



**HAL**  
open science

# Fiabilité et optimisation des calculs obtenus par des formulations intégrales en propagation d'onde

Mark Bakry

► **To cite this version:**

Mark Bakry. Fiabilité et optimisation des calculs obtenus par des formulations intégrales en propagation d'onde. Mathématiques [math]. UNIVERSITE PARIS-SACLAY, 2016. Français. NNT : . tel-01396574

**HAL Id: tel-01396574**

**<https://hal.science/tel-01396574>**

Submitted on 14 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

*Établissement d'inscription* : École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

*Établissement d'accueil* : École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

*Laboratoire d'accueil* : Unité de mathématiques appliquées, ENSTA-CNRS-INRIA

## THÈSE DE DOCTORAT ÈS MATHÉMATIQUES

*Spécialité* : Mathématiques appliquées

**Marc BAKRY**

Fiabilité et optimisation des calculs obtenus par des  
formulations intégrales en propagation d'onde

*Date de soutenance* : 3 octobre 2016

*Après avis des rapporteurs* : XAVIER ANTOINE (IECL)  
BENJAMIN STAMM (RWTH Aachen)

*Jury de soutenance* :

TOUFIC ABOUD	(IMACS) Président
XAVIER ANTOINE	(IECL) Rapporteur
STÉPHANIE CHAILLAT	(CNRS-POEMS) Encadrante de thèse
PATRICK CIARLET	(ENSTA-ParisTech) Directeur de thèse
FRANCIS COLLINO	Examineur
GILDAS KUBICKE	(DGA) Invité
SÉBASTIEN PERNET	(ONERA) Encadrant de thèse
BENJAMIN STAMM	(RWTH Aachen) Rapporteur



# Fiabilité et optimisation des calculs obtenus par des formulations intégrales en propagation d'onde

Applications à l'acoustique et l'électromagnétisme

Marc Bakry

Thèse de doctorat  
Mathématiques appliquées

Université Paris–Saclay  
3 octobre 2016



# Remerciements

Le présent manuscrit est l'aboutissement de trois années de thèse effectuées pour la majeure partie dans l'unité DTIM/M2SN de l'ONERA, centre Midi-Pyrénées, et dans le laboratoire UMA/POEMS de l'ENSTA-ParisTech. J'estime avoir bénéficié d'un environnement humain exceptionnel. Cela m'a notamment permis de rester fidèle au programme que je m'étais fixé par rapport aux dates de rendu du manuscrit et de fin de thèse. Si la charge de travail fut importante, je ne me suis jamais senti perdu, et ai conservé ma motivation jusqu'au bout. Pour toutes ces raisons (et bien d'autres encore), j'énumère ci-après une liste de personnes que je souhaite remercier pour leur(s) contribution(s), de près ou de loin, à ce travail.

Je souhaiterais commencer par mon encadrement direct. Je remercie tout d'abord Marc Lenoir qui m'a suivi au début de ma thèse, puis Patrick Ciarlet qui a repris la suite ainsi que pour la relecture du présent manuscrit. Je remercie également Stéphanie Chaillat pour la relecture du manuscrit et ses conseils pour l'amélioration de la rédaction. Je remercie enfin grandement Sébastien Pernet qui m'a suivi au jour le jour tout au long de ces trois années, pour avoir enduré mes questions, pour m'avoir laissé libre de choisir les directions que je souhaitais explorer, pour sa relecture attentive du manuscrit, pour la confiance qu'il m'a accordée, de manière générale pour m'avoir supporté.

J'aimerais maintenant remercier Xavier Antoine et Benjamin Stamm pour leur relecture très attentive du manuscrit et le temps qu'ils ont accepté d'y investir. Je remercie également Toufic Abboud pour avoir accepté de présider le jury de soutenance et Gildas Kubické pour avoir représenté la DGA. Je remercie particulièrement Francis Collino pour sa collaboration fructueuse et le temps qu'il a pris pour éclaircir certains points ou encore ses morceaux de codes.

Je remercie tous les membres de l'unité toulousaine M2SN pour la bonne ambiance que j'y ai trouvée et les bons moments que j'y ai passés. Je ne suis jamais venu à reculons (sauf le lundi matin, mais c'est un autre problème). Il en va de même pour le laboratoire palaisien POEMS où j'ai passé la moitié de mon temps durant ma dernière année.

Je salue encore les thésard(e)s que j'ai pu(e)s croiser, que ce soit pour les débats interminables à la pause, les conversations qui dérivent, ou bien la transmission de la mémoire et des légendes.

Je pense également à mes "vieux" amis Julien, Clément, Guillaume, et aux membres de l'AVAT qui m'ont permis de passer de très bons moments.

Je tiens maintenant à remercier mes parents, Marie-Edith et Frédéric, mon petit frère Etienne, ma petite sœur Juliette ainsi que ma tante Marie-Reine et mon oncle Dominique, pour leur soutien et leurs encouragements, en particulier pour l'appartement à Ramonville, les repas, la logistique en général. . .

---

Enfin, merci à toi, Laure, de m'avoir accompagné tout au long de cette troisième année, pour m'avoir fait revoir ma vision des choses, pour ton soutien, et pour la joie que tu continues de m'apporter.

Marc BAKRY, 7 octobre 2016

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Outils mathématiques</b>	<b>11</b>
1.1 Opérateur de Fredholm . . . . .	11
1.2 Opérateur différentiels surfaciques . . . . .	13
1.2.1 Gradient surfacique . . . . .	13
1.2.2 Rotationnel tangentiel et rotationnel surfacique . . . . .	13
1.2.3 Divergence surfacique . . . . .	14
1.2.4 Laplacien Beltrami . . . . .	14
1.2.5 Identités de Stokes . . . . .	14
1.3 Espaces de Sobolev $H^s$ . . . . .	15
1.3.1 Espace $W^s$ – Norme de Slobodeckij . . . . .	15
1.3.2 Espace $H^s$ – Avec Fourier . . . . .	16
1.3.3 Correspondance entre les espaces $H^s$ et $W^s$ . . . . .	17
1.3.4 Espaces $H^s$ de frontière "classiques" . . . . .	18
1.3.5 Espaces de Sobolev de frontière pour l'électromagnétisme, décomposition de Helmholtz . . . . .	19
1.4 Lemmes de Céa et Bramble–Hilbert . . . . .	21
1.5 Eléments d'analyse microlocale . . . . .	22
1.5.1 Notion d'opérateur pseudo-différentiel . . . . .	22
1.5.2 Opérateurs intégraux . . . . .	27
1.6 Conclusion sur les outils . . . . .	30
<b>2 Construction des formulations intégrales pour l'acoustique et l'électromagnétisme</b>	<b>31</b>
2.1 Méthodes intégrales pour l'acoustique . . . . .	31
2.1.1 Equation de propagation d'une onde acoustique . . . . .	32
2.1.2 Formulations intégrales des champs . . . . .	37
2.1.3 Construction des quatre opérateurs intégraux . . . . .	39
2.1.4 Formulations intégrales pour l'acoustique . . . . .	41
2.1.5 Espaces conformes pour les équations intégrales en acoustique . . . . .	45
2.1.6 Conclusion sur les équations intégrales pour l'acoustique . . . . .	45
2.2 Méthodes intégrales pour l'électromagnétisme . . . . .	46
2.2.1 Les équations de Maxwell . . . . .	46
2.2.2 Formules de représentation . . . . .	49
2.2.3 Les équations intégrales en électromagnétisme . . . . .	51
2.2.4 Espaces conformes pour les équations intégrales en électromagnétisme . . . . .	52
2.3 Conclusion . . . . .	53

<b>3</b>	<b>Vérification de la validité d'indicateurs d'erreur existant pour le problème de propagation d'ondes acoustiques.</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction à l'indication d'erreur <i>a posteriori</i> . . . . .	55
3.1.1	Contexte de l'indication d'erreur . . . . .	56
3.1.2	Estimation d'erreur <i>a priori</i> et <i>a posteriori</i> . . . . .	56
3.1.3	Convergence optimale d'un algorithme de raffinement autoadaptatif . . . . .	61
3.2	Indicateurs basés sur le résidu . . . . .	63
3.2.1	Indicateurs basés sur le résidu de Faermann . . . . .	64
3.2.2	Indicateur résidu pondéré . . . . .	66
3.2.3	Conclusion sur les indicateurs résidu . . . . .	77
3.3	Indicateurs basés sur des reconstructions ou enrichissements d'espace . . . . .	77
3.3.1	Indicateur par enrichissement d'espace : indicateur $h - \frac{h}{2}$ . . . . .	79
3.3.2	Indicateurs par reconstruction d'espace . . . . .	80
3.4	Conclusion sur les indicateurs de la littérature et leur extension pour l'acoustique . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Construction d'un nouvel indicateur d'erreur fiable, efficace, local et asymptotiquement exact pour l'acoustique</b>	<b>87</b>
4.1	Une technique non-standard de localisation des normes de Sobolev d'ordre non entier . . . . .	87
4.1.1	Construction abstraite d'un nouvel indicateur d'erreur <i>a posteriori</i> fiable, efficace, local. . . . .	87
4.1.2	Caractère asymptotiquement exact de l'indicateur $\Lambda$ . . . . .	88
4.1.3	Proposition d'une technique générique de construction pour l'indicateur $\Lambda$ . . . . .	89
4.1.4	Conclusion sur la technique de localisation par opérateur . . . . .	90
4.2	Construction des opérateurs $\Lambda$ sous forme intégrale . . . . .	90
4.2.1	Forme intégrale du $\Lambda$ pour l'équation $\mathcal{S}_{k_w}$ . . . . .	90
4.2.2	Forme intégrale du $\Lambda$ pour l'équation $\mathcal{N}_{k_w}$ . . . . .	95
4.2.3	Conclusion sur la construction de l'indicateur- $\Lambda$ pour l'acoustique . . . . .	98
4.3	Construction de l'opérateur $\Lambda$ comme puissance d'un opérateur différentiel classique . . . . .	98
4.3.1	Construction de l'opérateur $\Lambda$ comme puissances d'opérateurs conventionnels . . . . .	98
4.3.2	Conclusion sur les opérateurs $\Lambda$ comme puissance d'opérateurs conventionnels . . . . .	100
4.4	Conclusion sur l'indicateur <i>a posteriori</i> basé sur un opérateur $\Lambda$ . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Validation numérique des indicateurs <i>a posteriori</i> pour l'acoustique</b>	<b>101</b>
5.1	Précisions sur l'implémentation des différents indicateurs d'erreur . . . . .	101
5.1.1	Implémentation des indicateurs par reconstruction . . . . .	102
5.1.2	Implémentation des indicateurs "résidu classique" . . . . .	102
5.1.3	Implémentation des indicateurs $\Lambda$ . . . . .	104
5.1.4	Implémentation du calcul de l'erreur exacte . . . . .	106
5.2	Validation numérique – Acoustique 2D . . . . .	107
5.2.1	Guidage par l'indicateur $\Lambda$ sur le cercle . . . . .	109
5.2.2	Guidage par l'indicateur $\Lambda$ sur le carré . . . . .	114
5.2.3	Guidage par l'indicateur $\Lambda$ sur le segment . . . . .	120
5.2.4	Guidage par l'indicateur $\Lambda$ sur le résonateur . . . . .	125
5.2.5	Guidage d'un algorithme de raffinement par les indicateurs $\eta_{r_h}$ et $\eta_{\Pi_{L^2}}$ de la littérature . . . . .	131

5.2.6	Comportement de l'indicateur $\eta_\Lambda$ lorsqu'on fait varier le paramètre de raffinement "Dörfler" $\theta_d$ . . . . .	134
5.2.7	Comportement de l'indicateur $\eta_\Lambda$ lorsqu'on utilise une source ponctuelle .	136
5.2.8	Comparaison entre l'indicateur $\eta_\Lambda$ sous forme "puissance" et sous forme "intégrale" . . . . .	141
5.2.9	Comportement de l'indicateur $\eta_\Lambda^i$ lorsqu'il est tronqué . . . . .	143
5.2.10	Conclusion sur les simulations en acoustique 2D . . . . .	144
5.3	Validation numérique – Acoustique 3D . . . . .	145
5.3.1	Remarques préliminaires sur le choix des exemples . . . . .	145
5.3.2	Convergence de $\eta_\Lambda$ sur la sphère de rayon $R = 1$ . . . . .	147
5.3.3	Convergence de $\eta_\Lambda$ sur le cube de côté $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . . . . .	147
5.3.4	Convergence de $\eta_\Lambda$ sur le bateau . . . . .	151
5.3.5	Conclusion sur les simulations en acoustique 3D . . . . .	152
5.4	Conclusion sur les simulations numériques en acoustique . . . . .	153
<b>6</b>	<b>Indicateurs d'erreurs pour l'EFIE</b> . . . . .	<b>155</b>
6.1	Proposition d'un indicateur par reconstruction pour l'EFIE . . . . .	156
6.2	Indicateur d'erreur de Stamm pour l'EFIE . . . . .	159
6.2.1	L'indicateur résidu de Nochetto & Stamm pour l'EFIE . . . . .	159
6.2.2	Éléments de preuve de convergence optimale pour l'indicateur de Nochetto & Stamm . . . . .	160
6.2.3	Application numérique pour l'indicateur résidu EFIE . . . . .	163
6.2.4	Conclusion sur l'indicateur résidu pour l'EFIE . . . . .	165
6.3	Indicateur $\Lambda$ pour l'EFIE . . . . .	166
6.3.1	$\eta_\Lambda^{\text{EFIE},1}$ basé sur une décomposition de Helmholtz du résidu . . . . .	167
6.3.2	$\eta_\Lambda^{\text{EFIE},2}$ basé sur une autre localisation de la norme $H_{\text{rot}}^{-1/2}$ . . . . .	173
6.3.3	Conclusion sur l'indicateur $\Lambda$ pour l'EFIE . . . . .	176
6.4	Indicateur basé sur le calcul des charges . . . . .	177
6.4.1	Construction d'un indicateur mesurant l'erreur sur les charges . . . . .	177
6.4.2	Exemple numérique pour l'indicateur sur les charges . . . . .	179
6.4.3	Conclusion sur l'indicateur $\eta_p$ . . . . .	180
6.5	Conclusion sur les indicateurs d'erreur <i>a posteriori</i> pour l'EFIE . . . . .	181
<b>7</b>	<b>Construction d'un indicateur d'erreur fiable et local pour des problèmes de type <i>goal-oriented</i></b> . . . . .	<b>183</b>
7.1	Introduction aux problèmes de type <i>goal-oriented</i> . . . . .	183
7.1.1	Estimation d'erreur <i>a priori</i> pour l'erreur <i>goal-oriented</i> . . . . .	184
7.1.2	Éléments de littérature sur le <i>goal-oriented</i> . . . . .	185
7.1.3	Exemples d'intérêt pour $\mathcal{Q}$ . . . . .	186
7.1.4	Le champ proche . . . . .	186
7.1.5	Le champ lointain . . . . .	187
7.2	Un indicateur <i>a posteriori goal-oriented</i> pour l'équation $\mathcal{S}_{k_w}$ . . . . .	187
7.3	Exemples pour les indicateurs <i>goal-oriented</i> . . . . .	188
7.3.1	Cas du cercle $R = 0.9$ . . . . .	188
7.3.2	Cas du carré $a = 1$ . . . . .	188
7.3.3	Cas du triangle équilatéral $e = 2$ . . . . .	189
7.3.4	Comparaison des maillages générés . . . . .	191
7.4	Conclusion sur l'indicateur <i>goal-oriented</i> . . . . .	192
	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>195</b>



# Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche visant à fournir des outils pour la mesure et le contrôle automatique de l'erreur d'approximation faite lors de la résolution numérique des équations intégrales de frontière relatives aux problèmes de propagation d'onde acoustique et électromagnétique en milieu homogène ouvert ou fermé.

La résolution de problèmes de propagation d'onde intervient dans de nombreux domaines de l'industrie comme de la recherche. En acoustique, des applications courantes sont par exemple le calcul de l'acoustique d'une salle de concert (c'est un problème fermé puisque l'environnement est clôt), le volume sonore au sol provenant des moteurs d'avion (le domaine de propagation est ici infini). En électromagnétisme, cela peut être la signature d'un avion éclairé par un radar, le calcul du champ généré par une antenne (satellite, radar, ...), ou encore le calcul des interactions entre composants électroniques dans le cadre de vérifications de compatibilité électromagnétique.

Le problème peut être abordé de deux manières. On peut privilégier une approche *temporelle* avec des équations d'ondes classiques issue directement des modèles physiques. C'est une approche utile lorsque le phénomène vibratoire couvre une large bande de fréquences. C'est également la seule alternative possible lorsqu'on souhaite étudier les phénomènes transitoires (en temps). Dans ce cas, on part d'un état initial du système qu'on fait évoluer dans le temps. Cela nécessite la mise en œuvre de méthodes pour résoudre deux problèmes : il faut pouvoir déterminer l'état du système à un instant  $t$  à partir des états précédents, puis il faut être capable de le faire évoluer de  $t$  à  $t + \delta t$ . En particulier, il faut souvent choisir entre stabilité inconditionnelle du schéma temporel mais pour lequel l'itération  $t \rightarrow t + \delta t$  est coûteuse (schéma temporel implicite), ou bien une stabilité conditionnelle (de type Courant-Freidrichs-Lewy) moins coûteuse par itération mais susceptible d'induire un plus grand nombre de ces itérations et des problèmes de stabilité (schéma explicite).

L'autre approche est l'**approche fréquentielle**. Elle est particulièrement adaptée lorsque le spectre du signal est réduit ou lorsqu'on ne s'intéresse qu'à une fréquence en particulier. L'approche fréquentielle a cet avantage qu'il n'y a pas d'évolution temporelle à gérer. Elle s'obtient à partir de l'approche temporelle en postulant une solution oscillant de manière sinusoïdale en temps à une fréquence connue mais dont on ignore l'amplitude et la phase. Le problème devient purement spatial. L'équation obtenue est du type de l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + k_w^2 u = 0$$

où  $k_w \in \mathbb{R}$  est le *nombre d'onde* tel que  $k_w = \frac{2\pi}{\lambda}$  avec  $\lambda$  la longueur d'onde.

Cette équation peut être résolue par plusieurs types de méthodes numériques. Une méthode très répandue est la méthode des Eléments Finis (FEM). C'est une méthode volumique aisée à mettre en place. Elle permet de gérer efficacement les milieux hétérogènes et elle induit une matrice à inverser creuse. Dans le cas de milieux non-bornés, des conditions limites d'ondes sortantes du type Perfectly Matched Layers peuvent être facilement implémentées. Elle présente cependant quelques désavantages. D'une part, c'est une méthode qui induit de la dispersion numérique mais ce problème peut être réglé par l'utilisation d'approximations d'ordre élevé.

D'autre part, la forme bilinéaire associée n'est pas coercive et le conditionnement de la matrice est très mauvais : dans le cas d'une inversion directe (problème 2D, ou petit problème 3D), cela ne pose pas de problèmes ; dans le cas d'une inversion par méthode itérative (problème 3D conventionnel), par exemple par un algorithme de type GMRES, le coût de résolution augmente fortement car de nombreuses itérations sont nécessaires. C'est un problème qui reste encore difficile à pré-conditionner.

La méthode à laquelle on s'intéresse dans cette thèse est basée sur les **équations intégrales**. On parle de *méthode des éléments finis de frontière*, ou *Boundary Element Method* (BEM). Ces équations sont obtenues par intégration par parties de l'équation de Helmholtz sur le domaine de propagation. On y adjoint une condition de radiation à l'infini pour sélectionner l'onde sortante du domaine et obtenir un problème bien posé. Au contraire des autres formulations, il n'y a pas de condition limite à l'infini à imposer puisqu'elle est *intrinsèque à l'équation*. Supposons qu'on appelle  $\Omega$  l'objet diffractant,  $\Gamma = \partial\Omega$  sa frontière. Les équations intégrales s'expriment comme des intégrales sur  $\Gamma$ . Le second membre de l'équation va dépendre de la condition limite imposée sur  $\Gamma$ . Ce sont des problèmes purement surfaciques dont l'un des avantages est de ne nécessiter que le maillage de  $\Gamma$  lors de la discrétisation du problème. Le nombre de degrés de liberté par rapport à une méthode volumique est donc plus faible ! Un autre avantage est la faible dispersion numérique des méthodes associées car la solution fondamentale de l'équation est prise explicitement en compte dans les formulations intégrales. Elles sont donc *très précises* ! Il y a évidemment des inconvénients pour ces méthodes. Un premier désavantage est qu'elles ne peuvent être utilisées directement sous la forme la plus simple que lorsque le milieu de propagation est homogène. Quelle que soit la méthode de discrétisation choisie, les matrices issues des équations intégrales sont pleines ce qui pose le problème aussi bien du stockage (en  $N^2$  avec  $N$  une dimension de la matrice), ou de l'inversion (en  $N^3$ , si l'inversion est directe, en  $N^2$  par méthode itérative). Ce dernier soucis peut être résolu par des méthodes de compression de matrice comme la Fast Multipole Method (pour laquelle la complexité de l'ensemble est en  $\mathcal{O}(N \log(N))$ ) ou les  $\mathcal{H}$ -matrices. On peut mentionner ensuite la mise en œuvre complexe, nécessitant en particulier l'évaluation précise d'intégrales singulières en plusieurs dimensions. Enfin, il faut faire un compromis entre la précision de la formulation utilisée et le conditionnement des matrices associées. Ce dernier problème est en grande partie résolu par l'utilisation de formulations combinées. De plus, les équations intégrales peuvent être efficacement pré-conditionnées.

Les avantages certains des formulations basées sur les équations intégrales en font des méthodes de choix pour la résolution de problèmes de propagation d'onde en milieu homogène. Cependant, leurs désavantages sont susceptibles de freiner leur développement. Une des manières d'en faciliter l'utilisation est d'*automatiser la chaîne de calcul*, de la génération du maillage à la production du résultat final à la précision souhaitée.

Pour cela, on se propose de mettre en place un algorithme de raffinement auto-adaptatif. L'objectif d'un tel algorithme est de produire une suite de maillages garantissant une convergence de l'erreur d'approximation vers une erreur cible fournie par l'utilisateur, certifiant ainsi la validité d'un calcul. Une boucle de raffinement auto-adaptative fonctionne de la manière suivante : on effectue une résolution sur un maillage initial, on estime l'erreur d'approximation sur l'ensemble du maillage, on marque ensuite les éléments du maillage où cette erreur est la plus grande selon un critère pré-défini, on raffine les zones marquées puis on itère le processus jusqu'à ce que l'indication d'erreur corresponde à la cible prescrite par l'utilisateur. Par exemple, on peut imaginer partir d'un maillage "grossier", éventuellement mauvais du point de vue des règles de bonne pratique mais généré rapidement, puis prescrire une erreur cible et enfin de laisser l'algorithme auto-adaptatif générer la suite de maillages jusqu'à convergence de

l'erreur. On peut donc expliciter trois objectifs majeurs :

- le premier objectif est de garantir la précision d'un calcul par rapport à une prescription de l'utilisateur.
- le second objectif est de proposer un maillage "idéal" du point de vue de la simulation. Ce maillage peut servir de base pour des simulations futures, par exemples à d'autres fréquences.
- le troisième objectif est enfin de réduire le coût global du calcul en économisant du temps sur la génération du maillage.

Un des points clés du raffinement auto-adaptatif est donc la *mesure* de l'erreur d'approximation.

On fait alors appel à des outils permettant cette mesure de l'erreur. On les appelle *indicateurs d'erreur a posteriori* et on les note  $\eta$ . Si on pose  $\mathcal{T}_h$  une discrétisation de  $\Gamma$  et  $\tau \in \mathcal{T}_h$  un élément de cette discrétisation, ces indicateurs permettent de mesurer l'erreur sur chaque élément  $\tau$ . Posons encore  $u$  la solution exacte et  $u_h$  son approximation numérique. L'indicateur  $\eta$  est une grandeur qui doit pouvoir se calculer *uniquement* à partir de  $u_h$  et des données du problème tout en donnant une information sur  $e_h = u - u_h$ . Il s'exprime généralement sous forme d'une norme. Cette information peut être

- qualitative : on récupère une information sur le *comportement* en convergence de l'erreur,
- quantitative : on récupère une information sur la *valeur* de l'erreur.

On doit alors exiger un certain nombre de propriétés sur  $\eta$  :

- fiabilité : l'indicateur ne converge pas plus vite que l'erreur,
- efficacité : l'erreur ne converge pas plus vite que l'indicateur. Cette propriété n'est pas indispensable mais permet entre autres de garantir la convergence optimale d'un algorithme de raffinement auto-adaptatif.
- localité : l'indicateur peut se décomposer sur les éléments du maillage. Elle est donc cruciale pour la bonne identification des zones à raffiner.

C'est cette dernière propriété qui est le cœur de la problématique de l'indication d'erreur *a posteriori* en équations intégrales. En effet, les espaces fonctionnels de Sobolev entrant en jeu dans les équations intégrales sont souvent d'ordre non entier. Par conséquent, les normes associées n'ont pas cette propriété de localité et il devient difficile de construire de tels indicateurs.

La problématique de l'indication *a posteriori* n'est pas nouvelle et remonte à la fin des années 70 avec les travaux de I. Babuška et W. C. Rheinboldt [4, 5] en éléments finis. Dans la foulée, toute une zoologie d'indicateurs pour la FEM ont été développés dont un aperçu peut être obtenu dans [2]. On a alors pu voir apparaître la notion de convergence optimale d'un algorithme auto-adaptatif. La convergence optimale signifie que l'indicateur d'erreur garantit un certain taux de convergence pour celle-ci. Elle est résumée, ainsi qu'une manière de la prouver, dans [16].

En BEM, le problème majeur est l'extension des indicateurs existant pour d'autres méthodes en contournant la non-localité des normes et des opérateurs. On trouve cependant une littérature solide sur le sujet, essentiellement lorsqu'on s'intéresse à des problèmes scalaires comme les équations relatives au problème de Poisson ou de Helmholtz. Ces indicateurs se répartissent en plusieurs grandes familles. La première grande famille est basée sur le fait que la norme du résidu de l'équation est une grandeur équivalente de l'erreur d'approximation. Cette propriété est notamment utilisée par B. Faermann dans [34] qui se base sur l'indicateur de Babuška-Rheinboldt, et [33, 35] en définissant son indicateur localement sur un élément  $\tau$  comme une norme sur un patch d'éléments  $\omega_\tau$  autour de cet élément. A peu près à la même époque, on a les travaux de C. Carstensen [14], poursuivis dans [17]. Ces indicateurs sont basés sur des localisations des normes non-locales en norme  $L^2$  pondérée par une taille locale caractéristique du maillage. Dans leur cadre d'utilisation le plus général, ils ne sont que fiables et locaux. Une autre famille d'indicateurs peut être regroupée dans les termes "enrichissement/reconstruction

d'espaces". Les indicateurs par "reconstruction" sont initialement introduits comme "indicateurs par moyenne". Les indicateurs par enrichissement utilisent des bases hiérarchiques pour reconstruire le problème et une approximation de l'erreur exacte (voir par exemple [6]). La seconde catégorie utilise une résolution sur un maillage raffiné par rapport au maillage initial, puis une reconstruction de cette erreur sur le maillage initial. Cela permet alors de récupérer localement une estimation de l'erreur. On renvoie à [30] pour une synthèse.

Ces indicateurs ont chacun leurs avantages et leurs inconvénients. Les indicateurs basés sur le résidu nécessitent son calcul, mais ne donnent pas d'idée sur la valeur de l'erreur. Ceux par enrichissement/reconstruction sont coûteux car il faut assembler, ou résoudre un problème plus grand. Néanmoins, ils permettent de récupérer, sous une forme non localisée, la valeur exacte de l'erreur en norme de Galerkin (voir [19] et [20]).

Pour une partie de ces indicateurs, on est capable de prouver la convergence (quasi-)optimale [16] lorsqu'ils sont utilisés pour le guidage d'un algorithme auto-adaptatif. C'est le cas notamment pour les indicateurs utilisant une localisation du résidu [41, 37, 38], pour les indicateurs multi-niveaux et de B. Faermann [40].

Le développement qui suit s'inscrit dans la continuité des travaux cités précédemment. **Les équations sur lesquelles on se focalise sont celles associées à l'opérateur Simple Couche  $\mathcal{S}_{k_w}$  et hypersingulier  $\mathcal{N}_{k_w}$  en ce qui concerne l'acoustique, et l'opérateur  $T$  associé à l'équation EFIE en électromagnétisme.** En effet, ce sont ceux qui font intervenir des espaces de Sobolev d'ordre non entier. On généralise notamment quelques indicateurs de la littérature introduits initialement pour l'équation de Laplace à l'équation de Helmholtz. On introduit également un nouvel indicateur d'erreur *a posteriori* permettant de faire une synthèse des qualités des indicateurs de la littérature, l'ensemble étant ensuite généralisé aux problèmes d'électromagnétisme. Le manuscrit est donc organisé comme suit.

Au chapitre 1, on effectue quelques rappels généraux de mathématiques nécessaires à la bonne compréhension des développements. On rappelle notamment la définition d'un opérateur de Fredholm, classe à laquelle appartiennent les opérateurs intégraux manipulés dans la suite. On donne encore les définitions des espaces de Sobolev d'ordre entier et non entier, également particularisés pour l'électromagnétisme. On finit avec une introduction à l'analyse microlocale en se focalisant sur les outils nécessaires à cette thèse.

Dans le chapitre 2, on ré-établit les équations intégrales. On cherche à donner une vision la plus complète possible, mais aisément compréhensible, de la construction des opérateurs intégraux. Ce travail est fait à la fois pour les équations intégrales en acoustique, et de manière plus sommaire pour celles en électromagnétisme.

Le chapitre 3 est dédié à la présentation détaillée de l'indication d'erreur. Dans un premier temps, on introduit plus en détail la notion d'indicateur d'erreur *a posteriori* ainsi que celle de convergence optimale. Dans un second temps, on explicite quelques indicateurs de la littérature basés sur le calcul du résidu et introduits pour le problème de Laplace. En particulier, on étend les indicateurs basés sur une norme  $L^2$  pondérée du résidu au problème de Helmholtz en acoustique. On effectue les démonstrations de convergence quasi-optimale des algorithmes auto-adaptatifs guidés par ces indicateurs. Dans un troisième temps, on introduit quelques indicateurs par enrichissement/reconstruction. On étend la sous-catégorie basée sur des reconstructions d'espace aux problèmes d'acoustique. Ces extensions sont basées sur le constat que les opérateurs intégraux pour l'équation de Helmholtz ne diffèrent de ceux pour l'équation de Laplace que d'un opérateur compact. Cet opérateur compact se traduit, lorsque l'erreur converge, par des termes d'ordre élevé dont on donne la définition dès maintenant.

**Définition 0.0.1** (Terme d'ordre élevé). *On dit que  $a$  est d'ordre élevé par rapport à  $b$  lorsque  $a \rightarrow 0$  et  $b \rightarrow 0$  si  $a = o_0(b)$ .*

On peut aussi dire que  $a$  tend "plus vite vers 0" que  $b$ . Les termes d'ordre élevé sont donc des termes qui peuvent, généralement, être négligés au sens asymptotique lors de l'analyse d'erreur *a posteriori* car on ne recherche pas des inégalités avec des bornes supérieures ou inférieures fermes.

Au chapitre 4, on introduit un nouvel indicateur d'erreur *a posteriori* pour l'acoustique basé sur une localisation de la norme du résidu par un opérateur  $\Lambda$ . L'idée est d'utiliser cet opérateur  $\Lambda$  pour "transporter" le résidu de l'espace fonctionnel auquel il appartient dans  $L^2$ . On peut alors montrer que cet indicateur est fiable, efficace et local. De plus, sous certaines conditions de régularité sur la surface  $\Gamma$ , on montre qu'un choix judicieux pour  $\Lambda$  fait de l'indicateur d'erreur associé un indicateur asymptotiquement exact vis-à-vis de la norme de Galerkin de l'erreur. Ce choix judicieux consiste à rechercher  $\Lambda$  comme un inverse approché de la racine carrée de la partie coercive de l'opérateur inversé lors de la résolution de l'équation intégrale. On propose alors deux manières de construire  $\Lambda$ , basées toutes les deux sur des techniques d'analyse micro-locale. Une première manière, inspirée par la thèse de M. Lecouvez [54], consiste à rechercher  $\Lambda$  sous la forme d'un opérateur intégral. Cette approche se limite au cas où la surface  $\Gamma$  est fermée et est peu pratique. De plus, les preuves d'efficacité et de fiabilité n'ont de sens que si  $\Gamma$  est régulière (au moins  $\mathcal{C}^1$ ). On donne alors une seconde manière qui consiste à considérer des puissances de l'opérateur  $\mathcal{I} - \Delta_\Gamma$  ("identité moins Laplacien Beltrami"). On montre que cette approche est plus agréable à manipuler et de plus valable sur des surfaces lipschitziennes.

Le chapitre 5 permet de valider numériquement la construction de l'indicateur basé sur un opérateur  $\Lambda$  du chapitre 4. On valide également les extensions faites au chapitre 3. On indique tout d'abord les techniques d'implémentation qui ont été mises en œuvre. Elles diffèrent selon qu'on a considéré l'équation associée à  $\mathcal{S}_{k_w}$  ou celle associée à  $\mathcal{N}_{k_w}$ . On effectue ensuite une large variété de simulations en 2D. On montre notamment que l'indicateur  $-\Lambda$ , quelle que soit sa forme, permet de guider optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif sur une large gamme de fréquences, ou encore avec des sources différentes et ce sur des géométries variées. En particulier, on vérifie qu'il est asymptotiquement exact en norme de Galerkin que ce soit sous la première forme (intégrale) ou la seconde. On effectue ensuite des simulations en 3D pour l'équation associée à l'opérateur  $\mathcal{N}_{k_w}$ . On vérifie à nouveau que l'indicateur est asymptotiquement exact et qu'il guide optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif.

Dans le chapitre 6, on étend l'ensemble des indicateurs développés aux chapitres 3 et 4 à l'Electric Field Integral Equation relative à la propagation d'une onde électromagnétique. Les équations intégrales en électromagnétisme font intervenir des espaces de Sobolev surfaciques d'ordre non entier particuliers qui rendent l'analyse *a posteriori* très complexe. On donne en particulier une forme admissible pour l'indicateur par reconstruction. On prouve ensuite la convergence optimale d'un algorithme auto-adaptatif guidé par un indicateur de type résidu [58]. On continue en introduisant deux candidats possibles pour un indicateur  $-\Lambda$ . La première forme est valable sur surface fermée et est théoriquement asymptotiquement exacte. La seconde est extensible sur tout  $\Gamma$  mais on perd *a priori* le caractère asymptotiquement exact. Enfin, on introduit un indicateur "incomplet" construit "à la main" permettant de mesurer la partie de l'erreur relative aux charges. Ce dernier indicateur présente l'avantage d'être extrêmement simple et rapide à calculer.

Le chapitre 7, dernier de ce manuscrit, s'intéresse à la problématique de l'erreur *goal-oriented*. Il ne s'agit plus de mesurer l'erreur sur la solution de l'équation intégrale, mais l'erreur sur une grandeur s'en déduisant, appelée *cible*, par exemple le champ acoustique en un point. Après avoir rappelé la problématique de l'erreur *a posteriori* goal-oriented, on introduit un indicateur d'erreur relatif à l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ . On donne finalement des exemples numériques en 2D en prenant comme cible le champ lointain derrière l'objet.

Bonne lecture.



# Chapitre 1

## Outils mathématiques

Dans ce chapitre, on effectue des rappels mathématiques généraux nécessaires à la bonne compréhension des méthodes qui sont mises en œuvre dans la suite.

Dans un premier temps, on rappelle ce qu'est un opérateur de Fredholm. C'est à cette classe d'opérateurs qu'appartiennent les opérateurs intégraux qu'on introduit au chapitre 2.

Dans un second temps, on présente l'équivalent surfacique des opérateurs différentiels volumiques classiques comme le laplacien, la divergence, etc.

Dans un troisième temps, on rappelle les définitions des espaces de Sobolev qui constituent le cadre dans lequel les analyses sont faites. En particulier, les équations intégrales font entrer en jeu des espaces de Sobolev d'ordre non entier qui complexifient grandement la problématique de l'indication d'erreur *a posteriori*. On présente d'abord les espaces de Sobolev "classiques" puis on introduit les espaces de Sobolev propres aux équations intégrales dans le cadre de l'électromagnétisme. On rappelle également la notion de trace et d'espace de trace.

On rappelle ensuite deux lemmes importants pour l'estimation d'erreur *a priori* et qui permettent de donner le meilleur taux de convergence possible pour l'erreur lorsqu'on raffine uniformément le maillage. Il s'agit tout d'abord du lemme de Céa puis du lemme de Bramble–Hilbert.

Enfin, on donne une introduction fournie à l'analyse microlocale. Cet outil joue un rôle central dans la construction de l'opérateur  $\Lambda$  et de l'indicateur d'erreur associé au chapitre 4.

Pour toutes les notions qui ne sont pas introduites ici, on renvoie à [9] ou bien [55].

### 1.1 Opérateur de Fredholm

Dans cette partie, on rappelle ce qu'est un opérateur de Fredholm. Cette notion va être très utile dans la suite puisque les opérateurs intégraux qu'on va manipuler appartiennent à cette classe d'opérateurs. Les propriétés de ces opérateurs permettent de démontrer le caractère bien posé d'un problème.

On commence par la définition suivante.

**Définition 1.1.1** (Opérateur de Fredholm). *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces vectoriels, un opérateur  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$  est dit "Fredholm" si*

- $\text{im}\mathcal{A}$  est fermée dans  $Y$ ,
- $\ker\mathcal{A}$  et  $Y/\text{im}\mathcal{A}$  sont de dimension finie.

La composition d'un opérateur de Fredholm avec un autre opérateur de Fredholm reste un opérateur de Fredholm.

Cette définition n'est pas très pratique. On peut en fait montrer le théorème suivant.

**Théorème 1.1.1.** *Soit un opérateur  $\mathcal{A} = \mathcal{I} + \mathcal{K}$  avec  $\mathcal{I}$  l'opérateur identité et  $\mathcal{K} : X \rightarrow X^*$ , avec  $X^*$  le dual de  $X$ , un opérateur **compact**, alors  $\mathcal{A} : X \rightarrow X^*$  est un opérateur de type Fredholm.*

Supposons de plus que  $X$  est un espace hilbertien et que  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, X^*)$ . On peut donner une caractérisation supplémentaire pour savoir si  $\mathcal{A}$  est Fredholm.

**Théorème 1.1.2.** *Si  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{K}$  avec  $\mathcal{A}_0 : X \rightarrow X^*$  coercif et  $\mathcal{K} : X \rightarrow X^*$  un opérateur compact, alors  $\mathcal{A} : X \rightarrow X^*$  est un opérateur de type Fredholm.*

On a alors la très utile *alternative de Fredholm* qui permet de donner le caractère "bien posé" d'une équation.

**Théorème 1.1.3** (Alternative de Fredholm). *Soit un opérateur de Fredholm  $\mathcal{A} : X \rightarrow X^*$ , alors on a l'une des deux possibilités suivantes à l'exclusion l'une de l'autre :*

- l'équation homogène  $\mathcal{A}x = 0$  admet pour unique solution  $x = 0$ . Dans ce cas,
  - pour tout  $f \in X^*$ , l'équation  $\mathcal{A}u = f$  admet une unique solution  $u \in X$ .
  - pour tout  $g \in X$ , l'équation adjointe  $\mathcal{A}^*v = g$  admet une unique solution  $v \in X^*$ .
- l'équation homogène  $\mathcal{A}u = 0$  admet  $p$  solutions linéairement indépendantes. Il en va de même pour l'équation adjointe.

On a donc une bonne caractérisation pour prouver que l'équation  $\mathcal{A}u = f$  admet une unique solution. En effet, on commence par montrer que  $\mathcal{A}$  est de type Fredholm, puis on montrer que  $\mathcal{A}$  est injectif.

On remarque également que la partie coercive de  $\mathcal{A}$  est telle que

$$(u, v)_{\mathcal{A}_0} = (\mathcal{A}_0 u, v)$$

et définit un produit scalaire et sa norme associée telle que

$$\|u\|_{\mathcal{A}_0}^2 = (u, u)_{\mathcal{A}_0}.$$

On l'appelle *norme énergie* ou indifféremment *norme de Galerkin*.

Pour montrer qu'un problème continu est bien posé, on peut aussi utiliser le théorème de Banach–Necăs–Babuška, quoique peut utilisable sous cette forme.

**Théorème 1.1.4** (Banach–Necăs–Babuška). *Soit  $W$  un espace de Banach et  $V$  un espace de Banach réflexif,  $a$  une forme bilinéaire sur  $W$  et  $V$ ,  $f \in V^*$ , le problème : trouver un unique  $u \in W$  tel que pour tout  $v \in V$  on a*

$$a(u, v) = (f, v)$$

*est bien posé si et seulement si*

- on a la **condition inf-sup**

$$\exists \alpha > 0, \inf_{w \in W} \sup_{v \in V} \frac{|a(w, v)|}{\|w\|_W \|v\|_V} \geq \alpha,$$

- pour  $v \in V$ ,

$$\forall w \in W, a(w, v) = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Ainsi, si un opérateur est de Fredholm et qu'on a montré que le problème associé est **bien posé**, on a la condition inf–sup **continue** ci-dessus.

On peut se demander si cette condition reste vérifiée lorsqu'on remplace les espaces  $W$  et  $V$  par un espace *discret* d'approximation  $V_h$  tel que  $V_h \subset V$  et  $V_h \subset W$ . On parle alors de **condition inf–sup discrète**. En général, la condition inf–sup continue n'implique pas la condition inf–sup discrète. Néanmoins, lorsqu'on traite le cas d'opérateurs de Fredholm, elle est toujours vérifiée pour une discrétisation suffisamment fine.

**Proposition 1.1.1.** *On considère un domaine  $\Omega$  et sa discrétisation  $\Omega_h$  (respectivement  $\Gamma$  et  $\mathcal{T}_h$  lorsqu'on traite les équations intégrales), il existe au moins une discrétisation<sup>1</sup> telle que la condition inf–sup discrète*

$$\exists \alpha_h > 0, \inf_{w \in V_h} \sup_{v \in V_h} \frac{|a(w, v)|}{\|w\|_{V_h} \|v\|_{V_h}} \geq \alpha_h$$

soit vérifiée avec  $\alpha_h$  une constante dépendant de ce maillage minimal.

## 1.2 Opérateur différentiels surfaciques

Les opérateurs intégraux introduits au chapitre 2 sont des opérateurs surfaciques qui font aux-mêmes intervenir l'équivalent surfacique des opérateurs gradient, laplacien, divergence, rotationnel. Si ces opérateurs sont bien définis sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , il est nécessaire de prendre quelques précautions pour les étendre à des opérateurs sur  $\Gamma = \partial\Omega$  l'enveloppe de  $\Omega$ . On s'appuie ici principalement sur [59].

### 1.2.1 Gradient surfacique

Soit une surface  $\Gamma$  de normale  $\mathbf{n}$  et un champ  $\mathbf{u}$  défini sur  $\Gamma$ .

**Définition 1.2.1** (Gradient surfacique). *Soit  $\mathbf{u}$  une fonction définie sur  $\Gamma$  et  $\tilde{\mathbf{u}}$  un relèvement de  $\mathbf{u}$  dans  $\Omega$ , on appelle gradient surfacique  $\nabla_\Gamma$  la trace tangentielle de  $\nabla\tilde{\mathbf{u}}$ , soit encore*

$$\nabla_\Gamma u = \nabla\tilde{u}|_\Gamma - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla\tilde{u}|_\Gamma).$$

Ce n'est rien d'autre que la projection orthogonale de  $\nabla\tilde{u}$  dans un plan tangent à  $\Gamma$ .

### 1.2.2 Rotationnel tangentiel et rotationnel surfacique

De la même manière que précédemment, en conservant les notations, on peut définir le rotationnel tangentiel (un vecteur) et le rotationnel surfacique (un scalaire).

**Définition 1.2.2** (Rotationnel tangentiel). *On définit le rotationnel tangentiel  $\overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma u$  comme le rotationnel volumique  $\overrightarrow{\text{rot}}(\tilde{\mathbf{u}} \mathbf{n})$ . On peut l'exprimer simplement à partir du gradient surfacique comme*

$$\overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma u = \nabla_\Gamma u \times \mathbf{n}.$$

On a également le rotationnel surfacique. On suppose maintenant que  $\mathbf{u}$  est à valeurs vectorielles.

**Définition 1.2.3** (Rotationnel surfacique). *On définit le rotationnel surfacique de  $u$  comme*

$$\text{rot}_\Gamma \mathbf{u} = \left( \overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{u}_\parallel \cdot \mathbf{n} \right)_\Gamma$$

où  $\mathbf{u}_\parallel$  est la composante tangentielle de  $\tilde{\mathbf{u}}|_\Gamma$ .

1. Si on considère une suite de maillages raffinés uniformément, on parle d'un  $h$  suffisamment petit. Si on parle d'une suite de maillages  $(\mathcal{T}_l)_l$  raffinés, d'un rang  $l$  suffisamment grand.

### 1.2.3 Divergence surfacique

C'est l'équivalent surfacique de l'opérateur divergence.

**Définition 1.2.4** (Divergence surfacique). *On définit la divergence surfacique de  $\mathbf{u}$  comme*

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{u}_\parallel.$$

### 1.2.4 Laplacien Beltrami

C'est l'opérateur Laplacien défini dans un plan tangent à une surface  $\Gamma$ . Il se définit de la même manière que le Laplacien volumique scalaire ou vectoriel.

**Définition 1.2.5** (Laplacien Beltrami). *Pour  $u$  un champ scalaire, on définit le Laplacien Beltrami scalaire comme*

$$\Delta_\Gamma u = \operatorname{div}_\Gamma \nabla_\Gamma u = -\operatorname{rot}_\Gamma \overrightarrow{\operatorname{rot}_\Gamma} u.$$

*Pour  $\mathbf{u}$  un champ vectoriel, on définit le Laplacien Beltrami vectoriel comme*

$$\Delta_\Gamma \mathbf{u} = \nabla_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} - \overrightarrow{\operatorname{rot}_\Gamma} \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{u}.$$

### 1.2.5 Identités de Stokes

Les identités suivantes donnent quelques relations entre les différents opérateurs surfaciques introduits précédemment<sup>2</sup>. Elles sont le pendant surfacique des relations volumiques.

Soient  $u \in H^1(\Gamma)$ <sup>3</sup> un champ scalaire surfacique et  $\mathbf{v} \in L_t^2(\Gamma)$  avec  $L_t^2(\Gamma) = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Gamma)]^3, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0\}$ , on a les règles de dualité

$$\langle \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}, u \rangle = - \int_\Gamma \mathbf{v} \cdot \nabla_\Gamma u \, d\gamma,$$

$$\langle \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{v}, u \rangle = \int_\Gamma \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}_\Gamma} u \, d\gamma.$$

Les opérateurs  $\operatorname{div}_\Gamma$  et  $\operatorname{rot}_\Gamma$  sont donc les opérateurs adjoints de  $-\nabla_\Gamma$  et  $\overrightarrow{\operatorname{rot}_\Gamma}$ .

On a de plus les identités

$$\operatorname{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma u = 0,$$

$$\operatorname{div}_\Gamma \overrightarrow{\operatorname{rot}_\Gamma} u = 0,$$

$$\operatorname{div}_\Gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) = \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{v}.$$

Les opérateurs introduits précédemment et les identités qui s'y rapportent permettent la manipulation des équations intégrales. En particulier, on s'en sert pour exprimer l'équivalent surfacique de la décomposition de Helmholtz (voir partie 1.3).

---

2. Voir par exemple [13].

3. Voir la partie 1.3.

## 1.3 Espaces de Sobolev $H^s$

Dans cette section, on redéfinit les espaces de Sobolev  $H^s$  afin de bien mettre en évidence leur importance dans l'analyse qui suit. On peut définir deux familles d'espaces de Sobolev qui seront équivalentes sous condition. Dans la suite,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  désigne un ouvert non vide.

On définit d'abord les espaces de Sobolev classiques  $W^s$  et  $H^s$ . On définit ensuite les espaces de Sobolev spécifiques qui interviennent lorsqu'on travaille avec les équations intégrales pour l'électromagnétisme.

### 1.3.1 Espace $W^s$ – Norme de Slobodeckij

On considère un réel  $s \geq 0$ <sup>4</sup>. Supposons tout d'abord que  $s \in \mathbb{N}_0$ .

**Définition 1.3.1.** On définit l'espace  $W^s(\Omega)$ ,  $s \in \mathbb{N}_0$ , comme

$$W^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \|u\|_s = \left( \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^2 d\Omega \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

En particulier,  $W^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ . Dans le cas où  $s$  n'est pas entier, il faut utiliser une caractérisation par une norme un peu particulière.

On commence par écrire  $s = r + \mu$  avec  $r \in \mathbb{N}_0$  et  $\mu \in ]0, 1[$ . On définit la semi-norme de Slobodeckij.

**Définition 1.3.2** (Norme de Slobodeckij). Soit  $n$  la dimension de  $\Omega$ , on définit la semi-norme de Slobodeckij comme

$$|u|_\mu = \left( \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\mu}} d\Omega_x d\Omega_y \right)^{1/2}.$$

Il est évident, à cause de la double intégrale, que cette norme ne peut pas être décomposée sur des sous-ensembles de  $\Omega$ . C'est la source majeure de difficultés dès lors qu'on cherche des indicateurs d'erreur *a posteriori* en équations intégrales.

On peut alors définir l'espace  $W^s$  dans le cas où  $s \in \mathbb{R}^+$ .

**Définition 1.3.3** (Espace  $W^s$ ). Pour  $s = r + \mu$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$  et  $\mu \in ]0, 1[$ , on définit l'espace de Sobolev  $W^s(\Omega)$  comme

$$W^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \|u\|_s = \left( \|u\|_r^2 + \sum_{|\alpha|=r} |\partial^\alpha u|_\mu^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

On a bien sûr les produits scalaires

$$(u, v)_s = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} d\Omega, \quad s \in \mathbb{N}_0,$$

$$(u, v)_s = \dots$$

$$\dots (u, v)_r + \sum_{|\alpha|=r} \int_{\Omega \times \Omega} \frac{(\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)) \overline{(\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y))}}{|x - y|^{n+2\mu}} d\Omega_x d\Omega_y, \quad s = r + \mu.$$

Avec cette définition, la notion de régularité intermédiaire non entière est contenue dans l'exposant  $n + 2\mu$ .

On présente maintenant une autre définition qui permet de faire des calculs plus explicites.

4. Le cas  $s < 0$  correspond aux espaces duaux des espaces avec  $s \geq 0$ .

### 1.3.2 Espace $H^s$ – Avec Fourier

On présente une seconde définition pour les espaces de Sobolev. Elle présente l'avantage, en plus de mettre clairement en évidence la régularité des fonctions de l'espace, de ne pas être restreinte au cas  $s \geq 0$ . On suppose donc que  $s \in \mathbb{R}$ .

On introduit le *potentiel de Bessel*

$$\mathcal{J}_s u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s/2} e^{i2\pi\xi \cdot x} \widehat{u}(\xi) d\xi$$

avec  $\xi$  la variable de Fourier et  $\widehat{u}$  la transformée de Fourier de  $u$ . L'expression ci-dessus est en fait la transformée de Fourier inverse de  $\widehat{u}$  pondérée par  $(1 + |\xi|^2)^{s/2}$ . Par conséquent,

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}(\mathcal{J}_s u)(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi).$$

On peut alors définir les espaces  $H^s$ .

**Définition 1.3.4** (Espace  $H^s$ ). *On pose  $\mathcal{S}^*$  l'espace des distributions tempérées dans  $\mathbb{R}^n$ . On définit alors l'espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  tel que*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n), \mathcal{J}_s u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

On lui associe naturellement le produit scalaire

$$(u, v)_s = (\mathcal{J}_s u, \mathcal{J}_s v)_0 \tag{1.1}$$

et la norme

$$\|u\|_s = \|\mathcal{J}_s u\|_0.$$

On en déduit que  $(H^s(\mathbb{R}^n))^* = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ . En effet, pour  $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$  et  $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , le crochet de dualité

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{-s, s} &= (\mathcal{J}_{-s} u, \mathcal{J}_s v), \\ &= (\widehat{u}, \widehat{v})_0 \end{aligned}$$

est bien défini.

On peut interpréter cette définition de la manière suivante : dans l'espace de Fourier, multiplier par  $|\xi|$  revient à dé-régulariser une fois dans l'espace "normal". Ainsi, multiplier par  $(1 + |\xi|^2)^{s/2}$  peut être vu comme un changement de régularité d'ordre  $s$ . Par exemple, pour  $s = 1/2$ , dire qu'une fonction  $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$  revient à dire que ses dérivées d'ordre  $1/2$  sont  $L^2$ . C'est très similaire à, par exemple,  $H^1$  où on demande que le gradient (donc la dérivée d'ordre 1) soit  $L^2$ .

Avec cette définition, il est beaucoup plus simple de voir la manière dont s'emboîtent les espaces  $H^s$ . En effet, d'après la définition, pour  $s \leq t$ ,

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \leq (1 + |\xi|^2)^{t/2}$$

donc

$$\|u\|_s \leq \|u\|_t.$$

Par conséquent, pour tout  $s, t \in \mathbb{R}$  tels que  $s \leq t$ , on a l'inclusion

$$H^t(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n).$$

Jusqu'à présent, on ne s'est intéressé qu'aux espaces  $H^s$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On particularise maintenant à des sous-ensembles  $\Omega$ .

**Définition 1.3.5** (Espace  $H^s$ ). Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert, pour  $s \in \mathbb{R}$ , on définit

$$H^s(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}^*(\Omega), u = U|_{\Omega} \text{ pour } U \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

où  $\mathcal{D}^*$  est l'espace des distributions sur  $\Omega$ , dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact et  $H^s(\mathbb{R}^n)$  est muni du produit scalaire défini en (1.1).

Avec cette définition, on a, en toute généralité,  $H^s(\Omega) \neq H^{-s}(\Omega)$  pour  $s \neq 0$ . On définit les espaces

- pour un fermé  $F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $H_F^s = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n), \text{supp } u \subseteq F\}$ ,
- $\tilde{H}^s(\Omega) =$  fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ ,
- $H_0^s(\Omega) =$  fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^s(\Omega)$ .

Par définition, on a toujours  $\tilde{H}^s(\Omega) \subseteq H_0^s(\Omega)$ . L'inclusion inverse est valable dès lors que  $\Omega$  est un domaine lipschitzien et  $s \neq \frac{1}{2} + \mathbb{N}_0$ .

Le théorème suivant donne les règles de dualité entre les espaces  $H^s(\Omega)$ .

**Théorème 1.3.1.** Soit un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $s \in \mathbb{R}$ ,

- si  $\tilde{H}^{-s}(\Omega) = H_{\Omega}^{-s}$ , alors  $\tilde{H}^{-s}(\Omega) = (H^s(\Omega))^*$ ,
- si  $\tilde{H}^s(\Omega) = H_{\Omega}^s$ , alors  $H^{-s}(\Omega) = (\tilde{H}^s(\Omega))^*$ .

Pour  $s \in \mathbb{R}$ , les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées dès lors que  $\Omega$  est un domaine  $\mathcal{C}^0$  ce qui est **toujours** le cas dans la suite.

Il reste maintenant à lier les deux définitions entre elles. Cela permet d'utiliser l'une ou l'autre de manière complètement équivalente.

### 1.3.3 Correspondance entre les espaces $H^s$ et $W^s$

On a donné deux définitions qui ne sont pas, dans un cadre complètement général, équivalentes. Néanmoins, il existe des restrictions pour lesquelles les espaces  $H^s$  et  $W^s$  sont les mêmes. Pour cela, il faut vérifier les conditions sous lesquelles les normes sont équivalentes.

**Théorème 1.3.2.** Pour  $s \geq 0$ ,  $W^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$ .

Le corollaire suivant donne une inclusion.

**Corollaire 1.3.1.** Pour tout ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $s \geq 0$ , on a l'inclusion continue  $H^s(\Omega) \subseteq W^s(\Omega)$ .

On n'a l'inclusion inverse que sous certaines conditions.

**Théorème 1.3.3.** Soit un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $s \geq 0$  tels qu'il existe un opérateur linéaire continu  $E : W^s(\Omega) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\forall u \in W^s(\Omega)$ ,  $Eu|_{\Omega} = u$ , alors  $H^s(\Omega) = W^s(\Omega)$ .

Si on suppose que  $\Omega$  est un domaine lipschitzien, alors on peut trouver un tel opérateur  $E$ . Le théorème suivant étend tous les résultats précédents à un domaine  $\Omega$  lipschitzien.

**Théorème 1.3.4.** Soit  $\Omega$  un domaine lipschitzien,

- $(H^s(\Omega))^* = \tilde{H}^{-s}(\Omega)$  et  $(\tilde{H}^s(\Omega))^* = H^{-s}(\Omega)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$
- $W^s(\Omega) = H^s(\Omega)$  pour tout  $s \geq 0$ .

L'avantage d'avoir deux définitions est qu'on peut utiliser de manière équivalent l'une ou l'autre (lorsque cela a un sens!). On a finalement les théorèmes d'inclusion des espaces de Sobolev.

**Théorème 1.3.5.** Soient  $-\infty < s < t < \infty$ ,

- soit  $K \in \mathbb{R}^n$  un compact, alors l'inclusion  $H_K^t \subseteq H_K^s$  est compacte,
- soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné, l'inclusion  $H^t(\Omega) \subseteq H^s(\Omega)$  est compacte.

On définit maintenant les espaces de Sobolev de frontière.

### 1.3.4 Espaces $H^s$ de frontière "classiques"

On définit ici les espaces de Sobolev définis sur la frontière  $\Gamma$  d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . On sépare cette partie en deux. D'une part, on introduit les espaces de Sobolev de frontière "classique" tels qu'ils vont être utilisés en acoustique. D'autre part, on introduit les espaces de Sobolev relatifs aux équations intégrales en électromagnétisme.

Ces espaces de frontière apparaissent naturellement lors de la construction des équations intégrales.

#### Espaces $H^s$ classiques de frontière

Les espaces  $H^s$  de frontière classiques se définissent simplement à partir des définitions des espaces  $H^s$  de la partie précédente. Il faut remarquer qu'une surface  $\Gamma$  plongée dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est l'image de  $\mathbb{R}^{n-1}$  par une transformation  $\zeta$ . Ainsi, on pose

$$\zeta : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

lipschitzienne telle que  $\Gamma = (x', \zeta(x'))$ ,  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

Pour  $u$  une fonction définie sur  $\Gamma$ , on pose

$$u_\zeta(x') = u(x', \zeta(x')), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

**Définition 1.3.6** (Espace  $H^s$  de frontière). Soit  $s \in \mathbb{R}^+$ ,  $\Gamma$  une surface plongée dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , on définit

$$H^s(\Gamma) = \{u \in L^2(\Gamma), u_\zeta \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})\}.$$

muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^s(\Gamma)} = (u_\zeta, v_\zeta)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

On a cependant les limitations suivantes,

- pour  $\Omega$  lipschitzien, l'espace  $H^s(\Gamma)$  est bien défini dès lors que  $|s| \leq 1$ ,
- pour  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ ,  $k \geq 1$ ,  $H^s(\Gamma)$  est bien défini dès lors que  $|s| \leq k$ .

On peut se rapporter à [26] par exemple.

Le dual de  $H^s(\Gamma)$  est alors  $H^{-s}(\Gamma)$  auquel on associe la norme

$$\|u\|_{-s} = \sup_{v \in H^s(\Gamma), v \neq 0} \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\|_s}.$$

On peut être amené à travailler sur des surfaces ouvertes. C'est par exemple le cas lorsqu'on traite des problèmes "d'écran" comme une plaque infiniment mince. Supposons qu'on ait  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ , on définit similairement aux espaces sur  $\Omega$

- $H^s(\Gamma_0) = \{U|_{\Gamma_0}, U \in H^s(\Gamma)\}$ ,
- $\tilde{H}^s(\Gamma_0) =$  fermeture de  $\mathcal{D}(\Gamma_0)$  dans  $H^s(\Gamma)$ ,
- $H_0^s(\Gamma_0) =$  fermeture de  $\mathcal{D}(\Gamma_0)$  dans  $H^s(\Gamma_0)$ .

Les propriétés des espaces  $H^s(\Omega)$  se prolongent ensuite aux espaces  $H^s$  surfaciques.

On présente maintenant l'opérateur de trace. C'est en appliquant cet opérateur qu'on fait apparaître naturellement les espaces  $H^s(\Gamma)$ .

## Opérateur de trace

L'opérateur de trace est un outil fondamental dans la constructions des formulations intégrales. Il permet de passer d'un problème mixte surfacique–volumique, pour lequel on a des potentiels volumiques qui s'expriment comme des intégrales surfaciques, à un problème purement surfacique tout en donnant la régularité des potentiels sur la surface  $\Gamma$ .

L'opérateur de trace peut être vu comme une généralisation de la notion de *restriction*  $u|_{\Gamma}$  d'une fonction  $u \in H^s(\Omega)$ . On définit en fait un ensemble d'opérateurs de trace  $\gamma_j$ .

**Théorème 1.3.6** (Théorème de trace). *Soit  $\Omega$  un domaine de frontière  $\Gamma$ , on définit l'opérateur de trace  $\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{D}(\Gamma)$  comme*

$$\gamma_0 u = u|_{\Gamma}.$$

*Si  $\Omega$  est un domaine  $\mathcal{C}^{k-1}$  et  $\frac{1}{2} \leq s \leq k$ , alors  $\gamma_0$  peut s'étendre à un opérateur linéaire continu et borné*

$$\gamma_0 : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

*Si  $\Omega$  est lipschitzien, alors  $\gamma_0$  est borné pour  $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$ .*

*On peut généraliser  $\gamma_0$ . Soit  $\Omega$  un domaine  $\mathcal{C}^{k-1}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\{j, k\} \in \mathbb{N}$  avec  $\frac{1}{2} + j < s \leq k$ , alors il existe un opérateur de trace linéaire continu  $\gamma_j$  tel que*

$$\gamma_j H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

*qui est une généralisation de*

$$\gamma_j u = \left. \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \right|_{\Gamma}$$

*pour  $u \in \mathcal{C}^l(\overline{\Omega})$  où  $s + j \leq l \in \mathbb{N}$ .*

Si on considère par exemple un domaine  $\mathcal{C}^0$  lipschitzien et  $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ , alors  $\gamma_0 u \in H^{1/2}(\Gamma)$  et  $\gamma_1 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ .

On a introduit ici les espaces de Sobolev de frontière dont on se sert quand on traite les équations intégrales relatives à l'acoustique. On présente maintenant les espaces de Sobolev de frontière spécifiques aux équations intégrales en électromagnétisme. Ils se déduisent des espaces  $H^s(\Gamma)$  classiques.

### 1.3.5 Espaces de Sobolev de frontière pour l'électromagnétisme, décomposition de Helmholtz

On présente ici les espaces de Sobolev de frontière pour l'électromagnétisme. On leur dédie une partie à part car on va les particulariser sur les surfaces polygonales. On reprend une partie des notations et les définitions de [13].

On introduit premièrement l'espace  $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$  puis l'espace  $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ . On introduit finalement la décomposition de Helmholtz.

On suppose que  $\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i$ . Pour deux éléments  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$  adjacents, on pose  $e_{ij}$  l'arête les séparant,  $\tau_{ij}$  un vecteur directeur de  $e_{ij}$ ,  $\tau_i$  un vecteur normal unitaire à  $\tau_{ij}$  sortant de  $\Gamma_i$  et  $\tau_j$  un vecteur normal unitaire à  $\tau_{ij}$  sortant de  $\Gamma_j$ . On introduit premièrement l'espace

$$L_t^2(\Gamma) = \{ \mathbf{v} \in [L^2(\Gamma)]^d, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \}$$

avec  $d$  la dimension de  $\Omega$ . On introduit ensuite

$$H_-^{1/2}(\Gamma) = \{ \mathbf{v} \in L^2_t(\Gamma), \forall i, \mathbf{v}|_{\Gamma_i} \in H^{1/2}(\Gamma_i) \}.$$

On introduit ensuite les deux opérateurs de trace

— la *trace tangentielle* telle que

$$\begin{aligned} \gamma_t : H^1(\Omega) &\longrightarrow H^1_\times(\Gamma), \\ \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{n} \times \mathbf{v}|_\Gamma \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale à  $\Gamma$ . L'espace  $H^1_\times$  est tel que

$$H^1_\times(\Gamma) = \left\{ \mathbf{v} \in H_-^{1/2}(\Gamma), \mathbf{v}|_{\Gamma_i} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{v}|_{\Gamma_j} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \text{ pour tout } \Gamma_i, \Gamma_j \text{ voisins} \right\}.$$

On pose  $H^{-1/2}_\times(\Gamma) = \left( H^1_\times(\Gamma) \right)^\star$  sont dual.

— la "composante de trace tangentielle" telle que

$$\begin{aligned} \gamma_\tau : H^1(\Omega) &\longrightarrow H^1_\perp(\Gamma), \\ \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_\Gamma \end{aligned}$$

avec  $H^1_\perp$  définit comme

$$H^1_\perp(\Gamma) = \left\{ \mathbf{v} \in H_-^{1/2}(\Gamma), \mathbf{v}|_{\Gamma_i} \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} = \mathbf{v}|_{\Gamma_j} \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} \text{ pour tout } \Gamma_i, \Gamma_j \text{ voisins} \right\}.$$

On pose  $H^{-1/2}_\perp(\Gamma) = \left( H^1_\perp(\Gamma) \right)^\star$  sont dual.

On est maintenant en mesure de définir l'espace  $H^{-1/2}_{\text{div}}$ .

**Définition 1.3.7** (Espace  $H^{-1/2}_{\text{div}}(\text{div}, \Gamma)$ ). *On définit l'espace*

$$H^{-1/2}_{\text{div}}(\text{div}, \Gamma) = \left\{ \mathbf{v} \in H^{-1/2}_\times(\Gamma), \text{div}_\Gamma \mathbf{v} \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\}.$$

*C'est un espace de Hilbert pour les normes*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{-1/2, \text{div}}^2 &= \|\mathbf{v}\|_{-1/2}^2 + \|\text{div}_\Gamma \mathbf{v}\|_{-1/2}^2, \\ \|\mathbf{v}\|_{-1/2, \text{div}}^2 &= \|\mathbf{v}\|_{-1/2}^2 + \frac{1}{k_w^2} \|\text{div}_\Gamma \mathbf{v}\|_{-1/2}^2 \quad (\text{en électromagnétisme}) \end{aligned}$$

avec  $k_w$  un paramètre réel.

On a une définition équivalente lorsque  $\Gamma$  est régulière en remplaçant simplement  $H^{-1/2}_\times$  par  $H^{-1/2}$ . Dans toute la suite, en faisant un **abus de notation**, on écrira toujours  $H^{-1/2}_{\text{div}}$ , la régularité de  $\Gamma$  se déduisant du contexte.

On a de plus la relation

$$H^{-1/2}_{\text{div}} = \gamma_t(H_{\text{rot}}(\Omega))$$

où  $H_{\text{rot}}(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^d, \overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^d \right\}$ .

**Définition 1.3.8** ( $H_{\perp}^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$ ). On définit l'espace

$$H_{\perp}^{-1/2}(\text{div}, \Gamma) = \left\{ \mathbf{v} \in H_{\perp}^{-1/2}(\Gamma), \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{v} \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour les normes

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{-1/2, \text{div}}^2 &= \|\mathbf{v}\|_{-1/2}^2 + \|\text{rot}_{\Gamma} \mathbf{v}\|_{-1/2}^2, \\ \|\mathbf{v}\|_{-1/2, \text{div}}^2 &= \|\mathbf{v}\|_{-1/2}^2 + \frac{1}{k_w^2} \|\text{rot}_{\Gamma} \mathbf{v}\|_{-1/2}^2 \quad (\text{en électromagnétisme}). \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\Gamma$  est régulière, on peut remplacer  $H_{\perp}^{-1/2}$  par  $H^{-1/2}$ . On fait, comme précédemment un **abus de notation** en écrivant dans toute la suite  $H_{\text{rot}}^{-1/2}$ .

On a de plus la relation

$$H_{\text{rot}}^{-1/2} = \gamma_{\tau}(H_{\text{rot}}(\Omega)).$$

**Proposition 1.3.1.** Les espaces  $H_{\text{div}}^{-1/2}$  et  $H_{\text{rot}}^{-1/2}$  sont duaux pour le crochet de dualité

$$\langle \gamma_t \mathbf{u}, \gamma_{\tau} \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \left( \overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{u} \right) d\Omega, \quad \forall \mathbf{u} \in H_{\text{rot}}(\Omega), \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega).$$

## Décomposition de Helmholtz–Hodge

Similairement à la décomposition de Helmholtz existant pour les champ définis dans  $\Omega$ , on a une décomposition surfacique.

**Théorème 1.3.7** (Décomposition de Helmholtz–Hodge). On a

$$H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) = \begin{cases} \mathbf{n} \times \nabla_{\Gamma}(H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C}) \oplus \nabla_{\Gamma}(H^{3/2}(\Gamma)/\mathbb{C}) & \text{si } \Gamma \text{ suffisamment régulière,} \\ \mathbf{n} \times \nabla_{\Gamma}(H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C}) \oplus \nabla_{\Gamma}(\{v \in H^1(\Gamma)/\mathbb{C}, \Delta_{\Gamma} v \in H^{-1/2}(\Gamma)\}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce théorème de décomposition est utile au chapitre 6 pour déterminer un indicateur  $\Lambda$  pour l'équation intégrale EFIE.

## 1.4 Lemmes de Céa et bramble–Hilbert

On donne ici deux lemmes importants relatifs à la méthode des éléments finis qui servent au chapitre 3 pour déterminer des estimations *a priori* de convergence lorsqu'on utilise une méthode de type Galerkin pour la discrétisation des équations intégrales.

On commence par le lemme de Céa. Il donne une relation entre la distance entre la solution exacte et la distance entre la solution exacte et l'espace d'approximation.

**Lemme 1.4.1** (Lemme de Céa). Soit  $u \in V$  la solution exacte d'une équation  $\mathcal{A}u = f$ ,  $a \in \mathcal{L}(V, W)$  la forme bilinéaire associée, et  $u_h \in V_h$  la solution discrète du problème variationnel associé, alors de manière générale

$$\|u - u_h\|_V \leq \left( 1 + \frac{\|a\|_{V,W}}{\alpha_h} \right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

où  $\|a\|_{V,W}$  est la norme de  $a$  et  $\alpha_h$  la constante issue de la condition inf–sup discrète de la proposition 1.1.1.

Cette inégalité signifie que l'écart entre  $u$  et son approximation discrète  $u_h$  n'explose pas.

On a ensuite le lemme de Bramble–Hilbert qui fournit une indication sur les erreurs d'interpolation en dimension finie dans les espaces de Sobolev. On l'énonce pour  $s \geq 0$  entier mais se généralise grâce aux interpolations complexes d'espaces à  $s \in \mathbb{R}^+$ .

**Lemme 1.4.2** (Lemme de Bramble–Hilbert). *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert borné de diamètre  $h$ . On pose  $\mathcal{P}^k(\Omega)$  l'espace des polynômes de degré au plus  $k$  sur  $\Omega$ . Soit  $u \in H^k(\Omega)$  et on suppose de plus que toutes les dérivées  $m_j$ -èmes pour  $m_j = 0, \dots, m$  existent, alors il existe une constante  $C(m, \Omega)$  indépendante de  $u$  telle qu'il existe un polynôme  $v \in \mathcal{P}^{m-1}(\Omega)$  tel que pour  $k = 0, \dots, m$*

$$\|u - v\|_k \leq C(m, \Omega) h^{m-k} |u|_m.$$

Il peut être formulé plus simplement en posant  $v = \mathcal{I}u$  une interpolation  $\mathcal{P}^{m-1}$  de  $u$ . Dans ce cas,

**Lemme 1.4.3** (Lemme de Bramble–Hilbert – Forme simple). *Sous les hypothèses précédentes, avec  $v \in \mathcal{P}^{m-1}(\Omega)$  une interpolation de  $u$ , on a*

$$\|u - v\|_k \leq C(m, \Omega) h^{m-k} |u|_m.$$

C'est sous cette dernière forme qu'on utilise le lemme.

On donne un exemple d'utilisation de ce lemme pour obtenir une information sur la convergence *a priori* de l'erreur. On suppose que  $u \in H^{1/2}(\Omega)$  et que  $u_h \in \mathcal{P}^1(\Omega)$ . On suppose de plus que  $|u|_2$  existe. On a donc  $m = 2$  et  $k = 1/2$ . Le lemme de Céa puis le lemme de Bramble–Hilbert donnent

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1/2} &\leq C_{\text{Céa}} \|u - v\|_{1/2}, \\ &\leq C C_{\text{Céa}} h^{3/2} |u|_2. \end{aligned}$$

On en déduit un taux de convergence maximum de l'erreur en  $\mathcal{O}(h^{3/2})$ . Il s'agit du taux de convergence **asymptotique** lorsqu'on raffine uniformément le maillage. En pratique, la solution n'est que rarement suffisamment régulière pour permettre de l'atteindre <sup>5</sup>.

## 1.5 Eléments d'analyse microlocale

On effectue ici une courte introduction à l'analyse microlocale. C'est un outil puissant qui permet de décrire le comportement local d'un opérateur *pseudo-différentiel*. Il consiste à représenter cet opérateur dans le domaine de Fourier (on appelle cette représentation *symbole*) afin de récupérer des informations sur son action. On extrait du symbole son symbole principal qui va représenter l'effet dominant de l'opérateur, notamment son caractère régularisant ou dé-régularisant. Pour utiliser l'analyse microlocale, il faut cependant faire une hypothèse forte de régularité sur le domaine : dans cette partie, et à chaque fois qu'on manipule des outils d'analyse microlocale, on doit supposer que le domaine  $\Omega$  sur lequel on observe l'action d'un opérateur pseudo-différentiel est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

### 1.5.1 Notion d'opérateur pseudo-différentiel

On introduit ici la notion d'opérateur pseudo-différentiel. Elle étend la notion d'opérateur différentiel. Dans cette dernière catégorie, on peut par exemple citer l'opérateur gradient, laplacien, etc. Par exemple, l'action "dérive" pour un opérateur pseudo-différentiel ne se fait pas

5. On a supposé que  $|u|_2$  existe. Cela justifie également l'utilisation de raffinement (auto-)adaptatif.

forcément par l'action d'un opérateur de dérivation classique. Les opérateurs intégraux (ou non) que nous allons manipuler dans la suite appartiennent tous à des sous-classes d'opérateurs pseudo-différentiels. On donne maintenant les résultats classiques de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et de l'analyse microlocale, sans les démontrer.

### Symbole classique

On définit ici le *symbole classique* pour les opérateurs sur des fonctions/distributions sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.5.1** (Symbole classique). *Soit  $m \in \mathbb{R}$ , on définit la classe de symboles  $\mathbf{S}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  d'ordre  $m$  comme l'ensemble des fonctions  $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  avec la propriété que pour tout compact  $K \subset \Omega$  et tout multi-indice  $\alpha, \beta$  on peut trouver une constante  $c(K, \alpha, \beta) > 0$  telle que*

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha a(x, \xi) \right| \leq c(K, \alpha, \beta) (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}.$$

Cette définition implique que

- toutes les dérivées de  $a$  sont bornées en  $x$ ,
- la croissance à l'infini en  $\xi$  des dérivées de  $a$  est contrôlée.

On associe à un symbole classique un *opérateur pseudo-différentiel standard*.

**Définition 1.5.2** (Opérateur pseudo-différentiel standard). *Etant donné  $a$  un symbole, soit  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  et  $\hat{u}$  sa transformée de Fourier,  $x \in \Omega$ , on définit l'opérateur pseudo-différentiel standard comme*

$$A(x, -iD)u = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi.$$

ou encore

$$\begin{aligned} A(x, -iD)u &= \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} (a(x, \xi) \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) u(y) dy d\xi \end{aligned}$$

où on a posé  $\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}$  la transformée de Fourier directe et  $\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}$  la transformée de Fourier inverse.

On note  $OPS^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels dont le symbole est d'ordre  $m$ .

**Théorème 1.5.1.** *Soit  $A \in OPS^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ ,*

- $A : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$  est continu avec  $C_0^\infty$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ .
- pour tout ensemble compact  $K \subset \Omega$ ,  $A$  s'étend en une application linéaire continue  $A : \tilde{H}^s(K) \rightarrow H_{\text{loc}}^{s-m}(\Omega)$ .
- dans le cadre des distributions,  $A : \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{D}^*$  est continu avec  $\mathcal{E}^*$  est l'espace des distributions à support compact dans  $\Omega$ .

Au vu de ce théorème, il y a donc un lien direct entre l'ordre de l'opérateur et la régularité de son image. Ainsi, un opérateur d'ordre négatif est régularisant alors qu'un opérateur d'ordre positif est dérégularisant.

Pour un  $A : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ , il existe une *unique* distribution  $K_A(x, y) \in \mathcal{D}^*(\Omega \times \Omega)$  appelée *noyau de Schwartz* telle que

$$Au(x) = \int_{\Omega} K_A(x, y) u(y) dy.$$

**Théorème 1.5.2.** *Pour  $A \in OPS^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ , alors  $K_A \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega \setminus \{(x, x), x \in \mathbb{R}^n\})$ . De plus,*

$$K_A(x, y) = k(x, x - y) = |x - y|^{-2N} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( (-\Delta_\xi)^N a(x, \xi) \right) e^{i(x-y) \cdot \xi} d\xi$$

où  $N$  est le plus petit entier tel que  $N \geq \left\lceil \frac{m+n}{2} \right\rceil + 1$  quand  $m+n \geq 0$  et  $N = 0$  quand  $m+n \leq 0$ .

Ce théorème ne signifie **pas** que  $K_A$  est singulier sur la diagonale  $(x, x) \in \Omega \times \Omega$ . On a les propriétés suivantes sur  $\mathbf{S}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ .

**Propriété 1.5.1.** *On a*

- $m \leq m' \Rightarrow \mathbf{S}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n) \subset \mathbf{S}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n) \subset \mathbf{S}^{m'}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ ,
- $a \in \mathbf{S}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n) \Rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha a \in \mathbf{S}^{m-|\alpha|}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ ,
- $a \in \mathbf{S}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  et  $b \in \mathbf{S}^{m'}(\Omega \times \mathbb{R}^n) \Rightarrow ab \in \mathbf{S}^{m+m'}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ .

En utilisant les propriétés précédentes, on peut définir le *symbole principal* d'un opérateur.

**Définition 1.5.3** (Symbole principal). *Soit  $a \in \mathbf{S}^{m_0}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  et une suite de symboles  $a_{m_j} \in \mathbf{S}^{m_j}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  tels que  $m_j > m_{j+1} \rightarrow -\infty$ . On appelle  $\sum_{j=0}^{\infty} a_{m_j}$  une expansion asymptotique de  $a$  si pour tout  $k > 0$  on a*

$$a - \sum_{j=0}^{k-1} a_{m_j} \in \mathbf{S}^{m_k}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$$

et on écrit  $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m_j}$ . Le terme  $a_{m_0}$  est appelé *symbole principal*.

Le symbole principal apparaît comme le terme qui contient le degré de régularité de l'opérateur.

**Théorème 1.5.3.** *Pour une suite de  $a_{m_j} \in \mathbf{S}^{m_j}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ ,  $m_j > m_{j+1} \rightarrow -\infty$ , il existe un unique symbole  $a \in \mathbf{S}^{m_0}(\Omega, \mathbb{R}^n)$  modulo  $\mathbf{S}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  tel que pour tout  $k > 0$ ,*

$$a - \sum_{j=0}^{k-1} a_{m_j} \in \mathbf{S}^{m_k}(\Omega \times \mathbb{R}^n).$$

Autrement dit, deux symboles ayant la même expansion asymptotique sont égaux à un symbole d'ordre  $-\infty$  près, ou encore deux opérateurs pour lesquels l'expansion asymptotique de leur symbole diffère d'un symbole d'ordre  $-\infty$ , sont égaux à un opérateur infiniment régularisant près.

**Définition 1.5.4** (Symbole classique). *On dit que  $a \in \mathbf{S}_{cl}^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$  est un symbole classique d'ordre  $m$  si la suite  $(m_j)_{j \geq 0}$  est telle que  $m_j = m - j$  et les termes de l'expansion asymptotique sont homogènes de degré  $m - j$ , i.e. vérifient*

$$a_{m-j}(x, t\xi) = t^{m-j} a(x, \xi) \quad \text{pour } t \geq 1 \text{ et } |\xi| \geq 1.$$

On est désormais capable de caractériser complètement un opérateur à partir de son symbole. La question est désormais de savoir si à partir de la forme "complète" de l'opérateur on est capable de calculer son symbole. La réponse est oui, mais...

On a besoin de la définition suivante.

**Définition 1.5.5** (Distribution proprement supportée). *Une distribution  $K_A \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$  est dite proprement supportée si pour tout compact  $K \subset \Omega$ ,  $\text{supp } K_A \cap (K \times \Omega)$  et  $\text{supp } K_A \cap (\Omega \times K)$  sont compacts dans  $\Omega \times \Omega$ .*

On dit alors qu'un opérateur est proprement supporté si et seulement si son noyau de Schwartz l'est. On a alors le lien opérateur  $\rightarrow$  symbole suivant.

**Théorème 1.5.4.** *Si  $A \in OPS^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  est proprement supporté, alors son symbole est donné par*

$$a(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} (Ae^{ix \cdot \xi})(x).$$

On a également des résultats pour l'opérateur adjoint. Premièrement sur sa forme à partir du symbole  $a$  de  $A$  :

$$A^*u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x-y) \cdot \xi} a(y, -\xi) u(y) d\xi dy.$$

**Théorème 1.5.5.** *Si  $A \in OPS^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  est proprement supporté, alors  $A^* \in OPS^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ .*

### Opérateur intégral de Fourier

**Définition 1.5.6** (Opérateur intégral de Fourier). *On dit que  $A \in \mathcal{L}^m(\Omega)$  si pour une fonction d'amplitude  $a(x, y, \xi) \in \mathbf{S}^m(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$  on a*

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi.$$

Par construction,  $OPS^m(\Omega \times \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^m(\Omega)$ . Un opérateur  $R \in \mathcal{L}^{-\infty}(\Omega)$  est dit *lissant*.

De la même manière que pour  $A \in OPS^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ , si  $A \in \mathcal{L}^m(\Omega)$  est proprement supporté, on a  $a(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} (Ae^{i\xi \cdot \bullet})(x)$  et  $a(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \left( \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha \left( -i \frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha a(x, y, \xi) \right)_{|x=y}$ .

Un opérateur  $A \in \mathcal{L}^m(\Omega)$  peut donc s'écrire de manière *non unique* sous la forme

$$A = A_0 + R, \quad A_0 \in OPS^m(\Omega \times \mathbb{R}^n), R \in \mathcal{L}^m(\Omega)$$

avec  $A_0$  proprement supporté. On peut lui associer le symbole

$$a(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} (A_0 e^{i\xi \cdot \bullet})(x).$$

**Définition 1.5.7** (Classes de symboles). *On pose  $\sigma_A$  la classe d'équivalence des symboles complets associés à  $A$  dans  $\mathbf{S}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n) \setminus \mathbf{S}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  par la formule ci-dessus. L'application  $A \in \mathcal{L}^m(\Omega) \mapsto a \in \sigma_A$  est un isomorphisme.*

*On pose  $\sigma_{mA}$  la classe d'équivalence des symboles principaux dans  $\mathbf{S}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n) \setminus \mathbf{S}^{m-1}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ . Elle induit de même un isomorphisme de  $\mathcal{L}^m(\Omega) \setminus \mathcal{L}^{m-1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{S}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n) \setminus \mathbf{S}^{m-1}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ .*

On récupère les propriétés suivantes sur  $\mathcal{L}^m(\Omega)$ .

**Théorème 1.5.6.** *Soit  $A \in \mathcal{L}^m(\Omega)$ , alors les opérations suivantes sont continues*

$$\begin{aligned} A &: \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega), \\ A &: \mathcal{E}^*(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}^*(\Omega), \\ A &: H_c^s(\Omega) \rightarrow H_{\text{loc}}^{s-m}(\Omega). \end{aligned}$$

*Si de plus  $A$  est proprement supporté, les opérations suivantes sont continues*

$$\begin{aligned} A &: \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \\ A &: \mathcal{C}^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega), \\ A &: \mathcal{E}^*(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^*(\Omega), \\ A &: \mathcal{D}^*(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}^*(\Omega), \\ A &: H_c^s(\Omega) \rightarrow H_c^{s-m}(\Omega), \\ A &: H_{\text{loc}}^s(\Omega) \rightarrow H_{\text{loc}}^{s-m}(\Omega). \end{aligned}$$

On peut se demander à quelle classe appartient la composition de deux opérateurs.

**Théorème 1.5.7.** *Soient  $A \in \mathcal{L}^{m_1}(\Omega)$  et  $B \in \mathcal{L}^{m_2}(\Omega)$  dont un des deux au moins est proprement supporté, alors*

$$A \circ B \in \mathcal{L}^{m_1+m_2}(\Omega).$$

Mieux,  $A \circ B$  et  $B \circ A$  ne diffèrent que d'un opérateur d'ordre  $m_1 + m_2 - 1$ , i.e. une partie plus régulière. Autrement dit, leurs parties principales sont les mêmes.

De même que pour un symbole classique, on définit la sous-classe des opérateurs pseudo-différentiels classiques.

**Définition 1.5.8** (Opérateur pseudo-différentiel classique). *Un opérateur  $A \in \mathcal{L}^m(\Omega)$  est dit classique si son symbole complet a un représentant dans  $\mathbf{S}_{cl}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ . On appelle cette sous-classe  $\mathcal{L}_{cl}^m(\Omega)$ .*

On peut trouver un représentant de  $\sigma_{mA}$  tel que

$$a_m^0(x, \xi) = |\xi|^m a_m \left( x, \frac{\xi}{|\xi|} \right).$$

Le symbole  $a_m^0$  est appelé *symbole principal homogène* de  $A \in \mathcal{L}^m(\Omega)$ . Dans la suite, et par abus de langage, on l'appellera plus simplement *le symbole principal*.

## Opérateur et changement de coordonnées

Une question importante est de savoir comment évolue l'action / la nature d'un opérateur sous changement de coordonnées. On se donne deux domaines  $\Omega$  et  $\Omega'$  tels qu'il existe un difféomorphisme  $\Phi$

$$\begin{aligned} \Phi &: \Omega \rightarrow \Omega' \\ x &\mapsto x' = \Phi(x), \end{aligned}$$

et un opérateur  $A \in \mathcal{L}^m(\Omega)$ . Si  $\Phi$  est un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme, alors l'opérateur  $A_\Phi = \Phi_* A \Phi^* \in \mathcal{L}^m(\Omega')$ <sup>6</sup> et la classe de symbole de  $A_\Phi$  admet une décomposition asymptotique de la même

---

6. Les fonctions  $\Phi^*$  et  $\Phi_*$  sont appelées respectivement *pullback* et *pushforward*, voir [49] p. 320.

forme que celle de  $A$ . Autrement dit, une transformation  $\mathcal{C}^\infty$  ne change pas l'action / la nature de l'opérateur.

Cette propriété va nous être très utile dans la suite puisque dans la plupart des cas, on n'est pas capable de calculer le symbole principal sur une surface  $\Gamma$  mais on peut espérer avoir des formes explicites lorsqu'on travaille avec des géométries simple comme  $\mathbb{R}^n$  ou bien un cercle. Il suffit alors d'étudier le comportement de  $A$  sur cette géométrie simple, et d'en déduire le comportement sur les géométries qui nous intéressent. Cependant, cela n'est valide que si le changement de coordonnées est  $\mathcal{C}^\infty$ . Par exemple dans le cas d'une surface 1D (donc plongée dans  $\mathbb{R}^2$ ), si on fait une étude sur  $\mathbb{R}$  ou un cercle, on ne pourra en déduire le comportement que sur des courbes fermées infiniment régulières...

## Opérateur elliptique

Les opérateurs elliptiques sont une sous-classe de  $\mathcal{L}^m(\Omega)$  qui vont avoir l'avantage d'être inversibles. Comme précédemment, on définit en parallèle la notion d'ellipticité pour les symboles et celle pour les opérateurs.

**Définition 1.5.9** (Symbole elliptique). *Un symbole  $a \in \mathbf{S}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  est dit elliptique d'ordre  $m$  si on peut trouver un  $b \in \mathbf{S}^{-m}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  tel que*

$$ab - 1 \in \mathbf{S}^{-1}(\Omega \times \mathbb{R}^n).$$

Cela signifie que le terme principal de l'expansion de  $ab$  doit être égal à 1 qui est le symbole de l'opérateur identité.

**Définition 1.5.10** (Opérateur elliptique). *Un opérateur  $A \in \mathcal{L}^m(\Omega)$  est elliptique dès lors qu'un des représentants de  $\sigma_1$  est elliptique.*

On peut alors définir la notion de parametrix qui correspond à un inverse approché d'un opérateur elliptique.

**Définition 1.5.11.** *Un parametrix  $Q_0$  de  $A \in \mathcal{L}^m(\Omega)$  est un opérateur proprement supporté tel que*

$$\begin{aligned} A \circ Q_0 - I &= C_1 \in \mathcal{L}^{-\infty}(\Omega), \\ Q_0 \circ A - I &= C_2 \in \mathcal{L}^{-\infty}(\Omega). \end{aligned}$$

avec  $I$  l'opérateur identité.

Par conséquent, la définition précédente implique qu'un opérateur dans  $\mathcal{L}^m(\Omega)$  est elliptique si et seulement si on peut lui trouver un parametrix.

Les parametrix peuvent servir comme préconditionneurs lors de l'inversion itérative d'un opérateur  $A$ . En effet, un opérateur "proche" de l'identité s'inverse plus rapidement qu'un opérateur "lointain". On peut donc essayer de trouver un parametrix  $Q_0$  de  $A$  facilement et rapidement calculable. On inverse alors l'opérateur  $A \circ Q_0$  (ou bien  $Q_0 \circ A$ ) qui est "proche de l'identité". Nous nous servirons également de cette notion lors des étapes de construction de l'opérateur  $\Lambda$  au chapitre 4.

## 1.5.2 Opérateurs intégraux

On a introduit en 1.5.1 les opérateurs pseudo-différentiels de manière un peu générale. Les opérateurs pseudo-différentiels peuvent en fait être mis sous forme intégrale (définie ou non définie). La forme intégrale correspond à la forme sous laquelle les opérateurs issus des

formulations intégrales vont apparaître. On aimerait donc avoir des formules pour passer d'une forme à une autre.

Dans cette sous-partie, on va se contenter de rappeler quelques définitions et donner les formules qui nous seront utiles pour la suite.

**Définition 1.5.12** (Fonction pseudo-homogène). *On dit que  $k_q(x, z) \in \mathcal{C}^\infty \in (\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  est pseudo-homogène de degré  $q \in \mathbb{R}$  par rapport à  $z$  si*

$$\begin{aligned} k_q(x, tz) &= t^q k(x, z), \quad \forall t > 0 \text{ et } z \neq 0 \text{ si } q \notin \mathbb{N}_0, \\ k_q(x, z) &= f_q(x, z) + \log |z| p_q(x, z) \quad \text{si } q \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

où  $p_q(x, z)$  est polynomial de degré  $q$  en  $z$  et  $f_q(x, tz) = t^q f(x, z)$ . On pose  $\Psi h f_q$  la classe des fonctions pseudo-homogènes de degré  $q$ .

De la même manière que pour un symbole,  $k(x, x-y)$  a un développement pseudo-homogène de degré  $q$  si on peut trouver des  $k_{q+j} \in \Psi h f_{q+j}$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$  tels que

$$k(x, x-y) = \sum_{j=0}^J k_{q+j}(x, x-y) \in \mathcal{C}^{q+j-\delta}(\Omega \times \Omega), \quad 0 < \delta < 1.$$

On aimerait donner un sens à l'opérateur  $A$  tel que

$$Au(x) = \int_{\Omega} k_q(x, x-y) u(y) dy.$$

Cependant, cette intégrale peut ne pas être définie. On utilise le concept d'opérateur intégral en partie finie d'Hadamard. On donne ici la définition telle que donnée dans [49].

**Définition 1.5.13** (Opérateur intégral en partie finie). *Soit un domaine  $\Omega$  et  $\Omega_0 \subset \Omega$  convexe. On pose  $R(\hat{\theta})$  la distance radiale de  $x \in \Omega_0$  à  $y \in \partial\Omega_0$  dépendante de  $\hat{\theta} = \frac{x-y}{|x-y|}$ . L'opérateur intégral en partie finie d'Hadamard est défini par*

$$\begin{aligned} \text{p.f.} \int_{\Omega} k_q(x, x-y) u(y) dy &= \dots \\ &\dots \int_{\Omega} k_q(x, x-y) \left\{ u(y) - \sum_{|\alpha| \leq \kappa} \frac{1}{\alpha!} (y-x)^\alpha D^\alpha u(x) \right\} dy + \sum_{|\alpha| \leq \kappa} d_\alpha(x) D^\alpha u(x) \end{aligned}$$

avec  $\kappa = [-n - q]$ . Pour  $\rho = -n - q - \kappa$ ,  $\rho \in ]0, 1[$ , on a

$$\begin{aligned} d_\alpha(x) &= -\frac{1}{j+\rho} \frac{1}{\alpha!} \int_{|\hat{\theta}|=1} R^{-j-\rho}(\hat{\theta}) \hat{\theta}^\alpha k_q(x, -\hat{\theta}) d\omega \dots \\ &\dots + \frac{1}{\alpha!} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} k_q(x, x-y) (x-y)^\alpha dy \end{aligned}$$

pour tout  $\alpha$  tel que  $|\alpha| = \kappa - j$  et  $j = 0 \dots \kappa$ .

Si  $\rho = 0$ , alors

$$d_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha!} \int_{|\hat{\theta}|} \log R(\hat{\theta}) \hat{\theta}^\alpha k_q(x, -\hat{\theta}) d\omega + \frac{1}{\alpha!} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} k_q(x, x-y) (y-x)^\alpha dy.$$

Ce concept est très proche de celui d'intégrale en partie finie d'Hadamard qu'on ne donne pas. En pratique, lors du calcul d'une telle intégrale, on isole le terme indéfini qu'on se contente de retirer afin de ne garder que la partie finie.

La construction des formules symbole  $\rightarrow$  noyau, respectivement noyau  $\rightarrow$  symbole nécessite de particulariser selon que l'ordre  $m$  de l'opérateur associé est positif ou négatif. On peut retenir comme résultats intéressants que

- si  $m < 0$ , l'opérateur intégral n'est pas donné en partie finie.
- le degré de pseudo-homogénéité du noyau de Schwartz dépend non seulement de l'ordre de l'opérateur, mais aussi de la dimension de l'espace!

On donne maintenant les formules de transformation entre le noyau de Schwartz et les termes du développement asymptotique du symbole. On considère  $A \in \mathcal{L}_{cl}^m(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Son noyau de Schwartz est une fonction pseudo-homogène de degré  $\kappa$  avec  $\kappa = -m - n$ . On rappelle qu'on peut obtenir le symbole correspondant à une partie proprement supportée  $A_0$  de  $A$  par la formule

$$a(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} A_0(e^{i\xi \cdot \bullet}) \quad \text{et}$$

$$\sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j}^0(x, \xi).$$

Pour la transformation noyau  $\rightarrow$  symbole, on distingue 3 cas :

**$m - j < 0$**  Pour  $x \in \Omega$ , et  $\psi$  une fonction de cut-off telle que  $\psi(z) = 1$  pour  $|z| \leq \frac{1}{2}$  et  $\psi(z) = 0$  pour  $|z| \geq 1$ .

$$a_{m-j}^0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} k_{\kappa+j}(x, z) \psi\left(\frac{z}{t}\right) e^{-i\xi \cdot z} dz. \quad (1.2)$$

**$m \notin \mathbb{N}_0$  et  $m - j > 0$**  On a

$$a_{m-j}^0(x, \xi) = \text{p.f.} \int_{\mathbb{R}^n} k_{\kappa+j}(x, z) e^{-i\xi \cdot z} dz. \quad (1.3)$$

**$m \in \mathbb{N}_0$  et  $m - j \geq 0$**  Si  $\int_{|\theta|=1} \theta^\alpha f_\kappa(x, \theta) d\omega = 0$ , alors

$$a_{m-j}^0(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m-j} c_\alpha(x) (i\xi)^\alpha + \text{p.f.} \int_{\mathbb{R}^n} k_{\kappa+j}(x, z) e^{-i\xi \cdot z} dz. \quad (1.4)$$

où  $c_\alpha(x)$  correspond aux coefficients de l'expression de l'opérateur différentiel "classique".

Pour la transformation symbole  $\rightarrow$  noyau, il y a seulement deux cas :

**$m - j < 0$**

$$k_{\kappa+j}(x, z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \text{p.f.} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot z} a_{m-j}^0(x, \xi) d\xi, \quad x \in \Omega, \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

**$m - j \geq 0$**  En posant  $l \in \mathbb{N}_0$  tel que  $2l \geq m + n - j$ ,

$$k_{\kappa+j}(x, z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot z} a_{m-j}^0(x, \xi) \psi(\xi) d\xi + \dots$$

$$\dots \frac{1}{|z|^{2l}} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot z} (-\Delta_\xi)^l \{a_{m-j}^0(x, \xi)(1 - \psi(\xi))\} d\xi. \quad (1.6)$$

Ces formules sont à peu près tout ce dont nous aurons besoin lorsque nous chercherons à déterminer la forme de certains opérateurs à partir de leur symbole ou bien le symbole à partir des opérateurs.

On termine ici sur l'analyse microlocale. Il faut essentiellement retenir que

- il y a un lien direct entre la notion de symbole et celle d'opérateur pseudo-différentiel,
- l'ordre d'un opérateur définit son degré de régularité (dérivation, intégration, combien de fois),
- l'information sur l'opérateur (degré, etc.) est contenue dans son symbole principal,
- un opérateur elliptique est inversible,
- tout opérateur de la classe  $\mathcal{L}_{cl}^m(\Omega)$  peut se mettre sous forme intégrale avec un noyau pseudo-homogène.

Il devient ainsi "relativement aisé" de déduire la forme d'un opérateur pseudo-différentiel à partir de propriétés qu'on lui impose sur le symbole. Cela ne signifie pas qu'il est utilisable tel quel en pratique. . .

## 1.6 Conclusion sur les outils

Dans cette partie, on a introduit les outils principaux nécessaires à la manipulation des équations intégrales et des opérateurs qui entrent en jeu. Dans la partie suivante, on rappelle la construction des formulations intégrales pour l'acoustique et l'électromagnétisme.

# Chapitre 2

## Construction des formulations intégrales pour l'acoustique et l'électromagnétisme

L'objectif de cette partie est la construction des équations intégrales associées aux problèmes de propagation d'une onde acoustique et d'une onde électromagnétique et la caractérisation du cadre fonctionnel dans lequel on évoluera. Son contenu se veut comme un résumé, un peu étoffé, des techniques mises en œuvre afin de faciliter la compréhension par un lecteur non averti. Le cas de l'acoustique consiste à propager un champ scalaire correspondant à un potentiel du champ vectoriel de vitesses. Le cas de l'électromagnétisme consiste à propager le champ vectoriel des composantes spatiales du champ électromagnétique. Cela pose des difficultés supplémentaires vis-à-vis du contrôle des composantes au travers de la surface.

Pour cela, on commence par établir l'équation relative au problème fréquentiel de propagation acoustique. On caractérise ensuite son comportement dans un domaine d'extension infinie ce qui permet d'établir les formulations intégrales des champs. On en extrait quatre opérateurs principaux dont on donne les propriétés mathématiques. On construit les équations associées au problème de propagation extérieure pour conditions limites sur la surface de l'objet diffractant de type Dirichlet et Neumann et on identifie les espaces fonctionnels entrant en jeu. On conclut sur l'acoustique en donnant les espaces d'approximation qu'on utilise dans le cadre d'une résolution par des méthodes de type Galerkin.

On traite ensuite le cas de l'électromagnétisme en construisant sans donner les détails les équations de propagation à partir des équations de Maxwell. De la même manière que pour l'acoustique, on construit les équations intégrales et on détermine les espaces fonctionnels entrant en jeu. On termine cette partie sur les espaces d'approximation conformes qu'on utilise dans la suite.

Ce chapitre s'appuie **très fortement** sur les livres de Nédélec [59], Colton & Kress [25] ainsi que sur le cours d'A. Bendali sur les équations intégrales [7].

### 2.1 Méthodes intégrales pour l'acoustique

On commence dans un premier temps par construire l'équation de propagation d'une onde acoustique dans le domaine temporel. On supposera ensuite qu'on est établi en régime permanent afin d'en déduire l'équation d'onde dans le domaine fréquentiel. On en calculera alors la solution élémentaire et on en déduira les potentiels volumiques. Par application de l'opérateur de trace défini au **théorème 1.3.6**, on obtient alors les formulations intégrales. On leur associera les conditions limites qui nous intéressent pour en extraire les équations que nous résoudrons et les opérateurs intégraux que nous étudierons.

### 2.1.1 Equation de propagation d'une onde acoustique

On présente ici la construction de l'équation d'onde dans un fluide compressible de viscosité faible. Dans d'autres milieux, on aboutira à la même équation, mais la méthode et les hypothèses diffèrent.

#### Equation d'onde dans le domaine temporel

On considère un milieu homogène continu isotrope dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Afin de rester dans un cadre physique linéaire, on va supposer que les ondes acoustiques sont de faible amplitude. On pose  $\mathbf{v}(x, t)$  le champ de vitesse,  $p_0 + p(x, t)$  le champ de pression,  $\rho_0 + \rho(x, t)$  le champ de densité volumique et  $S_0 + S(x, t)$  le champ d'entropie. On considère que  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $\rho$  et  $S$  sont des petites perturbations des champs  $X_0$  et peuvent donc être négligées le cas échéant. On a trois équations bien connue qui sont l'équation de Navier-Stokes pour les fluides compressibles visqueux en général, l'équation de continuité qui assure la conservation de la masse, et une équation d'état qui va lier la pression à la masse volumique et l'entropie (ou la température). Compte-tenu de l'hypothèse  $\mathbf{v} \ll 1$ , on peut supposer la viscosité nulle. On aboutit alors aux équations suivantes

$$\text{(Eq. d'Euler)} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p = 0,$$

$$\text{(Eq. de continuité)} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

$$\text{(Eq. d'état)} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, p_0) \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

En combinant ces équations entre elles, on obtient l'équation d'onde en pression

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

où  $c$  est la célérité de l'onde dans le fluide. De l'équation d'Euler, on en déduit l'existence d'un potentiel des vitesses  $U$  tel que

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } U \quad \text{et} \quad p = -\frac{\partial U}{\partial t}. \quad (2.2)$$

De fait, ce potentiel vérifie encore l'équation d'onde

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (2.3)$$

Cette équation peut naturellement être résolue par des méthodes comme les éléments finis mais nécessite l'utilisation d'un schéma numérique d'intégration en temps. De telles méthodes peuvent être intéressantes pour étudier les régimes transitoires lorsqu'on module le signal d'excitation.

#### Equation d'onde dans le domaine fréquentiel – Equation de Helmholtz

On peut décider de ne s'intéresser qu'au régime permanent, qu'on pourra ainsi décrire comme un régime forcé. L'ensemble du système oscille à la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  de l'excitation. On pose alors l'Ansatz

$$U(x, t) = \Re\{u(x) e^{-i\omega t}\}$$

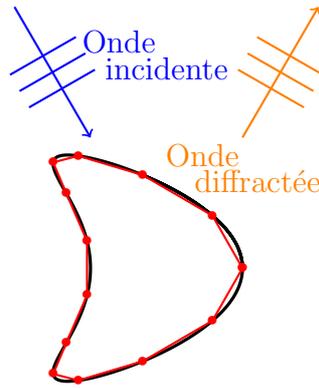


FIGURE 2.1 – Schéma de principe pour la propagation d'onde avec l'onde incidente (bleu), l'onde diffractée (orange), et la frontière (noire) maillée (rouge).

où  $u(x)$  est appelé *phaseur* et est une grandeur **complexe**. En injectant cet Ansatz dans (2.3) et en se souvenant que dans un milieu non dispersif on a la relation  $k_w = \frac{\omega}{c}$  où  $k_w$  est le nombre d'onde, on obtient l'**équation de Helmholtz**

$$\text{(Eq. de Helmholtz)} \quad \Delta u + k_w^2 u = 0 \quad (2.4)$$

dans tout le domaine de propagation. On appelle  $u$  l'onde *totale* qu'on décompose, en utilisant la linéarité du système, en

$$u = u^i + u^d$$

où  $u^i$  est l'onde incidente (l'agression, par exemple une onde plane) et  $u^d$  est l'onde *diffractée*. L'onde incidente comme l'onde réfléchi **doivent être toutes les deux solutions de l'équation de Helmholtz**.

### Conditions aux limites – Sur $\Omega$

On doit maintenant décider quelles sont les conditions aux limites que nous allons imposer sur la surface de l'objet diffractant. On va distinguer deux cas correspondant à un objet non pénétrable et qui mèneront à l'utilisation de deux opérateurs intégraux distincts. Il existe évidemment d'autres types de conditions aux limites (impédance, problèmes de transmission, etc.)!

**Objet *Sound-Soft*** On dit qu'un objet est *Sound-Soft* lorsque le champ de pression sur la surface de l'objet est nul à tout instant  $t$ . Cela revient, d'après (2.2) à imposer une condition aux limites de *Dirichlet*, soit encore

$$\text{(c.l. de Dirichlet)} \quad u|_{\Gamma} = 0.$$

On remarque que ce type de condition aux limites ne correspond pas, en acoustique, à un phénomène physique!

**Objet *Sound-Hard*** On dit qu'un objet est *Sound-Hard* lorsqu'on impose au champ de vitesse normal à la surface de l'objet diffractant d'être nul pour tout  $t$  : l'objet est rigide, ce qui est physiquement acceptable... Toujours en utilisant (2.2), cela revient à imposer une condition aux limites de *Neumann*, soit en posant  $\mathbf{n}$  la normale à  $\Gamma$

$$\text{(c.l. de Neumann)} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = (\text{grad } u \cdot \mathbf{n})_{\Gamma} = 0.$$

## Conditions aux limites – A l'infini

On peut imaginer une multitude de solutions vérifiant (2.3). Cependant, on ne s'intéressera qu'aux solutions dites "physiques", c'est-à-dire d'"énergie finie". Cela impose donc une certaine décroissance de l'amplitude du signal lorsqu'on s'éloigne de l'objet diffractant. Cette condition sera dite *condition de radiation à l'infini*, appelée dans le cadre de l'acoustique *condition de Sommerfeld*, et telle que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \partial_{|x|} u(x) - ik_w u(x) \right) = 0. \quad (2.5)$$

Cette condition peut se traduire par : le comportement à l'infini est celui d'une onde plane décroissante d'énergie finie. Mathématiquement, cela revient à imposer au champ acoustique d'être  $H_{\text{loc}}^1$  dans le domaine de propagation. Cette condition va intervenir explicitement lors de la construction des formulations intégrales.

## Solutions élémentaires de l'équation de Helmholtz

**Définition 2.1.1** (Onde plane). *On appelle onde plane une onde de la forme*

$$u^p(x) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.$$

Elle est dite "plane" car son front d'onde est un plan. Une onde plane vérifie l'équation de Helmholtz homogène mais pas la condition de Sommerfeld. On introduit alors la notion de *solution élémentaire*. On considère une source de type distribution de Dirac en 0, notée  $\delta_0$ , et on considère l'équation

$$-(\Delta E + k_w^2 E) = \delta_0. \quad (2.6)$$

Les solutions ne sont pas unique puisqu'on peut y ajouter n'importe quelle combinaison d'ondes planes. Regardons les solutions *radiales*, i.e. en fonction de  $r = |x|$ . L'équation précédente devient, en passant en coordonnées polaires/sphériques,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dE}{dr} \right) + k_w^2 E &= 0, \quad r > 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dE}{dr} \right) + k_w^2 E &= 0, \quad r > 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Ce sont des équations différentielles ordinaires dont la forme générale est connue. On va rechercher les solutions se propageant dans la direction des  $r$  croissants i.e. les ondes sortantes (on rappelle que la source est placée en  $r = 0$ ).

Pour  $n = 3$ , la solution générale est de la forme

$$E(r) = c_1 \frac{e^{ik_w r}}{r} + c_2 \frac{e^{-ik_w r}}{r}$$

et la seule solution sortante est celle pour laquelle  $c_2 = 0$ , à savoir

$$E(r) = c_1 \frac{e^{ik_w r}}{r}.$$

On souhaiterait déterminer  $c_1$ . En intégrant l'équation (2.6) au sens des distributions sur une boule  $\mathcal{B}(0, R)$  centrée en 0 et de rayon  $R$ , et par définition de  $\delta_0$ , on obtient en utilisant la

formule de Green–Ostrogradski

$$\begin{aligned}
 -1 &= \int_{\mathcal{B}(0,R)} \operatorname{div} \nabla E(r) d\mathcal{B}_0 + k_w^2 \int_{\mathcal{B}(0,R)} E(r) d\mathcal{B}_0, \\
 &= \int_{\partial\mathcal{B}(0,R)} \frac{\partial E}{\partial r}(r) d\partial\mathcal{B}_0 + \int_{\mathcal{B}(0,R)} E(r) d\mathcal{B}_0, \\
 &= 4\pi R^2 c_1 \left( ik_w \frac{e^{ik_w R}}{R} - \frac{e^{ik_w R}}{R^2} \right) + 4\pi c_1 (e^{ik_w R} (1 - ik_w R) - 1), \\
 &= -4\pi c_1.
 \end{aligned}$$

En conclusion la *solution fondamentale de l'équation de Helmholtz dans  $\mathbb{R}^3$*  est

$$\boxed{E(r) = \frac{e^{ik_w r}}{4\pi r}}. \quad (2.7)$$

Pour  $n = 2$ , on a une équation de Bessel et la solution fondamentale est alors

$$\boxed{E(r) = -\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k_w r)} \quad (2.8)$$

où  $H_0^{(1)}(k_w r)$  est la fonction de Hankel d'ordre 0.

Dans les deux cas, on vérifie aisément que la solution fondamentale vérifie la condition de Sommerfeld. Elle va jouer un rôle fondamental puisqu'elle permet de définir le *noyau de Green* à partir duquel nous allons construire les opérateurs intégraux.

**Définition 2.1.2** (Noyau de Green). *On définit le noyau de Green de l'équation de Helmholtz comme*

$$G_{k_w}(x, y) = E(|x - y|), \quad x \neq y.$$

Pour assurer les conditions d'existence et d'unicité des solutions, on doit caractériser le comportement des solutions admissibles en l'infini.

### Existence, unicité et caractérisation du comportement des solutions

On considère  $\bar{\mathcal{B}}_R$  une boule de centre l'origine et de rayon  $R$ , et  $\mathcal{B}_R^c$  son complémentaire dans  $\mathbb{R}^n$ . Dans cette partie, on va supposer que  $n = 3$ ; cependant le cas  $n = 2$  se traite de la même manière.

**Lemme 2.1.1** (Lemme de Rellich). *Soit  $U$  un domaine extérieur tel qu'il existe un  $R_0$  avec  $\mathcal{B}_{R_0}^c \subset U$ . Soit une distribution  $u \in \mathcal{D}^*(U)$  vérifiant (2.3), alors  $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$  et on a l'alternative*

- $u \equiv 0$  dans  $U$ ,
- ou bien

$$\exists R_1 > R_0, M > 0, \forall R > R_1, \int_{R_0 < |x| < R} |u(x)|^2 dx \geq MR.$$

On aimerait vérifier l'unicité des solutions de l'équation de Helmholtz. On va utiliser le principe d'*absorption limite* qui consiste à supposer que le milieu est à pertes, à savoir qu'on va supposer que  $k_w = \hat{k}_w e^{i\theta}$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  ( $k_w$  admet une composante complexe), puis à faire tendre  $\theta$  vers 0.

**Lemme 2.1.2.** Soit  $T \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^3)$ , soient  $w_1, w_2 \in H^1(\mathcal{B}_R^e)$  deux solutions de  $\Delta w_i + k_w^2 w_i = -T$  dans  $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^3)$ , avec  $\text{supp } T \subset \mathcal{B}_R$ , alors  $w_1 = w_2$ .

*Démonstration.*  $w = w_1 - w_2$  est solution de l'équation homogène. On a alors  $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ , puis  $w \in H^1(\mathbb{R}^3)$ . Par densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  dans  $H^1(\mathbb{R}^3)$ , il existe une suite  $(\varphi_m)_{m \geq 0} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  telle que

$$\lim \varphi_m = w.$$

En testant l'équation homogène par  $\varphi_m$ , en intégrant par parties, puis en passant à la limite, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w(x)|^2 - \hat{k}_w^2 e^{2i\theta} |w(x)|^2 dx &= 0, \\ -\hat{k}_w^2 \sin(2\theta) \int_{\mathbb{R}^3} |w(x)|^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

En conclusion,  $w = 0$ . □

Sous les mêmes conditions, on peut montrer que

**Théorème 2.1.1.** Une solution de  $\Delta u + \hat{k}_w^2 e^{2i\theta} u = -T$  est donnée explicitement par

$$u = G_{\hat{k}_w, \theta} \star T.$$

De plus,  $u \in \mathcal{C}^\infty$  en dehors de  $\text{supp } T$ .

Le principe d'absorption limite donne alors pour  $\theta \rightarrow 0$  (i.e. un milieu sans pertes)

$$u = G_{k_w} \star T.$$

On a toujours  $u \in \mathcal{C}^\infty$  en dehors du support de  $T$ .

On impose maintenant à  $u \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^3)$  de respecter la condition de radiation de Sommerfeld. Dans ce cas,

**Lemme 2.1.3.** Si  $S_R = \{x \in \mathbb{R}^3, |x| = R\}$ , alors

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |u(x)|^2 dS_R = 0.$$

*Démonstration.* En utilisant la formule de Green,

$$\int_{|x| < R} (|\nabla u|^2 - k_w^2 |u|^2) dx = \int_{|x| < R} \nabla \cdot (\bar{u} \nabla u) dx = \int_{S_R} \bar{u} \partial_r u dS_R \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,  $\Im \left( \int_{S_R} \bar{u} \partial_r u dS_R \right) = 0$ . On a encore  $\lim_{R \rightarrow \infty} |\partial_r u - ik_w u| = 0$  en utilisant la condition de Sommerfeld.

En développant

$$\begin{aligned} \int_{S_R} |\partial_r u - ik_w u|^2 dS_R &= \int_{S_R} |\partial_r u|^2 dS_R + k^2 \int_{S_R} |u|^2 dS_R - 2k_w \Im \left( \int_{S_R} \bar{u} \partial_r u dS_R \right), \\ &= \int_{S_R} |\partial_r u|^2 dS_R + k^2 \int_{S_R} |u|^2 dS_R, \end{aligned}$$

on a à la fois  $\int_{S_R} |\partial_r u|^2 dS_R \rightarrow 0$  et  $\int_{S_R} |u|^2 dS_R \rightarrow 0$ . □

Ce lemme permet alors de conclure sur l'unicité des solutions.

**Théorème 2.1.2.** *Soient  $T \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^3)$  et  $u$  solution de l'équation,*

$$\Delta u + k_w^2 u = -T \quad \text{dans } \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^3)$$

*obtenue par le principe d'absorption limite et vérifiant la condition de radiation de Sommerfeld, alors  $u$  est unique.*

*Démonstration.* On montre que  $T = 0 \Rightarrow u = 0$ . Si on suppose que  $u \neq 0$ , alors le lemme de Rellich implique l'existence d'un  $R_1 > R$  et  $M > 0$  tels que

$$\int_{|x| < R} |u(x)|^2 dx \geq MR.$$

On a encore d'après le lemme précédent l'existence d'un  $R_2$  tel que  $\forall R \geq R_2$ ,

$$\int_{S_R} |u(x)|^2 dS_R \leq \frac{M}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} MR &\leq \int_{|x| < R} |u(x)|^2 dx = \int_{|x| < R_2} |u(x)|^2 dx + \int_{R_2}^R \int_{S_r} |u(x)|^2 dS_r dr, \\ &\leq \int_{|x| < R_2} |u(x)|^2 dx + (R - R_2) \frac{M}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, en divisant par  $R$  et en faisant tendre  $R \rightarrow \infty$ , on obtient

$$M \leq \left(1 - \frac{R_2}{R}\right) \frac{M}{2}$$

ce qui est une contradiction.  $\square$

Finalement,

- l'équation de Helmholtz admet une unique solution "physique",
- on a caractérisé le comportement cette solution en dehors des termes sources ainsi que sa décroissance en l'infini,
- on vérifie facilement à partir de la caractérisation de  $u$  que  $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ , i.e. est d'énergie finie. Cette propriété est une conséquence directe de la condition de radiation de Sommerfeld.

Ces propriétés nous permettront d'imposer implicitement ces comportements aux champs reconstruits à partir des formulations intégrales.

## 2.1.2 Formulations intégrales des champs

Dans le cas général, la solution  $u$  de l'équation de Helmholtz vit dans tout le domaine de propagation, y compris l'objet diffractant, par exemple dans le cas d'un problème de transmission. Il n'y a évidemment aucune garantie a priori de continuité de  $u$  au passage de  $\Gamma$ . On pose maintenant  $\Omega_i (\equiv \Omega)$  le domaine intérieur et  $\Omega_e (\equiv \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega})$  le domaine de propagation extérieur.

Soit  $\mathbf{n}$  la normale sortante à  $\bar{\Omega}_i$ , alors pour  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , on définit  $u_{\text{int/ext}}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{int/ext}}$  leur traces intérieures, respectivement extérieures. Pour cette partie encore on supposera que  $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^3$ , mais l'ensemble des résultats reste évidemment valable dans  $\mathbb{R}^2$ . On pose alors

$$[u] = u_{\text{int}} - u_{\text{ext}}, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{int}} - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{ext}} \quad (2.9)$$

les sauts de traces au passage de  $\Gamma$ . On a le théorème de représentation suivant.

**Théorème 2.1.3** (Théorème de représentation). *Pour  $u$  solution de l'équation de Helmholtz, on a les formules suivantes :*

$\mathbf{x} \notin \Gamma$

$$u(x) = \int_{\Gamma} G_{k_w}(x, y) \left[ \frac{\partial u}{\partial n}(y) \right] d\gamma_y - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} (G_{k_w}(x, y)) [u(y)] d\gamma_y, \quad (2.10)$$

$\mathbf{x} \in \Gamma$

$$\frac{u_{\text{int}}(x) + u_{\text{ext}}(x)}{2} = \int_{\Gamma} G_{k_w}(x, y) \left[ \frac{\partial u}{\partial n}(y) \right] d\gamma_y - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} (G_{k_w}(x, y)) [u(y)] d\gamma_y. \quad (2.11)$$

Ce théorème permet d'établir un lien entre les traces surfaciques de  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial n}$  et la valeur du champ en un point  $x$  quelconque du domaine de propagation. On passe d'un problème volumique à un problème surfacique. C'est le premier pas vers les formulations intégrales.

**Eléments de construction de ces formules** Pour tout domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ , en se rappelant que  $u$  et  $E(\cdot - x)$  sont solutions de l'équation de Helmholtz, on a en utilisant la formule de Green

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial n}(y) E(y - x) - \frac{\partial}{\partial n_y} E(y - x) u(y) \right) d\gamma_y.$$

La difficulté vient du comportement singulier de  $E$  quand  $x = y$ . On suppose donc que  $x \in \Omega_i$  et on considère une boule  $\mathcal{B}(x, \epsilon)$  centrée en  $x$  de rayon  $\epsilon$  d'enveloppe  $S_\epsilon$  et une boule  $\mathcal{B}(x, R)$  telle que  $\Omega_i \subset \mathcal{B}(x, R)$  d'enveloppe  $S_R$ . On a bien  $\Gamma \subset \mathcal{B}(x, R)$  ! En appliquant la formule précédente sur  $\Omega_i \setminus \mathcal{B}(x, \epsilon)$  et sur  $\Omega_e \cap \mathcal{B}(x, R)$  puis en sommant les deux contributions, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} E(y - x) \left[ \frac{\partial u}{\partial n}(y) \right] d\gamma_y - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} E(y - x) [u(y)] d\gamma_y \dots \\ &\dots - \int_{S_\epsilon} E(y - x) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\gamma_y + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial}{\partial n_y} E(y - x) u(y) d\gamma_y \dots \\ &\dots + \int_{S_R} E(y - x) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\gamma_y - \int_{S_R} \frac{\partial}{\partial n_y} E(y - x) u(y) d\gamma_y. \end{aligned}$$

On comprend alors mieux l'intérêt d'introduire les deux boules :

- $\mathcal{B}(x, \epsilon)$  va permettre de contrôler le comportement de l'intégrale lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  puisque dans ce cas la fonction  $u$  est régulière. La première des intégrales sur  $\mathcal{B}(x, \epsilon)$  est bornée par  $\epsilon \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right|$  et tend donc vers 0 lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . La seconde intégrale sur  $S_\epsilon$  prend la forme

$$\begin{aligned} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial}{\partial n_y} E(y - x) u(y) d\gamma_y &= u(x) \int_{S_\epsilon} \frac{\partial}{\partial n_y} E(y - x) d\gamma_y + \dots \\ &\dots \int_{S_\epsilon} \frac{\partial}{\partial n_y} E(y - x) (u(y) - u(x)) d\gamma_y \quad . \end{aligned}$$

On notera que  $\frac{\partial E}{\partial n} = \left( \frac{ik_w}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r^2} \right) e^{ik_w r}$  et par conséquent le second terme est borné par  $(1 + \epsilon k_w) \sup_{y \in \mathcal{B}(x, \epsilon)} |u(x) - u(y)|$  et donc tend vers 0 par continuité de  $u$ . Le premier terme tend quant à lui vers  $-1$ .

- $\mathcal{B}(x, R)$  quand à elle permet de contrôler le comportement de l'intégrale lorsque  $R \rightarrow \infty$ .  
En effet, ces termes peuvent être réécrits comme

$$- \int_{S_R} \left( \frac{\partial}{\partial n_y} E(y-x) - ikE(y-x) \right) u(y) d\gamma_y + \int_{S_R} E(y-x) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - iku(y) \right) d\gamma_y$$

où le premier terme est borné par  $\sup_{x \in S_R} |u(x)|$  et le second par la condition de radiation de Sommerfeld. Dans les deux cas, on sait que ces bornes supérieures tendent vers 0.

La formule pour  $\mathbf{x} \notin \Gamma$  vient immédiatement. Il reste à traiter le cas  $x \in \Gamma$ . Les intégrales sur  $S_R$  tendent toujours vers 0. Cependant,  $\mathcal{B}(x, \epsilon)$  est divisée en  $\mathcal{B}_i(x, \epsilon) = \mathcal{B}(x, \epsilon) \cap \Omega_i$  et  $\mathcal{B}_e(x, \epsilon) = \mathcal{B}(x, \epsilon) \cap \Omega_e$ . La seconde intégrale sur  $S_\epsilon$  est toujours bornée par  $|u_{\text{int/ext}}(x) - u_{\text{int/ext}}(y)|$  selon qu'on est dans  $\mathcal{B}_i$  ou  $\mathcal{B}_e$ . Dans les deux cas, la continuité de  $u_{\text{int/ext}}$  assure sa convergence vers 0.

En ce qui concerne le premier terme, la surface  $\Gamma$  peut être assimilée à un plan quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . On a  $\partial \mathcal{B}_{i/e} = \Gamma_\epsilon \cup S_{i/e}$  et donc  $\int_{S_\epsilon} = \int_{S_i} \square_i + \int_{\Gamma_\epsilon} \square_i + \int_{S_e} \square_e + \int_{\Gamma_\epsilon} \square_e$ . Par le même calcul que pour le cas  $x \notin \Gamma$  (mais sur une demi-sphère),

$$u_{\text{int}}(x) \int_{S_{i/e}} \frac{\partial}{\partial n_y} d\gamma_y \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{u_{\text{int/ext}}(x)}{2}.$$

Par ailleurs,  $\frac{\partial}{\partial n_y} E(y-x)$  se comporte comme  $\frac{1}{|x-y|}$  quand  $y \rightarrow x$ . Quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , cela revient à considérer  $\Gamma_\epsilon$  comme un disque de rayon  $\epsilon$  et de centre  $x$ , noté  $\mathcal{D}(x, \epsilon)$ . On a donc uniquement besoin d'étudier le comportement de l'intégrale

$$\int_{\mathcal{D}(x, \epsilon)} \frac{1}{|x-y|} d\gamma_y$$

dont un changement de variable en coordonnées polaires montre qu'elle se comporte comme  $\epsilon$ , d'où la formule pour  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .

La condition de radiation (donc le comportement de  $u$  en l'infini) sont pris **explicitement** en compte dans la construction des formulations intégrales et sont donc imposés implicitement dans les équations finales au sens où on n'a pas besoin de les prendre en compte numériquement (avec par exemple des PML dans le cas de résolutions par éléments finis).

### 2.1.3 Construction des quatre opérateurs intégraux

On voit apparaître deux opérateurs intégraux dans les formules (2.10) et (2.11) du théorème de représentation. On pose le

**Potentiel de Simple Couche  $\mathcal{S}_{k_w}$**

$$u(x) = (\mathcal{S}_{k_w} u)(x) = \int_{\Gamma} G_{k_w}(x, y) q(y) d\gamma_y, \quad (2.12)$$

**Potentiel de Double Couche  $\mathcal{D}_{k_w}$**

$$u(x) = (\mathcal{D}_{k_w} u)(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_{k_w}}{\partial n_y}(x, y) \varphi(y) d\gamma_y. \quad (2.13)$$

Ces deux potentiels **vérifient l'équation de Helmholtz** aussi bien dans  $\Omega_i$  que dans  $\Omega_e$ , ainsi que la condition de radiation de Sommerfeld! On a le théorème suivant.

**Théorème 2.1.4.** *On se donne  $q \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$ . Le potentiel de simple couche  $\mathcal{S}_{k_w}$  est continu en  $x$  à la traversée de  $\Gamma$  et vaut*

$$u(x) = \int_{\Gamma} G_{k_w}(x, y) q(y) d\gamma_y. \quad (2.14)$$

*La dérivée normale de  $\mathcal{S}_{k_w}$  est discontinue à la traversée de  $\Gamma$ . Les limites à droite et à gauche sont alors*

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\text{int}} = \frac{q(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G_{k_w}}{\partial n_x}(x, y) q(y) d\gamma_y, \quad (2.15)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\text{ext}} = -\frac{q(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G_{k_w}}{\partial n_x}(x, y) q(y) d\gamma_y. \quad (2.16)$$

*On se donne  $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$ . Le potentiel  $\mathcal{D}_{k_w}$  est discontinu à la traversée de  $\Gamma$ . Les valeurs limites sont alors*

$$u_{\text{int}}(x) = -\frac{\varphi(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G_{k_w}}{\partial n_y}(x, y) \varphi(y) d\gamma_y, \quad (2.17)$$

$$u_{\text{ext}}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G_{k_w}}{\partial n_y}(x, y) \varphi(y) d\gamma_y. \quad (2.18)$$

*La dérivée normale de  $\mathcal{D}_{k_w}$  est continue à la traversée de  $\Gamma$  et s'exprime sous forme d'intégrale impropre à cause de sa singularité.*

Par conséquent, toute somme d'un potentiel de simple couche de densité  $q$  et d'un potentiel de double couche de densité  $\varphi$  définit une solution admissible  $u$  de l'équation de Helmholtz avec de plus

$$q = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \quad \text{et} \quad \varphi = [u].$$

## Les quatre opérateurs intégraux et les projecteurs de Calderon

Le théorème précédent a permis de mettre en évidence les quatre opérateurs intégraux **à la base de toutes les formulations intégrales pour l'acoustique**. On a donc

**Le simple couche**

$$\mathcal{S}_{k_w} u(x) = \int_{\Gamma} G_{k_w}(x, y) u(y) d\gamma_y,$$

**Le double couche**

$$\mathcal{D}_{k_w} u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_{k_w}}{\partial n_y}(x, y) u(y) d\gamma_y,$$

**L'adjoint du double couche**

$$\mathcal{D}_{k_w}^* u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_{k_w}}{\partial n_x}(x, y) u(y) d\gamma_y,$$

**La dérivée normale du double couche**

$$\mathcal{N}_{k_w} u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G_{k_w}}{\partial n_x \partial m_y}(x, y) u(y) d\gamma_y.$$

On a les relations de Calderon.

**Théorème 2.1.5** (Projecteurs de Calderon). *Soit*

$$\mathcal{H}_{k_w} = \begin{pmatrix} -\mathcal{D}_{k_w} & \mathcal{S}_{k_w} \\ -\mathcal{N}_{k_w} & \mathcal{D}_{k_w}^* \end{pmatrix},$$

les opérateurs

$$\mathcal{C}_{\text{int}} = \frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{H}_{k_w}, \quad (2.19)$$

$$\mathcal{C}_{\text{ext}} = \frac{\mathcal{I}}{2} - \mathcal{H}_{k_w} \quad (2.20)$$

sont appelés projecteurs de Calderon. Ils vérifient

$$\mathcal{C}_{\text{int/ext}}^2 = \mathcal{C}_{\text{int/ext}}, \quad \mathcal{C}_{\text{int}} + \mathcal{C}_{\text{ext}} = \mathcal{I}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{k_w}^2 - \mathcal{S}_{k_w} \mathcal{N}_{k_w} &= \frac{\mathcal{I}}{4}, & \mathcal{D}_{k_w} \mathcal{S}_{k_w} &= \mathcal{S}_{k_w} \mathcal{D}_{k_w}^*, \\ \mathcal{N}_{k_w} \mathcal{D}_{k_w} &= \mathcal{D}_{k_w}^* \mathcal{N}_{k_w}, & (\mathcal{D}_{k_w}^*)^2 - \mathcal{N}_{k_w} \mathcal{S}_{k_w} &= \frac{\mathcal{I}}{4}. \end{aligned}$$

On ne suppose plus désormais que  $q \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$  ou  $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$  qui sont des conditions très contraignantes, et on s'intéresse à l'action de ces opérateurs comme opérateurs entre espaces de Sobolev ce qui revient à travailler avec des espaces de distributions.

## 2.1.4 Formulations intégrales pour l'acoustique

On construit maintenant les équations intégrales associées aux deux problèmes extérieurs de Dirichlet et de Neumann. On rappelle que le champ total peut être décomposé en un champ incident provenant de la source, éventuellement placée à l'infini, et un champ diffracté de telle sorte que

$$u = u^i + u^d, \quad \nabla u = \nabla u^i + \nabla u^d.$$

On va chercher à calculer le champ diffracté selon la condition limite voulue. On se contente pour l'instant de donner les équations intégrales, on s'intéressera plus loin aux critères d'inversibilité.

En utilisant le théorème de représentation 2.1.3 et les définitions de  $q = [u]$  et  $\varphi = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]$ , il vient en remplaçant  $u_{\text{int}} = [u] + u_{\text{ext}}$ , respectivement  $\frac{\partial u_{\text{int}}}{\partial n} = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] + \frac{\partial u_{\text{ext}}}{\partial n}$ ,

$$u_{\text{ext}} = -\frac{\varphi}{2} - \mathcal{D}_{k_w} \varphi + \mathcal{S}_{k_w} q, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u_{\text{ext}}}{\partial n} = -\frac{q}{2} + \mathcal{D}_{k_w}^* q - \mathcal{N}_{k_w} \varphi. \quad (2.22)$$

Ce sont bien des équations posées sur  $\Gamma$ !

### Condition limite homogène de Dirichlet

On remarque dans un premier temps que par définition,  $[u] = [u^d]$ , de même pour la dérivée normale. De fait, les formules de représentation sont encore valables pour  $u^d$  et donc

$$u^d = -\frac{\varphi}{2} - \mathcal{D}_{k_w}\varphi + \mathcal{S}_{k_w}q \quad \text{sur } \Gamma.$$

Par ailleurs, imposer une condition limite de Dirichlet homogène à  $u$  sur  $\Gamma$  revient à imposer  $u^d|_{\Gamma} = -u^i|_{\Gamma}$  et à prolonger cette valeur à l'intérieur de  $\Omega_i$ . Par conséquent,  $u^d$  est continu au passage de  $\Gamma$  ( $\Leftrightarrow \varphi = 0$ ) et

$$\boxed{\mathcal{S}_{k_w}q = -u^i} \quad (2.23)$$

puis

$$\boxed{-\frac{q}{2} + \mathcal{D}_{k_w}^*q = -\frac{\partial u^i}{\partial n}}. \quad (2.24)$$

### Condition limite homogène de Neumann

On procède de la même manière que pour la condition de Dirichlet. Dans ce cas,  $q = 0$  et

$$\boxed{\mathcal{N}_{k_w}\varphi = \frac{\partial u^i}{\partial n}} \quad (2.25)$$

puis

$$\boxed{\frac{\varphi}{2} + \mathcal{D}_{k_w}\varphi = u^i}. \quad (2.26)$$

### Critères d'inversibilité

Les équations (2.23)–(2.26) n'admettent pas toujours des solutions! En effet, l'équation de Helmholtz peut se mettre sous la forme

$$\Delta u = -k_w^2 u.$$

On s'intéresse au cas d'une condition limite de Dirichlet (le cas Neumann se traite de la même manière). Si  $-k_w^2$  n'est pas une valeur propre du problème intérieur avec condition de Dirichlet, alors  $u$  est donnée par les formules précédentes. Si  $-k_w^2$  est une valeur propre du laplacien (ce qui est possible car  $k_w \in \mathbb{R}$ ), alors la résolution de l'équation de Helmholtz devient un problème aux valeurs propres et  $k_w$  correspond à une fréquence de résonance de la cavité par rapport au problème du Laplacien.

En conséquence,

- l'équation (2.23) n'est pas solvable lorsque  $-k_w^2$  est une valeur propre associée au problème intérieur du laplacien avec conditions de Dirichlet,
- considérant un vecteur propre  $w$  du problème du laplacien intérieur avec condition de Dirichlet, il satisfait les hypothèses du théorème de représentation. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{k_w} \frac{\partial w}{\partial n} &= 0 && \text{dans } \Omega_e, \\ -\left(\frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{D}_{k_w}^*\right) \frac{\partial w}{\partial n} &= 0 && \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

L'équation (2.24) n'admet donc pas de solutions dès lors que  $-k_w^2$  est valeur propre du problème intérieur du laplacien avec condition de Dirichlet.

- De manière similaire, on peut montrer que l'équation (2.26) n'admet pas solution lorsque  $-k_w^2$  est valeur propre du problème intérieur du laplacien avec condition de Neumann,
- et qu'il en va de même pour l'équation (2.25).

En conclusion, en dehors des valeurs critiques énoncées ci-dessus, les équations intégrales (2.23)–(2.26) admettent toujours une unique solution<sup>1</sup>. Il existe des formulations intégrales qui permettent de contourner cette difficulté. Elles utilisent le fait que les valeurs propres du problème intérieur pour la laplacien avec conditions de Dirichlet ou Neumann sont différentes. Cela suggère d'utiliser une condition de type "impédance" afin d'éliminer les modes propres intérieurs.

### Autres formulations – L'astuce de Brakhage et Werner

Supposons qu'on souhaite résoudre un problème avec condition de Dirichlet (la condition de Neumann se traitera de la même manière). L'astuce de Brakhage et Werner consiste à résoudre l'équation

$$\frac{q}{2} + \mathcal{D}_{k_w} q - i\eta \mathcal{S}_{k_w} q = u^i \quad (2.27)$$

où  $\eta$  est un paramètre réel positif. L'inversibilité de cet opérateur est garantie pour toute fréquence  $k_w$ . Kress montre (voir [53]) que le paramètre optimal, au sens du conditionnement de l'équation, est  $\eta = \max\{1/2, k_w\}$ .

**Remarque 2.1.1.** *L'inconnue  $q$  n'a plus de sens physique! On parle d'une formulation en sources.*

### La formulation CFIE

Le terme CFIE signifie Combined Field Integral Equation. Cela consiste à combiner purement deux équations intégrales indépendantes avec des seconds membres différents en introduisant une pondération de l'une par rapport à l'autre. On se donne un paramètre  $\alpha \in [0, 1]$ . Pour le problème de Dirichlet, la formulation CFIE s'écrit

$$(1 - \alpha) \left( \frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{D}_{k_w} \right) q - ik_w \alpha \mathcal{S}_{k_w} q = (1 - \alpha) \frac{\partial u^i}{\partial n} + ik_w \alpha u^i. \quad (2.28)$$

L'opérateur à inverser est sensiblement le même que pour l'astuce de Brakhage & Werner mais les seconds membres sont combinés également.

**Remarque 2.1.2.** *L'inconnue  $q$  correspond toujours à  $\left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]$ .*

### Caractère "bien posé" des équations intégrales et formulations variationnelles

On a supposé jusqu'à maintenant, en dehors des cas où  $k_w$  est une fréquence de résonance, les équations intégrales étaient toujours inversibles. C'est le cas lorsque  $q$  et  $\varphi$  sont  $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ . Ces hypothèses sont néanmoins très restrictives et ne tiennent plus lorsqu'on s'intéresse au caractère  $H^s(\Omega_{e/i})$  du champ acoustique. Dans ce cas, on s'appuie sur la théorie des espaces de Sobolev et on s'intéresse au caractère "Fredholm" des opérateurs intégraux.

On a cherché les solutions  $u$  d'énergie finie de l'équation de Helmholtz, i.e.  $u \in H^1(\Omega_{e/i})$ . Par conséquent les opérateurs intégraux fournissent la trace des champs et on obtient naturellement

1. Cette affirmation est à nuancer en 2D où la notion de *capacité* d'une surface entre en jeu. Voir par exemple [29] pour une explication claire

$\gamma_0 u \in H^{1/2}(\Gamma)$  et  $\gamma_1 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$  en utilisant le théorème de trace. Cette caractérisation permet de définir définitivement le cadre fonctionnel dans lequel on va évoluer.

On a décidé de résoudre les équations intégrales par une approche de type Galerkin ( $\Leftrightarrow$  éléments finis de frontière) donc on donne également les formulations variationnelles associées.

**Equation (2.23)** On considère l'opérateur  $\mathcal{S}_0$  ( $\Leftrightarrow k_w = 0$ ). On peut montrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 : H^{-1/2} &\longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \\ q &\longmapsto \int_{\Gamma} G_0(x, y) q(y) d\gamma_y \end{aligned}$$

est coercif quand  $\mathcal{S}_0 q \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Par conséquent, le lemme de Lax-Milgram s'applique et garantit l'existence et l'unicité d'une solution. Par dualité,  $\mathcal{S}_0 q \in H^{1/2}(\Gamma) \Rightarrow q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ . De plus  $\mathcal{S}_0$  est continu. On peut alors montrer une propriété équivalent pour  $\mathcal{S}_{k_w}, k_w > 0$ .

**Théorème 2.1.6.** *L'opérateur  $\mathcal{S}_{k_w} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  est un isomorphisme dès lors que  $-k_w^2$  n'est pas une valeur propre du problème de Dirichlet intérieur pour le laplacien.*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $\mathcal{S}_{k_w} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{R}_{k_w}$  où  $\mathcal{R}_{k_w}$  est un opérateur régularisant (donc compact dans ce contexte) d'ordre  $-3$ . On a alors

$$\mathcal{S}_{k_w} = (\mathcal{I} + \mathcal{R}_{k_w} \mathcal{S}_0^{-1}) \mathcal{S}_0.$$

C'est un opérateur de la forme coercif+compact et il suffit alors d'appliquer l'alternative de Fredholm.  $\square$

**Théorème 2.1.7.** *La formulation variationnelle associée à l'équation (2.23) est : pour tout  $v \in H^{-1/2}(\Gamma)$ ,*

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} v(x) G_{k_w}(x, y) q(y) d\gamma_y d\gamma_x = - \int_{\Gamma} u^i(x) v(x) d\gamma_x. \quad (2.29)$$

**Remarque 2.1.3.** *Ici, on peut préférer la notation utilisant le crochet de dualité  $\langle \mathcal{S}_{k_w} q, v \rangle = -\langle u^i, v \rangle$  puisqu'on travaille entre espaces duaux.*

**Equations (2.26) et (2.24)** Les opérateurs  $-\frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{D}_{k_w}^*$  et  $\frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{D}_{k_w}$  sont continus de  $L^2(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma)$ .

**Théorème 2.1.8.** *Les opérateurs  $-\frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{D}_{k_w}^*$  et  $\frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{D}_{k_w}$  vus de  $L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  sont des isomorphismes excepté lorsque  $k_w$  est l'une des fréquences de résonance déjà évoquées.*

*Démonstration.* Les opérateurs  $\mathcal{D}_{k_w}$  et  $\mathcal{D}_{k_w}^*$  vus de  $L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  sont compacts. Il suffit encore une fois d'appliquer l'alternative de Fredholm.  $\square$

**Théorème 2.1.9.** *La formulation variationnelle associée à l'équation (2.26) est : pour tout  $v \in L^2(\Gamma)$ ,*

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} v(x) \varphi(x) d\gamma_x + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} v(x) \frac{\partial G_{k_w}}{\partial n_y}(x, y) \varphi(y) d\gamma_y d\gamma_x = \int_{\Gamma} u^i(x) v(x) d\gamma_x. \quad (2.30)$$

*L'équation (2.24) se traite de la même manière.*

**Equation (2.25)** On a encore un résultat de ce type pour l'opérateur  $\mathcal{N}_{k_w}$ .

**Théorème 2.1.10.** *L'opérateur  $\mathcal{N}_{k_w} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  est un isomorphisme dès lors que  $k_w^2$  n'est pas une valeur propre du problème intérieur de Neumann pour le laplacien.*

*Démonstration.* On ne donne pas ici la preuve complète car trop longue. Elle consiste à retrancher  $\mathcal{N}_0$  à  $\mathcal{N}_{k_w}$  et à vérifier qu'on obtient un opérateur régularisant d'ordre  $-3$ . Le caractère coercif de  $\mathcal{N}_0$  permet d'appliquer l'alternative de Fredholm.  $\square$

**Théorème 2.1.11.** *La formulation variationnelle associée à l'équation (2.25) est : pour tout  $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,*

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} v(x) \cdot \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \varphi(y) G_{k_w}(x, y) d\gamma_y d\gamma_x \dots \\ & \dots - k_w^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} v(x) G_{k_w}(x, y) \varphi(y) \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y d\gamma_y d\gamma_x = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^i}{\partial n} v(x) d\gamma_x. \end{aligned} \quad (2.31)$$

où  $n_x$ , respectivement  $n_y$  est la normale à  $\Gamma$  en  $x/y$ .

## 2.1.5 Espaces conformes pour les équations intégrales en acoustique

Les équations introduites dans la partie 2.1.4 sont résolues par une méthode de type Galerkin. La surface de l'objet diffractant est discrétisée en un maillage  $\mathcal{T}_h$ . On utilisera des segments dans le cas d'une propagation dans  $\mathbb{R}^2$  ou des triangles dans le cas d'une propagation dans  $\mathbb{R}^3$ . Il s'agit donc uniquement de trouver un espace d'approximation conforme  $V_h$  pour chaque équation. On peut remarquer que

$$\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h) \subset L^2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma)$$

où  $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)$  est l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les éléments  $\tau \in \mathcal{T}_h$ . On a encore, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\mathcal{P}^k(\mathcal{T}_h) \subset H^1(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma)$$

où  $\mathcal{P}^k(\mathcal{T}_h)$  désigne l'espace des fonctions polynomiales de degré  $k \geq 1$  par morceau avec recollement  $\mathcal{C}^0$  entre les éléments du maillage.

Par conséquent, les équations (2.23) et (2.24) peuvent être discrétisées en utilisant  $V_h = \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)$ . Les équations (2.23)–(2.24) peuvent être discrétisées avec  $V_h = \mathcal{P}^k(\mathcal{T}_h)$ . On précise, à titre indicatif pour l'instant, que monter en ordre polynomial devient inutile à partir d'un certain stade si l'ordre de l'approximation géométrique n'augmente pas car dans ce cas l'erreur géométrique devient prépondérante. On reviendra sur ce point dans la partie sur l'indication d'erreur goal-oriented.

## 2.1.6 Conclusion sur les équations intégrales pour l'acoustique

On termine ici la construction des équations intégrales pour l'acoustique qu'on va étudier. On a donné un sens à ces équations du point de vue fonctionnel, i.e. on a bien défini les espaces fonctionnels dans lesquels ces équations vont être résolues. On a conséquemment donné les formulations variationnelles qu'on va utiliser pour leur résolution. On fait quelques remarques d'importance sur les restrictions qu'on impose dans la suite de l'étude.

**Remarque 2.1.4.** *On n'a considéré, jusqu'ici, que le cas où  $\Gamma$  est une surface fermée. Néanmoins, les opérateurs  $\mathcal{S}_{k_w}$  et  $\mathcal{N}_{k_w}$  sont bien définis lorsque  $\Gamma$  est ouverte. On a alors encore des problèmes bien posés tels que*

$$\mathcal{S}_{k_w} : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_{k_w} : \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \quad (2.32)$$

La manipulation de surfaces ouvertes apporte des complications supplémentaires puisqu'il faut bien définir le comportement au bord des opérateurs sur les espaces fonctionnels correspondant. **Sauf mention contraire, on supposera toujours que  $\Gamma$  est fermée.**

**Remarque 2.1.5.** *Les équations (2.24) et (2.26), ou les formulations combinées, ne présentent pas de difficultés pour l'étude d'indicateurs a posteriori. En effet, les opérateurs sont de  $L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ . Le caractère "bien posé" de ces problèmes implique que la norme  $L^2$  du résidu est une norme équivalente de l'erreur. De plus, la norme  $L^2$  est locale donc un indicateur d'erreur basé dessus possède toutes les propriétés requises (voir la partie correspondante du chapitre 3).*

Dans toute la suite, et dans le cadre de l'acoustique, on ne s'intéressera qu'aux équations (2.23) et (2.24) car elles ne font intervenir que des espaces de Sobolev d'ordre non entier pour lesquels une localisation des normes est nécessaire.

## 2.2 Méthodes intégrales pour l'électromagnétisme

On présente ici la méthode de construction des équations intégrales pour l'électromagnétisme. On s'intéresse à la diffraction d'une onde électromagnétique incidente par un objet  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ . Le domaine de propagation est encore une fois décomposé en  $\mathbb{R}^3 = \Omega_i \cup \Gamma \cup \Omega_e$ . Une grande nouveauté est que l'inconnue est désormais vectorielle. De plus, les caractéristiques des champs vont faire apparaître des sous-espaces d'espaces de Sobolev "classiques" dont la manipulation ne va pas s'avérer aisée.

### 2.2.1 Les équations de Maxwell

On précise les caractéristiques du milieu de propagation de l'onde électromagnétique. De même que pour l'acoustique, on se place en régime harmonique et les champs sont de la forme phaseur  $\times e^{-i\omega t}$ . La dérivation en temps est remplacée par une multiplication par  $-i\omega$  et on assimile alors le champ à son phaseur.

#### Milieu homogène isotrope

On considère un milieu de propagation isotrope. Ses caractéristiques sont

- **permittivité diélectrique** :  $\varepsilon(x)\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon \geq 1$ , et  $\varepsilon_0 > 0$  est la *permittivité diélectrique du vide*,  $\varepsilon$  est éventuellement complexe dans un matériau à pertes,
- **permittivité magnétique** :  $\mu = \mu(x)\mu_0$ ,  $\mu \geq 1$ , et  $\mu_0 > 0$  est la **permittivité magnétique du vide**,  $\mu$  est éventuellement complexe,
- **conductivité électrique** :  $\sigma(x) \geq 0$ ,
- **conductivité magnétique** :  $\sigma_m(x) \geq 0$ .

On suppose de plus que le milieu est homogène, i.e.  $\varepsilon(x) = \varepsilon$ ,  $\mu(x) = \mu$ ,  $\sigma(x) = \sigma$  et  $\sigma_m(x) = \sigma$ . Ce milieu est traversé par les courants

- **électriques** :  $\mathbf{J}(x)$ ,

— **magnétiques** :  $\mathbf{M}(x)$ .

Le milieu est chargé par des

— **charges électriques** :  $\rho$ ,

— **charges magnétiques** :  $\rho_m$ .

Les champs régnant sont alors

— **le champ électrique** :  $\mathbf{E}(x)$ ,

— **le champ magnétique** :  $\mathbf{H}(x)$ .

**Remarque 2.2.1.** *Les courants et charges magnétiques n'ont aucune signification physique, i.e. dans un milieu réel  $\sigma_m = 0$  et  $\mathbf{M} = 0$ . Ce sont des artifices pour faciliter la modélisation.*

### Condition de transmission entre deux milieux

Supposons que l'onde se propage dans deux domaines (1) et (2) aux caractéristiques différentes, il est nécessaire d'imposer une condition de transmission sur les champs à l'interface  $\Sigma$ . On impose la **continuité de la composante tangentielle** des champs, soit encore

$$\mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{n}_{|\Sigma} = \mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{n}_{|\Sigma} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^{(1)} \times \mathbf{n}_{|\Sigma} = \mathbf{H}^{(2)} \times \mathbf{n}_{|\Sigma}. \quad (2.33)$$

On autorise la composante normale à être discontinue, notamment dans le cas où il existe des charges surfaciques sur  $\Sigma$  ou au niveau d'un changement de milieu diélectrique.

### Equations de Maxwell dans le domaine fréquentiel

Les grandeurs ci-dessus sont liées entre elles par les quatre équations de Maxwell dans le cas général d'un milieu avec pertes :

$$\text{(Loi de Gauss – Champ électrique)} \quad \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (2.34)$$

$$\text{(Loi de Gauss – Champ magnétique)} \quad \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = \frac{\rho_m}{\mu_0}, \quad (2.35)$$

$$\text{(Loi de Faraday)} \quad \nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu_0\mu\mathbf{H} = -\mathbf{M}, \quad (2.36)$$

$$\text{(Loi d'Ampère)} \quad \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}. \quad (2.37)$$

On obtient alors le système de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} - ik_w Z \mu \mathbf{H} = -\mathbf{M}, \quad (2.38)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + ik_w \frac{1}{Z} \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad (2.39)$$

qui est celui qu'on résoudra. Ces équations peuvent être regroupées en une seule, posée en  $\mathbf{E}$ , ou de manière équivalente en  $\mathbf{H}$ . On pose  $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$  l'impédance du vide et  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  l'indice du milieu.  $k_w$  est le nombre d'onde déjà introduit pour l'acoustique.

### Equation en champ électrique

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} - k_w^2 \varepsilon \mathbf{E} = ik_w Z \mathbf{J} - \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{M}.$$

Pour un milieu homogène, cette équation devient en utilisant la formule

$$\nabla \times \nabla \times \square = \nabla \nabla \cdot \square - \Delta \square,$$

on obtient

$$-(\Delta + k_w^2 n^2) \mathbf{E} = ik_w Z \left( \frac{1}{k_w^2 \varepsilon} \nabla \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu \mathbf{J} \right) - \nabla \times \mathbf{M}. \quad (2.40)$$

### Equation en champ magnétique

$$\nabla \times \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} - k_w^2 \mu \mathbf{H} = ik_w \frac{1}{Z} \mathbf{M} + \nabla \times \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{J}.$$

De même après transformation,

$$-(\Delta + k_w^2 n^2) \mathbf{H} = ik_w \frac{1}{Z} \left( \frac{1}{k_w^2 \mu} \nabla \nabla \cdot \mathbf{M} + \varepsilon \mathbf{M} \right) = \nabla \times \mathbf{J}. \quad (2.41)$$

On remarque ainsi que **chaque composante du champ électrique/magnétique obéit à une équation de Helmholtz** avec second membre. Le travail effectué en 2.1.1 sur la caractérisation, l'existence et l'unicité des solutions reste complètement valable !

### Conditions aux limites – Conducteur parfait

On ne s'intéresse qu'au cas d'un conducteur parfait. Dans ce cas, et lorsque la fréquence de l'onde incidente est élevée, les corps conducteurs comme les métaux peuvent être considérés comme parfaitement conducteurs ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) et on montre alors grâce aux équations de Maxwell que le champ électromagnétique s'annule à l'intérieur. En particulier avec la condition de continuité du champ tangentiel, on impose la condition limite

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \quad (2.42)$$

### Condition de radiation à l'infini

On rappelle qu'imposer une condition de radiation à l'infini revient à vouloir imposer à l'onde d'être d'énergie finie. Pour l'acoustique, cela se traduisait simplement par le fait que l'inconnue  $u$  devait être  $H^1(\mathbb{R}^3)$ . On pourrait être tenté d'imposer une condition de Sommerfeld sur les composantes du champ électromagnétique. Cependant, la puissance d'une onde électromagnétique à travers une surface est donnée en calculant le flux du *vecteur de Poynting*

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}} \quad (2.43)$$

que la condition de Sommerfeld ne permet pas de caractériser. On lui préfère la *condition de Silver-Müller* définie par

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( Z \mathbf{H}(x) \times \frac{x}{|x|} - \mathbf{E}(x) \right) = 0. \quad (2.44)$$

On peut montrer que cette condition limite impose au champ diffracté d'être  $H_{\text{rot}}(\mathbb{R}^3)$ .

**Définition 2.2.1** (Espace  $H_{\text{rot}}^s(\Omega)$ ). *Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , les fonctions vectorielles  $\mathbf{E} \in H_{\text{rot}}^s(\Omega)$  sont telles que  $\mathbf{E} \in H^s(\Omega)$  et  $\nabla \times \mathbf{E} \in H^s(\Omega)$ .*

On a alors un théorème équivalent au cas acoustique.

**Théorème 2.2.1.** *La solution du système de Maxwell obtenue par le procédé d'absorption limite est la seule solution la condition de radiation vérifiant la condition de Silver-Müller.*

## 2.2.2 Formules de représentation

On cherche à résoudre le problème de propagation libre (2.38)–(2.39) dans un milieu homogène sans perte et sans charges. Cela implique en particulier que

$$n = 1, \quad \mathbf{J}_{|\Omega_{i/e}} = 0, \quad \mathbf{M}_{|\Omega_{i/e}} = 0.$$

On ne sait cependant (pour l'instant) rien de ce qui se passe sur  $\Gamma$ . Le champ total est décomposé en une onde incident ( $\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$ ) et une onde diffractée ( $\mathbf{E}^d, \mathbf{H}^d$ ). L'onde incidente vérifie le système de Maxwell homogène mais n'obéit pas forcément à la condition de Silver-Müller. Néanmoins, on impose cette condition pour le champ diffracté. Ainsi, on est amené à résoudre dans chaque domaine  $\Omega_i$  ou  $\Omega_e$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - ik_w Z \mathbf{H} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} + ik_w \frac{1}{Z} \mathbf{E} = 0, \\ \text{S.M.}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^i, \mathbf{H} - \mathbf{H}^i) = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

L'idée des formules de représentation est de reformuler le problème précédent de telle sorte à faire apparaître un second membre composé de courants surfaciques équivalents. On utilisera encore la terminologie  $\mathbf{J}, \mathbf{M}$  pour les désigner, mais ils ne sont issus d'aucune distribution de charges! Plus précisément,  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  désigneront des traces tangentielles de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ . En fait, (2.45) devient

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - ik_w Z \mathbf{H} = -\mathbf{M}, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \nabla \times \mathbf{H} + ik_w \frac{1}{Z} \mathbf{E} = \mathbf{J}, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \text{S.M.}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^i, \mathbf{H} - \mathbf{H}^i) = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

avec  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_e$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_i + \mathbf{M}_e$ ,  $\mathbf{J}_{i/e} = \mp \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{i/e}$  et  $\mathbf{M}_{i/e} = \mp \mathbf{E}_{i/e} \times \mathbf{n}$  où un champ  $\mathbf{X}_{i/e}$  vaut 0 dans  $\Omega_e$ , respectivement  $\Omega_i$ . Ici,  $\mathbf{n}$  est la normale **sortante** à  $\Omega_i$ . Comme pour l'acoustique, on a les formules de représentation.

**Théorème 2.2.2.** *Les solutions de (2.45) vérifient les formules suivantes pour  $x \in \Omega_{i/e}$  (i.e.  $\Leftrightarrow x \notin \Gamma$ )*

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^i(x) + ik_w Z (\mathcal{T}\mathbf{J})(x) + (\mathcal{K}\mathbf{M})(x), \\ \mathbf{H}(x) = \mathbf{H}^i(x) - (\mathcal{K}\mathbf{J})(x) + ik_w \frac{1}{Z} (\mathcal{T}\mathbf{M})(x) \end{cases} \quad (2.47)$$

avec

$$\begin{cases} (\mathcal{T}\mathbf{J})(x) = \frac{1}{k_w^2} \nabla \int_{\Gamma} G_{k_w}(x, y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) d\gamma_y + \int_{\Gamma} G_{k_w}(x, y) \mathbf{J}(y) d\gamma_y, \\ (\mathcal{K}\mathbf{M})(x) = \int_{\Gamma} \nabla_y G_{k_w}(x, y) \times \mathbf{M}(y) d\gamma_y. \end{cases}$$

Si on s'intéresse au problème extérieur, on suppose l'objet impénétrable, donc on prolonge les champs  $\mathbf{E}_i$  et  $\mathbf{H}_I$  par 0. Si on considère le problème intérieur, alors on prolonge les champs par 0 dans  $\Omega_e$ . Le résultat est les formules de Stratton-Chu.

**Théorème 2.2.3** (Formules de Stratton-Chu).

**Problème extérieur :** Soient  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  réguliers et définis dans  $\bar{\Omega}_e$ , alors pour

$$\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma},$$

les formules suivantes sont valides,

$$\mathbf{E}^i(x) + ik_w Z(\mathcal{T}\mathbf{J})(x) + (\mathcal{K}\mathbf{M})(x) = \begin{cases} \mathbf{E}(x) & \text{si } x \in \Omega_e, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_i. \end{cases}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{H}^i(x) + ik_w \frac{1}{Z}(\mathcal{T}\mathbf{M})(x) - (\mathcal{K}\mathbf{J})(x) = \begin{cases} \mathbf{H}(x) & \text{si } x \in \Omega_e, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_i. \end{cases} \quad (2.49)$$

**Problème intérieur :** Soient  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  réguliers et définis dans  $\overline{\Omega}_i$ , alors pour

$$\mathbf{J} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = -\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma},$$

les formules suivantes sont valides

$$ik_w Z(\mathcal{T}\mathbf{J})(x) + (\mathcal{K}\mathbf{M})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega_e, \\ \mathbf{E}(x) & \text{si } x \in \Omega_i. \end{cases}, \quad (2.50)$$

$$ik_w \frac{1}{Z}(\mathcal{T}\mathbf{M})(x) - (\mathcal{K}\mathbf{J})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega_e, \\ \mathbf{H}(x) & \text{si } x \in \Omega_i. \end{cases} \quad (2.51)$$

Ce théorème ne dit pour l'instant rien sur ce qui se passe lorsque  $x \in \Gamma$ , mais on a les formules de trace et les formules des sauts.

**Théorème 2.2.4** (Formules de trace). *La trace tangentielle de  $\mathcal{T}\mathbf{J}$  est continue au travers de  $\Gamma$  et est telle que pour tout  $x \in \Gamma$ ,*

$$T\mathbf{J}(x) = \frac{1}{k_w^2} \nabla_{\Gamma} \int_{\Gamma} G_{k_w}(x, y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) d\gamma_y + \left( \int_{\Gamma} G_{k_w}(x, y) \mathbf{J}(y) d\gamma_y \right)_T. \quad (2.52)$$

Par ailleurs,

$$(\mathcal{K}\mathbf{M})_{e/i, T} = \pm \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{M} + K\mathbf{M} \quad (2.53)$$

où

$$K\mathbf{M}(x) = \int_{\Gamma} \nabla_y G_{k_w}(x, y) \times \mathbf{M}(y) d\gamma_y.$$

Ces expressions sont très similaires à celles pour les traces des potentiels de simple et double couche pour l'acoustique! Il vient alors la *formule des sauts*.

**Théorème 2.2.5.** *Soient  $\mathbf{E}_{i/e, T}$  et  $\mathbf{H}_{i/e, T}$  les traces tangentielles intérieures et extérieures des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , et  $\mathbf{E}^i = 0$ ,  $\mathbf{H}^i = 0$ , alors on a*

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{i/e, T} = ik_w Z(T\mathbf{J}) \mp \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{M} + K\mathbf{M}, \\ \mathbf{H}_{i/e, T} = ik_w \frac{1}{Z}(T\mathbf{M}) \pm \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{J} - K\mathbf{J}. \end{cases} \quad (2.54)$$

avec en particulier

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}] = (\mathbf{E} \times \mathbf{n})_e - (\mathbf{E} \times \mathbf{n})_i = \mathbf{M} \quad \text{et} \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = \mathbf{J}.$$

Si on ne s'intéresse qu'au problème extérieur, alors  $\mathbf{E}_e \times \mathbf{n} = \mathbf{M}$  et  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_e = \mathbf{J}$ . Si on ne s'intéresse qu'au problème intérieur, alors  $-\mathbf{E}_i \times \mathbf{n} = \mathbf{M}$  et  $-\mathbf{n} \times \mathbf{H}_i = \mathbf{J}$ .

### 2.2.3 Les équations intégrales en électromagnétisme

On a introduit dans la partie précédente les différents opérateurs intégraux que nous allons utiliser. Comme pour l'acoustique, il existe plusieurs équations intégrales permettant de résoudre le même problème. On en présente trois.

Il faut tout d'abord revenir aux formules de Stratton-Chu (2.2.3) pour deux courants  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  non précisés. Les courants  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  engendrent les champs  $\mathbf{E} - \mathbf{E}^i$  et  $\mathbf{H} - \mathbf{H}^i$ . Ils vérifient les hypothèses de la formule de saut (2.2.5) et on a par conséquent (puisque  $\mathbf{E}_i = 0$  et  $\mathbf{H}_i = 0$ )

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= (\mathbf{n} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}^i))_e - (\mathbf{n} \times (-\mathbf{H}^i))_i = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_e, \\ \mathbf{M} &= ((\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) \times \mathbf{n})_e - ((-\mathbf{E}^i) \times \mathbf{n})_i = \mathbf{E}_e \times \mathbf{n}.\end{aligned}$$

On impose encore une condition limite de type **conducteur parfait**

$$\mathbf{E}_e \times \mathbf{n} = 0.$$

Par conséquent, la condition  $\mathbf{E}_i = 0$  implique

$$\boxed{\mathbf{M} = 0}.$$

On fait alors apparaître deux conditions, pour  $x \in \Gamma$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{E}^i + ik_w Z \mathbf{n} \times (T\mathbf{J}) &= 0, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}^i - \frac{1}{2}\mathbf{J} - \mathbf{n} \times (K\mathbf{J}) &= 0\end{aligned}$$

qui vont permettre de construire les équations suivantes.

#### Electric Field Integral Equation (EFIE)

On précise d'abord le cadre fonctionnel dans lequel on se trouve. D'après les formules de Stratton-Chu, l'opérateur  $\mathcal{T}$  volumique renvoie un champ qui est dans  $H_{\text{rot}}(\Omega_e)$  dont la trace tangentielle est dans  $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ . Autrement dit, on a  $T : X \rightarrow H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$  où  $X$  est à déterminer. Par dualité (voir **proposition 1.3.1**), on a directement  $X \equiv H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ .

L'équation intégrale du champ électrique, dite encore EFIE, s'exprime alors comme : *trouver*  $\mathbf{J} \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$  *tel que*

$$\boxed{ik_w Z(T\mathbf{J}) = -(\mathbf{E}^i)_T}. \quad (2.55)$$

Sous forme variationnelle, adaptée pour une résolution type Galerkin, le problème s'exprime comme : *trouver*  $\mathbf{J} \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$  *tel que pour tout*  $\mathbf{J}' \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$  *on a*

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G_{k_w}(x, y) \left( \mathbf{J}'(x) \cdot \mathbf{J}(y) - \frac{1}{k_w^2} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}'(x) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) \right) d\gamma_y d\gamma_x &= \dots \\ \dots - \frac{1}{ik_w Z} \int_{\Gamma} \mathbf{E}^i(x) \cdot \mathbf{J}'(x) d\gamma_x.\end{aligned} \quad (2.56)$$

Ce problème est bien posé dès lors que  $k_w$  ne correspond pas à une fréquence de résonance de la cavité  $\Omega_i$ . Dans le cas contraire, la solution est obtenue à une solution de l'équation homogène près. On note que l'EFIE est utilisable sur surface ouverte !

## Magnetic Field Integral Equation (MFIE)

Similairement, on a l'équation du champ magnétique dite MFIE. Pour  $\mathbf{J} \in L_T^2(\Gamma)$  l'espace des champs vectoriels tangents à  $\Gamma$  et  $L^2$ , on a

$$\boxed{\frac{1}{2}\mathbf{J} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \times K\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^i}. \quad (2.57)$$

Sous forme variationnelle, on veut trouver  $\mathbf{J} \in L_T^2(\Gamma)$  tel que pour tout  $\mathbf{J}' \in L_T^2(\Gamma)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{J}'(x) \cdot \mathbf{J}(x) d\gamma_x + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \mathbf{n}_x \times (\nabla_y G_{k_w}(x, y) \times \mathbf{J}(y)) \cdot \mathbf{J}'(x) d\gamma_y d\gamma_x = \dots \\ \dots \int_{\Gamma} \mathbf{n}_x \times \mathbf{H}^i(x) \cdot \mathbf{J}'(x) d\gamma_x. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Elle est également bien posée sauf pour un certain ensemble discret de fréquences  $k_w$ . Cette équation n'a pas de sens sur surface fermée.

## Combined Field Integral Equation (CFIE)

Comme pour l'acoustique, on introduit la formulation mixte CFIE telle que pour  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$\boxed{\text{CFIE} = \alpha \text{EFIE} + (1 - \alpha) Z \text{MFIE}}. \quad (2.59)$$

La CFIE est toujours bien posée, le paramètre  $\alpha$  vaut généralement  $\alpha = 0.2$ . A cause de la partie MFIE, cette équation ne peut être utilisée sur surface ouverte.

### 2.2.4 Espaces conformes pour les équations intégrales en électromagnétisme

La problématique de trouver un espace conforme pour l'EFIE consiste à trouver une espace conforme  $H_{\text{div}}(\mathcal{T}_h) \subset H_{\text{div}}^{-1/2}(\mathcal{T}_h)$ . On se donne deux triangles adjacents  $\tau_1$  et  $\tau_2$  de  $\Gamma$  et  $e_{1/2}$  leur arête commune. On pose encore  $\mathbf{n}_1$  la normale à  $e_{12}$  se trouvant dans le plan de  $\tau_1$  et dirigée vers l'extérieur. On construit de même  $\mathbf{n}_2$ . On peut alors montrer que

$$\nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J} \in L^2(\tau_1 \cup \tau_2) \Leftrightarrow \mathbf{J}|_{\tau_1} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{J}|_{\tau_2} \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \text{ et } \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}|_{\tau_i} \in L^2(\tau_i).$$

pour tous  $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_h$  adjacents.

Des fonctions de base conforme  $H_{\text{div}}$  sont les éléments de Raviart-Thomas (ou encore Rao-Wilton-Glisson). On pose  $RT_k$  la famille des éléments de Raviart-Thomas d'ordre  $k$ . La résolution initiale utilise des éléments  $RT_0$  mais on sera amenés à utiliser des éléments d'ordre supérieur lorsque nous effectuerons des projections sur des espaces d'ordre élevé. Les éléments  $RT_0$  sont construits comme suit.

Soit un triangle  $\tau$ . On pose  $a_j, j \in [1, 3]$  ses sommets et  $e_j$  l'arête opposée au  $j$ -ième sommet. Soit encore  $x \in \tau$  et  $\mathbf{r}_j(x)$  le vecteur  $[a_j \ x]$ , alors la fonction de base associée à la  $j$ -ième arête est telle que

$$\mathbf{B}_j(x) = \frac{\mathbf{r}_j(x) - a_j}{2|\tau|} \quad (2.60)$$

où  $|\tau|$  est l'aire de  $\tau$ . Le cardinal de  $RT_k$  est  $\text{card}(RT_k) = (k+1)(k+3)$ .

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a construit les formulations intégrales pour l'acoustique et l'électromagnétisme avec lesquelles on va travailler dans la suite. On a été amené à caractériser le comportement des solutions admissibles de l'équation de Helmholtz en fonction de la condition de radiation (ou d'énergie finie) à l'infini. On a alors donné les formules de représentation qui prennent intrinsèquement en compte la condition de radiation. En prenant la trace des formules volumiques, on a obtenu des équations purement surfaciques. L'utilisation explicite des conditions aux limites a permis d'établir les équations intégrales. Pour chacune, on a précisé le caractère solvable et les espaces fonctionnels associés. Enfin, on a donné les espaces d'approximation utilisés pour une résolution par méthode de type Galerkin.

L'utilisation des formulations intégrales impose de travailler dans des espaces de Sobolev d'ordre non entier. Une propriété majeure de ces espaces est que les normes associées sont non-locales comme on a déjà pu le constater à la **définition 1.3.3**. Ce point est la raison même des difficultés rencontrées lors de la construction d'indicateurs d'erreur a posteriori, pour cette classe de méthodes, qu'on aborde au chapitre suivant avec la vérification de la validité d'indicateurs *a posteriori* établis pour l'équation de Laplace. On ne se concentre donc que sur les équations faisant intervenir les potentiels  $\mathcal{S}_{k_w}$  et  $\mathcal{N}_{k_w}$ .



# Chapitre 3

## Vérification de la validité d'indicateurs d'erreur existant pour le problème de propagation d'ondes acoustiques.

L'objectif de ce chapitre est d'étendre les indicateurs d'erreurs présentés pour des équations intégrales associées à l'équation de Laplace aux problèmes de propagation d'onde acoustique. Pour cela, on commence par définir la notion d'indicateur d'erreur *a posteriori* afin de mettre en évidence le problème de la construction de tels indicateurs en équations intégrales. On explique ensuite comment un tel indicateur peut être utilisé dans le cadre d'un algorithme de contrôle de l'erreur. On introduit alors la notion d'optimalité ce qui permet de mettre en relation les notions de convergence *a priori* et *a posteriori* et de calculer le meilleur taux de convergence possible. On étudie ensuite l'extension d'indicateurs déjà construits pour l'équation de Laplace. Ces indicateurs se répartissent en deux familles qu'on traite séparément. Pour chaque famille, on prend un exemple qu'on détaille. On démontre alors la validité de leur utilisation sous la même forme dans le cas de la propagation d'une onde acoustique puis ces indicateurs ont été implémentés dans des codes BEM-acoustique en 2D et en 3D spécifiquement développés dans cette thèse. On effectue des simulations sur les exemples académiques que sont le cercle et la sphère et pour lesquels la solution exacte est connue. On effectue ensuite des simulations sur des géométries nécessitant l'utilisation d'un algorithme autoadaptatif pour assurer la meilleure convergence. Cela permet de mettre en évidence les limitations des ces indicateurs et de justifier l'introduction d'un nouvel indicateur d'erreur *a posteriori*.

L'étude menée dans ce chapitre ne se veut pas exhaustive et ne couvre pas l'ensemble des indicateurs d'erreur de la littérature. Pour cela, on renvoie à [36] qui fait un état de l'art sur les indicateurs *a posteriori* pour la BEM associée à l'équation de Laplace. On préfère plutôt présenter quelques indicateurs sélectionnés pour leur facilité d'implémentation et qui ont fait l'objet de simulations dans le cadre de problèmes de propagation acoustique (à l'exception des indicateurs construits par B. Faermann).

### 3.1 Introduction à l'indication d'erreur *a posteriori*

On reprend ici quelques éléments de l'introduction qu'on approfondit. On replace tout d'abord la problématique de l'indication d'erreur dans son contexte. On rappelle la différence entre l'estimation d'erreur *a priori* et l'indication d'erreur *a posteriori* qu'on tente de lier avec la notion d'optimalité. On donne ensuite les propriétés requises pour un indicateur d'erreur *a posteriori* et on met en évidence la manière dont il peut être utilisé dans une boucle de raffinement autoadaptatif. Cela permet de mettre en évidence la plus grande difficulté relative à l'indication d'erreur *a posteriori* en équations intégrales.

### 3.1.1 Contexte de l'indication d'erreur

La problématique de la mesure de l'erreur n'est pas spécifique aux méthodes de résolution par équations intégrales. En se plaçant du point de vue de l'utilisateur (scientifique ou industriel), l'analyse de données numériques ne peut se faire que si on peut garantir la proximité de ces dernières par rapport aux données "exactes". Cela se fait classiquement par *essais-erreurs*, ou bien par des calculs théoriques, qui donnent ensuite lieu à des règles de "bonnes pratiques". On peut donner quelques exemples pour les méthodes basées sur des maillages :

- en propagation d'onde : pour  $\lambda$  la longueur d'onde, la taille caractéristique des mailles devrait être  $h = \frac{\lambda}{6}$  au minimum.
- en acoustique : prenons l'exemple d'un objet avec des arêtes / pointes, etc. Ces singularités géométriques peuvent se comporter comme des sources secondaires, générer des ondes rampantes. Localement, on peut s'attendre à de forts gradients de la solution et il convient donc de mailler plus finement ces zones. Autrement dit, et de manière absolument non rigoureuse, il faut "mailler là où il y a du phénomène".

Par conséquent, le maillage d'une géométrie devient compliqué, et donc très coûteux, dès lors que cette géométrie devient un peu complexe. On peut imaginer, par exemple, le maillage d'un avion complet en configuration décollage, ou atterrissage, qui aurait son train d'atterrissage et ses volets sortis. . . Le coût de préparation d'un calcul peut même être plus coûteux que le coût du calcul lui-même.

Supposons encore que l'utilisateur souhaite faire un calcul "à  $\varepsilon$  donné" (à une précision donnée). L'utilisation des bonnes pratiques n'apporte aucune garantie autre qu'heuristique à la validité de la solution.

Enfin, il faut être capable de mesurer l'écart entre le numérique et la "réalité". On commence d'abord par se demander quelle est la grandeur intéressante : erreur sur la solution ? Erreur sur une donnée issue de la solution ? On cherche ensuite quel sens donner à l'erreur : est-ce qu'on s'intéresse à un écart absolu (mathématiquement : une norme  $\| \cdot \|_{L^\infty}$ , sous-réserve que cela ait un sens) ? Une mesure de l'énergie (norme  $\| \cdot \|_s$  où  $s$  dépend de l'espace des solutions) ?

On peut tenter d'établir un cahier des charges. Un utilisateur :

- ne doit pas avoir trop de difficultés à générer un maillage.
- ne doit pas avoir à recommencer un calcul parce que la solution ne lui convient pas.
- doit pouvoir obtenir une information fiable sur la qualité de sa solution numérique.

On peut reformuler cette problématique : on cherche à obtenir des informations **qualitatives** et **quantitatives** sur l'erreur et ce pour trois choses

- garantir la qualité de la solution,
- proposer un maillage "idéal" qui peut resservir de base pour de futures simulations,
- réduire le coût global d'une simulation.

Ici, **qualitatif** signifie qu'on souhaite récupérer une information sur la *convergence de l'erreur* lorsqu'on raffine le maillage et **quantitatif** signifie qu'on souhaite récupérer une information sur sa *valeur* (la mesure qu'on en fait ne doit pas être trop loin de la réalité).

Idéalement, on peut imaginer partir d'un maillage très grossier, par exemple en  $h = \frac{\lambda}{3}$ , prescrire une *erreur cible*, et laisser un algorithme générer automatiquement le maillage "idéal" et la solution à précision donnée. Ces points vont être détaillés dans les parties qui suivent.

### 3.1.2 Estimation d'erreur *a priori* et *a posteriori*

On peut aborder la question de l'estimation d'erreur sous deux angles qui ne sont pas équivalents en général. Avant tout calcul, on peut essayer de déterminer théoriquement la

manière dont doit se comporter l'erreur à partir des propriétés, théorèmes, etc. relatifs à la méthode utilisée. On parle alors d'indication d'erreur *a priori*. Autrement, on peut vouloir mesurer l'erreur après la simulation. On a alors besoin d'un outil de mesure. C'est évidemment cette dernière approche qu'on utilisera.

### Indication d'erreur *a priori*

On considère un maillage  $\mathcal{T}_h$  de la surface de l'objet diffractant,  $h$  est la taille caractéristique des éléments du maillage. L'indication d'erreur *a priori* consiste à donner une information sur la convergence théorique de la méthode lorsque le maillage est raffiné. Elle impose l'utilisation d'un maillage quasi-uniforme (on rappelle que cela signifie que le rapport de taille entre la plus grande maille et la plus petite n'explose pas en raffinant), autrement dit elle n'a de sens que si on effectue un raffinement uniforme du maillage. On récupère ainsi une information de la forme

$$\|e_h\| = \mathcal{O}(h^s)$$

où  $s \geq 0$  est le *taux de convergence en taille* de l'erreur  $e_h$ . Pour du raffinement autoadaptatif, on peut regarder le taux de convergence en fonction du nombre de triangles/degrés de libertés dont on peut définir une "évolution équivalente" en fonction de  $h$  en introduisant la dimension  $n$  de l'espace de propagation de l'onde :

$$\begin{aligned} \text{— en 2D, } h \rightarrow \frac{h}{2} &\Rightarrow N_{\text{elem}} = N_{\text{seg}} \rightarrow \frac{N_{\text{seg}}}{2}, \\ \text{— en 3D, } h \rightarrow \frac{h}{2} &\Rightarrow N_{\text{elem}} = N_{\text{tri}} \rightarrow \frac{N_{\text{tri}}}{4}, \end{aligned}$$

soit

$$\|e_h\| = \mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{\frac{-s}{n-1}}). \quad (3.1)$$

Dans le cadre d'une méthode de résolution de type Galerkin, on peut combiner le lemme de Céa (lemme 1.4.1) et le lemme de Bramble–Hilbert (**lemme 1.4.2**) pour obtenir une information *a priori* sur l'ordre de convergence. Cet ordre dépend de l'ordre  $m - 1$  de l'espace polynomial utilisé comme espace d'approximation. Dans ce cadre, en supposant que les grandeurs existent, on a l'inégalité

$$\|u - u_h\|_k \leq C_{>0} h^{m-k} |u|_m \quad (3.2)$$

où  $|\cdot|_m$  est la semi-norme  $H^m$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . On peut alors faire trois remarques importantes.

**Remarque 3.1.1.** *L'estimation a priori précédente donne le pire taux de convergence possible une fois qu'on a choisi le degré polynomial  $m - 1$  de l'espace d'approximation, mais la meilleure inégalité possible. Autrement dit, l'erreur peut normalement converger plus vite que  $m - k$  en  $h$ , ou bien  $\frac{k - m}{n - 1}$  en  $N_{\text{elem}}$ , **sous réserve que  $|u|_m$  existe.***

*Dans tous les cas pratiques rencontrés dans cette étude, le taux de convergence en  $h$  s'établit toujours à la pire estimation a priori.*

Malheureusement, l'erreur ne converge généralement même pas à ce taux et on a une inégalité "pire".

**Remarque 3.1.2.** *L'inégalité (3.2) ne vaut que si toutes les dérivées jusqu'à  $|u|_m$  existent, donc la solution exacte  $u$  doit être **suffisamment régulière**. En pratique, c'est rarement le cas et on va avoir une estimation de la forme*

$$\|u - u_h\|_k \leq C_{>0} h^{m_1 - k} |u|_{m_1}, \quad m_1 \leq m \text{ et } m_1 \in \mathbb{R}, k \leq m_1.$$

**Remarque 3.1.3.** *Il est important de bien regarder en quelle norme on mesure l'erreur. En effet, si on prend une norme trop régulière (par exemple une norme  $L^2$  au lieu d'une norme  $H^{-1/2}$ ), l'erreur peut ne pas converger... Dans tous les cas, la norme est dictée par l'équation et le schéma numérique.*

En supposant qu'on soit capable de "mesurer" l'erreur, on se sert de l'indication *a priori* comme suit :

- si le taux de convergence en  $h$  en raffinement uniforme est le maximum possible, alors il suffit de raffiner le maillage uniformément jusqu'à ce que l'erreur cible soit atteinte.
- si ce n'est pas le cas, on peut modifier le maillage (manuellement, ou bien automatiquement) pour l'adapter aux caractéristiques attendues de la solution exacte.

### Indication d'erreur *a posteriori*

L'indication d'erreur *a posteriori* répond au problème de la mesure de l'erreur après résolution. Elle doit donner une information sur la convergence lorsqu'on raffine le maillage, ainsi que sur la valeur de l'erreur.

Pour cela, on introduit une grandeur qu'on appelle *indicateur d'erreur a posteriori*.

**Définition 3.1.1** (Indicateur d'erreur *a posteriori*). *On appelle indicateur d'erreur a posteriori une grandeur  $\eta$  calculable à partir de la solution numérique  $\mathbf{u}_h$  et des données du problème telle que*

$$\exists \{C_{\text{eff}}, C_{\text{fia}}\} > 0, \forall h, \quad C_{\text{eff}}\eta \leq \|e_h\| \leq C_{\text{fia}}\eta \quad (3.3)$$

où  $C_{\text{eff}}$  et  $C_{\text{fia}}$  ne dépendent **que** de  $\Gamma$ .

On impose de plus que

$$\begin{aligned} \eta^2 &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \eta_\tau^2 && \text{ou bien} \\ \eta &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \eta_\tau. \end{aligned} \quad (3.4)$$

L'inégalité de droite dans (3.3) est appelée propriété de **fiabilité**. Elle signifie que l'erreur converge au moins aussi vite que l'indicateur.

L'inégalité de gauche dans (3.3) est appelée propriété d'**efficacité**. Elle signifie que l'erreur ne converge pas plus vite que l'indicateur.

La fiabilité et l'efficacité garantissent qu'on a une grandeur qui se comporte comme l'erreur. Néanmoins, on aimerait être capable de déterminer les zones qui génèrent le plus d'erreur, autrement dit celles qui sont mal maillées. Pour cela, on a la propriété (3.4) dite de **localité de l'indicateur** : l'erreur totale peut être décomposée comme une somme de contributions individuelles sur les éléments du maillage.

**Remarque 3.1.4 (Importante!).** *La localité de l'indicateur **ne signifie pas** qu'il représente l'erreur locale. Cela résulte de la non-localité des opérateurs intégraux entrant en jeu. Néanmoins, on peut se servir de cette décomposition pour guider un **algorithme de raffinement autoadaptatif**.*

**Remarque 3.1.5.** *La propriété d'efficacité n'est pas toujours intégrée dans la définition d'un indicateur a posteriori. En effet, on cherche généralement à assurer la convergence de l'erreur et l'efficacité est un moyen de contrôle supplémentaire. Elle n'est cependant pas indispensable pour obtenir une estimation de l'erreur.*

## Algorithme de raffinement autoadaptatif

On a évoqué précédemment le fait que le raffinement de maillage se fait généralement *a priori*. On souhaite désormais automatiser la procédure, et ce pour trois choses :

1. on souhaite **garantir la précision de la solution** : on prescrit *a priori* une "erreur cible" et l'algorithme se charge de construire un solution répondant à ce critère.
2. on récupère un **maillage "idéal"** au sens qu'on va pouvoir le réutiliser comme maillage de base pour des simulations similaires.
3. on peut réduire la difficulté, le temps et donc le coût de construction des maillages. En effet, on peut se contenter d'un maillage de départ grossier, l'algorithme se chargeant de repérer et raffiner les zones critiques.

Pour cela, on utilise une **boucle de raffinement autoadaptatif**. Le principe d'un tel algorithme est résumé sur la FIG. 3.1. L'indicateur d'erreur intervient juste après la phase

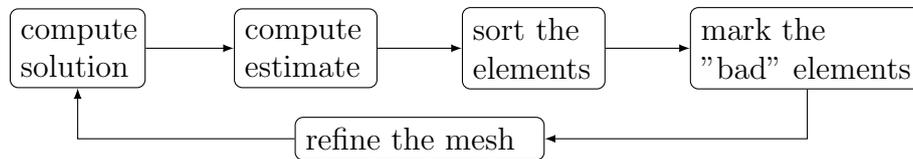


FIGURE 3.1 – Boucle de raffinement autoadaptatif

de résolution de l'équation. On récupère la solution numérique ce qui nous permet d'obtenir localement, sur les éléments du maillage, une grandeur dont on va se servir pour sélectionner les éléments à raffiner. Il faut ensuite trier ces grandeurs locales de la plus grande à la plus petite. Il reste à définir un critère qui va déterminer le nombre de "mauvais" éléments qu'on va marquer pour raffinement. On pose

$$\mathcal{M}(\mathcal{T}_h) = \{\tau \in \mathcal{T}_h, \tau \text{ est marqué pour raffinement}\}. \quad (3.5)$$

On peut citer au moins deux critères :

- un premier critère consiste à récupérer le maximum des valeurs locales de l'indicateur d'erreur puis à comparer toutes les autres à ce maximum via un paramètre  $\theta \in [0, 1]$ . Autrement dit,

$$\mathcal{M}(\mathcal{T}_h) = \left\{ \tau \in \mathcal{T}_h, \eta_\tau \geq \theta(\max_{\tau' \in \mathcal{T}_h} \eta_{\tau'}) \right\}.$$

- un second critère est la **méthode de Dörfler**. Cette approche consiste à trouver l'ensemble minimal d'éléments tels que la valeur de l'indicateur sur cet ensemble correspond à un certain pourcentage de la valeur totale de l'indicateur. Formellement,

$$\theta \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \eta_\tau^2 \leq \sum_{\tau \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_h)} \eta_\tau^2. \quad (3.6)$$

**C'est le critère qu'on utilisera dans la suite** car il existe des preuves de convergence "optimale" [16] des algorithmes utilisant ce marquage.

Une fois les triangles marqués, il "suffit" de les raffiner.

## Raffinement de maillage – Un aperçu

En 2D, le raffinement d'une frontière (qui est linéique...) est trivial puisqu'il suffit de couper chaque segment en son milieu.

En 3D, la problématique est tout autre puisqu'il faut

- décider du nombre d'enfants des triangles : est-ce qu'on le divise en deux, quatre sous-triangles ?
- assurer la conformité de maillage au sens des éléments finis (voir FIG. 3.2),
- conserver autant que possible la "qualité" des triangles (voir FIG. 3.3). En effet une mauvaise technique de raffinement entraîne l'apparition de triangles aplatis pour lesquels les techniques d'intégration fonctionnent moins bien, et qui entraînent de surcroît une détérioration du conditionnement de la matrice "éléments finis", une dégradation du coefficient de régularité des triangles ce qui détériore également l'estimation de convergence *a priori* car la constante multiplicative augmente.

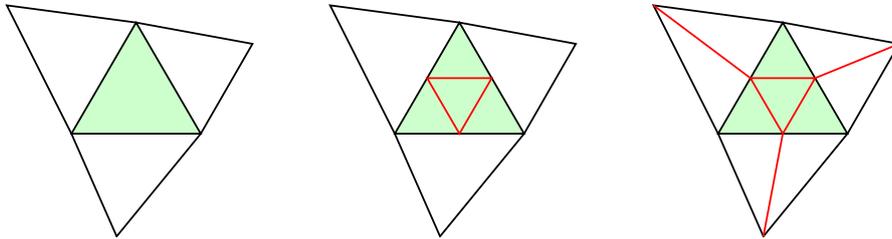


FIGURE 3.2 – Triangle parent (gauche), triangle parent raffiné en 4 sans conformité (centre), raffinement conforme (droite).

On introduit ici deux techniques de raffinement.

La première technique est appelée le *red-green-blue refinement*. Pour un triangle donné, elle consiste à se donner une arête de référence qui va servir de base pour effectuer un raffinement *red*, *green* ou *blue* (cf. FIG. 3.4). Un choix judicieux de cette arête permet d'éviter les dégénérescences dans le maillage. Une manière d'effectuer le raffinement est décrite dans [15].

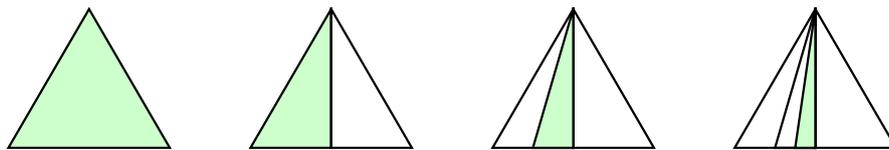


FIGURE 3.3 – Exemple d'une dégénérescence du maillage au fur-et-à-mesure des raffinements

La seconde technique est appelée *newest-vertex bisection*. Elle est très proche du raffinement *red-green-blue*. Elle est également basée sur une arête de référence. On se donne un triangle  $T$ . Le milieu de l'arête de référence devient un nouveau nœud du maillage qui est relié au sommet opposé pour générer deux triangles enfants  $T_1$  et  $T_2$ . Les arêtes opposées à l'arête de référence de  $T$  deviennent les arêtes de référence des triangles enfants. On parcourt donc l'ensemble des triangles et on marque l'arête de référence de tous les triangles à raffiner. Il se peut alors qu'il faille assurer la conformité ce qui peut mener à raffiner les triangles en deux, trois ou quatre enfants (voir FIG. 3.5). L'algorithme et ses variantes est décrit avec plus de précision dans [51]. On choisit comme arête de référence la plus longue.

C'est cette dernière technique qu'on utilise dans la suite car elle induit des convergences optimales [16].

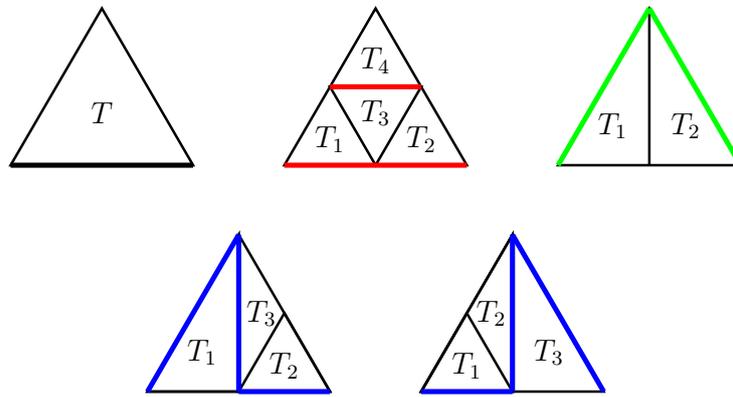


FIGURE 3.4 – Raffinement *red* (milieu–haut), *green* (droite–haut), *blue* (bas). Les nouvelles arêtes de référence sont en gras.

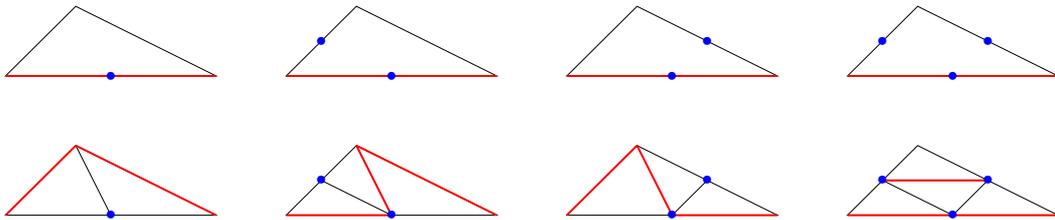


FIGURE 3.5 – Exemple de *newest-vertex bisection* en fonction du nombre d'arêtes marquées pour le raffinement. Extrême gauche : une seule arête à raffiner  $\Leftrightarrow$  arête de référence. Centre gauche et droit : il faut assurer la conformité de maillage avec une seule arête. Extrême droite : toutes les arêtes sont raffinées : on fait un raffinement *red*.

### 3.1.3 Convergence optimale d'un algorithme de raffinement autoadaptatif

Le concept de "convergence optimale" est compliqué à définir. En effet, par rapport à quelle grandeur se définit la *convergence*? Dans le cadre d'un algorithme de raffinement autoadaptatif, ça ne peut pas être la taille des mailles car elle ne converge pas forcément (si par exemple l'élément n'est jamais marqué). De plus, elle n'est pas représentative du coût effectif de calcul qui va dépendre du nombre d'éléments du maillage.

Par ailleurs, dans quel sens doit-on comprendre *optimal*? Une première approche naïve consisterait à prétendre qu'un algorithme de raffinement autoadaptatif converge *optimalement* si le comportement en convergence de l'erreur par rapport au nombre d'éléments est le même que celui correspondant au raffinement uniforme correspondant à une solution "parfaitement" régulière (typiquement le taux de convergence qu'on pourrait obtenir sur un cercle ou une sphère). Autrement dit, le raffinement autoadaptatif "lisserait" les solutions. Cette approche est **biaisée**, même si elle peut aider à saisir le principe d'un algorithme autoadaptatif. En effet, le "lissage" de la solution par une distribution géométrique particulière des triangles suppose un lien fort avec la technique de raffinement des triangles : est-ce que raffiner en bisectant par rapport au nœud placé au *milieu* de l'arête de référence est vraiment la meilleure solution ?

A cet approche, on préfère une définition abstraite qui se "contente" de garantir la convergence de l'erreur si on utilise un algorithme de raffinement autoadaptatif. On pose

- $(\mathcal{T}_l)_{l \geq 0}$  la suite de maillages générés par l'algorithme auto-adaptatif tels que  $\forall l \geq 0$  où  $\mathcal{T}_0$  correspond à un maillage initial de résolution,  $\mathcal{T}_l \subseteq \mathcal{T}_{l+1}$ <sup>1</sup> et  $\hat{\mathcal{T}}$  tout raffinement admissible d'un maillage  $\mathcal{T}$ ,

1. Cette inclusion est à comprendre au sens que  $\mathcal{T}_{l+1}$  est un raffinement quelconque de  $\mathcal{T}_l$ .

- $u$  la solution du problème sur un maillage  $\mathcal{T}$  et  $u_l$  la solution du problème discret sur chaque maillage  $\mathcal{T}_l$  de la suite  $(\mathcal{T}_l)_l$ ,  $\hat{u}$  celle sur  $\hat{\mathcal{T}}$ ,
- $|\mathcal{T}| = \text{card}(\mathcal{T})$  le nombre d'éléments d'un maillage  $\mathcal{T}$ ,
- $\eta$  un indicateur d'erreur *a posteriori* et  $\eta_\tau$  sa valeur sur un élément  $\tau \in \mathcal{T}_l$ .

**Remarque 3.1.6.** *Dans les définitions des notations ci-dessus, on n'évoque pas le cas de la conformité géométrique du maillage. On prend l'exemple de la sphère : si on ne projette pas la géométrie, l'intégralité du développement suivant est parfaitement valable puisqu'on respecte l'inclusion  $\mathcal{T}_l \subseteq \mathcal{T}_{l+1}$ , mais la solution continue est celle d'une boule à facettes !*

*Si on projette les nœuds de la suite de maillages sur la géométrie, on n'a plus l'inclusion des maillages et donc des espaces fonctionnels. On fait alors apparaître des termes d'erreur géométrique qui sont d'ordre élevé par rapport à la valeur de l'erreur d'approximation (sous réserve que l'ordre polynomial de l'espace d'approximation ne soit pas trop élevé, voir la conclusion de 7.3.1).*

On pose encore

$$\begin{aligned} \|(\eta, u)\|_{\mathbb{B}_s} &= \sup_{N \in \mathbb{N}_0} \inf_{|\mathcal{T}| - |\mathcal{T}_0| \leq N} \eta(\mathcal{T}, u) (N+1)^s, \\ &\simeq \sup_{l \in \mathbb{N}_0} \eta(\mathcal{T}_l, u_l) (|\mathcal{T}_l| - |\mathcal{T}_0| + 1)^s \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Définition 3.1.2 (Convergence optimale, voir [16]).** *Si il existe au moins un  $s > 0$  tel que  $\|(\eta, u)\|_{\mathbb{B}_s} < \infty$ , alors il existe une suite de maillages telle qu'une convergence en  $\mathcal{O}(N^{-s})$  est possible.*

*On dit que l'algorithme auto-adaptatif **converge optimalement** si il permet de récupérer une telle convergence.*

La conséquence principale de cette définition est que pour le plus grand  $s$  admissible  $s_{\max}$  dans la définition précédente, alors un taux asymptotique de convergence pour  $\eta$  tel que

$$\eta(\mathcal{T}, u) = \mathcal{O}(N^{-s_{\max}})$$

est possible si on choisit à chaque itération le "meilleur maillage" possible.

**Remarque 3.1.7.** *Cette définition n'implique **absolument pas** que  $s_{\max}$  correspond systématiquement au  $s_{\max}$  qu'on pourrait obtenir avec une solution régulière. Par contre,  $s_{\max}$  est borné au-dessus par ce dernier.*

*Le  $s_{\max}$  dépend de la classe d'approximation de la solution continue.*

Carstensen et al. [16] montrent qu'il suffit de quatre axiomes pour assurer la convergence optimale de l'algorithme de raffinement autoadaptatif en supposant uniquement la fiabilité de l'indicateur *a posteriori*. En reprenant leurs notations, on pose  $\mathbb{T}$  l'ensemble des raffinements admissibles d'un maillage initial  $\mathcal{T}_0$ ,  $\mathcal{X}(\mathcal{T})$  un espace fonctionnel sur  $\mathcal{T}$ , et  $\|\cdot\|$  une distance sur  $\mathcal{X}(\mathcal{T})$ . On pose encore  $\eta(\mathcal{T}, v)$  la valeur de l'indicateur  $\eta$  pour une fonction  $v$  définie sur le maillage  $\mathcal{T}$ . Ces axiomes sont

- (A1) la **stabilité sur les éléments non-raffinés**. Pour tout raffinement  $\hat{\mathcal{T}} \in \mathbb{T}$  de  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ , pour tout sous-ensemble d'éléments communs  $J \in \hat{\mathcal{T}} \cap \mathcal{T}$  (i.e. qui n'ont pas été raffinés), et pour tout  $v \in \mathcal{X}(\mathcal{T})$  et  $\hat{v} \in \mathcal{X}(\hat{\mathcal{T}})$ , alors

$$\left| \left( \sum_{\tau \in J} \eta_\tau(\hat{\mathcal{T}}, \hat{v})^2 \right)^{1/2} - \left( \sum_{\tau \in J} \eta_\tau(\mathcal{T}, v)^2 \right)^{1/2} \right| \leq C_{\text{stab}} \|\hat{v} - v\|.$$

Cet axiome signifie que la valeur de l'indicateur est contrôlée indépendamment de la fonction pour laquelle on l'évalue.

- (A2) la **propriété de réduction sur les éléments du domaine raffiné**. Pour tout raffinement  $\hat{\mathcal{T}} \in \mathbb{T}$  de  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ , en posant  $\hat{U}$  et  $U$  les solutions calculées sur ces maillages, alors

$$\sum_{\tau \in \hat{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{T}} \eta_{\tau}(\hat{\mathcal{T}}, \hat{U})^2 \leq \rho_{\text{red}} \sum_{\tau \in \mathcal{T} \setminus \hat{\mathcal{T}}} \eta_{\tau}(\mathcal{T}, U)^2 + C_{\text{red}} \|\hat{U} - U\|$$

où  $\hat{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{T}$  est l'ensemble des triangles issus du raffinement et  $\mathcal{T} \setminus \hat{\mathcal{T}}$  ceux dont est issu  $\hat{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{T}$  i.e. les éléments "parents",  $\rho_{\text{red}} < 1$ ,  $C_{\text{red}} \geq 1$ .

Cet axiome indique que la valeur de l'indicateur appliqué à la solution numérique diminue sur les éléments raffinés.

- (A3) la **quasi-orthogonalité générale**. On peut trouver des constantes  $0 \leq \varepsilon_{\text{qo}} \leq \varepsilon_{\text{qo}}^*(\theta)$  et  $C_{\text{qo}} \geq 1$  telles que  $\forall l, N \in \mathbb{N}_0$  et  $N \geq l$ , on a

$$\sum_{k=l}^N (\|U_{k+1} - U_k\|^2 - \varepsilon_{\text{qo}} \|u - U_k\|^2) \leq C_{\text{qo}} \eta(\mathcal{T}_l, U_l)^2.$$

où ici  $u$  est la solution du problème continu.

- (A4) la **fiabilité discrète**. Pour tout raffinement  $\hat{\mathcal{T}}$  de  $\mathcal{T}$ , il existe un sous-ensemble  $\mathcal{R}(\mathcal{T}, \hat{\mathcal{T}}) \subseteq \mathcal{T}$  avec  $\mathcal{T} \setminus \hat{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{T}, \hat{\mathcal{T}})$  et  $|\mathcal{R}(\mathcal{T}, \hat{\mathcal{T}})| \leq C_{\text{ref}} |\mathcal{T} \setminus \hat{\mathcal{T}}|$  tel que

$$\|U - \hat{U}\|^2 \leq C_{\text{drel}}^2 \sum_{\tau \in \mathcal{R}(\mathcal{T}, \hat{\mathcal{T}})} \eta_{\tau}(\mathcal{T}, U)^2.$$

Il s'agit de l'hypothèse de fiabilité où la solution continue  $u$  a été remplacée par la solution sur un maillage raffiné  $\hat{U}$ . En pratique, l'ensemble  $\mathcal{R}(\mathcal{T}, \hat{\mathcal{T}})$  correspond à un patch autour des éléments de  $\mathcal{T}$  qui vont être raffinés.

Dans le cas des équations intégrales associées au problème de Laplace, la convergence optimale est démontrée pour certains indicateurs qui vont être présentés dans la suite. Dans les cas des équations intégrales pour le problème de Helmholtz, la partie compacte des opérateurs intégraux génère des termes supplémentaires non-contrôlables directement venant s'ajouter aux inégalités dans (A1)–(A4).

Dans la suite de ce chapitre, on présente quelques indicateurs d'erreur *a posteriori* de la littérature, généralement développés pour l'équation de Laplace, et on les étend, lorsque c'est nécessaire aux formulations intégrales pour l'équation de Helmholtz.

## 3.2 Indicateurs basés sur le résidu

Dans cette section, on présente plus en détail quelques indicateurs de la littérature basés sur l'évaluation du résidu de l'équation. On rappelle que pour une équation de la forme  $\mathcal{A}u = b$  où  $\mathcal{A}$  est un opérateur à inverser,  $u$  la solution continue et  $u_h$  la solution discrète, on définit le **résidu**

$$\begin{aligned} r_h &= b - \mathcal{A}u_h, \\ &= \mathcal{A}(u - u_h). \end{aligned}$$

Si de plus le problème est *bien posé*, i.e. on a la **condition inf-sup** et  $\mathcal{A}$  est un opérateur continu, alors "la" norme du résidu est une grandeur équivalente de la norme de l'erreur et définit donc un indicateur d'erreur *a posteriori* fiable, efficace mais non local<sup>2</sup>. En effet, la condition inf-sup s'écrit :  $\exists \alpha > 0$ ,

$$\inf_{w \in V} \sup_{v \in V} \frac{|\langle \mathcal{A}w, v \rangle|}{\|w\| \|v\|} \geq \alpha.$$

En particulier,

$$\sup_{v \in V} \frac{|\langle \mathcal{A}w, v \rangle|}{\|v\|} \geq \alpha \|w\|$$

où on reconnaît la définition de la norme duale dans  $V^*$ . Pour  $w = e_h = u - u_h$ , on a l'efficacité

$$\|\mathcal{A}e_h\|_{V^*} \geq \alpha \|e_h\|_V.$$

Par ailleurs la continuité de  $\mathcal{A}$  assure la fiabilité

$$\|\mathcal{A}e_h\|_{V^*} \lesssim \|e_h\|_V.$$

Il s'agit donc de trouver une localisation de la norme du résidu. On présente dans un premier temps un indicateur transposé des éléments finis classiques aux éléments finis de frontière par Birgit Faermann [34] utilisant une localisation sur un patch autour de chaque élément du maillage, puis on introduit un indicateur basé sur des estimations inverses issu des travaux de Carsten Carstensen [14].

### 3.2.1 Indicateurs basés sur le résidu de Faermann

On présente ici les indicateurs basés sur le calcul du résidu introduits par B. Faermann dans [34]. Il ne font l'objet d'**aucune** simulation dans la suite de l'étude, et sont donc uniquement présentés comme exemples de localisation de la norme du résidu.

#### Premier indicateur

On considère un objet diffractant  $\Omega$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  plongé dans  $\mathbb{R}^n$ . On pose  $\mathcal{T}_h$  une discrétisation de  $\Gamma$ . On a l'erreur  $e_h = u - u_h$  où  $u$  est la solution continue et  $u_h$  la solution discrète. On cherche à localiser une norme  $H^s(\Gamma)$ .

On résout une équation de la forme  $\mathcal{A}u = b$  où

$$\mathcal{A} : H^\alpha(\Gamma) \longrightarrow H^{-\alpha}(\Gamma), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

est d'ordre  $2\alpha$ . On suppose le problème bien posé et vérifiant l'inégalité de Gårding, i.e.  $\exists C_{\text{ell}}, \delta > 0$  et  $C_G \geq 0$  telles que

$$\forall v \in H^\alpha(\Gamma), \quad |\langle \mathcal{A}v, v \rangle| \geq C_{\text{ell}} \|v\|_\alpha^2 - C_G \|v\|_{\alpha-\delta}^2.$$

**Remarque 3.2.1.** *L'inégalité de Gårding résulte du caractère "bien posé" du problème et peut être vue comme une généralisation de la notion de coercivité. Dans le cas des équations intégrales en onde, elle signifie que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est bijectif sauf pour un ensemble discret de fréquences.*

---

2. dans le cadre des équations intégrales.

On suppose encore que  $\mathcal{A} : H^{\alpha-\delta}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\alpha-\delta}(\Gamma)$  est bijectif et continu. Cela inclut notamment les opérateurs  $\mathcal{S}_{k_w}$  (pour  $\alpha = -1/2$ ),  $\mathcal{N}_{k_w}$  ( $\alpha = 1/2$ ) mais aussi  $\mathcal{D}_{k_w}$  et  $\mathcal{D}_{k_w}^*$  ( $\alpha = 0$ ).

On doit également faire quelques suppositions sur le maillage  $\mathcal{T}_h$  et l'espace d'approximation  $V_h$ . On pose  $(B_q)_{q \in \Xi}$  une base de  $V_h$  où  $(B_q)$  l'espace des fonctions "chapeau" associées aux éléments de  $\Xi$ . On suppose alors que

— on peut partitionner  $\Xi$  en  $I_1, I_2, \dots, I_\rho$  tels que  $\forall \nu \in \{1, \dots, \rho\}$ ,

$$\text{supp}(B_q) \cap \text{supp}(B_p) = \emptyset \quad \text{pour tout } p, q \in I_\nu, p \neq q.$$

—  $(B_q)_{q \in \Xi}$  est une *partition de l'unité*.

— on a la propriété de stabilité :  $\forall v \in H^{\max(\alpha, 0)}(\Gamma), \exists v_\Gamma \in V_h$ ,

$$\sum_{q \in \Xi} \|B_q(v - v_\Gamma)\|_\alpha^2 \leq C_\alpha^{\text{stab}} \|v\|_\alpha^2.$$

— on a la propriété d'approximation :  $\forall v \in H^{\alpha+\delta}(\Gamma), \exists v_\Gamma \in V_h$ ,

$$\|v - v_\Gamma\|_\alpha \leq C_{\alpha, \alpha+\delta}^{\text{approx}} |\Gamma|^\delta \|v\|_{\alpha+\delta}.$$

où  $|\Gamma|$  correspond au maximum des diamètres des éléments  $\tau \in \mathcal{T}_h$  une discrétisation de la surface  $\Gamma$ .

Faermann rappelle alors la définition de l'indicateur de Babuška-Rheinboldt.

**Définition 3.2.1** (Indicateur de Babuška-Rheinboldt). *Soit  $(B_q)_q$  une base de  $V_h$ , on définit l'indicateur local de Babuška-Rheinboldt (BR) comme*

$$\eta_q = \sup_{\substack{v \in H^{\max(\alpha, 0)}(\Gamma) \\ B_q v \neq 0}} \frac{|\langle r_h, B_q v \rangle|}{\|B_q v\|_\alpha}.$$

D'après cette définition,  $\eta_q$  est bien une quantité localement représentative du résidu puisqu'il ne dépend que du comportement de  $r_h$  sur le support de  $B_q$  qui agit ainsi comme une troncature.

On a alors le théorème suivant.

**Théorème 3.2.1.** *Sous les conditions définies précédemment sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{T}_h$ , alors pour tout  $u \in H^{\max(\alpha, 0)}(\Gamma)$ ,*

(a) *si  $C_G = 0$ ,*

$$\|e_h\|_\alpha^2 \leq C_2 \sum_{q \in \Xi} \eta_q^2.$$

*où  $C_2$  est indépendante de  $u$  et  $\mathcal{T}_h$ . Si  $C_G > 0$ , l'inégalité précédente ne vaut que si le nombre d'éléments de  $\mathcal{T}_h$  est suffisamment.*

(b) *si  $\alpha \geq 0$ ,*

$$C_1 \sum_{q \in \Xi} \eta_q^2 \leq \|e_h\|_\alpha^2$$

*où  $C_1$  est indépendante de  $u$  et  $\mathcal{T}_h$ .*

(c) *pour les autres cas,*

$$C_{1, \mathcal{T}_h} \sum_{q \in \Xi} \eta_q^2 \leq \|e_h\|_\alpha^2$$

*où  $C_{1, \mathcal{T}_h}$  dépend de  $\mathcal{T}_h$ .*

L'indicateur BR de Faermann pour les formulations intégrales discrétisées par la méthode de Galerkin est donc fiable, efficace et local sous conditions.

Sous la forme de la définition 3.2.1, l'indicateur n'est pas utilisable à cause du calcul du supremum. En dimension 2, on montre alors qu'on peut utiliser les indicateurs équivalents selon que

- $\alpha < 0$ , on pose  $\tilde{\eta}_q = \|r_h\|_{H_w^{-\alpha}(\text{supp}(B_q))}$ ,
- $\alpha \geq 0$ , on pose  $\tilde{\eta}_q = h_q^\alpha \|r_h\|_{L^2(\text{supp}(B_q)^*)}$ .

Ici  $\text{supp}(B_q)^*$  correspond à la zone d'influence de  $\text{supp}(B_q)$  et correspond à un patch de points dépendant de  $\alpha$  autour du support de  $B_q$  (voir [34], Thm. 6.7) et  $\|\cdot\|_{H_w^{-\alpha}}$  est une norme pondérée définie dans [34], Thm. 6.6.

L'indicateur BR de Faermann ne s'exprime malheureusement pas comme quantité sur des éléments en particulier et reste peu agréable pour l'implémentation. Néanmoins, il présente l'avantage de ne pas requérir d'hypothèses fortes d'ellipticité pour  $\mathcal{A}$ .

## Second indicateur

Cet indicateur se base sur une localisation de la semi-norme  $|\cdot|_{W^s}$ ,  $s \notin \mathbb{N}_0$  définie dans la partie 1.3.1. On renvoie à [33] et [35] pour les détails des démonstrations. Il se présente sous une forme beaucoup plus simple et intuitive que le précédente. Il fait explicitement appel à la semi-norme de Slobodeckij (**définition 1.3.2**). Soit un élément  $\tau \in \mathcal{T}_h$ , on pose  $\omega_\tau$  le *patch* des triangles autour de  $\tau$  tels que  $\tau' \in \omega_\tau \Leftrightarrow \bar{\tau}' \cap \bar{\tau} \neq \emptyset$ . Si  $\mathcal{A} : H^{s+2\alpha}(\Gamma) \rightarrow H^s(\Gamma)$  avec  $s \in (0, 1)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , en supposant que  $\mathcal{T}_h$  est un maillage régulier, alors on a

$$C_{\text{eff}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \varepsilon_\tau^2 \leq \|e_h\|_{s+2\alpha}^2 \leq C_{\text{rel}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \varepsilon_\tau^2$$

où

$$\varepsilon_\tau^2 = \int_\tau \int_{\omega_\tau} \frac{|r_h(\xi) - r_h(\eta)|^2}{|\xi - \eta|^{2+2s}} d\xi d\eta + \frac{1}{h_\tau^{2s}} \|r_h\|_{L^2(\tau)}^2.$$

L'opérateur  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{S}_{k_w}$  entre dans le cadre d'utilisation de cet indicateur.

Au contraire de l'indicateur précédent, le second indicateur de Faermann est donné explicitement sur les éléments du maillage ce qui permet de l'utiliser plus aisément dans une boucle de raffinement autoadaptatif pour sélectionner les triangles.

Cet indicateur nécessite le calcul d'une intégrale singulière et n'est donc pas très pratique d'utilisation. On ne le prendra pas en compte dans notre étude numérique.

## 3.2.2 Indicateur résidu pondéré

On présente ici l'indicateur résidu "standard", appelé également dans la littérature "indicateur résidu pondéré". On utilise cette terminologie car il représente la forme la plus simple et la plus intuitive de localisation des normes  $H^{\pm 1/2}$  en utilisant une pondération par une longueur caractéristique locale. Il a d'abord été introduit par Carstensen en 1997 dans [14] pour les problèmes du simple couche et opérateur hyper-singulier associés à l'équation de Laplace en 2D. La seule hypothèse était alors que le résidu s'annule sur chaque segment de la discrétisation  $\mathcal{T}_h$  de  $\Gamma$  ce qui le rend également adapté aux méthodes de collocation. Cet indicateur a ensuite été généralisé au cas 3D dans [17] pour l'opérateur hyper-singulier  $\mathcal{N}_0$  et l'opérateur  $\mathcal{S}_0$  dans [18].

On donne dans un premier temps la forme générale de l'indicateur résidu "standard" dans le cas général pour laquelle on précise les techniques sous-jacentes utilisées pour la localisation

des normes. On explique ensuite en quoi cet indicateur peut être étendu sans modifications aux équations associées aux opérateurs  $\mathcal{S}_{k_w}$  et  $\mathcal{N}_{k_w}$ . On prouve la convergence optimale dans le cas de l'équation de Helmholtz en démontrant que dans ce cas encore l'indicateur vérifie les quatre axiomes énoncés dans [16]. On conclut en discutant des avantages et inconvénients de cet indicateur.

### Forme générale de l'indicateur résidu "standard"

Au contraire des indicateurs de Faermann, la seule propriété garantie pour l'indicateur résidu standard est la fiabilité. On a alors le théorème suivant pour l'équation associée au  $\mathcal{S}_{k_w}$ .

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $\Gamma$  une surface, éventuellement ouverte plongée dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , et sa discrétisation régulière  $\mathcal{T}_h$ , alors l'indicateur d'erreur a posteriori défini par*

$$\eta_{r_h} = \|h^{1/2}(\nabla_{\Gamma} r_h)\|_0, \quad r_h = b - \mathcal{S}_{k_w} u_h \in \underline{H^1(\Gamma)}$$

est fiable et local.

On a également le pendant pour l'équation associée au  $\mathcal{N}_{k_w}$ .

**Théorème 3.2.3.** *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, l'indicateur d'erreur défini par*

$$\eta_{r_h} = \|h^{1/2} r_h\|_0, \quad r_h = b - \mathcal{N}_{k_w} u_h \in \underline{L^2(\Gamma)}$$

est fiable et local.

Dans les deux cas, la constante de fiabilité ne dépend que de  $\Gamma$ , de la régularité de  $\mathcal{T}_h$  et du degré polynomial de l'espace d'approximation pour la solution.

Avant de donner l'idée derrière la construction, on donne le cadre (restreint) dans lequel cet indicateur est également efficace.

**Théorème 3.2.4.** *Soit  $\Gamma$  une courbe plongée dans  $\mathbb{R}^2$ , éventuellement ouverte, telle que le second membre de l'équation soit  $b \in H^1(\Gamma)$  et pour chaque segment  $\tau_i \in \mathcal{T}_h$  où  $\mathcal{T}_h$  est une discrétisation régulière de  $\Gamma$ , on a  $b \in H^s(\tau_i)$  avec  $s > 2$ , alors l'indicateur résidu défini au théorème 3.2.2 est efficace à un terme d'oscillation près tel que  $\forall \varepsilon > 0$ ,*

$$C_{\text{eff}} \eta_{r_h} \leq \|e_h\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} + C(s, \varepsilon) \left( \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_{\tau}^{\min(2s, 5) - 1 - \varepsilon} \right).$$

On peut encore restreindre les hypothèses en supposant qu'on ne s'intéresse qu'au problème de l'équation de Laplace. Dans ce cas, à la condition que  $r_h$  admette au moins un zéro sur chaque segment  $\tau_i \in \mathcal{T}_h$  et en supposant que  $\mathcal{T}_h$  est un maillage quasi-uniforme, Carstensen montre [14] que les indicateurs définis dans les théorèmes 3.2.2 et 3.2.3 sont efficaces sans terme d'oscillation.

On retient que dans le cas général, l'indicateur résidu pondéré n'est que fiable *a priori*. Une conséquence importante est qu'en suivant la méthode de preuve de convergence optimale de [16], on peut **prouver la convergence optimale de l'indicateur, mais pas celle de l'erreur**.

On donne maintenant quelques éléments de preuve pour la construction de cet indicateur. Cela justifie notamment l'extension de cet indicateur aux formulations type Galerkin pour les équations intégrales associées au problème de Helmholtz.

### Éléments de preuve de la fiabilité de l'indicateur résidu "standard"

La preuve de fiabilité repose principalement sur l'orthogonalité du résidu par rapport à l'espace de test. En effet, on rappelle qu'une formulation Galerkin revient à vérifier, pour  $u \in V$ ,  $u_h, v_h \in V_h$  où  $V_h \subset V$  est un espace de dimension finie, l'égalité

$$\langle v_h, \mathcal{A}_{k_w} u_h \rangle = \langle v_h, b \rangle, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Par définition du résidu, on a alors

$$\langle v_h, b - \mathcal{A}_{k_w} u_h \rangle = \langle v_h, r_h \rangle = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

**Cas  $\mathcal{A}_{k_w} \equiv \mathcal{S}_{k_w}$**  On s'intéresse dans un premier temps au cas du  $\mathcal{S}_{k_w}$  donc  $e_h \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$  et  $r_h \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Cette estimation a été prouvée dans [18] et on en reprend ici les grandes lignes.

La démonstration repose sur la constatation suivante : l'espace d'approximation et de test est  $V_h = \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)$ , l'espace des fonctions constantes par morceaux sur chaque élément de  $\mathcal{T}_h$ . Autrement dit, le résidu est de moyenne nulle sur chaque élément  $\tau \in \mathcal{T}_h$ . On peut donc utiliser l'inégalité de Poincaré<sup>3</sup> sur chaque  $\tau$  de diamètre  $h_\tau$  :

$$\|r_h\|_{L^2(\tau)} \leq h_\tau \|\nabla_\Gamma r_h\|_{L^2(\tau)}.$$

Dans un premier temps, on montre que pour un ensemble de fonctions  $f_1, \dots, f_n \in H^{1/2}(\Gamma)$  à support  $\omega_i$  disjoints 2 à 2, alors

$$\left\| \sum_{j=1}^n f_j \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \leq C_1(\Gamma) \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{H^{1/2}(\omega_j)}^2.$$

On introduit une partition finie de l'unité  $(\varphi_z)_{z \in \mathcal{N}}$  de taille  $m$  (les fonctions "chapeaux" associées aux nœuds) telle que  $\mathcal{N}$  est l'ensemble des nœuds du maillage de cardinal  $M$ . On a de plus

$$\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^M \mathcal{N}_i$$

de telle sorte que pour  $z_1, z_2 \in \mathcal{N}_i$ , on a  $\varphi_{z_1} \varphi_{z_2} = 0$  (les supports  $\omega_i$  sont disjoints deux à deux). Soit  $d_i$  la largeur de  $\omega_i$ , alors on montre ensuite en utilisant la décomposition  $\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^M \mathcal{N}_i$  que pour  $r_h \in H^1(\Gamma)$ ,

$$\|r_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \sum_{j=1}^m d_j (1 + d_j^2)^{1/2} \|\nabla_\Gamma(\varphi_j r_h)\|_{L^2(\omega_j)}.$$

La preuve de cette inégalité se fait en utilisant une interpolation complexe entre  $L^2(\omega_i)$  et  $H^1(\omega_i)$  puis en utilisant l'inégalité de Friedrich.

On en déduit alors une première estimation

$$\|e_h\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \lesssim \sum_{j=1}^m \text{diam}(\omega_j) \|\nabla_\Gamma(\varphi_j r_h)\|_{L^2(\omega_j)}^2.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on montre alors que

$$\|\nabla_\Gamma(\varphi_i r_h)\|_{L^2(\omega_i)}^2 \lesssim \|\nabla_\Gamma r_h\|_{L^2(\omega_i)}^2.$$

---

3. Voir **Corollaire 9.19** dans [9]

En réécrivant la somme sur les  $N$  éléments  $\tau_j$  de  $\mathcal{T}_h$  et non plus les  $\omega_i$ , il vient finalement

$$\|e_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \lesssim \sum_{j=1}^N h_j \|\nabla_{\Gamma} r_h\|_{L^2(\tau_j)}^2$$

où  $h_j = \text{diam}(\tau_j)$ .

**Cas  $\mathcal{A}_{k_w} \equiv \mathcal{N}_{k_w}$**  On traite maintenant le cas du  $\mathcal{N}_{k_w}$ , pour lequel la démonstration complète peut être trouvée dans [17].

De même que précédemment, on introduit une partition finie de l'unité  $\{\varphi_z\}_z$  correspondant aux fonctions "chapeau" associées aux nœuds de  $\mathcal{T}_h$ . On pose encore  $\omega_z = \text{supp}(\varphi_z)$  et  $h_z = \text{diam}(\omega_z)$ . L'orthogonalité du résidu par rapport à l'espace de test permet de montrer une première inégalité

$$\|r_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \leq C \sum_{z \in \mathcal{K}} h_z \|r_h\|_{L^2(\omega_z)}^2$$

où  $\mathcal{K}$  est l'ensemble des nœuds intérieurs de  $\mathcal{T}_h$  (quand  $\Gamma$  est une surface ouverte) ou bien l'ensemble  $\mathcal{N}$  des nœuds quand  $\Gamma$  est fermée. En redistribuant la somme précédente sur les éléments  $\tau$  du maillage et non plus les nœuds, en posant  $h_{\tau} = \text{diam}(\tau)$ , et en utilisant le fait que la norme du résidu est une norme équivalente de l'erreur, il vient le résultat voulu

$$\|e_h\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \lesssim \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_{\tau} \|r_h\|_{L^2(\tau)}^2.$$

Le principe de construction de ces indicateurs fait qu'ils sont valides pour le problème de Helmholtz. De plus, il s'agit du seul indicateur pour lequel une preuve de convergence *quasi-optimale* a été faite, et ce dans le cas des équations intégrales associées à l'équation de Laplace. Cette démonstration n'est pas directement utilisable pour le problème de Helmholtz. On en propose donc une extension prenant en compte la partie compacte de  $\mathcal{S}_{k_w}$  et  $\mathcal{N}_{k_w}$ .

### Preuve de convergence quasi-optimale pour l'indicateur résidu-standard dans le cadre de l'équation intégrale associée à l'opérateur oscillant $\mathcal{S}_{k_w}$

Les travaux de C. Carstensen et al. [16] suggèrent qu'un indicateur d'erreur a posteriori fiable et efficace n'a besoin de vérifier que quatre axiomes (voir 3.1.3) afin de pouvoir prouver la convergence optimale de l'erreur en utilisant un algorithme de raffinement autoadaptatif guidé par cet indicateur.

Cette preuve a été faite ([41]) dans le cas de l'indicateur du théorème 3.2.2 lorsque l'opérateur considéré est  $\mathcal{S}_0$ . Elle n'est pas directement applicable dans le cas du  $\mathcal{S}_{k_w}$  car elle utilise notamment l'orthogonalité de l'erreur par rapport à l'espace de test pour le produit scalaire issu de  $\mathcal{S}_0$  ce qui permet de garantir la décroissance de l'erreur dès lors qu'on raffine le maillage. En effet, considérons une suite de maillages  $(\mathcal{T}_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$  tels que  $\mathcal{T}_l \subset \mathcal{T}_{l+1}$  ( $\mathcal{T}_{l+1}$  est un raffinement de  $\mathcal{T}_l$ ) et les espaces d'approximation correspondants  $V_l \subset V_{l+1}$ . On pose  $U_l \in V_l$  la solution de Galerkin sur le maillage  $\mathcal{T}_l$ . On a donc également  $U_l \in V_{l+1}$ . On rappelle que la norme de Galerkin s'exprime, dans ce cas,

$$\|u\|^2 = \langle \mathcal{S}_0 u, u \rangle.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|u - U_l\|^2 &= \|u - U_l + U_{l+1} - U_{l+1}\|^2, \\ &= \|u - U_{l+1}\|^2 + \|U_l - U_{l+1}\|^2, \\ &\geq \|u - U_{l+1}\|^2. \end{aligned}$$

Lorsqu'on traite le cas du  $\mathcal{S}_{k_w > 0}$ , l'erreur n'est plus orthogonale à l'espace de test et il faut traiter la "perturbation" introduite par la partie compacte de  $\mathcal{S}_{k_w}$ .

On se propose alors de révéifier les quatre "axiomes de l'adaptivité" pour l'indicateur résidu pondéré dans le cadre des équations intégrales associées au problème de propagation acoustique. Avant cela, on donne un résultat de continuité sur le gradient de l'opérateur  $\mathcal{S}_{k_w}$ .

**Lemme 3.2.1.** *Pour tout  $\psi_l \in V_l \subset H^1(\Gamma)$ , on a*

$$\|h_l^{1/2}(\nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w} \psi_l)\|_0 \lesssim \|\psi_l\|.$$

*Démonstration.* On décompose  $\mathcal{S}_{k_w} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{C}_{k_w}$ . En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|h_l^{1/2}(\nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w} \psi_l)\|_0 \leq \|h_l^{1/2}(\nabla_\Gamma \mathcal{S}_0 \psi_l)\|_0 + \|h_l^{1/2}(\nabla_\Gamma \mathcal{C}_{k_w} \psi_l)\|_0.$$

On sait par la proposition 2 dans [37] que

$$\|h_l^{1/2}(\nabla_\Gamma \mathcal{S}_0 \psi_l)\|_0 \lesssim \|\psi_l\|.$$

Concernant la partie compacte, on sait ([11], **lemme 2.1**) que  $\mathcal{C}_{k_w}$  est continu de

$$\mathcal{C}_{k_w} : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^1(\Gamma)$$

quand  $\Gamma$  est lipschitzienne. En posant  $h_0 = \max_{\tau \in \mathcal{T}_0} \text{diam}(\tau)$ , il vient

$$\begin{aligned} \|h_l^{1/2}(\nabla_\Gamma \mathcal{C}_{k_w} \psi_l)\|_0 &\leq h_0 |\mathcal{C}_{k_w} \psi_l|_1, \\ &\leq C(h_0) \|\mathcal{C}_{k_w} \psi_l\|_1, \\ &\leq C_1(h_0) \|\psi_l\|. \end{aligned}$$

□

On a désormais tous les outils nécessaires pour vérifier les axiomes.

### Axiome 1 – Stabilité sur les éléments non raffinés

**Proposition 3.2.1.** *L'axiome 1 de l'adaptivité est vérifié par l'indicateur résidu pondéré dans le cas du  $\mathcal{S}_{k_w}$ .*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{T}_l$  une discrétisation de  $\Gamma$  et  $\widehat{\mathcal{T}}$  un raffinement **quelconque** de  $\mathcal{T}_l$ . On pose  $f = \widehat{\mathcal{T}} \cap \mathcal{T}_l$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{T}_l$  qui n'ont pas été raffinés. Si  $V_l$  et  $\widehat{V}$  sont les espaces d'approximation discrets associés, alors pour tout  $v_l \in V_l$  et  $\widehat{v} \in \widehat{V}$ ,

$$\begin{aligned} &\left| \left( \sum_{\tau \in f} \|h_\tau^{1/2}(\nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w}(u - \widehat{v}))\|_{0,\tau}^2 \right)^{1/2} - \left( \sum_{\tau \in f} \|h_\tau^{1/2}(\nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w}(u - v_l))\|_{0,\tau}^2 \right)^{1/2} \right| \dots \\ &\dots = \left| \|h^{1/2}(\nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w}(u - \widehat{v}))\|_{L^2(f)} - \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \|h^{1/2}(\nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w}(u - v_l))\|_{L^2(f)} \right|, \\ &\leq \|h^{1/2}(\nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w}(\widehat{v} - v_l))\|_{L^2(f)}, \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq C_{\text{stab}} \|\widehat{v} - v_l\|. \quad (\text{lemme 3.2.1}) \end{aligned}$$

□

## Axiome 2 – Réduction sur les éléments du domaine raffiné

**Proposition 3.2.2.** *L'axiome 2 de l'adaptivité est vérifié par l'indicateur résidu pondéré dans le cas du  $\mathcal{S}_{k_w}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\hat{\mathcal{T}}$  un raffinement de  $\mathcal{T}_l$ , en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned} & \|\hat{h}^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(u - \hat{U}))\|_{L^2(\hat{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{T}_l)}^2 \leq \dots \\ & \dots \left( \|\hat{h}^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(u - U_l))\|_{L^2(\hat{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{T}_l)} + \|\hat{h}^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(U_l - \hat{U}))\|_{L^2(\hat{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{T}_l)} \right)^2 \end{aligned}$$

On rappelle l'inégalité d'Young : pour  $\delta > 0$  quelconque on a

$$(a + b)^2 \leq (1 + \delta)a^2 + (1 + \delta^{-1})b^2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \|\hat{h}^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(u - \hat{U}))\|_{L^2(\hat{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{T}_l)}^2 \leq \dots \\ & \dots (1 + \delta) \|\hat{h}^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(u - U_l))\|_{L^2(\hat{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{T}_l)}^2 + (1 + \delta^{-1}) \|\hat{h}^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(U_l - \hat{U}))\|_{L^2(\hat{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{T}_l)}^2. \end{aligned}$$

Pour l'ensemble des éléments raffinés, on a  $\hat{h} \leq q h_l$  avec  $q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Par conséquent,

$$\|\hat{h}^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(u - U_l))\|_{L^2(\hat{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{T}_l)}^2 \leq q \|h_l^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(u - U_l))\|_{L^2(\hat{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{T}_l)}^2$$

or

$$\|h_l^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(u - U_l))\|_{L^2(\hat{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{T}_l)}^2 = \|h_l^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(u - U_l))\|_{L^2(\mathcal{T}_l\setminus\hat{\mathcal{T}})}^2.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} & \|\hat{h}^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(u - \hat{U}))\|_{L^2(\hat{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{T}_l)}^2 \leq \dots \\ & \dots q (1 + \delta) \|h_l^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(u - U_l))\|_{L^2(\mathcal{T}_l\setminus\hat{\mathcal{T}})}^2 + (1 + \delta^{-1}) \|\hat{h}^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(U_l - \hat{U}))\|_{L^2(\hat{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{T}_l)}^2. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité du lemme 3.2.1 et en choisissant  $\delta$  suffisamment petit tel que  $\rho_{\text{red}} = \frac{1 + \delta}{\sqrt{2}} < 1$ , il vient le résultat voulu

$$\|\hat{h}^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(u - \hat{U}))\|_{L^2(\hat{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{T}_l)}^2 \leq \rho_{\text{red}} \|h_l^{1/2}(\nabla_{\Gamma}\mathcal{S}_{k_w}(u - U_l))\|_{L^2(\mathcal{T}_l\setminus\hat{\mathcal{T}})}^2 + C_{\text{stab}} \|\hat{U} - U_l\|^2.$$

□

## Axiome 3 – Quasi-orthogonalité générale

**Proposition 3.2.3.** *L'axiome 3 de l'adaptivité est vérifié par l'indicateur résidu pondéré dans le cas du  $\mathcal{S}_{k_w}$ .*

*Démonstration.* On se base sur les LEMME 3.5 et PROPOSITION 3.6 de [39] dont on reprend la démonstration pour l'adapter à notre cas.

**Lemme 3.2.2.** *On suppose que l'algorithme auto-adaptatif a convergé (conséquence des Propositions 3.2.1 et 3.2.2). Les suites  $(e_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$  et  $(E_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$  définies par*

$$e_l = \begin{cases} \frac{u - U_l}{\|u - U_l\|} & \text{pour } u \neq U_l, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$E_l = \begin{cases} \frac{U_{l+1} - U_l}{\|U_{l+1} - U_l\|} & \text{pour } U_{l+1} \neq U_l, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

convergent faiblement vers 0 dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .

*Démonstration.* La démonstration est faite pour  $(e_l)_l$ , celle pour  $(E_l)_l$  se faisant de la même manière.

On pose  $V_\infty = \lim_{l \rightarrow \infty} V_l$  et on suppose que la suite des  $(U_l)_l$  converge vers un  $U_\infty = u$  (on converge vers la solution exacte lorsque  $(V_l) \rightarrow V_\infty$ ).

La suite  $(e_l)_l$  est bornée donc on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente  $(e_{l_j})_j$  vers un  $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$ . On sait que  $u, U_l \in V_\infty$ , d'où  $w \in V_\infty$ . Dans un second temps, l'imbrication des  $V_l$  implique que

$$\forall l_j \geq l, e_{l_j} \neq 0, \forall v_l \in V_l, \|u - U_{l_j}\| \langle \mathcal{S}_{k_w} e_{l_j}, v_l \rangle = 0.$$

Par conséquent, pour tout  $l \in \mathbb{N}_0, \varepsilon > 0$ , il existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $j \geq j_0$  on a

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{S}_{k_w} w, v_l \rangle| &\leq \varepsilon + |\langle e_{l_j}, \mathcal{S}_{k_w} v_l \rangle|, \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

en utilisant le fait qu'il existe un rang à partir duquel  $|\langle w - e_l, \mathcal{S}_{k_w} v_l \rangle| \leq \varepsilon$ .

L'index  $j_0$  est choisi suffisamment grand pour que  $l_j \geq l$ . Pour tout  $l \in \mathbb{N}_0$  et tout  $v_l \in V_l$ , on a ainsi

$$\langle \mathcal{S}_{k_w} w, v_l \rangle = 0$$

ce qui implique  $w = 0$ . □

On peut alors utiliser ce résultat pour prouver un "inégalité de Pythagore", i.e. quantifier le comportement de la partie compacte de  $\mathcal{S}_{k_w}$ .

**Proposition 3.2.4.** *Pour tout  $0 < \varepsilon < 1$ , il existe un rang  $l_0 \in \mathbb{N}_0$  tel que pour tout  $l \geq l_0$*

$$\|U_{l+1} - U_l\|^2 \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \|u - U_l\|^2 - \|u - U_{l+1}\|^2.$$

*Démonstration.* Par définition de la norme  $\|\cdot\|$  et en utilisant la décomposition  $\mathcal{S}_{k_w} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{C}_{k_w}$ , on a

$$\begin{aligned} \|u - U_l\|^2 &= \langle \mathcal{S}_0(u - U_l), u - U_l \rangle, \\ &= \langle \mathcal{S}_0(u - U_{l+1} + U_{l+1} - U_l), u - U_{l+1} + U_{l+1} - U_l \rangle, \\ &= \|u - U_{l+1}\|^2 + \|U_{l+1} - U_l\|^2 + \langle \mathcal{S}_0(u - U_{l+1}), U_{l+1} - U_l \rangle + \dots \\ &\quad \dots \langle \mathcal{S}_0(U_{l+1} - U_l), u - U_{l+1} \rangle, \\ &= \|u - U_{l+1}\|^2 + \|U_{l+1} - U_l\|^2 + \langle (\mathcal{S}_{k_w} - \mathcal{C}_{k_w})(u - U_{l+1}), U_{l+1} - U_l \rangle + \dots \\ &\quad \dots \langle (\mathcal{S}_{k_w} - \mathcal{C}_{k_w})(U_{l+1} - U_l), u - U_{l+1} \rangle, \end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité  $\langle \mathcal{S}_{k_w}(u - U_{l+1}), U_{l+1} - U_l \rangle = 0$ , il ne reste que les termes en  $\mathcal{C}_{k_w}$

$$\begin{aligned} \|u - U_l\|^2 &= \|u - U_{l+1}\|^2 + \|U_{l+1} - U_l\|^2 + \dots \\ &\dots \langle \mathcal{C}_{k_w}(U_l - U_{l+1}), u - U_{l+1} \rangle + \langle \mathcal{C}_{k_w}(u - U_{l+1}), U_l - U_{l+1} \rangle. \end{aligned}$$

On a alors, puisque  $\mathcal{C}_{k_w} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma)$ ,

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{C}_{k_w}(u - U_{l+1}), U_{l+1} - U_l \rangle| &\leq \|u - U_{l+1}\| |\langle \mathcal{C}_{k_w} e_{l+1}, U_{l+1} - U_l \rangle|, \\ &\leq \|\mathcal{C}_{k_w} e_{l+1}\|_{H^1(\Gamma)} \|u - U_{l+1}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|U_{l+1} - U_l\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

ainsi que

$$|\langle \mathcal{C}_{k_w}(U_{l+1} - U_l), u - U_{l+1} \rangle| \leq \|\mathcal{C}_{k_w} E_l\|_{H^1(\Gamma)} \|u - U_{l+1}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|U_{l+1} - U_l\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

L'opérateur  $\mathcal{C}_{k_w}$  est compact de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $H^1(\Gamma)$ . Ainsi, en utilisant le **Lemme 3.2.2**, on a la convergence forte de  $\|\mathcal{C}_{k_w} E_l\|_{H^1(\Gamma)}$  et  $\|\mathcal{C}_{k_w} e_{l+1}\|_{H^1(\Gamma)}$  vers 0. Par conséquent, pour tout  $\delta > 0$ , il existe un rang  $l_0$  tel que pour tout  $l \geq l_0$ , on a

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{C}_{k_w}(u - U_{l+1}), U_{l+1} - U_l \rangle| + |\langle \mathcal{C}_{k_w}(U_{l+1} - U_l), u - U_{l+1} \rangle| &\leq \dots \\ &\dots \delta \|u - U_{l+1}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|U_{l+1} - U_l\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

En particulier, pour tout  $l \geq l_0$

$$\|U_{l+1} - U_l\|^2 \leq \|u - U_l\|^2 - \|u - U_{l+1}\|^2 + \delta C_{\text{norm}}^2 \|u - U_{l+1}\| \|U_{l+1} - U_l\|$$

où  $C_{\text{norm}}$  est la constante multiplicative entre  $\|\cdot\|_{H^{-1/2}}$  et  $\|\cdot\|$ . Il suffit alors de poser  $\varepsilon = \frac{\delta C_{\text{norm}}^2}{2}$  et d'utiliser  $2ab \leq a^2 + b^2$  pour obtenir le résultat souhaité.  $\square$

La proposition précédente est alors suffisante pour démontrer la propriété de quasi-orthogonalité. En effet, En choisissant  $\varepsilon$  suffisamment petit tel que  $\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} < 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=l}^N \|U_{k+1} - U_k\|^2 &\leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \sum_{k=l}^N \|u - U_k\|^2 + \|u - U_l\|^2 - \|u - U_{N+1}\|^2, \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \sum_{k=l}^N \|u - U_k\|^2 + \|u - U_l\|^2. \end{aligned}$$

En posant  $\varepsilon_{\text{qo}} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$  et en utilisant la fiabilité de l'indicateur  $\eta_{r_h}$ , il vient directement

$$\sum_{k=l}^N (\|U_{k+1} - U_k\|^2 - \varepsilon_{\text{qo}} \|u - U_k\|^2) \leq C_{\text{qo}} \eta_{r_l}^2.$$

$\square$

#### Axiome 4 – Fiabilité discrète

**Proposition 3.2.5.** *L'axiome 4 de l'adaptivité est vérifié par l'indicateur résidu pondéré dans le cas du  $\mathcal{S}_{k_w}$ .*

*Démonstration.* On suit le cheminement de la preuve de la PROPOSITION 4.3 dans [41]. Elle utilise le fait que le  $\mathcal{S}_0$  induit un produit scalaire sur  $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$  et qu'il s'agit de l'opérateur inversé ce qui permet d'utiliser l'orthogonalité de l'erreur. Ce n'est pas le cas lorsqu'on résout  $\mathcal{S}_{k_w}$ . On peut cependant supposer que le problème discret est bien posé, à savoir qu'on a la condition inf-sup discrète : il existe un rang  $l_0$  tel que  $\forall l \geq l_0, \exists \alpha > 0$  **indépendant** de  $l$  tel que

$$\inf_{v_l \in V_l} \sup_{w_l \in V_l} \frac{|\langle \mathcal{S}_{k_w} v_l, w_l \rangle|}{\|v_l\| \|w_l\|} \geq \alpha > 0.$$

Pour un raffinement  $\hat{\mathcal{T}}$  quelconque de  $\mathcal{T}_l$ , en particulier  $V_l \subset \hat{V}$ , on a

$$\|\hat{U} - U_l\| \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{\hat{v} \in \hat{V}} \frac{|\langle \mathcal{S}_{k_w}(\hat{U} - u), \hat{v} \rangle|}{\|\hat{v}\|}.$$

Cette fois-ci, on peut utiliser l'orthogonalité du résidu par rapport à l'espace de test  $\hat{V}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}_{k_w}(\hat{U} - U_l), \hat{v} \rangle &= \langle \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l), \hat{v} \rangle + \langle \mathcal{S}_{k_w}(\hat{U} - u), \hat{v} \rangle, \\ &= \langle \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l), \hat{v} \rangle. \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{N}_l$  l'ensemble des nœuds de  $\mathcal{T}_l$ . On pose  $\eta_z$  la fonction "chapeau" associée à  $z \in \mathcal{N}_l$ . On pose  $\mathcal{R}_l \subset \mathcal{T}_l$  le voisinage immédiat des éléments de  $\mathcal{T}_l$  qui ont été raffinés,

$$\mathcal{R}_l = \left\{ \tau \in \mathcal{T}_l, \exists \tau' \in \mathcal{T}_l \setminus \hat{\mathcal{T}}, \tau \in \omega_{\tau'} \right\}$$

où  $\omega_\tau$  correspond au patch des éléments entourant  $\tau$  (en incluant  $\tau$ ). On pose encore  $\mathcal{N}_l^R \subset \mathcal{N}_l$  l'ensemble des nœuds appartenant à un élément de  $\mathcal{T}_l$  qui a été raffiné et  $S_l = \mathcal{R}_l \setminus (\mathcal{T}_l \setminus \hat{\mathcal{T}})$ .

On définit un opérateur de projection  $\pi_l : \mathcal{P}^0(\hat{\mathcal{T}}) =: \hat{V} \rightarrow \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_l) =: V_l$  tel que

$$\pi_l(\hat{v})(\tau \in \mathcal{T}_l) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \in \mathcal{T}_l \setminus \hat{\mathcal{T}}, \\ \hat{v}(\tau) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a  $\chi = \sum_{z \in \mathcal{N}_l^R} \eta_z$  tel que  $\chi|_{\mathcal{T}_l \setminus \hat{\mathcal{T}}} = 1$ . Pour tout  $\hat{v} \in \mathcal{P}^0(\hat{\mathcal{T}})$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l), \hat{v} \rangle &= \langle \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l), (1 - \pi_l)\hat{v} \rangle, \\ &= \left\langle \sum_{z \in \mathcal{N}_l^R} \eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l), \hat{v} \right\rangle - \left\langle \sum_{z \in \mathcal{N}_l^R} \eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l), \hat{v}|_{S_l} \right\rangle. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, le fait que  $h_l = \hat{h}$  pour les éléments de  $S_l$  (plus précisément :  $1 = \frac{1}{h_l^{1/2}} \hat{h}^{1/2}$ ),

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l), \hat{v} \rangle| &\leq \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_l^R} \eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\hat{v}\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} + \dots \\ &\dots \|h_l^{-1/2} \sum_{z \in \mathcal{N}_l^R} \eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l)\|_{L^2(\Gamma)} \|h_l^{1/2} \hat{v}\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

En utilisant le THÉORÈME 3.6<sup>4</sup> de [44], il vient

$$|\langle \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l), \widehat{v} \rangle| \leq \left( \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_l^R} \eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \dots \right. \\ \left. \dots \left\| h_l^{-1/2} \sum_{z \in \mathcal{N}_l^R} \eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l) \right\|_{L^2(\Gamma)} \right) \|\widehat{v}\|_{\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma)}.$$

On commence par majorer le premier terme entre parenthèses ci-dessus. En utilisant le LEMME 2.1 de [18] avec  $\omega_z = \text{supp}(\eta_z)$ , on a l'inégalité

$$\left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_l^R} \eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \lesssim \sum_{z \in \mathcal{N}_l^R} \|\eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l)\|_{H^{1/2}(\omega_z)}^2.$$

Le THÉORÈME 3.2 de [18] et l'interpolation des normes  $\|\cdot\|_{1/2} \lesssim \|\cdot\|_0 \|\cdot\|_1$  donnent

$$\|\eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l)\|_{H^{1/2}(\omega_z)}^2 \leq h_z(1 + h_z^2)^{1/2} \|\nabla_\Gamma(\eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l))\|_{L^2(\omega_z)}^2.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et en majorant  $\eta_z \leq 1$ ,

$$\|\nabla_\Gamma(\eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l))\|_{L^2(\omega_z)} \leq \|(\nabla_\Gamma \eta_z) \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l)\|_{L^2(\omega_z)} + \|\eta_z \nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l)\|_{L^2(\omega_z)}, \\ \lesssim \|\nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l)\|_{L^2(\omega_z)}.$$

Enfin,

$$\left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_l^R} \eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \lesssim \sum_{z \in \mathcal{N}_l^R} h_z \|\nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l)\|_{L^2(\omega_z)}^2, \\ \lesssim \|h_l^{1/2} \nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l)\|_{L^2(\mathcal{R}_l)}^2.$$

On obtient la même estimation pour le second terme de la somme entre parenthèses. Par conséquent,

$$\|h_l^{-1/2} \sum_{z \in \mathcal{N}_l^R} \eta_z \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l)\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|h_l^{1/2} \nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l)\|_{L^2(\mathcal{R}_l)}.$$

En conclusion, en posant  $\widehat{v} = \widehat{U} - U_l$ ,

$$|\langle \mathcal{S}_{k_w}(\widehat{U} - U_l), \widehat{U} - U_l \rangle| \lesssim \|h_l^{1/2} \nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l)\|_{L^2(\mathcal{R}_l)} \|\widehat{U} - U_l\|_{\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma)},$$

puis en utilisant la condition inf-sup,

$$\|\widehat{U} - U_l\| \leq C_{\text{drel}} \|h_l^{1/2} \nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w}(u - U_l)\|_{L^2(\mathcal{R}_l)}$$

ce qui est le résultat voulu.  $\square$

4. Soit  $i \in \{0, 1\}$ ,  $m \geq i$ ,  $s \in [0, 1]$  et  $-\infty < \underline{\alpha} < \bar{\alpha} < \infty$ . Alors on a l'inégalité  $\|\rho^{s+\alpha} u\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\rho^\alpha u\|_{H^{-s}(\Omega)}$  pour  $u \in \mathcal{S}_i^m(\mathcal{T})$  et  $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ . Ici,  $\mathcal{S}_0^m$  est l'ensemble des fonctions  $u \in L^\infty$  sur  $\Omega$  dont la restriction à un élément du maillage  $\tau$  est polynomiale de degré  $m$  sur l'élément de référence. On a la même définition pour  $\mathcal{S}_1^m$  en prenant  $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ .

**Théorème 3.2.5** (Convergence quasi-optimale de  $\eta_{r_h}$  pour l'opérateur  $\mathcal{S}_{k_w}$ ). *On suppose que l'algorithme de raffinement produit une suite de maillages  $(\mathcal{T}_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ . Avec les **Propositions 3.2.1–3.2.5**, il existe un rang  $l_0 \in \mathbb{N}_0$  tel que pour  $l \geq l_0$ , l'algorithme de raffinement auto-adaptatif guidé par l'indicateur résidu pondéré, utilisant le critère de marquage de Dörfler et la technique de raffinement newest vertex bisection converge quasi-optimalement pour l'équation intégrale associée au  $\mathcal{S}_{k_w}$ .*

*Si on admet l'efficacité de l'indicateur résidu pondéré, la convergence est optimale.*

*Démonstration.* En se basant sur la FIG. 1 dans [16], l'indicateur  $\eta_{r_h}$  pour l'équation associée au  $\mathcal{S}_{k_w}$  est fiable et vérifie les quatre axiomes de l'adaptivité.  $\square$

### Preuve de convergence quasi-optimale pour l'indicateur résidu-standard dans le cadre de l'équation intégrale associée à l'opérateur oscillant $\mathcal{N}_{k_w}$

On fait ici la preuve de convergence quasi-optimale de l'indicateur résidu pondéré associé à l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  lorsque  $\Gamma$  est une surface fermée. On donne ici une inégalité inverse basée sur le LEMME 3.1 de [38] pour l'opérateur  $\mathcal{N}_0$ .

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage admissible de  $\Gamma$ . Pour  $v_l \in \mathcal{P}^{p+1}(\mathcal{T}_l)$ , on a*

$$\|h_l^{1/2} \mathcal{N}_{k_w} v_l\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}} \|v_l\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

*Démonstration.* On utilise la décomposition  $\mathcal{N}_{k_w} = \mathcal{N}_0 + \mathcal{F}_{k_w}$  puis l'inégalité triangulaire, avec  $\mathcal{F}_{k_w}$  continu

$$\mathcal{F}_{k_w} : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^1(\Gamma)$$

pour  $\Gamma$  une surface lipschitzienne. Par conséquent, en posant  $h_0 = \max_{\tau \in \mathcal{T}_0} (\text{diam}(\tau))$ ,

$$\begin{aligned} \|h_l^{1/2} \mathcal{F}_{k_w} v_l\|_{L^2(\Gamma)} &\leq C(h_0) \|\mathcal{F}_{k_w} v_l\|_{H^1(\Gamma)}, \\ &\lesssim \|v_l\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

$\square$

#### Axiome 1 – Stabilité sur les éléments non raffinés

**Proposition 3.2.6.** *L'axiome 1 de l'adaptivité est vérifié par l'indicateur résidu pondéré dans le cas du  $\mathcal{N}_{k_w}$ .*

*Démonstration.* La preuve se fait de la même manière que pour la **Proposition 3.2.1** en utilisant le **Lemme 3.2.3**.  $\square$

#### Axiome 2 – Réduction sur les éléments du domaine raffiné

**Proposition 3.2.7.** *L'axiome 2 de l'adaptivité est vérifié par l'indicateur résidu pondéré dans le cas du  $\mathcal{N}_{k_w}$ .*

*Démonstration.* La preuve se fait de la même manière que pour la **Proposition 3.2.2** (inégalité triangulaire, inégalité d'Young,  $\hat{q} \leq q h_l$  avec  $q < 1$ ) en utilisant le **Lemme 3.2.3**.  $\square$

#### Axiome 3 – Quasi-orthogonalité générale

**Proposition 3.2.8.** *L'axiome 3 de l'adaptivité est vérifié par l'indicateur résidu pondéré dans le cas du  $\mathcal{N}_{k_w}$ .*

*Démonstration.* La preuve peut se faire de la même manière que pour la **Proposition 3.2.3**.  $\square$

#### Axiome 4 – Fiabilité discrète

**Proposition 3.2.9.** *L'axiome 4 de l'adaptivité est vérifié par l'indicateur résidu pondéré dans le cas du  $\mathcal{N}_{k_w}$ .*

*Démonstration.* Comme pour 3.2.5, on part de la condition inf-sup discrète

$$\|\widehat{U} - U_l\| \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{\widehat{v} \in \widehat{V}} \frac{|\langle \mathcal{N}_{k_w}(\widehat{U} - U_l), \widehat{v} \rangle|}{\|\widehat{v}\|},$$

puis

$$\langle \mathcal{N}_{k_w}(\widehat{U} - U_l), \widehat{v} \rangle = \langle \mathcal{N}_{k_w}(u - U_l), \widehat{v} \rangle$$

en utilisant l'orthogonalité de Galerkin. Le reste de la preuve se fait de la même manière que celle du point (iii) de la PROPOSITION 3.5 de [38].  $\square$

**Théorème 3.2.6** (Convergence quasi-optimale de  $\eta_{r_h}$  pour l'opérateur  $\mathcal{N}_{k_w}$ ). *On suppose que l'algorithme de raffinement produit une suite de maillages  $(\mathcal{T}_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ . Avec les **Propositions 3.2.1–3.2.5**, il existe un rang  $l_0 \in \mathbb{N}_0$  tel que pour  $l \geq l_0$ , l'algorithme de raffinement auto-adaptatif guidé par l'indicateur résidu pondéré, utilisant le critère de marquage de Dörfler et la technique de raffinement newest vertex bisection converge quasi-optimalement pour l'équation intégrale associée au  $\mathcal{N}_{k_w}$ .*

*Si on admet l'efficacité de l'indicateur résidu pondéré, la convergence est optimale.*

*Démonstration.* En se basant sur la FIG. 1 dans [16], l'indicateur  $\eta_{r_h}$  pour l'équation associée au  $\mathcal{N}_{k_w}$  est fiable et vérifie les quatre axiomes de l'adaptivité.  $\square$

### 3.2.3 Conclusion sur les indicateurs résidu

On a présenté deux types d'indicateurs basés sur le calcul du résidu utilisant des techniques de localisation différentes. On ne retient pas les indicateurs de Faermann pour les simulations car ils sont plus complexes à calculer, malgré la propriété d'efficacité qui est absente chez les indicateurs du type "résidu pondéré". Les preuves de convergence quasi-optimale montrent que ces derniers vont permettre de retrouver la convergence optimale de l'indicateur ce qui en fait un indicateur de choix pour le guidage d'un algorithme de raffinement auto-adaptatif. Cependant, la question de la preuve de l'efficacité n'est toujours pas résolue. La seule hypothèse pour leur utilisation est que  $r_h \in H^1(\Gamma)$ , respectivement  $L^2(\Gamma)$ , pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ , respectivement  $\mathcal{N}_{k_w}$ . Pour les seconds membres les plus courants (onde plane, source ponctuelle), ça sera toujours le cas.

Néanmoins, le calcul du résidu peut s'avérer être une option coûteuse puisque cela suppose de recalculer un produit matrice–vecteur plein. Ce problème peut être résolu en utilisant une méthode rapide comme la FMM. Il faut de plus être capable de calculer le résidu précisément, i.e. de s'assurer d'avoir suffisamment de points de quadrature pour que la norme  $\|h^{1/2}(\nabla_{\Gamma} r_h)\|_0$  ou bien  $\|h^{1/2} r_h\|_0$  soit stabilisée.

## 3.3 Indicateurs basés sur des reconstructions ou enrichissements d'espace

Dans cette section, on présente des indicateurs d'erreur basés sur des reconstructions d'espace d'approximation.

On présente dans un premier temps un indicateur de type "enrichissement d'espace" simple qu'est l'indicateur  $h - \frac{h}{2}$ . Cette classe d'indicateurs est basée sur l'idée suivante : soit  $V_h$  l'espace d'approximation sur  $\mathcal{T}_h$  et  $u_h$  la solution Galerkin dans  $V_h$ , et  $u \in V_\infty$  la solution du problème continu. On introduit un espace enrichi  $\widehat{V}_h$  tel que  $V_h \subset \widehat{V}_h \subset V_\infty$ , alors pour  $\widehat{u}_h$  la solution Galerkin correspondante,

$$\eta_e = \|\widehat{u}_h - u_h\|_V$$

est une bonne approximation de l'erreur. A première vue, il est nécessaire d'effectuer le calcul (coûteux) de  $\widehat{u}_h$ , ainsi que de localiser la norme  $\|\cdot\|_{V_\infty}$ . Il est ensuite nécessaire d'introduire une hypothèse de *saturation*.

**Hypothèse 3.3.1** (Hypothèse de saturation). *Soit une suite  $(V_l)_l$  d'espaces d'approximation à laquelle on associe une suite d'espaces enrichis  $(\widehat{V}_l)_l$ , on suppose qu'il existe une constante  $C_{\text{sat}} \in [0, 1[$  telle que pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,*

$$\|u - \widehat{U}_l\| \leq C_{\text{sat}} \|u - U_l\|$$

où  $\|\cdot\|$  représente la norme énergie.

C'est une hypothèse forte sur la nature du problème résolu, comme on le détaille dans la remarque suivante.

**Remarque 3.3.1.** *L'hypothèse 3.3.1 de saturation suppose que l'erreur d'approximation décroît strictement ( $C_{\text{sat}} < 1$ ) dès lors qu'on raffine un maillage, et ce **quelle que soit la manière dont on effectue le raffinement**!*

*Pour un problème **purement coercif**, cette hypothèse est, la plupart du temps, vraie. En effet, soit  $\mathcal{A}_0$  un opérateur coercif,  $U_l \in V_l$  et  $\widehat{U}_l \in \widehat{V}_l$ , alors*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_0(u - U_l), u - U_l \rangle &= \langle \mathcal{A}_0(u - \widehat{U}_l + \widehat{U}_l - U_l), u - \widehat{U}_l + \widehat{U}_l - U_l \rangle, \\ &= \langle \mathcal{A}_0(u - \widehat{U}_l), u - \widehat{U}_l \rangle + \langle \mathcal{A}_0(\widehat{U}_l - U_l), \widehat{U}_l - U_l \rangle, \\ \|u - U_l\|^2 &= \|u - \widehat{U}_l\|^2 + \|\widehat{U}_l - U_l\|^2 \quad (\text{Pythagore}) \end{aligned}$$

car  $u - \widehat{U}_l$  est orthogonal à  $\widehat{V}_l$  pour le produit scalaire induit par  $\mathcal{A}_0$ . En général,  $\widehat{U}_l \neq U_l$  et

$$\|u - \widehat{U}_l\| < \|u - U_l\|.$$

Les opérateurs intégraux qu'on étudie dans cette thèse sont du type Fredholm. Par conséquent, on n'a plus orthogonalité de l'erreur par rapport à l'espace d'approximation pour le produit scalaire issu de la partie coercive. Dans notre cas, il y a donc une incertitude sur sa validité. En fait, un calcul simple montre que pour  $\mathcal{A}_{k_w} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{C}_{k_w}$  avec  $\mathcal{C}_{k_w}$  compact et auto-adjoint, on a

$$\|u - U_l\|^2 = \|u - \widehat{U}_l\|^2 + \|\widehat{U}_l - U_l\|^2 + 2 \left( \langle \mathcal{C}_{k_w}(u - \widehat{U}_l), u - \widehat{U}_l \rangle + \Re(\langle \mathcal{C}_{k_w}(\widehat{U}_l - u), u - U_l \rangle) \right).$$

Ainsi, en regroupant les termes en  $\mathcal{C}_{k_w}$ ,

$$\begin{aligned} \|u - U_l\|^2 &= \|u - \widehat{U}_l\|^2 + \|\widehat{U}_l - U_l\|^2 + \varepsilon, \\ &> \|u - \widehat{U}_l\|^2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ici,  $\varepsilon$  peut être négatif! Les termes en  $\mathcal{C}_{k_w}$  correspondent à des termes d'ordre élevé par rapport à  $\|u - \widehat{U}_l\|^2$ . Il existe donc un rang  $l_0 \in \mathbb{N}_0$  tel que pour tout  $l \geq l_0$ ,

$$\|u - U_l\|^2 > \|u - \widehat{U}_l\|^2.$$

On a bien l'hypothèse de saturation, mais à partir d'un certain rang seulement<sup>5</sup>...

Cette hypothèse permet d'assurer l'efficacité et la fiabilité (voir **Proposition 46**, [36]).

On présente ensuite un indicateur basé sur une reconstruction d'espace. Ils supposent de résoudre l'équation sur un maillage  $\widehat{\mathcal{T}}_h$  raffiné uniformément de  $\mathcal{T}_h$  puis de reconstruire la solution  $\widehat{u}_h$  sur un espace d'approximation d'ordre supérieur de  $\mathcal{T}_h$ .

### 3.3.1 Indicateur par enrichissement d'espace : indicateur $h - \frac{h}{2}$

On présente ici l'indicateur par enrichissement d'espace  $h - \frac{h}{2}$  qui se caractérise par la simplicité de sa formulation. Comme explicité en introduction de cette section, on aimerait ne pas avoir à calculer les deux solutions  $u_h$  et  $\widehat{u}_h$ , et on aimerait trouver un moyen de localiser la norme énergie.

Le premier point peut être résolu en se contentant d'un post-processing de  $\widehat{u}_h$  qui devra de toute manière être calculé.

Supposons que l'espace d'approximation sur  $\mathcal{T}_h$  est  $V_h$ , respectivement  $\widehat{V}_h$  sur  $\widehat{\mathcal{T}}_h$ . On introduit alors un projecteur  $\Pi : \widehat{V}_h \rightarrow V_h$  tel que

$$\begin{aligned} \|(1 - \Pi)\widehat{u}_h\| &\leq C_{\text{apx}} \min_{v \in V_h} \|\widehat{u}_h - v\|_{h^s}, \\ \|\widehat{u}_h\|_{h^s} &\leq C_{\text{inv}} \|\widehat{u}_h\|. \end{aligned}$$

Ici,  $\|\cdot\|_{h^s}$  représente une semi-norme pondérée par  $h^s$  où  $h$  est une taille de maille caractéristique des éléments de  $\mathcal{T}_h$ . Cette donnée est suffisante pour la définition de l'indicateur  $h - \frac{h}{2}$ .

#### Indicateur $h - \frac{h}{2}$ pour l'équation $\mathcal{S}_{k_w}$

On a le théorème (**Théorème 54**, [36]) suivant.

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $\widehat{u}_h$  la solution Galerkin de l'équation  $\mathcal{S}_{k_w} u = b$  sur  $\widehat{\mathcal{T}}_h$ . Sous hypothèse de saturation et pour  $\Pi \equiv \Pi_{L^2}$  le projecteur  $L^2$  classique, l'indicateur d'erreur a posteriori définit par*

$$\eta_{h-\frac{h}{2}} = \|h^{1/2}(1 - \Pi_{L^2})\widehat{u}_h\|_{L^2(\Gamma)}$$

est fiable, efficace et local.

#### Indicateur $h - \frac{h}{2}$ pour l'équation $\mathcal{N}_{k_w}$

De même que pour  $\mathcal{S}_{k_w}$ , on a le théorème équivalent pour  $\mathcal{N}_{k_w}$  (**Théorème 56**, [36]).

**Théorème 3.3.2.** *On suppose que  $V_h = \mathcal{P}^1(\mathcal{T}_h)$ . Pour*

- $\Pi \equiv J$  le projecteur de Scott-Zhang<sup>6</sup>,
- $\Pi \equiv \Pi_{L^2}$ ,
- $\Pi \equiv$  l'interpolateur nodal,

5. Ce rang dépend de la convergence de la partie compacte par rapport à l'erreur d'approximation. Il dépend donc de  $u$  et de l'espace d'approximation.

6. Voir [22] par exemple.

l'indicateur d'erreur définit par

$$\eta_{h-\frac{h}{2}} = \|h^{1/2}\nabla_{\Gamma}(1-\Pi)\widehat{u}_h\|_{L^2(\Gamma)}$$

est fiable, efficace et local.

L'indicateur  $h - \frac{h}{2}$  présente donc une grande facilité de mise en œuvre. Néanmoins, il a le gros désavantage de nécessiter la résolution du problème sur un maillage raffiné ce qui est très coûteux.

Dans cette catégorie, on peut encore mentionner l'indicateur à deux niveaux (voir [63]) qui lui ne demande que le calcul de la solution sur le maillage non raffiné  $\mathcal{T}_h$ . On suppose que l'espace d'approximation initial est  $V_h$ . On se donne alors un espace enrichi  $\widehat{V}_h$  tel que  $\widehat{V}_h = V_h \oplus W_h$ . On réécrit la somme directe comme  $\widehat{V} = W_{h,0} \oplus W_{h,1} \oplus \dots \oplus W_{h,N}$  où  $N$  peut être adapté selon le choix de l'utilisateur. On pose  $W_{h,0} = V_h$ . Les étapes du calcul de l'indicateur sont les suivantes.

1. On résout le problème suivant sur  $V_h$

$$\mathcal{A}(U, v) = L(v), \quad \forall v \in V_h.$$

2. On pose  $\widehat{U} \in \widehat{V}_h$  une meilleure approximation de la solution continue  $u$  au sens que  $\|u - \widehat{U}\| \leq \|u - U\|$ . L'idée est de calculer une meilleure approximation de  $u - U$  sur chaque sous-espace  $W_{h,j}$  comme la projection sur  $W_{h,j}$  de  $\widehat{U} - U$  qu'on nomme  $P_j(\widehat{U} - U)$ . Finalement,  $\widehat{U} - U = \sum_{j=1}^N P_j(\widehat{U} - U)$ .
3. On résout pour chaque sous-espace  $W_{h,j}$

$$\mathcal{A}(P_j(\widehat{U} - U), v) = L(v) - \mathcal{A}(U, v), \quad \forall v \in W_{h,j}.$$

Ce sont des problèmes de petite dimension donc normalement peu coûteux. On remarque qu'on peut se passer du calcul de  $\widehat{U}$ . Il faut malgré tout effectuer un assemblage complet pour le terme  $\mathcal{A}(U, v)$  !

4. On calcule l'indicateur d'erreur *a posteriori*

$$\eta^2 = \sum_{j=1}^N \eta_j^2,$$

$$\eta_j = \|P_j(\widehat{U} - U)\|.$$

La contrepartie de la simplicité des indicateurs par enrichissement d'espace est donc un coût de calcul extensif. Si on souhaite néanmoins garder cet esprit de simplicité, on peut leur préférer les indicateurs par reconstruction d'espace.

### 3.3.2 Indicateurs par reconstruction d'espace

L'approche utilisée pour les indicateurs par reconstruction est très proche de celle utilisée pour les indicateurs par enrichissement d'espace tout en étant plus simple. L'idée est la suivante : on considère un maillage  $\mathcal{T}_h$ ,  $V_h$  l'espace d'approximation et  $u_h \in V_h$  la solution Galerkin correspondante et  $u$  la solution continue. On introduit ensuite  $\Pi$ , qu'on appelle pour l'instant opérateur de reconstruction. On a alors, sous certaines conditions de régularité discutées ci-après,

$$u - u_h = u - \Pi u + \Pi(u - u_h) + \Pi u_h - u_h.$$

On suppose alors qu'on a choisi  $\Pi$  de telle sorte que  $u - \Pi u$  et  $\Pi(u - u_h)$  soient des termes d'ordre élevé par rapport à  $\Pi u_h - u_h$ . Dans ce cas<sup>7</sup>,

$$\|u - u_h\| = \|u_h - \Pi u_h\| + o(\|u_h - \Pi u_h\|).$$

La grandeur  $\|u_h - \Pi u_h\|$  est uniquement calculable à partir de  $u_h$  et représente alors une grandeur **asymptotiquement exacte de l'erreur**. De plus, il ne fait pas intervenir l'opérateur qui a été inversé mais dépend uniquement des espaces de Sobolev entrant en jeu. On a cependant le même problème que pour les autres indicateurs, à savoir que la norme  $\|\cdot\|$  n'est pas locale. On se base alors sur les inégalités inverses pour la localiser.

En pratique, ces indicateurs sont basés, comme pour l'indicateur  $h - \frac{h}{2}$ , sur deux maillages. On pose maintenant  $\mathcal{T}_H$  le maillage initial de résolution et  $\mathcal{T}_h$  un raffinement uniforme de  $\mathcal{T}_H$  tel que  $h = \frac{H}{2^k}$ ,  $k \geq 1$ . Le problème variationnel est alors résolu *uniquement sur  $\mathcal{T}_h$*  et on va se servir de  $\mathcal{T}_H$  pour reconstruire la solution. De plus, l'opérateur  $\Pi$  est un projecteur qui peut être le projecteur de Galerkin  $\Pi_G$  associé à la norme  $\|\cdot\|$  (i.e. le  $\mathcal{S}_0$  dans le cas de l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ ) ou bien le projecteur  $\Pi_{L^2}$  usuel. Si on suppose par exemple que  $V_h = \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_h)$ , alors la reconstruction se fait sur  $\widehat{V}_H = \mathcal{P}^{p+1}(\mathcal{T}_H)$ <sup>8</sup>, l'idée étant qu'une approximation polynomiale d'ordre plus élevée converge plus vite vers la solution. L'indicateur d'erreur est ensuite calculé localement sur les éléments de  $\mathcal{T}_H$  : en comparant localement la solution avec une meilleure approximation, on est capable de "mesurer localement l'erreur". Par exemple, si la valeur de l'indicateur est localement élevée, il en est de même pour la valeur de l'erreur et il faut affiner localement le maillage. Si la valeur de l'indicateur est faible, alors il n'y a pas besoin de raffiner.

On montre d'abord la fiabilité et l'efficacité de l'indicateur non localisé. On présente ensuite l'indicateur qui sera utilisé pour l'équation associée au  $\mathcal{S}_{k_w}$ , et enfin celui pour l'équation associée au  $\mathcal{N}_{k_w}$ .

### Fiabilité et efficacité pour les indicateurs basés sur la reconstruction d'espace

On définit l'indicateur par reconstruction de manière complètement générale.

**Définition 3.3.1** (Indicateur par reconstruction non localisé). *On pose l'indicateur d'erreur a posteriori non localisé en norme d'espace*

$$\widetilde{\eta}_\Pi = \min_{v_H \in \widehat{V}_H} \|u_h - v_H\|_V.$$

Pour prouver sa fiabilité et son efficacité, on doit faire les hypothèses suivantes. On utilise le fait que le problème pour  $\mathcal{A}_{k_w}$  vérifie une inégalité de Gårding : il existe un opérateur compact  $T : V \rightarrow V^*$  et une constante  $C_{\text{ell}} > 0$  tels que pour tout  $v \in V$ ,

$$|\langle \mathcal{A}_{k_w} v, v \rangle + \langle T v, v \rangle| \geq C_{\text{ell}} \|v\|_V^2.$$

**Hypothèse 3.3.2** (Hypothèse d'approximation (AA)). *On suppose que la grandeur*

$$\delta_{hH} = \frac{\min_{v_H \in \widehat{V}_H} \|u - v_H\|_V}{\min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V} = o(1).$$

7. On rappelle que  $v_H \in \mathcal{P}^{p+1}(\mathcal{T}_H)$  et  $v_h \in \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_h)$  !

8. On peut décider d'avoir  $\widehat{V}_H = \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_H)$  et  $V_h = \mathcal{P}^{p+1}(\mathcal{T}_h)$ , mais dans ce cas, on se rapproche d'un indicateur  $h - \frac{h}{2}$  amélioré... Comme on le re-souligne plus loin, on calcule la solution sur un maillage raffiné ce qui est coûteux. Augmenter l'ordre polynomial de l'espace d'approximation est encore plus coûteux et pas forcément utile.

**Hypothèse 3.3.3** (Propriété discrète (PD)). *On suppose que*

$$q = \max_{v_H \in \widehat{V}_H \setminus \{0\}} \min_{v_h \in V_h} \frac{\|v_H - v_h\|_V}{\|v_H\|_V} < \frac{C_{\text{ell}}}{C_{\text{bd}}}$$

où  $C_{\text{bd}}$  est la constante de continuité de l'opérateur  $\mathcal{A}_{k_w}$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_V$ .

En ce qui concerne l'hypothèse (AA), elle peut être obtenue en utilisant un ordre polynomial plus élevé pour  $\widehat{V}_H$  que pour  $V_h$  lorsqu'on suppose que  $u$  est "suffisamment régulière". L'hypothèse (PD) se vérifie numériquement et sa validité dépend, comme on le constate plus tard, du nombre de raffinements du maillage (voir par exemple la partie "**Indicateur par reconstruction pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$** ").

Dans ce cas,

**Théorème 3.3.3.** *Avec les hypothèses 3.3.2 et 3.3.3,*

$$\frac{1}{1 + \delta_{hH}} \tilde{\eta}_{\Pi} \leq \|e_h\|_V \leq \frac{C_{\text{ell}}^{-1} C_{\text{bd}}}{1 - q C_{\text{ell}}^{-1} C_{\text{bd}}} (\tilde{\eta}_{\Pi} + \min_{v_H \in \widehat{V}_H} \|u - v_H\|_V) + \frac{C_{\text{ell}}^{-1}}{1 - q C_{\text{ell}}^{-1} C_{\text{bd}}} \frac{|\langle T e_h, e_h \rangle|}{\|e_h\|_V}$$

*i.e. l'indicateur non localisé  $\tilde{\eta}_{\Pi}$  est fiable et efficace vis-à-vis de l'erreur sur le maillage raffiné.*

On étend la preuve (voir **Théorème 2.1**, [20]) adaptée au cas où  $\mathcal{A}_{k_w}$  est sous la forme coercif + compact.

*Démonstration.* On commence par l'efficacité.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{\Pi} &\leq \|u - u_h\|_V + \min_{v_H \in \widehat{V}_H} \|u - v_H\|_V, \\ &\leq \|u - u_h\|_V + \delta_{hH} \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V, \\ &\leq (1 + \delta_{hH}) \|u - u_h\|_V \quad \text{avec} \quad \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leq \|u - u_h\|_V. \end{aligned}$$

La preuve de fiabilité nécessite l'utilisation de l'hypothèse 3.3.3. Soit  $E_H \in \widehat{V}_H$  tel que

$$\|e_h - E_H\|_V = \min_{v_H \in \widehat{V}_H} \|e_h - v_H\|_V.$$

On a notamment  $\|E_H\|_V \leq \|e_h\|_V$  (stabilité de l'approximation).

En utilisant la propriété discrète,

$$\min_{v_h \in V_h} \|E_H - v_h\|_V \leq q \|E_H\|_V,$$

on a encore

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}_{k_w} e_h, E_H \rangle| &= |\langle \mathcal{A}_{k_w} e_h, E_H - v_h \rangle|, \quad \text{pour tout } v_h \in V_h, \\ &= \min_{v_h \in V_h} |\langle \mathcal{A}_{k_w} e_h, E_H - v_h \rangle|, \\ &\leq C_{\text{bd}} q \|e_h\|_V \|E_H\|_V. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant  $\|E_H\|_V \leq \|e_h\|_V$  et l'inégalité de Gårding,

$$\begin{aligned} C_{\text{ell}} \|e_h\|_V^2 &\leq |\langle \mathcal{A}_{k_w} e_h, e_h \rangle| + |\langle T e_h, e_h \rangle|, \\ &\leq |\langle \mathcal{A}_{k_w} e_h, e_h - E_H \rangle| + |\langle \mathcal{A}_{k_w} e_h, E_H \rangle| + |\langle T e_h, e_h \rangle|, \\ &\leq C_{\text{bd}} \|e_h\|_V (\|e_h - E_H\|_V + q \|e_h\|_V) + |\langle T e_h, e_h \rangle|. \end{aligned}$$

En simplifiant par  $\|e_h\|_V$ ,

$$\begin{aligned} (C_{\text{ell}} - q C_{\text{bd}}) \|e_h\|_V &\leq C_{\text{bd}} \|e_h - E_H\|_V + \frac{|\langle Te_h, e_h \rangle|}{\|e_h\|_V}, \\ \|e_h\|_V &\leq \frac{C_{\text{ell}}^{-1} C_{\text{bd}}}{1 - q C_{\text{ell}}^{-1} C_{\text{bd}}} \|e_h - E_H\|_V + \frac{C_{\text{ell}}^{-1}}{1 - q C_{\text{ell}}^{-1} C_{\text{bd}}} \frac{|\langle Te_h, e_h \rangle|}{\|e_h\|_V}, \\ &\leq C_{\text{rel}} \|e_h - E_H\|_V + \frac{C_{\text{rel}}}{C_{\text{bd}}} \frac{|\langle Te_h, e_h \rangle|}{\|e_h\|_V}. \end{aligned}$$

où  $C_{\text{rel}} = \frac{C_{\text{ell}}^{-1} C_{\text{bd}}}{1 - q C_{\text{ell}}^{-1} C_{\text{bd}}}$ . Or,

$$\|e_h - E_H\|_V = \min_{v_H \in \widehat{V}_H} \|e_h - v_H\|_V.$$

Finalement, en utilisant l'inégalité triangulaire et  $u_{hH}$  la meilleure approximation de  $u_h$  dans  $\widehat{V}_H$ ,

$$\begin{aligned} \|e_h\|_V &\leq C_{\text{rel}} \left( \min_{v_H \in \widehat{V}_H} \|u - v_H\|_V + \|u_h - u_{hH}\|_V \right) + \frac{C_{\text{rel}}}{C_{\text{bd}}} \frac{|\langle Te_h, e_h \rangle|}{\|e_h\|_V}, \\ &\leq C_{\text{rel}} \left( \min_{v_H \in \widehat{V}_H} \|u - v_H\|_V + \tilde{\eta}_\Pi \right) + \frac{C_{\text{rel}}}{C_{\text{bd}}} \frac{|\langle Te_h, e_h \rangle|}{\|e_h\|_V}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité.  $\square$

En fait, les termes  $\min_{v_H \in \widehat{V}_H} \|u - v_H\|_V$  (sous condition de régularité sur  $u$ ) et  $\frac{|\langle Te_h, e_h \rangle|}{\|e_h\|_V}$  sont des termes d'ordre élevé par rapport à  $\tilde{\eta}_\Pi$ . Concernant  $\min_{v_H \in \widehat{V}_H} \|u - v_H\|_V$ , cela se justifie par l'hypothèse 3.3.2. Pour  $\frac{|\langle Te_h, e_h \rangle|}{\|e_h\|_V}$ , on renvoie à la démonstration du **lemme 3.2.2**.

L'indicateur par reconstruction est donc **fiable et efficace à un terme d'ordre élevé près** (sous condition de régularité!). Il est de plus asymptotiquement exact par construction.

Il reste essentiellement deux points à éclaircir :

- comment calculer  $\min_{v_H \in \widehat{V}_H} \|u_h - v_H\|_V$ ? Si on pose par exemple  $\|\cdot\|_V \equiv \|\cdot\|$ , alors  $v_H = u_{hH}$  = la projection de Galerkin de  $u_h$  minimise  $\|u_h - v_H\|$ . C'est une solution coûteuse car nécessitant l'assemblage et l'inversion d'un second problème plein. On remarque ainsi que le choix du projecteur  $L^2$  garantit la fiabilité de l'indicateur mais pas (*a priori*) son efficacité.
- comment localiser  $\|\cdot\|_V$ ?

### Indicateur par reconstruction pour l'équation $\mathcal{S}_{k_w}$

On présente ici l'indicateur par reconstruction pour l'équation du simple couche tel qu'il a été introduit originellement dans [19].

On vérifie la validité des hypothèses (AA) et (PD). Commençons par l'hypothèse (PD).

Pour  $v \in \mathcal{P}^{p+1}(\mathcal{T}_h)$ ,

$$\begin{aligned}
 q &= \max_{v_H \in \widehat{V}_H \setminus \{0\}} \min_{v_h \in V_h} \frac{\|v_H - v_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}{\|v_H\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}, \\
 &\leq \max_{v_H \in \widehat{V}_H \setminus \{0\}} \frac{\|v_H - \Pi v_H\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}{\|v_H\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}, \\
 &\lesssim \max_{v_H \in \widehat{V}_H \setminus \{0\}} \frac{\|h^{1/2} v_H\|_{L^2(\Gamma)}}{\|v_H\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}, \\
 &\lesssim \max_{v_H \in V_H \setminus \{0\}} \left\| \left( \frac{h}{H} \right)^{1/2} \right\|_{L^\infty(\Gamma)} \frac{\|H^{1/2} v_H\|_{L^2(\Gamma)}}{\|v_H\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}, \\
 &\lesssim \max_{v_H \in V_H \setminus \{0\}} \left\| \left( \frac{h}{H} \right)^{1/2} \right\|_{L^\infty(\Gamma)} \frac{\|v_H\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}{\|v_H\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}} \quad (\text{estimation inverse}), \\
 &\lesssim \left\| \left( \frac{h}{H} \right)^{1/2} \right\|_{L^\infty(\Gamma)}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 q &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} && \text{si on raffine une seule fois,} \\
 &\leq \frac{1}{2^{k/2}} && \text{si on raffine } k \text{ fois.}
 \end{aligned}$$

En pratique,  $k = 1$  suffit<sup>9</sup> pour les objets que nous considérons au chapitre 5.

En ce qui concerne l'hypothèse (AA), il faut supposer que la solution continue  $u$  est suffisamment régulière pour pouvoir utiliser le lemme de Bramble-Hilbert. Dans ce cas,

$$\min_{v_H \in \widehat{V}_H} \|u - v_H\|_V \lesssim H^{p+1+1/2}, \quad \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \lesssim h^{p+1/2}.$$

En utilisant  $h = \frac{H}{2^k}$ , il vient

$$\delta_{hH} \lesssim 2^{k(p+1/2)} H$$

soit  $\delta_{hH} = o(1)$ .

On peut alors énoncer la forme localisée de l'indicateur par reconstruction pour  $\mathcal{S}_{k_w}$ .

**Théorème 3.3.4** (Indicateur par reconstruction localisé pour  $\mathcal{S}_{k_w}$ ). *Si  $\mathcal{T}_H$  (et donc  $\mathcal{T}_h$ ) est un maillage régulier, l'indicateur d'erreur a posteriori pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  définit par*

$$\eta_\Pi = \|H^{1/2}(1 - \Pi)u_h\|_{L^2(\Gamma)}$$

*est fiable et local.*

La preuve est basée sur des estimations inverses pour les polynômes et n'est pas donnée ici.

9. Au vu de [21], il faudrait logiquement augmenter  $k$  en fonction de la taille de l'objet en longueurs d'onde.

### Indicateur par reconstruction pour l'équation $\mathcal{N}_{k_w}$

On a un résultat similaire à celui pour le  $\mathcal{S}_{k_w}$ .

**Théorème 3.3.5.** *Si  $\mathcal{T}_H$  est un maillage régulier, l'indicateur d'erreur a posteriori pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  définit par*

$$\eta_{\Pi} = \|H^{1/2}\nabla_{\Gamma}(1 - \Pi)u_h\|_{L^2(\Gamma)}$$

*est fiable et local.*

On renvoie à [3] pour les détails. Comme pour le théorème 3.3.4, les preuves se basent essentiellement sur des localisations de la norme  $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ .

### Conclusion sur les indicateurs par enrichissement ou reconstruction d'espace

On peut citer trois avantages des indicateurs par reconstruction :

- ils sont asymptotiquement exact<sup>10</sup> sous leur forme non localisée et leur valeur peut alors servir de critère d'arrêt rigoureux pour un algorithme auto-adaptatif.
- ils sont basés uniquement sur la solution approchée et ne se basent que sur les propriétés de transport d'espaces des opérateurs qui sont inversés, et non sur les opérateurs eux-mêmes.
- si la forme utilisant la projection de Galerkin ne présente pas d'intérêt du fait de la nécessité de ré-assembler un problème plein, la forme utilisant la projection  $L^2$  est très simple d'implémentation et le calcul de l'indicateur est très rapide.

Malheureusement, ils nécessitent de résoudre le problème sur un maillage raffiné uniformément par rapport au maillage initial, ce qui peut coûter très cher. Par exemple, pour le cas où  $\mathcal{A}_{k_w} \equiv \mathcal{S}_{k_w}$  et l'espace d'approximation est  $V_h \equiv \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)$ , le coût d'assemblage de la matrice éléments finis (sans algorithme d'accélération) est multiplié par 4 en 2D et par 16 en 3D par rapport à une résolution sur le maillage initial.

**Remarque 3.3.2.** *On peut envisager l'utilisation de méthodes multi-grilles. Si on opte pour une méthode basée sur plusieurs maillages, cela suppose de faire plusieurs assemblages du problème. On peut aussi envisager une méthode algébrique. Dans tous les cas, cela complexifie grandement la mise en œuvre de ce type de méthodes.*

Ils présentent beaucoup de similarité par rapport aux indicateurs par enrichissement d'espace. Si ils ont en commun la grande facilité de mise en œuvre, ils possèdent également des désavantages similaires.

## 3.4 Conclusion sur les indicateurs de la littérature et leur extension pour l'acoustique

Dans ce chapitre, on a introduit quelques indicateurs *a posteriori* de la littérature. Ils sont classés par catégories selon leur principe de construction : basés sur une localisation de la norme du résidu, sur des espaces enrichis, ou sur des espaces reconstruits. Ils ont généralement été introduits pour les formulations intégrales associées à l'équation de Laplace qui ont l'avantage d'être coercives. Lorsque cela a été nécessaire, on a généralisé les démonstrations de la littérature [41, 38] aux équations intégrales associées aux opérateurs  $\mathcal{S}_{k_w}$  et  $\mathcal{N}_{k_w}$ .

Les indicateurs basés sur la localisation du résidu ont l'avantage de ne pas nécessiter de résolution sur un maillage raffiné. Ils sont aussi les plus "naturels" puisque la norme du résidu

10. Sous condition de régularité!

est une norme équivalente de l'erreur. Néanmoins, le calcul du résidu peut-être une opération coûteuse si elle n'est pas accélérée par un algorithme rapide comme la FMM ou les  $\mathcal{H}$ -matrices, et nécessite par conséquent un effort d'implémentation important. Il peut arriver également que selon l'implémentation utilisée pour la FMM, on doit en utiliser une différente de celle utilisée pour la résolution itérative de l'équation. De plus, ces indicateurs ne peuvent pas donner, que ce soit sous forme globale ou localisée, une idée de la valeur "exacte" de l'erreur à cause des constantes multiplicatives indéterminées, dépendantes du problème traité, qui les lient à l'erreur exacte.

Les indicateurs par reconstruction ont l'avantage d'être, par construction et sous leur forme non-localisée, asymptotiquement exacts. De plus, ils sont très faciles à mettre en œuvre car ils ne nécessitent qu'une projection  $L^2$ . Malheureusement, il faut effectuer la résolution sur un maillage raffiné ce qui fait augmenter le temps de calcul (voir la conclusion de 3.3) et la localisation fait perdre le caractère asymptotiquement exact. De plus, il reste une faiblesse théorique puisqu'il faut supposer que la solution exacte est suffisamment régulière.

Au vu des inconvénients mis en évidence ci-dessus, on s'intéresse, dans le chapitre suivant, à la construction d'indicateurs d'erreur *a posteriori* fournissant une information quantitative fiable sur la valeur de l'erreur. Ce type de problématique est largement étudié dans la littérature pour les méthodes volumiques. On peut citer, par exemple, les travaux de M. Vohralík [32] qui propose la construction d'indicateurs d'erreur par des techniques de reconstruction de flux permettant d'aboutir à des constantes d'efficacité proche de l'optimal. On propose une approche différente basée sur l'utilisation d'un opérateur de *localisation bien choisi* permettant d'aboutir à un indicateur d'erreur *a posteriori* fiable, efficace, local et asymptotiquement exact.

# Chapitre 4

## Construction d'un nouvel indicateur d'erreur fiable, efficace, local et asymptotiquement exact pour l'acoustique

Dans ce chapitre, on construit un nouvel indicateur fiable, efficace, local et asymptotiquement exact pour les problèmes de propagation acoustique. Cet indicateur est basé sur une localisation de la norme du résidu. Pour cela, on introduit une nouvelle technique de localisation générique afin de conserver un certain niveau d'abstraction par rapport aux équations résolues. On considère encore une équation de la forme  $\mathcal{A}_{k_w} u = b$  où  $\mathcal{A}_{k_w} \equiv \mathcal{S}_k$  ou bien  $\mathcal{A}_{k_w} \equiv \mathcal{N}_k$  et  $u \in H^s(\Gamma)$ . On introduit alors un opérateur de *localisation*  $\Lambda : H^{-s}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  qui permet d'agir comme une localisation de norme. On démontre ensuite que sous certaines hypothèses sur  $\Lambda$ , on est capable de définir un nouvel indicateur d'erreur *a posteriori* fiable, efficace et local. On choisit alors une norme dans laquelle on va exprimer l'erreur. On montre alors que l'indicateur d'erreur *a posteriori* résultant est asymptotiquement exact. On propose ensuite deux techniques de construction pour un tel  $\Lambda$ .

### 4.1 Une technique non-standard de localisation des normes de Sobolev d'ordre non entier

On a constaté au chapitre précédent que la préoccupation principale lors de la recherche d'un indicateur d'erreur *a posteriori* en équations intégrales est la localisation des normes des espaces  $H^s$  quand  $s \notin \mathbb{N}_0$ . La plupart des techniques de construction des indicateurs d'erreur sont basées sur l'expression de l'indicateur en fonction d'une norme  $H^s$  puis en sa localisation en utilisant des inégalités inverses. Dans cette partie, on propose une nouvelle approche abstraite pour la localisation des normes, dépendante uniquement des propriétés de l'opérateur  $\mathcal{A}_{k_w}$ . En particulier, on s'intéresse à la localisation de la norme du résidu.

Dans toute la suite, on reprend les notations introduites pour les preuves de convergence de l'indicateur "résidu pondéré" de la partie 3.2.2. On suppose que l'algorithme auto-adaptatif produit une suite de maillages  $(\mathcal{T}_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$  pour lesquels la solution du problème variationnel discret  $(u_l \in V_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$  converge vers la solution continue  $u \in V$ .

#### 4.1.1 Construction abstraite d'un nouvel indicateur d'erreur *a posteriori* fiable, efficace, local.

On suppose que  $\mathcal{A}_{k_w} : \tilde{H}^s(\Gamma) \rightarrow H^{-s}(\Gamma)$ . Le problème étant bien posé, on va utiliser comme en 3.2 le fait que la norme du résidu  $r_l = \mathcal{A}_{k_w}(u - u_l) \in H^{-s}(\Gamma)$  est une norme équivalente de

l'erreur. On cherche donc ici à localiser une norme  $\| \cdot \|_{-s}$  où  $s = \pm 1/2$ . On aimerait également que cette localisation puisse être faite sans hypothèse aucune sur la nature de l'objet dont on veut localiser la norme : autrement dit, on veut une localisation non limitée aux fonctions de moyenne nulle, ou bien aux polynômes, etc.

On suppose qu'il existe un opérateur **continu**  $\Lambda$  tel que

$$\Lambda : H^{-s}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma).$$

On a alors un théorème de construction d'un nouvel indicateur d'erreur *a posteriori*, qu'on qualifiera de "forme faible".

**Théorème 4.1.1** (Indicateur  $\Lambda$  abstrait – Forme faible). *Soit  $\Lambda : \tilde{H}^{\pm 1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  un isomorphisme, alors l'indicateur d'erreur a posteriori défini par*

$$\eta_\Lambda = \|\Lambda r_l\|_{L^2(\Gamma)}$$

*est fiable, efficace et local.*

*Si  $\Lambda$  n'est que continu, l'indicateur  $\eta_\Lambda$  est seulement efficace et local.*

*Démonstration.* La preuve est directe. Si  $\Lambda$  est un isomorphisme,  $\|\Lambda r_l\|_0$  est une norme équivalente de  $\|r_l\|_{\pm 1/2}$  qui est elle-même une norme équivalente de  $\|e_l\|_{\mp 1/2}$ . Cela implique la fiabilité et l'efficacité. La localité de l'indicateur provient directement de la localité de la norme  $L^2$ .  $\square$

Dans toute la suite, on utilise la terminologie "indicateur- $\Lambda$ " ou bien "estimation/indication- $\Lambda$ " lorsqu'on se réfère à l'utilisation de  $\eta_\Lambda$ .

On qualifie ce théorème de "faible" car la *seule hypothèse* de ce théorème est que le candidat pour  $\Lambda$  soit un isomorphisme. On ne suppose absolument *rien* sur la régularité de  $\Gamma$ . Trouver un tel  $\Lambda$  est évidemment le cas idéal.

Il n'est cependant pas toujours évident de vérifier qu'un candidat est un isomorphisme et on propose dans les parties 4.2.1 et 4.2.2 une forme "forte" (et donc au cadre d'application plus restreint) permettant de lever cette hypothèse.

Le principe de l'indication- $\Lambda$  est donc simple, mais ce n'est pas son seul avantage. On montre maintenant en quoi ce nouvel indicateur d'erreur permet de mesurer précisément l'erreur.

### 4.1.2 Caractère asymptotiquement exact de l'indicateur $\Lambda$

On montre ici en quoi un choix judicieux pour l'opérateur  $\Lambda$  permet d'obtenir un indicateur d'erreur *a posteriori asymptotiquement exact*. Pour cela, il faut définir par rapport à quelle norme on souhaite ce caractère d'exactitude. On rappelle que les opérateurs intégraux auxquels on s'intéresse, sont des opérateurs de type Fredholm et donc de la forme  $\mathcal{A}_{k_w} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{C}_{k_w}$  où  $\mathcal{A}_0$  est un opérateur coercif et  $\mathcal{C}_{k_w}$  est un opérateur compact. Par conséquent, pour  $u \in V$ ,  $\mathcal{A}_0$  permet de définir une norme équivalente sur  $V$  dite "norme de Galerkin" ou "norme énergie" telle que

$$\| \| u \| \|^2 = \langle \mathcal{A}_0 u, u \rangle_{V^*, V}.$$

On *choisit* alors de poser

$$\boxed{\| \cdot \|_V = \| \| \cdot \| }.$$

Reprenons alors la définition de  $\eta_\Lambda$ .

$$\begin{aligned} \eta_\Lambda^2 &= \|\Lambda r_l\|_0, \\ &= (\Lambda \mathcal{A}_{k_w} e_l, \Lambda \mathcal{A}_{k_w} e_l). \end{aligned}$$

La composition d'un opérateur compact avec un opérateur continu est encore un opérateur compact. Par conséquent, on peut extraire les parties compactes et les regrouper en un opérateur  $\mathcal{K}$  ce qui donne

$$\begin{aligned}\eta_\Lambda^2 &= (\Lambda \mathcal{A}_0 e_l, \Lambda \mathcal{A}_0 e_l) + \langle \mathcal{K} e_l, e_l \rangle, \\ &= \langle \mathcal{A}_0^* \Lambda^* \Lambda \mathcal{A}_0 e_l, e_l \rangle + \langle \mathcal{K} e_l, e_l \rangle.\end{aligned}$$

On suppose maintenant qu'on choisit  $\Lambda$  tel que  $\mathcal{A}_0^* \Lambda^* \Lambda \equiv \mathcal{I} + \mathcal{K}_1$  où  $\mathcal{K}_1$  est compact de  $V$  dans  $V^*$ . On obtient

$$\eta_\Lambda^2 = \langle \mathcal{A}_0 e_l, e_l \rangle + \langle \mathcal{K}_2 e_l, e_l \rangle$$

où  $\mathcal{K}_2$  regroupe tous les termes compacts qu'on a fait apparaître jusqu'à maintenant. On a déjà montré avec le **lemme 3.2.2** qu'appliquer un opérateur compact à  $e_l$  conduit à des termes d'ordre élevé par rapport à  $\|e_l\|_V$ . Par conséquent,

$$\eta_\Lambda^2 = \langle \mathcal{A}_0 e_l, e_l \rangle + \text{termes d'ordre élevé.}$$

En conclusion, si on arrive à trouver un "bon"  $\Lambda$ ,

$$\boxed{\eta_\Lambda = \|e_l\| + \text{termes d'ordre élevé}},$$

autrement dit  $\eta_\Lambda$  est un indicateur d'erreur *a posteriori* **asymptotiquement exact en norme  $L^2$**  relativement à la norme de Galerkin !

### 4.1.3 Proposition d'une technique générique de construction pour l'indicateur $\Lambda$

Etant donné que l'on cherche  $\Lambda$  tel que  $\mathcal{A}_0^* \Lambda^* \Lambda \equiv \mathcal{I} + \mathcal{K}_1$ , il est naturel de le chercher comme la **racine carrée d'un inverse approché de l'opérateur  $\mathcal{A}_0$** .

Pour cela, on va se baser sur des techniques d'analyse microlocale et **extraire le symbole principal homogène de  $\mathcal{A}_0$**  puis en déduire celui de  $\Lambda$ . Il est alors nécessaire de faire l'hypothèse de construction suivante.

**Hypothèse 4.1.1.** *Pour toutes les techniques issues de l'analyse microlocale, on suppose que le contour  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .*

**Remarque 4.1.1.** *Les opérateurs qui vont être exhibés dans la suite ont toujours un sens quand  $\Gamma$  est lipschitzienne !*

C'est une hypothèse qui est évidemment restrictive en apparence puisque la plupart, si ce n'est l'intégralité, des simulations pratiques se font sur des domaines avec au moins une arête ou un coin. Cette technique n'est donc parfaitement rigoureuse que sur les cas académiques comme, par exemple, les ellipsoïdes. Néanmoins, il semble que la nature des opérateurs  $\Lambda$  construits dans la suite vis-à-vis de  $\mathcal{A}_0$  ne change pas lorsque l'on se place dans le cas où  $\Gamma$  est une surface lipschitzienne ou polygonale. Dans ces cas, les résultats numériques seront le juge de paix <sup>1</sup>.

On pose  $\sigma_{\mathcal{A}_0, k}^0(x, \xi)$  le symbole principal homogène de degré  $k$  de  $\mathcal{A}_0$  et  $\sigma_{\Lambda, k-1/2}^0(x, \xi)$  celui de  $\Lambda$ . Un bon candidat  $\Lambda$  est tel que

$$\boxed{\sigma_{\Lambda, k-1/2}^0(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{\mathcal{A}_0, k}^0(x, \xi)}}}. \quad (4.1)$$

Il "suffit" ensuite de remonter à **une** forme explicite de  $\Lambda$ .

Des formes explicites des opérateurs  $\Lambda_{\mathcal{S}_{k_w}}$ , respectivement  $\Lambda_{\mathcal{N}_{k_w}}$ , associés aux opérateurs  $\mathcal{S}_{k_w}$ , respectivement  $\mathcal{N}_{k_w}$  vont être données dans les sections 4.2, respectivement 4.3.

1. ©S. Pernet

#### 4.1.4 Conclusion sur la technique de localisation par opérateur

On a introduit une nouvelle technique abstraite de localisation des normes qui permet la définition d'un indicateur d'erreur *a posteriori*  $\eta_\Lambda$  qui est fiable, efficace, local. Elle se base sur l'application d'un opérateur  $\Lambda$  aux éléments des espaces  $H^s$ . Si l'on est capable de trouver un  $\Lambda$  qui soit un isomorphisme, alors on a équivalence des normes. De plus, le choix de  $\Lambda$  comme racine carrée de l'inverse de  $\mathcal{A}_0$  permet, au moins sur des surfaces de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , d'assurer l'exactitude asymptotique de  $\eta_\Lambda$ .

On construit maintenant les opérateurs  $\Lambda$  associés aux équations pour le  $\mathcal{S}_{k_w}$  et pour le  $\mathcal{N}_{k_w}$ .

## 4.2 Construction des opérateurs $\Lambda$ sous forme intégrale

On propose ici une première approche basée purement sur de l'analyse micro-locale qui va permettre de construire les opérateurs  $\Lambda$  sous la forme d'opérateurs intégraux, i.e. tels que

$$(\Lambda u)(x) = \int_{\Gamma} k_\Lambda(x, x-y) u(y) d\gamma_y.$$

Partant de la formule (4.1), on va utiliser les formules p. 392–394 de [49].

On traite séparément le cas des opérateurs  $\mathcal{S}_{k_w}$  et  $\mathcal{N}_{k_w}$ . Pour chaque cas, on calcule  $\Lambda_{\mathcal{S}_{k_w}/\mathcal{N}_{k_w}}$  selon que  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  ou bien  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ . Pour le cas  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ , on prouve la fiabilité et l'efficacité de l'indicateur  $\eta_\Lambda$  sous forme "forte" (en opposition au théorème "faible" 4.1.1). On discute finalement de leur forme et difficulté d'implémentation.

### 4.2.1 Forme intégrale du $\Lambda$ pour l'équation $\mathcal{S}_{k_w}$

On construit ici l'opérateur  $\Lambda$  associé à  $\mathcal{A}_0 \equiv \mathcal{S}_0$  sous forme intégrale. On s'intéresse dans un premier temps au cas 2D.

#### Construction du $\Lambda$ associé au $\mathcal{S}_0$ sous forme intégrale – Cas 2D

Que ce soit en 2D ou en 3D, on peut montrer que le symbole principal homogène de l'opérateur  $\mathcal{S}_0$  est (formules (9.2.17) et (10.1.10) dans [49])

$$\sigma_{\mathcal{S}_0, -1}(x, \xi) = \frac{1}{2|\xi|}, \quad |\xi| \geq 1. \quad (4.2)$$

On choisit alors

$$\boxed{\sigma_{\Lambda_{\mathcal{S}_0}, 1/2}(x, \xi) = \sqrt{2|\xi|}}. \quad (4.3)$$

Les formules de passage symbole  $\rightarrow$  noyau sont malheureusement difficilement praticables dans ce cas. On préfère plutôt *postuler*<sup>2</sup> une forme pour l'opérateur  $\Lambda_{\mathcal{S}_0}$  et calculer son symbole principal homogène.

On introduit l'opérateur  $\Lambda_{\mathcal{S}_0} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  tel que

$$(\Lambda_{\mathcal{S}_0} u)(x) = -\sqrt{\pi} \text{p.f.} \int_{\Gamma} \frac{u(y)}{|x-y|^{3/2}} d\gamma_y \quad (4.4)$$

2. Le choix de la constante  $-\sqrt{\pi}$  n'est pas un hasard, comme on peut le constater dans la suite du calcul. En ce qui concerne le degré de la singularité qui est en  $|x-y|^{-3/2}$ , cela provient du lien entre le degré d'homogénéité du noyau, la dimension de l'espace, et l'ordre de l'opérateur pseudo-différentiel associé. Tous ces résultats sont résumés dans [49], pp. 392–394.

où "p.f." signifie "intégrale en partie finie" (au sens de Hadamard). Le noyau est  $k(x, z) = |z|^{-3/2}$  et est une fonction pseudo-homogène de degré  $-3/2$ . Utilisant la formule (7.1.82) de [49], on en déduit que le symbole principal homogène de  $\Lambda_{\mathcal{S}_0}$  est de degré  $1/2$  ce qui en fait bien un opérateur d'ordre  $1/2$  (opérateur de *demi-dérivation*). Ainsi,

$$\begin{aligned}\sigma_{\Lambda_{\mathcal{S}_0, 1/2}}^0(x, \xi) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{p.f.} \int_{\mathbb{R}} k(x, z) e^{-i\xi z} dz, \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x|>0} \frac{e^{-i\xi z} dz}{|z|^{3/2}} - 2 \frac{e^{-i\xi\varepsilon} + e^{i\xi\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \right).\end{aligned}$$

On utilise le fait que  $\Re(e^{-i\xi z})$  est paire et  $\Im(e^{-i\xi z})$  est impaire. En posant  $\tilde{\sigma}_{\Lambda_{\mathcal{S}_0, 1/2}}^0$  le terme à l'intérieur de la limite dans l'équation précédente,

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\Lambda_{\mathcal{S}_0, 1/2}}^0(x, \xi) &= 2 \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos(\xi z)}{z^{3/2}} dz, \\ &= 2 \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos(\xi z) - 1}{z^{3/2}} dz + \frac{4}{\sqrt{\varepsilon}}.\end{aligned}$$

En faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned}\sigma_{\Lambda_{\mathcal{S}_0, 1/2}}^0(x, \xi) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\xi z) - 1}{z^{3/2}} dz, \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{|\xi|} \frac{\cos(\zeta) - 1}{\zeta^{3/2}} d\zeta, \quad \text{avec } \zeta = |\xi|z,\end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_{\Lambda_{\mathcal{S}_0, 1/2}}^0(x, \xi) = \sqrt{2|\xi|}}.$$

On a bien égalité du symbole principal homogène avec (4.3). On a donc bien trouvé une *approximation* (à un terme compact près) de la racine carrée de l'inverse de  $\mathcal{S}_0$ . C'est un bon candidat pour être utilisé pour la  $\Lambda$ -estimation. Malheureusement, il est donné comme une intégrale en partie finie et se prête alors peu aux calculs numériques car il nécessiterait la mise en place de techniques d'intégrations particulières. On lui préfère une forme intégrée par partie<sup>3</sup> et on pose alors

$$\boxed{(\Lambda_{\mathcal{S}_0} u)(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \nabla_{\Gamma} \cdot \int_{\Gamma} \sqrt{|x-y|} \nabla_{\Gamma} u(y) d\gamma_y}. \quad (4.5)$$

Le noyau de cette version est modifié par rapport à la forme en partie finie puisqu'il contient maintenant toutes les fonctions constantes par morceaux. Les opérateurs définis en (4.4) et (4.5) ne diffèrent que d'un opérateur régularisant car ils ont le même symbole principal.

### L'opérateur $\Lambda_{\mathcal{S}_0}$ définit un indicateur d'erreur *a posteriori* fiable et efficace

On montre maintenant que l'opérateur  $\Lambda_{\mathcal{S}_0}$  défini en (4.5) permet de construire un indicateur d'erreur *a posteriori*  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{S}_0}}$  fiable, efficace, local, dès lors que  $\Gamma$  est une surface de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$ .

**Théorème 4.2.1.** *Soient  $\Gamma = \mathcal{C}(0, R)$  le cercle de centres 0 et de rayon  $R$  et*

$$V = \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \langle \varphi, 1_{\Gamma} \rangle = 0\}^4$$

*le sous-espace des fonctions de moyenne nulle de  $H^{1/2}(\Gamma)$ , alors*

$$\Lambda_{\mathcal{S}_0} : V \rightarrow L^2(\Gamma)$$

*définit en (4.5) est un isomorphisme.*

3. utilisée dans [54] pour des problèmes de décomposition de domaine.

4. Pour les formulations du type Galerkin, le résidu pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  appartient à  $V$ .

*Démonstration.* Par construction, l'opérateur  $\Lambda_{S_0}$  est du type Fredholm et l'alternative de Fredholm peut être utilisée. Il suffit alors de montrer que  $\Lambda_{S_0}$  est injectif. Pour cela, on va montrer que la valeur propre 0 est associée à un unique sous-espace propre qui est celui des fonctions constantes sur  $\Gamma$ .

Les fonctions propres sont les  $\varphi_n = e^{in\theta}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . En appliquant  $\Lambda_{S_0}$ ,

$$\begin{aligned} \Lambda_{S_0} \varphi_n &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial \theta_x} \int_{\Gamma} \sqrt{R} ((\cos(\theta) - \cos(\theta_x))^2 + (\sin(\theta) - \sin(\theta_x))^2)^{1/4} \frac{\partial e^{in\theta}}{\partial \theta} R d\theta, \\ &= -\frac{2R^{3/2}n^2}{\sqrt{\pi}} e^{in\theta_x} I_n \end{aligned}$$

où on a posé

$$I_n = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \left| \sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \right|} e^{in\tilde{\theta}} d\tilde{\theta} \quad \text{en posant } \tilde{\theta} = \theta - \theta_x.$$

Les valeurs propres  $(\lambda_n)_n$  de  $\Lambda_{S_0}$  sur  $\mathcal{C}(0, R)$  sont donc les

$$\lambda_n = -\frac{2R^{3/2}n^2}{\sqrt{\pi}} I_n.$$

On va alors prouver que  $\forall n \geq 1$ ,  $I_n < 0$ . La parité de l'intégrande dans  $I_n$  est telle que

$$I_n = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2 \left| \sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \right|} \cos(n\tilde{\theta}) d\tilde{\theta}.$$

Considérons une fonction  $f(t)$ ,  $t \in [0, \pi]$  continue, croissante et concave et

$$I_n(f) = \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt.$$

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_n(f) &= -\frac{1}{n} \int_0^{\pi} f'(t) \sin(nt) dt, \\ &= -\frac{1}{n^2} \int_0^{n\pi} f'\left(\frac{t}{n}\right) \sin(t) dt, \\ &= -\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f'\left(\frac{t}{n}\right) \sin(t) dt, \\ &= -\frac{1}{n^2} J_k. \end{aligned}$$

Pour  $n = 1$ , on a clairement  $I_n(f) < 0$ . En fait, on a seulement besoin de vérifier que pour  $k \in [0, n-2]$  pair on a  $J_k + J_{k+1} \geq 0$ . On pose  $f'_{k+j} = f'\left(\frac{k+j}{n}\right)$ . On a

$$\begin{cases} J_k & \geq \int_{k\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi} f'_{k+\frac{1}{2}} \sin(t) dt + \int_{(k+\frac{1}{2})\pi}^{(k+1)\pi} f'_{k+1} \sin(t) dt, \\ J_{k+1} & \geq \int_{(k+1)\pi}^{(k+\frac{3}{2})\pi} f'_{k+1} \sin(t) dt + \int_{(k+\frac{3}{2})\pi}^{(k+2)\pi} f'_{k+\frac{3}{2}} \sin(t) dt. \end{cases}$$

et finalement

$$J_k + J_{k+1} \geq f'_{\frac{1}{2}} - f'_{\frac{3}{2}} \geq 0$$

avec inégalité stricte dès lors que  $f' \neq 0$ . Le cas  $f(t) = 2\sqrt{2\sin(\frac{t}{2})}$  vérifie les hypothèses sur  $f$ .

En conclusion,

$$I_n < 0 \Rightarrow \lambda_n > 0, \quad \forall n \geq 1.$$

La seule valeur propre nulle correspond au cas  $n = 0$ . □

On montre maintenant qu'on peut utiliser  $\Lambda_{S_0}$  pour définir un indicateur d'erreur fiable et efficace sur toute surface  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On utilise le fait qu'un changement de variable  $\mathcal{C}(0, R) \mapsto \Gamma$  correspond à perturber l'opérateur  $\Lambda_{S_0}$  sur le cercle par des opérateurs compacts.

**Théorème 4.2.2.** *Soit  $\Gamma$  un contour de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , l'espace fonctionnel  $V$  est tel que défini au théorème 4.2.1. Il existe un  $l_0$  tel que pour  $l \geq l_0$ , l'indicateur d'erreur a posteriori défini par*

$$\eta_{\Lambda_{S_0}} = \|\Lambda_{S_0} r_l\|_0$$

*est fiable, efficace, local et **asymptotiquement exact**.*

*Démonstration.* On décompose  $\Lambda_{S_0} = \Lambda_0 + K$  avec  $\Lambda_0$  un isomorphisme et  $K$  un opérateur compact. Soit  $r_l \in V$ ,

$$\|\Lambda_{S_0} r_l\|_0^2 = \langle (\Lambda_0^* \Lambda_0) r_l, r_l \rangle_{-1/2, 1/2} + \langle \tilde{K} r_l, r_l \rangle_{-1/2, 1/2}$$

où  $\tilde{K} = \Lambda_0^* K + K^* \Lambda_0 + K^* K$  est un opérateur compact. Par conséquent, il existe  $C_1, C_2 > 0$  telles que

$$\left| C_1 \|r_l\|_{1/2}^2 - \|\tilde{K} r_l\|_{-1/2} \|r_l\|_{1/2} \right| \leq \|\Lambda_{S_0} r_l\|_0^2 \leq C_2 \|r_l\|_{1/2}^2 + \|\tilde{K} r_l\|_{-1/2} \|r_l\|_{1/2}.$$

Le terme compact  $\|\tilde{K} r_l\|_{-1/2}$  converge plus rapidement que  $\|r_l\|_{1/2}$  lorsque  $l \rightarrow \infty$  (cf. lemme 3.2.2). Il suffit alors d'ajuster les constantes  $C_1$  et  $C_2$ .

L'exactitude asymptotique est un résultat de la méthode de construction. □

Le cadre de construction et la preuve de fiabilité/efficacité se font dans le cadre très restreint des surfaces de classe  $\mathcal{C}^\infty$ <sup>5</sup>. Néanmoins, et comme on le verra lors des validations numériques, ces propriétés semblent se généraliser à une surface lipschitzienne quelconque.

### Construction du $\Lambda$ sous forme intégrale – Cas 3D

On suppose maintenant que  $\Gamma$  est une surface  $\mathcal{C}^\infty$  plongée dans  $\mathbb{R}^3$ . On ré-applique la méthode utilisée pour obtenir (4.4).

**Proposition 4.2.1.** *L'opérateur  $\Lambda_{S_0}$  pour une surface  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dans  $\mathbb{R}^3$  est sous la forme*

$$\boxed{(\Lambda_{S_0} u)(x) = -0.1177 \text{ p.f. } \int_{\Gamma} \frac{u(y)}{|x-y|^{5/2}} d\gamma_y.} \quad (4.6)$$

5. Ce résultat peut être étendu à une surface  $\mathcal{C}^1$ , voir [54].

*Démonstration.* Les calculs sont effectués en partie à l'aide de Maple. Comme pour le cas 2D, on postule un symbole principal homogène de la forme

$$k_{-5/2}(x, z) = \frac{A}{|z|^{5/2}}$$

où  $A$  est une constante à déterminer. Ce postulat est encore tiré de [49], pp. 392–394. On recherche un opérateur d'ordre  $m = \frac{1}{2}$  sur une surface de dimension  $n = 2$  (puisque c'est une surface plongée dans  $\mathbb{R}^3$ ). Le degré d'homogénéité du noyau est alors donné par  $\kappa = -m - n = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$ . On calcule alors

$$I = A \text{ p.f. } \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i(\xi \cdot z)}}{|z|^{5/2}} dz.$$

En passant en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} I &= A \text{ p.f. } \int_{\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]} \frac{\cos(r\xi \cos(\theta))}{r^{3/2}} dr d\theta, \\ &= A \left[ -\frac{2 \cos(r\xi \cos(\theta))}{\sqrt{r}} - 2\xi \cos(\theta) \sqrt{2\pi} \text{FresnelS}\left(\frac{\sqrt{2\xi \cos(\theta)r}}{\sqrt{\pi}}\right) \right]_{\varepsilon}^{\infty}. \end{aligned}$$

avec  $\text{FresnelS}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$ .

En conservant la partie finie et en utilisant  $\text{FresnelS}(0) = 0$  et  $\text{FresnelS}(\infty) = \frac{1}{2}$ , on a

$$I = -A \sqrt{2 \cos(\theta) \xi \pi}$$

En calculant  $\int_0^\pi \sqrt{\cos(\theta)} d\theta$ , on trouve  $A = -0.1177 \dots$  □

On peut faire plusieurs remarques.

**Remarque 4.2.1.** *L'opérateur  $\Lambda_{S_0}$  se présente, comme en 2D, sous la forme d'une partie finie. On peut transformer l'intégrale en une intégrale classique en intégrant par parties avec les mêmes conséquences qu'en 2D.*

**Remarque 4.2.2.** *En supposant qu'on ait réduit la singularité selon la remarque précédente, il reste tout de même une singularité en  $\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}$  à intégrer. Cela suppose de mettre en place des routines d'intégration spécifiques pour sa prise en compte.*

**Remarque 4.2.3.** *L'utilisation de cet opérateur sous forme discrète suppose, à un moment, d'effectuer un produit matrice-vecteur plein. Pour utiliser l'indicateur  $\eta_\Lambda$  résultant, il faut alors payer le prix d'un assemblage plein puis d'un produit matrice-vecteur plein. Si ce dernier ne peut pas être accéléré, les coûts d'implémentation et d'utilisation de cet opérateur peuvent devenir rapidement prohibitifs. Ces effets sont démultipliés lorsqu'on passe du 2D au 3D.*

La forme intégrale semble mal se prêter à une utilisation sur des surfaces 3D et on propose en partie 4.3 une construction alternative de  $\Lambda_{S_0}$ .

### Troncature de l'indicateur $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ sous forme intégrale

On a vu précédemment que l'utilisation de l'opérateur  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  sous forme intégrale implique la manipulation d'une matrice pleine ce qui est vite très coûteux. On se demande donc si il n'existe pas un moyen de réduire le coût de calcul de l'indicateur en "fournissant moins d'information" à  $\Lambda_{S_0}$  mais en faisant en sorte que l'information manquante correspond à des termes plus réguliers, donc d'ordre élevé, par rapport à la partie principale. Considérons un élément  $\tau \in \mathcal{T}_h$ . On a

$$\Lambda_{S_0} r_h(x) = \int_{\Gamma} k(x, y) r_h(y) d\gamma_y, \quad \forall x \in \tau.$$

On peut décomposer l'intégrale sur  $\Gamma$  en une partie proche de  $\tau$  et une partie "lointaine". Soit  $\omega_\tau$  le patch des éléments du maillage ayant au moins un nœuds commun avec  $\tau$  (voir 4.1 figure patch!). On introduit une fonction  $\psi_\tau$  de cut-off lipschitzienne telle que  $\psi_\tau(x) = 1$  pour tout  $x \in \tau$  et  $\psi_\tau(x) = 0$  pour tout  $x \in \partial\omega_\tau$ . Ensuite,

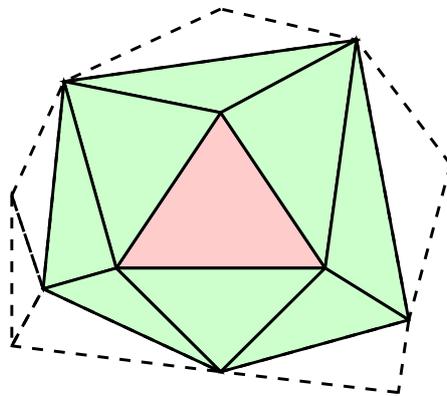


FIGURE 4.1 – Élément  $\tau$  (rouge, au centre) et son patch  $\omega_\tau$  (rouge + vert, trait épais)

$$\begin{aligned} \Lambda_{S_0} r_h(x) &= \int_{\Gamma} k(x, y) \psi_\tau(y) r_h(y) d\gamma_y + \int_{\Gamma} k(x, y) (1 - \psi_\tau(y)) r_h(y) d\gamma_y, \\ &= \int_{\Gamma} k(x, y) \psi_\tau(y) r_h(y) d\gamma_y + \text{ordre élevé}, \quad \forall x \in \tau, \end{aligned}$$

car le noyau  $k(x, y) (1 - \omega_\tau(y))$  est régulier donc l'opérateur correspondant est régularisant <sup>6</sup>. On **propose** alors l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{S_0}}^t$  tronqué tel que la valeur de l'indicateur sur  $\tau$  est

$$\boxed{\eta_{\Lambda_{S_0}, \tau}^t = \|\Lambda_{S_0}(\psi_\tau r_h)\|_{0, \tau}}. \quad (4.7)$$

Cet indicateur tronqué reste asymptotiquement exact par construction. On renvoie au chapitre 5 suivant pour la preuve de son efficacité numérique.

#### 4.2.2 Forme intégrale du $\Lambda$ pour l'équation $\mathcal{N}_{k_w}$

On construit ici l'opérateur  $\Lambda$  associé à  $\mathcal{A}_0 \equiv \mathcal{N}_0$  sous forme intégrale.

6. On peut envisager une troncature plus large, englobant plus d'éléments du voisinage de  $\tau$ . Intuitivement, cela revient à récupérer plus d'information sur la valeur de l'erreur. Cependant, une troncature sur le patch  $\omega_\tau$  suffit pour faire apparaître des termes compacts.

**Construction du  $\Lambda$  associé à  $\mathcal{N}_0$  sous forme intégrale – Cas 2D**

On suppose toujours que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Le calcul symbolique donne

$$\sigma_{\mathcal{N}_0,1}^0(x, \xi) = \frac{|\xi|}{2}.$$

On en déduit alors

$$\sigma_{\Lambda_{\mathcal{N}_0,-1/2}}^0(x, \xi) = \sqrt{\frac{2}{|\xi|}}.$$

Cette fois-ci, le calcul symbole  $\rightarrow$  noyau est aisé. En utilisant la formule (7.1.39) dans [49],

$$\begin{aligned} k(x, z) &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi z}}{\sqrt{|\xi|}} d\xi, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-iz} \sqrt{\xi})}{\sqrt{-iz}} + \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{iz} \sqrt{-\xi})}{\sqrt{iz}} \right), \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Re\left(\frac{1}{\sqrt{iz}}\right), \\ &= \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{|z|}{2}} \frac{1}{|z|}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{|z|}}. \end{aligned}$$

On a ainsi un candidat pour le noyau de  $\Lambda_{\mathcal{N}_0}$ .

**Proposition 4.2.2.** *Soit  $\Gamma$  un contour de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , l'opérateur définit par*

$$(\Lambda_{\mathcal{N}_0} u)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} \frac{u(y)}{\sqrt{|x-y|}} d\gamma_y \quad (4.8)$$

est continu de  $H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ .

**Remarque 4.2.4.** *La singularité en  $\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}$  est intégrable. On n'a donc pas besoin de l'affaiblir comme pour  $\Lambda_{\mathcal{S}_0}$ .*

**L'opérateur  $\Lambda_{\mathcal{N}_0}$  définit un indicateur d'erreur *a posteriori* fiable et efficace**

On peut effectuer exactement la même analyse qu'en partie 4.2.1. On a directement les résultats suivant.

**Théorème 4.2.3.** *Soit  $\Gamma = \mathcal{C}(0, R)$  le cercle centré en 0 et de rayon  $R$ , alors*

$$\Lambda_{\mathcal{N}_0} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* Voir la preuve du théorème 4.2.1. □

Dans le même esprit, on peut généraliser à un contour de classe  $\mathcal{C}^\infty$  quelconque.

**Théorème 4.2.4.** Soit  $\Gamma$  un contour quelconque de classe  $C^\infty$ , il existe un  $l_0$  tel que  $\forall l \geq l_0$ , l'indicateur d'erreur a posteriori défini par

$$\eta_{\mathcal{N}_0} = \|\Lambda_{\mathcal{N}_0} r_l\|_0$$

est fiable, efficace, local et **asymptotiquement exact**.

*Démonstration.* Voir la preuve du théorème 4.2.2. □

### Construction du $\Lambda$ associé au $\mathcal{N}_0$ sous forme intégrale – Cas 3D

Si on suppose que  $\Gamma$  est une surface  $C^\infty$  plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , on obtient encore une forme intégrale.

**Proposition 4.2.3.** L'opérateur  $\Lambda_{\mathcal{N}_0}$  pour une surface  $\Gamma$  de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^3$  est sous la forme

$$\boxed{(\Lambda_{\mathcal{N}_0} u)(x) = 0.05379 \int_{\Gamma} \frac{u(y)}{|x-y|^{3/2}} d\gamma_y.} \quad (4.9)$$

*Démonstration.* Les calculs sont effectués en partie avec Maple. On procède similairement au cas  $\mathcal{N}_{k_w}$ . On postule un symbole principal homogène de la forme

$$k_{-3/2}(x, z) = \frac{A}{|z|^{3/2}}.$$

On calcule alors

$$I = A p.f. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\xi \cdot z}}{|z|^{3/2}}.$$

En passant en coordonnées polaires, on se ramène à

$$I = A \sqrt{\frac{2}{|\xi|}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\cos(\theta)}} d\theta.$$

L'évaluation de  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)}}$  donne le résultat. □

**Remarque 4.2.5.** L'intégrale de la proposition 4.2.3 est bien définie.

Comme pour  $\Lambda_{\mathcal{S}_0}$ , l'application d'un opérateur intégral se prête mal à des calculs 3D à cause du coût de calcul.

### Troncature de l'indicateur $\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0}}$ sous forme intégrale

Similairement à  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{S}_0, \tau}}^t$ , et en utilisant les mêmes arguments, on propose une version tronquée de  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0}}$  sous la forme

$$\boxed{\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0, \tau}}^t = \|\Lambda_{\mathcal{N}_0}(\psi_\tau r_h)\|_{0, \tau}.} \quad (4.10)$$

Cet indicateur reste asymptotiquement exact par construction.

### 4.2.3 Conclusion sur la construction de l'indicateur- $\Lambda$ pour l'acoustique

Pour chaque problème  $\mathcal{S}_{k_w}/\mathcal{N}_{k_w}$  en 2D ou 3D, on a construit un opérateur  $\Lambda_{\mathcal{S}_0/\mathcal{N}_0}$  candidat pour être utilisé comme opérateur de localisation dans le cadre de l'estimation- $\Lambda$ . La détermination des candidats en utilisant des méthodes d'analyse micro-locale suppose que la surface  $\Gamma$  est très régulière (de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ). Sous cette condition, le candidat permet d'en déduire un indicateur d'erreur fiable, efficace, local et asymptotiquement exact. On ne peut malheureusement (pour l'instant) rien dire lorsque  $\Gamma$  est une surface lipschitzienne quelconque. Néanmoins, il semble que ces résultats restent valables ce qu'on vérifie numériquement au chapitre 5.

Par ailleurs, si la complexité de mise en œuvre des indicateurs reste raisonnable en 2D, elle explose en 3D et dans ce cas, la forme intégrale perd définitivement son intérêt.

Dans la section suivante, on propose une construction alternative basée sur le calcul de puissances fractionnaires d'opérateurs différentiels classiques.

## 4.3 Construction de l'opérateur $\Lambda$ comme puissance d'un opérateur différentiel classique

On a proposé en 4.2 des candidats pour un opérateur  $\Lambda$  utilisable dans le cadre de l'indicateur d'erreur défini au théorème 4.1.1. Les propriétés intéressantes (fiabilité, efficacité, exactitude asymptotique) n'ont été démontrées que dans le cadre de surfaces très régulières. Un autre désavantage de ces candidats est que la forme intégrale peut s'avérer complexe à mettre en œuvre et coûteuse en pratique.

Par conséquent, on propose ici une autre approche pour la construction de  $\Lambda_{\mathcal{S}_0/\mathcal{N}_0}$  qui présente l'avantage d'être plus simple et moins coûteuse.

### 4.3.1 Construction de l'opérateur $\Lambda$ comme puissances d'opérateurs conventionnels

On introduit ici l'idée **initiale** qui a mené à ce concept. Pour cela, on va encore considérer quelques instants que  $\Gamma$  est une surface de classe  $\mathcal{C}^\infty$  plongée dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  afin de pouvoir réutiliser le concept de symbole principal homogène. On suppose également que  $\Gamma$  est une surface fermée.

On part alors du résultat simple suivant : si on pose  $\Delta_\Gamma$  l'opérateur Laplacien-Beltrami, on a

$$\sigma_{-\Delta,2}^0(x, \xi) = |\xi|^2. \quad (4.11)$$

Par conséquent, un opérateur  $\Lambda$  quelconque de symbole principal homogène

$$\sigma_{\Lambda,s}^0(x, \xi) = |\xi|^{2s}, \quad s \in \mathbb{R}$$

est une *puissance approchée* de l'opérateur  $-\Delta_\Gamma$  à des termes régularisants près.

On s'intéresse pour l'instant au cas du  $\Lambda_{\mathcal{S}_0}$ . Un bon candidat semble alors être, d'après (4.3),

$$\Lambda_{\mathcal{S}_0} = \sqrt{2} (-\Delta_\Gamma)^{\frac{1}{4}}.$$

On souhaite pouvoir utiliser simplement le théorème 4.1.1 or  $(-\Delta_\Gamma)^{1/4}$  n'est pas un isomorphisme de  $H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ .

Par conséquent, on s'intéresse plutôt à un opérateur de la forme

$$\boxed{\Lambda = (\mathcal{I} - \Delta_\Gamma)^{s/2}}. \quad (4.12)$$

où  $\mathcal{I}$  est l'opérateur identité. On a alors le théorème suivant.

**Théorème 4.3.1** (Gesztesy, thm. 1.1–(2)–(v) [43]). *Soit  $\Gamma$  une surface lipschitzienne fermée et compacte,  $s, r \in [0, 1]$ , alors*

$$(\mathcal{I} - \Delta)^{r/2} : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-r}(\Gamma)$$

est un isomorphisme borné d'inverse

$$(\mathcal{I} - \Delta)^{-r/2} : H^{s-r}(\Gamma) \rightarrow H^s(\Gamma).$$

Ce résultat permet alors de lever la condition de régularité sur  $\Gamma$ . On peut ainsi donner des candidats généraux pour  $\Lambda_{\mathcal{S}_0}$  et  $\Lambda_{\mathcal{N}_0}$ .

**Théorème 4.3.2** (Indicateur- $\Lambda$  sur surface Lipschitzienne). *Soit  $\Gamma$  une surface fermée lipschitzienne et compacte, on pose*

$$\boxed{\Lambda_{\mathcal{S}_0} = \sqrt{2}(\mathcal{I} - \Delta_\Gamma)^{\frac{1}{4}}} \quad (4.13)$$

et

$$\boxed{\Lambda_{\mathcal{N}_0} = \sqrt{2}(\mathcal{I} - \Delta_\Gamma)^{-\frac{1}{4}}}. \quad (4.14)$$

Les indicateurs a posteriori définis par

— pour l'équation relative à  $\mathcal{S}_{k_w}$ ,

$$\eta_{\Lambda_{\mathcal{S}_0}} = \|\Lambda_{\mathcal{S}_0} r_l\|_0, \quad (4.15)$$

— pour l'équation relative à  $\mathcal{N}_{k_w}$ ,

$$\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0}} = \|\Lambda_{\mathcal{N}_0} r_l\|_0, \quad (4.16)$$

sont fiables, efficaces, locaux.

Si de plus  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , alors ils sont asymptotiquement exacts.

*Démonstration.* Il suffit que  $\Lambda_{\mathcal{S}_0}$  et  $\Lambda_{\mathcal{N}_0}$  vérifient les hypothèses du théorème 4.3.1.

C'est le cas pour  $\Lambda_{\mathcal{S}_0}$  avec  $s = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{4}$ .

C'est le cas pour  $\Lambda_{\mathcal{N}_0}$  avec  $s = -\frac{1}{2}, r = -\frac{1}{4}$ .

Le théorème 4.1.1 assure fiabilité, efficacité et localité. L'exactitude asymptotique dans le cas où  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  provient de la méthode de construction basée sur le symbole principal homogène.  $\square$

**Remarque 4.3.1.** *Comme pour la forme intégrale, on ne peut rien dire a priori sur le caractère "asymptotiquement exact" de  $\Lambda_{\mathcal{S}_0/\mathcal{N}_0}$ . Néanmoins, les surfaces des objets considérés ont généralement des singularités localisées (points, arêtes) et sont en quelque sorte  $\mathcal{C}^\infty$  "presque partout". Une analyse de type microlocale (non effectuée dans cette thèse) en utilisant la transformation de Mellin montrerait que les opérateurs  $\Lambda$  choisis agissent correctement presque partout. On s'attend donc à voir numériquement que le caractère "asymptotiquement exact" ne soit pas, ou très peu, modifié par la présence de ces singularités.*

**Remarque 4.3.2.** *Les opérateurs de la forme  $(\mathcal{I} - \Delta)^{r/2}$  possèdent les mêmes espaces propres que  $\mathcal{I} - \Delta$ . En conséquence, lorsqu'on s'intéresse aux formulations faibles pour  $\Lambda_{\mathcal{S}_0/\mathcal{N}_0}$ , et plus particulièrement dans le cas de surfaces ouvertes, on pourra prendre les mêmes espaces de test.*

### 4.3.2 Conclusion sur les opérateurs $\Lambda$ comme puissance d'opérateurs conventionnels

On a proposé une seconde manière de déterminer des candidats pour les opérateurs utilisables pour les indicateurs  $\eta_\Lambda$ . Le principal avantage est que les propriétés de l'opérateur sont valables pour une surface lipschitzienne quelconque et la forme faible du théorème 4.1.1 suffit ! De plus, on conserve théoriquement l'exactitude asymptotique lorsque  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  avec une justification empirique lorsque  $\Gamma$  est lipschitzienne.

Un avantage certain est encore que les opérateurs  $\mathcal{I}$  et  $-\Delta$  sont faciles à assembler. Il faut alors trouver un moyen efficace de calculer  $(\mathcal{I} - \Delta)^{\pm\frac{1}{4}}$ <sup>7</sup>.

## 4.4 Conclusion sur l'indicateur *a posteriori* basé sur un opérateur $\Lambda$

Dans ce chapitre, on a introduit une nouvelle classe d'indicateurs *a posteriori* fiables, efficaces, locaux, et potentiellement asymptotiquement exacts. Ils sont basés sur l'application d'un opérateur  $\Lambda$  bien choisi au résidu. Le cas le plus agréable est alors celui où  $\Lambda$  est un isomorphisme. On a ensuite proposé deux manières de construire  $\Lambda$  pour les équations associées à  $\mathcal{S}_{k_w}$  ou à  $\mathcal{N}_{k_w}$ . La première n'est *a priori* complètement rigoureuse que dans le cas où la surface  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et se présente sous la forme d'un opérateur intégral. Cela peut rendre son utilisation très coûteuse, surtout en 3D. On a alors proposé, dans la section 4.2, une seconde méthode où  $\Lambda$  se présente sous la forme d'une puissance d'un opérateur différentiel classique pour lequel on sait que c'est un isomorphisme. On montre numériquement en 5 qu'elles produisent le même résultat.

Le principe de l'indicateur  $\eta_\Lambda$  et les méthodes mises en œuvre pour la construction de l'opérateur  $\Lambda$  ne sont pas spécifiquement reliées à une équation, une dimension d'espace de propagation, et peuvent s'étendre à d'autres domaines. On trouve déjà les mêmes idées dans le cas des pré-conditionneurs analytiques pour lesquels on s'attache plutôt à obtenir un inverse approché se calculant rapidement de l'opérateur qui a été inversé.

Au chapitre suivant, on effectue la validation numérique des différents indicateurs introduits pour l'acoustique. On donne des exemples en 2D et en 3D. En particulier, on montre numériquement que les deux formes des opérateurs  $\Lambda$  sont équivalentes et que les indicateurs *a posteriori* correspondant convergent optimalement. On effectue également des simulations sur des surfaces ouvertes en 2D.

---

7. On renvoie à 5.1.3.

# Chapitre 5

## Validation numérique des indicateurs a posteriori pour l'acoustique

On a étendu au chapitre 3 des indicateurs de la littérature, généralement introduits pour les opérateurs intégraux associés à l'équation de Laplace, au cas des opérateurs intégraux associés à l'équation de Helmholtz.

Au chapitre 4, on a introduit une nouvelle classe abstraite d'indicateurs a posteriori basée sur l'utilisation d'un opérateur de localisation  $\Lambda$ . On a alors construit les opérateurs  $\Lambda$  sous deux formes différentes pour les équations associées aux opérateurs intégraux  $\mathcal{S}_{k_w}$  et  $\mathcal{N}_{k_w}$ .

Dans ce chapitre, on valide numériquement les différents indicateurs relatifs aux opérateurs  $\mathcal{S}_{k_w}$  et  $\mathcal{N}_{k_w}$  en acoustique 2D et 3D. L'analyse effectuée aux chapitres 3 et 4 ne dépend pas de la dimension du domaine de propagation. Aussi, on se concentre sur les simulations en acoustique 2D et on ne se contente que de quelques cas particuliers en 3D.

Dans un premier temps, on évoque les techniques mises en œuvre pour l'implémentation des différents indicateurs. On donne en particuliers les avantages et les inconvénients pour chacune.

Dans un second temps, on effectue la validation en acoustique 2D. On présente les différentes géométries, leurs spécificités et leur pertinence vis-à-vis de la problématique de l'indication d'erreur *a posteriori*. On utilise en particulier des géométries singulières ou bien susceptible de générer des phénomènes de résonance. On modifie également le type de source. On vérifie la validité des extensions faites au chapitre 3 pour les indicateurs de la littérature. On se concentre particulièrement sur l'indicateur  $\Lambda$  du chapitre 4 dont la capacité à guider un algorithme de raffinement autoadaptatif est mise à l'épreuve dans des configurations variées.

Enfin, on présente quelques cas de validation pour un guidage par l'indicateur  $\eta_{\Lambda N_0}$  en 3D sur trois géométries de régularités différentes dont la sphère pour la validation de l'exactitude asymptotique.

### 5.1 Précisions sur l'implémentation des différents indicateurs d'erreur

On donne ici quelques précisions sur la manière dont les différents indicateurs ont été implémentés. Les indications données ici sont le résultat des différentes simulations qui ont été effectuées et qui ont menées à différentes techniques de calcul, notamment au niveau du résidu associé à l'équation du  $\mathcal{S}_{k_w}$ . Il est important de préciser les points clés du calcul des indicateurs car ils influencent directement la stabilité de la valeur de l'indicateur à problème fixé (maillage + nombre d'onde)!

On explique premièrement la manière dont sont calculés les indicateurs par reconstruction. On s'intéresse ensuite au calcul du résidu. On continue en précisant la manière dont sont

calculés les indicateurs  $\eta_\Lambda$ , que ce soit sous forme intégrale ou comme puissance d'un opérateur différentiel classique. Enfin, on donne la méthode utilisée pour estimer l'erreur exacte pour une géométrie quelconque.

### 5.1.1 Implémentation des indicateurs par reconstruction

On présente ici l'implémentation des indicateurs par reconstruction  $\eta_\Pi$ .

Comme évoqué en 3.3.2, les indicateurs basés sur une reconstruction d'espace nécessitent deux maillages. Le premier  $\mathcal{T}_H$  est le maillage sur lequel l'indicateur est calculé alors que le second  $\mathcal{T}_h$ , le maillage de résolution du problème de Galerkin, est obtenu par raffinement uniforme de  $\mathcal{T}_H$ . Dans notre cas, on se limitera à un seul degré de raffinement qu'on s'intéresse à l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  ou bien  $\mathcal{N}_{k_w}$ . De plus, il est nécessaire que les maillages soient emboîtés les uns dans les autres<sup>1</sup>, i.e.  $\mathcal{T}_H \subset \mathcal{T}_h$ . Cela implique que le maillage raffiné n'est pas re-projeté sur la géométrie réelle lorsque celle-ci est courbe.

On considère les deux projecteurs évoqués en 3.3.2, à savoir la projection  $L^2$  "classique"  $\Pi \equiv \Pi_{L^2}$  ainsi que la projection de Galerkin  $\Pi \equiv \Pi_G$ . La projection  $L^2$  d'un  $u \in L^2(\Gamma)$  sur un espace  $V \subset L^2(\Gamma)$  qu'on note  $\Pi u$  est telle que

$$(v, \Pi u) = (v, u) \quad \forall v \in V.$$

Dans le cadre de notre indicateur, elle s'exprime plus précisément : soit  $u_h \in \mathcal{P}^k(\mathcal{T}_h)$ , la projection  $L^2$  de  $u_h$  notée  $\Pi_H u_h$  sur  $\mathcal{P}^{k'}(\mathcal{T}_H)$  est telle que

$$(v_H, \Pi_H u_h) = (v_H, u_h) \quad \forall v_H \in \mathcal{P}^{k'}(\mathcal{T}_H). \quad (5.1)$$

La matrice de projection n'est qu'une matrice de masse  $L^2$  classique et est **très creuse**! Le projecteur  $L^2$  est donc le candidat idéal en terme de rapidité. La projection de Galerkin associée à un opérateur *coercif*  $\mathcal{A}_0$  s'exprime de la même manière, i.e.

$$\langle \mathcal{A}_0 v_H, \Pi_H u_h \rangle = \langle \mathcal{A}_0 v_H, u_h \rangle \quad \forall v_H \in \mathcal{P}^{k'}(\mathcal{T}_H). \quad (5.2)$$

Par définition, elle minimise la norme associée à  $\mathcal{A}_0$ , soit la norme  $\|\cdot\|$ . Il faut alors prendre quelques précautions pour le choix de  $\mathcal{A}_0$  :

- dans le cas de l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ , il n'y a aucun problème puisque l'opérateur  $\mathcal{S}_0$  est coercif sur  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .
- dans le cas de l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$ , et en reprenant "sans précautions" la forme bilinéaire associée pour  $k_w = 0$ , il vient

$$\langle \mathcal{N}_0 v, v \rangle = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} v(x) G_0(x, y) \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} v(y) d\gamma_y d\gamma_x.$$

Clairement, elle n'est pas coercive puisque les fonctions constantes l'annulent. Par conséquent, on la complète par un terme du type  $\mathcal{S}_0$  et on prend alors  $\mathcal{N}_0$  telle que

$$\langle \mathcal{N}_0 v, v \rangle = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left( \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} v(x) G_0(x, y) \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} v(y) + v(x) G_0(x, y) v(y) \right) d\gamma_y d\gamma_x. \quad (5.3)$$

Dans ce cas,  $\mathcal{N}_0$  permet bien de définir une **norme** et un **projecteur**! L'algorithme pour le calcul est donné sur la FIGURE 5.1.

### 5.1.2 Implémentation des indicateurs "résidu classique"

On présente ici l'implémentation des indicateurs résidus pour les équations  $\mathcal{S}_{k_w}$  et  $\mathcal{N}_{k_w}$ .

1. C'est une conséquence de la construction de l'indicateur, voir section 3.3.2.

### Implémentation de l'indicateur résidu pour l'équation $\mathcal{S}_{k_w}$

On doit calculer  $\eta_{r_h} = \|h^{1/2}\nabla_{\Gamma}r_h\|_0$ . Une première approche, simple à mettre en œuvre est de projeter  $r_h$  sur un espace polynomial d'ordre supérieur. En particulier,  $u_h \in \mathcal{P}^k(\mathcal{T}_h)$  implique qu'on projette  $r_h \in \mathcal{P}^{k'}(\mathcal{T}_h)$ ,  $k' > k$ . On calcule ensuite le gradient en dérivant les fonctions de base. En pratique, c'est une mauvaise méthode car il faut généralement interpoler  $u_h$  sur un maillage plusieurs fois raffinés à partir de  $\mathcal{T}_h$ , typiquement on interpole sur un  $\mathcal{T}_{\frac{h}{8}}$ . C'est très coûteux.

On peut en fait classiquement calculer  $\nabla_{\Gamma}r_h$  en décomposant le noyau en une partie continue et une partie analytique. L'indicateur se calcule alors directement à l'aide d'une quadrature numérique.

### Implémentation de l'indicateur résidu pour l'équation $\mathcal{N}_{k_w}$

Cet indicateur  $\eta_{r_h} = \|h^{1/2}r_h\|_0$  ne présente *a priori* comme seule difficulté d'implémentation "que" le calcul du résidu. Malheureusement, on ne peut pas appliquer ici directement l'opérateur  $\mathcal{N}_{k_w}$  à la solution numérique. En effet, cela nécessite le calcul d'une intégrale hyper-singulière, ce qui n'est pas possible. La solution la plus simple est de repartir de la formulation variationnelle. Le résidu est, par définition, "orthogonal" par rapport à l'espace d'approximation dans le sans où

$$\langle \mathcal{N}_{k_w}r_h, v_h \rangle = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

où  $V_h$  étant l'espace d'approximation/de test. L'idée est alors de tester par des fonctions appartenant à un espace  $W_h$  plus riche au sens de  $V_h \subset W_h$ . Typiquement, pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$ , on a

$$V_h = \mathcal{P}^1(\mathcal{T}_h) \quad \text{et} \quad W_h = \mathcal{P}^2(\mathcal{T}_h).$$

On pose  $\mathbf{N}_{21}$  la matrice associée à la formulation variationnelle pour laquelle l'espace d'approximation/de test est  $\mathcal{P}^1(\mathcal{T}_h)/\mathcal{P}^2(\mathcal{T}_h)$ ,  $\mathbf{F}_2$  le second membre testé par  $W_h$  et  $\mathbf{M}_{22}$  la matrice de masse  $L^2$  associée à  $\mathcal{P}^2(\mathcal{T}_h)$ . On utilise l'approximation  $\mathcal{P}^2(\mathcal{T}_h)$  suivante du résidu

$$\boxed{\mathbf{R}_h = \mathbf{M}_{22}^{-1}(\mathbf{F}_2 - \mathbf{N}_{21}\mathbf{u}_h)}. \quad (5.4)$$

Ce n'est en fait qu'une *projection*  $L^2$  du résidu sur  $\mathcal{P}^2(\mathcal{T}_h)$ . Le calcul de l'indicateur est ensuite immédiat.

On peut se poser la question de la valeur de l'approximation : des essais numériques sur des géométries régulières ou non montrent que la valeur de l'indicateur varie très peu si on décide de raffiner le maillage d'approximation du résidu. On décide de rester sur le maillage de résolution.

Le calcul du résidu peut malgré tout être coûteux puisqu'il faut assembler une seconde matrice pleine. Le produit matrice–vecteur peut éventuellement être accéléré par une méthode rapide comme la FMM<sup>2</sup>. L'inversion de  $\mathbf{M}_{22}$  est rapide et peut être faite directement car la matrice est très creuse!

2. C'est même la seule option envisageable quand le nombre de degrés de libertés augmente...

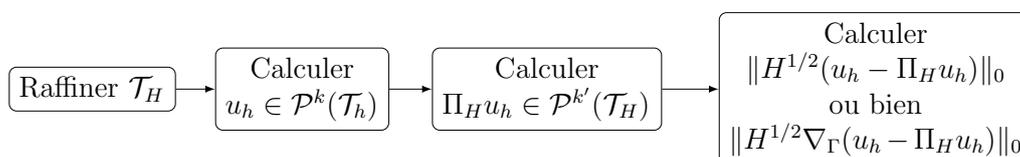
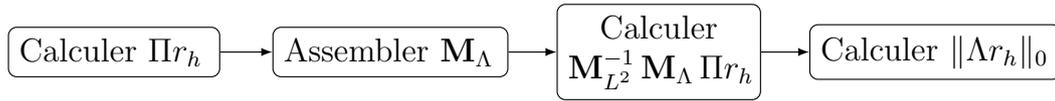


FIGURE 5.1 – Algorithme pour le calcul de l'indicateur par reconstruction


 FIGURE 5.2 – Algorithme pour le calcul de l'indicateur  $\eta_\Lambda$  quand  $\Lambda$  est sous forme intégrale.

### 5.1.3 Implémentation des indicateurs $\Lambda$

La principale difficulté des indicateurs  $\eta_\Lambda$  est de trouver un moyen d'appliquer l'opérateur  $\Lambda$  associé. On présente les méthodes pour les cas où  $\Lambda$  est sous forme intégrale (simulations 2D exclusivement !) ou sous forme de puissance d'opérateur (cas général).

#### Opérateur $\Lambda$ sous forme intégrale – 2D

Dans le cas où l'opérateur  $\Lambda$  est donné sous forme intégrale, la méthode la plus simple est d'assembler la matrice de la formulation variationnelle correspondante. On commence par calculer une approximation du résidu sous la forme d'une projection  $L^2$  sur un espace polynomial d'ordre plus élevé  $\mathcal{P}^{k'}(\mathcal{T}_h)$  que celui de l'espace de résolution  $\mathcal{P}^k(\mathcal{T}_h)$ . On assemble ensuite la matrice de la formulation variationnelle associée à  $\Lambda$ . On calcule un simple produit matrice–vecteur. Finalement, on multiplie par l'inverse de la masse  $L^2$   $\mathbf{M}_{L^2}$  associée à l'espace de projection. La séquence de calcul est résumée sur la FIGURE 5.2. Il faut néanmoins apporter quelques précisions selon qu'on s'intéresse à  $\Lambda_{\mathcal{S}_0}$  ou bien  $\Lambda_{\mathcal{N}_0}$ .

**$\Lambda$  intégral – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  On cherche à calculer la double intégrale non-singulière

$$I_{\tau_1, \tau_2} = \int_{\tau_1 \in \Gamma} \int_{\tau_2 \in \Gamma} \nabla_\Gamma v_h \sqrt{|x - y|} \nabla_\Gamma r_h d\gamma_x d\gamma_y$$

où  $v_h$  et  $r_h$  sont des fonctions polynomiales. Dans le cas où  $\tau_1 = \tau_2$ , on utilise une formule analytique. Si  $\tau_1 \neq \tau_2$ , on utilise une méthode de quadrature classique.

On constate numériquement que si on se contente d'effectuer la projection du résidu sur  $\mathcal{P}^{k'}(\mathcal{T}_h)$ , la valeur de l'indicateur  $\eta_\Lambda$  n'est pas bonne au sens qu'elle ne correspond pas à la solution exacte. Dans ce choix d'implémentation, il faut en fait projeter le résidu sur un maillage raffiné uniformément tel que  $\Pi u_h \in \mathcal{P}^{k'}(\mathcal{T}_{\frac{h}{8}})$ . Cela vient du fait que la projection du résidu ne permet pas de restituer correctement son comportement. On applique de même l'opérateur sur ce même maillage raffiné.

**$\Lambda$  intégral – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  On cherche à calculer la double intégrale faiblement singulière

$$I_{\tau_1, \tau_2} = \int_{\tau_1 \in \Gamma} \int_{\tau_2 \in \Gamma} \frac{v_h(x) r_h(y)}{\sqrt{|x - y|}} d\gamma_x d\gamma_y$$

où  $v_h$  et  $r_h$  sont des fonctions polynomiales. Dans le cas où  $\tau_1 = \tau_2$ , on utilise une formule analytique. Dans le cas contraire, et ce **bien que l'intégrale soit singulière**, on utilise une méthode de quadrature classique suffisamment riche pour "stabiliser" la valeur de l'indicateur. Au contraire du cas  $\mathcal{S}_{k_w}$ , il n'est pas nécessaire de raffiner le maillage de projection.

#### Opérateur $\Lambda$ comme puissance d'opérateurs différentiels classiques – 2D et 3D

Le problème ici se présente sous la forme générale : calculer

$$\Lambda r_h = (\mathcal{I} - \Delta)^\alpha r_h, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

En ce qui concerne le résidu, on effectue la même projection que pour le cas de la forme intégrale (avec raffinement du maillage quand il est nécessaire!). Il faut ensuite appliquer l'opérateur à cette projection.

On considère une première approche (brutale) qui consiste à assembler la matrice  $\mathbf{l}$  de la forme bilinéaire

$$l(v_h, u_h) = \langle (\mathcal{I} - \Delta) v_h, u_h \rangle, \quad u_h, v_h \in V_h.$$

En posant encore  $\mathbf{M}_{L^2}$  la matrice de masse  $L^2$  associée à l'espace de projection, la matrice de l'opérateur discrétisé  $\mathcal{I} - \Delta$  est

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_{L^2}^{-1} \mathbf{l}.$$

Finalement, la matrice de l'opérateur  $\Lambda$  discrétisé est

$$\boxed{\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{M}_{L^2}^{-1} \mathbf{l})^\alpha}.$$

Toute la difficulté est concentrée dans le calcul d'une puissance de matrice. Les techniques les plus courantes sont

- le calcul direct : on effectue un changement de base pour exprimer  $\mathbf{\Lambda}$  dans la base des vecteurs propres où elle est diagonale, notée  $\mathbf{\Lambda}'$ . On pose  $\mathbf{P}$  la matrice de changement de base de la base canonique à la base des vecteurs propres. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}' \mathbf{P}^T, \\ \mathbf{\Lambda} &= \mathbf{P} (\mathbf{\Lambda}')^\alpha \mathbf{P}^T \end{aligned}$$

où  $(\mathbf{\Lambda}')^\alpha$  correspond à la matrice diagonale dont les termes sont les puissances  $\alpha$ -ièmes des termes de  $\mathbf{\Lambda}'$ . C'est une méthode coûteuse car elle nécessite le calcul de toutes les valeurs propres et les vecteurs propres associés. L'avantage principal est qu'on obtient alors *exactement*  $\mathbf{\Lambda}$ .

- les algorithmes itératifs. On ne donne pas d'exemple ici, mais ils sont généralement basés sur une décomposition  $LU$  de  $\mathbf{L}$  et des produits matrice-matrice. En plus du coût de la décomposition  $LU$ , on prend le risque de générer des matrices pleines. Cette classe de méthodes n'est donc pas non plus adaptée pour notre cadre d'utilisation où les problèmes discrets ont plusieurs dizaines/centaines de milliers de degrés de liberté.

On utilise préférentiellement l'algorithme proposé dans [46], Method 2. Il est basé sur la formule intégrale de Cauchy pour les fonctions holomorphes

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz.$$

On utilise une quadrature adaptée afin de calculer

$$f(\mathbf{L}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(z) (z\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} dz \quad (5.5)$$

avec dans notre cas  $f(z) = z^\alpha$ .

Le calcul de la quadrature nécessite une estimation des valeurs propres minimum et maximum de  $\mathbf{L}$ . La valeur propre maximum peut être estimée par une méthode itérative du type *power iteration* [47]. Le calcul de la valeur propre minimum peut être plus coûteux. Cependant, pour la matrice  $\mathbf{L}$  on la connaît *a priori*, elle vaut *toujours*  $\lambda_{\mathbf{L}}^{\min} = 1$ ! L'ordre de quadrature doit être d'autant plus élevé que le conditionnement de  $\mathbf{L}$  est mauvais. Ensuite, la méthode converge **géométriquement** avec l'ordre de quadrature!

La formule (5.5) nécessite l'inversion de  $z\mathbf{I} - \mathbf{L}$ . Cependant, il s'agit d'une matrice creuse pour laquelle il existe des bibliothèques comme MUMPS<sup>3</sup> permettant de réaliser l'inversion de manière performante. On peut donc calculer  $\Lambda\Pi r_h$  à la volée.

**Remarque 5.1.1.** *Pour utiliser l'opérateur  $\Lambda$  sous forme d'une puissance sur une surface ouverte, il est nécessaire de définir son comportement aux bords du domaine. Cela se fait d'une manière équivalent à ce qu'on ferait pour  $\mathcal{I} - \Delta_\Gamma$ . La méthode la plus simple est alors, lors de l'assemblage de la matrice de la formulation variationnelle associée à  $\mathcal{I} - \Delta_\Gamma$ , d'utiliser un espace de test conforme  $H_0^1(\Gamma)$ .*

L'intérêt de cette méthode est la simplicité de mise en œuvre puisque

- il suffit d'assembler une seule fois la matrice  $\mathbf{L}$ ,
- on ne manipule que des matrices creuses,
- le coût du calcul de l'intégrale est faible par rapport à celui d'un assemblage/résolution BEM,
- le calcul de l'indicateur est fait à la volée.

Les deux désavantages principaux sont :

- l'approximation de la plus grande valeur propre par une méthode itérative dont la convergence dépend du conditionnement<sup>4</sup>,
- il faut être certain que la quadrature est suffisamment précise. Dans le cas contraire, le caractère "demi-dérivatif" ou "demi-intégrateur" de l'opérateur  $\Lambda$  est mal restitué. Là encore l'ordre de quadrature dépend du conditionnement. Cette difficulté peut être partiellement contournée en adaptant, au fur et à mesure des raffinements de maillage, l'ordre de quadrature  $N_{\text{quad}}$  de sorte à maintenir le rapport  $\frac{N_{\text{quad}}}{\log(\Lambda_{\text{max}}/\Lambda_{\text{min}})}$  constant (voir [46], formule (3.5)) où  $\Lambda_{\text{max/min}}$  sont les estimations des valeurs propres maximum et minimum.

Au niveau du calcul de l'indicateur, le gain est important puisque le coût de l'application de  $\Lambda$  ne dépend plus que du nombre de degrés de liberté indépendamment de l'équation qui a été résolue. De plus, on peut encapsuler le calcul de la puissance de matrice dans une bibliothèque afin d'en faire quelque chose de purement générique : l'utilisateur n'a plus qu'à fournir la matrice dont il veut calculer la puissance et le vecteur auquel il veut l'appliquer ! Cette facilité d'utilisation en fait la **méthode privilégiée** pour les cas 3D.

### 5.1.4 Implémentation du calcul de l'erreur exacte

On propose ici un moyen de calculer, ou à défaut d'estimer le plus précisément possible l'erreur exacte. Il existe quelques rares géométries pour lesquelles on est capable de calculer la solution analytique. C'est le cas notamment pour la sphère ou le segment  $[-1, 1]$  dans le cadre de l'équation de Laplace. Ce n'est pas le cas pour un carré, ou un triangle, ou le segment  $[-1, 1]$  dans le cadre de l'équation de Helmholtz.

On utilise ici une autre approche qui consiste, à chaque itération de la boucle auto-adaptative, à calculer la solution du problème sur un maillage éventuellement  $N$ -fois raffiné ou en montant en ordre pour l'espace d'approximation.

3. <http://mumps.enseeiht.fr>

4. En pratique, on n'a besoin que d'une *estimation* de la plus grande valeur propre : on peut en choisir un majorant.

### Erreur exacte – Equation $\mathcal{S}_{k_w}$

On suppose que la solution continue est suffisamment régulière pour que l'erreur vraie converge. A chaque itération, on raffine le maillage initial quatre<sup>5</sup> fois  $\mathcal{T}_h \rightarrow \mathcal{T}_{\frac{h}{8}}$ . On résout l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  sur  $\mathcal{T}_{\frac{h}{8}}$  sans changer l'ordre polynomial de l'espace d'approximation pour obtenir une solution plus précise  $u_{\frac{h}{8}}$ . On calcule alors

$$e_{\text{exacte}} = \left\| u_h - u_{\frac{h}{8}} \right\|. \quad (5.6)$$

### Erreur exacte – Equation $\mathcal{N}_{k_w}$

Pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$ , on se contente d'effectuer un raffinement uniforme du maillage et d'augmenter l'ordre polynomial de l'espace d'approximation  $V_h = \mathcal{P}^k(\mathcal{T}_h) \rightarrow V_{\frac{h}{2}} = \mathcal{P}^{k+1}(\mathcal{T}_{\frac{h}{2}})$ . On estime l'erreur exacte par

$$e_{\text{exacte}} = \left\| u_{h,k} - u_{\frac{h}{2},k+1} \right\|.$$

## 5.2 Validation numérique – Acoustique 2D

On se propose maintenant de valider les indicateurs présentés précédemment dans le cadre de la diffraction d'une onde acoustique plane se propageant dans un milieu homogène 2D par un objet diffractant de surface  $\Gamma$ , éventuellement ouverte, dont les dimensions sont voisines de 1. Ces objets sont

- le **cercle** de rayon  $R = 0.9$ . C'est un cas académique pour lequel la solution exacte est régulière. On s'attend alors à retrouver le meilleur taux de convergence possible lorsque le maillage est raffiné uniformément. Il sert d'étalon pour vérifier le comportement des autres indicateurs. La direction d'où **provient** l'onde plane incidente est  $\theta_i = 0^\circ$  (onde incidente se propageant selon  $-\mathbf{e}_x$ ).
- le **carré** de côté  $a = 1$ . Dans le cas de l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ , la solution exacte admet une discontinuité sur les arêtes. Pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$ , la solution n'est que faiblement régulière. On s'attend ainsi à observer une concentration des éléments à proximité des arêtes. L'angle de provenance de l'onde plane est encore  $\theta_i = 0^\circ$ . Le carré est donc éclairé sur sa face droite.
- le **segment**  $[-1, 1]$  éclairé selon sa normale (onde se propageant selon  $-\mathbf{e}_y$ ). La solution pour  $\mathcal{S}_{k_w}$  explose comme  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  [36] où  $r$  est la distance aux extrémités du segment. Elle est donc au plus de régularité  $H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ ,  $\varepsilon > 0$ . En ce qui concerne la solution pour  $\mathcal{N}_{k_w}$ , elle se comporte comme  $\sqrt{r}$  et est donc de régularité au plus  $H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Comme pour le carré, on s'attend à observer un raffinement important au niveau des bords.
- le **résonateur ouvert** de rayon 0.9 et d'angle d'ouverture  $\epsilon = 20^\circ$  (voir FIGURE 5.3). L'idée est ici de mélanger les saveurs : d'une part la surface est ouverte ce qui induit une faible régularité de la solution aux extrémités de la surface. D'autre part, on fait rentrer une onde dans la cavité qui va se réfléchir sur les parois ce qui complexifie le phénomène de diffraction. Le résonateur est éclairé par la droite de telle sorte à présenter son ouverture à l'onde incidente.

On applique sur  $\Gamma$  une condition limite de type Dirichlet ou Neumann ce qui amène à résoudre les équations associées au  $\mathcal{S}_{k_w}$  ou bien au  $\mathcal{N}_{k_w}$ . Pour chaque cas, on effectue des simulations pour trois nombres d'onde  $k_w$  différents :

5. Valeur "expérimentale" suffisante pour stabiliser la valeur de l'indicateur.

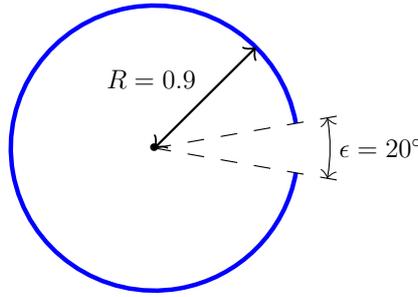


FIGURE 5.3 – Schéma de principe du résonateur utilisé pour les simulations en 2D.

- $k_w = 5 \Rightarrow \lambda \approx 1.26$  La longueur d'onde est de l'ordre de grandeur des dimensions de l'objet.
- $k_w = 20 \Rightarrow \lambda \approx 0.31$  L'objet est de l'ordre de deux à trois longueurs d'onde.
- $k_w = 100 \Rightarrow \lambda \approx 0.063$  La taille de l'objet est de l'ordre de quinze à vingt longueurs d'onde : on se rapproche du cadre asymptotique pour lequel des méthodes de type rayon peuvent être appliquées.

On fixe dans un premier temps le paramètre de raffinement  $\theta_d = 0.5$ . Cela semble *a priori* un bon compromis : si le paramètre est trop grand, on prend le risque que le comportement en convergence se rapproche de celui du raffinement uniforme ; si le paramètre est trop petit on va multiplier les itérations de la boucle auto-adaptative. L'indicateur utilisé pour le guidage de l'algorithme auto-adaptatif est  $\eta_\Lambda$  sous la forme  $(\mathcal{I} - \Delta)^\alpha$ .

On montre ensuite que les indicateurs de la littérature se comportent correctement sur le cercle et le segment  $[-1, 1]$ . On ne refait pas l'étude sur tous les objets car ces deux géométries correspondent à deux cas extrêmes par rapport à la régularité de la solution continue.

Sur le segment  $[-1, 1]$  et pour  $k_w = 20$  et  $k_w = 100$ , on s'intéresse au comportement en convergence de l'algorithme guidé par  $\eta_\Lambda$  lorsqu'on fait varier le paramètre de raffinement (critère de sélection Dörfler)  $\theta_d = \{0.25, 0.5, 0.75\}$ . On choisit le segment pour la même raison que précédemment, à savoir la régularité de la solution continue.

On se propose ensuite, pour  $k_w = \{20, 100\}$ , de modifier l'onde incidente en étudiant la diffraction par une onde sphérique émise par une source ponctuelle placée proche de l'objet. On sélectionne pour cette étude le carré car il combine une solution continue faiblement régulière et un effet d'écran par rapport à la source : on s'attend à avoir très peu de signal derrière l'objet (encore moins que pour une onde plane).

Finalement, on s'intéresse plus particulièrement à l'indicateur  $\Lambda$ . Le cas test est le carré car on a constaté que le  $\Lambda$  sous forme intégrale se comporte mal sur les surfaces ouvertes<sup>6</sup>. On montre numériquement que les deux formes de l'indicateur  $\eta_\Lambda$  permettent de guider de manière équivalente un algorithme de raffinement auto-adaptatif et que les valeurs de l'indicateur sont les mêmes. On termine par une étude sur une technique de localisation de l'indicateur  $\Lambda$  intégral en regardant ce qui se passe lorsqu'on n'applique pas l'opérateur au résidu complet mais seulement à sa valeur restreinte à un patch d'éléments. On utilisera encore le carré comme cas-test.

**Espaces d'approximation et estimation *a priori* pour les simulations en 2D** L'espace d'approximation conforme  $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$  utilisé pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  est

$$V_h = \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)$$

6. C'est une conséquence de la difficulté à définir le comportement au bord de  $\Lambda_{\mathcal{S}_0/\mathcal{N}_0}$  lorsqu'il est sous forme intégrale

l'espace des fonctions polynomiales de degré 0 (sur chaque élément du maillage). Le lemme de Bramble-Hilbert implique que le meilleur taux de convergence possible en raffinement uniforme est en  $\mathcal{O}(h^{3/2})$  soit en fonction du nombre d'éléments

$$\boxed{\text{Meilleur taux de convergence possible } \mathcal{S}_{k_w} = \mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})}.$$

**Remarque 5.2.1** (Importante!). *Les solutions de l'équation associée au  $\mathcal{S}_{k_w}$  admettent des singularités dès lors que la géométrie considérée a des coins (et des arêtes en 3D). On a constaté numériquement que lorsque l'ordre des quadratures utilisées pour l'assemblage des matrices élémentaires est trop faible et que les mailles adjacentes aux singularités géométriques sont trop petite, on a des instabilités numériques dans le calcul de la solution (et a fortiori dans le calcul des indicateurs). Ce phénomène est d'autant plus observable que la fréquence augmente. Pour cette partie, on a donc augmenté l'ordre des quadratures afin de montrer que le problème ne provient pas des indicateurs mais bien de la résolution initiale!*

L'espace d'approximation pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  est

$$\boxed{V_h = \mathcal{P}^1(\mathcal{T}_h)}$$

l'espace des fonctions polynomiales de degré 1 par morceau avec raccordement continu entre les éléments. Le lemme de Bramble-Hilbert implique donc que le meilleur taux de convergence possible en raffinement uniforme est en  $\mathcal{O}(h^{3/2})$  soit en fonction du nombre d'éléments

$$\boxed{\text{Meilleur taux de convergence possible } \mathcal{N}_{k_w} = \mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})}.$$

### 5.2.1 Guidage par l'indicateur $\Lambda$ sur le cercle

On s'intéresse premièrement au cas du cercle de rayon  $R = 0.9$ . Il est éclairé par une onde plane de fréquence  $k_w = \{5, 20, 100\}$ . Le paramètre de raffinement est fixé à  $\theta_d = 0.5$ .

Le cercle est discrétisé initialement en  $N_{\text{elem}}^0 = 45$  éléments. La solution exacte est régulière pour les deux équations donc on s'attend à retrouver le meilleur taux de convergence possible en raffinement uniforme à toutes les fréquences.

#### Cercle $R = 0.9$ , guidage par $\eta_\Lambda$ , $k_w = 5$

A ce nombre d'onde, la discrétisation est en  $\approx \frac{2\pi}{5} \frac{N_{\text{elem}}^0}{0.9\pi} \approx 10$  (donc en  $\frac{\lambda}{10}$ ). Cette finesse de discrétisation est conforme aux bonnes pratiques. Les courbes de convergence pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  regroupées sur la FIGURE 5.4 et pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  sur la FIGURE 5.5.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Le taux de convergence est optimal en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$  dès les premières itérations puisque le maillage est suffisamment fin par rapport à la longueur d'onde. Le raffinement auto-adaptatif apporte une faible (voir négligeable) amélioration de la valeur de l'erreur.

On constate que les valeurs de  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  se superposent dès la première itération, donc on mesure "exactement" l'erreur. Les autres indicateurs sont regroupés. En particulier, les indicateurs  $\eta_{\Pi_G}$  et  $\eta_{\Pi_{L^2}}$  sont superposés ce qui laisse supposer que les deux projections  $\Pi_G$  et  $\Pi_{L^2}$  produisent le même résultat, mais à des coûts très différents!

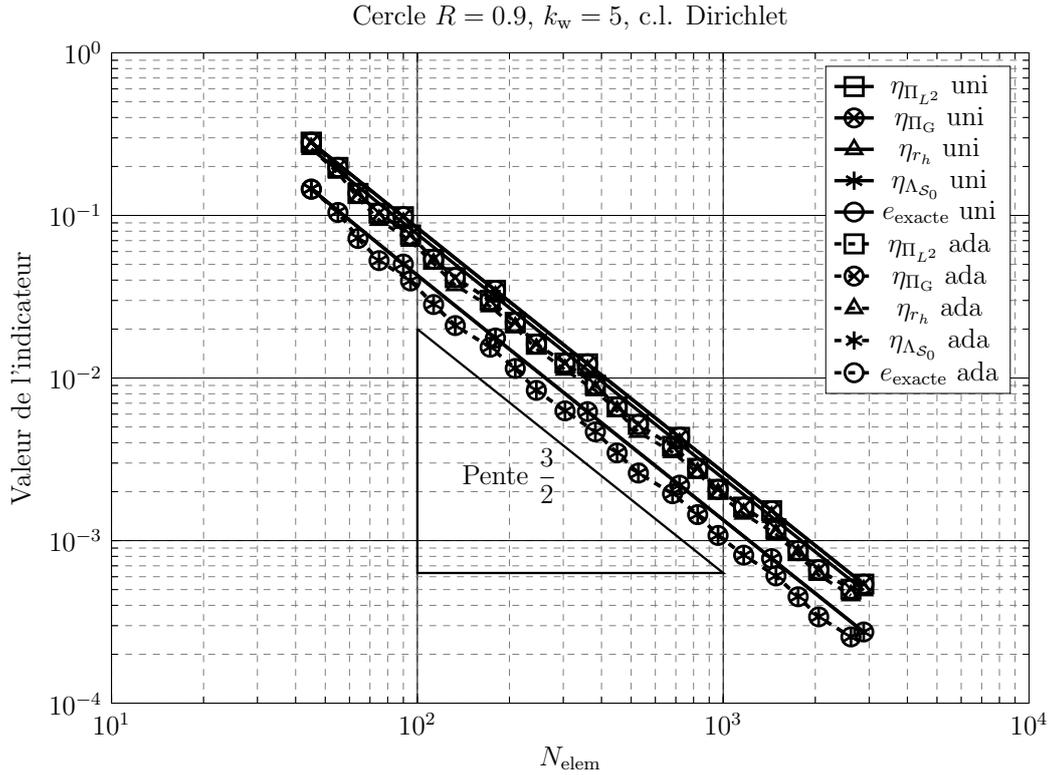


FIGURE 5.4 – Convergence des différents indicateurs pour le cercle de rayon  $R = 0.9$  pour  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet.

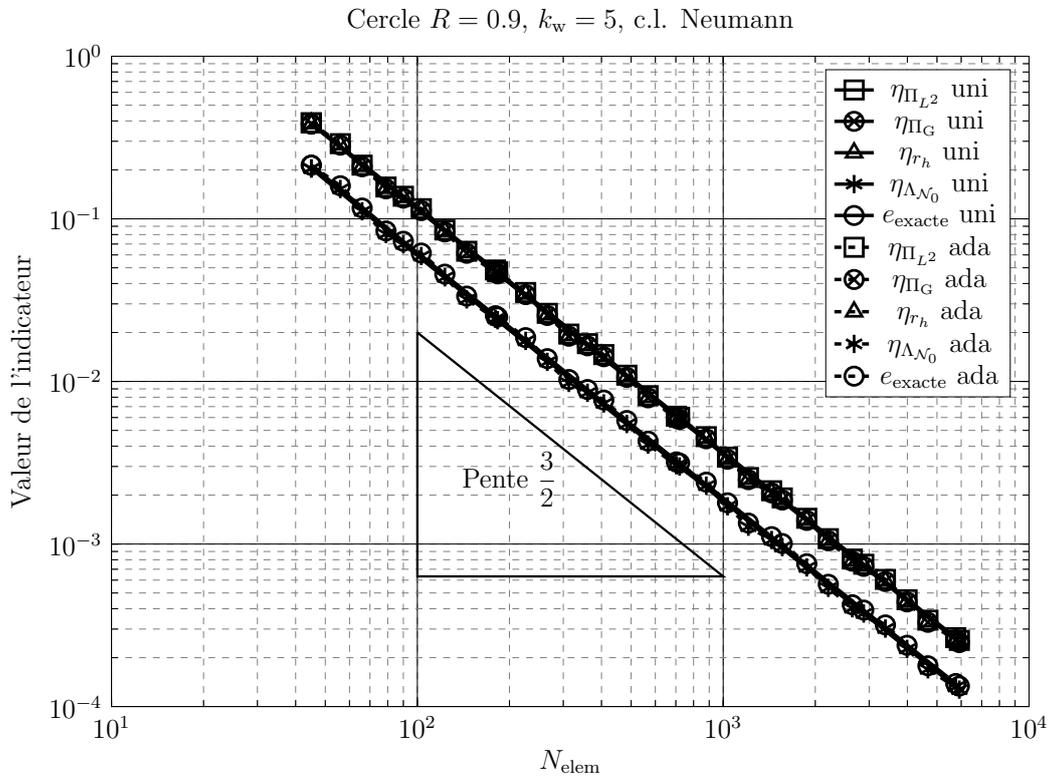


FIGURE 5.5 – Convergence des différents indicateurs pour le cercle de rayon  $R = 0.9$  pour  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  On constate, comme pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  que la convergence est optimale dès les premières itérations. Le taux de convergence s'établit immédiatement en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . Il n'y a de plus aucune amélioration de la valeur de l'erreur lorsqu'on utilise du raffinement auto-adaptatif.

Les valeurs de  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  coïncident. Les autres indicateurs sont regroupés puisque  $\eta_{\Pi_G}$ ,  $\eta_{\Pi_{L^2}}$  et  $\eta_{r_h}$  semblent se superposer.

### Cercle $R = 0.9$ , guidage par $\eta_{\Lambda}$ , $k_w = 20$

La finesse de discrétisation est approximativement en  $\frac{\lambda}{2}$  ce qui est normalement insuffisant. Les courbes de convergence sont représentées sur la FIGURE 5.6 pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  et sur la FIGURE 5.7 pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$ .

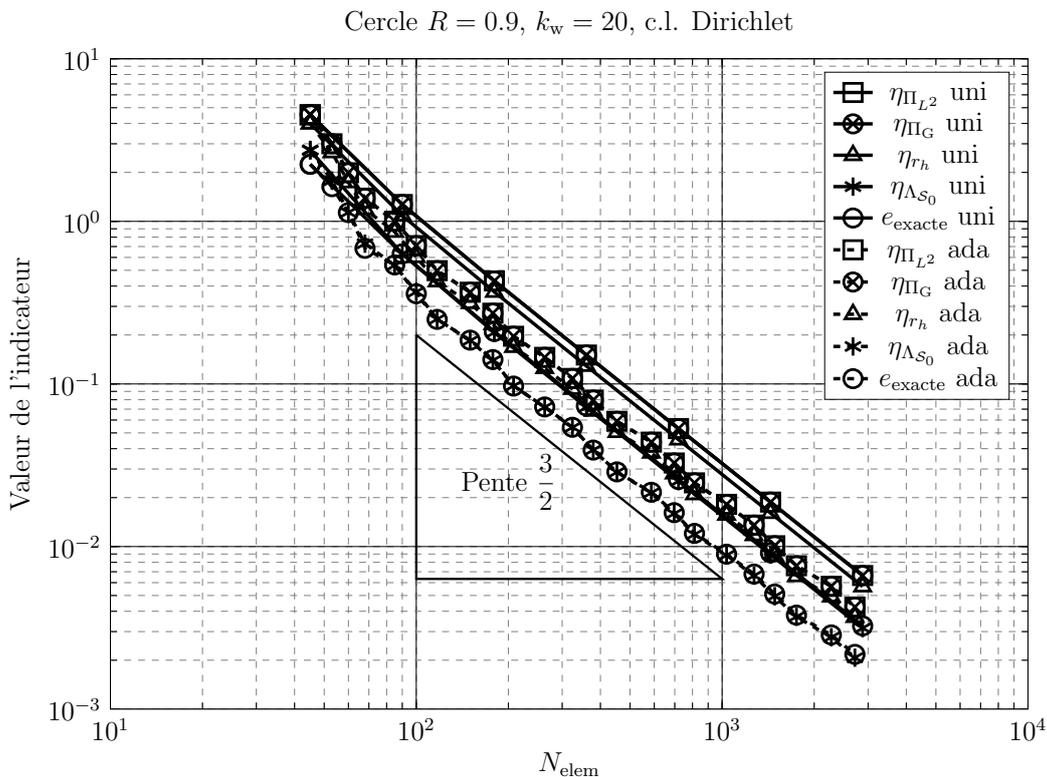


FIGURE 5.6 – Convergence des différents indicateurs pour le cercle de rayon  $R = 0.9$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Le régime asymptotique de convergence s'établit presque immédiatement à partir de  $N_{\text{elem}} \approx 100$  que ce soit pour le raffinement uniforme ou bien le raffinement auto-adaptatif. Les valeurs des indicateurs  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  se superposent (on mesure toujours l'erreur "exactement"). Les autres indicateurs restent groupés.

L'utilisation de raffinement auto-adaptatif permet un gain faible ( $\equiv 1.5$ ) sur la valeur de l'erreur exacte, mais reste au final peu intéressant.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  Le taux de convergence s'établit immédiatement en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$  pour tous les indicateurs. En ce qui concerne le raffinement uniforme, on constate que  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  ne sont pas initialement superposés. Les deux courbes de confondent à partir de  $N_{\text{elem}} = 360$ . En utilisant du raffinement auto-adaptatif, on constate que tous les indicateurs ont

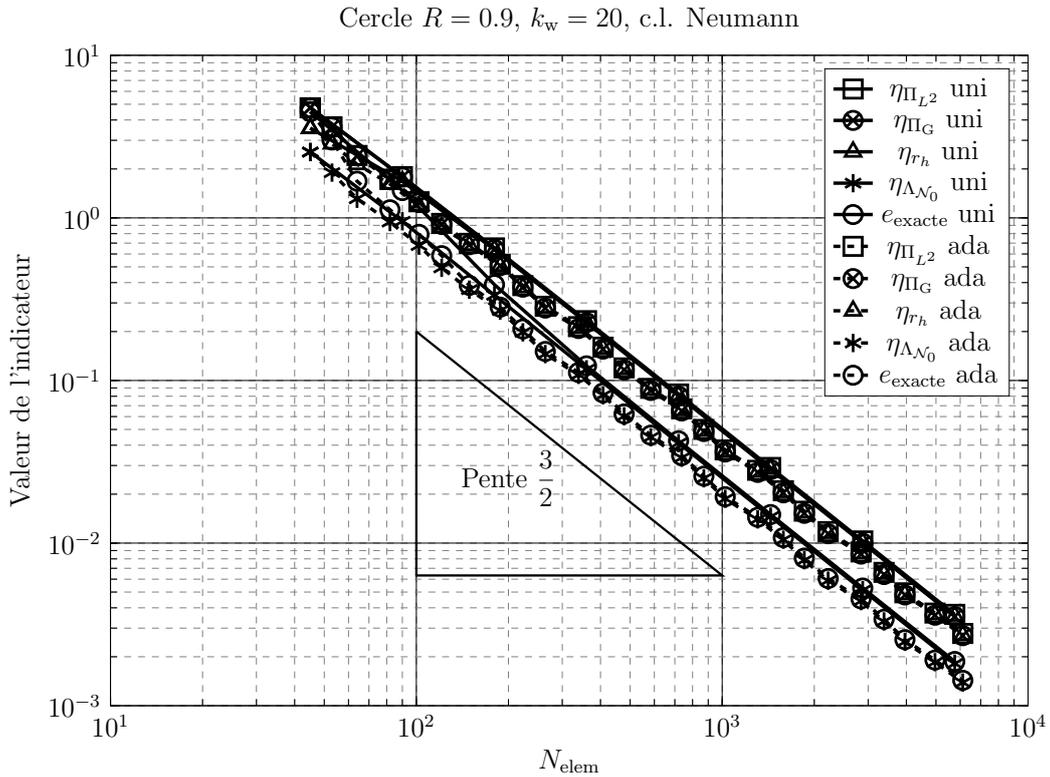


FIGURE 5.7 – Convergence des différents indicateurs pour le cercle de rayon  $R = 0.9$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann.

un léger gain dans la valeur de l'erreur. De plus,  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  se confondent pour  $N_{\text{elem}} \approx 150$ . On mesure ainsi toujours "exactement" l'erreur.

### Cercle $R = 0.9$ , guidage par $\eta_{\Lambda}$ , $k_w = 100$

La discrétisation est en  $2\lambda$ . On est très largement sous-discrétisé. La convergence pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  est représentée sur la FIGURE 5.8 et celle pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  sur la FIGURE 5.9.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Initialement (jusqu'à  $N_{\text{elem}} \approx 200$ ), les différents indicateurs ne convergent pas. A partir de  $N_{\text{elem}} \approx 200$ , le régime asymptotique est établi et on retrouve un comportement similaire à  $k_w = \{5, 20\}$ . Cela est dû à la sous-discrétisation initiale qui est trop grossière pour approximer le phénomène oscillatoire. Il est intéressant de remarquer que tous les indicateurs sont capables de mettre en évidence ce problème.

Les indicateurs  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  se superposent "presque tout le temps". En effet, la courbe  $e_{\text{exacte}}$  se décolle parfois de celle de  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ . L'explication la plus probable, en tenant compte du fait que les indicateurs de la littérature convergent correctement, est que l'approximation de l'erreur exacte ne fonctionne plus très bien lorsque la fréquence augmente. On retrouve ce phénomène pour les autres cas-tests. Les courbes laissent néanmoins penser que l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  permet encore de mesurer exactement l'erreur.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  On observe initialement un phénomène similaire au cas de l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ . Les indicateurs convergent sur une itération avec le bon taux de convergence. Ils oscillent ensuite avec plus ou moins d'amplitude : les indicateurs  $\eta_{r_h}$ ,  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  font un pic pour  $N_{\text{elem}} = 180$  avant de re-diminuer brusquement et de s'établir au taux optimal

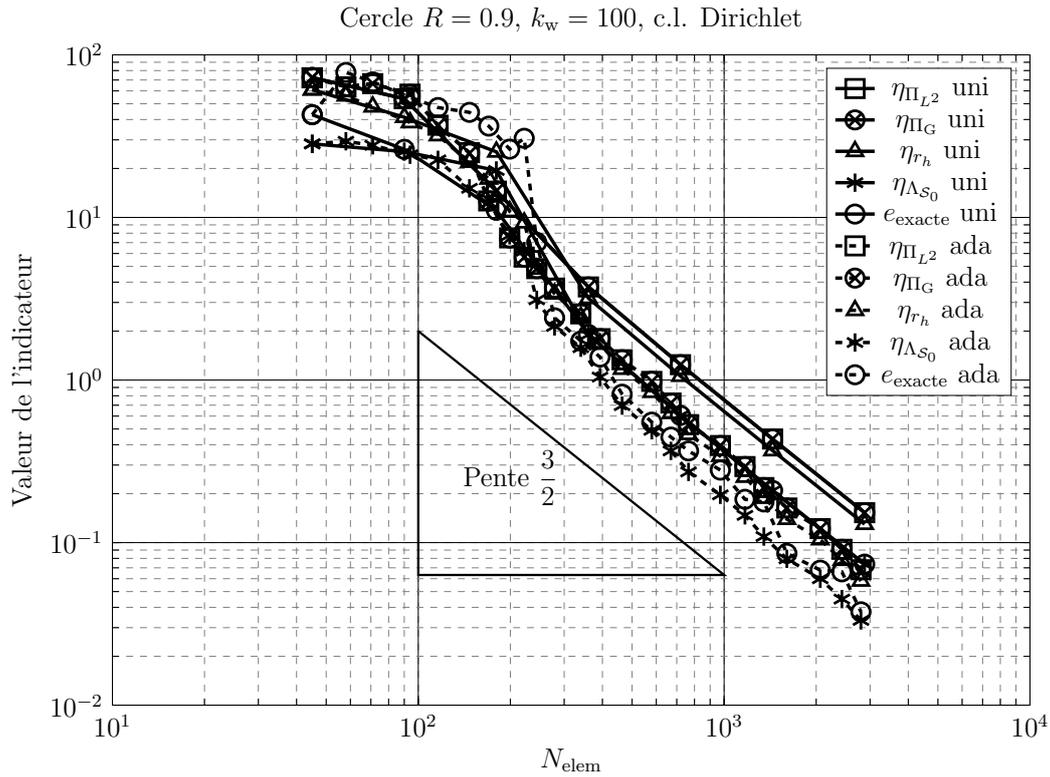


FIGURE 5.8 – Convergence des différents indicateurs pour le cercle de rayon  $R = 0.9$  pour  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet.

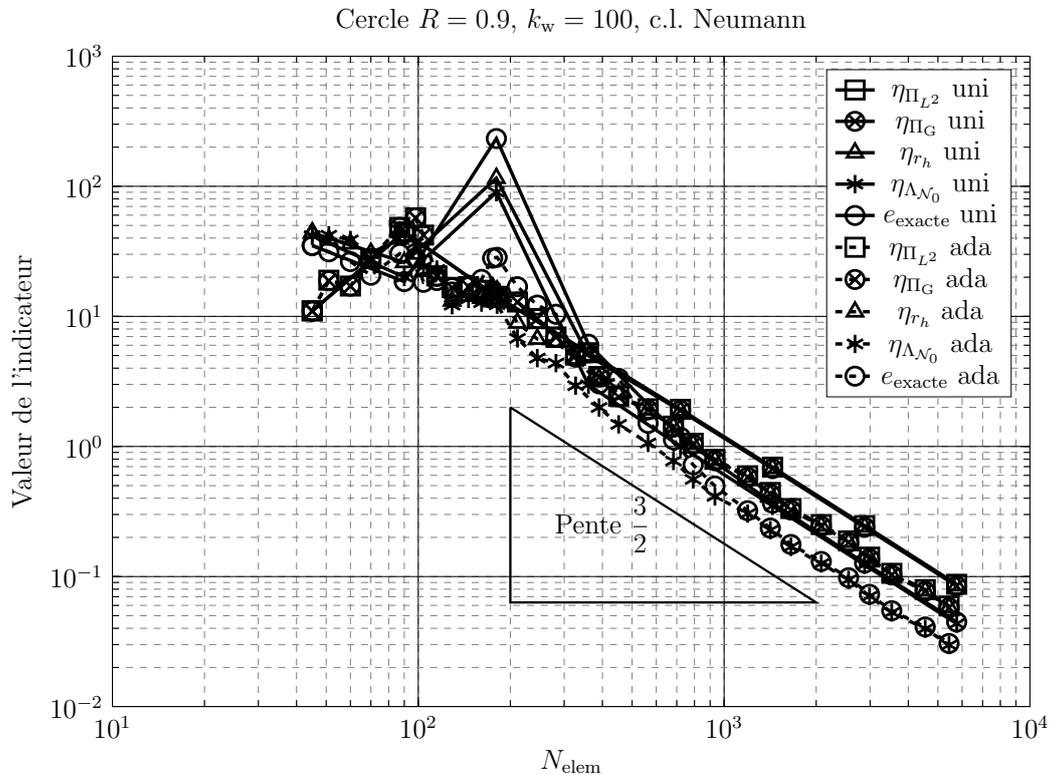


FIGURE 5.9 – Convergence des différents indicateurs pour le cercle de rayon  $R = 0.9$  pour  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann.

en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . Ce sont les trois indicateurs qui prennent en compte explicitement la "nature" oscillante du problème puisqu'on ré-applique l'opérateur  $\mathcal{N}_{k_w}$ . *A contrario*, les indicateurs par reconstruction (par "moyenne") semblent moins affectés. Une explication possible est que le problème est résolu sur un maillage raffiné et donc la discrétisation par rapport à la longueur d'onde est meilleure. Quoiqu'il en soit, l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  répercute correctement la variation de l'erreur exacte.

En raffinement auto-adaptatif, les indicateurs commencent par converger optimalement (à l'exception de ceux par reconstruction) puis oscillent mais avec une amplitude moindre. De plus, l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  suit toujours les variations de l'erreur exacte et les deux finissent par se confondre. Lorsque la convergence asymptotique s'établit, on constate que la valeur de l'erreur est améliorée par rapport au raffinement uniforme.

Ce cas "haute-fréquence" est intéressant car lorsqu'on est sous-discrétisé, la nature "oscillante" de l'opérateur n'est pas résolue correctement. Autrement dit, on ne résout pas initialement un problème de propagation d'onde. Lorsque le raffinement augmente, le phénomène oscillant apparaît et les indicateurs "suivent" le phénomène!

Le cas du cercle représente bien entendu un cas académique pour lequel tout est sensé très bien fonctionner. Le point le plus important est la vérification de la capacité pour les indicateurs  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  à représenter  $e_{\text{exacte}}$  à toute fréquence. Le caractère "asymptotiquement exact" est confirmé pour une surface de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ce qui montre que le principe de construction pour  $\eta_\Lambda$  est correct.

Il faut maintenant vérifier le caractère fiable–efficace–exact de  $\eta_\Lambda$  lorsque la géométrie est lipschitzienne. Dans le cas où la géométrie présente des singularités, la régularité de la solution dépend de l'angle rentrant de la géométrie dans le domaine de propagation [45] ce qui impacte directement le taux de convergence en raffinement uniforme. Une géométrie de type "carré" représente alors (avec peut-être les triangles) les géométries singulières les plus simples possibles.

### 5.2.2 Guidage par l'indicateur $\Lambda$ sur le carré

Le carré sert ici à tester le comportement de l'indicateur  $\eta_\Lambda$  lorsque la solution est peu (ou pas) régulière mais avec  $\Gamma$  une surface fermée. On rappelle que par construction,  $\Lambda$  sous forme "puissance" est un isomorphisme sur les surfaces lipschitziennes et que l'indicateur  $\eta_\Lambda$  associé est fiable, efficace et locale. On ne peut cependant rien affirmer *a priori* quand à son éventuel caractère "asymptotiquement exacte" ou bien sa capacité à guider un algorithme de raffinement auto-adaptatif. Dans le cadre de l'équation de Helmholtz, la solution exacte se comporte [45] comme  $u \equiv r^\alpha$  où  $\alpha$  est un réel positif dépendant de l'angle rentrant dans le domaine de propagation.

Dans le cadre de l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ , l'inconnue est le saut de dérivée normale au travers de la surface et qu'il se comporte donc comme

$$\frac{\partial u}{\partial n} \sim r^{\alpha-1}.$$

où  $r$  est la distance à la singularité géométrique. Dans le cas du carré,  $\alpha = \frac{1}{3}$ . On en déduit que  $\frac{\partial u}{\partial n} \in H^{1/3-\varepsilon}(\Gamma), \forall \varepsilon > 0$ . En utilisant l'inégalité (3.2), le meilleur taux de convergence en raffinement uniforme qu'on puisse espérer est en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-2/3})$ .

Dans le cadre de l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$ , l'inconnue est le saut  $[u]$  au travers de  $\Gamma$ . On a alors

$$u \sim r^{1/3}$$

ce qui permet d'en déduire que  $u \in H^{4/3-\varepsilon}(\Gamma), \forall \varepsilon > 0$ . En utilisant l'inégalité (3.2), le meilleur taux de convergence asymptotique en raffinement uniforme qu'on puisse espérer est également en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-2/3})$ .

**Remarque 5.2.2.** *Compte tenu des espaces d'approximation utilisés et de la régularité des solutions exactes, on a toujours la même estimation a priori entre l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  et l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$ . Dans la suite, on se contentera de l'établir pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$ .*

Le carré est initialement discrétisé avec 10 éléments par face, soit  $N_{\text{elem}}^0 = 40$ . Il est éclairé par une onde plane se propageant selon  $-\mathbf{e}_x$ . On effectue des simulations pour  $k_w = \{5, 20, 100\}$ .

### Carré $a = 1$ , guidage par $\eta_\Lambda$ , $k_w = 5$

Le carré est discrétisé en  $\frac{\lambda}{13}$  ce qui est normalement largement suffisant. Les courbes de convergence sont données sur la FIGURE 5.10 pour  $\mathcal{S}_{k_w}$  et sur la FIGURE 5.11 pour  $\mathcal{N}_{k_w}$ .

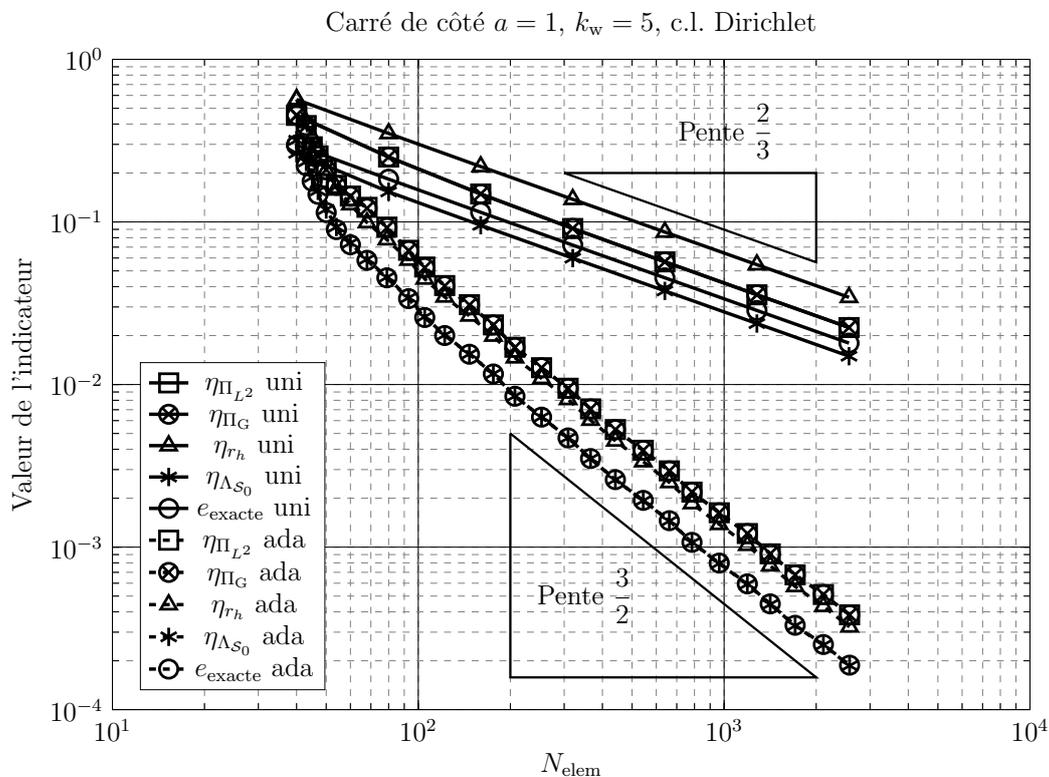


FIGURE 5.10 – Convergence des différents indicateurs pour le carré de côté  $a = 1$  pour  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  En raffinement uniforme, le régime asymptotique s'établit immédiatement au taux sous-optimal  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-2/3})$  conformément à l'estimation *a priori*. Les indicateurs  $\eta_{\Pi_G}$  et  $\eta_{\Pi_{L^2}}$  se superposent parfaitement. La courbe correspondant à  $\eta_{r_h}$  se démarque clairement des autres. De plus, les indicateurs  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  ne se superposent pas, et l'indicateur  $\eta_{r_h}$  se démarque clairement des autres.

En utilisant du raffinement auto-adaptatif, les indicateurs convergent rapidement initialement lorsque les singularités aux coins commencent à être approximées. On constate ensuite que tous les indicateurs convergent au taux optimal  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . De plus,  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  permet de mesurer "exactement" l'erreur puisque la courbe correspondante se superpose à celle de  $e_{\text{exacte}}$ .

Cela semble confirmer numériquement le caractère isomorphe de  $\Lambda_{S_0}$  lorsque  $\Gamma$  est une surface lipschitzienne ainsi que l'hypothèse selon laquelle il est asymptotiquement exact !

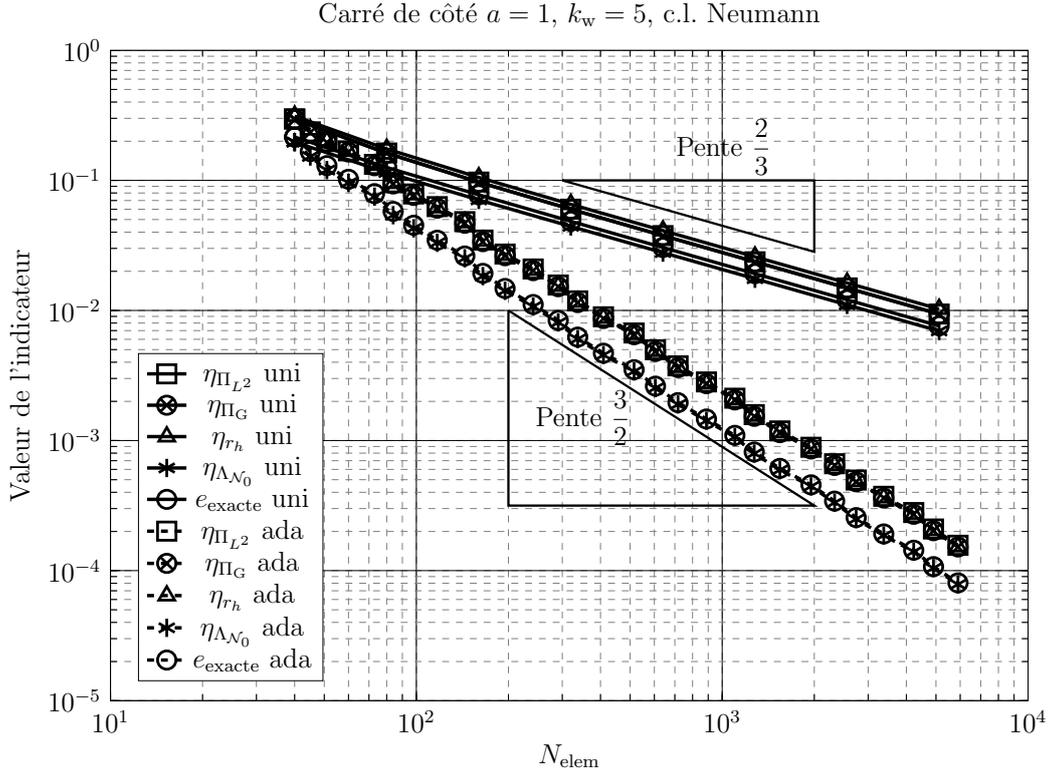


FIGURE 5.11 – Convergence des différents indicateurs pour le carré de côté  $a = 1$  pour  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  Le raffinement uniforme est ici encore sous-optimal et correspond à l'estimation *a priori*. L'erreur exacte et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  ne se superposent pas mais restent proches l'un de l'autre.

L'utilisation d'une boucle auto-adaptative permet de converger immédiatement avec le meilleur taux possible en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . On remarque que  $\eta_{r_h}$ ,  $\eta_{\Pi_G}$  et  $\eta_{\Pi_{L^2}}$  sont regroupés. De plus,  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  se superposent immédiatement ce qui confirme, comme pour  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , son caractère "asymptotiquement exacte" sur surface lipschitzienne.

Ces résultats préliminaires laissent supposer qu'on peut guider efficacement un algorithme auto-adaptatif avec  $\eta_{\Lambda}$ . On étudie maintenant la montée en fréquence.

### Carré $a = 1$ , guidage par $\eta_{\Lambda}$ , $k_w = 20$

La discrétisation initiale est en  $\frac{\lambda}{3}$  ce qui est insuffisant. Les courbes de convergence sont sur la FIGURE 5.12 pour  $\mathcal{S}_{k_w}$  et sur la FIGURE 5.13 pour  $\mathcal{N}_{k_w}$ .

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Comme précédemment, le taux de convergence uniforme se stabilise immédiatement conformément à l'estimation *a priori*. Les indicateurs  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  sont presque superposés. Les indicateurs  $\eta_{\Pi}$  restent confondus et  $\eta_{r_h}$  se distingue toujours des autres.

En raffinement auto-adaptatif, l'ensemble des indicateurs converge au taux maximum en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . L'indicateur  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  se confond avec  $e_{\text{exacte}}$ .

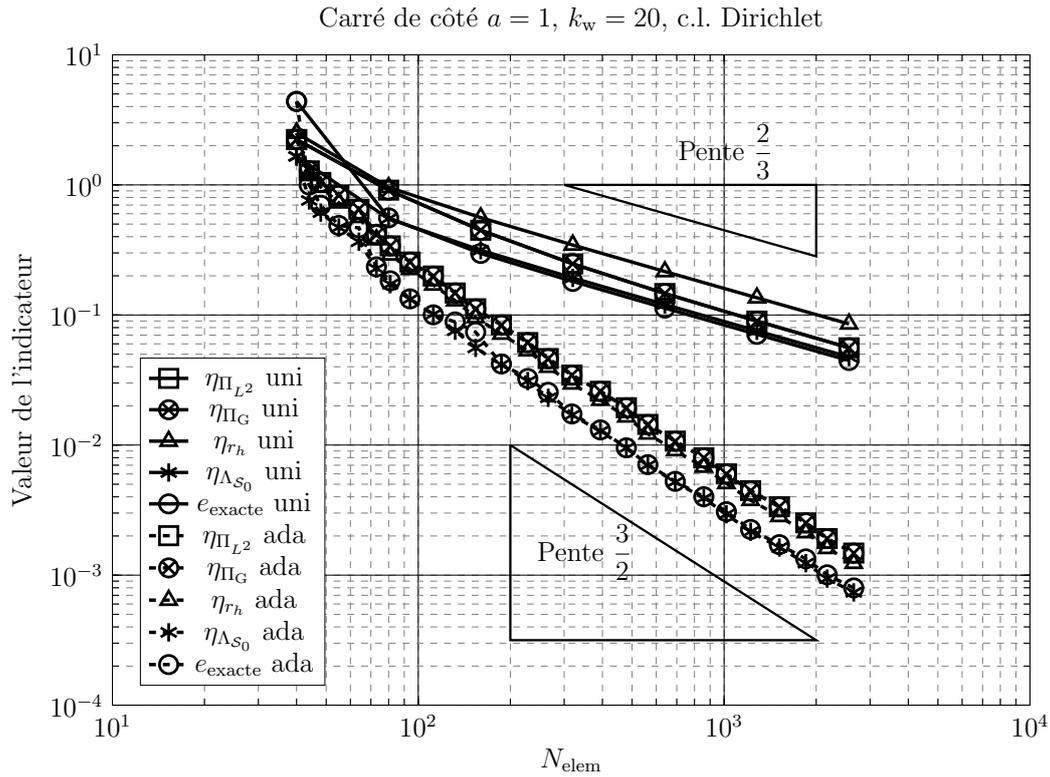


FIGURE 5.12 – Convergence des différents indicateurs pour le carré de côté  $a = 1$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet.

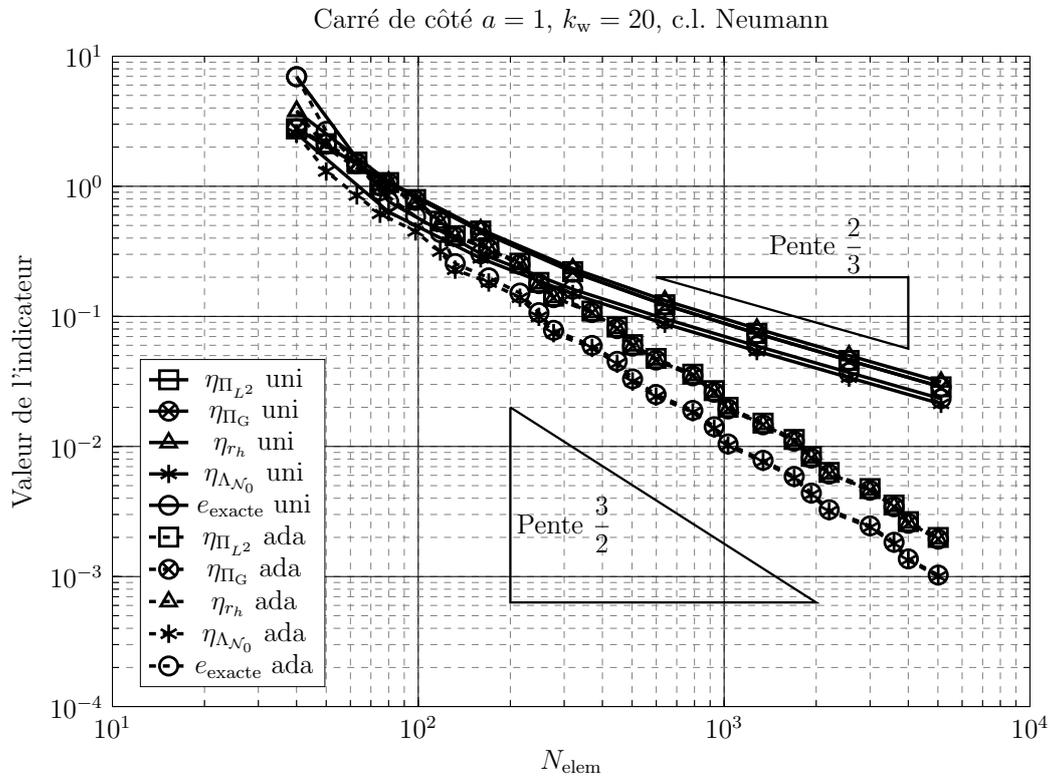


FIGURE 5.13 – Convergence des différents indicateurs pour le carré de côté  $a = 1$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  En raffinement uniforme, le taux de convergence s'établit rapidement en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-2/3})$  et les indicateurs se comportent de la même manière que pour  $k_w = 5$ .

En raffinement auto-adaptatif, la convergence s'établit immédiatement en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . Les indicateurs  $\eta_{r_h}$ ,  $\eta_{\Pi_G}$  et  $\eta_{\Pi_{L^2}}$  sont confondus. Il en est encore de même pour  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$ .

L'indicateur semble stable en fréquence sur surface lipschitzienne. On vérifie alors son comportement lorsque la fréquence est très élevée.

### Carré $a = 1$ , guidage par $\eta_{\Lambda}$ , $k_w = 100$

La discrétisation initiale est en  $1.6\lambda$ . La convergence pour le cas  $\mathcal{S}_{k_w}$  est représentée sur la FIGURE 5.14 et celle pour le cas  $\mathcal{N}_{k_w}$  sur la FIGURE 5.15.

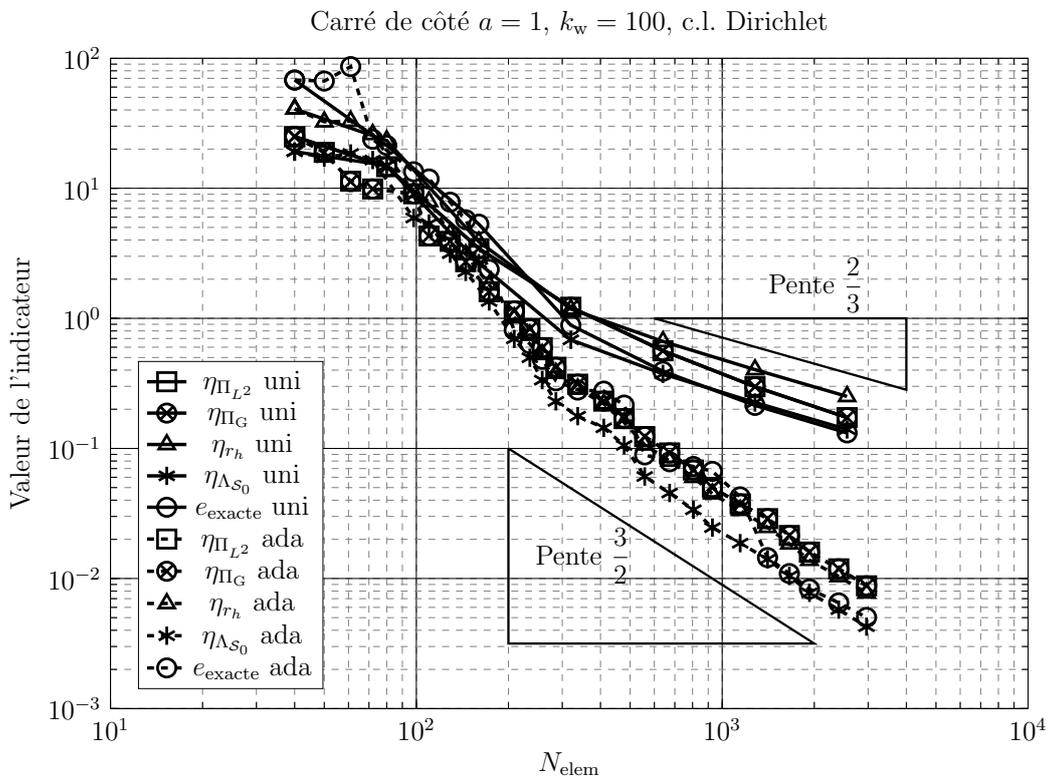


FIGURE 5.14 – Convergence des différents indicateurs pour le carré de côté  $a = 1$  pour  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Le taux de convergence semble s'établir initialement au taux maximal. A partir de  $N_{\text{elem}} = 320$ , il s'établit au taux asymptotique uniforme en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-2/3})$ . Cela correspond à une discrétisation en  $\frac{\lambda}{5}$  qui est juste en dessous du minimum recommandé (en  $\frac{\lambda}{6}$ ). Cet affaïssement de la convergence peut donc s'expliquer comme le moment où la discrétisation est suffisamment fine pour pouvoir représenter la nature oscillante du problème. Les indicateurs  $\eta_{\Pi}$  restent invariablement superposés. A partir de  $N_{\text{elem}} = 640$ ,  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  sont superposés.

En raffinement auto-adaptatif, le taux de convergence est initialement plus fort que le taux maximal asymptotique (de  $N_{\text{elem}} \approx 100 \Rightarrow N_{\text{elem}} \approx 300$ ). Au-delà, le régime asymptotique en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$  s'établit. A partir de  $N_{\text{elem}} \approx 1300$ ,  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  se superposent.

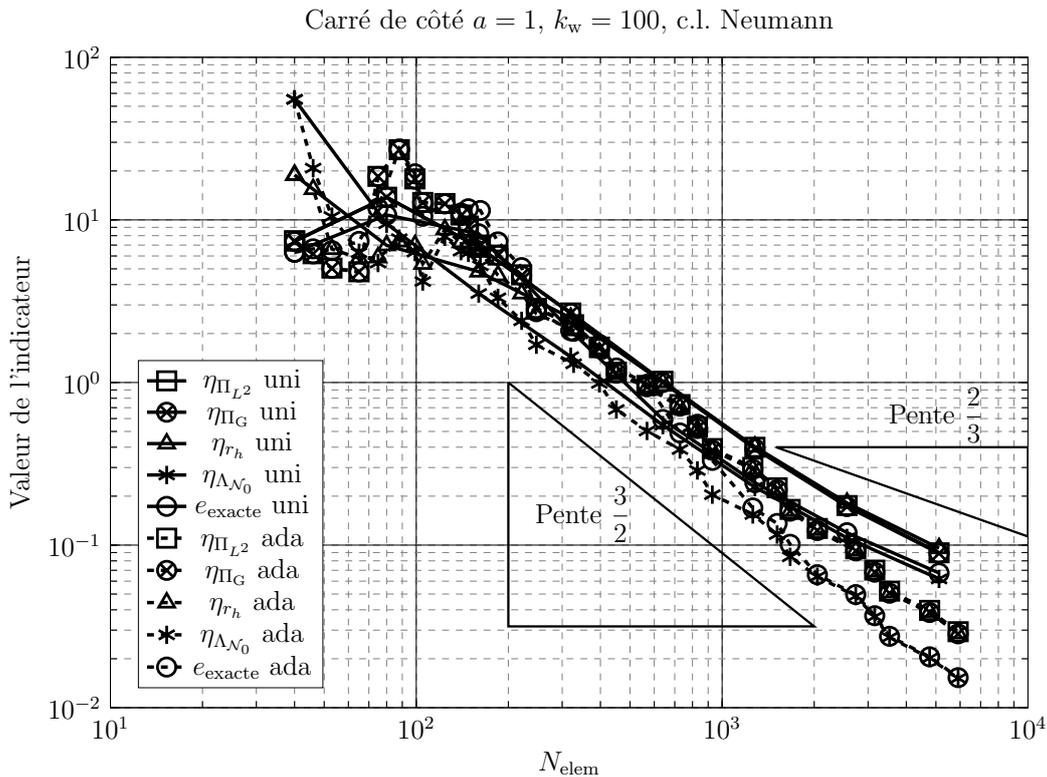


FIGURE 5.15 – Convergence des différents indicateurs pour le carré de côté  $a = 1$  pour  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  Comme pour le cercle, la valeur des indicateurs  $\eta_{\Pi}$  augmente à la première itération. Les autres indicateurs ont des valeurs très différentes. Lorsqu'une discrétisation en  $\frac{\lambda}{3}$  (maillage uniforme de 200 éléments) est atteinte, il semble s'établir un régime asymptotique pour tous les indicateurs avec un taux de convergence légèrement inférieur au taux optimal. On retrouve alors le comportement "habituel" avec  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  qui se superposent. Cependant, lorsque le nombre d'éléments continue d'augmenter, on retrouve le comportement *a priori* en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-2/3})$  alors que le problème est déjà très bien discrétisé (2000 éléments  $\Leftrightarrow$  discrétisation en  $\frac{\lambda}{30}$ ). Une hypothèse envisageable pour expliquer ces taux de convergence est que pour ce ratio taille objet / longueur d'onde = 16, le phénomène qui domine est de la réflexion sur l'objet et non plus de la diffraction. Cette réflexion est donc "capturée" en premier par la discrétisation tandis que la diffraction est trop ténue pour être observable. Lorsque la réflexion est suffisamment "résolue", il faut approximer la diffraction ce qui explique l'affaissement de la convergence lorsque le nombre d'éléments augmente.

Le raffinement auto-adaptatif n'apporte presque rien, que ce soit en valeur absolue de l'erreur ou en taux de convergence, aussi longtemps que la convergence uniforme est proche de l'optimum. De plus, les valeurs et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  ne coïncident pas. Lorsque la convergence uniforme s'affaïsse, l'ensemble des indicateurs retrouve le comportement observé aux autres longueurs d'onde.

Dans ce cas précis, on aurait pu commencer par des raffinements uniformes jusqu'à constater une baisse significative du taux de convergence, puis utiliser une boucle auto-adaptative au-delà.

On a pu constater sur cet exemple du carré que l'indicateur  $\Lambda$  sous forme "puissance d'opérateurs différentiels classiques" est bien fiable et efficace sur surface lipschitzienne, et ce sur une large bande de fréquences. Il permet de plus de guider correctement un algorithme de raffinement auto-adaptatif. Dans ce cas, il permet de mesurer correctement l'erreur exacte

asymptotiquement. Dans le cas d'un raffinement uniforme,  $\eta_{\Lambda_{S_0/\mathcal{N}_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  sont proches mais pas toujours confondus.

Jusqu'à présent, on s'est tenu au cadre théorique des indicateurs tel que défini au chapitre 4. Néanmoins, il n'y a pas de contre-indication à l'utilisation d'un opérateur  $\Lambda$  sur surface ouverte pourvu qu'on définisse correctement son comportement sur  $\partial\Gamma$  (voir 5.1.3). On se propose donc d'effectuer des simulations sur surface ouverte, la première étudiée étant le cas académique du segment  $[-1, 1]$ .

### 5.2.3 Guidage par l'indicateur $\Lambda$ sur le segment

Le segment  $[-1, 1]$  est la première surface ouverte considérée. Pour les seconds membres conventionnels, les surfaces ouvertes sont celles pour lesquelles la solution exacte présente la plus faible régularité. On peut montrer [45] que le comportement aux extrémités pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  est

$$u \sim \sqrt{r}$$

ce qui implique que la solution exacte se trouve dans  $H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , et dans  $H^{-\varepsilon}(\Gamma)$  pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ . Le meilleur taux de convergence uniforme auquel on peut s'attendre est donc en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-1/2})$ .

Le segment est initialement discrétisé en  $N_{\text{elem}}^0 = 45$  éléments. Il est éclairé par une onde plane se propageant selon  $-\mathbf{e}_y$  et de nombre d'onde  $k_w = \{5, 20, 100\}$ .

#### Segment $[-1, 1]$ , guidage par $\eta_\Lambda$ , $k_w = 5$

La discrétisation initiale est en  $\frac{\lambda}{28}$ . Les courbes de convergence pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont sur le FIGURE 5.16 et celles pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  sur la FIGURE 5.17.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  La discrétisation est suffisamment fine pour que la convergence soit asymptotique. Le taux de convergence s'établit ainsi immédiatement en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-1/2})$ . Les courbes correspondant à  $\eta_{\Pi_{G/L^2}}$  sont toujours superposées. L'indicateur  $\eta_{r_h}$  majore l'ensemble. Du plus, les courbes pour  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  sont distinctes.

L'utilisation de raffinement auto-adaptatif permet d'obtenir le taux maximal en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . Initialement, comme pour le carré, l'erreur diminue rapidement alors que les extrémités du segment sont raffinées afin de bien représenter le comportement en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ . Pour  $N_{\text{elem}} \approx 100$ , la convergence asymptotique s'établit. Les courbes correspondant à  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  se superposent parfaitement : on est capable d'estimer "exactement" l'erreur sous réserve d'utilisation d'une boucle auto-adaptative.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  Comme pour le  $\mathcal{S}_{k_w}$ , la convergence uniforme s'établit immédiatement en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-1/2})$ . De plus, on a  $e_{\text{exacte}} \approx 2\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0}}$ .

Le raffinement auto-adaptatif permet de récupérer une convergence optimale en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . Pour  $N_{\text{elem}} = 45 \dots 60$ , l'algorithme ne rajoute que quelques éléments aux extrémités du segment afin de bien approximer le comportement en  $\sqrt{r}$  de la solution. La décroissance de l'erreur est alors très rapide. A partir de  $N_{\text{elem}} \sim 60$ , on atteint le régime asymptotique. Le taux de convergence se stabilise au taux optimal de  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . On a de plus  $e_{\text{exacte}}$  qui coïncide avec  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0}}$ .

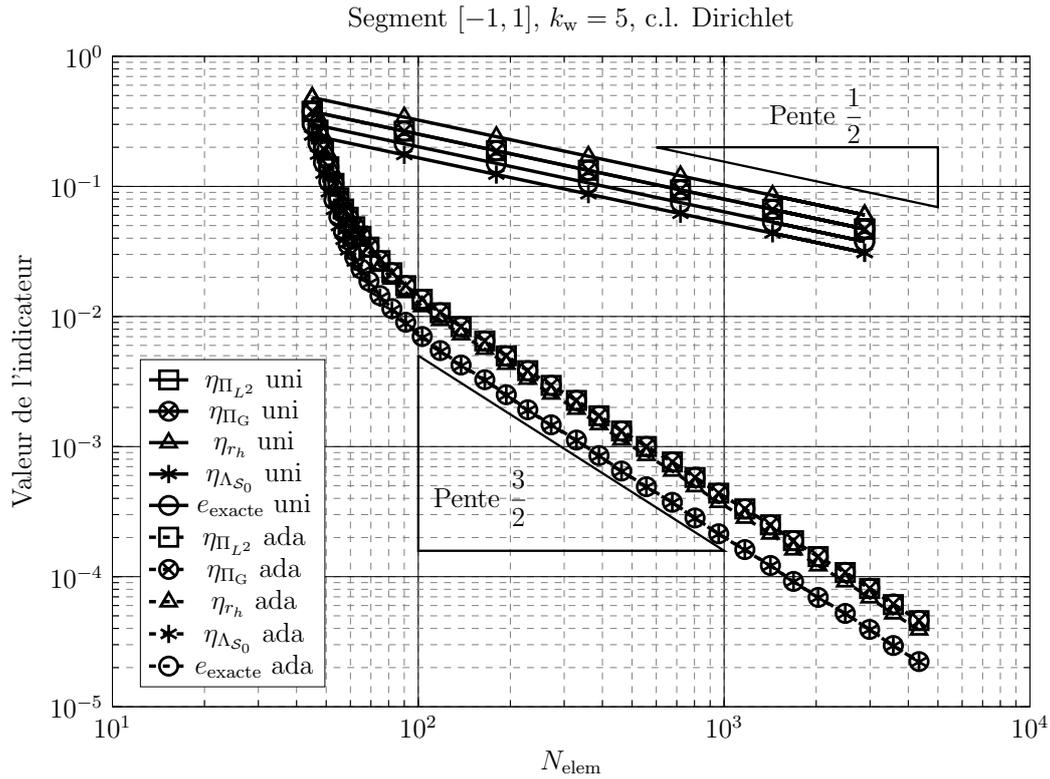


FIGURE 5.16 – Convergence des différents indicateurs pour le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet.

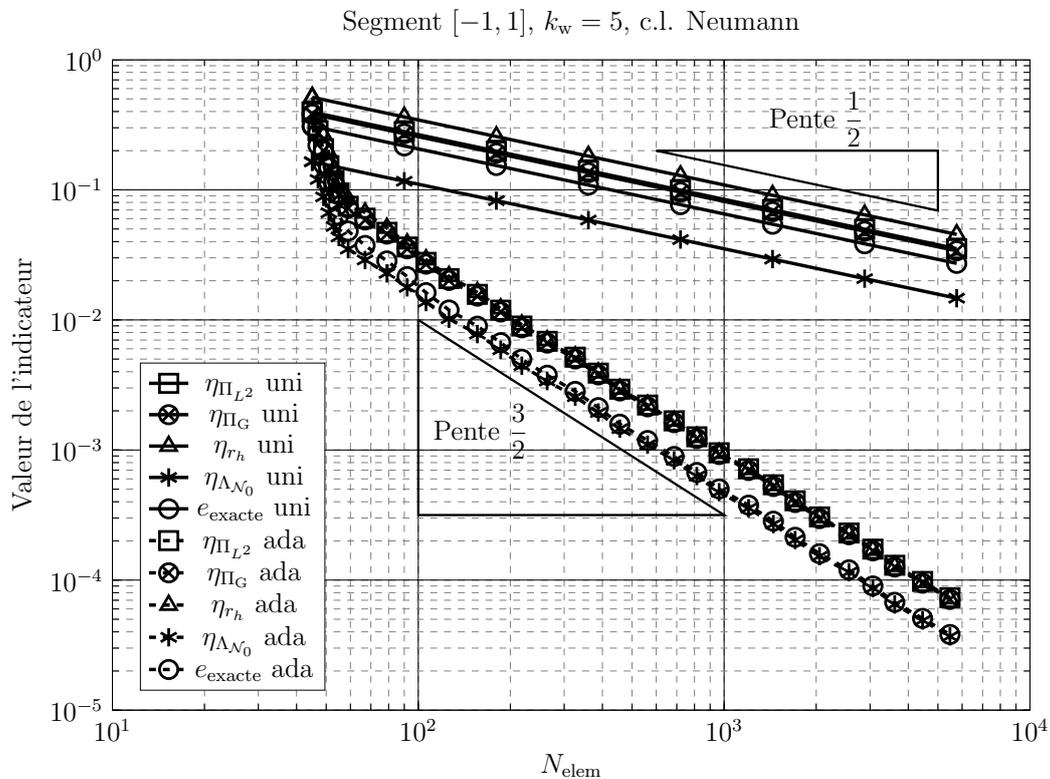


FIGURE 5.17 – Convergence des différents indicateurs pour le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann.

### Segment $[-1, 1]$ , guidage par $\eta_\Lambda$ , $k_w = 20$

La discrétisation est en  $\frac{\lambda}{7}$  ce qui est encore suffisant. Les courbes de convergence pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont sur la FIGURE 5.18 et celle pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  sur la FIGURE 5.19.

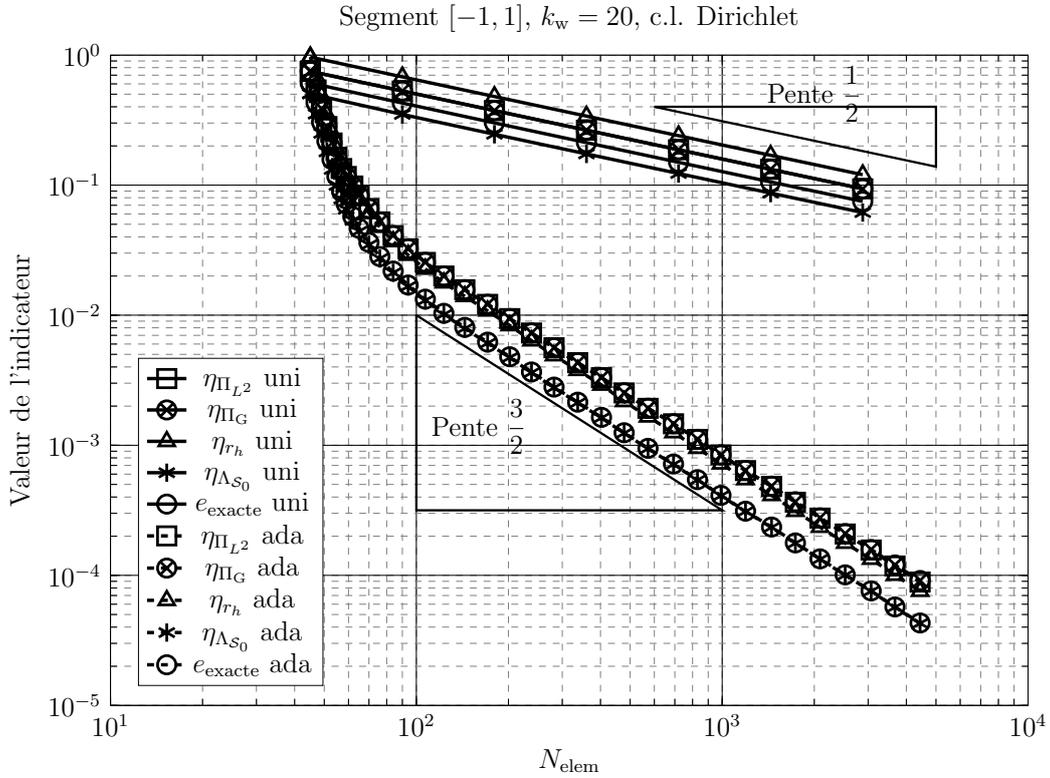


FIGURE 5.18 – Convergence des différents indicateurs pour le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Comme attendu, le taux de convergence est établi en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-1/2})$  en raffinement uniforme. Le comportement des autres indicateurs est similaire à  $k_w = 20$ . L'utilisation du raffinement auto-adaptatif permet de retrouver le taux optimal de convergence et la mesure "exacte" de l'erreur par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ .

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  Les commentaires sont également similaires à ceux pour  $k_w = 5$ . Le raffinement auto-adaptatif encore de mesurer l'erreur exacte.

On montre sur la FIGURE 5.20 un détail de la valeur absolue de la solution numérique à l'extrémité  $(1, 0)$  du segment pour une condition limite de type Neumann.

On observe que le caractère en  $\sqrt{r}$  est mal représenté lorsque le maillage est raffiné uniformément. *A contrario*, l'utilisation de raffinement auto-adaptatif "lisse" la solution. On remarque alors que l'indicateur a concentré les mailles à l'extrémité. Si on observe la densité de mailles entre  $x = 0.5$  et  $x = 0.6$ , on se rend compte que l'algorithme de raffinement n'a pas rajouté de mailles là où le raffinement uniforme en a rajouté.

### Segment $[-1, 1]$ , guidage par $\eta_\Lambda$ , $k_w = 100$

La discrétisation est maintenant en  $\frac{\lambda}{1.5}$  ce qui est trop faible. Les courbes pour  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont FIGURE 5.21 et celles pour  $\mathcal{N}_{k_w}$  FIGURE 5.22.

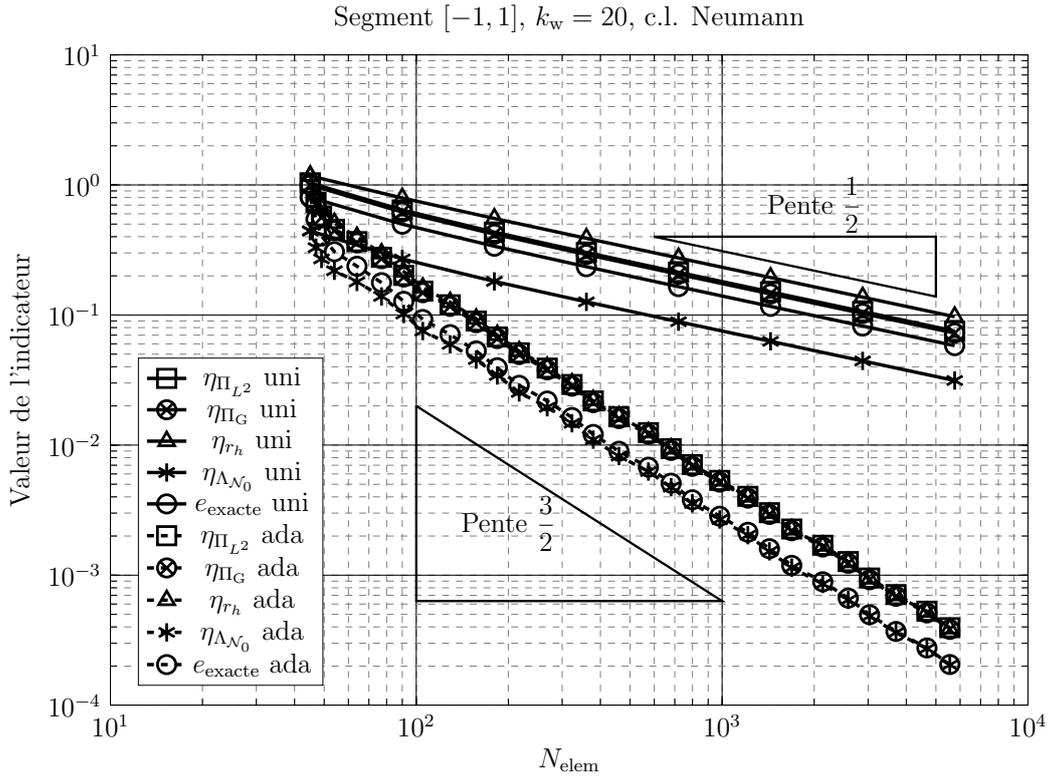


FIGURE 5.19 – Convergence des différents indicateurs pour le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann.

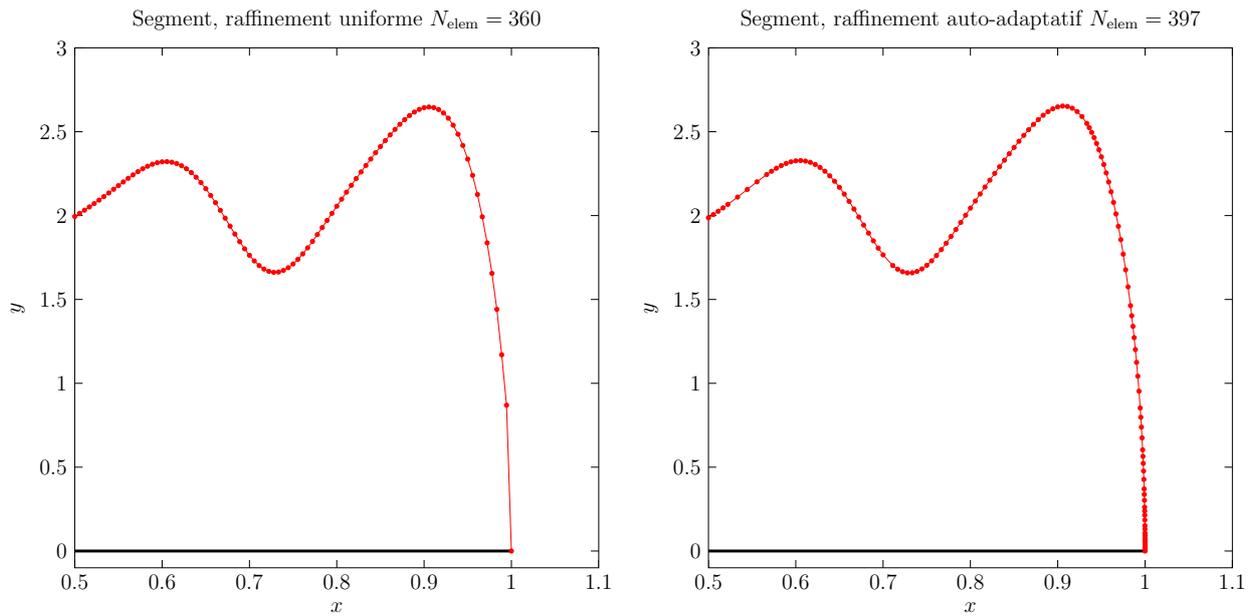


FIGURE 5.20 – Détail de la solution sur le segment  $[-1, 1]$  sur l'extrémité droite, avec raffinement uniforme  $N_{\text{elem}} = 360$  (gauche), avec raffinement auto-adaptatif  $N_{\text{elem}} = 397$  (droite).

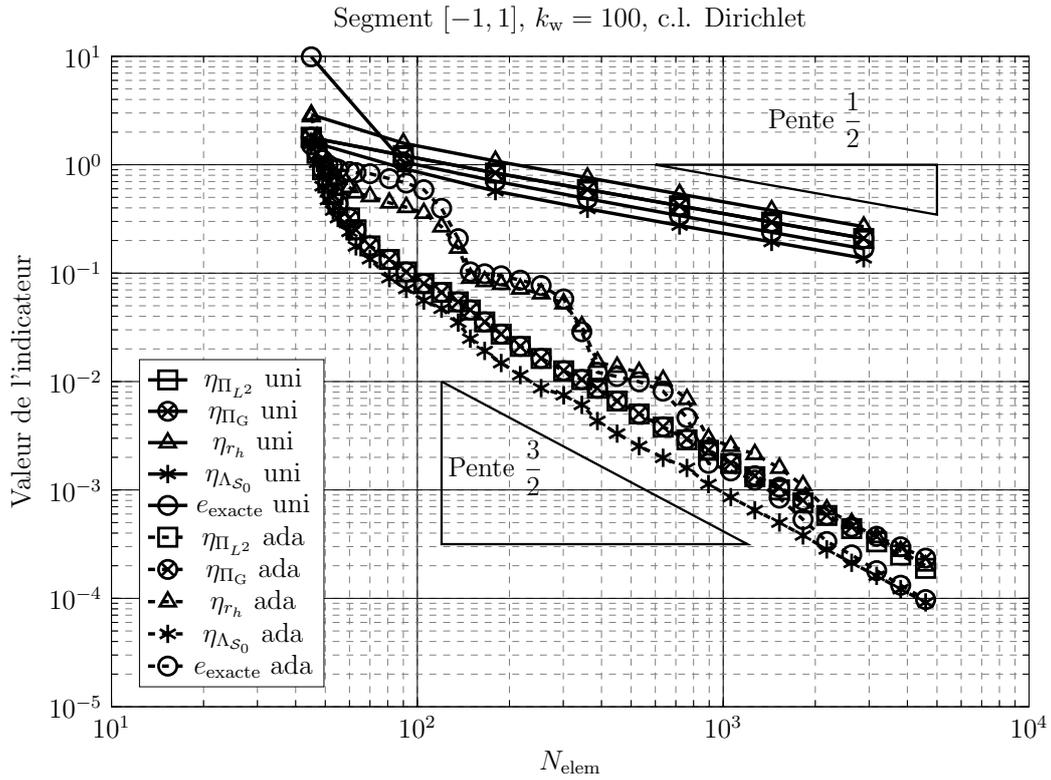


FIGURE 5.21 – Convergence des différents indicateurs pour le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Sans surprises, la convergence uniforme est en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-1/2})$ . En raffinement auto-adaptatif, la convergence est un peu plus chaotique. Les indicateurs  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  et  $\eta_{\Pi_{G/L^2}}$  suivent le schéma classique avec une décroissance initiale rapide de l'erreur puis une stabilisation au taux maximal en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . A contrario, les indicateurs  $\eta_{r_h}$  et  $e_{\text{exacte}}$  semblent converger en vaguelettes jusqu'à  $N_{\text{elem}} \approx 2000$ . Ensuite,  $\eta_{r_h}$  rejoint les autres indicateurs similairement à  $k_w = \{5, 20\}$ . De même, la valeur de  $e_{\text{exacte}}$  rejoint la courbe correspondant à  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ . Comme précédemment, il est possible que ce phénomène soit une précision insuffisante lors du calcul de la solution. Néanmoins, et sous réserve que le problème soit résolu avec suffisamment de précision, l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  mesure asymptotiquement l'erreur exacte.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  On retrouve les mêmes phénomènes que pour le carré (voir FIGURE 5.15) avec un taux initial de convergence uniforme élevé. De plus,  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  sont distincts. L'algorithme auto-adaptatif permet de maintenir la convergence optimale ainsi que la mesure "exacte" de l'erreur par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ .

On valide ici l'utilisation de l'indicateur  $\eta_{\Lambda}$  sous forme "puissance d'opérateurs" lorsque la surface  $\Gamma$  est ouverte. On constate numériquement la fiabilité, l'efficacité et le caractère "asymptotiquement exacte". Il n'y a donc aucune différence par rapport aux surfaces fermées.

On conclut par des simulations sur le résonateur. C'est un cas test qui permet de combiner une surface ouverte avec des phénomènes de diffraction et de résonance.

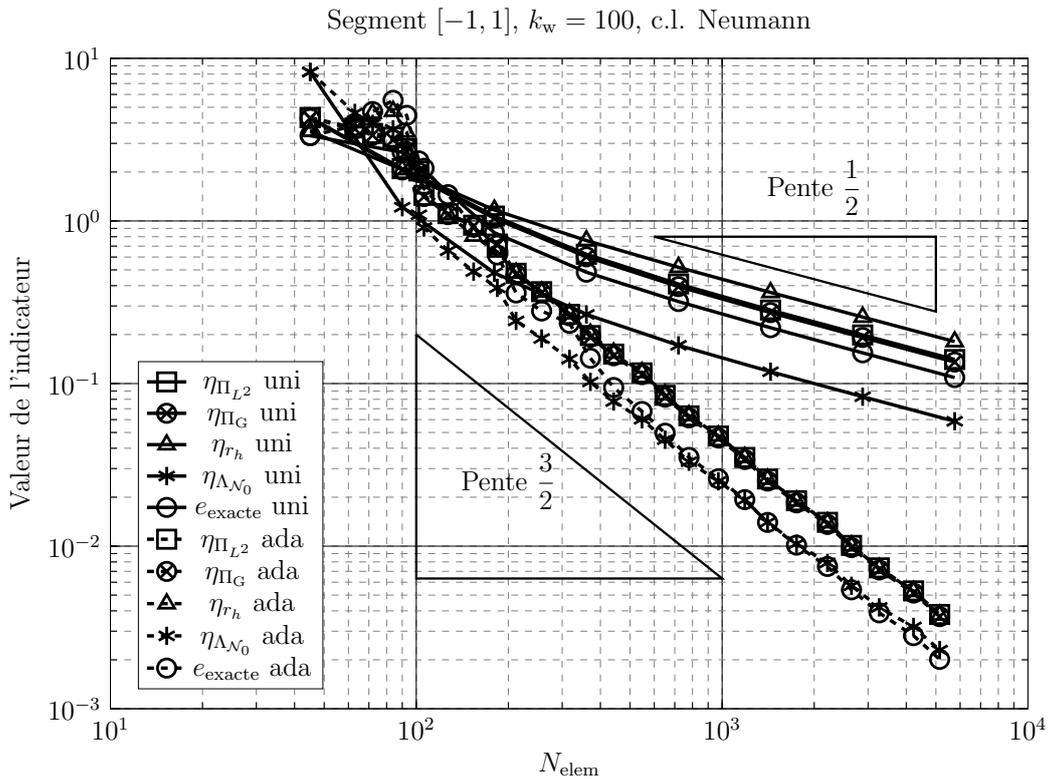


FIGURE 5.22 – Convergence des différents indicateurs pour le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0}}$ , c.l. Neumann.

#### 5.2.4 Guidage par l'indicateur $\Lambda$ sur le résonateur

Le résonateur permet de combiner plusieurs effets "physiques" susceptibles de perturber la convergence de l'erreur. L'ouverture d'angle  $\varepsilon = 20^\circ$  correspond à un diamètre  $d_\varepsilon = 0.31$ . Le nombre d'éléments initial est  $N_{\text{elem}}^0 = 45$ .

Premièrement, c'est une surface ouverte donc on s'attend à avoir une solution peu régulière aux bords de l'ouverture comme conséquence de la diffraction. Deuxièmement, l'ouverture est faite de telle manière que pour  $k_w = 5$ , l'onde soit faiblement diffractée à l'intérieur (longueur d'onde plusieurs fois plus grande que  $d_\varepsilon$ ); pour  $k_w = 20$  on a  $\lambda \approx d_\varepsilon$ ; pour  $k_w = 100$  l'onde rentre dans la cavité et est réfléchiée à l'intérieur. Des exemples pour le champ de potentiel acoustique sont représentés sur la FIGURE 5.23.

Le résonateur est éclairé par une onde plane se propageant selon  $-\mathbf{e}_x$  de nombre d'onde  $k_w = \{5, 20, 100\}$ . Les mêmes arguments que pour le segment permettent de prévoir une convergence uniforme en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-1/2})$  au mieux.

#### Résonateur $R = 0.9$ et $\varepsilon = 20^\circ$ , guidage par $\eta_\Lambda$ , $k_w = 5$

La discrétisation initiale est en  $\frac{\lambda}{10}$  ce qui est suffisamment fin. Le régime asymptotique est donc établi immédiatement. Les courbes de convergence pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont sur la FIGURE 5.24 et celles pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  sont sur la FIGURE 5.25.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Comme attendu, la convergence avec raffinement uniforme est établie en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-1/2})$ . Les indicateurs  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{S}_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  sont distincts.

En utilisant une boucle auto-adaptative, la vitesse de convergence initiale est très élevée mais se stabilise aussi très vite ( $N_{\text{elem}} \approx 60$ ) en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$  (comportement similaire au segment

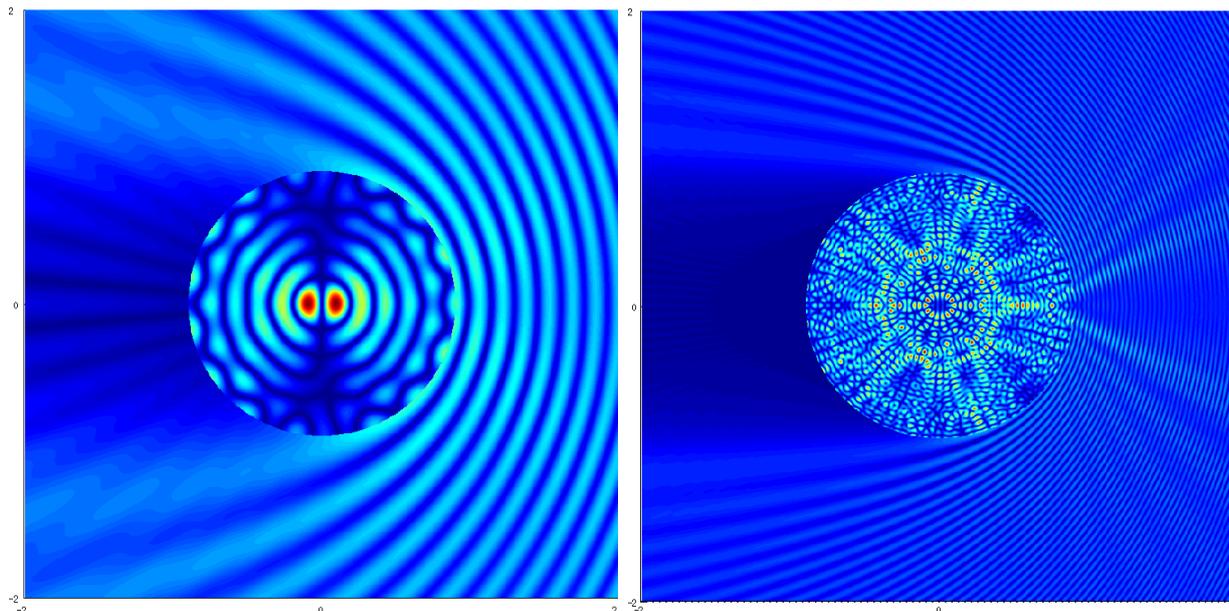


FIGURE 5.23 – Exemples de résonance dans le résonateur pour  $k_w = 20$  (gauche) et  $k_w = 100$  (droite), problème de Neumann.

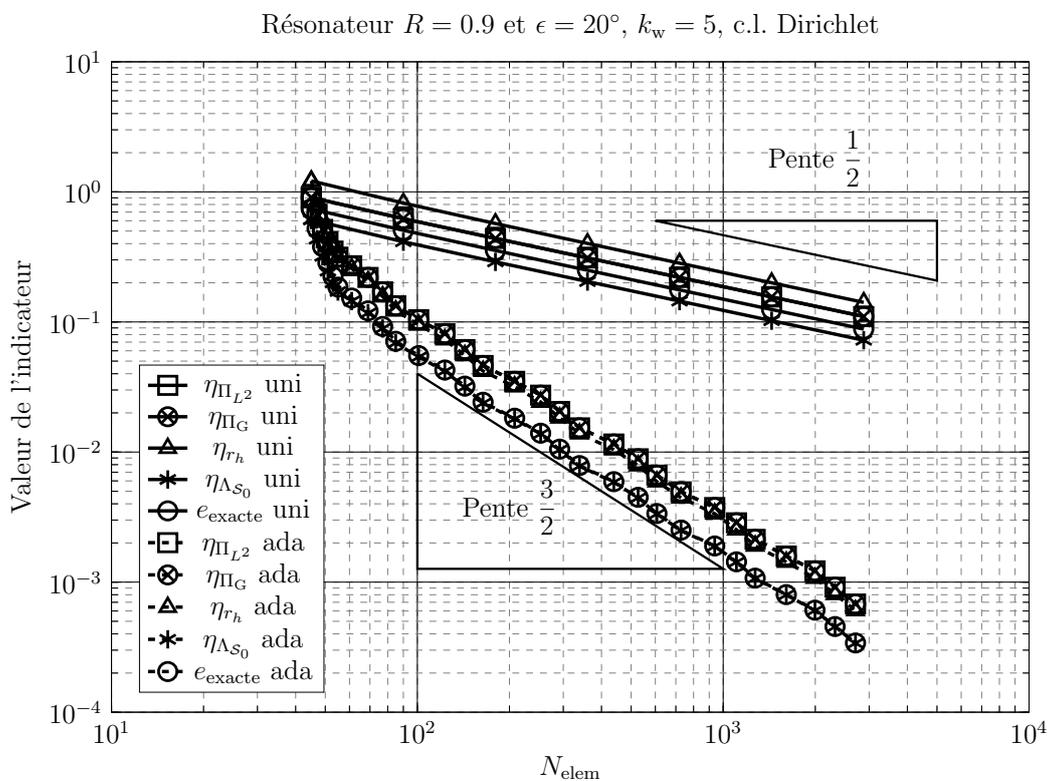


FIGURE 5.24 – Convergence des différents indicateurs pour le résonateur de rayon  $R = 0.9$  et d'ouverture  $\epsilon = 20^\circ$  pour  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet.

$[-1, 1]$ ). Les indicateurs  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  se superposent.

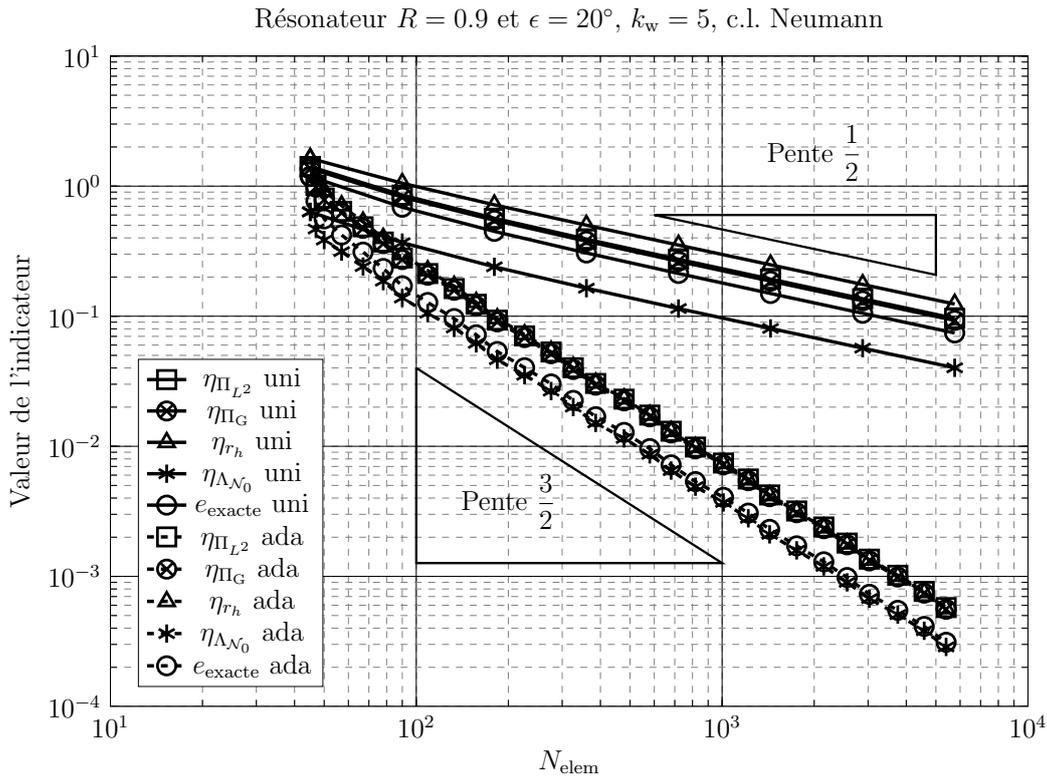


FIGURE 5.25 – Convergence des différents indicateurs pour le résonateur de rayon  $R = 0.9$  et d'ouverture  $\epsilon = 20^\circ$  pour  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  On a  $\lambda \sim 4d_\epsilon$ . L'onde est diffractée à l'intérieur du résonateur mais le signal n'est malgré tout pas très élevé. En raffinement uniforme, la convergence s'établit immédiatement en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-1/2})$ . On a encore des valeurs distinctes pour  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ .

L'utilisation de raffinement auto-adaptatif permet de retrouver presque immédiatement la convergence optimale en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$  et la correspondance entre  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$ .

### Résonateur $R = 0.9$ et $\epsilon = 20^\circ$ , guidage par $\eta_\Lambda$ , $k_w = 20$

La discrétisation initiale est en  $\frac{\lambda}{2.5}$  ce qui est trop faible. Dans ce cas,  $\lambda \approx d_\epsilon$  et l'onde est diffractée à l'intérieur du résonateur. Les courbes de convergence pour le cas  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont données sur la FIGURE 5.26 et pour le cas  $\mathcal{N}_{k_w}$  sur la FIGURE 5.27.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  En raffinement uniforme, les premières itérations correspondent à un taux en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . A partir de  $N_{\text{elem}} \approx 180$ , il se stabilise au taux asymptotique théorique en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-1/2})$ . Une explication possible est qu'initialement, le phénomène dominant n'est pas la diffraction mais une résonance à l'intérieur de la cavité. Dans ce cas, la partie singulière de la solution relative au phénomène de diffraction n'est pas dominante. Une fois que le phénomène de résonance est correctement approximé, le taux de convergence est bridé par la régularité de la solution exacte. Les comportements des indicateurs restent similaires à ce qui a été observé sur le segment.

Le raffinement auto-adaptatif permet de maintenir le taux de convergence en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . A partir de  $N_{\text{elem}} \approx 200$ , les courbes correspondant à  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  se superposent.

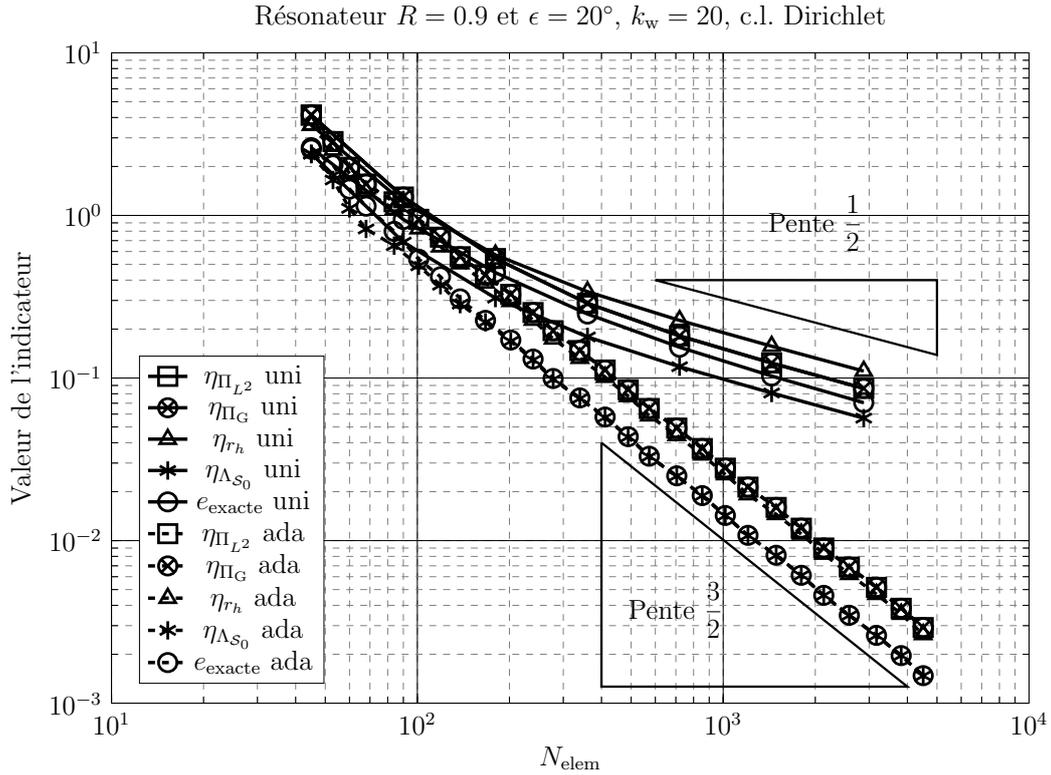


FIGURE 5.26 – Convergence des différents indicateurs pour le résonateur de rayon  $R = 0.9$  et d'ouverture  $\epsilon = 20^\circ$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet.

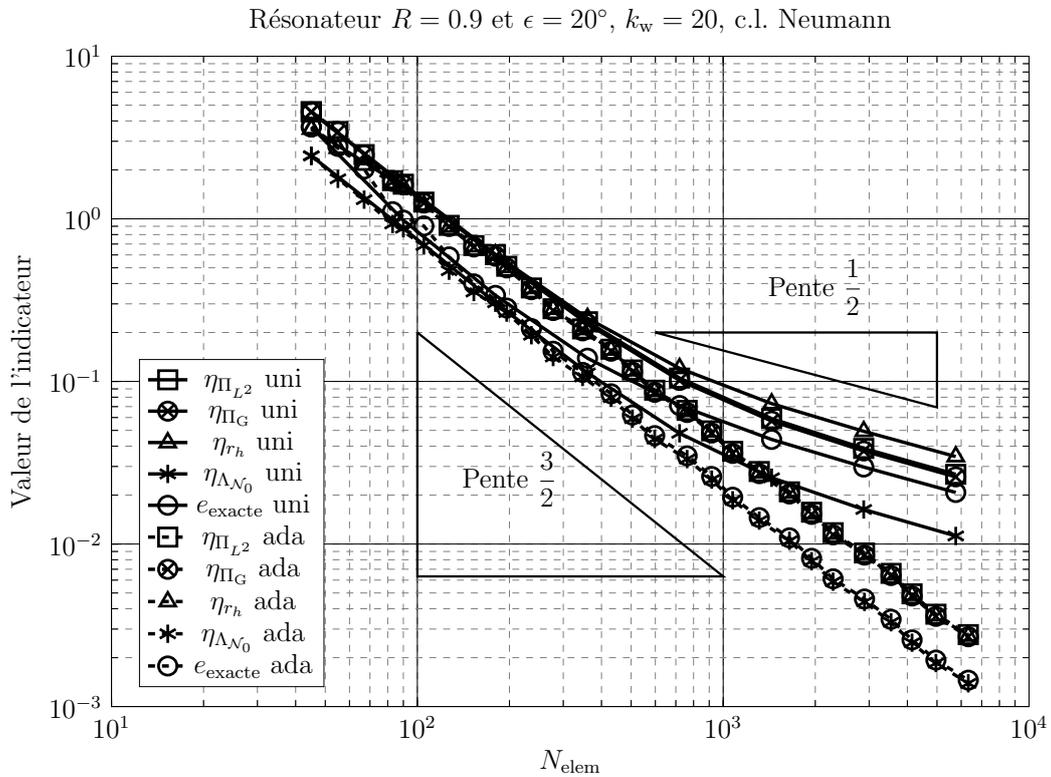


FIGURE 5.27 – Convergence des différents indicateurs pour le résonateur de rayon  $R = 0.9$  et d'ouverture  $\epsilon = 20^\circ$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  Le phénomène de résonance est beaucoup plus flagrant que pour le cas  $\mathcal{S}_{k_w}$ . Les indicateurs convergent initialement en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . A partir de  $N_{\text{elem}} \approx 400$  (discrétisation en  $\frac{\lambda}{20}$ ), ce taux diminue progressivement pour atteindre le taux uniforme calculé *a priori* une fois que la résonance est correctement approximée. Les indicateurs se comportent de la même manière que pour  $k_w = 5$ .

L'utilisation de raffinement auto-adaptatif permet de conserver le taux optimal en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . De plus,  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0}}$  coïncident dès  $N_{\text{elem}} \approx 200$ .

### Résonateur $R = 0.9$ et $\varepsilon = 20^\circ$ , guidage par $\eta_\Lambda$ , $k_w = 100$

La discrétisation est désormais en  $2\lambda$ . Dans ce cas, on a  $\frac{\lambda}{d_\varepsilon} \approx 0.2$  : l'onde traverse l'ouverture sans se diffracter et vient se réfléchir à l'intérieur de la cavité. Les courbes pour  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont FIGURE 5.28 et celles pour  $\mathcal{N}_{k_w}$  sur la FIGURE 5.29.

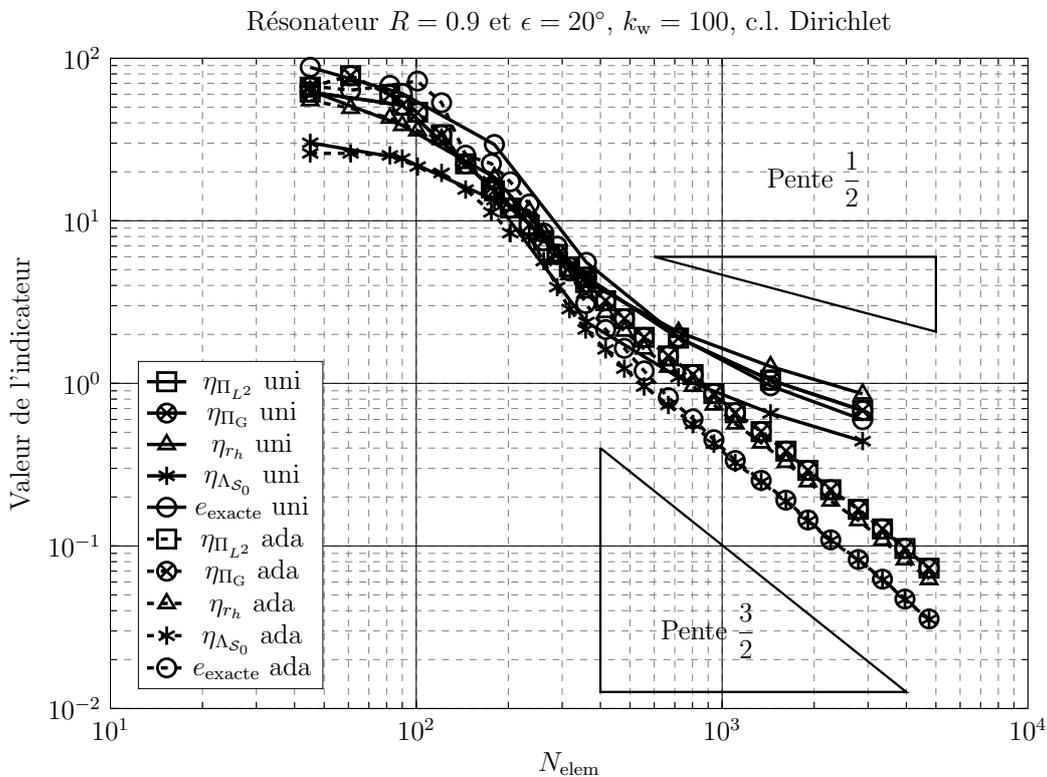


FIGURE 5.28 – Convergence des différents indicateurs pour le résonateur de rayon  $R = 0.9$  et d'ouverture  $\varepsilon = 20^\circ$  pour  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  En raffinement uniforme, le taux de convergence est initialement faible jusqu'à  $N_{\text{elem}} \approx 180$  (discrétisation en  $\frac{\lambda}{2}$  : le phénomène oscillant est vaguement approximé). Entre  $N_{\text{elem}} \approx 200$  et  $N_{\text{elem}} \approx 400$ , l'erreur converge au taux maximum en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$  avant de ralentir au taux asymptotique en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-1/2})$ .

L'utilisation de raffinement auto-adaptatif permet la convergence au taux maximum. De plus, l'erreur exacte est correctement mesurée par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ .

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  Comme pour le cas de l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ , ce qui apparaît est un condensé des différents phénomènes observés précédemment. On s'intéresse premièrement

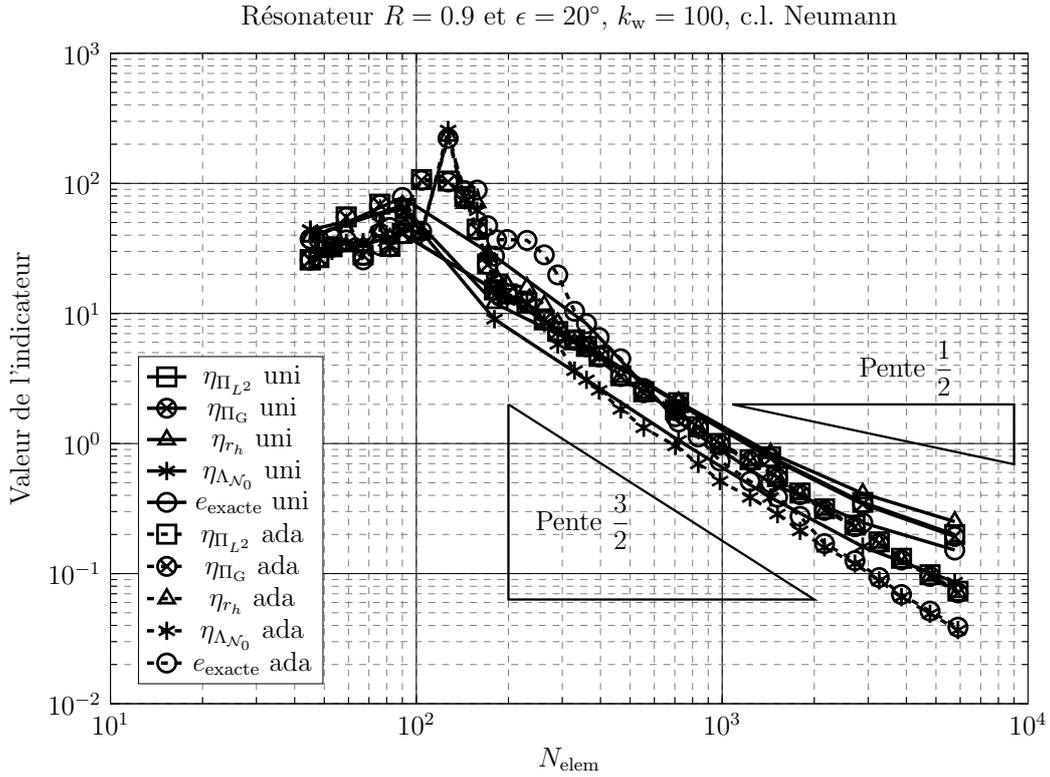


FIGURE 5.29 – Convergence des différents indicateurs pour le résonateur de rayon  $R = 0.9$  et d'ouverture  $\epsilon = 20^\circ$  pour  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann.

au raffinement uniforme. La valeur des indicateurs commence par augmenter car le phénomène oscillant n'est pas encore bien approximé. Il s'installe ensuite une convergence à un taux proche de l'optimal. Lorsque le phénomène dominant est la diffraction, la convergence ralentit vers le taux *a priori*. Les indicateurs se comportent similairement à ce qui a été observé précédemment.

En raffinement auto-adaptatif, les indicateurs oscillent légèrement lorsque  $N_{\text{elem}}$  est faible. Dès  $N_{\text{elem}} \approx 300$ , le taux de convergence de tous les indicateurs se stabilise en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . A partir de  $N_{\text{elem}} \approx 2000$ ,  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  se rejoignent et coïncident.

On a montré que l'indicateur  $\eta_\Lambda$  est capable, y compris sur des cas compliqués lorsque plusieurs phénomènes se superposent, de guider optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif et de mesurer correctement l'erreur exacte (sous réserve de raffinement auto-adaptatif).

Les simulations précédentes permettent de vérifier que l'indicateur  $\eta_\Lambda$  est, conformément à sa construction, fiable et efficace les surfaces lipschitziennes en général, fermées ou ouvertes. De plus, on conserve dans ce cas le caractère "asymptotiquement exact" de l'indicateur qu'on a justifié empiriquement pour les surfaces avec des singularités localisées.

On **valide** ainsi la construction de l'opérateur  $\eta_\Lambda$  sous forme de puissance d'opérateurs différentiels classiques et son utilisation dans le cadre de l'indicateur  $\eta_\Lambda$ .

Avant de poursuivre l'étude numérique sur  $\eta_\Lambda$ , on souhaite vérifier que l'extension des indicateurs de la littérature pour l'équation de Helmholtz qui a été faite au chapitre 3 est valable.

### 5.2.5 Guidage d'un algorithme de raffinement par les indicateurs $\eta_{r_h}$ et $\eta_{\Pi_{L^2}}$ de la littérature

On a vérifié précédemment la validité de l'indicateur  $\eta_\Lambda$ . Avant de poursuivre, on s'intéresse aux indicateurs présentés au chapitre 3 et qu'on a étendu aux opérateurs intégraux pour l'équation de Helmholtz.

Pour cela, on conserve  $\theta_d = 0.5$ . La géométrie sélectionné est le segment  $[-1, 1]$  car les surfaces ouvertes sont celles qui génèrent les solutions exactes les moins régulières. On effectue ensuite des simulations à  $k_w = 20$ . L'algorithme de raffinement auto-adaptatif est guidé par  $\eta_{r_h}$  ou bien  $\eta_{\Pi_{L^2}}$ . On a pu constater lors des simulations précédentes que le choix des projecteurs  $\Pi_G$  ou bien  $\Pi_{L^2}$  n'a aucune influence de la valeur de l'indicateur  $\eta_\Pi$  en général. Au vu du coût d'une projection  $\Pi_G$ , on se contente d'utiliser (et donc de représenter) que l'indicateur  $\eta_{\Pi_{L^2}}$ .

On s'intéresse dans un premier temps au guidage par  $\eta_{r_h}$ , puis dans un second temps à celui par  $\eta_{\Pi_{L^2}}$ .

#### Guidage par l'indicateur $\eta_{r_h}$

On guide l'algorithme auto-adaptatif en utilisant l'indicateur  $\eta_{r_h}$  étendu aux problèmes oscillants dont on a montré en 3.2.2 la fiabilité et la localité. Cela va permettre de vérifier numériquement son efficacité. Les courbes pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont sur la FIGURE 5.30 et celles pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  sont sur la FIGURE 5.31.

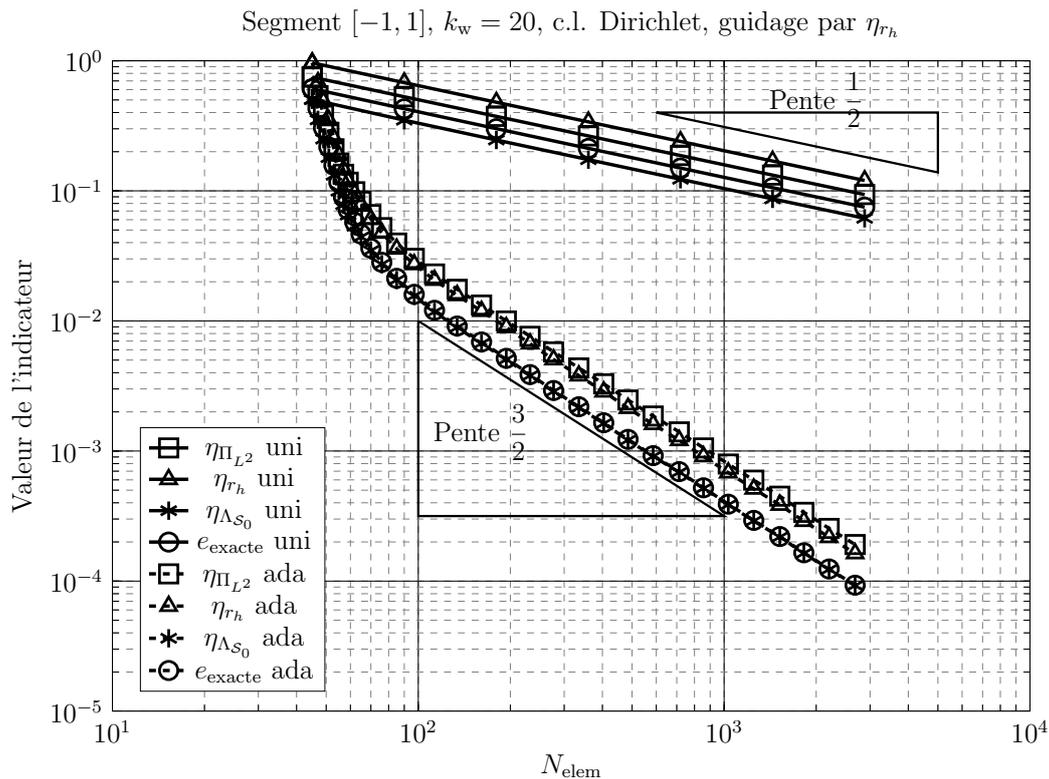


FIGURE 5.30 – Convergence des différents indicateurs pour le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{r_h}$ , c.l. Dirichlet.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Les courbes de convergence sont très similaires à ce qui a pu être observé dans le cas d'un guidage par  $\eta_\Lambda$ . En utilisant une boucle de raffinement auto-adaptative, on constate initialement une convergence rapide jusqu'à  $N_{\text{elem}} \approx 80$ . Le taux se

stabilise ensuite au taux maximum  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . De plus, les courbes correspondant à  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  sont superposées. La suite de maillages générée par  $\eta_{r_h}$ , et donc optimale par rapport à  $\eta_{r_h}$ , également optimale par rapport à  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ . L'erreur est toujours mesurée "exactement" malgré un guidage par  $\eta_{r_h}$  !

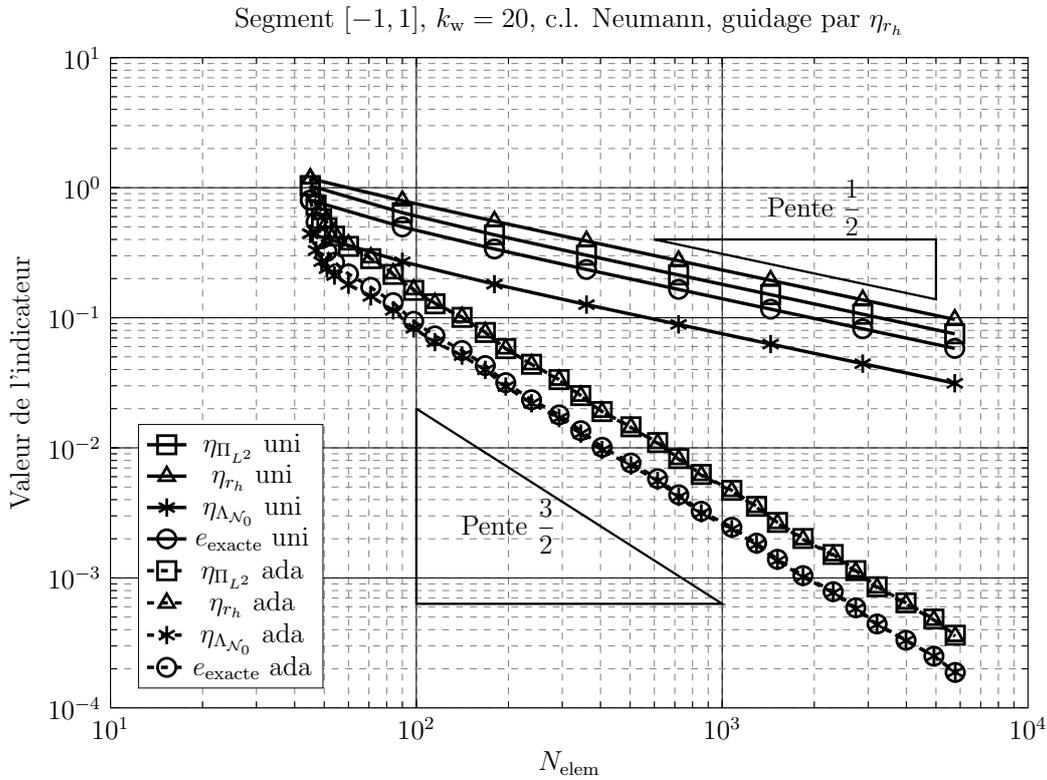


FIGURE 5.31 – Convergence des différents indicateurs pour le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{r_h}$ , c.l. Neumann.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  On peut faire les mêmes commentaires que pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ . On a bien une convergence optimale. De plus, l'erreur exacte est mesurée correctement par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  malgré un guidage par  $\eta_{r_h}$  ce qui prouve empiriquement que la convergence de l'algorithme auto-adaptatif guidé par cet estimateur est aussi optimale en erreur <sup>7</sup>.

L'extension de l'indicateur résidu pondéré faite en 3.2.2 est donc valide ! On observe maintenant ce qui se passe avec un guidage par  $\eta_{\Pi_{L^2}}$ .

### Guidage par l'indicateur $\eta_{\Pi_{L^2}}$

On guide l'algorithme de raffinement par  $\eta_{\Pi_{L^2}}$  afin de vérifier qu'on est dans le cadre des hypothèses de la partie 3.3.2. Les courbes de convergence pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont sur la FIGURE 5.32 et celles pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  sur la FIGURE 5.33.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  On constate encore une convergence initiale rapide avant une stabilisation en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . Les valeurs de  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  sont à nouveau égales. La suite de maillages générée par  $\eta_{\Pi_{L^2}}$  est également optimale pour  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ .

7. Ce qui n'a pas été prouvé au chapitre 3...

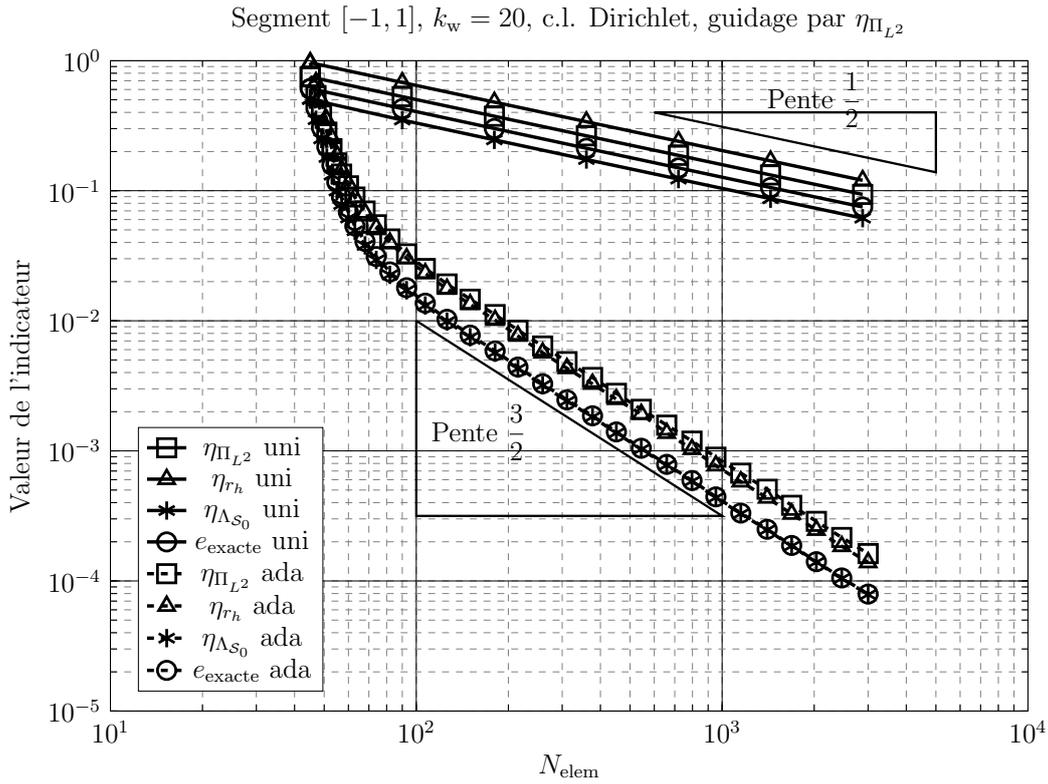


FIGURE 5.32 – Convergence des différents indicateurs pour le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Pi_{L^2}}$ , c.l. Dirichlet.

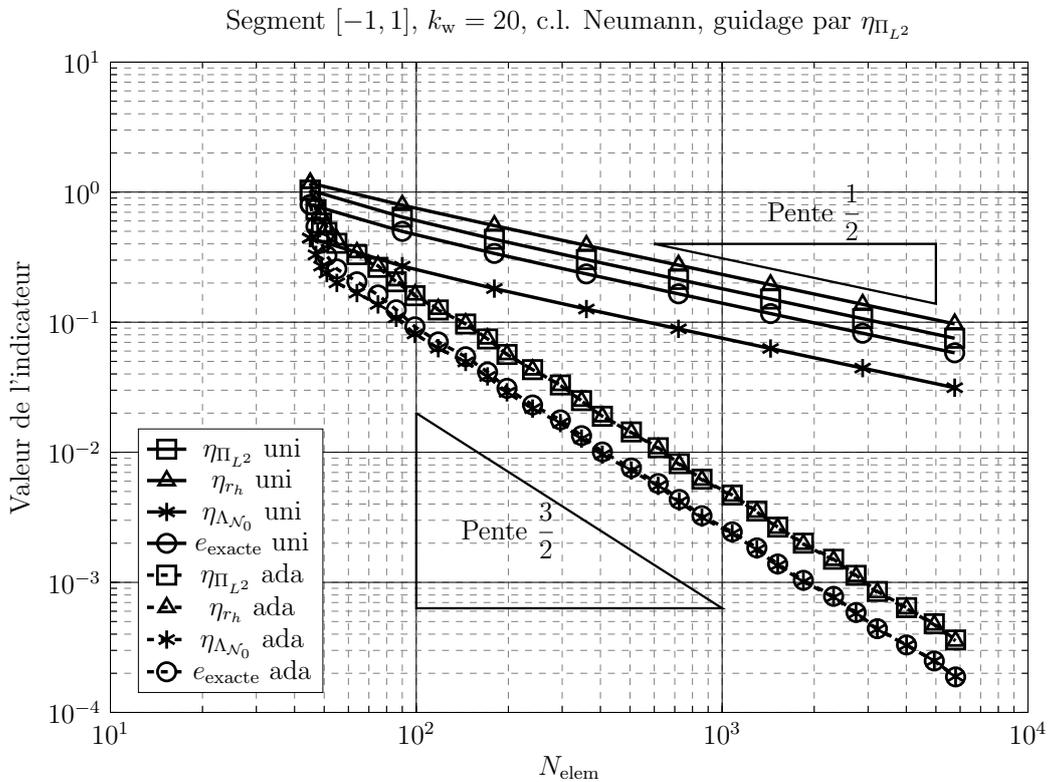


FIGURE 5.33 – Convergence des différents indicateurs pour le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Pi_{L^2}}$ , c.l. Neumann.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  Comme pour le cas  $\mathcal{S}_{k_w}$ , la convergence est optimale lorsque l'algorithme est guidé par  $\eta_{\Pi_{L^2}}$  et  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0}}$  permet encore de mesurer "exactement"  $e_{\text{exacte}}$ .

Les simulations de cette partie ont permis de vérifier que les suites de maillage générées par chacun des marquages sont très proches et optimales. En ce qui concerne le guidage de l'algorithme et son optimalité, il est alors **équivalent de marquer par  $\eta_{r_h}$ ,  $\eta_{\Pi_{L^2}}$  ou bien  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{S}_0}}$**  ! L'indicateur  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{S}_0}}$  peut ensuite être utilisé pour contrôler  $e_{\text{exacte}}$ . Par exemple, dans le cas de l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$ ,  $\eta_{\Lambda}$  est plus coûteux que  $\eta_{r_h}$  puisqu'il nécessite le calcul du résidu **puis** un post-traitement sur ce résidu. On peut donc se contenter de marquer par le résidu "classique" et d'appliquer l'opérateur  $\Lambda$  à intervalles réguliers pour vérifier la valeur de  $e_{\text{exacte}}$  dont on se servirait comme critère d'arrêt.

Dans toutes les simulations précédentes, on a fixé le paramètre  $\theta_d = 0.5$ . On s'intéresse dans la partie suivante au comportement de la convergence lorsqu'on le diminue ou augmente.

### 5.2.6 Comportement de l'indicateur $\eta_{\Lambda}$ lorsqu'on fait varier le paramètre de raffinement "Dörfler" $\theta_d$

On étudie ici le comportement en convergence de  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{S}_0}}$  lorsqu'on fait varier le paramètre de raffinement  $\theta_d = \{0.25, 0.5, 0.75\}$  pour  $k_w = 20$  et  $k_w = 100$ . Pour  $\theta_d$  petit, on ne s'attend pas à une modification flagrante du taux de convergence ou de la précision de  $\eta_{\Lambda}$ , uniquement à une augmentation du nombre d'itérations. Pour  $\theta_d = 0.75$ , on se rapproche d'un raffinement uniforme et il se peut que la convergence en raffinement auto-adaptatif n'atteigne pas le taux en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ .

La géométrie de test est encore le segment  $[-1, 1]$ . On choisit de ne représenter **que** l'indicateur  $\eta_{\Lambda}$  afin de ne pas surcharger la figure.

#### Segment $[-1, 1]$ , guidage par $\eta_{\Lambda}$ avec $\theta_d = \{0.25, 0.5, 0.75\}$ et $k_w = 20$

Les courbes de convergence pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont sur la FIGURE 5.34 et celle pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  sont sur la FIGURE 5.35.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Quelque soit le paramètre de raffinement choisit, le taux maximum de convergence est obtenu après  $N_{\text{elem}} \approx 80$ . Les courbes correspondant à  $\theta_d = \{0.25, 0.5\}$  sont parfaitement superposées. La courbe correspondant à  $\theta_d = 0.75$  est légèrement au-dessus. Cela peut s'expliquer par le fait que lorsque le paramètre de raffinement est trop grand, la singularité aux bords n'est pas calculée assez précisément et sa valeur est un peu plus élevée lorsque l'algorithme "passe en convergence optimale".

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  Quelque soit  $\theta_d$ , le régime de convergence asymptotique est obtenu après  $N_{\text{elem}} \approx 50$  (soit presque immédiatement). Les courbes correspondant à  $\theta_d = \{0.25, 0.5\}$  sont superposées alors que l'erreur pour  $\theta_d = 0.75$  est légèrement supérieure.

#### Segment $[-1, 1]$ , guidage par $\eta_{\Lambda}$ avec $\theta_d = \{0.25, 0.5, 0.75\}$ et $k_w = 100$

En augmentant la fréquence, on s'attend *a priori* à observer une mauvaise convergence lorsque  $\theta_d = 0.75$ . Les courbes de convergence pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont représentées sur la FIGURE 5.36 et celles pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  sur la FIGURE 5.37.

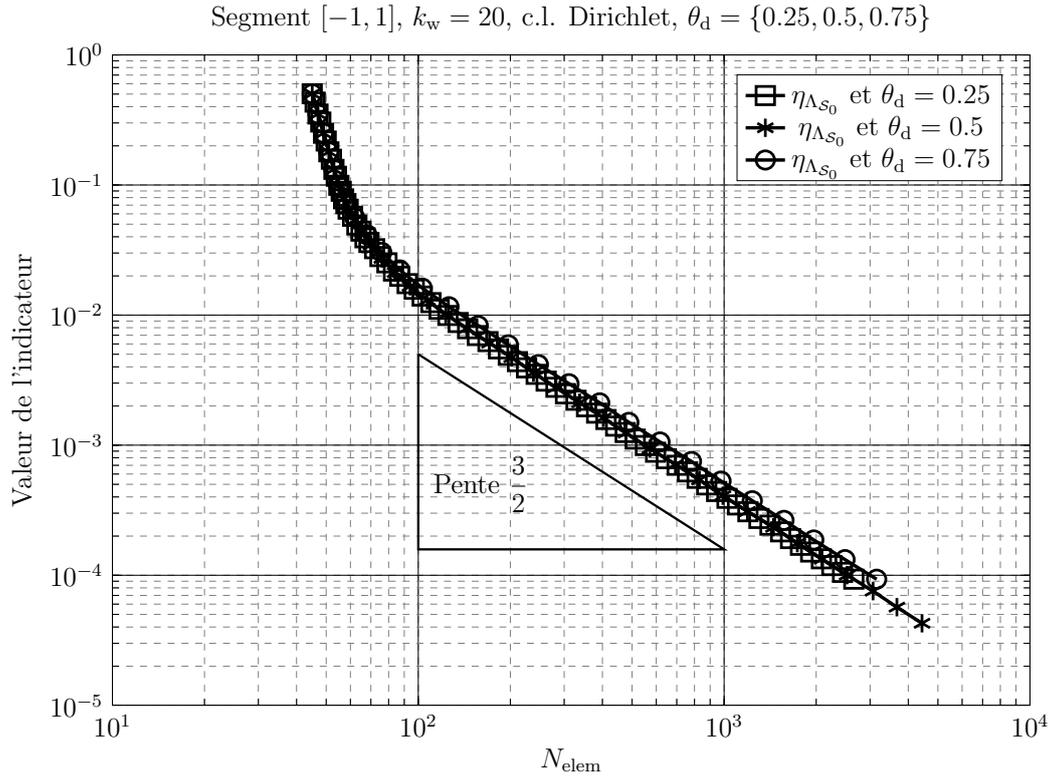


FIGURE 5.34 – Convergence de l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  sur le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = \{0.25, 0.5, 0.75\}$ , c.l. Dirichlet

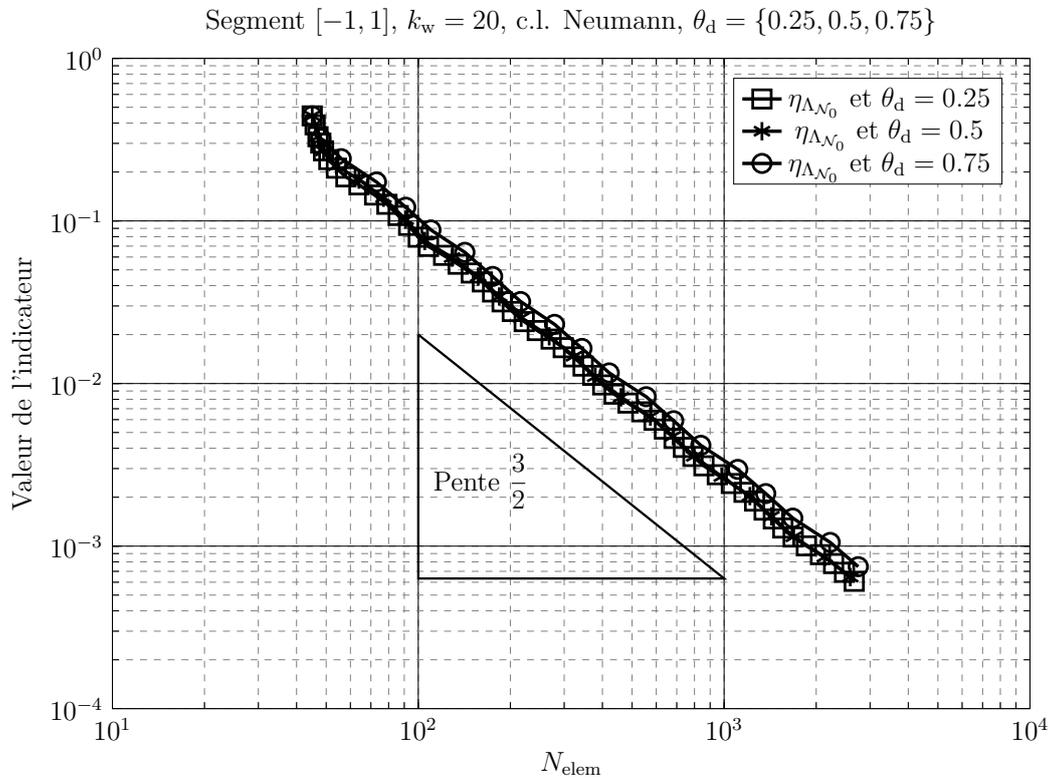


FIGURE 5.35 – Convergence de l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  sur le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = \{0.25, 0.5, 0.75\}$ , c.l. Neumann

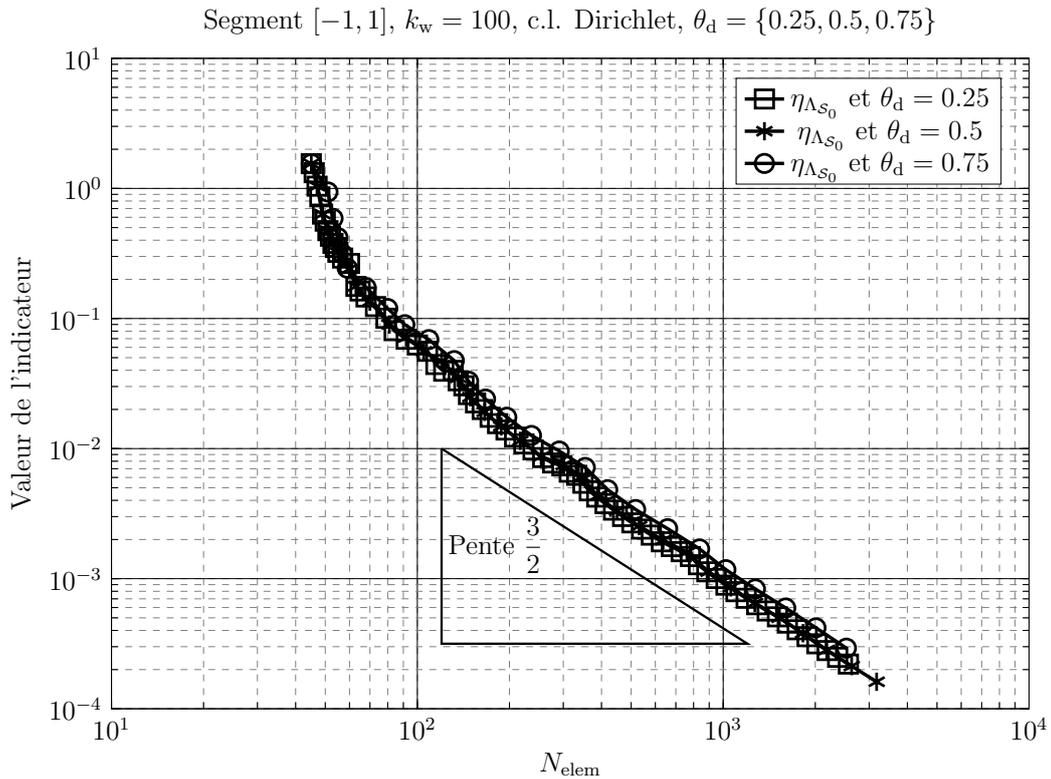


FIGURE 5.36 – Convergence de l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  sur le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = \{0.25, 0.5, 0.75\}$ , c.l. Dirichlet

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Les observations ne changent pas par rapport à ce qui a été fait pour la FIGURE 5.34.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  On fait les mêmes observations que pour la FIGURE 5.35.

Au vu de ces simulations, choisir un paramètre  $\theta_d$  trop petit peut-être contre-productif puisqu'on va multiplier le nombre d'itérations (coûteuses!) alors que le gain au niveau de l'erreur est nul par rapport à un  $\theta_d$  intermédiaire. Un paramètre  $\theta_d$  trop grand risque par contre de ne pas faire diminuer suffisamment l'erreur, ou bien de dégrader sa mesure par  $\eta_\Lambda$ .

Jusqu'à maintenant, on a supposé que la source est de type "onde plane". On la remplace par une source ponctuelle placée proche de la géométrie.

### 5.2.7 Comportement de l'indicateur $\eta_\Lambda$ lorsqu'on utilise une source ponctuelle

On remplace la source de type "onde plane" par une source ponctuelle placée à proximité de l'objet diffractant. Cela permet de "localiser le phénomène". On remarque qu'une source de type onde plane peut être vue comme une source ponctuelle renvoyée à l'infini.

La géométrie choisie est le carré. On l'éclaire par une source ponctuelle  $S$  placée à proximité du coin de coordonnées  $(0.5, 0.5)$ . On choisit  $x_S = (0.5001, 0.5001)$ . On effectue des simulations pour  $k_w = 20$  et  $k_w = 100$ . Le paramètre de raffinement est  $\theta_d = 0.5$ .

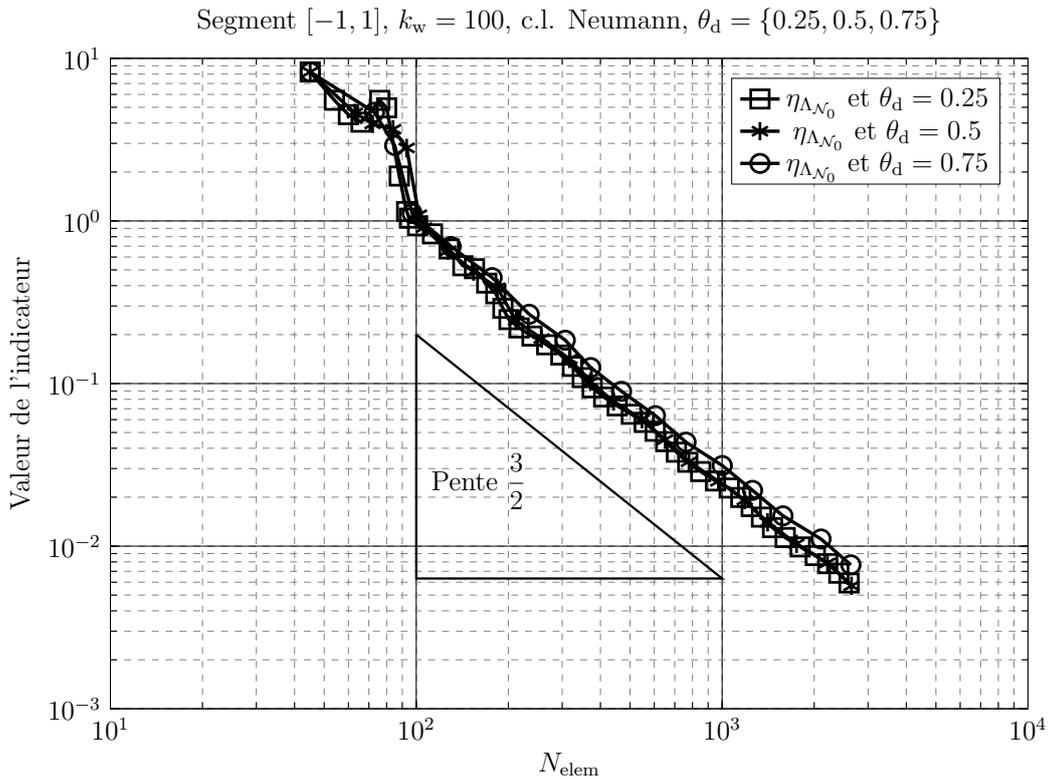


FIGURE 5.37 – Convergence de l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  sur le segment  $[-1, 1]$  pour  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = \{0.25, 0.5, 0.75\}$ , c.l. Neumann

### Comportement de $\eta_\Lambda$ quand la source est ponctuelle, $k_w = 20$

Les courbes de convergence pour le  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont présentées sur la FIGURE 5.38 et celles pour le  $\mathcal{N}_{k_w}$  sont FIGURE 5.39.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Il apparaît immédiatement qu'utiliser un raffinement uniforme pose de gros soucis. En effet, l'erreur semble converger très faiblement lorsque le maillage est raffiné alors qu'on multiplie le nombre d'éléments par presque 40 ! On peut expliquer ce problème de la manière suivante : afin de bien approximer la solution au coin, il faut localement un nombre de mailles important, or le raffinement uniforme ne le permet pas. L'erreur  $e_{\text{exacte}}$  est par contre mesurée correctement par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ .

L'utilité du raffinement auto-adaptatif est flagrante. Dans un premier temps, l'erreur converge fortement lorsque l'algorithme maille la zone à proximité de la source. Dans un second temps,  $N_{\text{elem}} \approx 100$ , le régime asymptotique est atteint et l'ensemble des indicateurs converge en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . L'erreur exacte est correctement estimée par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ .

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  Sur la première itération de raffinement uniforme, l'erreur diminue au taux optimal en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . Cependant, elle ré-augmente dès les itérations suivantes. Elle semble finalement diminuer lorsque  $N_{\text{elem}}$  devient très élevé. De plus,  $e_{\text{exacte}}$  n'est pas correctement mesuré par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  même si les deux courbes semblent se rapprocher à la dernière itération. Le phénomène propagatif n'est pas correctement approximé lorsque la source est si proche du bord et que la discrétisation est trop faible. Il se peut que le nombre d'éléments au coin proche de la source après plusieurs raffinements uniformes est encore trop faible ce qui explique l'absence de convergence de l'erreur. On est, similairement au cas de l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ , clairement sous-optimal !

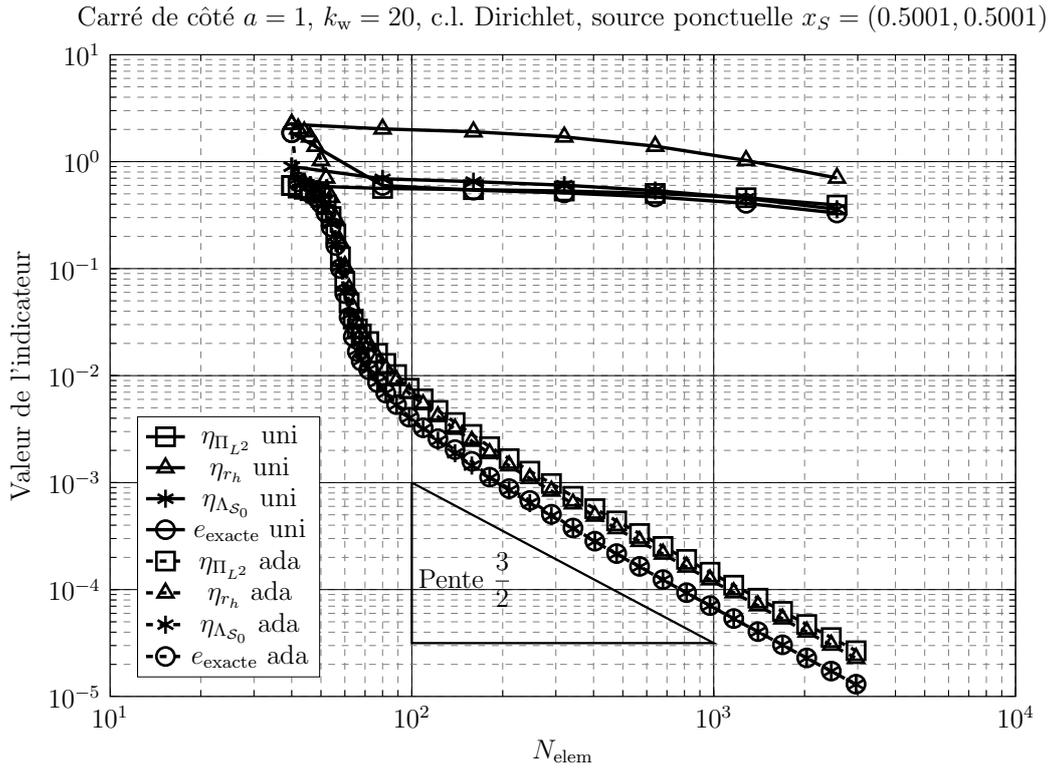


FIGURE 5.38 – Convergence des différents indicateurs pour le carré de côté  $a = 1$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet, source ponctuelle en  $x_S = (0.5001, 0.5001)$ .

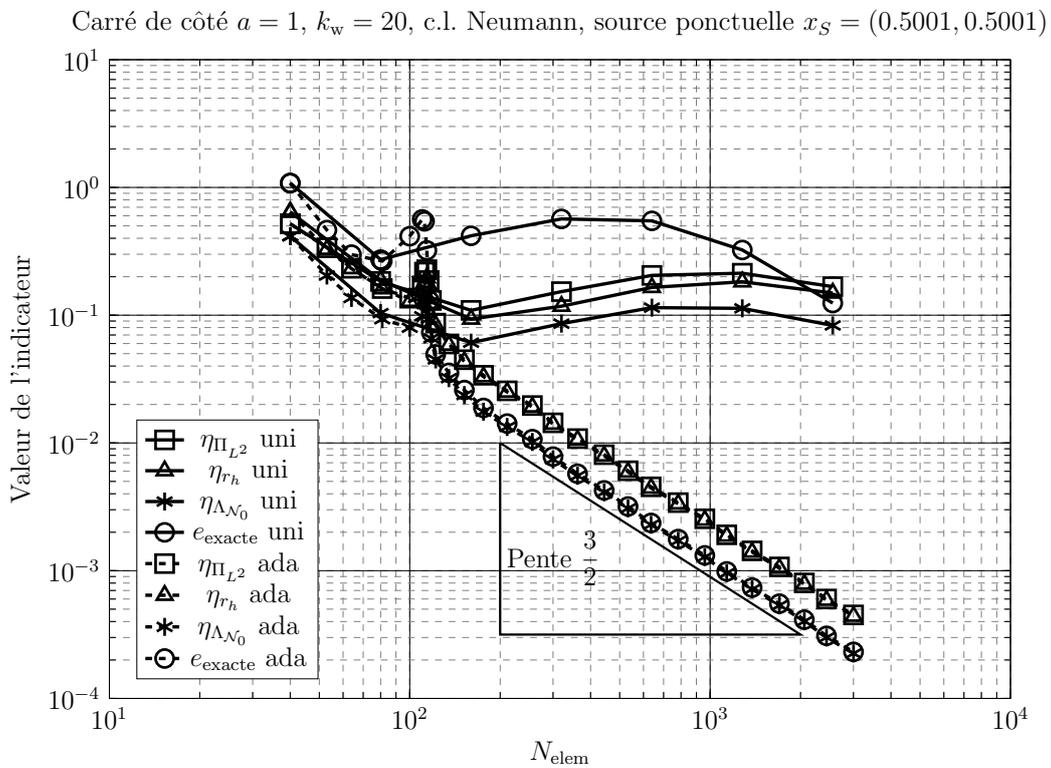


FIGURE 5.39 – Convergence des différents indicateurs pour le carré de côté  $a = 1$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann, source ponctuelle en  $x_S = (0.5001, 0.5001)$ .

On remarque trois étapes dans la convergence de l'algorithme auto-adaptatif. Dans un premier temps, les indicateurs convergent au taux optimal en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ . Pour  $N_{\text{elem}} \approx 100$ , leur valeur augmente brusquement et l'algorithme effectue un nombre important d'itérations pour lesquelles il rajoute un très petit nombre d'éléments (2 à chaque fois). On remarque que le  $N_{\text{elem}}$  correspond à peu près à celui pour lequel on a la première inflexion dans la convergence en raffinement uniforme. Finalement, pour  $N_{\text{elem}} \approx 150$ , la convergence se stabilise au taux maximum. L'erreur exacte est correctement mesurée par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ . A titre d'exemple, on montre sur la FIGURE 5.40 deux maillages pour le carré éclairé par une source ponctuelle pour  $k_w = 20$ . Il apparaît clairement une concentration des mailles au coin  $(0.5, 0.5)$  alors que le coin opposé en  $(-0.5, -0.5)$ , qui correspond à une zone d'ombre, est moins maillé que ce qu'on observe en raffinement uniforme.

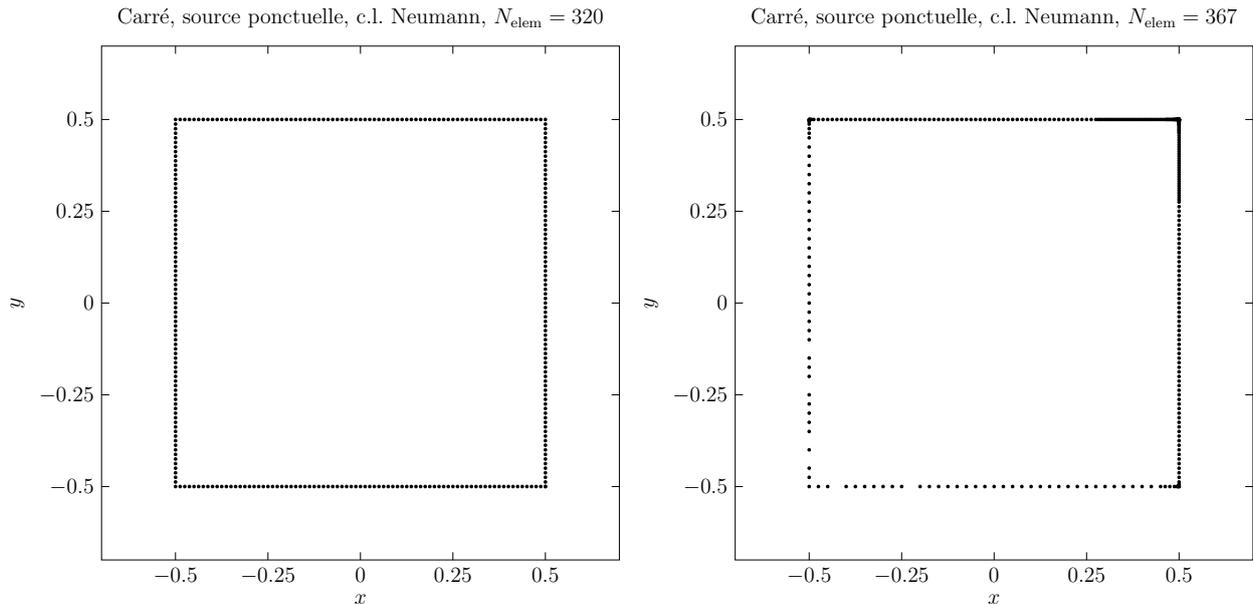


FIGURE 5.40 – Comparaison des maillages obtenus pour le carré éclairé par une source ponctuelle, avec raffinement uniforme  $N_{\text{elem}} = 320$  (gauche) et raffinement auto-adaptatif  $N_{\text{elem}} = 367$  (droite).

### Comportement de $\eta_{\Lambda}$ quand la source est ponctuelle, $k_w = 100$

On s'attend ici à retrouver les phénomènes observés pour  $k_w = 20$ , avec la difficulté posée par la haute fréquence et la sous-discrétisation initiale. Les courbes pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont sur la FIGURE 5.41 et celles pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  sont sur la FIGURE 5.42.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  On observe le même comportement en convergence que pour  $k_w = 20$ . Le raffinement uniforme est complètement inutile même si on observe que  $e_{\text{exacte}}$  est correctement estimée par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  à partir de  $N_{\text{elem}} \approx 640$ . La boucle auto-adaptative permet de récupérer le meilleur taux de convergence possible en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$  qui est atteint pour  $N_{\text{elem}} \approx 500$ . Malgré un nombre d'onde élevé, l'erreur exacte est correctement estimée par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  dès les premières itérations.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  La convergence uniforme est très chaotique. Il n'y a, d'ailleurs, pas de convergence des indicateurs. L'erreur  $e_{\text{exacte}}$  n'est pas approximée par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ . Encore une fois, l'utilisation d'un algorithme auto-adaptatif permet de récupérer la convergence optimale. De plus, on a une superposition de  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  à partir de  $N_{\text{elem}} \approx 2000$ .

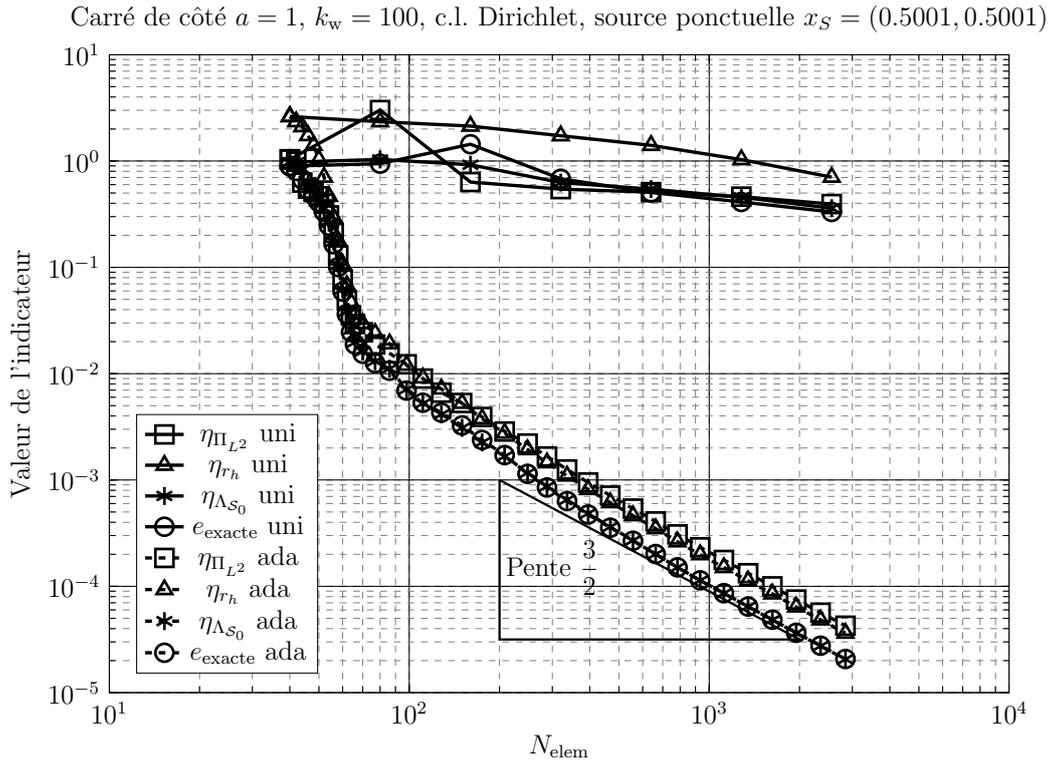


FIGURE 5.41 – Convergence des différents indicateurs pour le carré de côté  $a = 1$  pour  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$ , c.l. Dirichlet, source ponctuelle en  $x_S = (0.5001, 0.5001)$ .

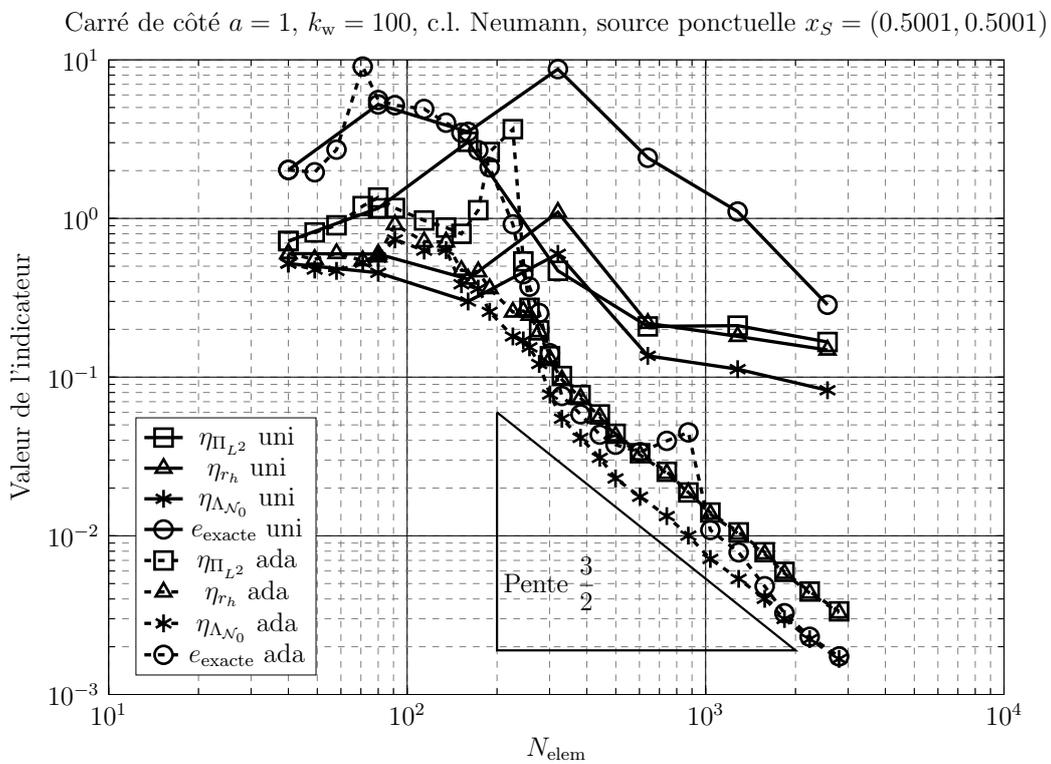


FIGURE 5.42 – Convergence des différents indicateurs pour le carré de côté  $a = 1$  pour  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ , c.l. Neumann, source ponctuelle en  $x_S = (0.5001, 0.5001)$ .

L'utilité du raffinement auto-adaptatif est ici flagrante puisqu'il permet de faire diminuer rapidement l'erreur et garantir sa convergence.

Prenons par exemple l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ . On constate qu'il n'y a besoin que de peu d'éléments pour obtenir une erreur  $e_{\text{exacte}} \leq 10^{-2}$  puisque 100 éléments suffisent. Le nombre d'itérations pour y parvenir peut paraître élevé (17 pour  $k_w = 20$ , 18 pour  $k_w = 100$ ), mais ces itérations ne coûtent presque rien car le problème à résoudre est de faible dimension ! Si on souhaite obtenir une telle erreur avec un maillage uniforme, il faudrait compter plusieurs dizaines de milliers d'éléments. . .

De plus, l'utilisation du raffinement auto-adaptatif permet encore de garantir, à faible  $N_{\text{elem}}$  une bonne mesure de  $e_{\text{exacte}}$  par  $\eta_\Lambda$ .

Dans cette partie, on a montré que l'indicateur  $\eta_\Lambda$  permet de guider optimalement un algorithme auto-adaptatif pour plusieurs types de sources. C'est un résultat assez logique puisque l'indicateur est construit à partir des propriétés de l'opérateur inversé et non la nature de la source.

Dans la partie suivante, on effectue une comparaison entre l'opérateur  $\eta_\Lambda$  sous forme "puissance" avec sa forme "intégrale".

### 5.2.8 Comparaison entre l'indicateur $\eta_\Lambda$ sous forme "puissance" et sous forme "intégrale"

Jusqu'à maintenant, on s'est intéressé à l'opérateur  $\eta_\Lambda$  sous sa forme "puissance d'opérateurs différentiels classique" qu'on note ici (et seulement ici)  $\eta_\Lambda^p$ . C'est en effet la forme la plus agréable à utiliser et sur laquelle on a le plus de résultats quant à la convergence, l'inconnue théorique étant le caractère asymptotiquement exacte. Dans cette partie, on vérifie que la construction de l'indicateur  $\eta_\Lambda$ , lorsque  $\Lambda$  est donnée sous forme intégrale (voir 4.2), reste valable. On le notera  $\eta_\Lambda^i$ .

Pour cela, on effectue des simulations en guidant par l'un ou l'autre indicateur, i.e. les courbes correspondant à  $\eta_\Lambda^i$  sont guidées par  $\eta_\Lambda^i$ , de même pour  $\eta_\Lambda^p$ . On n'a pas défini le comportement au bord de  $\eta_\Lambda^i$  dans le cas d'une surface ouverte donc s'intéresse au cas d'une surface fermée : la géométrie choisie est le carré, éclairé par une onde plane se propageant selon  $-\mathbf{e}_x$  et de nombre d'onde  $k_w = 20$  ou  $k_w = 100$ .

Les courbes pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont représentées sur la FIGURE 5.43, celles pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  sur la FIGURE 5.44. On a déjà montré que  $\eta_\Lambda^p$  restitue correctement la valeur de  $e_{\text{exacte}}$ . Afin de ne pas surcharger les figures, on ne représente donc pas  $e_{\text{exacte}}$ .

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Pour chaque nombre d'onde, les courbes correspondant à  $\eta_{\Lambda_{S_0}}^p$  et  $\eta_{\Lambda_{S_0}}^i$  se superposent ce qui signifie que la forme intégrale pour  $\Lambda$  permet encore d'obtenir la convergence optimale, mais aussi d'avoir "l'exactitude" asymptotique par rapport à l'erreur exacte.

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  Il n'y a pas de remarque supplémentaire à faire par rapport au cas  $\mathcal{S}_{k_w}$  ; la construction intégrale pour  $\Lambda_{\mathcal{N}_0}$  permet de retrouver le meilleur taux de convergence et l'exactitude asymptotique.

Ces simulations permettent de vérifier que la construction de l'opérateur  $\Lambda$  sous forme intégrale reste valide sur une surface lipschitzienne fermée en dépit de l'incertitude théorique sur le caractère isomorphe de cet opérateur.

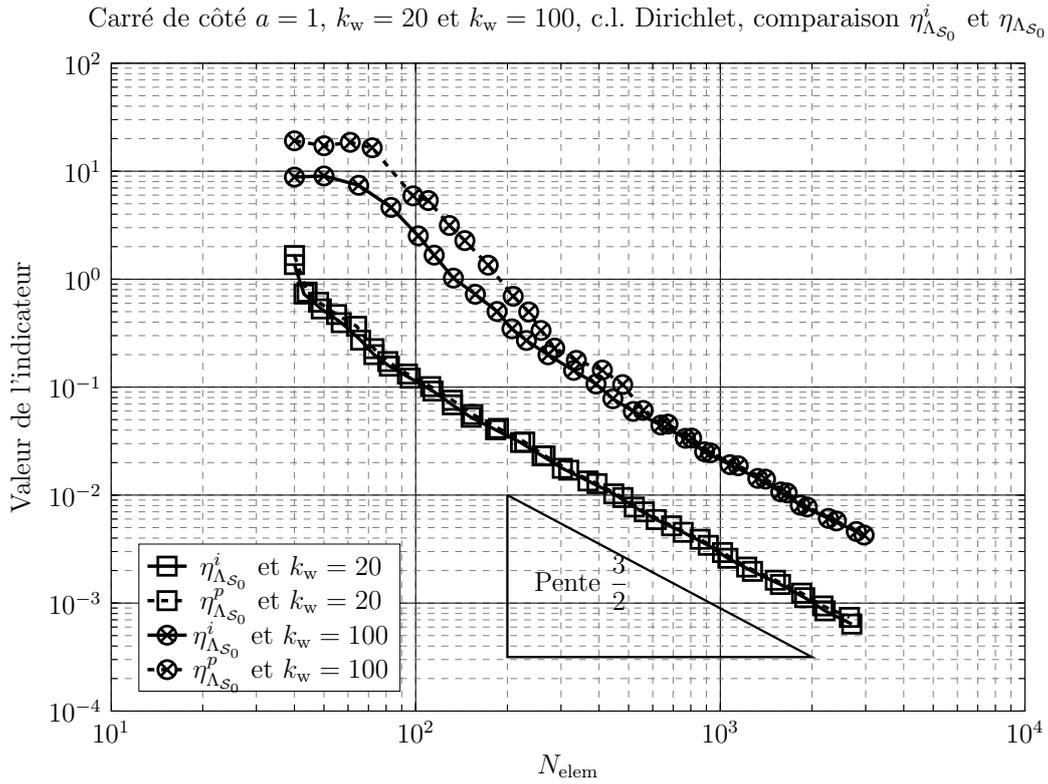


FIGURE 5.43 – Convergence des indicateurs  $\eta_{\Lambda_{S_0}}^i$  et  $\eta_{\Lambda_{S_0}}^p$  sur le carré de côté  $a = 1$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{S_0}}^i$  et  $\eta_{\Lambda_{S_0}}^p$ ,  $k_w = 20$  et  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = 0.5$ , c.l. Dirichlet.

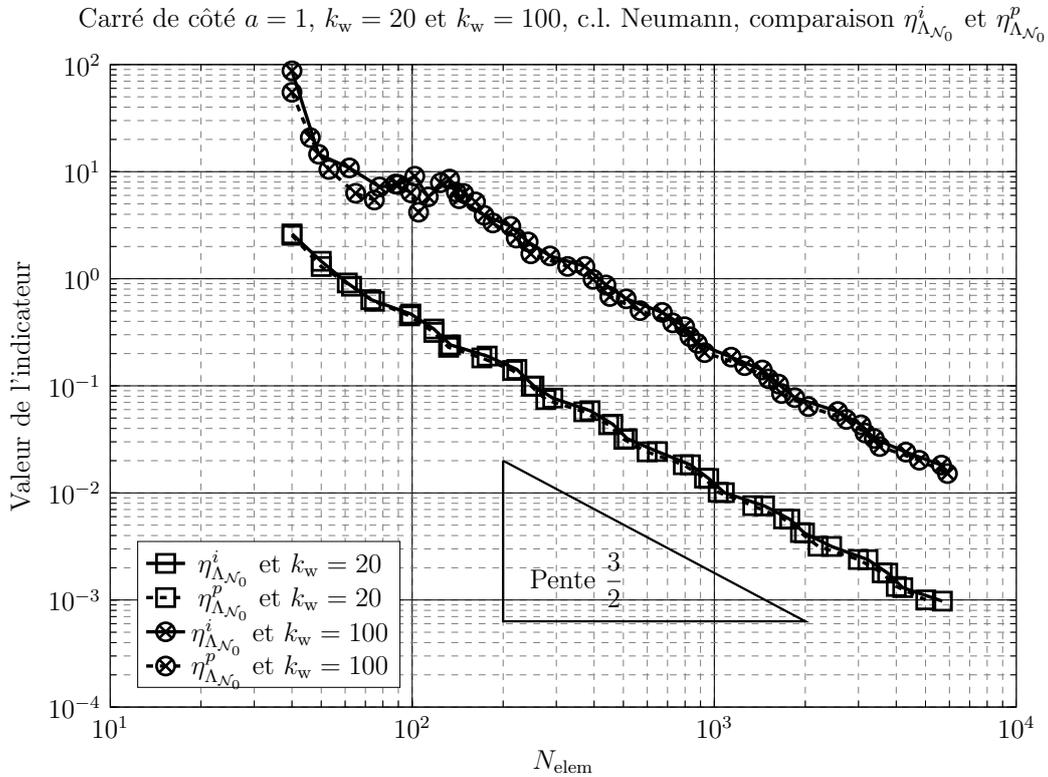


FIGURE 5.44 – Convergence des indicateurs  $\eta_{\Lambda_{N_0}}^i$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}^p$  sur le carré de côté  $a = 1$ , guidage par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}^i$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}^p$ ,  $k_w = 20$  et  $k_w = 100$ ,  $\theta_d = 0.5$ , c.l. Neumann.

Par construction, la forme intégrale de  $\Lambda$  est coûteuse à manipuler puisqu'elle suppose un assemblage de matrice pleine. Une question légitime est alors de se poser la question d'une troncature de l'opérateur  $\Lambda^i$ .

### 5.2.9 Comportement de l'indicateur $\eta_{\Lambda}^i$ lorsqu'il est tronqué

On étudie ici le comportement de l'indicateur  $\eta_{\Lambda}^t$  introduit aux équations (4.7) et (4.10) qui a l'avantage d'être beaucoup moins cher en termes de calculs et qui est sensé conserver malgré tout son caractère "asymptotiquement exact".

Le cas d'étude est encore le carré éclairé par une onde plane de nombres d'onde  $k_w = 20$  et  $k_w = 100$ . Ces simulations sont regroupées, pour chaque équation, sur une même figure.

Les courbes pour le cas  $\mathcal{S}_{k_w}$  sont sur la FIGURE 5.45 et celles pour le cas  $\mathcal{N}_{k_w}$  sont sur la FIGURE 5.46.

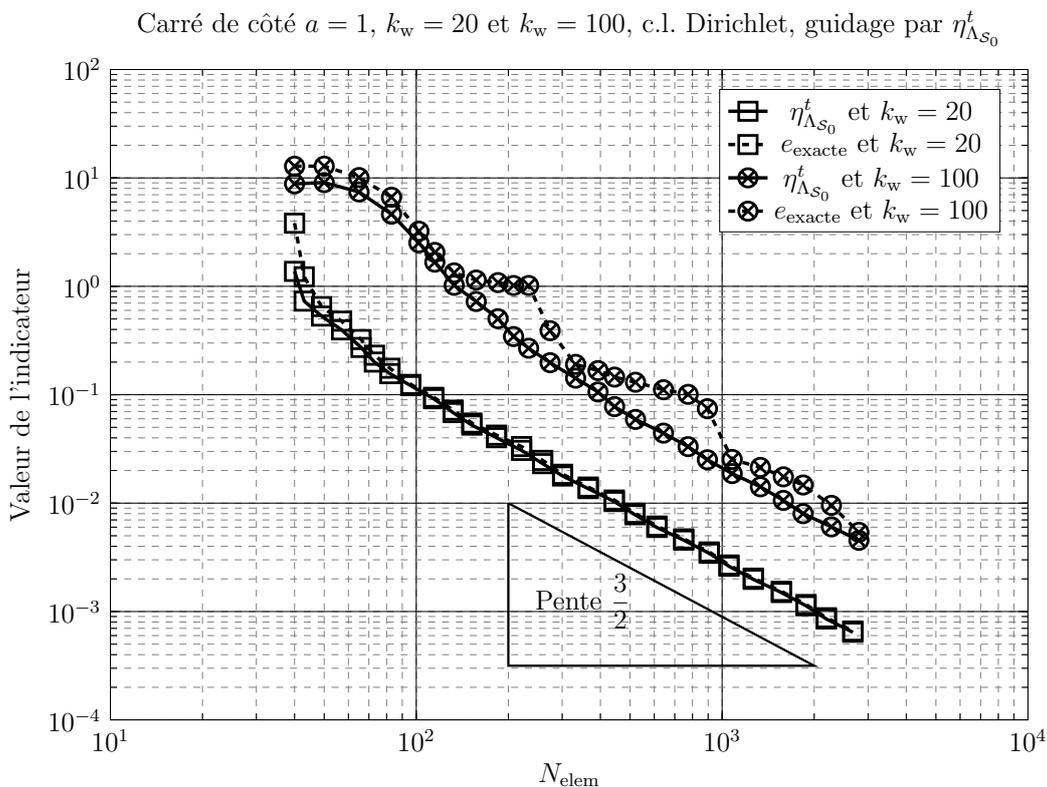


FIGURE 5.45 – Convergence de l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{S_0}}^t$  comparé à l'erreur exacte pour  $k_w = \{20, 100\}$ , c.l. Dirichlet,  $\theta_d = 0.5$ .

**Commentaire – Equation  $\mathcal{S}_{k_w}$**  Pour le nombre d'onde "raisonnable"  $kw = 20$ , le taux de convergence optimal en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$  est atteint très rapidement. De plus, l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{S_0}}^t$  est "exact".

Lorsque  $k_w = 100$ , la convergence semble plus chaotique. La courbe correspondant à  $\eta_{\Lambda_{S_0}}^t$  est "lisse" mais l'erreur exacte décroît en marches d'escalier. C'est déjà le cas lorsqu'on utilise  $\eta_{\Lambda_{S_0}}$  (voir FIGURE 5.14). Ce n'est donc pas une conséquence de la troncature mais *éventuellement* du calcul de  $e_{\text{exacte}}$ . Dans tous les cas, la convergence asymptotique s'établit en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$  et on a une estimation précise de  $e_{\text{exacte}}$ .

**Commentaire – Equation  $\mathcal{N}_{k_w}$**  On constate que le comportement de l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{N_0}}^t$  est optimal pour  $k_w = 20$  et  $k_w = 100$ . En effet, le taux de convergence s'établit immédiatement

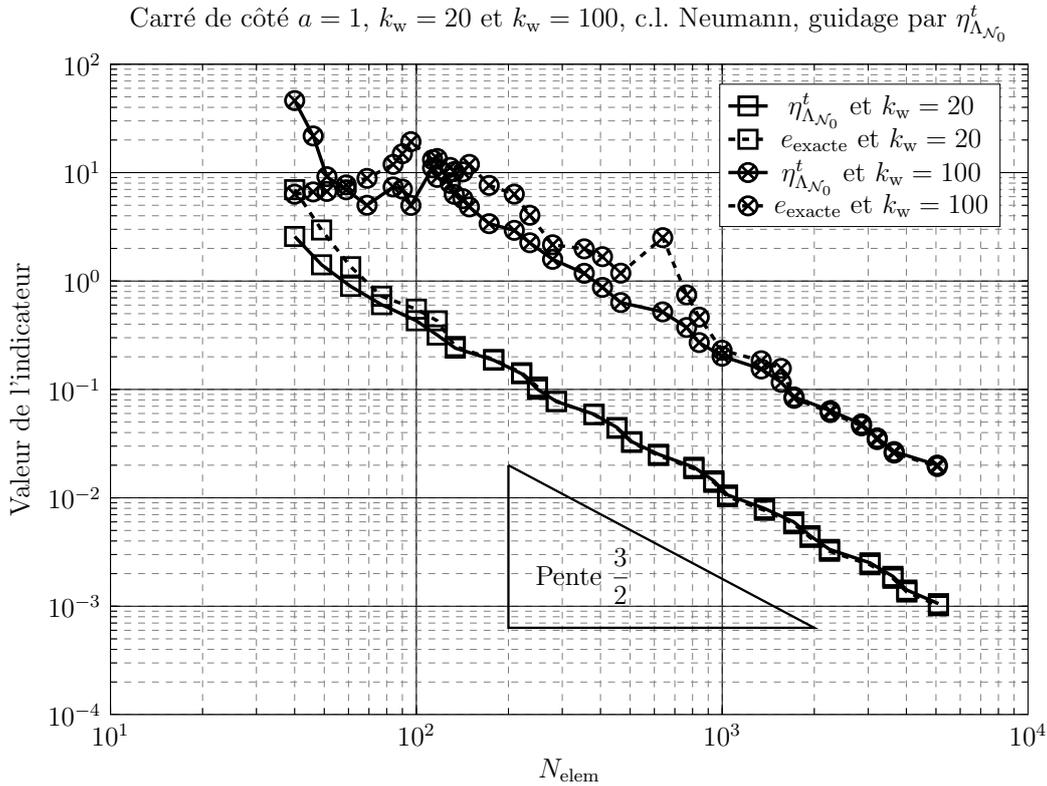


FIGURE 5.46 – Convergence de l'indicateur  $\eta_{\Lambda, \mathcal{N}_0}^t$  comparé à l'erreur exacte pour  $k_w = \{20, 100\}$ , c.l. Neumann,  $\theta_d = 0.5$ .

en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$  pour  $k_w = 20$  et à partir de  $N_{\text{elem}} \approx 150$  pour  $k_w = 100$ . De plus, les courbes correspondant à  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_{\Lambda, \mathcal{N}_0}^t$  sont superposées donc l'erreur est, pour ce cas également, estimée correctement.

L'indicateur  $\eta_{\Lambda}^t$  permet ainsi de guider optimalement l'algorithme auto-adaptatif tout en conservant le caractère "asymptotiquement exact", conformément à la construction. De plus, il ne nécessite que l'assemblage de matrices réduites pour  $\Lambda$  sur les patches  $\omega_{\tau}$ ,  $\tau \in \mathcal{T}_h$ . Il est donc moins coûteux en assemblage comme en mémoire que l'indicateur complet !

### 5.2.10 Conclusion sur les simulations en acoustique 2D

Dans cette partie, on a mis à l'épreuve les indicateurs étendus de la partie 3 pour les équations  $\mathcal{S}_{k_w}$  et  $\mathcal{N}_{k_w}$ . On a testé leur validité pour une gamme de fréquences étendue allant de la basse fréquence avec  $k_w = 5$  aux limites de l'optique géométrique avec  $k_w = 100$ . On a vérifié numériquement qu'ils permettent tous de guider **optimalement** un algorithme de raffinement auto-adaptatif en obtenant asymptotiquement le meilleur taux de convergence possible ! De plus, dans ce cas, l'indicateur  $\eta_{\Lambda}$  est asymptotiquement exact bien qu'il ne serve pas au guidage<sup>8</sup>.

On s'est focalisé sur les indicateurs  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{N}_0}}$  introduits au chapitre 4. On a vérifié que la forme "puissance d'opérateurs conventionnels" permet de guider optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif à toute fréquence, que la surface soit fermée ou non, que le paramètre de raffinement  $\theta_d$  soit faible ou non. Dans tous ces cas, on a également vérifié qu'il est asymptotiquement exact. On a montré que le changement de type d'onde incidente n'influe pas le comportement asymptotique des indicateurs, mais justifie clairement leur utilisation

8. Cela implique encore une convergence **optimale** en erreur, et non pas quasi-optimale.

puisque le raffinement uniforme induit une convergence très faible de l'erreur (FIGURES 5.41 et 5.42 par exemple).

On a également vérifié que l'indicateur  $\eta_\Lambda$  sous forme intégrale (appelé  $\eta_\Lambda^i$ ) se comporte comme attendu lorsque la surface est fermée. On n'a pas été capable de le faire fonctionner sur surface ouverte dans le cas de l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ . Par ailleurs, on a montré numériquement qu'il peut être tronqué en un  $\eta_\Lambda^t$  qui conserve toutes les bonnes propriétés de  $\eta_\Lambda^i$  tout en étant moins coûteux en terme de calculs.

Ces simulations font la preuve que le concept d'un indicateur d'erreur basé sur une localisation par application d'un opérateur est bon. On vérifie maintenant qu'on retrouve des résultats similaires en acoustique 3D.

## 5.3 Validation numérique – Acoustique 3D

Dans la partie précédente, on a effectué de nombreuses simulations en 2D afin de vérifier la validité de la construction de l'indicateur  $\eta_\Lambda$  et l'extension des indicateurs  $\eta_\Pi$  et  $\eta_{r_h}$ . Les constructions et extensions des chapitres 3 et 4 ont été faites sans considération de dimension du domaine de propagation. Ainsi, la construction de l'opérateur  $\Lambda$  est valable pour un problème posé dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . On a montré numériquement qu'il était fiable, efficace, asymptotiquement exact et stable en fréquence.

Dans cette partie, on vérifie sur quelques exemples basiques le comportement optimal de l'indicateur  $\eta_\Lambda$ . Pour cela, on se concentre sur l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  (voir 5.3.1) et l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0}}$  associé.

Dans un premier temps, on effectue des simulations en raffinement uniforme sur la sphère pour trois fréquences différentes afin de vérifier l'exactitude asymptotique de  $\eta_\Lambda$ . Le guidage est d'ailleurs assuré par  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0}}$  exclusivement.

Dans un second temps, on prend l'exemple d'une boîte cubique. On choisit trois nombres d'onde  $k_w = \{5, 10, 15\}$ . On effectue une première simulation avec du raffinement uniforme ce qui permet de vérifier que la convergence est sous-optimale. On montre ensuite que l'utilisation d'un algorithme de raffinement autoadaptatif permet de récupérer une convergence optimale.

Enfin, on donne un exemple plus "réel" de géométrie complexe avec un bateau pour lequel on effectue une analyse semblable à celle du cube.

### 5.3.1 Remarques préliminaires sur le choix des exemples

On précise ici le cadre autour des simulations en 3D ; on justifie notamment les contraintes qui ont menées à la production d'un code BEM Acoustique 3D.

L'implémentation des différents indicateurs impose de pouvoir assembler les différentes formes variationnelles avec des espaces de test et d'approximation  $\mathcal{P}^k(\mathcal{T}_h)$  d'ordre variable et qui ne sont pas forcément les mêmes. A titre d'exemple, on peut évoquer le calcul de l'indicateur  $\eta_{r_h}$  pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  :

- l'espace d'approximation choisit est  $\mathcal{P}^1(\mathcal{T}_h)$  l'espace des polynômes d'ordre 1 sur chaque  $\tau \in \mathcal{T}_h$  avec raccord continu entre les éléments. L'espace de test est également  $\mathcal{P}^1(\mathcal{T}_h)$ .
- à cause de la nature hyper-singulière de l'opérateur  $\mathcal{N}_{k_w}$  (le noyau est en  $\frac{1}{|x-y|^3}$  en 3D), il n'est pas possible d'appliquer  $\mathcal{N}_{k_w}$  à la solution numérique pour calculer le résidu. L'approche utilisée est, comme en 2D, de construire la matrice associée à la forme variationnelle. On teste alors l'équation par  $\mathcal{P}^2(\mathcal{T}_h) \supset \mathcal{P}^1(\mathcal{T}_h)$ .

En acoustique 2D, ces opérations sont aisées puisque les expressions analytiques des intégrales singulières sont relativement simples. En 3D, on n'a plus la même flexibilité et il est plus pratique d'utiliser des méthodes d'intégrations génériques comme la méthode de Sauter & Schwab<sup>9</sup> [60] qui permettent de choisir aisément les espaces d'approximation ou de test. On a donc implémenté un code basé sur cette méthode permettant de gérer les ordres élevés polynomiaux et permettant de résoudre l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  ou bien l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$ .

Ce code n'a pas été optimisé. En premier lieu, les assemblages nécessitent la détection de voisinages qui n'est vraiment efficace que si on utilise des structures de type *octree*, ce qui n'est pas le cas dans ce code. De plus, la méthode de Sauter & Schwab se base sur des intégrales 4D qui sont calculées avec des quadratures particulières, nécessitant en particulier la détection de la configuration des triangles. L'ensemble de ces opérations est coûteux.

L'inversion du problème se fait en utilisant une FMM, séquentielle, afin de ne pas manipuler des matrices BEM trop larges et d'avoir des temps d'assemblage extensifs. La résolution est donc itérative (algorithme GMRES) mais les matrices correspondant à  $\mathcal{S}_{k_w}$  et  $\mathcal{N}_{k_w}$  sont mal conditionnées. On a implémenté un pré-conditionneur analytique<sup>10</sup> qui permet de réduire le nombre d'itérations nécessaires de moitié environ.

Malgré cela, le coût en termes de temps CPU de la résolution du problème puis du calcul des indicateurs est très élevé. C'est en particulier le cas pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  en ce qui concerne le calcul des indicateurs *a posteriori*. En effet, on a déjà évoqué en 5.1.2 le fait qu'en 2D le calcul du résidu nécessite d'effectuer des sous-raffinements de maillage sur lesquels le problème va être ré-assemblé. C'était déjà une opération très coûteuse en 2D, c'est évidemment pire en 3D. Pour l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$ , on peut se contenter d'augmenter l'ordre de l'espace de test.

Un autre exemple d'opération coûteuse est le calcul d'une référence  $e_{\text{exacte}}$  qui nécessite au moins un raffinement, et éventuellement une montée en ordre lorsqu'on a une géométrie autre que la sphère<sup>11</sup>.

Par conséquent,

- on ne présente pas de résultats concernant les indicateurs par reconstruction puisqu'ils nécessitent une résolution sur un maillage raffiné,
- on ne présente pas de résultats pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  car la mise en œuvre est très coûteuse en termes de temps de calcul et on n'a pas réussi à avoir des résultats probants au niveau de l'approximation du résidu,
- on se concentre sur un guidage par l'indicateur  $\Lambda$ .

On insiste encore une fois sur le fait qu'il n'y a pas de problèmes théoriques lorsqu'on passe d'un problème 2D à un problème 3D. Les simulations en 2D ont déjà prouvé le concept, sa mise en œuvre et sa robustesse. Les simulations en 3D visent simplement à fournir quelques exemples basiques pour vérifier le caractère asymptotiquement exact et la capacité de guidage de  $\eta_\Lambda$ .

On a justifié les restrictions qu'on s'impose. Dans les parties suivantes, on effectue des simulations sur la sphère de rayon  $R = 1$ , sur un cube de côté  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$  et finalement sur un "bateau" (très) simplifié.

---

9. Cette méthode permet de calculer la double-intégrale sur deux triangles (ou quadrangles) d'une fonction générique admettant une singularité en  $\frac{1}{|x-y|}$ .

10. Voir [27].

11. Géométrie pour laquelle il existe une solution analytique!

### 5.3.2 Convergence de $\eta_\Lambda$ sur la sphère de rayon $R = 1$

Dans cette partie, on présente des résultats de convergence **uniforme** pour la sphère de rayon  $R = 1$ . On a déjà vérifié en partie 5.2.1 que le raffinement auto-adaptatif n'est d'aucune utilité lorsque la solution exacte est très régulière. Le choix de la sphère se justifie par l'existence d'une solution exacte qui permet de vérifier l'exactitude asymptotique de  $\eta_\Lambda$ <sup>12</sup>.

Pour cela, on éclaire une sphère par une onde plane de nombre d'onde  $k_w = \{5, 9.5, 15\}$ <sup>13</sup>. On n'est pas en mesure d'effectuer des simulations pour des  $k_w$  très élevés car cela implique une forte augmentation de la taille du problème. Conformément à ce qui a été écrit en 5.3.1, on ne s'intéresse qu'à une condition limite de type Neumann et donc à l'équation associée au  $\mathcal{N}_{k_w}$ . La discrétisation initiale comporte  $N_{\text{elem}} = 212$  triangles.

On compare alors les valeurs des indicateurs  $e_{\text{exacte}}$ ,  $\eta_{r_h}$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ . L'erreur  $e_{\text{exacte}}$  est calculée en norme  $\| \cdot \|$  en utilisant une FMM : le cas  $k_w = 0$  n'est normalement pas géré donc on utilise un  $k_w = 0.00001$  pour s'en rapprocher.

L'espace d'approximation choisi est  $V_h = \mathcal{P}^1(\mathcal{T}_h)$  l'espace des polynômes d'ordre 1 sur chaque élément  $\tau \in \mathcal{T}_h$  avec raccordement continu. L'estimation *a priori* est alors, en fonction du nombre d'éléments du maillage,

$$e_{\text{exacte}} = \mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$$

ce qui correspond à  $\mathcal{O}(h^{3/2})$  en raffinement uniforme. C'est également le meilleur taux de convergence possible pour ce choix d'espace d'approximation, quelle que soit la géométrie. Pour  $k_w = 5$ , la discrétisation initiale est en  $\frac{\lambda}{2.5}$ , pour  $k_w = 9.5$  en  $\frac{\lambda}{1.3}$  et pour  $k_w = 15$  en  $\frac{\lambda}{0.8}$ .

Les courbes de convergence pour  $k_w = \{5, 9.5, 15\}$  sont représentées sur la FIGURE 5.47.

Tous les indicateurs convergent au meilleur taux théorique en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$ . De plus, l'erreur exacte  $e_{\text{exacte}}$  est correctement estimée par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  ce qui montre encore une fois la validité de la construction faite au chapitre 4.

Sans surprise, l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  produit le résultat attendu. On montre dans la partie suivante qu'il permet également en 3D de guider optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif.

### 5.3.3 Convergence de $\eta_\Lambda$ sur le cube de côté $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Dans cette partie, on effectue des simulations sur le cube d'arête  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Le choix de cette longueur d'arête correspond au plus grand cube qui puisse être introduit dans une sphère de rayon  $R = 1$ ; cela permet de garder un objet de même taille caractéristique que la sphère.

Des simulations sont effectuées pour  $k_w = \{5, 10, 15\}$ . Dans un premier temps, on effectue une simulation avec des raffinements uniformes afin de vérifier que la convergence est sous-optimale. Dans un second temps, on utilise une boucle de raffinement auto-adaptative pour améliorer la vitesse de convergence.

Le nombre d'éléments initial dans le cube est  $N_{\text{elem}}^0 = 252$  triangles. Il est éclairé par un

12. Voir [59], par exemple.

13. Le choix de  $k_w = 9.5$  peut paraître incongru. La raison est que le choix  $k_w = 10$  correspond à une fréquence de résonance du problème intérieur pour laquelle l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  est mal posée... Prendre  $k_w = 9.5$  suffit pour la démonstration.

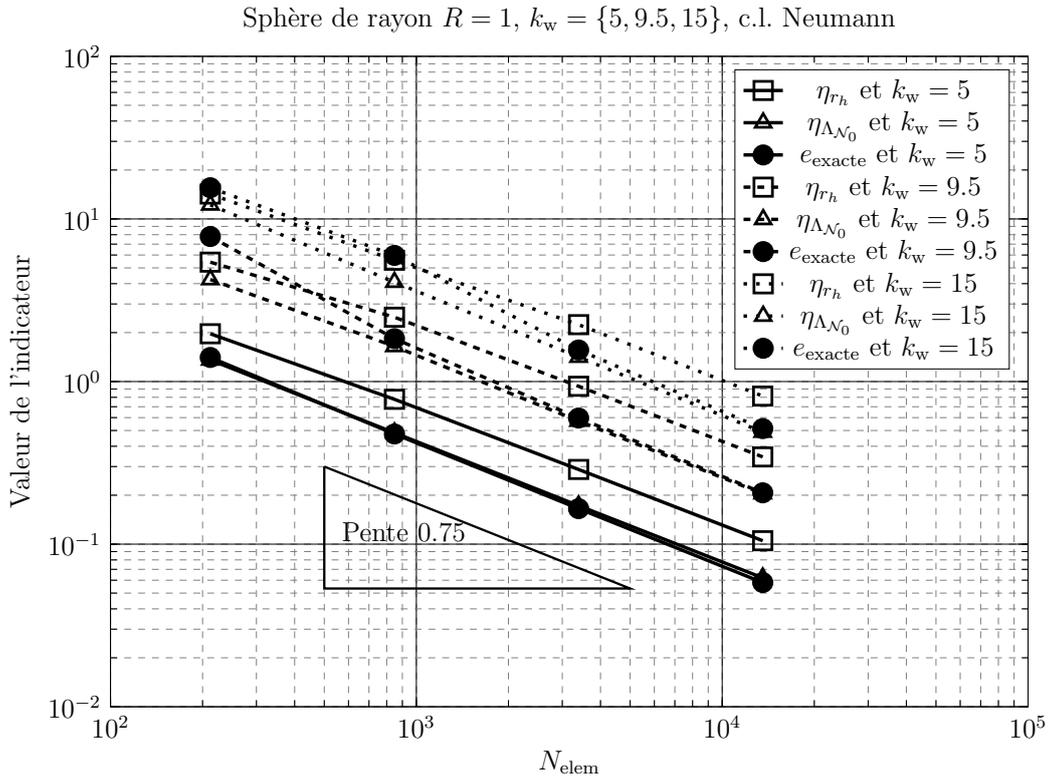


FIGURE 5.47 – Convergence de  $\eta_{r_h}$ ,  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0}}$  et  $e_{\text{exacte}}$  sur la sphère de rayon  $R = 1$  pour  $k_w = \{5; 9.5, 15\}$ , c.l. Neumann.

coin afin de "localiser" les raffinements induits par l'algorithme auto-adaptatif<sup>14</sup>. Pour  $k_w = 5$ , la discrétisation initiale est en  $\frac{\lambda}{3.5}$ , pour  $k_w = 10$  en  $\frac{\lambda}{1.75}$  et pour  $k_w = 15$  en  $\frac{\lambda}{1.17}$ . On rappelle que si le meilleur taux de convergence possible est bien en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$ , obtenir un taux de convergence plus faible en raffinement auto-adaptatif ne signifie pas que la convergence n'est pas optimale. En effet, les algorithmes de raffinement utilisés ne permettent que la génération de maillages isotropes. Par conséquent, récupérer  **systématiquement**  un taux de convergence en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$  suppose d'utiliser un remaillage anisotrope. On renvoie à la partie 3.1.3 pour plus de précisions sur la notion de convergence optimale. Dans notre cas, on dit qu'on converge optimalement si on obtient un taux de convergence en raffinement auto-adaptatif qui est à la fois

- meilleur qu'en raffinement uniforme,
- et stable au fur et à mesure des itérations.

### Cas $k_w = 5$

Les courbes de convergence pour le cas  $k_w = 5$  sont représentées sur la FIGURE 5.48. On a effectué des simulations pour  $\theta_d = 0.5$  et  $\theta_d = 0.25$  afin de vérifier qu'il n'y avait pas de modification dans le taux de convergence en raffinement auto-adaptatif.

On constate immédiatement que le raffinement uniforme n'est pas optimal. Le taux de convergence se tasse progressivement. Sur la dernière itération, il correspond à  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.37})$ .

En raffinement auto-adaptatif, quelque soit le paramètre  $\theta_d$  la vitesse de convergence augmente sans atteindre le taux maximal en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$  et est stabilisée en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.6})$ . On constate

14. **Attention** : on ne prétend pas que les raffinements vont être localisés sur le coin ! On espère juste que toutes les arêtes ne seront pas sur-raffinées. En particulier, on s'attend à ce que les arêtes dans la zone d'ombre derrière le cube soient peu raffinées.

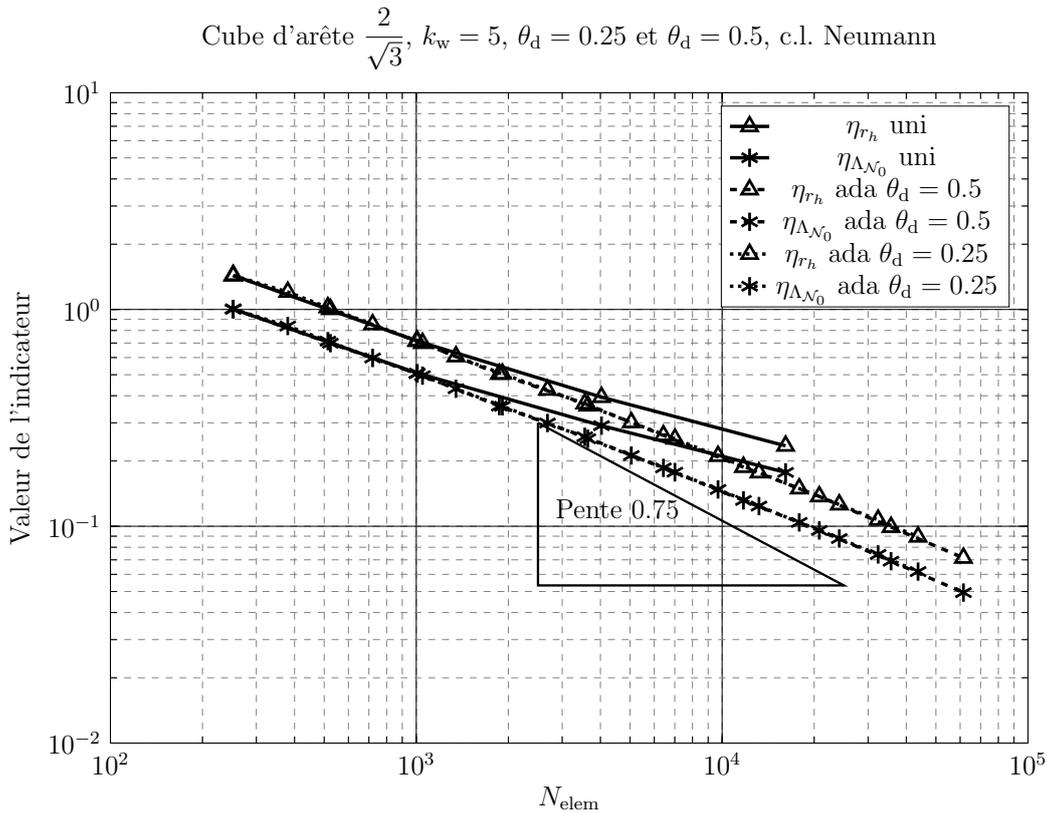


FIGURE 5.48 – Convergence pour le cube de côté  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = \{0.25, 0.5\}$ , c.l. Neumann.

également que similairement au cas 2D, il est inutile de prendre un paramètre de raffinement  $\theta_d$  trop petit.

On a donc bien convergence optimale puisque la vitesse de convergence augmente et reste stable.

#### Cas $k_w = 10$

On augmente la fréquence à  $k_w = 10$ . Cette fois-ci, on n'utilise que  $\theta_d = 0.5$ . Les courbes de convergence sont FIGURE 5.49.

Initialement, le taux de convergence en raffinement uniforme est le même que celui en raffinement auto-adaptatif. A partir de la quatrième itération, la vitesse de convergence uniforme ralentit alors que le taux de convergence adaptatif reste constant en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.6})$ . Ici encore on ne retrouve pas le taux maximum en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$ .

#### Cas $k_w = 15$

Les courbes de convergence pour  $k_w = 15$  sont données sur la FIGURE 5.50.

Ici, le raffinement auto-adaptatif semble n'avoir aucun avantage. Cela correspond à ce qui a été observé en 2D lorsque la fréquence augmente. Si on calcule plus finement le taux de convergence, on constate néanmoins qu'il diminue puisque sur la dernière itération uniforme il est en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.58})$  contre  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.61})$  constant pour le raffinement auto-adaptatif.

Un détail du raffinement pour le cube est donné sur la FIGURE 5.51.

On constate clairement que le raffinement initial ne permet pas d'observer le phénomène oscillant. En raffinement auto-adaptatif, des mailles sont rajoutées au milieu des faces, mais elles sont surtout concentrées sur les arêtes du cube.

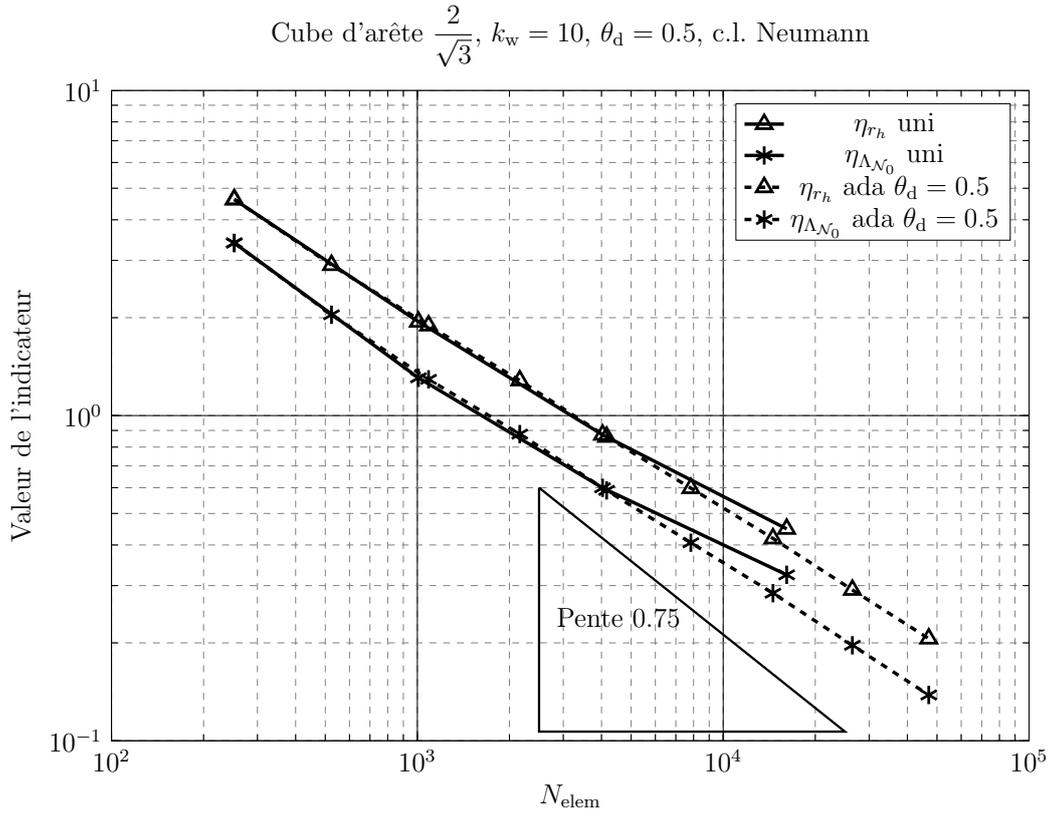


FIGURE 5.49 – Convergence pour le cube de côté  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $k_w = 10$ ,  $\theta_d = 0.5$ , c.l. Neumann.

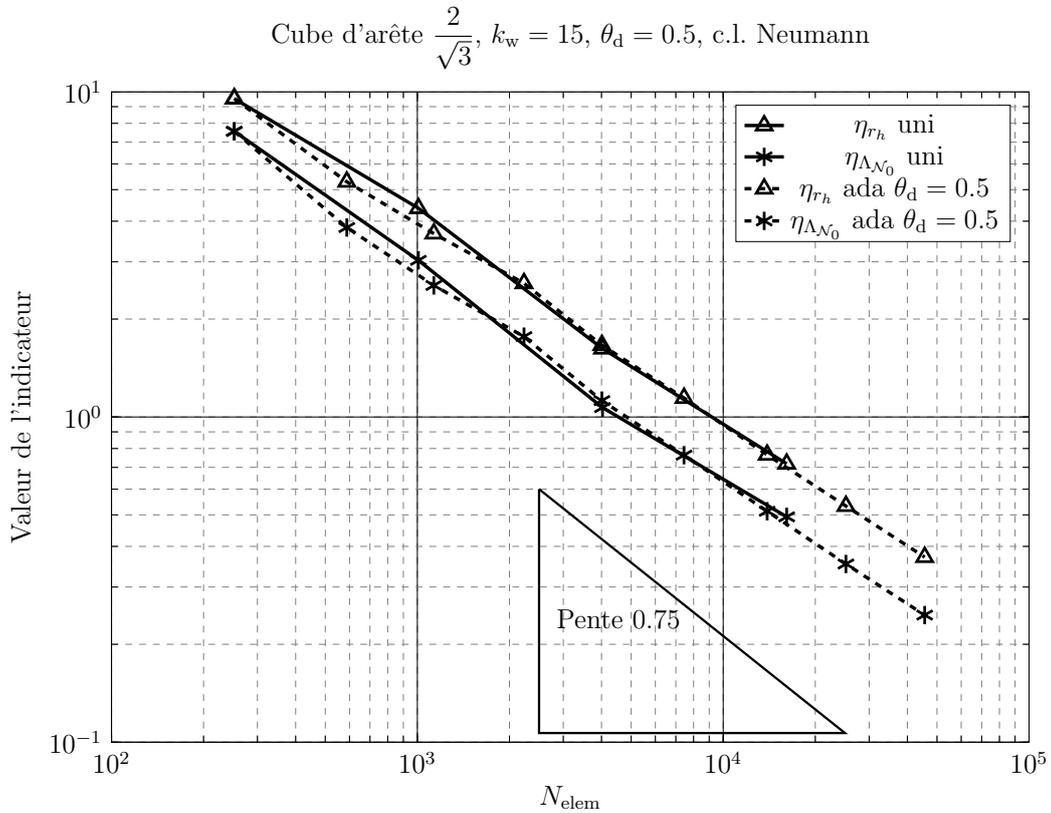


FIGURE 5.50 – Convergence pour le cube de côté  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $k_w = 15$ ,  $\theta_d = 0.5$ , c.l. Neumann

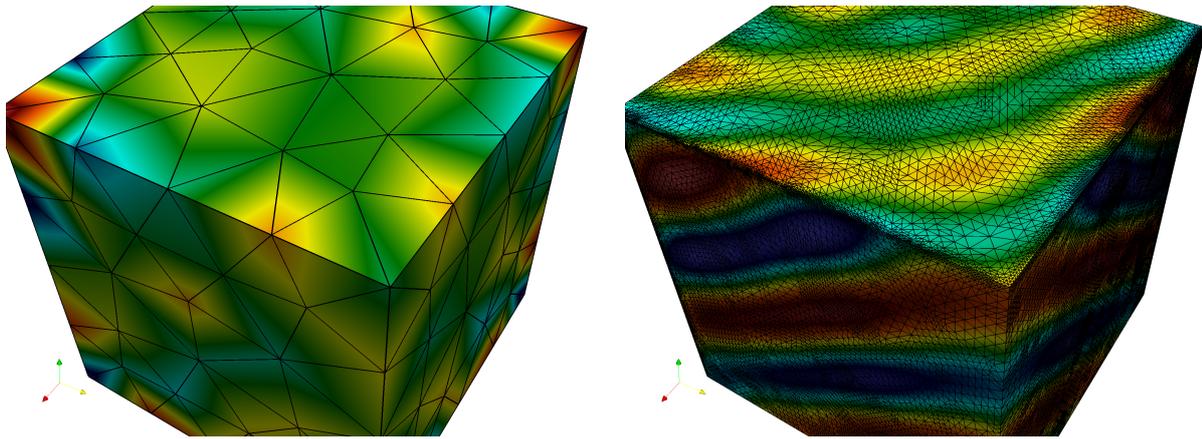


FIGURE 5.51 – Détail du raffinement sur le cube éclairé par un coin,  $k_w = 15$ , avec maillage initial (gauche) et maillage final (droite).

### 5.3.4 Convergence de $\eta_\Lambda$ sur le bateau

On conclut cette série de simulations en acoustique par l'exemple du bateau. Cette géométrie, quoique très simplifiée, présente l'avantage d'avoir de nombreuses arêtes ainsi qu'une pointe (la poupe du bateau). On a privilégié une géométrie dont les surfaces sont des plans afin de s'éviter la contrainte de re-projection des nouveaux nœuds sur la géométrie exacte.

On a constaté sur le cube que lorsque la fréquence est trop élevée, le phénomène de tassement de la convergence est observé à  $N_{\text{elem}}$  élevé. On choisit donc une fréquence basse avec  $k_w = 5$ . Le bateau est de longueur 2.5 soit environ  $2\lambda$ . La discrétisation initiale est en  $\frac{\lambda}{3.6}$ . Le paramètre de raffinement est encore une fois  $\theta_d = 0.5$ .

Les courbes de convergence sont données sur la FIGURE 5.52.

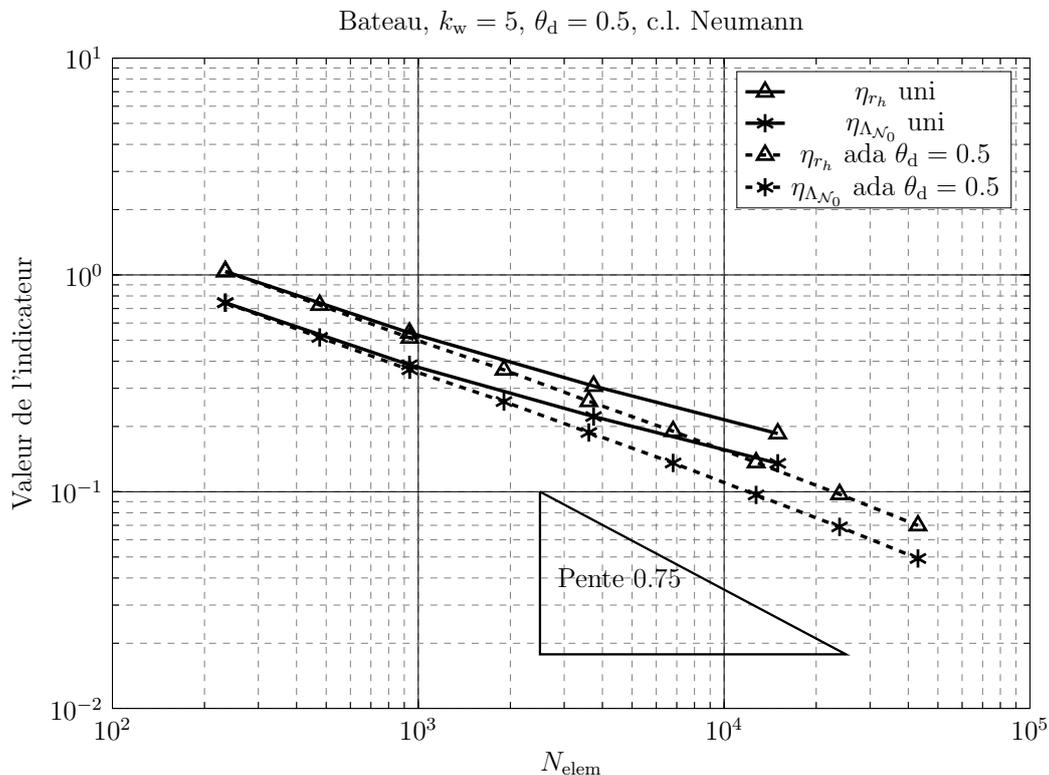


FIGURE 5.52 – Convergence pour le bateau,  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = 0.5$ , c.l. Neumann.

En raffinement uniforme, la vitesse de convergence ralentit progressivement. Pour la dernière itération, elle correspond à  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.35})$ . Cependant, l'utilisation du raffinement auto-adaptatif permet au contraire de l'accélérer progressivement. Ainsi, le taux moyen sur les deux dernières itérations est en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.55})$ . De plus, les deux indicateurs  $\eta_{r_h}$  et  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  convergent à la même vitesse. L'indicateur  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  guide donc optimalement l'algorithme de raffinement auto-adaptatif.

Sur la FIGURE 5.53, on présente la solution avant et après raffinement, puis on donne un détail du raffinement.

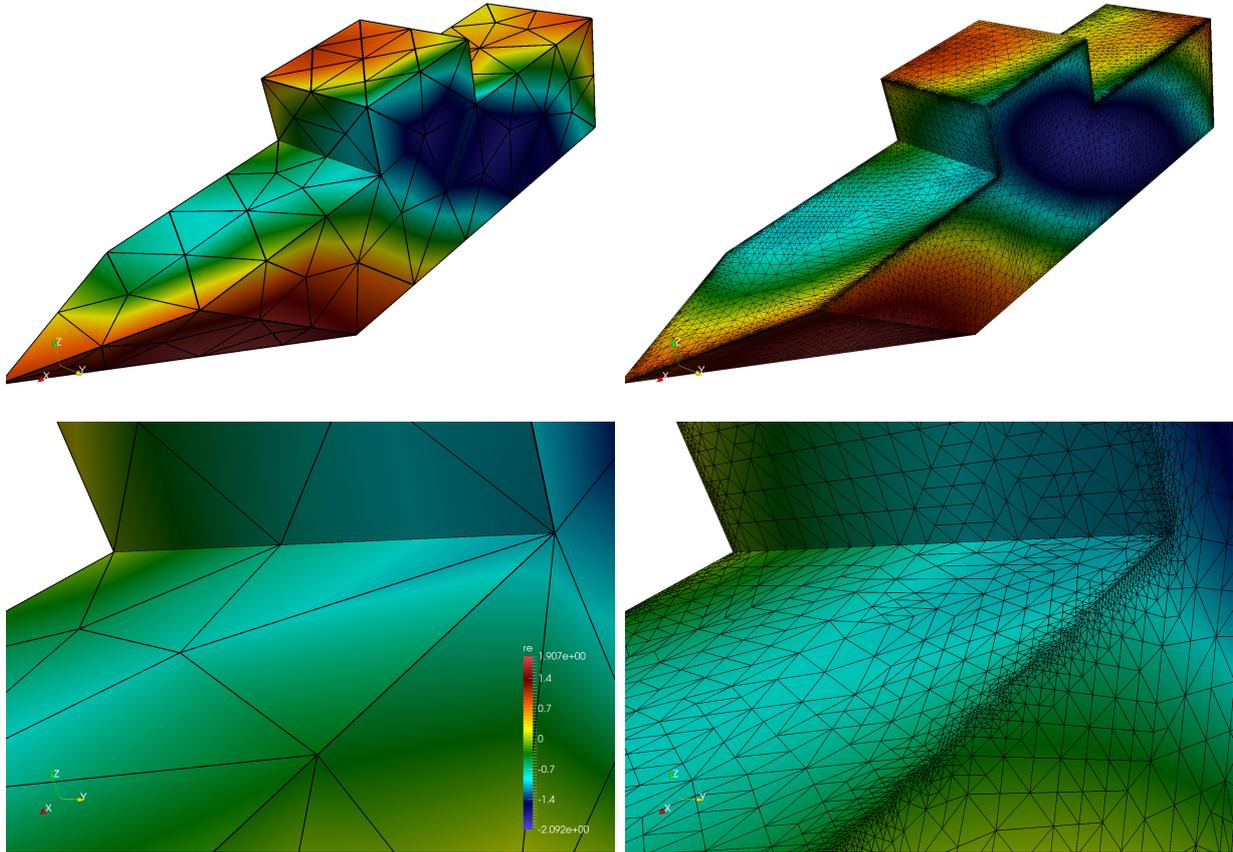


FIGURE 5.53 – Raffinement sur le bateau pour  $k_w = 5$ , vues d'ensemble maillage initial (en haut à gauche), après raffinement (en haut à droite). Détail du raffinement (en bas à droite) comparé au maillage initial (en bas à gauche).

L'algorithme auto-adaptatif a sélectionné les arêtes et concentré les mailles à cet endroit. On constate visuellement une amélioration de la solution.

### 5.3.5 Conclusion sur les simulations en acoustique 3D

Dans cette section, on a effectué des simulations pour une condition limite de Neumann. On a vérifié sur la sphère que les indicateurs  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  est toujours fiable et efficace, et de plus asymptotiquement exact pour  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$ . On a ensuite montré sur un cube que le guidage d'un algorithme auto-adaptatif par  $\eta_{\Lambda_{N_0}}$  permet de converger optimalement. Cela a été confirmé par l'exemple du bateau.

Néanmoins, on peut faire trois remarques importantes :

- on observe dans tous les cas des convergences lentes puisque le taux ne peut pas dépasser  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$ . Il est donc difficile de percevoir un tassement de la vitesse de convergence.
- on a vérifié qu'il est difficile (voir impossible puisqu'on n'y est pas arrivé) de récupérer le meilleur taux de convergence possible. La raison est qu'on rajoute beaucoup trop

de triangles par rapport à ce qui est nécessaire. La meilleure solution serait d'utiliser un maillage anisotrope, en privilégiant vraisemblablement un fort raffinement dans la direction normale aux arêtes.

- enfin, contrairement au cas 2D où on inversait directement les matrices, le mauvais conditionnement du problème dû, d'une part à la nature de l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  sur surface fermée, d'autre part aux petits éléments dans le maillage, fait qu'il est nécessaire de pré-conditionner les matrices lors de la résolution.

En conclusion, conformément à ce qui a pu être vérifié en 2D, l'indicateur  $\eta_{\Lambda_{\mathcal{N}_0}}$  est fiable, efficace, asymptotiquement exact et permet de guider optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif. De même, l'indicateur  $\eta_{r_h}$  est fiable et efficace.

## 5.4 Conclusion sur les simulations numériques en acoustique

Dans ce chapitre, on a vérifié numériquement la validité des indicateurs d'erreur *a posteriori*  $\eta_{r_h}$ ,  $\eta_{\Pi}$  étendus au chapitre 3. On a montré pour les deux équations  $\mathcal{S}_{k_w}$  et  $\mathcal{N}_{k_w}$  qu'ils sont fiables, efficaces et guident optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif. On a plus particulièrement étudié l'indicateur  $\eta_{\Lambda}$  introduit au chapitre 4. On a constaté que sa forme "puissance d'opérateur différentiel classique" est fiable, efficace et asymptotiquement exacte sur géométrie lipschitzienne quelconque pour une variété de situations. On a également montré qu'il guide optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif puisqu'on retrouve le taux maximum de convergence en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$  en 2D et on l'améliore beaucoup en 3D, sans toutefois parvenir à obtenir le taux maximum en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$ . La sous-optimalité provient vraisemblablement du caractère localement isotrope du raffinement utilisé. On a encore vérifié en 2D que l'utilisation de  $\Lambda$  sous forme intégrale confère les mêmes propriétés à  $\eta_{\Lambda}$  si la surface  $\Gamma$  est fermée.

Dans le chapitre suivant, on généralise les indicateurs introduits en acoustique à l'équation EFIE en électromagnétisme. En particulier, on présente deux manières de généraliser l'indicateur  $\eta_{\Lambda}$ , une en utilisant une décomposition de Helmholtz du résidu et l'autre en localisant la norme  $\|\cdot\|_{-1/2,\text{rot}}$  grâce à un opérateur  $\Lambda$ .



# Chapitre 6

## Indicateurs d'erreurs pour l'EFIE

Après avoir introduit l'indicateur d'erreur  $\Lambda$  au chapitre précédent, on présente dans cette section trois indicateurs d'erreur *a posteriori* pour l'EFIE (2.55).

Dans un premier temps, on propose un indicateur par reconstruction pour l'EFIE semblable à celui introduit en partie 3.3.2 pour l'acoustique.

On présente ensuite l'indicateur proposé par Nochetto & Stamm [58]. Il est basé sur une localisation de la norme du résidu telle qu'elle a pu être faite en partie 3.2.2 en pondérant le résidu par une taille caractéristique locale de la maille. Ceci revient à calculer une norme  $H_{\text{rot}}$  pondérée.

Dans un troisième temps, on propose deux indicateurs d'erreur basés sur une localisation de la norme du résidu par un opérateur  $\Lambda$  similairement à ce qui a été fait au chapitre 4. Le premier indicateur est basé sur une décomposition de Helmholtz du résidu. On applique ensuite un opérateur de localisation à chacun des potentiels (gradient et rotationnel) afin de les transporter dans  $H^1(\Gamma)$ , définissant ainsi les potentiels gradient et rotationnel pour  $\Lambda \mathbf{R}_h$ . Il suffit enfin de calculer le champ de vecteur issu de ces deux potentiels. On montre alors qu'un tel indicateur est fiable, efficace et asymptotiquement exact par rapport à la norme de Galerkin de l'erreur. Le second indicateur est basé sur une localisation directe de la norme du résidu. Il est alors directement fiable et efficace. Il est du également "asymptotiquement exact" par rapport à la norme  $H_{\text{rot}}^{-1/2}$  du résidu.

Finalement, on propose un indicateur dérivé de l'indicateur "de Nochetto & Stamm" qu'on fait apparaître lors du calcul de la norme  $L^2$  du résidu. Cet indicateur est basé sur une estimation de l'erreur sur les "charges" qui correspondent à la divergence de la solution de l'EFIE. Pour un triangle  $\tau \in \mathcal{T}_h$ , l'erreur est estimée à partir du saut des charges au travers de ses trois arêtes. On peut ainsi extraire une grandeur dominante permettant d'estimer l'erreur. La construction de l'indicateur ne fait pas l'objet d'une justification rigoureuse. On vérifie néanmoins qu'il semble capable de guider efficacement un algorithme de raffinement auto-adaptatif.

Avant de commencer, on donne une estimation de convergence *a priori* pour l'équation EFIE. Elle sert de référence pour l'ensemble des simulations numériques présentées dans la suite. D'après [8], on a

$$\boxed{\text{meilleur taux possible en EFIE} = \mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})}. \quad (6.1)$$

## 6.1 Proposition d'un indicateur par reconstruction pour l'EFIE

Dans cette partie, on propose des indicateurs par reconstruction pour l'EFIE. La démarche de construction est identique à celle utilisée à celle pour l'acoustique (voir partie 3.3.2). On rappelle que l'idée associée à de tels indicateurs est d'abord d'effectuer une résolution sur un maillage raffiné  $\mathcal{T}_h$  d'un maillage initial  $\mathcal{T}_H$ , puis de projeter la solution sur un espace d'approximation d'ordre polynomial (Raviart-Thomas en électromagnétisme) plus élevé. On pose respectivement les espaces  $V_h = \mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h)$  et  $\widehat{V}_H = \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_H)$  les espaces associés à  $\mathcal{T}_h$  et  $\mathcal{T}_H$ . On utilise la différence entre la solution et sa projection afin d'estimer l'erreur d'approximation.

On rappelle les grandes lignes de ce type de construction. Plus précisément, on souhaite construire une estimation de

$$\|\mathbf{e}_H\|_{-1/2,\text{div}} = \|\mathbf{J} - \mathbf{J}_H\|_{-1/2,\text{div}}$$

car il s'agit de l'erreur numérique contrôlée naturellement par le schéma.

On introduit alors un opérateur de projection  $H_{\text{div}}$  noté  $\Pi_{\text{div},H} : H_{\text{div}}(\Gamma) \rightarrow \widehat{V}_H$  (et non plus de projection  $L^2$  comme en acoustique). Un indicateur d'erreur *a posteriori* non localisé similaire à l'acoustique est

$$\eta_{\Pi_{\text{div}}}^{\text{glob}} = \|\mathbf{J}_h - \Pi_{\text{div},H}\mathbf{J}_h\|_{-1/2,\text{div}}$$

qui est asymptotiquement exact par construction sous conditions, voir 3.3.2. En revenant à la définition d'une norme  $H_{\text{div}}^{-1/2}$ , on a

$$(\eta_{\Pi_{\text{div}}}^{\text{glob}})^2 = \|\mathbf{J}_h - \Pi_{\text{div},H}\mathbf{J}_h\|_{-1/2}^2 + \frac{1}{k_w^2} \|\text{div}_\Gamma(\mathbf{J}_h - \Pi_{\text{div},H}\mathbf{J}_h)\|_{-1/2}^2.$$

**Remarque 6.1.1.** *Le facteur  $\frac{1}{k_w^2}$  n'est pas obligatoire mais il permet d'homogénéiser l'ensemble.*

On localise ensuite les normes  $H^{-1/2}$  classique<sup>1</sup> de la même manière qu'en (3.3.2, indicateur par reconstruction pour  $\mathcal{S}_{k_w}$ ).

**Définition 6.1.1.** *Soit  $\mathcal{T}_h$  un iso-raffinement d'un maillage  $\mathcal{T}_H$ , on pose  $\Pi_{\text{div}} : \mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_H)$  avec  $k > 0$ . On a l'indicateur d'erreur *a posteriori* par reconstruction pour l'EFIE*

$$\eta_{\Pi_{\text{div}}} = \|\sqrt[4]{|\tau|}(\mathbf{J}_h - \Pi_{\text{div},H}\mathbf{J}_h)\|_{\text{div}}. \quad (6.2)$$

En pratique, on utilise deux types de projection  $H_{\text{div}}$  : une projection **globale**  $\Pi_{\text{div}}$  et une projection **locale**  $\Pi_{\text{div}}^{\text{loc}}$ ,

- la projection globale  $\Pi_{\text{div}}$  se définit de la même manière que la projection  $L^2$  classique. Soit  $\mathbf{J} \in H_{\text{div}}(\Gamma)$  la fonction à projeter, on cherche la grandeur  $\Pi_{\text{div}}\mathbf{J} \in V \subset H_{\text{div}}(\Gamma)$  telle que pour tout  $\mathbf{v} \in V$ , on a

$$(\mathbf{v}, \Pi_{\text{div}}\mathbf{J})_{\Gamma,\text{div}} = (\mathbf{v}, \mathbf{J})_{\Gamma,\text{div}}$$

où  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma,\text{div}}$  représente le produit scalaire usuel sur  $H_{\text{div}}$ . Dans le cas  $\Pi_{\text{div}} \equiv \Pi_{\text{div},H}$ , on a  $V = \widehat{V}_H$ .

1. On peut le faire car on a affaire à des polynômes par morceaux.

- la projection locale  $\Pi_{\text{div}}^{\text{loc}}$  se définit de la même manière que  $\Pi_{\text{div}}$  où on a remplacé  $H_{\text{div}}(\Gamma)$  par  $H_{\text{div}}(\tau)$  où  $\tau \in \widehat{\mathcal{T}}_H$  et  $V = \{\mathbf{v}_h \in L^2(\Gamma)^3, \forall \tau \in \widehat{\mathcal{T}}_H, \mathbf{v}_h|_{\tau} \in \mathbf{RT}_k\}$ <sup>2</sup>.

**Remarque 6.1.2.** Comme pour l'opérateur  $\mathcal{S}_{k_w}$ ,  $\eta_{\Pi_{\text{div}}}$  s'exprime très simplement, il est facile à mettre en œuvre et nécessite la résolution d'un système creux (pour le calcul de la projection). Il implique par contre une résolution initiale sur un maillage sur-discretisé ce qui peut être coûteux.

### Applications numériques pour l'indicateur $\eta_{\Pi_{\text{div}}^{\text{loc}}}$

On propose deux exemples d'applications pour l'indicateur  $\eta_{\Pi_{\text{div}}^{\text{loc}}}$ . Dans un premier temps, on vérifie qu'il converge au taux optimal en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$  lorsqu'on raffine uniformément une sphère pour  $k_w = 5$  et  $k_w = 20$ . Dans un second temps, on reprend l'exemple du bateau (FIGURE 5.53), également pour  $k_w = 5$  et  $k_w = 20$ . On choisit  $\theta_d = 0.5$  comme paramètre de raffinement auto-adaptatif.

Dans cette partie, et seulement dans cette partie,  $N_{\text{elem}}$  correspond au nombre de triangles dans le **maillage raffiné!**

Les courbes de convergence pour la sphère sont données sur la FIGURE 6.1. On constate que le taux de convergence s'établit immédiatement en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$ , conformément à l'estimation *a priori* (6.1).

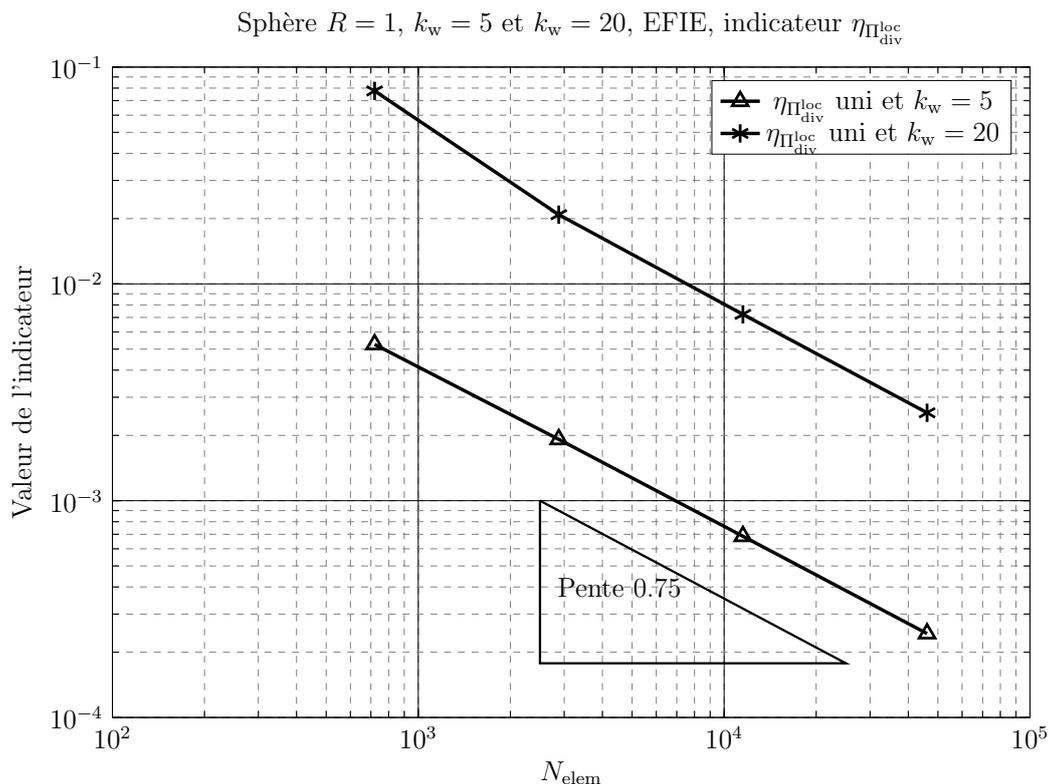


FIGURE 6.1 – Courbes de convergence pour l'indicateur  $\eta_{\Pi_{\text{div}}^{\text{loc}}}$  pour la sphère  $R = 1$ ,  $k_w = \{5, 20\}$ , raffinement uniforme.

On s'intéresse maintenant au cas du bateau. Les courbes de convergence sont représentées sur la FIGURE 6.2.

2. On n'a donc pas de continuité globale de la projection.

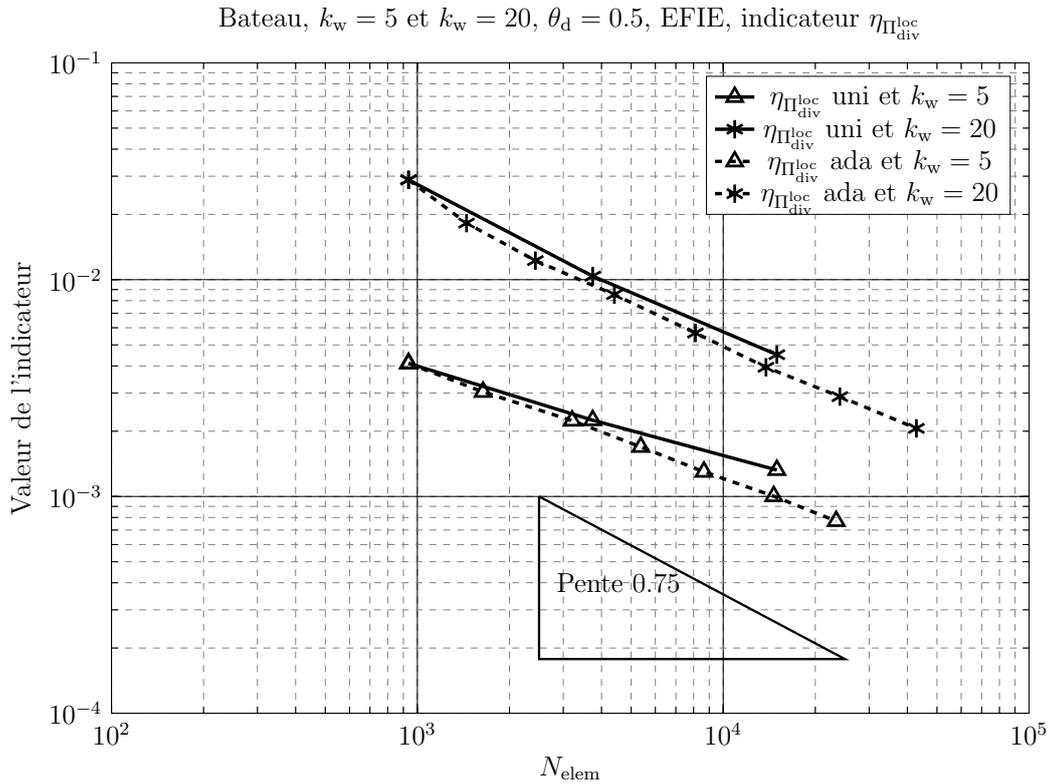


FIGURE 6.2 – Courbes de convergence pour l'indicateur  $\eta_{\Pi_{\text{div}}^{\text{loc}}}$  pour le bateau,  $k_w = \{5, 20\}$ ,  $\theta_d = 0.5$ .

Pour  $k_w = 5$ , on constate que le taux de convergence diminue en raffinement uniforme. A la dernière itération, il correspond à  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.38})$ . L'utilisation de raffinement auto-adaptatif permet de maintenir une convergence moyenne en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.6})$ .

Pour  $k_w = 20$ , la différence de comportement entre raffinement uniforme et auto-adaptatif est moins flagrante puisque le taux de convergence pour la dernière itération uniforme comme adaptative correspond à  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.6})$ . Il est néanmoins probable qu'il diminue progressivement en raffinement uniforme alors qu'il se maintient en raffinement auto-adaptatif. Ces taux de convergence sont similaires à ceux qui ont été observés en acoustique 3D.

Un détail du raffinement sur le bateau est présenté sur la FIGURE 6.3. On remarque que l'indicateur sélectionne prioritairement les triangles sur les arêtes.

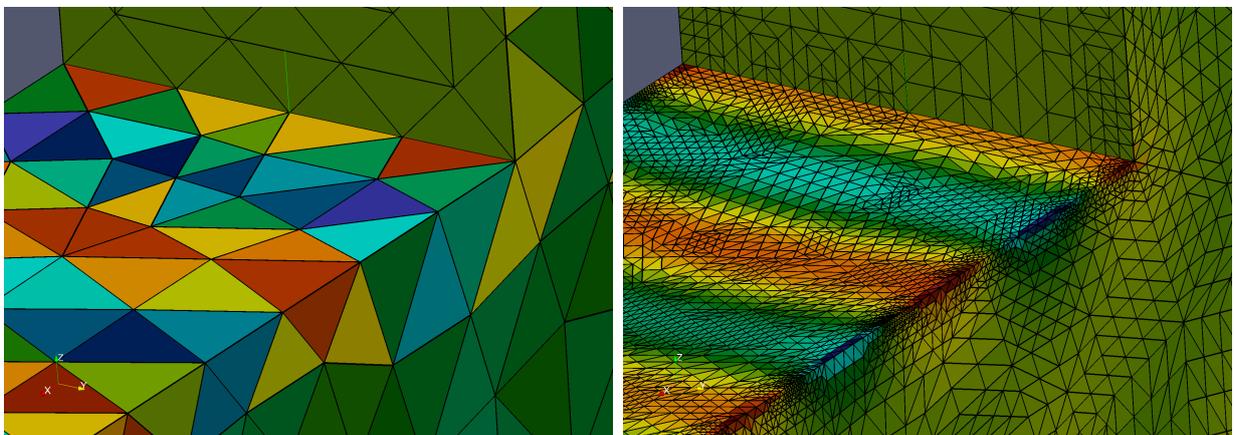


FIGURE 6.3 – Détails du raffinement sur le bateau,  $k_w = 20$ , indicateur  $\eta_{\Pi_{\text{div}}^{\text{loc}}}$  : maillage initial (gauche) et maillage final (droite).

En conclusion, bien que l'indicateur d'erreur utilisé pour le guidage soit une forme tronquée, il permet de faire converger optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif dans le cas où on résout l'EFIE.

Comme en acoustique, c'est un indicateur qui, sous forme globale ou localisée, est très simple à mettre en œuvre. Néanmoins, la résolution sur le maillage raffiné<sup>3</sup> est très coûteuse puisqu'on multiplie par quatre le nombre de triangles par rapport au maillage initial.

## 6.2 Indicateur d'erreur de Stamm pour l'EFIE

On présente dans cette partie l'indicateur *a posteriori* de Nochetto & Stamm. Il est basé sur une localisation similaire à ce qui a été fait pour l'indicateur  $\eta_{r_h}$  associé à l'équation  $\mathcal{N}_{k_w}$  (voir **Théorème 3.2.3**).

On présente dans un premier temps l'indicateur résidu et on aborde quelques points de construction.

Dans un second temps, on effectue la preuve de convergence de l'algorithme auto-adaptatif guidé par un tel indicateur.

Finalement, on aborde quelques points délicats de construction.

### 6.2.1 L'indicateur résidu de Nochetto & Stamm pour l'EFIE

On présente ici le principe de l'indicateur basé sur le calcul du résidu issu des travaux de R. H. Nochetto et B. Stamm [58]. Le point de départ de la construction est l'équivalence entre  $\|\mathbf{J} - \mathbf{J}_h\|_{-1/2, \text{div}}$  et la norme du résidu  $\|\mathbf{R}_h\|_{-1/2, \text{rot}}$  qui fait de cette dernière un indicateur fiable et efficace.

Partant de la définition de la norme  $H_{\text{rot}}^{-1/2}$  suivante

$$\|\mathbf{v}\|_{-1/2, \text{rot}}^2 = \|\mathbf{v}\|_{-1/2}^2 + \frac{1}{k_w^2} \|\text{rot}_\Gamma \mathbf{v}\|_{-1/2}^2, \quad \forall v \in H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma),$$

Nochetto et Stamm proposent une localisation de  $\|\mathbf{R}_h\|_{-1/2, \text{rot}}$ .

**Théorème 6.2.1** (Indicateur résidu-pondéré pour l'EFIE). *Soit  $\mathbf{e}_h = \mathbf{J} - \mathbf{J}_h \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$  l'erreur d'approximation où  $\mathbf{J} \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ , est la solution exacte de l'EFIE et  $\mathbf{J}_h \in \mathbf{RT}_0$  la solution approchée,  $\Gamma$  est supposée polygonale, alors l'indicateur d'erreur a posteriori défini par*

$$\eta_{\mathbf{R}_h}^2 = \|\mathbf{R}_h\|_{\text{rot}, h}^2 \tag{6.3}$$

$$= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \eta_{\mathbf{R}_h, \tau}^2 \tag{6.4}$$

où

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_h\|_{\text{rot}, h}^2 &= \|\sqrt{h} \mathbf{R}_h\|_0^2 + \frac{1}{k_w^2} \|\sqrt{h} \text{rot}_\Gamma \mathbf{R}_h\|_0^2, \\ h : \tau \in \mathcal{T}_h &\mapsto \sqrt{|\tau|}, \end{aligned}$$

et

$$\eta_{\mathbf{R}_h, \tau}^2 = \sqrt{|\tau|} \|\mathbf{R}_h\|_{\text{rot}, \tau}^2$$

est fiable et local, i.e.  $\exists C_{\text{fia}} > 0$ ,

$$\|\mathbf{e}_h\|_{-1/2, \text{div}} \leq C_{\text{fia}} \eta_{\mathbf{R}_h}.$$

3. En 2D, un raffinement uniforme de maillage suppose de couper chaque segment en son milieu. En 3D, on divise chaque triangle en triangles-fils de même forme. Cela passe donc par un raffinement en au moins quatre enfants !

On renvoie à [58] pour la construction.

**Remarque 6.2.1.** *L'indicateur  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  est le pendant formel de  $\eta_{r_h}$  en acoustique !*

**Remarque 6.2.2.** *Similairement à l'indicateur similaire en acoustique, les **théorèmes 4.5 et 4.6** dans [58] ne permettent pas de conclure sur l'efficacité "forte" de  $\eta_{\mathbf{R}_h}$ .*

On peut pousser l'étude un peu plus loin et s'interroger sur la capacité d'un tel indicateur à pouvoir guider optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif (voir 3.2.2).

## 6.2.2 Éléments de preuve de convergence optimale pour l'indicateur de Nochetto & Stamm

On se propose ici de vérifier la validité des axiomes (A1) et (A2) de la partie 3.1.3.

### Axiome 1 – Stabilité sur les éléments non-raffinés

**Proposition 6.2.1.** *L'axiome 1 de l'adaptivité est vérifié par l'indicateur  $\eta_{\mathbf{R}_h}$ .*

*Démonstration.* La démonstration est semblable à ce qui a été fait pour l'acoustique. On a besoin d'une inégalité similaire au **lemme 3.2.1**.

En reprenant les notations de la **Proposition 3.2.1** et en posant  $h_\tau = \sqrt{|\tau|}$  et  $T$  l'opérateur de l'EFIE, il vient pour tout  $\mathbf{v} \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \left\| \left( \mathcal{S}_{k_w} \mathbf{v} + \frac{1}{k_w^2} \nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w} \text{div}_\Gamma \mathbf{v} \right) \right\|_{H_{\text{rot}}(f), h}^2 \leq \dots \\ \dots \|h_\tau^{1/2} \mathcal{S}_{k_w} \mathbf{v}\|_0^2 + \frac{1}{k_w^2} \|h_\tau^{1/2} \nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w} \text{div}_\Gamma \mathbf{v}\|_0^2 + \frac{1}{k_w^2} \|h_\tau^{1/2} \text{rot}_\Gamma \mathcal{S}_{k_w} \mathbf{v}\|_0^2 \end{aligned}$$

qu'on souhaite majorer par  $\|\mathbf{v}\|_{-1/2}^2$ .

Une majoration par  $\|\mathbf{v}\|_{-1/2}$  pour le premier terme de la somme est obtenue immédiatement en utilisant la continuité de  $\mathcal{S}_{k_w}$  vis-à-vis des composantes de  $\mathbf{v}$ .

Pour le second terme, il suffit de réutiliser le **lemme 3.2.1** pour  $\text{div}_\Gamma \mathbf{v}$  ce qui permet de le majorer par  $\|\text{div}_\Gamma \mathbf{v}\|_{-1/2}$ .

Seul le terme  $\|\sqrt{h_\tau} \text{rot}_\Gamma \mathcal{S}_{k_w} \mathbf{v}\|_0^2$  pose problème. Il suffit de remarquer que

$$\|\text{rot}_\Gamma \mathbf{v}\|^2 \lesssim \|\nabla_\Gamma((\mathcal{S}_{k_w} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_x)\|^2 + \|\nabla_\Gamma((\mathcal{S}_{k_w} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_y)\|^2 + \|\nabla_\Gamma((\mathcal{S}_{k_w} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_z)\|^2.$$

On peut ainsi ré-appliquer le **lemme 3.2.1**.

Finalement, on a la majoration suivante

$$\|h_\tau^{1/2} \left( \mathcal{S}_{k_w} \mathbf{v} + \frac{1}{k_w^2} \nabla_\Gamma \mathcal{S}_{k_w} \text{div}_\Gamma \mathbf{v} \right)\|_{H_{\text{rot}}(f)} \lesssim \|\mathbf{v}\|_{-1/2, \text{div}}. \quad (6.5)$$

On reprend désormais les étapes de la démonstration de la **proposition 3.2.1**.

$$\begin{aligned} \left| \left( \sum_{\tau \in f} \|h_\tau^{1/2} (T(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{v}}))\|_{\text{rot}, \tau}^2 \right)^{1/2} - \left( \sum_{\tau \in f} \|h_\tau^{1/2} (T(\mathbf{u} - \mathbf{v}_l))\|_{\text{rot}, \tau}^2 \right)^{1/2} \right| \dots \\ \dots \leq \|h_\tau^{1/2} (T(\widehat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_l))\|_{H_{\text{rot}}(f)}. \end{aligned}$$

Il suffit d'utiliser l'inégalité (6.5) avec  $\mathbf{v} = \widehat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_l$  pour conclure.  $\square$

## Axiome 2 – Réduction sur les éléments du domaine raffiné

**Proposition 6.2.2.** *L'axiome 2 de l'adaptivité est vérifié par l'indicateur  $\eta_{\mathbf{R}_h}$ .*

*Démonstration.* On ne détaille pas la preuve ici. Il suffit de reprendre la preuve de la **proposition 3.2.2** en remplaçant la norme  $\|\cdot\|_0$  par  $\|\cdot\|_{\text{rot}}$ ,  $\|\cdot\|$  par  $\|\cdot\|_{-1/2,\text{div}}$  et de se servir de l'inégalité (6.5).  $\square$

## Axiome 3 – Quasi-orthogonalité générale

Avant toute chose, on définit la norme suivante.

**Définition 6.2.1.** *On définit la norme de Galerkin  $\|\cdot\|_{\text{div}}$  équivalente à  $\|\cdot\|_{-1/2,\text{div}}$  telle que*

$$\forall \mathbf{v} \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma), \quad \|\mathbf{v}\|_{\text{div}}^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\text{div}_{\Gamma}\mathbf{v}\|^2$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme définie par le crochet de dualité

$$\forall w \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \|w\|^2 = \langle \mathcal{S}_0 w, w \rangle.$$

La norme définie ci-dessus est trivialement une norme équivalente dans  $H_{\text{div}}^{-1/2}$ . Les axiomes 1 et 2 impliquent notamment que l'erreur converge en norme  $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ <sup>4</sup>

On a alors la proposition suivante.

**Proposition 6.2.3.** *L'axiome 3 de l'adaptivité est vérifié par l'indicateur  $\eta_{\mathbf{R}_h}$ .*

*Démonstration.* On sait que le terme  $\text{div}_{\Gamma}\mathbf{e}_l$  converge vers 0 en norme Galerkin.

On rappelle que  $\mathcal{S}_{k_w} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{C}_{k_w}$  où  $\mathcal{C}_{k_w}$  est un opérateur compact. En utilisant le **lemme 3.2.2**, on peut affirmer que  $|\langle \mathcal{C}_{k_w} \text{div}_{\Gamma}\mathbf{e}_h, \text{div}_{\Gamma}\mathbf{e}_h \rangle|$  est bien un terme d'ordre élevé par rapport à  $\|\text{div}_{\Gamma}\mathbf{e}_h\|^2$ .

La preuve se fait alors de la même manière que pour la **proposition 3.2.3** en remplaçant  $\|\cdot\|$  par  $\|\cdot\|_{\text{div}}$ .  $\square$

## Axiome 4 – Fiabilité discrète

**Proposition 6.2.4.** *L'axiome 4 de l'adaptivité est vérifié par l'indicateur  $\eta_{\mathbf{R}_h}$ .*

*Démonstration.* La preuve n'est plus aussi directe que pour les axiomes (1)–(3). On reprend alors celle de la **proposition 3.2.5** en l'adaptant à  $\eta_{\mathbf{R}_h}$ , en ne détaillant pas les étapes similaires, et en conservant les notations.

L'opérateur  $T$  de l'EFIE vérifie une condition inf–sup discrète

$$\|\widehat{U} - U_l\|_{\text{div}} \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{\widehat{v} \in \widehat{V}} \frac{|T(\widehat{U} - U_l, \widehat{v})|}{\|\widehat{v}\|_{\text{div}}} \quad (6.6)$$

où on a toujours  $\widehat{V} = \mathbf{RT}_0(\widehat{\mathcal{T}})$ . On a également fait un abus de notation en utilisant  $T(\cdot, \cdot)$  pour la forme bilinéaire associée à l'opérateur EFIE. On va ré-utiliser la démarche de [58] pour démontrer la fiabilité de  $\eta_{\mathbf{R}_h}$ .

Pour  $\widehat{v} \in \mathbf{RT}_0(\widehat{\mathcal{T}})$ , on a la décomposition

$$\widehat{v} = \widehat{\Psi} + \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \widehat{\alpha}$$

4. De la même manière qu'elle converge en norme  $H^{-1/2}(\Gamma)$  pour la **proposition 3.2.3**!

où  $\widehat{\Psi} \in \mathbf{RT}_0(\widehat{\mathcal{T}}) \cap H^{1/2}(\widehat{\mathcal{T}})$  est la partie régulière de  $\widehat{v}$ , et  $\widehat{\alpha} \in \mathcal{P}^1(\widehat{\mathcal{T}}) \cap H^{1/2}(\widehat{\mathcal{T}})$ . Ainsi,

$$|T(u - U_l, \widehat{v})| = \left| T(u - U_l, \widehat{\Psi} + \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \widehat{\alpha} - v_l) \right|$$

où  $v_l \in V_l$ . On introduit alors l'**interpolateur de Clément**  $\mathcal{I}_{\text{cl}}^l : \widehat{V} \rightarrow V_l$  tel que défini dans ([58], **Définition 2.9**). On pose encore  $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}^l$  l'interpolation de Lagrange  $\mathcal{P}^1$  classique définie aux nœuds de  $\mathcal{T}_l$ . On peut alors prendre

$$v_l = \mathcal{I}_{\text{cl}}^l \widehat{\Psi} + \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma}(\mathcal{I}_{\mathcal{L}}^l \widehat{\alpha}).$$

Par conséquent,

$$|T(u - U_l, \widehat{v})| \leq \left| T(u - U_l, \widehat{\Psi} - \mathcal{I}_{\text{cl}}^l \widehat{\Psi}) \right| + \left| T(u - U_l, \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma}(\widehat{\alpha} - \mathcal{I}_{\mathcal{L}}^l \widehat{\alpha})) \right|$$

On fait alors trois remarques,

1. par définition de l'interpolation  $\mathcal{I}_{\text{cl}}^l$  et considérant que  $\widehat{\Psi} \in \mathbf{RT}_0(\widehat{\mathcal{T}})$ , on a  $\text{supp}(\widehat{\Psi} - \mathcal{I}_{\text{cl}}^l \widehat{\Psi}) = \mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}}$  et  $(\widehat{\Psi} - \mathcal{I}_{\text{cl}}^l \widehat{\Psi}) \cdot \mathbf{n}_a = 0$  sur  $\partial(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}})$  avec  $\mathbf{n}_a$  la normale sortante aux arêtes  $a$  des triangles. En effet, sur tous les éléments non-raffinés, l'interpolateur  $\mathcal{I}_{\text{cl}}^l$  correspond à l'identité. Il n'est donc différent de 0 que sur les triangles qui ont été raffinés!
2. on a  $\text{supp}(\widehat{\alpha} - \mathcal{I}_{\mathcal{L}}^l \widehat{\alpha}) = \mathcal{R}(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}})$ , où  $\mathcal{R}(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}})$  désigne le voisinage direct de la partie de  $\mathcal{T}_l$  qui est raffinée, et  $\widehat{\alpha} - \mathcal{I}_{\mathcal{L}}^l \widehat{\alpha} = 0$  sur  $\partial \mathcal{R}(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}})$ . Cela se justifie de la même manière que pour la remarque 1., sauf qu'il faut prendre en compte le fait qu'on interpole des fonctions  $\mathcal{P}^1(\widehat{\mathcal{T}})$  donc le support est un peu plus large que  $\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}}$ .

On a donc, en revenant à l'opérateur  $T$ , en utilisant une intégration par parties et les remarques 1. et 2.,

$$|T(u - U_l, \widehat{v})| \leq \left| \left( T(u - U_l), \widehat{\Psi} - \mathcal{I}_{\text{cl}}^l \widehat{\Psi} \right)_{0, \mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}}} \right| + \left| \left( \text{rot}_{\Gamma} T(u - U_l), \widehat{\alpha} - \mathcal{I}_{\mathcal{L}}^l \widehat{\alpha} \right)_{0, \mathcal{R}(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}})} \right|.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |T(u - U_l, \widehat{v})| &\leq \|h_l^{1/2} T(u - U_l)\|_{0, \mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}}} \|h_l^{-1/2} (\widehat{\Psi} - \mathcal{I}_{\text{cl}}^l \widehat{\Psi})\|_{0, \mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}}} + \dots \\ &\quad \dots \|h_l^{1/2} \text{rot}_{\Gamma} T(u - U_l)\|_{0, \mathcal{R}(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}})} \|h_l^{-1/2} (\widehat{\alpha} - \mathcal{I}_{\mathcal{L}}^l \widehat{\alpha})\|_{0, \mathcal{R}(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}})}. \end{aligned}$$

En utilisant ([58], **Proposition 2.17**), on a

$$\|h_l^{-1/2} (\widehat{\Psi} - \mathcal{I}_{\text{cl}}^l \widehat{\Psi})\|_{0, \mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}}} \lesssim \|\widehat{\Psi}\|_{1/2}.$$

En utilisant un résultat standard pour l'interpolation de Lagrange, on a

$$\|h_l^{-1/2} (\widehat{\alpha} - \mathcal{I}_{\mathcal{L}}^l \widehat{\alpha})\|_{0, \mathcal{R}(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}})} \lesssim \|\widehat{\alpha}\|_{1/2}.$$

On a encore, d'après ([58], **Lemme 4.1**),

$$\|\widehat{\Psi}\|_{1/2} + \|\widehat{\alpha}\|_{1/2} \leq \|\widehat{v}\|_{-1/2, \text{div}}.$$

Par conséquent,

$$|T(u - U_l, \widehat{v})| \lesssim \left( \|h_l^{1/2} T(u - U_l)\|_{0, \mathcal{R}(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}})} + \|h_l^{1/2} \text{rot}_{\Gamma} T(u - U_l)\|_{0, \mathcal{R}(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\mathcal{T}})} \right) \|\widehat{v}\|_{-1/2, \text{div}}.$$

En particulier,

$$\sup_{\widehat{v} \in \widehat{V}} \frac{|T(u - U_l, \widehat{v})|}{\|\widehat{v}\|_{-1/2, \text{div}}} \lesssim \|h_l^{1/2} T(u - U_l)\|_{0, \mathcal{R}(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\tau})} + \|h_l^{1/2} \text{rot}_\Gamma T(u - U_l)\|_{0, \mathcal{R}(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\tau})}.$$

En utilisant une inégalité d'Young et la condition inf-sup (6.6), on obtient finalement

$$\|u - U_l\|_{\text{div}}^2 \lesssim \sum_{\tau \in \mathcal{R}(\mathcal{T}_l \setminus \widehat{\tau})} \eta_{\mathbf{R}_h, \tau}^2$$

ce qui est le résultat attendu.  $\square$

On peut alors énoncer un théorème très similaire au **théorème 3.2.5** établi en acoustique.

**Théorème 6.2.2** (Convergence quasi-optimale pour  $\eta_{\mathbf{R}_h}$ ). *On suppose que l'algorithme de raffinement produit une suite de maillages  $(\mathcal{T}_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ . Avec les **propositions 6.2.1–6.2.4**, il existe un rang  $l_0 \in \mathbb{N}_0$  tel que pour  $l \geq l_0$ , l'algorithme de raffinement auto-adaptatif guidé par l'indicateur résidu pondéré, utilisant le critère de marquage de Dörfler et la technique de raffinement newest vertex bisection converge quasi-optimalement par rapport à l'indicateur  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  pour l'équation intégrale associée à l'opérateur  $T$  de l'EFIE (voir (2.55)).*

*Démonstration.* L'indicateur  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  est fiable et vérifie les quatre axiomes de l'adaptivité.  $\square$

### 6.2.3 Application numérique pour l'indicateur résidu EFIE

On présente maintenant quelques résultats numériques de convergence pour l'indicateur de Nocketto & Stamm. On se limite à  $k_w = 5$  car on remarque sur la FIGURE 6.3 que le caractère sous-optimal du raffinement uniforme apparaît plus tard. On choisit également  $\theta_d = 0.25$ . C'est plus fin que pour l'indicateur par reconstruction introduit précédemment mais on n'a pas réussi à obtenir quelque chose de vraiment probant pour  $\theta_d = 0.5$ . On rappelle par ailleurs que rien ne garantit une convergence optimale lorsque  $\theta_d$  est grand (voir la section 3.2.2 et les preuves de convergence optimale).

On sélectionne trois géométries pour l'application numérique. La première est évidemment la sphère qui permet de vérifier la convergence optimale en raffinement uniforme. On s'intéresse ensuite à un cube de côté  $a = 1$ . On termine avec le bateau.

#### Sphère $R = 1$

On effectue un raffinement uniforme sur quatre itérations. La courbe de convergence est sur la FIGURE 6.4. On observe que le taux de convergence uniforme s'établit immédiatement en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$  ce qui correspond à l'estimation *a priori* (6.1).

#### Cube de côté $a = 1$

On effectue d'abord un raffinement uniforme puis un raffinement auto-adaptatif. Les courbes de convergence sont représentées sur la FIGURE 6.5.

On constate que la convergence uniforme est immédiatement sous-optimale. Le taux pour la dernière itération est en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.33})$ .

En utilisant un algorithme de raffinement auto-adaptatif, on remarque que la valeur de l'indicateur est initialement plus élevée par rapport au raffinement uniforme. Néanmoins, le

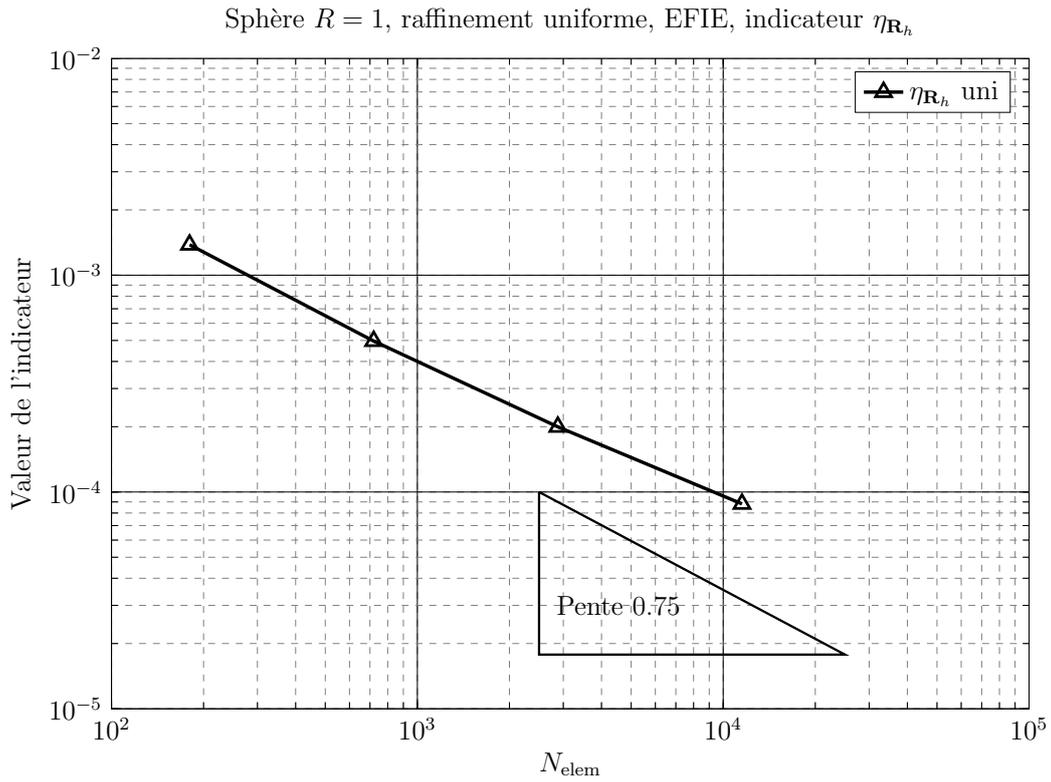


FIGURE 6.4 – Convergence uniforme de l'indicateur  $\eta_{R_h}$  sur la sphère de rayon  $R = 1$ ,  $k_w = 5$ , EFIE.

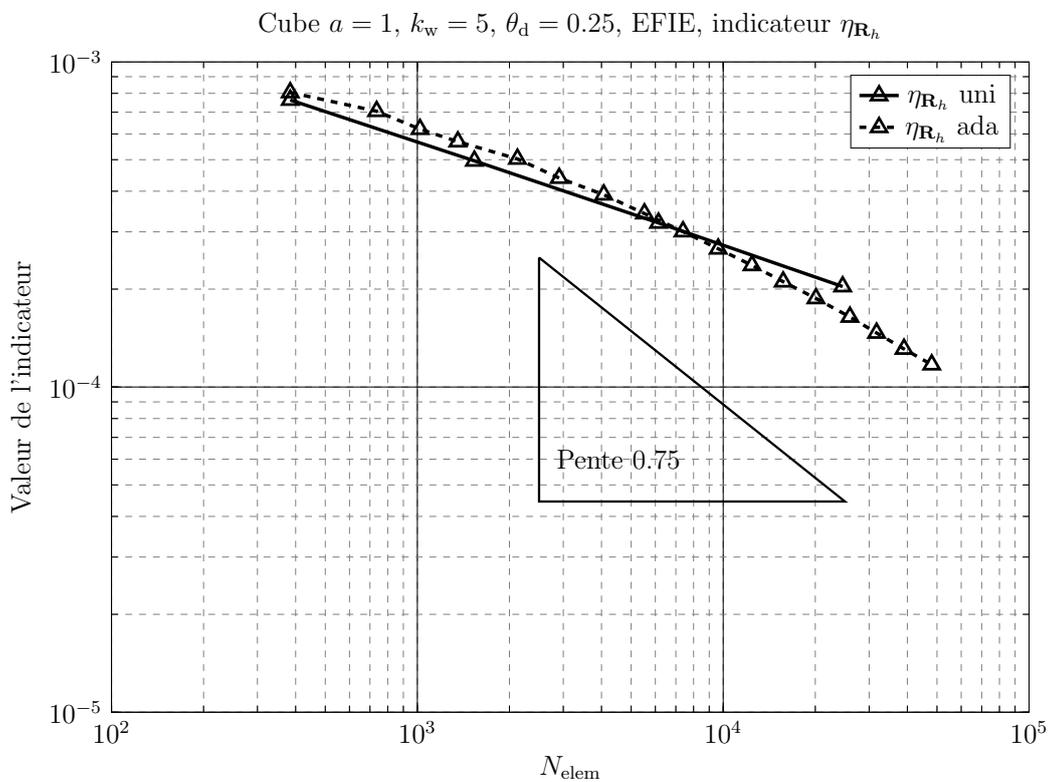


FIGURE 6.5 – Convergence de l'indicateur  $\eta_{R_h}$  sur le cube de côté  $a = 1$ ,  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = 0.25$ , EFIE.

taux de convergence augmente progressivement pour atteindre  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.53})$  à la dernière itération. L'indicateur  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  guide donc quasi-optimalement l'algorithme auto-adaptatif bien qu'on ne retrouve pas le taux maximum. De plus, il est possible que le taux de convergence augmente encore un peu si on effectue quelques itérations supplémentaires.

Sur la FIGURE 6.6, on donne un détail du raffinement sur une arête du cube. Comme attendu, l'indicateur focalise sur les arêtes.

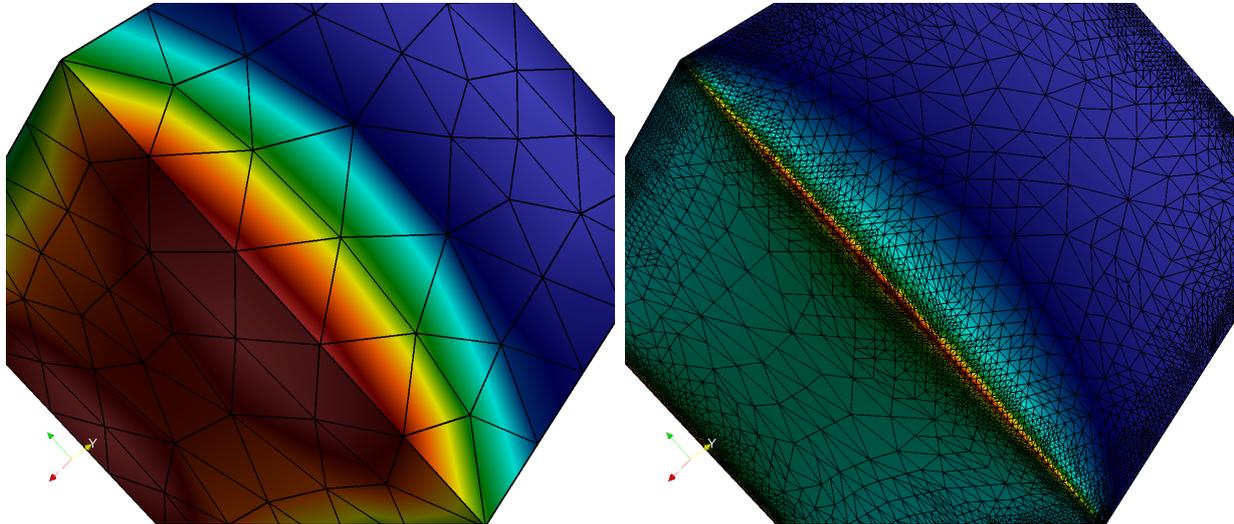


FIGURE 6.6 – Détails du raffinement sur une arête du cube, guidage par  $\eta_{\mathbf{R}_h}$ ,  $k_w = 5$ .

## Bateau

On conclut les simulations sur le bateau. Les courbes de convergence sont sur la FIGURE 6.7.

Le raffinement uniforme est clairement sous-optimal. Le taux à la dernière itération est en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.31})$ .

En utilisant du raffinement auto-adaptatif, la valeur de l'indicateur est tout le temps plus faible qu'en raffinement uniforme. De plus, le taux de convergence augmente progressivement pour atteindre  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.55})$  à la dernière itération, sans rejoindre le maximum possible<sup>5</sup>. On en conclut que l'indicateur  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  guide encore une fois quasi-optimalement l'algorithme de raffinement auto-adaptatif.

### 6.2.4 Conclusion sur l'indicateur résidu pour l'EFIE

Dans cette partie, on a présenté "l'indicateur résidu pondéré" introduit par Nochetto & Stamm. Cet indicateur se présente, comme pour l'indicateur  $\eta_{r_h}$  associé à l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ , sous la forme d'une norme  $H_{\text{rot}}$  du résidu pondéré par une taille de maille locale.

C'est un indicateur dont le principe s'exprime simplement. La difficulté principale est le calcul du résidu qui a de plus la propriété d'être singulier sur les arêtes et les nœuds des triangles du maillage. En supposant que le résidu puisse être calculé simplement, l'indicateur se calcule très facilement.

On a également montré qu'à l'instar de l'acoustique, l'indicateur  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  converge (théoriquement) quasi-optimalement ; si de plus on suppose son efficacité forte, la convergence est optimale. Il peut donc être utilisé pour le guidage d'un algorithme de raffinement auto-adaptatif.

5. On est de toute façon bloqué par l'isotropie du raffinement.

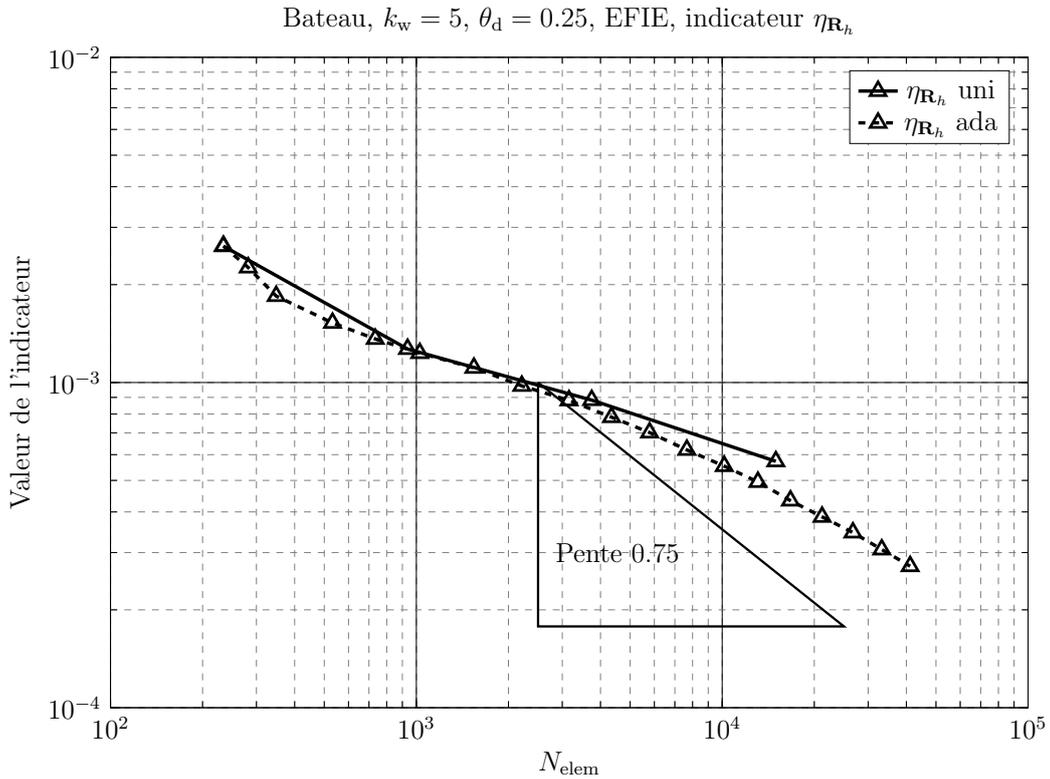


FIGURE 6.7 – Convergence de l'indicateur  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  sur le bateau,  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = 0.25$ , EFIE.

Les applications numériques sur des géométries simples, comme un cube ou un bateau, confirment la capacité de  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  à guider optimalement le raffinement auto-adaptatif. Similairement à l'acoustique, on ne retrouve jamais le taux de convergence maximal en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$  mais l'amélioration du taux de convergence est sensible.

Comme en acoustique, ça en fait donc un indicateur d'erreur de choix pour le guidage d'un algorithme de raffinement auto-adaptatif.

Dans la partie suivante, on présente d'autres indicateurs basés sur le calcul du résidu. Ils reprennent le principe de l'indicateur  $\Lambda$  introduit au chapitre 4.

### 6.3 Indicateur $\Lambda$ pour l'EFIE

On a présenté précédemment deux indicateurs basés sur le résidu. On a vérifié numériquement qu'ils permettent de guider un algorithme de raffinement auto-adaptatif.

Dans cette partie, on étend le principe de l'indicateur  $\eta_{\Lambda}$  introduit au chapitre 4 à l'EFIE. On rencontre ainsi deux difficultés majeures :

- les inconnues ne sont plus scalaires mais vectorielles,
- les espaces d'approximation ne sont plus les espaces d'approximation "simples" rencontrés en acoustique

ce qui fait qu'il n'est pas aisé d'appliquer "directement" un opérateur de régularisation au résidu  $\mathbf{R}_h$  puisque  $\mathbf{R}_h \in H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ . Néanmoins, on souhaiterait toujours pouvoir l'exprimer en norme  $L^2(\Gamma)$ . On propose deux approches.

La première consiste à passer par une décomposition de Helmholtz–Hodge du résidu pour en récupérer deux potentiels  $\varphi$  et  $\psi$ , appliquer à chacun un opérateur  $\Lambda^{\mp}$  bien choisi, puis calculer le champ vectoriel associé.

La seconde approche utilise la définition de l'espace  $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$  et une localisation de norme très similaire à ce qui a été fait au chapitre 4!

**Remarque 6.3.1** (Sur les applications numériques). *Pour les applications numériques relatives aux indicateurs  $\Lambda$  pour l'EFIE introduits ci-après, il n'a pas été aisé d'obtenir des résultats numériques et les taux de convergence ne rejoignent pas ceux des indicateurs introduits dans les parties 6.1 et 6.2. On reconnaît une possible faiblesse quant à l'implémentation des indicateurs. On présente donc, en plus de la sphère, des simulations sur des exemples choisis.*

*Néanmoins, on constate quand même une amélioration par rapport à l'uniforme.*

### 6.3.1 $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},1}$ basé sur une décomposition de Helmholtz du résidu

On présente ici une première approche pour la construction d'un opérateur  $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE}}$ . On aimerait pouvoir calculer quelque chose de la forme

$$\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE}} = \|\Lambda \mathbf{R}_h\|_0$$

avec  $\Lambda : H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  (on rappelle que  $\mathbf{R}_h \in H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ ) un isomorphisme, si possible sur surface lipschitzienne, ce qui en ferait un indicateur fiable, efficace et local. Comme évoqué en introduction, les deux difficultés principales sont le caractère vectoriel de  $\mathbf{R}_h$  et l'espace d'approximation  $H_{\text{rot}}^{-1/2}$ .

Une façon de revenir à des choses plus "classiques" est d'utiliser une<sup>6</sup> décomposition de Helmholtz–Hodge [10] du résidu  $\mathbf{R}_h$  et des courants  $\mathbf{J}_h$  dont on présente le principe ci-dessous.

Pour la construction de  $\Lambda$ <sup>7</sup>, on va supposer que  $\Gamma$  est **fermée** afin de s'affranchir de la manipulation des termes de bord dans la décomposition, et de plus régulière pour pouvoir utiliser le calcul pseudo-différentiel.

On commence par effectuer la décomposition de Helmholtz de  $\mathbf{e}_h = \mathbf{J} - \mathbf{J}_h$  dans  $H_{\text{div}}^{-1/2}$

$$\mathbf{J} = \nabla_{\Gamma} \varphi_e + \mathbf{n} \times \nabla_{\Gamma} \psi_e \quad (6.7)$$

où  $\varphi_e \in H^{3/2}(\Gamma)$  et  $\psi_e \in H^{1/2}(\Gamma)$ <sup>8</sup> sont deux potentiels scalaires. Les deux termes de la décomposition sont orthogonaux par rapport au produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^2$ .

On introduit encore un opérateur "poubelle"  $\Upsilon_i^{-1}, i = 1, 2, \dots$  dans lequel on va placer tous les opérateurs générant des termes d'ordre élevé lorsque l'erreur converge : des opérateurs régularisant d'**au moins un ordre** par rapport au reste, ou bien des opérateurs compacts. C'est notamment le cas du **commutateur** de deux opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  défini comme

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$$

qui est d'ordre  $-1$  au moins! L'utilisation de  $\Upsilon_i^{-1}$  permet uniquement d'alléger les notations et de mettre en évidence les termes d'ordre élevé en convergence!

En appliquant l'opérateur EFIE à l'erreur  $\mathbf{e}_h = \mathbf{J} - \mathbf{J}_h$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h &= \mathcal{S}_{k_w}(\nabla_{\Gamma} \varphi_e) + \mathcal{S}_{k_w}(\mathbf{n} \times \nabla_{\Gamma} \psi_e) + \frac{1}{k_w^2} \nabla_{\Gamma}(\mathcal{S}_{k_w} \Delta_{\Gamma} \varphi_e), \\ &= \nabla_{\Gamma}(\mathcal{S}_{k_w} \varphi_e + \frac{1}{k_w^2} \mathcal{S}_{k_w}(\Delta_{\Gamma} \varphi_e)) + \mathbf{n} \times \nabla_{\Gamma}(\mathcal{S}_{k_w} \psi_e) + \Upsilon_1^{-1} \end{aligned}$$

6. Les potentiels sont calculés à une constante additive près...

7. et comme en acoustique...

8. En général,  $H^{3/2}(\Gamma)$  n'est pas défini comme la trace de  $H^2(\Omega)$ , lemme 3.6 dans [26]! Dans notre cas,  $\Gamma$  est supposée  $\mathcal{C}^{\infty}$  donc il n'y a pas de problèmes.

en commutant  $\nabla_\Gamma$  et  $\mathcal{S}_{k_w}$ .

En regroupant les termes,

$$\mathbf{R}_h = \nabla_\Gamma \left( \mathcal{S}_{k_w} \left( \mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2} \right) \varphi_e \right) + \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma (\mathcal{S}_{k_w} \psi_e) + \Upsilon_2^{-1}.$$

En utilisant le symbole principal et ([27], p. 54),

$$\mathcal{S}_{k_w} \left( \mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2} \right) = -\frac{1}{2ik_w} \left( \mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2} \right)^{1/2} + \Upsilon_3^{-1}$$

On a finalement

$$\boxed{\mathbf{R}_h = -\frac{1}{2ik_w} \nabla_{k_w} \left( \left( \mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2} \right)^{1/2} \varphi_e \right) - \frac{1}{2ik_w} \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \left( \left( \mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2} \right)^{-1/2} \psi_e \right) + \Upsilon_4^{-1}.} \quad (6.8)$$

Parallèlement, on a la décomposition du résidu  $\mathbf{R}_h$  dans  $H_{\text{rot}}^{-1/2}$  telle que

$$\mathbf{R}_h = \nabla_\Gamma \varphi_R + \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \psi_R \quad (6.9)$$

avec  $\varphi_R \in H^{1/2}(\Gamma)$  et  $\psi_R \in H^{3/2}(\Gamma)$ . En identifiant (6.8) et (6.9), on a

$$\varphi_R = -\frac{1}{2ik_w} \left( \mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2} \right)^{1/2} \varphi_e + \text{h.o.t.} \quad \psi_R = -\frac{1}{2ik_w} \left( \mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2} \right)^{-1/2} \psi_e + \text{h.o.t.}$$

L'idée pour l'indicateur  $\Lambda$  est alors la suivante : on définit l'indicateur  $\eta_\Lambda^{\text{EFIE}}$  comme l'application de deux opérateurs  $\Lambda^\mp$  aux potentiels de Helmholtz du résidu de telle sorte que

$$\boxed{\Lambda^{\text{EFIE},1} \mathbf{R}_h = \nabla_\Gamma (\Lambda^- \varphi_R) + \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma (\Lambda^+ \psi_R)}. \quad (6.10)$$

On pose alors

$$\boxed{\eta_\Lambda^{\text{EFIE}} = \sqrt{\sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \|\Lambda^{\text{EFIE}} \mathbf{R}_h\|_{0,\tau}^2}}. \quad (6.11)$$

C'est la forme "classique" de l'indicateur  $\eta_\Lambda$  tel qu'introduit en acoustique. L'équation (6.8) suggère de choisir

$$\boxed{\Lambda^\mp = \sqrt{2k_w} \left( \mathcal{I} - \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2} \right)^{\mp 1/4}}. \quad (6.12)$$

De plus,

$$\Lambda^+ : H^{3/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma) \quad \text{et} \quad \Lambda^- : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma).$$

**Remarque 6.3.2.** *Les opérateurs  $\Lambda^\mp$  sont très similaires aux opérateurs  $\Lambda$  introduits en acoustique. Ce sont des isomorphismes !*

### Que peut-on dire sur l'injectivité de $\Lambda^\mp$ ?

L'opérateur  $\Lambda^\mp$  est bien un isomorphisme (voir 4.3). On a

$$\nabla_\Gamma(\Lambda^-\varphi_R) = 0 \Rightarrow \Lambda^-\varphi_R = C_1 \quad (\text{une constante}).$$

Similairement, on a  $\Lambda^+\psi_R = C_2$ . En utilisant la construction de  $\Lambda^\mp$  comme puissance d'un opérateur différentiel classique, et notamment le fait que les sous-espaces propres sont identiques, la seule possibilité est que  $\varphi_R = C_3$  et  $\psi_R = C_4$ . Par conséquent,  $\mathbf{R}_h = 0$ . L'opérateur  $\Lambda^{\text{EFIE}}$  est **injectif**.

La surjectivité est une conséquence de celle des opérateur  $\Lambda^\mp$ . En conclusion,

**Théorème 6.3.1.** *L'indicateur  $\eta_\Lambda^{\text{EFIE},1}$  tel qu'introduit à l'équation (6.11) est **fiable, efficace et local**.*

*Démonstration.* L'opérateur  $\Lambda^{\text{EFIE}}$  est injectif et surjectif. C'est un isomorphisme et on peut appliquer le **Théorème 4.1.1**.  $\square$

### Caractère "asymptotiquement exact"

Le caractère asymptotiquement exact (en norme  $\|\cdot\|_0$ ) de  $\eta_\Lambda^{\text{EFIE},1}$  ne se déduit pas directement de la construction. Idéalement, on souhaite écrire quelque chose de la forme

$$\|\Lambda^{\text{EFIE}}\mathbf{R}_h\|_0 = \|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}} + \text{termes d'ordre élevé.}$$

On **suppose que la surface  $\Gamma$  est de classe**<sup>9</sup>  $\mathcal{C}^\infty$  ! Avant tout calcul, on fait quelques remarques sur le caractère sur le symbole principal homogène des opérateurs qui entrent en jeu. On adopte la notation simplifiée  $\sigma_0$ . On a

$$\begin{aligned} \sigma_0(\mathcal{S}_0) &= \frac{1}{2|\xi|}, \\ \sigma_0\left(\left(\mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2}\right)^{-1/2}\right) &= \frac{k_w}{i|\xi|}, \\ \sigma_0\left(-\frac{1}{2ik_w}\left(\mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2}\right)^{-1/2}\right) &= \frac{1}{2|\xi|}, \\ \sigma_0\left(\left(\mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2}\right)^{1/2}\right) &= \frac{i|\xi|}{k_w}, \\ \sigma_0\left(-\frac{1}{2ik_w}\left(\mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2}\right)^{1/2}\right) &= -\frac{|\xi|}{2k_w^2}. \end{aligned}$$

Pour les candidats  $\Lambda^\pm$ , on a encore

$$\begin{aligned} \sigma_0(\Lambda^-) &= \sqrt{2|\xi|}, \\ \sigma_0(\Lambda^+) &= \frac{\sqrt{2}k_w}{\sqrt{|\xi|}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sigma_0\left((\Lambda^+)^* \left(-\frac{1}{2ik_w}\left(\mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2}\right)^{-1/2}\right) \Lambda^+\right) &= 1, \\ \sigma_0\left((\Lambda^-)^* \left(-\frac{1}{2ik_w}\left(\mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2}\right)^{1/2}\right) \Lambda^-\right) &= -1. \end{aligned}$$

9. On utilise à nouveau des techniques d'analyse microlocale.

Revenons à la définition de  $\|\Lambda \mathbf{R}_h\|_0^2$ . On a

$$\|\Lambda \mathbf{R}_h\|_0^2 = \|\mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \Lambda^+ \psi_R\|_0^2 + \|\nabla_\Gamma \Lambda^- \varphi_R\|_0^2.$$

On traite premièrement le terme  $\|\mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \Lambda^+ \psi_R\|_0^2$ . Par soucis de simplification des notations, on pose

$$\mathcal{A}_{k_w} = -\frac{1}{2ik_w} \left( \mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2} \right)^{-1/2}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \Lambda^+ \psi_R\|_0^2 &= (\mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \Lambda^+ \mathcal{A}_{k_w} \psi_e, \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \Lambda^+ \mathcal{A}_{k_w} \psi_e)_0, \\ &= -\langle (\Lambda^+)^* \Delta_\Gamma \Lambda^+ \mathcal{A}_{k_w} \psi_e, \mathcal{A}_{k_w} \psi_e \rangle, \\ &= -\langle \Delta_\Gamma (\Lambda^+)^* \Lambda^+ \mathcal{A}_{k_w} \psi_e, \mathcal{A}_{k_w} \psi_e \rangle, \\ &= -\langle \Delta_\Gamma \psi_e, \mathcal{A}_{k_w} \psi_e \rangle + \text{ordre élevé}^{10}, \\ &= \langle \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \psi_e, \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \mathcal{A}_{k_w} \psi_e \rangle + \text{ordre élevé}, \\ &= \langle \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \psi_e, \mathcal{S}_0(\mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \psi_e) \rangle + \text{ordre élevé}, \\ &= \|\mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \psi_e\|^2 + \text{ordre élevé}. \end{aligned}$$

On pose maintenant, toujours pour simplifier les notations,

$$\mathcal{B}_{k_w} = -\frac{1}{2ik_w} \left( \mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2} \right)^{1/2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|\nabla_\Gamma \Lambda^- \varphi_R\|_0^2 &= (\nabla_\Gamma \Lambda^- \mathcal{B}_{k_w} \varphi_e, \nabla_\Gamma \Lambda^- \mathcal{B}_{k_w} \varphi_e)_0, \\ &= -\langle \Delta_\Gamma (\Lambda^-)^* \Lambda^- \mathcal{B}_{k_w} \varphi_e, \mathcal{B}_{k_w} \varphi_e \rangle, \\ &= \langle \Delta_\Gamma \varphi_e, \mathcal{B}_{k_w} \varphi_e \rangle + \text{ordre élevé}, \\ &= \langle \Delta_\Gamma \varphi_e, \mathcal{S}_0 \left( \mathcal{I} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2} \right) \varphi_e \rangle + \text{ordre élevé}, \\ &= \langle \Delta_\Gamma \varphi_e, \mathcal{S}_0 \varphi_e \rangle + \langle \Delta_\Gamma \varphi_e, \mathcal{S}_0 \frac{\Delta_\Gamma}{k_w^2} \varphi_e \rangle + \text{ordre élevé} \\ &= -\|\nabla_\Gamma \varphi_e\|^2 + \frac{1}{k_w^2} \|\text{div}_\Gamma \nabla_\Gamma \varphi_e\|^2 + \text{ordre élevé}. \end{aligned}$$

En regroupant les termes, on obtient

$$\|\Lambda \mathbf{R}_h\|_0^2 = \|\mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \psi_e\|^2 - \|\nabla_\Gamma \varphi_e\|^2 + \frac{1}{k_w^2} \|\text{div}_\Gamma \nabla_\Gamma \varphi_e\|^2 + \text{ordre élevé}.$$

Pour conclure il suffit de remarquer que  $\|\nabla_\Gamma \varphi_e\|^2$  est un terme d'ordre élevé par rapport à  $\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}^2$ . On peut donc changer  $-\|\nabla_\Gamma \varphi_e\|^2$  en  $+\|\nabla_\Gamma \varphi_e\|^2$  ce qui permet de conclure

$$\boxed{\|\Lambda \mathbf{R}_h\|_0^2 = \|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}^2 + \text{ordre élevé}}. \quad (6.13)$$

10. Par rapport à la norme  $\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}$ . Voir (6.13).

En effet, en étudiant le comportement de  $\frac{\langle \mathcal{S}_0 \nabla_\Gamma \varphi_e, \nabla_\Gamma \varphi_e \rangle}{\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathcal{S}_0 \nabla_\Gamma \varphi_e, \nabla_\Gamma \varphi_e \rangle}{\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}} &= \langle \mathcal{S}_0 \frac{\nabla_\Gamma \varphi_e}{\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}}, \nabla_\Gamma \varphi_e \rangle, \\ &\leq \left\| \mathcal{S}_0 \frac{\nabla_\Gamma \varphi_e}{\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}} \right\|_{1/2} \|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}. \end{aligned}$$

On sait que

$$\frac{\mathbf{e}_h}{\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}} \xrightarrow{\text{faible}} 0 \quad \text{dans } H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) \text{ }^{11}.$$

On en déduit que

$$\frac{\nabla_\Gamma \varphi_e}{\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}} \xrightarrow{\text{faible}} 0 \quad \text{dans } H_t^{1/2}(\Gamma).$$

De plus, on sait que  $\mathcal{S}_0$  est un opérateur d'ordre  $-1$  donc  $\mathcal{S}_0 \frac{\nabla_\Gamma \varphi_e}{\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}} \in H_t^{3/2}(\Gamma)$ , or  $H_t^{3/2}(\Gamma)$  s'injecte de façon compacte dans  $H_t^{1/2}(\Gamma)$  donc on a convergence **forte** de  $\mathcal{S}_0 \frac{\nabla_\Gamma \varphi_e}{\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}} \rightarrow 0$  dans  $H_t^{1/2}(\Gamma)$ .

**Remarque 6.3.3.** *En utilisant les mêmes techniques, on peut montrer que les termes croisés*

$$\langle \mathcal{S}_0 \nabla_\Gamma \varphi_e, \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \psi_e \rangle \quad \text{et} \quad \langle \varphi_e, \mathcal{S}_0 \nabla_\Gamma (\mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \psi_e) \rangle$$

sont également d'ordre élevé par rapport à  $\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}^2$ .

C'est cela qui nous permet d'écrire en (6.13) que

$$\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}^2 = \|\nabla_\Gamma \varphi_e\|^2 + \|\mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \psi_e\|^2 + \text{ordre élevé}.$$

D'après l'équation (6.13), l'indicateur  $\eta_\Lambda^{\text{EFIE},1}$  défini à l'équation (6.11) est **asymptotiquement exact** par rapport à  $\|\mathbf{e}_h\|_{\text{div}}$  lorsque  $\Gamma$  est une surface **régulière**.

**Remarques sur la construction de  $\eta_\Lambda^{\text{EFIE},1}$**

La construction de l'indicateur introduit en (6.11) peut poser quelques problèmes. En effet, il va falloir calculer les deux potentiels  $\varphi_R$  et  $\psi_R$  de manière approchée (typiquement les projeter sur un espace polynomial  $\mathcal{P}^p(\mathcal{T}_h)$ ) pour pouvoir appliquer les opérateurs  $\Lambda^\mp$ . On présente une manière de faire pour le potentiel  $\varphi_R$ . La procédure pour  $\psi_R$  s'en déduit très facilement.

On applique l'opérateur de divergence au résidu. Ainsi,

$$\text{div}_\Gamma \mathbf{R}_h = \Delta_\Gamma \varphi_R.$$

On teste par un  $v \in \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_h)$  puis on intègre l'ensemble par parties <sup>12</sup>

$$\int_\Gamma \nabla_\Gamma v \cdot \mathbf{R}_h \, d\gamma_y = \int_\Gamma \nabla_\Gamma v \cdot \nabla_\Gamma \varphi_R \, d\gamma_y.$$

Le problème variationnel ci-dessus est bien connu et évidemment mal posé. Il suffit alors de fixer la valeur d'un seul des degrés de liberté pour l'approximation de  $\varphi_R$  pour le rendre inversible <sup>13</sup>.

Le reste de la procédure pour le calcul de l'indicateur est similaire à ce qui a été fait en acoustique.

11. Voir démonstration de la quasi-orthogonalité 6.2.3.

12. La surface est supposée fermée, donc il n'y a pas de terme de bord.

13. Cela fixe du même coup la partie constante de  $\varphi_R$

## Application numérique

On propose ici une application numérique pour l'indicateur  $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},1}$ . Avant toute chose, **on précise qu'on n'a pas été capable de l'utiliser avec succès pour le guidage d'un algorithme de raffinement auto-adaptatif**. De plus, on n'a pas pu vérifier le caractère "asymptotiquement exact" prévu théoriquement ; Les simulations qu'on présente sont donc les suivantes :

- une sphère de rayon  $R = 1$  avec raffinement uniforme pour vérifier qu'on retrouve bien l'estimation *a priori*,
- une plaque trouée (qu'on retrouve en partie 6.4) pour laquelle l'algorithme est guidé par  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  introduit en 6.2 ou bien par  $\eta_{\rho}$  introduit dans la partie suivante 6.4.

On choisit le nombre d'onde  $k_w = 5$ . Le paramètre de raffinement utilisé pour la plaque est  $\theta_d = 0.25$ .

La courbe de convergence pour la sphère est donnée sur la FIGURE 6.8. Le taux de convergence asymptotique est atteint immédiatement et s'établit conformément à l'estimation *a priori* (6.1) en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$ .

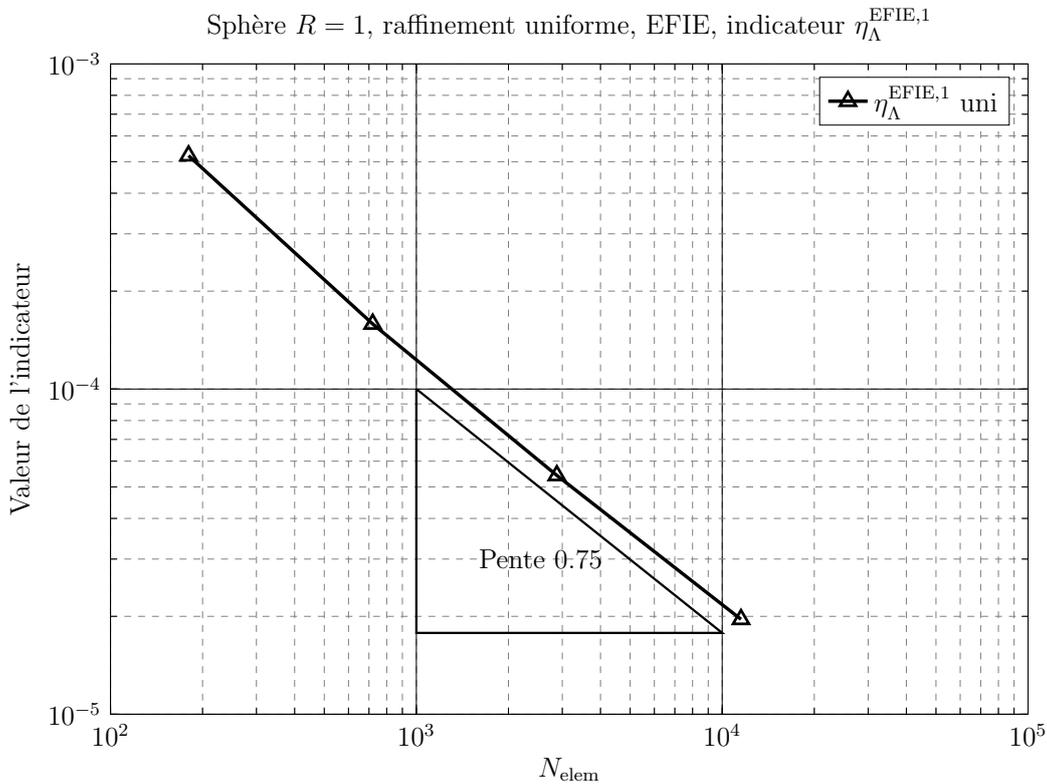


FIGURE 6.8 – Convergence de l'indicateur  $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},1}$ , sphère  $R = 1$ ,  $k_w = 5$ , EFIE.

Les courbes de convergence pour la plaque trouée sont données sur la FIGURE 6.9.

La convergence uniforme apparaît sous-optimale par rapport à la convergence obtenue avec raffinement auto-adaptatif. Pour la dernière itération, le taux correspond à  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.28})$ . En raffinement auto-adaptatif,  $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},1}$  semble converger à des taux similaires qu'on utilise  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  ou bien  $\eta_{\rho}$  pour le guidage. En faisant une moyenne sur les huit dernières itérations, on trouve  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.45})$  pour un guidage avec  $\eta_{\rho}$  et  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.49})$  pour un guidage avec  $\eta_{\mathbf{R}_h}$ .

Par conséquent, il semble que les indicateurs  $\eta_{\rho}$  et  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  guident optimalement l'algorithme auto-adaptatif pour  $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},1}$ . Malgré l'absence de résultats probants en guidage, on pourrait se

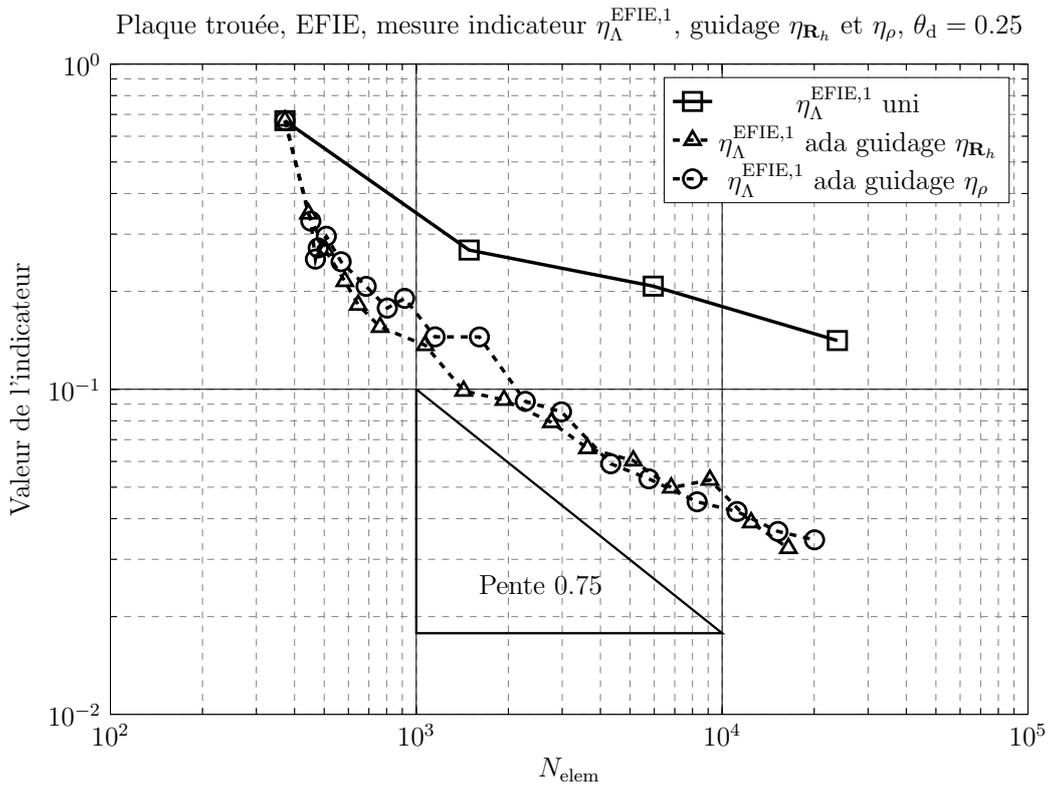


FIGURE 6.9 – Convergence de l'indicateur  $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},1}$  avec guidage par  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  et  $\eta_{\rho}$ , plaque trouée,  $k_w = 5$ , EFIE.

servir de l'indicateur  $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},1}$  pour la mesure de l'erreur (ou comme critère d'arrêt pour une méthode de raffinement auto-adaptative).

### 6.3.2 $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},2}$ basé sur une autre localisation de la norme $H_{\text{rot}}^{-1/2}$

On a introduit dans la partie précédente 6.3.1 un premier indicateur basé sur le concept d'un opérateur de localisation  $\Lambda$  pour l'EFIE. Si il n'est pas compliqué à mettre en œuvre, hormis le calcul du résidu, il nécessite de passer par des approximations des potentiels de Helmholtz qu'il faudra prendre d'ordre suffisamment élevé pour que l'opération inverse de calcul du champ à partir des potentiels soit suffisamment précise lorsqu'il a une structure complexe.

On cherche donc une manière de localiser la norme du résidu en limitant grandement les approximations. On peut en fait procéder de la même manière qu'en acoustique.

Pour cette partie, on suppose que  $\Gamma$  **peut être ouverte**. On revient premièrement à la définition de la norme  $\|\cdot\|_{-1/2,\text{rot}}$ . On a l'équivalence

$$\mathbf{v} \in H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma) \iff \|\mathbf{v}\|_{-1/2} < \infty \quad \text{et} \quad \|\text{rot}_{\Gamma}\mathbf{v}\|_{-1/2} < \infty.$$

Il suffit maintenant de revenir à la définition d'une norme équivalent dans  $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ . Pour tout  $\mathbf{v} \in H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ , on pose

$$\|\mathbf{v}\|_{-1/2,\text{rot}}^2 = \|\mathbf{v}\|_{-1/2}^2 + \frac{1}{k_w^2} \|\text{rot}_{\Gamma}\mathbf{v}\|_{-1/2}^2. \quad (6.14)$$

On pose maintenant  $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$  et on définit une norme de mesure du résidu (comme en

acoustique)

$$\|\mathbf{v}\|_{-1/2}^2 = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{v}(y)}{4\pi|x-y|} d\gamma_y d\gamma_x \quad (6.15)$$

i.e. la norme  $\|\cdot\|$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$  classique. On peut réécrire l'égalité ci-dessus comme

$$\boxed{\|\mathbf{v}\|_{-1/2,\text{rot}}^2 = \|v_x\|^2 + \|v_y\|^2 + \|v_z\|^2 + \frac{1}{k_w^2} \|\text{rot}_{\Gamma}\mathbf{v}\|^2}. \quad (6.16)$$

On définit l'opérateur

$$\Lambda^{\text{EFIE}} = \sqrt{2} (\mathcal{I} - \Delta_{\Gamma})^{-1/4}. \quad (6.17)$$

On a le théorème suivant.

**Théorème 6.3.2** (Indicateur  $\Lambda^{\text{EFIE}}$  – Version 2). *Soit  $\Lambda^{\text{EFIE}}$  tel que définit en (6.17), l'indicateur d'erreur a posteriori définit par*

$$\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},2} = \|\Lambda \mathbf{R}_h\|_{\text{rot}}, \quad (6.18)$$

$$(\eta_{\Lambda,\tau}^{\text{EFIE},2})^2 = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \|\Lambda \mathbf{R}_h\|_{\text{rot},\tau}^2 \quad (6.19)$$

avec

$$\begin{aligned} \|\Lambda \mathbf{R}_h\|_{\text{rot},\tau}^2 &= \dots \\ &\dots \|\Lambda^{\text{EFIE}} R_{h,x}\|_{0,\tau}^2 + \|\Lambda^{\text{EFIE}} R_{h,y}\|_{0,\tau}^2 + \|\Lambda^{\text{EFIE}} R_{h,z}\|_{0,\tau}^2 + \frac{1}{k_w^2} \|\Lambda^{\text{EFIE}} \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{R}_h\|_{0,\tau}^2 \end{aligned} \quad (6.20)$$

est **fiable**, **efficace** et **local**.

*Démonstration.* La preuve est immédiate :  $\Lambda^{\text{EFIE}}$  tel qu'introduit en (6.17) est un isomorphisme donc on a toujours  $\|v\| \sim \|\Lambda^{\text{EFIE}} v\|_0$ .  $\square$

### Remarques diverses sur l'indicateur $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},2}$

Au contraire de l'indicateur introduit en 6.3.1, l'indicateur d'erreur proposé ici s'exprime très simplement et ne nécessite la manipulation que d'un unique opérateur  $\Lambda^{\text{EFIE}}$  !

Sous réserve d'avoir à disposition un outil permettant de récupérer les valeurs de  $\mathbf{R}_h$  et  $\text{rot}_{\Gamma} \mathbf{R}_h$ , il est aussi simple à mettre en œuvre qu'en acoustique.

Enfin, la seule approximation ici va être la projection sur un espace polynomial des composantes  $R_{h,x}$ ,  $R_{h,y}$ ,  $R_{h,z}$  et de  $\text{rot}_{\Gamma} \mathbf{R}_h$ . On y gagne donc par rapport à l'autre indicateur  $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},1}$ . Néanmoins, on est asymptotiquement exact par rapport à la norme du résidu !

### Quid du caractère "asymptotiquement exact" ?

On ne peut *a priori* rien dire sur le caractère asymptotiquement exact. En effet, la méthode de construction qu'on utilise en acoustique repose sur le fait qu'on se sert de la partie coercive  $\mathcal{A}_0$  de l'opérateur  $\mathcal{A}_{k_w}$  inversé (voir la partie 4.1.2) pour construire l'opérateur de localisation. On définit ainsi l'opérateur de localisation  $\Lambda \approx \mathcal{A}_0^{-1/2}$  et on remarque alors qu'on construit un indicateur exact à des termes d'ordre élevé près.

En EFIE, ça ne "fonctionne pas dans le bon sens". En effet, on ne calcule pas  $\|\mathbf{e}_h\|$  mais  $\|\mathbf{R}_h\|$ . En prenant,  $\Lambda^{\text{EFIE}} \equiv \Lambda_{\mathcal{N}_0}$ , la localisation a un sens, et on a encore

$$\|\Lambda^{\text{EFIE}} \mathbf{R}_h\|_{0,\text{rot}} = \|\mathbf{R}_h\|_{-1/2,\text{rot}} + \text{termes d'ordre élevé},$$

mais il manque le lien entre  $\|\mathbf{R}_h\|_{-1/2,\text{rot}}$  et  $\|\mathbf{e}_h\|_{-1/2,\text{div}}$ .

## Application numérique

On présente ici une courte application numérique pour l'indicateur  $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},2}$  sous la forme n'utilisant pas de décomposition de Helmholtz. On choisit encore  $k_w = 5$  et  $\theta_d = 0.25$ . La première géométrie est encore la sphère. On présente ensuite un résultat de convergence sur le cube.

La courbe de convergence pour la sphère est présentée sur la FIGURE 6.10. On retrouve bien l'estimation maximale *a priori* (6.1).

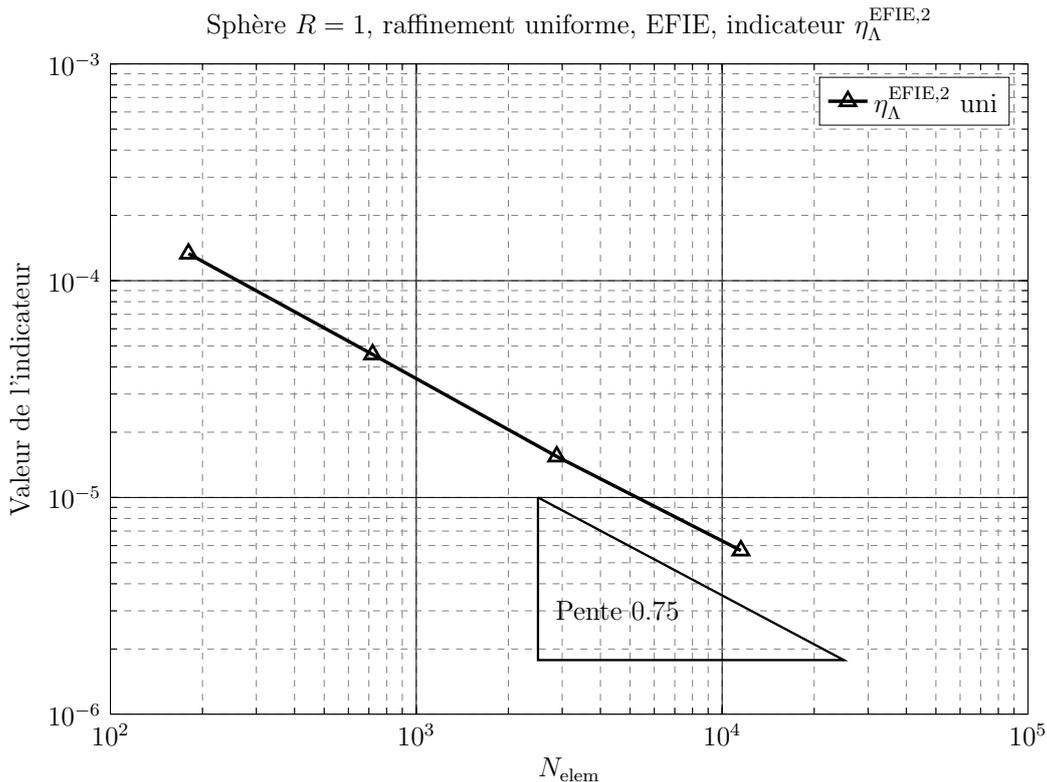


FIGURE 6.10 – Convergence de l'indicateur  $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE},2}$ , sphère  $R = 1$ ,  $k_w = 5$ , EFIE.

Les courbes de convergence pour le cube sont représentées sur la FIGURE 6.11.

On observe que le raffinement uniforme n'est pas optimal. Le taux de convergence pour la dernière itération est en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.27})$ . En utilisant le raffinement auto-adaptatif, on observe initialement le même phénomène que pour l'indicateur résidu sur le cube : la valeur de l'indicateur est plus élevée qu'en raffinement uniforme. Le taux de convergence adaptatif augmente progressivement sans garantie qu'il rejoigne le taux maximum. L'erreur devient plus faible qu'en raffinement uniforme. A la dernière itération, le taux de convergence est en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.47})$ . C'est moins élevé que pour l'indicateur résidu. Il est possible que cette différence résulte de l'approximation utilisée pour le calcul de l'indicateur : on commence par effectuer une projection  $\mathcal{P}^2$  de chacune des composantes du résidu puis de son rotationnel, puis on leur applique l'opérateur  $\Lambda$ . Le problème numérique vient probablement de la projection  $\mathcal{P}^2$  qui n'est peut-être pas assez riche.

Les résultats avec ce second indicateur  $\Lambda$  pour l'EFIE semblent prometteurs du point de vue du guidage d'un algorithme de raffinement auto-adaptatif.

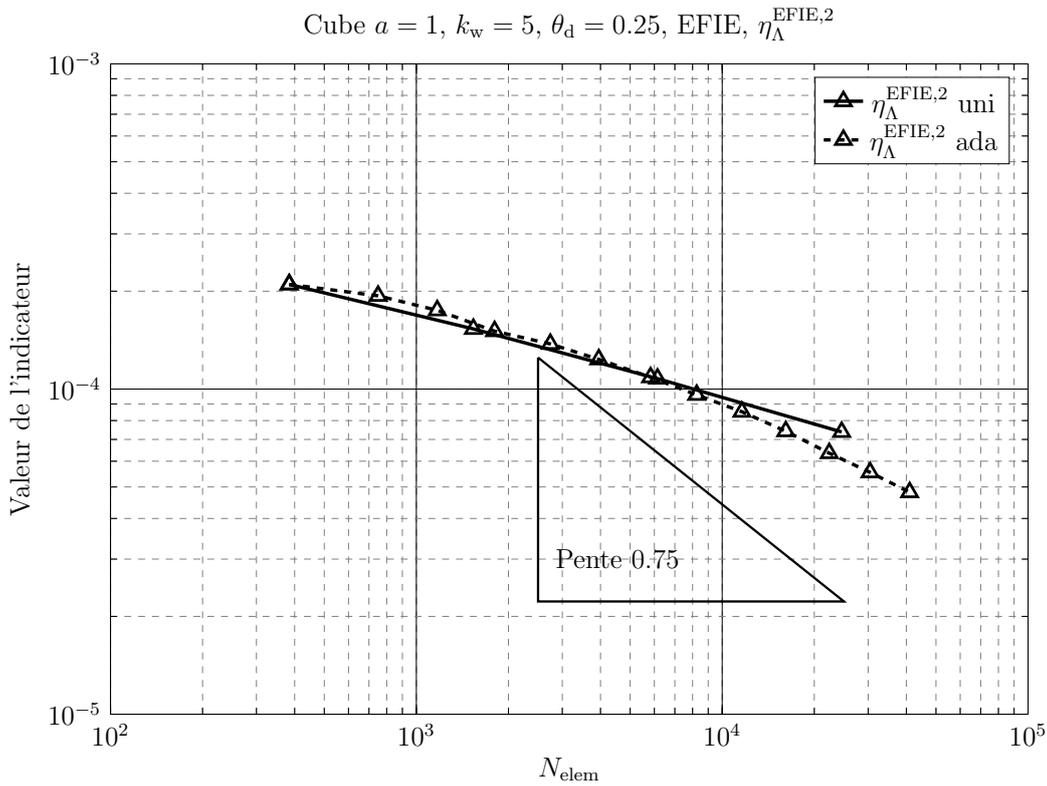


FIGURE 6.11 – Convergence de l'indicateur  $\eta_\Lambda^{\text{EFIE},2}$ , cube  $a = 1$ ,  $k_w = 5$ ,  $\theta_d = 0.25$ , EFIE.

### 6.3.3 Conclusion sur l'indicateur $\Lambda$ pour l'EFIE

Dans cette section, on a introduit deux manières différentes de construire un indicateur  $\eta_\Lambda$  pour l'EFIE, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients.

La première est basée sur une décomposition de Helmholtz du résidu. Appliquer un opérateur  $\Lambda^{\text{EFIE}}$  au résidu revient alors à appliquer deux opérateurs  $\Lambda^\pm$  aux potentiels de Helmholtz. On peut alors montrer que cet indicateur d'erreur est fiable, efficace. On montre de plus, théoriquement, qu'il est asymptotiquement exact. On ne l'a cependant pas généralisé aux surfaces ouvertes. Les résultats numériques ne sont pas complètement satisfaisant. En effet, on n'a pas été capable de l'utiliser pour guider correctement un algorithme de raffinement auto-adaptatif. On constate néanmoins qu'il se comporte correctement lorsqu'il est utilisé pour mesurer l'erreur et qu'un autre indicateur sert pour le guidage.

La seconde manière est basée sur les localisations classiques de normes du chapitre 4. Il suffit de décomposer la norme  $H_{\text{rot}}^{-1/2}$  du résidu selon ses composantes. On se rend compte qu'il suffit d'appliquer un isomorphisme régularisant d'ordre  $-1/2$  pour l'exprimer en norme  $H_{\text{rot}}$  classique. Cependant, on n'a pas *a priori* de propriété d'exactitude asymptotique pour l'erreur mais on est asymptotiquement exact par rapport à la norme du résidu. Par contre, il se généralise aux surfaces ouvertes même si cela n'a pas été vérifié numériquement.

On a vérifié pour chacune des deux formes qu'ils permettent le guidage d'un algorithme auto-adaptatif. Les résultats ne sont pas aussi positifs que pour les deux autres indicateurs introduits en 6.1 et 6.2 mais restent très prometteurs. Il faut vraisemblablement travailler sur la qualité de l'approximation numérique, soit des potentiels, soit des projections.

Quoiqu'il en soit, les deux indicateurs introduits ici sont les premiers indicateurs fiables et efficaces (sans termes d'oscillation) pour l'EFIE.

## 6.4 Indicateur basé sur le calcul des charges

On a présenté précédemment deux indicateurs *a posteriori* pour l'EFIE en 6.2 et 6.3 qui sont basés sur une localisation de la norme du résidu. Ils nécessitent tous les deux le calcul du résidu, mais le premier n'en demande que la norme  $H_{\text{rot}}$  pondérée et est fiable, alors que  $\eta_{\Lambda}^{\text{EFIE}}$  est un peu plus coûteux mais est, en plus, efficace.

Dans cette partie, on propose un indicateur *incomplet* et "construit avec les mains". **On ne propose pas de justification rigoureuse de sa construction**, ni de ses propriétés.

Il est basé sur un constat fait lors du calcul explicite de l'indicateur  $\eta_{\mathbf{R}_h}$  introduit en 6.2 dont on extrait un terme permettant de contrôler aisément et à faible coût l'erreur sur la charge  $\rho = \frac{\text{div}_{\Gamma} \mathbf{J}}{ik_w}$ . On pose donc

$$e_{\rho} = \frac{\text{div}_{\Gamma} \mathbf{J} - \text{div}_{\Gamma} \mathbf{J}_h}{ik_w}$$

cette erreur.

Dans un premier temps, on construit un indicateur "à la main" permettant d'estimer  $e_{\rho}$  et on lui donne un sens en norme  $L^2$  pondérée.

Dans un second temps, on donne un exemple illustratif de convergence.

### 6.4.1 Construction d'un indicateur mesurant l'erreur sur les charges

On construit maintenant l'indicateur basé sur les charges. Pour cela, on utilise la localisation de Nchetto & Stamm présentée en 6.2. On s'intéresse plus particulièrement au calcul de  $\|\mathbf{R}_h\|_{0,\tau}^2$  avec  $\tau$  un élément du maillage  $\mathcal{T}_h$ .

**Remarque 6.4.1.** *Dans tout le développement suivant, on suppose que  $\mathbf{J}_h \in RT_0(\mathcal{T}_h)$ .*

On peut décomposer  $\mathbf{R}_h$  en

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{f} - \mathbf{T}_h^{\text{reg}} - \mathbf{T}_h^{\text{sing}}.$$

On peut alors poser

$$\mathbf{R}_h^{\text{reg}} = \mathbf{f} - \mathbf{T}_h^{\text{reg}}$$

une partie régulière du résidu. On a par ailleurs une partie singulière

$$\mathbf{T}_h^{\text{sing}} = \sum_{\tau' \in \omega_{\tau}} \gamma_{\tau} \left( \frac{1}{ik_w} \nabla_{\Gamma} \int_{\tau'} \frac{\rho_h d\gamma_y}{4\pi|x-y|} \right).$$

On rappelle que l'opérateur  $\gamma_{\tau}$  s'exprime comme  $\gamma_{\tau} \mathbf{u} = \mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n})$ . En ne s'intéressant qu'à la partie en  $\rho_h$ , il vient

$$\gamma_{\tau} \left( \frac{1}{ik_w} \nabla_{\Gamma} \int_{\tau'} \frac{d\gamma_y}{4\pi|x-y|} \right) \rho_{\tau'} = \frac{\Omega_{\tau'}(x)}{4\pi} \gamma_{\tau'} \mathbf{n}_{\tau'} + \sum_{a' \in \partial\tau'} \gamma_{\tau'} \nu_{a'} \int_{a'} \frac{d\gamma_y}{4\pi|x-y|} \rho_{\tau'}$$

où  $\nu_{a'}$  est la normale sortante à  $\tau'$  dans le plan de  $\tau'$  le long de l'arête  $a'$ . La partie avec l'angle solide  $\Omega_{\tau'}$  correspond à nouveau à un terme "régulier" et est regroupée avec  $\mathbf{R}_h^{\text{reg}}$ .

Finalement, on a  $\forall x \in \tau$ ,

$$\mathbf{T}_h^{\text{sing}}(x) = \sum_{a' \in \partial\tau} \llbracket \rho_h \rrbracket_{a'} \log\left(\frac{\delta_{a'}(x)}{l_{a'}}\right) \pi_{\tau} \nu_{a'} + \sum_{S \in \partial\tau} \delta \mathbf{r}_S \log\left(\frac{|x-x_S|}{l_S}\right) \quad (6.21)$$

où on a posé

- $[[\rho_h]]_a$  le saut de charge discrète  $\rho_h$  au passage de l'arête  $a$ ,
- $\delta_a(x)$  la distance de  $x \in \tau$  à l'arête  $a$ ,
- $l_a$  la longueur de l'arête  $a$  qui sert pour adimensionaliser et éviter au terme dans le log de devenir trop petit,
- $S$  les sommets de  $\tau$  et  $x_S$  leurs coordonnées,
- $\delta \mathbf{r}_S$  une grandeur représentant la somme des sauts de charge au sommet  $S$ ,
- et finalement  $l_s$  une grandeur d'adimensionalisation.

En examinant le second terme dans (6.21), la singularité est a priori moins forte que pour le premier terme, et est au pire du même ordre. On va maintenant chercher le comportement en fonction de  $|\tau|$  de  $\|\mathbf{T}_h^{\text{sing}}\|_{0,\tau}^2$ . Il suffit donc de regarder comment se comporte

$$I_\tau = \int_\tau \log^2\left(\frac{\delta_a(x)}{l_a}\right) d\gamma_x.$$

On insiste bien sur le fait qu'on recherche un comportement et non une forme exacte. On a bien à l'esprit que des constantes multiplicatives apparaissent et qu'elles peuvent éventuellement devenir très grandes.

On pose  $h_a$  la hauteur du triangle par rapport à  $a$  (distance entre  $a$  et le sommet opposé). On a une intégrale  $2D$  à calculer. On se place dans le plan du triangle  $\tau$  et on introduit un repère orthonormal direct donc l'axe  $\mathbf{e}_x$  est porté par  $a'$  et l'axe  $\mathbf{e}_z$  est la normale à  $\tau$ . On pose  $\mathbf{x}_a$  le projeté orthogonal du sommet opposé sur  $a'$ . Par construction, on a  $\mathbf{x}_a = (x_a, 0)$ . On décompose alors  $I_\tau$  en

$$\begin{aligned} I_\tau &= \int_0^{x_a} \int_0^{\frac{h_a}{x_a}x} \log^2\left(\frac{|y|}{l_a}\right) dy dx + \int_{x_a}^{l_a} \int_0^{h_a - \frac{h_a}{l_a - x_a}(x - x_a)} \log^2\left(\frac{|y|}{l_a}\right) dy dx, \\ &= |\tau| \left( \frac{5}{4} + \left( \log\left(\frac{h_a}{l_a}\right) - \frac{3}{2} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Autrement dit, en supposant que l'algorithme de raffinement préserve le caractère régulier de la triangulation (ce qui est le cas du red-green),  $\frac{h_a}{l_a} \approx C$ . Finalement,

$$\boxed{\|\mathbf{T}_h^{\text{sing}}\|_{0,\tau}^2 \sim |\tau|}.$$

En utilisant la localisation de Nochetto & Stamm, on est en mesure de proposer un indicateur d'erreur *a posteriori* sur les charges.

**Proposition 6.4.1.** *On définit l'indicateur a posteriori local sur les charges*

$$\boxed{\eta_{\rho,\tau}^2 = |\tau|^{3/2} \sum_{a \in \partial\tau} |[[\rho_h]]_a|^2}. \quad (6.22)$$

On précise bien qu'il ne s'agit pas d'un terme dominant puisque rien ne garantit que la partie  $\mathbf{T}_h^{\text{reg}}$  laissée de côté ne converge pas au même taux. Néanmoins,  $\eta_\rho$  permet bien de définir un indicateur sur les charges.

On fait maintenant le lien entre la forme de la **proposition 6.4.1** et une norme de  $[[e_\rho]]$ . On suppose dans un premier temps que  $\mathbf{J}$  est suffisamment régulier pour que  $[[\rho]]$  soit nul presque

partout sur les arêtes. On fait ensuite le constat

$$\begin{aligned}\eta_{\rho,\tau}^2 &= \sum_{a \in \partial\tau} \frac{|\tau|^{3/2}}{l_a} \int_a |[\![\rho_h]\!]|^2 da, \\ &= \sum_{a \in \partial\tau} \frac{|\tau|^{3/2}}{l_a} \int_a |[\![e_\rho]\!]|^2 da, \\ \boxed{\eta_{\rho,\tau}^2} &\sim |\tau| \|\![e_\rho]\!\|_{0,\partial\tau}^2.\end{aligned}$$

L'indicateur  $\eta_\rho$  est donc équivalent à une norme  $L^2$  pondérée des sauts d'erreurs sur la charge sur les arêtes.

Cet indicateur présente quelques désavantages :

- on n'a *aucune* certitude quant à la fiabilité par rapport à l'erreur globale  $\mathbf{e}_h$ ,
- il ne mesure pas toute l'erreur  $\mathbf{e}_h^J$  mais seulement l'erreur sur les charges  $e_h^\rho$ .

On préfère plutôt insister sur son avantage principal : en comparaison avec l'indicateur de Nchetto & Stamm (en partie 6.2.1) ou les indicateurs basés sur une localisation par un opérateur  $\Lambda$  (en partie 6.3), l'indicateur  $\eta_\rho$  introduit à la **proposition 6.4.1** est **particulièrement simple et rapide** à calculer.

En effet,

- il faut trouver les triangles voisins, ce qui peut se faire en un temps linéaire du nombre d'éléments du maillage  $\mathcal{T}_h$ ,
- il faut calculer la charge sur chaque triangle. C'est en fait une donnée du code puisqu'il s'agit uniquement de calculer  $\text{div}\mathbf{J}_h$  qui est constante sur chaque  $\tau \in \mathcal{T}_h$  quand l'espace d'approximation est  $V_h = RT_0(\mathcal{T}_h)$ .

*A contrario*, les indicateurs basés sur le résidu nécessitent au minimum un produit matrice–vecteur plein ce qui, en l'absence de méthode d'accélération comme une FMM, se fait en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^2)$  opérations<sup>14</sup> !

## 6.4.2 Exemple numérique pour l'indicateur sur les charges

On propose ici un exemple d'application pour un guidage par l'indicateur sur les charges.

On se contente d'une simulation effectuée sur la plaque trouée déjà introduite en 6.2. La source est un dipôle de nombre d'onde  $k_w = 5$  ou  $k_w = 20$  placé au centre du trou. On rappelle que la taille de la plus grande arête pour le maillage est  $l_{\max} = 0.41$ .

Les résultats de convergence pour l'indicateur  $\eta_\rho$  sont donnés sur la FIGURE 6.12. Le paramètre de raffinement est choisi arbitrairement à  $\theta_d = 0.25$ .

On s'intéresse premièrement au cas  $k_w = 5$ . La discrétisation initiale est alors en  $\frac{\lambda}{3}$  ce qui est trop faible. En raffinement uniforme, la première itération fait augmenter l'erreur. À l'itération suivante, le taux de convergence est  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.58})$ . Ensuite, le taux de convergence décroît à chaque itération pour atteindre la valeur  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.47})$  à la dernière. Il est probable qu'en augmentant encore le nombre de degrés de liberté, le taux continue de chuter.

L'utilisation d'un algorithme de raffinement auto-adaptatif a deux avantages. Premièrement, le taux de convergence se stabilise asymptotiquement en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.61})$ <sup>15</sup> ce qui est plus élevé que le taux de convergence uniforme. Deuxièmement, la valeur de l'indicateur est beaucoup plus faible en utilisant du raffinement auto-adaptatif. En effet, si on regarde le nombre d'éléments

14. Et au mieux en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}} \log(N_{\text{elem}}))$  opérations...

15. On ne peut probablement pas espérer récupérer le taux maximum en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.75})$ . Il faudrait pour cela effectuer des raffinements anisotropes.

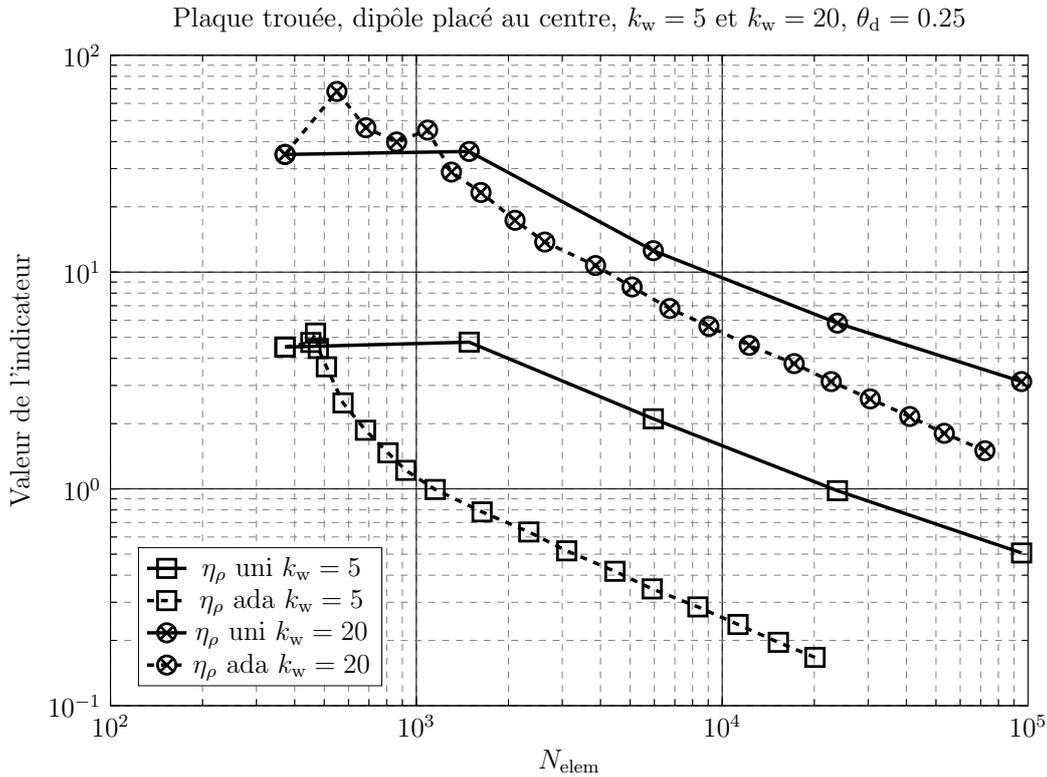


FIGURE 6.12 – Convergence de  $\eta_\rho$  sur la plaque trouée pour  $k_w = 5$  et  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.25$ .

nécessaires pour obtenir  $\eta_\rho = 1$ , il en faut  $\approx 23800$  en raffinement uniforme contre  $\approx 1152$ , soit **plus de 10 fois moins** !

On constate les mêmes phénomènes pour  $k_w = 20$  ce qui correspond à une discrétisation en  $\frac{\lambda}{0.75}$ . A la première itération en raffinement uniforme, l'erreur augmente avant de diminuer. Le taux de convergence uniforme pour la dernière itération est  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.45})$ . En utilisant du raffinement auto-adaptatif, la convergence est initialement chaotique alors que l'algorithme maille les zones "critiques", puis le taux de convergence se stabilise asymptotiquement en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-0.64})$ .

On présente sur les FIGURES 6.13 ET 6.14 un détail du raffinement sur les arêtes du trou de la plaque. On constate que l'indicateur concentre le raffinement dans le trou et plus particulièrement ses arêtes. C'est un phénomène logique puisqu'il s'agit de l'endroit le plus exposé au signal. Dans les zones plus occultées comme les faces du dessous et du dessus de la plaque, en s'éloignant du trou, il est moins nécessaire de raffiner et on y trouve des mailles plus grosses.

### 6.4.3 Conclusion sur l'indicateur $\eta_\rho$

Dans cette section, on a introduit un indicateur d'erreur *a posteriori* pour l'EFIE basé sur le calcul des sauts de charges entre un triangle  $\tau$  et ses voisins pondéré par l'aire de  $\tau$ . Cet indicateur ne mesure pas l'erreur sur les courants dans sa globalité  $\mathbf{J}$  mais donne une indication sur la partie correspondant aux charges  $\rho$ .

Sa construction est basée sur des estimations de comportement en fonction de l'aire de  $\tau$  des différents termes composant le calcul de l'indicateur résidu introduit en 6.2. On a notamment négligé de nombreux termes qui s'avèrent être compacts. De fait, la méthode de construction n'est pas absolument rigoureuse. Cependant, on a pu vérifier numériquement qu'il

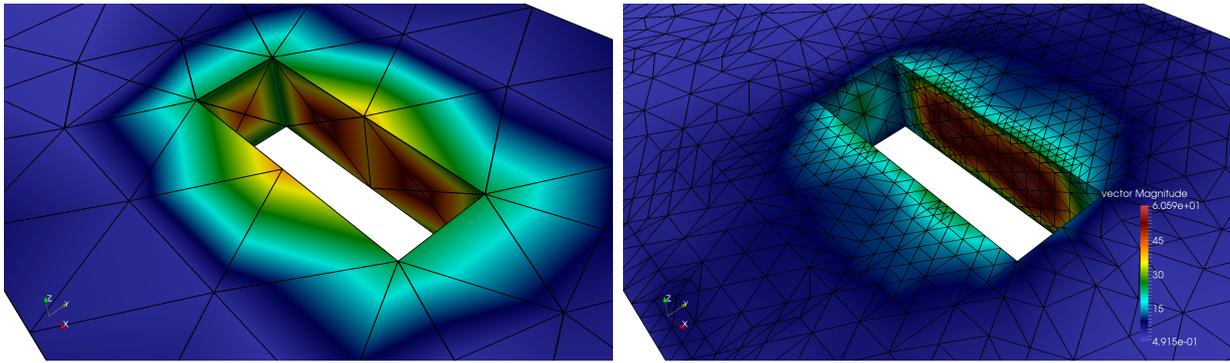


FIGURE 6.13 – Détails du raffinement engendré sur la plaque troué par l'indicateur  $\eta_\rho$  après 10 itérations pour  $\theta_d = 0.25$  et  $k_w = 20$ .

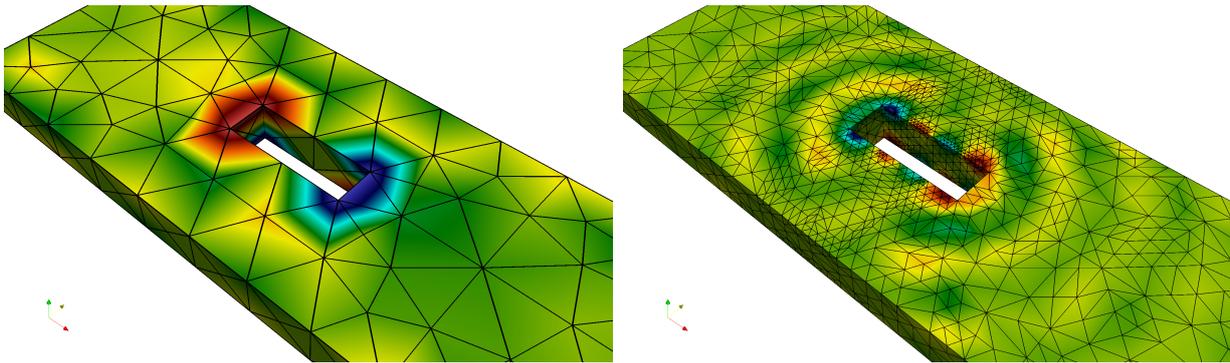


FIGURE 6.14 – Détails du raffinement engendré sur la plaque troué par l'indicateur  $\eta_\rho$  après 10 itérations pour  $\theta_d = 0.25$  et  $k_w = 20$ .

permet d'améliorer la vitesse de convergence lorsqu'il est utilisé dans une boucle de raffinement auto-adaptatif.

On insiste enfin sur le fait que cet indicateur est probablement le plus simple qui puisse être implémenté puisqu'il ne nécessite ni calcul sur maillage raffiné (contrairement à celui introduit en 6.1) ni assemblage supplémentaire (contrairement à celui introduit en 6.2) pour le calcul du résidu. De plus la complexité de son calcul est linéaire!

En dépit du fait qu'il ne mesure pas toute l'erreur, il peut être un très bon candidat pour le guidage d'un algorithme de raffinement auto-adaptatif, couplé éventuellement à un indicateur plus "rigoureux" qu'on estimerait sur un nombre moins fréquent d'itérations<sup>16</sup>.

## 6.5 Conclusion sur les indicateurs d'erreur *a posteriori* pour l'EFIE

Dans ce chapitre, on a proposé des indicateurs d'erreur *a posteriori* pour l'EFIE. On s'est inspiré, pour leur construction, de ceux qu'on a pu rencontrer ou développer pour l'acoustique aux chapitres 3 et 4.

On a donc proposé un indicateur basé sur une reconstruction d'espace pour lequel on a montré qu'il guide efficacement un algorithme de raffinement auto-adaptatif. Son avantage principal est la facilité d'implémentation, mais il nécessite d'effectuer une résolution sur un maillage raffiné.

16. Une vérification numérique consiste à guider l'algorithme par  $\eta_\rho$  et observer la convergence des autres indicateurs. On renvoie à la FIGURE 6.9 pour un exemple.

On a ensuite présenté un indicateur déjà existant basé sur une localisation de la norme du résidu. On a prouvé qu'il permet de guider quasi-optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif. Cela a été confirmé par des applications numériques. Il nécessite le calcul du résidu pour lequel on peut mettre en place une méthode rapide (du type FMM). Une fois le résidu calculé, le calcul de l'indicateur est direct. Ça en fait donc un indicateur de choix pour le guidage.

Dans un troisième temps, on a étendu le principe de l'indicateur  $\eta_\Lambda$  introduit au chapitre 4 à l'EFIE. On a proposé deux manières d'aborder le problème. La première manière consiste à utiliser une décomposition de Helmholtz du résidu. On applique ensuite deux opérateurs  $\Lambda^+$  et  $\Lambda^-$  à chacun des potentiels puis on calcule le champ vectoriel associé à ces nouveaux potentiels. On a montré qu'en choisissant bien  $\Lambda^\pm$ , l'indicateur d'erreur associé est asymptotiquement exact. On n'a pas été capable d'utiliser l'indicateur pour le guidage d'un algorithme auto-adaptatif, ni de vérifier son exactitude asymptotique. Néanmoins, il se comporte correctement lorsqu'il est utilisé uniquement pour la "mesure" de l'erreur. On suppose donc qu'il s'agit d'un problème numérique plus que théorique. La seconde manière consiste à localiser brutalement la norme  $\|\cdot\|_{\text{rot}}$  du résidu avec l'opérateur  $\Lambda_{\mathcal{N}_0}$ . On obtient alors un indicateur d'erreur fiable, efficace. On n'a cependant pas de caractère "exact" pour l'erreur, mais on l'a pour la norme du résidu. On a montré que cet indicateur permet de guider un algorithme de raffinement auto-adaptatif, mais on pense que la précision de l'approximation numérique peut encore être améliorée. Il est par ailleurs simple à implémenter. Ces deux indicateurs correspondent aux premiers indicateurs fiables **et** efficaces pour l'EFIE.

Enfin, on a introduit un indicateur dérivé de l'indicateur basé sur une localisation du résidu. Il permet de mesurer une erreur sur les charges uniquement et est donc, en ce sens, "incomplet". De plus, il n'est pas construit de manière rigoureuse. Néanmoins, on montre qu'il permet de guider optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif. Cet indicateur est *très* simple d'implémentation et *très rapide* à calculer (complexité linéaire!). En supposant que le premier indicateur  $\eta_\Lambda^{\text{EFIE},1}$  restitue correctement l'erreur, l'indicateur sur les charges semble construire un espace optimal pour la convergence en erreur. C'est potentiellement un candidat idéal pour le guidage le guidage d'un algorithme auto-adaptatif tout en mesurant l'erreur avec un autre indicateur (par exemple  $\eta_\Lambda$ ).

Dans le chapitre suivant, on change de thématique pour s'intéresser à une erreur non plus sur la solution de l'équation intégrale, mais à une erreur sur une cible calculée à partir de cette solution : ce sont les problèmes *goal-oriented*.

# Chapitre 7

## Construction d'un indicateur d'erreur fiable et local pour des problèmes de type *goal-oriented*

Au contraire des problèmes résolus précédemment où on s'intéressait à une erreur sur les courants, on s'intéresse désormais au cas où l'erreur est mesurée sur une grandeur cible calculée à partir des courants, par exemple le champ lointain. La plupart des indicateurs d'erreur *goal-oriented* sont basés sur la résolution des problèmes primal et dual sur lesquels on effectue une mesure "classique" de l'erreur au sens utilisé jusqu'à présent. Il faut ensuite combiner les deux indications pour définir l'indicateur *goal-oriented*. Ce type d'indication pose toujours le problème qu'il est impossible de contrôler le lien entre la valeur de l'indicateur et l'erreur sur la cible. Le but de ce chapitre est donc de construire un indicateur d'erreur qu'on pourra qualifier de "spécifique *goal-oriented*" au sens où il n'est pas basé sur un indicateur d'erreur "classique". Pour cela, on introduira dans un premier temps la problématique de l'indication d'erreur *goal-oriented* en mettant en évidence le rôle du problème dual. On pourra ainsi estimer le comportement *a priori* de l'erreur sur la cible par rapport à l'erreur sur les courants. On construira ensuite un indicateur fiable et local ne se basant pas sur les indicateurs d'erreurs "classiques" et ne nécessitant pas le calcul du problème dual. On validera cet indicateur sur deux cas académiques en acoustique 2D pour une condition limite de type Dirichlet.

### 7.1 Introduction aux problèmes de type *goal-oriented*

Jusqu'à maintenant, on s'est préoccupé de la solution des équations intégrales, autrement dit du problème *direct*. On s'est posé la question de savoir si l'approximation de la solution était suffisamment proche de la solution continue. Pour les équations qu'on a considérées, la solution représentait un saut de potentiel acoustique ou bien un saut de dérivée normale de potentiel acoustique au travers d'une surface. C'était une inconnue "physique" et on parlait alors d'équation en champ. Pour certaines formulations (par exemple Brakhage & Werner, équation (2.27)), cette inconnue ne peut pas être directement liée à une grandeur "physique". On parle alors d'équation en sources. Un exemple typique est la formulation de Brakhage & Werner (2.27).

En pratique, la solution directe des équations intégrales ne présente pas d'intérêt en elle-même si ce n'est qu'elle permet de reconstruire des **observables** (grandeurs d'intérêts) telles que le champ de potentiel acoustique en un point quelconque de l'espace, le champ lointain ou encore une énergie. Ces observables sont calculées par application d'un opérateur qu'on va appeler  $\mathcal{Q}$  à la solution  $\varphi$  de l'équation intégrale. On ne s'intéresse ici qu'au cas où  $\mathcal{Q}$  est

**linéaire** par rapport à  $\varphi^1$  tel qu'il existe une distribution  $f_{\mathcal{Q}}$  de sorte que

$$\mathcal{Q}(\varphi) = \langle f_{\mathcal{Q}}, \varphi \rangle. \quad (7.1)$$

On peut alors se poser légitimement la question de mesurer l'erreur entre  $\mathcal{Q}(\varphi)$  et  $\mathcal{Q}(\varphi_h)$  où  $\varphi_h$  représente la solution approchée de l'équation intégrale. On pose

$$e_{\mathcal{Q}} = |\mathcal{Q}(\varphi) - \mathcal{Q}(\varphi_h)| = |\mathcal{Q}(\varphi - \varphi_h)|$$

l'erreur *goal-oriented*. Elle se mesure bien selon la norme  $|\cdot|$  car on regarde l'écart entre deux valeurs ponctuelles!

**Remarque 7.1.1.** *Le développement en partie 7.1.1 est incompatible avec un  $\mathcal{Q}$  à valeurs vectorielles utilisé brutalement. Néanmoins, si on souhaite, par exemple, récupérer un  $\nabla\varphi$  en un point de l'espace, on peut récupérer  $\nabla\varphi \cdot \mathbf{e}_x$ ,  $\nabla\varphi \cdot \mathbf{e}_y$ ,  $\nabla\varphi \cdot \mathbf{e}_z$  où  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  représente une base de l'espace. Cela définit trois cibles  $\mathcal{Q}_x$ ,  $\mathcal{Q}_y$  et  $\mathcal{Q}_z$  puis on retombe dans le cadre de la partie 7.1.1.*

Dans un premier temps, on montre l'influence du problème dual sur l'estimation d'erreur *a priori* en goal-oriented. Pour cela, on montre que l'erreur goal-oriented est majorée par le produit des normes des erreurs du problème direct et du problème dual.

On introduit les manières les plus courantes trouvées dans la littérature pour guider un algorithme de raffinement auto-adaptatif goal-oriented.

On donne alors deux exemples pour  $\mathcal{Q}$  ainsi que les  $f_{\mathcal{Q}}$  associées.

### 7.1.1 Estimation d'erreur *a priori* pour l'erreur *goal-oriented*

On considère un opérateur continu  $\mathcal{A}$ , et la forme variationnelle associée  $a(\cdot, \cdot)$ . On résout  $\mathcal{A}\varphi = f$ . On pose  $V$  l'espace d'approximation et  $V_h$  l'espace discret de résolution tel que  $V_h \subset V$ .

On introduit les problèmes **primaux** *continus* et *discrets*

$$\begin{aligned} a(\varphi, \psi) &= f(\psi) & \forall \psi \in V, \\ a(\varphi_h, \psi_h) &= f(\psi_h) & \forall \psi_h \in V_h, \end{aligned} \quad (7.2)$$

ainsi que les problèmes **duaux** *continus* et *discrets*

$$\begin{aligned} a(\psi, \rho) &= \mathcal{Q}(\psi) & \forall \psi \in V, \\ a(\psi_h, \rho_h) &= \mathcal{Q}(\psi_h) & \forall \psi_h \in V_h. \end{aligned} \quad (7.3)$$

$\rho$  et  $\rho_h$  sont les solutions des problèmes duaux continus et discrets.

**Remarque 7.1.2.** *Le problème dual n'a pas besoin d'avoir une signification physique car il ne nous sert qu'à faire entrer en jeu l'opérateur  $\mathcal{Q}$ . Il s'agit purement d'un artifice de calcul pour faire apparaître l'erreur goal-oriented. On peut le voir comme une manière de récupérer de l'information sur la nature de l'observable.*

On fait maintenant le lien entre l'erreur sur les problèmes primaux, duaux et l'erreur goal-oriented. C'est un calcul classique. On pose

$$\begin{aligned} e_p &= \|\varphi - \varphi_h\|, \\ e_d &= \|\rho - \rho_h\|. \end{aligned}$$

---

1. Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\varphi_1, \varphi_2 \in V$  où  $V$  est l'espace d'approximation, on a  $\mathcal{Q}(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = \mathcal{Q}(\varphi_1) + \lambda\mathcal{Q}(\varphi_2)$ . Un exemple de  $\mathcal{Q}$  **non-linéaire** serait une mesure d'énergie en un point.

les erreurs sur la solution du problème primal, respectivement dual. On a d'une part

$$a(\varphi - \varphi_h, \psi_h) = 0.$$

D'autre part, pour tout  $\psi, \psi_h \in V$ , on a

$$\mathcal{Q}(\psi) - \mathcal{Q}(\psi_h) = a(\psi - \psi_h, \rho).$$

En particulier,

$$\mathcal{Q}(\varphi) - \mathcal{Q}(\varphi_h) = a(\varphi - \varphi_h, \rho).$$

Par ailleurs,  $\psi_h, \rho_h \in V_h$  et

$$\mathcal{Q}(\varphi) - \mathcal{Q}(\varphi_h) = a(\varphi - \varphi_h, \rho - \rho_h).$$

Avec la continuité de  $\mathcal{A}$ , il vient

$$\boxed{|\mathcal{Q}(\varphi) - \mathcal{Q}(\varphi_h)| \leq \|\mathcal{A}\| \|\varphi - \varphi_h\| \|\rho - \rho_h\|}. \quad (7.4)$$

On a obtenu une *borne supérieure* pour l'erreur goal-oriented. Elle fait explicitement intervenir les mesures d'erreur pour le problème primal et le problème dual. Elle permet encore de donner *a priori* le pire taux de convergence possible pour  $e_{\mathcal{Q}}$  en fonction des taux de convergence de  $e_p$  et  $e_d$ . On peut remarquer que si  $e_p$  et  $e_d$  convergent au même taux uniforme, alors l'erreur goal-oriented converge deux fois plus vite que l'erreur sur les courants!

Supposons par exemple qu'on considère l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$  résolue sur un cercle avec  $V_h = \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)$ , le taux de convergence uniforme pour  $e_{p,d}$  est en  $\mathcal{O}(h^{3/2})$ . On est alors en mesure d'affirmer que le taux de convergence uniforme pour  $e_{\mathcal{Q}}$  est au moins en  $\mathcal{O}(h^3)$ .

Une conséquence immédiate (et positive) est la suivante : **le maillage de résolution  $\mathcal{T}_h$  n'a pas besoin d'être très fin pour garantir une bonne approximation de l'observable  $\mathcal{Q}$ !**

On se demande maintenant si il existe des indicateurs *a posteriori* pour les problèmes de type goal-oriented.

### 7.1.2 Éléments de littérature sur le goal-oriented

On présente ici succinctement et de manière non-exhaustive quelques méthodes pour guider un algorithme de raffinement auto-adaptatif goal-oriented. Elles sont principalement basées sur l'utilisation conjointe d'une indication d'erreur *a posteriori* sur le problème primal qu'on appelle  $\eta_p$  et d'une indication d'erreur *a posteriori* sur le problème dual  $\eta_d$ . Ces indicateurs peuvent être n'importe lesquels parmi ceux introduits précédemment ou de la littérature.

Une première manière consiste (voir par exemple [62]) à sélectionner l'un des deux indicateurs  $\eta_p$  ou bien  $\eta_d$  et à l'utiliser pour le guidage de l'algorithme de raffinement. Son avantage est qu'elle ne nécessite que le calcul du problème primal<sup>2</sup> mais ne prend pas en compte l'influence du problème dual et de l'observable sur la convergence.

2. Lorsque l'opérateur  $\mathcal{A}$  est auto-adjoint, le calcul des deux problèmes ne coûte pas, en soit, beaucoup plus cher puisque seul le second membre change entre le problème primal et le problème dual.

Une seconde stratégie consiste à pondérer élément par élément un indicateur par l'autre. Par exemple, Walsh [65] propose, dans le cas où  $\eta_p$  et  $\eta_d$  sont les indicateurs résidu pondérés, l'indicateur local sur un élément  $\tau_k \in \mathcal{T}_h$ ,  $N =$  nombre d'éléments dans  $\mathcal{T}_h$ ,

$$\eta_{\tau_k} = \max \left( \max_{i=1 \dots N} \eta_{p, \tau_i} \eta_{d, \tau_k}, \max_{j=1 \dots N} \eta_{p, \tau_k} \eta_{d, \tau_j} \right).$$

Il compare ensuite chaque  $\eta_{\tau_k}$  à  $0.6 \max_{k=1 \dots N} \eta_{\tau_k}$  pour décider si un élément doit être raffiné ou non.

On évoque une autre possibilité pour le raffinement. Il s'agit comme précédemment de calculer  $\eta_p$  et  $\eta_d$ , sauf que la pondération est cachée par la stratégie de raffinement : à l'étape  $l$  de l'algorithme itératif, on calcule les indicateurs et on génère les maillages  $\mathcal{T}_{l+1,p}$  et  $\mathcal{T}_{l+1,d}$  qui correspondent aux maillages raffinés obtenus en utilisant pour le marquage des éléments  $\eta_p$ , respectivement  $\eta_d$ . L'idée consiste alors à **choisir le maillage  $\mathcal{T}_{l+1}$  entre  $\mathcal{T}_{l+1,p}$  et  $\mathcal{T}_{l+1,d}$  tel que**

$$\text{card}(\mathcal{T}_{l+1}) = \min(\text{card}(\mathcal{T}_{l+1,p}), \text{card}(\mathcal{T}_{l+1,d})).$$

Il existe enfin une stratégie qui consiste à utiliser un indicateur d'erreur "mixte" primal-dual. Cette idée est développée dans [56]. Il s'agit de pondérer le résidu du problème primal par l'erreur du problème dual. C'est cette stratégie qu'on va mettre en œuvre dans la partie 7.2 pour construire un indicateur goal-oriented pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ .

### 7.1.3 Exemples d'intérêt pour $\mathcal{Q}$

On donne deux exemples pour l'observable  $\mathcal{Q}$  qu'on particularise dans le cas de l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ .

On rappelle que pour cette équation, l'inconnue est  $\varphi = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]$  le saut de dérivée normale du potentiel acoustique au passage de la surface  $\Gamma$ .

### 7.1.4 Le champ proche

Le calcul du champ proche consiste à calculer, en un point du domaine de propagation  $x_p \notin \Gamma$ , la valeur du potentiel acoustique  $u(x_p)$ . En équations intégrales, il faut reconstruire ce champ à partir de l'inconnue  $\varphi$ .

Pour cela, on utilise la formule de représentation du **théorème 2.1.3** avec la propriété que pour une condition limite de type Dirichlet sur le potentiel  $u$  on a  $[u] = 0$ . La valeur du potentiel acoustique généré par  $\varphi$  en un point quelconque du domaine de propagation en dehors de  $\Gamma$  est alors

$$\boxed{(\mathcal{Q}_{\text{proche}}(\varphi))(x_p) = \int_{\Gamma} G_{k_w}(x_p, y) \varphi(y) d\gamma_y}, \quad x_p \notin \Gamma. \quad (7.5)$$

Dans ce cas, on a

$$\boxed{f_{\mathcal{Q}_{\text{proche}}} = G_{k_w}}.$$

Un exemple typique d'application serait le calcul du niveau sonore en un point particulier d'une pièce.

### 7.1.5 Le champ lointain

En opposition au champ proche, on se demande comment un observateur renvoyé à l'infini dans une *direction* donnée perçoit l'onde diffractée : quelles sont les directions dans lesquelles l'onde est diffractée ? Avec quel niveau ?

Il s'agit en fait d'étudier le comportement asymptotique du champ proche lorsque  $|x_p| \rightarrow \infty$ . En 2D, on a

$$u(x) = \frac{e^{ik_w|x|}}{\sqrt{|x|}} a_{\text{cl}}\left(\frac{x}{|x|}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$$

où on appelle  $a_{\text{cl}}(\cdot)$  l'*amplitude du champ lointain* telle que

$$a_{\text{cl}}\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1+i}{4\sqrt{k_w\pi}} \int_{\Gamma} e^{-ik_w \frac{x}{|x|} \cdot y} \varphi(y) d\gamma_y. \quad (7.6)$$

En 3D,

$$u(x) = \frac{e^{ik_w|x|}}{|x|} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{-ik_w \frac{x}{|x|} \cdot y} \varphi(y) d\gamma_y.$$

L'observable est par conséquent

$$\mathcal{Q}_{\text{lointain}}(\varphi)\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1+i}{4\sqrt{k_w\pi}} \int_{\Gamma} e^{-ik_w \frac{x}{|x|} \cdot y} \varphi(y) d\gamma_y \quad (7.7)$$

et

$$f_{\mathcal{Q}_{\text{lointain}}} = \frac{1+i}{4\sqrt{k_w\pi}} e^{-ik_w \frac{x}{|x|} \cdot y}. \quad (7.8)$$

On est désormais en mesure de construire un indicateur goal-oriented pour l'équation  $\mathcal{S}_{k_w}$ .

## 7.2 Un indicateur *a posteriori goal-oriented* pour l'équation $\mathcal{S}_{k_w}$

Dans cette partie, on construit un indicateur d'erreur *a posteriori goal-oriented* pour une observable de la forme de celle de l'équation (7.1).

**Remarque 7.2.1.** *La construction ne fait pas l'objet d'une justification rigoureuse au sens où on ne justifie pas la convergence rapide des termes mis de côté.*

On part de

$$\begin{aligned} e_{\mathcal{Q}} &= |a(\varphi - \varphi_h, \rho - \rho_h)|, \\ &= |(r_h, \rho - \rho_h)|, \quad r_h = f - \mathcal{A}\varphi_h, \\ &\leq \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} |(r_h, \rho - \rho_h)_{\tau}|. \end{aligned}$$

On cherche à approcher correctement  $e_d = \rho - \rho_h$ . Pour cela, on applique encore la même méthode que précédemment ce qui permet de définir un indicateur d'erreur *a posteriori goal-oriented*.

**Théorème 7.2.1.** *L'indicateur d'erreur a posteriori goal-oriented défini par*

$$\begin{aligned}\eta_{\text{go},\tau} &= \left| \int_{\tau} r_h(y) (\Pi_{L^2} \rho_h - \rho_h)(y) d\gamma_y \right|, \\ \eta_{\text{go}} &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_H} \eta_{\text{go},\tau}\end{aligned}\tag{7.9}$$

est **fiable** et **local**. De plus, la constante de fiabilité est  $C_{\text{fiabilité}} = 1$  sous conditions de régularité sur  $\rho$ .

*Démonstration.* Voir la méthode de construction de l'indicateur.  $\square$

**Remarque 7.2.2.** *Cet indicateur nécessite l'assemblage du problème primal et du problème dual!*

Dans la partie suivante, on donne des exemples numériques pour l'indicateur  $\eta_{\text{go}}$ .

## 7.3 Exemples pour les indicateurs goal-oriented

On effectue des simulations numériques pour faire la preuve de concept de la construction de l'indicateur  $\eta_{\text{go}}$ .

Pour cela, on se restreint au cas  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{S}_{k_w}$ . On choisit  $k_w = 20$ . Les cas tests sont le **cercle de rayon**  $R = 0.9$ , le carré de côté  $a = 1$  et un triangle équilatéral de côté  $e = 2$  afin de présenter un cas non-symétrique. L'observable  $\mathcal{Q}$  est le *champ lointain* (voir 7.1.5). Le paramètre de raffinement est  $\theta_{\text{Dörfler}} = 0.5$ . Pour chaque cas, on compare l'erreur goal-oriented en raffinement uniforme avec l'erreur goal-oriented lorsqu'on utilise un algorithme de raffinement auto-adaptatif.

### 7.3.1 Cas du cercle $R = 0.9$

Le cercle de rayon  $R = 0.9$  est éclairé par une onde plane se propageant le long de l'axe  $-\mathbf{e}_x$ . On observe le champ lointain pour la direction  $\theta_{\text{far-field}} = 180^\circ$  i.e. derrière l'objet.

La valeur de référence du champ lointain pour le calcul de l'erreur exacte  $e_{\text{exacte}}$  est calculée **analytiquement**. Les résultats de convergence sont présentés sur la FIGURE 7.1. On commente tout d'abord ce qui se passe pour l'indicateur : que ce soit en raffinement uniforme ou auto-adaptatif, l'indicateur  $\eta_{\mathcal{Q}}$  converge au moins au taux maximum de convergence  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3})$ . Cela correspond à l'estimation *a priori* puisque les solutions du problème primal et dual sont régulières et convergent chacune, en raffinement uniforme au taux optimum  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3/2})$ .

Néanmoins,  $\eta_{\mathcal{Q}}$  est beaucoup trop optimiste en ce qui concerne la valeur exacte de l'erreur puisqu'on se rend compte que celle-ci ne converge qu'en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-2})$ . Ce taux correspond au taux de convergence de l'**erreur géométrique** ! L'indicateur  $\eta_{\mathcal{Q}}$  converge trop vite et l'erreur géométrique prédomine. Ainsi, et ce dès que la géométrie admet une sous-partie courbe, l'erreur  $e_{\text{exacte}}$  ne converge pas plus vite que l'erreur géométrique. Les seules issues possibles sont alors

- prendre en compte l'erreur géométrique dans le calcul de l'indicateur  $\eta_{\mathcal{Q}}$ ,
- ou bien utiliser un maillage iso-paramétrique...

### 7.3.2 Cas du carré $a = 1$

De la même manière que pour le cercle, le carré est éclairé par une onde plane se propageant le long de l'axe  $-\mathbf{e}_x$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.75^3$ . On calcule le champ lointain pour  $\theta_{\text{far-field}} = 180^\circ$ .

3. On prend un paramètre plus élevé que précédemment afin de générer moins d'itérations pour arriver à un nombre d'éléments donnés. Il s'agit purement d'un artifice pour la représentation des données afin de mieux

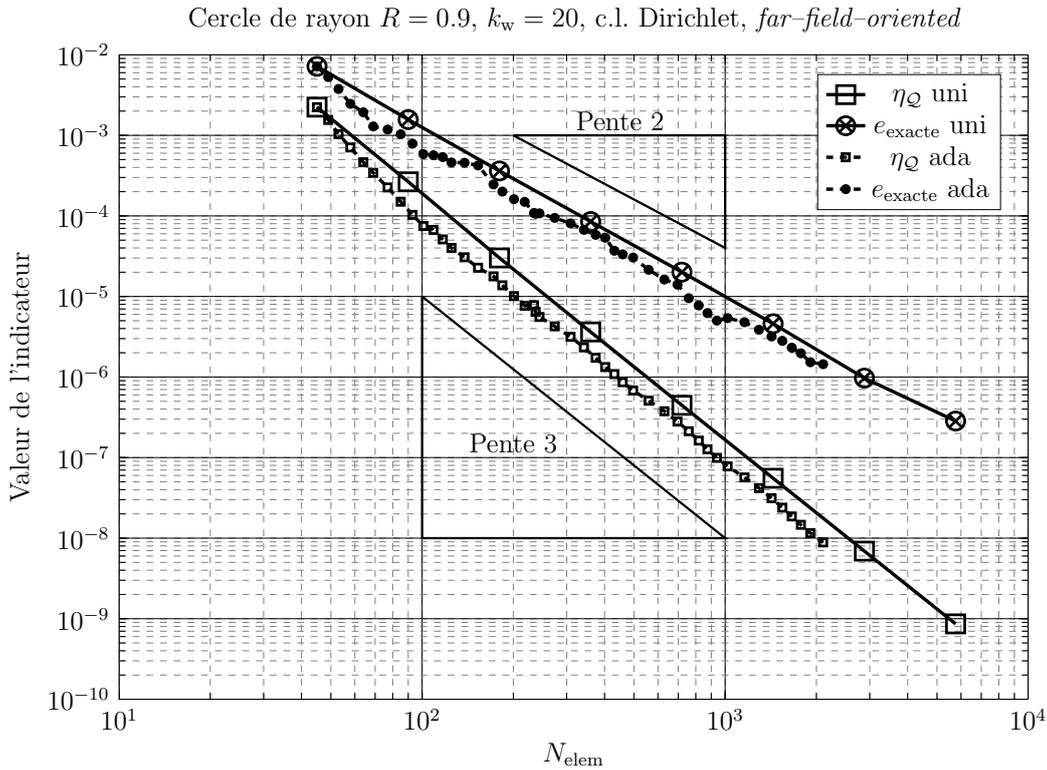


FIGURE 7.1 – Convergence *far-field-oriented* pour le cercle de rayon  $R = 0.9$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.5$ , guidage par  $\eta_Q$ .

La solution de référence est calculée à partir d'un maillage très raffiné. Les résultats de convergence sont présentés sur la FIGURE 7.2. Il apparaît immédiatement que le raffinement uniforme est sous-optimal ce qui est une conséquence logique de la sous-optimalité vis-à-vis de l'erreur sur le problème primal (et dual). Le taux de convergence est alors en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-1.37}) \approx \mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-2/3} N_{\text{elem}}^{-2/3})$  i.e. le taux minimal possible déduit de l'estimation *a priori*.

On constate que l'algorithme auto-adaptatif guidé par  $\eta_Q$  permet de retrouver le taux maximum en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3})$  ce qui implique qu'il trouve un optimum prenant en compte à la fois le problème primal et le problème dual.

**Remarque 7.3.1.** *On constate rapidement que  $\eta_{\text{exacte}}$  arrête brutalement de converger. Cela est dû à l'approximation qui est utilisée pour le calcul de la référence.*

### 7.3.3 Cas du triangle équilatéral $e = 2$

La source est la même que précédemment. On choisit encore  $\theta_d = 0.75$ . La technique pour le calcul de la référence est la même que pour le calcul de la référence pour le carré.

Les résultats de convergence sont présentés sur la FIGURE 7.3. Comme pour le carré, la convergence uniforme est sous-optimale et l'erreur exacte est mal restituée par  $\eta_Q$ . Au contraire, l'utilisation du raffinement auto-adaptatif permet de retrouver le taux maximal de convergence en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3})$ . De plus, on a une très bonne adéquation entre  $e_{\text{exacte}}$  et  $\eta_Q$ . Lorsqu'on raffine trop le maillage, on atteint les limites du calcul de la référence et la valeur de  $e_{\text{exacte}}$  augmente subitement.

---

mettre en valeur le taux en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3})$  avant que la qualité de l'approximation de la valeur de référence ne devienne insuffisante.

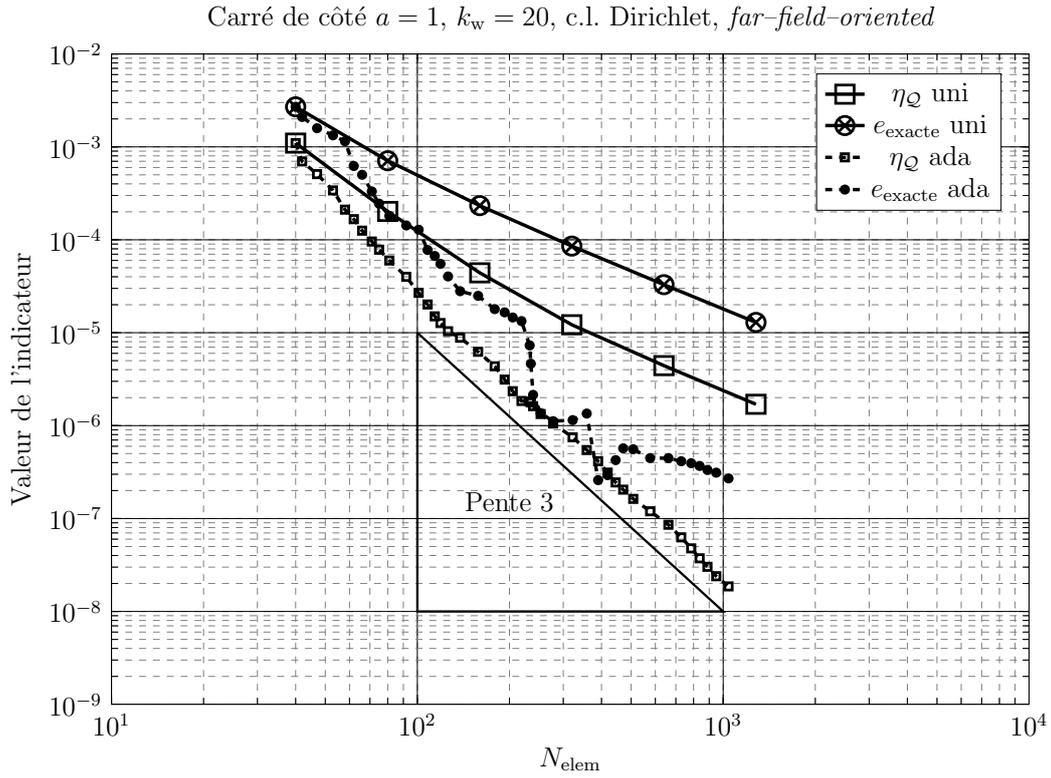


FIGURE 7.2 – Convergence *far-field-oriented* pour le carré de côté  $a = 1$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.75$ , guidage par  $\eta_Q$ ,  $\theta_{\text{far-field}} = 180^\circ$ .

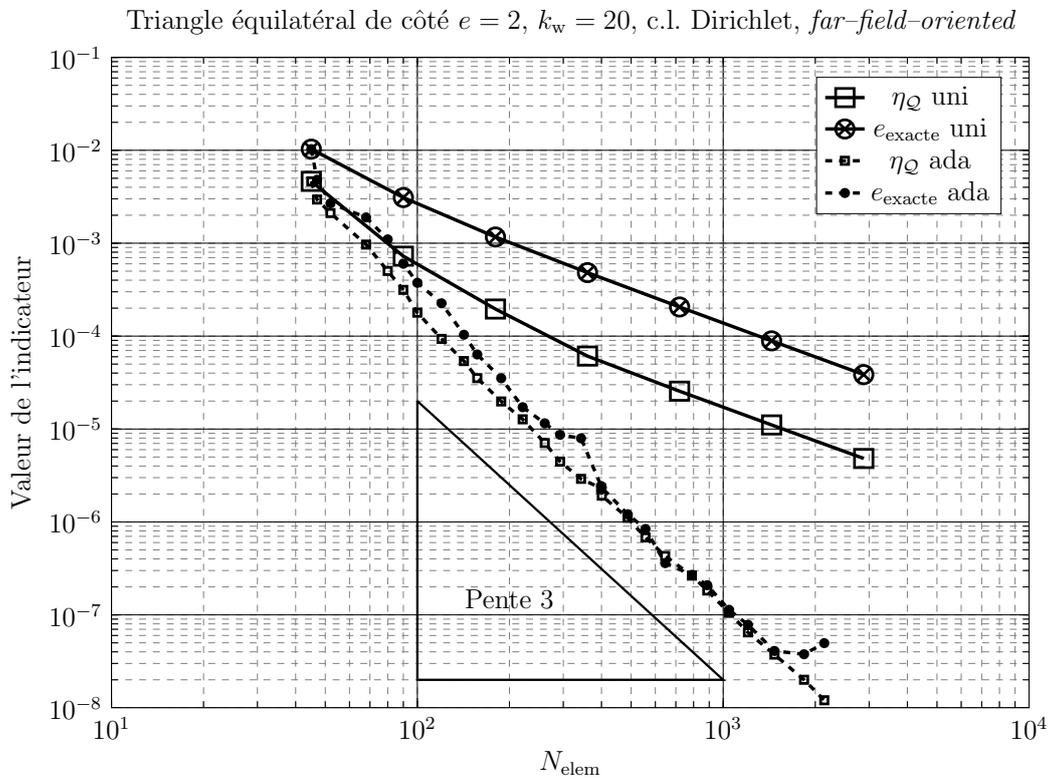


FIGURE 7.3 – Convergence *far-field-oriented* pour le triangle équilatéral de côté  $e = 2$  pour  $k_w = 20$ ,  $\theta_d = 0.75$ , guidage par  $\eta_Q$ ,  $\theta_{\text{far-field}} = 180^\circ$ .

### 7.3.4 Comparaison des maillages générés

On conclut cette sous-partie sur le goal-oriented numérique en comparant les maillages obtenus lorsque l'algorithme de raffinement est guidé par  $\eta_{r_h}$  (donc un indicateur classique sur la solution) ou bien lorsqu'il est guidé par  $\eta_Q$ . Il n'y a aucune raison *a priori* pour que les raffinements se trouvent au même endroit puisque l'indicateur goal-oriented prend en compte les propriétés de l'observable. On présente sur la FIGURE 7.4 les maillages obtenus après quelques itérations de l'algorithme itératif sur le cercle lorsque  $N_{\text{elem}} \approx 200$ . Les paramètres de simulation sont inchangés. En ce qui concerne le marquage par  $\eta_{r_h}$ , on constate que l'indicateur marque

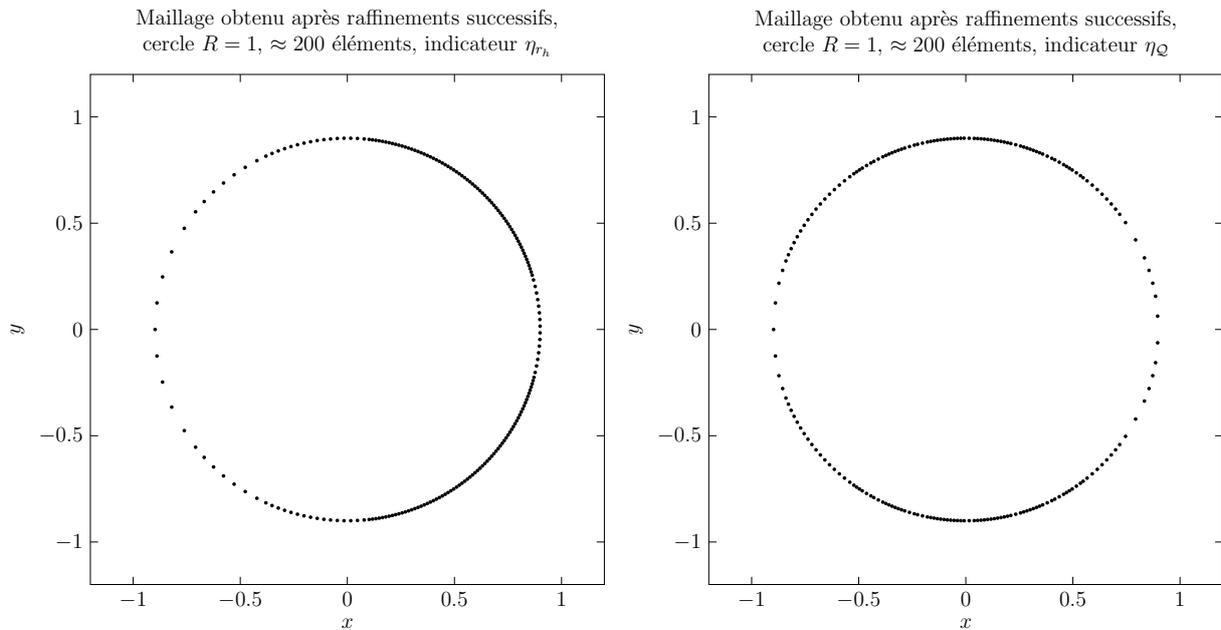


FIGURE 7.4 – Comparaison des maillages obtenus par marquage avec  $\eta_{r_h}$  et  $\eta_Q$ , cercle  $R = 1$ .

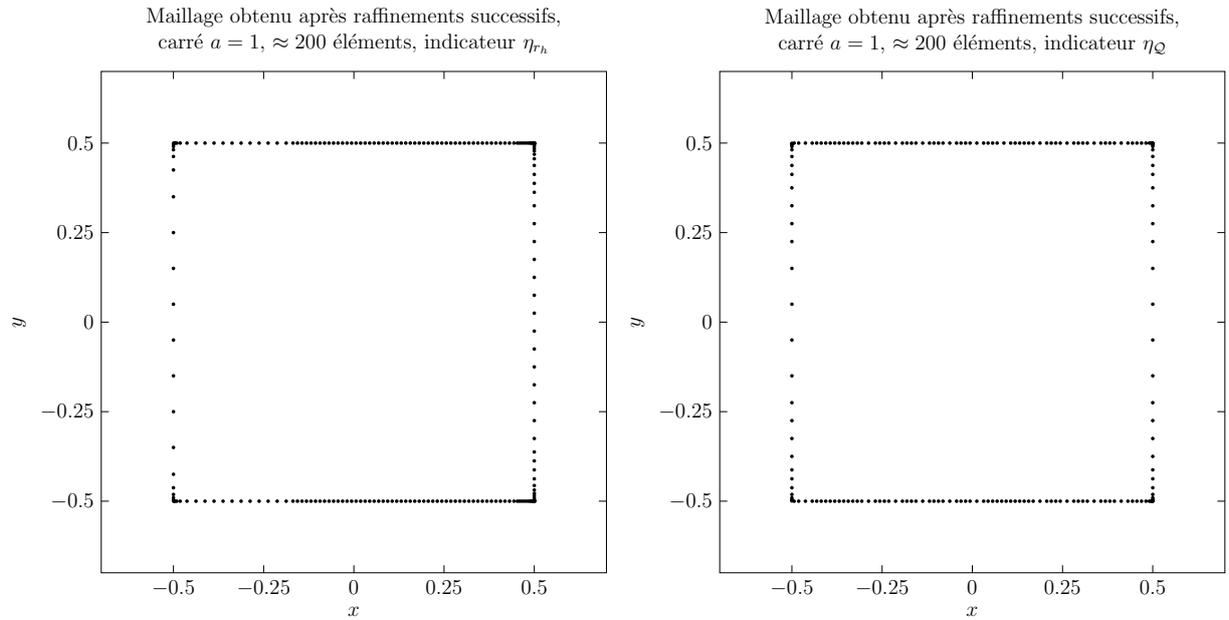
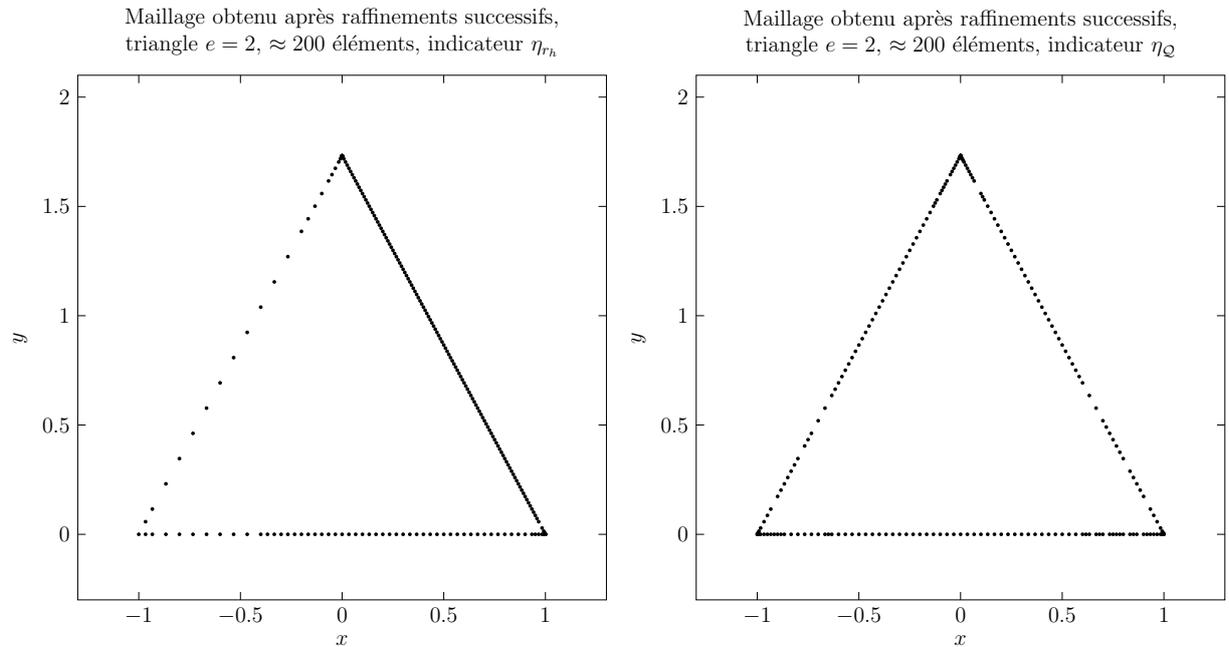
préférentiellement le côté recevant l'onde incidente. Cela correspond à des zones où la valeur de la solution de l'équation intégrale est élevée. Autrement dit, c'est une zone où il y a beaucoup de signal.

Le maillage généré par un marquage avec  $\eta_Q$  est différent : les raffinements se concentrent sur le haut et le bas de la sphère. On peut l'analyser de cette manière : l'observable est une grandeur spatiale et non plus surfacique. Le phénomène important pour l'évaluation du champ lointain est le phénomène qui a lieu à la transition avant-arrière de la sphère, là où a lieu la diffraction.

On présente sur la FIGURE 7.5 le maillage pour le carré lorsque  $N_{\text{elem}} \approx 200$ . On sait que la solution présente des singularités aux coins ce qui se traduit logiquement par un sur-raffinement à ces endroits là. Il est donc très important aux coins correspondant à la face frontale du carré.

Dès lors qu'on s'intéresse au champ lointain derrière le carré, la zone importante devient les faces en haut et en bas du carré ce qui se traduit par un raffinement important et relativement homogène avec une légère concentration aux coins.

Similairement, on présente les maillages obtenus pour le triangle pour  $N_{\text{elem}} \approx 200$  sur la FIGURE 7.6. Dans le cas d'une estimation sur les courants, c'est la face présentée à l'onde incidente, et les coins, qui sont raffinés alors que les parties se trouvant dans la zone d'ombre ne le sont que peu. Lorsqu'on est dans le cadre d'une estimation sur  $Q$ , on constate que les coins, y compris celui dans la zone d'ombre, sont raffinés mais que les faces le sont peu.


 FIGURE 7.5 – Comparaison des maillages obtenus par marquage avec  $\eta_{r_h}$  et  $\eta_Q$ , carré  $a = 1$ .

 FIGURE 7.6 – Comparaison des maillages obtenus par marquage avec  $\eta_{r_h}$  et  $\eta_Q$ , triangle  $e = 2$ .

Les indicateurs sur le problème primal et goal-oriented ont bien des comportements différents en ce sens qu'ils ne génèrent pas la même suite d'espaces d'approximation.

## 7.4 Conclusion sur l'indicateur *goal-oriented*

Dans ce chapitre, on a introduit un indicateur d'erreur *a posteriori goal-oriented*. On a montré par construction qu'il est fiable. Il est relativement simple à mettre en œuvre puisque la seule difficulté se trouve dans le calcul du résidu du problème primal. Un autre avantage est qu'il est indépendant, dans sa forme, de l'observable considérée qui n'intervient que dans le second membre du problème dual. Un désavantage certain est le coût de l'approximation de

l'erreur duale puisqu'il faut résoudre le problème dual sur un maillage raffiné. Par ailleurs, le calcul du résidu peut être accéléré en utilisant des méthodes rapides du type FMM.

On a vérifié numériquement la fiabilité sur le cercle ainsi que l'optimalité de sa convergence. Cela a permis de mettre en évidence l'importance de l'erreur géométrique dans la convergence de l'erreur exacte sur la valeur des observables. On a ensuite montré sur le carré que l'utilisation d'un indicateur goal-oriented tel qu'introduit en 7.2 permet de converger au moins au taux maximum  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3})$ .

La technique mise en œuvre dans ce chapitre se généralise facilement aux autres opérateurs intégraux. Un axe de recherche potentiel est la prise en compte de l'erreur géométrique dans l'indicateur  $\eta_{\mathcal{Q}}$ . Néanmoins, on peut supposer que, dans le cas d'une géométrie courbe, la convergence optimale de l'indicateur en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-3})$  implique la convergence de l'erreur exacte en  $\mathcal{O}(N_{\text{elem}}^{-2})$ .

Les applications d'un tel indicateur sont multiples. On peut ainsi s'en servir pour calculer précisément une fréquence de résonance au sein d'une cavité. Une méthodologie possible serait par exemple d'effectuer un balayage en fréquence  $k_w \in [k_{w_{\min}}, k_{w_{\max}}]$ . Pour chaque fréquence de l'échantillon, on résout les problèmes primal et dual. La précision du calcul est alors garantie par l'utilisation d'un algorithme de raffinement auto-adaptatif.



# Conclusion

Le développement de ce manuscrit arrive à sa fin. On en rappelle ici les grandes lignes et les principaux résultats.

Au chapitre 3, on a montré que certains indicateurs d'erreur *a posteriori* choisis dans la littérature peuvent être utilisés sous la même forme pour les problèmes de propagation acoustique. La raison principale est que la partie compacte des opérateurs intégraux relatifs à l'équation de Helmholtz se traduit par des termes d'ordre élevé qui sont négligés dans le cadre de l'indication d'erreur *a posteriori*. On a donc pu se référer aux démonstrations faites dans le cas de l'équation de Laplace. Cette partie compacte pose problème lorsqu'on cherche à prouver la convergence (quasi-)optimale des indicateurs d'erreur. Sur le cas de l'indicateur "résidu-pondéré" auquel on s'est intéressé, on n'avait plus l'orthogonalité de la solution numérique par rapport à l'espace de test pour le produit scalaire issu de la partie coercive des opérateurs intégraux. On a alors adapté la démonstration et démontré la convergence quasi-optimale de l'indicateur "résidu-pondéré" pour les opérateurs intégraux issus de l'équation de Helmholtz. Les indicateurs introduits dans ce chapitre ne sont cependant pas systématiquement efficace, et jamais "exacts" sous forme localisée.

Au chapitre 4, on a introduit un nouvel indicateur d'erreur *a posteriori* dit "indicateur- $\Lambda$ " pour l'acoustique. Cet indicateur utilise une technique de localisation de la norme du résidu basée sur un opérateur  $\Lambda$  qui peut être, dans le meilleur des cas, un isomorphisme. On a montré que cet indicateur d'erreur est, sous cette dernière condition et sur surface lipschitzienne fermée, systématiquement fiable, efficace et local. Dans le cas des surfaces fermées  $C^\infty$ , on a montré que le caractère isomorphe n'est pas requis. De plus, on a construit ces opérateurs  $\Lambda$  de telle sorte que l'indicateur d'erreur associé soit asymptotiquement exact en norme de Galerkin. Cela passe notamment par le calcul d'une approximation de l'inverse de la racine carrée de la partie coercive de l'opérateur intégral inversé. On a alors donné deux formes possibles pour  $\Lambda$  : une sous forme intégrale et une sous forme de puissance d'un opérateur différentiel classique.

Le chapitre 5 a permis de vérifier numériquement les extensions du chapitre 3 et le concept, et son développement, de l'indicateur- $\Lambda$  du chapitre 4. On a montré sur de nombreux exemples, notamment en acoustique 2D, et y compris sur des géométries ouvertes, que les indicateurs de la littérature guident optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif. On a notamment vérifié qu'il en va de même pour l'indicateur- $\Lambda$ . Il est, en particulier, robuste en fréquence et en géométrie, et asymptotiquement exact. On a donné quelques exemples en 3D pour le problème de Neumann qui se sont avérés concluants.

Au chapitre 6, on a généralisé les indicateurs d'erreur *a posteriori* de l'acoustique au problème de propagation d'une onde électromagnétique pour lequel l'équation résolue est l'EFIE. On a alors proposé un indicateur par reconstruction d'espace et on l'a validé numériquement. On a ensuite démontré la convergence quasi-optimale de l'indicateur "résidu pondéré" de Nochetto & Stamm. On l'a également validé numériquement. Après cela, on a étendu le concept de l'indicateur- $\Lambda$  en proposant deux formes différentes pour l'opérateur  $\Lambda$  : une basée sur la décomposition de Helmholtz du résidu et une basée sur une localisation directe de la norme  $H_{\text{rot}}^{-1/2}$ . Pour la première, on a montré que l'indicateur associé est théoriquement asymptotiquement exact. On n'a pas réussi à l'utiliser pour le guidage d'un algorithme auto-adaptatif et on pense

qu'il s'agit essentiellement d'un problème de précision de l'implémentation. Néanmoins, on obtient des taux de convergence cohérents lorsque l'algorithme est guidé par un autre indicateur. Pour la seconde forme, on n'a plus le caractère "asymptotiquement exact" pour l'erreur mais on l'a par rapport à la norme du résidu. De plus, le calcul de l'indicateur est plus simple et il guide avec succès un algorithme de raffinement. Il est encore nécessaire d'effectuer des améliorations sur la précision du calcul de l'indicateur. Enfin, on a dérivé de l'indicateur résidu de Nochetto & Stamm un indicateur d'erreur mesurant l'erreur sur les charges (et non plus l'erreur totale). Ce dernier indicateur est simple et rapide à calculer et il semble guider efficacement un algorithme de raffinement auto-adaptatif.

Dans le dernier chapitre 7, on a changé de thématique en s'intéressant à la problématique du raffinement de maillage *goal-oriented*. On a notamment proposé un indicateur d'erreur *a posteriori goal-oriented* pour l'équation associée à l'opérateur de simple couche en acoustique. Il utilise le principe de l'indicateur par reconstruction en acoustique introduit au chapitre 3. On a montré numériquement qu'il permet de guider optimalement un algorithme de raffinement auto-adaptatif et que les maillages produits diffèrent selon qu'on raffine en étant basé sur l'erreur sur la solution ou sur le *goal*. Cela a permis de mettre en évidence le rôle de l'erreur géométrique.

Le résultat le plus important de cette thèse est bien le nouvel indicateur d'erreur *a posteriori* (l'indicateur- $\Lambda$ ) introduit au chapitre 4. Premièrement, il est inconditionnellement fiable et efficace sur surface lipschitzienne fermée. De plus, il est construit pour être asymptotiquement exact sur surface de classe  $C^\infty$ , mais on constate numériquement que c'est encore le cas lorsque la surface est polygonale et ouverte. Deuxièmement, la forme abstraite de l'indicateur d'erreur est "universelle" et n'est pas liée à l'espace dans lequel se trouve le résidu. Le principe peut donc se généraliser à d'autres phénomènes de propagation d'onde, ce qui a été fait pour l'électromagnétisme. Cela a permis de proposer les premiers indicateurs d'erreur *a posteriori* fiables et efficaces pour l'EFIE. Cet indicateur est un peu plus coûteux, en termes de calculs, qu'un simple indicateur basé sur une localisation standard de la norme du résidu. On peut décider de choisir ce dernier pour le guidage de l'algorithme auto-adaptatif, et d'utiliser l'indicateur- $\Lambda$  toutes les  $n$  itérations pour mesurer la valeur de l'erreur exacte.

On n'a pas poussé l'étude aussi loin mais il est probable que ce concept s'étende aux problèmes de propagation d'onde en élastodynamique.

On a un second résultat important : les indicateurs d'erreur présentés ici sont donnés sous la forme de grandeurs locales mais il n'y a *aucune* raison *a priori* qu'ils soient représentatifs de l'erreur locale. En effet, les opérateurs intégraux (et l'opérateur  $\Lambda$  qui est un opérateur pseudo-différentiel) font perdre cette propriété. Malgré cela, on montre théoriquement ou numériquement qu'ils permettent de faire converger optimalement l'erreur via un algorithme de raffinement auto-adaptatif !

Un autre aspect mis en évidence ici est qu'il est probablement impossible, avec les techniques de maillage et de raffinement conventionnelles, de retrouver le taux de convergence maximal en 3D. Cela provient du fait que ces techniques de raffinement rajoutent trop d'éléments (raffinement local isotrope, propagation de la conformité géométrique aux éléments voisins, ...) ce qui n'a pas lieu d'être en 2D. Une manière de contourner cette difficulté consiste à utiliser du raffinement anisotrope avec des éléments allongés dans une direction. Par exemple, si on se place le long d'une arête d'un cube, les simulations montrent que la solution évolue peut le long de l'arête, mais beaucoup dans la direction normale de l'arête. Du remaillage isotrope ne prend pas en compte cette spécificité, mais du remaillage anisotrope va se contenter de multiplier les éléments dans la direction normale sans modifier le nombre le long de l'arête : on en génère donc beaucoup moins.

Un autre axe de développement dont on a commencé l'investigation, est l'indication d'erreur *goal-oriented* en BEM. On pense que l'indicateur d'erreur introduit ici se généralise aisément à d'autres équations en acoustique, mais également en électromagnétisme, et plus généralement aux équations BEM.

Le principe des indicateurs- $\Lambda$  nous offre également une approche pour déterminer une estimation de l'erreur algébrique induite par l'utilisation d'un solveur itératif. Cette estimation sera de même nature que l'erreur de discrétisation (en fonction d'une norme sous-jacente à la méthode d'approximation) et devrait ainsi nous permettre de proposer des critères d'arrêt efficaces.



# Bibliographie

- [1] Buffa A. and Hiptmair R. *Galerkin Boundary Element Methods for Electromagnetic Scattering*. In *Topics in computational wave propagation*, pages 85–126. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [2] M. Ainsworth and J. T. Oden. *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [3] M. Aurada, M. Feischl, T. Führer, M. Karkulik, and D. Praetorius. *Energy norm based error estimators for adaptive BEM for hypersingular integral equations*. *Applied Numerical Mathematics*, 95 :15 – 35, 2015. Fourth Chilean Workshop on Numerical Analysis of Partial Differential Equations (WONAPDE 2013).
- [4] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15(4) :736–754, 1978.
- [5] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(10) :1597–1615, 1978.
- [6] Randolph E. Bank and R. Kent Smith. A posteriori error estimates based on hierarchical bases. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 30(4) :921–935, 1993.
- [7] A. Bendali. *Equations intégrales en électromagnétisme*. Cours BEM INSA Toulouse, 2013.
- [8] A. Besselov and N. Heuer. *The hp-BEM with quasi-uniform meshes for the electric field integral equation on polyhedral surfaces : a priori error analysis*. *Applied Numerical Mathematics*, 60 :705–718, 2010.
- [9] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 1st edition, November 2010.
- [10] A. Buffa, M. Costabel, and D. Sheen. *On traces for  $H(\text{curl}, \Omega)$  in Lipschitz domains*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 276(2) :845 – 867, 2002.
- [11] A. Buffa and R. Hiptmair. *Regularized Combined Field Integral Equations*. *Numerische Mathematik*, 100(1) :1–19, 2005.
- [12] A. Buffa and P. Ciarlet Jr. *On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations Part I : An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra*. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 24 :9–30, 2001.
- [13] A. Buffa and P. Ciarlet Jr. *On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations Part II : Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications*. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 24 :31–48, 2001.
- [14] C. Carstensen. *An a posteriori error estimate for a first kind integral equation*. *Math. Comp.*, 66(217) :139–155, 1997.
- [15] C. Carstensen. *An Adaptive Mesh-Refining Algorithm Allowing for an  $H^1$ -Stable  $L^2$ -Projection onto Courant Finite Element Spaces*. *Constructive Approximation*, 20(4) :549–564, 2003.

- [16] C. Carstensen, M. Feischl, M. Page, and D. Praetorius. *Axioms of adaptivity*. *Comput. Methods Appl. Math.*, 67(6) :1195–1253, 2014.
- [17] C. Carstensen, M. Maischak, D. Praetorius, and E.P. Stephan. *Residual-based a posteriori error estimate for hypersingular equation on surfaces*. *Numerische Mathematik*, 97(3) :397–425, 2004.
- [18] C. Carstensen, M. Maischak, and E. P. Stephan. *A posteriori error estimate and h-adaptive algorithm on surfaces for Symm’s integral equation*. *Numer. Math.*, 90(2) :197–213, 2001.
- [19] C. Carstensen and D. Praetorius. *Averaging Techniques for the Effective Numerical Solution of Symm’s Integral Equation of the First Kind*. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(4) :1226–1260, 2006.
- [20] C. Carstensen and D. Praetorius. *Boundary Element Analysis : Mathematical Aspects and Applications*, chapter *Averaging Techniques for a Posteriori Error Control in Finite Element and Boundary Element Analysis*, pages 29–59. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [21] S. N. Chandler-Wilde and D. P. Hewett. *Wavenumber-Explicit Continuity and Coercivity Estimates in Acoustic Scattering by Planar Screens*. *Integral Equations and Operator Theory*, 82(3) :423–449, 2015.
- [22] Patrick Ciarlet. *Analysis of the Scott-Zhang interpolation in the fractional order Sobolev spaces*. *J. Numer. Math.*, 21 :173–180, 2013.
- [23] Philippe G. Ciarlet. *Finite Element Method for Elliptic Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2002.
- [24] S. Cochez-Dhondt and S. Nicaise. *Robust a posteriori error estimation for the Maxwell equations*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196 :2583–2595, 2007.
- [25] David L. Colton and Rainer Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. Malabar, Fla. Krieger Pub. Co., 1992. Originally published : New York : Wiley, c1983.
- [26] Martin Costabel. *Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains : Elementary Results*. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 19(3) :613–626, 1988.
- [27] M. Darbas. *Préconditionneurs analytiques de type Calderon pour les formulations intégrales des problèmes de diffraction d’ondes*. PhD thesis, INSA Toulouse, 2004.
- [28] Alan Demlow and Gerhard Dziuk. *An Adaptive Finite Element Method for the Laplace-Beltrami Operator on Implicitly Defined Surfaces*. *SIAM J. Numerical Analysis*, 45(1) :421–442, 2007.
- [29] W. Dijkstra. *Condition Numbers in the Boundary Element Method : Shape and Solvability*. PhD thesis, Eindhoven University, 2008.
- [30] C. Erath, S. Ferraz-Leite, S. Funken, and D. Praetorius. *Energy norm based a posteriori error estimation for boundary element methods in two dimensions*. *Appl. Numer. Math.*, 59 :2713–2734, 2009.
- [31] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Theory and practice of finite elements*. Applied mathematical sciences. Springer, New York, 2004.
- [32] Alexandre Ern and Martin Vohralík. *Polynomial-degree-robust a posteriori estimates in a unified setting for conforming, nonconforming, discontinuous galerkin, and mixed discretizations*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 53(2) :1058–1081, 2015.
- [33] B Faermann. *Localization of the Aronszajn-Slobodeckij norm and application to adaptive boundary elements methods. Part I. The two-dimensional case*. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 20(2) :203–234, 2000.

- [34] Birgit Faermann. *Local a-posteriori error indicators for the Galerkin discretization of boundary integral equations*. *Numerische Mathematik*, 79(1) :43–76, 1998.
- [35] Birgit Faermann. *Localization of the Aronszajn-Slobodeckij norm and application to adaptive boundary element methods, Part II. The three-dimensional case*. *Numerische Mathematik*, 92(3) :467–499, 2002.
- [36] M. Feischl, T. Führer, N. Heuer, M. Karkulik, and D. Praetorius. *Adaptive Boundary Element Methods : a posteriori error estimators, adaptivity, convergence, and implementation*. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 22(3) :309–389, 2014.
- [37] M. Feischl, T. Führer, M. Karkulik, J. M. Melenk, and D. Praetorius. *Quasi-optimal convergence rates for adaptive boundary element methods with data approximation, part I : weakly-singular integral equation*. *Calcolo*, 51(4) :531–562, 2013.
- [38] M. Feischl, T. Führer, M. Karkulik, J. M. Melenk, and D. Praetorius. *Quasi-optimal convergence rates for adaptive boundary element methods with data approximation, part II : Hyper-singular integral equation*. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 44 :153–176, 2015.
- [39] M. Feischl, T. Führer, and D. Praetorius. *Adaptive FEM with Optimal Convergence Rates for a Certain Class of Nonsymmetric and Possibly Nonlinear Problems*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 52(2) :601–625, 2014.
- [40] M. Feischl, T. Führer, G. Mitscha-Eibl, D. Praetorius, and E. P. Stephan. *Convergence of Adaptive BEM and Adaptive FEM-BEM Coupling for Estimators Without h-Weighting Factor*. *Comput. Methods Appl. Math.*, 14(4) :485–508, 2014.
- [41] M. Feischl, M. Karkulik, J. M. Melenk, and D. Praetorius. *Quasi-optimal Convergence Rate for an Adaptive Boundary Element Method*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(2) :1327–1348, 2013.
- [42] S. Ferraz-Leite and D. Praetorius. *Simple a posteriori error estimators for the h-version of the boundary element method*. *Computing*, 83(4) :135–162, 2008.
- [43] F. Gesztesy, I. Mitrea, D. Mitrea, and M. Mitrea. *On the nature of the laplace-beltrami operator on lipschitz manifolds*. *Journal of Mathematical Sciences*, 172(3) :279–346, 2010.
- [44] I. G. Graham, W. Hackbusch, and S. A. Sauter. *Finite elements on degenerate meshes : inverse-type inequalities and applications*. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 25(2) :379–407, 2005.
- [45] Pierre Grisvard. *Singularities in boundary value problems*. *Recherches en mathématiques appliquées = Research notes in applied mathematics*. Masson Berlin Heidelberg New York, Paris, Milan, Barcelone, 1992.
- [46] Nicholas Hale, Nicholas J. Higham, and Lloyd N. Trefethen. *Computing  $A^\alpha$ ,  $\log(A)$ , and Related Matrix Functions by Contour Integrals*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(5) :2505–2523, 2008.
- [47] John H. Halton. *A Very Fast Algorithm for Finding Eigenvalues and Eigenvectors*. Technical Report TR96-043, U. of North Carolina, 1996.
- [48] M. Hintermueller, R.H.W. Hoppe, and C. Loebhard. *A dual-weighted residual approach to goal-oriented adaptivity for optimal control of elliptic variational inequalities*. Technical Report 2012–023, TU Graz, 2012.
- [49] George C. Hsiao and Wolfgang L. Wendland. *Boundary integral equations*. *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [50] P. Jiránéz, Z. Strakos, and M. Vohralík. *A posteriori error estimates including algebraic error and stopping criteria for iterative solvers*. *SIAM J. Sci. Comput.*, 32 :1567–1590, 2010.

- [51] M. Karkulik, D. Pavlicek, and D. Praetorius. *On 2D Newest Vertex Bisection : Optimality of Mesh-Closure and  $H^1$ -Stability of  $L^2$ -Projection*. *Constructive Approximation*, 38(2) :213–234, 2013.
- [52] E. Kita and N. Kamiya. *Error estimation and adaptive mesh refinement in boundary element method, an overview*. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 25 :479–495, 2001.
- [53] Rainer Kress. *Minimizing the condition number of boundary integral operators in acoustic and electromagnetic scattering*. *Q. Jl. Mechanics Appl Math*, 38 :323–396, 1985.
- [54] Matthieu Lecouvez. *Méthodes itératives de décomposition de domaine sans recouvrement avec convergence géométrique pour l'équation de Helmholtz*. PhD thesis, Ecole Polytechnique – Université Paris-Saclay, 2015.
- [55] William McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, 2000.
- [56] Igor Mozolevski and Serge Prudhomme. *Goal-oriented error estimation based on equilibrated-flux reconstruction for finite element approximations of elliptic problems*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 288 :127 – 145, 2015. Error Estimation and Adaptivity for Nonlinear and Time-Dependent Problems.
- [57] P. Mund, E. P. Stephan, and J. Weiße. Two-level methods for the single layer potential in  $\mathbb{R}^3$ . *Computing*, 60(3) :243–266, 1998.
- [58] R. H. Nochetto and B. Stamm. *A posteriori error estimates for the Electric Field Integral Equation on Polyhedra*. Technical report, U. of Maryland, U. of California, 2012.
- [59] Jean-Claude Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*. Applied mathematical sciences. Springer, New York, 2001.
- [60] S. Sauter and C. Schwab. *Boundary Element Methods*, volume 39 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2011.
- [61] F.-J. Sayas. *From Raviart-Thomas to HDG*. *ArXiv e-prints*, July 2013.
- [62] L. Steffens, N. Pares, and P. Diez. *Goal-oriented  $h$ -adaptivity for the Helmholtz equation : error estimates, local indicators and refinement strategies*. *Computational mechanics*, 47(6) :681–699, Jan 2011.
- [63] Ernst P. Stephan. *Multilevel methods for the  $h$ -,  $p$ -, and  $hp$ -versions of the boundary element method*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125(1–2) :503 – 519, 2000. Numerical Analysis 2000. Vol. VI : Ordinary Differential Equations and Integral Equations.
- [64] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley-Teubner, 1996.
- [65] Timothy Walsh and Leszek Demkowicz.  *$hp$ -Boundary element modeling of the external human auditory system—goal-oriented adaptivity with multiple load vectors*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(1–2) :125 – 146, 2003.



**Titre :** Fiabilité et optimisation des calculs obtenus par des formulations intégrales en propagation d'onde

**Mots clés :** équations intégrales, indicateurs d'erreur *a posteriori*, raffinement autoadaptatif

**Résumé :** Dans cette thèse, on se propose de participer à la popularisation des méthodes de résolution de problèmes de propagation d'onde basées sur des formulations intégrales en fournissant des indicateurs d'erreur *a posteriori* utilisable dans le cadre d'algorithmes de raffinement autoadaptatif. Le développement de tels indicateurs est complexe du fait de la non-localité des normes associées aux espaces de Sobolev et des opérateurs entrant en jeu. Des indicateurs de la littérature sont étendus au cas de la propagation d'une onde acoustique. On étend les preuves de convergence quasi-optimale (de la littérature) des algorithmes autoadaptatifs associés dans ce cas. On propose alors une nouvelle approche par rapport à la littérature qui consiste à utiliser une technique de localisation des normes, non pas basée sur des inégalités inverses, mais sur l'utilisation d'un opérateur  $\Lambda$  de localisation bien choisi.

On peut alors construire des indicateurs d'erreur *a posteriori* fiables, efficaces, locaux et asymptotiquement exacts par rapport à la norme de Galerkin de l'erreur. On donne ensuite une méthode pour la construction de tels indicateurs. Les applications numériques sur des géométries 2D et 3D confirment l'exactitude asymptotique ainsi que l'optimalité du guidage de l'algorithme autoadaptatif.

On étend ensuite ces indicateurs au cas de la propagation d'une onde électromagnétique. Plus précisément, on s'intéresse au cas de l'EFIE. On propose des généralisations des indicateurs de la littérature. On effectue la preuve de convergence quasi-optimale dans le cas d'un indicateur basé sur une localisation de la norme du résidu. On utilise le principe du  $\Lambda$  pour obtenir le premier indicateur d'erreur fiable, efficace et local pour cette équation. On en propose une seconde forme qui est également, théoriquement asymptotiquement exacte.

**Title :** Reliability and optimization of integral formulation based computations for wave propagation

**Keywords :** integral equations, *a posteriori* error estimates, autoadaptive refinement

**Abstract :** The aim of this work is to participate to the popularization of methods for the resolution of wave propagation problems based on integral equations formulations by developing *a posteriori* error estimates in the context of autoadaptive mesh refinement strategies. The development of such estimates is difficult because of the non-locality of the norms associated to the Sobolev spaces and of the involved integral operators. Estimates from the literature are extended in the case of the propagation of an acoustic wave. The proofs of quasi-optimal convergence of the autoadaptive algorithms are established. We then introduce a new approach with respect to the literature which is based on a new norm-localization technique based on the use of a well-chosen  $\Lambda$  operator and not on inverse inequalities as it was the case previously.

We then establish new *a posteriori* error estimates which are reliable, efficient, local and asymptotically exact with respect to the Galerkin norm of the error. We give a method for the construction of such estimates. Numerical applications on 2D and 3D geometries confirm the asymptotic exactness and the optimality of the autoadaptive algorithm.

These estimates are extended in the case of the propagation of an electromagnetic wave. More precisely, we are interested in the EFIE. We suggest generalization of the estimates of the literature. A proof for quasi-optimal convergence is given for an estimate based on a localization of the norm of the residual. The principle of  $\Lambda$  is used to construct the first reliable, efficient, local error estimate for this equation. We give a second forme which is eventually theoretically asymptotically exact.

