



**HAL**  
open science

# ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, ÉQUATIONS NON-LOCALES ET CONTRÔLE OPTIMAL DÉTERMINISTE.

Emmanuel Chasseigne

► **To cite this version:**

Emmanuel Chasseigne. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, ÉQUATIONS NON-LOCALES ET CONTRÔLE OPTIMAL DÉTERMINISTE.. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université François Rabelais - Tours, 2014. tel-01411482

**HAL Id: tel-01411482**

**<https://hal.science/tel-01411482>**

Submitted on 7 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES

Discipline : **Mathématiques**

« **Équations aux dérivées partielles, équations non-locales  
et contrôle optimal déterministe** »

présentée et soutenue publiquement le 31 Octobre 2014 par

EMMANUEL CHASSEIGNE

**RAPPORTEURS :**

M. XAVIER CABRÉ	Professeur	Université Polytechnique de Catalogne, Espagne
M. PIERRE CARDALIAGUET	Professeur des universités	Université de Paris-Dauphine
M. JULIO D. ROSSI	Professeur	Université de Buenos Aires, Argentine

**COMPOSITION DU JURY :**

M. GUY BARLES	Professeur des universités	Université F. Rabelais - Tours
M. PIERRE CARDALIAGUET	Professeur des universités	Université de Paris-Dauphine
M. ALESSIO PORRETTA	Professeur	Université de Rome "Tor Vergata", Italie
M. JULIO D. ROSSI	Professeur	Université de Buenos Aires, Argentine
M. LAURENT VÉRON	Professeur des universités	Université F. Rabelais - Tours





Lame importante du Tarot de Marseille, le mat symbolise le parcours propre à chacun, s'effectuant parfois en dehors des conventions et usages habituels. De là il tire sans doute son nom : *mat*, *matto*, *mad*, que l'on retrouve également dans la version française sous le terme « *fou* » ou encore « *le fol* » (*the fool*, en anglais). Seul arcanes majeurs ne portant pas de numéro, le mat représente à la fois le terme d'un cheminement, et son renouvellement à travers le départ pour un nouveau cycle. Le baluchon accompagnant le marcheur symbolise l'essentiel de la moisson du cycle précédent.

Rédiger son mémoire d'habilitation une bonne douzaine d'années après la thèse n'est pas si courant ; le commencer par l'évocation du *fol* ne l'est sans doute pas plus. Il n'est cependant pas question ici de se singulariser, juste d'assumer le cheminement qui a été le mien depuis mes années de thèse. En particulier, il m'aura fallu du temps, beaucoup plus de temps qu'à d'autres pour me sentir en mesure de prendre un peu de recul par rapport aux travaux auxquels j'ai participé. Et j'avoue avec humilité ne pas tenir cela pour une évidence, aujourd'hui encore plus qu'hier.

La forme de ce mémoire ne suit pas non plus la logique couramment utilisée, à savoir : définitions, énoncés de théorèmes, (éléments de) preuves. Il a fallu faire des choix pour résumer en un mémoire douze années de travaux variés. Mais si l'adage dit que *choisir, c'est renoncer*, ce n'est pas ainsi que je vois les choses, car j'assume de ne pas avoir cherché à faire des pages qui suivent un recueil technique.

Le hasard, qui fait bien bien les choses, a voulu que la date de la soutenance tombe pendant la semaine de la *samhain*. Moment qui convient parfaitement puisqu'il marque à la fois une pause symbolique avant l'entrée de l'hiver et donc également un franchissement entre deux cycles.

*Quelque part entre un chêne et un érable,  
Équinoxe d'automne 2014.*

**Remerciements .**

*A tout seigneur, tout honneur.* Je souhaiterais commencer par présenter mes plus sincères remerciements à Monsieur Guy Barles. Si son rôle de référant s'est en particulier incarné de façon autoritaire dans le fait de graver dans mon tableau la mention « *passé ton HDR d'abord!* », c'est avant tout le collègue, le collaborateur et l'ami que je souhaiterais remercier chaleureusement ici. Ce mémoire ainsi qu'une grande partie des travaux qui le constituent n'auraient certainement pas vus le jour sans son aide précieuse, sa patience, sa volonté de partage et son enthousiasme de chaque instant. Par ailleurs, nos échanges quotidiens, nos *debriefings* footballistiques hebdomadaires et nos fou-rires sont autant de moments qui rendent la vie agréable, au-delà des maths que nous faisons.

J'aimerais remercier M. Pierre Cardaliaguet d'avoir accepté de faire un rapport sur mon mémoire. Je me souviens d'une discussion il y a plusieurs années de cela dans mon bureau où je t'expliquais, cher Pierre, que je ne souhaitais pas présenter d'habilitation. Heureusement (ou pas), les gens changent. Ils en ont le droit, et sans doute même le devoir.

Un grand merci à M. Xavier Cabré d'avoir également accepté ce travail de rapporteur. Cher Xavier, il est dommage que tu n'aies pu être des nôtres le jour de la soutenance, c'eût été un grand plaisir que de partager ce moment avec toi.

Cher Julio, tu es d'une certaine façon à l'origine de ce mémoire : c'est en discutant avec toi (et Manuela, que je n'oublie pas), que j'ai commencé à m'intéresser aux équations non-locales, en 2005. Un article, et un nouveau départ pour moi qui allait conditionner une grande partie de ce qui est contenu dans les pages qui suivent. Curieusement, nous n'avons jamais recollaboré par la suite jusque très récemment, et de façon indirecte. C'est un immense plaisir que tu aies accepté toi aussi d'être rapporteur de mes travaux.

Alessio Porretta me fait l'honneur d'être membre de mon jury et c'est une grande joie de le compter parmi nous pour ma soutenance. Si elles sont malheureusement trop rares, nos discussions constituent toujours des moments que je tiens pour agréables et enrichissants.

Laurent Véron a été un directeur de thèse très présent et attentionné, j'ai donc naturellement plaisir à présenter ce mémoire devant lui. Je lui dois, entre autres choses, de m'avoir transmis des outils fondamentaux me permettant d'appréhender les directions de recherche différentes qui ont suivi mon doctorat. Cher Laurent, merci d'avoir accepté d'être membre de mon jury d'habilitation.

On le voit sur la représentation de l'arcane, même si son parcours lui appartient le *fol* ne chemine pas seul. Il serait délicat et risqué de vouloir établir ici une liste exhaustive des amis et connaissances, des rencontres qui pendant une douzaine d'années ont influencé ce parcours sous une forme ou une autre. C'est même tout simplement impossible dans

l'optique de garder à ce mémoire une taille raisonnable.

Il me tient à cœur néanmoins de remercier nommément mes collaborateurs, celles et ceux avec qui j'ai pris plaisir à apprendre et à faire des maths, et qui sont naturellement associés aux travaux que j'évoque. À commencer par Juan-Luis Vázquez auprès de qui j'ai passé les derniers mois de ma thèse à tenter de m'approprier un peu de son savoir sur les milieux poreux et la diffusion rapide.

C'est grâce à ce séjour que j'ai pu rencontrer notamment mon ami Raúl et sa compagne Ana, qui sont pour moi comme des parents d'adoption à chacun de mes séjours en terre hispanique depuis lors. Manuela et Manolo sont aussi dans mes pensées en cet instant, même si cela fait (trop) longtemps que nous nous sommes retrouvés à partager un moment ensemble.

Merci Arturo, merci Fernando pour les échanges toujours sympathiques et intéressants à chacune de mes visites. Un jour peut-être, quand nous aurons retrouvé le temps de faire les choses, ferons-nous ce livre dont nous avons rêvé. Ou peut-être le ferez vous sans moi, et je suis certain qu'il sera une réussite.

Cyril porte une responsabilité non négligeable dans ma conversion aux solutions de viscosité. Ce fut difficile au début (et aujourd'hui encore), mais cela en valait la peine. Je pense aussi volontiers à Olivier puis Adina qui a fièrement pris la relève ; je vous remercie tous les trois pour avoir été une stimulation m'incitant à aller au-delà de ma *comfort zone*.

Même si elle s'est parfois plainte de l'étudiant pinailleur (pour ne pas dire autre chose) que j'étais, travailler avec Christine c'est aussi l'assurance d'éclats de rire aux accents du soleil.

Grâce à Espen j'ai pu vivre ce qu'on peut appeler de vraies "nuits blanches". C'est toujours un plaisir que de lui rendre visite et faire des maths dans un pays où le temps est une donnée clairement non-linéaire !

Ariela, en plus d'être une compagne de bureau toujours agréable, m'a elle aussi fait sortir de ma zone de confort en m'amenant à aborder la théorie du contrôle dont je n'imaginai pas au début qu'elle me plairait autant.

Erwin et Silvia sont des collaborateurs plus récents mais dont j'ai énormément apprécié l'enthousiasme dans nos échanges. Je vous souhaite une très belle carrière, vous le méritez.

Enfin, de très grands mercis, Cristina, pour les moments passés en ta compagnie à mélanger les maths et les discussions sur tout et n'importe quoi, autour d'une bière, d'un café, d'un voyage ou au détour d'une messagerie.

Je souhaite avoir encore la chance de croiser vos routes à toutes et tous pendant de

nombreuses années.

Le Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique est un lieu particulier, plein de vie, dans lequel il fait bon travailler même si nous râtons parfois : le français se doit de se plaindre de temps en temps, c'est une question de fierté et de génétique.

Merci à l'ensemble des collègues que je côtoie au fil des jours qui passent, en particulier à ceux qui, récemment arrivés, continuent de nourrir cette bonne ambiance. Merci également aux secrétaires, bibliothécaires et techniciens du moment présent et des jours passés. En plus d'être une aide précieuse dans notre travail au quotidien, vous représentez aussi un ancrage dans la réalité lorsque parfois nos délires de matheux nous emportent un peu loin.

Le métier de mathématicien, comme tout métier a ses particularités. Même si à titre personnel j'ai de plus en plus de plaisir à me pencher sur un article au milieu du bruit des arbres dans un parc, ou dans l'activité de fourmilière d'un café, il est facile de s'enfermer dans son bureau et s'adonner à ses recherches en restant dans un monde purement imaginaire. C'est aussi un métier qu'il n'est pas facile d'expliquer (en dehors de sa partie d'enseignement). Au fond, il est bien connu que  $2+2=5$ , donc que reste-t-il d'autre à prouver, à part que  $4=5$  ?

Pour ces raisons, il ne serait ni correct ni juste de terminer ces remerciements sans un mot pour les amis proches et la famille. Même si je ne sais pas toujours l'exprimer, j'ai une reconnaissance immense pour le fait que vous acceptiez mes choix même s'ils ne sont pas toujours évidents à suivre, et que malgré cela vous soyez toujours présents.



# AVANT-PROPOS

---

Ce mémoire compile l'ensemble des travaux que j'ai réalisés depuis la thèse soutenue en Décembre 2000, soit environ une douzaine d'années. Dans les grandes lignes, il suit peu ou prou l'ordre chronologie de mes recherches, que l'on peut diviser en quatre périodes dont la première va de 2000 à 2004, durant laquelle j'ai poursuivi des travaux découlant naturellement de (ou reliés à) ma thèse. Il s'agit des travaux référencés de [18] à [26]. J'ai opté pour ne pas exposer ces travaux dans ce mémoire, afin de lui préserver une cohérence d'une part ; d'autre part pour mettre plutôt en évidence les lignes de recherches nouvelles, différentes de ma thèse.

A partir de 2005, je me suis consacré à une ligne de recherche différente, concernant les équations intégro-différentielles. D'abord en considérant des équations avec des termes de convolution ; puis très vite en abordant également des équations avec termes plus singuliers (de type Lévy et Lévy-Itô). Les publications en résultant sont développées dans les parties A. et B. de ce mémoire, respectivement. Il s'agit d'axes de recherche encore d'actualité au moment où j'écris ces lignes.

Plus récemment, en 2011, j'ai commencé l'étude d'un autre thème de recherche totalement nouveau pour moi : la théorie du contrôle déterministe, en présence de dynamiques discontinues. Les travaux qui en découlent sont exposés en partie C.

Ce document ne vise pas à se substituer aux articles et travaux qu'il décrit. On n'y trouvera donc pas d'énoncés de théorèmes précis, ni de démonstrations détaillées de ceux-ci. Il est conçu comme un guide de lecture, voire comme un grimoire (!), expliquant dans les grandes lignes les approches suivies, les outils employés et les résultats obtenus.

De nombreuses notes viennent se greffer sur fil de la lecture, repérées par une lettre entre parenthèses en exposant. Elles sont regroupées en fin de mémoire dans la partie Annexe 1. Comme ce mémoire recoupe plusieurs thème et théories variées, il m'a semblé utile de faire des ébauches de certains concepts de base, qui n'auraient pas eu leur place dans le texte principal. J'assume le coté parfois naïf ou basique de ces notes, qui seront pour la plupart surtout utiles au lecteur non spécialiste.

Concernant la bibliographie, les simples numéros notés entre crochet [Num] renvoient à mes travaux listés en Annexe 2 et 3, alors que la notation [NomAnnée] renvoie à la bibliographie générale, *cf.* Annexe 4.



Les résultats exposés ont été réalisés dans le cadre de plusieurs projets scientifiques :

- *Ecuaciones en derivadas parciales no lineales : difusión, explosión y fronteras libres*, MTM2005-08760-C02-02 Spain, 01/01/2005 – 31/12/2008.
- *Ecuaciones de difusión no lineal : problemas locales y no locales* MTM2011-25287 Spain, 01/01/2012 – 31/12/2014.
- *ANR HJnet, Hamilton-Jacobi equations on heterogeneous structures and networks* ANR-12-BS01-0008-01, 01/2013 – 12/2015.
- *ANR WKBHJ, Weak KAM beyond Hamilton-Jacobi* ANR-12-BS01-0020, 12/2012 – 12/2015



# TABLES DES MATIÈRES

---

<b>A. – EQUATION NON-LOCALES DE TYPE CONVOLUTION</b>	<b>11</b>
1. Introduction . . . . .	12
2. Asymptotique pour l'équation de la chaleur non-locale . . . . .	13
3. Grandes déviations . . . . .	15
4. Données optimales . . . . .	17
5. Isothermalisation . . . . .	19
6. Problème de Stefan non-local . . . . .	21
<b>B. – EQUATION NON-LOCALES DE TYPE LÉVY</b>	<b>27</b>
1. Introduction . . . . .	28
2. Solutions de viscosité pour les problèmes non-locaux . . . . .	30
3. Problème de Dirichlet . . . . .	31
4. Régularité . . . . .	32
5. Problème de Neumann . . . . .	36
6. Comportement en temps long . . . . .	40
<b>C. – CONTRÔLE DÉTERMINISTE AVEC DYNAMIQUES DISCONTINUES</b>	<b>43</b>
1. Contrôle et edp ; position du problème . . . . .	44
2. Discontinuités de codimension un . . . . .	46
3. Extensions . . . . .	51
4. Homogénéisation . . . . .	54
5. Exemples explicites en dimension un . . . . .	58
<b>D. – ANNEXES</b>	<b>61</b>
1. Notes . . . . .	61
2. Publications depuis la thèse . . . . .	72
3. Travaux réalisés pendant la thèse . . . . .	74
4. Bibliographie générale . . . . .	74
5. Index et notations . . . . .	80



# EQUATIONS NON-LOCALES

---

*Termes de type convolution*



Dans ce chapitre, je présente mes travaux sur des équations avec terme de convolution  $J*u$ , où  $J$  est un noyau “sympathique”. On traitera en particulier de l’équation de la chaleur, de grandes déviations, du phénomène d’isothermalisation et du problème de Stefan. On parle de diffusion *non-locale* car le terme de convolution implique les valeurs de la solution  $u$  a des points autres que le point courant, au même instant.

Les questions naturelles concernent le fait de savoir ce qui change entre les versions locales (classiques) des équations et leurs équivalents non-locaux. Pour un certain nombre de propriétés, on retrouve des résultats similaires mais avec quelques variantes d’intérêt. Pour illustrer ce propos par un exemple : la condition de croissance optimale des données initiales pour l’équation de la chaleur, en  $\exp(x^2)$  est remplacée par une condition un peu moins forte :  $\exp(x \ln x)$ .

La traduction en terme de probabilités fait intervenir des processus de Poisson composés, qui sont des prototypes de processus de Lévy (*cf.* chapitre suivant).

EQUATION DE LA CHALEUR NON-LOCALE

GRANDES DÉVIATIONS

ISOTHERMALISATION

PROBLÈME DE STEFAN NON-LOCAL

## 1. INTRODUCTION

---

**Non-local** — Le monde du non-local est assez vaste, il est impossible d'en faire le tour ici. On se contentera de dire que l'on parle d'une équation non-locale lorsque cette équation fait intervenir la valeur de la fonction solution à des points différents de l'espace, au même instant. Un exemple simplissime d'équation non-locale est le suivant (la fonction  $f$  étant donnée et  $u$  l'inconnue) :  $u(x) + u(-x) = f(x)$ , qui fait intervenir la valeur de  $u$  en  $x$  mais aussi au point  $(-x)$ . Plus généralement, on peut envisager une moyenne des valeurs des points dans un voisinage plus ou moins grand autour de  $x$  (le point de référence), dans ce cas on s'intéresse donc à des termes du genre

$$(J * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)u(y) dy,$$

où  $J$  est une densité de probabilité, *i.e.* c'est une fonction positive au sens large, intégrable et d'intégrale égale à 1.

**Généralisations du laplacien** — Il existe de nombreuses généralisations de l'opérateur laplacien  $(-\Delta)$ , parmi lesquelles  $-\text{Tr}(a(x)D^2u)$  et  $-\text{div}(a(x,u,Du)Du)$  pour n'en citer que les plus connues dans le monde des équations aux dérivées partielles (raccourci en « edp », dans la suite). L'opérateur non-local  $T[u](x) := (J * u)(x) - u(x)$  en est également une généralisation particulièrement intéressante.

L'idée est de faire la balance entre la valeur moyenne de la fonction  $u$  autour du point  $x$  (pondérée par la densité de probabilité  $J$ ) et la valeur de  $u$  en ce point, ce qui au final n'est rien d'autre que ce que fait le laplacien dans une version infinitésimale. Du reste, il est facile de voir que lorsqu'on concentre le noyau  $J$  vers la masse de Dirac au point  $x = 0$ , on obtient à la limite le laplacien (à condition de prendre un noyau possédant un moment d'ordre 2, et de moyenne nulle) : par exemple en dimension  $N = 1$ , si  $u$  est régulière alors un simple développement de Taylor donne immédiatement

$$T[u](x) = \int_{\mathbb{R}} J(x-y)[u(y) - u(x)] dy = u''(x) \frac{m_2}{2} + \text{reste},$$

où le reste tend vers zéro quand  $J$  se concentre vers la masse de Dirac,  $m_2$  étant le moment d'ordre 2 du noyau  $J$ .

Il est possible de faire d'autres généralisations non-locales du laplacien : à partir de la version probabiliste (processus de Lévy), en prenant une racine d'opérateur positif, à partir de la transformée de Fourier etc. (*cf.* chapitre suivant).

**Processus de Poisson composé** — L'opérateur  $T[u]$  ci-dessus apparaît également dans un contexte probabiliste puisqu'il est le générateur infinitésimal du semi-groupe associé au processus de Poisson composé, faisant partie des processus de Lévy sur lesquels nous reviendrons dans la partie B.

Le processus de Poisson composé est un processus de saut càdlàg<sup>(a)</sup> qui se définit comme suit : on considère d'abord pour tout  $t \geq 0$  une variable  $N_t$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$  (on prendra  $\lambda = 1$  pour simplifier ici) et qui compte le nombre de sauts effectués dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Puis, on se donne une suite de variables aléatoires  $(Y_i)$  indépendantes (entre elles et de  $N_t$ ) qui suivent une même loi  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^N$ .

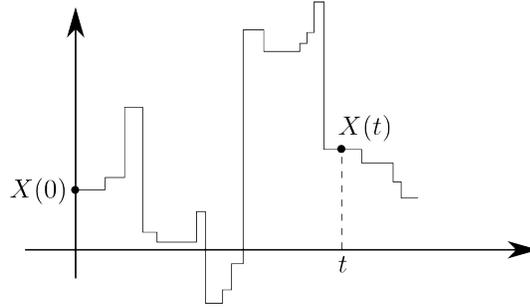


FIGURE 1.1 – Poisson composé.

Le processus de Poisson composé partant d'un état initial  $X_0$  s'écrit donc

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \sum_{i=1}^{N_t(\omega)} Y_i(\omega).$$

Un calcul classique de la fonction caractéristique de  $X_t$  conduit à  $\mathbb{E}[e^{iX_t}] = \exp [t(\hat{\mu}(\xi) - 1)]$ . Il s'agit d'un exemple typique de processus de Markov dont on peut calculer le générateur infinitésimal<sup>(b)</sup> :  $\mathcal{A}f = \mu * f - f$ . Si la mesure  $\mu$  est à densité, on retrouve l'opérateur  $T[u]$ .

## 2. ASYMPTOTIQUE POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR NON-LOCALE

Dans [17], nous étudions le comportement en temps long de l'équation

$$(1.1) \quad u_t = J * u - u, \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, \infty),$$

en fonction des hypothèses que l'on met sur le noyau  $J$  (support compact ou décroissance à l'infini). Dans le cas par exemple où le noyau est à support compact, on retrouve un comportement asymptotique identique à celui de l'équation de la chaleur :  $u(x, t) = O(t^{-N/2})$  et plus précisément

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| t^{N/2} u(xt^{N/2}, t) - \|u_0\|_1 G(x) \right| = 0,$$

où  $G(\cdot)$  est une gaussienne, qui est donc multipliée par la norme dans  $L^1$  de la donnée initiale. En réalité, pour que ce résultat soit valable, il suffit que le noyau soit de moyenne nulle et qu'il possède un moment d'ordre 2.

Les résultats sont en fait plus généraux, et le comportement asymptotique dépend de la queue du noyau  $J$ . Dans le cas d'un noyau n'ayant pas de moment d'ordre 2, la discussion se fait sur le comportement de la transformée de Fourier  $\hat{J}(\cdot)$  de  $J$  pour les basses fréquences. Plus précisément, s'il existe  $\alpha \in (0, 2)$  tel que  $\hat{J}(\xi) = 1 - A|\xi|^\alpha + o(|\xi|^\alpha)$ , alors le comportement asymptotique est donné par

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{N/\alpha} \sup_x |u(x, t) - v(x, t)| = 0$$

où  $v$  est la solution de l'équation  $v_t = -(-\Delta)^{\alpha/2}v$ , avec donnée initiale  $v(0) = u_0$  (on renvoie au chapitre suivant pour la définition du laplacien fractionnaire,  $(-\Delta)^{\alpha/2}$ ).

On voit donc que l'effet de « localisation » n'a lieu que si la queue de  $J$  est suffisamment petite (c'est le cas des noyaux à support compacts, à décroissance exponentielle etc. ). Dans le cas  $\alpha < 2$ , le comportement asymptotique n'est plus donné par une solution d'une équation locale, mais d'un laplacien fractionnaire.

L'idée de la preuve est d'utiliser la transformation de Fourier en séparant les basses fréquences des hautes fréquences. On a la solution explicite

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{(\hat{J}(\xi)-1)t} \hat{u}_0$$

et comme  $J$  est une densité de probabilité,  $\hat{J}(\xi) \rightarrow 0$  lorsque  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Ainsi, les hautes fréquences (en fait, celles qui ne sont pas trop proches de zéro) sont amoindries exponentiellement vite : pour tout  $|\xi| \geq \eta > 0$ , il existe  $\delta(\eta) > 0$  tel que

$$\left| e^{(\hat{J}(\xi)-1)t} \right| \leq e^{-\delta t}.$$

D'autre part, pour  $|\xi| \ll 1$ , on utilise le développement limité de  $\hat{J}$  qui donne le comportement essentiel. Il faut évidemment bien recoller ces deux régions, en choisissant des zones de fréquences qui dépendent du temps :  $\{|\xi| \leq c(t)\}$  et  $\{|\xi| > c(t)\}$  où en  $c(t) \rightarrow 0$  d'une façon spécifique en fonction de  $\alpha$ . Il suffit ensuite de revenir aux variables d'origine par transformation de Fourier inverse.

A noter que d'autres échelles sont possibles : nous avons également donné dans [17] l'asymptotique dans le cas d'une correction logarithmique :  $\hat{J}(\xi) \sim 1 + |\xi|^2 \ln |\xi|$ , dans lequel on retrouve le phénomène de localisation, mais l'équation de la chaleur locale doit être « lue » à une vitesse différente :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t \ln t)^{N/2} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| u(x, t) - v(x, t \ln t) \right| = 0,$$

où  $v$  est la solution de  $v_t = (1/2)\Delta v$  avec donnée initiale  $v(0) = u_0$ .

**Problèmes de Dirichlet et Neumann** — Toujours dans [17], nous avons également donné l'asymptotique des problèmes dans un ouvert. La première chose consiste à bien définir ce qu'est le problème de Dirichlet et de Neumann puisque dans un cadre non-local, il ne suffit pas de déterminer ce qui se passe sur le bord (topologique) de l'ouvert. En effet, l'équation

va *a priori* « voir » ce qui se passe au moins dans un voisinage à l'extérieur de ce bord, si ce n'est dans l'espace tout entier.

Le problème de Dirichlet homogène peut être défini à partir de l'opérateur suivant :

$$T_D[u](x) := \int_{\Omega} J(x-y)u(y) dy - u(x),$$

ce qui revient à poser  $u = 0$  en dehors de  $\Omega$ . Evidemment, si l'on considère le problème d'évolution associé, la masse totale ne peut que décroître puisque le noyau n'est pas intégré en totalité. Cette décroissance de la masse est également caractéristique d'un problème de Dirichlet homogène dans le cas local, où elle a lieu de façon exponentielle avec un taux relié à la première valeur propre du laplacien dans l'ouvert en question.

Ici aussi, on démontre qu'on peut définir une première valeur propre dont l'expression est donnée par minimisation d'une fonctionnelle d'énergie :

$$\lambda_1 = \inf_{u \in L^2(\Omega)} \frac{\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y) |u(x) - u(y)|^2 dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx} > 0$$

et on obtient une décroissance exponentielle : pour tout  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , la solution décroît exponentiellement vite dans  $L^2(\Omega)$  :  $\|u(\cdot, t)\|_2 \leq \|u_0\|_2 e^{-\lambda_1 t}$ . De plus il existe une constante  $C^*$  et une fonction propre  $\phi$  associée à  $\lambda_1$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \Omega} |e^{\lambda_1 t} u(x, t) - C^* \phi(x)| = 0.$$

Pour le problème de Neumann on a des résultats similaires que nous n'allons pas détailler ici. Le problème se définit à travers l'opérateur

$$T_N[u](x) := \int_{\Omega} J(x-y) [u(y) - u(x)] dy,$$

qui lui, évidemment, conserve la masse. On a une valeur propre associée et une décroissance exponentielle vers la moyenne  $c = 1/|\Omega| \int_{\Omega} u_0(y) dy$ , résultat classique dans le cas local <sup>(c)</sup>.

### 3. GRANDES DÉVIATIONS

L'objet des deux publications [14, 11] est d'étudier la façon dont la solution de (1.1) est approchée par les solutions du problème de Cauchy-Dirichlet dans la boule  $B_R(0)$ , lorsque  $R \rightarrow \infty$ . On résout donc le problème

$$\partial_t u_R = T_D^R[u] := \int_{B_R} u_R(y) J(x-y) dy - u_R(x)$$

avec donnée initiale  $u_R(0) = u_0 \mathbb{1}_{B_R}$  et on cherche à estimer l'écart  $\sup |u - u_R|$  où  $u$  est la solution de (1.1) avec donnée initiale  $u_0$  dans  $\mathbb{R}^N$  tout entier. Ce problème s'apparente à une

estimation de *grandes déviations*<sup>(d)</sup> puisque la quantité  $u - u_R$  permet d'estimer la quantité de trajectoires du processus qui sortent de la boule de rayon  $R > 0$ .

**Estimations de la vitesse de convergence** — Dans le cas de l'équation de la chaleur locale, de telles estimations ont été obtenues dans [BarlesDaherRomano1995], elles font apparaître une borne de la forme

$$\sup_{|x| < \theta R} (u - u_R) \leq \exp\left(-R^2 \frac{(1 - \theta)^2}{t} + o(R^2)\right)$$

lorsque  $R \rightarrow \infty$ , où  $\theta \in (0, 1)$  est fixé.

Dans le cas où le noyau  $J$  a un moment d'ordre 2 (en particulier s'il est à support compact), on a vu que le comportement asymptotique en temps long est donné par celui de la chaleur locale. On pourrait donc s'attendre à ce qu'il en soit de même pour l'estimation de  $(u - u_R)$ , or il n'en est rien. Selon la décroissance de la queue de distribution de  $J$ , on obtient diverses estimations, et en particulier pour un noyau à support compact :

$$\sup_{|x| < \theta R} (u - u_R) \leq \exp\left(-\frac{(1 - \theta)R \ln((1 - \theta)R/t)}{\eta} + o(R)\right),$$

où  $\eta > 0$  est le rayon du support de  $J$ . On voit donc une convergence non pas en  $\exp(-R^2)$ , mais un peu moins rapide, en  $\exp(-R \ln R)$ . On peut aisément interpréter cela en pensant qu'avec les sauts du processus, il est plus facile de sortir de la boule de rayon  $R > 0$  que dans le cas du mouvement brownien.

Quand la queue de distribution devient plus grande, l'estimation se dégrade et dans le cas où  $J(y) = e^{-|y|}$ , on obtient une convergence en  $\exp(-R)$ . De façon générale, on obtient un taux en  $\exp(-Rf(R))$  où  $f$  est sous-linéaire.

**Méthode employée** — Elle consiste à faire un changement d'échelle et de fonction : d'abord on introduit  $w_R(x, t) := (u - u_R)(Rx, Rt)$ , qui est donc définie dans la boule fixe de rayon 1. Puis on étudie l'équation satisfaite par la fonction  $I_R := -(1/R) \ln w_R$  :

$$\partial_t I_R(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} \left( e^{-R\{I_R(x+y/R, t) - I_R(x, t)\}} - 1 \right) J(y) dy = 0.$$

Cette équation se « localise » lorsque  $R \rightarrow \infty$  puisque formellement,  $I := \lim I_R$  satisfait une équation de Hamilton-Jacobi dans  $B_1 \times (0, \infty)$

$$\partial_t I + H(DI) = 0, \quad \text{avec} \quad H(p) = \int_{\mathbb{R}^N} \left( e^{p \cdot y} - 1 \right) J(y) dy$$

et condition initiale  $I(0) = -\infty$  (ceci provient du fait que  $u - u_R = 0$  dans  $B_R$  pour  $t = 0$ ).

On voit alors clairement que la condition d'intégrabilité  $\int e^{c|y|} J(y) dy < \infty$  pour un certain  $c > 0$  est nécessaire pour pouvoir obtenir un hamiltonien avec un domaine non vide. C'est une limite technique de notre approche, mais elle couvre déjà de nombreux cas.

**Extensions** — Dans [11], la méthode est étendue aux mesures singulières et aux termes de Lévy généraux. On renvoie à la partie B pour plus d’informations sur ce point. Nous nous contenterons ici de mentionner que les estimations de grandes déviations ne dépendent pas du comportement de la mesure à l’origine, mais uniquement de sa queue de distribution.

Cela permet de traiter, par exemple, le cas du laplacien fractionnaire tempéré, pour lequel le noyau  $J$  est remplacé par la mesure singulière  $\mu(dz) = e^{-|z|}/|z|^{N+\alpha} dz$ . Le cas du laplacien fractionnaire non tempéré n’est pas traitable par notre approche car il ne vérifie pas la condition d’intégrabilité (hamiltonien infini). On renvoie aux travaux récents de [MeleardMirrahi2014] qui aborde ce cas du laplacien fractionnaire.

#### 4. DONNÉES OPTIMALES

---

Comme pour les milieux poreux (mais contrairement au phénomène de diffusion rapide)<sup>(e)</sup>, l’équation de la chaleur (locale) ne peut être résolue si les données initiales croissent trop vite. Concrètement, dans le cas où  $u_0(x)$  est une fonction, il est nécessaire d’avoir une borne du genre  $|u_0(x)| \leq Ce^{-\alpha|x|^2}$  pour avoir une solution au moins sur un certain intervalle de temps, qui dépend de  $\alpha$ . C’est aussi ce genre de condition que l’on retrouve pour avoir de l’unicité<sup>(f)</sup>.

Il est alors assez naturel de chercher à savoir si la même condition reste valable pour le cas non-local. En tenant compte des résultats de grandes déviations, on peut légitimement penser que la décroissance de la queue de distribution a une influence sur le résultat, ce que nous avons confirmé dans [12]. On introduit ici une distinction en écrivant  $J(y) = e^{-|y|\omega(y)}$  pour une certaine fonction continue  $\omega(\cdot)$ . Si  $\omega(y)$  tend vers une limite finie quand  $|y|$  tend vers l’infini, on parle de décroissance lente ; et on parle de décroissance rapide si  $\omega(y) \rightarrow \infty$ .

**Cas des noyaux à décroissance rapide** — Dans le cas d’un noyau à support compact, nous avons démontré que la condition optimale pour des données initiales n’est pas une exponentielle quadratique, mais

$$|u_0(x)| \leq Ce^{\alpha|x|\ln|x|},$$

où  $\alpha < 1/\rho$ ,  $\rho$  étant le rayon du support de  $J$ . On retrouve ainsi le comportement en  $R \ln R$  mis en évidence dans les estimations de grandes déviations. Un résultat d’unicité est également obtenu dans cette classe. L’obtention de ce résultat passe par l’étude du noyau associé à (1.1) que l’on peut écrire à l’aide de la fonction

$$\omega(t) = e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n J^{*n}}{n!},$$

où  $J^{*n}$  est la convolée  $n$  fois de  $J$  avec lui-même :  $J^{*1} = J$ ,  $J^{*2} = J * J$  etc. En effet, dans le cas d'unicité, la solution s'écrit  $u(t) = e^{-t}u_0 + \omega(t) * u_0$ . Obtenir une estimation de la fonction  $\omega(\cdot)$  est le point clef, et cela passe par l'étude de convolées itérées, qui montre en gros que pour tout  $\sigma > \rho$ , on a deux constantes  $c_1, c_2 > 0$  telles que pour  $|x|$  assez grand,

$$c_1 e^{-t} e^{-(1/\sigma)|x|\ln|x|} \leq \omega(x,t) \leq c_2 e^{-t} e^{-(1/\rho)|x|\ln|x|}.$$

Le résultat d'existence et d'unicité dans cette classe en découle. Anoter néanmoins que la restriction  $\sigma > \rho$  ne permet pas d'obtenir un critère complètement précis, c'est une difficulté technique de notre approche.

**Cas des noyaux à décroissance lente** — On parle d'un noyau à décroissance lente lorsque la décroissance est sous-exponentielle. On rencontre alors essentiellement deux type de noyaux : ceux de type puissance et ceux de type puissance tempérée. Dans le premier cas, on introduit

$$\alpha_0 := \sup \left\{ \alpha > 0 : \int J(y)(1 + |y|)^{N+\alpha} < \infty \right\} \in (0, \infty),$$

et la croissance optimale pour les données initiales est alors  $|u_0(x)| \leq c(1 + |x|)^{N+\alpha}$  pour tout  $\alpha < \alpha_0$ . Dans le cas d'une puissance tempérée, on fait de même avec

$$\beta_0 := \sup \left\{ \beta > 0 : \int J(y)e^{|y|}(1 + |y|)^{N+\beta} < \infty \right\} \in (0, \infty)$$

et la croissance optimale est évidemment donnée par  $|u_0(x)| \leq ce^{|x|}(1 + |x|)^{N+\beta}$  pour tout  $\beta < \beta_0$ . Dans ces deux cas, la méthode utilisée consiste à construire des barrières explicites.

**Solutions non bornées** — Dans le cas où le noyau est une gaussienne, on peut faire des calculs explicites précis des convolées successives en variables de Fourier :

$$c_1 e^{-t} e^{-\gamma|x|(\ln|x|)^{1/2}} \leq \omega(x,t) \leq c_2 e^{-t} e^{-\gamma|x|(\ln|x|)^{1/2}},$$

où  $\gamma$  est une constante explicite reliée au noyau  $J$ . La condition optimale d'existence devient donc  $|u_0(x)| \ll Ce^{|x|(\ln|x|)^{1/2}}$ , tout comme dans les estimations de grandes déviations pour ce type de noyau. Mais l'estimation précise de  $\omega(\cdot)$  nous donne un renseignement supplémentaire : dans le cas où  $u_0$  se comporte exactement comme  $Ce^{|x|(\ln|x|)^{1/2}}$ , on a un blow-up en temps fini (tout comme pour la chaleur locale).

Signalons enfin que d'autre solutions non-bornées sont constructibles : dans le cas où le noyau a un moment d'ordre  $2p$  et  $u_0(x) = |x|^{2p}$ , on a une solution de la forme

$$u(x,t) = |x|^{2p} + ct^p + o(t^p) \quad \text{quand } t \rightarrow \infty,$$

où  $c$  est une constante dépendant du noyau  $J$ . On retrouve ici encore un résultat connu du cas local, de telles solutions tendent vers l'infini mais sont globales en temps.

**Extensions, Problèmes ouverts** — Comme pour les grandes déviations, ce qui importe ici c'est le comportement de la queue de distribution de  $J$ . On peut donc sans problème étendre ces résultats au cas des mesures de Lévy (singulières à l'origine, cf. partie B).

Dans ce cadre, nos résultats pour les noyaux de type puissance rejoignent ceux de [AlibaudImbert2009] en ce qui concerne l'existence de solutions, ainsi que la méthode qui consiste à utiliser des barrières (mais en général nous utilisons des barrières paraboliques et non pas elliptiques). Notons que de telles barrières existent aussi dans le cas de noyaux à décroissance rapide, mais malheureusement elles ne donnent pas le résultat optimal. L'étude des convolutions itérées dans  $\omega(t)$  est vraiment nécessaire pour conclure dans ce cas.

Signalons enfin que si, dans le cas d'une Gaussienne, on est en mesure de démontrer le blow-up en temps fini pour des données initiales critiques grâce à une estimation précise de  $\omega(\cdot)$ , ce n'est pas le cas pour un noyau à support compact. Nous sommes néanmoins convaincus que ce résultat est valable quelque soit le type de noyau, dès l'instant que l'on prend des données à croissance critique.

## 5. ISOTHERMALISATION

---

Si on considère l'équation de la chaleur (local) dans un milieu homogène, pour toute donnée initiale bornée ou intégrable, on voit que la solution  $u(t)$  tend vers zéro, avec une certaine vitesse connue :  $u(t) \sim ct^{-N/2}$ . Ce résultat est obtenu en estimant directement  $u$  grâce à la représentation explicite, à l'aide du noyau de la chaleur.

Dans le cas de l'équation non locale (1.1), nous avons vu qu'il en est de même, puisque l'asymptotique est déterminée par l'équation locale (au moins si le noyau  $J$  a un moment d'ordre 2). Dans un milieu inhomogène il en va autrement, cf. [Kamin1996] : on peut sous certaines conditions obtenir un état limite non trivial qui reflète une homogénéisation de la température.

Dans [8] nous nous sommes intéressés à la version non-locale de ces résultats en considérant l'équation nonlocale en milieu inhomogène

$$\rho(x)u_t = J * u - u \quad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

où  $\rho(\cdot)$  est une fonction continue, positive strictement, tendant vers zéro à l'infini. On considère pour simplifier une donnée initiale positive au sens large et continue (et la solution associée l'est donc également), mais de nombreux résultats sont valables dans le cadre des solutions changeant de signe puisque l'équation est linéaire : on décompose  $u$  en partie positive et négative.

**Différents états limites isothermes** — Comme dans le cas « local », une discussion a lieu en fonction de l'intégrabilité de la fonction  $\rho$  et de  $u_0$  par rapport à la mesure  $\rho(x) dx$  :

- si  $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$  et  $u_0$  est bornée, alors  $u_0 \in L^1(\rho)$  et on démontre alors que

$$u(\cdot, t) \rightarrow \mathbb{E}_\rho(u_0) := \frac{\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\rho(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx} \quad \text{dans } L^1(\rho).$$

En d'autres termes la solution converge vers sa moyenne pondérée par la fonction  $\rho$ . C'est ce phénomène qu'on appelle *isothermalisation* : la solution tend vers un état isotherme, non trivial.

- Si  $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$  mais  $u_0 \notin L^1(\rho)$ , alors  $u(t)$  tend vers l'infini dans  $L^1_{\text{loc}}$  : la très grande masse à l'infini de la donnée initiale diffuse et fait tendre la solution vers l'infini dans tout l'espace, même lorsque la solution est globale (ce qui est le cas si, par exemple,  $u_0$  est à croissance sous quadratique).
- Si  $\rho \notin L^1(\mathbb{R}^N)$  mais tout de même  $u_0 \in L^1(\rho)$ , on assiste alors au phénomène « classique » :  $u(t)$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini. C'est évidemment en particulier le cas lorsque  $\rho \equiv 1$ , *i.e.* dans le cas du milieu homogène. Dans cette situation, le flux à l'infini est si important qu'il entraîne une forte perte de masse.
- Enfin, le cas où  $\rho \notin L^1(\mathbb{R}^N)$  et  $u_0 \notin L^1(\rho)$  n'est pas facile à aborder car de nombreux comportements différents peuvent arriver. Par exemple si  $\rho = 1$ ,  $u(x, t) = 1$  et  $u(x, t) = |x|^2 + ct$  sont deux solutions (pour  $c$  bien choisi).

**Problèmes d'unicité** — Dans le cas  $N = 1$  ou  $N = 2$ , on démontre l'unicité dans la classe des solutions bornées, mais cela cesse d'être vrai si  $N \geq 3$  en général (y compris pour la chaleur locale). On récupère néanmoins de l'unicité si on suppose que  $\rho$  ne dégénère pas trop vite, *i.e.*  $\rho(x) \geq c(1 + |x|^2)^{-1}$ .

De façon générale, on démontre l'existence d'une solution minimale obtenue par approximation par des problèmes de Neumann dans des boules  $B_R(0)$ , lorsque  $R \rightarrow \infty$ . Une propriété particulièrement utile de cette solution minimale est qu'elle vérifie une loi de conservation de la masse pondérée puisque pour tout  $t > 0$  on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x, t)\rho(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\rho(x) dx,$$

et ce, que ces intégrales soient finies ou non. Ainsi, même dans les cas de non-unicité, les résultats asymptotiques ci-dessus restent valables pour la solution minimale.

## 6. PROBLÈME DE STEFAN NON-LOCAL

---

Le problème de Stefan concerne un modèle bien connu de transition de phase entre, par exemple, de la glace et de l'eau liquide [LameClapeyron1831, Stefan1889]. Dans le modèle dit « à une phase », seule l'une des phases est régie par une équation d'évolution de type diffusion, l'autre phase étant maintenue à la température de transition (0°C). Dans le modèle à plusieurs phases, chaque phase évolue selon une diffusion qui lui est propre.

On a donc affaire dans ce modèle à un phénomène de frontière libre<sup>(g)</sup>, que l'on peut appréhender sous deux angles : le premier est d'utiliser la pression sur l'interface pour décrire comment elle bouge (description dynamique). La seconde approche consiste à décrire le phénomène de façon thermodynamique, utilisant le concept de chaleur latente.

La seconde approche possède l'avantage de fournir un modèle global, c'est-à-dire une formulation sous la forme d'une seule équation dans tout le domaine considéré, que nous allons décrire maintenant dans le cadre du modèle à une phase.

**Le modèle local** — On utilise deux variables d'état thermodynamiques pour décrire le phénomène de transition de phase : la température,  $v$  et l'enthalpie,  $u$ . La première équation utilisée est la conservation de l'énergie,  $u_t = \Delta v$ , et la seconde est l'équation constitutive reliant  $u$  et  $v$  :  $v = (u - 1)_+$ , l'enthalpie  $u = 1$  représentant le seuil d'activation, qui fait fondre la glace. Tout ceci conduit à la formulation globale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(u - 1)_+,$$

l'équation devant évidemment être prise dans un sens faible (distributions). La phase de glace correspond à  $v = 0$ , alors que  $v > 0$  désigne la phase liquide (puisque la température est positive).

Cependant, le modèle prévoit l'existence de régions appelées *mushy regions* (zones boueuses, pâteuses). Ce sont des zones où l'eau est dans un état intermédiaire, pas liquide car  $v = 0$ , mais pas de la glace à énergie nulle non plus puisque  $0 < u < 1$ . Dans une telle zone, la chaleur latente n'est pas encore atteinte et donc la transition n'est pas complètement faite entre la glace et l'eau, mais certaines liaisons structurales de la glace ont commencé à être brisées. Il s'agit véritablement de la zone où a lieu la transition de phase.

Dans ce modèle (local), on peut démontrer que si les zones mushy n'existent pas au départ, elles ne peuvent être créées au cours de l'évolution [Friedman1968], ce qui est l'un des principaux inconvénients de ce modèle car sur ce point il ne rend pas bien compte de la réalité.

**Présentation du modèle non-local** — dans [10] nous avons proposé une approche non-locale du problème de Stefan à une phase. L'idée n'est pas qu'un « jeu mathématique » consistant à remplacer le laplacien par une convolution, elle va plus loin. En autorisant les interactions à distance moyenne (en utilisant un noyau à support compact), on démontre que dans ce modèle non-local, les mushy regions vont être créées au cours de l'évolution.

Concrètement, on s'intéresse ici à l'équation non-locale suivante :

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = J * \Gamma(u) - \Gamma(u), \quad \Gamma(s) = (s - 1)_+.$$

Le noyau  $J$  est à support compact et on part d'une distribution d'enthalpie initiale  $u_0 \geq 0$ . La notion de solution est à comprendre *a priori* au sens intégré en temps. Si  $u_0$  est continue, alors on peut attendre plus de régularité et une équation vérifiée au sens classique.

Notre but est d'obtenir d'une part des résultats d'existence et d'unicité, mais surtout de comprendre le phénomène de formation des mushy regions, le comportement en temps long et la façon dont ce modèle s'approche du modèle local lorsque le support du noyau se réduit à un point.

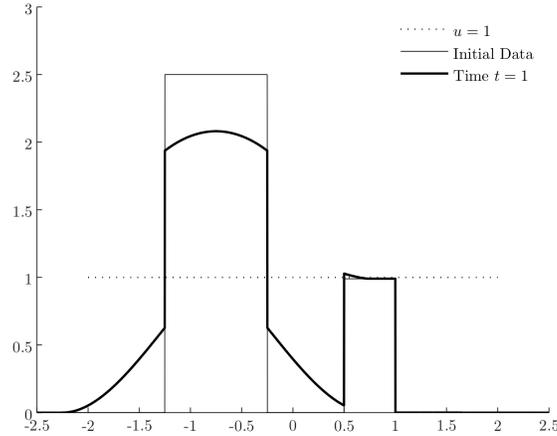
**Résultats d'existence, unicité, mushy regions** — Obtenir l'existence et l'unicité dans un cadre de convolution se fait très souvent par un théorème de point fixe, ce qui est encore le cas ici puisque le graphe  $\Gamma(\cdot)$  est 1-Lipchitzien : on arrive facilement à construire un opérateur contractant sur un intervalle de temps suffisamment petit. Ce qui assure également l'unicité dans la classe utilisée pour le point fixe, ici l'ensemble des applications continues en temps à valeur  $L^1$  en espace.

Pour obtenir des résultats d'existence et de comparaison plus étendus (données initiales bornées par exemple), on procède par approximation, et utilisation de sous et sursolutions. On démontre également que cette équation engendre un semi-groupe contractant en norme  $L^1$  (au sens large), ainsi qu'une conservation de l'enthalpie :

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) dx \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Pour bien décrire les mushy regions, il est nécessaire de déterminer le support de  $u(\cdot, t)$  et de  $v(\cdot, t)$ . Or, les solutions n'étant *a priori* par continues en espace, il faut utiliser la notion de support au sens des distributions. On démontre alors que les supports de  $u(t)$  et  $v(t)$  sont croissants au sens large en temps (tout comme pour le cas local), même si la valeur de  $u$  et/ou  $v$  peut diminuer (la chaleur et l'énergie se diffusent). Ce genre de propriété assez courante en diffusion est appelée *réention* <sup>(h)</sup>.

Néanmoins, on dénote plusieurs différences dues au caractère non-local de l'équation. La première différence de taille est l'existence d'un temps d'attente (*waiting time*) : si la

FIGURE 1.2 – *Creation de zones mushy.*

donnée initiale est, par exemple,  $u_0 = 2 \cdot \mathbb{1}_A$  pour un ouvert  $A \subset \mathbb{R}^N$ , alors il existe un temps  $t_0 > 0$  avant lequel le support de  $u(t)$  reste exactement  $A$ . Pendant ce temps, le support de  $v$  croît et ce n'est qu'à partir de  $t_0$  que le support de  $u(t)$  commence à s'étendre, cf. Figure 1.2.

Le modèle non-local rend très bien compte de ce temps d'attente (que l'on peut estimer), la convolution représentant un terme d'interaction à moyenne distance. A l'extérieur (mais pas trop loin) de la zone d'eau, ce terme de convolution va capter un peu de chaleur contenue dans la phase liquide et faire augmenter l'enthalpie. Lorsque cette enthalpie devient suffisamment grande, elle dépasse la chaleur latente et la phase liquide se met alors à bouger.

Dans le cas local, cette propriété n'est pas vraie : le support de l'eau liquide croît instantanément, ce qui n'est pas vraiment acceptable si on pense en terme de chaleur latente : il faut du temps pour réchauffer la glace, la briser, et qu'elle se transforme en eau liquide. La différence d'avec le cas non-local est que le transfert d'énergie ne se fait pas à distance, mais en revanche sur le bord de  $A$ , il est infini : comme  $u_0$  n'est pas régulière,  $u_t$  devient infinie. Alors que dans le cas non-local, le transfert se fait à distance, mais de façon contrôlée, même si la donnée initiale n'est pas régulière.

On démontre de la même façon l'apparition de mushy regions, à l'aide des interactions à distance moyenne. Ces mushy regions restent donc localisées près de la phase liquide, à une distance de l'ordre du diamètre du support de  $J$ . Un autre phénomène non présent dans le modèle local est l'apparition spontanée possible de nouvelles zones liquide non connexes.

Tous ces phénomènes sont décrits dans [10] (résultats démontrés et exemples numériques), ainsi que la disparition des mushy regions lorsque le noyau se concentre et que l'équation se « localise ».

**Comportement en temps long** — un autre aspect important du problème de Stefan concerne le comportement asymptotique en temps long, qui fait intervenir un problème limite de type « mesa », c’est-à-dire un problème d’obstacle elliptique.

Concrètement, on démontre (toujours dans [10]) que pour une large gamme de distributions d’enthalpies  $f \geq 0$ , la solution  $u(t)$  converge vers un état limite  $\mathcal{P}f := f + J * w - w$  où  $w$  est l’unique solution du problème d’obstacle

$$(1.3) \quad \begin{cases} \text{Trouver } w \geq 0 \text{ intégrable telle que} \\ 0 \leq f + J * w - w \leq 1, \quad w(f + J * w - w - 1) = 0. \end{cases}$$

La solution de ce problème d’obstacle (cf. Figure 1.3) n’est autre que  $w = \int_0^\infty v(t) dt$ , lorsque cette intégrale converge dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$ . Cette quantité porte donc l’information de l’ensemble maximal où s’est étendu la phase liquide : là où  $w$  est strictement positive,  $v$  l’a nécessairement été à certain instant, et l’est restée par la suite (de part la propriété de rétention). Alors que si  $w = 0$ , on sait qu’il n’y a jamais pu avoir d’eau liquide à cet endroit tout au court de l’évolution. Cette fonction  $w$ , appelée *transformée de Baiocchi* est un outil fondamental dans le problème de Stefan à une phase.

On démontre enfin que l’opérateur  $\mathcal{P}$  est une contraction dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$ , ce qui permet de l’étendre à  $L^1$  tout entier par densité (pour des données initiales positives au sens large).

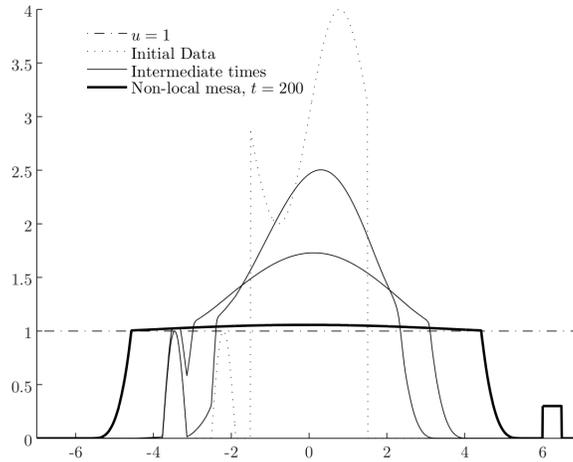


FIGURE 1.3 – Evolution vers une mesa non-locale.

**Problème à deux phases** — Dans [5], nous avons étudié le problème non-local de Stefan à deux phases, où l’on autorise des solutions qui changent de signe en remplaçant le graphe  $\Gamma(\cdot)$  par :

$$\Gamma(s) = \text{sign}(s)(|s| - 1)_+.$$

Evidemment, les constantes de diffusion et les chaleurs latentes n'ont pas de raison d'être les mêmes dans les deux phases, mais après un changement d'unité adéquat on se ramène à ce graphe monotone.

L'enjeu principal est la description du comportement asymptotique qui, même dans le cas local n'est pas connue. La raison en est que les propriétés de rétention de l'enthalpie et de la chaleur ne sont plus vraies en général : les deux phases peuvent se mélanger et donc l'expansion des phases n'est pas monotone. Dans ce cas, la transformée de Baiocchi ne décrit plus aussi bien le problème limite car les zones où  $w$  a un signe ne donnent pas assez d'information pour identifier le problème limite.

Nous avons donné néanmoins quelques conditions suffisantes pour lesquelles on sait décrire le problème et le comportement asymptotique. On considère séparément les données initiales correspondant aux deux phases :  $f_+ = \max(f, 0)$  et  $f_- = \max(-f, 0)$ , puis les solutions associées  $\mathbb{U}^+$ ,  $\mathbb{U}^-$  et les états limites

$$\mathcal{P}f_+ = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{U}^+, \quad \mathcal{P}f_- = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{U}^-.$$

Nous avons essentiellement donné deux résultats partiels :

- Si les supports de  $\mathcal{P}f_+$  et  $\mathcal{P}f_-$  sont distants de plus de 2 fois le diamètre du support de  $J$ , alors non seulement les phases ne se rencontrent jamais, mais même les supports des enthalpies non plus. On démontre alors que la solution n'est rien d'autre que  $u = \mathbb{U}^+ - \mathbb{U}^-$ , et on en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \mathcal{P}f_+ - \mathcal{P}f_-.$$

Si ce résultat est assez intuitif, il nécessite néanmoins de démontrer que les propriétés de rétention restent vraies dans ce cas précis.

- Si la distance entre  $\Gamma(\mathcal{P}f_-)$  et  $\Gamma(\mathcal{P}f_+)$  est supérieure au diamètre du support de  $J$ , alors on ne peut plus dire que  $u = \mathbb{U}^+ - \mathbb{U}^-$  car les enthalpies ont pu interagir : on sait que les phases sont séparées mais la zone mushy a été mélangée. Néanmoins, on démontre que la transformée de Baiocchi permet de garder toute l'information nécessaire pour obtenir un problème limite qui fait apparaître un double obstacle :

$$(1.4) \quad \begin{cases} \text{Trouver } w \text{ intégrable telle que} \\ 0 \leq \text{sign}(w)(f + J * w - w) \leq 1, \quad |w|(f + J * w - w - \text{sign}(w)) = 0, \end{cases}$$

en effet, la fonction limite de  $u$ ,  $f + J * w - w$  est « coupée » aux deux niveaux :  $-1$  et  $+1$ .

Ce ne sont donc que des résultats très partiels, concernant les cas où les deux phases n'interagissent pas ou peu, le cas général restant encore totalement ouvert à notre connaissance y compris dans le cas local.



# EQUATIONS NON-LOCALES

---

*Termes de type Lévy*

# B

Cette partie traite de différents problèmes impliquant des termes non-locaux qui, contrairement à la partie précédente, font intervenir des intégrales singulières où la mesure par rapport à laquelle on intègre est de type Lévy. Ce genre de terme intégral apparaît naturellement quand on étudie le générateur infinitésimal des processus de Lévy, qui englobent notamment les processus de Poisson composé vu dans la partie A.

Pour traiter les termes de type Lévy généraux dans un cadre totalement non-linéaire (*fully nonlinear*), il est nécessaire d'utiliser une théorie de solutions de viscosité adaptée. A partir de là, nos travaux ont consisté à passer en revue un certain nombre de questions naturelles : problèmes de Dirichlet, de Neumann, régularité et comportement asymptotique en temps long.

SOLUTIONS DE VISCOSITÉ

PROBLÈME DE DIRICHLET

RÉGULARITÉ

PROBLÈME DE NEUMANN

COMPORTEMENT EN TEMPS LONG

## 1. INTRODUCTION

---

Dans cette partie, nous allons considérer des opérateurs nonlocaux plus généraux que ceux abordés dans la partie précédente. Un changement de variables permet de réécrire l'opérateur  $T[u]$  sous la forme :

$$T[u] = \int_{\mathbb{R}^N} [u(x+z) - u(x)] d\mu(z),$$

où  $\mu$  est la mesure de probabilités dont la densité est  $J(-z)$ . Cette formulation ouvre de nouvelles perspectives puisque si la fonction  $u$  est suffisamment régulière, on peut alors autoriser une singularité en  $z = 0$  pour  $\mu$ . En réalité, cet argument est dual : plus la mesure  $\mu$  est singulière en  $z = 0$ , plus la fonction  $u$  devra être régulière puisque  $u(x+z) - u(x)$  devra s'annuler convenablement pour compenser la singularité.

**Mesures de Lévy, compensateurs** — Afin de trouver les mesures les plus générales que nous puissions rencontrer dans cette approche, précisons que nous cherchons des mesures de Borel positives <sup>(a)</sup>. Ensuite, comme on va considérer des fonctions  $u$  bornées, cela implique que  $\mu$  doit être de masse finie. Mais nous allons relaxer cette condition près de l'origine.

Le développement de Taylor nous donne que si  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $u(x+z) - u(x) = \nabla u(x) \cdot z + o(z)$ . Et donc si  $|z|$  est  $\mu$ -intégrable au voisinage de zéro, le terme intégral a un sens. Cela nous permet par exemple d'utiliser des mesures comme celles correspondant au laplacien fractionnaire <sup>(b)</sup> d'ordre  $\alpha < 1$  :

$$(2.1) \quad \mu(dz) = \frac{dz}{|z|^{N+\alpha}},$$

dont on note  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  l'opérateur  $I[u]$  associé (cf. ci-dessous). Ceci étant, si  $\mu$  est symétrique dans le sens suivant :  $\int_{|z|<1} z d\mu(z) = 0$ , alors on peut pousser le développement de Taylor et obtenir que pour une fonction  $u \in \mathcal{C}^2$ , la condition sur  $\mu$  est que  $|z|^2$  soit intégrable près de l'origine. En combinant la condition d'intégrabilité à l'infini et celle en zéro on obtient

$$(2.2) \quad \int_{\mathbb{R}^N} (1 \wedge |z|^2) \mu(dz) < \infty.$$

Une telle mesure est appelée une mesure de Lévy. En particulier, on autorise des mesure comme celle donnée ci-dessus, mais pour toute la gamme  $\alpha \in (0, 2)$ .

Dans le cas où  $\mu$  n'est pas symétrique, il existe un moyen de faire converger quand

même l'intégrale : on utilise un *compensateur*<sup>(c)</sup> en définissant

$$\mathcal{I}[u](x) := \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ u(x+z) - u(x) - (Du(x) \cdot z) \mathbb{1}_{|z| < 1} \right\} \mu(dz).$$

**Processus de Lévy** — La version probabiliste concerne une gamme de processus markoviens assez naturels : un processus de Lévy est un processus càdlàg à increments indépendants et stationnaires. Concrètement, cela signifie que :

- (i)  $(X_t)$  peut présenter des sauts (discontinuités) ;
- (ii)  $X_t - X_s$  est indépendant de  $X_{t'} - X_{s'}$  si  $[s, t] \cap [s', t'] = \emptyset$  ;
- (iii) la loi de  $X_{t+s} - X_t$  ne dépend que de  $s$ .

Les exemples typiques de processus de Lévy sont le mouvement brownien (seul processus de Lévy continu) et le processus de Poisson composé (vu au chapitre précédent), qui est quant à lui purement discontinu. Les processus de Lévy étant des processus markoviens, ils engendrent des semi-groupes de Markov et on montre que le générateur infinitésimal<sup>(d)</sup> associé prend une forme impliquant l'opérateur  $\mathcal{I}$ . Plus précisément, la forme générale est donnée par :

$$\mathcal{L}[u](x) := -\frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma \sigma^T D^2 u) + b \cdot Du(x) + \mathcal{I}[u](x),$$

où la mesure de Lévy  $\mu$  vérifie nécessairement la condition (2.2), la matrice  $a = \sigma \sigma^T$  est symétrique, positive, et  $b$  est un champ de vecteurs. Dans une version encore plus générale, considèrera que le triplet  $(\sigma, b, \mu)$  dépend du point  $x$ .

On voit donc apparaître un terme de diffusion classique (du type laplacien), un terme de transport (drift) et un terme de sauts. C'est la prise en compte des sauts qui rend ces processus fort intéressants, et par ailleurs entraîne l'apparition de termes nonlocaux dans les équations liées aux générateurs.

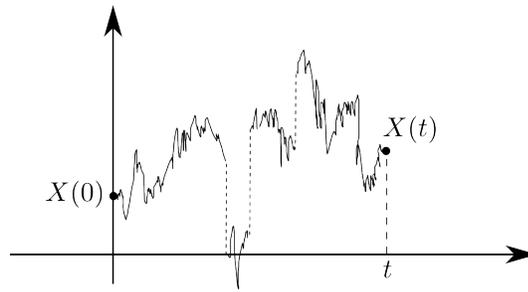


FIGURE 2.4 – *Processus de Lévy.*

## 2. SOLUTIONS DE VISCOSITÉ POUR LES PROBLÈMES NON-LOCAUX

Les équations auxquelles nous nous intéressons ici font intervenir le terme nonlocal de type Lévy,  $\mathcal{I}[u]$ , mais également une variante appelée terme de Lévy-Itô :

$$\mathcal{I}[u](x) := \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ u(x + j(x, z)) - u(x) - (Du(x) \cdot j(x, z)) \mathbb{1}_{|z| < 1} \right\} \mu(dz),$$

dont l'idée est de moduler les sauts avec une fonction  $j(x, z)$  qui typiquement vérifie  $|j(x, z)| \leq c_0|z|$  pour une constante  $c_0 > 0$ . Ainsi, sous la condition de Lévy (2.2) on garde un terme bien défini si  $u$  est régulière. On considère donc une équation générale

$$(2.3) \quad F(x, u, Du, D^2u, \mathcal{I}[u]) = 0,$$

ou sa variante avec  $\mathcal{I}[u]$ . Pour donner un sens à ce genre d'équation « fully nonlinear », on utilise la théorie des solutions de viscosités<sup>(e)</sup> puisque les solutions ne sont pas en général régulières. Cela permet de donner un sens aux termes différentiels. Mais l'utilisation des solutions de viscosités est également nécessaire pour traiter les termes non-intégraux quand la mesure de Lévy est singulière, *i.e.* non intégrable près de l'origine : il faut remplacer  $u$  par une fonction-test suffisamment régulière pour que l'intégrale ait un sens.

Concrètement, on décompose l'intégrale non-locale en deux morceaux. Si  $\phi$  est une fonction régulière et  $p \in \mathbb{R}^N$  on pose pour  $\delta \in (0, 1)$  :

$$I_\delta[\phi, p](x) = \int_{|z| < \delta} \left\{ \phi(x + z) - \phi(x) - p \cdot z \right\} \mu(dz),$$

$$I^\delta[\phi, p](x) = \int_{|z| \geq \delta} \left\{ \phi(x + z) - \phi(x) - (p \cdot z) \mathbb{1}_{|z| < 1} \right\} \mu(dz).$$

Et on utilise ensuite l'approche classique des solutions de viscosités :

**Définition** - Une fonction  $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  *s.c.s*<sup>(f)</sup> est une sous-solution de viscosité de (2.3) si pour toute fonction  $\phi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $u - \phi$  admet un maximum local au point  $x_0$  et tout  $\delta \in (0, 1)$ , on a

$$F(x, u(x), D\phi(x), D^2\phi(x), I_\delta[\phi, D\phi(x)](x) + I^\delta[u, D\phi(x)](x)) \leq 0$$

On définit de même une notion de sursolution, et enfin une solution est une fonction continue qui est à la fois sous et sur solution du problème. Plusieurs autres notions de solutions existent pour gérer les termes non-locaux mais elles sont essentiellement toutes équivalentes (*cf.* [BarlesImbert2006]). Enfin, on gère évidemment le terme  $\mathcal{I}[u]$  de la même façon.

Evidemment, en fonction du type de problème (Neumann, Dirichlet), il faut adapter la définition du terme non-local pour prendre en compte la donnée « au bord », comme déjà souligné dans la partie A de ce mémoire. Le point de départ de la théorie des solutions de viscosité repose sur le principe de comparaison. L'existence est en général obtenue via la méthode de Perron<sup>(g)</sup>.

### 3. PROBLÈME DE DIRICHLET

---

Nous avons étudié le problème de Dirichlet pour (2.3) dans [15], le cas des mesures non singulières ayant été auparavant abordé dans [16], dans le cas d'évolution.

**Cas non singulier** — si la mesure n'est pas singulière (en fait si elle est intégrable près de l'origine), alors la valeur au bord n'a aucune raison d'être prise au sens classique. Plus précisément, si on cherche à résoudre un problème de Dirichlet avec  $u = 0$  dans  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ , alors en fait on prouve [16] que  $u > 0$  sur le bord  $\partial\Omega$  (au sens d'un prolongement par continuité à partir de l'intérieur de  $\Omega$ ).

**Cas singulier** — rappelons d'abord que dans le cadre de la théorie des solutions de viscosité, une condition de Dirichlet «  $u = g$  » au bord doit se comprendre d'une façon relaxée : de façon imagée, on a le choix entre (i) prendre la valeur au bord et (ii) vérifier l'équation au bord<sup>(h)</sup>. Prenons le cas où (2.3) se réduit simplement au terme nonlocal,  $-\mathcal{S}_D[u] = f$  par exemple. La conditions de Dirichlet  $u = 0$  se code dans l'intégrale, ce qui revient à poser  $u = 0$  en dehors de  $\Omega$ .

Dans ce cas, si la mesure  $\mu$  du terme  $\mathcal{S}[u]$  est singulière, on retrouvera bien  $u = 0$  sur le bord. L'explication est assez naturelle : si jamais  $u$  avait une discontinuité au franchissement de  $\partial\Omega$ , la singularité non-intégrable de  $\mu$  ferait exploser le terme intégral et l'équation n'aurait plus de sens, près du bord.

**Equations linéaires** — le résultat précédent mérite d'être précisé lorsque l'équation (2.3) ne se réduit pas au seul terme  $\mathcal{S}[u]$  : en effet en présence d'une équation linéaire impliquant des termes de diffusion de type laplacien et dérive, on retrouve des phénomènes déjà connus dans le cas purement local<sup>(i)</sup> : la dérive peut entrer en compétition avec la tendance diffusive. Dans le cas de l'équation modèle

$$-\operatorname{Tr}\left(a(x)D^2u(x)\right) + b(x) \cdot Du(x) + \mathcal{S}[u](x) + u(x) = f(x),$$

on obtient que les valeurs au bord sont prises au point  $x \in \partial\Omega$  dès que par exemple l'une

des conditions suivantes est vérifiée :

- (i)  $a(x)Dd(x) \cdot Dd(x) > 0$
- (ii)  $\int_{|z|<1} |Dd(y) \cdot z| d\mu(z) = +\infty$  au voisinage de  $x$ ,
- (iii)  $b(x) \cdot Dd(x) + \text{Tr} \left( a(x)D^2u \right) - \int_{r<|z|<1} Dd(y) \cdot z d\mu(z) < 0$  au voisinage de  $x$ .

Dans le cas (i), l'ellipticité forte de la partie diffusion est suffisante pour que la valeur au bord soit prise, quelque soit la dérive et le terme nonlocal. Le cas (ii) montre que si la mesure  $\mu$  est suffisamment singulière, alors de même la valeur au bord est prise. Enfin, le cas (iii) est intéressant dans le sens où il met en évidence le rôle de la dérive  $b(x)$ , mais aussi celui d'une dérive créée par le compensateur, à travers le terme  $I_r$ . Des conditions plus générales et plus fines sont données dans [15].

Il est à noter que dans le cas du laplacien fractionnaire, la valeur  $\alpha = 1$  donne le cas (ii) ci-dessus, ce qui suffit à contrôler les termes de dérive. Le laplacien  $(-\Delta)^{1/2}$  est donc de ce point de vue « plus fort » qu'une dérivée d'ordre 1.

**Compléments** — On trouvera dans [15] des conditions dans le cas d'équations non-linéaires, ainsi qu'un contre-exemple en dimension 1 qui montre que si  $\alpha < 1$ , la présence d'une dérive peut empêcher les valeurs au bord d'être atteintes.

Dans le cas où les valeurs au bord sont prises partout sur  $\partial\Omega$ , on peut alors construire des solutions du problème de Dirichlet, continues jusqu'au bord [15, Thm 1]. A noter que l'existence de solutions dans le cas où les valeurs au bord ne sont pas nécessairement prises a été obtenu récemment, cf. [BarlesTopp2013].

#### 4. RÉGULARITÉ

---

Une des questions fondamentales en edp lorsqu'on aborde une théorie de solutions faibles est de savoir quelle régularité on peut espérer pour ces solutions. Dans le cas des solutions de viscosité, on part d'une solution continue (puisque à la fois sci et scs), et on se demande si elle n'est pas mieux que cela, typiquement Hölderienne, Lipschitzienne, voir encore de classe  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$  ou  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ . Par ailleurs, la question de la régularité est liée à la possibilité de pouvoir utiliser le théorème d'Ascoli afin d'extraire des suites de solutions qui convergent : avoir des bornes localement uniformément Hölder (ou plus) donne l'équi-continuité.

Plusieurs méthodes existent pour obtenir la régularité des solutions d'edp, en particulier citons : la méthode de Bernstein, les estimations de type Schauder, l'utilisation d'inégalités de Harnack, et enfin l'approche à la Ishii-Lions [IshiiLions1990] que nous allons

développer plus bas <sup>(i)</sup>.

En utilisant l'approche des inégalités de Harnack, Caffarelli et Silvestre [Silvestre2006, CaffarelliSilvestre2009] ont obtenu des bornes  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$  pour une classe d'équations non-locales. C'est en revanche l'approche à la Ishii-Lions que nous utilisons dans [13] puis [9], afin d'obtenir des estimations de type Hölder et Lipschitz. Notre approche ne nous permet pas de traiter tous les cas contenus dans les travaux de Caffarelli et Silvestre, mais d'autre part nous traitons des cas non contenus dans ces travaux. Les deux approches sont donc complémentaires.

En particulier, un des points fondamentaux de notre façon de procéder est qu'elle nous permet de traiter des cas où l'ellipticité vient soit de termes locaux, soit non-locaux selon le point  $x$ . Plus précisément, si on considère l'équation

$$-\operatorname{Tr}\left(a(x)D^2u(x)\right) - c(x)\mathcal{I}[u](x) + H(x, u, Du) = 0,$$

il suffit essentiellement de supposer que  $a(x) \geq \Lambda_1(x)\operatorname{Id}$ ,  $c(x) \geq \Lambda_2(x)$  avec

$$\Lambda_1(x) + \Lambda_2(x) = \Lambda > 0, \quad \Lambda_1, \Lambda_2 \geq 0.$$

Evidemment, d'autres hypothèses classiques sur  $H$ ,  $a(\cdot)$  et  $c(\cdot)$  sont nécessaires pour avoir de la régularité, que nous donnons ci-dessous.

**L'approche à la Ishii-Lions** — le point de départ de cette méthode est relativement aisé à comprendre : pour obtenir un résultat de régularité  $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ , il suffit d'estimer la quantité

$$(2.4) \quad M := \sup_{x,y} \left( u(x) - u(y) - C|x-y|^\alpha \right).$$

On va donc utiliser l'équation en faisant jouer à  $u$  à la fois le rôle de sous-solution et celui de sur-solution en calquant peu ou prou la preuve de comparaison. On montre ainsi que si on choisit bien  $C$  et  $\alpha$ , on obtient  $M \leq 0$ . La stratégie de preuve consiste à localiser le sup pour en faire un max atteint près du point  $x$ , puis estimer les différents termes de l'équation, le gros du travail se concentrant ici sur les termes non-locaux.

Ajoutons ici que l'ingrédient essentiel qui fait fonctionner cette méthode est l'ellipticité dans la direction du gradient : en oubliant les termes de localisation, en un point de maximum  $(x, y)$  on a pour tout vecteurs  $p, q \in \mathbb{R}^N$  :

$$\begin{aligned} \langle D^2u(x)p, p \rangle - \langle D^2u(y)q, q \rangle &\leq \alpha C|x-y|^{\alpha-1} \langle D^2\chi(p-q), p-q \rangle \\ &\quad + C\alpha(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2} \langle D\chi, p-q \rangle^2 \end{aligned}$$

où  $\chi(z) = |z|$ . Evidemment, en un tel point de maximum, on peut supposer  $x \neq y$  et donc  $\chi$  différentiable en  $(x-y)$ , sinon on a directement  $M = 0$ . Comme  $D^2\chi D\chi = 0$  puisque  $|D\chi|^2 = 1$ , on en déduit en choisissant  $p = -q = D\chi = e$  :

$$\langle D^2u(x)e, e \rangle - \langle D^2u(y)e, e \rangle \leq 4C\alpha(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2},$$

qui est un terme très négatif si  $C$  est grand et  $x$  proche de  $y$ . On voit donc que le vecteur  $e = (x - y)/|x - y|$  joue un rôle primordial, qui représente la direction du gradient de  $u$  puisque  $Du(y) = Du(x) = C\alpha|x - y|^{\alpha-1}e$ . C'est ce terme qui permet d'obtenir une contradiction en utilisant l'équation.

**Principaux résultats de régularité Hölder** — on a besoin de trois hypothèses fondamentales :

1. La première hypothèse est la suivante : pour tout  $R > 0$  il existe des constantes  $k \geq 0$ ,  $\tau, \theta \in (0, 1]$ , une fonction localement bornée  $\chi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , un module de continuité  $\omega_F$ , deux constantes  $\eta, \varepsilon_0 > 0$ ,  $\varpi \in (0, 1/3)$  tels que pour tout  $|u|, |v|, |q| \leq R$ ,  $|x - y| \leq \eta$ ,  $\ell_1 \leq \ell_2$ ,  $L > 0$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $|\hat{a}| = 1$ , on a

$$\begin{aligned} F(y, u, p, Y, \ell_2) - F(x, u, p + q, X, \ell_1) \leq \\ \Lambda_1 \left( \text{Tr}(X - Y) + \frac{\omega_F(|x - y|)}{\varepsilon} + |x - y|^\tau |p|^{2+\tau} + |p|^2 + \chi(L, \eta) \right) \\ + \Lambda_2 \left( (\ell_1 - \ell_2) + \frac{|x - y|^{2\theta}}{\varepsilon} + |x - y|^\tau |p|^{k+\tau} + C_F |p|^k + \chi(L, \eta) \right) \end{aligned}$$

où les matrices  $X, Y$  vérifient la condition

$$-\frac{4}{\varepsilon} \text{Id} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \frac{2}{\varepsilon} \begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $Z = I - (1 + \varpi) \hat{a} \otimes \hat{a}$ .

2. Du côté des mesures  $\{\mu_x\}_x$  dans le terme  $\mathcal{S}[\cdot]$ , en plus des conditions naturelles de types mesure de Lévy, l'hypothèse suivante est importante : on considère le cône tronqué

$$C_{\eta, \delta}(d) := \{z \in \mathbb{R}^N : |d \cdot z| \geq (1 - \eta)|z|\} \cap B_\delta(0).$$

Alors on demande que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $C_\mu(\eta) > 0$  telle que pour tout  $|d| = 1$  et  $\delta \in (0, 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\int_{C_{\eta, \delta}(d)} |z|^2 \mu_x(dz) \geq C_\mu(\eta) \delta^{2-\beta}.$$

Cette hypothèse signifie que les mesures  $\mu_x$  doivent charger suffisamment les cônes d'ouverture  $(1 - \eta)$ , dans toutes les directions. En particulier nous utiliserons cette propriété dans la direction  $d = \frac{x-y}{|x-y|}$  où  $x, y$  sont essentiellement les points pour lesquels le sup de (2.4) est atteint : comme nous l'avons vu plus haut, l'idée est d'utiliser l'ellipticité de l'équation dans la direction du gradient.

3. Enfin, on demande une certaine régularité des mesures par rapport à la variable  $x$  : il

existe  $\beta \in (0, 2)$  et un module de continuité  $\omega_\mu(\cdot)$  tels que pour tout  $\delta \in (0, 1)$

$$\int_{B_\delta(0)} |z|^2 |\mu_x - \mu_y|(\mathrm{d}z) \leq \omega_\mu(|x - y|) \delta^{2-\beta}$$

$$\int_{B_1(0) \setminus B_\delta(0)} |z| |\mu_x - \mu_y|(\mathrm{d}z) \leq \omega_\mu(|x - y|) \delta^{\beta-1},$$

avec une correction logarithmique si  $\beta = 1$ . Notons que l'exemple typique de mesure considérée est le laplacien fractionnaire d'ordre  $\beta$  (au lieu de  $\alpha$  dans (2.1)).

Sous les trois hypothèses ci-dessus, on obtient divers types de résultats de régularité Hölder, dont voici deux exemples principaux :

- (i) si  $\beta > 1$ ,  $k = \beta$  et  $\theta > (\beta - 2)/2$ , alors les solutions sont  $\mathcal{C}^{0,\alpha}$  pour tout  $\alpha \in (0, 1)$  ;
- (ii) si  $\beta < 1$ ,  $C_F = 0$  et  $\tau > k(1/\beta - 1)$ , alors les solutions sont  $\mathcal{C}^{0,\beta}$ .

Dans tous les cas, les estimations sont uniformes, dépendant uniquement des paramètres et constantes entrant en jeu dans les hypothèses. Des résultats équivalents sont donnés dans le cas d'opérateurs de type Lévy-Itô,  $\mathcal{I}[\cdot]$ .

**Régularité Lipschitz** — Les résultats évoqués ci-dessus montrent que si  $\beta$  caractérise la singularité des mesures  $\mu_x$ , alors on obtient de la régularité  $\mathcal{C}^{0,\alpha}$  pour  $\alpha < \min(1, \beta)$ . Or, dans le cas où  $\beta \geq 1$  il semble naturel de penser que l'on doit obtenir de la régularité Lipschitz.

Dans [9] nous avons affiné la méthode employée, en remplaçant dans (2.4) le terme  $C|x - y|^\alpha$  non pas par  $L|x - y|$  (qui ne permet pas de conclure), mais par une perturbation restant strictement convexe,  $\varphi(|x - y|)$  où  $\varphi(t) = L(t - \rho|t|^{1+\alpha})$  pour  $t$  proche de 0. En reprenant notamment les estimation des termes non-locaux sur les cônes  $C_{\eta,\delta}(\cdot)$ , nous sommes parvenus à obtenir la régularité Lipschitz si  $\beta > 1$ , mais le cas  $\beta = 1$  résiste à notre analyse (on en reste au niveau Hölder pour tout  $\alpha < 1$ ).

**Equations mixtes** — L'autre intérêt de [9] réside dans le fait de considérer des équations « mixtes » dans lesquelles les dérivées secondes et les termes non-locaux n'agissent pas sur les mêmes directions. L'exemple de base est le suivant :

$$-\Delta_{x_1} u + (-\Delta_{x_2})^{\beta/2} u = f(x_1, x_2).$$

En effet, les résultats de [13], s'ils prennent en compte une ellipticité généralisée, ne permettent pas de traiter un tel cas modèle. On s'attaque donc ici à des équations dont la forme est principalement est la suivante :

$$F_0(u, Du, D^2u, \mathcal{I}[u]) + F_1(x_1, D_{x_1}u, D_{x_1}^2, \mathcal{I}_{x_1}[u]) + F_2(x_2, D_{x_2}u, D_{x_2}^2, \mathcal{I}_{x_2}[u]) = f(x),$$

où  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$  et

$$\mathcal{I}_{x_1}[u](x) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} u(x_1 + z, x_2) - u(x_1, x_2) - D_{x_1}u(x) \cdot z \mathbf{1}_{|z| < 1}(z) \, \mathrm{d}\mu_{x_1}(z),$$

de même pour  $\mathcal{I}_{x_2}[\cdot]$ .

On reprend les mêmes hypothèses que dans le cas non-mixte ci-dessus, pour chaque hamiltonien et mesures séparément. Mais on ajoute une condition de régularité pour gérer le passage « croisé » entre les divers hamiltoniens : on demande que pour  $i = 1, 2$ , chaque  $\ell \mapsto F_i(\cdot, \ell)$  soit Lipschitz, uniformément par rapport à toutes les autres variables, et chaque  $F_i$  vérifie également une régularité par rapport à la variable  $x$  assez classique :

$$F_i\left(y, \frac{x-y}{\varepsilon}, Y, \ell\right) - F_i\left(x, \frac{x-y}{\varepsilon}, X, \ell\right) \leq \omega_{F_i}\left(\frac{|x-y|^2}{\varepsilon} + |x-y|\right).$$

Dans ce cadre, on obtient alors des résultats de régularité Hölder (si  $\beta \leq 1$ ) et Lipschitz (si  $\beta > 1$ ). Les conditions de régularité des hamiltoniens ci-dessus ne sont pas si contraignantes qu'on pourrait le croire car il suffit que l'un des  $F_i$  la vérifie pour obtenir le résultat. D'autre part on peut « localiser » les arguments en se ramenant à des gradients bornés, puis en vérifiant que les bornes Hölder/Lipschitz ne dépendent pas de ces bornes de gradient, cf. la discussion qui suit le Corollaire 5 dans [9].

## 5. PROBLÈME DE NEUMANN

Cette section se réfère à la publication [6] dans laquelle nous avons étudié le problème de Neumann dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^N = \mathbb{R}_{N-1} \times \mathbb{R}_+$ . En fait, on devrait parler « des problèmes de Neumann » nonlocaux puisque nous présentons au moins 4 modèles distincts cohérents par rapport au cas classique.

Dans le cas d'un problème de Neumann pour une diffusion continue (typiquement, quand l'opérateur est le laplacien), l'idée est de contraindre le processus stochastique associé à rester dans l'ouvert où a lieu l'équation, ce qui implique en particulier une préservation de la masse totale dans le cas d'évolution. Cela est obtenu essentiellement par réflexion sur le bord, via la méthode développée par Lions et Sznitman <sup>(k)</sup>, cf. [LionsSznitman1984].

Dans le cas d'un processus à sauts, on reprend cette idée mais il y a alors plusieurs façons de maintenir le processus à l'intérieur du domaine d'étude. La figure ci-contre reprend les quatre modèles principaux traités dans [6]. Tous peuvent se coder sous la forme suivante : si le saut de  $x$  à  $x+z$  conduit en dehors du domaine, alors on utilisera à la place un point  $x + \eta(x, z)$  situé dans  $\bar{\Omega}$  où  $\Omega := \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)$ .

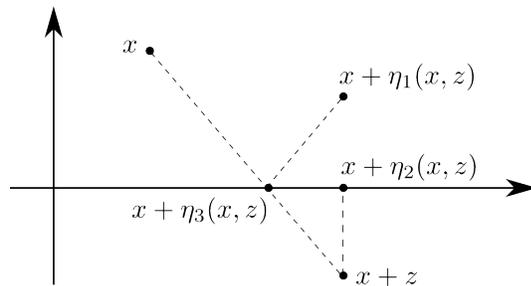


FIGURE 2.5 – Différents modèles de saut.

Ce qui diffère dans les cas représentés, c'est le choix de la fonction  $\eta$ , donc du mécanisme qui maintient le processus à l'intérieur :

- (i) on peut faire une réflexion au bord, ce qui conduit à  $x + \eta_1(x, z)$  ;
- (ii) on peut appliquer la méthode de Lions-Sznitman : ramener le processus le long de la normale, ce qui donne  $x + \eta_2(x, z)$ .
- (iii) on peut stopper le processus sur le bord, comme s'il restait « collé » sur la paroi (d'où le nom que nous avons donné à ce modèle, *fleas on the window*),  $x + \eta_3(x, z)$ .
- (iv) enfin, on peut très bien décider, dans le cas où le saut conduirait hors du domaine, de ne pas sauter. Donc on stoppe le processus, puis on le ressucite à partir du point où il était juste avant le saut, donc ici  $x + \eta_4(x, z) = x$ .

**Formulation du problème** — la façon générale de formuler le problème est d'incorporer la condition de Neumann dans la définition de l'opérateur lui-même, comme nous l'avons vu pour le problème de Dirichlet. L'idée est donc d'introduire une fonction de saut  $\eta(x, z)$  comme ci-dessus et de définir le problème-type linéaire ainsi :

$$(2.5) \quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ u(x + \eta(x, z)) - u(x) - \eta(x, z) \cdot Du(x) \mathbb{1}_{|z| < 1}(z) \right\} d\mu(z) + u(x) = f(x).$$

La contrainte principale que doit vérifier la fonction de saut est que pour tout  $x \in \Omega$  et tout  $z \in \mathbb{R}^N$ ,  $\eta(x, z) \in \bar{\Omega}$ , et si  $x + z \in \bar{\Omega}$ , alors  $\eta(x, z) = z$ .

Néanmoins, il est *a priori* nécessaire d'imposer la condition de Neumann sur le bord : pour une sous-solution, si le max de  $u - \phi$  est atteint sur le bord, on demande que

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x_N} \leq 0.$$

Il s'avère que cette condition n'est nécessaire que si la mesure est suffisamment singulière (typiquement,  $\alpha > 1$  dans le cas du laplacien fractionnaire). Dans le cas contraire, l'équation a lieu au bord et il n'est pas nécessaire d'utiliser la condition de Neumann « classique ».

Le cas où la fonction  $(z \mapsto \eta(x, z))$  est uniformément Lipschitz peut se traiter de façon assez naturelle par les méthodes de viscosité. Mais ici, on voit clairement dans les exemples (i)–(iv) que cette fonction ne vérifie pas toujours cette propriété. Par exemple dans le cas « fleas on the window » si on prend un point proche du bord  $\{x_N = 0\}$  avec un saut rasant, le moindre écart change complètement la donne, cf. figure 2.6.

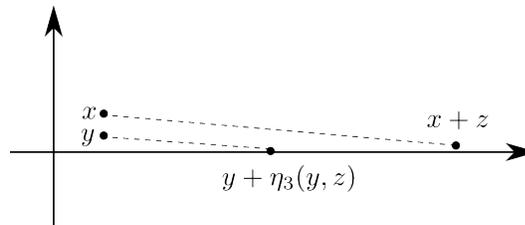


FIGURE 2.6 – Sauts rasants.

Néanmoins, les cas (i)–(iii) ont tous en commun d'être Lipschitz dans la variable  $x_N$

(on note  $x = (x', x_N)$  dans la suite), ce qui est une propriété nous est très utile pour obtenir le principe de comparaison. On a donc une première catégorie de problèmes de Neumann où la fonction de saut vérifie les conditions suivantes :

- (a)  $|\eta(x, z)| \leq C|z|$  ;
- (b)  $\eta(x, \sigma_i z)_i = -\eta(x, z)_i$  pour toute symétrie ponctuelle  $\sigma_i$ , n'agissant que sur les  $N - 1$  premières coordonnées ;
- (c)  $\eta(y, z) \rightarrow \eta(x, z)$  quand  $y \rightarrow x$  pour presque tout  $z$  ;
- (d)  $|\eta(x', s, z)' - \eta(y', s, z)'| \leq C|x' - y'| |z|$  pour tout  $x', y', z$  et  $s > 0$  ;
- (e)  $|\eta(x, z)_N - \eta(y, z)_N| \leq |x_N - y_N|$ .

Le cas (iv) est bien plus singulier, et relève d'une approche différente que nous évoquons également plus bas, puisque  $\eta(x, z) = 0$  si  $x_N + z_N < 0$ .

**Résultat de comparaison** — la preuve de comparaison recèle plusieurs ingrédients que nous allons mettre en évidence sans les détailler. Tout d'abord, pour gérer convenablement les hypothèses générales (a) – (e), il est nécessaire de supposer que  $\mu$  se décompose sous la forme  $\mu = \mu_* + \mu_{\sharp}$ , où  $\mu_*$  est une mesure à densité symétrique, et  $\mu_{\sharp}$  est une mesure telle que  $\int (1 \wedge |z|) d\mu_{\sharp}(z) < \infty$ . Ainsi, la perturbation non-symétrique est d'ordre inférieur. Ce type de décomposition est valable pour une large gamme de mesures à densité, par exemple si  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de  $z = 0$  on a

$$\frac{g(z)}{|z|^{N+\alpha}} dz = \frac{g(0)}{|z|^{N+\alpha}} dz + \frac{g(z) - g(0)}{|z|^{N+\alpha}} dz = \mu_*(dz) + \mu_{\sharp}(dz),$$

Comme déjà dit, si  $\eta$  était Lipschitz en  $x$ , la méthode serait assez « classique », consistant à estimer un maximum pénalisé :

$$M := \sup_{x, y} \left( u(x) - v(y) - \frac{|x - y|^2}{\varepsilon^2} - \text{vd}(x, y) + \Phi_R(x, y) \right).$$

Le rôle du terme en  $\varepsilon^2$  est clair : il s'agit de forcer les points  $x$  et  $y$  à converger vers le même point. Le terme en  $v$  a pour but de pousser les points de max à l'intérieur de  $\Omega$ , typiquement on utilisera pour cela  $d(x, y) = (1 \wedge x_N) + (1 \wedge y_N)$ . Enfin le terme  $\Phi_R(x, y)$  est un terme classique de localisation ayant pour but de s'assurer que le max est atteint.

Mais le fait d'avoir à gérer une direction particulière,  $x_N$ , incite à utiliser une méthode qui désymétrise les termes de dédoublement de variables. Au lieu d'utiliser la pénalisation typique,  $|x - y|^2/\varepsilon^2$ , on emploie deux paramètres  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon_N$  :

$$\frac{|x' - y'|^2}{(\varepsilon')^2} + \frac{|x_N - y_N|^2}{(\varepsilon_N)^2}.$$

La stratégie de la preuve consiste donc (une fois que l'on a poussé les points à l'intérieur de  $\Omega$ ), à utiliser la propriété (e) de contraction dans la direction  $x_N$ , afin de faire tendre d'abord  $\varepsilon_N$  vers zéro.

A ce stade, on obtient donc des points  $x$  et  $y$  qui vérifient  $x_N = y_N$ . On utilise alors l'hypothèse (d) avec  $s = x_N = y_N$  pour récupérer un contrôle sur les variables de  $\mathbb{R}^{N-1}$ . L'hypothèse de symétrie (b) permet de rendre nuls divers termes intégrés par rapport à  $\mu_*$ , tandis que les termes intégrés par rapport à  $\mu_\#$  sont d'ordre inférieur. On peut alors faire tendre  $\varepsilon'$  vers zéro, qui permet de se débarrasser des termes de pénalisation en  $|x' - y'|^2$ .

Il reste à faire tendre  $v$  vers 0 puis  $R$  vers l'infini, sous réserve d'avoir obtenu des estimations stables de ces termes par rapport à  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon_N$  auparavant, ce qui est classique en solutions de viscosité.

**Cas des processus censurés** — deux cas se présentent : le cas très singulier ( $\alpha > 1$  dans le cas du laplacien fractionnaire), et le cas d'une singularité pas trop forte ( $\alpha \leq 1$ ) qui relève d'une approche différente.

- Dans le cas peu singulier, *i.e.*  $\int |z| \wedge 1 d\mu(z) < \infty$ , on construit une solution de type « blow-up », c'est à dire une fonction  $\mathcal{U}$  vérifiant

$$-\mathcal{I}[\mathcal{U}] \geq -K \quad \text{dans } \{0 \leq x_N \leq R\}$$

avec  $\mathcal{U} \geq 1/\omega(x_N)$ , où  $\lim \omega = 0$  lorsque  $x_N \rightarrow 0$ . L'existence d'une telle fonction est obtenue pour une large gamme de mesures dont le cas du laplacien fractionnaire, tempéré ou pas. Dans ce cas la preuve de comparaison relève de principes assez classiques : on utilise la fonction  $\mathcal{U}$  dans la pénalisation en étudiant

$$\sup_{x,y} \left( u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{\varepsilon^2} - \kappa \mathcal{U}(x) - \kappa \mathcal{U}(y) - \phi_R(x,y) \right).$$

Ces termes de blow-up empêchent les points de max d'être sur le bord, et on peut donc utiliser l'équation à l'intérieur pour faire une comparaison habituelle (en tenant compte tout de même des termes non-locaux).

- Dans le cas des mesures plus singulières, on utilise encore la décomposition  $\mu_* + \mu_\#$ , mais on demande ici un peu plus :

$$\mu_*(dz) = \frac{dz}{|z|^{N+\alpha}}, \quad \int (1 \wedge |z|^{\bar{\beta}}) \mu_\#(dz) < \infty,$$

où  $\bar{\beta} = \alpha - 1$ . Les résultats de comparaison que nous allons avoir dans ce cas sont donc moins généraux que dans les autres cas. Non seulement à cause de la restriction sur la partie  $\mu_\#$ , mais également à cause d'une hypothèse de régularité *a priori* que nous n'avons pas réussi à relaxer.

Le résultat obtenu est le suivant : si  $u$  est une sous-solution,  $v$  une sur-solution telles que pour un certain  $\beta > \bar{\beta}$ ,

$$u(x', x_N) \geq u(x', 0) - C|x_N|^\beta \quad v(x', x_N) \leq v(x', 0) + C|x_N|^\beta$$

alors  $u \leq v$ . En particulier, on démontre donc qu'il existe au plus une solution de classe  $\mathcal{C}^{0,\beta}$  pour tout  $\beta > \alpha - 1$ .

De façon complémentaire, on sait démontrer qu'en dimension  $N = 1$  toute solution bornée, uniformément continue est  $\mathcal{C}^{0,\beta}$  pour un certain  $\beta > \bar{\beta}$ . On sait de plus construire de telles solutions, ce qui boucle (en partie seulement) le problème. En dimension plus grande, le même résultat reste vrai mais il nécessite des hypothèses assez fortes sur la régularité de  $f$  par rapport aux variables de  $\mathbb{R}^{N-1}$  qui ne sont pas satisfaisantes.

- Un mot sur la condition de Neumann  $-\partial_{x_N} u \leq 0$  : dans le cas des processus censurés de faible intensité, le fait d'avoir une solution de type blow-up entraîne qu'il n'est pas besoin de s'occuper des points du bord. Ainsi, cette condition de Neumann est tout simplement encodée dans l'opérateur. En d'autres termes, pour faire un parallèle avec les équations locales, il semble que le processus associé ne puisse venir toucher le bord (et donc l'équation à lieu au bord). Alors que dans le cas des processus censurés de forte intensité, on n'évite pas le fait d'utiliser la condition de Neumann pour évacuer la présence des points de max sur le bord.

**Convergence quand  $\alpha$  tend vers  $2^-$**  — une fois le principe de comparaison établi, il est presque automatique d'obtenir des solutions via la méthode de Perron. Cela nous fournit donc, à partir d'une fonction  $f$  donnée, au moins une solution pour chaque modèle de Neumann non-local. La question se pose alors de savoir lequel de ces modèles est cohérent avec le modèle local, lorsqu'on passe à la limite en concentrant la mesure  $\mu$ . Nous avons prouvé que si on considère la suite de solutions  $(u_\alpha)$  de l'équation (2.5) avec

$$\mu_\alpha(dz) = (2 - \alpha) \frac{g(z) dz}{|z|^{N+\alpha}},$$

alors sous les hypothèses (a) – (d) (qui incluent également les processus censurés), lorsque  $\alpha \rightarrow 2^-$  tous nos modèles convergent vers l'unique solution du problème local

$$-a\Delta u + b \cdot Du + u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial x_N} = 0,$$

où  $a = g(0)|\mathbb{S}^{N-1}|/N$ ,  $b = Dg(0)|\mathbb{S}^{N-1}|/N$ . Cela signifie donc que chacun des modèles considéré est raisonnable, en ce sens qu'il en est une approximation nonlocale cohérente.

## 6. COMPORTEMENT EN TEMPS LONG

---

Dans cette section, nous considérons une équation parabolique sous la forme générale suivante :

$$(2.6) \quad u_t + F(x, Du, D^2u, I[u]) = 0,$$

avec une donnée initiale  $u_0$  définie sur  $\mathbb{R}^N$ . On remarquera la non-dépendance en  $u$  qui est en partie remplacée par le terme de dérivée en temps<sup>(1)</sup>. L'ensemble de la théorie d'exis-

tence, d'unicité, de régularité s'étend sans trop de difficultés, la variable temps n'étant en fait qu'une variable de plus. Ce qui nous intéresse principalement ici, c'est d'obtenir le comportement asymptotique des solutions lorsque  $t$  tend vers l'infini.

**Méthodes classiques** — Dans le cas purement local (pas de dépendance en  $I[u]$ ), il s'agit d'un problème qui a été longuement étudié, cf. notamment [Lions1982, NamahRoquejoffre1999, BarlesSouganidis2001] pour l'approche que nous décrivons et utilisons ci-dessous, et [Fathi1998] pour une autre approche de type systèmes dynamiques (théorie de KAM faible). On peut aussi aborder ce problème par des méthodes probabilistes. La bibliographie concernant le comportement asymptotique étant assez vaste, on revoit à [7] pour plus de références sur le sujet.

Pour l'approche edp, on met en évidence d'abord le fait que le rapport  $u(\cdot, t)/t$  tend vers une constante  $\lambda$ , appelée *constante ergodique*<sup>(m)</sup>. Puis, on cherche un développement asymptotique de la forme

$$u(x, t) = \lambda t + v(x) + o(1),$$

où  $o(1)$  désigne une quantité qui tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. On démontre alors que sous certaines hypothèses sur  $F$ , il existe bien une unique valeur de  $\lambda$ , indépendante de la donnée initiale  $u_0$ , telle que l'équation

$$(2.7) \quad \lambda + F(x, Dv, D^2v) = 0$$

ait une solution de viscosité  $v$ , qui donne donc le développement asymptotique recherché. On notera que donc ni  $\lambda$ , ni  $v$  ne dépendent de la donnée initiale  $u_0$ , ce sont des quantités reliées à la structure de l'équation.

**Le cas non-local** — Dans [7], nous avons repris la méthode de [BarlesSouganidis2001] pour la mettre en place dans notre situation. Cette méthode repose principalement sur deux ingrédients :

- (i) des bornes Lipschitz de gradient, obtenues dans [9] ;
- (ii) un principe du maximum fort<sup>(n)</sup>, démontré dans [Ciomaga2012].

Les hypothèse de structure sur  $F$  sont donc dans un premier temps les mêmes que celles pour obtenir de la régularité et de la comparaison. Puis, pour résoudre le problème ergodique (2.7), on utilise une structure plus spécifique :

$$F(x, u, Du, D^2u, I[v]) = F_0(x, v, Dv, I[v]) + H(Dv),$$

où  $F_0$  est positivement homogène de degré 1 :  $F_0(x, \lambda u, \lambda p, \lambda M, \lambda \ell) = \lambda F_0(x, u, p, M, \ell)$  pour tout  $\lambda > 0$ . La partie non-linéaire en gradient,  $H(Dv)$  peut être sous-linéaire ou sur-linéaire, l'idée étant d'isoler cette dépendance non-linéaire en gradient de la dépendance en  $x$ , chose toujours délicate en théorie des solutions de viscosité.

Sous ces hypothèses on obtient bien l'existence d'une unique constante  $\lambda$  telle que (2.7) ait une solution, qui est unique à constante additive près. L'obtention de ce résultat

passé par la résolution du problème modifié :

$$\delta v + F(x, v, Dv, D^2vI[v]) = 0,$$

dont le passage à la limite montre que  $\delta v(0) \rightarrow \lambda$ , ce qui sélectionne la bonne valeur de la constante ergodique. Les preuves diffèrent quelque peu selon que  $H(\cdot)$  est sous-linéaire ou sur-linéaire, mais c'est en particulier à cet endroit que des bornes localement uniformes (pas nécessairement Lipschitz) sont nécessaires pour passer à la limite et avoir une solution du problème ergodique.

Reste ensuite à démontrer que  $u$  se comporte bien comme  $\lambda t + v(x)$ . On commence par invoquer le principe de comparaison pour l'équation parabolique qui montre que si on définit

$$m(t) := \max_{x \in \mathbb{R}^N} \left( u(x, t) - \lambda t - v(x) \right),$$

alors  $|m(t)| \leq |m(0)|$ . En fait, on voit de même que  $m(\cdot)$  est une fonction décroissante (au sens large), ce qui permet de définir sa limite en l'infini,  $\bar{m} \in \mathbb{R}$ . Evidemment, si on savait que  $\bar{m} = 0$  on aurait presque fini, mais rien ne permet de le dire à ce stade.

On utilise alors la fonction  $w(\cdot, t) := u(\cdot, t) - \lambda t$  qui est bornée et equi-Lipschitz. On peut donc trouver une suite  $t_{n_k} \rightarrow \infty$  telle que  $w(\cdot, t_{n_k} + t) \rightarrow \bar{w}(\cdot, t)$  où  $\bar{w}(\cdot, t)$  est uniformément Lipschitz en  $x$ . En passant à la limite dans  $m(t_{n_k} + t)$ , on voit que

$$\bar{m} = \max_{x \in \mathbb{R}^N} \left( \bar{w}(\cdot, t) - v(\cdot) \right).$$

C'est ici que nous sert le principe du maximum fort qui montre que  $\bar{w}$  ne dépend pas de  $x$  puisque  $\bar{w}(x, t) = v(x) + \bar{m}$ . Mais de plus,  $v + \bar{m}$  est la seule limite possible pour  $w(\cdot, t)$  et c'est donc toute la suite qui converge, pas seulement une sous-suite. Enfin, on obtient

$$\|u(\cdot, t) - \lambda t - v(\cdot) - \bar{m}\|_\infty \leq \|w(\cdot) - v(\cdot) - \bar{m}\|_\infty \rightarrow 0$$

ce qui montre qu'on a le développement  $u(x, t) = \lambda t + \bar{v}(x) + o(1)$  où  $\bar{v} = v + \bar{m}$  est bien une solution du problème ergodique associé à  $\lambda$ .

On notera que plusieurs passages à la limite ne nécessitent pas des bornes Lipschitz (à condition d'avoir des bornes globalement uniformes), mais qu'on utilise le caractère Lipschitz au moment d'utiliser le principe du maximum fort. En effet, il faut pour cela obtenir l'équation satisfaite par  $\bar{w}$ , et dans le cas surlinéaire, il est nécessaire de linéariser l'équation.

# CONTRÔLE DÉTERMINISTE

---

*Dynamiques discontinues*



Cette troisième partie aborde la thématique du contrôle déterministe. Les travaux exposés concernent plus précisément le cas où les dynamiques présentent des discontinuités, ce qui en fait un problème non-standard.

L'approche « équations aux dérivées partielles » *via* les équations de Bellman ne permet pas de décrire complètement les phénomènes qui se présentent le long des lignes de discontinuité. Il est donc nécessaire d'utiliser des arguments plus fins, au niveau du problème de contrôle.

Sous l'angle edp, la question qui se pose est celle de l'unicité des solutions d'équations

$$H_i(x, u, Du) = 0 \quad \text{dans } \Omega_i,$$

où les  $\bar{\Omega}_i$  recouvrent l'espace tout entier et les hamiltoniens sont associés à des problèmes de « contrôle ». On démontre en fait qu'il existe une solution minimale et une maximale qui sont distinctes en général.

CONTRÔLE ET EDP

DISCONTINUITÉS DE CODIMENSION UN

EXTENSIONS

HOMOGÉNÉISATION

EXEMPLES EN DIMENSION UN

## 1. CONTRÔLE ET EDP ; POSITION DU PROBLÈME

---

Pour comprendre les problèmes qui se présentent dans le cas des dynamiques discontinues, nous allons passer rapidement en revue les notions fondamentales de la théorie du contrôle et des edp associées.

**Equations différentielles ordinaires contrôlées** — On part de l'edo suivante

$$(3.1) \quad \begin{cases} X(t) = b(X(t), \alpha(t)) & \text{pour } t > 0, \\ X(0) = x \in \mathbb{R}^N & \text{pour } t = 0. \end{cases}$$

Ici,  $\alpha(\cdot)$  est une fonction de  $\mathcal{A} := L^\infty(0, T; A)$  où  $A$  est un espace métrique compact. On parle indifféremment de *contrôle* pour un élément de  $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$  ou  $\alpha \in A$ . Par ailleurs, il est courant de supposer  $A$  convexe pour éviter d'avoir à utiliser des contrôles relaxés<sup>(a)</sup>.

Sous l'hypothèse classique que le champ de vecteurs  $b : \mathbb{R}^N \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^N$  est Lipschitz par rapport à sa première variable, le théorème de Cauchy-Lipschitz fournit pour tout contrôle  $\alpha \in \mathcal{A}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , une unique *trajectoire contrôlée*  $X(\cdot) = X_x^\alpha(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$  qui satisfait (3.1). L'espace ambiant pour  $X(\cdot)$  est appelé *espace d'état* puisque  $X(\cdot)$  encode l'état du système étudié (sa position physique dans l'espace, par exemple).

Dans le cas où la *dynamique*  $b$  est seulement continue, on peut encore résoudre l'edo (conditions de Péano), mais l'unicité est perdue a priori. En revanche, cela devient sensiblement plus compliqué lorsque  $b$  présente des discontinuités, sujet qui est au cœur des travaux [4, 3] que j'expose plus loin.

**Contrôle optimal** — Lorsqu'on sélectionne un ensemble spécifique de contrôles, on obtient un ensemble de trajectoires qui partent toutes du même point  $x$ . Dans les problèmes qui nous intéressent ici, on cherche à minimiser un *coût*, calculé pour chaque trajectoire<sup>(b)</sup>. Notant  $\ell(y, \alpha)$  le coût instantané calculé à la position courante  $y$  en utilisant le contrôle  $\alpha \in A$ , on se ramène donc à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$J(x, \alpha) := \int_0^\infty \ell(X(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt,$$

où  $\lambda > 0$  est appelé *facteur d'actualisation*. Ce problème est dit en *horizon infini* car on laisse les trajectoires évoluer sans les stopper à un instant  $T > 0$  (cf. plus loin le cas des horizons finis où on ajoute un coût spécifique en  $T > 0$ ). Le rôle de ce facteur est, entre autres choses, de faire converger l'intégrale, pour cela il suffit alors d'avoir un coût instantané borné.

La plupart du temps (mais pas toujours, comme nous le verrons), on prend tous les contrôles de l'ensemble  $\mathcal{A}$  et on cherche donc à déterminer

$$U(x) := \inf_{(X,\alpha) \in \mathcal{T}(x)} \int_0^\infty \ell(X(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt,$$

où  $\mathcal{T}(x)$  désigne l'ensemble des trajectoires contrôlées *admissibles*, c'est-à-dire celles qui sont solutions de l'edo contrôlée (3.1), en partant du point  $x$ . Souvent, on ne se contente pas que de chercher la valeur de cet infimum ; on cherche aussi la (ou les) bonne(s) stratégie(s) permettant d'obtenir l'inf, *i.e.* on cherche le ou les contrôle(s) optimal(aux)  $\alpha(\cdot)$  et la ou les trajectoire(s) associée(s)  $X(\cdot)$ .

**L'approche de Bellman et la programmation dynamique** — Dans son célèbre problème du voyageur [Bellman1962], Bellman a abordé ce problème de minimisation sous un angle particulièrement intéressant : plutôt que chercher à calculer l'inf et le contrôle optimal à  $x$  fixé, son idée fut d'étudier la *fonction valeur* ( $x \mapsto U(x)$ ), en particulier en cherchant une équation (fonctionnelle, ou aux dérivées partielles) qu'elle satisfait.

La première information importante concernant la fonction valeur est qu'elle satisfait le *principe de la programmation dynamique* (ppd) qui se traduit par une équation permettant de relier  $U(x)$  et la valeur de  $U$  en un point voisin (ou pas) : pour tout  $\tau > 0$ ,

$$U(x) = \inf_{(X,\alpha) \in \mathcal{T}(x)} \left( \int_0^\tau \ell(X(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt + U(X(\tau)) e^{-\lambda \tau} \right).$$

L'une des deux inégalités est facile à obtenir : si  $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$  est un contrôle optimal pour  $U(x)$ , alors en découpant l'intégrale, en faisant un changement de variable puis en prenant l'inf il vient,

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_0^\tau \ell(X(t), \bar{\alpha}(t)) e^{-\lambda t} dt + e^{-\lambda \tau} \int_0^\infty \ell(X(t+\tau), \bar{\alpha}(t+\tau)) e^{-\lambda t} dt, \\ &\geq \int_0^\tau \ell(X(t), \bar{\alpha}(t)) e^{-\lambda t} dt + e^{-\lambda \tau} U(X(\tau)), \end{aligned}$$

D'où l'inégalité  $U(x) \geq \dots$  en prenant l'inf sur toutes les trajectoires admissibles. L'autre inégalité s'obtient par un découpage similaire, mais en construisant une suite « bons » contrôles, donnant l'inf à  $\varepsilon$  près.

**Equations de Hamilton-Jacobi-Bellman** — La programmation dynamique peut se traduire de façon infinitésimale : lorsqu'on fait tendre  $\tau$  vers 0 dans

$$\frac{U(x) - U(X(\tau)) e^{-\lambda \tau}}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \ell(X(t), \bar{\alpha}(t)) dt,$$

on obtient formellement

$$\ell(x, \bar{\alpha}) = \left. \frac{\partial (U(X(\tau)) e^{-\lambda \tau})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = b(x, \bar{\alpha}) \cdot DU(x) - \lambda U(x).$$

La justification exacte fait intervenir la théorie des solutions de viscosité, en remplaçant  $U(\cdot)$  par une fonction-test régulière (afin de justifier le calcul de dérivées), et on procède donc par double inégalité.

En introduisant l'hamiltonien  $H(x, u, p) = \sup_{a \in A} \{ \lambda u - b(x, a) \cdot p - \ell(x, a) \}$ , et en utilisant quelques manipulations classiques entre l'inf et le sup sur les contrôles, on arrive à la conclusion que la fonction valeur  $U(\cdot)$  satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$H(x, U(x), DU(x)) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N.$$

L'hamiltonien  $H$ , bien que non-linéaire, satisfait un certain nombre de « bonnes » propriétés, en particulier la coercivité et la convexité<sup>(c)</sup> qui assurent qu'il existe une unique solution (au sens de viscosité) de cette équation dans  $\mathbb{R}^N$ .

**Contrôle en feedback** — Nous venons donc de caractériser  $U$  comme l'unique solution de l'équation de Bellman  $H(x, U, DU) = 0$  mais même si cette équation peut nous fournir des renseignements qualitatifs sur  $U$  en fonction du point  $x$ , cela ne répond pas à l'une des questions de départ, à savoir trouver le contrôle optimal qui réalise l'inf, c'est-à-dire : quelle est la « bonne » stratégie à employer pour minimiser le coût ?

L'idée est d'obtenir ce contrôle par *feedback* : pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , on sélectionne le contrôle  $a = a(x)$  qui réalise le sup dans le calcul de  $H(x, U, DU)$ , qui donne la meilleure stratégie « instantanée » au point  $x$ .

Ensuite, on résout l'edo suivante :  $\dot{X}(t) = b(X(t), a(X(t)))$  en partant de  $X(0) = x$ . On obtient ainsi une trajectoire admissible associée au contrôle  $\alpha(t) := a(X(t))$ , et on démontre qu'elle fournit une trajectoire optimale, donnant l'inf. Ainsi, une des « bonnes » stratégies recherchées est donnée par  $\alpha(\cdot)$ , qui est obtenu par feedback. Pour résumer l'approche : on résout d'abord l'équation de Bellman puis on en déduit le contrôle optimal. Notons tout de même qu'il n'est pas si aisé de calculer concrètement  $a(\cdot)$  car il faut trouver le maximiseur de l'hamiltonien en chaque point  $X(t)$  de la trajectoire.

## 2. DISCONTINUITÉS DE CODIMENSION UN

---

Dans [4] nous abordons le cas où la dynamique  $b(\cdot, \cdot)$  n'est plus Lipschitz par rapport à sa première variable, ni même continue.

Le cas modèle est le suivant : on sépare  $\mathbb{R}^N$  en deux domaines  $\Omega_1 = \{x_N > 0\}$ ,  $\Omega_2 = \{x_N < 0\}$  et on note  $\mathcal{H}$  (ou  $\Gamma$ ) la frontière commune  $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ , qui n'est rien d'autre que l'hyperplan  $\{x_N = 0\}$ . On se donne ensuite deux dynamiques Lipschitz  $b_1$  et  $b_2$ , définies sur  $\bar{\Omega}_1$  et  $\bar{\Omega}_2$  respectivement, mais avec  $b_1 \neq b_2$  sur  $\mathcal{H}$  *a priori*. On se donne également deux ensembles de contrôles  $A_1$  et  $A_2$  (différents ou non, cela n'a pas d'importance ici).

Dans un premier temps, nous allons supposer que nous avons une controlabilité forte dans le sens suivant<sup>(d)</sup> : il existe un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ ,

$$(3.2) \quad \{b_i(x, \alpha) : \alpha \in A_i\} \supset B_\delta(0), \quad i = 1, 2.$$

Dans le cas où les dynamiques sont continues, cette hypothèse permet de démontrer par exemple que l'on peut relier en temps fini n'importe quels points  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^N$  par une trajectoire de (3.1) à l'aide d'un contrôle bien choisi.

**Résolution de l'edo par inclusion différentielle** — La première difficulté consiste à donner un sens à l'edo (3.1) lorsque le champ  $b$  est défini comme étant égal à  $b_1$  sur  $\Omega_1$  et  $b_2$  sur  $\Omega_2$  : que doit-on faire lorsque la trajectoire arrive sur un point de  $\mathcal{H}$  ? Une première approche consiste à régulariser le problème en faisant une interpolation régulière entre  $b_1$  et  $b_2$  sur  $\mathcal{H}$  ; c'est l'approche de Filippov [Filippov1960], décrite plus bas (cf. *Approximations de Filippov et viscosité évanescence*, plus loin).

L'autre approche consiste à utiliser l'outil des inclusions différentielles (voir par exemple [AubinFrankowska1990]) : on définit pour tout  $i = 1, 2$  et  $x \in \bar{\Omega}_i$ , les ensembles  $B_i(x) := \{b_i(x, \alpha) ; \alpha \in A_i\}$ . Puis, sur  $\mathcal{H}$  on définit

$$B_{\mathcal{H}}(x) := \overline{\text{co}}(B_1(x) \cup B_2(x)),$$

où  $\overline{\text{co}}(E)$  désigne l'adhérence convexe<sup>(e)</sup> de  $E$ . On retrouve en fait la même idée que dans l'approximation de Filippov puisque cette dernière consiste à faire des combinaisons convexes une fois les dynamiques étendues un peu au-delà de leurs domaines de définition. L'avantage des inclusions différentielles est que cela fournit un outil clef en main pour résoudre l'edo sans avoir à faire de passage à la limite : en posant

$$\mathcal{B}(x) := \begin{cases} B_1(x) & \text{si } x \in \Omega_1, \\ B_2(x) & \text{si } x \in \Omega_2, \\ B_{\mathcal{H}}(x) & \text{si } x \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

on se ramène à résoudre l'inclusion différentielle

$$\dot{X}(t) \in \mathcal{B}(X(t)).$$

Trois conditions sont toutefois à vérifier pour pouvoir résoudre ce problème : l'application  $(x \mapsto \mathcal{B}(x))$  doit être semi-continue supérieurement, à images convexes et compactes, ce qui est bien le cas ici car on a pris soin de prendre l'adhérence convexe.

A priori, on a perdu dans cette formulation l'aspect « trajectoire contrôlée ». On utilise alors un résultat de *sélection mesurable* qui nous permet de récupérer le contrôle sous-jacent : il existe un contrôle  $a(\cdot)$  tel que l'on peut écrire  $X(\cdot)$  comme la solution d'une edo contrôlée  $\dot{X}(t) = b(X(t), a(t))$ , cf. Figure 3.7.

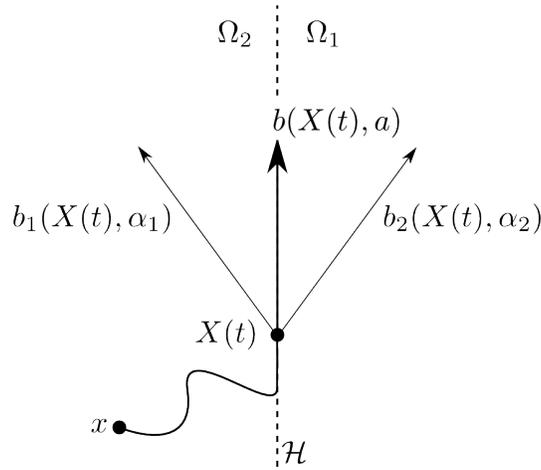


FIGURE 3.7 – Trajectoire globale.

Ce contrôle  $a(\cdot)$  tient compte de chaque contrôle séparément sur  $\Omega_i$ , mais aussi de la combinaison convexe sur  $\mathcal{H}$ . Ainsi, pour tout  $t > 0$ ,

$$a(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \mu(t)) \in A_1 \times A_2 \times [0, 1] := A,$$

et donc  $a(\cdot) \in \mathcal{A} = L^\infty(0, T; A)$ . Pour ce qui est du champ  $b$ , on a  $b = b_1$  dans  $\Omega_1$ ,  $b_2$  dans  $\Omega_2$  et sur  $\mathcal{H}$  on retrouve la combinaison convexe

$$b(x, a) = \mu b_1(x, \alpha_1) + (1 - \mu) b_2(x, \alpha_2).$$

On a ainsi obtenu une notion de trajectoire admissible globale dans  $\mathbb{R}^N$ . On note  $\mathcal{T}(x)$  l'ensemble de ces trajectoires.

**Formulation edp du problème** — puisque dans chaque ouvert  $\Omega_i$  on a un problème standard, en utilisant les hamiltoniens

$$H_i(x, u, p) := \sup_{\alpha_i \in A_i} \{ \lambda u - b_i(x, \alpha_i) \cdot p - l_i(x, \alpha_i) \}$$

(qui sont définis sur  $\bar{\Omega}_i$ ), on obtient déjà deux équations à résoudre :

$$(3.3) \quad H_i(x, u, Du) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_i, \quad i = 1, 2.$$

Reste la question de savoir les conditions sur  $\mathcal{H}$ . De par la théorie des solutions de viscosité, on sait qu'il faut compléter ces équations par les conditions de Ishii sur le bord <sup>(f)</sup>, ce qui donne pour tout  $x \in \mathcal{H}$  :

$$(3.4) \quad \begin{cases} (i) & \max \{ H_1(x, u, Du); H_2(x, u, Du) \} \geq 0, \\ (ii) & \min \{ H_1(x, u, Du); H_2(x, u, Du) \} \leq 0, \end{cases}$$

qu'il faut comprendre de la façon suivante : la condition (i) doit être vérifiée par une sur-solution, et la condition (ii) par une sous-solution. La question qui se pose alors est de prouver la comparaison pour un tel système d'équations, afin d'obtenir l'existence et l'unicité de la fonction valeur  $u$  de notre problème.

Un point important à noter pour la suite est que les conditions d'Ishii sur le bord sont obtenues en passant à la limite lorsqu'on vient de l'intérieur des  $\Omega_i$ . Ces conditions n'ajoutent donc fondamentalement pas d'information supplémentaire par rapport à la paire d'équations  $H_i = 0$  dans  $\Omega_i$ .

En fait, ce manque d'information supplémentaire sur le bord (du point de vue edp) est une vraie difficulté qui empêche d'avoir un résultat de comparaison général. Nous expliquons ci-après comment on peut construire deux fonctions-valeur qui vérifient les équations de Bellman, mais qui sont en général non identiques. Il faut pour cela rentrer plus en détail dans le problème de contrôle sur  $\mathcal{H}$ . Voir aussi plus loin quelques contre-exemples en dimension un.

**Stratégies régulières et singulières** — En dehors de l'hyperplan  $\mathcal{H}$ , le problème est plutôt standard. Ce qui change ici, c'est la possibilité de croiser  $\mathcal{H}$ , mais surtout d'y rester ! En effet, notant  $\mathbf{n}$  une normale à  $\mathcal{H}$ , tant que  $b(X(t), a(t)) \cdot \mathbf{n} = 0$ , la trajectoire  $X(t)$  reste dans l'hyperplan  $\mathcal{H}$  puisque le théorème de Stampacchia nous donne

$$\dot{X}(t) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{pour presque tout } t \text{ tel que } X(t) \in \mathcal{H}.$$

Cependant, le point fondamental est qu'il y a deux type de stratégies permettant aux trajectoires de rester sur  $\mathcal{H}$  :

- (i) les stratégies dites *push-push*, qui consiste à utiliser une combinaison de champs  $b_1$  et  $b_2$  poussant la trajectoire vers  $\mathcal{H}$  ;
- (ii) les stratégies *pull-pull* où les champs tirent chacun de leur coté la trajectoire, mais la combinaison convexe donne un équilibre (a priori instable).

Si on revient à la formulation edp, on comprend aisément que les stratégies pull-pull ne peuvent être encodées dans le système d'edp, contrairement aux stratégies push-push. En effet, les push-push sont obtenues comme limites de champ ramenant de l'information depuis l'intérieur des  $\Omega_i$ , contrairement aux pull-pull qui peuvent donc être considérées comme « singulières », mais qui restent néanmoins présentes. Cette remarque incite donc à introduire la définition suivante :

$$\mathcal{T}^{\text{reg}}(x) := \{ (X, a) \in \mathcal{T}(x) : b_i(X(t), a(t)) \cdot \mathbf{n}_i \geq 0, i = 1, 2, X(t) \in \mathcal{H} \}.$$

Cet ensemble  $\mathcal{T}^{\text{reg}}(x)$  est donc constitué des trajectoires contrôlées admissibles qui sont « régulières » sur  $\mathcal{H}$ , dans le sens où les stratégies singulières (pull-pull) en sont exclues.

**Fonctions-valeurs** — A partir des trajectoires de  $\mathcal{T}(x)$ , on peut définir une première fonction-valeur, comme on le fait dans le cas classique. Pour cela, il faut définir le coût

sur  $\mathcal{H}$  et on le fait en copiant la même combinaison convexe que celle qui donne la dynamique sur  $\mathcal{H}$ . On pose donc  $\ell(x, a) = l_i(x, \alpha_i)$  si  $x \in \Omega_i$  et sur l'hyperplan,  $\ell(x, a) = \mu l_1(x, \alpha_1) + (1 - \mu) l_2(x, \alpha_2)$ . A partir de là, on peut définir

$$\mathbb{U}^-(x) := \inf_{(X,a) \in \mathcal{T}(x)} \int_0^\infty \ell(X(t), a(t)) e^{-\lambda t} dt,$$

et on démontre que  $\mathbb{U}^-$  vérifie bien le système d'équations complémenteés par les équations de Ishii, (3.4).

On peut aussi utiliser les trajectoires « régulières » et définir de façon similaire une autre fonction-valeur

$$\mathbb{U}^+(x) := \inf_{(X,a) \in \mathcal{T}^{\text{reg}}(x)} \int_0^\infty \ell(X(t), a(t)) e^{-\lambda t} dt.$$

Comme on prend l'infimum sur un ensemble plus restreint de trajectoires, on a évidemment  $\mathbb{U}^+ \geq \mathbb{U}^-$ . De plus, on démontre que  $\mathbb{U}^+$  est également solution des edp complémenteés par (3.4). En fait, il s'avère que  $\mathbb{U}^-$  est la solution minimale (plus petite sur-solution) alors que  $\mathbb{U}^+$  est la solution maximale (plus grande sous-solution) du problème edp.

En général, il est clair que ces deux solutions extrémales sont distinctes car le coût sur les trajectoires singulières peut être moindre que sur les trajectoires régulières. Nous donnons dans la section 4. quelques exemples explicites en dimension un de ce type de phénomène.

Pour prouver les principes de comparaison pour ces deux fonctions-valeurs, il faut s'appuyer sur le problème de contrôle, en particulier pour  $\mathbb{U}^-$ , car la notion de trajectoire singulière n'est pas encodée dans les edp.

**hamiltoniens tangentiels, retour sur l'approche edp** — La question de savoir caractériser les deux fonctions-valeur extrémales  $\mathbb{U}^+$  et  $\mathbb{U}^-$  d'un point de vue edp est *a priori* délicate : on a déjà vu qu'elles vérifient toutes deux les équations (3.3)–(3.4). Il faut donc complémenteer ces équation par autre chose sur le bord pour retrouver de l'unicité.

On revient alors aux trajectoires qui restent sur  $\mathcal{H}$  et on introduit un hamiltonien « tangentiel » sur cet hyperplan :

$$H_T(x, u, p) := \sup_{a \in A_0} \{ \lambda u - b(x, a) \cdot p - \ell(x, a) \}.$$

Ici,  $A_0$  est l'ensemble des contrôles  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \mu) \in A$  tels que  $b(x, a) \cdot \mathbf{n} = 0$ . En réalité,  $H_T$  étant défini pour  $x \in \mathcal{H}$ , on doit le calculer sur des fonctions qui sont restreintes à  $\mathcal{H}$ . Cela entraîne que la variable  $p$  est censée être  $(N - 1)$ -dimensionnelle. Mais comme les contrôles sont dans  $A_0$ , le champ  $b(x, a)$  est tangentiel et donc le produit scalaire  $b(x, a) \cdot p$  se réduit au produit scalaire dans  $\mathcal{H}$ . On peut donc faire un abus d'écriture en écrivant  $H_T(x, u, Du)$  même si la fonction  $u$  est définie sur  $\mathbb{R}^N$  et son gradient est dans  $\mathbb{R}^N$  (cf. plus loin dans le cas d'une frontière qui n'est pas un hyperplan).

L'intérêt de cet hamiltonien tangentiel est qu'il porte l'information de l'ensemble de toutes les stratégies sur  $\mathcal{H}$ , pas seulement les régulières. Ainsi, on récupère le fait que la fonction-valeur  $\mathbb{U}^-$  satisfait

$$H_T(x, \mathbb{U}^-, D\mathbb{U}^-) \leq 0 \quad \text{sur } \mathcal{H}.$$

On peut alors récupérer de l'unicité en imposant la condition sur  $H_T$ , uniquement sur la condition de sous-solution :

- on dit que  $u$  est sous-solution de  $\mathbb{H}^-(x, u, Du) = 0$  si et seulement si elle est sous-solution de (3.3), vérifie (3.4)-(i) et  $H_T(x, u, Du) \leq 0$  ;
- on dit que  $u$  est une sur-solution de  $\mathbb{H}^+(x, u, Du) = 0$  si c'est une sur-solution de (3.3) qui vérifie (3.4)-(ii).
- on dit que  $u$  est une solution de  $\mathbb{H}^-(x, u, Du) = 0$  si c'est à la fois une sous et une sur-solution.

On démontre alors qu'on a un principe de comparaison pour les sous et sur-solutions de  $\mathbb{H}^-(x, u, Du) = 0$ , ce qui implique que  $\mathbb{U}^-$  est caractérisée comme l'unique solution de ce problème edp complémenté.

Il est tentant d'essayer une approche similaire pour  $\mathbb{U}^+$  en définissant  $H_T^{\text{reg}}$  à partir de l'ensemble  $A_0^{\text{reg}}$  des contrôles réguliers qui donnent un champ tangentiel : on prouve que  $H_T^{\text{reg}}(x, \mathbb{U}^+, D\mathbb{U}^+) \leq 0$  sur  $\mathcal{H}$ . Mais évidemment,  $H_T^{\text{reg}} \leq H_T$  et on ne sait pas caractériser  $\mathbb{U}^+$  comme l'unique solution des edp complémentées par la condition  $H_T^{\text{reg}}$  puisque par exemple,  $\mathbb{U}^-$  la vérifie aussi.

### 3. EXTENSIONS

Dans [3], nous avons étendus les résultats précédents essentiellement sur trois plans que nous allons esquisser maintenant.

**Interfaces non plates** — les résultats du cas modèle de l'hyperplan  $\mathcal{H} = \{x_N = 0\}$  séparant deux ouverts peut se généraliser quand l'interface  $\Gamma := \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$  est suffisamment régulière.

Typiquement, si  $\Gamma$  est une sous-variété de dimension  $(N - 1)$  de classe  $W^{1,\infty}$  (dans le cas complètement contrôlable), on peut utiliser un système de cartes qui permet de se ramener localement au bord plat.

De plus, une des avancées de [3] est d'avoir montré des versions locales de nos

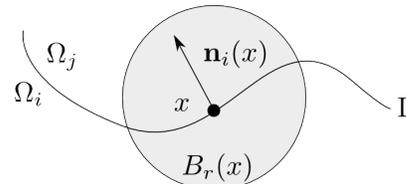


FIGURE 3.8 – Bords non plats.

travaux précédents. Cela permet, entre autre chose, d'étendre nos résultats au cas d'une infinité de domaines  $(\Omega_i)$  tels que pour tout  $x \in \Gamma := \mathbb{R}^N \setminus (\cup \Omega_i)$ , il existe une boule  $B_r(x)$  dans laquelle la situation est exactement celle de deux ouverts séparés par une interface Lipschitz<sup>(g)</sup>.

Evidemment, pour un point frontière  $x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ , la définition de stratégies singulières et/ou régulières se fait à travers les normales sortantes  $\mathbf{n}_i(x)$  et  $\mathbf{n}_j(x)$ .

**Dépendance en temps** — l'introduction d'une dépendance en temps est relativement facile, car les preuves employées, aussi bien du coté edp que du coté contrôle ne changent presque pas. Cela permet d'étendre nos résultats au cas d'équations du type  $u_t + H(x, u, Du) = 0$ .

Concrètement, on introduit une dépendance en temps dans les dynamiques et coûts :  $b_i(x, s, a)$  et  $l_i(x, s, a)$ , et utilise un coût final  $g(\cdot)$  en  $t \in [0, T]$ . Le problème de minimisation devient donc de trouver

$$u(x, t) = \inf_{(X, a) \in \mathcal{T}(x, t)} \int_0^t \ell(X(s), t - s, a(s)) \, ds + g(X(t)),$$

où  $t \in [0, T]$   $\dot{X}(s) \in \mathcal{B}(X(s), t - s)$ ,  $X(0) = x$ . La programmation dynamique montre que dans les cas standard, la fonction-valeur vérifie l'équation

$$u_t + H(x, u, Du) = 0$$

avec donnée initiale  $u(0, x) = g(x)$ , et  $H(x, u, p) := \sup\{-b(x, a) \cdot p - \ell(x, a)\}$ .

Dans le cas discontinu (avec des surfaces de discontinuité ne dépendant pas du temps), nous avons prouvé que l'ensemble de nos résultats s'appliquent : on peut définir deux fonctions valeur extrémales  $\mathbb{U}^-$  et  $\mathbb{U}^+$  qui vérifient les équations dans chaque domaine (et les conditions de Ishii sur les frontières). La fonction  $\mathbb{U}^+$  est obtenue en prenant l'infimum sur les trajectoires régulières, et en général, elle est différente de  $\mathbb{U}^-$ , pour laquelle l'infimum est pris sur toutes les trajectoires admissibles. Et on garde un principe de comparaison (en fait, local) pour (3.3)–(3.4), complémentée par la condition  $u_t + H_T(x, u, Du) \leq 0$  pour la condition de sous-solution.

**Controlabilité normale** — la condition de controlabilité (3.2) peut être relaxée pour n'utiliser qu'une controlabilité partielle, dans la direction normale. Plus précisément, nos résultats sont valables sous l'hypothèse qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\{b_i(x, \alpha) \cdot \mathbf{n}_i(x) : \alpha \in A_i\} \supset (-\delta; \delta), \quad i = 1, 2.$$

Cette controlabilité faible permet de récupérer de la coercivité par rapport à la composante normale  $p_N$ , et d'en déduire qu'une solution est Lipschitz en la variable  $x_N$  dès qu'elle l'est par rapport aux variables tangentielles. Ce point nous permet de faire l'ensemble des preuves de comparaison en régularisant d'abord uniquement par rapport aux variables tangentielles<sup>(h)</sup>.

Evidemment, comme le seul point délicat concerne ce qui se passe sur la frontière  $\Gamma$ , cette contrôlabilité normale est seulement nécessaire au voisinage de  $\Gamma$ , pas nécessairement partout dans  $\mathbb{R}^N$ .

**Stabilité** — Nous avons démontré un résultat de stabilité pour les fonctions extrémales : on part de suites de dynamiques et coûts  $(b_i^\varepsilon, l_i^\varepsilon)$  et  $g^\varepsilon$  qui convergent localement uniformément (en  $x$ ) vers  $(b_i, l_i)$  et  $g$ , et on souhaite passer à la limite dans les fonctions-valeur  $\mathbb{U}_\varepsilon^-$  et  $\mathbb{U}_\varepsilon^+$ .

Tout d'abord, passer à la limite dans les edp  $H_i = 0$  et les conditions (3.4) est assez standard en solutions de viscosité<sup>(i)</sup>. La vraie difficulté pour  $\mathbb{U}^-$  est de passer à la limite dans la caractérisation  $H_T \leq 0$ . Pour cela, une première étape consiste à montrer que  $H_T^\varepsilon \rightarrow H_T$  localement uniformément en toutes ses variables (notons que la contrôlabilité selon la normale joue un rôle ici).

Il faut ensuite pouvoir extraire des trajectoires admissibles convergeant vers une trajectoire admissible du problème limite. Pour les trajectoires associées à  $\mathbb{U}^-$ , cela peut se faire en utilisant l'outil des inclusion différentielles, mais c'est en revanche plus compliqué pour  $\mathbb{U}^+$ , car les trajectoires régulières ne sont pas « vues » de façon spécifique par l'inclusion différentielle.

Un lemme important consiste donc à démontrer que d'un ensemble de trajectoires régulières, on peut extraire une suite qui converge vers une trajectoire du problème limite, qui est régulière. C'est un point réellement délicat car les indicatrices des ensembles  $\{X^\varepsilon \in \mathcal{H}\}$  ne convergent pas vers l'indicatrice de l'ensemble  $\{X \in \mathcal{H}\}$  : les trajectoires limites qui restent sur  $\mathcal{H}$  peuvent être approchées par des trajectoires restant sur  $\mathcal{H}$  ou au contraire, qui s'approchent de  $\mathcal{H}$  en restant dans un  $\Omega_i$ . Notons que l'on peut aussi faire varier les domaines, en ayant un ensemble de frontières  $\mathcal{H}^\varepsilon \rightarrow \mathcal{H}$  puisque localement, on va redresser le bord pour se ramener à un bord plat, fixe.

**Approximations de Filippov et viscosité évanescence** — nous avons déjà évoqué l'approximation de Filippov, qui permet de construire des trajectoires associées à des dynamiques discontinues. Elle consiste à utiliser des champs  $b_i$  définis non seulement sur  $\bar{\Omega}_i$  mais sur un voisinage de cet ensemble, et faire une zone de transition continue passant d'une dynamique à l'autre.

Concrètement, dans le cas des deux demi-plans : pour tout  $\varepsilon > 0$  on définit une fonction  $\psi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et monotone telle que  $\psi_\varepsilon(x_N) = 1$  si  $x_N > \varepsilon$  et  $\psi_\varepsilon(x_N) = 0$  si  $x_N < -\varepsilon$ , et on introduit le champ continu

$$b_\varepsilon(x, \alpha) := \psi_\varepsilon(x_N) b_1(x, \alpha_1) + \{1 - \psi_\varepsilon(x_N)\} b_2(x, \alpha_2).$$

Cela permet pour tout  $\varepsilon > 0$  de résoudre l'edo (3.1) avec  $b_\varepsilon$ , où le contrôle est  $\alpha$  est en fait un couple  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , et on obtient donc une trajectoire  $X_\varepsilon(\cdot)$ .

Le problème de minimisation associé fournit une fonction-valeur  $u_\varepsilon$  qui est l'unique solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman  $H_\varepsilon(x, u, Du) = 0$ . En passant à la limite

lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, il est facile de vérifier que  $H_\varepsilon \rightarrow H$ , mais qu'en est-il de  $u_\varepsilon$  ? Etant donné le caractère « stable » de la solution minimale (cf. le paragraphe sur la stabilité), et comme par unicité du problème approché  $u_\varepsilon = \mathbb{U}_\varepsilon^-$ , on en déduit facilement que  $u_\varepsilon$  converge vers la solution minimale du problème limite,  $\mathbb{U}^-$ . Ainsi, l'approximation de Filippov fournit la solution minimale du problème discontinu.

L'autre approximation naturelle consiste à régulariser *via* la méthode dite de *viscosité évanescence* <sup>(i)</sup> : on considère le problème approché

$$-\varepsilon\Delta u + H(x, u, Du) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

et on cherche vers quoi tend cette solution  $u^\varepsilon$ . Par  $H$ , on entend ici une fonction définie presque partout (en fait partout sauf sur  $\mathcal{H}$ ), qui vaut  $H_1$  ou  $H_2$  selon l'endroit où se trouve  $x$ . Etant donné que l'hamiltonien  $H$  (bien que discontinu), vérifie des hypothèses « raisonnables », on sait qu'on peut construire une solution faible (*i.e.* au sens des distributions) dans  $W^{1,\infty}$ .

Intuitivement, on comprend que puisque l'on a gommé le rôle de l'hyperplan, on va privilégier les stratégies régulières car les stratégies singulières ne sont pas « encodées » dans le système d'équations (3.3)–(3.4). On s'attend donc à ce que  $u^\varepsilon$  converge vers la solution maximale,  $\mathbb{U}^+$ . Nous n'avons malheureusement qu'un résultat partiel. On ne sait pas prouver ce résultat de façon générale, mais il est vrai dès que  $\mathbb{U}^+$  est sous-harmonique.

En effet, si  $-\Delta\mathbb{U}^+ \leq 0$ , alors  $\mathbb{U}^+$  vérifie

$$-\varepsilon\Delta\mathbb{U}^+ + H(x, \mathbb{U}^+, D\mathbb{U}^+) \leq 0,$$

donc par principe de comparaison,  $u^\varepsilon \geq \mathbb{U}^+$  pour tout  $\varepsilon > 0$  ce qui entraîne  $\liminf(u^\varepsilon) \geq \mathbb{U}^+$ . Par ailleurs,  $\bar{u} := \limsup(u^\varepsilon)$  est une sous-solution du problème limite, donc  $\bar{u} \leq \mathbb{U}^+$ . On en déduit que

$$\liminf(u^\varepsilon) = \limsup(u^\varepsilon) = \mathbb{U}^+.$$

Ainsi, toute la suite  $(u^\varepsilon)$  converge vers la solution maximale  $\mathbb{U}^+$ . Nous donnons plus loin des exemples en dimension un pour lesquels  $\mathbb{U}^+$  est convexe, ce qui montre que dans ce cas la méthode de viscosité évanescence converge vers  $\mathbb{U}^+$ .

#### 4. HOMOGÉNÉISATION

---

Dans [1], nous abordons un problème d'homogénéisation discontinue, relié aux problèmes de contrôle vus précédemment.

**Introduction à l'homogénéisation** — Le principe de l'homogénéisation est d'étudier les effets d'oscillations de grandes fréquences dans un système décrit par des edp. Un exemple

typique est le suivant<sup>(k)</sup> : on cherche à comprendre le comportement, lorsque  $\varepsilon > 0$  tend vers 0 des solutions  $u^\varepsilon$  du problème

$$(3.5) \quad H\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u(x), Du(x)\right) = 0.$$

On voit que lorsque  $\varepsilon \ll 1$ , cette équation apparaît deux échelles d'espace : une variable dite « lente »,  $x$  ; et une « rapide »,  $y = x/\varepsilon$ . Une des hypothèses principales est que  $H$  soit périodique en sa variable  $y$ . Par exemple, on supposera que  $H(x, y + z, u, p) = H(x, y, u, p)$  dès que  $z \in \mathbb{Z}^N$ . Ainsi, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , par périodicité on peut considérer que la variable  $x/\varepsilon$  va osciller considérablement dans  $[0, 1]^N$ , d'où le terme « rapide ». On peut donc s'attendre à un effet de moyennisation de la dépendance en  $y$  dans  $H$ . On renvoie ici à [LionsPapanicolaouVaradhan] pour plus de précisions.

Sous un certain nombre d'hypothèses sur l'hamiltonien considéré, l'équation (3.5) se simplifie et on obtient que  $u := \lim u^\varepsilon$  vérifie un problème homogénéisé où la variable rapide a disparu :

$$(3.6) \quad \bar{H}\left(x, u(x), Du(x)\right) = 0.$$

Ce nouvel hamiltonien  $\bar{H}$  est appelé *hamiltonien effectif*.

Les questions naturelles qui se posent, en dehors des préoccupations usuelles d'existence et de comparaison pour les deux problèmes (approché et limite), sont : prouver l'existence de l'hamiltonien effectif ; démontrer la convergence des  $(u^\varepsilon)$  ; avoir une approximation de  $u^\varepsilon$  pour  $\varepsilon$  proche de zéro.

Ces questions sont abordées de façon conjointe dans un premier temps : on part de (3.5) en injectant dedans un développement de la forme suivante

$$u^\varepsilon(x) = u_0(x, x/\varepsilon) + \varepsilon u_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(x, x/\varepsilon) \dots,$$

où  $u_1, u_2, \dots$  sont des *correcteurs*, définis sur  $\mathbb{R}^N \times [0, 1]^N$ . La coercivité de l'hamiltonien implique directement que  $D_y u_0 = 0$ , sans quoi le terme en  $\varepsilon^{-1} D_y u_0$  ferait exploser l'hamiltonien lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. On voit donc que le premier terme du développement est constant en  $y$  :  $u_0(x, y) = V(x)$ .

Pour trouver l'hamiltonien effectif, on utilise à nouveau l'équation dans laquelle on a injecté le développement de  $u^\varepsilon$ , en ne gardant que les termes d'ordre zéro en  $\varepsilon$  :

$$F\left(x, y, V(x), D_x V + D_y u_1\right) = 0.$$

En regardant cette équation comme une équation en la variable  $y$ , on voit que pour tout  $x$  fixé, la fonction  $(y \mapsto u_1(x, y))$  est solution de l'équation  $F(x, y, V, D_y u_1 + p) = 0$ . Or, on sait que dans le cas périodique, l'équation  $F(x, y, V, D_y u_1 + p) = \lambda$  n'admet de solution que pour une certaine valeur spécifique du second membre, la constante ergodique  $\lambda$ . Ici,  $\lambda$  dépend de  $x, V, p$  et en notant  $\lambda = \bar{H}(x, V, p)$ , on récupère ainsi l'équation pour  $V(x)$  :

$$\bar{H}\left(x, V(x), DV(x)\right) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N.$$

La conclusion est que  $u^\varepsilon(\cdot) \rightarrow V(\cdot)$ , on a obtenu la limite des  $u^\varepsilon$  et un développement au premier ordre. Il est bien entendu possible de poursuivre ensuite pour obtenir les correcteurs  $u_1$  et  $u_2$ .

Une fois obtenu  $\bar{H}$  et  $V(\cdot)$ , tout le travail consiste à justifier les calculs formels que nous venons de faire.

**Cas des discontinuités au franchissement de domaines** — On reprend le principe d’homogénéiser sur la variable rapide  $y = x/\varepsilon$ , mais qui va maintenant osciller fortement entre deux domaines dans lesquelles les dynamiques sont distinctes, avec une discontinuité au franchissement de la frontière commune.

On part donc de deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  tels que  $\mathbb{R}^N = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{H}$  où  $\mathcal{H} = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ . On suppose de plus que les  $\Omega_i$  sont  $\mathbb{Z}^N$ -périodiques : si  $x \in \Omega_i$ , alors pour tout  $z \in \mathbb{Z}^N$ ,  $x+z \in \Omega_i$ . Dans le cadre contrôle, on utilise ici les hamiltoniens

$$H_i(x, y, u, p) := \sup_{\alpha_i \in A_i} \{ \lambda u - b_i(x, y, \alpha_i) \cdot p - l_i(x, y, \alpha_i) \},$$

et on doit donc résoudre les équations

$$(3.7) \quad H_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u(x), Du(x)\right) = 0 \quad \text{dans } \varepsilon\Omega_i, \quad i = 1, 2.$$

On l’a déjà vu, il faut déjà compléter ces équations par les condition de Ishii au bord :

$$(3.8) \quad \begin{cases} (i) & \min \{ H_1(x, x/\varepsilon, u, Du); H_2(x, x/\varepsilon, u, Du) \} \leq 0 \quad \text{sur } \varepsilon\mathcal{H}, \\ (ii) & \max \{ H_1(x, x/\varepsilon, u, Du); H_2(x, x/\varepsilon, u, Du) \} \geq 0 \quad \text{sur } \varepsilon\mathcal{H}, \end{cases}$$

mais aussi introduire l’hamiltonien tangentiel

$$(3.9) \quad H_T\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u, Du\right) \leq 0 \quad \text{sur } \varepsilon\mathcal{H}.$$

On utilise les même notations que dans la section précédente :  $\mathbb{H}^- \leq 0$  signifie que l’on a une sous-solution de (3.7) qui vérifie (3.8)-(i) et (3.9);  $\mathbb{H}^- \geq 0$  pour une sur-solution de (3.7) et (3.8)-(ii). On définit de la même manière  $\mathbb{H}^+$  avec la condition de sous-solution  $H_T^{\text{reg}} \leq 0$ .

Le problème est ici de démontrer la convergence des solutions extrémales  $\mathbb{U}_\varepsilon^-$  et  $\mathbb{U}_\varepsilon^+$  de (3.7)–(3.8) vers des fonctions caractérisées à partir de problèmes homogénéisés, qui sont *a priori* différents car l’hamiltonien effectif n’a pas de raisons d’être le même dans les deux cas.

**Convergence des solutions minimales** — En ce qui concerne la solution minimale  $\mathbb{U}_\varepsilon^-$ , le fait qu’elle soit entièrement caractérisée par un jeu d’edp rend le passage à la limite presque standard.

On commence par la résolution du problème ergodique

$$\mathbb{H}^-(x, y, u, Dv(y) + p) = \lambda$$

qui se fait essentiellement en combinant la théorie standard [LionsPapanicolaouVaradhan] avec l'étude des problèmes à dynamique discontinues que nous avons vu précédemment : on démontre qu'il existe une unique constante  $\lambda$  notée  $\bar{H}^-(x, u, p)$  telle qu'il existe au moins une solution  $v$ . Un point fondamental ici est que l'hamiltonien effectif ne « voit » plus les discontinuités car il ne fait intervenir que la variable lente,  $x$ . Une fois démontré que  $\bar{H}^-$  possède les bonnes propriétés pour avoir des résultats de comparaison, l'unicité la solution de  $\bar{H}^-(x, u, Du) = 0$  est standard. On note  $\mathbb{U}^-$  cette unique solution.

Pour démontrer la convergence de  $\mathbb{U}_\varepsilon^-$ , on utilise des bornes dans  $W^{1,\infty}$  qui sont indépendantes de  $\varepsilon$ . Ces bornes Lipschitz découlent de l'hypothèse de contrôlabilité totale <sup>(l)</sup>  $\{b_i(x, y, \alpha_i); \alpha_i \in A_i\} \supset B_\delta(0)$ . En appliquant le théorème d'Ascoli-Arzelà, on en déduit l'existence d'une limite Lipschitz notée  $U(\cdot)$ , à extraction près.

Pour démontrer que  $U \equiv \mathbb{U}^-$ , on démontre que c'est à la fois une sous et une sur-solution de  $\bar{H}^-(x, u, Du) = 0$ , ce qui se fait grâce à la méthode de la *fonction-test perturbée* <sup>(m)</sup>. C'est à ce niveau de la preuve que l'on utilise la caractérisation de  $\mathbb{U}_\varepsilon^-$  comme l'unique solution de  $\mathbb{H}^-(\dots) = 0$ . Il ne reste plus alors qu'à invoquer l'unicité du problème homogénéisé pour en déduire la convergence des solutions minimales vers la solution  $\mathbb{U}^-$ .

**Convergence des solutions maximales** — Il est plus délicat de traiter le cas de la solution maximale, car nous n'avons pas de caractérisation edp : on sait qu'elle vérifie  $\mathbb{H}^+(\dots) = 0$ , mais il n'y a pas d'unicité *a priori* pour ce système d'équations. Le problème se situe en fait au niveau de la condition de sous-solution, car la condition  $H_T^{\text{reg}} \leq 0$  ne fournit pas assez d'information pour avoir de la comparaison. Néanmoins, certaines étapes vues pour la convergence des solutions minimales restent valables.

Tout d'abord, on obtient ici aussi l'existence d'une constante ergodique notée  $\bar{H}^+$  et on peut résoudre de façon unique le problème

$$(3.10) \quad \bar{H}^+(x, \mathbb{U}^+, D\mathbb{U}^+) = 0.$$

Comme pour la solution minimale, en appliquant le théorème d'Ascoli-Arzelà on obtient de la convergence localement uniforme (à extraction près) vers une fonction Lipschitz  $U$ .

Démontrer que la limite  $U$  est une sur-solution de (3.10) se fait comme pour  $\mathbb{U}^-$  : on peut appliquer la méthode de la fonction-test perturbée en utilisant la comparaison avec  $\mathbb{U}_\varepsilon^+$  car la fonction-test sera une sur-solution de  $\mathbb{H}^+(\dots) = 0$ , alors que  $\mathbb{U}_\varepsilon^+$  en est la sous-solution maximale.

En revanche, on a besoin d'information complémentaire que pour démontrer les propriétés de sous-solution, ce qui est plus difficile car ici on n'a pas la condition (3.9). La stratégie est ici beaucoup plus subtile, et nécessite d'utiliser la représentation des fonctions-valeur sous l'angle du contrôle. Au lieu d'utiliser un argument edp de comparaison locale, on obtient le même résultat en combinant un argument de sur-optimalité pour la fonction-test perturbée, avec la programmation dynamique pour  $\mathbb{U}_\varepsilon^+$ .

Néanmoins, cette approche ne fonctionne ainsi que si on suppose les dynamiques et coûts ne dépendent pas de la variable lente. En effet, écrire l'inégalité de programmation dynamique du correcteur  $\varepsilon V(x/\varepsilon)$  nécessite de faire un changement de variable de la trajectoire en  $X(t) = \varepsilon^{-1}Y(\varepsilon^{-1}t)$ , qui induit également une répercussion sur la variable lente. Si le champ  $b$  était continu, ces perturbations pourraient être contrôlées mais évidemment nous sommes en présence de discontinuités au franchissement de  $\mathcal{H}$ .

Pour contourner ce problème dans le cas général, on introduit une suite de problèmes approchés indexés par  $\kappa \in ]0, 1]$  où, pour  $\kappa > 0$  fixé, la dynamique est constante par rapport à la variable lente. On obtient une suite de correcteurs approchés  $V_\kappa$ , associés à une suite de constantes ergodiques  $\bar{H}_\kappa^+$ . Les résultats de stabilité prouvés dans [3] permettent de passer à la limite :  $V_\kappa \rightarrow V$  et  $\bar{H}_\kappa^+ \rightarrow \bar{H}^+$ .

Ici aussi le fait qu'on puisse extraire d'un ensemble de trajectoires régulières une sous-suite qui converge vers une trajectoire qui reste régulière est un point fondamental, non-trivial.

## 5. EXEMPLES EXPLICITES EN DIMENSION UN

L'intérêt de la dimension un est de pouvoir faire une classification complète des différents types de solutions en fonction des trajectoires optimales associées.

**Classification des solutions** — Pour commencer, on introduit les solutions de type « contrainte d'état » :  $\mathbb{U}_{SC1}$  dans  $\Omega_1$  et  $\mathbb{U}_{SC2}$  dans  $\Omega_2$  qui sont définies de la façon suivante : pour  $i = 1, 2$

$$\mathbb{U}_{SCi}(x_0) := \inf_{\mathcal{A}_{SCi}} \left[ \int_0^{+\infty} l_i(Y_{x_0}^i(s), \alpha_i(s)) e^{-\lambda s} ds \right],$$

where  $\mathcal{A}_{SCi}$  est l'ensemble des contrôles  $\alpha_i(\cdot)$  tels que  $Y_{x_0}^i(s) \in \bar{\Omega}_i$  pour tout  $s \geq 0$ . Un résultat classique donne que les  $\mathbb{U}_{SCi}$  vérifient  $H_i = 0$  dans  $\Omega_i$  et  $H_i \geq 0$  sur  $\bar{\Omega}_i$ . On note également

$$u_{\mathcal{H}}(0) = \frac{1}{\lambda} \min_{(\mu, \alpha_1, \alpha_2) \in A_0(0)} \left\{ \mu l_1(0, \alpha_1) + (1 - \mu) l_2(0, \alpha_2) \right\},$$

qui est la solution de  $H_T(x, u, Du) = 0$  sur  $\mathcal{H} = \{0\}$  dans ce cas particulier. De la même façon, on définit  $u_{\mathcal{H}}^{\text{reg}}(0)$  en prenant le min sur les contrôles réguliers,  $A_0^{\text{reg}}(0)$ .

A partir de là, on sait que  $\mathbb{U}^-(0) = \min\{u_{\mathcal{H}}(0); \mathbb{U}_{SC1}(0); \mathbb{U}_{SC2}(0)\}$  (car c'est la solution minimale) et donc trois cas se présentent :

- (i) C'est  $u_{\mathcal{H}}(0)$  qui réalise le min. Dans ce cas,  $\mathbb{U}^-$  est la solution qui résoud les deux

problèmes de Dirichlet séparément dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  avec pour valeur commune au bord  $u_{\mathcal{H}}(0)$ .

- (ii) Si c'est  $\mathbb{U}_{\text{SC1}}(0)$  qui réalise le min, alors  $\mathbb{U}^- \equiv \mathbb{U}_{\text{SC1}}$  dans  $\Omega_1$  et on résoud le problème de Dirichlet dans  $\Omega_2$  à partir de la valeur au bord  $\mathbb{U}_{\text{SC1}}(0)$ .
- (iii) Dans le cas où c'est  $\mathbb{U}_{\text{SC2}}(0)$  qui réalise le min, on est dans la situation inverse de la précédente.

La même classification est valable pour  $\mathbb{U}^+$  avec  $u_{\mathcal{H}}^{\text{reg}}(0)$  et c'est précisément la différence entre  $u_{\mathcal{H}}(0)$  et  $u_{\mathcal{H}}^{\text{reg}}(0)$  qui entraîne la non-unicité potentielle.

La démonstration de cette classification nécessite d'étudier les trajectoires optimales associées et d'utiliser notamment le principe de la programmation dynamique en dimension 1 pour obtenir des propriétés de monotonie de ces trajectoires : si elles partent à l'infini, on est dans le cas des contraintes d'état, et si elle décroissent vers  $x = 0$ , on se retrouve avec une condition de Dirichlet. Evidemment, la situation est loin d'être aussi simple en dimension plus grande que un, et on ne peut obtenir une classification aussi complète des solutions.

Dans les exemples en dimension un qui suivent, nous allons utiliser les dynamiques les plus simples, où le contrôle n'est autre que la vitesse de la trajectoire :

$$\dot{X}(t) = \alpha_1(t) \text{ dans } \Omega_1, \quad \dot{X}(t) = \alpha_2(t) \text{ dans } \Omega_2,$$

où  $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot) \in L^\infty(0, +\infty; [-1, 1])$ . Nous renvoyons à [4] où les calculs explicites qui suivent sont détaillés.

**Exemple 1 : contraintes d'état** — On va choisir ici comme coûts les fonctions suivantes :

$$l_1(x, \alpha_1) = 1 - \alpha_1 + e^{-|x|} \text{ dans } \Omega_1, \quad l_2(x, \alpha_2) = 1 + \alpha_2 + e^{-|x|} \text{ dans } \Omega_2.$$

Dans un tel cas, il est facile de voir que la meilleure stratégie, si on part d'un  $x_0 > 0$ , consiste à prendre  $\alpha_1 \equiv 1$  et la trajectoire part à l'infini : on va donc obtenir une solution de type contrainte d'état. Concrètement, le calcul donne  $u_{\mathcal{H}}(0) = 1/\lambda$  alors qu'on a une formule explicite :

$$\mathbb{U}_{\text{SC1}}(x) = \frac{e^{-x}}{1 + \lambda}.$$

On voit donc effectivement que  $\mathbb{U}^-(0) = \mathbb{U}_{\text{SC1}}(0) = \mathbb{U}^+(0)$  et comme la situation est symétrique en  $x$ , au final

$$\mathbb{U}^-(x) = \mathbb{U}^+(x) = \frac{e^{-|x|}}{1 + \lambda},$$

on est dans un cas d'unicité où ce sont les contraintes d'état qui donnent la solution du problème. Les hamiltoniens associés sont ici

$$H_1(x, u, p) = |p - 1| + \lambda u - e^{-|x|} - 1, \quad H_2(x, u, p) = |p + 1| + \lambda u - e^{-|x|} - 1.$$

**Exemple 2 : stratégies push-push** — On prend maintenant

$$l_1(x, \alpha_1) = 1 + \alpha_1 \text{ dans } \Omega_1, \quad l_2(x, \alpha_2) = 1 - \alpha_2 \text{ dans } \Omega_2.$$

Le calcul donne  $u_{\mathcal{H}}(0) = 0$ , qui est obtenu à partir d'une stratégie « push-push »  $(\mu, \alpha_1, \alpha_2) = (1/2, -1, +1)$ . Le calcul des contraintes d'état donne une estimation simple :

$$\mathbb{U}_{\text{SC1}}(x) \geq \frac{1}{\lambda} - x,$$

et qui ne peut donc donner le min dans la valeur de  $\mathbb{U}^-(0)$ . On est donc dans le cas d'un problème de Dirichlet avec donnée au bord  $\mathbb{U}^-(0) = 0$ . Le calcul de l'hamiltonien associé aux coûts donne

$$H_i(x, u, p) = |u_x + 1| + \lambda u + 1$$

et on voit donc que l'unique solution est  $\mathbb{U}^- \equiv 0$ , ce que l'on peut aussi vérifier par un calcul direct à partir de la représentation de  $\mathbb{U}^-$  par la formule de contrôle.

Etant donné que le min est atteint pour une stratégie « push-push », il s'agit déjà d'une stratégie régulière et donc  $\mathbb{U}^+ \equiv \mathbb{U}^-$  : on est ici encore dans un cas d'unicité.

**Exemple 3 : stratégies pull-pull** — Pour obtenir de la non-unicité, on va en quelque sorte inverser les coûts :

$$l_1(x, \alpha_1) = 1 - \alpha_1 + |x| \text{ dans } \Omega_1, \quad l_2(x, \alpha_2) = 1 + \alpha_2 + |x| \text{ dans } \Omega_2.$$

Dans ce cas, la valeur  $u_{\mathcal{H}}(0) = 0$  est obtenue par une stratégie singulière, « pull-pull » puisque  $(\mu, \alpha_1, \alpha_2) = (1/2, 1, -1)$ . Si on se restreint à des stratégies régulières, on voit facilement que

$$u_{\mathcal{H}}^{\text{reg}}(0) = \frac{1}{\lambda} > u_{\mathcal{H}}(0) = 0.$$

Il reste donc à étudier les valeurs en  $x = 0$  des solutions de contraintes d'état : si elles ne réalisent pas le min, on aura deux solution différentes,  $\mathbb{U}^-$  et  $\mathbb{U}^+$ .

Le calcul n'est pas aussi aisé que dans les situations précédentes (il faut séparer plusieurs cas en fonction de  $\lambda$ ) mais il n'est pas non plus trop difficile. Par exemple, pour  $\lambda > 1$ , on obtient

$$\mathbb{U}_{\text{SC1}}(x) = \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2},$$

et on voit que le min pour  $\mathbb{U}^-(0)$  est atteint par  $u_{\mathcal{H}}(0) = 0$ , tandis que celui pour  $\mathbb{U}^+(0)$  est atteint par

$$\mathbb{U}_{\text{SC1}}(0) = \frac{1}{\lambda^2} < u_{\mathcal{H}}^{\text{reg}}(0) = \frac{1}{\lambda}.$$

On démontre alors que  $\mathbb{U}^+ = \mathbb{U}_{\text{SC1}}$  dans  $\Omega_i$ , et que cette solution est bien distincte de  $\mathbb{U}^-$ . Enfin, l'hamiltonien associé est :  $H_1(x, u, p) = |u_x - 1| + \lambda u - x - 1$ .

# ANNEXES

Notes, publications.

# D

## 1. NOTES

---

### Notes partie A.

- (a) Le terme « càdlàg » signifie continu à droite, avec limite à gauche. On demande donc au processus  $(X_t)$  que pour presque tout  $\omega$ , la trajectoire  $t \mapsto X_t(\omega)$  vérifie cette propriété. Evidemment, c'est le cas pour un processus à trajectoires continues (par exemple : le mouvement brownien) mais pour un processus à sauts, les trajectoires sont évidemment discontinues. Le choix de la continuité à droite n'est pas anodin : il signifie qu'une fois qu'un processus a sauté, il ne peut recommencer instantanément.
- (b) Un processus de Markov est en quelque sorte un processus « sans mémoire ». Plus précisément, la propriété de Markov dit que pour tout  $s < t$ ,

$$\mathbb{P}(X_t \in B \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in B \mid X_s)$$

où  $B$  est un borélien et  $\mathcal{F}_s$  est la tribu engendrée par les états du passé de  $(X_t)$ , à savoir  $\mathcal{F}_s := \sigma(X_\tau : 0 \leq \tau \leq s)$ .

Un processus de Markov  $(X_t)$  engendre un semi-groupe en agissant sur l'ensemble des fonctions continues bornées (par exemple) à travers la définition suivante :

$$T_t[f](x) = \mathbb{E}^x \left[ f(X_t) \right],$$

où  $(X_t)$  est le processus tel que  $X_0^x = x$  presque sûrement. La propriété de Markov entraîne la propriété de semi-groupe :  $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ . On peut ensuite définir le *générateur*

*infinitésimal* du semi-groupe de la façon suivante :

$$\mathcal{A}f := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_t[f] - f}{t}.$$

Le domaine de l'opérateur  $\mathcal{A}$  étant précisément l'ensemble des fonctions pour lesquelles la limite existe (il y a cependant plusieurs façons de considérer cette limite : ponctuelle, fonctionnelle). En pratique c'est souvent un sous-ensemble de fonctions suffisamment régulières. On étend ensuite éventuellement l'opérateur à des classes plus vastes à l'aide de méthodes classique (arguments de densité, en particulier).

- (c) Contrairement au cas du problème de Dirichlet où la solution perd de la masse, celle-ci est conservée dans le cas du problème de Neumann. La diffusion tend alors à redistribuer de façon uniforme dans le domaine considéré (s'il est borné), et il est donc naturel que  $u$  converge vers la moyenne de la donnée initiale.
- (d) Le terme *grandes déviations* (*large deviations* en anglais) provient à l'origine du français « grands écarts », utilisé pour décrire les événement exceptionnels ne suivant pas la loi normale.

Il est par exemple bien connu que si  $(X_n)$  est une suite de variables indépendantes identiquement distribuées avec  $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ , alors lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{loi}} \mu.$$

La convergence a lieu en loi, appelée *loi des grands nombres*. On peut alors se demander comment estimer les événements rares, c'est-à-dire pour tout  $\varepsilon > 0$ , la quantité

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right).$$

Un résultat de Cramér en 1938 (*cf.* par exemple [DenHollender2000]) montre que si on définit la fonction de taux

$$I(\varepsilon) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right),$$

alors  $I(\varepsilon) = \sup \{\varepsilon t - \log M(t)\}$  où  $M(t) := \mathbb{E}[e^{tX_1}]$ , ce qui entraîne une estimation exponentielle :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq e^{-nI(\varepsilon)}.$$

On a en fait plus qu'une majoration puisqu'on peut montrer également un inférieur exponentiel des événements rares. C'est pour ce genre d'estimation que l'on parle de « grandes déviations ».

- (e) Une des généralisations « naturelles » de l'équation de la chaleur est l'équation dite des *milieux poreux*,  $u_t = \Delta(u^m)$  où  $m > 1$ . Cette équation a fait l'objet de nombreuses publications concernant les conditions de croissance à l'infini, la régularité des solutions,

des frontières libres, le comportement asymptotique etc. On renvoie à [Vazquez2007] pour l'état de l'art et des connaissances sur le sujet.

Certains aspects caractéristiques de cette équation se comprennent bien lorsqu'on la réécrit sous la forme  $u_t = \operatorname{div}(D(u)\nabla u)$ , avec un coefficient de diffusion  $D(u) = mu^{m-1}$  : aux petites valeurs de  $u$ , la diffusion est très lente ce qui explique par exemple le phénomène de frontières libres.

La diffusion dite *rapide* apparaît dans le cas où  $m < 1$  : en effet, dans cas  $D(u)$  devient infini lorsque  $u$  s'approche de zéro et la diffusion devient donc considérable en ces points, ce qui entraîne l'absence de frontières libres. D'autre part, on peut résoudre l'équation dans  $\mathbb{R}^N$  sans aucune condition de croissance à l'infini.

Le cas limite  $m = 1$  correspond à celui de l'équation de la chaleur, qui garde certains aspects de la diffusion rapide (pas de frontières libres), mais d'autres des milieux poreux (condition de croissance à l'infini).

- (f) Le célèbre contre-exemple de Tychonoff montre qu'en dehors de la classe des fonctions qui croissent au plus comme une exponentielle quadratique, on peut avoir perte d'unicité. La solution particulière de Tychonoff s'écrit sous la forme d'une série

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

où  $f(t) = e^{-1/t^2}$  pour  $t > 0$ . Il s'agit d'une solution de l'équation de la chaleur dans  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  qui a pour donnée initiale  $u(x, 0) = 0$  (cf. par exemple [John1991]).

Néanmoins, il est important de préciser que si on se restreint à des solutions positives (au sens large), aucune condition de croissance n'est nécessaire *a priori* pour obtenir l'unicité des solutions. Evidemment, le contre-exemple de Tychonoff ne rentre pas dans ce cadre car cette solution oscille considérablement, prenant des valeurs très positives et très négatives.

- (g) De façon très générale, la notion de *frontière libre* apparaît dans une classe de problèmes où l'inconnue n'est pas seulement la solution  $u$  d'une équation aux dérivées partielles, mais un couple  $(u, \omega)$  où  $\omega$  est un ensemble. La portion de  $\partial\omega$  qui est inconnue est appelée la frontière libre. La plupart du temps, on cherche ainsi à résoudre une équation dans  $\omega$ , et la condition sur le bord de  $\omega$  détermine sa forme. Les questions fondamentales sont celles de la régularité de  $\omega$ , son évolution dans le temps, etc.

Dans le cas du problème de Stefan, on cherche à trouver une zone d'eau (le complémentaire étant une zone de glace), dans laquelle on vérifie l'équation de la chaleur. La position exacte de l'interface eau-glace est déterminée par la quantité de chaleur dans la zone d'eau, et le mécanisme qui fait fondre la glace.

- (h) On parle de phénomène de *réretention* dans une équation de diffusion si le fait que toute solution  $u \geq 0$  vérifie la propriété suivante :

$$\{ u(x, s) > 0 \Rightarrow u(x, t) > 0 \quad \forall t \geq s \}.$$

Ceci n'interdit évidemment pas que  $u(x, t)$  puisse s'approcher de zéro.

Dans le cas des milieux poreux, par exemple, l'estimation de type semi-groupe donnée dans [BenilanCrandall1981]

$$u_t \geq -\frac{u}{(m-1)t}$$

implique la rétention en intégrant entre  $s$  et  $t$  au point  $x$ . Dans le cas d'une solution positive au sens large, on déduit en particulier que la zone où  $u$  est positive est croissante : une fois que  $u$  est positive en un point, elle ne pourra jamais redevenir nulle en ce point. Evidemment, dans le cas de l'équation de la chaleur la question ne se pose pas puisque toute solution positive non identiquement nulle est instantanément strictement positive partout.

Pour ce qui est du problème de Stefan, la rétention est liée au fait que la phase d'eau, contenant de la chaleur, a tendance à empiéter sur la phase de glace.

## Notes partie B.

- (a) Une mesure borélienne est une mesure positive (au sens large) définie sur la tribu des boréliens. Elle n'est pas nécessairement finie sur les compacts. Si c'est le cas, on parle de mesure de Radon ou de mesure de Borel. En particulier dans le cas d'une mesure de Lévy  $\mu$ , on peut voir  $\mu$  comme une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ , ou comme une mesure de Borel sur  $\mathbb{R}^N$  tout entier.
- (b) On convient d'écrire ici  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  avec  $\alpha \in (0, 2)$ , l'autre convention étant d'écrire  $(-\Delta)^\sigma$  avec  $\sigma \in (0, 1)$ , cette dernière écriture étant plus en cohérence avec la théorie des racines d'opérateurs positifs.
- (c) Ecrire le compensateur à l'aide d'une indicatrice relève d'un choix car on pourrait prendre une fonction plus régulière. Toutes ces notions sont équivalentes mais changer de forme de compensateur entraîne l'apparition d'un terme de renormalisation qui prend la forme d'un drift,  $\beta \cdot Du(x)$ . Pour plus d'information au sujet des compensateurs, cf. [Bertoin2006]
- (d) cf. la note (b) de la partie A.
- (e) La théorie des solutions de viscosité a été introduite par M. Crandall et P.L. Lions en 1981 pour traiter des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. Elle fut ensuite rapidement étendue au second ordre, permettant de traiter des équations de type *fully nonlinear*  $F(x, u, Du, D^2u) = 0$  et  $u_t + F(x, u, Du, D^2u) = 0$ .

On renvoie à plusieurs ouvrages de référence pour les aspects généraux de la théorie : [CrandallLions1983], [Barles1994], [CrandallIshiiLions1992]. Pour des fonctions  $F$  assez générales, on ne s'attend pas à avoir des solutions au sens classique, on peut s'en convaincre aisément en dimension un, en prenant  $F(u') = |u'| - 1$ , avec conditions de bord  $u(-1) = u(1) = 0$ .

Comme il n'est pas possible non plus en général d'utiliser la notion de solution faible (distribution, intégration par parties), l'idée consiste à remplacer  $u$  par une fonction régulière (ici, de classe  $\mathcal{C}^1$  ou  $\mathcal{C}^2$ ) en demandant deux inégalités complémentaires : on dit que  $u$  est sous-solution de  $F(x, u, Du, D^2) = 0$  si pour toute fonction test régulière  $\phi$  qui touche  $u$  par dessus au point  $x_0$ , on a

$$F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0.$$

On définit de la même façon une sur-solution avec des fonctions-test qui touchent par en dessous. Enfin, une solution est une fonction qui est à la fois sous et sur-solution.

En pratique, on a une théorie raisonnable dès que l'on peut montrer un principe de comparaison entre sous et sur-solution, ce qui traduit le fait que cette théorie est fondamentalement reliée au principe de maximum. Montrer un principe de comparaison est donc en général la toute première étape lorsqu'on aborde un problème sous l'angle des solutions de viscosité.

- (f) Les fonctions semi-continues supérieures (scs) vérifient en tout point

$$f(x_0) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Les seules discontinuités possibles sont donc “vers le haut” :  $f(x_0) > \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . C'est l'inverse pour les fonctions semi-continues inférieures (sci). Pour une fonction scs sur un borné, on peut toujours définir le max mais pas nécessairement le min, et c'est l'inverse pour une fonction sci. Par exemple,  $f(x) = x$  pour  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 1$  est scs et elle admet un max sur  $[-1, 1]$  qui vaut  $f(0) = 1$ , mais pas de min, son infimum valant 0 n'est pas atteint.

- (g) La méthode de Perron consiste à démontrer que le sup des sous-solutions d'un problème donné est une solution de ce problème.

Soit par exemple une sous-solution constante  $M$ . On considère l'ensemble  $\mathcal{S}$  des sous-solutions  $v \leq M$ . Cet ensemble est non vide et on peut ainsi définir  $u(x) := \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}\}$ . On souhaite d'abord démontrer que  $u$  est un élément de  $\mathcal{S}$ , pour cela on montre d'abord que si  $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$ , alors  $\sup(u_1, u_2) \in \mathcal{S}$ , ce qui est assez naturel, en revenant à la définition de solution de viscosité. On passe ensuite au fait que  $\sup_n \{v_n(x) : v_n \in \mathcal{S}\}$  reste dans  $\mathcal{S}$  par une récurrence immédiate ; on en déduit que  $u \in \mathcal{S}$  en faisant le raisonnement en chaque point  $x$  (pour chaque point, il existe une sous-suite  $v_n(x)$  qui donne le sup). Pour montrer que  $u$  est également une sur-solution de viscosité on procède par l'absurde en supposant que  $u$  n'est pas une sur-solution, et en perturbant légèrement  $u$

à l'aide d'une fonction « bump », qui permet alors de construire un élément de  $S$  qui est strictement plus grand que  $u$  au moins dans un voisinage autour d'un point (ce qui est une contradiction avec la définition de  $u$ ).

On renvoie à [GilbargTrudinger1983] et [Barles1994] pour plus de précisions, également à [BarlesImbert2006] pour la méthode de Perron dans le cas non-local, qui nécessite de construire les fonctions bump en prenant en compte le caractère non-local de l'équation.

- (h) Dans le cas d'un problème de Dirichlet typique pour  $F(x, u, Du, D^2u) = 0$  dans  $\Omega$  avec  $u = g$  sur le bord  $\partial\Omega$ , la condition de sous-solution est la même tant que le point de maximum  $x_0$  de  $u - \phi$  est à l'intérieur de  $\Omega$ , mais si  $x_0 \in \partial\Omega$  elle devient :

$$\min \left\{ (u - \phi)(x_0); F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \right\} \leq 0.$$

Cela implique soit que  $u(x_0) \leq \phi(x_0)$ , soit alors que  $F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0$ . On a une alternative similaire pour la condition de sursolution, avec un max au lieu d'un min sur le bord. Et donc au final, il n'est pas nécessaire que  $u = \phi$  en  $x_0$  pour que la définition d'un problème de Dirichlet ait un sens. Cette condition au bord dite « relaxée » provient du fait que pour des solutions possiblement discontinues, on fait intervenir les enveloppes sci et scs des hamiltoniens, qui gardent une certaine « trace » au bord de l'équation intérieure. On renvoie à [Ishii1985] et [Barles1994] sur ce sujet.

- (i) Si on considère l'équation

$$-\text{Tr}(a(x)D^2u) + b(x) \cdot Du(x) = f(x)$$

avec des conditions de Dirichlet «  $u = g$  » au bord (au sens des solutions de viscosité), alors il y a des conditions sur  $a$  et  $b$  pour que la valeur au bord soit atteinte au sens classique. Ces conditions ne font que refléter le fait que le processus stochastique associé doit venir toucher le bord au point  $x$ , afin que la valeur  $g(x)$  soit « lue » et prise en compte, cf. [GilbargTrudinger1983].

- (j) Quelques mots rapides sur ces différentes méthodes.

(i) La première étape est d'obtenir de la régularité de type Hölder. Pour cela, il y a essentiellement deux approches : la méthode de Ishii-Lions que nous détaillons dans le texte principal, et les méthodes basées sur l'obtention d'inégalités de type Harnack (fortes ou faibles). Ces dernières sont des estimation du sup par l'inf de la solution sur un ensemble arbitraire. On les utilise ensuite pour contrôler l'oscillation de la solution, et en déduire la régularité Hölder. C'est en particulier l'approche suivie par les estimations de De Giorgi-Nash-Moser, dans le cas des équations uniformément elliptiques sous forme divergentielle avec coefficients seulement mesurables. La version en *fully non-linear* est due à Krylov-Safonov. On renvoie par exemple à [HanLin1997] et [CabreCaffarelli1995] pour ces approches.

(ii) A partir de la régularité Hölder, on tente d'aller plus loin pour obtenir des

estimations Lipschitz,  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$  ou  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$  afin d'avoir si possible des solutions classiques. Dans cette optique, les estimations de Schauder concernent les équations linéaires uniformément elliptiques. Ces estimations *a priori* donnent une régularité Hölder en gagnant deux dérivées lorsque les coefficients sont eux-même Hölder. Une autre approche permet, dans le cas d'hamiltoniens convexes de la forme  $F(D^2u) = 0$ , d'obtenir de la régularité  $C^{2,\alpha}$ , cf. [Evans1982]-[Krylov1982].

(iii) La méthode de Bernstein fournit un résultat d'un autre ordre : on sait qu'on a des solutions régulières mais on souhaite avoir des estimations uniformes en vue de passages à la limite. La version dite « forte » consiste à chercher une équation satisfaite par  $w = |Du|^2$ , ce qui se fait en dérivant l'équation de départ. On cherche ensuite à utiliser un principe de comparaison pour avoir une borne sur  $w$ , ce qui fournit les estimations Lipschitz uniformes. Une version « faible » peut se faire sans avoir besoin de dériver l'équation, et il est intéressant de constater qu'elle conduit à la même condition de structure que pour la version forte, cf. [Barles1991].

- (k) La méthode de Lions et Sznitman consiste à garder le processus dans  $\bar{\Omega}$  par pénalisation à l'aide d'un terme de drift assez fort le long de la normale à l'ouvert. Dans le cas du laplacien (par exemple), l'idée est de résoudre pour tout  $\varepsilon > 0$  l'équation différentielle stochastique dans tout l'espace  $\mathbb{R}^N$  :

$$dX_t^\varepsilon = dW_t - \frac{\nabla p(X_t^\varepsilon)}{\varepsilon^2} dt$$

où  $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $p = 0$  dans  $\Omega$ ,  $p(\cdot) = \text{dist}(\cdot, \Omega)^2$  sur un voisinage de  $\Omega$  et  $p > 0$  en dehors de  $\Omega$ . En passant à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on démontre que  $(X_t^\varepsilon)$  converge vers un processus limite  $X_t$  qui vérifie le problème de Skorohod, à savoir qu'il est contenu dans  $\bar{\Omega}$  et son générateur est une solution de l'équation  $-\Delta u = 0$  dans  $\Omega$  avec condition de Neumann sur le bord  $\partial\Omega$ .

- (l) Lorsqu'on s'intéresse à une équation elliptique du type  $F(x, u, Du, D^2u) = 0$ , une des conditions qui intervient assez naturellement est que l'hamiltonien  $F$  soit « propre », c'est-à-dire que  $F(x, u, p, M) - F(x, v, p, M) \geq \gamma(u - v)_+$  pour une constante  $\gamma > 0$ . C'est une hypothèse qui, conjointement à d'autres, garanti l'unicité. D'un point de vue technique, elle ramène plus ou moins à l'étude des équations sous la forme  $\gamma u + F(x, Du, D^2) = 0$ , où cette fois,  $F$  ne dépend plus de  $u$ .

Dans le cas parabolique, c'est le terme  $u_t$  qui joue le rôle du terme  $\gamma u$ .

- (m) Le terme n'est évidemment pas choisi au hasard, il est lié aux propriétés d'ergodicité du processus sous-jacent. Concrètement, si nous prenons l'exemple de l'équation  $-\Delta u + H(x, Du) = 0$  où l'hamiltonien  $H$  satisfait certaines propriétés, on peut établir une programmation dynamique pour la solution  $u$  :

$$u(x, T) = \inf_{\alpha(\cdot)} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^T L(\alpha, X_t) dt + u(X_T) \right],$$

où  $dX_t = \alpha(X_t)dt + dW_t$  est un processus contrôlé qui part de  $x$  en  $t = 0$ , et  $L$  est le Lagrangien associé à  $H$ . En divisant par  $T$  et en faisant tendre  $T$  vers l'infini, on en déduit l'identité

$$\lambda = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \inf_{\alpha(\cdot)} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^T L(\alpha, X_t) dt \right],$$

qui met en évidence une moyenne ergodique liée à  $(X_t)$ .

- (n) Le principe du maximum fort est proche du principe de comparaison mais, comme son nom l'indique, il est plus « fort ». L'exemple typique de principe du maximum fort concerne le cas des fonctions harmoniques : il est bien connu que si une fonction  $u$ , harmonique dans un ouvert, atteint son maximum en un point  $x_0$  de l'ouvert, alors  $u(x) = u(x_0)$  en tout point de l'ouvert, la fonction est donc constante. Ce type de résultat reste valable pour des opérateurs plus généraux que le laplacien.

### Notes partie C.

- (a) L'utilité de cette hypothèse est la suivante : si  $(\alpha_i)_{i \in I}$  est un sous-ensemble de contrôles dans  $A$ , le manque de compacité ne permet pas d'en extraire une sous-suite qui converge dans une topologie suffisante pour passer à la limite dans des termes du genre  $b(x, \alpha)$ . Pour contourner cette difficulté, on utilise le fait qu'un contrôle  $\alpha_i \in A$  peut être vu comme une masse de Dirac  $\delta_{\alpha_i}$ , et donc pour toute fonction  $f$  continue bornée sur  $A$ ,

$$f(\alpha_i) = \int_A f(s) d\delta_{\alpha_i}(s).$$

De l'ensemble des mesures  $(\delta_{\alpha_i})$  sur  $A$  on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une mesure sur  $A$  notée  $\alpha_*$  ce qui donne, pour une suite  $i_n \rightarrow \infty$ ,

$$f(\alpha_{i_n}) \rightarrow \int_A f(s) d\alpha_*(s).$$

Cette mesure  $\alpha_*$  est appelée *contrôle relaxé* et si on suppose  $A$  convexe, alors on sait qu'il existe un contrôle  $\alpha \in A$  tel que  $\alpha_* = \delta_\alpha$ . Cela permet donc d'avoir un passage à la limite plus simple :  $f(\alpha_{i_n}) \rightarrow f(\alpha)$ .

- (b) D'autres problèmes très intéressants peuvent être abordés : on peut notamment se poser la question de la contrôlabilité, à savoir s'il est toujours possible de joindre deux points quelconques  $x$  et  $y$  par une trajectoire contrôlée en temps fini ; on peut également chercher à minimiser le temps de parcours, entre autres choses.
- (c) Pour la coercivité et la convexité, on se réfère à la variable gradient :  $H(x, u, p) \rightarrow +\infty$  si  $|p| \rightarrow +\infty$  et  $p \mapsto H(x, u, p)$  est convexe.
- (d) L'hypothèse  $b(x, A) \supset B_\delta(0)$  pour tout  $x$  est standard, elle permet de démontrer que le système est totalement contrôlable : si  $x$  et  $y$  sont deux points quelconques de  $\mathbb{R}^N$ , on

pourra toujours trouver une trajectoire contrôlée qui permet de joindre  $x$  à  $y$  en temps fini. En effet, il suffit de choisir à chaque instant un contrôle  $\alpha(t)$  tel que

$$b(X(t), \alpha(t)) = \frac{\delta}{2} \frac{x-y}{|x-y|},$$

qui permet d'avancer en ligne droite avec une vitesse  $\delta/2$  de  $x$  vers  $y$ .

Cette hypothèse permet également de démontrer que la fonction-valeur est Lipschitz : étant donné  $x \neq y$ , on construit la trajectoire

$$X(t) = x + \frac{\delta}{2} \frac{x-y}{|x-y|} t,$$

qui est une trajectoire admissible qui atteint  $y$  en un temps  $\tau = 2|x-y|/\delta$ . On déduit de la programmation dynamique que

$$\mathbb{U}(x) \leq \int_0^\tau \ell(X(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt + e^{-\lambda \tau} \mathbb{U}(y) \leq 2\tau M.$$

Comme le coût  $\ell$  est borné (par  $M$ ), on voit facilement que  $|\mathbb{U}| \leq M/\lambda$  et donc que

$$\mathbb{U}(x) - \mathbb{U}(y) \leq M\tau + \lambda\tau \|\mathbb{U}\|_\infty,$$

ce qui entraîne  $\mathbb{U}(x) - \mathbb{U}(y) \leq (4M/\delta)|x-y|$ . La régularité Lipschitz en découle.

- (e) L'adhérence convexe est l'ensemble de toutes les limites de combinaisons convexes d'éléments de  $E$ .
- (f) Ces conditions sur le bord proviennent de la formulation du problème en présence d'hamiltoniens discontinus, cf. [Ishii1985] : on introduit l'hamiltonien

$$G(x, u, p) := \begin{cases} H_1(x, u, p) & \text{dans } \Omega_1 \\ H_2(x, u, p) & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

Alors, une fonction localement bornée  $u$  s.c.s. est sous-solution de viscosité de  $G(x, u, Du) = 0$  dans  $\mathbb{R}^N$  si et seulement si pour toute fonction-test  $\phi$  telle que  $u - \phi$  atteint un maximum au point  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ , on a

$$G_*(x_0, u(x_0), Du(x_0)) \leq 0.$$

La notation  $G_*$  renvoie à l'enveloppe s.c.i. :  $G_*(x, u, p) = \liminf_{y \rightarrow x} G(y, u, p)$ . On retrouve donc bien  $H_i(x, u, p) \leq 0$  dans  $\Omega_i$ , et sur la frontière commune,

$$G_*(x, u, p) = \min\{H_1(x, u, p); H_2(x, u, p)\} \leq 0.$$

La condition de sursolution conduit au max positif ou nul sur la frontière, en utilisant l'enveloppe s.c.s. de  $G$ .

- (g) Ces hypothèses ne permettent toutefois pas de gérer des géométries plus complexes comme le cas des intersections à trois branches ou plus, ou des discontinuités portées

par des sous-variétés de dimension inférieures. Ces discussions sont plus délicates, cf. [BressanHong2007].

- (h) Prenons le cas où  $\mathcal{H} = \{x_N = 0\}$ . En supposant  $p_N > 0$ , comme il existe un contrôle  $\alpha \in A_1$  tel que  $b_1(x, \alpha) \cdot e_N = \delta/2$ , on a en particulier

$$H_1(x, u, p) \geq -b_1(x, \alpha) \cdot p - l_1(x, \alpha).$$

Cela donne donc  $H_1(x, u, p) \geq (\delta/2)p_N - C_1|p'| - C_2$  où on a décomposé  $p = (p', p_N)$  et  $C_1, C_2$  dont deux bornes pour  $b_1$  et  $l_1$ . Dans le cas où  $p_N < 0$ , on fait de même avec un contrôle tel que  $b_1(x, \alpha') \cdot e_N = -\delta/2$ . Enfin, on fait exactement de même pour  $H_2$  et donc également pour  $H_T$ , ce qui donne bien la coercivité par rapport à la variable normale  $p_N$ . En particulier, on en déduit la régularité Lipschitz par rapport à cette variable, si l'on connaît la régularité par rapport aux variables tangentielles.

- (i) La stabilité est une propriété assez naturelle pour les solutions de viscosité, de par la nature même de la définition. Supposons que  $H_n(x, u, p) \rightarrow H(x, u, p)$  localement uniformément en tous les arguments. Il est assez facile de voir que si  $u_n$  vérifie  $H_n(x, u_n, Du_n) \leq 0$  au sens de viscosité et que par ailleurs,  $u_n \rightarrow u$  localement uniformément, alors  $H(x, u, Du) \leq 0$  au sens de viscosité. En effet, si on prend fonction-test régulière  $\phi$  telle que  $u - \phi$  atteigne un maximum en  $x_0$ , on peut toujours supposer que ce maximum est strict (quitte à modifier légèrement  $\phi$ ), et donc il existe une suite de points  $x_n \rightarrow x_0$  en lesquels  $u_n - \phi$  atteint son maximum. En passant à la limite dans  $H_n(x, \phi(x_n), D\phi(x_n)) \leq 0$  on en déduit que  $H(x_0, \phi(x_0), D\phi(x_0)) \leq 0$ , d'où le résultat. Un résultat similaire est évidemment valable pour des suites de sur-solutions.

On en déduit que si on a une suite de solutions de  $H_n(x, u_n, Du_n) = 0$  qui converge localement uniformément, la limite  $u$  vérifie  $H(x, u, Du) = 0$  au sens de viscosité.

Dans le cas où on n'a pas de bonnes estimations sur la suite  $(u_n)$ , il n'est pas toujours clair qu'on puisse extraire une sous-suite convergeant localement uniformément et dans ce cas, la stabilité ne permet pas de passer à la limite de façon aussi simple. On emploie alors un autre argument, cf. [BarlesPerthame1988]. En considérant les semi-limites relaxées

$$\bar{u}(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty, y \rightarrow x} u_n(y), \quad \underline{u}(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty, y \rightarrow x} u_n(y),$$

on voit que  $\bar{u}$  est une sous-solution scs du problème limite alors que  $\underline{u}$  en est une sur-solution sci. Si ce problème limite vérifie un résultat de comparaison, on en déduit que  $\bar{u} \leq \underline{u}$ , ce qui donne au final l'égalité car l'autre inégalité est évidente. Cela montre alors que la suite  $u_n$  converge localement uniformément vers la solution du problème limite.

Evidemment, dans le cas où les hamiltoniens sont discontinus, la situation se complique *a priori* et démontrer la stabilité n'est pas si simple, ce qui est le cas pour les problèmes que nous étudions ici.

- (j) La méthode dite de la *viscosité évanescente* illustre très bien la stabilité des solutions de viscosité, *cf.* note précédente. Si on regarde l'équation

$$-\varepsilon \Delta u + H(x, u, Du) = 0,$$

sous des hypothèses raisonnables sur  $H$ , il est facile d'obtenir des « bonnes » solutions ( $u^\varepsilon$ ) grâce à la présence du terme en laplacien qui permet d'avoir un principe de maximum et de la régularité. On obtient donc aisément des solutions classiques, ou au moins de classe  $\mathcal{C}^1$ . L'extraction d'une sous-suite convergente peut se faire grâce à des estimations uniformes en  $\varepsilon$ , en utilisant soit la coercivité de l'hamiltonien. On peut aussi procéder par semi-limites relaxées (*cf.* note précédente). Quoiqu'il en soit, la stabilité entraîne qu'on obtient une solution de viscosité de  $H(x, u, Du) = 0$ . C'est d'ailleurs de cette approche que le nom provient.

- (k) De nombreux autres cadres existent, qui relèvent de difficultés différentes, selon qu'il s'agit d'un problème d'ordre 1 ou 2, et qu'on est dans le cadre stochastique ou déterministe. Pour ne citer qu'un exemple à titre d'illustration : un problème d'homogénéisation en milieu aléatoire, modélisé par l'équation

$$-\operatorname{div} \left[ A \left( \frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \nabla u^\varepsilon(x) \right] = f(x)$$

où on suppose que les lois de  $A(x, \omega)$  et  $A(x+k, \omega)$  sont identiques pour tout  $k \in \mathbb{Z}^N$ .

- (l) *cf.* la note (d) de la Partie C.
- (m) Dans ce cadre, l'argument pour démontrer qu'on a une sous-solution consiste à procéder par l'absurde en supposant que

$$\bar{H}^-(\bar{x}, \phi(\bar{x}), D\phi(\bar{x})) \leq -\eta < 0,$$

la fonction  $\phi$  étant régulière, telle que  $U - \phi$  atteint son maximum au point  $\bar{x}$ , avec  $U(\bar{x}) = \phi(\bar{x})$ . On considère la fonction  $V$ , solution du problème ergodique (en la variable  $y$ )

$$\mathbb{H}^-(\bar{x}, y, \phi(\bar{x}), DV(y) + D\phi(\bar{x})) = \bar{H}^-(\bar{x}, \phi(\bar{x}), D\phi(\bar{x})),$$

et en considérant  $\chi_\varepsilon(x) := \phi(x) + \varepsilon V(x/\varepsilon) + \gamma$ , on démontre qu'en choisissant bien  $\gamma$ , on a  $\mathbb{H}^-(x, x/\varepsilon, \chi_\varepsilon, D\chi_\varepsilon) \leq 0$  dans un voisinage de  $\bar{x}$  indépendant de  $\varepsilon$ . En appliquant une comparaison locale au niveau  $\varepsilon$ , on en déduit que  $\mathbb{U}_\varepsilon^- \geq \phi(x) + \varepsilon V(x/\varepsilon) + \gamma/2$  dans un voisinage de  $\bar{x}$ . Enfin, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, on obtient la contradiction recherchée :  $U(\bar{x}) \geq \phi(\bar{x}) + \gamma/2 > \phi(\bar{x})$ . L'argument de sur-solution se fait exactement de la même manière.

## 2. PUBLICATIONS DEPUIS LA THÈSE

---

- [1] G. BARLES, A. BRIANI, E. CHASSEIGNE, N. TCHOU, “An homogeneization result for a multi-domains periodic problem”, *soumis* (2014).
- [2] E. CHASSEIGNE, P. FELMER, J.D. ROSSI, E. TOPP, “Fractional decay bounds for nonlocal zero order heat equations”, *à paraître dans* Bulletin of the London Mathematical Society (2014).
- [3] G. BARLES, A. BRIANI, E. CHASSEIGNE, “A Bellman approach for regional optimal control problems in  $R^N$ ”, *à paraître dans* Siam Journal on Control and Optimization (2014).
- [4] G. BARLES, A. BRIANI, E. CHASSEIGNE, “A Bellman approach for two-domains optimal control problems in  $R^N$ ”, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **19** (2014), 710–739.
- [5] E. CHASSEIGNE, S. SASTRE, “A nonlocal two-phase Stefan problem”, *Differential Integral Equations* **26** (2013), 1235–1434.
- [6] G. BARLES, E. CHASSEIGNE, C. GEORGELIN & E. JAKOBSEN, “On Neumann-type problems for nonlocal equations set in a half space,” *à paraître dans* Trans. Amer. Math. Soc. (2013).
- [7] G. BARLES, E. CHASSEIGNE, A. CIOMAGA & C. IMBERT, “Large time behavior of periodic viscosity solutions for integro-differential equations”, *Calc. Var. and PDE* **50** (2014), 283–304.
- [8] E. CHASSEIGNE, R. FERREIRA, “Isothermalisation for a nonlocal heat equation”, *à paraître dans* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (2013).
- [9] G. BARLES, E. CHASSEIGNE, A. CIOMAGA & C. IMBERT, “Lipschitz Regularity of Solutions for Mixed Integro-Differential Equations”, *Jl. Diff. Eq.* **252** (2012), 6012–6060.
- [10] C. BRÄNDLE, E. CHASSEIGNE, F. QUIRÓS, “Phase Transitions with Midrange Interactions : A Nonlocal Stefan Model”, *SIAM J. Math. Anal.*, **44**, No. 4, (2012) 3071–3100.
- [11] C. BRÄNDLE, E. CHASSEIGNE, “Large Deviations estimates for some non-local equations. General bounds and applications”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **365** (2013), 3437–3476.

- [12] C. BRÄNDLE, E. CHASSEIGNE & R. FERREIRA, “Unbounded solutions of the non-local heat equation, with C. Brändle and R. Ferreira, *Commun. Pure Appl. Anal.* **10** (2011), no. 6, 1663–1686
- [13] G. BARLES, E. CHASSEIGNE & C. IMBERT, “Hölder continuity of solutions of second-order non-linear elliptic integro-differential equation”, *J.E.M.S.* **13** (2011) 1–26.
- [14] C. BRÄNDLE, E. CHASSEIGNE, “Large Deviations estimates for some non-local equations I. Fast decaying kernels and explicit bounds”, *Nonlinear Analysis TMA* **71** (2009), 5572–5586.
- [15] G. BARLES, E. CHASSEIGNE & C. IMBERT, “On the Dirichlet Problem for Second-Order Elliptic Integro-Differential Equations”, *Indiana Univ. Math. Jl.* **57** (2008), 213–146.
- [16] E. CHASSEIGNE, “The Dirichlet problem for some non-local diffusion equations”, *Differential Integral Equations* **20** (2007), no. 12, 1389–1404.
- [17] E. CHASSEIGNE, M. CHAVES & J. ROSSI, “Asymptotic behavior for nonlocal diffusion equations”, *J. Math. Pures Appl.* (9) **86** (2006), no. 3, 271–291.
- [18] E. CHASSEIGNE, J.-L. VAZQUEZ, “Extended solutions for general fast diffusion equations with optimal measure data”, *Adv. Differential Equations* **11** (2006), no. 6, 627–646.
- [19] E. CHASSEIGNE, R. FERREIRA, “Monotone approximations of Green’s functions”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **339** (2004), no. 6, 395–400.
- [20] E. CHASSEIGNE, J.-L. VAZQUEZ, “The pressure equation in the fast diffusion range”, *Rev. Mat. Iberoamericana* **19** (2003), no. 3, 873–917.
- [21] E. CHASSEIGNE, “Fundamental solutions and singular shocks in scalar conservation laws”, *Rev. Mat. Complut.* **16** (2003), no. 2, 443–463.
- [22] S. BITON, E. CHASSEIGNE & O. LEY, “Uniqueness without growth condition for the mean curvature equation with radial initial data”, *Comm. Partial Differential Equations* **28** (2003), no. 9-10, 1503–1526.
- [23] E. CHASSEIGNE, “Une estimation de type Aronson-Bénilan”. (French) [An Aronson-Bénilan estimate] *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **336** (2003), no. 12, 991–996.
- [24] E. CHASSEIGNE “Classification of razor blades to the filtration equation—the sublinear case”, *J. Differential Equations* **187** (2003), no. 1, 72–105.
- [25] E. CHASSEIGNE, J.-L. VAZQUEZ “Sets of admissible initial data for porous-medium equations with absorption”, *Proceedings of the 2001 Luminy Conference on Quasilinear Elliptic and Parabolic Equations and System*, 53–83 (electronic), *Electron. J. Differ. Equ. Conf.* **8**, Southwest Texas State Univ., San Marcos, TX, 2002.

- [26] M.-F. BIDAUT-VÉRON, E. CHASSEIGNE & L. VÉRON “Initial trace of solutions of some quasilinear parabolic equations with absorption”, *J. Funct. Anal.* **193** (2002), no. 1, 140–205.

### 3. TRAVAUX RÉALISÉS PENDANT LA THÈSE

---

- [27] E. CHASSEIGNE, J.-L. VAZQUEZ “Theory of extended solutions for fast-diffusion equations in optimal classes of data. Radiation from singularities”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **164** (2002), no. 2, 133–187.
- [28] E. CHASSEIGNE “Initial trace for a porous medium equation. I. The strong absorption case”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **179** (2001), 413–458.
- [29] E. CHASSEIGNE “Initial trace for a porous medium equation. II. The critical absorption term”, *Asymptot. Anal.* **24** (2000), no. 1, 37–72.

### 4. BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

---

- [AlibaudImbert2009] N. ALIBAUD, C. IMBERT, “Fractional semi-linear parabolic equations with unbounded data,” *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 2527–2566.
- [AubinFrankowska1990] J.-P. AUBIN, H. FRANKOWSKA, “Set-valued analysis.” *Systems & Control : Foundations & Applications*, **2** (1990).
- [Barles1991] G. BARLES, “A weak Bernstein method for fully nonlinear elliptic equations.” *Differential Integral Equations* **4** (1991), 241–262.
- [Barles1994] G. BARLES, “Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi.” *Mathématiques & Applications* **17**, Springer-Verlag, Paris (1994).
- [BarlesDaherRomano1995] G. BARLES, CH. DAHER, M. ROMANO, “Convergence of numerical schemes for parabolic equations arising in finance theory”, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **5** (1995), 125–143.
- [BarlesImbert2006] G. BARLES, C. IMBERT, “Second-order elliptic integro-differential equations : viscosity solutions’ theory revisited.” *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **25** (2008), 567–585.

- [BarlesPerthame1988] G. BARLES, B. PERTHAME, “Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method” *SIAM J. Control Optim.* **26** (1988), 1133–1148.
- [BarlesSouganidis2001] G. BARLES, P.E. SOUGANIDIS, “Space-time periodic solutions and long-time behavior of solutions to quasi-linear parabolic equations.” *SIAM J. Math. Anal.* **32** (2001), 1311–1323.
- [BarlesTopp2013] G. BARLES, E. TOPP, “Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior for Nonlocal Parabolic Problems with Dominating Gradient Terms.” *Prépublication Univ. Tours* (2014).
- [Bellman1962] R. BELLMAN, “Dynamic Programming Treatment of the Travelling Salesman Problem”, *J. Assoc. Comput. Mach.* **9** (1962), 61–63.
- [BenilanCrandall1981] P. BÉNILAN, M. CRANDALL, “Regularizing effects of homogeneous evolution equations.” *Contributions to analysis and geometry* (1981), 23–39.
- [Bertoin2006] J. BERTOIN “Lévy processes.” *Cambridge Tracts in Mathematics* **121** (1996).
- [BressanHong2007] A. BRESSAN, Y. HONG, “Optimal control problems on stratified domains”, *Netw. Heterog. Media* **2** (2007), 313–331.
- [CabreCaffarelli1995] L.A. CAFFARELLI, X. CABRE, “Fully nonlinear elliptic equations”, *American Mathematical Society* (1995).
- [CaffarelliSilvestre2009] L. CAFFARELLI, L. SILVESTRE, “Regularity theory for fully nonlinear integro-differential equations.” *Comm. Pure Appl. Math.* **62** (2009), 597–638.
- [CrandallLions1983] M. CRANDALL, P.L. LIONS “Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **277** (1983), 1–42.
- [CrandallIshiiLions1992] M. CRANDALL, I. ISHII, P.L. LIONS, “User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations”, *Bull. Amer. Math. Soc.* **27** (1992), 1–67.
- [Ciomaga2012] A. CIOMAGA, “On the strong maximum principle for second-order nonlinear parabolic integro-differential equations.” *Adv. Differential Equations* **17** (2012), 635–671.
- [DenHollender2000] F. DEN HOLLANDER, “Large deviations”, *Fields Institute Monographs* **14** (2000).
- [Evans1982] L.C. EVANS, “Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations.”, *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), 333–363.
- [Fathi1998] A. FATHI, “Sur la convergence du semi-groupe de Lax-Oleinik, *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.* **327** (1998), 267–270.

- [Filippov1960] A.F. FILIPPOV, “Differential equations with discontinuous right-hand side.” *Matematicheskii Sbornik*, **51** (1960), 99–128. *American Mathematical Society Translations*, **42** (1964), 199–231.
- [Friedman1968] A. FRIEDMAN, “The Stefan problem in several space variables.” *Trans. Amer. Math. Soc.* **133** (1968), 51–87.
- [GilbargTrudinger1983] D. GILBARG, N. TRUDINGER, “Elliptic partial differential equations of second order.” (Second edition) *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **224**. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [HanLin1997] Q. HAN, F. LIN, “Elliptic partial differential equations”, *New York University, Courant Institute for Mathematical Sciences* (1997).
- [Ishii1985] H. ISHII “Hamilton-Jacobi Equations with discontinuous Hamiltonians on arbitrary open sets.” *Bull. Fac. Sci. Eng. Chuo Univ.* **28** (1985), 33–77.
- [IshiiLions1990] H. ISHII AND P.-L. LIONS, “Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations,” *J. Differential Equations*, **83** (1990), 26–78.
- [John1991] F. JOHN, “Partial differential equations.” *Springer-Verlag* (1991).
- [Kamin1996] S. KAMIN, “Heat propagation in an inhomogeneous medium.” *Progress in partial differential equations : the Metz surveys* **4**, 229–237. Pitman Res. Notes Math. Ser., 345, Longman, Harlow (1996).
- [Krylov1982] N.V. KRYLOV, “Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations.”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46** (1982), 487–523.
- [LameClapeyron1831] G. LAMÉ, B.P. CLAPEYRON, “Mémoire sur la solidification par refroidissement d’un globe solide.” *Ann. Chem. Phys.* **47** (1831), 250–256.
- [Lions1982] P.L. LIONS, “Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations,” *Research Notes in Mathematics* **69**, Pitman, Boston, (1982).
- [LionsPapanicolaouVaradhan] P.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, S.R.S. VARADHAN, *papier non publié*.
- [LionsSznitman1984] P.L. LIONS, A.S. SZNITMAN, “Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions.” *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1984), 511–537.
- [MeleardMirrahimi2014] S. MÉLÉARD, S. MIRRAHIMI, “Singular limits for reaction-diffusion equations with fractional Laplacian and local or nonlocal nonlinearity”, *pre-publication*
- [NamahRoquejoffre1999] G. NAMAHA, J.M. ROQUEJOFFRE, “Remarks on the long time behaviour of the solutions of Hamilton-Jacobi equations.” *Comm. Partial Differential Equations* **24** (1999), 883–893.
- [Silvestre2006] L. SILVESTRE, “Hölder estimates for solutions of integro-differential equations like the fractional Laplace.” *Indiana Univ. Math. J.* **55** (2006)n 1155–1174.

- [Stefan1889] J. STEFAN, “Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung,” *Sitzungsber, Wien, Akad. Mat. Natur.* **98** (1889), 473–484 ; également 614–634 ; 965–983 ; 1418–1442.
- [Vazquez2007] J.-L. VÁZQUEZ “The porous medium equation.” *Oxford Mathematical Monographs* (2007).



## 5. INDEX ET NOTATIONS

---

- $(-\Delta)^{\alpha/2}$ , laplacien fractionnaire, 14, 28
- $A, \mathcal{A}$ , espaces des contrôles, 44
- $H_T, H_T^{\text{reg}}$ , hamiltoniens tangentiels, 50
- $J$ , densité de probabilité, 12
- $T[u]$ , opérateur non-local, 12
- $T_D[u]$ , opérateur de Dirichlet, 15
- $T_N[u]$ , opérateur de Neumann, 15
- $\Gamma$ , discontinuités (contrôle), 46
- $\Gamma$ , graphe de Stefan, 22, 25
- $\mathbb{U}_{\text{Sci}}$ , contraintes d'état, 58
- $\alpha, a$ , contrôles, 44
- $\bar{H}$ , hamiltonien effectif, 55
- $\mathcal{H}$ , discontinuités (contrôle), 46
- $\mathcal{T}$ , trajectoires admissibles, 45
- $\mathcal{T}^{\text{reg}}$ , traj. admissibles régulières, 49
- $\mathbb{H}^-, \mathbb{H}^+$ , hamiltoniens complémentés, 51
- $\mathbb{U}^-, \mathbb{U}^+$ , pb. de Stefan, 25
- $\mathbb{U}^-, \mathbb{U}^+$ , pb. de contrôle, 49
- $\mathcal{P}$ , projection (pb. de Stefan), 24
- $\mathcal{S}[u]$ , terme de type Lévy, 29
- $\mathcal{J}[u]$ , terme de Lévy-Itô, 30
- $\mu$ , mesure de Lévy, 28
- $\omega(\cdot)$ , noyau nonlocal, 18
- $b$ , dynamique, 44
- $l, \ell$ , coûts instantanés, 44
  
- actualisation, facteur, 44
- asymptotique, en temps long, 13, 40
  
- Baiocchi, transformée de, 24
- blow-up, 18
  
- chaleur latente, 21
- coût, 44
- compensateur, 28
- conditions de Ishii, 48
- contrôle
  - fonction, 44
  - relaxé, 44, 68
- contrainte d'état, 58
- correcteurs, 55
  
- Dirichlet, problème de, 14, 31
- dynamique
  - continue, 44
  - discontinue, 46
  
- ergodique
  - constante, 41, 55, 67
  - problème, 41
- espace d'état, 44
  
- feedback, contrôle, 46
- fonction valeur, 45
- frontière libre, 21
  
- grandes déviations, 16
  
- Hölder, régularité, 34
- Hamilton-Jacobi-Bellman, équation, 45
- hamiltonien
  - complémenté, 51
  - effectif, 55
  - tangentiel, 50
- homogénéisation, 54
  
- isothermalisation, 19
  
- Lévy
  - mesure de, 28
  - processus, 29
- Lévy-Itô, terme de, 30
- laplacien
  - généralisations, 12
- Lipschitz, régularité, 35
- localisation, phénomène de, 14, 16
  
- mesa, problème, 24

- mesure
  - borélienne, 64
  - de Lévy, 28
- mushy, régions, 21
- Neumann, problème de, 15, 36
- obstacle
  - double, 25
  - simple, 24
- optimales, données initiales, 17
- perturbée, fonction-test, 57, 71
- Poisson composé, 13
- processus
  - càdlàg, 61
  - de Lévy, 29
  - Poisson composé, 13
- programmation dynamique, 45
- propres, valeurs, 15
- régularité
  - Hölder, 34
  - Lipschitz, 35
- rétenion, 22
- sélection mesurable, 47
- semi-limites relaxées, 70
- stabilité, 53, 70
- Stefan
  - problème à deux phases, 24
  - problème à une phase, 21
- stratégie
  - pull-pull, 49
  - push-push, 49
  - régulière, 49
- temps d'attente, 22
- trajectoire, contrôlée, 44
- trajectoires
  - admissibles, 45
- Tychonoff, contre-exemple, 17
- variable
  - lente, 55
  - rapide, 55
- viscosité
  - évanescence, 54
  - solutions de, 30, 65



**RÉSUMÉ** — Ce mémoire concerne l'ensemble des travaux que j'ai réalisés entre les années 2005 et 2014. Ceux-ci sont regroupés en trois chapitres, correspondant aux trois lignes thématiques que j'ai abordées durant cette période.

La première partie concerne les équations non-locales avec termes de convolution, dont la principale motivation est d'identifier les différences qualitatives entre la version locale de l'équation de la chaleur et sa version non-locale. Plusieurs thèmes sont abordés : la convergence asymptotique en temps long ; la croissance optimale des données pour le problème de Cauchy ; des résultats de type « grandes déviations » pour étudier la rapidité de la convergence d'un problème de Cauchy-Dirichlet dans une boule dont le rayon tend vers l'infini. Dans le cas de noyaux à support compact, ces deux dernières questions font apparaître des taux en  $R \ln R$  au lieu du taux quadratique  $R^2$  pour la chaleur locale. Les problèmes d'isothermalisation dans un milieu non homogène ainsi qu'une version non-locale du problème de Stefan sont également étudiés. L'intérêt de la version non-locale du problème de Stefan ne réside pas que dans un « jeu » mathématique : la question de l'existence de zones dont l'état est intermédiaire entre l'eau et la glace (*mushy regions*) est centrale du point de vue de la modélisation physique. Le problème local ne rend pas complètement compte de la possible apparition de ces zones et leur évolution, alors que notre modèle non-local permet de mieux les prendre en compte et les localiser.

En parallèle, je me suis intéressé également aux équations non-locales non-linéaires avec des termes de type Lévy, impliquant donc des mesures singulières. Dans ce cadre, c'est la notion de solution de viscosité qui est retenue afin de traiter les opérateurs les plus généraux possibles. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité de solutions des problèmes de Dirichlet et Neumann ; l'étude du problème de Dirichlet sur le bord (la valeur au bord est-elle prise ?) ; la régularité (locale) des solutions ; leur comportement asymptotique en temps grand. Un aspect intéressant de notre approche est qu'elle permet de traiter des problèmes « mixtes » dans le sens où l'ellipticité peut, en chaque point, provenir soit d'une partie locale de l'équation, soit d'une partie non-locale, et chaque terme peut concerner des variables d'espace distinctes.

La troisième partie de ce mémoire reprend des travaux plus récents, entre 2011 et 2014, sur des problèmes de contrôle optimal en présence de discontinuités dans les dynamiques au franchissement de certaines zones. L'enjeu est de décrire complètement l'ensemble des solutions des équations aux dérivées partielles associées (équations de Hamilton-Jacobi-Bellman), puisque l'on montre qu'il n'y a pas unicité en général. Nos résultats permettent de caractériser la solution minimale et la solution maximale comme fonction-valeur de deux problèmes de contrôle où les dynamiques sur les zones de discontinuité doivent être précisées : la solution minimale est obtenue lorsqu'on ne fait aucune restriction sur les contrôles, alors que pour la solution maximale il faut sélectionner les contrôles dits « réguliers ». Les questions d'homogénéisation en présence de discontinuités sont aussi abordées, on montre des résultats d'homogénéisation pour les solutions minimales d'une part, et pour les solutions maximales d'autre part, qui conduisent à des problèmes ergodiques différents.