



HAL
open science

Minimisations sous contraintes et flots du périmètre et de l'énergie de Willmore

François Dayrens

► **To cite this version:**

François Dayrens. Minimisations sous contraintes et flots du périmètre et de l'énergie de Willmore. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard Lyon 1, 2016. Français. NNT : 2016LYS1105 . tel-01400613v1

HAL Id: tel-01400613

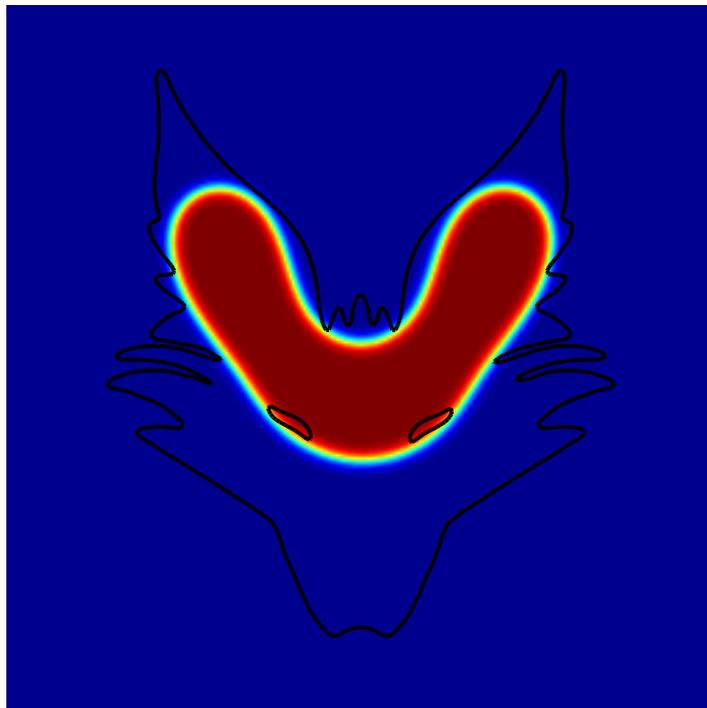
<https://hal.science/tel-01400613v1>

Submitted on 5 Jul 2016 (v1), last revised 22 Nov 2016 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Minimisations sous contraintes et flots du périmètre et de l'énergie de Willmore



François Dayrens

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard Lyon 1
École doctorale **InfoMath**, ED 512
Spécialité : **Mathématiques**
N. d'ordre : NNT : 2016LYSE1105

Minimisations sous contraintes et flots du périmètre et de l'énergie de Willmore

Thèse de doctorat

Soutenue publiquement le 1^{er} juillet 2016 par

François Dayrens

devant le jury composé de :

| | | |
|----------------------------|----------------------------------|--------------------|
| Monsieur Franck Boyer | Université de Toulouse | Examineur |
| Monsieur Dorin Bucur | Université de Savoie | Examineur |
| Monsieur Antonin Chambolle | École Polytechnique | Rapporteur |
| Monsieur Pascal Frey | Université Pierre et Marie Curie | Examineur |
| Monsieur Antoine Lemenant | Université Paris Diderot | Examineur |
| Monsieur Simon Masnou | Université de Lyon | Directeur de thèse |
| Monsieur Benoît Merlet | Université de Lille | Rapporteur |
| Monsieur Matteo Novaga | Université de Pise | Directeur de thèse |

*Vingt cent mille ânes dans un pré et vingt cent
dans l'autre, combien y a-t-il d'ânes dans les
prés ?*

Reconnaissance

Il est d'usage de commencer cette rubrique par les directeurs de thèse, et dans leurs cas c'est mérité. Simon, je suis venu te voir en décembre 2012 avec en tête seulement deux mots : "analyse" et "géométrie". Tu m'as proposé ce sujet en calcul des variations avec des énergies géométriques. S'en sont suivies trois années de thèse au cours desquelles j'ai trouvé en toi quelqu'un de disponible et affable me faisant manipuler des maths passionnantes. Matteo, ce séjour à Pise fut très enrichissant et fructueux. Ta maîtrise des flots géométriques ne cessera de me surprendre. Ta patience et ta réactivité m'ont été des plus bénéfiques.

Je suis également très reconnaissant envers mes rapporteurs, Antonin et Benoît, d'avoir pris le temps de relire "mes" mathématiques. Mon manuscrit et moi vous devons beaucoup. Antoine, Dorin, Franck et Pascal, vous avez toute ma gratitude pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Au sein de l'Institut Camille Jordan, je rends hommage à tout le personnel, en particulier à Aurélie, à Laurent, à Maria, à Nabila, à Vincent et à tous ces membres qui font marcher ce laboratoire dans lequel je me suis épanoui. Et puis il y a Élie, à qui cette thèse et moi devons beaucoup, en particulier sur le numérique et les méthodes de champ de phase.

Vient le tour des collègues, de tous temps et de tous bureaux. J'ai pu éprouver leur patience, alimenter leur dépit et implorer leur miséricorde à coups de jeux de mots, parfois vraiment trop moisis. Mes coburelles : Adriane, Ariane et Cécilia, et mes cobureaux : Benjamin¹, Colin, Évrard, Ivan, Raouf et Romain, y en a-t-il un seul d'entre vous que je n'ai pas embêté avec des questions techniques de français, d'anglais, d'enseignement, d'administratif et parfois de maths ? Dans les bureaux d'à côté : Agathe, Benoît, Coline, Corentin, Élodie, François, Gwladys, Hugo², Jean-Cyrille, Luigia, Maxime, Maxime, Niccolo, Nils, Quentin, Thomas³, Xiaolin et tous ceux que je croise régulièrement, m'avez-vous déjà entendu dire autre chose que des bêtises ? J'ai eu la joie de côtoyer régulièrement les "+1" et autres pièces rapportées, en particulier Cécile et François. La liste est longue et pourtant elle n'est pas finie, je pense notamment à Cécile et à son chœur. Le tour des collègues passe par l'Italie avec une pensée enjouée pour leur accueil : Alessandra, Alessio, Maria et Serena. Je terminerai la liste des collègues qui m'ont marqué par une figure emblématique à qui je dois un surnom, un soutien durable et renouvelable⁴, une compagnie appréciable en conférence et de la bonne humeur : Blanche. Je ne saurais exprimer le plaisir que j'ai eu et que j'aurai toujours à partager des glaces, à partir en rando en montagne, à jouer à la pétanque, à vérifier par l'expérience la loi des grands nombres sur un 90 ♠, à être ensemble et à raconter des futilités avec vous.

En dehors du travail, ou presque, il y a des gens qui reviennent, des amis qui ne se lassent pas parmi lesquels Clément⁵, Julien⁶, Samantha et Simon.

1. Manger ?

2. le stagiaire

3. Wesh, gros !

4. un soutien "bio", en fait

5. ou Maurice, selon que ses blagues sont plus ou moins vaseuses que les miennes

6. Lâche ce couteau !

Il est parfois difficile de côtoyer des personnes mais c'est une autre histoire que de vivre avec. J'ai été pénible (et le suis toujours) et je vous demande de m'en excuser, l'auberge Garibaldi n'aurait pas été aussi conviviale sans vous, mes colocs : Fred, Mathias⁷, Maxime et Vincent⁸. Si on accueille toujours autant de monde depuis six ans, c'est grâce à vous. Je ne pense pas que le monde tournerait bien droit si on résolvait les problèmes avec nos propres solutions, mais au moins⁹ on se marrerait bien et ça serait festif.

Il me faut terminer ces quelques lignes par les personnes qui s'inquiètent, qui rient, qui pleurent, qui crient, qui râlent, qui soutiennent, qui comptent, qui veillent, qui engueulent quand il le faut, à qui on manque mais ne veulent pas le montrer et qui sont là, du début à la fin : Maman, Papa, Domy, Zaboo, Antho, Élyria, Lyriane et Gram.

7. Libérez les otages !

8. Banane !

9. se prononce [mwēs]

Table des matières

| | |
|---|-----|
| Reconnaissance | 7 |
| Introduction | 11 |
| 1. Organisation de la thèse | 12 |
| 2. Conventions et notations | 21 |
| PARTIE 1. RELAXATION DES ÉNERGIES GÉOMÉTRIQUES | 23 |
| Chapitre 1. Énergies géométriques et pré-requis | 25 |
| 1. Les courbes dans le plan | 25 |
| 2. Les fonctions à variation bornée et les ensembles de périmètre fini | 27 |
| 3. Courbure moyenne et énergie de Willmore | 32 |
| 4. Les formules de la co-aire | 37 |
| Chapitre 2. Relaxée et approximation | 39 |
| 1. Énergies relaxées | 39 |
| 2. La caractérisation de l'énergie élastique dans le plan | 42 |
| 3. La méthode de champ de phase | 44 |
| PARTIE 2. RELAXATION ET MINIMISATION D'ÉNERGIES GÉOMÉTRIQUES EN PRÉSENCE DE CONTRAINTES | 53 |
| Chapitre 3. Relaxation du périmètre dans le plan avec contrainte de connexité | 55 |
| 1. Notions et résultats préliminaires | 56 |
| 2. Relaxation du périmètre | 62 |
| 3. Preuve de la formule d'identification | 68 |
| 4. Application - Interaction coulombienne | 87 |
| Chapitre 4. Reconstruction volumétrique à partir de sections | 91 |
| 1. Introduction | 92 |
| 2. Γ -convergence pour les contraintes épaissies | 102 |
| 3. Preuve des lemmes | 110 |
| 4. Expériences numériques | 113 |
| 5. Extension de la méthode - simulations numériques avancées | 117 |
| Chapitre 5. Le problème de l'élastique confiné | 127 |
| 1. Définitions et énoncé du problème | 128 |
| 2. Digression : les espaces de Sobolev sur les variétés compactes | 129 |
| 3. Existence d'une solution | 132 |
| 4. Étude des auto-contacts | 136 |
| 5. Étude de la régularité des minimiseurs | 148 |
| 6. Confinement convexe | 158 |
| 7. Un exemple de confinement engendrant un auto-contact | 162 |
| 8. Quelques simulations numériques | 172 |

| | |
|---|-----|
| PARTIE 3. FLOT DE L'ÉNERGIE DE WILLMORE RELAXÉE | 181 |
| Chapitre 6. Mouvement minimisant et énergies géométriques | 183 |
| 1. Les mouvements minimisants | 183 |
| 2. Mouvement par courbure moyenne | 186 |
| 3. Flot de Willmore pour les fonctions | 190 |
| Chapitre 7. Flot de Willmore en dimension 2 | 193 |
| 1. Définitions et formalisme | 193 |
| 2. Flot discret et estimations | 196 |
| 3. Existence d'un flot continu | 201 |
| 4. Régularité du flot discret en espace | 205 |
| 5. Régularité du flot continu | 208 |
| Chapitre 8. Le flot des fonctions radiales | 215 |
| 1. Définitions et formalisme | 215 |
| 2. Formule de la co-aire pour l'énergie de Willmore relaxée | 217 |
| 3. Le mouvement minimisant des fonctions radiales | 227 |
| Perspectives | 235 |
| 1. La méthode de champ de phase | 235 |
| 2. Le flot de Willmore | 236 |
| 3. Définition d'un flot de Willmore | 236 |
| Bibliographie | 237 |

Introduction

Quel est le point commun entre le choix d'un itinéraire, le comportement d'un prédateur et la forme d'un pont ? Ce sont tous les trois des problèmes d'optimisation avec contraintes. Quand on doit se rendre dans un endroit, il y a souvent plusieurs possibilités et le choix dépend d'un critère, d'un coût ou d'une énergie. Entre l'avion et le vélo, les dépenses engendrées et le temps de parcours sont très différents. Si on opte pour minimiser le temps de parcours en voiture pour aller de Lyon à Gaillac, est-ce qu'on s'autorise à passer par l'autoroute avec ses péages ou non ? Dans la négative, il y a deux moyens de tenir compte de cette contrainte : soit on ne considère pas les trajets comportant des sections à péage, soit on ajoute le prix des péages dans le temps de parcours (par exemple $1 \text{ €} \rightarrow +5 \text{ minutes}$). Dans le premier cas, l'ensemble des trajets admissibles (ceux sans péage) est plus compliqué que dans le second mais on est assuré de ne pas passer par une section payante d'autoroute. Dans le deuxième cas, si les temps de trajets hors autoroutes payantes sont vraiment plus longs, rien ne dit que le critère nous fera choisir un trajet sans péage.

Dans l'exemple précédent, les différents coûts et critères se quantifient assez facilement. Concernant le prédateur, si la minimisation d'une quantité permet d'expliquer le comportement du prédateur, cette quantité est beaucoup plus complexe. En effet, attaquer discrètement une proie affaiblie ou isolée demande moins d'effort que de chasser en meute mais la prise de risque est plus grande tout comme la récompense. Énormément de paramètres entrent en jeu dans ce problème et définir un critère équilibrant toutes ces données pour déterminer le comportement du prédateur n'est pas chose aisée. Quant au pont, le critère à optimiser est souvent sa solidité. Les contraintes peuvent être de nature très différentes mais on retrouve usuellement le coût de production des matériaux, le coût de fabrication et la nature du terrain sur lequel le pont est implanté. La physique des matériaux nous permet de quantifier assez bien les différentes tensions au sein du pont en fonction des forces s'appliquant sur lui et de sa forme globale.

Trouver la forme, optimale pour un certain critère, d'un objet soumis à différentes contraintes est un problème d'optimisation géométrique. Que ce soit en aérodynamique, en thermodynamique ou en mécanique des fluides, les problèmes d'optimisation géométrique sont très répandus dans notre vie moderne. Un des plus anciens est celui de la Reine Didon de Carthage (vers 800 avant J.C.) et constitue la forme la plus simple du problème isopérimétrique. On se donne une corde dont les extrémités sont attachées entre elles et le but est de poser cette corde au sol en englobant la plus grande surface possible. Didon savait déjà que le cercle est la bonne solution mais les prémices d'une démonstration n'apparaissent qu'au II^{ème} siècle avant J.C. avec Zénodore. Jacques Bernoulli (1654-1705) est le premier à utiliser du calcul différentiel, de la géométrie et de l'analyse pour donner une réponse partielle à ce problème. Après plusieurs contributions dues notamment à Jakob Steiner (1796-1863) et à Karl Weierstrass (1815-1897), la preuve du Théorème isopérimétrique en dimension 2 est enfin complète.

En dimension 3, la forme des bulles de savon est reliée au problème dual de celui de Didon. Alors que le reine de Carthage cherchait la plus grande surface à périmètre fixé, les bulles de savons englobent un volume fixe et prennent la forme qui minimisent l'aire. Cette forme est encore une fois la sphère et ce problème n'est que le premier de la liste des problèmes d'optimisation géométrique dans la modélisation de phénomènes physiques

et biologiques. Alors que le périmètre encode seulement une longueur ou une aire, d'autres énergies géométriques comme l'énergie de Willmore tiennent compte de la forme de la courbe ou de la surface en impliquant sa courbure.

Par ailleurs, les problèmes d'optimisation sont des cas stationnaires des flots gradients. Un flot gradient est en quelque sorte le meilleur chemin qu'emprunte un système pour aller à l'équilibre, c'est-à-dire sur un minimum d'énergie. Par exemple, étant donnée une surface en dimension 3, le meilleur moyen de la déformer pour diminuer son aire est d'aplatir les zones de forte courbure pour que la surface devienne la plus plane possible. Lorsqu'on gonfle une bulle de savon, la forme n'est pas sphérique au moment où la bulle se referme et pourtant cette bulle se déforme et finit toujours par ressembler à une sphère bien ronde. Il s'agit là d'un flot gradient pour l'aire.

1. Organisation de la thèse

Dans cette thèse, nous étudions des problèmes d'optimisation géométrique sous contraintes et des problèmes de flot gradient impliquant le périmètre et l'énergie de Willmore.

Dans la **première partie** de ce manuscrit, nous définissons les énergies et les notions que nous utilisons dans toute la thèse. En particulier le Chapitre 1 définit des notions sur les courbes, sur les ensembles de périmètre fini au sens des fonctions à variation bornée, sur l'énergie de Willmore et sur les formules de la co-aire (outil important pour les Chapitres 4 et 8). Le Chapitre 2 s'intéresse plus spécifiquement à la notion d'énergie relaxée. En effet, les formulations intuitives des problèmes que nous considérons sont souvent mal posées, c'est-à-dire que le problème n'a pas de sens ou que son minimum n'est pas atteint. La notion clef pour pallier cette difficulté est celle de la relaxée semi-continue inférieurement, qui est développée dans le Chapitre 2.

Dans la **deuxième partie** de ce manuscrit, nous étudions trois problèmes d'optimisation avec contraintes (connexité, inclusion-exclusion et confinement). Pour le périmètre, nous incluons les contraintes dans l'énergie, c'est-à-dire que nous étudions

$$J(E) = \begin{cases} P(E) & \text{si } E \text{ vérifie les contraintes,} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $P(E)$ désigne le périmètre de l'ensemble E . Afin d'avoir un problème bien posé, nous considérons la relaxée \bar{J} de J (ou enveloppe semi-continue inférieurement). Nous étudions cette énergie relaxée dans les Chapitres 3 et 4 et nous obtenons une formule :

$$\bar{J}(E) = P(E) + \mathcal{H}(E),$$

où $\mathcal{H}(E)$ est un terme mesurant à quel point E ne satisfait pas les contraintes (en particulier, $\mathcal{H}(E)$ est nul lorsque E vérifie les contraintes).

Concernant l'énergie de Willmore, nous préférons garder les contraintes en dehors de l'énergie car nous n'avons pas accès à une formule d'identification comme ci-dessus. Dans le Chapitre 4, nous étudions une méthode de reconstruction de domaines utilisant le périmètre et l'énergie de Willmore. Des résultats théoriques sont obtenus pour le périmètre et l'énergie de Willmore est utilisée dans les simulations numériques. Le Chapitre 5 s'intéresse à la minimisation de l'énergie élastique d'une courbe fermée dans le plan avec une contrainte de confinement. L'étude porte sur l'existence, la régularité et la forme des courbes minimisantes. En particulier, nous nous intéressons à la forme des courbes minimisantes pour les confinements convexes et un confinement non simplement connexe.

La **troisième partie** de cette thèse étudie le flot gradient de l'énergie de Willmore. Que se soit pour le périmètre ou pour l'énergie de Willmore, le flot dans le cas des ensembles

réguliers, ou des surfaces régulières, se met assez facilement en équation. Malheureusement, ce flot régulier peut développer des singularités, c'est-à-dire que la surface n'est plus régulière partout en temps fini. Ainsi, lorsque les singularités apparaissent, l'équation régissant le flot n'a plus de sens. Afin d'étudier le flot au delà des singularités, nous utilisons un formalisme alternatif, celui des mouvements minimisants. Le Chapitre 6 explique le principe des mouvements minimisants et donne des résultats classiques sur le périmètre. Le Chapitre 7 regarde le mouvement minimisant d'une énergie similaire à celle de Willmore dans le plan. Le Chapitre 8 s'intéresse à un cas particulier de mouvement minimisant de l'énergie de Willmore pour les fonctions.

1.1. Les pré-requis

Dans le **Chapitre 1** nous introduisons la notion d'ensemble de périmètre fini via les fonctions à variation bornée : un ensemble E de \mathbb{R}^d est de périmètre fini dès que la variation totale de sa fonction indicatrice est finie

$$P(E) = \|D\mathbb{1}_E\|(\mathbb{R}^d) < +\infty.$$

Nous introduisons également l'énergie de Willmore d'une hypersurface régulière M de \mathbb{R}^d :

$$\mathcal{W}(M) = \int_M |H|^2 d\mathcal{H}^{d-1},$$

où H est la courbure moyenne de M et \mathcal{H}^{d-1} la mesure de Hausdorff ou mesure de surface sur M .

Dans le **Chapitre 2**, nous présentons les types de problèmes étudiés dans cette thèse. En particulier, nous étendons la notion d'énergie de Willmore aux ensembles E dont le bord ∂E est une hypersurface régulière par

$$\mathcal{W}(E) = \mathcal{W}(\partial E) = \int_{\partial E} |H|^2 d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Pour les problèmes d'optimisation géométrique que nous considérons, en plus d'ajouter des contraintes à la minimisation de P et de \mathcal{W} , nous utilisons la relaxée des énergies par rapport à la topologie L^1 :

$$\bar{J}(E) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(E_n) \mid E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^d) \right\},$$

où J représente soit P , soit \mathcal{W} , avec éventuellement des contraintes.

Nous introduisons également l'approximation de champ de phase afin de l'utiliser comme modélisation numérique de P et de \mathcal{W} . Un ensemble E est approché via sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_E$ par

$$u_\varepsilon(x) = q\left(\frac{1}{\varepsilon}d(x, E)\right),$$

où $q(s) = \frac{1}{2}(1 - \text{th}(s/2))$ et $d(x, E) = \text{dist}(x, E) - \text{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus E)$ est la distance signée de x à E . Le périmètre et l'énergie de Willmore sont approchés respectivement par

$$P_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right) dx,$$

où $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$, et

$$\mathcal{W}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \varepsilon \Delta u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} W'(u_\varepsilon) \right|^2 dx.$$

1.2. Les problèmes d'optimisation

Les premiers résultats de la thèse sont donnés dans le **Chapitre 3**, dans lequel nous étudions la relaxation du périmètre avec des contraintes de connexité dans le plan. Le principe est d'approcher un ensemble E par une suite d'ensembles connexes ou simplement connexes (E_n) et de calculer le périmètre limite minimal de la suite (E_n) . Plus précisément, nous définissons

$$\overline{P}_C(E) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) \mid E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^d) \text{ et } E_n \text{ connexe} \right\},$$

et

$$\overline{P}_S(E) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) \mid E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^d) \text{ et } E_n \text{ simplement connexe} \right\}.$$

L'objectif est d'avoir une formule plus explicite de \overline{P}_C et de \overline{P}_S . La difficulté majeure est de manipuler conjointement la topologie classique pour laquelle la notion de connexité est bien définie et la topologie L^1 . À l'aide de [4], nous introduisons la notion de connexité L^1 . La connexité classique et la connexité L^1 coïncident sur les ensembles réguliers et cela nous permet de montrer le résultat suivant.

Théorème 3.30. *Si \overline{P}_C et \overline{P}_S désignent les relaxées ci-dessus avec la notion de connexité L^1 et si \overline{P}_C^r et \overline{P}_S^r désignent les relaxées ci-dessus quand on impose que les ensembles approchant soient réguliers, alors, pour tout ensemble E borné et de périmètre fini, on a*

$$\overline{P}_C^r(E) = \overline{P}_C(E) \quad \text{et} \quad \overline{P}_S^r(E) = \overline{P}_S(E).$$

Le deuxième résultat du Chapitre 3 est une formule d'identification. On note $St(E)$ la longueur d'un arbre de Steiner de E , c'est à dire la longueur minimale nécessaire pour connecter les composantes connexes de E . On note également $St_c(E)$ la longueur de l'arbre de Steiner de $\mathbb{R}^2 \setminus E$.

Théorème 3.33. *Soit E un ensemble de \mathbb{R}^2 essentiellement borné, de périmètre fini et satisfaisant $\partial E = \partial^* E \pmod{\mathcal{H}^1}$. On a*

$$\overline{P}_C(E) = P(E) + 2St(E)$$

et

$$\overline{P}_S(E) = P(E) + 2St(E) + 2St_c(E).$$

L'hypothèse $\partial E = \partial^* E \pmod{\mathcal{H}^1}$ signifie que le bord pour la topologie classique et celui pour la topologie L^1 ne sont pas trop différents.

Le **Chapitre 4** développe un modèle de reconstruction de domaine à partir de coupes (droites en dimension 2 et planaires en dimension 3). Le principe est le suivant : étant donnée une famille finie d'ensembles ω^{int} répartis sur des hyperplans de \mathbb{R}^d , nous reconstruisons un domaine "volumique" E tel que $\omega^{int} \subset E$. Afin d'éviter les solutions triviales du type $E = \mathbb{R}^d$, nous sommes amenés à définir ω^{ext} , la famille des ensembles complémentaires de ceux de ω^{ext} sur les hyperplans. Ainsi, nous cherchons un ensemble E tel que $\omega^{int} \subset E \subset \mathbb{R}^d \setminus \omega^{ext}$. Parmi la grande famille des ensembles vérifiant cette contrainte, nous discriminons en choisissant l'ensemble de plus basse énergie J où J désigne soit P , soit \mathcal{W} . Le problème d'optimisation géométrique est donc le suivant :

$$\min_{\omega^{int} \subset E \subset \mathbb{R}^d \setminus \omega^{ext}} J(E).$$

Ce problème est mal posé pour le périmètre car la notion de périmètre que nous utilisons est volumique et les contraintes sont de volume nul. Autrement dit, l'ensemble $E = \omega^{int}$

est admissible pour le problème ci-dessus et $P(E) = 0$. Cette solution n'est pas très intéressante.

Plutôt que de trouver directement une bonne formulation de ce problème, nous utilisons une approche indirecte par méthode champ de phase. En effet, les énergies P et \mathcal{W} s'approchent bien par P_ε et \mathcal{W}_ε . De plus, en posant

$$u_\varepsilon^{int}(x) = q \left(\frac{1}{\varepsilon} d(x, \omega^{int}) \right) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon^{ext}(x) = 1 - q \left(\frac{1}{\varepsilon} d(x, \omega^{int}) \right),$$

les contraintes d'inclusion-exclusion se transforment bien en champ de phase

$$\omega^{int} \subset E \subset \mathbb{R}^d \setminus \omega^{ext} \quad \Leftrightarrow \quad u_\varepsilon^{int} \leq u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^{ext}.$$

La version champ de phase du problème d'optimisation géométrique précédent devient donc

$$\min_{u_\varepsilon^{int} \leq u \leq u_\varepsilon^{ext}} J_\varepsilon(u).$$

Nous étudions la Γ -convergence du modèle pour le périmètre et nous dégagons le fait que l'énergie

$$\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon(u) = \begin{cases} P_\varepsilon(u) & \text{si } u_\varepsilon^{int} \leq u \leq u_\varepsilon^{ext}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

semble Γ -converger vers

$$F_1(u) = \begin{cases} \lambda \left(P(E) + \mathcal{H}^{d-1}(E \cap \omega^{ext}) + \mathcal{H}^{d-1}((\mathbb{R}^d \setminus E) \cap \omega^{int}) \right) & \text{si } u = \mathbb{1}_E, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où λ est une constante strictement positive. La minimisation de cette énergie limite ne renvoie pas nécessairement un ensemble E satisfaisant $\omega^{int} \subset E \subset \mathbb{R}^d \setminus \omega^{ext}$, comme on peut le voir sur des exemples simples, ce qui est plutôt gênant. Pour pallier ce problème, nous proposons d'épaissir un peu les contraintes avec un volume d'ordre ε^α (où $\alpha \in]0, 1[$) :

$$\omega^{int} \longrightarrow \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{int} \quad \text{et} \quad \omega^{ext} \longrightarrow \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{ext}.$$

En posant comme précédemment

$$U_\varepsilon^{int}(x) = q \left(\frac{1}{\varepsilon} d(x, \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{int}) \right) \quad \text{et} \quad U_\varepsilon^{ext}(x) = 1 - q \left(\frac{1}{\varepsilon} d(x, \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{int}) \right),$$

nous montrons le résultat suivant.

Théorème 4.5. *La famille d'énergies*

$$\mathcal{P}_\varepsilon(u) = \begin{cases} P_\varepsilon(u) & \text{si } U_\varepsilon^{int} \leq u \leq U_\varepsilon^{ext}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

Γ -converge, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers

$$F_2(u) = \begin{cases} \lambda \left(P(E) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E \cap \omega^{ext}) + 2\mathcal{H}^{d-1}((\mathbb{R}^d \setminus E) \cap \omega^{int}) \right) & \text{si } u = \mathbb{1}_E, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Intuitivement et numériquement, la minimisation de F_2 renvoie bien un ensemble E satisfaisant $\omega^{int} \subset E \subset \mathbb{R}^d \setminus \omega^{ext}$.

La suite du Chapitre 4 est consacrée à des illustrations numériques de cette approximation en dimension 2 et 3 avec le périmètre et l'énergie de Willmore. Nous illustrons l'efficacité de la méthode sur la Figure 0.1.

Le Chapitre 4 se termine sur une exploration numérique d'extensions possibles de la méthode. En particulier, nous regardons ce que donne la reconstruction en utilisant des coupes non planaires et des nuages de points. Nous illustrons également une approximation

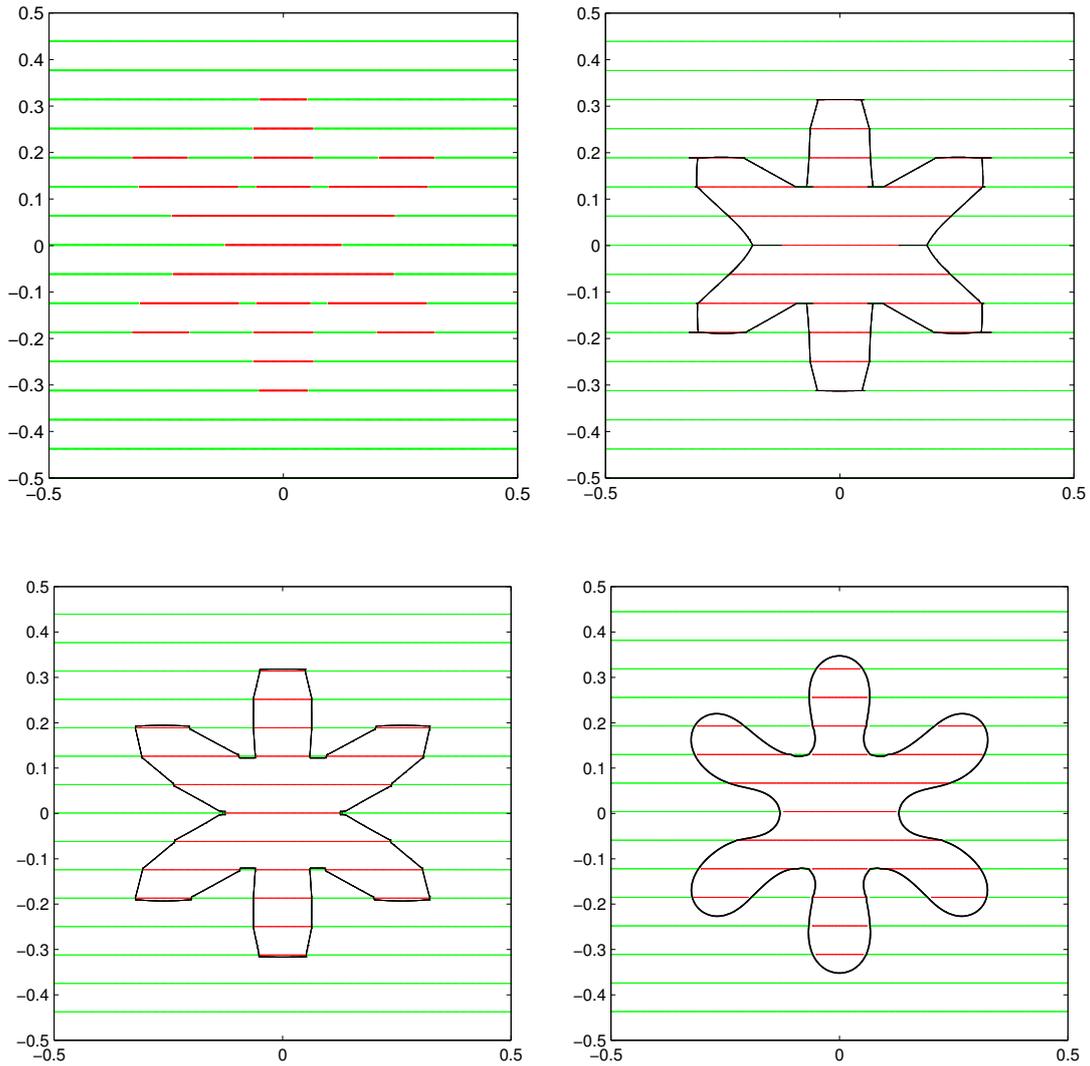


FIGURE 0.1. Reconstruction d'une étoile en utilisant les trois méthodes - (haut, gauche) contraintes d'inclusion (rouge) et d'exclusion (vert) - (haut, droite) reconstruction avec le périmètre épais - (bas, gauche) reconstruction avec le périmètre fin - (bas, droite) reconstruction avec Willmore.

multiphase, c'est-à-dire nous reconstruisons simultanément plusieurs domaines disjoints ou inclus les uns dans les autres.

Dans le **Chapitre 5**, nous étudions la minimisation de l'énergie de Willmore dans le plan – plus connue sous le nom d'énergie élastique, d'énergie de flexion ou d'énergie d'Euler-Bernoulli – avec une contrainte de confinement. Soient Ω un ouvert connexe borné lipschitzien et \mathcal{A} l'ensemble des courbes fermées, de classe $W^{2,2}$, pouvant avoir des auto-contacts tangents et confinées dans Ω . Ce problème est étudié dans un contexte ensembliste : les courbes représentent le bord d'un ensemble dont on minimise l'énergie de flexion. Afin que le bord ait une énergie de flexion finie, il faut nécessairement une courbe fermée dans l'espace de Sobolev $W^{2,2}$ et cette courbe ne doit pas former de coin ou d'angle.

Le problème d'optimisation s'écrit donc

$$\min_{\gamma \in \mathcal{A}} \mathcal{W}(\gamma).$$

Dans ce contexte, l'énergie de flexion s'écrit

$$\mathcal{W}(\gamma) = \int_{(\Gamma)} \kappa^2 ds,$$

où κ est la courbure de γ .

Nous montrons avec le **Théorème 5.13** que ce problème admet une solution. Nous étudions ensuite qualitativement la forme du minimiseur. Nous montrons dans le **Théorème 5.24** que les auto-contacts d'une courbe minimale sont bien ordonnés ce qui donne à la courbe une forme de "double goutte". Nous en déduisons le résultat suivant.

Théorème 5.27. *Soit γ une courbe minimale, il existe une paramétrisation de γ telle que*

$$\text{indice}_\gamma(\mathbb{R} \setminus (\gamma)) \subset \{0, 1\}.$$

De plus, si Ω est simplement connexe alors

$$\{z \in \mathbb{R} \mid \text{ind}_\gamma(z) = 1\} \subset \Omega.$$

Concernant la régularité, il est classique en calcul des variations que les minimiseurs d'une énergie soient plus réguliers que les éléments de l'ensemble admissible. C'est le cas pour notre problème d'élastique. On note BV l'espace des fonctions à variation bornée.

Théorème 5.34. *Soit γ une courbe minimale, on a*

$$\gamma \in W^{3,\infty}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}), \quad \gamma^{[3]} \in BV(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \kappa' \in BV(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}).$$

De plus, γ est lisse sur tout intervalle ouvert de \mathbb{S}^1 dans lequel il n'y a pas de contact (aussi bien auto-contact que contact avec $\partial\Omega$).

La suite du Chapitre 5 s'intéresse à deux cas particuliers de confinement Ω . Nous prouvons le résultat intuitif suivant.

Théorème 5.41. *Si Ω est convexe alors toute courbe minimale encercle un ensemble convexe.*

En particulier, les courbes minimales sont simples, c'est à dire qu'elles n'admettent pas d'auto-intersection. *A contrario*, il existe des confinements forçant les auto-intersections.

Théorème 5.42. *Il existe un confinement Ω (ni convexe, ni simplement connexe) tel que toute courbe minimale admet au moins un auto-contact.*

Nous montrons ce théorème en exhibant un confinement qui n'est pas convexe mais aussi qui n'est pas simplement connexe. Nous terminons l'étude de l'élastique confiné par quelques simulations numériques.

1.3. Le flot de Willmore

La dernière partie de cette thèse commence avec le **Chapitre 6** dans lequel nous expliquons la notion de mouvement minimisant due à De Giorgi. Il s'agit d'un formalisme permettant de définir un flot gradient pour des énergies peu régulières, trop peu pour leur associer un gradient. Le principe des mouvements minimisants est le suivant. Soient (X, d) un espace métrique complet et $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle. Afin de définir un flot pour F partant d'un point de départ x_0 , on considère un flot discret donné par un

chemin constant par morceaux $x_\tau(t) = x_n$ pour $t \in [n\tau, (n+1)\tau[$ où $\tau > 0$ est le pas de temps. La suite $(x_n)_n$ est construite par minimisation successive :

$$x_{n+1} \in \operatorname{argmin}_{x \in X} \left(F(x) + \frac{1}{2\tau} d(x, x_n)^2 \right).$$

À l'aide de quelques hypothèses sur F (semi-continuité inférieure, compacité, etc...) $(x_\tau)_\tau$ converge, à une sous-suite, près vers un chemin continu $x : [0, +\infty[\rightarrow X$ qui est appelé un mouvement minimisant de F partant de x_0 .

Nous illustrons ce concept en rappelant les résultats d'Algreem, Taylor et Wang [2], de Luckhaus et Sturzenhecker [90] et de Chambolle [36] qui ont étudié la définition d'un flot de courbure moyenne (flot gradient du périmètre) via les mouvements minimisants. Nous terminons le Chapitre 6 avec une application directe d'un résultat d'existence de mouvement minimisant assez général ([6, Proposition 2.2.3]) à l'énergie

$$\overline{\mathcal{W}}(u) = \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(u_k) \mid u_k \rightarrow u \text{ dans } L^1(\Omega) \right\}$$

où

$$\mathcal{W}(u) = \int_{\Omega} \left| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right|^2 |\nabla u| dx.$$

Cette énergie est en fait la relaxée pour la topologie L^1 de l'énergie de Willmore d'une fonction (énergie donnée par la formule de la co-aire). En nous plaçant dans l'espace

$$\mathcal{L}_M(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) \mid \|Du\|(\Omega) \leq M\},$$

où $M > 0$ est une constante, nous pouvons montrer le théorème suivant. On note AC_{loc}^2 l'ensemble des fonctions L^2 -localement absolument continues.

Théorème 6.16. *Soit Ω un ouvert borné à bord lipschitzien de \mathbb{R}^d . L'énergie $\overline{\mathcal{W}}$ définie sur $\mathcal{L}_M(\Omega)$ admet un mouvement minimisant dans $AC_{loc}^2([0, +\infty[, \mathcal{L}_M(\Omega))$.*

Dans le **Chapitre 7**, nous nous plaçons dans \mathbb{R}^2 et nous étudions le mouvement minimisant de l'énergie relaxée pour la topologie L^1 de

$$\mathcal{F}(E) = \int_{\partial E} (\lambda^2 + \kappa^2) d\mathcal{H}^1,$$

où λ est une constante (non nulle) et κ la courbure de ∂E . Cette relaxée a été étudiée par Bellettini, Dal Maso et Paolini [13] puis de nouveau par Bellettini et Mugnai [14]. Les auteurs ont complètement caractérisé les ensembles E pour lesquels $\overline{\mathcal{F}}(E) < +\infty$. À l'aide de cette caractérisation, nous étudions le flot de $\overline{\mathcal{F}}$ par les mouvements minimisants. Le Chapitre 7 est un travail en cours dont les résultats n'ont pas encore abouti. Nous présentons néanmoins deux résultats partiels d'existence et un résultat de régularité. Concernant l'existence, nous proposons une preuve incomplète pour laquelle il manque une estimation. Il est possible de s'en passer en localisant le flot dans un compact.

Théorème 7.12. *Soient K un compact et E_0 un ensemble borné tel que $\overline{\mathcal{F}}(E_0) < +\infty$. Pour tout $t > 0$, pour tout flot discret $E_\tau(t)$ provenant du mouvement minimisant, il existe une sous-suite $\tau_l \rightarrow 0$ et un ensemble limite $E(t)$ tels que*

$$E_{\tau_l}(t) \rightarrow E(t) \quad \text{dans } L^1(K).$$

L'estimation peut être obtenue en supposant que les composantes connexes des ensembles du flot discret sont simplement connexes.

Théorème 7.13. Soit E_0 un ensemble borné tel que $\overline{\mathcal{F}}(E_0) < +\infty$. Pour tout $t > 0$, soit $E_\tau(t)$ un flot discret provenant du mouvement minimisant. Si les composantes connexes de $E_\tau(t)$ sont simplement connexes, alors il existe une sous-suite $\tau_i \rightarrow 0$ et un ensemble limite $E(t)$ tels que

$$E_{\tau_i}(t) \rightarrow E(t) \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^2).$$

Concernant la régularité, nous obtenons le même résultat que pour l'élastique confiné du Chapitre 5.

Théorème 7.19. Soient E_n un flot discret provenant du mouvement minimisant et $\gamma_{n,i}$ une courbe recouvrant une composante connexe ∂E_n . On a

- $\gamma_{n,i}$ est de classe $W^{3,\infty}$;
- $\gamma_{n,i}^{[3]}$ et $\kappa_{n,i}$ sont des fonctions à variation bornée ;
- le long des arcs libres de $\gamma_{n,i}$ (c'est-à-dire dans les zones sans contact avec les autres courbes recouvrant ∂E_n), l'équation d'Euler est vérifiée :

$$2\gamma_{n,i}^{[4]} + 3\left(|\gamma_{n,i}''|^2 \gamma_{n,i}'\right)' - \gamma_{n,i}'' + \frac{1}{\tau}d(\gamma_{n,i}, E_{n-1})\nu = 0,$$

où ν est la normale à $\gamma_{n,i}$. Ainsi, $\gamma_{n,i}$ est de classe $C^{4,1}$.

Le dernier chapitre de cette thèse, le **Chapitre 8**, revient sur le mouvement minimisant de l'énergie de Willmore pour les fonctions du Chapitre 6. L'idée est d'utiliser une formule de la co-aire :

$$\mathcal{W}_p(u) = \int_{\Omega} \left| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right|^p |\nabla u| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_p(\{u = t\}) dt,$$

où $\{u = t\}$ est la ligne de niveau de u de hauteur t et

$$\mathcal{W}_p(M) = \int_M |H|^p d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Une telle formule est malheureusement fautive lorsqu'on considère la relaxée $\overline{\mathcal{W}}$ plutôt que \mathcal{W} . Ainsi, nous nous plaçons dans un cas particulier dans lequel cette formule est vraie avec $\overline{\mathcal{W}}$. Nous considérons le cas (très réducteur) des fonctions radiales décroissantes de $L^1(\Omega)$ où Ω est une boule. De telles fonctions se définissent en fait par leurs ensembles de niveau : u est une fonction radiale décroissante s'il existe une fonction $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\{u \geq t\} = B(0, r(t)).$$

Dans l'espace des fonctions radiales décroissantes positives, nous démontrons la formule de la co-aire suivante.

Théorème 8.8. Soit $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, radiale décroissante, bornée et à support compact dans $\Omega = B(0, R_0)$. Pour $p > 1$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{W}}_p(\{v \geq t\}, \Omega) dt = \overline{\mathcal{W}}_p(v, \Omega).$$

Grâce à cette formule, nous sommes capables d'expliciter le mouvement minimisant pour $\overline{\mathcal{W}}$ d'une fonction radiale décroissante. Soit $\Omega = B(0, R_0)$, on considère l'espace fonctionnel

$$L_{c+}^1(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\mathbb{R}^d) \mid u \geq 0, \operatorname{supp}(u) \subset \Omega \right\}.$$

Théorème 8.12. Soient $u_0 \in L^1_{c^+}(\Omega)$ une fonction bornée et radiale décroissante et r_0 sa fonction rayon. Si $\{u = \sup u_0\}$ n'est pas de volume nul, alors il existe un mouvement minimisant de \overline{W}_{d-1} partant de u_0 . De plus, il existe $\lambda : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que le mouvement minimisant est donné par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\rightarrow L^1_{c^+}(\Omega) \\ t &\mapsto u_t \end{aligned}$$

où

$$u_t(x) = \min(u_0(x), \lambda(t)).$$

La fonction λ est lipschitzienne, décroissante, vérifie $\lambda(0) = \sup u_0$ et s'annule en temps fini.

Le mouvement minimisant de (la relaxée de) l'énergie de Willmore correspond donc à un mouvement d'érosion de la condition initiale. Pour $u_0 \in L^1_{c^+}(\Omega)$, on note r_0 sa fonction rayon définie par

$$\{u \geq t\} = B(0, r_0(t)).$$

La condition “ $\{u = \sup u_0\}$ n'est pas de volume nul” se traduit sur r_0 par $r_0(\sup u_0) > 0$. De plus, si r_0 est continue alors l'évolution de λ est donnée par une équation différentielle ordinaire. En tout point t tel que $\lambda(t) > 0$ et r_0 est continue en $\lambda(t)$, λ est dérivable et satisfait l'équation différentielle

$$\lambda'(t) = -\frac{\omega_d}{\alpha_d^2} \frac{1}{r_0(\lambda(t))^{2d}},$$

avec ω_d et α_d respectivement l'aire de la sphère et le volume de la boule unité de \mathbb{R}^d .

2. Conventions et notations

Dans toute cette thèse, nous adoptons les conventions et notations suivantes. L'espace ambiant est noté \mathbb{R}^d avec $d \geq 2$.

| | |
|----------------------|---|
| $ E $ | désigne le volume de E , c'est-à-dire la mesure de Lebesgue de E ; |
| \mathcal{H}^k | est la mesure de Hausdorff de dimension k ; |
| ℓ | est la notation par défaut de la longueur; |
| $A\Delta B$ | est la différence symétrique de A et de B définie par $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$; |
| \overline{E} | désigne la fermeture de E pour la topologie classique; |
| $\overset{\circ}{E}$ | désigne l'intérieur de E pour la topologie classique; |
| ∂E | désigne le bord de E pour la topologie classique défini par $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$; |
| $A \subset\subset B$ | désigne l'inclusion relativement compacte de A dans B , c'est-à-dire \overline{A} est compact et inclus dans B ; |
| $dist(x, E)$ | est la distance classique d'un point x à un ensemble E ; |
| $d(x, E)$ | est la distance signée d'un point x à un ensemble E définie par $d(x, E) = dist(x, E) - dist(x, \mathbb{R}^d \setminus E)$; |
| $W^{k,p}$ | désigne l'espace de Sobolev des fonctions admettant k dérivées dans L^p ; |
| $f _A, \mu _A$ | est la restriction d'une fonction f ou d'une mesure μ à un ensemble A ; |
| $\text{supp } f$ | désigne le support de la fonction f , c'est-à-dire le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel $f = 0$ presque partout; |
| C_c^k | désigne l'ensemble des fonctions de classe C^k à support compact; |
| $u \cdot v$ | est le produit scalaire classique entre u et v ; |
| $[x]$ | désigne la partie entière du réel x . |

Pour les ensembles *négligeables* et les *presque partout*, la mesure sous-jacente est toujours la mesure de Lebesgue sauf si une autre est précisée (par exemple \mathcal{H}^{d-1} -négligeable, \mathcal{H}^1 -presque partout, ...).

Pour les espaces de fonctions, $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions de Ω à valeurs dans \mathbb{R}^d . $\mathcal{F}(\Omega)$ désigne $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ et \mathcal{F} désigne $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. En particulier $C_c^k(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de Ω dans \mathbb{R} , de classe C^k dont le support est compact et inclus dans Ω .

On dit qu'une fonction est *régulière* dès qu'elle est de classe C^k où k est un ordre suffisamment élevé pour pouvoir utiliser les dérivées au sens classique. De même, un ensemble E est *régulier* dès que son bord peut localement s'écrire comme le graphe d'une fonction régulière. Nous précisons l'ordre de régularité lorsque celui-ci a de l'importance.

Première partie

Relaxation des énergies géométriques

Énergies géométriques et pré-requis

Dans toute cette thèse, nous allons étudier deux énergies géométriques : le périmètre et l'énergie de Willmore. Le but de ce chapitre est de formaliser les définitions et les pré-requis des objets et des notions que nous allons utiliser par la suite. Le formalisme le plus important de ce travail est celui des ensembles de périmètre fini et des fonctions à variation bornée pour lequel la notion de périmètre se définit et se manipule très bien. Concernant l'énergie de Willmore, sa définition est basée sur les courbures d'une hypersurface et requiert des notions en géométrie différentielle qui sont rapidement rappelées. Bien que ces deux énergies se définissent dans tout espace de dimension finie plus grande que 2, les Chapitres 3, 5 et 7 s'intéressent au cas d'ensembles de \mathbb{R}^2 . L'intérêt de la dimension 2 est que le bord des ensembles peut être vu comme une famille de courbes pour lesquelles de nombreux outils sont à notre disposition et rappelés dans ce chapitre. Enfin nous terminons ce chapitre par une présentation des formules de la co-aire. Valables dans de nombreux contextes, ces formules permettent de faire un lien entre une fonction et ses ensembles de niveaux.

1. Les courbes dans le plan

Cette section a pour but de poser les définitions classiques et surtout les notations sur les courbes dans le plan. En effet, les notions de périmètre et d'énergie de Willmore se définissent plus facilement dans le plan qu'en dimension supérieure. Nous renvoyons à [51, Chapitre 1] et à [20, Chapitre 8].

Définition 1.1 (Courbe). *Une courbe γ dans le plan est une application continue*

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} . Une courbe γ est fermée dès que $I = [a, b]$ et $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dans ce cas, on choisit un paramétrage par le cercle :

$$\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

D'une manière générale, dans ce manuscrit les courbes sont fermées mais nous avons besoin d'en utiliser des sous-parties. Ainsi, une courbe non-fermée est plutôt appelée un *arc* même si un arc est une courbe au sens de la définition ci-dessus. Pour une courbe γ (ou un arc), on utilisera plusieurs notions comme sa longueur, sa courbure, son ensemble image, son indice, etc...

Définition 1.2 (Longueur d'une courbe). *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1 , sa longueur est définie par*

$$\ell(\gamma) = \int_I |\gamma'(t)| dt.$$

Toutes les courbes considérées seront de longueur finie et définies sur un intervalle fermé de telle sorte à pouvoir considérer un paramétrage par longueur d'arc.

Définition 1.3 (Paramétrage par longueur d'arc). *On dit qu'une courbe γ de classe C^1 est paramétrée par longueur d'arc dès que*

$$\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

où ℓ est sa longueur et pour tout $s \in [0, \ell]$, $|\gamma'(s)| = 1$.

Afin d'éviter les ambiguïtés, nous notons avec t un paramétrage quelconque de γ et avec s un paramétrage par longueur d'arc. Concernant l'image d'une courbe, on note (γ) son ensemble image dans le plan et nous nous intéressons à la régularité de cet ensemble. Plus précisément, nous évitons la formation de coins sur (γ) grâce à la définition suivante.

Définition 1.4 (Courbe régulière). *On dit qu'une courbe γ est régulière si elle est de classe C^1 et si, pour tout $t \in I$, $\gamma'(t) \neq 0$.*

Avec un peu plus de régularité, on peut définir la courbure et l'énergie de flexion d'une courbe.

Définition 1.5 (Courbure). *Soit γ une courbe régulière de classe C^2 , sa courbure $\kappa(t)$ au point $\gamma(t)$ est définie par*

$$\kappa(t) = \frac{\det(\gamma''(t), \gamma'(t))}{|\gamma'(t)|^3}.$$

De plus, si γ est paramétrée par longueur d'arc alors l'expression de sa courbure se simplifie sous la forme

$$\kappa(s) = \gamma''(s) \cdot \gamma'(s)^\perp,$$

où u^\perp est l'image du vecteur u par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct.

Définition 1.6 (Énergie de flexion). *Soit γ une courbe régulière de classe C^2 , son énergie de flexion est définie par*

$$\mathcal{W}(\gamma) = \int_I \kappa(t)^2 dt.$$

Cette énergie est aussi nommée énergie élastique ou énergie d'Euler-Bernoulli. Il s'agit du cas particulier d'énergie de Willmore en dimension 2. Elle intervient dans la modélisation de nombreux problèmes. Sans être exhaustif, nous présentons quelques unes de ces modélisations. Historiquement, cette énergie est apparue dans les travaux d'Euler et de Bernoulli sur l'étude dynamique des tiges élastiques (voir [111] pour un historique plus précis). Depuis lors, elle est beaucoup utilisée dans de nombreux domaines comme l'étude des matériaux, le traitement de l'image (complétion amodale, restauration, débruitage, lissage etc...) et la vision par ordinateur (voir [7, 25, 27, 34, 37, 44, 47, 48, 60, 80, 93, 101, 102]).

Remarque 1.7. Si γ est régulière, de classe C^2 , et paramétrée par longueur d'arc alors

$$\mathcal{W}(\gamma) = \int_0^\ell |\gamma''(s)|^2 ds.$$

La courbure et l'énergie de flexion sont intrinsèques à (γ) , c'est-à-dire que κ et $\mathcal{W}(\gamma)$ sont invariants par reparamétrage. Ainsi, on note parfois

$$\mathcal{W}(\gamma) = \int_{(\gamma)} \kappa^2 d\mathcal{H}^1.$$

Par la suite, nous serons amenés à utiliser l'indice d'une courbe par rapport à un point.

Définition 1.8 (Indice). *On identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} . Soit γ une courbe de classe C^1 par morceaux et $z \in \mathbb{R}^2 \setminus (\gamma)$. L'indice de γ par rapport à z est donné par*

$$\text{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\gamma)} \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2i\pi} \int_I \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt.$$

Définition 1.9 (Courbe simple). *On dit que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe simple si pour tout $z \in (\gamma)$, il existe un unique $t \in I$ tel que $\gamma(t) = z$.*

Remarque 1.10. En général on utilise les notions d'indice et de simplicité pour une courbe fermée. Les deux définitions précédentes restent valables pour les courbes fermées en remplaçant I par \mathbb{S}^1 ou par $[0, 1]$ avec périodicité.

2. Les fonctions à variation bornée et les ensembles de périmètre fini

L'espace des fonctions à variation bornée défini dans ce chapitre est un espace fonctionnel extrêmement utile en calcul des variations, surtout lorsqu'on s'intéresse à des énergies géométriques. Cet espace possède toutes les propriétés nécessaires à la minimisation (compacité, densité des fonctions lisses et semi-continuité inférieure de quantités importantes). Nous renvoyons à [5, 62, 118] pour une description détaillée.

2.1. Fonctions à variation bornée

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d .

Définition 1.11 (Variation totale). *Soit $f \in L^1(\Omega)$, on définit la variation totale de f dans Ω par*

$$\|Df\|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d), |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

Cette quantité peut être vue comme la norme de la forme linéaire

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi dx,$$

définie sur $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ par rapport à la topologie de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. Tout l'intérêt est que la topologie requiert une dérivée de moins que $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Cette quantité s'appelle la variation totale de f car, pour une fonction f de classe $W^{1,1}$, on a

$$\|Df\|(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla f| dx.$$

La définition avec la borne supérieure permet d'avoir un espace plus grand.

Définition 1.12 (Espace BV). *L'espace des fonctions à variation bornée de Ω est défini par*

$$BV(\Omega) = \left\{ f \in L^1(\Omega) \mid \|Df\|(\Omega) < +\infty \right\}.$$

L'espace BV contient $W^{1,1}$ et est inclus dans L^1 . En particulier, sur $] -1, 1[$ la fonction de Heaviside $\mathbb{1}_{]0,1[}$ est une fonction à variation bornée qui n'est pas dans $W^{1,1}$. Nous parlerons plus longuement des ensembles dont la fonction indicatrice est à variation bornée dans le prochain paragraphe. De cette définition découle énormément de propriétés. Sans pouvoir être exhaustif, nous énonçons les plus classiques d'entre elles qui illustrent bien le fait que l'espace BV est un bon espace pour le calcul des variations. Pour cela, nous rappelons la définition des mesures de Radon¹.

Définition 1.13 (Mesure de Radon). *Soit μ une mesure définie sur les boréliens de Ω .*

- (1) *La mesure μ est une mesure de Radon dès que μ est une mesure positive finie sur les compacts de Ω .*
- (2) *μ est une mesure de Radon vectorielle (ou à valeurs dans \mathbb{R}^k) dès que $\mu(\emptyset) = 0$ et, pour toute famille $(U_n)_n$ de boréliens disjoints deux à deux, on a*

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(U_n).$$

Il est entendu que la série ci-dessus converge absolument et en particulier, pour tout borélien U de Ω , $|\mu(U)| < +\infty$.

Il est important de remarquer qu'une mesure de Radon (positive) n'est pas une mesure de Radon vectorielle (à valeurs dans \mathbb{R}) car la condition $\mu(\Omega) < +\infty$ n'est pas requise pour les mesures positives.

Théorème 1.14 (Théorème de structure - [62, Théorème 1 Partie 5.1]). *Soit $f \in BV(\Omega)$. Il existe une mesure de Radon μ sur Ω et une fonction $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ telles que*

- σ soit μ mesurable ;
- pour μ -presque tout $x \in \Omega$, $|\sigma(x)| = 1$;
- pour tout $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi dx = - \int_{\Omega} \varphi \cdot \sigma d\mu.$$

Grâce à ce théorème, on peut remarquer que la dérivée au sens des distributions d'une fonction à variation bornée est une mesure de Radon vectorielle. Pour une fonction $f \in BV(\Omega)$, on peut alors voir que

$$U \mapsto \|Df\|(U)$$

est une mesure de Radon qui coïncide avec la mesure μ définie par le théorème précédent. De plus, par le Théorème de décomposition de Radon-Nikodym, on peut identifier

$$\sigma = \frac{Df}{\|Df\|},$$

où Df est la dérivée au sens des distributions de f . Dans le même ordre d'idée, en décomposant Df par rapport à la mesure de Lebesgue, on peut écrire

$$Df = \nabla f dx + D^s f,$$

1. nous renvoyons à [5, Chapitre 1] pour plus de détail concernant la théorie de la mesure.

où $D^s f$ est la partie singulière de Df (par rapport à la mesure de Lebesgue). Ainsi, $f \in W^{1,1}$ si et seulement si $D^s f = 0$ et dans ce cas, ∇f correspond bien au gradient usuel des fonctions de $W^{1,1}$. La partie singulière peut être plus précisément décrite mais ce n'est pas le propos ici, nous renvoyons à [5] pour de plus amples discussions à ce sujet.

En tant que sous-espace de $L^1(\Omega)$, l'espace BV hérite naturellement de la topologie induite (appelée topologie L^1 par la suite). Nous allons voir que pour $f \in BV$, la quantité $\|Df\|$ se comporte bien dans une optique de calcul des variations.

Théorème 1.15 (semi-continuité inférieure - [118, Théorème 5.2.1]). *Soient $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $BV(\Omega)$. Si $f_n \rightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$ alors*

$$\|Df\|(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|Df_n\|(\Omega).$$

Les deux aspects importants à retenir sont que la variation totale est une fonctionnelle semi-continue inférieurement pour la topologie L^1 , et que si une famille de fonctions de L^1 a une variation totale uniformément bornée alors toute sous-suite convergente admet pour limite une fonction à variation bornée.

Théorème 1.16 (approximation - [118, Théorème 5.3.3]). *Soit $f \in BV(\Omega)$. Il existe une suite de fonctions lisses $(f_n)_n$ à variation bornée convergeant vers f dans $L^1(\Omega)$ et telle que*

$$\|Df_n\|(\Omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|Df\|(\Omega).$$

L'intérêt de ce théorème est d'avoir la convergence de la suite $(f_n)_n$ vers f et des variations totales vers la variation totale de f . On appelle d'ailleurs cette convergence la *convergence stricte*.

Théorème 1.17 (compacité - [62, Théorème 4 Partie 5.2]). *Soient Ω un ouvert borné lipschitzien et $(f_n)_n$ une suite de fonctions à variation bornée de $L^1(\Omega)$. Si*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\|f_n\|_{L^1} + \|Df_n\|(\Omega) \right) < +\infty,$$

alors il existe une fonction $f \in BV(\Omega)$ et une sous-suite de $(f_n)_n$ convergeant vers f en topologie L^1 .

2.2. Ensembles de périmètre fini

En prenant les fonctions indicatrices d'ensembles comme cas particuliers de fonctions à variation bornée, on peut définir une notion de périmètre d'un ensemble. Cette définition a l'avantage de généraliser la notion d'aire du bord d'un ensemble et de conserver les propriétés des fonctions à variation bornée. De nombreux résultats sur les ensembles de périmètre fini sont disponibles dans [91].

Définition 1.18 (Ensemble de périmètre fini). *Soit E un ensemble mesurable de \mathbb{R}^d , on dit que E est de périmètre fini dès que*

$$\|D\mathbb{1}_E\|(\mathbb{R}^d) < +\infty,$$

où $\mathbb{1}_E$ est la fonction indicatrice de E . De même, E est de périmètre fini dans Ω dès que

$$\|D\mathbb{1}_E\|(\Omega) < +\infty.$$

Dans ce cas, on note $P(E, \Omega) = \|D\mathbb{1}_E\|(\Omega)$ et $P(E) = P(E, \mathbb{R}^d)$.

On peut remarquer qu'en particulier, si E est un ensemble régulier alors

$$P(E) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial E),$$

c'est-à-dire que le périmètre coïncide bien avec la mesure de l'aire du bord de E .

Par ailleurs, la norme L^1 (et sa topologie) appliquée aux fonctions indicatrices induit une distance (et sa topologie) sur la collection des ensembles mesurables.

Définition 1.19 (Distance L^1). *Soient E et F deux ensembles mesurables, on définit la différence symétrique de E et de F par*

$$E\Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

Ainsi, la distance (L^1) de E à F dans Ω est donnée par

$$|(E\Delta F) \cap \Omega| = \|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_F\|_{L^1(\Omega)}.$$

Remarque 1.20. Notons que si N est un ensemble négligeable alors $|E\Delta(E \cup N)| = 0$. En particulier, tout comme les fonctions de L^1 sont bien définies à un ensemble de mesure nulle près, la topologie L^1 sur les ensembles nous force à considérer les classes d'ensembles définis modulo les ensembles négligeables.

Cette remarque prendra une grande importance dans la suite et sera au cœur du Chapitre 3.

2.2.1. Premières propriétés

L'application des théorèmes des fonctions à variation bornée au cas particulier des ensembles de périmètre fini nous donne les résultats suivants.

Théorème 1.21 (semi-continuité inférieure - [5, Proposition 3.38]). *Soient E un ensemble mesurable et $(E_n)_n$ une suite d'ensembles de périmètre fini. Si $E_n \rightarrow E$ dans $L^1(\Omega)$, alors*

$$P(E, \Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P(E_n, \Omega).$$

Théorème 1.22 (approximation - [5, Théorème 3.42]). *Soit E un ensemble de périmètre fini dans Ω . Il existe une suite d'ensembles réguliers $(E_n)_n$ de périmètre fini convergeant vers E dans $L^1(\Omega)$ et telle que*

$$P(E_n, \Omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(E, \Omega).$$

Théorème 1.23 (compacité - [5, Théorème 3.39]). *Soit $(E_n)_n$ une suite d'ensembles de périmètre fini. S'il existe un compact K tel que pour tout n , $E_n \subset K$ et si*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} P(E_n) < +\infty,$$

alors il existe un ensemble $E \subset K$ de périmètre fini et une sous-suite de $(E_n)_n$ convergeant vers E en topologie L^1 .

Ces propriétés sont essentielles dans le cadre de cette thèse, cependant les résultats sur les ensembles de périmètre fini dépassent largement la portée de ces trois théorèmes. Avec cette notion de périmètre, on retrouve l'inégalité isopérimétrique bien connue.

Théorème 1.24 (inégalité isopérimétrique - [118, Théorème 5.4.3]). *Soit E un ensemble borné de périmètre fini de \mathbb{R}^d . On a*

$$|E| \leq CP(E)^{\frac{d}{d-1}}$$

où $C > 0$ est une constante. Le cas d'égalité est obtenu pour les boules avec la constante optimale C (ce qui permet de la déterminer).

La version localisée de ce théorème est l'inégalité isopérimétrique relative ([118, Théorème 5.4.3])

$$\min(|E \cap \Omega|, |\Omega \setminus E|) \leq CP(E, \Omega)^{\frac{d}{d-1}}.$$

2.2.2. Densité et bord essentiel

Nous l'avons déjà vu avant, le périmètre d'un ensemble est le même quel que soit le représentant choisi dans la classe des ensembles modulo les ensembles négligeables. En particulier, l'identification $P(E) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial E)$, valable pour les ensembles réguliers, est fautive en général dès que E n'est plus régulier. Pour pallier cette difficulté, nous définissons l'intérieur et le bord d'un ensemble pour la topologie L^1 .

Définition 1.25 (Densité d'un ensemble). *Soit E un ensemble mesurable, pour $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on définit la densité de E en $x \in \mathbb{R}^d$ par*

$$\theta_E(x, r) = \frac{|E \cap B(x, r)|}{|B(x, r)|}.$$

On définit également les ensembles, pour $t \in [0, 1]$,

$$E^t = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \lim_{r \rightarrow 0} \theta_E(x, r) = t \right\},$$

et

$$\partial^* E = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < \liminf_{r \rightarrow 0} \theta_E(x, r) \text{ et } \limsup_{r \rightarrow 0} \theta_E(x, r) < 1 \right\}.$$

Comme $0 \leq \theta_E(x, r) \leq 1$, il n'est pas difficile de voir que $E^0 \cup \partial^* E \cup E^1$ est une partition de \mathbb{R}^d . Ainsi, E^1 est appelé l'intérieur essentiel de E et E^0 l'extérieur essentiel. De plus, les ensembles E^t et $\partial^* E$ ne dépendent pas du représentant choisi et grâce au Théorème de différentiation de Lebesgue, on peut voir que $|E \Delta E^1| = 0$. Par conséquent, E^1 est le représentant préférentiel de E . Par ailleurs, il est beaucoup plus délicat de voir que $\partial^* E$ est le bord de E dont l'aire coïncide avec le périmètre.

Théorème 1.26 ([5, Théorème 3.61]). *Soit E un ensemble de périmètre fini de \mathbb{R}^d . On a*

- $\mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E \setminus E^{1/2}) = 0$;
- pour \mathcal{H}^{d-1} -presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $x \in E^0 \cup E^{1/2} \cup E^1$;
- pour tout ouvert Ω ,

$$P(E, \Omega) = \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial^* E) = \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap E^{1/2}).$$

En plus de faire apparaître $\partial^* E$ et $E^{1/2}$ comme des généralisations du bord de l'ensemble, la dernière égalité permet de définir le périmètre de E dans n'importe quel borélien Ω de \mathbb{R}^d .

2.2.3. La normale généralisée

Une dernière notion, très utile dans le cas régulier, qu'on peut étendre aux ensembles de périmètre fini, est celle de la normale (extérieure) à l'ensemble.

Définition 1.27 (Normale généralisée). Soient E un ensemble de périmètre fini dans \mathbb{R}^d et $x \in \mathbb{R}^d$. On note

$$\nu(x) = -\sigma(x) = \lim_{r \rightarrow 0} -\frac{D\mathbb{1}_E(B(x, r))}{\|D\mathbb{1}_E\|(B(x, r))}.$$

Lorsque $\nu(x)$ existe et est unitaire, on parle de normale extérieure généralisée. On définit

$$\partial^- E = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \nu(x) \text{ existe et est unitaire}\}.$$

L'existence de la normale extérieure généralisée nous permet de considérer un plan tangent généralisé à E défini pour tout $x \in \partial^- E$ par

$$T_x E = x + (\nu(x))^\perp.$$

Les ensembles $\partial^* E$, $E^{1/2}$ et $\partial^- E$ sont tous de bons candidats pour être désigné comme le bord essentiel de E . Il n'est pas difficile de voir que

$$\partial^- E \subset E^{1/2} \subset \partial^* E \subset \partial E.$$

Cependant, il est plus délicat d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 1.28 ([5, Théorème 3.61]). Soit E un ensemble de périmètre fini. On a

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial^- E \Delta E^{1/2}) = \mathcal{H}^{d-1}(E^{1/2} \Delta \partial^* E) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial^- E \Delta \partial^* E) = 0.$$

Ainsi, selon les auteurs, le *bord essentiel* de E est désigné soit par $\partial^* E$, soit par $E^{1/2}$, soit par $\partial^- E$. Le choix du bord n'a pas vraiment d'importance puisque ces ensembles sont égaux modulo un ensemble \mathcal{H}^{d-1} -négligeable. À l'aide de ce théorème et du théorème de structure (Théorème 1.14), on obtient facilement un théorème de la divergence.

Théorème 1.29 ([118, Théorème 5.8.2]). Soient E un ensemble de périmètre fini et $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, on a

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\partial^- E} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

3. Courbure moyenne et énergie de Willmore

Nous définissons maintenant l'énergie de Willmore d'une hypersurface de \mathbb{R}^d . Cette énergie utilise la notion de courbure de l'hypersurface. Quelle que soit la dimension, la courbure mesure la variation de la normale le long de la surface. La normale étant un objet lié au plan tangent, sa variation est un objet d'ordre 2. Ainsi, l'énergie de Willmore requiert des outils de géométrie différentielle que le lecteur pourra trouver dans [79]. Afin de garder une intuition de la notion de courbure, nous définissons d'abord la courbure moyenne pour une surface de \mathbb{R}^3 . Comme pour le périmètre, une généralisation à des objets moins réguliers existe pour la courbure moyenne. Cette théorie, utilisant les *varifolds*², ne sera quasiment pas utilisée dans cette thèse. C'est pourquoi nous restons dans le cadre régulier pour l'énergie de Willmore, mais nous renvoyons à [30, 116] pour plus de lectures à ce sujet.

2. on renvoie à [30, 116] pour la définition et l'utilisation des varifolds.

3.1. Courbure moyenne en dimension 3

Soit M une surface régulière de \mathbb{R}^3 . Un moyen visuel de construire les courbures est de se ramener au cas des courbes. Soit $x \in M$, on note $T_x M$ le plan tangent de M en x et $\nu(x)$ une normale. On considère $(i(x), j(x))$ une base de $T_x M$. Tout plan affine P contenant $\nu(x)$ et passant par x coupe $T_x M$ et forme un angle θ avec $i(x)$ dans le plan $T_x M$. De plus, cette intersection est localement transverse en x . Ainsi, $P \cap M$ forme une courbe plane notée $\gamma_{x,\theta}$ au voisinage de x . Cette courbe est régulière et on peut calculer sa courbure $\kappa_{x,\theta}$ en x . En 1760, Euler obtient le résultat suivant.

Théorème 1.30 (Euler - [61]). *La fonction $\theta \mapsto \kappa_{x,\theta}$ atteint son maximum et son minimum pour deux plans orthogonaux entre eux.*

On peut ainsi définir les deux courbures de M en x par

$$\kappa_1(x) = \min_{\theta} \kappa_{x,\theta}, \quad \text{et} \quad \kappa_2(x) = \max_{\theta} \kappa_{x,\theta},$$

la courbure moyenne par

$$H(x) = \kappa_1(x) + \kappa_2(x),$$

et le vecteur courbure moyenne par

$$\vec{H}(x) = (\kappa_1(x) + \kappa_2(x))\nu(x).$$

Remarquons que le signe de H dépend du choix de ν . En effet, la définition de la courbure d'une courbe dans le plan utilise comme vecteur normal celui donné par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ du vecteur tangent à la courbe. Ce vecteur tangent doit être cohérent avec $\nu(x)$, donc le signe de $\kappa_{x,\theta}$ dépend du sens de parcours de $\gamma_{x,\theta}$. Le vecteur courbure moyenne \vec{H} , quant à lui, ne dépend pas de l'orientation.

3.2. Courbure moyenne en dimension d

En dimension supérieure, il existe plusieurs moyens de définir la courbure moyenne, nous en présentons trois dans cette section. Soit M une hypersurface régulière orientable de \mathbb{R}^d avec $d \geq 3$.

3.2.1. La seconde forme fondamentale

Pour ce paragraphe, nous renvoyons à [20, Chapitre 10] et à [51, Chapitre 3]. Comme M est une hypersurface régulière (orientable ou non), on peut définir localement sa normale ν . La fonction

$$\begin{aligned} \nu &: M \rightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto \nu(x). \end{aligned}$$

est régulière et sa différentielle (en tant qu'application entre sous-variétés) est une application sur les fibrés tangents

$$\begin{aligned} D\nu &: TM \rightarrow \mathbb{R}^d \\ (x, v) &\mapsto D\nu(x).v \end{aligned}$$

La condition $|\nu(x)| = 1$ se traduit, après dérivation, par : pour tout $v \in T_x M$,

$$(D\nu(x).v) \cdot \nu(x) = 0.$$

Ainsi $D\nu(x).v \in T_x M$ et on peut voir $D\nu(x)$ comme un endomorphisme de $T_x M$. On définit la seconde forme fondamentale comme étant la forme bilinéaire associée à cet endomorphisme :

$$\begin{aligned} II &: TM^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, v, w) &\mapsto -(D\nu(x).v) \cdot w, \end{aligned}$$

où $u \cdot v$ est le produit scalaire classique de \mathbb{R}^d entre u et v . À l'aide de quelques calculs, on peut voir que pour tout $x \in M$, $(v, w) \mapsto II(x).(v, w)$ est symétrique en tant que forme bilinéaire de $T_x M$ (voir [79, Partie 3.6]). On peut donc la diagonaliser en base orthonormée (de $T_x M$).

Définition 1.31 (Courbures principales). *On appelle courbures principales de M en $x \in M$ les valeurs propres $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}$ de $II(x)$. Les vecteurs propres correspondants peuvent être pris orthonormés et sont appelés les directions de courbures principales.*

Définition 1.32 (Courbure moyenne). *La courbure moyenne de M en x est définie par*

$$H(x) = \sum_{i=1}^{d-1} \kappa_i(x) = \text{tr}(II(x)).$$

Le vecteur de courbure moyenne est, quant à lui, défini par

$$\vec{H}(x) = H(x)\nu(x).$$

Comme précédemment, la courbure moyenne dépend de l'orientation choisie pour ν mais ce n'est pas le cas du vecteur de courbure moyenne. La courbure moyenne est un objet local dépendant de la normale. Pour une hypersurface orientée, on peut choisir une orientation globale de la normale. Ainsi, H peut aussi être défini globalement sur M (au signe près), pour peu que M soit orientable.

3.2.2. Formulation variationnelle

Un autre moyen de définir le vecteur de courbure moyenne est de calculer la variation de l'aire de l'hypersurface et d'utiliser la formule de la divergence (voir [58, Appendice A]). Nous rappelons un moyen rapide de définir la divergence tangentielle à une sous-variété en utilisant le gradient tangentiel. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière, pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned} Df(x) : T_x M &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto Df(x).v \end{aligned}$$

est une forme linéaire. Par le Théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur $\nabla_M f(x) \in T_x M$ tel que, pour tout $v \in T_x M$, $Df(x).v = \nabla_M f(x) \cdot v$. Ce vecteur est appelé le gradient tangentiel de f en x . On peut aussi voir que si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière alors

$$\nabla_M f(x) = p_{T_x M}(\nabla f(x)),$$

il s'agit de la projection sur le plan tangent $T_x M$ du gradient (classique) de f en x . Il n'est pas difficile de voir que $\nabla_M f$ ne dépend que des valeurs de f sur M . Soit e_1, \dots, e_d une base orthonormée de \mathbb{R}^d , soit $X : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs régulier, on définit la divergence tangentielle de X le long de M par

$$\text{div}_M X(x) = \sum_{i=1}^d \left(\nabla_M (X \cdot e_i) \right) \cdot e_i.$$

Ici encore, la valeur de $\text{div}_M X$ ne dépend que des valeurs de X le long de M et ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

Le but maintenant est de calculer la variation première de l'aire d'une hypersurface. Nous ne donnerons pas les calculs intermédiaires (voir [92, Chapitre 1]). Soit M une hypersurface régulière compacte sans bord, l'aire de M est donnée par

$$\mathcal{H}^{d-1}(M) = \int_M d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Pour tout champ de vecteurs $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ régulier à support compact, il existe $(\varphi_t)_t$ une famille à un paramètre de C^1 -difféomorphismes définie pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et vérifiant

$$\left. \frac{d\varphi_t}{dt} \right|_{t=0} = X.$$

Le but est de calculer la variation d'aire

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{H}^{d-1}(\varphi_t(M)).$$

Comme c'est une hypersurface plongée, on peut équiper M d'une métrique g (provenant du produit scalaire de \mathbb{R}^d) et exprimer l'élément d'aire $d\mathcal{H}^{d-1}$ à l'aide de cette métrique. En particulier, on peut calculer les dérivées de la métrique et ainsi les variations de cet élément d'aire. Après quelques calculs, on obtient

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{H}^{d-1}(\varphi_t(M)) = \int_M \operatorname{div}_M X d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Par la formule de la divergence, on obtient

$$\int_M \operatorname{div}_M X d\mathcal{H}^{d-1} = - \int_M X \cdot \vec{H} d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Cette égalité est le point de départ d'une définition alternative de \vec{H} . En effet, les deux membres de cette égalité peuvent être vus comme des formes linéaires sur $C^1(M, \mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, le membre de droite ne requiert pas de dérivée sur X . Ainsi, dès que M est assez régulière et compacte, \vec{H} est continue et vérifie

$$\left| \int_M \operatorname{div}_M X d\mathcal{H}^{d-1} \right| \leq \mathcal{H}^{d-1}(M) \left(\sup_{x \in M} |\vec{H}(x)| \right) \left(\sup_{x \in M} |X(x)| \right).$$

Cette inégalité traduit la continuité d'une forme linéaire. Soit M une hypersurface régulière, la forme linéaire

$$\begin{aligned} C^1(M, \mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto \int_M \operatorname{div}_M X d\mathcal{H}^{d-1} \end{aligned}$$

est continue pour la topologie C^0 dès qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $X \in C^1(M, \mathbb{R}^d)$,

$$\left| \int_M \operatorname{div}_M X d\mathcal{H}^{d-1} \right| \leq C \|X\|_\infty.$$

Dans ce cas, on peut appliquer un Théorème de représentation de Riesz. Ainsi, il existe un unique champ de vecteurs $\vec{H} : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ tel que, pour tout $X \in C^1(M, \mathbb{R}^d)$,

$$\int_M \operatorname{div}_M X d\mathcal{H}^{d-1} = - \int_M X \cdot \vec{H} d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Cet unique champ de vecteurs est le vecteur courbure moyenne et coïncide avec celui donné dans le paragraphe précédent. Cette définition variationnelle de la courbure moyenne est aussi le point de départ de la définition d'une notion de courbure moyenne généralisée pour les varifolds.

Remarque 1.33. On peut ainsi noter que la déformation la plus efficace pour diminuer l'aire de M est de choisir $X = \vec{H}$. Ainsi, le flot induit par \vec{H} , appelé flot de courbure moyenne, est celui qui diminue le plus l'aire de la surface.

3.2.3. Ligne de niveau

Souvent, il est utile de voir une hypersurface comme la ligne de niveau d'une fonction régulière (voir [63, Chapitre 2]). Avec ce formalisme nous pouvons aussi définir la notion de courbure moyenne. Soient $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et M sa ligne de niveau 0 :

$$M = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = 0\}.$$

M est une hypersurface régulière dès que f est régulière et que, pour tout $x \in M$, $\nabla f(x) \neq 0$. Dans ce cas, comme f est constante le long de M , il n'est pas difficile de voir que $\nabla f(x)$ est orthogonal à M en $x \in M$. Ainsi une normale à M en x est donnée par

$$\nu(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}.$$

Après quelques calculs, on peut aussi voir que la courbure moyenne de M est donnée par

$$(1) \quad H(x) = -\operatorname{div} \nu(x) = -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) (x).$$

Le vecteur courbure moyenne est, quant à lui, donné par

$$\vec{H} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right).$$

3.3. Énergie de Willmore

Une fois la courbure moyenne définie, on peut considérer l'énergie de Willmore d'une hypersurface de \mathbb{R}^d .

Définition 1.34 (Énergie de Willmore). *Soit M une hypersurface régulière (de classe C^2) de \mathbb{R}^d . Son énergie de Willmore est définie par*

$$\mathcal{W}(M) = \int_M |H|^2 d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Remarquons qu'en dimension 2 on retombe sur l'énergie de flexion définie pour les courbes

$$\mathcal{W}(\gamma) = \int_{(\gamma)} \kappa^2 ds.$$

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , on définit l'énergie de Willmore de f par

$$\mathcal{W}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) \right|^2 |\nabla f| dx,$$

avec la convention

$$\left| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) \right|^2 |\nabla f| = 0$$

dès que $\nabla f(x) = 0$. Cette formulation prendra tout son sens dans la section suivante. En lien avec (1), on peut néanmoins remarquer que

$$\left| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) \right|^2 = |H|^2.$$

Remarque 1.35. Si $(M_t)_t$ est un flot de courbure moyenne d'hypersurfaces, c'est à dire si

$$\frac{dM_t}{dt} = \vec{H}_{M_t},$$

alors la variation première de son aire est égale à son énergie de Willmore, autrement dit

$$\left. \frac{d}{dt} \right)_{t=0} \mathcal{H}^{d-1}(M_t) = - \int_{M_t} |H|^2 d\mathcal{H}^{d-1} = -\mathcal{W}(M_t).$$

4. Les formules de la co-aire

On présente ici les formules de la co-aire. Ces formules, qui généralisent la notion de changement de variable dans les intégrales, existent en plusieurs versions selon le contexte et la régularité des fonctions impliquées. Des démonstrations de ces formules classiques peuvent être trouvées dans [62, 91].

Définition 1.36 (Jacobien généralisé). *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction lipschitzienne avec $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $m \leq n$. On définit le jacobien généralisé de f par*

$$Jf(x) = \begin{cases} \sqrt{\det(Df(x)Df(x)^*)} & \text{si } f \text{ est dérivable en } x \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $Df(x)^*$ est l'adjoint de $Df(x)$.

Comme f est lipschitzienne, le Théorème de Rademacher montre que f est dérivable presque partout donc $Jf(x)$ est bien définie à un ensemble de mesure nulle près. Remarquons que, lorsque $m = 1$, on a $Jf(x) = |\nabla f(x)|$.

Théorème 1.37 ([62, Théorème 1 - Section 3.4.2]). *Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est lipschitzienne avec $m \leq n$, alors pour tout ensemble A borélien de \mathbb{R}^n , la fonction $y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(y))$ est mesurable et*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(y)) dy = \int_A Jf(x) dx.$$

Ce théorème a un cas particulier intéressant, consistant à prendre

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Jf(x) = 0\},$$

et on obtient alors que pour presque tout $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{H}^{n-m}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = y, Jf(x) = 0\}) = 0.$$

On peut voir cette égalité comme un Lemme de Morse-Sard faible dans le sens où presque toutes les lignes de niveaux de f sont régulières \mathcal{H}^{n-m} -presque partout.

Corollaire 1.38 (formule de la co-aire - [62, Théorème 2 - Partie 3.4.3]). *Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction lipschitzienne avec $m \leq n$ et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.*

– *Si $g \in L^1(\mathbb{R}^m)$, alors pour presque tout $y \in \mathbb{R}^m$,*

$$g|_{f^{-1}(y)} \in L^1(\mathcal{H}^{n-m}).$$

– *Si g est positive ou $g \in L^1(\mathbb{R}^m)$, alors pour tout ensemble A borélien de \mathbb{R}^n ,*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{A \cap f^{-1}(y)} g d\mathcal{H}^{n-m} \right) dy = \int_A g(x) Jf(x) dx.$$

Lorsqu'on prend $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g = \varphi \circ f$ dans le théorème précédent, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(f(x)) |\nabla f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \mathcal{H}^{n-1}(\{y \in \mathbb{R}^n \mid f(y) = t\}) dt.$$

Ceci nous donne un moyen de calculer l'intégrale de φ sur les lignes de niveaux de f .

Cette formule de la co-aire est la plus classique mais elle se généralise à de nombreux contextes. Par exemple, cette formule est valable en géométrie différentielle avec f une application entre deux variétés. La généralisation qui nous intéresse est celle pour les fonctions à variation bornée et pour les ensembles de périmètre fini.

Théorème 1.39 ([62, Théorème 1 Partie 5.5]). Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et $f \in L^1(\Omega)$, on note

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq t\}.$$

- Si $f \in BV(\Omega)$, alors pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, E_t est un ensemble de périmètre fini.
- Si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t, \Omega) dt < +\infty,$$

alors $f \in BV(\Omega)$.

Dans les deux cas, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t, \Omega) dt = \|Df\|(\Omega).$$

Il ne nous reste plus qu'à écrire un cas particulier de la formule de la co-aire pour l'énergie de Willmore.

Proposition 1.40. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a

$$\mathcal{W}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) \right|^2 |\nabla f| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}(\{x \mid f(x) = t\}) dt,$$

où on a noté

$$\mathcal{W}(\{x \mid f(x) = t\}) = \int_{\{x \mid f(x)=t\}} |H|^2 d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Remarquons qu'avec le Lemme de Morse-Sard faible précédent, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, $\{x \mid f(x) = t\}$ est \mathcal{H}^{d-1} -presque partout une hypersurface régulière. Par conséquent, les quantité intégrales précédentes sont bien définies.

Relaxée et approximation

Dans ce chapitre, nous décrivons le type de problème que nous étudions. Une partie des travaux de la thèse concerne des problèmes de minimisation du périmètre ou de l'énergie de Willmore en présence de contraintes. L'autre partie s'intéresse plus spécifiquement aux flots de ces énergies. Au cœur du Chapitre 4 et en marge du Chapitre 5, nous approchons le périmètre et l'énergie de Willmore par une méthode de champ de phase afin de faire des simulations numériques. Cette méthode est présentée à la fin de ce chapitre.

1. Énergies relaxées

Pour les problèmes d'optimisation, nous minimisons toujours sur un espace d'ensembles mesurables muni de la topologie L^1 . En effet, nous avons vu au chapitre précédent que le périmètre, vu comme une fonctionnelle, se comportait très bien avec la topologie L^1 . L'énergie de Willmore, initialement définie sur les hypersurfaces, se transmet sans difficulté aux ensembles.

Définition 2.1 (Énergie de Willmore d'un ensemble). *Soit E un ensemble régulier de classe C^2 de \mathbb{R}^d . Son énergie de Willmore est définie par*

$$\mathcal{W}(E) = \mathcal{W}(\partial E) = \int_{\partial E} |H|^2 d\mathcal{H}^{d-1},$$

où H est la courbure moyenne de l'hypersurface orientée ∂E .

Le choix de la topologie L^1 pour l'énergie de Willmore est plus discutable. Deux avantages se dégagent de cette topologie. Le premier est de pouvoir passer facilement à la topologie L^1 sur les fonctions via la formule de la co-aire. L'autre est le lien avec le périmètre. En effet, à plusieurs reprises, nous avons une borne sur l'énergie de Willmore d'un ensemble et en combinant avec une contrainte sur l'ensemble, nous obtenons borne sur son périmètre. Cela nous permet d'utiliser le théorème de compacité des ensembles de périmètre fini (Théorème 1.23) vu au chapitre précédent.

Le principe général des problèmes d'optimisation que nous regardons est le suivant. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des ensembles mesurables de \mathbb{R}^d . Soit J désignant le périmètre P ou l'énergie de Willmore \mathcal{W} . On note \mathcal{A}_J le sous-ensemble de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sur laquelle l'énergie considérée est bien définie. Plus précisément, on définit :

- $\mathcal{A}_P = \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mid E \text{ est de périmètre fini}\}$;
- $\mathcal{A}_\mathcal{W} = \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mid E \text{ est régulier de classe } C^2\}$.

On choisit ensuite un ensemble de contraintes *cont* et on définit la classe des ensembles admissibles :

$$\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mid E \text{ vérifie les contraintes } cont\}.$$

Les contraintes que nous utilisons sont du type :

- connexité : E est connexe ou simplement connexe (Chapitre 3) ;

- inclusion-exclusion : $\omega^{int} \subset E \subset \mathbb{R}^d \setminus \omega^{ext}$, où ω^{int} et ω^{ext} sont deux ensembles disjoints de \mathbb{R}^d (Chapitre 4);
- confinement : $E \subset \Omega$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d (Chapitre 5).

On définit ensuite une énergie contrainte :

$$J_c(E) = \begin{cases} J(E) & \text{si } E \in \mathcal{A}_J \cap \mathcal{A} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tout l'enjeu ensuite est de minimiser J_c sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. La difficulté est que, en général, le minimum n'existe pas ou n'est pas atteint. Premièrement, \mathcal{A}_J n'est pas fermé pour la topologie L^1 contrairement à \mathcal{A}_P . Ensuite, les contraintes de \mathcal{A} passent rarement à la limite, notamment pour les contraintes de connexité et d'inclusion-exclusion. En d'autres termes, l'énergie J_c n'est pas semi-continue inférieurement pour la topologie L^1 .

Définition 2.2 (Semi-continuité inférieure). *Soit $J : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle. Si, pour tout $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, pour toute suite d'ensembles $(E_n)_n$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers E en topologie L^1 , on a*

$$J(E) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(E_n),$$

alors on dit que J est semi-continue inférieurement pour la topologie L^1 .

La semi-continuité inférieure est essentielle pour nos problèmes de minimisation. En effet, nous utilisons systématiquement la méthode directe du calcul des variations pour prouver l'existence de minimiseurs d'une énergie. Le principe de cette méthode est le suivant. Dès que

$$\inf_{F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} J_c(F) \text{ est fini,}$$

il existe une suite $(E_n)_n$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_c(E_n) = \inf_{F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} J_c(F).$$

En particulier, au moins à partir d'un certain rang,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} J_c(E_n) < +\infty,$$

c'est-à-dire $E_n \in \mathcal{A}_J \cap \mathcal{A}$. En général, la régularité de \mathcal{A}_J et les contraintes \mathcal{A} nous permettent d'utiliser un théorème de compacité (par exemple, le Théorème 1.23). Ainsi, il existe un ensemble E et une sous-suite de $(E_n)_n$ convergeant vers E en topologie L^1 . Pour des raisons de clarté, nous gardons l'indice n pour cette sous-suite. Si J_c est semi-continue inférieurement, alors

$$J_c(E) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J_c(E_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_c(E_n) = \inf_{F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} J_c(F).$$

Ainsi, comme la borne inférieure est finie, on récupère que $E \in \mathcal{A}_J \cap \mathcal{A}$ et l'existence d'un minimum pour J_c .

Par conséquent, sans semi-continuité inférieure, nous sommes coincés. Un moyen de pallier cette difficulté est de remplacer l'énergie J_c par une énergie semi-continue inférieurement qu'on espère suffisamment proche de J_c . Pour cela, nous considérons l'enveloppe semi-continue inférieurement – ou relaxée – de J_c .

Définition 2.3 (Relaxée). *Soit $J : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle. On définit \bar{J} l'enveloppe semi-continue inférieurement – ou relaxée – de J par rapport à la topologie L^1 par*

$$\bar{J}(E) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(E_n) \mid E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1 \right\}.$$

Autrement dit, étant donné un ensemble E , parmi toutes les suites convergeant vers E , il y en a une qui minimise l'énergie J . La valeur limite de l'énergie de cette suite est égale à $\bar{J}(E)$. Le lemme suivant confirme que \bar{J} est effectivement semi-continue inférieurement.

Lemme 2.4 ([22, Remarque 1.3]). *Soit (X, d) un espace métrique et $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle. L'énergie*

$$\bar{J}(u) = \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(u_k) \mid u_k \rightarrow u \right\}$$

est semi-continue inférieurement.

Preuve.

Soit $(u_n)_n$ une suite de X convergeant vers u . Si, à partir d'un certain rang, $\bar{J}(u_n) = +\infty$, alors

$$\bar{J}(u) \leq \liminf \bar{J}(u_n) = +\infty.$$

Dans le cas contraire, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\bar{J}(u_n) < +\infty$. Ainsi, à n fixé, il existe une suite $(u_{n,k})_k$ de X convergeant vers u_n et telle que

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} J(u_{n,k}) \leq \bar{J}(u_n) + \frac{1}{n}.$$

Quitte à extraire selon k , on peut supposer qu'à partir d'un certain rang, $k \geq k_0^n$, on a

$$J(u_{n,k}) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(u_{n,k}) + \frac{1}{n}.$$

On utilise ensuite les convergences des suites : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad d(u, u_n) < \varepsilon \\ \text{et } \exists k_1^n \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_1^n, \quad d(u_n, u_{n,k}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit $k_n \geq \max(k_0^n, k_1^n, k_{n-1} + 1)$. On note $v_n = u_{n, k_n}$. On a ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \quad d(u, v_n) < 2\varepsilon.$$

Donc $(v_n)_n$ converge bien vers u . De plus, en combinant les deux inégalités précédentes sur les limites inférieures, on obtient

$$J(v_n) \leq \bar{J}(u_n) + \frac{2}{n}.$$

En prenant la limite inférieure selon n , on obtient

$$\bar{J}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(v_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \bar{J}(u_n).$$

Ainsi, \bar{J} est bien semi-continue inférieurement. □

Si J est semi-continue inférieurement, alors $\bar{J} = J$. Dans le cas contraire, notre énergie est modifiée et parfois de manière assez importante. Cet écart entre les deux énergies porte le nom de *phénomène de Lavrentief* (voir [31]). Dans certains cas, les contraintes disparaissent à la limite. En particulier, on peut avoir une inclusion stricte :

$$\mathcal{A}_J \cap \mathcal{A} \subsetneq \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mid \bar{J}_c(E) < +\infty\}.$$

C'est exactement ce qu'il se passe dans les problèmes étudiés aux Chapitres 3 et 4. Dans ces cas particuliers, nous verrons que

$$\bar{J}_c(E) = J(E) + C(E),$$

où $C(E)$ est une énergie pénalisant le fait que l'ensemble E ne respecte pas les contraintes de J_c .

Une autre modification majeure de la relaxée est la localité. En effet, P et \mathcal{W} sont données par des intégrales, autrement dit elles peuvent être localisées. En particulier, étant donné un ensemble E , les applications

$$\Omega \mapsto P(E, \Omega) = \int_{\Omega \cap \partial^* E} 1 d\mathcal{H}^{d-1}$$

et

$$\Omega \mapsto \mathcal{W}(E, \Omega) = \int_{\Omega \cap \partial E} |H_{\partial E}|^2 d\mathcal{H}^{d-1}$$

sont croissantes par rapport à l'inclusion. La relaxée n'admet pas, en général, une représentation sous forme intégrale. Nous verrons un exemple sur \mathcal{W} dans la section suivante.

2. La caractérisation de l'énergie élastique dans le plan

Dans cette section, nous reprenons la relaxée de l'énergie de Willmore dans le plan

$$\mathcal{W}(E) = \int_{\partial E} \kappa^2 d\mathcal{H}^1.$$

Le bord ∂E étant une famille de courbes, on a beaucoup plus d'outils pour étudier la relaxée de \mathcal{W} par rapport à la topologie L^1 dans le plan qu'en dimension plus grande.

Dans cette section, nous reprenons les résultats des articles de Bellettini-Dal Maso-Paolini [13] et de Bellettini-Mugnai [14]. Les articles de Bellettini *et al.* se sont concentrés sur l'étude d'une énergie un peu différente, il s'agit de l'énergie de redressement-raccourcissement¹. Nous étudions le flot de cette énergie dans le Chapitre 7. Les auteurs ont étudié la relaxée de cette énergie dans le plan et ont réussi à complètement caractériser les ensembles du plan ayant une énergie relaxée finie à l'aide de familles minimales de courbes recouvrant leur bord. En particulier, il mettent en lumière le fait qu'une partie de l'énergie relaxée est portée par des parties fantômes de l'ensemble. À partir de leurs résultats, nous étudions deux problèmes d'optimisation. Dans le Chapitre 5, nous étudions les courbes minimales de l'énergie de flexion confinées dans un ouvert borné.

Définition 2.5 (Énergie de redressement-raccourcissement). *On définit l'énergie de redressement-raccourcissement d'un ensemble E de \mathbb{R}^2 par*

$$\mathcal{F}(E) = \begin{cases} \int_{\partial E} (1 + \kappa^2) d\mathcal{H}^1 & \text{si } E \text{ est régulier et de classe } C^2, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La relaxée semi-continue inférieurement par rapport à la topologie L^1 est donnée par

$$\overline{\mathcal{F}}(E) = \inf \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(E_n) \mid E_n \rightarrow E \right),$$

la borne inférieure étant prise sur les suites d'ensembles convergeant vers E par rapport à la topologie L^1 .

Dans la classe des ensembles coïncidant avec E presque partout, nous choisissons un représentant vérifiant

$$\forall x \in E, \quad \liminf_{r \rightarrow 0} |E \cap B(x, r)| > 0.$$

La caractérisation de Bellettini *et al.* s'appuie sur la notion de système de courbes pour recouvrir le bord des ensembles.

1. straightening-shortening en anglais

Définition 2.6 (Système de courbes). *On dit que Γ est un système de courbes si $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ est composé d'un nombre fini de courbes régulières fermées γ_i . De plus,*

- Γ est dans $W^{2,2}$ si chaque courbe γ_i est dans $W^{2,2}$, c'est à dire si γ_i , γ_i' et γ_i'' appartiennent à L^2 en tant que dérivées faibles;
- Γ est sans croisement si $\gamma_i'(t)$ et $\gamma_j'(s)$ sont parallèles dès que $\gamma_i(t) = \gamma_j(s)$;
- l'image de Γ est donnée par

$$(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^N (\gamma_i) ;$$

- l'indice de Γ est donné par

$$\text{ind}_\Gamma(x) = \sum_{i=1}^N \text{ind}_{\gamma_i}(x),$$

pour $x \notin (\Gamma)$;
- on note

$$A_\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \setminus (\Gamma) \mid \text{ind}_\Gamma(x) = 1\}.$$

Nous définissons ensuite la notion de système de courbes recouvrant le bord d'un ensemble ainsi que l'énergie de redressement-raccourcissement d'un système de courbes.

Définition 2.7 (Recouvrement du bord d'une ensemble). *Soit E un ensemble de \mathbb{R}^2 . On dit que Γ est un système de courbes pour E si Γ est $W^{2,2}$, sans croisement, $\partial E \subset (\Gamma)$ et $E = A_\Gamma$. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des systèmes de courbes de E . \mathcal{F} s'étend naturellement aux systèmes de courbes Γ par*

$$\mathcal{F}(\Gamma) = \sum_{i=1}^N \int_{(\gamma_i)} (1 + \kappa^2) d\mathcal{H}^1.$$

Le lemme suivant est important car il donne une borne sur le nombre de courbes d'un système de courbes à partir de l'énergie \mathcal{F} . Cette borne justifie le fait de ne regarder que des systèmes de courbes ayant un nombre fini de courbes. Elle est essentielle dans les estimations utilisées pour montrer les résultats principaux des articles de Bellettini *et al.*

Lemme 2.8 ([13, Lemme 3.1]). *Pour tout $M > 0$, il existe $N_M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout système de courbes Γ , si $\mathcal{F}(\Gamma) \leq M$ alors Γ est composé d'au plus N_M courbes.*

L'idée de la preuve, qui n'est pas rappelée ici, est de voir que l'énergie \mathcal{F} d'une courbe fermée est minorée par une constante non nulle. On énonce maintenant le résultat principal des deux articles.

Théorème 2.9 ([14, Proposition 6.1]). *Si $E \subset \mathbb{R}$ vérifie $\overline{\mathcal{F}}(E) < +\infty$, alors*

$$\overline{\mathcal{F}}(E) = \min_{\Gamma \in \mathcal{A}(E)} \mathcal{F}(\Gamma).$$

En particulier, $\mathcal{A}(E)$ est non vide, le minimum est atteint, et si E est régulier de classe C^2 alors $\overline{\mathcal{F}}(E) = \mathcal{F}(E)$ ([14, Théorème 8.1]).

Un dernier point à examiner est le caractère non local de $\overline{\mathcal{F}}$. Les définitions de \mathcal{W} et de la relaxée peuvent se localiser.

Définition 2.10 (Énergies locales). Soit Ω un ensemble mesurable de \mathbb{R}^2 . On définit

$$\mathcal{F}(E, \Omega) = \begin{cases} \int_{\Omega \cap \partial E} (1 + \kappa^2) d\mathcal{H}^1 & \text{si le bord de } E \text{ est de classe } C^2, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\overline{\mathcal{F}}(E, \Omega) = \inf \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(E_n, \Omega) \mid E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1(\Omega) \right).$$

L'idée est de voir que $\overline{\mathcal{F}}(E, \Omega)$ ne peut pas s'écrire comme l'intégrale d'une certaine fonction sur Ω par rapport à une certaine mesure. Nous reprenons l'exemple [13, Fig. 7.1]. Soient E et Ω les ensembles donnés par la Figure 2.1.

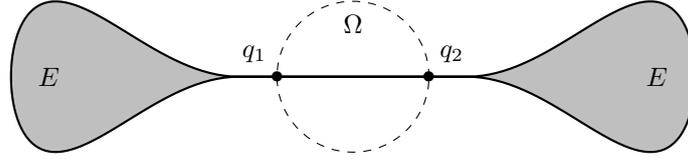


FIGURE 2.1. Exemple de Bellettini *et al.* - E en gris et Ω en tirets.

Comme $E \cap \Omega = \emptyset$, on a $\overline{\mathcal{F}}(E, \Omega) = 0$. Il est montré [13, Théorème 7.2] que

$$\overline{\mathcal{F}}(E, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega) = \overline{\mathcal{F}}(E) - 2\ell([q_1, q_2]),$$

où $\ell([q_1, q_2])$ est la longueur du segment $[q_1, q_2]$ de \mathbb{R}^2 . Ainsi, on obtient

$$\overline{\mathcal{F}}(E, \mathbb{R}^2) > \overline{\mathcal{F}}(E, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega) + \overline{\mathcal{F}}(E, \Omega).$$

Ceci est une contradiction avec le fait que $\overline{\mathcal{F}}(\cdot, \Omega)$ puisse s'écrire sous forme d'une intégrale sur Ω .

3. La méthode de champ de phase

Nous expliquons dans cette section la méthode que nous utilisons pour approcher le périmètre et l'énergie de Willmore afin de faire des simulations numériques. Le principe de la méthode de champ de phase est d'approcher la fonction indicatrice d'un ensemble par des fonctions plateaux régulières. Le but ensuite est d'avoir des énergies qui "capturent" le périmètre ou l'énergie de Willmore des ensembles sous-jacents à ces fonctions plateaux.

Considérons l'énergie, pour $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$,

$$P_\varepsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right) dx,$$

où W est un potentiel double puits, typiquement $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$.

Cette énergie est d'abord apparue en physique-chimie dans [110] (traduction de l'article original de van der Waals). Une fonctionnelle similaire est utilisée pour modéliser l'énergie d'interface liquide-gaz, le principe étant que la frontière entre le gaz et le liquide est diffuse, c'est-à-dire contient une proportion non négligeable de particules du liquide et de particules du gaz. Cette énergie a ensuite été reprise par Cahn et Hilliard [32] pour modéliser l'interface entre deux liquides non miscibles.

Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite de fonctions de $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, si

$$\sup_{\varepsilon > 0} P_\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty,$$

alors le terme $\frac{1}{\varepsilon}W(u_\varepsilon)$ force u_ε à valoir 0 ou 1. Le terme $\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u_\varepsilon|^2$, quant à lui, impose de la régularité à u_ε et charge uniquement l'interface de u_ε , c'est-à-dire la zone de transition entre 0 et 1 de u_ε . Intuitivement, la minimisation de P_ε va bien renvoyer une fonction plateau et compter la "taille" de l'interface. Une approche similaire existe pour l'énergie de Willmore et sera développée dans un second temps.

Le résultat formalisant le fait que P_ε approche le périmètre est un résultat de Γ -convergence. Dans la suite de cette section, nous expliquons la notion de Γ -convergence et nous donnons les résultats de Γ -convergence de ce type d'approximation vers le périmètre et l'énergie de Willmore. Nous renvoyons à [13, 18, 26, 41, 98] pour l'étude des modèles de champ de phase.

3.1. La Γ -convergence

L'idée de la Γ -convergence d'une suite d'énergies est d'approcher une énergie limite de sorte que les minimiseurs de la suite approchent ceux de l'énergie limite. Nous renvoyons à [22, 23] pour plus de lecture à propos de la Γ -convergence.

Soient (X, d) un espace métrique et $F_\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une famille de fonctionnelles.

Définition 2.11 (Γ -convergence). *On dit que $(F_\varepsilon)_\varepsilon$ Γ -converge vers une énergie limite $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

– (Γ – lim inf) : *pour tout $u \in X$, pour toute suite $u_\varepsilon \rightarrow u$, on a*

$$F(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) ;$$

– (Γ – lim sup) : *pour tout $u \in X$, il existe une suite $u_\varepsilon \rightarrow u$ telle que*

$$F(u) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

La propriété de Γ – lim inf est très similaire à la définition de la semi-continuité inférieure. On retrouve d'ailleurs cette propriété à la limite. La Γ – lim sup, quant à elle, interdit à F de "creuser" un écart trop important avec $(F_\varepsilon)_\varepsilon$.

Propriété 2.12 ([22, Proposition 1.28]). *Si F_ε Γ -converge vers une énergie limite F dans (X, d) , alors F est semi-continue inférieurement.*

L'autre propriété très importante dans un contexte de minimisation est la suivante.

Propriété 2.13 ([22, Théorème 1.21]). *Soient $(F_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite de fonctionnelles et u_ε un minimiseur de F_ε . Si $(F_\varepsilon)_\varepsilon$ Γ -converge vers une énergie limite F et si $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers une limite u , alors u est un minimiseur de F .*

3.2. Approximation du périmètre

Nous avons vu en introduction de la section que l'énergie approchant le périmètre est :

$$P_\varepsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right) dx.$$

La topologie sous-jacente est celle de la convergence L^1 des fonctions. Le résultat de convergence provient de [98, 99].

Théorème 2.14 ([98, Théorème 1]). *La suite $(P_\varepsilon)_\varepsilon$ Γ converge vers λP , où*

$$P(u) = \begin{cases} P(E) & \text{si } u = \mathbb{1}_E \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\lambda = \int_0^1 \sqrt{2W(s)} ds.$$

Ce résultat nous dit que, pour tout ensemble de périmètre fini E , il existe une suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de $W^{1,2}$ convergeant vers $\mathbb{1}_E$ en distance L^1 telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon(u_\varepsilon) = \lambda P(E).$$

Nous allons donner les grandes lignes de la démonstration de ce résultat. Cette preuve sera reprise dans le Chapitre 4 et elle donne explicitement la suite (u_ε) assurant la convergence vers le périmètre.

La preuve proposée par Modica et Mortola est divisée en deux étapes : la preuve de la $\Gamma - \lim \inf$ et celle de la $\Gamma - \lim \sup$. Nous présentons uniquement un schéma de preuve, nous ne donnons pas tous les arguments rigoureux et renvoyons à [98].

♣ *Preuve de la $\Gamma - \lim \inf$:* soient $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite de fonctions telle que

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^d),$$

et

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty.$$

On a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} W(u_\varepsilon) dx \leq \varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon),$$

et ainsi, par le Lemme de Fatou, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} W(u_\varepsilon) dx \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Comme $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans L^1 et W est continue, on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} W(u_\varepsilon) = W(u) \quad \text{presque partout.}$$

De plus,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0,$$

et ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^d} W(u) dx \leq 0.$$

Par ailleurs, W est strictement positive sauf en 0 et en 1 donc, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$u(x) \in \{0, 1\}.$$

Ainsi, il existe un ensemble borélien E tel que $u = \mathbb{1}_E$ presque partout. De surcroît, en utilisant l'inégalité

$$\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \geq |\nabla u_\varepsilon| \sqrt{2W(u_\varepsilon)},$$

et la formule de la co-aire dans BV (Théorème 1.39), on a

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_\varepsilon| \sqrt{2W(u_\varepsilon)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2W(s)} P(\{u_\varepsilon \geq s\}) ds. \end{aligned}$$

En utilisant encore une fois le Lemme de Fatou, on obtient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2W(s)} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}) ds.$$

En outre, comme $u_\varepsilon \rightarrow \mathbb{1}_E$ alors

$$\{u_\varepsilon \geq s\} \rightarrow E,$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, dans L^1 , pour $s \in]0, 1[$. Ainsi, on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}) \geq P(E).$$

Par conséquent, on obtient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \lambda P(E).$$

♣ *Preuve de la Γ – lim sup* : soit E un ensemble régulier de périmètre fini. On introduit le profil de champ de phase

$$(2) \quad q(s) = \frac{1}{2} \left(1 - \text{th}(s/2) \right),$$

et la suite de fonctions

$$u_\varepsilon(x) = q \left(\frac{1}{\varepsilon} d(x, E) \right),$$

où $d(x, E)$ est la distance signée de x à E . Le choix du profil q n'est pas anodin. En effet, q est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} q' &= -\sqrt{2W(q)} \\ q(0) &= 1/2. \end{cases}$$

Cela permet à u_ε de réaliser le cas d'égalité de

$$\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \geq |\nabla u_\varepsilon| \sqrt{2W(u_\varepsilon)}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_\varepsilon| \sqrt{2W(u_\varepsilon)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2W(s)} P(\{u_\varepsilon \geq s\}) ds. \end{aligned}$$

Comme on traite d'abord le cas régulier, on a

$$P(\{u_\varepsilon \geq s\}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} P(E),$$

pour $s \in]0, 1[$, et

$$P(\{u_\varepsilon \geq s\}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

pour $s < 0$ et pour $s > 1$. Par conséquent

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2W(s)} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}) ds = \lambda P(E).$$

Enfin, on utilise la densité des ensembles lisses, la semi-continuité du périmètre et la preuve de la Γ – lim inf précédente pour étendre ce résultat aux ensembles de périmètre fini (non nécessairement réguliers).

Le point important de cette preuve est le profil de champ de phase

$$u_\varepsilon(x) = q \left(\frac{1}{\varepsilon} d(x, E) \right),$$

que nous utilisons beaucoup dans le Chapitre 4.

3.3. Approximation de l'énergie de Willmore

En utilisant la Remarque 1.33, on peut voir que la courbure moyenne d'une hypersurface est reliée à la variation première de l'aire de celle-ci. Par conséquent, il est naturel de se demander si le flot gradient de P_ε nous donne une approximation de la courbure. Plus précisément, si $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est un flot gradient L^2 de P_ε alors u satisfait

$$\partial_t u = \varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W'(u).$$

Le terme de droite de l'égalité précédente apparaît donc comme un candidat à l'approximation de la courbure moyenne. Modulo une remise à l'échelle, on peut considérer l'approximation suivante de l'énergie de Willmore

$$\mathcal{W}_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W'(u) \right|^2 dx.$$

Il existe de nombreuses approximations de l'énergie de Willmore basées sur la méthode de champ de phase [13, 15, 28, 100, 103, 109, 117]. Dans le cadre de cette thèse, nous nous consacrons uniquement à l'approximation donnée par la formule ci-dessus. Cette formule a l'avantage d'être simple et intuitive. De plus, il a été montré [17, 103, 109] que $P_\varepsilon + \mathcal{W}_\varepsilon$ Γ -converge (en dimension 2 et 3, pour un ensemble limite régulier) vers $\lambda P + \lambda \mathcal{W}$.

3.4. Schémas numériques de minimisation

Nous introduisons maintenant la méthode que nous utilisons dans cette thèse afin de minimiser les énergies géométriques que sont le périmètre et l'énergie de Willmore. Afin de minimiser une énergie, nous utilisons une méthode de descente de gradient. Le principe est donc de résoudre

$$(3) \quad \begin{cases} \partial_t u &= -\nabla J_\varepsilon(u) \quad \text{sur } \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{cases}$$

où u_0 est une fonction initiale donnée et J_ε désigne soit P_ε , soit \mathcal{W}_ε . Nous renvoyons à [114] pour l'étude du flot du périmètre et à [28] pour celle concernant le flot de Willmore par approximation de champ de phase.

De nombreuses méthodes numériques ont été utilisées pour résoudre de telles équations. Par exemple des méthodes de différences finies [12, 42, 77] et des méthodes d'éléments finis [67, 68, 56]. D'un point de vue pratique, nous résolvons cette équation dans une boîte Q en espace avec des conditions périodiques au bord. Ceci nous permet de calculer la solution en utilisant une méthode spectrale de Fourier en espace (voir [39, 57]).

Plus précisément, nous utilisons la même technique que [54, 55], c'est-à-dire nous séparons l'énergie en deux termes $-J = J_L + J_N$ où J_L est une énergie quadratique et J_N un reste. Ainsi, le flot gradient se décompose en deux contributions :

$$-\nabla J(u) = L(u) + N(u),$$

où $L(u)$ est linéaire en u . Le choix de la séparation de J en deux énergies $J_L + J_N$ n'est pas trivial. Pour le périmètre, nous reprenons la séparation de [55, Section 5.2] et pour l'énergie de Willmore, nous utilisons la séparation de [54]. Dans les deux cas, la partie linéaire permet de contrôler la partie non linéaire et le schéma qui en résulte est inconditionnellement stable.

3.4.1. Discrétisation en temps

En utilisant la formule de Duhamel, l'équation (3) s'intègre en

$$u(t, \cdot) = e^{tL} u_0 + e^{tL} \int_0^t e^{-sL} N(u(s, \cdot)) ds,$$

où e^{tL} est un opérateur linéaire. En discrétisant la fonction u en temps, $u_n = u(t_n, \cdot)$ où $t_n = n\delta t$, on peut calculer de proche en proche une approximation de la solution en

choisissant $u_{n+1} = v(\delta t, \cdot)$ où v est solution de

$$\begin{cases} \partial_t v &= L(v) + N(v) \quad \text{sur } \mathbb{R}^d \\ v(0, x) &= u_n(x). \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$u_{n+1} = e^{\delta t L} u_n + e^{\delta t L} \int_0^{\delta t} e^{-sL} N(v(s, \cdot)) ds.$$

L'idée est maintenant de calculer numériquement l'intégrale avec une méthode de Runge-Kutta. On peut déduire ainsi des schémas numériques à tout ordre en temps.

♣ *Ordre 1* : en approchant $N(v(s, \cdot))$ par $N(u_n)$ dans l'intégrale précédente, on a

$$\int_0^{\delta t} e^{-sL} N(v(s, \cdot)) ds \approx \int_0^{\delta t} e^{-sL} N(u_n) ds = -L^{-1}(e^{-\delta t L} - Id)N(u_n).$$

Ainsi, on obtient

$$u_{n+1} = e^{\delta t L} u_n + L^{-1}(e^{\delta t L} - Id)N(u_n).$$

Dans le cadre de cette thèse, nous utilisons l'ordre 2.

♣ *Ordre 2* : en approchant $N(v(s, \cdot))$ par $N(u_n) + \frac{s}{\delta t}(N(u_{n+1}) - N(u_n))$ dans l'intégrale précédente, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta t} e^{-sL} N(v(s, \cdot)) ds &\approx \int_0^{\delta t} e^{-sL} \left(N(u_n) + \frac{s}{\delta t}(N(u_{n+1}) - N(u_n)) \right) ds \\ &= -L^{-1}(e^{-\delta t L} - Id)N(u_n) - \frac{1}{\delta t} L^{-2} \left(\delta t L e^{-\delta t L} + e^{-\delta t L} - Id \right) (N(u_{n+1}) - N(u_n)). \end{aligned}$$

De plus, en approchant $N(u_{n+1})$ par $N(y_n)$ où

$$y_n = e^{\delta t L} u_n + e^{\delta t L} \int_0^{\delta t} e^{-sL} N(v(s, \cdot)) ds \approx e^{\delta t L} u_n + L^{-1}(e^{\delta t L} - Id)N(u_n),$$

on obtient :

$$u_{n+1} = y_n + \frac{1}{\delta t} L^{-2} \left(e^{\delta t L} - (Id + \delta t L) \right) (N(y_n) - N(u_n)).$$

3.4.2. Discrétisation en espace

Concernant la discrétisation des opérateurs L et $e^{\delta t L}$ précédents, nous allons passer en Fourier.

♣ *Pour le périmètre* : nous avons

$$\partial_t v = \varepsilon \Delta v - \frac{1}{\varepsilon} W'(v).$$

Nous utilisons la décomposition $-\nabla J = L + N$ suivante :

$$\partial_t v = \underbrace{\varepsilon \Delta v - \frac{1}{\varepsilon} v}_{L(v)} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} v - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(v)}_{N(v)}.$$

Nous calculons dans la boîte $Q = [0, 1]^d$ avec des conditions périodiques au bord. Nous notons la transformée de Fourier par

$$\begin{aligned} f &: L^2(\mathbb{R}^d) &\rightarrow (\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})^d \\ v &\mapsto (\hat{v}_k)_k, \end{aligned}$$

et la transformée en série de Fourier inverse par

$$\begin{aligned} f^{-1} &: (\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})^d &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \\ (v_k)_k &\mapsto \left(x \mapsto \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})^d} v_k e^{2i\pi k \cdot x} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons exprimer les opérateurs $L = \varepsilon\Delta + \frac{1}{\varepsilon}Id$ et $e^{L\delta t}$. Soit

$$v(t, x) = \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})^d} \hat{v}_k(t) e^{2i\pi k \cdot x}.$$

En décomposant sur la base de Fourier, la fonction v est solution de

$$\begin{cases} \partial_t v &= \varepsilon\Delta v + \frac{1}{\varepsilon}v \quad \text{sur } \mathbb{R}^d \\ v(0, x) &= v_0(x), \end{cases}$$

dès que, pour tout $k \in (\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})^d$,

$$\begin{cases} \hat{v}'_k(t) &= (-4\pi^2|k|^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}) \hat{v}_k(t) \\ \hat{v}_k(0) &= v_k, \end{cases}$$

où $(v_k)_k$ égale $f(v_0)$. On obtient donc

$$\hat{v}_k(t) = v_k \exp\left(\left(-4\pi^2|k|^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)t\right).$$

Par conséquent, on a

$$e^{L\delta t}v_0 = f^{-1}\left(a_k f(v_0)\right),$$

où a_k égale $\exp(-4\pi^2|k|^2\varepsilon\delta t + \frac{\delta t}{\varepsilon})$. Concernant les puissances de L , on a

$$L^p v_0 = \left(\varepsilon\Delta + \frac{1}{\varepsilon}Id\right)^p v_0 = \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})^d} v_k \left(-4\pi^2|k|^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)^p e^{2i\pi k \cdot x} = f^{-1}\left(b_k^p f(v_0)\right),$$

où $p \in \mathbb{Z}$ et $b_k = -4\pi^2|k|^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}$.

Dans les simulations, on ne garde qu'un nombre fini de modes de Fourier. Autrement dit, soit $m \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathcal{P}_m = \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, |k_j| \leq m\}.$$

On discrétise v_0 en espace :

$$v_0 \approx (v_0)_j, \quad \text{avec } j \in \mathcal{P}_m,$$

et, grâce à l'algorithme de transformée de Fourier rapide *fft* (voir [45]), on calcule

$$(\hat{v}_k)_k = \text{fft}\left((v_0)_j\right),$$

où $k \in \mathcal{P}_m$. On obtient

$$e^{L\delta t}v_0 \approx \text{fft}^{-1}\left(A \odot \text{fft}\left((v_0)_j\right)\right),$$

et

$$L^p v_0 \approx \text{fft}^{-1}\left(B_p \odot \text{fft}\left((v_0)_j\right)\right),$$

où A et B_p sont les d -matrices dont les coefficients sont $(a_k)_{k \in \mathcal{P}_m}$ et $(b_k^p)_{k \in \mathcal{P}_m}$ respectivement et \odot est le produit de Hadamard (ou terme à terme) des matrices.

♣ *Pour l'énergie de Willmore* : nous avons

$$\partial_t v = -\varepsilon\Delta \left(\Delta v - \frac{1}{\varepsilon^2}W'(v)\right) + \frac{1}{\varepsilon}W''(v) \left(\Delta v - \frac{1}{\varepsilon^2}W'(v)\right).$$

Nous utilisons la décomposition suivante : $\partial_t v = L(v) + N(v)$, où

$$L(v) = -\varepsilon\Delta^2 v + \frac{4}{\varepsilon}\Delta v - \frac{4}{\varepsilon^3}v,$$

et

$$N(v) = \frac{1}{\varepsilon}\Delta(W'(v)) + \frac{1}{\varepsilon}W''(v)\Delta v - \frac{1}{\varepsilon^3}W''(v)W'(v) - \frac{4}{\varepsilon}\Delta v + \frac{4}{\varepsilon^3}v.$$

Comme précédemment, en utilisant la décomposition de Fourier, on a

$$e^{L\delta t}v = f^{-1} \left(\exp \left(16\pi^4 \varepsilon |k|^4 \delta t - \frac{4\pi^2 |k|^2}{\varepsilon} \delta t + \frac{4}{\varepsilon^3} \delta t \right) f(v) \right),$$

$$L^p v = f^{-1} \left(\left(16\pi^4 \varepsilon |k|^4 - \frac{4\pi^2 |k|^2}{\varepsilon} + \frac{4}{\varepsilon^3} \right)^p f(v) \right),$$

et

$$\begin{aligned} N(v) = \frac{1}{\varepsilon} f^{-1} \left(-4\pi^2 |k|^2 f(W'(v)) \right) + \frac{1}{\varepsilon} W''(v) f^{-1} \left(-4\pi^2 |k|^2 f(v) \right) \\ - \frac{1}{\varepsilon^3} W''(v) W'(v) - \frac{4}{\varepsilon} f^{-1} \left(-4\pi^2 |k|^2 f(v) \right) + \frac{4}{\varepsilon^3} v. \end{aligned}$$

3.4.3. Algorithmes de calcul des flots gradients

Nous en déduisons quatre algorithmes pour calculer le flot minimisant du périmètre et de l'énergie de Willmore. Nous rappelons les coefficients des d -matrices (pour $k \in \mathcal{P}_m$) :

$$(A)_k = \exp \left(-4\pi^2 |k|^2 \varepsilon \delta t + \frac{\delta t}{\varepsilon} \right), \quad (B_p)_k = \left(-4\pi^2 |k|^2 \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right)^p,$$

$$(C)_k = -4\pi^2 |k|^2, \quad (D)_k = \exp \left(16\pi^4 \varepsilon |k|^4 \delta t - \frac{4\pi^2 |k|^2}{\varepsilon} \delta t + \frac{4}{\varepsilon^3} \delta t \right),$$

et

$$(E_p)_k = \left(16\pi^4 \varepsilon |k|^4 - \frac{4\pi^2 |k|^2}{\varepsilon} + \frac{4}{\varepsilon^3} \right)^p.$$

Nous notons $\mathbf{1}$ la d -matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Concernant le potentiel, nous avons

$$W(s) = \frac{1}{2} s^2 (1-s)^2, \quad W'(s) = s(1-s)(1-2s),$$

et

$$W''(s) = 6s^2 - 6s + 1.$$

Algorithme 1 - flot périmètre - ordre 1

Données : $u_0, T_{max}, \varepsilon, \delta t$

$u := u_0$

pour $t = 1$ **à** T_{max} **faire**

$$u := \text{fft}^{-1} \left(A \odot \text{fft}(u) + B_{-1} \odot (A - \mathbf{1}) \odot \text{fft} \left(\frac{1}{\varepsilon} u - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u) \right) \right)$$

fin pour

Résultat : u

Algorithme 2 - flot périmètre - ordre 2

Données : $u_0, T_{max}, \varepsilon, \delta t$

$u := u_0$

pour $t = 1$ **à** T_{max} **faire**

$$y := \text{fft}^{-1} \left(A \odot \text{fft}(u) + B_{-1} \odot (A - \mathbf{1}) \odot \text{fft} \left(\frac{1}{\varepsilon} u - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u) \right) \right)$$

$$\text{dif} := \left(\frac{1}{\varepsilon} y - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(y) \right) - \left(\frac{1}{\varepsilon} u - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u) \right)$$

$$u := y + \text{fft}^{-1} \left(\frac{1}{\delta t} B_{-2} \odot (A - (\mathbf{1} + \delta t B_1)) \odot \text{fft}(\text{dif}) \right)$$

fin pour

Résultat : u

Algorithme 3 - flot Willmore - ordre 1

Données : $u_0, T_{max}, \varepsilon, \delta t$

$u := u_0$

pour $t = 1$ **à** T_{max} **faire**

$$nl := \frac{1}{\varepsilon} \text{fft}^{-1} \left(C \odot (\text{fft}(W'(u) - 4u)) \right) + \frac{1}{\varepsilon} W''(u) \odot \left(\text{fft}^{-1}(C \odot \text{fft}(u)) \right) + \frac{4}{\varepsilon^3} u$$

$$u := \text{fft}^{-1} \left(D \odot \text{fft}(u) + E_{-1} \odot (D - \mathbf{1}) \odot \text{fft}(nl) \right)$$

fin pour

Résultat : u

Algorithme 4 - flot Willmore - ordre 2

Données : $u_0, T_{max}, \varepsilon, \delta t$

$u := u_0$

pour $t = 1$ **à** T_{max} **faire**

$$nl_1 := \frac{1}{\varepsilon} \text{fft}^{-1} \left(C \odot (\text{fft}(W'(u) - 4u)) \right) + \frac{1}{\varepsilon} W''(u) \odot \left(\text{fft}^{-1}(C \odot \text{fft}(u)) \right) + \frac{4}{\varepsilon^3} u$$

$$y := \text{fft}^{-1} \left(D \odot \text{fft}(u) + E_{-1} \odot (D - \mathbf{1}) \odot \text{fft}(nl_1) \right)$$

$$nl_2 := \frac{1}{\varepsilon} \text{fft}^{-1} \left(C \odot (\text{fft}(W'(y) - 4y)) \right) + \frac{1}{\varepsilon} W''(y) \odot \left(\text{fft}^{-1}(C \odot \text{fft}(y)) \right) + \frac{4}{\varepsilon^3} y$$

$$u := y + \text{fft}^{-1} \left(\frac{1}{\delta t} E_{-2} \odot (D - (\mathbf{1} + \delta t E_1)) \odot \text{fft}(nl_2 - nl_1) \right)$$

fin pour

Résultat : u

Nous utilisons l'Algorithme 2 pour calculer le flot du périmètre (Chapitre 4 Section 4) et l'Algorithme 4 pour calculer le flot de Willmore (Chapitre 4 Sections 4 et 5 - Chapitre 5 Section 8).

Deuxième partie

Relaxation et minimisation d'énergies géométriques en présence de contraintes

Relaxation du périmètre dans le plan avec contrainte de connexité

Le premier problème d'optimisation que nous considérons est l'étude de l'enveloppe semi-continue inférieurement du périmètre dans le plan avec des contraintes de connexité. L'idée est d'approcher un ensemble E du plan en norme L^1 par des ensembles connexes (ou simplement connexes) en payant le moins de périmètre possible. Considérons par exemple deux boules à distance non nulle l'une de l'autre. Quelle que soit la suite approchante d'ensembles connexes, il y aura toujours un filament à la limite qui joindra les deux boules. Ce filament ayant une longueur non nulle, il aura une contribution non nulle dans le périmètre limite. Cette contribution peut être rendue minimale en prenant le segment de longueur minimale qui joint les boules comme filament mais elle ne sera pas nulle. Nous allons caractériser cette contribution minimale.

Le problème se formalise ainsi : considérons les deux énergies suivantes définies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (les ensembles mesurables de \mathbb{R}^d)

$$P_C(E) = \begin{cases} P(E) & \text{si } E \text{ est régulier et connexe} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$P_S(E) = \begin{cases} P(E) & \text{si } E \text{ est régulier et simplement connexe} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

ainsi que leur relaxée dans L^1

$$\overline{P}_C(E) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_C(E_n) \mid E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1 \right\},$$

et

$$\overline{P}_S(E) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_S(E_n) \mid E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1 \right\}.$$

Pour $d = 2$, nous allons identifier une expression pour chacune de ces énergies relaxées. Pour cela, nous utilisons des arbres de Steiner. Pour un ensemble régulier E on considère l'arbre de Steiner de ses composantes connexes, c'est-à-dire l'ensemble unidimensionnel qui les connecte avec une longueur minimale, qu'on note $St(E)$. Nous allons montrer (Théorème 3.33) que

$$\overline{P}_C(E) = P(E) + 2St(E),$$

et

$$\overline{P}_S(E) = P(E) + 2St(\partial E),$$

où E est un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . Le facteur 2 s'explique par le fait que lorsqu'une suite $(E_n)_n$ d'ensembles connexes converge vers E , le filament de connexité résiduel est une partie fantôme, c'est-à-dire que deux portions du bord de E_n se sont rapprochées pour se coller à la limite. Chacune de ces portions charge une fois la longueur du filament.

La difficulté principale de cette étude est un problème de topologie. En effet, la topologie naturelle est celle de la norme L^1 , cependant la connexité est une affaire de topologie classique. Autrement dit, ajouter une courbe de longueur finie à un ensemble peut changer sa connexité mais ne changera pas sa représentation volumique.

Ainsi, nous utilisons une notion de connexité cohérente avec la topologie L^1 (Section 1.1). Nous rappelons aussi la définition et les propriétés classiques des arbres de Steiner (Section 1.2) avant d'énoncer et de démontrer (Section 3) le résultat de ce chapitre.

1. Notions et résultats préliminaires

1.1. Connexité des ensembles de périmètre fini

Nous allons définir les notions d'ensemble indécomposable et d'ensemble simple qui généralisent, dans le plan, les notions de connexité et de simple connexité à la topologie L^1 . Nous renvoyons à [4] pour les preuves des résultats de cette section.

Définition 3.1 (Ensemble indécomposable). *Soit E un ensemble de périmètre fini de \mathbb{R}^d , on dit que E est décomposable s'il existe deux ensembles mesurables A et B non négligeables tels que*

$$E = A \cup B \quad \text{et} \quad P(E) = P(A) + P(B).$$

On dit que E est indécomposable s'il n'est pas décomposable.

Remarque 3.2 ([4, Proposition 2 Section 4]). Si E est un ouvert connexe vérifiant

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial E) < +\infty$$

alors est indécomposable.

À partir des ensembles indécomposables, on peut décomposer n'importe quel ensemble de périmètre fini en sous-ensembles "connexes". Nous rappelons que E^t est l'ensemble des points de densité t de E et que $\partial^* E$, le bord essentiel de E , est défini par $\partial^* E = \mathbb{R}^d \setminus (E^1 \cup E^0)$. On donne un moyen de construire des ensembles indécomposables assez généraux.

Théorème 3.3 ([4, Théorème 1 Section 4]). *Soit E un ensemble de périmètre fini dans \mathbb{R}^d . Il existe une unique famille d'ensembles de périmètre fini $(E_i)_{i \in I}$, où I est au plus dénombrable, telle que*

- $|E_i| > 0$;
- $P(E) = \sum_{i \in I} P(E_i)$;
- $\mathcal{H}^{d-1} \left(E^1 \setminus \bigcup_{i \in I} E_i^1 \right) = 0$;
- (E_i) est indécomposable et maximal c'est-à-dire que pour tout ensemble indécomposable F inclus dans E , il existe $i \in I$ tel que $F = E_i$.

À partir de cette décomposition, on peut définir les composantes indécomposables d'un ensemble.

Définition 3.4 (Composantes indécomposables). *Avec les notations du théorème précédent, les E_i sont appelés les composantes indécomposables de E et pour \mathcal{H}^{d-1} -presque tout $x \in E^1$, il existe une unique composante indécomposable contenant x .*

Remarque 3.5 ([4, Théorème 2 Section 4]). Si E est un ouvert vérifiant

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial E) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E)$$

alors ses composantes indécomposables coïncident avec ses composantes connexes.

Proposition 3.6 ([4, Proposition 5 Section 4]).

- Si E_1 et E_2 sont deux ensembles indécomposables et si $|E_1 \cap E_2| > 0$ ou si $\mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E_1 \cap \partial^* E_2) > 0$ alors $E_1 \cup E_2$ est indécomposable.
- Si (E_k) est une suite croissante d'ensembles indécomposables ayant un périmètre uniformément borné alors $\bigcup E_k$ est indécomposable.

Définition 3.7 (Notion de simple connexité pour la mesure). Soit E un ensemble de périmètre fini de \mathbb{R}^d .

- Si E est indécomposable alors un trou de E est une composante indécomposable de $\mathbb{R}^d \setminus E$ ayant une mesure finie.
- Si E est indécomposable alors la saturation de E , $\text{sat}(E)$, est l'union de E et de ses trous.
- Si E est décomposable alors sa saturation est donnée par l'union des saturations de ses M -composantes connexes E_i

$$\text{sat}(E) = \bigcup_{i \in I} \text{sat}(E_i).$$

- E est dit saturé si $E = \text{sat}(E)$.
- E est dit simple s'il est saturé et indécomposable.

Remarquons que seul \mathbb{R}^2 est à la fois simple et de mesure infinie. Par ailleurs, en dimension $d > 2$, ce n'est pas la simple connexité qui est généralisée par la simplicité mais plutôt les ensembles contractiles, c'est-à-dire les images d'une boule par homéomorphisme. Comme nous travaillons en dimension 2, nous garderons cet abus de langage car dans \mathbb{R}^2 , un ensemble homéomorphe à une boule est simplement connexe (et vice-versa).

Propriété 3.8 ([4, Proposition 6 et Théorème 3 Section 5]). Si E est un ensemble de périmètre fini alors $\text{sat}(\text{sat}(E)) = \text{sat}(E)$ et $P(E) \geq P(\text{sat}(E))$. De plus, si E est indécomposable alors $\text{sat}(E)$ est simple.

Dans la suite, nous allons beaucoup utiliser les notions d'ensemble indécomposable et d'ensemble simple et, afin de définir et d'utiliser proprement les arbres de Steiner, nous avons besoin d'avoir plus d'informations sur la décomposition du bord essentiel de E .

Remarque 3.9 ([4, Remarque 1 Section 4]). Soit E un ensemble de périmètre fini dans \mathbb{R}^d . Si $|E| = +\infty$ alors il existe une unique composante indécomposable E_i telle que $|E_i| = +\infty$. Par conséquent, si $|E| < \infty$ on appelle extérieur de E la composante indécomposable de $\mathbb{R}^d \setminus E$ ayant un volume infini et on la note $\text{ext}(E)$.

Définition 3.10 (Bord de Jordan). Un ensemble J de \mathbb{R}^d est un bord de Jordan s'il existe un ensemble simple E tel que $J = \partial^* E \bmod \mathcal{H}^{d-1}$. Un tel ensemble est nécessairement unique (à un ensemble de mesure \mathcal{H}^{d-1} -nulle près), et est appelé l'intérieur de J , noté $\text{int}(J)$.

Théorème 3.11 (Théorème de décomposition - [4, Théorème 4 Section 6]). *Soit E un ensemble de périmètre fini de \mathbb{R}^d . Alors il existe une décomposition (mod \mathcal{H}^{d-1}) de ∂^*E en bords de Jordan*

$$\{J_i^+, J_k^- \mid i, k \in \mathbb{N}\}$$

avec éventuellement $\mathcal{H}^{d-1}(J_j^\pm) = 0$ c'est-à-dire $\text{int}(J_j^\pm) = \emptyset$ ou $\mathbb{R}^d \pmod{\mathcal{H}^{d-1}}$ telle que

- $\text{int}(J_i^+)$ et $\text{int}(J_j^+)$ sont soit disjoints, soit l'un est sous-ensemble de l'autre ;
- $\text{int}(J_k^-)$ et $\text{int}(J_j^-)$ sont soit disjoints, soit l'un est sous-ensemble de l'autre ;
- pour tout k il existe i tel que $\text{int}(J_k^-) \subset \text{int}(J_i^+)$;
- si $\text{int}(J_j^+) \subset \text{int}(J_i^+)$ pour $i \neq j$ alors il existe k tel que $\text{int}(J_j^+) \subset \text{int}(J_k^-) \subset \text{int}(J_i^+)$;
- si $\text{int}(J_j^-) \subset \text{int}(J_k^-)$ pour $j \neq k$ alors il existe i tel que $\text{int}(J_j^-) \subset \text{int}(J_i^+) \subset \text{int}(J_k^-)$;
- $P(E) = \sum_i \mathcal{H}^{d-1}(J_i^+) + \sum_k \mathcal{H}^{d-1}(J_k^-)$;
- pour tout i , on note $L_i = \{k \mid \text{int}(J_k^-) \subset \text{int}(J_i^+)\}$ et

$$Y_i = \text{int}(J_i^+) \setminus \bigcup_{k \in L_i} \text{int}(J_k^-),$$

alors $(Y_i)_i$ est une famille d'ensembles disjoints deux à deux, indécomposables et $E = \bigcup_i Y_i$ (à un ensemble négligeable près).

On se concentre maintenant sur le cas de \mathbb{R}^2 dans lequel un bord de Jordan peut être représenté par une courbe de Jordan lipschitzienne.

Théorème 3.12 ([4, Théorème 7 Section 8]). *Soit E un ensemble simple de \mathbb{R}^2 tel que $0 < |E| < +\infty$. Alors il existe une courbe de Jordan Γ telle que $\partial^*E = \Gamma \pmod{\mathcal{H}^1}$. De plus, Γ admet une paramétrisation lipschitzienne et*

$$P(E) = \mathcal{H}^1(\Gamma).$$

On n'utilisera pas toute la portée du théorème de décomposition (Théorème 3.11), on souligne les éléments utiles pour notre étude avec le corollaire suivant.

Corollaire 3.13 ([4, Corollaire 1 Section 8]). *Si E est de périmètre fini dans \mathbb{R}^2 alors ∂^*E se décompose en une famille de courbes de Jordan lipschitziennes. En outre, si E est simple (et différent de \mathbb{R}^2) alors cette famille se réduit à une seule courbe.*

Remarque 3.14. Soit E un ensemble simple de \mathbb{R}^2 tel que $|\mathbb{R}^2 \setminus E| > 0$ et γ une courbe de Jordan recouvrant son bord essentiel. Si $x, y \in E^1$ alors γ entoure à la fois x et y . Par conséquent $\mathcal{H}^1(\gamma) \geq 2|x - y|$. Donc

$$P(E) \geq 2 \text{diam}(E^1).$$

On a le même résultat lorsque E est indécomposable et $|E| < +\infty$. En effet, dans ce cas $\text{sat}(E)$ est de mesure finie, $E^1 \subset \text{sat}(E)^1$ et $P(\text{sat}(E)) \leq P(E)$ donc on peut utiliser le cas précédent sur $\text{sat}(E)$ qui est simple.

1.1.1. Topologie classique versus topologie de la mesure

Nous en avons déjà parler précédemment, la topologie classique et celle de la mesure ne s'accordent pas très bien. Cependant il existe des liens forts lorsqu'on suppose que

$$\partial E = \partial^* E \quad \text{mod } \mathcal{H}^1.$$

Plus exactement, les ouverts et les fermés des deux topologies se correspondent, non plus aux ensembles \mathcal{H}^2 -négligeable près, mais aux ensembles \mathcal{H}^1 -négligeable près. Nous rappelons que nous notons $\overset{\circ}{E}$ l'intérieur et \overline{E} la fermeture de E pour la topologie classique.

Lemme 3.15. *Si E est un ensemble de périmètre fini tel que $\partial E = \partial^* E \quad \text{mod } \mathcal{H}^1$ alors*

$$E^1 = \overset{\circ}{E} \quad \text{mod } \mathcal{H}^1 \quad \text{et} \quad E^0 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{E} \quad \text{mod } \mathcal{H}^1.$$

Preuve.

Il est facile de voir que $\overset{\circ}{E} \subset E^1$ car si $x \in \overset{\circ}{E}$ alors pour $r > 0$ assez petit $B(x, r) = B(x, r) \cap E$ et donc la densité de E en x est égale à 1. Par ailleurs, une conséquence directe de la définition de E^1 est $E^1 \subset \overline{E}$. Ainsi si $x \in E^1$ et $x \notin \overset{\circ}{E}$ alors $x \notin \partial^* E$ et $x \in \partial E$ ce qui est possible uniquement sur un ensemble \mathcal{H}^1 -négligeable. Donc $E^1 = \overset{\circ}{E} \quad \text{mod } \mathcal{H}^1$. On prouve de la même manière que $E^0 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{E} \quad \text{mod } \mathcal{H}^1$. \square

Par conséquent, $P(E) = P(\overset{\circ}{E}) = P(\overline{E}) = \mathcal{H}^1(\partial^* E) = \mathcal{H}^1(\partial E)$.

Définition 3.16 (Borne essentielle). *Soit E un ensemble mesurable, on dit que E est essentiellement borné s'il existe une boule $B(x, R)$ telle que*

$$\left| E \setminus B(x, R) \right| = 0$$

c'est-à-dire que E^1 est borné. De même, on dit qu'une suite d'ensembles $(E_n)_n$ est uniformément essentiellement bornée s'il existe une boule $B(x, R)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\left| E_n \setminus B(x, R) \right| = 0.$$

La proposition suivante porte sur le bord des ensembles E , E^1 et E^0 dans les cas favorables. Elle est à rapprocher de [91, Remarque 15.3] où il est montré que $\partial E = \overline{\partial^* E}$.

Proposition 3.17. *Soit E un ensemble de périmètre fini tel que $E = E^1$. Alors*

$$\partial E = \partial E^1 = \partial E^0$$

où ∂ est le bord topologique classique.

Preuve.

La première égalité est triviale puisque $E = E^1$. On montre la seconde par double inclusion. Soit $x \in \partial E^0$. Comme $\mathbb{R}^d = E^1 \cup \partial^* E \cup E^0$ est une partition, il existe une suite $(x_n)_n$ de $\partial^* E \cup E^1$ convergant vers x . $\partial^* E \subset \partial E$ et $E^1 = E$ donc il existe une suite $(x_n^k)_k$ de E convergant vers x_n lorsque $k \rightarrow +\infty$. En utilisant une extraction, on peut voir qu'il existe une suite $(x_n^{kn})_n$ de E convergant vers x . Par conséquent $x \in \overline{E}$. De plus $E^0 \subset \mathbb{R}^d \setminus E$ donc $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{E}$ ainsi $x \in \partial E$. Ceci montre que $\partial E^0 \subset \partial E$.

Pour l'autre inclusion, soit $x \in \partial E = \partial E^1$. Nous allons montrer par contradiction que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap E^0 \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap E^0 = \emptyset$.

Ainsi

$$B(x, \varepsilon) = (E^1 \cup \partial^* E) \cap B(x, \varepsilon)$$

donc

$$|E \cap B(x, \varepsilon)| = |B(x, \varepsilon)|$$

puisque $|\partial^* E| = 0$. Pour tout $y \in B(x, \varepsilon)$ et tout $\delta > 0$ suffisamment petit pour satisfaire $B(y, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$, on a

$$|E \cap B(y, \delta)| = |B(y, \delta)|.$$

En effet, si $|E \cap B(y, \delta)| < |B(y, \delta)|$ alors en le sommant avec l'inégalité

$$\left| E \cap \left(B(x, \varepsilon) \setminus B(y, \delta) \right) \right| \leq |B(x, \varepsilon) \setminus B(y, \delta)|$$

on obtient

$$|E \cap B(x, \varepsilon)| < |B(x, \varepsilon)|$$

ce qui est impossible. Par conséquent $y \in E^1$ et $B(x, \varepsilon) \subset E^1$. Ceci ne peut pas arriver car $x \in \partial E^1$. Donc $x \in \overline{E^0}$ et, comme x est la limite d'une suite de points de E^1 qui n'appartiennent pas à E^0 , alors $x \in \partial E^0$. Ceci montre que $\partial E \subset \partial E^0$. \square

1.1.2. Approximation par l'intérieur

On rappelle le résultat de [113] qui nous permet d'approcher un ensemble de périmètre fini E par une suite d'ensembles réguliers depuis l'intérieur de E . Ce résultat nous sera très utile dans la suite.

Théorème 3.18 ([113, Théorème 1.1]). *Soit Y un ouvert borné de périmètre fini dans \mathbb{R}^d tel que $P(Y) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial Y)$. Alors, pour tout $\delta > 0$ il existe un ensemble lisse Y_δ tel que*

- $Y_\delta \subset Y$;
- $Y \setminus Y_\delta \subset \mathcal{N}_\delta(\partial Y) \cap \mathcal{N}_\delta(\partial Y_\delta)$;
- $P(Y_\delta) \leq P(Y) + \delta$;

où $\mathcal{N}_\delta(A)$ est le voisinage tubulaire $\{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, A) < \delta\}$.

1.2. Le problème de Steiner

Dans cette partie, nous rappelons des résultats classiques à propos des arbres de Steiner dans \mathbb{R}^2 .

Définition 3.19 (Problème de Steiner). *Soit K un compact de \mathbb{R}^2 . On appelle problème de Steiner le problème d'optimisation suivant*

$$(4) \quad \sigma(K) = \min\{\mathcal{H}^1(S) \mid K \cup S \text{ est connexe}\}.$$

La topologie naturelle pour attaquer ce genre de problème est celle de Hausdorff associée aux compacts.

Définition 3.20 (Distance de Hausdorff). *Soit K_1 et K_2 deux compacts, on définit la distance de Hausdorff par*

$$d(K_1, K_2) = \max \left(\sup_{x_1 \in K_1} \inf_{x_2 \in K_2} |x_1 - x_2|, \sup_{x_2 \in K_2} \inf_{x_1 \in K_1} |x_1 - x_2| \right).$$

L'existence de solutions au problème de Steiner (Problème (4)) est hautement reliée au Théorème de Golab.

Théorème 3.21 (Théorème de Golab - [64, Théorème 3.18]). *Si $(K_n)_n$ est une suite de compacts connexes \mathbb{R}^2 convergeant vers un compact K pour la distance de Hausdorff alors K est connexe et*

$$\mathcal{H}^1(K) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^1(K_n).$$

Théorème 3.22 ([108, Théorème 4.1]). *Le problème de Steiner (Problème (4)) admet une solution, c'est-à-dire que pour tout compact K il existe un ensemble S_0 tel que $K \cup S_0$ est connexe et*

$$\mathcal{H}^1(S_0) = \min\{\mathcal{H}^1(S) \mid K \cup S \text{ est connexe}\}.$$

Définition 3.23 (Arbres et feuilles). *Dans \mathbb{R}^2 ,*

- *on dit que S est un arbre si S est un graphe non orienté (V, A) (où V représente l'ensemble des sommets du graphe et A l'ensemble des arêtes) avec A composé de segments dont l'intersection deux à deux est incluse dans V ;*
- *le degré d'un sommet v est le nombre d'arêtes partant de v (éventuellement égal à $+\infty$) ;*
- *un sommet de degré 1 est appelé une feuille ;*
- *un sommet de degré strictement supérieur à 1 est appelé un branchement ;*
- *un sommet de degré 3 est appelé une jonction triple ;*
- *on dit que S est fini si V est fini (c'est-à-dire que S a un nombre fini de composantes connexes et de branchements) ;*
- *on appelle angle entre deux arêtes incidentes à un même sommet l'angle dans $[0, \pi]$ entre les deux segments définissant les arêtes.*

On résume les propriétés des arbres de Steiner obtenus dans [108].

Théorème 3.24 ([108, Théorèmes 5.1, 7.6 et 7.3]). *Soit K un compact et S une solution du problème de Steiner (Problème (4)) telle que $\mathcal{H}^1(S) < +\infty$, alors*

- *$K \cup S$ est compact ;*
- *$S \setminus K$ a au plus un nombre dénombrable de composantes connexes et chacune a une longueur strictement positive ;*
- *S ne contient pas de boucle ;*
- *la fermeture (topologique) de chaque composante connexe de S est un arbre dont les feuilles appartiennent à K , avec au plus une feuille par composante connexe de K , chaque branchement est de degré fini et le nombre de branchements est au plus dénombrable ;*
- *pour presque tout $\varepsilon > 0$, $S \setminus \{x : d(x, K) < \varepsilon\}$ est un arbre fini ;*
- *si K est fini alors S est fini et ses sommets sont soit un point de K , soit une jonction triple.*

On en déduit le corollaire suivant, spécifique à \mathbb{R}^2 .

Corollaire 3.25. *Soit K un compact de \mathbb{R}^2 , S une solution du problème de Steiner (Problème (4)) telle que $\mathcal{H}^1(S) < +\infty$ et v un sommet de S . Le degré de v est au plus 3 et*

- *soit $v \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ et son degré est égal à 3, soit $v \in \partial K$;*
- *si la composante connexe K contenant v n'est pas réduite à $\{v\}$ alors le degré de v est égal à 1 ou 2.*

Dans tous les cas, l'angle entre les arêtes est supérieur ou égal à $2\pi/3$ (c'est-à-dire égal à $2\pi/3$ si le degré est 3).

Preuve.

Si $v \notin K$ alors il existe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $v \in S \setminus \{x \mid d(x, K) < \varepsilon\}$ donc la composante connexe de $S \setminus \{x \mid d(x, K) < \varepsilon\}$ contenant v est un arbre fini. Soit $B(v, r)$ une petite boule incluse dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{x \mid d(x, K) < \varepsilon\}$. Comme les feuilles de S appartiennent à K , $B(v, r)$ ne contient pas de feuille et $B(v, r) \cap S$ est un arbre fini. Par conséquent $B(v, r) \cap S$ est un arbre fini dont les feuilles sont sur le cercle $\partial B(v, r)$. En notant p_1, \dots, p_N ces feuilles, $B(v, r) \cap S$ est une solution au problème de Steiner pour l'ensemble fini $\tilde{K} = \{p_1, \dots, p_N\}$. Ainsi, en utilisant le théorème précédent (Théorème 3.24), v est une jonction triple. Par des calculs basiques on peut voir qu'une jonction triple est de longueur minimale lorsque les angles sont égaux à $2\pi/3$.

Si $v \in K$ alors il est facile de voir que $v \in \overset{\circ}{K}$ ne peut pas être minimal sinon on pourrait enlever une petite boule $B(v, r)$ à S en gardant la connexité. Donc $v \in \partial K$. On considère deux arêtes partants de v faisant un angle $\theta < 2\pi/3$. Ainsi on peut construire une configuration de Steiner (une jonction triple) dans une petite boule $B(v, r)$ dont la longueur totale est plus basse (strictement). Ceci est impossible par minimalité (voir Figure 3.1). Ainsi, l'angle entre les deux arêtes est supérieur ou égal à $2\pi/3$ ce qui impose au degré de v d'être au plus égal à 3.

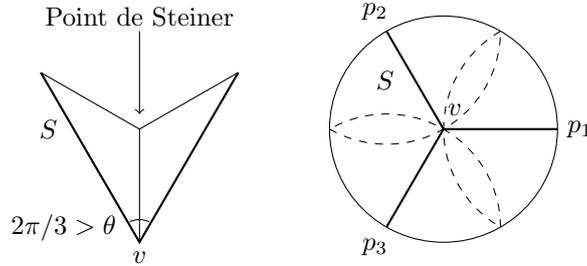


FIGURE 3.1. Configurations non minimales.

De plus, si le degré de v est égal à 3 alors on choisit r suffisamment petit pour que les seules arêtes coupant $B(v, r)$ soient celles partant de v . On note p_i les points d'intersection entre chacune de ces arêtes (au plus 3) et le cercle $\partial B(v, r)$, par minimalité, on a (voir Figure 3.1),

$$K \cap B(v, r) \subset B(v, r) \setminus \left(B(p_1, r) \cup B(p_2, r) \cup B(p_3, r) \right) = \{v\}.$$

Ceci est impossible si la composante connexe de K contenant v n'est pas réduite à $\{v\}$. \square

2. Relaxation du périmètre

2.1. Relaxation pour les ensembles indécomposables et simples

On définit deux énergies basées sur le périmètre et utilisant les notions d'ensembles indécomposables et simples vues précédemment.

Définition 3.26 (Perimètres connexes). On définit l'énergie suivante sur les ensembles mesurables de \mathbb{R}^2

$$P_C(E) = \begin{cases} P(E) & \text{si } E \text{ est indécomposable} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$P_S(E) = \begin{cases} P(E) & \text{si } E \text{ est simple} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère leurs enveloppes semi-continue inférieurement :

$$\overline{P_C}(E) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_C(E_n) \mid E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1 \right\}$$

et

$$\overline{P_S}(E) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_S(E_n) \mid E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1 \right\}.$$

Une première conséquence de la définition de $\overline{P_C}$ et de $\overline{P_S}$ est la propriété suivante.

Propriété 3.27. Soit E un ensemble mesurable.

- On a $P(E) \leq \overline{P_C}(E) \leq \overline{P_S}(E)$.
- Si $0 < |E| < +\infty$ alors $2 \operatorname{diam}(E^1) \leq \overline{P_C}(E)$.
- Si $|\mathbb{R}^2 \setminus E| > 0$ alors $2 \operatorname{diam}(E^1) \leq \overline{P_S}(E)$.

Preuve.

Le premier point est évident en utilisant la semi-continuité inférieure du périmètre par rapport à la topologie L^1 . L'inégalité de droite s'obtient en constatant qu'un ensemble simple est indécomposable.

Pour le deuxième point, si $|E| < +\infty$ et $\overline{P_C}(E) < +\infty$ alors il existe une suite $(E_n)_n$ d'ensembles indécomposables telle que $|E_n \Delta E| \rightarrow 0$ et $P(E_n) \rightarrow \overline{P_C}(E)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Ainsi, pour tout $\eta > 0$, pour n suffisamment grand, on a $0 < |E_n| < +\infty$ et $P(E_n) < \overline{P_C}(E) + \eta$. Par conséquent, en utilisant la Remarque 3.14, on obtient que $2 \operatorname{diam}(E_n^1)$ est uniformément borné par $\overline{P_C}(E) + \eta$. Grâce à la convergence L^1 , on a $2 \operatorname{diam}(E^1) \leq \overline{P_C}(E) + \eta$ et en prenant $\eta \rightarrow 0$ on arrive bien à $2 \operatorname{diam}(E^1) \leq \overline{P_C}(E)$.

La preuve pour le troisième point est identique à celle du second. \square

2.2. Relaxation pour les ensembles réguliers

En général, lorsqu'on approche un ensemble, on veut ajouter de la régularité pour avoir accès à plus de quantités géométriques. Dans ce cas, la connexité et l'indécomposabilité coïncident et il peut être intéressant de voir si l'ajout de régularité change la relaxation. On rappelle qu'un ensemble est régulier dès que son bord peut localement s'écrire comme le graphe d'une fonction régulière (de classe C^∞ dans ce chapitre). Comme précédemment on définit les énergies suivantes.

Définition 3.28 (Périmètres connexes réguliers). On définit les énergies suivantes sur les ensembles mesurables de \mathbb{R}^2 :

$$P_C^r(E) = \begin{cases} P(E) & \text{si } E \text{ est régulier et connexe} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$P_S^r(E) = \begin{cases} P(E) & \text{si } E \text{ est régulier et simplement connexe} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Leurs enveloppes semi-continues inférieurement sont données par

$$\overline{P}_C^r(E) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_C^r(E_n) \mid E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1 \right\}$$

et

$$\overline{P}_S^r(E) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_S^r(E_n) \mid E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1 \right\}.$$

Remarque 3.29. Pour les ensembles réguliers, le caractère indécomposable et le caractère connexe sont équivalents (de même que pour les caractères simple et simplement connexe). Ainsi on obtient les inégalités

$$\overline{P}_C(E) \leq \overline{P}_C^r(E) \quad \text{et} \quad \overline{P}_S(E) \leq \overline{P}_S^r(E).$$

Si l'ensemble E n'est pas régulier alors on n'a pas de lien entre la décomposabilité et la connexité comme on peut le voir sur la Figure 3.2.

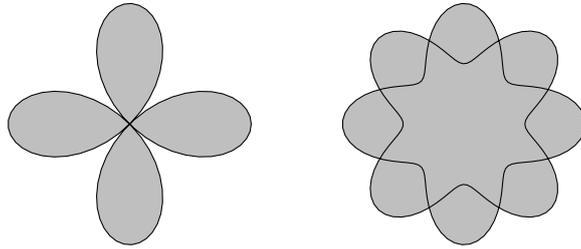


FIGURE 3.2. Ensembles (en gris) et leur bord (en noir) - à gauche : un ensemble (fermé) connexe et décomposable - à droite : un ensemble (ouvert) non connexe et indécomposable.

Le théorème suivant stipule qu'ajouter de la régularité ne change pas la relaxation.

Théorème 3.30. Soit E un ensemble essentiellement borné et de périmètre fini dans \mathbb{R}^2 . On a

$$\overline{P}_C^r(E) = \overline{P}_C(E) \quad \text{et} \quad \overline{P}_S^r(E) = \overline{P}_S(E).$$

Preuve.

Afin de prouver $\overline{P}_S^r(E) = \overline{P}_S(E)$, il suffit de voir que, étant donné un ensemble simple E , on peut l'approcher en topologie L^1 par une suite d'ensembles lisses et simplement connexes $(E_\varepsilon)_\varepsilon$ telle que $P(E_\varepsilon) \rightarrow P(E)$ puis appliquer un argument d'extraction.

Soit E un ensemble simple, par le théorème de décomposition (Théorème 3.11) on peut identifier E avec $\text{int}(J^+)$ où J^+ est la frontière de Jordan de E . Ensuite on peut supposer que $P(E) = \mathcal{H}^1(\partial E)$ et E est ouvert. En utilisant le théorème d'approximation (Théorème 3.18), il existe une suite $(E_\varepsilon)_\varepsilon$ d'ensembles lisses telle que $P(E_\varepsilon) \leq P(E) + \varepsilon$. Si E_ε n'est

pas simplement connexe alors les bords des trous et des composantes connexes de E_ε sont un ε -voisinage de ∂E . Ainsi, il existe une unique composante connexe \tilde{E}_ε de E_ε telle que

$$E \setminus \mathcal{N}_\varepsilon(\partial E) \subset \tilde{E}_\varepsilon.$$

En enlevant les éventuelles autres composantes connexes de \tilde{E}_ε et en bouchant les éventuels trous, on obtient un ensemble lisse et simplement connexe (inclus dans E) et dont le bord appartient à $\mathcal{N}_\varepsilon(\partial E)$. De plus, on a

$$P(\tilde{E}_\varepsilon) \leq P(E_\varepsilon) \leq P(E) + \varepsilon$$

et

$$E \Delta \tilde{E}_\varepsilon \subset \mathcal{N}_\varepsilon(\partial E).$$

Comme $\partial E = \partial^* E \pmod{\mathcal{H}^1}$ est rectifiable, en utilisant [65, Théorème 3.2.39], on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\mathcal{N}_\varepsilon(\partial E)|}{2\varepsilon} = P(E)$$

et ainsi $\tilde{E}_\varepsilon \rightarrow E$ en topologie L^1 . Pour finir on utilise la semi-continuité inférieure du périmètre afin d'obtenir $P(\tilde{E}_\varepsilon) \rightarrow P(E)$.

Pour $\overline{P_C} = \overline{P_C}$ la preuve est très similaire. Étant donné un ensemble indécomposable E , nous allons l'approcher par une suite d'ensembles lisses et connexes $(E_\varepsilon)_\varepsilon$ telle que $P(E_\varepsilon) \rightarrow P(E)$. On utilise le théorème de décomposition (Théorème 3.11) pour identifier E avec

$$Y_0 \setminus \bigcup_{j \in J} T_j$$

où $Y_0 = \text{sat}(E)$ et (T_j) est la famille des trous de E avec $T_j \subset Y_0$. Les ensembles Y_0 et T_j , pour tout $j \in J$, sont simples et peuvent être approchés par des ensembles lisses comme précédemment.

Soit $\varepsilon > 0$, on définit

- $J_\varepsilon = \{j \in J \mid |T_j| > \varepsilon\}$;
- $Y_{0,\varepsilon}$, une approximation par l'extérieur de Y_0 (Théorème 3.18 avec $\delta = \varepsilon$). Comme Y_0 est simple et borné, on peut approcher son complémentaire dans une grosse boule par l'intérieur. En remplissant la composante non bornée extérieure on obtient bien un ensemble lisse $\tilde{Y}_{0,\varepsilon}$ approchant $\mathbb{R}^2 \setminus Y_0$ dans le sens du Théorème 3.18. On choisit ensuite $Y_{0,\varepsilon} = \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{Y}_{0,\varepsilon}$ et on a
 - $Y_0 \subset Y_{0,\varepsilon}$;
 - $Y_{0,\varepsilon} \setminus Y_0 \subset \mathcal{N}_\delta(\partial Y_0) \cap \mathcal{N}_\delta(\partial Y_{0,\varepsilon})$;
 - $P(Y_{0,\varepsilon}) \leq P(Y_0) + \varepsilon$;
- $T_{j,\varepsilon}$, une approximation par l'intérieur de T_j avec $\delta = \varepsilon^2$ pour $j \in J_\varepsilon$;
- $E_\varepsilon = Y_{0,\varepsilon} \setminus \bigcup_{j \in J_\varepsilon} T_{j,\varepsilon}$.

En utilisant $T_j \subset Y_0$, on a

$$\varepsilon \text{card}(J_\varepsilon) \leq \sum_{j \in J_\varepsilon} |Y_i| \leq \sum_{j \in J} |Y_i| \leq |Y_0|$$

et puisque $|Y_0| = |\text{sat}(E)| < +\infty$, on obtient

$$\varepsilon \text{card}(J_\varepsilon) \leq |\text{sat}(E)| < +\infty.$$

En utilisant le même argument que pour $\overline{P_S}$, on peut supposer que $Y_{0,\varepsilon}$ et $T_{j,\varepsilon}$ sont des ensembles lisses et simples et comme les bords des ensembles précédents ne se coupent pas

on a que E_ε est lisse et connexe. De plus, on calcule le périmètre de E_ε ,

$$\begin{aligned}
P(E_\varepsilon) &\leq P(Y_{0,\varepsilon}) + \sum_{j \in J_\varepsilon} P(T_{j,\varepsilon}) \\
&\leq P(Y_0) + \varepsilon + \sum_{j \in J_\varepsilon} (P(T_j) + \varepsilon^2) \\
&\leq P(Y_0) + \varepsilon + \sum_{j \in J_\varepsilon} P(Y_j) + \varepsilon^2 \text{card}(J_\varepsilon) \\
&\leq P(Y_0) + \varepsilon + \sum_{i \in J} P(Y_i) + \varepsilon^2 \text{card}(J_\varepsilon) \\
&\leq P(E) + \varepsilon + \varepsilon^2 \text{card}(J_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Par conséquent $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(E_\varepsilon) \leq P(E)$. Ensuite on décompose

$$|E \Delta E_\varepsilon| = |Y_{0,\varepsilon} \setminus Y_0| + \sum_{j \in J \setminus J_\varepsilon} |T_j| + \sum_{j \in J_\varepsilon} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon}|,$$

le premier terme vient de l'approximation par l'extérieur de $\text{sat}(E) = Y_0$, le second vient du remplissage des petits trous et le troisième vient de l'approximation par l'intérieur des trous restants. Comme $\sum_{j \in J \setminus J_\varepsilon} |T_j|$ est un reste de la série absolument convergente $\sum_{j \in J} |T_j| < |Y_0|$, on a

$$\sum_{j \in J \setminus J_\varepsilon} |T_j| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De la même manière que précédemment

$$|Y_{0,\varepsilon} \setminus Y_0| \leq |\mathcal{N}_\varepsilon(\partial Y_0)| \leq 2\varepsilon P(E)$$

pour ε assez petit. Ainsi $|Y_{0,\varepsilon} \setminus Y_0| \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On obtient de plus, pour tout $j \in J_\varepsilon$

$$|T_{j,\varepsilon} \setminus T_j| \leq |\mathcal{N}_\varepsilon(\partial T_j)| \leq 2\varepsilon^2 P(E)$$

pour ε assez petit, notons que J_ε est une suite croissante d'ensembles lorsque ε décroît. De plus $\sum_{j \in J_\varepsilon} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon}| \leq |\text{sat}(E)| < +\infty$ donc $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j \in J_\varepsilon} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon}| < +\infty$. On note ε_h une sous-suite telle que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j \in J_\varepsilon} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon}| = \lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{j \in J_{\varepsilon_h}} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon_h}|.$$

Pour tout $\eta > 0$ il existe $H > 0$ tel que pour tout $h > H$, $\sum_{j \in J_{\varepsilon_h} \setminus J_{\varepsilon_H}} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon_h}| < \eta/2$. J_{ε_H} est fini et $J_{\varepsilon_H} \subset J_{\varepsilon_h}$ ainsi pour h assez grand

$$\sum_{j \in J_{\varepsilon_H}} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon_h}| \leq 2\varepsilon_h^2 \text{card}(J_{\varepsilon_H}) P(E) \leq 2\varepsilon_h^2 \text{card}(J_{\varepsilon_h}) P(E).$$

En choisissant h assez grand pour avoir $2 \text{card}(J_{\varepsilon_h}) \varepsilon_h^2 P(E) < \eta/2$ on obtient

$$\sum_{j \in J_{\varepsilon_h}} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon_h}| \leq \sum_{j \in J_{\varepsilon_H}} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon_h}| + \sum_{j \in J_{\varepsilon_h} \setminus J_{\varepsilon_H}} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon_h}| < \eta.$$

Ainsi

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j \in J_\varepsilon} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon}| = \lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{j \in J_{\varepsilon_h}} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon_h}| < \eta.$$

Par conséquent, en prenant $\eta \rightarrow 0$, on a

$$\sum_{j \in J_\varepsilon} |T_j \setminus T_{j,\varepsilon}| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Donc

$$|E_\varepsilon \Delta E| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

et en utilisant la semi-continuité inférieure du périmètre, on a

$$P(E_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} P(E).$$

L'argument d'extraction pour $\overline{P_C}$ et pour $\overline{P_S}$ est le suivant. Soit E un ensemble borné de périmètre fini. Si $\overline{P_C}(E) < +\infty$ alors il existe une suite $(E_n)_n$ d'ensembles indécomposables convergeant vers E en topologie L^1 telle que

$$\overline{P_C}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n).$$

Cependant, il existe une suite $(E_n^k)_k$ d'ensembles connexes et lisses convergeant vers E_n en topologie L^1 telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(E_n^k) = P(E_n).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$

$$|E_n \Delta E| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |P(E_n) - P(E)| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n > n_0$, il existe k_n tel que pour tout $k > k_n$

$$|E_n^k \Delta E_n| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |P(E_n^k) - P(E_n)| < \varepsilon.$$

Par conséquent, pour la suite $E_n^{k_n}$, on a pour $n > n_0$

$$|E_n^{k_n} \Delta E| < 2\varepsilon \quad \text{et} \quad |P(E_n^{k_n}) - P(E)| < 2\varepsilon.$$

Donc la suite d'ensembles $(E_n^{k_n})_n$ connexes et lisses converge bien vers E en topologie L^1 et satisfait bien

$$\overline{P_C}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n^{k_n}).$$

□

2.3. Formule d'identification

Nous allons voir maintenant qu'il est possible d'avoir une expression de $\overline{P_C}$ et de $\overline{P_S}$ faisant intervenir des arbres de Steiner.

Définition 3.31 (Arbres de Steiner d'un ensemble). *Soit E un ensemble de périmètre fini dans \mathbb{R}^2 , essentiellement borné et satisfaisant $\partial E = \partial^* E \pmod{\mathcal{H}^1}$. On définit $St(E) = \mathcal{H}^1(S)$ et $St_c(E) = \mathcal{H}^1(S^c)$ où S est un arbre de Steiner pour $\overline{E^1}$ et S^c un arbre de Steiner pour $\overline{E^0}$ (voir Figure 3.3).*

Remarque 3.32. Dans la définition précédente, $\overline{E^0}$ n'est pas borné cependant on peut quand même lui associer un arbre de Steiner. Soit $B(0, R)$ une boule contenant $\overline{E^1}$, pour tout ensemble \tilde{S} connectant les composantes connexes de $\overline{E^0}$ on a que $\tilde{S} \cap B(0, R)$ connecte encore $\overline{E^0}$ car $\overline{E^0} \setminus B(0, R) = \mathbb{R}^2 \setminus B(0, R)$. Ainsi on peut considérer seulement les ensembles \tilde{S} dans $B(0, R)$ et il n'est pas difficile de voir que la longueur minimale pour \tilde{S} ne dépend pas du rayon R tant que $\overline{E^1} \subset B(0, R)$.

Si E n'est pas essentiellement borné et $|\mathbb{R}^2 \setminus E| > 0$ alors, en utilisant la Propriété 3.27 il est naturel de définir $St_c(E) = +\infty$. Pour $St(E)$ c'est moins évident car E peut avoir un périmètre fini mais aussi une suite non bornée de trous contenant d'autres composantes indécomposables. Ainsi on manque de compacité pour définir proprement S .

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant et sa preuve est donnée dans la section suivante.

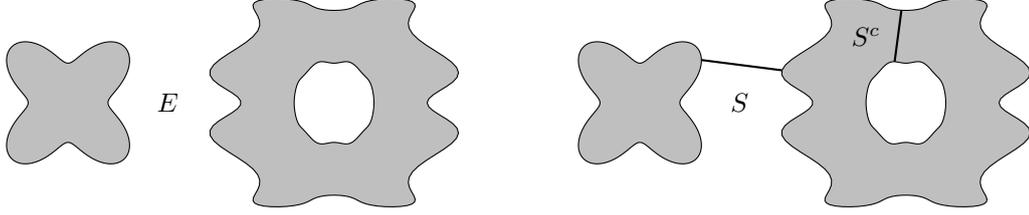


FIGURE 3.3. Définition des arbres S et S^c .

Théorème 3.33 (formule d'identification). *Soit E un ensemble de \mathbb{R}^2 essentiellement borné, de périmètre fini et satisfaisant $\partial E = \partial^* E \pmod{\mathcal{H}^1}$. On a*

$$\overline{P}_C(E) = P(E) + 2St(E)$$

et

$$\overline{P}_S(E) = P(E) + 2St(E) + 2St_c(E).$$

Remarque 3.34. On rappelle que $\sigma(K)$ est la longueur des arbres de Steiner du compact K dans le problème (4). Si E est un ensemble borné et de périmètre fini tel que $E^1 = E$ alors on a

$$St(E) + St_c(E) = \sigma(\partial E)$$

où ∂E est le bord topologique (classique). En effet, un arbre de Steiner de $St(E)$ relie les composantes connexes de $\overline{E^1}$ c'est-à-dire qu'il s'agit d'un arbre à l'extérieur de E^1 ayant ses feuilles sur ∂E^1 . De même, $St_c(E)$ est un arbre en dehors de E^0 avec ses feuilles sur ∂E^0 . Ainsi, les deux arbres précédents sont disjoints (sauf éventuellement au niveau des feuilles) et en utilisant la Proposition 3.17, leur réunion est un arbre minimal pour ∂E .

3. Preuve de la formule d'identification

Soit E un ensemble satisfaisant les hypothèses du Théorème 3.33. On démontre dans la Section 3.1 que pour toute suite $(E_n)_n$ d'ensembles convergeant vers E en topologie L^1 , on a

$$P(E) + 2St(E) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_C(E_n) \quad \text{et} \quad P(E) + 2St(E) + 2St_c(E) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_S(E_n).$$

De plus, comme les ensembles lisses et connexes sont indécomposables (et de même les ensembles lisses et simplement connexes sont simples), on obtient

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} P_C(E_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_C^r(E_n) \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_S(E_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_S^r(E_n).$$

Nous prouvons dans la partie 3.2.1 que si \hat{E} est lisse, de périmètre fini et a un nombre fini de trous et de composantes connexes alors il existe deux suites $(\tilde{E}_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\tilde{F}_\varepsilon)_\varepsilon$ convergeant vers E dans L^1 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ telles que

– (Proposition 3.45) \tilde{E}_ε est lisse, connexe et satisfait

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\tilde{E}_\varepsilon) \leq P(\hat{E}) + 2St(\hat{E}) ;$$

– (Proposition 3.47) \tilde{F}_ε est lisse, simplement connexe et satisfait

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\tilde{F}_\varepsilon) \leq P(\hat{E}) + 2St(\hat{E}) + 2St_c(\hat{E}).$$

On prouve ensuite dans la partie 3.2.2 qu'il est possible d'approcher E en topologie L^1 par des ensembles lisses, de périmètre fini et ayant un nombre fini de trous et de composantes connexes par une suite notée $(\hat{E}_\delta)_\delta$ satisfaisant

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} P(\hat{E}_\delta) + 2St(\hat{E}_\delta) \leq P(E) + 2St(E)$$

et

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} P(\hat{E}_\delta) + 2St(\hat{E}_\delta) + 2St_c(\hat{E}_\delta) \leq P(E) + 2St(E) + 2St_c(E).$$

En combinant ces inégalités, il existe $(E_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(F_\varepsilon)_\varepsilon$ convergeant vers E en topologie L^1 et vérifiant (Proposition 3.45)

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P_C^r(E_\varepsilon) \leq P(E) + 2St(E),$$

et (Proposition 3.47)

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P_S^r(F_\varepsilon) \leq P(E) + 2St(E) + St_c(E).$$

Par conséquent, en utilisant les inégalités sur les lim inf et sur les lim sup, il existe des suites $(E_n)_n$ et $(F_n)_n$ convergeant vers E en topologie L^1 lorsque $n \rightarrow +\infty$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_C^r(E_n) = P(E) + 2St(E) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_S^r(F_n) = P(E) + 2St(E) + 2St_c(E).$$

Donc

$$\overline{P_C}(E) = \overline{P_C^r}(E) = P(E) + 2St(E) \quad \text{et} \quad \overline{P_S}(E) = \overline{P_S^r}(E) = P(E) + 2St(E) + 2St_c(E).$$

3.1. L'inégalité liminf

Dans cette partie nous prouvons que pour toute suite $(E_n)_n$ convergeant vers E en topologie L^1 , on a

$$P(E) + 2St(E) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_C(E_n) \quad \text{et} \quad P(E) + 2St(E) + 2St_c(E) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_S(E_n).$$

La preuve repose sur le fait que le bord des ensembles E_n est recouvert par une famille de courbes lipschitziennes. On utilise alors le Théorème d'Arzela-Ascoli afin de faire converger ces courbes vers une famille de courbes limites qui recouvrent le bord de E et qui donnent une manière de lier les différentes composantes connexes et les différents trous.

La preuve est en fait plus facile pour $\overline{P_S}$ car il suffit d'une courbe pour recouvrir le bord d'un ensemble simple. On montre ensuite l'inégalité pour $\overline{P_C}$ en adaptant celle de $\overline{P_S}$.

3.1.1. L'inégalité liminf pour $\overline{P_S}$.

Soit $(E_n)_n$ une suite d'ensembles convergeant dans L^1 vers E (qui, rappelons le, est essentiellement borné, a un périmètre fini et satisfait $\partial^*E = \partial E \pmod{\mathcal{H}^1}$). Sans perte de généralité, on peut supposer que $\overline{P_S}(E) < +\infty$ et qu'ainsi la suite approchante satisfait $\sup_n P_S(E_n) < +\infty$. En particulier, cela signifie que E_n est simple et donc ∂E_n est couvert (mod \mathcal{H}^1) par une courbe de Jordan lipschitzienne $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Par conséquent $lip(\gamma_n) = \ell(\gamma_n) = P(E_n)$ est uniformément borné. Comme $E_n \cap E \neq \emptyset$ pour n assez grand, on a que (γ_n) reste dans une boule contenant E . La suite de courbes $(\gamma_n)_n$ est bornée et

uniformément lipschitzienne donc, par le Théorème d'Arzela-Ascoli, il existe une courbe fermée lipschitzienne $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (pas nécessairement une courbe de Jordan) et une sous-suite (toujours indexée par n) telle que $(\gamma_n)_n$ converge uniformément vers γ .

En passant à la lim inf dans l'inégalité $|\gamma_n(s) - \gamma_n(t)| \leq Lip(\gamma_n)|t - s|$ on peut voir que

$$\ell(\gamma) = Lip(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} Lip(\gamma_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_S(E_n).$$

Le but maintenant va être de travailler sur la longueur de γ . On utilise la formule de l'aire mais on définit avant la multiplicité de γ :

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ x &\mapsto \text{card}(\gamma^{-1}(\{x\})). \end{aligned}$$

La formule de l'aire nous donne

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(s)| ds = \int_{\mathbb{R}^2} \theta(x) d\mathcal{H}^1(x).$$

Comme $\ell(\gamma) < +\infty$ on a $\theta(x) < +\infty$ pour \mathcal{H}^1 -presque tout x . De plus $\theta(x) = 0$ si $x \notin (\gamma)$ et $\theta(x) \geq 1$ si $x \in (\gamma)$.

Lemme 3.35. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel qu'il existe $t \in [0, 1]$ et $r > 0$ satisfaisant

- $\gamma(t) = x$;
- γ est dérivable en t ;
- $|B(x, r) \cap E| = 0$;

alors $\theta(x) \geq 2$.

Preuve.

Comme γ est fermée, on peut supposer que $\gamma : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et que $t = 0$. Soit $\delta > 0$ suffisamment petit pour que $\gamma|_{[-\delta, \delta]}$ appartienne à la boule $B(x, r)$ et est donnée localement par le graphe d'une fonction L -lipschitzienne au dessus de sa tangente et ayant x comme origine. Pour $\varepsilon > 0$ on définit (voir Figure 3.4)

- $BT = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \delta, |x_2| \leq L|x_1|\}$;
- $BT_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(y, BT) < \varepsilon\}$.

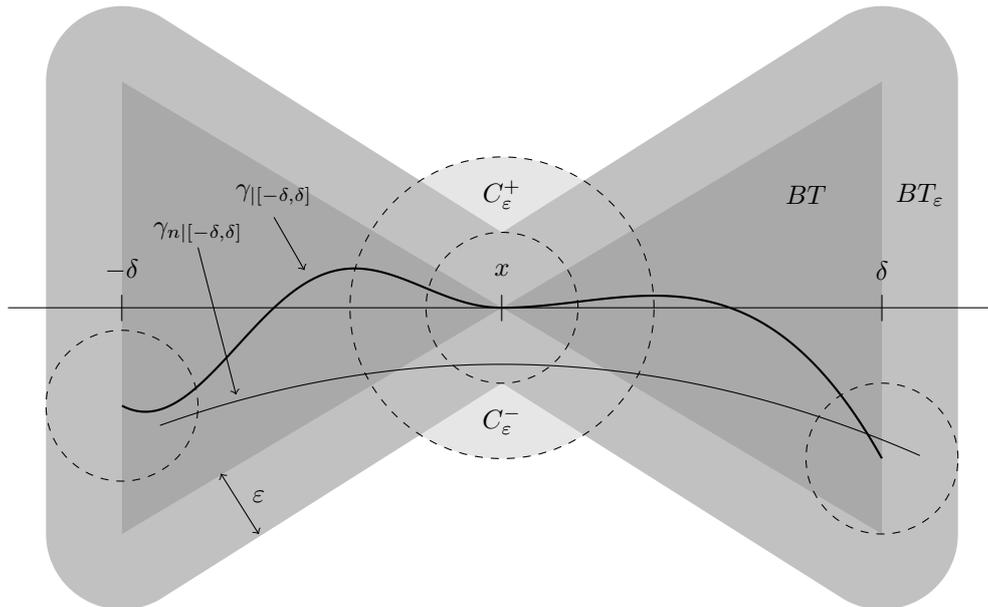


FIGURE 3.4. Construction du Lemme 3.35.

Pour tout $s \in [-\delta, \delta]$, on a $\gamma(s) \in BT$. On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $B(\gamma(-\delta), \varepsilon)$, $B(\gamma(\delta), \varepsilon)$ et $B(x, \varepsilon)$ soient disjointes deux à deux. Comme $(\gamma_n)_n$ converge uniformément vers γ , il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $s \in [-\delta, \delta]$, on a $\gamma_n(s) \in BT_\varepsilon$.

♣ *Fait* : pour tout $N > n_0$ il existe $n_\varepsilon \geq N$ et $s_\varepsilon \in [-1/2, 1/2] \setminus (-\delta, \delta)$ tels que

$$|\gamma_{n_\varepsilon}(s_\varepsilon) - x| < 2\varepsilon.$$

Preuve du Fait : si ce n'est pas le cas alors pour tout pour tout $n > N$, pour tout $s \in [-1/2, 1/2] \setminus (-\delta, \delta)$, on a

$$\gamma_n(s) \notin B(x, 2\varepsilon).$$

On définit $C_\varepsilon = B(x, 2\varepsilon) \setminus BT_\varepsilon$ et on note C_ε^+ et C_ε^- ses deux composantes connexes. La courbe γ_n est fermée, ainsi

- elle commence à $s = -\delta$ dans $B(\gamma(-\delta), \varepsilon)$;
- elle reste dans BT_ε pour $s \in [-\delta, \delta]$;
- elle atteint en $s = \delta$ un point de $B(\gamma(\delta), \varepsilon)$;
- puis elle boucle pour revenir en $\gamma_n(\delta)$ sans croiser $B(x, 2\varepsilon)$ pour $s \in [-1/2, 1/2] \setminus (-\delta, \delta)$.

Par conséquent γ_n entoure nécessairement C_ε^+ ou C_ε^- . Ainsi

$$|E_n \cap B(x, r)| \geq \frac{1}{2}|C_\varepsilon|,$$

et c'est incompatible avec $|E \cap B(x, r)| = 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

En utilisant le Fait pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on peut voir que s_ε converge vers un certain $s \in [-1/2, 1/2] \setminus (-\delta, \delta)$ lorsque $n_\varepsilon \rightarrow +\infty$. Grâce à la convergence uniforme, on a $\gamma_{n_\varepsilon}(s_\varepsilon) \rightarrow \gamma(s)$ et par le fait $\gamma(s) = x$. Ainsi $\gamma(0) = \gamma(s) = x$ et $s \neq 0$ c'est à dire $\theta(x) \geq 2$. \square

Corollaire 3.36. *Pour \mathcal{H}^1 -presque tout $x \in (\gamma) \setminus \partial^*E$, $\theta(x) \geq 2$.*

Preuve.

Soit $x \in (\gamma) \setminus \partial E$ un point tel que γ soit différentiable en t avec $\gamma(t) = x$. Comme $x \notin \partial E$ on a, soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{E}$, soit $x \in \overset{\circ}{E}$. Dans le premier cas, il existe $r > 0$ satisfaisant les hypothèses du lemme précédent et ainsi $\theta(x) \geq 2$. Dans le second cas, on applique le même argument sur $\mathbb{R}^2 \setminus E$ et donc $\theta(x) \geq 2$.

De plus γ est lipschitzienne donc elle est dérivable presque partout sur $[0, 1]$ et l'image des points de non dérivabilité de γ est \mathcal{H}^1 -négligeable. Comme $\partial^*E = \partial E \pmod{\mathcal{H}^1}$ on a $(\gamma) \setminus \partial^*E = (\gamma) \setminus \partial E \pmod{\mathcal{H}^1}$. Ceci termine la preuve du lemme. \square

Lemme 3.37. *Si $x \in \partial^*E$ alors $\theta(x) \geq 1$.*

Preuve.

On commence par regarder en un point x satisfaisant $\theta(x) = 0$. Si $\theta(x) = 0$ alors $x \notin (\gamma)$ et, comme (γ) est compact, $d(x, \gamma) > 0$. Ainsi il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x, r_0) \cap (\gamma) = \emptyset$. Comme $\gamma_n \rightarrow \gamma$ uniformément alors il existe n_0 tel que, soit pour tout $n > n_0$, $B(x, r_0/2) \subset E_n$, soit pour tout $n > n_0$, $B(x, r_0/2) \cap E_n = \emptyset$. Dans le premier cas on a, pour $r < r_0$,

$$1 = \frac{|B(x, r) \cap E_n|}{|B(x, r)|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|B(x, r) \cap E|}{|B(x, r)|}$$

ainsi $x \in E^1$. Le second cas est similaire :

$$0 = \frac{|B(x, r) \cap E_n|}{|B(x, r)|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|B(x, r) \cap E|}{|B(x, r)|}$$

d'où $x \in E^0$.

On a prouvé que $\mathbb{R}^2 \setminus (\gamma) \subset E^1 \cup E^0$. En passant au complémentaire, on obtient

$$\partial^* E = \mathbb{R}^2 \setminus (E^1 \cup E^0) \subset (\gamma).$$

Par conséquent $\theta(x) \geq 1$ si $x \in \partial^* E$. □

On rappelle qu'on a obtenu

$$\int_{\mathbb{R}^2} \theta(x) d\mathcal{H}^1(x) = \ell(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_S(E_n).$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \theta(x) d\mathcal{H}^1(x) &= \int_{E^0} \theta(x) d\mathcal{H}^1(x) + \int_{E^1} \theta(x) d\mathcal{H}^1(x) + \int_{\partial^* E} \theta(x) d\mathcal{H}^1(x) \\ &\geq \int_{(\gamma) \cap E^0} 2d\mathcal{H}^1 + \int_{(\gamma) \cap E^1} 2d\mathcal{H}^1 + \int_{\partial^* E} 1d\mathcal{H}^1 \\ &= 2\mathcal{H}^1((\gamma) \cap E^0) + 2\mathcal{H}^1((\gamma) \cap E^1) + P(E) \\ &= 2\mathcal{H}^1((\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{E})) + 2\mathcal{H}^1((\gamma) \cap \overset{\circ}{E}) + P(E). \end{aligned}$$

Lemme 3.38. $((\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{E})) \cup \bar{E}^1$ et $((\gamma) \cap \overset{\circ}{E}) \cup \bar{E}^0$ sont tous les deux équivalents (mod \mathcal{H}^1) à un ensemble connexe.

Preuve.

Les courbes de Jordan de la suite $(\gamma_n)_n$ sont de longueurs finies donc E_n est (Lebesgue) équivalent à $\text{int}(\gamma_n)$ donc on peut supposer que $E_n = \text{int}(\gamma_n)$. De plus $\gamma_n \rightarrow \gamma$ uniformément et on peut supposer que ind_{γ_n} est à valeurs dans $\{0, 1\}$ ainsi on peut définir l'intérieur de γ par

$$\text{int}(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\gamma) \mid \text{ind}_{\gamma}(x) = 1\}.$$

De plus, on a $E_n \cup (\gamma_n) \rightarrow \text{int}(\gamma) \cup (\gamma)$ en distance de Hausdorff. Comme $E_n \cup (\gamma_n)$ est connexe, alors par le Théorème de Golab (Théorème 3.21), $\text{int}(\gamma) \cup (\gamma)$ est aussi connexe.

Nous prouvons maintenant que $\text{int}(\gamma) \cup (\gamma)$ et $E \cup (\gamma)$ sont équivalents mod \mathcal{H}^1 . On prouve d'abord que $\text{int}(\gamma) \cup (\gamma) \subset E \cup (\gamma)$ à un ensemble \mathcal{H}^1 -négligeable près. Si $x \in \text{int}(\gamma)$ alors, pour r assez petit et n assez grand, on a

$$\frac{|E_n \cap B(x, r)|}{|B(x, r)|} = 1$$

donc $x \in E^1$ qui coïncide mod \mathcal{H}^1 avec $\overset{\circ}{E} \subset E$. Ainsi $\text{int}(\gamma) \cup (\gamma) \subset E \cup (\gamma)$ à un ensemble \mathcal{H}^1 -négligeable près. On prouve ensuite que $(E \cup (\gamma)) \setminus (\text{int}(\gamma) \cup (\gamma))$ est \mathcal{H}^1 -négligeable.

En effet si $x \in (E \cup (\gamma)) \setminus (\text{int}(\gamma) \cup (\gamma))$ alors $x \notin \overset{\circ}{E}$ (puisque toute boule incluse dans E et contenant x doit être recouverte en volume par E_n qui converge vers $\text{int}(\gamma)$ dans L^1 , ainsi x devrait appartenir à $\text{int}(\gamma) \cup (\gamma)$) donc $x \in \partial E$. Comme $\partial^* E \subset (\gamma)$, on obtient que $x \notin \partial^* E$ ce qui est possible uniquement sur un ensemble \mathcal{H}^1 -négligeable. En conséquence $E \cup (\gamma) = \text{int}(\gamma) \cup (\gamma)$ à un ensemble \mathcal{H}^1 -négligeable près.

Maintenant nous prouvons que $E \cup (\gamma)$ et $((\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{E})) \cup \bar{E}^1$ sont équivalents mod \mathcal{H}^1 .

On commence par remarquer que $\partial^* E = \partial^* E^1 \subset \partial E^1 \subset \bar{E}^1$ donc $E^1 \cup \partial^* E \subset \bar{E}^1$.

- Soit $x \in E \cup (\gamma)$;
 - Si $x \in E$ alors $x \notin \mathbb{R}^2 \setminus \overline{E} = E^0 \pmod{\mathcal{H}^1}$ donc $x \in E^1 \cup \partial^* E \subset \overline{E^1}$;
 - Si $x \in (\gamma)$ alors soit $x \in E^1 \cup \partial^* E \subset \overline{E^1}$, soit $x \in E^0 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{E} \pmod{\mathcal{H}^1}$;
 Ainsi $x \in \left((\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E}) \right) \cup \overline{E^1}$ à un ensemble \mathcal{H}^1 -négligeable près.
- Soit $x \in \left((\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E}) \right) \cup \overline{E^1}$;
 - Si $x \in (\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E})$ alors $x \in (\gamma)$;
 - Si $x \in \overline{E^1}$ alors soit $x \in E^1 = \overset{\circ}{E} \pmod{\mathcal{H}^1} \subset E$, soit $x \in \partial^* E \subset (\gamma)$, soit $x \in E^0$. Dans ce dernier cas, comme $\overline{E^1} \subset \overline{E}$ et $\overset{\circ}{E} \cap E^0 = \emptyset$ on a que $x \in \partial E = \partial^* E \pmod{\mathcal{H}^1} \subset (\gamma)$.

Ainsi $x \in E \cup (\gamma)$ à un ensemble \mathcal{H}^1 -négligeable près.

En conséquence $E \cup (\gamma) = \left((\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E}) \right) \cup \overline{E^1} \pmod{\mathcal{H}^1}$.

Donc $\left((\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E}) \right) \cup \overline{E^1}$ est équivalent mod \mathcal{H}^1 à $\text{int}(\gamma) \cup (\gamma)$ qui est connexe. Pour $\left((\gamma) \cap \overset{\circ}{E} \right) \cup \overline{E^0}$, on peut prouver par les mêmes arguments qu'il est équivalent mod \mathcal{H}^1 à $(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E}) \cup (\gamma)$ qui est lui-même équivalent mod \mathcal{H}^1 à $\left(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\text{int}(\gamma)} \right) \cup (\gamma)$. Ce dernier ensemble est connexe en tant que limite uniforme de $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E_n}$ qui est connexe dès que $\overline{E_n}$ est simplement connexe. \square

Ainsi il existe deux ensembles \mathcal{H}^1 -négligeables N_1 et N_2 tels que

$$\left\{ \left[\left((\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E}) \right) \cup N_1 \right] \setminus N_2 \right\} \cup \overline{E^1}$$

soit connexe donc on a

$$\mathcal{H}^1 \left((\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E}) \right) = \mathcal{H}^1 \left(\left\{ \left[\left((\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E}) \right) \cup N_1 \right] \setminus N_2 \right\} \right) \geq St(E).$$

De manière similaire, on peut prouver que

$$\mathcal{H}^1 \left((\gamma) \cap \overset{\circ}{E} \right) \geq St_c(E).$$

On arrive finalement à

$$P(E) + 2St(E) + 2St_c(E) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_S(E_n).$$

3.1.2. L'inégalité liminf pour $\overline{P_C}$.

Pour $\overline{P_C}$, on utilise la même démarche que pour $\overline{P_S}$ avec $(E_n)_n$ une suite d'ensembles convergeant dans L^1 vers E . La preuve est construite de la même manière que précédemment, cependant une difficulté technique s'ajoute : on travaille non plus avec une courbe mais avec une famille de courbes recouvrant ∂E_n . Comme précédemment on peut supposer que $\overline{P_C}(E) < +\infty$ et que $\sup_n P_C(E_n) < +\infty$ c'est-à-dire que E_n est indécomposable et que $\partial^* E_n$ est recouvert par une famille de courbes de Jordan lipschitziennes $\gamma_{n,i} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ où $i \in I_n$. Ainsi

$$\sum_{i \in I_n} \ell(\gamma_{n,i}) = P(E_n) < +\infty.$$

On en déduit que I_n est au plus dénombrable et $Lip(\gamma_{n,i}) = \ell(\gamma_{n,i}) \leq P(E_n)$ est uniformément borné.

De plus, E_n est uniformément essentiellement borné (pour n assez grand). En effet, en utilisant la Propriété 3.27, $\text{diam}(E_n^1)$ est uniformément borné car E_n est indécomposable et converge vers E (c'est-à-dire $0 < |E_n| < +\infty$ pour n assez grand). Par ailleurs $E^1 \cap E_n^1 \neq \emptyset$ pour n assez grand donc E_n est uniformément essentiellement borné.

De plus, il existe un unique $i_0 \in I_n$ tel que $\gamma_{n,i_0} = \partial^* \text{sat}(E_n) \bmod \mathcal{H}^1$. Notons que $\gamma_{n,0}$ entoure $\gamma_{n,j}$ pour tout j dans I_n différent de 0. En réindexant (et éventuellement en étendant la famille à l'aide de courbes constantes $\gamma_{n,i} = x_{n,i} \in E_n$) on peut supposer que $I_n = \mathbb{N}$, $i_0 = 0$ et $\ell(\gamma_{n,i}) \geq \ell(\gamma_{n,i+1})$ pour tout $i \geq 1$.

On a vu que E_n est localement uniformément borné donc $(\gamma_{n,0})$ reste dans une grosse boule contenant E . Ainsi pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\gamma_{n,i}$ reste dans cette même boule. Par le Théorème d'Arzela-Ascoli, il existe une courbe limite lipschitzienne et fermée $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et une sous-suite $(\gamma_{n,i})$ convergeant uniformément vers γ_i lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par un argument diagonal on peut supposer que la même sous-suite est valable pour tout $i \in \mathbb{N}$ et on garde les mêmes notations pour cette sous-suite. On note $(\Gamma_n) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\gamma_{n,i})$, $(\Gamma) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\gamma_i)$,

$$\ell(\Gamma_n) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \ell(\gamma_{n,i}) = \sum_{i \in I_n} \ell(\gamma_{n,i}) \quad \text{et} \quad \ell(\Gamma) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \ell(\gamma_i).$$

Comme précédemment, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \ell(\gamma_{n,i}) \geq \ell(\gamma_i)$$

ainsi

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \ell(\Gamma_n) \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \ell(\gamma_{n,i}) \\ &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \ell(\gamma_{n,i}) \\ &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \ell(\gamma_i) \\ &= \ell(\Gamma). \end{aligned}$$

Donc $(\gamma_i)_i$ est uniformément lipschitzienne et

$$\ell(\Gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_C(E_n).$$

On définit la fonction multiplicité $\theta = \sum_{i \in \mathbb{N}} \theta_i$ où

$$\begin{aligned} \theta_i : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ x &\mapsto \text{card}(\gamma_i^{-1}(\{x\})). \end{aligned}$$

en utilisant la formule de l'aire, on peut calculer

$$\ell(\Gamma) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_0^1 |\gamma_i'(s)| ds = \int_{\mathbb{R}^2} \theta(x) d\mathcal{H}^1(x).$$

Comme précédemment, $\ell(\Gamma) < +\infty$ donc $\theta(x) < +\infty$ pour \mathcal{H}^1 -presque tout x . De plus $\theta(x) = 0$ si $x \notin (\Gamma)$ et $\theta(x) \geq 1$ si $x \in (\Gamma)$.

Nous devons adapter la preuve précédente à une famille de courbes : on reformule les Lemmes 3.35, 3.37 et 3.38 et le corollaire 3.36.

Lemme 3.39. *Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel qu'il existe $i \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1]$ et $r > 0$ satisfaisant*

- $\ell(\gamma_i) > 0$;
- $\gamma_i(t) = x$;
- γ_i est dérivable en t ;
- $|B(x, r) \cap E| = 0$;

alors $\theta(x) \geq 2$.

Preuve.

La construction est la même que dans le Lemme 3.35 en utilisant γ_i et en modifiant le fait par le suivant.

- ♣ *Fait* : pour tout $N > n_0$, il existe $n_\varepsilon \geq N$ et $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que
 - si $i_\varepsilon = i$ alors il existe $s_\varepsilon \in [-1/2, 1/2] \setminus (-\delta, \delta)$ tel que

$$|\gamma_{n_\varepsilon, i}(s_\varepsilon) - x| < 2\varepsilon ;$$

- sinon, il existe $s_\varepsilon \in [-1/2, 1/2]$ tel que

$$|\gamma_{n_\varepsilon, i_\varepsilon}(s_\varepsilon) - x| < 2\varepsilon.$$

La preuve du Fait est exactement la même que précédemment à l'exception près qu'il s'agit soit de $\gamma_{n_\varepsilon, i}$ soit d'une autre courbe de la famille venant recouvrir x . Pour le premier cas, la fin de la preuve est identique. Pour le second cas, on fixe n_ε et on note

$$I_\varepsilon = \{j \in \mathbb{N} : \exists s \in [-1/2, 1/2] \text{ satisfaisant } |\gamma_{n_\varepsilon, j}(s) - x| < 2\varepsilon\}$$

et $\text{int}(\gamma)$ le domaine entouré par n'importe quelle courbe fermée γ .

Si $\theta_i(x) = 1$ alors pour tout r assez petit, on a $|\text{int}(\gamma_i) \cap B(x, r)| > 0$. Comme $|E \cap B(x, r)| = 0$, $\bigcup_{j \in I_\varepsilon} \text{int}(\gamma_{n_\varepsilon, j})$ doit recouvrir le volume $|\text{int}(\gamma_i) \cap B(x, r)|$ lorsque $n_\varepsilon \rightarrow +\infty$.

Ainsi, pour N assez grand, on a

$$\sum_{j \in I_\varepsilon} |\text{int}(\gamma_{n_\varepsilon, j})| \geq \frac{1}{2} |\text{int}(\gamma_i) \cap B(x, r)|.$$

En utilisant l'inégalité isopérimétrique, on a

$$|\text{int}(\gamma_{n_\varepsilon, j})| \leq \frac{1}{4\pi} \ell(\gamma_{n_\varepsilon, j})^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_\varepsilon} |\text{int}(\gamma_{n_\varepsilon, j})| &\leq \frac{1}{4\pi} \sum_{j \in I_\varepsilon} \ell(\gamma_{n_\varepsilon, j})^2 \leq \frac{1}{4\pi} \left(\sup_{j \in I_\varepsilon} \ell(\gamma_{n_\varepsilon, j}) \right) \sum_{j \in I_\varepsilon} \ell(\gamma_{n_\varepsilon, j}) \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \left(\sup_{j \in I_\varepsilon} \ell(\gamma_{n_\varepsilon, j}) \right) \ell(\Gamma_{n_\varepsilon}). \end{aligned}$$

Comme il existe M , indépendant de n et de ε , tel que $\sup_n \ell(\Gamma_n) \leq M$, on a

$$\sup_{j \in I_\varepsilon} \ell(\gamma_{n_\varepsilon, j}) \geq 2\pi \frac{|\text{int}(\gamma_i) \cap B(x, r)|}{M}$$

alors il existe $j_\varepsilon \in I_\varepsilon$ tel que

$$\ell(\gamma_{n_\varepsilon, j_\varepsilon}) \geq \pi \frac{|\text{int}(\gamma_i) \cap B(x, r)|}{M}.$$

Par ailleurs, les $(\gamma_{n_\varepsilon, i})_i$ sont ordonnées de sorte à avoir une longueur décroissante donc

$$i \ell(\gamma_{n_\varepsilon, i}) \leq \ell(\Gamma_n)$$

ainsi j_ε est bornée lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Comme $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ on a que $(j_\varepsilon)_\varepsilon$ est stationnaire (à une sous-suite près) et, en notant j sa limite, l'argument de compacité dans la preuve du Lemme 3.35 est valide (c'est-à-dire $s_\varepsilon \rightarrow s$, $\gamma_{n_\varepsilon, j_\varepsilon}(s_\varepsilon) \rightarrow x$ et $\ell(\gamma_j) > 0$). Ceci termine la preuve du lemme. \square

Corollaire 3.40. *Pour \mathcal{H}^1 -presque tout $x \in (\Gamma) \setminus \partial^* E$, $\theta(x) \geq 2$.*

Preuve.

La preuve est exactement la même que celle du corollaire 3.36. On note qu'on peut avoir $\ell(\gamma_i) = 0$ pour certain $i \in \mathbb{N}$. Comme il y a au plus un nombre dénombrable de ces courbes réduites à un point, on peut les inclure dans l'ensemble \mathcal{H}^1 -négligeable du corollaire. \square

La preuve du Lemme 3.37 ne semble pas être facile à adapter aux familles de courbes donc on préfère utiliser le lemme suivant dont la démonstration utilise le même genre d'argument que celle du Lemme 3.39.

Lemme 3.41. *Pour \mathcal{H}^1 -presque tout $x \in \partial^* E$, $\theta(x) \geq 1$.*

Preuve.

Nous prouvons le résultat pour $x \in E^{1/2}$. Pour tout $\delta > 0$ assez petit, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r < r_0$

$$\frac{1}{2} - \delta \leq \frac{|B(x, r) \cap E|}{|B(x, r)|} \leq \frac{1}{2} + \delta.$$

Comme le volume de E dans $B(x, r)$ n'est égal ni à zéro ni à celui de la boule, on a, pour n assez grand, $B(x, r) \cap E_n \neq \emptyset$ et $B(x, r) \not\subset E_n$. Ainsi $(\Gamma_n) \cap B(x, r) \neq \emptyset$. De manière équivalente, il existe $i_r \in \mathbb{N}$ et $s_r \in [0, 1]$ tels que

$$|\gamma_{n, i_r}(s_r) - x| < r.$$

Comme la famille de courbes Γ_n encercle un certain volume près de x , on utilise le même argument que dans la preuve du Lemme 3.37 pour prouver qu'on peut choisir une courbe γ_{n, i_r} telle que sa longueur soit bornée par en-dessous indépendamment de r et de n (mais peut éventuellement dépendre de r_0). Comme précédemment, en prenant $r \rightarrow 0$, $(i_r)_r$ est borné et donc, par compacité, il existe $i \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, 1]$ tels que $\ell(\gamma_i) > 0$ et $\gamma_i(s) = x$. Donc $\theta(x) \geq \theta_i(x) \geq 1$. On conclut en disant que pour un ensemble E ayant un périmètre fini, on a $\mathcal{H}^1(\partial^* E \Delta E^{1/2}) = 0$. \square

Tout comme dans la partie précédente, on calcule

$$\int_{\mathbb{R}^2} \theta(x) d\mathcal{H}^1(x) \geq P(E) + 2\mathcal{H}^1\left((\Gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E})\right).$$

En utilisant une preuve calquée sur celle du Lemme 3.38, on peut voir que $\left((\Gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E})\right) \cup \overline{E}^c$ est équivalent mod \mathcal{H}^1 à un ensemble connexe donc $\mathcal{H}^1\left((\Gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E})\right) \geq St(E)$ et ainsi

$$P(E) + 2St(E) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_C(E_n).$$

3.2. L'inégalité limsup

Soit E un ensemble de périmètre fini, essentiellement borné et tel que $\partial^* E = \partial E$ mod \mathcal{H}^1 . Nous allons montrer dans cette section qu'il existe deux suites d'ensembles $(E_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(F_\varepsilon)_\varepsilon$ convergeant vers E dans L^1 et telles que l'une satisfasse

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P_C(E_\varepsilon) \leq P(E) + 2St(E).$$

et l'autre vérifie

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P_S(F_\varepsilon) \leq P(E) + 2St(E) + 2St_c(E)$$

Cette section est divisée en trois parties. Dans la première, nous construisons les suites (E_ε) et (F_ε) dans le cas où l'ensemble limite E est lisse et a un nombre fini de trous et de composantes connexes. La deuxième est un résultat de densité : nous démontrons

qu'on peut approcher n'importe quel ensemble E du cas général par une suite d'ensembles de la première partie tout en contrôlant les énergies P_S et P_C suffisamment pour obtenir l'inégalité \limsup . La dernière partie est une preuve alternative et directe de l'inégalité ci-dessus pour $\overline{P_C}$.

3.2.1. L'inégalité limsup pour des ensembles réguliers

Soit E un ensemble borné, lisse, de périmètre fini et ayant un nombre fini de trous et de composantes connexes. Ce cas de figure simplifié nous permet d'avoir deux propriétés utiles dans la suite. La première est une propriété d'orthogonalité entre ∂E et les arbres de Steiner. La seconde permet de voir que les arbres de Steiner sont finis.

Propriété 3.42. *Soit E un ensemble borné, lisse et de périmètre fini et soient S et S^c des arbres de Steiner de la Définition 3.31. Si v est un sommet de S ou de S^c tel que $v \in \partial E$ alors v est une feuille et l'arête incidente à v est orthogonale à ∂E en v .*

Preuve.

Soit v' un sommet voisin de v et a une arête entre v et v' . On note γ la courbe fermée régulière recouvrant la composante connexe de ∂E contenant v . Par minimalité, la longueur de a est égale à

$$\min_{x \in (\gamma)} |x - v'|^2.$$

On obtient facilement la condition d'optimalité suivante : le vecteur $x - v'$ est orthogonal à γ en v . Ainsi, par compacité de (γ) il existe un minimiseur x_0 tel que $a = [x_0, v]$ et ainsi a est orthogonale à ∂E en v .

De plus, à l'aide du corollaire 3.25, on peut voir que si v n'est pas une feuille alors son degré est égal à 2. Ainsi ∂E doit être orthogonal aux deux arêtes incidentes à v . Ces arêtes font un angle supérieur ou égal à $2\pi/3$ ainsi ∂E devrait former un angle ce qui est impossible par régularité. Donc v est une feuille. \square

Propriété 3.43. *Soit E un ensemble borné, régulier, de périmètre fini et ayant un nombre fini de trous et de composantes connexes. Les arbres de Steiner S et S^c de la Définition 3.31 sont nécessairement finis.*

Preuve.

Soit S_k une composante connexe de S . D'après le Théorème 3.24, S_k a au plus une feuille par composante connexe de E . Ainsi S_k a un nombre fini de feuilles $\{p_1, \dots, p_N\}$ donc S_k est un arbre de Steiner pour l'ensemble $K = \{p_1, \dots, p_N\}$. En utilisant le Théorème 3.24, S_k est donc un arbre (connexe) fini. Par minimalité, deux composantes connexes de E sont liées par au plus une seule composante connexe S_k donc S admet un nombre fini de composantes connexes. Ainsi S est un arbre fini.

Le même argument peut être appliqué sur S^c en utilisant les trous de E afin de montrer que S^c est lui aussi un arbre fini. \square

Construction pour $\overline{P_C}$.

Soit S une solution du problème (4) pour $\overline{E^1} = \overline{E}$ avec $\mathcal{H}^1(S) < +\infty$. On définit le voisinage tubulaire par

$$S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, S) < \varepsilon\}.$$

Lemme 3.44. *Pour le voisinage tubulaire précédent, on a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |S_\varepsilon| = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}^1(\{x \mid d(x, S) = \varepsilon\}) \leq 2\mathcal{H}^1(S).$$

Preuve.

On note $\varphi(x) = d(x, S)$ la fonction distance à S . Notons que $\varphi(x) = d(x, \overline{S})$ et, comme S n'a pas d'intérieur (topologique), φ coïncide avec la fonction distance signée à S ou à \overline{S} . φ est 1-lipschitzienne ainsi $|\nabla\varphi| = 1$ presque partout dans \mathbb{R}^2 donc, d'après la formule de la co-aire, on a pour tout $r > 0$:

$$|\varphi^{-1}(]-r, r[)| = \int_{\varphi^{-1}(]-r, r[)} |\nabla\varphi| dx = \int_{-r}^r \mathcal{H}^1(\{x \mid \varphi(x) = t\}) dt.$$

En utilisant le Théorème 3.24, on peut voir que S est 1-rectifiable et a ses feuilles sur \overline{E} . S est un arbre fini donc \overline{S} et S diffèrent seulement par un nombre fini de points ainsi \overline{S} est aussi 1-rectifiable et $\mathcal{H}^1(\overline{S}) = \mathcal{H}^1(S)$. Grâce au [65, Théorème 3.2.39], on obtient

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\varphi^{-1}(]-r, r[)|}{2r} = \mathcal{H}^1(\overline{S}) = \mathcal{H}^1(S).$$

Par conséquent $|S_\varepsilon| \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et on peut trouver une suite strictement positive $(\varepsilon_i)_i$ telle que

$$\limsup_{i \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^1(\{x \mid \varphi(x) = \varepsilon_i\}) \leq 2\mathcal{H}^1(S).$$

Ceci termine la démonstration du lemme. □

Pour $\varepsilon > 0$ on définit la famille d'ensembles

$$E_\varepsilon = E \cup S_\varepsilon.$$

Soit v une feuille de S , pour ε assez petit S_ε ressemble au voisinage de v à un demi stade et on peut supposer que la demi boule autour de v est incluse dans un voisinage pour lequel ∂E peut s'écrire comme le graphe d'une fonction lisse autour de v (voir Figure 3.5).

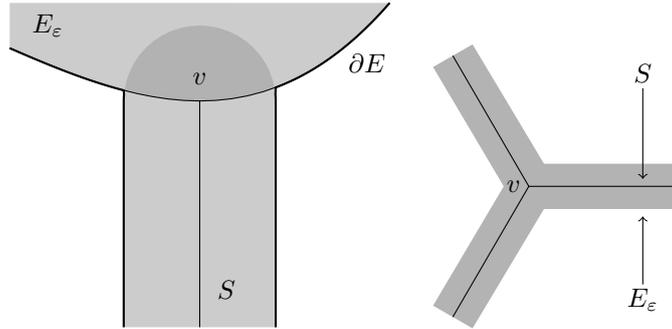


FIGURE 3.5. Près d'un sommet ou d'un point triple.

Si v n'est pas une feuille alors il s'agit d'un point triple et S_ε ressemble à un Y au voisinage de v pour ε assez petit (voir Figure 3.5). Comme S est un arbre fini, on peut choisir ε assez petit pour que toutes les feuilles et tous les points triples soient dans la situation décrite précédemment. De plus, S relie toutes les composantes connexes de $\overline{E^1} = \overline{E}$ donc E_ε est connexe (et indécomposable). Cette construction ne génère qu'un nombre fini (indépendant de ε) de points anguleux dans ∂E_ε ainsi on peut les lisser avec une perturbation arbitrairement petite en volume et en périmètre. Par ailleurs,

$$P(E_\varepsilon) \leq P(E) + P(S_\varepsilon) \leq P(E) + \mathcal{H}^1(\{x \mid d(x, S) = \varepsilon\}).$$

Avec le lemme précédent, nous avons montré la proposition suivante.

Proposition 3.45. $(E_\varepsilon)_\varepsilon$ est une suite d'ensembles lisses et connexes convergeant vers E en topologie L^1 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. De plus, on a

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(E_\varepsilon) \leq P(E) + 2\mathcal{H}^1(S).$$

Construction pour $\overline{P_S}$.

On reste dans le même cas que précédemment pour E . La construction d'une famille d'ensembles lisses et simplement connexes ayant les bonnes propriétés de convergence est très similaire au cas connexe. Dans un premier temps, on construit une suite d'ensembles $(\tilde{E}_\varepsilon)_\varepsilon$ comme précédemment en ajoutant un voisinage tubulaire de S et en ôtant un voisinage tubulaire de S^c . Ces voisinages permettent de relier les composantes connexes de E entre elles et de relier les trous avec l'extérieur de E . Alors que les arguments précédents s'appliquent sans difficulté sur la plupart des cas, une nouvelle difficulté se montre. Pour $\overline{P_S}$ il se peut que S et S^c aient une feuille en commun et ainsi les voisinages tubulaires se recourent mal. Pour palier ce problème, nous introduisons une légère modification du bord de \tilde{E}_ε pour construire la suite (F_ε) qui nous intéresse.

On définit

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, S) \leq \varepsilon\} \setminus E, \\ U_\varepsilon^c &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, S^c) < \varepsilon\} \cap E \end{aligned}$$

où S et S^c sont des arbres de Steiner de la Définition 3.31 satisfaisant $\mathcal{H}^1(S \cup S^c) < +\infty$ et

$$\tilde{E}_\varepsilon = (E \cup U_\varepsilon) \setminus U_\varepsilon^c$$

(voir Figure 3.6).

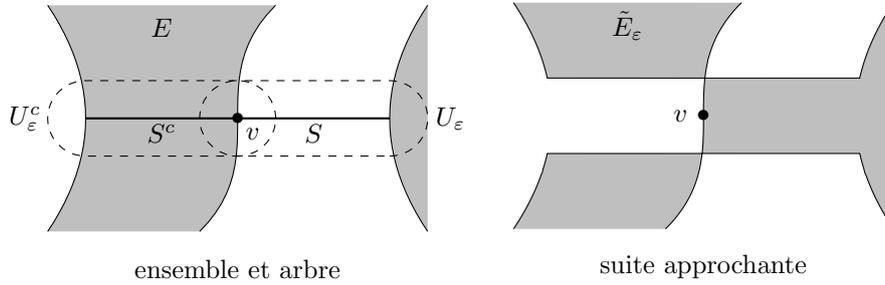


FIGURE 3.6. Construction de $\partial\tilde{E}_\varepsilon$.

Proposition 3.46. $\tilde{E}_\varepsilon \rightarrow E$ dans L^1 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\tilde{E}_\varepsilon) \leq P(E) + 2St(E) + 2St_c(E).$$

Preuve.

La preuve est exactement la même que celle de $\overline{P_C}$ en utilisant

$$|U_\varepsilon| \leq \left| \left\{ \{x \mid d(x, S) \leq \varepsilon\} \right\} \right|, \quad |U_\varepsilon^c| \leq \left| \left\{ \{x \mid d(x, S^c) < \varepsilon\} \right\} \right|$$

et

$$P(E_\varepsilon) \leq P(E) + \mathcal{H}^1(\{x \mid d(x, S) = \varepsilon\}) + \mathcal{H}^1(\{x \mid d(x, S^c) = \varepsilon\}).$$

□

Notons que si v est une feuille de S et de S^c alors les arêtes incidentes sont toutes deux orthogonales à ∂E en v . Ainsi ces arêtes sont parallèles (voir Figure 3.7).

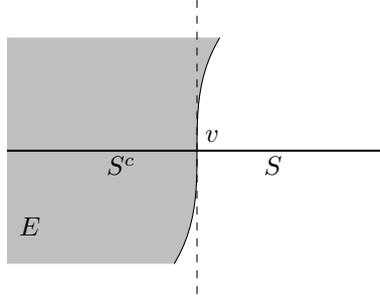


FIGURE 3.7. Près d'un sommet commun de S et de S^c .

Nous modifions maintenant $\partial \tilde{E}_\varepsilon$ afin de relier à la fois U_ε avec les composantes connexes de E et U_ε^c avec les trous et l'extérieur de E .

♣ *Cas 1* : soit v_1 et v_2 deux feuilles de $S \setminus S^c$ appartenant à la même composante connexe de S (cas similaire à celui de la Figure 3.5). Cette composante connexe est sans cycle donc v_1 et v_2 appartiennent à deux composantes connexes différentes de E . Par conséquent ces composantes sont liées par l'ouvert U_ε . En raisonnant de manière similaire sur S^c on peut voir que U_ε connecte bien les trous et l'extérieur de E . Pour les points triples, le même argument que dans la démonstration pour $\overline{P_C}$ peut être appliqué.

♣ *Cas 2* : soit v un sommet commun à S et à S^c . On suppose d'abord que les sommets voisins de v (ceux de S et ceux de S^c) sont dans $S \Delta S^c$. On modifie légèrement \tilde{E}_ε en un ensemble noté F_ε comme sur la Figure 3.8 dans le but de relier conjointement les composantes connexes de E d'une part et les trous et l'extérieur de E d'autre part. Grâce à l'orthogonalité des arbres avec ∂E , on peut voir que cette modification locale peut être faite en réduisant le périmètre et en perturbant le volume d'un facteur d'ordre ε^2 (voir Figure 3.8). Ainsi, on a localement $P(F_\varepsilon) \leq P(\tilde{E}_\varepsilon)$ et $|F_\varepsilon \Delta \tilde{E}_\varepsilon| \leq \varepsilon^2$.

Remarquons que sur la Figure 3.8, dans F_ε , les deux composantes connexes de \tilde{E}_ε sont reliées ainsi que les deux trous. En effet la suite approchante \tilde{E}_ε coupe une composante connexe de E seulement une fois car S et S^c sont sans cycle. De la même manière, un pont de F_ε dans un trou de E ne le sépare pas en plusieurs trous.

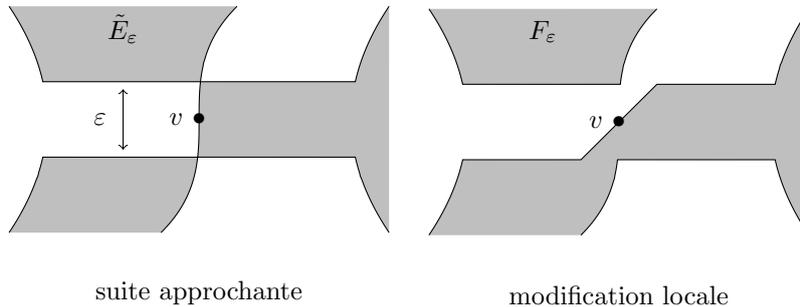


FIGURE 3.8. Construction de F_ε - un sommet.

♣ *Cas 3* : soit v et v' deux sommets voisins de $S \cap S^c$. On peut faire une construction similaire au cas 2 (voir Figure 3.9). S'il y a plusieurs sommets chacun à distance 1 (dans l'arbre) du suivant et du précédent alors on peut faire la même construction que pour $\overline{P_C}$.

♣ *Conclusion* : comme précédemment, il n'y a qu'un nombre fini de sommets donc on peut choisir ε assez petit pour que les constructions soient valables sur tous les sommets. De

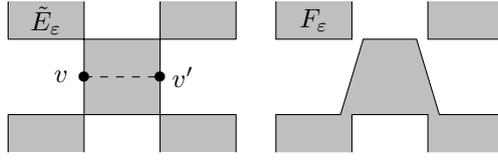


FIGURE 3.9. Construction de F_ε - deux sommets.

même, ces constructions ne génèrent qu'un nombre fini de points anguleux qu'on peut lisser en perturbant peu le périmètre et le volume. Ceci permet d'avoir la proposition suivante.

Proposition 3.47. $(F_\varepsilon)_\varepsilon$ est une suite d'ensembles lisses et simplement connexes convergant vers E dans L^1 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. De plus, on a

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(F_\varepsilon) \leq P(E) + 2\mathcal{H}^1(S) + 2\mathcal{H}^1(S^c).$$

3.2.2. L'inégalité limsup par approximation

Soit E un ensemble essentiellement borné, de périmètre fini et satisfaisant $\partial E = \partial^* E \bmod \mathcal{H}^1$. On approche E par des ensembles réguliers ayant un nombre fini de trous et de composantes connexes. On commence par remplir les petits trous et enlever les petites composantes indécomposables de E . On approche ensuite l'ensemble obtenu par l'intérieur à l'aide du Théorème 3.18. Le "petit" précédent est quantifié avec les notations suivantes.

On note

- Y_i , pour $i \in I$, les composantes indécomposables de E données par le Théorème 3.11 ;
- $T_{i,j}$, pour $j \in J_i$, les trous de Y_i ;
- $J_{i,\varepsilon}$ un sous-ensemble de J_i , servant à indiquer les petits trous de Y_i , tel que
 - $J_i \setminus J_{i,\varepsilon}$ est fini ;
 - $\sum_{j \in J_{i,\varepsilon}} P(T_{i,j}) < \varepsilon^2$;
- $\tilde{Y}_i = Y_i \cup \left(\bigcup_{j \in J_{i,\varepsilon}} T_{i,j} \right)$, le remplissage des petits trous de Y_i ;
- $I_\varepsilon = \{i \in I \mid |\tilde{Y}_i| > 2\varepsilon\}$ les indices des composantes indécomposables de E "pas trop petites" ;
- $Y_{i,\varepsilon}$, pour $i \in I_\varepsilon$, une approximation par l'intérieur donnée par le Théorème 3.18 de \tilde{Y}_i avec le paramètre $\delta = \varepsilon^3$;
- $N_\varepsilon = \text{card}(I_\varepsilon)$;
- $E_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} Y_{i,\varepsilon}$.

Notons que $J_{i,\varepsilon}$ existe car $\sum_{j \in J_i} P(T_{i,j}) \leq P(E) < +\infty$ et $P(T_{i,j}) > 0$. De plus, pour $\varepsilon < 1$ on a $P(T_{i,j}) < 1$ pour $j \in J_{i,\varepsilon}$ ainsi, par l'inégalité isopérimétrique, on a

$$\sum_{j \in J_{i,\varepsilon}} |T_{i,j}| \leq \frac{1}{4\pi} \sum_{j \in J_{i,\varepsilon}} P(T_{i,j})^2 \leq \frac{1}{4\pi} \sum_{j \in J_{i,\varepsilon}} P(T_{i,j}) \leq \frac{1}{4\pi} \varepsilon^2.$$

De plus, la condition $P(E) = \mathcal{H}^1(\partial E)$ se transmet aux composantes indécomposables Y_i et, en utilisant le Lemme 3.15, on peut supposer, sans perte de généralité, que Y_i est ouvert.

Lemme 3.48. On a $\varepsilon N_\varepsilon \leq |E|$ (pour $\varepsilon < 4\pi$), $P(E_\varepsilon) \leq P(E) + \varepsilon^3 N_\varepsilon$ et

$$E_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E \quad \text{dans } L^1.$$

Preuve.

Pour commencer, on a pour tout $i \in I_\varepsilon$ et $\varepsilon < 4\pi$, $2\varepsilon < |\tilde{Y}_i| = |Y_i| + \sum_{j \in J_{i,\varepsilon}} |T_{i,j}| \leq |Y_i| + \frac{1}{4\pi}\varepsilon^2$

ainsi $|Y_i| > \varepsilon$. Donc

$$\varepsilon N_\varepsilon \leq \sum_{i \in I_\varepsilon} |Y_i| \leq \sum_{i \in I} |Y_i| \leq |E|.$$

Deuxièmement, comme $P(\tilde{Y}_i) \leq P(Y_i)$ puisqu'on a rempli certains trous pour passer de Y_i à \tilde{Y}_i , on calcule

$$\begin{aligned} P(E_\varepsilon) &\leq \sum_{i \in I_\varepsilon} P(Y_{i,\varepsilon}) &\leq \sum_{i \in I_\varepsilon} (P(\tilde{Y}_i) + \varepsilon^3) \\ &\leq \sum_{i \in I_\varepsilon} P(Y_i) + \varepsilon^3 N_\varepsilon &\leq \sum_{i \in I} P(Y_i) + \varepsilon^3 N_\varepsilon \\ &\leq P(E) + \varepsilon^3 N_\varepsilon. \end{aligned}$$

Concernant le dernier item, on a $E = \bigcup_{i \in I} Y_i$ et $E_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} Y_{i,\varepsilon}$ ainsi

$$|E \Delta E_\varepsilon| \leq \sum_{i \in I \setminus I_\varepsilon} |Y_i| + \sum_{i \in I_\varepsilon} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i,\varepsilon}| + \sum_{\substack{i \in I_\varepsilon \\ j \in J_{i,\varepsilon}}} |T_{i,j}|.$$

La première somme provient des “petites” composantes de E qu'on a enlevées. En fait, prendre \tilde{Y}_i serait plus naturel que prendre Y_i , mais ça ne change rien car enlever Y_i à E revient au même qu'enlever \tilde{Y}_i puisque les trous de Y_i sont les trous de E . La deuxième somme provient de l'approximation par l'intérieur et la troisième provient du remplissage des trous des composantes “pas trop petites” Y_i .

Comme $\sum_{i \in I \setminus I_\varepsilon} |Y_i|$ est le reste de la série absolument convergente $\sum_{i \in I} |Y_i| = |E|$, on a

$$\sum_{i \in I \setminus I_\varepsilon} |Y_i| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

D'après le Théorème 3.18, on a $\tilde{Y}_i \Delta Y_{i,\varepsilon} \subset \mathcal{N}_{\varepsilon^3}(\partial \tilde{Y}_i)$ et en utilisant [65, Théorème 3.2.39], on obtient lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$|\mathcal{N}_{\varepsilon^3}(\partial \tilde{Y}_i)| \sim 2\varepsilon^3 \mathcal{H}^1(\partial \tilde{Y}_i) = 2\varepsilon^3 P(\tilde{Y}_i) \leq 2\varepsilon^3 P(E)$$

puisque ∂Y_i est \mathcal{H}^1 -rectifiable. De plus

$$\sum_{i \in I_\varepsilon} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i,\varepsilon}| \leq |\text{sat}(E)| < +\infty$$

ainsi

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i \in I_\varepsilon} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i,\varepsilon}| < +\infty.$$

On note $(\varepsilon_h)_h$ une sous-suite telle que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i \in I_\varepsilon} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i,\varepsilon}| = \lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_{\varepsilon_h}} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i,\varepsilon_h}|.$$

Pour tout $\eta > 0$, il existe $H > 0$ tel que pour tout $h > H$, $\sum_{i \in I_{\varepsilon_h} \setminus I_{\varepsilon_H}} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i,\varepsilon_h}| < \eta/2$.

L'ensemble I_{ε_H} est fini et $I_{\varepsilon_H} \subset I_{\varepsilon_h}$ donc pour h assez grand

$$\sum_{i \in I_{\varepsilon_H}} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i,\varepsilon_h}| \leq 2\varepsilon_h^3 N_{\varepsilon_H} P(E) \leq 2\varepsilon_h^3 N_{\varepsilon_H} P(E).$$

En choisissant h suffisamment grand pour avoir $2N_{\varepsilon_h} \varepsilon_h^3 P(E) < \eta/2$ on obtient

$$\sum_{i \in I_{\varepsilon_h}} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i, \varepsilon_h}| \leq \sum_{i \in I_{\varepsilon_H}} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i, \varepsilon_h}| + \sum_{i \in I_{\varepsilon_h} \setminus I_{\varepsilon_H}} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i, \varepsilon_h}| < \eta.$$

Ainsi

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i \in I_\varepsilon} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i, \varepsilon}| = \lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_{\varepsilon_h}} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i, \varepsilon_h}| < \eta.$$

Par conséquent, en prenant $\eta \rightarrow 0$, on a

$$\sum_{i \in I_\varepsilon} |\tilde{Y}_i \Delta Y_{i, \varepsilon}| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Enfin,

$$\sum_{\substack{i \in I_\varepsilon \\ j \in J_{i, \varepsilon}}} |T_{i, j}| \leq \frac{1}{4\pi} \varepsilon^2 N_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

donc

$$E_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E \quad \text{in } L^1.$$

□

Soit S un arbre de Steiner de $\overline{E^1}$, nous construisons S_ε , un ensemble de dimension 1, qui relie les composantes connexes de E_ε . Il y a trois points particuliers auxquels il faut faire attention. En premier lieu, nous devons allonger certaines arêtes de S afin d'atteindre le bord de $Y_{i, \varepsilon}$ qui est en retrait par rapport à celui de Y_i . Ensuite, si deux composantes indécomposables de E sont reliées par S à travers des composantes enlevées (car "trop petites") alors il faut assurer cette connexion pour S_ε . Nous pouvons le faire en utilisant les bords des composantes enlevées. Enfin, si le bord de deux composantes de E ont un point commun alors les composantes correspondantes de E_ε sont à une distance positive. Comme ce cas de figure n'est pas vu par S , nous devons ajouter un petit segment afin d'assurer la connexion.

Pour $k \in I^S$, on note S_k^* , la composante connexe de

$$S \cup \left(\bigcup_{i \in I \setminus I_\varepsilon} \partial \tilde{Y}_i \right)$$

telle qu'il existe au moins deux indices distincts $i, j \in I_\varepsilon$ tels que S_k^* relie Y_i et Y_j . On note

- $I_k^S = \{i \in I \setminus I_\varepsilon \mid \partial \tilde{Y}_i \subset S_k^*\}$;
- S_k les composantes connexes de S impliquées dans S_k^* .

On a $\text{card}(I^S) \leq N_\varepsilon^2$, en effet, dans le cas contraire, en utilisant le principe des tiroirs, il existerait deux indices distincts $i, j \in I_\varepsilon$ et deux indices distincts $k, k' \in I^S$ tels que S_k^* et $S_{k'}^*$ connectent chacun Y_i et Y_j . Ceci signifierait qu'il existe un cycle dans S et ce n'est pas possible par minimalité des arbres de Steiner.

♣ *Cas 1* : on définit $I_{k, \varepsilon} = \{i \in I_\varepsilon \mid S_k^* \text{ est relié à } Y_i\}$. Pour $i \in I_{k, \varepsilon}$, comme $\tilde{Y}_i \Delta Y_{i, \varepsilon} \subset \mathcal{N}_{\varepsilon^3}(\partial \tilde{Y}_i) \subset \mathcal{N}_{\varepsilon^3}(\partial Y_i)$, on peut relier S_k à $Y_{i, \varepsilon}$ en utilisant un segment de longueur au plus égale à ε^3 . On note $S_{k, \varepsilon}$ la réunion de tous ces segments (pour $i \in I_{k, \varepsilon}$) et de S_k . On obtient

$$\mathcal{H}^1(S_{k, \varepsilon}) \leq \mathcal{H}^1(S_k) + \sum_{i \in I_k^S} P(\tilde{Y}_i) + \text{card}(I_{k, \varepsilon}) \varepsilon^3.$$

♣ *Cas 2* : On définit $I_\varepsilon^2 = \{(i, j) \in I_\varepsilon \times I_\varepsilon \mid i \neq j, \overline{Y}_i \cap \overline{Y}_j \neq \emptyset\}$. Pour $(i, j) \in I_\varepsilon^2$ l'arbre de Steiner S ne voit pas la connexion $Y_i \leftrightarrow Y_j$ (c'est à dire ne les connecte pas)

donc l'ensemble $Y_{i,\varepsilon}$ correspondant et $Y_{j,\varepsilon}$ ne sont pas reliés par S comme dans le cas 1. Cependant, le Théorème 3.18 nous donne

$$\tilde{Y}_i \Delta Y_{i,\varepsilon} \subset \mathcal{N}_{\varepsilon^3}(\partial \tilde{Y}_i) \cap \mathcal{N}_{\varepsilon^3}(\partial Y_{i,\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \tilde{Y}_j \Delta Y_{j,\varepsilon} \subset \mathcal{N}_{\varepsilon^3}(\partial \tilde{Y}_j) \cap \mathcal{N}_{\varepsilon^3}(\partial Y_{j,\varepsilon}).$$

Par conséquent on peut trouver un segment $S_{ij,\varepsilon}$ reliant $Y_{i,\varepsilon}$ et $Y_{j,\varepsilon}$ ayant une longueur d'au plus $2\varepsilon^3$.

♣ *Conclusion* : on définit

$$S_\varepsilon = \left(\bigcup_{k \in I^S} S_{k,\varepsilon} \right) \cup \left(\bigcup_{(i,j) \in I_\varepsilon^2} S_{ij,\varepsilon} \right).$$

S_ε relie tous les $Y_{i,\varepsilon}$ pour $i \in I_\varepsilon$, ainsi

$$\begin{aligned} St(E_\varepsilon) &\leq \mathcal{H}^1(S_\varepsilon) \leq \sum_{k \in I^S} \mathcal{H}^1(S_{k,\varepsilon}) + \sum_{(i,j) \in I_\varepsilon^2} \mathcal{H}^1(S_{ij,\varepsilon}) \\ &\leq \sum_{k \in I^S} \mathcal{H}^1(S_k) + \sum_{\substack{k \in I^S \\ i \in I_k^S}} P(\tilde{Y}_i) + \sum_{k \in I^S} \varepsilon^3 \text{card}(I_{k,\varepsilon}) + 2\varepsilon^3 \text{card}(I_\varepsilon^2) \\ &\leq \mathcal{H}^1(S) + \sum_{i \in I \setminus I_\varepsilon} P(\tilde{Y}_i) + \varepsilon^3 \text{card}(I^S) \text{card}(I_\varepsilon) + 2\varepsilon^3 \text{card}(I_\varepsilon) \\ &\leq \mathcal{H}^1(S) + \sum_{i \in I \setminus I_\varepsilon} P(Y_i) + \varepsilon^3 N_\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 N_\varepsilon. \end{aligned}$$

Concernant les trous de E , on utilise S^c (un arbre de steiner de $\overline{E^0}$), mais il est en fait plus facile de relier les trous de E_ε que les composantes connexes. En effet comme le bord de E_ε est en retrait par rapport à celui de E , les trous et l'extérieur de E sont agrandis dans E_ε (c'est-à-dire qu'un trou de E est inclus dans un trou de E_ε , de même pour l'extérieur de E). Ainsi la connexion induite par S^c est toujours une connexion valable pour les trous et l'extérieur de E_ε . Il reste simplement à prendre en compte les trous remplis entre Y_i et \tilde{Y}_i , on traite ce cas de la même manière que les composantes indécomposables "trop petites" précédentes.

On note

$$S_\varepsilon^c = S^c \cup \left(\bigcup_{\substack{i \in I_\varepsilon \\ j \in J_{i,\varepsilon}}} \partial T_{i,j} \right).$$

Si $T_{i,j}$ est un trou de Y_i alors soit il est rempli dans \tilde{Y}_i , soit il rencontre (et fusionne avec) $\text{ext}(E_\varepsilon)$, soit il est inclus dans un trou de $Y_{i,\varepsilon}$. Par conséquent le chemin entre les trous de E_ε ou un trou et $\text{ext}(E_\varepsilon)$ est construit soit sur des trous remplis de E dont les bords appartiennent à S_ε^c à travers $\partial T_{i,j}$, soit sur S^c , soit sur les trous restants dans $Y_{i,\varepsilon}$. Ainsi S_ε^c relie les trous de E_ε avec $\text{ext}(E_\varepsilon)$. Par conséquent

$$St_c(E_\varepsilon) \leq \mathcal{H}^1(S_\varepsilon^c) \leq \mathcal{H}^1(S^c) + \sum_{\substack{i \in I_\varepsilon \\ j \in J_{i,\varepsilon}}} P(T_{i,j}) < \mathcal{H}^1(S_\varepsilon^c) + \varepsilon^2 N_\varepsilon.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} P(E_\varepsilon) + 2St(E_\varepsilon) + 2St_c(E_\varepsilon) &\leq P(E) + 2St(E) + 2St_c(E) \\ &\quad + \varepsilon^3 N_\varepsilon + 2\varepsilon^3 N_\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 N_\varepsilon + 2 \sum_{i \in I \setminus I_\varepsilon} P(Y_i) + 2\varepsilon^3 N_\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme précédemment, $\sum_{i \in I \setminus I_\varepsilon} P(Y_i)$ est le reste d'une série absolument convergente ainsi il disparaît à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Donc

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(E_\varepsilon) + 2St(E_\varepsilon) \leq P(E) + 2St(E)$$

et

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(E_\varepsilon) + 2St(E_\varepsilon) + 2St_c(E_\varepsilon) \leq P(E) + 2St(E) + 2St_c(E).$$

3.2.3. Une preuve directe pour l'inégalité limsup de $\overline{P_C}$.

Dans cette partie nous donnons une preuve alternative de l'inégalité limsup pour $\overline{P_C}$ qui repose sur des propriétés des ensembles indécomposables. On se donne toujours un ensemble E essentiellement borné, de périmètre fini et satisfaisant $\partial E = \partial^* E \pmod{\mathcal{H}^1}$. Nous construisons une suite $(E_\varepsilon)_\varepsilon$ d'ensembles indécomposables satisfaisant

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(E_\varepsilon) \leq P(E) + 2St(E) + 2St_c(E).$$

La construction est très similaire au cas régulier précédent et utilise encore un voisinage tubulaire d'un arbre de Steiner pour connecter les composantes indécomposables. Cependant, il est possible que deux composantes indécomposables E_i et E_j se touchent (c'est-à-dire $\overline{E_i} \cap \overline{E_j} \neq \emptyset$). Cette intersection ayant une longueur \mathcal{H}^1 nulle, elle n'est pas vue par l'arbre de Steiner. C'est pourquoi nous ajoutons des petites boules au niveau de certaines intersections afin de relier les composantes indécomposables avec du volume (voir Figure 3.10).

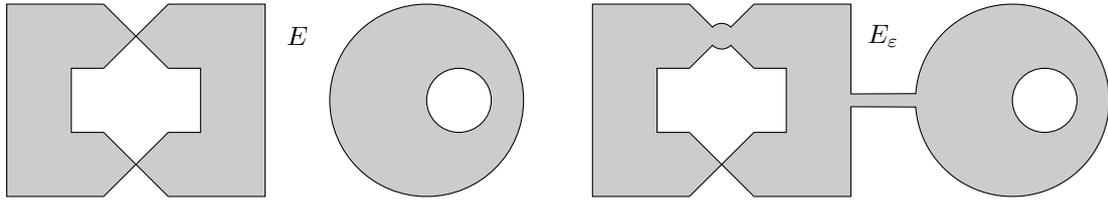


FIGURE 3.10. Construction de E_ε - cas direct.

Soit $(\gamma_i)_{i \in I}$ une famille de courbes de Jordan lipschitziennes données par le Lemme 3.13. Soit $(x_{ij})_{ij}$ une famille de points de $(\gamma_i) \cap (\gamma_j)$ avec $i \neq j$ lorsque l'intersection n'est pas vide. $(x_{ij})_{ij}$ est indexée par un sous-ensemble de $I \times I$ ainsi cette famille est au plus dénombrable. Quitte à réindexer la famille, on peut supposer que cette famille est donnée par $(x_k)_{k \in I_E}$ où I_E est un intervalle \mathbb{N} contenant 0.

Lemme 3.49. *Soit A un ensemble indécomposable et Γ une famille de courbes couvrant $\partial^* A$. Si $x \in (\Gamma)$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $A \cup B(x, \varepsilon)$ est indécomposable.*

Preuve.

On utilise la Proposition 3.6, il suffit ainsi de prouver que $|A \cap B(x, \varepsilon)| > 0$. On note γ une courbe de longueur non nulle dans Γ telle que $x \in (\gamma)$. Par contradiction, supposons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $|A \cap B(x, \varepsilon_0)| = 0$. Ainsi $B(x, \varepsilon_0) \subset A^0$ et par conséquent $\partial^* A \cap B(x, \varepsilon_0) = \emptyset$. Cependant soit $(\gamma) \subset B(x, \varepsilon_0)$, soit $\mathcal{H}^1((\gamma) \cap B(x, \varepsilon_0)) \geq \varepsilon_0$. Ainsi $\mathcal{H}^1((\gamma) \cap B(x, \varepsilon_0)) > 0$ et $\mathcal{H}^1(\partial^* A \cap B(x, \varepsilon_0)) = 0$ ce qui contredit $\partial^* A = (\Gamma) \pmod{\mathcal{H}^1}$. Donc le lemme est prouvé. \square

Soit S un arbre de Steiner de $\overline{E^1}$ avec $\mathcal{H}^1(S) < +\infty$. On définit un voisinage tubulaire

$$S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, S) < \varepsilon\}.$$

Lemme 3.50. *On a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |S_\varepsilon| = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}^1(\{x \mid d(x, S) = \varepsilon\}) \leq 2\mathcal{H}^1(S).$$

Preuve.

On note $\varphi(x) = d(x, S)$ la fonction distance à S . Notons que, comme l'intérieur topologique de S est vide, φ coïncide avec la fonction distance signée à \overline{S} . De plus φ est lipschitzienne et $|\nabla\varphi| = 1$ presque partout dans \mathbb{R}^2 ainsi, en utilisant la formule de la co-aire, on a pour tout $r > 0$:

$$|\varphi^{-1}(]-r, r[)| = \int_{\varphi^{-1}(]-r, r[)} |\nabla\varphi| dx = \int_{-r}^r \mathcal{H}^1(\{x \mid \varphi(x) = t\}) dt.$$

En utilisant le Théorème 3.24, on peut voir que S est \mathcal{H}^1 -rectifiable et a ses feuilles sur \overline{E} . De plus, chaque composante connexe de S a au plus une feuille par composante indécomposable de E qui sont en nombre au plus dénombrable. S ayant un nombre au plus dénombrable de composantes connexes, on en déduit que \overline{S} et S diffèrent par un ensemble de points au plus dénombrable donc \overline{S} est \mathcal{H}^1 -rectifiable et $\mathcal{H}^1(\overline{S}) = \mathcal{H}^1(S)$. On utilise ensuite le [65, Théorème 3.2.39] pour obtenir

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\varphi^{-1}(]-r, r[)|}{2r} = \mathcal{H}^1(\overline{S}) = \mathcal{H}^1(S).$$

par conséquent $|S_\varepsilon| \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et on peut trouver une suite de réels $\varepsilon_i > 0$ tels que

$$\limsup_{i \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^1(\{x \mid \varphi(x) = \varepsilon_i\}) \leq 2\mathcal{H}^1(S).$$

Ceci termine la preuve du lemme. □

Pour $\varepsilon > 0$ on définit la famille d'ensembles

$$E_\varepsilon = E \cup S_\varepsilon \cup \bigcup_{k \in I_E} B(x_k, \varepsilon/2^k).$$

Proposition 3.51. *E_ε est indécomposable, $E_\varepsilon \rightarrow E$ dans L^1 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(E_\varepsilon) \leq P(E) + 2St(E).$$

Preuve.

On note

$$B_\varepsilon = \bigcup_{k \in I_E} B(x_k, \varepsilon/2^k).$$

Il est facile de voir que $|B_\varepsilon| \rightarrow 0$ et $P(B_\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ ainsi

$$|E_\varepsilon \Delta E| \leq |B_\varepsilon| + |S_\varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Ceci nous donne la convergence de E_ε vers E . Pour le périmètre, on a

$$P(E_\varepsilon) \leq P(E) + P(B_\varepsilon) + P(S_\varepsilon)$$

et, comme $\partial S_\varepsilon \subset \{x \mid d(x, S) = \varepsilon\}$, on a

$$P(S_\varepsilon) \leq \mathcal{H}^1(\{x \mid d(x, S) = \varepsilon\}).$$

Par conséquent, en prenant la lim sup dans l'inégalité de $P(E_\varepsilon)$ on obtient

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(E_\varepsilon) \leq P(E) + 2\mathcal{H}^1(S)$$

qui est l'énoncé du lemme en voyant que $\mathcal{H}^1(S) = St(E)$.

Il reste à prouver que E_ε est indécomposable. Le point clef pour montrer cette propriété est de voir que les composantes indécomposables de E sont liées entre elles par un peu de volume provenant soit de S_ε , soit de B_ε . Comme il y a un nombre au plus dénombrable de composantes indécomposables et de points x_k , on peut utiliser le Lemme 3.49. Soit E_1 une composante indécomposable E , on note $(S_p^1)_{p \in I_{S^1}}$ les composantes connexes de S telles qu'un sommet de S_p^1 appartienne à $\overline{E_1}$ et $(x_{k_s^1})_{s \in I_{E_1}}$ les points de la famille $(x_k)_k$ appartenant à une courbe recouvrant $\partial^* E_1$. Comme I_{S^1} et I_{E_1} sont dénombrables et que le contact avec E_1 se fait via une boule $(B(x_{k_s^1}, \varepsilon/2^{k_s^1}))$ pour I_{E_1} et $B(v_p, \varepsilon)$ pour I_{S^1} où v_p est un sommet de S_p^1 appartenant à $\overline{E_1}$ on peut utiliser de Lemme 3.49 de manière récurrente avec la Proposition 3.6 pour montrer que

$$E_{1,\varepsilon} = E_1 \cup S_\varepsilon^1 \cup \bigcup_{s \in I_{E_1}} B(x_{k_s^1}, \varepsilon/2^{k_s^1})$$

est indécomposable (avec $S_\varepsilon^1 = \{x \mid d(x, S^1) < \varepsilon\}$). Notons que

$$P(E_{1,\varepsilon}) \leq P(E_1) + \mathcal{H}^1(\{x \mid d(x, S^1) = \varepsilon\}) + \sum_{s \in I_{E_1}} P(B(x_{k_s^1}, \varepsilon/2^{k_s^1})).$$

Une fois que $E_{q,\varepsilon}$ est construit, on considère E_{q+1} la réunion des composantes indécomposables de E touchant soit $(x_{k_s^q})_{s \in I_{E_q}}$, soit S^q . On construit comme précédemment un ensemble indécomposable

$$E_{q+1,\varepsilon} = E_{q,\varepsilon} \cup E_{q+1} \cup S_\varepsilon^{q+1} \cup \bigcup_{s \in I_{E_{q+1}}} B(x_{k_s^{q+1}}, \varepsilon/2^{k_s^{q+1}}).$$

Notons que

$$\begin{aligned} P(E_{q+1,\varepsilon}) &\leq P(E_{q,\varepsilon}) + P(E_{q+1}) + \mathcal{H}^1(\{x \mid d(x, S^{q+1}) = \varepsilon\}) \\ &\quad + \sum_{s \in I_{E_{q+1}}} P(B(x_{k_s^{q+1}}, \varepsilon/2^{k_s^{q+1}})) \\ &\leq \sum_{r=1}^{q+1} P(E_r) + \sum_{r=1}^{q+1} \mathcal{H}^1(\{x \mid d(x, S^r) = \varepsilon\}) + \sum_{r=1}^{q+1} \sum_{s \in I_{E_r}} P(B(x_{k_s^r}, \varepsilon/2^{k_s^r})) \\ &\leq P(E) + \mathcal{H}^1(\{x \mid d(x, S) = \varepsilon\}) + \sum_{k \in I_E} P(B(x_k, \varepsilon/2^k)) < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, $(E_{q,\varepsilon})_q$ est une suite croissante d'ensembles indécomposables ayant un périmètre uniformément borné et dont la réunion est égale à E_ε . Donc E_ε est indécomposable. \square

4. Application - Interaction coulombienne

À titre d'illustration de l'utilité des énergies $\overline{P_C}$ et $\overline{P_S}$ par rapport au périmètre, nous étudions un résultat d'existence dans un problème d'optimisation. Dans \mathbb{R}^2 , on considère la minimisation de l'énergie suivante.

$$(5) \quad \min_{|E|=m} P(E) + \iint_{E \times E} \frac{dx dy}{|x - y|^\alpha}$$

où $m > 0$ et $\alpha \in]0, 2[$. Cette énergie est utilisée, entre autres, pour modéliser l'interaction coulombienne de répulsion dans une goutte de liquide chargé. L'idée d'une telle énergie est d'avoir un terme local (le périmètre) voulant agglomérer les particules en compétition avec un terme non local et répulsif cherchant à éparpiller le plus possible les particules. Des résultats de [83] concernant la minimisation de cette énergie sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 3.52 ([83, Théorèmes 2.2, 2.3, 2.5 et 2.7]).

- Si E est un minimiseur de (5) alors ∂E est de classe $C^{2,\beta}$ (avec $0 < \beta < 1$) et E est connexe avec un nombre fini de trous.
- Il existe $m_1(\alpha) > 0$ tel que pour tout $m \leq m_1(\alpha)$, (5) admet une solution.
- Il existe $m_0(\alpha) > 0$ tel que pour tout $m \leq m_0(\alpha)$, la solution de (5) est unique et correspond au disque ayant le bon volume.
- Il existe $m_2(\alpha) > 0$ tel que pour tout $m > m_2(\alpha)$, (5) n'a pas de solution.
- Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha \leq \alpha_0$, $m_0(\alpha) = m_1(\alpha) = m_2(\alpha)$.

Ce théorème est illustré par la Figure 3.11.

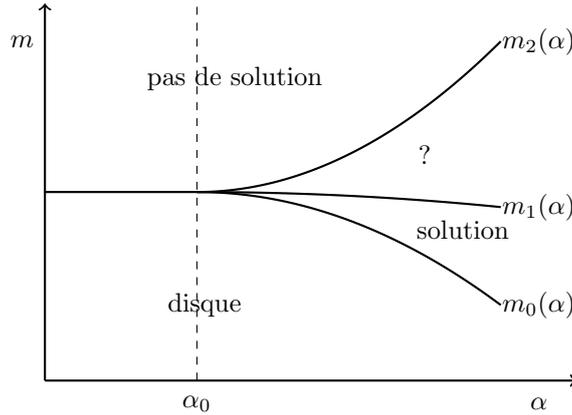


FIGURE 3.11. Illustration du Théorème 3.52.

Avec le périmètre classique, les ensembles d'une suite minimisante de (5) ont tendance à se séparer en deux composantes connexes pour les gros volumes et à s'éloigner le plus possible l'une de l'autre afin de diminuer le terme non local. Ce phénomène empêche la suite minimisante de converger. En utilisant $\overline{P_C}$ ou $\overline{P_S}$ dans (5), on induit un peu de connexité qui empêche les composantes connexes de trop s'éloigner dans la suite minimisante. On peut alors montrer un résultat d'existence pour tout $\alpha \in]0, 2[$ et pour tout $m > 0$.

On note

$$\mathcal{F}(E) = P(E) + \iint_{E \times E} \frac{dx dy}{|x - y|^\alpha}$$

et

$$\mathcal{F}_C(E) = \overline{P_C}(E) + \iint_{E \times E} \frac{dx dy}{|x - y|^\alpha}.$$

La preuve d'existence de minimiseur de \mathcal{F}_C tient au fait que $\overline{P_C}$ induit une borne sur le diamètre de l'ensemble. Par compacité dans BV on obtient un ensemble limite en topologie L^1 et l'énergie passe à la limite sans difficulté.

Lemme 3.53.

$$E \mapsto \iint_{E \times E} \frac{dx dy}{|x - y|^\alpha}$$

est continue pour la topologie $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Preuve.

La preuve se résume à un exercice d'intégration.

(1) Montrer que $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{|x - y|^\alpha}$ appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$.

f est mesurable et positive dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ et pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $y \in B(0, R)$ on a

$$\begin{aligned} \int_{B(0, R)} \frac{dy}{|x - y|^\alpha} &= \int_{\substack{B(0, R) \\ |x - y| > 1}} \frac{dy}{|x - y|^\alpha} + \int_{\substack{B(0, R) \\ |x - y| \leq 1}} \frac{dy}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq |B(0, R)| + \int_{B(0, 1)} \frac{dy}{|y|^\alpha} < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction

$$x \mapsto \int_{B(0, R)} \frac{dy}{|x - y|^\alpha}$$

est intégrable sur tout compact donc, par le Théorème de Fubini-Tonelli, f est bien intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que pour tout ensemble $A, B \subset \mathbb{R}^2$,

$$(A \times A) \Delta (B \times B) = \left((A \setminus B) \times A \right) \cup \left((A \cap B) \times (A \Delta B) \right) \cup \left((B \setminus A) \times B \right).$$

On montre cette inégalité par double inclusion.

– Si $x \in (A \times A) \Delta (B \times B)$ alors, par symétrie on peut supposer que $x \in A \times A$ et on écrit $x = (a, a')$. Si $a \in B$ alors $a' \notin B$ car $x \notin B \times B$ et ainsi $x \in (A \cap B) \times (A \Delta B)$. Si $a \notin B$ alors $x \in (A \setminus B) \times A$. Par symétrie en A et B , on obtient bien la première inclusion.

– Si $x \in (A \setminus B) \times A$ alors on écrit $x = (a, a')$ où $a \in A \setminus B$ et $a' \in A$ ainsi $x \in A \times A$ et $x \notin B \times B$ d'où

$$x \in (A \times A) \Delta (B \times B).$$

– Si $x \in (B \setminus A) \times B$ alors par symétrie du cas précédent on obtient

$$x \in (A \times A) \Delta (B \times B).$$

– Si $x \in (A \cap B) \times (A \Delta B)$ alors soit $x \in A \times A$ et $x \notin B \times B$, soit $x \in B \times B$ et $x \notin A \times A$. Dans les deux cas, on a

$$x \in (A \times A) \Delta (B \times B).$$

(3) En déduire que si $E_n \rightarrow E$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ alors $E_n \times E_n \rightarrow E \times E$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$.

On note K un compact tel que $E_n \subset K$ et $|\cdot|_k$ la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^k . De l'inclusion précédente, on déduit

$$\begin{aligned} |(E_n \times E_n) \Delta (E \times E)|_4 &\leq |(E_n \setminus E) \times E_n|_4 \\ &\quad + |(E_n \cap E) \times (E_n \Delta E)|_4 + |(E \setminus E_n) \times E|_4 \\ &\leq |(E_n \setminus E)|_2 |E_n|_2 \\ &\quad + |(E_n \cap E)|_2 |E_n \Delta E|_2 + |E \setminus E_n|_2 |E|_2 \\ &\leq |(E_n \Delta E)|_2 \left(|E_n|_2 + |E|_2 |E_n \cap E|_2 \right). \end{aligned}$$

Comme $|(E_n \Delta E)|_2 \rightarrow 0$ et $|E_n|_2 + |E|_2 + |E_n \cap E|_2 \leq 3|K|$ alors on a bien

$$|(E_n \times E_n) \Delta (E \times E)|_4 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

avec $E_n \times E_n$ inclus dans le compact $K \times K$.

(4) *Conclure sur la continuité de f .*

On utilise l'inégalité

$$\left| \iint_{E_n \times E_n} \frac{dx dy}{|x - y|^\alpha} - \iint_{E \times E} \frac{dx dy}{|x - y|^\alpha} \right| \leq \|f\|_{L^1(K \times K)} |(E_n \times E_n) \Delta (E \times E)|_4.$$

Grâce au troisième item, on a

$$\iint_{E_n \times E_n} \frac{dx dy}{|x - y|^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \iint_{E \times E} \frac{dx dy}{|x - y|^\alpha}$$

lorsque $E_n \rightarrow E$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

□

Soit $(E_n)_n$ une suite minimisante de \mathcal{F}_C avec $|E_n| = m$. Sans perdre de généralité on peut supposer que $\sup_n \mathcal{F}_C(E_n) < +\infty$. Ainsi en utilisant la Propriété 3.27 on a

$$P(E_n) \leq \overline{P}_C(E_n) \leq \sup_n \mathcal{F}_C(E_n) < +\infty$$

et

$$2 \operatorname{diam}(E_n^1) \leq \overline{P}_C(E_n) \leq \sup_n \mathcal{F}_C(E_n) < +\infty.$$

À une translation près, on peut supposer que $0 \in E_n^1$ et donc $(E_n)_n$ est uniformément essentiellement borné. Par conséquent, en utilisant la compacité de BV , $(E_n)_n$ converge vers un ensemble E (à une sous-suite près) en topologie L^1 . Comme \overline{P}_C est semi-continue inférieurement et comme f est continue, on obtient que \mathcal{F}_C est semi-continue inférieurement et ainsi

$$\inf \mathcal{F}_C = \mathcal{F}_C(E).$$

Notons que comme $(E_n)_n$ converge vers E dans L^1 alors la contrainte $|E_n| = m$ est conservée lors du passage à la limite, autrement dit $|E| = m$. Le même preuve est valable pour \overline{P}_S ce qui fournit une démonstration du théorème suivant.

Théorème 3.54. *Pour tout $\alpha \in]0, 2[$ et tout $m > 0$,*

$$\min_{|E|=m} \left\{ \overline{P}_C(E) + \iint_{E \times E} \frac{dx dy}{|x - y|^\alpha} \right\}$$

et

$$\min_{|E|=m} \left\{ \overline{P}_S(E) + \iint_{E \times E} \frac{dx dy}{|x - y|^\alpha} \right\}$$

admettent chacun une solution.

Ces contraintes de connexité permettent d'obtenir une solution au problème mathématique. Cependant, le lien avec le problème physique n'est pas clair. Est-ce que cette connexité peut modéliser un régime transitoire de la goutte chargée ? Est-ce que les parties fantômes, c'est-à-dire les arbres de Steiner, ont une interprétation physique ?

Reconstruction volumétrique à partir de sections

Le but de ce chapitre est de développer un algorithme de reconstruction de courbes et de surfaces. L'idée et les applications se conçoivent mieux en dimensions 2 et 3 même si les méthodes développées ici sont valables pour toute dimension $d \geq 2$. Dans \mathbb{R}^3 , on se donne une famille d'ensembles planaires disjoints (appelés *coupes* dans la suite) et on cherche à reconstruire le meilleur domaine de \mathbb{R}^3 qui englobe cette famille. L'application principale est la reconstruction d'une image 3D (une surface) d'un organe à partir des coupes données par exemple par une IRM¹. On peut citer également comme autre application la création de graphismes et d'animations en informatique [19].

De nombreuses méthodes ont été développées autour de ces problèmes de reconstruction. Sans être exhaustif, on peut les classer en deux catégories. La première consiste à trouver la topologie puis coller une surface ayant cette topologie, soit en utilisant une représentation paramétrique [19, 21, 59, 71, 81, 96], soit en utilisant une représentation implicite [1, 8, 33, 35, 40]. La seconde catégorie est variationnelle, la surface recherchée est solution d'un problème d'optimisation avec contraintes [38, 43, 50, 66, 82, 104].

En ce qui nous concerne, nous utilisons une méthode variationnelle ayant la particularité que la surface recherchée est le bord d'un ensemble E^* qui englobe les coupes. Afin de distinguer le "meilleur" ensemble qui englobe les coupes, on choisit celui qui minimise une des deux énergies géométriques suivantes : son périmètre ou l'énergie de Willmore de son bord. L'intérêt de la première énergie est qu'elle est relativement facile à manipuler aussi bien d'un point de vue théorique que numérique. La seconde demande plus de régularité et nous verrons dans les simulations numériques que la surface reconstruite est très lisse et donne une réponse très naturelle à notre problème.

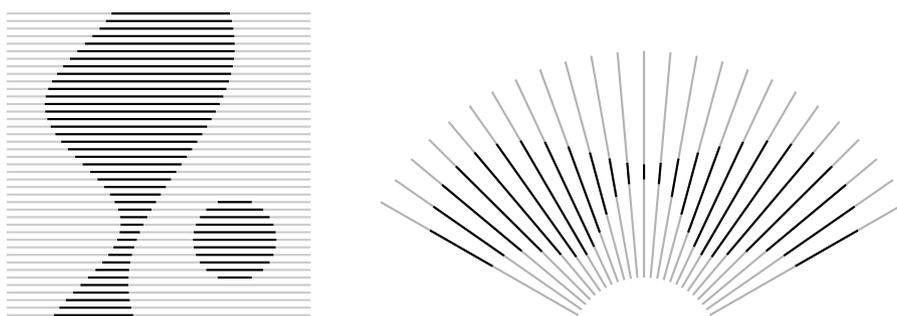


FIGURE 4.1. Exemples, dans \mathbb{R}^2 , de familles de coupes

1. Imagerie par résonance magnétique

1. Introduction

On se place dans \mathbb{R}^d et on considère une famille finie d'hyperplans $(\Pi_n)_n$. Sur chaque hyperplan, on se donne deux coupes c'est-à-dire deux ensembles $\omega_n^{int}, \omega_n^{ext} \subset \Pi_n$. La première coupe ω_n^{int} (appelée *coupe intérieure*) représente la partie que notre domaine doit englober lors de la reconstruction. La seconde coupe ω_n^{ext} (appelée *coupe extérieure*) permet d'éviter que notre domaine englobe trop grossièrement ω_n^{int} en lui imposant d'éviter ω_n^{ext} . Il n'est pas nécessaire que les deux coupes forment une partition de l'hyperplan Π_n , on peut laisser de la liberté à notre domaine. La seule condition sur les coupes est $\omega_n^{int} \cap \omega_n^{ext} = \emptyset$. La surface à reconstruire avec notre approche est ainsi le bord du domaine E^* défini par

$$(6) \quad E^* = \underset{\substack{\omega_n^{int} \subset E \\ E \cap \omega_n^{ext} = \emptyset}}{\operatorname{argmin}} \{J(E)\}$$

où $\omega_n^{int} = \bigcup \omega_n^{int}$, $\omega_n^{ext} = \bigcup \omega_n^{ext}$ et J est soit le périmètre, soit l'énergie de Willmore.

Nous remarquons un peu plus loin que ce problème est mal défini. Cependant nous utilisons la méthode de champ de phase afin de résoudre numériquement ce problème car il s'avère que son équivalent champ de phase est bien posé. Une formulation du problème (6) en méthode de champ de phase se fait de la manière suivante. Au lieu de considérer les ensembles E , ω_n^{int} et ω_n^{ext} , nous utilisons leurs profils de champ de phase associés :

$$u_\varepsilon(x) = q\left(\frac{d(x, E)}{\varepsilon}\right), \quad u_\varepsilon^{int}(x) = q\left(\frac{d(x, \omega_n^{int})}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon^{ext}(x) = 1 - q\left(\frac{d(x, \omega_n^{ext})}{\varepsilon}\right)$$

où q est le profil : $q(s) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{th}(s/2))$. Ainsi les contraintes d'inclusion-exclusion se transforment en inégalité

$$u_\varepsilon^{int} \leq u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^{ext}.$$

Le problème (6) se transforme ainsi en

$$(7) \quad u_\varepsilon^* = \underset{u_\varepsilon^{int} \leq u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^{ext}}{\operatorname{argmin}} \{J_\varepsilon(u_\varepsilon)\}$$

où J_ε est une approximation champ de phase du périmètre ou de l'énergie de Willmore. Remarquons que les contraintes d'inclusion-exclusion sur E se changent en contraintes linéaires sur u_ε .

Les résultats de ce chapitre sont à la fois d'ordre théorique et numérique. En ce qui concerne les aspects théoriques, on ne considère que le périmètre. Nous verrons que le problème (6) est mal défini pour des ensembles E non lisses et que l'approximation champ de phase de l'énergie contrainte du problème (7) Γ -converge vers une énergie composée d'une somme du périmètre et de termes de pénalisation.

La mauvaise définition du problème (6) vient du fait que les contraintes n'ont pas de volume, elles sont donc invisibles pour la topologie L^1 . On retrouve en partie ce problème dans l'énergie limite du problème (7). Les termes de pénalisation de l'énergie limite n'imposent pas aux minimiseurs de satisfaire les contraintes. Afin de pallier ces difficultés, nous proposons d'épaissir un peu les contraintes d'inclusion-exclusion avant de les transformer en profil de champ de phase.

Pour les aspects numériques, nous donnons une illustration de la nécessité d'épaissir les contraintes. Nous présentons de plus la différence de reconstruction entre l'utilisation du périmètre et de l'énergie de Willmore.

1.1. Autour du modèle et de la méthode de champ de phase

Le côté mal défini du problème (6) vient du fait que les contraintes ω_n^{int} et ω_n^{ext} n'ont pas de volume alors que la topologie naturelle à utiliser pour minimiser le périmètre est la topologie L^1 . Ainsi, formulé tel quel, le problème (6) admet une solution triviale $E^* = \omega_n^{int}$

pour laquelle $P(E^*) = 0$. Une reformulation possible du problème consiste à utiliser les ensembles des points de densité 0 et 1 de E :

$$E^* = \operatorname{argmin}_{\substack{\omega^{int} \subset E^1 \\ \omega^{ext} \subset E^0}} \{P(E)\}.$$

Pour un ensemble de périmètre fini, il existe un ensemble au plus \mathcal{H}^{d-1} -négligeable de points pour lesquels la densité n'est pas définie, mais élargir les contraintes d'inclusion-exclusion modulo un ensemble \mathcal{H}^{d-1} -négligeable n'est pas gênant pour notre reconstruction.

On introduit ensuite l'énergie correspondant au périmètre contraint :

$$P_{\omega^{int}, \omega^{ext}}(E) = \begin{cases} P(E) & \text{si } \omega^{int} \subset E^1 \text{ et } \omega^{ext} \subset E^0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

il n'est pas difficile de voir que cette énergie n'est pas semi-continue inférieurement pour la topologie L^1 . En effet, par exemple dans \mathbb{R}^2 , si on considère $\omega^{int} = [-1, 1] \times \{0\}$, $\omega^{ext} = \emptyset$ et la suite d'ensembles $E_h = [-1, 1] \times [-h, h]$. On a que $E_h \rightarrow E_0$ lorsque $h \rightarrow 0$, cependant on a aussi $P_{\omega^{int}, \omega^{ext}}(E_h) \rightarrow 4$ et $P_{\omega^{int}, \omega^{ext}}(E_0) = +\infty$ (car $E_0 = \omega^{int}$ et est de mesure nulle). C'est pourquoi nous introduisons l'enveloppe semi-continue inférieurement de $P_{\omega^{int}, \omega^{ext}}$:

$$\bar{P}_{\omega^{int}, \omega^{ext}}(E) = \inf_{E_h \rightarrow E} \left\{ \liminf_{h \rightarrow 0} \{P_{\omega^{int}, \omega^{ext}}(E_h)\} \right\}.$$

La formulation bien posée du problème (7) est ainsi :

$$E^* = \operatorname{argmin}_E \{\bar{P}_{\omega^{int}, \omega^{ext}}(E)\}.$$

En fait, nous laissons de côté cette formulation pour nous concentrer sur l'approximation champ de phase du problème, on introduit

$$P_{\varepsilon, u_1, u_2}(u) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right) dx & \text{si } u_1 \leq u \leq u_2, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La version champ de phase du problème de reconstruction s'écrit ainsi

$$u_\varepsilon^* = \operatorname{argmin} \{P_{\varepsilon, u_\varepsilon^{int}, u_\varepsilon^{ext}}\}.$$

Sans donner une preuve complète, nous avons des arguments (voir Section 1.3) indiquant que la Γ -limite de $P_{\varepsilon, u_\varepsilon^{int}, u_\varepsilon^{ext}}$ soit l'énergie

$$F_{1, \omega^{int}, \omega^{ext}}(u) = \begin{cases} F_{1, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E) & \text{si } u = \mathbb{1}_E, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$F_{1, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E) = P(E) + \mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int}) + \mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext}).$$

Cette énergie est constituée du périmètre plus un terme qui mesure à quel point l'ensemble limite ne satisfait pas les contraintes d'inclusion-exclusion. Cependant, cette énergie limite n'est pas convenable car sa minimisation peut mener à des ensembles ne respectant pas les contraintes (voir Remarque 4.2).

Remarque 4.1. On s'attend néanmoins à ce que $F_{1, \omega^{int}, \omega^{ext}}$ puisse être obtenu comme limite de $P_{\omega^{int}, \omega^{ext}}$ pour la convergence faible-* du varifold diffus

$$V_\varepsilon = |\nabla u_\varepsilon| \otimes \delta_{(\nabla u_\varepsilon)^\perp}.$$

On propose donc de modifier légèrement le modèle de champ de phase en épaississant les contraintes d'inclusion-exclusion $\Omega_{\varepsilon^\alpha}^{int}$ et $\Omega_{\varepsilon^\alpha}^{ext}$ d'une largeur d'ordre ε^α où $\alpha \in]0, 1[$. On considère ensuite les profils de champ de phase

$$u_{\varepsilon, \alpha}^{int} = q(d(x, \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{int})/\varepsilon) \text{ et } u_{\varepsilon, \alpha}^{ext} = 1 - q(d(x, \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{ext})/\varepsilon).$$

Nous montrons (Théorème 4.5) que l'énergie $P_{\varepsilon, u_{\varepsilon, \alpha}^{int}, u_{\varepsilon, \alpha}^{ext}}$ Γ -converge vers

$$F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}(u) = \begin{cases} F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E) & \text{si } u = \mathbb{1}_E, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E) = P(E) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int}) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext}).$$

Par rapport à $F_{1, \omega^{int}, \omega^{ext}}$, le facteur 2 permet à $F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}$ de pénaliser plus E s'il ne satisfait pas les contraintes. Par minimisation, nous récupérons ainsi des minimiseurs vérifiant les contraintes d'inclusion-exclusion (voir Remarque 4.2).

Par ailleurs, la preuve de Γ -convergence nous fournit une démonstration de la formule d'identification suivante (Théorème 4.4)

$$\overline{P}_{\omega^{int}, \omega^{ext}}(E) = F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E).$$

Nous pouvons aussi remarquer que dans notre exemple précédent $E_h = [-1, 1] \times [-h, h]$, on a $F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E_0) = 4$.

Remarque 4.2. La différence entre $F_{1, \omega^{int}, \omega^{ext}}$ et $F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}$ est le facteur 2 devant le terme de pénalisation de l'énergie limite qui mesure à quel point l'ensemble E ne satisfait pas les contraintes d'inclusion-exclusion. On se concentre sur deux configurations afin de comparer ces énergies (voir Figure 4.2).

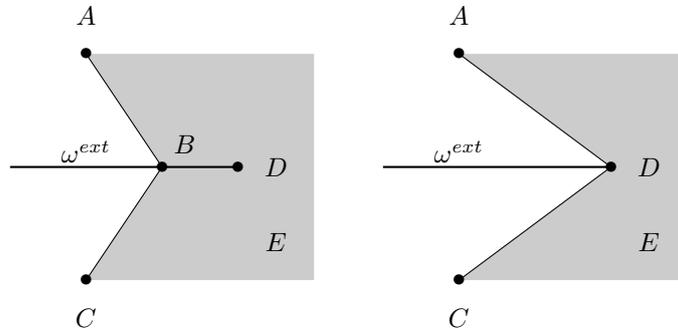


FIGURE 4.2. Deux configurations locales.

Dans \mathbb{R}^2 on regarde la configuration locale de ∂E autour d'une coupe extérieure ω^{ext} et on suppose que ∂E traverse ω^{ext} . Sur la Figure 4.2, le bord de E est représenté par des segments (minimiseurs locaux de la longueur), les points A , C et D sont fixes et le point B reste sur ω^{ext} . Quel est le moins coûteux pour traverser ω^{ext} ? Pour $F_{1, \omega^{in}, \omega^{out}}$, le prix à payer est la somme des longueurs BA , BC et BD . Cette somme est minimale lorsque B est le point de Steiner entre A , C , et D c'est-à-dire le point vérifiant

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = \widehat{CBA} = \frac{2\pi}{3}.$$

En particulier

$$F_{1, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E_{gauche}) = |BA| + |BD| + |BC| < |AD| + |CD| = F_{1, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E_{droite}).$$

Pour $F_{2,\omega^{int},\omega^{ext}}$, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$F_{2,\omega^{int},\omega^{ext}}(E_{gauche}) = |BA| + 2|BD| + |BC| > |AD| + |CD| = F_{2,\omega^{int},\omega^{ext}}(E_{droite}).$$

Ainsi, les minimiseurs de $F_{1,\omega^{int},\omega^{ext}}$ ne seront pas convenables pour notre problème de reconstruction car, à priori, ils ne satisfont pas les contraintes, contrairement à ceux de $F_{2,\omega^{int},\omega^{ext}}$.

1.2. Définitions et notations

Soit $\varepsilon > 0$ et $0 < \alpha < 1$. On note d la fonction distance signée dans \mathbb{R}^d :

$$d(x, A) = \text{dist}(x, A) - \text{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus A)$$

où dist est la distance classique à un ensemble. On considère une famille finie d'hyperplans $(\Pi_n)_n$ pas nécessairement distincts et on se donne deux familles de coupes :

$$\omega^{int} = \bigcup_n \omega_n^{int} \quad \text{et} \quad \omega^{ext} = \bigcup_n \omega_n^{ext}$$

où ω_n^{int} et ω_n^{ext} sont deux sous-ensembles ouverts, connexes et à bord lipschitzien, de Π_n (en tant que sous-ensembles de \mathbb{R}^{d-1}). Le principe est que si ω^{int} a plusieurs composantes connexes sur un même hyperplan alors chacune de ces composantes est identifiée par un indice n différent (de même pour ω^{ext}). Par conséquent, on suppose que $(\omega_n^{int})_n$ est une famille finie d'ensembles disjoints deux à deux (de même pour $(\omega_n^{ext})_n$). Enfin, pour que la reconstruction soit cohérente, on suppose que

$$\omega^{int} \cap \omega^{ext} = \emptyset.$$

On note d_n la fonction distance signée dans le sous espace Π_n . Pour chaque Π_n , on choisit un repère affine orthonormé de \mathbb{R}^d tel que

$$\Pi_n = \{(y, 0) \mid y \in \mathbb{R}^{d-1}\}$$

et, dans ce repère, on définit

$$\Omega_{n,\varepsilon^\alpha} = \left\{ (y, z) \mid y \in \omega_n, |z| < \varepsilon^\alpha |d_n(y, \omega_n)| \right\}.$$

Afin de simplifier un peu les notations, on écrit ω_n pour désigner un élément des familles $(\omega_n^{int})_n$ ou $(\omega_n^{ext})_n$, de même avec ω , $\Omega_{n,\varepsilon^\alpha}$, etc. Ces ensembles $\Omega_{n,\varepsilon^\alpha}$ vont nous servir à plusieurs reprises dans ce chapitre, notamment, en jouant sur le paramètre ε , ils représenteront à la fois une boîte englobant ω_n dans laquelle nous travaillerons et un épaississement de la coupe ω_n .

Remarque 4.3. Nous préférons utiliser un épaississement en forme de cône plutôt qu'un épaississement uniforme dans la direction normale des coupes afin de ne pas imposer de contraintes tangentielles au niveau des coupes sur l'ensemble que nous reconstruisons. En effet, s'il n'y a pas d'espace entre les contraintes (c'est-à-dire si $\overline{\omega^{int}} \cap \overline{\omega^{ext}} \neq \emptyset$) alors un épaississement uniforme impose à l'ensemble à reconstruire E de passer entre l'épaississement de ω^{int} et celui de ω^{ext} . Ainsi, les plans tangents de E au niveau des coupes sont orthogonaux aux plans des coupes. Ce phénomène n'est pas trop gênant pour le périmètre car E peut avoir des angles pour compenser cette orthogonalité. Par contre, pour l'énergie de Willmore, l'orthogonalité et le fait d'avoir une borne sur la courbure moyenne lorsque ε tend vers 0 font que, intuitivement, l'ensemble limite est orthogonal aux plans de coupes. Il devient ainsi impossible de reconstruire un ensemble traversant les plans de coupes de manière non orthogonale avec l'énergie de Willmore.

Nous faisons la reconstruction dans une grosse boîte notée Q . Pour le coté théorique, Q sera un ouvert borné connexe et pour le coté numérique, Q sera simplement un cube. On suppose ainsi que $\omega^{int} \cup \omega^{ext} \subset Q$. Comme $(\omega_n)_n$ est une famille finie d'ensembles

bornés et deux à deux disjoints, il existe $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit tel que, pour tout n , les ensembles $(\Omega_{n,\varepsilon_0^\alpha})$ soient deux à deux disjoints. On note

$$\Omega_{\varepsilon^\alpha}^{int} = \bigcup_n \Omega_{n,\varepsilon^\alpha}^{int} \quad \text{et} \quad \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{ext} = \bigcup_n \Omega_{n,\varepsilon^\alpha}^{ext}.$$

Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ le profil de champ de phase induit par le potentiel W (on rappelle que pour $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$ on a $q(s) = \frac{1}{2}(1 - \text{th}(s/2))$, voir 2). On définit

$$u_{\varepsilon,\alpha}^{int}(x) = q\left(\frac{1}{\varepsilon}d(x, \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{int})\right) \quad \text{et} \quad u_{\varepsilon,\alpha}^{ext}(x) = 1 - q\left(\frac{1}{\varepsilon}d(x, \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{ext})\right).$$

Il est facile de voir qu'on obtient la convergence ponctuelle suivante

$$u_{\varepsilon,\alpha}^{int}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \omega^{int}, \\ 1/2 & \text{si } x \in \bigcup_n \partial_n \omega_n^{int}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où ∂_n désigne le bord topologique dans Π_n vu comme \mathbb{R}^{d-1} . En effet, si $x \in \omega_n^{int}$ alors, par des arguments de géométrie élémentaire (voir Figure 4.3), on obtient que pour $\varepsilon \rightarrow 0$

$$d_n(x, \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{int}) = -l \sim -c\varepsilon^\alpha$$

où $c > 0$ est une constante dépendant de $d_n(x, \omega_n^{int})$.

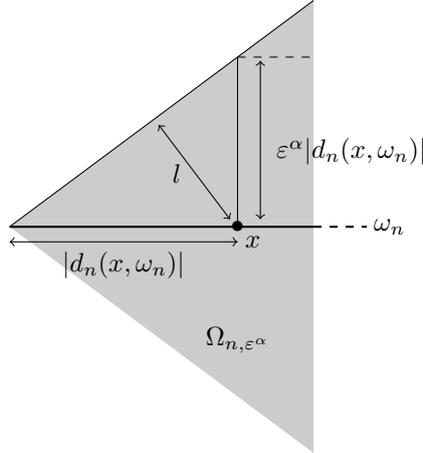


FIGURE 4.3. Géométrie élémentaire du triangle

Ainsi

$$u_{\varepsilon,\alpha}^{int}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{-\infty} q = 1.$$

Si $x \in \bigcup_n \partial_n \omega_n^{int}$ alors $d(x, \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{int}) = 0$ donc $u_{\varepsilon,\alpha}^{int}(x) = q(0) = 1/2$. Sinon $x \notin \omega^{int}$ alors pour tout n , $d(x, \omega_n^{int}) > 0$ et pour ε assez petit, on a

$$d(x, \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{int}) > \frac{1}{2}d(x, \omega_n^{int}) > 0.$$

Donc

$$u_{\varepsilon,\alpha}^{int}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{+\infty} q = 0.$$

Exactement de la même manière, on a

$$u_{\varepsilon,\alpha}^{ext}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \omega^{ext}, \\ 1/2 & \text{si } x \in \bigcup_n \partial_n \omega_n^{ext}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que pour $u_\varepsilon(x) = q(d(x, E)/\varepsilon)$, on a

$$u_{\varepsilon,\alpha}^{int} \leq u_\varepsilon \leq u_{\varepsilon,\alpha}^{ext} \Leftrightarrow \Omega_{\varepsilon,\alpha}^{int} \subset E \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega_{\varepsilon,\alpha}^{ext}.$$

Dans la suite, nous utilisons la densité d'un ensemble de périmètre fini, nous rappelons la notation (Définition 1.25)

$$E^t = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|E \cap B(x, r)|}{|B(x, r)|} = t \right\}$$

et le fait que si E est de périmètre fini alors la limite précédente existe et vaut 0, 1/2 ou 1 pour \mathcal{H}^{d-1} -presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. Nous rappelons également que $E^{1/2}$ est le bord essentiel de E et qu'on a, pour tout borélien A de \mathbb{R}^d :

$$P(E, A) = \mathcal{H}^{d-1}(E^{1/2} \cap A)$$

avec la convention que $P(E) = P(E, \mathbb{R}^d)$.

Le résultat théorique de ce chapitre est un résultat de Γ -convergence. On rappelle que dans un espace métrique (X, d) , on dit qu'une famille d'énergies $G_\varepsilon : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Γ -converge vers une énergie limite $G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si on a les deux inégalités suivantes :

– Γ – lim inf : pour tout u et pour toute suite $u_\varepsilon \rightarrow u$, on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq G(u) ;$$

– Γ – lim sup : pour tout u , il existe une suite $u_\varepsilon \rightarrow u$ telle que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq G(u).$$

1.3. L'importance d'épaissir les contraintes

Dans cette section, on explique plus précisément le phénomène qui se produit lorsqu'on n'épaissit pas les coupes. Nous allons montrer que, dans certaines configurations, la limite de $P_{\varepsilon, u_\varepsilon^{int}, u_\varepsilon^{ext}}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, si elle existe, est au plus égale à $F_{1, \omega^{int}, \omega^{ext}}$. À la vue de la Remarque 4.2, cette limite ne nous intéresse pas pour notre problème de reconstruction.

Soit E un ensemble de périmètre fini. Nous regardons d'abord un cas pour lequel l'énergie limite est (trop) simple, on suppose que $\omega^{int} \subset E^1$ et $\omega^{ext} \subset E^0$ c'est-à-dire E satisfait les contraintes d'inclusion-exclusion. Dans ce cas les profils de champ de phase introduits précédemment satisfont la contrainte

$$u_\varepsilon^{int} \leq u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^{ext}.$$

Le résultat original de Γ -convergence (Théorème 2.14) de l'énergie de champ de phase nous donne ainsi la limite suivante

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{\varepsilon, u_\varepsilon^{int}, u_\varepsilon^{ext}}(u_\varepsilon) = \lambda P(E) = \lambda F_{1, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E) = \lambda F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E).$$

Ceci est le résultat attendu, les problèmes arrivent lorsque E ne satisfait pas les contraintes.

1.3.1. Un premier exemple

Si E ne satisfait pas les contraintes, alors le calcul de l'énergie limite est plus compliqué. Considérons d'abord un exemple : soient $E = B$ une boule dans \mathbb{R}^2 , ω^{int} un segment à l'intérieur de cette boule et $\omega^{ext} = \emptyset$ (voir Figure 4.4).

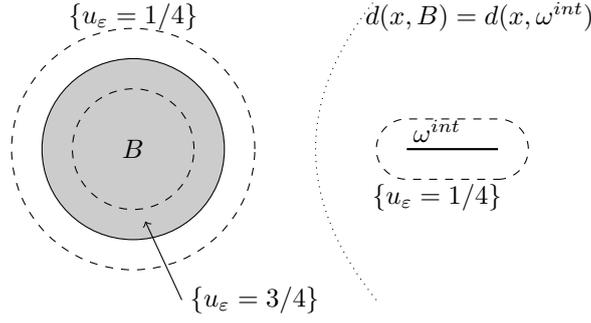


FIGURE 4.4. Un exemple avec une boule et un segment

On considère le profil de champ de phase associé à B et ω^{int}

$$v_\varepsilon(x) = q\left(\frac{1}{\varepsilon}d(x, B)\right) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon^{int}(x) = q\left(\frac{1}{\varepsilon}d(x, \omega^{int})\right).$$

Comme ω^{int} est d'intérieur vide, on a $d(x, \omega^{int}) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Ainsi les lignes de niveau $\{u_\varepsilon^{int} = t\}$ sont vides pour $1/2 < t < 1$. De plus, on définit

$$u_\varepsilon = \max(v_\varepsilon, u_\varepsilon^{int}).$$

Cette fonction est égale à v_ε près de B et égale à u_ε^{int} près de ω^{int} . Plus exactement, u_ε est lisse partout sauf sur l'ensemble $\{u_\varepsilon^{int} = v_\varepsilon\}$ qui coïncide avec $\{x \mid d(x, B) = d(x, \omega^{int})\}$. Dans notre cas simple, cet ensemble est négligeable et coïncide avec une courbe parabolique à mi chemin entre B et ω^{int} (voir Figure 4.4). De plus, comme u_ε est constitué de profils de champ de phase, on a

$$\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon}W(u_\varepsilon) = |\nabla u_\varepsilon|\sqrt{2W(u_\varepsilon)}$$

à part sur la courbe parabolique et u_ε satisfait $u_\varepsilon^{int} \leq u_\varepsilon$ (et $u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^{ext} = 1$). On peut ainsi utiliser la formule de la co-aire pour calculer

$$P_{\varepsilon, u_\varepsilon^{int}, u_\varepsilon^{ext}}(u_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon}W(u_\varepsilon) \right) dx = \int_0^1 \sqrt{2W(t)}P(\{u_\varepsilon \geq t\})dt.$$

Pour $t \in]0, 1[$, il existe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\{u_\varepsilon \geq t\}$ reste loin de la courbe parabolique $\{d(x, B) = d(x, \omega^{int})\}$ et donc

$$P(\{u_\varepsilon \geq t\}) = \begin{cases} \mathcal{H}^1(\{v_\varepsilon = t\}) + \mathcal{H}^1(\{u_\varepsilon^{int} = t\}) & \text{si } 0 < t < 1/2 \\ \mathcal{H}^1(\{v_\varepsilon = t\}) & \text{si } 1/2 < t < 1. \end{cases}$$

Comme $\{v_\varepsilon = t\}$ est une boule et $\{u_\varepsilon^{int} = t\}$ a la forme d'un stade, on peut voir que

$$\mathcal{H}^1(\{v_\varepsilon = t\}) \rightarrow P(B) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^1(\{u_\varepsilon^{int} = t\}) \rightarrow 2\mathcal{H}^1(\omega^{int})$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. De manière heuristique, on obtient donc

$$P_{\varepsilon, u_\varepsilon^{int}, u_\varepsilon^{ext}}(u_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1/2} \sqrt{2W(t)}(P(B) + 2\mathcal{H}^1(\omega^{int}))dt + \int_{1/2}^1 \sqrt{2W(t)}P(B)dt.$$

En utilisant la symétrie du potentiel : $W(1-t) = W(t)$, on arrive à

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{\varepsilon, u_\varepsilon^{int}, u_\varepsilon^{ext}}(u_\varepsilon) = \lambda(P(B) + \mathcal{H}^1(\omega^{int})) = \lambda F_{1, \omega^{int}, \emptyset}(B).$$

L'idée cruciale de cet exemple est de voir que la contrainte fine ω^{int} induit l'apparition de lignes de niveau de hauteur t seulement pour $t \in]0, 1/2[$ et pas pour $t \in]1/2, 1[$.

1.3.2. Une généralisation

Maintenant, nous généralisons l'exemple précédent. Soit E un ensemble lisse, ouvert et de périmètre fini de \mathbb{R}^d . Nous considérons le pire cas de figure, c'est-à-dire celui pour lequel ω^{int} est entièrement en dehors de E et ω^{ext} est complètement inclus dans E . Afin d'éviter les restrictions techniques, on suppose que les contraintes d'inclusion-exclusion

- sont strictement incluses dans, ou exclues de, E c'est-à-dire, pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$\mathcal{N}_\varepsilon(\omega^{int}) \cap E = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_\varepsilon(\omega^{ext}) \subset E$$

où $\mathcal{N}_\varepsilon(\omega)$ est le voisinage tubulaire $\{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, \omega) \leq \varepsilon\}$ est un ε -voisinage de ω ;

- sont lisses en tant que sous-ensembles de \mathbb{R}^{d-1} afin de vérifier

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\mathcal{N}_\varepsilon(\omega^{int})) = 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega^{int}) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\mathcal{N}_\varepsilon(\omega^{ext})) = 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega^{ext}).$$

On note

- $\mathcal{U}^{int} = \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(\omega^{int})$;
- $\mathcal{U}^{ext} = \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(\omega^{ext})$;
- $\mathcal{U}^E = \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(E)$;

pour ε_0 suffisamment petit pour que les ensembles ci-dessus soit disjoints deux à deux. On définit ensuite les profils de champ de phase

- $v_\varepsilon(x) = q\left(\frac{1}{\varepsilon}d(x, E)\right)$;
- $u_\varepsilon^{int}(x) = q\left(\frac{1}{\varepsilon}d(x, \omega^{int})\right)$;
- $u_\varepsilon^{ext}(x) = 1 - q\left(\frac{1}{\varepsilon}d(x, \omega^{ext})\right)$;
- $u_\varepsilon = \max\left(u_\varepsilon^{int}, \min(u_\varepsilon^{ext}, v_\varepsilon)\right)$;

Il n'est pas difficile de voir que u_ε^{int} et u_ε^{ext} convergent presque partout vers 0 et que v_ε converge lui aussi presque partout vers $\mathbb{1}_E$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Par conséquent u_ε converge presque partout vers $\mathbb{1}_E$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. De plus, $u_\varepsilon^{int} \leq u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^{ext}$ donc

$$P_{\varepsilon, u_\varepsilon^{int}, u_\varepsilon^{ext}}(u_\varepsilon) = \int_Q \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right) dx.$$

On utilise ensuite le même principe que précédemment afin de calculer la limite de $P_{\varepsilon, u_\varepsilon^{int}, u_\varepsilon^{ext}}(u_\varepsilon)$. On note

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_Q \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right) dx \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{U}^{int}} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right) dx}_{I_\varepsilon^{int}} + \underbrace{\int_{\mathcal{U}^{ext}} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right) dx}_{I_\varepsilon^{ext}} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\mathcal{U}^E} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right) dx}_{I_\varepsilon^E} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right) dx}_{I_\varepsilon^{neg}}. \end{aligned}$$

où \mathcal{V} est l'ensemble $Q \setminus (\mathcal{U}^{int} \cup \mathcal{U}^{ext} \cup \mathcal{U}^E)$.

En utilisant les inclusions d'ensembles, on obtient

$$u_\varepsilon = \begin{cases} u_\varepsilon^{int} & \text{sur } \mathcal{U}^{int}, \\ u_\varepsilon^{ext} & \text{sur } \mathcal{U}^{ext}, \\ v_\varepsilon & \text{sur } \mathcal{U}^E. \end{cases}$$

Et comme on a utilisé les profils de champ de phase, on a

$$\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) = |\nabla u_\varepsilon| \sqrt{2W(u_\varepsilon)}.$$

En fait, l'ensemble des points sur lequel l'égalité n'est pas valable est l'ensemble des points où u_ε n'est pas dérivable et qui correspond au lieu d'égalité des fonctions suivantes (deux parmi trois) :

$$x \mapsto d(x, \omega^{int}), \quad x \mapsto d(x, \mathbb{R}^d \setminus \omega^{ext}) \quad \text{et} \quad x \mapsto d(x, E).$$

Cet ensemble est négligeable, indépendant de ε et inclus dans \mathcal{V} . Comme $|\nabla v_\varepsilon|$, $|\nabla u_\varepsilon^{int}|$ et $|\nabla u_\varepsilon^{ext}|$ tendent vers 0 sur \mathcal{V} , on a $|\nabla u_\varepsilon| \rightarrow 0$ presque partout et ainsi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^{neg} = 0.$$

Concernant I_ε^E , on a

$$I_\varepsilon^E = \int_{\mathcal{U}} |\nabla v_\varepsilon| \sqrt{2W(v_\varepsilon)} dx = \int_0^1 \sqrt{2W(t)} P(\{v_\varepsilon \geq t\}, \mathcal{U}) dt.$$

De plus, pour $t \in]0, 1[$, il existe $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $\{v_\varepsilon \geq t\} \subset\subset \mathcal{U}$ et par conséquent

$$P(\{v_\varepsilon \geq t\}, \mathcal{U}) = P(\{v_\varepsilon \geq t\}).$$

Par ailleurs, comme E est lisse, on obtient

$$\{v_\varepsilon \geq t\} = \mathcal{N}_{\varepsilon q^{-1}(t)}(E) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E$$

et

$$P(\{v_\varepsilon \geq t\}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} P(E).$$

Donc, en passant à la lim sup dans I_ε^E , on a,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^E \leq \lambda P(E)$$

où $\lambda = \int_0^1 \sqrt{2W(t)} dt$.

De manière similaire, on a

$$I_\varepsilon^{int} = \int_{\mathcal{U}^{int}} |\nabla u_\varepsilon^{int}| \sqrt{2W(u_\varepsilon^{int})} dx = \int_0^1 \sqrt{2W(t)} P(\{u_\varepsilon^{int} \geq t\}, \mathcal{U}^{int}) dt.$$

De plus $\{u_\varepsilon^{int} \geq t\} = \mathcal{N}_{\varepsilon q^{-1}(t)}(\omega^{int})$ ce qui signifie que $\{u_\varepsilon^{int} \geq t\} = \emptyset$ pour $t \in]1/2, 1[$ (c'est-à-dire $q^{-1}(t) < 0$) puisque $|\omega^{int}| = 0$. Ainsi $\{u_\varepsilon^{int} \geq t\} \subset\subset \mathcal{U}^{int}$ pour ε assez petit. De plus, on a supposé que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\mathcal{N}_\varepsilon(\omega^{int})) = 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega^{int})$$

donc on obtient

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^{int} \leq 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega^{int}) \int_0^{1/2} \sqrt{2W(t)} dt.$$

De manière identique, on peut montrer que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^{ext} \leq 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega^{ext}) \int_{1/2}^1 \sqrt{2W(t)} dt.$$

En remarquant que le potentiel W est symétrique (c'est-à-dire $W(1-s) = W(s)$), on a

$$\int_0^{1/2} \sqrt{2W(t)} dt = \int_{1/2}^1 \sqrt{2W(t)} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{2W(t)} dt = \frac{1}{2} \lambda.$$

Tout bien considéré, on a prouvé que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{\varepsilon, u_\varepsilon^{int}, u_\varepsilon^{ext}}(u_\varepsilon) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon \leq \lambda \left(P(E) + \mathcal{H}^{d-1}(\omega^{int}) + \mathcal{H}^{d-1}(\omega^{ext}) \right).$$

Le membre de droite de l'inégalité est un cas particulier de $F_{1, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E)$ pour lequel $\omega^{int} \subset E^0$ et $\omega^{ext} \subset E^1$.

1.4. Résultats principaux

Nous nous sommes placés dans une grosse boîte Q (ouvert connexe borné de \mathbb{R}^d) et nous avons défini les énergies, pour $E \subset Q$,

$$P_{\omega^{int}, \omega^{ext}}(E) = \begin{cases} P(E) & \text{si } \omega^{int} \subset E^1 \text{ et } \omega^{ext} \subset E^0, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$P_{\varepsilon, u_1, u_2}(u) = \begin{cases} \int_Q \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right) dx & \text{si } u_1 \leq u \leq u_2, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E) = P(E) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int}) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext}).$$

Nous allons prouver les résultats suivants.

Théorème 4.4 (identification de la relaxée). *Soit E un ensemble borné et de périmètre fini, on a*

$$\overline{P}_{\omega^{int}, \omega^{ext}}(E) = F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E).$$

Théorème 4.5 (contraintes épaisses). *Soit $\alpha \in]0, 1[$ et Q un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d . Alors $P_{\varepsilon, u_{\varepsilon, \alpha}^{int}, u_{\varepsilon, \alpha}^{ext}}$ Γ -converge vers $\lambda F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}$ par rapport à la topologie L^1 .*

Nous donnons une preuve du Théorème 4.5 dans la Section 2. On peut extraire de cette preuve une démonstration du Théorème 4.4, en effet soit $(E_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite d'ensembles convergeant vers E dans L^1 . Quitte à restreindre à une boule et à prendre une sous-suite, on peut supposer que E_ε est borné et de périmètre fini. En utilisant le Lemme 4.8 sur la suite de fonctions $(\mathbb{1}_{E_\varepsilon})_\varepsilon$, on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{\omega^{int}, \omega^{ext}}(E_\varepsilon) \geq F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E).$$

De plus, dans la Section 2.3, nous montrons qu'il existe une suite d'ensembles $(E_\eta)_\eta$ telle que

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} P_{\omega^{int}, \omega^{ext}}(E_\eta) = F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E).$$

À la vue du résultat de la Section 1.3 et des tests numériques (voir Section 4), on peut conjecturer le résultat suivant.

Conjecture 4.6. *L'énergie $P_{\varepsilon, u_\varepsilon^{int}, u_\varepsilon^{ext}}$ Γ -converge vers $F_{1, \omega^{int}, \omega^{ext}}$.*

La Section 1.3 correspond à une preuve partielle de la partie $\Gamma - \lim \sup$ de ce résultat. Nous présenterons une preuve de la $\Gamma - \lim \inf$ dans la Section 2.4.

Remarque 4.7. Concernant une approche similaire pour l'énergie de Willmore, c'est beaucoup plus délicat. En effet, le périmètre est semi-continu inférieurement donc les difficultés viennent de l'effet des contraintes. Pour l'énergie de Willmore, l'étude de la relaxée semi-continue inférieurement sans contrainte est déjà complexe (voir Chapitre 3 Section 2). Pour l'instant, il n'est pas évident de voir comment l'énergie relaxée de Willmore est modifiée avec des contraintes d'inclusion-exclusion.

2. Γ -convergence pour les contraintes épaissies

2.1. Preuve de la Γ – lim inf

Pour plus de simplicité, on note $F_\varepsilon = P_{\varepsilon, u_{\varepsilon, \alpha}^{int}, u_{\varepsilon, \alpha}^{ext}}$ avec $\alpha \in]0, 1[$. Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite de fonctions telle que

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}_E \quad \text{dans } L^1(Q).$$

En utilisant les mêmes calculs que dans le Chapitre 2 (Section 3.2), on obtient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2W(s)} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, Q) ds.$$

La suite de la section a pour but de montrer le lemme suivant.

Lemme 4.8. *Pour presque tout s dans $[0, 1]$,*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, Q) \geq P(E, Q) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int}) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext}).$$

En admettant ce lemme pour le moment on peut terminer la preuve :

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2W(s)} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, Q) ds \\ &\geq \int_0^1 \sqrt{2W(s)} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, Q) ds \\ &\geq \int_0^1 \sqrt{2W(s)} \left(P(E, Q) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int}) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext}) \right) ds \\ &= \lambda F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E). \end{aligned}$$

Les preuves des lemmes intermédiaires sont données dans la Section 3.

2.2. Preuve du Lemme 4.8

Afin de prouver ce lemme, nous allons localiser autour des contraintes ω_n . Autour de chaque contrainte, nous définissons une boîte B_n dans laquelle nous allons estimer

$$P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B_n).$$

La taille de la boîte est choisie de sorte à bien recouvrir Q sans perdre de contribution due au périmètre. La forme de la boîte est donnée par $\Omega_{n, \varepsilon^\alpha}$ avec une taille inférieure à ε_0^α (taille maximale de l'épaississement). En jouant sur le paramètre ε , nous pourrions imposer $\mathcal{H}^{d-1}(E^{1/2} \cap \partial B_n) = 0$ pour toutes les boîtes B_n .

On réutilise le repère lié à Π_n , soit φ la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega_{n, \varepsilon_0^\alpha} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (y, z) &\mapsto \frac{|z|}{|d_n(y, \omega_n)|}. \end{aligned}$$

φ est bornée par ε_0^α et son ensemble de niveau $\{\varphi < \varepsilon^\alpha\}$ est exactement l'épaississement $\Omega_{n, \varepsilon^\alpha}$. Nous allons utiliser le [5, Lemme 2.95] qui requiert que φ soit lipschitzienne. Cependant φ est seulement localement lipschitzienne ainsi nous appliquerons ce lemme sur une famille croissante de restrictions de φ avant de prendre la réunion.

Soit $\delta > 0$ et

$$\Omega_{n, \varepsilon_0^\alpha, \delta} = \left\{ (y, z) \mid y \in \omega_n, |d_n(y, \omega_n)| > \delta, |z| < \varepsilon_0^\alpha |d_n(y, \omega_n)| \right\};$$

$\varphi|_{\Omega_{n, \varepsilon_0^\alpha, \delta}}$ est $1/\delta^2$ -lipschitzienne et ainsi, en utilisant le [5, Lemme 2.95] et le fait que $|E^{1/2}| = 0$, on obtient, pour presque tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$,

$$\mathcal{H}^{d-1}(E^{1/2} \cap \Omega_{n, \varepsilon_0^\alpha, \delta} \cap \varphi^{-1}(\{\varepsilon^\alpha\})) = 0.$$

Soit $(\delta_k)_k$ une suite décroissante et convergeant vers 0. Pour chaque k , on note N_k l'ensemble des $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ pour lesquels l'égalité précédente est fausse. Ainsi, N_k est négligeable et, pour $\varepsilon \notin N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$, on a

$$\mathcal{H}^{d-1}\left(E^{1/2} \cap \Omega_{n, \varepsilon_0^\alpha, \delta_k} \cap \varphi^{-1}(\{\varepsilon^\alpha\})\right) = 0,$$

et

$$\Omega_{n, \varepsilon_0^\alpha, \delta_k} \subset \Omega_{n, \varepsilon_0^\alpha, \delta_{k+1}}.$$

Par conséquent, en utilisant un argument de limite croissante, on a

$$\Omega_{n, \varepsilon_0^\alpha} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_{n, \varepsilon_0^\alpha, \delta_k}$$

et on récupère que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[\setminus N$,

$$\mathcal{H}^{d-1}\left(E^{1/2} \cap \Omega_{n, \varepsilon_0^\alpha} \cap \varphi^{-1}(\{\varepsilon^\alpha\})\right) = 0.$$

En choisissant l'un de ces ε , on peut définir

$$B_n = \Omega_{n, \varepsilon_0^\alpha} \cap \varphi^{-1}(\{\varepsilon_n^\alpha\})$$

et on a bien

$$\mathcal{H}^{d-1}(E^{1/2} \cap \partial B_n) = 0.$$

Ainsi, pour toute contrainte ω_n il existe une boîte (ouverte) $B_n = \Omega_{n, \varepsilon_n}$ telle que

$$\mathcal{H}^{d-1}(E^{1/2} \cap \partial B_n) = 0$$

et comme on a un nombre fini de contraintes, on peut choisir $\varepsilon_n = \varepsilon$ pour un certain ε .

Nous allons maintenant distinguer selon si B_n englobe une contrainte intérieure ou extérieure. Nous regarderons ensuite aussi ce qu'il se passe en dehors des boîtes.

2.2.1. Proche d'une contrainte intérieure

On considère une contrainte intérieure ω_n^{int} et sa boîte B_n . Comme $u_\varepsilon \rightarrow \mathbb{1}_E$ dans L^1 on a, à une sous-suite près, que pour presque tout $s \in [0, 1]$:

$$\{u_\varepsilon \geq s\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E \quad \text{en mesure dans } Q.$$

Grâce à $F_\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty$, on obtient $u_\varepsilon^{int} \leq u_\varepsilon$ et ainsi

$$\{u_\varepsilon^{int} \geq s\} \subset \{u_\varepsilon \geq s\}.$$

Notons que

$$u_\varepsilon^{int}(x) \geq s \quad \Leftrightarrow \quad d(x, \Omega_{n, \varepsilon^\alpha}^{int}) \leq \varepsilon q^{-1}(s).$$

On distingue deux cas.

– Si $s \leq q(0) = 1/2$ alors $\varepsilon q^{-1}(s) \geq 0$ et donc, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_n$,

$$\Omega_{n, \varepsilon^\alpha}^{int} \subset \{x \in B_n \mid d(x, \Omega_{n, \varepsilon^\alpha}^{int}) \leq \varepsilon q^{-1}(s)\}.$$

Ceci signifie que $\Omega_{n, \varepsilon^\alpha}^{int}$ est un ouvert borné enfermant ω_n^{int} et séparant B_n en deux parties (voir Figure 4.5 [droite])

$$B_n^+ = \left\{ (y, z) \mid y \in \omega_n^{int}, z > 0, |z| < \varepsilon^\alpha |d_n(y, \omega_n^{int})| \right\}$$

et

$$B_n^- = \left\{ (y, z) \mid y \in \omega_n^{int}, z < 0, |z| < \varepsilon^\alpha |d_n(y, \omega_n^{int})| \right\}.$$

On note $S_{n, \varepsilon} = \Omega_{n, \varepsilon^\alpha}^{int}$.

– Si $s > q(0) = 1/2$ alors $\varepsilon q^{-1}(s) > 0$ et ainsi

$$\left\{ x \in B_n \mid d(x, \Omega_{n,\varepsilon^\alpha}^{int}) \leq \varepsilon q^{-1}(s) \right\}$$

ne contient pas nécessairement ω_n^{int} (voir Figure 4.5 [gauche]). Par conséquent, nous allons réduire B_n afin de nous ramener au cas précédent. Soit $\delta > 0$, on considère $B_{n,\delta} = \Omega_{n,\varepsilon_0^\alpha,\delta}$ et $\Omega_{n,\varepsilon^\alpha,\delta}$ comme dans la définition de B_n . On considère aussi

$$S_{n,\varepsilon,\delta} = \left\{ (y, z) \mid y \in \omega_n^{int}, |z| < l_\varepsilon, |d_n(y, \omega_n^{int})| > \delta \right\}$$

où $l_\varepsilon = \delta \varepsilon^\alpha - \varepsilon q^{-1}(s) \sqrt{1 + \varepsilon^{2\alpha}}$ (voir Figure 4.6). Pour ε assez petit, $S_{n,\varepsilon,\delta}$ est un ouvert borné contenant

$$\omega_n^{int} \cap \Omega_{n,\varepsilon^\alpha,\delta}$$

et séparant $B_{n,\delta}$ en deux parties $B_{n,\delta}^+$ et $B_{n,\delta}^-$ comme dans le cas précédent.

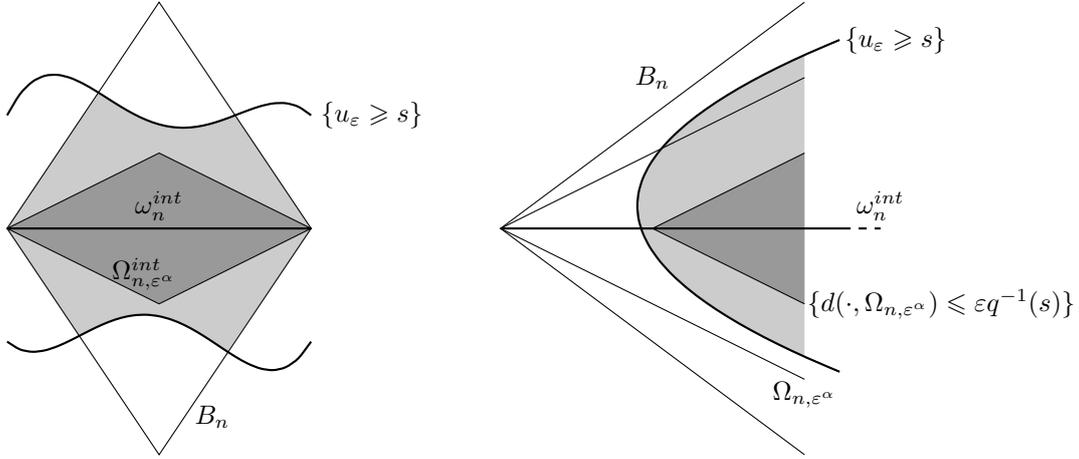


FIGURE 4.5. Ensembles de niveau.

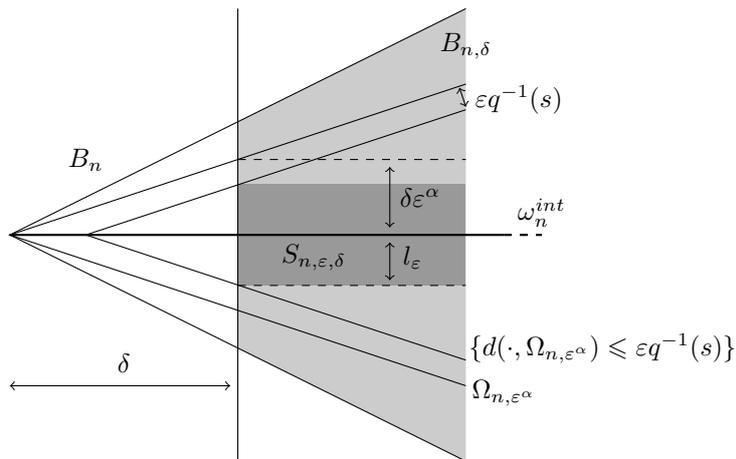


FIGURE 4.6. La sous boîte $S_{n,\varepsilon,\delta}$ pour le second cas.

Dans les deux cas, la suite de la preuve est identique et on note B et S pour traiter les deux cas ensemble (B_n et $S_{n,\varepsilon}$ dans le premier cas et $B_{n,\delta}$ et $S_{n,\varepsilon,\delta}$ pour le deuxième).

Comme S est un ouvert borné inclus dans $\{u_\varepsilon \geq s\}$ et contenant $\omega_n \cap B$, l'interface entre B^+ et B^- , on obtient la relation suivante sur le périmètre :

$$\begin{aligned} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B) &= P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B^+) + P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B^-) \\ &= P(\{u_\varepsilon \geq s\} \cup B^-, B^+) + P(\{u_\varepsilon \geq s\} \cup B^+, B^-) \\ &= P(\{u_\varepsilon \geq s\} \cup B^-, B) + P(\{u_\varepsilon \geq s\} \cup B^+, B). \end{aligned}$$

On rappelle que pour presque tout s

$$\{u_\varepsilon \geq s\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E \quad \text{en mesure dans } Q$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \{u_\varepsilon \geq s\} \cup B^+ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E \cup B^+ \quad \text{en mesure dans } B \\ \{u_\varepsilon \geq s\} \cup B^- &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E \cup B^- \quad \text{en mesure dans } B. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient l'inégalité suivante

$$(8) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B) \geq P(E \cup B^-, B) + P(E \cup B^+, B).$$

Pour $B = B_n$, on a exactement

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B_n) \geq P(E \cup B^-, B_n) + P(E \cup B^+, B_n).$$

Concernant $B = B_{n,\delta}$, on considère $(\delta_k)_k$ une suite décroissante convergeant vers 0 et on obtient $B_{n,\delta_k} \subset B_{n,\delta_{k+1}} \subset B_n$. Ainsi,

$$P(E \cup B_{n,\delta_k}^-, B_{n,\delta_k}) = P(E \cup B_n^-, B_{n,\delta_k}),$$

et

$$P(E \cup B_{n,\delta_k}^+, B_{n,\delta_k}) = P(E \cup B_n^+, B_{n,\delta_k}).$$

En passant à la limite croissante, on a

$$B_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{n,\delta_k}$$

et pour

$$A \mapsto P(\{u_\varepsilon \geq s\}, A), \quad A \mapsto P(E \cup B_n^+, A) \quad \text{et} \quad A \mapsto P(E \cup B_n^-, A)$$

on peut passer à la limite $k \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B_{n,\delta_k}) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B_n), \\ P(E \cup B_{n,\delta_k}^-, B_{n,\delta_k}) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} P(E \cup B_n^-, B_n), \end{aligned}$$

et

$$P(E \cup B_{n,\delta_k}^+, B_{n,\delta_k}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} P(E \cup B_n^+, B_n).$$

Afin de simplifier, on note

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon,\delta} &= P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B_{n,\delta}), \\ \alpha &= P(E \cup B^-, B_n) + P(E \cup B^+, B_n), \end{aligned}$$

et

$$v_\varepsilon = P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B_n).$$

Avec la construction précédente, nous avons

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} v_{\varepsilon,\delta_k} \geq \alpha,$$

et

$$(v_{\varepsilon,\delta_k})_k \text{ est croissante et converge vers } v_\varepsilon.$$

Nous allons maintenant montrer que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon \geq \alpha.$$

En effet, la double limite inférieure ci-dessus nous indique que pour tout $a > 0$, il existe $k_a \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq k_a, \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} v_{\varepsilon, \delta_k} \geq \alpha - a.$$

De même, pour tout $b > 0$, il existe $\varepsilon_{a,b} > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_{a,b}, \quad v_{\varepsilon, \delta_k} \geq \alpha - a - b.$$

En utilisant la monotonie de $(v_{\varepsilon, \delta_k})_k$, on obtient

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_{a,b}, \quad v_\varepsilon \geq v_{\varepsilon, \delta_k} \geq \alpha - a - b.$$

Ainsi,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon \geq \alpha - a - b.$$

En choisissant a et b arbitrairement petits, on obtient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon \geq \alpha.$$

Donc

$$P(E \cup B_n^-, B_n) + P(E \cup B_n^+, B_n) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B_n).$$

En conséquence, (8) est valide pour presque tout s dans $[0, 1]$ avec $B = B_n$ (dans les deux cas). On utilise le lemme suivant pour identifier le membre de gauche dans l'inégalité.

Lemme 4.9. *Soit E un ensemble de périmètre localement fini. Avec B_n une boîte contenant ω_n^{int} , on a*

$$P(E \cup B_n^-, B_n) + P(E \cup B_n^+, B_n) = P(E, B_n) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int} \cap B_n).$$

2.2.2. Proche d'une contrainte extérieure

Pour une contrainte ω_n^{ext} et sa boîte B_n , on utilise le résultat précédent sur le complémentaire de E dans Q . Comme $u_\varepsilon \rightarrow \mathbb{1}_E$ dans $L^1(Q)$ on a encore, à une sous-suite près, que pour presque tout $s \in [0, 1]$

$$Q \setminus \{u_\varepsilon \geq s\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} Q \setminus E \quad \text{en mesure dans } Q.$$

La contrainte $u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^{ext}$ nous mène à

$$Q \setminus \{u_\varepsilon^{ext} \geq s\} \subset Q \setminus \{u_\varepsilon \geq s\}.$$

La même preuve que pour les contraintes intérieures en utilisant ces ensembles nous fournit

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(Q \setminus \{u_\varepsilon \geq s\}, B_n) \geq P(Q \setminus E, B_n) + 2\mathcal{H}^{d-1}((Q \setminus E)^0 \cap \omega^{out} \cap B_n).$$

Et comme d'une part pour tout borélien A , $Q \setminus A$ coïncide avec $B_n \setminus A$ dans B_n , d'autre part $P(A, B_n) = P(Q \setminus A, B_n)$ et $(Q \setminus E)^0 \cap B_n = E^1 \cap B_n$ on obtient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B_n) \geq P(E, B_n) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext} \cap B_n).$$

2.2.3. En dehors des boîtes

Ailleurs, loin des contraintes, dans

$$B_0 = Q \setminus \bigcup_n \overline{B_n}$$

on a $u_\varepsilon \rightarrow \mathbb{1}_E$ dans $L^1(Q)$ et ainsi, pour presque tout s ,

$$\{u_\varepsilon \geq s\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E \quad \text{en mesure dans } B_0.$$

donc

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B_0) \geq P(E, B_0).$$

2.2.4. Rassemblement des boites

Comme B_0 et $(B_n)_n$ sont disjointes deux à deux, on peut rassembler les résultats des trois paragraphes précédents dans l'inégalité :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B_n) \geq P(E, B_n) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{in} \cap B_n) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{out} \cap B_n).$$

Comme on a choisi nos boites B_n de manière convenable pour satisfaire

$$\mathcal{H}^{d-1}(E^{1/2} \cap \partial B_n) = 0$$

et sachant que $(\omega \cap B_n)_n$ est une famille d'ensembles disjoints deux à deux recouvrant ω^{int} et ω^{ext} , on peut écrire

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, Q) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P\left(\{u_\varepsilon \geq s\}, \bigcup_{n \geq 0} B_n\right) \\ &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n \geq 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B_n) \\ &\geq \sum_{n \geq 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, B_n) \\ &\geq \sum_{n \geq 0} \left(P(E, B_n) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int} \cap B_n) \right. \\ &\quad \left. + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext} \cap B_n) \right) \\ &= P(E, Q) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int}) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext}). \end{aligned}$$

Ainsi, le Lemme 4.8 est finalement prouvé.

2.3. Preuve de la Γ – lim sup.

Soit E un ensemble de périmètre fini dans Q . Soit $\eta > 0$, on considère

$$E_\eta = (E \cup \Omega_\eta^{int}) \setminus \Omega_\eta^{ext}.$$

Pour $\varepsilon^\alpha < \eta$, on a

$$\Omega_{\varepsilon^\alpha}^{int} \subset E_\eta \subset Q \setminus \Omega_{\varepsilon^\alpha}^{ext}$$

et ainsi la fonction définie sur Q par

$$u_{\varepsilon, \eta}(x) = q\left(\frac{1}{\varepsilon} d(x, E_\eta)\right)$$

satisfait $u_{\varepsilon, \alpha}^{int} \leq u_{\varepsilon, \eta} \leq u_{\varepsilon, \alpha}^{ext}$ pour tout $\varepsilon^\alpha < \eta$. En utilisant le résultat classique de Γ -convergence, on a

$$F_\varepsilon(u_{\varepsilon, \eta}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda P(E_\eta, \Omega).$$

Ensuite, nous allons prouver que

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} P(E_\eta, \Omega) \leq P(E, \Omega) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int}) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext}).$$

Les preuves des lemmes sont données dans la Section 3.

On choisit les mêmes boites B_n que pour la Γ – lim inf, on a, pour $\eta < \min_n \varepsilon_n^\alpha$,

$$\mathcal{H}^{d-1}(E_\eta \cap \partial B_n) = 0$$

et ainsi

$$P(E_\eta, \Omega) = \sum_{n \geq 0} P(E_\eta, B_n).$$

Comme (B_n) est une famille d'ensembles disjoints deux à deux, on obtient

- soit $P(E_\eta, B_0) = P(E, B_0)$;
- soit $P(E_\eta, B_n) = P(E \cup \Omega_{n, \eta}^{int}, B_n)$ pour $B_n = B_n^{int}$;

– soit $P(E_\eta, B_n) = P(E \setminus \Omega_{n,\eta}^{ext}, B_n)$ pour $B_n = B_n^{ext}$.

Le premier point est convenable, pour les deux autres on utilise la formule suivante sur le périmètre (voir [5, Proposition 3.38]) :

$$P(E \cup \Omega, B) + P(E \cap \Omega, B) \leq P(E, B) + P(\Omega, B).$$

Pour le deuxième point, on obtient

$$P(E \cup \Omega_{n,\eta}^{int}, B_n) \leq P(E, B_n) + P(\Omega_{n,\eta}^{int}, B_n) - P(E \cap \Omega_{n,\eta}^{int}, B_n).$$

On utilise ensuite le lemme suivant avec $A = E \cap \Omega_{n,\eta}^{int}$ et $\Pi = \Pi_n$.

Lemme 4.10. *Soit A un ensemble de périmètre fini et Π un hyperplan de \mathbb{R}^d . Alors*

$$P(A) \geq 2\mathcal{H}^{d-1}(\Pi \cap (A^1 \cup A^{1/2})).$$

En effet $E \cap \Omega_{n,\eta}^{int}$ est inclus dans B_n (sauf éventuellement le long de $\partial_n \omega_n^{in}$ qui est un ensemble \mathcal{H}^{d-1} -négligeable) donc $P(E \cap \Omega_{n,\eta}^{int}, B_n) = P(E \cap \Omega_{n,\eta}^{int})$. Sur Π_n , on a $(E \cap \Omega_{n,\eta}^{int})^1 = E^1 \cap \Omega_{n,\eta}^{int}$ à un ensemble \mathcal{H}^{d-1} -négligeable près puisque $\Omega_{n,\eta}^{int}$ est un ouvert et :

– si $x \in \Pi_n \cap \Omega_{n,\eta}^{int}$, alors

$$\frac{|(E \cap \Omega_{n,\eta}^{int}) \cap B(x, r)|}{|B(x, r)|} = \frac{|E \cap B(x, r)|}{|B(x, r)|},$$

donc $x \in (E \cap \Omega_{n,\eta}^{int})^1 \Leftrightarrow x \in E^1 \cap \Omega_{n,\eta}^{int}$;

– si $x \in \Pi_n \cap (Q \setminus \overline{\Omega_{n,\eta}^{int}})$, alors

$$\frac{|(E \cap \Omega_{n,\eta}^{int}) \cap B(x, r)|}{|B(x, r)|} \leq \frac{|\Omega_{n,\eta}^{int} \cap B(x, r)|}{|B(x, r)|} = 0$$

pour r assez petit. Donc $x \notin \Omega_{n,\eta}^{int}$ et $x \notin (E \cap \Omega_{n,\eta}^{int})^1$;

– sinon x appartient à $\partial \Omega_{n,\eta}^{int} \cap \Pi_n = \partial_n \omega_n^{int}$ qui est un ensemble de \mathcal{H}^{d-1} -négligeable.

De manière similaire, on obtient

$$(E \cap \Omega_{n,\eta}^{in})^{1/2} = E^{1/2} \cap \Omega_{n,\eta}^{in}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{d-1} \left(\Pi_n \cap \left((E \cap \Omega_{n,\eta}^{int})^1 \cup (E \cap \Omega_{n,\eta}^{int})^{1/2} \right) \right) &= \mathcal{H}^{d-1} \left(\Pi_n \cap \Omega_{n,\eta}^{int} \cap (E^1 \cup E^{1/2}) \right) \\ &= \mathcal{H}^{d-1} (\omega_n^{int} \cap (E^1 \cup E^{1/2})). \end{aligned}$$

Donc on a

$$P(E \cap \Omega_{n,\eta}^{int}, B_n) \geq 2\mathcal{H}^{d-1} (\omega_n^{int} \cap (E^1 \cup E^{1/2}))$$

et ainsi

$$P(E \cup \Omega_{n,\eta}^{int}, B_n) \leq P(E, B_n) + P(\Omega_{n,\eta}^{int}, B_n) - 2\mathcal{H}^{d-1} (\omega_n^{int} \cap (E^1 \cup E^{1/2})).$$

On prend la lim sup sur $\eta \rightarrow 0$ et on utilise le lemme suivant.

Lemme 4.11. *Pour les contraintes épaissies $\Omega_{n,\eta}$, on a*

$$P(\Omega_{n,\eta}, B_n) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega_n).$$

Comme $E^1 \cup E^{1/2} \cup E^0$ est une \mathcal{H}^{d-1} -presque partition de \mathbb{R}^d , nous avons finalement prouvé que

$$\begin{aligned} \limsup_{\eta \rightarrow 0} P(E \cup \Omega_{n,\eta}^{int}, B_n) &\leq P(E, B_n) + 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega_n^{int}) - 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega_n^{int} \cap (E^1 \cup E^{1/2})) \\ &= P(E, B_n) + 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega_n^{int} \cap E^0). \end{aligned}$$

Pour ω_n^{ext} , on passe au complémentaire dans Q . On a

$$\begin{aligned} P(E \setminus \Omega_{n,\eta}^{ext}, B_n) &= P(E \cap (Q \setminus \Omega_{n,\eta}^{ext}), B_n) \\ &= P((Q \setminus E) \cup \Omega_{n,\eta}^{ext}, B_n) \\ &\leq P((Q \setminus E), B_n) + P(\Omega_{n,\eta}^{ext}, B_n) - P((Q \setminus E) \cap \Omega_{n,\eta}^{ext}, B_n). \end{aligned}$$

On procède exactement de la même manière que pour ω_n^{int} en utilisant $Q \setminus E$ au lieu de E et on obtient

$$\begin{aligned} \limsup_{\eta \rightarrow 0} P(E \setminus \Omega_{n,\eta}^{ext}, B_n) &\leq P(Q \setminus E, B_n) + 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega_n^{ext} \cap (Q \setminus E)^0) \\ &= P(E, B_n) + 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega_n^{ext} \cap E^1). \end{aligned}$$

Comme les boîtes B_n ont été bien choisies, on arrive à

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} P(E_\eta, Q) \leq P(E, Q) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int}) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext}).$$

En se souvenant que

$$\lambda P(E_\eta, Q) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon^\eta)$$

on a en fait prouvé que

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_{\varepsilon,\eta}) \leq \lambda P(E, Q) + 2\lambda \mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int}) + 2\lambda \mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext}).$$

En utilisant la [91, Proposition 12.19], on peut choisir un représentant de E (dans la classe des ensembles modulo les ensembles négligeables) satisfaisant $|\partial E| = 0$. Ainsi, on peut définir

$$u_\varepsilon = u_{\varepsilon, 2\varepsilon^\alpha}$$

et on a

$$u_\varepsilon^{int} \leq u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^{ext}.$$

De plus, si $x \in Q \setminus (\bar{E} \cup \omega^{int})$ alors $d(x, E \cup \omega^{int}) > 0$ donc il existe ε_0 assez petit tel que $d(x, E_{2\varepsilon_0}) > 0$. Par conséquent pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$d(x, E_{2\varepsilon}) \geq d(x, E_{2\varepsilon_0}) > 0$$

ainsi

$$u_\varepsilon(x) \xrightarrow[\infty]{\varepsilon \rightarrow 0} \lim q = 0.$$

Si $x \in \overset{\circ}{E} \setminus \omega^{ext}$ alors $d(x, E \cup \omega^{ext}) < 0$. Donc il existe ε_0 assez petit tel que $d(x, E_{2\varepsilon_0}) < 0$. Par conséquent pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$d(x, E_{2\varepsilon}) \leq d(x, E_{2\varepsilon_0}) < 0$$

ainsi

$$u_\varepsilon(x) \xrightarrow[-\infty]{\varepsilon \rightarrow 0} \lim q = 1.$$

Sinon, comme $|\omega^{int}| = |\omega^{ext}| = |\partial E| = 0$, x reste dans un ensemble négligeable donc

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\infty]{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}_E \quad \text{presque partout sur } Q.$$

Par conséquent

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_{\varepsilon, 2\varepsilon^\alpha}) \leq \limsup_{\eta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_{\varepsilon,\eta}) \leq \lambda F_{2, \omega^{int}, \omega^{ext}}(E).$$

On obtient ainsi l'inégalité de $\Gamma - \lim \sup$.

2.4. L'inégalité de Γ – lim inf pour des contraintes non épaissies

Nous montrons ici la preuve de la partie Γ – lim inf du résultat de la Conjecture 4.6. En fait la preuve est construite sur le même principe que celle de la Γ – lim inf dans le cas des contraintes épaissies et nous allons adapter les résultats intermédiaires.

Choisir $\Omega_{n,\varepsilon^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ ou ω_n dans la définition de $u_{\varepsilon,\alpha}^{int/ext}$ induit quelques modifications. Le premier est la limite ponctuelle de $u_{\varepsilon,\alpha}^{int}$ et de $u_{\varepsilon,\alpha}^{ext}$:

$$u_{\varepsilon,\alpha}^{int}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in \omega^{int} \\ 1/2 & \text{si } x \in \bigcup_n \partial_n \omega_n^{int} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$u_{\varepsilon,\alpha}^{ext}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \omega^{ext} \\ 1/2 & \text{si } x \in \bigcup_n \partial_n \omega_n^{ext} \\ 1/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La preuve est exactement du même type que celle avec les contraintes épaissies. Le Lemme 4.8 est légèrement modifié, on le remplace par le lemme suivant.

Lemme 4.8 (modifié). *Pour presque tout s dans $[0, 1/2]$,*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, \Omega) \geq P(E, \Omega) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int}).$$

Pour presque tout s dans $[1/2, 1]$,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\{u_\varepsilon \geq s\}, \Omega) \geq P(E, \Omega) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext}).$$

Ainsi, en suivant la même procédure que précédemment, on arrive à

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \lambda P(E, \Omega) + 2\lambda_1 \mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int}) + 2\lambda_2 \mathcal{H}^{d-1}(E^1 \cap \omega^{ext})$$

où

$$\lambda = \int_0^1 \sqrt{2W(s)} ds,$$

$$\lambda_1 = \int_0^{1/2} \sqrt{2W(s)} ds$$

et

$$\lambda_2 = \int_{1/2}^1 \sqrt{2W(s)} ds.$$

En utilisant un potentiel symétrique $W(1-s) = W(s)$, on a $2\lambda_1 = 2\lambda_2 = \lambda$.

3. Preuve des lemmes

Lemme 4.9. *Soit E un ensemble de périmètre localement fini. Avec B_n une boîte contenant ω_n^{int} , on a*

$$P(E \cup B_n^-, B_n) + P(E \cup B_n^+, B_n) = P(E, B_n) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E^0 \cap \omega^{int} \cap B_n).$$

Preuve.

En utilisant le [91, Théorème 16.3], on a

$$P(E \cup B_n^-, B_n) = P(E, (B_n^-)^0 \cap B_n) + P(B_n^-, E^0 \cap B_n) + \mathcal{H}^{d-1}(\{\nu_E = \nu_{B_n^-}\} \cap B_n)$$

où ν_E est la normale extérieure généralisée de E et

$$\{\nu_E = \nu_{B_n^-}\} = \{x \in \partial^* E \cap \partial^* B_n^- \mid \nu_E(x) = \nu_{B_n^-}(x)\}$$

où $\partial^* E$ est l'ensemble des points pour lesquels ν_E existe. Notons que, pour un ensemble de périmètre fini, $\partial^* E = E^{1/2}$ modulo un ensemble \mathcal{H}^{d-1} -négligeable. Comme on se place dans une boîte ouverte B_n , on a $(B_n^-)^0 \cap B_n = B_n^+$ et $\partial^* B_n^- \cap B_n = \omega_n^{int}$. On définit e le vecteur unitaire orthogonal à ω_n^{int} pointant vers B_n^+ . ainsi, on peut écrire

$$P(E \cup B_n^-, B_n) = P(E, B_n^+) + \mathcal{H}^{d-1}(\omega_n^{int} \cap E^0) + \mathcal{H}^{d-1}(\{x \in \partial^* E \cap \omega_n^{int} \mid \nu_E(x) = e\}).$$

De manière similaire, on a

$$P(E \cup B_n^+, B_n) = P(E, B_n^-) + \mathcal{H}^{d-1}(\omega_n^{int} \cap E^0) + \mathcal{H}^{d-1}(\{x \in \partial^* E \cap \omega_n^{int} \mid \nu_E(x) = -e\}).$$

De plus, ω_n^{int} et $\partial^* E$ sont $(d-1)$ -rectifiables ainsi, en utilisant la [91, Proposition 10.5], on a, pour \mathcal{H}^{d-1} -presque tout $x \in \partial^* E \cap \omega_n^{int}$,

$$\nu_E(x) = \pm e.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E \cap \omega_n^{int}) &= \mathcal{H}^{d-1}(\{x \in \partial^* E \cap \omega_n^{int} \mid \nu_E(x) = e\}) \\ &\quad + \mathcal{H}^{d-1}(\{x \in \partial^* E \cap \omega_n^{int} \mid \nu_E(x) = -e\}). \end{aligned}$$

Finalement, en sommant on obtient

$$P(E \cup B_n^-, B_n) + P(E \cup B_n^+, B_n) = P(E) + 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega_n^{int} \cap E^0)$$

$$\text{car } P(E, B_n) = P(E, B_n^+) + P(E, B_n^-) + \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E \cap \omega_n^{int}). \quad \square$$

Lemme 4.10. *Soit A un ensemble de périmètre fini et Π un hyperplan de \mathbb{R}^d . Alors*

$$P(A) \geq 2\mathcal{H}^{d-1}(\Pi \cap (A^1 \cup A^{1/2})).$$

Preuve.

On note Π^+ et Π^- les demi espaces ouverts de part et d'autre de Π . Si $|A \cap \Pi^+| > 0$ et $|A \cap \Pi^-| > 0$ alors, en utilisant la [91, Proposition 19.22] on a

$$P(A, \Pi^+) = P(A \cap \Pi^+, \Pi^+) > \mathcal{H}^{d-1}(\partial^*(A \cap \Pi^+) \cap \Pi)$$

et

$$P(A, \Pi^-) = P(A \cap \Pi^-, \Pi^-) > \mathcal{H}^{d-1}(\partial^*(A \cap \Pi^-) \cap \Pi).$$

On rappelle que pour un ensemble de périmètre fini A on note $\partial^* A$ l'ensemble des points x pour lesquels la normale extérieure généralisée existe $\nu(x)$. On utilise le [91, Théorème 16.3] pour obtenir

$$\partial^*(A \cap \Pi^+) = ((\Pi^+)^1 \cap \partial^* A) \cup (A^1 \cap \partial^*(\Pi^+)) \cup \{\nu_A = \nu_{\Pi^+}\}$$

et

$$\partial^*(A \cap \Pi^-) = ((\Pi^-)^1 \cap \partial^* A) \cup (A^1 \cap \partial^*(\Pi^-)) \cup \{\nu_A = \nu_{\Pi^-}\}$$

où

$$\{\nu_A = \nu_{\Pi^+}\} = \{x \in \partial^* A \cap \partial^*(\Pi^+) \mid \nu_A(x) = \nu_{\Pi^+}(x)\}.$$

De plus, comme nous avons des demi espaces ouverts, on obtient $(\Pi^+)^1 = \Pi^+$, $(\Pi^-)^1 = \Pi^-$, $\partial^*(\Pi^+) = \partial^*(\Pi^-) = \Pi$ et $\nu_{\Pi^+} = -\nu_{\Pi^-}$. Par ailleurs,

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial^*(A \cap \Pi^+) \cap \Pi) = \mathcal{H}^{d-1}(A^1 \cap \Pi) + \mathcal{H}^{d-1}(\{\nu_A = \nu_{\Pi^+}\})$$

et

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial^*(A \cap \Pi^-) \cap \Pi) = \mathcal{H}^{d-1}(A^1 \cap \Pi) + \mathcal{H}^{d-1}(\{\nu_A = -\nu_{\Pi^+}\}).$$

En notant e un vecteur unitaire orthogonal à Π , on a

$$\{\nu_A = \nu_{\Pi^+}\} \cup \{\nu_A = -\nu_{\Pi^+}\} = \Pi \cap \{\nu_A = \pm e\}$$

et, utilisant la [91, Proposition 10.5] comme dans la démonstration du lemme précédent, on a

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial^* A \cap H) = \mathcal{H}^{d-1}(\{\nu_A = \nu_{\Pi^+}\}) + \mathcal{H}^{d-1}(\{\nu_A = -\nu_{\Pi^+}\}).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A, \Pi^+) + P(A, \Pi^-) + \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* A \cap \Pi) \\ &= P(A \cap \Pi^+, \Pi^+) + P(A \cap \Pi^-, \Pi^-) + \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* A \cap \Pi) \\ &\geq \mathcal{H}^{d-1}(\partial^*(A \cap \Pi^+) \cap \Pi) + \mathcal{H}^{d-1}(\partial^*(A \cap \Pi^-) \cap \Pi) + \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* A \cap \Pi) \\ &= 2\mathcal{H}^{d-1}(A^1 \cap \Pi) + \mathcal{H}^{d-1}(\{\nu_A = \nu_{\Pi^+}\}) \\ &\quad + \mathcal{H}^{d-1}(\{\nu_A = -\nu_{\Pi^+}\}) + \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* A \cap \Pi) \\ &= 2\mathcal{H}^{d-1}(A^1 \cap \Pi) + 2\mathcal{H}^{d-1}(\partial^* A \cap \Pi) \\ &= 2\mathcal{H}^{d-1}((A^1 \cup \partial^* A) \cap \Pi). \end{aligned}$$

Pour conclure, on utilise le fait que $\partial^* A = A^{1/2}$ à un ensemble \mathcal{H}^{d-1} -négligeable près.

Enfin, si $|A \cap \Pi^+| = 0$ alors $A^1 \cap \Pi^+ = \emptyset$ et $\{\nu_A = \nu_{\Pi^+}\} = \emptyset$. La preuve reste valable dans ce cas. On a la même chose si $|A \cap \Pi^-| = 0$. Si on a à la fois $|A \cap \Pi^+| = 0$ et $|A \cap \Pi^-| = 0$ alors $|A| = 0$ et l'énoncé du lemme est clairement vrai dans ce cas. \square

Lemme 4.11. *Pour les contraintes épaissies $\Omega_{n,\eta}$, on a*

$$P(\Omega_{n,\eta}, B_n) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega_n).$$

Preuve.

Le point clef de cette preuve est que le bord de $\Omega_{n,\eta}$ est une surface qu'on peut paramétrer comme la réunion de deux graphes de fonctions lipschitziennes définies sur ω_n . En effet, on rappelle que

$$\Omega_{n,\eta} = \{(y, z) \mid y \in \omega_n, |z| < \eta^\alpha |d_n(y, \omega_n)|\}.$$

Pour $y \in \Pi_n$, on introduit

$$f_\eta^\pm(y) = \pm \eta^\alpha d_n(y, \omega_n)$$

on a

$$\partial\Omega_{n,\eta} = \text{graph}(f_\eta^+, \omega_n) \cup \text{graph}(f_\eta^-, \omega_n) \cup \partial_n \omega_n$$

avec des ensembles disjoints. f_η^+ et f_η^- sont dérivables \mathcal{H}^{d-1} -presque partout sur Π_n et comme $\mathcal{H}^{d-1}(\partial_n \omega_n) = 0$, on a

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega_{n,\eta}) = \int_{\omega_n} \sqrt{1 + |\nabla f_\eta^+|^2} d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\omega_n} \sqrt{1 + |\nabla f_\eta^-|^2} d\mathcal{H}^{d-1}.$$

De plus, $|\nabla d_n(y, \omega_n)| \leq 1$ donc

$$\sqrt{1 + |\nabla f_\eta^\pm|^2} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 1.$$

ω_n est borné donc, par le Théorème de convergence dominé de Lebesgue, on obtient

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega_{n,\eta}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \int_{\omega_n} 1 d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\omega_n} 1 d\mathcal{H}^{d-1} = 2\mathcal{H}^{d-1}(\omega_n).$$

Rappelant que $P(\Omega_{n,\eta}, B_n) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega_{n,\eta} \cap B_n) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega_{n,\eta})$ car $\Omega_{n,\eta} \subset \overline{B_n}$ et $\partial\Omega_{n,\eta} \cap \partial B_n = \partial_n \omega_n$ est de mesure \mathcal{H}^{d-1} nulle, le lemme est donc prouvé. \square

4. Expériences numériques

Dans cette partie nous utilisons l'approximation de champ de phase afin d'implémenter une résolution numérique du problème.

$$(7) \quad u_\varepsilon^* = \operatorname{argmin}_{u_1 \leq u \leq u_2} \{J_\varepsilon(u)\}.$$

Plus précisément, nous allons considérer trois problèmes d'optimisation avec contraintes dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3 :

– Cas du périmètre avec des contraintes fines

$$J_\varepsilon(u) = P_\varepsilon(u) = \int_Q \left(\varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right) dx \quad \text{et} \quad u_1 = u_{\varepsilon,+\infty}^{int}, \quad u_2 = u_{\varepsilon,+\infty}^{ext}.$$

– Cas du périmètre avec des contraintes épaisses

$$J_\varepsilon(u) = P_\varepsilon(u) = \int_Q \left(\varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right) dx, \quad \text{et} \quad u_1 = u_{\varepsilon,1/2}^{int}, \quad u_2 = u_{\varepsilon,1/2}^{ext}.$$

– Cas de l'énergie de Willmore avec des contraintes fines

$$J_\varepsilon(u) = \mathcal{W}_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_Q \left(\varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W'(u) \right)^2 dx \quad \text{et} \quad u_1 = u_{\varepsilon,+\infty}^{int}, \quad u_2 = u_{\varepsilon,+\infty}^{ext}.$$

Ici, Q est la boîte dans laquelle nous calculerons la solution numérique : $Q = [0, 1]^d$.

4.1. Principe général de minimisation sous contraintes

Afin de résoudre le problème d'optimisation sous contraintes (7) nous allons utiliser une descente de gradient depuis une condition initiale. Dès que le flot est stationnaire, nous avons point critique de l'énergie ci-dessus, et donc possiblement un minimiseur. L'intérêt de la descente de gradient est de pouvoir ramener un problème de minimisation à un calcul de flot. Cependant, le minimiseur trouvé par cette technique est uniquement local.

Nous utilisons le schéma numérique décrit dans le Chapitre 2 Section 3.4. On calcule le flot de proche en proche, à chaque pas de temps on minimise l'énergie libre puis on projette sur les contraintes. Soit δ_t un pas de temps et $u^0 : Q \rightarrow [0, 1]$ une condition initiale, on définit le flot minimisant discret $(u^n)_n$ par

(1) $u^{n+1/2}$ une approximation de $v(\delta_t)$ où v est solution de

$$\begin{cases} v_t = -\nabla J_\varepsilon(v) & \text{sur } Q \\ v(x, 0) = u^n(x). \end{cases}$$

(2) u^{n+1} la projection de $u^{n+1/2}$ sur les contraintes :

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= \operatorname{argmin}_u \left\{ \frac{1}{2\delta_t} \int_Q |u - u^{n+1/2}|^2 dx + \chi_{u_1, u_2}(u) \right\} \\ &= \min(\max(u^{n+1/2}, u_1), u_2). \end{aligned}$$

Ici, χ_{u_1, u_2} est la fonction indicatrice des contraintes ;

$$\chi_{u_1, u_2}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_1 \leq u \leq u_2 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Concernant la condition initiale u^0 , nous construisons un ensemble initial E_0 à partir des coupes intérieures. Comme celles-ci sont parallèles, nous les dupliquons dans la direction orthogonale d'une demi hauteur au dessus et d'une demi hauteur en dessous (par hauteur nous entendons la distance qui sépare une tranche de celle au dessus ou celle en dessous). Cet ensemble E_0 a l'avantage de satisfaire les contraintes

$$\Omega_{\varepsilon,\alpha}^{int} \subset E_0 \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega_{\varepsilon,\alpha}^{ext}$$

et ainsi, le profil de champ de phase correspondant $u_\varepsilon^0 = q(d(x, E_0)/\varepsilon)$ satisfait

$$u_{\varepsilon,\alpha}^{int} \leq u_\varepsilon^0 \leq u_{\varepsilon,\alpha}^{ext}.$$

Le fait de satisfaire les contraintes a l'avantage de rendre la projection au premier pas de temps moins violente et cela a pour conséquence d'accélérer la stationnarité du flot.

4.2. A propos des contraintes dans l'approche de champ de phase

Nous supposons que les contraintes intérieures et extérieures ω^{int} et ω^{ext} sont incluses dans la boîte Q . Afin de simplifier la fabrication numérique de $\Omega_{\varepsilon,\alpha}^{int}$ et $\Omega_{\varepsilon,\alpha}^{ext}$, nous étendons les contraintes dans la direction orthogonale au plan Π_n d'une épaisseur de l'ordre de ε^α uniformément sur Π_n (voir Figure 4.7).

Une première idée pour calculer $u_{\varepsilon,\alpha}^{int}$ et $u_{\varepsilon,\alpha}^{ext}$ est d'utiliser une méthode de marche forcée² [115] pour calculer les fonctions distances $d(x, \Omega_{\varepsilon,\alpha}^{int})$ et $d(x, \Omega_{\varepsilon,\alpha}^{ext})$ puis de prendre

$$u_{\varepsilon,\alpha}^{int} = q\left(\frac{d(x, \Omega_{\varepsilon,\alpha}^{int})}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad u_{\varepsilon,\alpha}^{ext} = 1 - q\left(\frac{d(x, \Omega_{\varepsilon,\alpha}^{ext})}{\varepsilon}\right)$$

où q est la fonction profil associée au potentiel W (on a $q(s) = 1/2(1 - \tanh(s/2))$ pour $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1 - s)^2$).

Cependant, la méthode de marche forcée est coûteuse, surtout en dimension 3, donc nous utilisons une approche un peu différente pour calculer les fonctions contraintes $u_{\varepsilon,\alpha}^{int}$ et $u_{\varepsilon,\alpha}^{ext}$. Pour la reconstruction avec le périmètre on utilise

$$u_{\varepsilon,\alpha}^{int} = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\Omega_{\varepsilon,\alpha}^{int}} \quad \text{et} \quad u_{\varepsilon,\alpha}^{ext} = 1 - \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\Omega_{\varepsilon,\alpha}^{ext}}.$$

Bien que ces fonctions soient très raides, la stabilité du flot du périmètre par la méthode de champ de phase est suffisamment forte pour que la reconstruction fonctionne. Pour l'énergie de Willmore, de telles fonctions contraintes cassent trop le profil lors du flot minimisant. Cependant, en procédant à la reconstruction avec le périmètre en utilisant une seule coupe, la fonction de champ de phase u_ε^* renvoyée est très proche du profil de champ de phase sur cette unique coupe. En prenant le maximum sur toutes les coupes, nous arrivons à créer des fonctions profils $u_{\varepsilon,\alpha}^{int}$ et $u_{\varepsilon,\alpha}^{ext}$ très satisfaisantes.

4.3. Premiers exemples en dimension 2

Nous comparons la résolution numérique des trois problèmes donnés ci-dessus. Concernant les paramètres, nous avons pris $m = 2^9$ (nombres de modes de Fourier) et $\varepsilon = 1.5/m$. Pour le pas de temps, nous avons choisi $\delta_t = \varepsilon$ pour les reconstructions avec le périmètre et $\delta_t = 1/m^3$ pour les reconstructions avec l'énergie de Willmore.

Sur les premières simulations (Figure 4.8), nous montrons (en haut à gauche) les contraintes intérieures en rouge et les contraintes extérieures en vert. L'image en haut à droite correspond à la reconstruction donnée avec le périmètre et sans épaissir les contraintes (le bord de l'ensemble optimal E^* est dessiné en noir). On peut d'ores et déjà voir que E n'est pas lisse et ne satisfait pas exactement les contraintes comme nous l'avons anticipé dans la partie théorique. L'image en bas à gauche représente la solution en utilisant le périmètre et en épaississant les contraintes. Cette fois-ci, l'ensemble E^* n'est pas lisse mais respecte bien les contraintes. Enfin, l'image en bas à droite représente la reconstruction utilisant

2. fast marching method en anglais

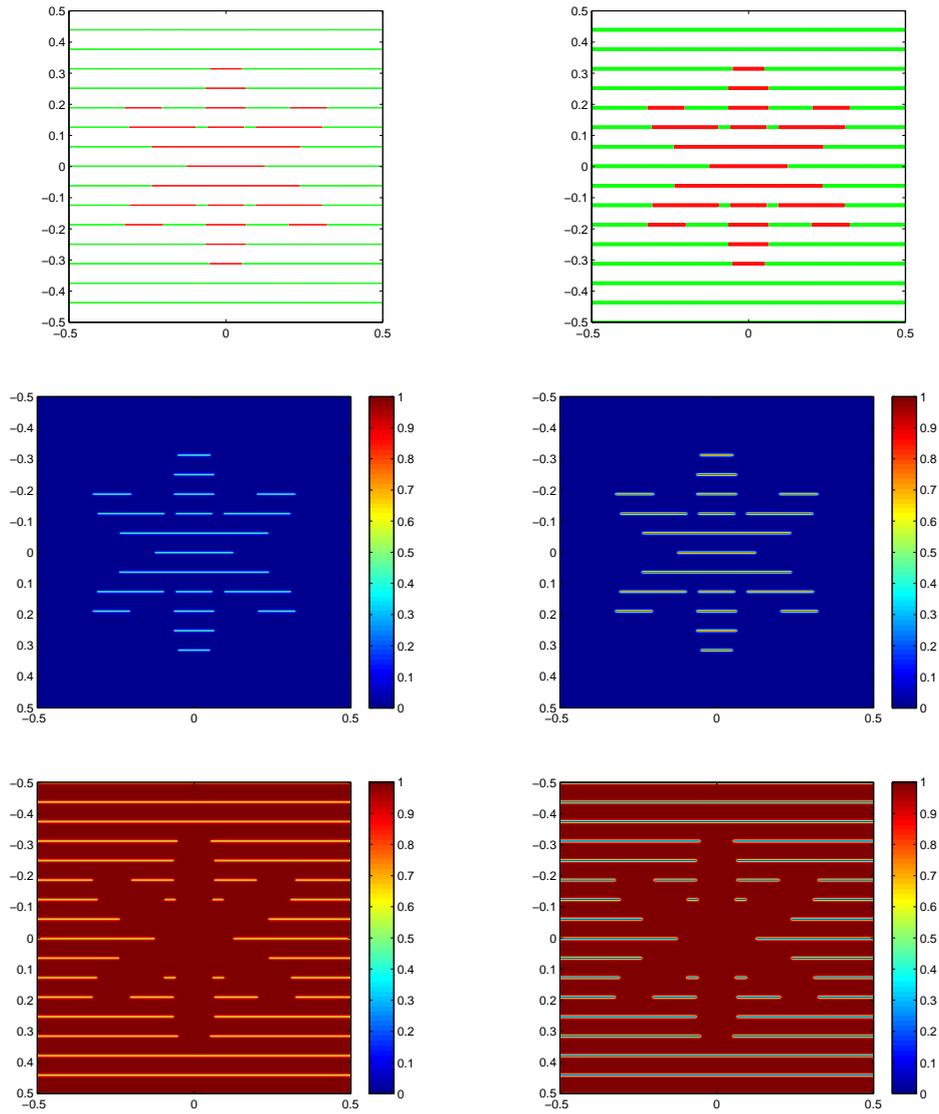


FIGURE 4.7. Exemple de contraintes d'inclusion-exclusion - à gauche : contraintes non épaissies ($\alpha = +\infty$) - à droite : contraintes épaissies ($\alpha = 1/2$) - en haut : coupes ω^{int} , ω^{ext} , $\Omega_{\varepsilon}^{int}$ et $\Omega_{\varepsilon}^{ext}$ - au milieu : u_{ε}^{int} et $u_{\varepsilon,\alpha}^{int}$ - en bas : u_{ε}^{ext} et $u_{\varepsilon,\alpha}^{ext}$.

l'énergie de Willmore (et des contraintes fines). Ce dernier ensemble est très lisse comme on peut s'y attendre avec l'énergie de Willmore.

Une autre simulation numérique est présentée sur la Figure 4.9. Le principe sur celle-ci est de laisser un peu de liberté entre les coupes intérieures et les coupes extérieures. Sur l'image de gauche sont représentées les coupes et l'ensemble initial E^0 du flot discret minimisant et sur l'image de droite est représentée la solution en utilisant l'énergie de Willmore.

Il ressort de ces premiers exemples que la reconstruction utilisant l'énergie de Willmore est bien plus naturelle que celles utilisant le périmètre. Ceci n'est pas surprenant car l'utilisation du périmètre induit très peu de régularité sur l'ensemble, en particulier les coins ne sont pas interdits pour le périmètre alors qu'ils le sont pour l'énergie de Willmore.

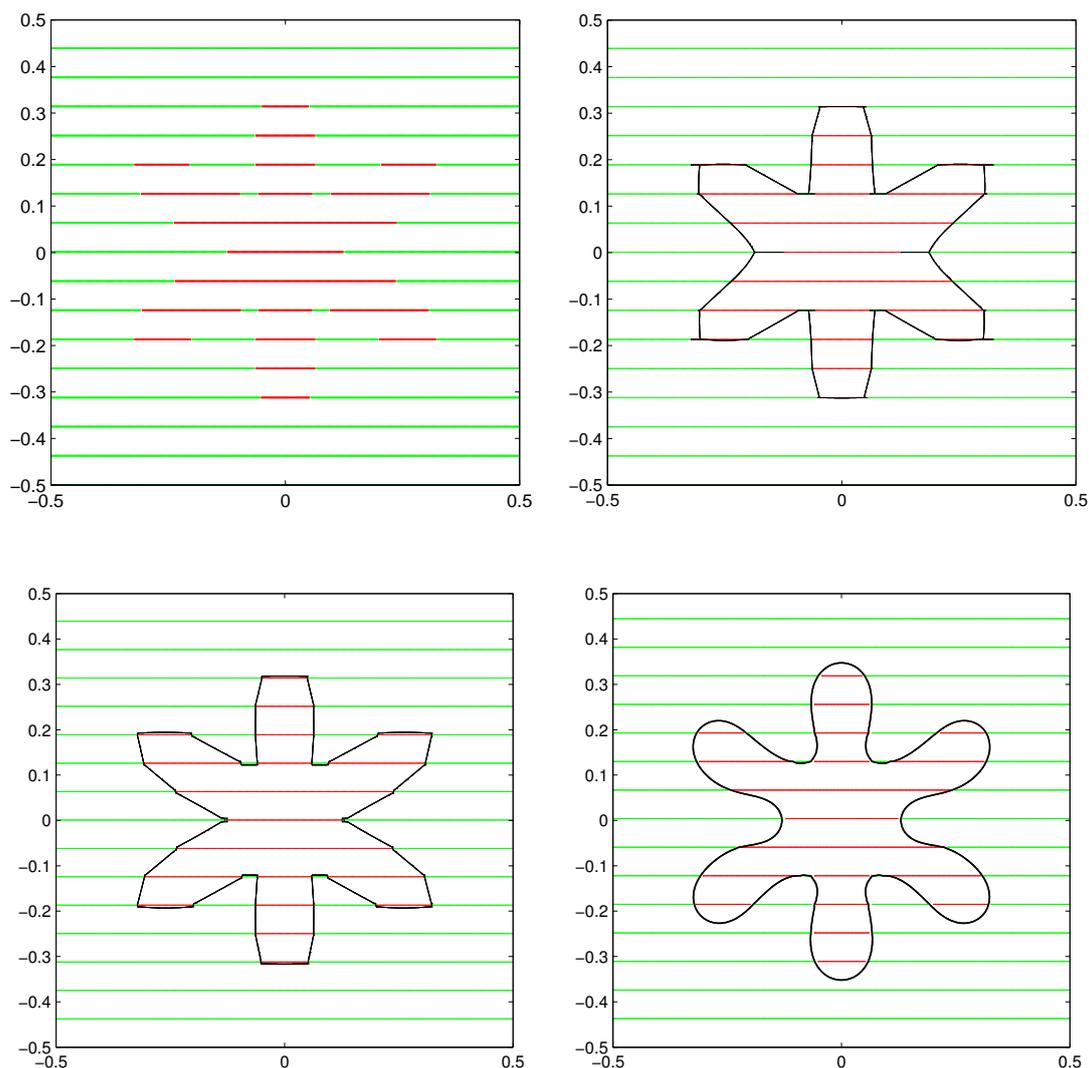


FIGURE 4.8. Reconstruction d'une étoile en utilisant les trois méthodes - (haut, gauche) contraintes d'inclusion (rouge) et d'exclusion (vert) - (haut, droite) reconstruction avec le périmètre épais - (bas, gauche) reconstruction avec le périmètre fin - (bas, droite) reconstruction avec Willmore.

Pour les simulations 3D, nous utiliserons uniquement l'énergie de Willmore car le périmètre n'empêche pas non plus l'apparition d'arêtes sur les surfaces reconstruites.

4.4. Reconstruction 3D avec l'énergie de Willmore

Comme précédemment, nous effectuons quelques tests en 3D avec l'énergie de Willmore, dans la suite, les paramètres utilisés sont $m = 2^7$, $\varepsilon = 1.5/m$ et $\delta_t = 1/m^3$. Le premier test (très académique) est la reconstruction d'un double cylindre (voir Figure 4.10). On peut noter que l'énergie de Willmore permet de reconstruire des tubes de manière assez fidèle ce qui peut être très intéressant dans un contexte d'imagerie médicale pour modéliser des vaisseaux sanguins par exemple. Une telle structure ne peut pas être récupérée avec le périmètre car, entre deux coupes discales, la surface d'aire minimale est soit la caténoïde (si les coupes sont assez proches), soit les deux disques (si les coupes sont trop éloignées). On

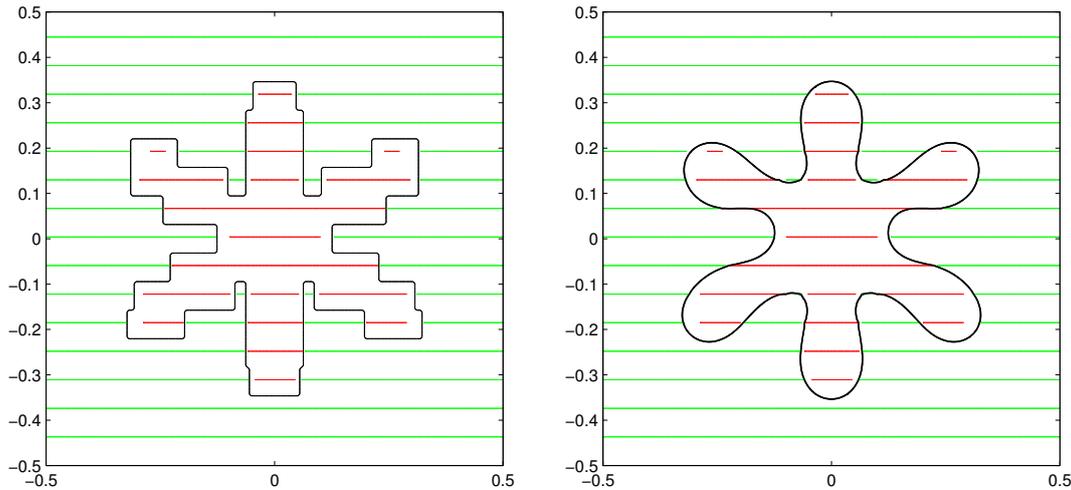


FIGURE 4.9. Reconstruction d’une étoile avec de la liberté entre les coupes - à gauche l’ensemble initial du flot - à droite la reconstruction avec Willmore.

peut également noter que le cylindre étant coupé en haut et en bas, l’énergie de Willmore génère une fermeture très lisses des parties hautes et de la partie basse du cylindre.

Une deuxième simulation, plus classique en traitement numérique des surfaces, présente le lapin de Stanford sur la Figure 4.11. Nous présentons la reconstruction de la surface du lapin à partir de 12 et de 24 coupes, nous avons également représenté la condition initiale (au milieu). Il est important de remarquer que malgré le faible nombre de coupes au niveau des oreilles, la reconstruction arrive à générer une forme convenable.

Nous présentons un exemple à partir de données réelles provenant d’une IRM de cerveau. Sur la Figure 4.12 sont représentées trois vues d’une même reconstruction. Le gros avantage de l’énergie de Willmore est de ne pas avoir besoin de connaître la topologie de la surface pour la reconstruire. Ceci vient du fait que l’approche champ de phase du flot de Willmore autorise les changements de topologie. Par ailleurs, il est difficile de se faire une idée a priori de la topologie “naturelle” de la surface à la vue des coupes du cerveau.

Sur la Figure 4.13, on reconstruit un noeud. L’idée est de voir qu’avec cette méthode, deux bords proches ont tendance à s’attirer et à fusionner. Ce problème peut se régler en raffinant ε .

5. Extension de la méthode - simulations numériques avancées

Les simulations numériques précédentes montrent que la reconstruction utilisant l’énergie de Willmore est très efficace. D’un point de vu théorique, l’énergie de Willmore est trop difficile à manipuler. Cependant nous explorons dans cette section quelques extensions de la méthode de reconstruction utilisant l’énergie de Willmore.

Les extensions que nous présentons sont des deux natures. Tout d’abord on change le type de coupes. Plutôt que d’utiliser des coupes planes, nous allons utiliser des coupes sur une famille de surfaces et des nuages de points pour une reconstruction en 3D. Dans un deuxième temps, nous utilisons une approche multiphase afin de reconstruire plusieurs

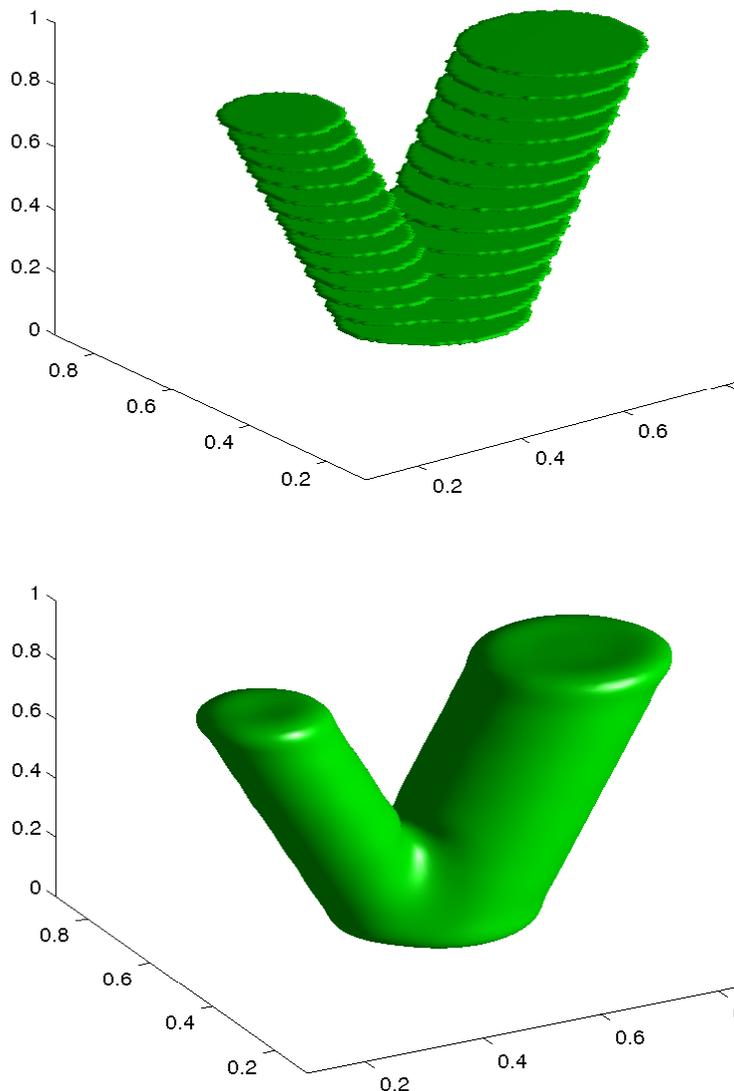


FIGURE 4.10. Reconstruction d'un double cylindre - en haut : les coupes intérieures - en bas : l'ensemble reconstruit.

domaines simultanément. Deux contraintes naturelles s'ajoutent dans ce dernier cas : les domaines reconstruits doivent être soit disjoints, soit emboîtés.

5.1. Autres données initiales

La première extension que nous illustrons s'intéresse à l'utilisation de données initiales différentes. L'utilisation de l'énergie de Willmore pour la reconstruction nous permet d'utiliser les contraintes d'inclusion-exclusion sans les épaissir. Ainsi la méthode s'adapte bien avec des coupes surfaciques non planaires et des nuages de points (voir Figure 4.14).

5.2. Une approche multiphase

La deuxième extension que nous regardons est l'utilisation de la méthode de champ multiphase. Le principe est de reconstruire plusieurs domaines en même temps à partir de coupes pour chacun des domaines. La méthode est exactement la même que pour un seul

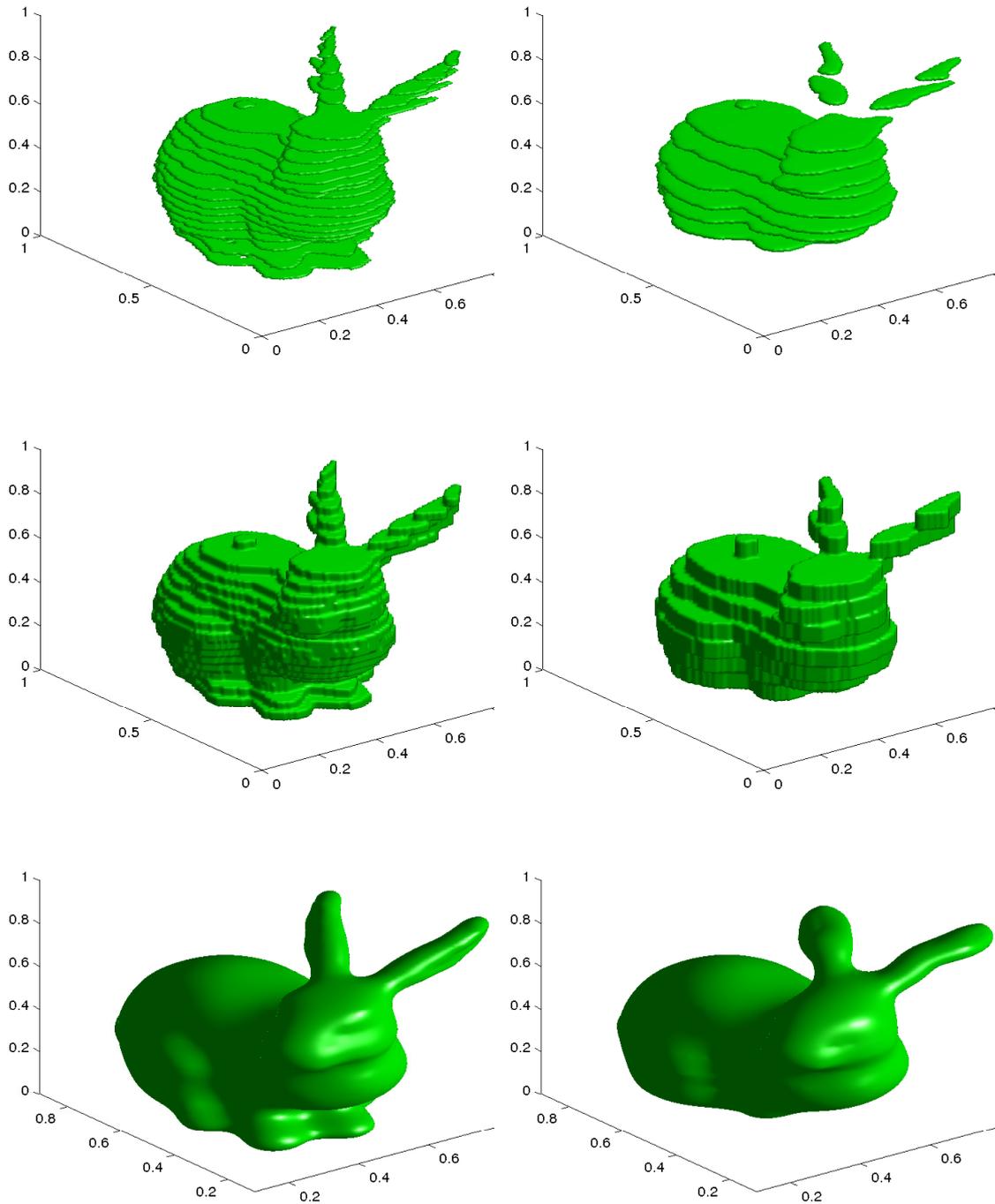


FIGURE 4.11. Reconstruction du lapin de Stanford - à gauche : à partir de 24 coupes - à droite : à partir de 12 coupes - en haut : coupes intérieures - au milieu : ensemble initial - en bas : reconstruction.

domaine mais nous ajoutons en plus une contrainte pour indiquer soit que les domaines sont disjoints, soit qu'ils sont inclus les uns dans les autres.

Nous proposons la méthode suivante pour l'implémentation de ces nouvelles contraintes. On note u_ε^p les phases des différents domaines à reconstruire (avec $p \in \llbracket 1, N_p \rrbracket$). Dans

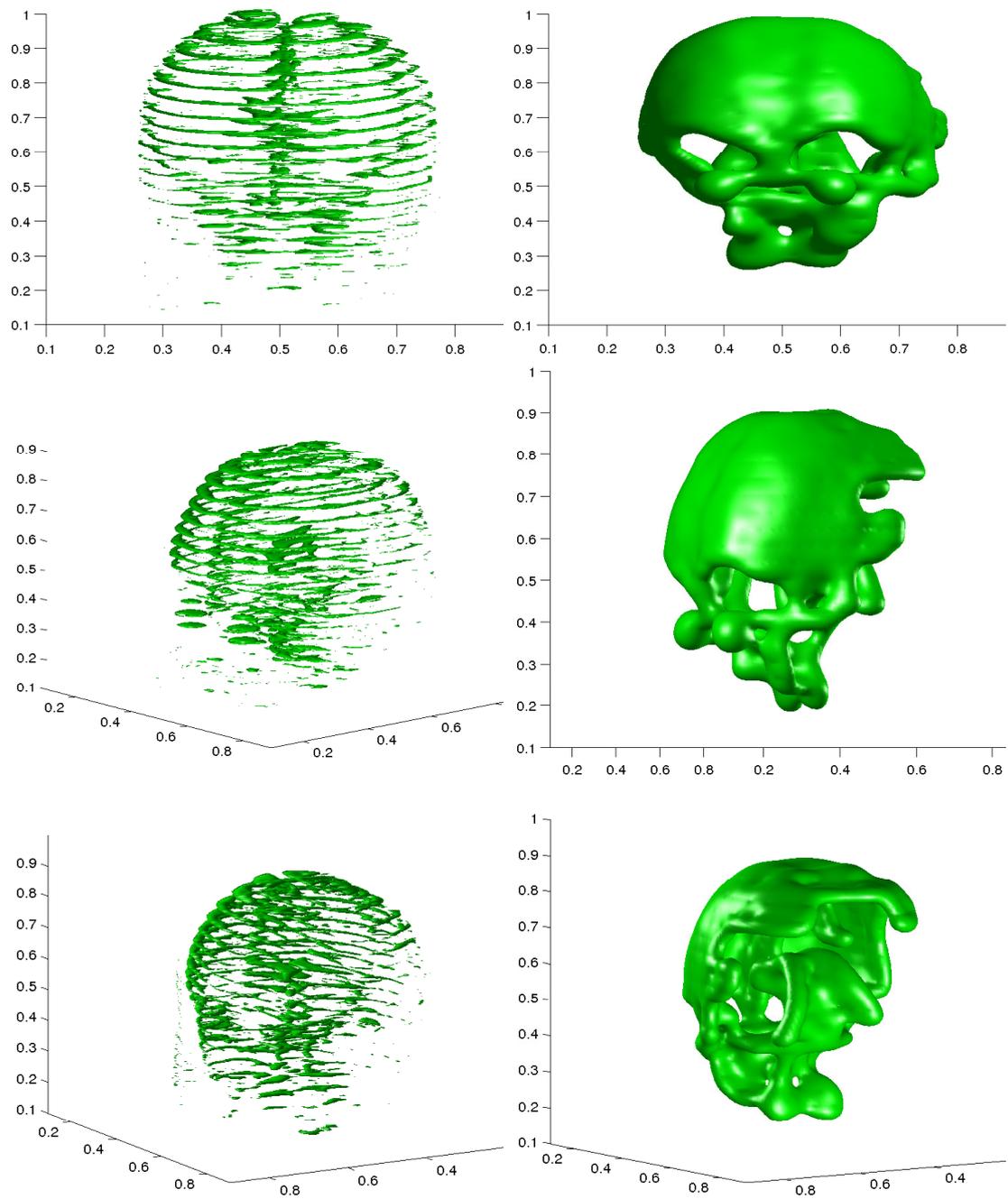


FIGURE 4.12. Trois différentes vues d'une reconstruction d'un cerveau à partir de coupes d'une image obtenue par IRM.

le calcul du flot minimisant, après avoir fait un pas de temps et projeté sur les contraintes d'inclusion-exclusion pour chaque phase u_ε^p , on projette

– sur la contrainte

$$\sum_{p=1}^{N_p} u_\varepsilon^p \leq 1$$

pour la reconstruction de domaines disjoints ;

– sur la contrainte

$$u_\varepsilon^1 \leq u_\varepsilon^2 \leq \dots \leq u_\varepsilon^{N_p}$$

pour la reconstruction des domaines inclus (on a implicitement supposé que le domaine lié à la phase u_ε^1 devait être inclus dans celui inclus dans la phase u_ε^2 lui même inclus dans celui de la phase u_ε^3 et ainsi de suite).

Deux exemples sont présentés sur les Figures 4.15 et 4.16.

5.3. Conclusion sur la méthode numérique

À la vue des simulations numériques, nous en déduisons que la reconstruction de domaine utilisant l'énergie de Willmore est très efficace car elle renvoie une surface lisse et naturelle. Par ailleurs, malgré la régularité imposée par une telle énergie, la méthode reste très flexible et nous permet de considérer plusieurs types de données initiales (en 3D : coupes surfaciques, coupes linéiques, nuages de points, etc...). De plus, l'approche multiphase permet la reconstruction simultanée de plusieurs domaines, certains s'incluant, certains s'excluant. Finalement, le fait de pouvoir garder une liberté entre les contraintes d'inclusions et les contraintes d'exclusion ouvre la porte vers des données bruitées ou statistiques.

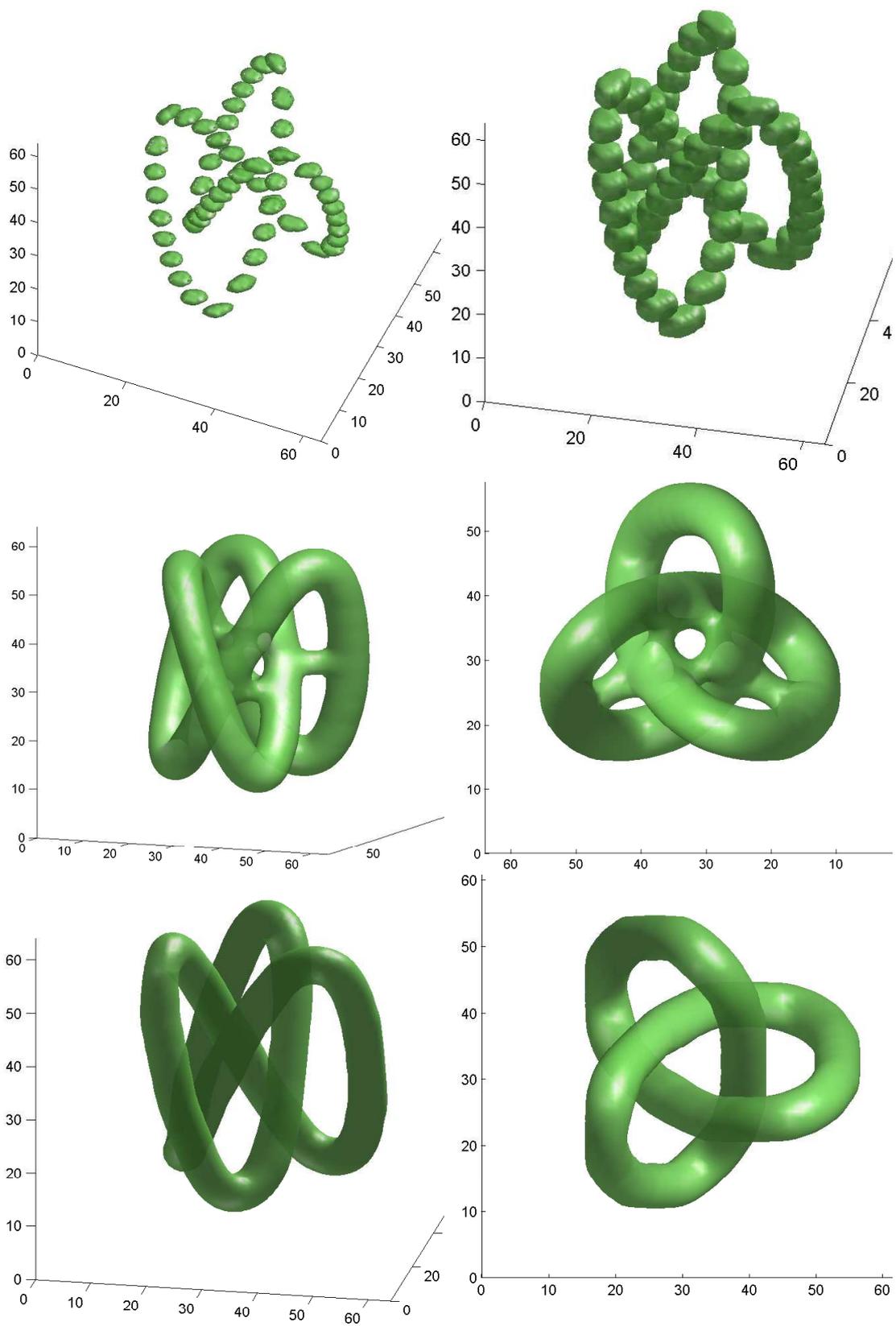


FIGURE 4.13. Reconstruction d'un noeud - en haut à gauche : coupes - en haut à droite : ensemble initial - au milieu : $\varepsilon = 0.6/m$ - en bas : $\varepsilon = 0.35/m$.

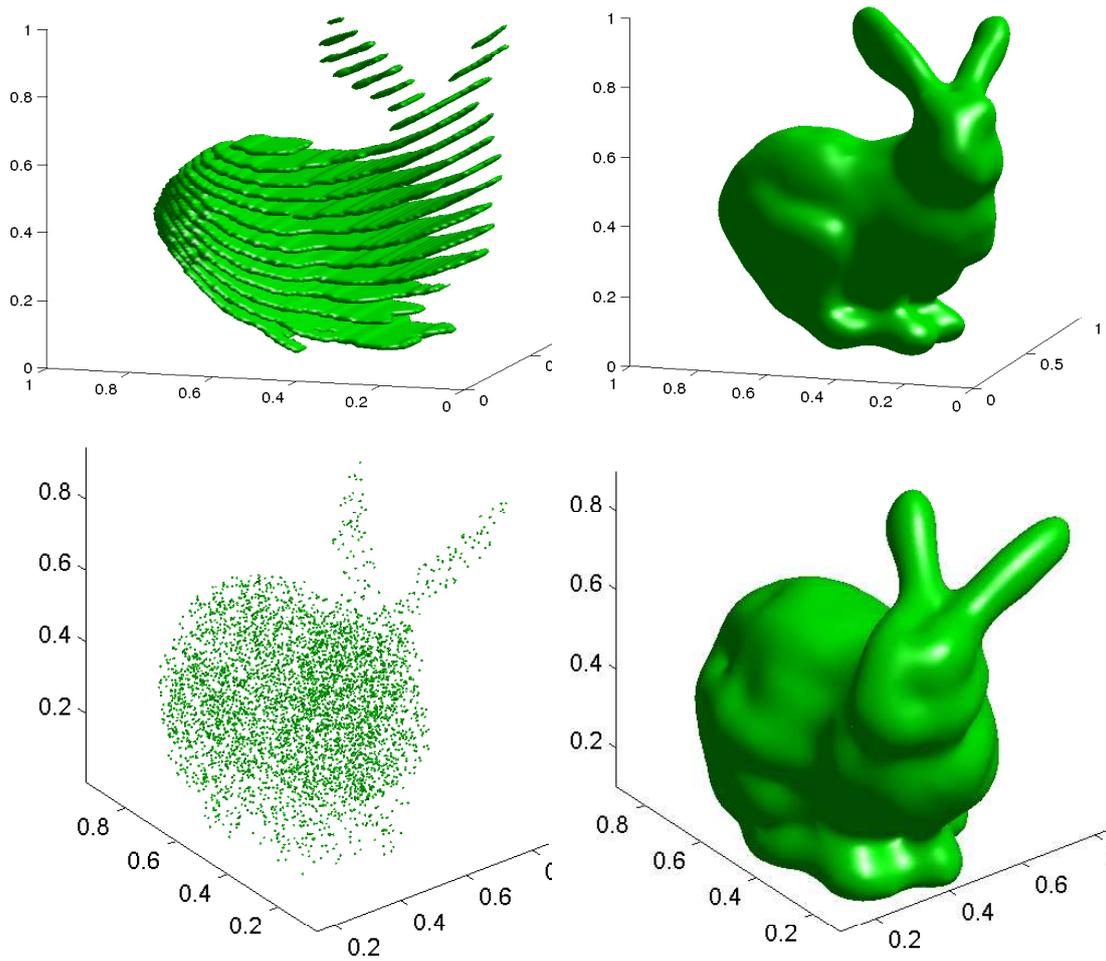


FIGURE 4.14. Adaptation possible de la méthode - gauche : contraintes intérieures - droite : surface reconstruite (avec Willmore) - haut : avec des coupes courbées - bas : avec un nuage de points "volumique".

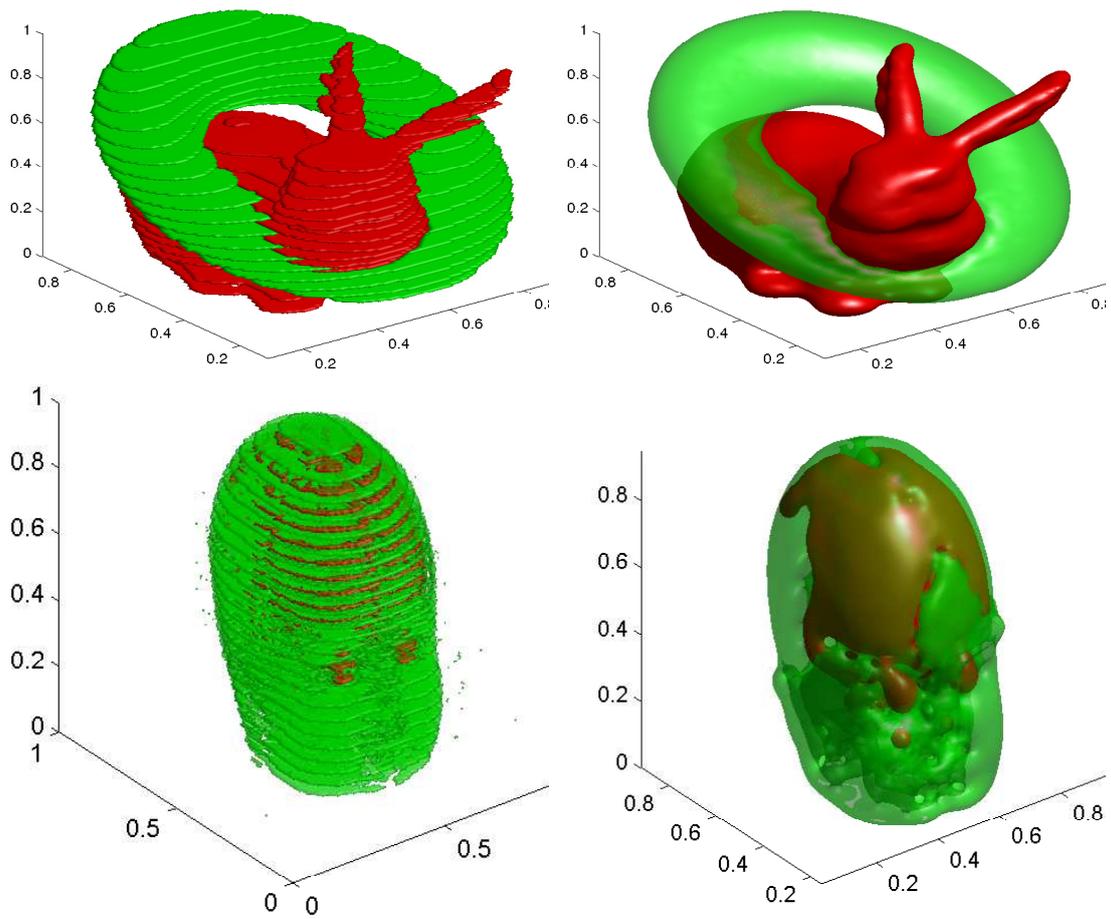


FIGURE 4.15. Adaptation avec une approche multiphase - haut : deux ensembles côte à côte - bas : un ensemble inclus dans l'autre.

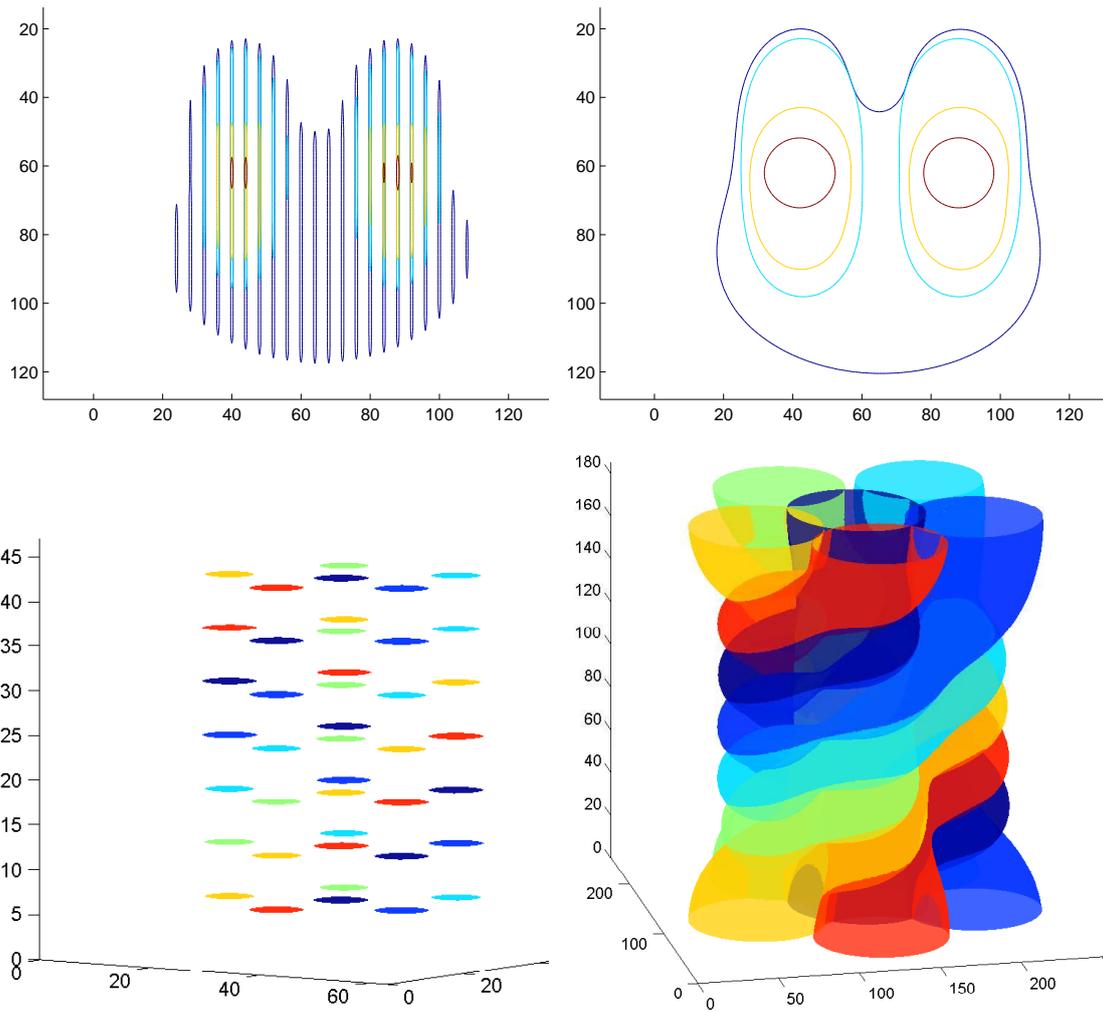


FIGURE 4.16. Un autre exemple de reconstruction multiphase - en 2D avec l'inclusion des phases - en 3D avec l'exclusion des phases.

Le problème de l'élastique confiné

Nous abordons dans ce chapitre un problème assez classique dans la littérature, celui de l'étude des élastiques. Un élastique est une courbe dans le plan, dans \mathbb{R}^d ou plus généralement dans une variété riemannienne qui est un point critique de l'énergie de flexion :

$$\mathcal{W}(\gamma) = \int_{(\gamma)} \kappa^2 d\sigma$$

où $d\sigma$ désigne l'élément de longueur de l'espace ambiant.

En ce qui concerne l'énergie de flexion, la minimisation libre n'est pas un problème bien posé car, par exemple, l'énergie d'un cercle de rayon R est $2\pi/R$ qui tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$. La seule courbe ayant une énergie nulle étant le segment droit, on n'a pas de minimiseur pour les courbes fermées régulières. Ainsi l'énergie de flexion vient toujours avec un jeu de contraintes dont, la plupart du temps, une longueur fixée (voir [11, 112]). Cependant, de nombreuses autres contraintes ont été introduites, parmi lesquelles :

- prescription de l'aire encerclée, pour une courbe dans le plan (voir [9, 29, 69]) ;
- courbes ouvertes avec extrémités encastrées (voir [46, 70, 74]) ;
- courbes fermées confinées dans un contexte d'approximation de champ de phase (voir [53, 52]) ;
- courbes gauches nouées (dans \mathbb{R}^3) (voir [85]) ;
- courbes sur une variété riemannienne (voir [84, 86]) ;
- problème d'obstacle sur les graphes avec un terme d'adhésion (voir [97]).

Un autre type de problèmes variationnels classiques est l'étude du flot gradient L^2 , c'est-à-dire l'évolution qui garantit la décroissance la plus rapide de l'énergie de flexion. Par exemple [89, 87] étudient le flot général, [105] ajoute une contrainte d'aire encerclée et [107] s'intéresse à des simulations numériques du flot.

Dans le cadre de cette thèse, nous étudions les courbes fermées planaires confinées dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné. En fait nous n'allons pas considérer toutes les courbes fermées. Pour comprendre notre approche, nous nous référons au Chapitre 2 (Section 2) et aux mouvements minimisants (Partie 3). L'étude du mouvement minimisant du flot de courbure moyenne s'appuie sur une propriété fondamentale : la préservation de l'inclusion c'est-à-dire que si $E \subset F$ alors les flots de courbure moyenne E_t et F_t correspondants vérifient $E_t \subset F_t$. Une telle propriété est fautive pour le flot de l'énergie de flexion. En effet, en dimension 2, on considère une boule E et un demi-espace F contenant E . On a bien $E \subset F$, mais le flot de l'énergie de flexion de la boule E_t est une famille de boules dont le rayon grandit au cours du temps. Comme le flot de F est stationnaire, il arrive un moment où E_t s'échappe de F_t . Un moyen de forcer ce phénomène est de contraindre le flot E_t à rester inclus dans F_t . En tant que premier pas dans cette direction, nous étudions la minimisation de l'énergie de flexion sur les ensembles confinés dans un ouvert Ω .

Par la suite, Bellettini *et al.* ont classifié les ensembles du plan pour lesquels l'énergie de flexion (dans sa forme relaxée) est finie. Ces ensembles ont la particularité de voir leur bord recouvert par une famille de courbes régulières fermées ayant des contacts et auto-contacts tangents. Dans un cadre de minimisation, il est facile de voir qu'un ensemble minimisant E est "presque" connexe dans le sens qu'on peut supposer qu'il existe une courbe recouvrant une partie du bord de E qui encercle toutes les autres. Notre problème de minimisation de

Ainsi, parmi les courbes fermées γ , la minimisation de

$$\int_{(\gamma)} \kappa^2 d\sigma$$

s'effectue naturellement sur l'espace de Sobolev $W^{2,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$.

Définition 5.1 (Espace $W^{2,2}$). *On note $W^{2,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ l'espace de Sobolev des courbes fermées $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telles que les dérivées, au sens des distributions, satisfont*

$$\gamma, \gamma', \gamma'' \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2).$$

Il nous reste maintenant à formaliser la notion d'auto-contacts et de confinement.

Définition 5.2 (Auto-contact tangent). *Soit γ une courbe régulière, on dit que les auto-contacts de γ sont tangents si pour tout $t, s \in I$ tels que $t \neq s$ et $\gamma(t) = \gamma(s)$ on a que $\gamma'(t)$ et $\gamma'(s)$ sont colinéaires.*

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , nous définissons la classe des courbes admissibles pour notre problème.

Définition 5.3 (Ensemble admissible). *On note \mathcal{A} l'ensemble des courbes régulières γ de $W^{2,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ telles que $(\gamma) \subset \bar{\Omega}$ et, soit γ est simple, soit γ n'admet que des auto-contacts tangents.*

Nous pouvons maintenant formuler le problème d'optimisation étudié dans ce chapitre

$$(9) \quad \min_{\gamma \in \mathcal{A}} \mathcal{W}(\gamma).$$

Remarque 5.4. Pour montrer l'existence d'une solution au Problème (9), seul le caractère borné de Ω est important. Par la suite, nous étudions les courbes minimales. Chaque courbe minimale est incluse dans une composante connexe de Ω donc nous pouvons supposer que Ω est connexe dans toute l'étude.

En plus de la connexité, les résultats se démontrent plus facilement en considérant Ω à bord régulier lipschitzien. En fait, toutes les preuves données par la suite s'adaptent au cas où $\partial\Omega$ est une courbe telle que, localement, il existe une direction pointant vers l'intérieur de Ω .

Dans tout le chapitre, Ω est un ouvert borné connexe à bord lipschitzien. Seule la Section 7 utilise un confinement Ω à bord non lipschitzien.

2. Digression : les espaces de Sobolev sur les variétés compactes

Nous l'avons vu dans la partie précédente, l'espace naturel à considérer est $W^{2,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$. Cette section a pour but de rappeler que les espaces de Sobolev sur une variété compacte sont bien définis et se comportent de la même manière que les espaces de Sobolev sur \mathbb{R}^d . Toute cette partie s'appuie sur [10] et [73]. On renvoie à ces deux références pour les preuves des résultats.

2.1. Cas général

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte lisse de dimension d . Afin de définir les espaces de Sobolev $W^{k,p}(M, \mathbb{R})$, nous avons besoin de considérer les dérivées successives d'une fonction définie sur M . En géométrie différentielle on peut facilement définir la première dérivée d'une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ et il s'agit d'une 1-forme différentielle (tenseur) définie sur le fibré tangent TM . Sans plus de structure on ne peut pas définir de dérivée seconde de f de manière convenable. Cependant, la structure riemannienne induite par la métrique g nous permet de construire une connexion linéaire et les dérivées covariantes sur les champs de tenseurs (comme par exemple une fonction). La dérivée covariante d'un champ de tenseurs étant un champ de tenseurs, on peut ainsi considérer ses dérivées successives. Le produit scalaire g défini sur M s'étend naturellement aux champs de tenseurs, on a ainsi un produit scalaire sur les dérivées successives d'une fonction. On renvoie à [79] pour tout approfondissement sur la géométrie riemannienne.

On note $\nabla^k f$ la $k^{\text{ème}}$ dérivée covariante de la fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ et sa norme par $|\nabla^k f|$. En coordonnées locales, on a

$$\nabla^k f = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d} (\nabla^k f)_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k}$$

et

$$|\nabla^k f|^2 = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d \\ 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq d}} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} (\nabla^k f)_{i_1, \dots, i_k} (\nabla^k f)_{j_1, \dots, j_k}$$

où g^{ij} est le coefficient i, j de l'inverse de la matrice de g .

Définition 5.5 (Espaces de Sobolev sur une variété). *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty[$, on munit l'espace $C^\infty(M, \mathbb{R})$ avec la norme*

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{l=0}^k \int_M |\nabla^l f|^p d\text{vol}_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace de Sobolev $W^{k,p}(M, \mathbb{R})$ est la complétion de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$.

On résume trois propriétés essentielles provenant de [10, Théorème 2.20 et Remarque 2.7] et [73, Propositions 2.2 et 3.2].

Théorème 5.6 ([73, Propositions 2.2 et 3.2]). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte.*

- $W^{k,p}(M, \mathbb{R})$ est un espace de Banach qui ne dépend pas de la métrique g sur M ;
- $C^\infty(M, \mathbb{R})$ est dense dans $W^{k,p}(M, \mathbb{R})$;
- $W^{k,2}(M, \mathbb{R})$ est un espace de Hilbert.

On rappelle maintenant les propriétés les plus importantes des espaces de Sobolev : les inclusions. Considérons deux espaces de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ avec $E \subset F$. On dit que E est continûment inclus dans F si l'application inclusion $i : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ est continue en tant qu'application linéaire entre espaces vectoriels normés. On écrira $E \hookrightarrow F$. De plus, on dit que l'inclusion est compacte lorsque de toute suite bornée de $(E, \|\cdot\|_E)$ on peut extraire une suite convergente dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

Les théorèmes suivants sont une reformulation de [10, Théorèmes 2.10 et 2.20], [73, Théorèmes 2.6 et 2.8] et du Théorème de Kondrakov (inclusion compacte) [10, Théorème 2.34] et [73, Théorème 2.9].

Théorème 5.7 (inclusion continue - [73, Théorèmes 2.6 et 2.8]). Soit $p, q \in [1, +\infty[$, $k, l \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in [0, 1[$.

- Si $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{k-l}{d}$ alors $W^{k,p}(M, \mathbb{R}) \hookrightarrow W^{l,q}(M, \mathbb{R})$.
- Si $\frac{k-(l+\alpha)}{d} \geq \frac{1}{p}$ alors $W^{k,p}(M, \mathbb{R}) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(M, \mathbb{R})$.

$C^{l,\alpha}(M, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions dont la $l^{\text{ème}}$ dérivée est α -höldérienne. Une définition précise de $C^{l,\alpha}(M, \mathbb{R})$ pour les variétés requiert la notion de transport parallèle qui n'est pas nécessaire ici car on utilisera seulement la continuité de la dernière dérivée. Le théorème précédent (Théorème 5.7), le suivant (Théorème 5.8) et le corollaire d'après (Corollaire 5.9) restent vrais si on remplace $C^{l,\alpha}(M, \mathbb{R})$ par $C^l(M, \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|f\|_{C^l} = \max_{i \in \llbracket 0, l \rrbracket} \sup_{x \in M} |\nabla^i f(x)|.$$

Théorème 5.8 (inclusion compacte - [73, Théorème 2.9]). En utilisant les notations du théorème précédent (Théorème 5.7), on a

- si $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{k-l}{d}$ alors l'inclusion $W^{k,p}(M, \mathbb{R}) \hookrightarrow W^{l,q}(M, \mathbb{R})$ est compacte ;
- si $\frac{k-\alpha}{d} > \frac{1}{p}$ alors l'inclusion $W^{k,p}(M, \mathbb{R}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(M, \mathbb{R})$ est compacte.

Corollaire 5.9. En utilisant les notations du théorème précédent (Théorème 5.7),

si $\frac{k-(l+\alpha)}{d} > \frac{1}{p}$ alors l'inclusion $W^{k,p}(M, \mathbb{R}) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(M, \mathbb{R})$ est compacte.

Preuve.

Ce corollaire est une conséquence immédiate du fait que la composition de deux inclusions est compacte si elles sont continues et l'une au moins est compacte. \square

L'extension des propriétés de $W^{k,p}(M, \mathbb{R})$ à $W^{k,p}(M, \mathbb{R}^2)$ se fait sans difficulté en considérant les composantes des fonctions et le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^2

2.2. Le cas $W^{2,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$

Dans le cas qui nous intéresse, $W^{2,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, muni de

$$\|\gamma\|_{W^{2,2}} = \left(\int_{\mathbb{S}^1} (|\gamma(t)|^2 + |\gamma'(t)|^2 + |\gamma''(t)|^2) dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

est un espace de Hilbert dans lequel $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ est dense. De plus $W^{2,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ s'injecte de manière compacte dans $C^{1,\alpha}$ où $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. On peut ainsi démontrer la formule d'intégration par parties.

Proposition 5.10. Soit $\gamma \in W^{2,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, on a

$$\int_{\mathbb{S}^1} \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_{\mathbb{S}^1} \gamma(t) \cdot \gamma''(t) dt.$$

Preuve.

Par densité des courbes lisses, il existe une suite $(\gamma_n)_n$ convergeant vers γ en norme $\|\cdot\|_{W^{2,2}}$. En particulier, $\gamma'_n \rightarrow \gamma'$ et $\gamma''_n \rightarrow \gamma''$ dans L^2 . Grâce à l'inclusion de Sobolev (Corollaire

5.9), γ est de classe C^1 et ainsi

$$\int_{\mathbb{S}^1} \gamma'_n(t) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_{\mathbb{S}^1} \gamma(t) \cdot \gamma''_n(t) dt.$$

Toutes ces courbes sont L^2 donc les deux intégrales convergent lorsque $n \rightarrow +\infty$ et à la limite on obtient

$$\int_{\mathbb{S}^1} \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_{\mathbb{S}^1} \gamma(t) \cdot \gamma''(t) dt.$$

□

3. Existence d'une solution

Afin de prouver l'existence de solutions au problème (9), nous allons utiliser la méthode directe du calcul des variations. Comme $\mathcal{W} \geq 0$ on peut considérer $(\gamma_n)_n$ une suite minimisante de \mathcal{W} dans \mathcal{A} . Les deux conditions $\gamma \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{W}(\gamma) < +\infty$ nous donnent deux bornes naturelles sur $\|\gamma\|_{L^2}$ et $\|\gamma''\|_{L^2}$. Afin d'utiliser la compacité de l'espace $W^{2,2}$ il nous faut récupérer une borne L^2 sur γ' . Une autre difficulté est l'expression de l'énergie \mathcal{W} , en effet l'expression générale de la courbure (Définition 1.5) est peu maniable et la formulation par longueur d'arc (Définition 1.7) donne un paramétrage sur des espaces différents $\gamma_n : [0, \ell_n] \rightarrow \mathbb{R}^2$. En guise de compromis, on utilise une paramétrage à vitesse constante.

Proposition 5.11. *Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière de classe C^2 paramétrée à vitesse constante et de longueur ℓ , on a*

$$\mathcal{W}(\gamma) = \frac{1}{\ell^3} \int_{\mathbb{S}^1} |\gamma''(t)|^2 dt.$$

Preuve.

Afin de fixer l'élément de longueur, on identifie $\mathbb{S}^1 = [0, 1]$. En utilisant un paramétrage par longueur d'arc $\tilde{\gamma} : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et un changement de variable, on a

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \tilde{\gamma}(t\ell). \end{aligned}$$

Afin d'éviter les confusions, on écrit s et $\tilde{\gamma}$ pour la paramétrisation par longueur d'arc et t et γ la paramétrisation à vitesse constante. Ainsi, on a les transformations suivantes sur la dérivée seconde

$$\frac{d^2 \tilde{\gamma}}{ds^2}(s) = \frac{1}{\ell^2} \frac{d^2 \gamma}{dt^2}(t)$$

où $s = t\ell$. On peut donc faire le changement de variable dans l'expression de \mathcal{W} :

$$\begin{aligned} (10) \quad \mathcal{W}(\gamma) &= \int_0^\ell \left| \frac{d^2 \tilde{\gamma}}{ds^2}(s) \right|^2 ds = \int_0^1 \left| \ell^{-2} \frac{d^2 \gamma}{dt^2}(t) \right|^2 \ell dt \\ &= \frac{1}{\ell^3} \int_0^1 \left| \frac{d^2 \gamma}{dt^2}(t) \right|^2 dt = \frac{1}{\ell^3} \int_{\mathbb{S}^1} |\gamma''(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

□

Ainsi on a l'estimation suivante sur la suite minimisante.

Proposition 5.12. *Pour tout $M > 0$, il existe $C > 0$ (dépendant de M et de Ω) tel que pour toute courbe $\gamma \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mathcal{W}(\gamma) \leq M$, on a*

$$\|\gamma'\|_{L^2} \leq C \quad \text{et} \quad \frac{1}{C} \leq \ell(\gamma) \leq C.$$

Preuve.

Comme précédemment, on identifie $\mathbb{S}^1 = [0, 1]$ de sorte à avoir

$$\int_{\mathbb{S}^1} 1 dt = 1$$

et on suppose de plus que $\Omega \subset \overline{B}(0, R)$. Ainsi, pour tout $\gamma \in \mathcal{A}$ on a $(\gamma) \subset B(0, R)$ et donc

$$\|\gamma\|_{L^2} \leq R.$$

En utilisant l'expression de \mathcal{W} , on a

$$\|\gamma''\|_{L^2}^2 \leq M\ell^3.$$

On utilise la formule d'intégration par partie

$$\int_{\mathbb{S}^1} \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_{\mathbb{S}^1} \gamma''(t) \cdot \gamma(t) dt,$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\|\gamma'\|_{L^2}^2 \leq \|\gamma\|_{L^2} \|\gamma''\|_{L^2},$$

et

$$\ell = \int_{\mathbb{S}^1} |\gamma'(t)| dt \leq \|\gamma'\|_{L^2}.$$

Premièrement, on combine ces inégalités

$$\ell \leq \sqrt{\|\gamma\|_{L^2} \|\gamma''\|_{L^2}} \leq \sqrt{MR} \ell^{3/2},$$

et ainsi, on a

$$\frac{1}{MR} \leq \ell.$$

Deuxièmement, on obtient

$$\|\gamma''\|_{L^2}^2 \leq M \|\gamma'\|_{L^2}^3,$$

et on en déduit

$$\|\gamma'\|_{L^2}^2 \leq R\sqrt{M} \|\gamma'\|_{L^2}^{3/2}.$$

Par conséquent, on a

$$\|\gamma'\|_{L^2} \leq R^2 M,$$

et finalement

$$\ell \leq R^2 M.$$

□

En utilisant les estimations précédentes on peut montrer le théorème suivant.

Théorème 5.13. *Le problème d'optimisation*

$$\min_{\gamma \in \mathcal{A}} \mathcal{W}(\gamma)$$

admet une solution.

Preuve.

Soit $(\gamma_n)_n$ une suite minimisante de \mathcal{W} dans \mathcal{A} , c'est-à-dire γ_n vérifie $\gamma_n \in \mathcal{A}$ et

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(\gamma_n) = \inf_{\hat{\gamma} \in \mathcal{A}} \mathcal{W}(\hat{\gamma}) \geq 0.$$

La preuve se décompose en deux étapes : on montre qu'une sous-suite de $(\gamma_n)_n$ converge vers une courbe γ , puis que cette courbe est admissible et d'énergie minimale.

♣ *Étape 1* : existence d'un candidat à la minimisation.

Soit $(\gamma_n)_n$ une suite minimisante, sans perdre en généralité, on peut supposer

$$\sup_n \mathcal{W}(\gamma_n) \leq M$$

pour un certain $M > 0$. Par la Proposition 5.12, on a une borne uniforme en n sur $\|\gamma_n\|_{W^{2,2}}$. En effet

$$\|\gamma_n''\|_{L^2}^2 \leq M \ell(\gamma_n)^3 \leq MC^3$$

et

$$\|\gamma_n'\|_{L^2}^2 \leq C^2.$$

Par ailleurs, grâce au confinement, on a

$$\|\gamma_n\|_{L^2}^2 \leq R^2$$

où R vérifie $\Omega \subset B(0, R)$. Par conséquent, on a

$$\|\gamma_n\|_{W^{2,2}} \leq \sqrt{MC^3 + C^2 + R^2}$$

ce qui signifie, par le Théorème de Banach-Alaoglu et l'inclusion compacte, qu'il existe une sous-suite (toujours notée $(\gamma_n)_n$) et une courbe $\gamma \in W^{2,2}$ telles que

$$\gamma_n \rightarrow \gamma$$

faiblement-* dans $W^{2,2}$ et uniformément dans C^1 . De plus, en utilisant la minoration énoncée dans la Proposition 5.12, on a

$$\ell(\gamma_n) \geq \frac{1}{C}.$$

Grâce à la convergence uniforme de $(\gamma_n')_n$ vers γ' , on récupère en passant à la limite

$$\ell(\gamma) \geq \frac{1}{C},$$

ce qui signifie que γ n'est pas dégénérée en une courbe constante.

♣ *Étape 2* : admissibilité et minimalité.

Comme on a convergence uniforme de $(\gamma_n)_n$ vers γ , on récupère à la limite le confinement $(\gamma) \subset \bar{\Omega}$. Concernant la condition de tangence des auto-contacts, $\gamma \in W^{2,2}$ donc γ' est continue. Si γ fait un auto-contact transverse alors γ est paramétrée localement au niveau de cet auto-contact comme deux droites sécantes non parallèles. De plus, $(\gamma_n')_n$ converge uniformément vers γ' donc, pour n suffisamment grand, γ_n aussi est paramétrée localement comme deux droites arbitrairement proches de celle de γ . Ainsi γ_n forme un auto-contact transverse, ce qui est impossible pour une courbe admissible. Donc γ n'admet pas d'auto-contact transverse, d'où $\gamma \in \mathcal{A}$. Concernant la minimalité, la convergence faible-* dans l'espace de Hilbert $W^{2,2}$ entraîne la semi-continuité suivante

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\gamma_n''\|_{L^2} \geq \|\gamma''\|_{L^2}.$$

Dans l'étape 1, nous avons montré que $\ell(\gamma_n) \rightarrow \ell(\gamma) > 0$ et ainsi

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell(\gamma_n)^3} \|\gamma_n''\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{\ell(\gamma)^3} \|\gamma''\|_{L^2}^2.$$

Autrement dit,

$$\inf_{\hat{\gamma} \in \mathcal{A}} \mathcal{W}(\hat{\gamma}) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(\gamma_n) \geq \mathcal{W}(\gamma)$$

ce qui signifie que γ est bien minimale. \square

Remarque 5.14. On peut montrer une borne inférieure sur la longueur des courbes minimales dépendant uniquement du confinement. Soient $x \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$. Si γ est une courbe minimale et $\ell(\gamma) < 2r$, alors on considère $\tilde{\gamma}$ une translation de γ telle que $x \in (\tilde{\gamma})$. Ainsi, comme la longueur de γ est trop petite, on a $\tilde{\gamma} \subset B(x, r)$. Soit h l'homothétie affine définie par

$$h(y) = x + (1 + \varepsilon)(y - x)$$

où $\varepsilon > 0$ est choisi de sorte à saturer la condition $h(\tilde{\gamma}) \subset \overline{B}(x, r)$ c'est-à-dire $h(\tilde{\gamma}) \cap \partial B(x, r) \neq \emptyset$. Ainsi, en utilisant la Proposition 5.11, on peut calculer

$$\mathcal{W}(h(\tilde{\gamma})) = \frac{1}{1 + \varepsilon} \mathcal{W}(\tilde{\gamma}) < \mathcal{W}(\tilde{\gamma}).$$

Notons que $\tilde{\gamma} \subset \overline{B}(x, r) \subset \overline{\Omega}$ et ainsi $\tilde{\gamma} \in \mathcal{A}$. L'inégalité ci-dessus est donc impossible à cause de la minimalité de γ . Donc

$$\ell(\gamma) \geq 2r.$$

En particulier, si r est le rayon de la plus grosse boule incluse dans $\overline{\Omega}$ alors toute courbe minimale γ vérifie l'inégalité ci-dessus.

Avant d'approfondir l'étude des minimiseurs de \mathcal{W} , on peut montrer, en utilisant des transformations géométriques simples, que n'importe quelle courbe minimale admet au moins deux points de contact avec le confinement.

Théorème 5.15. *Soit γ une courbe minimale du problème (9). Il existe au moins deux paramètres distincts $t, s \in \mathbb{S}^1$ tels que $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ et $\gamma(t), \gamma(s) \in \partial\Omega$.*

Preuve.

On suppose d'abord que γ ne fait aucun contact avec le confinement. Par compacité, cela revient à dire que $\text{dist}(\gamma, \partial\Omega) > 0$. Soit $\lambda > 0$ et considérons h_λ l'homothétie de rapport $1 + \lambda$ (et de centre 0). Par continuité de la fonction distance, on a $d(h_\lambda(\gamma), \partial\Omega) > 0$ pour $\lambda > 0$ suffisamment petit. De plus, $h_\lambda(\gamma) \in \mathcal{A}$ car elle vérifie les mêmes conditions de régularité, d'auto-contacts et de confinement que γ . Cependant,

$$\mathcal{W}(h_\lambda(\gamma)) = \frac{1}{1 + \lambda} \mathcal{W}(\gamma) < \mathcal{W}(\gamma)$$

ce qui contredit la minimalité de γ . Donc γ admet au moins un point de contact avec $\partial\Omega$.

On note t ce point de contact et on suppose qu'il n'y en a pas d'autre. On écrit γ et $\partial\Omega$ localement en $\gamma(t)$ comme des graphes de fonctions. Plus précisément on suppose que le système de coordonnées locales (O, \vec{i}, \vec{j}) vérifie

- $O = \gamma(t)$;
- \vec{i} et $\gamma'(t)$ coïncident (modulo leurs longueurs) ;
- il existe un ouvert \mathcal{U} tel que $(\gamma) \cap \mathcal{U} = (\gamma|_{[t_1, t_2]})$ et $\partial\Omega \cap \mathcal{U} = \Gamma$ sont données par les graphes de fonctions toujours notées $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ et Γ ;
- $t \in]t_1, t_2[$;
- $\Gamma \leq \gamma|_{[t_1, t_2]}$.

On a implicitement supposé que la seule portion de γ présente dans \mathcal{U} est $\gamma|_{[t_1, t_2]}$, nous reviendrons sur ce point dans le dernier paragraphe. Soit $\tau > 0$ et considérons T_τ la translation de vecteur directeur $\tau\vec{j}$. Comme précédemment $\text{dist}\left((\gamma) \setminus (\gamma|_{[t_1, t_2]}), \partial\Omega\right) > 0$ ainsi $\text{dist}\left((T_\tau(\gamma)) \setminus (T_\tau(\gamma|_{[t_1, t_2]})), \partial\Omega\right) > 0$ pour τ assez petit. De plus, en coordonnées

locales $\Gamma \leq \gamma|_{[t_1, t_2]} < T_\tau(\gamma|_{[t_1, t_2]})$ donc $\text{dist}(T_\tau(\gamma), \partial\Omega) > 0$ et $\mathcal{W}(T_\tau(\gamma)) = \mathcal{W}(\gamma)$ doit être minimal. En se ramenant au cas précédent on peut voir que γ ne peut pas être minimale. Donc γ admet un autre point de contact $s \neq t$ avec $\partial\Omega$.

Afin de s'assurer que $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ il suffit de voir que tout point de $(\gamma) \cap \mathcal{U}$ se retrouve détaché de $\partial\Omega$ par la translation. Cette translation renvoie bien une courbe admissible dès que $(\gamma) \setminus \mathcal{U}$ ne fait pas de contact avec $\partial\Omega$. Ainsi le point $\gamma(s)$ précédemment trouvé se trouve dans $(\gamma) \setminus \mathcal{U}$ et est donc différent de $\gamma(t)$.

On remarque enfin qu'on a besoin d'écrire seulement γ sur un voisinage de t comme le graphe d'une fonction. En particulier si γ fait des auto-contacts en $\gamma(t)$ en plus de son contact avec $\partial\Omega$ alors la translation décolle toutes les branches de γ qui touchent $\partial\Omega$ en $\gamma(t)$. \square

4. Étude des auto-contacts

Dans cette partie on s'intéresse aux auto-contacts que peut faire une courbe minimale. Nous allons voir que l'agencement de ces auto-contacts n'est pas quelconque et cela va nous permettre de considérer la courbe comme une courbe simple. Dans toute cette partie, on utilise un paramétrage à vitesse constante de la courbe et on note

$$\mathcal{C} = \{t \in \mathbb{S}^1 \mid \exists s \in \mathbb{S}^1, s \neq t : \gamma(t) = \gamma(s)\}.$$

Comme les auto-contacts sont tangents, dès que $\gamma(t) = \gamma(s)$, on a $\gamma'(t) = \pm\gamma'(s)$.

4.1. Un théorème de forme

Dans un premier temps, on essaie de caractériser la forme d'une courbe minimale. Comme le confinement Ω est quelconque cette caractérisation se base sur le paramétrage de la courbe. Toutes les preuves de cette partie sont basées sur le principe suivant.

♣ *Principe (découpage et reparamétrage)* : Soit γ une courbe admissible, son paramétrage est naturellement donné par \mathbb{S}^1 . On dessine ainsi un cercle orienté pour représenter \mathbb{S}^1 et on fait figurer les points de \mathcal{C} . Étant donnés deux points de \mathcal{C} , on dessine la corde entre t et s dès que $\gamma(t) = \gamma(s)$ (voir Figure 5.2).

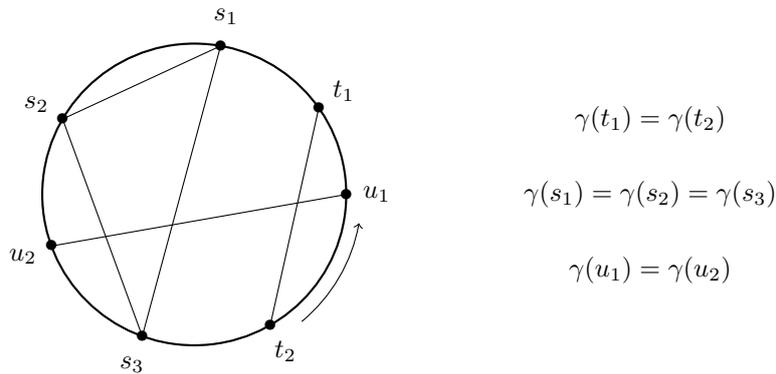


FIGURE 5.2. Représentation du paramétrage et des points d'auto-contacts.

À partir de γ , on construit une sous courbe $\tilde{\gamma}$ en ne parcourant qu'une ou plusieurs parties de γ . Afin d'obtenir une courbe fermée admissible il faut que les recollements entre les différentes parties de γ soit au moins C^1 . La sous courbe $\tilde{\gamma}$ peut être décrite de la manière suivante. Partant d'un point $t_0 \in \mathbb{S}^1$, on peut parcourir la courbe γ dans un sens ou dans

l'autre jusqu'à atteindre $t_1 \in \mathcal{C}$. Notant t_2 un autre paramètre tel que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, on peut soit poursuivre l'arc de courbe initial après t_1 soit sauter sur l'arc contenant le paramètre t_2 . Si on choisit de sauter sur l'arc de t_2 alors le sens de parcours de la suite de γ doit être cohérent avec les tangentes : concrètement si $\gamma'(t_1) = \gamma'(t_2)$ alors on parcourt γ après t_2 dans le même sens qu'avant t_1 , sinon $\gamma'(t_1) = -\gamma'(t_2)$ et on doit donc changer le sens de parcours (voir Figure 5.3). Après un ou plusieurs sauts, on boucle sur t_0 avec le même sens de parcours pour avoir une courbe fermée régulière. La sous courbe $\tilde{\gamma}$ reste admissible du point de vue du confinement et des auto-contacts tangents.

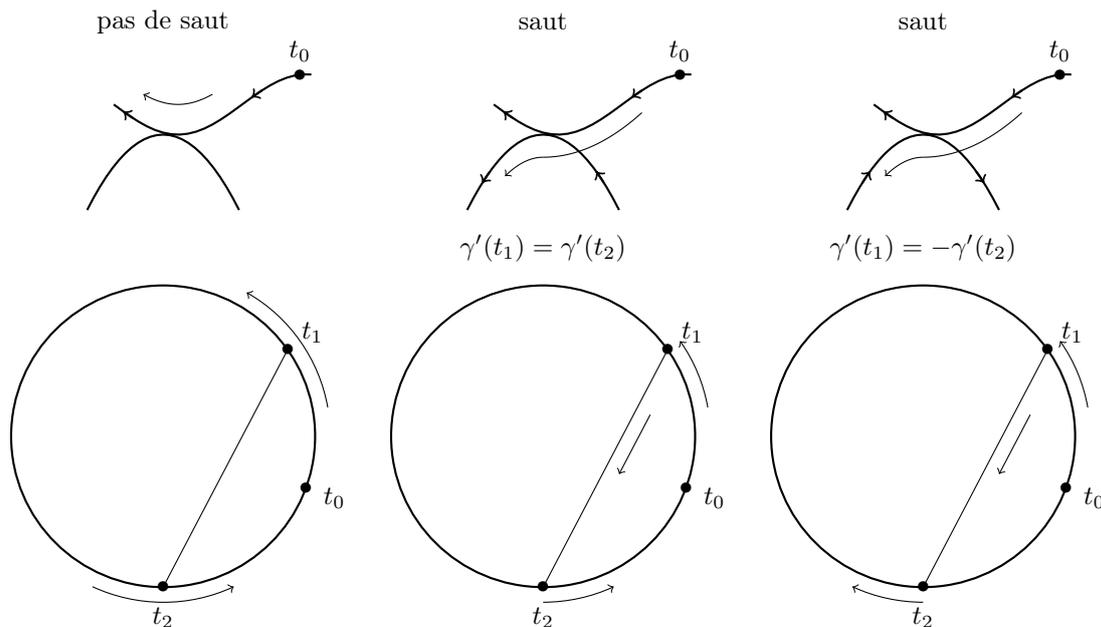


FIGURE 5.3. Saut et paramétrisation.

Dans les cas que nous regarderons il y aura toujours un nombre fini de sauts et $\tilde{\gamma}$ sera recollée au point initial dans le même sens de parcours que le sens initial. Ainsi $\tilde{\gamma}$ restera admissible.

Proposition 5.16. *Soit γ une courbe admissible et $\tilde{\gamma}$ une sous courbe de γ construite sur le principe précédent. Si $\tilde{\gamma}$ n'est composée que de parties de γ parcourues une seule fois alors*

$$\mathcal{W}(\tilde{\gamma}) \leq \mathcal{W}(\gamma)$$

avec égalité si et seulement si $(\gamma) \setminus (\tilde{\gamma})$ est soit vide soit constitué de segments de droites.

Preuve.

On note $[a_i, b_i]$ les segments de \mathbb{S}^1 tels que

$$(\tilde{\gamma}) = \bigcup_{i=1}^n (\gamma|_{[a_i, b_i]}).$$

Pour tout $t \in]a_i, b_i[$, on a $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$, $\tilde{\gamma}'(t) = \pm\gamma'(t)$ et $\tilde{\gamma}''(t) = \pm\gamma''(t)$ ainsi,

$$\kappa_{\tilde{\gamma}}(t)^2 = \kappa_{\gamma}(t)^2.$$

Ces égalités ponctuelles sont à prendre au sens presque partout sur \mathbb{S}^1 . Ainsi on peut calculer

$$\mathcal{W}(\tilde{\gamma}) = \sum_{i=1}^n \int_{]a_i, b_i[} \kappa_{\tilde{\gamma}}(t)^2 dt = \sum_{i=1}^n \int_{]a_i, b_i[} \kappa_{\gamma}(t)^2 dt \leq \int_{\mathbb{S}^1} \kappa_{\gamma}(t)^2 dt = \mathcal{W}(\gamma).$$

On a égalité dans cette inégalité dès que

$$\mathbb{S}^1 = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

ou $\kappa_{\gamma} = 0$ sur

$$\mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i].$$

Comme γ est paramétrée à vitesse constante, la condition $\kappa_{\gamma} = 0$ sur un segment $[c, d]$ est équivalente à $(\gamma|_{[c, d]})$ est un segment de droite. \square

On peut maintenant commencer à étudier les points d'auto-contacts. Soit γ une courbe minimale du problème (9).

Propriété 5.17. *Les auto-contacts de γ sont des points doubles parcourus dans des sens opposés c'est-à-dire*

$$\forall t \in \mathcal{C}, \exists ! s \in \mathcal{C}, s \neq t, \gamma(s) = \gamma(t) \text{ et } \gamma'(t) = -\gamma'(s).$$

Preuve.

Supposons qu'il existe trois points distincts t_1, t_2 et t_3 tels que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = \gamma(t_3)$. Au moins deux d'entre eux ont le même vecteur tangent, quitte à renommer les points on suppose qu'il s'agit de t_1 et t_2 . On note $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[t_1, t_2]}$. Cette courbe est bien construite sur le principe précédent et le reste de γ ne peut pas être réduit à un segment, ainsi

$$\mathcal{W}(\tilde{\gamma}) < \mathcal{W}(\gamma).$$

Ceci est impossible avec la minimalité de γ . \square

Remarque 5.18. \mathcal{C} est un sous-ensemble fermé de \mathbb{S}^1 . En effet, l'application

$$\begin{aligned} G : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\mapsto (\gamma(s) - \gamma(t), \gamma'(s) + \gamma'(t)) \end{aligned}$$

est continue et $\mathcal{C} = p(G^{-1}(\{0\}))$ où $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ est la projection sur la première composante (qui est une application fermée). $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ donc \mathcal{C} est bien fermé.

Afin de faciliter la lecture, on utilise les notations et conventions suivantes.

Définition 5.19. *(Couple d'auto-contact et ordonnancement) Soit $\hat{\gamma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ une courbe admissible.*

- *Étant donnée une orientation du cercle \mathbb{S}^1 , on dit que t_1, t_2, t_3 sont ordonnés si, à une permutation circulaire près, on rencontre d'abord t_1 , puis t_2 et enfin t_3 . On écrit $t_1 < t_2 < t_3$.*
- *On dit que (t, s) est un couple d'auto-contact si $\hat{\gamma}(t) = \hat{\gamma}(s)$ et $t \neq s$. On identifie les deux couples (t, s) et (s, t) .*

Définition 5.20. (*Couples croisés*) Soit $\hat{\gamma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ une courbe admissible. Étant donné deux couples d'auto-contacts distincts (t_1, s_1) et (t_2, s_2) , on dit qu'ils sont croisés si on peut les ordonner (voir Figure 5.4) :

$$t_1 < t_2 < s_1 < s_2.$$

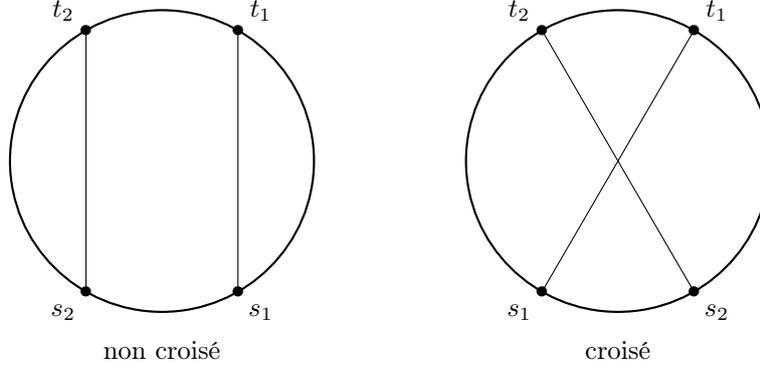


FIGURE 5.4. Configurations de deux couples d'auto-contacts.

Propriété 5.21. Si γ est minimale alors tout couples d'auto-contacts distincts (t_1, s_1) et (t_2, s_2) ne sont pas croisés.

Preuve.

Supposons que (t_1, s_1) et (t_2, s_2) sont croisés, quitte à les renommer, on suppose qu'ils sont ordonnés comme sur la Figure 5.4. On considère la courbe $\tilde{\gamma}$ construite

- en parcourant γ de t_1 à t_2 dans le sens positif;
- en sautant de t_2 à s_2 ;
- en parcourant γ de s_2 à s_1 dans le sens négatif;
- en sautant de s_1 à t_1 .

En appliquant le principe précédent, on a

$$\mathcal{W}(\tilde{\gamma}) < \mathcal{W}(\gamma)$$

ce qui est impossible. □

Propriété 5.22. Soit γ une courbe minimale et (t_1, s_1) , (t_2, s_2) et (t_3, s_3) trois couples d'auto-contacts distincts. Alors on peut les ordonner de la manière suivante

$$t_1 < t_2 < t_3 < s_3 < s_2 < s_1.$$

De plus, on a

$$\mathcal{W}(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = \mathcal{W}(\gamma|_{[s_2, s_1]}) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}(\gamma|_{[t_2, t_3]}) = \mathcal{W}(\gamma|_{[s_3, s_2]}).$$

Preuve.

Quitte à choisir une origine et à renommer les couples, on peut supposer que $t_i < s_i$ (pour $i = 1, 2$ ou 3 et $t_1 < t_2 < t_3$). Par la Propriété 5.21 chaque paire de couples n'est pas croisée et on peut écrire

$$t_1 < t_i < s_i < s_1 \quad \text{pour } i = 2, 3.$$

On est ainsi réduit à considérer seulement deux cas : soit $t_2 < t_3 < s_3 < s_2$ (cas emboîté), soit $t_2 < s_2 < t_3 < s_3$ (cas juxtaposé) (voir Figure 5.5).

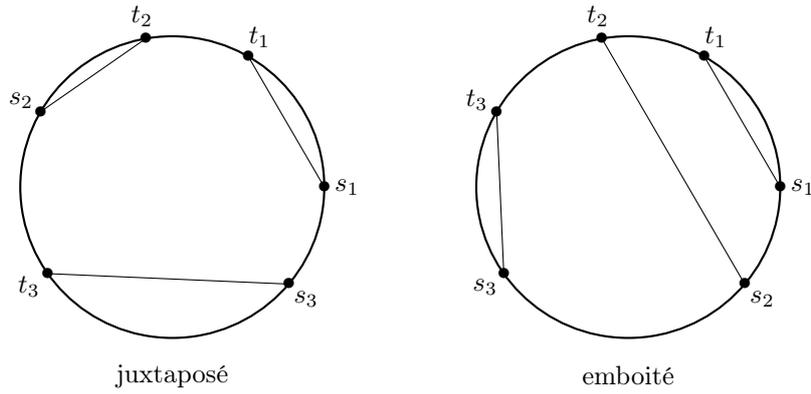


FIGURE 5.5. Configurations de trois couples d'auto-contacts sur une courbe minimale.

Nous allons voir que le cas juxtaposé ne peut pas être optimal. Parmi les arcs, $\gamma_{|[s_1, t_2]}$, $\gamma_{|[s_2, t_3]}$ et $\gamma_{|[s_3, t_1]}$, on considère celui qui a la plus petite énergie \mathcal{W} . Afin de simplifier, on suppose qu'il s'agit de $\gamma_{|[s_1, t_2]}$ et on construit $\tilde{\gamma}$

- en parcourant l'arc minimal de t_1 à s_2 (en passant par s_1 et t_2) dans le sens positif;
- en sautant de s_2 à t_2 ;
- en parcourant γ de t_2 à s_1 dans le sens négatif;
- en sautant de s_1 à t_1 .

$\tilde{\gamma}$ est construite selon le principe précédent et parcourt $\gamma_{|[t_1, s_1]}$ et $\gamma_{|[t_2, s_2]}$ une seule fois et $\gamma_{|[s_1, t_2]}$ deux fois (voir Figure 5.6). Comme on a choisi l'arc minimal, parcourir $\gamma_{|[s_1, t_2]}$ est (strictement) moins coûteux en énergie que parcourir les trois arcs $\gamma_{|[s_1, t_2]}$, $\gamma_{|[s_2, t_3]}$ et $\gamma_{|[s_3, t_1]}$ une seule fois chacun. De plus $\gamma_{|[t_3, s_3]}$ n'est pas parcouru par $\tilde{\gamma}$ donc

$$\mathcal{W}(\tilde{\gamma}) < \mathcal{W}(\gamma)$$

ce qui est impossible.

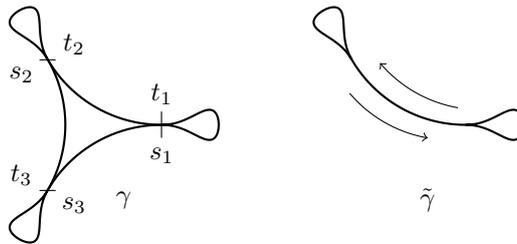


FIGURE 5.6. Configurations de trois couples d'auto-contacts sur une courbe minimale.

□

Propriété 5.23. Soit γ une courbe minimale ayant au moins deux couples d'auto-contacts distincts. Alors il existe deux couples d'auto-contacts distincts (t, s) et (τ, σ) tels que $]t, s[\cap \mathcal{C}$ et $] \tau, \sigma[\cap \mathcal{C}$ sont vides. De plus, ces deux couples sont uniques.

Preuve.

Soient deux couples d'auto-contacts distincts (t_0, s_0) et (τ_0, σ_0) , en utilisant la Propriété 5.21, ils ne sont pas croisés et on les ordonne de la façon suivante :

$$t_0 < s_0 < \tau_0 < \sigma_0.$$

La construction est symétrique entre (t_0, s_0) et (τ_0, σ_0) . Si $]t_0, s_0[\cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ alors on considère un point de \mathcal{C} dans $]t_0, s_0[$, comme le couple d'auto-contact correspondant ne peut pas croiser (t_0, s_0) alors il est inclus dans $]t_0, s_0[$. On note $(t_i, s_i)_{i \in I}$ l'ensemble des couples d'auto-contacts inclus dans $]t_0, s_0[$. Comme tout se passe dans $[t_0, s_0]$, on a un ordre canonique sur les éléments des couples, ainsi on suppose que $t_i < s_i$. En utilisant la Propriété 5.22, on a que pour tout $i, j \in I$, $[t_i, s_i] \subset [t_j, s_j]$ ou $[t_i, s_i] \subset [t_j, s_j]$. Ainsi on considère (voir Figure 5.7)

$$t = \sup_{i \in I} t_i \quad \text{and} \quad s = \inf_{i \in I} s_i.$$

On a $t \leq s$ et comme \mathcal{C} est fermé (Remarque 5.18) alors t et s sont dans \mathcal{C} . Il reste à voir qu'il s'agit des deux éléments d'un couple. En passant à la limite dans $\gamma(t_i) = \gamma(s_i)$ et dans $\gamma'(t_i) = -\gamma'(s_i)$ (car γ est au moins C^1), on obtient bien que (t, s) est un couple d'auto-contact et $t < s$. Par définition de t et de s , on a $]t, s[\cap \mathcal{C} = \emptyset$. De la même manière, on construit τ et σ .

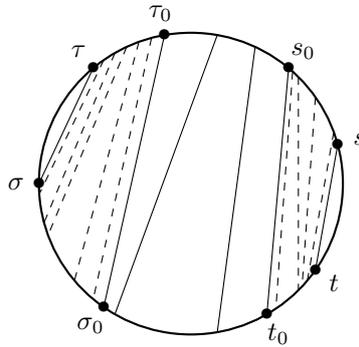


FIGURE 5.7. Localisation des paramètres t, s, τ et σ .

□

Toutes ces propriétés se condensent dans le théorème suivant.

Théorème 5.24 (Théorème de forme). *Soit γ une courbe minimale du problème (9). Si γ admet au moins deux couples d'auto-contacts distincts alors il existe quatre temps ordonnés $t < s < \tau < \sigma$ tels que :*

- (t, s) et (τ, σ) sont des couples d'auto-contacts ;
- $\gamma|_{]t, s[}$ et $\gamma|_{] \tau, \sigma [}$ sont des arcs de courbe sans auto-contact (c'est-à-dire $]t, s[\cap \mathcal{C}$ et $] \tau, \sigma [\cap \mathcal{C}$ sont vides). Ces arcs peuvent avoir des contacts avec $\partial\Omega$;
- $\gamma|_{]s, \tau[}$ et $\gamma|_{] \sigma, t [}$ sont des arcs simples ayant la même énergie \mathcal{W} . Ces deux arcs peuvent avoir des contacts tangents l'un avec l'autre mais dans ce cas pour tout $a \in]s, \tau[$ et pour tout $b \in] \sigma, t [$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$, on a

$$\mathcal{W}(\gamma|_{]s, a}) = \mathcal{W}(\gamma|_{]b, t}) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}(\gamma|_{]a, \tau]) = \mathcal{W}(\gamma|_{] \sigma, b}).$$

De plus (t, s) et (τ, σ) sont uniques et on les appellera les couples d'auto-contacts extrémaux de γ .

Ce théorème nous dit que toute courbe minimale ayant au moins deux auto-contacts est formée par deux gouttes reliées entre elles par deux arcs ayant la même énergie (voir Figure 5.8).

Preuve.

La Propriété 5.23 nous donne l'existence et l'ordre de temps t, s, τ, σ . En particulier $\gamma|_{]t, s[}$

et $\gamma_{\tau, \sigma}$ sont des arcs simples. Pour les deux autres arcs $\gamma_{s, \tau}$ et $\gamma_{\sigma, t}$, si l'un venait à faire un auto-contact avec lui-même alors γ serait dans le cas des trois couples d'auto-contacts juxtaposés de la Propriété 5.22 (Figure 5.5) qui est une configuration non minimale. Comme $\gamma_{s, \tau}$ et $\gamma_{\sigma, t}$ peuvent avoir des contacts l'un avec l'autre, il nous reste à prouver les égalités d'énergie.

Si $\gamma_{s, \tau}$ et $\gamma_{\sigma, t}$ n'ont pas la même énergie (supposons que $\gamma_{s, \tau}$ ait la plus petite énergie) alors on construit $\tilde{\gamma}$

- en parcourant γ de t à σ (en passant par s et τ) dans le sens positif;
- en sautant de σ à τ ;
- en parcourant γ de τ à s dans le sens négatif;
- en sautant de s à t .

On a ainsi

$$2\mathcal{W}(\gamma_{s, \tau}) < \mathcal{W}(\gamma_{s, \tau}) + \mathcal{W}(\gamma_{\sigma, t})$$

Ce qui fait que $\tilde{\gamma}$ a une énergie plus basse que γ et c'est impossible.

Pour a et b , la preuve est la même en remplaçant d'un côté t et s dans le paragraphe précédent par b et a respectivement afin d'obtenir

$$\mathcal{W}(\gamma_{[a, \tau]}) = \mathcal{W}(\gamma_{[\sigma, b]}).$$

D'un autre côté, en remplaçant τ et σ on obtient

$$\mathcal{W}(\gamma_{[s, a]}) = \mathcal{W}(\gamma_{[b, t]}).$$

□

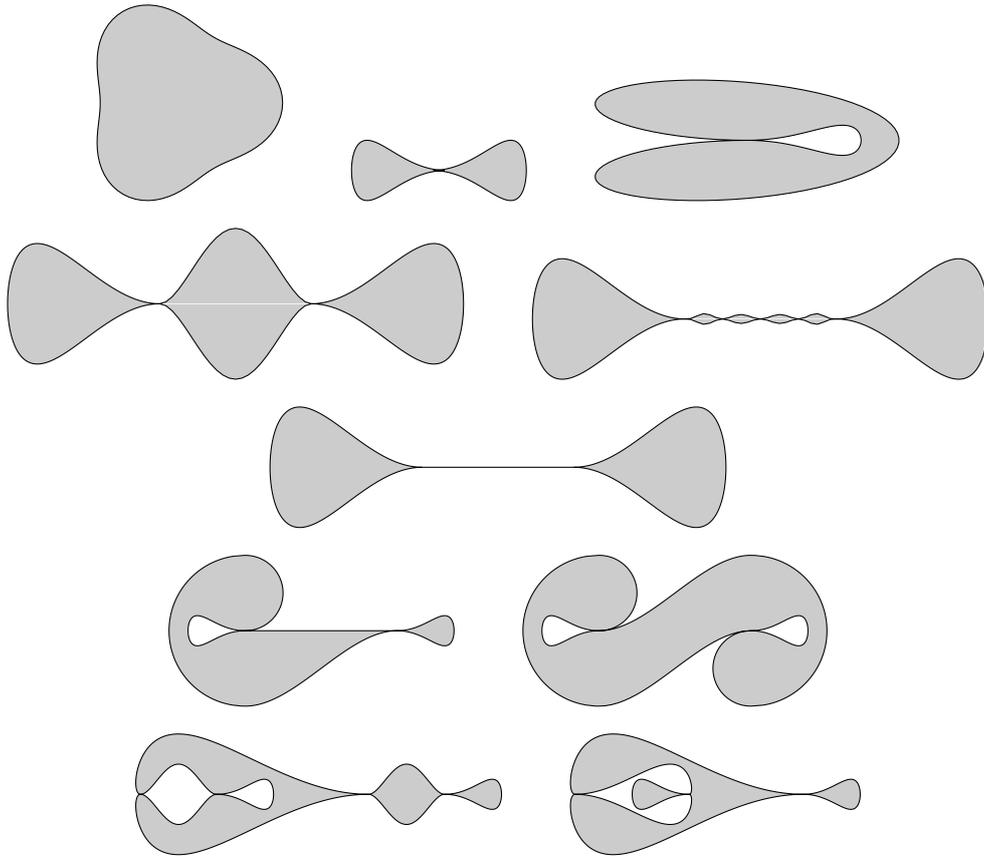


FIGURE 5.8. Exemples d'agencements des gouttes et des arcs.

4.2. Indice et bord d'ensemble

Dans cette partie, on utilise le théorème de forme (Théorème 5.24) afin d'avoir un reparamétrage particulier d'une courbe minimale γ . Ce paramétrage va nous permettre de montrer que l'indice de γ peut être pris dans 0 ou 1. En d'autres termes, chaque courbe minimale peut être vue comme la limite de courbes fermées simples dont certains arcs se rapprochent et se collent à la limite.

Le cœur de la preuve est le lemme technique suivant. Ce lemme sera réutilisé dans la partie sur la convexité (Section 6).

Lemme 5.25. *Soit γ une courbe minimale du problème (9). Il existe une paramétrisation de γ telle que pour tout a et b de \mathbb{S}^1 distincts, $\gamma|_{[a,b]}$ ne traverse pas $\gamma|_{[b,a]}$.*

Par $\gamma|_{[a,b]}$ et $\gamma|_{[b,a]}$ on entend les deux arcs de γ reliant $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$. Ce lemme signifie que localement en chaque point d'auto-contact, deux arcs se touchent mais ne se croisent pas (autrement dit, modulo le choix des axes, un arc reste au dessus de l'autre). Le point fort de ce lemme est de pouvoir avoir un paramétrage global entraînant le non croisement des arcs.

Preuve.

Ce lemme ne dit rien lorsque la courbe minimale γ est simple et il n'y a rien à prouver. Si γ admet un seul point d'auto-contact, on note (t, s) le couple correspondant et $\gamma_1 = \gamma|_{[t,s]}$ et $\gamma_2 = \gamma|_{[s,t]}$. Les courbes γ_1 et γ_2 sont fermées et on peut considérer deux points z_1 et z_2 encerclés par γ_1 et γ_2 respectivement. Comme chaque courbe est parcourue une seule fois, $\text{ind}_{\gamma_1}(z_1) = \pm 1$ et $\text{ind}_{\gamma_2}(z_2) = \pm 1$. S'il ne s'agit pas du même signe, on remplace γ par la courbe suivante obtenue :

- en parcourant γ de t à s dans le sens positif ;
- en sautant de s à t ;
- en parcourant γ de t à s dans le sens négatif.

Ainsi on se ramène au cas où les deux indices sont les mêmes. La courbe γ est régulière donc on peut écrire localement chaque arc $\gamma|_{[t-\varepsilon_1, t+\varepsilon_2]}$ et $\gamma|_{[s-\varepsilon_3, s+\varepsilon_4]}$ comme le graphe d'une fonction au-dessus de leur droite tangente commune en t et s . Le fait que les indices de γ_1 et de γ_2 sont les mêmes signifie qu'on a un ordre sur les fonctions : $\gamma|_{[t-\varepsilon_1, t+\varepsilon_2]} \leq \gamma|_{[s-\varepsilon_3, s+\varepsilon_4]}$ ou $\gamma|_{[t-\varepsilon_1, t+\varepsilon_2]} \geq \gamma|_{[s-\varepsilon_3, s+\varepsilon_4]}$. Localement proche de l'auto-contact, γ ne se traverse pas et comme il s'agit du seul point où elle peut se croiser, on en déduit que γ ne se traverse nulle part.

Le cas où γ admet plusieurs auto-contacts n'est, sur le principe, pas plus compliqué. L'idée générale est la suivante. En utilisant les couples extrémaux du théorème de forme (Théorème 5.24), on commence le reparamétrage dans $]t, s[$ jusqu'au premier couple d'auto-contact (ici, c'est (t, s)). On écrit localement les deux arcs (celui contenant t et celui contenant s) comme le graphe de fonctions et on prend la partie qui est au dessus de l'autre pour continuer le paramétrage d'un arc et l'autre partie pour le paramétrage de l'autre arc. On recommence de proche en proche afin de propager le paramétrage des deux arcs jusqu'à atteindre le couple (τ, σ) . La difficulté est technique car il faut recoller chaque paramétrage de manière cohérente.

Plus rigoureusement, en utilisant les couples extrémaux du théorème de forme (Théorème 5.24), on écrit $\gamma_1 = \gamma|_{[s,\tau]}$ et $\gamma_2 = \gamma|_{[\sigma,t]}$. La preuve est constituée de deux étapes, d'abord on montre qu'il existe une collection finie de boules recouvrant γ_1 nous permettant de l'écrire localement comme le graphe d'une fonction dans chaque boule. Dans un second temps on construit le paramétrage par récurrence, chaque itération se fait dans une boule différente et le processus ne revient jamais dans une boule déjà visitée. Ainsi on a besoin que d'un nombre fini d'itérations pour atteindre le bout de γ_1 et donc pour définir le reparamétrage.

♣ *Graphe local* : γ est une courbe minimale donc γ_1 est régulière, de classe C^2 et compacte¹. Donc il existe un voisinage tubulaire de γ_1 d'épaisseur $\varepsilon > 0$:

$$\mathcal{T} = \{\gamma(u) + \lambda(\gamma'(u))^\perp \mid u \in [s, \tau], |\lambda| < \varepsilon\}$$

où $(\gamma'(u))^\perp$ est l'image de $\gamma(u)$ par la rotation d'angle $+\pi/2$. γ_1 sépare \mathcal{T} en deux parties, on considère l'une des deux :

$$\mathcal{T}^+ = \{\gamma(u) + \lambda(\gamma'(u))^\perp \mid u \in [s, \tau], 0 < \lambda < \varepsilon\}.$$

γ_1 est régulière donc pour tout $u \in [s, \tau]$, il existe une boule $B(\gamma_1(u), \varepsilon_u)$ telle que $\varepsilon_u < \varepsilon$ et γ_1 peut être écrite comme le graphe d'une fonction φ_1 au dessus de sa tangente en u . S'il existe $u' \in [\sigma, t]$ tel que $\gamma_1(u) = \gamma_2(u')$ alors, comme γ_2 est aussi régulière, il existe une boule $B(\gamma_2(u'), \varepsilon_{u'})$ telle que γ_2 peut être écrite dans cette boule comme le graphe d'une fonction au dessus de sa tangente en u' . Comme $\gamma_1(u) = \gamma_2(u')$ et que les deux tangentes précédentes coïncident, quitte à remplacer ε_u par $\min(\varepsilon_u, \varepsilon_{u'})$, on peut supposer que, dans la boule $B(\gamma_1(u), \varepsilon_u)$, γ_1 et γ_2 peuvent s'écrire comme des graphes avec le même axe en x . De plus, quitte à renverser l'axe des y on peut supposer que

$$B(\gamma_1(u), \varepsilon_u) \cap \mathcal{T}^+ = \{(x, y) \text{ dans le graphe} \mid \varphi_1(x) < y\}.$$

L'ensemble de toutes les boules $(B(\gamma_1(u), \varepsilon_u))_{u \in [s, \tau]}$ est un recouvrement par des ouverts de la courbe compacte γ_1 donc on peut en extraire un sous recouvrement fini. À une réorganisation près, $(\mathcal{V}_k)_{0 \leq k \leq N}$ est une famille de voisinages telle que

- il existe deux suites finies (s_-^k) et (s_+^k) avec $s_-^0 = s$, $s_+^N = \tau$ et

$$\forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad s_-^k < s_+^{k-1} < s_-^{k+1} < s_+^k ;$$

- $\gamma_1^k = \gamma_1|_{[s_-^k, s_+^k]}$ est localement le graphe d'une fonction c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions $x_1^k : [s_-^k, s_+^k] \rightarrow [-\varepsilon^k, \varepsilon^k]$ et $\varphi_1^k : [-\varepsilon^k, \varepsilon^k] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\gamma_1^k = (x_1^k, \varphi_1^k \circ x_1^k)$ dans le système de coordonnées locales de \mathcal{V}_k ;
- si γ_2 entre en contact avec γ_1 dans \mathcal{V}_k alors il existe $t_-^k < t_+^k$ tels que $\gamma_2^k = \gamma_2|_{[t_-^k, t_+^k]}$ peut être écrite comme le graphe d'une fonction, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions $x_2^k : [t_-^k, t_+^k] \rightarrow [-\varepsilon^k, \varepsilon^k]$ et $\varphi_2^k : [-\varepsilon^k, \varepsilon^k] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\gamma_2^k = (x_2^k, \varphi_2^k \circ x_2^k)$ dans le système de coordonnées locales \mathcal{V}_k ;
- chaque ensemble de la famille $(\{(x, y) \text{ dans le graphe } \mathcal{V}_k \mid \varphi_1^k(x) < y\})_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ appartient au même côté de γ_1 (celui de \mathcal{T}^+).

Comme γ_1 et γ_2 sont parcourus dans des sens différents lorsqu'ils entrent en contact on a que x_1^k est croissante et x_2^k est décroissante (lorsqu'elle existe), $t_+^0 = t$ et $t_-^N = \sigma$. Par conséquent, pour tout $k_1 < k_2$ tels que $t_-^{k_1}, t_+^{k_1}, t_-^{k_2}$ et $t_+^{k_2}$ existent, on a

$$t_-^{k_2} < t_+^{k_2} < t_-^{k_1} < t_+^{k_1}.$$

On définit la suite de points milieux, pour $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$,

$$s^{k-1/2} = \frac{s_-^k + s_+^{k-1}}{2} \quad \text{et} \quad s^{k+1/2} = \frac{s_+^k + s_-^{k+1}}{2},$$

Cette notation vérifie $s^{k+1/2} = s^{(k+1)-1/2}$. De plus, on utilisera

$$\zeta^k = x_1^k(s^{k-1/2})$$

et, lorsque c'est possible, on définit $t^{k-1/2}$ par la relation

$$\zeta^k = x_2^k(t^{k-1/2})$$

On renvoie à la Figure 5.9 pour une illustration des différentes notations.

1. à priori, γ est seulement de classe C^1 . On verra dans la partie suivante qu'en fait les courbes minimales sont plus régulières. Le résultat de régularité n'utilisera pas le théorème que nous sommes en train de démontrer.

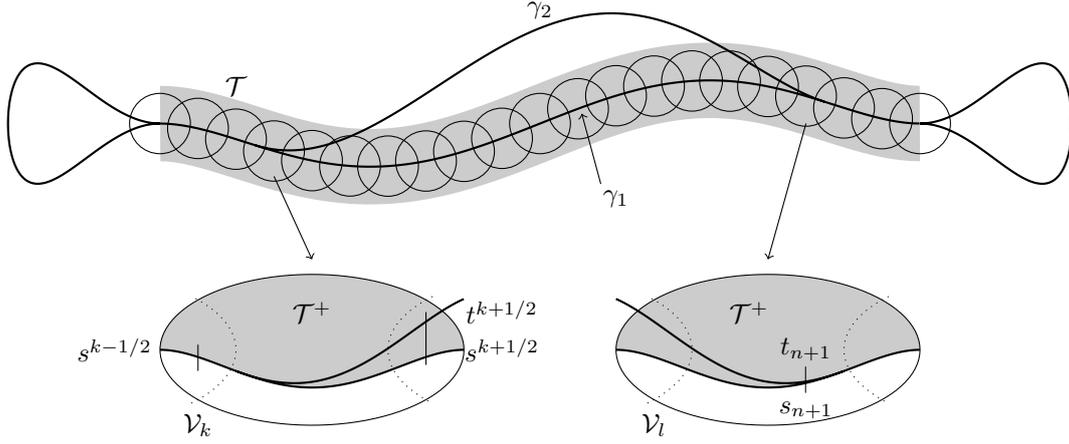


FIGURE 5.9. Voisinages tubulaires et graphes locaux

♣ *Récurrance* : nous allons construire le paramétrage $\tilde{\gamma}$ empêchant les arcs de se traverser par récurrence. D'abord, nous construisons $\tilde{\gamma}|_{[t_1, s_1]}$ avec $\sigma < t_1 < t < s < s_1 < \tau$. Puis nous construisons $\tilde{\gamma}|_{[t_2, s_2]}$ avec $\sigma < t_2 < t_1 < t < s < s_1 < s_2 < \tau$. On continue ainsi de suite jusqu'à l'étape finale $t_{fin} = \sigma$ et $s_{fin} = \tau$. On referme le paramétrage $\tilde{\gamma}|_{[\sigma, \tau]}$ en utilisant $\gamma|_{[\tau, \sigma]}$.

♣ *Initialisation* : nous commençons la construction dans \mathcal{V}_0 , on considère la fonction

$$\varphi_+^0 = \max(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \quad \text{et} \quad \varphi_-^0 = \min(\varphi_1^0, \varphi_2^0).$$

φ_1^0 et φ_2^0 appartiennent à $W^{2,2}$ et ont des contacts tangents donc φ_+^0 et φ_-^0 appartiennent aussi à $W^{2,2}$. Ensuite on définit $\tilde{\gamma}_-^0$ sur $[s_-^0, s^{1-1/2}]$ et $\tilde{\gamma}_+^0$ sur $[t^{1-1/2}, t_+^0]$ par :

$$\forall u \in [s_-^0, s^{1-1/2}], \quad \tilde{\gamma}_-^0(u) = (x_1^0(u), \varphi_-^0(x_1^0(u)))$$

et

$$\forall u \in [t^{1-1/2}, t_+^0], \quad \tilde{\gamma}_+^0(u) = (x_2^0(u), \varphi_+^0(x_2^0(u))).$$

(voir Figure 5.10).

En se souvenant que $s_-^0 = s$ et $t_+^0 = t$, on reconnecte les deux arcs à $\gamma|_{[t, s]}$ et on examine les deux demi-arcs $\gamma|_{[t, t+\eta]}$ et $\gamma|_{[s-\eta, s]}$ (pour η petit). De manière similaire au cas où γ a un seul point d'auto contact, on peut changer le sens de parcours de $\gamma|_{[t, s]}$ dans le but de connecter les deux demi-arcs à $\tilde{\gamma}_-^0$ et à $\tilde{\gamma}_+^0$ de sorte à satisfaire la conclusion du lemme.

On continue le reparamétrage de la manière suivante. Si $\varphi_1^0(\zeta^0) = \varphi_2^0(\zeta^0)$ alors soit $t_1 = t^{1-1/2}$ et $s_1 = s^{1-1/2}$ et on définit $\tilde{\gamma}|_{[t_1, s_1]}$

- en parcourant $\tilde{\gamma}_+^0$ de t_1 à t ;
- en parcourant γ de t à s ;
- en parcourant $\tilde{\gamma}_-^0$ de s à s_1 .

L'orientation a été changée en amont pour pouvoir faire les connections tangentielles de manière convenable. La construction se poursuit dans \mathcal{V}_1 .

Si $\varphi_1^0(\zeta^0) < \varphi_2^0(\zeta^0)$ alors $\tilde{\gamma}_+^0$ se reconnecte à γ_2 et $\tilde{\gamma}_-^0$ se reconnecte à γ_1 dont la paramétrisation initiale (de $\gamma|_{[s^{1-1/2}, t^{1-1/2}]}$) reste valide. Si $\varphi_1^0(\zeta^0) > \varphi_2^0(\zeta^0)$ on renverse le sens de parcours de $\gamma|_{[s^{1-1/2}, t^{1-1/2}]}$ dans le but d'avoir un paramétrage approprié c'est-à-dire d'assurer la continuité des connections entre $\tilde{\gamma}_+^0$ et γ_1 et entre γ_2 et $\tilde{\gamma}_-^0$ avec une paramétrisation dans $[t^{1-1/2} - \eta, s^{1-1/2} + \eta]$. Supposons que le renversement a été fait s'il était nécessaire (c'est-à-dire qu'on se place dans le cas $\varphi_1^0(\zeta^0) < \varphi_2^0(\zeta^0)$) et on considère

$$t_1 = \inf\{u < t^{1-1/2} \mid \gamma_2(u) \in (\gamma_1)\}$$

et

$$s_1 = \sup\{u > s^{1-1/2} \mid \gamma_1(u) \in (\gamma_2)\}.$$

comme \mathcal{C} est fermé, on a que t_1 et t_2 sont des points d'auto-contacts. De plus, il n'y a pas de contact entre $\gamma_1|_{s^{1-1/2}, s_1[}$ et $\gamma_2|_{t_1, t^{1-1/2}[}$ et, puisque les couples d'auto-contact ne sont pas croisés, on a que (t_1, s_1) est un couple d'auto-contact. Soit $\tilde{\gamma}|_{[t_1, s_1]}$ défini

- en parcourant γ_2 de t_1 à $t^{1-1/2}$;
- en parcourant $\tilde{\gamma}_+^0$ de $t^{1-1/2}$ à t ;
- en parcourant γ de t à s ;
- en parcourant $\tilde{\gamma}_-^0$ de s à $s^{1-1/2}$;
- en parcourant γ_1 de $s^{1-1/2}$ à s_1 .

Encore une fois, l'orientation a été changée de sorte à avoir des connexions tangentielles convenables. Puis, il existe $k > 0$ tel que $s_-^k < s_1 < s_+^k$ donc on continue la construction dans \mathcal{V}_k .

♣ *Itérations* : on suppose que $\tilde{\gamma}|_{[t_n, s_n]}$ est construit et soit \mathcal{V}_k le voisinage contenant l'image de (t_n, s_n) par γ . La construction est exactement la même que pour l'initialisation : on considère les fonctions

$$\varphi_+^k = \max(\varphi_1^k, \varphi_2^k) \quad \text{et} \quad \varphi_-^k = \min(\varphi_1^k, \varphi_2^k).$$

φ_+^k et φ_-^k appartiennent aussi à $W^{2,2}$. Quelle que soit la manière dont on a terminé le pas précédent, on définit $\tilde{\gamma}_-^k$ sur $[s_n, s^{k+1/2}]$ et $\tilde{\gamma}_+^k$ sur $[t^{k+1/2}, t_n]$ par :

$$\forall u \in [s_n, s^{k+1/2}], \quad \tilde{\gamma}_-^k(u) = (x_1^k(u), \varphi_-^k(x_1^k(u)))$$

et

$$\forall u \in [t^{k+1/2}, t_n], \quad \tilde{\gamma}_+^k(u) = (x_2^k(u), \varphi_+^k(x_2^k(u))).$$

(voir Figure 5.10).

Comme \mathcal{V}_k est bien orienté (la surface supérieure coïncide avec \mathcal{T}^+), la connexion entre $\tilde{\gamma}|_{[t_n, s_n]}$ et $\tilde{\gamma}_-^k$ est convenable autour de s_n , celle entre $\tilde{\gamma}|_{[t_n, s_n]}$ et $\tilde{\gamma}_+^k$ l'est aussi autour de t_n .

Si $\varphi_1^k(\zeta^k) = \varphi_2^k(\zeta^k)$ alors soit $t_{n+1} = t^{k+1/2}$ et $s_{n+1} = s^{k+1/2}$ et soit $\tilde{\gamma}|_{[t_{n+1}, s_{n+1}]}$ défini

- en parcourant $\tilde{\gamma}_+^k$ de t_{n+1} à t_n ;
- en parcourant $\tilde{\gamma}|_{[t_n, s_n]}$ de t_n à s_n ;
- en parcourant $\tilde{\gamma}_-^k$ de s_n à s_{n+1} .

La construction continue dans \mathcal{V}_{k+1} .

Si $\varphi_1^k(\zeta^k) \neq \varphi_2^k(\zeta^k)$ alors on utilise exactement le même argument de renversement sur $\gamma|_{[s^{k+1/2}, t^{k+1/2}]}$. Supposons encore une fois que le renversement a été fait s'il était nécessaire (donc on se place dans le cas $\varphi_1^k(\zeta^k) < \varphi_2^k(\zeta^k)$) et on considère

$$t_{n+1} = \inf\{u < t^{k+1/2} \mid \gamma_2(u) \in (\gamma_1)\}$$

et

$$s_{n+1} = \sup\{u > s^{k+1/2} \mid \gamma_1(u) \in (\gamma_2)\}.$$

(voir Figure 5.9). Une fois encore (t_{n+1}, s_{n+1}) est un couple d'auto-contact. Soit $\tilde{\gamma}|_{[t_{n+1}, s_{n+1}]}$ défini

- en parcourant γ_2 de t_{n+1} à $t^{k+1/2}$;
- en parcourant $\tilde{\gamma}_+^k$ de $t^{k+1/2}$ à t_n ;
- en parcourant $\tilde{\gamma}|_{[t_n, s_n]}$ de t_n à s_n ;
- en parcourant $\tilde{\gamma}_-^k$ de s_n à $s^{k+1/2}$;
- en parcourant γ_1 de $s^{k+1/2}$ à s_{n+1} .

Comme précédemment, il existe $l > k$ tel que $s_-^l < s_{n+1} < s_+^l$ donc la construction se poursuit dans \mathcal{V}_l .

♣ *Dernier pas* : il n'y a qu'un nombre fini de voisinages \mathcal{V}_k donc il arrive un moment où soit $t_{n+1} = \sigma$ et $s_{n+1} = \tau$ (si $\varphi_1^k(\zeta^k) \neq \varphi_2^k(\zeta^k)$ dans la pénultième itération) soit l'image

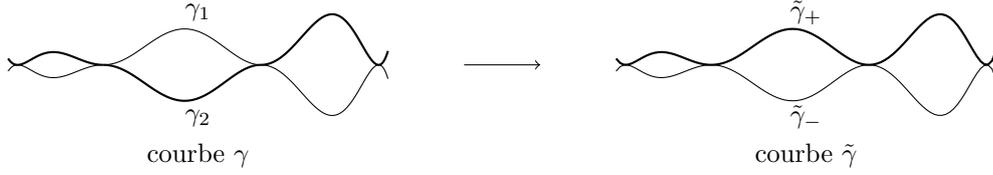


FIGURE 5.10. Modification locale du paramétrage de γ .

de (t_{n+1}, s_{n+1}) par γ appartient à \mathcal{V}_N . Dans ce deuxième cas, on fait exactement la même construction en utilisant $s^{N+1/2} = \tau$ et $t^{N+1/2} = \sigma$ pour paramétrer $\tilde{\gamma}_{[[\sigma, \tau]]}$.

Dans les deux cas, $\tilde{\gamma}_{[[\sigma, \tau]]}$ est construit et on utilise une dernière fois l'argument de renversement sur $\tilde{\gamma}_{[[\tau, \sigma]]}$ pour reconnecter tous les demi-arcs de manière adéquate.

♣ *Conclusion* : cette paramétrisation globale permet à l'arc supérieur de rester au dessus de l'arc inférieur au niveau de chaque point d'auto-contact (voir Figure 5.10).

Ainsi le lemme est prouvé. \square

On vient de le voir dans la démonstration, chaque arc peut se décoller de celui qui le touche, c'est le principe de la preuve du lemme suivant. C'est-à-dire qu'on peut déformer continûment γ dans \mathbb{R}^2 privé d'un point pour en faire une courbe simple

Corollaire 5.26. *Soit $z \in \mathbb{R} \setminus (\gamma)$. γ est homotope dans $\mathbb{R} \setminus \{z\}$ à une courbe simple.*

Preuve.

Si γ n'est pas d'ores et déjà simple alors on utilise la paramétrisation (et les notations de la preuve) du Lemme 5.25. Le cas de l'unique point d'auto-contact sera traité après.

♣ *Étape 1* : s'il y a plusieurs points d'auto-contacts alors on utilise les mêmes graphes locaux pour séparer les arcs qui se touchent. On considère \mathcal{V}_k tel que γ_1 et γ_2 entrent en contact. Soit $\eta^k > 0$ et $\psi^k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions lisses satisfaisant $0 < \psi^k \leq \eta^k$ sur $] -\varepsilon^k, \varepsilon^k[$ et $\psi^k = 0$ ailleurs. De même que pour $\tilde{\gamma}$, on définit $\hat{\gamma}$ par

$$\forall u \in [s_n, s^{k+1/2}], \quad \hat{\gamma}_-^k(u) = (x_1^k(u), \varphi_-^k(x_1^k(u)) - \psi^k(x_1^k(u)))$$

et

$$\forall u \in [t^{k+1/2}, t_n], \quad \hat{\gamma}_+^k(u) = (x_2^k(u), \varphi_+^k(x_2^k(u)) + \psi^k(x_2^k(u))).$$

Il est entendu que pour $n = 0$, $s_0 = s_0^-$ et $t_0 = t_0^+$. Comme $d(z, \gamma) > 0$ et γ est compact, on peut choisir η^k suffisamment petit pour que l'homotopie

$$\lambda \mapsto (x_1^k(u), \varphi_-^k(x_1^k(u)) - \lambda\psi^k(x_1^k(u)))$$

$$\lambda \mapsto (x_2^k(u), \varphi_+^k(x_2^k(u)) + \lambda\psi^k(x_2^k(u)))$$

ne traverse pas z pour $\lambda \in [0, \eta^k]$. Cette perturbation mène à $\hat{\gamma}_-^k < \hat{\gamma}_+^k$ dans le graphe sauf éventuellement en $-\varepsilon^k$ et en ε^k . En faisant cette construction pour chaque indice k tel que \mathcal{V}_k contienne des auto-contacts, on construit une courbe $\hat{\gamma}$ homotope à γ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$ et qui a un nombre fini de points d'auto-contacts (localisés en (s_n, t_n)).

♣ *Étape 2* : que ce soit pour $\hat{\gamma}$ ou pour le cas où γ admet un seul auto-contact, on a un nombre fini de points d'auto-contacts. On utilise exactement la même méthode pour écarter les arcs. Considérons une énumération (s_n, t_n) de ces couples d'auto-contacts, on utilise la même construction avec les graphes locaux que précédemment et des ouverts suffisamment petits pour ne contenir qu'une seule image de couple par γ . Afin de simplifier, on note avec l'indice n et les couples d'auto-contacts vérifient

- $s^n \in]s_-^n, s_+^n[$;
- $t^n \in]t_-^n, t_+^n[$;

– le contact a lieu en $x_1^n = x_2^n = 0$.
 Soit $\alpha^n > 0$ et $\theta^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions lisses telles que $0 < \theta^n \leq \alpha^n$ sur $] -\varepsilon^n, \varepsilon^n[$ et $\theta^n = 0$ ailleurs. De même que pour $\hat{\gamma}$, on définit $\check{\gamma}$ par

$$\forall u \in [s_-, s_+], \quad \check{\gamma}_-^n(u) = (x_1^n(u), \varphi_-^n(x_1^n(u)) - \theta^n(x_1^n(u)))$$

et

$$\forall u \in [t_-, t_+], \quad \check{\gamma}_+^n(u) = (x_2^n(u), \varphi_+^n(x_2^n(u)) + \theta^n(x_2^n(u))).$$

Exactement comme précédemment, pour α^n assez petit, $\check{\gamma}$ est homotope à $\hat{\gamma}$ (et donc à γ).
 Finalement, cette dernière modification décroche tous les points d'auto-contacts restants.

Par conséquent, $\check{\gamma}$ est homotope à γ dans $\mathbb{R} \setminus \{z\}$. \square

Ce lemme se reformule avec les indices.

Théorème 5.27. *Soit γ une courbe minimale pour le problème (9), il existe une paramétrisation de γ telle que*

$$\text{ind}_\gamma(\mathbb{R} \setminus (\gamma)) \subset \{0, 1\}.$$

De plus, si Ω est simplement connexe alors

$$\{z \in \mathbb{R} \mid \text{ind}_\gamma(z) = 1\} \subset \Omega.$$

Preuve.

En utilisant le corollaire précédent, on peut définir une homotopie locale qui sépare deux arcs d'une distance de ε . Par compacité, on peut séparer complètement les arcs de γ d'une distance ε avec un nombre fini d'homotopies (nombre dépendant des voisinages et non de ε). On obtient ainsi une courbe simple γ_ε homotope à γ (dans \mathbb{R}^2) et très proche de γ . Quitte à renverser le sens de parcours, on peut supposer que $\text{ind}_{\gamma_\varepsilon}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Soit $z \in \mathbb{R}^2 \setminus (\gamma)$, par compacité $\text{dist}(z, (\gamma)) > 0$ donc pour $\varepsilon > 0$ assez petit γ_ε est homotope à γ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$. Ainsi $\text{ind}_\gamma(z) \in \{0, 1\}$.

Pour la seconde partie du théorème, comme $(\gamma) \subset \bar{\Omega}$ et que Ω est simplement connexe alors γ ne peut pas encercler un point z en dehors de Ω . Donc les points d'indice 1 de γ (ceux qui sont effectivement encerclés par γ) sont dans Ω . \square

5. Étude de la régularité des minimiseurs

Dans cette partie nous allons montrer que les minimiseurs du problème (9) sont en fait plus réguliers que les courbes admissibles. Concrètement nous montrons qu'ils sont de classe C^3 et presque quatre fois dérivable (la dérivée troisième est une fonction à variation bornée).

La stratégie pour montrer le résultat est la suivante. On calcule l'inéquation d'Euler-Lagrange associée à l'énergie \mathcal{W} c'est-à-dire qu'on calcule la variation première de \mathcal{W}

$$\mathcal{W}(\gamma + \varepsilon\delta) = \mathcal{W}(\gamma) + \varepsilon d\mathcal{W}(\gamma).\delta + o(\varepsilon)$$

où γ est une courbe minimale, δ une perturbation lisse et $d\mathcal{W}(\gamma)$ une forme linéaire. L'idée est de voir que, dès lors que $\gamma + \varepsilon\delta$ est admissible (pour ε assez petit), on a $\mathcal{W}(\gamma + \varepsilon\delta) \geq \mathcal{W}(\gamma)$ ce qui revient à dire $d\mathcal{W}(\gamma).\delta \geq 0$. La première difficulté est de lever cette condition d'admissibilité sur $\gamma + \varepsilon\delta$, ce faisant on peut montrer que $d\mathcal{W}(\gamma)$ est une mesure de Radon

à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Finalement on arrive par un argument d'auto-amorce² à obtenir plus de régularité sur γ .

5.1. Calcul de l'équation d'Euler-Lagrange

Le calcul de la variation première de \mathcal{W} n'est pas extrêmement complexe puisqu'il s'agit simplement d'un développement limité à l'ordre 1. Les diverses expressions de \mathcal{W} rendent le calcul un peu technique cependant il est assez difficile de trouver une preuve de l'expression de $d\mathcal{W}(\gamma)$ même dans le cas γ lisse. C'est pourquoi nous donnons une preuve complète de la proposition suivante.

Proposition 5.28. *Soit γ une courbe régulière de $W^{2,2}([0, \ell], \mathbb{R}^2)$ paramétrée par longueur d'arc. Pour tout $\delta \in C^\infty([0, \ell], \mathbb{R})$ et pour $\varepsilon > 0$, on a*

$$\mathcal{W}(\gamma + \varepsilon\delta) = \mathcal{W}(\gamma) + \varepsilon \int_0^\ell (2\gamma'' \cdot \delta'' - 3(\gamma' \cdot \delta')|\gamma''|^2) ds + o(\varepsilon).$$

Preuve.

On calcule le développement limité de \mathcal{W} à l'ordre 1 et on le met sous la forme

$$\mathcal{W}(\gamma + \varepsilon\delta) = \mathcal{W}(\gamma) + \varepsilon \int_0^\ell a(\gamma, \delta)(s) ds + o(\varepsilon),$$

où a est une forme linéaire en δ . Le calcul de la courbure $\kappa_{\gamma+\varepsilon\delta}$ utilisera γ'' qui est seulement L^2 . Par conséquent, nous devons expliciter les termes d'ordre supérieur à 1 en ε afin de voir qu'ils restent petits lors de l'intégration sur $[0, \ell]$. Pour plus de lisibilité, on introduit une fonction générique ψ_k pour expliciter les termes en $o(\varepsilon)$. Chaque fois que la fonction ψ est changée d'une ligne de calcul à la suivante, on incrémente l'indice k de 1. On prêtera attention au fait que $(s, \varepsilon) \rightarrow \psi(\varepsilon, s)$ est uniformément bornée en s et en ε (pour ε assez petit). Pour plus de lisibilité, on note ψ les fonctions $o(\varepsilon)$ à valeurs réelles et $\vec{\psi}$ celles à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

♣ *Étape 1* : calcul de la paramétrisation par longueur d'arc de $\gamma + \varepsilon\delta$.

Soit

$$t = f(s) = \int_0^s |\gamma'(u) + \varepsilon\delta'(u)| du.$$

Comme γ est paramétrée par longueur d'arc, on a $|\gamma'(u)| = 1$ et ainsi

$$\begin{aligned} |\gamma' + \varepsilon\delta'| &= \sqrt{(\gamma' + \varepsilon\delta')^2} \\ &= \sqrt{1 + 2\varepsilon\gamma' \cdot \delta' + \varepsilon^2|\delta'|^2} \\ &= 1 + \varepsilon\gamma' \cdot \delta' + \frac{1}{2}\varepsilon^2|\delta'|^2 + \sum_{n \geq 2} \binom{1/2}{n} \varepsilon^n (2\gamma' \cdot \delta' + \varepsilon|\delta'|^2)^n \\ &= 1 + \varepsilon\gamma' \cdot \delta' + \varepsilon^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2}|\delta'|^2 + \sum_{n \geq 2} \binom{1/2}{n} \varepsilon^{n-2} (2\gamma' \cdot \delta' + \varepsilon|\delta'|^2)^n \right)}_{=\theta_\varepsilon(s)}. \end{aligned}$$

La série converge normalement car $2\gamma' \cdot \delta' + \varepsilon|\delta'|^2$ est borné. Par conséquent

$$t = f(s) = s + \varepsilon \underbrace{\int_0^s \gamma'(u) \cdot \delta'(u) du}_{=\varphi(s)} + \varepsilon^2 \int_0^s \theta_\varepsilon(u) du.$$

Ensuite, en prenant la dérivée première

$$f'(s) = 1 + \varepsilon\varphi'(s) + \varepsilon^2\theta_\varepsilon(s),$$

². bootstrap en anglais

et seconde (qui existe pour presque tout s)

$$f''(s) = \varepsilon\varphi''(s) + \varepsilon^2\theta'_\varepsilon(s).$$

Lorsqu'une expression impliquant φ'' est un terme d'ordre 1 en ε on le laissera sous cette forme et sinon on l'écrira

$$\varphi'' = \gamma'' \cdot \delta' + \gamma' \cdot \delta'' = \psi_1 + \gamma'' \cdot \vec{\psi}_2$$

On calcule

$$\begin{aligned} \theta'_\varepsilon(s) &= \delta'' \cdot \delta' \\ &+ \left(\sum_{n \geq 2} \binom{1/2}{n} n \varepsilon^{n-2} (2\gamma' \cdot \delta' + \varepsilon|\delta'|^2)^{n-1} \right) (2\gamma'' \cdot \delta' + 2\gamma' \cdot \delta'' + 2\varepsilon\delta'' \cdot \delta') \\ &= \psi_3 + \gamma'' \cdot \vec{\psi}_4. \end{aligned}$$

Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned} f(s) &= s + \varepsilon\varphi + \varepsilon^2\psi_5, \\ f'(s) &= 1 + \varepsilon\varphi' + \varepsilon^2\psi_6 \\ \text{et } f''(s) &= \varepsilon\varphi'' + \varepsilon^2\psi_7 + \varepsilon^2\gamma'' \cdot \vec{\psi}_8. \end{aligned}$$

Donc pour ε assez petit, φ et φ' sont bornées et ainsi f est un C^1 difféomorphisme de $[0, \ell]$ dans $[0, \ell_\varepsilon]$ où ℓ_ε est la longueur $\gamma + \varepsilon\delta$. On note g sa fonction réciproque. $w(t) = \gamma(g(t)) + \varepsilon\delta(g(t))$ est un paramétrage par longueur d'arc de $\gamma + \varepsilon\delta$. De plus, en dérivant la relation $f(g(t)) = t$ deux fois, on peut calculer les deux premières dérivées de g .

$$\begin{aligned} f(g(t)) = t &\Rightarrow g(t) + \varepsilon\varphi(g(t)) + \varepsilon^2\psi_5(g(t)) = t \\ &\Rightarrow g(t) = t - \varepsilon\varphi(g(t)) + \varepsilon^2\psi_5(g(t)). \end{aligned}$$

Ainsi on obtient pour la première dérivée

$$f'(g(t))g'(t) = 1 \Rightarrow g'(t) = f'(g(t))^{-1}.$$

Cependant

$$\begin{aligned} f'(s)^{-1} &= (1 + \varepsilon\varphi' + \varepsilon^2\psi_6)^{-1} \\ &= 1 - \varepsilon\varphi' + \varepsilon^2\psi_6 + \sum_{n \geq 2} \varepsilon^n (-\varphi' + \varepsilon\psi_6)^n \\ &= 1 - \varepsilon\varphi' + \varepsilon^2\psi_9 \end{aligned}$$

et donc

$$g'(t) = 1 - \varepsilon\varphi' + \varepsilon^2\psi_9.$$

Pour plus de clarté, on n'écrira pas les variables dans les expressions à venir. Il est entendu que les expressions de la forme $fonction(s) = \dots$ sont prises au point s et les expressions en $fonction(t) = \dots$ sont prises au point $g(t)$. On obtient ainsi pour la dérivée seconde de g :

$$\begin{aligned} f''(g(t))g'(t)^2 + f'(g(t))g''(t) = 0 &\Rightarrow g''(t) = -f''(g(t))g'(t)^2 f'(g(t))^{-1} \\ &\Rightarrow g''(t) = -\varepsilon\varphi'' + \varepsilon^2\psi_{10} + \varepsilon^2\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{11}. \end{aligned}$$

On rassemble les expressions précédentes

$$\begin{aligned} g(t) &= t - \varepsilon\varphi + \varepsilon^2\psi_5, \\ g'(t) &= 1 - \varepsilon\varphi' + \varepsilon^2\psi_9 \\ \text{et } g''(t) &= -\varepsilon\varphi'' + \varepsilon^2\psi_{10} + \varepsilon^2\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{11}. \end{aligned}$$

♣ *Étape 2* : calcul du développement limité de $\mathcal{W}(\gamma + \varepsilon\delta)$.
Grâce à la paramétrisation par longueur d'arc, on peut écrire

$$\mathcal{W}(\gamma + \varepsilon\delta) = \int_0^{\ell_\varepsilon} \left| \frac{d^2 w}{dt^2}(t) \right|^2 dt.$$

Cependant on a

$$\begin{aligned}
\frac{d^2w}{dt^2} &= \gamma''g'^2 + \gamma'g'' + \varepsilon\delta''g'^2 + \varepsilon\delta'g'' \\
&= \gamma''(1 - \varepsilon\varphi' + \varepsilon^2\psi_9)^2 + \gamma'(-\varepsilon\varphi'' + \varepsilon^2\psi_{10} + \varepsilon^2\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{11}) \\
&\quad + \varepsilon\delta''(1 - \varepsilon\varphi' + \varepsilon^2\psi_9)^2 + \varepsilon\delta'(-\varepsilon\varphi'' + \varepsilon^2\psi_{10} + \varepsilon^2\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{11}) \\
&= \gamma'' + \varepsilon(\delta'' - 2\varphi'\gamma'' - \varphi''\gamma') \\
&\quad + \varepsilon^2(\vec{\psi}_{12} + \psi_{13}\gamma'' + (\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{14})\vec{\psi}_{15}).
\end{aligned}$$

Ceci nous permet de calculer, en utilisant $\gamma'' \cdot \gamma' = 0$ (provenant du paramétrage par longueur d'arc),

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d^2w}{dt^2} \right|^2 &= |\gamma''|^2 + 2\varepsilon(\gamma'' \cdot \delta'' - 2\varphi'|\gamma''|^2) \\
&\quad + \varepsilon^2(\psi_{16} + \gamma'' \cdot \vec{\psi}_{17} + \psi_{18}|\gamma''|^2 + (\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{19})(\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{20})).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(\gamma + \varepsilon\delta) &= \int_0^{\ell_\varepsilon} |\gamma''|^2 dt + 2\varepsilon \int_0^{\ell_\varepsilon} (\gamma'' \cdot \delta'' - 2\varphi'|\gamma''|^2) dt \\
&\quad + \varepsilon^2 \int_0^{\ell_\varepsilon} (\psi_{16} + \gamma'' \cdot \vec{\psi}_{17} + \psi_{18}|\gamma''|^2 + (\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{19})(\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{20})) dt
\end{aligned}$$

où l'expression dans l'intégrale est prise en $g(t)$. En utilisant un changement de variable $s = g(t)$ (ou $t = f(s)$) on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(\gamma + \varepsilon\delta) &= \int_0^\ell |\gamma''(s)|^2 f'(s) ds + 2\varepsilon \int_0^\ell (\gamma''(s) \cdot \delta''(s) - 2\varphi'(s)|\gamma''(s)|^2) f'(s) ds \\
&\quad + \varepsilon^2 \int_0^\ell (\psi_{16} + \gamma'' \cdot \vec{\psi}_{17} + \psi_{18}|\gamma''|^2 + (\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{19})(\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{20})) f'(s) ds.
\end{aligned}$$

En combinant des expressions précédentes, on arrive à

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(\gamma + \varepsilon\delta) &= \int_0^\ell |\gamma''|^2 ds + \varepsilon \int_0^\ell (2\gamma'' \cdot \delta'' - 3\varphi'|\gamma''|^2) ds \\
&\quad + \varepsilon^2 \left(\underbrace{\int_0^\ell \psi_{21} ds}_{=I_1} + \underbrace{\int_0^\ell \gamma'' \cdot \vec{\psi}_{22} ds}_{=I_2} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\int_0^\ell \psi_{23}|\gamma''|^2 ds}_{=I_3} + \underbrace{\int_0^\ell (\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{24})(\gamma'' \cdot \vec{\psi}_{25}) ds}_{=I_4} \right).
\end{aligned}$$

Comme chaque fonction ψ est uniformément bornée en s et en ε , en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs de \mathbb{R}^2 et les fonctions de L^2 , on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C\ell, \\
I_2 &\leq \| |\gamma''| |\vec{\psi}_{22}| \|_{L^1} \leq C\sqrt{\ell} \|\gamma''\|_{L^2}, \\
I_3 &\leq C\|\gamma''\|_{L^2}^2 \\
\text{et } I_4 &\leq \| |\gamma''|^2 |\vec{\psi}_{24}| |\vec{\psi}_{25}| \|_{L^1} \leq C^2 \|\gamma''\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

où C est une borne commune sur les ψ . Ainsi les termes d'ordre élevé en ε restent bornés lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Finalement on obtient

$$\mathcal{W}(\gamma + \varepsilon\delta) = \mathcal{W}(\gamma) + \varepsilon \int_0^\ell (2\gamma''(s) \cdot \delta''(s) - 3|\gamma''(s)|^2 \gamma'(s) \cdot \delta'(s)) ds + O(\varepsilon^2).$$

□

En utilisant des intégrations par partie on peut écrire la variation première au sens des distributions : $\forall \delta \in C^\infty([0, L], \mathbb{R})$,

$$d\mathcal{W}(\gamma) \cdot \delta = \int_0^\ell (2\gamma'' \cdot \delta'' - 3(\gamma' \cdot \delta')|\gamma''|^2) ds = \int_0^\ell \left(2\gamma^{[4]} + 3(|\gamma''|^2 \gamma')' \right) \cdot \delta ds.$$

5.2. Perturbations admissibles

Il faut maintenant réussir à jouer sur les perturbations afin de pouvoir utiliser la minimalité de γ dans la classe des courbes admissibles. Le but de cette partie est de montrer la proposition suivante

Proposition 5.29. *Soit γ une courbe minimale (paramétrée par longueur d'arc), alors*

$$d\mathcal{W}(\gamma) : \delta \mapsto \int_0^\ell \left(2\gamma^{[4]} + 3(|\gamma''|^2 \gamma')' \right) \cdot \delta ds.$$

est une mesure.

Par le Théorème de représentation de Riesz, il suffit de montrer que $d\mathcal{W}(\gamma)$ est continue par rapport à la norme infinie sur $C(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$.

Définition 5.30 (Perturbation admissible). *Étant données une courbe minimale $\gamma \in \mathcal{A}$ et une perturbation $\delta \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, on dit que δ est une perturbation admissible si $\gamma + \varepsilon\delta \in \mathcal{A}$ dès que $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit.*

Les contraintes sur l'ensemble des courbes admissibles sont de deux types : les auto-contacts tangents et les contacts avec le confinement $\partial\Omega$. Concernant cette dernière contrainte, la condition pour que γ reste dans Ω sous l'effet de la perturbation est simplement que en tout point t tel que $\gamma(t) \in \partial\Omega$, $\delta(t)$ doit pointer vers l'intérieur de Ω . Pour les contraintes d'auto-contacts tangents, il est nécessaire que la perturbation n'induisse pas d'auto-croisement sur γ . Cette condition n'est pas évidente à écrire surtout sans connaître l'entrelacement des arcs qui composent la courbe.

Cependant on peut simplifier le problème avec l'argument suivant. En utilisant le théorème de forme (Théorème 5.24), on peut voir que si une courbe minimale a plus de deux couples d'auto-contacts alors elle se décompose en deux gouttes $\gamma|_{[t,s]}$ et $\gamma|_{[\tau,\sigma]}$ qui sont des courbes fermées simples (avec un point de rebroussement) et deux arcs $\gamma|_{[s,\tau]}$ et $\gamma|_{[\sigma,t]}$ simples mais entremêlés et qui ont la même énergie. Soit δ une perturbation sur l'un des arcs (disons $\gamma|_{[s,\tau]}$ pour simplifier) qui s'annule de manière lisse aux extrémités (de sorte à l'étendre par 0 ailleurs). Comme l'arc ne touche pas les deux gouttes (sauf aux extrémités) alors la perturbation $\gamma + \varepsilon\delta$ ne traverse pas les gouttes pour ε assez petit. Si

$$\mathcal{W}(\gamma|_{[s,\tau]} + \varepsilon\delta) < \mathcal{W}(\gamma|_{[s,\tau]})$$

alors on considère $\tilde{\gamma}$

- en parcourant γ de t à s (première goutte) ;
- en parcourant $\gamma + \varepsilon\delta$ de s à τ (premier arc perturbé) ;
- en parcourant γ de τ à σ (deuxième goutte) ;
- en en bouclant avec $\gamma|_{[s,\tau]} + \varepsilon\delta$ (premier arc perturbé parcouru en sens inverse).

Si δ est admissible pour les contacts avec $\partial\Omega$ alors $\tilde{\gamma}$ ne s'auto-traverse pas et est donc admissible. Ainsi

$$\mathcal{W}(\tilde{\gamma}) < \mathcal{W}(\gamma)$$

ce qui est impossible par minimalité de γ . Par conséquent on peut se ramener à l'étude de la condition d'auto-contact tangent uniquement au niveau des deux couples d'auto-contacts extrémaux du théorème de forme (Théorème 5.24).

Afin de montrer que $d\mathcal{W}(\gamma)$ est une mesure nous allons travailler localement le long de la courbe minimale γ (sur un intervalle $]a, b[$ de \mathbb{S}^1) et construire (dans la partie suivante) un champ de vecteurs $\nu : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lisse et nul en dehors de $]a, b[$ qui vérifie : pour toute perturbation lisse $\delta : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ à support dans $]a, b[$,

$$\delta_1 = \delta + 2\|\delta\|_\infty \nu$$

et

$$\delta_2 = \delta - 2\|\delta\|_\infty \nu$$

sont admissibles. Ainsi, par minimalité de γ , on a

$$d\mathcal{W}(\gamma).\delta_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad d\mathcal{W}(\gamma).\delta_2 \geq 0$$

ce qui nous mène à

$$|d\mathcal{W}(\gamma).\delta| \leq A\|\delta\|_\infty$$

où $A = 2|d\mathcal{W}(\gamma).\nu|$. Enfin, par densité des fonctions lisses dans les fonctions continues, $d\mathcal{W}(\gamma)$ s'étend de manière unique en une forme linéaire continue sur $C(]a, b[, \mathbb{R}^2)$, il s'agit donc d'une mesure sur $]a, b[$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Comme \mathbb{S}^1 est compact, on peut le recouvrir avec un nombre fini d'ouverts dans lesquels la construction de ν sera valable et ainsi $d\mathcal{W}(\gamma)$ est bien une mesure sur $[0, \ell]$ (périodique) qu'on peut identifier avec \mathbb{S}^1 .

5.3. Construction du champ de vecteurs ν

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{S}^1 et $\delta \in C_c^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$ une perturbation locale. On dit que δ est localement admissible si on peut l'étendre de manière lisse à \mathbb{S}^1 par 0 tel que $\gamma + \varepsilon\delta$ soit admissible pour ε assez petit.

D'un côté, supposons que $\partial\Omega$ touche l'arc $\gamma_{]a, b[}$ il suffit alors de trouver un vecteur unitaire \vec{j} pointant localement vers l'intérieur de Ω (voir Figure 5.11). Dans ce cas, δ sera localement admissible si pour tout $u \in]a, b[$ tel que $\gamma(u) \in \partial\Omega$ on a

$$\delta(u) \cdot \vec{j} \geq 0.$$

Il faut encore adapter \vec{j} en un champ de vecteurs défini sur $[a, b]$ et s'annulant au bord de manière lisse.

D'un autre côté, si un autre arc $\gamma_{]c, d[}$ vient toucher $\gamma_{]a, b[}$ sans le croiser autour d'un couple extrémal alors il suffit de trouver un vecteur unitaire \vec{j} pointant d'un arc vers l'autre afin d'avoir une direction pour séparer les arcs (voir Figure 5.11). δ sera localement admissible si pour tout couple d'auto contact (t, s) avec $t \in]a, b[$ et $s \in]c, d[$ on a

$$\delta(s) \cdot \vec{j} \geq \delta(t) \cdot \vec{j}.$$

Là encore nous devons adapter \vec{j} en un champ de vecteurs défini sur $[a, b]$ et sur $[c, d]$ s'annulant aux extrémités.

Si les deux types de contact se produisent, on a alors suffisamment de liberté sur \vec{j} pour satisfaire les deux conditions précédentes (voir Figure 5.11).

5.3.1. En dehors des couples d'auto-contacts extrémaux

On suppose que $[a, b]$ ne contient pas d'élément des couples d'auto-contacts extrémaux. Si $\gamma_{]a, b[}$ ne touche pas $\partial\Omega$ alors n'importe quelle perturbation locale est localement admissible et on peut prendre $\nu = 0$ sur $]a, b[$. En particulier on obtient que pour tout $\delta \in C_c^\infty(]a, b[, \mathbb{R}^2)$,

$$d\mathcal{W}(\gamma).\delta = 0.$$

Sinon $\gamma_{]a, b[}$ touche $\partial\Omega$. Quitte à réduire $]a, b[$ on suppose qu'on peut écrire $\partial\Omega$ comme le graphe d'une fonction Γ définie sur $[0, 1]$ et qu'il existe \tilde{a} et \tilde{b} tel que

- $]a, b[\subset]\tilde{a}, \tilde{b}[$;
- $\gamma_{]a, b[}$ est le graphe d'une fonction sur $[0, 1]$;
- $\Gamma \leq \gamma_{]a, b[}$.

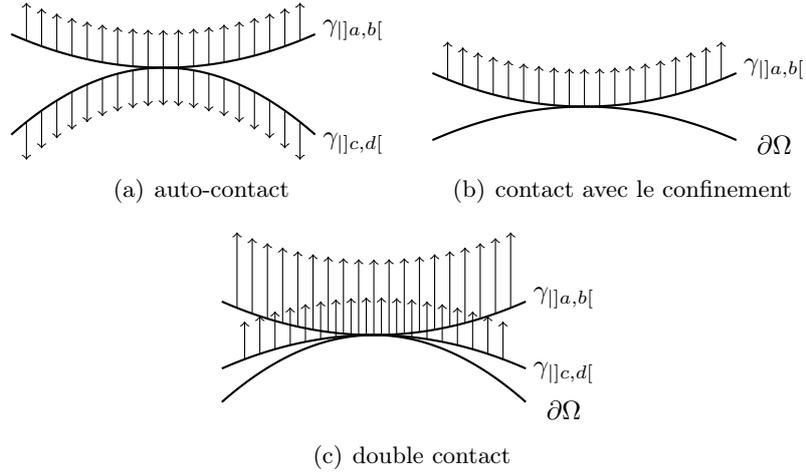


FIGURE 5.11. Directions des perturbations.

Soit $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction plateau lisse telle que $\varphi(\tilde{a}) = \varphi(\tilde{b}) = 0$, $0 < \varphi \leq 1$ sur $]\tilde{a}, \tilde{b}[$ et $\varphi = 1$ sur $[a, b]$. En notant (\vec{i}, \vec{j}) la base vectorielle du graphe, on définit le champ de vecteurs ν sur $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ par la relation

$$\nu(t) = \varphi(t)\vec{j}.$$

Ce champ de vecteurs éloigne γ de $\partial\Omega$ et

$$\forall t \in [a, b], \nu(t) \cdot \vec{j} = 1.$$

Ainsi, pour toute perturbation locale $\delta \in C_c^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$, les champs de vecteurs

$$\delta_1 = \delta + 2\|\delta\|_\infty \nu$$

et

$$\delta_2 = -\delta + 2\|\delta\|_\infty \nu.$$

satisfont $\delta_1(t) \cdot \vec{j} > 0$ et $\delta_2(t) \cdot \vec{j} > 0$ pour $t \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ et $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ailleurs. Ainsi δ_1 et δ_2 sont bien localement admissibles.

5.3.2. Autour des couples d'auto-contacts extrémaux

On suppose maintenant que $]a, b[$ contient un des éléments d'un couple d'auto-contact extrémal et on note $\gamma_{]c,d[}$ l'arc contenant l'autre élément du couple.

♣ *Cas 1* : sans contact avec $\partial\Omega$.

Si $\partial\Omega$ n'a pas de contact avec l'arc au niveau du couple extrémal alors quitte à réduire $]a, b[$ et $]c, d[$, on peut supposer qu'il existe $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ et \tilde{d} tels que

- $]a, b[\subset]\tilde{a}, \tilde{b}[$ et $]c, d[\subset]\tilde{c}, \tilde{d}[$;
- $\gamma_{]a,b[}$ et $\gamma_{]c,d[}$ peuvent s'écrire chacun comme le graphe d'une fonction définie sur $[-1, 1]$;
- $\gamma_{]c,d[} \leq \gamma_{]a,b[}$;
- il existe $0 < \eta < 1/2$ tel que les applications affines (bijectives) $x : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [-1, 1]$ et $y : [\tilde{c}, \tilde{d}] \rightarrow [-1, 1]$ (servant au changement d'échelle entre les paramètres des arcs et l'abscisse des graphes) vérifie

$$x(a) = y(d) = -1 + \eta \quad \text{et} \quad x(b) = y(c) = 1 - \eta.$$

Pour le troisième item, on a supposé que les deux branches ne s'entremêlent pas c'est-à-dire que $\gamma_{]c,d[}$ reste en dessous de $\gamma_{]a,b[}$. C'est possible d'avoir cette propriété en considérant

le max et le min entre les deux fonctions³. Pour le quatrième item, les deux arcs sont parcourus dans des sens opposés (voir Proposition 5.17), on a donc supposé que x est croissante et y est décroissante.

Comme précédemment on considère une fonction plateau $\psi : [\tilde{c}, \tilde{d}] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\psi(\tilde{c}) = \psi(\tilde{d}) = 0$ et qu'il existe c' et d' satisfaisant $y(d') = -1 + \eta/2$, $y(c') = 1 - \eta/2$ et

$$0 < \psi < 1 \text{ sur }]\tilde{c}, c'[\text{ et sur }]d', \tilde{d}[\quad \text{et} \quad \psi = 1 \text{ sur }]c', d'[:$$

On définit ensuite pour $u \in [\tilde{c}, \tilde{d}]$:

$$\nu(u) = \psi(y(u))\vec{j}$$

où \vec{j} est le deuxième vecteur de la base des graphes.

Ainsi pour toute perturbation $\delta \in C_c^\infty([a, b], \mathbb{R})$ on reprend

$$\delta_1 = \delta + 2\|\delta\|_\infty \nu$$

et

$$\delta_2 = -\delta + 2\|\delta\|_\infty \nu.$$

Un calcul simple montre que pour tout couple d'auto-contact (t, s) avec $t \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ et $s \in]\tilde{c}, \tilde{d}[$:

$$\delta_1(s) \cdot \vec{j} > \delta_1(t) \cdot \vec{j} \quad \text{et} \quad \delta_2(s) \cdot \vec{j} > \delta_2(t) \cdot \vec{j}.$$

De plus $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ailleurs. Par conséquent δ_1 et δ_2 sont localement admissibles.

♣ *Cas 2* : contact avec $\partial\Omega$.

Le dernier cas à regarder est celui où $\partial\Omega$ touche les deux arcs au moment de leur auto-contact. De manière analogue, quitte à réduire $]a, b[$ et $]c, d[$, on suppose qu'on peut écrire $\partial\Omega$ comme le graphe d'une fonction Γ au dessus de $[-1, 1]$ et qu'il existe \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{c} et \tilde{d} tels que :

- $]a, b[\subset]\tilde{a}, \tilde{b}[$ et $]c, d[\subset]\tilde{c}, \tilde{d}[$;
- $\gamma_{]a, b[}$ et $\gamma_{]c, d[}$ peuvent s'écrire comme des graphes au dessus de $[-1, 1]$;
- $\Gamma \leq \gamma_{]a, b[}$ et $\Gamma \leq \gamma_{]c, d[}$;
- il existe $0 < \eta < 1/2$ tel que les applications affines (bijectives) $x : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [-1, 1]$ et $y : [\tilde{c}, \tilde{d}] \rightarrow [-1, 1]$ satisfont

$$x(a) = y(d) = -1 + \eta \quad \text{et} \quad x(b) = y(c) = 1 - \eta.$$

Comme précédemment, les arcs ne sont pas entremêlés et x est croissante et y est décroissante.

Pour simplifier on suppose que $\gamma_{]a, b[}$ est piégée entre les deux autres fonctions c'est-à-dire qu'au niveau des graphes $\Gamma \leq \gamma_{]a, b[} \leq \gamma_{]c, d[}$. Cette fois-ci on considère deux fonctions plateaux $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : [\tilde{c}, \tilde{d}] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

- $\varphi(\tilde{a}) = \psi(\tilde{c}) = \varphi(\tilde{b}) = \psi(\tilde{d}) = 0$;
- en notant a' et b' les paramètres tels que $x(a') = -1 + \eta/2$ et $x(b') = 1 - \eta/2$, on a $\varphi = 0$ sur $]a', a'[$ et sur $]b', \tilde{b}[$, $0 < \varphi < 1$ sur $]a', a'[$ et sur $]b', b'[$ et $\varphi = 1$ sur $[a, b]$;
- en notant c' et d' les paramètres tels que $y(d') = -1 + \eta/2$ et $y(c') = 1 - \eta/2$, on a $0 < \psi < 1$ sur $]c', c'[$ et sur $]d', \tilde{d}[$ et $\psi = 1$ sur $]c', d'[:$

On définit finalement ν par

$$\forall u \in [\tilde{a}, \tilde{b}], \quad \nu(u) = \varphi(x(u))\vec{j}$$

et

$$\forall u \in [\tilde{c}, \tilde{d}], \quad \nu(u) = \psi(y(u))\vec{j}$$

où comme toujours \vec{j} est le deuxième vecteur de la base des graphes (voir Figure 5.12).

3. Ça a déjà été fait dans la démonstration du lemme de reparamétrage (Lemme 5.25) sauf qu'ici on n'a pas besoin du caractère global du paramétrage qui est un aspect important du lemme.

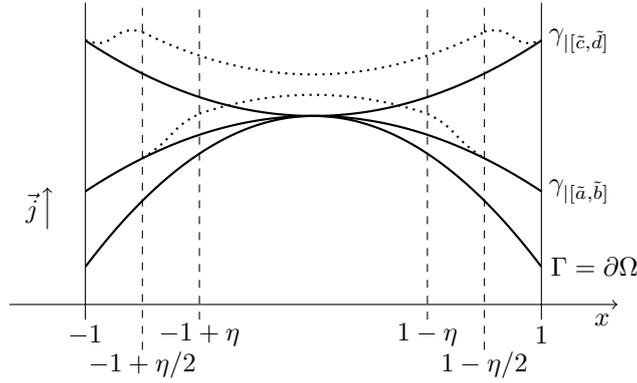


FIGURE 5.12. Perturbation induite par ν (en pointé).

Ainsi, pour toute perturbation locale $\delta \in C_c^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$ on définit

$$\delta_1 = \delta + 2\|\delta\|_\infty \nu$$

et

$$\delta_2 = -\delta + 2\|\delta\|_\infty \nu.$$

Un calcul simple montre que pour tout couple d'auto-contact (t, s) avec $t \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ et $s \in]\tilde{c}, \tilde{d}[$:

$$\delta_1(s) \cdot \vec{j} > \delta_1(t) \cdot \vec{j} > 0 \quad \text{et} \quad \delta_2(s) \cdot \vec{j} > \delta_2(t) \cdot \vec{j} > 0.$$

de plus $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ailleurs. Par conséquent δ_1 et δ_2 sont localement admissibles.

Si c'est $\gamma_{|[c, d[}$ qui est piégée alors la construction est la même en échangeant les rôles de φ et de ψ . φ repousse $\gamma_{|[a, b[}$ plus loin de $\partial\Omega$ que ψ ne repousse $\gamma_{|[c, d[}$ de $\partial\Omega$. La construction est la même.

5.4. L'argument d'auto-amorce

En conséquence des deux parties précédentes, dès que γ est minimale, $d\mathcal{W}(\gamma) = 2\gamma^{[4]} + 3(|\gamma''|^2 \gamma)'$ est une mesure sur \mathbb{S}^1 . Cette information est le point de départ des arguments suivants pour gagner en régularité. On rappelle la règle de Leibniz sur les dérivées qui est valable dans un contexte de dérivée faible.

Lemme 5.31. *Si $u, v \in BV([a, b], \mathbb{R})$ alors uv est une fonction à variation bornée et, au choix d'un représentant convenable, on a*

$$(uv)' = u'v + uv'$$

au sens des distributions.

Ce lemme est prouvé dans [5, ex 3.97], le suivant est prouvé dans [62, 4.2.2 - Théorème 4]

Lemme 5.32. *Soit $p \in [1, +\infty]$, si $u, v \in L^\infty \cap W^{1,p}([a, b], \mathbb{R})$ alors uv est une fonction de $W^{1,p}$ et*

$$(uv)' = u'v + uv'$$

au sens des distributions.

En appliquant ces deux lemmes aux composantes de fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^2 , on peut démontrer le corollaire suivant.

Corollaire 5.33. Si $u, v \in BV(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ et $\lambda \in BV(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ alors $u \cdot v$ et λu sont dans $BV(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$. De plus, si $u, v \in W^{1,\infty}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ alors $(uv)' \in L^\infty$. Dans les deux cas, la règle de Leibniz est valide.

On est maintenant capable d'énoncer et de démontrer le résultat de régularité de ce chapitre.

Théorème 5.34. Soit γ une courbe minimale, on a

$$\gamma \in W^{3,\infty}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}), \quad \gamma^{[3]} \in BV(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \kappa' \in BV(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}).$$

De plus, γ est lisse sur tout intervalle ouvert de \mathbb{S}^1 dans lequel il n'y a pas de contact (aussi bien auto-contact que contact avec $\partial\Omega$).

Preuve.

Comme $d\mathcal{W}(\gamma) = 2\gamma^{[4]} + 3(|\gamma''|^2\gamma)'$ est une mesure, on a

$$2\gamma^{[3]} + 3|\gamma''|^2\gamma' \text{ appartient à } BV.$$

D'un côté, l'espace source est le compact \mathbb{S}^1 , $|\gamma''|^2 \in L^1$ et γ' est continue donc $|\gamma''|^2\gamma'$ appartient à L^1 . D'un autre côté, en dimension 1, $BV \hookrightarrow L^\infty$ et, comme \mathbb{S}^1 est de mesure fini, $L^\infty \hookrightarrow L^1$. Ainsi

$$\gamma^{[3]} \in L^1.$$

Par conséquent $\gamma \in W^{3,1}$ et donc $\gamma'' \in W^{1,1}$. Cependant $W^{1,1} \hookrightarrow BV \hookrightarrow L^\infty$ donc $|\gamma''|^2\gamma' \in L^\infty$ et on a

$$\gamma^{[3]} \in L^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}).$$

En utilisant le corollaire précédent, $\gamma'' \in BV$ et $\gamma' \in W^{2,\infty} \hookrightarrow BV$ donc la fonction $(\gamma'' \cdot \gamma'')\gamma'$ appartient à BV . Ainsi on a

$$\gamma^{[3]} \in BV(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}).$$

Pour en arriver à κ on utilise le paramétrage par longueur d'arc pour écrire

$$\kappa = \gamma'' \cdot (\gamma')^\perp$$

où \perp est la rotation d'angle $+\pi/2$. Comme $\gamma'' \in W^{1,\infty}$ et $(\gamma')^\perp \in W^{2,\infty} \hookrightarrow W^{1,\infty}$ alors le corollaire précédent nous donne

$$\kappa' = \gamma^{[3]} \cdot (\gamma')^\perp + \underbrace{\gamma'' \cdot (\gamma'')^\perp}_{=0}.$$

Finalement, comme $\gamma^{[3]}$ et $(\gamma')^\perp$ sont dans BV on obtient

$$\kappa' \in BV.$$

Concernant le dernier point, il suffit de se souvenir que lorsque γ n'a pas de contact, on a mieux que $d\mathcal{W}(\gamma)$ est une mesure :

$$2\gamma^{[4]} + 3(|\gamma''|^2\gamma') = 0.$$

Cela signifie

$$2\gamma^{[3]} = \text{cst} - 3|\gamma''|^2\gamma'.$$

Comme $\gamma \in W^{3,\infty} \hookrightarrow C^{2,\alpha}$ alors $|\gamma''|^2\gamma'$ est continue et donc $\gamma^{[3]}$ est aussi continue, ainsi $\gamma \in C^3$. Cependant dans ce cas $|\gamma''|^2\gamma' \in C^1$ donc $\gamma^{[3]} \in C^1$ et γ est en fait de classe C^4 . En répétant cet argument de manière récursive, on obtient $\gamma \in C^\infty$. \square

Remarque 5.35. Sur les arcs où γ est lisse et sans contact on peut utiliser le repère mobile de Serret Frenet (τ, n) accroché à γ . La courbure κ s'obtient en dérivant ce système :

$$\begin{aligned}\tau' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa \tau \\ \gamma' &= \tau \\ \gamma'' &= \kappa n \\ \gamma^{[3]} &= \kappa' n - \kappa^2 \tau \\ \gamma^{[4]} &= (\kappa'' - \kappa^3)n - 3\kappa'' \kappa \tau.\end{aligned}$$

En injectant ces expressions dans l'équation d'Euler-Lagrange

$$2\gamma^{[4]} + 3(|\gamma''|^2 \gamma')' = (2\kappa'' + \kappa^3)n = 0$$

on retombe bien sur l'équation d'Euler-Lagrange bien connue sur la courbure :

$$2\kappa'' + \kappa^3 = 0.$$

6. Confinement convexe

Dans cette partie, le confinement Ω est convexe. Il est naturel de se demander si les courbes minimisantes sont convexes c'est-à-dire si elles entourent un ensemble convexe. La réponse est oui et l'argument est très simple. Considérons une courbe minimale du problème (9). Si cette courbe n'est pas convexe alors on peut poser une droite de manière tangente sur γ en au moins deux points pour "comblé" une partie non convexe de γ . En remplaçant la partie non convexe de γ par un segment issu de la droite, on diminue strictement l'énergie $\mathcal{W}(\gamma)$ ce qui contredit la minimalité de γ . Donc γ est convexe.

Cependant, attraper d'un point de vue technique une "droite comblant une partie non convexe" de γ est un problème non local et assez difficile. La preuve proposée se base sur cette idée de droite d'appui mais sa technicité rend les arguments moins visibles.

Définition 5.36 (Droite d'appui). *Soit A un ensemble de \mathbb{R}^2 . On dit que A admet une droite d'appui en $x \in \partial A$ s'il existe une forme linéaire Λ et un réel λ tels que*

$$x \in D = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \Lambda(y) = \lambda\}$$

et

$$A \subset \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \Lambda(y) \geq \lambda\}.$$

D'un point de vue géométrique, D est une droite d'appui de A si elle touche le bord de A et si A est d'un seul côté de D . Nous allons utiliser la caractérisation suivante des convexes.

Proposition 5.37 ([72, Théorème 2.7 (iii)]). *Soit A un ensemble fermé d'intérieur non vide. A est convexe si et seulement si en tout point de son bord passe une droite d'appui.*

Dans notre cas, A sera l'ensemble (fermé) entouré par γ , une courbe minimale. Comme γ est régulière, une droite d'appui est une droite tangente :

$$D_t = \gamma(t) + \mathbb{R}\gamma'(t)$$

Pour montrer que γ est convexe, nous allons utiliser le Lemme 5.25 ainsi que les trois suivants.

Lemme 5.38. *Pour tout droite Δ de \mathbb{R}^2 , il existe au moins deux droites d'appui de (γ) parallèles à Δ .*

Ce lemme, dont la preuve nécessite uniquement le caractère borné de (γ) , montre qu'il existe énormément de droite d'appui.

Preuve.

Quitte à utiliser une rotation et une translation, on peut supposer que Δ est l'axe horizontal $D : y = 0$. Comme (γ) est borné, il existe deux droites $\Delta_a : y = a$ et $\Delta_b : y = b$ (avec $b < 0 < a$) parallèles à Δ telles que γ appartienne à la bande $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid a \leq y \leq b\}$. Parmi ces couples de droites, on regarde celles qui sont les plus proche de (γ) :

$$a^+ = \inf\{a > 0 \mid (\gamma) \text{ est en dessous de la droite } \Delta_a : y = a\}$$

et

$$b^- = \sup\{b < 0 \mid (\gamma) \text{ est au dessus de la droite } \Delta_b : y = b\}.$$

Ainsi $\Delta^+ : y = a^+$ et $\Delta^- : y = b^-$ sont des droites d'appui de (γ) distinctes et parallèles à Δ . \square

Lemme 5.39.

$$I = \{t \in \mathbb{S}^1 \mid D_t \text{ est une droite d'appui de } (\gamma)\}$$

est fermé dans \mathbb{S}^1 .

La preuve de ce lemme utilise uniquement le coté C^1 de γ

Preuve.

Soit $t \in \mathbb{S}^1 \setminus I$, D_t n'est pas une droite d'appui donc il existe deux paramètres distincts s_1 et s_2 de \mathbb{S}^1 tels que $\gamma(s_1)$ et $\gamma(s_2)$ sont de part et d'autre de D_t strictement. En particulier s_1 et s_2 sont différents de t . $t \mapsto D_t$ est continue (car γ est de classe C^1) donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $D_{t+\eta}$ sépare strictement $\gamma(s_1)$ et $\gamma(s_2)$. Ainsi $D_{t+\eta}$ n'est pas une droite d'appui ce qui signifie que $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\subset \mathbb{S}^1 \setminus I$. $\mathbb{S}^1 \setminus I$ est donc ouvert c'est-à-dire I est fermé. \square

Lemme 5.40. Pour tout t tel que D_t est une droite d'appui,

$$I_t = \{s \in \mathbb{S}^1 \mid \gamma(s) \in D_t\}$$

est un segment de \mathbb{S}^1 .

La preuve de ce lemme utilise de manière cruciale la minimalité de γ .

Preuve.

Comme γ est continue et D_t est fermée, I_t est fermé donc il suffit de montrer qu'il est connexe. Considérons t tel que I_t ne soit pas connexe mais que D_t soit une droite d'appui. Il existe $s \in I_t$ tel que γ ne longe pas le segment (de \mathbb{R}^2) $[\gamma(t), \gamma(s)]$ sur toute sa longueur. Comme D_t est une droite d'appui, γ est tangente à D_t en tout point de I_t . Ainsi $\gamma'(t)$ et $\gamma'(s)$ appartiennent à \vec{D}_t , la droite vectorielle dirigée par D_t .

Si $\gamma'(t) = \gamma'(s)$, quitte à échanger $\gamma(t)$ et $\gamma(s)$ on peut supposer que $\overrightarrow{\gamma(t)\gamma(s)} \cdot \gamma'(t) > 0$ (voir Figure 5.13), considérons ainsi $\tilde{\gamma}$:

- en parcourant D_t de $\gamma(t)$ à $\gamma(s)$;
- en parcourant γ de s à t dans le sens positif (de \mathbb{S}^1).

Comme tous les contacts entre (γ) et D_t sont tangents, les raccords de $\tilde{\gamma}$ sont bien C^1 . De plus, comme γ ne longe pas $[\gamma(t), \gamma(s)]$, on a

$$\mathcal{W}(D_{t|[t,s]}) = 0 < \mathcal{W}(\gamma_{[t,s]}).$$

Ceci contredit la minimalité de γ .

Si $\gamma'(t) = -\gamma'(s)$ alors une partie de γ (proche de t ou de s) entre dans le domaine délimité par $\gamma_{[t,s]}$ et D_t et une autre partie de γ sort de ce domaine. Par continuité, il existe $u_1, u_2 \in \mathbb{S}^1$ tels que $\gamma(u_1) = \gamma(u_2)$ et $t < u_1 < s < u_2$ (voir Figure 5.13). Comme précédemment, on peut supposer que $\gamma'(s) \cdot \overrightarrow{\gamma(s)\gamma(t)} > 0$. Considérons $\tilde{\gamma}$

- en parcourant γ de t à u_1 dans le sens positif;
- en sautant de u_1 à u_2 ;
- en parcourant γ de u_2 à s dans le sens négatif;
- en parcourant D_t de $\gamma(s)$ à $\gamma(t)$.

Comme précédemment, $\tilde{\gamma}$ est bien de classe C^1 et a une énergie plus basse (strictement) que γ ce qui est impossible.

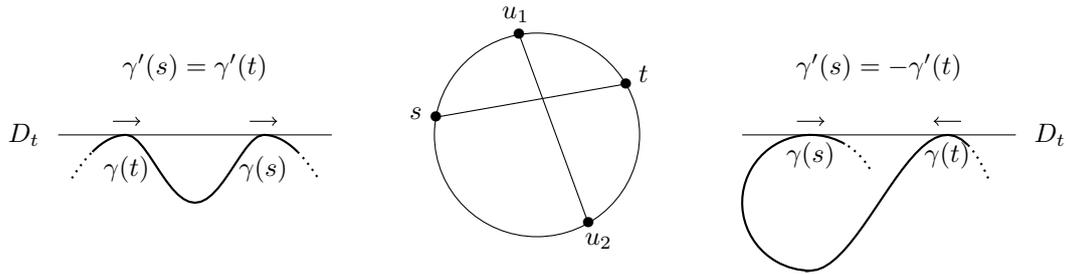


FIGURE 5.13. Deux configurations lorsque γ est tangente à D_t .

En conclusion, pour tout t tel que D_t est une droite d'appui, I_t est un segment de \mathbb{S}^1 . □

Maintenant nous pouvons prouver le résultat de cette partie.

Théorème 5.41. *Si Ω est convexe alors toute courbe minimale encercle un ensemble convexe.*

Preuve.

On rappelle

$$D_t = \gamma(t) + \mathbb{R}\gamma'(t)$$

et

$$I = \{t \in \mathbb{S}^1 \mid D_t \text{ est une droite d'appui de } (\gamma)\}.$$

L'idée de cette preuve est de montrer que $I = \mathbb{S}^1$, ainsi tout point de (γ) (ou tout point du bord de l'ensemble fermé bordé par (γ)) admet une droite d'appui d'où on en déduit la convexité.

I est fermé et on suppose qu'il existe $t \in \mathbb{S}^1 \setminus I$. Soit $]a, b[$ l'intervalle ouvert maximal contenant t tel que

$$]a, b[\subset \mathbb{S}^1 \setminus I.$$

Comme $\mathbb{S}^1 \setminus I$ est ouvert, la maximalité de l'intervalle $]a, b[$ implique que D_a et D_b sont des droites d'appui de (γ) .

♣ *Cas 1 : $D_a = D_b$.*

Dans ce cas, $\gamma(a) \in D_b$ (et aussi $\gamma(a) \in D_a$), en utilisant le Lemme 5.40 on obtient $\gamma_{[b,a]} \subset D_a$ ($[b, a]$ signifiant l'autre segment de \mathbb{S}^1 reliant a à b , celui différent de $]a, b[$). Ainsi, par le Lemme 5.38 il existe une droite d'appui D différente de $D_a = D_b$ mais qui lui est parallèle. en notant s un point tel que $D_s = D$, on a $s \in]a, b[$ puisque l'arc $\gamma_{[b,a]}$ est inclus dans D_a . L'existence d'un tel s est impossible par définition de $]a, b[$ (voir Figure 5.14).

♣ *Cas 2* : D_a et D_b sont distinctes et parallèles.

Dans ce cas, quitte à utiliser une rotation on peut supposer que D_a et D_b sont horizontales. (γ) est coincée entre D_a et D_b . En utilisant le Lemme 5.38, il existe deux droites d'appui verticales, une à gauche de γ et l'autre à droite. L'une de ces droites est tangente à l'arc $\gamma_{]a,b[}$. En effet, supposons que ce soit $\gamma_{]b,a]}$ qui relie les droites d'appui verticales. Dans le rectangle délimité par les droites verticales et horizontales, on a que $\gamma_{]b,a]}$ relie les cotés verticaux et $\gamma_{[a,b]}$ relie les cotés horizontaux. Comme chaque coté est un segment d'une droite d'appui, l'intersection entre (γ) et le rectangle ne se situe pas sur les sommets du rectangle. Ainsi $\gamma_{]b,a]}$ traverse $\gamma_{[a,b]}$ et c'est impossible en utilisant le paramétrage du Lemme 5.25 qui interdit les croisements. Par conséquent, l'arc $\gamma_{]a,b[}$ admet une droite d'appui ce qui est impossible avec la définition de $]a, b[$ (voir Figure 5.14).

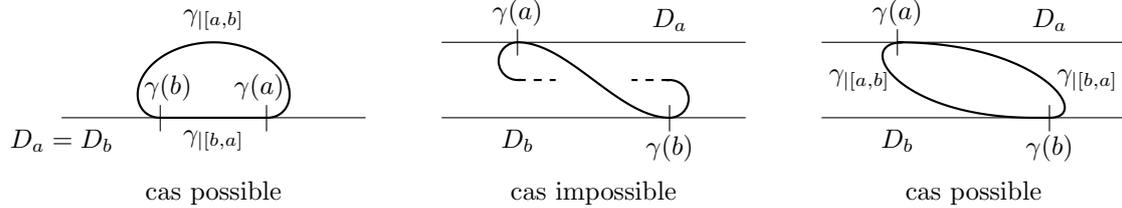


FIGURE 5.14. Configurations si D_a et D_b sont parallèles

♣ *Cas 3* : D_a et D_b ne sont pas parallèles.

Dans ce cas, on note z leur point d'intersection. Quitte à utiliser une rotation, on suppose que la droite $(\gamma(a)\gamma(b))$ est horizontale et que z se situe au dessus de cette ligne. On considère ensuite le domaine U délimité par les segments (de \mathbb{R}^2) $[z, \gamma(a)]$ et $[z, \gamma(b)]$ et par $\gamma_{]a,b]}$. En utilisant le Lemme 5.25 on peut voir que $\gamma_{]b,a]}$ est soit inclus dans U (voir Figure 5.15, cas inclus) soit en dehors de U (voir Figure 5.15, cas exclu). Pour le cas inclus, il existe une droite d'appui horizontale en dessous de (γ) . La droite tangente correspondante D_s vérifie $s \in]a, b[$ ce qui est impossible. Pour le cas exclu, l'argument est le même avec une droite d'appui au dessus de γ .

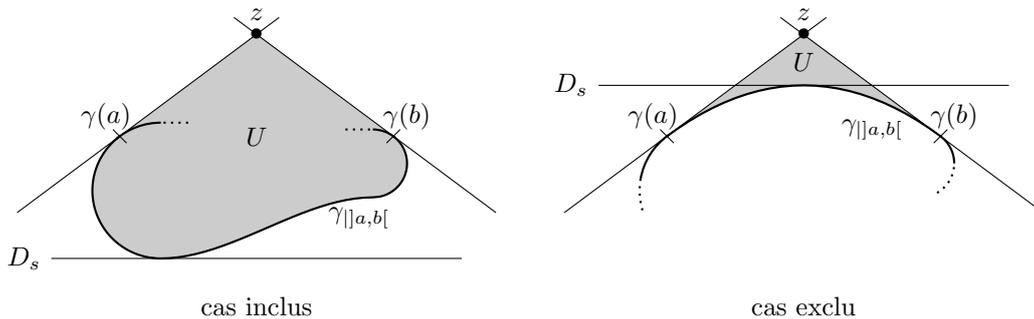


FIGURE 5.15. Configurations si D_a et D_b ne sont pas parallèles

Chaque cas renvoie à une contradiction, on en déduit que $I = \mathbb{S}^1$ c'est-à-dire que chaque tangente est une droite d'appui. En conclusion, γ encercle un ensemble convexe. \square

7. Un exemple de confinement engendrant un auto-contact

Dans cette partie on construit un confinement Ω pour lequel toute courbe minimale du problème (9) admet au moins un auto-contact. Ce confinement est un voisinage tubulaire d'une courbe fermée régulière composée de deux gouttes pointant dans des directions éloignées et reliées par un arc (voir Figure 5.16).

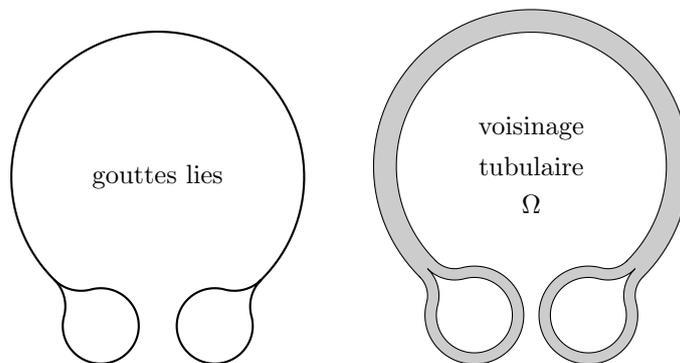


FIGURE 5.16. Construction d'un confinement ad hoc

Le résultat démontré est le suivant.

Théorème 5.42. *Soit Ω un tel confinement, alors toute courbe minimale du problème (9) admet au moins un auto-contact.*

Pour le moment, les hypothèses sur Ω ne sont pas très claires mais il n'est pas difficile de construire Ω comme sur la Figure 5.16 en utilisant des arcs de cercles. On donnera à la fin les points cruciaux que doit satisfaire Ω pour que la construction proposée reste valable.

Les arguments proposés utilisent de manière significative la non simple connexité de Ω . En particulier nous verront que, pour γ une courbe minimale, on a

$$\{z \in \mathbb{R}^2 \mid \text{ind}_\gamma(z) = 1\} \not\subset \Omega.$$

Savoir s'il existe un confinement simplement connexe forçant l'apparition d'auto-contacts est hors de portée pour le moment.

La démonstration du théorème ci-dessus est séparée en deux phases. D'abord on donne le cœur de la preuve contenant l'organisation de toutes les idées et éludant les points techniques. Ensuite on donne la construction rigoureuse de Ω et on démontre les points techniques laissés en attente dans la première phase.

7.1. Schéma général de la preuve

Un argument important de la preuve est le théorème suivant montré simultanément dans [29] et [69].

Théorème 5.43 ([29, Théorème 1.1]). *Soit γ une courbe régulière, fermée, simple, de classe C^2 et bordant un ensemble simplement connexe \mathcal{U} , on a*

$$\mathcal{W}(\gamma)^2 \text{Aire}(\mathcal{U}) \geq 4\pi^3.$$

Ce théorème montre qu'on ne peut pas écraser une courbe simple sans faire exploser son énergie de flexion \mathcal{W} . Comme les courbes minimales de notre problème ne sont pas nécessairement simples, on ne peut pas appliquer ce théorème directement cependant l'idée de la preuve est la même.

On note Γ la courbe formée par les deux gouttes et l'arc de la Figure 5.16 et ε l'épaisseur du voisinage tubulaire Ω_ε . On suppose que Γ est suffisamment régulière pour avoir $\mathcal{W}(\Gamma) < +\infty$. Ainsi on a $Aire(\Omega_\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Quel que soit ε , Γ est admissible pour Ω_ε . Soit γ_ε une courbe minimale du problème 9. On note \mathcal{U} le domaine encerclé par γ_ε , défini par exemple avec la paramétrisation du Lemme 5.25 par

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \text{ind}_{\gamma_\varepsilon}(z) = 1\}.$$

On distingue trois cas (voir Figure 5.17) :

- (1) Si γ_ε est simple et n'entoure aucune goutte alors $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$ donc $Aire(\mathcal{U}_\varepsilon) \leq Aire(\Omega_\varepsilon)$. Ainsi, en utilisant le Théorème 5.43 on a

$$\mathcal{W}(\gamma_\varepsilon)^2 \geq \frac{4\pi^3}{Aire(\Omega_\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty.$$

Donc pour ε assez petit,

$$\mathcal{W}(\gamma_\varepsilon) > \mathcal{W}(\Gamma).$$

ce qui n'est pas possible avec la minimalité de γ_ε ;

- (2) Si γ_ε entoure une seule goutte ou si γ_ε n'entoure pas de goutte et n'est pas simple alors γ_ε fait un demi tour sur une épaisseur d'au plus 2ε . Ainsi nous verrons dans la partie technique que cela signifie que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{W}(\gamma_\varepsilon) = +\infty.$$

Comme précédemment, cela empêche γ_ε d'être minimale pour ε assez petit ;

- (3) Si γ_ε entoure les deux gouttes alors on peut extraire deux arcs de γ_ε dans la partie tubulaire de Ω_ε joignant les deux gouttes : un arc intérieur et un arc extérieur (voir Figure 5.17).

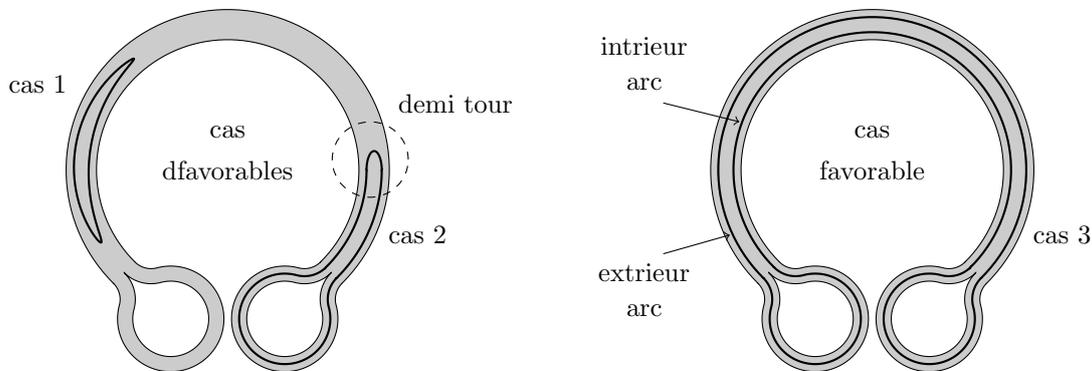


FIGURE 5.17. 3 configurations pour une courbe minimale

Dans ce cas les deux arcs parcourent une amplitude angulaire supérieure à π . Ainsi on peut trouver deux droites non parallèles (à droite et à gauche des arcs) tangentes à l'arc intérieur (voir Figure 5.18). Si γ_ε est simple alors la partie de l'arc intérieur entre les deux points de tangence avec les droites ne touche pas l'arc extérieur. Donc on peut appliquer une homothétie (de rapport strictement supérieur à 1 et de centre le point d'intersection des deux droites) à cette partie de l'arc intérieur pour qu'il vienne toucher l'arc extérieur (voir Figure 5.18). Comme les deux droites sont tangentes à la courbe, on peut raccorder de manière C^1 la partie précédemment dilatée au reste de la courbe avec des segments. Cette dilatation diminuant strictement \mathcal{W} , cette nouvelle courbe a une énergie plus basse que γ_ε ce qui est impossible. Donc γ_ε ne peut pas être simple.

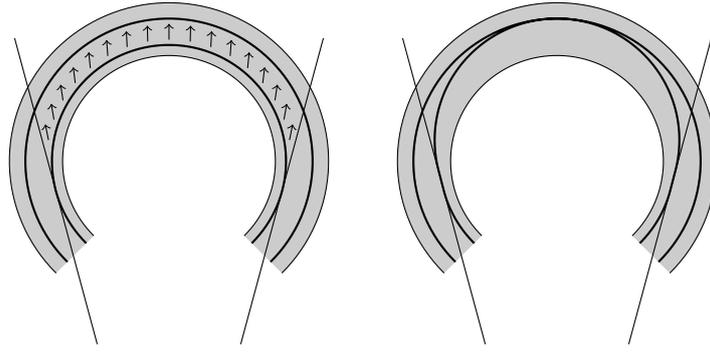


FIGURE 5.18. Dilatation d'une partie de la courbe minimale

7.2. Partie technique de la preuve

Les points techniques développés ici concernent la construction de Ω , l'estimation d'énergie d'un demi tour sur une épaisseur ε , l'utilisation de cette estimation, la définition des arcs intérieur et extérieur et l'argument de dilatation.

7.2.1. Le confinement Ω

Nous allons construire le confinement Ω et la courbe Γ à partir de cercles afin d'obtenir une courbe d'énergie finie. On peut construire une goutte en accolant trois cercles de même rayon comme sur la Figure 5.19. On ajoute un segment de longueur $l > 0$ à l'extrémité pointue de la goutte (ce segment sera utile dans la partie suivante). On place ensuite cette goutte et son image miroir de part et d'autre de l'axe des y . On rejoint ensuite l'extrémité des deux gouttes avec un arc de cercle. Quitte à tourner les gouttes, on peut supposer que la jonction soit un $3/4$ de cercle.

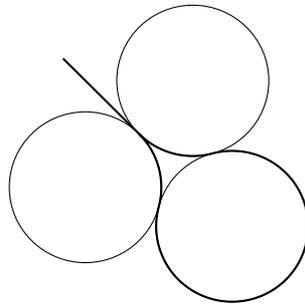


FIGURE 5.19. Une goutte faite de cercles

On note g_1 et g_2 ces gouttes et G_1 et G_2 le domaine fermé délimité par g_1 et g_2 respectivement. On note $\Gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière dont l'image est l'ensemble décrit précédemment. La courbe Γ parcourt ainsi g_1 et g_2 une fois et le $3/4$ de cercle deux fois. Soit n le champ de vecteurs normal à Γ pointant à l'extérieur de G_1 et G_2 lorsque Γ parcourt g_1 et g_2 . On définit ainsi le voisinage tubulaire d'épaisseur ε de Γ :

$$T_\varepsilon = \{\Gamma(s) + \lambda n(s) \mid s \in \mathbb{S}^1, \lambda \in [0, \varepsilon]\}.$$

Le confinement ouvert et alors donné par

$$\Omega_\varepsilon = T_\varepsilon \setminus (g_1 \cup g_2).$$

Notons que ce domaine n'est pas à bord lipschitzien, cependant dans tout le chapitre on n'a pas besoin d'avoir autant de régularité. L'aspect important est qu'en chaque point de $\partial\Omega$ on peut éloigner une courbe du bord ce qui est le cas pour Ω_ε .

7.2.2. Un demi tour dans un tube fin.

Soit $\Gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière, de classe C^2 , simple et non fermée. On note $n(s)$ le vecteur unitaire normal à Γ en $\Gamma(s)$ tel que $(\gamma'(s), n(s))$ soit une base directe. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $s \in [0, \ell]$ l'intersection des deux boules (ouvertes) tangentes

$$B(\Gamma(s) + Rn(s), R) \quad \text{et} \quad B(\Gamma(s) - Rn(s), R)$$

avec Γ est vide. Cette condition signifie que la courbe Γ n'est pas trop courbée pour permettre à une petite boule de "rouler" le long de Γ . On considère comme précédemment le voisinage tubulaire d'épaisseur $\varepsilon > 0$:

$$\mathcal{T}_\varepsilon = \{\Gamma(s) + \lambda n(s) \mid s \in [0, \ell], \quad |\lambda| < \varepsilon\}$$

on définit aussi la famille de segments normaux

$$N_s = \{\Gamma(s) + \lambda n(s) \mid |\lambda| < \varepsilon\}.$$

Soit $0 < l < \ell$ $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière de $W^{2,2}$ telle que (voir Figure 5.20)

- $(\gamma) \subset \mathcal{T}_\varepsilon$;
- $\gamma(0) \in \{\Gamma(0) + \lambda n(0) \mid 0 < \lambda < \varepsilon\}$;
- $\gamma(1) \in \{\Gamma(0) - \lambda n(0) \mid 0 < \lambda < \varepsilon\}$;
- $(\gamma) \cap \Gamma_{[0, l]} = \emptyset$.

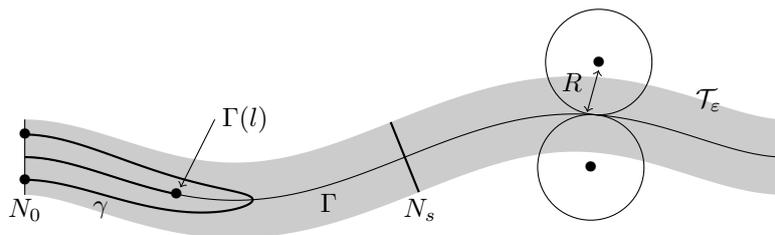


FIGURE 5.20. Un demi tour dans un tube fin

L'intérêt du réel l est d'obliger γ à faire son demi tour loin de l'entrée du tube. Comme γ est confinée dans le tube fin \mathcal{T}_ε et commence et termine sur N_0 alors il existe s^* tel que γ fasse demi tour au niveau de $\Gamma(s^*)$, ce paramètre est défini par

$$s^* = \inf\{s \in [0, \ell] \mid (\gamma) \cap N_s = \emptyset\}.$$

Si γ atteint N_ℓ alors le confinement impose que γ soit tangente à N_ℓ , on a aussi $s^* = \ell$. Sinon $l < s^* < \ell$ et la condition de borne inférieure impose aussi que γ soit tangente à N_{s^*} . Dans les deux cas on a que γ reste d'un seul coté du tube \mathcal{T}_ε par rapport à N_{s^*} :

$$(\gamma) \subset \{\Gamma(s) + \lambda n(s) \mid s \in [0, s^*], \quad |\lambda| < \varepsilon\}.$$

On note $t^* \in [0, 1]$ un paramètre tel que $\gamma(t^*) \in N_{s^*}$. s^* et t^* sont bien définis par compacité de $[0, \ell]$ et de $[0, 1]$ et par la continuité de γ et de Γ (voir Figure 5.21).

On considère (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère et des coordonnées (x, y) tels que

- $O = \Gamma(s^*)$;
- \vec{i} est parallèle à $\Gamma'(s^*)$;
- \vec{j} est parallèle à N_{s^*} et $\gamma'(t^*)$;
- γ appartient au demi espace $\{x \geq 0\}$ (localement près de $\gamma(t^*)$).

Toutes les constructions géométriques suivantes seront faites dans ce système de coordonnées. Soit

- C^+ le cercle centré en $(0, R)$ et de rayon R ;
- C^- le cercle centré en $(0, -R)$ et de rayon R ;
- C_ε^+ le cercle centré en $(0, R)$ et de rayon $R - \varepsilon$;

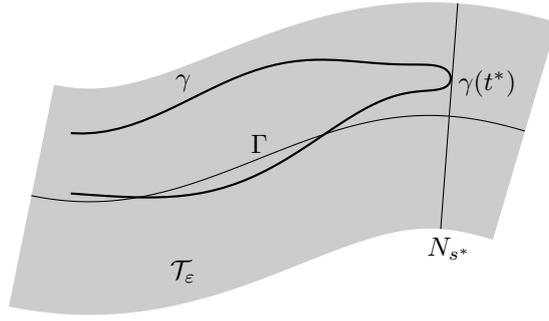


FIGURE 5.21. Localisation du demi tour - 1^{er} cas.

– C_ε^- le cercle centré en $(0, -R)$ et de rayon $R - \varepsilon$.

On se reporte à la Figure 5.22 pour illustrer les constructions. Comme γ ne croise ni C^+ ni C^- , \mathcal{T}_ε aussi ne croise ni C_ε^+ ni C_ε^- . Soit D_ε la droite d'équation $x = -\sqrt{\varepsilon}$. pour ε assez petit (c'est-à-dire $\sqrt{\varepsilon} < R - \varepsilon$), D_ε croise deux fois C_ε^+ et C_ε^- chacun. On note A_ε^+ le point d'intersection entre D_ε et C_ε^+ qui a l'ordonnée la plus basse et A_ε^- le point d'intersection entre D_ε et C_ε^- qui a l'ordonnée la plus haute. Par le Théorème de Pythagore, on calcule

$$A_\varepsilon^+ = (-\sqrt{\varepsilon}, R - \sqrt{(R - \varepsilon)^2 + \varepsilon}) \quad \text{et} \quad A_\varepsilon^- = (-\sqrt{\varepsilon}, -R + \sqrt{(R - \varepsilon)^2 + \varepsilon}).$$

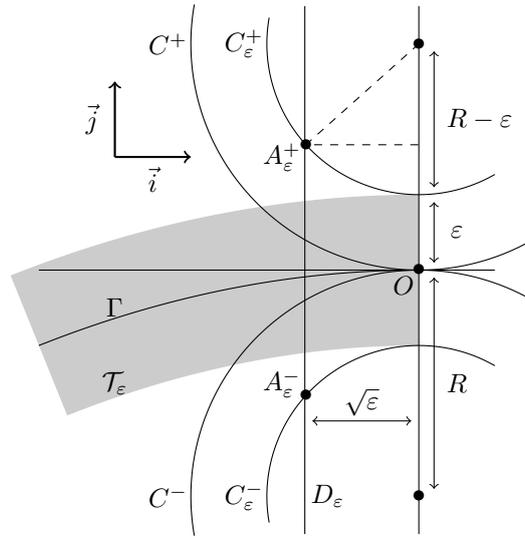


FIGURE 5.22. Construction géométrique

Soit $B = (0, b)$ le point $\gamma(t^*)$, $B' = (-\sqrt{\varepsilon}, b)$ sa projections orthogonale sur D_ε et α l'angle (non orienté) entre $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{BA_\varepsilon^+}$ (voir Figure 5.23).

Pour ε assez petit (tel que $D_\varepsilon \cap \Gamma \in \Gamma_{[l/2, \ell]}$), D_ε croise le tube \mathcal{T}_ε et $D_\varepsilon \cap \mathcal{T}_\varepsilon \subset [A_\varepsilon^+, A_\varepsilon^-]$. Donc γ coupe le segment $[A_\varepsilon^+, A_\varepsilon^-]$ au moins deux fois. De plus, γ a une tangente verticale (dans le système de coordonnées) et t^* (au point B sur la Figure 5.23) ainsi γ croise $[B, A_\varepsilon^+]$ en un point nommé $\gamma(t_0)$ (voir Figure 5.23). Quitte à renverser le sens de parcours de γ on peut supposer que $t^* < t_0$ et que $\gamma'(t^*)$ est positivement colinéaire à \vec{j} . On note $\theta(t)$ l'angle (orienté) entre $\gamma'(t)$ et \vec{i} pris dans $[0, 2\pi[$. On a ainsi $\theta(t^*) = \pi/2$ et, comme γ croise $[B, A_\varepsilon^+]$,

$$\pi - \alpha \leq \theta(t_0) \leq 2\pi - \alpha.$$

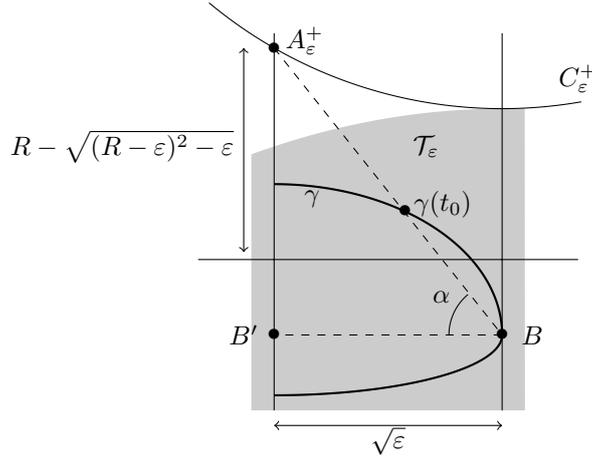


FIGURE 5.23. Un morceau du demi tour

Par conséquent

$$\theta(t_0) - \theta(t^*) \geq \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Cependant

$$\tan \alpha = \frac{\|\overrightarrow{B'A_\epsilon^+}\|}{\|\overrightarrow{B'B}\|} \leq \frac{\|\overrightarrow{A_\epsilon^+A_\epsilon^-}\|}{\sqrt{\epsilon}} = 2 \frac{R - \sqrt{(R-\epsilon)^2 - \epsilon}}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Par un développement limité, on obtient

$$0 \leq \tan \alpha \leq 2 \left(1 + \frac{1}{2R} \right) \sqrt{\epsilon} + o(\sqrt{\epsilon}).$$

Donc, pour ϵ assez petit, on a $\alpha < \pi/4$ et donc

$$\theta(t_0) - \theta(t^*) > \frac{\pi}{4}.$$

Maintenant on peut définir

$$\tau = \inf \{ t > t^* \mid \theta(t) - \theta(t^*) \geq \frac{\pi}{4} \}$$

et observer que $t^* < \tau < t_0$. De plus $\gamma_{[t^*, \tau]}$ est coincé dans un rectangle de dimension $L_\epsilon \times l_\epsilon$ et relie deux sommets opposés en formant un angle de 0 et de $\pi/4$ avec l'axe vertical $(0\vec{j})$ (voir Figure 24(a)). On a de plus les inégalités suivantes :

$$L_\epsilon \leq R - \sqrt{(R-\epsilon)^2 + \epsilon} \quad \text{et} \quad l_\epsilon \leq \sqrt{\epsilon}.$$

On symétrise ce 8^{ème} de tour pour obtenir un tour complet (voir Figure 24(d)). Concrètement on symétrise $\gamma_{[t^*, \tau]}$ par rapport à l'axe dirigé par $\vec{i} + \vec{j}$ et passant par $\gamma(\tau)$ (voir Figure 24(b)). Puis on symétrise la courbe obtenue par rapport à l'axe horizontal (voir Figure 24(c)) et enfin par rapport à l'axe vertical (voir Figure 24(d)). La courbe obtenue $\tilde{\gamma}$ se recolle bien de manière C^1 (et est bien dans $W^{2,2}$), est une courbe simple et vérifie

$$\mathcal{W}(\tilde{\gamma}) = 8\mathcal{W}(\gamma_{[t^*, \tau]}).$$

En notant \mathcal{U}_ϵ le domaine entouré par $\tilde{\gamma}$, on a :

$$\text{Aire}(\mathcal{U}_\epsilon) \leq 8L_\epsilon l_\epsilon + 4L_\epsilon^2.$$

En utilisant le Théorème 5.43, on a

$$\mathcal{W}(\gamma)^2 \geq \frac{1}{8^2} \mathcal{W}(\tilde{\gamma})^2 \geq \frac{\pi^3}{8^2 \text{Aire}(\mathcal{U}_\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} +\infty.$$

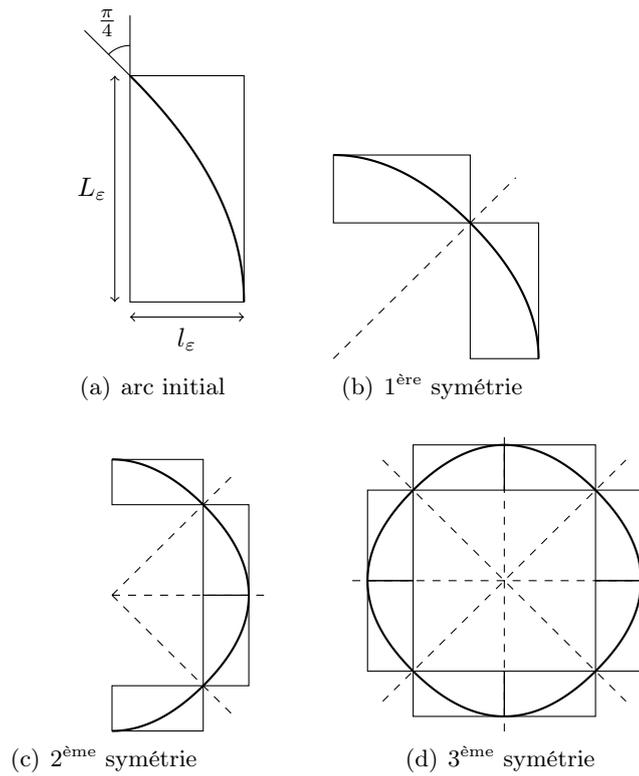


FIGURE 5.24. Symétrisation du 8^{ème} de tour

7.2.3. Utilisation de l'énergie d'un demi tour

Dans la preuve du résultats de cette partie, on a considéré trois cas. Essentiellement selon que la courbe minimale considérée entoure zéro, une ou les deux gouttes. On a vu que le cas d'une courbe simple n'entourant aucune goutte s'éliminait avec le Théorème 5.43. On considère ici le second cas : γ est soit une courbe n'entourant qu'une seule goutte soit une courbe non simple n'entourant aucune goutte.

Supposons que γ entoure une seule goutte (qu'on nomme g). On note σ le segment de la pointe de g . Soit S le segment orthogonal à σ , de longueur 2ε et inclus dans le tube \mathcal{T}_ε (voir Figure 5.25). Ainsi le milieu de S et celui de σ sont confondus.

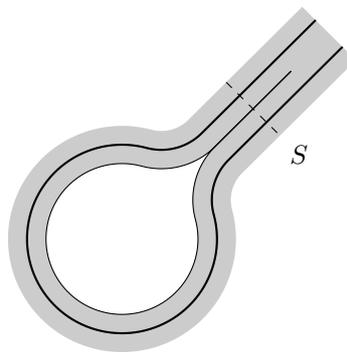


FIGURE 5.25. Encerclement d'une goutte

Ainsi γ traverse S de G vers l'autre goutte au moins deux fois (une fois de chaque côté de σ). Si γ fait demi tour avant d'atteindre l'autre goutte alors on est exactement dans le cas du paragraphe 7.2.2 et on peut directement utiliser l'estimation d'énergie pour voir

que γ ne peut pas être minimale dès que ε est trop petit. Il se peut que γ aille jusqu'à l'autre goutte avant de faire son demi tour (éventuellement dans le voisinage demi-tubulaire autour de cette goutte). Quitte à considérer les segments orthogonaux du tube \mathcal{T}_ε ou du demi tube \mathcal{T}_ε autour de l'autre goutte, on peut voir qu'il existe un de ces segments N_{s^*} tel que γ soit tangente N_{s^*} et reste localement d'un seul côté. Ainsi toute la construction du paragraphe 7.2.2 s'adapte à ce cas.

Reste à voir le cas où γ n'entoure pas de goutte et n'est pas simple. Soit (t, s) un couple d'auto-contact de γ . Dans le paragraphe \mathcal{T}_ε , on a utilisé l'existence d'une petite longueur l pour imposer à γ de s'enfoncer un peu dans le tube avant de faire son demi tour. Comme γ est auto-tangente en (t, s) , cette petite longueur n'est pas nécessaire et on peut faire la même construction que précédemment en démarrant le tube au niveau de $\gamma(t) = \gamma(s)$ et en orientant le tube vers une direction prise par un des arcs au niveau de l'auto-tangence (voir Figure 5.26). Ainsi la construction du paragraphe 7.2.2 s'adapte à ce cas aussi.

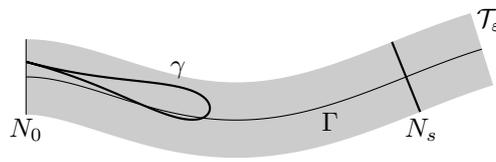


FIGURE 5.26. Localisation du demi tour - 2^{ème} cas

7.2.4. L'arc intérieur et l'arc extérieur

On a vu que si γ était une courbe minimale, alors nécessairement elle entourait les deux gouttes. On suppose ici que γ est simple. Comme précédemment on considère les segments S_1 et S_2 orthogonaux aux pointes de chacune des gouttes. On définit les demi segments S_1^+ , S_2^+ , S_1^- et S_2^- comme sur la Figure 5.27 avec $S_i = S_i^+ \cup S_i^-$.

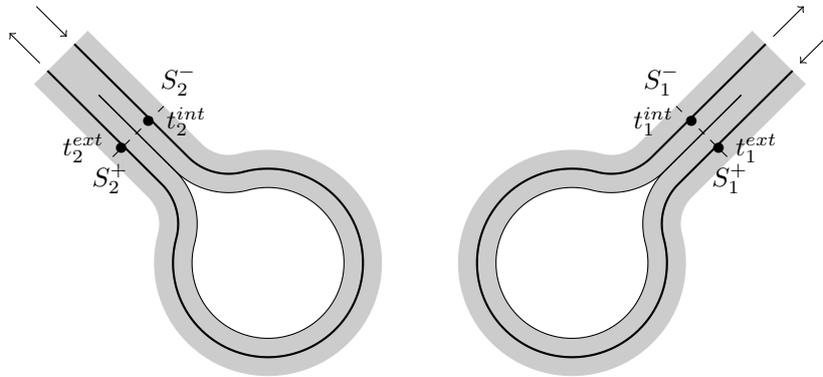


FIGURE 5.27. Encerclement des deux gouttes

Comme γ entoure G_1 et G_2 , on a l'existence d'au moins un arc allant de S_1^- à S_2^- tel que seules les extrémités appartiennent à S_1 ou S_2 . La longueur d'un tel arc étant minorée par une constante déterminée par la longueur du tube \mathcal{T}_ε et la longueur totale de γ étant finie, on en déduit qu'il existe au plus un nombre fini de tels arcs. De plus comme γ est simple, ces arcs ne se rencontrent pas et on peut considérer "celui qui est le plus à l'intérieur" c'est à dire celui dont les points d'intersection avec S_1^- et S_2^- sont les plus éloignés du milieu de S_1 et de S_2 . On note cet arc γ^{int} pour arc intérieur. De manière similaire, on peut considérer les arcs, différents de γ^{int} , joignant S_1 à S_2 , n'ayant que leurs extrémités comme intersection avec S_1 et S_2 . Ces arcs ne se croisent pas et sont en nombre fini donc on peut considérer le plus proche de γ^{int} qu'on note γ^{ext} pour arc extérieur.

Remarquons que γ^{ext} n'est pas l'arc le plus à l'extérieur mais l'arc le plus proche de γ^{int} . En effet lors de la dilatation (à venir) de l'arc intérieur, le premier auto-contact de γ aura lieu avec l'arc le plus proche de γ^{int} qui n'est pas forcément l'arc le plus extérieur. Intuitivement, d'un point de vue énergétique, la courbe minimale n'a que deux arcs reliant S_1 à S_2 cependant il n'est pas évident de démontrer un tel résultat.

On introduit les paramètres t_1^{int} , t_2^{int} , t_1^{ext} et t_2^{ext} comme sur la Figure 5.27 pour la partie suivante sur la dilatation de l'arc intérieur.

7.2.5. La dilatation de l'arc intérieur

On travail sur l'arc intérieur $\gamma(s)$ pour $s \in [t_1^{int}, t_2^{int}]$. On introduit les notations de la Figure 5.28. On note

- C^{int} et C^{ext} le cercle intérieur et le cercle extérieur (respectivement) du tube Ω_ε entre les deux gouttes;
- A_1 et A_2 l'extrémité de la pointe de chaque goutte;
- D_1 et D_2 les droites telles que D_i soit tangente à C^{int} et passe par A_i ;
- B_1 et B_2 les points d'intersection entre D_i et C^{int} ;
- C_1 et C_2 les points d'intersection entre D_i et C^{ext} ;
- Z le point d'intersection entre D_1 et D_2 ;
- s_0 un paramètre tel que $\gamma^{int}(s_0)$ soit sur l'axe des y .

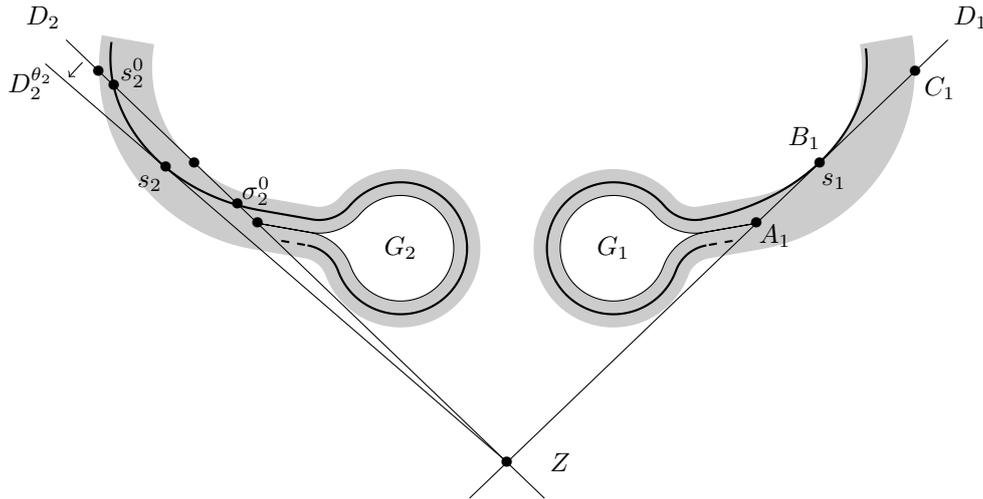


FIGURE 5.28. Construction de la dilatation

On définit deux paramètres s_1 et s_2 pour localiser la portion de γ^{int} que nous allons dilater. Pour cela on définit les premiers temps (de chaque coté de s_0) tels que γ^{int} croise D_1 ou D_2 :

$$s_1^0 = s_0 - \inf\{\eta > 0 \mid \gamma(s_0 - \eta) \in D_1\} \quad \text{et} \quad s_2^0 = s_0 + \inf\{\eta > 0 \mid \gamma(s_0 + \eta) \in D_2\}.$$

Si γ^{int} passe par B_i (cas de G_1 sur la Figure 5.28) alors D_i est tangente à γ^{int} . Ainsi on définit $s_1 = s_1^0$. Sinon (cas de G_2 sur la Figure 5.18), γ^{int} croise le segment $]B_i, C_i[$ et, par continuité, il croise aussi $[B_i, A_i]$. On définit le premier temps après s_1^0 et s_2^0 tel que γ^{int} rencontre D_i entre A_i et B_i :

$$\sigma_1^0 = s_1^0 - \inf\{\eta > 0 \mid \gamma(s_1^0 - \eta) \in D_1\} \quad \text{et} \quad \sigma_2^0 = s_2^0 + \inf\{\eta > 0 \mid \gamma(s_2^0 + \eta) \in D_2\}.$$

Soit $\theta > 0$ et considérons D_1^θ la droite passant par Z et faisant un angle de $-\theta$ avec D_1 . De même D_2^θ est la droite passant par Z et faisant un angle de θ avec D_2 . On introduit

$$\theta_1 = \inf\{\theta > 0 \mid \gamma|_{[\sigma_1^0, s_1^0]} \cap D_1^\theta = \emptyset\} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \inf\{\theta > 0 \mid \gamma|_{[s_2^0, \sigma_2^0]} \cap D_2^\theta = \emptyset\}.$$

En tant que borne inférieure, on a que $D_1^{\theta_1}$ et $D_2^{\theta_2}$ sont tangentes à γ^{int} . On appelle s_1 un paramètre au niveau duquel l'intersection tangente entre γ^{int} et $D_1^{\theta_1}$ a lieu et s_2 un paramètre similaire pour G_2 .

Maintenant, soit $\lambda > 0$ et considérons l'homothétie affine h_λ centrée en Z et de rapport $1 + \lambda$. Comme $\gamma_{|[s_1, s_2]}$ est tangente à $D_1^{\theta_1}$ et $D_2^{\theta_2}$ et que ces droites passent par Z , on a que $h_\lambda(\gamma_{|[s_1, s_2]})$ reste tangent à $D_1^{\theta_1}$ et $D_2^{\theta_2}$ (il est entendu que si $s_i = s_i^0$ alors $\theta_i = 0$). De plus, $\gamma_{|[s_1, s_1^0]}$ et $\gamma_{|[s_2^0, s_2]}$ sont piégés dans les cônes formés par $D_1^{\theta_1}$ et D_1 d'une part et $D_2^{\theta_2}$ et D_2 d'autre part et que ces cônes (ouverts) ne coupent pas C^{int} . Ainsi $h_\lambda(\gamma_{|[s_1, s_1^0]})$ et $h_\lambda(\gamma_{|[s_2^0, s_2]})$ ne croisent pas C^{int} . Concernant $\gamma_{|[s_1^0, s_2^0]}$, on considère le domaine convexe \mathcal{D} bordé par C^{int} entre B_1 et B_2 et les segments $[B_1, Z]$ et $[Z, B_2]$. \mathcal{D} est convexe et contient Z le centre de l'homothétie donc $\mathcal{D} \subset h_\lambda(\mathcal{D})$. Par continuité $h_\lambda(\gamma_{|[s_1^0, s_2^0]})$ est en dehors de $h_\lambda(\mathcal{D})$ et par conséquent $h_\lambda(\gamma_{|[s_1^0, s_2^0]})$ est en dehors de \mathcal{D} . Ainsi $h_\lambda(\gamma_{|[s_1^0, s_2^0]})$ ne croise pas C^{int} . Donc

$$\forall \lambda > 0, \quad h_\lambda(\gamma_{|[s_1, s_2]}) \cap C^{int} = \emptyset.$$

Comme il s'agit d'une homothétie, on a

$$\mathcal{W}(h_\lambda(\gamma_{|[s_1, s_2]})) = \frac{1}{1 + \lambda} \mathcal{W}(\gamma_{|[s_1, s_2]}) < \mathcal{W}(\gamma_{|[s_1, s_2]}).$$

On rappelle que la courbe minimale γ est supposée simple. Par compacité on a

$$dist(\gamma^{ext}, \gamma^{int}) > 0$$

et par continuité

$$dist(\gamma^{ext}, h_\lambda(\gamma_{|[s_1, s_2]})) > 0$$

pour $\lambda > 0$ assez petit. En combinant le fait que $h_\lambda(\gamma_{|[s_1, s_2]})$ ne croise pas C^{int} avec la construction de h_λ on a que $h_\lambda(\gamma_{|[s_1, s_2]})$ reste dans Ω_ε . On définit finalement $\tilde{\gamma}$

- en parcourant γ de s_2 à s_1 ;
- en parcourant le segment $[\gamma(s_1), h_\lambda(\gamma(s_1))]$;
- en parcourant $h_\lambda(\gamma_{|[s_1, s_2]})$;
- en parcourant le segment $[h_\lambda(\gamma(s_2)), \gamma(s_2)]$.

On a bien que $\tilde{\gamma} \subset \Omega_\varepsilon$ et les connexions avec les segments sont bien C^1 , donc $\tilde{\gamma}$ est admissible. De plus on a

$$\mathcal{W}(\tilde{\gamma}) = \mathcal{W}(\gamma_{[s_2, s_1]}) + \mathcal{W}(h_\lambda(\gamma_{|[s_1, s_2]})) < \mathcal{W}(\gamma_{[s_2, s_1]}) + \mathcal{W}(\gamma_{|[s_1, s_2]}) = \mathcal{W}(\gamma).$$

Ce qui contredit la minimalité de γ , donc γ ne peut pas être simple c'est-à-dire que γ admet au moins un auto-contact.

7.3. Remarques générales

D'une manière générale, il est assez difficile de décrire un confinement forçant l'apparition d'auto-contacts sur les courbes minimales, même pour un confinement ayant la forme de celui de cette partie. L'idée de la construction de ce confinement est de forcer la courbe minimale à avoir deux arcs dans un tube fin. Ensuite on a trouvé une portion de la courbe à dilater pour forcer un contact en diminuant l'énergie mais en restant dans le confinement. Les points cruciaux de la construction présentée dans cette partie sont les suivants :

- Le confinement est un voisinage tubulaire fin d'une courbe Γ formée à partir de deux gouttes ;
- Γ possède une énergie finie ;
- on peut trouver des boules suffisamment petites "roulant" le long de Γ (c'est-à-dire qu'il existe une borne inférieure non nulle sur $|\kappa_\Gamma|$;
- la jonction entre les deux gouttes est convexe et a une amplitude angulaire supérieure à π .

8. Quelques simulations numériques

On termine l'étude des élastiques confinés par quelques illustrations numériques. L'approche numérique est exactement la même que celle du Chapitre 4 c'est-à-dire on utilise la méthode de champ de phase. On rappelle rapidement le principe. Soit E un ensemble, sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_E$ peut être approchée par la suite de fonctions régulières

$$u_\varepsilon(x) = q\left(\frac{d(x, E)}{\varepsilon}\right)$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ avec $q(s) = \frac{1}{2}(1 - \text{th}(s/2))$. L'énergie de flexion du bord de E est ainsi approchée par l'énergie

$$\mathcal{W}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \varepsilon \Delta u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} W'(u_\varepsilon) \right|^2 dx$$

où $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$.

La contrainte $E \subset \Omega$ est traitée comme précédemment c'est-à-dire qu'on pose

$$u_\varepsilon^\Omega(x) = q\left(\frac{d(x, \Omega)}{\varepsilon}\right)$$

et on impose

$$u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^\Omega.$$

Comme précédemment, pour trouver un point critique de

$$\min_{u \leq u_\varepsilon^\Omega} \mathcal{W}_\varepsilon(u)$$

on calcule le flot gradient discret u^n depuis une condition initiale u^0 donnée en itérant le procédé suivant :

(1) on calcule $u^{n+1/2}$ la solution au temps δ_t de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u &= -\nabla \mathcal{W}_\varepsilon(u) \\ u(0, x) &= u^n(x). \end{cases}$$

Ici, on a

$$\nabla \mathcal{W}_\varepsilon(u) = \Delta \left(\Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u) \right) - \frac{1}{\varepsilon} W''(u) \left(\Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u) \right) ;$$

(2) on calcule u^{n+1} en projetant $u^{n+1/2}$ sur la contrainte $u^{n+1/2} \leq u_\varepsilon^\Omega$:

$$u^{n+1} = \min(u^{n+1/2}, u_\varepsilon^\Omega).$$

Bien que l'étude théorique se base uniquement sur une courbe, les simulations proposées se basent sur un ensemble. Ainsi il arrive que certaines simulations présentées mettent en scène deux courbes pour délimiter l'ensemble (aussi bien au niveau des ensembles initiaux que des minimiseurs trouvés). Sur les Figures 5.29, 5.30, 5.31, 5.32, 5.33 et 5.34 sont représentées en noir le bord du confinement (connexe), en vert le bord de l'ensemble initial et en bleu le minimiseur trouvé. Le tableau Figure 5.37 présente les énergies de flexion des différentes simulations. Les paramètres utilisés pour les simulations sont ($m = 64$ et $\varepsilon = 1.5/m$) sauf mention du contraire.

8.1. Un premier test avec deux boules collées

Ces premières simulations (voir Figure 5.29) présentent trois ensembles initiaux dans un même confinement. Comme une boule gonfle sous l'effet du flot, la courbe a beaucoup de mal à passer d'une boule à l'autre. Un effet de pincement est visible sur la troisième expérience. Ce phénomène, observé dans [49], est dû à la formation d'une croix sur une ligne de niveau de la fonction champ de phase. La hauteur de ligne de niveau, l'angle entre les branches de la croix et ε sont liés et cette configuration est stable pour le flot.

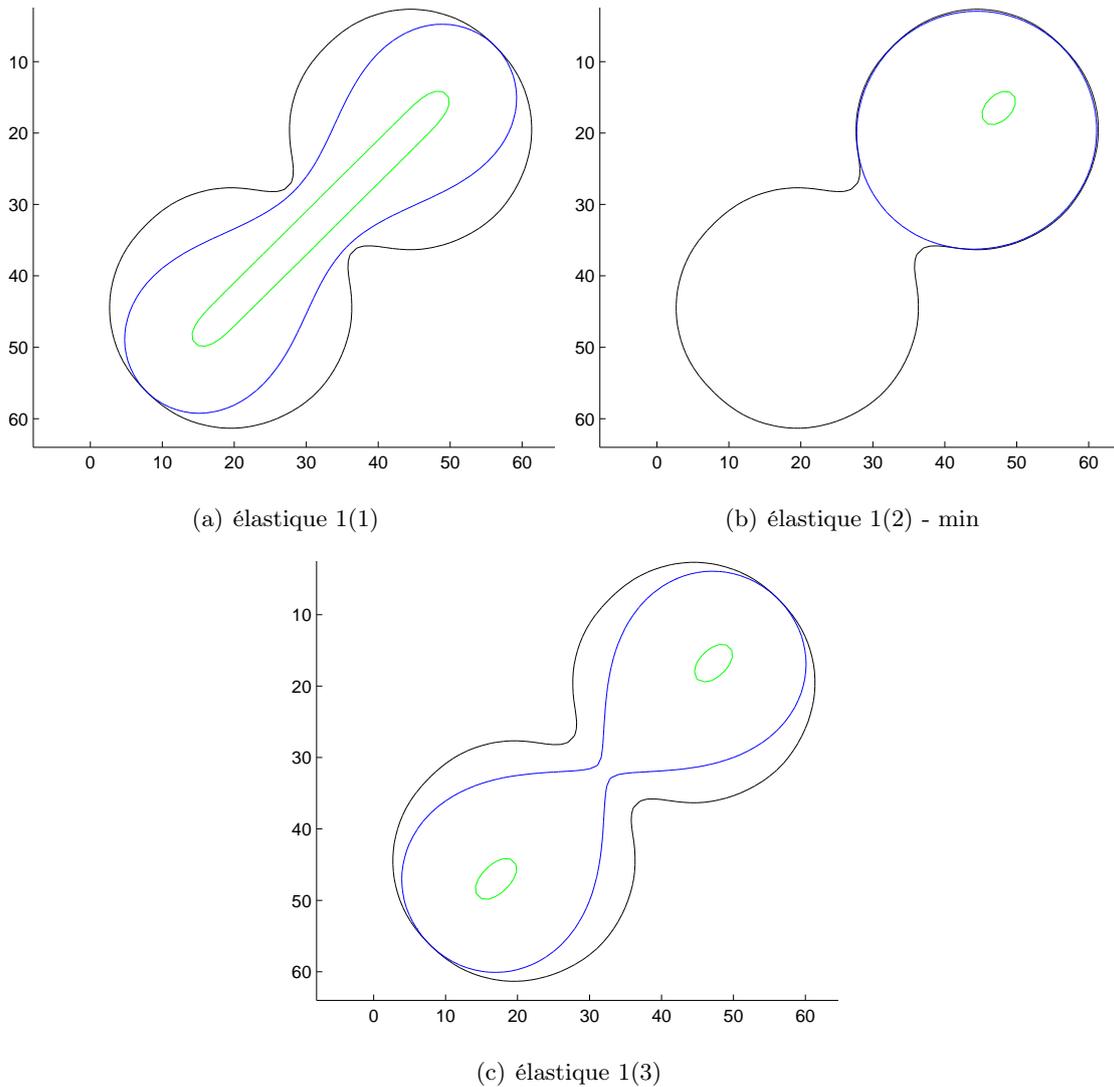


FIGURE 5.29. Premières simulations sur l'élastique.

8.2. Déplacement par gonflement

Sur les simulations Figure (5.30), le principe est de montrer que la courbe est capable de se déplacer en prenant appui sur la contrainte lors de son gonflement. On retrouve le même phénomène de pincement que dans l'expérience précédente.

8.3. Contrainte non simplement connexe

Pour des contraintes non simplement connexes, si on veut garder une seule courbe alors la contrainte $u \leq u_\varepsilon^\Omega$ n'est pas adaptée car elle impose à l'ensemble de ne pas contenir les

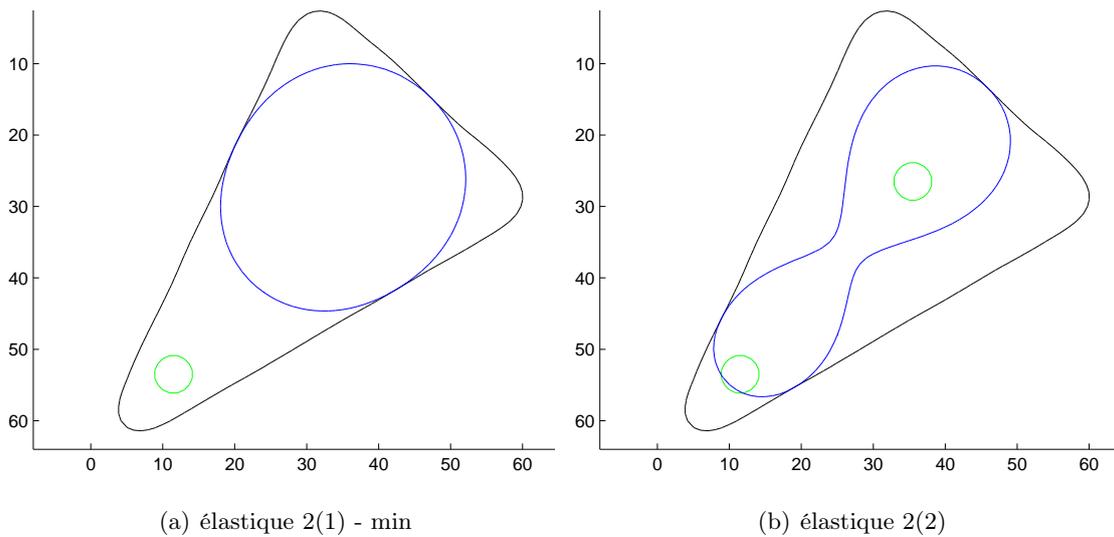


FIGURE 5.30. Déplacement de la courbe.

trous de Ω . Avec cette contrainte, si l'ensemble initial est simplement connexe et contient un trou de Ω alors la première projection sur $u \leq u_\varepsilon^\Omega$ génère une nouvelle interface autour de ce trou et le flot n'est plus simplement connexe. Un moyen de s'en sortir est de trouver les trous inclus dans la condition initiale et d'imposer au flot de contenir ces trous. Concrètement, soit T l'ensemble des trous contenus dans l'ensemble initial, on définit

$$u_\varepsilon^T(x) = q\left(\frac{d(x, T)}{\varepsilon}\right)$$

et on impose la contrainte

$$u_\varepsilon^T \leq u \leq u_\varepsilon^\Omega$$

au flot. L'inconvénient de cette approche est que le flot ne pourra pas sauter et englobera toujours les mêmes trous sans en encercler de nouveaux. Des simulations en ce sens sont présentées sur la Figure 5.31.

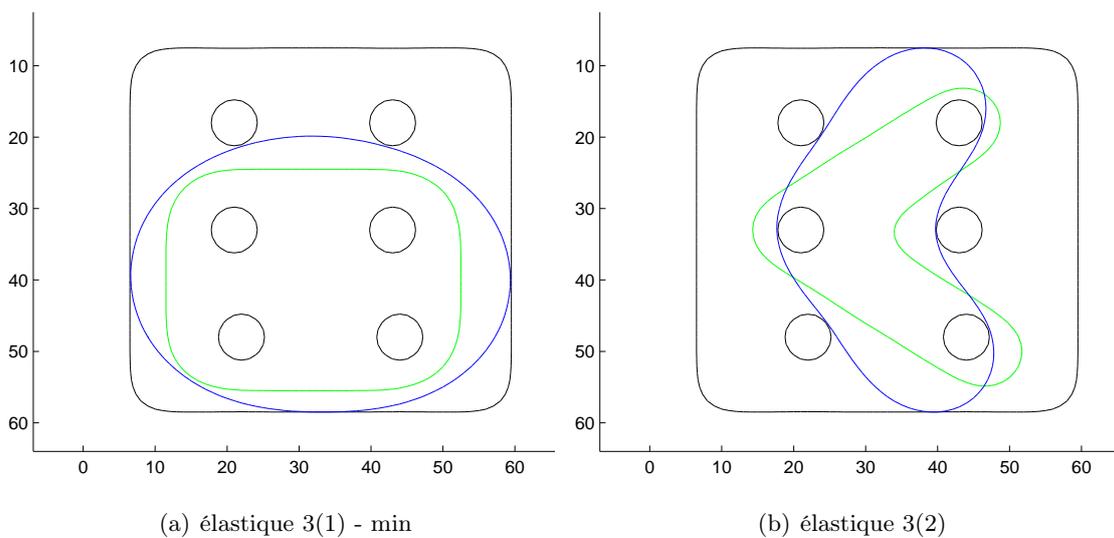


FIGURE 5.31. Une contrainte non simplement connexe.

8.4. Un florilège de configurations

Les simulations de les Figures 5.32 et 5.33 ont pour but de montrer que le choix de la condition initiale influe beaucoup sur le résultat. On peut voir que certaines configurations ne sont pas des points critiques. Ce phénomène est lié à l'approche de champ de phase. En effet, au cours du flot, lorsque deux arcs du bord de l'ensemble se rapprochent, ils peuvent soit fusionner et ainsi changer la topologie de l'ensemble, soit se repousser. La distinction entre les deux comportements n'est pas claire, cela semble notamment dépendre de la courbure des deux arcs.

8.5. Deux gouttes liées

Ces simulations reprennent l'exemple de la Section 7. Sur la Figure 5.34, les arcs se repoussent et, à cause du confinement, on atteint une situation d'équilibre qui nous empêche de récupérer le résultat théorique d'auto-contact de la Section 7.

Afin de diminuer un peu l'effet de répulsion observé sur la Figure 5.34, nous augmentons la résolution des images (c'est-à-dire le nombre de modes de Fourier) et nous diminuons l'épaisseur du profil de champ de phase. Sur la Figure 5.35, nous avons choisi les paramètres $m = 128$ et $\varepsilon = 1.3/m$ ou $\varepsilon = 0.65/m$.

8.6. Un dernier exemple

Nous terminons ces tests numériques avec un exemple un peu plus sauvage. Nous calculons une courbe élastique minimale (localement) dans un confinement en forme de tête de renard. La Figure 5.36 présente une courbe minimale et le profil de la fonction de champ de phase associée. Les paramètres utilisés sont $m = 256$ et $\varepsilon = 1.5/m$.

8.7. Conclusion sur l'approche numérique

La méthode de champ de phase est assez facile à implémenter dans ce contexte mais elle souffre de deux gros défauts. Le premier est l'apparition d'une configuration stable dans laquelle la courbe présente presque un croisement (voir Élastique 1(3)). Une situation similaire existe pour le flot du périmètre : il existe des solutions nodales de l'équation d'Allen-Cahn [49]. Autrement dit, ces solutions en forme de croix viennent de l'énergie approchante dans le modèle de champ de phase.

Le deuxième défaut est qu'il est impossible de récupérer des auto-contacts, lorsque deux arcs de la courbe sont proches, soit ils se repoussent, soit ils s'attirent et fusionnent. Un moyen de corriger ces défauts serait d'utiliser une autre approximation de l'énergie de flexion. Parmi les énergies classiques (voir [28]), certaines, comme l'énergie de Bellettini-Mugnai [16], n'autorisent pas les changements de topologie, qui est pourtant un point fort de la méthode de champ de phase utilisée dans cette thèse.

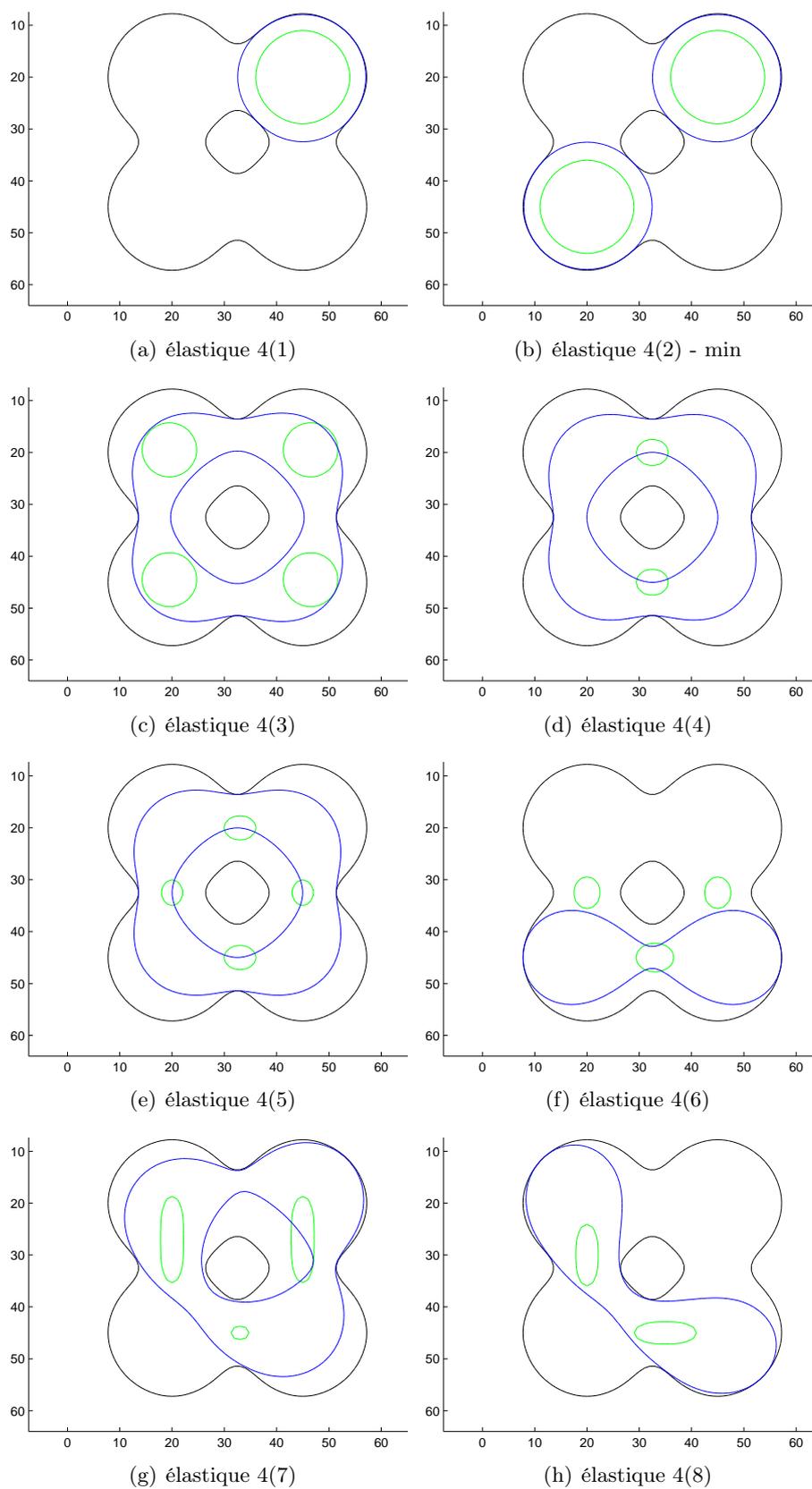


FIGURE 5.32. Plusieurs données initiales et plusieurs minimiseurs potentiels (1/2).

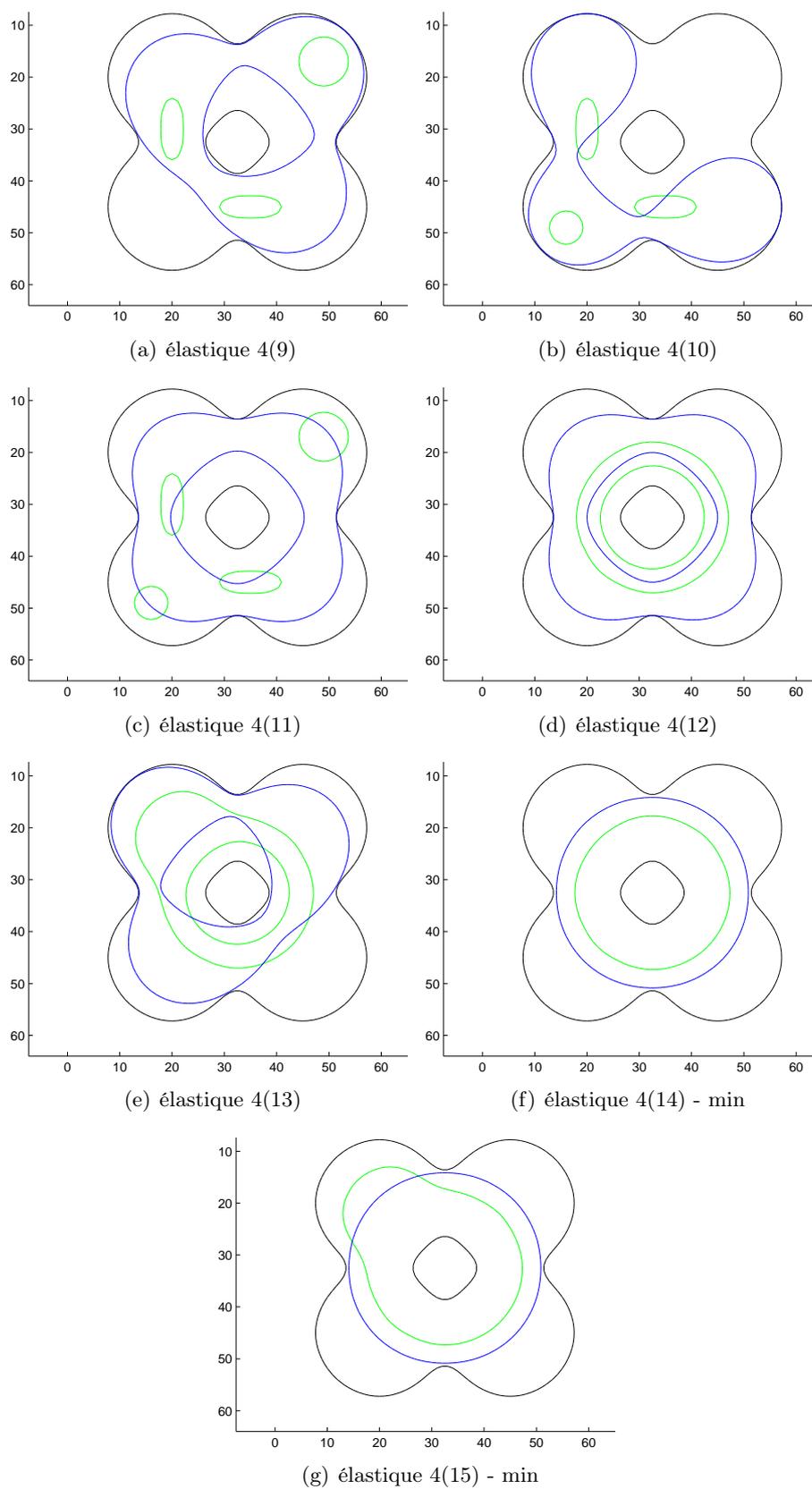


FIGURE 5.33. Plusieurs données initiales et plusieurs minimiseurs potentiels (2/2).

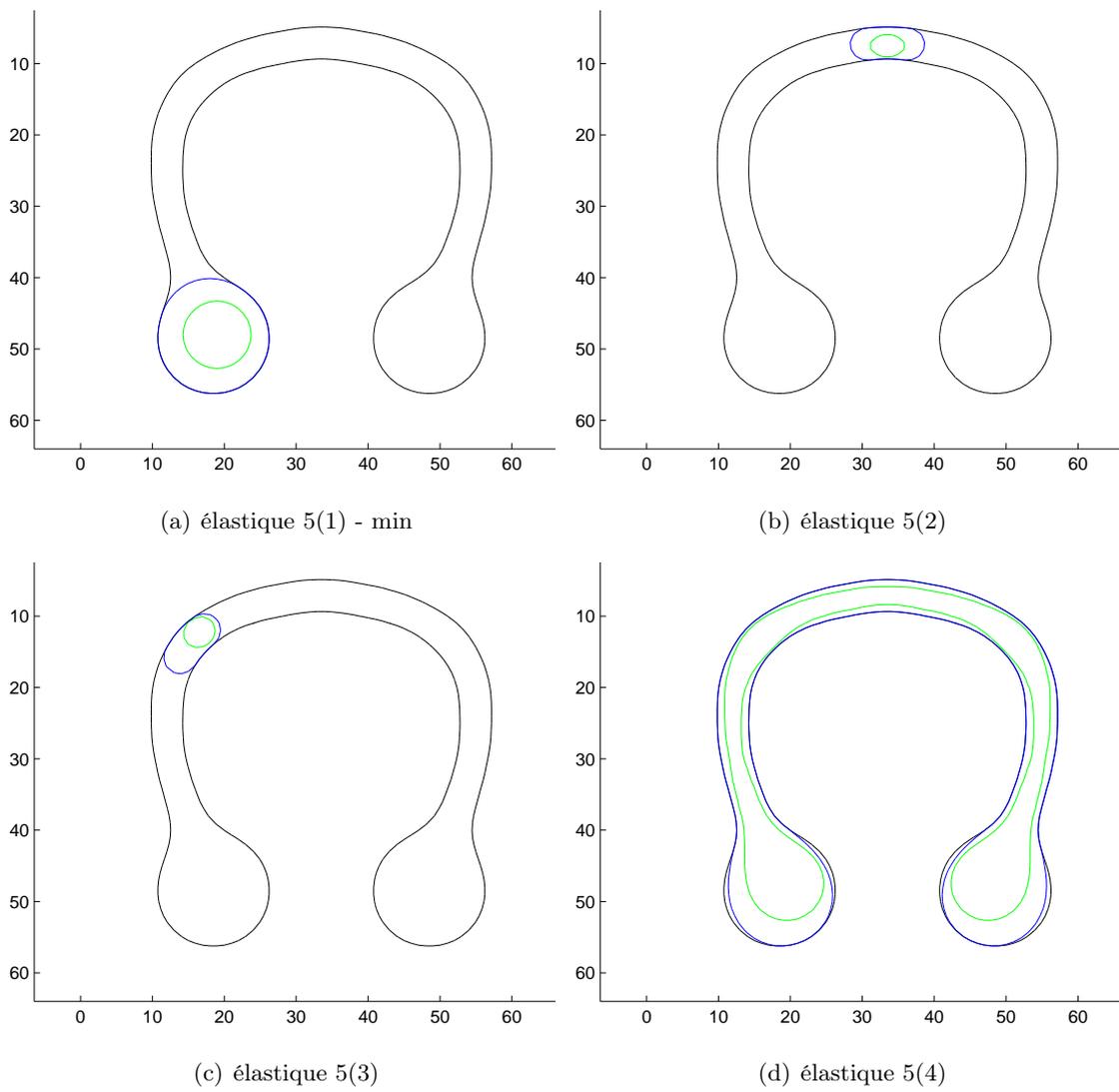


FIGURE 5.34. Un confinement tubulaire.

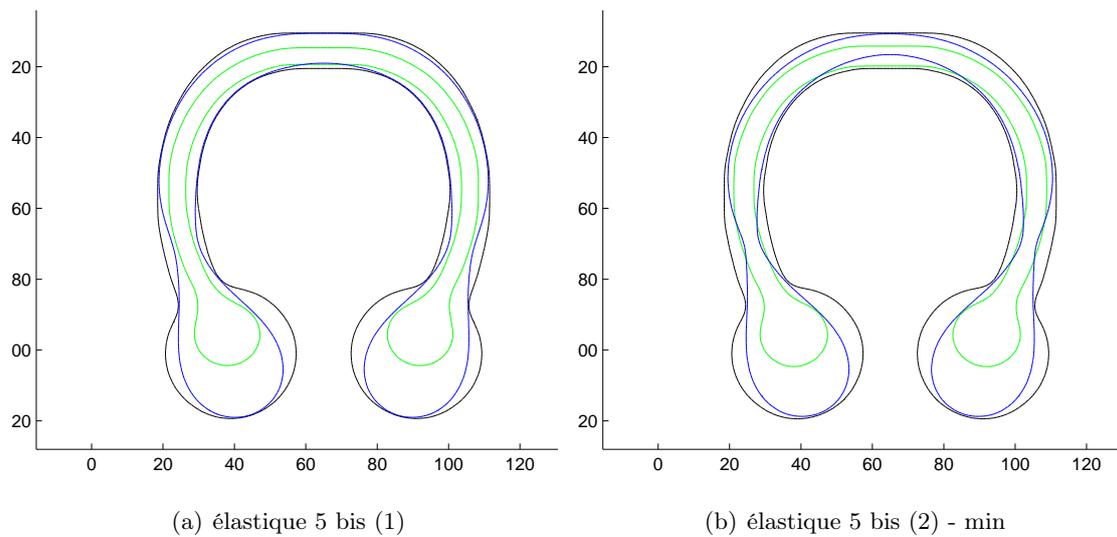


FIGURE 5.35. Un confinement tubulaire - gauche $m = 128$, $\varepsilon = 1.3/m$ - droite $m = 128$, $\varepsilon = 0.65/m$.

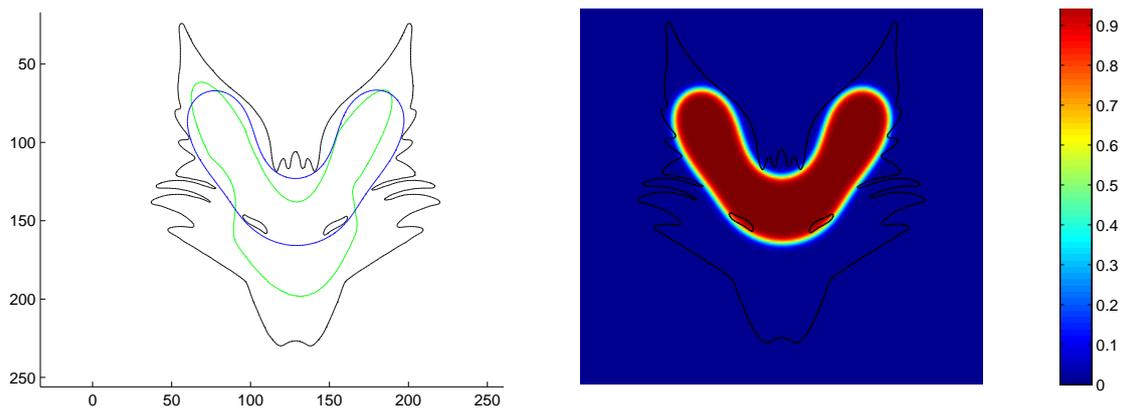


FIGURE 5.36. Un élastique dans un confinement en forme de tête de renard - gauche : courbe minimale (locale) - droite : profil champ de phase correspondant.

| expérience | énergie | expérience | énergie |
|---------------------|---------|-----------------|---------|
| élastique 1(1) | 3.92 | élastique 4(1) | 3.03 |
| élastique 1(2) | 2.34 | élastique 4(2) | 6.02 |
| élastique 1(3) | 3.49 | élastique 4(3) | 5.40 |
| élastique 2(1) | 2.17 | élastique 4(4) | 5.36 |
| élastique 2(2) | 4.64 | élastique 4(5) | 5.36 |
| élastique 3(1) | 1.86 | élastique 4(6) | 4.86 |
| élastique 3(2) | 5.56 | élastique 4(7) | 5.57 |
| élastique 5(1) | 4.82 | élastique 4(8) | 5.46 |
| élastique 5(2) | 17.30 | élastique 4(9) | 5.65 |
| élastique 5(3) | 16.77 | élastique 4(10) | 6.21 |
| élastique 5(4) | 38.74 | élastique 4(11) | 5.40 |
| élastique 5 bis (1) | 8.09 | élastique 4(12) | 5.36 |
| élastique 5 bis (2) | 7.83 | élastique 4(13) | 5.64 |
| renard | 21.09 | élastique 4(14) | 2.22 |
| | | élastique 4(15) | 2.22 |

FIGURE 5.37. Énergie de flexion des différentes simulations.

Troisième partie

Flot de l'énergie de Willmore relaxée

Mouvement minimisant et énergies géométriques

L'idée de ce chapitre est de donner la construction générale par mouvement minimisant d'un flot pour des énergies non régulières comme le périmètre et la relaxée de l'énergie de Willmore. Nous commençons par introduire les mouvements minimisants sur un espace de Hilbert car la construction et les propriétés générales se comprennent mieux dans ce cadre là. Ensuite nous utilisons les idées de cette construction pour définir un flot minimisant pour le périmètre (c'est-à-dire un flot de courbure moyenne) et pour l'énergie de Willmore. La section concernant le périmètre ne présente aucun nouveau résultat mais permet d'illustrer les propriétés classiques que nous sommes en droit d'attendre lors de l'étude de ce genre de flot. Enfin, la dernière section est une application directe d'un théorème général d'Ambrosio, Gigli et Savaré [6] afin de montrer l'existence d'un flot pour l'énergie de Willmore relaxée dans sa version fonctionnelle.

1. Les mouvements minimisants

On introduit la notion de mouvement minimisant. Afin de simplifier l'approche on se place d'abord sur un espace de Hilbert. Soit X un espace de Hilbert séparable et

$$f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

une fonction. Si f est de classe C^1 alors son flot gradient (minimisant) peut être défini par l'équation

$$\begin{cases} u'(t) &= -\nabla f(u(t)) \\ u(0) &= x. \end{cases}$$

Cependant nous voulons définir un tel flot pour une fonction f à priori non régulière. Pour approcher le gradient de f , on discrétise le flot précédent à l'aide d'un schéma d'Euler implicite : pour $\tau > 0$ petit

$$\begin{cases} u'(t) &\simeq \frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau} \\ \nabla f(u(t)) &\simeq \nabla f(u(t+\tau)). \end{cases}$$

Cette équation se réécrit

$$\frac{y-x}{\tau} + \nabla f(y) = 0$$

en remplaçant $u(t)$ par x et $u(t+\tau)$ par y . Ainsi apparaît naturellement l'équation

$$\nabla F_x(y) = 0$$

où F_x est la fonction

$$F_x(y) = f(y) + \frac{1}{2\tau}|y-x|^2.$$

Sous cette forme, on peut voir que y est défini comme étant un point critique de F_x . Un bon moyen d'atteindre des points critiques d'une fonction est de trouver ses minimiseurs. Le point clef des mouvements minimisants se trouve dans cette idée : si y_0 est un minimiseur de F_{x_0} , alors y_0 est proche de x_0 et $f(y_0) \leq f(x_0)$. On itère ce processus en remplaçant

x_0 par le minimiseur y_0 : soit $x_1 = y_0$, on trouve y_1 un minimiseur de F_{x_1} qui, comme précédemment est proche de x_1 et vérifie $f(y_1) \leq f(x_1) \leq f(x_0)$. On construit ainsi un flot minimisant discret $(x_n)_n$ le long duquel f décroît et tel que $|x_{n+1} - x_n| \leq C\tau$ pour une certaine constante C . Il est naturel de penser que la suite $(x_n)_n$ converge vers un chemin continu $t \mapsto x(t)$ lorsque $\tau \rightarrow 0$ le long duquel f décroît. On s'attend à ce que ce chemin, nommé mouvement minimisant, soit solution de $u'(t) = -\nabla f(u(t))$ lorsque f est régulière.

On donne maintenant le formalisme nécessaire à la définition du mouvement minimisant.

Définition 6.1 (Flot minimisant discret). *Soit $\tau > 0$ et*

$$x_0 \in \text{dom}(f) = \{x \in X \mid -\infty < f(x) < +\infty\},$$

on définit le flot discret $(x_\tau(n))_n$ de f partant de x_0 par récurrence : $x_\tau(0) = x_0$ et $x_\tau(n+1)$ est un minimiseur de

$$y \mapsto f(y) + \frac{1}{2\tau}|y - x_\tau(n)|^2.$$

Grâce à ce flot discret, on peut définir un chemin constant par morceaux :

$$u_\tau(t) = x_\tau([t/\tau])$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

Définition 6.2 (Mouvement minimisant). *On dit que $u : [0, +\infty[\rightarrow X$ est un mouvement minimisant de f partant de x_0 s'il existe un flot discret tel que $(u_\tau)_\tau$ converge uniformément vers u lorsque $\tau \rightarrow 0$ (à une sous-suite près).*

L'existence du mouvement minimisant est ainsi conditionnée à la possibilité de minimiser f . Pour montrer l'existence d'un mouvement minimisant, il est parfois commode de considérer une fonction continue et affine par morceaux pour u_τ ou de montrer la convergence uniforme sur $[0, T]$ pour tout $T > 0$.

Remarque 6.3. Si f est positive et si $f(x_0)$ est un minimum local f alors $u(t) = x_0$ est le seul mouvement minimisant de f partant de x_0 . En effet, quitte à ajouter une constante pour rendre ce minimum strictement positif, on a $0 < f(x_0) \leq f(x)$ dans une petite boule $B(x_0, \delta)$. Ainsi on obtient

$$f(x_0) \leq f(x) + \frac{1}{2\tau}|x - x_0|^2 \quad \text{dans } B(x_0, \delta)$$

avec égalité seulement lorsque $x = x_0$. Pour $\tau > 0$ assez petit ($\tau < \frac{\delta^2}{2f(x_0)}$), on a

$$f(x_0) \leq f(x) + \frac{1}{2\tau}|x - x_0|^2 \quad \text{sur } X$$

avec le même cas d'égalité. Donc le flot minimisant est constant et vaut x_0 . Il en est de même pour le mouvement minimisant.

En particulier, le flot discret et le mouvement minimisant qui en découle peuvent être piégés dans les points critiques de f . On donne ensuite un théorème d'existence qui montre aussi que le mouvement minimisant coïncide bien avec le flot gradient lorsque f est régulière.

Théorème 6.4 ([3, Esempio 1.1]). *Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Si f est lipschitzienne ou si $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors pour tout point de départ x_0 , f admet un unique mouvement minimisant partant de x_0 donné par l'équation*

$$\begin{cases} u'(t) &= -\nabla f(u(t)) \\ u(0) &= x_0. \end{cases}$$

Nous redonnons la preuve de ce résultat qui permet de voir les particularités du mouvement minimisant.

Preuve.
Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on note :

$$F(y) = f(y) + \frac{1}{2\tau}|y - x|^2.$$

On montre d'abord l'existence d'un minimum pour F . Soit $(y_k)_k$ une suite telle que

$$F(y_k) \rightarrow \inf_{z \in \mathbb{R}^d} F(z)$$

lorsque $k \rightarrow +\infty$. Comme

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} F(y) = +\infty,$$

$(y_k)_k$ reste dans une boule et donc, par compacité, $(y_k)_k$ converge, à une sous-suite près, vers un élément $y \in \mathbb{R}^d$. Par conséquence, en utilisant la continuité de f et de la norme $|\cdot|$, on a

$$F(y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} F(y_k) = \inf_{z \in \mathbb{R}^d} F(z).$$

F admet donc bien un minimum. On peut ainsi construire le flot discret et u_τ . De plus, comme F est dérivable, on a

$$u_\tau(n+1) - u_\tau(n) = -\tau \nabla f(u_\tau(n+1)).$$

On se place sur $[0, T]$ pour un certain $T > 0$. On définit la fonction continue et affine par morceaux :

$$v_\tau(t) = u_\tau([t/\tau]) + \left(t/\tau - [t/\tau]\right) \left(u_\tau([t/\tau] + 1) - u_\tau([t/\tau])\right).$$

Si f est lipschitzienne, alors

$$|u_\tau([t/\tau] + 1) - u_\tau([t/\tau])| \leq \tau \text{Lip}(f).$$

Ainsi, les pentes de v_τ n'excèdent pas $\pm \text{Lip}(f)$, c'est-à-dire que la famille $(v_\tau)_\tau$ est équi-lipschitzienne et, comme $v_\tau(0) = x_0$, cette famille est bornée sur $[0, T]$ indépendamment de τ . Si au contraire, f vérifie l'autre hypothèse, alors f est minorée. En écrivant l'inégalité définissant un minimum de F on obtient, en $y = u_\tau(n)$:

$$|u_\tau(n+1) - u_\tau(n)|^2 \leq 2\tau \left(f(u_\tau(n+1)) - f(u_\tau(n)) \right).$$

Ceci montre que $f(u_\tau(n))_n$ est une suite décroissante et donc $t \rightarrow v_\tau(t)$ reste dans une boule indépendante de τ . On peut ainsi écrire pour $0 \leq s < t \leq T$:

$$\begin{aligned} |v_\tau(t) - v_\tau(s)|^2 &\leq \left(\int_s^t |v'(a)| da \right)^2 \\ &\leq |t - s| \int_s^t |v'(a)|^2 da \\ &\leq |t - s| \sum_{n=[s/\tau]}^{[t/\tau]} \tau^{-1} |u_\tau(n+1) - u_\tau(n)|^2 \\ &\leq 2|t - s| \left(f(x_0) - \inf f \right). \end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(v_\tau)_\tau$ est uniformément équi-continue sur $[0, T]$ et à valeurs dans un compact indépendant de τ .

Dans les deux cas, on peut appliquer le Théorème d'Ascoli pour avoir la convergence uniforme d'une sous-suite vers une fonction continue u sur $[0, T]$. De plus, comme

$$|u_\tau(t) - v_\tau(t)| \leq |u_\tau(\lceil t/\tau \rceil + 1) - u_\tau(\lceil t/\tau \rceil)| \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$$

alors, à une sous-suite près, u_τ converge aussi uniformément vers u .

Quelque soit la sous-suite qui converge, on va montrer que la fonction limite vérifie l'équation différentielle. On reprend les notations ci-dessus. Et, comme f est régulière, on a :

$$\forall t \in]n\tau, (n+1)\tau[, \quad v'_\tau(t) = -\nabla f(u_\tau(n+1)).$$

Ensuite on évalue l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \left| v_\tau(t) - x_0 - \int_0^t -\nabla f(v_\tau(s)) ds \right| = \left| \int_0^t v'_\tau(s) + \nabla f(v_\tau(s)) ds \right| \\ & \leq \sum_{n=0}^{\lceil t/\tau - 1 \rceil} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} |\nabla f(v_\tau(s)) - \nabla f(u_\tau(n+1))| ds + \int_{\tau \lceil t/\tau \rceil}^t |\nabla f(v_\tau(s)) - \nabla f(u_\tau(\lceil t/\tau \rceil + 1))| ds \\ & \leq \sum_{n=0}^{\lceil t/\tau \rceil} \tau \text{Lip}(\nabla f) \|v_\tau(s) - u_\tau(\lceil s/\tau \rceil + 1)\|_{L^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

f étant de classe C^2 , ∇f est lipschitzienne sur un compact contenant les trajectoires $v_\tau(t)$ et $u_\tau(t)$ sur $[0, T]$. Le terme précédent est inférieur à

$$(\lceil t/\tau \rceil + 1) \tau \text{Lip}(\nabla f) \|v_\tau(s) - u_\tau(\lceil s/\tau \rceil + 1)\|_{L^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)}.$$

Comme la norme L^∞ tend vers 0 à cause de la convergence uniforme, $(\lceil t/\tau \rceil + 1)\tau$ tend vers t et $u_\tau(\lceil s/\tau \rceil + 1) = v_\tau(t + \tau)$. On obtient alors à la limite en $\tau \rightarrow 0$

$$u(t) = x_0 - \int_0^t \nabla f(u(s)) ds.$$

Cette expression est la forme intégrale de l'équation différentielle du théorème qui admet une unique solution d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz. Grâce à cette unicité, on récupère la convergence de toute la suite u_τ . Donc, quelque soit la suite minimisante de départ, on a convergence de toute la suite vers la solution de cette équation différentielle. \square

2. Mouvement par courbure moyenne

On utilise maintenant la notion de mouvement minimisant pour définir un flot pour le périmètre. Le papier fondateur du flot de courbure moyenne par les mouvements minimisants est celui d'Almgren, Taylor et Wang de 1993 [2]. Bien que la plupart des résultats exposés dans cette section viennent de ce papier, nous présentons les trois approches de [3, 36, 90]. L'intérêt est de donner des exemples de résultats existants dans la littérature que nous espérons obtenir pour le flot de Willmore.

2.1. L'approche géométrique classique

Comme $|E\Delta E_{n-1}| = \|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_{n-1}}\|_{L^1}$ est une distance sur les ensembles mesurables bornés, la formulation naturelle du flot par courbure moyenne utilisant les mouvements minimisants est la minimisation récursive de l'énergie suivante

$$E \mapsto P(E) + \frac{1}{\tau}|E\Delta E_{n-1}|.$$

Cependant cette distance n'est pas adaptée à la définition d'un mouvement minimisant. Prenons un exemple : soit $B = B(0, 1)$ la boule unité dans \mathbb{R}^2 . On cherche un minimiseur de

$$\mathcal{F} : E \mapsto P(E) + \frac{1}{\tau}|E\Delta B|.$$

Il n'est pas difficile d'utiliser la méthode directe du calcul des variations pour montrer qu'un tel minimiseur existe. Par des arguments simples, on peut même montrer que ce minimiseur est une boule. En effet, parmi tous les ensembles mesurables d'un volume fixé, on peut montrer que $E \mapsto |E\Delta B|$ est minimale lorsque $E \subset B$ ou $B \subset E$ (voir Lemme 8.15). De même, grâce à l'inégalité isopérimétrique, le périmètre à volume fixé est minimal pour les boules. Ainsi, on peut supposer que le minimiseur précédent est la boule $B(0, r)$. On peut ainsi calculer

$$\mathcal{F}(B(0, r)) = 2\pi r + \frac{\pi}{\tau}|r^2 - 1|.$$

Cette expression est croissante en r pour $r \geq 1$ et comme $\mathcal{F}(B(0, 1 - \varepsilon)) < \mathcal{F}(B(0, 1 + \varepsilon))$, alors le minimiseur est à chercher parmi les boules $B(0, r)$ de rayon $0 \leq r \leq 1$. Un calcul simple permet de voir que $r \mapsto 2\pi r + \frac{\pi}{\tau}(1 - r^2)$ est minimale sur $[0, 1]$ en $r = 1$ dès que $\tau < 1$. Ainsi le flot discret est constant et égal à B pour τ assez petit. On en déduit que le mouvement minimisant correspondant est stationnaire, ce qui est contradictoire avec le flot régulier qui fait décroître strictement le rayon de la boule.

Ainsi il est préférable de changer le terme de distance. Dans [3], l'énergie suivante est minimisée récursivement :

$$(11) \quad E \mapsto P(E) + \frac{1}{\tau} \int_{E\Delta F} |d(x, F)| dx$$

où d est la distance signée. Ce nouveau terme n'est pas une distance mais est un bon moyen de mesurer l'écart entre deux ensembles. Il est plus permissif et évite ainsi le phénomène décrit ci-dessus d'apparaître. Le résultat principal de [3] est un théorème d'existence.

Théorème 6.5 ([3, Théorème 3.3]). *Soit E_0 un ensemble mesurable borné de \mathbb{R}^d , de périmètre fini tel que $|\partial E_0| = 0$. Alors il existe un mouvement minimisant du périmètre défini par (11) partant de E_0 . De plus, il existe $C > 0$ dépendant uniquement de d et de E_0 tel que, pour tout mouvement minimisant $E(t)$ partant de E_0 , pour tout $t, s > 0$ tel que $|t - s| < 1$, on a*

$$|E(t)\Delta E(s)| \leq C|t - s|^{\frac{1}{d+1}}.$$

Dans les problèmes de minimisations, on récupère souvent plus de régularité sur les minimiseurs que celle nécessaire pour avoir une énergie finie. Comme le flot est défini par un problème de minimisation, on récupère un peu de régularité en espace le long du flot (ici, sur le bord de $E(t)$) que ce qui est imposé par l'énergie (ici, le périmètre). Cela se traduit dans notre contexte par le Théorème suivant.

Théorème 6.6 ([3, Théorème de régularité partielle]). *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est solution du problème (11) alors il existe un ensemble fermé $K \subset \partial E$ de dimension inférieure ou égale à $d - 8$ tel que ∂E soit une sous-variété de classe C^2 et de dimension $d - 1$.*

Remarquons que K est vide pour $d \leq 7$ et est discret pour $d = 8$. En plus de ces résultats de régularité en temps et en espace, le théorème suivant montre qu'il s'agit bien d'une généralisation du flot par courbure moyenne régulier. En effet, les deux coïncident lorsque le flot $t \mapsto E(t)$ est suffisamment régulier.

Théorème 6.7 ([2, Théorème 7.4]). *Soit $L(t)$ une famille d'ensembles bornés dont le bord $\partial L(t)$ est une hypersurface régulière évoluant, sur un intervalle de temps $[0, T]$, selon l'équation*

$$\frac{d}{dt} \partial L(t) = H_{\partial L(t)}$$

où $H_{\partial L(t)}$ est le vecteur courbure moyenne de $\partial L(t)$. Si $E_\tau(t)$ est un flot discret défini par (11) partant de $L(0)$ alors ce flot converge vers $L(t)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d \times [0, T])$.

2.2. Une approche dans BV

Dans [90], le mouvement minimisant est aussi défini par (11) bien que le formalisme et la convergence du flot discret a lieu dans un espace de fonctions à variation bornée. Plus exactement, les auteurs définissent une suite d'ensembles $(E_n)_n$ par la relation (11) et introduisent ensuite

$$(12) \quad \chi_\tau(t, \cdot) = \mathbb{1}_{E_{[t/\tau]}} \in BV(\mathbb{R}^d, \{0, 1\}).$$

Le principal intérêt de ce formalisme est de pouvoir donner une formulation faible de la propriété "être un flot de courbure moyenne". Plus précisément, soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d et $T > 0$, on note $\Omega_T = \Omega \times]0, T[$. Une fonction $\chi : \Omega_T \rightarrow \{0, 1\}$ de l'espace $L^\infty(]0, T[, BV(\Omega, \{0, 1\}))$ est un mouvement par courbure moyenne "faible" s'il existe une fonction $v : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ de l'espace $L^1(]0, T[, L^1(\|D\chi\|))$ (avec $\|D\chi\|$ la mesure variation totale de $x \mapsto \chi(t, x)$) telle que pour tout $\zeta \in C^\infty(\overline{\Omega_T}, \mathbb{R}^d)$ vérifiant $\zeta = 0$ sur $\partial\Omega \times]0, T[$, on a

$$\int_{\Omega_T} \left[\left(\operatorname{div} \zeta - \frac{D\chi}{\|D\chi\|} \nabla \zeta \frac{D\chi}{\|D\chi\|} \right) - v \zeta Du \right] dx dt = 0$$

et pour tout $\xi \in C^\infty(\overline{\Omega_T}, \mathbb{R}^d)$ vérifiant $\xi = 0$ sur $\partial\Omega \times]0, T[$ et sur $\Omega \times \{T\}$, on a

$$\int_{\Omega_T} \chi \partial_t \xi dt dx + \int_{\Omega} \chi(0, x) \xi(0, x) dx = - \int_{\Omega_T} v \xi |D\chi| dx dt.$$

Les auteurs ont montré la convergence de la famille χ_τ vers un flot par courbure moyenne dans le sens ci-dessus. Le théorème de convergence est le suivant.

Théorème 6.8 ([90, Théorème 2.3]). *Soit E_0 un ensemble de Ω de périmètre fini. Le flot χ_τ défini par (11) et (12) converge dans $L^1(\Omega_T)$ vers une fonction*

$$\chi \in L^1\left(]0, T[, BV(\Omega, \{0, 1\})\right).$$

De plus, si $d \leq 7$ et

$$\int_{\Omega_T} \|D\chi_\tau\| dt dx \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} \|D\chi\| dt dx$$

alors χ est un flot par courbure moyenne au sens ci-dessus.

2.3. Un algorithme pour le mouvement par courbure moyenne

Le dernier formalisme que nous présentons est celui tiré de [36]. L'intérêt de celui-ci est de pouvoir être implémenté numériquement afin de calculer effectivement le mouvement par courbure moyenne d'un ensemble.

La construction du flot discret se fait en deux étapes. Soit Ω un ouvert borné convexe de \mathbb{R}^d . Pour E un ensemble de Ω , on définit une fonction

$$w_E = \operatorname{argmin}_{u \in L^2(\Omega)} \left\{ \|Du\|(\Omega) + \frac{1}{2\tau} \|u - d(\cdot, E)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}.$$

Ce problème est convexe et on peut montrer qu'il admet une unique solution. On définit ensuite un opérateur sur les sous-ensembles de Ω :

$$\mathcal{T}_\tau(E) = \{x \in \Omega \mid w_E(x) < 0\}.$$

Soit E_0 un ensemble de périmètre fini dans Ω , le flot discret est défini par récurrence

$$E_n = \mathcal{T}_\tau(E_{n-1}) = \mathcal{T}_\tau^n(E_0).$$

Une force de l'opérateur \mathcal{T} est de vérifier la propriété d'inclusion du mouvement par courbure moyenne (voir [36, Lemme 2.1]), c'est-à-dire que si $E \subset F \subset \Omega$, alors $\mathcal{T}_\tau(E) \subset \mathcal{T}_\tau(F) \subset \Omega$.

En particulier, l'auteur montre la propriété suivante indiquant que ce flot coïncide bien avec le flot discret des paragraphes précédents.

Proposition 6.9 ([36, Proposition 2.2]). *Soit $E \subset \Omega$, $\mathcal{T}_\tau(E)$ est solution du problème de minimisation (11).*

Ainsi on a exactement les mêmes résultats de convergence, de régularité partielle et de consistance avec le flot régulier que ceux donnés par les Théorèmes 6.5, 6.6 et 6.7 en veillant bien à ce que $E_0 \subset\subset \Omega$ et que Ω soit convexe et borné. De plus, on peut définir une autre version faible de la propriété "être un flot de courbure moyenne" utilisant la notion de solution de viscosité.

Théorème 6.10 ([36, Théorème 4]). *Soit $E_0 \subset\subset \Omega$ un ensemble borné de périmètre fini tel que $|\partial E_0| = 0$. S'il existe une solution de viscosité au problème*

$$\begin{cases} \partial_t u = |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) & \text{sur } [0, T] \times \Omega \\ u(0, \cdot) = \mathbb{1}_{\Omega \setminus E_0} - \mathbb{1}_{E_0} & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

alors le flot discret défini par (11) converge vers $E(t)$ dans $L^1(\Omega \times [0, T])$, où $E(t)$ est défini par

$$u(t, \cdot) = \mathbb{1}_{\Omega \setminus E(t)} - \mathbb{1}_{E(t)}.$$

3. Flot de Willmore pour les fonctions

Dans cette section, nous nous intéressons à la définition d'un mouvement minimisant pour l'énergie de Willmore relaxée dans sa version fonctionnelle. Soit Ω un ouvert borné et $u \in L^1(\Omega)$

$$\overline{\mathcal{W}}(u) = \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(u_k) \mid u_k \rightarrow u \text{ dans } L^1(\Omega) \right\}$$

où

$$\mathcal{W}(u) = \int_{\Omega} \left| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right|^2 |\nabla u| dx$$

si u est de classe C^2 (avec la convention $\left| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right|^2 |\nabla u| = 0$ dès que $|\nabla u| = 0$) et $\mathcal{W}(u) = +\infty$ sinon.

L'espace naturel dans lequel on veut se placer est $L^1(\Omega)$ en tant qu'espace métrique. Pour cela, il faut étendre la définition de mouvements minimisants aux espaces métriques. Cette extension a été faite par Ambrosio, Gigli, et Savaré [4].

3.1. Mouvement minimisant dans un espace métrique

Le théorème d'existence du mouvement minimisant qu'on va utiliser se place dans un espace métrique complet (X, d) . On note $F : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ la fonctionnelle et φ la fonction intervenant dans la définition de la suite minimisante :

$$\varphi(\tau, u, v) = F(v) + \frac{1}{2\tau} d(u, v)^2.$$

On a besoin de trois propriétés sur F pour s'assurer de l'existence du mouvement minimisant. Ces propriétés sont très classiques dans un cadre de minimisation de fonction.

Définition 6.11 (Propriétés minimisantes). *On dit que φ est coercive s'il existe $\tau_* > 0$ et $u_* \in X$ tels que*

$$\inf_{v \in X} \varphi(\tau_*, u_*, v) > -\infty.$$

On dit que F est semi-continue inférieurement si pour toute suite (u_n) convergeant vers u , on a

$$F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n).$$

On dit que F est propre si pour toute suite (u_n) telle que

$$\sup_{n,m} d(u_n, u_m) < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_n F(u_n) < +\infty,$$

il existe une sous-suite convergeant dans X .

Le théorème issu du livre d'Ambrosio, Gigli et Savaré [4] donne un résultat d'existence du mouvement minimisant dans l'espace des fonctions localement absolument continues.

Définition 6.12 (Fonctions localement absolument continues). *Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $p \in [1, +\infty]$ et $u : I \rightarrow X$. On dit que u est localement absolument continue dans L^p s'il existe $v \in L^p_{loc}(I, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $t, s \in I$,*

$$d(u(t), u(s)) \leq \left| \int_s^t v(\tau) d\tau \right|.$$

On note $AC^p_{loc}(I, X)$ l'ensemble des fonctions localement absolument continues de I dans X .

Nous pouvons maintenant expliciter le théorème que nous utiliserons par la suite.

Théorème 6.13 ([6, Proposition 2.2.3]). Soit (X, d) un espace métrique et $F : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$. Si F vérifie les trois propriétés minimisantes, alors pour tout $u_0 \in \text{dom } F$, il existe un flot discret (u_τ) partant de u_0 et il existe $u \in AC_{loc}^2([0, +\infty[, X)$ tels que, pour une sous-suite $(u_{\tau_k})_k$ avec $\tau_k \rightarrow 0$, on ait

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad u_{\lambda_k}(t) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u(t).$$

Une telle fonction u est appelée un mouvement minimisant de F partant de u_0 .

Remarque 6.14. Pour $1 < p < \infty$, en prenant $\varphi(\tau, u, v) = F(v) + \frac{1}{p\tau}d(u, v)^p$, alors on a le même théorème pour un mouvement minimisant dans $AC_{loc}^p([0, +\infty[, X)$.

3.2. Un mouvement minimisant pour l'énergie de Willmore

L'espace métrique qui nous intéresse est $L^1(\Omega)$ pour avoir l'existence d'un mouvement minimisant. On définit ainsi

$$\varphi(\tau, u, v) = \overline{\mathcal{W}}(v) + \frac{1}{2\tau} \|v - u\|_{L^1(\Omega)}^2.$$

Il est utile de remarquer que le domaine de $\overline{\mathcal{W}}$ n'est pas vide dans le sens où il existe des fonctions de L^1 telles que $\overline{\mathcal{W}}(u) < +\infty$: par exemple, la fonction

$$u(x) = \frac{1}{1 + |x|^{d+1}}.$$

Après de simples calculs, on trouve, pour presque tout x :

$$|\nabla u| \left| \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right|^2 = (d+1)(d-1)^2 \frac{|x|^{d-2}}{(1 + |x|^{d+1})^2}.$$

Cette fonction est dans L^1 donc $\overline{\mathcal{W}}(u) \leq \mathcal{W}(u) < +\infty$.

Comme $\overline{\mathcal{W}}$ est positive, la propriété de coercivité est automatiquement vérifiée. La semi-continuité inférieure est aussi vérifiée car la définition de la relaxée est faite pour satisfaire cette propriété.

Il ne reste plus qu'à voir la propriété de compacité. Malheureusement, la fonctionnelle $\overline{\mathcal{W}}$ à elle seule ne peut pas garantir de la compacité. Comme nous l'avons vu sur les ensembles, la compacité vient d'une borne sur le périmètre. Du point de vue des fonctions, c'est donc sur la variation totale qu'on impose une borne.

Notation 6.15. On note $\mathcal{L}_M(\Omega)$ l'ensemble

$$\mathcal{L}_M(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) \mid \|Du\|(\Omega) \leq M\}.$$

On peut noter que grâce à la semi-continuité inférieure de la variation totale, l'espace $\mathcal{L}_M(\Omega)$ est fermé dans $L^1(\Omega)$. On peut maintenant appliquer le théorème d'Ambrosio-Gigli-Savaré pour avoir l'existence du mouvement minimisant.

Théorème 6.16. Soit Ω un ouvert borné à bord lipschitzien de \mathbb{R}^d . L'énergie $\overline{\mathcal{W}}$ définie sur $\mathcal{L}_M(\Omega)$ admet un mouvement minimisant dans $AC_{loc}^2([0, +\infty[, \mathcal{L}_M(\Omega))$.

Preuve.

Le fait de s'être restreint à un espace plus petit ne change pas le caractère coercif et semi-continue inférieurement de l'énergie \mathcal{W} . La propriété de compacité vient de la compacité de l'ensemble des fonctions à variation bornée définies sur un ouvert borné lipschitzien Ω pour la topologie L^2 . Ainsi $\overline{\mathcal{W}}$ vérifie les trois propriétés minimisantes et admet donc un mouvement minimisant. \square

Flot de Willmore en dimension 2

Dans ce chapitre, nous étudions le flot de l'énergie de redressement-raccourcissement dans \mathbb{R}^2 défini pour un ensemble dont le bord est régulier et de classe C^2 par

$$\mathcal{F}(E) = \int_{\partial E} (\lambda^2 + \kappa^2) d\mathcal{H}^1,$$

où λ est une constante (strictement positive), κ la courbure du ∂E et \mathcal{H}^1 la mesure de Hausdorff de dimension 1 (ou mesure de longueur). Plus exactement nous allons définir un flot par les mouvements minimisants de cette énergie et étudier ses propriétés (existence et régularité).

Un mouvement minimisant est une formulation variationnelle d'un flot. Afin de pouvoir minimiser l'énergie \mathcal{F} nous avons besoin de semi-continuité inférieure. C'est pourquoi nous utilisons la relaxée semi-continue inférieurement de \mathcal{F} pour la topologie L^1 définie par

$$\overline{\mathcal{F}}(E) = \inf \left(\liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(E_k) \mid |E \Delta E_k| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \right).$$

Cette énergie correspond à celle présentée dans le Chapitre 2 Section 2.

Comme introduit en début de partie, la définition d'un flot par mouvement minimisant passe par la construction par récurrence d'un flot discret depuis un ensemble initial E_0 :

$$E_{n+1} \in \operatorname{argmin}_E \left(\overline{\mathcal{F}}(E) + \frac{1}{\tau} \int_{E_n \Delta E} |d(x, E_n)| dx \right).$$

Nous allons ainsi étudier ce problème d'optimisation et la limite du flot discret lorsque $\tau \rightarrow 0$. Nous rappelons que d est la distance signée dans \mathbb{R}^2 , nous notons *dist* la distance canonique.

Ce chapitre est le fruit¹ d'un travail en cours. Nous avons donc seulement des résultats partiels. Notamment nous montrons que le problème de minimisation ci-dessus admet une solution et que toute solution est presque aussi régulière que les élastiques confinés du Chapitre 5. Autrement dit, le bord des ensembles minimisants coïncide avec une famille de courbes de classe $W^{3,\infty}$ globalement (avec une courbure dans BV). Localement ces courbes sont a priori seulement de classe C^4 et non C^∞ comme pour les élastiques. Nous montrons également que ce flot discret converge (modulo des hypothèses techniques) vers un flot continu pour lequel nous avons essayé d'étudier la régularité en espace et en temps.

1. Définitions et formalisme

Nous introduisons les notions et propriétés qui nous seront utiles dans la suite.

1.1. Système de courbes

Comme dans les Chapitres 1 et 5, nous rappelons qu'une courbe γ est régulière dès qu'elle est de classe C^1 et que γ' ne s'annule pas. De plus, un ensemble dans le plan est de classe C^2 dès que ∂E est localement représenté par une courbe régulière de classe C^1 .

1. pas encore mûr

Définition 7.1 (Énergie de redressement-raccourcissement). On définit l'énergie de redressement-raccourcissement d'un ensemble E de \mathbb{R}^2 par

$$\mathcal{F}(E) = \begin{cases} \int_{\partial E} (\lambda^2 + \kappa^2) d\mathcal{H}^1 & \text{si } E \text{ est de classe } C^2 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit aussi son enveloppe semi-continue inférieurement (par rapport à la topologie L^1) :

$$\overline{\mathcal{F}}(E) = \inf \left(\liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(E_k) \mid E_k \rightarrow E \right).$$

Comme nous travaillons avec la topologie L^1 , nos ensembles sont définis modulo les ensembles négligeables. Dans ce chapitre nous choisissons comme représentant de E celui qui vérifie

$$\forall x \in E, \quad \liminf_{r \rightarrow 0} |E \cap B(x, r)| > 0.$$

L'énergie étudiée dans ce chapitre est celle du Chapitre 2 Section 2. En particulier nous allons utiliser les mêmes notations. Nous rappelons néanmoins que $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ est un système de courbes de classe $W^{2,2}$ sans croisement dès que

- γ_i est une courbe fermée régulière de classe $W^{2,2}$;
- $\gamma'_i(t)$ et $\gamma'_j(s)$ sont colinéaires pour i, j, t et s tels que $\gamma_i(t) = \gamma_j(s)$.

Pour un système de courbes Γ , on note

$$A_\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \setminus (\Gamma) \mid \text{ind}_\Gamma(x) = 1\}$$

où $\text{ind}_\Gamma = \sum \text{ind}_{\gamma_i}$. Par ailleurs, l'énergie \mathcal{F} s'étend naturellement aux systèmes de courbes en définissant

$$\mathcal{F}(\Gamma) = \sum_{i=1}^N \int_{(\gamma_i)} (\lambda^2 + \kappa^2) d\mathcal{H}^1.$$

Soit E un ensemble, on dit que Γ est un système de courbes pour E si

- Γ est régulière de classe $W^{2,2}$ et sans croisement ;
- $\partial E \subset (\Gamma)$;
- $E = A_\Gamma$.

On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des système de courbes de E . Nous utiliserons le résultat principal de Bellettini *et al.*

Théorème 7.2 ([14, Proposition 6.1]). Si $E \subset \mathbb{R}^2$ satisfait $\overline{\mathcal{F}}(E) < +\infty$ alors $\mathcal{A}(E)$ est non vide et

$$\overline{\mathcal{F}}(E) = \min_{\Gamma \in \mathcal{A}(E)} \mathcal{F}(\Gamma).$$

Un système de courbes réalisant ce minimum est appelé système minimal de courbes.

En particulier, si E est de classe C^2 alors $\overline{\mathcal{F}}(E) = \mathcal{F}(E)$ ([14, Théorème 8.1]).

1.2. Premières propriétés du mouvement minimisant

Dans cette section, nous précisons l'utilisation du mouvement minimisant pour définir le flot de $\overline{\mathcal{F}}$ et nous donnons quelques propriétés du flot discret.

Soit E_0 un ensemble de \mathbb{R}^2 tel que $\overline{\mathcal{F}}(E_0) < +\infty$ et soit $\tau > 0$, le flot discret est défini par

$$(13) \quad E_{n+1} \in \underset{E}{\text{argmin}} \left(\overline{\mathcal{F}}(E) + \frac{1}{\tau} \int_{E_n \Delta E} |d(x, E_n)| dx \right)$$

où $d(\cdot, E_n)$ est la distance signée à l'ensemble E_n .

Nous allons prouver l'existence de ce flot discret dans la section suivante. En particulier nous utiliserons le lemme suivant indiquant un contrôle du périmètre par l'énergie $\overline{\mathcal{F}}$.

Lemme 7.3. *Pour tout ensemble E , on a $P(E) \leq \lambda^{-2}\overline{\mathcal{F}}(E)$.*

Preuve.

C'est évident pour les ensembles réguliers car

$$\overline{\mathcal{F}}(E) = \mathcal{F}(E) = \lambda^2 P(E) + \int_{\partial E} k^2 d\mathcal{H}^1.$$

Dans le cas contraire, soit $(E_k)_k$ une suite d'ensembles réguliers convergeant vers E (en topologie L^1). Grâce à la régularité, on a

$$P(E_k) \leq \lambda^{-2}\mathcal{F}(E_k).$$

Ainsi

$$P(E) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} P(E_k) \leq \lambda^{-2} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(E_k).$$

En prenant la borne inférieure sur toutes les suites d'ensembles réguliers convergeant vers E (et sachant que $\mathcal{F}(E_k) < +\infty$ uniquement pour les ensembles réguliers), on obtient

$$P(E) \leq \lambda^{-2} \inf_{(E_k)_k} \left(\liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(E_k) \right) = \lambda^{-2}\overline{\mathcal{F}}(E).$$

□

En admettant pour le moment l'existence du flot discret (nous le prouverons dans la prochaine section), on peut facilement déduire la proposition suivante du problème (13).

Proposition 7.4. *Soit $(E_n)_n$ un flot discret défini par (13), on a :*

- $(\overline{\mathcal{F}}(E_n))_n$ est décroissante et bornée ;
- $(P(E_n))_n$ est uniformément bornée par $\lambda^{-2}\overline{\mathcal{F}}(E_0)$;
- de plus

$$\int_{E_n \Delta E_{n+1}} |d_{E_n}| dx \leq \tau \left(\overline{\mathcal{F}}(E_n) - \overline{\mathcal{F}}(E_{n+1}) \right).$$

Preuve.

Par définition, pour tout ensemble E :

$$\overline{\mathcal{F}}(E_{n+1}) + \frac{1}{\tau} \int_{E_n \Delta E_{n+1}} |d(x, E_n)| dx \leq \overline{\mathcal{F}}(E) + \frac{1}{\tau} \int_{E_n \Delta E} |d(x, E_n)| dx.$$

On déduit les trois points de la proposition en choisissant $E = E_n$ et en utilisant le Lemme 7.3. □

Le flot constant par morceaux est défini par

$$E_\tau(t) = E_{[t/\tau]}$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Le principe est de montrer qu'à une sous-suite près, cette famille de flot converge vers un flot limite :

$$E(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} E_\tau(t).$$

Remarquons qu'en utilisant les semi-continuités inférieures du périmètre et de \mathcal{F} , les deux premiers points de la Proposition 7.4 nous donnent une borne naturelle sur le périmètre et la courbure de $E(t)$ (c'est-à-dire de la régularité en espace) :

$$P(E(t)) \leq \lambda^{-2}P(E_0) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{F}}(E(t)) \leq \overline{\mathcal{F}}(E_0).$$

Nous verrons que le troisième point induira plutôt de la régularité en temps sur le flot limite.

2. Flot discret et estimations

Dans cette section, nous étudions le problème d'optimisation (13). Nous allons prouver l'existence du flot discret et démontrer quelques estimations.

2.1. Existence du flot discret

Soit F un ensemble de \mathbb{R}^2 satisfaisant $\overline{\mathcal{F}}(F) < +\infty$, le problème (13) s'écrit

$$\min_E \left(\overline{\mathcal{F}}(E) + \frac{1}{\tau} \int_{F \Delta E} |d(x, F)| dx \right).$$

On note l'énergie ci-dessus $\overline{\mathcal{F}}_\tau(E, F)$ et on utilise la méthode directe du calcul des variations. Soit $(E_k)_k$ une suite minimisante de $\overline{\mathcal{F}}_\tau(\cdot, F)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\overline{\mathcal{F}}_\tau(E_k, F)$ est uniformément bornée en k par une constante notée M . En utilisant le Lemme 7.3, on peut voir que le périmètre de E_k est borné par $\lambda^{-2}M$. Comme $\overline{\mathcal{F}}(F) < +\infty$ alors F est borné, soit r_F un rayon tel que $F \subset B(0, r_F)$. En notant $q = \sup_k P(E_k) < +\infty$, on peut supposer que $E_k \subset B(0, r_F + q)$. En effet, si $B(0, r_F + q) \cap E_k \neq \emptyset$ alors il existe une composante connexe, notée C_k , de E_k telle que $C_k \cap B(0, r_F) = \emptyset$. Enlever cette composante diminue les deux termes de $\overline{\mathcal{F}}_\tau(E_k, F)$ et ainsi on peut considérer $\tilde{E}_k = E_k \setminus C_k$ qui a une énergie plus basse.

Par conséquent, la suite minimisante $(E_k)_k$ est bornée et a son périmètre uniformément borné. Il existe donc une sous-suite convergeant vers une limite E en topologie L^1 . Par définition $\overline{\mathcal{F}}$ est semi-continue inférieurement. Concernant l'autre terme, on peut le réécrire

$$\int_{E \Delta F} |d(x, F)| dx = \int_E d(x, F) dx - \int_F d(x, F) dx.$$

Ainsi le terme correspondant dans $\overline{\mathcal{F}}_\tau(\cdot, F)$ est aussi semi-continue inférieurement. Donc on obtient

$$\overline{\mathcal{F}}_\tau(E, F) = \min \overline{\mathcal{F}}_\tau(\cdot, F).$$

En conclusion, le flot discret $(E_n)_n$ est bien défini.

2.2. Estimation en temps

La régularité en temps est plus délicate à obtenir à partir du problème (13). Nous cherchons une estimation de la forme

$$|E_n \Delta E_m| \leq C |\tau(n - m)|^\alpha$$

pour des constantes $\alpha > 0$ et $C > 0$ le long de la suite minimisante. Avoir une telle inégalité nous permettrait de déduire une estimation de la forme

$$|E(t) \Delta E(s)| \leq C |t - s|^\alpha.$$

Nous allons suivre la même stratégie que celle utilisée par Ambrosio pour l'étude du flot de courbure moyenne (défini par mouvement minimisant) [3]. Nous commençons par un lemme de densité sur la longueur d'une courbe ayant une énergie finie.

Lemme 7.5. Soit $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée de classe $W^{2,2}$ telle que

$$\mathcal{W}(\gamma) = \int_{(\gamma)} \kappa^2 d\mathcal{H}^1 < +\infty.$$

Alors, pour r dans $]0, \mathcal{W}(\gamma)^{-1}[$, pour tout $x \in (\gamma)$, on a

$$\mathcal{H}^1((\gamma) \cap B(x, r)) \geq 2r.$$

Preuve.

Soit $\theta(t)$ l'angle (orienté) que forme $\gamma'(t)$ avec l'axe des abscisses. Sans perte de généralité, on peut supposer que γ est paramétrée par longueur d'arc, $\theta(0) = 0$ et $\gamma(0) = x = 0$. Ainsi $\kappa(t) = \theta'(t)$, ℓ est la longueur de γ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $t > 0$,

$$|\theta(t)| = |\theta(t) - \theta(0)| = \left| \int_0^t \theta'(s) ds \right| \leq \sqrt{t} \sqrt{\int_0^t \theta'(s)^2 ds} \leq \sqrt{t} \sqrt{\mathcal{W}(\gamma)}.$$

En système de coordonnées, on écrit $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ (sachant que $\gamma'(0) = (1, 0)$ et $x = (0, 0)$) et ainsi

$$x_1(t) = \int_0^t \cos(\theta(s)) ds.$$

En utilisant $\cos(\theta) \geq 1 - \theta^2/2$ on calcule

$$x_1(t) \geq \int_0^t (1 - \theta(s)^2/2) ds \geq \int_0^t (1 - \mathcal{W}(\gamma)s^2/2) ds = t - \mathcal{W}(\gamma)t^2/4.$$

Comme γ est fermée, on a $x_1(\ell) = 0$ et ainsi $0 \geq \ell - \mathcal{W}(\gamma)\ell^2/4$, c'est-à-dire

$$(14) \quad \ell \mathcal{W}(\gamma) \geq 4.$$

De plus, $t \mapsto t - \mathcal{W}(\gamma)t^2/4$ est croissante sur $[0, 2/\mathcal{W}(\gamma)]$ et vaut $1/\mathcal{W}(\gamma)$ en $t = 2/\mathcal{W}(\gamma)$. Par conséquent, pour tout $0 < r < \mathcal{W}(\gamma)^{-1}$, il existe $t_1 > 0$ tel que $x_1(t) > r$ et $x_1(t) > 0$ pour tout $0 < t < t_1$. En utilisant un argument analogue, pour $t < 0$ il existe $t_2 < 0$ (modulo la périodicité de la courbe) tel que $x_1(t_2) < -r$ et $x_2(t) < 0$ pour tout $t_2 < t < 0$. Ainsi $\mathcal{H}^1((\gamma) \cap B(x, r)) \geq 2r$. \square

Le lemme suivant est un contrôle de la distance L^1 entre deux ensembles par le terme d'écart présent dans le problème (13).

Lemme 7.6 ([3, Confronto volume distanza]). Soit K un compact de \mathbb{R}^d tel qu'il existe $q > 0$ et $r_0 > 0$ satisfaisant

$$\forall r \in]0, r_0[, \forall x \in K, \quad \mathcal{H}^{d-1}(K \cap B(x, r)) \geq qr^{d-1}.$$

Alors, il existe $C > 0$ (dépendant seulement de d) tel que pour tout $R > r_0$ et pour tout borélien A :

$$|A \setminus K| \leq C \left[\frac{1}{q} \left(\frac{R}{r_0} \right)^{d-1} \mathcal{H}^{d-1}(K) \right]^{1/2} \left(\int_A \text{dist}(x, K) dx \right)^{1/2} + \frac{1}{R} \int_A \text{dist}(x, K) dx.$$

Cela nous permet de déduire l'estimation suivante.

Proposition 7.7. Soit $(E_n)_n$ un flot discret défini par (13), alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|E_n \Delta E_{n+1}| \leq C \sqrt{\overline{\mathcal{F}}(E_n)} \sqrt{\int_{E_n \Delta E_{n+1}} |d(x, E_n)| dx} + \frac{\overline{\mathcal{F}}(E_n)}{2} \int_{E_n \Delta E_{n+1}} |d(x, E_n)| dx.$$

Preuve.

Le flot discret satisfait $\overline{\mathcal{F}}(E_n) < +\infty$ et ainsi, par le Théorème 2.9, le bord ∂E_n est recouvert par un système de courbes $W^{2,2}$ sans croisement $\Gamma_n = (\gamma_{n,1}, \dots, \gamma_{n,N_n})$ avec

$$\int_{(\gamma_{n,i})} \kappa^2 d\mathcal{H}^1 \leq \overline{\mathcal{F}}(E_n).$$

En utilisant le Lemme 7.5, on a

$$\mathcal{H}^1((\gamma_{n,i}) \cap B(x, r)) \geq 2r$$

pour tout x dans $\bigcup_{i=1}^{N_n} (\gamma_{n,i})$ et r dans $]0, r_0[$ où $r_0 = \overline{\mathcal{F}}(E_n)^{-1}$. Ensuite on utilise le Lemme

7.6 avec $d = 2$, $q = 2$, $K = \bigcup_{i=1}^{N_n} (\gamma_{n,i})$, $r_0 = \overline{\mathcal{F}}(E_n)^{-1}$, $R = 2r_0$ et $A = E_n \Delta E_{n+1}$:

$$|E_n \Delta E_{n+1}| \leq C \sqrt{\mathcal{H}^1(K)} \sqrt{\int_{E_n \Delta E_{n+1}} \text{dist}(x, K) dx} + \frac{\overline{\mathcal{F}}(E_n)}{2} \int_{E_n \Delta E_{n+1}} \text{dist}(x, K) dx.$$

La preuve se termine en remarquant que $\mathcal{H}^1(K) \leq \overline{\mathcal{F}}(E_n)$ et, comme $K \subset \partial E_n$,

$$\text{dist}(x, K) \leq \text{dist}(x, \partial E_n) = |d(x, E_n)|.$$

□

Proposition 7.8. Soit $(E_n)_n$ un flot discret de (13), alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout n, m dans \mathbb{N} :

$$|E_n \Delta E_m| \leq C \overline{\mathcal{F}}(E_0) \sqrt{\tau |m - n|} + \frac{\tau}{2} \overline{\mathcal{F}}(E_0)^2.$$

Preuve.

On utilise le Lemme 7.3 et la Proposition 7.4 pour obtenir $P(E_n) \leq \lambda^{-2} \overline{\mathcal{F}}(E_0)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $n < m$. On utilise la Proposition 7.4 et le corollaire 7.7 pour évaluer

$$|E_n \Delta E_m| \leq C \sqrt{\overline{\mathcal{F}}(E_0)} \sqrt{\tau} \sum_{k=n}^{m-1} \left(\overline{\mathcal{F}}(E_k) - \overline{\mathcal{F}}(E_{k+1}) \right)^{1/2} + \tau \frac{\overline{\mathcal{F}}(E_0)}{2} \sum_{k=n}^{m-1} \left(\overline{\mathcal{F}}(E_k) - \overline{\mathcal{F}}(E_{k+1}) \right).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\sum_{k=n}^{m-1} \left(\overline{\mathcal{F}}(E_k) - \overline{\mathcal{F}}(E_{k+1}) \right)^{1/2} \leq \sqrt{m - n} \left(\sum_{k=n}^{m-1} \overline{\mathcal{F}}(E_k) - \overline{\mathcal{F}}(E_{k+1}) \right)^{1/2}.$$

En utilisant le fait que $(\overline{\mathcal{F}}(E_k))_k$ est décroissante, on obtient

$$\sum_{k=n}^{m-1} \left(\overline{\mathcal{F}}(E_k) - \overline{\mathcal{F}}(E_{k+1}) \right) \leq \overline{\mathcal{F}}(E_0).$$

Ainsi la proposition est prouvée.

□

2.3. Estimations de volume

Dans cette section, nous prouvons des résultats intermédiaires qui ne seront pas nécessairement utilisés car il s'agit d'un travail en cours au moment de la rédaction de ce manuscrit.

Lemme 7.9. *Soient F , E_1 et E_2 des ensembles de \mathbb{R}^2 tel que $E_2 \neq \emptyset$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et*

$$\overline{\mathcal{F}}(E_1 \cup E_2) \geq \overline{\mathcal{F}}(E_1) + \overline{\mathcal{F}}(E_2).$$

Alors, on a

$$\overline{\mathcal{F}}_\tau(E_1 \cup E_2, F) \geq \overline{\mathcal{F}}_\tau(E_1, F) + 4 \min(\lambda^2, 1) - \frac{1}{\tau} |E_2| d(F, E_2).$$

Preuve.

On calcule d'abord le terme de distance dans $\overline{\mathcal{F}}_\tau$. En utilisant $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ on a

$$\int_{(E_1 \cup E_2) \Delta F} |d(x, F)| dx = \int_{E_1} d(x, F) dx + \int_{E_2} d(x, F) dx - \int_F d(x, F) dx.$$

Notons que

$$\int_{E_2} d(x, F) dx \geq \int_{E_2} -\text{dist}(E_2, F) dx = -|E_2| \text{dist}(E_2, F)$$

on a

$$\int_{(E_1 \cup E_2) \Delta F} |d(x, F)| dx \geq \int_{E_1 \Delta F} |d(x, F)| dx - |E_2| \text{dist}(E_2, F).$$

Ainsi, comme $E_2 \neq \emptyset$ tout système minimal de courbes impliqué dans le calcul de $\overline{\mathcal{F}}(E_2)$ a au moins un élément γ . En utilisant (14) sur γ , on peut voir que

$$2 \leq \sqrt{\ell(\gamma)} \sqrt{\mathcal{W}(\gamma)} \leq \frac{1}{2} (\ell(\gamma) + \mathcal{W}(\gamma))$$

et donc

$$\overline{\mathcal{F}}(E_2) \geq \overline{\mathcal{F}}(\gamma) = \lambda^2 \ell(\gamma) + \mathcal{W}(\gamma) \geq 4 \min(1, \lambda^2).$$

En combinant les deux inégalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_\tau(E_1 \cup E_2, F) &\geq \overline{\mathcal{F}}(E_1) + \overline{\mathcal{F}}(E_2) + \frac{1}{\tau} \int_{(E_1 \cup E_2) \Delta F} |d(x, F)| dx \\ &\geq \overline{\mathcal{F}}(E_1) + 4 \min(1, \lambda^2) + \frac{1}{\tau} \left(\int_{E_1 \Delta F} |d(x, F)| dx - |E_2| \text{dist}(E_2, F) \right) \\ &\geq \overline{\mathcal{F}}_\tau(E_1, F) + 4 \min(\lambda^2, 1) - \frac{1}{\tau} |E_2| \text{dist}(F, E_2). \end{aligned}$$

□

Définition 7.10 (Composante connexe liée). *Soit E un ensemble tel que $\overline{\mathcal{F}}(E) < +\infty$ et Γ un système minimal de courbes. C est une composante connexe liée de E si C est une composante connexe de $E \cup (\Gamma)$. On appelle longueur de cette composante la longueur totale des courbes de Γ impliquées dans cette composante connexe liée. On la note $\ell(C)$.*

Lemme 7.11. *Soit $(E_n)_n$ un flot discret et C_n une composante connexe liée de E_n . Alors*

$$C_n \cap E_{n-1} \neq \emptyset$$

et on a

$$|C_n| \geq \frac{4 \min(\lambda^2, 1)}{\lambda^{-2} \overline{\mathcal{F}}(E_0)} \tau.$$

Preuve.

Par définition de C_n , le système minimal de courbes impliqué Γ_n peut être partagé en deux sous-systèmes :

- Γ_n^1 , un système de courbes de $E_n \setminus C_n$;
- Γ_n^2 , un système de courbes de C_n .

Par définition d'un système minimal de courbes, on a

$$\overline{\mathcal{F}}(E_n \setminus C_n) \leq \mathcal{F}(\Gamma_n^1)$$

et

$$\overline{\mathcal{F}}(C_n) \leq \mathcal{F}(\Gamma_n^2).$$

Ainsi

$$\overline{\mathcal{F}}(E_n \setminus C_n) + \overline{\mathcal{F}}(C_n) \leq \mathcal{F}(\Gamma_n^1) + \mathcal{F}(\Gamma_n^2) = \mathcal{F}(\Gamma_n) = \overline{\mathcal{F}}(E_n).$$

On obtient donc

$$\overline{\mathcal{F}}(E_n \setminus C_n) < \overline{\mathcal{F}}(E_n).$$

Pour la première partie du lemme, on suppose que $C_n \cap E_{n-1} = \emptyset$. On obtient alors une partition non triviale

$$E_n \Delta E_{n-1} = \left((E_n \setminus C_n) \Delta E_{n-1} \right) \cup \left(C_n \Delta E_{n-1} \right).$$

Par conséquent,

$$\int_{E_n \Delta E_{n-1}} |d(x, E_{n-1})| dx > \int_{(E_n \setminus C_n) \Delta E_{n-1}} |d(x, E_{n-1})| dx.$$

Donc $E_n \setminus C_n$ est un meilleur minimiseur (strictement) de $\overline{\mathcal{F}}_\tau(\cdot, E_{n-1})$ que E_n ce qui est impossible. Donc

$$C_n \cap E_{n-1} \neq \emptyset.$$

Pour la deuxième partie, on suppose que

$$|C_n| < \frac{4 \min(\lambda^2, 1)}{\lambda^{-2} \overline{\mathcal{F}}(E_0)} \tau.$$

En appliquant le Lemme 7.9 avec $F = E_{n-1}$, $E_1 = E_n \setminus C_n$ et $E_2 = C_n$, on obtient

$$\overline{\mathcal{F}}_\tau(E_n, E_{n-1}) \geq \overline{\mathcal{F}}_\tau(E_n \setminus C_n, E_{n-1}) + 4 \min(1, \lambda^2) - \frac{1}{\tau} |C_n| \text{dist}(C_n, E_{n-1}).$$

Comme $C_n \cap E_{n-1} \neq \emptyset$ et C_n est une composante connexe liée, on a pour tout x de C_n :

- soit $x \notin E_{n-1}$, alors

$$\text{dist}(x, \partial E_{n-1}) \leq \ell(C_n) \leq \lambda^{-2} \overline{\mathcal{F}}(E_0) ;$$

- soit $x \in E_{n-1}$, alors

$$d(x, \partial E_{n-1}) \leq \frac{1}{2} P(E_{n-1}) \leq \lambda^{-2} \overline{\mathcal{F}}(E_0).$$

Donc, pour tout x dans C_n on obtient

$$\text{dist}(x, \partial E_{n-1}) \leq \lambda^{-2} \overline{\mathcal{F}}(E_0)$$

et donc

$$\text{dist}(C_n, E_{n-1}) \leq \lambda^{-2} \overline{\mathcal{F}}(E_0).$$

Par conséquent,

$$\overline{\mathcal{F}}_\tau(E_n, E_{n-1}) \geq \overline{\mathcal{F}}_\tau(E_n \setminus C_n, E_{n-1}) + 4 \min(1, \lambda^2) - \frac{1}{\tau} |C_n| \lambda^{-2} \overline{\mathcal{F}}(E_0) > \overline{\mathcal{F}}_\tau(E_n \setminus C_n, E_{n-1})$$

ce qui est impossible. Donc le second point du lemme est montré. \square

3. Existence d'un flot continu

Dans cette section nous allons montrer la convergence du flot discret $E_\tau(t)$ vers un flot limite $E(t)$ continu en temps pour la topologie L^1 . En fait nous allons présenter une preuve incomplète dans le cas général. Cependant il existe deux moyens de la compléter en ajoutant une des hypothèses (au choix) :

- localisation du flot dans un compact ;
- simple connexité des composantes connexes.

Nous exposons un schéma de preuve dans le cas général et nous ajouterons l'une ou l'autre hypothèse lorsque cela sera nécessaire.

Soient $t > 0$ et $E_\tau(t)$ le flot discret. Comme le nombre de courbes d'un système minimal de $E_\tau(t)$ est borné par $\overline{\mathcal{F}}(E_\tau(t))$, lui même borné par $\overline{\mathcal{F}}(E_0)$, alors le nombre de courbes d'un système minimal, le nombre de composantes connexes et le nombre de composantes connexes liées sont bornés, par un entier noté N , uniformément en t et en τ .

Soit $(C_\tau^i(t))_{i \in I_\tau(t)}$ la famille des composantes connexes liées de $E_\tau(t)$ où $I_\tau(t)$ est un sous-ensemble de $\llbracket 1, N \rrbracket$. La longueur totale de ces composantes connexes liées est bornée par $\lambda^{-2}\overline{\mathcal{F}}(E_\tau(t))$. Ainsi, il existe une famille de points $(x_\tau^i(t))_{i \in I_\tau(t)}$ de \mathbb{R}^2 telle que

$$C_\tau^i(t) \subset B(x_\tau^i(t), R)$$

où R vaut $\frac{1}{2}\lambda^{-2}\overline{\mathcal{F}}(E_0)$.

Quitte à compléter la famille par $C_\tau^i(t) = \emptyset$ et $x_\tau^i(t) = 0$, on peut supposer que $I_\tau(t) = \llbracket 1, N \rrbracket$ et ainsi $C_\tau^i(t) - x_\tau^i(t)$ reste dans $B(0, R)$ et a un périmètre uniformément borné lorsque $\tau \rightarrow 0$. Donc, il existe des ensembles limites $C^i(t)$ tels que, à une sous-suite près, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$C_\tau^i(t) - x_\tau^i(t) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} C^i(t).$$

Si $|C^i(t)| = 0$, alors quel que soit le comportement de $x_\tau^i(t)$, la composante $C_\tau^i(t)$ disparaît en passant à la limite $\tau \rightarrow 0$ en topologie L^1 .

L'idée de la suite de la preuve est de montrer que si $C_\tau^i(t)$ ne disparaît pas à la limite alors $|x_\tau^i(t)|$ est uniformément bornée lorsque $\tau \rightarrow 0$ par une quantité ne dépendant que de t et de E_0 . Un moyen artificiel de ne regarder que les $x_i(t)$ bornés est de localiser dans un compact K . On a ainsi le théorème suivant :

Théorème 7.12. *Soient K un compact et E_0 un ensemble borné tel que $\overline{\mathcal{F}}(E_0) < +\infty$. Pour tout $t > 0$, pour tout flot discret $E_\tau(t)$ défini par (13), il existe une sous-suite $\tau_l \rightarrow 0$ et un ensemble limite $E(t)$ tels que*

$$E_{\tau_l}(t) \rightarrow E(t) \quad \text{dans } L^1(K).$$

Preuve.

Les arguments de la preuve ont été donnés précédemment : chaque composante $C_\tau^i(t) - x_\tau^i(t)$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ vers une limite $C^i(t)$. Si, pour τ assez petit, $C_\tau^i(t) \cap K = \emptyset$, alors $C^i(t) \cap K = \emptyset$. En particulier

$$C_\tau^i(t) \rightarrow \emptyset \quad \text{dans } L^1(K).$$

Sinon,

$$x_\tau^i(t) \in \overline{B}(0, R_0 + \lambda^2\overline{\mathcal{F}}(E_0)) + K,$$

qui est compact. Ainsi, à une sous-suite près, $x_\tau^i(t)$ converge vers un certain $x^i(t)$. Ainsi,

$$C_\tau^i(t) \rightarrow x^i(t) + C^i(t) \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^2).$$

En particulier, on a la même convergence dans $L^1(K)$. En notant I l'ensemble des indices pour lesquels on a cette convergence, I étant fini indépendamment de t et de τ , on peut

choisir une sous-suite commune pour laquelle toutes les composantes $C_\tau^i(t)$ convergent. On a donc

$$E_\tau(t) \rightarrow E(t) = \bigcup_{i \in I} \left(x^i(t) + C^i(t) \right) \quad \text{dans } L^1(K)$$

lorsque $\tau \rightarrow 0$ à une sous-suite près. \square

On reprend maintenant notre schéma de preuve dans le cas général. Soit $C_\tau^i(t)$ une composante connexe liée telle que

$$\limsup_{\tau \rightarrow 0} |C_\tau^i(t)| > 0.$$

Soit η_k une suite de réels dans $]0, 1[$. Partant de $i_0 = i$ et de $t_0 = t$, nous construisons par récurrence une suite décroissante $(t_k)_k$ et une suite d'indice $(i_k)_k$ telles que

$$(15) \quad C\overline{\mathcal{F}}(E_0)^2 \sqrt{|t_k - t_{k+1}|} = \eta_k u_k \quad \text{ou} \quad t_{k+1} = 0,$$

et

$$u_k = \limsup_{\tau \rightarrow 0} |C_\tau^{i_k}(t_k)| > 0$$

où C est la même constante que celle de la Proposition 7.8.

Le principe, dans ce cas, est de montrer que

$$|x_\tau^{i_{k+1}}(t_{k+1}) - x_\tau^{i_k}(t_k)| \leq 2R$$

et qu'il existe un entier $N(t)$ tel que, pour tout $k > N(t)$, $t_k = 0$. Ainsi

$$|x_\tau^i(t) - x_\tau^{i_{N(t)}}(0)| \leq 2RN(t)$$

avec $x_\tau^{i_{N(t)}}(0) \in E_0$ qui est borné.

Soient $t_0 = t$ et $i_0 = i$, on suppose que t_k et i_k sont construits. On définit t_{k+1} par la relation (15), c'est-à-dire

$$t_{k+1} = \max \left(0, t_k - \left(\frac{\eta_k u_k}{C\overline{\mathcal{F}}(E_0)^2} \right)^2 \right).$$

On considère

$$I_\tau = \{j \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid C_\tau^{i_k}(t_k) \cap C_\tau^j(t_{k+1}) \neq \emptyset\}.$$

Par définition de t_{k+1} pour τ assez petit, on a

$$C\overline{\mathcal{F}}(E_0)^2 \sqrt{\tau |[t_k/\tau] - [t_{k+1}/\tau]|} + \frac{\tau}{2} \overline{\mathcal{F}}(E_0) < |C_\tau^{j_k}(t_k)|$$

et

$$\begin{aligned} \left| C_\tau^{j_k}(t_k) \setminus \bigcup_{j \in I_\tau} C_\tau^j(t_{k+1}) \right| &\leq |E_\tau(t_k) \Delta E_\tau(t_{k+1})| \\ &\leq C\overline{\mathcal{F}}(E_0)^2 \sqrt{\tau |[t_k/\tau] - [t_{k+1}/\tau]|} + \frac{\tau}{2} \overline{\mathcal{F}}(E_0). \end{aligned}$$

Cependant

$$\left| C_\tau^{j_k}(t_k) \setminus \bigcup_{j \in I_\tau} C_\tau^j(t_{k+1}) \right| = |C_\tau^{j_k}(t_k)| - \sum_{j \in I_\tau} |C_\tau^{j_k}(t_k) \cap C_\tau^j(t_{k+1})|$$

donc

$$u_k = \limsup_{\tau \rightarrow 0} |C_\tau^{j_k}(t_k)| \leq C\overline{\mathcal{F}}(E_0)^2 \sqrt{|t_k - t_{k+1}|} + \limsup_{\tau \rightarrow 0} \sum_{j \in I_\tau} |C_\tau^{j_k}(t_k) \cap C_\tau^j(t_{k+1})|.$$

Ainsi, par définition de t_{k+1} ,

$$\limsup_{\tau \rightarrow 0} \sum_{j \in I_\tau} |C_\tau^{j_k}(t_k) \cap C_\tau^j(t_{k+1})| > 0.$$

Soit j_τ un indice tel que

$$|C_\tau^{j_\tau}(t_{k+1})| = \max_{j \in I_\tau} |C_\tau^j(t_{k+1})|.$$

On calcule

$$|C_\tau^{j_\tau}(t_{k+1})| \geq \frac{1}{\text{card}(I_\tau)} \sum_{j \in I_\tau} |C_\tau^j(t_{k+1})| \geq \frac{1}{N} \sum_{j \in I_\tau} |C_\tau^{j_k}(t_k) \cap C_\tau^j(t_{k+1})|.$$

Comme $(j_\tau)_\tau$ est une suite bornée d'entiers, elle est stationnaire à une sous-suite près et on note i_{k+1} sa limite. On obtient ainsi

$$u_{k+1} = \limsup_{\tau \rightarrow 0} |C_\tau^{i_{k+1}}(t_{k+1})| \geq \frac{1}{N} \limsup_{\tau \rightarrow 0} \sum_{j \in I_\tau} |C_\tau^{i_k}(t_k) \cap C_\tau^j(t_{k+1})| > 0.$$

De plus,

$$u_{k+1} \geq \frac{1}{N} \left(u_k - C\overline{\mathcal{F}}(E_0)^2 \sqrt{|t_k - t_{k+1}|} \right) = \frac{1}{N} (1 - \eta_k) u_k.$$

Par récurrence, les suites $(t_k)_k$ et $(i_k)_k$ sont construites et satisfont

$$t - t_{k+1} = \sum_{l=0}^k (t_l - t_{l+1}) = \frac{1}{C^2 \overline{\mathcal{F}}(E_0)^4} \sum_{l=0}^k \eta_k^2 u_k^2.$$

♣ *Résultat admis* : on peut trouver une suite $(\eta_k)_k$ telle que $\sum u_k^2 \eta_k^2 = +\infty$. Nous n'avons pas réussi à prouver la divergence de cette série pour le moment, c'est pourquoi la preuve est incomplète. Nous terminons d'abord la démonstration avant de voir comment la simple connexité nous permet de trouver une telle suite $(\eta_k)_k$.

Supposons qu'il existe une telle suite, alors il existe k_0 tel que

$$\sum_{l=0}^{k_0} \eta_l^2 u_l^2 \geq t,$$

c'est-à-dire que $t_{k_0+1} = 0$. On note $N(t)$ le plus petit de ces entiers.

Une conséquence de la définition de i_k est d'avoir

$$C_\tau^{i_k}(t_k) \cap C_\tau^{i_{k+1}}(t_{k+1}) \neq \emptyset$$

et ainsi, comme il s'agit de deux composantes connexes liées de longueur totale bornée, on a

$$|x_\tau^{i_{k+1}}(t_{k+1}) - x_\tau^{i_k}(t_k)| \leq 2R.$$

En sommant sur k jusqu'à $N(t)$, il existe $x_\tau^0 \in E_0 \subset B(0, R_0)$ tel que, pour tout τ suffisamment petit, $|x_\tau^i(t) - x_\tau^0| \leq 2RN(t)$, c'est-à-dire

$$|x_\tau^i(t)| \leq R_0 + 2RN(t).$$

Donc, à une sous-suite près, il existe $x^i(t)$ tel que $x_\tau^i(t) \rightarrow x^i(t)$ lorsque $\tau \rightarrow 0$. Par conséquent,

$$C_\tau^i(t) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} x^i(t) + C^i(t).$$

Ainsi, cela permet d'avoir la convergence de $E_\tau(t)$ vers

$$E(t) = \bigcup_{i=1}^N (x^i(t) + C^i(t))$$

dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.

On a cependant le théorème suivant en ajoutant une hypothèse de simple connexité.

Théorème 7.13. *Soit E_0 un ensemble borné tel que $\overline{\mathcal{F}}(E_0) < +\infty$. Pour tout $t > 0$, soit $E_\tau(t)$ un flot discret défini par (13). Si les composantes connexes de $E_\tau(t)$ sont simplement connexes, alors il existe une sous-suite $\tau_l \rightarrow 0$ et un ensemble limite $E(t)$ tels que*

$$E_{\tau_l}(t) \rightarrow E(t) \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^2).$$

Preuve.

Il est connu que, pour une courbe simple γ , l'aire du domaine encerclé par γ est bornée par en dessous par son énergie de flexion (voir [29, 69]). Plus précisément

$$\mathcal{W}(\gamma)^2 \text{aire}(\gamma) \geq 4\pi^3.$$

où $\text{aire}(\gamma)$ désigne l'aire du domaine encerclé par γ . Dans notre contexte, les courbes d'un système minimal Γ_n de E_n peuvent être obtenues comme limite de courbes simples (voir [13, Lemme 3.3]). Ainsi l'inégalité ci-dessus passe à la limite sur les courbes de Γ_n .

Si on suppose que chaque composante connexe liée de E_n est simplement connexe, alors chaque courbe de Γ_n coïncide avec le bord de C_n et on obtient

$$|C_n| \geq \frac{4\pi^3}{\overline{\mathcal{F}}(E_0)^2}.$$

Par conséquent, la suite $(u_k)_k$ est bornée par en dessous et on peut choisir pour $(\eta_k)_k$ n'importe quelle suite constante dans $]0, 1[$ pour remplir les conditions de la construction précédente. \square

En dépit de l'existence du flot limite, on peut montrer les bornes suivantes sur tout flot continu.

Proposition 7.14. *Soit E_0 un ensemble de \mathbb{R}^2 satisfaisant $\overline{\mathcal{F}}(E_0) < +\infty$. Pour tout flot discret $E_\tau(t)$ défini par (13), si pour tout $t > 0$ il existe une sous-suite $\tau_l \rightarrow 0$ et un ensemble limite $E(t)$ tels que E_{τ_l} converge vers $E(t)$ dans $L^1(\mathbb{R}^2)$, alors il existe une sous-suite $\tau_k \rightarrow 0$ telle que pour tout $t > 0$, E_{τ_k} converge vers $E(t)$ dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. De plus, on a*

- $\overline{\mathcal{F}}(E(t)) \leq \overline{\mathcal{F}}(E_0)$;
- $P(E(t)) \leq \lambda^{-2} \overline{\mathcal{F}}(E_0)$;
- $|E(t)\Delta E(s)| \leq C\sqrt{|t-s|}$;

où $C > 0$ est une constante universelle.

Preuve.

Par un argument diagonal, on peut choisir la même sous-suite pour tout $t > 0$ dans \mathbb{Q} . On fixe $t, s > 0$ dans \mathbb{Q} et on passe à la limite $\tau_k \rightarrow 0$ dans la Proposition 7.8 (avec $n = \lceil t/\tau \rceil$ et $m = \lceil s/\tau \rceil$), ainsi

$$|E(t)\Delta E(s)| \leq C\sqrt{|t-s|}.$$

Pour $t > 0$ dans \mathbb{R} , on choisit une suite $(t_l)_l$ de nombres rationnels convergeant vers t . En utilisant l'inégalité précédente, on a que $(E(t_l))_l$ est une suite de Cauchy pour la topologie L^1 . Donc elle converge vers un ensemble $E(t)$ et sa limite ne dépend pas de la suite de rationnels $(t_l)_l$. Ainsi on récupère la convergence de $E_{\tau_k}(t)$ vers $E(t)$ en utilisant

$$|E_{\tau_k}(t)\Delta E(t)| \leq |E_{\tau_k}(t)\Delta E_{\tau_k}(t_l)| + |E_{\tau_k}(t_l)\Delta E(t_l)| + |E(t_l)\Delta E(t)|.$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe l_0 tel que pour tout $l > l_0$ on a

$$|E(t_l)\Delta E(t)| \leq \varepsilon/4 \quad \text{et} \quad C\sqrt{|t-t_l|} \leq \varepsilon/4.$$

Par conséquent il existe k_0 tel que, pour tout $k > k_0$, on a

$$|E_{\tau_k}(t_l)\Delta E(t_l)| \leq \varepsilon/4 \quad \text{et} \quad |E_{\tau_k}(t)\Delta E_{\tau_k}(t_l)| \leq C\sqrt{|t-t_l|} + \varepsilon/4.$$

Donc

$$|E_{\tau_k}(t)\Delta E(t)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, le mouvement minimisant existe et en utilisant la Proposition 7.8, on obtient

$$|E(t)\Delta E(s)| \leq C\sqrt{|t-s|}.$$

Finalement, comme P et $\overline{\mathcal{F}}$ sont semi-continues inférieurement, on a

$$P(E(t)) \leq \liminf_{\tau_k \rightarrow 0} P(E_{\tau_k}(t)) \leq \lambda^{-2}\overline{\mathcal{F}}(E_0)$$

grâce au Lemme 7.3 et

$$\overline{\mathcal{F}}(E(t)) \leq \liminf_{\tau_k \rightarrow 0} \overline{\mathcal{F}}(E_{\tau_k}(t)) \leq \overline{\mathcal{F}}(E_0)$$

par la Proposition 7.4. □

Cette proposition est vraie en remplaçant L^1 par L^1_{loc} . En effet, toutes les convergences en volume peuvent être localisées dans un compact et les composantes connexes liées de $E_\tau(t)$ qui ne touchent pas K disparaissent à la limite dans E_t en faisant diminuer le périmètre et l'énergie $\overline{\mathcal{F}}$.

4. Régularité du flot discret en espace

Dans cette section, on étudie l'équation d'Euler du flot afin d'obtenir un peu plus de régularité sur $\partial E(t)$. On rappelle

$$\overline{\mathcal{F}}_\tau(E, F) = \overline{\mathcal{F}}(E) + \frac{1}{\tau} \int_{E\Delta F} |d(x, F)| dx$$

et on note $\Delta(E, F)$ le terme de distance entre E et F . Par les mêmes calculs que dans le Chapitre 5 (Section 5), on obtient la variation première de $\overline{\mathcal{F}}$ en γ une courbe régulière fermée :

$$\overline{\mathcal{F}}(\gamma + \varepsilon\delta) = \overline{\mathcal{F}}(\gamma) + \varepsilon \int_0^{\ell(\gamma)} \left[2\gamma^{[2]} \cdot \delta'' - 3(|\gamma''|^2\gamma') \cdot \delta' + \lambda^2\gamma' \cdot \delta' \right] ds + o(\varepsilon)$$

où δ est un champ de vecteurs lisse défini le long de γ . Pour le second terme de $\overline{\mathcal{F}}_\tau(E, F)$, on a

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi_\varepsilon(E), F) &= \int_{\varphi_\varepsilon(E)\Delta F} |d(x, F)| dx = \int_{E\Delta F} |d(x, F)| dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{\partial E} \nu(x) \cdot X(x) d(x, F) d\mathcal{H}^1(x) + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

où φ_t est une famille à un paramètre de C^1 difféomorphisme avec

$$\left. \frac{d\varphi_t}{dt} \right|_{t=0} = X$$

et ν la normale extérieure à ∂E . Seules les valeurs de X le long de ∂E sont requises pour cette expression, on introduit ainsi les notations suivantes.

Notation 7.15. Soient γ une courbe régulière, E un ensemble tel que $\partial E \subset (\gamma)$ et δ un champ de vecteurs lisse défini le long de γ . On note les variations premières

$$d\bar{\mathcal{F}}(\gamma).\delta = \int_0^{\ell(\gamma)} \left[2\gamma^{[2]} \cdot \delta'' - 3(|\gamma''|^2 \gamma') \cdot \delta' + \lambda^2 \gamma' \cdot \delta' \right] ds$$

et

$$d\Delta(E, F).\delta = \int_{\partial E} \nu(s) \cdot \delta(s) d(\gamma(s), F) ds.$$

Pour le flot discret $(E_n)_n$ donné par (13) et par le Théorème 2.9, l'énergie $\bar{\mathcal{F}}(E_n)$ est donnée par un système minimal de courbes $\Gamma_n = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$. Nous avons besoin de définir la notion de petite perturbation de E_n par un système de champ de vecteurs le long de Γ_n .

Définition 7.16 (Perturbation d'un système de courbes). *Soient E un ensemble et Γ un système minimal de E . On dit que δ est une perturbation de E si $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N)$ est un système de champs de vecteurs lisses ayant la même paramétrisation que Γ . La perturbation induite sur E par δ est donnée par*

$$E + \varepsilon\delta = A_{\Gamma + \varepsilon\delta}$$

où $\Gamma + \varepsilon\delta = (\gamma_1 + \varepsilon\delta_1, \dots, \gamma_N + \varepsilon\delta_N)$.

Remarque 7.17. Évidemment, la condition d'indice $\text{ind}_{\Gamma + \varepsilon\delta} \subset \{0, 1\}$ nous interdit de considérer toutes les perturbations. On dit qu'une perturbation δ est admissible dès que la condition d'indice ci-dessus est satisfaite pour ε suffisamment petit. Par exemple, pour tout s, t tels que $\gamma_i(t) = \gamma_j(s)$, on écrit ces courbes localement comme le graphe de fonctions au dessus de leur tangente commune dans un système de coordonnées $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On suppose que localement $\gamma_i \leq \gamma_j$ et ainsi la condition d'indice est vérifiée dès que

$$\delta_i(t) \cdot \vec{j} \leq \delta_j(s) \cdot \vec{j}.$$

Ainsi on peut calculer la variation première de $\bar{\mathcal{F}}_\tau(\cdot, F)$ en étendant les calculs précédents au cas où ∂E_n est recouvert par une famille finie de courbes régulières. Comme tout système minimal de courbes Γ_n de E_n est une limite d'un système disjoint de courbes simples (voir [13, 14]), alors chaque courbe $\gamma_{n,i}$ du système minimal hérite d'une normale extérieure $\nu_{n,i}$. On peut ainsi étendre $d\Delta(\cdot, F)$ à Γ_n par

$$d\Delta(\gamma_{n,i}, F).\delta_i = \int_0^{\ell(\gamma_{n,i})} \nu_{n,i}(s) \cdot \delta_i(s) d(\gamma_{n,i}(s), F) ds.$$

Par conséquent, on a

$$\bar{\mathcal{F}}_\tau(E_n + \varepsilon\delta, F) = \bar{\mathcal{F}}_\tau(E_n, F) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N_n} \left(d\bar{\mathcal{F}}(\gamma_{n,i}).\delta_i + \frac{1}{\tau} d\Delta(\gamma_{n,i}, F).\delta_i \right) + o(\varepsilon).$$

On note

$$d\bar{\mathcal{F}}_\tau(E_n, F).\delta = \sum_{i=1}^{N_n} \left(d\bar{\mathcal{F}}(\gamma_{n,i}).\delta_i + \frac{1}{\tau} d\Delta(\gamma_{n,i}, F).\delta_i \right).$$

Remarque 7.18. Grâce à ce choix de normale extérieure $\nu_{n,i}$, si une perturbation δ conserve une partie fantôme de ∂E (c'est-à-dire un arc de $\Gamma \setminus \partial E$) autrement dit si la perturbation est la même le long de tous les arcs de Γ recouvrant cette partie fantôme, alors l'orientation des normales $\nu_{n,i}$ impliquées dans ces arcs donne des annulations dans le calcul de $d\Delta(\gamma_{n,i}, F)$. Ainsi dans l'expression totale

$$\sum_{i=1}^{N_n} \left(\frac{1}{\tau} d\Delta(E_{n,i}, F) \cdot \delta \right),$$

on a aucune contribution de cette partie fantôme.

Par minimalité, on a

$$d\overline{\mathcal{F}}_\tau(E_n, F) \cdot \delta \geq 0$$

pour toute perturbation admissible δ . En utilisant les mêmes constructions que dans le Chapitre 5 (Section 5), on obtient que

$$d\overline{\mathcal{F}}_\tau(E_n, F)$$

est une mesure de Radon à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Par conséquent, le même argument d'amorce nous donne le théorème suivant :

Théorème 7.19. *Soient E_n un flot discret défini par (13) et Γ_n un système minimal de courbes de E_n . Pour toute courbe $\gamma_{n,i}$ de ce système, on a*

- $\gamma_{n,i}$ est de classe $W^{3,\infty}$;
- $\gamma_{n,i}^{[3]}$ et $\kappa_{n,i}$ sont des fonctions à variation bornée ;
- le long des arcs libres de $\gamma_{n,i}$ (c'est-à-dire dans les zones sans contact avec Γ_n), l'équation d'Euler est vérifiée :

$$2\gamma_{n,i}^{[4]} + 3\left(|\gamma_{n,i}''|^2 \gamma_{n,i}'\right)' - \gamma_{n,i}'' + \frac{1}{\tau} d(\gamma_{n,i}, F)\nu = 0$$

et ainsi $\gamma_{n,i}$ est de classe $C^{4,1}$.

Comme $x \mapsto d(x, F)$ est seulement lipschitzienne sur \mathbb{R}^2 , on ne peut pas avoir plus de régularité en toute généralité. Γ_n est suffisamment régulière sur les arcs libres pour récupérer l'équation d'Euler sur la courbure : si ν est la normale donnée par rotation d'angle $\pi/2$ dans le sens direct de $\gamma_{n,i}'$ alors $\gamma_{n,i}$ satisfait

$$(16) \quad 2\kappa_{n,i}'' + \kappa_{n,i}^3 - \lambda^2 \kappa_{n,i} + \frac{1}{\tau} d(\gamma_{n,i}, F) = 0$$

le long de chaque arc libre.

On peut gagner un peu plus d'information sur les points simples isolés de $\text{sing}(E)$.

Définition 7.20 (Point simple isolé). *On note $\text{sing}(E)$ l'ensemble des points singuliers de ∂E (c'est-à-dire les points pour lesquelles ∂E ne peut pas s'écrire comme le graphe d'une fonction régulière). On dit que $x \in \text{sing}(E)$ est un point simple isolé si ∂E peut s'écrire localement comme la réunion du graphe de deux fonctions régulières dont l'intersection est réduite à $\{x\}$.*

Considérons x un point simple isolé de $\text{sing}(E_n)$. On note $\gamma_{n,i}$ et $\gamma_{n,j}$ les deux arcs de courbes et \mathcal{U} un voisinage de x donnés par la définition ci-dessus (rien empêche d'avoir $i = j$). On suppose que $x = \gamma_{n,i}(t) = \gamma_{n,j}(s)$ et on considère une perturbation quelconque δ telle que

- pour tout $k \neq i, j$, on a $\delta_{n,k} = 0$;
- pour tout u tel que $\gamma_{n,i}(u) \notin \mathcal{U}$, on a $\delta_{n,i}(u) = 0$;

– pour tout u tel que $\gamma_{n,j}(u) \notin \mathcal{U}$, on a $\delta_{n,j}(u) = 0$.
Ainsi, Γ est composée d'arcs libres dans \mathcal{U} sauf en x et comme la variation première $d\overline{\mathcal{F}}_\tau(E_n, F)$ de l'énergie est une mesure, on obtient

$$d\overline{\mathcal{F}}_\tau(E_n, F) \cdot \delta = a_i \cdot \delta_i(t) + a_j \cdot \delta_j(s)$$

où a_i, a_j sont dans \mathbb{R}^2 . On note \vec{j} le vecteur unitaire donné par la Remarque 7.17. Si

$$\delta_i(t) \cdot \vec{j} \leq \delta_j(s) \cdot \vec{j},$$

alors δ est admissible et, par minimalité, on a nécessairement que

$$a_i \cdot \delta_i(t) + a_j \cdot \delta_j(s) \geq 0.$$

Grâce au lemme suivant, on peut montrer que $a_i = -a_j$ et que ces vecteurs sont parallèles à \vec{j} .

Lemme 7.21. *Soient v, a_1, a_2 des vecteurs de \mathbb{R}^2 où $|v| = 1$. Si a_1 et a_2 vérifient*

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R} : \quad p_1 \cdot v \leq p_2 \cdot v \quad \Rightarrow \quad a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 \geq 0,$$

alors il existe $\beta \geq 0$ tel que $a_2 = -a_1 = \beta v$.

Preuve.

On se place dans une base telle que $v = (1, 0)$ et on écrit $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$, $p_1 = (X_1, Y_1)$ et $p_2 = (X_2, Y_2)$. Par hypothèse, si $X_1 \leq X_2$, alors $x_1 X_1 + y_1 Y_1 + x_2 X_2 + y_2 Y_2 \geq 0$. En choisissant $X_1 = X_2 = 0$, $Y_1 = 1$ et $Y_2 = 0$, on a $y_1 \geq 0$. Avec $Y_1 = -1$, on obtient $-y_1 \geq 0$. Donc $y_1 = 0$ et, de manière similaire $y_2 = 0$. De plus, en prenant $X_1 = X_2 = \pm 1$, on a $x_1 + x_2 \geq 0$ et $-x_1 - x_2 \geq 0$. Donc $x_1 = -x_2$. Finalement avec $X_1 = 0$ et $X_2 = 1$ on a $x_2 \geq 0$. Ainsi le lemme est prouvé. \square

Ainsi, nous avons prouvé la proposition suivante.

Proposition 7.22. *Soient $(E_n)_n$ un flot discret défini par (13) et Γ_n système minimal de courbes. Avec les notations précédentes, si x est un point simple isolé de $\text{sing}(E_n)$ alors il existe β un réel et v un vecteur unitaire normal à $\gamma_{n,i}$ et à $\gamma_{n,j}$ tel que*

$$2\gamma_{n,i}^{[4]} + 3\left(|\gamma_{n,i}''|^2 \gamma_{n,i}'\right)' - \gamma_{n,i}'' + \frac{1}{\tau} d_F(\gamma_{n,i})\nu = \beta v \delta_t$$

et

$$2\gamma_{n,j}^{[4]} + 3\left(|\gamma_{n,j}''|^2 \gamma_{n,j}'\right)' - \gamma_{n,j}'' + \frac{1}{\tau} d_F(\gamma_{n,j})\nu = -\beta v \delta_s$$

dans un voisinage local de x (où δ est une masse de Dirac).

5. Régularité du flot continu

Dans cette section nous voulons étudier le passage à la limite des équations de régularité obtenues précédemment. Malheureusement aucune piste n'a abouti en ce sens. Nous présentons néanmoins la démarche générale. Le principe est de passer à la limite $\tau \rightarrow 0$ dans l'équation (16) afin d'avoir de la régularité en espace et en temps. Le premier élément pour pouvoir faire ce passage à la limite est d'avoir une borne sur κ'' (par exemple une borne L^2).

Afin d'éviter les ambiguïtés, nous noterons ∂_s la dérivée par rapport au paramétrage des courbes et ∂_t la dérivée par rapport au temps le long du flot. En particulier, nous cherchons une borne sur $\partial_s^2 \kappa$.

Nous rappelons que le flot minimisant régulier de \mathcal{F} est donné par l'équation

$$(17) \quad \partial_t \gamma_t = -(2\partial_s^2 \kappa_t + \kappa_t^3 - \lambda^2 \kappa_t) \nu_t$$

où $(\gamma_t)_t$ est une famille à un paramètre de courbes simples et lisses dépendant de manière lisse en t et ν_t le vecteur unitaire normal à γ_t cohérent avec κ_t .

Nous commençons par faire un petit calcul afin de voir que, si une famille de courbes régulières γ_t vérifie l'équation (16), alors nécessairement elle vérifie aussi l'équation du flot régulier (17).

Soit γ_t une famille de courbes simples régulières évoluant d'après l'équation

$$\frac{d\gamma_t(s)}{dt} = a_t(s) \nu_t(s)$$

où est $(t, s) \mapsto a_t(s)$ une certaine fonction régulière. Soient $t > 0$ et $\tau > 0$, on suppose que E_t , le domaine encerclé par γ_t , vérifie

$$E_{t+\tau} \in \operatorname{argmin}_E \left(\overline{\mathcal{F}}(E) + \frac{1}{\tau} \int_{E \Delta E_t} |d(x, E_t)| dx \right).$$

Nous allons montrer qu'alors a_t vérifie

$$a_t = -(2\partial_s^2 \kappa_t + \kappa_t^3 - \lambda^2 \kappa_t).$$

En effet, quitte à changer l'orientation, on suppose que ν_t est la normale sortante E_t . L'évolution de γ_t est régulière en espace et en temps donc sa courbure vérifie l'équation

$$2\partial_s^2 \kappa_{t+\tau} + \kappa_{t+\tau}^3 - \lambda^2 \kappa_{t+\tau} = -\frac{1}{\tau} d(\gamma_{t+\tau}, E_t)$$

et, lorsque $\tau \rightarrow 0$, la partie gauche de cette égalité converge vers

$$2\partial_s^2 \kappa_t + \kappa_t^3 - \lambda^2 \kappa_t.$$

Il reste donc à prouver que

$$\frac{1}{\tau} d(\gamma_{t+\tau}, E_t) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} a_t.$$

Pour cela, on calcule

$$d(\gamma_{t+\tau}(s), E_t) = \pm \operatorname{dist}(\gamma_{t+\tau}(s), (\gamma_t))$$

avec le même signe que celui de $a_t(s)$. On peut écrire

$$\gamma_{t+\tau}(s) = \gamma_t(s) + a_t(s) \tau \nu_t(s) + o(\tau)$$

et ainsi

$$\operatorname{dist}(\gamma_{t+\tau}(s), (\gamma_t)) \leq |a_t(s)| \tau + o(\tau).$$

Comme (γ_t) est compacte, il existe s_τ tel que

$$d(\gamma_{t+\tau}(s), (\gamma_t)) = |\gamma_{t+\tau}(s) - \gamma_t(s_\tau)|.$$

Ainsi, on calcule, en notant $\gamma_t'(s) = v_t(s)$ le vecteur vitesse (qui est non nul car γ_t est régulière) et en remarquant que $v_t \cdot \nu_t = 0$,

$$\begin{aligned} |\gamma_{t+\tau}(s) - \gamma_t(s_\tau)| &= |\gamma_{t+\tau}(s) - \gamma_t(s) + \gamma_t(s) - \gamma_t(s_\tau)| \\ &= |a_t(s) \tau \nu_t(s) - (s_\tau - s) v_t(s) + o(\tau) + o(s_\tau - s)| \\ &= \left(a_t(s)^2 \tau^2 + |v_t(s)|^2 (s_\tau - s)^2 \right. \\ &\quad \left. + o(\tau^2) + o((s_\tau - s)^2) + o(\tau(s_\tau - s)) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi, comme

$$|\gamma_{t+\tau}(s) - \gamma_t(s_\tau)| \leq |a_t(s)| \tau + o(\tau),$$

on a

$$|v_t(s)|^2 (s_\tau - s)^2 + o(\tau^2) + o((s_\tau - s)^2) + o(\tau(s_\tau - s)) \leq o(\tau^2)$$

donc $s_\tau - s = o(\tau)$. Par conséquent

$$\text{dist}(\gamma_{t+\tau}(s), (\gamma_t)) = |a_t(s)|\tau + o(\tau),$$

ce qui nous mène à

$$d(\gamma_{t+\tau}(s), E_t) = a_t(s)\tau + o(\tau).$$

Donc

$$\frac{1}{\tau}d(\gamma_{t+\tau}(s), E_t) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} a_t(s)$$

et ainsi on retombe bien sur (17).

Nous étudions maintenant cette équation pour trouver des estimations qui se généralisent pour le flot discret. On commence par énoncer trois règles de calcul qui nous seront utiles dans la suite. Ces règles sont tirées de [106].

Lemme 7.23. *Soit γ_t une famille de courbe évoluant d'après l'équation (17), pour toute fonction régulière de la forme $u(t, s) = u(\gamma_t(s))$, on a*

$$\partial_t \partial_s u = \partial_s \partial_t u - \kappa a \partial_s u$$

où $a = 2\partial_s^2 \kappa + \kappa^3 - \lambda^2 \kappa$. De plus, pour la courbure, on a

$$\partial_t \kappa = -\partial_s^2 a - \kappa^2 a$$

et pour l'élément de longueur, on a

$$\partial_t(ds) = \kappa a ds.$$

Comme γ_t est une courbe fermée, on peut faire la double intégration par partie suivante

$$\int_{(\gamma_t)} \kappa \partial_s^2 a ds = \int_{(\gamma_t)} a \partial_s^2 \kappa ds.$$

De plus, grâce à ce lemme, on peut calculer formellement la décroissance de l'énergie \mathcal{F} le long du flot dans le cas régulier :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(\gamma_t) &= \frac{d}{dt} \int_{(\gamma_t)} (\lambda^2 + \kappa^2) ds \\ &= \int_{(\gamma_t)} \partial_t (\lambda^2 + \kappa^2) ds + (\lambda^2 + \kappa^2) \partial_t(ds) \\ &= \int_{(\gamma_t)} (2\kappa \partial_t \kappa + \lambda^2 \kappa a + \kappa^3 a) ds \\ &= \int_{(\gamma_t)} (-2\kappa \partial_s^2 a - \kappa^3 a + \lambda^2 \kappa a) ds \\ &= \int_{(\gamma_t)} (-2a \partial_s^2 \kappa - \kappa^3 a + \lambda^2 \kappa a) ds \\ &= - \int_{(\gamma_t)} a^2 ds. \end{aligned}$$

En intégrant sur t entre 0 et T , on obtient

$$\int_0^T \int_{(\gamma_t)} a^2 ds = \mathcal{F}(\gamma_0) - \mathcal{F}(\gamma_T) \leq \mathcal{F}(\gamma_0).$$

Nous développons le calcul de a^2 :

$$a^2 = 4|\partial_s^2 \kappa|^2 + \kappa^6 + \lambda^4 \kappa^2 + 4\kappa^3 \partial_s^2 \kappa - 4\lambda^2 \kappa \partial_s^2 \kappa - 2\lambda^2 \kappa^4.$$

L'idée maintenant est d'avoir une borne en norme L^2 sur $\partial_s^2 \kappa$ à partir de l'inégalité précédente et d'une borne sur $\|\kappa\|_2$ elle-même bornée par $\mathcal{F}(\gamma_0)$. Nous allons utiliser le lemme suivant (tiré de [10]) et surtout son corollaire.

Lemme 7.24 ([10, Théorème 3.70]). *Soit M une variété compacte sans bord de dimension d . Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq n \leq m$ et $q, r \in [1, +\infty]$. Pour α tel que $\frac{n}{m} \leq \alpha \leq 1$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in C^\infty(M)$ telle que*

$$\int_M f = 0,$$

on a

$$\|\nabla^n f\|_p \leq C \|\nabla^m f\|_r^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

où

$$\frac{1}{p} = \frac{n}{d} + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d} \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{q} \geq 0.$$

Si $r = \frac{d}{m-n} \neq 1$ et $a = 1$ alors l'inégalité n'est pas valable.

Corollaire 7.25. *Soient γ_t la famille de courbes précédentes et κ la courbure de γ_t . Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \geq 1$ et $0 \leq n < m$, pour tout $p \geq 2$, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|\partial_s^n \kappa\|_p \leq C \|\partial_s^m \kappa\|_2^\sigma \|\kappa\|_2^{1-\sigma}$$

où $\sigma = \frac{1}{m}(n + 1/2 - 1/p)$.

Preuve.

Comme γ_t est simple, régulière et fermée, on a

$$\int_{(\gamma_t)} \kappa \, ds = 2\pi.$$

On applique le lemme précédent à $\kappa - \frac{2\pi}{\ell}$ où ℓ est la longueur de γ_t , en remarquant que

$$\begin{aligned} \int_{(\gamma_t)} \left| \kappa - \frac{2\pi}{\ell} \right|^2 ds &= \int_{(\gamma_t)} \kappa^2 ds - \frac{4\pi}{\ell} \int_{(\gamma_t)} \kappa \, ds + \frac{4\pi^2}{\ell^2} \int_{(\gamma_t)} ds \\ &= \int_{(\gamma_t)} \kappa^2 ds - \frac{4\pi^2}{\ell} \leq \int_{(\gamma_t)} \kappa^2 ds. \end{aligned}$$

□

On utilise ce corollaire afin de borner les différentes expressions apparaissant dans $\int_{(\gamma_t)} a^2 ds$. Avec $n = 0, m = 2, p = 6$ et $\sigma = 1/6$, on a

$$\left(\int_{(\gamma_t)} \kappa^6 ds \right)^{\frac{1}{6}} \leq C \|\partial_s^2 \kappa\|_2^{1/6} \|\kappa\|_2^{5/6}.$$

Avec $n = 0, m = 2, p = 4$ et $\sigma = 1/8$, on a

$$\left(\int_{(\gamma_t)} \kappa^4 ds \right)^{\frac{1}{4}} \leq C \|\partial_s^2 \kappa\|_2^{1/8} \|\kappa\|_2^{7/8}.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left| \int_{(\gamma_t)} \kappa \partial_s^2 \kappa \, ds \right| \leq \|\partial_s^2 \kappa\|_2 \|\kappa\|_2.$$

On a aussi

$$\left| \int_{(\gamma_t)} \kappa^3 \partial_s^2 \kappa \, ds \right| \leq \|\partial_s^2 \kappa\|_2 \|\kappa^6\|_2^{5/6} \leq C^3 \|\partial_s^2 \kappa\|_2^{3/2} \|\kappa\|_2^{5/2}.$$

Ainsi, on a la minoration suivante

$$\int_{(\gamma_t)} a^2 ds \geq 4 \int_{(\gamma_t)} |\partial_s^2 \kappa|^2 ds + 4 \int_{(\gamma_t)} \kappa^3 \partial_s^2 \kappa ds + 4 \int_{(\gamma_t)} |\kappa|^6 ds - 4\lambda^2 \int_{(\gamma_t)} \kappa \partial_s^2 \kappa ds - 2\lambda^2 \int_{(\gamma_t)} |\kappa|^4 ds.$$

On utilise ensuite l'inégalité classique $\alpha\beta \leq \frac{\varepsilon}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\beta^2$. On obtient

$$\begin{aligned} \left| 4 \int_{(\gamma_t)} \kappa^3 \partial_s^2 \kappa ds \right| &\leq 2 \int_{(\gamma_t)} \left(\varepsilon_1 |\partial_s^2 \kappa|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} |\kappa|^6 \right) ds \\ &\leq 2\varepsilon_1 \|\partial_s^2 \kappa\|_2^2 + \frac{2}{\varepsilon_1} C^6 \|\partial_s^2 \kappa\|_2 \|\kappa\|_2^5 \\ &\leq 2\varepsilon_1 \|\partial_s^2 \kappa\|_2^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} C^6 \|\partial_s^2 \kappa\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon_2 \varepsilon_1} C^6 \|\kappa\|_2^{10} \\ &= \left(2\varepsilon_1 + C^6 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \|\partial_s^2 \kappa\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon_2 \varepsilon_1} C^6 \|\kappa\|_2^{10}. \\ \left| 4 \int_{(\gamma_t)} \kappa \partial_s^2 \kappa ds \right| &\leq 2 \int_{(\gamma_t)} \left(\varepsilon_3 |\partial_s^2 \kappa|^2 + \frac{1}{\varepsilon_3} |\kappa|^2 \right) ds \\ &\leq 2\varepsilon_3 \|\partial_s^2 \kappa\|_2^2 + \frac{2}{\varepsilon_3} \|\kappa\|_2^2. \\ \left| 2 \int_{(\gamma_t)} |\kappa|^4 ds \right| &\leq 2C^4 \|\partial_s^2 \kappa\|_2^{1/2} \|\kappa\|_2^{7/2} \\ &\leq C^4 \varepsilon_4 \|\partial_s^2 \kappa\|_2 + \frac{C^4}{\varepsilon_4} \|\kappa\|_2^{7/2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{(\gamma_t)} a^2 ds \geq P(\|\partial_s^2 \kappa\|_2) - Q(\|\kappa\|_2),$$

où P et Q désignent les polynômes

$$P = \left(4 - 2\varepsilon_1 + C^6 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 2\lambda^2 \varepsilon_3 \right) X^2 - C^4 \lambda^2 \varepsilon_4 X$$

et

$$Q = \frac{C^6}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} X^{10} + \frac{C^4 \lambda^2}{\varepsilon_4} X^7 + \frac{2\lambda^2}{\varepsilon_3} X^2.$$

On choisit $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon^2$ et $\varepsilon_3 = \varepsilon$, ainsi le polynôme du second degré

$$-X^2 + P = \left((3 - \varepsilon(2 + C^6 + 2\lambda^2))X - C^4 \lambda^2 \varepsilon_4 \right) X$$

s'annule en $X_0 = 0$ et en

$$X_1 = \frac{C^4 \lambda^2 \varepsilon_4}{3 - \varepsilon(2 + C^6 + 2\lambda^2)}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $X_1 > 0$ et on peut choisir ε_4 de sorte à ce que $X_1 = 1$. Ainsi pour $x \geq X_1 = 1$ on a

$$P(x) \geq x^2,$$

donc

$$x^2 \leq \max(1, P(x)).$$

Par conséquent,

$$\|\partial_s^2 \kappa\|_2^2 \leq \max \left(1, \int_{(\gamma_t)} a^2 ds + Q(\|\kappa\|_2) \right).$$

Comme a et κ sont bornées en norme L^2 par $\mathcal{F}(\gamma_0)$, on a bien une borne sur la norme L^2 de $\partial_s^2 \kappa$.

Revenons à notre flot discret E_τ , un autre objectif de l'étude de la régularité est de montrer que le mouvement minimisant coïncide avec le flot classique dans le cas régulier. En supposant que $E_\tau(t)$ converge vers un ensemble limite $E(t)$ régulier, on cherche à savoir si la courbure de ∂E_t vérifie l'équation du flot régulier (17).

Ainsi on suppose que $E_\tau(t)$ converge vers une famille d'ensembles réguliers $E(t)$ en topologie L^1 lorsque $\tau \rightarrow 0$ et pour $t \in [0, T]$. Grâce à la borne sur l'énergie

$$\overline{\mathcal{F}}(E_\tau(t)) \leq \overline{\mathcal{F}}(E_0),$$

on a qu'un système minimal de courbes $\Gamma_{t,\tau}$ de $E_\tau(t)$ converge dans $W^{2,2}$ (à une sous-suite près) vers un système limite Γ_t . Cependant, comme la limite de $(E_\tau(t))_\tau$ est $E(t)$, on a nécessairement que Γ_t est le système de courbes de $E(t)$ et que toute la suite $E_\tau(t)$ converge lorsque $\tau \rightarrow 0$. La convergence dans $W^{2,2}$ entraîne la convergence dans $C^{1,\alpha}$ (voir Chapitre 5 Section 2). Comme $E(t)$ est régulier, alors Γ_t est un système de courbes simples et disjointes. Grâce à la convergence $C^{1,\alpha}$, on récupère que $\Gamma_{t,\tau}$ est aussi un système de courbes simples et disjointes pour τ assez petit. Ainsi les courbes $\gamma_{t,\tau,i}$ de ce système vérifient l'équation d'Euler (16) :

$$2\partial_s^2 \kappa_{t,\tau,i} + \kappa_{t,\tau,i}^3 - \lambda^2 \kappa_{t,\tau,i} = -\frac{1}{\tau} d(\gamma_{t,\tau,i}, E_\tau(t - \tau)).$$

En élevant au carré et en intégrant en s , on obtient

$$\int_{(\gamma_{t,\tau,i})} (2\partial_s^2 \kappa_{t,\tau,i} + \kappa_{t,\tau,i}^3 - \lambda^2 \kappa_{t,\tau,i})^2 ds = \frac{1}{\tau^2} \int_{(\gamma_{t,\tau,i})} d(\gamma_{t,\tau,i}, E_\tau(t - \tau))^2 ds.$$

Le terme de gauche peut se minorer comme dans le cas régulier. Le terme de droite est relié à la décroissance de l'énergie. En sommant sur toutes les courbes $\gamma_{t,\tau,i}$ du système de courbes puis en "intégrant" sur $[0, T]$, on espère avoir une estimation de la forme

$$\sum_{k=1}^{[T/\tau]} \tau \int_{(\Gamma_{k\tau,\tau})} |\partial_s^2 \kappa|^2 ds \leq \text{fonction}(\overline{\mathcal{F}}(E_0)).$$

Une telle estimation nous permettrait de gagner suffisamment en régularité pour passer à la limite dans (16) et ainsi obtenir l'équation (17) sur $E(t)$.

Le flot des fonctions radiales

Dans ce chapitre, on caractérise le mouvement minimisant de l'énergie de Willmore relaxée dont le point de départ est une fonction radiale. En effet, dans ce cas particulier on peut démontrer et utiliser une formule de la co-aire nous permettant de reporter l'énergie d'une fonction sur celle de ses ensembles de niveau. En particulier, nous montrerons que le flot d'une fonction radiale est donné par une érosion par le haut du profil de cette fonction.

1. Définitions et formalisme

L'idée générale est d'étudier dans L^1 le mouvement minimisant de $\overline{\mathcal{W}}$ défini par minimisation successive de

$$u \mapsto \overline{\mathcal{W}}(u) + \frac{1}{2\tau} \|u - u_0\|_{L^1}^2.$$

Le problème général est trop complexe, c'est pourquoi on étudie une puissance différente, plus géométrique, de la courbure moyenne. De plus, on a vu précédemment que l'énergie de Willmore a besoin de contraintes pour pouvoir être minimisée, ainsi on se place dans un ouvert borné Ω .

Définition 8.1 (Énergie de Willmore invariante par changement d'échelle). *Soit u une fonction de $C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et E un ensemble de classe C^2 de \mathbb{R}^d . On définit*

$$\mathcal{W}_{d-1}(u) = \frac{1}{(d-1)^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u| \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|^{d-1} dx$$

et

$$\mathcal{W}_{d-1}(E) = \int_{\partial E} |H|^{d-1} d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Les relaxées de ces énergies sont définies de la même manière que précédemment. Pour toute fonction $u \in L^1(\Omega)$ et tout ensemble borélien $E \subset \Omega$:

$$\overline{\mathcal{W}}_{d-1}(u, \Omega) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{W}_{d-1}(u_n) \mid u_n \in C_c^2(\Omega), u_n \rightarrow u \text{ dans } L^1(\Omega) \right\}$$

et

$$\overline{\mathcal{W}}_{d-1}(E, \Omega) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{W}_{d-1}(E_n) \mid E_n \subset \Omega, \partial E_n \text{ de classe } C^2, E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1(\Omega) \right\}.$$

Par la suite, on notera

$$\mathcal{F}(u) = \overline{\mathcal{W}}_{d-1}(u, \Omega) + \frac{1}{2\tau} \|u - u_0\|_{L^1}^2.$$

L'intérêt de cette énergie de type Willmore est que les boules sont minimisantes. De plus, regarder une condition initiale radiale (c'est-à-dire une fonction dont chaque ensemble

de niveau est une boule) va nous permettre de montrer qu'un minimiseur de \mathcal{F} est radial. Ainsi on reste dans la même classe de fonctions le long du flot discret.

Définition 8.2 (Fonction radiale décroissante). *Soit $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que u est radiale décroissante s'il existe une fonction $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que, pour presque tout $s \in \mathbb{R}$, on a*

$$\{u \geq s\} = \overline{B}(0, r(s))$$

à un ensemble de mesure nulle près. Une telle fonction r est unique, modulo un ensemble de mesure nulle, et est appelée la fonction rayon de u .

Remarquons que la fonction rayon est nécessairement décroissante. De plus, étant donnée une fonction $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante, on peut définir

$$u(x) = \sup\{s \in \mathbb{R} \mid r(s) \geq |x|\}.$$

Ainsi u est radiale décroissante et r est sa fonction rayon.

À cause de difficultés techniques, on étudie le mouvement minimisant dans l'espace

$$L_{c+}^1(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\mathbb{R}^d) \mid u \geq 0, \text{supp}(u) \subset \Omega \right\}$$

où Ω est une boule. Nous allons montrer que partant d'une fonction u_0 radiale décroissante de $L_{c+}^1(\Omega)$ et de sa fonction rayon r_0 , le mouvement minimisant existe dans $L_{c+}^1(\Omega)$ et est donné par une érosion de u_0 :

$$u_t(x) = \min(u_0(x), \lambda(t))$$

où $\lambda : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction lipschitzienne et décroissante (voir Figure 8.1).

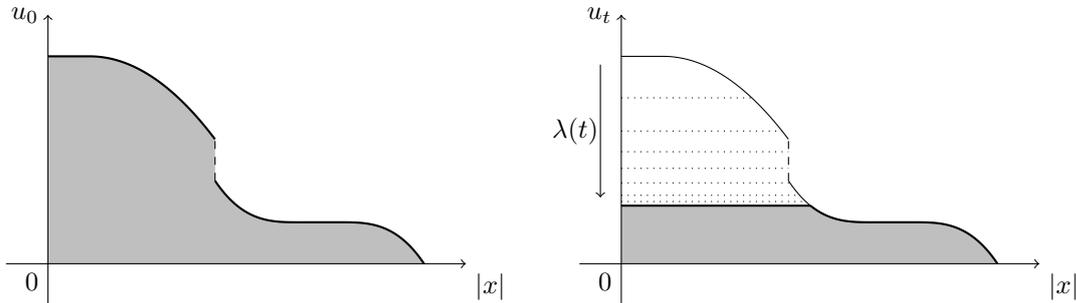


FIGURE 8.1. Mouvement minimisant d'une fonction radiale décroissante

De plus, si r_0 est continue, alors λ est caractérisée par l'équation différentielle

$$\begin{cases} \lambda'(t) &= -\frac{\omega_d}{\alpha_d^2} \frac{1}{r_0(\lambda(t))^{2d}} \\ \lambda(0) &= \sup u_0, \end{cases}$$

où ω_d est l'aire et α_d est le volume de la boule unité de \mathbb{R}^d .

La stratégie pour montrer ces résultats est de commencer par montrer une formule de la co-aire sur $\overline{\mathcal{W}}_{d-1}$ valable pour les fonctions radiales de $L_{c+}^1(\Omega)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{W}}_{d-1}(\{u \geq t\}, \Omega) dt = \overline{\mathcal{W}}_{d-1}(u, \Omega).$$

Ensuite, soit u un candidat à la minimisation de \mathcal{F} , on construit une fonction radiale décroissante \tilde{u} dont les ensembles de niveau (sont des boules et) ont le même volume que ceux de u . Cette transformation diminue les deux termes de \mathcal{F} : la distance L^1 et l'énergie $\overline{\mathcal{W}}$. La distance L^1 entre u_0 et \tilde{u} est plus petite que celle entre u_0 et u et, en

utilisant la formule de la co-aire ci-dessus avec le fait que les boules sont minimisantes, l'énergie $\overline{\mathcal{W}}(\tilde{u}, \Omega)$ est plus basse que $\overline{\mathcal{W}}(u, \Omega)$. Ainsi on est ramené à étudier le mouvement minimisant dans la classe des fonctions radiales décroissantes.

Dans un second temps, on prouve que parmi les fonctions radiales décroissantes, les troncatures de la fonction initiale u_0 sont les meilleures candidates à la minimisation de \mathcal{F} . Enfin en étudiant la meilleure troncature on gagne des estimations sur la hauteur de coupe qui nous permettent de démontrer le théorème et la caractérisation par l'équation différentielle.

2. Formule de la co-aire pour l'énergie de Willmore relaxée

Dans cette partie on travaille sur une formule de la co-aire pour l'énergie de Willmore relaxée. Soit $p \in [1, +\infty[$, on regarde la famille d'énergies suivante.

Définition 8.3 (*p*-énergies de Willmore). *Soit u une fonction de $C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et E un ensemble de classe C^2 de \mathbb{R}^d . On définit*

$$\mathcal{W}_p(u) = \frac{1}{(d-1)^p} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u| \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|^p dx$$

et

$$\mathcal{W}_p(E) = \int_{\partial E} |H|^p d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Les relaxées de ces énergies sont définies de la même manière que précédemment. Pour toute fonction $u \in L^1(\Omega)$ et tout ensemble borélien $E \subset \Omega$:

$$\overline{\mathcal{W}}_p(u, \Omega) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{W}_p(u_n) \mid u_n \in C_c^2(\Omega), u_n \rightarrow u \text{ dans } L^1(\Omega) \right\}$$

et

$$\overline{\mathcal{W}}_p(E, \Omega) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{W}_p(E_n) \mid E_n \subset \Omega, \partial E_n \text{ de classe } C^2, E_n \rightarrow E \text{ dans } L^1(\Omega) \right\}.$$

Le cas qui nous intéresse dans ce chapitre est $p = d - 1$. Le principe est de prouver une formule de la co-aire pour $\overline{\mathcal{W}}_p$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{W}}_p(\{u \geq t\}, \Omega) dt = \overline{\mathcal{W}}_p(u, \Omega).$$

D'un point de vue général, une telle formule ne peut pas être valide (voir [94, Figure 2]). Cependant dans le cas restreint des fonctions radiales, nous allons prouver que cette formule est vraie.

2.1. Lemmes préliminaires

La démonstration de la formule de la co-aire est basée sur les lemmes suivants.

Lemme 8.4. *Soient $u, v : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u - v| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\{u \geq t\} \Delta \{v \geq t\}| dt$$

où $\{u \geq t\}$ est l'ensemble de niveau de hauteur t de u .

Preuve.

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|\mathbb{1}_{\{u \geq t\}}(x) - \mathbb{1}_{\{v \geq t\}}(x)| = \begin{cases} 1 & \text{si } \min(u(x), v(x)) < t < \max(u(x), v(x)) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbb{1}_{\{u \geq t\}}(x) - \mathbb{1}_{\{v \geq t\}}(x)| dt = \max(u(x), v(x)) - \min(u(x), v(x)) = |u(x) - v(x)|.$$

Le résultat du lemme s'obtient en intégrant sur $x \in \mathbb{R}^d$, en utilisant le théorème de Fubini et en remarquant que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_{\{u \geq t\}}(x) - \mathbb{1}_{\{v \geq t\}}(x)| dx = |\{u \geq t\} \Delta \{v \geq t\}|.$$

□

Ce lemme permet aussi de voir que si $(u_n)_n$ est une suite de fonctions convergeant vers u dans L^1 , alors il existe une sous-suite $(u_{n_i})_i$ telle que, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\{u_{n_i} \geq t\} \longrightarrow \{u \geq t\}$$

lorsque $i \rightarrow +\infty$.

Lemme 8.5 ([7, Théorème 4 et Remarque 2]). *Soit $u \in L^1(\Omega)$, on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{W}}_p(\{u \geq t\}, \Omega) dt \leq \overline{\mathcal{W}}_p(u, \Omega).$$

Preuve.

C'est évident si $\overline{\mathcal{W}}_p(u, \Omega) = +\infty$. Sinon, il existe $(u_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^2 à support compact dans Ω telle que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_p(u_n) \longrightarrow \overline{\mathcal{W}}_p(u, \Omega).$$

Grâce au lemme précédent, quitte à prendre une sous-suite, on a que pour presque tout t dans \mathbb{R} ,

$$\{u_n \geq t\} \longrightarrow \{u \geq t\} \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

De plus, par le Lemme de Sard, pour presque tout t , $\{u_n \geq t\}$ est un ensemble régulier de \mathbb{R}^d . Par définition de $\overline{\mathcal{W}}_p$, on a

$$\overline{\mathcal{W}}_p(\{u \geq t\}, \Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{W}_p(\{u_n \geq t\}).$$

En intégrant selon t et en utilisant le Lemme de Fatou et la formule de la co-aire (Proposition 1.40), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{W}}_p(\{u \geq t\}, \Omega) dt &\leq \liminf \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_p(\{u_n \geq t\}) dt \\ &= \liminf \mathcal{W}_p(u_n, \Omega) \\ &= \overline{\mathcal{W}}_p(u, \Omega). \end{aligned}$$

□

Lemme 8.6. Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < 0$ et $b < 0$. Il existe une fonction strictement décroissante $f \in C^2([0, 1])$ telle que

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 & f(1) &= 0 \\ f'(0) &= a & f'(1) &= b \\ f''(0) &= \alpha & f''(1) &= \beta. \end{aligned}$$

Preuve.

Le principe de cette preuve est de construire une interpolation avec des polynômes. Cependant la condition de décroissance stricte nécessite une technique un peu fine.

♣ *Étape 1 :* on commence par construire une fonction de classe C^2 et décroissante (mais non strictement décroissante) f_0 satisfaisant

$$\begin{aligned} f_0(0) &= 1 & f_0(1) &> 0 \\ f_0'(0) &= a & f_0'(1) &= b \\ f_0''(0) &= \alpha & f_0''(1) &= \beta. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, nous allons définir $f_0' = 0$ sur $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ et forcer les conditions de bord sur f_0' et f_0'' à l'aide de polynômes. Ensuite nous définirons

$$f_0(t) = 1 + \int_0^t f_0'(s) ds$$

avec un ε bien choisi.

On introduit les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} P &= (\lambda_1 + \mu_1(X - \varepsilon))(X - \varepsilon)^2 & \text{où } \lambda_1 &= 3a/\varepsilon^2 + \alpha/\varepsilon \\ & & \mu_1 &= 2a/\varepsilon^3 + \alpha/\varepsilon^2 \\ Q &= (\lambda_2 + \mu_2(1 - \varepsilon - X))(1 - \varepsilon - X)^2 & \text{où } \lambda_2 &= 3b/\varepsilon^2 - \beta/\varepsilon \\ & & \mu_2 &= 2b/\varepsilon^3 - \beta/\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Ces deux polynômes vérifient

$$\begin{aligned} P(0) &= a, & P(\varepsilon) &= 0, & Q(1 - \varepsilon) &= 0, & Q(1) &= b, \\ P'(0) &= \alpha, & P'(\varepsilon) &= 0, & Q'(1 - \varepsilon) &= 0, & Q'(1) &= \beta. \end{aligned}$$

De plus, en prenant ε suffisamment petit, c'est-à-dire $\varepsilon < \min\left(\frac{3|a|}{|\alpha|}, \frac{3|b|}{|\beta|}\right)$, ces polynômes sont strictement négatifs sur les intervalles qui nous intéressent :

$$\begin{aligned} P &< 0 & \text{sur } [0, \varepsilon[, \\ Q &< 0 & \text{sur }]1 - \varepsilon, 1]. \end{aligned}$$

Par un calcul simple, on a

$$\int_0^\varepsilon P(t) dt + \int_{1-\varepsilon}^1 Q(t) dt = \frac{a+b}{2}\varepsilon + \frac{\alpha-\beta}{12}\varepsilon^2 < 0.$$

Pour $\varepsilon < 1/2$, on définit la fonction

$$g(t) = \begin{cases} P(t) & \text{si } t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{si } t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \\ Q(t) & \text{si } t \in [1 - \varepsilon, 1]. \end{cases}$$

La fonction g est de classe C^1 , négative et vérifie les conditions de bord $g(0) = a$, $g(1) = b$, $g'(0) = \alpha$ et $g'(1) = \beta$. Maintenant on fixe $\varepsilon < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{3|a|}{|\alpha|}, \frac{3|b|}{|\beta|}\right)$ tel que

$$1 + \frac{a+b}{2}\varepsilon + \frac{\alpha-\beta}{12}\varepsilon^2 > 0$$

et on définit

$$f_0(t) = 1 + \int_0^t g(s) ds.$$

♣ *Étape 2* : soit φ une fonction lisse sur $[0, 1]$ telle que φ est strictement positive sur $]0, 1[$, s'annule aux ordres 0 et 1 en $t = 0$ et $t = 1$ et telle que $\int_0^1 \varphi(t) dt = 1$. Soit $A > 0$ tel que

$$1 + \frac{a+b}{2}\varepsilon + \frac{\alpha-\beta}{12}\varepsilon^2 - A = 0.$$

La fonction

$$f(t) = f_0(t) - A \int_0^t \varphi(s) ds$$

vérifie l'énoncé du lemme. □

Le dernier lemme permet de voir que la relaxée $\overline{\mathcal{W}}_p$ coïncide avec \mathcal{W}_p sur les ensembles réguliers de Ω .

Lemme 8.7. *Soient $p > 1$ et E un compact de classe C^2 inclus dans Ω . On a*

$$\overline{\mathcal{W}}_p(E, \Omega) = \mathcal{W}_p(E).$$

Preuve.

Dans la littérature, on peut trouver des preuves de ce résultat pour l'énergie $E \mapsto P(E) + \mathcal{W}_p(E)$. Dans notre contexte, la preuve est exactement la même que celle du [7, Théorème 4] dès lors qu'on a un contrôle sur le périmètre. Nous arrivons à avoir un tel contrôle à partir de \mathcal{W}_p et de Ω de la manière suivante. Comme ∂E est une surface compacte de classe C^2 , on peut calculer la divergence tangentielle du champ de vecteurs V défini par $V(x) = x$: $\operatorname{div}_{\partial E} V = d - 1$. Par le théorème de la divergence, on a

$$\int_{\partial E} \operatorname{div}_{\partial E} V d\mathcal{H}^{d-1} = - \int_{\partial E} V \cdot H d\mathcal{H}^{d-1}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec les exposants $1/p + 1/q = 1$, on obtient

$$(d-1)P(E) = \int_{\partial E} \operatorname{div}_{\partial E} V d\mathcal{H}^{d-1} \leq \left(\int_{\partial E} |V|^q d\mathcal{H}^{d-1} \right)^{1/q} \left(\int_{\partial E} |H|^p d\mathcal{H}^{d-1} \right)^{1/p}.$$

Soit $M > 0$ tel que $\Omega \subset B(0, M)$, ainsi on a

$$(d-1)P(E) \leq M \mathcal{W}_p(E)^{1/p} P(E)^{1/q}.$$

Donc

$$P(E) \leq \left(\frac{M}{d-1} \right)^p \mathcal{W}_p(E).$$

La fin de la preuve est identique à celle du [7, Théorème 4]. On donne les grandes lignes à titre indicatif. Soit $(E_n)_n$ une suite d'ensembles de classe C^2 inclus dans Ω et convergeant vers E dans $L^1(\Omega)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\sup_n \mathcal{W}_p(E_n) < +\infty$ et ainsi, par l'inégalité précédente, on a $\sup_n P(E_n) < +\infty$. Considérons la suite de varifold unitaire $V_n = \mathcal{V}(\partial E_n, 1)$. Comme ∂E_n est régulière, la courbure moyenne classique et la courbure moyenne généralisée au sens des varifolds coïncident et sont notées H_n . Grâce aux bornes uniformes sur \mathcal{W}_p et P , les masses totales et les variations premières de V_n sont uniformément bornées. Ainsi par le Théorème de compacité d'Allard, on peut extraire une sous-suite (toujours indexée par n) de $(V_n)_n$ qui converge faiblement-* vers un varifold entier $V = \mathcal{V}(\Sigma, \theta)$. Soient μ_n et μ les masses de V_n et de V respectivement et $B(x, r)$ une boule de Ω . Grâce à la semi-continuité inférieure du périmètre, on a

$$P(E, B(x, r)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(E_n, B(x, r)) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B(x, r)) = \mu(B(x, r)).$$

Par conséquent $\partial E \subset \text{supp } V$ c'est-à-dire $\theta(x) \geq 1$ pour \mathcal{H}^{d-1} -presque tout $x \in \partial E$. En utilisant la semi-continuité inférieure de \mathcal{W}_p par rapport à la convergence des varifolds (voir [5, exemple 2.36] et [7]), V admet une courbure généralisée notée H . De plus, en utilisant la localité de la courbure moyenne généralisée (voir [7, 88] et son extension à $p > 1$ en toute dimension [95]), $H(x)$ coïncide avec la courbure moyenne classique de ∂E pour \mathcal{H}^{d-1} -presque tout $x \in \partial E$. Par conséquent, on a

$$\mathcal{W}_p(E) = \int_{\partial E} |H|^p d\mathcal{H}^{d-1} \leq \int_{\Sigma} \theta |H|^p d\mathcal{H}^{d-1} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial E_n} |H_n|^p d\mathcal{H}^{d-1} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{W}_p(E_n).$$

Donc $\mathcal{W}_p(E) \leq \overline{\mathcal{W}}_p(E, \Omega)$. En prenant la suite constante $E_n = E$ on obtient $\overline{\mathcal{W}}_p(E, \Omega) \leq \mathcal{W}_p(E)$ et ceci prouve le lemme. \square

Voici maintenant le résultat principal de cette partie.

Théorème 8.8. *Soit $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, radiale décroissante, bornée et à support compact dans $\Omega = B(0, R_0)$. Pour $p > 1$, on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{W}}_p(\{v \geq t\}, \Omega) dt = \overline{\mathcal{W}}_p(v, \Omega).$$

Pour une telle fonction v , on note $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction rayon définie par la relation

$$\{v \geq t\} = B(0, r(t)).$$

Notons que $r(0) < +\infty$ est le rayon du support de v , $r(t) > 0$ pour tout t dans $[0, \sup v[$ et $r(t) = 0$ pour $t > \sup v$. En utilisant le Lemme 8.7 et le fait que la courbure moyenne d'une boule de rayon r est $H = 1/r$, on a

$$\overline{\mathcal{W}}_p(\{v \geq t\}, \Omega) = \omega_d r(t)^{d-1-p}$$

et ainsi

$$\overline{\mathcal{W}}_p(v, \Omega) = \omega_d \int_0^{\sup v} r(t)^{d-1-p} dt$$

où ω_d désigne l'aire de la sphère unité de \mathbb{R}^d .

Preuve.

Soit r la fonction rayon précédente, on note $b = \sup v < +\infty$.

♣ *Un cas particulier :* on regarde d'abord un cas régulier, c'est-à-dire que nous formulons des hypothèses sur r pour avoir v suffisamment régulière pour appliquer la formule de la co-aire classique sur \mathcal{W}_p . On suppose ainsi que r est de classe C^2 , strictement décroissante sur $]0, b[$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $q \in]0, 1/4[$ tels que

$$\forall t \in [b - \varepsilon, b], \quad r(t) = (b - t)^q$$

et

$$\forall t \in [0, \varepsilon], \quad r(t) = r(0) - t^q.$$

Dans ce cas, r est bijective et sa dérivée ne s'annule pas sur $]0, b[$. Donc on a $v(x) = r^{-1}(|x|)$ et v est de classe C^2 sur $B(0, r(0)) \setminus \{0\}$. Cependant, pour $|x| < r(b - \varepsilon)$, on a

$$v(x) = b - |x|^{1/q} = b - (|x|^2)^{1/2q}$$

qui est de classe C^2 en $x = 0$ car $1/2q > 2$. De la même manière pour $r(\varepsilon) < |x| < r(0)$, on a $v(x) = (r(0) - |x|)^{1/q}$ qui se rattache à la fonction nulle avec une régularité C^2 sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0, r(0))$. Ceci nous permet de voir que $v \in C_c^2(\Omega)$ et on peut utiliser la formule de la co-aire (Proposition 1.40), on obtient

$$\mathcal{W}_p(v) = \int_0^{+\infty} \mathcal{W}_p(\{v \geq t\}) dt.$$

♣ *Cas général* : r n'est pas nécessairement une fonction régulière strictement décroissante (voir Figure 8.2).

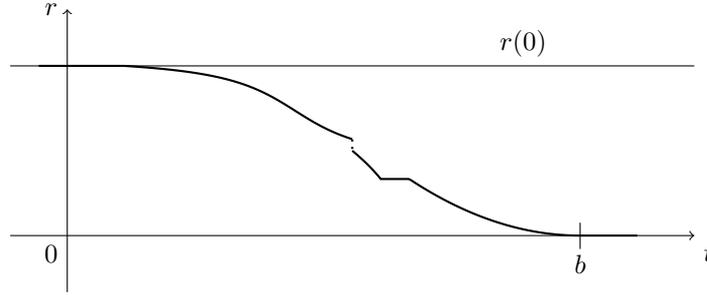


FIGURE 8.2. Exemple - graphe d'une fonction rayon r .

Nous allons approcher r par des fonctions régulières pour se ramener au cas précédent. La suite approchante sera construite de sorte à ce que les quantités qui nous intéressent passent à la limite. On obtient la régularité de la suite approchante par une convolution entre r et un noyau régularisant. Concernant la convergence des p -énergies de Willmore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{W}}_p(\{v \geq t\}, \Omega) dt = \omega_d \int_{-\infty}^{+\infty} r_n(t)^{d-1-p} dt,$$

il faut voir que lorsque $d-1-p < 0$, l'intégrande est en $1/r_n$. Afin que la suite d'intégrales ci-dessus converge, nous allons utiliser le théorème de convergence monotone. Pour ce faire ; nous allons construire une suite décroissante de fonction $(r_n)_n$. Dans le cas où $d-1-p \geq 0$, la convergence des intégrales est plus simple car la suite de fonctions sera bornée sur un compact. Le dernier point important pour se ramener au cas précédent est d'ajuster les fonctions r_n afin d'ajouter les queues en t^q .

♣ *Étape 1* : soit $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un noyau régularisant tel que ρ soit de classe C^2 , $\rho > 0$ sur $]0, 1[$, $\text{supp}(\rho) = [0, 1]$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = 1$. Soit $R \in]r(0), R_0[$, on étend r par R pour $t < 0$ et par 0 pour $t > b$ (ce paramètre R sera utile dans la suite pour avoir des fonctions r_n strictement décroissantes et pas seulement décroissantes). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\rho_n(t) = n\rho(nt)$ et $\tilde{r}_n = r * \rho_n$. Comme r est bornée et ρ est à support compact, \tilde{r}_n est de classe C^2 sur \mathbb{R} . De plus, on a la formule suivante :

$$\tilde{r}_n(t) = \int_{\mathbb{R}} nr(t-s)\rho(ns)ds = \int_0^{1/n} nr(t-s)\rho(ns)ds = \int_0^1 r(t-s/n)\rho(s)ds.$$

En utilisant cette formule on peut montrer que $(\tilde{r}_n)_n$ est une suite décroissante de fonctions décroissantes. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $s \in [0, 1]$, on a

$$t - \frac{s}{n} \leq t - \frac{s}{n+1} \Rightarrow r\left(t - \frac{s}{n+1}\right)\rho(s) \leq r\left(t - \frac{s}{n}\right)\rho(s).$$

En intégrant par rapport à s , on a $\tilde{r}_{n+1}(t) \leq \tilde{r}_n(t)$. Donc $(\tilde{r}_n)_n$ est une suite décroissante. De manière similaire, pour tout $t \leq t'$ et $s \in [0, 1]$, on a

$$t - \frac{s}{n} \leq t' - \frac{s}{n} \Rightarrow r\left(t' - \frac{s}{n}\right)\rho(s) \leq r\left(t - \frac{s}{n}\right)\rho(s).$$

Donc $\tilde{r}_n(t') \leq \tilde{r}_n(t)$ et ainsi \tilde{r}_n est une fonction décroissante. Nous définissons maintenant

$$b_n = \inf(t \in \mathbb{R} \mid \tilde{r}_n(t) = 0)$$

et vérifions que $b_n = b + \frac{1}{n}$. En effet, pour tout $t > b + 1/n$ et tout $s \in [0, 1]$ on a

$$t - \frac{s}{n} > b \Rightarrow r\left(t - \frac{s}{n}\right) = 0 \Rightarrow \tilde{r}_n(t) = 0.$$

c_n a été choisi pour satisfaire $\eta(c_n) = \frac{R}{2n^{1/2p^*}}$. Pour $n > (R/2)^{\frac{1/q}{1/2p^*-1}}$ on a $b_n < c_n < b_n + 1/n$. De surcroît,

$$r_n(b_n) = \frac{R}{n^{1/2p^*}} > \frac{R}{2n^{1/2p^*}} = \eta(c_n),$$

$$r'_n(b_n) = -R \left(1 - \frac{1}{n^{1/2p^*}}\right) < 0 \quad \text{et} \quad \eta'(c_n) = -q \left(\left(\frac{R}{2}\right)^{1/q} \frac{1}{n^{1/2p^*}} \right)^{q-1} < 0.$$

Grâce au Lemme 8.6, on peut raccorder η et r_n entre $[b_n, c_n]$ par une fonction de classe C^2 et strictement décroissante (voir Figure 8.4).

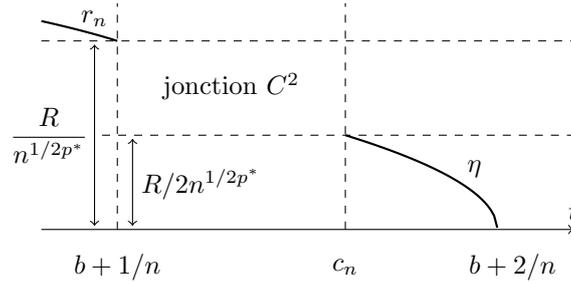


FIGURE 8.4. Ajout de la queue proche de b .

On étend ensuite r_n par 0 au-delà de $b_n + 1/n$.

♣ *Étape 4* : on ajoute maintenant la queue en t^q proche de $t = 0$ en considérant

$$\forall t \in [0, 1/n], \quad \theta(t) = R + \frac{1}{n} - t^q.$$

On définit $a_n = (1/2n)^{1/q}$ de sorte que $\theta(a_n) = R + 1/2n$. Notons que $0 < a_n < 1/n$ quand $n > (1/2)^{\frac{1/q}{1/q-1}}$. En outre

$$r_n(1/n) < R < \theta(a_n), \quad r'_n(1/n) < 0 \quad \text{et} \quad \theta'(a_n) = -q \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{q-1}{q}} < 0.$$

Ainsi, comme précédemment, on peut raccorder de manière C^2 avec le Lemme 8.6 (voir Figure 8.5).

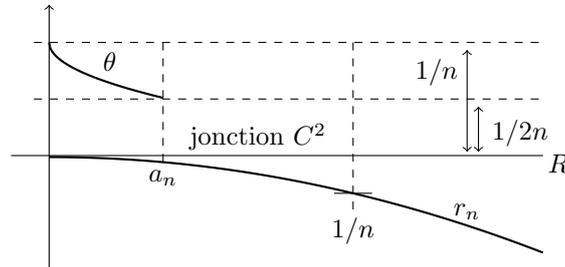


FIGURE 8.5. Ajout de la queue proche de a .

La suite $(r_n)_n$ construite avec les deux queues entre dans le cadre du cas régulier. Ainsi on a

$$\mathcal{W}_p(v_n) = \int_0^{\sup v_n} \mathcal{W}_p(B(0, r_n(t))) dt = \omega_d \int_0^{b+2/n} r_n(t)^{d-1-p} dt.$$

Il faut maintenant vérifier que $(v_n)_n$ converge bien vers v en norme L^1 et que l'intégrale ci-dessus converge vers sa limite supposée impliquant r .

♣ *Étape 5* : grâce à la convolution, $(\tilde{r}_n)_n$ converge vers r (étendue par R et 0) dans L^1_{loc} . Ainsi, à une sous-suite près, dans le compact $[0, b+2]$, on a

$$\text{pour presque tout } t \in [0, b+2], \quad \tilde{r}_n(t) \rightarrow r(t) \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

De plus, pour tout $t \in]0, b]$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > n_0$, $1/n < t$ et ainsi, comme t est loin de la queue en 0,

$$|r_n(t) - \tilde{r}_n(t)| \leq |R - \tilde{r}_n(t)| \left| \frac{t}{b+1/n} \right| \frac{1}{n^{1/2p}} \leq \frac{R}{n^{1/2p}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour tout $t > b$, il existe un rang n à partir duquel $b+2/n < t$ donc

$$r_n(t) = \tilde{r}_n(t) = r(t) = 0.$$

Par conséquent, $(r_n)_n$ converge vers r presque partout sur $[0, b+2]$. En prenant $v_n(x) = r_n^{-1}(|x|)$ et en utilisant le Lemme 8.4, on a

$$\|v - v_n\|_{L^1} = \int_0^{b+2} \alpha_d |r_n(t)^d - r(t)^d| dt$$

où α_d est le volume de la boule unité de \mathbb{R}^d . Comme $|r_n(t)^d - r(t)^d|$ converge vers 0 presque partout et $|r_n(t)^d - r(t)^d| \leq 2R^d$ alors, par le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^d).$$

♣ *Étape 6* : si $d-1-p \geq 0$ alors $|r_n| \leq R$ et par le théorème de convergence dominée, on a

$$\mathcal{W}_p(v_n) = \omega_d \int_0^{b+2/n} r_n(t)^{d-1-p} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega_d \int_0^b r(t)^{d-1-p} dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{W}_p(\{v \geq t\}) dt.$$

Si $d-1-p < 0$ alors on découpe l'intégrale sur plusieurs intervalles

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_d} \mathcal{W}_p(v_n) &= \int_0^{b+2/n} \frac{1}{r_n(t)^{p^*}} dt = \underbrace{\int_0^{1/n} \frac{1}{r_n(t)^{p^*}} dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{1/n}^b \frac{1}{r_n(t)^{p^*}} dt}_{I_2} \\ &\quad + \underbrace{\int_b^{c_n} \frac{1}{r_n(t)^{p^*}} dt}_{I_3} + \underbrace{\int_{c_n}^{b+2/n} \frac{1}{r_n(t)^{p^*}} dt}_{I_4}. \end{aligned}$$

Notons qu'après avoir rattaché les deux queues de manière C^2 , la suite $(r_n)_n$ n'est plus nécessairement décroissante cependant elle le reste en restreignant les fonctions sur $[1/n, b]$, intervalle sur lequel nous allons avoir besoin de cette monotonie. Pour I_1 , pour tout $t \in [0, 1/n]$: $r_n(t) \geq r_n(1/n) \geq r_n(b/2) \geq r(b/2) > 0$ puisque $(r_n)_n$ est une suite décroissante de fonctions décroissantes minorée par r . Ainsi

$$\forall t \in [0, 1/n], \quad \frac{1}{r_n(t)^{p^*}} \leq \frac{1}{r(b/2)^{p^*}}.$$

Donc $I_1 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour I_2 , $\left(\mathbb{1}_{t > 1/n} \frac{1}{r_n(t)^{p^*}} \right)_n$ est une suite croissante de fonctions convergeant presque partout vers $\frac{1}{r(t)^{p^*}}$ sur $]0, b[$. Par le théorème de convergence monotone,

$$I_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{r(t)^{p^*}} dt.$$

Pour I_3 , sur $[b, c_n] : r_n(t) \geq R/n^{1/2p^*}$, donc

$$I_3 \leq \frac{\sqrt{n}}{R^{p^*}}(c_n - b) \leq \frac{2}{R^{p^*}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi $I_3 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Quant à I_4 , sur $[c_n, b + 2/n]$:

$$r_n(t) = \left(b + \frac{2}{n} - t\right)^q.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (et en écrivant $A = \left(\frac{R}{2}\right)^{1/q} \frac{1}{n^{1/2qp^*}}$) on a

$$I_4 = \int_0^A \frac{ds}{s^{qp^*}} \leq \sqrt{\int_0^1 \mathbb{1}_{s < A}^2 ds} \sqrt{\int_0^1 \frac{ds}{s^{2qp^*}}}.$$

La première racine carré est égale à $\left(\frac{R}{2}\right)^{1/2q} \frac{1}{n^{1/4qp^*}} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. La seconde est finie car $2qp^* < 1$. Donc $I_4 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Finalement, dans tous les cas, on a

$$\mathcal{W}_p(v_n) = \omega_d \int_0^{b+2/n} r_n(t)^{d-1-p} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega_d \int_0^b r(t)^{d-1-p} dt = \int_0^{+\infty} \overline{\mathcal{W}}_p(\{v \geq t\}, \Omega) dt.$$

Comme $v_n \rightarrow v$ dans L^1 et par définition de $\overline{\mathcal{W}}_p$ on a

$$\overline{\mathcal{W}}_p(v, \Omega) \leq \int_0^{+\infty} \overline{\mathcal{W}}_p(\{v \geq t\}, \Omega) dt.$$

L'autre inégalité provient du Lemme 8.5 et en conséquence

$$\overline{\mathcal{W}}_p(v, \Omega) = \int_0^{+\infty} \overline{\mathcal{W}}_p(\{v \geq t\}, \Omega) dt.$$

□

Remarque 8.9. En fait nous avons prouvé que pour n'importe quel $p > 0$

$$\overline{\mathcal{W}}_p(v, \Omega) \leq \int_0^{+\infty} \mathcal{W}_p(\{v \geq t\}) dt.$$

La restriction $p > 1$ est requise uniquement pour pouvoir appliquer le Lemme 8.7 et ainsi identifier $\overline{\mathcal{W}}_p$ avec \mathcal{W}_p sur les boules. Dans la suite, nous allons appliquer ce théorème (Théorème 8.8) pour $p = d - 1$ qui ne satisfait pas $p > 1$ si $d = 2$. Cependant pour le cas invariant par changement d'échelle $p = d - 1$, les boules sont des minimiseurs globaux de \mathcal{W}_p parmi la classe des ensembles compacts réguliers. Ainsi, le Lemme 8.7 peut être remplacé par le Lemme 8.16 dans la preuve du Théorème 8.8.

Remarque 8.10. Le Théorème 8.8 peut être facilement étendu à n'importe quel ouvert borné Ω pour une fonction radiale décroissante centrée en un point x et ayant son support dans une boule $B(x, R) \subset \Omega$.

Remarque 8.11. Dans le Théorème 8.8 on peut remplacer l'hypothèse v bornée par

$$\int_0^{+\infty} r(t)^{d-1-p} dt < +\infty$$

et $v \in L^1$. En effet, on peut définir la suite de fonctions $(v_n)_n$ par troncature de v au dessus de la valeur n . La suite de fonctions rayons correspondante est $(t \mapsto r(t) \mathbb{1}_{t < n})_n$. Il ne reste plus qu'à appliquer le Théorème 8.8 à v_n , et à passer à la limite en $n \rightarrow +\infty$.

3. Le mouvement minimisant des fonctions radiales

Soit $\Omega = B(0, R_0)$, on considère l'espace fonctionnel

$$L_{c+}^1(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\mathbb{R}^d) \mid u \geq 0, \text{ supp}(u) \subset \Omega \right\}.$$

Soit $u_0 \in L_{c+}^1(\Omega)$ une fonction radiale décroissante comme point de départ du mouvement minimisant. La détermination du mouvement minimisant de \overline{W} dans L_{c+}^1 partant de u_0 se fait en deux étapes. D'abord on étudie la minimisation de

$$\mathcal{F}(u) = \overline{W}(u, \Omega) + \frac{1}{2\tau} \|u - u_0\|_{L^1}^2$$

dans $L_{c+}^1(\Omega)$ et on montre qu'un minimiseur est nécessairement une fonction radiale décroissante de $L_{c+}^1(\Omega)$. Ensuite, nous montrons que parmi les fonctions radiales décroissantes, le meilleur choix pour minimiser \mathcal{F} est de prendre une troncature de la donnée initiale. Ainsi le flot discret correspond à une succession de troncatures de la fonction initiale. On prouve ensuite que lorsque $\tau \rightarrow 0$, cette succession de troncatures se transforme en une érosion de la donnée initiale au cours du temps.

On note r_0 la fonction rayon associée à la donnée initiale u_0 . On démontre dans cette partie le théorème suivant.

Théorème 8.12. *Soient $u_0 \in L_{c+}^1(\Omega)$ une fonction bornée et radiale décroissante et r_0 sa fonction rayon. Si $r_0(\sup u_0) > 0$, alors il existe un mouvement minimisant de \overline{W}_{d-1} partant de u_0 . De plus, il existe $\lambda : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que le mouvement minimisant est donné par*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\rightarrow L_{c+}^1(\Omega) \\ t &\mapsto u_t \end{aligned}$$

où

$$u_t(x) = \min(u_0(x), \lambda(t)).$$

La fonction λ est lipschitzienne, décroissante, vérifie $\lambda(0) = \sup u_0$ et s'annule en temps fini.

De surcroît, on peut obtenir plus d'information sur le comportement de λ .

Proposition 8.13. *Avec les notations du théorème précédent. En tout point t tel que $\lambda(t) > 0$ et r_0 est continue en $\lambda(t)$, λ est dérivable et satisfait l'équation différentielle*

$$\lambda'(t) = -\frac{\omega_d}{\alpha_d^2} \frac{1}{r_0(\lambda(t))^{2d}}.$$

Ainsi un mouvement minimisant de \overline{W}_{d-1} pour les fonctions radiales est décrit par ces ensembles de niveaux. On a supposé que le plus haut ensemble de niveau non nul de u_0 n'était pas réduit à un point c'est-à-dire $r_0(\sup u_0) > 0$ et cette hypothèse est délicate à enlever. En effet l'équation différentielle ci-dessus traduit le fait que si $r_0(\sup u_0) = 0$ alors le mouvement minimisant commence avec une vitesse infinie, c'est-à-dire par un saut dans l'érosion de la condition initiale.

3.1. Un minimiseur radial décroissant

On montre d'abord que parmi toutes les fonctions de $L_{c+}^1(\Omega)$, celles qui sont radiales décroissantes sont les meilleures candidates à la minimisation de \mathcal{F} . On démontre le théorème suivant.

Théorème 8.14. *Pour tout $u \in L^1_{c^+}(\Omega)$, il existe $\tilde{u} \in L^1_{c^+}(\Omega)$ radiale décroissante telle que*

$$\mathcal{F}(\tilde{u}) \leq \mathcal{F}(u)$$

(les deux valeurs étant potentiellement infinies).

Les idées de la preuve sont les suivantes et les détails sont donnés un peu plus loin. Soit u un candidat de $L^1_{c^+}(\Omega)$. On remplace chaque ensemble de niveau de u par une boule de même volume $B(0, r(t))$. En empilant ces ensembles de niveaux, on construit une fonction radiale décroissante \tilde{u} . En utilisant le Lemme 8.4 et le lemme suivant (Lemme 8.15), on peut montrer que changer les ensembles de niveau par des boules de même volume diminue la distance L^1 à la donnée initiale u_0 .

Lemme 8.15. *Soient $a, b > 0$. La fonction $(A, B) \mapsto |A\Delta B|$, définie sur la collection des paires d'ensembles mesurables (A, B) tels que $|A| = a$ et $|B| = b$, atteint son minimum lorsque $A \subset B$ ou $B \subset A$ (à un ensemble de mesure nulle près) et ce minimum vaut $|A\Delta B| = |a - b|$.*

Preuve.

On écrit

$$|A\Delta B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = a + b - 2|A \cap B|.$$

On a $|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$ avec égalité lorsque l'un des ensembles est inclus dans l'autre (à un ensemble négligeable près). Ainsi $(A, B) \mapsto |A\Delta B|$ atteint son minimum lorsque $A \subset B$ ou $B \subset A$. Si $A \subset B$, alors $|A \cap B| = |A|$ et $b \geq a$ donc $|A\Delta B| = b - a$. Sinon $B \subset A$, alors $|A \cap B| = |B|$ et $b \leq a$ donc $|A\Delta B| = a - b$. \square

De plus, les énergies des ensembles de niveau de u sont plus grandes que celles des boules (voir Lemme 8.16 ci-dessous). Ainsi, par la formule de la co-aire précédemment démontrée, on peut voir le passage de u à \tilde{u} diminue aussi $\overline{\mathcal{W}}_{d-1}$.

Lemme 8.16. *Soit E un compact de mesure non nulle dans Ω . On a*

$$\overline{\mathcal{W}}(E, \Omega) \geq \omega_d.$$

Preuve.

C'est une conséquence directe d'un résultat classique disant que, pour l'énergie de Willmore invariante par changement d'échelle, la sphère est minimisante parmi la classe des surfaces compactes régulières (voir [78] et les références à l'intérieur). Autrement dit, pour toute surface compacte régulière M de \mathbb{R}^d , on a

$$\int_M |H|^{d-1} d\mathcal{H}^{d-1} \geq \omega_d,$$

avec égalité uniquement pour les sphères. Si $\overline{\mathcal{W}}(E, \Omega) < +\infty$, alors il existe une suite $(E_n)_n$ d'ensembles compacts de classe C^2 inclus dans Ω telle que $E_n \rightarrow E$ dans L^1 et $\mathcal{W}(E_n) \rightarrow \overline{\mathcal{W}}(E, \Omega)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Comme ∂E_n est une surface compacte régulière, on a

$$\mathcal{W}(E_n) \geq \omega_d.$$

En passant à la limite $n \rightarrow +\infty$, on a

$$\overline{\mathcal{W}}(E, \Omega) \geq \omega_d.$$

\square

Remarquons que ω_d est l'énergie de n'importe quelle boule dans ce cas là. Ainsi on a finalement que

$$\mathcal{F}(\tilde{u}) \leq \mathcal{F}(u).$$

Remarque 8.17. On peut noter que les boules sont aussi minimisantes pour le périmètre à volume prescrit. En utilisant la formule de la co-aire pour les fonctions BV (Théorème 1.39), on peut voir qu'on a aussi

$$\|D\tilde{u}\|(\Omega) \leq \|Du\|(\Omega).$$

♣ *Démonstration du Théorème 8.14 :* soit u une fonction de $L^1_{c^+}(\Omega)$, on définit la fonction rayon de u , notée r , et donnée par la relation

$$|\{u \geq s\}| = |B(0, r(s))|$$

avec r décroissante telle que $\text{supp } r = [0, \sup u]$ et $r(0) < +\infty$ puisque $|B(0, r(0))| = |\text{supp } u|$. On définit ensuite

$$\tilde{u}(x) = \sup\{s \in \mathbb{R} \mid r(s) \geq |x|\}$$

de sorte à avoir

$$\{\tilde{u} \geq s\} = \overline{B}(0, r(s)).$$

\tilde{u} est ainsi radiale décroissante et r est sa fonction rayon. On utilise le Lemme 8.4 pour calculer

$$\|\tilde{u}\|_{L^1} = \int_0^{+\infty} |\{\tilde{u} \geq s\}| ds = \int_0^{+\infty} |B(0, r(s))| ds = \int_0^{+\infty} |\{u \geq s\}| ds = \|u\|_{L^1}.$$

D'un côté $\{u \geq s\}$ et $\{\tilde{u} \geq s\}$ ont le même volume. De l'autre côté, $\{\tilde{u} \geq s\}$ et $\{u_0 \geq s\}$ sont des boules concentriques (en particulier, l'une est incluse dans l'autre) ainsi, par le Lemme 8.15, on a

$$|\{u \geq s\} \Delta \{u_0 \geq s\}| \geq |\{\tilde{u} \geq s\} \Delta \{u_0 \geq s\}|.$$

En intégrant sur $s \in [0, +\infty[$ et en ré-utilisant le Lemme 8.4, on a

$$\|u - u_0\|_{L^1} \geq \|\tilde{u} - u_0\|_{L^1}.$$

En outre, pour tout $s > 0$, $\{u \geq s\}$ est compact. Donc par le Lemme 8.16 on obtient $|\{u \geq s\}| = 0$ ou $\overline{\mathcal{W}}(\{u \geq s\}, \Omega) \geq \omega_d$. Le premier cas signifie que $r(s) = 0$ et ainsi $\overline{\mathcal{W}}(B(0, r(s)), \Omega) = 0$. Pour le second cas, on observe que

$$\omega_d = \overline{\mathcal{W}}(B(0, R), \Omega) = \mathcal{W}(B(0, R))$$

pour tout $R > 0$. À chaque fois, on obtient

$$\overline{\mathcal{W}}(\{u \geq s\}, \Omega) \geq \overline{\mathcal{W}}(\{\tilde{u} \geq s\}, \Omega).$$

En intégrant sur $s \in [0, +\infty[$, en utilisant la formule de la co-aire (Théorème 8.8) sur \tilde{u} et l'inégalité de la co-aire (Lemme 8.5) sur u , on a

$$\overline{\mathcal{W}}(u, \Omega) \geq \overline{\mathcal{W}}(\tilde{u}, \Omega).$$

En ajoutant à cette inégalité celle sur la distance L^1 à la fonction initiale, on obtient bien le résultat du Théorème 8.14.

3.2. Étude du minimiseur

Maintenant nous savons que nous pouvons rechercher des minimiseurs de \mathcal{F} parmi les fonctions radiales décroissantes de $L^1_{c+}(\Omega)$. Ainsi nous allons utiliser une paramétrisation différente des fonctions radiales décroissantes de $L^1_{c+}(\Omega)$ et une formule différente pour \mathcal{F} . On se place sur l'espace des fonctions rayons en introduisant

$$\mathcal{A} = \left\{ r : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+ \mid r \text{ est décroissante, } r(0) < R_0 \text{ et } r \in L^d([0, +\infty[) \right\}.$$

Toute fonction radiale décroissante $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ peut être affiliée à une unique fonction rayon $r : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ (et vice-versa) par la relation

$$\{u \geq s\} = B(0, r(s)).$$

De même on peut retrouver u à partir de r avec la formule

$$u(x) = \sup\{s > 0 \mid r(s) \geq |x|\}.$$

En conséquence,

$$u \in L^1 \Leftrightarrow r \in L^d$$

et

$$\text{supp } u \subset \Omega \Leftrightarrow r(0) < R_0.$$

Propriété 8.18. *Quelles que soient les fonctions u et r associées, on a*

$$u \in L^1_{c+}(\Omega) \text{ est radiale décroissante} \Leftrightarrow r \in \mathcal{A}.$$

Remarque 8.19. Nous pouvons noter que u_0 et r_0 n'ont pas les mêmes discontinuités. En effet, un saut dans le profil de u n'induit pas une discontinuité dans r . Ce sont les parties localement constantes de u qui font sauter sa fonction rayon.

On peut écrire $\mathcal{F}(u)$ en utilisant les fonctions rayons de u et de u_0 :

$$\overline{\mathcal{W}}(u, \Omega) = \omega_d \int_0^{\sup u} r(s)^{d-1-(d-1)} ds = \omega_d \sup u = \omega_d |\text{supp } r|$$

et

$$\|u - u_0\|_{L^1} = \alpha_d \int_0^{+\infty} |r(s)^d - r_0(s)^d| ds.$$

Donc

$$\mathcal{F}(u) = F(r) = \omega_d |\text{supp } r| + \frac{\alpha_d^2}{2\tau} \left(\int_0^{+\infty} |r(s)^d - r_0(s)^d| ds \right)^2.$$

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 8.20. *Pour toute paire (u, r) de fonctions associées, sont équivalents*

- u est un minimiseur de \mathcal{F} parmi les fonctions radiales décroissantes de $L^1_{c+}(\Omega)$;
- r est un minimiseur de F dans \mathcal{A} .

Considérons maintenant une fonction rayon tronquée $\tilde{r}(t) = r_0(t) \mathbb{1}_{s < \text{supp } r}$ et calculons $F(\tilde{r})$. Comme $\text{supp } \tilde{r} \subset \text{supp } r$ et $\tilde{r} = r_0$ sur $\text{supp } r$, on a

$$F(\tilde{r}) \leq F(r).$$

Ainsi, parmi toutes les fonctions rayons de \mathcal{A} , les troncatures de r_0 sont les meilleures candidates. On cherche ainsi un minimiseur de la forme

$$r(s) = r_0(s) \mathbb{1}_{s < \lambda}.$$

On s'est ramené à un problème à un paramètre réel λ . On note $a = |\text{supp } r_0|$ et on remarque qu'il suffit de chercher λ dans $[0, a]$. On considère le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} f &: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \lambda &\mapsto \omega_d \lambda + \frac{\alpha_d^2}{2\tau} \left(\int_{\lambda}^a r_0(s)^d ds \right)^2. \end{aligned}$$

Comme $r_0^d \in L^1$, f est continue, admet un minimum et est dérivable presque partout avec

$$f'(\lambda) = \omega_d - \frac{\alpha_d^2}{\tau} r_0(\lambda)^d \int_{\lambda}^a r_0(s)^d ds.$$

r_0 est décroissante, positive et, si elle est constante sur un petit intervalle alors l'intégrale n'est pas constante sur le même intervalle. Ainsi, f' est strictement croissante. Notons que $f'(a) = \omega_d > 0$ et

$$f'(0) = \omega_d - \frac{\alpha_d^2}{\tau} r_0(0)^d \|r_0\|_{L^d} < 0$$

pour τ assez petit. Si r_0 est continue alors f' est continue donc il existe un unique λ^* tel que $f'(\lambda^*) = 0$. Sinon on définit

$$\lambda^* = \sup\{s \mid f'(s) \leq 0\}.$$

Par conséquent, dans les deux cas il existe un unique λ^* minimisant f et, si r_0 est continue, λ^* est défini par la relation

$$r_0(\lambda^*)^d \int_{\lambda^*}^a r_0(s)^d ds = \frac{\omega_d}{\alpha_d^2} \tau.$$

Remarquons que si τ n'est pas assez petit alors le minimum λ^* est égal à zéro. Par ailleurs, pour tout $z \in [0, a[$,

$$r_0(z)^d \int_z^a r_0(s)^d ds > 0,$$

donc il existe $\tau > 0$ suffisamment petit pour vérifier $f'(z) < 0$ et ainsi $\lambda^* > z$. Par conséquent

$$\lambda^* \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} a.$$

Ainsi le premier temps du flot discret est donné sur la fonction rayon par

$$r_1(s) = r_0(s) \mathbb{1}_{s < \lambda^*}$$

ou, en utilisant la donnée initiale

$$u_1 = \min(u_0, \lambda^*).$$

En itérant, on construit le flot discret u_n à l'aide d'une suite décroissante $(\lambda_n)_n$:

$$u_n = \min(u_{n-1}, \lambda_n) = \min(u_0, \lambda_n).$$

3.3. Convergence du flot discret

Grâce aux résultats de la section précédente, un flot discret est donné par troncature successive de la fonction initiale u_0 et ce flot est décrit à travers la suite décroissante $(\lambda_n)_n$. Afin d'étudier le comportement de $(\lambda_n)_n$ lorsque $\tau \rightarrow 0$, on suppose dans un premier temps que r_0 est continue sauf en $a = \text{supp } u_0$ (dans la suite nous allons nous servir de $r_0(a) > 0$ ce qui induit une discontinuité).

On pose $\lambda_0 = a$, la suite $(\lambda_n)_n$ est définie par minimisation de

$$f_n(\lambda) = \omega_d \lambda + \frac{\alpha_d^2}{2\tau} \left(\int_{\lambda}^{\lambda_n} r_0(s)^d ds \right)^2.$$

En effet λ_{n+1} est l'unique minimiseur de f_n sur $[0, \lambda_n]$. Cette suite est décroissante et λ_{n+1} est donnée par $\lambda_{n+1} = 0$ ou

$$r_0(\lambda_{n+1})^d \int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_n} r_0(s)^d ds = \frac{\omega_d}{\alpha_d^2} \tau.$$

Le choix de la valeur de λ_{n+1} se fait selon la petitesse de τ . Comme $\tau > 0$ est fixé pour la définition de $(\lambda_n)_n$, il se peut que les premiers termes soient donnés par l'équation, alors qu'à partir d'un certain rang, on peut avoir $\lambda_n = 0$. En effet si $\lambda_n = 0$ alors $\lambda_{n+1} = 0$ et ainsi de suite. Autrement dit, le flot discret peut devenir stationnaire sur la fonction nulle à partir d'un certain rang.

Comme r_0 est décroissante, on a

$$r_0(\lambda_{n+1})^d r_0(\lambda_n)^d (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \leq \frac{\omega_d \tau}{\alpha_d^2} \leq r_0(\lambda_{n+1})^{2d} (\lambda_n - \lambda_{n+1}).$$

Dans le but d'avoir des estimations sur λ_n uniforme en n , nous supposons que $r_0(a) > 0$ ce qui amène la discontinuité discutée plus haut. On obtient ainsi un double encadrement

$$(18) \quad \frac{\omega_d \tau}{r_0(0)^{2d} \alpha_d^2} \leq \lambda_n - \lambda_{n+1} \leq \frac{\omega_d \tau}{r_0(a)^{2d} \alpha_d^2}.$$

Remarque 8.21. La première inégalité montre qu'au delà d'un certain rang on a nécessairement $\lambda_n = 0$. En effet, en sommant on déduit que

$$\lambda_n \leq a - \omega_d r_0(0)^{2d} \alpha_d^2 n \tau$$

et comme $\lambda_n \geq 0$, cela signifie que

$$n \tau \leq \frac{a r_0(0)^{2d} \alpha_d^2}{\omega_d}.$$

Ceci nous donne une borne, dépendante de τ , du rang à partir duquel λ_n s'annule.

La seconde inégalité nous permet de prouver la convergence du flot discret. On définit

$$\begin{aligned} \lambda_\tau &: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, a] \\ t &\mapsto \lambda_n + \frac{t - n\tau}{\tau} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \quad \text{pour } t \in [n\tau, (n+1)\tau]. \end{aligned}$$

λ_τ est une famille de fonctions continues et affines par morceaux telle que (grâce à (18))

$$|\lambda'_\tau(t)| \leq \frac{\omega_d}{r_0(a)^{2d} \alpha_d^2}.$$

En utilisant la remarque précédent, on a $\lambda_\tau(t) = 0$ pour $t \geq \frac{a r_0(0)^{2d} \alpha_d^2}{\omega_d}$ et ainsi, par le Théorème d'Ascoli, on a la proposition suivante.

Proposition 8.22. *Il existe une fonction limite $\lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, a]$ telle que $\lambda_\tau \rightarrow \lambda$ uniformément lorsque $\tau \rightarrow 0$, à une sous-suite près. De plus λ est lipschitzienne et décroissante.*

Ainsi le mouvement minimisant existe, est continu et consiste en une érosion de la donnée initiale. De surcroît, on peut avoir plus d'information sur la fonction limite λ .

Proposition 8.23. *On suppose que r_0 est continue. En tout point t tel que $\lambda(t) > 0$, λ est dérivable et satisfait l'équation différentielle*

$$\lambda'(t) = -\frac{\omega_d}{\alpha_d^2} \frac{1}{r_0(\lambda(t))^{2d}}.$$

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda(t + \varepsilon) > 0$. Pour tout $\tau > 0$, on écrit $t = p\tau + \eta$ et $t + \varepsilon = (p + q)\tau + \eta'$, où $p, q \in \mathbb{N}$, $0 \leq \eta < \tau$ et $0 \leq \eta' < \tau$. Ainsi $\lambda_p \rightarrow \lambda(t)$ et $\lambda_{p+q} \rightarrow \lambda(t + \varepsilon)$ lorsque $\tau \rightarrow 0$. Pour tout entier n entre p et $p + q$, on utilise l'encadrement (18) avec λ_p et λ_{p+q} au lieu de 0 et a :

$$\frac{\omega_d \tau}{r_0(\lambda_{p+q})^{2d} \alpha_d^2} \leq \lambda_n - \lambda_{n+1} \leq \frac{\omega_d \tau}{r_0(\lambda_p)^{2d} \alpha_d^2}.$$

En sommant sur n de p à $p + q - 1$, on obtient

$$\frac{\omega_d}{r_0(\lambda_{p+q})^{2d} \alpha_d^2} q\tau \leq \lambda_p - \lambda_{p+q} \leq \frac{\omega_d}{r_0(\lambda_p)^{2d} \alpha_d^2} q\tau.$$

On exprime ensuite $q\tau$ en fonction de ε , η et η' et en divisant par ε , on peut voir que

$$\frac{\omega_d}{r_0(\lambda_{p+q})^{2d} \alpha_d^2} \frac{\varepsilon + \eta - \eta'}{\varepsilon} \leq \frac{\lambda_p - \lambda_{p+q}}{\varepsilon} \leq \frac{\omega_d}{r_0(\lambda_p)^{2d} \alpha_d^2} \frac{\varepsilon + \eta - \eta'}{\varepsilon}.$$

En passant à la limite $\tau \rightarrow 0$, on a

$$\frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t + \varepsilon))^{2d} \alpha_d^2} \leq -\frac{\lambda(t + \varepsilon) - \lambda(t)}{\varepsilon} \leq \frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t))^{2d} \alpha_d^2}.$$

De même en prenant $\varepsilon \rightarrow 0$, on arrive à calculer la dérivée à droite de λ en t . En opérant de la même manière (avec des signes différents) on a

$$\frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t))^{2d} \alpha_d^2} \leq -\frac{\lambda(t - \varepsilon) - \lambda(t)}{-\varepsilon} \leq \frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t - \varepsilon))^{2d} \alpha_d^2}.$$

À la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient la dérivée à gauche. □

3.4. Raffinement - r_0 non continue

On se place dans le cas où r_0 n'est pas nécessairement continue sur $[0, a[$. On va montrer que λ vérifie presque l'équation différentielle précédente. En fait on obtient un encadrement sur le taux d'accroissement de λ . Dans la suite, on écrira $r_0(s+)$ et $r_0(s-)$ pour indiquer les limites à droite et limites à gauche respectivement de r_0 en un point s . Plus précisément, on montre le résultats suivant.

Proposition 8.24. *En tout point t où $\lambda(t) > 0$, on a le contrôle suivant sur le taux d'accroissement*

$$-\frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t+))^{2d} \alpha_d^2} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(t + \varepsilon) - \lambda(t)}{\varepsilon} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(t + \varepsilon) - \lambda(t)}{\varepsilon} \leq -\frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t-))^{2d} \alpha_d^2}$$

pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $\varepsilon \rightarrow 0^-$.

Preuve.

Que r_0 soit continue ou non, l'existence de la suite $(\lambda_n)_n$ est assurée et on a

$$\lambda_{n+1} = \sup\{s \mid f'_n(s) \leq 0\}.$$

En notant que (λ_n) est strictement décroissante avant de s'annuler et que f'_n est croissante, on a pour presque tout $s \in]\lambda_{n+1}, \lambda_n[$, $f'_n(s) \geq 0$. Ainsi

$$r_0(s)^d \int_s^{\lambda_n} r_0(u)^d du \leq \frac{\tau \omega_d}{\alpha_d^2}.$$

Donc

$$r_0(\lambda_n)^{2d} (\lambda_n - s) \leq \frac{\tau \omega_d}{\alpha_d^2}.$$

Maintenant on prend $s \rightarrow \lambda_{n+1}$ pour avoir

$$\lambda_n - \lambda_{n+1} \leq \frac{\omega_d \tau}{r_0(\lambda_n)^{2d} \alpha_d^2}.$$

De manière identique, pour presque tout $s < \lambda_{n+1}$, $f'_n(s) \leq 0$ et ainsi

$$r_0(s)^d \int_s^{\lambda_n} r_0(u)^d du \geq \frac{\tau \omega_d}{\alpha_d^2}.$$

Donc

$$r_0(s)^{2d} (\lambda_n - s) \geq \frac{\tau \omega_d}{\alpha_d^2}.$$

En passant à la limite $s \rightarrow \lambda_{n+1}$, on obtient

$$\lambda_n - \lambda_{n+1} \geq \frac{\omega_d \tau}{r_0(\lambda_{n+1}-)^{2d} \alpha_d^2}.$$

Quant à l'estimation globale, on a exactement le même encadrement (18) et donc on récupère l'existence du mouvement minimisant.

Pour le contrôle sur le taux d'accroissement, on procède de la même manière que pour obtenir l'équation différentielle. La preuve est pratiquement la même, on indique simplement les changements par rapport à celle-ci. On note que $r_0(\lambda_{p+q-}) \leq r_0(\lambda_{p+q+1})$ et $\lambda_{p+q+1} \rightarrow \lambda(t + \varepsilon)$ car $|\lambda_{p+q} - \lambda_{p+q+1}| \leq \frac{\omega_t}{r_0(\lambda)^{2d} \alpha_d^2} \tau$. Par conséquent

$$\frac{\omega_d}{r_0(\lambda_{p+q+1})^{2d} \alpha_d^2} \frac{\varepsilon + \eta - \eta'}{\varepsilon} \leq \frac{\lambda_p - \lambda_{p+q}}{\varepsilon} \leq \frac{\omega_d}{r_0(\lambda_p)^{2d} \alpha_d^2} \frac{\varepsilon + \eta - \eta'}{\varepsilon}.$$

Les valeurs de la suite (λ_n) dépendent de τ donc, pour $m = [s/\tau]$ la vitesse de convergence de λ_m vers $\lambda(s)$ lorsque $\tau \rightarrow 0$ n'est pas claire. Ainsi on utilise les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{r_0(\lambda(s)-)} \leq \liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{r_0(\lambda_m)} \leq \limsup_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{r_0(\lambda_m)} \leq \frac{1}{r_0(\lambda(s)+)}$$

et en passant à la lim inf dans la partie gauche de l'inégalité (avec $s = t + \varepsilon$ et $m = p + q + 1$) et à la lim sup dans la partie droite (avec $s = t$ et $m = p$) on obtient

$$\frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t + \varepsilon)-)^{2d} \alpha_d^2} \leq \frac{\lambda(t) - \lambda(t + \varepsilon)}{\varepsilon} \leq \frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t)+)^{2d} \alpha_d^2}.$$

Grâce à la décroissance de $t \mapsto \lambda(t)$, on a

$$\frac{1}{r_0(\lambda(t + 2\varepsilon))} \leq \frac{1}{r_0(\lambda(t + \varepsilon)-)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_0(\lambda(t)+)} \leq \frac{1}{r_0(\lambda(t - \varepsilon))}.$$

Donc

$$\frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t + 2\varepsilon))^{2d} \alpha_d^2} \leq \frac{\lambda(t) - \lambda(t + \varepsilon)}{\varepsilon} \leq \frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t - \varepsilon))^{2d} \alpha_d^2}.$$

Comme $t + 2\varepsilon$ décroît vers t lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, alors $\lambda(t + 2\varepsilon)$ croît vers $\lambda(t)$ et ainsi $r_0(\lambda(t + 2\varepsilon)) \rightarrow r_0(\lambda(t)-)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. De même, $r_0(\lambda(t - \varepsilon)) \rightarrow r_0(\lambda(t)+)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Par conséquent on peut passer à la lim inf et à la lim sup dans les inégalités précédentes pour obtenir

$$-\frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t)+)^{2d} \alpha_d^2} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(t + \varepsilon) - \lambda(t)}{\varepsilon} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(t + \varepsilon) - \lambda(t)}{\varepsilon} \leq -\frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t)-)^{2d} \alpha_d^2}.$$

En utilisant exactement les mêmes arguments pour la dérivée à gauche, on a

$$-\frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t)+)^{2d} \alpha_d^2} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(t - \varepsilon) - \lambda(t)}{-\varepsilon} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(t - \varepsilon) - \lambda(t)}{-\varepsilon} \leq -\frac{\omega_d}{r_0(\lambda(t)-)^{2d} \alpha_d^2}.$$

□

Perspectives

À l'issue des résultats obtenus dans cette thèse, nous pouvons dégager trois axes de développements. Le premier concerne la méthode de champ de phase utilisée dans les Chapitres 2, 4 et 5. Le second est la suite de l'étude de flot pour l'énergie de Willmore du Chapitre 7. Le dernier correspond à trouver une caractérisation des flots de Willmore faibles.

1. La méthode de champ de phase

Nous avons vu dans le Chapitre 4 que la reconstruction par méthode champ de phase autorise une grande flexibilité dans le choix des contraintes d'inclusion-exclusion. En effet, la reconstruction reste efficace même quand les sections ne sont pas planaires ou qu'on les remplace par un nuage de points volumique. Au niveau numérique, il reste à tester si la méthode est suffisamment robuste pour accepter plusieurs types de données. En particulier, peut-on mélanger des contraintes d'inclusion-exclusion ayant plusieurs co-dimensions aussi bien en monophasé qu'en multiphasé? En complément de ses contraintes, que nous pouvons voir comme des conditions de Dirichlet, nous nous demandons si nous pouvons ajouter des conditions de Neumann. Autrement dit, pour une section planaire (de co-dimension 1), pouvons-nous imposer la direction des plans tangents du bord du domaine au niveau de l'intersection avec le plan de la section? Par exemple, en 3D, si les coupes sont des disques identiques et parallèles alors la reconstruction renvoie un cylindre droit, c'est-à-dire un cylindre orthogonal aux plans des coupes. L'objectif est de trouver comment intégrer des conditions tangentielles afin que la reconstruction renvoie un "cylindre" ondulant qui, localement, n'est pas orthogonal aux plans des coupes. Toutes ces extensions sont d'abord à étudier au niveau numérique. La suite de l'étude théorique du modèle s'oriente plus facilement vers la méthode multiphasé. En effet, nous pensons pouvoir obtenir de manière similaire un résultat de Γ -convergence pour le modèle multiphasé en utilisant le périmètre.

Dans le Chapitre 5, nous avons vu que la méthode de champ de phase n'est pas bien adaptée pour approcher des élastiques confinés. Un problème apparaît au niveau des auto-intersections de la courbe minimale. La méthode de champ de phase est connue pour autoriser les changements de topologie, or, dans le problème de l'élastique confiné, nous ne voulons pas que la topologie de l'ensemble limité par la courbe change. Bien qu'atténué, ce problème subsiste en augmentant le nombre de modes de Fourier m et en diminuant la taille du profil ε . En plus d'essayer de trouver un moyen de corriger ce problème, nous nous demandons s'il est possible d'intégrer des contraintes de longueur ou d'aire englobée prescrites ainsi que des conditions de Dirichlet et de Neumann. Pour les contraintes de longueur et d'aire, il est déjà connu que la méthode de champ de phase peut s'adapter [26]. Pour les conditions de Dirichlet ou de Neumann, l'idée serait de coincer la courbe entre deux boules afin de fixer un point et la tangente en ce point.

2. Le flot de Willmore

Concernant le flot de Willmore du Chapitre 7, l'étude n'est pas terminée et nous espérons pouvoir obtenir les résultats d'existence et de régularité attendus. Par ailleurs, il serait intéressant d'étudier le comportement en temps long du flot. D'après [112], les points critiques de l'énergie de redressement-raccourcissement (Définition 7.1) sont les cercles et les "8". Comme l'énergie relaxée de Bellettini *et al.* (Définition 2.5) interdit les croisements "anguleux" du bord des ensembles, nous nous attendons à ce que le flot en temps long d'un ensemble converge mais que le bord de l'ensemble limite ne forme pas de "8". Plus précisément, si une composante connexe liée $C(t)$ (Définition 7.10) du flot $E(t)$ est simplement connexe, alors nous pensons que $C(t)$ converge lorsque $t \rightarrow +\infty$ vers un disque de rayon $1/\lambda$ (seul disque stable de l'énergie). Si $C(t)$ n'est pas simplement connexe mais n'a qu'un seul trou, alors nous nous attendons à ce que $C(t)$ prenne la forme d'un anneau dont les bords sont deux cercles convergeant vers le même cercle de rayon $1/\lambda$. Ainsi, $C(t)$ devrait disparaître en temps infini. Si $C(t)$ a plus d'un trou alors la situation est plus complexe car les bords des trous et le bord "extérieur" de $C(t)$ devrait converger vers le même cercle. Cependant, comme les courbes décrivant le bord des trous sont encerclées par celle décrivant le bord extérieur, l'ensemble limite adopte certainement une forme non triviale.

Un peu de la même manière, nous pouvons étudier le flot de l'énergie élastique du Chapitre 5 (dans un confinement). La difficulté réside dans la définition d'un ensemble à partir d'une courbe admissible (Définition 5.3). Le Théorème 5.27 nous indique que c'est possible pour les courbes minimales mais la tâche est moins aisée pour n'importe quelle courbe admissible.

3. Définition d'un flot de Willmore

Le dernier aspect que nous n'avons pas du tout abordé dans cette thèse est l'élaboration d'un critère permettant de dire si une évolution géométrique correspond ou non à un flot de Willmore. En effet, il n'existe pas de notion faible de flot gradient pour l'énergie de Willmore. Les mouvements minimisants nous permettent de définir un flot à partir de l'énergie de Willmore mais en quoi l'évolution obtenue est-elle un flot gradient ? Plusieurs notions de flot existent déjà pour le périmètre, nous en avons donné une lors de la présentation des mouvements minimisants (Chapitre 6 Section 2.2). Une autre, nommée flot de courbure moyenne de Brakke et utilisant la notion de varifold, a été développée dans [24].

Il est prouvé dans [76] que l'équation d'Allen-Cahn (l'équation régissant le flot gradient de l'approximation par champ de phase du périmètre) converge vers le flot de courbure moyenne de Brakke. Nous pouvons nous demander si un résultat analogue peut se démontrer pour l'énergie de Willmore mais cela nécessite d'abord de définir une notion de flot faible pour cette énergie. Un moyen d'y parvenir est peut être d'utiliser les varifolds. En effet, une notion de courbure moyenne généralisée existe pour les varifolds et d'autres objets comme la seconde forme fondamentale peuvent aussi être généralisés (voir [75]). À l'image du flot de Brakke, nous pouvons espérer obtenir une formulation faible du flot de Willmore en utilisant les varifolds.

Bibliographie

- [1] Samir AKKOUCHÉ et Eric GALIN : Fast surface reconstruction from contours using implicit surfaces. *In Implicit Surfaces*, volume 98, pages 139–144, 1998.
- [2] Fred ALMGREN, Jean TAYLOR et Lihe WANG : Curvature-driven flows : a variational approach. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 31(2):387–437, March 1993.
- [3] Luigi AMBROSIO : Movimenti minimizzanti. *Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Memorie di Matematica e Applicazioni*, 19(113):191–246, 1995.
- [4] Luigi AMBROSIO, Vicent CASELLES, Simon MASNOU et Jean Michel MOREL : Connected components of sets of finite perimeter and applications to image processing. *Journal of the European Mathematical Society*, 3(3):39–92, 2001.
- [5] Luigi AMBROSIO, Nicola FUSCO et Diego PALLARA : *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford University Press, 2006.
- [6] Luigi AMBROSIO, Nicola GIGLI et Giuseppe SAVARÉ : *Gradient Flow in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*. Birkhauser, 2005.
- [7] Luigi AMBROSIO et Simon MASNOU : A direct variational approach to a problem arising in image reconstruction. *Interfaces and Free Boundaries*, 5:63–81, 2003.
- [8] Morade AMRANI, Benoît CRESPIN et Behzad SHARIAT : Skeletal implicit surface reconstruction from sections for flexible body simulation. *In Information Visualisation, 2001. Proceedings. Fifth International Conference on*, pages 723–728, 2001.
- [9] Guillermo ARREAGA, Riccardo CAPOVILLA, Chryssomalis CHRYSSOMALAKOS et Jemal GUVEN : Area-constrained planar elastica. *Physical Review E*, 65(3), 2002.
- [10] Thierry AUBIN : *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 1998.
- [11] Sergey AVVAKUMOV, Oleg KARPENKOV et Alexey SASSINSKY : Euler elasticae in the plane and the Whitney-Graustein theorem. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 20(3):257–267, July 2013.
- [12] Peter BATES, Sarah BROWN et Jian Long HAN : Numerical analysis for a nonlocal Allen-Cahn equation. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 6:33–49, 2009.
- [13] Giovanni BELLETTINI, Gianni DAL MASO et Maurizio PAOLINI : Semi-continuity and relaxation properties of a curvature depending functional in 2d. *Annali della Scuola Normale Superior di Pisa, Classe di scienze*, 20(2):247–297, 1993.
- [14] Giovanni BELLETTINI et Luca MUGNAI : Characterization and representation of the lower semicontinuous envelope of the elastica functional. *Annale de l'institut Henri Poincaré, Analyse non Linéaire*, 21:839–880, 2004.
- [15] Giovanni BELLETTINI et Luca MUGNAI : On the approximation of the elastica functional in radial symmetry. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 24:1–20, 2005.
- [16] Giovanni BELLETTINI et Luca MUGNAI : Approximation of helfrich's functional via diffuse interfaces. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 42(6):2402–2433, 2010.
- [17] Giovanni BELLETTINI et Maurizio PAOLINI : Approssimazione variazionale di funzionali cao curvatura. *Seminario di annali matematica, dipartimento di matematica dell universita di Bologna*, 1993.
- [18] Giovanni BELLETTINI et Maurizio PAOLINI : Anisotropic motion by mean curvature in the context of Finsler geometry. *Hokkaido Mathematical Journal*, 25:537–566, 1996.
- [19] Musodiq BELLO, James CARSON, Wah CHIU, Gregor EICHELE, Ioannis KAKADIARIS, Tao JU, Christina THALLER et Joe WARREN : Building 3d surface networks from 2d curve networks with application to anatomical modeling. *The Visual Computer*, 21(8):764–773, 2005.
- [20] Marcel BERGER et Bernard GOSTIAUX : *Differential Geometry : Manifolds, Curves, and Surfaces*. Springer-Verlag, 1987.

- [21] Jean-Daniel BOISSONNAT : Shape reconstruction from planar cross sections. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing. An International Journal*, 44(1):1–29, august 1988.
- [22] Andrea BRAIDES : Γ -convergence for beginners. Oxford University Press, 2002.
- [23] Andrea BRAIDES : *Local minimization, variational evolution and Gamma-convergence*, volume 2094 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 2013.
- [24] Kenneth BRAKKE : *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*. Princeton University Press, 1978.
- [25] Kristian BREDIES, Thomas POCK et Benedikt WIRTH : A convex, lower semi-continuous approximation of Euler’s elastica energy. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 47(1):566–613, February 2015.
- [26] Élie BRETIN : *Mouvement par courbure moyenne et méthode de champ de phases*. Thèse de doctorat, Institut Polytechnique de Grenoble, 2009.
- [27] Élie BRETIN, Jacques-Olivier LACHAUD et Édouard OUDET : Regularization of discrete contour by Willmore energy. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40(2):214–229, 2011.
- [28] Élie BRETIN, Simon MASNOU et Édouard OUDET : Phase-field approximations of the Willmore functional and flow. *Numerische Mathematik*, 131(1):115–171, 2014.
- [29] Dorin BUCUR et Antoine HENROT : A new isoperimetric inequality for the elasticae. *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*, 2016 (to appear).
- [30] Blanche BUET : *Approximation de surfaces par varifolds discrets : représentation, courbure, rectifiabilité*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, 2014.
- [31] Giuseppe BUTAZZO : Interpretation of the Lavrentiev phenomenon by relaxation. *Journal of Functional Analysis*, 110(2):434–460, December 1992.
- [32] John CAHN et John HILLIARD : Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. *The Journal of Chemical Physics*, 28(2):258–267, 1958.
- [33] Marie-Paule CANI, Olivier PALOMBI et Adeline PIHUIT : Reconstruction implicite de surfaces 3d à partir de régions 2d dans des plans parallèles. In *AFIG 2009 - 22e Journées de l’Association Française d’Informatique Graphique*, Novembre 2009.
- [34] Frédéric CAO, Yann GOUSSEAU, Simon MASNOU et Patrick PÉREZ : Geometrically guided exemplar-based inpainting. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 4(4):1143–1179, 2011.
- [35] Nathan CARR, Michelle HOLLOWAY, Tao JU et Ming ZOU : Topology-constrained surface reconstruction from cross-sections. *ACM Transactions on Graphics*, 34(4):128 :1–128 :10, july 2015.
- [36] Antonin CHAMBOLLE : An algorithm for mean curvature motion. *Interfaces and Free Boundaries*, 6:195–218, 2004.
- [37] Tony CHAN, Sung Ha KANG et Jianhong SHEN : Euler’s elastica and curvature based inpaintings. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63:564–592, 2002.
- [38] David CHEN, Bryan MORSE, Penny RHEINGANS, K. R.SUBRAMANIAN et Terry YOO : Interpolating implicit surfaces from scattered surface data using compactly supported radial basis functions. In *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, SIGGRAPH ’05, 2005.
- [39] Long Qing CHEN et Jie SHEN : Applications of semi-implicit Fourier-spectral method to phase field equations. *Computer Physics Communications*, 108:147–158, 1998.
- [40] Min CHEN et Mark JONES : A new approach to the construction of surfaces from contour data. *Computer Graphics Forum*, 13(3):75–84, 1994.
- [41] Xinfu CHEN : Generation and propagation of interfaces for reaction-diffusion equations. *Journal of Differential Equations*, 96(1):116–141, 1992.
- [42] Xinfu CHEN, Charles ELLIOTT, Andrew GARDINER et Jennifer Jing ZHAO : Convergence of numerical solutions to the Allen-Cahn equation. *Applicable Analysis. An International Journal*, 69:47–56, 1998.
- [43] Yongho CHOI, Yibao LI, Junseok KIM et Jaemin SHIN : Three-dimensional volume reconstruction from slice data using phase-field models. *Computer Vision and Image Understanding*, 137:115 – 124, 2015.
- [44] Giovanna CITTI et Alessandro SARTI : A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24:307–326, 2006.
- [45] James COOLEY et John TUKEY : An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, pages 297–301, 1965.
- [46] Ian COOPE : Curve interpolation with nonlinear spiral splines. *IMA Journal of numerical analysis*, 13:327–341, 1992.

- [47] Daniel CREMERS, Fredrik KAHL, Simon MASNOU et Thomas SCHÖNEMANN : A linear framework for region-based image segmentation and inpainting involving curvature penalization. *International Journal of Computer Vision*, 99(1):53–68, 2012.
- [48] Daniel CREMERS, Simon MASNOU et Thomas SCHÖNEMANN : The elastic ratio : introducing curvature into ratio-based image segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 20(9):2565–2581, 2011.
- [49] Manuel DEL PINO, Michal KOWALCZYK, Frank PACARD et Juncheng WEI : Multiple-end solutions to the allen-cahn equation in \mathbb{R}^2 . *Journal of Functional Analysis*, 258(2):458–503, 2010.
- [50] Tony DEROSE, Tom DUCHAMP, Hugues HOPPE, John McDONALD et Werner STUETZLE : Surface reconstruction from unorganized points. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 26(2):71–78, july 1992.
- [51] Manfredo DO CARMO : *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [52] Patrick DONDL, Antoine LEMENANT et Stephan WOJTOWYTSCH : Phase field models for thin elastic structures with topological constraint. Preprint, 2015.
- [53] Patrick DONDL, Luca MUGNAI et Matthias RÖGER : Confined elastic curves. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 71(6):2205–2226, 2011.
- [54] Qiang DU, Lili JU et Xiaoqiang WANG : Efficient and stable exponential time differencing Runge-Kutta methods for phase field elastic bending models. *Journal on Computational Physics*, 2016 (to appear).
- [55] Qiang DU, Lili JU, Jian ZHANG et Liyong ZHU : fast explicit integration factor methods for semilinear parabolic equation. *Journal of Scientific Computing*, 62(2):431–455, 2015.
- [56] Qiang DU et Jian ZHANG : Numerical studies of discrete approximations to the Allen-Cahn equation in the sharp interface limit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31:3042–3063, July 2009.
- [57] Qiang DU et Wen-Xiang ZHU : Stability analysis and application of the exponential time differencing schemes. *Journal of Computational Mathematics*, 22(2):200–209, March 2004.
- [58] Klaus ECKER : *Regularity Theory for Mean Curvature Flow*. Birkhäuser, 2004.
- [59] A. B. EKOULE, Françoise PEYRIN et Christophe ODET : A triangulation algorithm from arbitrary shaped multiple planar contours. *ACM Transactions on Graphics*, 10(2):182–199, apr 1991.
- [60] Selim ESEDOGLU et Jianhong SHEN : Digital inpainting based on the mumford-shah-euler image model. *European Journal of Applied Mathematics*, 13:353–370, 2002.
- [61] Leonhard EULER : Recherches sur la courbure des surfaces. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, (16):119–143, 1760.
- [62] Lawrence Craig EVANS et Ronald GARIEPY : *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 1992.
- [63] Lawrence Craig EVANS et Joel SPRUCK : Motion of level sets by mean curvature. I. *Journal of Differential Geometry*, 33:635–681, 1991.
- [64] Kenneth John FALCONER : *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, 1985.
- [65] Herbert FEDERER : *Geometric Measure Theory*. Springer Verlag, 1996.
- [66] Ronald FEDKIW, Stanley OSHER et Hong-Kai ZHAO : Fast surface reconstruction using the level set method. In *Variational and Level Set Methods in Computer Vision, 2001. Proceedings. IEEE Workshop on*, pages 194–201, 2001.
- [67] Xiaobing FENG et Andreas PROHL : Analysis of a fully discrete finite element method for the phase field model and approximation of its sharp interface limits. *Mathematics of Computation*, pages 541–567, 2004.
- [68] Xiaobing FENG et Hai-Jun WU : A posteriori error estimates and an adaptive finite element method for the Allen-Cahn equation and the mean curvature flow. *Journal of Scientific Computing*, 24:121–146, August 2005.
- [69] Vincenzo FERONE, Bernd KAWOHL et Carlo NITSCH : The elastica problem under area constraint. *Mathematische Annalen*, 2016 (to appear).
- [70] George FORSYTHE et Erastus LEE : Variational study of nonlinear spline curves. *SIAM Review*, 15:120–133, 1973.
- [71] Helmut FUCHS, Zvi Meir KEDEM et S P USELTON : Optimal surface reconstruction from planar contours. *Communications of the Association for Computing Machinery*, 20(10):693–702, oct 1977.
- [72] Mariano GIAQUINTA et Giuseppe MODICA : *Mathematical Analysis, Foundations and Advanced Techniques for Functions of Several Variables*. Birkhauser, 2012.
- [73] Emmanuel HEBEY : *Nonlinear Analysis on Manifolds : Sobolev Spaces and Inequalities*. Lecture notes. American Mathematical Society, 2000.

- [74] Berthold HORN : The curve of least energy. *Association for Computing Machinery - Transactions on Mathematical Software*, 9(4):441–460, December 1983.
- [75] John HUTCHINSON : Second fundamental form for varifolds and the existence of surfaces minimising curvature. *Indiana University Mathematics Journal*, 35:45–71, 1986.
- [76] Tom ILMANEN : Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke’s motion by mean curvature. *Journal of Differential Geometry*, 38(2):417–461, 1993.
- [77] Darae JEONG, Junseok KIM, Hyun Geun LEE et Yibao LI : An unconditionally stable hybrid numerical method for solving the Allen–Cahn equation. *Computers Mathematics with Applications*, 60(6):1591–1606, 2010.
- [78] Zhou JIAZU : On the Willmore’s theorem for convex hypersurfaces. *Acta Mathematica Scientia*, 31B(2):361–366, 2011.
- [79] Jürgen JOST : *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, 2005.
- [80] Fredrik KAHL, Petter STRANDMARK et Johannes ULÉN : Shortest paths with higher-order regularization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 37:2588 – 2600, December 2015.
- [81] E. KEPPEL : Approximating complex surfaces by triangulation of contour lines. *IBM Journal of Research and Development*, 19(1):2–11, January 1975.
- [82] Sang-Un KIM et Chang-Ock LEE : Accurate surface reconstruction in 3d using two-dimensional parallel cross sections. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 53(2):182–195, 2015.
- [83] Hans KNÜPFER et Cyrill MURATOV : On an isoperimetric problem with a competing nonlocal term I : The planar case. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 66(7):1129–1162, 2013.
- [84] Norihito KOISO : Elastica in a Riemannian submanifold. *Osaka Journal of Mathematics*, 29:539–543, 1992.
- [85] Joel LANGER et David SINGER : Knotted elastic curves in R^3 . *Kangwon-Kyunggi Mathematical Journal*, 5(2):113–119, 1984.
- [86] Joel LANGER et David SINGER : The total squared curvature of closed curves. *Journal of Differential Geometry*, 20:1–22, 1984.
- [87] Joel LANGER et David SINGER : Curve straightening and a minimax argument for closed elastic curves. *Topology*, 24(1):75–88, 1985.
- [88] Gian Paolo LEONARDI et Simon MASNOU : Locality of the mean curvature of rectifiable varifold. *Advances in Calculus of Variations*, 2:17–42, 2009.
- [89] Anders LINNÉR : Some properties of the curve straightening flow in the plane. *Transactions of the American Mathematical Society*, 314(9):605–618, 1989.
- [90] Stephan LUCKHAUS et Thomas STURZENHECKER : Implicit time discretization for the mean curvature flow equation. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 3:253–271, 1995.
- [91] Francesco MAGGI : *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems*. Cambridge University Press, 2012.
- [92] Carlo MANTEGAZZA : *Lecture Notes on Mean Curvature Flow*. Birkhäuser, 2010.
- [93] Simon MASNOU et Jean Michel MOREL : On a variational theory of image amodal completion. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 116:211–252, 2006.
- [94] Simon MASNOU et Giacomo NARDI : A coarea type formula for the relaxation of a generalized elastica functional. *Journal of Convex Analysis*, 20(3):617–653, 2013.
- [95] Ulrich MENNE : Second order rectifiability of integral varifolds of locally bounded first variation. *Journal of Geometric Analysis*, 23(2):709–763, 2013.
- [96] David MEYERS, Shelley SKINNER et Kenneth SLOAN : Surfaces from contours. *ACM Transactions on Graphics*, 11(3):228–258, July 1992.
- [97] Tatsuya MIURA : Singular perturbation by bending for an adhesive obstacle problem. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 55(1):55–19, 2016.
- [98] Luciano MODICA et Stefano MORTOLA : Un esempio di Γ -convergenza. *Unione Matematica Italiana. Bollettino. B. Serie V*, 14(1):285–299, 1977.
- [99] Luciano MODICA et Stefano MORTOLA : Il limite nella Γ -convergenza di una famiglia di funzionali ellittici. *Unione Matematica Italiana. Bollettino. A. Serie V*, 14(3):526–529, 1977.
- [100] Roger MOSER : A higher order asymptotic problem related to phase transitions. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 37(3):712–736, 2005.

- [101] David MUMFORD : *Elastica and computer vision*, pages 491–506. 1994.
- [102] David MUMFORD et Mark NITZBERG : The 2.1-D sketch. *In Proceedings, Third International Conference on Computer Vision*, pages 138–144, 1990.
- [103] Yuko NAGASE et Yoshihiro TONEGAWA : A singular perturbation problem with integral curvature bound. *Hiroshima Mathematical Journal*, 37:455–489, 2007.
- [104] James O'BRIEN et Greg TURK : Shape transformation using variational implicit functions. *In Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH '99*, pages 335–342, 1999.
- [105] Shinya OKABE : The motion of elastic planar closed curves under the area preserving condition. *Indiana University Mathematics Journal*, 56(4):1871–1912, 2007.
- [106] Shinya OKABE : Remarks on a dynamical aspect of shortening-straightening flow for non-closed planar curves with fixed boundary. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B35:41–63, 2012.
- [107] Nadine OLISCHLÄGER et Martin RUMPF : Two step time discretization of Willmore flow. (mathematics of surfaces XIII). *Lecture Notes in Computer Science*, 5654:278–292, 2009.
- [108] Emanuele PAOLINI et Eugene STEPANOV : Existence and regularity results for the steiner problem. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 46(3):837–860, 2013.
- [109] Matthias RÖGER et Reiner SCHÄTZLE : On a modified conjecture of De Giorgi. *Mathematische Zeitschrift*, 254(4):675–714, 2006.
- [110] John ROWLINSON : (translation of van der waals' article) the thermodynamic theory of capillarity under the hypothesis of a continuous variation of density. *Journal of Statistical Physics*, 20(2):200–244, February 1979.
- [111] Yu SACHKOV : Maxwell strata in the Euler elastic problem. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 14(2):169–234, April 2008.
- [112] Yu SACHKOV : Closed Euler elasticae. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 278: 218–232, 2012.
- [113] Thomas SCHMIDT : Strict interior approximation of sets of finite perimeter and functions of bounded variation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 143(5):2069–2084, 2015.
- [114] Sylvia SERFATY : Γ -convergence of gradient flows on hilbert and metric spaces and applications. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 31(4):1427–1451, 2011.
- [115] James Albert SETHIAN : *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. Cambridge monographs on applied and computational mathematics. Cambridge University Press, 1999.
- [116] Leon SIMON : *Lecture on geometric measure theory*. volume 3, 1983.
- [117] Yoshihiro TONEGAWA : Phase field model with a variable chemical potential. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 132:993–1019, July 2002.
- [118] William ZIEMER : *Weakly Differentiable Functions*. Springer-Verlay, 1989.

Minimisations sous contraintes et flots du périmètre et de l'énergie de Willmore

Résumé : nous étudions la minimisation du périmètre et de l'énergie de Willmore en présence de contraintes ainsi que le flot, défini par les mouvements minimisants, de l'énergie de Willmore. La semi-continuité inférieure est une notion clef qui fait souvent défaut dans les problèmes d'optimisation et dans les flots que nous étudions. Ainsi, nous sommes amenés à étudier l'enveloppe semi-continue inférieurement des énergies (périmètre ou énergie de Willmore) et la manière d'inclure les contraintes.

Dans la première partie de la thèse, nous étudions trois problèmes d'optimisation. Le premier concerne l'approximation d'un ensemble par des ensembles connexes (ou simplement connexes) dans le plan. Nous montrons en particulier que si une suite d'ensembles connexes converge vers un ensemble alors la limite des périmètres est strictement supérieure au périmètre de l'ensemble limite. Nous arrivons à quantifier cet écart en utilisant les arbres de Steiner. Le deuxième problème est la reconstruction de domaines volumiques à partir de sections planaires (en dimension 2, 3 et supérieure). L'idée est de calculer numériquement le meilleur ensemble qui englobe les sections, meilleur pour le périmètre ou l'énergie de Willmore. Nous prouvons des résultats théoriques pour la reconstruction avec le périmètre. Numériquement, nous utilisons surtout l'énergie de Willmore avec différents types de données. La méthode numérique utilisée est l'approximation par champ de phase des ensembles et des énergies. Enfin, le troisième problème est l'analyse d'un élastique confiné dans le plan. Nous étudions les courbes fermées, confinées dans un ouvert borné du plan, minimisant l'énergie de Willmore (ou énergie élastique). Nous démontrons des résultats d'existence, de régularité et de forme des courbes minimales. Nous utilisons la même approche numérique que dans le problème précédent afin d'illustrer les résultats théoriques.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous étudions le flot de l'énergie de Willmore par les mouvements minimisants. Même pour une surface régulière, ce flot est difficile à analyser, notamment parce qu'il peut développer des singularités en temps fini. Deux généralisations sont possibles : l'enveloppe semi-continue inférieurement étend l'énergie de Willmore à des surfaces moins régulières, tandis que les mouvements minimisants génèrent un flot en temps long même pour ce type d'énergie dont le gradient n'est pas bien défini. Nous étudions en particulier le flot de deux modèles liés aux énergies de flexion ou de Willmore : le premier modèle est défini dans le plan et implique aussi le périmètre, tandis que le second modèle étend en dimension quelconque l'énergie de Willmore aux fonctions par la formule de la co-aire. Nous caractérisons en particulier l'évolution d'une classe de fonctions radiales par le flot de l'énergie de Willmore invariante par changement d'échelles.

Mots clefs : périmètre ; énergie de Willmore ; énergie élastique ; relaxée semi-continue inférieurement ; méthode champ de phase ; mouvement minimisant ; flot numérique.

Image en couverture : simulation numérique d'une courbe élastique dans un confinement en forme de tête de renard.

