Contrôle de la traînée de frottement d'une couche limite turbulente au moyen de revêtements rainurés de type riblets

Amaury Bannier

▶ **To cite this version:**

Amaury Bannier. Contrôle de la traînée de frottement d'une couche limite turbulente au moyen de revêtements rainurés de type riblets. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, PARIS VI, 2016. Français. NNT : . tel-01414968v1

HAL Id: tel-01414968

https://hal.science/tel-01414968v1

Submitted on 12 Dec 2016 (v1), last revised 2 Feb 2017 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ONERA
THE FRENCH AEROSPACE LAB

UPMC
SORBONNE UNIVERSITÉS

Université Pierre et Marie Curie
École Doctorale SMAER

Thèse de doctorat

Discipline : Mécanique

présentée par

Amaury BANNIER

Contrôle de la traînée de frottement d'une couche limite turbulente au moyen de revêtements rainurés de type *riblets*

Soutenue le 28/06/2016 devant le jury composé de :

M.	**Jean-Paul**	**BONNET**	**Institut P', Poitiers**	***Rapporteur***
M.	**Jean-Camille**	**CHASSAING**	**∂'Alembert, UPMC, Paris**	***Examinateur***
M.	**Carlo**	**COSSU**	**IMFT, Toulouse**	***Rapporteur***
M.	**Jean-Paul**	**DUSSAUGE**	**IUSTI, Polytech Marseille**	***Examinateur***
M.	**Éric**	**GARNIER**	**ONERA, Meudon**	***Directeur***
M.	**Pierre**	**SAGAUT**	**M2P2, Aix-Marseille Univ.**	***Directeur***

ONERA – The French Aerospace Lab
8, rue des Vertugadins
92190 MEUDON

à mes amis,
à ma famille,
à Clémentine.

« On dit qu'on apprend avec ses erreurs, mais à mon avis c'est une erreur...
et si je me trompe, au moins j'aurai appris quelque chose. »
– Geluck, *Le tour du chat en 365 jours* –

Remerciements

Trois années de thèse, trois ans sur un même sujet, ça peut a priori sembler très long. Et pourtant... Et pourtant, je n'y ai pas vu le temps passer, tant le sujet et le cadre de travail ont pu être captivants. Je tiens vivement à remercier tous ceux qui, à Meudon, au 2bis ou ailleurs, ont contribué à ce que chaque nouvelle journée puisse être abordée avec le même enthousiasme.

Tout d'abord, il convient de rappeler que cette thèse a été réalisée au sein du département d'aérodynamique appliquée (DAAP) de l'Onera, grâce au financement de ce même office et de l'École Polytechnique. Les conditions de travail et les moyens mis à la disposition des doctorants y sont tout simplement exceptionnels, tant sur les aspects d'encadrement que sur les moyens de calcul scientifique. Ça a donc été une grande chance de pouvoir bénéficier du fort niveau d'expertise technique, maintenu à l'Onera depuis un demi-siècle, au travers de scientifiques impliqués et de ressources encore considérables.

Par expertise technique, j'entends en particulier celle d'Éric Garnier et de Pierre Sagaut, qui ont su diriger ma thèse, éclairer les points obscurs et surtout insuffler les changements de cap face aux aléas de la recherche. Plus qu'un directeur de thèse, Éric a été un encadrant, un conseiller d'orientation, un partenaire de bureau... Nos discussions, qu'elles soient orientées turbulence, planeur ou randonnée, ont été incroyablement enrichissantes et constituent un élément majeur de mon quotidien de thèse et un très agréable souvenir.

Mon quotidien de thésard aura également été animé par toute la vie du second étage du DAAP. Une vie faite de réflexions anatomiques et d'expérimentations nasales avec Sébastien Deck, dont les divers conseils ont été d'un véritable encouragement. Une vie faite des défis lancés par Philippe, qui m'ont permis d'éprouver des sensations réservées habituellement aux seuls véritables champions du déhanché athlétique. Une vie faite des "Maüro" gesticulés d'Andrea, partenaire d'arrosage de feue la plante carnivore. Une vie faite de digressions FIK allant bon train (oxymore ?) avec Nicolas Hatee-hatee-hatee-ho. Une vie du tac-au-tac avec Ciel-mon-Mickael, camarade du LériX. Une vie faite de Facts, feta et poils arabica aux côté d'Ilias, dont les progrès linguistiques sont dignes d'un vrai "gars de la famille". Une vie faite d'attendrissants petits chatons dont seul John Q. a une connaissance exhaustive. Une vie faite des jeux d'esprit et des non moins impressionnants jeux de jambes de Loic, capoeiriste philosophe. Une vie faite de footings avec des gars qui n'étaient pas à fond, comme Gérald, Thierry, François et Edoardo. Une vie faite de mariages qui n'en étaient pas avant qu'ils en soient, d'élégante licorne, de king de la bachata, de contrôle militaire franco-allemand et de toutes ces petites choses qui font que l'on sait que l'on est bien entouré. Merci à tous les protagonistes de cette incroyable vie du DAAP !

Quand la journée à Meudon s'achevait, celle du 2bis commençait. Quel plaisir, quelle joie, quel bonheur que de retrouver, chaque soir, quatre colocataires exceptionnels et autres amis non moins

incomparables pour des soirées prohib', allers-et-retours au Mammouth, cultures de vers, repas indiens, concerts mexicanos, randonnées himalayennes, trails free-spirit... Côtoyer chacune de vos bonnes bouilles joyeuses aura été autant de bonnes raisons de profiter à pleins poumons de ces riches années étudiantes.

Enfin, mes plus grands remerciements sont tout droit dirigés vers ma famille et vers Clémentine. Au delà de tous les excellents moments passés ensemble, leur compréhension et leurs encouragements auront été d'un soutien considérable lors des traversées du désert qui jalonnent la thèse. Merci d'avoir continuer, pendant ces trois années, à vous intéresser à mes lentes avancées. Quelle chance et quel ressourcement que d'être entouré de gens que l'on aime. La thèse étant maintenant derrière, place à une nouvelle vie nantaise pleine de dynamisme sans concessions !

Édouard, il est temps d'apporter enfin une réponse à ta persévérante question.

Oui, j'ai finis ma thèse.

Table des matières

I Introduction **1**

II Revue bibliographique **5**

1 Physique de la turbulence pariétale **7**
1.1 Rappel des équations de la mécanique des fluides 8
1.1.1 Équations de conservation 8
1.1.2 Lois complémentaires 9
1.1.3 Modélisation statistique de la turbulence 10
1.2 Présentation de la couche limite : un problème multi-échelle 12
1.2.1 Grandeurs et échelles caractéristiques 13
1.2.2 Équations de couche limite 14
1.3 Description de la couche limite incompressible sans gradient de pression 16
1.3.1 Profils de vitesse moyenne 17
1.3.2 Évolution des grandeurs caractéristiques 24
1.3.3 Grandeurs turbulentes 27
1.4 Description des mouvements fluctuants 30
1.4.1 Cycle proche-paroi d'auto-régénération de la turbulence 30
1.4.2 Hypothèse des tourbillons attachés 33
1.4.3 Mécanismes *top-down* et super-structures 34
1.4.4 Vitesse de convection 36
1.5 Description de l'empreinte pariétale de la turbulence 36
1.5.1 Grandeurs pariétales 36
1.5.2 Décomposition du frottement 37
1.5.3 Cas limite du frottement laminaire 38
1.5.4 Interactions entre frottement et structures turbulentes 39

2 Contrôle de la turbulence pariétale **43**
2.1 Définitions et classification des stratégies de contrôle 44
2.2 Présentation du contrôle par utilisation de *riblets* 47
2.2.1 Performances et régimes de réduction de frottement 50
2.2.1.1 Performance en écoulement laminaire 50
2.2.1.2 Influence de la dimension des *riblets* 51
2.2.1.3 Influence de la géométrie 52

2.2.1.4 Sensibilité à la finesse de la crête . . . 54
2.2.1.5 Influence de l'alignement des *riblets* avec l'écoulement . . . 55
2.2.1.6 Influence du nombre de Reynolds . . . 56
2.2.1.7 Influence du nombre de Mach . . . 57
2.2.1.8 Influence du gradient de pression . . . 57
2.2.1.9 Influence sur la transition laminaire/turbulente . . . 58
2.2.2 Caractéristiques de l'écoulement contrôlé . . . 58
2.2.2.1 Distribution spatiale du frottement sur la surface des rainures . . . 58
2.2.2.2 Écoulement moyen . . . 59
2.2.2.3 Tensions de Reynolds . . . 62
2.2.3 Mécanismes de réduction de traînée . . . 64
2.2.3.1 Résistance aux fluctuations transverses . . . 64
2.2.3.2 Interactions entre *riblets* et TQLs . . . 66
2.2.3.3 Mécanisme de revêtement rugueux . . . 69
2.2.3.4 Instabilités de Kelvin–Helmotz . . . 71
2.3 Oscillations transverses de parois et ondes progressives . . . 72
2.3.1 Performances de réduction de traînée . . . 74
2.3.1.1 Paramètres d'influence sur la réduction de traînée . . . 74
2.3.1.2 Économie nette d'énergie . . . 76
2.3.1.3 Mouvement périodique arbitraire . . . 76
2.3.1.4 De la dépendance temporelle à la dépendance spatiale . . . 78
2.3.2 Caractéristiques de l'écoulement contrôlé . . . 78
2.3.3 Mécanismes de réduction de traînée . . . 80
2.3.3.1 Déplacement latéral relatif des structures turbulentes proche-paroi . . . 80
2.3.3.2 Création de vorticité transverse négative . . . 81

3 Modélisation et simulation des écoulements turbulents 83
3.1 Simulations des grandes échelles . . . 85
3.1.1 Filtrage . . . 86
3.1.1.1 Définition et propriétés . . . 86
3.1.1.2 Application aux écoulements turbulents . . . 86
3.1.2 Modélisation sous-maille . . . 88
3.1.2.1 Modélisation du tenseur sous-maille . . . 89
3.1.2.2 Modèle d'échelles mixtes sélectif . . . 89
3.1.2.3 Modélisation de la conductivité sous-maille . . . 90
3.2 Discrétisation et résolution des équations de Navier-Stokes . . . 90
3.2.1 Formulation vectorielle . . . 90
3.2.2 Méthode des volumes finis . . . 91
3.2.3 Discrétisation spatiale des flux . . . 91
3.2.3.1 Discrétisation spatiale des flux visqueux . . . 91
3.2.3.2 Discrétisation spatiale des flux convectifs . . . 92
3.2.4 Intégration temporelle . . . 94
3.2.5 Conditions aux limites . . . 96
3.2.5.1 Parois solides . . . 97
3.2.5.2 Frontières libres . . . 97
3.2.5.3 Condition d'entrée . . . 97
3.2.5.4 Condition de périodicité, raccord informatique et implicitation par bloc . . . 99

III Études **101**

4 Établissement d'une méthode pour la simulation numérique de *riblets* rectilignes 103
4.1 Choix et définition du cas d'étude . . . 104
4.2 Choix des paramètres numériques . . . 106
4.2.1 Domaine et discrétisation . . . 107
4.2.2 Condition aux limites . . . 108
4.2.3 Schémas numériques . . . 109
4.3 Génération analytique du maillage . . . 109
4.3.1 Topologie du maillage dans la zone de contrôle . . . 110
4.3.2 Topologie du maillage dans la zone de paroi lisse . . . 112
4.3.3 Distribution analytique des mailles . . . 115
4.4 Présentation des résultats et validation de la méthode numérique . . . 117
4.4.1 Campagnes de simulations et choix de paramètres numériques . . . 117
4.4.2 Degré 0 : Observation qualitative de champs instantanés . . . 118
4.4.2.1 Frottement pariétal instantané . . . 118
4.4.2.2 Structures turbulentes . . . 119
4.4.3 Degré 1 : Grandeurs globales . . . 121
4.4.3.1 Frottement pariétal moyen . . . 121
4.4.3.2 Épaisseurs de couche limite . . . 126
4.4.4 Degré 2 : Champs aérodynamiques moyens . . . 128
4.4.4.1 Champ de densité moyenne . . . 128
4.4.4.2 Champ de pression moyenne . . . 128
4.4.4.3 Champs de vitesses moyennes . . . 129
4.4.5 Degré 3 : Intensités fluctuantes . . . 133
4.4.5.1 Champs des tensions de Reynolds . . . 133
4.4.5.2 Contrainte de cisaillement total . . . 136
4.4.6 Degré 4 : Densité spectrale de puissance . . . 137
4.4.7 Degré 5 : Corrélations spatiales et temporelles . . . 140
4.4.8 Degré 6 : Bilans énergétiques . . . 142
Conclusion du chapitre . . . 143

5 Définition d'une origine virtuelle adaptée à l'analyse de l'écoulement contrôlé 145
5.1 Introduction . . . 145
5.2 Article : *Riblet Flow Model Based on an Extended FIK Identity* . . . 147
5.2.1 *Introduction* . . . 147
5.2.2 *Simulation Overview* . . . 150
5.2.3 *Reduction of the Wall Friction* . . . 155
5.2.4 *A New Skin Friction Decomposition for Complex Surfaces* . . . 157
5.2.5 *Analysis of the Riblet Effects Through a Friction Decomposition* . . . 161
5.2.6 *An Appropriate Virtual Origin Based on the Friction Decomposition* . . . 161
5.2.7 *Mean Velocity Field and Turbulent Statistics* . . . 164
5.2.8 *Conclusion and Outlook* . . . 169
5.2.9 *References* . . . 170
5.3 Discussion complémentaire . . . 173
5.3.1 Résumé succinct de l'article . . . 173
5.3.2 Mouvements cohérents . . . 173
5.3.3 Bilans énergétiques . . . 176
Conclusion du chapitre . . . 179

6 Prévision des performances à grand nombre de Reynolds 181
6.1 Introduction . . . 181
6.2 Article : *Friction drag reduction achievable by near-wall turbulence manipulation in spatially developing boundary-layer* . . . 183
6.2.1 *Introduction* . . . 183
6.2.2 *A composite model for the controlled flow* . . . 184
6.2.3 *Direct effect : Skin-friction reduction* . . . 186
6.2.4 *Indirect effect : Decrease of the boundary-layer thickening rate* . . . 188
6.2.5 *Combined effects* . . . 189
6.2.6 *Effect on the FIK decomposition* . . . 191
6.2.7 *Comparison with real drag-reducing flow* . . . 195
6.2.8 *Conclusions* . . . 197
6.3 Résumé succinct de l'article . . . 199
Conclusion du chapitre . . . 200

7 Évaluation des capacités de réduction de traînée de *riblets* tridimensionnels 201
7.1 Évaluation de la traînée de patchs de *riblets* . . . 202
7.1.1 Introduction . . . 202
7.1.2 Paramétrisation des patchs de *riblets* . . . 202
7.1.3 Performance de réduction de traînée . . . 203
7.2 Étude paramétrique de *riblets* sinueux . . . 207
7.2.1 Introduction . . . 207
7.2.2 Paramétrisation des *riblets* sinueux . . . 209
7.2.3 Mise en place d'une stratégie d'optimisation . . . 210
7.2.3.1 Construction de la surface de réponse par krigeage . . . 212
7.2.3.2 Échantillonnage initial par hypercube latin . . . 216
7.2.3.3 Stratégie de raffinement et fonction de mérite . . . 217
7.2.3.4 Critère de convergence . . . 220
7.2.3.5 Optimisation basse-fidélité par évaluation directe . . . 220
7.2.3.6 Évaluation haute-fidélité par LES . . . 220
7.2.4 Résultat de l'optimisation . . . 221
7.2.4.1 Poursuite de l'optimisation ? . . . 223
7.2.5 Simulations LES/DNS complémentaires . . . 223
7.2.5.1 Traînée totale, frottement visqueux et résultante des efforts de pression 225
7.2.5.2 Influence des *riblets* sinueux sur l'écoulement . . . 227
7.3 Évaluation de la traînée de *riblets* en chevron . . . 229
7.3.1 Introduction . . . 229
7.3.2 Mise en place de simulations numériques directes . . . 232
7.3.3 Performance de réduction de traînée . . . 236
7.3.4 Influence de grandes échelles dans la couche limite. . . . 239
Conclusion du chapitre . . . 241

IV Conclusions 243

Annexes 249

A Dérivation de la décomposition FIK étendue aux surfaces géométriquement complexes 251
A.1 Introduction . . . 251
A.2 Dérivation de la décomposition . . . 252
A.3 Formulation étendue . . . 257

B Implémentation de la méthode d'injection de turbulence SEM **259**
B.1 Objectif de la méthode . . . 260
B.2 Formulation . . . 260
B.2.1 Fluctuations de densité et de pression . . . 261
B.2.2 Fluctuations de vitesse . . . 262
B.2.3 Décomposition de Cholesky . . . 262
B.2.4 Modes de fluctuations . . . 263
B.2.5 Fonctions de forme . . . 263
B.3 Données d'entrée . . . 264
B.4 Données de sortie . . . 265
B.5 Pseudo-code . . . 265
B.5.1 Pré-traitement . . . 265
B.5.1.1 Fonctions de forme . . . 265
B.5.1.2 Adimensionnement des fonctions de formes . . . 266
B.5.1.3 Mise à l'échelle des structures . . . 266
B.5.1.4 Nombre de structures . . . 267
B.5.1.5 Correction de superposition . . . 267
B.5.1.6 Calcul de la décomposition de Cholesky . . . 270
B.5.1.7 Fin du prétraitement . . . 271
B.5.2 Génération des structures . . . 272
B.5.2.1 Initialisation de la population de structures . . . 272
B.5.2.2 Début de la boucle temporelle . . . 272
B.5.2.3 Mise à jour des structures . . . 273
B.5.2.4 Calcul du champ de fluctuation instantané . . . 273
B.5.2.5 Calcul du champ instantané de $\tilde{\nu}$ . . . 275
B.5.2.6 Fin de la boucle temporelle . . . 277
B.6 Notes sur l'implémentation . . . 277
B.6.1 Paramétrage des modes . . . 277
B.6.2 Dimensionnement des structures . . . 278
B.6.3 Appel des fonctions de forme . . . 278
B.6.4 Gestion de la périodicité . . . 278
B.6.5 Localisation des structures . . . 279

Bibliographie **281**

Première partie

Introduction

Introduction

Contexte de l'étude

Depuis une trentaine d'années, l'industrie du transport s'est particulièrement intéressée à la réduction de ses dépenses énergétiques. La hausse des prix du carburant et les exigences environnementales des agences de régulation maintiennent une pression forte sur cette problématique. Dans les applications aéronautiques, les efforts pour atteindre cet objectif se concentrent notamment sur la traînée de frottement, qui représente environ la moitié de la traînée totale, c'est-à-dire un poste de dépense énergétique majeur. Une réduction de 2% de la traînée de frottement entraînerait une baisse d'environ 0.75% de la consommation de carburant du transport aérien civil, soit potentiellement 9 millions de tonnes de rejet annuel de CO_2 [167].

La traînée de frottement provient du caractère visqueux du fluide, qui adhère aux parois en mouvement et s'oppose ainsi à leur déplacement. La région dans laquelle le fluide est affecté par la présence de la paroi est appelée couche limite. En fonction des conditions de l'écoulement, celle-ci peut passer d'un état laminaire à un état turbulent, pour lequel le frottement est largement amplifié. La capacité à manipuler la turbulence à proximité de la paroi, de sorte à limiter cette élévation du frottement, offre des perspectives de gain énergétique considérable, mais nécessite une bonne compréhension des phénomènes physiques.

La dernière décennie a vu les connaissances sur la structure de la couche limite turbulente croître de façon importante. Notamment, la mise en œuvre d'outils de simulations numériques directes (DNS) ou de simulations des grandes échelles (LES) a permis d'identifier les modèles phénoménologiques qui expliquent l'influence des structures turbulentes sur le frottement pariétal. Grâce à ces avancées, de nombreuses stratégies de contrôle de la turbulence pariétale ont été envisagées, mais restent aujourd'hui technologiquement inapplicables, financièrement inabordables ou estimées trop peu efficaces pour conduire à de réelles utilisations pratiques.

Parmi les technologies les plus prometteuses, l'utilisation de surface rainurée longitudinalement a été étudiée avec une attention particulière, tant expérimentalement [18] que numériquement [37]. Ces rainures, nommées *riblets*, permettent de réduire le frottement pariétal jusqu'à 10% de façon totalement passive, c'est-à-dire sans nécessiter d'apport énergétique. Dès le début des années 1990, des essais en conditions réelles d'utilisation ont confirmé les résultats des essais en soufflerie. La traînée globale d'un Airbus A320 a ainsi été réduite de 2% environ en recouvrant 70% de sa surface de *riblets*. Néanmoins, en considérant les coûts de maintenance de l'époque, ce gain s'est révélé trop limité pour justifier l'adoption de cette technologie.

Depuis, la simulation numérique a grandement contribué à la compréhension et à la caractérisation de l'influence des *riblets* sur les couches limites turbulentes. Par exemple, on sait aujourd'hui

identifier les formes de rainures pertinentes et caractériser, suivant la taille des *riblets*, différents régimes de réduction ou d'augmentation de traînée. De plus, la couche limite turbulente contrôlée par des *riblets* a été largement observée et décrite dans la littérature. Néanmoins, de nombreuses incertitudes demeurent quant aux principaux mécanismes responsables de la réduction de traînée et quant à leur évolution à grands nombres de Reynolds.

Par ailleurs, de récentes études numériques [207] et expérimentales [33] ont révélé des pistes très encourageantes avec des géométries de *riblets*, non plus rectilignes, mais tridimensionnelles. Ces résultats ont été obtenus sur des configurations d'écoulement de canal plan qui ne tiennent pas compte de l'évolution longitudinale des échelles spatio-temporelles dans la couche limite turbulente. Ils ouvrent néanmoins de nombreuses perspectives et laissent penser que le potentiel des *riblets* est loin d'avoir été complètement exploré.

Objectif et démarche

Justifiée par le contexte précédent, cette thèse a suivi un double objectif.

Le premier objectif consiste à améliorer la compréhension des mécanismes d'interaction entre les *riblets* et les mouvements turbulents proches de la paroi. Il s'agit notamment de permettre une meilleure quantification des performances de réduction de traînée atteignables dans des cas applicatifs.

L'exploration du potentiel *a priori* prometteur que représentent différentes géométries de *riblets* tridimensionnels a constitué le second objectif de cette thèse. Le but est non seulement de confirmer les quelques résultats précurseurs de la littérature à ce sujet, mais également de proposer une géométrie à la fois optimale en termes de réduction de traînée et industriellement réalisable.

Après la présentation des connaissances actuelles de la communauté scientifique relatives à la turbulence pariétale, à son contrôle et sa simulation numérique, quatre grands volets d'études pourront être dégagés, dont chacun fera l'objet d'un chapitre dédié :

Le premier axe, développé dans le chapitre 4, concerne l'établissement et la validation d'une méthodologie de simulation numérique. Il s'agit de mettre au point une méthode qui permette de simuler numériquement une couche limite turbulente contrôlée par des *riblets*. On s'intéressera aux couches limites en développement spatial, plus représentatives des écoulements des cas industriels que l'on souhaite traiter. Une attention particulière sera portée aux contraintes imposées par la présence des *riblets*, tant en termes de discrétisation spatiale qu'en termes de topologie de maillage. Les résultats de simulation seront alors présentés et confrontés à des résultats de référence de la littérature chaque fois que cela sera possible.

Ainsi assurée de la pertinence et de la validité de la méthode numérique, une analyse plus fine de l'écoulement pourra être entreprise. Au chapitre 5, le concept d'origine virtuelle, c'est-à-dire la position particulière à laquelle la couche limite "voit" une paroi plane équivalente, sera alors abordé. Sa définition est de première importance lorsque l'on souhaite comparer l'écoulement au-dessus d'une paroi plane avec celui au-dessus de *riblets*. Une origine virtuelle placée de façon adéquate permettra d'établir d'importantes similitudes entre les écoulements avec et sans contrôle.

Au chapitre 6, on s'intéressera à l'évolution de la couche limite contrôlée à mesure que celle-ci se développe, c'est-à-dire à mesure que son nombre de Reynolds augmente. En effet, la présence du contrôle affecte non seulement le frottement local, mais perturbe également l'épaississement de la couche limite. En s'appuyant sur la caractérisation de l'écoulement faîte au chapitre précédent, l'étude analytique qui y sera conduite tentera d'évaluer l'influence sur le frottement pariétal de ces différents effets du contrôle sur la couche limite turbulente.

Finalement, la traînée induite par des *riblets* de diverses géométries tridimensionnelles sera évaluée dans le chapitre 7. Basées sur des résultats issus de la littérature ou établis au cours des chapitres précédents, trois configurations *a priori* prometteuses seront étudiées. En particulier, les concepts de *riblets* sinueux et de *riblets* en chevrons déjà abordés dans la littérature seront réévalués en détail.

Deuxième partie

Revue bibliographique

Chapitre **1**

Physique de la turbulence pariétale

Sommaire

1.1 Rappel des équations de la mécanique des fluides 8
1.1.1 Équations de conservation 8
1.1.2 Lois complémentaires 9
1.1.3 Modélisation statistique de la turbulence 10
1.2 Présentation de la couche limite : un problème multi-échelle 12
1.2.1 Grandeurs et échelles caractéristiques 13
1.2.2 Équations de couche limite 14
1.3 Description de la couche limite incompressible sans gradient de pression 16
1.3.1 Profils de vitesse moyenne 17
1.3.2 Évolution des grandeurs caractéristiques 24
1.3.3 Grandeurs turbulentes 27
1.4 Description des mouvements fluctuants 30
1.4.1 Cycle proche-paroi d'auto-régénération de la turbulence 30
1.4.2 Hypothèse des tourbillons attachés 33
1.4.3 Mécanismes *top-down* et super-structures 34
1.4.4 Vitesse de convection 36
1.5 Description de l'empreinte pariétale de la turbulence 36
1.5.1 Grandeurs pariétales 36
1.5.2 Décomposition du frottement 37
1.5.3 Cas limite du frottement laminaire 38
1.5.4 Interactions entre frottement et structures turbulentes 39

Pour commencer ce mémoire, on propose dans ce chapitre de décrire la physique de la turbulence pariétale, avant d'envisager, dans les chapitres suivants, de la contrôler. Il serait donc opportun de commencer par fournir une définition claire et précise de la turbulence. Cependant, comme le précisent de nombreux spécialistes depuis plus de 40 ans [261, 231], cet exercice s'avère difficile de par la nature même de la turbulence. Néanmoins, le concept de turbulence peut être indirectement cerné par ses caractéristiques. Tout d'abord, le qualificatif de "turbulent" s'applique à un **écoulement** et non pas à un fluide lui-même. C'est donc un concept intimement lié à la notion de mouvement. De

plus, les deux ouvrages précédents s'accordent sur la nature **tridimensionnelle** et **instationnaire** de la turbulence. Les fluctuations turbulentes, et en particulier les mouvements **tourbillonnaires**, confèrent aux écoulements turbulents des propriétés fortement **diffusives** et **dissipatives**. Enfin, les deux dernières caractéristiques majeures de la turbulence concernent sa nature **chaotique** et la grande **diversité des échelles** dynamiques actives. Ainsi, bien que le mouvement des écoulements turbulents soit régi par les lois établies de la mécanique des milieux continus, sa description déterministe n'a que peu d'intérêt. L'étude de la turbulence doit donc être réalisée au moyen d'outils statistiques.

Par opposition à l'étude d'écoulement turbulent comme les couches de mélange ou même à l'étude très fondamentale de la turbulence homogène isotrope, on s'intéresse ici au cas de la turbulence pariétale, c'est-à-dire aux écoulements turbulents à proximité d'une paroi. Sous l'effet de la viscosité, la présence de la paroi affecte l'écoulement dans une fine couche appelée couche limite, siège d'un cisaillement important. Cette couche limite sera présentée plus en détail après un bref rappel des lois fondamentales régissant la dynamique des écoulements. Dans la suite du chapitre, on abordera alors une description plus fine de l'écoulement d'une couche limite sans gradient de pression, en s'intéressant particulièrement aux mouvements fluctuants et à leurs empreintes sur la paroi.

1.1 Rappel des équations de la mécanique des fluides

Le cadre des écoulements considérés dans ce travail est celui des fluides compressibles, pour lesquels l'hypothèse de milieu continu est valide. Cela implique que le libre parcours moyen des molécules sera toujours très inférieur aux plus petites dimensions caractéristiques en jeu dans cette étude. Ainsi, les volumes de contrôle considérés, même élémentaires, comprendront un nombre de molécules suffisamment élevé pour que le concept de moyenne statistique s'applique et que le comportement du fluide puisse être décrit par ses propriétés macroscopiques, telles que la pression, la densité ou la vitesse. Cela suppose qu'un équilibre thermodynamique local soit vérifié.

Pour un écoulement non hypersonique ($M < 6$ dans l'air), il est possible de négliger les effets de dissociation et d'ionisation pouvant se produire au niveau moléculaire. Ces approximations permettent d'utiliser une loi d'état de gaz parfait.

La densité n'étant pas uniforme, des effets de gravité pourraient se manifester. Contrairement aux écoulements atmosphériques, ils seront négligeables dans les applications considérées par rapport aux effets inertiels.

1.1.1 Équations de conservation

Les équations de Navier–Stokes régissent la dynamique des fluides. Elles retranscrivent, dans une description Eulérienne, les principes fondamentaux de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Chacun de ses trois principes s'énonce respectivement par

$$\partial_t \rho + \partial_k \rho u_k = 0 , \tag{1.1a}$$

$$\partial_t \rho u_i + \partial_k \rho u_i u_k = -\partial_i p + \partial_k \tau_{ik} , \qquad \forall i \in [1;3] , \tag{1.1b}$$

$$\partial_t \rho E + \partial_k \rho E u_k = -\partial_k p u_k + \partial_k u_i \tau_{ik} - \partial_k q_k . \tag{1.1c}$$

Dans ces équations comme dans la suite du document, la convention de sommation des indices répétés d'Einstein a été utilisée. De plus, les notations ∂_i et ∂_t représentent respectivement les dérivées partielles par rapport à la direction de l'espace $i \in \{1,2,3\} = \{x,y,z\}$ et par rapport au temps t, se substituant ainsi aux notations classiques $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$.

On dénombre 18 inconnues (scalaires) dans ces 5 équations (scalaires) :

- $\rho(\underline{x},t)$, la densité ;
- $\underline{u}(\underline{x},t)$, le vecteur vitesse (qui totalise 3 variables scalaires) ;
- $p(\underline{x},t)$, la pression ;

- $\underline{\underline{\tau}}(\underline{x},t)$, le tenseur des contraintes (qui totalise 9 variables scalaires) ;
- $E(\underline{x},t)$, l'énergie totale ;
- $\underline{q}(\underline{x},t)$, le vecteur flux de chaleur (qui totalise 3 variables scalaires).

Le système est donc ouvert. Afin de pouvoir le résoudre, il nous faut adjoindre des relations supplémentaires régissant le comportement de la pression p, du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\tau}}$ et du flux de chaleur $\underline{q}$.

La résolution de cette équation demeure mathématiquement difficile. En fait, l'existence même d'une solution et son éventuelle unicité demeure l'une des questions mises à prix sur la liste des sept problèmes du prix du millénaire. Au-delà de la complexité inhérente aux équations aux dérivées partielles couplées (ici entre la vitesse, la pression, la densité et l'énergie totale), la **non-linéarité** du terme d'advection $\partial_k \rho u_i u_k$ est la source des complications liées à cette équation et est également à l'origine du phénomène de turbulence.

1.1.2 Lois complémentaires

Loi d'état. Pour un gaz parfait, la pression est donnée par

$$p = \rho r T \,, \tag{1.2}$$

où T désigne la température et r est une constante dépendant du fluide considéré, définie à partir de sa masse molaire $\mathcal{M}$ et de la constante universelle des gaz parfaits $\mathcal{R} = 8.314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$ par la relation $r = \mathcal{R}/\mathcal{M}$. Dans le cas de l'air, on a $r_{\mathrm{air}} = 287.1\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

Notons que l'énergie totale E peut se décomposer en énergie interne e et énergie cinétique par unité de masse selon

$$E = e + \frac{1}{2} u_i u_i \,, \tag{1.3}$$

où l'énergie interne d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait s'écrit en fonction de la température T et de la capacité thermique massique $c_v = r/(\gamma - 1)$:

$$e = c_v T \,. \tag{1.4}$$

Ainsi, la pression p peut être reliée à l'énergie interne selon

$$p = \rho(\gamma - 1) e \,. \tag{1.5}$$

Loi de comportement. La loi de comportement d'un fluide newtonien vérifiant des conditions de Stokes s'écrit

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu \underline{\underline{S}} \,, \tag{1.6}$$

avec $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^{\top}$ le tenseur des taux de déformation, défini par

$$S_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{3} \left(\partial_k u_k\right) \delta_{ij} \,, \qquad \forall (i,j) \in [1;3]^2 \,. \tag{1.7}$$

Loi de Fourier. Le flux de chaleur est donné par la loi de Fourier :

$$q_k = -\kappa_{\mathrm{th}}\, \partial_k T \,, \tag{1.8}$$

où κ_{th} désigne le coefficient de conductivité thermique. En introduisant le nombre de Prandtl, défini par $\mathcal{P}r = \mu c_{\mathrm{p}}/\kappa_{\mathrm{th}}$ et estimé pour l'air à $\mathcal{P}r_{\mathrm{air}} = 0.72$, le flux de chaleur peut s'écrire :

$$q_k = -\frac{\mu c_{\mathrm{p}}}{\mathcal{P}r}\, \partial_k T \,. \tag{1.9}$$

Loi de Sutherland. La viscosité μ est évaluée à partir de la loi de Sutherland,

$$\mu(T) = \mu_0 \, \frac{T_\mathrm{S} + T_0}{T_\mathrm{S} + T} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} . \tag{1.10}$$

Son domaine de validité s'étend de 170 K à 1900 K. La constante de Sutherland T_S vaut 110.4 K et l'on définit, pour l'air, $T_{0,\mathrm{air}} = 273.16\,\mathrm{K}$ et $\mu_{0,\mathrm{air}} = 1.711 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}}$.

1.1.3 Modélisation statistique de la turbulence

Une description statistique des écoulements turbulents s'impose lorsqu'on cherche à caractériser leur dynamique, et surtout à identifier les propriétés ayant un certain degré d'universalité qui sont nécessaires à l'élaboration de toute théorie physique.

On fera ici l'hypothèse que les champs physiques associés à un écoulement turbulent (ρ, $\underline{u}$, p, ...) peuvent être assimilés à des variables aléatoires et possèdent toutes les propriétés requises pour que les outils statistiques usuels soient pertinents (convergence des statistiques, ...).

Moyenne et décomposition. Afin de caractériser un champ turbulent $\phi(\underline{x}, t)$, on considère tout d'abord sa moyenne, notée $\overline{\phi}(\underline{x}, t)$ et définie comme une moyenne d'ensemble classique par

$$\overline{\phi}(\underline{x}, t) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \phi^{(k)}(\underline{x}, t) \right) , \tag{1.11}$$

où $\phi^{(k)}$ désigne la k-ième réalisation indépendante de ϕ. Dans la pratique, on s'intéresse souvent à des écoulements statistiquement stationnaires, pour lesquels la moyenne d'ensemble peut être remplacée par une moyenne temporelle (hypothèse d'ergodicité). La moyenne temporelle est définie par

$$\overline{\phi}(\underline{x}) = \lim_{\tau \to \infty} \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \phi^{(k)}(\underline{x}, t) \, \mathrm{d}t \right) . \tag{1.12}$$

Quand le laps de temps τ est suffisamment long, la valeur moyenne est indépendante du temps, et donc de l'instant initial de l'opération de moyenne.

Osborne Reynolds proposa de décomposer chaque variable associée à un champ turbulent en la somme de sa moyenne et de sa fluctuation :

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' , \tag{1.13}$$

où l'on a introduit la variable aléatoire centrée (c'est-à-dire de moyenne nulle) $\phi' = \phi - \overline{\phi}$.

Pour les écoulements à masse volumique variable, il est commode d'introduire une moyenne pondérée par la masse volumique ρ. Cette moyenne, dite de Favre, est adoptée pour les calculs d'écoulements turbulents compressibles. Elle s'écrit

$$\widetilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\overline{\rho}} . \tag{1.14}$$

On peut alors définir la décomposition de Favre :

$$\phi = \widetilde{\phi} + \phi'' . \tag{1.15}$$

La partie fluctuante est définie de sorte que $\widetilde{f''} = \overline{\rho f''} = 0$, cependant, $\overline{f''} \neq 0$. Les propriétés des opérateurs permettent d'écrire les relations utiles suivantes :

$$\overline{\rho\phi} = \overline{\rho}\widetilde{\phi} ; \tag{1.16a}$$

$$\overline{\rho\phi\psi} = \overline{\rho}\widetilde{\phi}\widetilde{\psi} + \overline{\rho\phi''\psi''} . \tag{1.16b}$$

Dans le cas particulier d'un écoulement incompressible de densité uniforme, moyennes et décompositions de Reynolds et de Favre deviennent identiques.

Équations de Navier–Stokes moyennées. L'application de l'opérateur de moyenne aux équations de Navier–Stokes (1.1) aboutit à :

$$\partial_t \overline{\rho} \quad + \partial_k \overline{\rho}\, \widetilde{u}_k \quad = \quad 0\,; \tag{1.17a}$$

$$\partial_t \overline{\rho}\, \widetilde{u}_i + \partial_k \overline{\rho}\, \widetilde{u}_i\, \widetilde{u}_k = -\partial_i \overline{p} \quad + \partial_k \overline{\tau}_{ik} \quad - \partial_k \overline{\rho}\, \widetilde{u_i'' u_k''}\,, \qquad \forall i \in [1;3]\,; \tag{1.17b}$$

$$\partial_t \overline{\rho}\, \widetilde{E} + \partial_k \overline{\rho}\, \widetilde{E}\, \widetilde{u}_k = -\partial_k \overline{p\, u_k} + \partial_k \overline{u_i\, \tau_{ik}} - \partial_k \overline{\rho}\, \widetilde{u_k'' E''} \; - \partial_k \overline{q}_k\,. \tag{1.17c}$$

Les équations pour le champ moyen (1.17) ressemblent aux équations constitutives d'origine (1.1) écrites pour le champ moyen au lieu du champ complet. La différence notable est la présence de termes de flux supplémentaires faisant apparaître les champs fluctuants. Ces termes sont interprétés comme des flux turbulents, qui modifient les équations bilan du champ moyen.

Pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.17b), le terme supplémentaire est le seul mettant en jeu des grandeurs fluctuantes. Il représente le couplage entre le mouvement moyen et le mouvement turbulent. À l'instar du terme de contrainte visqueuse, ce dernier se présente sous la forme d'une divergence. On définie alors, symétrique comme $\underline{\underline{\tau}}$, le tenseur des contraintes de Reynolds $\underline{\underline{R}}$ par

$$R_{ij} = \overline{\rho}\, \widetilde{u_i'' u_j''}\,. \tag{1.18}$$

Les moyennes quadratiques (*root mean square*) des intensités fluctuantes pour chaque composante u_i' est reliée aux termes diagonaux du tenseur de Reynolds par

$$u_{i,\mathrm{rms}} = \sqrt{\widetilde{u_i''^2}} = \sqrt{\frac{R_{ii}}{\overline{\rho}}}\,, \qquad \forall i \in [1;3]\,, \tag{1.19}$$

où l'on ne réalise pas la sommation sur les indices i répétés. Dans le cas d'écoulements incompressibles, les contraintes de Reynolds et les intensités fluctuantes sont simplement définies par $R_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$ et $u_{i,\mathrm{rms}} = \sqrt{R_{ii}}$ respectivement.

On peut alors définir un tenseur de contraintes totales $\underline{\underline{\sigma}}$ à partir du tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\tau}}$ et du tenseur des contraintes de Reynolds $\underline{\underline{R}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \overline{\underline{\underline{\tau}}} - \underline{\underline{R}} = \overline{\mu}\, \widetilde{\underline{\underline{S}}} \; - \overline{\rho}\, \widetilde{\underline{u} \otimes \underline{u}}\,. \tag{1.20}$$

Pour l'établissement de la dernière égalité, l'approximation $\overline{\mu\, \underline{\underline{S}}} = \overline{\mu}\, \widetilde{\underline{\underline{S}}}$ a été réalisée. Elle revient à négliger les fluctuations de viscosité cinématique $\nu' = (\mu/\rho)'$, une approximation aussi courante [98] qu'utile.

Bilans d'énergies cinétiques. En posant $\mathcal{K} = \frac{1}{2}\overline{\rho}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_i$, il est possible de démontrer l'équation de bilan de l'énergie cinétique du champ moyen en opérant $\widetilde{u}_i \times$(1.17b) :

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{K} + \partial_k \mathcal{K}\, \widetilde{u}_k \; &= \overline{p}\, \partial_i \widetilde{u}_i && \text{redistribution par la pression} \\
&- \partial_i \overline{p}\, \widetilde{u}_i && \text{diffusion par la pression} \\
&- \overline{\tau}_{ik}\, \partial_k \widetilde{u}_i && \text{dissipation} \\
&+ \partial_k \overline{\tau}_{ik}\, \widetilde{u}_i && \text{diffusion visqueuse} \\
&+ R_{ik}\, \partial_k \widetilde{u}_i && \text{transfert entre } \mathcal{K} \text{ et } k \\
&- \partial_k R_{ik}\, \widetilde{u}_i\,. && \text{diffusion turbulente}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

L'interprétation physique de ces termes est indiquée succinctement en regard de l'équation. Les termes diffusifs, se présentant comme des divergences, ne créent ni ne détruisent d'énergie. Ils se contentent de la transporter. Ce n'est à l'inverse pas le cas des termes de dissipation et de transfert entre l'énergie cinétique moyenne $\mathcal{K}$ et l'énergie cinétique turbulente k abordée ci-dessous.

L'énergie cinétique turbulente k est définie de sorte que la somme de $\mathcal{K}$ et k soit égale à l'énergie cinétique totale $\frac{1}{2}\overline{\rho u_i u_i}$. Elle vaut alors $k = \frac{1}{2}R_{ii} = \frac{1}{2}\overline{\rho}\,\widetilde{u_i'' u_i''}$ et son équation bilan est obtenue en appliquant l'opérateur de moyenne au produit $u_i'' \times$(1.1b) :

$$\begin{aligned}
\partial_t\, k + \partial_k\, k\, \widetilde{u}_k \;&= \overline{p'\, \partial_i\, u_i''} && \text{redistribution par la pression} \\
&- \partial_i\, \overline{p'\, u_i''} && \text{diffusion par la pression} \\
&- \overline{u_i''}\, \partial_i\, \overline{p} && \text{effet de compressibilité sur la pression} \\
&- \overline{\tau_{ik}\, \partial_k\, u_i''} && \text{dissipation } \varepsilon \\
&+ \partial_k\, \overline{\tau_{ik}\, u_i''} && \text{diffusion visqueuse} \\
&+ \overline{u_i''}\, \partial_k\, \overline{\tau}_{ik} && \text{effet de compressibilité sur la viscosité} \\
&- R_{ik}\, \partial_k\, \widetilde{u}_i && \text{production (transfert entre } \mathcal{K} \text{ et } k) \\
&- \partial_k\, \tfrac{1}{2}\, \overline{\rho}\, \widetilde{u_i'' u_i'' u_k''}\,. && \text{diffusion turbulente}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

On retrouve donc le terme de "transfert entre $\mathcal{K}$ et k" déjà observé avec un signe opposé dans (1.21). On verra par la suite qu'en pratique, ce terme agit comme un terme puits pour $\mathcal{K}$ et un terme source pour k, de sorte qu'il est fréquemment désigné en tant que terme de "production d'énergie cinétique turbulente".

Dans le cas incompressible, le terme de dissipation visqueuse d'énergie cinétique turbulente, ε, peut être décomposé en

$$\varepsilon = \overline{\tau_{ik}\, \partial_k\, u_i''} = \mu\, \overline{\omega_i' \omega_i'} + 2\, \mu\, \partial_{ik}^2\, \overline{u_i' u_k'}\,, \tag{1.23}$$

où $\underline{\omega} = \mathrm{rot}(\underline{u})$ désigne la **vorticité**. Le dernier terme de l'équation (1.23), appelée contribution inhomogène, est un terme de transport. Sa contribution globale est donc nulle, de telle sorte que la dissipation ε est directement reliée à l'**enstrophie turbulente** $\overline{\omega_i' \omega_i'}$. Une analyse de l'enstrophie turbulente, par l'étude des termes de son équation bilan, pourra donc fournir des indications sur la dynamique de la dissipation turbulente. Notons que dans le cas compressible, ce résultat, bien qu'inexact, reste néanmoins une bonne approximation [98].

1.2 Présentation de la couche limite : un problème multi-échelle

Parmi les différents types d'écoulement, on s'intéressera dans cette étude aux écoulements le long d'une paroi. Cette paroi affecte l'écoulement dans une fine couche à sa proximité appelée couche limite. La notion de **couche limite** a été introduite en 1904 par Ludwig Prandtl [213]. Les écoulements de couche limite les plus étudiés sont les écoulements le long de plaque plane sans gradient de pression, dans un canal plan ou dans une conduite circulaire. La structure de la couche limite de ces trois types d'écoulement a souvent été considérée comme semblable, bien que de récentes études [189, 10] aient montré des comportements différents entre ces trois types d'écoulement.

Les travaux de ce manuscrit ont porté sur le cas de couche limite en développement spatial, en raison de sa plus grande pertinence d'un point de vue applicatif. Une telle couche limite se développe, depuis le bord d'attaque de la paroi, et ne cesse de s'épaissir le long de la plaque. Suivant l'épaisseur de la couche limite, la vitesse de l'écoulement libre, la viscosité du fluide, mais aussi l'historique de l'écoulement, ce dernier adoptera des comportements variés dont les caractéristiques sont présentées ci-dessous.

Par convention, le repère orthonormé (x, y, z) est orienté de sorte que les trois composantes indiquent respectivement la direction de l'écoulement libre, appelée **direction longitudinale**, la **direction normale** à la paroi et enfin, la **direction transverse**. Par **écoulement libre**, on entend la zone de l'écoulement dans laquelle l'influence de la paroi ne se fait pas sentir. Le vecteur vitesse

dans cette partie du fluide est alors noté U_∞. La position de la paroi est spécifiée par la donnée de son ordonnée $y_\mathrm{w}(x,z)$, où l'indice w relate une grandeur prise à la paroi.

1.2.1 Grandeurs et échelles caractéristiques

Comme précisé ci-dessus, l'état de la couche limite turbulente de plaque plane dépend de l'histoire de son développement. Pour décrire cet état, on a généralement recours à plusieurs grandeurs, présentées dans cette section.

Épaisseurs de couche limite. Dans une couche limite, le fluide approche asymptotiquement la vitesse U_∞ lorsque l'on s'écarte de la paroi. Conventionnellement, le bord de la couche limite est défini comme étant le point auquel 99% de la vitesse à l'infini U_∞ est atteinte :

$$\overline{u}\,(y{=}\delta_{99\%}) = 0.99\,U_\infty\,. \tag{1.24}$$

Cette épaisseur de couche limite $\delta_{99\%}$ est couramment utilisée, bien que définie sur des critères arbitraires et dont la détermination pratique demeure très sensible à la mesure du profil de vitesse dans la zone externe de la couche limite.

Épaisseurs intégrales. Les épaisseurs intégrales sont des échelles de longueur construites à partir d'une intégrale du profil de vitesse moyenne. On utilise habituellement [56] les épaisseurs de déplacement δ^* (parfois noté δ_1) et de quantité de mouvement θ (parfois noté δ_2). Elles sont définies par

$$\delta^* = \int_{y_\mathrm{w}}^{\infty} \left(1 - \frac{\overline{\rho}\,\widetilde{u}}{\rho_\infty U_\infty}\right) \mathrm{d}y\,, \tag{1.25}$$

$$\theta = \int_{y_\mathrm{w}}^{\infty} \frac{\overline{\rho}\,\widetilde{u}}{\rho_\infty U_\infty} \left(1 - \frac{\widetilde{u}}{U_\infty}\right) \mathrm{d}y\,. \tag{1.26}$$

Le produit $U_\infty\delta^*$ représente la perte de débit due à la présence de la couche limite. L'épaisseur δ^* est donc celle dont il faudrait déplacer la paroi pour que le débit réel dans la couche limite soit le même que celui d'un écoulement fictif de fluide parfait. De façon similaire, $U_\infty^2\theta$ représente la perte de quantité de mouvement due à la présence de la couche limite.

Le rapport de ces deux épaisseurs intégrales est appelé facteur de forme :

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}\,. \tag{1.27}$$

Il caractérise la forme du profil de vitesse dans la couche limite.

Grandeurs liées au frottement. Le frottement pariétal dans la direction longitudinale $\tau_{\mathrm{w},x}$, également appelé **traînée de frottement**, est donné par

$$\tau_{\mathrm{w},x} = \underline{n}\cdot\underline{\underline{\tau}}\cdot\underline{e}_x\Big|_{y_\mathrm{w}} = \mu_\mathrm{w}\,\partial_n u\Big|_{y_\mathrm{w}}\,, \tag{1.28}$$

où la loi de comportement (1.6) et la condition d'adhérence à la paroi $\underline{u} = \underline{0}$ ont été utilisées. Le vecteur $\underline{n}$ représente le vecteur unitaire localement normal à la paroi.

Le coefficient de frottement c_f s'écrit alors en fonction de la contrainte pariétale moyenne $\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}$ comme

$$c_f = \frac{\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}\,. \tag{1.29}$$

On définit la vitesse de frottement u_τ et la longueur associée l_τ par

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}}{\overline{\rho}_\mathrm{w}}}\,, \qquad\qquad l_\tau = \frac{\nu}{u_\tau}\,. \tag{1.30}$$

Ces grandeurs sont largement utilisées pour l'adimensionnement dans l'étude de la couche limite. On note classiquement avec un exposant + les données ainsi normalisées, comme $u^+ = u/u_\tau$ par exemple.

Nombre de Reynolds. À partir de la viscosité du fluide, de la vitesse de l'écoulement libre et de l'épaisseur de couche limite, on peut construire le nombre sans dimension

$$Re_\delta = \frac{\rho\, U_\infty\, \delta}{\mu} = \frac{U_\infty\, \delta}{\nu}\,. \tag{1.31}$$

Ce nombre porte le nom de **nombre de Reynolds**. Il peut être interprété comme le rapport entre les efforts inertiels, caractérisés dans les équations de Navier-Stokes (1.1b) par $\partial_k \rho u_i u_k$ et donc homogène à $\rho U_\infty^2/\delta$, et les efforts visqueux, caractérisés par $\partial_k \tau_{ik}$ et homogène à $\mu U_\infty/\delta^2$. On verra par la suite que ce nombre apparaît naturellement en adimensionnant les équations de Navier-Stokes.

Il convient de préciser que différents nombres de Reynolds peuvent être construits suivant le choix de l'échelle de longueur (généralement parmi δ_{99}, δ^* ou θ) et de l'échelle de vitesse (classiquement U_∞ ou u_τ). L'interprétation quant à la valeur d'un nombre de Reynolds dépend donc grandement de sa définition.

En particulier, le nombre de Reynolds de frottement, défini par

$$Re_\tau = \frac{\rho\, u_\tau\, \delta}{\mu} = \frac{u_\tau\, \delta}{\nu} = \frac{\delta}{l_\tau} = \delta^+\,. \tag{1.32}$$

s'avère être une mesure de la disparité entre l'échelle de longueur δ de la couche limite et l'échelle de longueur l_τ des phénomènes visqueux à la paroi.

1.2.2 Équations de couche limite

Les hypothèses de couche limite et le développement asymptotique raccordé sont de précieux outils pour une description analytique de la couche limite. La méthode est succinctement présentée ici dans le cas d'un écoulement laminaire incompressible. Comme nous le verrons par la suite, il est possible de l'étendre aux couches limites turbulentes, incompressibles comme compressibles.

Hypothèses. On étudie dans cette partie l'écoulement au-dessus d'une plaque plane ($y_\mathrm{w} = 0$), sous les hypothèses d'un écoulement stationnaire, **laminaire**, **incompressible** et bidimensionnel plan. Sous ces conditions, les équations de Navier–Stokes moyennées (1.1) se simplifient de la façon suivante :

$$\partial_x u + \partial_y v = 0\,; \tag{1.33a}$$

$$u\,\partial_x u + v\,\partial_y u = -\partial_x p/\rho + \nu\left(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2\right) u\,; \tag{1.33b}$$

$$u\,\partial_x v + v\,\partial_y v = -\partial_y p/\rho + \nu\left(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2\right) v\,, \tag{1.33c}$$

auxquels il convient d'ajouter les conditions aux limites :

$$\underline{u}\,(y \mapsto 0) = \underline{0}\,; \tag{1.33d}$$

$$\underline{u}\,(|\underline{x}| \mapsto \infty) = U_\infty\, \underline{e}_x\,. \tag{1.33e}$$

Les équations relatives à l'énergie totale et à la quantité de mouvement dans la direction z n'ont plus de raison d'être sous les présentes hypothèses.

On peut adimensionner les longueurs, les vitesses et la pression en utilisant une échelle de longueur L ainsi que la vitesse U_∞ et la densité du fluide ρ, de sorte que

$$x^* = \frac{x}{L}\,, \qquad y^* = \frac{y}{L}\,, \qquad u^* = \frac{u}{U_\infty}\,, \qquad v^* = \frac{v}{U_\infty}\,, \qquad p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2}\,. \tag{1.34}$$

Avec ces notations, les équations de Navier–Stokes adimensionnées s'écrivent :

$$\partial_{x^*} u^* + \partial_{y^*} v^* = 0\,; \tag{1.35a}$$
$$u^*\,\partial_{x^*} u^* + v^*\,\partial_{y^*} u^* = -\,\partial_{x^*} p^* + \tfrac{1}{Re}(\partial^2_{x^*x^*} + \partial^2_{y^*y^*})u^*\,; \tag{1.35b}$$
$$u^*\,\partial_{x^*} v^* + v^*\,\partial_{y^*} v^* = -\,\partial_{y^*} p^* + \tfrac{1}{Re}(\partial^2_{x^*x^*} + \partial^2_{y^*y^*})v^*\,, \tag{1.35c}$$

avec les conditions aux limites :

$$\underline{u}^*\,(y^* \mapsto 0) = \underline{0}\,; \tag{1.35d}$$
$$\underline{u}^*\,(|\underline{x}^*| \mapsto \infty) = \underline{e}_x\,, \tag{1.35e}$$

où Re est le nombre de Reynolds $Re = U_\infty L/\nu$.

Région extérieure. La méthode des développements asymptotiques consiste à décomposer les champs u^*, v^* et p^* selon

$$u^*(x^*, y^*, Re) = u_0^*(x^*, y^*) + \eta_1(Re)\,u_1^*(x^*, y^*) + \eta_2(Re)\,u_2^*(x^*, y^*) + \ldots\,; \tag{1.36}$$
$$v^*(x^*, y^*, Re) = v_0^*(x^*, y^*) + \eta_1(Re)\,v_1^*(x^*, y^*) + \eta_2(Re)\,v_2^*(x^*, y^*) + \ldots\,; \tag{1.37}$$
$$p^*(x^*, y^*, Re) = p_0^*(x^*, y^*) + \eta_1(Re)\,p_1^*(x^*, y^*) + \eta_2(Re)\,p_2^*(x^*, y^*) + \ldots\,, \tag{1.38}$$

où les fonctions $\eta_i(Re)$ sont des fonctions de jauge rangées par ordre croissant, c'est-à-dire telles que $\eta_i \mapsto 0$ avec $1 \gg |\eta_1| \gg |\eta_2| \gg$ ... lorsque $Re \mapsto \infty$. Ces jauges doivent être choisies pour que les champs u_i^*, v_i^*, p_i^* soient de l'ordre de l'unité lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini.

À l'ordre 0, le problème est donc régi par les **équations d'Euler** :

$$\partial_x u + \partial_y v = 0\,, \tag{1.39a}$$
$$u\,\partial_x u + v\,\partial_y u = -\,\partial_x p/\rho\,, \tag{1.39b}$$
$$u\,\partial_x v + v\,\partial_y v = -\,\partial_y p/\rho\,, \tag{1.39c}$$

où, à cause de la diminution de l'ordre du système, seule la condition aux limites externe peut être imposée :

$$\underline{u}\,(|\underline{x}| \mapsto \infty) = U_\infty\,\underline{e}_x\,. \tag{1.39d}$$

Ces équations représentent une approximation valable des équations de Navier–Stokes uniquement dans la région extérieure, $|\underline{x}| = \mathcal{O}(L)$, pour $Re \mapsto \infty$. Il convient alors d'étudier le processus limite au voisinage de la paroi.

Région intérieure. On considère cette fois l'écoulement au voisinage de la paroi, dans une région dite intérieure d'épaisseur $\delta(Re) \ll L$. On introduit alors un nouvel adimensionnement en utilisant cette épaisseur pour la direction normale :

$$x^+ = x^* = \frac{x}{L}\,, \qquad y^+ = \frac{y^*}{\delta^*(Re)} = \frac{y}{\delta(Re)}\,, \qquad u^+ = u^*\,, \qquad v^+ = v^*\,, \qquad p^+ = p^*\,, \tag{1.40}$$

De façon analogue à l'analyse de la région externe, un développement asymptotique associé à cet adimensionnement peut être conduit. Les fonctions de jauge intérieures sont notées $\varepsilon_i(Re)$.

L'équation de conservation de la masse conduit à $v_0^+ = 0$ et le principe de moindre dégénérescence permet de fixer les conditions de jauge :

$$\varepsilon_1(Re) = \frac{\delta(Re)}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \,. \tag{1.41}$$

Ainsi, à l'ordre dominant dans la région interne, l'écoulement est régi par les **équations de couche limite de Prandtl** :

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \,; \tag{1.42a}$$

$$u\,\partial_x u + v\,\partial_y u = -\partial_x p/\rho + \nu\,\partial^2_{yy} u \,; \tag{1.42b}$$

$$\partial_y p = 0 \,, \tag{1.42c}$$

avec les conditions aux limites

$$u\,(y \mapsto 0) = v\,(y \mapsto 0) = 0 \,. \tag{1.42d}$$

Conditions de raccord. La solution dans la région intérieure doit se raccorder à celle obtenue dans la région extérieure. Pour cela, on ajoute aux équations d'Euler (1.39) et de Prandtl (1.42) les règles de raccord :

$$U_e(x^*) = \lim_{y^* \mapsto 0} u_0^*(x^*, y^*) = \lim_{y^+ \mapsto \infty} u_0^+(x^+, y^+) \,, \tag{1.43a}$$

$$\lim_{y^* \mapsto 0} v_0^*(x^*, y^*) = \lim_{y^+ \mapsto \infty} v_0^+(x^+, y^+) = 0 \,, \tag{1.43b}$$

$$p_e(x^*) = \lim_{y^* \mapsto 0} p_0^*(x^*, y^*) = \lim_{y^+ \mapsto \infty} p_0^+(x^+, y^+) = p_0^+(x^+) \,, \tag{1.43c}$$

où l'indice e caractérise la solution à la paroi des équations d'Euler.

Dans l'analyse présentée ici, nous nous sommes limités au résultat à l'ordre 0. Il est possible d'effectuer le développement à un ordre supérieur. Pour les subtilités que cela représente, le lecteur peut se référer à l'ouvrage de Patrick Huerre [117].

Une analyse analogue sur les champs moyens d'une couche limite turbulente est possible. Le livre de Jean Cousteix [56] est un des rares ouvrages présentant un développement détaillé de ce cas plus compliqué, dont les principaux résultats sont énoncés ci-dessous.

1.3 Description de la couche limite incompressible sans gradient de pression

L'évolution des grandeurs précédemment introduites (δ, δ^*, θ, c_f, ...) et des champs statistiques ($\overline{u}$, $\overline{p}$, R_{ij}, ...) est décrite ici dans le cas canonique d'une couche limite turbulente de plaque plane, sans gradient de pression externe. Ce cas de référence sera nommé par la suite ZPGTBL pour *zero-pressure-gradient turbulent boundary-layer*.

L'intérêt de ce cas d'étude est double. Premièrement, il répond à un cas de figure élémentaire pour bon nombre d'applications industrielles. Enfin, malgré son extrême simplicité géométrique, il concentre les effets dynamiques essentiels des couches limites turbulentes [231] :

– Les **effets de cisaillement**, imposés par la condition d'adhérence $\underline{u} = \underline{0}$ à la paroi et la condition de vitesse $\underline{U}_\infty \neq \underline{0}$ à l'extérieur de la couche limite. Ainsi, la couche limite se veut être une zone de raccord induisant un cisaillement grossièrement évalué comme U_∞/δ. L'existence de ce cisaillement moyen est à l'origine d'une production d'énergie cinétique turbulente et induit de l'anisotropie dans l'écoulement.

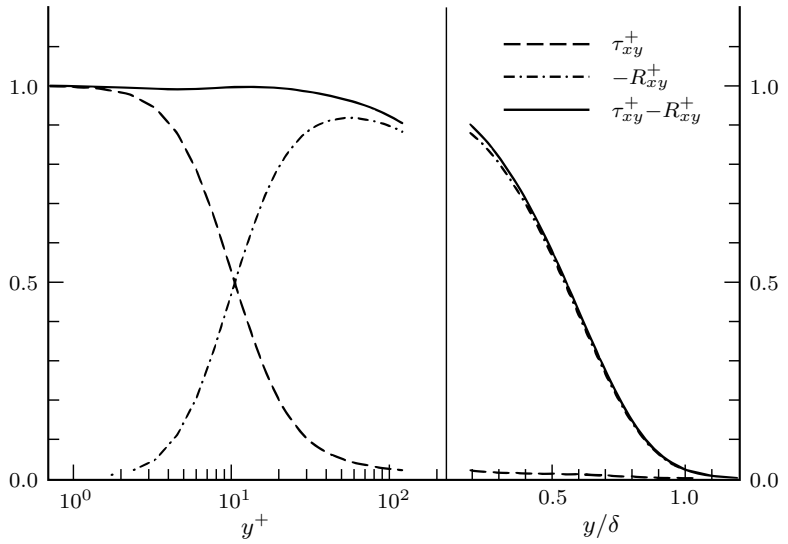


FIGURE 1.1 – Profils des composantes visqueuse (τ_{xy}) et turbulente ($-R_{xy}$) de la contrainte totale ($\sigma_{xy} = \tau_{xy} - R_{xy}$) en fonction de la distance à la paroi. Les profils sont tracés en zone interne en fonction de $y^+ = y/l_\tau = yu_\tau/\nu$ et en zone externe en fonction de y/δ. Les données sont extraites d'une simulation numérique directe de P. Spalart [251]. Figure extraite de [202].

- Les **effets visqueux**, présents sous forme dissipative (très proche paroi) ou diffusive (redistribution spatiale de l'énergie). On aura donc affaire à des mécanismes de redistribution entre les différentes échelles et entre les différentes régions.
- Les **effets de pression**. Le premier est un effet dit cinématique, associé à la condition d'imperméabilité de la paroi : lorsqu'une structure turbulente vient impacter la paroi, sa quantité de mouvement verticale est redistribuée par les effets de pression dans les directions parallèles à la paroi. Le second effet est acoustique : les perturbations dues à la paroi se propagent dans tout l'espace à la vitesse du son. Dans le cas limite d'un écoulement incompressible, la pression est non locale et tout l'espace est instantanément affecté par toute perturbation qui peut avoir lieu.
- Les **effets de température**. Dans le cas compressible, l'évolution de l'énergie interne, et donc de la température, est totalement couplée avec celle du champ de vitesse, au travers de la densité et de la viscosité. Les mécanismes de flux de chaleur seront donc à prendre en compte.

Nous nous limiterons dans la suite de cette section au cas des ZPGTBLs incompressibles, sauf lorsque mentionné.

1.3.1 Profils de vitesse moyenne

La méthode des raccordements asymptotiques a été présentée dans le cas laminaire dans la section 1.2.2. Dans le cas turbulent, en plus des effets visqueux et inertiels, le rôle joué par la turbulence vient complexifier la dynamique de la couche limite. La figure 1.1 présente les composantes visqueuse et turbulente de la contrainte totale dans une couche limite turbulente. Des zones contrôlées par différentes physiques peuvent être identifiées. Ainsi, alors que la couche limite laminaire a dû être traitée en deux zones, intérieure et extérieure, la couche limite turbulente à grand nombre de Reynolds doit être divisée en trois grandes régions d'influence : les régions interne et externe de la couche limite et la région de l'écoulement libre.

Hors de la couche limite, comme pour le cas laminaire, l'écoulement libre (*free stream*) est contrôlé uniquement par les effets inertiels. La viscosité et la turbulence peuvent y être négligées. Dans la région externe de la couche limite (*outer region*), la turbulence contrôle l'écoulement, mais

la viscosité est toujours négligeable. L'écoulement dans cette région dépend grandement des phénomènes inertiels et du gradient de pression imposés par l'écoulement libre. Cela n'est pas le cas dans la région interne de la couche limite (*inner region*), qui est la seule région dans laquelle la viscosité joue un rôle non négligeable. Ces différentes zones sont représentées sur la figure 1.2.

Région de l'écoulement libre. Dans la région la plus éloignée de la paroi, l'échelle de longueur est de l'ordre de la dimension L de l'obstacle. La solution d'ordre 0 dans cette région satisfait les **équations d'Euler** (1.39) avec condition de vitesse normale $\overline{v}$ nulle à la paroi. Dans le cas d'une couche limite de plaque plane sans gradient de pression, il s'agit trivialement de la solution uniforme $\overline{u} = U_\infty$. L'écoulement extérieur n'est modifié par la présence de la couche limite qu'à l'ordre 2. La condition limite à la paroi est alors donnée par la vitesse de transpiration

$$V_e \sim \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\delta^* U_e\right) , \tag{1.44}$$

où δ^* est l'épaisseur de déplacement, définie par (1.25).

Région externe de la couche limite. Dans cette région, la longueur caractéristique δ est telle que $\delta/L \sim u_\tau/U_\infty$, où u_τ est une vitesse caractéristique de la turbulence. En pratique, l'épaisseur $\delta_{99\%}$ de la couche limite définie par (1.24) et la vitesse de frottement définie par (1.30) sont de bons candidats pour ces échelles caractéristiques.

Si l'on remplace la contrainte visqueuse $\underline{\underline{\tau}}$ par la contrainte totale $\underline{\underline{\sigma}}$, définie par (1.20), les **équations de couche limite turbulente** sont formellement identiques à celles obtenues en régime laminaire, équations (1.42). On les écrit comme suit. Pour le cas compressible, il suffit de remplacer les moyennes de Reynolds par des moyennes de Favre et d'utiliser la densité moyenne.

$$\partial_x \rho\,\overline{u} + \partial_y \rho\,\overline{v} = 0 ; \tag{1.45a}$$

$$\rho\,\overline{u}\,\partial_x \overline{u} + \rho\,\overline{v}\,\partial_y \overline{u} = -\partial_x \overline{p} + \partial_y \sigma_{xy} ; \tag{1.45b}$$

$$\partial_y \overline{p} = 0 . \tag{1.45c}$$

Dans cette région, la tension visqueuse est négligeable devant la tension turbulente. À l'ordre 0, la vitesse longitudinale est constante et égale à U_∞. Une analyse dimensionnelle permet alors d'aboutir à une **loi de vitesse déficitaire** par rapport à U_∞, appelée **loi de sillage** :

$$\frac{U_\infty - \overline{u}}{u_\tau} = \mathsf{F}\left(\Pi, \frac{y}{\delta}\right) , \tag{1.46}$$

où F est la fonction adimensionnée déficitaire de sillage, initialement formulée par Von Kármán [140], et Π est le paramètre de sillage, permettant de prendre en compte des perturbations extérieures, comme un gradient de pression. Clauser [48] qualifie d'**écoulement à l'équilibre** un écoulement vérifiant la loi de sillage.

Région interne de la couche limite. La région la plus interne est appelée **sous-couche visqueuse** (*viscous sublayer*). Tel que son nom l'indique, l'écoulement y est principalement influencé par les contraintes visqueuses. Cette région est caractérisée par la vitesse et la longueur de frottement u_τ et $l_\tau = \nu/u_\tau$, dites **échelles internes** ou **unités de paroi**. À ces fins, les grandeurs adimensionnées par ces échelles sont marquées de l'exposant $+$. La sous-couche visqueuse permet d'assurer la condition d'adhérence $\underline{u} = 0$ à la paroi, et ce, bien que son épaisseur devienne infinitésimale devant celle de la couche limite à haut nombre de Reynolds ($l_\tau/\delta \mapsto 0$ pour $Re \mapsto \infty$). Comme mis en évidence sur la figure 1.1, le frottement total σ_{xy} y est quasiment constant :

$$\partial_y \sigma_{xy} = \partial_y\left(\overline{\tau}_{xy} - R_{xy}\right) \simeq 0 . \tag{1.47}$$

Dans la littérature, le terme de "sous-couche visqueuse" fait parfois référence à une zone proche-paroi encore plus fine, située en dessous de $y^+ \simeq 3 - 7$, que l'on dénomme ici **sous-couche linéaire**

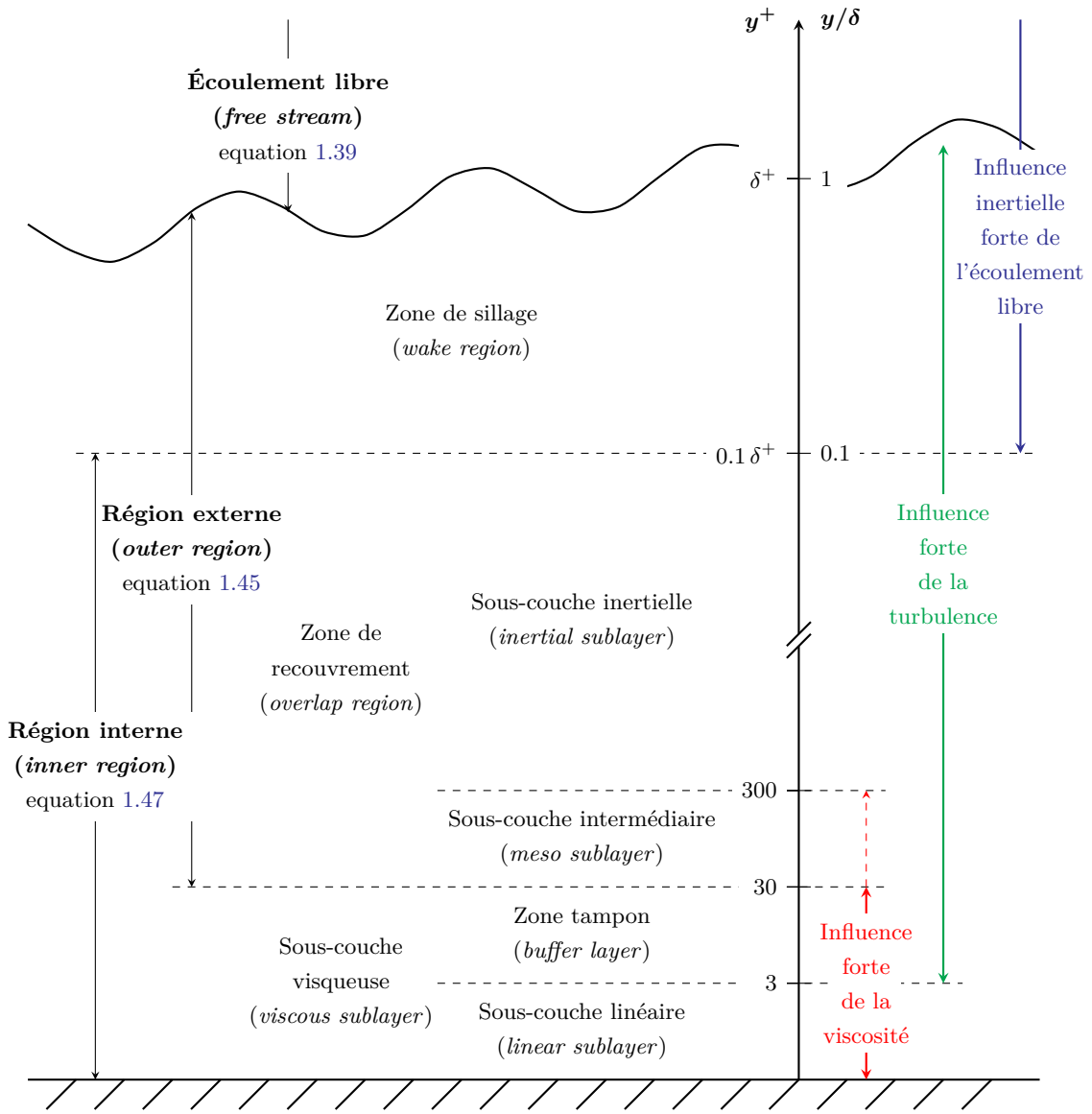


FIGURE 1.2 – Schéma des différentes sous-couches d'une couche limite turbulente. Les noms des différentes régions caractéristiques sont indiqués *à gauche* de l'axe des ordonnées y. Les zones d'influence forte des différents mécanismes physiques figurent *à droite* de l'axe. Les repères indicatifs sur l'axe des ordonnées sont donnés en unités interne (*à gauche*) et externe (*à droite*). Figure adaptée de [101]

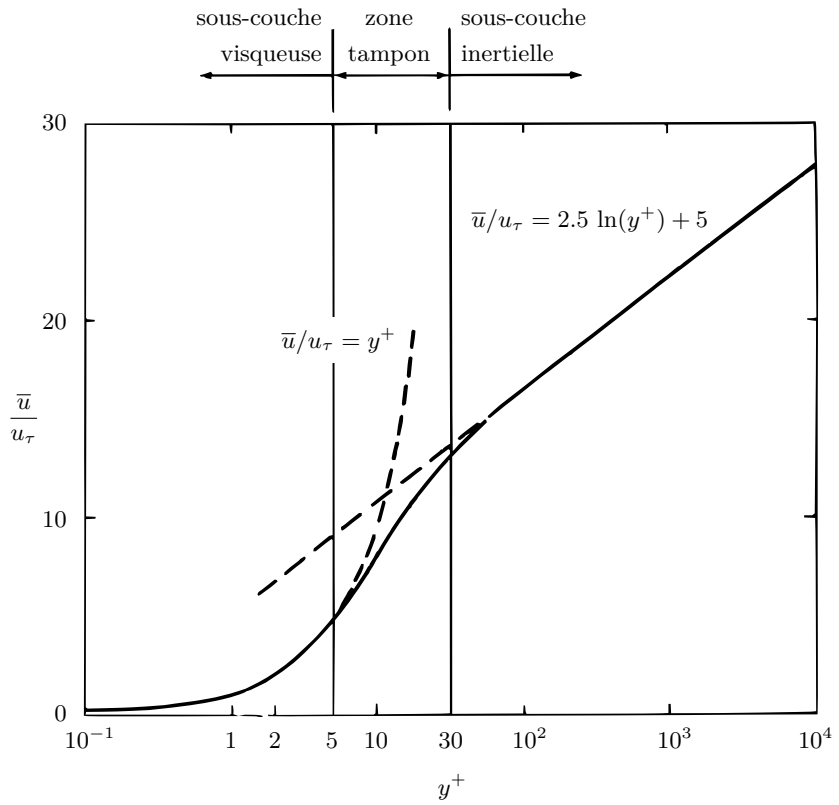


FIGURE 1.3 – Profil de la loi de paroi $\overline{u}/u_\tau = \mathsf{f}(y^+)$ dans la région interne de la couche limite, calculée par développement asymptotique raccordé. Le profil dans la zone tampon (*buffer layer*) est un raccordement empirique entre la loi linéaire et la loi logarithmique. Figure extraite de [231].

(*linear sublayer*) (voir figure 1.2). Dans cette zone, les contraintes turbulentes R_{xy} sont négligeables en raison de la condition d'adhérence. À partir de l'équation (1.47), on obtient alors un profil de vitesse linéaire :

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{y}{l_\tau}\,, \qquad \text{ou encore} \qquad \overline{u}^+ = y^+\,. \tag{1.48}$$

La partie supérieure de la sous-couche visqueuse est appelée **zone tampon** (*buffer layer*) et prend traditionnellement place dans l'intervalle $3 - 7 \lesssim y^+ \lesssim 30$. Néanmoins, de récentes études [147] montrent que l'influence de la sous-couche visqueuse s'étendrait jusqu'à ${Re_\tau}^{1/2}$, repoussant ainsi la limite haute de la zone tampon. Son rôle est de connecter la sous-couche linéaire avec la zone inertielle. Il n'est pas question ici de négliger les contraintes turbulentes ou les contraintes visqueuses, qui jouent chacune un rôle important (comme le montre la figure 1.1).

Une analyse dimensionnelle permet d'établir que, dans la zone interne de la couche limite, l'écoulement ne dépend que de la distance y^+ à la paroi en échelle interne. On obtient alors une relation, appelée **loi de paroi**, de la forme :

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \mathsf{f}\left(\frac{y}{l_\tau}\right)\,, \qquad \text{ou encore} \qquad \overline{u}^+ = \mathsf{f}(y^+)\,. \tag{1.49}$$

L'allure de la fonction $\mathsf{f}(y^+)$ pour une couche limite turbulente de plaque plane est représentée sur la figure 1.3.

Zone de recouvrement. La région externe est caractérisée par l'épaisseur de la couche limite δ et la zone interne par l'unité de paroi l_τ. Le nombre de Reynolds $Re_\tau = \delta/l_\tau = \delta^+$ caractérise la disparité entre ces deux échelles. S'il est suffisamment important, il existe une zone, appelée zone de recouvrement (*overlap region*), vérifiant simultanément $y^+ \gg 1$ et $y \ll \delta$, dans laquelle y^+ est

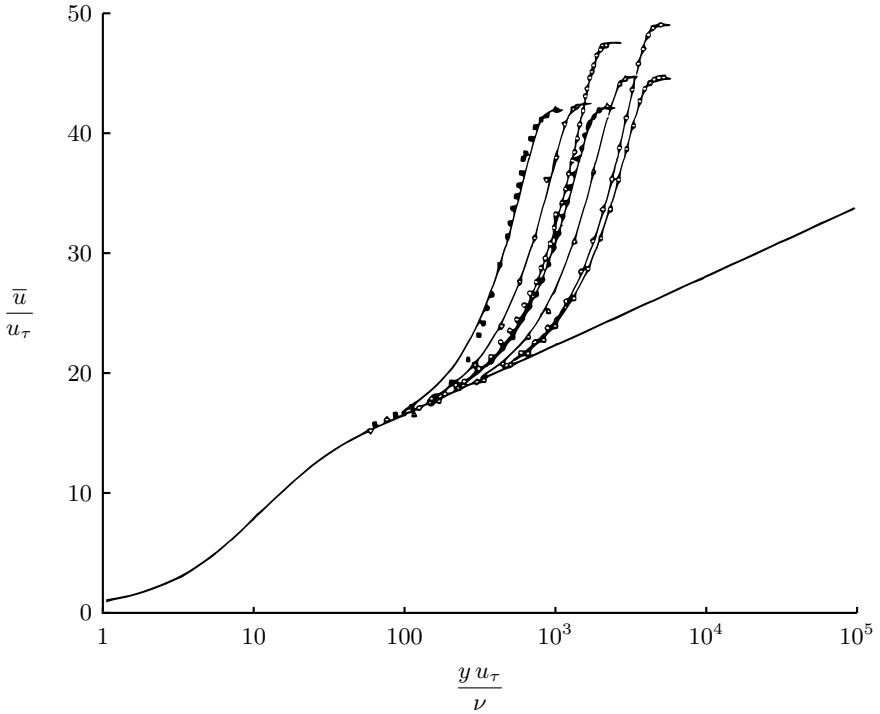


FIGURE 1.4 – Similarité à deux paramètres, δ^+ et U_∞^+, du profil de vitesse moyenne. Les profils de vitesse moyenne représentés sont issus d'expériences réalisées dans des conditions d'écoulement très variées, tant en termes de nombre de Reynolds qu'en termes de gradient de pression ou de courbure de la paroi. Figure extraite de [51].

à la fois trop grand pour que la viscosité joue un rôle prédominant, mais également trop petit pour que y/δ soit pertinent. L'unique unité de longueur existante est la distance à la paroi y elle-même [267]. Dans la pratique, l'étendue de la zone de recouvrement est estimée à $30 \lesssim y^+ \lesssim 0.1\,\delta^+$.

Grâce à la méthode du développement asymptotique raccordé, une analyse dimensionnelle permet d'établir qu'à l'extérieur de la zone interne (c'est-à-dire pour $y^+ \gg 1$), le profil (1.49) tend vers une **loi logarithmique** :

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{y}{l_\tau}\right) + C \qquad \text{ou encore} \qquad \overline{u}^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + C \qquad \text{pour} \qquad y^+ \gg 1 \tag{1.50}$$

et qu'à l'intérieur de la zone externe (c'est-à-dire pour $y/\delta \ll 1$), la loi déficitaire de sillage (1.46) suit une loi logarithmique déficitaire :

$$\frac{U_\infty - \overline{u}}{u_\tau} = -\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + B \qquad \text{pour} \qquad \frac{y}{\delta} \ll 1\,. \tag{1.51}$$

Ainsi, la zone de recouvrement est usuellement nommée **zone logarithmique**. Bien que la théorie ne permette pas de les définir analytiquement, les constantes κ, B et C peuvent être estimées empiriquement. Suivant les types d'écoulement (écoulement de conduite circulaire [179], de canal plan [290] ou de couche limite [32]), la constante de Von Kármán κ est évaluée entre 0.38 et 0.42. La constante B dépend des conditions extérieures à la couche limite et peut prendre des valeurs très variées, comme en témoigne la figure 1.4. La constante additive C est déterminée par la condition d'adhérence à la paroi, mais puisque la loi logarithmique (1.50) n'est valable que pour $y^+ \gg 1$, sa valeur dépend du détail de l'écoulement dans la sous-couche visqueuse. Pour un écoulement sur paroi lisse, sa valeur est voisine de 5.

L'existence d'une telle loi logarithmique est remise en cause par certains auteurs [102, 101] qui prônent, au contraire, l'existence d'un profil décrit par une loi puissance. En tout état de cause, la

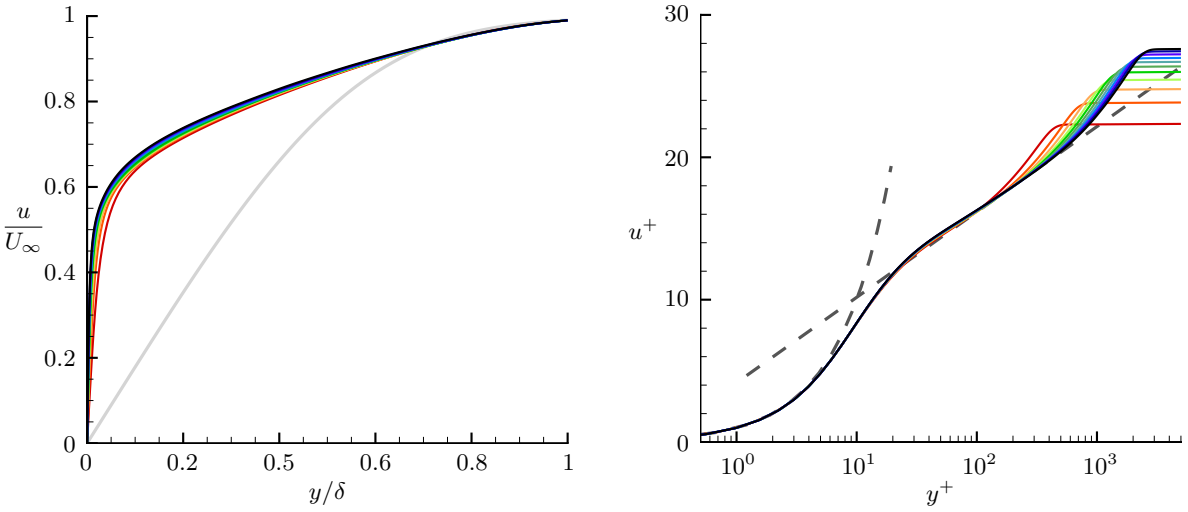


FIGURE 1.5 – Profils de vitesse moyenne, en unités externes (*gauche*) et internes (*droite*), respectivement en échelles linéaire et logarithmique, à différents nombres de Reynolds compris entre $Re_\theta = 1376$ (*rouge*) et 8183 (*noir*). Les lois linéaire (1.48) et logarithmique (1.50), avec $\kappa = 0.384$ et $C = 4.17$ (*pointillés gris*), ainsi que le profil laminaire de Blasius (*ligne gris-clair*) sont également représentés. Les données sont extraites des simulations numériques (LES) de Eitel-Amor *et al.* [78].

validité de la loi logarithmique comme solution de la méthode des développements asymptotiques raccordés n'est valable que dans la limite asymptotique $Re \mapsto \infty$. La pertinence de cette loi pour décrire des écoulements à nombre de Reynolds fini reste un sujet de recherche ouvert, mais sa validation par comparaison avec des données de références est problématique. En effet, les simulations numériques directes sont aujourd'hui limitées par la puissance des supercalculateurs disponibles à des nombres de Reynolds $Re_\theta = \mathcal{O}(10^3)$ et les souffleries les plus performantes atteignent la décade suivante. À ces nombres de Reynolds, bien que le profil de vitesse moyenne vienne longer la loi logarithmique — comme représenté sur la figure 1.5 — l'étendue de la zone de recouvrement est encore trop restreinte pour permettre de valider ou d'invalider cette théorie.

De plus, bien que l'influence de la tension visqueuse ait classiquement été négligée dans l'équation du mouvement moyen au-dessus de $y^+ \simeq 30$, il est aujourd'hui accepté que son influence se fait en réalité sentir jusqu'à $y^+ \simeq 200 - 600$ [256, 289, 192]. On appelle **sous-couche intermédiaire** (*meso-sublayer*) la partie de la zone de recouvrement encore influencée par la viscosité, c'est à dire $y^+ \lesssim 300$ [101] ou $y^+ \lesssim \sqrt{\delta^+}$ [147] suivant les études. L'observation d'un véritable profil logarithmique nécessite l'existence d'une **zone inertielle** (*inertial sublayer*), délimitée par $300 \lesssim y^+ \lesssim 0.1\,\delta^+$, large d'au moins une décade, c'est-à-dire un nombre de Reynolds supérieur à $Re_\tau = \delta^+ \simeq 30000$.

Représentation du profil complet. En s'appuyant sur la validité des lois de paroi (1.49) et de sillage (1.46), Coles [51] affirme que le profil de vitesse d'une couche limite turbulente sur paroi lisse, même en présence d'un gradient de pression externe, est totalement déterminé par la donnée des coordonnées — altitude et vitesse — du point d'écoulement libre (δ^+, U_∞^+). Une illustration en est donnée figure 1.4. Il précise que le profil complet peut alors s'écrire sous la forme

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \mathsf{f}\left(\frac{y}{l_\tau}\right) + \frac{\Pi(x)}{\kappa}\mathsf{w}\left(\frac{y}{\delta}\right) . \tag{1.52}$$

En dehors de la sous-couche visqueuse, puisque la loi de paroi f tend vers la loi logarithmique (1.50), on peut écrire :

$$\overline{u}^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y^+\right) + C + \frac{\Pi(x)}{\kappa}\mathsf{w}\left(\frac{y}{\delta}\right) \qquad \text{pour} \qquad y^+ \gg 1\,. \tag{1.53}$$

Le terme w est appelé **terme de sillage**, dont Coles en donne l'approximation $\mathsf{w}(\eta) = 2\,\sin^2(\frac{\pi}{2}\eta)$. Il peut être considéré comme négligeable en dessous de $y/\delta \simeq 0.15$ et est habituellement normalisé de sorte que $\mathsf{w}(1) = 2$. L'amplitude des effets de l'écoulement libre est alors prise en compte par le facteur Π, de la même façon que C traduit l'influence de la sous-couche visqueuse. D'après Fernholz & Finley [79], sa valeur est d'environ $\Pi \simeq 0.52$ pour une ZPGTBL canonique à haut nombre de Reynolds.

Monkewitz *et al.* [188] ont proposé une loi analytique pour décrire le profil $\overline{u}^+(y^+)$ de ZPGTBL canonique à grand nombre de Reynolds. Cette loi analytique est obtenue en partie par régression linéaire sur des données de référence expérimentales (notamment celles de Nagib *et al.* [193] et d'Österlund [200]) et en partie par des considérations théoriques (comme la tendance logarithmique (1.50)) et des lois intégrales (comme celles qui seront développées dans la sous-section suivante).

Le profil analytique proposé par Monkewitz *et al.* est composé selon l'une des deux formes équivalentes suivantes :

$$\overline{u}^+ \simeq \overline{u}^+_{\text{inner}} + \overline{u}^+_{\text{outer}} - \overline{u}^+_{\text{log}} \tag{1.54a}$$

$$\simeq \overline{u}^+_{\text{inner}} \times \overline{u}^+_{\text{outer}} \;/\; \overline{u}^+_{\text{log}}\,. \tag{1.54b}$$

Le profil $\overline{u}^+_{\text{log}}$ correspond au profil logarithmique des lois (1.50) et (1.51). Il est décrit par :

$$\overline{u}^+_{\text{log}} = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y^+\right) + C\,, \tag{1.55a}$$

$$\text{avec} \qquad \kappa = 0.384\,, \tag{1.55b}$$

$$\text{et} \qquad C = 4.17\,. \tag{1.55c}$$

Le profil $\overline{u}^+_{\text{inner}}(y^+)$ fait valoir la loi de paroi (1.49) et joue le rôle de ce que l'on a noté $\mathsf{f}(y^+)$ dans ce manuscrit. Pour $y^+ \to \infty$, ce profil tend vers le profil logarithmique $\overline{u}^+_{\text{log}}(y^+)$, conformément à la loi (1.50). Ce profil interne est décomposé comme suit :

$$\overline{u}^+_{\text{inner}}(y^+) = U^+_{\text{inner,23}}(y^+) + U^+_{\text{inner,25}}(y^+)\,, \tag{1.56a}$$

$$\begin{aligned}\text{où} \qquad U^+_{\text{inner,23}}(y^+) = \;& 0.68285472\;\ln(y^{+2} + 4.7673096y^+ + 9545.9963)\\ &+ 1.2384572\;\ln(y^+ + 95.232690)\\ &+ 1.2408249\;\arctan(0.010238083y^+ + 0.024404056)\\ &- 11.930683\,,\end{aligned} \tag{1.56b}$$

$$\begin{aligned}\text{et} \qquad U^+_{\text{inner,25}}(y^+) = \;& -0.50435126\;\ln(y^{+2} - 7.8796955y^+ + 78.389178)\\ &- 2.7768771\;\ln(y^{+2} + 16.209175y^+ + 933.16587)\\ &+ 6.5624567\;\ln(y^+ + 13.670520)\\ &+ 4.7413546\;\arctan(0.12612158y^+ - 0.49689982)\\ &+ 0.37625729\;\arctan(0.033952353y^+ + 0.27516982)\\ &+ 6.1128254\,.\end{aligned} \tag{1.56c}$$

Le profil $\overline{u}^+_{\text{outer}}(\eta)$ est défini de façon déficitaire selon la loi de sillage (1.46), à la différence près que $\eta = y/\Delta = y/U^+_\infty\delta^*$ a été préféré à y/δ. La fonction $w^+_{\text{outer}}(\eta)$ définie ci-après joue alors le

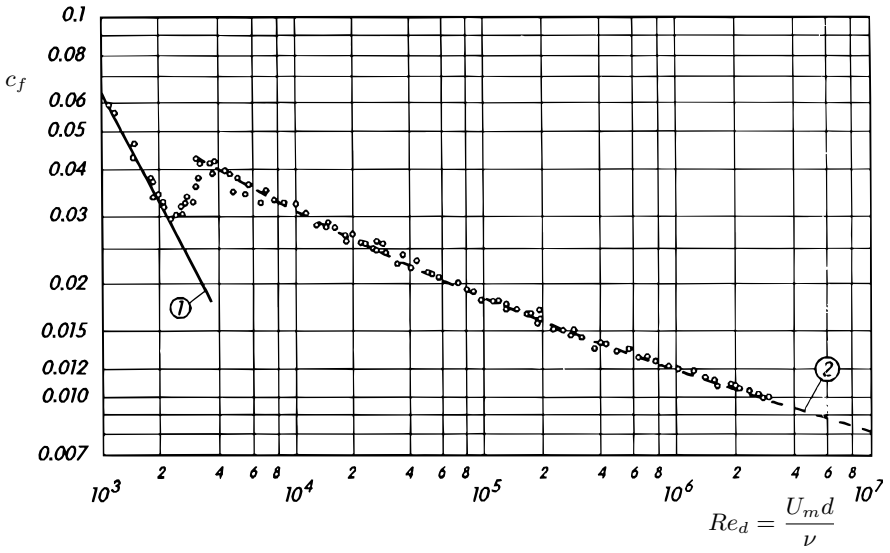


FIGURE 1.6 – Évolution du coefficient de frottement c_f en fonction du nombre de Reynolds pour une couche limite de conduite circulaire. La solution laminaire est représentée par la courbe ①, alors que la courbe ② représente une corrélation empirique pour le régime turbulent. Figure extraite de [240]

rôle de ce que l'on a noté $\mathsf{F}(y/\delta)$ dans ce manuscrit. Pour $\eta \to \infty$, le profil tend vers le profil logarithmique $\overline{u}^+_{\log}(\eta)$, conformément à la loi (1.51).

$$w^+_{\text{outer}}(\eta) = U^+_\infty - \overline{u}^+_{\text{outer}}(\eta)\,, \tag{1.57a}$$

$$\text{où} \qquad w^+_{\text{outer}}(\eta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa}E_1(\eta) + 0.6332\right)\left(1 - \tanh\left(\frac{-0.096}{\eta} + 28.5\eta^2 + 33000\eta^8\right)\right)\,, \tag{1.57b}$$

$$\text{et} \qquad E_1(\eta) \simeq -\gamma - \ln(\gamma) + 0.99999193\eta - 0.24991055\eta^2 + 0.05519968\eta^3 - 0.00976004\eta^4 + 0.00107857\eta^5\,, \tag{1.57c}$$

$$\text{avec} \qquad \gamma = 0.57721566\,. \tag{1.57d}$$

1.3.2 Évolution des grandeurs caractéristiques

La transition vers la turbulence conduit à une augmentation drastique du frottement, comme le montre la figure 1.6. À nombre de Reynolds donné, le coefficient de frottement d'un écoulement laminaire est nécessairement plus faible que celui de l'écoulement turbulent associé. Nous reviendrons plus tard sur ce résultat, démontré en canal [23, 87], mais qui reste vraisemblablement valable pour les écoulements externes [143]. Le rappel des principaux résultats d'une couche limite laminaire constitue ainsi un intéressant point de comparaison.

Solution de Blasius. Une couche limite incompressible laminaire de plaque plane, sans gradient de pression, est caractérisée par la solution auto-semblable de Blasius. L'évolution dans la direction de l'écoulement des principales grandeurs de la couche limite peut être calculée analytiquement. En notant $Re_x = U_\infty\, x/\nu$ le nombre de Reynolds basé sur l'abscisse x depuis le bord d'attaque de la

plaque plane, on obtient :

$$\delta_{99\%}(x) = \frac{5\,x}{\sqrt{Re_x}} = 4.92\sqrt{\frac{\nu\,x}{U_\infty}}\,, \tag{1.58a}$$

$$\delta^*(x) = \frac{1.72\,x}{\sqrt{Re_x}} = 1.72\sqrt{\frac{\nu\,x}{U_\infty}}\,, \tag{1.58b}$$

$$\theta(x) = \frac{0.664\,x}{\sqrt{Re_x}} = 0.664\sqrt{\frac{\nu\,x}{U_\infty}}\,, \tag{1.58c}$$

$$H(x) = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.59\,, \tag{1.58d}$$

$$c_f(x) = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} = 0.664\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty\,x}}\,. \tag{1.58e}$$

Ainsi, le coefficient de frottement d'une couche limite laminaire est donné en fonction de Re_θ par :

$$c_f\,(Re_\theta) = \frac{0.664^2}{Re_\theta}\,. \tag{1.59}$$

Couche limite turbulente. Il est possible d'intégrer les équations de couche limite entre la paroi, $y = y_\mathrm{w} = 0$, et l'extérieur de la couche limite, $y = \delta(x)$. En particulier, l'intégration de l'équation (1.45b) régissant la quantité de mouvement longitudinal conduit à l'**équation intégrale de quantité de mouvement** :

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + \theta\left(\frac{H+2}{U_\infty}\frac{\mathrm{d}U_\infty}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\rho_\infty}\frac{\mathrm{d}\rho_\infty}{\mathrm{d}x}\right)\,. \tag{1.60}$$

Pour obtenir ce résultat, il a fallu également intégrer l'équation de conservation de la masse (1.45a) et utiliser les relations suivantes :

$$\sigma_{xy}(y=0) = \overline{\tau}_\mathrm{w}\,; \qquad \sigma_{xy}(y=\delta) \simeq 0\,; \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\rho_\infty U_\infty\,\frac{\mathrm{d}U_\infty}{\mathrm{d}x}\,. \tag{1.61}$$

Bien qu'exacte, cette équation ne permet pas de déterminer le frottement en pratique. En effet, si $U_\infty(x)$ et $\rho_\infty(x)$ sont des données d'un problème de couche limite classique, les évolutions $c_f(x)$, $\theta(x)$, $H(x)$ sont toutes inconnues. L'équation intégrale (1.60) ne suffit pas à elle seule à les déterminer.

En réalité, aucune formule analytique exacte n'exprime l'évolution des grandeurs caractérisant la couche limite dans le cas turbulent. Les analyses asymptotiques, l'expérience et la simulation numérique permettent cependant d'établir de nombreuses formules semi-empiriques.

Dans le cadre des développements asymptotiques raccordés décrits précédemment, la validité simultanée des lois logarithmiques de paroi (1.50) et de sillage (1.51) permet d'obtenir la loi de frottement suivante, reliant le coefficient $c_f = 2/U_\infty^{+2}$ au nombre de Reynolds $Re_\tau = \delta^+$:

$$U_\infty^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(\delta^+) + B + C\,, \qquad \text{ou encore} \qquad c_f = 2\left[\frac{1}{\kappa}\ln(Re_\tau) + B + C\right]^{-2}\,. \tag{1.62}$$

Souvent, on préfère utiliser cette loi en faisant apparaître le nombre de Reynolds Re_{δ^*}. On obtient alors la loi de Coles–Fernholz :

$$c_f = 2\left[\frac{1}{\kappa}\ln(Re_{\delta^*}) + D^*\right]^{-2}\,, \tag{1.63}$$

avec les coefficients $\kappa = 0.41$ et $D^* = 4.2$, calibrées empiriquement sur un jeu de données expérimentales pour lesquelles $Re_{\delta^*} \in [10^3; 10^5]$ [56].

D'autres formules semi-empiriques sont listées dans le tableau 1.1. Il est étonnant de constater

	Forme originale	Modifications
Coles–Fernholz 1 [51]	$c_f = 2\,[1/\kappa\,\ln(Re_{\delta^*}) + D^*]^{-2}$	$\kappa = 0.384,\ D^* = 3.354$
Coles–Fernholz 2 [51]	$c_f = 2\,[1/\kappa\,\ln(Re_\theta\ ) + D\ ]^{-2}$	$\kappa = 0.384,\ D\ = 4.127$
Kármán–Schoenherr [242]	$c_f = 0.558\,c'_f/[0.558 + 2(c'_f)^{-1/2}]$	
	$c'_f = [\log(2\,Re_\theta)/\mathbf{0.242}]^{-2}$	$0.242 \mapsto\ 0.2385$
Prandtl–Schlichting [240]	$c_f = \mathbf{0.455}\,(\log Re_x)^{-2.58} - A/Re_x$	$0.455 \mapsto\ 0.3596$
Prandtl–Kármán [212]	$c_f^{-1/2} = 4\,\log(Re_x\,\sqrt{c_f}) - \mathbf{0.4}$	$0.4\ \mapsto\ 2.12$
Schultz-Grunow [246]	$c_f = \mathbf{0.427}\ (\log Re_x - 0.407)^{-2.64}$	$0.427 \mapsto\ 0.3475$
Nikuradse [196]	$c_f = 0.02666\,Re_x^{\mathbf{-0.139}}$	$-0.139 \mapsto -0.1502$
Schlichting's fit [240]	$c_f = (2\,\log Re_x - 0.65)^{\mathbf{-2.3}}$	$-2.3\ \mapsto -2.3333$
White [285]	$c_f = \mathbf{0.455}\ [\ln(0.06\,Re_x)]^{-2}$	$0.455 \mapsto\ 0.4177$
1/7th law	$c_f = \mathbf{0.027}\,Re_x^{-1/7}$	$0.027 \mapsto\ 0.02358$
1/5th law	$c_f = \mathbf{0.058}\,Re_x^{-1/5} - A/Re_x$	$0.058 \mapsto\ 0.0655$
GC97 [102]	$c_f = 2\,\left[(C_{i\infty}/\mathbf{55})\ (\delta^+)^{\gamma\infty}\ e^{-A/(\ln\delta^+)^\alpha}\right]^{-1/2}$	$0.55\ \mapsto\ 56.7$
Smits *et al.* [248]	$c_f = 0.024\,Re_\theta^{-1/4}$	not treated in [192]

TABLE 1.1 – Diverses lois semi-empiriques donnant la variation du coefficient de frottement moyen avec le nombre de Reynolds. Les coefficients de la dernière colonne proviennent du recalage proposé par Nagib *et al.* Tableau adapté de [192].

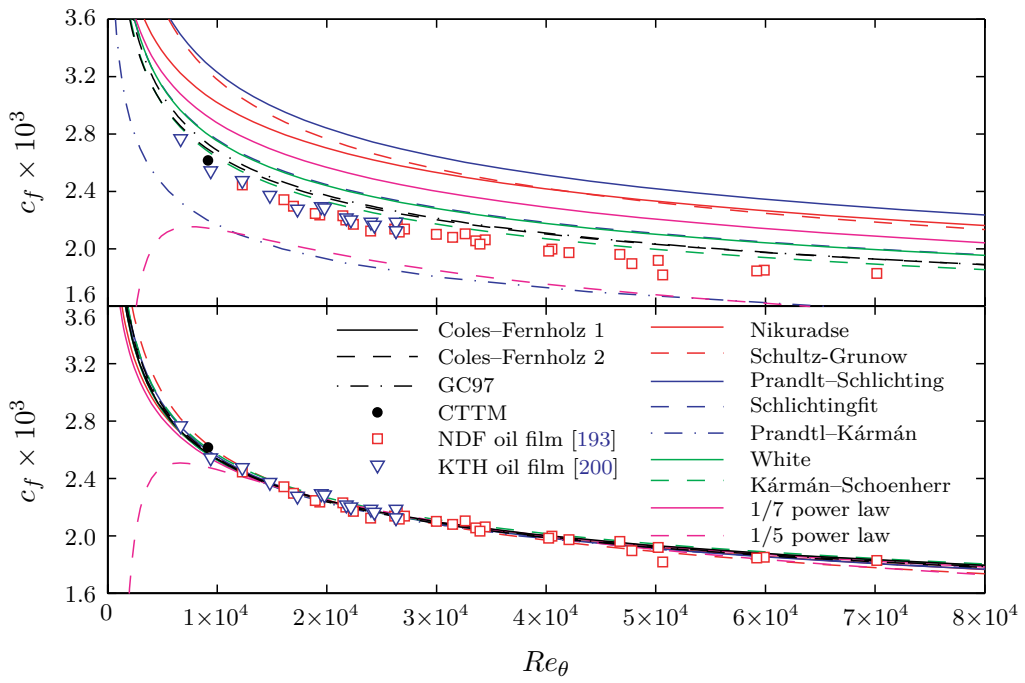


FIGURE 1.7 – Évolution du coefficient de frottement c_f en fonction du nombre de Reynolds Re_θ. Les symboles sont issus de mesures expérimentales. Les courbes sont données par les lois semi-empiriques du tableau 1.1, en utilisant les coefficients originaux (*graphique supérieur*) ou recalés par Nagib *et al.* (*graphique inférieur*). Figure adaptée de [192].

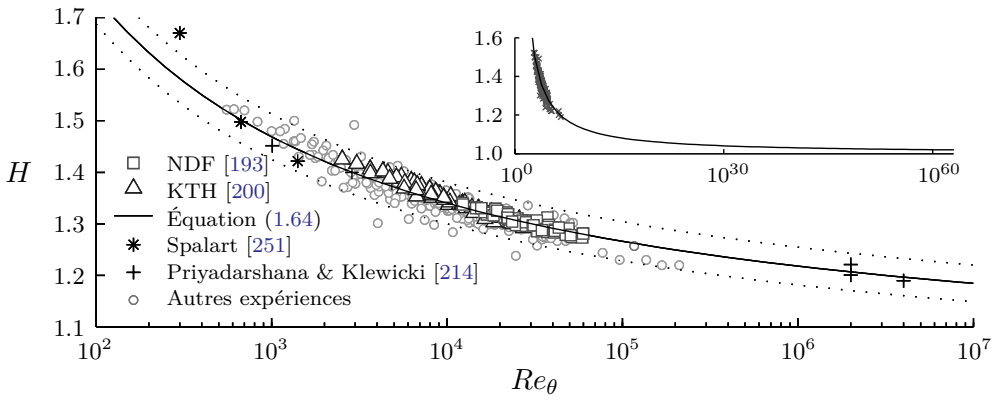


FIGURE 1.8 – Évolution du facteur de forme H en fonction de Re_θ. Figure adaptée de [192].

à quel point ces lois empiriques diffèrent, tant en termes de forme mathématique, qu'en termes de valeur prédite du frottement, comme représenté sur le graphique supérieur de la figure 1.7. Plusieurs raisons expliquent cette variabilité. Tout d'abord, les lois sont ajustées empiriquement grâce à des paramètres ajustables sur différents jeux de résultats expérimentaux ou numériques. Les incertitudes de mesure expliquent une partie de la variabilité des données expérimentales. L'autre raison est due à la non-unicité de la loi de frottement $c_f(Re)$. En effet, à nombre de Reynolds donné, la valeur du frottement dépend grandement des conditions extérieures (conditions aux limites, taux de turbulence de l'écoulement libre, type de transition laminaire–turbulente, ...) [238]. Ceci est particulièrement important pour les couches limites turbulentes de faible nombre de Reynolds, $Re_\theta \simeq 10^3$, pour lesquelles l'historique de l'écoulement depuis la transition turbulente une influence du premier ordre.

Malgré cette grande variété de formules, le recalage des paramètres empiriques proposés par Nagib *et al.* [192] conduit à une excellente superposition de l'ensemble des courbes sur une large plage de nombre de Reynolds (de $Re_\theta \simeq 10^4$ à 10^5), comme représenté sur la partie inférieure de la figure 1.7.

Le facteur de forme H, que l'on a vu constant et égal à 2.59 pour la solution auto-semblable de Blasius, évolue dans une plage de valeur bien plus faible dans le cas turbulent. En pratique, on le considère couramment dans l'intervalle $1.3 - 1.4$. La loi proposée par Nagib *et al.* [192], dont l'évolution est représentée sur la figure 1.8, suggère que $H(Re)$ tend vers sa borne inférieure 1 lorsque $Re \mapsto \infty$:

$$H = \frac{1}{1 - \frac{C'}{U_\infty^+}}, \qquad \text{avec} \qquad C' = \frac{U_\infty^+}{\delta^*} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\overline{u}^+}{U_\infty^+}\right)^2 \mathrm{d}y \;\simeq\; 7.135 + \mathcal{O}(Re_\theta)\,. \tag{1.64}$$

D'après la définition du facteur de forme (1.27), une faible valeur de H implique un profil de vitesse dynamisé en proche-paroi. Ainsi, les écoulements turbulents se distinguent des écoulements laminaires par une vitesse moyenne plus importante pour les faibles valeurs de y, comme le montre la figure 1.5. Les tensions turbulentes de Reynolds, termes supplémentaires dans l'équation de la quantité de mouvement (1.17b) par rapport au cas laminaire, ont donc pour effet de transférer de l'énergie cinétique vers la paroi.

L'équation intégrale de quantité de mouvement, équation (1.60), permet, aux côtés des corrélations empiriques pour le coefficient de frottement (1.63) et le facteur de forme (1.64), d'obtenir l'évolution des grandeurs caractéristiques des couches limites ZPGTBL.

1.3.3 Grandeurs turbulentes

Le caractère turbulent de l'écoulement se manifeste par l'ajout de termes supplémentaires dans les équations moyennées (1.17), faisant intervenir des corrélations de variables fluctuantes. Dans

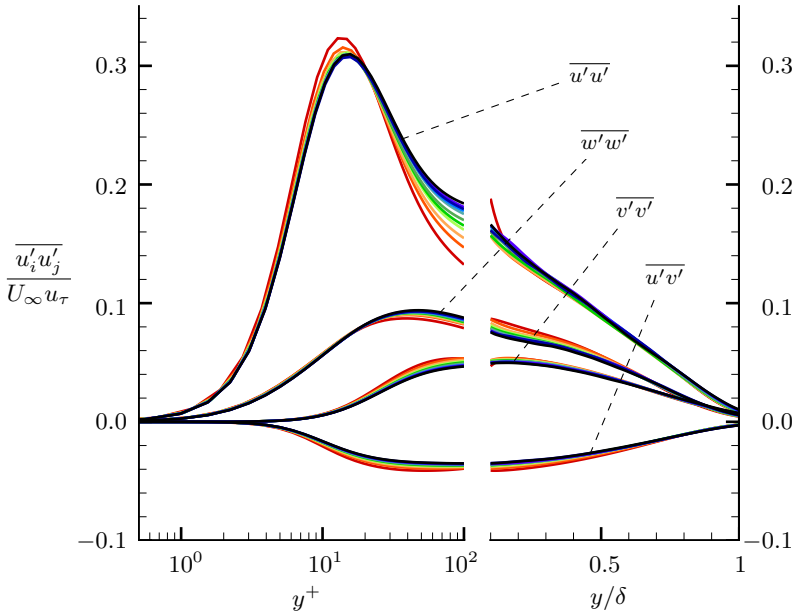


FIGURE 1.9 – Contraintes de Reynolds $\overline{u_i'u_j'}$ à différents nombres de Reynolds compris entre $Re_\theta = 1376$ (*rouge*) et 8183 (*noir*). L'adimensionnement mixte de DeGraaff et Eaton [70] est retenu. Les données sont extraites des simulations numériques (LES) de Eitel-Amor *et al.* [78].

le cas de la conservation de la quantité de mouvement, il s'agit du tenseur des contraintes de Reynolds $R_{ij} = \overline{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}$, et plus spécifiquement, pour une couche limite turbulente, c'est la composante $R_{xy} = \overline{\rho}\widetilde{u''v''}$ appelée **contrainte de cisaillement de Reynolds** (*Reynolds shear stress*) qui intervient dans (1.45). Dans le cas incompressible, son expression se simplifie naturellement en $R_{xy} = \overline{u'v'}$. Son comportement dans la couche limite est représenté sur la figure 1.9.

Parmi les autres termes du tenseur $\underline{\underline{R}}$, il y a les **contraintes de Reynolds normales** ($\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ et $\overline{w'^2}$). Leur demi-somme mesure l'énergie cinétique turbulente k. Leur comportement apparaît également sur la figure 1.9.

Enfin, les deux derniers termes croisés du tenseur de Reynolds, $\overline{u'w'}$ et $\overline{v'w'}$, sont identiquement nuls dans une couche limite statistiquement bidimensionnelle pour des raisons de symétrie.

La question de la détermination d'un adimensionnement pertinent des tensions de Reynolds pouvant conduire à une formulation générale indépendante du régime considéré est un sujet qui fait toujours débat au sein de la communauté scientifique. Les grandeurs caractéristiques internes et externes ne conduisent en effet pas à un tel résultat. L'adimensionnement mixte proposé par DeGraaff et Eaton [70], c'est-à-dire faisant intervenir u_τ et U_∞, a été utilisé sur la figure 1.9. Il tend à satisfaire la superposition des données de différents nombres de Reynolds aux positions y^+ dans la zone interne ainsi qu'aux positions y/δ dans la zone externe de la couche limite.

La contrainte de cisaillement étant négative au travers de toute la couche limite, on en déduit que les fluctuations de vitesses longitudinales et normales, u' et v', sont corrélées négativement : une survitesse $u' > 0$ est donc plus vraisemblablement accompagnée d'une déflexion de fluide vers la paroi $v' < 0$, et inversement. On reviendra dans la section suivante sur cette notion de **corrélation**.

La région où l'énergie cinétique est à son maximum est la zone tampon. On remarque de plus que les contributions des différentes tensions normales ne sont pas égales en intensité. La principale contribution à l'énergie cinétique turbulente k est la tension longitudinale $\overline{u'^2}$, suivie de la composante transverse $\overline{w'^2}$ puis de la composante normale $\overline{v'^2}$. Cela témoigne de la forte **anisotropie**

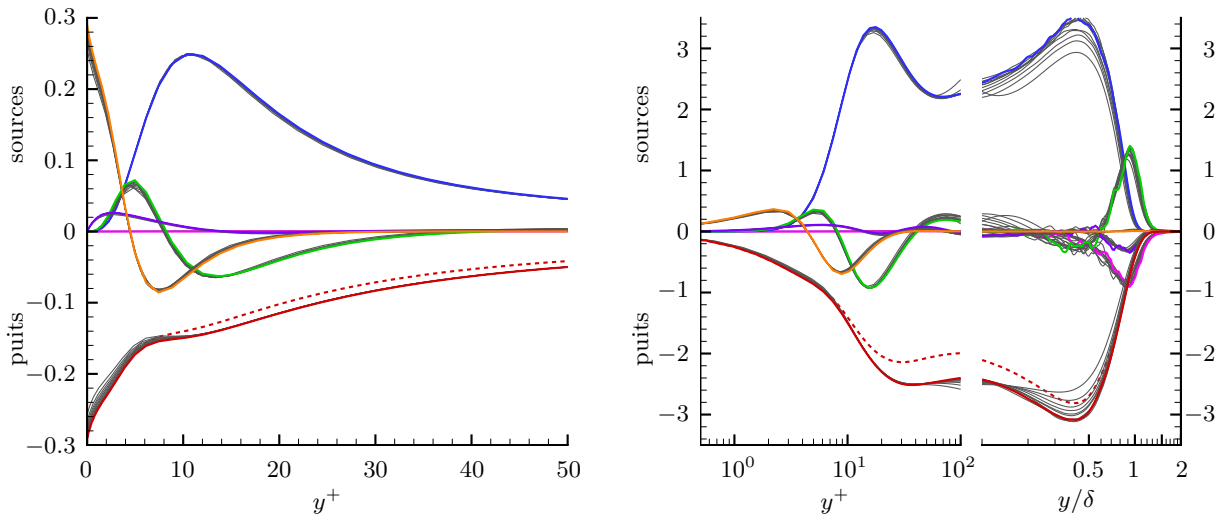


FIGURE 1.10 – Termes (*gauche*) et termes pré-multipliés par y^+ (*droite*) du bilan d'énergie cinétique turbulente (1.22) en unité de paroi d'une couche limite incompressible à $Re_\theta = 8183$ (*couleur*). ainsi que pour différents nombres de Reynolds de $Re_\theta = 1376$ à 7603 (*gris*). Les termes sont respectivement : convection (*rose*), production (transfert de $\mathcal{K}$ vers k) (*bleu*), dissipation (*rouge*), diffusion visqueuse (*orange*), diffusion turbulente (*vert*), diffusion par la pression (*violet*). Pour un écoulement incompressible, les autres termes de (1.22) sont nuls. Les données sont extraites des simulations numériques (LES) de Eitel-Amor *et al.* [78] pour lesquels la dissipation totale est la somme de la dissipation résolue, représentée en pointillés pour le cas $Re_\theta = 8183$, et des dissipations sous-maille et numérique (calculées comme terme résiduel du bilan).

des écoulements au voisinage d'une paroi. Selon Wilcox [286], la répartition des tensions suit les ratios $\overline{u'^2} : \overline{v'^2} : \overline{w'^2} = 4 : 2 : 3$ dans la région logarithmique et une bonne partie de la zone déficitaire.

Les termes du bilan d'énergie cinétique turbulente k, équation (1.22), sont tracés sur la figure 1.10. Dans une couche limite turbulente, le terme de transfert entre les énergies cinétiques moyenne $\mathcal{K}$ et turbulente k constitue majoritairement un terme source pour k et justifie l'appellation de "terme de production". Cela traduit le fait que la turbulence extrait de l'énergie du mouvement moyen pour la convertir en fluctuations de vitesse. Ce "centre producteur" d'énergie est situé aux environs de $y^+ \simeq 11 - 12$, mais une grande partie de la production est repartie sur toute l'épaisseur de la couche limite, comme le montre la figure 1.10 pré-multipliée en échelle logarithmique. Smits *et al.* [249] rappellent qu'au-dessus de $Re_\tau \simeq 4200$, la production dans la zone inertielle $y^+ > 30$ devient prépondérante devant celle dans la sous-couche visqueuse. Les termes de diffusion (visqueuse, turbulente et de pression) ainsi que le transport par le champ moyen (convection) ne créent ni de détruisent d'énergie, ils ne font que la redistribuer spatialement. À terme, l'énergie transférée à la turbulence est totalement dissipée par des effets visqueux. Ainsi, on observe l'équilibre global "production = dissipation".

La diffusion turbulente transfère de l'énergie de la zone tampon vers la sous-couche linéaire. La diffusion visqueuse la transfère encore plus proche de la paroi. Dans la sous-couche linéaire, l'équilibre énergétique se traduit par une dissipation visqueuse de l'énergie apportée par la diffusion visqueuse. Dans le reste de la couche limite, l'équilibre dominant (production = dissipation) traduit le fait que l'énergie apportée par le mouvement moyen est dissipée localement. Enfin, le terme de convection utilise l'énergie apportée dans la zone externe par la diffusion turbulente pour l'épaississement de la couche limite.

1.4 Description des mouvements fluctuants

Les sections précédentes ont présenté une analyse statistique, moyenne, de la turbulence pariétale. En particulier, l'analyse des bilans d'énergie cinétique turbulente a montré l'existence d'un transfert d'énergie de l'écoulement moyen vers la turbulence, qui la dissipait finalement par des effets visqueux. Bien que ces informations soient très utiles dans le développement de modèles de turbulence, elles ne permettent pas de comprendre les phénomènes physiques qui régissent ce comportement. De nombreuses études ont conduit à la découverte de la présence de mouvements organisés, ou structures cohérentes, et à la mise en évidence de leur lien avec la production de turbulence. La connaissance de ces structures s'est développée principalement grâce aux simulations numériques depuis les années 1980. Robinson [227] propose dans sa revue une définition générale d'une structure cohérente :

> *Il s'agit d'une région de l'écoulement au sein de laquelle au moins une variable fondamentale (une composante de la vitesse, la densité, la température, ...) présente une corrélation significative avec elle-même ou une autre variable dans un intervalle de temps ou d'espace significativement plus grand que les échelles locales les plus petites.*

Les efforts de Robinson [227] se sont révélés particulièrement utiles puisqu'ils ont permis d'établir une classification des structures cohérentes de la couche limite. Parmi les mouvements organisés connus à cette époque, on peut notamment lister les *streaks*, les éjections et balayages, les tourbillons quasi-longitudinaux ou en épingle à cheveux, ainsi que les structures de grande envergure δ associées aux explosions turbulentes de la zone externe.

De pair avec la découverte de mouvements cohérents particuliers et leurs interactions avec l'écoulement, un certain nombre de modèles a été proposé afin d'apporter un éclairage sur les propriétés de la couche limite. L'objectif général de ces modèles est de fournir un cadre théorique permettant d'expliquer comment diverses fluctuations instationnaires aboutissent aux comportements moyens observés. Certains de ces modèles, ayant émergé dans les deux dernières décennies, sont présentés ci-dessous.

1.4.1 Cycle proche-paroi d'auto-régénération de la turbulence

Pour des raisons de coût de calcul, mais aussi parce que le maximum de production de k se situe aux alentours de $y^+ \simeq 11$ (voir figure 1.10), de nombreuses études ont initialement porté sur la région proche-paroi $y^+ \lesssim 100$. C'est de plus la seule région à ne pas être déficitaire sur le plan énergétique, au sens où la production d'énergie cinétique turbulente y est supérieure à la dissipation (cf. figure 1.10 et [231]). Ces travaux ont permis de révéler l'existence d'un cycle auto-entretenu de la turbulence pariétale. Les différentes structures en jeu dans ce cycle sont dans un premier temps décrites.

Streaks. En observant le champ instantané de vitesse longitudinale dans la sous-couche visqueuse, comme présenté sur la figure 1.11, on remarque que l'écoulement est structuré en bandes de fluide, sinueuses et très allongées dans la direction de l'écoulement.

Ces bandes comportent alternativement du fluide haute vitesse et du fluide basse vitesse en comparaison avec la vitesse moyenne $\overline{u}(y)$ au même endroit. Cela correspond donc à des bandes de fluctuation $u' > 0$, que l'on appelle ***streaks* rapides**, et des bandes de fluctuation $u' < 0$, appelées ***streaks* lents**.

Kline *et al.* [148] précisent que ces structures ne sont plus observées au-dessus de $y^+ \simeq 40 - 50$ et déterminent leurs dimensions caractéristiques : leur longueur est estimée à $\lambda_x^+ \simeq 10^3 - 10^4$ et leur espacement à $\lambda_z^+ \simeq 80 - 100$.

Tourbillons quasi-longitudinaux (TQLs). Dans les années 70s, le fait que des mouvements tourbillonnaires soient responsables de la production de turbulence était quasi-consensuel. En 1979,

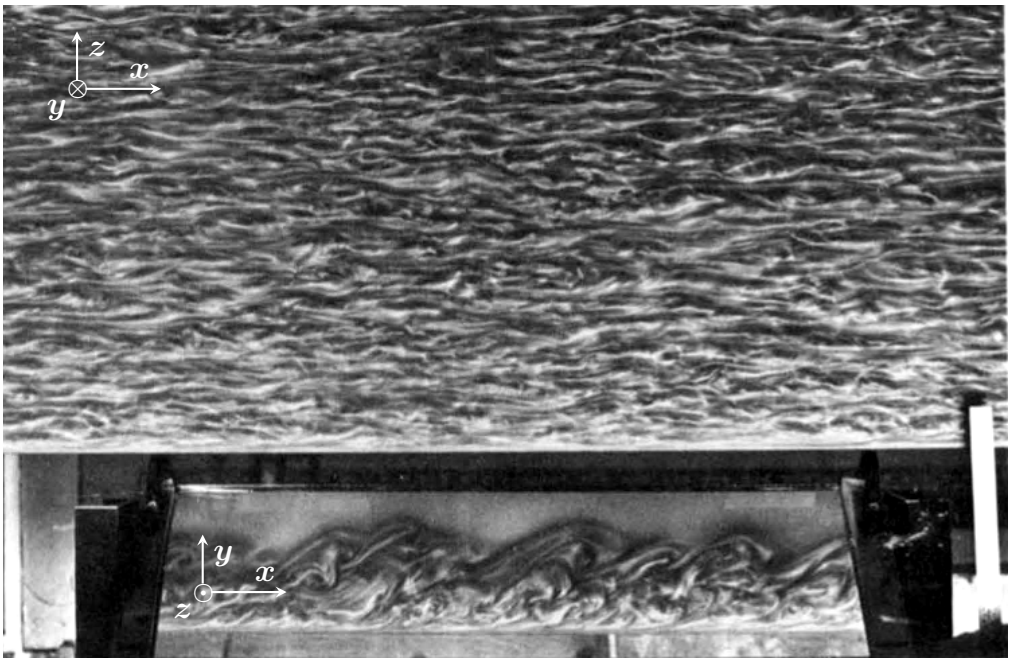


FIGURE 1.11 – Visualisation de *streaks* dans la sous-couche visqueuse d'une couche limite turbulente. L'écoulement est visualisé par le dessous et va de la gauche vers la droite. Le miroir en bas de l'image permet une vue de coupe simultanée. Pour chacune de ces deux vues, un repère respectant l'orientation précédemment établie a été ajouté. La photo est issue des expériences de Cantwell *et al.* [30].

les travaux de Blackwelder et Eckelmann [25] mettent en évidence la présence de Tourbillons Quasi-Longitudinaux (TQLs), orientés dans la direction de l'écoulement. Ils sont décrits comme des paires de tourbillons contra-rotatifs qui aspirent le fluide plus lent, de proche-paroi, et conduisent à la formation de *streaks* basse-vitesse. Ces phénomènes seraient donc directement liés aux évènements d'éjection et de balayage. De nombreuses méthodes ont été mises en œuvre pour étudier les TQLs, mais il faudra attendre l'arrivée de la simulation numérique directe (DNS pour *direct numerical simulation*) pour une compréhension plus poussée.

Jeong *et al.* [132] fournissent en 1997 une description très précise de ces tourbillons en se basant sur des résultats de DNS. Ils caractérisent ainsi les TQLs comme étant organisés en de longues chaînes de $\Delta x^+ = 600 - 1000$ dont les maillons seraient des paires de tourbillons contrarotatifs. Les tourbillons s'étendent en moyenne sur 200 unités de paroi dans la direction longitudinale et leur diamètre est compris entre 10 et 50 unités de paroi [144]. Le côté aval des tourbillons est surélevé et forme ainsi un angle d'environ 9° avec la paroi. De plus, un angle de dérapage de $\pm 4°$ est observé dans le plan (x, z), selon leur sens de rotation par rapport à l'écoulement moyen.

Ils sont convectés par l'écoulement à une vitesse proche de $10u_\tau$ et sont également animés d'un mouvement ascendant. Une fois qu'ils ont quitté la région de proche paroi, certains disparaissent sous forme de vorticité désorganisée [137, 227, 231].

Cycle auto-entretenu de proche-paroi. Il a été envisagé depuis les années 1980 que les *streaks* et les tourbillons longitudinaux sont impliqués dans un cycle de régénération mutuelle. Cette hypothèse a été confirmée grâce aux simulations numériques durant les quinze dernières années. Le motif élémentaire du mécanisme est composé d'un *streak* lent bordé par deux tourbillons longitudinaux [133]. C'est la configuration minimale pour que les fluctuations s'auto-entretiennent.

Une découverte importante est que ce cycle d'auto-régénération de la turbulence, approximativement situé dans la région $10 \lesssim y^+ \lesssim 60$, est un cycle autonome, auto-entretenu, en ce sens qu'il perdure en l'absence d'échange d'énergie avec les autres régions de la couche limite. Ceci a notamment été prouvé par Jiménez et Pinelli [137], grâce à des simulations numériques dans lesquelles

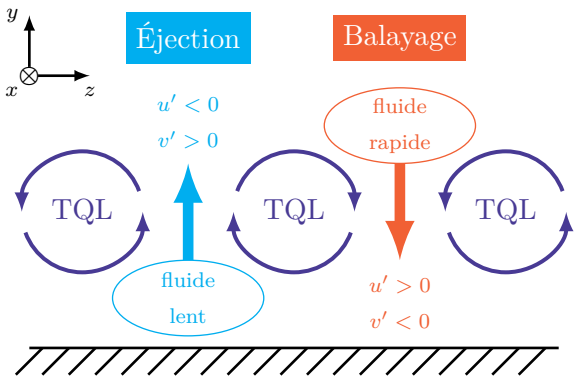


FIGURE 1.12 – Schéma de coupe dans le plan normal à l'écoulement illustrant les évènements d'éjection et de balayage à l'origine de la création des *streaks* lents et rapides par les tourbillons quasi-longitudinaux.

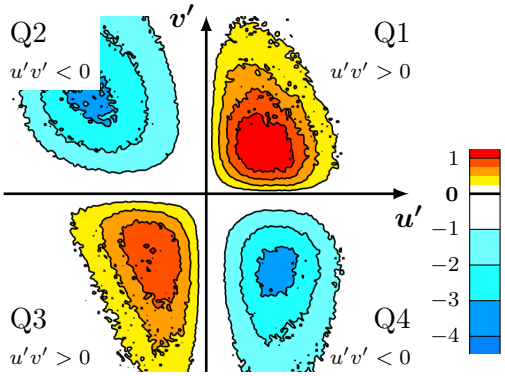


FIGURE 1.13 – Densités de probabilités jointes pré-multipliées des fluctuations de vitesses longitudinale et normale, $u'v'\,P(u'v') \times 10^4$, à la position $y^+ = 30$, représentées dans chacun des quadrants du plan $(0\,;u',v')$. Figure adaptée de [202].

toutes fluctuations turbulentes en dehors de cette zone étaient annulées, et par Hwang [122], grâce à des simulations dans lesquelles ce sont les structures plus grandes que celles précédemment décrites qui étaient annulées. Cependant, de plus en plus de récentes études suggèrent que la région proche-paroi est fortement influencée, en particulier à grand nombre de Reynolds, par les structures de la zone externe abordées plus loin [70, 120, 178].

Le mécanisme détaillé du cycle d'auto-régénération de la turbulence n'est pas encore complètement connu et plusieurs modèles théoriques sont encore en compétition pour l'expliquer.

Une certitude est que les *streaks* sont créés par les tourbillons longitudinaux par un phénomène d'entraînement [25]. À cause du cisaillement moyen, le fluide à proximité de la paroi est plus lent que l'écoulement au-dessus. Comme illustré sur la figure 1.12, lorsque les tourbillons drainent, vers la paroi ($v' < 0$), du fluide provenant d'une région supérieure de la couche limite, celui-ci possède une quantité de mouvement longitudinale supérieure à celle du fluide ambiant. Lors de ces évènements, que l'on appelle **balayages** (*sweeps*), une fluctuation de survitesse ($u' > 0$) est ainsi générée, donnant naissance à un *streak* rapide. Inversement, on parle d'**éjections** (*ejections*) lorsque du fluide proche de la paroi, qui possède donc une faible quantité de mouvement, est éloigné ($v' > 0$) vers la partie supérieure de la couche limite. Cela génère les fluctuations de vitesse négative ($u' < 0$) à l'origine des *streaks* lents. Lorsqu'on les considère suivant leur position dans le plan $(0\,;u',v')$, représenté sur la figure 1.13, les éjections et balayages correspondent respectivement aux évènements des quadrants Q2 (pour lequel $u' < 0$ et $v' > 0$) et Q4 (tel que $u' > 0$ et $v' < 0$). Il apparaît sur la figure 1.13 que ces deux évènements ont une occurrence bien plus forte que celle des évènements Q1 et Q3, justifiant l'importance du mécanisme de génération des *streaks*. Ces deux types d'évènements, Q2 et Q4, correspondent à des mouvements producteurs de turbulence, puisqu'avec $\overline{u'v'} < 0$, ils interviennent comme terme source dans l'équation de bilan de l'énergie cinétique turbulente.

L'autre partie du cycle, qui concerne la régénération des tourbillons par les *streaks*, est encore aujourd'hui sujette à controverse. En effet, deux mécanismes différents ont été mis en évidence. Une première hypothèse porterait sur la régénération de *streaks* par des **mécanismes auto-similaires**. Lorsqu'un TQL approche une paroi, à cause de la condition d'adhérence, il va induire un mouvement tourbillonnaire de sens opposé [26]. Cette structure secondaire, déjà orientée dans le sens de l'écoulement, va pouvoir décoller de la paroi dans certaines circonstances, comme représenté sur la

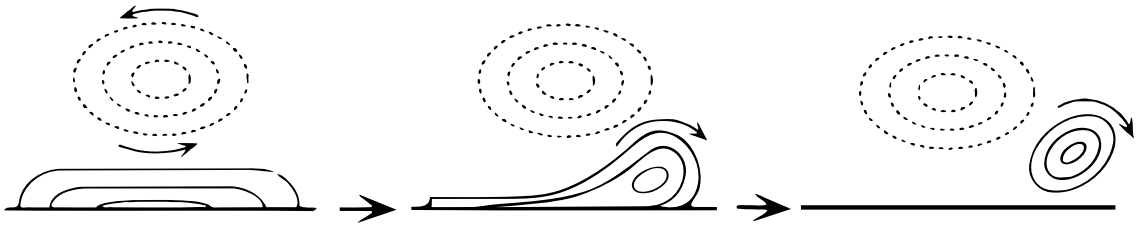


FIGURE 1.14 – Schéma du mécanisme bidimensionnel d'enroulement auto-similaire de la vorticité longitudinale. Des iso-niveaux de vorticité, dans le plan normal à l'écoulement moyen, sont représentés pour $\omega_x > 0$ (*lignes continues*) et pour $\omega_x < 0$ (*lignes pointillées*). Figure extraite de [243].

figure 1.14, et s'intensifier grâce au cisaillement présent dans cette région.

L'autre hypothèse est que les *streaks*, sujets à des **instabilités hydrodynamiques**, rentreraient en oscillation rapide, et, une fois en phase de croissance non-linéaire, engendreraient les tourbillons longitudinaux [112, 243, 276]. Le lecteur est invité à se référer à l'étude de Schoppa et Hussain [243] pour une description plus détaillée des étapes de ce phénomène.

En supprimant alternativement l'un et l'autre de ces deux mécanismes, Jiménez et Pinelli [137] démontrent que la turbulence ne survit pas sans génération de TQL induite par les *streaks*, alors que l'absence du cycle auto-similaire n'a que peu d'influence. Ils permettent ainsi de conclure que l'enchaînement basé sur l'instabilité des *streaks* serait prépondérant.

1.4.2 Hypothèse des tourbillons attachés

Initialement décrit par Townsend [267] et plus tard repris par Perry et ses collègues [208, 209, 174], le concept de tourbillons attachés repose sur l'hypothèse (*attached eddies hypothesis*) selon laquelle la couche limite serait peuplée par une famille de mouvements, géométriquement similaires, mais dont la taille caractéristique varie proportionnellement à la distance à la paroi, comme représenté sur la figure 1.15. Bien que définie avec une grande facilité conceptuelle, cette théorie aboutit à des formulations mathématiques et des implications bien plus exigeantes.

La plupart des propriétés propres à cette théorie sont bien prises en compte par les **vortex en épingle à cheveux** (*hairpin-like vortices*) théorisés par Theodorsen [262], si bien que ces derniers sont souvent utilisés pour modéliser les tourbillons attachés. Robinson [227] propose de décrire cette structure comme une paire de tourbillons contra-rotatifs préférentiellement inclinés de 45° par rapport à la paroi (les jambes), reliés dans leur partie supérieure par un tourbillon transverse (la tête). La partie entre la tête et les jambes est appelée le cou. Une représentation caractéristique peut en être donnée, figure 1.16, par un tube de vorticité K en épingle à cheveux. Afin de correctement remplir l'espace, ces tourbillons attachés sont distribués au-dessus de la paroi avec une densité inversement proportionnelle au carré de leur taille δ_{eddy} [209].

Bien que de nombreux *hairpins* puissent être identifiés à bas nombre de Reynolds, expérimentalement [113] ou par simulation numérique directe [287], il devient tout juste possible d'en observer des fragments asymétriques, appelés "cannes" [227], à plus haut nombre de Reynolds. En réalité, les tourbillons attachés doivent être considérés comme un concept statistique. Zhou *et al.* [292] ont ainsi pu détecter des structures ressemblant clairement à un *hairpin* par estimation stochastique autour des évènements Q2 d'intensité suffisante. Une représentation en est donnée sur la figure 1.17.

Adrian *et al.* [3] propose que la couche limite turbulente soit densément peuplée de paquets de structures cohérentes, appelés **mouvements de grande taille** ou **LSMs** (*large-scale motions*), dont l'importance dépend de l'âge : de petits paquets naissent en proche-paroi et se déplacent vers l'extérieur de la couche limite en croissant en taille. L'auto-organisation en "paquet" d'une multitude de mouvements organisés, comme représentée sur la figure 1.18, capture les propriétés globales d'une couche limite turbulente : création de tourbillons quasi-longitudinaux et de *streaks* lents entre les

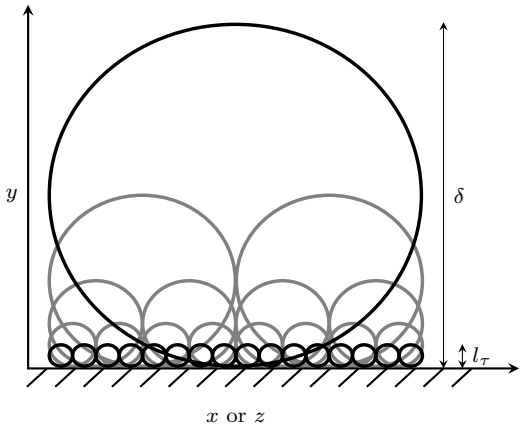


FIGURE 1.15 – Schéma conceptuel illustrant l'hypothèse des tourbillons attachés [208, 267]. Chaque cercle matérialise un unique tourbillon attaché. La taille des plus petits est dimensionnée en unité de paroi l_τ, celle des plus grands en unité externe δ. Dans la zone logarithmique (en *gris*), la taille des tourbillons est proportionnelle à la distance y entre leur centre et la paroi, comblant ainsi la séparation d'échelle entre l_τ et δ. Figure adaptée de [123].

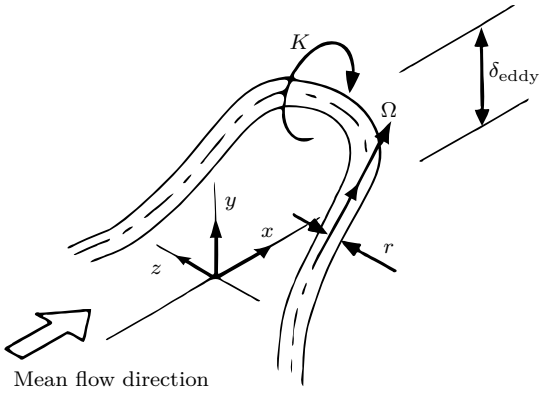


FIGURE 1.16 – Schéma d'un tourbillon attaché représentatif, annoté de ses caractéristiques géométriques et cinématiques principales. Figure adaptée de [243].

jambes des *hairpins* du paquet, occurrence des évènements Q2 et Q4 à différentes altitudes, présence de tourbillons transverses en zone externe [3, 92, 119].

La taille des LSMs augmente graduellement à mesure que le point d'observation s'écarte de la paroi jusqu'à atteindre une échelle longitudinale de l'ordre de $2-3\,\delta$ et une échelle latérale de l'ordre de δ [265, 91]. Ces plus grandes structures pourraient être associées avec les évènements d'explosion turbulente (*turbulent bulge*) passant à l'extérieur de la couche limite [2].

Bien qu'il ait initialement été proposé que l'épaississement des structures soit dû à l'appariement de *hairpins* de la région pariétale [265, 2], les récentes investigations numériques ont révélé qu'il pourrait exister des mécanismes auto-entretenus, propres à chaque échelle caractéristique et indépendants de ceux des autres échelles [7, 81, 125].

1.4.3 Mécanismes *top-down* et super-structures

Récemment, des études numériques et expérimentales ont révélé l'existence de structures de dimension encore plus importante, dans les régions logarithmiques et de sillage [145, 110, 11, 121, 189]. Des effets de leur présence ont même été relevés au-delà de la couche limite [270]. Ces structures sont très longues, sinueuses, et sont constituées d'une zone étroite de fluide basse-vitesse bordée de régions de fluide plus haute vitesse. Bien qu'elles soient observées dans les écoulements internes et externes, des différences semblent exister entre ces deux cas [11, 68]. Ainsi, elles sont couramment appelées **mouvements de très grande taille** ou **VLSMs** (*very large-scale motions*) pour les écoulements internes, et **super-structures** pour les écoulements externes. Leur dimension dans la direction longitudinale se mesure en variables externes. Les super-structures peuvent atteindre 10 à $15\,\delta$ [121].

L'origine de ces super-structures n'est pas parfaitement comprise. D'un côté, Kim & Adrian [145] suivis par d'autres [120, 110] ont suggéré qu'elles seraient causées par un pseudo-alignement longitudinal de paquets de *hairpins* (LSMs), alors que de l'autre, del Àlamo & Jiménez [4] puis Cossu, Hwang *et al.* [52, 123, 124] pensent qu'elles seraient formées par des processus d'amplification de perturbation du profil moyen. L'importance relative de ces deux mécanismes est l'objet de nombreuses

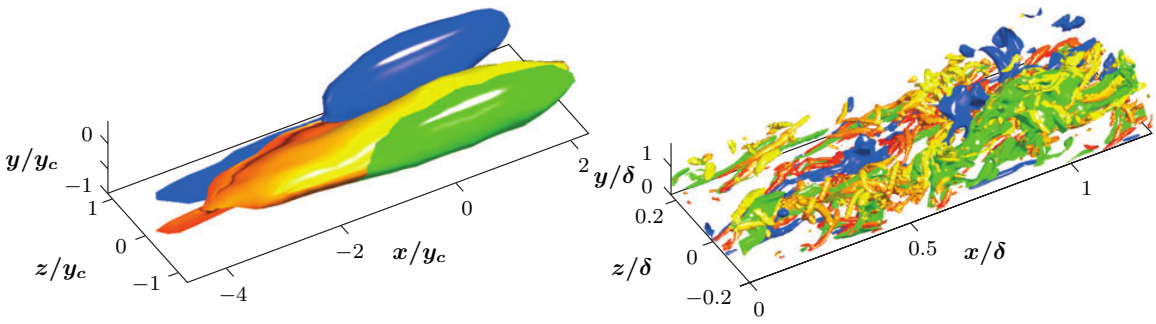


FIGURE 1.17 – *À gauche* : Structure de tension de Reynolds moyennée conditionnellement à la présence d'un balayage (*bleu*) et d'une éjection (*vert*) côte à côte. L'origine est positionnée au centre de gravité des deux zones de fortes tensions de Reynolds et les axes sont adimensionnés par sa distance à la paroi y_c. La position moyenne de la zone de forte vorticité est représentée en *jaune*. *À droite* : Réalisation instantanée du même objet, avec les axes adimensionnés par δ. Le nombre de Reynolds de l'écoulement est $Re_\tau = 934$. Figure extraite de [136].

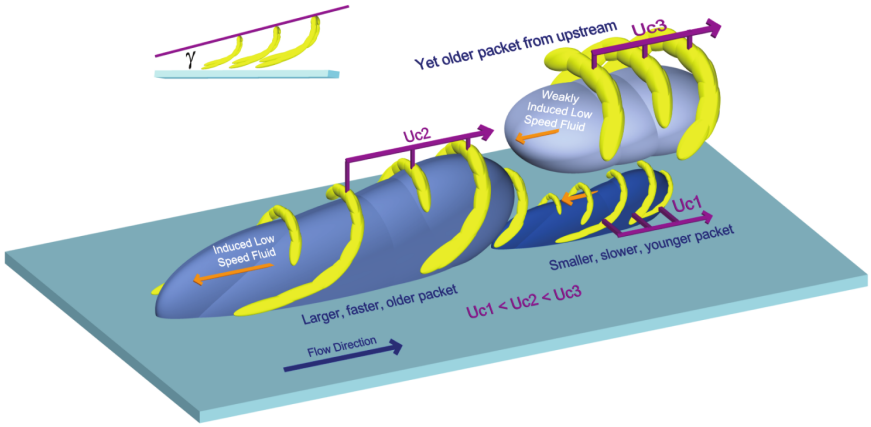


FIGURE 1.18 – Modèle conceptuel d'Adrian *et al.* expliquant la dynamique de la couche limite turbulente à partir de paquets de *hairpins*. Figure extraite de [3].

études.

Ces structures ont pour effet de moduler l'activité du cycle proche-paroi [178, 270, 239] et d'imprimer leurs empreintes dans la sous-couche visqueuse [1, 115, 120, 121]. Pour autant, leur dynamique ne serait pas influencée en retour par les structures proche-paroi [80, 82].

Des revues très complètes présentent plus en détail les dernières avancées sur la compréhension de ces structures de très grande dimension [136, 249].

Des structures cohérentes dont la taille et la localisation dans la couche limite diffèrent ont été présentées : les *streaks* et leurs TQLs, les LSMs constitués de *hairpins*, les VLSMs ou super-structures. Certains auteurs avancent qu'entre les tourbillons quasi-longitudinaux proche-paroi de petite dimension et les super-structures s'étendant jusqu'à l'extérieur de la couche limite, il existerait en réalité un continuum de mouvements cohérents de taille et de complexité croissante [136, 123].

Cependant, deux principales plages d'échelles énergétiques bien distinctes existent [120] et sont représentées sur la figure 1.19. La première, centrée autour de $y^+ \simeq 15$ pour des structures de longueurs caractéristiques $\lambda_x^+ \simeq 10^3$, corresponds aux *streaks* et structures associées du cycle proche-paroi. La seconde plage d'énergie apparaît dans la région logarithmique, autour de $y^+ \simeq \sqrt{15 Re_\tau}$, et prend de l'importance pour les couches limites à haut nombre de Reynolds. Cette plage énergétique est associée à des structures de grandes tailles, $\lambda_x > 3\delta$, correspondant vraisemblablement aux super-structures [120, 145, 265].

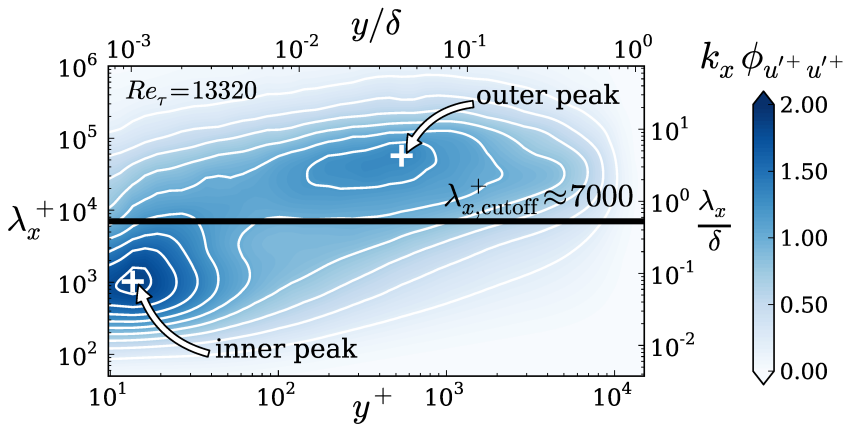


FIGURE 1.19 – Spectrogramme pré-multiplié d'énergie cinétique turbulente longitudinale mettant en évidence les deux pics énergétiques de la couche limite. Figure extraite de [29] réalisée à partie des mesures de [159].

1.4.4 Vitesse de convection

Une couche limite canonique n'est pas caractérisée par une unique vitesse de convection : celle-ci dépend du phénomène ou de la structure observée et de sa position dans la couche limite [5, 185, 223]. En pratique, on estime usuellement la vitesse de convection par la vitesse moyenne $\overline{u}(y)$, sauf à proximité de la paroi où une vitesse constante et proche de $10\,u_\tau$ est souvent utilisée pour caractériser la convection des structures du cycle proche-paroi [273].

Que ce soit en canal [5] ou en ZPGTBL [223], la vitesse de convection est quasi-uniforme à proximité de la paroi. Sa valeur dimensionnée en unité interne est approximativement constante et peut être estimée à

$$u_{\mathrm{conv}}^{+} \simeq 10 - 12 \qquad \text{pour} \qquad y^+ < 15 - 20\,, \tag{1.65}$$

Cette approximation est particulièrement bien vérifiée si l'on ne considère que les plus petites structures, dont font partie les structures du cycle proche-paroi d'auto-régénération de la turbulence.

1.5 Description de l'empreinte pariétale de la turbulence

1.5.1 Grandeurs pariétales

Les précédentes études attestent qu'il existe une interaction forte entre les différentes couches de l'écoulement, de la partie externe de la couche limite jusqu'à la paroi. Les traces mesurables à la paroi d'une telle interaction se décomposent en effort normal — terme de pression — et en effort tangentiel — terme de cisaillement d'origine visqueuse. Ainsi, la pression pariétale $p_{\mathrm{w}} = p(y_{\mathrm{w}})$ et les cisaillements pariétaux longitudinal $\tau_{\mathrm{w},x}$ (définie par (1.28)) et transverse $\tau_{\mathrm{w},z}$ représentent une véritable empreinte des fluctuations turbulentes de l'écoulement. Elles sont appelées **grandeurs pariétales** [202]. La figure 1.20, représentant le champ pariétal instantané $\tau_{\mathrm{w},x}(x,z,t)$, illustre cette empreinte. On y voit l'influence des structures turbulentes des différentes échelles.

Les grandeurs pariétales, de par les informations qu'elles contiennent, permettent de caractériser l'écoulement turbulent proche-paroi. Thomas and Bull [263] ont utilisé des mesures de vitesse et de pression pariétale pour examiner les motifs d'écoulement générant des fluctuations de pression à la paroi. Ainsi, ils mirent en évidence que les brèves périodes d'intenses fluctuations de pression sont associées au passage de larges (de l'ordre de δ) structures tourbillonnaires. Bewley et Protas [24] essayèrent avec ambition de reconstruire le champ de l'écoulement en proche-paroi à partir des données pariétales et de leurs dérivées spatiales et temporelles. Leur reconstruction s'est avérée très efficace dans la sous-couche visqueuse, c'est-à-dire pour $y^+ \lesssim 3$, mais ne permet pas de reproduire

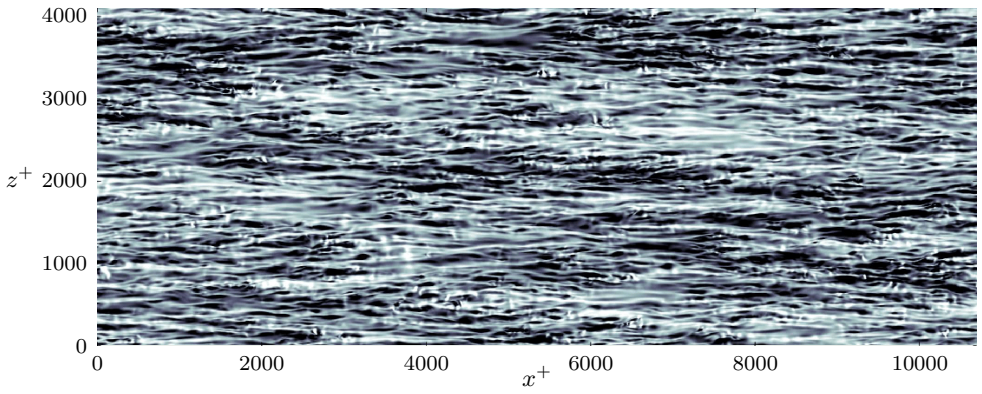


FIGURE 1.20 – Cisaillement pariétal instantané $\tau_{\mathrm{w},x}(x,z,t)$ pour un écoulement de canal à $Re_\tau = 934$. Les zones blanches et noires représentent respectivement un cisaillement local faible et important. Figure extraite de [29] réalisée à partir des simulations DNS de [6].

fidèlement l'écoulement turbulent au-dessus de $y^+ \simeq 10$.

Les études abordées précédemment confirment l'existence d'une réelle interaction entre la paroi et la turbulence, ou, plus précisément, entre les fluctuations pariétales et le cycle proche-paroi de la turbulence. On peut néanmoins se demander dans quelle mesure et de quelle façon la turbulence induit une augmentation moyenne du frottement pariétal. En effet, puisque l'énergie cinétique turbulente conduit à une augmentation de la dissipation et puisque la contrainte de cisaillement de Reynolds est négative pour les *streaks* lents comme rapides, il n'est pas étonnant que la turbulence puisse conduire à une augmentation du frottement moyen par rapport au cas laminaire. Cependant, le frottement instantané étant localement augmenté par les *streaks* rapides et localement diminué par les *streaks* lents, comme représenté sur la figure 1.20, il n'est pas évident d'en déterminer *a priori* l'effet global [199]. Le reste de cette section tend à clarifier ce point.

1.5.2 Décomposition du frottement

Le frottement pariétal moyen $\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}$ est classiquement défini en fonction du cisaillement à la paroi, équation (1.28). Le lien avec la turbulence, dont les fluctuations de vitesse sont nulles à la paroi, peut alors sembler difficile à établir. Néanmoins, il est possible de relier analytiquement le frottement pariétal et les champs moyens de différentes grandeurs dans l'ensemble de la couche limite.

Ainsi, par triple intégration de l'équation de Navier–Stokes régissant la quantité de mouvement longitudinale (1.17b), Fukagata, Iwamoto et Kasagi [85] ont obtenu une décomposition du coefficient de frottement, dite **identité FIK**, dans laquelle différentes contributions sont isolées suivant leurs origines physiques sous-jacentes. En particulier, cette méthode permet de quantifier l'influence de la turbulence sur le coefficient de frottement, mais également d'en localiser spatialement l'origine dans la couche limite. La méthode a ensuite été généralisée aux cas des écoulements compressibles de plaque plane [107] ainsi qu'à une certaine classe de surfaces complexes [205].

Pour les couches limites turbulentes bidimensionnelles, l'identité FIK s'écrit :

$$c_f = c_{f,1} + c_{f,2} + c_{f,3}\,, \tag{1.66}$$

où les termes $c_{f,i}$ représentent respectivement les composantes dîtes "laminaire", "turbulente" et

"transitionnelle et/ou spatialement inhomogène" définies par :

$$c_{f,1} = \frac{4}{Re_\delta}\int_0^\delta \frac{\overline{\rho}\,\widetilde{u}}{\rho_\infty U_\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\delta} \quad = \quad \frac{4}{Re_\delta}\left(1-\frac{\delta^*}{\delta}\right)\,, \tag{1.67}$$

$$c_{f,2} = \quad 4\int_0^\delta \left(1-\frac{y}{\delta}\right)\frac{-R_{xy}}{\rho_\infty U_\infty^2}\frac{\mathrm{d}y}{\delta}\,, \tag{1.68}$$

$$c_{f,3} = -4\int_0^\delta \frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2\frac{\delta}{\rho_\infty U_\infty^2}\left(\partial_t\overline{\rho}\widetilde{u}+\overline{I_x}+\partial_x\overline{p}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\delta}\,, \tag{1.69}$$

$$\text{avec} \qquad \overline{I_x} = \partial_k\left(\overline{\rho}\,\widetilde{u}\,\widetilde{u}_k\right) - \partial_x\,\tau_{xx} + \partial_x\,R_{xx} - \partial_y(\tau_{xy} - \nu_\mathrm{w}\partial_y\overline{\rho}\,\widetilde{u})\,. \tag{1.70}$$

Le détail de la dérivation de cette identité sera explicité dans l'annexe A dans le cas plus général d'une paroi complexe non plane.

Pour un écoulement laminaire de canal plan ou de conduite circulaire, seul le premier terme est non nul, justifiant le qualificatif de contribution laminaire. Si l'écoulement devient turbulent, les tensions de Reynolds ne valent plus zero et la contribution turbulente $c_{f,2}$ intervient. Ce terme met en valeur le fait que les fluctuations turbulentes, à n'importe quelle hauteur dans la couche limite, peuvent contribuer au frottement pariétal. Enfin, pour les écoulements en développement spatial, tels que les ZPGTBLs, les dérivées en x du terme $\overline{I_x}$ ne sont plus nulles et le terme $c_{f,3}$ vient compléter le frottement.

Pour la solution auto-similaire de couche limite laminaire de Blasius, Deck *et al.* [68] ont montré que le coefficient de frottement $c_{f,\mathrm{lam}} = 0.664/\sqrt{Re_x}$, définie par (1.58e), se décompose en

$$c_{f,1,\mathrm{lam}} = 0.796\,c_{f,\mathrm{lam}} \qquad c_{f,2,\mathrm{lam}} = 0 \qquad c_{f,3,\mathrm{lam}} = 0.204\,c_{f,\mathrm{lam}}\,. \tag{1.71}$$

Contrairement au frottement $c_{f,\mathrm{lam}}(Re_x)$, les contributions relatives $c_{f,i}/c_f$ ne dépendent pas du nombre de Reynolds Re_x.

Dans le cas canonique de couche limite turbulente en développement spatial, la contribution turbulente $c_{f,2}$ n'est pas nulle, comme le montre la figure 1.21. Bien au contraire, elle constitue la majeure partie du frottement, alors que la contribution laminaire $c_{f,1}$ tend vers 0 à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Deck *et al.* [68] observèrent que $c_{f,3}/c_f$ reste relativement constant dans les cas turbulents comme laminaires et environ égal à $c_{f,3,\mathrm{lam}}/c_{f,\mathrm{lam}} = 20\%$. L'explication avancée porte sur la réécriture de $c_{f,3}/c_f$ en fonction du profil de contrainte totale $\sigma^+_{xy}(y/\delta)$:

$$\frac{c_{f,3}}{c_f} = -\int_0^\delta \left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2\frac{\partial\,\sigma^+_{xy}}{\partial\,y/\delta}\,\frac{\mathrm{d}y}{\delta}\,. \tag{1.72}$$

Ainsi, la faible dépendance au nombre de Reynolds de $c_{f,3}/c_f$ témoigne d'un remarquable comportement auto-similaire de la contrainte de cisaillement total dans les couches limites en développement spatial. Grâce à ce résultat, une relation de proportionnalité peut être établie entre le terme $c_{f,2}$ d'une couche limite turbulente et son surplus de frottement par rapport au cas laminaire.

1.5.3 Cas limite du frottement laminaire

Bien que les théories et avancées en contrôle de la turbulence constituent le sujet du prochain chapitre, certains résultats obtenus par cette communauté méritent d'être mentionnés dès à présent.

> *La traînée minimale durablement atteignable pour un écoulement incompressible de canal à débit constant, contrôlé par une distribution pariétale de soufflage/aspiration à débit moyen nul, est exactement celle de l'écoulement laminaire.*

Cette conjecture, formulée par Bewley [22], provient de l'expression du frottement (1.66) pour un tel écoulement, composé d'un terme laminaire, $c_{f,1}$, et d'un terme turbulent, $c_{f,2}$, qui s'exprime comme l'intégrale des tensions de Reynolds. Bewley postule qu'il est au maximum possible d'annuler cette

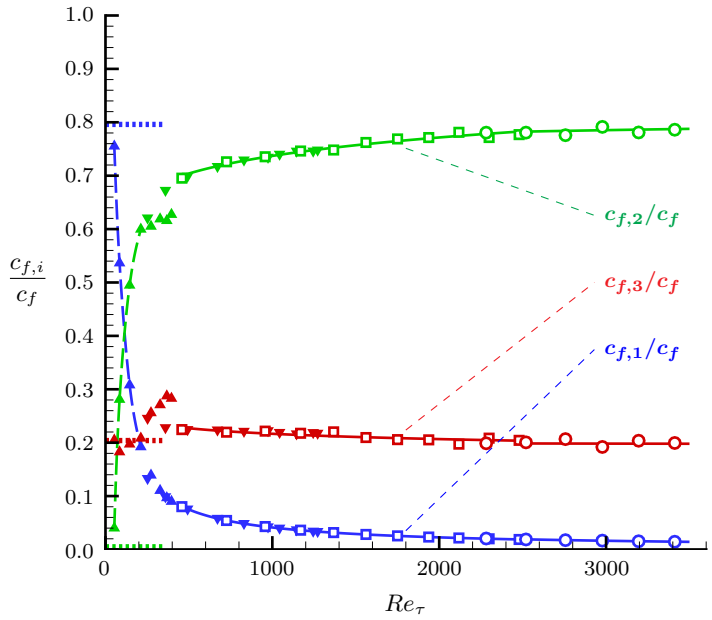


FIGURE 1.21 – Évolution des contributions relatives au frottement $c_{f,i}/c_f$ dans une couche limite de plaque plane sans gradient de pression, pour des nombres de Reynolds balayant les plages laminaire (▪▪▪▪▪▪▪▪), transitionnelle (– – –) et turbulente (———). Les données sont issues des simulations de Wu & Moin [287] (DNS, ▲), Schlatter & Örlü [238] (DNS, ▼), Eitel-Amor *et al.* [78] (LES, □) et Deck *et al.* [68] (ZDES, ○).

intégrale. Cette conjecture s'est avérée être fausse : des réductions de traînée sub-laminaires ont pu être maintenues à faible nombre de Reynolds en canal turbulent pleinement développé [86, 184].

Par la suite, Bewley et d'autres démontrèrent analytiquement qu'en prenant en compte la puissance consommée par le dispositif de contrôle, l'écoulement laminaire dans un canal plan ou une conduite circulaire constitue la réduction énergétique maximale qui peut être maintenue [23, 86, 87]. Nous pouvons en conclure que pour ces écoulements, le régime turbulent (non contrôlé) traîne nécessairement plus que son équivalent laminaire de même débit. Un résultat similaire est vraisemblablement valable dans le cas d'une couche limite en développement spatial [143], comme observé empiriquement sur la figure 1.6.

Ainsi, le frottement (1.59) donné par la solution auto-similaire de Blasius représente le frottement minimal pour une couche limite sans gradient de pression. Les structures turbulentes et les fluctuations de vitesse qu'elles induisent augmentent nécessairement le frottement, et ce, de façon substantielle dans la pratique.

1.5.4 Interactions entre frottement et structures turbulentes

Les études fondatrices dans la compréhension des mécanismes de génération de la turbulence se sont également intéressées aux liens existants entre les différentes structures cohérentes observées et le frottement pariétal. Ainsi, il a pu être établi que la plupart des régions d'intense frottement pariétal sont induites par la présence de tourbillons quasi-longitudinaux, positionnés en moyenne 90 unités de paroi plus en aval et à $y^+ \simeq 20$ [143, 156]. Ce sont les évènements de balayage $Q4$, directement induits par les tourbillons quasi-longitudinaux (voir la section 1.4.1), qui jouent un rôle majeur dans la génération de la tension de cisaillement turbulente [41, 156]. Les *streaks* rapides, en augmentant le cisaillement pariétal, peuvent induire une augmentation du frottement local instantané jusqu'à hauteur de 300% du frottement moyen. Inversement, les *streaks* basse-vitesse engendrent une diminution du frottement. Cependant, l'effet délétère des *streaks* rapides demeure prépondérant [199].

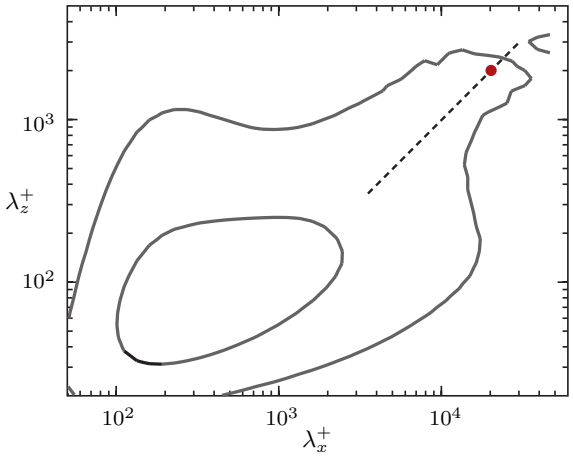


FIGURE 1.22 – Densité spectrale pré-multipliée de la norme de la vorticité, $k_x k_z E_{\omega\omega}$, à proximité de la paroi, $y^+ = 6$, pour un canal à $Re_\tau = \delta^+ = 2000$. Les deux iso-contours contiennent respectivement 50% et 90% de l'enstrophie $\frac{1}{2}|\underline{\omega}|^2$. La ligne pointillée vérifie $\lambda_x = 10\lambda_z$ et le point indique $\lambda_z = \delta$. Figure adaptée de [136] et de [116].

La présence des *streaks* que l'on peut clairement visualiser à la paroi sur la figure 1.20 a donc pour conséquence directe une augmentation globale de la traînée de frottement, notamment par rapport au cas laminaire.

Il a initialement été formulé [133] que la partie externe de la couche limite n'a qu'un effet négligeable sur le frottement moyen (et sur les autres statistiques locales de la région pariétale). Des analyses spectrales sur le cisaillement dans la sous-couche visqueuse, figure 1.22, ont en effet mis en évidence la prédominance d'empreintes de largeur $\mathcal{O}(100^+)$ caractéristiques des structures proches-paroi. Cependant, elles ont également permis de démontrer la présence d'empreintes de structures de très grande dimension, allant jusqu'à $\mathcal{O}(10\delta)$ de long [136]. Le cœur de tels mouvements organisés se situe justement dans la partie externe de la couche limite. De nombreux auteurs [11, 68, 110, 145, 265] ont d'ailleurs relevé qu'une importante proportion de l'énergie cinétique turbulente et des contraintes de Reynolds est transportée par les superstructures : plus de 40% de la production de k et plus de 30% de celle de R_{xy} sont attribués à des modes dont la longueur d'onde est supérieure à $3\,\delta$. Le lien entre la contrainte turbulente R_{xy} et le frottement pariétal est immédiat grâce à la décomposition FIK (1.66).

Deck *et al.* [68] analysèrent plus en détail le terme turbulent $c_{f,2}$, prédominant dans la décomposition FIK pour les ZPGTBLs à hauts nombres de Reynolds. Ils observèrent les longueurs d'onde caractéristiques, en fonction de la distance à la paroi, de l'intégrande de l'intégrale définissant $c_{f,2}$ (1.68). Grâce à cette analyse, ils purent établir, figure 1.23, que dans une gamme de nombre de Reynolds s'étendant de $Re_\theta = 5200$ à 13000, les structures de longueur d'onde $\lambda_x > \delta$ contribuent pour plus de 60% à $c_{f,2}$, lui-même contribuant pour plus de 80% à c_f, montrant ainsi l'influence notable des super-structures sur le frottement pariétal moyen.

Hwang [122] confirma le rôle prépondérant des structures de grande échelle en réalisant une simulation dans laquelle les fluctuations de longueur d'onde transverse plus large que 100 unités de paroi, $\lambda_z^+ > 100$, sont supprimées. Alors que le cycle proche paroi et les structures turbulentes associées (*streaks* et tourbillons quasi-longitudinaux) ne sont quasiment pas perturbés par ce filtrage des grandes échelles, le frottement pariétal encourt une diminution d'autant plus importante que le nombre de Reynolds est élevé.

Cependant, aucun lien de causalité n'est révélé par les précédentes analyses et filtrages spectraux. Ainsi, il n'est pas possible de déterminer aisément le mécanisme d'influence entre les super-structures et l'augmentation du frottement. Peut-être que l'effet direct des super-structures est de stimuler le cycle de turbulence proche-paroi. Les balayages induits par les TQLs de ce cycle proche-paroi

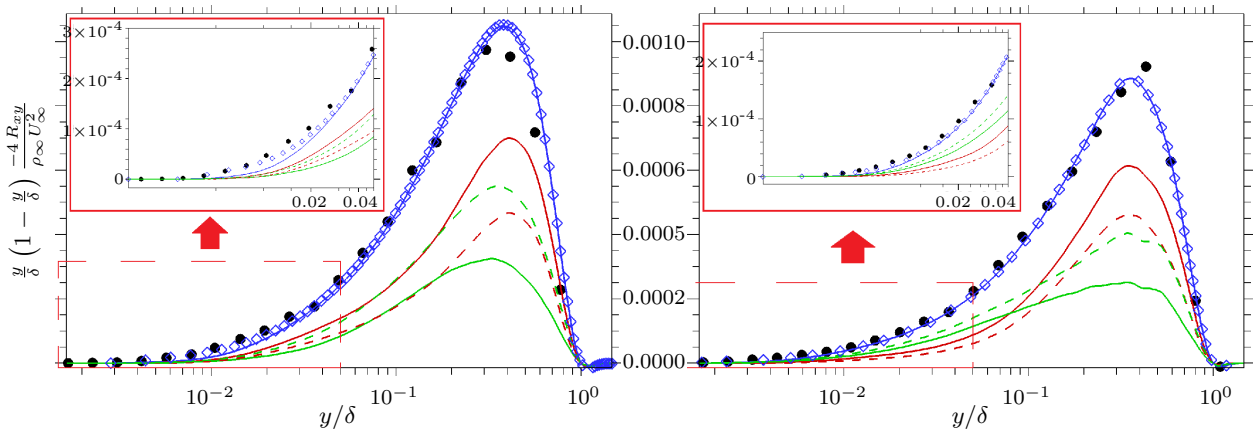


FIGURE 1.23 – Contribution pré-multipliée des petites et des grandes échelles à l'intégrande définissant la composante turbulente $c_{f,2}$ du frottement (1.68) dans une couche limite turbulente pour $Re_\theta = 5200$ (*à gauche*) et $Re_\theta = 13000$ (*à droite*) : signal ZDES résolu pour toutes les longueurs d'onde λ_x (——) ; $\lambda_x < \delta$ (——) ; $\lambda_x < 2\delta$ (- - -) ; $\lambda_x > \delta$ (——) ; $\lambda_x > 2\delta$ (- - -) ; signal ZDES résolu et modélisé (◇) ; expérience de DeGraaff & Eaton ([70], •). Figure extraite de [68].

intensifié contribuent alors à l'augmentation du frottement. Alternativement, peut-être que les super-structures augmentent directement le cisaillement moyen grâce à des balayages de grande échelle. En plus de la conséquence délétère sur le frottement, une augmentation du cisaillement serait également responsable d'une intensification du cycle de régénération de la turbulence. Quoi qu'il en soit, il semble que les mouvements cohérents du cycle proche-paroi restent dimensionnés en unité de paroi, unité qui dépend du frottement. C'est pourquoi il n'est pas aisé de savoir qui de ces structures et du frottement entraîne l'autre, après avoir été directement influencé par les super-structures.

Chapitre **2**

Contrôle de la turbulence pariétale

Sommaire

2.1 Définitions et classification des stratégies de contrôle 44
2.2 Présentation du contrôle par utilisation de *riblets* 47
2.2.1 Performances et régimes de réduction de frottement 50
2.2.1.1 Performance en écoulement laminaire 50
2.2.1.2 Influence de la dimension des *riblets* 51
2.2.1.3 Influence de la géométrie 52
2.2.1.4 Sensibilité à la finesse de la crête 54
2.2.1.5 Influence de l'alignement des *riblets* avec l'écoulement 55
2.2.1.6 Influence du nombre de Reynolds 56
2.2.1.7 Influence du nombre de Mach 57
2.2.1.8 Influence du gradient de pression 57
2.2.1.9 Influence sur la transition laminaire/turbulente 58
2.2.2 Caractéristiques de l'écoulement contrôlé 58
2.2.2.1 Distribution spatiale du frottement sur la surface des rainures . . 58
2.2.2.2 Écoulement moyen 59
2.2.2.3 Tensions de Reynolds 62
2.2.3 Mécanismes de réduction de traînée 64
2.2.3.1 Résistance aux fluctuations transverses 64
2.2.3.2 Interactions entre *riblets* et TQLs 66
2.2.3.3 Mécanisme de revêtement rugueux 69
2.2.3.4 Instabilités de Kelvin–Helmotz 71
2.3 Oscillations transverses de parois et ondes progressives 72
2.3.1 Performances de réduction de traînée 74
2.3.1.1 Paramètres d'influence sur la réduction de traînée 74
2.3.1.2 Économie nette d'énergie 76
2.3.1.3 Mouvement périodique arbitraire 76
2.3.1.4 De la dépendance temporelle à la dépendance spatiale 78
2.3.2 Caractéristiques de l'écoulement contrôlé 78
2.3.3 Mécanismes de réduction de traînée 80
2.3.3.1 Déplacement latéral relatif des structures turbulentes proche-paroi 80

2.3.3.2 Création de vorticité transverse négative 81

Leschiziner *et al.* [167] introduisent de façon particulièrement imagée le challenge que représente le contrôle de la turbulence par la description suivante :

> *Contrôler la turbulence ou les écoulements turbulents est comparable à essayer de remplir d'eau deux mains arthritiques : d'une difficulté frustrante et, dans le meilleur des cas, seulement partiellement efficace...*

C'est pour autant le prix à payer pour parvenir à relever ce défi dont les enjeux sont considérables. Pour ne citer que le domaine des transports, une meilleure maîtrise de la turbulence pourrait se traduire par une diminution se chiffrant en milliards de dollars du coût annuel en carburant et, par la même occasion, rendrait l'activité plus respectueuse de l'environnement.

C'est pourquoi le contrôle de la turbulence est aujourd'hui l'un des sujets les plus étudiés dans le domaine de la mécanique des fluides. Les grands axes de recherches peuvent être répartis selon quelques grandes problématiques dont :

- le retard ou le déclenchement de la transition,
- la suppression ou la provocation d'un décollement,
- l'augmentation ou l'affaiblissement de la turbulence.

Néanmoins, quel que soit le but recherché, deux défis majeurs se posent. Le premier réside dans l'optimisation des dépenses énergétiques. En effet, la suppression brutale de la turbulence est toujours possible, mais nécessite souvent un apport d'énergie considérable qui dépasse les gains qui en seront obtenus [88]. Le second challenge est d'ordre technologique. Les échelles de la turbulence — dont l'ordre de grandeur typique pour différentes applications est donné sur la figure 2.1 — imposent des contraintes de miniaturisation telles que la mise en pratique d'une stratégie de contrôle est souvent compromise, même lorsqu'il a été établie que celle-ci soit théoriquement viable.

Après une brève classification des stratégies de contrôle, on abordera plus en détail le cas particulier des *riblets*, sujet central de ce mémoire. En particulier, on s'attachera à réaliser un tour d'horizon des différents résultats relevés dans la littérature : performances de réduction de traînée, particularités de l'écoulement contrôlé, mais également éléments de compréhension quant aux mécanismes physiques en action. Dans un second temps, une autre stratégie de contrôle, le contrôle par oscillations transverses de paroi, sera abordée. On s'attachera alors à relever les points similaires et différenciant par rapport à l'utilisation de *riblets*.

2.1 Définitions et classification des stratégies de contrôle

Il existe de nombreuses stratégies pour contrôler la turbulence. Le propos de ce paragraphe est de fournir des éléments de compréhension et de classification. Avant de se faire, il convient néanmoins de définir les principaux termes en théorie du contrôle.

La **théorie du contrôle** a comme objet d'étude le comportement de **systèmes** commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir. Le but d'une stratégie de contrôle est d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Parler de son **état** suppose qu'on est capable de le caractériser. Pour ce faire, de l'information est extraite du système : il s'agit de la **mesure**. Notons que cette mesure peut être réalisée en temps réel à l'aide de **senseurs**, mais peut également résulter d'une étude antérieure. L'**objectif** peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation) ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal). Afin d'atteindre l'objectif, l'utilisateur réalise généralement une **action** au travers d'un **dispositif de contrôle**, qui peut être constitué d'un ou plusieurs **actionneurs**. L'exécution de cette action doit dépendre directement de l'état de l'écoulement, et donc de la mesure. Le lien entre la mesure et l'action est appelé l'**algorithme** ou encore la **loi de contrôle**.

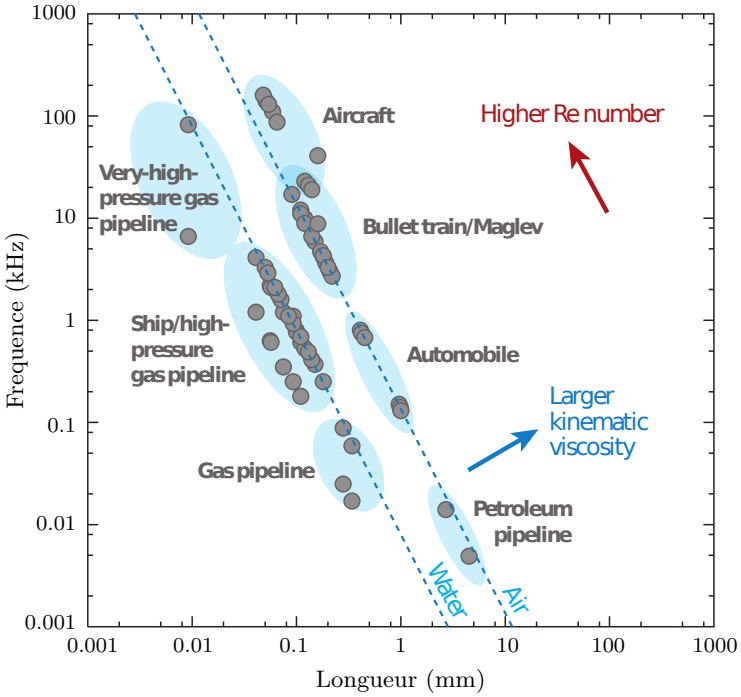


FIGURE 2.1 – Échelles spatio-temporelles caractérisant les structures cohérentes (TQLs) dans des applications réelles. Les points *gris* correspondent, en unités de paroi, à des longueurs de 30 et des fréquences de 0.01 pour différentes applications. Les ellipses *bleues* représentent des groupes d'application. Figure extraite de [142].

Ainsi, une **stratégie** ou une **méthode** de contrôle désigne l'ensemble {objectif – mesure – algorithme – action}. Le sous-ensemble {mesure – algorithme – action} est quant à lui appelé **contrôleur**.

Dans notre cas, le système considéré n'est autre que l'écoulement de couche limite turbulente. Depuis les travaux pionniers d'Osborne Reynolds à la fin du 19^{e} siècle, les trois grands challenges des scientifiques dans le domaine de la turbulence ont été la compréhension, la prédiction et le contrôle des phénomènes turbulents [142]. Ces challenges représentent un enjeu évident quant aux problématiques turbulentes de traînée, de bruit, de transfert de chaleur ou encore de mélange de réactifs chimiques. Mis à part certaines explorations fondamentales, l'objectif de la plupart des stratégies de contrôle porte sur le délai de transition, la réduction de la turbulence proche-paroi ou la suppression de zone de séparation [167].

Dans la suite de cette étude, on s'intéressera exclusivement aux stratégies de contrôle ayant pour objectif de réduire la traînée en contraignant la turbulence proche-paroi. Néanmoins, certaines de ces stratégies pourront également avoir une influence directe sur d'autres grandeurs d'intérêt, comme les flux de chaleur à la paroi. On définit alors le **taux de réduction de traînée** (*drag reduction rate*), noté DRR, comme paramètre à maximiser par la méthode de contrôle. La notion de **taux de réduction de frottement** (*skin-friction reduction rate*), est semblable à celle de DRR, à la différence près quelle ne prend pas en compte la composante de pression des efforts de traînée. Elle est définie par

$$FRR = -\frac{\Delta c_f}{c_{f,\mathrm{ref}}} = \frac{c_{f,\mathrm{ref}} - c_f}{c_{f,\mathrm{ref}}}\,, \tag{2.1}$$

où l'indice "ref" renvoie à l'écoulement de référence non contrôlé.

Dans les cas de configurations pour lesquelles la pression n'exerce pas d'effort longitudinal, comme celles des *riblets* bidimensionnels par exemple, la traînée se limite au frottement pariétal et DRR s'identifie à FRR.

Comme développé par Pamiès [202], il existe de nombreuses façons de classifier les méthodes de contrôle des couches limites. Gad-el-Hak [89], par exemple, mentionne deux grandes classifications. La première basée sur la dépense énergétique de la stratégie de contrôle, la seconde sur la localisation et l'étendue du dispositif de contrôle. Pollard [211], d'autre part, propose une classification séparant les stratégies agissant sélectivement sur certaines structures cohérentes de celles ayant une étendue d'action plus globale. Les principaux critères de classifications sont explicités ci-dessous.

Contrôle passif / actif. La dépense d'énergie du dispositif de contrôle a été un des critères de classification de Gad-el-Hak [89]. De ce point de vue, un contrôleur passif n'introduit aucune énergie dans l'écoulement. On peut citer par exemple l'utilisation d'état de surface rugueux ou de manipulateur externe cassant les tourbillons comme les LEBUs (*large eddy break-up devices*), pour lesquels le dispositif de contrôle ne comporte pas d'actionneurs.

À l'inverse, dans le cas d'un contrôleur actif, de l'énergie doit être fournie pour faire fonctionner le ou les actionneurs du dispositif de contrôle. Les contrôles par jets pulsés ou par oscillation de paroi sont des exemples de telles stratégies actives.

Un dispositif de contrôle actif, susceptible de réduire de moitié le coefficient de traînée au prix d'une dépense énergétique considérable, doit-il être considéré comme plus performant qu'un dispositif passif, capable de réduire la traînée d'une dizaine de pour cent seulement ? En effet, d'un point de vue applicatif, la traînée n'est autre qu'une perte énergétique que le moteur ou la pompe entretenant le mouvement doivent compenser. L'utilisation d'énergie pour réduire la traînée d'un écoulement turbulent lève donc un problème de fond quant à l'évaluation des performances de la méthode de contrôle.

La notion de taux de réduction de traînée DRR doit donc être abandonnée au profit d'une approche énergétique avec un indicateur basé sur le **taux d'économie nette d'énergie** (*net energy saving rate*) :

$$ESR = -\frac{\Delta\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{\text{ref}}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{ref}} - (\mathcal{P} + \mathcal{P}_{\text{input}})}{\mathcal{P}_{\text{ref}}} \tag{2.2}$$

où $\mathcal{P}_{\text{ref}}$ et $\mathcal{P}$ désignent la puissance dissipée par le frottement pour le cas de référence et le cas contrôlé, et $\mathcal{P}_{\text{input}}$ représente la puissance consommée par le dispositif de contrôle.

Notons tout de même que dans le cas d'un contrôle passif, la puissance $\mathcal{P}_{\text{input}}$ étant nulle par définition, le taux d'économie nette d'énergie ESR s'identifie au taux de réduction de traînée DRR.

Contrôle prédéterminé / réactif. L'action d'une stratégie de contrôle peut être totalement déterminée à l'avance. Ce type de stratégie, que l'on qualifie de prédéterminée, ne nécessite donc pas la présence de senseurs : les paramètres de fonctionnement sont réglés *a priori*. C'est évidemment le cas des stratégies de contrôle passives, mais également de certaines stratégies actives comme l'oscillation de paroi [139], pour laquelle la fréquence et l'amplitude d'oscillation sont préalablement fixées.

Le contrôle réactif à l'inverse est basé sur la notion de boucle de **rétroaction** (*feed-back*) : un contrôle réactif adapte son action à l'état du système. Ses paramètres sont alors continuellement ajustés en fonction des mesures de senseurs. Le contrôle actif en opposition [38] en est un exemple.

Contrôle en boucle ouverte / fermée. Il existe deux types de contrôle actif réactif, qui se distinguent par la manière dont sont reliées l'action et la mesure. On dit que la loi de contrôle est en boucle ouverte lorsque la mesure n'est pas perturbée par l'action. C'est le cas si la mesure est réalisée en amont du dispositif de contrôle.

La loi de contrôle est dite en boucle fermée si l'action est conditionnée par une comparaison entre les états après et avant contrôle. Ainsi, la mesure doit être directement influencée par l'action, qui elle-même dépend de la mesure, illustrant l'appellation de boucle fermée.

Contrôle localisé / global. Dans le cas d'un écoulement de couche limite, le dispositif du contrôle peut se trouver à la paroi ou dans le champ, et être plus ou moins localisé. Lorsque l'étendue du dispositif de contrôle est sensiblement plus grande que l'épaisseur de couche limite, on dira que la méthode est globale. Il s'agit par exemple d'une modification de l'état de surface ou encore d'une oscillation de toute la paroi.

Lorsque le contrôle est concentré dans un espace sensiblement plus petit que δ, on dira que la méthode est localisée.

Contrôle sélectif / non-sélectif. Il est également possible de différencier les stratégies de contrôle suivant qu'elles s'intéressent à une modification entière de l'écoulement, ou qu'ils ne ciblent que certaines sous-parties de celui-ci, de manière sélective. Par exemple, une stratégie sélective peut être capable d'identifier et de contrôler spécifiquement telles ou telles structures cohérentes de la couche limite. Ce type de méthode est par essence réactif et localisé, afin de pouvoir adapter son action à la présence des structures ciblées.

Inversement, on parle de contrôle non sélectif lorsque l'action n'est pas spécifiquement ciblée sur une partie de l'écoulement. Tel est le cas avec de l'oscillation transverse de paroi qui s'intéresse à l'écoulement dans son ensemble. Généralement, cette catégorie regroupe des stratégies passives ou actives prédéterminées

Contenu physique des lois de contrôle. Moin & Bewley [186] introduisent un critère basé sur le contenu physique des lois de contrôle. Ils différencient les stratégies de contrôle :

- basées sur des **algorithmes adaptatifs** ne prenant pas en compte la physique sous-jacente ;
- **basées sur des modèles physiques**, et notamment le cycle de régénération proche-paroi de la turbulence ;
- utilisant la théorie des **systèmes dynamiques non linéaires** ;
- minimisant une fonction de coût donnée en utilisant les équations de Navier-Stokes, que l'on appelle **contrôle optimal**.

Dans la prochaine section de ce chapitre, on se propose de présenter la stratégie de contrôle centrale de cette étude : le contrôle par utilisation de *riblets*. Dans un second temps, le contrôle par oscillation transverse de paroi sera abordé pour l'intérêt qu'il représente, tant en termes de compréhension plus approfondie des mécanismes de réduction de traînée, que pour ouvrir des perspectives d'amélioration des *riblets* classiques. Les autres stratégies, bien que d'un intérêt certain, ne seront pas revues dans ce mémoire. Le lecteur intéressé est donc renvoyé aux nombreux articles et ouvrages sur le sujet.

2.2 Présentation du contrôle par utilisation de *riblets*

Les ***riblets*** sont des micro-rainures sur la paroi, alignées avec la direction de l'écoulement. Un exemple d'un tel revêtement est représenté sur la figure 2.2. Dès les premières études, initiées en 1978 par Michael J. Walsh et ses collègues du *NASA Langley Research Center*, des réductions de 7 à 8 pour cent du frottement en couches limites turbulentes furent observées [282, 277, 278, 281]. Les *riblets* sont ainsi considérés comme étant l'une des premières techniques de réduction de la traînée turbulente [76]. Par la suite, des développements analytiques (citons notamment [15, 93, 169]), des essais en soufflerie (dont [18, 41, 73, 109, 215]) et des simulations numériques (parmi [36, 37, 46, 94, 95, 105, 106]) ont permis de confirmer les premières mesures, apporter des éléments de compréhension des phénomènes physiques en jeu et atteindre 10% de réduction de frottement turbulent.

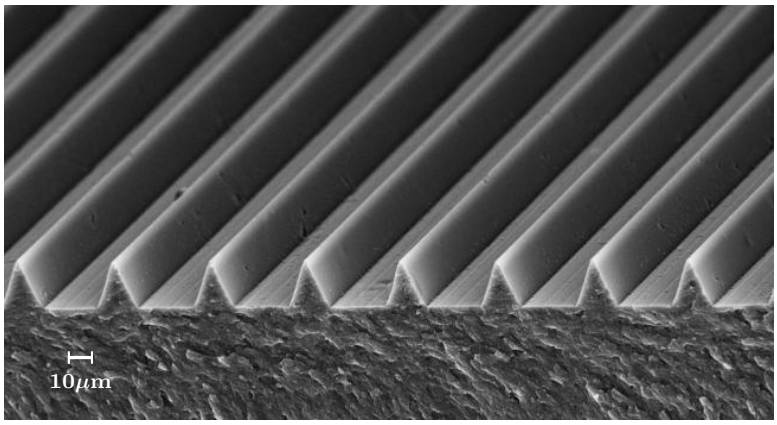


FIGURE 2.2 – Visualisation au microscope à balayage électronique d'un revêtement micro-rainuré. *Riblets* et photographie réalisés par l'Institut Fraunhofer–IFAM [257].

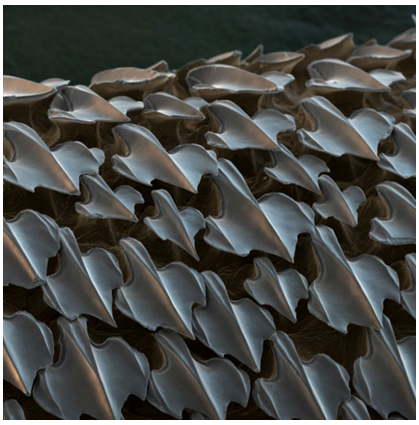


FIGURE 2.3 – Photographie d'écailles de requin, appelées denticules [source inconnue].

Les revêtements comportant des *riblets* sont souvent qualifiés de "peaux de requin". Il faut tout d'abord savoir que les requins, contrairement aux dauphins et aux baleines, ne sont pas des mammifères, mais des poissons. Ainsi, ce que l'on appelle "peau de requin" fait en réalité référence à des écailles. Pour les poissons cartilagineux que sont les requins et les raies, les écailles sont qualifiées de placoïdes ou également appelées denticules. Leur structure est tout à fait analogue à celle d'une dent (composée de dentine recouverte d'email) et rend la peau du requin rugueuse, voire même abrasive. La forme de ces écailles (plates, en forme de poils, en nid d'abeille, striées, ... [71]) diffèrent énormément d'une espèce à l'autre suivant des contraintes évolutives liées à l'abrasion, la luminescence, la défense ou l'hydrodynamisme [221]. Chez les espèces prédatrices actives telles que le mako, les écailles sont pourvues de sillons parallèles [72, 222] comme le montre la figure 2.3. Ces écailles sont généralement larges de l'ordre de $0.2 - 0.5\,\text{mm}$ et leurs rainures espacées de $30 - 100\,\mu\text{m}$ [17]. Elles sont disposées de façon à se recouvrir partiellement, à la manière des tuiles sur un toit, dans la direction allant de la tête à la queue de l'animal. Outrepassant la performance des *riblets* bidimensionnels sur plaque plane fixe, une réduction de la traînée atteignant 12% est obtenue en recouvrant une membrane flexible de denticules [198, 291]. Une telle chute de la traînée serait le fruit de l'action conjuguée de différents mécanismes [16] : la présence de mucus pourrait avoir un effet, bien que ce ne semble pas être ici le mécanisme essentiel ; le passage de fluide entre et sous les écailles rend possible un mécanisme passif d'aspiration/soufflage ; enfin, les rainures sur les écailles interagiraient avec la turbulence proche-paroi selon le mécanisme des *riblets* mentionnés précédemment.

Plus tard, des chercheurs ont découvert que la fourrure du phoque permettait de réduire de 12% la traînée par rapport à une surface lisse [126]. Ils observent au microscope que les poils de la fourrure de phoque se collent à la peau et s'organisent pour former des rainures de type *riblets* de largeurs inhomogènes.

Ainsi inspirés par les "3.8 milliards d'années de Recherche & Développement de la nature" [1], les ingénieurs ont très rapidement appliqué ces découvertes au monde sportif nautique : l'aviron de l'équipe américaine aux Jeux olympiques de 1984 et le voilier californien "*Stars and Stripes 87*" en final de la Coupe de l'America 1987 ont tous deux connus la victoire en étant couverts de *riblets* [27, 46, 141, 280] avant que les règlements sportifs ne les interdisent. Plus récemment, depuis les Jeux olympiques de Sydney en l'an 2000, les nageurs ont fait tomber de nombreux records grâce aux combinaisons *Speedo Fastskin* et *Speedo LZR Racer* dont les *riblets* permettraient 4 à 6% de réduction de traînée [157, 194]. Dès qu'ils furent à nouveau autorisés, les *riblets* refirent leur apparition

1. Fondement du biomimétisme, énoncé par la naturaliste américaine Janine Benyus dont le livre "*Biomimicry – Innovation inspired by Nature*" [20] a signé l'acte de naissance de la discipline en 1997. Le biomimétisme, c'est l'ingénierie inspirée du vivant qui cherche à tirer parti des solutions et inventions produites par la nature.

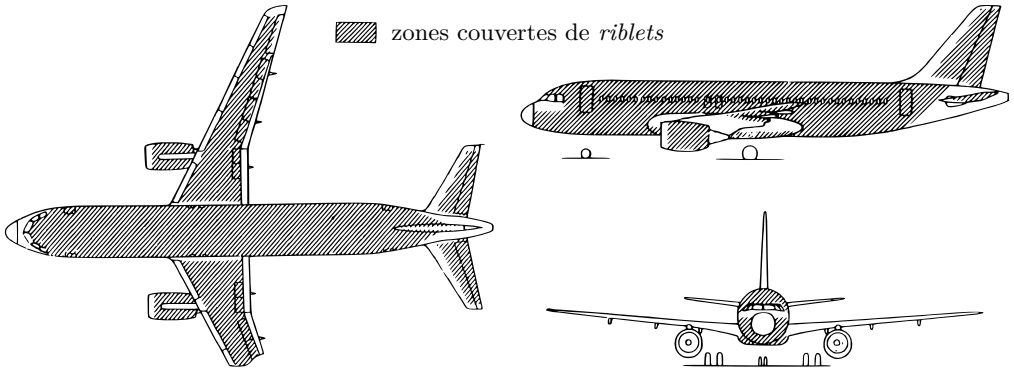


FIGURE 2.4 – Schéma de l'Airbus A320 numéro 1 partiellement recouvert de *riblets*. Les zones hachurées sont celles sur lesquelles un film rainuré a été appliqué. Figure extraite de [259].

sur le trimaran "*USA 17*" qui remporta la Coupe de l'America 2010. Bien que tous ces exemples d'utilisation de *riblets* dans le domaine sportif se soient conclus par des victoires, il est impossible de quantifier leur rôle effectif, si tant est qu'il y en ait eu un.

Les applications dans le domaine aéronautique se sont également soldées par des succès. Les *riblets*, appliqués sur des profils d'aile [163] ou des maquettes d'avion en soufflerie [274] comme en vol [58], ont conduit à des réductions mesurables de la traînée totale. Ainsi, pour un vol d'essai en 1989, l'avion prototype A320 d'Airbus a été recouvert de *riblets* à hauteur de $70-75\%$ de sa surface totale, sur le fuselage et l'extrados des ailes comme le montre la figure 2.4. En moyenne sur les différents paliers de vol, une réduction de la traînée totale de presque 2% a alors pu être mise en évidence en se basant sur la consommation en carburant [225, 259]. À ce titre, il faut savoir que la traînée totale d'un avion se décompose en traînée de frottement, traînée de forme, traînée induite et traînée d'onde. La traînée de frottement — sur laquelle les *riblets* ont un impact direct — ne compte que pour un peu plus de la moitié de la traînée totale d'un avion de ligne moderne [167, 252]. Avec cette précision en tête et en prenant également en compte le pourcentage de recouvrement de l'avion par des *riblets*, la réduction de traînée obtenue en vol est cohérente avec les réductions de frottement obtenues sur plaques planes [60]. En plus de ce vol d'essai en condition transsonique, l'efficacité des *riblets* a également été démontrée sur un avion de combat F-104G *Starfigther* en condition de vol supersonique [293]. La taille typique des *riblets* pour ce type d'application aéronautique est alors de l'ordre de $30-50\,\mu$m.

Ainsi, les *riblets* sont l'une des rares stratégies de contrôle à avoir été appliquées avec succès à la réduction du frottement pariétal dans des couches limites turbulentes, que ce soit en laboratoire comme sur des applications aéronautiques complètes.

En dépit des excellentes performances obtenues et du faible coût de fabrication des *riblets*, aucune compagnie aérienne n'utilise véritablement les *riblets* à ce jour. Connaissant l'intense concurrence entre les très nombreux acteurs du marché et la guerre des prix instaurée par les compagnies *low-cost*, la réticence constatée envers les *riblets* trouve nécessairement une explication rationnelle. En réalité, ce qui limite l'utilisation des *riblets* ne porte pas sur des critères de performance pure en termes de réduction de traînée, mais sur des problématiques de longévité et de maintenance [252]. Les coûts liés à l'installation initiale et aux remplacements successifs des *riblets* tout au long de la vie de l'avion représentent un véritable frein à leur utilisation. Les *riblets* souffrent en particulier de l'érosion et de l'encrassement. De plus, ils interfèrent avec la peinture et donc avec l'apparence de l'avion et génèrent des contraintes de maintenance et d'accès, notamment sur les ailes lors des inspections structurelles régulières. Pour ces raisons, la communauté scientifique de chercheurs en Structure et Matériaux tente activement de mettre au point de nouveaux matériaux ou procédés de fabrication et de pose [28, 35, 257] qui finiront bien — espérons-le — par rendre viable la mise en service des *riblets*.

2.2.1 Performances et régimes de réduction de frottement

Intéressons-nous maintenant aux caractéristiques de réduction de frottement des *riblets*. Dans la suite, on s'intéressera, sauf mention contraire, aux cas canoniques de couches limites turbulentes incompressibles, que ce soit en canal ou sans gradient de pression, bordées par une plaque plane recouverte de *riblets* bidimensionnels. L'objectif est ici de fournir les clefs permettant d'évaluer la performance de *riblets* en fonction de leurs géométries et des conditions d'écoulement.

Ce que l'on appelle performance se rapporte ici au taux de réduction de traînée DRR. Dans le cas de *riblets* bidimensionnels, la traînée s'assimile à la traînée de frottement. En particulier, DRR et $FRR = -\Delta c_f / c_{f,\mathrm{ref}}$ sont confondus. Dans la suite, on pourra donc les identifier l'un et l'autre.

Dans le cas de revêtement inhomogène, le coefficient de frottement c_f, dont la définition générale est donnée par (1.29), doit être revu. En utilisant une paroi recouverte de *riblets*, l'objectif est de réduire la traînée de frottement globale, accumulée sur toute la largeur de la paroi, sans se soucier de la contribution relative des vallées et des crêtes. Ainsi, le frottement moyen — au sens temporel — doit également être moyenné spatialement dans la direction transverse aux *riblets*. Pour cela, après avoir intégré l'effort local $\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}(\underline{x})$ dans la direction transverse sur une largeur de *riblets* s autour du point $\underline{x}$ considéré, l'intégrale est adimensionnée, non pas par la longueur effective de la surface mouillée s_{wet}, mais par la largeur "macroscopique" s entre deux rainures successives. Pour des *riblets* alignés avec la direction x sur une paroi plane normale à y, on a donc :

$$\langle \overline{\tau}_{\mathrm{w},x} \rangle (x,z) = \frac{1}{s} \int\limits_{z-\frac{s}{2}<\mathsf{z}<z+\frac{s}{2}} \overline{\tau}_{\mathrm{w},x}(x,\mathsf{z})\, \mathrm{d}l(\mathsf{z})\,, \tag{2.3}$$

où $\mathrm{d}l(\mathsf{z})$ désigne l'arc de longueur infinitésimal le long de la paroi à x constant autour du point (x,z). Selon ces notations, s_{wet} est alors égal à $\int_{z-s/2}^{z+s/2} \mathrm{d}l(\mathsf{z})$. Le coefficient de frottement c_f est par la suite redéfini en utilisant le frottement temporellement et spatialement moyenné $\langle \overline{\tau}_{\mathrm{w},x} \rangle$ à la place du frottement local $\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}$.

Depuis l'étude fondatrice de Walsh & Weinstein en 1978 [282], de nombreuses configurations ont été testées afin d'évaluer l'influence de paramètres comme la taille et la forme des *riblets*, leur alignement avec l'écoulement, les nombres de Reynolds et de Mach, le gradient de pression... Les revues de Walsh [280] et de Coustols [60] reviennent sur la grande diversité d'expériences conduites pendant les années 80 et 90. En particulier, des essais ont été conduits en tunnels à huile, ce qui permet de travailler sur des dimensions de *riblets* plus larges et de mieux contrôler la géométrie et les mesures ponctuelles. L'étude de Bechert *et al.* [18] constitue ainsi une solide base de données abondamment utilisée.

2.2.1.1 Performance en écoulement laminaire

Avant de discuter de leurs performances pour la réduction du frottement en écoulement turbulent, intéressons-nous brièvement à l'influence des *riblets* dans un écoulement laminaire.

La solution pour un écoulement laminaire est unique — à un adimensionnement près — quelque soit le nombre de Reynolds considéré. Après avoir démontré analytiquement ce résultat, Choi *et al.* [36] confirmèrent la conclusion de Launder & Li [162] : les *riblets* augmentent systématiquement le frottement en écoulement laminaire par rapport à la paroi lisse, totalisant moins de surface mouillée. Le frottement local, en termes de position vis-à-vis de la crête ou de la vallée des *riblets*, est très inhomogène [36, 73, 46]. Sur la plus grande partie de la surface des *riblets*, le frottement est plus faible que celui d'une plaque lisse. Seule la région proche de la crête subit une augmentation du frottement, d'autant plus importante que l'angle de crête est aigu.

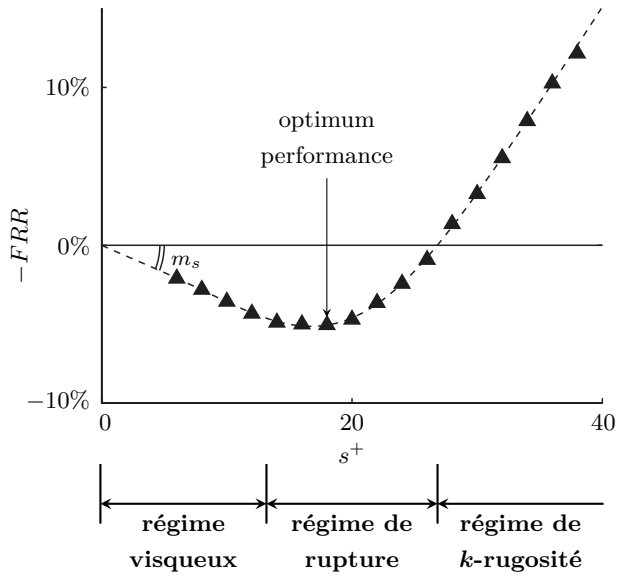


FIGURE 2.5 – Différents régimes de réduction de frottement en fonction de la dimension s^+ des *riblets*. Figure extraite de [93] réalisée à partir des données expérimentales de [18] sur des *riblets* triangulaires d'angle de crête $\alpha = 60°$.

2.2.1.2 Influence de la dimension des *riblets*

Pour une géométrie fixée de *riblets*, l'influence de la dimension est primordiale. Les deux cas extrêmes en témoignent : des *riblets* de taille infinitésimale ne peuvent entrainer de réduction ni d'augmentation notable du frottement. À l'inverse, des rainures de taille comparable ou supérieure à celle de la couche limite augmentent sensiblement le frottement. Entre ces deux cas limites, il existe pourtant un régime de réduction de frottement.

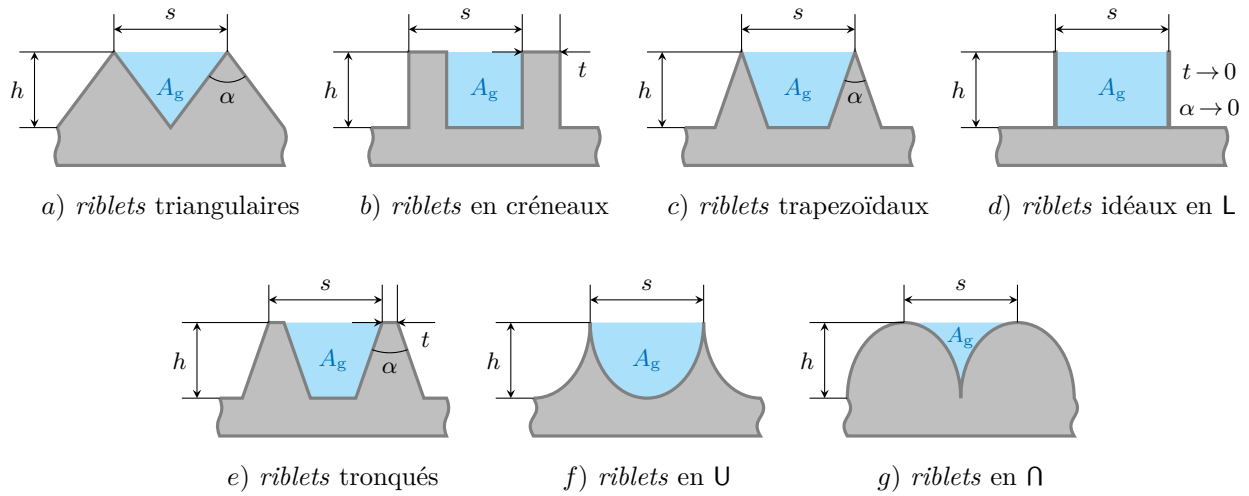
Walsh & Lindemann [281] établirent que le taux de réduction de frottement induit par les *riblets* peut être relativement bien exprimé en fonction de leur dimension en unité de paroi. Si l'on choisit l'espacement s entre deux arêtes successives comme dimension caractéristique des *riblets*, la quantité $s^+ = su_\tau/\nu$ peut être considérée comme un nombre de Reynolds : c'est le nombre de Reynolds basé sur la dimension des *riblets* et sur la vitesse de frottement. La figure 2.5 montre une courbe typique du taux de réduction de frottement FRR en fonction de l'espacement s^+.

García-Mayoral & Jiménez [93] y distinguent différents régimes. Le comportement dans la limite des petits *riblets*[2], formellement pour $s^+ \ll 1$ mais en pratique $s^+ \lesssim 10 - 15$, est appelé **régime visqueux**[3] (*viscous regime*). Dans ce régime, les *riblets* sont censés être totalement immergés dans la sous-couche linéaire visqueuse (définie au paragraphe 1.3.1). Comme cela sera abordé par la suite, le taux de réduction de frottement FRR est alors proportionnel à s^+ et on caractérise par m_s le coefficient de proportionnalité. La validité du régime visqueux s'effondre lorsque la dimension des *riblets* s'approche de la dimension optimale s^+_{opt}. On parle alors du **régime de rupture** (*breakdown regime*). Au-delà, la réduction de frottement chute puis devient une augmentation de frottement [254]. C'est ce que l'on appelle le **régime rugueux** (*roughness regime*). Les dénominations employées pour ces différents régimes laissent d'ores et déjà transparaître des mécanismes physiques sous-jacents. Ceux-ci seront abordés en détail dans la section 2.2.3 dédiée.

Toutes les géométries de *riblets* n'engendrent pas les mêmes taux de réduction de frottement.

2. "Petits *riblets*" correspond ici à "petit devant l'échelle des plus petits mouvements turbulents". Cette échelle, dite échelle de Kolmogorov η, est de l'ordre de l'unité de paroi à la paroi.

3. Il ne faut pas confondre "régime visqueux" — qui caractérise le comportement de petits *riblets* dans un écoulement turbulent — et "écoulement visqueux" — qui renvoie aux écoulements laminaires de Stokes. Il ne faut pas oublier que des *riblets* dans un écoulement laminaire augmentent nécessairement le frottement pariétal (cf. paragraphe 2.2.1.1), alors que des *riblets* en régime visqueux le réduisent (voir la figure 2.5).



a) *riblets* triangulaires *b*) *riblets* en créneaux *c*) *riblets* trapezoïdaux *d*) *riblets* idéaux en L

e) *riblets* tronqués *f*) *riblets* en U *g*) *riblets* en ∩

FIGURE 2.6 – Coupe transverse de différentes géométries de *riblets* bidimensionnelles. Les géométries triangulaires (*a*), en créneaux (*b*), trapézoïdales (*c*) et en L (*d*) sont des cas particuliers de *riblets* tronqués (*e*) — la géométrie en L étant un cas limite idéal d'épaisseur nulle. Les formes en U (*f*) et en ∩ (*g*) sont basés sur des lignes courbes. Sur chaque figure, la section transverse de la rainure, d'aire A_g, est représentée en *bleu*.

Les paramètres qui semblent déterminer leur performance optimale sont la pente m_s du régime visqueux et la taille optimale s^+_{opt}. Ainsi, le but du paragraphe suivant est d'établir l'existence d'une dépendance entre la géométrie et les paramètres m_s et s^+_{opt}.

2.2.1.3 Influence de la géométrie

Des *riblets* de différentes formes — généralement bidimensionnelles — ont été étudiés en couche limite turbulente. Certaines de ces géométries sont représentées sur la figure 2.6. Les géométries triangulaires (ou "en dents de scie" ou "en V"), rectangulaires (ou "en créneaux"), trapézoïdales et en lame (ou "en L") sont les plus fréquemment étudiées dans la littérature.

Toutes les géométries peuvent être caractérisées, a minima, par la hauteur h des *riblets* (ou la profondeur de la rainure) et par l'espacement s entre deux arêtes successives, comme annoté sur la figure 2.6. Le ratio h/s et l'aire de la section de la rainure A_g (*groove cross section*) pourront également être des dimensions d'intérêt.

Comme précisé dans la sous-section précédente, toutes ces géométries n'engendrent pas les mêmes taux de réduction de frottement. Dans le tunnel à huile du DLR, Bechert *et al.* [18] ont mesuré avec précision la traînée de différentes géométries de *riblets* pour différents nombres de Reynolds s^+ dans une couche limite turbulente sans gradient de pression de nombre de Reynolds Re_δ de l'ordre de $\mathcal{O}(10^4)$. La taille physique des *riblets* étant fixe, c'est la variation du débit dans le canal qui permet de faire varier continûment la dimension s^+.

La largeur optimale s^+_{opt} varie considérablement d'une géométrie de *riblets* à l'autre, comme le montre la figure 2.7 (*gauche*). Une largeur de l'ordre de $10-20$ unités de paroi correspond, pour un avion en condition de croisière (Mach 0.8 à 10 000 m d'altitude), à une dimension de l'ordre de $10-100\,\mu$m. Dans l'eau, pour des vitesses de l'ordre de $50\,\text{km.h}^{-1}$, on retrouve la même largeur en unité physique. Cela confirme bien les dimensions typiques, précédemment énoncées, des *riblets* utilisés pour les essais en vol ou observés sur les denticules de requin.

Pour établir empiriquement une loi plus universelle, García-Mayoral & Jiménez [94] proposent d'utiliser une autre longueur caractéristique plutôt que de se baser sur la largeur s^+ entre deux rainures successives. Après avoir constaté que la hauteur h^+ des *riblets* ne conduit pas non plus à une bonne superposition des courbes obtenues à partir de différentes géométries, figure 2.7 (*milieu*),

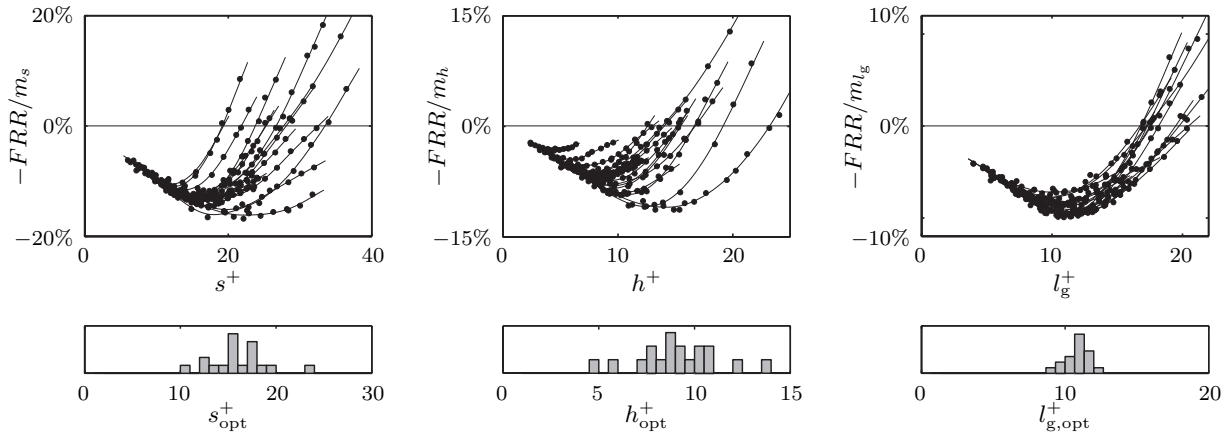


FIGURE 2.7 – (*En haut*) Taux de réduction de frottement FRR, adimensionnés par la pente initiale du régime visqueux, en fonction de la dimension des *riblets*. La dimension caractéristique considérée est (*à gauche*) s^+, (*au milieu*) h^+, (*à droite*) l_g^+. Chaque courbe correspond à une géométrie de *riblets* différente parmi les géométries types en créneaux, en L, trapézoïdaux et en U. (*En bas*) Histogrammes de la dimension optimale. Figures extraites de [94] réalisées à partir des données expérimentales de [18].

García-Mayoral & Jiménez construisent la longueur $l_g = \sqrt{A_g}$ à partir de la section des rainures (matérialisée en bleue sur la figure 2.6). Cette nouvelle longueur caractéristique conduit, sur la figure 2.7 (*droite*), à un net regroupement des courbes [4].

La courbe $FRR(l_g^+)/m_{l_g}$ — taux de réduction de frottement en fonction de la dimension caractéristique l_g^+, adimensionné par la pente initiale — semble donc être une loi quasi universelle, au moins pour $l_g^+ \lesssim 15$. Pour une grande variété de géométries, la dimension optimale des *riblets* et la valeur maximale du taux de réduction de frottement peuvent alors être estimées par

$$l^+_{g,\mathrm{opt}} \simeq 10.7 \pm 10\% \,; \tag{2.4}$$

$$FRR_{\max} \simeq 0.83\, m_{l_g}\, l^+_{g,\mathrm{opt}} \pm 20\% \,. \tag{2.5}$$

Pour compléter cette loi empirique et évaluer le taux de réduction de frottement d'une géométrie donnée de *riblets*, il faut encore être capable de calculer m_{l_g}, la pente dans le régime visqueux de la courbe $FRR(l_g^+)$.

Le concept de **hauteur de protubérance** (*protrusion height*), défini pour la première fois par Bechert & Bartenwerfer en 1989 [15] puis revisité par Luchini *et al.* [169] deux ans plus tard, va se révéler adapté au calcul des performances de *riblets* dans leur limite de régime visqueux. Sa définition analytique sera abordée dans la section 2.2.3.1, mais les principales répercussions sur l'évaluation de la performance des *riblets* sont exposées dès à présent.

La hauteur de protubérance Δh est une longueur définie à partir de l'écoulement de Stokes au-dessus de *riblets*. Elle est propre à chaque géométrie et proportionnelle à la taille des *riblets* (s ou l_g par exemple). La définition de cette grandeur est basée sur la notion intuitive que des *riblets* offrent une plus grande résistance aux fluctuations transverses qu'à l'écoulement longitudinal. La hauteur de protubérance est donc un paramètre permettant de quantifier la capacité d'une géométrie de *riblets* à entraver sélectivement les fluctuations transverses. Comme on le verra dans la section 2.2.3.1, la valeur optimale de Δh est $\Delta h_{\mathrm{opt}} = 0.132\, s$. Elle est atteinte par les *riblets* idéaux en L de la

4. Bien que relativement adapté pour les géométries de *riblets* conventionnelles présentées sur la figure 2.6, le lien entre la longueur l_g et le taux de réduction de frottement reste empirique. Il est d'ailleurs facile de le mettre en défaut avec une géométrie de *riblets* en T — construite en ajoutant des plans horizontaux sur chaque paroi verticale de *riblets* en L : dans la limite où les T viendraient à se rejoindre, les sillons deviendraient isolés du reste de l'écoulement et une modification de la profondeur, et donc de l_g, n'aurait plus d'influence sur le frottement.

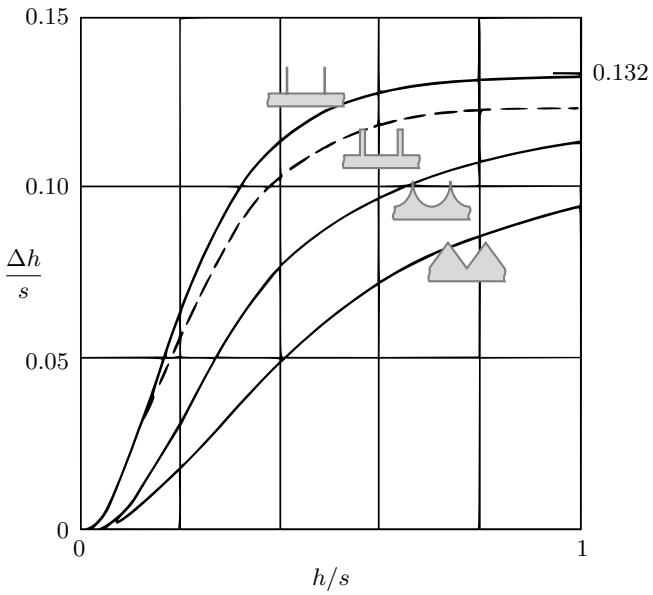


FIGURE 2.8 – Hauteur de protubérance $\Delta h/s$ en fonction du rapport d'aspect h/s pour quatre géométries : *riblets* idéaux en L, *riblets* rectangulaires d'épaisseur $t/s = 0.02$, *riblets* paraboliques en U et *riblets* triangulaires. Figure adaptée de [18].

figure 2.6 (d) lorsque le rapport d'aspect h/s devient très grand. La valeur de Δh est inférieure pour les *riblets* réels, qui ne sont ni infiniment fins, ni de rapport d'aspect infiniment profond. C'est ce que montre la figure 2.8 pour les cas de *riblets* triangulaires, en U, rectangulaires et en L.

Bechert *et al.* [18] et Garía-Mayoral & Jiménez [93] formalisent ces résultats et établissent l'existence d'une relation de proportionnalité entre Δh et le taux de réduction de frottement FRR pour des *riblets* en régime visqueux (c'est-à-dire suffisamment petits [5]) : $FRR \propto \Delta h^+$ où le coefficient de proportionnalité sera explicitement donné par la formule (2.14). Finalement, la pente m_{l_g} de la courbe $FRR(l_g^+)$ dans le régime visqueux s'écrit de la façon suivante, où $\mu_0 \simeq 0.7$ est une constante :

$$m_{l_g} = \left.\frac{\partial FRR}{\partial l_g^+}\right|_{l_g \to 0} = \frac{\mu_0}{(2c_{f,\mathrm{ref}})^{-1/2} + (2\kappa)^{-1}} \frac{\Delta h}{l_g}\,. \tag{2.6}$$

L'utilisation des équations (2.4), (2.5) et (2.6) permet donc une évaluation empirique des capacités de réduction de frottement d'une géométrie donnée de *riblets*, uniquement à partir de résolutions d'écoulement de Stokes.

Forts de ces constats, Bechert *et al.* [18] établirent que les *riblets* trapézoïdaux avec $\alpha = 30°$ et $h/s = 0.5$ constituent un bon compromis entre la performance maximale des *riblets* idéaux en L et les contraintes pratiques de réalisation. La réduction de traînée obtenue se révèle être 60% plus importante que celle obtenue dans les mêmes conditions par des *riblets* triangulaires alors largement utilisés, et à peine 20% moins bonne que les *riblets* idéaux irréalisables en pratique. Ces *riblets* s'avèrent être très proches de la meilleure des géométries testées quelques années plus tôt par Pulles *et al.* [215], qui atteignit 10.6% de réduction de traînée.

2.2.1.4 Sensibilité à la finesse de la crête

La finesse de la crête peut être vue comme un critère de définition géométrique. Dans les applications industrielles, la finesse de la crête est directement affectée par l'érosion. La question est donc de savoir dans quelle mesure cette usure affecte la performance du revêtement.

5. Voir note 3

Pour des *riblets* triangulaires avec $\alpha = 45°$, la crête peut-être légèrement arrondie d'un rayon de courbure inférieur à $R/s \simeq 4\%$. Avec un tel polissage, aucune dégradation significative de la performance des *riblets* n'est constatée [279, 281]. Cependant, pour R/s de l'ordre de 8%, la chute des performances de réduction de traînée atteind 40%. Le polissage de la vallée des *riblets* n'engendre pas de dégradation significative du frottement.

Les outils introduits précédemment pour corréler la géométrie à la réduction de traînée peuvent être mis à profit ici. Un émoussement de la crête des *riblets* ne modifie pas substantiellement l'aire de la section de la rainure A_g ni la longueur l_g associée. Cependant, comme le montre la figure 2.8, la hauteur de protubérance Δh est réduite d'environ 7% lorsque les *riblets* idéaux en L de grand rapport d'aspect h/s sont épaissis de seulement $t/s = 2\%$. Ainsi, une modification de l'extrême pointe des rainures influence la capacité des *riblets* à affaiblir préférentiellement les fluctuations transverses. Une chute de Δh entraîne donc une chute de la réduction de traînée dans le domaine visqueux et donc du coefficient m_{l_g} (équations (2.14) et (2.6)). Ce dernier coefficient ayant, d'après l'équation (2.5), une influence empirique sur la valeur du taux de réduction de frottement optimal $FRR_{\max}$.

Bien que l'érosion puisse réduire la finesse de crête de *riblets* initialement affûtés, et donc leur performance, elle peut également contribuer à dégrossir, épointer, l'extrémité de *riblets* initialement épais, améliorant ainsi leur efficacité [93]. Pour des applications dans lesquelles l'érosion est un problème, il pourrait être préférable d'utiliser des *riblets* ne dépendant pas trop de la finesse de leur crête, comme des *riblets* triangulaires, plutôt que d'opter pour des *riblets* trapézoïdaux étroits, dont les très bonnes performances initiales sont susceptibles de rapidement se détériorer.

2.2.1.5 Influence de l'alignement des *riblets* avec l'écoulement

Pour des applications sur des géométries complexes, les lignes de courant sur la surface peuvent être difficiles à déterminer en pratique. L'évaluation de la dégradation des performances pour des *riblets* qui ne seraient pas alignés avec la direction de l'écoulement est donc d'intérêt majeur. Les essais réalisés sur des ailes en flèches [58, 59, 274, 280] ont montré qu'il était essentiel de respecter un alignement approximatif des *riblets* avec la direction de l'écoulement extérieur pour obtenir une réduction de la traînée. Ainsi, l'utilisation de *riblets* dans les régions d'écoulement tridimensionnel risque de ne pas être profitable [60].

De très nombreux essais en soufflerie sur plaque plane ([59, 62, 277, 280, 281] pour n'en citer que certains) ont été entrepris avec des *riblets* placés obliquement, avec un angle de dérapage β, par rapport à la direction de l'écoulement moyen. Bien que l'influence du dérapage sur le frottement dépende des dimensions et de la géométrie des *riblets*, toutes les études convergent sensiblement vers les résultats suivants [60, 152] :

- Pour des *riblets* placés avec un angle d'incidence β inférieur à $10 - 15°$, la réduction de traînée n'est pas ou peu affectée ;
- Pour des angles supérieurs, la réduction de traînée chute puis devient nulle lorsque β atteint environ $20 - 35°$;
- Pour des angles encore supérieurs, les *riblets* engendrent une augmentation de la traînée ;
- Cette augmentation de traînée est maximale pour des *riblets* placés perpendiculairement à l'écoulement, c'est-à-dire pour $\beta = 90°$.

Hage *et al.* [111] remarquèrent que cette dégradation du frottement — prise pour des *riblets* proches de leur dimension optimale — est plus importante que celle constatée pour des *riblets* plus petits, en régime visqueux.

Les outils de prédiction du frottement traités précédemment peuvent être utilisés pour évaluer ce comportement [93]. Les équations régissant les écoulements de Stokes étant linéaires, les vitesses longitudinale et transverse par rapport à l'écoulement moyen peuvent être projetées dans le référentiel des *riblets*. Les origines virtuelles, longitudinale et transverse, sont donc des combinaisons

linéaires de celles calculées dans le cas de *riblets* alignés avec l'écoulement. La hauteur de protubérance $\Delta h(\beta)$ pour les *riblets* placés avec un angle d'incidence β se déduit alors de $\Delta h = \Delta h(\beta{=}0)$ par

$$\Delta h(\beta) = \cos(2\beta)\,\Delta h\,. \tag{2.7}$$

En accord avec la remarque précédente de Hage *et al.*, cette formule prédit une dégradation de Δh légèrement plus limitée que la dégradation de FRR constatée expérimentalement pour des *riblets* de dimension optimale. García-Mayoral & Jiménez [93] expliquent qu'il n'est pas étonnant que les outils linéaires basés sur l'écoulement de Stokes ne s'appliquent pas au-delà de la rupture du régime visqueux, puisque les mécanismes y conduisant sont non-linéaires.

2.2.1.6 Influence du nombre de Reynolds

De par leur dimension de l'ordre de la dizaine d'unités de paroi, les *riblets* n'interagissent directement qu'avec l'écoulement et les structures turbulentes proches de la paroi, si bien que l'effet de leur présence ne peut dépasser la zone tampon. Ainsi, le nombre de Reynolds $Re_\tau = \delta^+ = \delta u_\tau/\nu$, basé sur l'épaisseur δ de la couche limite, ne peut moduler que faiblement le comportement des *riblets* [95].

Walsh & Lindemann [281] ont très tôt établi que la dépendance de l'effet des *riblets* à un nombre de Reynolds peut s'exprimer en grande partie au travers de leur dimension en unité de paroi, telle que les nombres de Reynolds s^+ ou l_g^+.

Cependant, il existe une dépendance additionnelle au nombre de Reynolds de la couche limite via le coefficient de frottement $c_{f,\mathrm{ref}}$ [95], bien que ce dernier ne varie que lentement avec le nombre de Reynolds. La formule (2.6), permettant d'évaluer le comportement des *riblets* dans le régime visqueux, témoigne de cette dépendance. Alors que pour de petits *riblets*, la réduction de frottement est quasiment proportionnelle à $\Delta h^+ = (\Delta h/l_\mathrm{g})\,l_\mathrm{g}^+$, qui dépend de leur géométrie et de leur dimension en unité de paroi, le coefficient de proportionnalité est quant à lui modulé par $c_{f,\mathrm{ref}}$.

D'autres auteurs [8] caractérisent l'effet des *riblets* en s'appuyant sur le décalage ΔU_∞^+ qu'ils engendrent sur la vitesse adimesionnée de l'écoulement libre. En partant de l'équation $\sqrt{2/c_f} = U_\infty^+ = U_{\infty,\mathrm{ref}}^+ + \Delta U_\infty^+$, il est alors possible d'établir

$$\Delta U_\infty^+ = \sqrt{\frac{2}{c_{f,\mathrm{ref}}}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-FRR}} - 1\right) \qquad \text{ou} \qquad FRR = 1 - \left(1 + \Delta U_\infty^+\sqrt{\frac{c_{f,\mathrm{ref}}}{2}}\right)^{-2}. \tag{2.8}$$

Cette équation se simplifie au premier ordre en $FRR \simeq \Delta U_\infty^+\sqrt{2c_{f,\mathrm{ref}}}$ pour $c_{f,\mathrm{ref}} \ll 1$. On y retrouve la modulation par le nombre de Reynolds de l'écoulement via le frottement $c_{f,\mathrm{ref}}$. Ainsi, pour une géométrie de *riblets* donnée, le taux réduction de frottement se réduit à mesure que le Reynolds augmente et que le coefficient de frottement de référence est faible. Ce résultat est également constaté expérimentalement [254].

Ainsi, il est plus pertinent de caractériser le potentiel de *riblets* en utilisant les paramètres Δh^+ ou ΔU_∞^+ qui, contrairement au taux de réduction de frottement FRR, ne dépendent pas du nombre de Reynolds de la couche limite [8, 252].

Il faut néanmoins garder en tête que les résultats d'essais ou de simulations effectués à des nombres de Reynolds aussi faibles que $Re_\tau \simeq 180$ doivent être traités avec prudence dans la mesure où un écoulement à un tel nombre de Reynolds n'est que marginalement turbulent. Tout d'abord, au sein de la zone tampon, le comportement de l'écoulement à $Re_\tau \simeq 180$ ne vérifie pas parfaitement les tendances observées aux nombres de Reynolds supérieurs [191]. De plus, à cela s'ajoute le fait que la dimension de la couche limite aux faibles nombres de Reynolds ne peut être considérée comme négligeable devant celle des *riblets*. Pour l'étude de rugosité, Jiménez [135] a établi que la taille h d'un élément rugueux ne devait pas dépasser $0.025\,\delta$ pour que l'on puisse considérer qu'il ne perturbe pas la couche limite dans sa totalité. En appliquant ce critère avec des *riblets* de hauteur typique $h^+ \simeq 10-15$, le nombre de Reynolds des études doit dépasser $Re_\tau \gtrsim 600$ pour que l'on puisse exclure l'éventualité d'effets bas-Reynolds [95].

FIGURE 2.9 – Essais en soufflerie de *riblets* réalisés par l'Onera. (*À gauche*) Essais transsoniques sur une ogive/cylindre réalisés à la soufflerie T2 de Toulouse pour des nombres de Mach de 0.4 à 0.8 ; (*À droite*) Essais sur maquette d'A320 à l'échelle 1/11 réalisés à la soufflerie S1 de Modane. Figures extraites de [60].

2.2.1.7 Influence du nombre de Mach

Les *riblets* ont été très largement étudiés en régime faiblement compressible, mais également en écoulement transsonique et supersonique. Viswanath [274] revient en détail sur les différentes études réalisées dans ces conditions compressibles.

Les réductions de traînée obtenues en écoulement à basse vitesse ont été confirmées en régime transsonique [59, 63, 254] sur des corps de géométrie générique de type ogive/cylindre, comme représenté sur la figure 2.9 (*gauche*).

En écoulement supersonique, très peu d'essais en soufflerie ont été réalisés [99, 226]. Ceux réalisés à l'Onera sur des géométries de type cône/cylindre jusqu'à Mach 2.5 montrent des réductions de traînée comparables à celles des plus bas nombres de Mach [61].

L'avion de combat F-104G a également servi de banc d'essai en vol [293] : des réductions de traînée de 4 à 15% ont été observées sur la plaque rainurée fixée sous l'avion, pour des nombres de Mach de 1.2 à 1.6. Cette campagne d'essais en vol a confirmé la très faible dépendance au nombre de Mach.

Très récemment, des simulations numériques directes (DNSs) ont été réalisées pour des écoulements super- et hyper-soniques de nombres de Mach 2.5 et 7.2 [76]. La courbe de réduction de traînée en fonction de la dimension des *riblets* suit la tendance établie en régime incompressible, figure 2.5. De façon cohérente avec la loi de dimensionnement empirique (2.4) établie pour les écoulements subsoniques, la dimension optimale est atteinte pour des *riblets* triangulaires de dimension $l_g^+ \simeq 10$ pour les deux conditions d'écoulement super- et hyper-soniques. Le taux de réduction de frottement maximal — d'environ 7% — comme l'ensemble de la courbe $FRR(l_g^+)$ sont dans la plage de dispersion des mesures subsoniques de la figure 2.7 (*droite*). Pour des valeurs de l_g^+ supérieures au cas optimal, le frottement est légèrement plus défavorable en hypersonique que dans le cas supersonique.

La similitude observée dans la réduction du frottement pour une large gamme de nombres de Mach indique que la dynamique de l'écoulement des *riblets* en régime de rupture n'est pas modifiée significativement par des effets de compressibilité — au moins jusqu'à Mach 7.2. Une dépendance au nombre de Mach semble exister pour des *riblets* de dimension plus importante [76].

2.2.1.8 Influence du gradient de pression

Qu'ils soient favorables ou adverses, les gradients de pression sont omniprésents dans les configurations applicatives de l'aéronautique. C'est ce qui motive les études entreprises sur configuration complète, comme les essais en soufflerie visibles sur la figure de *droite* de 2.9. Paradoxalement, il est assez difficile de mesurer une variation de frottement pariétal dans de telles conditions d'écou-

lement : les estimations basées sur la mesure directe sont sujettes aux erreurs dues aux différences d'effort de pression entre l'amont et l'aval de la balance ; les estimations basées sur l'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement, équation (1.60), ne sont pas assez précises pour les quelques pour cent de réduction de traînée induits par des *riblets* [62, 280]. C'est peut-être la raison qui explique la disparité des résultats obtenus.

Les premières études [216, 255] pointent une très forte chute des performances de réduction de traînée pour des *riblets* placés dans un gradient de pression, qu'il soit favorable ou adverse. D'autres études [45, 180, 280] rapportent des réductions de traînée encore très honorables pour des gradients de pression bien plus intenses. Coustols & Savill [62] concluent que les gradients de pression rencontrés autour d'un profil d'aile, qu'ils soient positifs ou négatifs, ont un effet négligeable sur la performance des *riblets*. Enfin, Debisschop & Nieuwstadt [66] observent une augmentation de 7 à 13% de la réduction de traînée en plaçant des *riblets* triangulaires dans un gradient adverse bien plus intense.

2.2.1.9 Influence sur la transition laminaire/turbulente

Des études ont également été conduites sur la capacité des *riblets* à influencer la transition laminaire–turbulente. Une revue détaillée de ce sujet ne sera pas présentée ici et le lecteur intéressé peut se référer aux articles [109, 150, 258].

Notons tout de même que l'influence des *riblets* sur la transition dépend grandement du mécanisme de transition. Pour une transition de type K (*K-type transition*), les *riblets* ont pour effet d'amplifier la croissance linéaire des instabilités bidimensionnelles de Tolmien–Schlichting (dîtes ondes TS [245, 264]). Inversement, les *riblets* amortissent également les structures tourbillonnaires tridimensionnelles qui en découlent, appelées tourbillons Λ (*Λ-vortices*), et qui mènent à la création de spots turbulents. D'autre part, les *riblets* retardent les transitions dîtes obliques en stabilisant les fluctuations transverses et, là encore, les tourbillons Λ.

2.2.2 Caractéristiques de l'écoulement contrôlé

Au-delà du frottement moyen, les autres grandeurs caractéristiques et les variables de champ de la couche limite sont également affectées par la présence de *riblets* à la paroi. Dans cette section, on se propose de détailler les principales modifications engendrées par les *riblets* dans l'écoulement.

2.2.2.1 Distribution spatiale du frottement sur la surface des rainures

Comme brièvement abordé dans le cas d'écoulement laminaire, au paragraphe 2.2.1.1, le frottement n'est pas homogène sur la surface des *riblets*. Sa distribution spatiale dépend grandement de la géométrie. Au-dessus de *riblets* triangulaires, Hooshmand *et al.* [114] mesurent, au fond de la vallée, un frottement 40% plus faible que celui d'une paroi lisse, alors qu'au niveau de la crête, il est environ 10% plus élevé.

Choi *et al.* [37] constatent que la distribution relative du frottement est à peu près indépendante de la taille des *riblets*, du moins tant que les termes de convection sont négligeables, c'est-à-dire pour des *riblets* dans leur régime visqueux ou de rupture. Près des coins anguleux, les distributions de frottement et de vitesse obéissent alors asymptotiquement à des solutions locales auto-similaires qui ne dépendent que de l'angle du coin.

En fait, les distributions de frottement relatif pour les écoulements laminaires et turbulents sont très similaires [46, 205, 94]. Peet & Sagaut [205] le confirment en comparant la distribution de frottement relatif de l'écoulement turbulent à celle de l'écoulement de Stokes (déjà utilisé pour le calcul de l'origine virtuelle $h_{\|}$ et de la hauteur de protubérance Δh dans la section 2.2.1.3). Ces distributions sont tracées pour deux géométries de *riblets* sur la figure 2.10.

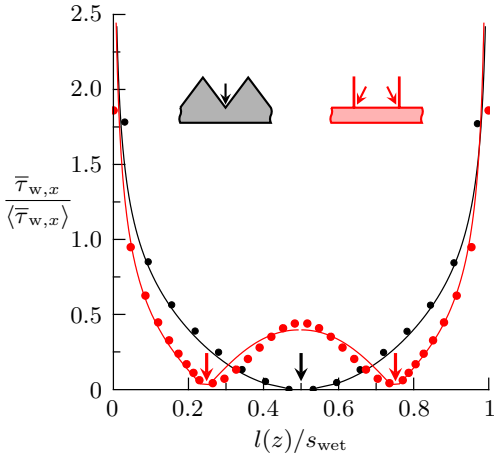


FIGURE 2.10 – Distribution spatiale du frottement pariétal le long de la surface de *riblets* triangulaires (*noir*) et en L (*rouge*) pour un écoulement de Stokes (*ligne*) et un écoulement turbulent (•). L'origine de l'abscisse curviligne $l(z)$ qui longe la surface des *riblets* dans la direction transversale z est placée sur la crête. Les flèches, sur la courbe comme sur les schémas, indiquent la position des coins au fond de la vallée. Figure adaptée de [205].

2.2.2.2 Écoulement moyen

Contrairement aux écoulements de plaque plane, qui sont statistiquement bidimensionnels, l'homogénéité dans la direction transverse est rompue par les *riblets*. Les champs moyens sont donc tridimensionnels.

Auteurs de la première simulation numérique directe d'écoulement turbulent contrôlé par des *riblets*, Choi *et al.* [37] fournissent un ensemble très complet de données de champ. Ils ont notamment rapporté les résultats de simulation en canal turbulent ($Re_\tau = 180$) de *riblets* triangulaires d'angle de crête $\alpha = 60°$ et de taille $s^+ = 20$ et $s^+ = 40$. Les premiers sont proches de la dimension optimale (cf. figure 2.5) et réduisent la traînée de 6% ; les seconds, de dimension trop importante, l'augmentent de 12%. Certaines de leurs données sont présentées sur la figure 2.11. On y observe que la vitesse de l'écoulement, à une altitude donnée, est plus importante au-dessus des vallées, mais que le gradient de vitesse est bien plus raide au-dessus des crêtes. Ce résultat est cohérent avec la distribution de frottement décrite dans le paragraphe précédent.

On observe de plus l'existence d'un écoulement moyen secondaire, à proximité des *riblets*, visible sur les champs moyens de vecteur transverse et de vorticité longitudinale. Son intensité, bien que faible, est beaucoup plus importante dans le cas de grands *riblets*, $s^+ = 40$, que dans le cas de *riblets* en régime de réduction de traînée, $s^+ = 20$: la vitesse maximale des écoulements secondaires dans ces deux cas atteint respectivement 0.8% et 0.2% de U_∞. Goldstein & Tuan [106] analysèrent en détail le rôle de ces vortex secondaires et conclurent qu'ils ont pour effet de convecter de la quantité de mouvement dans le cœur de la rainure en entretenant un balayage moyen de faible intensité. L'augmentation du brassage vertical est une source d'augmentation du frottement. Un tel écoulement secondaire n'est pas présent dans le cas d'écoulement laminaire [36]. Sa source met donc en jeu des phénomènes turbulents. Goldstein & Tuan estiment qu'il est le fruit de la déflexion par la paroi des *riblets* des fluctuations de vitesse transverse.

Enfin, on remarque que la présence des *riblets* ne se fait sentir sur les champs moyens qu'à proximité immédiate de la paroi. À partir de quelques hauteurs de *riblets* seulement au-dessus, l'écoulement ne dépend plus de la position vis-à-vis d'une crête ou d'une vallée. Selon les critères et les études [15, 37, 41, 46, 114, 274], la limite à partir de laquelle l'écoulement est bidimensionnel

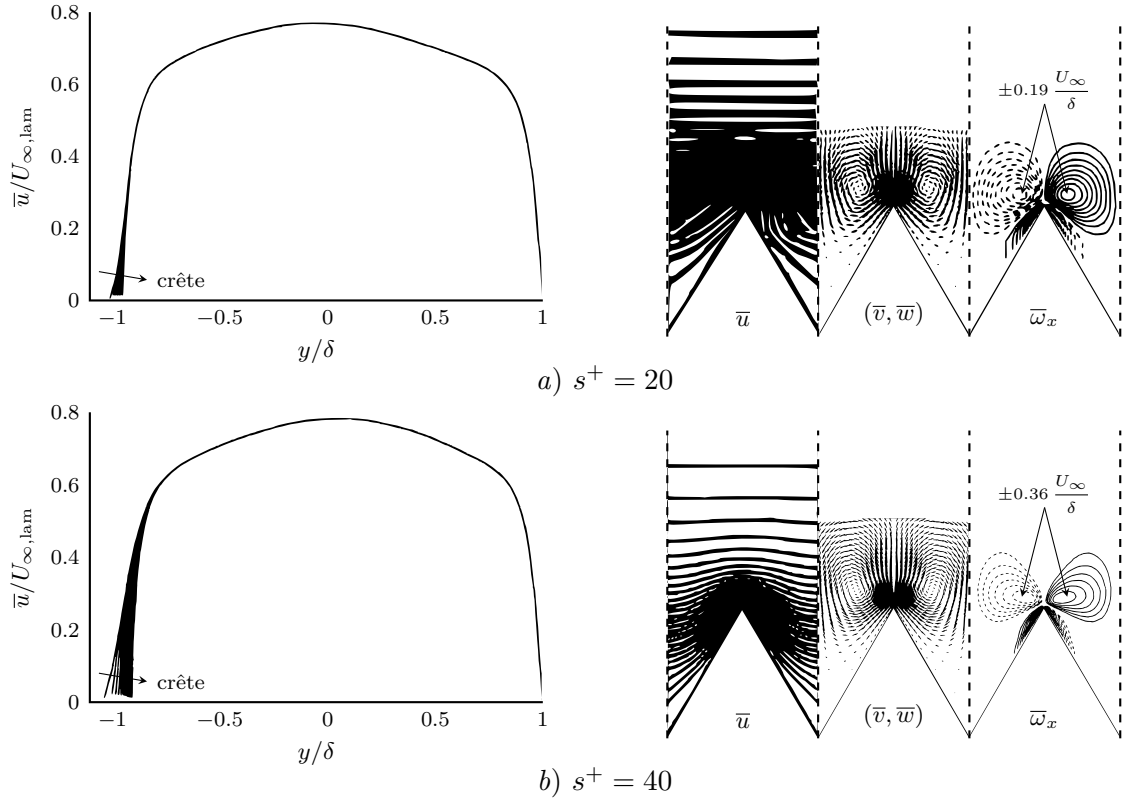


FIGURE 2.11 – Champs moyens dans un canal turbulent dont la paroi inférieure est recouverte de *riblets* triangulaires de dimension (*en haut*) $s^+ = 20$ et (*en bas*) $s^+ = 40$. *De gauche à droite* : Profils de vitesse moyenne $\overline{u}$ adimensionnée par la vitesse au centre du canal laminaire $U_{\infty,\mathrm{lam}}$ en fonction de y/δ pour différentes positions transverses au-dessus des *riblets* ; Iso-valeurs de la vitesse moyenne $\overline{u}$ dans le plan transverse (y, z) par incréments de $0.025\,U_{\infty,\mathrm{lam}}$; Champ de vecteurs de vitesse moyenne $(\overline{v}, \overline{w})$ dans le plan transverse (y, z), dont la norme est rétrécie de moitié dans le cas $s^+ = 40$ par rapport au cas $s^+ = 20$; Iso-valeurs de la vorticité longitudinale moyenne $\overline{\omega}_x$ dans le plan transverse (y, z) par incréments de $0.2\,\delta/U_\infty$ pour le cas $s^+ = 20$ et $0.4\,\delta/U_\infty$ pour le cas $s^+ = 40$. Figures extraites de [37].

— c'est-à-dire ne dépend plus de z — varie entre 10 et 70 unités de parois au-dessus des crêtes. Ainsi, comme on a pu le faire pour le frottement pariétal via la formule (2.3), on défini le champ de vitesse moyenné, non seulement temporellement, mais également spatialement sur une périodicité de *riblets* par

$$\langle\overline{u}\rangle(x,y,z) = \frac{1}{s}\int\limits_{z-\frac{s}{2}<\mathsf{z}<z+\frac{s}{2}} \overline{u}(x,y,\mathsf{z})\,\mathrm{d}\mathsf{z}\,. \tag{2.9}$$

Dans le cas d'un écoulement *globalement* homogène dans la direction transverse — c'est-à-dire sans tenir compte de l'inhomogénéité introduite par les *riblets* — la notion de profil $\langle\overline{u}\rangle(y)$ à une station x donnée a bien du sens et sa comparaison au profil canonique est possible tant que la région très proche paroi est traitée avec précaution. Par la suite, l'usage des chevrons $\langle\cdot\rangle$ sera omis dans un souci de simplification en prenant garde à n'introduire aucune ambiguïté.

Cependant, une telle comparaison implique la définition, au niveau des *riblets*, d'une origine $y = 0$ cohérente avec celle classiquement placée à la paroi dans les cas canoniques de plaque plane. On peut alors se demander s'il est plus adéquat de placer cette origine au fond des vallées, sur les crêtes, à mi-chemin entre les deux, au niveau de l'origine virtuelle visqueuse longitudinale $h_{\parallel}$ ou à bien d'autres positions. La réponse à cette interrogation ne fait pas consensus dans la communauté scientifique et les développements du chapitre 5 tenteront d'apporter un éclairage et une solution à cette problématique.

Sur la figure 2.12, les profils $\overline{u}^+(y^+)$ ont été tracés avec différents choix d'origine $y = 0$ au-dessus de *riblets* de dimension $s^+ = 20$ et $s^+ = 40$. L'influence du choix de l'origine tend à se réduire pour les grandes valeurs de y^+ grâce à l'échelle logarithmique du graphique. Dans la théorie classique des couches limites turbulentes, le comportement du sillage est indépendant de l'état de la paroi [51]. Ainsi, la loi de vitesse déficitaire, formule (1.46), et son asymptote logarithmique dans la zone de recouvrement, formule (1.51), doivent rester valables en présence de *riblets*. Il semble donc que les choix d'une origine placée dans la vallée, sur la crête ou à mi-distance ne soient pas les plus adaptés, étant donnée la déviation des courbes associées par rapport aux tendances logarithmiques attendues. Tout en étant translatée, la courbe issue de l'origine virtuelle $h_{\parallel}$ reproduit quant à elle la forme de la courbe canonique sur une très large étendue.

Pour des *riblets* réduisant la traînée, comme le cas $s^+ = 20$ présenté ici, on a affaire à une surélévation de $\Delta u^+ > 0$ de la zone logarithmique. Pour des *riblets* augmentant la traînée, $s^+ = 40$ ici, on a affaire à un abaissement de la zone logarithmique, $\Delta u^+ < 0$. On retrouve ici le décalage de vitesse abordée dans la formule (2.8) pour caractériser la performance de réduction du frottement des *riblets*. Ce comportement largement observé dans les études sur les *riblets* [114] est également constaté avec d'autres stratégies de réduction de traînée : LEBU (*large eddy break-up devices*) [12], ajout de polymères [170], etc.

Ces observations peuvent être mises à profit pour déterminer expérimentalement le frottement pariétal. En supposant la validité de loi logarithmique déficitaire (1.51) avec un coefficient κ inchangé par la présence de *riblets*, la méthode dite de Clauser [48] permet d'estimer le frottement pariétal $c_f = 2/U_\infty^{+2}$ grâce au profil $\overline{u}(y)$ adimensionné en unité externe. En effet, la relation entre $\overline{u}/U_\infty$ et $\ln(y/\delta)$ dans la zone logarithmique s'écrit alors

$$\frac{\overline{u}}{U_\infty} = \frac{\sqrt{c_f/2}}{\kappa}\ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + \left(1 - \frac{B}{U_\infty^+}\right)\,. \tag{2.10}$$

La pente du profil en échelle logarithmique caractérise donc directement le frottement c_f. Cependant, puisque l'origine de l'axe y est à déterminer, cette équation comporte deux inconnues à elle seule. Perry & Joubert [210] modifient la méthode pour surmonter cette difficulté. Ils proposent de choisir la position de l'origine $y = 0$ de sorte à ce que la zone logarithmique du profil soit la plus longue possible, puis de déterminer le frottement via la formule (2.10). En pratique, non seulement le nombre de Reynolds de l'écoulement doit être important pour que l'étendue de la zone logarithmique soit suffisante [37], mais en outre, la procédure demeure peu précise, que se soit pour prédire l'origine de l'axe y comme pour évaluer le frottement pariétal [90, 114].

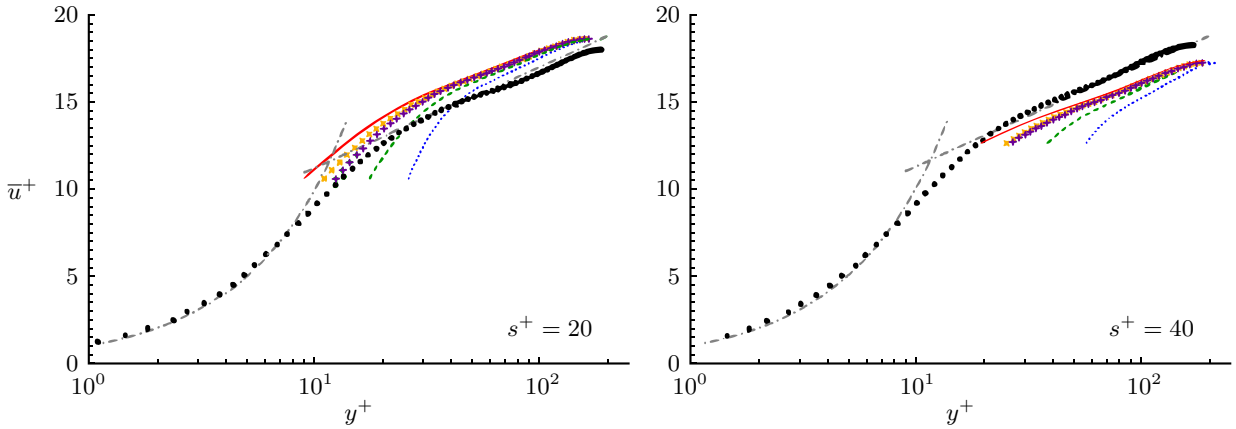


FIGURE 2.12 – Profil de vitesse moyenne $\overline{u}^+(y^+)$ adimensionnée en unité de paroi au-dessus de *riblets* triangulaires de dimension (*à gauche*) $s^+ = 20$ et (*à droite*) $s^+ = 40$ avec l'origine $y = 0$ placée sur la crête (—), dans la vallée ($\cdots$), à mi-distance entre les deux (- - -), à l'origine virtuelle visqueuse $h_{\parallel}$ ($+++$), à 13 unités de paroi en dessous de la position de maximum d'énergie cinétique turbulente ($\times\times\times$). Le profil de référence de couche limite de plaque plane ($\bullet$) ainsi que les lois linéaire (1.48) et logarithmique (1.50) ($\cdot - \cdot - \cdot$) sont également représentés. Figures extraites de [37].

2.2.2.3 Tensions de Reynolds

Après avoir observé les champs de vitesses moyennes, intéressons-nous à l'intensité des fluctuations de vitesse, c'est-à-dire aux tensions de Reynolds. Des coupes transverses d'iso-valeurs des champs fluctuants sont représentées sur la figure 2.13. Elles sont issues des données de Goldstein & Tuan [106] obtenues avec des *riblets* quasi-triangulaires de dimension $s^+ = 23$ réduisant la traînée de frottement.

Pour les *riblets* en régime de réduction de traînée, comme c'est ici le cas, l'ensemble des intensités fluctuantes $u_{i,\mathrm{rms}}$ et $-\overline{u'v'}$ sont fortement réduites, notamment à proximité de la paroi. Cependant, bien qu'affaiblis, ces niveaux fluctuants ne sont malgré tout pas négligeables à l'intérieur des rainures. Ainsi, Chu & Karniadakis [46] avancent qu'il ne serait pas pertinent de vouloir bien décrire la physique de l'écoulement, même entre les rainures, grâce à un écoulement de Stokes.

Une autre différence notable par rapport aux écoulements de plaque plane est la non-nullité des tensions de Reynolds $R_{xz} = \overline{u'w'}$ et $R_{yz} = \overline{v'w'}$, bien que leurs amplitudes soient très faibles. À proximité des *riblets*, la quantité de mouvement longitudinal est diffusée de façon analogue par les tensions de Reynolds R_{xy} et R_{xz}. En particulier le long des parois verticales de *riblets* en L, c'est bien $\pm R_{xz}$ qui joue le rôle de tension de cisaillement turbulente.

Comme pour les champs moyens, les champs fluctuants deviennent rapidement indépendants de la direction transverse z lorsque l'on s'écarte de la paroi. C'est ce dont témoigne également la figure 2.14 sur laquelle les profils pris à la verticale des crêtes et des vallées se superposent dès $y^+ \gtrsim 15$ pour toutes les intensités fluctuantes $u_{i,\mathrm{rms}}$ et pour $\overline{u'v'}$.

Les profils de la couche limite bordée par des *riblets* suivent de près les tendances de couche limite canonique de plaque plane. À proximité des *riblets* comme dans le reste de la couche limite, une baisse pouvant atteindre $10-15\%$ est observée pour toutes les intensités fluctuantes adimensionnées par U_∞ lorsque les *riblets* sont en régime de réduction de traînée [37, 41, 46, 114, 215, 277]. En particulier, l'affaiblissement de la contrainte de cisaillement turbulent $\overline{u'v'}$ traduit une baisse du transport vertical de quantité de mouvement vers la paroi, ce qui concorde avec la réduction du frottement pariétal. La comparaison des profils adimensionnés par $u_{\tau,\mathrm{ref}}$ sur la figure 2.14 est équivalente à un adimensionnement par U_∞, puisque les couches limites avec et sans *riblets* partagent la même valeur dimensionnée U_∞ et le même adimensionnement $u_{\tau,\mathrm{ref}}$.

Sur la figure 2.14, la position du maximum de fluctuations longitudinales est quasiment inchangée

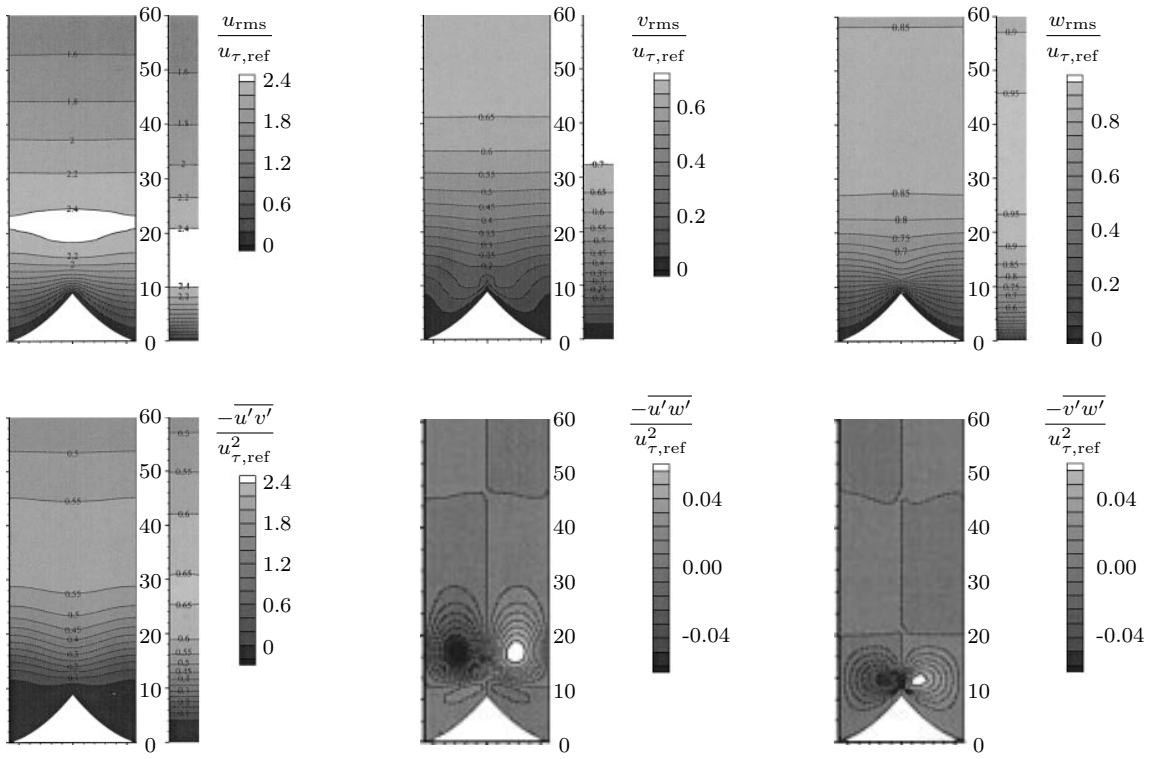


FIGURE 2.13 – Iso-valeurs des intensités fluctuantes dans le plan transverse (y, z) d'un canal turbulent dont la paroi inférieure est recouverte de *riblets* quasi-triangulaires de dimension $s^+ = 23$: (*En haut, de gauche à droite*) u_{rms}, v_{rms} et w_{rms} ; (*En bas, de gauche à droite*) $-\overline{u'v'}$, $-\overline{u'w'}$ et $-\overline{v'w'}$; Les champs de l'écoulement de plaque plane de référence sont également affichés pour comparaison (sauf $-\overline{u'w'}$ et $-\overline{v'w'}$ dont la valeur est nulle). Les données sont adimensionnées par la vitesse de frottement $u_{\tau,\text{ref}}$ de la plaque plane de référence, même pour les champs relatifs au cas avec *riblets*. Figures extraites de [106].

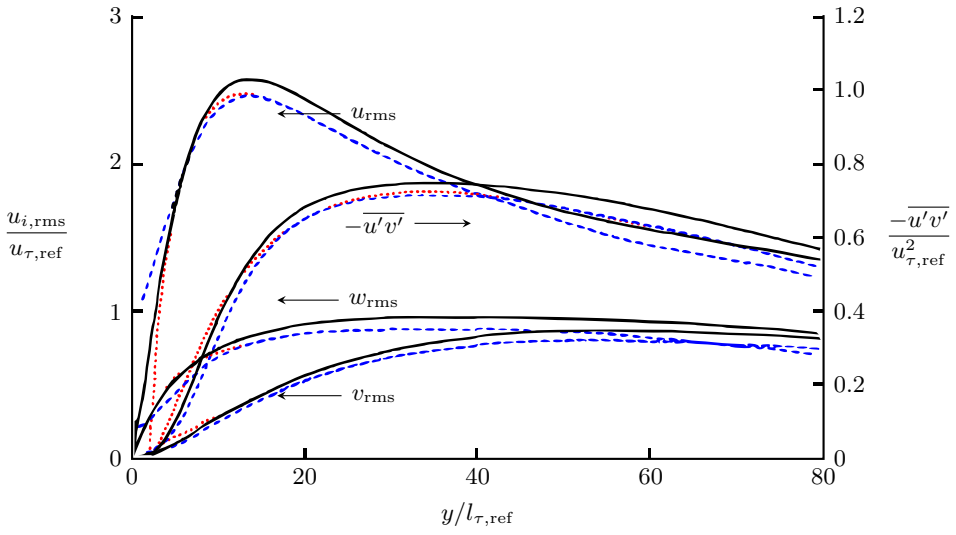


FIGURE 2.14 – Profils des intensités fluctuantes $u_{i,\text{rms}}$ (*axe de gauche*) et de la tension de cisaillement de Reynolds $-\overline{u'v'}$ (*axe de droite*) à la verticale des crêtes (· · ·) ou des vallée (- - -) de *riblets* triangulaires de dimension $s^+ = 20$ recouvrant une des deux parois d'un canal turbulent. Les profils de référence de plaque plane (—) sont également représentés. Les données sont adimensionnées par la vitesse et la longueur de frottement $u_{\tau,\text{ref}}$ et $l_{\tau,\text{ref}}$ de la plaque plane de référence, même pour les courbes relatives au cas avec *riblets*. L'origine $y = 0$ pour la paroi avec *riblets* est placée 13 unités de paroi en dessous de la position de maximum d'énergie cinétique turbulente. Figure adaptée de [37].

par les *riblets*. Cela est dû au choix du positionnement de l'origine $y = 0$ de la paroi rainurée, qui a justement consisté à faire en sorte que le maximum d'énergie cinétique turbulente se retrouve à la même altitude $y^+ = 13$ que l'écoulement de référence. Un choix d'origine placée plus bas (dans le fond de la vallée des *riblets* par exemple) aurait mené à la conclusion que par les *riblets* repousse le maximum de fluctuation plus loin de la paroi. Le choix opposé d'une origine plus haute conduirait à la conclusion contraire. Il est donc difficile d'apporter un éclairage grâce à ces courbes quant à la possible faculté des *riblets* à écarter les structures turbulentes de la paroi.

2.2.3 Mécanismes de réduction de traînée

Les mécanismes physiques responsables de la réduction de traînée des *riblets* ont été étudiés en détail, et pourtant, certains aspects demeurent mal compris ou controversés. On s'intéresse ici aux principaux mécanismes qui joueraient un rôle dans le comportement des *riblets*.

2.2.3.1 Résistance aux fluctuations transverses

La capacité à canaliser l'écoulement et entraver les mouvements transverses que l'on prête intuitivement aux *riblets* a été utilisée très tôt [16, 15, 41] comme explication majeure de la réduction de traînée. Grâce aux barrières longitudinales qu'ils représentent, les *riblets* semblent réduire le frottement en perturbant les activités turbulentes proches-paroi. Ce constat a d'ailleurs conduit Goldstein *et al.* [105] à réaliser des simulations numériques dans lesquelles une grande partie du comportement de l'écoulement était retrouvée en ne modélisant que l'effet de blocage par les *riblets* des fluctuations transverses.

Le frottement turbulent est en grande partie généré lors des évènements de balayages, comme établi dans la section 1.5.4. Les *riblets* affaibliraient ces évènements en gênant le mouvement latéral des tourbillons quasi-longitudinaux à leur origine [141].

Comme mentionné au paragraphe 1.3.1, dans la sous-couche linéaire d'une couche limite turbulente (parfois dénommée sous-couche visqueuse et délimitée par $y^+ \lesssim 3{-}7$), la viscosité est dominante devant les phénomènes turbulents et inertiels. L'écoulement qui entoure des *riblets* de dimension suffisamment petite est donc, à leur échelle, un cisaillement visqueux uniforme. Ces *riblets* infinitésimaux sont donc immergés dans un écoulement de Stokes avec des conditions aux limites imposées à chaque instant, de façon quasi-statique et uniforme, par les fluctuations turbulentes de la couche limite.

Considérons alors l'écoulement de Stokes animé par une vitesse longitudinale, c'est-à-dire alignée avec la direction des *riblets*. On utilisera le symbole $\parallel$ en indice pour qualifier les quantités liées à cet écoulement visqueux, représenté sur la figure 2.15 (*gauche*). De même, on s'intéresse à la solution de l'équation de Stokes pour une condition aux limites de vitesse transverse, c'est-à-dire orthogonale à la direction des *riblets*. L'indice $\perp$ qualifiera cette solution représentée sur la figure 2.15 (*droite*). Puisque l'équation de Poisson régissant les écoulements de Stokes est linéaire, une combinaison linéaire de ces deux solutions suffit à déterminer celle pour toutes les autres directions de condition aux limites.

Bechert & Bartenwerfer [15] utilisent des transformations conformes pour déterminer analytiquement ces écoulements visqueux sur une large variété de géométrie de *riblets*. Ils remarquent notamment qu'à mesure que l'on s'éloigne de la paroi, l'écoulement dépend de moins en moins de la position latérale par rapport aux crêtes et vallées des *riblets*. Plus précisément, l'écoulement loin au-dessus des *riblets* converge asymptotiquement vers la même solution d'écoulement à cisaillement constant que celle obtenue avec une plaque plane, à condition que celle-ci soit placée à une hauteur adéquate. Pour une géométrie donnée de *riblets*, il est possible de calculer cette position appropriée, appelée **origine virtuelle** (que Bechert & Bartenwerfer appelaient alors *protrusion height*, terme qui sera utilisé plus tard pour une grandeur dérivée). Son ordonnée pour l'écoulement de Stokes longitudinal est notée $h_\parallel$ et celle pour l'écoulement transverse, $h_\perp$. Toutes deux sont reportées sur la figure 2.15 (où elles sont ici négatives puisque le choix a été de positionner l'origine des ordonnées

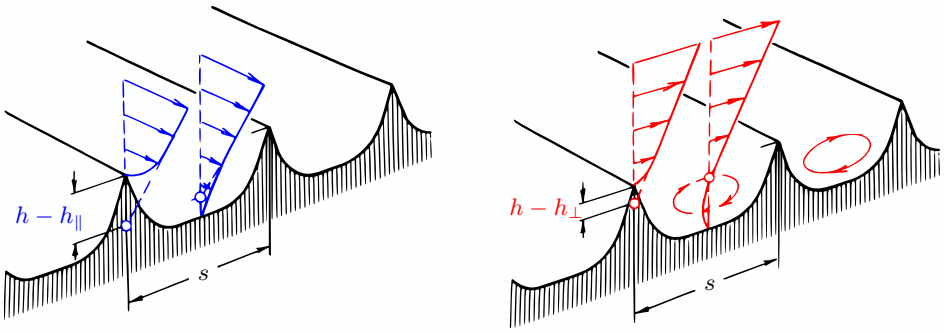


FIGURE 2.15 – Écoulement visqueux de Stokes au-dessus de *riblets* animé par une condition aux limites de vitesse (*à gauche*) longitudinale et (*à droite*) transverse. Afin d'uniformiser la définition des origines virtuelles $h_\parallel$ et $h_\perp$ dans ce manuscrit, la figure originelle a été modifiée de sorte à ce qu'ils soient ici définis par rapport à la position des vallées de *riblets* et non par rapport à celle des crêtes. Figure adaptée de [18].

au niveau de la crête des *riblets*). Plus tard, la notion d'origine virtuelle sera étendue des écoulements de Stokes au cas des écoulements turbulents, comme étant la position particulière à laquelle la couche limite "voit" une paroi plane équivalente.

Bechert & Bartenwerfer avaient pour objectif d'établir un lien entre l'origine virtuelle $h_\parallel$ et la réduction de frottement engendrée par les *riblets* dans les écoulements turbulents. C'est finalement Luchini *et al.* [169] qui compléteront leurs travaux. Ils proposent de s'intéresser à la différence d'ordonnée Δh entre les origines virtuelles $h_\parallel$ et $h_\perp$, définissant ainsi la **hauteur de protubérance** (*protrusion height*) :

$$\Delta h = h_\perp - h_\parallel \,. \tag{2.11}$$

Par cette définition, la hauteur de protubérance mesure l'efficacité d'une géométrie de *riblets* à entraver les fluctuations transverses préférentiellement à l'écoulement longitudinal. Elle quantifie ainsi la notion intuitive évoquée au début de cette section. Comme précisé dans la section 2.2.1.3 et représentée sur la figure 2.8, sa valeur est bornée par celle des *riblets* idéaux en L, d'épaisseur s nulle et de rapport d'aspect h/s grand, pour lesquels $\Delta h = 0.132\, s$.

Pour établir le lien entre cette hauteur de protubérance "visqueuse" et la réduction de traînée en couche limite turbulente, il faut s'intéresser à la manière par laquelle les *riblets* interagissent avec l'écoulement. Le profil moyen d'une couche limite turbulente canonique est décrit par la loi linéaire (1.48) dans la sous-couche linéaire et par la loi logarithmique (1.50) dans la zone de recouvrement. Ces deux lois s'intersectent à une hauteur y_0^+, solution de l'équation

$$y_0^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y_0^+) + C \,. \tag{2.12}$$

Une hypothèse concernant l'effet des *riblets* sur l'écoulement est de considérer que les fluctuations transverses, et donc la turbulence proche-paroi, sont amorties sur une hauteur Δh au-dessus d'une paroi plane équivalente. Dans cet intervalle très proche-paroi, rien n'entrave néanmoins la présence d'un écoulement longitudinal. Bechert *et al.* [18] et Garía-Mayoral & Jiménez [93] supposent alors que les *riblets* allongent la zone de validité de la sous-couche linéaire, c'est-à-dire, surélèvent la position y_0 de la hauteur Δh^+. Le coefficient C doit être réajusté pour que l'équation précédente demeure valide en remplaçant y_0^+ par $y_0^+ + \Delta h^+$. En linéarisant pour de petites valeurs, le coefficient ΔC, parfois noté Δu^+, est lié à Δh^+ par la relation de proportionnalité $\Delta C = \mu_0\, \Delta h^+$. La constante vaut $\mu_0 = 0.785$ en utilisant $C = 5.5$ [18]. Une évaluation empirique conduit néanmoins à une valeur légèrement inférieure, aux alentours de 0.66 [134].

La loi logarithmique de la zone de recouvrement se retrouve affectée par la modification du coefficient C. Elle s'écrit alors

$$\overline{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C + \Delta C \,. \tag{2.13}$$

La vitesse de l'écoulement libre U_∞^+, et donc le coefficient de frottement c_f, peuvent être reliés au petit décalage ΔC du profil de vitesse logarithmique en utilisant (1.62). Si l'on considère que la vitesse de l'écoulement libre U_∞ et l'épaisseur de la couche limite δ sont négligemment modifiées par les *riblets*, le taux de réduction de frottement s'exprime comme

$$FRR = -\frac{\Delta c_f}{c_{f,\text{ref}}} = \frac{\Delta C}{(2c_{f,\text{ref}})^{-1/2} + (2\kappa)^{-1}}\,. \tag{2.14}$$

Cette équation est à l'origine de la relation (2.6) permettant l'évaluation empirique (2.5) de la réduction de frottement d'une géométrie de *riblets*. Tout comme la formule (2.8) en identifiant ΔC à ΔU_∞^+, cette équation se simplifie en $FRR \simeq \Delta U_\infty^+ \sqrt{2c_{f,\text{ref}}}$ pour les faibles valeurs de $c_{f,\text{ref}}$.

Parfaitement à même de caractériser et de quantifier la réduction de traînée permise par des *riblets* en régime visqueux, cette théorie tombe en défaut quand il s'agit d'expliquer la saturation puis la dégradation que l'on observe dans les régimes dits "de rupture" et "de rugosité" de la figure 2.5.

2.2.3.2 Interactions entre *riblets* et TQLs

Grâce à leur simulation DNS précurseure, Choi *et al.* [37] ont apporté une grande quantité d'information instationnaire en très proche-paroi, jusqu'alors inaccessible aux expérimentateurs. Comme les auteurs précédents, ils font le constat que les *riblets* restreignent les fluctuations transverses. Le lien entre les fluctuations turbulentes et le frottement pariétal, sujet du paragraphe 1.5.4, est étroitement lié au transport de quantité de mouvement vers la paroi induit par les tourbillons quasi-longitudinaux. La présence d'un tourbillon quasi-longitudinal juste au-dessus de la paroi génère une hausse locale du frottement pariétal.

Pour des *riblets* triangulaires de largeur $s^+ = 20$ et $s^+ = 40$, réduisant et augmentant respectivement la traînée, le frottement pariétal instantané sur la surface des *riblets* est représenté sur les figures de *gauche* de 2.16. Comme mentionné auparavant, on constate globalement un frottement plus élevé sur les crêtes que dans les vallées. À la verticale des zones à fort frottement, comme celles des plans transverses localisés par des flèches, on observe la présence de structures tourbillonnaires longitudinales sur les figures de *droite* de 2.16. Pour les deux dimensions de *riblets*, un TQL intense est présent sur la partie droite de la coupe transverse (y, z), en concordance avec l'augmentation locale du cisaillement visqueux pariétal. Ce comportement a également été observé expérimentalement, comme le montre la figure 2.17.

Le diamètre moyen des TQLs est d'environ 30 unités de paroi (leur description est fournie dans le paragraphe 1.4.1). Ce diamètre caractéristique est plus étroit que la largeur crête-à-crête des *riblets* dans le cas $s^+ = 40$, permettant à la plupart des TQLs de se loger librement dans le sillon des *riblets*. À l'inverse, dans le cas de *riblets* de largeur plus réduite $s^+ = 20$, la majorité des TQLs restent au-dessus des rainures puisque leur diamètre moyen est plus large que l'espace entre deux crêtes.

Le mécanisme suggéré par Choi *et al.* est illustré par le diagramme schématique de la figure 2.18. Le cœur de ce mécanisme se base sur la possibilité ou l'impossibilité pour les TQLs de se loger entre les *riblets*. Dans le cas où la largeur des *riblets* est trop faible devant le diamètre des TQLs, ceux-ci sont repoussés par les crêtes plus loin de la paroi et élèvent avec eux la position des *streaks*. Ces constatations ont pu être observées expérimentalement [62] et numériquement [105, 46]. Ainsi, malgré l'augmentation de la surface mouillée, les *riblets* de petite taille cumulent moins de frottement qu'une plaque plane, car seule une petite partie de la surface est suffisamment proche des TQLs pour y être effectivement exposée. À l'inverse, les *riblets* de largeur suffisante permettent aux TQLs de se rapprocher de la paroi et de se loger entre les crêtes. Une grande partie de la surface des *riblets* est alors directement exposée aux balayages induits par les TQLs. Ce mécanisme est donc cohérent avec la tendance caractéristique de l'évolution de la traînée des *riblets*, abordée précédemment sur la figure 2.5.

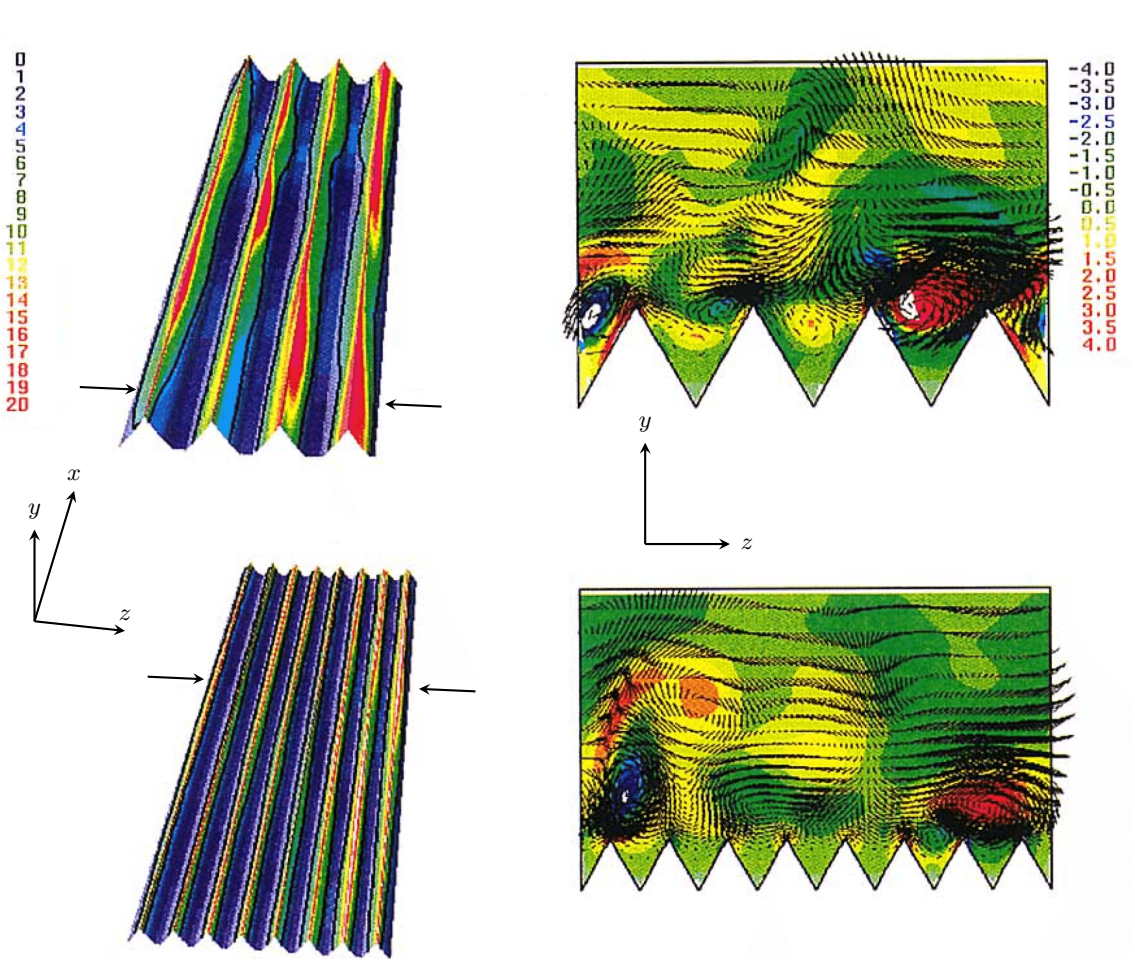


FIGURE 2.16 – Visualisation d'écoulements instantanés au-dessus de *riblets* triangulaires ($\alpha = 60°$) de largeur (*en haut*) $s^+ = 40$ et (*en bas*) $s^+ = 20$. (*À droite*) Contours d'iso-valeurs du frottement pariétal normalisé en unité externe. (*À gauche*) Contours d'iso-valeurs de la vorticité longitudinale ω_x et champ de vecteur vitesse transverse (v, w), dans le plan à x constant indiqué par des flèches sur la figure de droite. Figure extraite de [37].

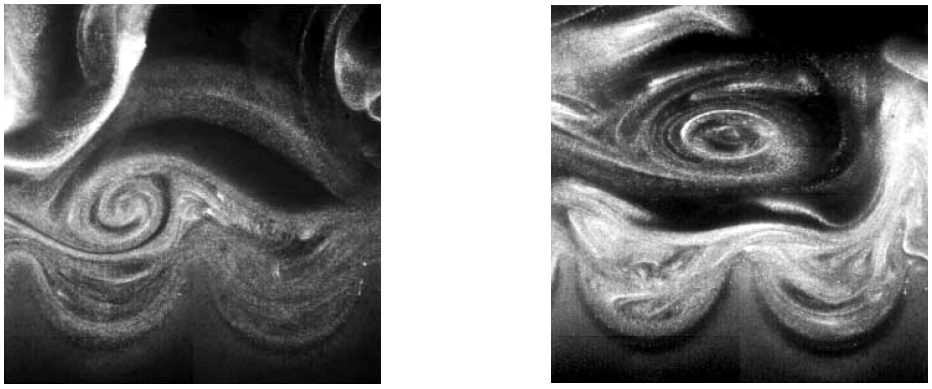


FIGURE 2.17 – Visualisation expérimentale de tourbillons quasi-longitudinaux au-dessus de parois recouvertes de *riblets* de dimension (*à gauche*) $s^+ \simeq 40$, induisant une augmentation de traînée et (*à droite*) $s^+ \simeq 25$, induisant une réduction de traînée. Figure extraite de [164].

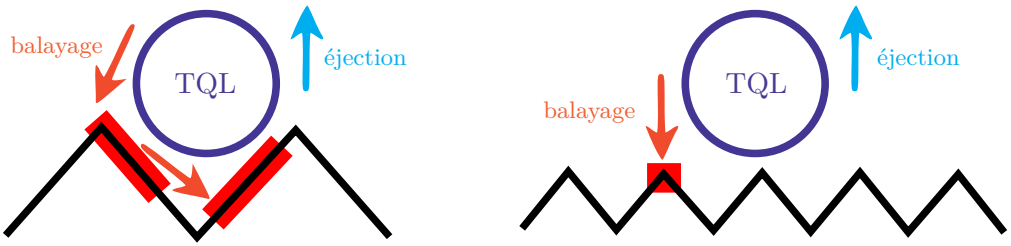


FIGURE 2.18 – Schéma explicatif des mécanismes (*à gauche*) d'augmentation de traînée induite par des *riblets* de grande taille ($s^+ \gtrsim 30$) et (*à droite*) de réduction de traînée induite par ceux de petite taille ($s^+ \lesssim 30$). Les zones rouges sur la surface des *riblets* représentent les zones où le frottement induit est intense. Figure adaptée de [37].

En s'appuyant sur ce mécanisme, Martin & Bhushan [173] ont évalué empiriquement à l'aide de simulations LES la largeur optimale des *riblets*. Ils suggèrent qu'elle serait approximativement 1.5 fois plus petite que le diamètre caractéristique des TQLs. Dans la pratique, le diamètre des TQLs n'est pas unique, mais est distribué autour de 30 unités de paroi, entre 10 et 50 unités de paroi environ. Ainsi, à mesure que la largeur s entre les crêtes successives de *riblets* augmente, de plus en plus de TQLs sont à même de venir se nicher entre et induire une augmentation de la traînée. Le mécanisme proposé permet donc d'expliquer la dégradation progressive de la réduction de traînée.

Choi *et al.* avancent que, pour les *riblets* induisant une réduction et pour ceux induisant une augmentation de traînée, le frottement local moyen à proximité des crêtes est identiquement élevé et le frottement au fond des vallées est identiquement faible. La différence notable entre les *riblets* augmentant et réduisant la traînée concerne le frottement à mi-chemin entre crêtes et vallées, qui est bien plus élevé dans ce premier cas de grands *riblets*. C'est ce que constatent numériquement Choi *et al.*. Cependant, les résultats d'études numériques postérieures [205, 94] suggèrent que la distribution relative de frottement sur la surface d'une géométrie de *riblets* ne dépend pas de la taille des *riblets* et du régime de réduction ou d'augmentation de traînée.

García-Mayoral & Jimenez [94] ont à ce titre calculé la position statistique moyenne des TQLs pour des *riblets* rectangulaires sur une large gamme de dimension $s^+ \in [8; 33]$. Leurs résultats indiquent qu'en moyenne, les TQLs ne s'approchent pas des crêtes à moins de $10 - 15$ unités. Ils précisent ne pas avoir observé de tourbillons se loger au sein des rainures et supposent que ce mécanisme, s'il existe, n'a lieu que pour des *riblets* de très grande dimension. D'un autre côté, Lee & Lee [164] ont capturé des milliers de champs de vitesse expérimentaux obtenus par PIV à partir de clichés comme ceux de la figure 2.17. Leur relevé de la position centrale des TQLs (repérée par un maximum de vorticité longitudinale) révèle de nombreux vortex logés dans les vallées de *riblets* de large dimension $s^+ \simeq 40$, appuyant ainsi les constations de Choi *et al.*.

Cette théorie est simple et intuitive. Cependant, on peut déplorer qu'elle ne soit que qualitative. En effet, à la connaissance de l'auteur, aucune donnée quantitative ne caractérise véritablement l'influence des TQLs sur le frottement pariétal de différentes tailles et géométries de *riblets*. Goldstein *et al.* [105] se demandent à ce titre si l'éloignement (respectivement rapprochement) des TQLs de la paroi est une cause ou une conséquence de la réduction (respectivement augmentation) de traînée. D'une part, si les tourbillons s'écartent de la paroi, ils drainent moins de fluide à haute vitesse vers la paroi, ce qui réduit la traînée. D'autre part, il est également possible que, les *riblets* réduisant la traînée, la région de cisaillement maximale s'écarte de la paroi et emmène les TQLs avec elle.

Publié la même année que l'article de Choi *et al.* [37], celui de Chu & Karniadakis [46] évoquent une interaction supplémentaire entre *riblets* et les structures du cycle de turbulence proche-paroi. Ces derniers analysent les nombreuses observations appuyant que le mouvement latéral des *streaks* est réfréné en présence de *riblets* de taille suffisante [9, 37]. En particulier, García-Mayoral & Jiménez [94] constatent que les TQLs ont tendance à se positionner à la verticale des vallées de façon

de plus en plus localisée à mesure que la taille des *riblets* augmente et que la réduction de traînée se détériore. Ainsi, l'ordonnancement latéral par les *riblets* des TQLs et des streaks pourrait avoir un effet délétère sur le frottement pariétal.

Cette stabilisation du flottement latéral (*spanwise meandering*) des *streaks* trouverait son origine dans la présence d'écoulements secondaires, générés par la résistance aux fluctuations transverses de *riblets* isolés ou espacés [105, 106]. Paradoxalement, l'introduction de vorticité longitudinale proche de la paroi serait, à l'inverse, responsable de la réduction de traînée observée pour d'autres dispositifs, comme l'oscillation transverse de paroi qui sera abordée dans la section 2.3.

À la lumière de ces observations et interprétations, l'interaction entre les *riblets* et la turbulence proche-paroi joue indéniablement un rôle majeur dans la modification du frottement pariétal. Cependant, aucun des mécanismes proposés n'établit une relation de causalité concordante et quantifiée entre les effets des *riblets* sur les structures fluctuantes et la réduction du frottement.

2.2.3.3 Mécanisme de revêtement rugueux

Jiménez [135] interprète la réduction de traînée induite par les *riblets* comme un effet de rugosité transitionnel (*transitional roughness*). Le qualificatif "transitionnel" traduit le fait que cet effet apparaît à des tailles de *riblets* pour lesquelles les éléments de rugosité conventionnelle ne présentent pas encore un comportement "totalement" rugueux. Revenons tout d'abord sur la théorie des écoulements turbulents sur parois rugueuses, dont Jiménez a fourni une revue détaillée [135].

L'effet d'une paroi rugueuse quelconque sur une couche limite dépend de la taille caractéristique k de ces rugosités. Plus précisément, deux paramètres doivent être pris en compte. Tout d'abord, le nombre de Reynolds de rugosité, k_s^+, mesure l'effet des rugosités dans la sous-couche visqueuse. Comme on le verra par la suite, la rugosité de grain de sable équivalente k_s introduite ici est directement liée à la dimension physique k des éléments rugueux et à leur géométrie. Ensuite, le ratio k/δ est l'autre paramètre d'importance puisqu'il permet de déterminer si le profil de vitesse logarithmique du cas canonique peut survivre à la perturbation par les éléments rugueux.

Si k n'est pas négligeable devant δ, la rugosité affecte l'écoulement turbulent jusqu'à la zone de recouvrement (ou zone logarithmique) dans laquelle une bonne partie de l'énergie cinétique turbulente est générée. Les éléments rugueux perturbent directement l'ensemble de l'écoulement et les équilibres énergétiques classiques que l'on observe dans les couches limites canoniques. Ce cas sera mis de côté, dans la mesure où il n'apporte pas d'élément de compréhension utile à l'étude des *riblets*. Dans la suite, on considère donc des éléments rugueux petits devant l'épaisseur de la couche limite, $k \ll \delta$.

Des rugosités de taille supérieure à quelques unités de paroi affectent la sous-couche visqueuse et, avec elle, le cycle de régénération de la turbulence dans la zone tampon. Si $k^+ \gtrsim 50 - 100$, ce cycle peut même être totalement détruit. Comme on a pu le voir dans la section 1.3.1, l'influence de la dynamique de la sous-couche visqueuse sur l'écoulement moyen dans le reste de la couche limite est prise en compte par l'intermédiaire de la constante additive C de la loi logarithmique (1.50). Le principal effet de la rugosité est donc de modifier la valeur de cette constante, comme l'ont fait les *riblets* dans l'équation (2.13) via le terme additif ΔC. Une formulation alternative, mais équivalente, est celle originellement proposée par Nikuradse [195] pour caractériser le profil de vitesse de la zone logarithmique dans des conduites rugueuses :

$$\overline{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y^+}{k_s^+}\right) + 8.5\,. \tag{2.15}$$

La quantité k_s^+, appelée **rugosité de grain de sable équivalente** (*equivalent sand rougness*), et la quantité ΔC, parfois notée Δu^+, caractérisent la rugosité de façon interchangeable. Elles dépendent, en général, de la taille caractéristique k des éléments de rugosité, de leur géométrie, mais aussi de

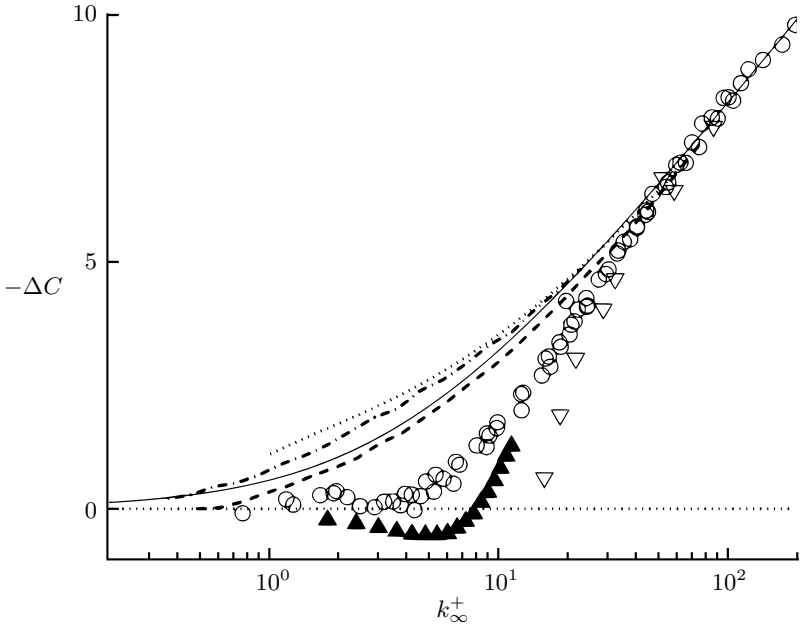


FIGURE 2.19 – Profils de l'évolution de l'écart ΔC à la loi logarithmique canonique en fonction de la dimension caractéristique k_∞ en unité de paroi de la rugosité pour différents types de paroi rugueuse : (○) grains de sable uniformes ; (▽) empilement compact de sphères uniformes ; (▲) *riblets* triangulaires ; (· · ·) métal galvanisé ; (- - -) fonte enduite de goudron ; (· - · -) fer forgé ; (—) corrélation pour le métal galvanisé, la fonte et le fer forgé. Figure extraite de [135].

l'épaisseur de la couche limite δ et de la viscosité via l_τ ou δ^+. Une valeur de k_s^+ élevée correspond à une valeur de ΔC très négative et une forte augmentation de traînée.

Lorsque $k^+ \gtrsim 50 - 100$, Jimenez montre que le frottement pariétal devient indépendant de la viscosité, et donc du nombre de Reynolds de l'écoulement. On parle alors de **régime pleinement rugueux** (*fully rough regime*). Il y a alors deux comportements possibles. Le comportement de ***k*-rugosité**, pour lequel k_s est proportionnel à la taille k des éléments de rugosité, et le comportement de ***d*-rugosité**, pour lequel k_s est proportionnel à l'épaisseur δ de la couche limite. Dans chacun de ces cas pleinement rugueux, la relation de proportionnalité impliquant k_s est indépendante de la valeur de k_s^+. Elle dépend uniquement de la géométrie de la rugosité.

Lorsque la valeur de k^+ n'est pas suffisante pour que le comportement soit pleinement rugueux, on parle de **régime transitionnellement rugueux** (*transitionally rough regime*) (qui n'a pourtant rien à voir avec la transition laminaire–turbulence). L'augmentation de frottement, et donc de k_s et de $-\Delta C$, n'est plus proportionnelle à un unique paramètre, mais évolue de façon plus complexe avec k^+. La figure 2.19 montre cette évolution pour différents types de rugosité en régime transitionnel. La dimension caractéristique k_∞ de la rugosité utilisée ici est une dimension propre à chaque géométrie, définie de sorte à ce que les tous les profils se superposent dans la limite pleinement rugueuse, c'est-à-dire pour $k^+ \gg 1$. On distingue sur la figure des comportements très différents d'un type de rugosité à l'autre. Pour la rugosité de grain de sable uniforme par exemple, le frottement n'est pas affecté tant que la granularité est plus petite qu'un seuil $k_\infty^+ \simeq 4$, alors que la détérioration de la traînée est bien plus directe pour les métaux galvanisés, couverts de goudron ou le fer forgé. Colebrook [50] avance l'explication que ces surfaces industrielles contiennent des irrégularités de différentes tailles qui deviennent individuellement actives à mesure qu'elles atteignent le nombre de Reynolds critique.

Selon Tani [260], les *riblets* peuvent être considérés comme des éléments de rugosité transitionnelle. Leur comportement est particulier en ce sens qu'ils réduisent la traînée pour les faibles valeurs de $k^+ \simeq s^+$. Cependant, comme en témoigne la figure 2.19, les *riblets* adoptent bien un comportement de k-rugosité lorsque $k^+ \gg 1$. Cette constatation est à l'origine du terme "régime rugueux"

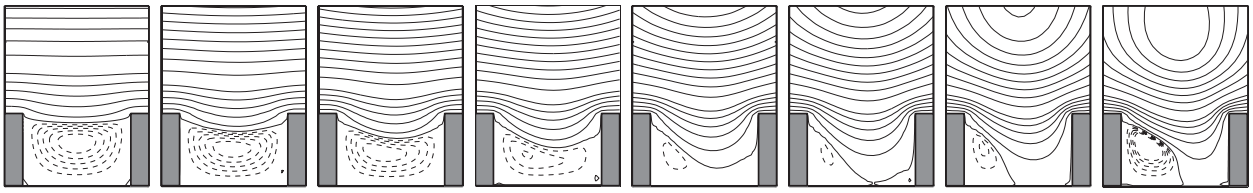


FIGURE 2.20 – Lignes de courant de l'écoulement conditionnellement moyenné, dans le plan transverse (y, z) dans et au-dessus de *riblets* rectangulaires ($h/s = 0.5$ et $t/s = 0.25$). Les champs instantanés ont été moyennés conditionnellement au sens de l'écoulement transverse juste au-dessus de la crête des *riblets*. Les résultats sont présentés pour différentes tailles caractéristiques de *riblets* en unité de paroi l_g^+ de 0 à 20 (*de gauche à droite*). Le cas $l_g^+ = 0$ correspond à l'écoulement de Stokes bidimensionnel. Les autres cas sont obtenus par simulation numérique directe. Figure extraite de [94].

introduit dans la section 2.2.1 et la figure 2.5 pour qualifier le comportement des *riblets* de grandes dimensions.

Jiménez [135] explique ces résultats en mettant en évidence deux effets antagonistes de la rugosité en régime transitionnellement rugueux. Les éléments rugueux génèrent une traînée de forme additionnelle, mais ils affaiblissent également le cycle de régénération de la turbulence ce qui a tendance à réduire le frottement. Cette explication justifie la réduction de traînée permise par les *riblets*. En effet, les *riblets* sont particuliers de par le fait que leur géométrie bidimensionnelle ne génère pas de traînée de forme additionnelle. Une fois que k^+ est suffisamment important pour que le cycle proche-paroi de régénération de la turbulence soit totalement détruit, les effets bénéfiques associés saturent et la traînée de forme devient prépondérante.

Dans le cas des *riblets*, la traînée de forme demeurant nulle quelle que soit la taille des rainures. Le mécanisme fourni par Jiménez ne permet donc pas d'expliquer le la hausse de la traînée dans le cas des *riblets*. Ainsi, d'autres phénomènes doivent être avancés pour apporter une justification convaincante.

2.2.3.4 Instabilités de Kelvin–Helmotz

Une des explications les plus avancées pour justifier la rupture de validité du régime visqueux pour les *riblets* de grande taille et la dégradation associée des performances de réduction de traînée (cf. section 2.2.1 et figure 2.5) a été proposée récemment par García-Mayoral & Jiménez [94].

García-Mayoral & Jiménez ont réalisé des simulations numériques directes d'écoulements de canal turbulent dont les parois sont recouvertes de *riblets* rectangulaires ($h/s = 0.5$ et $t/s = 0.25$) de taille caractéristique l_g^+ allant de 5 à 20. Cette plage couvre les régimes de réduction et d'augmentation de traînée de la figure 2.5.

Ils ont remarqué la présence d'une recirculation récurrente à l'intérieur des sillons. Celle-ci est mise en évidence sur la figure 2.20, où les champs de vitesse sont moyennés conditionnellement à la direction de l'écoulement transverse juste au-dessus des crêtes. Comme en témoignent les lignes de courant sur la figure, cette recirculation est déjà présente dans la limite de *riblets* de taille l_g^+ infinitésimale et persiste, en devenant de plus en plus asymétrique, pour des *riblets* de taille grandissante, au-delà même du régime visqueux. Cependant, l'amplitude de cet écoulement secondaire est si faible — partout inférieure à $0.04\,u_\tau$ — que le profil de vitesse longitudinale moyenne $\overline{u}^+(\frac{y}{s}, \frac{z}{h})$ dans les rainures est à peine affecté et demeure proche de celui de l'écoulement de Stokes. Ils établirent ainsi que la dégradation de la réduction de frottement des *riblets* de grande taille trouve nécessairement sa source dans l'écoulement au-dessus des *riblets*.

Au-dessus des *riblets*, la courbure des lignes de courant sur la figure 2.20 suggère la présence

de vortex quasi-longitudinaux de plus en plus proches de la paroi. D'après leurs résultats, le centre des TQLs ne s'approche pas des crêtes à moins de $10-15$ unités de paroi, même pour leurs plus grands *riblets* dont la largeur crête-à-crête est de $s^+ \simeq 33$. L'impression de rapprochement serait principalement due au changement d'échelle des figures qui sont normalisées par la taille des *riblets*. Ce résultat est en contradiction avec les observations de Choi *et al.* [37] et de Lee & Lee [164] mentionnées dans le paragraphe 2.2.3.2 qui suggèrent à l'inverse que de nombreux TQLs se logent à l'intérieur des rainures pour des *riblets* à peine légèrement plus larges, $s^+ \simeq 40$.

García-Mayoral & Jiménez ont observé les contraintes de cisaillements visqueux $\overline{\tau}^+_{xy}(y_{\text{crest}}, z)$ et de Reynolds $-\overline{R}^+_{xy}(y_{\text{crest}}, z)$ dans le plan horizontal à l'altitude des crêtes. Pour toutes les tailles de *riblets*, la distribution spatiale selon z du cisaillement total demeure relativement constante et la composante visqueuse s'avère être dominante, même pour les *riblets* les plus larges. Cependant, à mesure que la dimension des *riblets* augmente, une part croissante du cisaillement total à l'altitude y_{crest} est attribuée aux contraintes de Reynolds, notamment en raison d'un transfert du faible cisaillement à l'aplomb des vallées de $\overline{\tau}_{xy}$ vers $-\overline{R}_{xy}$. Le mécanisme de rupture est donc associé à l'apparition d'effets inertiels concentrés, non pas dans le sillon des *riblets*, mais au-dessus de leurs crêtes.

García-Mayoral & Jiménez ont alors conduit une analyse spectrale sur les composantes du tenseur de Reynolds $\underline{\underline{R}}$. Par ce biais, ils ont constaté l'apparition de structures transverses, étendues en envergure, dont la contribution énergétique pour $y^+ \lesssim 10$ croit avec la taille l_{g} des *riblets* à partir de la dimension optimale $l_{\text{g,opt}}$. Les dimensions caractéristiques de ces structures s'établissent en unité interne et sont caractérisées par $65 < \lambda^+_x < 290$ et $\lambda^+_z > 130$. Ils sont visibles sur-le-champ de vitesse proche-paroi de la figure 2.21. Leur cohérence s'étend en envergure bien au-delà de la périodicité des *riblets*, dont les perturbations sont visibles. La présence de telles structures, bien que jamais relevée jusqu'alors, est également visible sur les simulations de Goldstein *et al.* 105, fig. 20b et Chu & Karniadakis 46, fig. 30.

Une analyse de stabilité linéaire sur-le-champ moyen perturbé par les *riblets* permet d'établir que ces structures sont des tourbillons quasi-transverses (TQTs) qui peuvent être attribués à des instabilités de type Kelvin–Helmholtz. Le modèle de stabilité linéaire simplifié permet même d'établir la pertinence du paramètre empirique l^+_{g} comme dimension caractéristique des *riblets* et situe aux alentours de $l^+_{\text{g}} \simeq 11$ le seuil d'amplification des TQTs, très proche de la dimension empirique (2.4) de *riblets* optimaux.

La contribution à la traînée de ces structures explique en très grande partie la dégradation de la réduction de traînée par rapport à la tendance linéaire du régime visqueux. C'est ce que montre la figure 2.22, où la réduction de traînée FRR a été décomposée grâce à une formule analogue à la décomposition FIK de la section 1.5.2 (voir [94] pour plus de détails) et où l'influence des structures de large envergure a pu être isolée.

Ainsi, García-Mayoral & Jiménez suggèrent que le mécanisme de réduction de frottement des *riblets* s'explique par la théorie visqueuse de Bechert & Bartenwerfer [15] et Luchini *et al.* [169], quantifiée grâce à la hauteur de protubérance Δh. Lorsque la taille des *riblets* atteint $l^+_{\text{g,opt}} \simeq 11$, une instabilité linéaire non visqueuse de type Kelvin–Helmholtz provoque l'apparition proche-paroi de tourbillons quasi-longitudinaux. En générant des tensions de Reynolds additionnelles, ce sont ces tourbillons qui sont responsables d'une rapide dégradation de la traînée avec l'augmentation de la taille des *riblets*.

2.3 Oscillations transverses de parois et ondes progressives

Une autre méthode de contrôle consiste à induire dans l'écoulement un mouvement d'oscillation transverse, que ce soit par une mise en mouvement fluidique — comme l'imposition d'un gradient de pression instationnaire [57], l'utilisation de plasma [44] ou de propriétés magnétohydrodynamiques [21] — ou structurel, c'est-à-dire via un déplacement de la paroi [151, 139]. Dans la suite, on

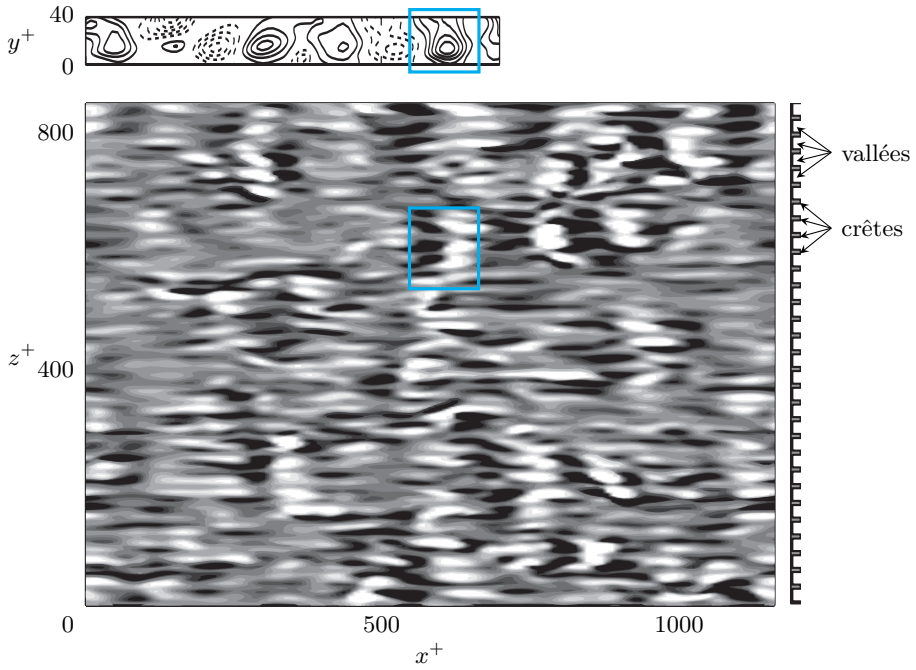


FIGURE 2.21 – Champ de vitesse normale instantanée v' dans le plan (x, z) à 3 unités de paroi au-dessus des crêtes de *riblets* rectangulaires de dimension $l_g^+ \simeq 17$. Les vitesses négatives (respectivement positives) sont représentées par des régions claires (respectivement foncées). La position des crêtes et des vallées est indiquée à droite de la figure. Figure extraite de [94].

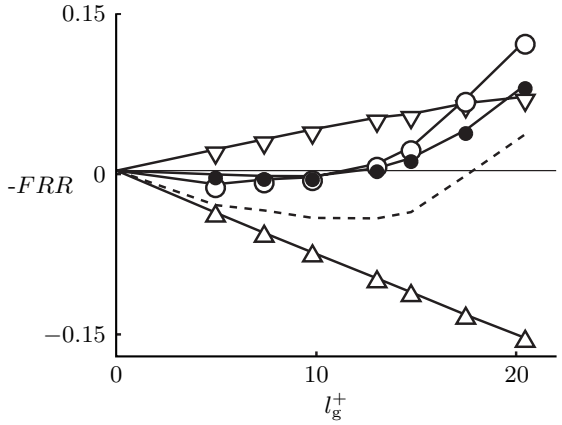


FIGURE 2.22 – Contributions à la réduction de frottement en fonction de la dimension l_g^+ des *riblets* : ($\triangledown$) effet de blocage dans le canal ; ($\triangle$) effet de réduction de traînée liée à Δh, caractérisé par la vitesse moyenne à l'altitude des crêtes ; ($\bigcirc$) effet du cisaillement de Reynolds additionnel ; ($\bullet$) idem en considérant uniquement le cisaillement avec $65 < \lambda_x^+ < 290$ et $\lambda_z^+ > 50$; (- - -) réduction de frottement totale FRR. Figure extraite de [94].

s'intéressera principalement au cas de l'oscillation transverse de paroi. Ce type de contrôle est actif et non-réactif : les paramètres d'oscillation, comme l'amplitude et la fréquence, sont généralement prédéterminés et l'utilisation de senseurs n'est pas nécessaire. Des revues complètes du sujet sont notamment celles de Karniadakis & Choi [141] et, plus récemment, de Quadrio [218].

2.3.1 Performances de réduction de traînée

Bien que le contrôle par oscillation de paroi n'ait jamais été mis en place pour des applications concrètes, de nombreuses expériences en soufflerie [151, 40, 160] ou par simulation numérique [139, 14, 39, 219] ont été conduites pour en évaluer les performances en termes de réduction de traînée.

Ainsi, Jung *et al.* [139] ont fait osciller sinusoïdalement dans la direction z l'une des deux parois de leur DNS de canal plan, de sorte que la vitesse transverse à la paroi soit donnée par

$$w_{\mathrm{w}}(t) = W_{\mathrm{osc}} \ \sin\left(\omega_{\mathrm{osc}}\, t\right) = W_{\mathrm{osc}} \ \sin\left(2\pi \frac{t}{T_{\mathrm{osc}}}\right) . \tag{2.16}$$

Ils ont alors constaté que pour des oscillations de période T_{osc} comprises entre 25 et 500 unités internes, la traînée de frottement était réduite. Le taux de réduction de traînée $FRR_{\max}$ atteint un maximum de l'ordre de 40% lorsque $T^+_{\mathrm{osc}} = 100$. Plus récemment, Quadrio & Ricco [219] ont confirmés ces résultats grâce une étude paramétrique sur T_{osc} et W_{osc} en obtenant une réduction de frottement maximale de 44.7% pour $T^+_{\mathrm{osc}} = 100$ et $W^+_{\mathrm{osc}} = 27$, la plus grande amplitude d'oscillation qu'ils ont testée.

Alors que les différentes études numériques s'accordent sur le taux de réduction de traînée maximale réalisable, les performances constatées expérimentalement demeurent inférieures et plafonnent aux alentours de 25 [40] à 35% [160].

Quadrio & Ricco [219] avancent que ces différences quantitatives peuvent en partie être expliquées par l'influence du transitoire. Dans la pratique, l'étendue de la paroi oscillante est de distance finie. Si bien qu'à son extrémité amont, le frottement chute petit à petit jusqu'à atteindre son niveau de réduction établie. Il se trouve que cette longueur d'adaptation augmente avec le paramètre W_{osc} et peut être de l'ordre de quelques milliers d'unités de paroi. Expérimentalement, ce transitoire spatial est donc à prendre en compte lors de la mesure du frottement, qui est souvent établie de façon globale sur toute l'étendue de la plaque (via une balance ou une mesure de perte de pression par exemple). Numériquement, les mêmes précautions doivent être prises dans le cas de ZPGTBL. Pour les simulations numériques en canal périodique, la transition spatiale devient une transition temporelle qu'il est plus aisé de prendre en compte.

Une autre incertitude majeure sur l'évaluation du taux de réduction de frottement FRR concerne la procédure d'adimensionnement utilisée. Ricco *et al.* [224] expliquent que, pour les écoulements de canal plan, lorsque le débit est maintenu constant lors de la comparaison entre les cas contrôlé et non contrôlé, la période d'oscillation de paroi optimale pour une valeur W_{osc} fixée est souvent reportée dans la fourchette $T^+_{\mathrm{osc}} \simeq 100 - 125$. En revanche, lorsque c'est le gradient de pression qui est maintenu constant, ils obtiennent une période optimale de l'ordre de $T^+_{\mathrm{osc}} \simeq 70$. Le premier cas de figure correspond à une comparaison à $Re_{\mathrm{b}} = U_{\mathrm{b}}\delta/\nu$ fixé, alors que le second équivaut à une comparaison à même Re_τ.

2.3.1.1 Paramètres d'influence sur la réduction de traînée

Deux paramètres ont été introduits pour configurer l'oscillation de paroi : la vitesse pariétale maximale W_{osc} et la période de l'oscillation T_{osc} (ou de façon totalement équivalente sa pulsation ou sa fréquence $\omega_{\mathrm{osc}} = 2\pi f_{\mathrm{osc}} = 2\pi/T_{\mathrm{osc}}$). La loi de contrôle (2.16) définit implicitement d'autres grandeurs comme, par exemple, le déplacement maximal de la paroi $Z_{\mathrm{osc}} = W_{\mathrm{osc}}/\omega_{\mathrm{osc}}$. *A priori*, le taux de réduction de frottement FRR dépend, en plus des paramètres d'écoulement comme le nombre de Reynolds, de ces différents paramètres de contrôle. Néanmoins, est-il possible de déterminer lequel de ces paramètres est le plus adapté à caractériser FRR, ou, à défaut, est-il possible d'en construire un ?

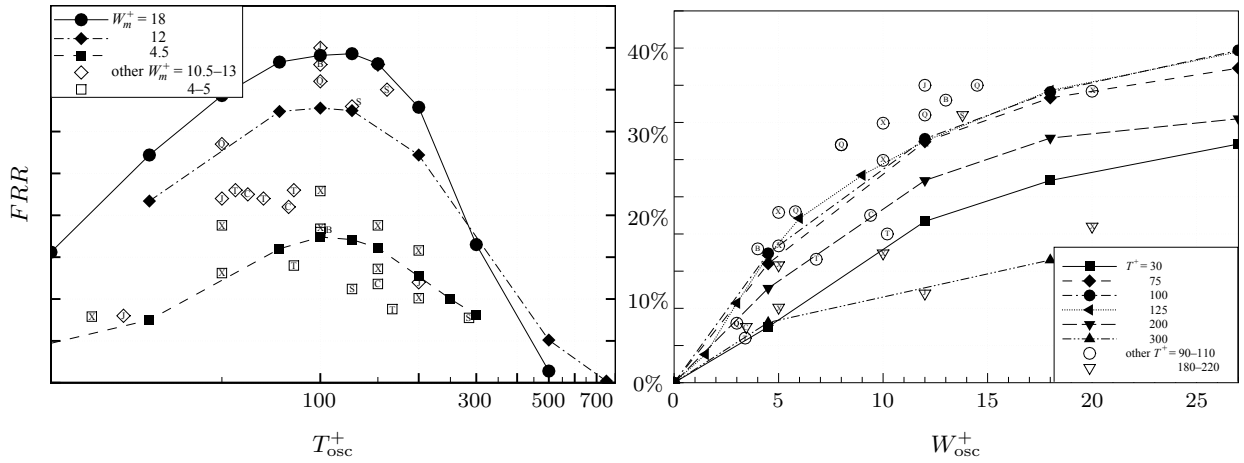


FIGURE 2.23 – Taux de réduction de frottement FRR pour une couche limite turbulente contrôlée par oscillation de paroi en fonction de la période d'oscillation $T_{\rm osc}^+$ et de la vitesse maximale de la paroi $W_{\rm osc}^+$. Les données sont issues d'expériences [40, 217, 160, 269] et de simulations numériques [14, 39, 139, 219]. Figures extraites de [219].

Quadrio & Ricco [219] ont établi que, lorsque le déplacement $Z_{\rm osc}^+$ est maintenu constant, FRR augmente monotoniquement avec $W_{\rm osc}^+$, c'est-à-dire lorsque $T_{\rm osc}^+$ diminue. À l'inverse, si la vitesse maximale $W_{\rm osc}^+$ est fixée, alors on observe un maximum pour FRR lorsque $T_{\rm osc}^+ \simeq 100 - 125$. C'est ce que l'on observe sur la figure 2.23.

Bien que la réduction de traînée FRR soit principalement fonction de la vitesse maximale de la paroi $W_{\rm osc}^+$ [40, 269], un paramètre plus pertinent encore a été construit par Choi *et al.* [39] puis Quadrio & Ricco [219]. Pour cela, ils se sont basés sur le constat que l'oscillation de la paroi induit un mouvement transverse dans l'écoulement qui, une fois moyenné dans la direction z, s'avère être semblable à la solution de la couche limite de Stokes [6] [217]. Une solution analytique existe pour caractériser cette couche limite de Stokes, ce qui permet d'en déterminer deux grandeurs caractéristiques : la profondeur de pénétration $l_{\rm osc}$ du champ de vitesse oscillant, définie par rapport à une vitesse transverse seuil $W_{\mathcal{S}}$, et l'accélération maximale $a_{\rm osc}$ à une distance $y_{\mathcal{S}}$ de la paroi. On peut néanmoins regretter que ces deux grandeurs $l_{\rm osc}$ et $a_{\rm osc}$ soient chacune définie par rapport à un paramètre, $W_{\mathcal{S}}$ ou $y_{\mathcal{S}}$, choisi arbitrairement.

$$a_{\rm osc}^+ = \frac{2\,\pi}{T_{\rm osc}^+}\, W_{\rm osc}^+ \, \exp\left(-y_{\mathcal{S}}^+ \sqrt{\frac{\pi}{T_{\rm osc}^+}}\right) , \tag{2.17}$$

$$l_{\rm osc}^+ = \sqrt{\frac{T_{\rm osc}^+}{\pi}} \, \ln\left(\frac{W_{\rm osc}^+}{W_{\mathcal{S}}^+}\right) . \tag{2.18}$$

Quadrio & Ricco ont alors construit une nouvelle grandeur $\mathcal{S}_{\rm osc}$ caractéristique de l'oscillation de paroi et définie par

$$S_{\rm osc}^+ = \frac{a_{\rm osc}^+ \, l_{\rm osc}^+}{W_{\rm osc}^+} . \tag{2.19}$$

Cette grandeur est bien fonction des paramètres $T_{\rm osc}$ et $W_{\rm osc}$ de l'oscillation transverse. Pour les périodes d'oscillation $T_{\rm osc}^+$ inférieures à 150, une relation linéaire entre $S_{\rm osc}^+$ et le taux de réduction de frottement FRR est observée lorsque les paramètres $W_{\mathcal{S}}$ et $y_{\mathcal{S}}$ sont fixés à $W_{\mathcal{S}}^+ = 1.2$ et $y_{\mathcal{S}}^+ = 6.3$. Bien qu'elles soient obtenues par régression linéaire, une signification physique à ces valeurs de seuils a été cherchée. Choi *et al.* [39] remarquent que $y^+ \simeq 5$ est l'altitude particulière à laquelle le

6. Attention, il ne faut pas confondre la *couche limite de Stokes* et l'*écoulement de Stokes*. La *couche limite de Stokes* fait référence à la solution du *deuxième problème de Stokes*, c'est-à-dire à la couche limite qui se créer dans un fluide visqueux initialement au repos à proximité d'une paroi plane oscillante. Un *écoulement de Stokes*, ou *écoulement rampant*, renvoie au cas limite dans lequel les effets inertiels deviendraient négligeables face aux effets visqueux.

coefficient d'aplatissement (*flatness coefficient*) des fluctuations de vitesse, $\overline{u'^4}/\overline{u'u'}^2$, est maximum. Quadrio & Ricco [219] soulignent que $W_S^+ \simeq 1$ est de l'ordre de grandeur des fluctuations transverses de la turbulence. La relation de proportionnalité entre S_{osc}^+ et FRR est finalement rompue lorsque $T_{\text{osc}}^+ \gtrsim 150$. Le mouvement oscillant de la paroi est alors trop lent pour engendrer une réelle réduction de traînée.

2.3.1.2 Économie nette d'énergie

La stratégie de contrôle par oscillation de paroi étant une stratégie active, il est intéressant de prendre en compte l'énergie dépensée pour son fonctionnement. On utilise pour cela la notion d'économie nette d'énergie, définie dans le préambule de la section 2.1, qui permet de comparer la puissance effectivement gagnée en réduisant la traînée à celle consommée par le dispositif.

Grâce à leur étude paramétrique sur W_{osc} et T_{osc}, Quadrio & Ricco [219] ont établi qu'un gain énergétique n'est possible que pour de faibles valeurs de $W_{\text{osc}}^+ \lesssim 7$. Pour des amplitudes d'oscillation plus importantes, la puissance dépensée augmente quadratiquement avec W_{osc}. Elle dépasse donc le gain d'énergie que constitue la réduction de traînée qui n'évolue que quasi linéairement avec W_{osc}. Les conditions d'oscillation optimales en termes d'économie nette d'énergie sont $T_{\text{osc}}^+ = 125$ et $W_{\text{osc}}^+ = 4.5$. Le gain énergétique est alors de $ESR = 7.3\%$. Ces résultats confirment ceux obtenus par Baron & Quadrio [14] qui avaient atteint une économie nette d'énergie d'à peine 8% en réduisant l'amplitude W_{osc} par rapport au cas minimisant la traînée. Leurs résultats sont représentés sur la figure 2.24.

Dans la pratique, il faudrait également prendre en compte le rendement imparfait de l'actionneur et les contraintes de coût, de mise en place et de maintenance du dispositif actif. En effet, dans des conditions d'écoulement de croisière sur un avion commercial, la vitesse et la longueur de frottement sont respectivement de l'ordre de la dizaine de mètres par seconde et du micromètre. Ainsi, la fréquence d'oscillation optimale, dictée par $T^+ \simeq 100$, se chiffre en centaine de kilohertz. Une telle fréquence d'oscillation sur des surfaces de grande envergure, associée à l'accélération conséquente qu'elle impose, rend une telle stratégie de contrôle impraticable aujourd'hui.

Ce résultat permet de relativiser le taux de réduction du frottement très attrayant de 40% de cette stratégie. De leur côté, les *riblets* peinent à dépasser les 10% de réduction de frottement, mais cette stratégie étant passive, elle affiche des performances de gain énergétique supérieures à celles obtenues par l'oscillation de paroi dans des conditions idéales d'actionneur parfait.

2.3.1.3 Mouvement périodique arbitraire

L'ensemble des études d'oscillation transverse de paroi abordées depuis le début de cette section est restreint au cas particulier d'un forçage sinusoïdal. L'interaction entre la paroi oscillante et la réduction de traînée étant hautement non-linéaire, les résultats pour un mouvement d'oscillation quelconque ne peut être déduit de ceux obtenus pour une oscillation sinusoïdale. Cimarelli *et al.* [47] ont alors conduit une étude paramétrique systématique sur les paramètres T_{osc}^+ et W_{osc}^+ pour des signaux sinusoïdaux et non-sinusoïdaux afin d'identifier la forme d'onde optimale en termes de réduction de traînée ou d'économie nette d'énergie. Les neuf signaux non-sinusoïdaux traités sont ceux représentés sur la figure 2.26.

Leur étude démontre que le signal en créneaux (le premier signal en *haut à gauche* de la figure 2.26) aboutit à la meilleure réduction de traînée, mais nécessite une importante consommation d'énergie. C'est le signal sinusoïdal qui permet d'aboutir à l'économie nette d'énergie la plus importante. Néanmoins, pour certains jeux de paramètres $(T_{\text{osc}}^+, W_{\text{osc}}^+)$ non-optimaux, le dernier signal de la figure est parfois plus économe que le signal sinusoïdal.

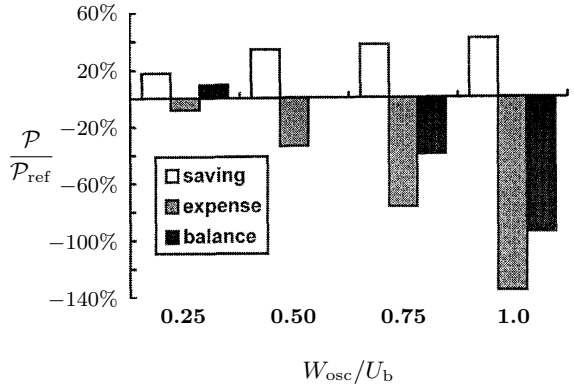


FIGURE 2.24 – Impact de l'amplitude de la vitesse d'oscillation de la paroi $W_{\rm osc}$ adimensionnée par $U_{\rm b}$ sur la puissance de dissipation visqueuse économisée (*saving* en *blanc*), sur la puissance dépensée par le contrôle (*expense* en *gris*) et sur l'économie nette de puissance (*balance* en *noir*). Ces puissances sont adimensionnées par celle de la dissipation visqueuse du cas non contrôlé. Figure extraite de [14].

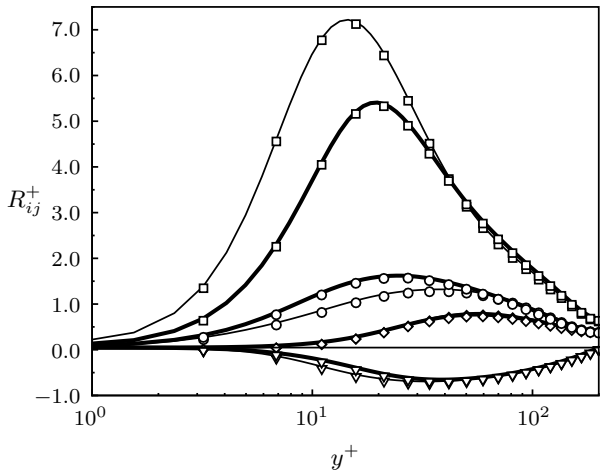


FIGURE 2.25 – Profils des tensions de Reynolds en unité de paroi $R^+_{xx} = u^{+2}_{\rm rms}$ (□), $R^+_{yy} = v^{+2}_{\rm rms}$ (◇), $R^+_{zz} = w^{+2}_{\rm rms}$ (○), R^+_{xy} (▽), pour le cas de référence non contrôlé (*traits fins*) et le cas de paroi oscillante avec $T^+_{\rm osc} = 100$ et $W^+_{\rm osc} = 12$ (*traits épais*). Figure extraite de [224].

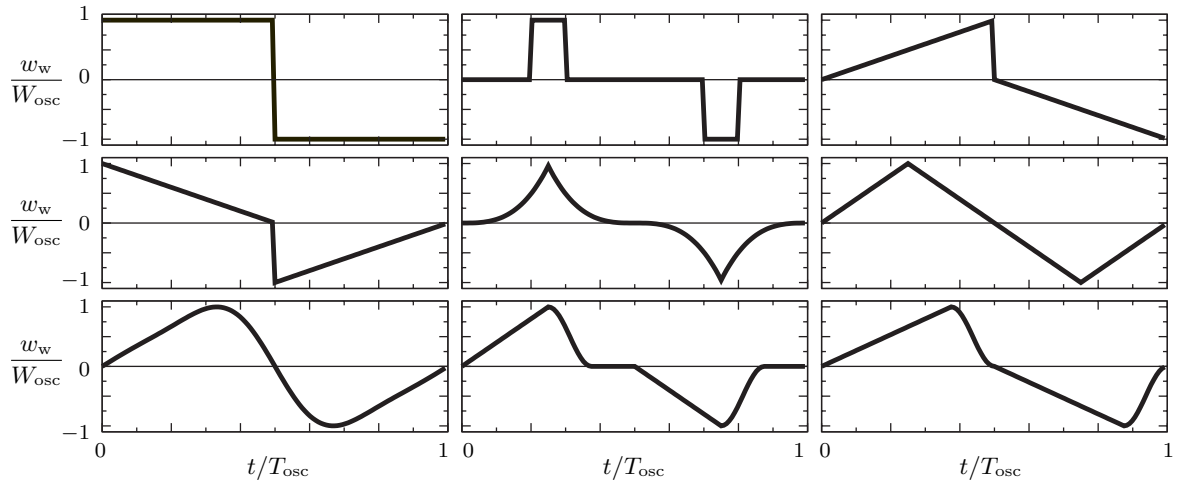


FIGURE 2.26 – Formes d'onde des signaux temporels $w_{\rm w}(t)$ utilisés pour le forçage de l'oscillation transverse de paroi par Cimarelli *et al.*. dans l'étude [47] d'où est extraite cette figure.

2.3.1.4 De la dépendance temporelle à la dépendance spatiale

Plutôt que d'imposer à la paroi un mouvement transverse qui oscille temporellement, le contrôle peut également consister en un mouvement de la paroi qui soit stationnaire, mais dont la vitesse évolue avec x. La vitesse à la paroi est alors imposée par l'équation

$$w_{\mathrm{w}}(x) = W_{\mathrm{osc}} \ \sin\left(k_{x,\mathrm{osc}}\, x\right) = W_{\mathrm{osc}} \ \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_{x,\mathrm{osc}}}\right) . \tag{2.20}$$

On parlera de contrôle par **onde transversale stationnaire de paroi**. Cette stratégie de contrôle a été appliquée par Viotti *et al.* [273] qui rapportent un comportement du frottement vis-à-vis des paramètres $(\lambda^+_{x,\mathrm{osc}}, W^+_{\mathrm{osc}})$ similaires à ce qui a été décrit pour les paramètres $(T^+_{\mathrm{osc}}, W^+_{\mathrm{osc}})$ de l'oscillation temporelle de paroi. Ainsi, la réduction de frottement croît monotoniquement avec W^+_{osc} et la longueur d'onde optimale pour une vitesse W^+_{osc} donnée est $\lambda^+_{x,\mathrm{osc}} \simeq 1000$. Les performances optimales en termes de réduction de traînée, mais surtout en termes d'économie nette d'énergie, sont améliorées par rapport au cas classique d'oscillation temporelle puisqu'elles atteignent $FRR \simeq 52\%$ et $ESR \simeq 23\%$.

La longueur d'onde longitudinale $\lambda_{x,\mathrm{osc}}$ peut être reliée à la période $T_{x,\mathrm{osc}}$ de l'oscillation temporelle via la donnée d'une vitesse de convection. D'après (1.65), la vitesse de convection des structures proche-paroi peut être considérée comme constante et égale à environ $10\,u_\tau$. Ainsi, en utilisant cette correspondance espace–temps, les performances de réduction de frottement sont équivalentes pour les stratégies de contrôle par oscillations temporelle et spatiale.

Les dispositifs d'oscillation temporelle et spatiale de paroi, définis respectivement par (2.16) et (2.20), sont des cas particuliers d'**ondes transversales progressives de paroi**. La vitesse transverse de la paroi est régie dans ce cas plus général par

$$w_{\mathrm{w}}(x) = W_{\mathrm{osc}} \ \sin\left(k_{x,\mathrm{osc}}\, x - \omega_{\mathrm{osc}}\, t\right) = W_{\mathrm{osc}} \ \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_{x,\mathrm{osc}}} - 2\pi \frac{t}{T_{\mathrm{osc}}}\right) . \tag{2.21}$$

Depuis les premiers travaux de Du *et al.* [74, 75], l'optimisation et l'étude de cette stratégie de contrôle font l'objet d'une intense activité de la part de la communauté scientifique ces dernières années. La carte typique de réduction de traînée à W_{osc} fixé est représentée dans le plan $(\omega_{\mathrm{osc}}, k_{x,\mathrm{osc}})$ sur la figure 2.27. On observe que la traînée est réduite pour l'ensemble des paramètres de contrôle, sauf dans le domaine hachuré de la figure, correspondant à des ondes progressives de vitesse de propagation $\omega_{\mathrm{osc}}/k_{x,\mathrm{osc}}$ proche de la vitesse de convection. Les paramètres optimaux correspondent à une onde progressive avançant à environ 30% de cette vitesse. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé aux articles de Quadrio *et al.* [220] et de Hurst *et al.* [118] qui apportent de nombreux éléments de caractérisation et de compréhension que nous n'aborderons pas ici.

2.3.2 Caractéristiques de l'écoulement contrôlé

La compréhension des mécanismes physiques expliquant le comportement du frottement sur une paroi oscillante est encore partielle et floue [218]. Aucune théorie ne permet à ce jour d'expliquer, de façon unifiée, les cas d'ondes progressives longitudinales et transverses, pour lesquels l'oscillation de paroi est un cas particulier.

Le profil de vitesse moyenne longitudinale de l'écoulement contrôlé présente les mêmes propriétés que celui au-dessus des *riblets* : la loi déficitaire de sillage (1.46) est toujours valide et l'on observe bien une zone de profil logarithmique (1.50), cependant, celle-ci est surélevée par rapport au cas de référence [139]. Ce comportement est caractéristique des écoulements contrôlés par des dispositifs pariétaux de réduction de traînée [41].

À cette vitesse moyenne longitudinale s'ajoute une composante transverse cyclique, induite par l'oscillation de la paroi. Dans le cas de réduction de traînée proche de l'optimum, cette perturbation

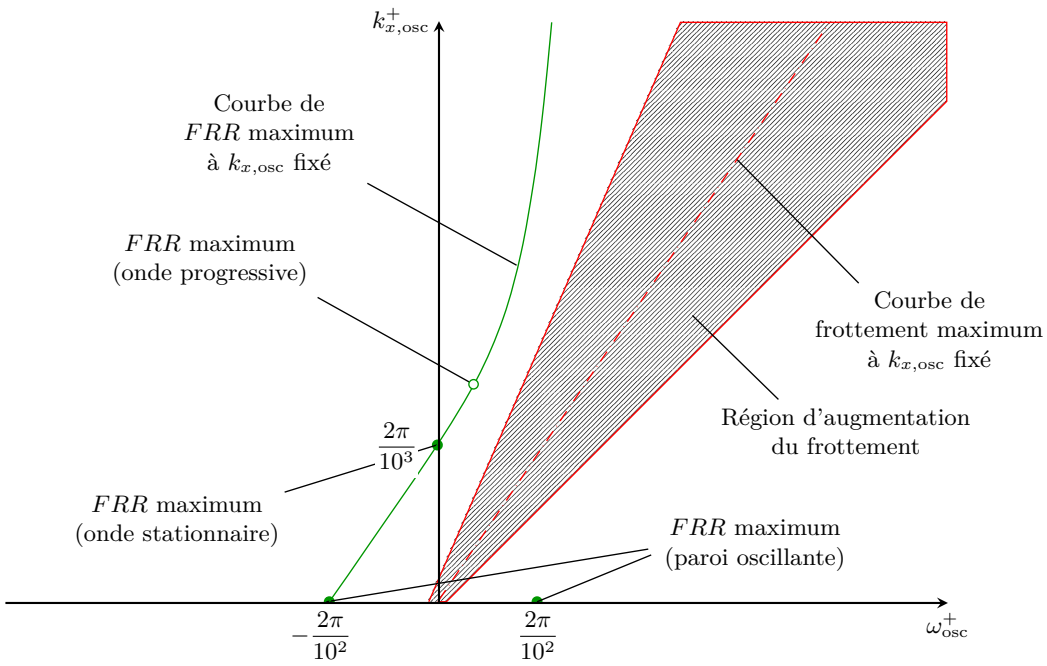


FIGURE 2.27 – Schéma qualitatif de la carte de réduction de traînée dans le plan des paramètres $(\omega_{\mathrm{osc}}, k_{x,\mathrm{osc}})$ d'une onde progressive de déplacement transverse de la paroi. Figure adaptée de [220].

reste confinée à la sous-couche visqueuse et le profil de vitesse transverse est alors très bien approché par la solution analytique de couche limite de Stokes [39, 266]. Cette propriété reste d'ailleurs valable dans le cas général où la paroi est animée d'un mouvement périodique non-sinusoïdal [47]. Ainsi, l'oscillation de la paroi ne se fait pas sentir *directement* au-delà de la zone tampon.

Cependant, ce mouvement de Stokes additionnel, bien que très localisé, influence les intensités turbulentes sur toute l'étendue de la couche limite, comme cela a été constaté dès les premières études [139] par la chute des niveaux fluctuants en valeur absolue (c'est-à-dire sans adimensionnement). Néanmoins, comme en témoigne la figure 2.25, l'utilisation d'un adimensionnement en unité de paroi approprié révèle que seul le niveau d'intensité turbulente longitudinale u^+_{rms} est diminué à proximité de la paroi, pour $y^+ \lesssim 30$ [224]. Au-delà, le profil $u^+_{\mathrm{rms}}(y^+)$ retrouve le niveau du cas canonique à même Re_τ. De plus, le niveau des fluctuations normales v^+_{rms} est clairement inchangé sur toute l'étendue de la couche limite, alors que celui de w^+_{rms} est même augmenté en dessous de $y^+ \simeq 40$. Ainsi, la baisse de u^+_{rms} cumulée à la hausse de w^+_{rms} conduit à une réduction significative de l'anisotropie. Ce constat est néanmoins contradictoire avec les résultats bien plus généraux de Frohnapfel *et al.* [84], qui corrèlent la réduction de la traînée à l'augmentation du niveau d'anisotropie à proximité de la paroi.

La contrainte de cisaillement de Reynolds R^+_{xy} est atténuée dans la région proche paroi. C'est cette chute du cisaillement turbulent qui explique l'épaississement de la sous-couche visqueuse et l'élévation de la loi logarithmique sur le profil $\overline{u}^+(y^+)$. Il est à noter la présence additionnelle et cyclique de la tension de Reynolds R_{yz}. Ce terme est nul dans le cas non contrôlé, mais joue, vis-à-vis de l'écoulement transverse induit par la paroi oscillante, un rôle similaire à celui de R_{xy} sur l'écoulement longitudinal. Il est en particulier responsable de la hausse de w^+_{rms}.

Les termes du bilan d'énergie cinétique turbulente k subissent tous une baisse significative en absolu [14, 224, 266]. Il en est de même pour les bilans associés aux tensions de Reynolds R_{xx}, R_{yy} et R_{xy}. L'analyse des bilans de Toubert & Leschziner [266] suggère que la réduction de la contrainte de cisaillement de Reynolds (puis des intensités turbulentes dans leur globalité) soit attribuée en particulier au déclin des évènements du quadrant Q2, c'est-à-dire des éjections.

Les évènements d'éjection sont causés par des mouvements cohérents de la turbulence proche-

paroi. Ainsi, la perturbation périodique du champ de vitesse provoque une importante distorsion des *streaks* et de l'organisation des mouvements cohérents proche-paroi. Les premières études ont rapporté la disparition totale de l'alternance des *streaks* lents et rapides au profit d'un écoulement quasi bidimensionnel [139, 14]. De récentes études ont néanmoins révélé la présence de *streaks* de forme classiquement allongée dans la direction de l'écoulement moyen, c'est-à-dire que leur orientation évolue cycliquement avec l'écoulement moyen transverse induit par la paroi [224, 266]. Ces *streaks* sont moins énergétiques que dans le cas canonique, ce qui est cohérent avec la chute du niveau d'intensité u_{rms} sur la figure 2.25. Néanmoins, les super-structures de la région externe ne sont quasiment pas affectées par le contrôle, mais contribuent grandement à réorganiser le cycle de turbulence proche-paroi affecté par l'oscillation pariétale [266].

Comme on l'a vu, le champ de vitesse transverse directement induit par la paroi oscillante ne pénètre pas l'écoulement au-delà de la sous-couche visqueuse. Comment expliquer alors les modifications constatées bien au-delà, sur les profils moyens et sur les mouvements cohérents ? La sous-section suivante apporte des éléments de réponse à ces questions.

2.3.3 Mécanismes de réduction de traînée

La soudaine imposition d'un mouvement latéral constant (non oscillant) dans une couche limite turbulente altère temporairement, mais profondément, les structures de la turbulence, provoquant ainsi une chute de l'énergie turbulente. Cependant, si le mouvement latéral est maintenu dans la durée, l'écoulement se réadapte après une phase transitoire : l'écoulement s'aligne à la direction de la nouvelle vitesse moyenne résultante et la turbulence retrouve son comportement canonique [14]. Ainsi, la notion de perturbation instationnaire de l'équilibre de la turbulence devra certainement être au cœur du (ou des) mécanisme(s) expliquant la réduction significative du frottement engendrée par les dispositifs d'oscillation de paroi.

Les deux principaux mécanismes qui ont été proposés et étudiés par la communauté scientifique pour spécifier le mécanisme par lequel le contrôle parvient à réduire la traînée sont développés ci-après.

2.3.3.1 Déplacement latéral relatif des structures turbulentes proche-paroi

Le premier principe, initialement avancé par Laadhari *et al.* [160], repose sur la capacité du champ oscillant transverse à perturber la cohérence spatiale entre les tourbillons quasi-longitudinaux et les bandes sinueuses que sont les *streaks* lents et rapides. Le contrôle modifie la disposition relative entre ces structures caractéristiques du cycle proche-paroi de régénération auto-entretenue de la turbulence.

Baron & Quadrio [14] avancent sur l'explication du mécanisme en approximant le champ oscillant moyen par la solution analytique du second problème de Stokes [7]. Ils calculent la profondeur de pénétration de cette couche limite oscillante dans l'écoulement turbulent et la comparent aux zones caractéristiques de localisation des structures turbulentes. En évaluant cette profondeur grâce à la formule (2.18), on obtient $l^+_{\text{osc}} \simeq 14$ dans les conditions quasi-optimales de réduction du frottement, c'est-à-dire avec $T^+_{\text{osc}} \simeq 100$ et $W^+_{\text{osc}} \simeq 15$. Ainsi, la zone la plus intense des *streaks* étant localisée dans la région $y^+ \lesssim 10 - 15$, ces derniers sont significativement entraînés par le mouvement oscillant de la paroi. À l'inverse, les TQLs étant classiquement situés dans la région $10 \lesssim y^+ \lesssim 50$, ils ne sont que marginalement affectés.

Ainsi, dans son mouvement oscillant, la paroi entraîne avec elle le fluide à sa proximité sur une épaisseur suffisante pour contenir les *streaks*. Les tourbillons quasi-longitudinaux étant suffisamment distants pour ne pas être autant affectés, leur position relativement aux *streaks* s'en retrouve perturbée. Normalement, les TQLs balayent la paroi avec du fluide à grande quantité de mouvement (évènements Q4) et éjectent le fluide pariétal de faible quantité de mouvement (évènements Q2). Cependant, à cause de la rupture de cohérence spatiale entre *streaks* et TQLs, ces derniers peuvent

7. Voir note 6

à l'inverse éjecter le fluide des *streaks* rapides (évènements Q1) et balayer vers la paroi le fluide des *streaks* lents (évènements Q3). Ces deux évènements contribuent positivement au cisaillement de Reynolds R_{xy}, permettant d'expliquer l'influence du contrôle sur le profil de $R^+_{xy}(y^+)$ de la figure 2.25. Par ce mécanisme, l'oscillation de paroi parvient à bouleverser le cycle auto-entretenu de régénération de la turbulence et cause une chute de l'énergie cinétique turbulente et de l'impact de la turbulence sur le frottement pariétal.

Ricco *et al.* [224] apportent un éclairage sur ce mécanisme en observant les bilans énergétiques. Ils se sont en particulier penchés sur le bilan d'enstrophie turbulente $\overline{\omega_i'\omega_i'}$, grandeur qui caractérise directement la dissipation ε, comme cela a été abordé avec l'équation (1.23). Lors de la mise en place du contrôle, la baisse transitoire d'un des termes de production d'enstrophie — il s'agit de la production par le cisaillement du champ moyen, dont l'expression est donnée par $\overline{\omega_x\omega_y}\,\partial_y\overline{u}$ — traduit le changement de phase entre les TQLs (liés à ω_x) et les *streaks* (liés à ω_y) évoqué précédemment. Ce résultat est donc en accord avec le mécanisme de Laadhari *et al.* et de Baron & Quadrio.

L'étude des bilans permet également de préciser que ce mécanisme est indirect, puisque la vitesse transverse, sur laquelle agit la paroi oscillante, n'apparaît pas directement dans le terme de production d'enstrophie.

Une fois le régime de réduction de traînée établi, la dissipation et la production s'équilibrent nécessairement. Bien qu'il ait été démontré que l'oscillation transverse de paroi a un impact fort sur le cycle d'auto-régénération de la turbulence, il n'est alors pas possible d'établir sur lequel des termes de dissipation ou de production le contrôle a effectivement une influence. En s'intéressant à la phase transitoire qui suit la mise en marche du contrôle, Ricco *et al.* [224] ont néanmoins pu mettre en évidence que le contrôle engendre une hausse de la dissipation d'énergie cinétique turbulente ε. Ce résultat fort permet de comprendre que le contrôle rend l'écoulement plus dissipatif pour y réduire l'activité turbulente. La baisse de l'activité turbulente se traduit par une chute du cisaillement associé et donc du frottement pariétal. Un nouvel équilibre se met en place, de sorte que les profils turbulents adimensionnés par le frottement affaibli retrouvent globalement les niveaux canoniques.

2.3.3.2 Création de vorticité transverse négative

Choi *et al.* [43] constatent que l'oscillation de la paroi conduit à la génération de vorticité transverse négative, que ce soit lors des phases d'aller comme de retour du mouvement oscillant. Ils expliquent ce constat par le mécanisme suivant.

Lorsqu'une paroi bordant du fluide au repos est animée d'un mouvement dans la direction $w_\mathrm{w} < 0$, la couche limite de Stokes qui se créer correspond à une nappe de vorticité longitudinale ω_x positive. Lorsque ce même mouvement de paroi est réalisé dans une couche limite, la nappe de vorticité est alors inclinée dans la direction des z négatif sous l'effet du cisaillement moyen, comme illustré sur la figure de *gauche* de 2.28. Ainsi, en plus de vorticité $\omega_x > 0$, une composante de vorticité latérale $\omega_z < 0$ est générée dans la région proche paroi.

Lorsque la paroi bouge dans la direction opposée, la couche de Stokes crée une nappe de vorticité longitudinale qui est cette fois-ci négative : $\omega_x < 0$. Immergée dans une couche limite, cette vorticité est inclinée vers les z positifs, c'est-à-dire vers le bas sur la figure de *droite* de 2.28, ce qui produit cette fois encore une composante de vorticité $\omega_z < 0$.

Ainsi, de la vorticité transverse négative est générée dans la couche limite turbulente pendant les phases d'aller et de retour du mouvement oscillant de la paroi. La vorticité transverse négative induit en conséquence un ralentissement de la vitesse longitudinale u dans la région pariétale, comme l'illustre la figure 2.29.

Un tel transfert de vorticité longitudinale vers de la vorticité transverse contribue également à diminuer l'intensité des TQLs. Karniadakis & Choi [141] avancent de plus que cette réduction de vitesse freine leur élongation, ce qui a pour effet de réduire l'intensité des évènements de balayage.

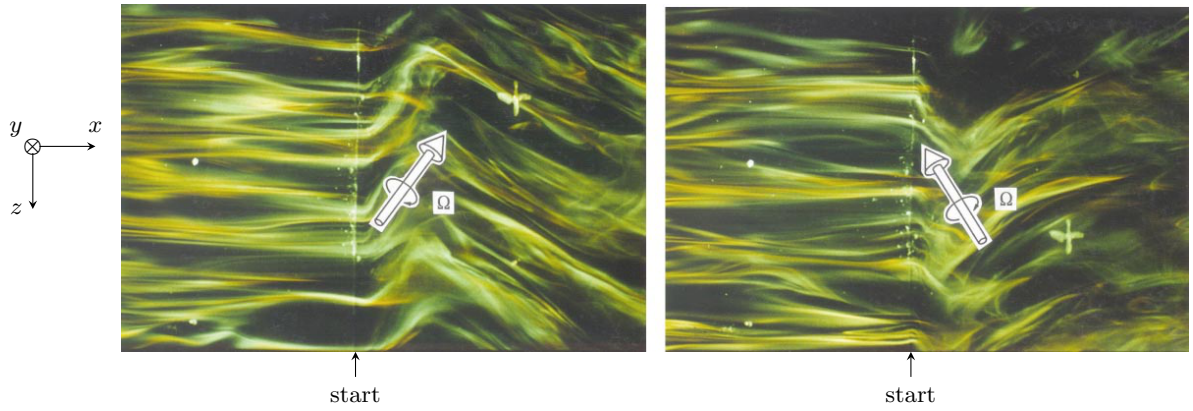


FIGURE 2.28 – Visualisation des structures de la turbulence proche-paroi en présence d'oscillation de paroi, lors des phases d'amplitude de vitesse w_w négative (*à gauche*) et positive (*à droite*) maximale. Les flèches annotées "start" localisent l'extrémité amont de la zone de contrôle. Figures extraites de [141], réalisées à partir de clichés instantanés des expériences de Choi [42].

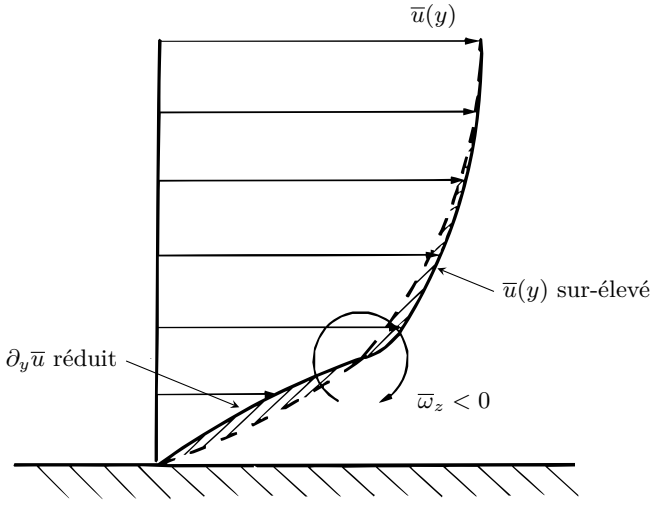


FIGURE 2.29 – Modèle conceptuel expliquant la réduction de frottement induite par l'oscillation transverse de la paroi. La création de vorticité transverse négative par le contrôle affecte le profil de vitesse moyenne $\overline{u}(y)$ (——) de sorte à diminuer le gradient à la paroi par rapport au cas canonique (– – –). Figure extraite de [42].

Chapitre **3**

Modélisation et simulation des écoulements turbulents

Sommaire

3.1 Simulations des grandes échelles 85
3.1.1 Filtrage 86
3.1.1.1 Définition et propriétés 86
3.1.1.2 Application aux écoulements turbulents 86
3.1.2 Modélisation sous-maille 88
3.1.2.1 Modélisation du tenseur sous-maille 89
3.1.2.2 Modèle d'échelles mixtes sélectif 89
3.1.2.3 Modélisation de la conductivité sous-maille 90
3.2 Discrétisation et résolution des équations de Navier-Stokes 90
3.2.1 Formulation vectorielle 90
3.2.2 Méthode des volumes finis 91
3.2.3 Discrétisation spatiale des flux 91
3.2.3.1 Discrétisation spatiale des flux visqueux 91
3.2.3.2 Discrétisation spatiale des flux convectifs 92
3.2.4 Intégration temporelle 94
3.2.5 Conditions aux limites 96
3.2.5.1 Parois solides 97
3.2.5.2 Frontières libres 97
3.2.5.3 Condition d'entrée 97
3.2.5.4 Condition de périodicité, raccord informatique et implicitation par bloc 99

Depuis les expériences d'Osborne Reynolds, de nombreux scientifiques ont continué à observer les écoulements turbulents. Des méthodes et dispositifs de plus en plus évolués ont été mis en place afin de mesurer, avec plus de finesse et dans des conditions toujours mieux maîtrisées, différentes caractéristiques des écoulements. Dans la seconde moitié du 20^{e} siècle, l'apparition et la rapide expansion du calcul numérique ont ouvert une voie complémentaire à cette approche expérimentale,

la mécanique des fluides numérique (CFD pour *Computational Fluid Dynamics*). En permettant la résolution des équations qui régissent la dynamique des fluides — rappelées dans la section 1.1 — l'informatique a permis d'approcher le comportement des écoulements réels.

Les approches expérimentale et numérique sont complémentaires, puisqu'elles bénéficient chacune d'avantages qui leur sont propres, mais souffrent également toutes deux de limitations différentes. Sans entrer dans une énumération exhaustive de leurs points différenciant, notons par exemple que la simulation numérique permet la mesure simultanée de l'ensemble des variables de champ avec la discrétisation spatiale et temporelle voulue, sans que cela ne perturbe l'écoulement. À l'inverse, l'expérience se distingue notamment par la possibilité qu'elle offre de réaliser des mesures sur des temps bien plus longs que ce que permet la simulation numérique. De plus, sous réserve d'une maîtrise convenable des conditions d'écoulement, l'expérience reste gage de validité et de référence pour la confrontation avec les résultats numériques.

Dans le cas particulier des écoulements turbulents, les approches expérimentale et numérique souffrent de limitations issues d'une même caractéristique physique. Comme souligné dès le premier chapitre, la turbulence comporte des phénomènes d'une très grande disparité d'échelle spatiale et temporelle, dont le nombre de Reynolds en donne une mesure. Le même défi se pose donc expérimentalement et numériquement : décrire pleinement la turbulence suppose d'être à même de capturer les plus petites structures comme les plus grosses. C'est du moins l'enjeu imposé par l'approche de la simulation numérique directe (DNS pour *Direct Numerical Simulation*).

En mécanique des fluides numérique, l'arithmétique de précision finie des calculateurs impose de discrétiser l'espace et le temps en intervalles élémentaires au sein desquels l'écoulement est considéré comme relativement uniforme. Ainsi, tout comme un appareil photo doit compter suffisamment de pixels pour que l'image matricielle qui en résulte puisse représenter le sujet dans sa totalité et avec un certain niveau de détails, la discrétisation numérique d'un écoulement turbulent doit compter suffisamment de mailles pour que l'ensemble des échelles y soit correctement capturé. Le coût d'une DNS dépend donc directement de la diversité des échelles de la turbulence et donc du nombre de Reynolds de l'écoulement. Par analyse dimensionnelle, Sagaut *et al.* [234] indiquent que le coût CPU d'une simulation numérique directe est proportionnel à Re_L^3, où L est la longueur caractéristique des plus grandes échelles.

Malgré les progrès considérables du calcul haute performance (HPC pour *High Performance Computing*), la résolution directe des équations de Navier-Stokes reste inabordable pour des écoulements turbulents d'intérêt industriel dont le nombre de Reynolds dépasse la dizaine de milliers. Une alternative est d'abandonner l'espoir de simuler la turbulence, fortement instationnaire par nature, mais plutôt de se contenter de modéliser statistiquement son influence sur l'écoulement moyen. C'est l'approche retenue par les simulations de types RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) et URANS (*Unsteady* RANS). Dans ce premier cas, on ne s'intéresse qu'aux champs temporellement moyennés et l'on tente de résoudre les équations de Navier-Stokes moyennées (1.17) (pour lesquelles les termes de dérivées temporelles sont alors triviaux). Un modèle est alors nécessaire pour fermer les équations, c'est-à-dire pour évaluer les termes $\widetilde{u_i'' u_k''}$ et $\widetilde{u_i'' E''}$. Pour des écoulements qui vérifient l'hypothèse forte d'une véritable séparation d'échelle entre celles des fluctuations turbulentes et celles des phénomènes basses fréquences que l'on souhaite étudier, l'approche URANS (*Unsteady* RANS) consiste à résoudre les équations (1.17) tout en prenant en compte les dérivées temporelles. Cependant, par nature, ces simulations ne permettent pas l'étude des mouvements fluctuants qui n'y sont pas simulés.

Comme illustré sur la figure 3.1, à mi-chemin entre les DNSs prohibitives et les simulations RANS trop grossières pour notre étude se trouvent les simulations des grandes échelles (LES pour *large eddy simulation*).

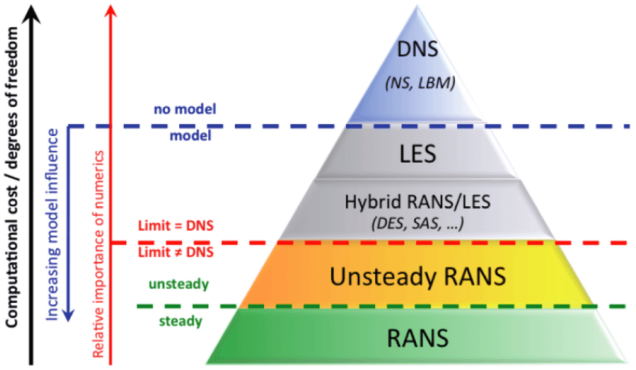


FIGURE 3.1 – Schéma illustrant les différentes approches de simulation et de modélisation de la turbulence. Figure extraite de [201].

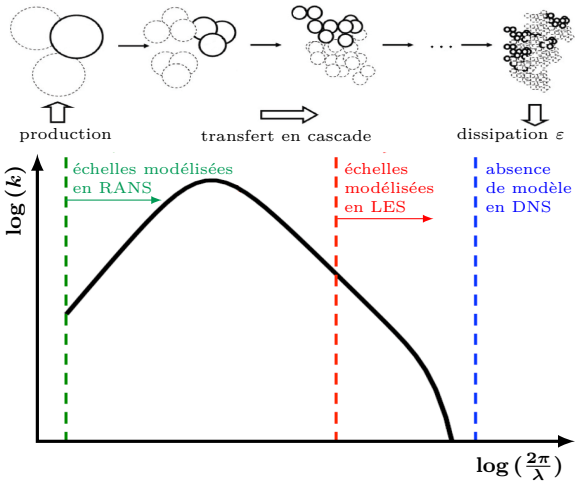


FIGURE 3.2 – *En haut :* Schéma illustrant la cascade de Kolmogorov de l'énergie cinétique turbulente k. *En dessous :* Spectre de k dans le cas de la turbulence homogène isotrope en fonction du nombre d'onde et représentation de la zone modélisée pour les principales stratégies de simulation. Figures adaptées de [201] et inspirées de [128, 83].

3.1 Simulations des grandes échelles

L'idée de la LES est de ne simuler que les plus grosses structures de la turbulence, qui contiennent la plus grande partie de l'énergie cinétique turbulente. Cela permet alors de relâcher la contrainte sur la discrétisation spatiale et temporelle puisque les plus petites échelles n'ont plus à être capturées. On qualifie alors de "sous-mailles" (*subgrid scale*) les petites échelles non simulées.

Néanmoins, on ne peut se permettre de simplement omettre ces plus petites structures. Leurs interactions avec le reste de l'écoulement doivent être prises en compte. En effet, lorsque les fluctuations turbulentes sont créées à une certaine échelle, on observe un transfert de l'énergie cinétique vers des échelles plus petites, mais aussi vers les échelles plus grandes. On dénomme ces transferts sous les termes de cascades directe et indirecte de l'énergie cinétique turbulente. Ces transferts sont strictement non-linéaires par nature et sont dus aux effets couplés des termes de convection et de pression [231]. Dans le cas spécifique de la turbulence homogène isotrope, la théorie de Kolmogorov [153] prédit le mécanisme de transfert d'énergie inter-échelle représenté sur la figure 3.2. L'énergie cinétique turbulente est principalement extraite de l'écoulement moyen par les grosses structures, avant d'être transférée en cascade à des échelles de plus en plus petites. Sous l'effet de la viscosité, les plus petites échelles (échelle de Kolmogorov) la dissipent finalement sous forme de chaleur. On obtient alors le spectre d'énergie cinétique caractéristique de la figure 3.2.

L'approche LES impose donc non seulement de séparer les grandes échelles des petites échelles sous-mailles, mais également de modéliser l'effet de ces dernières sur l'écoulement résolu. La première de ces deux étapes est réalisée grâce à un filtrage des équations de Navier-Stokes présenté dans la sous-section 3.1.1 suivante, alors que la modélisation sous-maille est abordée dans la sous-section 3.1.2. Le lecteur intéressé pourra se référer aux ouvrages de Sagaut [230] et de Garnier *et al.* [97] pour davantage de précision sur la simulation des grandes échelles en écoulement incompressible et compressible.

3.1.1 Filtrage

3.1.1.1 Définition et propriétés

Définition. Contrairement à l'opérateur de Reynolds, appliqué dans le cadre des simulations de type RANS, le filtre que l'on souhaite utiliser en LES est un filtre passe-haut pour les variables spatiales et/ou temporelles – c'est-à-dire passe-bas pour les variables fréquentielles et les longueurs d'onde. On note Δ_c son échelle de coupure en espace et k_c la longueur d'onde de coupure correspondante. Formellement, l'opération de filtrage d'un champ $\phi(\underline{x},t)$ est réalisée par un opérateur $G(\underline{\xi},\tau)$ suivant le produit de convolution

$$\overline{\phi}(\underline{x},t) = G(\underline{x},t) \star \phi(\underline{x},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}} G(\underline{\xi},\tau)\ \phi(\underline{x}+\underline{\xi},t+\tau)\ \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\underline{\xi}\,, \tag{3.1}$$

où la notation $\overline{\phi}$, déjà employée aux chapitres précédents pour décrire la moyenne de Reynolds de ϕ, représente dans cette section l'opération de filtrage. Dans l'espace spectral, le produit de convolution se résume à un simple produit. En notant $\hat{\phi}(\underline{k},\omega)$ la transformée de Fourier de $\overline{\phi}(\underline{x},t)$, le filtrage s'écrit

$$\hat{\overline{\phi}}(\underline{k},\omega) = \hat{G}(\underline{k},\omega)\ \hat{\phi}(\underline{k},\omega)\,. \tag{3.2}$$

Le filtrage ainsi défini permet alors de décomposer une variable de champ ϕ selon

$$\phi = \overline{\phi} + \phi'\,. \tag{3.3}$$

Propriétés. Le noyau de convolution G doit être choisi de sorte que le filtrage conserve les constantes, soit linéaire et commute avec les opérateurs de dérivation. Ces propriétés s'énoncent comme tel :

$$\overline{a} = a\,, \qquad \overline{\phi+\psi} = \overline{\phi}+\overline{\psi}\,, \qquad \overline{\partial_i\phi} = \partial_i\overline{\phi}\,, \qquad \overline{\partial_t\phi} = \partial_t\overline{\phi}\,. \tag{3.4}$$

Parmi les noyaux G admissibles, on retrouve notamment ceux construits à partir de filtres monodimensionnels "boîtes" $G(\xi) = \frac{1}{\Delta_c}\mathbb{1}(|\xi| < \frac{\Delta_c}{2})$, de filtres "boîtes spectrales" $\hat{G}(k) = \mathbb{1}(|k| < k_c)$ ou de filtres gaussiens. Plus de détails sur la définition et sur les propriétés de ces filtres sont fournis dans l'ouvrage de Sagaut [230].

Il convient de préciser que, contrairement aux opérateurs de Reynolds et de Favre, l'opérateur de filtrage n'est pas nécessairement idempotent, c'est-à-dire que

$$\overline{\overline{\phi}} \;=\; G\star G\star\phi \;\neq\; G\star\phi \;=\; \overline{\phi}\,. \tag{3.5}$$

Pour cette raison, l'application du filtre à ϕ' ne donne pas nécessairement zéro : $\overline{\phi'} \neq 0$. Dans ce cas, aucune information n'est perdue lors de l'application du filtrage, puisque le noyau de l'opérateur linéaire est alors réduit au singleton nul.

3.1.1.2 Application aux écoulements turbulents

L'approche LES consiste à appliquer un filtre aux variables de champ pour l'étude des écoulements turbulents. La décomposition (3.3) permet de séparer tout champ ϕ en une partie résolue $\overline{\phi}$ et une partie non résolue ϕ'. La partie résolue contient les grandes échelles que l'on souhaite simuler, alors que la partie non résolue, également appelée partie sous-maille, contient les plus petites échelles pour lesquelles on se contente de modéliser l'influence sur l'écoulement.

Filtrage de Favre. De manière analogue à l'opérateur de moyenne de Reynolds, le filtrage défini précédemment est mal adapté aux équations de Navier-Stokes en régime compressible, puisqu'il ajoute un grand nombre de termes inconnus. De façon comparable à l'introduction de la moyenne de Favre à partir de celle de Reynolds à l'équation (1.14), on définit ici un nouvel opérateur — couramment appelé filtrage de Favre — et une nouvelle décomposition entre partie résolue et partie non résolue :

$$\widetilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\overline{\rho}} \,, \tag{3.6}$$

$$\phi = \widetilde{\phi} + \phi'' \,. \tag{3.7}$$

Ce nouvel opérateur n'est pas un filtre au sens où il ne vérifie pas la propriété de commutation avec les dérivées (3.4). Il faut davantage le considérer comme un changement de variable qui permet de donner aux équations de Navier-Stokes filtrées pour les écoulements compressibles une forme similaire à celles des équations non filtrées originales.

Équations de Navier-Stokes filtrées. L'application du filtrage aux équations de Navier-Stokes (1.1) permet d'obtenir les équations constitutives de la LES suivantes.

$$\partial_t \overline{\rho} \quad + \partial_k \overline{\rho}\, \widetilde{u}_k \quad = \quad 0 \,, \tag{3.8a}$$

$$\partial_t \overline{\rho}\, \widetilde{u}_i + \partial_k \overline{\rho}\, \widetilde{u}_i\, \widetilde{u}_k = -\partial_i \overline{p} \quad + \partial_k \widehat{\tau}_{ik} \qquad + A_{1,i} + A_{2,i} \,, \qquad \forall i \in [1;3] \,, \tag{3.8b}$$

$$\partial_t \widehat{\rho E} \; + \partial_k \widehat{\rho E}\, \widetilde{u}_k \;=\; -\partial_k \overline{p}\, \widetilde{u}_k + \partial_k \widehat{\tau}_{ik}\, \widetilde{u}_i - \partial_k \widehat{q}_k + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 \,. \tag{3.8c}$$

Dans ces équations, l'ensemble des termes explicités ne font intervenir que des grandeurs résolues. Ils sont calculables. En particulier, le tenseur des efforts visqueux résolus $\underline{\underline{\widehat{\tau}}}$, le flux de chaleur résolu $\underline{\widehat{q}}$ et l'énergie calculable $\widehat{\rho E}$ sont définis uniquement à partir grandeur directement calculable selon :

$$\widehat{\tau}_{ik} = \; \mu(\widetilde{T}) \quad \widetilde{S}_{ik} \,, \tag{3.9}$$

$$\widehat{q}_k = \kappa_{\text{th}}(\widetilde{T})\, \partial_k \widetilde{T} \,, \tag{3.10}$$

$$\widehat{\rho E} = \overline{\rho}\, \widetilde{e} + \frac{1}{2}\, \overline{\rho}\, \widetilde{u}_i \widetilde{u}_i \,, \qquad \text{avec} \qquad \overline{\rho}\, \widetilde{e} = \frac{\overline{p}}{\gamma - 1} \,. \tag{3.11}$$

Les termes sous-mailles sont explicités sous les noms de variable $\underline{A}_n$ et B_n. Ils font intervenir des grandeurs non résolues. Ils sont donc non calculables à partir des champs filtrés et devront être modélisés, ce qui fera l'objet de la sous-section suivante. Leur expression est donnée par

$$A_{1,i} = \; -\partial_k \overline{\rho}\, (\widetilde{u_i u_k} - \widetilde{u}_i \widetilde{u}_k) = \; -\partial_k \tau_{ik}^{\text{sgs}} \,, \tag{3.12a}$$

$$A_{2,i} = \quad \partial_k (\overline{\tau}_{ik} - \widehat{\tau}_{ik}) \,, \tag{3.12b}$$

pour les termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, et par

$$B_1 = \; -\partial_k \overline{\rho}\, (\widetilde{eu_k} - \widetilde{e}\, \widetilde{u}_k) \,, \tag{3.13a}$$

$$B_2 = \; -\overline{p\, \partial_k u_k} + \overline{p}\, \partial_k \widetilde{u}_k \,, \tag{3.13b}$$

$$B_3 = \; -\partial_k (\tau_{ik}^{\text{sgs}}\, \widetilde{u}_i) \,, \tag{3.13c}$$

$$B_4 = \quad \tau_{ik}^{\text{sgs}}\, \partial_k \widetilde{u}_i \,, \tag{3.13d}$$

$$B_5 = \quad \overline{\tau_{ik}\, \partial_k u_i} - \overline{\tau}_{ik}\, \partial_k \widetilde{u}_i \,, \tag{3.13e}$$

$$B_6 = \quad \partial_k (\overline{\tau}_{ik} - \widehat{\tau}_{ik}) \widetilde{u}_i \,, \tag{3.13f}$$

$$B_7 = \; -\partial_k (\overline{q}_k - \widehat{q}_k) \,, \tag{3.13g}$$

pour ceux de l'équation de conservation de l'énergie. Les termes $\underline{A}_1$, B_3 et B_4 proviennent de la non-linéarité du terme convectif. Ils font intervenir le **tenseur sous-maille** $\underline{\underline{\tau}}^{\text{sgs}}$ qui peut-être considéré comme l'équivalent pour les équations filtrées de ce que le tenseur de Reynolds $\underline{\underline{R}}$ représente pour des équations moyennées.

De la théorie à la pratique. L'application d'un filtre pour l'étude d'écoulements complexes nécessite souvent l'utilisation d'une échelle de coupure Δ_c inhomogène. Pour l'étude de la turbulence pariétale par exemple, il peut être intéressant d'appliquer un filtre dont la longueur de coupure diminue à mesure que l'on s'approche de la paroi. Néanmoins, dans un tel cas, la propriété (3.4) de commutation entre les opérateurs de filtrage et de dérivation spatiale n'est plus vérifiée. Le filtrage introduit alors une erreur supplémentaire.

Puisque cette erreur n'est pas bornée en général, différentes formulations ont été introduites afin de la limiter à un certain ordre [103, 272]. On parle alors de filtres "commutants d'ordre n". Cependant, ces formulations ne sont utilisées en pratique que pour justifier de la possibilité d'utiliser un filtrage inhomogène [202].

Dans la grande majorité des calculs LES, le filtrage est implicite : aucune opération de filtrage avec un noyau de convolution G explicitement définie n'est réalisée. Le filtrage est alors assuré par le maillage qui, de par sa discrétisation finie, ne capte pas les échelles les plus petites. Cela justifie le qualificatif "sous-maille" attribué au terme non résolu ϕ' de la décomposition (3.3).

Les maillages n'étant généralement pas cartésiens, le filtrage est inhomogène et la longueur de coupure varie avec la direction considérée. Il convient alors de définir une longueur de coupure effective Δ_c. Deardoff [65] propose notamment d'utiliser le volume de la maille :

$$\Delta_c = 2\sqrt[3]{\Delta_x\,\Delta_y\,\Delta_z}\,, \tag{3.14}$$

où Δ_{x_i} est la dimension de la maille dans la direction x_i et le facteur 2 est issu du théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon.

On constate donc que, dans le cas extrême d'un maillage suffisamment fin — avec une longueur de coupure en tout point plus fine que l'échelle de Kolmogorov locale — le filtrage implicite devient trivial : la partie résolue $\overline{\phi}$ ou $\widetilde{\phi}$ s'identifie alors directement au champ ϕ lui-même et les termes sous-mailles deviennent nuls. Ainsi, contrairement aux simulations RANS, pour lesquelles les fluctuations temporelles sont supprimées indépendamment de la résolution spatiale, l'approche "des grandes échelles" converge vers la DNS dès lors que les "grandes échelles" simulées sont en fait toutes les échelles énergétiques de l'écoulement.

3.1.2 Modélisation sous-maille

Pour pouvoir les résoudre, il est nécessaire de fermer les équations de Navier-Stokes filtrées (3.8) et donc de modéliser les termes sous-mailles $\underline{A}_n$ et B_n. La part relative de chacun de ces termes a été évaluée, à partir de DNSs, par Vreman [275] dans une couche de mélange, puis par Lenormand *et al.* [166] dans un écoulement de canal plan. Leur classification figure dans le tableau 3.1, où un ordre de grandeur sépare chacune des catégories d'influence.

Influence	Termes résolus	Termes sous-mailles
Importante	Convection	
Moyenne	Diffusion	$\underline{A}_1$, B_1, B_2, B_3
Faible		B_4, B_5
Négligeable		$\underline{A}_2$, B_6, B_7

TABLE 3.1 – Classification de l'ordre de grandeur, suivant la norme L_2, des termes des équations filtrées. Tableau adapté de [275].

Dans la pratique, les termes d'influence négligeable sont effectivement négligés. Les deux termes B_4 et B_5, dont l'influence est faible, le sont également car leur modélisation est source d'incertitude et peut même s'avérer néfaste en présence d'ondes de choc. Ainsi, la liste des termes qui doivent être effectivement modélisés se réduit donc à $\underline{A}_1$, B_1, B_2 et B_3.

3.1.2.1 Modélisation du tenseur sous-maille

Différentes approches existent pour modéliser le tenseur sous-maille $\underline{\underline{\tau}}^{\text{sgs}}$ intervenant dans $\underline{A}_1$ et B_3. Sagaut [230] propose une classification en deux catégories de ces approches.

La première catégorie est celle des **modèles structurels**. Ces modèles tentent d'approcher le tenseur sous-maille réel en estimant la forme des échelles non résolues. Ils procèdent pour cela à une extrapolation des caractéristiques des échelles résolues les plus fines ou s'appuient sur des développements en séries. Les modèles de "déconvolution approchée", qui tentent d'inverser le produit de convolution, font également partie de cette catégorie. Des tests à partir de DNSs filtrées montrent que ces modèles présentent un bon niveau de corrélation avec le tenseur $\underline{\underline{\tau}}^{\text{sgs}}$ exact.

La seconde catégorie concerne les **modèles fonctionnels**. Ces modèles ne tentent pas d'approcher le tenseur sous-maille réel, mais prétendent simplement reproduire le comportement exercé par les échelles sous-mailles sur l'écoulement résolu. La théorie de Kolmogorov, abordée en début de section 3.1, fournit les hypothèses idéales d'un transfert énergétique universel des échelles les plus grosses vers les plus petites qui, *in fine*, dissipent l'énergie cinétique sous l'effet de la viscosité. Par conséquent, l'action des échelles sous-mailles vis-à-vis de l'écoulement résolu est essentiellement dissipative, d'où l'idée de calquer la modélisation du tenseur sous-maille sur celui des contraintes visqueuses. À l'instar de l'hypothèse de Boussinesq qui permet de modéliser le tenseur de Reynolds dans le cadre des équations RANS, on introduit une viscosité sous-maille $\mu_{\text{sgs}} = \overline{\rho}\,\nu_{\text{sgs}}$ qui permet de modéliser le tenseur $\underline{\underline{\tau}}^{\text{sgs}}$ par une expression similaire à celle (1.6) définissant $\underline{\underline{\tau}}$, c'est-à-dire :

$$\underline{\underline{\tau}}^{\text{sgs}} = -\mu_{\text{sgs}}\,\underline{\underline{\widetilde{S}}}\,. \tag{3.15}$$

Comme pour la plupart des LESs existantes, c'est cette dernière approche fonctionnelle qui, de par sa simplicité de mise en œuvre, est utilisée dans les travaux de ce manuscrit.

3.1.2.2 Modèle d'échelles mixtes sélectif

Il faut maintenant être en mesure d'estimer la viscosité sous-maille ν_{sgs}. Le modèle retenu dans ce manuscrit est basé sur le modèle d'échelles mixtes (*mixed scale model*) proposé par Sagaut [229] :

$$\nu_{\text{sgs}}(\underline{x},t) = C_m(\alpha_{\text{msm}})\ \left|\underline{\underline{\widetilde{S}}}(\underline{x},t)\right|^{\alpha_{\text{msm}}}\ \Big(k_{\text{c}}(\underline{x},t)\Big)^{\frac{1-\alpha_{\text{msm}}}{2}}\ {\Delta_{\text{c}}}^{1+\alpha_{\text{msm}}}\,, \tag{3.16}$$

où α_{msm} et $C_m(\alpha_{\text{msm}})$ sont des paramètres et où la longueur de coupure Δ_{c} est estimée selon (3.14) à partir des dimensions du maillage. Ce modèle fait intervenir à la fois des informations en provenance des échelles résolues, au travers du tenseur $\underline{\underline{\widetilde{S}}}$, et des informations sur les échelles sous-mailles, extrapolées à partir de l'énergie cinétique à la coupure k_{c}.

L'énergie k_{c} est estimée par l'énergie cinétique présente entre l'échelle de coupure de la LES Δ_{c} et une échelle de coupure test $\check{\Delta}_{\text{c}} > \Delta_{\text{c}}$. On calcule donc

$$k_{\text{c}} = \frac{1}{2}\Big(\widetilde{u}_i - \check{\widetilde{u}}_i\Big)\Big(\widetilde{u}_i - \check{\widetilde{u}}_i\Big), \tag{3.17}$$

où l'opérateur $\check{\cdot}$ est le filtre test de longueur de coupure $\check{\Delta}_{\text{c}}$. En pratique, ce filtre test est dérivé du filtre discret élémentaire suivant appliqué aux trois directions du maillage :

$$\check{\phi}\rfloor_i = \frac{\phi\rfloor_{i-1} + 2\,\phi\rfloor_i + \phi\rfloor_{i+1}}{4}\,. \tag{3.18}$$

Sur la base de tests empiriques réalisés *a posteriori*, les valeurs $\alpha_{\text{msm}} = 0.5$ et $C_m(\alpha_{\text{msm}}) = 0.06$ sont couramment préconisées.

Le modèle d'échelles mixtes ainsi défini s'avère être trop dissipatif dans les zones d'écoulement laminaire et à proximité des parois. Afin de l'améliorer, la définition (3.16) de la viscosité sous-maille $\nu_{\text{sgs}}(\underline{x},t)$ est multipliée par un senseur $f_{\text{s}}(\underline{x},t)$, défini de sorte à tendre vers zéro dans les

zones où la viscosité sous-maille n'est pas nécessaire. En se basant sur des constatations issues de l'étude de la turbulence homogène isotrope, David [64] propose que les zones considérées comme turbulentes soient celles pour lesquelles l'orientation de la vorticité $\widetilde{\underline{\omega}}(\underline{x},t)$ est sujette à de fortes variations locales. Il évalue cette variation d'orientation grâce à l'angle

$$\theta_{\mathrm{s}}(\underline{x},t) = \arcsin\left(\frac{\|\check{\widetilde{\underline{\omega}}} \wedge \widetilde{\underline{\omega}}\|}{\|\check{\widetilde{\underline{\omega}}}\| \cdot \|\widetilde{\underline{\omega}}\|}\right), \tag{3.19}$$

qui exploite également le filtre test $\check{}$ abordé précédemment. L'angle seuil à partir duquel la viscosité sous-maille est considérée comme nécessaire est estimé à 20°.

Le senseur $f_{\mathrm{s}}(\underline{x},t)$ peut alors prendre la forme

$$f_{\mathrm{s}}(\underline{x},t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \theta_{\mathrm{s}}(\underline{x},t) \geq 20^\circ\,, \\ \left(\dfrac{\tan^2\left(\frac{\theta_{\mathrm{s}}}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{20^\circ}{2}\right)}\right)^2 & \text{sinon}\,. \end{cases} \tag{3.20}$$

La fonction à base de tangente, introduite par Sagaut & Troff [236], assure la continuité de la fonction et permet d'éviter les problèmes numériques que peut entraîner la discontinuité d'un senseur "zéro ou un".

La pré-multiplication du modèle d'échelles mixtes (3.16) par le senseur (3.20) s'accompagne de celle par un facteur correctif, empiriquement évalué à 1.65. Le modèle ainsi obtenu porte le nom de modèle d'échelles mixtes sélectif (*selective mixed scale model*).

3.1.2.3 Modélisation de la conductivité sous-maille

De même que le tenseur sous-maille $\underline{\underline{\tau}}^{\mathrm{sgs}}$ a été modélisé pour produire sur l'écoulement résolu un effet assimilable à celui de la viscosité, Vreman [275] propose d'introduire une conductivité thermique sous-maille κ_{sgs} pour modéliser l'effet des deux termes restants B_1 et B_2. Il calque donc la loi de Fourier (1.8) pour construire le modèle suivant :

$$B_1 + B_2 = \partial_k\, q_k^{\mathrm{sgs}} \qquad \text{avec} \qquad q_k^{\mathrm{sgs}} = +\kappa_{\mathrm{sgs}}\, \partial_k\, \widetilde{T}\,. \tag{3.21}$$

On peut alors relier la conductivité thermique sous-maille κ_{sgs} à la viscosité sous-maille ν_{sgs} au moyen d'un nombre de Prandtl selon

$$\kappa_{\mathrm{sgs}} = \frac{\mu_{\mathrm{sgs}}\, c_{\mathrm{p}}}{\mathcal{P}r_{\mathrm{sgs}}} = \frac{\overline{\rho}\, \nu_{\mathrm{sgs}}\, c_{\mathrm{p}}}{\mathcal{P}r_{\mathrm{sgs}}}\,. \tag{3.22}$$

En pratique, on suppose alors ce nombre de Prandtl sous-maille $\mathcal{P}r_{\mathrm{sgs}}$ constant et égal au nombre de Prandtl classique, c'est-à-dire $\mathcal{P}r_{\mathrm{sgs}} = \mathcal{P}r = 0.72$.

3.2 Discrétisation et résolution des équations de Navier-Stokes

En utilisant la fermeture apportée par la modélisation sous-maille, on dispose maintenant d'un système d'équations (3.8) pour décrire l'évolution des variables conservatives résolues $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}\,\widetilde{\underline{u}}$ et $\widehat{\rho E}$. Un travail de reformulation de ce système est maintenant nécessaire afin de pouvoir le traiter numériquement. Les différentes étapes qui permettent d'obtenir, à partir de ces équations d'évolution continues, un système algébrique discret sont développées dans la suite de cette section.

3.2.1 Formulation vectorielle

Après simplification des termes négligés et introduction des modèles sous-mailles, les équations de Navier-Stokes filtrées peuvent s'exprimer formellement sous la forme vectorielle

$$\partial_t\, \underline{\boldsymbol{W}} + \partial_k\, \underline{\boldsymbol{F}}_k^{\mathbf{conv}} - \partial_k\, \underline{\boldsymbol{F}}_k^{\mathbf{visc}} = \underline{\mathbf{0}}\,, \tag{3.23}$$

avec $\underline{\boldsymbol{W}}$, $\underline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}}^{\mathbf{conv}}$ et $\underline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}}^{\mathbf{visc}}$ les vecteurs des variables conservatives, des flux convectifs et des flux visqueux, respectivement définis par

$$\underline{\boldsymbol{W}} = \begin{pmatrix} \overline{\rho} \\ \overline{\rho}\,\widetilde{u} \\ \overline{\rho}\,\widetilde{v} \\ \overline{\rho}\,\widetilde{w} \\ \widehat{\rho\,E} \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{F}}_k^{\mathbf{conv}} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}\,\widetilde{u}_k \\ \overline{\rho}\,\widetilde{u}\,\widetilde{u}_k + \overline{p}\,\delta_{1k} \\ \overline{\rho}\,\widetilde{v}\,\widetilde{u}_k + \overline{p}\,\delta_{2k} \\ \overline{\rho}\,\widetilde{w}\,\widetilde{u}_k + \overline{p}\,\delta_{3k} \\ \widehat{\rho\,E}\;\widetilde{u}_k + \overline{p}\,\widetilde{u}_k \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{F}}_k^{\mathbf{visc}} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\widetilde{\mu} + \mu_{\text{sgs}})\;\widetilde{S}_{1k} \\ (\widetilde{\mu} + \mu_{\text{sgs}})\;\widetilde{S}_{2k} \\ (\widetilde{\mu} + \mu_{\text{sgs}})\;\widetilde{S}_{3k} \\ (\widetilde{\mu} + \mu_{\text{sgs}})\,\widetilde{S}_{ik}\,\widetilde{u}_i + (\widetilde{\kappa}_{\text{th}} + \kappa_{\text{sgs}})\,\partial_k \widetilde{T} \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

3.2.2 Méthode des volumes finis

Alors que l'approche des différences finies est basée sur l'évaluation des variables de champ à des points localisés de l'espace — comme aux centres des mailles par exemple — l'approche des volumes finis s'intéresse pour sa part à leur valeur moyenne au sein de volumes élémentaires Ω tels que ceux des mailles. La formulation de cette approche est obtenue en intégrant l'équation d'évolution (3.23) sur ces volumes élémentaires. Grâce au théorème de Green-Ostrogradski, les opérateurs de divergence peuvent être reformulés de sorte que la variation des grandeurs conservatives dans un volume Ω s'exprime en fonction des flux à travers la frontière $\partial\Omega$ de ce volume élémentaire, dont la normale sortante est notée $\underline{n}$:

$$\iiint_{\Omega} \partial_t \underline{\boldsymbol{W}}\;\mathrm{d}\Omega + \oiint_{\partial\Omega} \left(\underline{\boldsymbol{F}}_k^{\mathbf{conv}} - \underline{\boldsymbol{F}}_k^{\mathbf{visc}}\right) n_k\;\mathrm{d}\mathcal{S} = \underline{\mathbf{0}}\,. \tag{3.25}$$

On se propose d'appliquer cette relation dans le cas d'un maillage structuré constitué uniquement de mailles hexaédriques (c'est-à-dire topologiquement cubiques). Chacune de ces mailles peut alors être identifiée par un triplet $\ell = (i, j, k)$. On pose $\underline{\boldsymbol{W}}_\ell(t)$ la moyenne spatiale du vecteur des variables conservatives $\underline{\boldsymbol{W}}(\underline{x}, t)$ dans le volume Ω_ℓ de la maille ℓ. Pour chacune des six facettes séparant cette maille de ses voisines d'indice $\ell+\delta\ell$, où $\delta\ell$ est l'un des incréments unitaires parmi $\pm(1,0,0)$, $\pm(0,1,0)$ ou $\pm(0,0,1)$, on note $\mathcal{S}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}}$ la surface de la facette et $\underline{\boldsymbol{F}}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}}$ le flux moyen qui la traverse et que l'on suppose implicitement orienté. En utilisant ces notations, l'équation (3.25) peut être réécrite suivant

$$\forall \ell = (i,j,k)\,, \qquad \partial_t\left(\Omega_\ell\,\underline{\boldsymbol{W}}_\ell\right) + \sum_{\|\delta\ell\|=1} \mathcal{S}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}} \left(\underline{\boldsymbol{F}}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}}^{\mathbf{conv}} - \underline{\boldsymbol{F}}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}}^{\mathbf{visc}}\right) = \underline{\mathbf{0}}\,. \tag{3.26}$$

3.2.3 Discrétisation spatiale des flux

L'équation discrète précédente obtenue par la méthode des volumes finis permet de suivre l'évolution au cours du temps du vecteur $\underline{\boldsymbol{W}}_\ell(t)$. La résolution d'une telle équation donnerait donc accès aux données discrètes que sont les valeurs moyennes des variables conservatives dans le volume de chaque maille. Sans disposer d'une meilleure description des champs continus, il nous faut néanmoins être en mesure d'évaluer les flux sur les interfaces entre les mailles. Différentes méthodes sont alors adoptées, suivant qu'il s'agit des flux visqueux ou des flux convectifs.

3.2.3.1 Discrétisation spatiale des flux visqueux

Les flux numériques sont généralement calculés à l'aide du schéma centré suivant, précis à l'ordre 2 :

$$\underline{\boldsymbol{F}}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}}^{\mathbf{visc}} = \frac{\underline{\boldsymbol{F}}_{\ell}^{\mathbf{visc}} + \underline{\boldsymbol{F}}_{\ell+\delta\ell}^{\mathbf{visc}}}{2}\,, \tag{3.27}$$

où les vecteurs $\underline{\boldsymbol{F}}_{\ell}^{\mathbf{visc}}$ et $\underline{\boldsymbol{F}}_{\ell+\delta\ell}^{\mathbf{visc}}$ sont calculés dans chacune des mailles correspondantes suivant la formule (3.24).

Puisque la définition du vecteur $\underline{\boldsymbol{F}}^{\mathbf{visc}}$ fait intervenir le tenseur $\widetilde{S}$, le gradient du vecteur vitesse dans chacune des mailles doit être évalué. Le gradient d'une variable ϕ, moyennée dans le volume d'une maille, est alors évalué à partir du théorème d'Ostrogradski. Dans le cas d'un maillage cartésien pour lequel les directions spatiales (x, y, z) coïncident avec les directions topologiques (i, j, k), on obtient :

$$\left[\partial_x \phi\right]_\ell = \frac{1}{\Omega_\ell} \iiint_{\Omega_\ell} \partial_x \phi \, \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{\Omega_\ell} \oiint_{\partial\Omega} \phi \, n_x \, \mathrm{d}\mathcal{S} = \frac{\mathcal{S}_{\ell+\frac{i}{2}} \, \phi_{\ell+\frac{i}{2}} - \mathcal{S}_{\ell-\frac{i}{2}} \, \phi_{\ell-\frac{i}{2}}}{\Omega_\ell} \,, \tag{3.28}$$

où $\phi_{\ell\pm\frac{i}{2}}$ peut de nouveau être estimé par la demi-somme $(\phi_\ell + \phi_{\ell\pm i})/2$.

Ainsi, dans chaque direction i, j ou k du maillage, cette discrétisation des flux visqueux fait intervenir les variables conservatives de la cellule elle-même, $\underline{\boldsymbol{W}}_\ell$, de ses voisines, $\underline{\boldsymbol{W}}_{\ell\pm\delta\ell}$, et des voisines de ses voisines, $\underline{\boldsymbol{W}}_{\ell\pm2\delta\ell}$. Le stencil de ce schéma est donc de 5 points pour un calcul mono-dimensionnel.

Une méthode de discrétisation alternative, proposée par Chakravarthy [31] consiste à évaluer le flux $\underline{\boldsymbol{F}}^{\mathbf{visc}}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}}$ dans un volume restreint centré sur la position de l'interface :

$$\underline{\boldsymbol{F}}^{\mathbf{visc}}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}} = \left(\frac{\widetilde{\mu}_\ell + \widetilde{\mu}_{\ell+\delta\ell}}{2}\right) \, \underline{\underline{\widetilde{S}}}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}} \cdot \underline{\mathcal{S}}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}} \,, \tag{3.29}$$

Mansour *et al.* [172] propose un schéma permettant de n'utiliser que les cellules directement avoisinantes. Ainsi, pour l'interface entre les cellules (i, j, k) et $(i+1, j, k)$ par exemple, on utilisera l'information des cellules $\ell \in [i, i{+}1]\times[j{-}1, j{+}1]\times[k{-}1, k{+}1]$. Dans le cas mono-directionnel, les flux de l'équation de conservation de la quantité de mouvement se calculent simplement par

$$\left[\partial_x \widetilde{u}\right]_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}} = \frac{\widetilde{u}_{\ell+\delta\ell} - \widetilde{u}_\ell}{\Delta x} = \frac{2\left(\widetilde{u}_{\ell+\delta\ell} - \widetilde{u}_\ell\right) \mathcal{S}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}}}{\Omega_{\ell+\delta\ell} + \Omega_\ell} \,. \tag{3.30}$$

Le stencil de cette approche, restreint à 3 points pour un calcul mono-dimensionnel, est donc nettement plus compact que pour l'approche précédente.

3.2.3.2 Discrétisation spatiale des flux convectifs

Les flux convectifs sont plus délicats à traiter, en raison de leur non-linéarité et de leur caractère hyperbolique.

Un fort parallèle peut être fait entre le problème de Riemann — qui consiste à déterminer l'écoulement lorsqu'une membrane qui sépare deux zones contenant du fluide dans des conditions de pression, vitesse ou température différentes est subitement supprimée — et l'évaluation des flux à l'interface entre deux mailles. Ainsi, l'utilisation de solveurs — exacts ou approchés — de Riemann pour le calcul des flux convectifs est possible. L'état du fluide de part et d'autre de l'interface séparant deux mailles voisines doit alors être reconstruit au mieux.

Reconstruction des variables à l'interface. Connaissant les valeurs des variables conservatives moyennées dans le volume de chaque maille, l'objectif est ici de les reconstruire sur la surface séparant deux mailles voisines. Le schéma de reconstruction MUSCL (*Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws*) introduit par Van Leer [271] consiste à supposer que les variables de champs sont paraboliques par morceaux dans chaque maille. Dans le cas mono-dimensionnel, une variable $\phi(x)$ sera donc décrite dans la maille ℓ par une loi de la forme

$$\phi(x) = a_\ell \, x^2 + b_\ell \, x + c_\ell \,, \qquad \forall x \in \Omega_\ell \,. \tag{3.31}$$

Les constantes a_ℓ, b_ℓ et c_ℓ sont choisies de sorte à satisfaire les contraintes suivantes :

$$\int_{x\in\Omega_{\ell-1}} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \Delta x_{\ell-1}\,\phi_{\ell-1}\,, \tag{3.32a}$$

$$\int_{x\in\Omega_{\ell}} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \Delta x_{\ell}\quad \phi_{\ell}\quad , \tag{3.32b}$$

$$\int_{x\in\Omega_{\ell+1}} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \Delta x_{\ell+1}\,\phi_{\ell+1}\,. \tag{3.32c}$$

Notons que le domaine de validité de la loi parabolique (3.31) est artificiellement étendu aux mailles voisines lors de cette étape de détermination des coefficients.

En appliquant cette loi au cas d'un maillage mono-dimensionnel uniforme, on obtient les formules de reconstruction précises à l'ordre 3 suivantes

$$\phi^{\mathrm{G}}_{\ell-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{6}\phi_{\ell-2} + \tfrac{5}{6}\phi_{\ell-1} + \tfrac{2}{6}\phi_{\ell}\,, \tag{3.33a}$$

$$\phi^{\mathrm{D}}_{\ell-\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{6}\phi_{\ell-1} + \tfrac{5}{6}\phi_{\ell} - \tfrac{1}{6}\phi_{\ell+1}\,, \tag{3.33b}$$

$$\phi^{\mathrm{G}}_{\ell+\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{6}\phi_{\ell-1} + \tfrac{5}{6}\phi_{\ell} + \tfrac{2}{6}\phi_{\ell+1}\,, \tag{3.33c}$$

$$\phi^{\mathrm{D}}_{\ell+\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{6}\phi_{\ell} + \tfrac{5}{6}\phi_{\ell+1} - \tfrac{1}{6}\phi_{\ell+2}\,. \tag{3.33d}$$

Pour des raisons de coût de calcul, ces formules sont utilisées comme telles, même dans le cas de maillage tridimensionnel non uniforme.

Le schéma AUSM+(P) avec senseur. Pour les écoulements à grands nombres de Reynolds, les schémas centrés s'avèrent être potentiellement oscillants, voire instables. On peut alors avoir recours à des schémas décentrés vers l'amont (*upwind scheme*) qui permettent d'apporter plus de stabilité au prix d'une dégradation de la précision.

On s'intéressera ici aux schémas AUSM (*Advection Upstream Splitting Method*). Ces schémas appartiennent à la famille des schémas de type FVS (*Flux Vector Splitting*) par opposition à celle des schémas de type FDS (*Flux Difference Splitting*) à laquelle les schémas de Roe ou d'Osher appartiennent. En particulier, le schéma AUSM+(P) incorpore diverses modifications par rapport à la formulation originelle. Ces modifications permettent, d'une part, d'obtenir la précision des schémas FDS tout en gardant la robustesse des schémas FVS [168] et d'autre part, d'assurer le couplage entre vitesse et pression [77], ce qui améliore la précision en régime subsonique. Une version simplifiée — sans capture de choc — introduite par Mary & Sagaut [176] a été retenue dans cette étude. Ce schéma est décrit ci-dessous dans le cas mono-dimensionnel.

En définissant les vecteurs $\underline{\boldsymbol{Q}} = (\overline{\rho},\ \overline{\rho}\,\widetilde{u},\ \widehat{\rho E} + \overline{p})$ et $\underline{\boldsymbol{P}} = (0,\ \overline{p},\ 0)$, les flux convectifs à chaque interface s'écrivent de la manière suivante :

$$\underline{\boldsymbol{F}}^{\mathbf{conv}}_{\ell+\frac{1}{2}} = U^{\mathrm{cent}}_{\ell+\frac{1}{2}} \frac{\underline{\boldsymbol{Q}}^{G}_{\ell+\frac{1}{2}} + \underline{\boldsymbol{Q}}^{D}_{\ell+\frac{1}{2}}}{2} - 2\,\Phi_{\ell+\frac{1}{2}}\,U^{\mathrm{upw}}_{\ell+\frac{1}{2}} \frac{\underline{\boldsymbol{Q}}^{G}_{\ell+\frac{1}{2}} - \underline{\boldsymbol{Q}}^{D}_{\ell+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\underline{\boldsymbol{P}}^{G}_{\ell+\frac{1}{2}} + \underline{\boldsymbol{P}}^{D}_{\ell+\frac{1}{2}}}{2}\,. \tag{3.34}$$

Les grandeurs U^{cent} et U^{upw} sont homogènes à des vitesses. La première est utilisée pour assurer la partie centrée, peu dissipative, du schéma, alors que la suivante amène le décentrement. Elles sont définies par

$$U^{\mathrm{cent}} = \frac{\widetilde{u}^{G} + \widetilde{u}^{D}}{2} - C_2 \frac{\overline{p}^{G} - \overline{p}^{D}}{\rho_{\mathrm{ref}} U_{\mathrm{ref}}}\,, \tag{3.35a}$$

$$U^{\mathrm{upw}} = \max\left(C_1\,U_{\mathrm{ref}},\ U^{\mathrm{int}}\right), \tag{3.35b}$$

$$\text{avec}\quad U^{\mathrm{int}} = \frac{\widetilde{u}^{G} + \widetilde{u}^{D}}{2} - C_2 \frac{\overline{p}^{G} - \overline{p}^{D}}{\rho_{\mathrm{ref}} U_{\mathrm{ref}}} \max\left(0,\ 1 - 2\frac{\widetilde{u}^{G} + \widetilde{u}^{D}}{2\,c}\right). \tag{3.35c}$$

Les grandeurs ρ_{ref} et U_{ref} sont des grandeurs de référence qui peuvent être, par exemple, celles de l'écoulement libre. Les coefficients C_1 et C_2 sont tous deux fixés à 0.04 de sorte à limiter la dissipation du schéma [176].

Le dernier terme de l'équation (3.34) est le senseur Φ. De façon nominale, ce senseur est fixé à 0 de sorte que le schéma soit centré et donc plus précis et moins dissipatif. Néanmoins, dans les zones où des oscillations numériques sont repérées, fixer le senseur à 1 permet d'amener le décentrement nécessaire à une stabilisation de la solution. En pratique, il suffit que l'une des variables conservatives présente un comportement oscillant pair–impair sur les mailles $\ell-1$, ℓ et $\ell+1$ pour que le senseur soit fixé à 1 pour le calcul des flux aux interfaces $\ell-\frac{1}{2}$ et $\ell+\frac{1}{2}$. Cette condition peut être formalisée de la manière suivante :

$$\Phi_{\ell+\frac{1}{2}} = \max\left(\Psi_{\ell-1}\Psi_{\ell},\ \Psi_{\ell}\Psi_{\ell+1},\ \Psi_{\ell+1}\Psi_{\ell+2}\right), \tag{3.36}$$

$$\text{avec} \quad \Psi_{\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists k \text{ tel que } \left(\boldsymbol{Q}_{\ell+1}(k)-\boldsymbol{Q}_{\ell}(k)\right)\left(\boldsymbol{Q}_{\ell}(k)-\boldsymbol{Q}_{\ell-1}(k)\right)<0\,, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{3.37}$$

où $\boldsymbol{Q}_{\ell}(k)$ dénote ici la k-ième composante du vecteur $\underline{\boldsymbol{Q}}_{\ell}$.

3.2.4 Intégration temporelle

La méthode des volumes finis (3.26), au côté des flux discrétisés (3.29) et (3.34), permet de décrire l'évolution temporelle des variables conservatives moyennées dans chaque maille $\underline{\boldsymbol{W}}_{\ell}$. Il faut maintenant discrétiser en temps cette équation d'évolution, ce qui implique la dérivée temporelle.

Un schéma d'intégration temporelle explicite est, au mieux, conditionnellement stable. C'est-à-dire qu'une condition sur le pas de temps Δt doit être respectée pour que le schéma demeure stable. Celle-ci porte le nom de condition CFL (pour Courant, Friedrichs, Lewy [55]). Pour assurer la stabilité du schéma, la quantité

$$CFL^{\text{hyperbolic}} = \max_i \left(\frac{\left(c+|\widetilde{u}_i|\right)\Delta t}{\Delta x_i}\right). \tag{3.38}$$

doit rester inférieure à une valeur seuil qui dépend du schéma d'intégration utilisé. Cette condition revient à comparer la taille de la maille à la distance parcourue par une perturbation acoustique pendant un pas de temps. À cette condition portant sur la propagation acoustique viennent s'ajouter des conditions relatives à chacun des phénomènes propagatifs en jeu. Dans notre cas, le transport par diffusion visqueuse doit également être pris en compte, ce qui amène à considérer le nombre sans dimension suivant

$$CFL^{\text{parabolic}} = \max_i \left(\frac{\mu\,\Delta t}{{\Delta x_i}^2}\right). \tag{3.39}$$

On voit donc que pour un écoulement donné, la limitation visqueuse peut devenir prépondérante si la discrétisation spatiale devient suffisamment fine.

Le recours à un schéma d'intégration temporelle implicite qui soit inconditionnellement stable permet d'utiliser un pas de temps bien plus long, sans considération CFL sur la stabilité. En contrepartie de cette stabilité inconditionnelle, les schémas implicites imposent une inversion de matrice difficile et coûteuse. En pratique, il faut avoir recours à des méthodes itératives, exécutées jusqu'à l'atteinte d'un niveau de convergence suffisant. Une attention particulière doit être portée à la convergence de ces résidus, en particulier dans le cas d'écoulements à faible nombre de Mach.

Bien qu'aucun risque d'instabilité ne se pose alors, le pas de temps du calcul doit néanmoins être suffisamment petit pour pouvoir décrire correctement la physique instationnaire que l'on veut simuler. En pratique, pour la plupart des applications aéronautiques subsoniques, l'utilisation d'un schéma implicite demeure une solution de choix en termes de coût de calcul.

Schéma temporel implicite rétrograde d'Euler. Le schéma utilisé dans cette étude est le schéma Euler rétrograde du second ordre proposé par Gear [100]. La dérivée temporelle du vecteur des variables conservatives $\underline{\boldsymbol{W}}_\ell$ à l'instant $t_{n+1} = (n+1)\times\Delta t$ s'écrit :

$$\left(\partial_t \underline{\boldsymbol{W}}_\ell\right)^{n+1} \simeq \frac{\frac{3}{2}\underline{\boldsymbol{W}}_\ell^{n+1} - 2\underline{\boldsymbol{W}}_\ell^{n} + \frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{W}}_\ell^{n-1}}{\Delta t}\,. \tag{3.40}$$

Le caractère implicite de la formulation découle du fait que la dérivée $\partial_t \underline{\boldsymbol{W}}_\ell$ est exprimée au même instant t_{n+1} que le vecteur le plus avancé dans le temps qui la compose, c'est-à-dire $\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1}$. En introduisant cette expression dans l'équation d'évolution (3.26), les flux convectifs et visqueux se retrouvent donc eux-mêmes exprimés à l'instant t_{n+1} le plus avancé :

$$\forall \ell\,,\ \forall n\,, \qquad \frac{3}{2}\Delta\underline{\boldsymbol{W}}_\ell^{n+1} - \frac{1}{2}\Delta\underline{\boldsymbol{W}}_\ell^{n} + \frac{\Delta t}{\Omega_\ell}\sum_{\|\delta\ell\|=1} \underline{\boldsymbol{F}}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}}^{n+1} = \underline{\mathbf{0}}\,, \tag{3.41}$$

avec $\underline{\boldsymbol{F}}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}} = \mathcal{S}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}}\left(\underline{\boldsymbol{F}}^{\mathbf{conv}}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}} - \underline{\boldsymbol{F}}^{\mathbf{visc}}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}}\right)$ le vecteur regroupant les flux convectifs et visqueux implicitement multipliés par la surface $\mathcal{S}_{\ell+\frac{\delta\ell}{2}}$ et avec $\Delta\underline{\boldsymbol{W}}_\ell^n = \underline{\boldsymbol{W}}_\ell^n - \underline{\boldsymbol{W}}_\ell^{n-1}$ le vecteur d'évolution incrémentale.

Résoudre cette équation implique de déterminer simultanément le vecteur $\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1}$ et les flux $\underline{\boldsymbol{F}}^{n+1} = \underline{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1})$ qui en dépendent. Pour ce faire, on linéarise la dépendance des flux au vecteur $\underline{\boldsymbol{W}}$ autour de l'état à l'instant t_n, c'est-à-dire

$$\underline{\boldsymbol{F}}^{n+1} \;=\; \underline{\boldsymbol{F}}^{n} \;+\; \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}}{\partial \underline{\boldsymbol{W}}}(\underline{\boldsymbol{W}}^{n})\cdot\Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1} \;+\; \mathcal{O}\left(\Delta t^2\right), \tag{3.42}$$

où la matrice jacobienne $\partial\underline{\boldsymbol{F}}/\partial\underline{\boldsymbol{W}}$ à l'instant t_n est connue puisque l'état $\underline{\boldsymbol{W}}^n$ l'est également. En prenant en compte la linéarisation des flux, l'équation d'évolution devient alors

$$\left[\frac{3}{2}\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \frac{\Delta t}{\Omega_\ell}\sum_{\|\delta\ell\|}\frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}}{\partial \underline{\boldsymbol{W}}}\left(\underline{\boldsymbol{W}}^{n}\right)\right]\cdot\Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1} = \frac{1}{2}\Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{n} - \frac{\Delta t}{\Omega_\ell}\sum_{\|\delta\ell\|}\underline{\boldsymbol{F}}^{n}\,. \tag{3.43}$$

Le calcul des matrices jacobiennes est non seulement coûteux, mais conduit également à une matrice mal conditionnée ce qui rend la résolution délicate. On peut alors avoir recours à différentes approximations pour simplifier le calcul [204, 49, 288, 129], mais celles-ci mettent à défaut l'ordre 2 de la discrétisation temporelle.

Pour le retrouver, il est nécessaire d'utiliser un algorithme de résolution itératif, dans lequel la linéarisation des flux (3.42) est systématiquement recalculée à partir de la nouvelle estimation sous-itérative [1] $\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p}$ du vecteur $\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1}$. En notant $\Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p+1} = \underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p+1} - \underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p}$, l'algorithme sous-itératif s'écrit alors

$$\left[\frac{3}{2}\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \frac{\Delta t}{\Omega_\ell}\sum_{\|\delta\ell\|}\frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}}{\partial \underline{\boldsymbol{W}}}\left(\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p}\right)\right]\cdot\Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p+1} = -\frac{3}{2}\left(\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p} - \underline{\boldsymbol{W}}^{n}\right) + \frac{1}{2}\Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{n} - \frac{\Delta t}{\Omega_\ell}\sum_{\|\delta\ell\|}\underline{\boldsymbol{F}}^{n+1,p}\,. \tag{3.44}$$

Ainsi, à convergence, lorsque $\Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p+1}$ tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque l'estimation itérative $\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p+1}$ n'évolue plus, les flux sont alors exactement calculés puisque leur linéarisation est faite autour de la valeur d'intérêt.

À chacune des sous-itérations, il faut résoudre un système linéaire (3.44) dont on simplifie la notation à

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{n+1,p}\cdot\Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p+1} = \underline{\mathcal{R}}^{n+1,p}\,. \tag{3.45}$$

1. Le terme de "sous-itération" sera utilisé ici pour faire référence à l'algorithme itératif de résolution du système implicite à un pas de temps n donné, afin que le terme d' "itération" désigne sans ambiguïté les résolutions successives du système implicite, pas de temps après pas de temps.

La matrice $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ peut aisément être approchée par la décomposition incomplète de type Gauss–Seidel symétrique :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \underline{\underline{\mathcal{L}}} + \underline{\underline{\mathcal{D}}} + \underline{\underline{\mathcal{U}}} \simeq \left(\underline{\underline{\mathcal{L}}} + \underline{\underline{\mathcal{D}}}\right) \cdot \underline{\underline{\mathcal{D}}}^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{\mathcal{D}}} + \underline{\underline{\mathcal{U}}}\right), \tag{3.46}$$

où les matrices introduites sont respectivement les parties strictement inférieure, diagonale et strictement supérieure de la matrice complète [204]. Cette décomposition permet de résoudre le système (3.45) par les trois étapes

$$\left(\underline{\underline{\mathcal{L}}} + \underline{\underline{\mathcal{D}}}\right) \cdot \Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{*} = \underline{\mathcal{R}}\,, \tag{3.47a}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{D}}}^{-1} \cdot \Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{**} = \Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{*}\,, \tag{3.47b}$$

$$\left(\underline{\underline{\mathcal{D}}} + \underline{\underline{\mathcal{U}}}\right) \cdot \Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1} = \Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{**}\,, \tag{3.47c}$$

présentant chacune l'avantage d'être facilement vectorisable par balayage sur des plans $i + j + k$ constants.

Dans un calcul multiprocesseur, la répartition des données est distribuée : aucun processeur n'a vocation à disposer des informations nécessaires à la résolution du système (3.44) global. Au contraire, chaque processeur vise à résoudre la partie de l'écoulement $\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1}$ restreinte aux mailles du (ou des) bloc(s) qui le concerne. Ainsi, pour chacun des blocs de maillage, un système d'équations est construit de façon équivalente à celui du système global, mais d'étendue limitée aux cellules du sous-domaine. Chaque découpe du domaine globale devient donc une frontière pour ces problèmes aux limites restreints. Les détails quant à la prise en compte de ce type particulier de conditions aux limites sont apportés dans la sous-section suivante.

3.2.5 Conditions aux limites

Après avoir décrit la méthode numérique de discrétisation et de résolution des équations de Navier-Stokes, il nous reste à aborder la problématique des conditions aux limites. Il s'agit non seulement d'établir les équations qui caractérisent la présence d'une frontière, mais également de préciser comment les imposer numériquement.

En particulier, les codes volumes finis FLU3M et FUN*k* sont des codes structurés auxquels l'utilisateur doit fournir un maillage qui discrétise la totalité de l'espace Ω de fluide à simuler. Plutôt que d'interférer, à proximité des frontières $\partial\Omega$, avec la résolution numérique des équations de Navier-Stokes dans le domaine Ω, une ou deux rangées de cellules de maillage sont générées par prolongement derrière chaque frontière. Ces mailles, créées pour des besoins numériques, sont appelées **cellules fictives** alors que celles du domaine fluide sont appelées **cellules réelles** par opposition.

Lors de la résolution des équations de Navier-Stokes discrètes, les mailles fictives sont numériquement utilisées comme les mailles réelles pour le calcul des flux à travers la frontière. Néanmoins, pour imposer les conditions aux limites voulues, elles sont remplies à chaque début de sous-itération par les valeurs de variables conservatives adaptées. Ces valeurs dépendent donc du type de condition aux limites (Dirichlet, Neumann, non-réflexion, etc.) et de l'écoulement dans les mailles réelles de l'autre côté de la frontière. À ce remplissage des variables conservatives dans les cellules fictives s'ajoute éventuellement une correction des flux initialement calculés par les schémas discrétisés (3.29) et (3.34).

Pour les études d'écoulements sans gradient de pression réalisé dans cette thèse, le domaine de calcul est globalement parallélépipédique. Parmi les six faces, on distingue différents types de conditions aux limites : une paroi solide en vis-à-vis avec une frontière dans l'écoulement libre, une condition d'entrée en vis-à-vis avec une condition de sortie et, enfin, deux frontières latérales reliées par périodicité. À ces frontières du domaine global viennent s'ajouter l'ensemble des frontières de raccord informatique entre les sous-domaines traités par des processeurs différents.

3.2.5.1 Parois solides

Dans le cadre de cette thèse, nous aurons à traiter des parois solides immobiles que l'on supposera adiabatiques. Ces conditions impliquent, à l'interface, la nullité des trois composantes du vecteur vitesse et des gradients dans la direction normale de la température et de la pression :

$$\forall t, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{\text{wall}}, \qquad \underline{u}(\underline{x},t) = \underline{0}\,, \qquad \partial_n T(\underline{x},t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_n p(\underline{x},t) = 0\,. \tag{3.48}$$

Cela correspond alors à une condition de Dirichlet pour les composantes du vecteur vitesse et à une condition de Neumann sur la température, la pression et donc la densité.

Numériquement, la première maille fictive est alors remplie, à chaque début de sous-itération, par la valeur actualisée de la densité et de la pression de la première maille réelle, positionnée de l'autre côté de la paroi. Pour les composantes du vecteur vitesse, on procède de même avec les valeurs opposées à celle de la première maille réelle. Il en est de même pour la seconde maille fictive, remplie en fonction des valeurs de champ de la seconde maille réelle.

Afin de s'assurer qu'aucune masse, quantité de mouvement, ni énergie ne transitent à travers la paroi, les flux convectifs initialement calculés à partir de la formule (3.34) doivent être corrigés. Ils sont donc surchargés par un calcul effectué directement à partir de la définition (3.24) dans laquelle la vitesse est effectivement considérée comme nulle à la paroi : $\underline{\boldsymbol{F}}_k^{\mathbf{conv}} = \overline{p}\ (0, \delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{3k}, \widetilde{u}_k)$.

3.2.5.2 Frontières libres

Pour traiter les frontières du domaine de calcul qui ne s'appuient sur aucune frontière physique, mais délimitent la zone de l'écoulement que l'on souhaite simuler dans un écoulement plus large, on ne peut imposer de condition de Dirichlet ou de Neumann avec des valeurs connues *a priori*.

On procède alors à une extrapolation à l'ordre zéro des conditions d'écoulement dans les dernières mailles réelles pour le remplissage des cellules fictives. En pratique, pour l'étude d'un écoulement de plaque plane sans gradient de pression, la seule variable imposée sur les différentes frontières fluides du domaine de calcul (mise à part la condition d'entrée abordée dans le prochain paragraphe) est la pression sur la frontière de sortie du domaine. Pour les autres variables et les autres frontières libres, les variables primitives peuvent être amenées à évoluer avec l'écoulement.

Si aucune précaution supplémentaire n'est prise, la condition aux limites d'extrapolation à l'ordre zéro peut être à l'origine de réflexions acoustiques. En effet, les éventuelles perturbations se propageant vers l'extérieur du domaine de calcul se retrouvent alors réfléchies vers l'intérieur et risquent de polluer la zone d'intérêt. Une correction des flux est alors apportée. L'écoulement à la frontière est décomposé suivant la méthode des caractéristiques, ce qui permet de séparer les perturbations suivant leur sens de propagation, de sorte à ne conserver que la composante se propageant vers l'extérieur du domaine de calcul.

En plus de ces précautions, une zone éponge est ajoutée en sortie de domaine. Cette zone éponge correspond à une zone additionnelle dans laquelle la discrétisation du maillage est progressivement étirée jusqu'à ce que les mailles soient suffisamment grandes pour ne pas permettre la survie des fluctuations turbulentes. La relaminarisation est alors progressive, sans réflexions parasites, et les champs de vitesse et de pression moyennes sont préservés. Dans les simulations conduites au cours de cette étude, le taux d'étirement d'une maille sur l'autre de la discrétisation Δx est fixé à 6% et la zone éponge se poursuit jusqu'à ce que Δx atteigne l'épaisseur de la couche limite.

3.2.5.3 Condition d'entrée

La condition d'entrée est un point crucial pour la justesse et la réduction du coût d'une simulation LES ou DNS de couche limite turbulente. L'enjeu réside dans la difficulté à générer des fluctuations turbulentes réalistes, c'est-à-dire vérifiant les différentes statistiques et corrélations spatio-temporelles d'une véritable couche limite turbulente. Un écoulement qui contient des perturbations

aléatoires, sans contenu fréquentiel adéquat, risque fortement de se dissiper et de conduire à une relaminarisation [253].

Un choix possible est de simuler la couche limite depuis sa naissance, en passant par les phases de développement laminaire, de transition vers la turbulence, puis de développement turbulent jusqu'à ce que l'écoulement ait atteint le nombre de Reynolds suffisant pour que l'étude puisse être entreprise. Cette procédure, bien que certainement l'une des plus propres quant à la représentativité du contenu turbulent, s'avère clairement inabordable en pratique dès que l'on souhaite atteindre des nombres de Reynolds Re_θ de l'ordre de 10^3 puisqu'elle implique la simulation fine d'une très grande longueur de domaine. Une alternative consiste à imposer, en entrée d'un domaine de calcul bien plus restreint autour de la zone d'intérêt, un champ fluctuant représentatif d'un écoulement turbulent de nombre de Reynolds adéquat.

Les simulations réalisées en canal plan ou en conduite circulaire peuvent tirer profit de l'homogénéité dans la direction longitudinale. Le signal turbulent en sortie de domaine peut alors être réinjecté tel quel en entrée. Il faut simplement s'assurer que le domaine est suffisamment long pour que la périodicité artificiellement introduite ne perturbe pas les phénomènes physiques étudiés.

Dans le cas des couches limites en développement spatial, une telle solution ne peut pas être appliquée directement à cause de l'évolution longitudinale de l'écoulement. Néanmoins, différentes méthodes ont été développées pour transformer, à moindre coût, le signal en sortie de domaine en un signal admissible pour son entrée. On parle de **méthodes de recyclage**. Notamment, Spalart [250, 251] prolongeait son domaine de calcul par une zone dans laquelle des forces volumiques agissaient de sorte à réduire artificiellement l'épaisseur de la couche limite. Une fois le bon nombre de Reynolds retrouvé, l'écoulement pouvait être réintroduit en entrée de domaine. Alternativement, Lund *et al.* [171] puis Tromeur [268] ont mis au point et adapté une méthode analytique de remise à l'échelle du profil de vitesse en sortie de domaine. Afin de prendre en compte la dualité des lois de dimensionnent interne et externe, un traitement différent est appliqué aux régions internes et externes de la couche limite. Cette méthode a largement été depuis utilisée et appliquée à diverses conditions d'écoulement [96, 235, 253].

Lorsque l'écoulement que l'on désire simuler ne comporte pas de zone d'équilibre, la technique de recyclage et de remise à l'échelle ne peut être utilisée. Une méthode alternative consiste alors à recourir à un **calcul précurseur**, stocké au préalable dans une base de données. Comme pour la méthode de recyclage, l'utilisation d'un calcul précurseur implique une remise à l'échelle des données instationnaires stockées. Schlüter *et al.* [241] proposent une formule afin de reproduire un profil de vitesse et des intensités turbulentes cibles, obtenues à partir d'une simulation RANS par exemple. Bien que cette méthode nécessite l'accès à d'importantes capacités de stockage et implique de coûteuses opérations de relecture durant la simulation, elle permet une spécification des données turbulentes pour tout type d'écoulement à un degré de réalisme raisonnable.

Une dernière catégorie de méthode rassemble les **méthodes synthétiques**, pour lesquelles un signal turbulent instationnaire est créé à partir de données statistiques de l'écoulement turbulent et de séquences aléatoires. De nombreuses méthodes ont vu le jour [146, 165, 154, 237, 130, 203] et une revue détaillée en est faite dans la thèse de Pamiès [202].

Ce dernier précise que pour la plupart des méthodes de génération de turbulence synthétique, l'écoulement nécessite une distance d'adaptation en aval de la condition d'injection souvent supérieure à celle des méthodes de recyclage. Cette distance traduit la capacité de la méthode à produire une turbulence dotée de bonnes informations statistiques et instantanées. Néanmoins, passée cette distance de relaxation, les méthodes synthétiques permettent l'imposition d'une distribution d'échelles temporelles et spatiales avec un bon degré de réalisme compte tenu du peu d'information statistique qu'elles utilisent. De plus, elles présentent l'avantage comparatif conséquent par rapport aux méthodes de recyclage de ne pas induire de périodicité non physique.

La condition d'entrée utilisée dans les travaux de cette thèse est la méthode d'injection de turbulence synthétique SEM (*synthetic eddy method*) introduite par Pamiès *et al.* [202, 203]. Tout comme la formulation de Jarrin *et al.* [130] dont elle est adaptée, la SEM de Pamiès utilise une décomposition de Cholesky du tenseur de Reynolds, ce qui permet d'imposer les moments d'ordre 2. En injectant des structures tourbillonnaires de dimensions, de formes et de distributions cohérentes et adaptées par rapport à leur position dans la couche limite, la méthode tente de générer un signal fluctuant qui reproduit une distribution d'échelle réaliste. Les détails quant à la formulation et l'implémentation de cette méthode figurent dans l'annexe B.

3.2.5.4 Condition de périodicité, raccord informatique et implicitation par bloc

Pour les simulations numériques dont les maillages sont suffisamment gros, le recours à des machines HPC disposant d'un grand nombre de processeurs est nécessaire. Afin de répartir au mieux la charge de travail entre les différents nœuds de calcul, le domaine est scindé en de multiples blocs — ou sous-domaines — qui sont attribués aux différents processeurs. Néanmoins, il est indispensable que les processeurs puissent échanger avec leurs voisins les conditions d'écoulement à leur frontière commune. On parle alors de condition de raccord informatique. Les conditions de périodicité sont très similaires à celles de raccord informatique, à la différence près que les coordonnées des mailles de part et d'autre de la frontière ne sont pas confondues.

Comme précisé à la fin de la section 3.2.4, chaque processeur tente de résoudre, pour chacun de ses blocs, un système d'équations implicite similaire à celui du domaine global, mais dont la portée est restreinte aux mailles du (ou des) bloc(s) qui le concerne. Ainsi, pour chacun des blocs de maillage, un système linéaire semblable à (3.44) est construit, dont une notation simplifiée est celle de l'équation (3.45).

La constitution du membre de droite $\underline{\mathcal{R}}^{n+1,p}$ du système d'équations ainsi réduit au sous-domaine nécessite la connaissance des flux à travers les facettes de toutes les mailles du bloc et donc, en particulier, au niveau des interfaces de raccord informatique. Classiquement, les processeurs s'échangent alors les informations nécessaires au calcul de ces flux, c'est-à-dire les variables conservatives sur une ou deux rangées de cellules derrière la frontière, cellules considérées comme fictives pour le processeur qui reçoit les informations.

La constitution du membre de gauche $\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{n+1,p}$ du système, détaillé dans l'équation (3.44), nécessite l'évaluation de la matrice jacobienne $\partial\underline{\boldsymbol{F}}/\partial\underline{\boldsymbol{W}}$ des flux par rapport aux variables conservatives. Cependant, puisqu'on ne résout le système implicite que pour les mailles du sous-domaine, la contribution des mailles fictives (c'est-à-dire des mailles de l'autre côté de la frontière de raccord informatique) à la matrice jacobienne ne peut être prise en compte. Cela revient donc à fixer $\Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p+1} = \underline{0}$ pour les cellules fictives, c'est-à-dire imposer une condition de Dirichlet figée à l'état de l'estimation sous-itérative précédente $\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p}$.

La procédure de résolution sous-itérative est alors la suivante. Après chaque nouvelle sous-itération p effectuée, les processeurs récupèrent de leurs voisins la dernière estimation $\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p}$ des variables conservatives de la (ou les deux) rangée(s) de cellules qui jouxtent leur domaine. Ils construisent le nouveau membre de droite $\underline{\mathcal{R}}^{n+1,p}$ à partir du calcul actualisé des flux $\underline{\boldsymbol{F}}^{n+1,p}$. Ils mettent à jour la jacobienne restreinte $\partial\underline{\boldsymbol{F}}/\partial\underline{\boldsymbol{W}}$ (restreinte puisque seule l'influence des mailles réelles sur les flux est prise en compte). Enfin, ils résolvent une nouvelle fois le système linéaire (3.44) en considérant comme figé l'état de l'écoulement dans les cellules fictives. Ce processus itératif est poursuivi pendant un certain nombre de sous-itérations ou jusqu'à ce qu'un critère de convergence prédéterminé soit vérifié.

Le processus ainsi présenté constitue le degré d'implicitation minimale, en termes d'échange d'informations entre les domaines limitrophes. Pour la plupart des écoulements, il suffit à atteindre un degré de convergence acceptable dans un temps tout à fait abordable. C'est le processus implémenté dans le solveur FLU3M.

Afin d'améliorer l'implicitation de la résolution et donc accélérer le processus de convergence sous-itératif, il est possible de procéder à la résolution du système implicite, non seulement dans le domaine réel, mais également dans les deux premières rangées de cellules fictives. C'est cette approche qui est utilisée dans le solveur FUNk.

Afin de constituer le second membre $\underline{\mathcal{R}}^{n+1,p}$ correspondant, il faut alors récupérer, auprès des processeurs voisins, les informations permettant de calculer les flux dans les deux premières rangées de cellules fictives, c'est-à-dire, ou bien récupérer les variables conservatives, non plus sur 2, mais sur 4 cellules fictives, ou alors récupérer le second membre $\underline{\mathcal{R}}^{n+1,p}$ dans les 2 rangées de cellules fictives après qu'il a été calculé par le processeur voisin.

Puisque le système d'équations est également résolu pour les variables conservatives des deux premières rangées de cellules fictives, leur influence sur les flux peut maintenant être prise en compte. La matrice jacobienne $\partial\underline{\boldsymbol{F}}/\partial\underline{\boldsymbol{W}}$ est alors un peu étendue. Tout comme la matrice jacobienne était déjà modifiée pour ne pas prendre en compte l'influence des cellules fictives dans le cas du solveur FLU3M, elle est cette fois-ci modifiée afin de ne pas prendre en compte l'influence des cellules voisines des cellules fictives. Cela revient à imposer la condition de Dirichlet $\Delta\underline{\boldsymbol{W}}^{n+1,p+1} = \underline{0}$ deux rangées de cellules fictives plus loin que dans l'approche classique.

Puisque la résolution du système est étendue aux cellules fictives, une solution est obtenue dans ces cellules fictives. Cette solution n'a d'ailleurs aucune raison de coïncider exactement avec celle obtenue par le processeur voisin, chez qui ces cellules fictives sont des cellules réelles. En fait, les valeurs calculées dans les cellules fictives ne seront de toute façon jamais utilisées, puisqu'à la sous-itération suivante, elles seront surchargées par celles du processeur voisin. La raison qui pousse donc à étendre la résolution implicite aux cellules fictives réside uniquement dans le constat suivant. Lors de la résolution sous-itérative bloc par bloc, les rangées de cellules au bord des blocs sont à proximité de cellules dont la résolution n'est pas conduite dans le même bloc et pour lesquelles une nouvelle estimation ne sera prise en considération qu'à la sous-itération suivante. L'impact de cette faible implicitation se ressent grandement dans les deux premières rangées de cellules, dans lesquelles les résidus sont particulièrement élevés. Ainsi, en résolvant le système dans les cellules réelles et dans deux rangées additionnelles de cellules fictives, on repousse les effets de bords néfastes en dehors du domaine utile. Comme on le verra par la suite, cette précaution est particulièrement importante dans le cadre des simulations conduites au cours de cette thèse, puisqu'en raison de la topologie de maillage choisie, les sous-domaines contiennent un nombre très limité de cellules dans la direction transverse.

Troisième partie

Études

Chapitre 4

Établissement d'une méthode pour la simulation numérique de *riblets* rectilignes

Sommaire

4.1 Choix et définition du cas d'étude . . . 104
4.2 Choix des paramètres numériques . . . 106
4.2.1 Domaine et discrétisation . . . 107
4.2.2 Condition aux limites . . . 108
4.2.3 Schémas numériques . . . 109
4.3 Génération analytique du maillage . . . 109
4.3.1 Topologie du maillage dans la zone de contrôle . . . 110
4.3.2 Topologie du maillage dans la zone de paroi lisse . . . 112
4.3.3 Distribution analytique des mailles . . . 115
4.4 Présentation des résultats et validation de la méthode numérique . . . 117
4.4.1 Campagnes de simulations et choix de paramètres numériques . . . 117
4.4.2 Degré 0 : Observation qualitative de champs instantanés . . . 118
4.4.2.1 Frottement pariétal instantané . . . 118
4.4.2.2 Structures turbulentes . . . 119
4.4.3 Degré 1 : Grandeurs globales . . . 121
4.4.3.1 Frottement pariétal moyen . . . 121
4.4.3.2 Épaisseurs de couche limite . . . 126
4.4.4 Degré 2 : Champs aérodynamiques moyens . . . 128
4.4.4.1 Champ de densité moyenne . . . 128
4.4.4.2 Champ de pression moyenne . . . 128
4.4.4.3 Champs de vitesses moyennes . . . 129
4.4.5 Degré 3 : Intensités fluctuantes . . . 133
4.4.5.1 Champs des tensions de Reynolds . . . 133
4.4.5.2 Contrainte de cisaillement total . . . 136
4.4.6 Degré 4 : Densité spectrale de puissance . . . 137
4.4.7 Degré 5 : Corrélations spatiales et temporelles . . . 140
4.4.8 Degré 6 : Bilans énergétiques . . . 142
Conclusion du chapitre . . . 143

L'objectif de ce chapitre est de définir un cas d'étude pour les travaux de cette thèse et de mettre au point la méthode permettant son analyse. Dans un premier temps, la configuration que l'on se propose d'étudier sera décrite. En particulier, les conditions d'écoulement et à la géométrie des *riblets* seront spécifiées et leurs choix argumentés. Le traitement de ce problème par des outils numériques impose de le discrétiser spatialement et temporellement. La deuxième section exposera la paramétrisation des solveurs utilisés, à savoir FLU3M et FUN*k* décrit dans le chapitre précédent, afin que les spécificités liées à l'écoulement, la géométrie et la discrétisation spatio-temporelle soient prises en compte. La méthode mise en place pour la génération du maillage sera également présentée. Enfin, les résultats de simulation seront analysés et comparés aux données de références de la littérature.

4.1 Choix et définition du cas d'étude

Le premier choix d'importance pour définir notre cas d'étude porte sur le type d'écoulement pariétal. On distingue notamment deux principales approches :

Les écoulements de canal plan ou de conduite circulaire sont animés par un gradient de pression uniforme. La direction de l'écoulement y est une direction homogène, ce qui représente un avantage conséquent concernant la mise en œuvre de la simulation numérique (en particulier pour la condition d'entrée qui peut alors être une simple condition de périodicité) et l'analyse physique des données (puisque l'évolution temporelle des mouvements fluctuants est, de fait, décorrélée d'une éventuelle convection à travers un écoulement moyen changeant). Cette approche est donc largement utilisée pour améliorer la compréhension de la physique de la turbulence pariétale.

À l'inverse, comme leur nom l'indique, les écoulements de couche limite en développement spatiale évoluent spatialement. C'est en particulier le cas des écoulements turbulents sans gradient de pression (ZPGTBL) de plaque plane, qui sont souvent choisis pour s'affranchir des effets de gradients de pression. La prise en compte du développement spatial permet l'observation de l'évolution des propriétés statistiques dans la direction de l'écoulement et offre la possibilité de comparer les calculs numériques avec des résultats expérimentaux de configurations réalistes. C'est ce dernier type d'écoulement qui a été retenu pour la présente étude.

Un domaine d'étude type est représenté sur la figure 4.1. Pour chaque simulation de paroi recouverte de *riblets*, une simulation de référence avec paroi lisse est réalisée dans les mêmes conditions. Cette simulation étalon permet une comparaison détaillée mettant précisément en évidence l'influence des *riblets* sur l'écoulement. Les données relatives à la simulation de référence sont indiquées par l'indice "ref". Comme on peut le constater sur la figure, dans le cas avec *riblets*, la paroi n'en est pas totalement recouverte. La zone de *riblets*, que l'on appellera également **zone contrôlée**, est précédée et suivie de zones à surface lisse. Ce choix permet l'observation des effets transitoires en amont et en aval de la zone de *riblets*— effets qui ne peuvent être observés dans les nombreuses études de canal plan longitudinalement homogène. Les indices 0 et 1 utilisés dans la suite feront référence aux extrémités amont et avale de la zone contrôlée. Il ne faut pas les confondre avec les extrémités amont et aval du domaine de calcul (qui comprend également les zones de surfaces lisses encadrant la zone contrôlée), respectivement identifiées par les indices "in" et "out".

L'impact de la compressibilité ne relève pas des problématiques que l'on se propose d'étudier. Notons d'ailleurs que, une fois les variations de densité moyenne prises en considération, la dynamique de la turbulence en écoulements supersoniques est très similaire à celles des écoulements incompressibles. Cette hypothèse porte le nom d'hypothèse de Morkovin [190] et s'avère être pertinente pour des ZPGTBLs jusqu'à des nombres de Mach d'environ 4 ou 5 [247]. Il a par ailleurs été

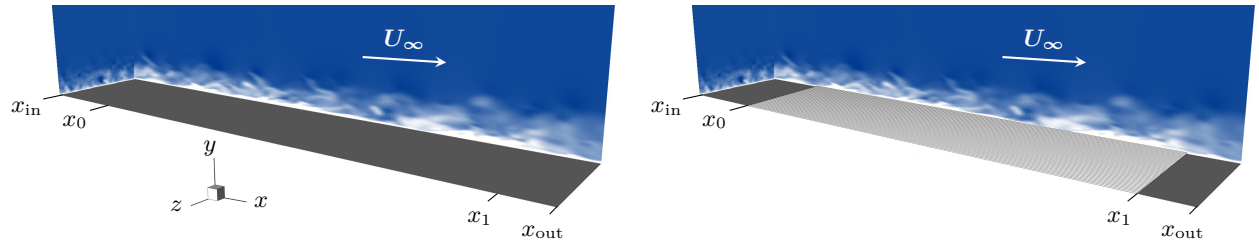


FIGURE 4.1 – Schéma du domaine de calcul d'une simulation de couche limite turbulente au-dessus d'une paroi partiellement couverte de *riblets* (*à droite*) et le domaine de la simulation de référence de plaque plane associée (*à gauche*).

constaté que l'influence du nombre de Mach sur l'efficacité des *riblets* est très faible, comme cela a pu être développé dans le paragraphe 2.2.1.7. Ainsi, les mécanismes responsables de la réduction de traînée engendrée par les *riblets* à des nombres de Mach supersoniques sont vraisemblablement ceux présents en écoulement subsonique ou incompressible.

Puisque l'écoulement d'un gaz n'est jamais parfaitement incompressible (mais surtout parce que le solveur à notre disposition est basé sur les équations de Navier-Stokes compressibles), on se place dans le cadre d'écoulements faiblement compressibles. Le nombre de Mach de l'écoulement libre est fixé à $M_\infty = 0.2$, ce qui permet d'obtenir, dans les conditions atmosphériques standards au niveau de la mer, la vitesse d'écoulement U_∞ figurant dans le tableau 4.1.

Un tel nombre de Mach constitue un bon compromis entre la volonté de limiter les effets de compressibilités et les contraintes numériques des écoulements faiblement compressibles. En effet, concernant ce premier point, les fluctuations de densité et de viscosité peuvent être considérées comme négligeables dans ces conditions. Une vérification *a posteriori* dans nos simulations a montré que l'intensité maximale de la déviation instantanée de la densité par rapport à la valeur moyenne, $\max_{\underline{x},t}(\rho'(\underline{x},t))$, demeure inférieure à 0.5%. En ce qui concerne les contraintes numériques, un bas nombre de Mach $M_\infty = U_\infty/c_\infty$ signifie tout d'abord une grande disparité entre la vitesse caractéristique de l'écoulement U_∞ et la vitesse de propagation des perturbations acoustiques c_∞ dans le milieu fluide. Ainsi, la condition CFL convective, basée sur la vitesse de propagation $|U_\infty| + c_\infty$ (cf. paragraphe 3.2.4), devient extrêmement contraignante et impose une discrétisation temporelle très fine, suffisante pour tenir compte des phénomènes acoustiques, mais excessive et prohibitive pour décrire les phénomènes turbulents d'intérêt ici. Les écoulements à bas nombre de Mach peuvent également entraîner une importante dissipation numérique si le schéma de discrétisation spatial pour les flux convectifs n'est pas choisi de manière adéquate.

p_∞ (hPa)	ρ_∞ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	T_∞ (K)	μ_∞ ($10^{-5}\text{Pa}\cdot\text{s}$)	M_∞	U_∞ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
1013.25	1.225	288.15	1.784	0.2	68.1

TABLE 4.1 – Caractérisation de l'écoulement libre.

Une autre décision structurante porte sur la portion de couche limite que l'on souhaite observer, autrement dit, le nombre de Reynolds de l'écoulement en entrée de la zone contrôlée et la longueur de cette zone. Comme cela a été précisé dans le paragraphe 2.2.1.1, il ne serait que d'un intérêt limité d'étudier des *riblets* en régime d'écoulement laminaire. Ainsi, le nombre de Reynolds d'étude doit être suffisant pour permettre la persistance de la turbulence. Il serait bien sûr intéressant de pouvoir atteindre des nombres de Reynolds d'applications aéronautiques. Simuler l'écoulement turbulent en détail jusqu'à la paroi, à de tels nombres de Reynolds, n'est actuellement pas technologiquement envisageable. García-Mayoral & Jiménez [95] préconisent d'utiliser un nombre de Reynolds $Re_\tau = \delta^+$ suffisant pour que la hauteur $h^+ \simeq 10 - 15$ des *riblets* ne représente pas un obstacle, perturbant

l'intégralité de la couche limite. Ils le déterminent empiriquement selon le critère $h/\delta \lesssim 2.5\%$ issu de l'étude des rugosités. Ainsi, pour que les *riblets* n'engendrent aucun effet de "blocage" sur la couche limite, le nombre de Reynolds doit être supérieur à $Re_\tau \gtrsim 400 - 600$. Cette exigence demeure très contraignante, si bien que la quasi-totalité des simulations de *riblets* — y compris les plus récentes et celles réalisées en canal [76, 94, 155, 207] — ne la satisfasse pas. Le nombre de Reynolds visé au début de la zone de *riblets* a finalement été $Re_\theta \simeq 670$, correspondant approximativement à $Re_{\tau,\text{ref}} \simeq 280$ pour une couche limite canonique de plaque plane. La raison qui a motivé cette valeur est la disponibilité, à cette station, de données de référence comme celles issues des DNSs de Spalart [251], considérées comme une référence depuis plus de 25 ans, ou de Schlatter & Örlü [238]. Le tableau 4.2 résume l'état de la couche limite effectivement obtenue à cette station.

$Re_{\delta,\text{ref}}$	$Re_{\delta^*,\text{ref}}$	$Re_{\theta,\text{ref}}$	$Re_{\tau,\text{ref}}$	$u_{\tau,\text{ref}}$ $(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$l_{\tau,\text{ref}}$ (μm)	δ_{ref} (mm)
5140	945	633	250	3.31	4.64	1.16

TABLE 4.2 – Caractérisation de la couche limite canonique à la station x_0 correspondant au début de zone contrôlée.

Comme précisé dans le paragraphe 2.2.1.3, de nombreuses géométries de coupe de *riblets* ont été étudiées depuis les premiers travaux de Walsh & Weinstein [282]. La géométrie trapézoïdale avec un rapport d'aspect $h/s = 0.5$ et un angle de crête $\alpha = 30°$ (voir le paramétrage sur la figure 2.6) peut-être considérée comme un très bon compromis entre la réduction de traînée maximale atteignable avec des *riblets* idéaux en L et les contraintes pratiques de réalisation [18]. Les études expérimentales sur cette géométrie ont conduit à des taux de réduction de traînée allant de 8.2% [18] à 10.6% [215] et des équipes sont aujourd'hui à même de réaliser de tels *riblets* dans les dimensions adaptées aux applications aéronautiques, comme en témoigne la figure 2.2 réalisée par l'institut allemand *Fraunhofer–IFAM*.

La loi empirique (2.4) permet d'évaluer la dimension optimale des *riblets*. Pour la géométrie trapézoïdale retenue, la dimension optimale basée sur $l^+_{\text{g,opt}}$ conduit à une largeur crête à crête de $s^+_{\text{opt}} = 16.2 \pm 10\%$. Les *riblets* sont donc dimensionnés suivant cette taille optimale théorique, du moins, au début de la zone de contrôle. En effet, au sein d'une ZPGTBL, le frottement pariétal diminue à mesure que le nombre de Reynolds augmente dans la direction aval, entraînant avec lui une évolution spatiale de l'unité de paroi. Puisque les *riblets* sont alignés avec l'écoulement, les sillons restent parallèles et leur dimension physique reste constante, ainsi, la dimension en unité interne ne peut être fixe. Elle décroît avec le frottement. Dans la pratique, on s'assurera néanmoins que la dimension des *riblets* reste dans l'intervalle de 10% autour de la dimension optimale théorique. Le tableau 4.3 résume l'ensemble des paramètres de la géométrie des *riblets* étudiés.

α (°)	h/s	s (μm)	s^+	l^+_g
30	0.5	79.9	$14.9 \rightarrow 16.5$	$9.84 \rightarrow 10.9$

TABLE 4.3 – Caractérisation de la géométrie des *riblets* trapézoïdaux. Les dimensions en unité de paroi sont prises entre $x_0 + 3\delta_0$ et $x_1 - \delta_1$, afin d'exclure les zones transitoires aux extrémités amont et avale de la zone de contrôle.

4.2 Choix des paramètres numériques

De manière générale, la simulation numérique des écoulements de paroi en régime turbulent présente de nombreuses difficultés, dont les principales sont explicitées ci-après. Chacune de ces

difficultés amène à réaliser des choix quant aux méthodes à mettre en œuvre pour mener à bien la simulation.

4.2.1 Domaine et discrétisation

La discrétisation spatiale du problème est soumise à différentes contraintes. Tout d'abord, le domaine ne doit pas être trop petit, au risque de ne pas permettre le développement des plus grandes structures turbulentes. En canal périodique, le plus petit domaine de calcul permettant l'entretien de la turbulence est appelé **unité d'écoulement minimale** (*minimal flow unit*). Ses dimensions en unité interne dans les directions longitudinale, normale et transverse sont respectivement $250 - 350 \times 2\,\delta^+ \times 100$. Un tel domaine de calcul permet tout juste l'existence des structures élémentaires du cycle d'auto-régénération 1.4.1, mais n'a cependant pas vocation à reproduire fidèlement les interactions entre les échelles variées de la turbulence.

Pour la simulation de la turbulence proche-paroi et des stratégies de contrôle associées, on postule généralement qu'un domaine de calcul doit être suffisamment grand pour contenir des structures longues de $1000\,l_\tau$ et larges de δ. Il s'agit là de la longueur caractéristique des *streaks* et de la largeur caractéristique des plus grands tourbillons attachés. En accord avec le théorème de Nyquiste–Shannon, les dimensions du domaine de calcul doivent alors être choisies au moins deux fois plus grandes que celles des plus grandes échelles. On en déduit les dimensions minimales de domaine de calcul figurant sur le tableau 4.4. Dans la direction normale, la dimension requise est supérieure à δ. Sa valeur dépend grandement de la qualité de la condition aux limites sur la frontière supérieure du domaine. Pour la campagne de simulations qui constitue la source principale des résultats de cette étude, les dimensions effectivement utilisées ont été indiquées dans le tableau 4.5.

Une observation *a posteriori* des fonctions d'autocorrélation spatiale peut permettre de s'assurer que la dimension du domaine est suffisante. La fonction d'autocorrélation spatiale est définie pour chaque variable de champ ϕ par $R_\phi(\underline{x}, t, \underline{r}) = \overline{\phi(\underline{x}, t)\phi(\underline{x} + \underline{r}, t)}/\overline{\phi}(\underline{x}, t)\overline{\phi}(\underline{x}, t)$. Comme son nom l'indique, cette fonction caractérise la corrélation qu'il existe entre les fluctuations prises à deux points de l'espace distants de $\underline{r}$ l'un de l'autre. Il faut donc que la fonction d'autocorrélation, pour les composantes du vecteur vitesse notamment, chute à zéro avant que $\underline{r}$ n'atteigne la moitié du domaine pour que l'on puisse s'assurer qu'aucun mouvement cohérent ne soit contraint par les limites du domaine. Une telle vérification sera réalisée dans la section 4.4.

$L_{x,\min}$	$L_{z,\min}$
$2000\,l_\tau$	$2\,\delta$

TABLE 4.4 – Caractérisation des dimensions minimales, dans les directions longitudinale et transverse, du domaine de calcul nécessaire à l'étude de la turbulence pariétale de couche limite.

$L_{\text{in}\to x_0}$	$L_{x_0\to x_1}$	$L_{x_1\to\text{out}}$	L_y	L_z
$10\,\delta_{\text{in}}$	$80\,\delta_{\text{in}}$	$10\,\delta_{\text{in}}$	$10\,\delta_{\text{in}}$	$2\,\delta_{\text{out}}$

TABLE 4.5 – Caractérisation des dimensions du domaine de calcul des campagnes de simulation R10 et RD10 (voir tableau 4.9) dont sont issus la plupart des résultats de cette étude. Comme sur la figure 4.1, x_{in} et x_{out} délimitent les frontières amont et avale du domaine de calcul, alors que x_0 et x_1 délimitent celle de la zone contrôlée.

Alors que la dimension du domaine de calcul est imposée par les plus grandes échelles, celle des mailles l'est par les plus petites échelles actives. Fondamentalement, il faudrait donc des mailles de dimension inférieure à l'échelle de Kolmogorov locale. L'**échelle de Kolmogorov** η, basée sur la dissipation d'énergie cinétique fluctuante ε de l'équation (1.22), caractérise l'échelle à laquelle la dynamique est principalement pilotée par des mécanismes linéaires dissipatifs pour les écoulements

isotropiques (que ne sont pas les écoulements pariétaux). Cependant, cette condition semble être trop stricte. En effets, les simulations numériques ont permis à Moin & Mahesh [187] d'établir que des tailles de maille de l'ordre de $15\,\eta$ à la paroi suffisent à capturer la plus grande partie de la dissipation dans leur simulation d'écoulement de canal. Dans la littérature [238, 239, 251, 287], la résolution à la paroi pour les simulations de type DNS est généralement de l'ordre de $\Delta x^+ \simeq 6-20$, $\Delta y^+ \simeq 0.3-1$ et $\Delta z^+ \simeq 4-10$.

La largeur des *riblets*, $s^+ \simeq 16$, est une contrainte bien plus sévère pour la dimension Δz que la résolution des plus petites échelles de la turbulence. Pour décrire la géométrie des *riblets* avec suffisamment de précision, on s'impose de discrétiser l'espace s entre deux crêtes successives avec 16 mailles et d'utiliser 10 mailles pour décrire l'espace h entre le fond de la vallée et le niveau des crêtes. Cette restriction, bien que numériquement coûteuse, a l'avantage d'apporter une grande finesse quant aux prévisions de frottement pariétal, puisque la résolution dans la direction transverse Δz est celle l'impactant le plus fortement [69].

L'utilisation d'un modèle de viscosité sous-maille permet aux simulations de type LES de s'affranchir du besoin de simuler les plus petites échelles de la turbulence. Les dimensions classiquement retenues [233] à proximité de la paroi pour le maillage de ces simulations est de l'ordre de $\Delta x^+ \simeq 50$, $\Delta y^+ \simeq 1$ et $\Delta z^+ \simeq 15$. Cependant, à cause des contraintes imposées par la géométrie des *riblets*, seule la discrétisation dans la direction longitudinale Δx peut être allongée grâce au modèle sous-maille.

La dimension des mailles des simulations LES dont sont issus la plupart des résultats de cette étude figure dans le tableau 4.6. La nature structurée du maillage impose la prolongation, à distance de la paroi, du raffinement Δx et Δz, même en dehors de la couche limite où une telle finesse de discrétisation n'est pas nécessaire. Par contre, la taille Δy des mailles dans la direction normale peut être étirée avec la distance à la paroi. La taille des mailles à la frontière de la couche limite et le taux d'accroissement relatif maximum de Δy d'une maille sur l'autre sont également précisées.

	Δx^+	$\Delta y^+(y_\mathrm{w})$	$\Delta y^+(\delta)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}j}\Delta y$	Δz^+	Δt^+
LESs actuelles	22	0.8	$0.035\,\delta^+$	4 %	1.1	0.07
standard DNS	$6-20$	$0.3-1$			$4-10$	$0.1-0.4$
standard LES	$30-60$	$0.3-1$			$12-25$	

TABLE 4.6 – Caractérisation des dimensions maximales des mailles utilisées pour la campagne de simulation LES dont sont issus la plupart des résultats de cette étude, comparées à celles classiquement utilisées pour des études de type DNS et LES.

4.2.2 Condition aux limites

Les conditions aux limites abordées dans la section 3.2.5 sont utilisées sur les différentes frontières du domaine de calcul.

Tout d'abord, la condition de paroi décrite dans la sous-section 3.2.5.1 est utilisée sur la surface inférieure du domaine et pour former la paroi des *riblets*.

La condition d'entrée utilisée est la condition SEM d'injection de turbulence synthétique introduite dans le paragraphe 3.2.5.3 et décrite dans l'annexe B.

La périodicité dans la direction latérale z est réalisée en reliant les frontières latérales z_min et z_max l'une à l'autre par une condition de raccord informatique, comme spécifié à la sous-section 3.2.5.4.

Les autres frontières libres, à savoir la sortie de domaine et sa partie supérieure, sont toutes deux traitées par la stratégie abordée dans la partie 3.2.5.2. En particulier, seule la pression en sortie de domaine est imposée pour maintenir un faible niveau de gradient de pression. La pression sur la frontière supérieure du domaine ainsi que les autres grandeurs ne sont pas imposées et sont donc libres d'évoluer avec l'écoulement. À cela s'ajoute un traitement de non-réflexion par la méthode

des caractéristiques ainsi que la présence d'une zone éponge en sortie de domaine.

Finalement, l'évaluation *a posteriori* du champ de pression moyenne permet d'évaluer le gradient $\partial_x \overline{p}_\infty$ effectif. Il existe différents adimensionnements pour le caractériser. Les trois critères les plus couramment utilisés et leurs valeurs maximales dans la zone $[x_0 + 3\delta_0, x_1 - \delta_1]$ sont précisés dans le tableau 4.7. Les zones transitoires aux extrémités amont et avale de la zone de contrôle sont exclues pour ne pas interpréter à tort leur perturbation tout à fait physique sur la pression. Ces faibles valeurs sont du même ordre que celles obtenues dans la littérature par des DNSs de

$\lvert\beta\rvert_{\max} = \left\lvert \frac{\delta^*}{\tau_w} \partial_x \overline{p}_\infty \right\rvert_{\max}$	$\left\lvert \frac{l_\tau}{\rho_w u_\tau^2} \partial_x \overline{p}_\infty \right\rvert_{\max}$	$\left\lvert \frac{\delta}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} \partial_x \overline{p}_\infty \right\rvert_{\max}$
1×10^{-2}	1×10^{-4}	1×10^{-4}

TABLE 4.7 – Caractérisation du gradient effectif maximum de pression moyenne.

référence, comme celle de Wu & Moin [287]. Lors de l'étude du frottement pariétal dans le paragraphe 4.4.3.1, on s'attachera en particulier à contrôler que le gradient de pression ne l'influence que marginalement.

4.2.3 Schémas numériques

Les schémas numériques utilisés sont ceux décrits dans le chapitre précédent 3, à savoir :

- la viscosité sous-maille sera apportée, pour les simulations qui en nécessitent, par le modèle d'échelles mixtes sélectif (cf. 3.1.2.2) ;
- les solveurs FLU3M et FUN*k* utilisés sont tous deux basés sur l'approche des volumes finis (cf. 3.2.2) ;
- dans le cas de FLU3M, les flux visqueux sont discrétisés selon le schéma classique, dît "5 points". Pour les simulations conduites avec FUN*k*, le schéma de Chakravarthy à "3-points" sera préféré (cf. 3.2.3.1) ;
- à partir d'une reconstruction MUSCL des variables aux interfaces, les flux convectifs sont évalués par le schéma AUSM+(P) avec senseur (cf. 3.2.3.2) ;
- la méthode d'intégration temporelle est basée sur le schéma implicite rétrograde d'Euler proposé par Gear (cf. 3.2.4). La résolution est approchée de façon itérative jusqu'à atteindre, avec FLU3M, un nombre prédéterminé de sous-itérations, et avec FUN*k*, un critère de converge sur les résidus implicites.

L'évaluation des grandeurs pariétales, comme le frottement ou la pression, sera réalisée à partir des flux numériques, et ce, afin de garder la plus grande consistance avec le solveur. En effet, si le frottement est évalué, en extrapolation de la vitesse dans les 2 premières mailles, comme étant la dérivée de la vitesse longitudinale selon la normale à la paroi, on obtient une erreur qui peut dépassé 5% dans un cas de surfaces géométriquement complexes (comme celles recouvertes de *riblets*). Une telle incertitude sur la mesure du frottement n'est pas acceptable pour l'évaluation de performances de réduction de traînée. Ainsi, les flux visqueux, obtenus avec le schéma du solveur, seront moyennés et utilisés pour l'évaluation du frottement, alors que les flux convectifs permettront d'estimer la pression pariétale.

4.3 Génération analytique du maillage

Les propriétés du maillage permettant la simulation numérique d'écoulements turbulents au-dessus d'une paroi couverte de *riblets* ont été spécifiées par des considérations physiques, dans

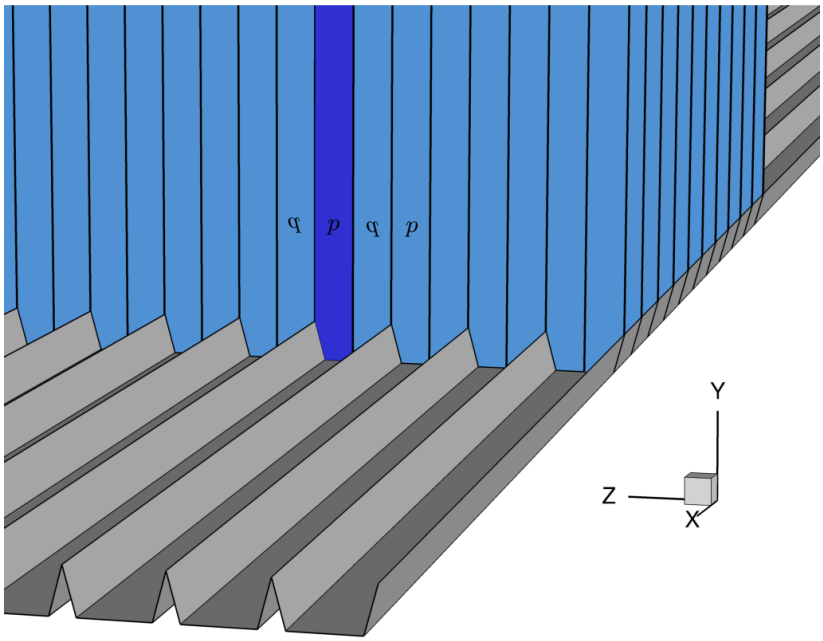


FIGURE 4.2 – Schéma illustrant la simplification de la discrétisation spatiale tridimensionnelle de la zone contrôlée à celle d'une coupe bidimensionnelle d'envergure réduite (*en bleu foncé*) par des considérations de périodicité, de symétrie et d'homogénéité. La lettre p et son symétrique q permettent de représenter la périodicité et la symétrie des quelques coupes minimales bordant celle mise en évidence.

la section 4.1, et par des considérations numériques, dans la section 4.2 précédente. Grâce à ces spécifications précises, il est possible d'entreprendre la génération d'un maillage.

Dans notre cas, la définition du domaine représenté sur la figure 4.1 est extrêmement simple : il sera globalement rectangulaire, sauf proche de la paroi où les *riblets* devront être pris en compte. De plus, les *riblets* sont tous identiques, régulièrement espacés et symétriques par rapport aux plans verticaux passant par les crêtes ou le milieu des vallées. On impose que le maillage et la topologie le soient également pour des raisons pratiques en vue du post-traitement des données (moyenne dans la direction spatiale, analyses spectrales, ...). De plus, au-dessus des parois lisses d'une part et dans la zone de contrôle d'autre part, le domaine est homogène dans la direction x. Ainsi, hormis aux extrémités amont et avale de la zone de contrôle, le maillage pourra être constitué de plans $x = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$ identiques les uns aux autres et uniformément espacés de Δx.

Pour résumé, discrétiser le volume au-dessus des *riblets* se réduit à la génération d'un maillage bidimensionnel de la surface du plan (y, z) comprise entre la verticale d'une crête et celle de la vallée suivante, comme représentée sur la figure 4.2. Une fois la zone de contrôle ainsi discrétisée, il faudra prendre en compte les extrémités des *riblets* et le prolongement de la topologie au-dessus de la paroi lisse.

4.3.1 Topologie du maillage dans la zone de contrôle

Notons tout de même que, bien que la périodicité ait été exploitée lors des processus de moyenne, la symétrie, elle, n'a pas été prise en compte pour l'élaboration des résultats présentés par la suite. Cela permet de caractériser qualitativement la convergence des moyennes statistiques. Sur l'exemple de la figure 4.17 notamment, le champ de vitesse moyenne $\overline{w}$ dans un plan transverse (y, z) est le fruit de la moyenne du champ au-dessus des 72 *riblets* effectivement calculés, mais sa dissymétrie permet d'apprécier du degré de convergence des statistiques.

La plupart des simulations d'écoulement mettant en jeux des *riblets* ont été réalisées avec des

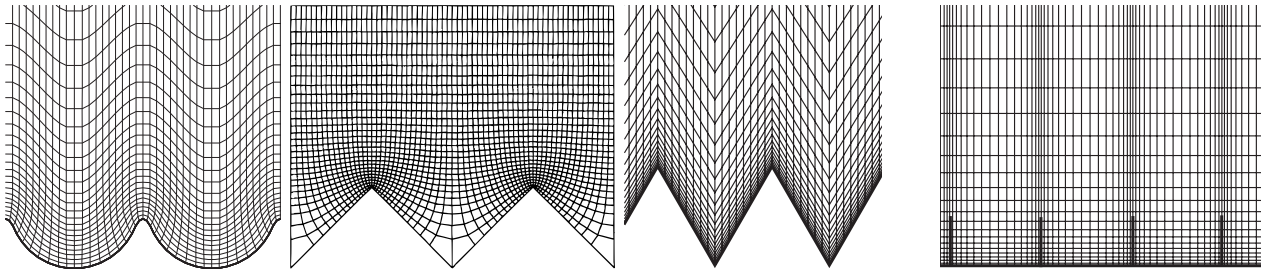


FIGURE 4.3 – Coupes transverses de différents maillages utilisés pour discrétiser l'espace au-dessus de *riblets* en U, triangulaires ou en L. *De gauche à droite*, il s'agit des maillages de Klumpp *et al.* [149], de Choi *et al.* [37] et de Peet & Sagaut [205] pour les deux derniers. Les figures sont extraites des articles correspondants.

maillages de topologie simple, mais aux mailles grandement déformées. Les trois maillages de *gauche* sur la figure 4.3 en sont des exemples. Topologiquement, le domaine est un simple parallélépipède dont la paroi est une des faces. Cependant, les mailles qui s'écartent du cas idéal d'un pavage orthogonal et uniforme de l'espace — en termes d'orthogonalité, rapport d'aspect, dissymétrie, étirement d'une maille à l'autre, etc. — induisent des erreurs lors de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes. De plus, dans le cas de *riblets* trapézoïdaux avec un angle de crête $\alpha = 30°$, la déformation du maillage serait plus importante encore que celle de la figure 4.3.

Dans le cas de *riblets* en L, une alternative géométriquement idéale est présentée à *droite* sur la figure 4.3. Une condition d'adhérence doit alors être appliquée sur la paroi verticale des *riblets*. Les solveurs que nous utilisons ne permettent pas d'imposer une telle condition sans altérer le contenu des deux rangées de maille derrière la paroi, ce qui corromprait ici les résultats de l'écoulement dans le *riblet* d'à côté.

Cependant, les solveurs FLU3M et FUN*k* ont la capacité de traiter des domaines en multi-blocs, comme cela a été détaillé dans la section 3.2.5.4. En tirant parti de cette propriété, la définition d'un maillage quasi-orthogonal est possible, même en présence de *riblets*. Une illustration en est donnée sur la représentation au *centre* de la figure 4.4. Chaque plan vertical au-dessus d'une crête de *riblets* marque la frontière entre deux domaines de calcul. Au-dessus de l'altitude de la crête, ces deux domaines sont reliés par une condition de raccord informatique. En dessous, une condition de paroi est appliquée. Ainsi, chaque domaine utilise les rangées de cellules fictives qui lui sont propres pour prendre en compte ses parois.

Cette solution cumule de nombreux avantages. Les domaines sont tous numériquement identiques, à une translation prêt des valeurs de z, et les conditions de raccords informatiques sont parfaitement régulières. La définition et la paramétrisation du maillage sont géométriquement simples, permettant une approche analytique et donc totalement maîtrisée. Au-dessus de l'altitude des crêtes, les mailles sont exactement orthogonales et uniformément réparties dans la direction transverse. En dessous des crêtes, elles ne sont que très faiblement déformées. La densité de maille sur la surface des *riblets* est parfaitement régulière (contrairement à ce que l'on observe sur le maillage de Choi *et al.* sur la figure 4.3), ce qui permet de ne pas propager jusqu'en haut du domaine une densité de maille encore plus élevée qu'elle ne l'est déjà. Ainsi, ce maillage permet de minimiser les incertitudes numériques liées aux calculs des flux sur un maillage complexe, que ce soit pour la résolution des équations de Navier-Stokes ou pour l'évaluation du frottement pariétal.

Cependant, cette solution présente également deux points sensibles. Tout d'abord, elle conduit à des domaines de calcul très étroits (16 mailles dans le cas présent). Au-delà de l'augmentation considérable du coût de calcul (l'ajout de 2 rangées de cellules fictives sur chaque frontière augmente d'au moins 25% le nombre de cellules calculées), cela impose de très nombreux raccords informatiques. Si ces raccords ne permettent pas une transmission correcte de l'information d'un domaine à son voisin, *à chaque sous-itération* de la résolution du système implicite, cette segmentation de

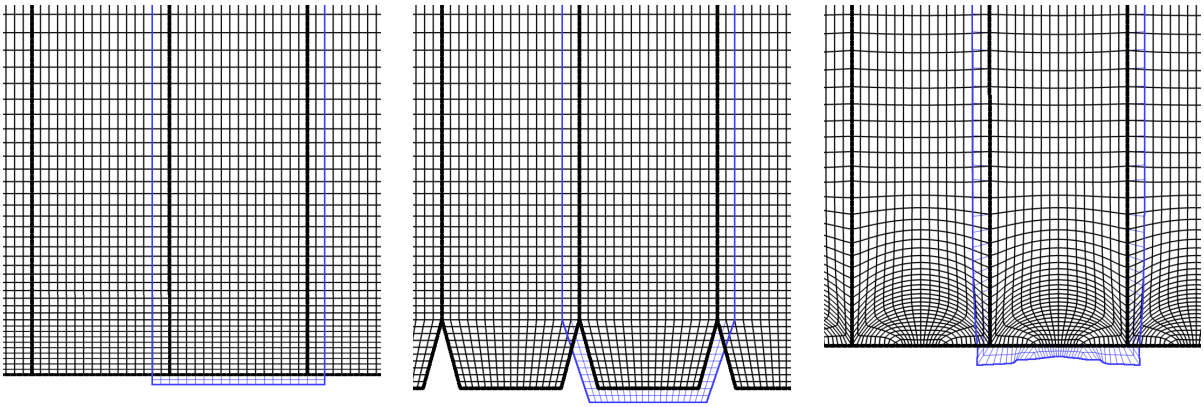


FIGURE 4.4 – Coupes transverses dans le plan (y, z) des maillages utilisés pour discrétiser l'espace au-dessus des *riblets* (*au milieu*) ou de la plaque plane, pour la topologie dite "cartésienne" (*à gauche*) et la topologie dite "déformée" (*à droite*). Les frontières de domaine sont indiquées en *trait épais* alors que le maillage est représenté en *trait fin*. Pour l'un des domaines, le maillage des deux rangées de cellules fictives est également représenté en *bleu*.

l'espace n'est pas sans conséquence sur la stabilité du système. Elle a d'ailleurs causé la divergence de nombreux calculs et une fastidieuse investigation a été nécessaire avant de pouvoir en établir l'origine. Le second inconvénient de cette géométrie concerne la transition vers le maillage de paroi lisse aux extrémités de la zone de contrôle.

4.3.2 Topologie du maillage dans la zone de paroi lisse

En partant du maillage au-dessus de la paroi couverte de *riblets*, représentée au *centre* de la figure 4.4, comment aboutir, par déformation continue, à un maillage permettant de discrétiser l'espace au-dessus de la paroi plane ? La topologie de maillage de plaque plane la plus évidente est celle représentée à *gauche* de la figure 4.4. Il est alors aisé de faire la correspondance maille à maille entre ces deux maillages. La déformation continue du maillage, qui sera celle des plans `i` successifs à l'extrémité des *riblets*, consiste en un affinement progressif de la base des *riblets* jusqu'à ce qu'elle devienne d'épaisseur nulle. À ce stade seulement, il est alors possible de rétablir une condition de raccord informatique sous l'altitude des *riblets*. De par le caractère non progressif du passage entre les conditions de paroi et de raccord informatique, d'une maille d'indice `i` à la suivante, cette topologie impose que l'extrémité des *riblets* soit acérée. On peut parler de singularité géométrique dans la mesure où une simulation de type volumes fini n'a pas vocation à discrétiser des variations sur des échelles de l'ordre de la maille. Cette topologie est celle qui a été initialement utilisée. Elle est représentée à *gauche* de la figure 4.6 et sera désignée en tant que **topologie cartésienne** dans la suite de ce manuscrit.

La résultante longitudinale des efforts de pression est nulle au-dessus de la paroi lisse et au-dessus des *riblets* bidimensionnels puisque la normale à aucun élément de surface n'a de composante selon x. Cependant, cela n'est pas le cas aux extrémités amont et aval de la zone de contrôle. Ainsi, pour limiter les efforts de pression, les *riblets* sont positionnés verticalement comme cela est représenté à *gauche* sur la figure 4.5, c'est-à-dire de sorte que la section frontale des pointes de *riblets* qui dépasse du niveau de la plaque plane soit compensée par la section frontale des vallées sous le niveau de la plaque plane.

Néanmoins, ce choix d'origine géométrique n'impose pas le choix de l'origine virtuelle utilisée pour l'analyse des écoulements. Comme on le verra par la suite, une autre position pour l'origine $y = 0$ de l'axe des ordonnées s'avérera plus adaptée pour la comparaison des écoulements au-dessus des *riblets* et de la plaque plane.

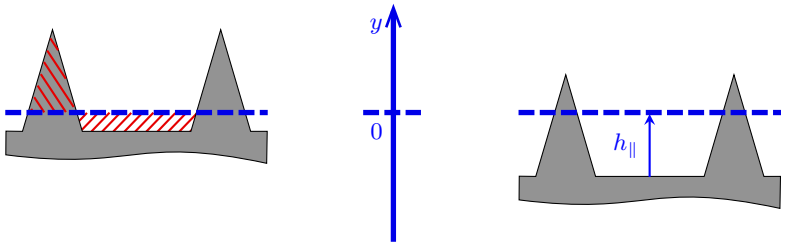


FIGURE 4.5 – Schémas de coupe transverse illustrant le positionnement vertical des *riblets* par rapport au niveau de la plaque plane (*pointillés bleus*) pour la topologie dite "cartésienne" (*à gauche*) et la topologie dite "déformée" (*à droite*). Les surfaces *hachurées en rouge* ont la même aire.

L'évolution suivant x du frottement moyen sur la paroi de cette topologie, tantôt lisse, tantôt couverte de *riblets*, sera étudiée en détail dans la sous-section 4.4.3.1. On aura alors l'occasion de constater que la singularité géométrique de cette topologie, l'extrémité vive des *riblets*, entraîne une importante discontinuité du frottement au début et à la fin de la zone de contrôle. La soudaine modification géométrique perturbe brutalement l'équilibre de l'écoulement et il devient donc difficile de caractériser finement de quelle façon la présence des *riblets* influe sur la turbulence. Pour éviter cette perturbation trop violente de l'écoulement, un maillage différent est nécessaire, avec une topologie permettant un passage progressif entre la paroi plane et les *riblets*.

Deux options sont alors possibles. La première consiste à conserver le maillage cartésien sur la paroi plane, à *gauche* de la figure 4.4, et trouver une déformation continue de ce maillage permettant de mailler l'espace du domaine en présence de *riblets*, délimité en *trait épais* sur la figure *centrale* de 4.4. Cette option est équivalente à celles utilisées sur les exemples de *gauche* de la figure 4.3. Un doute subsistera inévitablement quant à la justesse de la prédiction du solveur sur le maillage grandement distordu. Une option alternative consiste à conserver le maillage de grande qualité dans la zone de contrôle et de le déformer afin de mailler l'espace de la zone de plaque plane. Une transition progressive entre *riblets* et paroi plane implique que le sommet de la crête descende jusqu'au niveau des vallées. Ainsi, le maillage obtenu doit être topologiquement analogue à celui à *droite* de la figure 4.3. Avec cette option, le problème de l'utilisation d'un maillage grandement déformé est toujours présent, non plus au-dessus des *riblets* cette fois, mais au-dessus des zones planes. Cela représente néanmoins un avantage conséquent. Non seulement il sera facile de vérifier la capacité de prédiction de la méthode de calcul puisque les propriétés des écoulements sur paroi plane sont largement documentées. De plus, puisque l'accent porte ici sur l'étude des *riblets*, il semble plus pertinent de simuler l'écoulement dans la zone contrôlée avec une précision plus grande que dans les zones lisses en amont et en aval. Pour ces raisons, c'est bien cette seconde solution qui a été adoptée.

Le maillage bidimensionnel au-dessus des *riblets* est strictement identique à celui de la topologie cartésienne. Ce maillage quasi-cartésien est alors déformé pour obtenir celui au-dessus de la paroi plane, représenté à *droite* de la figure 4.4. L'algorithme de déformation utilisé a été développé à l'Onera [175] et est basé sur la méthode des quaternions. Cette méthode permet de conserver l'orthogonalité des mailles, même pour de larges déformations du maillage. Pour cela, elle génère, à partir des conditions aux limites des maillages d'origine et déformées, un champ de vecteurs pour caractériser la translation des nœuds du maillage et un champ de quaternions (sorte d'extension au 3D de ce que les nombres complexes sont au 2D) qui caractérise la rotation locale des mailles. Dans la zone de transition entre les zones lisses et contrôlées, le maillage est progressivement déformé. Ainsi, la surface évolue continûment, sans aucune singularité géométrique. Comme on le verra lors de l'analyse des résultats dans la section 4.4, les grandeurs aérodynamiques ne subissent plus non-plus de discontinuité. La topologie obtenue est représentée sur la figure 4.6 et sera désignée en tant que **topologie déformée** dans la suite de ce manuscrit.

En ce qui concerne le positionnement vertical des *riblets* relativement à celui des parois lisses, le

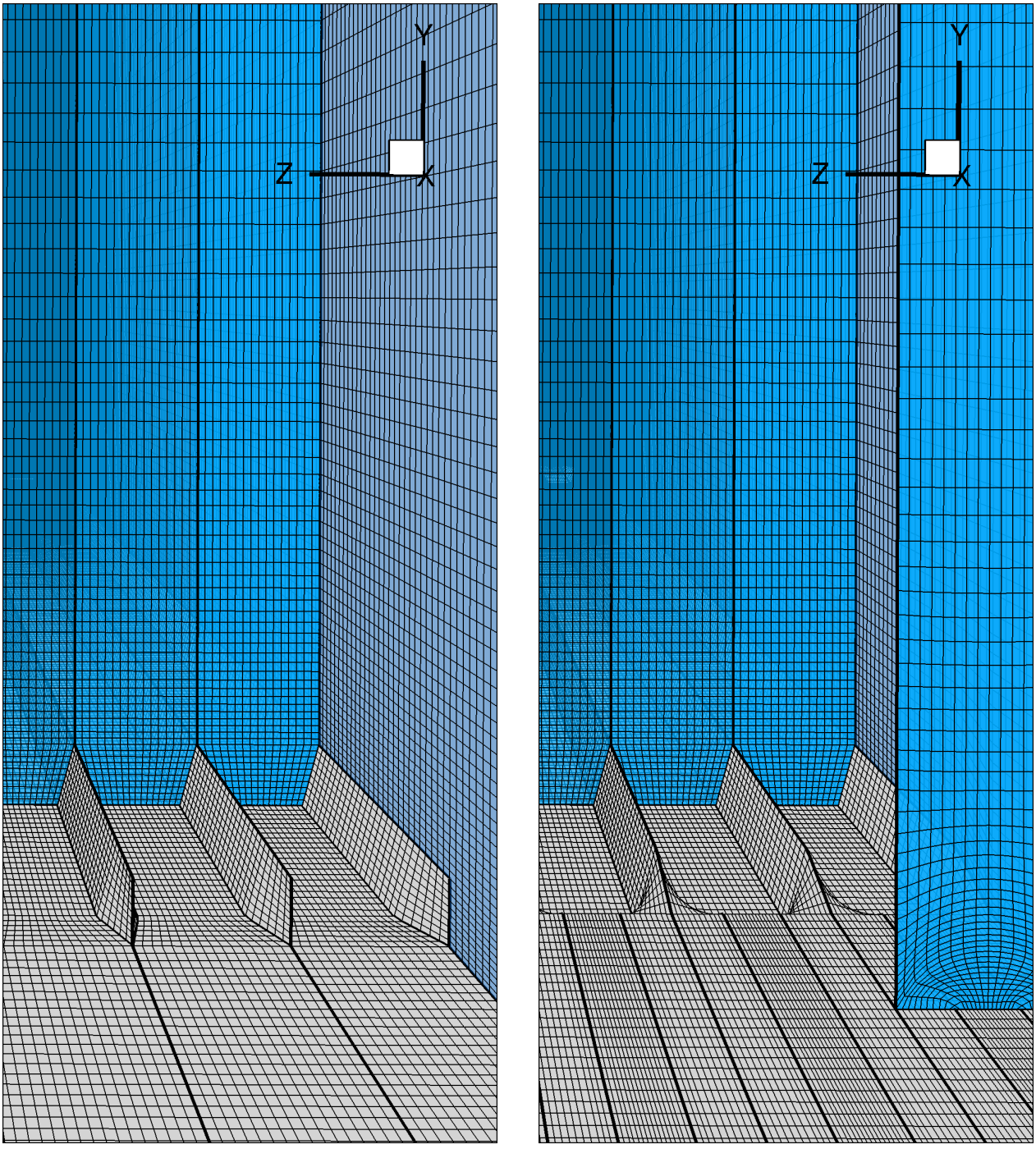


FIGURE 4.6 – Représentation du maillage utilisé pour discrétiser, en multi-blocs, l'espace au-dessus d'une paroi partiellement recouverte de *riblets*, pour la topologie dite "cartésienne" (*à gauche*) et topologie dite "déformée" (*à droite*). Les frontières de domaine sont indiquées en *trait épais* alors que le maillage est tracé en *trait fin*. Les parois sont représentées en *gris*. Les coupes *bleues* sont des plans dans le fluide (au sein d'un domaine de calcul ou à l'interface de raccord informatique entre deux domaines).

choix à cette fois été d'utiliser l'origine virtuelle définie par Bechert & Bartenwefer [15]. Sa définition, basée sur l'écoulement de Stokes dans la direction longitudinale au-dessus des *riblets*, a été abordée dans le paragraphe 2.2.3.1 et illustrée à la figure 2.15). Plus de détails sur les origines virtuelles seront fournis dans le chapitre suivant. Les figures 4.4 et 4.5 permettent d'illustrer les différences de positionnement vertical entre les deux topologies.

4.3.3 Distribution analytique des mailles

Des logiciels spécialisés, tels que IcemCFD, permettent la génération de maillages, même dans des cas de géométries et de topologies complexes. Étant donnée la simplicité géométrique de notre étude, une approche analytique a été préférée pour le contrôle et la modularité qu'elle offre. La topologie ayant été définie précédemment, il reste à déterminer la distribution des mailles.

Dans la direction transverse z, les mailles sont uniformément réparties pour le maillage de la zone contrôlée et, dans le cas de la topologie cartésienne, pour le maillage de la zone de paroi lisse, comme cela est représenté sur la figure 4.4.

Dans la direction normale y, le raffinement des mailles sous l'altitude des crêtes est gardé uniforme en présence de *riblets*. Ce raffinement et celui des mailles à l'altitude $y = \delta_{\text{out}}$ sont imposés aux valeurs du tableau 4.6. Entre ces deux altitudes, la dimension des mailles suit une loi de tangente hyperbolique en restreignant le taux d'étirement d'une maille à la suivante de sorte qu'il reste toujours inférieur à la valeur limite $\mathrm{d}(\Delta y)/\,\mathrm{d}j$ précisée dans le tableau. Au-dessus de l'altitude $y = \delta_{\text{out}}$, chaque maille est étirée par rapport à la précédente de ce taux d'étirement maximal. Pour la topologie cartésienne, la distribution des mailles est gardée inchangée lors de la transition de la zone de *riblets* vers la zone de paroi lisse, sauf pour les quelques mailles en dessous de l'altitude des crêtes qui doivent être comprimées. Ainsi, les quelques toutes premières mailles de la topologie cartésienne suivent une loi de tangente hyperbolique. Pour la topologie déformée, le maillage subit la transformation par la méthode des quaternions lors de la transition vers la paroi plane. On impose néanmoins que la transformation n'affecte pas les mailles cartésiennes au-dessus d'une altitude $y \simeq 10\,h$.

Enfin, dans la direction longitudinale, la discrétisation Δx est uniforme dans tout le domaine de calcul, pour les deux topologies, et sa valeur est spécifiée dans le tableau 4.6. Comme précisé dans la section 3.2.5.2, la condition aux limites pour la face avale du domaine de calcul est constituée d'une zone éponge dans laquelle le taux d'étirement de Δx d'une maille à la suivante est augmenté jusqu'au taux fixe de 6%. La zone éponge s'étend jusqu'à ce que la taille de la dernière maille atteigne $\Delta x = \delta_{\text{out}}$.

En suivant ces distributions, on obtient pour un domaine dont les dimensions sont celles du tableau 4.5 un maillage de près de 200 000 mailles. Le nombre de mailles dans chacune des directions est indiqué ci-dessous dans le tableau 4.8, où les indices (i, j, k) correspondent globalement aux axes (x, y, z).

N_i				N_j			N_k		
$N_{i,\text{flat}} + N_{i,\text{rib}} + N_{i,\text{flat}} + N_{i,\text{sponge}}$				$N_{j,\text{w}\to\text{crest}} + N_{j,\text{crest}\to\delta_{\text{out}}} + N_{j,\delta_{\text{out}}\to\text{top}}$			$N_{k,\text{rib}} \times N_{\text{ribs}}$		
998				172			1152		
94	+ 748 +	94	+ 62	10	+ 120 +	42	16	× 72	

TABLE 4.8 – Dimensions des maillages pour les campagnes de simulation dont sont issus la plupart des résultats de cette étude.

Ref.	Dimension du domaine $L_x \times L_y \times L_z$	Discrétisation spatiale $\Delta x^+ \times \Delta y^+ \times \Delta z^+$	Nb. de nœud de maillage $Nx \times Ny \times Nz$	Nb. de cœur	Type de modélisation (schéma de discrétisation des flux convectifs)	Paramètres spécifiquement étudiés	Nb. de simulations
L1	$10\delta_{\text{in}} \times 10\delta_{\text{in}} \times 1.3\delta_{\text{out}}$	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.6\delta^+\right) \times 1.2$	117×119×337	16	(U)RANS, Euler, LES (AUSM, senseur)	Model, Schéma, BDC_{wall}, $\text{BDC}_{\text{inlet}}$, BDC_{side}, Δt	25
L2	"	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.6\delta^+\right) \times 20$	117×119×23	1	Euler (AUSM, senseur), LES (AUSM)	Schéma, BDC_{wall}	5
L3	"	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.6\delta^+\right) \times 10$	117×119×45	2	Euler (senseur)	Raffinement de Δz^+	1
L4	"	$10 \times \left(1 \rightarrow 0.6\delta^+\right) \times 3.6$	303×119×133	16	LES, DNS (AUSM)	SGS, Δt	3
L5	"	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.6\delta^+\right) \times 1.2$	117×119×337	16	(U)RANS	(In)stationnaires	2
L6	$3.3\delta_{\text{in}} \times 5\delta_{\text{in}} \times 0.9\delta_{\text{out}}$	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.3\delta^+\right) \times 1.2$	59×88×224	1	(U)RANS	BDC_{top}, (In)stationnaires	3
L7	"	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.3\delta^+\right) \times 6$	59×88×50	1	RANS, LES (senseur)	Model	2
L8	"	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.3\delta^+\right) \times 12$	59×88×26	1	(U)RANS, LES (AUSM, senseur)	Model, Schéma, BDC_{top}, CFL, $N_{\text{ss-iter}}$	11
L9	$3.3\delta_{\text{in}} \times 5\delta_{\text{in}} \times \Delta z$	"	59×88×2	1	RANS	Écoulement bidimensionnel	1
L10	$3.3\delta_{\text{in}} \times 0.9\delta_{\text{out}} \times 5\delta_{\text{in}}$	$30 \times 12 \times \left(1 \rightarrow 0.3\delta^+\right)$	59×26×88	1	RANS	Interversion de y et z	1
L11	$3.3\delta_{\text{in}} \times 5\delta_{\text{in}} \times 0.9\delta_{\text{out}}$	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.3\delta^+\right) \times 12$	59×88×26	1	(U)RANS, LES (AUSM, senseur)	Maillage en *mm*, Model, Schéma, Δt, $N_{\text{ss-iter}}$	6
L12	"	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.3\delta^+\right) \times 1.2$	59×88×224	1	(U)RANS	(In)stationnaires, Δt, $N_{\text{ss-iter}}$	4
L13	$10\delta_{\text{in}} \times 10\delta_{\text{in}} \times 1.3\delta_{\text{out}}$	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.45\delta^+\right) \times 1.2$	120×127×337	16	URANS, LES (Roe, AUSM, senseur), DNS	Model, Schéma, $\text{BDC}_{\text{inlet}}$, Δt	12
L14	$26\delta_{\text{in}} \times 10\delta_{\text{in}} \times 2\delta_{\text{out}}$	$30 \times \left(0.2 \rightarrow 0.36\delta^+\right) \times 6$	252×187×121	16	LES (senseur), DNS	Résolution Δy pariétale, Model, $\text{BDC}_{\text{inlet}}$	14
L15	$2\delta_{\text{in}} \times 10\delta_{\text{in}} \times 2\delta_{\text{out}}$	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.36\delta^+\right) \times 6$	45×137×79	2	LES (senseur)	Code	2
L16	$26\delta_{\text{in}} \times 10\delta_{\text{in}} \times 2\delta_{\text{out}}$	"	91×137×79	6	LES (senseur)	SGS, $\text{BDC}_{\text{inlet}}$	4
L17	$10\delta_{\text{in}} \times 10\delta_{\text{in}} \times 2\delta_{\text{out}}$	$25 \times \left(1 \rightarrow 0.38\delta^+\right) \times 6$	143×119×97	6	LES (senseur)	$\text{BDC}_{\text{inlet}}$	5
R1	$(10\text{-}8\text{-}8)\delta_{\text{in}} \times 10\delta_{\text{in}} \times 1.3\delta_{\text{out}}$	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.6\delta^+\right) \times 1.1$	263×130×785	64	LES (senseur)	Maillage avec *riblets*	1
R2	"	"	"	64	LES (senseur)	BDC_{side}	2
R3	$(10\text{-}8\text{-}8)\delta_{\text{in}} \times 10\delta_{\text{in}} \times 2\delta_{\text{out}}$	"	263×130×801	64	LES (senseur)	$\text{BDC}_{\text{inlet}}$, BDC_{side}	4
R4	"	"	"	64	URANS, LES (Roe, AUSM)	Maillage en *mm*, Model, BDC_{wall}, Δt	4
R5	"	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.43\delta^+\right) \times 1.1$	267×137×801	64	LES (Roe)	Δt	1
R6	$(10\text{-}8\text{-}8)\delta_{\text{in}} \times 10\delta_{\text{in}} \times 2.3\delta_{\text{out}}$	$30 \times \left(1 \rightarrow 0.36\delta^+\right) \times 1.1$	256×137×721	64	LES (senseur)	Code, Paroi lisse/*riblets*, $\text{BDC}_{\text{inlet}}$, SGS	8
R7	"	$6 \times \left(1 \rightarrow 0.36\delta^+\right) \times 1.1$	1091×137×721	128	DNS	Code, Paroi lisse/*riblets*, $\text{BDC}_{\text{inlet}}$	6
R8	"	$25 \times \left(1 \rightarrow 0.36\delta^+\right) \times 1.1$	299×137×721	64	RANS, LES (AUSM, senseur)	Paroi lisse/*riblets*, Model, Schéma, $\text{BDC}_{\text{outlet}}$	6
R9	$(10\text{-}25\text{-}3)\delta_{\text{in}} \times 10\delta_{\text{in}} \times 2\delta_{\text{out}}$	$25 \times \left(1 \rightarrow 0.36\delta^+\right) \times 1.1$	413×143×673	128	LES (senseur)	Paroi lisse/*riblets*, Δt	5
RD9	"	"	"	128	LES (senseur)	Paroi lisse/*riblets*	2
R10	$(10\text{-}80\text{-}10)\delta_{\text{in}} \times 10\delta_{\text{in}} \times 2\delta_{\text{out}}$	$25 \times \left(1 \rightarrow 0.31\delta^+\right) \times 1.1$	999×173×1153	512	LES (senseur)	Paroi lisse/*riblets*	2
RD10	"	"	"	512	LES (senseur)	Paroi lisse/*riblets*	2

TABLE 4.9 – Tableau récapitulatif des campagnes de simulations de ZPGTBL entreprises sur des cas simplifiés de plaque lisse (*références L#*) et sur des cas de *riblets* rectilignes (*référence R#*). Les r*éférences RD#* se rapportent à l'utilisation d'un maillage déformé permettant une transition progressive entre paroi lisse et *riblets*. L'épaisseur de la couche limite en entrée et sortie de domaine est respectivement désignée par δ_{in} et δ_{out}. Pour les simulations avec *riblets*, la dimension longitudinale du domaine est décomposée en zone lisse amont, zone contrôlée puis zone lisse aval. Le schéma de Roe est systématiquement utilisé pour les simulations de types RANS et URANS, de même que le schéma "senseur" l'est pour toutes celles de type DNS. Dans la liste des paramètres étudiés : **"Model"** désigne des comparaisons entre les différents types de modélisation (RANS, LES, DNS, Euler) ; **"(In)stationnaire"** désigne des comparaisons entre des simulations stationnaires et instationnaires (RANS et URANS) ; **"Schéma"** désigne des comparaisons entre différentes discrétisations des flux convectifs (schéma de Roe, AUSM, ...) ; **"SGS"** désigne des comparaisons entre différents modèles de viscosité sous-maille (MILES, modèle d'échelles mixtes) ; **"BDC"** désigne des essais sur les conditions aux limites ; **"CFL"** et **"Δt"** désignent des tests de raffinement sur le pas de temps local ou global des simulations stationnaires et instationnaires ; **"$\mathbf{N_{ss\text{-}iter}}$"** désigne des tests sur la convergence de la résolution implicite sous-itérative ; **"Maillage en *mm*"** désigne le passage à un adimensionnement en *mm* pour que les volumes de maille restent grands devant le *zéro machine* ; **"Code"** désigne des comparaisons entre solveurs et le passage au solveur FUN*k* ; **"Paroi lisse/*riblets*"** désigne la réalisation dans les mêmes conditions de simulations avec paroi totalement lisse et avec paroi partiellement recouverte de *riblets*.

4.4 Présentation des résultats et validation de la méthode numérique

4.4.1 Campagnes de simulations et choix de paramètres numériques

La mise au point d'une méthode numérique peut être délicate. Pour de nombreuses raisons, un calcul peut devenir totalement inconsistant avec la réalité physique qu'il est censé reproduire. Les "symptômes" peuvent être variés, de l'apparition subite de `NaN` dans les champs de données à la divergence progressive des variables après des milliers d'itérations. Une des difficultés liées à l'identification de la cause de ces inconsistances vient du couplage total, via la résolution du système linéaire (3.45), entre toutes les différentes variables à tous les points de l'espace. Ainsi, une condition aux limites défectueuse peut instantanément polluer l'ensemble des champs de variables primitives, rendant difficile la localisation de la zone du domaine en cause. Une autre difficulté peut provenir du caractère chaotique de la turbulence, et donc, de l'impossibilité de réitérer une nouvelle fois une simulation dans des conditions identiques (bien que dans la pratique, les solveurs de l'Onera sont développés de façon à assurer la reproductibilité des résultats : pour un même jeu de conditions initiales, les mêmes opérations sont réalisées dans le même ordre et, si des nombres aléatoires sont nécessaires, ils sont fournis par des routines pseudo-aléatoires, mais réellement-déterministes). Enfin, l'utilisation de solveur complexe basé sur du calcul multi-processeur (*multi-processing*) ou multi-tâche (*multi-threading*) peut grandement complexifier l'identification de la source d'un problème.

Pour notre cas d'étude, une phase conséquente de mise au point de la méthode de calcul a été nécessaire pour obtenir des simulations précises et robustes. En effet, la simulation de l'écoulement turbulent au-dessus de *riblets* présente des particularités qui lui sont propres (topologie et raffinement de maillage spécifique, ...). Ces spécificités peuvent dévoiler certaines limitations des outils numériques, pourtant reconnus comme adaptés à de nombreuses autres conditions. Afin d'identifier ces limitations, différentes campagnes de simulation ont été entreprises, dont un résumé figure sur le tableau 4.9. Par "campagne de simulation", on comprend ici l'ensemble des simulations réalisées sur un maillage donné (avec ses deux variantes de paroi lisse et de paroi couverte de *riblets*) et avec des conditions génératrices fixées, mais où les paramètres numériques abordés précédemment (schémas de discrétisation, conditions aux limites, ...) peuvent varier. En particulier, un grand nombre de simulations a été conduit sur des domaines de petite taille, avec un seul ou un petit nombre de blocs et exclusivement pour la configuration non contrôlée, c'est-à-dire sans *riblets*. Ces simulations simplifiées présentent des avantages évidents de coût et de rapidité de mise en œuvre, permettant de réaliser de nombreux tests et d'isoler plus rapidement les causes des inconsistances numériques rencontrées.

C'est en améliorant les transferts d'information entre les différents blocs du maillage que le principal point bloquant, qui était responsable d'une lente divergence des champs de variables primitives jusqu'à l'explosion du calcul, a été résolu. La résolution itérative, bloc par bloc, du système linéaire (3.45) telle qu'elle est faite avec FLU3M (voir section 3.2.5.4) devient critique avec un maillage contenant autant de blocs que le nôtre. En effet, de par la présence des *riblets*, chacun des blocs de maillage dans la zone contrôlée n'est étroit que de 16 mailles uniquement, ce qui limite grandement la propagation de l'information dans la direction transverse, et donc la convergence de l'algorithme de résolution itératif. Les précautions particulières prises dans le solveur FUN*k* et décrites dans la section 3.2.5.4 permettent d'obtenir une convergence nominale des résidus même en présence d'un découpage extrême du maillage. Ce qui résout finalement les problèmes d'instabilité numérique rencontrés avec des topologies comme celle de cette étude.

Pour illustrer la diversité des problèmes que l'on peut rencontrer en mécanique des fluides numériques, citons également un deuxième point qui a posé quelques difficultés. Dans nos simulations DNSs les plus résolues, le volume des plus petites mailles, de l'ordre de $l_\tau^3 \simeq (4\mu\text{m})^3 \simeq 6 \times 10^{-17}\text{m}^3$, est minuscule lorsqu'exprimé en unités du système international, si bien que son utilisation peut amener aux limites inhérentes à l'arithmétique numérique à précision finie. Le dimensionnement de

toutes les longueurs en millimètre a permis de lever la difficulté. Pour garder de la consistance dans les unités, non seulement les durées et les masses ont été exprimées en milliseconde et microgramme, mais toutes les grandeurs ayant longueur, durée ou masse comme dimension de base ont été adimensionnées en concordance. De cette façon, les valeurs des nombres de Reynolds et des variables primitives (vitesse, pression et densité) ont toutes été conservées.

Ce sont finalement les résultats des campagnes de simulation nommées R10 et R10D dans le tableau 4.9 qui seront analysés dans la suite, sauf lorsque mentionné. Les simulations de ces campagnes bénéficient de l'expérience acquise lors des campagnes précédentes sur le paramétrage de l'injection de turbulence synthétique et des conditions aux limites de sortie, sur la génération du maillage, sur la détermination du pas de temps et du nombre de sous-itération pour la résolution du système implicite, ainsi que sur les choix de schémas de discrétisation spatiale. Les dimensions du domaine pour cette campagne de simulation ont été précisées dans le tableau 4.5

Dans la suite de ce chapitre, on s'attachera à vérifier que la méthode de calcul est en mesure de reproduire les propriétés et caractéristiques de la littérature pour les écoulements de ZPGTBLs au-dessus d'une paroi lisse ou couverte de *riblets*. Une analyse plus détaillée sera conduite dans les chapitres suivants. Notamment, la question de l'origine virtuelle d'une paroi recouverte de *riblets*, c'est-à-dire la position particulière à laquelle la couche limite "voit" une paroi plane équivalente, sera abordée dans le chapitre 5. Une fois l'origine virtuelle définie de façon pertinente, une nouvelle analyse des champs pourra être conduite. Dans le chapitre 6, l'influence des *riblets* sur le développement spatial de la couche limite et sur la réduction de traînée atteignable à grand nombre de Reynolds sera évaluée analytiquement.

Laissant ces deux problématiques pour plus tard, on s'attache ici à décrire l'écoulement selon des niveaux croissants d'analyse, conformément à la nomenclature du tableau 4.10, grandement inspirée de celle proposée par Sagaut, Deck et Weiss [233, 283].

Degré	Niveau de validation
0	Observation qualitative des champs instantanés *(fluctuations de vitesse, critère Q, ...)*
1	Grandeurs globales *(coefficient de frottement, épaisseur de couche limite, ...)*
2	Champ aérodynamique moyen *(profils de vitesse, de pression, ...)*
3	Statistiques du second-ordre *(tensions de Reynolds, ...)*
4	Analyses spectrales en un point *(densité spectrale de puissance, ...)*
5	Analyses spectrales en deux points *(corrélation, covariance, spectre de phase, ...)*
6	Analyse des équations de conservation *(bilan d'énergie, d'enstrophie, ...)*

TABLE 4.10 – Nomenclature des différents niveaux de validation de simulations numériques. Classification inspirée de [233] et [283].

4.4.2 Degré 0 : Observation qualitative de champs instantanés

Bien qu'elle ne tient pas pour lieu de validation, une première vérification utile est une observation qualitative d'une sortie instantanée de simulation. Parmi les nombreux champs qui peuvent être observés, le frottement pariétal et le critère Q sont brièvement présentés ci-dessous.

4.4.2.1 Frottement pariétal instantané

Une distribution typique du frottement instantané sur la paroi des *riblets* est représentée sur la figure 4.7. On constate une répartition très inhomogène entre les vallées et les crêtes de *riblets*, mais une très faible évolution dans la direction longitudinale. Les résultats relevés dans la littérature

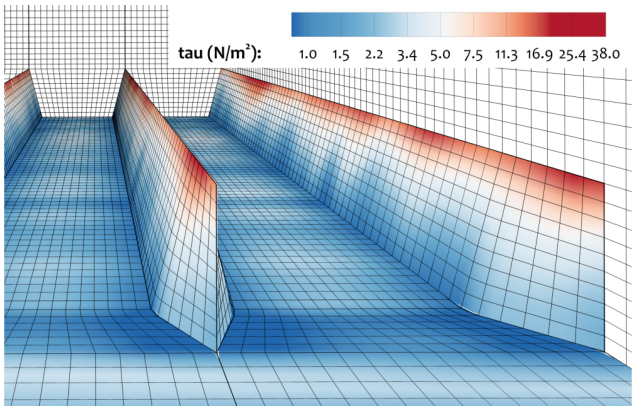


FIGURE 4.7 – Distribution du frottement pariétal instantané $\tau_{w,x}(x,z)$ à la surface des *riblets*.

et rapportés dans la section 2.2.2.1 sont donc retrouvés qualitativement ici. L'étude du frottement moyen par la suite permettra une comparaison plus quantitative.

Enfin, notons de plus l'absence de zone de frottement négatif, qui auraient révéler la présence des bulbes de recirculation observés dans le sillon des *riblets* par Chu & Karniadakis [46] mais contestés par d'autres auteurs [37].

4.4.2.2 Structures turbulentes

Afin de s'assurer de la pertinence de l'écoulement fluctuant calculé, l'observation qualitative des structures turbulentes permet de compléter la comparaison des profils moyens à des données de référence. Notamment, le critère Q introduit par Jeong & Hussain [131] est un critère classiquement employé pour visualiser les structures tourbillonnaires. Ce critère est défini comme le second invariant du gradient de vecteur vitesse, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire comme

$$Q = \frac{1}{2}\left(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}\right), \tag{4.1}$$

où $\underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{\Omega}}$ sont respectivement les parties symétrique et antisymétrique du gradient $\nabla\underline{u}$.

La figure *du dessus* de 4.8 représente une iso-surface du critère Q, colorée par la distance à la paroi. Cette représentation permet de visualiser des structures tourbillonnaires de différentes formes et de différentes échelles. On distingue notamment de nombreux tourbillons en épingle à cheveux (`hairpin-like vortices`) et davantage encore de demi-`hairpins` parfois appelés "cannes". Ces structures correspondent bien à celles décrites dans la littérature, telles que décrites dans la section 1.4.

Un plan de coupe, visible sur cette figure, permet de représenter le champ des vitesses instantanées. Un zoom de ce plan est isolé sur la figure *du dessous*. La couleur matérialise la vitesse longitudinale (perpendiculaire au plan) alors que le champ de vecteurs indique les composantes normales et transverses du vecteur vitesse. On distingue la présence de tourbillons longitudinaux de différentes échelles. Les plus petits, plus proches de la paroi, ont leur centre à une hauteur de *riblets* environ au-dessus des crêtes. La présence de ces tourbillons est fortement corrélée avec des zones d'écoulement plus lent et plus rapide placées de part et d'autre, conformément au mécanisme de formation des *streaks* décrit dans la section 1.4.1.

Ces observations qualitatives ont permis de retrouver quelques propriétés caractéristiques des écoulements turbulents. La suite de ce chapitre s'attachera maintenant à des considérations plus quantitatives.

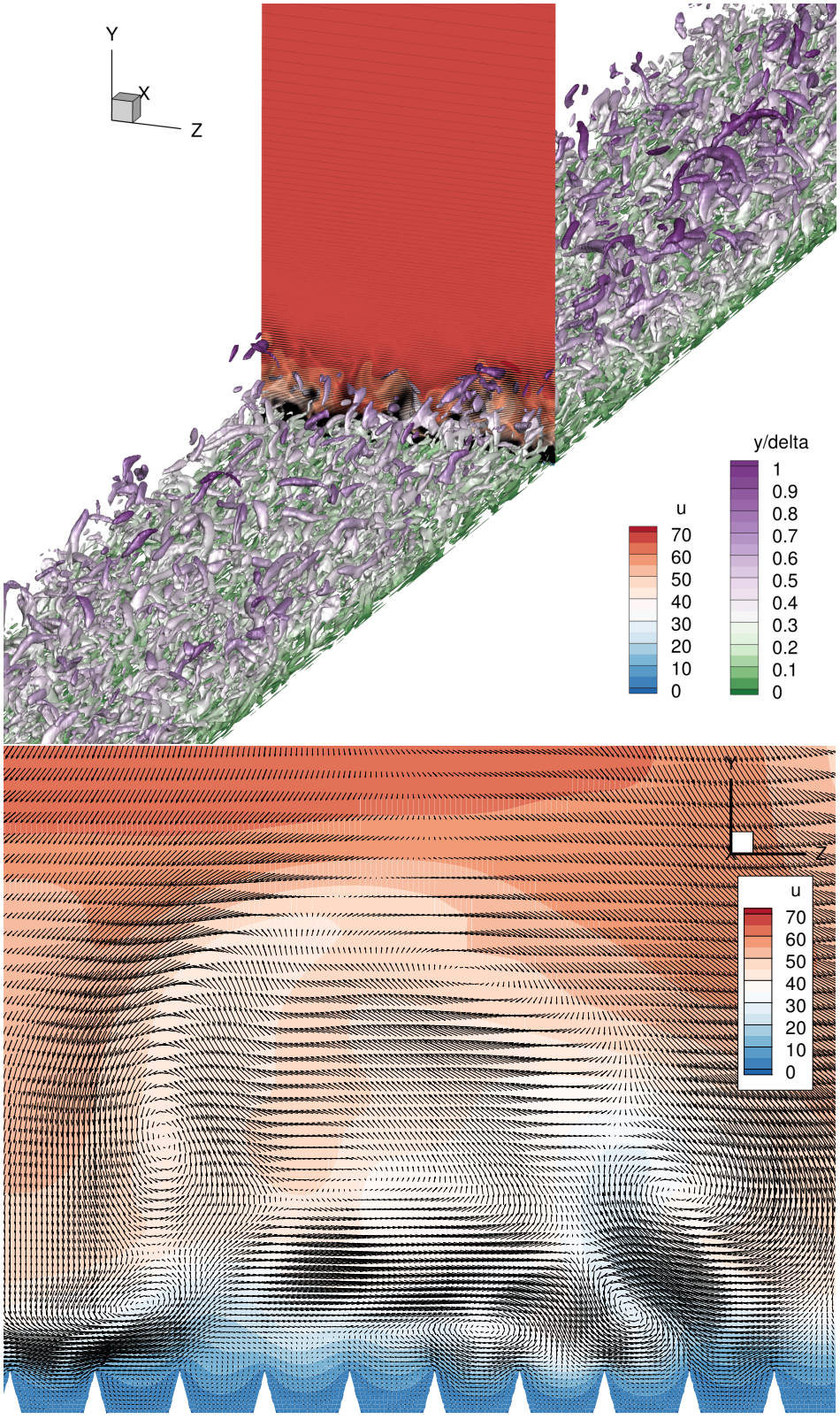


FIGURE 4.8 – Visualisation de l'écoulement instationnaire au-dessus de la paroi couverte de *riblets*. (*Au-dessus*) Iso-surface du critère Q colorée par la distance à la paroi y/δ. La coupe dans le plan transverse est mise en évidence sur la figure du dessous. (*En dessous*) Iso-valeur dans le plan transverse (y, z) de la vitesse longitudinale instantanée $u(x, y, z, t)$ à la station x telle que $Re_\tau \simeq 360$, auquel est superposé le champ instantané de vecteurs (v^+, w^+).

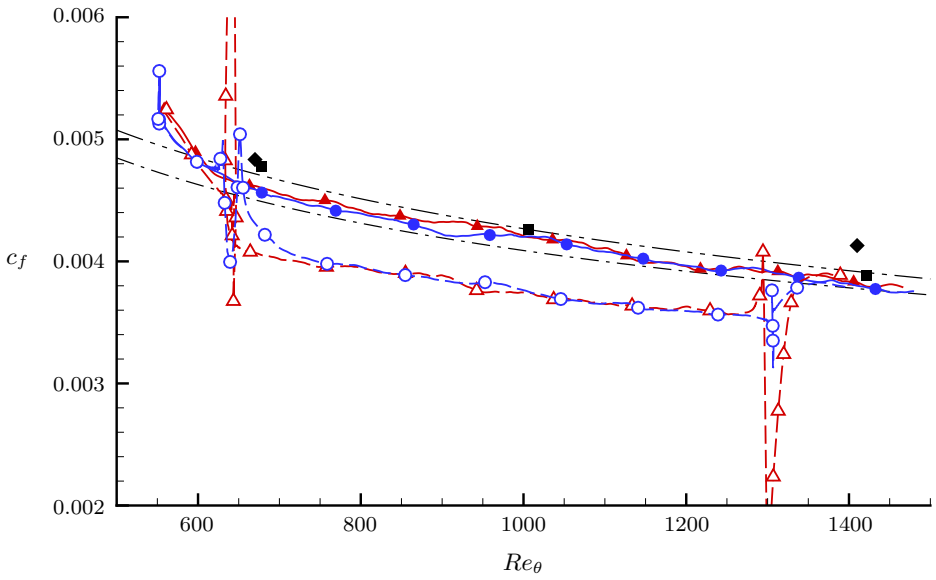


FIGURE 4.9 – Évolution du coefficient de frottement c_f en fonction du nombre de Reynolds Re_θ pour la configuration lisse (———, *symboles pleins*) et celle avec *riblets* (– – – , *symboles vides*). Les symboles ▲ et ● représentent respectivement les topologies cartésienne et déformée. Les données issues des DNSs de Spalart [251] (◆) et de Schlatter & Örlü [238] (■) sont représentées, tout comme les corrélations empiriques de Smits *et al.* [248] (— · · —) et de Nagib *et al.* [192] (— - —) dont l'expression est fournie dans le tableau 1.1.

4.4.3 Degré 1 : Grandeurs globales

Parmi les grandeurs globales de la couche limite turbulente, certaines concernent son épaisseur — par exemple $\delta_{99\%}$, δ^*, θ, H et les nombres de Reynolds associés — alors que d'autres sont liées au frottement pariétal — tels $\tau_{\mathrm{w},x}$ et c_f.

4.4.3.1 Frottement pariétal moyen

Le frottement constitue la fonction objectif que l'on souhaite minimiser par l'utilisation de *riblets*. Aussi, une excellente prédiction de cette grandeur est d'importance majeure dans notre étude. Dans un premier temps, on s'attachera donc à valider notre capacité à prédire correctement la valeur du frottement, laissant pour plus tard l'analyse physique des résultats obtenus.

Validation de la capacité d'évaluation du frottement pariétal. Trois méthodes nous permettent d'attester de la qualité de l'évaluation de c_f. Tout d'abord, une comparaison peut être faite entre le frottement obtenu sur les simulations avec paroi lisse et des données de référence. À ce titre, l'évolution du frottement c_f en fonction du nombre de Reynolds Re_θ est tracée sur la figure 4.9 pour les deux topologies de maillage. Pour la configuration lisse, le frottement peut y être comparé avec les résultats issus de DNSs et de corrélations de référence. Sa prédiction est non seulement identique pour chacune des deux topologies de maillage, mais est de plus en excellent accord avec les données de référence sur l'intégralité la plage de nombre de Reynolds utile. En parlant de plage *utile*, on exclut la partie la plus amont du domaine, c'est-à-dire pour x compris entre x_{in} et $x_0 - 3\delta$ environ, qui constitue une zone de relaxation de l'injection de turbulence synthétique. Ce résultat permet ainsi de valider pleinement la capacité à prédire correctement le frottement sur une paroi lisse.

Pour le cas avec *riblets*, la géométrie particulière de la paroi peut être susceptible d'engendrer

un biais dans le calcul du frottement. Ainsi, la validation de la méthode numérique sur paroi lisse, bien que rassurante, n'est pas suffisante. Notons tout de même que l'obtention du même niveau de frottement pour la configuration lisse, que ce soit avec le maillage cartésien de la première topologie ou avec le maillage grandement déformé sur une dizaine d'unités de paroi au-dessus de la surface de la seconde topologie, atteste de la robustesse et de la précision de la méthode numérique, même dans le cas d'une surface (traitée de façon numériquement) complexe.

Les données de la littérature ne sont pas suffisamment étayées pour qu'une base de données précise et éprouvée soit disponible avec la géométrie de *riblets* et les conditions d'écoulement adéquates. Ainsi, une validation est possible en comparant les résultats obtenus par la méthode LES à ceux issus de simulations plus fines. Une campagne de simulation de type DNS, nommée R7 dans le tableau 4.9, a alors été réalisée sur le domaine de calcul aux dimensions restreintes $L_{\text{in}\to x_0\to x_1\to\text{out}} = (10-8-8)\,\delta_{\text{in}}$ de la campagne R6 de simulation de type LES. Le domaine de calcul, la géométrie des *riblets*, ainsi que les conditions aux limites, sont gardés identiques pour les deux méthodes de simulation. Seules la présence d'un modèle de viscosité sous-maille et la finesse de la discrétisation Δx diffèrent. Cette dernière est ici étendue à $\Delta x^+ = 30$ pour les LESs alors qu'elle n'est que de $\Delta x^+ = 6$ pour les DNSs.

Pour les deux types de simulation, la courbe $c_f(Re_\theta)$ sur configuration de paroi lisse rejoint comme précédemment les tendances canoniques, et ce, avant que le début de la zone de contrôle ne soit atteint (non montré). Néanmoins, bien que la méthode d'injection de turbulence synthétique soit identiquement paramétrée pour les deux campagnes de simulations, le changement de résolution modifie grandement la distance de relaxation de la turbulence en entrée de domaine, celle-ci étant bien plus courte pour les simulations DNSs. Pour cette raison, le coefficient de frottement à une position x donnée ne prend pas les mêmes valeurs pour les cas LES et DNS, même sur les configurations de paroi lisse, car à une même position x ne correspond pas le même nombre de Reynolds de l'écoulement.

Il semble donc plus pertinent de s'intéresser au taux de réduction de frottement $FRR(x)$, permettant de ne considérer que la différence relative entre le frottement des configurations lisses et avec *riblets*. Les résultats sont représentés sur la figure 4.10 pour les deux types de simulation. Le comportement de leur taux de réduction de frottement est grandement identique, que ce soit dans la zone de réduction de traînée établie où les courbes diffèrent au maximum d'à peine plus d'un pour cent, ou à proximité des extrémités amont et avale de la zone contrôlée. Ce résultat permet alors de valider la capacité de la méthode numérique à correctement prendre en compte les irrégularités de paroi.

Une dernière méthode de validation permet de démontrer la consistance de la couche limite turbulente sans gradient de pression, que ce soit avec une paroi lisse ou couverte de *riblets*. En effet, l'intégration des équations de couche limite a mené à l'établissement de l'équation intégrale de quantité de mouvement (1.60). Pour le cas particulier d'une couche limite sans gradient de pression, la relation se simplifie en

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\,, \tag{4.2}$$

puisque les grandeurs U_∞ et ρ_∞ n'évoluent pas.

La grandeur intégrale $2\,\mathrm{d}\theta/\,\mathrm{d}x$ est tracée au côté de c_f sur la figure 4.11. En dehors du fait que son comportement soit très bruité, ce qui est dû à la grande sensibilité à la dérivation $\mathrm{d}/\,\mathrm{d}x$, l'équation intégrale est vérifiée sur toute l'étendue de la zone de contrôle. Aux extrémités amont et aval des *riblets*, la forte perturbation de la paroi induit les soudaines évolutions de la pression que l'on observe sur la figure. Ce résultat permet de démontrer la consistance entre le frottement pariétal, calculé directement à la paroi, et le champ de vitesse moyenne, qu'il a fallu intégrer dans toute la couche limite pour obtenir θ. On peut de plus conclure que le gradient de pression, dont l'évaluation a été donnée dans le tableau 4.7, est suffisamment faible pour ne pas avoir d'influence majeure sur l'évaluation du frottement.

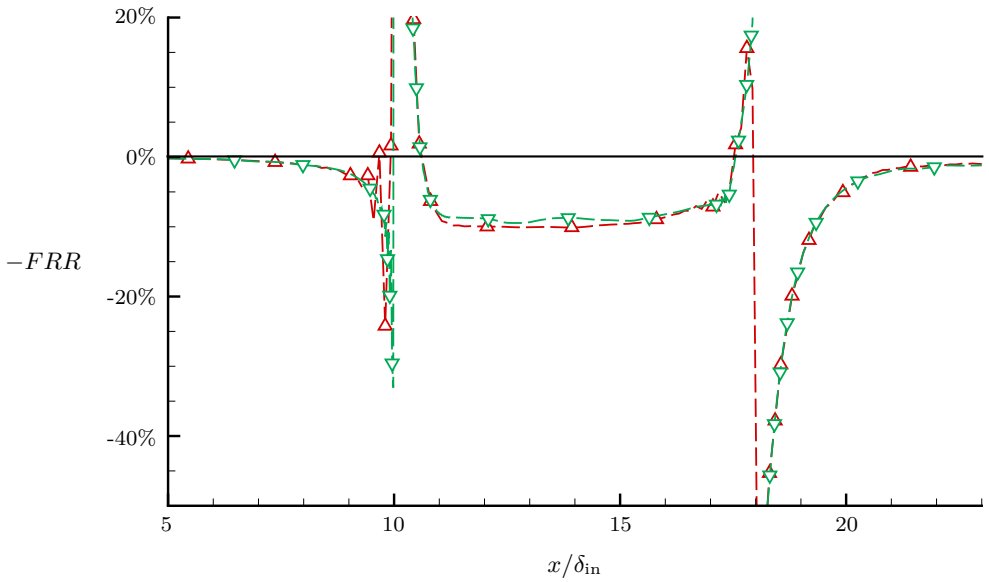


FIGURE 4.10 – Évolution du taux de réduction de frottement FRR dans la direction longitudinale x obtenue par simulations de types LES (— △ —, campagne de simulation R6) et DNS (— ▽ —, campagne de simulation R7).

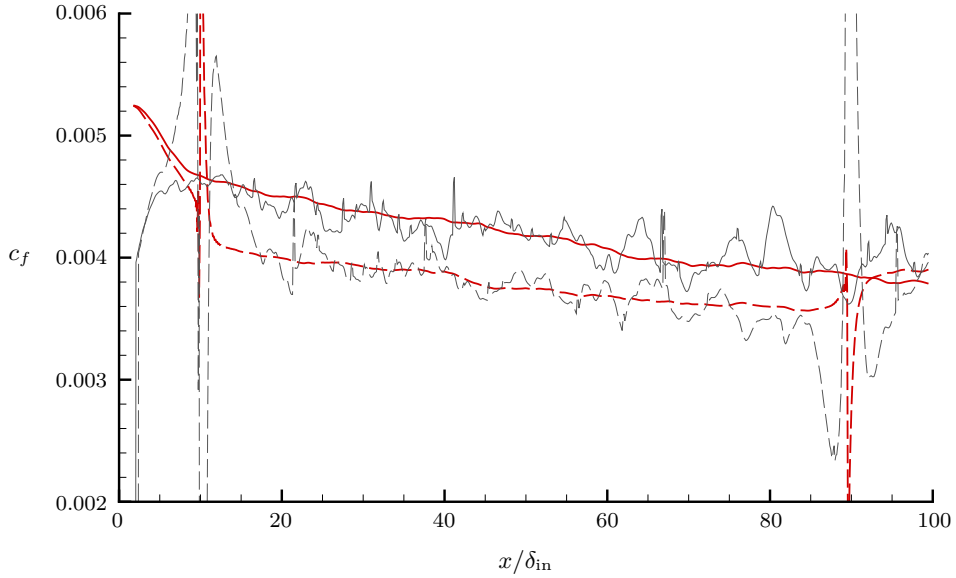


FIGURE 4.11 – Évolution dans la direction longitudinale x du coefficient de frottement c_f (———) et du double de la dérivée de l'épaisseur de quantité de mouvement $2\,\mathrm{d}\theta/\,\mathrm{d}x$ (———) pour la configuration lisse (———) et celle avec *riblets* (– – –). Seuls les résultats issus de la topologie cartésienne sont représentés ici.

Caractérisation de l'influence des *riblets* sur le frottement pariétal. Comme mentionné dans la littérature, on constate que les *riblets* entraînent bien une réduction significative du frottement. Sur la figure 4.11, on distingue une zone de réduction de frottement établie, encadrée par deux régions où le frottement est fortement perturbé par le changement de nature de la paroi. Cette zone établie s'étend ici entre $x \simeq x_0 + 2\,\delta_{\text{in}} \simeq x_0 + 2\,\delta(x_0)$ et $x \simeq x_1 - 5\,\delta_{\text{in}} \simeq x_1 - 2\,\delta(x_1)$ pour la topologie cartésienne. L'intensité et l'étendue des zones de relaxation dépendent grandement de la géométrie de l'extrémité des sillons des *riblets* et de leur position relative avec la paroi lisse.

La topologie cartésienne, qui a été la première topologie de maillage adoptée, a conduit à une géométrie de *riblets* présentant une arête vive aux extrémités amont et avale, comme cela est visible sur la figure 4.6 (*à gauche*). Comme on peut le constater sur la figure 4.11, cette première topologie avec arrêtes singulières génère un important pic de frottement à chacune des extrémités de la zone de contrôle (en amont, le coefficient c_f atteint 10^{-2} et sort donc du graphique). Une grande partie de ces efforts visqueux sont concentrés sur quelques facettes de maille uniquement.

Ce constat a donc conduit à un changement de topologie. Le maillage déformé représenté sur la figure 4.6 (*à droite*) présente l'avantage d'une transition progressive entre la paroi lisse et la paroi avec *riblets*. Le maillage dans la zone de contrôle est le même que précédemment et on a déjà pu juger de la bonne capacité de prédiction du frottement sur les zones de paroi lisse où la déformation de maillage est grande. De plus, le choix a cette fois été fait de positionner verticalement les *riblets* de sorte que l'altitude de la paroi lisse soit celle de leur origine virtuelle visqueuse $h_{\|}$, par opposition au choix effectué avec la topologie cartésienne pour laquelle les *riblets* ont été positionnés de sorte à conserver la surface frontale et ainsi minimiser les efforts de pression. Ces positions relatives sont représentées sur la figure 4.5.

Grâce à cette nouvelle topologie sans arrêtes vives aux extrémités amont et avales des *riblets*, l'évolution $c_f(x)$ du frottement est beaucoup plus progressive. Il n'y a plus de "pic" de frottement au début et à la fin de la zone de contrôle, mais une perturbation continue, nettement atténuée par rapport au cas précédent comme le montre la figure 4.9. L'évolution du frottement dans les régions de transition au début et à la fin de la zone de contrôle est elle aussi beaucoup plus progressive. Avec cette topologie, on estime donc l'étendue de la zone de réduction de frottement établie à $x \simeq x_0 + 10\,\delta_{\text{in}} \simeq x_0 + 9\,\delta(x_0)$ et $x \simeq x_1 - 2.5\,\delta_{\text{in}} \simeq x_1 - \delta(x_1)$.

Dans la zone de réduction de frottement établie, les deux topologies conduisent au même frottement $c_f(Re_\theta)$. Ainsi, la géométrie au commencement des *riblets* et leur position verticale par rapport à la paroi plane qui précède n'ont qu'une influence limitée à une zone transitoire. Passé cette zone, plus aucun impact sur le frottement ne persiste. Dans la suite, on utilisera donc indifféremment les résultats issus de l'une ou l'autre de ces deux topologies.

On constate une substantielle réduction entre le frottement sur la paroi lisse et celui sur les *riblets* à la même position x. Ainsi, au début de la zone de contrôle, pour $x/\delta_{\text{in}} = 20$ sur la figure 4.11, le taux de réduction de frottement SFF est d'environ 11.2%. Cependant, à mesure que l'on se déplace vers l'aval, le taux de réduction de frottement décroît et n'est plus que de 8.1% à la position $x/\delta_{\text{in}} = 80$.

Alternativement, lire le taux de réduction de traînée sur la figure 4.9 revient à comparer le frottement sur la paroi lisse avec celui sur les *riblets* pris à des stations correspondant à un même nombre de Reynolds Re_θ. Ainsi, par opposition au taux de réduction de frottement à position x fixée que l'on dénotera FRR_x, le taux de réduction de frottement à nombre de Reynolds Re_θ fixé, noté FRR_θ, n'évolue que très lentement — s'il évolue. Il est de 10.3 ± 0.4% sur l'ensemble de l'entendue des *riblets* (zones de transition en amont et aval mises à part).

Ces résultats soulèvent de nombreuses questions. Jusqu'à quel point le taux de réduction de frottement FRR_x peut il décroître et est-il possible qu'il devienne négatif, c'est-à-dire qu'après une zone de *riblets* suffisamment longue, le frottement à une station x soit plus élevé sur la paroi contrôlée ? Peut-on prévoir le comportement du taux de réduction de traînée FRR_θ : est-il constant ou est-il censé décroître à mesure que Re_θ augmente ? Comment expliquer la différence de valeur,

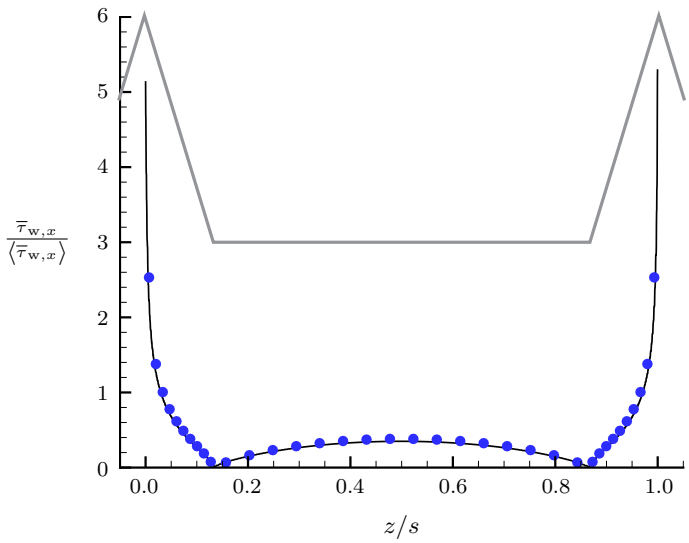


FIGURE 4.12 – Distribution spatiale du frottement pariétal moyen $\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}$ à la surface des *riblets* pour l'écoulement de Stokes longitudinal (———) et pour un écoulement turbulent ($Re_\theta = 1000$, ●). Pour indication, le profil de coupe des *riblets* est également représenté (———).

mais aussi de comportement, entre les taux de réduction de frottement suivant que l'on compare des couches limites à la même station x ou de même épaisseur θ ? Qu'en est-il du comportement du taux de réduction de frottement si l'on décide maintenant de garder un autre nombre de Reynolds fixe, comme Re_δ, Re_{δ^*} ou Re_τ ? Y a-t-il un critère plus pertinent que les autres à garder fixé ? À quel $FRR_?$ s'appliquent les résultats et les lois empiriques abordés dans la littérature et résumés dans la section 2.2.1 ?

Certaines de ces questions trouveront naturellement leur réponse dans la suite de ce chapitre, alors que d'autres seront spécialement traitées dans le chapitre 6 dédié. Un prérequis avant d'approfondir sur les différences entre FFR_x, FFR_θ, FFR_δ ou encore FRR_τ, sera de s'intéresser, dans la sous-section 4.4.3.2, aux évolutions avec x des différentes épaisseurs de couche limite. Auparavant, regardons avec plus de détails de quelle manière est réparti le frottement sur la surface non homogène des *riblets*.

Distribution du frottement pariétal sur la surface des *riblets*. On a déjà pu constater, sur la figure 4.7, que le frottement instantané $\tau_{\mathrm{w},x}(x,z)$ à la surface des *riblets* était plus intense au niveau des crêtes que dans le fond des vallées. Une fois moyennée en temps, la distribution du frottement $\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}(z/s)$ est représentée sur la figure 4.12. On a également représenté sur la même figure la distribution de frottement obtenue, au-dessus de la même géométrie de *riblets*, avec un écoulement de Stokes, laminaire et infiniment visqueux. La figure obtenue est similaire à celle de Peet & Sagaut [205], abordée dans la revue bibliographique à la figure 2.2.2.1, bien que l'abscisse soit ici l'axe z et non l'abscisse curviligne $l(z)$ parcourant la surface mouillée. Notamment, on retrouve la très proche similarité entre la distribution de frottement pour l'écoulement turbulent et pour l'écoulement de Stokes.

Le frottement pariétal moyen est proportionnel au gradient de $\overline{u}$ dans la direction localement normale à la paroi, comme spécifié dans sa définition (1.28). Ainsi, dans le sillon des *riblets*, les champs de vitesse $\overline{u}^+$ pour les écoulements turbulents et de Stokes possèdent les mêmes valeurs pariétales (conditions d'adhérence de Dirichlet avec $\overline{u}^+ = \overline{u}^+_{\mathrm{Stokes}} = 0$), mais également les mêmes gradients à la paroi : $\partial\overline{u}^+/\partial n^+ = \partial\overline{u}^+_{\mathrm{Stokes}}/\partial n^+$. Devant une similarité si forte, on peut se demander si les champs de vitesse $\overline{u}^+$ sous le niveau des crêtes dans les cas turbulents et visqueux-laminaire sont assimilables l'un à l'autre — thèse défendue par García-Mayoral & Jiménez [94] — ou, à l'inverse, s'il n'est pas pertinent de vouloir les comparer — thèse avancée par Chu & Karniadakis [46] en se basant sur la non-nullité des tensions de Reynolds dans cette région.

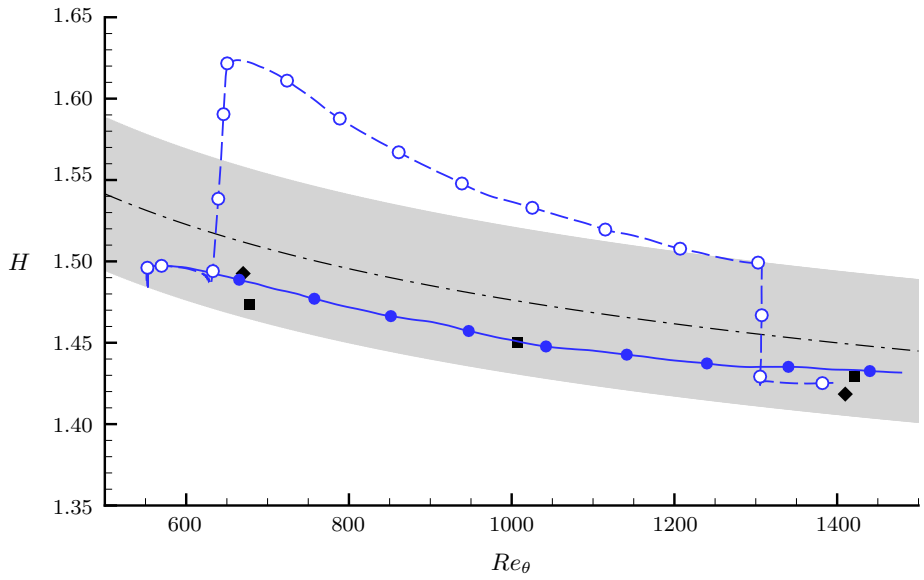


FIGURE 4.13 – Évolution du facteur de forme H en fonction du nombre de Reynolds Re_θ pour la configuration lisse (—●—) et celle avec *riblets* (—○—). Les données issues des DNSs de Spalart [251] (◆) et de Schlatter & Örlü [238] (■) sont représentées. La zone *grisée* représente un écart de ±3% par rapport à la corrélation empirique (1.64) de Nagib *et al.* [192] (— - —).

4.4.3.2 Épaisseurs de couche limite

Dans le cas d'un écoulement turbulent pleinement développé de canal plan, l'épaisseur δ de la couche limite est fixée par la demi-hauteur entre les deux parois. Dans le cas d'une couche limite en développement spatial, comme le nom l'indique, l'épaisseur de couche limite δ évolue dans la direction longitudinale. Il en est d'ailleurs de même pour les autres épaisseurs caractéristiques (θ, δ^*, ...).

Comme précédemment pour le frottement pariétal, on se propose de vérifier la capacité de la méthode numérique employée à prédire correctement l'évolution des différentes épaisseurs de la couche limite. L'influence du contrôle sera ensuite étudiée.

Validation de la capacité d'évaluation de l'épaississement de la couche limite. L'évolution avec x de l'épaisseur de quantité de mouvement θ est totalement dictée pour les ZPGTBLs par le coefficient de frottement c_f, comme en témoigne l'équation intégrale de quantité de mouvement (4.2). Ainsi, la capacité précédemment démontrée à correctement prédire le frottement permet d'assurer une évolution correcte de θ avec x.

L'évolution de δ^* est alors implicitement caractérisée par celle du facteur de forme $H = \delta^*/\theta$, représentée pour les simulations avec et sans *riblets* sur la figure 4.13 au côté de données issues de DNSs de référence et de la loi empirique (1.64) de Nagib *et al.* [192]. Pour le cas de paroi lisse, le comportement de H est dans l'écart de tolérance classique de 3% autour de la loi empirique et prend des valeurs extrêmement proches de celles des DNSs de référence.

Enfin, l'évolution de δ peut être confrontée aux données de référence des DNSs utilisées précédemment. Les courbes $\delta^+(Re_\theta)$ et $Re_\delta(Re_\theta)$ obtenues pour la configuration de paroi lisse sont là encore très proches des données DNSs (non montrées ici).

Caractérisation de l'influence des *riblets* sur l'épaississement de la couche limite. L'évolution avec x des différents nombres de Reynolds déjà évoqués, à savoir Re_τ, Re_θ, Re_{δ^*} et Re_δ, est représentée sur la figure 4.14. Dans le cas non-contrôlé , tous les nombres de Reynolds n'évoluent pas à la même vitesse. C'est le constat évident qui peut être fait en ce qui concerne Re_θ et Re_{δ^*} en remarquant que le facteur de forme H n'est pas une constante.

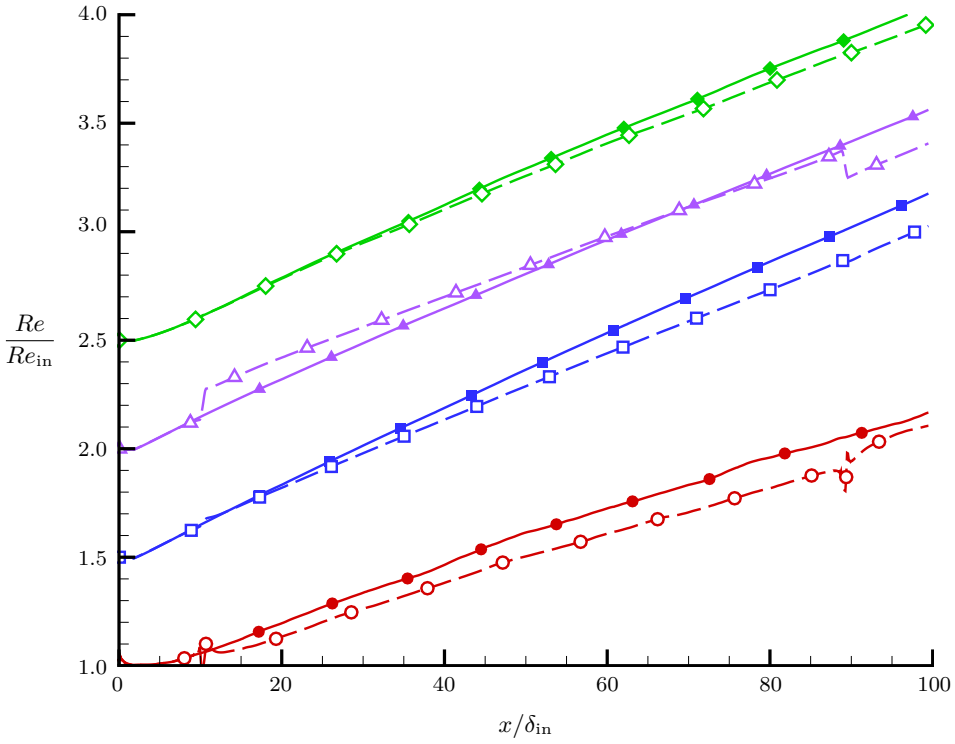


FIGURE 4.14 – Évolution avec x de différents nombres de Reynolds, normalisés par leur valeur en entrée de domaine, pour la configuration lisse (———) et celle avec *riblets* (– – –). Pour une meilleure lisibilité, les courbes sont successivement surélevées de 0.5 les unes par rapport aux autres : (●) $Re_\tau/Re_{\tau,\text{in}}$ avec $Re_{\tau,\text{in}} \simeq 235$, (■) $Re_\theta/Re_{\theta,\text{in}} + 0.5$ avec $Re_{\theta,\text{in}} \simeq 550$, (▲) $Re_{\delta^*}/Re_{\delta^*,\text{in}} + 1$ avec $Re_{\delta^*,\text{in}} \simeq 830$ et (◆) $Re_\delta/Re_{\delta,\text{in}} + 1.5$ avec $Re_{\delta,\text{in}} \simeq 4650$.

Ce que l'on constate de plus, c'est que les *riblets* produisent un ralentissement de l'épaississement de la couche limite : quelque soit l'épaisseur choisie, son taux d'accroissement avec x est diminué. Pour l'épaisseur de quantité de mouvement θ, le taux d'accroissement est directement relié au frottement via la formule (4.2). Ainsi, le ralentissement de l'épaississement de θ est donné par la réduction de traînée caractérisée précédemment.

Notons le comportement singulier de l'épaisseur de déplacement δ^* qui, contrairement aux autres grandeurs présentées, subit une nette discontinuité aux frontières amont et aval de la zone de contrôle et devient (temporairement vu la tendance) plus importante que dans le cas non-contrôlé. Une signification physique définitive, s'il en est une, reste à déterminer quant à ce comportement, bien que l'on puisse déjà donner quelques éléments de réponse. Comme son nom l'indique, l'épaisseur *de déplacement* caractérise la distance dont il faudrait déplacer la paroi pour qu'elle reproduise l'effet de la couche limite sur le débit d'un écoulement d'Euler — c'est-à-dire non visqueux et donc sans condition d'adhérence ni couche limite. Avec cette définition en tête, le sursaut de δ^* sous l'effet des *riblets* traduit une couche limite plus profondément affectée par la condition d'adhérence qu'avec une paroi lisse. Un autre élément d'interprétation peut être donné en remarquant que la discontinuité de δ^* est liée à la discontinuité de H sur la figure 4.13. Le facteur de forme est une mesure de la raideur du profil de vitesse moyenne dans la couche limite : un facteur de forme proche de 1 implique une couche limite dans laquelle la vitesse moyenne est partout très proche de U_∞ sauf dans une sous-couche proche-paroi extrêmement fine. À cause du transport par la turbulence de quantité de mouvement vers la paroi, les couches limites turbulentes ont un facteur de forme bien plus faible que les couches limites laminaires. La présence des *riblets* conduit à une augmentation du facteur de forme, traduisant un profil de vitesse moyenne moins raide et, en ce sens, plus proche d'un profil laminaire.

4.4.4 Degré 2 : Champs aérodynamiques moyens

Parmi les champs aérodynamiques moyens, on s'intéressera aux champs de densité, de pression et des trois composantes de la vitesse.

4.4.4.1 Champ de densité moyenne

Le champ de densité moyenne est quasi-uniforme. Sans dépendre des autres directions de l'espace, il n'évolue que très faiblement avec y/δ entre sa valeur minimale à la paroi ($\rho_\mathrm{w} \simeq 1.217\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$) et sa valeur maximale à l'extérieur de la couche limite ($\rho_\infty \simeq 1.225\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$), soit une plage inférieure au pour cent de variation. Cette faible variation de densité est due au choix d'un écoulement à faible nombre de Mach ($M_\infty = 0.2$) et justifie l'hypothèse faite dans la suite de ce manuscrit d'écoulement considéré comme incompressible. Le profil de $\overline{\rho}$, affiché sur la figure 4.15, présente une zone logarithmique qui n'est pas sans rappeler celle que l'on observe pour le champ de vitesse moyenne longitudinale $\overline{u}$ d'une couche limite canonique. Aucune influence notable de la présence des *riblets* n'est relevée, même entre les sillons.

4.4.4.2 Champ de pression moyenne

Le champ de pression moyenne ne dépend pas non plus de la position transverse z, même entre les sillons des *riblets* lorsqu'il y en a. Dans la direction longitudinale, son évolution est modeste : à l'extérieur de la couche limite, la pression n'est pas censée évoluer pour un écoulement de couche limite en développement spatiale sans gradient de pression. Dans la pratique, les conditions aux limites n'étant pas parfaites, on observe un faible gradient de pression favorable (c'est-à-dire que la pression diminue vers l'aval) dont l'amplitude est caractérisée dans le tableau 4.7. Le profil dans la direction normale du champ $\overline{p}$ est représenté sur la figure 4.15. Ce profil est caractéristique de ce que l'on observe pour les ZPGTBLs. Là encore, la présence des *riblets* ne semble pas avoir d'influence notable.

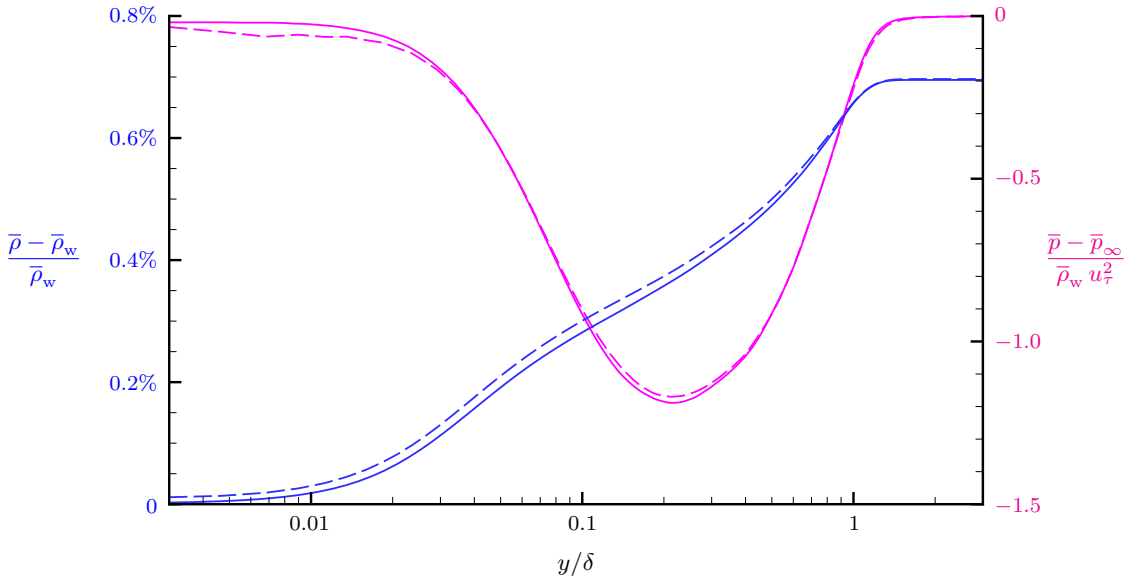


FIGURE 4.15 – Profils de pression moyenne $\overline{p}^+ - \overline{p}^+_\infty$ (*en rose*) et de densité moyenne $\overline{\rho}^+ - \overline{\rho}^+_w$ (*en bleu*) pour la configuration lisse (———) et celle avec *riblets* (– – –) au nombre de Reynolds $Re_\tau = 360$.

4.4.4.3 Champs de vitesses moyennes

Pour la configuration de paroi lisse, la figure 4.16 démontre la capacité de la méthode numérique à obtenir les profils canoniques de vitesses moyennes $\overline{u}(y)$ et $\overline{v}(y)$ à différents nombres de Reynolds. La vitesse transverse moyenne $\overline{w}$ est quasiment nulle quant à elle (on observe des variations inférieures à $\pm 0.1\% U_\infty$ due la durée finie du signal moyenné).

Dans le cas de la configuration avec *riblets*, le champ des vitesses est influencé par la présence des *riblets*, contrairement à ce que l'on a pu voir pour les champs de densité et de pression. Les résultats énoncés lors de la revue bibliographique, section 2.2.2.2, sont retrouvés et confirmés ici.

Tout d'abord, les champs de vitesses moyennes deviennent bien tridimensionnels. Néanmoins, les *riblets* étant tous identiques et régulièrement répartis, on peut mettre à profit cette périodicité et moyenner les champs, non seulement temporellement, mais également spatialement sur la période s entre deux crêtes successives. À cause de la condition d'adhérence, les champs de vitesse dépendent de la position transverse vis-à-vis des crêtes et des vallées. Les profils moyens obtenus dans le plan transverse sont présentés sur la figure 4.17. On y retrouve qualitativement les résultats de la figure 2.11 obtenus par Choi *et al.* [37] avec des *riblets* de géométrie triangulaire. Notamment, la vitesse $\overline{u}^+$ à y^+ donnée est plus importante au-dessus des vallées qu'au-dessus des crêtes. De plus, au travers de la paire de vortex quasi-longitudinaux contrarotatifs, de part et d'autre de la crête des *riblets*, on distingue la présence de l'écoulement secondaire mentionné par Goldstein & Tuan [106]. Ces vortex induisent également, entre eux et la paroi, de la vorticité de signe opposé afin de satisfaire la condition d'adhérence.

Comme on le verra dans le chapitre suivant, le champ de vitesse $\overline{u}^+(y^+, z^+)$ est très similaire à celui de l'écoulement de Stokes, et ce, jusqu'à quasiment une hauteur de *riblets* au-dessus des crêtes. On invite le lecteur impatient à se référer à la figure 8 de l'article présenté dans le chapitre 5 pour une illustration de cette similarité. À partir d'une hauteur de *riblets* au-dessus des crêtes, le champ de vitesse moyenne redevient progressivement bidimensionnel : en notant y_{tip} l'altitude des crêtes, le champ $\overline{u}$ varie de moins de 1% dans la direction z pour $y^+ > y^+_{\text{tip}} + h^+ \simeq y^+_{\text{tip}} + 8$. Au-delà, le profil de vitesse moyenne se différencie de la tendance linéaire de l'écoulement de Stokes sous l'effet du brassage de quantité de mouvement vers la paroi par la turbulence.

Puisque, rapidement au-dessus des *riblets*, l'écoulement ne dépend plus de z, les champs sont

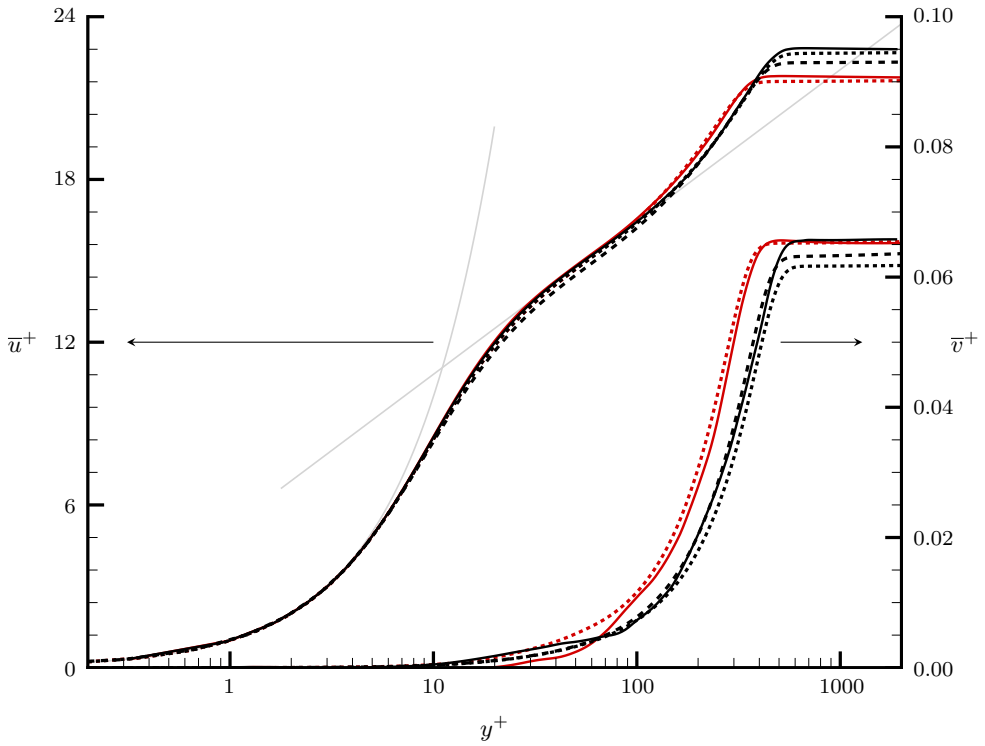


FIGURE 4.16 – Profils de vitesses moyennes longitudinale $\overline{u}^+$ et normale $\overline{v}^+$, adimensionnés en unité de paroi, aux nombres de Reynolds $Re_\theta \simeq 1000$ (*en rouge*) et $Re_\theta \simeq 1400$ (*en noir*) pour la configuration lisse (———). Les lois linéaire (1.48) et logarithmique (1.50) (avec $\kappa = 0.41$ et $B = 5.2$, ———) ainsi que les données issues des simulations de Schlatter & Örlü [238] (DNS, ·····) et d'Eitel-Amor *et al.* [78] (LES, - - - - -) sont également représentées.

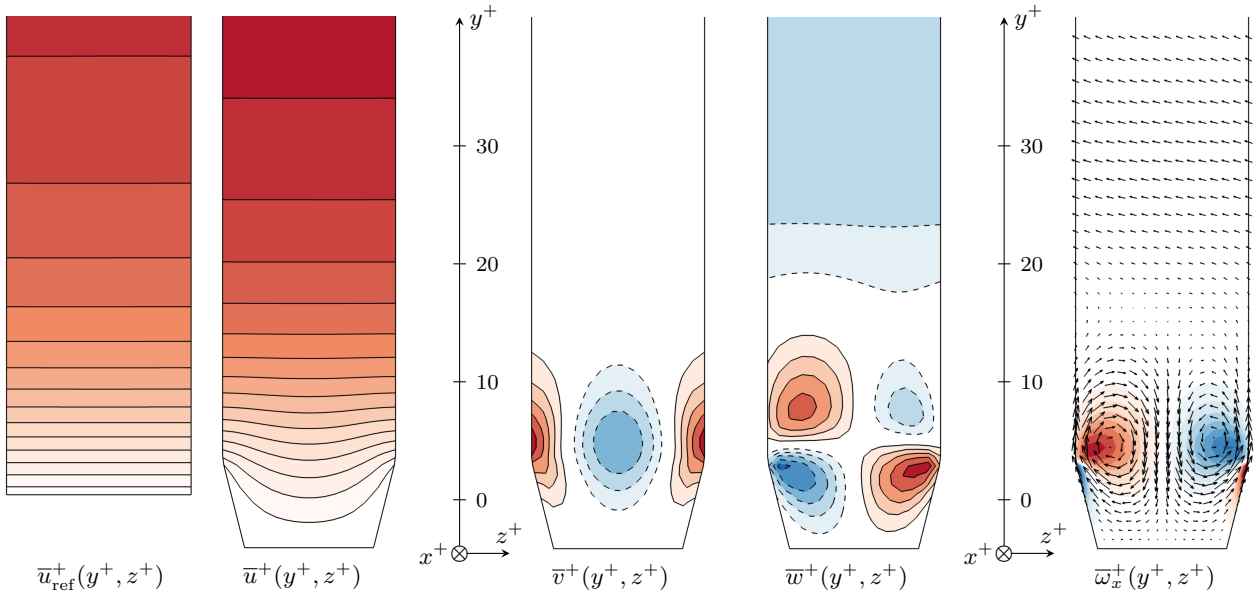


FIGURE 4.17 – Iso-valeurs dans le plan transverse (y^+, z^+) des champs moyens en unité de paroi. *De gauche à droite :* vitesse longitudinale $\overline{u}^+$ pour la configuration lisse et pour la configuration avec *riblets* par incréments de u_τ, vitesses normale $\overline{v}^+$ puis transverse $\overline{w}^+$ par incrément de $0.01\,u_\tau$ et $0.005\,u_\tau$ respectivement, vorticité longitudinale $\overline{\omega}^+_x$ par incréments de $0.005\,u_\tau/l_\tau$ auquel est superposé le champ de vecteurs $(\overline{v}^+, \overline{w}^+)$. Les lignes d'iso-valeurs positives sont en *traits pleins*, celles négatives en *traits discontinus* et la ligne d'iso-valeur nulle n'est pas représentée.

moyennés dans cette direction conformément à la formule (2.9). Les données à proximité immédiate de la paroi sont malgré tout à interpréter avec précaution. Avant de tracer le profil moyenné $\overline{u}^+(y^+)$ pour une station x donnée au côté de celui de l'écoulement de référence sur paroi lisse, l'origine virtuelle de l'axe vertical y est à spécifier. Le choix qui est fait dans toute la suite de ce chapitre est issu du travail de l'article [13] présenté au chapitre suivant. Sans donner de détails sur sa définition, il s'agit d'une origine virtuelle basée sur l'identité de FIK et dont la position est caractérisée par son altitude h_α par rapport au niveau des vallées de *riblets*, que l'on trouve ici égale à $h_\alpha^+ \simeq 0.58h^+ \simeq 4.5$. Si bien que la position des crêtes est donnée par l'ordonnée $y_{\text{tip}}^+ = h^+ - h_\alpha^+ \simeq 3.5$.

Le profil de vitesse moyenne, adimensionné en unité externe $\overline{u}/U_\infty(y/\delta)$ et en unité de paroi $\overline{u}^+(y^+)$, est présenté sur la figure 4.18. Les profils d'intensité turbulente qui y figurent seront abordés dans la suite. Intéressons-nous tout d'abord aux profils adimensionnés en unité externe, c'est-à-dire par U_∞ et δ. Puisque la vitesse U_∞ est constante et que le choix a été fait de comparer les écoulements à un nombre de Reynolds $Re_\delta = \delta U_\infty/\nu$ fixé, l'adimensionnement est le même pour les deux profils. Autrement dit, comparer ces deux écoulements adimensionnés en unité externe revient à les comparer sans adimensionnement du tout. Sur le graphique, il s'avère que l'influence des *riblets* semble être extrêmement limitée. La différence entre les deux profils de vitesse moyenne est maximale aux alentours de $y/\delta \simeq 0.02$ et de $y/\delta \simeq 0.1$ et vaut alors à peine plus de $\pm 2\%$ de U_∞^+.

Pour les profils adimensionnés en unité de paroi, c'est cette fois-ci le nombre de Reynolds Re_τ qui est considéré comme fixé, étant donné sa correspondance $Re_\tau = \delta^+$ avec l'adimensionnement interne. On constate une différence nettement plus significative entre les deux profils ainsi adimensionnés. En particulier, la vitesse d'écoulement libre U_∞^+ diffère largement. Cette différence était attendue puisque U_∞^+ caractérise directement le frottement via l'identité $U_\infty^+ = \sqrt{2/c_f}$. Il est donc possible de déterminer l'écart ΔU_∞^+ en se basant sur les valeurs respectives de c_f pour les deux écoulements, comme l'énonce la formule (2.8). Au nombre de Reynolds $Re_\tau = 360$, on mesure ici $c_{f,\text{ref}} = 4.28 \times 10^{-3}$ et $c_f = 3.76 \times 10^{-3}$, ce qui correspond alors à $FRR_\tau = 12.1\%$ et $\Delta U_\infty^+ = 1.45$.

Malgré cette différence de vitesse dans l'écoulement libre, si l'on traçait les profils déficitaires $(U_\infty^+ - \overline{u}^+)(y/\delta)$ des deux écoulements, on constaterait néanmoins qu'ils se superposent parfaitement dans la région de sillage. Ce résultat valide la théorie de Coles [51] suivant laquelle la loi de sillage (1.46) n'est pas influencée par l'état de surface de la paroi et, en particulier, par la présence de *riblets*. Dans la zone de recouvrement, la loi de sillage se poursuit par la loi logarithmique déficitaire (1.51) dont les coefficients κ et B restent identiques à ceux de la couche limite de référence.

La loi logarithmique (1.50) du profil classique $\overline{u}^+(y^+)$, contrairement à celle du profil déficitaire, n'est pas vérifiée telle quelle par l'écoulement contrôlé. Comme cela a déjà été observé dans la littérature, la loi logarithmique est surélevée par rapport celle de l'écoulement canonique. Son coefficient directeur reste là encore donné par la constante de Von Kármán $\kappa = 0.41$, mais le coefficient C est augmenté par rapport à la valeur de référence par un delta noté ΔC ou Δu^+. Il est graphiquement évalué à 1.4 unité de paroi. La formule (2.14) permet de le calculer analytiquement à partir des données de frottement. On obtient alors $\Delta C = \Delta u^+ = 1.46$, une valeur très proche de celle précédemment calculée pour ΔU_∞^+.

Pour finir l'analyse des profils de vitesse moyenne, notons que la loi linéaire (1.48) $\overline{u}^+ = y^+$ est approchée à proximité de la paroi pour l'écoulement contrôlé, bien que les données prises en dessous de $y^+ = y_{\text{tip}}^+ + h^+ \simeq 11$ doivent être traitées avec précaution puisque l'écoulement y est inhomogène dans la direction transverse moyennée.

On a constaté que la présence des *riblets* conduisait à un décalage de la vitesse adimensionnée U_∞^+ et de la loi logarithmique. Au nombre de Reynolds $Re_\tau = 360$, ce décalage commun a été estimé à $\Delta U_\infty^+ \simeq \Delta u^+ \simeq 1.45$. Son évolution avec le nombre de Reynolds Re_τ est représentée sur la figure 4.19. Son évolution est bruitée pour des raisons de convergence. En effet, bien que les courbes $U_\infty^+(Re_\theta)$ et $U_{\infty,\text{ref}}^+(Re_\theta)$ soient relativement bien convergées, l'écart ΔU_∞^+ entre elles est non seulement faible, environ 5% de $U_{\infty,\text{ref}}^+$, mais cumule leurs deux erreurs de convergence.

Ces données semblent néanmoins attester d'une relative constance, si ce n'est d'une très lente

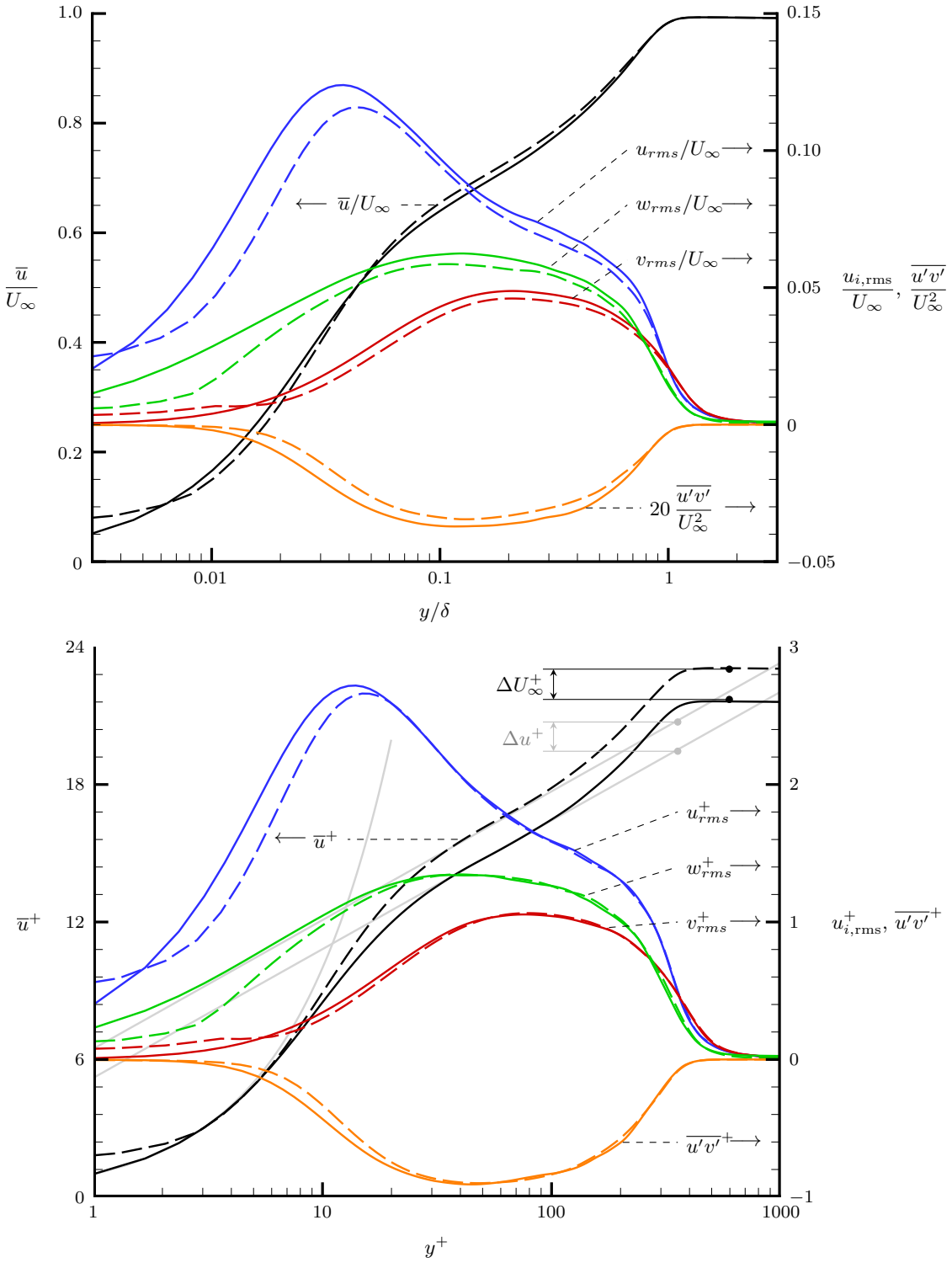


FIGURE 4.18 – Profils de la vitesse longitudinale moyenne $\overline{u}$, des intensités fluctuantes $u_{i,rms}$ et de la contrainte de cisaillement de Reynolds $\overline{u'v'}$, adimensionnés en unité externe au nombre de Reynolds $Re_\delta = 8000$ (*en haut*) et en unité de paroi au nombre de Reynolds $Re_\tau = 360$ (*en bas*), pour la configuration lisse (——) et celle avec *riblets* (– – –). La loi linéaire (1.48), la loi logarithmique (1.50) avec $\kappa = 0.41$ et $C = 5.2$ et une loi logarithmique surélevée de $\Delta C = \Delta u^+ = 1.4$ sont également représentées (——).

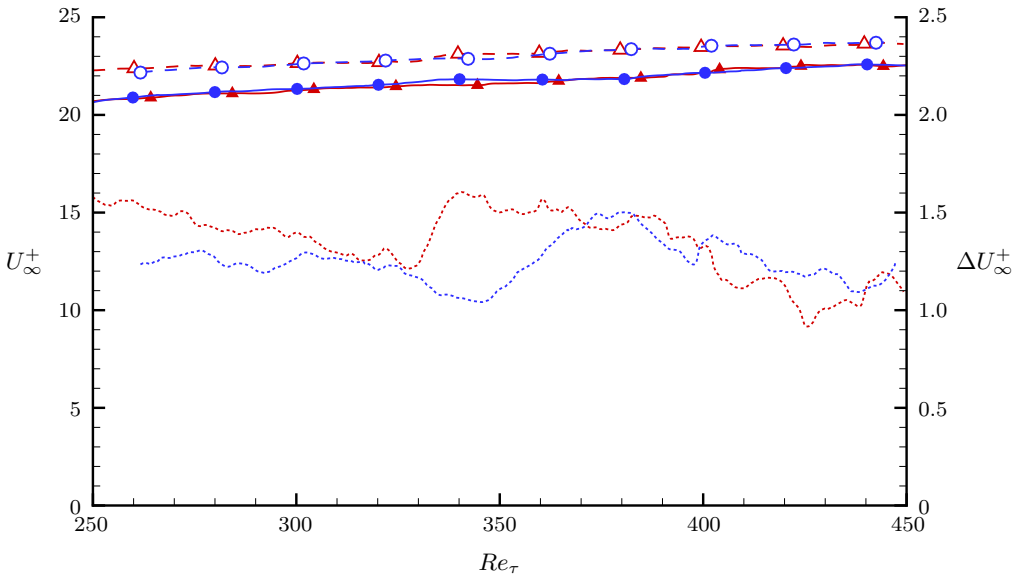


FIGURE 4.19 – Évolution avec le nombre de Reynolds Re_τ de la vitesse de l'écoulement libre adimensionné en unité de paroi U_∞^+ pour la configuration lisse (———, *symboles pleins*) et celle avec *riblets* (– – –, *symboles vides*) et différence entre elles ΔU_∞^+ (- - - - -, *sans symboles*). Les résultats issus de chacune des deux topologies sont représentés : la topologie cartésienne (▲, *en rouge*) et la topologie déformée (●, *en bleu*).

décroissance de ΔU_∞^+ avec le nombre de Reynolds Re_τ, sur la plage de nombre de Reynolds étudiée. La décroissance — s'il en est une — pourrait alors être attribuée à la légère dérive de la dimension $s^+(Re_\tau) = s/l_\tau(Re_\tau)$ des *riblets*. Quoi qu'il en soit, nos données ne permettent pas de trancher définitivement quant à l'évolution de ΔU_∞^+ sur une large étendue de nombres de Reynolds. Les récentes études de García-Mayoral & Jiménez [94, 95], prônant une mise à l'échelle interne des mécanismes propres aux *riblets*, appuient plutôt la thèse d'un comportement constant pour ΔU_∞^+.

4.4.5 Degré 3 : Intensités fluctuantes

Après avoir observé les champs moyens, intéressons-nous maintenant à la mesure de la turbulence, et plus particulièrement aux statistiques du second ordre que sont les tensions de Reynolds R_{ij} ou leur racine carrée, les intensités fluctuantes $u_{i,\mathrm{rms}} = \sqrt{R_{ii}}$.

4.4.5.1 Champs des tensions de Reynolds

Tout comme les champs de vitesses moyennes ont été confrontés à des résultats issus de DNSs de référence dans la sous-section précédente, la figure 4.20 permet de comparer les profils des tensions de Reynolds non nulles pour une ZPGTBL canonique à différents nombres de Reynolds. Notre méthode numérique permet de retrouver les profils de référence avec une excellente précision, légitimant sa capacité à traiter ce troisième degré d'analyse.

Pour ces champs comme pour ceux de vitesse moyenne, la présence des *riblets* rompt l'homogénéité dans la direction z. Les coupes dans le plan transverse sont représentées pour chacune des tensions de Reynolds sur la figure 4.21 où les champs sont adimensionnés en unité de paroi. Ces iso-valeurs sont qualitativement en excellent accord avec celles de la figure 2.13 issue d'une DNS de Goldstein & Tuan 106. Bien que leur simulation ait été réalisée avec des *riblets* de géométrie quasi-triangulaire, et non pas trapézoïdale comme c'est ici le cas, on observe des niveaux similaires et les mêmes tendances vis-à-vis de la position par rapport aux crêtes et aux vallées. Notamment, les fluctuations normales v' sont fortement contraintes à l'aplomb des vallées, alors que l'intensité u_{rms} des

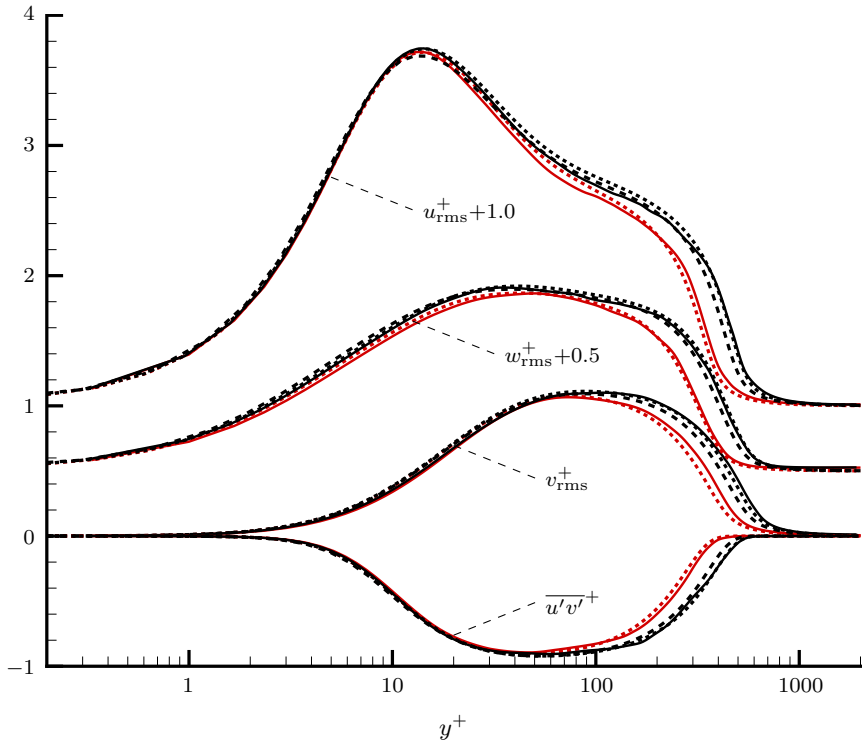


FIGURE 4.20 – Profils des intensités fluctuantes $u^+_{i,\mathrm{rms}}$ et de la contrainte de cisaillement de Reynolds $\overline{u'v'}^+$ adimensionnés en unité de paroi aux nombres de Reynolds $Re_\theta \simeq 1000$ (*en rouge*) et $Re_\theta \simeq 1400$ (*en noir*) pour la configuration lisse uniquement (——). Les données issues des simulations de Schlatter & Örlü [238] (DNS, ·····) et d'Eitel-Amor *et al.* [78] (LES, - - - - -) sont également représentées. Pour une meilleure lisibilité, les courbes relatives à u^+_{rms} et w^+_{rms} sont respectivement surélevées de 1 et de 0.5.

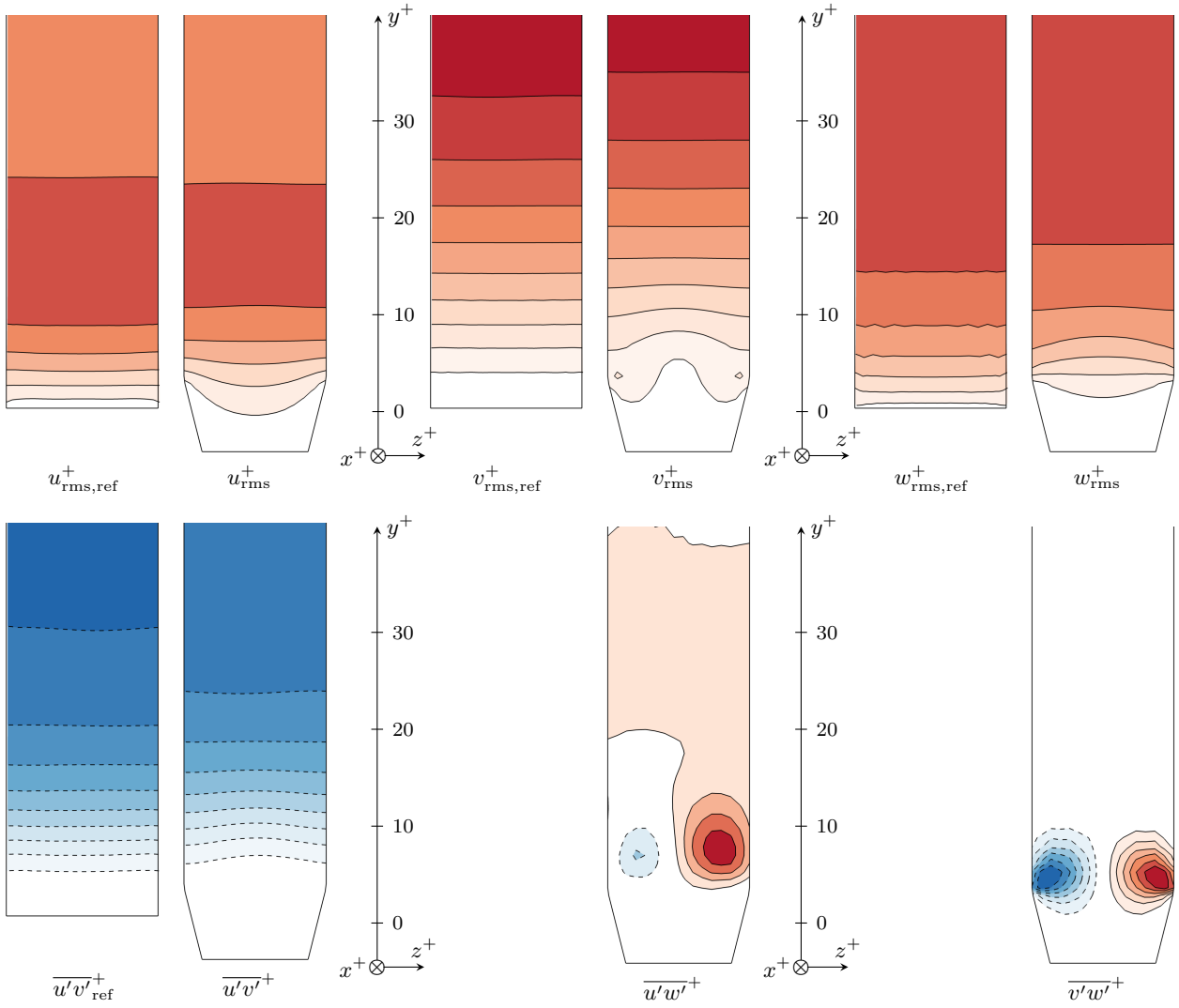


FIGURE 4.21 – Iso-valeurs dans le plan transverse (y^+, z^+) des champs fluctuants en unité de paroi. *En haut, de gauche à droite :* intensités fluctuantes u^+_{rms}, v^+_{rms} et w^+_{rms} pour la configuration lisse puis la configuration avec *riblets* par incréments de 0.5, 0.1 et $0.2\,u_\tau$ respectivement. *En bas, de gauche à droite :* tensions croisées de Reynolds $\overline{u'v'}^+$, $\overline{u'w'}^+$ et $\overline{v'w'}^+$ pour la configuration lisse (uniquement $\overline{u'v'}^+$) puis la configuration avec *riblets* par incréments de 0.1, 0.02 et $0.02\,u_\tau$ respectivement. Les lignes d'iso-valeurs positives sont en *traits pleins*, celles d'iso-valeurs négatives en *traits discontinus*, et la ligne d'iso-valeur nulle n'est pas représentée.

fluctuations longitudinales y est plus importante qu'au-dessus des crêtes. À une altitude y^+ donnée, l'intensité u^+_{rms} au-dessus des *riblets* est comparable à celle au-dessus d'une paroi lisse, alors que les niveaux pour v^+_{rms}, w^+_{rms} et $\overline{u'v'}^+$ sont plus affaiblis. Cependant, contrairement au cas de paroi lisse, la présence des *riblets* permet l'apparition de tensions de Reynolds croisées $\overline{u'w'}$ et $\overline{v'w'}$. Le rôle de $\overline{u'w'}$ le long des parois quasi-verticales des *riblets* est alors identique à celui joué classiquement par $\overline{u'v'}$ sur les parois lisses canoniques : il transporte de la quantité de mouvement longitudinale vers la paroi et contribue ainsi à augmenter le frottement. Néanmoins, les niveaux relevés pour $\overline{u'w'}$ restent extrêmement faibles.

Le caractère tridimensionnel des champs fluctuants est, comme pour les champs moyens, limité à la région très proche paroi. Au-delà, les champs ne dépendent que marginalement de z. On s'intéresse alors aux profils de ces champs moyennés dans la direction z, représentés sur la figure 4.18.

Lorsque l'on opte pour un adimensionnement en unité externe, on constate une baisse sensible de l'ensemble des niveaux fluctuants sur la quasi-totalité de la couche limite. Quantitativement, pour $y/\delta > 0.1$, les profils $u_{i,\text{rms}}/U_\infty$ enregistrent une baisse d'environ $5-6\%$ par rapport à ceux de la couche limite canonique prise au même nombre de Reynolds Re_δ. Ces résultats sont en accord avec ceux qui figurent dans la revue bibliographique et en particulier la figure 2.14. La position $y_{u_{\text{rms,max}}}/\delta$ du maximum d'intensité fluctuante longitudinale u_{rms} est quant à elle légèrement surélevée, bien que ce constat ne soit pas absolu, puisqu'il dépend directement du choix de positionnement de l'origine de l'axe y au-dessus de la paroi recouverte de *riblets*.

L'adimensionnement en unité de paroi permet une bien meilleure superposition des courbes des configurations avec et sans *riblets* au-delà de $y^+ \simeq 15-20$. Entre autres, les maxima d'intensité pour les profils de v^+_{rms}, w^+_{rms} et $\overline{u'v'}^+$ sont quasiment conservés, seul $u^+_{\text{rms,max}}$ subit une légère baisse et plafonne 2.1% en dessous de la valeur de la configuration lisse. Dans la partie la plus proche paroi, tous les profils sont affectés par la présence des *riblets* et leurs intensités y sont globalement inférieures à celles du cas canonique. Seul v^+_{rms} puis u^+_{rms} sont plus intenses en présence de *riblets* lorsque l'on s'approche suffisamment de la paroi.

4.4.5.2 Contrainte de cisaillement total

Parmi les tensions de Reynolds, la contrainte de cisaillement de Reynolds $R_{xy} = \overline{u'v'}$ joue un rôle particulier comme en témoigne sa présence dans l'équation de couche limite (1.45) au travers du terme de cisaillement total $\sigma_{xy} = \tau_{xy} - R_{xy}$. Ainsi, cette contrainte turbulente joue un rôle similaire à celui de la viscosité : il diffuse, transporte, de la quantité de mouvement longitudinale dans la direction normale à la paroi, contribuant de ce fait à augmenter le cisaillement pariétal.

La figure 4.22 représente le profil de chacune de ces contraintes de cisaillement R^+_{xy}, τ^+_{xy} et σ^+_{xy}, en unité de paroi, pour la configuration lisse et celle avec *riblets*. Les données de DNS de Schlatter & Örlü [238] sont également représentées en guise de référence et s'avèrent être en excellent accord avec celles obtenues pour la configuration lisse. La somme des contraintes de cisaillement visqueuse τ^+_{xy} et turbulente R^+_{xy} conduit au cisaillement total σ^+_{xy}. Il décroît de la paroi, où il atteint sa valeur maximale $\sigma^+_{xy} = 1$ due à l'adimensionnement interne, jusqu'à l'extérieur de la couche limite, où il s'annule.

En présence de *riblets*, le même comportement est observé, mis à part dans la région pariétale $y^+ \lesssim 3.5 = y^+_{\text{tip}}$. Cette région correspond à l'écoulement dans les sillons des *riblets*. La moyenne spatiale (dans la direction transverse) du cisaillement total $\sigma^+_{xy}(y < y^+_{\text{tip}})$ y est inférieure à 1. Le déficit de contrainte de cisaillement est pris en compte par la paroi des *riblets*. Au-delà de l'altitude des crêtes, le cisaillement total suit le même profil que pour une paroi lisse. Cependant, une part plus importante de ce cisaillement est constitué de cisaillement visqueux et, naturellement, le cisaillement turbulent y joue un rôle moindre.

L'observation de ces profils peut laisser l'impression que les courbes relatives au cas avec *riblets* sont juste décalées dans leur abscisse par un écart Δy^+, de l'ordre de l'unité, par rapport au

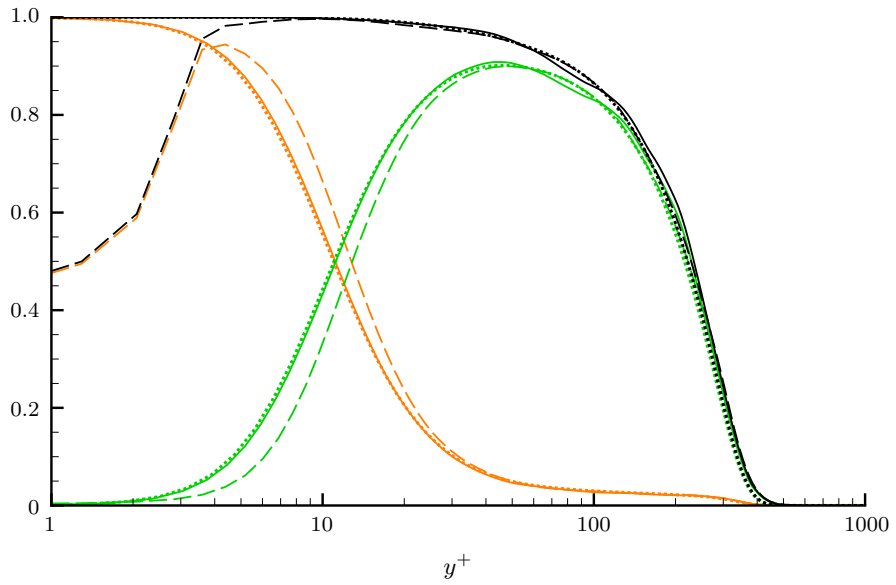


FIGURE 4.22 – Profils des contraintes de cisaillement visqueux $\overline{\tau}^+_{xy}$ (*en orange*), turbulent $-R^+_{xy}$ (*en vert*), et total σ^+_{xy} (*en noir*), adimensionnés en unité de paroi pour la configuration lisse (——) et celle avec *riblets* (– – –) au nombre de Reynolds $Re_\tau = 360$. Les données issues de la simulation DNS de Schlatter & Örlü [238] sont également représentées (·····).

cas canonique — l'abscisse étant logarithmique, les courbes ainsi décalées seraient graphiquement translatées plus fortement pour les faibles valeurs de y^+. Un retour à la figure 4.18 permet de faire le même constat pour l'ensemble des tensions de Reynolds. Peut-être que la *baisse* d'intensité constatée dans la région $y^+ \lesssim 15-20$ était uniquement due à un décalage de l'axe vertical y ? L'origine virtuelle choisie serait-elle mal choisie ? Sa position h_α au-dessus des vallées a juste été précisée au début de cette section sans qu'aucune justification ne soit donnée. C'est bien ce constat de translation entre les profils canoniques et ceux relatifs aux *riblets* qui a motivé en réalité la définition d'une telle origine virtuelle. Ce point fera l'objet du chapitre suivant où la cohérence de cette définition sera appuyée par des arguments physiques.

4.4.6 Degré 4 : Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance, ou PSD pour *power spectral density*, d'un signal $u(t)$ caractérise la répartition de la puissance du signal suivant les fréquences f. Ainsi, la densité spectrale de puissance $S_{uu}(f)$ est reliée à la puissance totale du signal $\overline{u^2}$ par

$$\overline{u^2} = \int_0^\infty S_{uu}(f)\,\mathrm{d}f = \int_0^\infty f\,S_{uu}(f)\,\mathrm{d}(\ln f)\,. \tag{4.3}$$

Une estimation de la PSD peut être faite grâce à un périodogramme, c'est-à-dire par

$$S_{uu}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,E\left[|\hat{u}_T(f)|^2\right] \quad \overset{?}{\simeq} \quad \frac{1}{T}\,|\hat{u}_T(f)|^2\,, \tag{4.4}$$

où E est l'opérateur d'espérance et $\hat{u}_T(f)$ la transformée de Fourier du signal $u(t)$ de durée T finie. Cependant, cette estimation est inconsistante : son biais ne tend pas vers zéro pour un signal de durée T finie, aussi grande soit-elle. La méthode de Welch [284] consiste à réduire ce biais en découpant le signal en segments et en faisant la moyenne des périodogrammes réalisés sur chacun de ces segments. Ainsi, plutôt que de réaliser un seul périodogramme sur le signal total, on en réalise plusieurs sur des signaux de durée T_s raccourcie. Autrement dit, on réduit le biais aux dépens de la résolution en fréquence. Lors de la découpe nette du signal d'origine en segment, des hautes fréquences sont introduites et risquent de polluer l'analyse fréquentielle. La solution consiste à multiplier chaque signal segmenté par une fonction d'amortissement $w(t)$, amenant progressivement à zéro les bords du

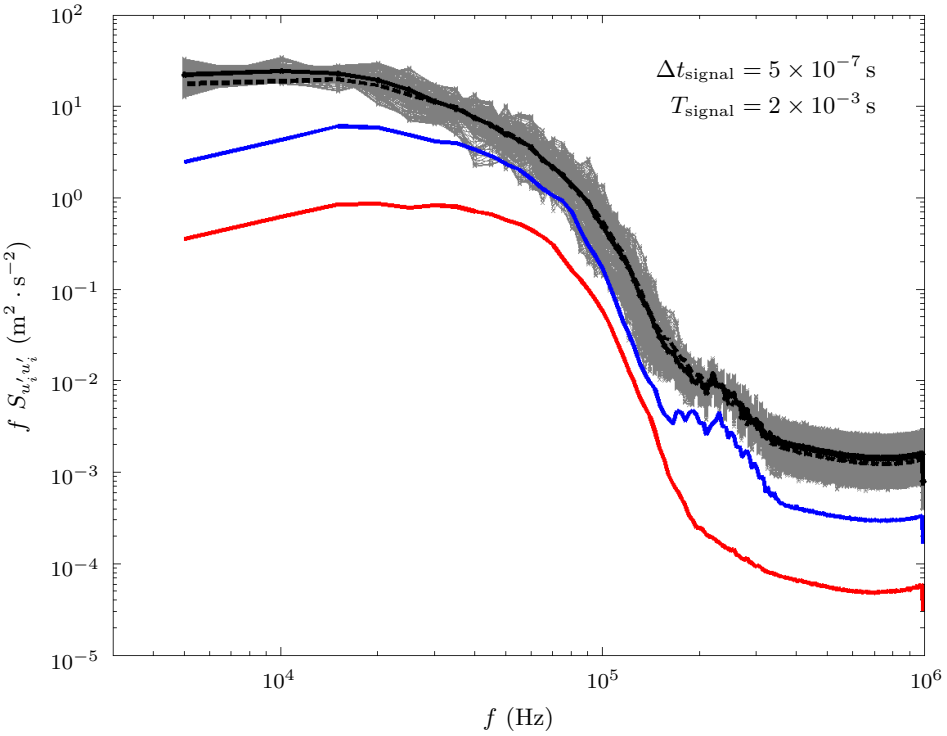


FIGURE 4.23 – Densités spectrales de puissance $S_{u_i'u_i'}(f)$ pré-multipliées par la fréquence f pour la configuration lisse (———) et celle avec *riblets* (– – –) au nombre de Reynolds $Re_\theta = 1000$ à l'altitude où l'énergie cinétique turbulente k est maximale : (*en noir*) $S_{u'u'}$, (*en rouge*) $S_{v'v'}$ et (*en bleu*) $S_{w'w'}$. Les PSDs ont été moyennées spatialement dans la direction transverse z, à l'exception des courbes *grises* qui correspondent aux densités spectrales $S_{u'u'}(f)$ obtenues pour chaque position z du domaine à paroi lisse.

signal. C'est ce que l'on appelle le fenêtrage. On utilisera dans notre cas des fenêtres de Hamming, c'est-à-dire que la fonction d'amortissement est définie par $w(t) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right)$. Davantage de détails sont fournis dans le cours de Sagaut *et al.* [232].

L'énergie cinétique turbulente est donnée par $k = \frac{1}{2}R_{ii} = \frac{1}{2}\left(u_{\text{rms}}^2 + v_{\text{rms}}^2 + w_{\text{rms}}^2\right)$. Après avoir caractérisé, sur la figure 4.18, la répartition de k suivant les différentes composantes $u_{i,\text{rms}}$ et suivant la localisation y dans la couche limite, la question du contenu fréquentiel (spatial et temporel) se pose alors. En particulier, deux questions seront abordées ici. Tout d'abord, la discrétisation de la simulation numérique permet-elle de résoudre toutes les fréquences énergétiques ? Ensuite, la présence de *riblets* a-t-elle une influence sur la répartition de l'énergie cinétique turbulente aux différentes fréquences ?

Le pas de temps du calcul est égal à $\Delta t_{LES} = 10^{-7}\,\text{s}$ et les extractions de données sont faites toutes les cinq pas de temps. Avec cet échantillonnage, la fréquence la plus élevée qu'il est possible d'étudier est donc $f_{\text{cut}} = \frac{1}{2}\frac{1}{5\,\Delta t_{LES}} = 10^6\,\text{Hz}$, où le facteur $\frac{1}{2}$ correspond au facteur d'échantillonnage de Nyquist. La durée du signal que l'on a ici considéré pour cette première étude spectrale est limitée à $T = 2\,\text{ms}$.

La figure 4.23 montre les densités spectrales de puissance $S_{u_i'u_i'}(f)$ pour les différentes intensités fluctuantes $\overline{u_i'u_i'}$ à l'altitude où l'énergie cinétique k est maximale, c'est-à-dire $y^+ \simeq 15$ pour la configuration lisse. À partir de $f_{\text{max}} \simeq 4 \times 10^5\,\text{Hz}$, soit $f_{\text{max}}^+ \simeq 0.6$, les densités de puissance atteignent un plateau à une valeur négligeable devant celle de leur maximum. Ainsi, on s'assure que plus aucune énergie n'est présente à la coupure : le pas de temps du calcul, $\Delta t_{LES} = 10^{-7}\,\text{s}$, permet de prendre largement en compte l'ensemble des échelles temporelles énergétiques de la turbulence.

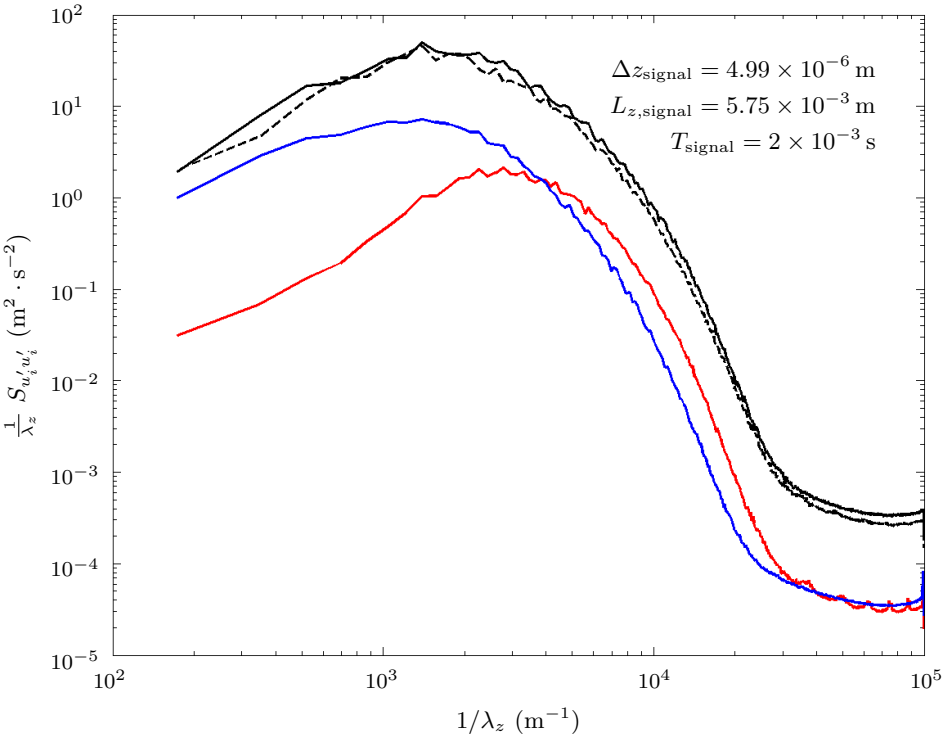


FIGURE 4.24 – Densités spectrales de puissance $S_{u_i' u_i'}(1/\lambda_z)$ pré-multipliées par la fréquence spatiale $1/\lambda_z$ pour la configuration lisse (———) et celle avec *riblets* (– – –) au nombre de Reynolds $Re_\theta = 1000$ à l'altitude où l'énergie cinétique turbulente k est maximale : (*en noir*) $S_{u'u'}$, (*en rouge*) $S_{v'v'}$ et (*en bleu*) $S_{w'w'}$.

Une analyse similaire pourrait être entreprise, non plus temporellement, mais spatialement dans la direction longitudinale x afin d'établir la répartition de l'énergie turbulente suivant les différentes longueurs d'onde λ_x. Cependant, cette direction n'est pas homogène en raison du développement spatial de la couche limite, interdisant une telle analyse. Une alternative est d'identifier le temps et la direction x de l'espace grâce à l'hypothèse de turbulence gelée de Taylor. Pour $y^+ \simeq 15$, la vitesse de convection peut être estimée d'après (1.65) à $\overline{u}^+_{\text{conv}} \simeq 10$. On peut alors déduire que la plus petite longueur d'onde longitudinale énergétique est de l'ordre de $\lambda^+_{x,\text{min}} = \overline{u}^+_{\text{conv}} / f^+_{\text{max}} \simeq 10/0.6 \simeq 20$. Plusieurs mailles par longueur d'onde étant nécessaires pour discrétiser un signal, la dimension des mailles $\Delta x^+ \simeq 22$ ne permet pas de décrire les longueurs d'onde énergétiques les plus courtes. Cela était prévisible pour une simulation de type LES et justifie l'emploi d'un modèle de viscosité sous-maille. La discrétisation Δx^+ étant néanmoins de l'ordre de $\lambda^+_{x,\text{min}}$, la grande majorité de l'énergie est directement simulée.

La direction transverse z est non seulement homogène, mais également périodique. Pour observer la distribution spectrale de l'énergie suivant les longueurs d'onde λ_z, une simple décomposition de Fourier peut donc se substituer à la méthode de Welch. La figure 4.24 représente les résultats de cette analyse. Là encore, on constate qu'une quantité négligeable d'énergie persiste à la longueur d'onde de coupure, c'est-à-dire au double de la dimension des mailles $\Delta z = 4.99 \times 10^{-6}\,\text{m} = 1.02\,l_\tau$. Des mailles jusqu'à trois fois plus larges auraient été suffisantes pour discrétiser l'ensemble des échelles énergétiques — mais pas pour décrire géométriquement les *riblets* recouvrant la paroi. La plus grande longueur d'onde prise en compte par le calcul correspond à la largeur du domaine périodique $L_z = 5.75 \times 10^{-3}\,\text{m}$. La figure nous confirme que l'énergie contenue dans des structures de cette envergure, bien que non négligeable, est 10 à 20 fois inférieure à celle contenue à l'échelle la plus énergétique. L'observation des corrélations spatiales dans la sous-section suivante permettra de s'assurer que le domaine est suffisamment large pour que les structures turbulentes ne soient pas contraintes par la dimension finie du domaine.

Les résultats des analyses spectrales temporelle et spatiale des figures 4.23 et 4.24 indiquent que les *riblets* ne changent pas fondamentalement ce qui a été établi dans le cas d'une paroi plane canonique. À l'altitude $y = \text{argmax}(k)$, l'influence des *riblets* sur la répartition spectrale de l'énergie cinétique turbulente est très limitée. La même analyse spectrale peut être conduite à d'autres altitudes. C'est ce qui sera fait dans la section 5.3.2 du chapitre suivant, où la densité spectrale de puissance $S^+_{u'u'}(1/\lambda_x)$ de $\overline{u'u'}^+$ sera représentée pour les altitudes y^+ allant de la paroi jusqu'à l'extérieur de la couche limite. On reporte à plus tard cette analyse afin de pouvoir la conduire à la lumière des résultats qui seront préalablement exposés dans la section 5.1.

4.4.7 Degré 5 : Corrélations spatiales et temporelles

Contrairement à la densité spectrale de puissance dans la sous-section précédente, on s'intéresse ici à des grandeurs basées sur la comparaison entre des signaux pris à deux endroits ou instants différents. Il s'agira de déterminer si les fluctuations en un point peuvent être statistiquement reliées à celles en un autre point ou un autre instant. Cette analyse permettra d'établir l'étendue, spatiale ou temporelle, des fluctuations cohérentes et donc d'en déduire leurs dimensions caractéristiques.

On définit le coefficient de corrélation normalisé entre deux signaux $u(x,t)$ et $v(x,t)$ par

$$C_{uv}(\xi,\tau) = E\Big[u^{\text{cr}}(x,t)\; v^{\text{cr}}(x+\xi,t+\tau)\Big] \qquad \text{où} \qquad u^{\text{cr}}(x,t) = \frac{u(x,t) - E[u]}{\sqrt{V[u]}}\,, \tag{4.5}$$

où les opérateurs E et V menant aux signaux centrés-réduits u^{cr} et v^{cr} sont l'espérance et la variance. Le coefficient de corrélation est compris entre les valeurs ± 1, qui sont atteintes si et seulement si les signaux continus u et v sont proportionnels entre eux. Lorsque $C_{uv} = +1$, les signaux sont dits **corrélés**. En pratique, la condition $C_{uv} > 0.8$ est considérée comme suffisante. Lorsque $C_{uv} < -0.8$, les signaux sont dits **anti-corrélés**. Enfin, deux signaux indépendants l'un de l'autre auront un coefficient de corrélation égal à zéro. Le lecteur intéressé peut se référer au cours de Sagaut *et al.* [232] pour plus de détails et d'exemples d'application.

Le coefficient d'autocorrélation deux-points/un-temps des signaux u'_i est représenté en fonction du décalage spatial dans la direction transverse ξ_z sur la figure 4.25. Ces données sont prises à l'extrémité haute de la zone inertielle, à l'altitude $y = 0.1\,\delta$. On observe que le coefficient pour chacune des composantes u'_i chute à zéro avant que le décalage spatial n'atteigne la moitié de la période $L_z = 5.75$mm. On s'assure ainsi que L_z est suffisamment large pour que les mouvements cohérents ne soient pas contraints par la finitude du domaine de calcul.

L'envergure caractéristique des mouvements cohérents peut également être mesurée grâce aux corrélations deux-points/un-temps. Pour cela, la figure 4.26 représente une analyse comparable à la précédente pour des signaux pris à l'altitude $y = \text{argmax}(k)$ où l'énergie cinétique turbulente est maximale. Le coefficient de corrélation pour les fluctuations longitudinales u' caractérise les *streaks*, lents et rapides. On mesure sur la courbe la demi-envergure $r_{z,u'} = 0.2\,\text{mm} \simeq 39\,l_\tau$ avant que le coefficient ne s'annule. Cette envergure est cohérente avec la largeur caractéristique $\lambda_z^+ = 80 - 100$ des *streaks* précisée dans la revue bibliographie à la sous-section 1.4.1. Les coefficients d'autocorrélation des fluctuations v' et w' caractérisent la présence des tourbillons quasi-longitudinaux. La demi-envergure correspondante aux fluctuations normales, $r_{z,v'} = 0.1\,\text{mm} \simeq 21\,l_\tau$, est cohérente avec le diamètre caractéristique des TQLs de la littérature, compris entre 10 et 50 unités de paroi.

La présence des *riblets* n'influe pas significativement les coefficients de corrélation avant leur première annulation. Néanmoins, les coefficients $C_{u'u'}$ et $C_{w'w'}$ sont nettement renforcés pour les décalages $\xi_z \simeq 0.2 - 0.55\,\text{mm} \simeq 40 - 110\,l_\tau$ pour lesquels les signaux sont anti-corrélés. Le coefficient de corrélation $C_{v'v'}$ est quant à lui négligemment affecté par les *riblets*. On peut interpréter ces comportements par la capacité des *riblets* à ordonner les différents mouvements cohérents. Ainsi, la taille de ces structures, caractérisée par le premier décalage ξ_z qui annule le coefficient de corrélation,

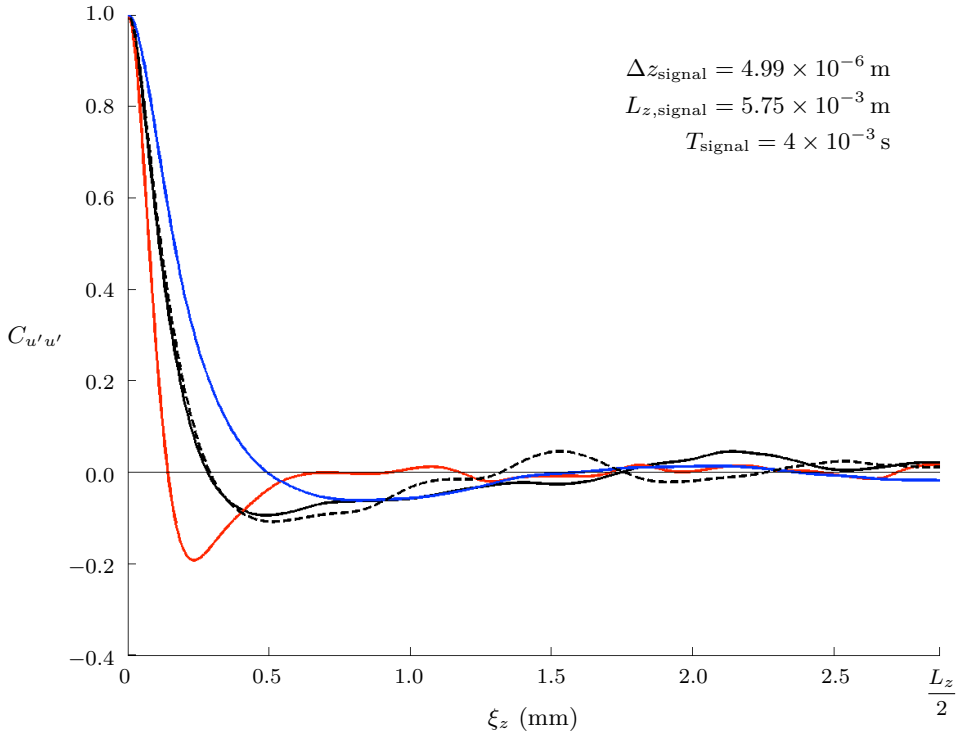


FIGURE 4.25 – Coefficient de corrélation $C_{u_i'u_i'}$ en fonction du décalage spatial ξ_z pour la configuration lisse (——) et celle avec *riblets* (– – –) au nombre de Reynolds $Re_\theta = 1000$ à l'altitude $y = 0.1\,\delta$: (*en noir*) $C_{u'u'}$, (*en rouge*) $C_{v'v'}$ et (*en bleu*) $C_{w'w'}$.

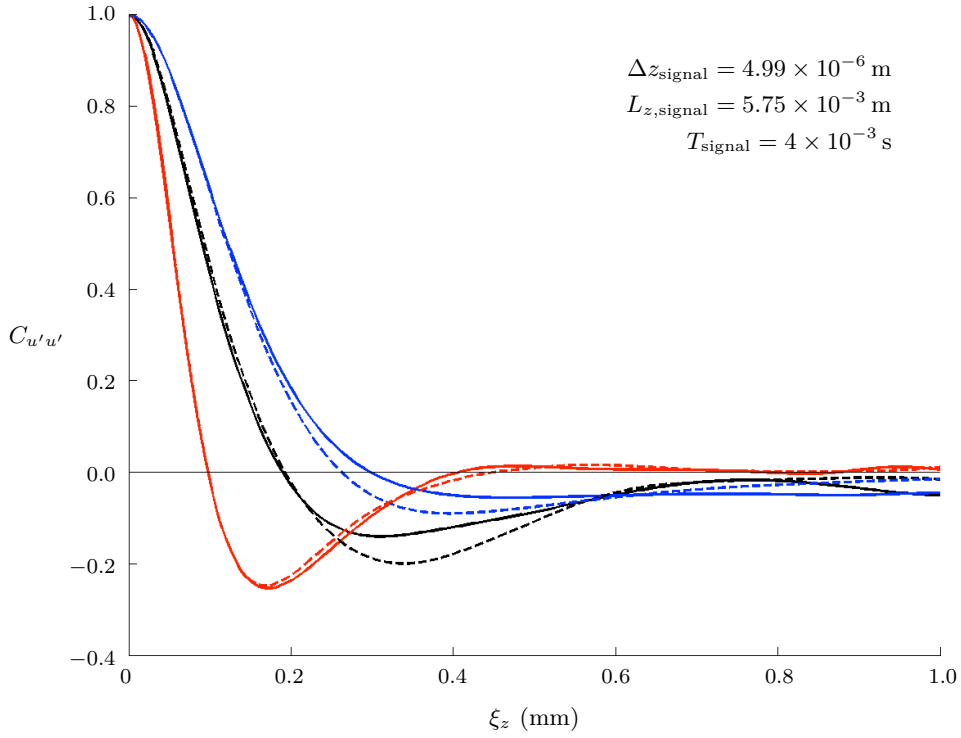


FIGURE 4.26 – Coefficient de corrélation $C_{u_i'u_i'}$ en fonction du décalage spatial ξ_z pour la configuration lisse (——) et celle avec *riblets* (– – –) au nombre de Reynolds $Re_\theta = 1000$ à l'altitude où l'énergie cinétique turbulente k est maximale : (*en noir*) $C_{u'u'}$, (*en rouge*) $C_{v'v'}$ et (*en bleu*) $C_{w'w'}$.

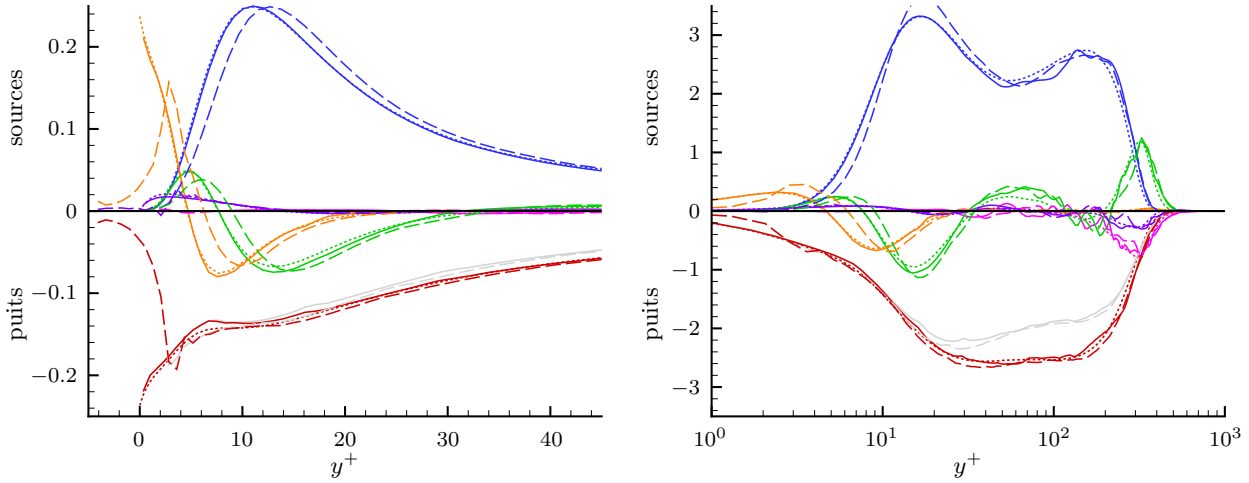


FIGURE 4.27 – Termes (*à gauche*) et termes pré-multipliés par y^+ (*à droite*) du bilan d'énergie cinétique turbulente (1.22) en unité de paroi au nombre de Reynolds $Re_\theta = 1000$ pour la configuration lisse (———) et celle avec *riblets* (– – –). Les données des simulations DNS de Schlatter & Örlü [238] (·····) sont également représentées. Les termes sont respectivement : convection (*rose*), production (transfert de $\mathcal{K}$ vers k) (*bleu*), dissipation (*rouge*), diffusion visqueuse (*orange*), diffusion turbulente (*vert*), diffusion par la pression (*violet*). La dissipation totale est obtenue en sommant la dissipation résolue, représentée *en gris*, et les dissipations sous-maille et numérique (calculées comme terme résiduel du bilan).

n'est pas modifiée, mais leur positionnement les unes par rapport aux autres est stabilisé, comme en témoigne l'amplification de l'anti-corrélation entre les structures voisines.

4.4.8 Degré 6 : Bilans énergétiques

En tout point de l'écoulement stationnaire, la production, la dissipation et le transport d'énergie cinétique turbulente k sont en équilibre et vérifient l'équation (1.22). Les profils pour chacun de ces termes sont représentés sur la figure 4.27. Les résultats pour la configuration de paroi lisse sont très similaires à ceux de la simulation DNS de référence de Schlatter & Örlü [238] à même nombre de Reynolds $Re_\theta = 1000$, quelque soit la hauteur dans la couche limite.

Suivant la procédure utilisée par Eitel *et al.* [78] comme cela a été précisé dans la section 1.3.3, le terme résiduel du bilan est attribué à la dissipation numérique et sous-maille. Ce terme est donc ajouté à la dissipation dite résolue, calculée selon sa définition dans la formule (1.22), pour constituer la dissipation dite totale. On peut néanmoins questionner la légitimité physique de cette procédure : en effet, comment justifier que le résidu du bilan (autrement dit, tout ce qui manque, suite aux diverses approximations numériques lors du calcul et du post-traitement, pour que le bilan soit à l'équilibre) puisse être attribué tel quel à la dissipation de l'énergie turbulente ? En absence de justification rigoureuse, force est de constater que cette hypothèse permet d'atteindre parfaitement les niveaux de référence pour la dissipation.

En présence de *riblets*, les termes du bilan sur la figure de *gauche* de 4.27 sont d'amplitudes très similaires à ceux du cas canonique. Comme précédemment pour les profils de vitesse moyenne, d'intensités fluctuantes et de contraintes de cisaillement, les courbes relatives aux *riblets* semblent être obtenues en translatant les courbes canoniques selon l'axe y^+. Les profils pré-multipliés par y^+ sont par contre d'amplitude plus importante dans la sous-couche visqueuse, c'est-à-dire pour $y^+ \lesssim 30$. Là encore, un choix d'origine virtuelle translatée pour l'axe y permettrait peut-être de retrouver les niveaux canoniques pour les termes pré-multipliés par y^+. On reporte à la section 5.3 du prochain chapitre l'étude plus complète du bilan de k pour les écoulements turbulents au-dessus d'une paroi recouverte de *riblets*.

L'observation des bilans permet ainsi de clôturer la validation de la méthode numérique.

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, le cas d'étude, c'est-à-dire les conditions d'écoulement et la géométrie des *riblets*, a tout d'abord été défini à la section 4.1. Ensuite, les choix quant à la méthode numérique ont été précisé dans la section 4.2, en passant en revue ceux relatifs à la discrétisation spatiale, aux conditions aux limites, aux schémas numériques et aux modèles de viscosité sous-maille.

La méthode de génération du maillage a été développée dans la section 4.3. En particulier, les avantages et inconvénients de deux topologies de maillage y sont exposés. La première, la topologie dite cartésienne, présente une excellente qualité de mailles (en termes d'orthogonalité, de symétrie et de régularité), mais conduit à une singularité géométrique aux extrémités amont et avale des *riblets*. La seconde topologie, dite déformée, permet une transition progressive entre les *riblets* et la paroi plane, mais contient des mailles grandement déformées dans les zones de paroi lisse. Néanmoins, la qualité du maillage dans la zone d'intérêt, c'est-à-dire dans la zone de *riblets*, demeure préservée.

Pour différents degrés de validation, allant de la simple observation qualitative aux analyses spectrales et aux bilans d'énergie, les propriétés des champs calculés ont été comparées aux résultats de référence de la littérature dans la section 4.4. Ainsi, la configuration de plaque plane, pour laquelle de nombreuses données expérimentales et numériques sont disponibles, a démontré la capacité de la méthode numérique à reproduire fidèlement les mécanismes turbulents à toutes les échelles pertinentes pour notre étude. De plus, la simulation de l'écoulement turbulent au-dessus de *riblets* mène à des résultats sensés. Ils se comparent très bien à ceux de la littérature quand ces derniers existent pour des conditions d'écoulement et une géométrie de *riblets* similaires.

Ainsi assuré de la pertinence des résultats de la méthode numérique, il sera possible d'entreprendre une véritable analyse de l'écoulement. Dans le chapitre 5 qui suit, le concept d'origine virtuelle qui a brièvement été abordé dans ce chapitre sera présenter et étudier plus en détails.

Chapitre **5**

Définition d'une origine virtuelle adaptée à l'analyse de l'écoulement contrôlé

Sommaire

5.1 Introduction . . . 145
5.2 Article : *Riblet Flow Model Based on an Extended FIK Identity* . . . 147
5.2.1 *Introduction* . . . 147
5.2.2 *Simulation Overview* . . . 150
5.2.3 *Reduction of the Wall Friction* . . . 155
5.2.4 *A New Skin Friction Decomposition for Complex Surfaces* . . . 157
5.2.5 *Analysis of the Riblet Effects Through a Friction Decomposition* . . . 161
5.2.6 *An Appropriate Virtual Origin Based on the Friction Decomposition* . . . 161
5.2.7 *Mean Velocity Field and Turbulent Statistics* . . . 164
5.2.8 *Conclusion and Outlook* . . . 169
5.2.9 *References* . . . 170
5.3 Discussion complémentaire . . . 173
5.3.1 Résumé succinct de l'article . . . 173
5.3.2 Mouvements cohérents . . . 173
5.3.3 Bilans énergétiques . . . 176
Conclusion du chapitre . . . 179

5.1 Introduction

Lorsque l'on étudie un écoulement bordé par une paroi plane, la définition d'un repère est aisée. La direction normale à la paroi permet de définir sans ambiguïté l'axe vertical $\underline{e}_y$, dont on peut placer l'origine sur la surface, de sorte que celle-ci soit implicitement définie par $y_\mathrm{w} = 0$. La direction générale de l'écoulement libre $\underline{U}_\infty$ permet ensuite de définir ce que l'on appellera la direction longitudinale $\underline{e}_x$. Enfin, la direction transverse $\underline{e}_z$ complète la base ortho-normale $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$.

Dans le cas d'une paroi plus complexe, qu'elle soit courbe et/ou rugueuse, la définition d'un repère n'est plus aussi simple. Pour une surface courbe mais lisse, comme la surface d'un profil d'aile par exemple, on peut alors avoir recours à un repère local pour l'étude de la couche limite à une corde donnée x_c. On utilise alors la direction localement normale à la paroi $\underline{e}_y(x_c)$ et on peut placer l'origine $y = 0$ au niveau de la paroi comme précédemment.

Dans le cas d'une paroi rugueuse (ou couverte de *riblets*), l'utilisation d'un repère local n'a pas véritablement de sens si les éléments rugueux sont bien plus petits que les phénomènes que l'on observe. La définition d'une base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ globale peut se faire classiquement via la direction de l'écoulement libre et la normale *globale* à la surface plane rugueuse. Le problème qui se pose concerne alors la définition de l'origine $y = 0$. Doit-elle être positionnée au fond des rugosités, c'est-à-dire au fond des vallées dans le cas de *riblets* ? Ou doit-elle, à l'inverse, être définie au niveau des crêtes ? Est-il plus pertinent de la placer à mi-distance ? Toutes les propositions précédentes sont purement géométriques, ne faut-il pas préférablement utiliser un critère basé sur des considérations physiques ? Notamment, qu'en est-il de l'origine virtuelle de Bechert & Bartenwerfer [15], définie dans la sous-section 2.2.3.1, qui est basée sur l'écoulement de Stokes ?

Alors que de nombreux choix sont possibles, la détermination de l'**origine virtuelle** la plus pertinente nécessite au préalable d'en définir l'usage : à quoi une origine virtuelle *pertinente* doit-elle être pertinente ? Pour reprendre la définition de Bechert *et al.* [16], l'origine virtuelle est la position particulière à laquelle la couche limite "voit" une paroi plane équivalente. Ainsi, pour l'étude de couches limites turbulentes, l'objectif que l'on se fixe est de fournir une origine permettant une comparaison légitime entre l'écoulement de surface rugueuse et l'écoulement canonique de paroi lisse. Le choix de l'origine a une grande influence sur les conclusions que l'on peut tirer d'une comparaison des écoulements. Pour illustrer ce point, plaçons-nous le temps d'une expérience de pensée dans la situation d'un écoulement de paroi lisse pour lequel l'origine de l'axe y serait surélevée de sa position habituelle à la paroi pour être placée un peu plus haut dans l'écoulement. Ce choix arbitraire d'origine aurait pour effet de translater vers la gauche le profil de vitesse moyenne $\overline{u}^+(y^+)$ de la figure 4.16, menant ainsi à la conclusion que la vitesse moyenne au-dessus de cette *nouvelle* surface est plus importante que dans le cas canonique. Le choix inverse d'une origine de l'axe y placée sous la paroi conduirait à la conclusion opposée — mais tout autant détachée de la réalité physique — que l'écoulement est ralenti par cette paroi plane *particulière*.

L'article qui suit, publié dans la revue *Flow, Turbulence and Combustion* [13], tente d'apporter une réponse à la question de la position de l'origine virtuelle. Une analyse du frottement sur une paroi recouverte de *riblets* est tout d'abord réalisée. En particulier, la décomposition FIK du frottement qui a été présentée dans la revue bibliographique à la sous-section 1.5.2 permettrait d'aller plus loin dans la compréhension de l'effet des *riblets* sur le frottement. Cependant, la décomposition originelle de Fukagata *et al.* [85] ne s'applique directement que dans le cas d'une paroi lisse. Une étape préalable est alors d'établir une nouvelle formulation, cohérente avec la formulation originale et permettant l'étude de paroi complexe. La formulation obtenue est précisée dans l'article qui suit et sa dérivation complète est détaillée dans l'annexe A dédiée.

Un critère quant au positionnement de l'origine virtuelle découle naturellement de la décomposition FIK étendue au cas des surfaces complexes. L'origine virtuelle ainsi obtenue, dont la position sera repérée grâce à sa distance h_α au-dessus du niveau des vallées de *riblets*, permettra de mettre en évidence des propriétés majeures de l'écoulement au-dessus de *riblets*. Cela donnera simultanément toute la légitimité à ce choix d'origine virtuelle et un nouveau point de vue quant à l'influence des *riblets* sur la turbulence pariétale.

Une discussion complémentaire sera alors entreprise dans la section 5.3. Complétés par de nouvelles analyses, les résultats déjà présentés dans le chapitre 4 précédent seront abordés de nouveau à la lumière de ce qui aura été établi dans l'article.

Flow Turbulence Combust (2015) 95:351–376
DOI 10.1007/s10494-015-9624-2

Riblet Flow Model Based on an Extended FIK Identity

Amaury Bannier[1] · Éric Garnier[1] · Pierre Sagaut[2]

Received: 20 January 2015 / Accepted: 26 May 2015 / Published online: 11 June 2015
© Springer Science+Business Media Dordrecht 2015

Abstract Large Eddy Simulations of zero-pressure-gradient turbulent boundary layers over riblets have been conducted. All along the controlled domain, riblets maintain a significant 11 % drag reduction with respect to the flat plate at the same Re_τ (from 250 to 450). To compare the flows above riblets and a reference smooth wall, an appropriate vertical shift between the two surfaces is required. In the present study, the "vertical origin" is set using the identity of Fukagata, Iwamoto and Kasagi (FIK) in *Phys. Fluids*, vol. 14, 2002, L73. This identity, which provides a physically meaningful decomposition of the skin friction, has been extended to complex wall surfaces and constitutes the basis for the derivation of a new virtual origin. Using this FIK-based origin, it is shown that the complex interactions between the riblets and the near-wall turbulent structures can be taken into account by a simple shift of the two axes of the mean and turbulent velocity profiles. The appropriate upward shift Δu^+, typical for drag reduction, is directly dependent on the skin friction on the riblets and on the reference smooth plate at the same Re_τ.

Keywords Riblets · Skin-friction decomposition · Virtual origin · Large-Eddy-Simulation · Spatially developing boundary layer

1 Introduction

Making grooves on a surface increases its wetted area and, counter-intuitively, may reduce drag for turbulent flows [1]. For the last three decades, those so-called "riblets" have remained under active consideration. They have been studied through experiments [2, 3],

✉ Amaury Bannier
amaury.bannier@onera.fr

[1] ONERA - The French Aerospace Lab, Applied Aerodynamics Department, 92190 Meudon, France

[2] Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, M2P2 UMR 7340, 13451 Marseille, France

numerical simulations [4, 5] and also flight testings [6]. With a technologically-feasible design, 8.2 % drag reduction was achieved by Bechert et al. [3] in their oil channel facility.

Riblets are quasi-immersed in the viscous sublayer [5] in which the viscous diffusion is predominant. Based on this observation, Bechert and Bartenwerfer [7] have computed analytically the viscous Stokes flow velocity-profile above a riblet-covered wall. It converges asymptotically to the same far-field solution as the smooth wall Stokes flow, providing the appropriate relative location of the ribbed and flat walls. For a given riblet geometry, one can compute analytically this appropriate relative location, called "virtual origin" h. Two origins $h_\parallel$ and $h_\perp$ can be defined, respectively for riblets aligned with the stream direction (see Fig. 8 for illustration) and for riblets aligned in the cross-flow direction. Later in this paper, the notion of "virtual origin" h will be extended as the particular elevation where the boundary layer 'sees' an equivalent wall, not only for a viscous Stokes flow, but also for a turbulent one. Luchini et al. [8] defined the "protrusion height" as the difference: $\Delta h = h_\perp - h_\parallel$ and described it as a measure of 'how much the corrugated wall impedes the cross-flow more than it does the longitudinal flow'. They established a link between Δh and the riblet design performance: an important protrusion height results in an upward deflection of the cross-flow motions, causing streamwise vortices and streaks to be displaced away from the wall [5] and shear to be reduced nearby the wall.

Other authors interpret the drag reduction achieved by riblets as a roughness effect [9]. In general, roughness elements modify the near-wall cycle of the turbulence regeneration process, which tends to decrease the wall friction, but they also generate an extra form drag which results in a total drag increase. Riblets are particular roughness elements in the sense that they are able to weaken the viscous regeneration cycle without generating additional form drag. When the riblets become too big however, the surface exhibits a fully rough behavior: the near-wall cycle is destroyed [9] and drag increases.

By impeding locally the flow with near-wall elements (such as riblets, wires or fins), Golstein and Tuan [10] have investigated the role of the induced secondary cross-flows. They have observed that damping the cross-flow fluctuations with widely spaced elements generates secondary streamwise rollers which have detrimental effect on drag.

García-Mayoral and Jiménez [11] gathered in one those previously proposed theories [8–10], identifying several regimes. At low Reynolds number based on riblet height, drag-reduction is well-characterized by the viscous protrusion height Δh. When the Reynolds number or the riblet size increases, a break-down mechanism, due to the apparition of spanwise rollers induced by Kelvin-Helmotz instabilities, cancels out the beneficial viscous effect. At even higher Reynolds number, riblets finally increase drag and can be considered as k-roughness elements. In their analysis, García-Mayoral and Jiménez have provided a scaling law for designing riblets within the appropriate regime.

The latter authors also compared direct numerical simulations (DNSs) of channel flow performed at $Re_\tau = 180$ and $Re_\tau = 550$, where Re_τ is the friction Reynolds number, based on the boundary layer thickness (or channel half-height) δ and the friction velocity $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ with ρ and τ_w the density and the wall shear stress. They established that the riblet-induced spanwise rollers, which are responsible for the drag-reducing break-down, scale in viscous units [12]. This result is consistent with the assumption that the riblet effect is limited to the viscous and buffer layers [13]. Hence, the turbulent mechanisms acting in the above layers are not supposed to be disrupted and the 'universal' laws for turbulent boundary layers—namely, the logarithmic law of the wall and the mean velocity defect law of the wake [14]—are expected to be retrieved.

Those two laws have already been extensively employed to evaluate the wall friction over riblets in experimental studies. Assuming the validity of the law of the wall, the Clauser's method consists in determining the friction coefficient leading to the best fit of the mean velocity profile with the theoretical logarithmic curve. However, the application of this method for flows over a rough wall is not straightforward because the location of the ordinate origin is not unambiguously defined. In the canonical case of a smooth surface, the wall-normal ordinate y is set to zero at the wall location. With rough surfaces, the appropriate axis origin, the previously mentioned "virtual origin", may lie somewhere between the bottom and the crest of the roughness elements. Perry and Joubert [15] attempted to overcome this problem by optimizing, not only the wall friction, but also the ordinate origin, to obtain the best fit with the logarithmic law. In practice however, this method is quite inaccurate and fails to predict correctly the friction coefficient and the "virtual origin" location [2, 16]. Similar methods have been developed based on the assumption that the canonical velocity defect profile is recovered for flow over roughness [17].

As a first approximation, the use of the virtual origin $h_{\|}$ based on a viscous Stokes flow can be adopted to set the ordinate origin of the velocity profile. The relevance of this choice relies on the validity of the assumption that the flow inside riblet valleys can be modeled as steady and viscous. This assumption is expected to be satisfied for tiny riblets within the viscous regime, and to be invalid for big riblets once passed the break-down regime.

To conclude, a reliable method is lacking for the determination of the "virtual origin". One of the main purposes of this paper is to address this issue by proposing a new virtual origin definition which is not predicated on restrictive assumptions (such as the locally steady and viscous behavior of the turbulent flow).

Besides, Fukagata, Iwamoto and Kasagi (FIK) derived an analytical decomposition of the wall skin friction [18]. In their formulation, the wall skin friction is split into several contributing terms, according to their physical underlying origins. The drag-producing mechanisms can be isolated and their intensities quantified. In particular, the impact of turbulence on skin friction can be clearly quantified and localized within the boundary layer thickness. This method has then been generalized to compressible flow [19] and to some complex wall surfaces [20]. The effect of riblets on each of the drag-contributing terms could shed more light on their drag-reducing mechanisms.

The scope of the present study is to explain the Reynolds number effect on the riblets efficiency in terms of drag reduction in a zero-pressure-gradient turbulent boundary layer (ZPGTBL).

While most of the previous numerical studies have focused on channel flows [4, 5, 10–12], only few numerical simulations of zero-pressure gradient boundary layers over riblets have been conducted for transitional flow [21, 22], supersonic flow [23] or flow over spanwise rods [24]. To the authors's knowledge, no available data exists for fully-turbulent subsonic ZPGTBL over drag-reducing riblets.

By means of Large-Eddy Simulations (LESs), extending from $Re_\theta = 550$ to $Re_\theta = 1450$ and whose methodology is presented in Section 2, the question of the streamwise evolution of the friction coefficient is addressed in Section 3. A new skin friction decomposition, applicable for arbitrary complex surfaces and consistent with the original decomposition of Fukagata et al. [18], is developed in Section 4 and applied to the present flow in Section 5. This new description is shown to implicitly yield a virtual origin, Section 6. The relevance of this origin is then demonstrated on the mean and turbulent velocity profiles in Section 7.

2 Simulation Overview

2.1 Numerical methods

Large Eddy Simulations have been conducted using the ONERA in-house flow solver FUNk. It resolves the Navier-Stokes equations for compressible flow on a multi-block structured grid with a finite volume approach. Viscous fluxes are approximated by second-order accurate centered formulas. The convective flux discretization uses a hybrid centered/upwind version of the AUSM+(P) scheme deprived of shock capturing capability and whose numerical dissipation is proportional to the local fluid velocity [25]. The time advancement is carried out with a Newton sub-iterative version of a second-order-accurate implicit Gear scheme. The subgrid viscosity is computed using the explicit selective mixed scale model [26]. The Synthetic Eddy Method (SEM) of Pamiès et al. [27] is used to generate the turbulent inflow. This method, inspired from the original SEM of Jarrin et al. [28], was modified to inject coherent vortical structures with the appropriate scaling. Thanks to this technique, identical turbulent inflows feed both the ribbed wall simulations and their associated smooth surface reference ones, allowing a rigorous comparison of the results. More details and validation test cases of the solver are provided in [29, 30].

2.2 Flow configuration

Simulations are conducted in a spatially-developing ZPGTBL. The Reynolds number based on the momentum thickness θ and the free-stream velocity U_∞ evolves from $Re_\theta = 550$ to 1450 on the reference smooth wall simulation. The corresponding friction velocity Reynolds number ranges from $Re_\tau = 240$ to $Re_\tau = 500$.

The simulation Mach number is set to 0.2. With this condition, density and viscosity fluctuations are found to be negligible (e.g., the maximum instantaneous deviation from the mean density remains below 0.5 %). All along the rest of this study, the flow is thus considered as incompressible, with density ρ and kinematic viscosity $\nu = \mu/\rho$.

The flow streamwise direction, the wall normal direction and the spanwise direction are indifferently denoted by (x, y, z) and $(x_i)_{i\in\{1,2,3\}}$. Similarly, (u, v, w) and $(u_i)_{i\in\{1,2,3\}}$ stand for the corresponding components of the velocity vector $\mathbf{u}$.

2.3 Riblet geometry

Under the constraint of realizable grooves, the most efficient riblets tested so far are the trapezoidal ones studied by Bechert et al. [3] and whose geometry is similar to the one pictured in Fig. 1. The height-over-width ratio is fixed to $h_{rib}/s_{rib} = 0.5$ and the tip angle is set to 30°. This design has been shown to achieve up to 8.2 % drag reduction and an industrial manufacturing process has already been developed [31].

Regarding the sizing of the groove, García-Mayoral and Jiménez [11] have provided a simplified stability model aiming at estimating the optimal riblet dimension for a given geometry. The scaling is based on the groove cross-section A_g, illustrated in Fig. 7e. Best performances are to be reached for $l^+_{g,opt} = (A^+_g)^{1/2} = 10.7 \pm 1.0$, where the superscript $+$ denotes quantities which are normalized with the inner (or viscous) scaling, that is, using ν and the local friction velocity u_τ. The way u_τ is computed in practice, especially over the riblet surface, will be explained in Section 2.5. For the present riblet design, setting l_g to its optimal value involves a riblet height h^+_{rib} of 8.1 ± 0.8 wall units.

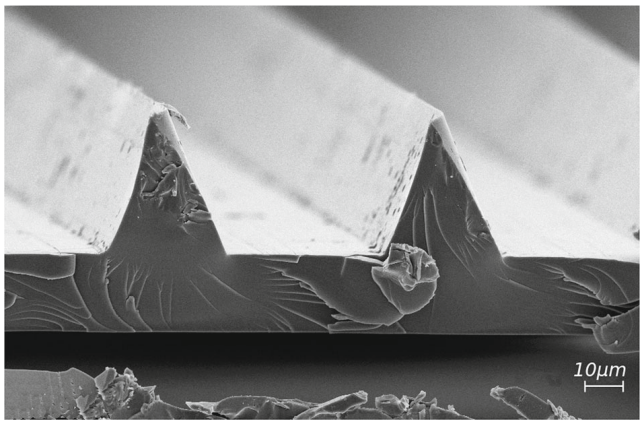


Fig. 1 Scanning electron image of a riblet-structured coating surface (from © Fraunhofer IFAM)

For present simulations, the riblet height is kept constant in physical units. However, in a spatially developing turbulent boundary layer, the friction velocity u_τ decreases with x. Using the inner-scaling, the riblet height decreases from 8.1 to 7.5 wall units along the computed ribbed domain. Because the sizing remains within the range of optimal dimension according to García-Mayoral & Jiménez's theory, the performance of the riblets are not supposed to deviate significantly from their optimum.

The bottom wall of the computational domain is not entirely covered by riblets. Smooth surfaces are placed up- and down-stream of a controlled zone. This allows the observation of transient effects at the riblet leading and trailing edges, although the present paper is mainly focusing on the established zone. Riblets pop out of a smooth wall 10 initial boundary layer thickness δ_0 downstream of the computational domain inlet. At this location, the Reynolds number over the smooth plate is $Re_\theta = 640$. The ribbed zone extends over $80\,\delta_0$ and is followed by another $10\,\delta_0$-long smooth surface. A final buffer zone in which the grid is progressively stretched insures a proper non-reflective outflow boundary condition.

The shape of the groove leading and trailing edges, as well as the relative vertical location of riblets with respect to the smooth surface, may have a local influence. The two topologies used for the present study are described below and displayed in Fig. 2, but an extensive study of their ins and outs is beyond the scope of the present study. Simulations are conducted, for

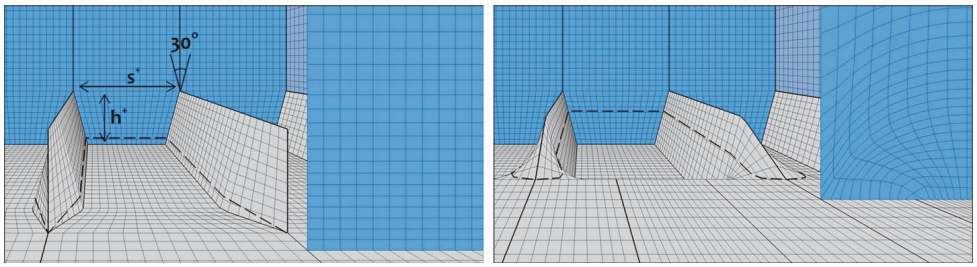


Fig. 2 Riblets geometry and mesh representation for the two topologies tested. (*left*) First topology; (*right*) Second topology. *Thick lines* denote the block delimitation and the *dashed line* helps visualizing the initial smooth plate vertical level

each of the two topologies, over both the ribbed configuration and the associated reference smooth wall.

Both configurations share the same previously described design of trapezoidal riblets.

For the first configuration (Fig. 2, *left*), the ribbed-versus-smooth surface relative vertical location is set so as to cancel, or at least to restrict, the net pressure force acting at riblet extremities (see corresponding set-up in Fig. 7b). Taking advantage of the multi-block ability of the structured-grid solver, the Cartesian mesh on the initial smooth wall is only slightly deformed to mesh the riblets. The sharp leading and trailing edges are geometric discontinuities which are expected to generate flow field discontinuities.

To avoid such geometric singularities, a quaternion-based method [32] has been used to continuously deform the mesh while preserving its orthogonality. The mesh above the riblets remains unchanged. It is continuously deformed at riblet emergences and the warped grid extends above the whole flat plate surfaces (Fig. 2, *right*). For this second configuration, the riblet-versus-smooth wall vertical location is set in agreement with viscous considerations, using the Stokes virtual origin $h_{\parallel}$ (defined earlier and displayed in Fig. 7c).

2.4 Spacial and temporal discretization

The tiny size of the riblets strongly constrains the mesh cell dimensions. In order to accurately reproduce the riblet shape, Δy^+ and Δz^+ are maintained below 1 close to the wall: 16 cells are used to discretized the gap s^+ between two riblets and 10 cells for the valley-to-tip height h^+. Away from the wall, Δy is progressively stretched but Δz remains unchanged. The accuracy of the computed skin friction is predominantly influenced by the spanwise refinement direction [33] which, in present simulations, is way beyond state-of-the-art DNS baselines (see Table 1).

Only the longitudinal resolution $\Delta x^+ \approx 21$ does not reach DNS standards. Even though common LES requirements are largely overachieved, a subgrid-scale model has been used to account for the possible uncaught turbulent activity. The computation a posteriori of the subgrid activity (defined as the proportion of turbulent kinetic energy dissipation due to subgrid turbulent viscosity) reveals that, anywhere across the boundary layer, at least 99 % of the dissipation is directly resolved. Within the riblet vicinity, the subgrid activity hardly reached 0.4 % at the crests. Since the turbulent dissipation is almost fully resolved, the present simulations can be considered as "quasi-DNSs".

The size of the computational domain is $100\delta_0 \times 10\delta_0 \times 5.75\delta_0$, where δ_0 denotes the inflow boundary layer thickness. The computational domain is spanned by 72 riblets and amounts to $937 \times 172 \times 1152$ cells, with a minimum of 85 cells within the boundary layer. Two-point correlations have been computed to ensure the domain is wide enough.

The time advancement is carried out with 6 to 30 local sub-iterations to converge the Newton sub-iterative process of the implicit scheme. The time step Δt^+ is lower than 0.07,

Table 1 Mesh cell characteristic dimensions at the wall for the present simulation and standard LESs and DNSs

	Δx^+	Δy^+_{wall}	Δz^+	Δt^+
LES guideline	30 → 60	0.3 → 1	12 → 25	
Present LES	20 → 22	0.75 → 0.8	**0.7 → 1.1**	**0.07**
DNS guideline	6 → 12	0.3 → 1	3 → 6	0.1 → 0.4

which is extremely low with respect to the viscous units [34]. That is imposed by the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition of the compressible Navier-Stokes equations which are actually solved. In the present case, $CFL = \frac{(\|u\|+c)\Delta t}{\Delta x_{i,min}} < 11$, where c is the sound speed and $\Delta x_{i,min}$ the local minimal cell dimension. The use of such a constraining compressible solver is justified by the will to eventually increase the Mach number and obtain flow conditions more representative of aeronautical applications.

Once a statistically stationary flow is obtained, the simulations for the two topologies are run and averaged on a duration of 544 and $1088\,\delta_0/U_\infty$ respectively. In addition to the temporal averaging, the statistical sample is enhanced by averaging in the spanwise direction.

2.5 Averaging methodology

Over the riblets, the spanwise direction z is periodic, but not homogeneous. The spatial averaging in this direction, denoted $\langle\cdot\rangle$, must be carefully conducted along with the classical temporal averaging $\overline{(\cdot)}$. The double-averaging procedure [35] that has been adopted consists in splitting the flow into a space-time average, a spatial disturbance of the temporal average and a turbulent fluctuation: $u = \langle\overline{u}\rangle(x, y) + \tilde{u}(x, y, z) + u'(x, y, z, t)$, where $u' = u - \overline{u}$ and $\tilde{u} = \overline{u} - \langle\overline{u}\rangle$.

Root-mean-squared values $u_{rms} = \langle\overline{u'u'}\rangle^{1/2}$ ordinarily characterize the turbulent fluctuation intensities. An analogous quantity is defined for the spatial disturbance counterpart $u_{\widetilde{rms}} = \langle\tilde{u}\tilde{u}\rangle^{1/2}$. The averaged kinetic energy is totally accounted for using those definitions: $2E_c = \langle\overline{u}\overline{u}\rangle = \langle\overline{u}\rangle^2 + u^2_{\widetilde{rms}} + u^2_{rms}$.

In the present simulations of flow over riblets, the spatial disturbance intensities $\langle\tilde{u}_i\tilde{u}_j\rangle^{1/2}$, apart from the streamwise component $u_{\widetilde{rms}} = \langle\tilde{u}_1\tilde{u}_1\rangle^{1/2}$, are found to be negligible. As for $u_{\widetilde{rms}}$, it sharply decreases from its maximum value (almost u_τ at the riblet crest level) and can be considered negligible from 15 viscous lengths above the crests. For the sake of clarity, curves for the spatial disturbance intensity will not be added to the graphs as they do not help to highlight any of the flow features discussed in the present paper.

The temporal averaging is classically defined by $\overline{u} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} u\,\mathrm{d}t$. Regarding the averaging in the z direction, field variables (which are defined on the fluid domain Ω, such as u) and surface variables (which are defined on the wall boundary $\partial\Omega_{wall}$, such as τ_w) must be treated separately. For field variables, the operator $\langle\cdot\rangle$ is defined by:

$$\langle\overline{u}\rangle(x, y) = \frac{1}{L_{z,\mathrm{eff}}(x, y)}\int_{\{z|(x,y,z)\in\Omega\}} \overline{u}(x, y, z)\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

where $L_{z,\mathrm{eff}}(x, z) = \int_{\{z|(x,y,z)\in\Omega\}}\mathrm{d}z$ represents the effective immersed span, so $\langle\overline{u}\rangle(x, y)$ returns the mean velocity of the fluid (inside the domain) at given x and y. For surface variables, $\langle\cdot\rangle$ is defined by:

$$\langle\overline{\tau}_w\rangle(x) = \frac{1}{L_{z,\mathrm{nom}}(x)}\int_{\{z|(x,z)\in\partial\Omega_{wall}\}} \overline{\tau}_w(x, z)\,\mathrm{d}l(z) \tag{2}$$

where $L_{z,\mathrm{nom}}(x) = \max(z \in \partial\Omega_{wall}(x)) - \min(z \in \partial\Omega_{wall}(x))$ is the nominal span. In the present case, it is constant and equals the domain width L_z. With this definition, the drag force $F_x(x) = L_z \cdot \langle\overline{\tau}_w\rangle(x)$ acting on the surface along the wetted line $\partial\Omega_{wall}(x)$ is proportional to the averaged shear stress with the same proportionality coefficient L_z for both the flat and ribbed plates.

Note that the instantaneous local wall friction $\tau_w(x, z, t)$ is directly obtained from the numerical finite-volume fluxes through the facet of wall-sided mesh-cells. The skin friction coefficient $c_f(x) = \langle\overline{\tau}_w\rangle / \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ and the friction velocity $u_\tau(x) = \sqrt{\langle\overline{\tau}_w\rangle/\rho}$ are computed, for the flat plate and for the ribbed plate simulations, using their own averaged skin frictions.

2.6 Validation of the numerical method

Figure 3 shows the mean velocity profile and the second-order velocity fluctuation statistics over the smooth surface at $Re_\theta = 1000$.

Reference DNS profiles by Wu and Moin [36] and Schlatter and Örlü [37] at nearly the same Reynolds number are also shown. In the near-wall region, the mean velocity profile for all the data-sets collapse on the linear relation $u^+ = y^+$. Further away from the wall, the classical logarithmic law of the wall [14], described by: $u^+ = (1/\kappa)\log(y^+) + B$, is recovered with the Von Kármán coefficient κ equal to 0.41 and B to 5.2. For every profiles, the agreement between the DNS data and the present LES simulation is very good throughout the boundary layer extent, which validates the employed CFD method.

The streamwise evolution of the skin friction coefficient c_f is displayed in Fig. 4. A reference flat plate simulation has been conducted with each of the two mesh topologies displayed in Fig. 2. The skin friction coefficients obtained with the conventional Cartesian mesh (first topology) and with the largely deformed mesh (second topology) are almost identical and between the correlations given by Smits et al. [38] ($c_f = 0.024 Re_\theta^{-1/4}$) and by Nagib et al. [39] ($c_f = 2(\ln(Re_\theta)/0.384 + 4.127)^{-2}$). The DNS data from Schlatter and Örlü [37] provides an additional validation agreement. This result demonstrates the ability of the method for computing an accurate skin friction, even with a mesh far from being Cartesian at the wall.

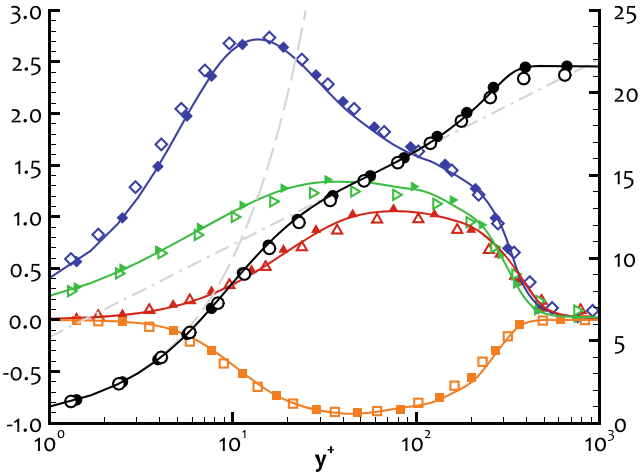


Fig. 3 Velocity profiles scaled in wall units over a smooth flat plate. *Right axis*: $\langle\overline{u}\rangle^+$ (◯); *Left axis*: u^+_{rms} (◇), v^+_{rms} (△), w^+_{rms} (▷), $\langle\overline{u'v'}\rangle^+$ (□). Present LES ($Re_\theta = 1000$, *solid line*); DNS, Wu and Moin [36] ($Re_\theta = 900$, *open symbols*); DNS, Schlatter and Örlü [37] ($Re_\theta = 1000$, *filled symbols*); Viscous sublayer using $u^+ = y^+$ (*long-dashed line*); Logarithmic region using $u^+ = (1/\kappa)\log(y^+) + B$ with $\kappa = 0.41$ and $B = 5.2$ (*dash-dotted line*)

3 Reduction of the Wall Friction

The streamwise evolution of the skin friction, over both the smooth and ribbed plates, is shown in Fig. 4. The two configurations (displayed in Fig. 2) differ geometrically only at riblet leading and trailing edges and the impact on the skin friction is only felt in their vicinity: after a transient area, the two curves almost overlap. The geometric discontinuity of the first configuration leads to a brutal discontinuity in c_f. This sudden peak of the friction has been greatly reduced with the continuous riblet edge design of the second geometry. The establishment length of the drag reduction strongly depends on the geometry. On the two tested configurations, it takes approximately 1δ and 7δ respectively to reach 90 % of the established friction reduction rate.

Further study of the transient phenomenon are left aside. The remainder of this article focuses exclusively on the established part ranging from $Re_\theta = 690$ to $Re_\theta = 1300$ (correspondingly, $Re_\tau = 250$ to $Re_\tau = 450$). Within this part, the two mesh topologies lead to the same results. Thus, data from the second topology are retained in the following since the simulation was conducted on a longer period.

The drag reduction achieved by the riblets is defined as $DR = 1 - c_f^{riblet}/c_f^{smooth}$. Its value will depend on the way the reference and ribbed cases are compared: at a given x, Re_δ, Re_θ or Re_τ. Indeed, those four quantities do not evolve the same way on the two walls.

Due to the c_f reduction, the longitudinal growth of the three Reynolds numbers is slower over the riblets, as shown in Fig. 5. The drag reduction $DR(x)$ implies the comparison between the friction of the controlled flow with the one of a reference flow at the same physical plate location x, but at higher Re_δ, Re_θ and Re_τ. This approach is coherent for most of practical applications, for which the aim is to reduce drag on a given surface, whose

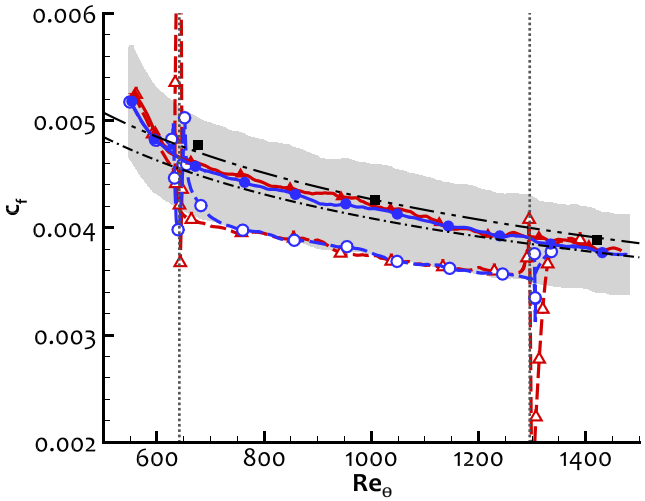


Fig. 4 Streamwise evolution of the skin friction coefficient c_f as a function of Re_θ: Present LES, smooth wall (*solid lines*, *filled symbols*), ribbed wall (*dashed lines*, *opened symbols*); Correlations by Smits et al. [38] ($c_f = 0.024\ Re_\theta^{-1/4}$, *dash-double-dotted line*) and by Nagib et al. [39] ($c_f = 2(\ln(Re_\theta)/0.384 + 4.127)^{-2}$, *dash-dotted line*); DNS of Schlatter and Örlü [37] (■). Symbols △ and ◯ denote respectively the first and the second mesh topologies (as displayed in Fig. 2). The grey area represents a ±10 % variation with respect to the smooth wall friction. The *vertical dotted lines* indicate the bounds of the ribbed zone

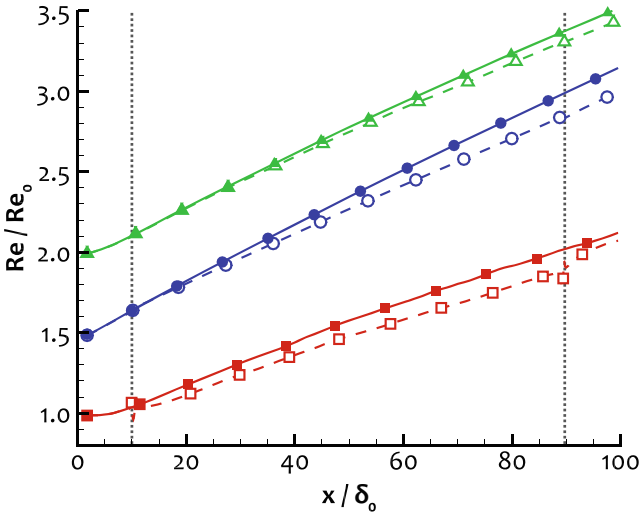


Fig. 5 Streamwise evolution of Reynolds numbers, normalized by the smooth case initial value, as a function of x/δ_0. Some profiles have been shifted upward for clarity sake: $Re_\tau/Re_{\tau,0}$ (□), $Re_\theta/Re_{\theta,0}$ shifted by 0.5 (◯), $Re_\delta/Re_{\delta,0}$ shifted by 1.0 (△). The smooth wall initial values, used for the different Reynolds numbers normalization, are respectively 240, 558 and 4680. Present LES, smooth wall (*solid lines*, *filled symbols*), ribbed wall (*dashed lines*, *opened symbols*). Only the second riblet configuration (displayed in Fig. 2) is shown. The *vertical dotted lines* indicate the bounds of the ribbed zone

length is fixed independently of the actual boundary layer growth. However, other type of comparison may be more appropriate for a physical comprehension purpose.

Similar considerations arise for channel flows. The teams of Ricco and Hasegawa addressed it. While most of the numerical channel flow simulations are done at constant mass flow rate (implying a comparison at constant bulk Reynolds number Re_b), Ricco et al. [40] model the flow in a channel under constant pressure gradient (leading to a constant friction Reynolds number Re_τ) and Hasegawa et al. [41] established an alternative constant power input condition.

Which parameter is it meaningful to kept constant in order to compare particular quantities between a reference and a perturbed flow? Such a choice will have to be made and justified, in the following sections, to compare each quantities from the riblet and smooth wall flows.

The evolution of the drag reduction with respect to each one of the previously listed parameters is given below.

Along the ribbed domain, the drag reduction rates at given x or Re_δ, written $DR(x)$ and $DR(Re_\delta)$, are significantly decreasing (not shown). When Re_δ increases from 5900 to 10500, $DR(Re_\delta)$ goes down from approximately 11.5 % to 8.3 % and $DR(x)$ decreases from 11.3 % to 7.5 %. This result is not inconsistent with Bechert et al.'s 8.2 % drag reduction, resulting from the global drag on their rectangular shear-stress balance [3]. Further comparison is not possible as Bechert et al. have conducted fully established turbulent channel flow experiments, which cannot be directly assimilated with the present spatially developing boundary layer.

The drag reduction with respect to Re_θ (whose corresponding c_f is shown in Fig. 4) and the drag reduction with respect to Re_τ (c_f in Fig. 6) are both approximately conserved

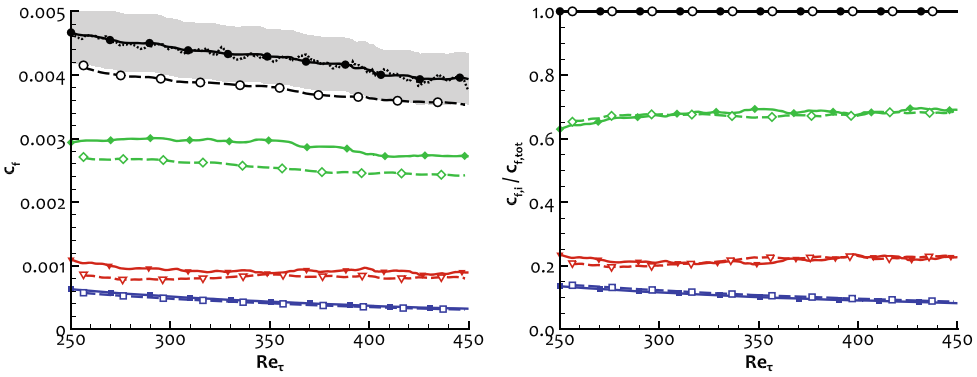


Fig. 6 Streamwise evolution of (*left*) the skin friction coefficient c_f and its FIK decomposition terms $c_{f,i}$ and (*right*) the relative FIK terms $c_{f,i}/c_f$, as a function of Re_τ. Smooth wall (*solid lines*, *filled symbols*), ribbed wall (*dashed lines*, *opened symbols*). c_f (◯); $c_{f,1}$ (□); $c_{f,2}$ (◊); $c_{f,3}$ (▽). The *grey area* represents a ±10 % variation with respect to the smooth wall friction. The c_f obtained from Eq. 10 with $c_{f,3}$ computed directly by its definition (13) is shown for the smooth wall case (*dotted line*). For riblet data, only the established drag-reducing zone is taken into consideration

along the domain extent. Their respective values remain around 10 % and 11 % respectively. A longer computational domain would be necessary to determine accurately whether or not the drag reduction remains constant when the comparison is done with respect to one of those two Reynolds numbers. García-Mayoral and Jiménez [12] have already predicted a weak dependence of c_f with Re_τ, invoking that the riblet influence is restricted to the buffer layer.

The reason for the depreciation of $DR(x)$ with x can be attributed to a boundary layer thickening effect. Yet, by reducing the wall friction, riblets slow down the boundary layer development (in a zero-pressure-gradient flow, $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = \sqrt{c_f/2}$), which has a counter-productive effect. Indeed, when the boundary layer thickens, the friction coefficient c_f decreases. For the flow over riblets, this drop is thus slowed down, which restricts the effective drag reduction of riblets at a given x location. That counterproductive effect is however supposed to be less important for higher Reynolds number flow, since the decreasing rate of c_f with x is getting lower.

As already mentioned in Section 2.3, the riblet height in inner scale h^+_{rib} decreases with the wall shear stress from 8.1 to 7.5 wall units. Although this change is moderate and remains within the range of optimal riblet sizing, note that a possible Reynolds number effect can be induced to the drag reduction by this mean [42].

4 A New Skin Friction Decomposition for Complex Surfaces

We propose here a variant expression for the FIK identity (see Section 1). The aim is to extend the applicability of the original decomposition [18] to arbitrary complex surfaces (including riblets). This contribution has been inspired by the work of Peet and Sagaut [20]. However, the new formulation coincides with the original FIK decomposition when applied to a canonical smooth wall, which is not the case with the formulation of Peet and Sagaut.[1]

[1]The formulation from Peet and Sagaut [20] cannot be compared term-by-term with the original FIK formulation [18] because of the subtraction of the spanwise-average values they performed (leading to the

Furthermore, with the formulation presented here, very few constraints are imposed on the flow and on the wall surface: the incompressible flow must be periodic (or homogeneous) in the spanwise direction and the no-slip wall surface is required to obey $y_{wall}(x,z) = \min(y \mid (x,y,z) \in \Omega)$, which only prevents surfaces from forming overhangs.

Derivation of the new skin friction decomposition for complex wall surfaces The evolution equation for the mean streamwise momentum of an incompressible flow is:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}_i \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial \overline{u' u'_i}}{\partial x_i}, \tag{3}$$

where Einstein summation convention is used.

Under the implicit hypothesis of ergodicity, the time derivative of the averaged velocity is equal to zero. Gathering terms differently, one can obtain:

$$0 = \left(\overline{I_x} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x}\right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right) \tag{4}$$

$$\text{where :} \qquad \overline{I_x} = \overline{u}_i \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} \tag{5}$$

Following Fukagata et al.'s method [18], a triple integration is performed on Eq. 4. Because the riblet geometry is not homogeneous in the spanwise direction, the inner integration is performed over the two-dimensional transverse cross sections $\Sigma(x)$, similarly to what has been done by Peet and Sagaut [20]: the integration domain of the inner integral is normal to the streamwise direction $\mathbf{e}_x$ and delimited by the wall $\partial\Omega_{wall}$ and by an arbitrary upper limit $y_{top}(x)$, which is not necessarily the boundary layer upper limit.

Note that for any function $\bullet$, without constraints on the boundary conditions, the triple integration is equivalent to:

$$\int_{y_a=y_{wall}}^{y_{top}} \int_{y_b=y_{wall}}^{y_a} \iint_{\Sigma(x|y<y_b)} \bullet \; \mathrm{d}\Sigma \, \mathrm{d}y_b \, \mathrm{d}y_a = \iint_{\Sigma(x)} \frac{1}{2}(y_{top} - y)^2 \quad \bullet \quad \mathrm{d}\Sigma. \tag{6}$$

A first integration by parts has been applied to the most external integral to get rid of the middle one. The same process is applied once again to obtain the final expression.

The FIK identity is obtained by applying this triple integration to Eq. 4. Thus, the decomposition can be seen as a weighted integration of the Navier-Stokes equation.

In the original FIK formulation, y_{top} is set to δ, which implies integrating the Navier-Stokes equation with the weighting function $(\delta - y)^2/2$. However, this is not the only possibility. Indeed, for practical experimental reasons, Mehdi et al. [43] have derived a

appearance of double-primed terms ($\bullet''$) in step II-D of [20]). This additional step fundamentally modifies the physical meaning of the third term $c_{f,3}$ and thus redistributes the skin friction differently over all the three contribution terms $c_{f,i}$.

variant decomposition in which the integral upper limit y_{top} can be set arbitrarily. They are thus implicitly integrating the Navier-Stokes equation up to y_{top} with a weight equal to $(y_{top}-y)^2/2$. Performing a quadruple integration instead of a triple one would give another FIK identity variant. In this case, the weighting function $(y_{top}-y)^{3/6}$, would give more importance to the wall vicinity.

Actually, any choice of weighting function would lead to a variant formulation, as long as it is differentiable and non-zero at the wall (additional simplifications would occur for a function twice differentiable and equal to zero at the top as its first derivative).

Nonetheless, the initial choice made by Fukagata et al. to perform a triple integration over the whole boundary layer thickness leads to a decomposition which conveys a surprisingly clear physical meaning. For instance, in the case of a turbulent channel flow, their decomposition yields a so-called "laminar" term, equal to the friction coefficient of the corresponding laminar flow, while the additional drag due to the turbulent nature of the flow appears in the "turbulent" term. The original choice of a triple integration performed up to the boundary layer upper limit is thus retained for the present analysis. The notation y_{top} is nevertheless conserved to keep the formulation general.

Taking benefits of the periodicity in the spanwise direction and of the no-slip condition at the wall, the following relation can be obtained:

$$\begin{aligned} 0 = & \iint_{\Sigma(x)} \frac{(y_{top}-y)^2}{2}\left(\overline{I_x}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}\right) \mathrm{d}\Sigma \\ & -\nu \iint_{\Sigma(x)} \overline{u}\,\mathrm{d}\Sigma + \frac{y_{top}^2}{2}\,\alpha(x)\,F_x(x) \\ & + \iint_{\Sigma(x)} (y_{top}-y)\,\overline{u'v'}\,\mathrm{d}\Sigma, \end{aligned} \tag{7}$$

where the wall stress $F_x(x) = L_z \cdot \langle \overline{\tau}_w \rangle(x)$ and the normalization coefficient for complex surface $\alpha(x)$ are given by:

$$F_x(x) = \int_{\partial\Sigma_{wall}(x)} \mathbf{e}_x \cdot \nu \nabla \overline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}(x,l)\ \mathrm{d}l = \int \mathrm{d}F_x \tag{8}$$

$$\alpha(x) = \int_{\partial\Sigma_{wall}(x)} \left(1-\frac{y_{wall}(x,l)}{y_{top}}\right)^2 \sqrt{1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x)^2}\,\frac{\mathrm{d}F_x}{F_x} \tag{9}$$

The integration curve, $\partial\Sigma_{wall}(x)$, stands for the wall part in the close contour $\partial\Sigma$ of the integration surface Σ. Note that the unit vector $\mathbf{n}(x,z)$, normal to the wall and pointing toward the fluid, does not necessarily lie in the x-normal plane Σ.

After normalization by the free-stream velocity U_∞ and the width L_z of the cross-section Σ, a generalization of the FIK decomposition is obtained for an arbitrary complex wall. Using the same notation as Deck et al. [44], we obtain a decomposition of the wall skin friction coefficient into three terms, respectively called "laminar", "turbulent" and "spatial heterogeneity" contributions:

$$c_f = c_{f,1} + c_{f,2} + c_{f,3} \tag{10}$$

with:

$$c_{f,1} = \frac{4\,\delta^2}{\alpha\; y_{top}^2}\frac{1}{Re_\delta}\iint_\Sigma \frac{\overline{u}}{U_\infty}\,\frac{\mathrm{d}\Sigma}{L_z\;\delta}$$

$$= \frac{4\,\delta^2}{\alpha\; y_{top}^2}\frac{\frac{1}{2}c_f}{Re_\tau}\iint_{\Sigma^+} \overline{u}^+\,\frac{\mathrm{d}\Sigma^+}{L_z^+\;\delta^+} \tag{11}$$

$$c_{f,2} = \frac{4\,\delta^2}{\alpha\; y_{top}^2}\iint_\Sigma \left(\frac{y_{top}-y}{\delta}\right)\frac{-\overline{u'v'}}{U_\infty^2}\,\frac{\mathrm{d}\Sigma}{L_z\;\delta}$$

$$= \frac{4\,\delta^2}{\alpha\; y_{top}^2}\frac{\frac{1}{2}c_f}{Re_\tau}\iint_{\Sigma^+} \left(y_{top}^+ - y^+\right)\left(-\overline{u'v'}^+\right)\,\frac{\mathrm{d}\Sigma^+}{L_z^+\;\delta^+} \tag{12}$$

$$c_{f,3} = \frac{-4\,\delta^2}{\alpha\; y_{top}^2}\iint_\Sigma \frac{1}{2}\left(\frac{y_{top}-y}{\delta}\right)^2\frac{\delta}{U_\infty^2}\left(\overline{I_x}+\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}\right)\,\frac{\mathrm{d}\Sigma}{L_z\;\delta}$$

$$= \frac{-4\,\delta^2}{\alpha\; y_{top}^2}\frac{\frac{1}{2}c_f}{Re_\tau}\iint_{\Sigma^+} \frac{1}{2}\left(y_{top}^+ - y^+\right)^2\left(\overline{I_x}^+ + \left(\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}\right)^+\right)\,\frac{\mathrm{d}\Sigma^+}{L_z^+\;\delta^+} \tag{13}$$

The different terms are each time given in outer and inner scalings.

In the canonical case of a flat surface located at $y_{wall} = 0$, the wall normal vector $\mathbf{n}$ is orthogonal to the streamwise direction $\mathbf{e}_x$. In this case, according to Eq. 9, the complex wall normalization coefficient α equals 1 and the formula given by Mehdi et al. [43] for an arbitrary integration upper limit y_{top} is recovered. Additionally, if the integration is performed over the boundary layer extent, that is setting $y_{top} = \delta$, the original FIK decomposition [18] is obtained.

In the general case of a complex wall, the coefficient α is not necessarily equal to 1. Two geometric wall characteristics can alter its value. First, the non-homogeneity of a surface in the streamwise direction modifies α through $\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x$. In the case of straight riblets, aligned in the flow, the scalar product $\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x$ is zero except at the riblet up- and down-stream extremities. Secondly, α is influenced by the distribution of the wall skin friction with respect to the vertical coordinate, which can be seen in the integrand of Eq. 9 through the weighting of the relative local friction $\mathrm{d}F_x/F_x$ by y_{wall}. Whether the riblet tips or valleys generate a more or less important contribution to the total friction modifies the value of α.[2]

Note that no assumption was made on the location of the vertical origin. Thus, any arbitrary physical location can be defined as axis origin. For example, one can apply the present decomposition to the flow over a flat smooth wall located at a constant non-zero y_{wall}.

In fact, the choice of the ordinate origin has no impact on the values of the decomposition terms $c_{f,i}$. Indeed, neither the ordinate difference $(y_{top}-y)$ and the boundary layer thickness δ nor the product $\alpha\; y_{top}^2$ depend on the choice of the vertical origin—whereas, both α and y_{top}, when considered separately, do depend on the origin location.

In this respect, note that, y_{top} is an ordinate. It is thus dependent on the choice of the ordinate origin, while the boundary layer thickness $\delta = y_{0.99U_\infty} - y_{wall}$ is not. Accordingly, to integrate over the whole boundary layer extent, the upper limit y_{top} must be set to $y_{wall} + \delta$.

[2] Although, the two formulae cannot be compared term-by-term (see footnote 1), the coefficient $\mathcal{A}$ in the decomposition of Peet and Sagaut [20] plays a role closely similar to the present coefficient α. The allowable surfaces in Peet and Sagaut's formulation are the ones for which $\mathbf{n}(x,z)\cdot\mathbf{e}_x$ is constant along $\partial\Sigma_{wall}(x)$.

Flow Turbulence Combust (2015) 95:351–376 365

5 Analysis of the Riblet Effects Through a Friction Decomposition

The skin friction decomposition (10) can be applied to the flows computed over both the smooth and ribbed walls.

A trick similar to the one by Mehdi and White [45] has been used to get rid of the convergence problem of $c_{f,3}$ when computed according to definition (13). It consists in computing $c_{f,3}$ as the difference $c_f - (c_{f,1} + c_{f,2})$ instead and using another formulation to obtain c_f. In their case, c_f was computed by integrating the total shear stress across the boundary layer. For the present finite-volume numerical simulations, c_f is directly obtained using the computational fluxes at the wall. As shown in Fig. 6, the total friction c_f obtained from the direct calculation of $c_{f,3}$ by Eq. 13 gives a noisy curve superimposed on the one obtained using computational fluxes.

The "laminar" term $c_{f,1}(Re_\delta)$ (not shown here) is not affected by the presence of riblets. $c_{f,1}$ is proportional to the integral of $\overline{u}/U_\infty$ across the boundary layer (see Eq. 11). It can be concluded that the riblets do not significantly change the flow rate within the boundary layer thickness. Considering the mean velocity profile in outer scaling will supplement this observation (Section 7.1).

The turbulent term $c_{f,2}$, which is related to the Reynolds shear stress $\langle\overline{u'v'}\rangle$, undergoes a massive reduction (Fig. 6, *left*). It confirms that riblets perturb the turbulence regeneration cycle [46]. However, over the whole controlled domain, its relative contribution to the total friction $c_{f,2}/c_f$ (Fig. 6, *right*) remains almost equal to that of the smooth wall at the same Re_τ. According to its definition (12), this implies that the weighted integral of $\overline{u'v'}^+$ across the boundary layer is approximately conserved. This suggests that the inner-scaled intensity of the Reynolds shear stress is not massively affected by the riblets. The analysis of turbulence intensity profiles in Section 7.2 will help to confirm this assumption.

The last term $c_{f,3}$ of the decomposition is related to the streamwise heterogeneity of the flow, that is the boundary layer growth and the eventual pressure gradient. This term is the one that suffers from the geometric discontinuities, impacting c_f at the beginning and the end of the riblets (see Fig. 4). Deck et al. [44] found that the relative contribution $c_{f,3}/c_f$ equals 20 % for flat plate laminar Blasius flow as for high Reynolds number ZPGTBLs with Re_θ ranging from 4000 to 13000. This property is not only recovered here over the smooth plate for Re_θ ranging from 550 to 1450, but it is furthermore found to be satisfied for the flow over the riblets. Hence, the presence of riblets does not lead to a fundamental change in the boundary layer spatial development.

6 An Appropriate Virtual Origin Based on the Friction Decomposition

6.1 Virtual origin definition

Prior to examining the velocity profiles, the matter of the relative location of the vertical axis between the riblets and the smooth wall has to be addressed. Above the smooth surface, the ordinate origin, $y = 0$, is unambiguously set at the wall location. Above the riblets, its location has to be specified. It is referred to as the "virtual origin". This notion, already broached in Section 1, is defined by Bechert et al. [47] as the particular elevation where the boundary layer 'sees' an equivalent wall.

The virtual origin will be located by its distance $h_{y=0}$ from the riblet valley (see Figs. 7 and 8). Its value is likely to lie between 0 and h_{rib}. With such a

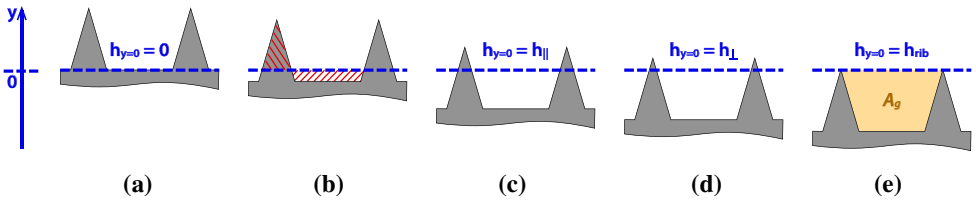


Fig. 7 Noticeable possibilities of riblet virtual origin. From *left to right*: origin at riblet valley level; cross-sectional area preserving origin; origin based on the longitudinal Stokes flow; origin based on the transverse Stokes flow; origin at riblet tip level. The virtual origin location is characterized by the length $h_{y=0}$ from the riblet valley. The *yellow-shaded area* illustrates the groove cross-sectional area A_g

vertical axis reference, the ordinates of the riblet valley and tip are respectively: $y_{valley} = -h_{y=0}$ and $y_{tip} = h_{rib} - h_{y=0}$.

Riblets can be set, for instance, such as the virtual origin is located at the valley or at the tip levels, corresponding respectively to $h_{y=0} = 0$ and $h_{y=0} = h_{rib}$. These two set-ups are displayed in Fig. 7a and e. In most experimental studies, the virtual origin is set at the valley, at the tip or at the midpoint between them [5]. In their respective DNSs, Chu and Karniadakis [4] and Duan and Choudhari [23] also made the choice of setting the riblet valley at the smooth plate level.

Alternatively, the decision can be made to conserve the same cross-sectional area (Fig. 7b). For channel flows, it may be useful for preserving a constant cross-section. In the case of transitions between flat wall and riblets, it cancels out, or at least restricts, the net pressure force acting at the leading and trailing edges of the grooves. This choice of origin has been used in the channel flow simulations of Peet et al. [48]. With the present riblet design, it leads to $h_{y=0} = \frac{h^2}{s} \tan(\frac{30°}{2}) \approx 0.13\, h_{rib}$.

The above mentioned origin choices are purely geometric. They do not take into account any property of the actual flow. Thus, they are not likely to properly define that "particular elevation where the boundary layer 'sees' an equivalent wall".

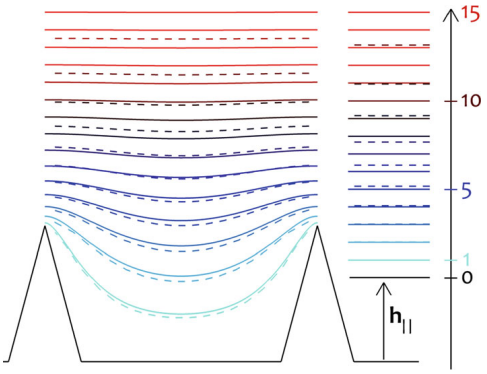


Fig. 8 Transverse view of mean streamwise velocity $\overline{u}^+(y^+, z^+)$ iso-contours, scaled in viscous units, over riblets (*main figure*) and over the flat plate (*right insert*): LES turbulent flow at $Re_\theta = 1000$ (*dashed lines*); Stokes flow (*solid lines*). Iso-values are every unit u_τ, starting from u_τ. The vertical location of the riblets with respect to the smooth wall is set such that both Stokes flows tend toward the same asymptote $u^+ = y^+$. This vertical origin is located $h_\parallel$ above the riblet valley

Some authors made use of the mean velocity profile to set their virtual origin. With a modified Clauser's method, explained in Section 1, they tried to determine the virtual origin that gives the best fit with the theoretical law of the wall [14]. Those methods have been widely used in experimental studies [2]. However, a wide logarithmic region is required for an accurate estimation, and, even though, the method is not sensitive enough since a small shift of the ordinates does not lead to a visible impact on a logarithmic plot for high values of y. Same comments apply to the method consisting in matching the velocity defect profile. These remarks will be later illustrated in Fig. 10, on which two different choices of virtual origin do not lead to a significant change of the logarithmic and defect laws.

Choi et al. [5] set the virtual origin using the turbulence intensity rather than the mean velocity. The location of the maximum streamwise velocity fluctuation intensity over a canonical flat plate occurs at a known ordinate. Choi et al. defined the virtual origin over riblets in order to recover this maximum intensity location. As will be shown in Section 7, this choice enables a good collapse of the smooth and ribbed walls turbulent velocity profiles. However, the virtual origin defined this way also leads to clear inconsistencies regarding the mean velocity profile. Moreover, the assumption that the maximum intensity location is not disrupted by the presence of riblets is quite strong and questionable.

The longitudinal Stokes flow over the riblets has been seen in Section 1 to yield an virtual origin located at a distance $h_\parallel$ above the riblet valley (Fig. 7c). With the present riblet geometry, the computation of the viscous flow field, illustrated in Fig. 8, gives $h_\parallel \approx 0.62\, h_{rib}$. One can wonder whether this origin $h_\parallel$, based on a laminar viscous flow, does properly characterize the actual turbulent flow. This choice is known to be consistent under the assumption that the actual turbulent flow can be approximated as purely viscous within the groove valleys. The following paragraph aims at clarifying this hypothesis.

6.2 Velocity profile within the riblet groove

The Stokes flow over the present riblet geometry can be computed and compared with the mean profile of the turbulent flow (see Fig. 8). From a few riblet heights above the tip, approximately 15 wall units, the mean velocity profile does no longer depend on the spanwise location with respect to tips or valleys. This result is in quantitatively good agreement with Hoosmand et al. experiments [2]. Thus, the riblet direct effect on the flow seems to be limited to the very close vicinity of the wall [13]. Modifications farther away result from indirect mechanisms: modifying the wall-unit scaling is an example of such an indirect perturbation by which riblets can be felt across the whole boundary layer extent [11]. Note that this conclusion would not be valid for riblets not aligned with the free-stream (for which an induced secondary flow would directly affect the whole boundary-layer flow).

Below the riblet crests, isovalues of $\overline{u}(y, z)$ for the turbulent and for the Stokes flows have the same shape, in agreement with Bechert and Bartenwerfer [7] hypothesis of a flow dominated by viscous effects within the grooves. For triangular and knife-bladed riblets, Peet and Sagaut [20] have showed the close fit between the skin friction distributions of the Stokes and turbulent flows.

However, more quantitatively, the mean velocity of the turbulent flow is shown, in Fig. 8, to be slightly higher than the viscous one inside the grooves. This is due to the presence of turbulence-induced momentum transfer towards the wall. That small but non-negligible turbulence activity was evidenced by Chu and Karniadakis [4] who demonstrated the unsteadiness of the flow inside the grooves.

The Stokes origin, located $h_\parallel$ above the valley, can be considered as a coherent choice for riblets within their viscous regime. However, since it is based on the strong hypothesis

that the turbulent flow behaves like a viscous flow within the riblets, this choice is perhaps not the most suitable in general (especially for bigger riblets, once the breakdown regime is passed). An alternative origin is proposed next to address this issue.

6.3 A skin friction based virtual origin

In Section 4, the original FIK identity has been extended to arbitrary complex walls, with almost no restrictions on the flow nor on the surface. Indeed, the same identity applies for viscous Stokes flow and for high-Reynolds number turbulent flow, on a flat plate or on riblets, in a channel or in a zero-pressure-gradient boundary layer. Furthermore, no assumptions have been made on the ordinate origin: any arbitrary physical location can be defined as axis origin. However, although none of the $c_{f,i}$ terms depend on the location of the ordinate origin, the normalization coefficient for complex surface α does. Recall that for a canonical smooth plate located at $y_{wall} = 0$, the coefficient α equals 1. For riblets—or roughness elements in general—the virtual origin can be defined such that α recovers that smooth-wall unity value. The distance from the riblet valley to that particular origin is denoted h_α. According to the definition of α, Eq. 9, the condition $\alpha = 1$ can be rewritten as:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma_w}\left(1-\frac{y_{wall}(x,l)}{y_{top}}\right)^2\sqrt{1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x)^2}\,\frac{\mathrm{d}F_x}{F_x}&\\ =1&\\ =\int_{\partial\Sigma_w}\left(1-\frac{y_{y=0}}{y_{top}}\right)^2\sqrt{1-(\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_x)^2}\,\frac{\mathrm{d}F_x}{F_x}&\end{aligned}\qquad(14)$$

where the virtual origin ordinate $y_{y=0}$ and the scalar product $\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x$ have been explicitly written for the sake of clarity, even though their values are 0 by definition. Thus, the origin defined this way can be seen as a barycentre of the wall friction. A smooth wall, normal to $\mathbf{e}_y$ and located at this origin $y_{y=0}$, aims at reproducing the same effect as the actual complex wall. For such a computation, one needs to know the skin friction distribution within the riblets, which is unknown a priori and remains generally inaccessible in experimental studies.

With the present riblet design, the newly defined virtual origin is found to be located at a distance $h_\alpha \approx 0.58\,h_{rib}$ above the valley for $Re_\tau = 360$. All along the ribbed part of the computational domain, this value remains almost constant within a 0.2 % envelop.

By comparison, recall that the virtual origin $h_\parallel$, which has been computed using a laminar viscous flow, is equal to $0.62\,h_{rib}$. That is approximately 0.30 wall units above the newly defined origin h_α. The difference between those two origins is quite small in the present flow conditions. Since no assumptions was made on the flow to obtain h_α, the method is expected to remain applicable even for riblets once their breakdown regime is passed, that is, for flow over riblets that may not be properly described by the Stokes flow any more. Additional computations would be necessary to properly attest this expectation.

7 Mean Velocity Field and Turbulent Statistics

7.1 Velocity profiles scaled in external units

The virtual origin h_α being now defined in this way, the mean velocity profile and the distribution of Reynolds stress components for the flow above the riblets can be compared

with the canonical smooth plate flow. Profiles in Fig. 9 are scaled in outer units, namely, using the local boundary layer thickness δ and the free-stream velocity U_∞.

Profiles for the smooth and the ribbed plates are both compared at the same $Re_\delta = 7770$, corresponding to $Re_\theta = 1000$ for the smooth wall case. The Reynolds number Re_δ, based on both δ and U_∞, seems to be well-suited for a proper comparison of profiles which are themselves normalized by δ and U_∞.

For the riblet flow, the mean velocity $\langle\overline{u}\rangle/U_\infty$ is increased in a large portion of the boundary layer, extending from $y = 0.2\,\delta$. However, the magnitude of the rise is weak: at most a couple of percent. The Reynolds normal $\langle\overline{u_i'u_i'}\rangle/U_\infty^2$ and shear $\langle\overline{u'v'}\rangle/U_\infty^2$ stresses all go through a significant reduction, between 10 % and 20 %, over the main part of the boundary layer. This turbulence intensity reduction has already been reported with similar magnitude in both experiments [2, 13] and channel flow simulations [4, 5].

The FIK "laminar" contribution term $c_{f,1}$ (defined in Eq. 11) is proportional to the integral of $\langle\overline{u}\rangle/U_\infty$ across the boundary layer thickness, that is to say, to the area delimited by the profile and the axes. The weak perturbation of the mean velocity profile by the riblets appears to be a graphical evidence for the preservation of $c_{f,1}$ at a given Re_δ. On the contrary, $\langle\overline{u'v'}\rangle/U_\infty^2$ is reduced on the whole boundary layer extent. Thus, the drop of the turbulent term $c_{f,2}$ is also graphically confirmed. Nothing can be deduced here regarding $c_{f,3}$ since it relies on the streamwise evolution of the velocity profiles.

7.2 Velocity profiles scaled in wall units

The inner-scaled profiles $\langle\overline{u}\rangle^+$, $u_{i,rms}^+$ and $\langle\overline{u'v'}\rangle^+$ are displayed in Fig. 10 at the same $Re_\tau = 360$ for the flows over the smooth and ribbed plates. The choice of comparing the profiles at a given friction Reynolds number is justified by its correspondence with the inner scaling.

The axis origin for the riblet curves is still set at the distance h_α above the valley. Another choice of virtual origin—the origin located at the valley—is also shown in order to

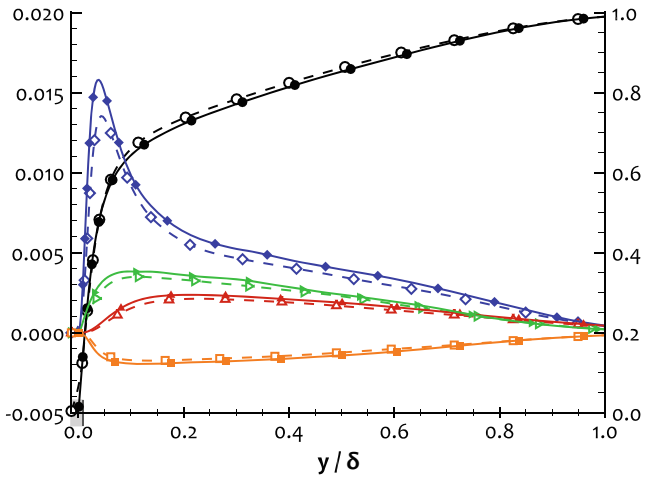


Fig. 9 Mean spanwise-averaged profiles scaled in outer units at $Re_\delta = 7770$. *Right axis*: $\langle\overline{u}\rangle/U_\infty$ (◯); *Left axis*: $\langle\overline{u'u'}\rangle/U_\infty^2$ (◇), $\langle\overline{v'v'}\rangle/U_\infty^2$ (△), $\langle\overline{w'w'}\rangle/U_\infty^2$ (▷), $\langle\overline{u'v'}\rangle/U_\infty^2$ (□). Smooth plate ($Re_\theta = 1000$, *solid line*, *filled symbols*); ribbed plate (*dashed line*, *open symbols*). The *grey shading* on the y-axis indicates the part of the flow below the riblet crest level

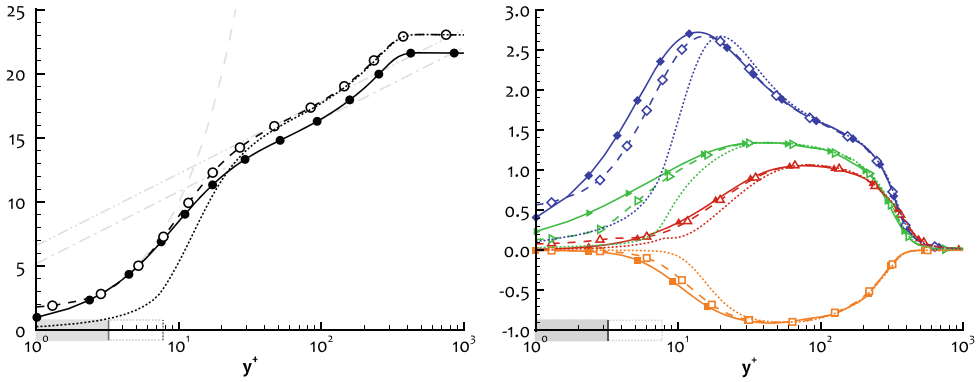


Fig. 10 Mean spanwise-averaged profiles scaled in wall units at $Re_\tau = 360$. (*Left*) Mean velocity: $\langle\overline{u}\rangle^+$ (◯). (*Right*) Turbulence intensities: u^+_{rms} (◇), v^+_{rms} (△), w^+_{rms} (▷), $\langle\overline{u'v'}\rangle^+$ (□). Smooth plate ($Re_\theta = 1000$, *solid line*, *filled symbols*); ribbed plate with ordinate origin h_α above the valley (*dashed line*, *open symbols*); ribbed plate with ordinate origin at valley level (*dotted line*); Viscous sublayer using $u^+ = y^+$ (*long-dashed line*); logarithmic region using $u^+ = (1/\kappa)\log(y^+) + B$ with $\kappa = 0.41$ and $B = 5.2$ (*dash-dotted line*) and $B = 5.2 + 1.4$ (*dash-double-dotted line*). The markers on the y-axis indicate the part of the flow below the riblet crest level, using the h_α-origin (*grey shading*) and the valley level origin (*grey dotted box*)

emphasize the importance of its proper location. A change of origin 'only' shifts the curves horizontally. However, because of the logarithmic axis, this shift does not have graphically the same magnitude on the whole plot: lower values of y^+ are much more affected. Hence, a virtual origin change does not lead to a simple translation of the curves, but distort them, especially near the wall.

With the FIK-based origin, the mean velocity profile $\langle\overline{u}\rangle^+(y^+)$ of the riblet flow satisfies the linear law $u^+ = y^+$ up to approximately 5 wall units. It is clear that the choice of virtual origin strongly affects this result, as emphasized by the profile obtained with the origin at the valley. With the origin based on the Stokes flow computation $h_\parallel$ (not shown), a discrepancy with the linear law is found, even though this origin is located less than half a wall unit above h_α.

Over the riblets, a logarithmic profile is recovered with the same slope $(1/\kappa)$ as the smooth wall curve, but moved upward by a velocity shift Δu^+. Similar situations have already been observed, not only for flow over riblets [2, 13] but also with other drag reduction devices, such as wall oscillation [49] or polymers [50]. Further away from the wall, the velocity defect law is perfectly retrieved. As stated by Coles [14], the defect function is insensitive to roughness at the wall, provided that the origin for the normal coordinate y is properly chosen.

As for the friction coefficient c_f in Section 3, the value of the upward velocity shift Δu^+ between the ribbed and smooth wall profiles depends whether the comparison is done at the same x, Re_δ, Re_θ or Re_τ. With the choice of comparing the flow at constant Re_τ and thanks to the validity of the defect law, the shift of the logarithmic law identifies with the shift of the inner-scaled free stream velocity: $\Delta u^+ = \Delta U^+_\infty = U^+_{\infty|riblet} - U^+_{\infty|smooth}$. This shift is thus related to the values of the friction coefficient since $c_f/2 = (U^+_\infty)^{-2}$. The following relation can be derived:

$$\Delta u^+ = \sqrt{\frac{2}{c_f^{riblets}}} - \sqrt{\frac{2}{c_f^{smooth}}} = \sqrt{\frac{2}{c_f^{smooth}}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-DR}} - 1\right) \tag{15}$$

This equation can be linearized (for small DR) and leads to [51]: $DR \sim \Delta u^+\sqrt{2\,c_f^{smooth}}$.

With the present riblets at $Re_\tau = 360$, the upward shift is found to be $\Delta u^+ = 1.4$, both graphically and with Eq. 15. This value of $\Delta u^+(Re_\tau)$ is observed to be almost constant within the range of tested Reynolds numbers. If it is assumed to remain stable for even higher Reynolds number flows, the linearized law states that the riblet drag-reduction is expected to reduce when the Reynolds number will increase (because of the reduction of c_f^{smooth}).

In Section 7.1, fluctuating intensities at a given Re_δ have been shown to be greatly reduced by the riblets when scaled in outer units (which is also true in physical units). However, as shown in Fig. 10, when the actual wall-unit scaling is used and when the profiles are compared at the same Re_τ, the modifications of the turbulence intensity profiles induced by the riblets are much more limited. The large reduction often reported in the literature appears to be the byproduct of an inappropriate scaling or of the comparison of flows at different friction Reynolds numbers. Similar observations have also been reported for turbulent drag reduction by oscillating walls [40].

In the close vicinity of the riblets (for $y^+ < 5$), within the viscous sublayer, only the spanwise component w_{rms} is damped, in agreement with Luchini et al.'s vision of riblets as devices impeding selectively the transverse over the longitudinal flow [8]. In the buffer layer (y^+ from 5 to 30 wall units), all turbulence intensities are decreased. However, the profiles are unvaried further away from the wall. Moreover, the peak magnitude is almost unchanged for all profiles (that of u_{rms} is slightly lowered by around $0.05\, u_\tau$).

The effect of riblets on turbulence can be alternatively interpreted by a shift Δy^+ of the y-axis ordinate. The most suitable shift to overlap the turbulence intensity profiles is estimated to $\Delta y^+ \approx 1.4 \pm 0.3$. This ordinate shift value is directly dependent on the virtual origin choice. With the present origin based on h_α, Δy^+ is found to be analogous to the previously computed mean velocity shift $\Delta u^+ = 1.4$.

The virtual origin choice made by Choi et al. [5], already mentioned in Section 6.1, is based on the location of the maximum intensity of the streamwise velocity fluctuations. According to previous observations, Choi et al.'s origin is located at a distance Δy above the FIK-based origin: $h_{\max\langle uu\rangle} = h_\alpha + \Delta y$. By construction, this virtual origin choice leads to a good collapse of the fluctuation profiles. However, it is inconsistent with regards to the mean velocity profile: $\langle\overline{u}\rangle^+$ approaches 1.4 at the origin location, the canonical viscous-sublayer law $\langle\overline{u}\rangle^+ = y^+$ is not satisfied and the range of validity of the logarithmic-law is reduced. Hence, since it does not characterize the apparent wall location, $h_{\max\langle uu\rangle}$ is not a suitable virtual origin choice.

However, if the skin friction distribution is unavailable, h_α cannot be obtained directly from Eq. 14 but can be approached using $h_{\max\langle uu\rangle}$ and the shift $\Delta y^+ = \Delta u^+$ computed by Eq. 15.

7.3 Shifted velocity profiles

Making use of the noticed similarity, in inner-scaling, between the velocity shift of the mean velocity profile and the ordinate shift of the turbulence intensity profiles, all the profiles are plotted with the corresponding offsets: a negative shift of $\Delta u^+ \approx 1.4$ is applied to the mean velocity and a downward shift, similar in value $\Delta y^+ = \Delta u^+$, is applied to the ordinate axis for all the profiles. That is to say, Fig. 11 represents the graph of $\langle\overline{u}\rangle^+ - \Delta u^+$, $u^+_{i,rms}$ and $\langle\overline{u'v'}\rangle^+$ as functions of $(y^+ - \Delta u^+)$.

The smooth wall and riblet shifted profiles almost overlap with one another across the whole boundary layer extent. The fact that the mean velocity profiles match in the inertial and outer layers was actually expected. Indeed, both flows have been seen to satisfy the

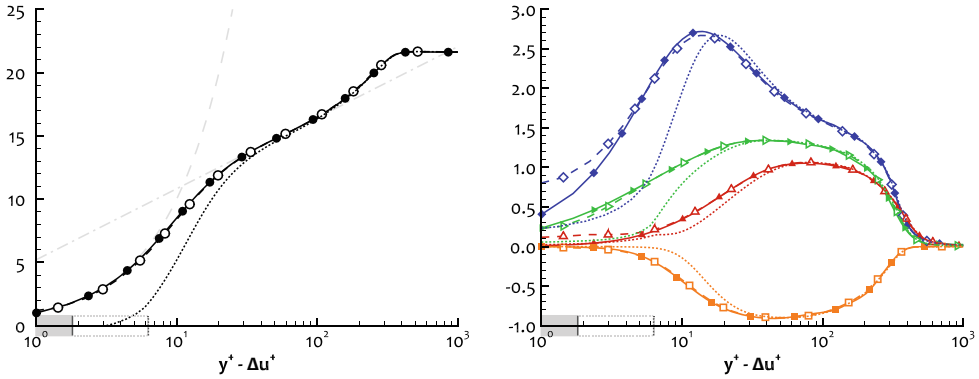


Fig. 11 Mean spanwise-averaged shifted profiles versus $y^+ - \Delta u^+$ scaled in wall units at $Re_\tau = 360$. (*Left*) Shifted mean velocity: $\overline{u}^+ - \Delta u^+$ (◯). (*Right*) Turbulence intensities: u^+_{rms} (◇), v^+_{rms} (△), w^+_{rms} (▷), $\overline{u'v'}^+$ (□). Smooth plate ($Re_\theta = 1000$, $\Delta u^+ = 0$, *solid line*, *filled symbols*); ribbed plate with ordinate origin h_α above the valley ($\Delta u^+ = 1.4$, *dashed line*, *open symbols*); ribbed plate with ordinate origin at valley level ($\Delta u^+ = 1.4$, *dotted line*); Viscous sublayer using $u^+ = y^+$ (*long-dashed line*); logarithmic region using $u^+ = (1/\kappa)\log(y^+) + B$ with $\kappa = 0.41$ and $B = 5.2$ (*dash-dotted line*). The markers on the y-axis indicate the part of the flow below the riblet crest level, using the h_α-origin (*grey shading*) and the valley level origin (*grey dotted box*)

velocity defect law and their respective free stream points (δ^+; U^+_∞) have been overlapped by the shifting process. According to Coles [14], these point coordinates are enough to fully characterize a canonical flow profile in the logarithmic and wake region.

In the viscous sublayer, the perfect matching of the (shifted) mean velocity profiles can be credited to the suitability of the virtual origin h_α. Indeed, the linear law ($y^+ = u^+$) is valid for the profile shifted by $\Delta u^+ = \Delta y^+$ because it was valid for the non-shifted profile, and this validity has been attributed to the choice of h_α.

The fact that the rest (i.e. the buffer layer) of the shifted mean velocity profiles coincides that well between the smooth and ribbed cases remains spectacular, since this layer contains the near-wall structures on which riblets have a direct influence [12, 13].

Similarly, the turbulence intensity profiles coincide with one another between the two simulations, from $y^+ \approx 5$ to the top of the boundary layer. Apart from the slight decrease of the u^+_{rms} peak value mentioned before, the turbulent profiles are indistinguishable. The interactions between the riblets and the near-wall turbulent structures (such as streaks and streamwise vortices), although surely complex, end up leading to turbulence statistics closely similar to those of the canonical flow. The turbulent near-wall mechanisms seems to be simply shifted away from the wall by the riblets.

The turbulent flow over the riblets can be approximated by the canonical turbulent flow that would develop upon a viscous layer (in which $y^+ = u^+$) of thickness Δu^+ set at the location of the virtual origin. This kind of flow has been studied, in a channel, by Iwamoto et al. [52] to quantify the amount of drag reduction one could expect assuming a totally relaminarized flow within a thin layer at the wall. The flow over super-hydrophobic surfaces presents similar properties [53, 54].

For given riblet shape and sizing, yielding a particular velocity shift Δu^+, one can recover the drag reduction DR (using Eq. 15). Provided the knowledge of the canonical smooth wall profiles at Re_τ, a good approximation of the mean velocity and the turbulence

intensity profiles over the riblets can be obtained, above $y^+ = 5$, with the following composite flow:

$$\overline{u}^+(Re_\tau, y^+) \approx \begin{cases} y^+ & \text{for } y^+ < \Delta u^+ \\ \Delta u^+ + \overline{u}_0^+(Re_\tau, y^+ - \Delta u^+) & \text{for } y^+ > \Delta u^+ \end{cases} \quad (16)$$

$$\overline{u_i' u_j'}^+(Re_\tau, y^+) \approx \begin{cases} 0 & \text{for } y^+ < \Delta u^+ \\ \overline{u_{i0}' u_{j0}'}^+(Re_\tau, y^+ - \Delta u^+) & \text{for } y^+ > \Delta u^+ \end{cases} \quad (17)$$

The subscript 0 refers to the canonical smooth wall flow. The velocity shift Δu^+ might depend on the friction-velocity Reynolds number Re_τ, even though no dependence was evidenced within the range of tested Reynolds numbers.

This composite flow can be used to run low-fidelity simulations, without having to solve for the flow inside the riblets. Aupoix et al. [51] recently applied such a strategy to model the riblet effects with RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes) simulations. The present study validates quantitatively some of their underlying assumptions in the case of a zero-pressure-gradient flow over riblets in their optimal drag-reduction regime.

8 Conclusion and Outlook

Zero-pressure-gradient turbulent boundary layer flows over smooth and ribbed walls have been compared by means of Large Eddy Simulations. The ribbed surface covers a large part of the computational domain, from $Re_\tau = 240$ to $Re_\tau = 450$. The influence of the riblet leading and trailing edges is limited to a transient area.

The friction over the riblets can be compared to the one on the smooth wall at the same physical location x or at the same Reynolds number Re_δ, Re_θ or Re_τ. In all cases, a significant reduction has been observed. When the two flows are compared at same x or at same Re_δ, the drag reduction is seen to decrease downstream. This depreciation has been explained by the slowing down, due to riblets, of the boundary layer development. When the friction on the riblets and on smooth wall is compared at a given Re_θ or at a given Re_τ, the drag reduction rate remains almost constant all along the controlled zone and equals values close to 10 % and 11 % respectively. The weak dependence with respect to Re_τ corroborates the observation made in the literature that riblets only interact with the buffer layer.

To analyze more in depth the way riblets affect the wall friction, an extension of the FIK identity, applicable to complex surfaces, has been derived. The "laminar" term, which is the smallest of the three contributions to the skin friction, is unaffected by the riblets at given Re_δ. The two other contributing terms, namely "turbulent" and "spatial heterogeneity", are greatly reduced by the riblets. However, their relative contributions to the total friction remain unchanged when the comparison is made with the reference smooth wall case at the same Re_τ. This property also points in favor of a wall-unit scaling of the interaction of riblets with the flow.

To compare the reference flow field above a smooth wall with the one above riblets, the vertical positioning of the two surfaces, given by the "virtual origin", must be chosen properly. The extension of the FIK identity to complex wall surfaces was the basis for the derivation of a new virtual origin. This FIK-based origin can be interpreted as a barycentre of the wall friction along the y axis.

When plotted in wall units and using the FIK-based virtual origin, the linear, logarithmic and defect laws are all retrieved for the mean velocity over the riblets. The recovering of the

former confirms the relevance of the virtual origin. The recovering of the two latter confirms that riblets do not disrupt the turbulent cycle above the buffer layer, thus preserving the logarithmic and wake regions.

When comparing the riblet and the reference smooth plate flows at the same Re_τ, the riblet mean velocity profile appears to be shifted upward by a constant Δu^+, from the logarithmic layer to the wake. The velocity shift $\Delta u^+(Re_\tau)$ is found to be uniform along the controlled domain and equals to 1.4 friction velocity for the present riblet design. Other riblet designs (in terms of shape or sizing) may lead to other velocity shift values.

The turbulence intensity profiles for the riblet flow, in inner-scaling, appear to be moved up by an ordinate shift $\Delta y^+ \approx 1.4$ with respect to the smooth wall profiles at the same Re_τ. This value is analogous to the one of the velocity shift Δu^+. Apart from this shift of the ordinate axis, the turbulence intensity magnitudes from the two flows are quasi-identical. The reduction of turbulence intensity often reported in the riblet literature appears to be the byproduct of an inadequate scaling or of a comparison between flows at different Re_τ.

A perfect overlap of the riblet and smooth plate curves is obtained by performing a double shift of the profiles: a downward shift Δu^+ of the mean velocity profile along with the downward shift of the y-axis ordinate of the mean and turbulent velocity profiles by $\Delta y^+ = \Delta u^+$. Hence, the complex interactions between the riblets and the near-wall turbulent structures finally result in a simplistic shift of the wall-normal ordinate and of the mean velocity profile. In other words, the turbulent flow over the riblets can be approximated by the canonical turbulent flow that would develop above a perfect viscous layer (i.e. in which $y^+ = u^+$) of thickness Δu^+ on the location of the virtual origin.

The suitability of the FIK-based virtual origin was demonstrated for riblets in their established drag-reducing regime and has resulted in the elaboration of an analogy between the flow over the riblets and a composite flow, made from the canonical flow over an equivalent smooth wall. Future work will aim at verifying the applicability of the FIK-based virtual origin for drag-increasing riblets, once the break-down regime is passed. Furthermore, the study of the transient phenomena, at the leading and trailing edges of the riblets, which have never been conducted so far, may reveal interesting properties.

Acknowledgments This work was granted access to the HPC resources from IDRIS under the allocation 2014-100392 made by the GENCI. The financial support from Ecole Polytechnique to the thesis of Amaury Bannier is gratefully acknowledged.

References

1. Walsh, M.J., Weinstein, L.M.: Drag and heat transfer on surfaces with small longitudinal fins. AIAA Paper 78-1161 (1978)
2. Hooshmand, D., Youngs, R.A., Wallace, J.M.: An experimental study of changes in the structure of a turbulent boundary layer due to surface geometry changes. AIAA Paper 83-0230 (1983)
3. Bechert, D.W., Bruse, M., Hage, W., Van Der Hoeven, J.G.T., Hoppe, G.: Experiments on drag-reducing surfaces and their optimization with an adjustable geometry. J. Fluid Mech. **338**, 59–87 (1997)
4. Chu, D.C., Karniadakis, G.E.: A direct numerical simulation of laminar and turbulent flow over riblet-mounted surfaces. J. Fluid Mech. **250**, 1–42 (1993)
5. Choi, H., Moin, P., Kim, J.: Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. J. Fluid Mech. **255**, 503–539 (1993)
6. Coustols, E., Savill, A.M.: Turbulent skin-friction drag reduction by active and passive means: parts 1 and 2. Special course on skin-friction drag reduction (AGARD Report 786) (1992)
7. Bechert, D.W., Bartenwerfer, M.: The viscous flow on surfaces with longitudinal ribs. J. Fluid Mech. **206**, 105–129 (1989)

8. Luchini, P., Manzo, F., Pozzi, A.: Resistance of a grooved surface to parallel flow and cross-flow. J. Fluid Mech. **228**, 87–109 (1991)
9. Jiménez, J.: Turbulent flows over rough walls. Annu. Rev. Fluid Mech. **36**, 173–196 (2004)
10. Goldstein, D.B., Tuan, T.C.: Secondary flow induced by riblets. J. Fluid Mech. **363**, 115–151 (1998)
11. García-Mayoral, R., Jiménez, J.: Drag reduction by riblets. Philos. Trans. R. Soc. Lond. A **369**(1940), 1412–1427 (2011)
12. García-Mayoral, R., Jiménez, J.: Scaling of turbulent structures in riblet channels up to $\mathrm{Re}_\tau \approx 550$. Phys. Fluids **24**(10), 105101 (2012)
13. Choi, K.S.: Near-wall structure of a turbulent boundary layer with riblets. J. Fluid Mech. **208**, 417–458 (1989)
14. Coles, D.: The law of the wake in the turbulent boundary layer. J. Fluid Mech. **1**, 191–226 (1956)
15. Perry, A.E., Joubert, P.N.: Rough wall boundary layers in adverse pressure gradients. J. Fluid Mech. **17**, 193–211 (1963)
16. Gallagher, J.A., Thomas, A.S.W.: Turbulent boundary layer characteristics over streamwise grooves. AIAA Paper 84-2185 (1984)
17. Bandyopadhyay, P.R.: Review—Mean flow in turbulent boundary layers disturbed to alter skin friction. AIAA Paper 86-1126 (1986)
18. Fukagata, K., Iwamoto, K., Kasagi, N.: Contribution of Reynolds stress distribution to the skin friction in wall-bounded flows. Phys. Fluids **14**(11), L73 (2002)
19. Gomez, T., Flutet, V., Sagaut, P.: Contribution of Reynolds stress distribution to the skin friction in compressible turbulent channel flows. Phys. Rev. E **89**, 035,301 (2009)
20. Peet, Y., Sagaut, P.: Theoretical prediction of turbulent skin friction on geometrically complex surfaces. Phys. Fluids **21**(10), 105,105 (2009)
21. Klumpp, S., Meinke, M., Schröder, W.: Numerical simulation of riblet controlled spatial transition in a zero-pressure-gradient boundary layer. Flow Turbul. Combust. **85**(1), 57–71 (2010)
22. Strand, J.S., Goldstein, D.B.: Direct numerical simulations of riblets to constrain the growth of turbulent spots. J. Fluid Mech. **668**, 267–292 (2011)
23. Duan, L., Choudhari, M.M.: Direct numerical simulations of high-speed turbulent boundary layers over riblets. In: 52nd Aerospace Sciences Meeting, vol. 0934 (2014)
24. Lee, J.H., Lee, S.H., Kim, K., Sung, H.J.: Structure of the turbulent boundary layer over a rod-roughened wall. Int. J. Heat Fluid Flow **30**, 1087–1098 (2009)
25. Mary, I., Sagaut, P.: Large eddy simulation of flow around an airfoil near stall. AIAA J. **40**(6), 1139 (2002)
26. Lenormand, E., Sagaut, P., Ta Phuoc, L., Comte, P.: Subgrid-scale models for large-eddy simulation of compressible wall bounded flows. AIAA J. **38**(8), 1340–1350 (2000)
27. Pamiès, M., Weiss, P.E., Garnier, E., Deck, S., Sagaut, P.: Generation of synthetic turbulent inflow data for large-eddy simulation of spatially-evolving wall-bounded flows. Phys. Fluids **21**(4), 045103 (2009)
28. Jarrin, N., Benhamadouche, S., Laurence, D., Prosser, R.: A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations. Int. J. Heat Fluid Flow **27**(4), 585–593 (2006)
29. Larchevêque, L., Sagaut, P., Mary, I., Labbé, O., Comte, P.: Large-eddy simulation of a compressible flow past a deep cavity. Phys. Fluids **15**(1), 193–210 (2003)
30. Laurent, C., Mary, I., Gleize, V., Lerat, A., Arnal, D.: DNS database of a transitional separation bubble on a flat plate and application to RANS modeling validation. Comput. Fluids **61**, 21–30 (2011)
31. Stenzel, V., Wilke, Y., Hage, W.: Drag-reducing paints for the reduction of fuel consumption in aviation and shipping. Prog. Org. Coat. **70**, 224–229 (2011)
32. Maruyama, D., Bailly, D., Carrier, G.: High-quality mesh deformation using quaternions for orthogonality preservation. AIAA J. **52**(12), 2712–2729 (2014)
33. Deck, S., Weiss, P.E., Pamiès, M., Garnier, E.: Zonal Detached Eddy Simulation of a spatially developing flat plate turbulent boundary layer. Comput. Fluids **48**, 1–15 (2011)
34. Choi, H., Moin, P.: Effects of the computational time step on numerical solutions of turbulent flow. J. Comp. Phys. **113**, 1–4 (1994)
35. Mignot, E., Barthelemy, E., Hurther, D.: Double-averaging analysis and local flow characterization of near-bed turbulence in gravel-bed channel flows. J. Fluid Mech. **618**, 279–303 (2009)
36. Wu, X., Moin, P.: Direct numerical simulation of turbulence in a nominally zero-pressure-gradient flat-plate boundary layer. J. Fluid Mech. **630**, 5–41 (2009)
37. Schlatter, P., Örlü, R.: Assessment of direct numerical simulation data of turbulent boundary layers. J. Fluid Mech. **659**, 116–126 (2010)
38. Smits, A.J., Matheson, N., Joubert, P.N.: Low-Reynolds-number turbulent boundary layers in zero and favourable pressure gradients. J. Ship Res. **27**, 147–157 (1983)
39. Nagib, H.M., Chauhan, K.A., Monkewitz, P.A.: Approach to an asymptotic state for zero pressure gradient turbulent boundary layer. Philos. Trans. R. Soc. Lond. A **365**, 755–770 (2007)

40. Ricco, P., Ottonelli, C., Hasegawa, Y., Quadrio, M.: Changes in turbulent dissipation in a channel flow with oscillating walls. J. Fluid Mech. **700**, 77–104 (2012)
41. Hasegawa, Y., Quadrio, M., Frohnapfel, B.: Numerical simulation of turbulent duct flows with constant power input. J. Fluid Mech. **750**, 191–209 (2014)
42. Walsh, M.J., Lindemann, A.M.: Optimization and application of riblets for turbulent drag reduction. AIAA Paper 84-0347 (1984)
43. Mehdi, F., Johansson, T.G., White, C.M., Naughton, J.W.: On determining wall shear stress in spatially developing two-dimensional wall-bounded flows. Exp. Fluids **55**, 1656 (2014)
44. Deck, S., Renard, N., Laraufie, R., Weiss, P.E.: Large-scale contribution to mean wall shear stress in high-Reynolds-number flat-plate boundary layers up to $Re_\delta = 13650$. J. Fluid Mech. **743**, 202–248 (2014)
45. Mehdi, F., White, C.M.: Integral form of the skin friction coefficient suitable for experimental data. Exp. Fluids **50**, 43–51 (2011)
46. Jiménez, J., Pinelli, A.: The autonomous cycle of near-wall turbulence. J. Fluid Mech. **389**, 335–359 (1999)
47. Bechert, D.W., Bartenwerfer, M., Hoppe, G., Reif, W.E.: Drag reduction mechanisms derived from shark skin. In: 15th Congress of the international council of the aeronautical sciences (ICAS), vol. 86-1.8.3, pp. 1044–1068. American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York, London, England (1986)
48. Peet, Y., Sagaut, P., Charron, Y.: Pressure loss reduction in hydrogen pipelines by surface restructuring. Int. J. Hydrogen Energy **34**(21), 8964–8973 (2009)
49. Jung, W.J., Mangiavacchi, N., Akhavan, R.: Suppression of turbulence in wall-bounded flows by high-frequency spanwise oscillations. Phys. Fluids A **4**(8), 1605 (1992)
50. Lumley, J.: Drag reduction in turbulent flow by polymer additives. J. Polym. Sci. Macromol. Rev. **7**, 263–290 (1973)
51. Aupoix, B., Pailhas, G., Houdeville, R.: Towards a general strategy to model riblet effects. AIAA J. **50**(3), 708–716 (2012)
52. Iwamoto, K., Fukagata, K., Kasagi, N., Suzuki, Y.: Friction drag reduction achievable by near-wall turbulence manipulation at high Reynolds numbers. Phys. Fluids **17**, 011702 (2005)
53. Fukagata, K., Kasagi, N., Koumoutsakos, P.: A theoretical prediction of friction drag reduction in turbulent flow by superhydrophobic surfaces. Phys. Fluids **18**, 051703 (2006)
54. Min, T., Kim, J.: Effects of hydrophobic surface on skin-friction drag. Phys. Fluids **16**(7), L55 (2004)

5.3 Discussion complémentaire

5.3.1 Résumé succinct de l'article

Dans l'article précédent, une généralisation de la décomposition FIK pour les écoulements le long de surfaces complexes a été proposée. Sa formulation est exprimée par les équations (10)–(13) de l'article. Le frottement y est décomposé en trois termes dont la définition est très similaire à celle de la formulation originelle (1.66)–(1.70). Les principales différences résident dans l'intégration surfacique qui remplace l'intégration linéique afin de prendre en compte la non-homogénéité de l'écoulement dans la direction transverse z et dans l'ajout d'un facteur $1/\alpha$ devant chacun des termes. Le coefficient α est défini par la formule (9) de l'article. Le détail de la dérivation de cette identité FIK généralisée est présenté dans l'annexe A.

La décomposition FIK généralisée a ensuite été appliquée au frottement d'une paroi couverte de *riblets*. Elle révèle que la composante dite laminaire $c_{f,1}(Re_\delta)$, la plus faible des trois contributions, est à peine affectée par la présence des *riblets*. À l'inverse, les contributions $c_{f,2}$ et $c_{f,3}$ subissent toutes deux une importante baisse. Plus exactement, ces contributions sont diminuées dans une proportion identique au coefficient de frottement c_f lui-même, c'est-à-dire que les contributions relatives $c_{f,2}/c_f(Re_\tau)$ et $c_{f,3}/c_f(Re_\tau)$ conservent les valeurs du cas canonique de paroi plane. Ce comportement appuie l'hypothèse que l'interaction entre les *riblets* et la turbulence est dimensionnée en échelle interne.

Le coefficient α introduit lors de la généralisation de la décomposition FIK aux surfaces complexes correspond à une moyenne du frottement à la surface de *riblets* pondérée par l'altitude locale $y_\mathrm{w}(x,z)$. En changeant l'origine virtuelle, on change les valeurs de y_w et donc la valeur de α. Dans le cas d'une paroi lisse, $\alpha = 1$ lorsque l'origine est placée à la paroi. Pour n'importe quelle surface rugueuse, il est possible de placer l'origine virtuelle de sorte que α prenne la même valeur unitaire. On définit ainsi une nouvelle origine virtuelle que l'on repérera par sa localisation h_α au-dessus du fond des vallées. Cette origine virtuelle peut être interprétée comme étant le barycentre pondéré du frottement pariétal vu de la frontière externe $\delta_{99\%}$ de la couche limite.

Lorsque l'origine virtuelle basée sur la décomposition FIK est utilisée, les lois linéaire (1.48), logarithmique (1.50) et de sillage (1.46) sont retrouvées sur le profil de vitesse moyenne en unité de paroi $\overline{u}^+(y^+)$. Ce résultat a d'ores et déjà été discuté dans la section 4.4.4.3 du chapitre précédent. En comparant à même Re_τ les profils de vitesse moyenne pour les écoulements au-dessus de la paroi lisse et au-dessus des *riblets*, on observe qu'ils sont de parfaites translations l'un de l'autre : les courbes des profils $\overline{u}^+_\mathrm{ref}(y^+)$ et $\overline{u}^+(y^+ + \Delta y^+) - \Delta u^+$ se superposent parfaitement. La valeur du décalage $\Delta u^+ \simeq 1.4$ peut être estimée graphiquement ou calculée à partir des coefficients de frottements c_f et $c_{f,\mathrm{ref}}$ comme cela a pu être fait dans la section 4.4.4.3 en utilisant les formules (2.8) ou (2.14). Le décalage Δy^+ dépend quant à lui directement de la position de l'origine de l'axe y. Lorsque l'origine virtuelle basée sur la décomposition FIK est utilisée, on trouve que le décalage Δy^+ s'identifie à Δu^+. En observant les intensités fluctuantes, on constate que les profils pour l'écoulement au-dessus des *riblets* sont eux aussi translatés du même décalage Δy^+ par rapport aux profils canoniques à même Re_τ, de sorte que $R^+_{ij}(y^+ + \Delta y^+) \simeq R^+_{ij,\mathrm{ref}}(y^+)$.

Ainsi, l'interaction qui peut exister entre les *riblets* et les structures de la turbulence proche paroi, aussi complexe soit-elle, se réduit à de simples décalages des courbes représentatives des profils de vitesse moyenne et d'intensités fluctuantes. Ces décalages peuvent s'interpréter comme un épaississement de la sous-couche linéaire. Au-delà de cette sous-couche $u^+ = y^+$ épaissie de $\Delta u^+ = \Delta y^+$, les profils canoniques de couche limite turbulente sont retrouvés. Tout se passe comme si l'écoulement au-dessus des *riblets* était identique au **profil composite** constitué d'un profil canonique placé sur une couche laminaire d'épaisseur Δy^+ de cisaillement constant.

5.3.2 Mouvements cohérents

Dans la sous-section 4.4.6, on a introduit les outils visant à évaluer la densité spectrale de puissance des fluctuations. Les figures 4.23 et 4.24 ont mis en évidence que la répartition spectrale

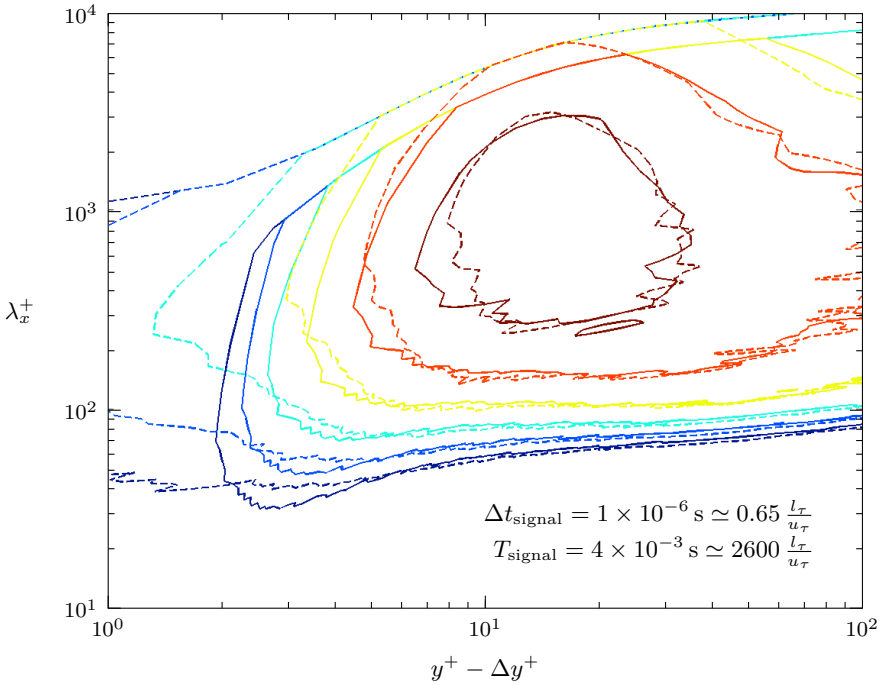


FIGURE 5.1 – Iso-valeurs dans le plan $(y^+ - \Delta y^+, \lambda_x^+)$ de la densité spectrale de puissance $S^+_{u'u'}$ en unité de paroi pré-multipliée par la longueur d'onde λ_x^+ pour la configuration lisse ($\Delta y^+ = 0$, ——) et celle avec *riblets* ($\Delta y^+ = 1.4$, – – –) au nombre de Reynolds $Re_\theta = 1000$. Les niveaux tracés croissent de $10^{-3/2}$ (*en bleu foncé*) à $10^{1/6}$ (*en rouge foncé*) par incréments logarithmiques de $10^{1/3}$.

(temporelle comme spatiale) de l'énergie cinétique longitudinale $\overline{u'u'}$ est à peine affectée par la présence des *riblets* à l'altitude où l'énergie cinétique turbulente est maximale.

La même analyse peut être conduite aux autres altitudes de la couche limite. C'est ce qui est fait sur la figure 5.1, où la densité spectrale de puissance $S^+_{u'u'}$ suivant $1/\lambda_x^+$ est tracée en fonction de $y^+ - \Delta y^+$. L'évolution du signal suivant x est en réalité le fruit de l'application de l'hypothèse de Taylor au signal temporel. Quand elles sont ainsi adimensionnées en unité de paroi et localisées suivant l'origine virtuelle décalée de $\Delta y^+ = \Delta u^+$, on observe que les densités spectrales des configurations lisse et avec *riblets* partagent les mêmes niveaux au-delà de $y^+ \simeq 5$. Malgré la présence des *riblets*, la répartition de l'énergie suivant les différentes échelles retrouve l'équilibre du cas canonique quand l'adimensionnement en unité interne est choisi. Ce résultat constitue une démonstration supplémentaire de la similarité entre l'écoulement au-dessus des *riblets* et l'écoulement composite défini précédemment, marquant une nouvelle fois le caractère extrêmement local de l'influence des *riblets* et de la capacité de la turbulence à retrouver son équilibre canonique.

La figure 5.1 nous apprend de plus que l'excédent d'énergie visible en dessous de $y^+ \lesssim 5$ sur le profil $u^+_{\text{rms}}(y^+)$ en *bas* de la figure 4.18 peut être attribué à des structures longues de $\lambda_x^+ \simeq 10^2$ à 10^3. Cela correspond vraisemblablement à l'empreinte des structures proches-paroi mise en évidence par Jiménez [136] comme reportée sur la figure 1.22 de la revue bibliographique. Il n'est pas étonnant que la densité spectrale de puissance ne chute pas à zéro pour $y^+ - \Delta y^+ \to 0$ dans le cas contrôlé, comme cela est pourtant le cas pour la configuration lisse, puisque du fluide s'écoule même aux abscisses $y^+ - \Delta y^+$ négatives dans le sillon des *riblets*.

Comme cela a été développé dans la sous-section 2.2.3.4 de la revue bibliographique, des tourbillons quasi-transverses, étendus dans la direction z, ont été associés au mécanisme de rupture de la réduction de traînée du régime visqueux par García-Mayoral & Jiménez [94]. Ainsi, la densité spectrale de puissance de la vorticité ω'_z a été étudiée afin de vérifier la présence éventuelle de ces

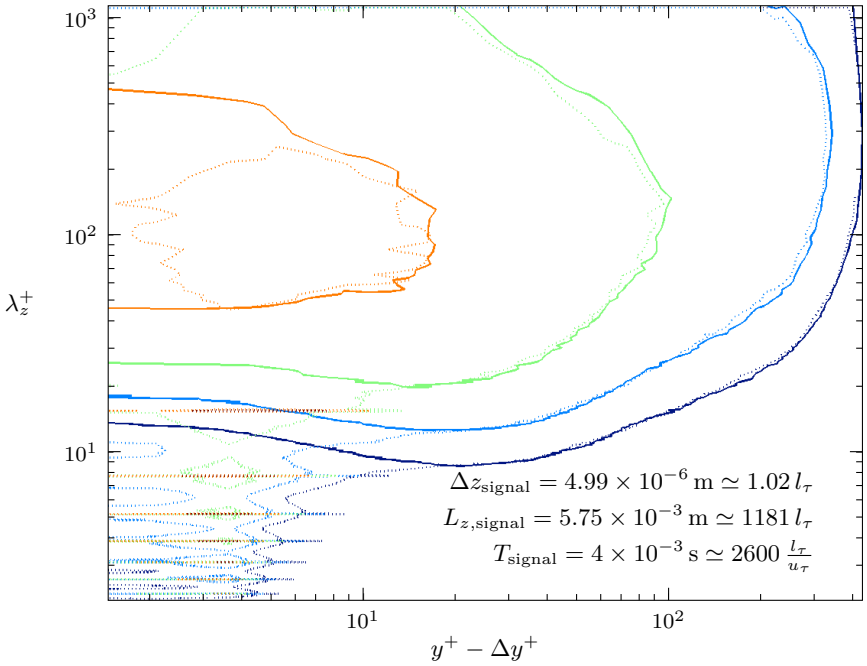


FIGURE 5.2 – Iso-valeurs dans la plan $(y^+ - \Delta y^+, \lambda_z^+)$ de la densité spectrale de puissance $S^+_{\omega'_z\omega'_z}$ en unité de paroi pré-multipliée par la longueur d'onde λ_z^+ pour la configuration lisse ($\Delta y^+ = 0$, ——) et celle avec *riblets* ($\Delta y^+ = 1.4$, ·····) au nombre de Reynolds $Re_\theta = 1000$. Les niveaux tracés croissent de 10^0 (*en bleu foncé*) à 10^3 (*en orange*) par incréments logarithmiques de 10^1.

TQTs. La figure 5.2 représente $S^+_{\omega'_z\omega'_z}$ en fonction de la longueur d'onde transverse λ_z^+ pour chaque altitude $y^+ - \Delta y^+$.

Pour la configuration lisse, le maximum de densité spectrale de puissance pré-multipliée se situe à l'altitude $y^+ \simeq 6$ et correspond à une longueur d'onde de $\lambda_z^+ \simeq 10^2$. En présence des *riblets*, l'amplitude et la position dans le plan $(y^+ - \Delta y^+, \lambda_z^+)$ de ce maximum ne sont pas sensiblement affectées. Il en est de même pour l'ensemble des niveaux au-delà de $y^+ \simeq 10$. En dessous, des raies de densité de puissance sont visibles aux harmoniques $\lambda^+_{z,n} = \lambda^+_{z,1}/n$ de la longueur d'onde $\lambda^+_{z,1} \simeq 16$. Cette longueur d'onde correspond à la largeur crête-à-crête s^+ des *riblets*. Les raies d'intense densité de puissance sont la marque de la périodicité qu'ils introduisent.

L'étude des corrélations deux-points/un-temps est une méthode complémentaire à l'observation de structures cohérentes, dont les bases ont été introduites à la sous-section 4.4.7. La figure 5.3 représente, à chaque altitude $y^+ - \Delta y^+$, le coefficient de corrélation $C_{\omega'_z\omega'_z}$ de la composante transverse de la vorticité pour un décalage transverse ξ_z. Seuls les niveaux $[-0.1, 0, 0.1]$ sont affichés pour délimiter les zones *relativement* corrélées. On y remarque là encore que les *riblets* n'engendrent pas d'influence notable sur les structures cohérentes au-dessus de $y^+ \simeq 10$. En dessous, la périodicité induite par leur présence est également relevée.

Pour les *riblets* étudiés, la présence de TQTs n'est donc pas mise en évidence sur la répartition spectrale de puissance de ω'_z ni sur son coefficient de corrélation transverse. Notre étude ne fournit donc aucun support supplémentaire aux observations et à la théorie de García-Mayoral & Jiménez [94]. Elle ne les met pas en défaut pour autant : la dimension des *riblets* ayant été choisie pour que la réduction de traînée soit optimale, elle est trop faible pour que le mécanisme de rupture soit prédominant. Ainsi, une étude similaire avec des *riblets* de dimension supérieure serait nécessaire pour apporter un éclairage sur ce point.

Néanmoins, cette étude a permis d'établir que des *riblets*, dans leur régime de réduction de traînée optimale, n'induisent pas de changement appréciable sur les structures turbulentes du cycle-

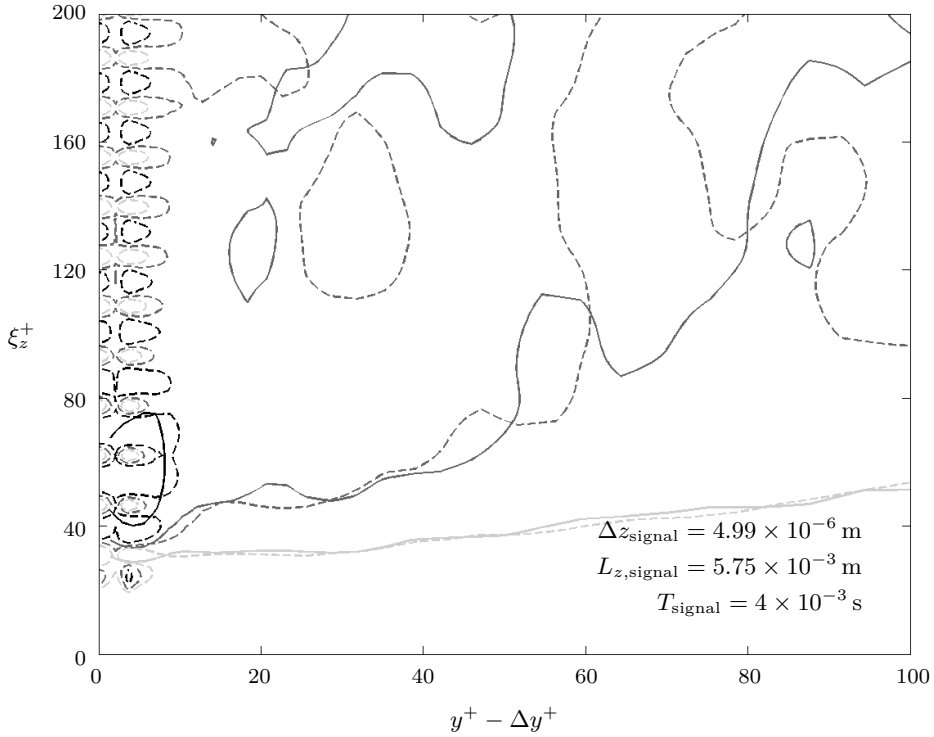


FIGURE 5.3 – Iso-valeurs dans la plan $(y^+ - \Delta y^+, \xi_z^+)$ du coefficient de corrélation $C_{\omega_z'\omega_z'}$ pour la configuration lisse (———) et celle avec *riblets* (– – –) au nombre de Reynolds $Re_\theta = 1000$. Les niveaux tracés sont 0.1 (*en gris clair*), 0 (*en gris foncé*) et −0.1 (*en noir*).

proche paroi. Ainsi, ni la répartition énergétique suivant les échelles spatiales et temporelles ni les longueurs de corrélations ne sont affectées au-delà des quelques premières unités de paroi, si l'origine de l'axe y est décalée de $\Delta y^+ = \Delta u^+$ par rapport à celle basée sur la décomposition FIK.

5.3.3 Bilans énergétiques

Les bilans d'énergie cinétique turbulente ont été présentés dans la sous-section 4.4.8 pour les configurations de plaque plane et de *riblets*. En observant la figure de *gauche* de 4.27, on avait alors pu remarquer que les profils du cas avec *riblets* semblaient translatés par rapport à ceux du cas de référence. À la lumière de l'analyse conduite dans l'article présenté dans la section précédente, on a représenté sur la figure 5.4 les profils en unité de paroi du bilan de k en fonction de $y - \Delta y^+$ avec $\Delta y^+ = \Delta u^+ = 1.4$. On constate que les profils pour l'ensemble des termes se superposent parfaitement sur toute l'étendue de la couche limite. Ainsi, au-delà de la sous-couche additionnelle d'épaisseur Δy^+, les *riblets* conservent l'intensité et la répartition de l'ensemble des mécanismes interagissant avec la turbulence, qu'ils soient liés à la viscosité, à la pression ou à l'écoulement moyen. Ce résultat va aussi dans le sens d'une similitude entre l'écoulement au-dessus des *riblets* et l'écoulement composite défini à la fin de la sous-section 5.3.1.

Les profils représentés sur la figure 5.4 sont tous adimensionnés en unité de paroi. Le frottement pariétal étant moindre sur la paroi couverte de *riblets*, la vitesse u_τ utilisée pour l'adimensionnement en unité de paroi y possède une valeur plus faible que dans le cas de plaque plane. La superposition des profils du bilan de k adimensionnés en unité interne implique que, lorsqu'ils sont dimensionnés ou adimensionnés en unité externe, les profils relatifs aux *riblets* sont d'intensité plus faible que ceux relatifs à la plaque plane (comme cela est aussi le cas pour les intensités fluctuantes, représentées en unité interne et en unité externe sur les figures 4.18). On peut donc en conclure que la présence des *riblets* engendre une chute de l'énergie cinétique turbulente et, dans la même proportion, de l'ensemble des termes de son bilan.

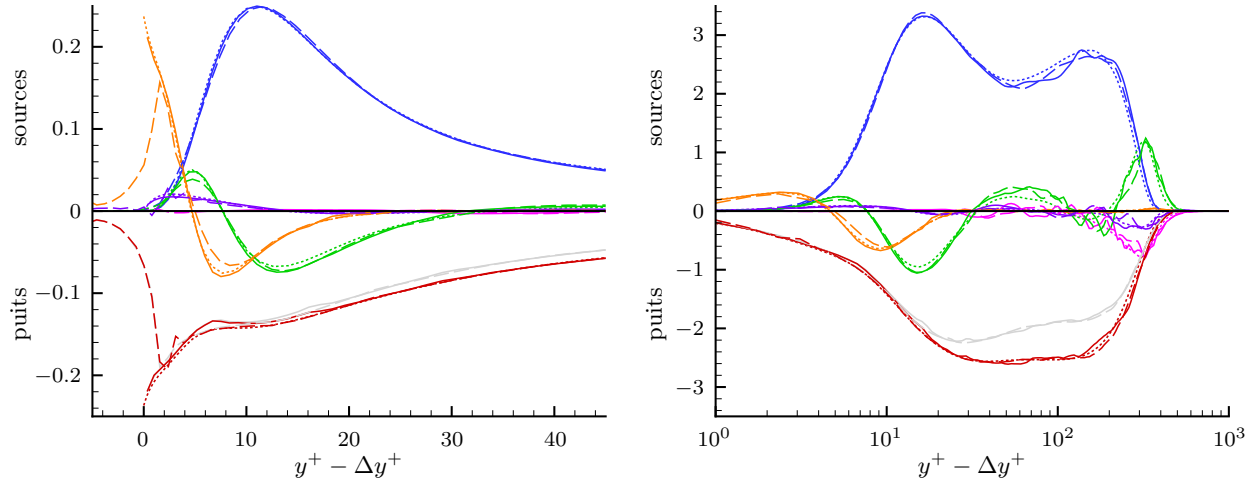


FIGURE 5.4 – Termes (*à gauche*) et termes pré-multipliés par $y^+ - \Delta y^+$ (*à droite*) du bilan d'énergie cinétique turbulente (1.22) en unité de paroi au nombre de Reynolds $Re_\theta = 1000$ pour la configuration lisse ($\Delta y^+ = 0$, ——) et celle avec *riblets* ($\Delta y^+ = 1.4$, – – –). Les données des simulations DNS de Schlatter & Örlü [238] ($\Delta y^+ = 0$, ·····) sont également représentées. Les termes sont respectivement ceux de convection (*rose*), de production (transfert de $\mathcal{K}$ vers k) (*bleu*), de dissipation (*rouge*), de diffusion visqueuse (*orange*), de diffusion turbulente (*vert*) et de diffusion par la pression (*violet*). La dissipation totale est obtenue en sommant la dissipation résolue, représentée *en gris*, et les dissipations sous-maille et numérique (calculées comme terme résiduel du bilan).

On peut alors se demander de quelle manière les *riblets* induisent la chute des niveaux turbulents. Est-ce que les *riblets* perturbent le cycle proche-paroi de la turbulence de sorte à atténuer la production de k, c'est-à-dire le transfert d'énergie entre $\mathcal{K}$ et k, provoquant alors une baisse du niveau d'énergie cinétique turbulente k ? Ou alors, est-ce que la baisse du niveau de k est provoquée par une augmentation de la dissipation d'énergie turbulente ? Dans chacun de ces cas, la baisse du niveau d'énergie cinétique fluctuante engendre, par la suite, une réduction du transfert de quantité de mouvement vers la paroi, du cisaillement moyen, puis du frottement pariétal. Un nouvel équilibre s'établit alors dans cet écoulement au cisaillement réduit et au faible niveau de k, dans lequel l'intensité de l'ensemble des termes du bilan est réduite en conséquence. Afin de mieux comprendre le mécanisme expliquant la réduction de traînée des *riblets*, il peut alors être intéressant de comprendre sur le(s)quel(s) des termes du bilan ils influent directement.

Les termes du bilan d'énergie cinétique turbulente ont alors été intégrés entre la paroi et l'extérieur de la couche limite, pour chacune des stations x. L'intégrale dans le plan (y, z) des termes de diffusions (visqueuse, turbulente et par la pression) est quasiment nulle. Seul subsiste l'effet de la diffusion selon x dont l'intensité est bien plus faible. Ces termes de diffusion ont tous été regroupés ensemble et ajoutés au terme de convection. L'ensemble {diffusion + convection} contient alors l'ensemble des termes de transport. Pour compléter le bilan, il faut également prendre en compte les termes de dissipation et de production.

L'évolution des termes du bilan intégrés est représentée sur la figure 5.5. À *gauche* de la figure, où les données sont adimensionnées en unité de paroi, les courbes avec et sans *riblets* sont d'une très grande similarité, hormis à proximité des extrémités amont et avale de la zone de contrôle. Ce résultat confirme que très vite après avoir été perturbée par la mise en place ou par la suppression du contrôle, la turbulence retrouve un équilibre adapté avec le cisaillement local, et donc avec l'adimensionnement interne. Ces courbes, ainsi adimensionnées, ne nous permettent donc pas d'éclaircir la nature de l'influence des *riblets*, puisque la perturbation du frottement et l'adimensionnement se mêlent à la perturbation engendrée sur chaque terme du bilan. Les mêmes données sont alors tracées, sans adimensionnement, sur la partie *droite* de la figure 5.5. Comme attendu, les niveaux de production et de dissipation sont tous deux diminués en présence de *riblets*. Il est néanmoins

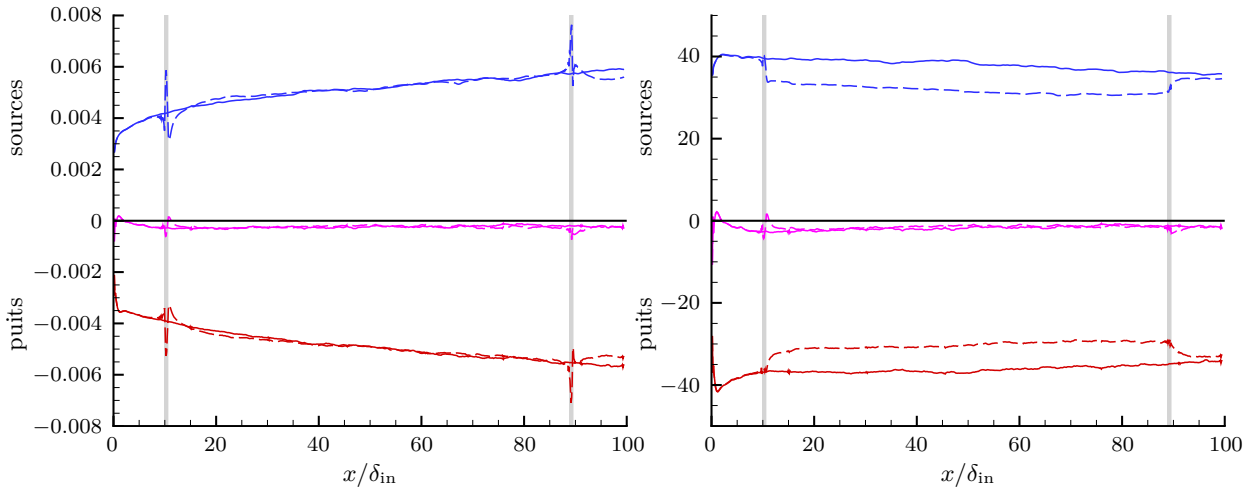


FIGURE 5.5 – Évolution avec x des termes du bilan d'énergie cinétique turbulente (1.22) intégrés sur chaque plan x en unité de paroi (*à gauche*) et sans adimensionnement (*à droite*) pour la configuration lisse (——) et celle avec *riblets* (– – –). Les termes sont respectivement ceux de transport (convection et diffusion) (*rose*), de production (*bleu*) et de dissipation (*rouge*). Les zones de transition entre plaque plane et *riblets* sont indiquées en *gris clair*.

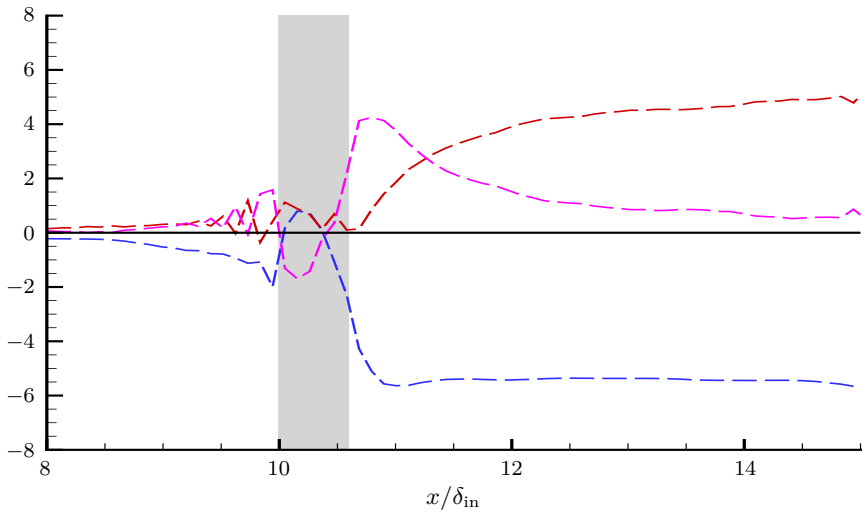


FIGURE 5.6 – Différence entre les niveaux des configurations avec et sans *riblets* des termes du bilan d'énergie cinétique turbulente (1.22) intégrés sur chaque plan x. Les termes sont respectivement ceux de transport (convection et diffusion) (*rose*), de production (*bleu*) et de dissipation (*rouge*). La zone de transition de la plaque plane vers les *riblets* est indiquée en *gris clair*.

difficile de déterminer, sur cette figure, lequel des deux est affecté le premier et entraîne la chute du second.

Afin de mettre en évidence l'influence des *riblets*, la différence entre les niveaux des configurations avec et sans *riblets* est représentée sur la figure 5.6. On se focalise ici sur la transition amont, de la plaque plane vers la zone de *riblets*. On y observe que le terme de production subit une chute rapide. Son déficit se stabilise très vite alors que la dissipation a tout juste commencé à évoluer. C'est donc bien sur la production d'énergie cinétique turbulente que les *riblets* influent directement. La chute de la dissipation n'en est qu'une conséquence indirecte.

Alors qu'un délai spatial d'environ $0.5\,\delta_{\text{in}}$ est nécessaire à la production pour atteindre son nouvel équilibre, il faut environ $4\,\delta_{\text{in}} \simeq 1000\,l_\tau$ pour le terme de dissipation. Dans l'intervalle, c'est le terme de transport qui permet de maintenir l'équilibre du bilan. Il subit une hausse soudaine pour compenser la chute de la production, puis retombe à son niveau canonique à mesure que la dissipation s'adapte progressivement au niveau de production atténuée. Le fait que le terme de transport subisse une hausse transitoire témoigne qu'il y existe un déficit d'énergie entre ce qui est localement produit et dissipé. La convection et la diffusion jouent alors le rôle de tampon en y transportant de l'énergie produite ailleurs.

Si, contrairement à ce qui a été constaté, les *riblets* avaient influé directement, non pas sur la production, mais sur la dissipation en provoquant son augmentation, cela aurait transitoirement causé un excédent d'énergie cinétique. Le rôle de tampon aurait là encore été joué par le terme de transport qui, cette fois, aurait adopté un comportement transitoire de puits d'énergie. C'est ce comportement qui a été observé par Ricco *et al.* [224] lors de leur étude du contrôle de la turbulence par une paroi oscillante. Cela témoigne de la diversité des mécanismes en jeu pour les différentes stratégies de contrôles.

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, à la section 5.1, la nécessité de définition d'une origine virtuelle cohérente a tout d'abord été démontrée. En effet, le choix d'une origine pour l'axe y n'est pas évident lors de l'étude de paroi rugueuse (et, *a fortiori*, couverte de *riblets*), puisque la surface n'est pas plane. Or ce choix a une réelle influence sur l'interprétation des résultats lors des comparaisons entre les écoulements dont la paroi est couverte ou non de *riblets*. La notion d'origine virtuelle est alors définie comme étant la position particulière à laquelle la couche limite "voit" une paroi plane équivalente. Parmi les différents choix existant dans la littérature, certains sont géométriques, d'autres basés sur l'écoulement de Stokes. Néanmoins, aucun ne trouve ses fondements dans les propriétés effectives de l'écoulement turbulent étudié.

La section 5.2 reprend l'article [13] publié dans la revue *Flow, Turbulence and Combustion*. En s'appuyant sur la décomposition FIK originelle, une décomposition du frottement étendue au cas des parois complexes est tout d'abord obtenue. Au-delà des résultats apportés par une telle analyse du frottement, cette décomposition induit implicitement la définition d'une origine virtuelle, formulée comme le barycentre du frottement sur la paroi complexe pondéré par une fonction de l'altitude locale. Dans la suite de la section, l'utilisation de cette origine virtuelle permet d'établir une forte similitude entre les profils de vitesses moyennes et de tensions de Reynolds des cas avec et sans contrôle, moyennant la translation des courbes adimensionnées en unité de paroi par un décalage $\Delta y^+ = \Delta u^+ = \Delta U_\infty^+$. Ainsi, aussi complexe soit l'interaction entre les *riblets* et la turbulence, l'écoulement au-dessus des *riblets* semble être correctement caractérisé par le profil composite constitué d'une couche limite turbulente canonique placée

sur une fine couche laminaire d'épaisseur Δy^+ et de cisaillement constant.

Dans la dernière section 5.3 de ce chapitre, la similitude entre l'écoulement au-dessus des *riblets* et le profil composite est confirmée par l'observation des mouvements cohérents et des bilans énergétiques.

En effet, les densités spectrales de puissance $S^+_{u'u'}(\lambda^+_x)$ et $S^+_{\omega'_z\omega'_z}(\lambda^+_z)$ et le coefficient de corrélation deux-points/un-temps $C^+_{\omega'_z\omega'_z}(\xi^+_z)$ conservent globalement les mêmes niveaux d'intensité en présence de *riblets* lorsqu'ils sont translatés de Δy^+. Seule la présence de la périodicité de largeur s^+ induite par la disposition régulière des *riblets* marque une différence entre les deux configurations, bien que cette périodicité ne se fasse plus sentir au-delà de $y^+ \simeq 10$. La présence de tourbillons quasi-transverses n'est pas relevée dans le cas présent, bien que ces TQTs soient suggérés, dans la littérature, comme responsables de la rupture du régime visqueux de réduction de traînée des *riblets*. Leur absence peut ici être expliquée par la dimension des *riblets* proche de l'optimum de réduction de traînée, c'est-à-dire trop petite pour que le mécanisme de rupture ne se fasse véritablement sentir.

De plus, les courbes canoniques pour chacun des termes du bilan d'énergie cinétique turbulente en unité de paroi se superposent parfaitement à celles de l'écoulement contrôlé de même nombre de Reynolds Re_τ si ces dernières sont translatées de Δy^+. Cela atteste une fois de plus de la pertinence de l'écoulement composite pour décrire celui au-dessus des *riblets*. L'analyse du bilan d'énergie cinétique turbulente permet également d'établir que les *riblets* réduisent le niveau absolu (c'est-à-dire non-adimensionné) de k en altérant son terme de production, par opposition à d'autres stratégies de contrôle qui influent sur le terme de dissipation. À cause de la baisse de la production, le niveau d'énergie cinétique turbulente chute et, avec lui, le brassage turbulent de quantité de mouvement, le cisaillement moyen et le frottement pariétal. Dans ces conditions d'écoulement au cisaillement réduit, la couche limite turbulente retrouve finalement son équilibre : les tensions de Reynolds et l'ensemble des termes du bilan de k retrouvent leur niveau canonique lorsqu'ils sont adimensionnés par le frottement.

La définition de l'origine virtuelle basée sur l'identité FIK a ainsi permis d'apporter un éclairage sur la caractérisation de l'écoulement contrôlé et sur le mécanisme de réduction de traînée des *riblets*. Le chapitre 6 suivant établira l'évolution à haut nombre de Reynolds d'une couche limite caractérisée par le profil composite introduit précédemment, sous l'hypothèse d'un décalage $\Delta y^+ = \Delta u^+$ constant. En particulier, on estimera par une approche analytique la double influence des *riblets* sur le frottement pariétal et sur l'épaississement de la couche limite.

Chapitre **6**

Prévision des performances à grand nombre de Reynolds

Sommaire

6.1 Introduction 181
6.2 Article : *Friction drag reduction achievable by near-wall turbulence manipulation in spatially developing boundary-layer* 183
6.2.1 *Introduction* 183
6.2.2 *A composite model for the controlled flow* 184
6.2.3 *Direct effect : Skin-friction reduction* 186
6.2.4 *Indirect effect : Decrease of the boundary-layer thickening rate* 188
6.2.5 *Combined effects* 189
6.2.6 *Effect on the FIK decomposition* 191
6.2.7 *Comparison with real drag-reducing flow* 195
6.2.8 *Conclusions* 197
6.3 Résumé succinct de l'article 199
Conclusion du chapitre 200

6.1 Introduction

Au cours des analyses menées dans les deux chapitres précédents, la question de l'évolution du comportement des *riblets* avec le nombre de Reynolds s'est posée de façon récurrente : à mesure que l'on avance dans la direction avale, comment évolue le taux de la réduction de frottement provoquée par les *riblets* par rapport à une paroi lisse canonique à la même station x ?

Par ailleurs, il a pu être constaté que cette réduction de frottement, qui se mesure usuellement par le taux $SFRR$, peut également l'être de façon équivalente par les décalages ΔU_∞^+ et $\Delta C = \Delta u^+$ induits sur la vitesse de l'écoulement libre et sur la loi logarithmique. Les formules (2.8) et (2.14) font alors le lien entre ces grandeurs. Là encore, on peut se demander comment ces décalages ΔU_∞^+ et Δu^+ évoluent avec le développement de la couche limite ?

De plus, par leur présence, les *riblets* perturbent le développement de la couche limite, de telle sorte que les épaisseurs δ, θ ou θ^* à une station x donnée n'auront pas la même valeur que sur une plaque plane canonique. Ainsi, plutôt que de s'intéresser à la réduction de frottement obtenue par comparaison entre la paroi couverte de *riblets* et la paroi plane de référence, toutes deux prises à la même station x, des constats différents peuvent éventuellement être émis si la comparaison est effectuée à un même nombre de Reynolds. Autrement dit, quelles sont les évolutions respectives de FRR_x, FRR_θ, FRR_τ et FRR_δ à mesure que la couche limite s'épaissit ?

Les simulations LES du chapitre précédent ont apportées des éléments de caractérisation des profils de vitesses moyennes et fluctuantes des couches limites contrôlées par des *riblets*. Lorsqu'ils sont préalablement translatés d'un décalage $\Delta y^+ = \Delta u^+ = \Delta U_\infty^+$ — suivant les formules (16) et (17) de l'article précédent — les profils de l'écoulement contrôlé sont très similaires à ceux d'une couche limite canonique non-contrôlée de même nombre de Reynolds Re_τ.

À cette observation s'ajoute le constat que le décalage de vitesse ΔU_∞^+ semble relativement indépendant de l'épaississement de la couche limite, comme illustré par la figure 4.19. Cette hypothèse est de plus appuyée par les observations de la littérature [8, 254], les formules d'estimation du taux de réduction de frottement telles que (2.8) et les mécanismes de réduction de traînée des *riblets*, tous concentrés sur le cycle de turbulence proche-paroi.

Il est alors possible d'identifier l'écoulement au-dessus des *riblets* par celui d'une couche limite canonique placée sur une sous-couche visqueuse additionnelle d'épaisseur $\Delta y^+ = \Delta u^+$ constante. Le **profil composite** que l'on obtient présente l'avantage de pouvoir être caractérisé avec les diverses lois semi-empiriques qui décrivent le profil canonique de plaque plane — comme celles abordées dans la section 1.3.1 notamment.

Sous l'hypothèse centrale que, sous l'action d'un contrôle (par des *riblets* ou par une autre stratégie), une couche limite vérifie un tel profil composite, l'article suivant tente d'éclaircir les interrogations formulées précédemment quant à l'évolution de la réduction de frottement pariétal avec l'épaississement de la couche limite.

PHYSICS OF FLUIDS **28**, 035108 (2016)

Friction drag reduction achievable by near-wall turbulence manipulation in spatially developing boundary-layer

Amaury Bannier,[1] Eric Garnier,[1,a)] and Pierre Sagaut[2]
[1]*Applied Aerodynamics Department, ONERA–The French Aerospace Lab, 92190 Meudon, France*
[2]*Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, M2P2 UMR 7340, 13451 Marseille, France*

(Received 10 September 2015; accepted 29 February 2016; published online 17 March 2016)

Various control strategies, such as active feedback control or riblets, end up restraining near-wall turbulence. An analytical study is conducted to estimate the drag-reduction achievable by such control in zero-pressure-gradient turbulent boundary-layers. Based on an idealized control which damps all fluctuations within a near-wall layer, a composite flow profile is established. It leads to explicit models for both the drag-reduction and the boundary-layer development rate. A skin-friction decomposition is applied and gives physical insights on the underlying phenomena. The control is found to alter the spatial development of the boundary-layer, resulting in detrimental impact on the skin-friction. However, the drag-reducing mechanism, attributed to the turbulence weakening, is found predominant and massive drag reductions remain achievable at high Reynolds number, although a minute part of the boundary-layer is manipulated. The model is finally assessed against Large Eddy Simulations of riblet-controlled flow. © *2016 AIP Publishing LLC.* [http://dx.doi.org/10.1063/1.4943625]

I. INTRODUCTION

Engineering devices aiming at manipulating turbulence have been developed and studied for long. The benefits being sought range from drag reduction to heat transfer regulation and reactant mixing speedup. Environmental regulation policies, especially on the aeronautical industry, will maintain the interest on this field for decades.

Among others, riblets,[1,2] hydrophobic surfaces,[3,4] and active feedback control[5,6] are diverse strategies intensively studied so far. Behind those very distinct methods, a common physical feature: they all end up affecting near-wall turbulence. Some promising active feedback control strategies are tuned to suppress, or at least ease, turbulent fluctuations within a given near-wall layer or at a particular elevation.[7] Above riblets, the flow is well approached by the canonical turbulent one placed over a laminar near-wall layer in which no turbulent fluctuations are assumed to exist.[8] Super-hydrophobic walls allowing a mean slip u_{slip} in the streamwise direction lead to canonical mean and turbulent profiles[3] when the mean velocity is scaled as $u^+ - u^+_{slip}$. This boosts the mean velocity, and, therefore, reduces turbulence intensities at a given flow rate. Hence, it appears that very-localized actions at the wall or in the near-wall region can successfully achieve substantial skin-friction reduction.

Fukagata, Iwamoto, and Kasagi[9] (FIK hereafter) split the skin-friction into several contributing terms according to their physical underlying origins. Their decomposition allows a spatial localization of the contributing terms' intensity. Results evidence that, as the Reynolds number of the flow increases, a growing part of the friction can be attributed to the turbulence through the whole boundary-layer extent.[10]

a)eric.garnier@onera.fr

 ©2016 AIP Publishing LLC

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

Those two last conclusions seem contradictory: how can a near-wall localized control achieve substantial drag reduction while a major part of the friction tends to be attributed to turbulent mechanisms occurring further from the wall?

Iwamoto *et al.*[11] led an analytical development to clarify the dilemma and quantified the drag reduction achievable by near-wall manipulation at high Reynolds number. Their analysis has been conducted in the frame of turbulent channel flow, in which no spatial development occurs. However, in most of external flow applications, the boundary-layer thickening has a major influence on the drag. Indeed, the thicker the boundary-layer, the lower the drag, while the lower the drag, the lower the boundary-layer thickening rate. Drag-reducing control devices indirectly slow down the boundary-layer development, which has a detrimental effect on the drag. This secondary effect, not present in channel flow, is inherent to spatially developing turbulent boundary-layers. Whether or not it can become predominant over the beneficial drag-reduction could have important practical consequences.

The present study aims at investigating the influence of near-wall turbulence manipulation on both the spatial development and the skin-friction of zero-pressure-gradient turbulent boundary-layers (ZPGTBLs). Following Iwamoto *et al.*,[11] near-wall turbulent fluctuations are supposed to be totally damped by a control strategy considered as ideal. Direct drag-reducing effects, comparable to those observed in the channel flow case, are expected to be retrieved, but must appear along with additional repercussions due to the spatially developing nature of ZPGTBLs.

Assumptions behind the use of an "ideal" control constitute the basis of the present analytical development and are detailed in Sec. II. The direct drag-reducing effect of the control is retrieved in Sec. III while its influence on the boundary-layer development comes into Sec. IV. Later, in Sec. V, both effects are simultaneously taken into account and reveal the performance actually achievable by such a near-wall turbulence manipulation. More insight is given in Sec. VI by considering the impact of the control on each of the FIK decomposition terms. At last, the proposed model is assessed versus Large Eddy Simulation (LES) results.

II. A COMPOSITE MODEL FOR THE CONTROLLED FLOW

The ideal control considered in the present study is assumed to damp all turbulent fluctuations within a thin near-wall layer of thickness Δy^+. The superscript + denotes quantities normalized in inner (or viscous) scaling, that is, using the viscosity ν and the local friction velocity $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$, where τ_w and ρ are the wall shear-stress and the fluid density. Within the damped layer, the total shear-stress reduces to its viscous contribution, which is assumed constant, leading to

$$u^+(y^+ < \Delta y^+) = y^+, \tag{1a}$$

$$R_{ij}^+(y^+ < \Delta y^+) = 0, \tag{1b}$$

where u stands for the mean velocity and R_{ij} for the Reynolds stress tensor (in particular, the Reynolds shear-stress is denoted R_{12} or R_{xy}). At the upper boundary $y^+ = \Delta y^+$ of the controlled layer, the inner-scaled velocity equals $u^+ = \Delta u^+ = \Delta y^+$ and the shear-stress is conserved from the wall: $\tau = \tau_w$.

Above the controlled layer, turbulent fluctuations are not damped anymore. When considered in the local frame of reference moving at $u^+ = \Delta y^+$ and with a wall-normal origin located at $y^+ = \Delta y^+$, the superimposed turbulent flow is denoted with a prime,

$$y^+ = \Delta y^+ + y'^+, \tag{2a}$$

$$u^+(y^+ > \Delta y^+) = \Delta y^+ + u'^+(y'^+), \tag{2b}$$

$$R_{ij}^+(y^+ > \Delta y^+) = R_{ij}'^+(y'^+). \tag{2c}$$

Taken together, the "inner-layer viscous profile" below $y^+ = \Delta y^+$, Eqs. (1), and the "superimposed turbulent flow" above it, Eqs. (2), define the "composite profile" that characterizes the controlled flow. It is represented in Fig. 1. The inner scaling is unambiguously defined since $u'_\tau = u_\tau$, resulting from $\tau'_w = \tau(y^+ = \Delta y^+) = \tau_w$. However, outer scaling and Reynolds number definitions must be

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

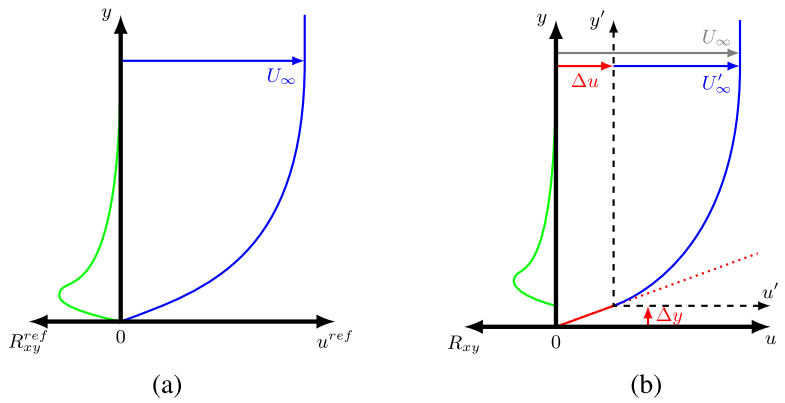


FIG. 1. Schematic mean velocity and Reynolds shear stress profiles. (a) Uncontrolled canonical ZPGTBL profiles. (b) Controlled composite profiles.

treated with care because the free-stream velocities of the composite and superimposed flows differ: $U_\infty^+ = \Delta y^+ + U_\infty'^+$.

The mean and turbulent profiles $u'^+(y'^+)$ and $R_{ij}'^+(y'^+)$ of the superimposed turbulent flow are assumed to be those of an uncontrolled canonical ZPGTBL flow, denoted by the superscript *ref*,

$$u'^+(y'^+) = u^{ref+}(y^+), \tag{3a}$$

$$R_{ij}'^+(y'^+) = R_{ij}^{ref+}(y^+). \tag{3b}$$

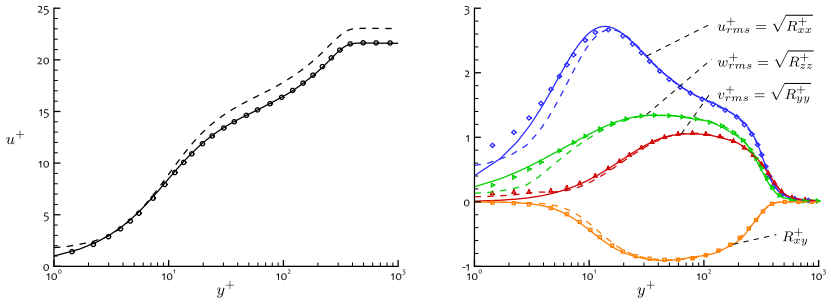
This assumption is quite strong, and one can wonder whether the above-defined composite profile with a given Δy^+ relevantly characterizes the flow that would be effectively obtained by damping near-wall fluctuations or by applying any specific control device (opposition control, riblets, super-hydrophobic wall, etc.). In this last case, the question of the definition of an equivalent damped layer thickness Δy^+ also arises.

In practice, depending on the nature of the control device, the equivalent thickness Δy^+ is determined from flow conditions and control parameters. For instance, active feedback control aims at damping fluctuations within a near-wall layer of specified thickness, thus, the definition of Δy^+ is straight-forward. For small enough riblets—that is riblets in their drag-reducing viscous-regime[2]—Δy^+ is found proportional to the riblet size and can be estimated empirically from the riblet design.[2] Unfortunately, the proportionality breaks when riblets become taller,[12] so Δy^+ cannot be increased infinitely. Flows bounded by hydrophobic walls are not accurately described by the composite profile and a model with $y^+ = y'^+$ instead of (2a) would be better suited. However, for most of the following conclusions, Δy^+ can be considered negligible against δ^+, so no significant quantitative difference has to be noted. In this case, Δy^+ corresponds to the mean streamwise slip length.[3] More generally, as long as a control device satisfies the composite profile, its value for Δy^+ can be computed *a posteriori* from the observed drag-reduction $DR_\tau = \left(c_f^{ref}(Re_\tau) - c_f(Re_\tau)\right)/c_f^{ref}(Re_\tau)$ using[8]

$$\Delta y^+ = \sqrt{\frac{2}{c_f^{ref}}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-DR_\tau}} - 1\right). \tag{4}$$

Fig. 2 shows the mean velocity and turbulent intensity profiles of flat-plate and riblet bounded flows obtained by LES.[8] Above the 8-wall-unit-tall trapezoidal riblets, the equivalent Δy^+ is found equal to 1.4. Both actual and "superimposed" profiles, obtained using (2), have been plotted aside flat-plate reference ones. Superimposed profiles $u'^+(y'^+)$ and $R_{ij}'^+(y'^+)$ perfectly collapse with $u^{ref+}(y^+)$ and $R_{ij}^{ref+}(y^+)$, at same Reynolds number $\delta'^+ = \delta^{ref+}$. Later, in Sec. VII, additional comparisons with the riblet-controlled flow will be performed for an *a posteriori* validation of the analytic development. A similar result can be evidenced using the mean and turbulent profiles from

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49



(a) (b)

FIG. 2. (a) Mean velocity and (b) turbulence intensity profiles scaled in wall-units: (*solid line*) reference canonical profiles $u^{ref+}(y^+)$ and $R_{ij}^{ref+}(y^+)$ at Reynolds number $\delta^{ref+} = 360$; (*dashed line*) actual riblet profiles $u^+(y^+)$ and $R_{ij}^+(y^+)$; (*symbols*) superimposed profiles $u'^+(y'^+)$ and $R_{ij}'^+(y'^+)$ at Reynolds number $\delta'^+ = 360$ obtained after shifting the actual riblet profiles by $\Delta y^+ = 1.4$ according to Eq. (2).

opposition control direct numerical simulation (DNS).[7] This demonstrates the relevancy of the composite profile to characterize realistic controlled ZPGTBLs. Based on pioneering DNSs of active feedback control,[5,13,14] Iwamoto *et al.*[11] reached a similar conclusion for controlled channel flows.

III. DIRECT EFFECT: SKIN-FRICTION REDUCTION

Under the effect of the previously defined ideal control, which suppresses all turbulent fluctuations within a thin layer of thickness Δy^+, the altered flow field has been assumed well characterized by composite profiles. How does it influence the drag?

The skin-friction coefficient c_f of the composite flow is given by

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} = \frac{1}{U_\infty^{+2}} = \frac{1}{(U_\infty'^+ + \Delta y^+)^2}. \tag{5}$$

To relate c_f to the flow Reynolds number, $U_\infty'^+$ must be made more explicit. Assumption (3) allows the use of canonical ZPGTBL relations for the superimposed turbulent flow, and especially, the Coles-Fernholz relation[15]

$$\sqrt{\frac{2}{c_f^{ref}}} = U_\infty^{ref+} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(Re_\theta^{ref}\right) + C, \tag{6}$$

where $Re_\theta = \theta U_\infty/\nu$ is the Reynolds number based on the momentum thickness $\theta = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u(y)}{U_\infty}\left(1 - \frac{u(y)}{U_\infty}\right)\mathrm{d}y$. Coefficients $\kappa = 0.384$ and $C = 4.127$ have been recently corrected.[16] This relation applies to high enough Reynolds number flows, imposing restrictions on the superimposed turbulent flow. Consequently, only results for which $Re'_{\theta'} = \theta' U'_\infty/\nu > 450$ are considered in the present study. This threshold is low, since a flow at such a Reynolds number does not have the properties of canonical high Reynolds number flows, though the present theory will be shown to still yield valid results even at this low Reynolds number limit.

From definitions (1) and (2) of the composite mean velocity profile, $Re_{\delta_1} = \delta_1 U_\infty/\nu$ and $Re'_{\delta'_1} = \delta'_1 U'_\infty/\nu$ on the one hand, and $Re_\theta = \theta U_\infty/\nu$ and $Re'_{\theta'} = \theta' U'_\infty/\nu$ on the other hand, can be related by

$$Re_{\delta_1} = Re'_{\delta'_1} + \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta y^+}{U_\infty^+}\right) U_\infty^+ \Delta y^+, \tag{7}$$

$$Re_\theta = \left(1 + (H' - 1)\frac{\Delta y^+}{U_\infty^+}\right) Re'_{\theta'} + \left(1 - \frac{2}{3}\frac{\Delta y^+}{U_\infty^+}\right)\frac{\Delta y^{+2}}{2}, \tag{8}$$

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

where $H' = \delta_1'/\theta'$ is the shape factor of the superimposed turbulent flow. It can be estimated using the estimation provided by Nagib *et al.*[16] for canonical ZPGTBL,

$$H^{ref}\left(U_\infty^{ref+}\right) = \frac{1}{1 - 7.135/U_\infty^{ref+}} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{7.135}{U_\infty^{ref+}}\right). \tag{9}$$

Substitution of (5) and (6) into (8) yields an explicit formula between the Reynolds number Re_θ and the friction coefficient (through $U_\infty^+ = \sqrt{2/c_f}$) of the composite flow,

$$Re_\theta = \left(1 + \left(H^{ref}(U_\infty^+ - \Delta y^+) - 1\right)\frac{\Delta y^+}{U_\infty^+}\right)e^{\kappa\left(U_\infty^+ - \Delta y^+ - C\right)} + \left(1 - \frac{2}{3}\frac{\Delta y^+}{U_\infty^+}\right)\frac{\Delta y^{+2}}{2}. \tag{10}$$

If Δy^+ is set to 0, the identity gets back to original Coles-Fernholz correlation (6). Else, if Δy^+ is assumed negligible against both U_∞^{+2} and $\sqrt{Re_\theta}$ as a first order approximation, the following modified Coles-Fernholz relation is obtained:

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = U_\infty^+ \approx \frac{1}{\kappa}\ln(Re_\theta) + C + \Delta y^+. \tag{11}$$

This approximate relation is rather precise as shown in Fig. 3(a), in which the influence of Δy^+ on the skin-friction coefficient c_f is plotted against Re_θ.

A drag reduction rate DR_θ can be computed by comparing the friction coefficients c_f of the controlled and reference cases at the same Reynolds number Re_θ,

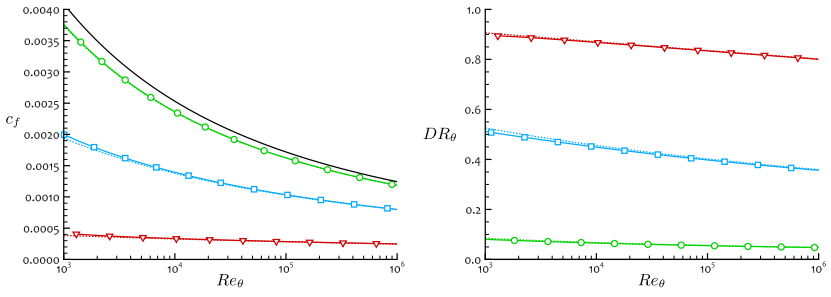
$$DR_\theta(Re_\theta) = \frac{c_f^{ref}(Re_\theta) - c_f(Re_\theta)}{c_f^{ref}(Re_\theta)} = 1 - \left(\frac{U_\infty^{ref+}(Re_\theta)}{U_\infty^+(Re_\theta)}\right)^2, \tag{12}$$

$$\approx 1 - \left(1 + \frac{\Delta y^+}{\frac{1}{\kappa}\ln(Re_\theta) + C}\right)^{-2}, \tag{13}$$

where both original and modified Coles-Fernholz friction laws (6) and (11) have been used to obtained Eq. (13).

Fig. 3(b) shows the influence of Δy^+ on $DR_\theta(Re_\theta)$. The drag reduction achieved by damping fluctuations in the — although extremely thin — near-wall part of the boundary-layer can be massive. For instance, at $Re_\theta = 10^5$, the boundary-layer thickness of the uncontrolled flow is about $\delta_{99}^{ref+} \approx 3 \cdot 10^4$, meaning that $\Delta y^+ = 10$ is less than a thousandth of the boundary-layer. Yet, the damping of the fluctuations in this minute layer results in a substantial 40% drag reduction.

The control efficiency for a given Δy^+ decreases when the Reynolds number Re_θ increases. However, the dependency is weak and significant drag reductions are still achievable even at large Reynolds number.



(a) (b)

FIG. 3. Influence of the damped layer thickness Δy^+ on (a) the skin-friction coefficient c_f and (b) the drag reduction rate DR_θ versus Re_θ: (black solid line) no control; (green solid line, circle) $\Delta y^+ = 1$; (blue solid line, square) $\Delta y^+ = 10$; (red solid line, triangle) $\Delta y^+ = 30$. First-order approximations obtained from (11) and (13) are plotted with *dotted lines* aside the corresponding exact solutions.

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

The drag reduction $DR_\theta\,(Re_\theta)$ observed here in a controlled ZPGTBL is closely similar to what is obtained in a channel flow on which the same near-wall fluctuation damping is applied. With $\Delta y^+ = 10$, Iwamoto *et al.*[11] reports a 37% drag reduction for turbulent channel flow at $Re_\tau^{ref} = \delta^{ref+} = 3 \cdot 10^4$. This value is consistent with the 40% obtained here in a spatially developing boundary-layer.

IV. INDIRECT EFFECT: DECREASE OF THE BOUNDARY-LAYER THICKENING RATE

Unlike channel or pipe flows, spatially developing boundary-layers are not statistically homogeneous in the streamwise direction: they develop, thicken, and their Reynolds numbers increase. Their development rate is related to the skin-friction through the momentum-integral equation.[17] In the present case of two-dimensional zero-pressure-gradient boundary-layer, this relation is simply formulated by

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{c_f}{2} = \frac{1}{U_\infty^{+2}}. \tag{14}$$

Because c_f is greatly reduced by the control, the streamwise thickening rate of the boundary-layer is expected to be decreased. Eq. (14) can be integrated to relate the physical streamwise location x to the momentum thickness θ

$$Re_x(Re_\theta) = Re_x^{offset} + \int^{Re_\theta} U_\infty^{+2}\,\mathrm{d}Re_\theta. \tag{15}$$

For uncontrolled flows, after substitution of skin-friction Coles-Fernholz relation (6) into (15), the streamwise development of the boundary-layer thickness can be solved analytically[16] and yields

$$Re_x^{ref}(Re_\theta) = \frac{1}{\kappa^2}\Big(\big(\ln(Re_\theta) + \kappa C - 1\big)^2 + 1\Big)Re_\theta, \tag{16}$$

where the integration offset $Re_x^{offset,ref}$ has been arbitrarily set to 0 which indirectly set the x-origin.

For controlled flows, the relation $U_\infty^+(Re_\theta)$ is implicitly given by relation (10). Because no explicit form can be derived, an analytic expression is inaccessible. Numerical integration must be performed to express the evolution of Re_x with respect to Re_θ. However, if one used approximated law (11) instead of (10), analytical solving yields

$$Re_x(Re_\theta) \approx Re_x^{offset} + \frac{1}{\kappa^2}\left(\big(\ln(Re_\theta) + \kappa C + \kappa\Delta y^+ - 1\big)^2 + 1\right)Re_\theta, \tag{17}$$

where Re_x^{offset} is to be adjusted such that $Re_x(Re_\theta^{ini}) = Re_x^{ref}(Re_\theta^{ini})$ with Re_θ^{ini} the Reynolds number at the location where the control starts. That is,

$$Re_x^{offset}(Re_\theta^{ini}) = -2\left(\frac{1}{\kappa}\ln(Re_\theta^{ini}) + C + \frac{\Delta y^+}{2} - \frac{1}{\kappa}\right)\Delta y^+\,Re_\theta^{ini}. \tag{18}$$

Fig. 4(a) shows the streamwise development of the boundary-layer thickness Re_θ for different damped layer thicknesses $\Delta y^+ \in \{1, 10, 30\}$ and for control applied from different locations $Re_x^{ini} \in \{10^6, 10^7, 10^8\}$ (corresponding to $Re_\theta^{ini} \in \{2.1 \cdot 10^3, 1.4 \cdot 10^4, 1.0 \cdot 10^5\}$. As expected, the growth rate of the boundary-layer is decreased by the control. For instance, with $\Delta y^+ = 10$ and $Re_x^{ini} = 10^6$, the controlled boundary-layer thickness at physical location $Re_x = 10^7$ is reduced by more than a third ($Re_\theta = 9.0 \cdot 10^3$) compared to the reference case ($Re_\theta^{ref} = 1.4 \cdot 10^4$). While the dependence of Δy^+ on the boundary-layer thickening remains high, the influence of the control starting location Re_x^{ini} tends to soften downstream a transient of about a decade. In other words, from the location $Re_x \approx 10\,Re_x^{ini}$, the momentum thickness becomes comparable to the one that would have been obtained with a control applied from any earlier location and, in particular, from the very beginning of the plate. The boundary-layer thickening of this limiting case, for which Re_x^{ini} and Re_θ^{ini} approach zero, is obtained by setting $Re_x^{offset} = 0$ in relation (17). After the decade-long declining transient, the momentum thickness ratio $Re_\theta/Re_\theta^{ref}$ starts increasing very slightly, so that it can be considered as roughly constant over the wide range of Reynolds number displayed in Fig. 4(b). In

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

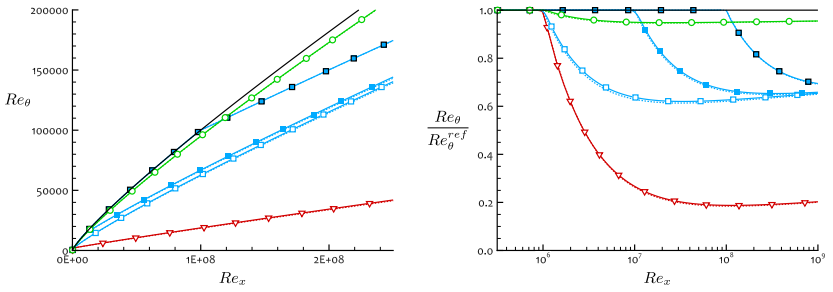


FIG. 4. Influence of both the damped layer thickness Δy^+ and the control starting location Re_x^{ini} on (a) the momentum thickness Reynolds number Re_θ and (b) its ratio to the reference uncontrolled one $Re_\theta/Re_\theta^{ref}$: (black solid line) no control; (green solid line, empty circle) $Re_x^{ini} = 10^6$, $\Delta y^+ = 1$; (blue solid line, empty square) $Re_x^{ini} = 10^6$, $\Delta y^+ = 10$; (blue solid line, filled square) $Re_x^{ini} = 10^7$, $\Delta y^+ = 10$; (blue solid line, box filled square) $Re_x^{ini} = 10^8$, $\Delta y^+ = 10$; (red solid line, empty triangle) $Re_x^{ini} = 10^6$, $\Delta y^+ = 30$. First-order approximations obtained from (17) are plotted with *dotted lines* aside the corresponding exact solutions.

the limit of infinite Reynolds number Re_x however, this ratio asymptotically approaches unity, even though the gap between the reference and the controlled momentum thicknesses, $Re_\theta^{ref} - Re_\theta$, grows to infinity. In the light of the analysis conducted in Sec. V, a complementary interpretation for this behavior will be developed.

A decrease of the boundary-layer thickening rate has a detrimental influence on the friction drag: indeed, the thicker the boundary-layer, the weaker the skin-friction. By way of illustration, consider the case of a control with $\Delta y^+ = 10$ and $Re_x^{ini} = 10^6$. At location $Re_x = 10^7$, where $Re_\theta = 9.0 \cdot 10^3$ and $Re_\theta^{ref} = 1.4 \cdot 10^4$, the two effects induced by the control are the following:

- a skin-friction reduction with respect to the uncontrolled case at same Re_θ. This is the direct effect, addressed in Sec. III. Using Eq. (12) or Fig. 3(b), one gets $DR_\theta(Re_\theta = 9.0 \cdot 10^3) \approx 45\%$.
- a decrease of the boundary-layer thickening rate compared to the uncontrolled case. This is the indirect effect. By growing naturally, the uncontrolled boundary-layer friction has felt down to $c_f^{ref}(Re_\theta^{ref} = 1.4 \cdot 10^4) = 2.37 \cdot 10^{-3}$ while it would have been 9% higher with the slow boundary-layer growth of the controlled case $c_f^{ref}(Re_\theta = 9.0 \cdot 10^3) = 2.58 \cdot 10^{-3}$.

When both effects are taken into account, the effective drag benefit is slightly smaller (40%) than when predicted by taking into account only the first effect.

An additional consequence of the narrowing of the boundary-layer, beneficial for once, has been underlined by Spalart and McLean.[18] A boundary-layer of reduced displacement thickness will be subject to a smaller viscous pressure drag. Hence, far from fundamental zero-pressure-gradient flat-plate studies, practical applications may take advantage of this indirect effect to reduce their total drag, avoid separation, or even beneficially interact with shock waves.

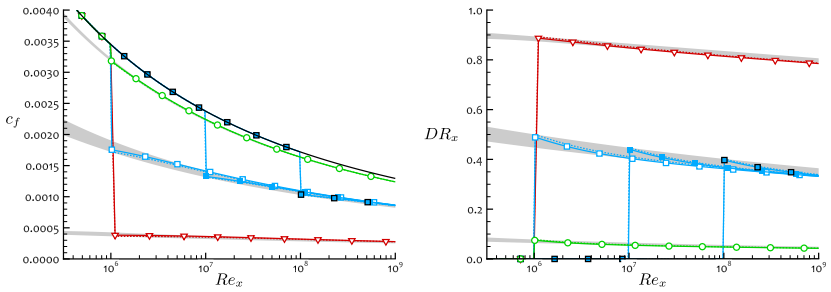
V. COMBINED EFFECTS

It has been shown that the two effects engendered by the control lead to opposite consequences on the drag: the direct effect reduces the skin-friction while the indirect one tends to increase it. One can wonder whether the drag of the controlled boundary-layer at a given location Re_x may not finally exceed that of the uncontrolled-but-thicker boundary-layer.

To answer this concern, the drag reduction at fixed Re_x must be computed. Using the friction laws (6) and (11) — relating $c_f = 2/U_\infty^2$ and Re_θ — and the boundary-layer growth laws (16) and (17) — relating Re_θ and Re_x — the following analytical expressions between $U_\infty = \sqrt{2/c_f}$ and Re_x can be established:

$$Re_x^{ref}(U_\infty^+) = \frac{1}{\kappa^2}\left(1 + \left(\kappa U_\infty^+ - 1\right)^2\right) e^{\kappa(U_\infty^+ - C)}, \tag{19a}$$

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49



(a) (b)

FIG. 5. Influence of both the damped layer thickness Δy^+ and the control starting location Re_x^{ini} on (a) the skin-friction coefficient c_f and (b) the drag reduction rate DR_x: (black solid line) no control; (green solid line, empty circle) $Re_x^{ini} = 10^6$, $\Delta y^+ = 1$; (blue solid line, empty square) $Re_x^{ini} = 10^6$, $\Delta y^+ = 10$; (blue solid line, filled square) $Re_x^{ini} = 10^7$, $\Delta y^+ = 10$; (blue solid line, box filled square) $Re_x^{ini} = 10^8$, $\Delta y^+ = 10$; (red solid line, empty triangle) $Re_x^{ini} = 10^6$, $\Delta y^+ = 30$. First-order approximations obtained from (17) are plotted with *dotted lines* aside the corresponding exact solutions. (*Shadings*) Envelopes obtained from (21) and (22) in which curves for controlled flows must lie whatever Re_x^{ini}.

$$Re_x\left(U_\infty^+\right) \approx \frac{1}{\kappa^2}\left(1+\left(\kappa U_\infty^+ - 1\right)^2\right) e^{\kappa\left(U_\infty^+ - \Delta y^+ - C\right)} + Re_x^{offset}(Re_\theta^{ini}), \tag{19b}$$

where $Re_x^{offset}(Re_\theta^{ini})$ has been given in (18). The last formula rests upon the approximations $\Delta y^+ \ll U_\infty^{+2}$ and $\Delta y^+ \ll \sqrt{Re_\theta}$ made to obtain (11) and (17). It is however possible to compute numerically the relation between Re_x and c_f without approximations using directly (10) and (15). Results are displayed in Fig. 5(a).

Like DR_θ, the drag reduction DR_x with respect to a given physical abscissa Re_x is defined by

$$DR_x(Re_x) = \frac{c_f^{ref}(Re_x) - c_f(Re_x)}{c_f^{ref}(Re_x)} = 1 - \left(\frac{U_\infty^{ref+}(Re_x)}{U_\infty^+(Re_x)}\right)^2. \tag{20}$$

DR_x is represented against Re_x in Fig. 5(b) for boundary-layers controlled with different damped layer thicknesses Δy^+ and starting locations Re_x^{ini}. As expected, the greater Δy^+, the greater the drag reduction. However, counter-intuitively, c_f is weaker when the control has been recently applied. Indeed, for a given Δy^+, the latter the control starts — i.e., the higher Re_θ^{ini} — the thicker the boundary-layer and thus the weaker the skin-friction c_f. This reasoning found mathematical justification in (18) and (19b) when considering the location Re_x at which a particular level of friction c_f will finally be reached.

The two extreme situations are the following:

- the case of a control applied from the very beginning of the boundary-layer: $Re_\theta^{ini} \approx 0$. This case is the one for which the boundary is the thinnest possible, resulting in the highest friction coefficient for a controlled flow, $c_{f,max}$, and the corresponding lowest inner-scaled free-stream velocity, $U_{\infty,min}^+$. Using (18) and (19b), $U_{\infty,min}^+(Re_x)$ can be implicitly approached by

$$Re_x \approx \frac{1}{\kappa^2}\left(\left(\kappa U_{\infty,min}^+ - 1\right)^2 + 1\right) e^{\kappa\left(U_{\infty,min}^+ - \Delta y^+ - C\right)}. \tag{21}$$

- the case of a control which has started immediately upstream of the observed location Re_x. This case is the one for which the boundary is the thickest possible, almost the uncontrolled boundary-layer thickness. Thus, it leads to the lowest skin-friction coefficient for a controlled flow, $c_{f,min}$, and the corresponding $U_{\infty,max}^+$ related to Re_x by

$$Re_x \approx \frac{1}{\kappa^2}\left(\left(\kappa U_{\infty,max}^+ - \kappa\Delta y^+ - 1\right)^2 + 1\right) e^{\kappa\left(U_{\infty,max}^+ - \Delta y^+ - C\right)}. \tag{22}$$

For each Δy^+, those two limiting cases define an envelope in which the skin-friction of controlled boundary-layers must lie, wherever the control has started. This envelope is represented

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

in Fig. 5. It can be observed that, at a given plate location Re_x, the evolution with Δy^+ of the width of that envelope is not monotonic: for instance, at $Re_x = 10^6$, the envelope for $\Delta y^+ = 10$ is wider than for $\Delta y+ = 1$ and $\Delta y+ = 30$. The reason for this non-monotonic behavior remains an open question. Even in the less favorable case, that is when $Re_\theta^{ini} \approx 0$, the skin-friction $c_{f,max}$ of the controlled flow remains below the uncontrolled one c_f^{ref}. This answers the previous concern: a controlled boundary-layer, although thinner, always generates less drag at a physical location x than the uncontrolled one. The direct drag-reduction of the control always dominates the detrimental effect of the boundary-layer thickening delay.

To reduce the skin-friction c_f at a given location Re_x, it has been established that the optimal tuning is to make Δy^+ as important as possible and to place Re_x^{ini} just upstream the location of interest Re_x. Are those control parameters also optimal for the reduction of the friction drag accumulated from the beginning of the plate to that location Re_x?

The accumulated skin-friction from the leading edge of a plate is amounted to by the momentum thickness. This is a straightforward result from the integration of (14). Hence, the cumulative effect of drag reduction along the plate is directly visible in Fig. 4. Conclusions stated earlier about the evolution of Re_θ can be brought back with this new perspective: with strong dependence in Δy^+ and vanishing influence of Re_x^{ini}, the earlier the control is applied, the lower the cumulative drag. When a plate with a given Re_x^{ini} is getting longer, the high skin-friction accumulated before the presence of the control is contributing in a decreasing proportion of the total drag. Having in mind that Re_θ is proportional to the accumulated drag, this explains both the initial decline of curves $Re_\theta/Re_\theta^{ref}$ in Fig. 4(b) and the weakening influence of Re_x^{ini} for further-off station $Re_x \gtrsim 10\,Re_x^{ini}$. However, the gentle increase of curves in Fig. 4(b) once passed the initial declining transient also has to be interpreted. As mentioned earlier in this section, the drag reduction DR_x decreases, although slightly, with the Reynolds number. Hence, at far enough location Re_x, the friction of the controlled flow is getting only weakly lower than the one of the reference uncontrolled case, meaning that the total drag on the two plates tends to accumulate at almost the same rate from this location. This explains why the ratio between their two accumulated drags approaches asymptotically 1 when $Re_x \to \infty$, even though the gap between them is still slowly increasing and tends towards infinity. Those two seemingly contradictory trends are visually evidenced in Figs. 4(a) and 4(b).

Hence, two somewhat opposite consequences can be underlined: a control applied early ($0 \leftarrow Re_x^{ini}$) minimizes the accumulated drag, while a control applied late ($Re_x^{ini} \to Re_x$) minimizes the local drag at downstream locations Re_x. In both cases, as long as the controlled flow can still be characterized by the composite profile, the bigger Δy^+, the stronger the effect.

Note that in practice, Δy^+ cannot be extended infinity. For opposition control, the detection plane must not be located too far from the wall.[5] The optimal value is found within 10–20 wall units from the wall, where sweeps and ejections occur. With riblets, Δy^+ grows linearly with the riblet size until the apparition of Kelvin–Helmholtz-like instabilities.[12] Those instabilities end up disturbing the flow, such that it cannot be described any more by the composite profile and the drag finally increases. Riblets studied so far hardly outperform 10% drag-reduction at moderate Reynolds number, $Re_\theta \approx O(10^3)$, reflecting an equivalent damped layer thickness around unity.

VI. EFFECT ON THE FIK DECOMPOSITION

It has been shown that impending turbulence in a tiny near-wall part of the boundary-layer can lead to a considerable drag reduction. In the channel flow case, the drag reduction has been related to a drastic decrease of Reynolds stresses not only in the thin controlled layer but also across the entire boundary-layer extent.[11]

To clarify what link can be made between c_f and R_{ij} in the case of a ZPGTBL, the FIK decomposition[9] is used to split the skin-friction into three terms, respectively, the "laminar," "turbulent," and "spatially heterogeneous" contributions,

$$c_f = c_{f,1} + c_{f,2} + c_{f,3} \tag{23}$$

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

with

$$c_{f,1} = \frac{4}{Re_\delta}\int_0^\delta \frac{u}{U_\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\delta} \quad = \quad \frac{4}{Re_\delta}\left(1-\frac{\delta_1}{\delta}\right), \tag{24a}$$

$$c_{f,2} = 4\int_0^\delta \left(1-\frac{y}{\delta}\right)\frac{-R_{xy}}{\rho U_\infty^2}\frac{\mathrm{d}y}{\delta}, \tag{24b}$$

$$c_{f,3} = -4\int_0^\delta \frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2\frac{\delta}{\rho U_\infty^2}\left(I_x+\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\delta}, \tag{24c}$$

$$I_x = \rho u_i\frac{\partial u}{\partial x_i} - \rho\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial R_{xx}}{\partial x}. \tag{24d}$$

In a fully developed laminar channel flow, all terms but $c_{f,1}$ equals zero, hence, the decomposition reduces to its sole "laminar" term. In the case of turbulent channel flow, the "turbulent" term $c_{f,2}$ also comes into play. Finally, in the present case of spatially developing turbulent boundary-layer, $c_{f,3}$ accounts for the spatial evolution in the streamwise direction, so none of the three terms vanish.

The scope of this section is to determine to what extent the control influences each of those terms.

A. Laminar contribution $c_{f,1}$

The FIK decomposition, and in particular, the "laminar" term $c_{f,1}$, directly depends on the definition of the boundary-layer thickness. In the case of a channel flow, δ is unambiguously defined as the channel half-width. For spatially developing boundary-layer, the 99% free-stream boundary-layer thickness δ_{99} is customary, but arbitrary, made used of. Nagib *et al.*[16] derived its expression by substituting generic outer velocity profile (25) evaluated at $y = \delta_{99}^{ref}$ into δ_1-based Coles-Fernholz relation (26),

$$u^{ref+}(y^+) = \frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + B + \frac{\Pi}{\kappa}\mathcal{W}\left(\frac{y^+}{\delta^{ref+}}\right), \tag{25}$$

$$U_\infty^{ref+} = \frac{1}{\kappa}\ln(Re_{\delta_1}^{ref}) + C_1, \tag{26}$$

with $B = 4.173$, $\Pi = 0.55$, $\mathcal{W}(0.99) \approx \mathcal{W}(1) = 2$, and $C_1 = 3.354$. Using the same methodology, a 100% free-stream thickness $\delta = \delta_{100}$ can be computed. In order to ease analytical developments in the remaining of this paper, this choice of boundary-layer thickness is used. For the uncontrolled flow, one obtains

$$\delta^{ref+} = Re_{\delta_1}^{ref}/e^{2\Pi+\kappa(B-C_1)}. \tag{27}$$

For the composite profile, the boundary-layer thickness satisfies

$$\begin{aligned}\delta^+ &= \delta'^+ + \Delta y^+ \\ &= Re'_{\delta'_1}/e^{2\Pi+\kappa(B-C_1)} + \Delta y^+ \\ &= Re_{\delta_1}/e^{2\Pi+\kappa(B-C_1)} + O\left(U_\infty^+\Delta y^+\right),\end{aligned} \tag{28}$$

where (2) and (7) has been used.

The laminar contribution $c_{f,1}$ of a controlled boundary-layer is compared to that of the uncontrolled reference taken at the same Re_δ by

$$\frac{c_{f,1}(Re_\delta)}{c_{f,1}^{ref}(Re_\delta)} = \frac{Re_\delta - Re_{\delta_1}(Re_\delta)}{Re_\delta - Re_{\delta_1}^{ref}(Re_\delta)}, \tag{29}$$

where $Re_{\delta_1}^{ref}$ and Re_{δ_1} can be expressed as functions of $Re_\delta = \delta^+ U_\infty^+$ from (27) and (28). This yields, after simplifications,

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

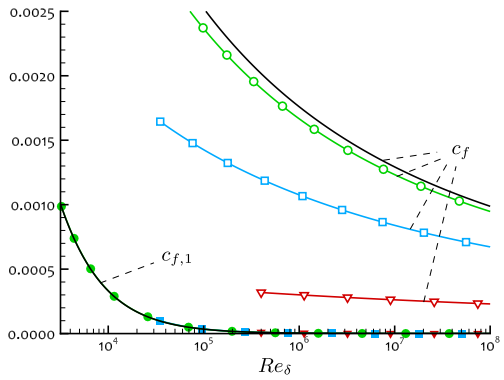


FIG. 6. Influence of the damped layer thickness Δy^+ on (*empty symbols*) the skin-friction coefficient c_f and (*filled symbols*) its laminar contribution $c_{f,1}$: (black solid line) no control; (green solid line, circle) $\Delta y^+ = 1$; (blue solid line, square) $\Delta y^+ = 10$; (red solid line, triangle) $\Delta y^+ = 30$. Only data for which $\delta^+ > 100\Delta y^+$ are shown.

$$\frac{c_{f,1}(Re_\delta)}{c_{f,1}^{ref}(Re_\delta)} = 1 + \frac{Re_{\delta_1}^{ref}(Re_\delta)}{Re_\delta - Re_{\delta_1}^{ref}(Re_\delta)}\left(1 - \frac{U_\infty^{ref+}(Re_\delta)}{U_\infty^+(Re_\delta)}\right) + O\left(\frac{\Delta y^+}{\delta^+}\right)$$
$$= 1 + O\left(\frac{Re_{\delta_1}^{ref}(Re_\delta)}{Re_\delta} DR_\delta(Re_\delta)\right) + O\left(\frac{\Delta y^+}{\delta^+}\right). \tag{30}$$

For today's realistic control (for which $DR \lesssim 10\%$) and high enough Reynolds number (such that $Re_{\delta_1} \lesssim 0.1 Re_\delta$), the laminar skin-friction contribution $c_{f,1}(Re_\delta)$ can be considered as weakly affected by the control: $c_{f,1}(Re_\delta) \approx c_{f,1}^{ref}(Re_\delta)$. This result is evidenced in Fig. 6, where curves of $c_{f,1}(Re_\delta)$ for the reference and for all the controlled flows all perfectly overlap.

The "laminar" contribution only depends on the mean velocity profile. Hence, the disturbance of the mean flow induced by the control does not straightforwardly explain the drag reduction, regardless whether controlled and uncontrolled flows are compared at equivalent Re_δ or Re_τ (as evidenced using (27) and (28)).

B. Turbulent contribution $c_{f,2}$

The Reynolds stresses of the superimposed turbulent flow, $R_{ij}^{\prime+}(y'^+) = R_{ij}^+(y^+ > \Delta y^+)$, have been assumed in Eq. (3b) to follow the profiles $R_{ij}^{ref+}(y^+)$ of the uncontrolled boundary-layer at same Reynolds number Re_τ, that is such that: $\delta^{ref+} = \delta'^+ = \delta^+ - \Delta y^+$. Making explicit the inner scaling, made of u_τ and $l_\tau = \nu/u_\tau$ for the controlled flow (respectively, u_τ^{ref} and l_τ^{ref} for the reference case), one obtains

$$\delta - \Delta y = \left(\frac{l_\tau}{l_\tau^{ref}}\right)\delta^{ref}, \tag{31a}$$

$$\frac{R_{ij}(y > \Delta y)}{U_\infty^2} = \left(\frac{U_\infty^{ref+}}{U_\infty^+}\right)^2 \frac{R_{ij}^{ref}\left(\frac{l_\tau^{ref}}{l_\tau}(y - \Delta y)\right)}{\left(U_\infty^{ref}\right)^2} = \left(\frac{c_f}{c_f^{ref}}\right)\frac{R_{ij}^{ref}\left(\frac{y-\Delta y}{\delta-\Delta y}\delta^{ref}\right)}{\left(U_\infty^{ref}\right)^2}. \tag{31b}$$

Substitution into the definition of $c_{f,2}$ and then change of variable $y \longleftrightarrow \mathsf{y} = \frac{y-\Delta y}{\delta-\Delta y}\delta^{ref}$ yield

$$c_{f,2} = 4\int_{\Delta y}^{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)\frac{c_f}{c_f^{ref}}\frac{-R_{xy}^{ref}\left(\frac{y-\Delta y}{\delta-\Delta y}\delta^{ref}\right)}{\rho\left(U_\infty^{ref}\right)^2}\frac{\mathrm{d}y}{\delta}$$

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

$$= 4\left(1-\frac{\Delta y}{\delta}\right)^2 \frac{c_f}{c_f^{ref}} \int_0^{\delta^{ref}} \left(1-\frac{\mathrm{y}}{\delta^{ref}}\right) \frac{-R_{xy}^{ref}(\mathrm{y})}{\rho\left(U_\infty^{ref}\right)^2} \frac{\mathrm{dy}}{\delta^{ref}}$$

$$= \left(1-\frac{\Delta y}{\delta}\right)^2 \frac{c_f}{c_f^{ref}} c_{f,2}^{ref}. \tag{32}$$

Neglecting $\Delta y^+/\delta^+$ when compared to one, the relative turbulent contribution is conserved,

$$\frac{c_{f,2}}{c_f}(Re_\tau) \approx \frac{c_{f,2}^{ref}}{c_f^{ref}}(Re_\tau). \tag{33}$$

Fig. 7 supports this conclusion. The knowledge of $R_{xy}(y)$ and its integration across the boundary-layer were needed to realize this figure. Formulae used so far have been sufficient to approximate global quantities such as τ_w, θ or δ, but are not to determine the Reynolds shear-stress profile. We decide to overcome this lack using the analytical mean velocity profile $u^+(y^+, U_\infty^+(x))$ provided by Monkewitz *et al.*[19] Along with the following boundary-layer equations,[20] the mean normal velocity $v(y)$ and then the Reynolds shear-stress $R_{xy}(y)$ can be computed at any location x,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{34a}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y} - R_{xy}\right). \tag{34b}$$

The fact that $c_{f,2}/c_f$ is unaltered by the control means that the "turbulent" contribution $c_{f,2}$ is reduced proportionally to c_f, that is, greatly reduced. This is surprising at the first sight since $c_{f,2}$ is defined by an integral of $R_{xy}(y)$, while the turbulent profiles of the controlled flow have been assumed to follow the canonical uncontrolled ones. However, a closer look at Eq. (3b) reveals that controlled and uncontrolled turbulent profiles are equal in wall-unit scaling only. Therefore, the weakening of the turbulent stress intensity is due to a scaling effect caused by the drop of the skin-friction. This explains how, by altering the turbulent fluctuation in a minute near-wall layer, the control spreads its effect across the whole boundary-layer extend.

The same conclusion is reached for channel flows:[11] among the two non-zero terms $c_{f,1}$ and $c_{f,2}$ of the channel flow decomposition, the drag reduction is attributed to a drop of the latter, caused by a weakening of the Reynolds shear-stress.

In actual flows, skin-friction and turbulent stress are intertwined. Does the control first damp turbulence, which alters the momentum transport towards the wall and then reduces the skin-friction? Or, alternatively, does the control first reduce the skin-friction, which diminishes the

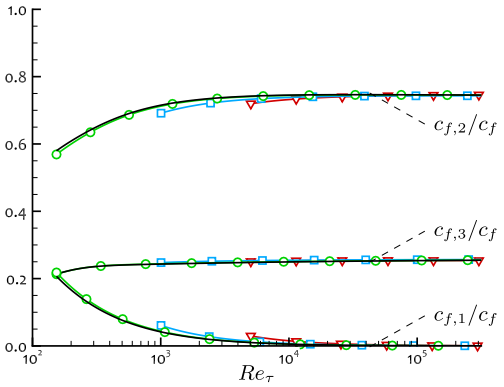


FIG. 7. Influence of the damped layer thickness Δy^+ on the relative FIK contribution terms $c_{f,i}/c_f$ versus Re_τ: (black solid line) no control; (green solid line, circle) $\Delta y^+ = 1$; (blue solid line, square) $\Delta y^+ = 10$; (red solid line, triangle) $\Delta y^+ = 30$. Only data for which $\delta^+ > 100\Delta y^+$ are shown.

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

near-wall shear and then weakens the turbulence regeneration process? Depending on the particular drag-reducing device being used (riblets, active feedback control, etc.), physical investigations are necessary to shed light on the specific mechanism in action.

C. Spatial heterogeneity contribution $c_{f,3}$

The last term of the decomposition, $c_{f,3}$, involves space derivatives in the streamwise direction x. Yet, it can be interpreted as the consequence on the skin-friction of the boundary-layer spatial development.

Deck *et al.*[10] analyzed the behavior of this term for high-Reynolds-number turbulent boundary-layers and for the Blasius self-similar solution. They noticed that the relative contribution $c_{f,3}/c_f$ remains surprisingly constant and equals approximately 20% whatever the laminar-versus-turbulent nature of the zero-pressure-gradient flow and its Reynolds number. As evidenced in Fig. 7, the ideal control does not either affect it: $c_{f,3}/c_f$ is found approximately equals to 25% independently of the presence of the control. This high value is due to the use of the "100% free-stream thickness" δ_{100} defined in (27) instead of the usual δ_{99}. The computation using $\delta = \delta_{99}$ leads to a relative $c_{f,3}$ contribution of approximately 20.5%, in perfect agreement with the literature.

Even though the boundary-layer development is slowed down by the control, its contribution to the skin-friction still conserves the same weight as for the uncontrolled case. Under the effect of the control, the two major contributions, $c_{f,2}$ and $c_{f,3}$, are thus going through a substantial reduction, while the "laminar" contribution $c_{f,1}$, although lesser at large Reynolds number, is almost unaffected.

VII. COMPARISON WITH REAL DRAG-REDUCING FLOW

As mentioned in Sec. II, turbulent flows over riblets exhibit velocity and turbulent profiles consistent with those of the composite flow defined here. The riblet design studied by Bannier *et al.*[8] leads to a control parameter Δy^+ approximately constant on a range of Reynolds numbers extending from $Re_\theta = 700$ to 1300 and equal to 1.4. The present analytic study is compared, as a validating test, to the actual turbulent flow developing over the ribbed wall.

The two effects induced by the control—namely, the skin-friction reduction at given Re_θ and the decrease of the boundary-layer thickening rate—are represented, respectively, in Figs. 8 and 9. Discrepancies localized at the upstream and downstream ends of the controlled zone ($Re_x = 2.2 \cdot 10^5$ and $5.7 \cdot 10^5$, corresponding to $Re_\theta \approx 640$ and 1300) are due to transitory effects: after the sudden appearance or disappearance of riblets on the wall, the turbulent flow needs a transient

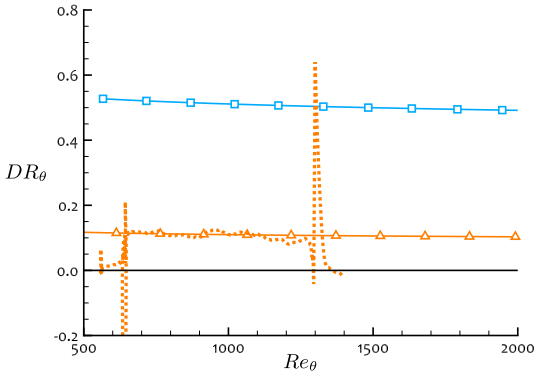


FIG. 8. Drag reduction rate DR_θ versus Re_θ. LES riblet-bounded flow (orange dotted line) and analytic composite profile: (orange solid line, triangle) $\Delta y^+ = 1.4$; (blue solid line, square) $\Delta y^+ = 10$.

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

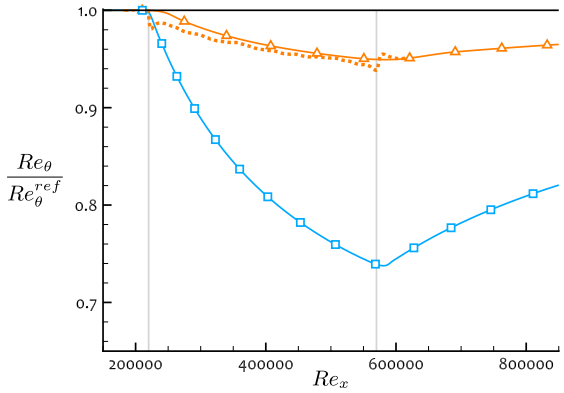


FIG. 9. Momentum thickness Reynolds number ratio $Re_\theta/Re_\theta^{ref}$ versus Re_x. LES riblet-bounded flow (orange dotted line) and analytic composite profile: (orange solid line, triangle) $\Delta y^+ = 1.4$; (blue solid line, square) $\Delta y^+ = 10$. Vertical lines indicate the upstream ($Re_x^{ini} = 2.2 \cdot 10^5$) and downstream ($Re_x^{end} = 5.7 \cdot 10^5$) ends of the controlled zone.

to re-adapt and reach a new equilibrium. Not before such equilibrium is reached, the flow is well portrayed by the composite profile (see Fig. 2). Both the drag reduction and the boundary-layer development are in that case well predicted by the present analytical model. The case $\Delta y^+ = 10$ is represented so as to put into perspective the saving that could potentially be obtained, on this Reynolds number range, with a hypothetical control device that would damp fluctuations within the ten first wall-units from the wall.

Considering simultaneously the two previous effects, the evolution of the skin-friction along the streamwise direction Re_x is shown in Fig. 10, and the relative contributions of the FIK terms in Fig. 11. Those results complete the validation of the analytical model, outside of the transient areas localized at both ends of the controlled zone.

Coles-Fernholz correlation (6), on which is based this analytical development, and Monkewitz *et al.*'s asymptotic velocity profile,[19] used to compute FIK terms, successfully describe the present flows, even though the considered Reynolds numbers are below their recommended range of application ($Re_\theta = O(10^3)$).

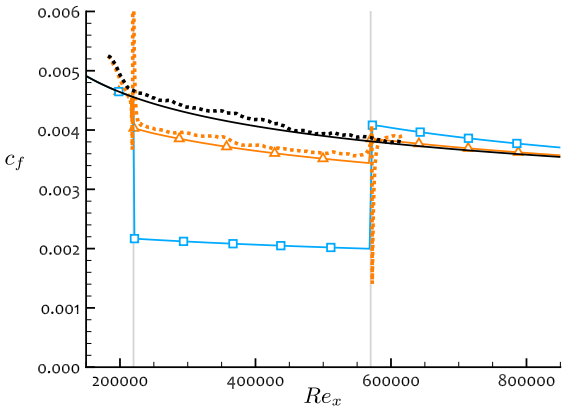


FIG. 10. Skin friction coefficient c_f versus Re_x. LES simulations: (black dotted line) reference case; (orange dotted line) riblet case. Analytic composite profile: (black solid line) no control; (orange solid line, triangle) $\Delta y^+ = 1.4$; (blue solid line, square) $\Delta y^+ = 10$. Vertical lines indicate the upstream ($Re_x^{ini} = 2.2 \cdot 10^5$) and downstream ($Re_x^{end} = 5.7 \cdot 10^5$) ends of the controlled zone.

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

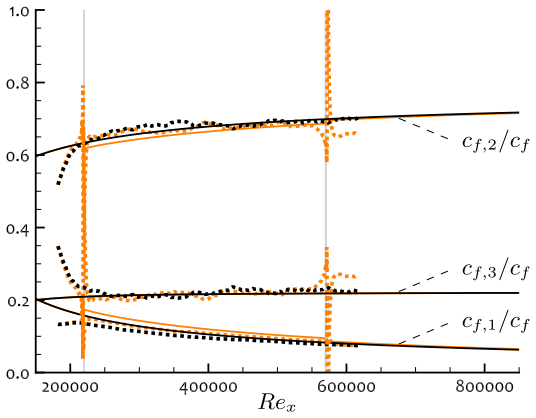


FIG. 11. Relative contribution $c_{f,i}/c_f$ of the FIK decomposition terms versus Re_x. LES simulations: (black dotted line) reference case; (orange dotted line) riblet case. Analytic composite profile: (black solid line) no control; (orange solid line) $\Delta y^+ = 1.4$. Vertical lines indicate the upstream ($Re_x^{ini} = 2.2 \cdot 10^5$) and downstream ($Re_x^{end} = 5.7 \cdot 10^5$) ends of the controlled zone.

VIII. CONCLUSIONS

Analytical formulae have been derived to describe the friction and the spatial development of zero-pressure-gradient turbulent boundary-layers for which near-wall turbulent fluctuations are supposed to be ideally damped. Under such control, the assumed velocity profiles are in good agreement with the ones actually observed for riblet-controlled flows, making riblets a practical and realistic benchmark to compare our analytical results.

Two main effects have been isolated to characterize the action of the control. First, the skin-friction is substantially reduced when compared to an uncontrolled flow at similar Reynolds number Re_θ. A similar effect is observed in fully developed turbulent channel flows under analogous control. The second effect, which is a direct consequence of the skin-friction drop, is a decrease of the boundary-layer spatial development rate. By growing more slowly, the boundary-layer thickness is thinner than when uncontrolled, which has detrimental effect on its drag. Despite that penalty, controlled flows at any given streamwise location x have been shown to always generate less drag than their uncontrolled counterpart.

The FIK decomposition splits the skin-friction into contributions to provide physical insight on its origin. While the laminar term is evidenced to be unaffected by the control, the turbulent contribution is as much reduced as the skin-friction itself. A wall-unit scaling effect is responsible for the weakening of turbulent intensities, resulting in the drop of the turbulent contribution. The same conclusion has already been drawn for channel flows subject to similar control. However, in the present case of spatially developing boundary-layer, the FIK contribution resulting from the spatial heterogeneity also comes into play. Its relative contribution to the skin-friction, known to be independent from the state of the flow and from the Reynolds number, is also found unaltered by the presence of the control.

Thanks to the influence of the control on those two major drag contributors, significant drag reduction is still achievable for high Reynolds number flows, even though the manipulated near-wall layer tends to represent an infinitesimal part of the boundary-layer. Because the control influences the boundary-layer growth, the local drag-reduction is maximized when the actuation starts just upstream. Conversely, a control applied early minimizes the global cumulative drag.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was granted access to the HPC resources from IDRIS under the Allocation No. 2015-i20152a7192 made by the GENCI. The financial support from Ecole Polytechnique to the thesis of Amaury Bannier is gratefully acknowledged.

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

[1] M. J. Walsh and L. M. Weinstein, "Drag and heat transfer on surfaces with small longitudinal fins," AIAA Paper No. 78-1161, 1978.
[2] R. García-Mayoral and J. Jiménez, "Drag reduction by riblets," Philos. Trans. R. Soc., A **369**, 1412–1427 (2011).
[3] T. Min and J. Kim, "Effects of hydrophobic surface on skin-friction drag," Phys. Fluids **16**, L55 (2004).
[4] J. P. Rothstein, "Slip on superhydrophobic surfaces," Annu. Rev. Fluid Mech. **42**, 89–109 (2010).
[5] H. Choi, P. Moin, and J. Kim, "Active turbulence control for drag-reduction in wall-bounded flows," J. Fluid Mech. **262**, 75–110 (1994).
[6] N. Kasagi, Y. Suzuki, and K. Fukagata, "Microelectromechanical systems-based feedback control of turbulence for skin friction reduction," Annu. Rev. Fluid Mech. **41**, 231–251 (2009).
[7] Q.-J. Xia, W.-X. Huang, C.-X. Xu, and G.-X. Cui, "Direct numerical simulation of spatially developing turbulent boundary layers with opposition control," Fluid Dyn. Res. **47**, 025503 (2015).
[8] A. Bannier, E. Garnier, and P. Sagaut, "Riblet flow model based on an extended FIK identity," Flow, Turbul. Combust. **95**, 351–376 (2015).
[9] K. Fukagata, K. Iwamoto, and N. Kasagi, "Contribution of Reynolds stress distribution to the skin friction in wall-bounded flows," Phys. Fluids **14**, L73 (2002).
[10] S. Deck, N. Renard, R. Laraufie, and P.-E. Weiss, "Large-scale contribution to mean wall shear stress in high-Reynolds-number flat-plate boundary layers up to $\mathrm{Re}_\delta = 13650$," J. Fluid Mech. **743**, 202–248 (2014).
[11] K. Iwamoto, K. Fukagata, N. Kasagi, and Y. Suzuki, "Friction drag reduction achievable by near-wall turbulence manipulation at high Reynolds numbers," Phys. Fluids **17**, 011702 (2005).
[12] R. García-Mayoral and J. Jiménez, "Hydrodynamic stability and breakdown of the viscous regime over riblets," J. Fluid Mech. **678**, 317–347 (2011).
[13] C. Lee, J. Kim, and H. Choi, "Suboptimal control of turbulent channel flow for drag reduction," J. Fluid Mech. **358**, 245–258 (1998).
[14] T. R. Bewley, P. Moin, and R. Temam, "DNS-based predictive control of turbulence: An optimal benchmark for feedback algorithms," J. Fluid Mech. **447**, 179–225 (2001).
[15] H.-H. Fernholz and P. J. Finley, "The incompressible zero-pressure-gradient turbulent boundary layer: An assessment of the data," Prog. Aeronaut. Sci. **32**, 245–311 (1996).
[16] H. M. Nagib, K. A. Chauhan, and P. A. Monkewitz, "Approach to an asymptotic state for zero pressure gradient turbulent boundary layer," Philos. Trans. R. Soc., A **365**, 755–770 (2007).
[17] H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering (McGraw-Hill, New York, 1979).
[18] P. R. Spalart and J. D. McLean, "Drag reduction: Enticing turbulence, and then an industry," Philos. Trans. R. Soc., A **369**, 1556–1569 (2011).
[19] P. A. Monkewitz, K. A. Chauhan, and H. M. Nagib, "Self-consistent high-Reynolds-number asymptotics for zero-pressure-gradient turbulent boundary layers," Phys. Fluids **19**, 115101 (2007).
[20] J. Cousteix, *Turbulence et Couche Limite* (Cépadués, 1989).

Reuse of AIP Publishing content is subject to the terms at: https://publishing.aip.org/authors/rights-and-permissions. Downloaded to IP: 90.59.33.82 On: Thu, 17 Mar 2016 19:00:49

6.3 Résumé succinct de l'article

Dans l'article précédent, on s'est intéressé à des couches limites turbulentes en développement spatial sans gradient de pression sur lesquelles un contrôle idéal est appliqué. Ce contrôle idéal a pour action de supprimer l'ensemble des fluctuations turbulentes dans une fine couche d'épaisseur constante Δy^+. L'écoulement sous cette altitude est alors laminaire et supposé vérifier un profil linéaire. Ainsi, à l'altitude $y^+ = \Delta y^+$, la vitesse de l'écoulement est de $u^+ = \Delta y^+$. Dans le reste de la couche limite, au-dessus de la couche laminarisée, la turbulence n'est pas contrainte. On fait l'hypothèse forte que, dans le référentiel en translation à la vitesse $u^+ = \Delta y^+$, les profils moyens et fluctuants y sont bien décrits par ceux d'une couche limite canonique. Ces hypothèses sont traduites par les équations (1), (2) et (3) et schématisées à la figure 1.

À partir de la loi de frottement de Coles–Fernholz pour les couches limites canoniques, qui permet de relier le coefficient de frottement c_f au nombre de Reynolds Re_θ, la loi de frottement pour la couche limite composite est alors dérivée. Son expression est donnée par l'équation (10) et se simplifie au premier ordre en une loi très similaire à celle de Coles–Fernholz, simplement modifiée par l'ajout d'un terme Δy^+. Une formule analytique pour le taux de réduction de frottement à nombre de Reynolds Re_θ donné, $SFRR_\theta$, est alors obtenue. Son évolution est représentée sur la figure 3. En ne supprimant la turbulence que sur une infime partie de la couche limite, le contrôle parvient néanmoins à une réduction substantielle du frottement. Par exemple, pour le paramètre de contrôle fixé à $\Delta y^+ = 10$, la sous-couche dans laquelle la turbulence est affectée représente moins d'un millième de la couche limite à $Re_\theta = 10^5$, mais le taux de réduction de frottement atteint tout de même $SFRR_\theta = 40\%$. On constate que la réduction de traînée augmente fortement avec Δy^+ mais tend à s'affaiblir doucement à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Ces constats corroborent, tant qualitativement que quantitativement, ceux obtenus par Iwamoto *et al.* [127] pour un écoulement de canal plan sous l'action d'un contrôle idéal similaire.

Pour une couche limite sans gradient de pression, comme c'est ici le cas, l'équation intégrale de quantité de mouvement (1.60) ou (14) prédit que le taux d'épaississement de la couche limite est directement proportionnel au frottement. Ainsi, en diminuant le frottement, le contrôle contribue à ralentir le développement de la couche limite. C'est ce qui est démontré sur la figure 4, où l'intégration de la loi de Coles–Fernholz a permis d'obtenir l'évolution de Re_θ avec Re_x. À partir de la position Re_x^{ini} à laquelle le contrôle commence à être appliqué, la croissance de Re_θ est ralenti et ce, d'autant plus que Δy^+ est grand. Néanmoins, l'historique de la position Re_x^{ini} tend à perdre en influence à mesure que l'on s'avance dans la direction avale, si bien qu'au-delà de $Re_x \simeq 10\, Re_x^{ini}$, l'épaisseur de la couche contrôlée ne dépend plus significativement de la position Re_x^{ini}.

Cet effet du contrôle sur l'épaississement de la couche limite est d'un grand intérêt pour l'étude du frottement, puisqu'une couche limite moins développée frotte davantage. Ainsi, le ralentissement du développement de la couche limite par le contrôle représente un effet délétère sur le frottement. Après une suffisamment longue étendue de la zone de contrôle, est-il alors possible que la couche limite contrôlée devienne si peu développée en comparaison de celle non-contrôlée pour que le frottement y soit finalement plus important ?

L'évolution du coefficient de frottement c_f et du taux de réduction de frottement $SFRR_x$ en fonction de Re_x est alors représentée sur la figure 5. On constate qu'à Δy^+ fixé, plus le contrôle commence à être appliqué loin en aval, plus la couche limite a pu s'épaissir et donc moindre sera le frottement. Ainsi, à Δy^+ fixé, le coefficient de frottement à un nombre de Reynolds Re_x donné est compris entre les cas limites d'un contrôle appliqué depuis la naissance de la couche limite, $Re_x^{ini} = 0$, et d'un contrôle appliqué depuis une position immédiatement en amont, $Re_x^{ini} \simeq Re_x$. La figure 5 met en évidence l'enveloppe définie par ces cas limites. Son épaisseur est relativement fine : cela traduit que l'historique du contrôle, au travers de Re_x^{ini}, a donc une influence du second ordre face à celle de son intensité Δy^+. Les résultats analytiques montrent de plus que, malgré que l'épaississement de la couche limite contrôlée soit ralenti, son frottement reste partout plus faible que celui de la couche limite canonique à une même position x. Une réduction de frottement conséquente reste possible, malgré le ralentissement du développement de la couche limite.

Deck *et al.* [68] ont établi que, lorsque le nombre de Reynolds augmente, une part grandissante du frottement peut être attribuée à l'action de la turbulence dans la zone externe. Comment peut-on alors expliquer que le contrôle idéal étudié ici, dont l'influence est limitée à une infime portion proche-paroi de la couche limite, puisse engendrer une réduction de frottement si importante ? Pour interpréter ce phénomène, la décomposition FIK [85] introduite à la section 1.5.2 est appliquée au profil de vitesses composite. Alors que la contribution laminaire $c_{f,1}$ n'est quasiment pas affectée par le contrôle, comme représenté à la figure 6, les contributions turbulente $c_{f,2}$ et spatialement inhomogène $c_{f,3}$ chutent toutes deux dans des proportions comparables au coefficient c_f lui-même. La réduction de ces termes s'explique par un effet d'échelle des intensités turbulentes, dont le dimensionnement en unité interne explique la chute avec le frottement. Le même mécanisme a déjà été mis en avant par Iwamoto *et al.* [127] dans le cas d'un écoulement de canal plan.

Afin de vérifier la pertinence de cette étude, les résultats obtenus analytiquement ont été confrontés aux simulations LES d'écoulement au-dessus de *riblets*. Le bon accord des évolutions d'épaisseurs de couche limite et de réduction de frottement valide non seulement l'analyse effectuée, mais confirme également la pertinence du profil composite pour décrire l'écoulement au-dessus des *riblets*.

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, une étude analytique a été menée afin de clarifier le comportement des *riblets* à grand nombre de Reynolds. Les constats réalisés au chapitre dernier sur les profils de vitesse moyenne et fluctuante d'une couche limite contrôlée par la présence de *riblets* ont constitué le point de départ de cette analyse. En effet, une simple relation de translation par le paramètre $\Delta y^+ = \Delta u^+$ relie ces profils à ceux du cas canonique non-contrôlé, pour lequel on dispose de lois analytiques et semi-empiriques.

L'étude démontre la forte influence du paramètre Δy^+ sur la réduction de frottement. Ce paramètre caractérise la longueur de pénétration sur laquelle le contrôle parvient à neutraliser les fluctuations turbulentes. Bien que cette longueur soit négligeable face à l'épaisseur de la couche limite, de fortes réductions de traînée ont pu être constatées. À mesure que le nombre de Reynolds augmente, le contrôle tend à perdre en efficacité, mais cette dépendance est très faible et une part substantielle de la réduction de frottement persiste, même aux plus grands nombres de Reynolds atteints par les applications du secteur aéronautique.

De façon générale pour les couches limites en développement spatial, moins une couche limite frotte, moins elle s'épaissit, mais, moins une couche limite est épaisse, plus elle frotte. Ainsi, en réduisant le frottement, les *riblets* engendrent l'effet collatéral de ralentir l'épaississement de la couche limite. Néanmoins, l'influence de cet effet délétère reste secondaire à côté de l'action directe du contrôle, si bien que la couche limite contrôlée, bien que moins épaisse, frotte nécessairement moins qu'une couche limite canonique. Par ailleurs, une autre conséquence, bénéfique cette fois, a été relevée par Spalart & McLean [252]. Une couche limite moins épaisse sera moins sujette à la traînée de pression visqueuse, ce qui peut constituer un avantage conséquent dans de nombreux cas d'applications pratiques, en aéronautique notamment.

Chapitre 7

Évaluation des capacités de réduction de traînée de *riblets* tridimensionnels

Sommaire

7.1 Évaluation de la traînée de patchs de *riblets* 202
7.1.1 Introduction 202
7.1.2 Paramétrisation des patchs de *riblets* 202
7.1.3 Performance de réduction de traînée 203
7.2 Étude paramétrique de *riblets* sinueux 207
7.2.1 Introduction 207
7.2.2 Paramétrisation des *riblets* sinueux 209
7.2.3 Mise en place d'une stratégie d'optimisation 210
7.2.3.1 Construction de la surface de réponse par krigeage 212
7.2.3.2 Échantillonnage initial par hypercube latin 216
7.2.3.3 Stratégie de raffinement et fonction de mérite 217
7.2.3.4 Critère de convergence 220
7.2.3.5 Optimisation basse-fidélité par évaluation directe 220
7.2.3.6 Évaluation haute-fidélité par LES 220
7.2.4 Résultat de l'optimisation 221
7.2.4.1 Poursuite de l'optimisation ? 223
7.2.5 Simulations LES/DNS complémentaires 223
7.2.5.1 Traînée totale, frottement visqueux et résultante des efforts de pression 225
7.2.5.2 Influence des *riblets* sinueux sur l'écoulement 227
7.3 Évaluation de la traînée de *riblets* en chevron 229
7.3.1 Introduction 229
7.3.2 Mise en place de simulations numériques directes 232
7.3.3 Performance de réduction de traînée 236
7.3.4 Influence de grandes échelles dans la couche limite. 239
Conclusion du chapitre 241

Les études relatives aux *riblets* réalisées par la communauté scientifique et dans les chapitres précédents de ce manuscrit démontrent leur grande capacité à réduire la traînée de frottement, et ce, de manière simple et passive.

La forme de coupe des *riblets* a été étudiée en détail depuis la découverte de cette stratégie de contrôle, comme cela a été rapporté dans la sous-section 2.2.1.3 de la revue bibliographique. Cependant, la grande majorité des études se sont restreintes à des géométries de *riblets* bidimensionnelles.

En s'affranchissant de cette contrainte géométrique, est-il possible de réduire la traînée davantage ? C'est à cette question à laquelle nous tenterons de répondre dans la suite de ce chapitre, où plusieurs solutions *a priori* prometteuses ont été testées numériquement. Ce chapitre est à vocation plus applicative que les précédents. En effet, bien que de nombreuses analyses intéressantes puissent être entreprises sur les *riblets* tridimensionnels, l'accent sera ici davantage porté sur la recherche d'une géométrie performante en termes de réduction de traînée que sur une interprétation physique poussée des mécanismes en jeu.

7.1 Évaluation de la traînée de patchs de *riblets*

7.1.1 Introduction

L'étude des *riblets* des chapitres précédents a mis en évidence la présence d'une zone transitoire en aval des zones de *riblets*. La courbe du coefficient de frottement c_f en fonction de x sur la figure 4.11 témoigne des brusques changements qu'imposent les *riblets* et de la progressive adaptation qui la suit. L'étude du bilan d'énergie cinétique turbulente intégré sur chaque plan x de la section 5.3.3 en apporte une autre démonstration.

Plutôt que des maintenir des *riblets* rectilignes sur une longue étendue, une utilisation intermittente, comme celle présentée sur la figure 7.1 où l'on observe des zones de plaque plane entrecoupées de patchs de *riblets*, peut sembler intéressante pour plusieurs raisons. On sait que les *riblets* traînent davantage que la plaque plane en écoulement laminaire. Si la traînée peut être réduite en écoulement turbulent, c'est uniquement grâce à la capacité des *riblets* à affaiblir la turbulence. En utilisant des patchs de *riblets*, on peut donc espérer que la turbulence n'ait pas le temps de retrouver son niveau canonique entre deux patchs. On profiterait alors du double avantage d'un faible taux de turbulence et d'une paroi en partie lisse. Le potentiel de ce scénario est de plus appuyé par les observations faites à la sous-section 5.3.3 sur le bilan d'énergie cinétique turbulente dans la zone transitoire en aval de la mise en place des *riblets*. En effet, la présence des *riblets* induit une chute très rapide de la production d'énergie cinétique turbulente, alors qu'il faut un transitoire long d'environs $4\,\delta$ pour que la dissipation turbulente atteigne finalement sa valeur d'équilibre. Ainsi, les patchs de *riblets* intermittents permettront de renforcer ce déséquilibre si le rétablissement du niveau canonique de production n'est pas aussi vif lors de la transition vers la paroi lisse.

7.1.2 Paramétrisation des patchs de *riblets*

On se propose donc de tester, par simulation numérique, les capacités de réduction de traînée d'une surface couverte de patchs de *riblets*. Afin de comparer au mieux la traînée sur cette surface à celles déjà établies sur une plaque plane ou sur des *riblets* bidimensionnels, les conditions d'écoulement et les paramètres numériques précédemment utilisés pour la campagne de simulation RD10 sont conservées. La seule modification porte sur donc sur la géométrie de la paroi et la disposition des mailles à sa proximité.

La dimension longitudinale $L_{x,\text{patch}}$ des patchs est choisie constante et égale à 800 unités de paroi. En se basant sur les résultats de l'étude des bilans d'énergie cinétique turbulente de la section 5.3.3, l'étendue des patchs est choisie de sorte que le terme de dissipation ait à peine le temps d'atteindre sa valeur d'équilibre, puisque sa zone transitoire a été estimée à environ 1000 unités de paroi. Notons

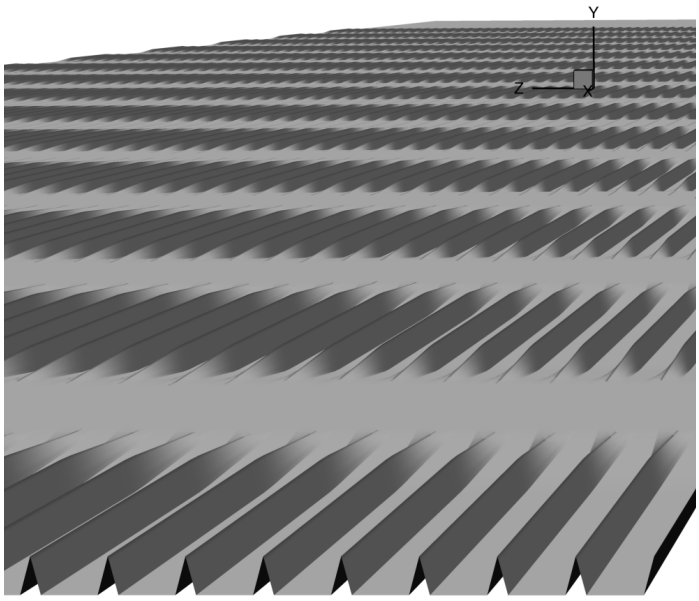


FIGURE 7.1 – Schéma d'une paroi de contrôle couverte de patchs de *riblets* régulièrement disposés.

d'ailleurs que puisque la longueur des *streaks* est supérieure à 10^3 unités de paroi, on s'assure que le cycle proche-paroi de régénération de la turbulence n'ait pas l'étendue suffisante pour se mettre totalement en place.

Concernant la zone plane entre les patchs de *riblets*, deux cas ont été envisagés. Pour l'un, l'étendue de la zone plane est choisie comme égale à celle des *riblets*, soit $L_{x,\text{flat}} = 800$ unités de paroi. Pour l'autre, $L_{x,\text{flat}}$ a été abaissée à 300 unités de paroi. Dans la suite, on fera alors référence à ces deux cas sous les noms de on800off800 et on800off300 respectivement, alors que les cas avec et sans *riblets* précédemment étudiés lors de la campagne RD10 porteront les noms de riblets 2D et plaque plane.

7.1.3 Performance de réduction de traînée

Il est important de noter que, pour la première fois depuis le début de ce manuscrit, il devient important de différencier la réduction de frottement et la réduction de traînée. La première ne concerne que les efforts visqueux sur la paroi, alors que la seconde prend également en compte la résultante des efforts de pression. Jusqu'à maintenant, les géométries concernées étaient bidimensionnelles, c'est-à-dire que la normale à la paroi était en tout point dans le plan (y, z) si bien que la pression ne fournissait aucun effort longitudinal. Les extrémités amont et aval des zones de *riblets* font néanmoins exception, mais puisque l'étude portait jusqu'alors principalement sur le comportement des *riblets* bidimensionnels en régime établi, il n'apparaissait pas utile de les prendre en compte. Dans le cas de patchs de *riblets* néanmoins, les extrémités des nombreuses zones de contrôle deviennent essentielles dans l'évaluation des efforts.

Le taux de réduction de frottement FRR (*friction reduction rate*) est toujours défini par l'équation (2.1), mais on introduit de plus le taux de réduction de traînée DRR (*drag reduction rate*), défini de façon analogue par l'expression :

$$DRR = -\frac{\Delta c_d}{c_{d,\text{ref}}} = \frac{c_{d,\text{ref}} - c_d}{c_{d,\text{ref}}}\,, \tag{7.1}$$

où c_d est le coefficient de traînée. Sa définition est similaire à celle de c_f, équation (1.29), bien que basée sur la contrainte totale $\tau^{\text{tot}}_{\text{w},x}$ plutôt que sur sa composante visqueuse $\tau_{\text{w},x}$:

$$c_d = \frac{\tau^{\text{tot}}_{\text{w},x}}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{\underline{n}\cdot\left(\underline{\underline{\tau}} + p\,\underline{\underline{1}}\right)\cdot\underline{e}_x\big|_{y_\text{w}}}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{\tau_{\text{w},x} + p_{\text{w},x}}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} = c_f + c_p\,. \tag{7.2}$$

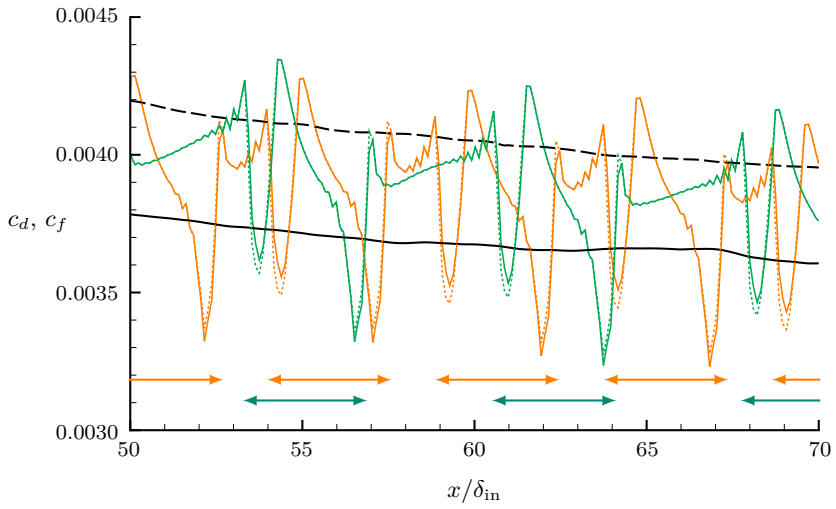


FIGURE 7.2 – Évolution dans la direction longitudinale x des coefficients de traînée c_d (——) et de frottement c_f (·····) pour les configurations de patchs de *riblets* on800off300 (——) et on800off800 (——). Les résultats issus des configurations de paroi lisse (– – – –) et de *riblets* bidimensionnels (——) sont également représentés. La position des patchs de *riblets* est indiquée par des flèches.

Dans notre cas, puisque la paroi de référence est plane, le coefficient de traînée $c_{d,\text{ref}}$ s'identifie à son coefficient de frottement $c_{f,\text{ref}}$. Ainsi, les taux de réduction de traînée DRR et de frottement FRR sont liés par $DRR = FRR - c_p/c_{f,\text{ref}}$.

L'évolution sur une partie du domaine de calcul des coefficients de traînée c_d et de frottement c_f est représentée sur la figure 7.2 pour les cas on800off300 et on800off800 au côté des résultats de plaque plane et de *riblets* bidimensionnels en régime établi. La résultante des efforts de pression est non nulle dans les zones de transition entre paroi lisse et *riblets*, mais son influence est ici très faible par rapport aux efforts visqueux.

En fonction de la position relativement aux patchs de *riblets*, la traînée locale moyenne est parfois bien inférieure à celle des *riblets* bidimensionnels, mais parfois bien supérieure à celle de la plaque plane. En plus de la moyenne temporelle et de la moyenne spatiale dans la direction transverse, une moyenne dans la direction longitudinale, glissante sur une période $L_{x,\text{patch}} + L_{x,\text{flat}}$, a alors été appliquée aux efforts pariétaux. La figure 7.3 montre l'évolution du taux de réduction de traînée DRR construit à partir de ces efforts moyennés et du frottement sur la plaque plane de référence. Ainsi moyennée, la traînée des patchs de *riblets* est partout intermédiaire à celle de la paroi continûment couverte de *riblets* et celle de la paroi lisse. La stratégie de contrôle par patchs de *riblets* ne permet donc pas d'atteindre des performances de réduction de traînée plus intéressantes que celles obtenues en recouvrement totalement la surface de *riblets* bidimensionnels. On remarque néanmoins que la configuration on800off300 permet d'atteindre une réduction de traînée plus importante que la configuration on800off800.

Afin de quantifier la performance globale des différentes surfaces de contrôle par un unique paramètre, on utilise la traînée accumulée sur tout le domaine de calcul, en prenant également en compte les zones en amont et en aval de la partie contrôlée où une influence persiste transitoirement. Son expression est donnée par

$$C_d = \int_{x_{\text{in}}}^{x_{\text{out}}} c_d(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{7.3}$$

Afin que le résultat ne dépende plus directement de la longueur arbitraire de la zone de contrôle, on adimensionne la réduction de traînée entre le cas contrôlé et celui de référence par la traînée de

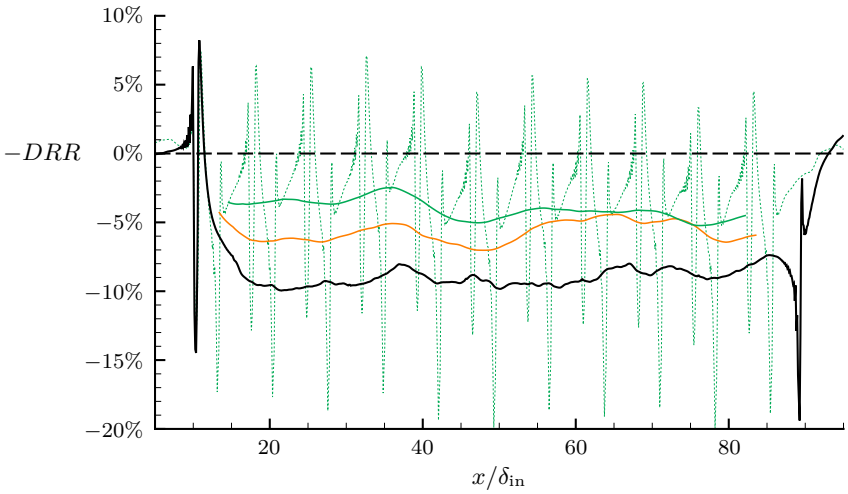


FIGURE 7.3 – Évolution dans la direction longitudinale x du taux de réduction de traînée DRR (·····) et de sa moyenne glissante sur un cycle de patchs de *riblets* (———) pour les configurations on800off300 (———) et on800off800 (———). Les résultats issus des configurations de paroi lisse (– – – –) et de *riblets* bidimensionnels (———) sont également représentés sans moyenne glissante.

référence accumulée sur l'étendue de la zone de contrôle seulement. On obtient alors le **taux de réduction de traînée accumulée** (*accumulated drag reduction rate*) défini par

$$ADRR = \frac{C_{d,\mathrm{ref}} - C_d}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} c_{d,\mathrm{ref}}(x)\,\mathrm{d}x}\,, \tag{7.4}$$

où les stations x_0 et x_1 marquent les positions de début et de fin de zone de contrôle, comme représenté sur la figure 4.1. Un **taux de réduction de frottement accumulé** $AFRR$ (*accumulated friction reduction rate*) peut être défini de façon analogue à partir de c_f en lieu de c_d.

Référence	$\frac{L_{\mathrm{in}\to\mathrm{out}}}{\delta_{\mathrm{in}}}$	$\frac{C_d}{L_{\mathrm{in}\to\mathrm{out}}}$	$\frac{C_f}{L_{\mathrm{in}\to\mathrm{out}}}$	$\frac{L_{x_0\to x_1}}{\delta_{\mathrm{in}}}$	$\frac{\int_{x_0}^{x_1} c_{f,\mathrm{ref}}}{L_{x_0\to x_1}}$	$ADRR$	$AFRR$
plaque plane	100	4.21×10^3		-	-	-	
riblets 2D	100	3.919×10^3	3.919×10^3	79.9	4.168×10^3	8.69%	8.68%
on800off300	100	4.024×10^3	4.023×10^3	77.2	4.179×10^3	5.69%	5.72%
on800off800	100	4.077×10^3	4.076×10^3	76.3	4.184×10^3	4.11%	4.11%

TABLE 7.1 – Résultats de l'évaluation de la traînée et du frottement accumulé sur la paroi pour les configurations on800off300 et on800off800 de patchs de *riblets* et pour les cas de plaque plane de référence et de *riblets* rectilignes bidimensionnels. Bien que la longueur du domaine de calcul $L_{\mathrm{in}\to\mathrm{out}}$ soit commune, l'étendue de la zone de contrôle $L_{x_0\to x_1}$ varie légèrement d'un cas à l'autre en fonction de la position de fin du dernier patch.

Les performances de réduction de traînée et de frottement accumulés ont été reportées dans le tableau 7.1. La quasi-égalité entre $ADRR$ et $AFRR$ confirme l'influence négligeable des efforts de pression sur la traînée. Avec les deux configurations de patchs de *riblets*, la traînée est diminuée dans une mesure moindre que lorsque la paroi totalement recouverte de *riblets*. Il est intéressant de constater que la réduction de traînée est quasiment proportionnelle au recouvrement de la surface par des *riblets*, bien que les transitions successives entre surface lisse et *riblets* aient une influence légère mais délétère. En effet, la surface de la configuration on800off800 est couverte à 50% par des

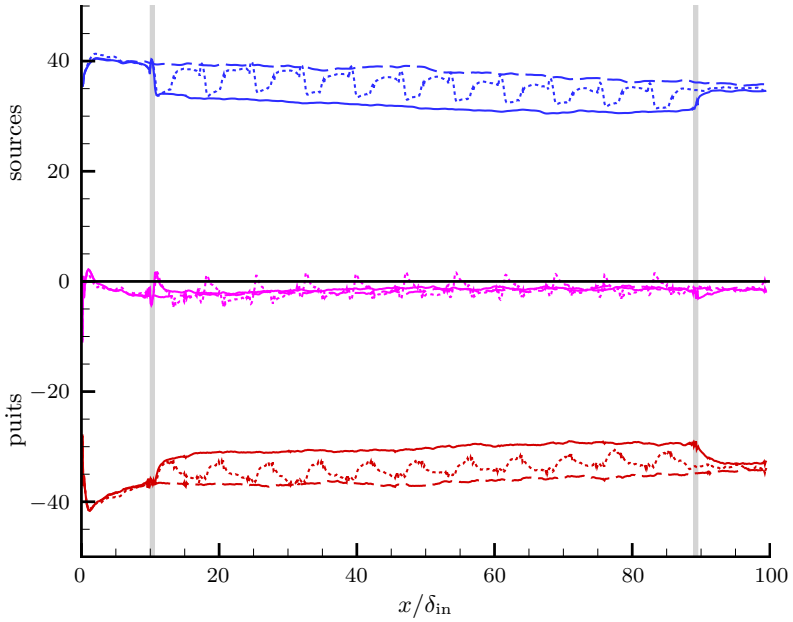


FIGURE 7.4 – Évolution avec x des termes dimensionnés du bilan d'énergie cinétique turbulente (1.22) intégrés sur chaque plan x pour les configurations de patchs on800off800 (·····), de *riblets* bidimensionnels (——) et de plaque plane (– – –). Les termes sont respectivement ceux de transport (convection et diffusion) (*rose*), de production (*bleu*) et de dissipation (*rouge*).

riblets et son taux de réduction de traînée accumulée est légèrement inférieur à la moitié de celui de la paroi totalement couverte de *riblets*. De même, le taux de réduction de traînée accumulée de la configuration on800off300 n'atteint pas les $\frac{800}{800+300}$-ièmes de celui des *riblets* bidimensionnels, c'est-à-dire 6.3% environ.

Comme mentionné en introduction de cette section, les observations faites sur le bilan d'énergie cinétique turbulente de la figure 5.5 ont mené à la présente étude de patchs de *riblets*. L'évolution des termes de ce bilan est représentée pour la configuration on800off800 sur la figure 7.4. Les courbes pour les termes de production et de dissipation oscillent entre celles des cas canoniques de plaque plane et de plaque totalement couverte de *riblets*. En comparaison avec le terme de dissipation, le terme de production s'adapte bien plus vite au changement entre surface lisse et *riblets*, dans un sens comme dans l'autre. Néanmoins, l'étendue des patchs et l'écart entre eux ne sont ici pas suffisamment longs pour que la dissipation ne puisse atteindre le niveau d'équilibre qui compense le niveau rapidement trouvé par la production. Bien que la moitié de la surface soit plane et l'autre moitié soit couverte de *riblets*, les niveaux de dissipation et de production évoluent autour de valeurs moyennes plus proches du cas de plaque plane que du cas de *riblets* bidimensionnels. Ce constat est en accord avec les résultats de réduction traînée du précédent paragraphe.

Pour conclure, la stratégie de réduction de traînée par utilisation de patchs de *riblets* ne représente qu'un intérêt applicatif limité. Néanmoins, les résultats présentés ici permettent d'établir que les transitions entre paroi plane et *riblets* n'ont qu'une faible influence sur la traînée. Ainsi, la réduction de traînée est quasiment proportionnelle à la surface effectivement recouverte par des *riblets*, ce qui, d'un point de vue applicatif, lève les nombreuses contraintes qu'aurait imposées le résultat contraire. Que ce soit pour des problématiques de détérioration localisée d'une surface de *riblets*, de zone où la pose de *riblets* doit être interrompue (interstice de porte, rivets, etc.) ou de mauvaises jonctions entre différents panneaux de *riblets*, l'effet sur la traînée est simplement proportionnel à la surface de la zone affectée.

7.2 Étude paramétrique de *riblets* sinueux

7.2.1 Introduction

La stratégie de contrôle par oscillation transverse de paroi (OTP) a été revue dans la section 2.3. Cette stratégie permet d'obtenir des taux significatifs de réduction de frottement pouvant dépasser 40%. Néanmoins, ce contrôle est actif. L'énergie nécessaire à son fonctionnement ruine les perspectives de véritable gain énergétique : en considérant les actionneurs comme idéaux, approximation extrêmement favorable, le gain énergétique net n'atteint pas 10%.

Pour leur part, les performances des *riblets* en termes de taux de réduction de traînée sont de l'ordre de 10%, ce qui est bien inférieur à celles de l'OTP. Néanmoins, contrairement à l'oscillation de paroi, le contrôle par *riblets* est une stratégie passive. Ainsi, en plus de l'extrême simplification technologique que l'absence de capteur et d'actionneur représente, la modeste réduction de traînée engendrée par les *riblets* s'identifie à leur gain net d'énergie. De ce point de vue, les performances des *riblets* ne sont pas ridicules devant celles de l'OTP, bien au contraire.

Les deux stratégies ont en commun le fait de n'agir sur l'écoulement que par une action depuis la paroi et, de ce fait, de ne pouvoir exercer d'influence directe que sur la turbulence proche-paroi et ses structures associées (TQLs et *streaks*). Ce résultat se retrouve d'ailleurs dans les lois de similitude concernant chacune de ces deux stratégies : toutes deux sont caractérisées par des grandeurs adimensionnées en unité de paroi, que ce soit l_g^+ ou Δh^+ pour les *riblets* (voir 2.2.1.3) ou l_{osc}^+ ou S_{osc}^+ pour l'oscillation transverse de paroi (voir 2.3.1.1). On pourra d'ailleurs remarquer la grande similarité entre les notions de hauteur de protubérance Δh^+ pour les *riblets* et de profondeur de pénétration l_{osc}^+ pour l'OTP, toutes deux caractérisant l'étendue de l'influence directe du contrôle dans la couche limite.

En dépit de cette similarité, les *riblets* et l'OTP semblent être des stratégies de contrôle tout à fait complémentaires, puisqu'elles interagissent avec l'écoulement turbulent de manière très différente.

Tout d'abord, comme on a pu le constater dès le début de la sous-section 2.3.3, les mécanismes en cause dans la réduction de traînée engendrée par l'OTP reposent intrinsèquement sur la notion de perturbation instationnaire de la turbulence. La traînée est effectivement réduite si le va-et-vient de la paroi empêche continuellement les structures du cycle proche-paroi — TQLs et *streaks*— de se réorganiser. À l'inverse, les mécanismes en jeu dans le cas des *riblets* parviennent à un régime établi qu'après un transitoire, comme cela est visible sur la figure 4.9, notamment sur la courbe *bleue* correspondant à la topologie de maillage sans discontinuité. Ainsi, les *riblets* ne sont pleinement efficaces qu'une fois que la turbulence proche-paroi a pu retrouver un nouvel équilibre. De plus, aux antipodes de l'OTP qui déstabilise continuellement les *streaks* et les orientent alternativement de part et d'autre de la direction longitudinale, les *riblets* les stabilisent et réfrènent leur louvoiement.

Une autre différence notable entre ces deux stratégies concerne leurs influences sur l'anisotropie de la turbulence à proximité de la paroi. Dans le cas de l'OTP, les profils d'intensités turbulentes, présentés sur la figure 2.25, révèlent une chute de u_{rms} et une hausse de w_{rms}. Ainsi, l'OTP conduit à une baisse de l'anisotropie (c'est-à-dire une hausse de l'isotropie) : alors que la turbulence de l'écoulement non-contrôlé est principalement mono-composante, elle devient davantage bi-composante sous l'effet du contrôle. Au contraire, en présence de *riblets*, la chute significative de w_{rms} visible sur la figure 4.18 engendre une dérive vers de la turbulence encore plus mono-composante. De façon plus générale, comme le traduit le concept de "hauteur de protrusion", l'efficacité des *riblets* se mesure à leur capacité d'entraver sélectivement les fluctuations transverses.

Enfin, comme mentionné dans le paragraphe 2.3.3.1, Ricco *et al.* [224] ont mis en avant que l'OTP agit sur la dissipation de l'énergie cinétique turbulente. En revanche, la sous-section 5.3.3 de notre étude a permis d'établir que les *riblets* affectent la production d'énergie cinétique turbulente. Dans chacun de ces deux cas, la chute de l'autre terme — production pour l'OTP et dissipation pour les *riblets*— n'est qu'une conséquence indirecte de l'effet du contrôle sur le premier.

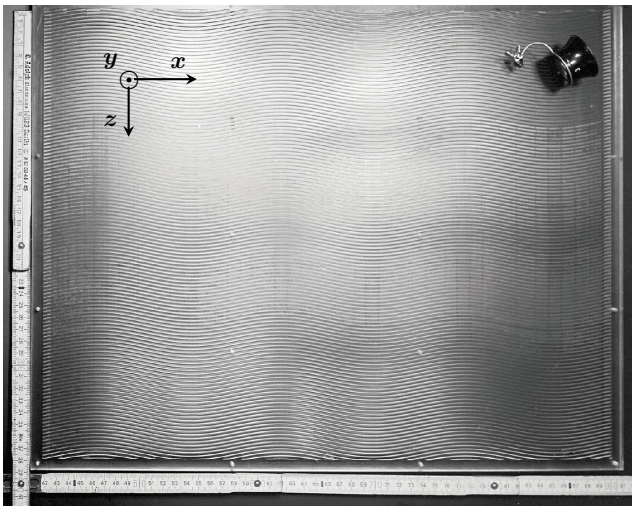


FIGURE 7.5 – Paroi recouverte de *riblets* sinueux. Figure extraite de [155].

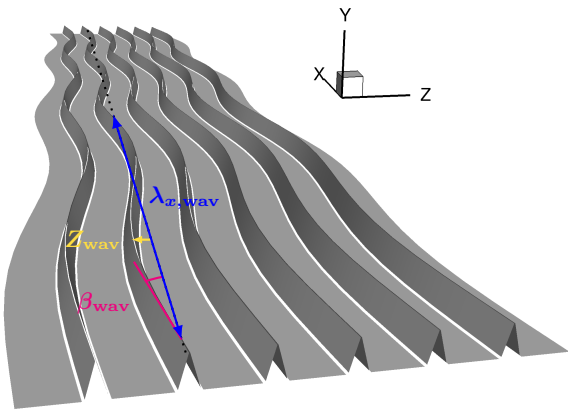


FIGURE 7.6 – Schéma en perspective de *riblets* sinueux avec la paramétrisation associée.

Puisque les deux stratégies de contrôle semblent altérer la traînée par des mécanismes dissociés, peut-être est-il possible de les cumuler. C'est dans cette optique que l'étude qui suit a été menée. Au lieu d'avoir recourt à des *riblets* bidimensionnels, dont les lignes de crête sont rectilignes et alignées avec la direction de l'écoulement, on se propose d'étudier des *riblets* tridimensionnels sinueux (*wavy riblets*), c'est-à-dire des *riblets* dont la ligne de crête oscille transversalement avec x. Un exemple de ces *riblets* est représenté sur la figure 7.5 et une paramétrisation est proposée sur la figure 7.6. De par la capacité des *riblets* à canaliser l'écoulement, on peut s'attendre à ce que l'écoulement proche de la paroi soit animé d'une vitesse transverse analogue à celle produite par un dispositif d'onde stationnaire de paroi, décrit dans la sous-section 2.3.1.4 par l'équation (2.20).

En faisant l'hypothèse qu'aucun mécanisme supplémentaire à ceux présents pour chacune des deux stratégies de contrôle prises séparément n'entre en jeux, alors, dans le meilleur des cas, leur réduction de traînée sera cumulée. Dans le pire des cas, on peut s'attendre à obtenir une réduction de traînée comparable à celle de *riblets* bidimensionnels (rectilignes) non-alignés avec la direction de l'écoulement libre (dont le comportement est décrit dans le paragraphe 2.2.1.5).

À la connaissance de l'auteur, deux études ont été menées sur les *riblets* sinueux et aboutissent à des conclusions opposées.

Tout d'abord, Peet *et al.* [206, 207, 205] ont conduit une étude numérique par LES de canal turbulent. Ils ont évalué le frottement induit en présence de *riblets* sinueux de différentes géométries, triangulaire ou en L (voir la figure 2.6), pour différents paramètres d'oscillation. Alors qu'ils ont obtenu $FRR = 11.2\%$ pour les *riblets* rectilignes en L, le taux de réduction de frottement atteint $FRR = 17\%$ pour des *riblets* sinueux de longueur d'onde $\lambda^+_{x,\mathrm{wav}} = 1080$ et de demi-envergure des oscillations $Z^+_{\mathrm{wav}} = 34$. Lorsque la résultante des efforts de pression est également prise en compte, le taux de réduction de traînée atteint tout de même $DRR = 14.6\%$.

La seconde étude portant sur les *riblets* sinueux, publiée dès l'année suivante par Kramer *et al.* [155], combine un pan expérimental et un pan numérique. Avec chacune de ces deux approches, pour les différents paramètres d'oscillation testés, aucun gain additionnel significatif des *riblets* sinueux n'a pu être mis en évidence par rapport aux *riblets* rectilignes classiques. En particulier, pour des paramètres d'oscillation proches de ceux de la configuration optimale de Peet *et al.*, Kramer *et al.* constatent un taux de réduction de traînée de $DRR = 7.6 \pm 1.1\%$, bien inférieur à celui évalué par Peet *et al.* [207].

Compte tenu des réductions de traînée atteintes par oscillation transverse de paroi dont les *riblets* sinueux tirent leur principe, de la complémentarité entre les mécanismes physiques impliqués

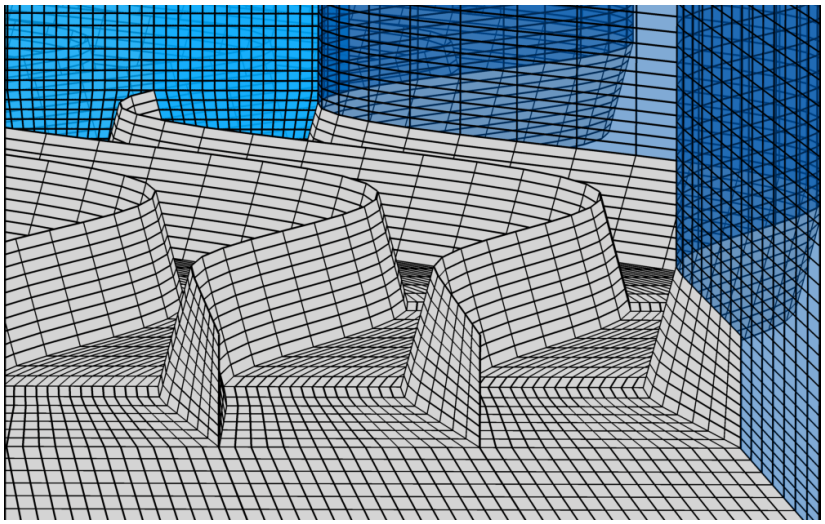


FIGURE 7.7 – Représentation du maillage utilisé pour discrétiser l'espace au-dessus d'une paroi partiellement recouverte de *riblets* sinueux. La topologie y est celle dite "cartésienne" de la figure 4.6.

pour l'OTP et pour les *riblets* rectilignes, ainsi que des résultats très prometteurs mais contestés de Peet *et al.*, on se propose d'entreprendre une nouvelle étude. L'objectif est de quantifier les performances de réduction de traînée engendrées par des *riblets* sinueux et ainsi évaluer si un gain additionnel est réalisable par rapport aux *riblets* rectilignes. Il n'est pas possible de savoir *a priori* quelle est la géométrie des *riblets* sinueux qui conduira à la traînée optimale. Pour cela, une étude paramétrique doit être entreprise.

La définition du cas d'étude et des paramètres que l'on se propose d'optimiser est détaillée dans la sous-section 7.2.2 suivante. La stratégie d'optimisation sera établie dans la sous-section 7.2.3, puis les résultats seront abordés dans la sous-section 7.2.4.

7.2.2 Paramétrisation des *riblets* sinueux

Avant d'entreprendre une étude paramétrique visant à optimiser la traînée de *riblets* sinueux, on définit ci-dessous les paramètres liés aux conditions d'écoulement et de simulation, qui ne seront pas optimisés, puis ceux liés à la géométrie des *riblets*, dont certains le seront.

Concernant les conditions d'écoulement et de simulation, le choix a été de conserver celles mises en place dans les sections 4.1 et 4.2 pour l'étude des *riblets* rectilignes. Ainsi, l'écoulement sera celui d'une ZPGTBL quasi-incompressible dont les caractéristiques figurent dans les tableaux 4.1 et 4.2. La discrétisation spatiale est représentée sur la figure 7.7 et répond aux exigences du tableau 4.6.

Afin de limiter les coûts de simulation, le domaine de calcul a été raccourci. L'étendue longitudinale de la zone de contrôle reste néanmoins de $25\,\delta_{\text{in}}$, correspondant ainsi au maillage de 40 millions de nœuds de la campagne de simulation R9 dans le tableau récapitulatif 4.9.

Les *riblets* conserveront leur géométrie de coupe trapézoïdale et les dimensions définies par le tableau 4.3. Cette géométrie, considérée comme quasi-optimale sous contrainte de faisabilité technologique pour des *riblets* rectilignes, ne sera pas optimisée davantage dans le cadre de *riblets* sinueux.

Suite aux résultats mitigés de l'OTP pour des mouvements périodiques non sinusoïdaux de Cimarelli *et al.* [47] abordés dans la sous-section 2.3.1.3, on se restreindra ici au cas de *riblets* oscillant de manière sinusoïdale.

L'oscillation transverse des *riblets* peut alors être spécifiée grâce à deux paramètres, comme n'importe quelle paire formée à partir de $\lambda_{x,\text{wav}}$, β_{wav} et Z_{wav} représentés sur la figure 7.6. Le mécanisme de réduction de traînée que l'on souhaite reproduire étant celui de l'oscillation transverse de paroi,

il serait intéressant de pouvoir se rapporter aux grandeurs T_{osc} et W_{osc} utilisées pour la caractériser. Comme dans le cas des ondes transverses stationnaires de paroi, abordé à la sous-section 2.3.1.4, une vitesse de convection est nécessaire pour traduire des variables spatiales en variables temporelles. Là encore, l'estimation $u^+_{\text{conv}} = 10$ de l'équation (1.65) valable pour les structures cohérentes de proche-paroi est utilisée. Les relations suivantes peuvent alors être établies entre les paramètres géométriques des *riblets* sinueux et ceux de l'OTP :

$$\lambda_{x,\text{wav}} = T_{\text{osc}}\, u_{\text{conv}} \,, \qquad \tan\left(\beta_{\text{wav}}\right) = \frac{W_{\text{osc}}}{u_{\text{conv}}} \,, \qquad Z_{\text{wav}} = \frac{W_{\text{osc}} T_{\text{osc}}}{2\pi} \,. \tag{7.5}$$

Les paramètres $\lambda_{x,\text{wav}}$ et β_{wav} présentent l'avantage d'être chacun directement relié à l'une des grandeurs $(T_{\text{osc}}, W_{\text{osc}})$ propres à l'OTP. C'est donc ce jeu que l'on décide d'utiliser dans la suite pour caractériser les *riblets* sinueux.

Dans le cas de l'OTP, il a été établi lors de la revue bibliographique que les configurations optimales en termes de réduction du frottement et d'économie nette d'énergie étaient atteintes pour $T^+_{\text{osc}} = 100 - 120$. En utilisant les formules (7.5), cela correspond à une longueur d'onde optimale $\lambda^+_{x,\text{wav}} = 1000 - 1200$.

La réduction de traînée induite par l'OTP croît avec W_{osc}, alors que l'économie nette d'énergie est maximale pour l'amplitude $W^+_{\text{osc}} = 4.5$. Cet optimum correspond à un angle β_{wav} de 24°. Cependant, il a été établi dans le paragraphe 2.2.1.5 que les *riblets* rectilignes voient leur performance progressivement chuter lorsqu'ils ne sont pas alignés avec l'écoulement, jusqu'à ce que la réduction de traînée devienne une augmentation de traînée lorsque l'angle de dérapage atteint $\beta = 20 - 35°$. Pour l'étude de *riblets* sinueux, on s'impose alors de conserver $\beta_{\text{wav}} \leq 20°$.

Ainsi, l'optimisation de *riblets* sinueux que l'on se propose d'entreprendre est restreinte à l'espace des paramètres $(\lambda_{x,\text{wav}}, \beta_{\text{wav}}) \in [\lambda_{x,\text{min}}, \lambda_{x,\text{max}}] \times [\beta_{\text{min}}, \beta_{\text{max}}]$ dont les bornes sont précisées dans le tableau 7.2. Par l'analogie avec l'oscillation temporelle, ces bornes correspondent à $12.5 \leq T^+_{\text{osc}} \leq 250$ et $0.17 \leq W^+_{\text{osc}} \leq 3.6$.

$\lambda^+_{x,\text{min}}$	$\lambda^+_{x,\text{max}}$	β_{min}	β_{max}
125	2500	1°	20°

TABLE 7.2 – Bornes de l'espace des paramètres à optimiser.

Notons que dans leur étude, Peet *et al.* [207] se sont intéressés aux longueurs d'onde $\lambda^+_{x,\text{wav}} \in \{580, 1080, 1620\}$ pour des angles $\beta^+_{\text{wav}} \leq 20°$. Kramer *et al.* [155] ont quant à eux réalisé des mesures expérimentales avec des paramètres $(\lambda^+_{x,\text{wav}}, \beta_{\text{wav}})$ de la gamme $[330, 1350] \times [3°, 13°]$ et centré leurs calculs sur la longueur d'onde $\lambda^+_{x,\text{wav}} = 1080$ pour des angles variant de 2.5° à 16.5°. Ces paramètres d'étude sont donc tous inclus dans l'espace que l'on se propose d'explorer.

7.2.3 Mise en place d'une stratégie d'optimisation

Le problème d'optimisation s'énonce de la façon suivante : quel jeu de paramètres $(\lambda_{x,\text{osc}}, \beta_{\text{osc}})$ minimise la traînée accumulée sur la paroi *ADRR* pour des conditions d'écoulement, un domaine de contrôle et une géométrie de coupe de *riblets* fixés ?

La fonction objectif $ADRR(\lambda_{x,\text{osc}}, \beta_{\text{osc}})$, définie par l'équation (7.4) est *a priori* continue, mais n'a aucune raison d'être linéaire. Son évaluation nécessite le recours à une simulation de type LES ou DNS pour chaque point de l'espace des paramètres. On a donc affaire à un problème d'optimisation non-linéaire, mono-objectif, non-contraint, à deux paramètres, avec un coût d'évaluation important. Différentes familles de **méthode d'optimisation** existent. Il ne s'agit pas ici d'en établir une revue exhaustive, ce qui dépasserait du cadre de cette thèse. Néanmoins, il paraît utile de détailler les choix qui ont conduit à l'utilisation de l'une de ces méthodes

Dans la suite de cette section, on désigne par $y(\underline{x})$ la **fonction objectif**, c'est-à-dire la fonction dont on veut trouver l'optimum sur l'espace des paramètres $\underline{x}$. Sans perdre en généralité, on suppose

que l'on cherche un minimum. Dans notre cas d'étude, $y(\underline{x})$ désigne donc l'opposée de la réduction de traînée $ADRR(\lambda_{x,\mathrm{osc}}, \beta_{\mathrm{osc}})$.

Dans le cadre d'optimisation d'une fonction continue non-linéaire, on peut distinguer deux grandes catégories de méthode d'optimisation : les algorithmes de recherche locale et ceux de recherche globale.

Les **algorithmes de recherche locale** sont basés sur la recherche des zéros du gradient de la fonction objectif. Ces méthodes suivent un procédé itératif pour converger vers l'optimum et nécessitent, à chaque itération, l'évaluation de la fonction objectif et de son gradient. Cette approche constitue la base des méthodes de Newton, de quasi-Newton ou de gradient conjugué. Ces méthodes sont particulièrement séduisantes dans la mesure où elles ne nécessitent généralement qu'un petit nombre d'évaluations et leur mise en place et implémentation est relativement aisée. Cependant, ces méthodes souffrent des inconvénients suivants :

- la fonction objectif doit être suffisamment régulière pour être dérivable,
- l'évaluation de son gradient est nécessaire,
- la méthode ne fournit aucune information sur le comportement global de la fonction objectif dans l'espace des paramètres,
- la solution obtenue peut n'être qu'un extremum local,
- la vitesse de convergence peut être lente et influencée par le choix du point de départ.

Dans notre cas, chaque évaluation de la fonction objective étant coûteuse, cette approche peut s'avérer séduisante par son faible prérequis en termes de nombre d'évaluations. Cependant, l'estimation du gradient local peut poser des soucis, puisqu'aucune méthode ne permet son évaluation directe (la résolution de l'état adjoint, par exemple, n'est pas disponible pour nos simulations instationnaires de type LES). Ainsi, l'évaluation du gradient doit se faire par le calcul d'un taux d'accroissement dans chacune des directions de l'espace des N_{spc} paramètres, ce qui implique au minimum N_{spc} évaluations supplémentaires de la fonction objective, sans compter les difficultés que peuvent causer les incertitudes de l'évaluation sur cette méthode d'estimation du gradient.

Pour résoudre des problèmes difficiles (présentant par exemple de nombreux extrema locaux), des **algorithmes de recherche globale** ont été développés. Parfois qualifiées de méthodes "boîte noire", elles sont presque totalement indépendantes des caractéristiques physiques du problème à optimiser. Les méthodes les plus connues sont les algorithmes génétiques, les algorithmes à colonies de fourmis ou le recuit simulé. Ces méthodes ne souffrent d'aucun des inconvénients évoqués pour les algorithmes de recherche locale, mais, à l'inverse, nécessitent généralement un très grand nombre d'évaluations de la fonction objectif. Ainsi, elles se révèlent inemployables dans les cas d'optimisation où l'appel à la fonction objectif est pénalisant.

C'est au même dilemme que l'industrie minière était confrontée quand la quantité de gisements inexploités devait être estimée en un minimum de forage. C'est dans ce cadre que Danie G. Krige [158] a élaboré, en 1951, les fondements d'une nouvelle approche qui gardera son nom : le **krigeage** (*kriging* en anglais). Il faudra attendre la décennie suivante pour que le corpsard Georges Matheron développe et formalise cette théorie [177]. Des références intéressantes sur le sujet sont par exemple [183, 228, 138].

La méthode d'optimisation par krigeage fait partie du cadre plus général des **méthodes d'optimisation par surface de réponse**, dont le principe général est le suivant. Le calcul de la fonction objectif en un point de l'espace des paramètres — calcul dit de haute-fidélité — étant coûteux, on souhaite en limiter le nombre. Ainsi, à partir d'un nombre restreint de calculs de haute-fidélité, on cherche à établir la meilleure représentation possible de la fonction objectif sur la totalité de l'espace des paramètres. Cette représentation porte le nom de **méta-modèle**, **modèle de substitution** (*surrogate model*) ou **surface de réponse** (*response surface*). Contrairement à la fonction objectif elle-même, le modèle de substitution doit pouvoir être évalué de façon peu coûteuse — évaluation dite de basse-fidélité — si bien que l'on pourra avoir recourt à un algorithme de recherche globale

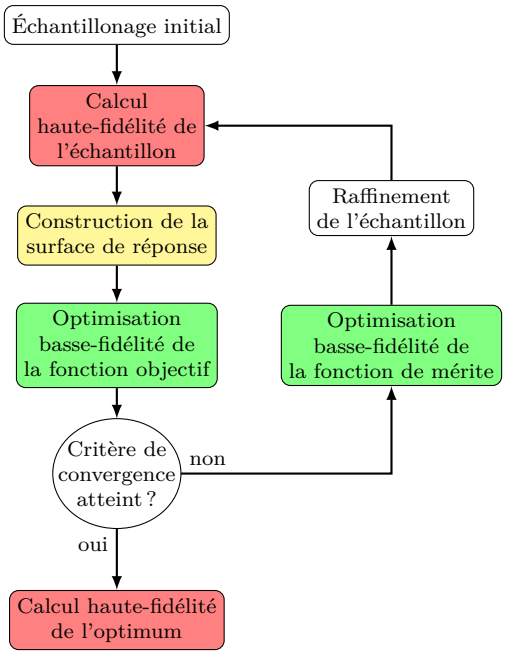


FIGURE 7.8 – Schéma de principe d'une méthode d'optimisation par surface de réponse.

pour y trouver un optimum. L'information fournie par le modèle de substitution permet d'identifier des points de l'espace des paramètres où la fonction objectif n'a pas encore été directement calculée, mais qui semblent prometteurs. De manière itérative, on peut alors calculer la fonction objectif sur les points prometteurs de l'espace des paramètres et affiner le modèle de substitution jusqu'à avoir de bonnes raisons de penser que l'optimum a été trouvé.

La difficulté et l'enjeu de la méthode sont alors d'être en mesure de déterminer la pertinence du modèle de substitution à représenter correctement la fonction objectif, notamment à proximité de l'optimum recherché. Comme on le verra de suite, c'est là tout l'intérêt du krigeage par rapport à d'autres méthodes de construction de surface de réponse.

Les méthodes d'optimisation par surface de réponse se décomposent en plusieurs étapes, illustrées par la figure 7.8. Chacune de ces étapes est indépendante : elles sont réalisées de façon séquentielle et font l'objet de choix de méthode et paramétrisation dissociés. Elles sont toutes détaillées, une à une, dans la suite de cette sous-section.

7.2.3.1 Construction de la surface de réponse par krigeage

À partir du calcul haute-fidélité de la fonction objectif sur un certain nombre de points de l'espace de réponse, il existe de nombreuses alternatives pour construire un modèle approché de la fonction objectif. Au côté du krigeage, la plus connue de ces méthodes n'est autre que la régression linéaire, que l'on considère dans un premier temps afin d'introduire très simplement le formalisme qui sera utilisé pour décrire le krigeage par la suite.

La méthode de régression linéaire consiste à approcher une fonction objectif $y(\underline{x})$ quelconque, en n'importe quel point $\underline{x} = (x_i)_{i\in[1,P]}$ de l'espace à P paramètres, par une fonction linéaire simple qui s'écrit comme $\beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_P x_P$. On sait que cette fonction n'est qu'une estimation approchée de la véritable fonction objectif y, si bien qu'en notant ϵ l'erreur commise, on peut écrire

$$y(\underline{x}) \;=\; \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_P x_P \;+\; \epsilon(\underline{x})\,. \tag{7.6}$$

L'objectif est donc de déterminer les coefficients β_i de la régression qui permettent de réduire autant que possible l'erreur commise, c'est-à-dire de minimiser sa variance $V(\epsilon) = \sigma^2$ tout en annulant son espérance $E(\epsilon)$.

Or, de la même façon que l'on ne peut pas calculer $y(\underline{x})$ sur tout l'espace des paramètres, on ne peut pas non plus le faire pour $\epsilon(\underline{x})$. On doit alors s'appuyer sur l'information restreinte que l'on a de la fonction objectif : une base de données de N points d'échantillonnage finement calculés. Leurs coordonnées dans l'espace des paramètres est notées par $\underline{X}_j = (X_i^j)_{i\in[1,P]}$ et leurs évaluations de haute-fidélité par $Y_j = y(\underline{X}_j)$. On cherche alors les coefficients $\hat{\beta}_i$, les meilleurs estimateurs des vrais coefficients β_i que notre échantillon limité nous permette. Ces estimateurs $\hat{\beta}_i$ doivent donc minimiser les erreurs $\hat{\epsilon}_j$ faites par le modèle sur les N points d'échantillonnage :

$$Y_j \;=\; \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1^j + ... + \hat{\beta}_P X_P^j \;+\; \hat{\epsilon}_j \,. \tag{7.7}$$

Élargissons maintenant le cadre à celui des régressions en général (non nécessairement linéaires cette fois). Le principe est toujours d'approcher la fonction objectif $y(\underline{x})$ sur l'ensemble de l'espace des paramètres, mais, cette fois-ci, on se garde le droit de le faire par une combinaison linéaire de n'importe quel jeu de K fonctions $f_k(\underline{x})$ déterminées *a priori*. De sorte que l'équation (7.6) de la régression linéaire avec ces $K = P + 1$ fonctions élémentaires se généralise en

$$y(\underline{x}) \;=\; \sum_{k=1}^{K} \beta_k f_k(\underline{x}) \;+\; \epsilon(\underline{x}) \,. \tag{7.8}$$

Là encore, on tente d'approcher les coefficients pondérateurs β_k au moyen de la base de données de N points d'échantillonnage. Le problème de dimension finie qu'il faut alors résoudre est de déterminer l'estimateur $\underline{\hat{\beta}}$ des coefficients pondérateurs $\underline{\beta}$ qui minimise la variance $V(\underline{\hat{\epsilon}})$ de l'erreur $\underline{\hat{\epsilon}}$ sous les contraintes

$$\underline{Y} \;=\; \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\hat{\beta}} \;+\; \underline{\hat{\epsilon}} \qquad \text{et} \qquad E(\underline{\hat{\epsilon}}) \;=\; \underline{1} \cdot \underline{\hat{\epsilon}} \;=\; 0 \,, \tag{7.9}$$

où la matrice $\underline{\underline{F}}$ de dimension $N \times K$ est définie par $F_{j,k} = f_k(\underline{X}_j)$.

L'estimation non biaisée des coefficients pondérateurs $\underline{\beta}$ est alors donnée par minimisation des moindres carrées de $V(\underline{\hat{\epsilon}})$ selon

$$\underline{\hat{\beta}} = \left(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}\right)^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{Y} \,, \tag{7.10}$$

où $\underline{\underline{F}}^T$ désigne la transposée de $\underline{\underline{F}}$.

Dans cet espace à P paramètres, on a donc approximé une fonction objectif quelconque $y(\underline{x})$ par une combinaison linéaire de K fonctions, de sorte à limiter l'erreur d'estimation en N points pré-évalués. Si $N > K$, il n'est pas assuré que la surface de réponse puisse passer par chacun des N points d'échantillonnage. À l'inverse, si l'ensemble des K fonctions est choisi de façon adéquate et que $N \leq K$, alors on dispose de suffisamment de degrés de liberté pour que la surface de réponse approxime correctement la fonction objectif sur chacun des points d'échantillonnage. On parle alors d'interpolation. Notons d'ailleurs que pour $N < K$, la solution d'interpolation n'est pas unique : le modèle est trop riche par rapport à la faible quantité d'information connue de la fonction objectif. Cela se traduit mathématiquement par le fait que la matrice $\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$ de (7.10) n'est pas inversible à proprement parler, bien que l'on puisse avoir recourt à l'un de ses pseudo-inverses.

Le **krigeage universel** est défini comme une méthode de régression pour laquelle, en plus de la composante déterministe, une déviation statistique $Z(\underline{x})$ est explicitement prise en compte :

$$y(\underline{x}) \;=\; \sum_{k=1}^{K} \beta_k f_k(\underline{x}) \;+\; Z(\underline{x}) \;+\; \epsilon(\underline{x}) \,. \tag{7.11}$$

Cette déviation statistique $Z(\underline{x})$ est interprétée comme une fonction propre au processus que décrit la fonction objectif. Son espérance est nulle et on suppose que sa loi de covariance ne dépend que de la distance entre les deux points — elle est donc uniforme sur l'espace des paramètres, ce qui constitue une hypothèse particulièrement forte. L'erreur $\epsilon(\underline{x})$ conserve les mêmes propriétés que précédemment et prend encore en compte l'irréductible écart entre la fonction objectif quelconque et le modèle de substitution ainsi défini.

Dans le cas du **krigeage ordinaire** qui nous intéressera par la suite, on simplifie grandement la partie déterministe du modèle de régression : le jeu des fonctions f_k considéré est réduit à l'unique fonction constante $f(\underline{x}) = 1$, si bien que seule la composante statistique du modèle est censée décrire la fonction objectif. L'équation (7.11) se simplifie en

$$y(\underline{x}) \;=\; \beta \;+\; Z(\underline{x}) \;+\; \epsilon(\underline{x})\,, \tag{7.12}$$

avec les spécificités suivantes sur la déviation statistique :

$$E(Z) = 0\,, \tag{7.13}$$

$$\mathrm{cov}\Big(Z(\underline{x}), Z(\underline{\mathrm{x}})\Big) = \sigma^2\, R\left(\underline{\theta}, |\underline{x} - \underline{\mathrm{x}}|\right) = \sigma^2 \prod_{i=1}^{P} e^{-\theta_i |x_i - \mathrm{x}_i|^2}\,, \tag{7.14}$$

où les coefficients positifs σ et θ_i seront à déterminer. La fonction R est appelée **fonction de corrélation spatiale**. Il est a noté qu'en général, elle n'est pas forcément définie comme un produit de gaussiennes, mais que seule cette définition nous intéressera par la suite. La fonction de corrélation caractérise le fait que la valeur de Z en un point n'est pas totalement indépendante de celle en un autre point proche, c'est-à-dire que la déviation statistique de la fonction objectif par rapport au modèle de régression (une constante ici !) n'est pas chaotique. La notion de *proche* est contrôlée indépendamment pour chaque direction de l'espace des paramètres par les P coefficients θ_i. Un coefficient θ_i faible implique que Z évolue lentement avec le paramètre x_i et donc que ce paramètre influe peu sur la fonction objectif.

De façon analogue au cas du modèle de régression classique, l'objectif est ici de déterminer la meilleure estimation de la fonction objectif $y(\underline{x})$ vérifiant le modèle précédent avec la seule connaissance des N points d'échantillonnage d'ores et déjà évalués. Cependant, en plus de définir l'estimateur de β, il faut de plus spécifier celui pour $Z(\underline{x})$, qui impliquera certainement σ et $\underline{\theta}$. Jones *et al.* [138] montrent que la meilleure estimation au sens du maximum de vraisemblance (*maximum likelihood estimate* ou MLE, voir [228]) est donnée par

$$\hat{y}(\underline{x}) \;=\; \hat{\beta} \;+\; \underline{r}(\underline{x})^T \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \Big(\underline{Y} - \hat{\beta}\,\underline{1}\Big)\,, \tag{7.15a}$$

avec

$$\hat{\beta} \;=\; \Big(\underline{1}^T \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{1}\Big)^{-1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{Y}\,, \tag{7.15b}$$

$$\hat{\sigma} \;=\; \frac{1}{N}\Big(\underline{Y} - \underline{1}\cdot\hat{\beta}\Big)^T \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \Big(\underline{Y} - \underline{1}\cdot\hat{\beta}\Big)\,, \tag{7.15c}$$

$$\hat{\underline{\theta}} \;=\; \underset{\hat{\theta}_i>0}{\mathrm{argmax}}\,[MLE] \;=\; \underset{\hat{\theta}_i>0}{\mathrm{argmax}} \left[-\frac{N}{2}\ln\left(\hat{\sigma}^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\|\underline{\underline{R}}\|\right)\right]\,, \tag{7.15d}$$

où $\underline{\underline{R}}$ est la **matrice de corrélation** entre les N points d'échantillonnage et $\underline{r}(\underline{x})$ est le **vecteur de corrélation** entre les N points d'échantillonnage et le site de prédiction $\underline{x}$. De dimensions respectives $N \times N$ et N, ils sont définis par $R_{ij} = R(\hat{\underline{\theta}}, \underline{X}_i - \underline{X}_j)$ et $r_j(\underline{x}) = R(\hat{\underline{\theta}}, \underline{x} - \underline{X}_j)$. Leurs composantes sont donc comprises entre 0 et 1 (0 dans la limite de points infiniment éloignés et 1 pour des points confondus) et la matrice $\underline{\underline{R}}$ est symétrique et unitaire sur la diagonale. Défini à partir de la fonction de corrélation R, la matrice et le vecteur $\underline{\underline{R}}$ et $\underline{r}$ dépendent des coefficients $\hat{\underline{\theta}}$. Il en est donc de même pour les estimateurs $\hat{\beta}$ et $\hat{\sigma}$. Ainsi, la définition de $\hat{\underline{\theta}}$ constitue un problème d'optimisation implicitement défini. Il peut néanmoins être résolu itérativement : à partir d'une première estimation $\hat{\underline{\theta}}$, on calcule $\hat{\beta}$ et $\hat{\sigma}$ grâce (7.15b) et (7.15c). On peut alors obtenir une meilleure estimation $\hat{\underline{\theta}}$ en résolvant (7.15d) avec $\hat{\sigma}$ fixé. On recommence ainsi de suite jusqu'à convergence.

En chacun des points d'échantillonnage, l'estimateur $\hat{y}(\underline{X}_j)$ coïncide bien avec la fonction objective $y(\underline{X}_j) = Y_j$. Cela permet de vérifier que cette modélisation est un interpolant de la fonction

objectif. En dehors des points d'échantillonnage, la méthode fournie une estimation de l'incertitude d'approximation par

$$\hat{s}^2(\underline{x}) \;=\; \hat{\sigma}^2 \cdot \left(1 - \underline{r}(\underline{x})^T \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{r}(\underline{x}) + \frac{\left(1 - \underline{1}^T \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{1}\right)^2}{\underline{1}^T \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{1}} \right) . \tag{7.16}$$

La fonction $\hat{s}(\underline{x})$ est appelée **écart-type de l'erreur de krigeage**. On remarque qu'elle ne dépend pas directement pas des valeurs $\underline{Y}$ prises par la fonction objectif aux points d'échantillonnage, mais seulement des distances entre les points via $\underline{\underline{R}}$ et $\underline{r}(\underline{x})$. On vérifie d'ailleurs qu'en chacun des points d'échantillonnage, l'écart-type de krigeage $\hat{s}(\underline{X}_j)$ est nul.

Une façon moins abstraite pour comprendre le krigeage ordinaire est de considérer qu'il s'agit d'une méthode de régression pour laquelle la fonction objectif est approximée par une combinaison de $K = N$ fonctions gaussiennes, où N est le nombre de points d'échantillonnage. Ces fonctions gaussiennes sont centrées sur chacun de ces points d'échantillonnage et partagent la même forme, C'est-à-dire que, pour chaque direction i de l'espace des paramètres, elles ont la même étendue, modulable par le coefficient $\hat{\theta}_i > 0$. Un coefficient $\hat{\theta}_i$ faible implique que les fonctions gaussiennes sont très étendues dans la direction du paramètre x_i et donc que le modèle de substitution $\hat{y}(\underline{x})$ évolue peu avec ce paramètre. Autrement dit, les estimations de y en deux points $\underline{x}$ et $\underline{x} + \delta\,\underline{e}_i$ sont d'autant plus corrélées que ces points sont proches ou que $\hat{\theta}_i$ est faible. Puisque l'on utilise autant de fonctions gaussiennes que de points d'échantillonnage, il est toujours possible de choisir quelle magnitude appliquer à chaque gaussienne pour que la combinaison linéaire soit interpolante, c'est-à-dire que la surface de réponse passe bien par les points d'échantillonnage.

On voit bien que si l'on définit tous les coefficients θ_i avec des valeurs suffisamment larges, chaque fonction gaussienne sera si étroite que le modèle de substitution prendra l'allure d'une fonction constante tachetée de pics distincts les uns des autres et placés à la position de chacun des points d'échantillonnage. Bien qu'effectivement interpolant, ce modèle de substitution ne constitue pas une bonne caractérisation de la fonction objectif. Le but de la phase de maximisation de la vraisemblance, équation (7.15d), est justement de déterminer les coefficients $\hat{\theta}_i$ qui élargissent le plus possible les gaussiennes, c'est-à-dire qui augmentent la corrélation entre les points de l'espace des paramètres.

De nombreux outils sont disponibles pour réaliser la construction d'un modèle de substitution par krigeage. À partir d'une base de données de points d'échantillonnage évalués, ces outils construisent le modèle de substitution $\hat{y}(\underline{x})$ selon (7.15a) et la fonction d'évaluation de l'erreur de krigeage $\hat{s}(\underline{x})$ définie par (7.16). L'outil qui a été mis en œuvre au cours de cette étude est la bibliothèque libre ooDACE, implémentée dans l'environnement Matlab et dont les détails sont fournis par Couckuyt *et al.* [53, 54].

Krigeage avec observations bruitées. La formulation du krigeage (7.15) repose sur l'hypothèse que la mesure haute fidélité de la fonction objectif est exacte. Dans de nombreuses applications physiques, comme dans le cas d'estimation de la traînée par simulation numérique, cette mesure est en pratique bruitée. Ainsi, la mesure haute-fidélité de deux points très proches de l'espace des paramètres peut fournir des valeurs sensiblement différentes au regard de leur proximité. La surface de réponse étant interpolante, sa construction s'en retrouve grandement affectée, puisque le passage par ces deux points engendre une grande variation qui ne traduit pourtant aucune réalité physique. La figure de gauche de 7.9 illustre ce phénomène : bien que la fonction analytique à optimiser soit relativement régulière, les erreurs de mesure engendrent de franches oscillations du modèle de substitution.

Afin de gagner en robustesse, il est donc nécessaire de renseigner le modèle sur l'écart-type de la mesure haute-fidélité τ_j à chacun des points d'échantillonnage $\underline{X}_j$. Ginsbourger établit dans sa thèse [104] les fondements mathématiques pour la prise en compte de cette incertitude de mesure.

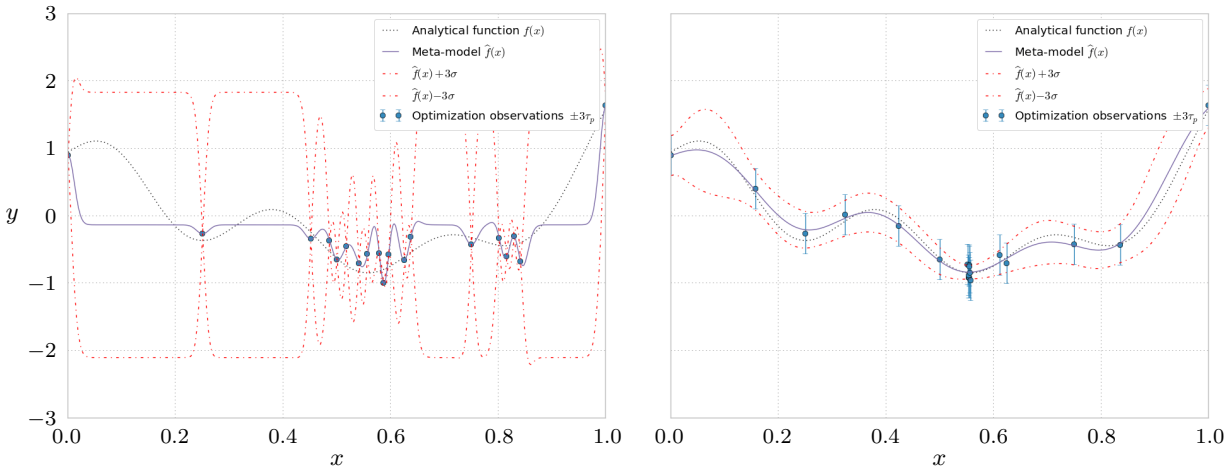


FIGURE 7.9 – Construction d'une surface de réponse mono-dimensionnelle par krigeage, en prenant (*à droite*) ou en ne prenant pas (*à gauche*) en compte de l'erreur de mesure de l'évaluation de haute-fidélité. Figures extraites de [161]

Au final, la matrice diagonale $\underline{\underline{\Delta}} = \mathrm{diag}(\tau_j)$ doit simplement être additionnée à la matrice $\underline{\underline{R}}$ dans les équations (7.15) et (7.16). Comme illustré par la figure de droite de 7.9, la surface de réponse alors obtenue n'est plus interpolante, puisque la meilleure estimation $\hat{y}$ de la fonction objectif en un point d'échantillonnage $\underline{X}_j$ n'est plus nécessairement le résultat de sa mesure de haute-fidélité bruitée Y_j. De plus, l'écart-type de l'erreur de krigeage $\hat{s}$ n'est plus nul aux points d'échantillonnage $\underline{X}_j$, mais dépend de la valeur de l'écart-type de l'erreur de mesure τ_j associé.

L'implémentation de cette méthode au sein de la bibliothèque ooDACE nécessite quelques précautions, notamment en ce qui concerne l'étape (7.15d) de calcul de $\hat{\underline{\theta}}$ par optimisation de de la fonction de maximum de vraisemblance.

7.2.3.2 Échantillonnage initial par hypercube latin

La présentation de la méthode de construction de surface de réponse par krigeage a mis en avant l'importance du choix d'échantillonnage. Le krigeage étant basé sur l'hypothèse forte que la fonction objectif est caractérisée par une fonction stochastique $Z(\underline{x})$ dont les propriétés de covariance entre deux points sont uniformes. Il est donc important, dans l'utilisation de cette méthode, de remplir uniformément l'espace des paramètres.

Choisir aléatoirement un jeu de points $\underline{X}$ ne permet pas de s'assurer d'un bon recouvrement de tout l'espace. Inversement, avoir recours à une distribution uniforme présente l'inconvénient de favoriser des directions particulières. Une méthode alternative est l'**échantillonnage par hypercube latin** (LHS pour *latin hypercube sampling*).

Pour obtenir un échantillon de N_{ini} points d'échantillonnage par hypercube latin, on partitionne uniformément l'espace propre à *chaque* paramètre en N_{ini} parties. On construit alors un jeu de N_{ini} points de sorte que chaque partie de la partition de chaque paramètre ne soit utilisée que par un unique point. La figure 7.10 illustre ce propos avec l'échantillonnage à 10 points qui a effectivement été utilisé pour initier l'optimisation.

Différents critères peuvent être employés pour la construction d'un tel jeu parmi les très nombreuses possibilités. Dans notre cas, la répartition est optimisée grâce à une routine de Didier Bailly, du département d'aérodynamique appliqué (DAAP) de l'Onera, afin de maximiser la distance entre les points d'échantillonnage.

Revenons à notre problème d'optimisation du taux de réduction de traînée $ADRR(\lambda_{x,\mathrm{wav}}, \beta_{\mathrm{wav}})$. Une simple règle de trois pourrait être utilisée pour passer de l'échantillonnage du carré uni-

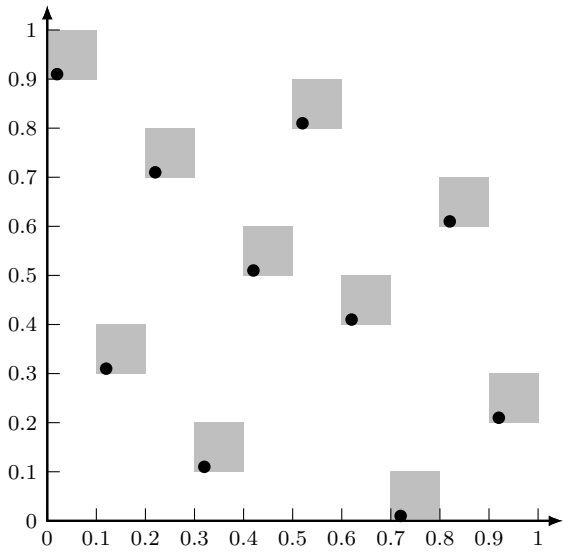


FIGURE 7.10 – Échantillonnage par hypercube latin du carré unitaire à deux dimensions $[0,1] \times [0,1]$ avec 10 échantillons. Les carrés *grisés* délimitent la partition de chacun des paramètres dans lesquels le point d'échantillon est seul.

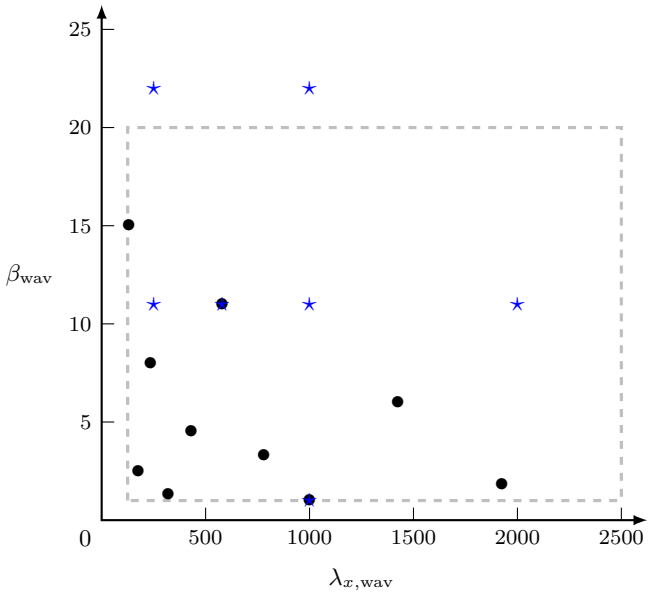


FIGURE 7.11 – Paramètres dans l'espace $(\lambda_{x,\text{wav}}, \beta_{\text{wav}})$ des points de l'échantillonnage initial de l'optimisation (•, cf. tableau 7.3) et des points de calcul additionnels (⋆, cf. tableau 7.5). Les bornes de l'espace des paramètres pour l'optimisation sont indiquées en *pointillés gris*.

taire $[0,1] \times [0,1]$ à celui de l'espace des paramètres $[\lambda_{x,\min}, \lambda_{x,\max}] \times [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ du tableau 7.2. Cependant, cette méthode accorderait la même densité de point sur tout l'espace de recherche, ce qui ne semble pas pertinent. En effet, dans le cas du paramètre $\lambda_{x,\text{wav}}$ par exemple, moins de variations de la traînée sont attendues pour $\lambda_{x,\text{wav}}$ évoluant dans l'intervalle $[2263, 2500]$ que dans l'intervalle de même longueur $[125, 362]$ sur lequel $\lambda_{x,\text{wav}}$ est presque triplé. Ainsi, plutôt que d'utiliser directement les paramètres $(\lambda_{x,\text{wav}}, \beta_{\text{wav}})$ dans la méthode d'optimisation "boîte noire", on préfère travailler avec leurs logarithmes $\ln(\lambda_{x,\text{wav}})$ et $\ln(\beta_{\text{wav}})$. Néanmoins, pour plus de clarté, on continuera à représenter les résultats en fonction des paramètres naturels. L'échantillonnage LHS du carré unitaire aboutit alors aux points du tableau 7.3, dont les valeurs ont été arrondies (et utilisées ainsi). Cet échantillon est représenté sur la figure 7.11.

Le raffinement lors du processus d'optimisation permettra, au besoin, d'aller chercher de l'information dans les zones trop peu explorées.

7.2.3.3 Stratégie de raffinement et fonction de mérite

À partir du calcul haute-fidélité de la fonction objectif aux points de l'échantillonnage initial, il est possible de construire une première surface de réponse grâce à la méthode de krigeage. Ainsi, à ce stade, la connaissance du problème se résume à l'estimation basse-fidélité $\hat{y}(\underline{x})$ de la fonction objectif, mais également de l'incertitude de cette estimation $\hat{s}(\underline{x})$. Ces deux grandeurs sont respectivement définies par les formules (7.15a) et (7.16).

Avec le petit nombre de points de l'échantillonnage initial répartis sur l'espace des paramètres, il est peu probable que l'estimation $\hat{y}(\underline{x})$ soit suffisamment précise pour être d'ores et déjà en mesure de déterminer l'optimum de la fonction objectif et son comportement général sur tout l'espace des paramètres. Comme décrit dans le schéma de principe 7.8, de nouveaux points devront être ajoutés à l'échantillonnage initial afin de pouvoir affiner l'estimation. Comment faut-il choisir les points à échantillonner pour pouvoir résoudre le problème d'optimisation avec un nombre minimal d'évaluations de haute-fidélité ? Une métrique doit être construite en connaissance $\hat{y}$ et de $\hat{s}$ afin de

Référence	$\lambda^+_{x,\mathrm{wav}}$	$\beta_{\mathrm{wav}}(^\circ)$	Z^+_{wav}	$T^+_{\mathrm{osc,eq}}$	$W^+_{\mathrm{osc,eq}}$
l0130b150	130	15	5.54	13	2.68
l0175b025	175	2.5	1.22	17.5	0.44
l0235b080	235	8.0	5.26	23.5	1.40
l0320b013	320	1.3	1.16	32	0.23
l0430b045	430	4.5	5.39	43	0.79
l0580b110	580	11	17.9	58	1.94
l0780b033	780	3.3	7.16	78	0.58
l1000b010	1000	1.0	2.78	100	0.17
l1425b060	1425	6.0	23.8	143	1.05
l1925b018	1925	1.8	9.63	193	0.31

TABLE 7.3 – Valeurs des paramètres de design de *riblets* sinueux pour l'échantillon initial. Les paramètres optimisés sont $(\lambda_{x,\mathrm{wav}}, \beta_{\mathrm{wav}})$. Les autres paramètres caractéristiques ont été abordés dans la sous-section 7.2.2.

quantifier l'intérêt que constitue l'évaluation d'un point jusqu'alors non exploré. Dans la pratique, on définit une fonction $f_{\mathrm{merit}}(\underline{x})$ dite **fonction de mérite** (*merit fonction*) sur l'espace des paramètres. Selon la métrique associée à cette fonction, le meilleur candidat pour le raffinement est celui qui la maximise.

Une fonction de mérite est adaptée à un problème si elle réalise le meilleur compromis entre les deux processus complémentaires de diversification et d'intensification. L'objectif recherché par le processus de **diversification** est d'accroître la connaissance générale de la fonction objectif en explorant les zones les moins renseignées de l'espace des paramètres. C'est ce processus qui permet de se sortir du piège des minimums locaux. À l'inverse, le processus d'**intensification** exploite l'information déjà récoltée pour parcourir les zones les plus intéressantes de l'espace de recherche dans l'espoir de s'approcher de la solution optimale.

Un des avantages intrinsèques du krigeage est qu'il fournit simultanément un indicateur des sites prometteurs (via la surface de réponse $\hat{y}$ elle-même) et des sites méconnus (via l'écart-type de l'erreur de krigeage $\hat{s}$). Ainsi, l'utilisation de $f_{\mathrm{merit}}(\underline{x}) = \hat{s}(\underline{x})$ est un exemple basique de fonction de mérite favorisant la diversification. Les candidats qui maximisent cette fonction sont bien ceux pour lesquels le méta-modèle est le plus incertain et ce, indépendamment de leur chance d'être l'optimum recherché. Il n'y a donc aucune incitation à visiter les zones prometteuses, ce qui fait qu'en pratique, ce critère de mérite est inefficace. À l'inverse, l'utilisation du méta-modèle lui-même en tant que fonction de mérite, $f_{\mathrm{merit}}(\underline{x}) = -\hat{y}(\underline{x})$, sélectionnera systématiquement le minimum de $y(\underline{x})$ le plus probable au regard de l'information déjà récoltée. Ce critère est également inefficace en pratique, puisqu'il risque de rester cantonné au premier minimum local observé.

Parmi les fonctions de mérites largement utilisées, nous nous sommes principalement intéressés à deux d'entre elles. La première consiste à maximiser l'amélioration espérée. L'**amélioration espérée** (*expected improvement*), notée $EI(\underline{x})$, est définie comme l'espérance que la fonction de mérite au point $\underline{x}$ soit inférieure à la plus faible des évaluations haute-fidélité qui en ont déjà été faites :

$$EI(\underline{x}) = E\left[\max\left(0, Y_{\min} - y(\underline{x})\right)\right] , \tag{7.17}$$

où E désigne l'espérance et $Y_{\min}$ la meilleure évaluation haute-fidélité réalisée. La fonction de mérite $f_{\mathrm{merit}}(\underline{x}) = EI(\underline{x})$ prend non seulement en compte la probabilité de progrès, mais aussi l'amplitude de ce dernier. Elle peut être calculée analytiquement via

$$EI(\underline{x}) = \left(Y_{\min} - \hat{y}(\underline{x})\right) \Phi\left(\frac{Y_{\min} - \hat{y}(\underline{x})}{\hat{s}(\underline{x})}\right) + \hat{s}(\underline{x})\, \varphi\left(\frac{Y_{\min} - \hat{y}(\underline{x})}{\hat{s}(\underline{x})}\right) , \tag{7.18}$$

où les fonctions Φ et φ représentent respectivement la densité de probabilité et la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Une justification détaillée est fournie dans [138] ou [104]. En plus de présenter l'avantage d'être nulle — donc minimale — aux points déjà explorés, cette fonction de mérite fait naturellement apparaître un compromis entre diversification et intensification : elle croît dans les zones prometteuses, c'est-à-dire lorsque $\hat{y}(\underline{x})$ diminue, et dans les zones incertaines, c'est-à-dire lorsque $\hat{s}(\underline{x})$ augmente.

La seconde fonction de mérite d'intérêt sélectionnée dans cette étude est basée sur la **méthode de validation croisée** (*cross-validation method*) et, plus particulièrement, la méthode *leave-one-out cross-validation* (LOOCV). Cette méthode a pour objectif de quantifier la fiabilité du processus de construction de la surface de réponse, ici par krigeage. Pour cela, on fait abstraction, tour à tour, de chacun des N points de l'échantillonnage pour construire N nouvelles surfaces de réponse basées sur les échantillonnages dégradés des $N-1$ points restants. On évalue alors les erreurs entre les valeurs de haute-fidélité de la fonction objectif aux points exclus et celles estimées par les méta-modèles dégradés. Dans le cas d'un krigeage avec données bruitées, puisque le méta-modèle n'est pas nécessairement interpolant, on évalue pour chacun des points d'échantillonnage l'erreur quadratique moyenne des estimations des N méta-modèles dégradés par rapport à l'évaluation haute-fidélité bruitée. Après avoir ainsi évalué une erreur moyenne d'estimation aux N points d'échantillonnage, on veut étendre ces données discrètes à tout l'espace des paramètres. Pour ce faire, on utilise tout simplement la méthodologie disponible : on construit la surface de réponse de l'erreur quadratique moyenne par krigeage que l'on notera $\hat{\mathcal{E}}_{\text{LOOCV}}$.

Une erreur importante traduit un manque de robustesse du méta-modèle. Ainsi, des points d'échantillonnage supplémentaires sont nécessaires dans ces zones d'erreur importante pour préciser un comportement local particulier de la fonction objectif qui n'est jusqu'à alors révélé que par un unique point de mesure. Le choix d'une telle fonction de mérite $f_{\text{merit}}(\underline{x}) = \hat{\mathcal{E}}_{\text{LOOCV}}$ favorise uniquement la diversification : aucune notion de point optimal ni de zone prometteuse n'entre en jeu. L'avantage complémentaire de cette méthode par rapport à l'amélioration espérée est de ne pas s'appuyer aveuglement sur les sorties du krigeage pour déterminer le point d'échantillonnage suivant. On évite ainsi les éventuelles dérives, telles que la divergence de l'un des paramètres θ_i de la fonction de corrélation spatiale R, équation (7.14), dont le syndrome est l'obtention d'une surface de réponse constituée de gaussiennes suffisamment fines dans la direction i correspondante pour ne pas interagir les unes avec les autres.

Afin de réaliser plusieurs évaluations de haute-fidélité en parallèle, il peut être intéressant de sélectionner simultanément plusieurs points d'échantillonnage. Le choix de l'un de ces deux points d'échantillonnage peut être fait, comme évoqué précédemment, en optimisant une fonction de mérite $f_{\text{merit}}(\underline{x})$. Cependant, si l'on procède de même pour les points suivants, en utilisant différentes fonctions de mérite par exemple, on encourt le risque de sélectionner des points proches les uns des autres. En plus des problèmes de robustesse du krigeage que pose cette proximité, la prise d'information est également plus pauvre qu'avec des points plus dispersés dans l'espace des paramètres. À ce titre, Ginsbouger présente dans sa thèse [104] une extension du critère d'amélioration espérée à plusieurs points. Similairement à l'EI à un seul point abordé plus haut, l'objectif de l'EI à q points est de déterminer l'ensemble des q points de l'espace des paramètres dont l'évaluation conjointe maximise l'espérance de faire progresser l'optimisation. Cette optimisation dans l'optimisation étant complexe à mettre en pratique, Ginsbourger propose alors une stratégie alternative plus simple. Cette stratégie porte le nom de **menteur systématique** (*constant liar*). Elle permet de choisir séquentiellement les points d'échantillonnage par optimisation du critère d'amélioration espérée à un point. Ainsi, pour le premier point, on optimise le critère EI de l'équation (7.18) grâce aux estimations $\hat{y}$ et $\hat{s}$ du krigeage des N points X_j déjà évalués, comme on le ferait pour l'ajout d'un unique point d'échantillonnage. On suppose alors l'évaluation de ce premier point X_{N+1} connue et égale à $Y_{\min}$, la plus faible des N évaluations effectivement réalisées, et on reconstruit une nouvelle surface de réponse $\hat{y}$ et $\hat{s}$ avec les $N+1$ évaluations (N véritables et 1 supposée). Un

second point peut alors être choisi en optimisant le critère EI basé sur ces nouveaux champs $\hat{y}$ et $\hat{s}$. On procède ainsi de suite pour déterminer successivement autant de points d'échantillonnage qu'on le souhaite. Le fait de supposer connue l'évaluation des candidats déjà sélectionnés permet de faire chuter l'erreur de krigeage $\hat{s}$ à leur proximité et y rend donc très limité l'espoir d'amélioration EI, ce qui favorise une répartition de points à distance suffisante les uns des autres.

La stratégie de ré-échantillonnage que l'on décide d'adopter dans cette étude est la suivante :

- un premier candidat X_{N+1} à l'évaluation haute-fidélité est choisi par la *méthode de validation croisée*, c'est-à-dire en optimisant la fonction de mérite $f_{\text{merit}}(\underline{x}) = \hat{\mathcal{E}}_{\text{LOOCV}}$.
- afin de choisir des candidats supplémentaires, on suppose temporairement connue l'évaluation de ce premier candidat. Plus précisément, on applique la *stratégie du menteur systématique* en supposant que Y_{N+1} soit égal à $Y_{\min}$.
- on choisit alors un second candidat X_{N+1} pour maximiser l'*amélioration espérée*, c'est-à-dire que l'on optimise la fonction de mérite $f_{\text{merit}}(\underline{x}) = EI$ construite à partir de la surface de réponse à $N+1$ points.
- dans les cas où l'on souhaite évaluer conjointement davantage de points, on renouvelle l'application de la stratégie du menteur systématique conjointement à celle de l'amélioration espérée.

7.2.3.4 Critère de convergence

L'optimisation est ici conduite avec une double attente : celle de déterminer non seulement l'optimum de la fonction objectif, mais également son comportement global sur l'ensemble de l'espace des paramètres. Pour atteindre cet objectif, le critère de convergence que l'on a choisi porte à la fois sur l'espérance qu'une solution meilleure que celle actuellement établie existe — on utilisera pour cela le critère EI de la sous-section précédente — et sur la robustesse du méta-modèle — on utilisera également l'erreur de validation croisée à chacun des points de l'échantillon $\mathcal{E}_{\text{LOOCV}}(X_j)$.

7.2.3.5 Optimisation basse-fidélité par évaluation directe

La procédure de raffinement nécessite l'optimisation d'une fonction de mérite sur l'espace des paramètres. Il s'agit donc d'une optimisation dans l'optimisation. Pour celle-ci cependant, la fonction $f_{\text{merit}}(\underline{x})$ à optimiser est définie à partir de la surface de réponse et des points d'échantillonnage déjà évalués. Il en est de même pour l'évaluation du critère de convergence. Ces fonctions sont donc peu coûteuses à évaluer, contrairement à la fonction objectif du problème d'optimisation principal. Cela permet d'avoir recours à des algorithmes d'optimisation plus gourmands, tels que les algorithmes de recherche globale évoqués au début de cette sous-section (algorithmes génétiques, recuit simulé, ...).

Dans le cas de notre optimisation, l'espace des paramètres est de seulement deux dimensions — $\lambda_{x,\text{wav}}$ et β_{wav} — sur un domaine relativement restreint. Par souci de simplicité d'implémentation, plutôt que de mettre en place une stratégie sophistiquée, le choix a été d'évaluer massivement les fonctions de basse-fidélité sur un maillage fin de l'espace des paramètres. Dans la pratique, on découpe l'espace $[\lambda_{x,\min}, \lambda_{x,\max}] \times [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ en un quadrillage de 100×100 points équirépartis en échelle logarithmique et on choisit la maille de valeur optimale après les avoir toutes évaluées.

7.2.3.6 Évaluation haute-fidélité par LES

L'évaluation de la fonction objectif — le taux de réduction de traînée accumulée $ADRR$ — aux points $(\lambda_{x,\text{osc}}, \beta_{\text{osc}})$ de l'échantillonnage initial puis à ceux des raffinements successifs se fait par simulation de type LES dont le paramétrage a été défini dans la sous-section 7.2.2.

7.2.4 Résultat de l'optimisation

Après avoir établi dans la sous-section précédente chacune des briques élémentaires de la stratégie de krigeage, on présente ici les résultats obtenus à l'issue de la première boucle d'optimisation du schéma 7.8. Les dix simulations LES initiales du tableau 7.3 ont été simultanément réalisées et permettent de construire une première surface de réponse.

Les résultats en termes de taux de réduction de traînée et de frottement accumulés, définis par l'équation (7.4), figurent dans le tableau 7.4 au côté des données brutes de calcul ayant permis leur calcul. Notons que la simulation l0130b150 a été retirée, puisque la résolution de maillage $\Delta x^+ \simeq 25$ ne conduit pas à une solution fiable pour des oscillations aussi marquées ($\beta_{\text{wav}} = 15°$) de longueur d'onde $\lambda^+_{x,\text{wav}}$ de seulement 130 unités de paroi.

Référence	$\frac{L_{\text{in}\to\text{out}}}{\delta_{\text{in}}}$	$\frac{C_d}{L_{\text{in}\to\text{out}}}$	$\frac{C_f}{L_{\text{in}\to\text{out}}}$	$\frac{L_{x_0\to x_1}}{\delta_{\text{in}}}$	$\frac{\int_{x_0}^{x_1} c_{f,\text{ref}}}{L_{x_0\to x_1}}$	$ADRR$	$AFRR$
plaque plane	38.1	4.55×10^3		-	-	-	
riblets 2D	38.1	4.26×10^3		24.9	4.43×10^3	9.8%	
l0175b025	38.1	4.25×10^3	4.25×10^3	24.9	4.43×10^3	10.1%	10.3%
l0235b080	38.1	4.24×10^3	4.20×10^3	25.1	4.42×10^3	10.7%	11.9%
l0320b013	38.1	4.26×10^3	4.26×10^3	25.2	4.42×10^3	9.8%	9.9%
l0430b045	38.1	4.26×10^3	4.25×10^3	24.9	4.43×10^3	9.8%	10.2%
l0580b110	38.1	4.27×10^3	4.21×10^3	25.3	4.42×10^3	9.3%	11.4%
l0780b033	38.1	4.25×10^3	4.25×10^3	24.9	4.43×10^3	10.2%	10.3%
l1000b010	38.1	4.26×10^3	4.26×10^3	24.9	4.43×10^3	9.9%	9.9%
l1425b060	38.1	4.25×10^3	4.24×10^3	25.5	4.42×10^3	9.9%	10.5%
l1925b018	38.1	4.24×10^3	4.24×10^3	25.4	4.42×10^3	10.3%	10.3%

TABLE 7.4 – Résultats de l'évaluation de la traînée et du frottement accumulé sur la paroi pour les *riblets* sinueux de l'échantillon initial de l'optimisation, dont les paramètres figurent dans le tableau 7.3, et pour les cas de plaque plane de référence et de *riblets* rectilignes bidimensionnels. Bien que la longueur du domaine de calcul $L_{\text{in}\to\text{out}}$ soit commune, l'étendue de la zone de contrôle $L_{x_0\to x_1}$ varie légèrement d'un cas à l'autre en fonction de la longueur d'onde $\lambda_{x,\text{wav}}$ d'oscillation des *riblets*.

Les taux de réduction de traînée pour l'ensemble des configurations de l'échantillon initial sont tous compris entres 9.3% et 10.7%. À ce stade de l'optimisation, le taux de réduction de traînée optimal n'est donc pas considérablement supérieur à celui de 9.8% obtenu avec des *riblets* rectilignes. De plus, l'écart de moins de 1.5% de traînée entre les différentes mesures témoigne d'une influence limitée des paramètres d'optimisation $\lambda^+_{x,\text{wav}}$ et β_{wav} sur la traînée.

Ce constat est de plus à mettre en perspective avec l'incertitude quant à la mesure de la traînée par LES. En effet, sans compter les éventuelles erreurs numériques, la simulation ne nous permet l'évaluation du coefficient de traînée instantané que pendant une durée finie, comme cela est représenté sur la figure 7.12, si bien que l'estimation de sa moyenne n'est que partiellement convergée. L'évaluation de l'incertitude de cette estimation n'est cependant pas triviale puisque la véritable valeur du frottement n'est pas à notre disposition.

Une première approche pour quantifier l'incertitude de l'estimation de la moyenne à partir d'un signal temporel de durée finie peut être inspirée de celle utilisée lorsque l'on dispose de N évaluations indépendantes d'une variable aléatoire. Si l'on suppose que cette variable suit un comportement de loi normale et que l'on note $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ les estimations de sa moyenne et de sa variance faites à partir de l'échantillon, l'intervalle de confiance à 95% de l'estimateur de la moyenne peut être prédit

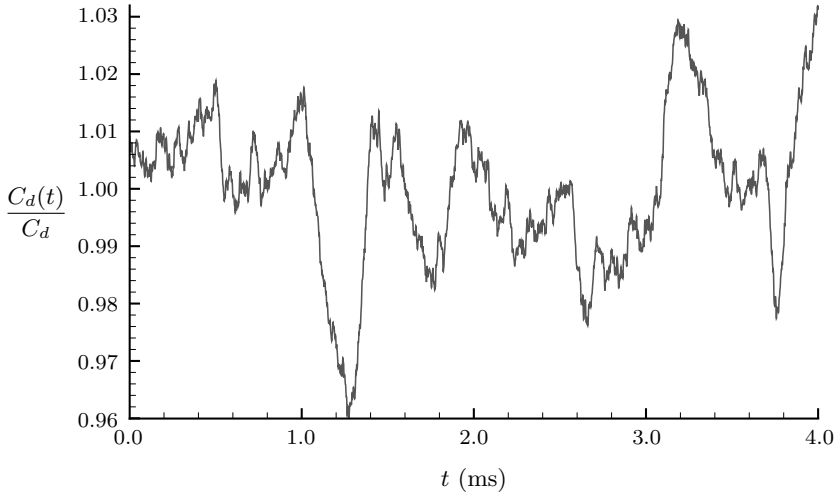


FIGURE 7.12 – Évolution du coefficient de traînée instationnaire du cas l0235b080, normalisée par le coefficient de traînée moyen.

grâce à la loi de Student comme étant $\hat{\mu} \pm t^{N-1}_{2.5\%}\,\hat{\sigma}/\sqrt{N}$, où t^k_γ est le quantile d'ordre γ de la loi de Student à k degrés de liberté. Dans le cas d'un signal aléatoire continu, les notions de nombre d'échantillons et d'évaluations indépendantes doivent cependant être précisées. On propose alors d'utiliser le premier zéro du coefficient d'autocorrélation temporelle, défini dans la section 4.4.7, pour découper le signal global en une succession de réalisations que l'on considérera comme indépendantes. Dans le cas du signal de la figure 7.12, la fonction d'autocorrélation s'annule pour un laps de temps de $\tau = 0.195\,\text{ms}$, si bien que le signal global peut être considéré comme $N = T/\tau = 4.0/0.195 \simeq 20$ réalisations aléatoires. Sachant que l'écart-type mesuré $\hat{\sigma}$ du signal temporel est égal à 1.28% de sa valeur moyenne $\hat{\mu}$, l'incertitude sur l'estimation du coefficient de traînée est donc d'environ ±0.6%. Un tel intervalle de confiance correspond à celui d'une loi normale ayant pour écart-type $\sigma(\hat{\mu}) = 0.29\%\,\hat{\mu}$.

Une méthode mathématiquement plus fondée pour estimer l'incertitude de la mesure est donnée Bendat & Piersol [19]. En utilisant cette fois encore l'écart-type σ du signal continu et son coefficient d'autocorrélation normalisé $C(\tau)$, la variance de l'incertitude de la moyenne est donnée par

$$\sigma^2(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) C(\tau)\,\mathrm{d}\tau \simeq \frac{\sigma^2}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{7.19}$$

En approchant σ et $C(\tau)$ par leurs estimations $\hat{\sigma}$ et $\hat{C}(\tau)$, on obtient dans le cas du signal de la figure 7.12 une variance de l'erreur de mesure de $\sigma^2(\hat{\mu}) \simeq 0.029\,\hat{\sigma}^2$, c'est-à-dire un écart-type de $\sigma(\hat{\mu}) = 0.22\%\,\hat{\mu}$.

On peut donc considérer la mesure de la traînée C_d comme bruitée par un bruit blanc dont l'écart-type est de l'ordre de $0.25\%\,C_d$. La mesure de $C_{d,ref}$ et $\int_{x_0}^{x_1} c_{d,ref}$ étant commune à toutes les simulations, les erreurs sur leur valeur ne seront pas prises en compte. Ainsi, l'écart-type de l'erreur de la mesure haute-fidélité de $ADRR$ peut être estimé à environ 0.25% de $C_d/\int_{x_0}^{x_1} c_{d,ref}$, soit approximativement 0.4%. Ainsi, la différence entre les taux de réduction de traînée des différentes configurations de *riblets* sinueux — tous compris dans un intervalle de seulement 1.5% — peut-être considérée comme d'autant plus insignifiante que l'intervalle de confiance à 95% des mesures est lui-même d'environ ±0.8%.

La construction de la surface de réponse permet d'illustrer ces propos. La figure 7.13 représente la surface de réponse construite par krigeage sans prendre en compte les incertitudes sur les mesures de haute-fidélité, c'est-à-dire que l'on suppose exactes les mesures LES. On impose donc à la surface de réponse d'être interpolante. Bien que les axes soient ici représentés linéairement par rapport aux paramètres à optimiser $\lambda^+_{x,\text{wav}}$ et β_{wav}, la construction de la surface de réponse a bien été réalisée en

utilisant leurs logarithmes, $\ln(\lambda^+_{x,\mathrm{wav}})$ et $\ln(\beta_{\mathrm{wav}})$. Sur la figure *en haut à gauche*, l'estimation $\widehat{ADRR}$ évolue entre les valeurs maximales 9.3% et 10.7% mesurées par LES. Aucune tendance claire n'est apparente à ce stade de l'optimisation : d'une part, les zones où la fonction objectif varie le plus sont sujettes à caution (comme en témoigne l'erreur quadratique de validation croisée $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{LOOCV}}$ sur la figure *en bas à droite*) et d'autre part, le méta-modèle est totalement aveugle sur une bonne partie de l'espace des paramètres (comme en témoigne cette fois-ci l'écart-type de l'erreur de krigeage $\widehat{s}_{ADRR}$ représenté sur la figure *en haut à droite*).

Si l'incertitude sur la mesure LES est maintenant prise en compte avec l'écart-type précédemment calculé d'environ 0.4%, la construction de la surface de réponse n'est plus possible. En effet, comme précisé dans le dernier paragraphe de la section 7.2.4, la prise en compte de l'incertitude de la mesure haute-fidélité consiste à ajouter la matrice des écart-types de l'erreur de mesure $\underline{\underline{\Delta}}$ à la matrice de corrélation $\underline{\underline{R}}$. Pour des écart-types trop importants, la phase d'optimisation de l'estimateur de maximum de vraisemblance MLE (7.15d) devient alors mal conditionnée.

Il faut abaisser artificiellement la valeur de l'écart-type de mesure pour que la construction de la surface de réponse soit possible. La figure 7.14 représente celle que l'on obtient avec un écart-type fixé à 0.26%. Bien que l'observe le même motif que pour la surface qui ne prend pas en compte les incertitudes de mesure, son amplitude est grandement atténuée. Le choix de l'écart-type fixé à 0.35%, qui constitue le cas limite avant que le krigeage ne puisse plus converger, renvoie une surface de réponse prédisant, avec une incertitude uniforme, une réduction de traînée de l'ordre de celle obtenue avec des *riblets* rectilignes.

7.2.4.1 Poursuite de l'optimisation ?

Comme on a pu le constater, les calculs LES ne sont pas assez convergés pour faire apparaître des tendances notables de réduction de traînée en fonction de λ et β. La poursuite de l'optimisation implique donc de prolonger les simulations LES déjà entreprises jusqu'à ce que l'incertitude sur l'estimation de la traînée moyenne soit suffisamment fine pour permettre la construction d'une surface de réponse mettant en évidence des variations notables. De plus, il est à noter que l'incertitude ne chute qu'avec la racine carrée de la durée du signal, comme en témoigne l'équation (7.19), si bien qu'une convergence significative de la traînée moyenne nécessite une durée de simulation inabordable.

Il paraît néanmoins important de re-situer l'étude dans son contexte : déterminer avec davantage de précision l'évolution de l'optimum de traînée importe peu en pratique — nous sommes déjà à ±0.6% de traînée ! Le résultat le plus important d'un point de vue applicatif a été évoqué lors de l'analyse des résultats bruts des simulations LES puis confirmé grâce aux outils statistiques du krigeage : l'oscillation des *riblets* n'a qu'une influence négligeable sur la traînée accumulée le long de la zone de contrôle, du moins, dans la plage des paramètres $(\lambda^+_{x,\mathrm{wav}}, \beta_{\mathrm{wav}})$ couverte par les dix simulations initiales. Cette étude confirme ainsi la thèse avancée par Kramer *et al.* [155] aux dépens de celle de Peet *et al.* [206].

7.2.5 Simulations LES/DNS complémentaires

Afin de vérifier si de véritables tendances existent pour des oscillations plus marquées, quelques simulations complémentaires ont été entreprises. En effet, l'économie nette d'énergie optimale pour la stratégie de contrôle par oscillation de paroi est obtenue pour une amplitude d'oscillation de $W^+_{\mathrm{osc}} = 4.5$, ce qui correspond à un angle de $\beta_{\mathrm{wav}} \simeq 24°$ via l'analogie précédente (7.5). Ainsi, le paramétrage optimal — selon cette analogie — n'a pas été couvert par l'échantillonnage de l'optimisation précédente : l'amplitude maximale de β_{wav} n'est que de 8° pour les simulations LES ayant effectivement abouties.

Un jeu de cinq simulations additionnelles, dont les paramètres sont listés dans le tableau 7.5 et représentés sur la figure 7.11, a alors été réalisé. Ces simulations permettent d'étudier l'influence

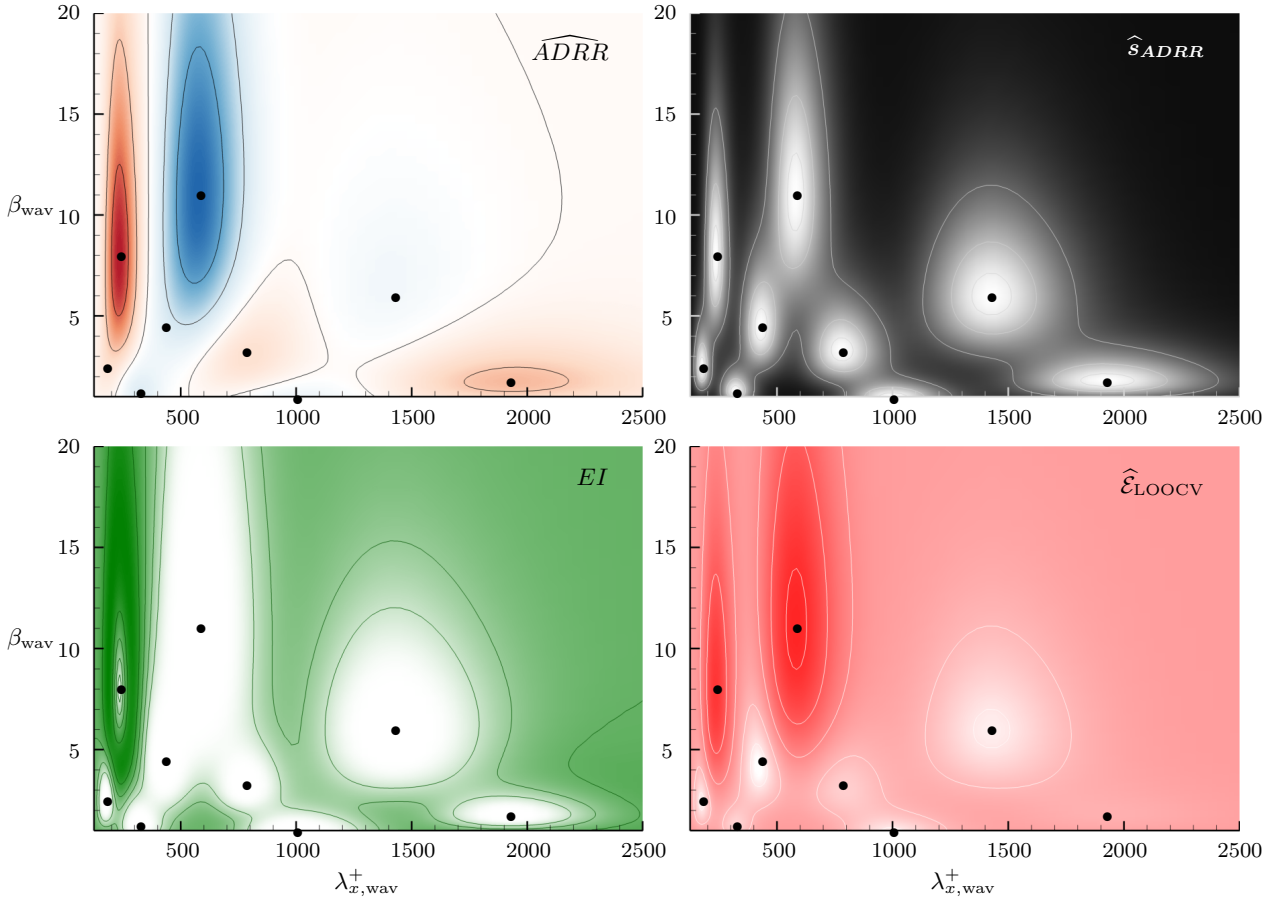


FIGURE 7.13 – Iso-valeurs sur l'espace des paramètres $(\lambda^+_{x,\mathrm{wav}}, \beta_{\mathrm{wav}})$ du méta-modèle et de fonctions de mérite obtenus par krigeage à partir des résultats LES du tableau 7.4. Les positions des points d'échantillonnage sont indiquées par les points •. Avec les notations de (7.15), les paramètres du krigeage sont $\hat{\beta} = 10.0\%$, $\hat{\sigma} = 0.357$, $\underline{\hat{\theta}} = [\hat{\theta}_{\ln(\lambda_{x,\mathrm{wav}})}, \hat{\theta}_{\ln(\beta_{\mathrm{wav}})}] = [7.64, 0.92]$ et $MLE = 0.877$. (*En haut à gauche*) Estimation du taux de réduction de traînée $\widehat{ADRR}$, dont les lignes de niveau vont de 9.5% (*en bleu*) à 10.5% (*en rouge*) par incrément de 0.25%. (*En haut à droite*) Écart-type de l'erreur de krigeage $\widehat{s}_{ADRR}$, dont les lignes de niveau vont de 0 (*en blanc*) à 0.3% (*en noir*) par incrément de 0.1%. (*En bas à gauche*) Amélioration espérée EI, dont les lignes de niveau vont de 0 (*en blanc*) à 0.1 (*en vert*) par incrément de 0.025. (*En bas à droite*) Erreur quadratique de validation croisée $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{LOOCV}}$, dont les lignes de niveau vont de 0 (*en blanc*) à 0.25% (*en rouge*) par incrément de 0.05%.

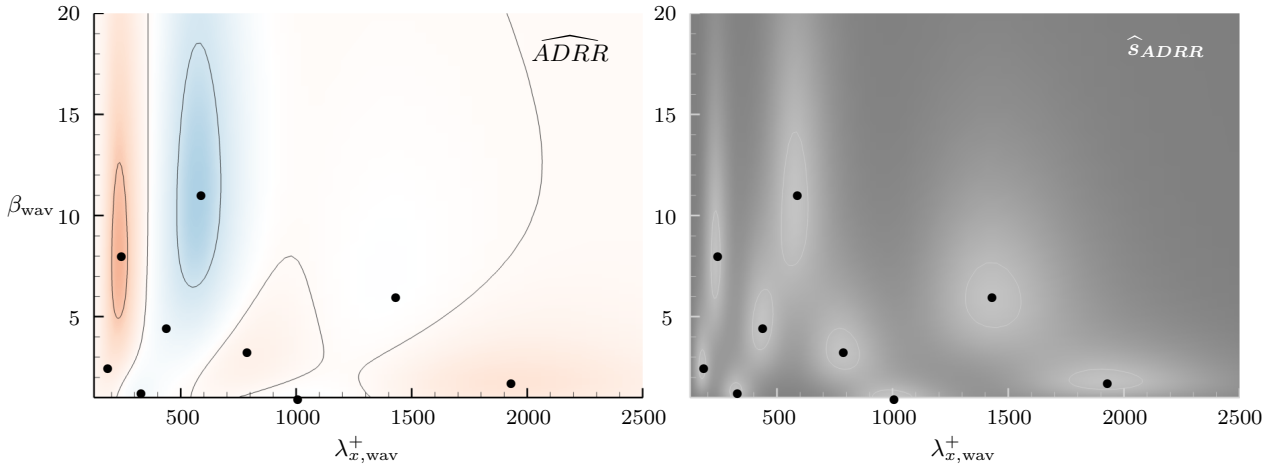


FIGURE 7.14 – Iso-valeurs du méta-modèle obtenu par krigeage avec mesures haute-fidélité bruitées, dont l'écart-type du bruit est uniforme et fixé à 0.26%. La légende est celle de la figure 7.13.

des paramètres $\lambda^+_{x,\mathrm{wav}}$ et β_{wav} lorsqu'ils évoluent séparément. Notons que les simulations pour lesquels β_{wav} atteint 22° ont nécessité l'utilisation d'un maillage doublement raffiné dans la direction longitudinale. Ainsi, $\Delta x^+ \simeq 12$ pour ces simulations, si bien que la résolution dans chacune des directions vérifie amplement les standards DNS (cf. tableau 4.6), ce qui justifie l'abandon du modèle de viscosité sous-maille.

Référence	$\lambda^+_{x,\mathrm{wav}}$	$\beta_{\mathrm{wav}}(°)$	Z^+_{wav}	$T^+_{\mathrm{osc,eq}}$	$W^+_{\mathrm{osc,eq}}$
l0250b110	250	11	7.72	25	1.94
l0250b220	250	22	16.1	25	4.04
l0580b110	*580*	*11*	*17.9*	*58*	*1.94*
l1000b010	*1000*	*1.0*	*2.78*	*100*	*0.17*
l1000b110	1000	11	30.9	100	1.94
l1000b220	1000	22	64.3	100	4.04
l2000b110	2000	11	61.8	200	1.94

TABLE 7.5 – Valeur des paramètres de design de *riblets* sinueux pour les simulations additionnelles. Les cas indiqués en *italique* ont déjà été traités lors de l'optimisation (cf. tableau 7.3).

7.2.5.1 Traînée totale, frottement visqueux et résultante des efforts de pression

Les résultats de traînée accumulée sur toute la longueur de la zone de contrôle sont présentés dans le tableau 7.6. On constate à nouveau, avec ces simulations supplémentaires, que la réduction de traînée obtenue avec des *riblets* bidimensionnels n'est jamais significativement améliorée. Néanmoins, une influence des oscillations sur le taux de réduction de traînée $ADRR$ est cette fois relevée pour les fortes valeurs de β_{wav}, comme en témoigne sa détérioration pour les simulations l0250b220 et l1000b220.

Référence	$\frac{L_{\mathrm{in}\to\mathrm{out}}}{\delta_{\mathrm{in}}}$	$\frac{C_d}{L_{\mathrm{in}\to\mathrm{out}}}$	$\frac{C_f}{L_{\mathrm{in}\to\mathrm{out}}}$	$\frac{L_{x_0\to x_1}}{\delta_{\mathrm{in}}}$	$\frac{\int_{x_0}^{x_1} c_{f,\mathrm{ref}}}{L_{x_0\to x_1}}$	$ADRR$	$AFRR$
plaque plane	38.1	4.55×10^3		-	-	-	
riblets 2D	38.1	4.26×10^3		24.9	4.43×10^3	9.8%	
l0250b110	38.1	4.23×10^3	4.16×10^3	25.0	4.42×10^3	11.0%	13.3%
l0250b220	38.1	4.31×10^3	4.02×10^3	25.0	4.42×10^3	8.2%	18.2%
l0580b110	38.1	4.27×10^3	4.21×10^3	25.3	4.42×10^3	9.3%	11.4%
l1000b010	38.1	4.26×10^3	4.26×10^3	24.9	4.43×10^3	9.9%	9.9%
l1000b110	38.1	4.27×10^3	4.21×10^3	24.9	4.43×10^3	9.5%	11.5%
l1000b220	38.1	4.32×10^3	4.09×10^3	24.9	4.43×10^3	6.8%	15.8%
l2000b110	38.1	4.26×10^3	4.21×10^3	26.4	4.42×10^3	9.4%	11.1%

TABLE 7.6 – Résultats de l'évaluation de la traînée et du frottement accumulé sur la paroi pour les *riblets* sinueux dont les paramètres figurent dans le tableau 7.5 et pour les cas de plaque plane de référence et de *riblets* rectilignes bidimensionnels.

Paradoxalement, on constate que ces deux simulations — pour lesquelles le taux de réduction de traînée $ADRR$ est minimal — aboutissent aux meilleures réductions du frottement avec un taux $AFRR$ pouvant dépasser 18%. Ainsi, la résultante des efforts de pression semble avoir une influence grandissante avec β_{wav} et serait responsable de la détérioration de la traînée.

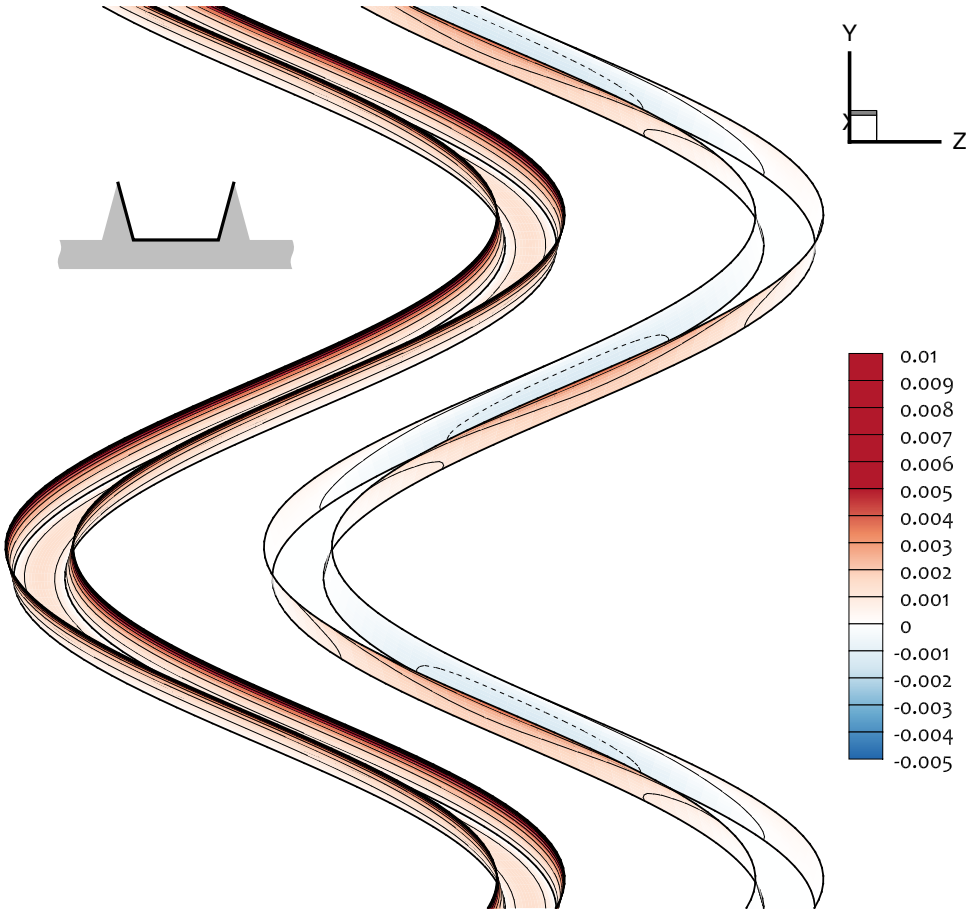


FIGURE 7.15 – Iso-valeurs à la paroi dans le sillon des *riblets* du coefficient de frottement visqueux local c_f (*à gauche*) et du coefficient des efforts de pression locaux c_p (*à droite*) pour la configuration l1000b220. L'incrément entre les lignes de niveau est de 0.001, les lignes de niveau strictement négatives étant en *pointillés*.

On représente alors, sur la figure 7.15, la répartition spatiale sur la surface des *riblets* sinueux de la composante longitudinale des efforts visqueux et des efforts de pression, dans le cas de la simulation l1000b220. On constate que la répartition du frottement relativement à la position des vallées et des crêtes n'est que marginalement affectée par l'oscillation des *riblets* : quelque soit la station x, le profil de $c_f(z)$ est très proche de celui obtenu dans le cas de *riblets* rectilignes et donc, *a fortiori*, de la répartition donnée par l'écoulement de Stokes de la figure 4.12.

Pour sa part, le coefficient c_p évolue largement avec l'oscillation des *riblets* sinueux. On constate une diminution de la pression dans les sillons, à l'endroit où la déviation des *riblets* sinueux est la plus marquée : cette chute de pression se matérialise par une composante négative des efforts longitudinaux sur les versants de *riblets* orientés vers l'amont et d'une composante positive sur les autres versants. Ainsi, chacun des versants contribue de manière opposée à la résultante des efforts de pression.

Si l'on intègre les efforts surfaciques le long de la direction transverse, pour chaque station x, on obtient les courbes de la figure 7.16. On constate que les résultantes visqueuse et de pression oscillent toutes deux avec l'oscillation des *riblets*. La contribution à la traînée des efforts de pression est partout positive (ou nulle), bien que la contribution issue de chaque versant puisse être parfois négative. Le coefficient de frottement est quant à lui partout inférieur (ou égal) à celui obtenu avec les *riblets* rectilignes. La traînée totale, qui prend en compte les contributions visqueuse et de pression, oscille donc de part et d'autre de celle des *riblets* rectilignes — pour lesquels la totalité de la traînée est d'origine visqueuse : ce que les *riblets* sinueux gagnent sur le plan visqueux, ils le perdent en efforts de pression.

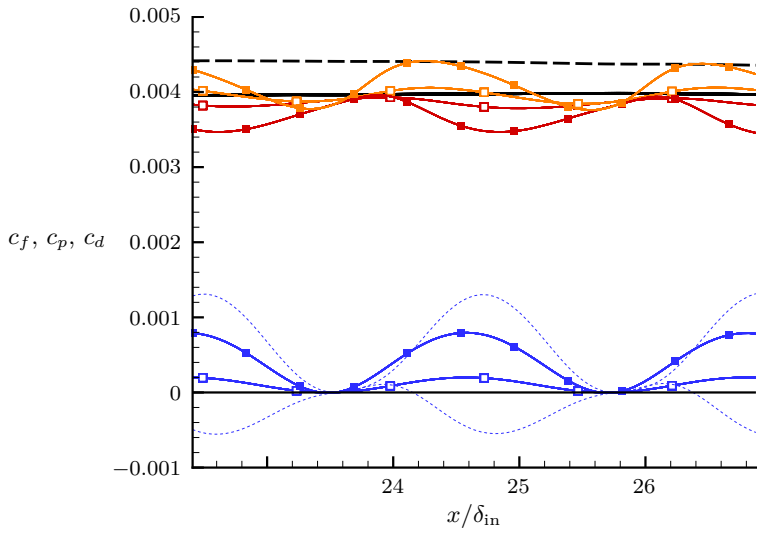


FIGURE 7.16 – Coefficient de frottement c_f (*rouge*), coefficient des efforts de pression c_p (*bleu*) et coefficient de traînée c_d (*orange*) moyennés dans la direction transverse pour les configurations l1000b110 (*symboles vides*) et l1000b220 (*symboles pleins*). Le coefficient $c_d = c_f$ est également représenté pour les cas de référence de plaque plane (*pointillés noirs*) et de *riblets* rectilignes bidimensionnels (*ligne noire*). La contribution à c_p des deux parois quasi-verticales, de part et d'autre des *riblets*, prises séparément est représentée pour la configuration l1000b220 (*pointillés fins bleus*).

L'évolution sur toute l'étendue du domaine contrôlé des coefficients c_f et c_p est représentée sur la figure 7.17 pour différents paramètres $\lambda^+_{x,\text{wav}}$ et β_{wav}. L'influence de l'angle β_{wav} est isolée sur les graphes de *gauche*, où les courbes sont issues de configurations de même longueur d'onde. À l'inverse, seul $\lambda_{x,\text{wav}}$ varie d'une courbe à l'autre sur les graphes de *droite*.

Comme constaté précédemment sur la figure 7.16, on retrouve l'oscillation des *riblets* sinueux dans l'évolution des courbes $c_f(x)$ et $c_p(x)$. L'amplitude de variation, pour chacun de ces deux coefficients, augmente rapidement avec β_{wav} alors qu'elle ne dépend que faiblement de $\lambda_{x,\text{wav}}$. On retrouve dans cette dépendance celle de l'oscillation transverse de paroi, pour laquelle la traînée dépend principalement du paramètre analogue W^+_{osc} (cf. paragraphe 2.3.1.1). Néanmoins, l'effet délétère de la pression croît plus rapidement que le gain additionnel sur le frottement, si bien que le gain de traînée accumulée ne dépasse jamais significativement de celui des *riblets* rectilignes.

7.2.5.2 Influence des *riblets* sinueux sur l'écoulement

Dans le cas d'un contrôle par oscillation transverse de paroi, le paragraphe 2.3.1.1 de la revue bibliographique a permis de souligner que l'effet du contrôle était étroitement lié à la couche limite oscillante de Stokes qui pénètre l'écoulement depuis la paroi jusqu'à la zone tampon. Dans le cas présent de contrôle par utilisation de *riblets* sinueux, il convient de vérifier si l'écoulement est bel et bien entraîné dans un mouvement oscillant comparable.

On constate, sur la figure 7.18, que le champ de vitesse moyenne transverse $\overline{w}$ n'est plus uniformément nul lorsque les *riblets* sont sinueux. La vitesse transverse maximale atteinte est légèrement supérieure à 0.6 unité de paroi, ce qui demeure bien en deçà de la vitesse d'oscillation $W^+_{\text{osc}} = 4.5$, qui optimise l'économie nette d'énergie d'une paroi oscillante, ou encore de la vitesse $W^+_{\mathcal{S}} = 1.2$, choisi empiriquement comme vitesse caractéristique dans (2.18).

Les profils $\overline{w}^+(y^+)$ à différentes stations x sont comparés sur la figure 7.19 pour différents jeux de paramètres $\lambda^+_{x,\text{wav}}$ et β_{wav}. La longueur d'onde $\lambda^+_{x,\text{wav}}$ n'a qu'une faible influence sur le profil $\overline{w}^+(y^+)$ et sur son amplitude. La profondeur de pénétration de la vitesse transverse dans le fluide semble plus importante dans le cas des plus grandes longueurs d'onde, bien que les données ne soient pas

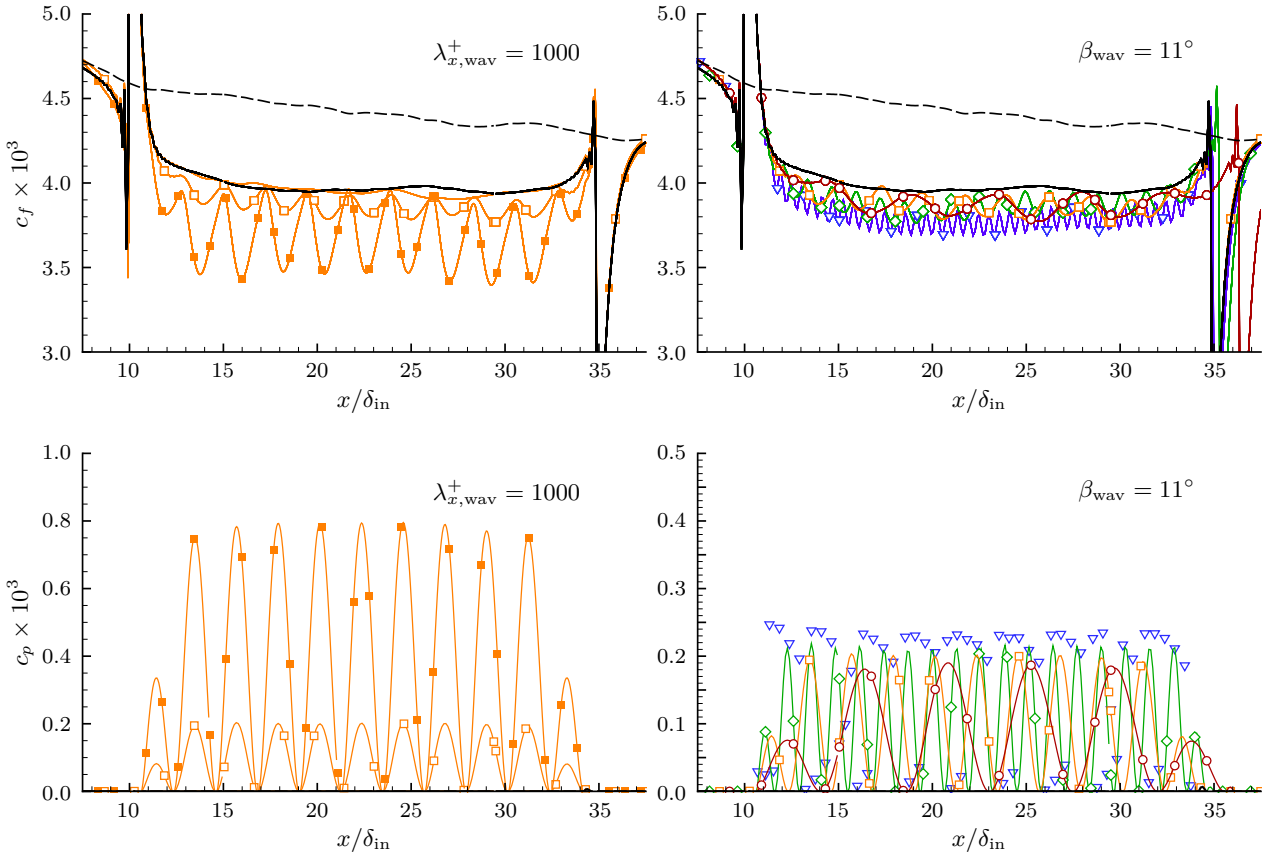


FIGURE 7.17 – Coefficient de frottement c_f (*en haut*) et coefficient des efforts de pression c_p (*en bas*) moyennés dans la direction transverse. *À gauche :* Configurations de *riblets* sinueux avec $\lambda^+_{x,\mathrm{wav}} = 1000$ et $\beta_{\mathrm{wav}} = 1.0°$ (*sans symbole*), 11° (*symboles vides*) et 22° (*symboles pleins*). *À droite :* Configurations avec $\beta_{\mathrm{wav}} = 11°$ et $\lambda^+_{x,\mathrm{wav}} = 250$ (*triangle bleu*), 580 (*losange vert*), 1000 (*carré orange*), 2000 (*cercle rouge*). Le coefficient c_f est également représenté pour les cas de référence de plaque plane (*pointillés noirs*) et de *riblets* rectilignes bidimensionnels (*ligne noire*).

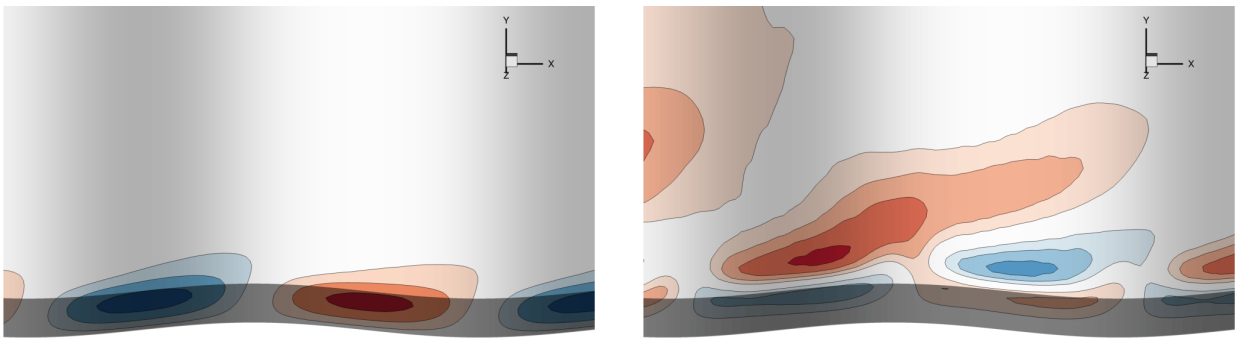


FIGURE 7.18 – Iso-valeurs de la vitesse transverse moyenne $\overline{w}^+$ (*à gauche*) et du cisaillement transverse de Reynolds $\overline{u'w'}^+$ (*à droite*) à la verticale de la vallée des *riblets* sinueux pour la configuration l1000b220. Les lignes de niveau sont respectivement de -0.6 à 0.6 par incréments de 0.2 pour $\overline{w}^+$ et de -0.2 à 0.2 par incréments de 0.05 pour $\overline{u'w'}^+$. Dans les deux cas, le niveau 0 n'est pas tracé.

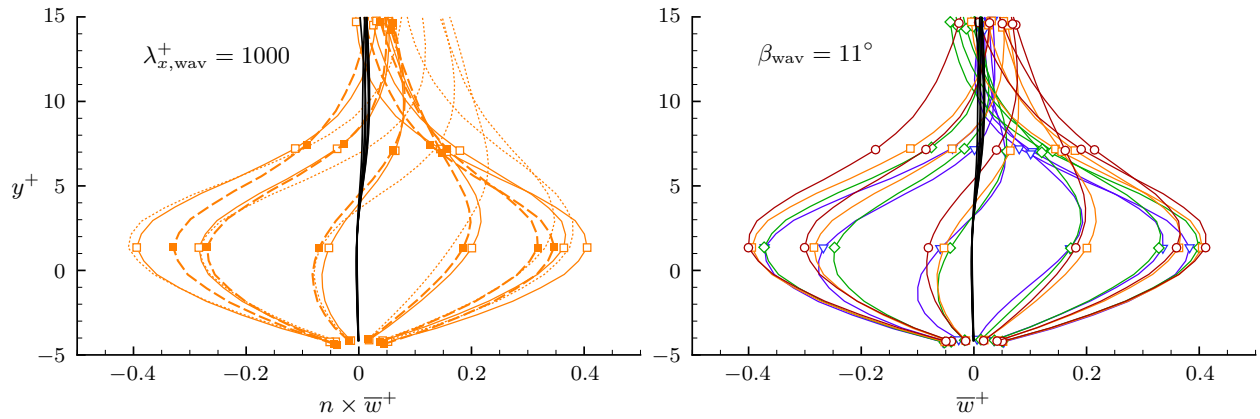


FIGURE 7.19 – Profils de vitesse transverse moyenne $\overline{w}^+$ à la verticale de la vallée des *riblets* sinueux pour 6 stations x équi-réparties dans une demi-longueur d'onde $\lambda_{x,\mathrm{wav}}$. *À gauche :* Configurations de *riblets* sinueux avec $\lambda^+_{x,\mathrm{wav}} = 1000$ et $\beta_{\mathrm{wav}} = 1.0°$ (*pointillés, sans symbole*), 11° (*ligne, symboles vides*) et 22° (*ligne discontinue, symboles pleins*). Afin de faciliter la comparaison de ces trois configurations, le profil y est respectivement multiplié par $n = 11$, 1 ou 0.5. *À droite :* Configurations de *riblets* sinueux avec $\beta_{\mathrm{wav}} = 11°$ et $\lambda^+_{x,\mathrm{wav}} = 250$ (*triangle bleu*), 580 (*losange vert*), 1000 (*carré orange*), 2000 (*cercle rouge*). Les profils pour les *riblets* rectilignes bidimensionnels sont également représentés en *noir* pour témoigner du niveau de convergence du champ moyenné.

suffisamment convergées pour permettre de le mesurer précisément. À longueur d'onde fixée, l'angle d'oscillation β_{wav} influe largement sur l'amplitude du profil $\overline{w}^+(y^+)$. Sur la figure de *gauche* de 7.19, la vitesse a été respectivement multipliée par 11, 1 et 0.5 pour les configurations d'angle $\beta_{\mathrm{wav}} = 1.0°$, 11° et 22°. L'amplitude du profil de vitesse transverse est donc proportionnelle à β_{wav}.

La comparaison avec la solution théorique du second problème de Stokes [1] n'est pas évidente à réaliser. En effet, dans la couche limite de Stokes, la vitesse transverse est maximale à la paroi, puis se diffuse dans la couche limite en perdant de son intensité. Dans le cas de *riblets* sinueux, la condition d'adhérence sur la paroi fixe impose une vitesse nulle à la paroi. L'amplitude de $\overline{w}^+$ est donc maximale dans le centre des sillons. Ainsi, pour comparer ce profil avec celui de la solution analytique du problème de Stokes, se pose encore la question de l'origine virtuelle. De plus, une telle comparaison n'est pertinente qu'à une distance suffisante des *riblets*— à partir de quelques hauteurs de *riblets* au-dessus de leur crête — pour que l'écoulement soit de nouveau homogène dans la direction transverse. Or le champ moyen de vitesse transverse ne pénètre pas suffisamment loin dans la couche limite pour que l'amplitude de $\overline{w}^+$ y soit encore non-négligeable.

Mis à part le champ de vitesse moyenne transverse, la vitesse longitudinale et les tensions de Reynolds sont également affectées par l'oscillation des *riblets*. Sur la figure 7.20, leurs profils sont représentés pour la configuration l1000b22 aux mêmes stations x que précédemment.

L'utilisation de *riblets* sinueux plutôt que de *riblets* rectilignes conduit aux mêmes modifications des profils que ce que l'on a pu observer, à la figure 2.25, lors de la comparaison entre les profils de paroi oscillante et les profils canoniques, à savoir, une légère chute de u_{rms} au profit de w_{rms}. Cependant, on ne constate pas ici d'affaiblissement supplémentaire pour $\overline{u'v'}$.

7.3 Évaluation de la traînée de *riblets* en chevron

7.3.1 Introduction

Après les études réalisées sur des patchs de *riblets* et sur des *riblets* sinueux, une dernière géométrie tridimensionnelle a été investiguée. Il s'agit d'une disposition de *riblets* en chevrons (*herringbone*

1. Voir note 6

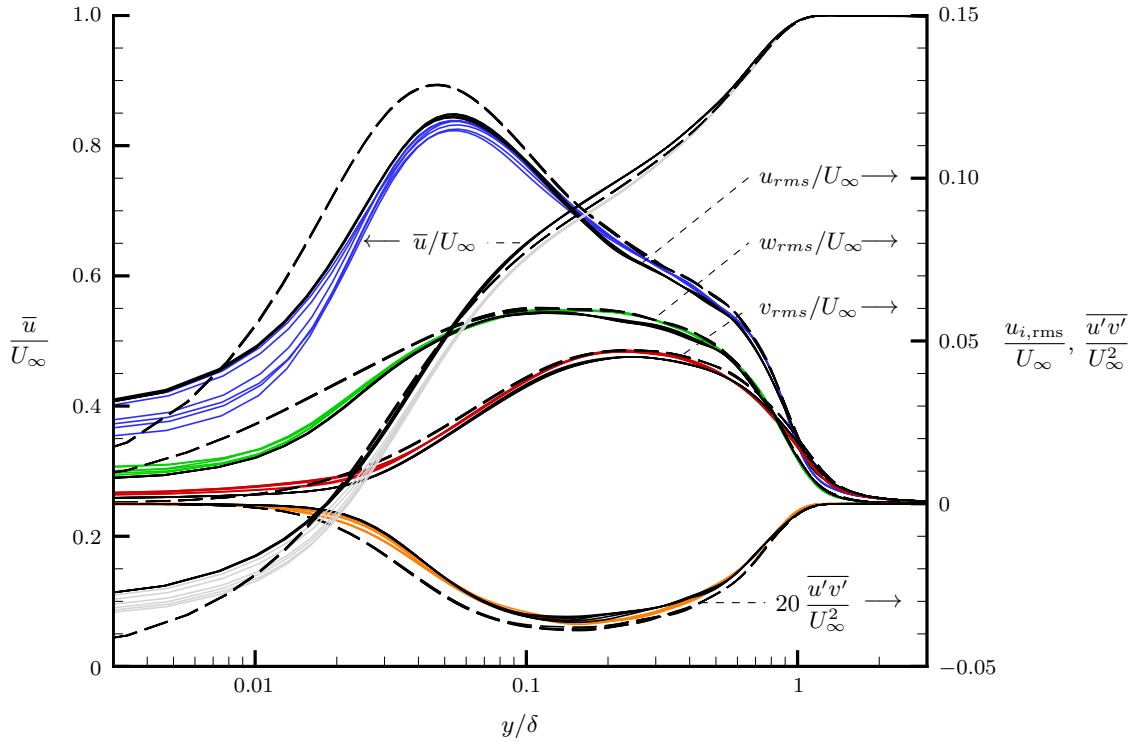


FIGURE 7.20 – Profils de la vitesse longitudinale moyenne $\overline{u}$, des intensités fluctuantes $u_{i,rms}$ et de la contrainte de cisaillement de Reynolds $\overline{u'v'}$, adimensionnés en unité externe pour 6 stations x équiréparties dans une demi-longueur d'onde $\lambda_{x,\mathrm{wav}}$ pour la configuration de *riblets* sinueux l1000b22 (*lignes en couleurs*) et pour les cas de référence de *riblets* rectilignes bidimensionnels (*ligne noire*) et de plaque plane (*pointillés noirs*).

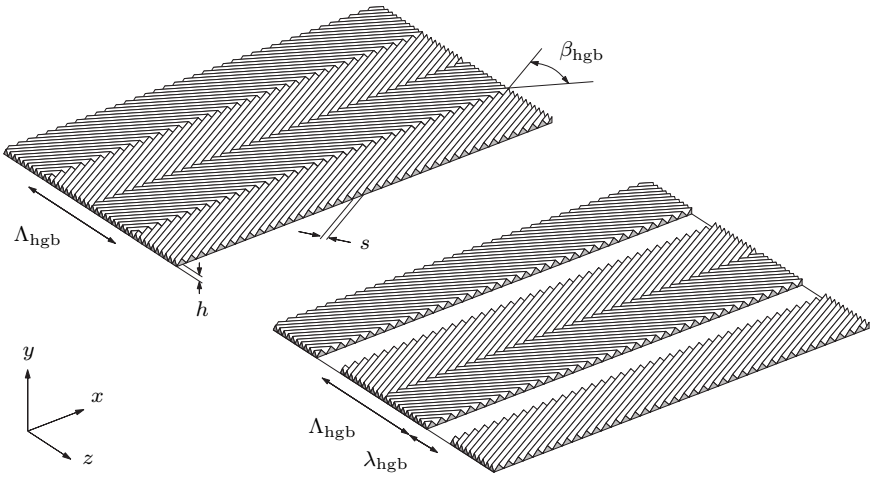


FIGURE 7.21 – Schéma et paramétrisation de *riblets* en chevron convergent-divergent (*en haut à gauche*) et de *riblets* en chevron divergent uniquement (*en bas à droite*). Figure adaptée de [197].

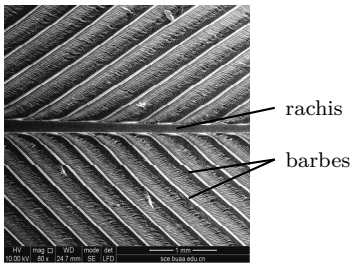


FIGURE 7.22 – Visualisation au microscope à balayage électronique d'une plume d'oiseau. Figure extraite de [33].

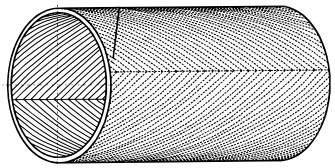


FIGURE 7.23 – Schéma du dispositif expérimental de Koeltzsch *et al.* [152] d'où est extraite la figure.

riblets en anglais), divergents ou convergents, représentée sur la figure 7.21. Cette géométrie a initialement été inspirée de la disposition des écailles de requin autour de certains organes externes (neuromastes, pores de la ligne latérale, etc.) [152] et des plumes d'oiseaux, comme représenté sur la figure 7.22 [33, 34]. Des résultats prometteurs ont récemment été mis en avant dans les rares études qui se sont intéressées aux *riblets* en chevron.

Koeltzsch *et al.* [152] ont recouvert l'intérieur d'une conduite circulaire avec des *riblets* disposés comme sur la figure 7.23, formant ainsi une ligne de chevrons convergents et une de chevrons divergents. Dans la zone des chevrons convergents, ils constatent alors une diminution de l'ordre de 15% de la vitesse moyenne $\overline{u}$ et une augmentation du même ordre de l'intensité fluctuante u_{rms}. L'effet inverse est observé dans la zone de chevrons divergents. Koeltzsch *et al.* interprètent ces constats en remarquant qu'un tel dispositif, bien que pariétal, permet de générer une recirculation moyenne de grande échelle dans la conduite circulaire.

Nugroho *et al.* [197] ont alors mis en relation ces résultats avec l'étude dans laquelle Schoppa & Hussain [244] démontrent que l'imposition de tourbillons longitudinaux contrarotatifs de grande envergure permet de réduire significativement la traînée de frottement d'une couche limite turbulente. Ils ont alors cherché à évaluer expérimentalement la traînée du dispositif de la figure *en haut à gauche* de 7.21 placé dans une couche limite turbulente sans gradient de pression. Les constats déjà obtenus en conduite circulaire y restent valables : alors que la hauteur h des *riblets* est de l'ordre du pour-cent de l'épaisseur δ_{ref} de la couche limite non contrôlée, les chevrons perturbent la couche limite dans sa globalité avec de larges mouvements tourbillonnaires. En particulier, la variation spatiale de δ entre les zones convergentes et divergentes peut évoluer du simple au double. La loi logarithmique du profil de vitesse moyenne $\overline{u}^+(y^+)$ dans la zone divergente (respectivement convergente) est translatée vers le haut (respectivement vers le bas), ce qui suggère — comme établi à l'équation (2.13) notamment — une baisse (respectivement une hausse) du frottement pariétal local. Bien que leurs mesures ne permettent pas de l'établir précisément, les *riblets* en chevron semblent conduire à une légère hausse de la traînée globale sur la paroi.

Chen *et al.* [33] effectuent une telle mesure avec plus de précision dans une conduite circulaire

recouverte de 4 répétitions de chevrons convergents-divergents. Ils constatent également une hausse de la traînée qu'ils évaluent à près de 5%. Conjointement, un intéressant parallèle est fait avec la structure des plumes d'oiseaux. Celles-ci sont formées d'un rachis central de part et d'autre duquel des barbes sont attachées obliquement, comme représenté sur la figure 7.22. Les barbes sont de fines lames parallèles les unes aux autres et dont les dimensions caractéristiques correspondent bien à celles des *riblets* en régime de réduction de traînée, à savoir un écartement de $s^+ \simeq 20$ et une hauteur $h \lesssim s$ qui tend à décroître vers les bords de la plume. Les plumes se superposent telles des tuiles pour former le plumage de l'oiseau, si bien qu'en première approximation, ce dernier peut être décrit comme une configuration de *riblets* en chevrons divergents telle que représenté sur la figure *en bas à droite* de 7.21. La fine bande lisse de largeur λ_{hgb} entre les chevrons divergents caractérise l'aplatissement des barbes sur le bord des plumes. Un tel dispositif est appliqué sur la paroi intérieure d'une conduite circulaire, de sorte que celle-ci contienne 4 répétitions de bandes de chevrons divergents entrecoupées de zones lisses. Avec un angle de chevrons de $\beta_{\text{hgb}} = 60°$, le dispositif permet d'atteindre 16% à 17% de réduction de traînée en écoulement turbulent [33, 34], une valeur significativement plus importante que les 6% à 7% obtenus dans les mêmes conditions avec des *riblets* rectilignes. Une configuration plus élaborée, dont la transition entre les bandes de chevrons et les zones lisses est plus douce, dépasse même les 20% de réduction de traînée.

7.3.2 Mise en place de simulations numériques directes

On se propose de reproduire l'expérience prometteuse de Chen *et al.* [34] par simulation numérique. L'objectif est double : il s'agit non seulement de confirmer l'important gain de réduction de traînée, mais également de disposer d'une description suffisamment fine de l'écoulement à proximité des *riblets* pour améliorer la compréhension des mécanismes turbulents en action.

Bien que l'expérience de Chen *et al.* ait été réalisée en conduite circulaire, on décide ici de simuler une couche limite turbulente de plaque plane sans gradient de pression, puisque l'on dispose d'ores et déjà d'une méthodologie pour ce type d'écoulement. Les conditions d'écoulement utilisées auparavant et décrites dans la section 4.1 sont préservées. On conserve également la géométrie de coupe des *riblets*, à savoir une géométrie trapézoïdale dont les dimensions caractéristiques sont spécifiées dans le tableau 4.3.

L'angle des chevrons pour la configuration optimale de Chen *et al.* est de $\beta_{\text{hgb}} = 60°$ et le rapport entre l'envergure des chevrons et celle de la zone lisse qui les séparent de $\lambda_{\text{hgb}}/\Lambda_{\text{hgb}} \simeq 1/3$. Puisque quatre répétitions de bandes de chevrons ont été placées dans la circonférence de la conduite circulaire turbulente pleinement développée de Chen *et al.*, la largeur du motif peut être estimée à $\Lambda_{\text{hgb}} + \lambda_{\text{hgb}} = \frac{\pi}{2}$, si bien que $\Lambda_{\text{hgb}} \simeq 1.2\,\delta$ et $\lambda_{\text{hgb}} \simeq 0.4\,\delta$. Le parallèle entre la dimension des chevrons dans une conduite circulaire, où la courbure est importante, et celle sur une plaque plane n'est pas évident. On se propose d'étudier deux configurations dont le paramétrage figure dans le tableau 7.7. Pour la configuration nommée `hgb12`, l'épaisseur des chevrons est proche de celle de la couche limite, alors qu'elle est deux fois plus importante pour la configuration `hgb24`. Cette dernière configuration permet donc l'existence de deux tourbillons contrarotatifs de dimension caractéristique proche de δ.

Référence	$\Lambda_{\text{hgb}}/\delta_{\text{ref}}$	$\lambda_{\text{hgb}}/\delta_{\text{ref}}$	β_{hgb}
`hgb12`	0.8	0.4	60°
`hgb24`	1.6	0.8	60°

TABLE 7.7 – Valeurs des paramètres de design des *riblets* en chevrons étudiés. L'épaisseur de couche limite $\delta_{\text{ref}} = 1.5\,\delta_{\text{in}} \simeq 335\,l_{\tau,\text{ref}}$ utilisée ici pour l'adimensionnement des paramètres est l'épaisseur de la couche limite canonique de référence au milieu de la zone de contrôle.

À l'instar des simulations précédentes, le domaine de calcul est composé d'une zone de contrôle

précédée et suivie par des zones de paroi lisse, comme illustré sur la figure 4.1. Les dimensions de ces différentes zones sont ici $L_{x_0 \to x_1} \simeq 30\,\delta_0$ et $L_{\text{in} \to x_0} = L_{x_1 \to \text{out}} \simeq 10\,\delta_0$.

On s'impose toujours que la largeur du domaine de calcul soit supérieure à la valeur seuil de $2\,\delta$ explicitée dans le tableau 4.4. Le coût de simulation découlant de la discrétisation extrêmement fine qu'impose ce problème (comme cela sera détaillé ci-dessous) interdit d'étendre le domaine bien au-delà. Ainsi, pour la simulation `hgb12`, le domaine comprend deux rangées de chevrons, alors que celui de la simulation `hgb24` n'en comporte qu'une seule.

La disposition des *riblets* impose de fortes contraintes topologiques sur le maillage puisque chaque crête de *riblets* marque un découpage entre deux blocs de maillage. Afin de conserver des mailles quasi-orthogonales, la solution qui a été retenue est représentée sur la figure 7.24. Dans un plan y constant — c'est-à-dire pour `j` donné — les lignes de maillage à `i` constant sont identiques entres elles à une translation selon x près. Il en est de même pour les lignes de maillage à k constant. De plus, ces dernières sont les symétriques des premières. Ainsi, les lignes à `i` constant vérifient l'équation $x = x_0(\texttt{i}) + f(z)$ alors que les lignes de maillage à `k` constant vérifient $x = x_0(\texttt{k}) + f(\Lambda_{\text{hgb}} + \lambda_{\text{hgb}} - z)$. La fonction f doit être déterminée de sorte que la ligne de maillage $x = f(z)$ suive la direction des chevrons imposée par β_{hgb} dans la bande $z \in [0, \Lambda_{\text{hgb}}/2]$, où l'origine $z = 0$ est positionnée dans l'alignement des pointes de chevron. De plus, on souhaite que le maillage soit orthogonal partout où cela est possible, tout en assurant la continuité et la dérivabilité des lignes de maillage. On obtient alors la fonction $f(z)$ définie par l'expression suivante, où l'indice *hgb* a été omis sur les paramètres Λ_{hgb}, λ_{hgb} et β_{hgb} pour alléger la lecture :

$$f(z) = \begin{cases} (\tan\frac{\beta}{2})^{-1}\, z & \text{pour } z \in \left[0, \dfrac{\Lambda}{2}\right], \\ f\left(\dfrac{\Lambda}{2}\right) + \dfrac{(\tan\frac{\beta}{2})^{\frac{2z-(\Lambda+\lambda)}{\lambda}} - (\tan\frac{\beta}{2})^{-1}}{\ln(\tan\frac{\beta}{2})}\,\dfrac{\lambda}{2} & \text{pour } z \in \left]\dfrac{\Lambda}{2}, \dfrac{\Lambda}{2}+\lambda\right], \\ f\left(\dfrac{\Lambda}{2}+\lambda\right) + (\tan\frac{\beta}{2})\left(z - \dfrac{\Lambda}{2} - \lambda\right) & \text{pour } z \in \left]\dfrac{\Lambda}{2}+\lambda, \Lambda+\lambda-s\right], \\ f\Big(\Lambda+\lambda-s\Big) + \dfrac{(\tan\frac{\beta}{2}) - (\tan\frac{\beta}{2})^{\frac{(2\Lambda+2\lambda-s)-2z}{s}}}{\ln(\tan\frac{\beta}{2})}\,\dfrac{s}{2} & \text{pour } z \in \Big]\Lambda+\lambda-s, \Lambda+\lambda\Big]. \end{cases} \tag{7.20}$$

Le dernier segment $]\Lambda + \lambda - s, \Lambda + \lambda]$, de largeur choisie arbitrairement comme étant la largeur s des *riblets*, a été introduit pour éviter que les lignes de maillage ne forment une ligne brisée au niveau de la pointe des chevrons. Le maillage est donc orthogonal sur tout le domaine, à l'exception de cette bande d'épaisseur s, comme en témoignent les intersections entre les lignes de maillage mises en évidence sur la figure 7.24. Les *riblets* sont formés en altérant légèrement la position des lignes de maillage sous l'altitude des crêtes, de sorte que les nœuds soient décalés vers le centre de la vallée de *riblets* la plus proche.

La condition de périodicité dans la direction transverse z est suffisamment souple pour que la topologie de maillage ne soit pas altérée sur les frontières gauche et droite du domaine de calcul. Néanmoins, la topologie ne permet pas d'obtenir un plan d'entrée et un plan de sortie qui soient effectivement des plans. Pour pallier ce problème, une zone de transition vers un maillage cartésien est générée en amont et en aval de la zone de contrôle. Celle en amont est visible sur la figure 7.25. Bien que les mailles n'y vérifient pas des propriétés particulières d'orthogonalité, la discrétisation y est suffisamment fine pour que le fluide y soit correctement représenté. Néanmoins, la paroi est laissée lisse entre ce changement de topologie et le chevron le plus proche sur une étendue de $0.8\,\delta_{\text{in}}$ afin de pallier les éventuelles imprécisions qui pourraient y être introduites.

La topologie de maillage et la dimension des *riblets* conduisent à une discrétisation extrêmement fine. En effet, en s'imposant d'utiliser 10 mailles pour discrétiser l'espace entre deux lignes de crêtes adjacentes, on fixe la largeur des mailles à moins de 1.6 unité de paroi. Leur longueur est alors imposée par la topologie et l'angle β_{hgb}. Elle vaut ici 2.8 unités de paroi environ. Une telle discré-

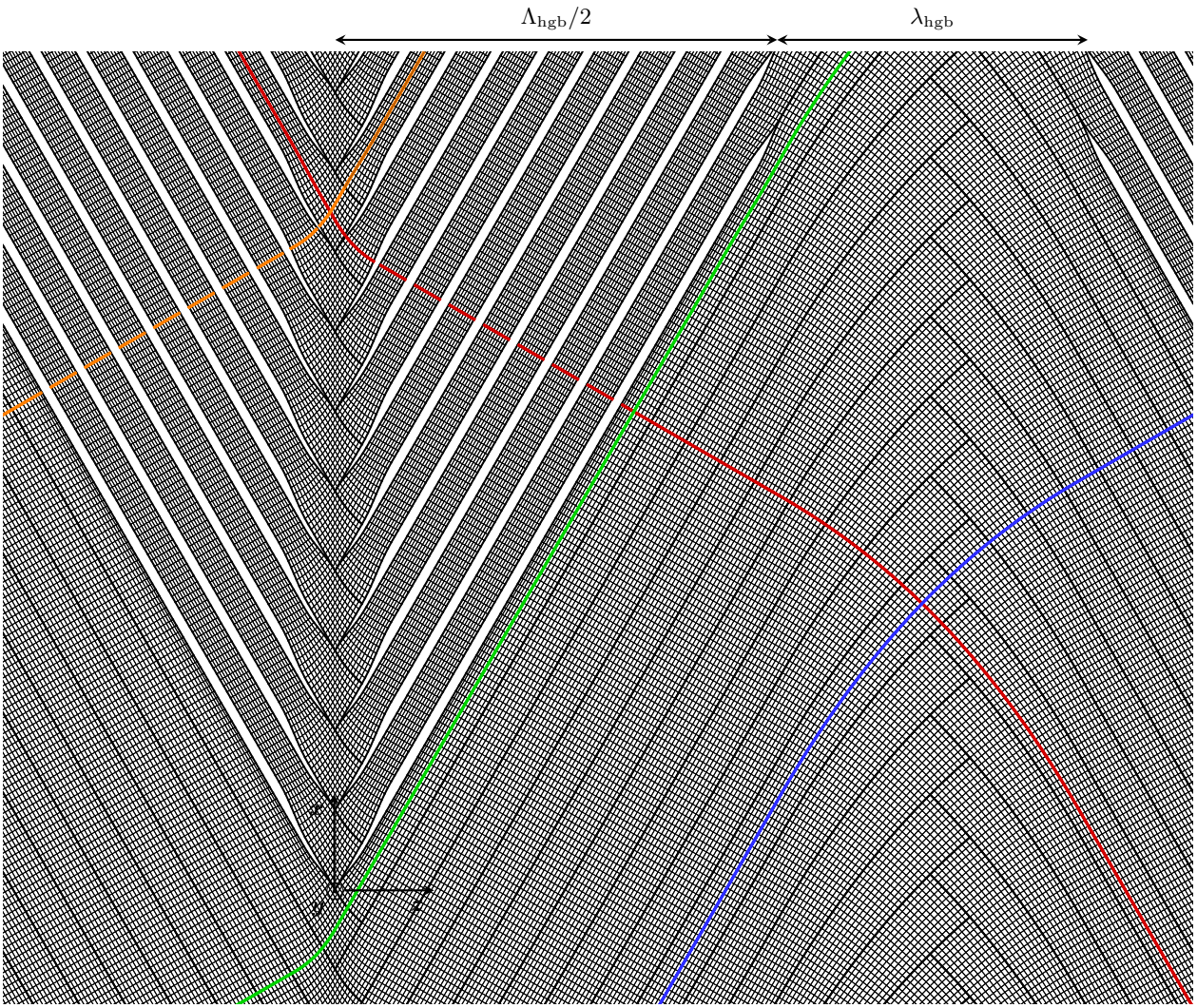


FIGURE 7.24 – Coupe dans le plan (x, z), à la paroi, du maillage utilisé pour discrétiser, en multi-blocs, l'espace au-dessus d'une paroi partiellement recouverte de *riblets* en chevrons pour la configuration `hgb12`. Les frontières de domaine sont indiquées en *trait épais* alors que le maillage est représenté en *trait fin*. Les *riblets* sont formés dans l'espace laissé entre les domaines de calcul. Les lignes de maillage s'intersectent de façon orthogonale, sauf à proximité des pointes de chevrons où cette contrainte a été levée pour se prémunir de lignes de maillage brisées. Les lignes en couleurs illustrent ces propriétés.

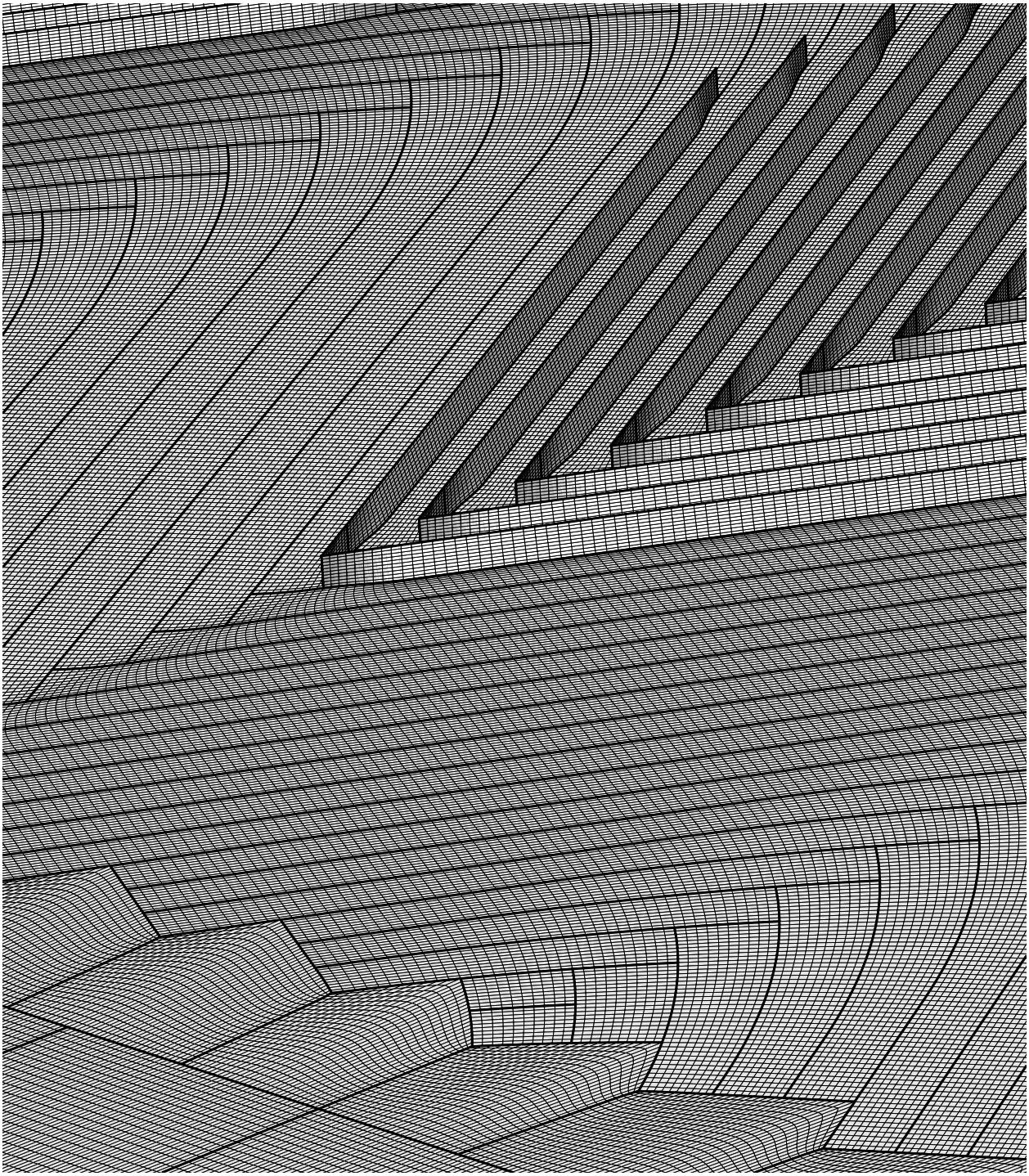


FIGURE 7.25 – Représentation de la partie surfacique du maillage utilisé pour discrétiser, en multi-blocs, l'espace au-dessus d'une paroi partiellement recouverte de *riblets* en chevrons pour la configuration `hgb12`. Les frontières de domaine sont indiquées en *trait épais* alors que le maillage est représenté en *trait fin*.

tisation est bien en dessous des standards de LES et même de DNS, rappelés dans le tableau 4.6. L'utilisation du modèle de viscosité sous-maille peut donc être abandonnée.

L'utilisation de maillages cartésiens en amont et en aval de la zone de contrôle permet un déraffinement progressif des mailles en dehors de la zone d'intérêt. La discrétisation des mailles y est étirée de $\Delta x^+ \simeq 3$ à proximité immédiate de la transition de topologie jusqu'à $\Delta x^+ \simeq 10$ sur la plus grande partie des parois lisses en amont et en aval du domaine.

Ainsi, les maillages obtenus totalisent près de 290 millions de nœuds et possèdent environ 185 chevrons par rangée. La configuration hgb12 compte deux rangées, alors que la configuration hgb24 n'est possède qu'une seule.

7.3.3 Performance de réduction de traînée

La répartition locale des efforts, visqueux d'une part et de pression d'autre part, sur la paroi couverte de *riblets* en chevron est exposée sur la figure 7.26. L'observation du coefficient c_f révèle, sans surprises, un frottement plus important sur les crêtes des *riblets* que dans leurs vallées. On constate également la présence de petites zones de recirculation entre chaque chevron à proximité de leur pointe. Ces zones sont immédiatement bordées par un frottement plus intense, révélant le balayage de fluide de quantité de mouvement élevé, canalisé par les chevrons. Sur les bandes de paroi lisse intercalées entre les rangées de chevrons, le frottement est notablement réduit. À l'inverse, celui-ci est grandement augmenté dans l'axe central des chevrons, ce qui est particulièrement visible en aval du dernier chevron.

La résultante locale des efforts de pression selon la direction longitudinale x est non-nulle sur les versants de *riblets* uniquement, puisque la normale à la paroi des autres zones est orientée selon $\overline{e}_y$. Le signe de c_p n'est pas uniforme sur ces versants. Mis à part l'axe central des chevrons et le premier chevron en amont, le coefficient c_p est négatif sur les versants orientés vers l'amont — c'est-à-dire que la pression y contribue à diminuer la traînée — et positif sur les versants orientés vers l'aval — c'est-à-dire que la pression y augmente la traînée[2]. Un tel comportement a déjà été observé avec les *riblets* sinueux à la figure 7.15.

Une interprétation plus claire peut être fournie en intégrant ces contributions locales grandement inhomogènes. C'est ce qui est représenté sur la figure 7.27, où les coefficients c_f, c_p et c_d ont été moyennés dans la direction transverse d'une part et dans la direction longitudinale d'autre part.

Intéressons-nous dans un premier temps à la figure de *gauche*, où l'on visualise l'évolution avec x des coefficients moyennés selon la direction z. On constate que le frottement visqueux est réduit par les *riblets* et on relève ici un taux de réduction de frottement FRR de l'ordre de 15% pour la configuration hgb24. La réduction est plus légère pour la configuration hgb12, dont le résultat du calcul est d'ailleurs bien moins convergé. Comme pour le cas des *riblets* sinueux à la sous-section 7.2.5.1, la résultante des efforts de pression contribue positivement à la traînée, mais son amplitude est ici bien plus importante : pour la configuration hgb24, le coefficient c_p atteint la moitié de la valeur du coefficient de frottement $c_{f,\text{ref}}$ de la plaque plane de référence, et il dépasse même les 70% pour la configuration hgb12. Finalement, bien loin de réduire la traînée totale, les *riblets* en chevron l'augmentent de façon considérable. On constate ainsi une hausse de l'ordre de 35% pour la configuration hgb24 et bien plus encore — près du double — pour la configuration hgb12.

Koeltzsch *et al.* [152], lors de leurs expériences en conduite circulaire, ont insisté sur la nécessité d'une zone de contrôle suffisamment longue pour que l'écoulement atteigne un régime contrôlé pleinement établi. Rien ne garantit ici que cette hypothèse soit pleinement vérifiée. Cependant, la tendance des courbes semble suffisamment stable — en amont d'une courte zone transitoire initiale de seulement quelques $4\,\delta_{\text{in}}$ — pour que cette réserve ne puisse laisser de doute sur l'incapacité de ces configurations de *riblets* en chevrons à réduire la traînée.

2. Il est à noter que le coefficient c_p, défini par (7.2), ne correspond pas au coefficient de pression usuel en aéronautique, mais au coefficient de la résultante longitudinale des efforts de pression. Ces deux coefficients sont donc égaux sur les parois de normale $-\underline{e}_x$, mais de signe opposé sur les parois orientées vers l'aval.

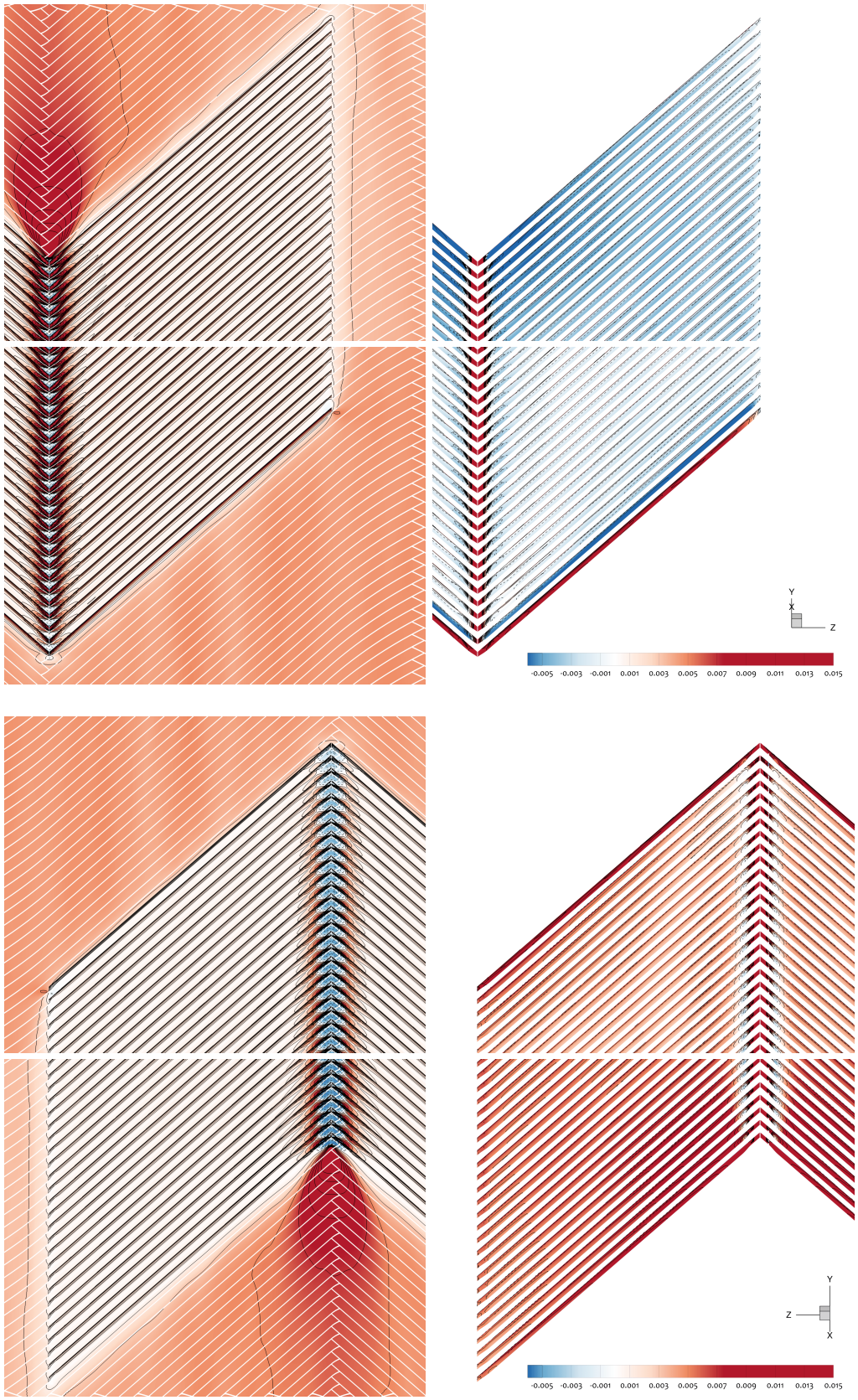


FIGURE 7.26 – Iso-valeurs à la paroi du coefficient de frottement local visqueux c_f (*à gauche*) et du coefficient des efforts de pression local c_p (*à droite*) pour la configuration de *riblets* en chevron hgb24. L'angle de vue est plongeant, pris depuis l'aval (*en haut*) ou depuis l'amont (*en bas*), comme indiqué par les repères *en bas à droite*. La zone de contrôle n'est pas représentée en intégralité : seules les zones proches de ses extrémités amont et aval le sont. Les lignes de niveau vont de -0.005 (*en bleu*) à 0.015 (*en rouge*) en passant par 0.000 (*en blanc*) par incrément de 0.002. Les lignes de niveau négatives sont en *pointillés*.

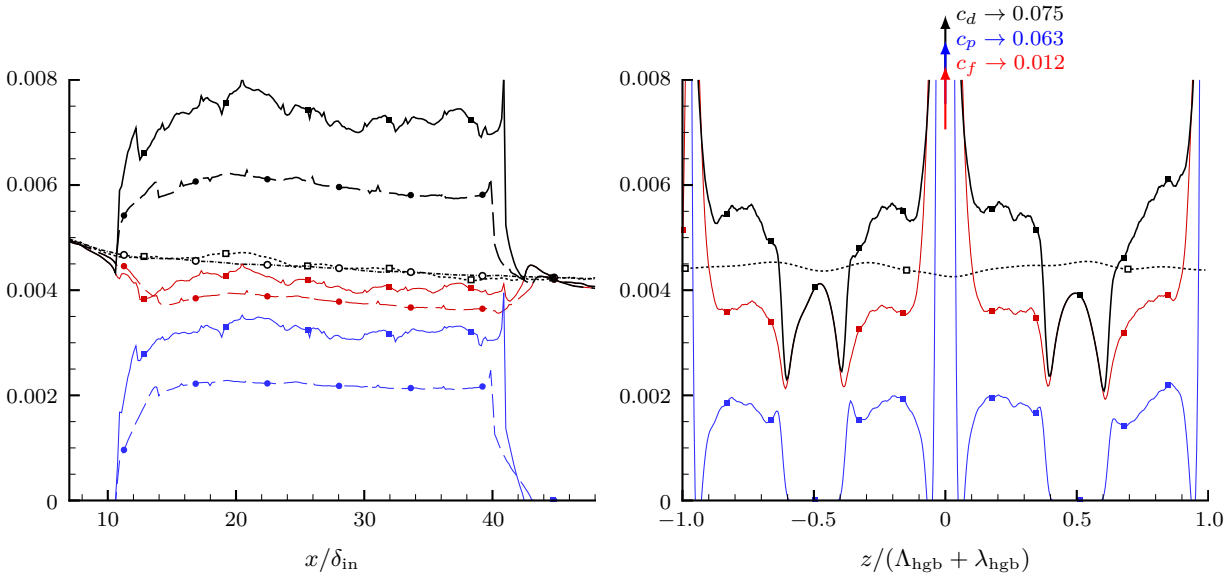


FIGURE 7.27 – Coefficient de frottement c_f (*rouge*), coefficient des efforts de pression c_p (*bleu*) et coefficient de traînée c_d (*noir*) moyennés dans la direction transverse (*à gauche*) ou dans la direction longitudinale (*à droite*) pour les configurations hgb12 (—■—) et hgb24 (— ●— —). Le coefficient $c_d = c_f$ pour la plaque plane de référence, discrétisée à partir de la topologie de maillage de chacune des deux configurations, est également représenté (- - -□- - - et - - -○- - -). Afin de ne pas prendre en compte les effets transitoires aux extrémités amont et avale de la zone de contrôle, la moyenne dans la direction longitudinale de la figure de *droite* n'est réalisée que sur les 151 chevrons dont la pointe est positionnée entre $x/\delta_{\text{in}} = 14.1$ et 38.1.

Les contributions à la traînée du frottement et de la pression ne sont pas uniformément réparties selon la direction transverse. La figure de *droite* de 7.27 représente, pour la configuration hgb24, la répartition selon z des coefficients c_f, c_p et c_d moyennés longitudinalement. Les premiers chevrons en amont de la zone de contrôle et les derniers en aval n'ont pas été pris en compte. Seuls les 151 chevrons pour lesquels le régime est relativement établi ont été considérés.

En observant la répartition transverse $c_f(z)$ du coefficient de frottement, on constate que son niveau est partout inférieur à celui de la plaque plane de référence, sauf à proximité immédiate de la pointe des chevrons où le niveau explose pour atteindre des valeurs près de 3 fois supérieures à $c_{f,\text{ref}}$. Le frottement visqueux atteint sa valeur minimale aux bords des bandes de paroi lisse intercalées entre les rangées successives de chevrons. Vers le centre de ces bandes lisses, le frottement augmente sans jamais atteindre pour autant le niveau non-contrôlé $c_{f,\text{ref}}$. Cette figure confirme donc le constat établi par Nugroho *et al.* [197] et déjà observé sur le champ surfacique de la figure 7.26 : le frottement pariétal est intensifié dans les zones de chevrons divergents et est réduit dans les zones de convergence.

Pour sa part, le coefficient des efforts de pression c_p est évidemment nul sur les bandes de paroi lisse entre les rangées de chevrons. Néanmoins, sa contribution est positive partout ailleurs, avec un pic considérable atteignant 0.063 dans l'alignement des pointes de chevron, soit près de 15 fois la valeur de $c_{f,\text{ref}}$. La pointe des chevrons étant un point d'arrêt pour le fluide, ce coefficient de pression renvoie à la pression dynamique du fluide proche paroi. La vitesse caractéristique du fluide impactant les chevrons peut donc être estimée à $\overline{u} = 0.25\,U_\infty \simeq 5\,u_{\tau,\text{ref}}$, valeur cohérente pour du fluide sous l'altitude $h^+ \simeq 8$ des crêtes de *riblets*.

Un autre résultat important porte sur la répartition transverse du coefficient de traînée c_d. Au centre des chevrons, sa valeur est très importante puisque celles des deux contributions c_f et c_p le sont. Sur les bandes lisses entre les rangées de chevrons, sa valeur s'identifie à celle de c_f. Ainsi, un gain de traînée y est observé, mais l'évolution de la courbe laisse à penser qu'augmenter la

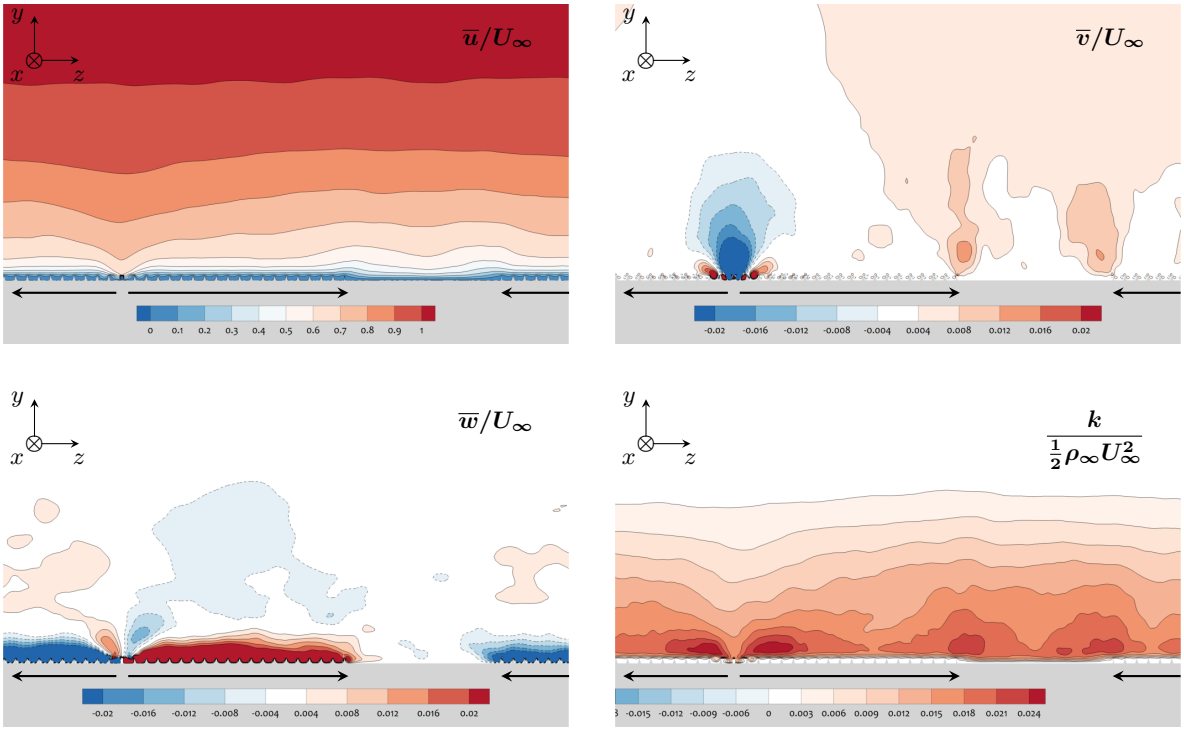


FIGURE 7.28 – (*De gauche à droite puis de haut en bas*) Iso-valeurs dans le plan transverse (y, z) des champs de vitesse moyenne longitudinale $\overline{u}$, normale $\overline{v}$ et transverse $\overline{w}$ et du champ d'énergie cinétique turbulente k, adimensionnés en unité externe pour la configuration de *riblets* en chevron hgb24 à la station $x = 30\,\delta_{\text{in}}$. Les flèches horizontales indiquent la position latérale des chevrons.

largeur λ_{hgb} de la bande lisse ne conduirait pas une véritable amélioration. Enfin, dans la zone de chevrons — partie centrale mise à part — on découvre que la traînée est substantiellement augmentée, alors que c'est bien dans cette zone qu'un gain était attendu. Bien que le frottement visqueux y soit réduit, la contribution de la pression vient largement contrebalancer cette légère réduction.

7.3.4 Influence de grandes échelles dans la couche limite.

Les résultats en termes de réduction de traînée obtenus ici en couche limite de plaque plane ne sont pas à la hauteur de ceux obtenus par Chen *et al.* [34] dans leurs expériences menées en conduite circulaire. Il est peu probable que la différence de configuration puisse induire des modifications notables très proches de la paroi, puisque les mécanismes turbulents y sont très similaires pour ces deux grands types d'écoulement. Néanmoins, comme cela a été relevé précédemment, une particularité des *riblets* en chevron est leur capacité à induire des mouvements de grande envergure dans l'écoulement, et ce, malgré leur petite dimension. Dans cette dernière sous-section, on s'attache alors à évaluer cette influence de large échelle.

Les champs des différentes composantes de la vitesse moyenne sont représentés dans un plan de coupe transverse à l'écoulement au-dessus des *riblets* en chevron sur la figure 7.28. Le positionnement latéral des chevrons est indiqué par des flèches et par la présence visible des *riblets* à la paroi.

Concernant la vitesse longitudinale $\overline{u}$, on constate un abaissement des iso-valeurs à la verticale des pointes de chevrons, traduisant une augmentation de la vitesse dans cette zone. À l'inverse, l'écoulement est ralenti au-dessus de la zone lisse, tout particulièrement à proximité du bord des chevrons. Ainsi, vis-à-vis de la position transverse par rapport aux chevrons, un parallèle peut être fait entre le comportement de la vitesse longitudinale moyenne dans la couche limite et celui du frottement sur la paroi (sur la figure de *droite* de 7.27). Ces résultats sont en accord avec ceux de

la littérature, abordés en début de section.

L'iso-valeur de la composante normale $\overline{v}$ de la vitesse moyenne révèle la présence d'un important *downwash*, dont l'amplitude maximale de la vitesse atteint environ $-0.05\,U_\infty \simeq -u_\tau$. Cette vitesse négative confirme la présence à grande échelle d'un balayage (dont le mécanisme est illustré sur la figure 1.12) sur l'écoulement moyen et permet d'expliquer l'augmentation de $\overline{u}$ dans cette zone. Inversement, l'écoulement à l'aplomb de la zone lisse est le siège d'une éjection de grande envergure. Cette éjection est moins localisée que le balayage précédent — comme en témoigne la très large étendue de l'iso-valeur de vitesse normale positive — mais elle est également bien moins intense : la valeur maximale de $\overline{v}$, atteinte à la verticale du bord des chevrons, dépasse tout juste $0.001\,U_\infty$.

On relève une grande influence des *riblets* en chevrons sur la vitesse transverse moyenne $\overline{w}$ à leur proximité immédiate. Sur quelques hauteurs de *riblets*, l'écoulement est entraîné dans la direction de dérapage des *riblets* à une vitesse pouvant dépasser $0.03\,U_\infty$ (voire $0.05\,U_\infty$ si l'on considère également l'écoulement sous l'altitude des crêtes). Plus haut dans la couche limite, l'écoulement transverse est bien plus lent et orienté dans la direction opposée. Ces observations, en conjonction avec celles du champ de vitesse normale, mettent en évidence la présence d'un écoulement secondaire caractérisé par de larges tourbillons longitudinaux contrarotatifs.

On retrouve alors tous les éléments du schéma de principe de la figure 1.12, ce qui complète l'analogie entre le comportement moyen induit à l'échelle de la couche limite par les chevrons et une partie du cycle instationnaire de régénération de la turbulence en proche-paroi. Néanmoins, l'analogie n'est que partielle : les tourbillons étant ici induits par les chevrons, ils sont ancrés à leur aplomb et ne peuvent donc pas se déplacer transversalement. Ainsi, ils ne peuvent ni générer d'autres tourbillons par un mécanisme auto-similaire, ni entrer en oscillation sous l'effet d'instabilités hydrodynamiques. Il n'y a donc pas de mécanisme de régénération auto-induit similaire à celui de la turbulence pariétale. À l'inverse, les tourbillons induits par les chevrons sont susceptibles de stabiliser les *streaks* [244, 197], affaiblissant ainsi le mécanisme de régénération de la turbulence et donc, par voie de conséquence, l'ensemble des intensités fluctuantes.

On le vérifie d'ailleurs sur le niveau général des intensités fluctuantes. La dernière figure de 7.28 révèle que l'énergie cinétique turbulente k dépend fortement de la position z par rapport aux chevrons. En particulier, elle est particulièrement importante de part et d'autre de la fine zone de *downwash* à la verticale des pointes de chevron, en raison de l'important cisaillement moyen qui y règne. On note également un niveau important d'énergie cinétique turbulente dans la zone d'*upwash* à la verticale du bord des chevrons. Bien que la valeur du pic de $u^+_{\mathrm{rms}}(y^+)$ dépende donc de la position z par rapport aux chevrons, son niveau moyen est de l'ordre de 2.6, ce qui est légèrement en deçà de ce que l'on observe pour une plaque plane canonique. Cette tendance globale soutient donc que les larges tourbillons longitudinaux contrarotatifs de l'écoulement moyen secondaire induisent un affaiblissement de la turbulence.

L'observation des champs de vitesse moyenne et d'énergie cinétique turbulente a donc permis de confirmer la présence de larges mouvements tourbillonnaires induits par les *riblets* en chevron. Comme observé dans la littérature, le frottement moyen comme les intensités turbulentes dépendent grandement de la position latérale par rapport aux chevrons. Néanmoins, bien que le frottement visqueux et le niveau de turbulence soient globalement diminués, la résultante des efforts de pression conduit à une hausse significative de la traînée. On peut regretter de ne pas disposer de relevé de champ pour la vitesse dans la conduite circulaire de Chen *et al.* dans laquelle une très nette chute de la traînée a pu être mesurée. Bien que l'on puisse supposer que des tourbillons longitudinaux contrarotatifs y soient également induits par les chevrons, leurs dispositions et leurs interactions relatives dans l'espace délimité par la paroi circulaire expliquent peut-être la différence notable entre les configurations de conduite circulaire et de plaque plane sans gradient de pression.

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, trois types de géométries tridimensionnelles de *riblets* ont été étudiés. Puisque la direction longitudinale x ne constitue plus une direction homogène, la résultante des efforts de pression n'est plus nécessairement nulle, comme elle l'est pourtant pour les cas de paroi plane ou des *riblets* rectilignes. Le coefficient de frottement c_f et le coefficient de traînée c_d doivent alors être distingués, puisque ce dernier prend également en compte les efforts longitudinaux de pression.

L'utilisation de patchs de *riblets* est la première stratégie de *riblets* tridimensionnels étudiée dans de ce chapitre, à la section 7.1. Les perspectives *a priori* offertes par cette stratégie s'appuient sur les observations des chapitres précédents concernant le comportement transitoire de l'écoulement en aval des extrémités de la zone de contrôle. L'étendue des patchs de *riblets* dans la direction longitudinale est fixée à 800 unités de paroi. Deux longueurs ont été testées pour celle de la zone de paroi lisse entre ces patchs, à savoir 300 et 800 unités de paroi. Ces dimensions sont choisies suffisamment courtes afin que le cycle proche-paroi d'auto-régénération de la turbulence ne puisse pas avoir l'étendue suffisante entre deux transitions successives plaque plane/*riblets* pour s'établir. Les résultats de simulation montrent que la résultante des efforts de pression s'avère être négligeable, si bien que la traînée est quasi exclusivement due au frottement visqueux. Par ailleurs, la réduction de traînée n'est pas aussi importante avec ces patchs qu'avec des *riblets* classiques. Elle est même légèrement inférieure au prorata de la surface couverte par des *riblets*. Cette configuration de *riblets* tridimensionnels ne constitue donc pas une stratégie de contrôle d'intérêt applicatif.

L'oscillation transverse de paroi (OTP) est une stratégie de contrôle active permettant d'atteindre des réductions de frottement supérieures à 40%. Néanmoins, cette stratégie est active et l'énergie requise à la mise en mouvement de la paroi réduit les perspectives de gain énergétique à seulement quelques pour cent. La complémentarité entre les mécanismes turbulents liés aux stratégies de contrôle par OTP et par *riblets* peut laisser penser que leurs réductions de traînée respectives puissent être cumulées. C'est ce qui a motivé l'étude de la section 7.2 sur les *riblets* spatialement sinueux, voie qui a déjà été suivie par deux groupes de recherche dont les conclusions sont opposées. La caractérisation de la géométrie de ces *riblets* tridimensionnels nécessite alors deux paramètres additionnels, qui peuvent être la longueur d'onde λ_{wav} et l'angle de dérapage maximal β_{wav}. Une étude paramétrique par krigeage est alors réalisée sur l'espace de ces deux paramètres. Néanmoins, les résultats des simulations mettent en évidence leur très faible influence sur la traînée. Pour la plupart des paramètres de design testés, la traînée totale reste approximativement égale à celle des *riblets* rectilignes. La décomposition de celle-ci en contributions visqueuse et de pression permet de constater une réelle réduction du frottement. Celle-ci est d'autant plus marquée que l'amplitude d'oscillation β_{wav} est importante. Cependant, la traînée de pression additionnelle compense presque exactement les gains de traînée de frottement. Pour les configurations dont l'angle de dérapage maximal β_{wav} dépasse 20°, cet effet délétère commence même à s'imposer et la réduction de traînée globale à se détériorer. Ainsi, les *riblets* sinueux ne semblent pas constituer une stratégie viable pour le contrôle de la traînée de couche limite turbulente. Ces résultats confirment ceux de l'étude de Kramer *et al.* [155].

La dernière section 7.3 a été consacrée au contrôle par chevrons de *riblets*. Les très rares études à s'être consacrées au sujet, toutes expérimentales, suggèrent que les chevrons de *riblets* convergeant entraînent une augmentation locale de la traînée alors que les chevrons divergeant la réduisent. Les larges mouvements secondaires de tourbillons contrarotatifs qu'ils imposent semblent en être la cause. Deux simulations ont alors été envisagées. Toutes deux contiennent

des rangées de *riblets* divergeant, entrecoupées de bandes de paroi lisse. La largeur des chevrons est de l'ordre de l'épaisseur de la couche limite pour l'une, et du double pour l'autre, permettant ainsi la coexistence de mouvements tourbillonnaires très larges. Bien que la présence de ces mouvements soit effectivement constatée, les résultats en termes de réduction de traînée sont très défavorables pour chacune des deux configurations. On constate bien une véritable réduction du frottement sur les bandes de paroi lisse séparant les rangées de chevrons successives. Cependant, les efforts de pression infligent une traînée additionnelle si conséquente que la traînée totale est finalement partout augmentée dans les rangées de chevrons. Quantitativement, pour la configuration la plus favorable, la traînée de frottement est réduite d'environ 15% mais la contribution additionnelle de la pression pénalise à hauteur de 50%. Ainsi, tout comme les *riblets* sinueux, les *riblets* en chevrons n'offrent pas les gains espérés.

Parmi les trois types de configuration de *riblets* tridimensionnels testée au cours de cette étude, pourtant *a priori* prometteuses, aucune ne constitue une solution de réduction de la traînée plus pertinente que les *riblets* rectilignes classiques. Bien que ce résultat puisse sembler décevant d'un point de vue applicatif, il n'en est pas moins utile. En effet, les simulations numériques directes (ou sub-LES) effectuées dans le cadre de cette étude ont non seulement permis une invalidation claire de ces différentes technologies, mais ont également pu apporter matière à compréhension de la physique sous-jacente. Un tel résultat aurait été plus difficilement accessible par d'autres moyens, expérimentaux notamment. En effet, sans compter les difficultés de prototypage et les plus grandes incertitudes sur la mesure de la traînée, l'impossibilité de distinguer le frottement des efforts de pression aurait grandement pénalisé l'analyse des résultats. L'incapacité des configurations de *riblets* sinueux et de *riblets* en chevrons à réduire la traînée plus que les simples *riblets* rectilignes est, dans ces deux cas, causée par la contribution défavorable des efforts de pression. Cette composante est donc à considérer pleinement lors des prochains essais de géométries tridimensionnelles.

Quatrième partie

Conclusions

Conclusions et perspectives

Synthèse

Les études réalisées au cours de cette thèse tentent d'apporter des éléments de réponse aux besoins d'amélioration des stratégies réalistes de réduction de traînée. Il a été rappelé en introduction à quel point cette thématique de recherche amont était importante, notamment dans le domaine du transport, au vu des gains énergétiques potentiels et des exigences environnementales. L'objectif de ces travaux a été d'explorer de nouvelles géométries de *riblets* tridimensionnelles et d'évaluer leurs capacités de réduction de traînée. Un préambule à cette exploration a été d'améliorer la compréhension des interactions qui existent entre les *riblets* et la turbulence proche paroi.

L'étude bibliographique du chapitre 1 a permis de souligner la complexité des phénomènes turbulents. Les couches limites turbulentes sont peuplées de mouvements cohérents, également appelés structures turbulentes, qui contribuent à augmenter le frottement à la paroi. Ces structures récupèrent leur énergie de l'écoulement moyen et la dissipent aux plus petites échelles. Elles se créent et s'entretiennent selon des mécanismes encore étudiés aujourd'hui. Les structures les plus proches de la paroi obéissent à un cycle d'auto-régénération de la turbulence qui a été particulièrement étudié. La connaissance des étapes de ce cycle a ouvert de nombreuses pistes de contrôle, dont l'objectif est de rompre la régénération de la turbulence, supprimer les structures proches de la paroi et ainsi limiter l'influence défavorable de la turbulence sur le frottement.

Parmi les nombreuses pistes de contrôle, on distingue les stratégies actives dont les actionneurs nécessitent un apport d'énergie. Dans la pratique, cet apport s'avère bien souvent être plus important que les gains énergétiques effectivement induits par le contrôle. À l'inverse, en plus de leur simplicité de réalisation, d'installation et de maintenance, les stratégies de contrôle passives présentent l'intérêt applicatif considérable de ne pas dépenser d'énergie. Parmi elles, les *riblets* sont des micro-rainures qui permettent des réductions de frottement pouvant atteindre des taux de 10%. On a présenté au chapitre 2 l'état des connaissances actuelles relatives à cette stratégie de contrôle, que ce soit en termes de performances dans différentes conditions d'écoulement, de caractéristiques moyennes et fluctuantes de la couche limite contrôlée, mais aussi de compréhension des mécanismes phénoménologiques expliquant la réduction du frottement.

Afin d'étudier à notre tour cette stratégie de contrôle, des outils de simulation numérique sont nécessaires. En particulier, le besoin de simuler avec précision les fluctuations turbulentes instationnaires impose l'usage de la simulation numérique directe (DNS) ou de la simulation des grandes échelles (LES). Cette dernière approche consiste à ne résoudre que les structures turbulentes les plus grosses en se contentant de modéliser l'influence des plus petites. En plus d'énoncer les justi-

fications théoriques derrière cette méthode, le chapitre 3 détaille les techniques de discrétisation et de résolution numériques qui sont implémentés dans les outils utilisés par la suite.

Le premier volet des travaux de cette thèse, développé dans le chapitre 4, a été la mise en place d'une méthodologie pour la simulation numérique d'écoulements contrôlés par des *riblets*. Cette notion de méthodologie englobe non seulement la définition de cas d'étude et de paramètres numériques, mais aussi l'étape de validation par confrontation aux résultats de référence de la littérature. Dans la perspective de simuler des écoulements réalistes pour les applications aéronautiques, le choix de la couche limite en développement spatial a naturellement prévalu. Alors que la quasi-totalité des études de la littérature liées aux *riblets* a été réalisée en canal plan, il s'agit là d'une décision forte notamment en raison des contraintes numériques qu'elle impose. Une fois les solveurs et leurs paramétrisations choisis de façon adéquate, après avoir établi une topologie de maillage cohérente, des simulations ont été entreprises et leurs résultats analysés pour différents degrés de validation. Les résultats canoniques et grandement documentés de couche limite turbulente sont retrouvés. De plus, la simulation de l'écoulement turbulent au-dessus de *riblets* se compare très bien aux résultats de la littérature dès lors qu'ils existent et que les conditions d'écoulement et la géométrie des *riblets* sont similaires.

Ainsi assurée de la pertinence de la méthode numérique, une véritable analyse de l'écoulement a pu être entreprise dans le chapitre 5. Le point initial de cette étude repose sur le constat simple que le choix de l'origine pour l'axe y n'a rien de trivial lorsque la paroi est couverte de *riblets*, puisque celle-ci n'est pas plane. Pourtant, ce choix a une réelle influence sur l'interprétation des résultats lors des comparaisons entre les écoulements contrôlés ou non. Tout l'enjeu est alors de déterminer la position particulière à laquelle la couche limite au-dessus des *riblets* "voit" une paroi plane équivalente. Cette position définit la notion d'origine virtuelle. Différents choix existent dans la littérature, mais aucun ne semble légitime puisque leurs fondements ne se trouvent pas dans les propriétés effectives de l'écoulement turbulent étudié. Une nouvelle approche a alors pu être proposée. Celle-ci repose sur la généralisation aux surfaces complexes (comme celles couvertes de *riblets*) de la décomposition du frottement proposée par Fukagata *et al.* [85]. Les détails concernant la dérivation de cette nouvelle identité sont présentés dans l'annexe A. Au-delà de l'intérêt que représente déjà une telle décomposition du frottement pour la compréhension de l'influence des *riblets* sur l'écoulement, l'identité FIK étendue induit implicitement la définition d'une origine virtuelle. Son expression peut s'interpréter comme un barycentre du frottement sur la paroi pondéré par une fonction de l'altitude locale. L'utilisation de cette origine virtuelle permet alors d'établir une forte similitude entre les écoulements des cas avec et sans contrôle considérés à un même nombre de Reynolds Re_τ. En effet, une simple translation par un petit décalage $\Delta y^+ = \Delta u^+$ permet une superposition quasi parfaite de l'ensemble des profils des deux écoulements, à savoir, la vitesse longitudinale moyenne, les tensions de Reynolds, des densités spectrales de puissance, les corrélations spatiales et même les bilans d'énergie cinétique turbulente. Ainsi, aussi complexe que soit l'interaction entre les *riblets* et les structures turbulentes, l'écoulement contrôlé peut être simplement caractérisé comme étant la superposition d'une couche limite turbulente canonique et d'une fine couche laminaire d'épaisseur Δy^+ et de cisaillement constant.

En s'appuyant sur cette dernière observation, une étude analytique a été menée au chapitre 6 afin de clarifier le comportement des *riblets* à grand nombre de Reynolds. L'action du contrôle est alors idéalisée à la capacité à supprimer toutes fluctuations turbulentes dans une fine couche d'épaisseur Δy^+ à la paroi. On suppose alors que l'écoulement turbulent qui se développe au-dessus de cette fine couche laminaire adopte un profil de couche limite canonique, comme c'est le cas pour l'écoulement au-dessus de *riblets*. Les diverses formules semi-empiriques existantes pour caractériser les couches limites canoniques peuvent alors être utilisées pour évaluer l'évolution avec le nombre de Reynolds de la couche limite contrôlée. Cette représentation très simple de l'écoulement contrôlé permet de mettre en lumière le dilemme qui se pose pour toute stratégie de contrôle de la turbulence pariétale et qui peut s'illustrer de la manière suivante. La suppression de la turbulence dans une fine couche d'épaisseur $\Delta y^+ = 10$ permet une réduction de frottement de l'ordre de 40%

à $Re_\tau = 10^4$, alors que Δy^+ ne représente dans ce cas qu'un millième de l'épaisseur de la couche limite. Comment expliquer qu'une étendue de contrôle si limitée puisse avoir un tel impact sur le frottement et comment évaluer les performances de réduction de traînée atteignable à grand nombre de Reynolds ? L'étude analytique conduite ici permet d'identifier les deux effets majeurs par lesquels le contrôle affecte le frottement. Tout d'abord, l'effet principal du contrôle est une réduction de la contribution turbulente au frottement. Il a été montré que cette réduction était causée par un simple effet de remise à l'échelle des tensions de Reynolds sur toute l'étendue de la couche limite, en raison de leur dimensionnement en unité de paroi. Le même mécanisme a déjà été mis en lumière pour des couches limites de canal plan sous l'action d'un contrôle similaire. Néanmoins, contrairement aux écoulements de canaux plans, les couches limites en développement spatial sont sujettes à un épaississement dans la direction de l'écoulement. De façon générale, moins une couche limite frotte, moins elle s'épaissit, mais, moins une couche limite est épaisse, plus elle frotte. En réduisant le frottement, les *riblets* engendrent l'effet collatéral de ralentir l'épaississement de la couche limite. Néanmoins, l'influence de cet effet délétère s'avère secondaire par rapport à l'action directe du contrôle, si bien que la couche limite contrôlée, bien que moins épaisse, peut maintenir des réductions de frottement considérables même pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds.

Le dernier volet de cette thèse, le plus applicatif, a porté sur l'étude de géométries de *riblets*, non plus rectilignes, mais tridimensionnelles. En particulier, trois configurations, *a priori* prometteuses en termes de réduction de traînée, ont été étudiées. La première n'est autre que l'utilisation de patchs de *riblets*. Au lieu de recouvrir totalement la surface de *riblets*, n'est-il pas possible de bénéficier des effets transitoires aux extrémités amont et aval de nombreuses bandes de *riblets* pour réduire la traînée plus encore ? Aucune des deux simulations réalisées n'a porté satisfaction sur ce point : le taux de réduction de frottement est approximativement proportionnel à la surface de la paroi couverte par des *riblets*, voire légèrement inférieur. Ce résultat est néanmoins d'une importance capitale puisqu'il établit qu'une dégradation locale d'une paroi couverte de *riblets* n'affectera les performances de réduction de traînée qu'au prorata de la surface endommagée. La configuration de *riblets* tridimensionnels suivante est inspirée de la stratégie de contrôle par oscillations transverses de paroi (OTP). L'idée directrice est alors d'estimer si l'utilisation de *riblets* spatialement sinueux permet de cumuler les mécanismes de réduction de traînée propres aux *riblets* et ceux propres à l'OTP. Enfin, la troisième et dernière configuration testée est l'arrangement de *riblets* en chevron, à l'image des barbes sur les plumes d'oiseau. Les larges tourbillons contrarotatifs que cette géométrie impose semblent pouvoir jouer favorablement sur la traînée. Pour ces deux dernières configurations, les conclusions sont assez semblables. Le frottement y est plus faible que pour des *riblets* rectilignes. Néanmoins, les efforts de pression engendrent une traînée additionnelle si conséquente que la traînée totale est, au mieux, identique à celle des *riblets* rectilignes, au pire, grandement augmentée. Ainsi, aucune de ces stratégies de contrôle ne présente un véritable intérêt applicatif. Bien que ces résultats puissent sembler décevant, ils permettent non seulement d'écarter ces fausses "bonnes solutions" sans avoir à entreprendre des compagnes d'essais onéreuses, mais également d'apporter matière à compréhension pour les mécanismes physiques sous-jacents. La capacité d'incriminer la composante de pression dans la détérioration de la traînée totale est un exemple de résultat qui n'aurait pu être établi par des moyens expérimentaux. En ce sens, les résultats de ces travaux confirment la vision des *riblets* rectilignes de Jiménez [135] : les *riblets* sont simplement des éléments de rugosité dont la particularité essentielle est de ne pas générer de traînée de forme additionnelle.

Perspectives

Les perspectives ouvertes par cette étude sont de deux types. Elles concernent d'une part la compréhension phénoménologique des mécanismes de contrôle de la turbulence pariétale, et d'autre part, la mise au point de stratégies de contrôle qui soient suffisamment performantes et industriellement envisageables pour conduire à des solutions applicatives ... et appliquées.

L'écoulement turbulent au-dessus des *riblets* a été grandement étudié, dans cette thèse comme dans de nombreuses autres études. La littérature regorge de profils de vitesse moyenne ou fluctuante, de densité spectrale de puissance, etc. De plus, les travaux de cette thèse tendent à établir que les données statistiques moyennes de l'écoulement au-dessus des *riblets* semblent être relativement bien caractérisées par celles d'une couche limite canonique non-contrôlée, moyennant un simple changement de référentiel. À l'inverse, une étude des mouvements cohérents qui peuplent la couche limite ne semble pas avoir déjà été conduite. Pourtant, de nombreux critères existent pour identifier, localiser, caractériser des structures tourbillonnaires. Le critère Q, visualisé sur la figure 4.8, est un exemple parmi d'autres, comme le critère Γ_2 ou encore le critère de Michard [108]. À partir des données instationnaires d'écoulement turbulent au-dessus de *riblets*, les tailles, positions, formes, vitesses, densités, durées de vie ou encore positions relatives des structures turbulentes pourraient alors être post-traités puis comparés à ceux d'une simulation de référence non-contrôlée. Une telle analyse fait aujourd'hui défaut dans l'étude des *riblets*. Elle permettrait de grandement éclaircir la compréhension de l'action du contrôle sur le cycle d'auto-régénération proche-paroi de la turbulence.

D'un point de vue plus applicatif, de nombreuses configurations restent à évaluer. Une étape préliminaire serait par exemple de poursuivre l'analyse, initiée dans cette thèse, des écoulements induits par des *riblets* sinueux ou par des *riblets* en chevrons. En particulier, la pression a été imputée des mauvaises performances de réduction de traînée de ces deux configurations de contrôle. Il serait maintenant intéressant d'identifier à quelles caractéristiques doit répondre un dispositif de contrôle pour maintenir au plus bas sa résultante des efforts de pression.

Un autre point d'intérêt qui mériterait d'être approfondi concerne les expériences de *riblets* en chevron en conduite circulaire menées par Chen *et al.* [33, 34]. Elles démontrent, par un dispositif expérimental très élémentaire, des taux de réduction de traînée si conséquents — plus de 15% — qu'ils ne peuvent s'interpréter comme une simple incertitude de mesure. À l'inverse, les résultats numériques de cette thèse établissent clairement que ce même dispositif conduit à une très nette augmentation de la traînée lorsqu'il est appliqué à une couche limite de plaque plane. Poursuivre la présente étude numérique pour l'appliquer, à l'image des expériences de Chen *et al.*, à un écoulement de conduite circulaire, serait d'un intérêt certain.

Enfin, de nombreuses configurations, pourtant considérées aujourd'hui comme prometteuses, restent inexplorées. Une source quasi-inépuisable en est la nature. Elle offre de solution pour lesquelles l'étude de faisabilité a déjà été réalisée par les "3.8 milliards d'années de R&D" de la sélection naturelle, de sorte que l'optimisation a été conduite sous de multiples contraintes opérationnelles : économie énergétique et de matériaux, robustesse et adaptativité aux conditions extérieures, résistance et longévité, ... Le paragraphe introductif de la section bibliographique 2.2 relève notamment l'exemple des écailles de requin et de la fourrure de phoque qui surpassent les performances de réduction de traînée atteintes par les *riblets*. Ces deux dispositifs de contrôle présentent le point commun d'une certaine souplesse, adaptant ainsi leur forme et leur disposition aux évènements turbulents. Ces interactions aéro-structurelles sont complexes à étudier, mais ouvrent un champ quasi-inexploré de contrôle passif de la turbulence pariétale.

Annexes

Annexe **A**

Dérivation de la décomposition FIK étendue aux surfaces géométriquement complexes

Sommaire

A.1 Introduction **251**
A.2 Dérivation de la décomposition **252**
A.3 Formulation étendue **257**

A.1 Introduction

Dans leur article [85] de 2002, Fukagata, Iwamoto & Kasagi ont proposé une décomposition du frottement pariétal qui portera leurs initiales : **l'identité FIK**.

Comme cela a été mentionné dans la sous-section 1.5.2, cette identité permet de relier le frottement pariétal, grandeur définie localement à la paroi par la formule (1.28), et les champs moyens et fluctuants dans l'ensemble de la couche limite. Le grand intérêt de cette méthode est qu'elle permet de quantifier la contribution au frottement pariétal de différents mécanismes physiques. La méthode va même plus loin puisque, pour chacune des contributions, la répartition spatiale dans l'épaisseur de la couche limite peut également être mesurée. Ainsi, bien que les fluctuations de vitesse soient nulles à la paroi, l'impact sur le frottement pariétal de la turbulence à différentes altitudes au-dessus de la paroi peut être précisément évalué.

Le point de départ de la dérivation de cette identité est l'équation moyenne de conservation de la quantité de mouvement longitudinale (1.17b) des équations de Navier-Stokes. Cette équation est alors intégrée trois fois entre la paroi et la frontière de la couche limite $y = \delta$. En fonction des types d'écoulement (canal plan, conduite circulaire ou couche limite de plaque plane en développement spatial), Fukagata *et al.* ont ainsi pu appliquer des simplifications. Cependant, seuls les cas de paroi lisse ont été abordés. Ainsi, pour l'étude de l'écoulement turbulent au-dessus de *riblets*, une généralisation de l'identité aux surfaces complexes est nécessaire. Peet & Sagaut [205] ont alors proposé une première formulation. Cependant, on peut regretter que cette généralisation de coïncide pas

avec la formule originelle lorsqu'elle est appliquée à une surface lisse.

En s'inspirant des travaux de Fukagata *et al.*, de Peet & Sagaut [205] et de Mehdi *et al.* [182, 181], on se propose d'obtenir une identité qui vérifie les conditions suivantes :

- La formulation doit coïncider avec la décomposition FIK originelle lorsqu'elle est appliquée à une paroi plane.
- L'identité doit pouvoir s'appliquer à l'étude de surfaces de type *riblets*. De plus, on s'attachera à ce que les contraintes sur la complexité de paroi soient aussi peu restrictives que possible.

A.2 Dérivation de la décomposition

Hypothèses. On se place dans le cadre d'un écoulement compressible, périodique (ou homogène) dans la direction transverse z. Ainsi, le domaine d'étude peut se réduite à la portion $z \in [0, L_z]$. On impose uniquement à la paroi de vérifier la condition $y_\mathrm{w}(x,z) = \mathrm{argmin}\big(\Omega(x,y,z)\big)$ où Ω est le volume occupé par le fluide, ce qui restreint uniquement la formation de dévers.

Équation de conservation. Rappelons l'équation de conservation de la quantité de mouvement longitudinale (1.17b) :

$$\partial_t \overline{\rho}\,\widetilde{u}_x + \partial_k \overline{\rho}\,\widetilde{u}_x\widetilde{u}_k = -\partial_x \overline{p} + \partial_k \overline{\tau}_{xk} - \partial_k R_{xk}\,. \tag{A.1}$$

En regroupant différemment les termes, on obtient :

$$\Big(\partial_t \overline{\rho}\,\widetilde{u}_x + \overline{I_x} + \partial_x \overline{p}\Big) + \overline{I_v} + \overline{I_t} = 0\,, \tag{A.2a}$$

$$\text{avec} \qquad \overline{I_x} = \partial_k \overline{\rho}\,\widetilde{u}_x\widetilde{u}_k - \partial_x \overline{\tau}_{xx} + \partial_x R_{xx}\,, \tag{A.2b}$$

$$\overline{I_v} = -\partial_y \overline{\tau}_{xy} - \partial_z \overline{\tau}_{xz} \quad = \quad -\mathrm{div}_{2d}\left(\overline{\tau}_{x\bullet}\right)\,, \tag{A.2c}$$

$$\overline{I_t} = \quad \partial_y R_{xy} + \partial_z R_{xz} \quad = \quad \mathrm{div}_{2d}\left(R_{x\bullet}\right)\,. \tag{A.2d}$$

C'est sur cette équation que l'on va pouvoir appliquer la triple intégration, conformément à la méthode originelle de Fukagata *et al.* [85].

Triple intégration. La triple intégration réalisée par Fukgata *et al.* s'écrit comme ceci :

$$\int_{y_a=y_\mathrm{w}}^{\delta}\ \int_{y_b=y_\mathrm{w}}^{y_a}\ \int_{y=y_\mathrm{w}}^{y_b} \bullet \quad \mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}y_b\ \ \mathrm{d}y_a\,. \tag{A.3}$$

Dans notre cas, le domaine n'étant pas nécessairement homogène dans la direction transverse. Ainsi, l'intégration la plus interne doit être faite non seulement selon y mais également selon la direction z supposée périodique. À la manière de Peet & Sagaut [205], on définie alors la surface $\Sigma(x)$ dans le plan transverse, c'est-à-dire à x fixée, qui s'étend en envergure sur une période de largeur L_z et qui est délimitée verticalement par la paroi d'une part et la borne supérieure de la triple intégration d'autre part, comme cela est représenté sur le schéma de la figure A.1.

Ainsi, si l'on note $y_\mathrm{min} = \min(y_\mathrm{w})$ et y_top les bornes inférieure et supérieure de la triple intégration, sans spécifier cette dernière dès à présent, la triple équation s'écrit comme suit et se simplifie

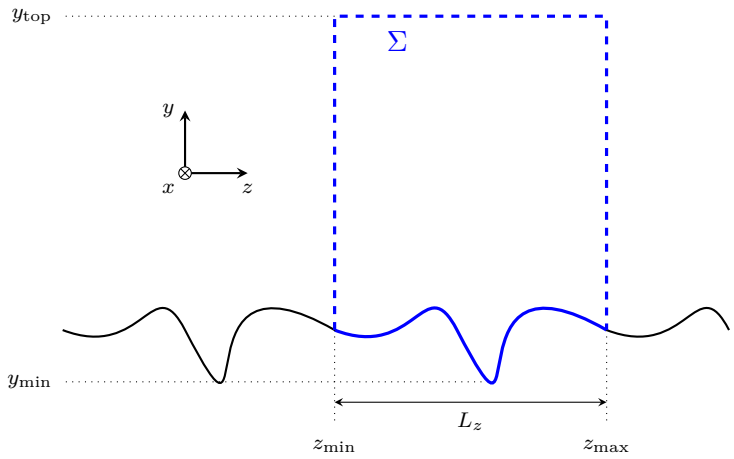


FIGURE A.1 – Schéma dans le plan transverse (y, z) de la surface d'intégration Σ délimité par ses frontières en *bleu*. La paroi géométriquement complexe et périodique dans la direction z est représentée en *traits pleins*.

par intégration par partie successive sur l'intégrale extérieure, sans contraintes sur l'intégrande :

$$
\begin{aligned}
&\int_{y_a=y_{\text{min}}}^{y_{\text{top}}} \int_{y_b=y_{\text{min}}}^{y_a} \iint_{\Sigma_{(y<y_b)}} \bullet \quad \mathrm{d}\Sigma \ \mathrm{d}y_b \ \mathrm{d}y_a \\
&= - \int_{y_a=y_{\text{min}}}^{y_{\text{top}}} -(y_{\text{top}} - y_a) \iint_{\Sigma_{(y<y_a)}} \bullet \quad \mathrm{d}\Sigma \ \mathrm{d}y_a \quad + \underbrace{\left[-(y_{\text{top}} - y_a) \int_{y_b=y_{\text{min}}}^{y_a} \iint_{\Sigma_{(y<y_b)}} \bullet \quad \mathrm{d}\Sigma \ \mathrm{d}y_b \right]_{y_a=y_{\text{min}}}^{y_{\text{top}}}}_{=0} \\
&= \int_{y_a=y_{\text{min}}}^{y_{\text{top}}} \frac{1}{2}(y_{\text{top}} - y_a)^2 \int_{z\in\partial\Sigma_{(y=y_a)}} \bullet \quad \mathrm{d}z \ \mathrm{d}y_a \quad - \underbrace{\left[\frac{1}{2}(y_{\text{top}} - y_a)^2 \iint_{\Sigma_{(y<y_a)}} \bullet \quad \mathrm{d}\Sigma \right]_{y_a=y_{\text{min}}}^{y_{\text{top}}}}_{=0} \\
&= \int_{y_a=y_{\text{min}}}^{y_{\text{top}}} \int_{z\in\partial\Sigma_{(y=y_a)}} \frac{1}{2}(y_{\text{top}} - y_a)^2 \quad \bullet \quad \mathrm{d}z \ \mathrm{d}y_a \\
&= \iint_{\Sigma} \frac{1}{2}(y_{\text{top}} - y)^2 \quad \bullet \quad \mathrm{d}\Sigma \,.
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Ainsi, la triple intégration de Fukagata *et al.* est équivalente à une simple intégrale pondérée par une fonction de la coordonnée y. Cette fonction est ici $\frac{1}{2}(y_{\text{top}} - y)^2$. Dans le cas de la formulation originelle, pour laquelle $y_{\text{top}} = \delta$, il s'agit plus simplement de la fonction $\frac{1}{2}(\delta - y)^2$. Si l'on procédait à une quadruple intégration au lieu d'une triple, cela reviendrait à utiliser la fonction de pondération $\frac{1}{6}(y_{\text{top}} - y)^3$. En réalité, rien ne nous empêche d'utiliser n'importe quelle fonction, à partir du moment où celle-ci est différentiable et différente de zéro à la paroi. Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dont la valeur et la dérivée s'annulent en $y = y_{\text{top}}$ amènerait des simplifications supplémentaires intéressantes.

Néanmoins, le choix originel de Fukagata *et al.* a le bon goût d'aboutir à une décomposition qui, comme on le verra, transporte une signification physique étonnamment claire. Ainsi, l'utilisation de la triple intégration (et donc de la fonction de pondération qui en découle) sera maintenue ici, bien qu'il semblait utile de démystifier ce choix.

Triple intégration de l'équation de conservation. On applique alors la triple intégration à chacun des termes de l'équation de Navier-Stokes ré-arrangée (A.2a).

Pour le terme entre parenthèses, puisqu'aucune simplification n'est possible lors de la triple intégration, on peut directement appliquer le résultat de la simplification (A.4). On obtient donc

$$\int_{y_a}\int_{y_b}\iint_{\Sigma_{(y<y_b)}} \left(\partial_t\overline{\rho}\widetilde{u}_x + \overline{I_x} + \partial_x\overline{p}\right)\,\mathrm{d}\Sigma\;\mathrm{d}y_b\;\mathrm{d}y_a = \iint_{\Sigma}\frac{1}{2}(y_{\mathrm{top}}-y)^2\left(\partial_t\overline{\rho}\widetilde{u}_x + \overline{I_x} + \partial_x\overline{p}\right)\,\mathrm{d}\Sigma\,. \quad \text{(A.5)}$$

Pour le terme $\overline{I_v}$, puisque celui-ci est formulé comme une divergence bidimensionnelle dans le plan (y,z), il est possible d'appliquer le théorème de Green-Ostrogradski sur l'intégration la plus intérieure. On obtient

$$\int_{y_a}\int_{y_b}\iint_{\Sigma_{(y<y_b)}} \overline{I_v}\;\mathrm{d}\Sigma\;\mathrm{d}y_b\;\mathrm{d}y_a = \int_{y_a}\int_{y_b}\oint_{\partial\Sigma_{(y<y_b)}} -\overline{\tau}_{xn_{2d}^{\mathrm{out}}}(l)\;\mathrm{d}l\;\mathrm{d}y_b\;\mathrm{d}y_a\,, \quad \text{(A.6)}$$

où $\overline{\tau}_{xn_{2d}^{\mathrm{out}}}(l) = \underline{e}_x\cdot\underline{\overline{\tau}}(l)\cdot\underline{n}_{2d}^{\mathrm{out}}(l)$, avec $\underline{n}_{2d}^{\mathrm{out}}(l)$ le vecteur courant du plan (y,z) normal à la frontière $\partial\Sigma$ du domaine bidimensionnelle $\Sigma_{(y<y_b)}$. En utilisant l'hypothèse de périodicité sur les bords $z_{\min}$ et $z_{\max}$, l'équation se simplifie en

$$\begin{aligned}\int_{y_a}\int_{y_b}\iint_{\Sigma_{(y<y_b)}} \overline{I_v}\;\mathrm{d}\Sigma\;\mathrm{d}y_b\;\mathrm{d}y_a = &\int_{y_a}\int_{y_b}\int_{\partial\Sigma_{\mathrm{w},(y_{\mathrm{w}}<y_b)}} -\overline{\tau}_{xn_{2d}^{\mathrm{out}}}(l)\;\mathrm{d}l\;\mathrm{d}y_b\;\mathrm{d}y_a \\ &+\int_{y_a}\int_{y_b}\int_{\partial\Sigma_{(y=y_b)}} -\overline{\tau}_{xn_{2d}^{\mathrm{out}}}(l)\;\mathrm{d}l\;\mathrm{d}y_b\;\mathrm{d}y_a\,. \end{aligned} \quad \text{(A.7)}$$

Traitons séparément chacun de ces deux termes. Pour le premier, l'intégrale intérieure est une intégrale curviligne le long de la paroi sous l'altitude y_b. Le vecteur $\underline{n}_{2d}^{\mathrm{in}} = -\underline{n}_{2d}^{\mathrm{out}}$ est alors la projection unitaire dans le plan (y,z) du vecteur normal à la paroi $\underline{n}$, de sorte que $\underline{n}_{2d}^{\mathrm{in}} = \frac{\underline{n}-(\underline{n}\cdot\underline{e}_x)\underline{e}_x}{\|\underline{n}-(\underline{n}\cdot\underline{e}_x)\underline{e}_x\|} = \frac{\underline{n}-(\underline{n}\cdot\underline{e}_x)\underline{e}_x}{\sqrt{1-(\underline{n}\cdot\underline{e}_x)^2}}$. Ainsi, le premier terme de l'équation (A.7) s'écrit comme suit et se simplifie par inté-

gration par partie sur l'intégrale extérieure.

$$\begin{aligned}
&\int_{y_a=y_{\min}}^{y_{\text{top}}} \int_{y_b=y_{\min}}^{y_a} \int_{\partial\Sigma_{\text{w},(y_{\text{w}}<y_b)}} -\overline{\tau}_{xn_{2d}^{\text{out}}}(l)\ \mathrm{d}l\ \mathrm{d}y_b\ \mathrm{d}y_a \\
&\quad = -\int_{y_a=y_{\min}}^{y_{\text{top}}} (y_{\text{top}}-y_a) \int_{l\in\partial\Sigma_{\text{w}}} \mathbb{1}_{(y_{\text{w}}(l)<y_a)}\ \overline{\tau}_{xn_{2d}^{\text{in}}}(l)\ \mathrm{d}l\ \mathrm{d}y_a \\
&\quad = -\int_{l\in\partial\Sigma_{\text{w}}} \overline{\tau}_{xn_{2d}^{\text{in}}}(l) \int_{y_a=y_{\min}}^{y_{\text{top}}} (y_{\text{top}}-y_a)\ \mathbb{1}_{(y_{\text{w}}(l)<y_a)}\ \mathrm{d}y_a\ \mathrm{d}l \\
&\quad = -\int_{l\in\partial\Sigma_{\text{w}}} \overline{\tau}_{xn_{2d}^{\text{in}}}(l) \int_{y_a=y_{\text{w}}(l)}^{y_{\text{top}}} (y_{\text{top}}-y_a)\ \mathrm{d}y_a\ \mathrm{d}l \\
&\quad = \int_{l\in\partial\Sigma_{\text{w}}} \frac{1}{2}\big(y_{\text{top}}-y_{\text{w}}(l)\big)^2\ \overline{\tau}_{xn_{2d}^{\text{in}}}(l)\ \mathrm{d}l \\
&\quad = \int_{l\in\partial\Sigma_{\text{w}}} \frac{1}{2}\big(y_{\text{top}}-y_{\text{w}}(l)\big)^2 \sqrt{1-\Big(\underline{n}(l)\cdot\underline{e}_x\Big)^2}\ \overline{\tau}_{\text{w},x}(l)\ \mathrm{d}l \\
&\quad = \left(\int_{l\in\partial\Sigma_{\text{w}}} \frac{1}{2}\big(y_{\text{top}}-y_{\text{w}}(l)\big)^2 \sqrt{1-\Big(\underline{n}(l)\cdot\underline{e}_x\Big)^2}\ \frac{\overline{\tau}_{\text{w},x}(l)\,\mathrm{d}l}{\langle\overline{\tau}_{\text{w},x}\rangle}\right)\langle\overline{\tau}_{\text{w},x}\rangle\,,
\end{aligned} \tag{A.8}$$

où le terme $\langle\overline{\tau}_{\text{w},x}\rangle$ représente le frottement pariétal moyenné sur la largeur $L_z = z_{\max} - z_{\min}$ de la paroi périodique à la station x. Il est défini, comme dans l'équation (2.3), par

$$\langle\overline{\tau}_{\text{w},x}\rangle(x) = \frac{1}{L_z}\int_{l\in\partial\Sigma_{\text{w}}} \overline{\tau}_{\text{w},x}(l)\ \mathrm{d}l\,. \tag{A.9}$$

Pour le second terme de (A.7), l'intégrale la plus interne suit la frontière supérieure $\partial\Sigma_{(y=y_b)}$ pour laquelle la normale $\underline{n}_{2d}^{\text{out}}$ est tout simplement la direction $\underline{e}_y$. En faisant les approximations $\overline{\tau}_{xy} \simeq \overline{\mu}\ \partial_y\widetilde{u}$ et $\overline{\mu}(y,z) \simeq \overline{\mu}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{y_a=y_{\min}}^{y_{\text{top}}} \int_{y_b=y_{\min}}^{y_a} \int_{\partial\Sigma_{(y=y_b)}} -\overline{\tau}_{xn_{2d}^{\text{out}}}\ \mathrm{d}l\ \mathrm{d}y_b\ \mathrm{d}y_a &= \int_{y_a=y_{\min}}^{y_{\text{top}}} \iint_{\Sigma_{(y<y_a)}} -\overline{\tau}_{xy}\ \mathrm{d}\Sigma\ \mathrm{d}y_a \\
&\simeq \int_{y_a=y_{\min}}^{y_{\text{top}}} \iint_{\Sigma_{(y<y_a)}} -\overline{\mu}\ \partial_y\widetilde{u}\ \mathrm{d}\Sigma\ \mathrm{d}y_a \\
&\simeq -\,\overline{\mu}\int_{y_a=y_{\min}}^{y_{\text{top}}} \iint_{\Sigma_{(y<y_a)}} \partial_y\widetilde{u}\ \mathrm{d}\Sigma\ \mathrm{d}y_a \\
&= -\,\overline{\mu}\iint_{\Sigma} \widetilde{u}\ \mathrm{d}\Sigma\,.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Ainsi, la triple intégration du terme $\overline{I_v}$ s'écrit finalement

$$\begin{aligned}
\int_{y_a}\int_{y_b}\iint_{\Sigma_{(y<y_b)}} \overline{I_v}\ \mathrm{d}\Sigma\ \mathrm{d}y_b\ \mathrm{d}y_a = &\left(\int_{l\in\partial\Sigma_{\text{w}}} \frac{1}{2}\big(y_{\text{top}}-y_{\text{w}}(l)\big)^2 \sqrt{1-\Big(\underline{n}(l)\cdot\underline{e}_x\Big)^2}\ \frac{\overline{\tau}_{\text{w},x}(l)\,\mathrm{d}l}{\langle\overline{\tau}_{\text{w},x}\rangle}\right)\langle\overline{\tau}_{\text{w},x}\rangle \\
&-\overline{\mu}\iint_{\Sigma}\widetilde{u}\,\mathrm{d}\Sigma\,.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Enfin, le dernier terme de l'équation de Navier-Stokes (A.2a), $\overline{I_t}$, peut être intégré comme suit. Le théorème de Green-Ostrogradski est là encore appliqué et la périodicité du domaine et la nullité des tensions de Reynolds à la paroi permettent de simplifier l'expression.

$$\begin{aligned}\int_{y_a}\int_{y_b}\iint_{\Sigma_{(y<y_b)}} \overline{I_t}\ \mathrm{d}\Sigma\ \mathrm{d}y_b\ \mathrm{d}y_a &= \int_{y_a}(y_{\mathrm{top}}-y_a)\iint_{\Sigma_{(y<y_a)}} \overline{I_t}\ \mathrm{d}\Sigma\ \mathrm{d}y_a\\ &= \int_{y_a}(y_{\mathrm{top}}-y_a)\oint_{\partial\Sigma_{(y<y_a)}} R_{xn_{2d}^{\mathrm{out}}}\ \mathrm{d}l\ \mathrm{d}y_a\\ &= \int_{y_a}(y_{\mathrm{top}}-y_a)\int_{\partial\Sigma_{(y=y_a)}} R_{xy}\ \mathrm{d}l\ \mathrm{d}y_a\\ &= \iint_{\Sigma}(y_{\mathrm{top}}-y)\ R_{xy}\ \mathrm{d}\Sigma\,. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Décomposition du frottement. Les triples intégrations (A.5), (A.11) et (A.12) de chacun des termes de l'équation de conservation (A.2a) permettent d'aboutir à la formule suivante.

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \iint_{\Sigma}\frac{1}{2}(y_{\mathrm{top}}-y)^2\left(\partial_t\overline{\rho}\widetilde{u}_x+\overline{I_x}+\partial_x\overline{p}\right)\ \mathrm{d}\Sigma\\ + \quad & \left(\int_{l\in\partial\Sigma_{\mathrm{w}}}\frac{1}{2}\big(y_{\mathrm{top}}-y_{\mathrm{w}}(l)\big)^2\sqrt{1-\left(\underline{n}(l)\cdot\underline{e}_x\right)^2}\ \frac{\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}(l)\,\mathrm{d}l}{\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle}\right)\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle \quad - \quad \overline{\mu}\iint_{\Sigma}\widetilde{u}\,\mathrm{d}\Sigma\\ + \quad & \iint_{\Sigma}(y_{\mathrm{top}}-y)\ R_{xy}\ \mathrm{d}\Sigma\,. \end{aligned} \tag{A.13}$$

En isolant $\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle$, on obtient finalement la décomposition du frottement moyen :

$$\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle = \langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle_1+\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle_2+\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle_3\,, \tag{A.14a}$$

avec

$$\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle_1 \quad = \quad \frac{2\ \overline{\mu}}{\alpha\ y_{\mathrm{top}}^2}\iint_{\Sigma}\widetilde{u}\ \frac{\mathrm{d}\Sigma}{L_z}\,, \tag{A.14b}$$

$$\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle_2 \quad = \quad \frac{2}{\alpha\ y_{\mathrm{top}}^2}\iint_{\Sigma}(y_{\mathrm{top}}-y)(-R_{xy})\ \frac{\mathrm{d}\Sigma}{L_z}\,, \tag{A.14c}$$

$$\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle_3 \quad = \quad \frac{-2}{\alpha\ y_{\mathrm{top}}^2}\iint_{\Sigma}\frac{1}{2}(y_{\mathrm{top}}-y)^2\left(\partial_t\overline{\rho}\widetilde{u}_x+\overline{I_x}+\partial_x\overline{p}\right)\ \frac{\mathrm{d}\Sigma}{L_z}\,, \tag{A.14d}$$

et où le coefficient α est définie par

$$\alpha \quad = \quad \int_{l\in\partial\Sigma_{\mathrm{w}}}\left(1-\frac{y_{\mathrm{w}}(l)}{y_{\mathrm{top}}}\right)^2\ \sqrt{1-\left(\underline{n}(l)\cdot\underline{e}_x\right)^2}\ \frac{\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}(l)\ \mathrm{d}l}{\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle\ L_z}\,. \tag{A.15}$$

Ce coefficient α dépend de $\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}(l)/\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle$ qui caractérise la distribution spatiale du frottement le long de la paroi $\partial\Sigma_{\mathrm{w}}$.

Dans le cas d'une paroi plane et lisse, l'ordonnée y_{w} de la paroi est uniformément 0, de sorte que le facteur entre parenthèse dans l'intégrande soit égale à 1. De plus, la normale à la surface y est uniformément $\underline{n}=\underline{e}_y$, entraînant ainsi la nullité de $\underline{n}\cdot\underline{e}_x$. D'après la définition (A.9) du frottement

moyennée en envergure $\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle$, le coefficient α prend finalement la valeur $\alpha_{\mathrm{smooth}} = 1$.

Dans la définition du coefficient α, les quantités $\underline{n}(l)\cdot\underline{e}_x$ et $\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}(l)/\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle$ ne dépende pas du choix de l'origine pour l'axe vertical y. De même, si y_{top} est défini à une position physique, telle que la frontière extérieure de la couche limite $y_{\mathrm{top}} = y_{\mathrm{w}} + \delta$, alors le dénominateur $\alpha\ y_{\mathrm{top}}^2$ apparaissant dans les équations (A.14b) à (A.14d) ne dépend pas non plus de la position de l'origine de l'axe y. Ce qui est rassurant puisque cela implique que la décomposition du frottement (A.14a) est indépendante de la position arbitraire de l'origine.

Cependant, contrairement au produit $\alpha\ y_{\mathrm{top}}^2$, un changement d'origine modifie la valeur du coefficient α seul. En effet, pour y_{top} définit par $y_{\mathrm{w}} + \delta$, le terme $1 - \frac{y_{\mathrm{w}}}{y_{\mathrm{top}}}$ se simplifie en $\frac{\delta}{y_{\mathrm{w}}+\delta}$, qui dépend de la position de la paroi par rapport au niveau $y = 0$ arbitrairement choisi. Par exemple, si l'origine de l'axe y est placée à très grande distance en dessous de la paroi, alors $y_{\mathrm{w}}(l)$ prend de très grandes valeurs de sorte que $\frac{\delta}{y_{\mathrm{w}}+\delta}$ et α tendent vers zéro et ce, quelque soit la forme de la paroi ou la distribution spatiale du frottement.

Il est alors possible de placer l'origine de l'axe y de sorte que le coefficient α prenne la valeur unitaire $\alpha_{\mathrm{smooth}} = 1$ du cas de paroi plane $y_{\mathrm{w}} = 0$. Si une telle condition est vérifiée, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}\int\limits_{l\in\partial\Sigma_{\mathrm{w}}} \left(1 - \frac{y_{\mathrm{w}}(l)}{y_{\mathrm{top}}}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\underline{n}(l)\cdot\underline{e}_x\right)^2}\ \frac{\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}(l)\ \mathrm{d}l}{\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle\ L_z} \\ = 1 \\ = \int\limits_{l\in\partial\Sigma_{\mathrm{w}}} \left(1 - \frac{0}{y_{\mathrm{top}}}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\underline{e}_y\cdot\underline{e}_x\right)^2}\ \frac{\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}(l)\ \mathrm{d}l}{\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle\ L_z}\,, \end{aligned} \tag{A.16}$$

où les termes $0/y_{\mathrm{top}}$ et $\underline{e}_y\cdot\underline{e}_x$ sont explicitement écrits, bien que nuls, afin de mettre en évidence la définition du coefficient α que l'on aurait obtenu dans le cas d'une paroi plane $y_{\mathrm{w}} = 0$. Ainsi, la position de l'origine de l'axe y qui conduit à l'égalité $\alpha = 1$ peut être considérée comme la position de la plaque plane équivalente. Le lecteur est renvoyé à l'article [13] développé dans le chapitre 5 pour plus de précision sur les implications d'un tel choix de positionnement de l'origine.

A.3 Formulation étendue

La formulation FIK généralisée aux surfaces complexes est obtenue à partir de la décomposition du frottement (A.14) en l'exprimant en fonction du coefficient de frottement c_f. Ce dernier est obtenu en adimensionnant le frottement moyen $\langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle$ par les variables extérieures, c'est-à-dire $c_f = \langle\overline{\tau}_{\mathrm{w},x}\rangle/\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2$. En appliquant le même adimensionnement à chacun des termes de la décomposition (A.14a), on obtient l'identité voulue :

$$c_f = c_{f,1} + c_{f,2} + c_{f,3}\,, \tag{A.17a}$$

avec

$$c_{f,1} = \frac{4}{Re_\delta}\ \frac{\delta^2}{\alpha\ y_{\mathrm{top}}^2} \iint\limits_\Sigma \frac{\widetilde{u}}{U_\infty}\ \frac{\mathrm{d}\Sigma}{L_z\ \delta} = \frac{4}{Re_\delta}\ \frac{\delta^2}{\alpha\ y_{\mathrm{top}}^2}\left(1 - \frac{\delta^*}{\delta}\right)\,, \tag{A.17b}$$

$$c_{f,2} = 4\ \frac{\delta^2}{\alpha\ y_{\mathrm{top}}^2} \iint\limits_\Sigma \left(\frac{y_{\mathrm{top}} - y}{\delta}\right)\ \frac{-R_{xy}}{\rho_\infty U_\infty^2}\ \frac{\mathrm{d}\Sigma}{L_z\ \delta}\,, \tag{A.17c}$$

$$c_{f,3} = -4\ \frac{\delta^2}{\alpha\ y_{\mathrm{top}}^2} \iint\limits_\Sigma \frac{1}{2}\left(\frac{y_{\mathrm{top}} - y}{\delta}\right)^2 \frac{\left(\partial_t\overline{\rho}\widetilde{u}_x + \overline{I_x} + \partial_x\overline{p}\right)}{\rho_\infty U_\infty^2/\delta}\ \frac{\mathrm{d}\Sigma}{L_z\ \delta}\,. \tag{A.17d}$$

Vérifions que cette décomposition coïncide bien avec celle de Fukagata *et al.* [85]. On se place alors dans le cas d'un écoulement incompressible sans gradient de pression de plaque plane et lisse, dont la surface est définie par $y_\mathrm{w} = 0$. De plus, on fixe y_top à δ. Dans un tel cas, le coefficient $\alpha = \alpha_\mathrm{smooth} = 1$ et la fraction $\frac{\delta}{y_\mathrm{top}} = 1$. De plus, le problème étant homogène dans la direction transverse z, les intégrales doubles $\iint_\Sigma \mathrm{d}\Sigma/L_z$ peuvent se simplifier en intégrales simples $\int_{y=y_\mathrm{w}}^{\delta} \mathrm{d}y$. Enfin, on adimensionne toutes les grandeurs par la densité supposée constante, ce qui revient à fixée $\overline{\rho}$ et ρ_∞ à 1. On obtient alors la formulation FIK originelle :

$$c_f = \frac{4}{Re_\delta}\left(1-\frac{\delta^*}{\delta}\right) + 4\int_{y=0}^{\delta}\left(1-\frac{y}{\delta}\right)\frac{-\overline{u'v'}}{U_\infty^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\delta} - 2\int_{y=0}^{\delta}\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2\frac{\left(\partial_t\overline{u}_x + \overline{I_x}\right)}{U_\infty^2/\delta}\,\frac{\mathrm{d}y}{\delta}\,. \tag{A.18}$$

Les champs sont naturellement adimensionnés par les variables extérieures U_∞, ρ_∞ et δ dans la formulation (A.17). Il peut être également intéressant d'obtenir une formulation faisant intervenir ces champs adimensionnement interne. En ayant recourt à la relation $c_f/2 = 1/U_\infty^{+2}$, on obtient alors les expressions suivantes pour les contributions relatives $c_{f,i}/c_f$:

$$\frac{c_{f,1}}{cf} = \frac{2}{Re_\tau}\,\frac{\delta^2}{\alpha\; y_\mathrm{top}^2}\iint_\Sigma \widetilde{u}^+\,\frac{\mathrm{d}\Sigma^+}{L_z^+\;\delta^+}\,, \tag{A.19a}$$

$$\frac{c_{f,2}}{cf} = \frac{2}{Re_\tau}\,\frac{\delta^2}{\alpha\; y_\mathrm{top}^2}\iint_\Sigma \left(y_\mathrm{top}^+ - y^+\right)\left(-R_{xy}^+\right)\,\frac{\mathrm{d}\Sigma^+}{L_z^+\;\delta^+}\,, \tag{A.19b}$$

$$\frac{c_{f,3}}{cf} = \frac{-2}{Re_\tau}\,\frac{\delta^2}{\alpha\; y_\mathrm{top}^2}\iint_\Sigma \frac{1}{2}\left(y_\mathrm{top}^+ - y^+\right)^2\left(\partial_t\overline{\rho}\widetilde{u}_x + \overline{I_x} + \partial_x\overline{p}\right)^+\,\frac{\mathrm{d}\Sigma^+}{L_z^+\;\delta^+}\,. \tag{A.19c}$$

Annexe **B**

Implémentation de la méthode d'injection de turbulence SEM (Synthetic Eddy Method)

Sommaire

B.1 Objectif de la méthode . . . 260
B.2 Formulation . . . 260
B.2.1 Fluctuations de densité et de pression . . . 261
B.2.2 Fluctuations de vitesse . . . 262
B.2.3 Décomposition de Cholesky . . . 262
B.2.4 Modes de fluctuations . . . 263
B.2.5 Fonctions de forme . . . 263
B.3 Données d'entrée . . . 264
B.4 Données de sortie . . . 265
B.5 Pseudo-code . . . 265
B.5.1 Pré-traitement . . . 265
B.5.1.1 Fonctions de forme . . . 265
B.5.1.2 Adimensionnement des fonctions de formes . . . 266
B.5.1.3 Mise à l'échelle des structures . . . 266
B.5.1.4 Nombre de structures . . . 267
B.5.1.5 Correction de superposition . . . 267
B.5.1.6 Calcul de la décomposition de Cholesky . . . 270
B.5.1.7 Fin du prétraitement . . . 271
B.5.2 Génération des structures . . . 272
B.5.2.1 Initialisation de la population de structures . . . 272
B.5.2.2 Début de la boucle temporelle . . . 272
B.5.2.3 Mise à jour des structures . . . 273
B.5.2.4 Calcul du champ de fluctuation instantané . . . 273
B.5.2.5 Calcul du champ instantané de $\tilde{\nu}$ . . . 275
B.5.2.6 Fin de la boucle temporelle . . . 277
B.6 Notes sur l'implémentation . . . 277
B.6.1 Paramétrage des modes . . . 277
B.6.2 Dimensionnement des structures . . . 278

B.6.3 Appel des fonctions de forme 278
B.6.4 Gestion de la périodicité 278
B.6.5 Localisation des structures 279

B.1 Objectif de la méthode

La méthode de turbulence synthétique SEM (*synthetic eddy method*) est une méthode permettant de générer une condition d'entrée turbulente pour des simulations numériques instationnaires (DNS, LES, ZDES, URANS, etc.). Inspirée des travaux de Jarin *et al.* [130], la SEM a été développée par Pamiès *et al.* [203].

Dans la suite, on note $\underline{x} = (x_i)_{1<i<3} = (x, y, z)$ les directions de l'espace et $\underline{u} = (u_i)_{1<i<3} = (u, v, w)$ les composantes associées du vecteur vitesse. La densité, la pression, la température et la viscosité sont classiquement notées ρ, p, T et μ. La décomposition de Reynolds (ou de Favre) fait apparaître une partie moyenne et une partie fluctuante :

$$u_i(\underline{x}, t) = \overline{u}_i(\underline{x}) + u'_i(\underline{x}, t) \,, \tag{B.1}$$

où $\overline{\bullet}$ est l'opérateur de moyenne. La partie fluctuante est définie comme $u' = u - \overline{u}$ de sorte que $\overline{u'} = 0$.

Dans la pratique, le profil moyen $\overline{\underline{u}}$ peut être déterminé (ou plutôt approximé) grâce à des données expérimentales, des lois empiriques ou des simulations numériques stationnaires. La partie fluctuante du vecteur vitesse, quant à elle, peut être en partie caractérisée par la donnée du tenseur de Reynolds :

$$R_{ij}(\underline{x}) = \overline{u'_i u'_j}(\underline{x}) \,. \tag{B.2}$$

L'objectif de la SEM originelle de Jarrin *et al.* [130] est de générer un champ de vitesse instationnaire $\underline{u}(\underline{x}, t)$ vérifiant le profil moyen $\overline{\underline{u}}(\underline{x})$ et les tensions de Reynolds $\underline{\underline{R}}(\underline{x})$ spécifiées par l'utilisateur. L'extension de Pamies *et al.* [203] permet de générer des structures dont les échelles caractéristiques s'approchent de celles de la turbulence.

Nous renvoyons le lecteur aux deux articles précédents, ainsi qu'au rapport technique de Deck [67], pour d'avantages d'explications quant à la philosophie de la méthode ainsi que sa validation. Seules la formulation et son implémentation seront développées ici.

B.2 Formulation

Les variables primitives sont décomposées selon la décomposition de Reynolds :

$$\rho(\underline{x}, t) = \overline{\rho}(\underline{x}) + \rho'(\underline{x}, t) \,, \tag{B.3a}$$
$$u_i(\underline{x}, t) = \overline{u}_i(\underline{x}) + u'_i(\underline{x}, t) \,, \tag{B.3b}$$
$$p(\underline{x}, t) = \overline{p}(\underline{x}) + p'(\underline{x}, t) \,. \tag{B.3c}$$

Les profils moyens $\overline{\rho}(\underline{x})$, $\overline{\underline{u}}(\underline{x})$, $\overline{p}(\underline{x})$ sont supposés connus et le champ de vitesse fluctuante $\underline{u}'$ doit satisfaire les tensions de Reynolds $\underline{\underline{R}}(\underline{x})$ spécifiées et contenir des structures fluctuantes de nombre, taille, forme et disposition adaptées. De plus, la loi des gaz parfaits permet d'obtenir le profil de la température :

$$T(\underline{x}, t) = \frac{p(\underline{x}, t)}{r_{\text{gp}}\ \rho(\underline{x}, t)} \,. \tag{B.4}$$

Enfin, dans le cas de l'utilisation du modèle de Spalart-Allmaras, la variable additionnelle $\tilde{\nu}(\underline{x},t)$ doit être fournie en entrée. Elle est calculée à partir des valeurs des viscosités moléculaire $\nu(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\mu(\underline{x},t)$ et turbulente $\nu_\mathrm{t}(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\mu_\mathrm{t}(\underline{x},t)$. La méthode est présentée dans l'article de Deck *et al.* [69] et consiste à inverser l'équation suivante :

$$\nu_\mathrm{t}(\underline{x},t) = \tilde{\nu}(\underline{x},t)\ f_{v1}(\underline{x},t) \qquad \text{avec} \qquad f_{v1}(\underline{x},t) = \frac{\tilde{\nu}^3(\underline{x},t)}{\tilde{\nu}^3(\underline{x},t) + C_{v1}^3\ \nu^3(\underline{x},t)}\,, \tag{B.5}$$

où $C_{v1} = 7.1$. Cette équation peut être réécrite sous la forme d'un polynôme du 4$^\mathrm{e}$ degré en $\tilde{\nu}/\nu$ selon

$$\left(\frac{\tilde{\nu}}{\nu}\right)^4 - \frac{\nu_\mathrm{t}}{\nu}\left(\frac{\tilde{\nu}}{\nu}\right)^3 = C_{v1}^3\ \frac{\nu_\mathrm{t}}{\nu}\,, \tag{B.6}$$

que l'on pourra résoudre en utilisant la méthode de Ferrari.

Les viscosités moléculaire et turbulente sont obtenues respectivement par la formule de Sutherland et le modèle de Michel :

$$\mu(\underline{x},t) = \mu_S \frac{T_\mathrm{S} + T_\mathrm{S}^\mathrm{ref}}{T_\mathrm{S} + T(\underline{x},t)}\left(\frac{T(\underline{x},t)}{T_\mathrm{S}^\mathrm{ref}}\right)^{1.5} \tag{B.7}$$

$$\mu_\mathrm{t}(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\ \|\Omega(\underline{x})\|\ \left(1 - e^{\frac{-d_\mathrm{wall}^+(\underline{x})}{A_p}}\right)^2 l_\mathrm{mich}(\underline{x})^2 \tag{B.8}$$

$$\text{avec} \qquad l_\mathrm{mich}(\underline{x}) = 0.085\,\delta(\underline{x})\ \tanh\left(\frac{\kappa\ d_\mathrm{wall}(\underline{x})}{0.085\,\delta(\underline{x})}\right)\,, \tag{B.9}$$

où les constantes de l'équation de Sutherland sont fixée, pour l'air, à $T_\mathrm{S} = 110.4$, $T_\mathrm{S}^\mathrm{ref} = 273.16$ et $\mu_S = 1.711 \cdot 10^{-5}$. Dans le modèle de Michel, d_wall représente la distance à la paroi, δ, l'épaisseur moyenne de couche limite, $\|\Omega\|$, la norme du tenseur de rotation obtenu à partir du champ moyen, et les constantes sont fixée à $A_p = 26.0$ et $\kappa = 0.41$.

Dans le cas d'un calcul de type ZDES, la viscosité turbulente est calculée en se basant sur le modèle de Smagorinsky dans une partie du domaine de calcul. Ce cas ne sera pas davantage développé ici, et le lecteur peut se référer à l'article de Deck *et al.* [69] et au rapport technique de Deck [67] pour davantage de précision. La viscosité turbulente sera néanmoins traitée comme un terme instationnaire, bien que dans le cas présent, sa valeur est issue d'un calcul portant sur des variables moyennées.

B.2.1 Fluctuations de densité et de pression

On suppose nulles les fluctuations de pression du champ d'entrée SEM :

$$p'(\underline{x},t) = 0\,. \tag{B.10}$$

En pratique, le champ fluctuant synthétique injecté sera à l'origine d'importantes fluctuations de pression. Cela est dû à la nature des fluctuations de vitesse injectées, qui ne vérifie aucune condition particulière pour s'en prémunir.

Sous l'hypothèse précédente, $p = \overline{p}$, on calcule les fluctuations de densité ρ' à partir des fluctuations de température T' en linéarisant la loi des gaz parfaits :

$$\rho'(\underline{x},t) = -\frac{T'(\underline{x},t)}{\overline{T}(\underline{x})}\ \overline{\rho}(\underline{x})\,. \tag{B.11}$$

On fait alors l'hypothèse de l'analogie forte de Reynolds (SRA pour *strong Reynolds analogy*), qui consiste à supposer le champ de température fluctuante totalement corrélé au champ de vitesse fluctuante par la relation suivante :

$$\frac{T'(\underline{x},t)}{\overline{T}(\underline{x})} = -(\gamma-1)\ \overline{M}(\underline{x})^2\ \frac{u'(\underline{x},t)}{\overline{u}(\underline{x})}\,. \tag{B.12}$$

Cela revient à calculer le coefficient de proportionnalité $c_{\mathrm{SRA}}(\underline{x})$ entre T' et u' :

$$T'(\underline{x},t) = -c_{\mathrm{SRA}}(\underline{x})\ u'(\underline{x},t)\,, \tag{B.13}$$

$$\text{avec} \qquad c_{\mathrm{SRA}}(\underline{x}) = (\gamma-1)\ \overline{M}(\underline{x})^2\ \frac{\overline{T}(\underline{x})}{\overline{u}(\underline{x})} = \frac{\overline{u}(\underline{x})}{\gamma\, c_v}\,, \tag{B.14}$$

où le nombre de Mach est défini par $\overline{M}(\underline{x}) = \overline{u}(\underline{x})/\overline{c}(\underline{x}) = \overline{u}(\underline{x})/\sqrt{\gamma\ r_{\mathrm{gp}}\ \overline{T}(\underline{x})}$ avec $r_{\mathrm{gp}} = (\gamma-1)c_v$, $\gamma = 1.4$ et $c_v = 717.5$ pour l'air. Le lecteur est renvoyé au livre de Smits *et al.* [247] pour de plus amples informations sur la SRA.

B.2.2 Fluctuations de vitesse

Les fluctuations de vitesse sont calculées suivant le produit matriciel

$$u'_i(\underline{x},t) = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}(\underline{x})\ \phi_j(\underline{x},t), \qquad \forall i \in \{1,2,3\}\,, \tag{B.15}$$

où $\underline{\phi}(\underline{x},t)$ est une séquence instationnaire normalisée, c'est-à-dire vérifiant les propriétés suivantes :

- moyenne nulle : $\overline{\phi}_j = 0$,
- variance unitaire : $\overline{\phi_j\phi_j} = 1$,
- et covariance nulle : $\overline{\phi_j\phi_{k\neq j}} = 0$.

La première propriété suffit à garantir la nullité de la moyenne des fluctuations $\overline{u'} = 0$. Les deux autres propriétés et la condition $\overline{u'_i u'_j} = R_{ij}$ imposent à la matrice $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ de vérifier

$$\underline{\underline{A}}(\underline{x})\underline{\underline{A}}^T(\underline{x}) = \underline{\underline{R}}(\underline{x})\,. \tag{B.16}$$

Ainsi, la matrice $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ ne contient aucune information instationnaire. Elle ne fait que moduler l'intensité et les corrélations entre les différentes composantes du vecteur de vitesse fluctuante. L'information relative aux structures fluctuantes (nombre, dimension, forme, disposition) doit donc être contenue dans le vecteur de fluctuation normalisé $\underline{\phi}(\underline{x},t)$.

Les composantes j du vecteur de fluctuation normalisé $\underline{\phi} = (\phi_j)_{j\in[1,3]}$ ne correspondent pas directement aux composantes i du vecteur de vitesse fluctuante $\underline{u}' = (u'_i)_{i\in[1,3]}$. Cependant, dans le cas d'une turbulence pariétale de plaque plane canonique (pour laquelle $R_{13} = R_{23} = 0$), l'identification sera approximativement conservée par le choix de la matrice $\underline{\underline{A}}$ présenté dans la section suivante. Par la suite, on appellera indépendamment "composante" les indices i de u_i et j de ϕ_j, alors que le terme "direction" renverra aux indices d de x_d.

B.2.3 Décomposition de Cholesky

Le tenseur de Reynolds $\underline{\underline{R}}$ étant, par définition, symétrique défini positif, une décomposition de Cholesky de $\underline{\underline{R}}$ est un bon candidat pour $\underline{\underline{A}}$. En chaque point $\underline{x}$ du plan d'entrée, on pose donc

$$\underline{\underline{A}} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ R_{21}/A_{11} & \sqrt{R_{22}-A_{21}^2} & 0 \\ R_{31}/A_{11} & (R_{32}-A_{21}A_{31})/A_{22} & \sqrt{R_{33}-A_{31}^2-A_{32}^2} \end{bmatrix}\,. \tag{B.17}$$

B.2.4 Modes de fluctuations

Le champ de fluctuations normalisées $\underline{\phi}(\underline{x},t)$ contient les informations relatives aux structures injectées. Pamiès *et al.* [203] préconisent l'usage de différents modes en fonction de la distance à la paroi, chaque mode pouvant caractériser différents types de structures de la turbulence pariétale. On distingue par exemple les tourbillons quasi-longitudinaux proches de la paroi, les têtes de *hairpin* au-dessus, ou encore, des structures anisotropes dans la région externe de la couche limite. Pour chacun des modes, on spécifie la fenêtre du plan d'entrée de laquelle des structures de ce mode sont injectées. Ces fenêtres peuvent être spécifiées par la donnée de bornes inférieure et supérieure en termes de distance à la paroi.

On note N_{mod} le nombre de modes employés. Le champ de fluctuations normalisées $\underline{\phi}(\underline{x},t)$, pour chacune de ses composantes j, s'obtient en sommant les contributions de chacune des $N_{\text{str}}(n)$ structures de chacun des N_{mod} modes :

$$\phi_j(\underline{x},t) = C_j(\underline{x}) \sum_{n=1}^{N_{\text{mod}}} \frac{1}{\sqrt{N_{\text{str}}(n)}} \sum_{m=1}^{N_{\text{str}}(n)} \varepsilon_j(n,m)\ \Phi_j^n\left(\frac{x-X(n,m,t)}{l_x(n)}, \frac{y-Y(n,m,t)}{l_y(n)}, \frac{z-Z(n,m,t)}{l_z(n)}\right) \tag{B.18}$$

Dans cette équation, on distingue :

- $l_x(n)$, $l_y(n)$ et $l_z(n)$ les échelles de longueur caractéristiques des structures dans chaque direction pour chacun des modes n.
- $X(n,m,t)$, $Y(n,m,t)$ et $Z(n,m,t)$ les coordonnées du centre de chacune des structures turbulentes m de chacun des modes n à l'instant t. Les structures sont convectées à une vitesse $v_{\text{c}}(n)$ supposée constante. Ainsi, dans le cas d'un écoulement moyen porté par x, les coordonnées $Y(n,m)$ et $Z(n,m)$ ne dépendent pas du temps, alors que $X(n,m,t)$ peut être caractérisé par l'instant $T(n,m)$ auquel le centre de la structure traversera le plan d'entrée : $X(n,m,t) = x_{\text{plan}} + (t - T(n,m))/v_{\text{c}}(n)$. Une fois qu'une structure a été totalement injectée, c'est à dire quant elle est sortie du plan d'entrée $X(n,m,t) > x_{\text{plan}} + l_x(n)$, une nouvelle structure est générée avec de nouvelles coordonnées $T(n,m)$, $Y(n,m)$ et $Z(n,m)$.
- $\varepsilon_j(n,m) = \pm 1$, les sens de rotation pour chaque composante j pour chacune des structures m de chacun des modes n. Ils sont choisis aléatoirement pour chaque structure et chaque composante afin d'assurer les conditions $\overline{\phi}_j = 0$ et $\overline{\phi_j \phi_{k\neq j}} = 0$. Pour certains modes cependant, les sens de rotations des différentes composantes sont corrélés (par exemple, $\varepsilon_2(1,m) = \varepsilon_3(1,m)$ pour les paramètres suggérés dans la section B.6.1). Dans ce cas, la condition de covariance nulle reste malgré tout valide grâce aux distributions impaires des fonctions de forme associées.
- $\Phi_j^n(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, une fonction de forme par composante j pour chacun des modes n. Ces fonctions ont un support compact sur $[-1;1]^3$ et vérifient la condition de variance unitaire $\overline{\Phi_j \Phi_j} = 1$. En fonction des modes, on distingue différentes fonctions de forme qui imprime à la structure une forme et/ou une orientation donnée.
- $N_{\text{str}}(n)$, un nombre de structures pour chaque mode n. Dans la pratique, N_{str} sera calculé de sorte que : $N_{\text{str}}(n) = 4\mathcal{A}(n)/l_y(n)l_z(n)$, où $\mathcal{A}(n)$ est l'aire de la fenêtre d'injection du mode n. On assure ainsi une densité suffisante de structure.
- $1/\sqrt{N_{\text{str}}(n)}$, coefficient appliqué pour chaque mode n, afin de normaliser la variance de la somme des $N_{\text{str}}(n)$ fonctions Φ_j, elles-même de variance unitaire.
- une correction $C_j(\underline{x})$ afin de corriger la variance de la somme des modes, dans le cas où ils viendraient à se superposer (ou bien parce que les fenêtres d'injection de plusieurs modes se superposent, ou alors parce que le bord de certaines structures peut venir empiéter sur la fenêtre d'un autre mode).

B.2.5 Fonctions de forme

Les fonctions de forme $\Phi_j^n(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ se décomposent selon

$$\Phi_j^n(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \ f_x^{n,j}(\tilde{x})\ f_y^{n,j}(\tilde{y})\ f_z^{n,j}(\tilde{z})\,, \tag{B.19}$$

où les fonctions $f_d^{n,j}$ sont des fonctions élémentaires mono-dimensionnelles à support sur $[-1,1]$. Pamiès *et al.* [203] utilisent notamment :

- la gaussienne tronquée : $G(x) = \exp\left(-x^2/2\sigma^2\right) - \exp\left(-1/2\sigma^2\right)$, avec écart-type σ,
- la fonction impaire : $H(x) = \left[\cos(2\pi x) - 1\right]/2\pi x$,
- la fonction composée : $xG(x)$.

Ces fonctions sont ensuite toutes normalisées de sorte que

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(f_d^{n,j}(\tilde{x})\right)^2 \,\mathrm{d}\tilde{x} = 1\,. \tag{B.20}$$

Des suggestions de mode (paramétrage et fonction de forme) sont données dans la partie B.6.1.

B.3 Données d'entrée

Les données d'entrée requises par la méthode sont les suivantes :

- un maillage d'entrée. Bien qu'il puisse être quelconque en général, on le supposera ici, par souci de simplification, structuré, cartésien et bidimensionnel :

```
x(:) = 0          ! direction longi (normale au plan d'entrée)
y(1:jm)           ! direction normale à la paroi
z(1:km)           ! direction transverse
```

  où `y` et `z` sont des fonctions croissantes des indices `j`∈`[1;jm]` et `k`∈`[1;km]`.
  On suppose de plus la paroi définie par $y = 0 =$ `y(1)`.

- les champs moyens des variables primitives. Par la suite, on les suppose ne dépendre que de y, donc de `j`, avec :

```
mean(1:jm,1)      ! rho(y) : densité moyenne
mean(1:jm,2)      ! u(y)   : vitesse longitudinale moyenne
mean(1:jm,3)      ! v(y)   : vitesse normale moyenne
mean(1:jm,4)      ! w(y)   : vitesse transverse moyenne
mean(1:jm,5)      ! p(y)   : pression moyenne
```

- le champ des tensions de Reynolds, que l'on suppose ici ne dépendre que de y, donc de `j` :

```
reyn(1:jm,1)      ! tension longitudinale <uu>
reyn(1:jm,2)      ! tension normale <vv>
reyn(1:jm,3)      ! tension transverse <ww>
reyn(1:jm,4)      ! tension croisée de cisaillement <uv>
reyn(1:jm,5)      ! tension croisée <uw>
reyn(1:jm,6)      ! tension croisée <vw>
```

- les spécifications sur les structures, données mode par mode.

```
nmod              ! nombre de mode
ls(1:3,1:nmod)    ! dimensions des structures turbulentes dans les
!                   directions longitudinales, normales et
!                   transverses, pour chaque mode
[y/z]c_[min/max](1:nmod)
!                   bornes dans les 2 directions normales au plan
```

```
!                  d'entrée, délimitant les fenêtres d'injection,
!                  pour chaque mode (bornes auxquelles les coordonnées
!                  des centres de structure doivent appartenir)
ff(1:nmod)       ! numéro de la fonction de forme (voir la section
!                  6.1), pour chaque mode
et(1:3,1:nmod)   ! écart-type caractérisant le caractère
!                  rare-mais-intense ou fréquent-mais-faible des
!                  structures, pour chaque direction et chaque mode
vc(1:nmod)       ! vitesse de convection des structures (pour
!                  transformer la dimension longitudinale des
!                  structures en durée de passage a travers le
!                  plan d'entrée), pour chaque mode
```

– les informations temporelles quant aux sorties instationnaires attendues :

```
t0               ! Instant initial
dt               ! Pas de temps
tm               ! Nombre d'itérations
```

B.4 Données de sortie

En sortie, l'algorithme de génération de turbulence synthétique doit être en mesure de retourner les champs instationnaires des variables primitives dans le plan d'entrée aux `tm` instants demandés :

```
inst(1:jm,1:km,1:tm,1)    ! rho(y,z,t) : densité instantanée
inst(1:jm,1:km,1:tm,2)    ! u(y,z,t)   : vitesse longitudinale instantanée
inst(1:jm,1:km,1:tm,3)    ! v(y,z,t)   : vitesse normale instantanée
inst(1:jm,1:km,1:tm,4)    ! w(y,z,t)   : vitesse transverse instantanée
inst(1:jm,1:km,1:tm,5)    ! p(y,z,t)   : pression  instantanée
inst(1:jm,1:km,1:tm,6)    ! nutild(y,z,t) si calcul RANS Spalart-Almaras
```

B.5 Pseudo-code

Le code est décomposé en deux parties : la première constitue la phase de prétraitement, développée dans la section B.5.1, alors que la seconde est la phase de génération des structures et de calcul des champs instantanés, développée dans la section B.5.2. Cette dernière partie peut être incluse dans un solveur pour le calcul, à la volée, de la condition aux limites d'injection turbulente.

B.5.1 Pré-traitement

B.5.1.1 Fonctions de forme

De façon générale, à chaque mode `n` doit être attribué un type de fonction de forme, identifié par son numéro `ff(n)` et un écart-type `et(j,n)` par direction `j`. Les écarts-types caractérisent le caractère rare-mais-intense ou fréquent-mais-faible des structures. Pour les directions y et z, la valeur 0.4 est préconisée. Pour la direction longitudinale, des suggestions sont proposées dans la section B.6.1.

Chaque type de fonction de forme `ff` est composé de 3 fonctions élémentaires mono-dimensionnelles (une par direction `j` de l'espace). Les fonctions élémentaires suggérées par Pamiès *et al.* [203] sont décrites dans le paragraphe B.2.5. Toute autre fonction peut néanmoins être choisie par l'utilisateur.

Avec les notations de la section B.2.5, la routine retournant la valeur $f_d^{n,j}(\tilde{x})$ d'une fonction élémentaire mono-dimensionelle à partir de la donnée de l'abscisse normalisée $\tilde{x}$, de l'écart-type

associé $\sigma_{d,n}$, de la direction d, de la composante `j` et du numéro de fonction de forme `ff`, est appelée `forme`. En notant explicitement les dépendances au mode `n`, à la direction `d` et à la composante `j`, nous écrirons `forme(x,et(d,n),d,j,ff(n))`.

B.5.1.2 Adimensionnement des fonctions de formes

Quelles que soient les fonctions élémentaires mono-dimensionnelles choisies $f_d^{n,j}$ — qu'elles soient ou non parmi les fonctions $G(x)$, $H(x)$ ou $xG(x)$ suggérées par Pamiès *et al.* [203] — elles doivent être normalisées conformément à l'équation (B.20). Pour ce faire, on peut intégrer le carré des fonctions choisies, de façon discrète, en utilisant $2 * \texttt{npt}$ points sur l'intervalle $[-1, 1]$. Dans la pratique, $\texttt{npt} \simeq 64$ est suffisant.

```
do n=1:nmod  ! boucle sur mes modes
do j=1:3     ! boucle sur les composantes
do d=1:3     ! boucle sur les directions x,y,z

   ! Calcul de la variance
   var =      0 + 0.5/real(npt) * forme(-1,et(d,n),d,j,ff(n))**2
   do i=-npt+1:npt-1
      x = real(i)/real(npt)
      var = var + 1.0/real(npt) * forme( x,et(d,n),d,j,ff(n))**2
   enddo
   var =    var + 0.5/real(npt) * forme(+1,et(d,n),d,j,ff(n))**2

   ! Adimensionnement de la fonction élémentaire
   forme(x,et(d,n),d,j,ff(n)) <== sqrt(2.0/var) * forme(x,et(d,n),d,j,ff(n))

enddo ! boucle directions d
enddo ! boucle composantes j
enddo ! boucle mode n
```

La notation `<==` est utilisé ici pour signifier une modification de la routine `forme`. Par la suite, on suppose que les fonctions élémentaires appelées par `forme(x,et,d,j,ff)` sont donc déjà normalisées.

B.5.1.3 Mise à l'échelle des structures

La taille des structures doit être corrigée, de manière à ce que les dimensions caractéristiques des structures réellement injectées correspondent à celles spécifiées par l'utilisateur dans la variable d'entrée `ls`. Cette taille caractéristique est calculée en prenant en considération l'étendue des fonctions de formes, indiquées par la variable `ff` et les écarts-types `et`.

On calcule alors un facteur d'adimensionnement `cmod` pour les composantes de chacune des directions de chacun des modes, avant de mettre à jour le tableau `ls`.

```
do n=1,nmod ! boucle sur les modes
do d=1,3    ! boucle sur les directions x,y,z

   iccor(1:3) = 0.0
   do j=1,3 ! boucle sur les composantes phi_j

      ! Calcul de l'intégrale entre [-1,1]
      !   Les fonctions élémentaires sont supposées normalisées,
```

```
      !   on se passe donc de calculer l'intégrale de leur carré sur [-1;1]
      var = 2.0

      ! Corrélation sur [-1,-1]
      do di=1,2*npt
         dx = real(di-1)/real(npt)
         covar =     0 + 0.5/real(npt) * forme(-1   ,et(d,n),d,j,ff(n))
&                                      * forme(-1+dx,et(d,n),d,j,ff(n))
         do i =-npt+1,npt-di
            x  = real(i)/real(npt)
            covar = covar + 1.0/real(npt) * forme(x   ,et(d,n),d,j,ff(n))
&                                         * forme(x+dx,et(d,n),d,j,ff(n))
         enddo
         covar = covar + 0.5/real(npt) * forme(+1-dx,et(d,n),d,j,ff(n))
&                                      * forme(+1   ,et(d,n),d,j,ff(n))

         if (di.eq.1 .or. di.eq.2*npt) then
             iccor(j) = iccor(j) + 0.5/real(npt) * abs(covar/var)
         else
             iccor(j) = iccor(j) + 1.0/real(npt) * abs(covar/var)
         endif
      enddo

   enddo ! boucle sur les composantes j

   ! Somme des contribution des 3 composantes
   cmod = ( 1.0/iccor(1) + 1.0/iccor(2) + 1.0/iccor(3) ) / 3.0

   ! Normalisation des tailles de structures
   ls(d,n) = cmod * ls(d,n)

enddo ! boucle d sur les directions
enddo ! boucle n sur les modes
```

B.5.1.4 Nombre de structures

On calcule le nombre de structures à injecter pour chaque mode. Ce nombre dépend de la surface frontale d'une structure et de la surface frontale de la fenêtre d'injection pour ce mode.

```
do n=1,nmod
   nstr(n)=nint(  4.0*(yc_max(n)-yc_min(n)) / (2.0*ls(2,n))
&               * 4.0*(zc_max(n)-zc_min(n)) / (2.0*ls(3,n)) )
enddo
```

Le facteur 4 présent dans chaque direction permet d'obtenir une densité de probabilité relativement gaussienne.

B.5.1.5 Correction de superposition

On calcule un facteur de correction de variance `corvar`, correspondant à $C_j(\underline{x})$ dans (B.18), pour prendre en compte :

- la superposition de plusieurs modes en un même point du plan d'injection, sans quoi, les intensités turbulentes effectivement injectées seraient 2 fois trop importantes. C'est le rôle du champ `var`.

– les points du plan d'entrée ne faisant partie d'aucune des fenêtres d'injection (dans lesquelles les centres de structure peuvent être injectés), mais étant suffisamment proche pour voir passer le bord de certaines structures. En effet, ces points verront passer très peu de structure. Pourtant, sans correction, plus la probabilité de passage d'une structure est faible, plus son intensité sera localement élevée afin d'atteindre les tensions de Reynolds exigées. On doit donc apporter une correction spécifique en marge des zones d'injection pour éviter la divergence de l'intensité des fluctuations (quitte à ne pas atteindre les tensions de Reynolds exigées dans ces zones marginales). C'est le rôle du champ `acvar`.

Calcul de la variance spatiale due à la somme des modes `var`.

```
var(1:jm,1:km,1:3) = 0.0
do n-1,nmod  ! boucle sur les modes
do k=1,km    ! boucle sur les points du plan d'entrée
do j=1,jm
   ! Note that  forme(x,et,d,j,ff)=0  if abs(x)>1
```

$$\begin{aligned}\mathtt{var(j,k,1:3)} = \mathtt{var(j,k,1:3)} \\ + \frac{\int_{\mathtt{yc_min(n)}}^{\mathtt{yc_max(n)}} \left(\mathtt{forme}(\frac{\mathtt{y(j)}-y_c}{\mathtt{ls(2,n)}}, \mathtt{et(2,n)}, 2, \mathtt{1:3}, \mathtt{ff(n)})\right)^2 \mathrm{d}y_c}{\mathtt{yc_max(n)} - \mathtt{yc_min(n)}} \\ \times \frac{\int_{\mathtt{zc_min(n)}}^{\mathtt{zc_max(n)}} \left(\mathtt{forme}(\frac{\mathtt{z(j)}-z_c}{\mathtt{ls(3,n)}}, \mathtt{et(3,n)}, 3, \mathtt{1:3}, \mathtt{ff(n)})\right)^2 \mathrm{d}z_c}{\mathtt{zc_max(n)} - \mathtt{zc_min(n)}}\end{aligned}$$

```
enddo ! boucle j
enddo ! boucle k
enddo ! boucle n
```

Les intégrales peuvent être réalisées de façon discrète en utilisant `2*npt` points dans l'intervalle $[-1;1]$:

$$\int_{-1}^{1} \mathtt{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3\,\mathtt{npt}} \sum_{\mathtt{i}=-\mathtt{npt}}^{\mathtt{npt}-1} \mathtt{f}^2\left(\frac{\mathtt{i}}{\mathtt{npt}}\right) + \mathtt{f}\left(\frac{\mathtt{i}}{\mathtt{npt}}\right) \times \mathtt{f}\left(\frac{\mathtt{i}+1}{\mathtt{npt}}\right) + \mathtt{f}^2\left(\frac{\mathtt{i}+1}{\mathtt{npt}}\right)$$

Calcul de la fonction d'amortissement `acvar`.

La fonction d'amortissement vaut 1 dans toutes les zones d'injection. À l'extérieur des fenêtres d'injection, elle décroît linéairement jusqu'à l'inverse de la variance liée au mode le plus proche.

Exemple avec les frontières de type `yc_min` :

```
acvar(1:jm,1:km,1:3) = 0.0
do n=1,nmod  ! boucle sur les modes
do k=1,km
do j=1,jm
if ( y(j) < yc_min(n) ) then
```

$$\begin{aligned}
\texttt{var_bdr(1:3)} &= \frac{\int_{\texttt{yc_min(n)}}^{\texttt{yc_max(n)}} \left(\texttt{forme}(\frac{\texttt{yc_min(n)}-y_c}{\texttt{ls(2,n)}}, \texttt{et(2,n)}, 2, \texttt{1:3}, \texttt{ff(n)})\right)^2 \mathrm{d}y_c}{\texttt{yc_max(n)} - \texttt{yc_min(n)}} \\
&\times \frac{\int_{\texttt{zc_min(n)}}^{\texttt{zc_max(n)}} \left(\texttt{forme}(\frac{\texttt{z(j)}-z_c}{\texttt{ls(3,n)}}, \texttt{et(3,n)}, 3, \texttt{1:3}, \texttt{ff(n)})\right)^2 \mathrm{d}z_c}{\texttt{zc_max(n)} - \texttt{zc_min(n)}} \\
\texttt{var_loc(1:3)} &= \frac{\int_{\texttt{yc_min(n)}}^{\texttt{yc_max(n)}} \left(\texttt{forme}(\frac{\texttt{y(j)}-y_c}{\texttt{ls(2,n)}}, \texttt{et(2,n)}, 2, \texttt{1:3}, \texttt{ff(n)})\right)^2 \mathrm{d}y_c}{\texttt{yc_max(n)} - \texttt{yc_min(n)}} \\
&\times \frac{\int_{\texttt{zc_min(n)}}^{\texttt{zc_max(n)}} \left(\texttt{forme}(\frac{\texttt{z(j)}-z_c}{\texttt{ls(3,n)}}, \texttt{et(3,n)}, 3, \texttt{1:3}, \texttt{ff(n)})\right)^2 \mathrm{d}z_c}{\texttt{zc_max(n)} - \texttt{zc_min(n)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\texttt{acvar(j,k,1:3)} = \max\Bigg(&\texttt{acvar(j,k,1:3)}, \\
&\left[1 - \left(\frac{\texttt{yc_min(n)} - \texttt{y(j)}}{\texttt{ls(2,n)}} - 1\right)\left(\frac{1}{\texttt{var_bdr(1:3)}} - 1\right)\right] \texttt{var_loc(1:3)}\Bigg)
\end{aligned}$$

```
endif ! point j sous la frontière yc_min
enddo ! boucle j
enddo ! boucle k
enddo ! boucle n
```

À ce stade, `acvar(j,k,1:3)` contient la valeur locale maximale pour tous les modes `n` pour la direction de frontière `yc_min` . On réitère avec les frontières `yc_max`, `zc_min`, `zc_max`. Ainsi, `acvar(j,k,1:3)` contient alors la valeur locale maximale pour tous les modes `n` et toutes les directions de frontière.

On procède de même avec les coins, comme, par exemple, le coin `yc_min+zc_min` :

```
do n-1,nmod  ! boucle sur les modes
do k=1,km
do j=1,jm
if ( y(j) < yc_min(n) .and. z(k) < zc_min(n) ) then
```

$$\begin{aligned}
\texttt{var_bdr(1:3)} &= \frac{\int_{\texttt{yc_min(n)}}^{\texttt{yc_max(n)}} \left(\texttt{forme}(\frac{\texttt{yc_min(n)}-y_c}{\texttt{ls(2,n)}}, \texttt{et(2,n)}, 2, \texttt{1:3}, \texttt{ff(n)})\right)^2 \mathrm{d}y_c}{\texttt{yc_max(n)} - \texttt{yc_min(n)}} \\
&\times \frac{\int_{\texttt{zc_min(n)}}^{\texttt{zc_max(n)}} \left(\texttt{forme}(\frac{\texttt{zc_min(n)}-z_c}{\texttt{ls(3,n)}}, \texttt{et(3,n)}, 3, \texttt{1:3}, \texttt{ff(n)})\right)^2 \mathrm{d}z_c}{\texttt{zc_max(n)} - \texttt{zc_min(n)}} \\
\texttt{var_loc(1:3)} &= \frac{\int_{\texttt{yc_min(n)}}^{\texttt{yc_max(n)}} \left(\texttt{forme}(\frac{\texttt{y(j)}-y_c}{\texttt{ls(2,n)}}, \texttt{et(2,n)}, 2, \texttt{1:3}, \texttt{ff(n)})\right)^2 \mathrm{d}y_c}{\texttt{yc_max(n)} - \texttt{yc_min(n)}} \\
&\times \frac{\int_{\texttt{zc_min(n)}}^{\texttt{zc_max(n)}} \left(\texttt{forme}(\frac{\texttt{z(j)}-z_c}{\texttt{ls(3,n)}}, \texttt{et(3,n)}, 3, \texttt{1:3}, \texttt{ff(n)})\right)^2 \mathrm{d}z_c}{\texttt{zc_max(n)} - \texttt{zc_min(n)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\texttt{acvar(j,k,1:3)} = \max\Bigg(&\texttt{acvar(j,k,1:3)}, \\
&\left[1 - \left(\frac{\texttt{yc_min(n)} - \texttt{y(j)}}{\texttt{ls(2,n)}} - 1\right)\left(\frac{\texttt{zc_min(n)} - \texttt{z(k)}}{\texttt{ls(3,n)}} - 1\right)\left(\frac{1}{\texttt{var_bdr(1:3)}} - 1\right)\right] \texttt{var_loc(1:3)}\Bigg)
\end{aligned}$$

```
endif ! point sous les frontières yc_min et zc_min
enddo ! boucle j
enddo ! boucle k
enddo ! boucle n
```

On réitère de même avec les 3 autres coins.

Pour finir, on impose la valeur d'`acvar` à 1 dans les zones d'injection des différents modes, et on s'assure qu'elle reste inférieure à 1 en dehors.

```
do n-1,nmod  ! boucle sur les modes
do k=1,km
do j=1,jm
if (yc_min(n)<y(j)<yc_max(n) .and. zc_min(n)<z(k)<zc_max(n)) then
   acvar(j,k,1:3) = 1.0
endif ! point dans la zone d'injection
enddo ! boucle j
enddo ! boucle k
enddo ! boucle n
acvar(1:jm,1:km,1:3) = min( 1.0, acvar(1:jm,1:km,1:3) )
```

Le coefficient correcteur $C_j(\underline{x})$ apparaissant dans (B.18) se calcule finalement par :

```
corvar(1:jm,1:km,1) = 0.0
corvar(1:jm,1:km,2) = 0.0
corvar(1:jm,1:km,3) = 0.0
do k=1,km
do j=1,jm
   if(var(j,k,1)>0.0) corvar(j,k,1) = acvar(j,k,1) / sqrt(var(j,k,1))
   if(var(j,k,2)>0.0) corvar(j,k,2) = acvar(j,k,2) / sqrt(var(j,k,2))
   if(var(j,k,3)>0.0) corvar(j,k,3) = acvar(j,k,3) / sqrt(var(j,k,3))
enddo
enddo
```

B.5.1.6 Calcul de la décomposition de Cholesky

On calcule les coefficients de la matrice $\underline{\underline{A}}$ apparaissant dans (B.16) en utilisant la décomposition de Cholesky (B.17).

```
do j=1,jm

  ! Test de la réalisabilité du tenseur de Reynolds
  if (reyn(j,1)<0.0) reyn(j,1)=0.0
  if (reyn(j,2)<0.0) reyn(j,2)=0.0
  if (reyn(j,3)<0.0) reyn(j,3)=0.0
  if (reyn(j,4)**2>reyn(j,1)*reyn(j,2))
&     reyn(j,4)=sign(1.0,reyn(j,4))*sqrt(reyn(j,1)*reyn(j,2))
  if (reyn(j,5)**2>reyn(j,1)*reyn(j,3))
&     reyn(j,5)=sign(1.0,reyn(j,5))*sqrt(reyn(j,1)*reyn(j,3))
  if (reyn(j,6)**2>reyn(j,2)*reyn(j,3))
&     reyn(j,6)=sign(1.0,reyn(j,6))*sqrt(reyn(j,2)*reyn(j,3))
```

Il faudrait en plus faire un test sur le déterminant du tenseur qui doit être positif puisque dans le repère principal du tenseur de Reynolds, on doit avoir R_{11}, R_{22} et R_{33} positifs. Si tel n'est pas le cas, il faudrait corriger le problème en diagonalisant le tenseur $\underline{\underline{R}}$, en annulant la valeur propre négative et en repassant dans le repère d'origine. Cette étape n'est pas réalisée en pratique : l'utilisateur s'assure manuellement de la cohérence des tensions de Reynolds qu'il décide d'imposer.

```
  ! Calcul de la décomposition de Cholesky
  eps=1.0e-10  ! utile pour éviter les erreurs numériques
  chol(j,1) = sqrt( reyn(j,1)+eps )                              ! uu
  chol(j,4) = reyn(j,4)/chol(j,1)                                ! uv
  chol(j,2) = sqrt( reyn(j,2)-chol(j,4)**2+eps )                 ! vv
  chol(j,5) = reyn(j,5)/chol(j,1)                                ! uw
  chol(j,6) = ( reyn(j,6)-chol(j,4)*chol(j,5) )/chol(j,1)        ! vw
  chol(j,3) = sqrt( reyn(j,3)-chol(j,5)**2-chol(j,6)**2+eps )    ! ww

enddo ! boucle j
```

On peut alors directement calculer la matrice de Cholesky corrigée grâce à `corvar`. Cette matrice corrigée correspond au produit de A_{ij} visible dans (B.15) avec C_j de (B.18).

```
do k=1,km
do j=1,jm
  cchol(j,k,1) = chol(j,1) * corvar(j,k,1)     ! uu
  cchol(j,k,2) = chol(j,2) * corvar(j,k,2)     ! vv
  cchol(j,k,3) = chol(j,3) * corvar(j,k,3)     ! ww
  cchol(j,k,4) = chol(j,4) * corvar(j,k,1)     ! uv
  cchol(j,k,5) = chol(j,5) * corvar(j,k,1)     ! uw
  cchol(j,k,6) = chol(j,6) * corvar(j,k,2)     ! vw
enddo
enddo
```

B.5.1.7 Fin du prétraitement

Le prétraitement étant fini, il peut être utile de sauver les données qui seront nécessaires à la génération des structures turbulentes.

Il s'agit des champs suivants :

- `mean(1:jm,1:5)` : champ moyen des variables primitives,
- `cchol(1:jm,1:km,1:6)` : champ d'intensité turbulente locale corrigé,

et des données sur les modes suivantes :

- `nmod` : nombre de mode,
- `nstr(1:nmod)` : nombre de structures pour chaque mode
- `ls(1:3,1:nmod)` : dimensions corrigées des structures en unité physique
- `vc(1:nmod)` : vitesse de convection en unité physique
- `ff(1:nmod)` : numéro de la fonction de forme
- `et(1:3,1:nmod)` : écart-type
- `yc_min,yc_max(1:nmod)` : bornes d'injection dans la direction normale
- `zc_min,zc_max(1:nmod)` : bornes d'injection dans la direction transverse

B.5.2 Génération des structures

Dans cette deuxième partie de routine, on génère des structures turbulentes, de sens de rotation et de position au sein des fenêtres d'injection choisis de façon aléatoire. Une fois qu'une structure a été totalement convectée à travers le plan d'entrée, une nouvelle structure, du même mode, est générée, permettant ainsi de maintenir la taille de la population.

B.5.2.1 Initialisation de la population de structures

La position du centre des structures dans le plan d'entrée et leur sens de rotation sont choisis aléatoirement et stockés dans les tableaux `str_pos(1:3,1:nstr,1:nmod)` et `str_rot(1:3,1:nstr,1:nmod)`. La position longitudinale est remplacée par l'instant auquel le centre de la structure traverse le plan d'entrée. Les deux autres composantes sont choisies, en fonction du mode `n`, dans la fenêtre `[yc_min(n); yc_max(n)]` × `[zc_min(n); zc_max(n)]`.

Dans la pratique, l'utilisation d'un générateur de nombre pseudo-aléatoire permet de conserver la répétabilité du code, propriété intéressante pour des tests de debugging ou de non-régression. C'est dans cette routine d'initialisation des structures que le générateur de nombre pseudo-aléatoire peut-être initialisé. Dans la suite, on note `RANDOM` l'appel à la routine générant aléatoirement un nouveau nombre réel dans l'intervalle $[0; 1]$.

Pour l'initialisation de la composante longitudinale (i.e. temporelle) de la position des structures, deux choix sont présentés :

- Initialisation avec aucune structure en travers du plan d'entrée à l'instant initial `t=t0`. Cette solution permet un transitoire plus doux, mais plus long.
- Initialisation avec une population répartie comme en régime établi dès l'instant initial. Cette solution induit une discontinuité avec le champ de vitesse, ce qui peut nuire à la stabilité et générer une importante quantité de bruit.

```
do n=1,nmod     ! boucle sur les modes
do m=1,nstr(n)  ! boucle sur les structures

   ! Position du centre de la structure :
   str_pos(1,m,n) = t0 + (2.0*RANDOM+1.0)*ls(1,n)/vc(n)  ! sans structure
   str_pos(1,m,n) = t0 + (2.0*RANDOM-1.0)*ls(1,n)/vc(n)  ! avec structure
   str_pos(2,m,n) = yc_min(n) + (yc_max(n)-yc_min(n))*RANDOM
   str_pos(3,m,n) = zc_min(n) + (zc_max(n)-zc_min(n))*RANDOM

   ! Sens de rotation
   str_rot(1,m,n) = sign(1.0, RANDOM-0.5)
   str_rot(2,m,n) = sign(1.0, RANDOM-0.5)
   str_rot(3,m,n) = sign(1.0, RANDOM-0.5)
   if     (ff(n)==1) then  ! Tourbillons quasi-longitudinaux
      str_rot(3,m,n) = str_rot(2,m,n)
   elseif (ff(n)==2) then  ! Têtes de hairpin
      str_rot(2,m,n) = str_rot(1,m,n)
      str_rot(3,m,n) = str_rot(1,m,n)
   endif

Enddo ! Boucle structures
Enddo ! Boucle modes
```

B.5.2.2 Début de la boucle temporelle

```
tps = t0
```

```
DO t = 1,tm
   tps = tps + dt
```

B.5.2.3 Mise à jour des structures

Lorsqu'une structure a été totalement convectée (c'est-à-dire telles que `str_pos(1,m,n) + ls(1,n)/vc(n) > tps`), une nouvelle structure est alors générée (telles que `str_pos(1,m,n) - ls(1,n)/vc(n) < tps`). La position de son centre, dans le plan d'entrée, ainsi que son sens de rotation, sont choisis de façon aléatoire. La composante longitudinale (*i.e.* temporelle) peut être déterminée de deux manières :

- apparition immédiate : plus simple pour satisfaire la condition de variance.
- apparition avec délai aléatoire : améliore la répartition spectrale, mais biaise la variance si l'on n'ajoute pas plus de structures pour compenser.

```
Do n=1,nmod     ! boucle sur les modes
Do m=1,nstr(n)  ! boucle sur les structures

  ! Test sur la disparition de la structure à l'itération suivante
  t_out = str_pos(1,m,n) + ls(1,n)/vc(n)
  If (tps > t_out) then

    ! Position du centre de la structure :
    str_pos(1,m,n) = str_pos(1,m,n)+             2.0*ls(1,n)/vc(n) ! immédiat
    str_pos(1,m,n) = str_pos(1,m,n)+(1.0+RANDOM)*2.0*ls(1,n)/vc(n) ! délai
    str_pos(2,m,n) = yc_min(n) + (yc_max(n)-yc_min(n))*RANDOM
    str_pos(3,m,n) = zc_min(n) + (zc_max(n)-zc_min(n))*RANDOM

    ! Sens de rotation
    str_rot(1,m,n) = sign(1.0, RANDOM-0.5)
    str_rot(2,m,n) = sign(1.0, RANDOM-0.5)
    str_rot(3,m,n) = sign(1.0, RANDOM-0.5)
    if     (ff(n)==1) then  ! Tourbillons quasi-longitudinaux
       str_rot(3,m,n) = str_rot(2,m,n)
    elseif (ff(n)==2) then  ! Têtes de hairpin
       str_rot(2,m,n) = str_rot(1,m,n)
       str_rot(3,m,n) = str_rot(1,m,n)
    endif

  Endif  ! Test sur la disparition de la structure

Enddo  ! Boucle structures
Enddo  ! Boucle modes
```

B.5.2.4 Calcul du champ de fluctuation instantané

Comme précisé en préambule, à l'équation (B.3) en particulier, le champ d'entrée d'une condition aux limites de type SEM est la somme d'une composante moyenne $\underline{\overline{u}}$, issue du tableau `mean` et d'une composante fluctuante $\underline{u}'$. Cette composante fluctuante, instationnaire, doit être recalculée à chaque itération. Sa valeur correspond à la somme des contributions de chaque structure de chaque mode, comme indiqué dans l'équation (B.18). La matrice de Cholesky corrigée `cchol`, calculée dans la sous-section B.5.1.6, est utilisée pour normer le signal afin d'obtenir les tensions de Reynolds `reyn` spécifiées par l'utilisateur.

La contribution au champ fluctuant $\underline{u}'$ de chaque structure est calculée en fonction de :

- son sens de rotation, pour chaque composante j, stocké dans `str_rot`, correspondant à ε_j dans (B.18).
- d'une intensité normalisée `intens(1:3)` pour chaque composante j, prenant en compte la distance entre le centre de la structure et chaque point du maillage du plan d'entrée, correspondant à $\Phi_j^n = f_x^{n,j}(\tilde{x}) f_y^{n,j}(\tilde{y}) f_z^{n,j}(\tilde{z})$ dans (B.19).
- d'un facteur de normalisation `1/sqrt(nstr)` prenant en compte le nombre de structures présentes, correspondant à $1/\sqrt{N_{\text{str}}}$ dans (B.18).
- de la matrice de Cholesky corrigée, correspondant au produit de A_{ij} de (B.15) et C_j de (B.18).

À partir du champ de vitesse fluctuante, on obtient les fluctuations de température par SRA, puis le champ de densité, comme précisé dans la section B.2.1.

```
! Boucle sur les points du maillage
Do k=1,km       ! boucle j
Do j=1,jm       ! boucle k

  ! Mise a zero du tableau des fluctuations
  signal(1:3) = 0.0

  ! Boucle sur les structures turbulentes
  Do n=1,nmod     ! boucle sur les modes
  Do m=1,nstr(n)  ! boucle sur les structures

    ! Positions relatives de la maille par rapport au centre structure
    pos_relat(1)   =    0 - (tps-str_pos(1,m,n))*vc(n)
    pos_relat(2)   = y(j) -      str_pos(2,m,n)
    pos_relat(3)   = z(k) -      str_pos(3,m,n)

    pos_relat(1) = pos_relat(1) / ls(1,n)
    pos_relat(2) = pos_relat(2) / ls(2,n)
    pos_relat(3) = pos_relat(3) / ls(3,n)

    ! Point influencé par la structure
    if (  max(abs(pos_relat(1:3))) .lt. 1.0 ) then

      ! Intensité locale de la structure, composante par composante
      intens(1) = forme( pos_relat(1),et(1,n),1,1,ff(n) )
                * forme( pos_relat(2),et(2,n),2,1,ff(n) )
                * forme( pos_relat(3),et(3,n),3,1,ff(n) )
      intens(2) = forme( pos_relat(1),et(1,n),1,2,ff(n) )
                * forme( pos_relat(2),et(2,n),2,2,ff(n) )
                * forme( pos_relat(3),et(3,n),3,2,ff(n) )
      intens(3) = forme( pos_relat(1),et(1,n),1,3,ff(n) )
                * forme( pos_relat(2),et(2,n),2,3,ff(n) )
                * forme( pos_relat(3),et(3,n),3,3,ff(n) )

      ! Ajout de la contribution de la structure
      signal(1) = signal(1) + str_rot(1,m,n)*intens(1)/sqrt(nstr(n))
      signal(2) = signal(2) + str_rot(2,m,n)*intens(2)/sqrt(nstr(n))
      signal(3) = signal(3) + str_rot(3,m,n)*intens(3)/sqrt(nstr(n))

    Endif ! point influencé par la structure
```

```
  Enddo ! boucle structures
  Enddo ! boucle modes

  ! Calcul des champs de vitesse fluctuant
  ufluc = cchol(j,k,1)*signal(1)
  vfluc = cchol(j,k,4)*signal(1)
        + cchol(j,k,2)*signal(2)
  wfluc = cchol(j,k,5)*signal(1)
        + cchol(j,k,6)*signal(2)
        + cchol(j,k,3)*signal(3)

  ! Profil moyen
  rm = mean(j,1)
  um = mean(j,2)
  pm = mean(j,5)
  tm = pm/(rgp*rm)

  ! Fluctuation de température par SRA
  csra  = um / (gamma*cv)
  tfluc = -csra * ufluc

  ! Loi des G.P. linéarisée avec supposition p constant
  rfluc = -tfluc / tm * rm

  ! Champ instationnaire
  inst(j,k,t,1) = mean(j,1) + rfluc    ! densité
  inst(j,k,t,2) = mean(j,2) + ufluc    ! vitesse u
  inst(j,k,t,3) = mean(j,3) + vfluc    ! vitesse v
  inst(j,k,t,4) = mean(j,4) + wfluc    ! vitesse w
  inst(j,k,t,5) = mean(j,5)            ! pression

Enddo ! boucle j
Enddo ! boucle k
```

B.5.2.5 Calcul du champ instantané de $\tilde{\nu}$

Maintenant que l'on dispose du champ de variables primitives instantané, on peut calculer le champ de $\tilde{\nu}$ en chaque point du maillage selon l'équation (B.5). On calcule au préalable μ selon (B.7) et μ_t selon (B.8) et (B.9). Dans le présent rapport, seul un calcul de type RANS est traité. Le calcul de μ_t par le modèle de Smagorinsky doit être à considérer pour la zone LES d'un calcul de type ZDES.

```
! Boucle sur les points du maillage
Do k=1,km       ! boucle j
Do j=1,jm       ! boucle k

  rho    = inst(j,k,t,1)
  p      = inst(j,k,t,5)
  T      = p/(rho*(gamma-1)*cv)

  ! Calcul de mu : loi de Sutherland
  mu     = mu_S * (T_S+T_refS)/(T+T_S) * (T/T_refS)**1.5
```

```
 ! Calcul de mut : modèle de Michel
 ! (Le gradient du vecteur de vitesse moyenne est supposé
 !  accessible par une méthode propre au code de calcul utilisé.
 !  On note  d$d%   le gradient du champ  $  selon la direction  % )
 nomeg  = sqrt( dudy(j,k)**2+dudz(j,k)**2
&              +dwdy(j,k)**2+dvdz(j,k)**2
&              -2.*dwdy(j,k)*dvdz(j,k)   )
 nomeg  = max( 1e-12, nomeg)
 dwall  = abs( y(j) )
 lmich  = 0.085*delta * tanh(kappa*dwall/(0.085*delta))
 mut    = rho * nomeg * lmich**2 * (1.0 - exp(-dwall/(lp*Ap)))**2
 mut    = max( mut, 1e-12*mu )


 ! Calcul de nutild : résolution du polynôme en nutild/nu (méthode de Ferrari)

 ! L'équation est de la forme :  X^4 + aa*X^3 + bb = 0
 aa = -mut/mu
 bb = -mut/mu * Cv1**3

 ! On effectue le changement de variable : X = Z - aa/4
 ! L'équation devient : Z^4 + pp*Z^2 + qq*Z + rr = 0
 pp =    - 6.0*(aa/4.)**2
 qq =    + 8.0*(aa/4.)**3
 rr = bb - 3.0*(aa/4.)**4

 ! Le principe de la méthode de Ferrari est de simplifier cette
 ! expression en remplacant Z^4 par (Z^2+Y)^2 - 2Y*Z^2 - Y^2,
 ! ou Y est choisi de sorte que l'équation globale de
 ! degré 4 se factorise en 2 polynômes de degré 2 par
 ! identité remarquable.
 ! Cette condition est vérifiée si :
 !  8*Y^3 - 4*pp*Y^2 - 8*rr*Y + (4*rr*pp-q^2) = 0
 ! En posant Y = K + pp/6, cela revient a :
 !  K^3 -(3*(pp/6)^2+rr)*K + 2*(rr*(pp/6)-(pp/6)^3-(qq/4)^2)= 0
 ! Que l'on note :
 !  K^3 + ll*K + mm = 0
 ll = -3.0*(pp/6.0)**2 -     rr
 mm = -2.0*(pp/6.0)**3 + 2.0*rr*(pp/6.0) - qq**2/8.0

 ! On utilise la méthode de Cardan pour résoudre K.
 ! Le determinant vaut : Delta  = - 4*ll^3 - 27*mm^2
 ! On utilise le determinant réduit : Deltanu = -Delta/27
 deltanu =  4.0/27.0*ll**3 + mm**2

 ! Dans les plages considérées, Delta est toujours négatif (nul
 ! en zéro et strictement décroissant en fonction de mut/mu).
 ! Ainsi, il existe une seule solution réelle K0.
 uu = (-mm/2.0 + sqrt(deltanu)/2.0)**(1.0/3.0)
 vv =  -mm/2.0 - sqrt(deltanu)/2.0
 vs = sign(1.0,vv)
```

```
  vv = vs*abs(vv)**(1.0/3.0)
  k0 = uu + vv

  ! On peut alors remonter a la solution en Y
  y0 = k0 + pp/6.0

  ! L'équation en Z peut alors s'écrire :
  !     (Z^2 + y0)^2 - (a0*Z + b0)^2 = 0
  ! qu'il est maintenant possible de factoriser en :
  !     (Z^2 - a0*Z + y0 - b0)(Z^2 + a0*Z + y0 + b0) = 0
  a0 = sqrt( abs(-pp+2.0*y0) )
  b0 = -qq/(2.0*a0)

  ! La seule racine réelle positive est celle de l'équation au
  ! discriminant positif
  delta1 = a0**2 - 4.0*(y0-b0)
  z0     = (a0 + sqrt(delta1))/2.0

  ! On obtient alors la solution X et rho*nutild
  x0     = z0 - aa/4.0
  mutild = mu * x0

  ! Stockage dans le tableau des champs instantanés
  inst(j,k,t,6) = max( mutild, 0.0)

Enddo ! boucle j
Enddo ! boucle k
```

B.5.2.6 Fin de la boucle temporelle

```
ENDDO ! boucle en temps initiée dans la section B.5.2.2
```

B.6 Notes sur l'implémentation

Cette section a pour vocation à attirer l'attention du lecteur sur quelques points délicats ou pour indiquer des possibilités d'implémentation intéressantes.

B.6.1 Paramétrage des modes

En se basant sur les suggestions de Pamiès *et al.* [203], nous recommandons le paramétrage de mode détaillé dans le tableau B.1. Pour chaque numéro $\texttt{ff}(n)$ de ce tableau correspond une fonction de forme $\Phi_j^{\texttt{ff}(n)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ spécifiée dans le tableau B.2 et définie à partir des trois fonctions élémentaires mono-dimensionnelles $f_d^{\texttt{ff}(n),j}(\tilde{x})$:

$$G(\tilde{x}) = \exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \tag{B.21a}$$

$$H(\tilde{x}) = \frac{\cos(2\pi\tilde{x}) - 1}{2\pi\tilde{x}} \tag{B.21b}$$

$$\tilde{x}G(\tilde{x}) \tag{B.21c}$$

Mode	Réf.	l_x^+	l_y^+	l_z^+	$y_{\min}^+$	$y_{\max}^+$	`ff`	σ_x	v_c^+
$n=1$	STQL	100	20	**30**	**0**	60	`1`	0.4	15
$n=2$	LEGS	120	60	60	60	$\mathbf{0.4\,\delta^+}$	`1`	0.4	15
$n=2$	HEAD	60	60	120	$\mathbf{0.4\,\delta^+}$	$0.5\,\delta^+$	`2`	0.4	15
$n=3$	WAKE	$0.1\,\delta^+$	$0.1\,\delta^+$	$0.1\,\delta^+$	$0.5\,\delta^+$	$0.8\,\delta^+$	`3`	0.4	$0.8\,U_\infty^+$
$n=4$	WAKE	$0.15\,\delta^+$	$0.15\,\delta^+$	$0.15\,\delta^+$	$0.8\,\delta^+$	$1.5\,\delta^+$	`3`	0.1	$0.8\,U_\infty^+$

TABLE B.1 – Suggestion de paramétrage des modes pour l'utilisation de la SEM pour la simulation d'une couche limite turbulente. En ce qui concerne les écarts-types σ_y et σ_z, la valeur de 0.4 est préconisée pour tous les modes. En dehors des données en gras, les valeurs sont celles proposées dans l'article original de Pamiès *et al.* [203].

$\Phi_j^{\mathtt{ff}(n)}(\underline{\tilde{x}})$	Réf.	$j=1$	$j=2$	$j=3$	restriction
`ff = 1`	JHSK	$G(\tilde{x})\,G(\tilde{y})\,H(\tilde{z})$	$-G(\tilde{x})\,G(\tilde{y})\,H(\tilde{z})$	$G(\tilde{x})\,H(\tilde{y})\;\;G(\tilde{z})$	$\varepsilon_2{=}\varepsilon_3$
`ff = 2`	TRANS	$-G(\tilde{x})\,H(\tilde{y})\,G(\tilde{z})$	$\tilde{x}G(\tilde{x})\,G(\tilde{y})\,G(\tilde{z})$	$G(\tilde{x})\,H(\tilde{y})\,\tilde{z}G(\tilde{z})$	$\varepsilon_1{=}\varepsilon_2{=}\varepsilon_3$
`ff = 3`	GAUSS	$G(\tilde{x})\,G(\tilde{y})\,G(\tilde{z})$	$G(\tilde{x})\,G(\tilde{y})\,G(\tilde{z})$	$G(\tilde{x})\,G(\tilde{y})\;\;G(\tilde{z})$	–

TABLE B.2 – Définition des fonctions de formes suggérées dans le tableau B.1. Les fonctions élémentaires $G(\tilde{x})$, $H(\tilde{x})$ et $\tilde{x}G(\tilde{x})$ sont celles spécifiées à l'équation (B.21). Ces définitions sont celles proposées dans l'article original de Pamiès *et al.* [203].

B.6.2 Dimensionnement des structures

Les structures turbulentes proches paroi semblent être dimensionnées en unité interne, c'est-à-dire, de taille fixe quand adimensionnées par le frottement pariétal $\overline{\tau}$ et la viscosité ν. À l'inverse, les fluctuations dans la zone externe de la couche limite sont dimensionnées en unité externe, c'est à dire en utilisant la vitesse externe U_{ext} et l'épaisseur de couche limite δ.

Il peut être intéressant d'inclure en interne les routines permettant le calcul, à partir du champ de vitesse moyenne, du frottement pariétal moyen $\overline{\tau}$ ainsi que de l'épaisseur de couche limite δ, afin de dimensionner automatiquement les tailles de structures $l_{x,y,z}$ et leur vitesse de convection v_c.

B.6.3 Appel des fonctions de forme

La routine `forme` permettant l'évaluation des fonctions élémentaires mono-dimensionnelles $f_d^{n,j}(\tilde{x})$, présentées dans la section B.5.1.1, fait appel à des fonctions gaussiennes, exponentielles ou sinusoïdales, qui peuvent exiger un coût CPU non négligeable.

Afin de le diminuer, il peut être intéressant d'interpoler $f_d^{n,j}(\tilde{x})$ à partir de `2*npt` points pré-évalués entre -1 et 1, pour chaque direction d, chaque composante j et chaque mode n.

B.6.4 Gestion de la périodicité

Dans les cas canoniques d'écoulement de canal plan ou de couche limite bidimensionnelle, la périodicité dans la direction transverse (appelée z ici) doit être prise en compte.

À chaque structure créée, dont le centre z_0 est positionné dans le domaine de calcul, c'est à dire $z_0 \in [z_{\min}, z_{\max}]$, correspond les structures images par périodicité dont les centres sont positionnés hors du domaine de calcul à l'ordonnée $z_i = z_0 + i(z_{\max} - z_{\min})$. Lors du calcul du champ de fluctuation, section B.5.2.4, il faut alors ajouter une boucle sur les images `i` au sein de la boucle sur les structures `m` afin de prendre en compte leur potentielle influence. En effet, l'image d'une structure aura de l'influence sur l'écoulement si elle atteint le bord du domaine de calcul, c'est à dire, si $z_i - l_z(n) < z_{\max}$ ou que $z_i + l_z(n) > z_{\min}$.

Inversement, il peut être utile de prévoir les cas où l'on ne souhaite pas prendre en compte la périodicité, mais où l'on veut malgré tout conserver l'homogénéité dans la direction transverse. Dans un tel cas, pour éviter les "effets de bord", les structures doivent être injectées de façon aléatoire, non plus entre $z_{\min}$ et $z_{\max}$, mais entre $z_{\min} - l_z(n)$ et $z_{\max} + l_z(n)$.

Dans les deux cas précédents, des modifications doivent être apportées, non seulement pour garder la cohérence entre le nombre de structures effectif et le nombre de structures utilisé pour l'adimensionnement $1/\sqrt{N_{srt}}$ dans (B.18), mais également pour adapter la correction de superposition `corvar` dans B.5.1.5.

B.6.5 Localisation des structures

Lors du calcul du champ fluctuant, section B.5.2.4, au lieu de réaliser une boucle sur tous les points du maillage pour chacune des structures, il peut être intéressant de restreindre, pour chaque structure, à la zone du maillage réellement concernée.

Ainsi, lors de la génération d'une nouvelle structure, il est suggéré de stocker les indices minimum et maximum du maillage pour lesquels il existe des mailles influencées par cette nouvelle structure. Au sein d'une boucle sur les structures, la boucle sur les mailles pourra alors se limiter à un domaine restreint du plan d'entrée.

Bibliographie

[1] Abe, H., Kawamura, H. et Choi, H. : Very large-scale structures and their effects on the wall shear-stress fluctuations in a turbulent channel flow up to $\mathrm{Re}_\tau = 640$. *J. Fluid Eng.*, 126:835–843, 2004. 35

[2] Adrian, R. J. : Hairpin vortex organization in wall turbulence. *Phys. Fluids*, 19(4):041301, 2007. 34

[3] Adrian, R. J., Meinhart, C. D. et Tomkins, C. D. : Vortex organization in the outer region of the turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 422:1–54, 2000. 33, 34, 35

[4] del Àlamo, J. C. et Jiménez, J. : Linear energy amplification in turbulent channels. *J. Fluid Mech.*, 559:205–213, 2006. 34

[5] del Àlamo, J. C. et Jiménez, J. : Estimation of turbulent convection velocities and corrections to Taylor's approximation. *J. Fluid Mech.*, 640:5–26, 2009. 36

[6] del Àlamo, J. C., Jiménez, J., Zandonade, P. et Moser, R. D. : Scaling of the energy spectra of turbulent channels. *J. Fluid Mech.*, 500:135–144, 2004. 37

[7] del Àlamo, J. C., Jiménez, J., Zandonade, P. et Moser, R. D. : Self-similar vortex clusters in the turbulent logarithmic region. *J. Fluid Mech.*, 561:329–358, 2006. 34

[8] Aupoix, B., Pailhas, G. et Houdeville, R. : Towards a general strategy to model riblet effects. *AIAA J.*, 50(3):708–716, 2012. 56, 182

[9] Bacher, E. V. et Smith, C. R. : A combined visualization-anemometry study of the turbulent drag reducing mechanisms of triangular micro-groove surface modifications. *AIAA Paper*, 85-0548, 1985. 68

[10] Bailey, S. C. C., Hultmark, M., Smits, A. J. et Schultz, M. P. : Azimuthal structure of turbulence in high reynolds number pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 615:121–138, 2008. 12

[11] Balakumar, B. J. et Adrian, R. J. : Large- and very-large-scale motions in channel and boundary-layer flows. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 365:665–681, 2007. 34, 40

[12] Bandyopadhyay, P. R. : Review – Mean flow in turbulent boundary layers disturbed to alter skin friction. *AIAA Paper*, 86-1126, 1986. 61

[13] Bannier, A., Garnier, E. et Sagaut, P. : Riblet flow model based on an extended FIK identity. *Flow Turbul. Combust.*, 95(2):351–376, 2015. 131, 146, 179, 257

[14] Baron, A. et Quadrio, M. : Turbulent drag reduction by spanwise wall oscillations. *Appl. Sci. Res.*, 55:311–326, 1996. 74, 75, 76, 77, 79, 80

[15] Bechert, D. W. et Bartenwerfer, M. : The viscous flow on surfaces with longitudinal ribs. *J. Fluid Mech.*, 206:105–129, 1989. 47, 53, 59, 64, 72, 115, 146

[16] Bechert, D. W., Bartenwerfer, M., Hoppe, G. et Reif, W.-E. : Drag reduction mechanisms derived from shark skin. Dans *15th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS)*, vol. 86–1.8.3, p. 1044–1068. AIAA, September 1986. 48, 64, 146

[17] Bechert, D. W., Bruse, M. et Hage, W. : Experiments with three-dimensional riblets as an idealized model of shark skin. *Exp. Fluids*, 28:403–412, 2000. 48

[18] Bechert, D. W., Bruse, M., Hage, W., Van Der Hoeven, J. G. T. et Hoppe, G. : Experiments on drag-reducing surfaces and their optimization with an adjustable geometry. *J. Fluid Mech.*, 338:59–87, 1997. 3, 47, 50, 51, 52, 53, 54, 65, 106

[19] Bendat, J. S. et Piersol, A. G. : *Randon data : Analysis and measurement procedures.* John Wiley & Sons, 1971. 222

[20] Benyus, J. M. : *Biomimicry : Innovation inspired by Nature.* HarperCollins, 1997. 48

[21] Berger, T. W., Kim, J., Lee, C. et Lim, J. : Turbulent boundary layer utilizing the Lorentz force. *Phys. Fluids*, 12(3):631, mar 2000. 72

[22] Bewley, T. R. : Flow control : New challenges for a new renaissance. *Prog. Aer. Sci.*, 37:21–58, 2001. 38

[23] Bewley, T. R. : A fundamental limit on the balance of power in a transpiration-controlled channel flow. *J. Fluid Mech.*, 632:443–446, 2009. 24, 39

[24] Bewley, T. R. et Protas, B. : Skin friction and pressure : The “footprints” of turbulence. *Physica D*, 196(1–2):28–44, 2004. 36

[25] Blackwelder, R. F. et Eckelman, H. : Streamwise vortices associated with bursting phenomenon. *J. Fluid Mech.*, 94:577–594, 1979. 31, 32

[26] Brooke, J. W. et Hanratty, T. J. : Origin of turbulence-producing eddies in a channel flow. *Phys. Fluids A*, 5(4):1011–1022, 1993. 32

[27] Bushnell, D. M. et Moore, K. J. : Drag reduction in nature. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 23 (1):65–79, 1991. 48

[28] Büttner, C. C. et Schulz, U. : Shark skin inspired riblet structures as aerodynamically optimized high temperature coatings for blades of aeroengines. *Smart Mater. Struct.*, 20 (094016), 2011. 49

[29] Cabrit, O., Mathis, R. et Marusic, I. : On the fundamental fluctuating wall-shear-stress. Dans *International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP-8)*, Poitiers, France, August 2013. 36, 37

[30] Cantwell, B. J., Coles, D. et Dimotakis, P. : Structure and entrainment in the plane of symmetry of a turbulent spot. *J. Fluid Mech.*, 87(4):641–672, 1978. 31

[31] Chakravarthy, S. R. : High resolution upwind formulation for the navier-stokes equations. Dans *Von Karman Institute Lecture Series*, vol. 1988–05, 1988. 92

[32] Chauhan, K. A., Nagib, H. M. et Monkewitz, P. A. : Evidence of non-universality of Kármán constant. Dans *Progress in Turbulence 2* (éds Oberlack, M., Khujadze, G., Günther, S., Weller, T., Frewer, M., Peinke, J. et Barth, S.), vol. 109 de *Springer Proceedings in Physics*, p. 159–163. Springer Berlin Heidelberg, 2007. 21

[33] Chen, H., Rao, F., Shang, X., Zhang, D. et Hagiwara, I. : Biomimetic drag reduction study on herringbone riblets of bird feather. *J. Bionic Eng.*, 10:341–349, 2013. 4, 231, 232, 248

[34] Chen, H., Rao, F., Shang, X., Zhang, D. et Hagiwara, I. : Flow over bio-inspired 3D herringbone wall riblets. *Exp. Fluids*, 55:1698, 2014. 231, 232, 239, 248

[35] Chen, H., Zhang, X., Zhang, D., Pan, J. et Hagiwara, I. : Large-scale equal-proportional amplification bio-replication of shark skin based on solvent-swelling PDMS. *J. Appl. Polym. Sci.*, 130(4):2383–2389, 2013. 49

[36] Choi, H., Moin, P. et Kim, J. : On the effect of riblets in fully developed laminar channel flows. *Phys. Fluids A*, 3(8):1892–1896, 1991. 47, 50, 59

[37] Choi, H., Moin, P. et Kim, J. : Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. *J. Fluid Mech.*, 255:503–539, 9 1993. 3, 47, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 66, 67, 68, 72, 111, 119, 129

[38] Choi, H., Moin, P. et Kim, J. : Active turbulence control for drag-reduction in wall-bounded flows. *J. Fluid Mech.*, 262:75–110, 1994. 46

[39] Choi, J.-I., Xu, C.-X. et Sung, H. J. : Drag reduction by spanwise wall oscillation in wall-bounded turbulent flows. *AIAA J.*, 40(5):842, may 2002. 74, 75, 79

[40] Choi, K.-S. et Graham, M. : Drag reduction of turbulent pipe flows by circular-wall oscillation. *Phys. Fluids*, 10(1):7, jan 1998. 74, 75

[41] Choi, K.-S. : Near-wall structure of a turbulent boundary layer with riblets. *J. Fluid Mech.*, 208:417–458, 10 1989. 39, 47, 59, 62, 64, 78

[42] Choi, K.-S. : Near-wall structure of turbulent boundary layer with spanwise-wall oscillation. *Phys. Fluids*, 14(7):2530, jul 2002. 82

[43] Choi, K.-S., DeBisschop, J. R. et Clayton, B. R. : Turbulent boundary layer control by means of spanwise-wall oscillation. *AIAA J.*, 36(7):1157, 1998. 81

[44] Choi, K.-S., Jukes, T. N. et Whalley, R. : Turbulent boundary-layer control with plasma actuators. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 369:1443–1458, 2011. 72

[45] Choi, K.-S., Pearcey, H. H. et Savill, A. M. : Test of drag reducing riblets on a one-third scale racing yatch. Dans *Turbulent Drag Reduction by Passive Means Conference*, London, Sept. 1987. 58

[46] Chu, D. C. et Karniadakis, G. E. : A direct numerical simulation of laminar and turbulent flow over riblet-mounted surfaces. *J. Fluid Mech.*, 250:1–42, 1993. 47, 48, 50, 58, 59, 62, 66, 68, 72, 119, 125

[47] Cimarelli, A., Frohnapfel, B., Hasegawa, Y., de Angelis, E. et Quadrio, M. : Prediction of turbulence control for arbitrary periodic spanwise wall movement. *Phys. Fluids*, 25:075102, 2013. 76, 77, 79, 209

[48] Clauser, F. H. : Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients. *J. Aero. Sci.*, 21:91–108, 1954. 18, 61

[49] Coakley, T. J. : Implicit upwind methods for the compressible Navier-Stokes equations. *AIAA J.*, 23(2):374–386, 1983. 95

[50] Colebrook, C. F. : Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth- and rough-pipe laws. *J. Inst. Civil Eng.*, 11(133–56), 1939. 70

[51] Coles, D. : The law of the wake in the turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 1:191–226, 1956. 21, 22, 26, 61, 131

[52] Cossu, C., Pujals, G. et Depardon, S. : Optimal transient growth and very large-scale structures in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 619:79–94, 2009. 34

[53] Couckuyt, I., Dhaene, T. et Demeester, P. : ooDACE toolbox : A flexible object-oriented Kriging implementation. *J. Mach. Learn. Res.*, 15:3183–3186, 2014. 215

[54] Couckuyt, I., Forrester, A., Gorissen, D., de Turck, F. et Dhaene, T. : Blind Kriging : Implementation and performance analysis. *Adv. Eng. Softw.*, (3):1–13, 2012. 215

[55] Courant, R., Friedrichs, K. et Lewy, H. : Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100(1):32–74, 1928. Translated in : On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2). 94

[56] Cousteix, J. : *Turbulence et couche limite*. Cépadués, 1989. 13, 16, 25

[57] Cousteix, J., Houdeville, R. et Javelle, J. : Response of a turbulent boundary layer to a pulsation of the external flow with and without adverse pressure gradient. Dans *Proc. IUTAM Symposium Unsteady Turbulent Shear Flows*, p. 120–144, 1981. 72

[58] Coustols, E. : *Turbulence control by passive means*. Kluwer Academic, 1990. 49, 55

[59] Coustols, E. : Riblets : Main known and unknown features. Dans *Emerging Techniques in Drag Reduction* (éds Choi, K.-S., Krishna Prasad, K. et Truong, T. V.), Mech. Engrg. Publications, p. 3–43. 1996. 55, 57

[60] Coustols, E. : Effet des parois rainurées ("riblets") sur la structure d'une couche limite turbulente. *Mec. Ind.*, 2(5):421–434, 2001. 49, 50, 55, 57

[61] Coustols, E. et Cousteix, J. : Performances of riblets in the supersonic regime. *AIAA J.*, 32(2):431–433, 1994. 57

[62] Coustols, E. et Savill, A. M. : Turbulent skin-friction drag reduction by active and passive means : Parts 1 and 2. Dans *Special Course on Skin Friction Drag Reduction* (éd. Cousteix, J.), AGARD Report 786, p. 8.1–8.80. 1992. 55, 58, 66

[63] Coustols, E. et Schmitt, V. : Synthesis of experimental riblet studies in transonic conditions. Dans *Turbulence control by passive means* (éd. Coustols, E.), p. 123–140. Kluver Academic, 1990. 57

[64] David, E. : *Modélisation des écoulements compressibles et hypersoniques*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 1993. 90

[65] Deardoff, J. W. : A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 41:453–465, 1970. 88

[66] DeBisschop, J. R. et Nieuwstadt, F. T. M. : Turbulent boundary layer in an adverse pressure gradient : Effectiveness of riblets. *AIAA J.*, 34:932–937, 1996. 58

[67] Deck, S. : Simulation ZDES d'une couche limite turbulenspatialéveloppement spatial. Rapport Technique RT 1/22742, ONERA/DAAP, Avril 2015. 260, 261

[68] Deck, S., Renard, N., Laraufie, R. et Weiss, P.-E. : Large-scale contribution to mean wall shear stress in high-Reynolds-number flat-plate boundary layers up to $Re_\delta = 13650$. *J. Fluid Mech.*, 743:202–248, 2014. 34, 38, 39, 40, 41, 200

[69] Deck, S., Weiss, P.-E., Pamiès, M. et Garnier, E. : Zonal Detached Eddy Simulation of a spatially developing flat plate turbulent boundary layer. *Comput. Fluids*, 48:1–15, 2011. 108, 261

[70] DeGraaff, D. B. et Eaton, J. K. : Reynolds-number scaling of the flat-plate turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 422:319–346, 2000. 28, 32, 41

[71] Deynat, P. : La peau des requins et des raies. Rap. tech., Institut océanographique, Juillet 2014. 48

[72] Dinkelacker, A., Nitschke-Kowsky, P. et Reif, W.-E. : On the possibility of drag reduction with the help of longitudinal ridges in the walls. Dans *IUTAM Symp. on Turbulence Management and Laminarization* (éds Liepmann, H. W. et Narasimha, R.), Bangalore, India, Jan. 1988. Springer. 48

[73] Djenidi, L., Anselmet, F., Liandrat, J. et Fulachier, L. : Laminar boundary layer over riblets. *Phys. Fluids*, 6(9):2993–2999, 1994. 47, 50

[74] Du, Y. et Karniadakis, G. E. : Suppressing wall turbulence by means of a transverse traveling wave. *Sci. Mag.*, 288:1230, may 2000. 78

[75] Du, Y., Symeonidis, V. et Karniadakis, G. E. : Drag reduction in wall-bounded turbulence via a transverse travelling wave. *J. Fluid Mech.*, 457:1–34, 2002. 78

[76] Duan, L. et Choudhari, M. M. : Direct numerical simulations of high-speed turbulent boundary layers over riblets. Dans *52nd Aerospace Sciences Meeting*, vol. 934, National Harbor, Maryland, Jan. 2014. AIAA SciTech. 47, 57, 106

[77] Edwards, J. R. et Liou, M. S. : Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds. *AIAA J.*, 36(9):1610–1617, 1998. 93

[78] Eitel-Amor, G., Örlü, R. et Schlatter, P. : Simulation and validation of a spatially evolving turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 8300$. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 47:57–69, 2014. 22, 28, 29, 39, 130, 134, 142

[79] Fernholz, H.-H. et Finley, P. J. : The incompressible zero-pressure-gradient turbulent boundary layer : An assessment of the data. *Prog. Aer. Sci.*, 32:245–311, 1996. 23

[80] Flores, O. et Jiménez, J. : Effect of wall-boundary disturbances on turbulent channel flows. *J. Fluid Mech.*, 566:357–376, 2006. 35

[81] Flores, O. et Jiménez, J. : Hierarchy of minimal flow units in the logarithmic layer. *Phys. Fluids*, 22:071704, 2010. 34

[82] Flores, O., Jiménez, J. et del Àlamo, J. C. : Vorticity organization in the outer layer of turbulent channels with disturbed walls. *J. Fluid Mech.*, 591:145–154, 2007. 35

[83] Fröhlich, J. et von Terzi, D. : Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. *Prog. Aer. Sci.*, 44:349–377, 2008. 85

[84] Frohnapfel, B., Lammers, P., Jovanović, J. et Durst, F. : Interpretation of the mechanism associated with turbulent drag reduction in terms of anisotropy invariants. *J. Fluid Mech.*, 577:457–466, 2007. 79

[85] Fukagata, K., Iwamoto, K. et Kasagi, N. : Contribution of Reynolds stress distribution to the skin friction in wall-bounded flows. *Phys. Fluids*, 14(11):L73, 2002. 37, 146, 200, 246, 251, 252, 258

[86] Fukagata, K., Kasagi, N. et Sugiyama, K. : Feedback control achieving sublaminar friction drag. Dans *6th Symp. Smart Control of Turbulence*, Tokyo, Japan, Mar. 6-9 2005. 39

[87] Fukagata, K., Sugiyama, K. et Kasagi, N. : On the lower bound of net driving power in controlled duct flows. *Phys. D*, 238:1082–1086, 2009. 24, 39

[88] Gad-el-Hak, M. : Modern developments in flow control. *Appl. Mech. Rev.*, 49(7):365–379, 1996. 44

[89] Gad-el-Hak, M. : *Flow control : Passive, active, and reactive flow management*. Cambridge University Press, London, United Kingdom, 2000. 46

[90] Gallagher, J. A. et Thomas, A. S. W. : Turbulent boundary layer characteristics over streamwise grooves. *AIAA Paper*, 84-2185, 1984. 61

[91] Ganapathisubramani, B., Hutchins, N., Hambleton, W. T., Longmire, E. K. et Marusic, I. : Investigation of large-scale coherence in a turbulent boundary layer using two-point correlations. *J. Fluid Mech.*, 524:57–80, 2005. 34

[92] Ganapathisubramani, B., Longmire, E. K. et Marusic, I. : Characteristics of vortex packets in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 478:35–46, 2003. 34

[93] García-Mayoral, R. et Jiménez, J. : Drag reduction by riblets. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 369(1940):1412–1427, April 2011. 47, 51, 54, 55, 56, 65

[94] García-Mayoral, R. et Jiménez, J. : Hydrodynamic stability and breakdown of the viscous regime over riblets. *J. Fluid Mech.*, 678:317–347, 6 2011. 47, 52, 53, 58, 68, 71, 72, 73, 106, 125, 133, 174, 175

[95] García-Mayoral, R. et Jiménez, J. : Scaling of turbulent structures in riblet channels up to $\mathrm{Re}_\tau \approx 550$. *Phys. Fluids*, 24(10):105101, 2012. 47, 56, 105, 133

[96] Garnier, E. : *Simulation des grandes échelles en régime transsonique*. Thèse de doctorat, Université de Paris 11, France, 2000. 98

[97] Garnier, E., Adams, N. et Sagaut, P. : *Large eddy simulation for compressible flows*. Scientific Computation series. Springer Netherlands, 2009. 85

[98] Gatski, T. B. et Bonnet, J.-P. : *Compressibility, turbulence and high speed flow*. Elsevier Science, 2009. 11, 12

[99] Gaudet, L. : Properties of riblets at supersonic speed. *Appl. Sci. Res.*, 46:245–254, 1989. 57

[100] Gear, C. W. : Algorithm 407-DIFSUB for the solution of ordinary differential equations. *Commun. ACM*, 14(3):185–190, 1971. 95

[101] George, W. K. : Recent advancements toward the understanding of turbulent boundary layers. *AIAA J.*, 44(11):2435–2449, 2005. 19, 21, 22

[102] George, W. K. et Castillo, L. : Zero-pressure-gradient turbulent boundary layer. *Appl. Mech. Rev.*, 50(12):689–729, 1997. 21, 26

[103] Ghosal, S. et Moin, P. : The basic equations for the large-eddy simulation of turbulent flows in complex geometry. *J. Comp. Phys.*, 118(1):24–37, 1995. 88

[104] Ginsbourger, D. : *Multiples métamodèles pour l'approximation et l'optimisation de fonctions numériques multivariables.* Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, France, 2009. 215, 219

[105] Goldstein, D. B., Handler, R. A. et Sirovich, L. : Direct numerical simulation of turbulent flow over a modelled riblet covered surface. *J. Fluid Mech.*, 302:333–376, Nov 1995. 47, 64, 66, 68, 69, 72

[106] Goldstein, D. B. et Tuan, T.-C. : Secondary flow induced by riblets. *J. Fluid Mech.*, 363:115–151, 1998. 47, 59, 62, 63, 69, 129, 133

[107] Gomez, T., Flutet, V. et Sagaut, P. : Contribution of Reynolds stress distribution to the skin friction in compressible turbulent channel flows. *Phys. Rev. E*, 89:035301, 2009. 37

[108] Graftieaux, L., Michard, M. et Grosjean, N. : Combining PIV, POD and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows. *Meas. Sci. Technol.*, 12:1422–1429, 2001. 248

[109] Grek, G. R., Kozlov, V. V. et Titarenko, S. V. : An experimental study of the influence of riblets on transition. *J. Fluid Mech.*, 315:31–49, 1996. 47, 58

[110] Guala, M., Hommema, S. E. et Adrian, R. J. : Large-scale and very-large-scale motions in turbulent pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 554:521–42, 2006. 34, 40

[111] Hage, W., Bechert, D. W. et Bruse, M. : Yaw angle effects on optimized riblets. Dans *Proc. of the CEAS/DragNet European Drag Reduction conf.* (éd. Thiede, P.), p. 278–285, Berlin, Germany, 2000. Springer. 55

[112] Hamilton, J. M., Kim, J. et Waleffe, F. : Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.*, 287:317, 1995. 33

[113] Head, M. R. et Bandyophadhyay, P. : New aspects of turbulent boundary layer structure. *J. Fluid Mech.*, 107:297–338, 1981. 33

[114] Hooshmand, D., Youngs, R. A. et Wallace, J. M. : An experimental study of changes in the structure of a turbulent boundary layer due to surface geometry changes. *AIAA Paper*, 83-0230, 1983. 58, 59, 61, 62

[115] Hoyas, S. et Jiménez, J. : Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $\mathrm{Re}_\tau = 2003$. *Phys. Fluids*, 18(1):011702, 2006. 35

[116] Hoyas, S. et Jiménez, J. : Reynolds number effects on the Reynolds-stress budgets in turbulent channels. *Phys. Fluids*, 20(10):101511, 2008. 40

[117] Huerre, P. : *Mécanique des fluides.* Tome 1. École Polytechnique, 1998. 16

[118] Hurst, E., Yang, Q. et Chung, Y. M. : The effect of Reynolds number on turbulent drag reduction by streamwise travelling waves. *J. Fluid Mech.*, 759:28–55, 2014. 78

[119] Hutchins, N., Hambleton, W. T. et Marusic, I. : Inclined cross-stream stereo particle image velocimetry measurements in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 541:21–54, 2005. 34

[120] Hutchins, N. et Marusic, I. : Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 579:1–28, 2007. 32, 34, 35

[121] Hutchins, N. et Marusic, I. : Large-scale influences in near-wall turbulence. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 365:647–64, 2007. 34, 35

[122] Hwang, Y. : Near-wall turbulent fluctuations in the absence of wide outer motions. *J. Fluid Mech.*, 723:264–288, 2013. 32, 40

[123] Hwang, Y. : Statistical structure of self-sustaining attached eddies in turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 767:254–289, 2015. 34, 35

[124] Hwang, Y. et Cossu, C. : Amplification of coherent streaks in the turbulent Couette flow : An input-output analysis at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 643:333–348, 2010. 34

[125] Hwang, Y. et Cossu, C. : Self-sustained process at large scales in turbulent channel flow. *Phys. Rev. Lett.*, 105:044505, 2010. 34

[126] Itoh, M., Tamano, S., Iguchi, R., Yokota, K., Akino, N., Hino, R. et Kubo, S. : Turbulent drag reduction by the seal fur surface. *Phys. Fluids*, 18(065102):1–9, 2006. 48

[127] Iwamoto, K., Fukagata, K., Kasagi, N. et Suzuki, Y. : Friction drag reduction achievable by near-wall turbulence manipulation at high Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 17:011702, 2005. 199, 200

[128] Jacquin, L. : Scales in turbulent motions. *AerospaceLab*, 1, 2009. 85

[129] Jameson, A. et Turkel, E. : Implicit schemes and LU decomposition. *Math. Comp.*, 37 (156):385–397, 1981. 95

[130] Jarrin, N., Benhamadouche, S., Laurence, D. et Prosser, R. : A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 27(4):585–593, 2006. 98, 99, 260

[131] Jeong, J. et Hussain, F. : On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.*, 285:69–94, 1995. 119

[132] Jeong, J., Hussain, F., Schoppa, W. et Kim, J. : Coherent structures near the wall in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 332:185–214, 1997. 31

[133] Jiménez, J. et Moin, P. : The minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 225:213, 1991. 31, 40

[134] Jiménez, J. : On the structure and control of near wall turbulence. *Phys. Fluids*, 6:944–953, 1994. 65

[135] Jiménez, J. : Turbulent flows over rough walls. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 36:173–196, 2004. 56, 69, 70, 71, 247

[136] Jiménez, J. : Cascades in wall-bounded turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 44(1):27–45, 2012. 35, 40, 174

[137] Jiménez, J. et Pinelli, A. : The autonomous cycle of near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 389:335–359, 1999. 31, 33

[138] Jones, D. R., Schonlau, M. et Welch, W. J. : Efficient global optimization of expensive black-box. *J. Global Optim.*, 13:455–492, 1998. 211, 214, 219

[139] Jung, W.-J., Mangiavacchi, N. et Akhavan, R. : Suppression of turbulence in wall-bounded flows by high-frequency spanwise oscillations. *Phys. Fluids A*, 4(8):1605, aug 1992. 46, 72, 74, 75, 78, 79, 80

[140] von Kármán, T. : Theorie des Reibungswiderstandes [Theory of the frictional resistance]. Dans *Proceedings of the Conference on : Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs*, Hamburg, 1932. 18

[141] Karniadakis, G. E. et Choi, K.-S. : Mechanisms on transverse motions in turbulent wall flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 35:45–62, 2003. 48, 64, 74, 81, 82

[142] Kasagi, N., Suzuki, Y. et Fukagata, K. : Microelectromechanical systems-based feedback control of turbulence for skin friction reduction. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 41:231–251, 2009. 45

[143] Kim, J. : Physics and control of wall turbulence for drag reduction. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 369:1396–1411, 2011. 24, 39

[144] Kim, J., Moin, P. et Moser, R. D. : Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177:133, 1987. 31

[145] Kim, K. C. et Adrian, R. J. : Very large-scale motion in the outer layer. *Phys. Fluids*, 11 (2):417–422, 1999. 34, 35, 40

[146] Klein, M., Sadiki, A. et Janicka, J. : A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations. *J. Comp. Phys.*, 186:652–665, 2003. 98

[147] Klewicki, J. C., Fife, P. et Wei, T. : On the logarithmic mean profile. *J. Fluid Mech.*, 638:73–93, 2009. 20, 22

[148] Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. et Runstadler, P. W. : The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 30:741–773, 1967. 30

[149] Klumpp, S., Guldner, T., Meinke, M. et Schröder, W. : Riblets in a turbulent adverse-pressure gradient boundary layer. Dans *5th Flow Control Conference*, vol. 4706, 2010. 111

[150] Klumpp, S., Meinke, M. et Schröder, W. : Numerical simulation of riblet controlled spatial transition in a zero-pressure-gradient boundary layer. *Flow Turbul. Combust.*, 85(1):57–71, Jul 2010. 58

[151] Kobashi, Y. et Hayakawa, M. : Structure of a turbulent boundary layer on an oscillating flat plate. Dans *Proc. IUTAM Symposium on Unsteady Turbulent Shear Flows*, p. 67–76, 1981. 72, 74

[152] Koeltzsch, K., Dinkelacker, A. et Grundmann, R. : Flow over convergent and divergent wall riblets. *Exp. Fluids*, 33:246–350, 2002. 55, 231, 236

[153] Kolmogorov, A. N. : The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30:301–305, 1941. 85

[154] Kraichnan, R. : Diffusion by a random velocity field. *Phys. Fluids*, 13(1):22, 1970. 98

[155] Kramer, F., Grüneberger, R., Thiele, F., Wassen, E., Hage, W. et Meyer, R. : Wavy riblets for turbulent drag reduction. Dans *5th Flow Control Conference*, vol. 4583, 2010. 106, 208, 210, 223, 241

[156] Kravchenko, A. G., Choi, H. et Moin, P. : On the relation of nearwall streamwise vortices to wall skin friction in turbulent boundary layers. *Phys. Fluids A*, 5:3307, 1993. 39

[157] Krieger, K. : Do pool sharks swim faster ? *Science*, 305(5684):636–637, 2004. 48

[158] Krige, D. G. : A statistical approach to some basic mine valuation problems on the witwatersrand. Thèse de Master, University of Witwatersrand, South Africa, 1951. 211

[159] Kulandaivelu, V. : *Evolution and structure of zero pressure gradient turbulent boundary layer*. Thèse de doctorat, University of Melbourne, Australia, 2012. 36

[160] Laadhari, F., Skandaji, L. et Morel, R. : Turbulence reduction in a boundary layer by a local spanwise oscillating surface. *Phys. Fluids*, 6(10):3218, oct 1994. 74, 75, 80

[161] Labroquère, J., Duvigneau, R. et Guilmineau, E. : Impact of turbulence closures and numerical errors for the optimization of flow control devices. Dans *21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 2013. 216

[162] Launder, B. E. et Li, S. : A numerical study of riblet effects on laminar flow through a plane channel. *Appl. Sci. Res.*, 46:271–279, 1989. 50

[163] Lee, S.-J. et Jang, Y.-G. : Control of flow around a NACA 0012 airfoil with a micro-riblet film. *J. Fluid Struct.*, 20(5):659–672, 2005. 49

[164] Lee, S.-J. et Lee, S.-H. : Flow field analysis of a turbulent boundary layer over a riblet surface. *Exp. Fluids*, 30:153–166, 2001. 67, 68, 72

[165] Lee, S., Lele, S. K. et Moin, P. : Simulation of spatially evolving turbulence and the applicability of Taylor's hypothesis in compressible flow. *Phys. Fluids A*, 4(7):1521, Jul 1992. 98

[166] Lenormand, E., Sagaut, P., Ta Phuoc, L. et Comte, P. : Subgrid-scale models for large-eddy simulation of compressible wall bounded flows. *AIAA J.*, 38(8):1340–1350, 2000. 88

[167] Leschziner, M. A., Choi, H. et Choi, K.-S. : Flow-control approaches to drag reduction in aerodynamics : Progress and prospects. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 369:1349–1351, 2011. 3, 44, 45, 49

[168] Liou, M. S. : A sequel to AUSM : AUSM+. *J. Comp. Phys.*, 129:364–382, 1996. 93

[169] Luchini, P., Manzo, F. et Pozzi, A. : Resistance of a grooved surface to parallel flow and cross-flow. *J. Fluid Mech.*, 228:87–109, 1991. 47, 53, 65, 72

[170] Lumley, J. L. : Drag reduction in turbulent flow by polymer additives. *J. Polym. Sci. : Macromolecular Reviews*, 7:263–290, 1973. 61

[171] Lund, T. S., Wu, X. et Squires, K. D. : Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. *J. Comp. Phys.*, 140:233–258, 1998. 98

[172] Mansour, N. N., Kim, J. et Moin, P. : Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in turbulent channel flows. *J. Fluid Mech.*, 194:15–44, 1988. 92

[173] Martin, S. et Bhushan, B. : Fluid flow analysis of a shark-inspired microstructure. *F. Fluid Mech.*, 756:5–29, 2014. 68

[174] Marusic, I. et Perry, A. E. : A wall-wake model for the turbulence structure of boundary layers. Part 2. Further experimental support. *J. Fluid Mech.*, 298:389–407, 1995. 33

[175] Maruyama, D., Bailly, D. et Carrier, G. : High-quality mesh deformation using quaternions for orthogonality preservation. *AIAA J.*, 52(12):2712–2729, 2014. 113

[176] Mary, I. et Sagaut, P. : Large eddy simulation of flow around an airfoil near stall. *AIAA J.*, 40(6):1139, 2002. 93, 94

[177] Matheron, G. : Principles of geostatistics. *Economic Geology*, 58(8):1246–1266, 1963. 211

[178] Mathis, R., Hutchins, N. et Marusic, I. : Large-scale amplitude modulation of the small-scale structures in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 628:311–37, 2009. 32, 35

[179] McKeon, B. J., Li, J., Jiang, W., Morrison, J. F. et Smits, A. J. : Further observations on the mean velocity distribution in fully developed pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 501:135–47, 2004. 21

[180] McLean, J. D., George-Falvy, D. N. et Sullivan, P. P. : Flight-test of turbulent skin-friction reduction by riblets. Dans *Turbulent Drag Reduction by Passive Means Conference*, London, Sept. 1987. 58

[181] Mehdi, F., Johansson, T. G., White, C. M. et Naughton, J. W. : On determining wall shear stress in spatially developing two-dimensional wall-bounded flows. *Exp. Fluids*, 55:1656, 2014. 252

[182] Mehdi, F. et White, C. M. : Integral form of the skin friction coefficient suitable for experimental data. *Exp. Fluids*, 50:43–51, 2011. 252

[183] Meunier, M. : *Simulation et optimisation de systèmes hypersustentés d'avions civils équipés de dispositifs de contrôle des décollements.* Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), France, 2009. 211

[184] Min, T., Kang, S. M., Speyer, J. L. et Kim, J. : Sustained sub-laminar drag in a fully developed channel flow. *J. Fluid Mech.*, 558:309–318, 2006. 39

[185] Moin, P. : Revisiting Taylor's hypothesis. *J. Fluid Mech.*, 640:1–4, 2009. 36

[186] Moin, P. et Bewley, T. R. : Feedback control of turbulence. *Appl. Mech. Rev.*, 47(6):S3–S13, 1994. 47

[187] Moin, P. et Mahesh, K. : Direct numerical simulation : A tool in turbulence research. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30:539–578, 1998. 108

[188] Monkewitz, P. A., Chauhan, K. A. et Nagib, H. M. : Self-consistent high-Reynolds-number asymptotics for zero-pressure-gradient turbulent boundary layers. *Phys. Fluids*, 19:115101, 2007. 23

[189] Monty, J. P., Stewart, J. A., Williams, R. C. et Chong, M. S. : Large-scale features in turbulent pipe and channel flows. *J. Fluid Mech.*, 589:147–156, 2007. 12, 34

[190] Morkovin, M. V. : Effects of compressibility on turbulent flows. Dans *Mécanique de la Turbulence* (éd. Favre, A.), p. 367–380, Paris, 1962. CNRS. 104

[191] Moser, R. D., Kim, J. et Mansour, N. N. : Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $\mathrm{Re}_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, 11(4):943, apr 1999. 56

[192] Nagib, H. M., Chauhan, K. A. et Monkewitz, P. A. : Approach to an asymptotic state for zero pressure gradient turbulent boundary layer. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 365:755–770, 2007. 22, 26, 27, 121, 126

[193] Nagib, H. M., Christophorou, C. et Monkewitz, P. A. : High Reynolds number turbulent boundary layers subjected to various pressure-gradient conditions. Dans *IUTAM Symp. on One Hundred Years of Boundary Layer Research* (éds Meier, G. E. A. et Sreenivasan, K. R.), p. 383–394. DLR Göttingen, Germany, Berlin, Germany : Springer, 2004. 23, 26, 27

[194] NASA Technology Transfer Program : Space age swimsuit reduces drag, breaks records. https://spinoff.nasa.gov/Spinoff2008/ch_4.html, 2008. Consulté le 05 novembre 2015. 48

[195] Nikuradse, J. : Strömungsgesetze in Rauhen Rohren. *VDI-Forsch.*, 361, 1933. (Engl. transl. 1950. Laws of flow in rough pipes. NACA TM 1292). 69

[196] Nikuradse, J. : Turbulente reibungsschichten an der platten. *Herausgegeben von Zentr. wiss. Berichtwes. Luftfehrtforsch. München : Oldenbourg*, 1942. 26

[197] Nugroho, B., Hutchins, N. et Monty, J. P. : Large-scale spanwise periodicity in a turbulent boundary layer induced by highly ordered and directional surface roughness. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 41:90–102, 2013. 231, 238, 240

[198] Oeffner, J. et Lauder, G. V. : The hydrodynamic function of shark skin and two biomimetic applications. *J. Exp. Biol.*, 215:785–795, 2012. 48

[199] Orlandi, P. et Jiménez, J. : On the generation of turbulent wall friction. *Phys. Fluids*, 6 (2):634, 1994. 37, 39

[200] Österlund, J. M. : *Experimental studies of zero pressure-gradient turbulent boundary layer flow.* Thèse de doctorat, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1999. 23, 26, 27

[201] Pain, R. : *Simulation numérique, analyse physique et contrôle d'écoulements massivement décollés : Application au buffeting culot et à l'ovalisation de la tuyère sur des configurations de lanceur.* Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), France, 2013. 85

[202] Pamiès, M. : *Contrôle d'une couche limite turbulente au moyen d'un micro-système distribué.* Thèse de doctorat, Université de Lille 1, France, 2008. 17, 32, 36, 46, 88, 98, 99

[203] Pamiès, M., Weiss, P.-E., Garnier, E., Deck, S. et Sagaut, P. : Generation of synthetic turbulent inflow data for large-eddy simulation of spatially-evolving wall-bounded flows. *Phys. Fluids*, 21(4):045103, 2009. 98, 99, 260, 263, 264, 265, 266, 277, 278

[204] Pechier, M. : *Prévisions numériques de l'effet Magnus pour des configurations de munitions.* Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France, 1999. 95, 96

[205] Peet, Y. et Sagaut, P. : Theoretical prediction of turbulent skin friction on geometrically complex surfaces. *Phys. Fluids*, 21(10):105105, 2009. 37, 58, 59, 68, 111, 125, 208, 251, 252

[206] Peet, Y., Sagaut, P. et Charron, Y. : Turbulent drag reduction using sinusoïdal riblets with triangular cross-section. Dans *38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, num. 2008–3745, Seattle, WA, Jun. 2008. AIAA Fluid Dynamics Conference. 208, 223

[207] Peet, Y., Sagaut, P. et Charron, Y. : Pressure loss reduction in hydrogen pipelines by surface restructuring. *Int. J. Hydrogen Energy*, 34(21):8964–8973, 2009. 4, 106, 208, 210

[208] Perry, A. E. et Chong, M. S. : On the mechanism of wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 119:173–217, 1982. 33, 34

[209] Perry, A. E. et Marusic, I. : A wall-wake model for the turbulence structure of boundary layers. Part 1. Extension of the attached eddy hypothesis. *J. Fluid Mech.*, 298:361–388, 1995. 33

[210] Perry, A. E. et Joubert, P. N. : Rough wall boundary layers in adverse pressure gradients. *J. Fluid Mech.*, 17:193–211, 1963. 61

[211] Pollard, A. : Passive and active control of near-wall turbulence. *Prog. Aer. Sci.*, 33:689–708, 1997. 46

[212] Prandlt, L. : Über den reibungswiderstand stromender luft (On the frictional resistance of streaming air). *Ergeb. Aerodyn. Versuchsanst. Göttingen*, 3, 1927. 26

[213] Prandtl, L. : über flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner reibung. Dans *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904* (éd. Teubner, L.), p. 484–491, 1905. 12

[214] Priyadarshana, P. J. A. et Klewicki, J. C. : Study of the motions contributing to the Reynolds stress in high and low Reynolds number turbulent boundary layers. *Phys. Fluids*, 16(12):4586, dec 2004. 27

[215] Pulles, C. J. A., Krishna Prasad, K. et Nieuwstadt, F. T. M. : Turbulence measurements over longitudinal micro-grooved surfaces. *Appl. Sci. Res.*, 46:197–208, 1989. 47, 54, 62, 106

[216] Pulvin, P. : Riblets in internal flows with adverse pressure gradient. Dans *Third Turbulent Drag Reduction Working Party*, Paris, Sept. 1988. ONERA-Chatillon. 58

[217] Quadrio, M. et Sibilla, S. : Numerical simulation of turbulent flow in a pipe oscillating around its axis. *J. Fluid Mech.*, 424:217, 2000. 75

[218] Quadrio, M. : Drag reduction in turbulent boundary layers by in-plane wall motion. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 369:1428–1442, 2011. 74, 78

[219] Quadrio, M. et Ricco, P. : Critical assessment of turbulent drag reduction through spanwise wall oscillations. *J. Fluid Mech.*, 521:251–271, 2004. 74, 75, 76

[220] Quadrio, M., Ricco, P. et Viotti, C. : Streamwise-travelling waves of spanwise wall velocity for turbulent drag reduction. *J. Fluid Mech.*, 627:161–178, 2009. 78, 79

[221] Reif, W.-E. : Morphogenesis and function of the squamation in sharks. *Neues Jahrbuch für Geologie und Paläontologie - Abhandlungen*, 164:172–183, 1982. 48

[222] Reif, W.-E. et Dinkelacker, A. : Hydrodynamics of the squamation in fast swimming sharks. *Neues Jahrbuch für Geologie und Paläontologie - Abhandlungen*, 164:184–187, 1982. 48

[223] Renard, N. et Deck, S. : On the scale-dependent turbulent convection velocity in a spatially developing flat plate turbulent boundary layer at Reynolds number $re_\theta = 13\,000$. *J. Fluid Mech.*, 775:105–148, 2015. 36

[224] Ricco, P., Ottonelli, C., Hasegawa, Y. et Quadrio, M. : Changes in turbulent dissipation in a channel flow with oscillating walls. *J. Fluid Mech.*, 700:77–104, 2012. 74, 77, 79, 80, 81, 179, 207

[225] Robert, J.-P. : Drag reduction : An industrial challenge. Dans *Special Course on Skin Friction Drag Reduction* (éd. Cousteix, J.), AGARD Report 786, p. 2. 1992. 49

[226] Robinson, S. K. : Effects of riblets on turbulence in a supersonic boundary layer. *AIAA Paper*, 88-2526, 1988. 57

[227] Robinson, S. K. : Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 23:601–639, 1991. 30, 31, 33

[228] Sacks, J., Welch, W. J., Mitchell, T. J. et Wynn, H. P. : Design and analysis of computer experiments. *Statistical Science*, 4(4):409–435, 1989. 211, 214

[229] Sagaut, P. : *Simulations numériques d'écoulements décollés avec des modèles de sous-maille.* Thèse de doctorat, Université Paris 6, France, 1995. 89

[230] Sagaut, P. : *Large-eddy simulation for incompressible flows - An introduction.* Scientific Computation. Springer-Verlag, Berlin, 3 édn, 2005. 85, 86, 89

[231] Sagaut, P. : *Turbulence : Une introduction.* Université Pierre et Marie Curie, 2013. 7, 16, 20, 30, 31, 85

[232] Sagaut, P., Deck, S., et Larchevêque, L. : *Numerical data post-processing : From validation to physical understanding.* Von Karman Institute, Belgium, 2008. 138, 140

[233] Sagaut, P. et Deck, S. : Large eddy simulation for aerodynamics : Status and perspectives. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 367:2849–2860, 2009. 108, 118

[234] Sagaut, P., Deck, S. et Terracol, M. : *Multiscale and multiresolution approaches in turbulence.* Imperial College Press, 2006. 84

[235] Sagaut, P., Garnier, E., Tromeur, E., Larchevêque, L. et Labourasse, E. : Turbulent inflow conditions for large-eddy simulation of compressible wall-bounded flows. *AIAA J.*, 42 (3):469, 2004. 98

[236] Sagaut, P. et Troff, B. : Subgrid-scale improvement for non-homogeneous flows. Dans *First AFOSR International Conference on DNS and LES*, Ruston, USA, Aug. 4–8 1997. 90

[237] Sandham, N. D., Yao, Y. F. et Lawal, A. A. : Large-eddy simulation of transonic turbulent flow over a bump. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 24(4):584–595, 2003. 98

[238] Schlatter, P. et Örlü, R. : Assessment of direct numerical simulation data of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 659:116–126, 2010. 27, 39, 106, 108, 121, 126, 130, 134, 136, 137, 142, 177

[239] Schlatter, P., Örlü, R., Li, Q., Brethouwer, G., Fransson, J. H. M., Johansson, A. V., Alfredsson, P. H. et Henningson, D. S. : Turbulent boundary layers up to $\mathrm{Re}_\theta = 2500$ studied through simulation and experiment. *Phys. Fluids*, 21:051702, 2009. 35, 108

[240] Schlichting, H. : *Boundary-layer theory.* McGraw-Hill series in mechanical engineering. New York : Mc Graw Hill, 1979. 24, 26

[241] Schlüter, J. U., Pitsch, H. et Moin, P. : LES inflow conditions for coupling with Reynolds averaged flow solvers. *AIAA J.*, 42(3):478, 2004. 98

[242] Schoenherr, K. E. : Resistance of flat surfaces moving through a fluid. *Trans. Soc. Nav. Arch. Mar. Eng.*, p. 279–313, 1932. 26

[243] Schoppa, W. et Hussain, F. : Coherent structure generation in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 453:57–108, 2002. 33, 34

[244] Schoppa, W. et Hussain, F. : A large-scale control strategy for drag reduction in turbulent boundary layers. *Phys. Fluids*, 10(5):1049, may 1998. 231, 240

[245] Schubauer, G. B. et Skramstad, H. K. : Laminar boundary-layer oscillations and stability of laminar flow. *J. Aero. Sci.*, 14(2):69–78, 1947. 58

[246] Schultz-Grunow, F. : Neues widerstandsgesetz für glatte platten. *Luftfahrtforschung*, 17:239–246, 1940. 26

[247] Smits, A. J. et Dussauge, J.-P. : *Turbulent shear layers in supersonic flow.* Springer, 2nd édn, 2006. 104, 262

[248] Smits, A. J., Matheson, N. et Joubert, P. N. : Low-Reynolds-number turbulent boundary layers in zero and favourable pressure gradients. *J. Ship Res.*, 27:147–157, 1983. 26, 121

[249] Smits, A. J., McKeon, B. J. et Marusic, I. : High-Reynolds number wall turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 43:353–375, 2011. 29, 35

[250] Spalart, P. R. : Numerical study of sink-flow boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 172:307, 1986. 98

[251] Spalart, P. R. : Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $\mathrm{Re}_\theta = 1410$. *J. Fluid Mech.*, 187:61–98, 1988. 17, 27, 98, 106, 108, 121, 126

[252] Spalart, P. R. et McLean, J. D. : Drag reduction : Enticing turbulence, and then an industry. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 369:1556–1569, 2011. 49, 56, 200

[253] Spalart, P. R., Strelets, M. et Travin, A. : Direct numerical simulation of large-eddy-break-up devices in a boundary layer. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 27(5):902–910, 2006. 98

[254] Squire, L. C. et Savill, A. M. : Drag measurements on planar riblet surfaces at high subsonic speeds. *Appl. Sci. Res.*, 46:229–243, 1989. 51, 56, 57, 182

[255] Squire, L. C., Sebastian, W. et Savill, A. M. : Effect of varying pressure gradients on 3M V-groove performance at high subsonic Mach numbers. Dans *Third Turbulent Drag Reduction Working Party*, Paris, Sept. 1988. ONERA-Chatillon. 58

[256] Sreenivasan, K. R. et Sahay, A. : *Self-sustaining mechanisms of wall turbulence*, vol. 15 de *Advances in Fluid Mechanics Series*, chap. The persistence of viscous effects in the overlap region and the mean velocity in turbulent pipe and channel flows, p. 253–272. Southampton, UK, computational mechanical publications édn, 1997. 22

[257] Stenzel, V., Wilke, Y. et Hage, W. : Drag-reducing paints for the reduction of fuel consumption in aviation and shipping. *Prog. Org. Coat.*, 70:224–229, 2011. 48, 49

[258] Strand, J. S. et Goldstein, D. B. : Direct numerical simulations of riblets to constrain the growth of turbulent spots. *J. Fluid Mech.*, 668:267–292, 2011. 58

[259] Szodruch, J. : Viscous drag reduction on transport aircraft. Dans *29th Aerospace Sciences Meeting*, vol. 91-685, Reno, 7-10 janvier 1991. 49

[260] Tani, I. : Drag reduction by riblet viewed as roughness problem. *Proc. Japan Acad.*, 64(B):21–24, 1988. 70

[261] Tennekes, H. et Lumley, J. L. : *A first cours in turbulence*. MIT Press, 1972. 7

[262] Theodorsen, T. : Mechanism of turbulence. Dans *Proceedings of the Second Midwestern Conference on Fluid Mechanics*, p. 1–16. Ohio State University, 1952. 33

[263] Thomas, A. S. W. et Bull, M. K. : On the role of wall-pressure fluctuations in deterministic motions in the turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 128(283), 1983. 36

[264] Tollmien, W. : The production of turbulence. Technical Memorandum 609, NACA, 1931. 58

[265] Tomkins, C. D. et Adrian, R. J. : Spanwise structure and scale growth in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 490:37–74, 2003. 34, 35, 40

[266] Touber, E. et Leschziner, M. A. : Near-wall streak modification by spanwise oscillatory wall motion and drag-reduction mechanisms. *J. Fluid Mech.*, 693:150–200, 2012. 79, 80

[267] Townsend, A. A. : *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge University Press, 2nd édn, 1976. 21, 33, 34

[268] Tromeur, E. : *Simulations numériques des effets aéro-optiques pour les écoulements turbulents compressibles*. Thèse de doctorat, Université de Paris Nord, France, 2004. 98

[269] Trujillo, S. M., Bogard, D. G. et Ball, K. S. : Turbulent boundary layer drag reduction using an oscillating wall. *AIAA Paper*, 97-1870, 1997. 75

[270] Tutkun, M., George, W. K., Delville, J., Stanislas, M., Johansson, P. B. V., Foucaut, J.-M. et Coudert, S. : Two-point correlations in high Reynolds number flat plate turbulent boundary layers. *J. Turbul.*, 10:1–23, 2009. 34, 35

[271] Van Leer, B. : Towards the ultimate conservative differencing scheme V : A second-order sequel to Godounov's method. *J. Comp. Phys.*, 32:101–136, 1979. 92

[272] Vasilyev, O. V., Lund, T. S. et Moin, P. : A general class of commutative filters for LES in complex geometries. *J. Comp. Phys.*, 146:82–104, 1998. 88

[273] Viotti, C., Quadrio, M. et Luchini, P. : Streamwise oscillation of spanwise velocity at the wall of a channel for turbulent drag reduction. *Phys. Fluids*, 21(115109), 2009. 36, 78

[274] Viswanath, P. R. : Aircraft viscous drag reduction using riblets. *Prog. Aer. Sci.*, 38:571–600, 2002. 49, 55, 57, 59

[275] Vreman, B. : *Direct and large-eddy simulation of the compressible turbulent mixing layer*. Thèse de doctorat, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 1995. 88, 90

[276] Waleffe, F. : On a self-sustaining process in shear flows. *Phys. Fluids*, 9(4):883, apr 1997. 33

[277] Walsh, M. J. : Turbulent boundary layer drag reduction using riblets. *AIAA Paper*, 82-0169, 1982. 47, 55, 62

[278] Walsh, M. J. : Riblets as a viscous drag reduction technique. *AIAA J.*, 21(4):485–486, 1983. 47

[279] Walsh, M. J. : Effect of detailed surface geometry on riblet drag reduction performance. *J. Aircraft*, 27(6):572–573, 1990. 55

[280] Walsh, M. J. : Riblets. Dans *Viscous Drag Reduction in Boundary Layers* (éds Bushnell, D. M. et Hefner, J. N.), p. 203–261. AIAA, 1990. 48, 50, 55, 58

[281] Walsh, M. J. et Lindemann, A. M. : Optimization and application of riblets for turbulent drag reduction. *AIAA Paper*, 84-0347, 1984. 47, 51, 55, 56

[282] Walsh, M. J. et Weinstein, L. M. : Drag and heat transfer on surfaces with small longitudinal fins. *AIAA Paper*, 78-1161, 1978. 47, 50, 106

[283] Weiss, P.-E. et Deck, S. : On the coupling of a zonal body-fitted/immersed boundary method with ZDES : Application to the interactions in a full space launcher afterbody flow. Dans *4th International Conference on Turbulence and Interactions*, Corsica, France, Nov. 2015. 118

[284] Welch, P. D. : The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra : A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, AU-15(2):70–73, 1967. 137

[285] White, F. M. : *Viscous fluid flow*. New York, 3rd édn, 2006. 26

[286] Wilcox, D. C. : *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., La cañada, California, 1993. 29

[287] Wu, X. et Moin, P. : Direct numerical simulation of turbulence in a nominally zero-pressure-gradient flat-plate boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 630:5–41, 2009. 33, 39, 108, 109

[288] Yee, H. C. : Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications. *J. Comp. Phys.*, 68:151–179, 1987. 95

[289] Zagarola, M. V. et Smits, A. J. : Mean-flow scaling of turbulent pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 373:33–79, 1998. 22

[290] Zanoun, E.-S., Durst, F. et M., H. : Evaluating the law of the wall in two-dimensional fully developed turbulent channel flows. *Phys. Fluids*, 15:3079–89, 2003. 21

[291] Zhang, D., Li, Y., Han, X., Li, X. et Chen, H. : High-precision bio-replication of synthetic drag reduction shark skin. *Chinese Sci. Bull.*, 56(9):938–944, 2011. 48

[292] Zhou, J., Adrian, R. J., Balachandar, S. et Kendall, T. M. : Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow. *J. Fluid Mech.*, 387:353–396, 1999. 33

[293] Zuniga, F. A., Anderson, B. T. et Bertelrud, A. : *Flight test results of riblets at supersonic speeds*, vol. 4387. National Aeronautics and Space Administration, 1992. 49, 57

Contrôle de la traînée de frottement d'une couche limite turbulente au moyen de revêtements rainurés de type riblets

Motivée par les contraintes économiques et les exigences environnementales, l'industrie du transport tente de réduire ses dépenses énergétiques. Elle concentre notamment ses efforts sur la traînée de frottement. Bien que d'origine visqueuse, celle-ci est fortement amplifiée par les mouvements turbulents. La capacité à manipuler les fluctuations turbulentes, complexes et chaotiques, offre alors des perspectives de gain énergétique substantiel, mais nécessite une bonne compréhension des phénomènes physiques.
Parmi les stratégies de contrôle les plus prometteuses, l'utilisation de revêtements rainurés, nommés riblets, est étudiée dans ce mémoire. Bien que leur capacité de réduction de frottement soit connue depuis plusieurs décennies, les mécanismes par lesquels ils interagissent avec la turbulence restent à préciser. À ces fins, une méthode pour leur simulation numérique est mise au point. En redéfinissant la position de l'origine virtuelle, c'est-à-dire de la paroi plane équivalente, une forte similitude est établie entre les écoulements contrôlé et canonique. D'un point de vue applicatif, cela permet notamment de quantifier les performances de réduction de traînée atteignables à haut nombre de Reynolds.
Enfin, le potentiel a priori prometteur des riblets tridimensionnels est exploré. En s'appuyant sur les rares résultats précurseurs de la littérature, il s'agit de proposer une géométrie industriellement réalisable optimale en termes de réduction de traînée. Pour chacune des géométries novatrices testées, les simulations révèlent avec finesse que les éventuels bénéfices sur le frottement sont systématiquement surpassés par l'influence délétère des efforts de pression.

Mots-clés : SIMULATION DES GRANDES ECHELLES ; SIMULATION NUMERIQUE DIRECTE ; COUCHE LIMITE TURBULENTE ; CONTROLE DES ECOULEMENTS ; REDUCTION DE TRAINEE

Control of turbulent boundary-layer for skin-friction drag reduction by means of riblets coating

Economical constrains and environmental requirements lead the transportation industry to progress towards energy expenditure reduction. Efforts are especially focused on the skin-friction drag. Friction drag, while due to viscosity, is greatly amplified by turbulent motions. The ability to manipulate the complex and chaotic near-wall turbulent fluctuations thus offers prospects for substantial energy saving, but also requires a solid understanding of the physical phenomena.
Among the most promising control strategies, the present manuscript focuses on riblet-covered surfaces.
Even though their drag-reducing capability has been observed from decades, the mechanisms by which they interact with the near-wall turbulent motions still need to be clarified. Towards these ends, a numerical method for ensuring their proper simulation is developed. The virtual origin—interpreted as the equivalent flat wall location—is redefined, which highlights a strong similarity between the controlled and the canonical flows. As a practical interest, this similarity enables an improved evaluation of the drag reduction capabilities achievable at high Reynolds numbers.
Additionally, the promising potential for three-dimensional riblets is examined. Based on the scattered precursory results of the literature, we intend to come up with a design which demonstrates optimal drag reduction capabilities under the constraint of industrial feasibility. For each of the prospected innovative designs, the numerical simulations accurately reveal that the potential profit on skin-friction is consistently exceeded by the harmful influence of pressure stresses.

Keywords : LARGE EDDY SIMULATION ; DIRECT NUMERICAL SIMULATION ; TURBULENT BOUNDARY LAYER ; FLOW CONTROL ; DRAG REDUCTION

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales
8 rue des Vertugadins
92190 MEUDON
Tél. : +33 1 46 23 50 50
http://www.onera.fr