HAL
open science

Contribution à l'étude cinématique et dynamique des machines parallèles

Daniel Kanaan

To cite this version:

Daniel Kanaan. Contribution à l'étude cinématique et dynamique des machines parallèles. Robotique [cs.RO]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2008. Français. NNT : . tel-01385632

HAL Id: tel-01385632

https://hal.science/tel-01385632

Submitted on 21 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Centrale de Nantes

ÉCOLE DOCTORALE

SPIGA

Année 2004 N° B.U. :

Thèse de DOCTORAT

Diplôme délivré par
L'École Centrale de Nantes
.

Spécialité : GENIE MECANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

DANIEL KANAAN

le vendredi 24 Novembre 2008
à L'Ecole Centrale de Nantes à Nantes

TITRE

CONTRIBUTION A L'ETUDE CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DES MACHINES PARALLELES

JURY

Président :	Jean-Pierre Merlet	Directeur de Recherches INRIA, Nice Sophia-Antipolis
Rapporteurs :	François Pierrot	Directeur de Recherches CNRS, Université de Montpellier II
	Grigore Gogu	Professeur, IFMA, Clermont Ferrand
Examinateurs :	Frédérico Thomas	Professeur, Conseil National de la Recherche de l'Espagne, CSIC, Barcelone
	Damien Chablat	Chargé de Recherche CNRS, IRCCyN, Ecole Centrale de Nantes
	Philippe Wenger	Directeur de Recherches CNRS, IRCCyN, Ecole Centrale Nantes
	Wisama Khalil	Professeur, IRCCyN, Ecole Centrale de Nantes
Invité :	Cédric Baradat	Ingénieur, Fatronik, Montpellier

Directeurs de thèse : Philippe Wenger, Wisama Khalil
Laboratoire : Institut de Recherches en Communication en Cybernétique de Nantes
Co-encadrant : Damien Chablat

N° ED 0367xxx

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué à l'Institut de Recherche en Communications et en Cybernétique de Nantes, dirigé successivement par M. Jean-François Lafay et M. Michel Malabre, que je remercie sincèrement pour leur accueil.

Mes premiers remerciements vont à M. Philippe Wenger et M. Wisama Khalil, mes directeurs de thèse. Je leur exprime toute ma reconnaissance pour leur disponibilité, leur encadrement professionnel et rigoureux, leurs qualités scientifiques et leur grande gentillesse.

Je remercie de même M. Damien Chablat, mon co-encadrant, pour sa disponibilité, pour son dynamisme et ses qualités scientifiques.

Je remercie très sincèrement les membres du jury pour leurs remarques constructives, et surtout les rapporteurs M. François Pierrot et M. Grigore Gogu pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mon travail.

Je remercie aussi les membres des équipes MCM et Robotique au sein desquelles j'ai pu accomplir ce travail dans une ambiance agréable.

Mes AMIS !! à Nantes, en France, au Liban, je ne vous oublie jamais, GRAND MERCI !!

Mes PARENTS et mes FRERES !! Mes remerciements les plus chaleureux vont à vous. Pour votre grand amour, je vous dédie ce DOCTORAT.

SOMMAIRE

Résumé……....11

Abstract……...12

Introduction générale……....13

Chapitre 1 : Etat de l'art sur l'étude des manipulateurs parallèles

1. INTRODUCTION 20

2. CLASSIFICATION DES ARCHITECTURES PARALLELES 23

2.1. MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLELES 23
2.2. MANIPULATEURS HYBRIDES 24
2.3. MANIPULATEURS REDONDANTS 25
2.4. LES DIFFERENTS TYPES DE MOUVEMENT DES MANIPULATEURS PARALLELES 26
2.4.1. Manipulateurs plans 27
2.4.2. Manipulateurs sphériques 27
2.4.3. Manipulateurs spatiaux 28
2.5. LES MACHINES A ARCHITECTURE PARALLELES 31
2.6. COMPARAISON DES PERFORMANCES DES ROBOTS SERIE ET DES PKMS 34

3. NOTIONS IMPORTANTES EN ROBOTIQUE PARALLELE 35

3.1. MODELISATION GEOMETRIQUE 35
3.1.1. Espace articulaire et espace opérationnelle 36
3.1.2. Modèle géométrique inverse 36
3.1.3. Modèle géométrique direct 37
3.2. CONFIGURATIONS SINGULIERES 38
3.2.1. Approche analytique 38
3.2.2. Approche géométrique 41
3.3. ESPACE DE TRAVAIL 42
3.3.1. Espace de travail et représentation 42
3.3.2. Méthodes utilisées pour le calcul de l'espace de travail 43

4. CONCLUSION 44

Chapitre 2 : Modélisation géométrique et analyse des singularités sérielles de la machine Verne

1. INTRODUCTION 48

2. DESCRIPTION DE LA MACHINE VERNE 49

3. MODELES GEOMETRIQUES DU MODULE PARALLELE 50

3.1. LES EQUATIONS GEOMETRIQUES 50
3.2. COUPLAGE ENTRE LA POSITION ET L'ORIENTATION DE LA PLATE-FORME 52
3.3. MODELE GEOMETRIQUE INVERSE 52
3.4. MODELE GEOMETRIQUE DIRECT 56
3.5. SINGULARITES SERIELLES 60

4. MODELES GEOMETRIQUES DE LA MACHINE VERNE COMPLETE 63

4.1. LES EQUATIONS GEOMETRIQUES 63
4.2. MODELE GEOMETRIQUE INVERSE 66
4.3. MODELE GEOMETRIQUE DIRECT 67

5. CONCLUSION 68

Chapitre 3 : Calcul de l'espace de travail de la machine Verne

1. INTRODUCTION 72

2. CALCUL DE L'ESPACE DE TRAVAIL DU MODULE PARALLELE 73

2.1. METHODE DE CALCUL DE L'ESPACE DE TRAVAIL 73
2.2. MODELES GEOMETRIQUES DES CONTRAINTES LIMITANT L'ESPACE DE TRAVAIL 75
2.3. COLLISIONS ENTRE LES DIFFERENTS ELEMENTS DE LA MACHINE VERNE 76
2.4. LONGUEURS DES SEGMENTS ET SINGULARITES SERIELLES 79
2.5. BUTEES MECANIQUES SUR LES ARTICULATIONS PASSIVES 81
2.5.1. Limites mécaniques sur les articulations passives liées aux articulations prismatiques 81
2.5.2. Les limites Mécaniques sur les articulations passives liées à la plate-forme mobile 86
2.6. LES CONTRAINTES DE FERMETURE DE LA CHAINE I 87
2.7. L'ALGORITHME DE CALCUL DE L'ESPACE DE TRAVAIL TOTAL 88
2.7.1. Résumé de la méthode de calcul de l'espace de travail total 89

3. CALCUL DE L'ESPACE DE TRAVAIL DE LA MACHINE VERNE 94

4. CONCLUSION 96

<u>Chapitre 4 :</u> Etude de singularités parallèles des manipulateurs parallèles à mobilités restreintes

1. INTRODUCTION 100

2. METHODE GEOMETRIQUE DE DETECTION DE SINGULARITES PARALLELES 102

2.1. ALGEBRE DE GRASSMANN-CAYLEY 102

2.1.1. Algèbre du crochet 103

2.1.2. Les operateurs join et meet 104

2.1.3. La décomposition du superbracket 106

2.2. ESPACE PROJECTIF ET THEORIE DES VIS 107

2.2.1. Espace projectif de dimension trois 107

2.2.2. Les coordonnées homogènes et les coordonnées de Plücker 108

2.2.3. Les applications de la théorie de vis réciproques 109

2.3. LES CONDITIONS GEOMETRIQUES DE SINGULARITES PARALLELES 112

2.3.1. Trois classes de manipulateurs parallèles 112

2.3.2. Les manipulateurs avec trois forces d'actionnement et trois moments de contraintes 112

2.3.3. Les manipulateurs avec quatre forces d'actionnement et deux moments de contraintes 115

2.3.4. Les manipulateurs avec six forces d'actionnement 116

2.4. EXEMPLES D'APPLICATION 120

2.4.1. Analyse de singularités du manipulateur 3-UPU 120

2.4.2. Analyse de singularités du robot Delta linéaire 122

2.4.3. Analyse de singularités du manipulateur SMG de McGill 125

2.4.4. Analyse de singularités du module parallèle de la machine Verne 127

3. CONCLUSION 131

<u>Chapitre 5 :</u> Modélisation dynamique des manipulateurs parallèles à mobilités restreintes

NOTATIONS 134

1. INTRODUCTION 135

2. MODELES DYNAMIQUES DES ROBOTS PARALLELES 136

2.1. MODELE DYNAMIQUE INVERSE DES ROBOTS PARALLELES 136

2.1.1. Méthode du calcul du modèle dynamique inverse 137

2.1.2. Dynamique de la plate-forme 139

2.1.3. Dynamique des jambes 140

2.1.4. Matrices Jacobiennes 140

2.1.5. Equation Générale du MDI des robots parallèles 143

2.2. MODELE DYNAMIQUE DIRECT DES ROBOTS PARALLELES 144

2.2.1. Méthode de Calcul du modèle dynamique direct..... 144
2.2.2. Décomposition du modèle dynamique inverse de la jambe i..... 145
2.2.3. Calcul des accélérations articulaires de la jambe i..... 145
2.2.4. Equation General du MDD des robots parallèles..... 146

3. APPLICATION DES MODELES A LA MACHINE VERNE 147

3.1. DESCRIPTION DU MODULE PARALLELE DE LA MACHINE VERNE 147
3.2. DESCRIPTION GEOMETRIQUE DE LA STRUCTURE ARBORESCENTE..... 148
3.2.1. Description géométrique des jambes de la structure arborescente..... 149
3.2.2. Modèle géométrique direct des jambes..... 150
3.2.3. Modèle géométrique inverse des jambes 151
3.3. MODELE DYNAMIQUE INVERSE DE LA MACHINE VERNE..... 153
3.3.1. Dynamique des jambes de la structure arborescente équivalente 154
3.3.2. Dynamique de la plate-forme mobile 155
3.3.3. Calcul des matrices jacobiennes 156
3.4. MODELE DYNAMIQUE DIRECT DE LA MACHINE VERNE..... 157
3.5. SIMULATION NUMERIQUE DES MODELES DYNAMIQUES 158

4. CONCLUSION..... 164

Conclusion Générale……..……..……..……..165

Perspectives……..……..…….168

Bibliographie..……..……..……171

Publications personnelles……..……..……..…….189

Annexes……..……..……....191

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1.1: Machine-outil sérielle 20
Figure 1.2 : le mécanisme sphérique proposé en 1928 par J.E. Gwinnett.....21
Figure 1.3: Mécanisme de Pollard (1942) 21
Figure 1.4 : Plate-forme de Gough-Stewart 21
Figure 1.5 : Machine Variax.....22
Figure 1.6 : Le FlexPicker (ABB) 23
Figure 1.7 : Le Quattro (Adept Technology).....23
Figure 1.8 : Mécanisme pleinement parallèle de type Hexapode.....24
Figure 1.9 : Le robot LX4 de Logabex.....25
Figure 1.10: Le robot proposé par Chen.....25
Figure 1.11 : La machine Verne construite par Fatronik pour l'IRCCyN.....25
Figure 1.12 : Le robot Archi.....26
Figure 1. 13: Le robot double Tripod de Merkle [Merlet 05].....26
Figure 1.14: Manipulateur plan de type 3 RPR.....27
Figure 1.15 : Manipulateurs sphériques (à gauche) deux modules parallèles du robot Anguille et (à droite) le robot Agile Eye 28
Figure 1.16 : le manipulateur 3-UPU à 3 ddls de translations.....29
Figure 1.17 : le robot 3 RPS 29
Figure 1.18 : le robot SMG de l'Université de McGill 30
Figure 1.19 : Le robot d'Innocenti 31
Figure 1.20 : La machine Hexabot 32
Figure 1.21 : Le Tricept de Neos Robotics.....32
Figure 1.22 : Machine Hexaglide 32
Figure 1.23 : Machine HexaM 32
Figure 1.24 : UraneSX.....33
Figure 1.25 : Quickstep 33
Figure 1.26 : le robot GeorgV développé par IFW 33
Figure 1.27 : L'Orthoglide 5 axes 33
Figure 1.28 : Mécanisme à 5 barres en configurations singulières parallèle, sérielle et structurelle respectivement de gauche à droite. 40
Figure 2.1 : Vue d'ensemble de la machine Verne 48
Figure 2.2 : Représentation schématique de la machine Verne; (a) la représentation simplifiée et (b) la représentation CAO fournie par Fatronik 49
Figure 2.3 : Les dimensions de l'architecture parallèle dans le repère fourni par Fatronik 51

Figure 2.4 : Les courbes d'iso-valeurs de l'angle α entre $-\pi$ à $+\pi$ avec un pas constant de $2\pi/45$ (b) zoom de la zone encadrée....53
Figure 2.5 : Les seize solutions au modèle géométrique inverse pour $x_P = -240$ mm, $y_P = -86$ mm et $z_P = 1000$ mm 56
Figure 2.6 : Les quatre modes d'assemblage du module parallèle de la machine Verne pour $\rho_1 = 674$ mm, $\rho_2 = 685$ mm et $\rho_3 = 250$ mm. seulement la solution (a) est accessible par la machine....59
Figure 2.7 : Schéma de la table tilting: l'orientation de l'outil est définie par deux angles (ϕ_1, ϕ_2) dans le repère R_t lié à la table. Les orientations (θ_1, θ_2) de la table tilting sont définies dans le repère R_b lié à la base de la machine Verne....64
Figure 3.1 : La machine Verne, (a) Réelle, (b) avec découpage virtuel de la chaîne I....73
Figure 3.2 : Représentation schématique de la machine Verne....76
Figure 3.3 : La position du segment ij par rapport au plan des rails pour une situation quelconque de la plate-forme....77
Figure 3.4 : (a) La Plate-forme mobile, (b-c) représentations photographiques montrant les risques de collisions entre la plate-forme et le capot en (b) et entre la plate-forme et la table en (c)...78
Figure 3.5 : Le volume admissible pour le point P assurant qu'il n'y a pas de collision entre les différents éléments de la machine et pour une longueur d'outil nul....79
Figure 3.6 : Espace de travail du point P sous les contraintes imposées par la longueur du segment ij, sans singularité et pour une orientation donnée....80
Figure 3.7 : Articulation Cardan du type INA GLK 3 82
Figure 3.8 : Définition des limites articulaires d'une articulation cardan du type INA GLK 3 82
Figure 3.9 : (a) Définition de la surface caractérisant les contraintes sur l'articulation ij de la base pour une position fixe de son chariot. Le point A'_{ij} est fixe; le point P décrit cette contrainte dans le repère lié à cette articulation. (b) Projection de cette surface dans le plan xOy 83
Figure 3.10 : Les paramètres θ_{ij}, ψ_{ij}, ϕ_{ij}, de positionnement des articulations sur les chariots....85
Figure 3.11 : (a) les lieux du point P caractérisant les contraintes sur l'articulation ij de la base, pour une orientation donnée et pour une position fixe de son chariot. (b) Projection de cette surface dans le plan xOy....86
Figure 3.12 : (a) les lieux du point P caractérisant la contrainte imposée par la forme de la chaîne I pour une orientation donné α (b) La projection de cette surface dans le plan xOy 87
Figure 3.13 : Projection du volume ${}^2V^P$ dans le plan xOz pour une orientation donné α 89
Figure 3.14 : Les lieux accessibles par le point P dans le plan horizontal et pour une orientation donnée α ; (a) sous les contraintes mécaniques des articulations de base, (b) sous les contraintes mécaniques des articulation liées à la plate-forme, (c) en considérant toutes les contraintes mécaniques sur les articulations passives (après intersection entre les courbes)....90
Figure 3.15 : la zone $S_1(\alpha)$ avant et après intersection entre les courbes caractérisant les contraintes sur les longueurs des segments, les limites mécaniques sur les articulations passives et les contraintes évitant tout risque de collision entre les différents éléments de la machine....91
Figure 3.16 : Les lieux du point P pour une orientation et une hauteur données avec (a) $z_P \in I_2$, (b) $z_P \in I_1 \cup I_3$....92
Figure 3.17 : Espace de travail défini comme l'ensemble de points P dans R_b 93
Figure 3.18 : L'espace de travail pour plusieurs longueurs de l'outil 94
Figure 3.19 : L'espace de travail 3-axes pour différentes longueurs d'outil....95
Figure 3.20 : Comparaison entre l'espace de travail 3-axes calculé par notre méthode ($L_{u1} = 50mm$) et celui fourni par Fatronik, (a) vue de dessus et (b) vue de gauche....96

Figure 4.1 : Représentation géométrique d'un twist T et d'un wrench W appliqués à un corps rigide110
Figure 4.2 : Conditions géométriques des singularités parallèles des manipulateurs avec trois forces d'actionnement et trois moments de contraintes.....114
Figure 4.3 : Conditions géométriques de singularités de manipulateurs ayant quatre forces d'actionnement et deux moments de contraintes.....115
Figure 4.4: Conditions géométriques de singularités de manipulateurs parallèles avec six six forces d'actionnement.....119
Figure 4.5 : Le manipulateur 3-UPU.....121
Figure 4.6 : Le robot Delta linéaire.....123
Figure 4.7 : vue de face(a) et représentation CAO (b) du McGill Schönflies-Mouvement Générateur (SMG).....125
Figure 4.8 : Deux configurations singulières parallèles.....127
Figure 4.9 : Vue de dessus du schéma (a) et représentation CAO (b) du module parallèle de la machine Verne.....128
Figure 4.10 : Quatre configurations singulières parallèles de la machine Verne.....129
Figure 4.11 : Surface des singularités parallèles et la frontière de l'espace de travail de la machine Verne dans l'espace opérationnel.....130
Figure 4.12 : Surface des singularités parallèles et la frontière de l'espace de travail de la machine Verne dans l'espace articulaire.....130
Figure 5.1 : Le module parallèle de la machine Verne.....147
Figure 5.2 : Structure arborescente équivalente minimale du module parallèle de la machine Verne.148
Figure 5.3 : Les paramètres permettant de placer les repères des liaisons prismatiques par rapport au repère de la base.....149
Figure 5.4 : Placement des repères des jambes : (a), i=1,2 et (b), i=3..6.....149
Figure 5.5 : Trajectoire parcourue par le module parallèle de la machine Verne.....158
Figure 5.6 : Trajectoires, vitesses et accélérations linéaires de l'outil dans le repère de la table R_t ...160
Figure 5.7 : Trajectoires, vitesses et accélérations angulaires de l'outil par rapport à la table.....160
Figure 5.8 : Trajectoires, vitesses et accélérations linéaires du centre de la plate-forme dans R_0.....161
Figure 5.9 : Trajectoires, vitesses et accélérations angulaires de la plate-forme dans R_0.....161
Figure 5.10 : Forces et couples nécessaires pour bouger la plate-forme mobile.....162
Figure 5.11 : Forces et couples nécessaires pour bouger les jambes.....162
Figure 5.12 : Forces des actionneurs calculés par le MDI.....163
Figure 5.13 : Ecart entre les accélérations désirées et celles calculées par le MDD.....164

TABLEAUX

Tableau 1.1 : Comparatif entre Les robots séries et les PKMs.....35
Tableau 2.1 : Les orientations possibles pour une position fixe de la plate-forme 54
Tableau 2.2 : Les solutions de la variable articulaire ρ_1 d'après les valeurs de α 55
Tableau 2.3 : Calcul du modèle géométrique direct pour $\rho_1 = 674$ mm, $\rho_2 = 685$ mm et $\rho_3 = 250$ mm 60
Tableau 2.4 : Conditions d'existence des singularités sérielles vis-à-vis de la chaîne I 61
Tableau 2.5 : Conditions d'existence des singularités sérielles de la machine Verne.....62
Tableau 2.6 : Matrices de transformation qui ramène le repère de base R_b au repère R_t lié à la table tilting et les matrices qui ramène le repère R_t au repère R_{pl} lié à la plate-forme mobile; où x_u, y_u et z_u sont les coordonnées du centre de l'outil (TCP), U, dans R_t 64
Tableau 2.7 : les résultats numériques au modèle géométrique direct de l'exemple où $\rho_1 = 674$ mm, $\rho_2 = 685$ mm, $\rho_3 = 250$ mm, $\theta_1 = 0.19$ rd et $\theta_2 = 0.39$ rd 68
Tableau 5.1 : Paramètres géométriques de la jambe i (pour i = 1 à 6) 150
Tableau 5.2 : Paramètres dynamiques de la jambe i (pour i = 1 à 6) 154
Tableau 5.3 : Paramètres dynamiques de base de la jambe i (pour i = 1 à 6).....155

RESUME

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur l'étude cinématique et dynamique des robots parallèles à mobilités restreintes. Ces robots à moins de 6 degrés de liberté permettent d'effectuer de multiples tâches demandées par l'industrie. La raison principale de l'utilisation de ces robots est la volonté de réduire le coût en utilisant moins de jambes et moins de moteurs. Cependant, ces structures peuvent dans certains cas produire un mouvement de la plate-forme contraint par un couplage entre la position et l'orientation comme pour le module parallèle de la machine Verne ayant trois degrés de liberté de translation. Dans ce cas, la modélisation peut s'avérer compliquée.

Ce mémoire comporte cinq chapitres. Dans le premier chapitre, une classification des architectures parallèles est présentée et des notions importantes liées à la cinématique et à la conception des manipulateurs sont exposées. Les deuxième et troisième chapitres sont consacrés à la modélisation géométrique, à l'étude des singularités sérielles et au calcul de l'espace de travail de la machine Verne. Le quatrième chapitre traite les singularités parallèles des manipulateurs à mobilités restreintes en utilisant l'algèbre de Grassmann-Cayley. Les conditions géométriques d'existence des singularités pour quatre classes de manipulateurs sont trouvées. Les chaînes de ces manipulateurs transmettent des forces et/ou couples à la plate-forme mobile. Finalement, le cinquième chapitre concerne la modélisation dynamique des manipulateurs à mobilités restreintes. Une méthode générale basée sur les algorithmes de type Newton-Euler est développée. La méthode proposée prend en compte la dynamique des jambes et de la plate-forme. Nous obtenons ainsi des modèles dynamiques complets de ces robots.

ABSTRACT

This thesis deals with the kinematic and dynamic modeling of limited degree-of-freedom parallel robots. These robots with less than six degrees of freedom are able to carry out several industrial tasks. The main reason of using such robots is to reduce the production costs by using less legs and motors. However, in some cases, these structures can produce a complex motion defined as a simultaneous combination of translation and rotation of the moving platform, which is the case of the Verne parallel module having three translation degrees of freedom. The modeling of this type of robots can prove to be complicated.

This report includes five chapters. In the first chapter, a classification of parallel architectures is presented and a state of the art on important notions on kinematics and design of manipulators is exposed. The second and the third chapters are devoted to the kinematic modelling, serial singularity analysis and workspace calculation of the Verne machine. The fourth chapter deals with parallel singularity analysis of limited degrees of freedom robots using Grassmann-Cayley algebra. The geometrical conditions of existence of parallel singularities of four classes of parallel manipulators are found. Finally, the fifth chapter covers the dynamic modelling of limited degree-of-freedom parallel manipulators. A general method based on the Newton-Euler algorithm is developed. The proposed method takes in consideration all the dynamics of these robots including the legs dynamics as well as the mobile platform dynamics.

INTRODUCTION GENERALE

Les années passent et la technologie des machines à architecture cinématique parallèle (en anglais Parallel Kinematic Machines ou PKMs) prend progressivement sa place en s'affirmant comme l'une des solutions aujourd'hui retenues par un nombre de plus en plus important de constructeurs. Ces machines sont souvent utilisées dans l'industrie pour des applications comme l'usinage à grande vitesse, la manutention, les interventions chirurgicales, etc. Ces applications nécessitent des propriétés que les architectures sérielles ne peuvent pas toujours offrir. Ainsi, les machines-outils classiques qui doivent être massives pour augmenter leur rigidité, sont parfois inadaptées à des travaux de précision ou demandant une rapidité d'exécution. Elles souffrent alors d'inerties très importantes qui limitent leurs performances dynamiques. Par rapport à leurs homologues d'architecture sérielle, les architectures parallèles permettent de limiter les masses en mouvement tout en augmentant la rigidité conférant à la structure des qualités de précision et de rapidité. Toutefois, il existe des contraintes qui freinent le développement et l'emploi de ces machines. Ces contraintes sont principalement liées à la complexité des modèles caractérisant les relations d'entrée-sorties. Ces modèles géométriques cinématiques, statiques et dynamiques sont nécessaires pour simuler et contrôler les PKMs. Une autre contrainte est due à la présence de positions singulières pour lesquelles ces structures perdent leur rigidité et deviennent incontrôlables. De plus, ces architectures ont un espace de travail de forme restreinte et complexe.

Récemment, des chercheurs et des industriels ont commencé à concevoir des PKMs avec moins de jambes et moins de moteurs pour des applications exigeant moins de 6 degrés de liberté. Ces PKMs à mobilités restreintes présentent l'avantage d'un coût de fabrication réduit et de modèles plus simples. Cependant, le calcul des singularités de ces PKMs devient de plus en plus difficile et requiert à la fois des études cinématiques et statiques. En plus, ces machines peuvent dans certains cas produire un mouvement de la plate-forme contraint par un couplage entre la position et l'orientation comme pour le module parallèle de la machine

Verne développée par Fatronik pour l'IRCCyN. Dans ce cas la modélisation peut s'avérer compliquée.

Le développement des nouvelles méthodes de modélisation et d'analyse de ces PKMs à mobilités restreintes peut permettre de mieux appréhender les performances de ces mécanismes innovants. Associées à des outils adaptés, ces méthodes apportent une aide précieuse au concepteur de nouvelles cinématiques de machines contribuant ainsi à leur développement. Cette thèse s'inscrit donc dans ce cadre et participe à répondre à ce besoin.

Cette thèse comporte deux parties :

La première partie est consacrée à l'étude des modèles géométriques, à l'analyse des singularités sérielles et au calcul de plusieurs types d'espace de travail de la machine Verne. Cette machine appartient à une famille de PKMs se caractérisant par des jambes de longueur fixe qui glissent sur des rails [**Chablat 03, Pashkevich 05** et **Pashkevich 06**]. Un des problèmes fondamentaux de ces PKMs est la résolution des modèles géométriques direct et inverse (MGD et MGI). Dans le cas de la machine Verne, ces modèles sont très complexes et admettent plusieurs solutions. Actuellement, la résolution des MGD et MGI de cette machine pose sur la méthode de Newton-Raphson [**Terrier 05**]. Cette méthode est basée sur un algorithme numérique qui résout les modèles géométriques sans garantir la convergence, ni l'obtention de la bonne solution parmi toutes les solutions possibles. Par ailleurs, elle n'est pas rapide. Dans cette logique, nous formulons des expressions analytiques permettant d'identifier et de classer les différentes solutions des modèles géométriques pour en extraire celles qui satisfont l'utilisateur dans le temps de calcul le plus court possible.

Un espace de travail simplifié de la machine Verne a été fourni par Fatronik et est actuellement utilisé, mais cet espace est visiblement réduit par rapport à celui réellement accessible par la machine. Dans le but de mieux profiter de ses performances et d'augmenter sa productivité, nous développons une méthode pour calculer les différents types d'espace de travail accessibles par la machine. Cette méthode est applicable aussi sur des PKMs appartenant à la même famille que la machine Verne.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des singularités parallèles et à la modélisation dynamique des PKMs à mobilités restreintes. Les singularités parallèles sont définies par une perte de rigidité des PKMs et elles se traduisent par une instabilité de l'organe terminal de la machine lorsque ses articulations motorisées sont bloquées. Ces singularités sont souvent détectées en utilisant des approches analytiques basées sur les modèles cinématiques

[**Gosselin 90**]. Ces approches ne permettent pas de détecter certaines singularités parallèles des PKMs à mobilités restreintes, en particulier les « singularités de contraintes ». Ces singularités se produisent quand les jambes des PKMs à mobilités restreintes sont incapables de contraindre la plate-forme à exécuter le mouvement souhaité. En conséquence la plate-forme gagne des degrés de liberté supplémentaires rendant la machine incontrôlable. Pour surmonter ce problème, nous utilisons la théorie des vis réciproques combinée à l'algèbre de Grassmann-Cayley pour obtenir les conditions géométriques d'existence des singularités parallèles de trois classes de PKMs ayant trois et quatre degrés de liberté. Nous traduisons ces conditions sous forme vectorielle. Pour la machine Verne, nous vérifions l'absence des singularités parallèles dans son espace de travail.

L'augmentation constante des performances attendues des PKMs est liée à l'utilisation d'un modèle dynamique efficace pour la commande en ligne et assez précis pour l'application visée. Ainsi, la conception de leur commande doit prendre en compte toutes les forces d'interactions dynamiques. Les méthodes proposées dans la littérature pour l'étude de la dynamique des PKMs, sont fondées sur l'application des méthodes élaborées essentiellement pour les structures séries et utilise des modèles dynamiques simplifiés. Ces modèles considèrent seulement la dynamique de la plate-forme et négligent celle des différentes chaînes cinématiques ou uniquement la matrice d'inertie et négligent les forces de Coriolis et centrifuges. Une méthode établie dans [**Khalil 06, Ibrahim 06**] permet de modéliser les robots parallèles de façon complète en considérant l'ensemble des corps du mécanisme. Cette méthode est basée sur les algorithmes de type Newton-Euler. Nous adaptons cette méthode pour pouvoir l'appliquer aux robots à mobilités restreintes en ajustant les matrices jacobiennes. Cette démarche va nous permettre de traiter le problème dynamique de la machine Verne, un robot à mobilité complexe, sans ajouter des contraintes supplémentaires.

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre du projet européen NEXT "Next Generation Production Systems", IP n° 011815 2005-2009. Ce projet regroupe 24 partenaires européens. L'équipe robotique et l'équipe MCM de l'IRCCyN sont présentes dans ce projet par l'intermédiaire du CNRS qui regroupe trois laboratoires, le LASMEA, le LIRMM et l'IRCCyN. Notre activité porte principalement sur l'étude des architectures parallèles de machines outils. Notre exemple d'application est la machine Verne.

Cette thèse s'inscrit aussi dans le cadre du projet ANR SiRoPa "Singularités des robots parallèles" 2007-2010 : Ce projet regroupe cinq laboratoires, le projet COPRIN de l'INRIA de Sophia-Antipolis, l'IRCCyN, l'IRMAR, le LINA et le projet SALSA de l'INRIA de

Rocquencourt. Dans ce projet, Nous contribuons à la définition d'outils innovants et suffisamment génériques permettant le calcul et la gestion des singularités des robots parallèles. Les champs d'application sont ceux de la robotique parallèle, c'est-à-dire principalement la robotique manufacturière et les machines outils, la robotique médicale et les interfaces haptiques.

Ce mémoire est articulé suivant cinq chapitres :

Le premier chapitre introduit les manipulateurs parallèles, classifie les architectures parallèles et présente des notions et des propriétés liées à la cinématique et à la conception de ces manipulateurs.

Le deuxième chapitre est consacré au calcul des modèles géométriques direct et inverse d'une machine-outil hybride à cinq degrés de liberté (ddls), la machine Verne. Des solutions à ces modèles sont obtenues sous forme symbolique.

Dans le troisième chapitre, nous proposons une méthode qui permet de calculer plusieurs types d'espace de travail de la machine Verne pour différentes longueurs d'outils. Cette méthode prend en considération l'ensemble des contraintes exerçant une influence effective sur l'espace de travail: course des chariots, limitations sur les longueurs des segments, débattements des articulations, singularités sérielles et collisions entre les différents éléments de la machine, ainsi que les contraintes dues à la forme irrégulière de l'une des chaînes.

Dans le quatrième chapitre, nous nous concentrons sur l'identification des singularités parallèles des manipulateurs à mobilités restreintes au moyen de l'algèbre de Grassmann-Cayley (AGC). Les manipulateurs qui peuvent être analysés avec la méthodologie proposée dans cette thèse n'ont pas besoin de liaisons sphériques passives. Nous utilisons la théorie des vis réciproques pour trouver une matrice jacobienne inverse de dimension 6x6. Les colonnes de cette matrice peuvent être des droites finies ou des droites infinies dans l'espace projectif. Nous utilisons les opérateurs de l'AGC pour transformer le déterminant de cette matrice en conditions géométriques d'existence des singularités parallèles. Trois classes de manipulateurs à mobilités restreintes sont étudiées par cette méthode. De plus, les singularités de quatre manipulateurs : *i)* le manipulateur 3-UPU; *ii)* le robot Delta linéaire; *iii)* le robot SMG de McGill; et *iv)* le module parallèle de la machine Verne sont analysées à titre d'exemples.

Dans le cinquième chapitre, nous généralisons la méthode établie dans [**Khalil 06, Ibrahim 06**] en proposant une nouvelle méthode pour obtenir les matrices jacobiennes

utilisées dans le calcul des modèles dynamiques. Ces modèles sont obtenus en termes de modèles dynamiques des jambes exprimés en fonction des variables articulaires (variables lagrangiennes) et de la dynamique de la plate-forme exprimée en fonction des variables cartésiennes (variables eulériennes). Les modèles dynamiques des jambes et de la plate-forme sont ensuite projetés sur les axes des articulations motorisées (actives) par l'intermédiaire de matrices jacobiennes appropriées. Les jambes étant perçues dans leur points de connection avec la plate-forme, leurs modèles dynamiques et cinématiques sont obtenus en utilisant les méthodes classiques des robots série. Cependant, la dynamique de la plate-forme est obtenue par les équations de Newton-Euler qui donnent la résultante des forces et moments appliqués sur un corps solide en mouvement. Nous appliquons cette méthode pour obtenir les modèles dynamiques direct et inverse du module parallèle de la machine Verne.

Finalement, nous résumons notre contribution dans la conclusion et nous exposons les pistes de recherche ouvertes par ce travail dans les perspectives.

CHAPITRE 1

ETAT DE L'ART SUR L'ETUDE DES MANIPULATEURS PARALLELES

1. INTRODUCTION

On a assisté ces dernières années à un fort développement dans le monde industriel de l'utilisation des robots, principalement en raison de leur flexibilité. La plupart des applications exigent des performances dynamiques de plus en plus élevées de la part de ces machines. Ces performances peuvent être améliorées en équipant les machines de moteurs plus puissants. Cependant, ces améliorations sont limitées par les masses élevées des axes des machines-outils classiques dites « sérielles » (axes en séries). Sur une machine-outil sérielle, les axes sont « empilés » les uns sur les autres. Sur la Figure 1.1 par exemple, l'axe Y supporte l'axe X. Le moteur de l'axe Y doit donc déplacer deux corps massifs. Pour diminuer les inerties des machines, une solution très intéressante consiste à changer l'architecture cinématique en plaçant les axes non pas en série mais en parallèle (architecture parallèle) [**Tlusty 99**]. Toutefois l'architecture mécanique des robots série les plus couramment utilisés s'avère peu appropriée pour certaines tâches. C'est pourquoi, d'autres types d'architecture commencent à trouver leur place dans le monde de la robotique industrielle, ce sont des mécanismes à chaînes cinématiques fermés que nous désignerons aussi sous le nom des robots parallèles.

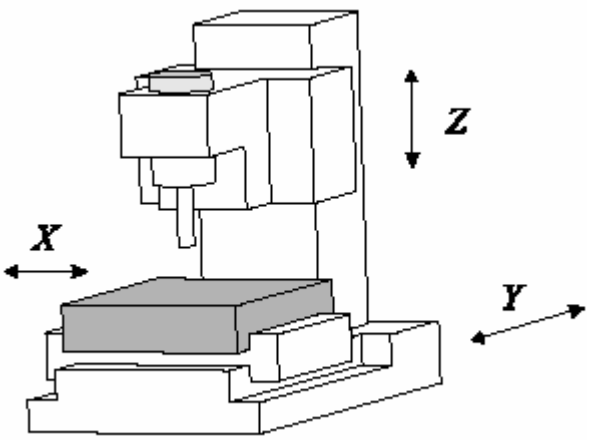


Figure 1.1: Machine-outil sérielle

Un robot parallèle est constitué d'un organe terminal à n degrés de liberté et d'une base fixe, reliés entre eux par au moins deux chaînes cinématiques indépendantes, la motorisation s'effectue par n actionneurs simples [**Merlet 05**].

La première véritable invention d'un robot parallèle daterait de 1928 [**Gwinnett 31**]. C'était un simulateur de mouvement destiné pour l'industrie de divertissement (Figure 1.2). Ce robot n'a jamais été construit, à cause de la complexité de sa commande [**Bonev 07**]. Dix

ans plus tard, et peu après la naissance du terme « robot », le premier robot industriel destiné à la peinture automatisée a été breveté **[Pollard 42].** La structure mécanique de ce robot représentée en Figure 1.3, consiste en trois bras, très similaires au robot Delta. Ce robot non plus n'a jamais été fabriqué.

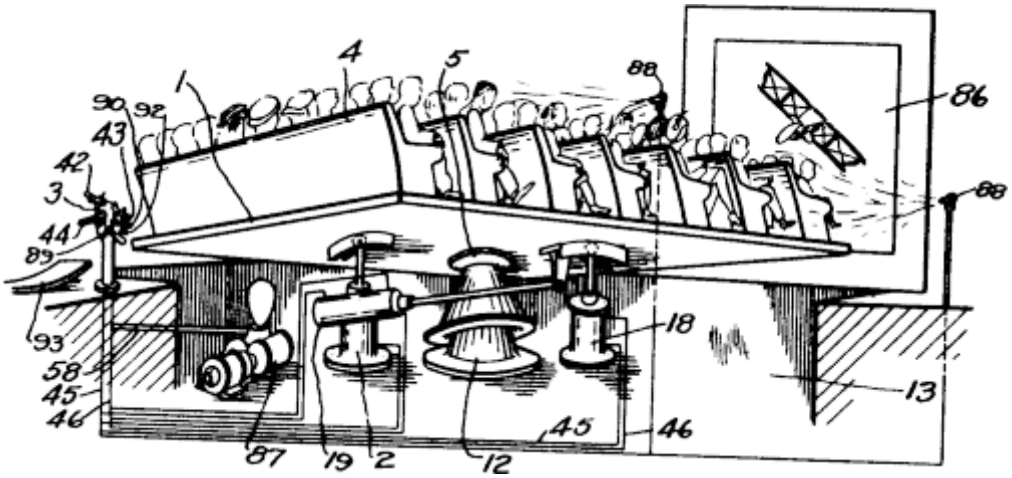


Figure 1.2 : le mécanisme sphérique proposé en 1928 par J.E. Gwinnett

Les premiers manipulateurs parallèles construits sont un simulateur de vol [**Stewart 65**] et une machine pour tester les pneus [**Gough 62**]. En 1947, Gough a établi les principes de base d'un mécanisme (Figure 1.4) permettant de positionner et d'orienter une plate-forme mobile dans le but de tester l'usure de pneumatiques, machine dont il a construit un prototype en 1955 **[Gough 62]**.

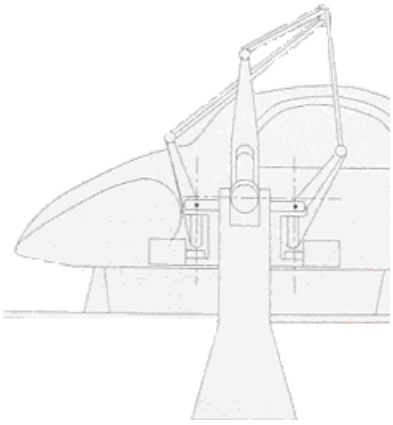


Figure 1.3: Mécanisme de Pollard (1942)

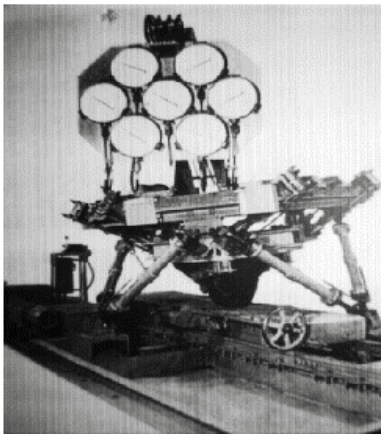


Figure 1.4 : Plate-forme de Gough-Stewart

La première machine-outil à architecture cinématique parallèle (Parallel Kinematic Machine) date de 1994 avec la Variax de Giddings & Lewis (Figure 1.5). C'est une fraiseuse qui possède une structure parallèle du même type que celle de la plate-forme de Gough. Nous appellerons les machines de ce type « Hexapodes ». D'après son constructeur, outre le fait

que la machine possède 6 degrés de liberté, elle serait 5 fois plus rigide qu'une machine classique et aurait des vitesses d'avance bien supérieures.

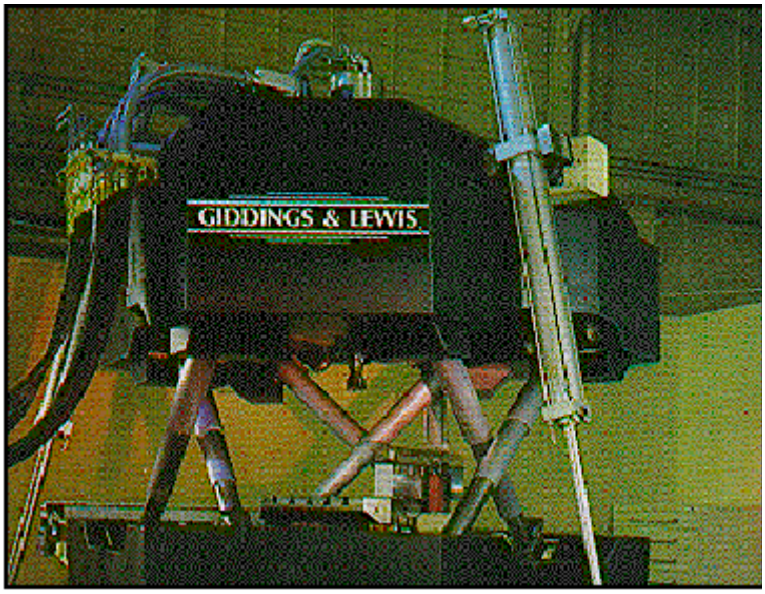


Figure 1.5 : Machine Variax

Outre l'hexapode, une autre architecture célèbre est celle du robot Delta [**Bonev 01**]. C'est au début des années 1980 que ce robot a été inventé par Clavel. Ce robot consiste en trois parallélogrammes liant la base à la nacelle (la plate-forme mobile) qui ne se déplace que selon trois translations (Figure 1.6). Plusieurs sociétés ont construit ce robot et plus de 4000 robots Delta ont été vendus [**Bonev 07**]. Depuis plusieurs manipulateurs ayant une architecture proche du Delta ont été construites et commercialisées comme par exemple le robot Par4. Ce robot destiné à la manutention a été conçu récemment par l'équipe de François Pierrot du LIRMM qui s'est associé à Fatronik, un centre de recherche appliquée du Pays Basque. Ce robot est basé sur le principe des parallélogrammes, et est caractérisé par l'utilisation d'une nacelle articulée et de quatre pattes identiques à celles du robot Delta. Baptisé Quattro, ce robot est destiné à toutes les applications de manutention (Figure 1.7).

Aujourd'hui, on trouve de nombreuses utilisations des mécanismes parallèles dans l'industrie : pick-and-place, simulateurs de vol, machines-outils, micro-positionnement, etc. Alors que la majorité des applications commerciales reposent sur deux architectures célèbres, la plate-forme de Gough-Stewart et le robot Delta.

Enfin, il est important de mentionner que l'état de l'art sur la présentation et l'étude des manipulateurs parallèles est un sujet vaste qui nécessite plus qu'un chapitre. Ce sujet est bien approfondi dans [**Merlet 05**, **Bonev 07** et **Angeles 07**].

Figure 1.6 : Le FlexPicker (ABB)

Figure 1.7 : Le Quattro (Adept Technology)

Dans la suite nous présentons brièvement dans le paragraphe 2, une classification des architectures parallèles ainsi qu'une comparaison entre les robots parallèles et sériels. Dans le paragraphe 3, nous présentons des notions en robotique parallèle nécessaires pour la compréhension des chapitres consacrés à l'étude géométrique et cinématique de ces robots. Un état de l'art sur les méthodes utilisées pour la modélisation dynamique sera présenté en particulier dans le chapitre 5. Ce chapitre est consacré à la modélisation dynamique des manipulateurs à mobilités restreintes.

2. CLASSIFICATION DES ARCHITECTURES PARALLELES

Parmi les multiples configurations possibles des architectures des PKMs, une première distinction entre architectures pleinement parallèles, hybrides et redondantes doit être faite.

2.1. MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLELES

Un manipulateur pleinement parallèle (Figure 1.8) est composé d'une plate-forme mobile liée à la base par plusieurs chaînes cinématiques. Le nombre de chaînes est strictement égal au nombre de degrés de liberté de la plate-forme mobile d'une façon que chaque chaîne est contrôlée par un seul actionneur.

Figure 1.8 : Mécanisme pleinement parallèle de type Hexapode

Un manipulateur pleinement parallèle est symétrique s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- Le type et le nombre des articulations dans chaque chaîne sont arrangés d'une façon identique,
- L'emplacement de l'articulation actionnée est le même dans chaque chaîne.

2.2. MANIPULATEURS HYBRIDES

Une architecture hybride peut exister sous différentes formes, ainsi un manipulateur hybride peut être constitué d'une multitude de manipulateurs parallèles connectés en série comme c'est la cas du robot LX4 de Logabex (Figure 1.9) constitué d'un empilement de structures du type Gough-Stewart [**Charentus 89**]. Une architecture hybride peut être composée de l'association en série d'un manipulateur à architecture parallèle et d'un autre à architecture sérielle, comme c'est le cas du robot de Chen [**Chen 94**] constitué d'un porteur parallèle de type Stewart combiné à un effecteur de type série (Figure 1.10). Elle peut aussi exister sous la forme d'une architecture de type main droite - main gauche, où deux robots distincts, l'un d'architecture parallèle et l'autre sérielle, se partagent les degrés de liberté. Sur les machines-outils, cette configuration permet d'orienter la pièce à usiner d'une part et de translater l'outil d'autre part comme pour la machine Verne construite par Fatronik (Figure 1.11). Cette machine destinée à l'usinage à grande vitesse sera étudiée en détail dans cette thèse. Ces architectures hybrides bénéficient d'un grand espace de travail, caractéristique propre aux mécanismes sériels, et des bonnes performances des manipulateurs parallèles en termes de rigidité et de dynamique.

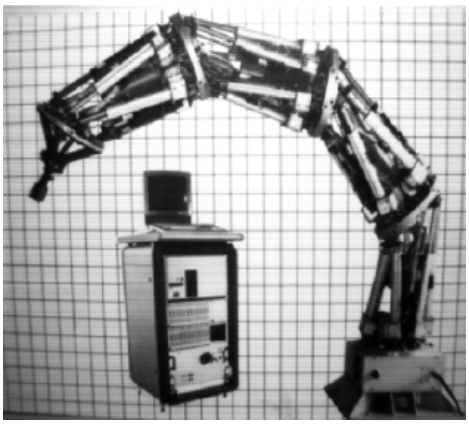


Figure 1.9 : Le robot LX4 de Logabex

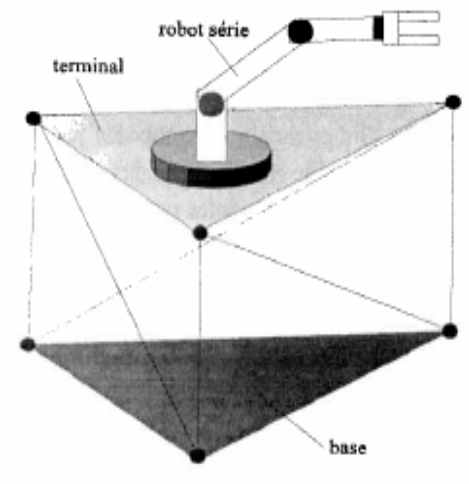


Figure 1.10: Le robot proposé par Chen

Figure 1.11 : La machine Verne construite par Fatronik pour l'IRCCyN

2.3. MANIPULATEURS REDONDANTS

Il existe trois sortes de redondance pour les mécanismes parallèles [**Pierrot 02**] :

- La redondance d'actionnement correspond aux manipulateurs qui possèdent plus de moteurs que de degrés de liberté. Les moteurs sont agencés de manière à pouvoir générer des efforts internes au mécanisme, et ne produisent pas d'effet sur l'organe terminal, comme pour le robot Archi représenté sur la Figure 1.12. Ce robot suractionné possède quatre moteurs pour trois degrés de liberté. Ce concept de redondance est utile pour éliminer les positions singulières.

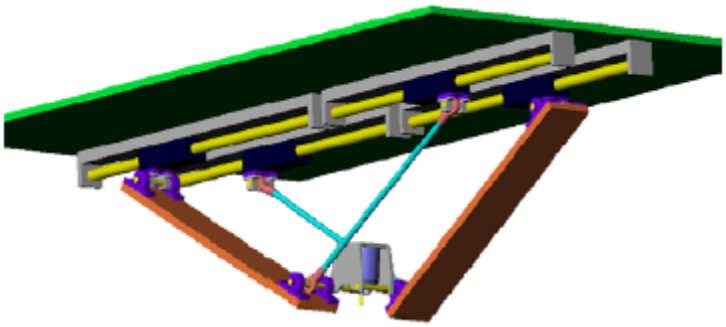


Figure 1.12 : Le robot Archi

- La redondance cinématique signifie qu'à une vitesse donnée de la plate-forme mobile correspond une infinité de vitesses pour les moteurs. Ainsi au moins une des jambes du robot est un générateur de mouvement avec un nombre de degré de libertés plus grand que nécessaire, comme pour le robot double Tripod de Merkle représenté sur la Figure 1. 13. Chacune de ces deux jambes possèdent trois actionneurs déplaçant les points P_1 et P_2 dans l'espace et contrôlant ainsi la rotation de l'organe terminal autour de son axe. Ce concept de redondance peut être utilisé pour augmenter l'espace de travail et éviter le passage par des singularités [**Merlet 05**].
- La redondance de mesure est obtenue lorsque le nombre des capteurs est plus grand que les nombres des liaisons actionnées. Ce concept de redondance joue un rôle important dans la résolution du modèle géométrique direct, la réduction de l'erreur de positionnement et le calibrage des robots.

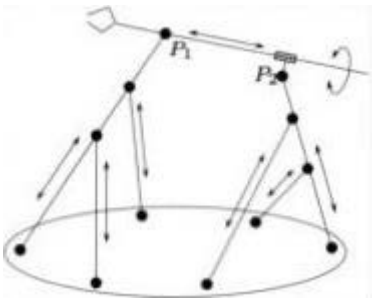


Figure 1. 13: Le robot double Tripod de Merkle [Merlet 05]

2.4. Les Differents Types de Mouvement des Manipulateurs Paralleles

Un grand nombre de manipulateurs d'architecture parallèle peut être obtenu en faisant varier le nombre et la topologie des chaînes cinématiques du manipulateur. Nous distinguons dans cette thèse les manipulateurs plans et les manipulateurs sphériques fonctionnant dans un

espace à trois ddls et les manipulateurs spatiaux fonctionnant dans un espace à six ddls [**Tsai 99**].

2.4.1. Manipulateurs plans

Un manipulateur plan est constitué généralement d'une plate-forme, comportant deux ou trois degrés de liberté (ddl) dont deux translations (2T) et une rotation (1R) autour de la normale au plan. La Figure 1.14 représente un manipulateur à architecture plane de type 3-R<u>P</u>R ayant trois ddls [**Mazen 07**]. Il existe de nombreuses autres architectures générant le même mouvement en jouant sur les articulations R et P dans les trois jambes [**Bonev 02**]

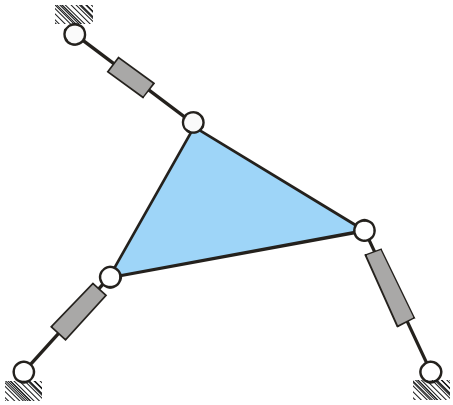


Figure 1.14: Manipulateur plan de type 3 R<u>P</u>R

2.4.2. Manipulateurs sphériques

Les manipulateurs sphériques permettent trois rotations autour d'un point fixe comme par exemple le module parallèle du robot anguille et le manipulateur Agile Eye développé par l'Université de Laval (Figure 1.15). Il existe de nombreuses autres façons d'obtenir un manipulateur sphérique, comme par exemple en utilisant une jambe passive contraignant le mouvement [**Merlet 05**]. Le robot anguille développé par l'IRCCyN est constitué de 12 modules parallèles, chaque module a une structure sphérique avec trois ddls en orientation [**Chablat 05**], la Figure 1.15 montre deux modules de la structure.

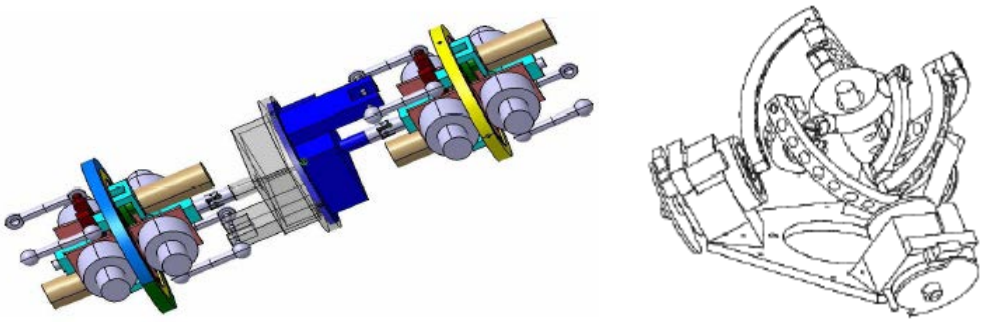


Figure 1.15 : Manipulateurs sphériques (à gauche) deux modules parallèles du robot Anguille et (à droite) le robot Agile Eye

2.4.3. Manipulateurs spatiaux

Les manipulateurs spatiaux sont constitués d'une plate forme et d'une base qui sont reliées entre elles par des chaînes cinématiques transmettant de trois à six degrés de liberté à la plate forme. Nous pouvons distinguer les manipulateurs à trois ddls de translation, les manipulateurs à ddls complexes, les manipulateurs couplant l'orientation à la translation et les manipulateurs découplés.

2.4.3.1. Manipulateurs à trois ddls de translation

Un exemple de manipulateur à trois ddls de translation est le manipulateur 3-U<u>P</u>U proposé par Tsai (Figure 1.16). Ce manipulateur est composé d'une plate-forme mobile et d'une base fixe, les deux sont reliées par trois jambes identiques composées chacune d'une articulation cardan (U), d'une articulation prismatique (P) motorisée et d'une autre articulation cardan (U) attachée à la plate-forme. Les axes des liaisons cardan liées à la base sont parallèles à ceux liées à la plate-forme de la même chaîne. Ce manipulateur sera étudié dans cette thèse.

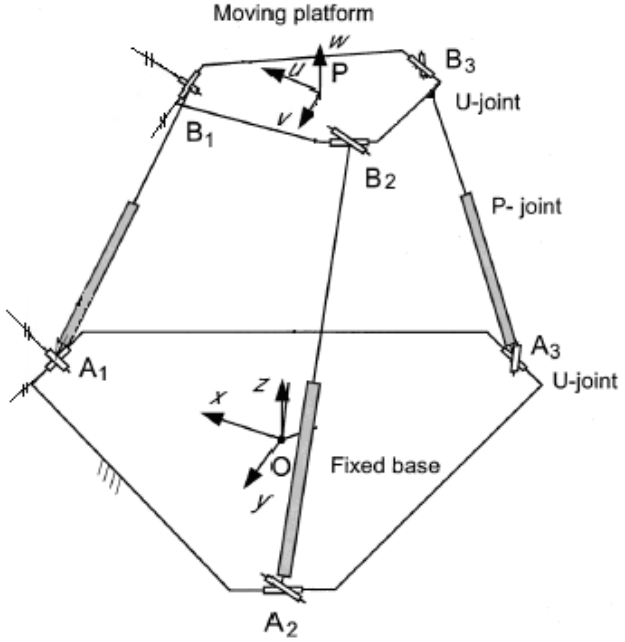


Figure 1.16 : le manipulateur 3-UPU à 3 ddls de translations

2.4.3.2. Manipulateurs à ddl complexes sont

Les manipulateurs à degrés de liberté complexes possèdent des degrés de liberté en orientation et en translation dépendant les uns des autres. Un exemple de ce type de manipulateurs est le robot 3-R<u>P</u>S proposé par Hunt [**Hunt 83**]. Les paramètres d'orientation et de position de ce robot sont au nombre de six, cependant seulement trois sont indépendants (Figure 1.17).

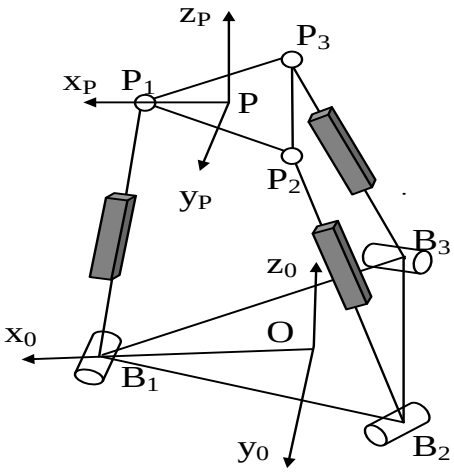


Figure 1.17 : le robot 3 R<u>P</u>S

2.4.3.3. Manipulateurs couplés

La plupart des manipulateurs sont munis d'actionneurs qui jouent un rôle à la fois sur la position et l'orientation de la plate-forme mobile. Le manipulateur SMG, générateur du mouvement de Schönflies proposé par Angeles [**Angeles 06**] et illustré dans la Figure 1.18 en constitue un exemple. Ce manipulateur possède quatre ddls, à savoir, trois translations indépendantes et une rotation autour d'un axe de direction fixe. D'autres manipulateurs existent à quatre, cinq et six degrés de libertés.

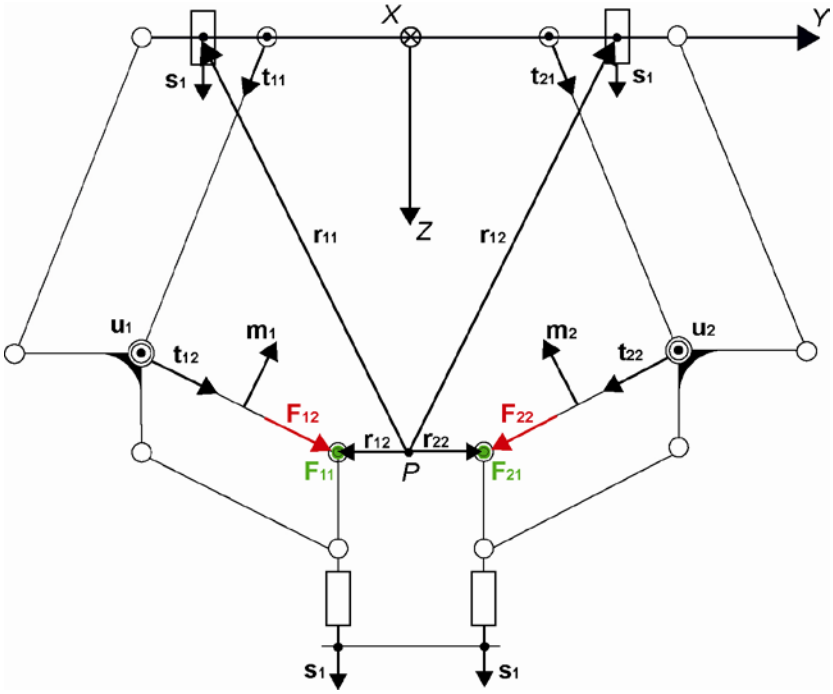


Figure 1.18 : le robot SMG de l'Université de McGill

2.4.3.4. Manipulateurs découplés

Un manipulateur partiellement découplé possède des actionneurs qui commandent les translations et d'autres qui commandent les orientations [**Merlet 05**]. Une architecture présentant cette caractéristique a été proposée par Innocenti et illustré dans la Figure 1.19. On peut remarquer qu'il y a trois segments qui partagent une rotule commune. Ainsi la modification des longueurs de ces segments permet de commander la position du centre de cette rotule. La commande de la longueur des trois segments restants permet alors de générer les rotations de la plate-forme mobile autour de cette rotule [**Innocenti 91**]. Un manipulateur est complètement découplé si chaque degré de liberté est commandé par un actionneur. Pour plus de détails sur les robots découplés, le lecteur peut se reporter à [**Gogu 08**].

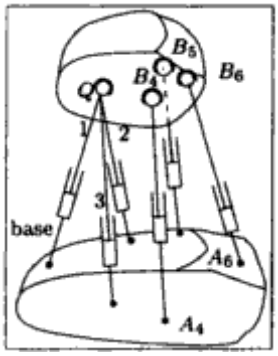


Figure 1.19 : Le robot d'Innocenti

2.5. LES MACHINES A ARCHITECTURE PARALLELES

Les machines à architecture cinématique parallèle (en anglais Parallel Kinematic Machines, PKMs) sont souvent reconnues pour leur grande rigidité structurelle, leur meilleure rapport charge utile / poids, leurs performances dynamiques élevées et leur meilleure précision [**Merlet 05**, **Tlusty 99** et **Wenger 99**]. Ainsi, ils sont prudemment considérés comme des architectures alternatives attirantes pour des tâches exigeantes telles que l'usinage à grande vitesse [**Weck 02**]. La plupart des PKMs existantes peuvent être classées en deux familles principales : Les PKMs de la première famille sont munies de vérins reliant la base à la plate-forme mobile tandis que les PKMs de la deuxième famille se caractérisent par des jambes de longueur fixe qui glissent sur des rails [**Chablat 03** et **Pashkevich 05**].

Dans la première famille, on distingue généralement les PKMs à six degrés de libertés appelées Hexapodes et les PKMs à trois ddls appelées Tripodes [**Hervé 91** et **Kong 02**]. Beaucoup de prototypes et de PKMs de type Hexapode existent déjà, comme la machine Hexabot de la société Hexel. Cette machine qui sert de support mobile de pièce est présentée dans la Figure 1.20. Nous pouvons aussi trouver des architectures hybrides telles que la machine Tricept de Neos Robotics [**Neumann 88**]. Cette PKM possède un poignet sériel à deux rotations monté sur un tripode à cinématique parallèle à jambes de longueur variable, avec une jambe passive (Figure 1.21).

Figure 1.20 : La machine Hexabot

Figure 1.21 : Le Tricept de Neos Robotics

Dans la deuxième famille, nous trouvons l'Hexaglide de l'ETH de Zürich dont les liaisons prismatiques sont toutes coplanaires et parallèles (Figure 1.22). L'avantage de cette architecture réside dans le fait que les moteurs sont fixes, ce qui diminue les inerties et permet l'emploi des moteurs linéaires. L'HexaM proposé par Toyoda [**Toyoama 98**] est un autre exemple avec trois paires de liaisons prismatiques parallèles montées sur un cône vertical (Figure 1.23).

Figure 1.22 : Machine Hexaglide

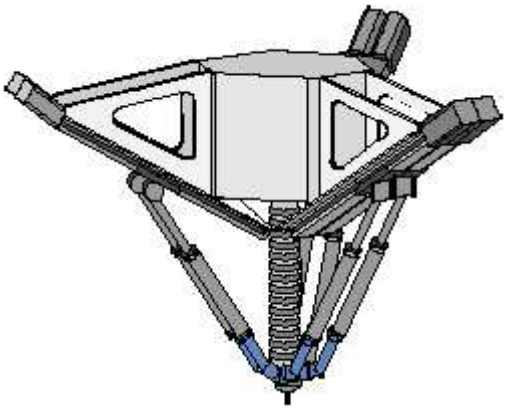


Figure 1.23 : Machine HexaM

Beaucoup de PKMs à trois axes de translation appartiennent à cette deuxième famille et reprennent une architecture proche du robot Delta linéaire [**Clavel 88**]. L'UraneSX de Renault Automation (Figure 1.24) et le Quickstep de Krause and Mauser (Figure 1.25) possèdent trois liaisons prismatiques parallèles et non-coplanaires [**Company 00**]. Une PKM hybride avec trois liaisons linéaires inclinées et un poignet de deux axes est le GeorgV de IFW (Figure 1.26).

Figure 1.24 : UraneSX

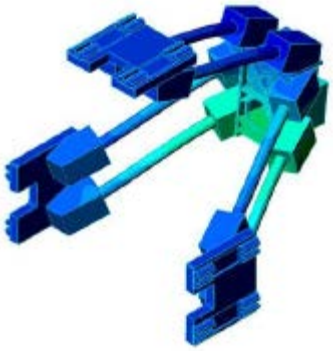


Figure 1.25 : Quickstep

Une autre PKM hybride est L'Orthoglide 5-axes présenté dans la Figure 1.27. Ce robot utilise un porteur parallèle de type Delta linéaire sur lequel est monté un poignet parallèle sphérique à 2 ddls de type Agile Eye [**Chablat 03**]. Le module parallèle assure des performances cinétostatiques homogènes dans l'espace de travail grâce à l'existence d'une configuration isotrope tandis que le poignet permet un grand espace de rotation. Ses applications principales sont l'usinage 5 axes, le soudage laser et le prototypage rapide **[Chablat 04]**. Dans une configuration isotrope, la vitesse et la rigidité statique de l'outil sont égales dans toutes les directions [**Majou 04** et **Caro 06**].

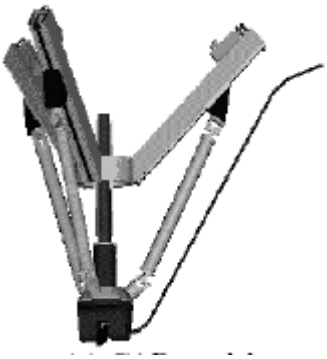


Figure 1.26 : le robot GeorgV développé par IFW

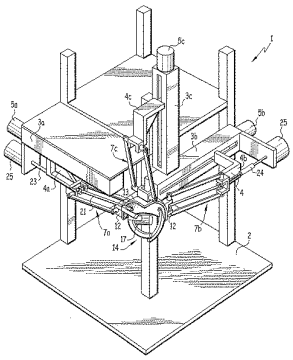


Figure 1.27 : L'Orthoglide 5 axes

Plus récemment, plusieurs équipes de recherche ont produit une famille de manipulateurs à trois degrés de liberté, isotropes dans tout l'espace de travail [**Kim 02, Kong 02, Gogu 05** et **07**]. L'isotropie est liée au conditionnement de la matrice jacobienne. Ce conditionnement est défini comme étant le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice jacobienne. Son domaine de variation est entre 1 et plus l'infini. Lorsqu'un mécanisme est en configuration singulière, le conditionnement tend vers l'infini. En configuration isotrope, il est égal à un. Ainsi, le conditionnement mesure l'uniformité de la distribution des vitesses et des efforts autour d'une configuration de l'outil mais ne permet pas de mesurer l'importance

des facteurs d'amplification ou d'effort de vitesse. Le conditionnement ne peut pas être obtenu directement pour les machines ayant des ddls de translation et de rotation à cause de la non homogénéité de la matrice jacobienne.

2.6. COMPARAISON DES PERFORMANCES DES ROBOTS SERIE ET DES PKMS

Les principaux critères de comparaison sont le volume de travail, le rapport masse transportable / masse du robot, la précision et le comportement dynamique:

- Volume de travail : Le principal défaut d'une PKM est que son domaine accessible est relativement restreint : il est dû à l'architecture parallèle, qui fait que les jambes d'une PKM se retiennent, en quelque sorte, les unes les autres, empêchant ainsi la plate-forme mobile d'accéder à un grand volume de travail par rapport a son encombrement [**Majou 04**]. L'empreinte au sol est un autre critère prépondérant pour une PKM destinée à l'industrialisation [**Company 02**]. Il dépend en partie de l'orientation spatiale du mécanisme sur lequel elle est basée. Cette orientation est choisie telle que la plate-forme mobile soit accessible par l'opérateur.
- Rapport masse transportable / masse robot : Dans l'architecture série classique, l'effecteur et l'objet manipulé se situent à l'extrémité de la chaîne mécanique articulée. Chaque actionneur doit avoir la puissance nécessaire pour mettre en mouvement non seulement l'objet, mais aussi les corps et actionneurs aval. Chaque segment du robot doit donc être dimensionné en conséquence, ce qui conduit à un faible rapport masse transportable / masse robot. Les actionneurs des PKMs se situent le plus souvent au voisinage des points d'articulation de la base, si ce n'est sur la base elle-même. Dans tous les cas, ces actionneurs agissent sans mettre en œuvre de transmissions complexes. Les segments peuvent être considérablement allégés.
- Précision et répétabilité : L'architecture même des robots de type série pose le problème de l'accumulation des erreurs, une erreur de positionnement sur chaque articulation ayant une répercussion sur la position de l'effecteur, répercussion d'autant plus importante que l'articulation est proche de la base. La mise en série des articulations implique aussi la mise en série de leurs défauts (jeux, frottements, flexion des corps...). Les PKMs ne présentent pas cet inconvénient et leur morphologie leur assure une rigidité remarquable même avec des structures mobiles très allégées.
- Comportement dynamique : Compte tenu de leur faible rapport masse transportable / masse robot et de leur structure massive, les robots de type série ont des performances

dynamiques limitées. Avec les PKMs, le fait que les actionneurs soient ramenés au voisinage des points d'articulation de la base donne des performances dynamiques appréciables. Par ailleurs, le fait de diminuer l'inertie du robot contribue à diminuer les effets de couplage dynamique entre les articulations, la commande pouvant éventuellement se contenter d'un modèle dynamique simplifié.

Mentionnons enfin que le mode de fonctionnement des robots série les rend peu aptes à fonctionner à des échelles de taille faibles [**Merlet 95**]. En effet leur principe moteur est la force inertielle qui doit dominer les forces de friction. Or cette force inertielle varie avec le carré des longueurs alors que les forces de friction sont beaucoup moins sensibles aux dimensions. Ainsi pour réaliser un micro-robot série il ne suffit pas de diviser les dimensions d'un robot série fonctionnant convenablement par le facteur de taille approprié, puisqu'à partir d'une certaine échelle les forces de friction deviendront prépondérantes. Le Tableau 1.1 synthétise les principales différences entre les manipulateurs parallèles et leurs homologues séries, ce qui revient à comparer leurs avantages et inconvénients.

	Robots Séries	**PKMs**
Structure du robot	Structure massive	Structure mobile allégée
Inertie	Elevée	Réduite
$\frac{\textbf{Volume de travail}}{\textbf{Encombrement}}$	Grande	Domaine accessible relativement restreint
$\frac{\textbf{masse transportable}}{\textbf{masse robot}}$	Faible	Très élevé
Précision et répétabilité	Problème de l'accumulation des erreurs	Rigidité remarquable
Comportement dynamique	Performances dynamiques limitées	Performances dynamiques appréciables

Tableau 1.1 : Comparatif entre Les robots séries et les PKMs

3. NOTIONS IMPORTANTES EN ROBOTIQUE PARALLELE

Des notions sur l'espace de travail, les modèles géométriques direct et inverse, et les singularités sont rappelées dans les parties suivantes. Il existe sur ce sujet plusieurs livres de référence dont : [**Merlet 05**], [**Tsai 99**], [**Angeles 07**].

3.1. MODELISATION GEOMETRIQUE

La conception et la commande des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques. Nous distinguons parmi ces modèles : les modèles géométriques direct et

inverse (MGD et MGI), qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement, les modèles cinématiques direct et inverse (MCD et MCI), qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement, les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

3.1.1. Espace articulaire et espace opérationnelle

Pour un manipulateur à n degrés de liberté, l'ensemble des variables articulaires motorisées (les entrées) notées **q** définissent la configuration articulaire tandis que l'ensemble des coordonnées opérationnelles de position et d'orientation de l'effecteur (les sorties) notées **X** définissent la configuration de la plate-forme. On définit une relation entre les variables articulaires motorisées et les coordonnées opérationnelles. Cette relation est définie par un opérateur géométrique F tel que :

$$F(\mathbf{X},\mathbf{q})=0 \qquad [1.1]$$

Nous noterons :

- EA^n l'espace articulaire lié aux articulations motorisées **q** (n est le nombre d'articulations motorisées).
- EO^m l'espace opérationnel de dimension m lié à la position et à l'orientation de l'effecteur.

3.1.2. Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse permet de trouver l'ensemble des configurations articulaires possibles pour une configuration donnée de la plate-forme mobile. Parfois, il existe plusieurs solutions au modèle géométrique inverse. Ainsi, nous associons plusieurs postures pour la même configuration de la plate-forme mobile du manipulateur. Un changement de posture revient à changer de solution du modèle géométrique inverse

La résolution du MGI ne pose généralement pas de problème. Pour calculer le MGI, nous écrivons un système d'équations non linéaires dont chaque équation est associée à une jambe du manipulateur. Chaque jambe est caractérisée par une origine A_i et une extrémité B_i. La configuration **X** de la plate-forme permet de définir la position des points extrêmes de chaque jambe. Nous pouvons ainsi écrire le MGI de chaque jambe : $A_iB_i = H(\mathbf{X})$. Ce modèle est

parfois difficile à résoudre, notamment pour les manipulateurs spatiaux et lorsque la structure de leurs jambes est complexe, nous citons à titre d'exemple le cas de la machine Verne dont l'une des jambes est différente des deux autres. Le modèle géométrique inverse de cette machine sera résolu dans le chapitre 2.

3.1.3. Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct (MGD) permet de trouver l'ensemble des configurations de la plate-forme mobile en fonction d'une configuration articulaire donnée. Il existe généralement plusieurs solutions au MGD. Il est ainsi possible d'associer plusieurs modes d'assemblage pour les mêmes configurations articulaires. Un changement de mode d'assemblage revient à changer de solution du modèle géométrique direct.

Dans la plupart des cas, l'obtention d'une solution au MGD correspond à la résolution d'un système d'équations non-linéaires ce qui est un problème complexe. La résolution du MGD est nécessaire pour compléter la boucle d'asservissement pour le système du contrôle du mouvement, c.-à-d., le MGD est nécessaire pour indiquer si le point requis dans l'espace de travail a été atteint ou pas.

Les méthodes de résolution du modèle géométrique direct des manipulateurs parallèles diffèrent suivant l'architecture du manipulateur et le type de ses articulations. Nous distinguons quatre méthodes, les méthodes analytiques, les méthodes itératives, les méthodes reposant sur l'ajout de capteurs additionnels et les méthodes utilisant les réseaux de neurones.

Il existe trois approches analytiques principales pour résoudre le MGD. La première approche consiste à formuler un système d'équations de contraintes non linéaires, puis à convertir ce système en un polynôme à une inconnue afin de le résoudre simultanément en utilisant une technique numérique comme la méthode de Newton-Raphson [**Waldron 89**], [**Liu 93**]; la deuxième approche consiste à découpler la position et l'orientation, ce qui permet de réduire la complexité du problème et d'accélérer le processus d'obtention de la solution [**Innocenti 92**]; la troisième approche utilise les quaternions pour obtenir une solution analytique pour une certaine classe de manipulateurs parallèles de type Hexapode [**Ji 01**]. Ces approches analytiques sont limitées à des architectures spéciales de manipulateurs parallèles et ne peuvent pas être appliquées à toutes sortes de manipulateurs.

Dans les approches itératives, le modèle géométrique est formulé afin qu'on puisse le résoudre en utilisant toutes les techniques numériques disponibles, comme par exemple, la

méthode de Newton-Raphson [**Dieudonne 72** et **Merlet 93**]; cependant, ces techniques numériques sont coûteuses en temps de calcul et ne garantissent pas l'obtention une solution dans un temps borné.

Une autre approche consiste à installer des capteurs supplémentaires sur le manipulateur [**Han 95** et **Tancredi 95**] dans le but d'obtenir plus d'information sur l'état du manipulateur. Ces capteurs nous permettent de résoudre facilement et rapidement le MGD mais leur coût supplémentaire limite l'intérêt de cette approche.

Une quatrième approche utilise les réseaux de neurones inspirés de la structure du cerveau humain [**Parikh 05**]. C'est un outil mathématique qui permet d'approximer les relations non –linéaires entre les vecteurs d'entrés et de sorties.

3.2. CONFIGURATIONS SINGULIERES

Les manipulateurs parallèles comportent des configurations dites singulières pour lesquelles le comportement du manipulateur se dégrade. Ces configurations peuvent se situer aussi bien à l'intérieur de l'espace de travail que sur ses frontières. Celles situées à l'intérieur de l'espace de travail sont les plus gênantes pour la génération de trajectoires puisque le manipulateur peut se bloquer dans de telles configurations. Les problèmes suivants peuvent aussi survenir au voisinage de ces configurations singulières :

- Une augmentation importante des efforts dans les articulations qui peut endommager la structure du manipulateur;
- Une perte de rigidité du manipulateur qui peut se traduire par une instabilité de son organe terminal lorsque les articulations motorisées sont bloquées.

Pour déterminer les configurations singulières des manipulateurs parallèles, deux approches existent. La première est une méthode analytique fondée sur l'étude des matrices jacobiennes du manipulateur. La seconde est une méthode géométrique utilisant des outils de géométrie tels que la théorie des vis réciproques (Reciprocal Screw Theory), la géométrie de Grassmann et l'algèbre de Grassmann-Cayley.

3.2.1. Approche analytique

L'approche analytique repose sur le travail de Gosselin et Angeles [**Gosselin 90**], qui consiste à l'étude de l'Eq. [1.2] obtenue en différentiant l'Eq. [1.1] par rapport au temps :

$$\mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \qquad [1.2]$$

Où $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{c}}]^T$ représente le torseur cinématique de la plate-forme du manipulateur (avec $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur des vitesses de rotation et $\dot{\mathbf{c}}$ le vecteur des vitesses de déplacement), $\dot{\mathbf{q}}$ représente le vecteur des vitesses articulaires et **A** et **B** sont deux matrices jacobiennes. La matrice **A** est nommée matrice *jacobienne parallèle* et la matrice **B** matrice *jacobienne sérielle.* A partir de l'étude de ces deux matrices, Gosselin a défini trois types de configurations singulières **[Gosselin 90]**:

- Les singularités parallèles qui sont dues à la perte de rang de la matrice jacobienne parallèle **A** (lorsque Det(**A**)= 0). Dans ce cas, l'effecteur peut bouger alors que les articulations motorisées sont bloquées. Le manipulateur gagne ainsi un ou plusieurs degré(s) de liberté;
- Les singularités sérielles qui sont dues à la perte du rang de la matrice jacobienne sérielle **B**. Dans ce cas, certains déplacements de l'effecteur ne peuvent pas être réalisés et le manipulateur perd un ou plusieurs degré(s) de liberté. Les singularités sérielles représentent aussi les limites de l'espace de travail du manipulateur;
- Les singularités parallèles/sérielles qui sont dues à la perte de rang simultanée de **A** et **B**. Dans ce cas, il est possible de déplacer de manière infinitésimale l'effecteur alors que les articulations motorisées sont bloquées et inversement;

Il existe un autre type de singularités, les *singularités structurelles*, qui apparaissent pour des dimensions particulières des manipulateurs. Dans ce cas, pour des configurations articulaires particulières, le modèle géométrique direct admet une infinité de solutions c-à-d une infinité de configurations pour la plate-forme mobile.

La Figure 1.1 présente respectivement de gauche à droite des configurations singulières parallèle, sérielle et structurelle d'un manipulateur à 5 barres.

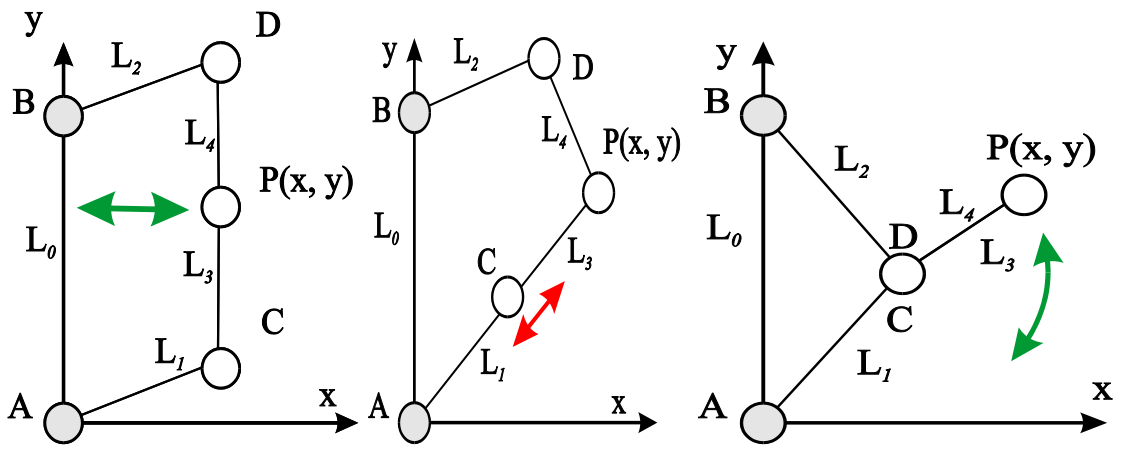


Figure 1.28 : Mécanisme à 5 barres en configurations singulières parallèle, sérielle et structurelle respectivement de gauche à droite.

De nombreuses études utilisent les matrices jacobiennes cinématiques pour déterminer les singularités des manipulateurs parallèles. Parmi celles-ci, nous pouvons citer [**Sefrioui 93**], [**Gosselin 95**] pour les manipulateurs plans et [**Ma 91**], [**Khalil 96**], [**Dheeman 97**] pour les manipulateurs spatiaux.

Ce formalisme [**Gosselin 90**] est souvent utilisé aujourd'hui mais, contrairement à ce qui a longtemps été admis dans le passé, il ne s'applique pas à tous les robots parallèles. En effet, certaines singularités ne peuvent pas être détectées par ce formalisme (en particulier les singularités internes et les « singularités de contraintes » pour les robots à moins de six degrés de liberté). Ces singularités se produisent quand les jambes des manipulateurs à moins de six ddls sont incapables de contraindre la plate-forme à exécuter le mouvement souhaité et en conséquence la plate-forme gagne des degrés de liberté supplémentaires rendant le manipulateur incontrôlable. D'autre part, l'écriture symbolique des matrices jacobiennes peut être très difficile en raison de la complexité des expressions. Un important travail d'analyse des singularités a été réalisé par Zlatanov [**Zlatanov 94**], où il a introduit la notion de « C-space singularity » (singularité de l'espace des configurations) qui a permis par la suite de bien comprendre le phénomène de singularité de contrainte [**Zlatanov 01**]. Plus récemment, S. Krut a proposé une méthode d'analyse des singularités adaptée aux robots à trois translations et une rotation, comme le robot H4. Cette méthode permet de recenser toutes les singularités de ce type de robot [**Krut 03**] mais son extension à d'autres architectures de robots n'est pas évidente. Ces travaux ont clairement mis en évidence les limitations du formalisme de Gosselin.

3.2.2. Approche géométrique

Les limites de l'approche analytique dans la détermination des singularités ont conduit les chercheurs à utiliser des approches géométriques pour résoudre ce problème. Ainsi d'une part la théorie de vis réciproques a été utilisée pour obtenir une matrice jacobienne de dimension 6×6 permettant de détecter toutes sortes de singularités, y compris les singularités de contrainte. D'autre part, des travaux ont été menés pour identifier géométriquement les singularités parallèles en se servant de la matrice jacobienne du robot. On distingue deux méthodes : la méthode basée sur la géométrie de Grassmann et celle basée sur l'algèbre de Grassmann-Cayley.

La méthode géométrique la plus utilisée pour l'identification des singularités parallèles des manipulateurs est basée sur la géométrie de Grassmann. Cette approche fonctionne par inspection des sous-ensembles de droites, appelées variétés. Ces variétés sont associées aux différentes configurations singulières d'une structure consistant de barres liant deux corps. L'application de la géométrie de Grassmann fut commencée par le travail de Dandurand [**Dandurand 84**] en examinant la dépendance linéaire de droites. Ainsi, en représentant les jambes liant deux corps d'une structure spatiale par des droites, il a présenté une méthodologie qui permet de vérifier la rigidité de cette structure. Toutes les variétés de droites ont été spécifiées ainsi que les conditions géométriques de dégénérescence de ces variétés. Merlet a repris le travail de Dandurand et a introduit la géométrie de Grassmann dans l'étude des singularités des manipulateurs parallèles **[Merlet 89]**. Les colonnes de la transposée de la matrice jacobienne inverse des manipulateurs de type Gough-Stewart sont des vecteurs de Plücker des droites finies portées par les jambes de ces manipulateurs. Ensuite d'autres chercheurs ont défini les conditions pour lesquelles les singularités peuvent être associées à la dépendance des droites finies dans l'espace [**Hao 98**], permettant ainsi d'appliquer la géométrie de Grassmann. Ces droites sont des torseurs statiques d'actionnement qui décrivent les forces instantanées appliquées par les actionneurs sur la plate-forme mobile. En conséquence une matrice jacobienne inverse formée de six vecteurs de Plücker dégénère lorsqu'un sous ensemble de n vecteurs de Plücker engendre une variété de dimension $m < n$.

Les variétés dégénérées de six vecteurs de Plücker, $\mathbf{F_i}$ (i=1..6) sont présentées en détail dans [**Dandurand 84**, **Merlet 89** et **Hao 98**].

La méthode basée sur l'algèbre de Grassmann-Cayley fonctionne d'une manière similaire à celle basée sur la géométrie de Grassmann mais en traduisant des conditions géométriques

spécifiques aux classes des manipulateurs étudiés. Dans cette méthode, le déterminant d'une matrice jacobienne constituée des vecteurs de Plücker est décomposé en une expression algébrique invariante. Cette expression est simplifiée selon l'architecture de la classe des manipulateurs étudiés en utilisant les propriétés du déterminant. L'expression finale est factorisée en utilisant les opérateurs de l'algèbre de Grassmann-Cayley pour obtenir une condition géométrique d'existence des singularités parallèles. Cette méthode présentée en détail dans le chapitre 4 est utilisée pour l'étude des singularités parallèles des manipulateurs à mobilités restreintes.

3.3. ESPACE DE TRAVAIL

L'espace de travail *W* définit l'ensemble des configurations accessibles de la plate-forme mobile. Il se caractérise par l'ensemble des positions et orientations accessibles par un repère lié à la plate-forme mobile.

L'espace de travail est un outil précieux pour différentes applications en robotique, il est utilisé pour analyser les performances des robots manipulateurs, pour la conception optimale de manipulateurs, pour le choix de morphologie en fonction d'une tâche déterminée, pour la préparation hors ligne des trajectoires, etc…

3.3.1. Espace de travail et représentation

L'espace de travail dépend de la morphologie et des paramètres géométriques du manipulateur parallèle. Ainsi il peut avoir des formes très variées et en général complexes. Il peut être restreint par les singularités d'une part et les butées articulaires d'autre part.

Pour un manipulateur parallèle à six degrés de liberté. La position et l'orientation du repère lié à la plate-forme mobile sont généralement dépendantes. Ainsi, la représentation de l'espace de travail est un volume de dimension six pour lequel il n'existe pas d'illustration possible. On ne peut donc que représenter des sous ensembles de l'espace de travail.

3.3.1.1. Les différents type d'espace de travail

Les différents types d'espace de travail repris de [**Merlet 05**] sont :

- Espace de travail à orientation constante ou espace de travail à translation est l'ensemble des positions du point de référence du manipulateur atteignable lorsque l'orientation de la plate-forme est fixe;

- Espace de travail à orientation ou espace de travail à centre fixe est l'ensemble des rotations possibles autour du point de référence lorsque celui occupe une position fixe dans le repère absolu.
- Espace de travail maximal, défini comme l'ensemble des positions du point de référence qui peuvent être atteintes avec au moins une orientation de la plate-forme.
- Espace de travail pour un intervalle d'orientation, défini comme l'ensemble des positions du point de référence qui peuvent être atteintes avec au moins une orientation dans un intervalle donné. L'espace maximal est un cas particulier de l'espace pour un intervalle d'orientation défini entre 0 et 2π.
- Espace de travail total pour un intervalle d'orientation est l'ensemble des positions du point de référence qui peuvent être atteintes avec toutes les orientations dans un intervalle donné.
- L'espace de travail dextre est l'ensemble des positions du point de référence pour lesquelles toutes les orientations sont permises. L'espace de travail dextre est un cas particulier de l'espace total pour un intervalle d'orientation défini entre 0 et 2π.
- L'espace de travail à orientation réduite est l'ensemble des positions du point de référence qui peuvent être atteintes pour un sous-ensemble des orientations définies dans un intervalle donné, et où les autres orientations peuvent avoir des valeurs arbitraires. Cet espace de travail est important pour les applications qui n'impliquent pas tous les degrés de liberté du robot, comme l'utilisation d'un robot à six ddls pour une application d'usinage 5-axes.

Un autre type d'espace de travail s'avère intéressant surtout dans le domaine de l'usinage:

- L'espace de travail 3-axes est l'ensemble des positions du point de référence défini dans le repère de la pièce à usiner pour lesquelles l'outil est considéré toujours perpendiculaire à la pièce. Cet espace est utile pour montrer la capacité des machines d'usinage 5-axes à usiner les mêmes pièces que celles de leurs homologues 3-axes.

3.3.2. Méthodes utilisées pour le calcul de l'espace de travail

Plusieurs méthodes ont été utilisées pour le calcul de l'espace de travail des manipulateurs parallèles, citons :

- Les méthodes algébriques [**Jo 89** et **Haugh 95**],

- les méthodes algébriques par discrétisation **[Chablat 98]**,
- les méthodes géométriques [**Merlet 00** et **Bonev 02**].

3.3.2.1. Méthodes Algébriques

Les méthodes algébriques sont plus difficiles à appliquer car elles augmentent la dimension du problème en introduisant des variables supplémentaires. Elles consistent à résoudre un problème d'optimisation en introduisant des pénalités aux frontières [**Jo 89**].

3.3.2.2. Méthode Algébriques par discrétisation

Les méthodes algébriques par discrétisation utilisent les modèles géométriques direct et inverse pour calculer l'ensemble des configurations que le manipulateur peut atteindre. Ces données sont enregistrées dans une structure hiérarchique. Nous citons à titre d'exemple les quadtrees et les octrees utilisés dans **[Chablat 98]** pour le calcul des domaines d'unicité des manipulateurs planaires et la méthode d'analyse par intervalles utilisée pour le calcul de l'espace de travail et la détermination des singularités des manipulateurs parallèles **[Merlet 01** et **Chablat 04]**. Cette méthode est coûteuse numériquement et gourmande en place mémoire mais assez facile à programmer.

3.3.2.3. Méthodes Géométriques

Les méthodes géométriques permettent de calculer rapidement la frontière de l'espace de travail. Elles peuvent intégrer les contraintes liées aux limites articulaires et des collisions entre les segments [**Merlet 05**]. Cependant, la reconstruction de l'espace de travail total est difficile. Pour certains cas comme pour le robot Delta, le calcul de l'espace de travail peut être fait directement en utilisant des logiciels de CAO (conception assisté par ordinateur) puisque l'espace de travail est équivalent à l'intersection entre des volumes simples.

4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons classifié les architectures parallèles et présenté les limites des machines-outils conventionnelles et les avantages des alternatives parallèles. La modélisation géométrique, l'espace de travail et les singularités des manipulateurs parallèles ont été exposés. Différentes propriétés caractérisant ces manipulateurs et des notions importantes en robotique ont été évoquées.

L'un des objectifs principaux de cette thèse est le développement des nouvelles méthodes de modélisation et d'analyse des PKMs à mobilités restreintes. Ces méthodes peuvent permettre de mieux appréhender les performances de ces mécanismes innovants.

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude des modèles géométriques, à l'analyse des singularités sérielles et au calcul de plusieurs types d'espace de travail de la machine Verne. Cette machine appartient à une famille des PKMs se caractérisant par des jambes de longueur fixe qui glissent sur des rails [**Chablat 03** et **Pashkevich 05**]. La résolution des modèle géométriques direct et inverse de cette machine sont très complexes et admettent plusieurs solutions Dans cette logique, nous formulons dans le chapitre 2 des expressions analytiques permettant d'identifier et de classer les différentes solutions des modèles géométriques pour enfin trouver celles qui satisfont l'utilisateur dans le temps de calcul le plus court possible. L'espace de travail actuellement utilisé est visiblement réduit par rapport à celui accessible par la machine Verne. Dans le but de mieux profiter de ses performances et augmenter sa productivité, nous développons dans le chapitre 3 une méthode pour calculer les différents types d'espace de travail accessible par cette machine.

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'étude des singularités parallèles et à la modélisation dynamique des PKMs à mobilités restreintes. Dans le chapitre 4, nous utilisons la théorie des vis réciproques combinée avec l'algèbre de Grassmann-Cayley pour obtenir les conditions géométriques d'existence des singularités parallèles de trois classes des PKMs à mobilités restreintes. Nous traduisons ces conditions sous forme vectorielle. Pour la machine Verne en particulier, nous vérifions l'absence des singularités parallèles dans son espace de travail. Dans le chapitre 5, nous généralisons l'application de la méthode proposée dans [**Khalil 06, Ibrahim 06**] pour la modélisation dynamique des robots parallèles. Nous modifions les dimensions des matrices jacobiennes utilisées dans ces modèles pour obtenir des matrices de dimension 6×6. L'obtention des matrices de telle dimension est systématique et nous permet d'obtenir une forme compacte et générale du modèle dynamique valable pour tous les manipulateurs sans se soucier de leurs degrés de liberté ou de leurs mobilités. Cette démarche nous permet de traiter le problème dynamique de la machine Verne. Nous appliquons aussi cette méthode sur deux autres robots à mobilités restreintes.

CHAPITRE 2

MODELISATION GEOMETRIQUE ET ANALYSE DES SINGULARITES SERIELLES DE LA MACHINE VERNE

1. INTRODUCTION

Beaucoup de tâches industrielles exigent moins de six degrés de liberté, plusieurs PKMs à mobilités restreintes ont été développées [**Kim 03**]. Pour certaines d'entre elles, comme le manipulateur 3-RPS [**Kim 03**] et le module parallèle de la machine Verne, la réduction du nombre de ddl peut conduire à un mouvement complexe associé à la plate-forme mobile. Certains chercheurs ont contribué à l'étude géométrique des PKMs à mobilités restreintes. Ils se sont concentrés sur la résolution de ces modèles par des méthodes analytiques et numériques [**Liu 01** et **Nair 94**]. La modélisation géométrique de ces PKMs doit être faite cas par cas selon leur structure.

Figure 2.1 : Vue d'ensemble de la machine Verne

Dans ce chapitre, nous calculons les modèles géométriques inverse et direct de la machine Verne et nous obtenons des solutions sous forme symbolique. La machine Verne est une machine-outil à 5 axes développée par Fatronik pour l'IRCCyN [**Martin 06** et **Terrier 05**]. Sa structure est de type main droite-main gauche (structure arborescente à deux branches). L'une des branches de l'arborescence, le porte-outil, est un mécanisme parallèle alors que la seconde, le porte-pièce, est un mécanisme sériel comme indiqué dans la Figure

2.1. Le module parallèle déplace l'outil principalement en translation pendant que la table tilting est utilisée pour tourner la pièce autour de deux axes qui reste toujours orthogonaux.

Le but de ce chapitre est de formuler des expressions symboliques pour trouver toutes les solutions possibles aux modèles géométriques inverse et direct de la machine Verne. Puis nous identifions et nous classons ces solutions pour trouver celles qui satisfont l'utilisateur.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : le paragraphe suivant décrit la machine Verne. Dans le paragraphe 3, nous calculons les modèles géométriques direct et inverse du module parallèle de la machine Verne ainsi que les singularités sérielles de ce manipulateur. Dans le paragraphe 4, les méthodes présentées dans le paragraphe 3 sont étendues pour être appliquées à la machine Verne.

2. DESCRIPTION DE LA MACHINE VERNE

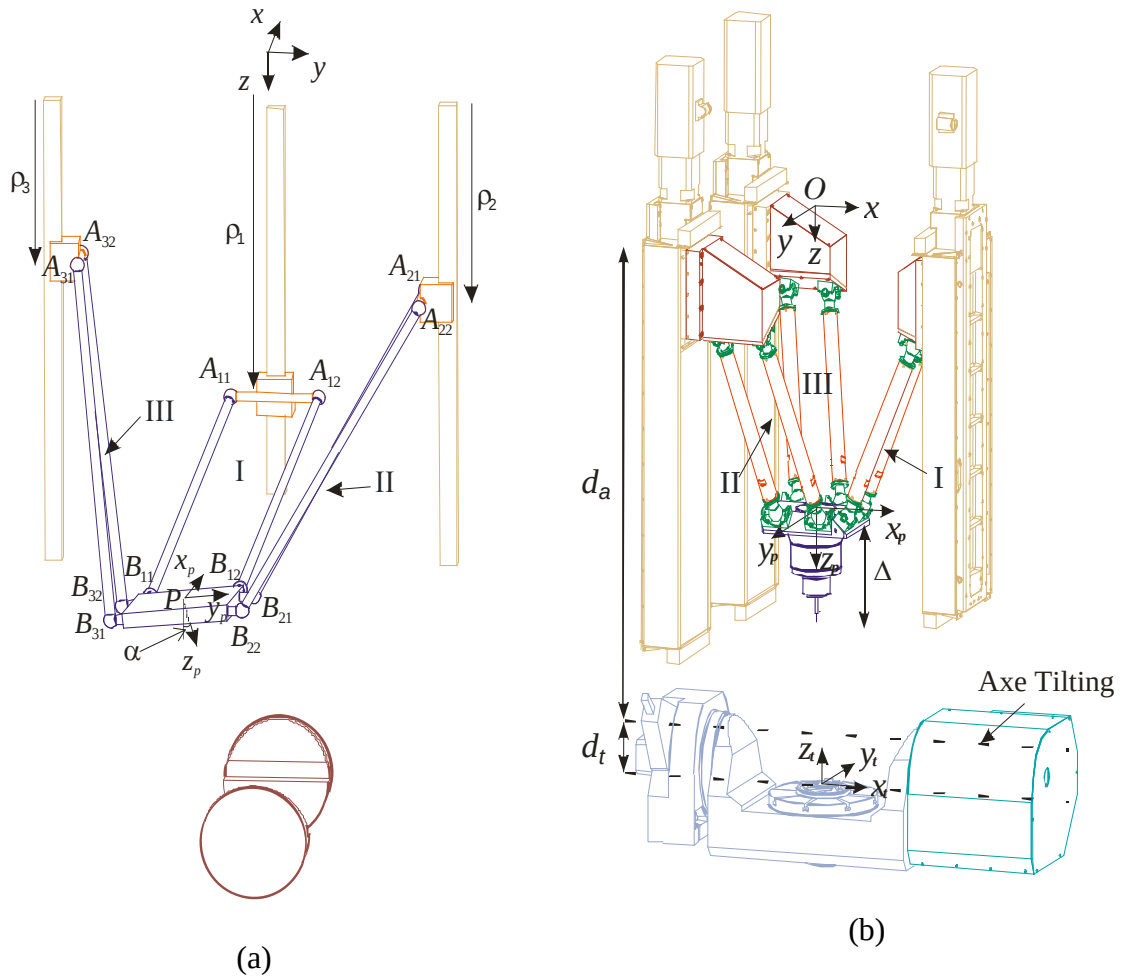


Figure 2.2 : Représentation schématique de la machine Verne; (a) la représentation simplifiée et (b) la représentation CAO fournie par Fatronik

La machine Verne est constituée d'un module parallèle et d'une table tilting comme indiqué dans la Figure 2.2. Le module parallèle est composé de trois chaînes cinématiques, I, II et III. Chaque chaîne utilise deux paires de segments liant une liaison prismatique à la plate-forme mobile par l'intermédiaire de deux paires de liaisons sphériques. Les chaînes II et III sont deux parallélogrammes identiques. Cependant, la chaîne I diffère des deux autres chaînes car la distance $A_{11}A_{12} \neq B_{11}B_{12}$. Par suite, la chaîne I ne reste pas planaire (les directions des segments définissent des lignes gauches) durant le mouvement de la machine, contrairement aux deux autres chaînes qui sont des parallélogrammes articulés. Le mouvement de la plate-forme mobile est produit par trois actionneurs prismatiques d'axe parallèle.

En raison de l'arrangement des liens et des liaisons, les chaînes II et III empêchent la plate-forme de tourner autour des axes y et z (voir la Figure 2.2). la chaîne I empêche la plate-forme de tourner autour de l'axe z (Figure 2.2). A cause de la forme irrégulière de la chaine I, cependant, une rotation parasite α autour de l'axe x existe comme indiqué sur la Figure 2.2a. En conséquence, le manipulateur exécute un mouvement complexe défini comme une combinaison simultanée de translation et de rotation. Ce mouvement complique la modélisation géométrique de la machine Verne. Son impact sur l'espace de travail sera examiné dans le chapitre 3. La table tilting est utilisée pour orienter la pièce autour de deux axes orthogonaux. Le premier est horizontal et le deuxième est toujours perpendiculaire à la table tilting. Cette machine prend plein avantage de ces deux axes supplémentaires pour ajuster l'orientation de l'outil par rapport à la pièce.

3. MODELES GEOMETRIQUES DU MODULE PARALLELE

3.1. LES EQUATIONS GEOMETRIQUES

Pour calculer les équations géométriques du module parallèle de la machine Verne, deux repères sont définis comme indiqué dans la Figure 2.2a. Un repère Cartésien, $R_b = (O, \mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z})$, est fixé à la base de la machine-outil, tel que l'axe z pointe vers le bas suivant la direction verticale. Un repère Cartésien mobile, $R_{pl} = (P, \mathrm{x_P},\ \mathrm{y_P},\ \mathrm{z_P})$, est attaché à la plate-forme mobile au point *P*. Dans tout système mécanique sous contraintes, les liaisons qui lient ses différents corps restreignent leur mouvement relatif et imposent des contraintes sur les coordonnées généralisées. Les contraintes géométriques sont formulées sous forme d'expressions algébriques dépendantes des coordonnées généralisées.

Définissons la matrice de transformation, ${}^{\mathbf{b}}\mathbf{T}_{\mathbf{pl}}$, qui ramène le repère Cartésien fixe, R_b, au repère Cartésien mobile R_{pl}, lié à la plate-forme mobile :

$$ {}^{\mathbf{b}}\mathbf{T}_{\mathbf{pl}} = \mathbf{Trans}\left(x_p,\ y_p,\ z_p\right)\mathbf{Rot}\left(x,\ \alpha\right) \qquad [2.1] $$

Nous utilisons cette matrice de transformation pour exprimer B_{ij} en fonction de x_p, y_p, z_p et α en utilisant la relation $B_{ij} = {}^{\mathbf{b}}\mathbf{T}_{\mathbf{pl}}\,{}^{pl}B_{ij}$ où ${}^{pl}B_{ij}$ représente le point B_{ij} exprimé dans le repère R_{pl}.

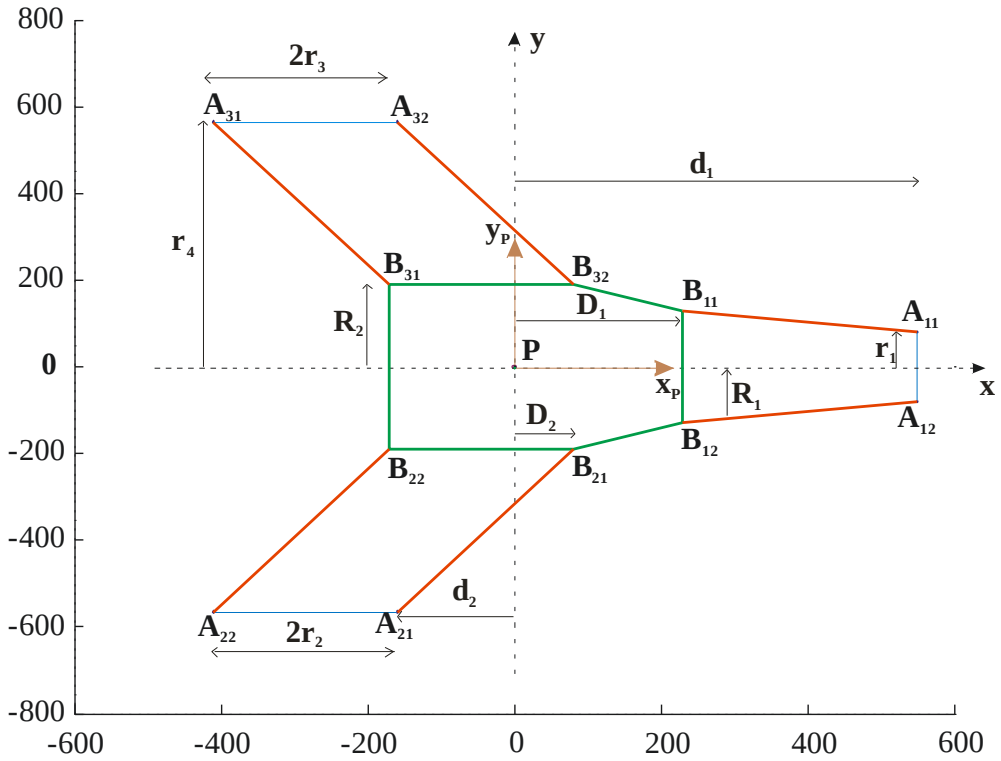


Figure 2.3 : Les dimensions de l'architecture parallèle dans le repère fourni par Fatronik

En utilisant les paramètres définis dans les Figues 2.2 et 2.3, les équations de contrainte du manipulateur parallèle sont exprimées comme:

$$ \left\|\mathrm{A_{ij}B_{ij}}\right\|^2 - L_i^2 = \left(x_{Bij} - x_{Aij}\right)^2 + \left(y_{Bij} - y_{Aij}\right)^2 + \left(z_{Bij} - z_{Aij}\right)^2 - L_i^2 = 0 \ \left(i = 1,\ 2,\ 3,\ j = 1,\ 2\right) \qquad [2.2] $$

La chaîne I est représentée par deux Eqs. [2.3a-2.3b]. Cela est dû au fait que $\mathrm{A_{11}A_{12}} \neq \mathrm{B_{11}B_{12}}$ (Figure 2.3).

$$ \left(x_P + D_1 - d_1\right)^2 + \left(y_P + R_1\cos(\alpha) - r_1\right)^2 + \left(z_P + R_1\sin(\alpha) - \rho_1\right)^2 - L_1^2 = 0 \qquad [2.3a] $$

$$ \left(x_P + D_1 - d_1\right)^2 + \left(y_P - R_1\cos(\alpha) + r_1\right)^2 + \left(z_P - R_1\sin(\alpha) - \rho_1\right)^2 - L_1^2 = 0 \qquad [2.3b] $$

La chaîne II est représentée par une seule Eq. [2.4].

$$\left(x_P + D_2 - d_2\right)^2 + \left(y_P - R_2\cos(\alpha) + r_4\right)^2 + \left(z_P - R_2\sin(\alpha) - \rho_2\right)^2 - L_2^2 = 0 \qquad [2.4]$$

La chaîne III est semblable à la chaîne II (Figure 2.3), est aussi représentée par une seule Eq. [2.5].

$$\left(x_P + D_2 - d_2\right)^2 + \left(y_P + R_2\cos(\alpha) - r_4\right)^2 + \left(z_P + R_2\sin(\alpha) - \rho_3\right)^2 - L_3^2 = 0 \qquad [2.5]$$

3.2. COUPLAGE ENTRE LA POSITION ET L'ORIENTATION DE LA PLATE-FORME

Le module parallèle de la machine Verne possède trois actionneurs et trois degrés de liberté. Cependant, il y a un couplage entre la position et l'orientation de la plate-forme mobile. L'objet de ce paragraphe est d'étudier la contrainte de couplage imposée par la chaîne I.

En éliminant ρ_1 des Eqs. [2.3a-2.3b], nous obtenons une relation [2.6] entre x_P, y_P et α indépendamment de z_P.

$$\begin{aligned} &R_1^2\sin^2(\alpha)\left(x_P + D_1 - d_1\right)^2 + \left(r_1^2 - 2R_1r_1\cos(\alpha) + R_1^2\right)y_P{}^2 - \\ &\quad R_1^2\sin^2(\alpha)\left(L_1^2 - \left(R_1^2 + r_1^2 - 2R_1r_1\cos(\alpha)\right)\right) = 0 \end{aligned} \qquad [2.6]$$

Nous remarquons que pour un angle α donné, Eq. [2.6] représente une ellipse [2.7]. Les dimensions de cette ellipse sont déterminées par a et b, où a est le longueur du demi-grand axe et b est le longueur du demi-petit axe.

$$\frac{\left(x_P + D_1 - d_1\right)^2}{a^2} + \frac{y_P{}^2}{b^2} = 1 \qquad [2.7]$$

$$\text{où} \begin{cases} a = \sqrt{\left(L_1^2 - \left(R_1^2 + r_1^2 - 2R_1r_1\cos(\alpha)\right)\right)} \\ b = \sqrt{\dfrac{R_1^2\sin^2(\alpha)\left(L_1^2 - \left(R_1^2 + r_1^2 - 2R_1r_1\cos(\alpha)\right)\right)}{\left(r_1^2 - 2R_1r_1\cos(\alpha) + R_1^2\right)}} \end{cases}$$

Ces ellipses définissent les lieux géométriques accessibles par le centre de la plate-forme pour une même orientation angulaire α.

3.3. MODELE GEOMETRIQUE INVERSE

Le modèle géométrique détermine les variables articulaires en fonction de la position de la plate-forme mobile. Pour le modèle géométrique inverse de notre manipulateur parallèle,

les variables opérationnelles (x_P, y_P, z_P) sont connues mais les variables articulaires ρ_i $(i = 1, 2, 3)$ et l'orientation α de la plate-forme mobile sont inconnues.

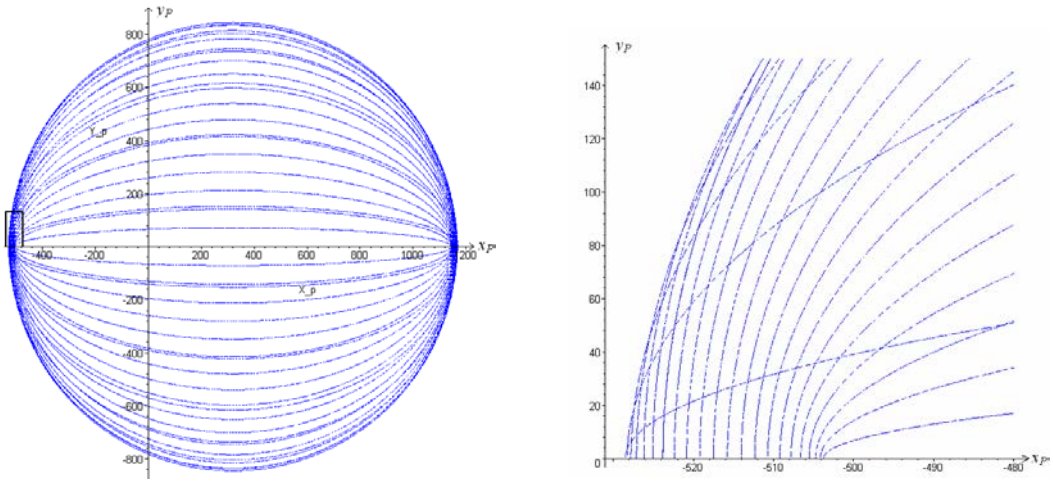


Figure 2.4 : Les courbes d'iso-valeurs de l'angle α entre $-\pi$ à $+\pi$ avec un pas constant de $2\pi/45$
(b) zoom de la zone encadrée

Pour résoudre le modèle géométrique inverse, nous trouvons en premier lieu toutes les orientations possibles α pour des valeurs prescrites de la position de la plate-forme (x_P, y_P, z_P). Ces orientations sont déterminées en résolvant l'Eq. [2.8], un polynôme de degré trois en $\cos(\alpha)$ obtenu à partir de l'Eq. [2.6].

$$p_1 \cos^3(\alpha) + p_2 \cos^2(\alpha) + p_3 \cos(\alpha) + p_4 = 0 \qquad [2.8]$$

$$\text{où} \begin{cases} p_1 = 2R_1^3 r_1 \\ p_2 = R_1^2\left(L_1^2 - R_1^2 - r_1^2\right) - R_1^2\left(x_P + D_1 - d_1\right)^2 \\ p_3 = -2R_1^3 r_1 - 2R_1 r_1 y_P^2 \\ p_4 = R_1^2\left(x_P + D_1 - d_1\right)^2 + \left(R_1^2 + r_1^2\right) y_P^2 - R_1^2\left(L_1^2 - R_1^2 - r_1^2\right) \end{cases}$$

Selon le paragraphe 3.2, cette équation représente aussi des ellipses d'iso-valeurs de α. Donc si nous traçons toutes les ellipses en variant α de $-\pi$ à $+\pi$ (Figure 2.4), nous remarquons que chaque point (défini par x_P, y_P et z_P) est obtenu par l'intersection de deux ellipses. En conséquence, chaque ellipse représente deux orientations opposées, donc chaque point peut avoir un maximum de quatre orientations différentes. Cette conclusion est vérifiée par le fait que seulement quatre solutions réelles existent pour le polynôme de l'Eq. [2.8] (Tableau 2.1).

$\begin{cases} x_P,\ y_P,\ z_P \\ y_P \neq 0 \end{cases}$	$\alpha = \{\pm\alpha_1 \text{ and } \pm\alpha_2\}$
$\begin{cases} x_P,\ y_P,\ z_P \\ y_P = 0 \end{cases}$	$\alpha = \{0,\ \pm\alpha_1,\ \pi\}$

Tableau 2.1 : Les orientations possibles pour une position fixe de la plate-forme

Après avoir trouvé toutes les orientations possibles, nous utilisons les équations obtenues dans le paragraphe 3.1 pour calculer les variables articulaires ρ_i pour chaque orientation α. Pour faciliter l'étude, nous introduisons deux nouveaux points A_1 et B_1 comme les milieux de $A_{11}A_{12}$ et $B_{11}B_{12}$, respectivement. L'équation de contrainte de ces deux points est:

$$\left(x_P + D_1 - d_1\right)^2 + {y_P}^2 + \left(z_P - \rho_1\right)^2 - \left(L_1^2 - \left(R_1^2 + r_1^2 - 2R_1 r_1 \cos(\alpha)\right)\right) = 0 \qquad [2.9]$$

Alors, pour des valeurs prescrites de la position et de l'orientation de la plate-forme, les positions des articulations prismatiques peuvent être directement calculées à partir des Eqs. [2.4], [2.9] et [2.5]:

$$\rho_1 = z_P + s_1\sqrt{\left(\left(L_1^2 - \left(R_1^2 + r_1^2 - 2R_1 r_1 \cos(\alpha)\right)\right) - \left(x_P + D_1 - d_1\right)^2 - {y_P}^2\right)} \qquad [2.10]$$

$$\rho_2 = z_P - R_2 \sin(\alpha) + s_2\sqrt{\left(L_2^2 - \left(x_P + D_2 - d_2\right)^2 - \left(y_P - R_2 \cos(\alpha) + r_4\right)^2\right)} \qquad [2.11]$$

$$\rho_3 = z_P + R_2 \sin(\alpha) + s_3\sqrt{\left(L_3^2 - \left(x_P + D_2 - d_2\right)^2 - \left(y_P + R_2 \cos(\alpha) - r_4\right)^2\right)} \qquad [2.12]$$

où $s_1,\ s_2,\ s_3 \in \{\pm 1\}$ sont les indices de configuration définis comme les signes de $\rho_1 - z_P$, $\rho_2 - z_P + R_2 \sin(\alpha)$ et $\rho_3 - z_P - R_2 \sin(\alpha)$ respectivement.

En soustrayant l'Eq. [2.3a] de l'Eq. [2.3b], nous obtenons:

$$y_P\left(R_1 \cos(\alpha) - r_1\right) = R_1 \sin(\alpha)\left(\rho_1 - z_P\right) \qquad [2.13]$$

L'équation [2.13] implique que: $sign\left(\rho_1 - z_p\right) sign\left(\sin(\alpha)\right) = sign\left(R_1 \cos(\alpha) - r_1\right) sign(y_P)$

Cela implique que pour des valeurs prescrites de la position et de l'orientation de la plate-forme, la variable articulaire ρ_1 possède une solution, sauf quand $\alpha = \{0,\ \pi\}$. Dans ce cas s_1 peut prendre les deux valeurs +1 et -1. En conséquence ρ_1 peut prendre deux valeurs quand $\alpha = \{0,\ \pi\}$.

$\alpha = \{0,\ \pi\}$	$s_1 = \pm 1$
$\begin{cases} R_1 \cos(\alpha) = r_1 \\ y_p = 0 \text{ avec } \alpha \neq 0 \end{cases}$	$\rho_1 = z_p$
autres	$s_1 = +1$ or -1

Tableau 2.2 : Les solutions de la variable articulaire ρ_1 d'après les valeurs de α

En observant les Eqs. [2.10], [2.11], [2.12], et les tableaux 2.1 et 2.2, nous en concluons qu'il y a quatre solutions pour la chaîne I et deux solutions pour les chaînes II et III. Donc il existe seize solutions au modèle géométrique inverse du module parallèle (Figure 2.5). Parmi ces seize solutions théoriques, une seule est utilisée par la machine Verne: celle ci est représentée par le cas (m) dans la Figure 2.5 qui est caractérisé par le fait que chaque chaîne doit avoir ces deux segments montés au dessus de la plate-forme mobile, c.-à-d. $s_i = -1$ (rappelons que l'axe z est pointé vers le bas).

Parmi les 15 solutions restantes, les configurations ont soit les deux segments de la chaîne I qui se croisent, soit l'une des articulations prismatiques qui dépasse ses limites. La plupart de ces solutions sont caractérisées par le fait qu'au moins l'une des chaînes a ses points d'attache à la base au-dessous de ses points d'attache à la plate-forme mobile. En conséquence, seules les valeurs correspondant à $s_1,\ s_2,\ s_3\ = -1$ dans les Eqs. [2.10-2.12] doivent être sélectionnées (rappelons que l'axe z est pointé vers le bas). Pour prévenir le croisement des segments, nous ajoutons une condition sur l'orientation de la plate-forme mobile. Cette condition est $R_1 \cos(\alpha) > r_1$. Finalement, nous vérifions les courses des articulations prismatiques aussi bien que les singularités sérielles calculées dans le paragraphe 3.5. Pour le module parallèle de la machine Verne, l'application des conditions ci-dessus, implique toujours l'obtention d'une solution unique dans l'espace de travail de la machine (solution (m) présentée dans la Figure 2.5).

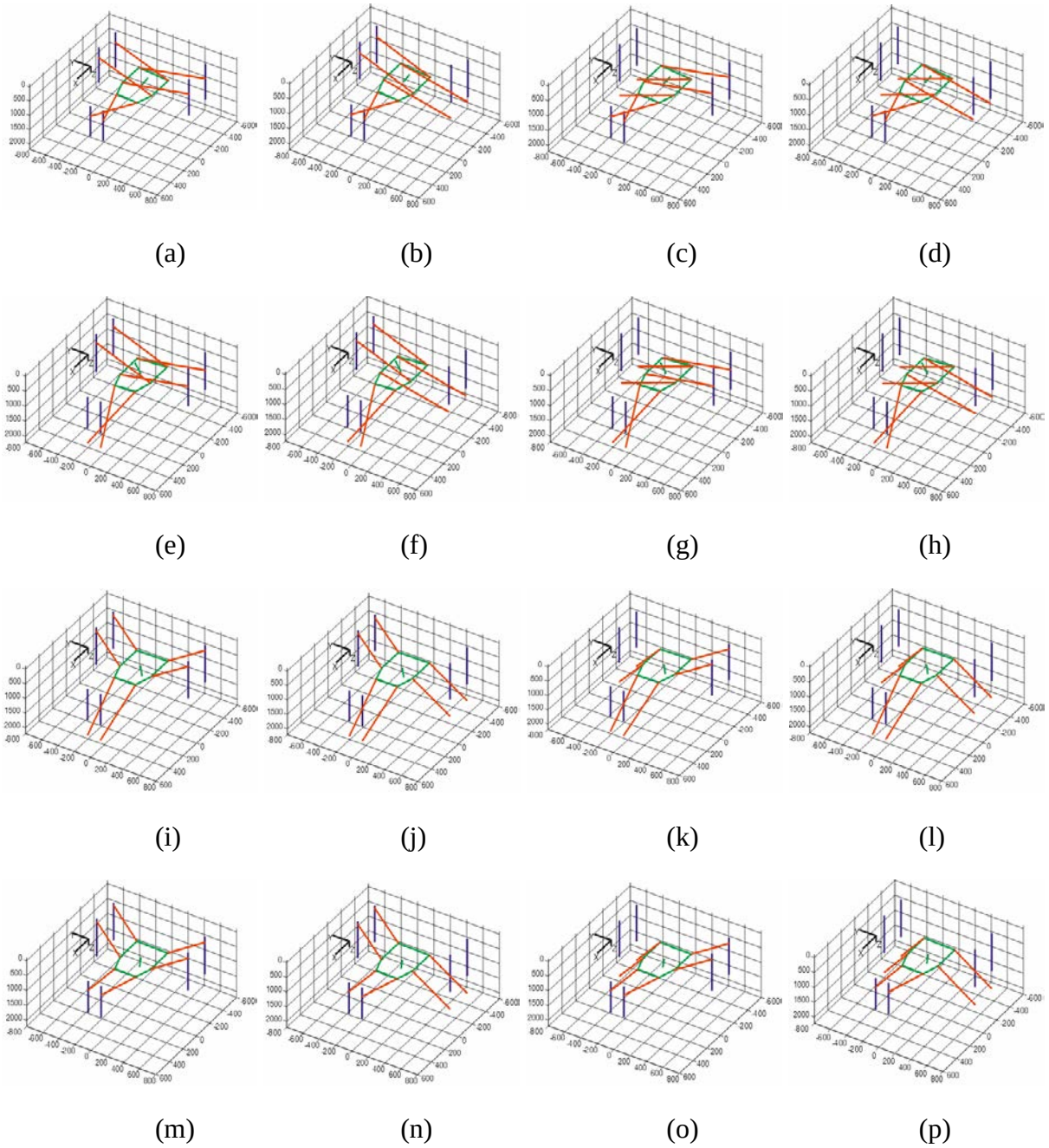


Figure 2.5 : Les seize solutions au modèle géométrique inverse pour $x_P = -240$ mm, $y_P = -86$ mm *et* $z_P = 1000$ mm

3.4. MODELE GEOMETRIQUE DIRECT

Le modèle géométrique direct permet d'obtenir la position de la plate-forme mobile en fonction des variables articulaires. Dans le cas du module parallèle de la machine Verne, les valeurs des variables articulaires ρ_i $(i = 1, 2, 3)$ sont connues et le but est de trouver les coordonnées x_P, y_P et z_P du centre de la plate-forme mobile *P*. Pour résoudre le modèle géométrique direct, nous éliminons successivement x_P, y_P et z_P du système $(S1)$ des quatre

équations ([2.3a], [2.3b], [2.4] et [2.5]) pour obtenir une équation exprimée en fonction des variables articulaires ρ_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ et en fonction de l'orientation α de la plate-forme. Pour réaliser cela, nous calculons en premier y_P en fonction de z_P dans l'Eq. [2.14] en soustrayant l'Eq. [2.3a] de l'Eq. [2.3b]

$$y_p = \frac{R_1 \sin(\alpha)(\rho_1 - z_p)}{(R_1 \cos(\alpha) - r_1)} \qquad [2.14]$$

L'expression de y_p dans l'Eq. [2.14] est substituée dans le système $(S1)$ pour obtenir un nouveau système $(S2)$ de trois Eqs. [2.15], [2.16] et [2.17] obtenues à partir des Eqs. [2.3a], [2.4] et [2.5], respectivement.

$$\begin{aligned}
&2R_1^3 r_1 \cos^3(\alpha) + R_1^2\left(\left(x_p + D_1 - d_1\right)^2 + R_1^2 + 5r_1^2 - L_1^2\right)\cos^2(\alpha) + \\
&\left(R_1^2 + r_1^2\right)\left(\rho_1 - z_p\right)^2 - 2R_1 r_1\left(\left(x_p + D_1 - d_1\right)^2 + \left(\rho_1 - z_p\right)^2 + R_1^2 + 2r_1^2 - L_1^2\right)\cos(\alpha) + \\
&r_1^2\left(\left(x_p + D_1 - d_1\right)^2 + R_1^2 + r_1^2 - L_1^2\right) = 0
\end{aligned} \qquad [2.15]$$

$$\begin{aligned}
&2R_1\left(R_1 r_4\left(\rho_1 - z_p\right) + R_2 r_1\left(\rho_1 - 2\rho_2 + z_p\right)\right)\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \\
&2r_1\left(R_2 r_1\left(\rho_2 - z_p\right) - R_1 r_4\left(\rho_1 - z_p\right)\right)\sin(\alpha) + \\
&R_1\left(R_1\left(\left(x_p + D_2 - d_1\right)^2 - \left(\rho_1 - z_p\right)^2 + \left(\rho_2 - z_p\right)^2 + R_2^2 + r_4^2 - L_2^2\right) + 4R_2 r_4 r_1\right)\cos^2(\alpha) - \\
&\left(2R_2 r_1^2 r_4 + 2R_1 r_1\left(\left(x_p + D_2 - d_2\right)^2 + \left(\rho_2 - z_p\right)^2 + R_2^2 + r_4^2 - L_2^2\right)\right)\cos(\alpha) + \\
&2R_1^2 R_2(\rho_2 - \rho_1)\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + R_1^2\left(\rho_1 - z_p\right)^2 + \\
&r_1^2\left(\left(x_p + D_2 - d_2\right)^2 + \left(\rho_2 - z_p\right)^2 + R_2^2 + r_4^2 - L_2^2\right) - 2R_1^2 R_2 r_4 \cos^3(\alpha) = 0
\end{aligned} \qquad [2.16]$$

$$\begin{aligned}
&2R_1\left(-R_1 r_4\left(\rho_1 - z_p\right) - R_2 r_1\left(\rho_1 - 2\rho_3 + z_p\right)\right)\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \\
&2r_1\left(-R_2 r_1\left(\rho_3 - z_p\right) + R_1 r_4\left(\rho_1 - z_p\right)\right)\sin(\alpha) + \\
&R_1\left(R_1\left(\left(x_p + D_2 - d_1\right)^2 - \left(\rho_1 - z_p\right)^2 + \left(\rho_3 - z_p\right)^2 + R_2^2 + r_4^2 - L_3^2\right) + 4R_2 r_4 r_1\right)\cos^2(\alpha) - \\
&\left(2R_2 r_1^2 r_4 + 2R_1 r_1\left(\left(x_p + D_2 - d_2\right)^2 + \left(\rho_3 - z_p\right)^2 + R_2^2 + r_4^2 - L_3^2\right)\right)\cos(\alpha) - \\
&2R_1^2 R_2(\rho_3 - \rho_1)\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + R_1^2\left(\rho_1 - z_p\right)^2 + \\
&r_1^2\left(\left(x_p + D_2 - d_2\right)^2 + \left(\rho_3 - z_p\right)^2 + R_2^2 + r_4^2 - L_3^2\right) - 2R_1^2 R_2 r_4 \cos^3(\alpha) = 0
\end{aligned} \qquad [2.17]$$

Nous calculons alors z_P en fonction de ρ_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ et α dans l'Eq. [2.18] en soustrayant l'Eq. [2.16] de l'Eq. [2.17].

$$z_p = \frac{\left(\left(R_1\cos(\alpha)-r_1\right)\left(\left(\rho_2+\rho_3\right)\left(\rho_3-\rho_2\right)-2R_2\left(\rho_3+\rho_2-2\rho_1\right)\sin(\alpha)\right)+4C_1\rho_1\sin(\alpha)\right)}{2\left(2C_1\sin(\alpha)+\left(R_1\cos(\alpha)-r_1\right)\left(\rho_3-\rho_2\right)\right)} \quad [2.18]$$

où $C_1 = \left(r_1R_2 - r_4R_1\right)$

L'expression de z_p dans l'Eq. [2.18] est substituée dans le système $(S2)$ pour obtenir un nouveau système $(S3)$ de deux Equations. obtenues à partir des Eqs. [2.15] et [2.16], respectivement. Finalement, nous calculons x_P en fonction des ρ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ et α en soustrayant les deux équations du système $(S3)$:

$$x_p = \frac{\begin{array}{l} -2R_2C_1\left(\rho_3-\rho_2\right)\sin^2(\alpha)+ \\ \left(\begin{array}{l} C_1\left(2C_2+\left(\rho_3-\rho_1\right)^2+\left(\rho_2-\rho_1\right)^2-4r_4R_2\cos(\alpha)\right)+ \\ 4\left(r_1C_1+R_2\left(\rho_3-\rho_1\right)\left(\rho_2-\rho_1\right)\right)\left(R_1\cos(\alpha)-r_1\right) \end{array}\right)\sin(\alpha)+ \\ \left(\rho_3-\rho_2\right)\left(C_2-\left(\rho_3-\rho_1\right)\left(\rho_2-\rho_1\right)-2r_1^2+2\left(r_1R_1-r_4R_2\right)\cos(\alpha)\right)\left(R_1\cos(\alpha)-r_1\right) \end{array}}{2(D_1-d_1-D_2+d_2)\left(2C_1\sin(\alpha)+\left(\rho_3-\rho_2\right)\left(R_1\cos(\alpha)-r_1\right)\right)} \quad [2.19]$$

où $C_2 = \left(D_2-d_2\right)^2-\left(D_1-d_1\right)^2+r_1^2+r_4^2-R_1^2+R_2^2+L_1^2-L_3^2$

Alors l'expression ci dessus de x_p est substituée dans le système $(S3)$. Les équations résultantes de ce système ne sont pas présentées directement dans ce chapitre à cause de leur grande taille. Ainsi, elles peuvent être obtenues en utilisant le programme présenté dans l'annexe A.

À chaque étape, nous déterminons des conditions d'existence des solutions en étudiant les dénominateurs des valeurs de x_P, y_P et z_P. Ces conditions sont:

$$R_1\cos(\alpha)-r_1 \neq 0 \quad [2.20]$$

$$2C_1\sin(\alpha)+\left(\rho_3-\rho_2\right)\left(R_1\cos(\alpha)-r_1\right) \neq 0 \quad [2.21]$$

L'équation [2.20] obtenue à partir de l'Eq. [2.13] implique que A_1B_1 est orthogonal à l'axe de l'articulation prismatique de la chaîne I. Dans ce cas, l'Eq. [2.7] représente un cercle car $a = b$.

Quand $\rho_2 = \rho_3$ dans l'Eq. [2.21], nous avons $\alpha = \{0,\ \pi\}$. Cela veut dire que $y_P = 0$ (obtenu à partir des Eqs. [2.4] et [2.5]).

Pour finir la résolution du système, nous appliquons un changement de variable pour remplacer α par la tangente de l'angle moitié $t = \tan(\alpha/2)$. En conséquence, nous obtenons

un polynôme de degré huit en t, dont les coefficients dépendent de ρ_1, ρ_2 et ρ_3. Les expressions de ces coefficients sont reportées en Annexe A. Connaissant la valeur de α, nous calculons x_p, y_p et z_p en utilisant les Eqs [2.19], [2.14] et [2.18], respectivement. Pour la machine Verne, seulement quatre modes d'assemblage ont été trouvés en faisant un balayage de l'espace articulaire (Figure 2.6). Nous avons pu trouver jusqu'à six modes d'assemblage mais seulement pour des positions des articulations prismatiques dépassant leurs limites accessibles par la machine.

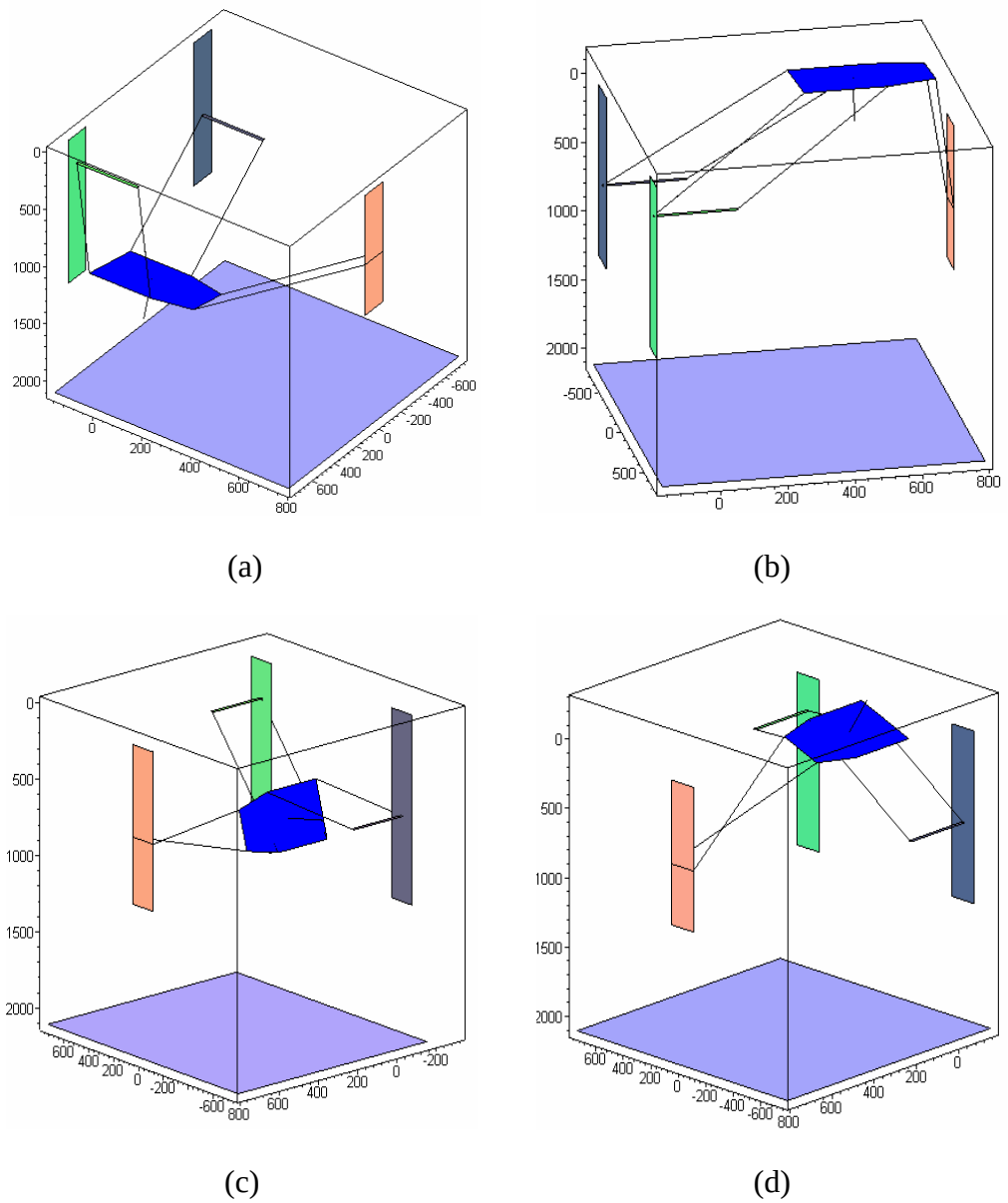


Figure 2.6 : Les quatre modes d'assemblage du module parallèle de la machine Verne pour $\rho_1 = 674$ mm, $\rho_2 = 685$ mm *et* $\rho_3 = 250$ mm. *seulement la solution (a) est accessible par la machine*

Seulement un mode d'assemblage est réellement accessible par la machine (la solution (a) présentée dans la Figure 2.6) parce que les autres mènent ou bien au croisement des segments de la chaîne I, ou à des collisions, ou au dépassement des courses des articulations prismatiques. Le mode d'assemblage accessible par la machine peut être reconnu par le fait que chaque chaîne doit avoir ses points d'attache à la base au-dessus de ses points d'attache à la plate-forme mobile, c.-à-d. $s_i = -1$ (rappelons que l'axe z est pointé vers le bas).

La méthode proposée pour calculer des différentes solutions au modèle géométrique direct a été implémentée sous Maple. Le Tableau 2.3 donnent les solutions pour $\rho_1 = 674$ mm, $\rho_2 = 685$ mm et $\rho_3 = 250$ mm et la Figure 2.6 présente les quatre modes d'assemblage.

$\rho_1 = 674$ mm, $\rho_2 = 685$ mm et $\rho_3 = 250$ mm				
Case	α (rd)	x_P (mm)	y_P (mm)	z_P (mm)
(a)	-0.22	-199.80	355.92	1242.00
(b)	-0.14	298.35	-297.53	-120.22
(c)	1.81	-393.6	322.82	958.21
(d)	2.70	-115.62	-189.68	-0.26

Tableau 2.3 : Calcul du modèle géométrique direct pour $\rho_1 = 674$ mm, $\rho_2 = 685$ mm *et* $\rho_3 = 250$ mm

3.5. SINGULARITES SERIELLES

Les singularités sérielles représentent les limites de l'espace de travail [**Merlet 05**]. Dans ces configurations, il n'est pas possible d'engendrer certaines vitesses de la plate-forme mobile et le manipulateur perd un ou plusieurs degré(s) de liberté. En présence d'une singularité sérielle, on peut trouver des vitesses articulaires non nulles pour lesquelles les vitesses opérationnelles sont nulles [**Gosselin 90**].

Une approche analytique pour calculer les singularités de la machine Verne consiste à établir les matrices jacobiennes, *parallèle* **A** et *sérielle* **B** de cette machine en différentiant les équations de contraintes par rapport au temps :

$$\mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \qquad [2.22]$$

où $\mathbf{t} = \left[\dot{x}_p \ \dot{y}_p \ \dot{z}_p\right]^T$ représente la vitesse linéaire de la plate-forme du manipulateur, $\dot{\mathbf{q}} = \left[\dot{\rho}_1 \ \dot{\rho}_2 \ \dot{\rho}_3\right]^T$ représente le vecteur des vitesses articulaires.

Les singularités sérielles sont dues à la perte de rang de la matrice jacobienne sérielle **B**. Cette matrice jacobienne est diagonale et ces termes sont obtenus en différentiant

respectivement les Eqs. [2.3a et 2.3b], [2.4] et [2.5] par rapport aux variables articulaires ρ_i (i=1, 2, 3).

La chaîne I est représentée par deux Eqs. [2.3a] et [2.3b]. En éliminant α entre ces deux équations puis en dérivant par rapport à ρ_1, nous obtenons un polynôme de degré huit en x_p et y_p. Ce polynôme peut être simplifié en introduisant α à partir de l'Eq. [2.6] puis en factorisant pour obtenir la relation suivante :

$$R_1^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)\left((x_p + D_1 - d_1)^2 - (L_1^2 - r_1^2 + 2R_1 r_1 \cos(\alpha) - R_1^2)\right) + R_1^3 \sin(\alpha)^3 r_1 + R_1 r_1 \sin(\alpha) y_p^2 = 0 \quad [2.23]$$

L'équation [2.23] représente la frontière de l'espace de travail accessible par la chaîne I. Cette équation peut aussi être obtenue en différentiant l'Eq. [2.6] par rapport à α. En résolvant le système des Eqs. [2.6] et [2.23] nous trouvons les conditions d'existence des singularités sérielles résumées dans le Tableau 2.4:

Singularités sérielles dues à la chaîne I	
$\rho_1 = z_P$ avec $\{\alpha = 0$ ou $\pm\pi\}$	les différentes branches du MGI se rencontrent
$\rho_1 = z_P$ avec $R_1 \cos(\alpha) = r_1$	A_1B_1 est perpendiculaire à l'axe du rail de la chaîne I
$x_P =$ calculée à partir de l'Eq. [2.6] $y_p = \pm R_1 \sqrt{\dfrac{R_1 r_1}{(R_1 - r_1\cos(\alpha))(R_1\cos(\alpha) - r_1)}}$	Frontière de l'espace accessible par la chaîne I

Tableau 2.4 : Conditions d'existence des singularités sérielles vis-à-vis de la chaîne I

Les chaînes II et III sont représentées respectivement par les Eqs. [2.4] et [2.5]. En différentiant respectivement ces équations par rapport à ρ_2 et ρ_3, on peut conclure que les singularités sérielles sont atteintes quand les chaînes II et III sont perpendiculaires à l'axe de leurs rails. Ces conditions sont définies respectivement par les relations [2.24] et [2.25] et correspondent aux configurations où les différentes branches du MGI se rencontrent.

$$\rho_2 = z_P - R_2 \sin(\alpha) \quad [2.24]$$

$$\rho_3 = z_P + R_2 \sin(\alpha) \quad [2.25]$$

Finalement, la machine Verne passe par une singularité sérielle pour les conditions illustrées dans le Tableau 2.5 :

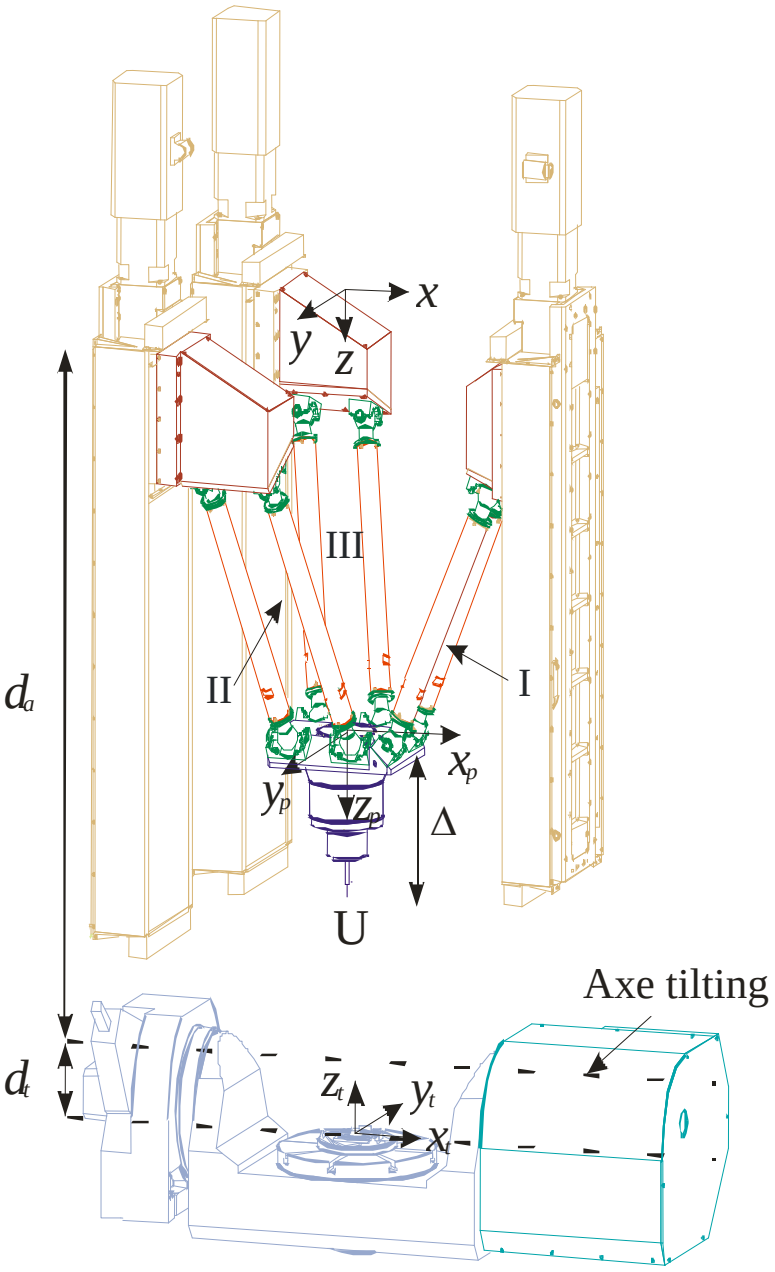
Singularités sérielles de la machine Verne	
Chaîne I	$\rho_1 = z_P$ avec $\{\alpha = 0$ ou $\pm\pi\}$
	$\rho_1 = z_P$ avec $R_1 \cos(\alpha) = r_1$
	$x_P =$ calculée à partir de l'Eq. [2.6] $y_p = \pm R_1 \sqrt{\dfrac{R_1 r_1}{(R_1 - r_1 \cos(\alpha))(R_1 \cos(\alpha) - r_1)}}$
Chaîne II	$\rho_2 = z_P - R_2 \sin(\alpha)$
Chaîne III	$\rho_3 = z_P + R_2 \sin(\alpha)$

Tableau 2.5 : Conditions d'existence des singularités sérielles de la machine Verne

La matrice jacobienne *parallèle* **A** est de dimension 3×3. Ainsi, elle ne permet pas de détecter les singularités de contrainte. Ces singularités se produisent quand les chaînes du module parallèle de la machine Verne sont incapables de contraindre la plate-forme à exécuter le mouvement souhaité et en conséquence la plate-forme gagne des degrés de liberté supplémentaires rendant le manipulateur incontrôlable. Les limites de l'approche analytique dans la détermination des singularités parallèles nous conduit à utiliser la théorie de vis réciproques dans le chapitre 4 pour obtenir une matrice jacobienne de dimension 6×6 permettant de détecter toutes sortes de singularités, y compris les singularités de contrainte. Puis nous identifions géométriquement les singularités parallèles en utilisant l'algèbre de Grassmann-Cayley.

4. MODELES GEOMETRIQUES DE LA MACHINE VERNE COMPLETE

4.1. LES EQUATIONS GEOMETRIQUES



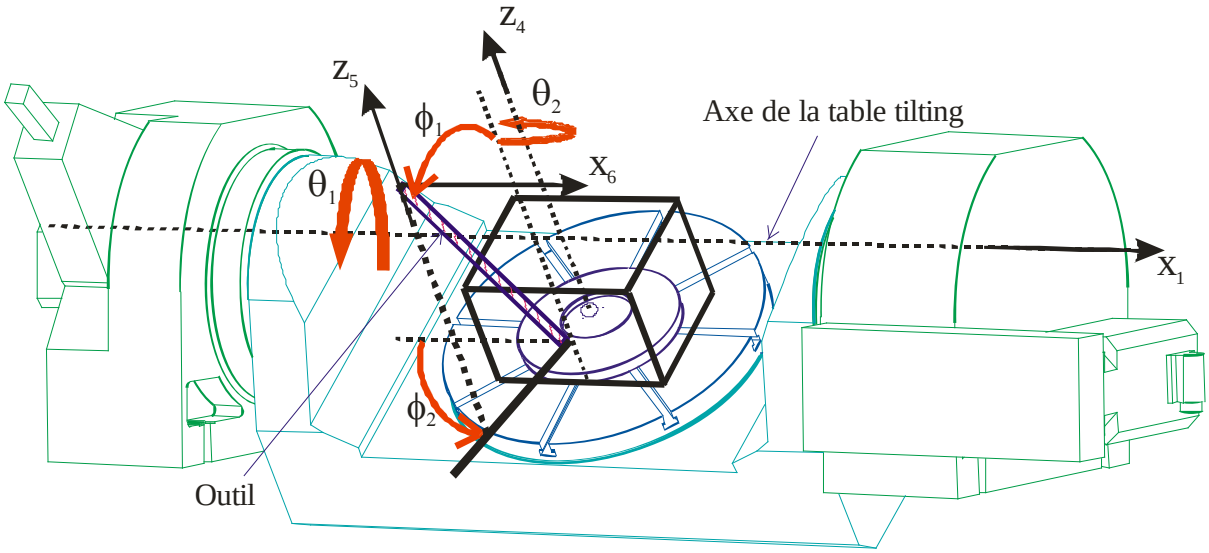


Figure 2.7 : Schéma de la table tilting: l'orientation de l'outil est définie par deux angles (ϕ_1, ϕ_2) dans le repère R_t lié à la table. Les orientations (θ_1, θ_2) de la table tilting sont définies dans le repère R_b lié à la base de la machine Verne

Pour analyser les équations géométriques de la machine Verne, nous définissons les repères présentés dans le Tableau IV:

Transformation	Axes	Angles/Distance	Repère initial	Repère finale
Translation	z	d_a	$R_b(O,\ x, y, z)$	$R_1(O_1,\ x_1, y_1, z_1)$
Rotation	x_1	θ_1	$R_1(O_1,\ x_1, y_1, z_1)$	$R_2(O_2,\ x_2, y_2, z_2)$
Translation	z_2	d_t	$R_2(O_2,\ x_2, y_2, z_2)$	$R_3(O_3,\ x_3, y_3, z_3)$
Rotation	x_3	π	$R_3(O_3,\ x_3, y_3, z_3)$	$R_4(O_4,\ x_4, y_4, z_4)$
Rotation	z_4	θ_2	$R_4(O_4,\ x_4, y_4, z_4)$	$R_t(t,\ x_t, y_t, z_t)$
Translation	$x_t,\ y_t,\ z_t$	$x_u,\ y_u,\ z_u$	$R_t(t,\ x_t, y_t, z_t)$	$R_5(O_5,\ x_5, y_5, z_5)$
Rotation	z_5	ϕ_2	$R_5(O_5,\ x_5, y_5, z_5)$	$R_6(O_6,\ x_6, y_6, z_6)$
Rotation	x_6	$\pi + \phi_1$	$R_6(O_6,\ x_6, y_6, z_6)$	$R_7(O_7,\ x_7, y_7, z_7)$
Translation	z_7	$-\Delta$	$R_7(O_7,\ x_7, y_7, z_7)$	$R_{pl}(P,\ x_p, y_p, z_p)$

Tableau 2.6 : Matrices de transformation qui ramène le repère de base R_b au repère R_t lié à la table tilting et les matrices qui ramène le repère R_t au repère R_{pl} lié à la plate-forme mobile; où x_u, y_u et z_u sont les coordonnées du centre de l'outil (TCP), U, dans R_t

Définissons ${}^{b}\mathbf{T_t}$, la matrice de transformation qui ramène le repère Cartésien fixe R_b au repère R_t lié à la table tilting.

$${}^{b}\mathbf{T_t} = \mathbf{Trans}(z, d_a)\mathbf{Rot}(x_1, \theta_1)\mathbf{Trans}(z_2, d_t)\mathbf{Rot}(x_3, \pi)\mathbf{Rot}(z_4, \theta_2) \qquad [2.26]$$

Définissons ${}^{\mathbf{t}}\mathbf{T}_{\mathbf{pl}}$, la matrice de transformation qui amène le repère lié à la table R_t au repère R_{pl} lié à la plate-forme mobile.

$$ {}^{\mathbf{t}}\mathbf{T}_{\mathbf{pl}} = \mathbf{Trans}(\mathrm{x}_u, \mathrm{y}_u, \mathrm{z}_u)\mathbf{Rot}(\mathrm{z}_5, \phi_2)\mathbf{Rot}(\mathrm{x}_6, \pi + \phi_1)\mathbf{Trans}(\mathrm{z}_7, -\Delta) \qquad [2.27] $$

Nous utilisons les matrices de transformation des Eqs. [2.26] et [2.27] pour exprimer B_{ij} en fonction de x_u, y_u, z_u, ϕ_1, ϕ_2, θ_1 et θ_2 en utilisant la relation $B_{ij} = {}^{\mathbf{b}}\mathbf{T}_{\mathbf{pl}}\, {}^{pl}B_{ij}$ où ${}^{\mathbf{b}}\mathbf{T}_{\mathbf{pl}} = {}^{\mathbf{b}}\mathbf{T}_{\mathbf{t}}\, {}^{\mathbf{t}}\mathbf{T}_{\mathbf{pl}}$ et ${}^{pl}B_{ij}$ représente le point B_{ij} exprimé dans le repère R_{pl}. En utilisant l'Eq. [2.2] du paragraphe 3.1 et les paramètres définis dans les Figues 2.2 et 2.3, nous pouvons exprimer toutes les équations de contrainte de la machine Verne. Cependant, sachant que $A_{i1}B_{i1}$ et $A_{i2}B_{i2}$ sont parallèles pour i=1, 2, nous pouvons écrire que :

$$ \theta_2 = -\phi_2 \qquad [2.28] $$

En substituant la valeur ci dessus de θ_2 dans toutes les équations de contrainte obtenues à partir de l'Eq. [2.2], nous obtenons que la chaîne I est représentée par deux Eqs. [2.29a] et [2.29b] tandis que la chaîne II (respectivement chaîne III) est représentée par une Eq. [2.30] (respectivement Eq. [2.31]).

$$ \begin{aligned} &\left(\cos(\phi_2)\, x_u + \sin(\phi_2)\, y_u + D_1 - d_1\right)^2 + \\ &\left(\sin(\theta_1)\left(z_u - d_t\right) + \cos(\theta_1)\left(\sin(\phi_2)\, x_u - \cos(\phi_2)\, y_u\right) + \Delta\sin(\theta_1+\phi_1) + R_1\cos(\theta_1+\phi_1) - r_1\right)^2 + \\ &\left(\sin(\theta_1)\left(\sin(\phi_2)\, x_u - \cos(\phi_2)\, y_u\right) - \cos(\theta_1)\left(z_u - d_t\right) + d_a - \Delta\cos(\theta_1+\phi_1) + R_1\sin(\theta_1+\phi_1) - \rho_1\right)^2 - L_1^{\,2} = 0 \end{aligned} \qquad [2.29a] $$

$$ \begin{aligned} &\left(\cos(\phi_2)\, x_u + \sin(\phi_2)\, y_u + D_1 - d_1\right)^2 + \\ &\left(\sin(\theta_1)\left(z_u - d_t\right) + \cos(\theta_1)\left(\sin(\phi_2)\, x_u - \cos(\phi_2)\, y_u\right) + \Delta\sin(\theta_1+\phi_1) - R_1\cos(\theta_1+\phi_1) + r_1\right)^2 + \\ &\left(\sin(\theta_1)\left(\sin(\phi_2)\, x_u - \cos(\phi_2)\, y_u\right) - \cos(\theta_1)\left(z_u - d_t\right) + d_a - \Delta\cos(\theta_1+\phi_1) - R_1\sin(\theta_1+\phi_1) - \rho_1\right)^2 - L_1^{\,2} = 0 \end{aligned} \qquad [2.29b] $$

$$ \begin{aligned} &\left(\cos(\phi_2)\, x_u + \sin(\phi_2)\, y_u + D_2 - d_2\right)^2 + \\ &\left(\sin(\theta_1)\left(z_u - d_t\right) + \cos(\theta_1)\left(\sin(\phi_2)\, x_u - \cos(\phi_2)\, y_u\right) + \Delta\sin(\theta_1+\phi_1) - R_2\cos(\theta_1+\phi_1) + r_4\right)^2 + \\ &\left(\sin(\theta_1)\left(\sin(\phi_2)\, x_u - \cos(\phi_2)\, y_u\right) - \cos(\theta_1)\left(z_u - d_t\right) + d_a - \Delta\cos(\theta_1+\phi_1) - R_2\sin(\theta_1+\phi_1) - \rho_2\right)^2 - L_2^{\,2} = 0 \end{aligned} \qquad [2.30] $$

$$ \begin{aligned} &\left(\cos(\phi_2)\, x_u + \sin(\phi_2)\, y_u + D_2 - d_2\right)^2 + \\ &\left(\sin(\theta_1)\left(z_u - d_t\right) + \cos(\theta_1)\left(\sin(\phi_2)\, x_u - \cos(\phi_2)\, y_u\right) + \Delta\sin(\theta_1+\phi_1) + R_2\cos(\theta_1+\phi_1) - r_4\right)^2 + \\ &\left(\sin(\theta_1)\left(\sin(\phi_2)\, x_u - \cos(\phi_2)\, y_u\right) - \cos(\theta_1)\left(z_u - d_t\right) + d_a - \Delta\cos(\theta_1+\phi_1) + R_2\sin(\theta_1+\phi_1) - \rho_3\right)^2 - L_3^{\,2} = 0 \end{aligned} \qquad [2.31] $$

Après identification des Eqs. [2.29a], [2.29b], [2.30] et [2.31] avec les Eqs. [2.3a], [2.3b], [2.4] et [2.5] respectivement, nous obtenons:

$$\alpha = \theta_1 + \phi_1 \qquad [2.32]$$

La condition [2.32] est utile pour comprendre le comportement de la machine Verne à partir de celle étudiée dans le paragraphe 3 pour son module parallèle.

4.2. MODELE GEOMETRIQUE INVERSE

Pour le modèle géométrique inverse de la machine Verne, la position de l'extrémité de l'outil, la position du TCP (x_u, y_u, z_u) et l'orientation de l'outil (ϕ_1 et ϕ_2) sont donnés dans le repère R_t, mais les variables articulaires, définies par les positions ρ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ des articulations prismatiques motorisées et l'orientation (θ_1 et θ_2) de la table tilting dans le repère de base R_b sont inconnues.

Sachant que $\theta_2 = -\phi_2$ de l'Eq. [2.28], le problème consiste à résoudre le système $(S4)$ de quatre Eqs. ([2.29a], [2.29b], [2.30] et [2.31]) pour seulement quatre variables inconnues (ρ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ et θ_1).

Pour résoudre le modèle géométrique inverse, nous suivons le même raisonnement que dans le paragraphe 3.3. Premièrement, nous éliminons ρ_1 des Eqs. [2.29a] et [2.29b] pour obtenir une relation [2.33] entre la position du TCP et l'orientation (x_u, y_u, z_u, ϕ_1 et ϕ_2) ainsi que l'angle tilting θ_1.

$$\begin{aligned}
&R_1^2 \sin^2(\theta_1+\phi_1)\left(\cos(\phi_2)\, x_u + \sin(\phi_2)\, y_u + D_1 - d_1\right)^2 + \\
&\left(r_1^2 - 2R_1 r_1 \cos(\theta_1+\phi_1) + R_1^2\right)\left(\sin(\theta_1)\left(z_u - d_t\right) + \cos(\theta_1)\left(\sin(\phi_2)\, x_u - \cos(\phi_2)\, y_u\right) + \Delta \sin(\theta_1+\phi_1)\right)^2 - \\
&R_1^2 \sin^2(\theta_1+\phi_1)\left(L_1^2 - \left(R_1^2 + r_1^2 - 2R_1 r_1 \cos(\theta_1+\phi_1)\right)\right) = 0
\end{aligned} \qquad [2.33]$$

Ensuite, nous trouvons toutes les orientations possibles pour des valeurs prescrites de la position et de l'orientation de l'outil. Ces orientations sont déterminées en résolvant un polynôme de degrés six en $\tan(\theta_1/2)$ dérivé de l'Eq. [2.33]. Ce polynôme peut avoir jusqu'à quatre solutions réelles. Cette conclusion est vérifiée par le fait que $\theta_1 = \phi_1 - \alpha$ (Eq. [2.32]) où α peut avoir seulement quatre solutions réelles comme prouvé dans le paragraphe 3.3. Après avoir trouvé toutes les orientations possibles, nous utilisons le système $(S4)$ des équations pour calculer les positions des articulations prismatiques ρ_i pour chaque orientation θ_1.

Pour ρ_1, nous devons vérifier que ses valeurs obtenues à partir des Eqs. [2.29a] et [2.29b] sont les mêmes, en conséquence, nous éliminons l'une des deux solutions.

En observant la remarque ci dessus et les Eqs. ([2.29a-2.29b]), [2.30], [2.31] définies comme des polynômes de degrés deux en ρ_i, $i = 1,\ 2,\ 3$ respectivement, nous concluons qu'il y a quatre solutions pour la chaîne I et deux solutions pour les chaînes II et III. Donc il y a seize solutions au modèle géométrique inverse de la machine Verne.

Comme mentionné pour le module parallèle, parmi ces seize solutions théoriques au modèle géométrique inverse, une seule est utilisée par la machine Verne. Cette solution est caractérisée par le fait que chaque chaîne doit avoir ses points d'attache à la base au-dessus de ses points d'attache à la plate-forme mobile.

Parmi les quinze solutions restantes l'une des articulations prismatiques dépasse ses limites ou les deux segments de la chaîne I se croisent. La plupart de ces solutions sont caractérisées par le fait qu'au moins l'une des chaînes a ses points d'attache à la base au dessus de ses points d'attache à la plate-forme mobile. Pour prévenir le croisement des segments, nous ajoutons aussi une condition sur l'orientation de la plate-forme mobile. Cette condition est $R_1 \cos(\theta_1 + \phi_1) > r_1$. Finalement, nous vérifions les courses des articulations prismatiques et les singularités sérielles. Comme déjà mentionné dans le paragraphe 3.3, l'application des conditions ci-dessus conduit toujours à une solution unique pour les applications pratiques.

4.3. MODELE GEOMETRIQUE DIRECT

Pour le modèle géométrique direct de la machine Verne, les valeurs des variables articulaires définies par les positions des articulations prismatiques motorisées ρ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ et par les orientations (θ_1 et θ_2) de la table tilting dans le repère de base R_b, sont connues. Le but est de trouver la position du TCP (x_u, y_u, z_u) et les orientations de l'outil (ϕ_1 et ϕ_2) dans le repère R_t. Sachant que $\phi_2 = -\theta_2$ (Eq. [2.28]) et $\phi_1 = \alpha - \theta_1$ (Eq. [2.32]), ce problème est résolu en calculant le modèle géométrique direct du module parallèle pour trouver les coordonnées x_P, y_P et z_P du centre de la plate-forme mobile P et l'orientation α de la plate-forme mobile en fonction des positions des articulations prismatiques motorisées ρ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Nous utilisons alors les matrices de transformation à partir des Eqs. [2.1] et [2.26] pour exprimer la position de l'outil et son orientation (x_u, y_u, z_u, ϕ_1 et ϕ_2) en fonction de $\left(x_P,\ y_P,\ z_P,\ \theta_1,\ \theta_2\right)$:

$$^{t}U = {}^{\mathbf{t}}\mathbf{T}_{\mathbf{b}}\ {}^{b}U = {}^{\mathbf{t}}\mathbf{T}_{\mathbf{b}}\ {}^{\mathbf{b}}\mathbf{T}_{\mathbf{pl}}\ {}^{pl}U = {}^{\mathbf{b}}\mathbf{T}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{-1}}\ \mathbf{T}_{\mathbf{pl}}\ {}^{pl}U \qquad [2.34]$$

où ${}^{pl}U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta & 1 \end{bmatrix}^T$ et ${}^{t}U = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u & 1 \end{bmatrix}^T$ représentent la position du TCP, U, exprimé dans les repères R_{pl} (lié à la plate-forme mobile) et le repère de base R_b, respectivement. Finalement nous obtenons:

$$\begin{cases} \phi_1 = \alpha - \theta_1 \\ \phi_2 = -\theta_2 \\ x_u = \cos(\theta_2) x_p + \sin(\theta_2)\left(\Delta \sin(\alpha - \theta_1) - \cos(\theta_1) y_p - \sin(\theta_1)\left(z_p - d_a\right)\right) \\ y_u = -\sin(\theta_2) x_p + \cos(\theta_2)\left(\Delta \sin(\alpha - \theta_1) - \cos(\theta_1) y_p - \sin(\theta_1)\left(z_p - d_a\right)\right) \\ z_u = \sin(\theta_1) y_p - \cos(\theta_1) z_p + d_a \cos(\theta_1) - \Delta \cos(\alpha - \theta_1) + d_t \end{cases} \quad [2.35]$$

La machine Verne se comporte comme son module parallèle : seulement six modes d'assemblages existent théoriquement (Figure 2.6) et un seul est réellement accessible par la machine (solution (a) présentée dans la Figure 2.6). La méthode proposée pour calculer les différentes solutions au modèle géométrique direct a été implémentée sous Maple. Le Tableau 2.7 donne la solution pour $\rho_1 = 674$ mm, $\rho_2 = 685$ mm, $\rho_3 = 250$ mm, $\theta_1 = 0.19$ rd et $\theta_2 = 0.39$ rd, les modes d'assemblages du module parallèle sont présentés dans la Figure 2.6.

$\rho_1 = 674$ mm, $\rho_2 = 685$ mm, $\rho_3 = 250$ mm, $\theta_1 = 0.19$ rd et $\theta_2 = 0.39$ rd					
Case	ϕ_1 rd	ϕ_2 rd	x_u (mm)	y_u (mm)	z_u (mm)
(a)	-0.41	-0.39	-338.06	-296.89	461.6
(b)	-0.33	-0.39	478.52	379.38	1661.55
(c)	1.62	-0.39	-22106.	497.49	1213.31
(d)	2.51	-0.39	219.2	837.37	2433.67

Tableau 2.7 : les résultats numériques au modèle géométrique direct de l'exemple où $\rho_1 = 674$ mm, $\rho_2 = 685$ mm, $\rho_3 = 250$ mm, $\theta_1 = 0.19$ rd *et* $\theta_2 = 0.39$ rd

5. CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré au calcul des modèles géométriques direct et inverse et à la détermination des singularités sérielles d'une machine-outil hybride à cinq ddls, la machine Verne. Cette machine possède un mouvement complexe causé par l'architecture asymétrique de son module parallèle où une de ces chaînes est différente des deux autres chaînes. Les modèles géométriques inverse et direct ont été établis. Le modèle géométrique direct a été résolu avec une méthode de substitution. Il a été montré que le modèle géométrique inverse possède seize solutions tandis que le modèle géométrique direct peut avoir jusqu'à six

solutions réelles. Des exemples ont été fournis pour illustrer les résultats. La géométrie spéciale de l'une des chaînes complique énormément la résolution des modèles géométriques. Comme les deux côtés opposés de cette chaîne ont des longueurs différentes, la chaîne I ne reste pas planaire (les directions des segments définissent des droites gauches) durant le mouvement de la machine, contrairement à ce qui se passe dans les deux autres chaînes qui sont des parallélogrammes articulés. En conséquence, un angle de couplage de la plate-forme mobile autour de l'axe x existe. Ce travail est intéressant car il peut améliorer la commande de la machine au niveau du temps de calcul. Notons que la machine Verne est utilisée actuellement tous les jours pour usiner des pièces complexes, surtout pour la fabrication de moules. C'est donc important de travailler sur l'amélioration de ses performances. Les équations symboliques obtenues dans ce travail sont implémentés actuellement dans *Visual Components*, un logiciel de simulation de PKMs développé par une société britannique, AMTRI. La simulation de la machine n'a pas pu être terminée à cause de la faillite de la société AMTRI. Pourtant le modèle géométrique inverse a été implémenté en C++ pour faire la simulaiton rapide.

CHAPITRE 3

CALCUL DE L'ESPACE DE TRAVAIL DE LA MACHINE VERNE

1. INTRODUCTION

Le calcul de l'espace de travail d'un manipulateur parallèle est très important pour le concepteur et l'utilisateur. Si nous considérons un manipulateur sériel classique, la représentation de l'espace de travail est généralement basée sur l'illustration en dimension trois de l'espace accessible par le centre de son poignet (caractérisant les translations) et par celui accessible par l'extrémité de l'organe terminal (caractérisant les orientations), ces deux zones étant découplées. Malheureusement, ce n'est pas le cas pour les robots parallèles: la zone accessible par le centre de la plate-forme mobile dépend souvent de l'orientation de sa plate-forme [**Merlet 05**]. Ainsi, une représentation graphique de l'espace de travail des manipulateurs parallèles avec plus de trois degrés de liberté est possible si nous fixons les paramètres qui représentent les autres degrés de liberté. En conséquence, différents types d'espace de travail peuvent être illustrés, selon le choix des paramètres fixés.

La plupart des PKMs existantes souffrent d'un espace de travail restreint [**Tsai 99**]. Une des solutions est de concevoir des manipulateurs de type hybride comme la machine Verne.

Un espace de travail simplifié de la machine Verne a été fourni par Fatronik et est actuellement utilisé, mais cet espace est visiblement réduit par rapport à celui accessible par la machine. Le but de ce chapitre est de calculer le « vrai » espace de travail accessible par la machine pour mieux profiter de ses performances et augmenter sa productivité. Le paragraphe suivant est consacré au calcul de l'espace de travail complet pour différentes longueurs d'outils du module parallèle de la machine Verne. Dans le paragraphe 2, nous modélisons géométriquement les contraintes qui limitent l'espace de travail. Nous appliquons une combinaison d'une méthode géométrique et d'une méthode de discrétisation pour calculer l'espace de travail complet. Dans le paragraphe 3, nous calculons l'espace de travail 3-axes de la machine Verne en considérant que l'outil reste toujours perpendiculaire à la pièce, et nous présentons aussi une façon d'obtenir plusieurs type d'espace de travail de la machine en fixant deux paramètres parmi les cinq paramètres représentant les degrés de liberté de la machine.

2. CALCUL DE L'ESPACE DE TRAVAIL DU MODULE PARALLELE

2.1. METHODE DE CALCUL DE L'ESPACE DE TRAVAIL

Le module parallèle de la machine Verne possède trois degrés de liberté, une présentation complète de son espace de travail est donc un volume. Par conséquent son espace de travail peut être défini par l'ensemble des positions accessibles dans l'espace par un point spécifique lié la plate-forme mobile.

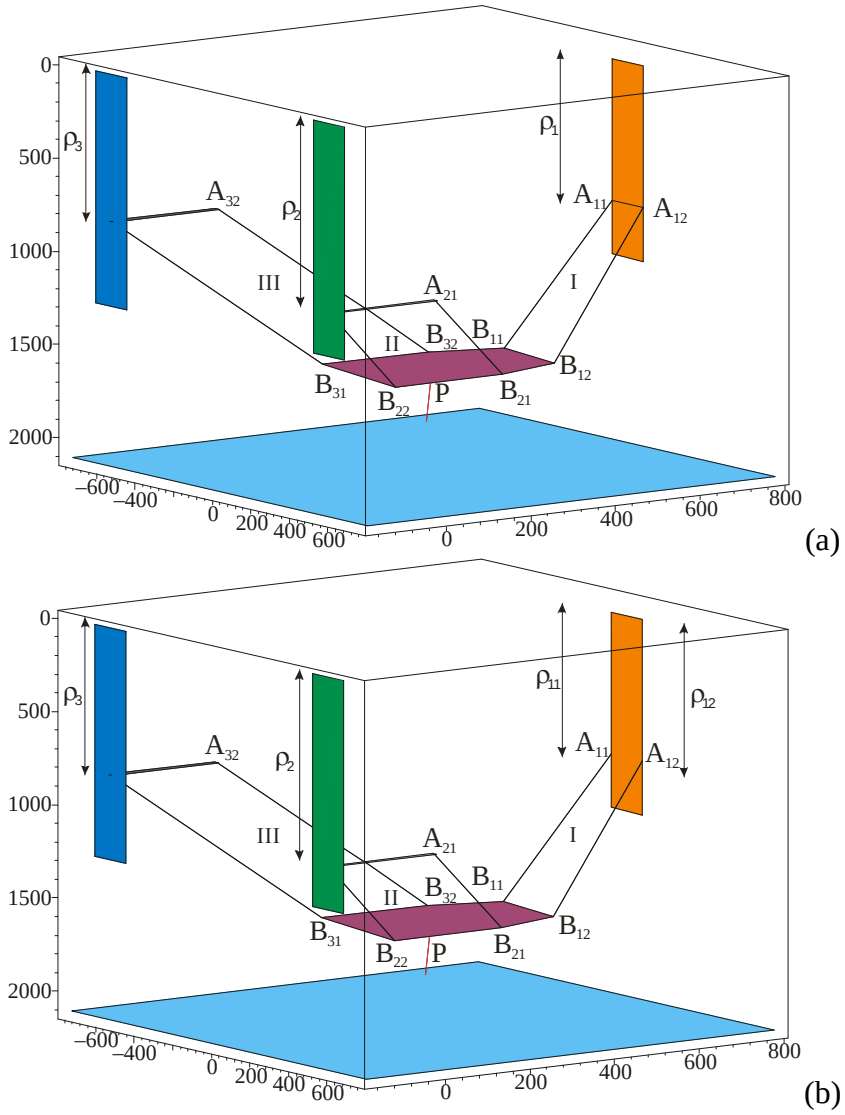


Figure 3.1 : La machine Verne, (a) Réelle, (b) avec découpage virtuel de la chaîne I

Cependant, puisque la première chaîne n'est pas un parallélogramme, la plate-forme subit un mouvement de rotation parasite autour de l'axe x défini par l'angle α. Ce mouvement pose un problème dans la détermination de l'espace de travail de la machine Verne, car il ne

représente pas un degré de liberté indépendant. Donc, il peut être exprimé en fonction des coordonnées du point *P* (x_P, y_P, z_P), centre du repère Cartésien mobile.

Pour résoudre le problème créé par l'existence de l'angle α nous proposons la méthode suivante:

1. Nous découpons virtuellement la chaîne I constituée des segments 11 et 12 (le segment *ij* désigne $A_{ij}B_{ij}$) en supposant que ρ_{11} est indépendant de ρ_{12} (voir la Figure 3.1b). L'architecture parallèle de la machine Verne possède maintenant quatre ddls au lieu de trois. Ces degrés de liberté sont définis par les coordonnées x_P, y_P et z_P du point *P* et par l'orientation α de la plate-forme mobile. Puis nous considérons que l'orientation α de la plate-forme est donnée, et nous modélisons géométriquement les contraintes qui limitent l'espace de travail de la nouvelle architecture parallèle (paragraphes 2.3, 2.4 et 2.5). L'intersection entre ces modèles est un volume.
2. Nous considérons l'interdépendance entre les segments *11* et *12* de la chaîne I caractérisée par le fait que $\rho_{11} = \rho_{12} = \rho_1$ (Figure 3.1a). Cette condition permet de déterminer une relation entre la position et l'orientation de la plate-forme. Ainsi, pour une orientation α donnée, le point *P* décrit une région surfacique (paragraphe 2.6).
3. L'intersection entre les modèles géométriques définis à l'étape 1 et la surface définie à l'étape 2 représente l'espace de travail pour une orientation donnée de la plate-forme. Nous calculons une coupe horizontale de cet espace de travail quand le point P, centre du repère Cartésien mobile, se déplace dans un plan horizontal connu. Puis nous procédons par discrétisation pour déterminer l'espace de travail total de la machine Verne (paragraphe 2.7).

Il est important de mentionner que les contraintes imposées par les segments qui constituent la même chaîne possèdent les mêmes limites sur l'espace de travail, si la chaîne est un parallélogramme. Alors, il suffit d'étudier l'un de deux segments pour calculer l'espace de travail. Tenant compte de cette remarque, nous pouvons limiter le calcul de l'espace de travail en étudiant seulement les segments *11*, *12*, *21* et *31*, puisque les chaînes II et III sont des parallélogrammes.

2.2. MODELES GEOMETRIQUES DES CONTRAINTES LIMITANT L'ESPACE DE TRAVAIL

Dans ce paragraphe, nous découpons virtuellement la chaîne I en supposant que ρ_{11} peut être différent de ρ_{12} (Figure 3.1b) et nous calculons pour une orientation α donnée, l'espace de travail vis-à-vis des contraintes sur les segments. Cet espace est de dimension trois car en découpant la chaîne I, nous ajoutons un degré de liberté à l'architecture parallèle.

En général, pour calculer géométriquement l'espace de travail d'un manipulateur parallèle, il est nécessaire d'établir des modèles géométriques pour toutes les contraintes qui limitent l'espace de travail [**Bonev 99**]. Dans notre cas, nous ne prenons en compte que les limitations sur les segments, et nous cherchons à déterminer géométriquement la frontière de l'espace de travail. Nous appliquons l'hypothèse que les contraintes sur les segments permettent de définir la région maximale que peut parcourir le point B_{ij}, où B_{ij} est le point d'attache du segment *ij* à la plate-forme, ceci d'une manière indépendante pour chaque segment.

Supposons que les contraintes sur le segment *ij* permettent de définir le volume $\mathrm{V_{ij}}$ accessible par le point B_{ij}. Lorsque le point B_{ij} décrit ce volume, le point *P* décrit un volume identique obtenu en translatant $\mathrm{V_{ij}}$ par le vecteur $\mathbf{B_{ij}P}$ qui est constant car l'orientation est fixée. Ce volume noté $\mathrm{V_{ij}^{P}}$ est le volume de travail accessible par le point *P* sous les contraintes sur le segment *ij*. L'espace de travail étant celui où les contraintes sur tous les segments sont satisfaites, il est obtenu par l'intersection de tous les volumes $\mathrm{V_{ij}^{P}}$. Ce volume est noté $\mathrm{V^{P}}$ **[Merlet 95]**.

Dans ce chapitre, pour faciliter le calcul de l'espace de travail, au lieu de déterminer le volume $\mathrm{V_{ij}}$ accessible par le point B_{ij}, nous exprimons les coordonnées de B_{ij} en fonction des coordonnées du point *P* et nous cherchons directement le volume de travail $\mathrm{V_{ij}^{P}}$ accessible par le point *P*. Les contraintes qui limitent l'espace de travail d'un manipulateur parallèle sont :

1. les collisions entre les différents éléments de la machine,
2. les longueurs des segments,
3. les singularités sérielles,

4. les limites mécaniques sur les articulations passives,

5. les courses des articulations prismatiques.

Dans les trois paragraphes suivants, nous modélisons géométriquement ces contraintes sous l'hypothèse que ρ_{11} peut être différente de ρ_{12}. Puis nous considérons dans le paragraphe 2.6 l'interdépendance entre les segments *11* et *12* de la chaîne I caractérisée par le fait que $\rho_{11} = \rho_{12} = \rho_1$.

2.3. COLLISIONS ENTRE LES DIFFERENTS ELEMENTS DE LA MACHINE VERNE

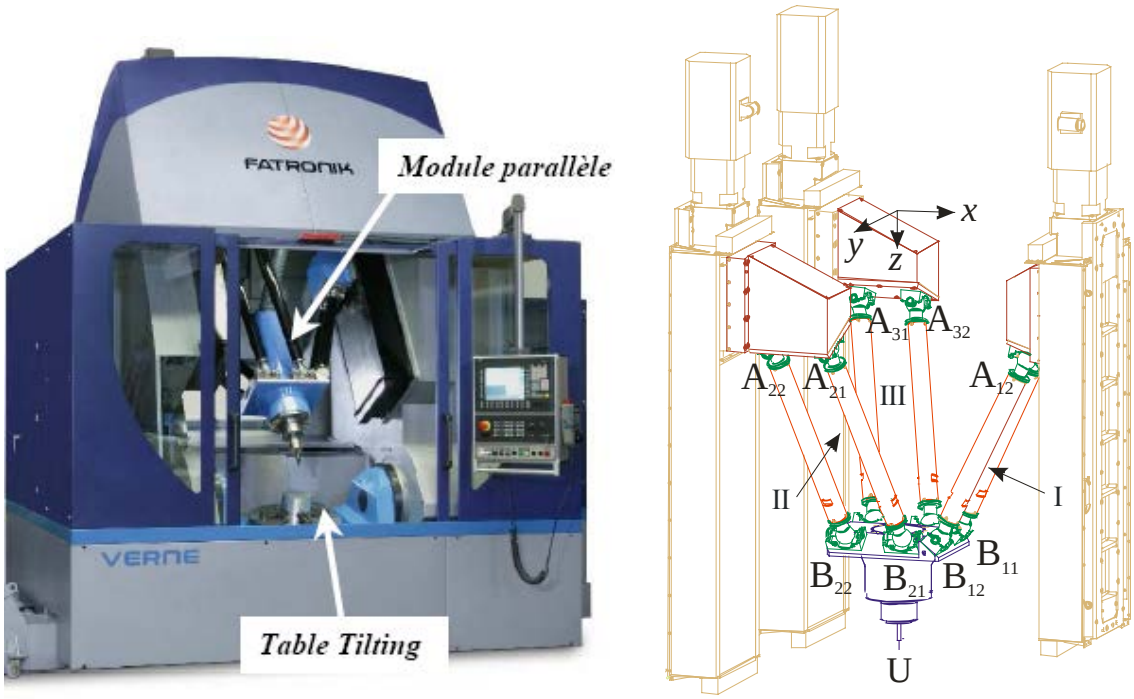


Figure 3.2 : Représentation schématique de la machine Verne

Dans ce paragraphe, nous définissons un parallélépipède rectangle pour le point *P* assurant qu'il n'y a pas de collision entre les différents éléments de la machine Verne. Ainsi, nous représentons les contraintes correspondantes par des inéquations qui nous permettent de déterminer les intervalles de x_p, y_p et z_p.

Pour éviter les collisions entre les rails et les segments, le segment devrait être seulement dans l'un des demi espaces séparé par un plan parallèle au plan des rails et passant par le point A_{ij} (voir la Figure 3.3). Nous pouvons représenter cette contrainte par des inéquations qui nous permettent de déterminer l'intervalle $\left]x_{p\min}, x_{p\max}\right[$ de x_p comme indiqué par les Eqs. [3.1a, 3.1b].

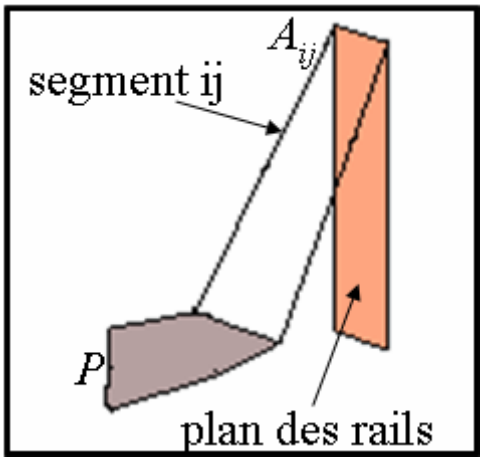


Figure 3.3 : La position du segment ij par rapport au plan des rails pour une situation quelconque de la plate-forme

$$x_{Bij} - x_{Aij} < 0 \ (i = 1,\ j = 1,\ 2) \ \Leftrightarrow x_{p\max} = d_1 - D_1 \qquad [3.1a]$$

$$x_{Bij} - x_{Aij} > 0 \ (i = 2,\ 3,\ j = 1) \ \Leftrightarrow x_{p\min} = d_2 - D_2 \qquad [3.1b]$$

Pour déterminer l'intervalle $\left]y_{p\min}, y_{p\max}\right[$, nous avons utilisé la contrainte sur les longueurs des segments:

$$y_{Bij} - y_{Aij} < L_2 \ (i = 2,\ j = 1,\ 2) \Leftrightarrow y_p < R_2 \cos(\alpha) + L_2 - r_4 \qquad [3.2a]$$

$$y_{Aij} - y_{Bij} < L_3 \ (i = 3,\ j = 1,\ 2) \Leftrightarrow y_p > r_4 - R_2 \cos(\alpha) - L_3 \qquad [3.2b]$$

Comme notre but est de trouver, pour toutes les valeurs de α, l'intervalle minimal $\left]y_{p\min}, y_{p\max}\right[$, nous utilisons $\alpha = 0$ dans les Eqs [3.2a, 3.2b] ce qui implique que $y_{p\max} = L_2 + R_2 - r_4$ et $y_{p\min} = r_4 - R_2 - L_3$.

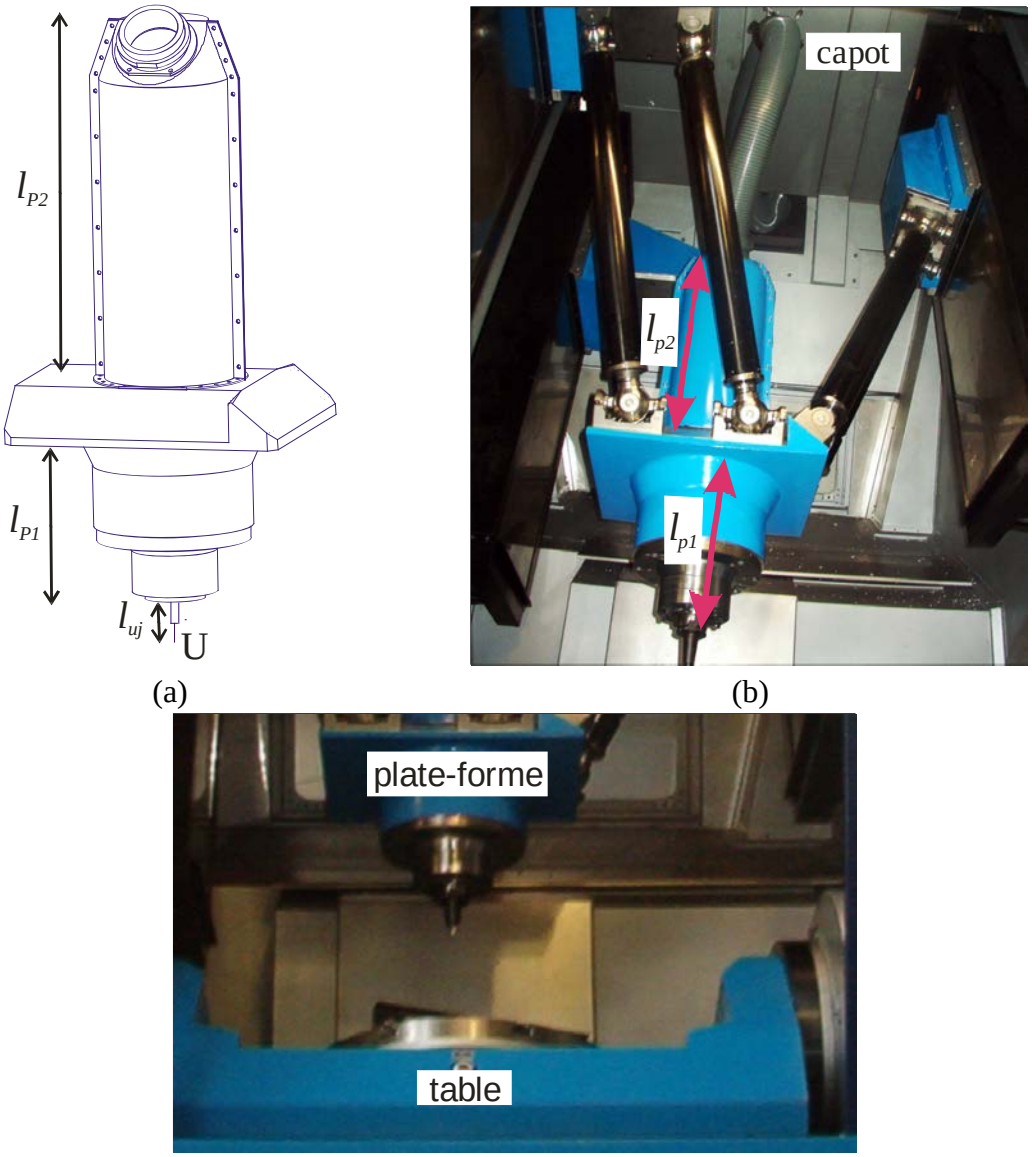


Figure 3.4 : (a) La Plate-forme mobile, (b-c) représentations photographiques montrant les risques de collisions entre la plate-forme et le capot en (b) et entre la plate-forme et la table en (c)

Pour évaluer la performance de la machine, il est important de trouver l'espace de travail de la machine pour différentes longueurs d'outil. Définissons $d_{p_u} = l_{p1} + l_{uj}$ comme la distance entre la plate-forme et l'extrémité *U* de l'outil (Figure 3.4a). Les paramètres $z_{table\ tilting}$ et z_{capot} définissent la position selon l'axe z de la table et du capot, respectivement.

Afin qu'il n'y ait aucune collision entre l'outil et la table tilting, il faut qu'à la limite l'outil arrive à la table tilting.

$$z_u - z_{table\ tilting} < 0 \Rightarrow z_P < z_{table\ tilting} - d_{p_u}\cos(\alpha) \qquad [3.3a]$$

soit $\alpha = 0$ dans l'Eq. [3.3a]. Cette condition assure qu'il n'y a pas de collision entre la plate-forme et la table tilting pour toute valeur de α (voir la Figure 3.4c).

Pour s'assurer qu'il n'y a pas de collision entre la plate-forme et le capot de la machine (voir la Figure 3.4b), nous définissons cette contrainte:

$$z_P > z_{capot} + l_{p2}\cos(\alpha) \qquad [3.3b]$$

Soit $\alpha = 0$ dans l'Eq. [3.3b]. Cette condition assure qu'il n'y ait pas de collision entre la plate-forme et le capot de la machine pour toute valeur de α.

Connaissant les bornes inférieures et supérieures de x_p, y_p et z_p, nous pouvons construire dans le repère Cartésien fixe le parallélépipède rectangle ${}^{1}\mathrm{V}^{\mathrm{P}}$ qui représente le domaine exclu de tout risque de collision entre les différents éléments de la machine Verne (voir la Figure 3.5).

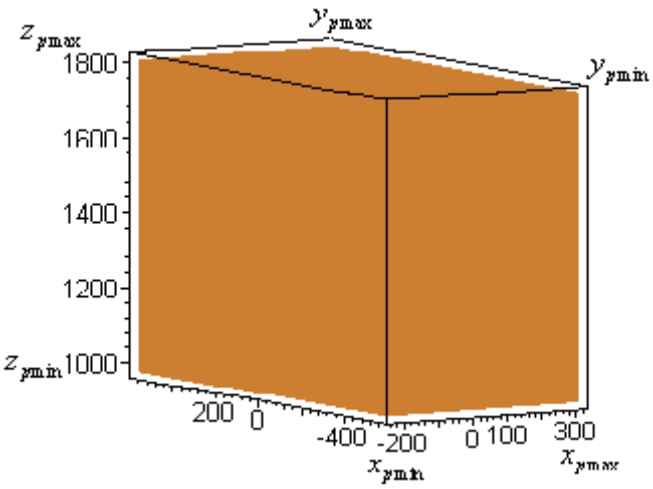


Figure 3.5 : Le volume admissible pour le point P assurant qu'il n'y a pas de collision entre les différents éléments de la machine et pour une longueur d'outil nul

2.4. LONGUEURS DES SEGMENTS ET SINGULARITES SERIELLES

Pour alléger l'explication de notre méthode, nous définissons les points A'_{ij} obtenus en translatant les points A_{ij} par le vecteur $\mathbf{B_{ij}P}$ qui est constant car l'orientation α est fixée. Les points A_{ij} (respectivement A'_{ij}) correspondent aux centres réels (respectivement centres fictifs) de rotation des articulations liées à la base. L'introduction de A'_{ij} va nous permettre de trouver directement le volume ${}^{k}\mathrm{V}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{ij}}$ accessible par *P* sous la contrainte k sur le segment *ij*

(nous supposons que l'espace de travail à orientation constante de la plate-forme est un volume car la chaîne I est découpée virtuellement).

Soit L_i la longueur du segment *i*. Si nous désignons respectivement par $A'_{ij,0}$ et $A'_{ij,1}$ les positions initiale et finale du centre de l'articulation *ij*, alors quand le point A'_{ij} coïncide avec le point $A'_{ij,0}$, le point *P* décrit une sphère $S'_{ij,0}$ de rayon L_i et de centre $A'_{ij,0}$. Cependant, une caractéristique particulière des manipulateurs parallèles de type $\underline{P}SS$ (ou $\underline{P}US$) est qu'ils passent par une singularité sérielle pour les configurations où un segment *ij* est perpendiculaire à l'axe de son rail (direction du mouvement de l'articulation prismatique). Pour éviter cette singularité, le mouvement de chaque segment devrait être restreint afin que l'angle entre les vecteurs $\mathbf{A'_{ij}B'_{ij}}$ et $\mathbf{A'_{ij,0}A'_{ij,1}}$ soit toujours dans l'un des deux intervalles $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ ou $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$. En conséquence, quand l'articulation prismatique est dans sa position initiale $A'_{ij,0}$, nous pouvons définir pour chaque segment *ij*, un plan perpendiculaire aux axes $A'_{ij,0}A'_{ij,1}$ en $A'_{ij,0}$. Ce plan découpe la sphère $S'_{ij,0}$ en deux hémisphères. Nous prenons l'hémisphère qui est du côté de l'axe $A'_{ij,0}\ A'_{ij,1}$. Quand le chariot atteint sa position finale $A'_{ij,1}$ en partant de $A'_{ij,0}$, le volume décrit par *P*, noté ${}^{2}V^{P}_{ij}$, est le volume balayé par l'hémisphère choisi le long de la directrice $A'_{ij,0}A'_{ij,1}$ (Figure 3.6).

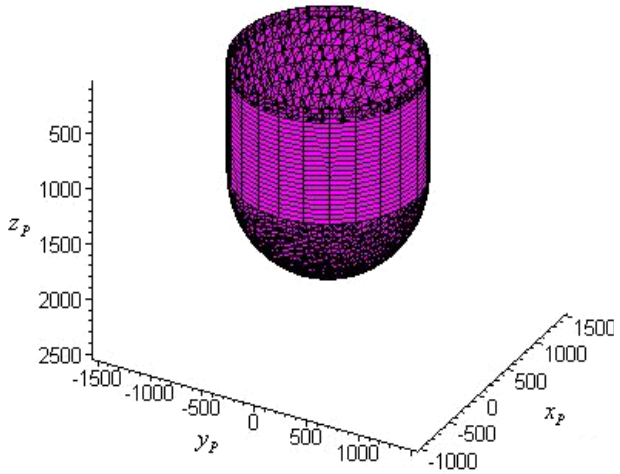


Figure 3.6 : Espace de travail du point P sous les contraintes imposées par la longueur du segment ij, sans singularité et pour une orientation donnée

Le volume ${}^{2}V_{ij}^{P}$ représente les lieux du point *P* sous les contraintes sur la longueur du segment *ij* et en s'assurant que ce segment ne passe pas par une singularité sérielle. Le volume ${}^{2}V^{P} = {}^{2}V_{11}^{P} \cap {}^{2}V_{12}^{P} \cap {}^{2}V_{21}^{P} \cap {}^{2}V_{31}^{P}$ satisfait les contraintes imposées par les longueurs des segments et ne contient pas de singularité sérielle. Ce volume est obtenu pour une orientation donnée α et en considérant que la chaîne I est découpée virtuellement. Ainsi d'autres singularités sérielles peuvent être trouvées quand nous considérons l'interdépendance entre les segments *11* et *12* de la chaîne I. Ces singularités sont présentées dans le paragraphe 2.6.

2.5. BUTEES MECANIQUES SUR LES ARTICULATIONS PASSIVES

Dans ce paragraphe, nous proposons une méthode qui prend en compte les limites mécaniques sur les articulations passives. Cette méthode prend en considération le type d'articulations aussi bien que l'emplacement de ces articulations dans la machine. En conséquence, nous cherchons à modéliser géométriquement ces contraintes pour trouver la frontière de l'espace de travail. Nous supposons que l'espace de travail à orientation constante de la plate-forme est un volume parce que la chaîne I est découpée virtuellement.

Notons que le point *P* est obtenu en translatant B_{ij} par le vecteur $\mathbf{B_{ij}P}$ qui est constant car l'orientation est fixée. Comme nous cherchons à trouver directement les lieux du point *P*, nous supposons que le segment *ij* est lié à son articulation prismatique et à la plate-forme mobile par les points $A_{ij}^{'}$ et P au lieu de points A_{ij} et B_{ij}.

2.5.1. Limites mécaniques sur les articulations passives liées aux articulations prismatiques

Nous pouvons décrire le mouvement des articulations sphériques par trois angles β, δ et γ. Ces angles sont définis de la manière suivante : partant du repère $R_{ij,0} = (A_{ij}^{'},\ \mathrm{x}_{\mathrm{ij},0}, \mathrm{y}_{\mathrm{ij},0}, \mathrm{z}_{\mathrm{ij},0})$ lié à l'articulation *ij*, nous obtenons l'orientation de l'articulation *ij* liée à la base par une première rotation autour de l'axe y d'un angle δ puis en tournant autour du nouvel axe $\mathrm{x}_{\mathrm{ij},1}$ d'un angle β et finalement en tournant autour du nouvel axe z d'un angle γ. Cependant, la rotation du segment autour du dernier axe peut être ignorée parce qu'il n'y a pas de limites articulaires. Le repère final obtenu est $R_{ij,2} = (A_{ij}^{'},\ \mathrm{x}_{\mathrm{ij},2}, \mathrm{y}_{\mathrm{ij},2}, \mathrm{z}_{\mathrm{ij},2})$ (Figure 3.7).

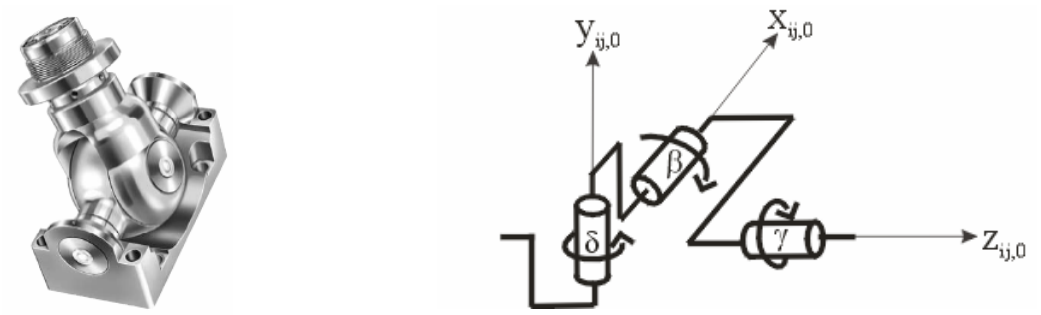


Figure 3.7 : Articulation Cardan du type INA GLK 3

Puisque les concepteurs fournissent les graphes qui décrivent le mouvement des articulations (Figure 3.8), nous pouvons définir l'angle β en fonction de l'angle δ. Connaissant leurs capacités angulaires aussi bien que la fonction qui les relie (Figure 3.8), nous pouvons décrire le mouvement de ces articulations.

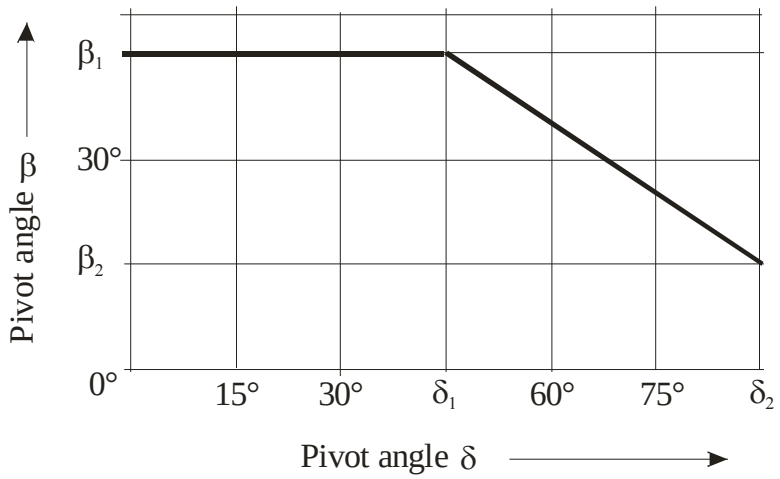


Figure 3.8 : Définition des limites articulaires d'une articulation cardan du type INA GLK 3

2.5.1.1. Modélisation des contraintes dues aux butées mécaniques sur les articulations de base

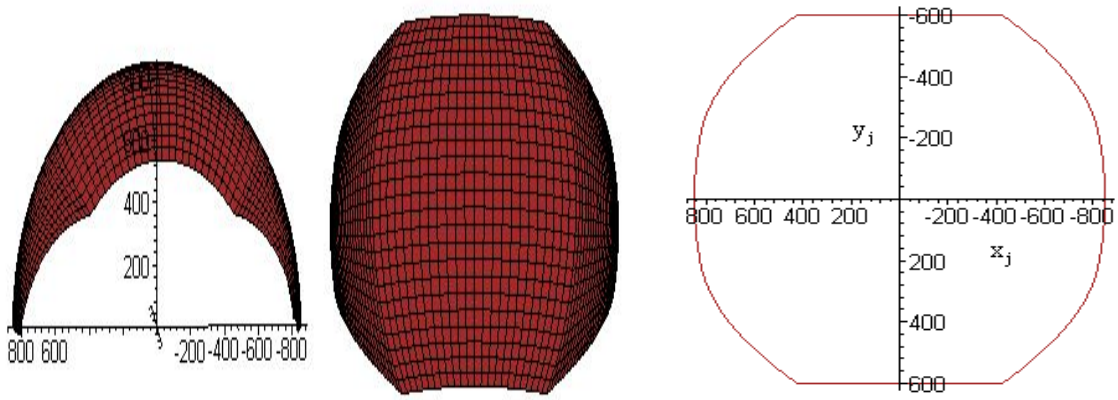
Soit ${}^{ij,0}\mathbf{T}_{ij,2} = \left[{}^{ij,0}\mathbf{s}_{ij,2} \; {}^{ij,0}\mathbf{n}_{ij,2} \; {}^{ij,0}\mathbf{a}_{ij,2} \; 0 \right] = \mathbf{Rot}(y_{ij,0}, \delta)\mathbf{Rot}(x_{ij,1}, \beta)$, la transformation entre le repère $R_{ij,0}$ et le repère $R_{ij,2}$ où ${}^{ij}\mathbf{s}_{ij,2}$, ${}^{ij}\mathbf{n}_{ij,2}$ et ${}^{ij}\mathbf{a}_{ij,2}$, désignent respectivement les vecteurs unitaires exprimés dans le repère $R_{ij,0}$ où $\mathbf{Rot}(y_{ij,0}, \delta)$ (respectivement $\mathbf{Rot}(x_{ij,1}, \beta)$) est une matrice de transformation qui décrit la rotation d'un angle δ (respectivement β) autour de l'axe $y_{ij,0}$ (respectivement $x_{ij,1}$).

$$ {}^{ij,0}\mathbf{T}_{ij,2} = \mathbf{Rot}(y_{ij,0},\delta)\mathbf{Rot}(x_{ij,1},\beta) = \begin{bmatrix} C\delta & 0 & S\delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\delta & 0 & C\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\beta & -S\beta & 0 \\ 0 & S\beta & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [3.4] $$

où $S\delta$ et $C\delta$ désignent $\sin\delta$ et $\cos\delta$, respectivement.

Soit ${}^{ij,0}\mathbf{P}$ (respectivement ${}^{ij,2}\mathbf{P}$), le vecteur qui exprime le point P dans le repère $(A_{ij}^{'},\ x_{ij,0}, y_{ij,0}, z_{ij,0})$ (respectivement $(A_{ij}^{'},\ x_{ij,2}, y_{ij,2}, z_{ij,2})$). Sachant que ${}^{ij,2}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_i & 1 \end{bmatrix}^T$ et ${}^{ij,0}\mathbf{T}_{ij,2}$ à partir de l'Eq. [3.4], nous déduisons ${}^{ij,0}\mathbf{P}$:

$$ {}^{ij,0}\mathbf{P} = {}^{ij,0}\mathbf{T}_{ij,2}\ {}^{ij,2}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} L_i \sin(\delta)\cos\beta & -L_i \sin\beta & L_i \cos(\delta)\cos\beta & 1 \end{bmatrix}^T \quad [3.5] $$



(a) (b)

Figure 3.9 : (a) Définition de la surface caractérisant les contraintes sur l'articulation ij de la base pour une position fixe de son chariot. Le point $A_{ij}^{'}$ est fixe; le point P décrit cette contrainte dans le repère lié à cette articulation. (b) Projection de cette surface dans le plan xOy

Vu que les coordonnées du point P sont exprimées en fonction des angles β et δ (Eq. [3.5]) et β est exprimé en fonction de δ, il suffit de connaitre les limites angulaires de δ (Figure 3.8) pour définir géométriquement les lieux du point P dans le repère lié à l'articulation correspondante (Figure 3.9).

2.5.1.2. Emplacement des articulations de type cardan

Considérons le repère $R_{ij,0} = (A_{ij}^{'},\ x_{ij,0}, y_{ij,0}, z_{ij,0})$ lié à l'articulation ij et le repère Cartésien fixe $R_a = (O,\ x, y, z)$. Soit ${}^{a}\mathbf{T}_{ij,0} = \begin{bmatrix} {}^{a}\mathbf{s}_{ij,0} & {}^{a}\mathbf{n}_{ij,0} & {}^{a}\mathbf{a}_{ij,0} & {}^{a}\mathbf{H}_{ij,0} \end{bmatrix}$, la transformation qui amène le repère R_a sur le repère $R_{ij,0}$, où ${}^{a}\mathbf{H}_{ij,0}$ est le vecteur exprimant $A_{ij}^{'}$, origine du repère $R_{ij,0}$ dans le repère R_a. Soit θ_{ij}, ψ_{ij} et ϕ_{ij} les angles décrivant la position de

l'articulation cardan *ij* par rapport au repère R_a. Ces angles sont définis de le manière suivante: en partant du repère R_a, nous obtenons le repère $R_{ij,0}$ lié à l'articulation *ij* en appliquant une translation suivant le vecteur $\mathbf{OA'_{ij}}$, puis une rotation autour de l'axe y d'un angle ψ, et une rotation autour du nouveau axe x d'un angle θ et finalement une rotation autour du nouveau axe z d'un angle ϕ.

$$^{\mathbf{a}}\mathbf{T_{ij,0}} = \mathbf{Trans}(\mathrm{x}_{A'_{ij}}, \mathrm{y}_{A'_{ij}}, \mathrm{z}_{A'_{ij}})\mathbf{Rot}(\mathrm{y},\psi_{\mathrm{ij}})\mathbf{Rot}(\mathrm{x},\theta_{\mathrm{ij}})\mathbf{Rot}(\mathrm{z},\phi_{\mathrm{ij}}) \qquad [3.6a]$$

où $\mathbf{Rot}(\mathrm{y},\psi_{\mathrm{ij}})$, $\mathbf{Rot}(\mathrm{x},\theta_{\mathrm{ij}})$ et $\mathbf{Rot}(\mathrm{z},\phi_{\mathrm{ij}})$ sont respectivement les matrices de transformation qui décrivent la rotation d'angles ψ_{ij}, θ_{ij} et ϕ_{ij} autour des axes y, x et z.

$$^{\mathbf{a}}\mathbf{T_{ij,0}} = \begin{bmatrix} C\psi_{ij}C\phi_{ij} + S\psi_{ij}S\theta_{ij}S\phi_{ij} & S\psi_{ij}S\theta_{ij}C\phi_{ij} - C\psi_{ij}S\phi_{ij} & S\psi_{ij}C\theta_{ij} & x_{A'_{ij}} \\ C\theta_{ij}S\phi_{ij} & C\theta_{ij}C\phi_{ij} & -S\theta_{ij} & y_{A'_{ij}} \\ C\psi_{ij}S\phi_{ij}S\theta_{ij} - S\psi_{ij}C\phi_{ij} & C\psi_{ij}S\theta_{ij}C\phi_{ij} + S\psi_{ij}S\phi_{ij} & C\psi_{ij}C\theta_{ij} & z_{A'_{ij}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [3.6b]$$

Soit $^{\mathbf{a}}\mathbf{P}$ et $^{\mathbf{ij,0}}\mathbf{P}$, les vecteurs qui expriment respectivement le point P dans les repères R_a et $R_{ij,0}$ en fonction des angles δ, β. Connaissant $^{\mathbf{ij,0}}\mathbf{P}$ à partir de l'Eq. [3.5] et $^{\mathbf{ij,0}}\mathbf{T_a}$ à partir des Eqs. [3.6a, 3.6b], nous déduisons:

$$^{\mathbf{a}}\mathbf{P} = {}^{\mathbf{a}}\mathbf{T_{ij,0}}\ {}^{\mathbf{ij,0}}\mathbf{P} \qquad [3.7]$$

La matrice $^{\mathbf{a}}\mathbf{T_{ij,0}}$ est exprimée en fonction de ρ_i, variable qui dépend de la position du chariot et des angles θ_{ij}, ψ_{ij}, ϕ_{ij} et α (les coordonnées de A'_{ij} sont exprimés en fonction de ρ_i et α). Les trois premiers angles sont des paramètres de conception (voir la Figure 3.10) et le dernier est l'angle représentant l'orientation de la plate-forme supposée connue. Donc $^{\mathbf{a}}\mathbf{P}$ peut être exprimé en fonction de β, δ et ρ_i (décrit dans la Figure 3.8).

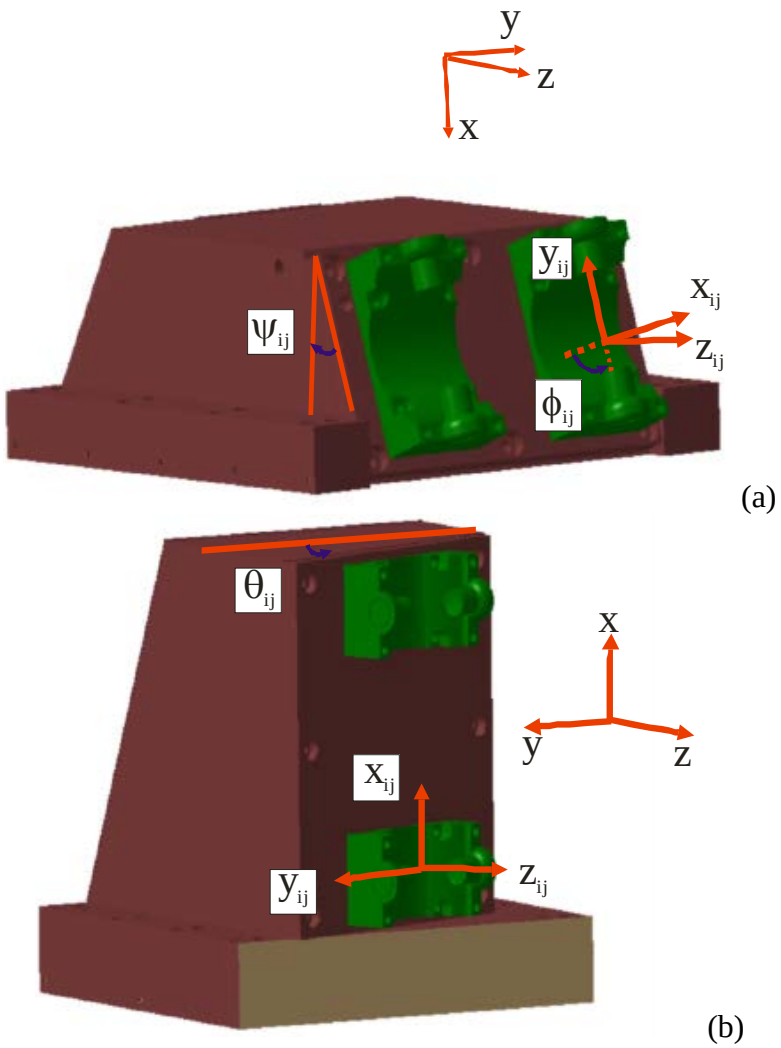


Figure 3.10 : Les paramètres θ_{ij}, ψ_{ij}, ϕ_{ij}, de positionnement des articulations sur les chariots

Nous pouvons maintenant définir la région sphérique S'_{ci} admissible pour le point *P* quand le point A'_{ij} est fixe (Figure 3.11), en faisant varier δ de $-\delta_2$ à $+\delta_2$ dans l'Eq. [37] (rappelons que β est exprimé en fonction de δ comme indiqué dans la Figure 3.8). La région surfacique S'_{ci} est déterminée pour une position donnée du chariot de l'articulation ij. Puisque A'_{ij} peut se déplacer seulement entre les points $A'_{ij,0}$ et $A'_{ij,1}$, la région spatiale admissible pour le point *P* est le volume ${}^3\mathrm{V}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{ij}}$ balayé par $S'_{ci,0}$ le long de la direction $A'_{ij,0}A'_{ij,1}$. Ce volume est le volume accessible par *P* en tenant compte seulement des limites mécaniques sur l'articulation *ij* de la base. Le volume total en prenant compte toutes les articulations sphériques de la base sera: ${}^3\mathrm{V}^{\mathrm{P}} = {}^3\mathrm{V}^{\mathrm{P}}_{11} \cap {}^3\mathrm{V}^{\mathrm{P}}_{12} \cap {}^3\mathrm{V}^{\mathrm{P}}_{21} \cap {}^3\mathrm{V}^{\mathrm{P}}_{31}$

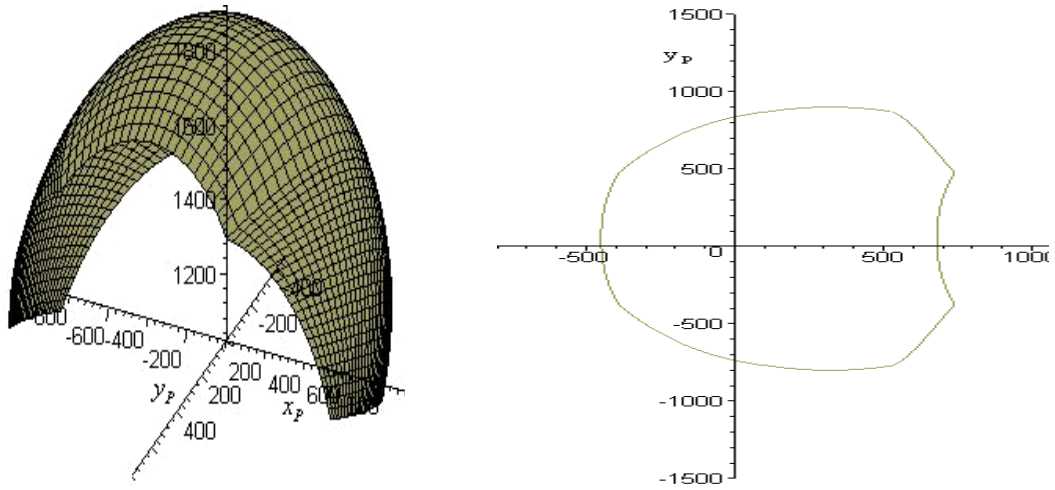


Figure 3.11 : (a) les lieux du point P caractérisant les contraintes sur l'articulation ij de la base, pour une orientation donnée et pour une position fixe de son chariot. (b) Projection de cette surface dans le plan xOy

Pour obtenir la projection de $S'_{ci,0}$ dans le plan xOy, nous calculons les coordonnées en x et y du point ${}^{a}P$ à partir de l'Eq. [3.7] en variant δ entre max(-δ_2,-$\pi/2-\psi_{ij}$) et min(δ_2, $\pi/2-\psi_{ij}$), de cette façon, nous nous assurons aussi que le segment *ij* ne traverse pas une singularité sérielle. Ce type de singularité se produit quand l'angle entre le plan des rails et le segment atteint $\pi/2$.

2.5.2. Les limites Mécaniques sur les articulations passives liées à la plate-forme mobile

Pour modéliser géométriquement les contraintes imposées par les articulations sphériques liées à la plate-forme, nous pouvons clairement adopter les mêmes modèles que ceux utilisés pour les articulations sphériques liées aux articulations prismatiques. Donc nous définissons la région sphérique S'_{si} de centre *P* telle que si les contraintes sur l'articulation *ij* sont satisfaites, le point A'_{ij} est sur cette surface (nous utilisons le même raisonnement employé dans le paragraphe précédent).

Considérons le repère $(A'_{ij}, x'_{ij,2}, y'_{ij,2}, z'_{ij,2})$ où $x'_{ij,2} = -x_{ij,2}$, $y'_{ij,2} = -y_{ij,2}$ et $z'_{ij,2} = -z_{ij,2}$. Nous pouvons définir dans ce repère une surface S'^{P}_{si} équivalente à S'_{si}, de centre A'_{ij} telle que si les contraintes sur l'articulation *ij* de la plate-forme sont satisfaites alors le point *P* est sur la surface S'^{P}_{si} [**Merlet 95**]. Comme le point A'_{ij} peut seulement se déplacer entre les points $A'_{ij,0}$ et $A'_{ij,1}$, la région spatiale admissible pour le point P est le volume ${}^{4}V^{P}_{ij}$ balayé par $S'^{P}_{si,0}$ le long

de la directrice $A'_{ij,0}A'_{ij,1}$. Ce volume est accessible par *P* en tenant compte seulement des butées mécaniques sur l'articulation *ij* de la plate-forme. Le volume total y compris toutes les articulations sphériques passives liées à la plate-forme mobile sera : ${}^{4}\mathrm{V}_{i}^{P} = {}^{4}\mathrm{V}_{11}^{P} \cap {}^{4}\mathrm{V}_{12}^{P} \cap {}^{4}\mathrm{V}_{21}^{P} \cap {}^{4}\mathrm{V}_{31}^{P}$.

2.6. LES CONTRAINTES DE FERMETURE DE LA CHAINE I

Nous considérons l'interdépendance entre les segments de chaîne I. Cela nous permet de définir la région parcourue par le point *P*. Cette région est une surface.

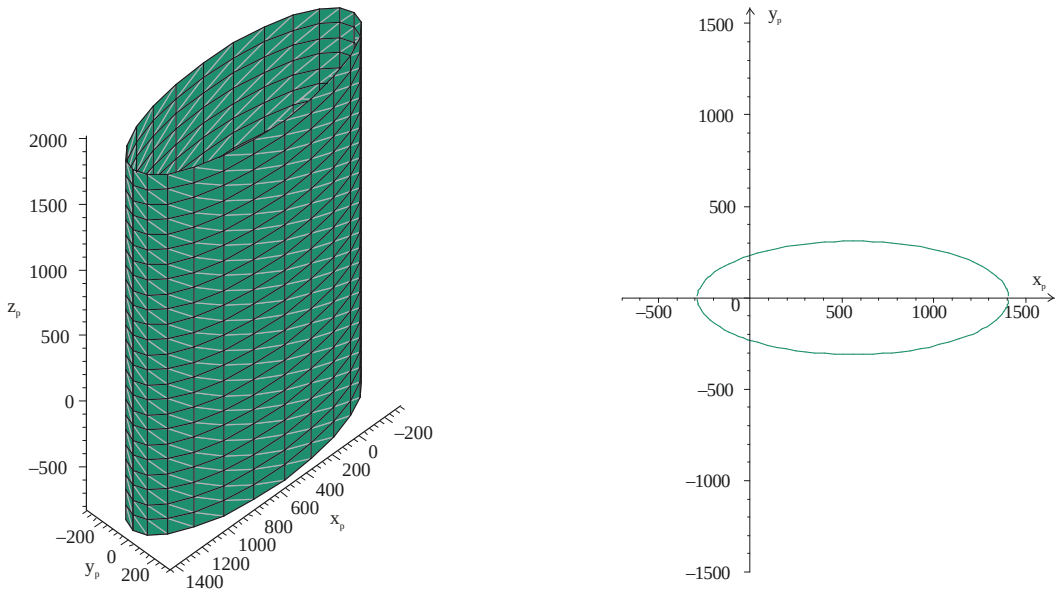


Figure 3.12 : (a) les lieux du point P caractérisant la contrainte imposée par la forme de la chaîne I pour une orientation donné α (b) La projection de cette surface dans le plan xOy

Pour une orientation donnée α, nous pouvons modéliser l'Eq. [2.7] par un cylindre creux Cy_1^P dont la base est une ellipse (Figure 3.12). Cette surface représente le couplage entre la position et l'orientation de la plate-forme qui résulte de la forme de la chaîne I. De plus, les singularités sérielles et le modèle géométrique inverse ajoutent des contraintes supplémentaires. Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié les singularités sérielles pour le module parallèle de la machine Verne quand la chaîne I est virtuellement découpée. Cependant, nous avons étudié les singularités sérielles du module parallèle de la machine Verne dans le chapitre 2. Dans cette étude, nous avons démontré qu'une singularité particulière a été obtenue quand $R_1 \cos(\alpha) = r_1$. Pour tenir compte de cette singularité, il est nécessaire d'imposer la contrainte suivante:

$$\cos(\alpha) > \frac{r_1}{R_1} \qquad [3.8]$$

Pour le calcul de l'espace de travail de la machine Verne, seulement une solution au modèle géométrique inverse est prise en considération. Dans le chapitre 2, nous avons prouvé que cette solution est obtenue quand les signes de $\rho_1 - z_P$, $\rho_2 - z_P + R_2 \sin(\alpha)$ et $\rho_3 - z_P - R_2 \sin(\alpha)$ sont négatifs. Cependant en soustrayant l'Eq. [2.3a] de l'Eq. [2.3b], nous obtenons :

$$y_P \left(R_1 \cos(\alpha) - r_1 \right) = R_1 \sin(\alpha) \left(\rho_1 - z_P \right) \qquad [3.9]$$

L'Équation [3.9] implique que $\operatorname{sgn}\left(\rho_1 - z_P\right)\operatorname{sgn}(\sin(\alpha)) = \operatorname{sgn}(R_1 \cos(\alpha) - r_1)\operatorname{sgn}(y_P)$. Donc pour vérifier la condition sur le modèle géométrique inverse $\rho_1 < \mathrm{z_P}$ et la contrainte liée à la singularité sérielle $R_1 \cos(\alpha) > r_1$, seulement la moitié du cylindre creux $\mathrm{Cy}_1^{\mathrm{P}}$ obtenu pour $y_P < 0$ (respectivement $y_P > 0$) si $\alpha > 0$ (respectivement $\alpha < 0$) doit être considéré dans le calcul de l'espace de travail de la machine Verne.

Il est important de noter que l'existence de cette contrainte nous a amenés à chercher les lieux du point P dans un plan parallèle au plan $(\mathrm{x}O\mathrm{y})$ pour une orientation donnée α.

2.7. L'ALGORITHME DE CALCUL DE L'ESPACE DE TRAVAIL TOTAL

Jusqu'à présent, nous avons recherché l'espace de travail du module parallèle de la machine Verne en considérant chaque contrainte séparément. Dans ce paragraphe, nous supposons en premier que l'orientation de la plate-forme mobile est fixée et nous cherchons les lieux possibles du point *P* vérifiant toutes les contraintes dans un plan horizontal. Alors nous parcourons les paramètres α et z_P pour trouver l'espace de travail total.

L'espace de travail du module parallèle de la machine Verne varie avec z_P. Cependant nous pouvons graphiquement prouver que pour $z_P \in \mathrm{I}_2 = \left[\max(\rho_{i\min} + l_i),\ \min(\rho_{i\max})\right]$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$, l'espace de travail du module parallèle reste constant. Quand $z_P \in \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_3$, où $\mathrm{I}_1 = \left[\min(\rho_{i\max}),\ \min(\rho_{i\max} + l_i)\right]$ et $\mathrm{I}_3 = \left[\max(\rho_{i\min}),\ \max(\rho_{i\min} + l_i)\right]$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$, l'espace de travail varie comme illustré dans la Figure 3.13 où $\rho_{i\min}$ et $\rho_{i\max}$ représentent respectivement les valeurs minimale et maximale de ρ_{i}.

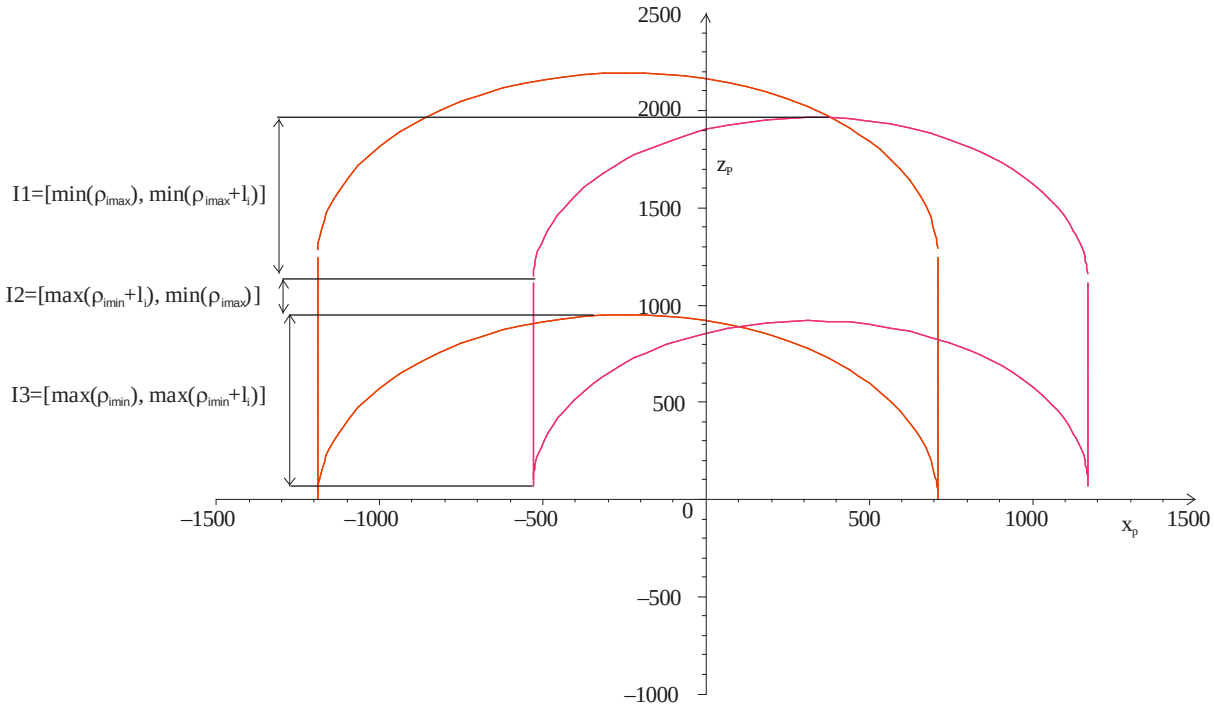


Figure 3.13 : Projection du volume ${}^2V^P$ dans le plan xOz pour une orientation donné α

2.7.1. Résumé de la méthode de calcul de l'espace de travail total

L'espace de travail de la machine Verne est l'intersection entre les modèles géométriques déjà définis dans les paragraphes précédents. Pour calculer cet espace de travail, nous appliquons les étapes suivantes:

- Étape 1 : Nous faisons varier α entre $-\alpha_1$ et $+\alpha_1$ en suivant un pas constant et pour chaque valeur de α nous répétons les étapes 2, 3 et 4. La valeur de α_1 definie dans l'Eq. [3.10] est obtenue à partir des contraintes liées aux singularités sérielles.

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{r_1}{R_1}\right) \qquad [3.11]$$

- Étape 2 : Nous projetons horizontalement tous les modèles géométriques obtenus pour une orientation donnée α .

- Étape 3 : Nous calculons l'intersection entre les zones projetées caractérisant les contraintes sur les longueurs des segments, les collisions entre les différents éléments de la machine et les limites mécaniques sur les articulations passives pour obtenir la zone $S_1(\alpha)$ (voir la Figure 3.15).

- Étape 4: Nous sélectionnons la partie de la demi-ellipse qui se trouve à l'intérieur de la zone $S_1(\alpha)$.

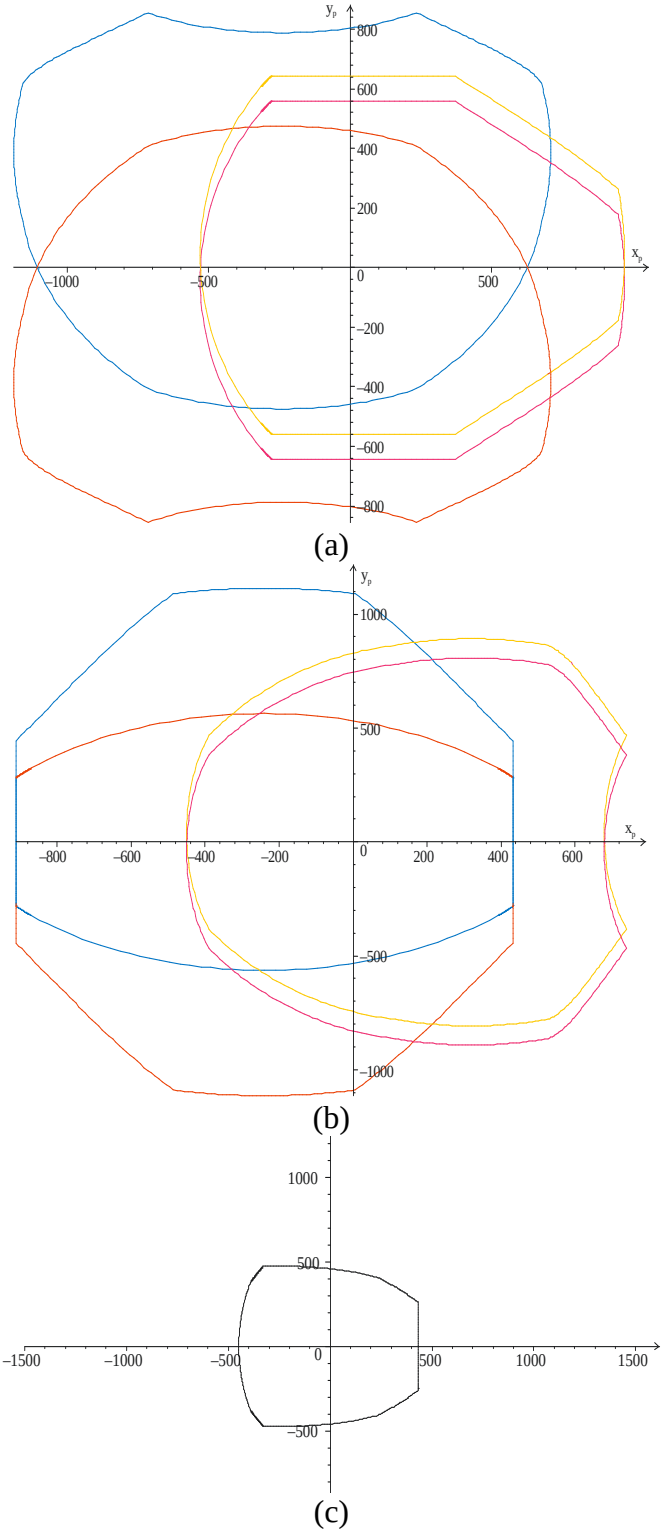
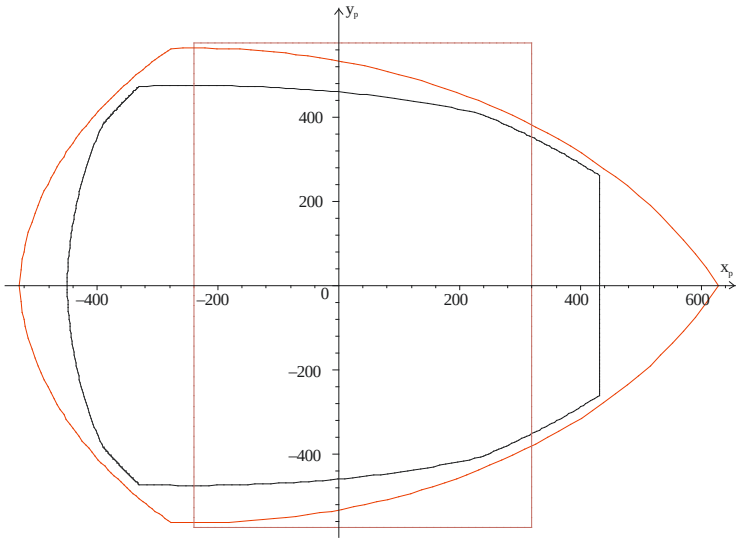
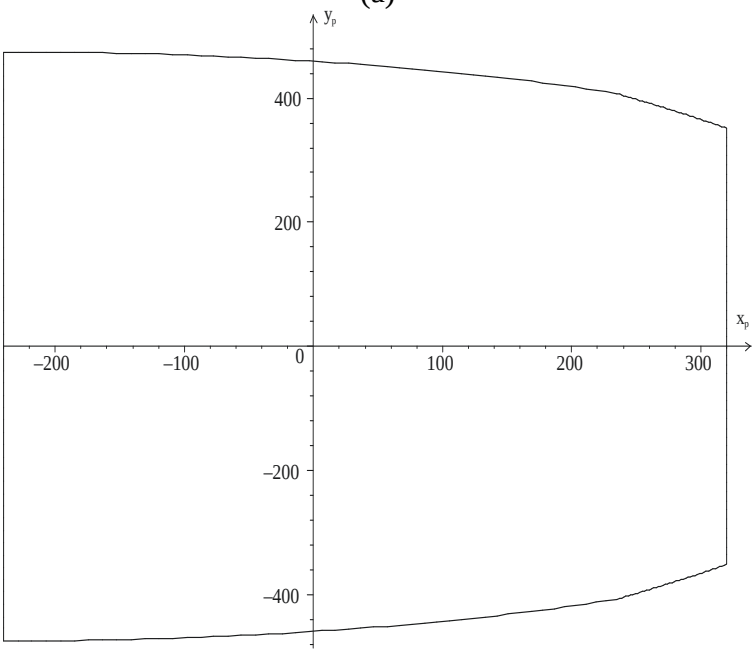


Figure 3.14 : Les lieux accessibles par le point P dans le plan horizontal et pour une orientation donnée α ; (a) sous les contraintes mécaniques des articulations de base, (b) sous les contraintes mécaniques des articulation liées à la plate-forme, (c) en considérant toutes les contraintes mécaniques sur les articulations passives (après intersection entre les courbes)



(a)



(b)

Figure 3.15 : la zone $S_1(\alpha)$ avant et après intersection entre les courbes caractérisant les contraintes sur les longueurs des segments, les limites mécaniques sur les articulations passives et les contraintes évitant tout risque de collision entre les différents éléments de la machine

- Étape 5 : Nous choisissons des valeurs discrètes de z_P dans l'intervalle $\left[(z_{capot} + l_{p2},\ z_{table\ tilting} - d_{p_u}\right]$ et pour chaque valeur de z_P nous appliquons toutes les étapes en partant de l'Étape 6 à l'Étape 10.

- Étape 6: Nous faisons varier α entre -α_1 et +α_1 avec un pas constant et pour chaque valeur de α nous répétons toutes les étapes en partant de l'Étape 7 à l'Étape 10.

- Étape 7: Si $z_P \in \mathrm{I}_2$, nous utilisons les résultats de l'Étape 4 et nous passons directement à l'Étape 10, sinon nous passons à l'Étape 8.

- Étape 8: Si $z_P \in \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_3$, nous coupons horizontalement tous les volumes ${}^2\mathrm{V}_\mathrm{k}^\mathrm{P}$ ($k = 11$, 12, 21, 31) par le plan $z = z_P$. Nous calculons alors l'intersection entre les zones circulaires obtenues et la zone $S_1(\alpha)$ pour obtenir une nouvelle zone $S_2(\alpha, z_P)$.

- Étape 9: Si $z_P \in \mathrm{I}_1$, nous sélectionnons la partie de la demi d'ellipse qui se trouve à l'intérieur de la zone $S_2(\alpha, z_P)$. En revanche, si $z_P \in \mathrm{I}_3$, nous sélectionnons la partie de la demi d'ellipse qui se trouve à l'extérieur de la zone $S_2(\alpha, z_P)$ mais à l'intérieur de la zone $S_1(\alpha)$. L'exemple est illustré dans la Figure 3.16.

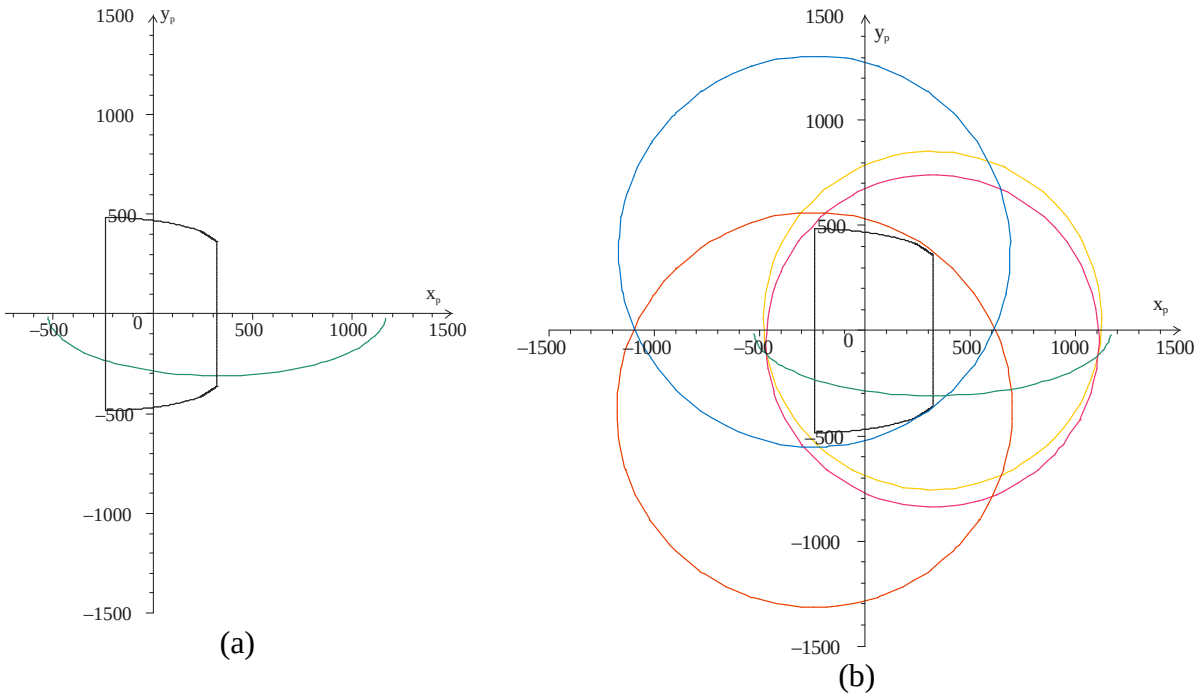


Figure 3.16 : Les lieux du point P pour une orientation et une hauteur données avec (a) $z_P \in I_2$, (b) $z_P \in I_1 \cup I_3$

- Étape 10: Nous avons une relation exprimant y_P en fonction de x_P (Eq. [2.6]) où les bornes inférieures et supérieures sont connues pour une valeur donnée de z_P. Donc nous sauvegardons en premier ces valeurs dans un ficher $f1$ puis nous faisons varier x_P avec un pas constant en calculant y_P pour chaque valeur de x_P. Ceci nous permettra de sauvegarder numériquement toutes les valeurs de x_P, y_P et z_P appartenant à l'espace de travail dans un autre fichier $f2$.

- Étape 11: Pour obtenir le volume de l'espace de travail, nous importons le fichier $f1$ dans CATIA V5® et nous générons le maillage en utilisant le produit "*Quick Surface Reconstruction Product*". Après cela, nous transformons le maillage final en une surface en utilisant le produit "*Digitized Shape Editor Product*". Finalement nous remplissons cette surface en utilisant la fonction remplissage dans le produit "*Part Design Product*". Le volume obtenu est l'espace de travail total illustré dans la Figure 3.17.

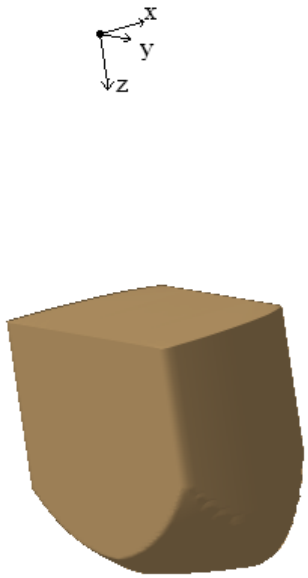


Figure 3.17 : Espace de travail défini comme l'ensemble de points P dans R_b

Pour calculer l'espace de travail pour une longueur donnée de l'outil nous procédons de la manière suivante :

- Étape 12: Nous exprimons les coordonnées de l'extrémité de l'outil U $(x_u,\ y_u,\ z_u)$ dans le repère Cartésien fixe en fonction des coordonnées du point P :

$$x_u = x_P,\ y_u = y_P - d_{p_u}\sin(\alpha) \text{ et } z_u = z_P + d_{p_u}\cos(\alpha) \qquad [3.12]$$

où $d_{p_u} = l_{p1} + l_{uj}$ et l_{uj} est la longueur de l'outil (Figure 3.4a).

- Étape 13: Nous vérifions la condition que $z_u \leq z_{table\ tilting}$

- Étape 14: Nous sauvegardons les résultats obtenus dans un fichier.

- Étape 15: Nous appliquons les mêmes opérations qu'à l'Étape 11. Cela nous permet d'obtenir un volume représentant l'espace de travail total pour une longueur d'outil donnée, comme illustré dans la Figure 3.18.

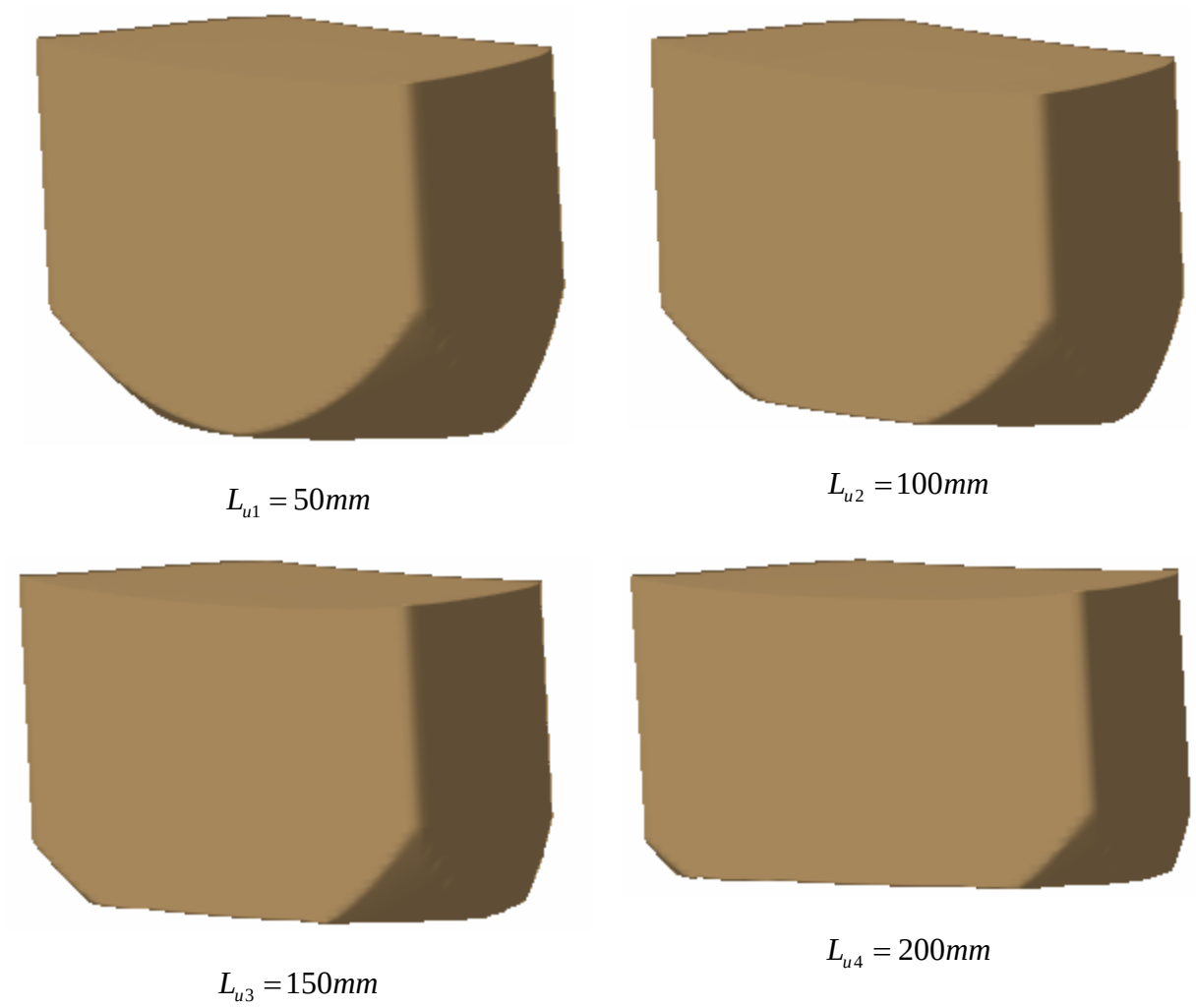


Figure 3.18 : L'espace de travail pour plusieurs longueurs de l'outil

La procédure proposée pour le calcul de l'espace de travail du module parallèle pour plusieurs longueurs d'outil a été implantée sous Maple 10®.

3. CALCUL DE L'ESPACE DE TRAVAIL DE LA MACHINE VERNE

L'espace de travail 3-axes est l'ensemble des positions du point de référence défini dans le repère de la pièce à usiner pour lesquelles l'outil est considéré toujours perpendiculaire à la pièce. Cet espace est utile pour montrer la capacité des machines d'usinage 5-axes à usiner les mêmes pièces que celles de leurs homologues 3-axes.

Dans ce paragraphe, nous calculons l'espace de travail 3-axe de la machine Verne en considérant que la table tilting tourne autour de son axe horizontal en suivant l'orientation α de la plate-forme mobile, ce qui veut dire que $\theta_1 = \alpha$ et $\phi_1 = 0$, nous supposons aussi que $\theta_2 = \phi_2 = 0$.

Pour calculer cet espace de travail, nous utilisons l'Eq. [2.35] en remplaçant θ_1, θ_2, ϕ_1 et ϕ_2 par leurs valeurs respectives. Cette équation exprime la position et l'orientation de l'extrémité de l'outil (en anglais *Tool Centre Point*, TCP) dans le repère R_t (x_u, y_u, z_u, ϕ_1, ϕ_2) en fonction de (x_p, y_p, z_p, α). Pour obtenir l'espace de travail 3-axes de la machine pour différentes longueurs d'outils (voir la Figure 3.19), nous ajoutons la condition que $z_u \geq 0$ et nous procédons de la même façon que dans les étapes 14 et 15 du paragraphe 2.7.1.

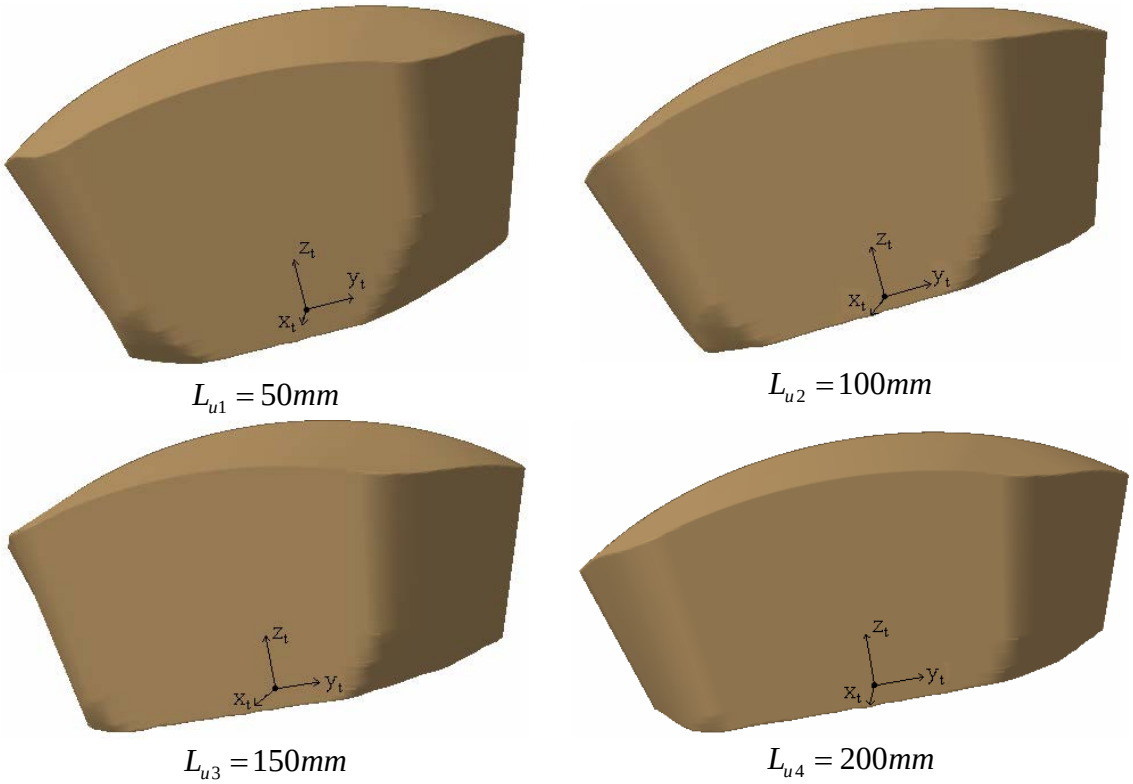


Figure 3.19 : L'espace de travail 3-axes pour différentes longueurs d'outil

Une représentation graphique de l'espace de travail des PKMs avec plus de trois degrés de liberté est possible seulement si nous fixons les paramètres représentant les degrés de liberté supplémentaires. Donc pour calculer l'espace de travail pour plusieurs orientations d'outil, nous fixons en premier ϕ_1 et ϕ_2, ensuite, nous calculons la position du TCP (x_u, y_u, z_u) dans le repère R_t en utilisant l'Eq. [2.35] du chapitre 2.

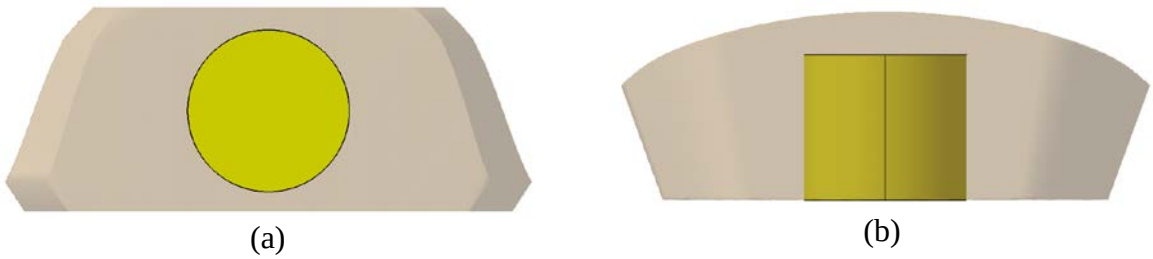


Figure 3.20 : Comparaison entre l'espace de travail 3-axes calculé par notre méthode ($L_{u1} = 50mm$) et celui fourni par Fatronik, (a) vue de dessus et (b) vue de gauche

La méthode proposée pour calculer l'espace de travail pour plusieurs longueurs et orientations d'outil a été implantée sous Maple et peut être affichée dans le logiciel de CAO CATIA. Les résultats obtenus montrent un espace de travail beaucoup plus grand que celui actuellement utilisé par la machine Verne (pour des orientations de l'outil données comme illustré dans la Figure 3.20). Ainsi, le volume de l'espace de travail 3-axes calculé par notre méthode pour une longueur d'outil égal à 50 mm est cinq fois plus grand que celui utilisé par la machine Verne pour la même longueur d'outil. Cette méthode va nous permettre d'améliorer la productivité de la machine Verne et atteindre les limites de sa capacité sans risque de collision ou dégât de la machine.

4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode pour calculer plusieurs types d'espace de travail de la machine pour différentes longueurs d'outils. Cette méthode prend en considération toutes les contraintes qui ont une influence réelle sur l'espace de travail du module parallèle : les longueurs des segments, les singularités sérielles, les limites mécaniques sur les articulations passives et actives, les collisions entre les différents éléments de la machine et la contrainte de fermeture de la chaîne I. Cette contrainte est particulière pour la machine Verne et est due à la forme irrégulière de la chaîne I qui n'est pas un parallélogramme. Dans la première partie, nous avons calculé l'espace de travail total du module parallèle de la machine Verne. La deuxième partie a été consacrée au calcul de l'espace de travail 3-axes lorsque l'axe de l'outil reste perpendiculaire à la pièce. Dans cette partie, nous avons présenté aussi une façon d'obtenir plusieurs type d'espace de travail de la machine en fixant 2 paramètres parmi les 5 paramètres représentant les degrés de liberté de la machine.

Dans cette méthode, la chaîne I a été découpée en considérant qu'elle est liée à la base par deux articulations prismatiques au lieu d'une et nous avons modélisé géométriquement les

contraintes qui limitent l'espace de travail de la nouvelle architecture parallèle pour une orientation donnée de la plate-forme. L'intersection entre ces modèles est un volume. Nous avons modélisé géométriquement la contrainte de la fermeture pour une orientation donnée de la plate-forme; cela nous a donné une surface. Nous avons calculé l'intersection entre ces modèles dans un plan horizontal connu, puis nous avons procédé par discrétisation pour déterminer l'espace de travail total du module parallèle de la machine Verne. Ensuite, nous avons utilisé les résultats obtenus dans le chapitre 2 pour exprimer l'extrémité de l'outil en fonction du centre de la plate-forme mobile et en conséquence représenter les différents types d'espace de travail de la machine Verne. Des algorithmes pour la détermination des différents types d'espace de travail ont été aussi présentés. Ces algorithmes ont été implantés dans le logiciel Maple 10®. Des exemples ont été fournis pour illustrer les résultats.

Cette méthode a été en particulier appliquée à la machine Verne. Cependant elle peut toujours être appliquée à toutes les machines de type $\underline{P}$SS (ou $\underline{P}$US) mais avec quelques modifications dans l'algorithme selon la forme des chaînes et le nombre de degré de liberté de la machine. Pour des manipulateurs parallèles avec plus de trois degrés de liberté, nous pouvons fixer les angles représentant les degrés de libertés associées à l'orientation et ensuite calculer un espace de travail à orientation constante. Pour les manipulateurs parallèles où les chaînes sont des segments simples (ou des parallélogrammes) nous pouvons modéliser géométriquement les contraintes et directement intégrer ces modèles dans CATIA V5® pour pouvoir calculer l'intersection entre ces modèles et obtenir le volume de l'espace de travail.

CHAPITRE 4

ETUDE DE SINGULARITES PARALLELES DES MANIPULATEURS PARALLELES A MOBILITES RESTREINTES

1. INTRODUCTION

Les singularités parallèles sont des configurations critiques dans lesquelles un manipulateur parallèle perd sa rigidité et gagne un ou plusieurs degré(s) de liberté supplémentaires. Ces configurations singulières peuvent être obtenues analytiquement [**Angeles 06**], géométriquement [**Merlet 89**] ou numériquement [**Merlet 05**].

La plupart des travaux de recherches sur l'analyse des singularités de manipulateurs parallèles ont été menés sur des manipulateurs à six ddls et particulièrement sur des manipulateurs de type Gough-Stewart. Les colonnes de la transposée de la matrice jacobienne inverse de ce type de manipulateur sont les coordonnées de Plücker des vecteurs représentant des droites finies dans l'espace. Ces droites sont des torseurs statiques d'actionnement qui décrivent les forces instantanées appliquées par les actionneurs sur la plate-forme mobile. Pour un manipulateur parallèle de type Gough-Stewart, les singularités parallèles se produisent quand les droites passant par les jambes du manipulateur sont linéairement dépendantes. Merlet a analysé les singularités de ce type de manipulateurs en utilisant la géométrie de Grassmann [**Merlet 06**]. Hao et McCarthy ont utilisé la théorie des vis pour définir les conditions, une fois vérifiées par un manipulateur, ces singularités sont liées à la dépendance des droites finies dans l'espace [**Hao 98**]. Ils se sont intéressés à des manipulateurs parallèles à six ddls dont chacune des jambes contient au moins un actionneur et a ses trois dernières liaisons équivalentes à une liaison sphérique passive. Par conséquent, chaque jambe du manipulateur peut appliquer seulement une force pure à la plate-forme, afin qu'il soit possible de caractériser toutes les configurations singulières par la géométrie de l'ensemble de droites linéairement dépendantes. Ben-Horin et Shoham ont analysé les singularités parallèles de deux classes de manipulateurs parallèles à six ddls en utilisant l'Algèbre Grassmann-Cayley (AGC) [**Ben-Horin 05 et 06**]. Ils ont utilisé la décomposition du superbracket et les opérateurs de Grassmann-Cayley pour obtenir les conditions géométriques de singularités. Ces conditions sont obtenues lorsque quatre plans définis par la direction des axes des liaisons et l'emplacement des liaisons sphériques se croisent en un point commun. Les manipulateurs analysés dans [**Ben-Horin 05 et 06**] ne sont pas nécessairement du type Gough-Stewart mais leurs jambes transmettent seulement des forces pures.

Contrairement aux manipulateurs à six ddls, le nombre de ddls des jambes d'un manipulateur parallèle à mobilité restreinte est inférieure à six [**Gogu 08**]. En effet, chaque

jambe contraint en partie le mouvement de la plate-forme mobile. En réalité, quand les jambes du manipulateur perdent leur capacité de contraindre la plate-forme mobile, une singularité de type contrainte (en anglais, *constraint singularity*) se produit. Notons que pour quelques manipulateurs parallèles comme le robot SMG de McGill [**Angeles 06**], des contraintes redondantes peuvent aussi apparaître. Joshi et Tsai ont développé une méthodologie pour définir la matrice jacobienne inverse des manipulateurs parallèles à mobilités restreintes par l'intermédiaire de la théorie des vis réciproques [**Joshi 02**]. En conséquence, une matrice jacobienne inverse de dimension 6×6 est définie. Les colonnes de la transposée de cette matrice sont des torseurs statiques qui informent sur les singularités parallèles et sur les singularités de type contrainte. Ces torseurs statiques, aussi connus comme droites gouvernantes, sont des torseurs statiques d'actionnement et de contrainte appliqués à la plate-forme mobile.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'identification de singularités parallèles des manipulateurs à mobilités restreintes au moyen de l'AGC. Pour cela, l'AGC est appliqué aux manipulateurs parallèles ayant une matrice jacobienne inverse de dimension 6×6. Les colonnes de cette matrice peuvent être des vecteurs de Plücker des droites finies représentées par des visseurs de pas zéro (en anglais, *zero pitch screws*) ou des droites infinies représentées par des visseurs de pas infini (en anglais, *infinite pitch screws*) dans l'espace projectif. Il apparait que les travaux précédents se sont concentrés seulement sur l'analyse des singularités des manipulateurs parallèles dont les jambes n'appliquent que des forces pures sur la plate-forme mobile. Ainsi, les singularités parallèles de ces manipulateurs sont liées à la dépendance des droites finies dans l'espace. En conséquence, les méthodes géométriques précédentes peuvent seulement être appliquées aux manipulateurs possédant au moins une liaison sphérique passive dans chaque jambe. La méthodologie introduite dans cette thèse permet d'identifier les singularités parallèles liées à la dépendance des droites finies et infinies dans l'espace projectif. Ainsi, les méthodes géométriques peuvent être appliquées à un grand nombre de manipulateurs, notamment aux manipulateurs dont les chaînes appliquent aussi bien des forces que des moments à la plate-forme mobile. Ces manipulateurs sont à mobilités réduites ou ceux dont certaines jambes ne possèdent aucune liaison sphérique passive ou bien des manipulateurs contenant des articulations de type parallélogramme.

2. METHODE GEOMETRIQUE DE DETECTION DE SINGULARITES PARALLELES

Nous présentons une méthodologie pour analyser géométriquement les singularités de manipulateurs parallèles à mobilités restreintes. Les manipulateurs analysés avec cette méthodologie n'ont pas besoin d'avoir des liaisons sphériques passives dans les jambes. Les conditions géométriques d'existence de singularités parallèles sont associées à la dépendance de six vecteurs de Plücker de droites (finies et infinies) dans l'espace projectif. Ces vecteurs qui constituent les colonnes de la transposée de la matrice jacobienne inverse sont formulés en utilisant l'AGC. Par conséquent, les conditions de singularités sont obtenues sous forme vectorielle. Cette étude est illustrée avec quatre exemples de manipulateurs.

Ce paragraphe est organisé comme suit: le paragraphe 2.1 présente brièvement les crochets de l'AGC, les opérateurs de l'AGC et la décomposition du superbracket qui est équivalent au déterminant de la matrice jacobienne inverse. Le paragraphe 2.2 défini l'espace projectif de dimension trois, P^3, et introduit ses entités géométriques que ce soit des éléments finis ou infinis dans cet espace. Ce paragraphe rappelle aussi les concepts de base de vis qui portent les torseurs statiques agissant sur la plate-forme mobile. Ces torseurs sont des forces d'actionnement ou de contrainte, connus comme des visseurs de pas nul, et des moments de contrainte, connus comme des visseurs de pas infini, dans P^3. Le paragraphe 2.3 introduit les conditions géométriques de singularités de trois classes de manipulateurs parallèles à mobilités restreintes. Finalement, les singularités parallèles de quatre manipulateurs sont analysées dans le paragraphe 2.4 comme exemples applicatifs, à savoir, *i)* le manipulateur 3-UPU; *ii)* le robot Delta linéaire; *iii)* le robot générateur du mouvement de Schönflies de l'université de McGill (SMG); et *iv)* le module parallèle de la machine Verne.

2.1. ALGEBRE DE GRASSMANN-CAYLEY

L'Algèbre de Grassmann-Cayley a été introduite par H. Grassmann comme un calcul pour les variétés linéaires. L'AGC possède deux opérateurs: le *join* et le *meet* notés par $\vee$ et $\wedge$, respectivement. Ces opérateurs sont associés à l'union et à l'intersection entre les sous-espaces vectoriels de tenseurs (en anglais *extensors*). Ces tenseurs sont des vecteurs représentés par des éléments géométriques et caractérisés par leurs pas (en anglais *step*). Les tenseurs de pas 1, 2 et 3 représentent respectivement un point, une droite et un plan dans l'espace projectif P^3. Il est possible de travailler au niveau symbolique avec l'AGC où les

points et les droites sont exprimés sous forme de coordonnées-libres par leurs coordonnées homogènes et leurs coordonnées de Plücker, respectivement.

Dans ce chapitre, l'AGC est utilisé pour transformer les conditions géométriques définies par la dépendance entre six droites exprimées dans $\mathbb{P}^3$, en expressions algébriques invariantes qui impliquent douze points sélectionné sur les axes de ces droites. Nous rappelons les concepts essentiels de l'AGC. Pour plus de détails sur l'AGC, le lecteur peut se reporter à [**Ben-Horin 06**, **Staffetti 00** et **White 05**].

2.1.1. Algèbre du crochet

Soit un ensemble fini de points $\{e_1, e_2,.., e_d\}$ défini dans l'espace vectoriel de dimension (d-1), V, sur le champ $\mathbb{R}$. Chaque point e_i est représenté par un d-uplet en utilisant les coordonnées homogènes avec $e_i=e_{1,i},e_{2,i},...,e_{d,i}$ ($1\leq i\leq d$). Le crochet de ces points est défini comme le déterminant de la matrice **M,** pour lequel les colonnes sont les coordonnées homogènes de points $\boldsymbol{e_i}$ ($1\leq i\leq d$):

$$\left[e_1,e_2,\ldots,e_d\right]=\det\left(\mathbf{M}\right)=\begin{vmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \ldots & e_{1,d} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ e_{d,1} & e_{d,2} & \ldots & e_{d,d} \end{vmatrix} \qquad [4.1]$$

L'ensemble des crochets forme une sous algèbre de l'AGC, appelée l'algèbre du crochet (en anglais, *bracket ring*). Les crochets satisfont les relations suivantes:

Si $\mathbf{e_i} = \mathbf{e_j}$ avec $i\neq j$, ou $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2},\ldots\mathbf{e_d}$ sont dépendants :

$$\left[e_1,e_2,\ldots,e_d\right]=0 \qquad [4.2]$$

Pour toute permutation σ de $\{1,2,\ldots, d\}$:

$$\left[e_1,e_2,\ldots,e_d\right]=sign\left(\sigma\right)\left[e_{\sigma 1},e_{\sigma 2},\ldots,e_{\sigma d}\right] \qquad [4.3]$$

$$\left[e_1,e_2,\ldots,e_d\right]\left[f_1,f_2,\ldots,f_d\right]=\sum_{j=1}^{d}\left[f_j,e_2,\ldots,e_d\right]\left[f_1,f_2,\ldots,f_{j-1},e_1,f_{j+1},\ldots,f_d\right] \qquad [4.4]$$

Toutes les opérations entre les crochets peuvent être dérivées des relations ci-dessus. L'équation [4.4] caractérise les relations de Grassmann-Plücker ou syzygies [**White 75**]. Cette relation est utile pour comparer et manipuler les expressions formées de crochets.

2.1.2. Les operateurs join et meet

Soit U un sous-espace vectoriel de dimension k de V. Soit $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_k\}$ la base de U et soit $\mathbf{A}$ un vecteur de Plücker de U. Ce vecteur peut être noté symboliquement par $\mathbf{A} = \mathbf{u_1} \vee \mathbf{u_2} \vee \ldots \vee \mathbf{u_k} = \mathbf{u_1}\mathbf{u_2}\ldots\mathbf{u_k}$, un vecteur exprimé dans l'espace vectoriel dimensionnel $V^{(k)}$ sans base spécifiée, [**White 94**]. Si $\mathbf{A} \neq 0$, c.-à-d., $\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}\ldots\mathbf{u_k}$ sont linéairement indépendants, $\mathbf{A}$ est considéré comme un tenseur décomposable de pas k et U est caractérisé par $\overline{A}$ qui est le support de $\mathbf{A}$. Par exemple une droite est le support d'un tenseur de pas 2 décomposable en 2 tenseurs de pas 1 représentés par des points dans P^3. L'espace vectoriel $V^{(k)}$ contient aussi des tenseurs indécomposables de pas k qui peuvent toujours être réécrits comme une combinaison linéaire de k-tenseurs. Par exemple un visseur est un tenseur indécomposable de pas 2 qui peut être réécrit sous forme d'une somme de 2 tenseurs de pas 2 représentés par une droite finie et une autre infinie dans P^3. Deux tenseurs de pas k sont égaux à un scalaire multiple près si et seulement si ils ont le même support. Si $\mathbf{A}$ est un tenseur de pas d, alors nous écrivons $\mathbf{A} = [u_1u_2... u_d]$, et on l'appelle crochet.

Maintenant, nous définissons l'AGC d'un espace vectoriel de dimension (d-1), V, en combinant tous les espaces vectoriels $V^{(k)}$, k=0,..,d dans un espace vectoriel $\Lambda(V)$. En conséquence, l'ensemble de ces espaces vectoriels avec les opérateurs *join* et *meet* forment l'AGC, à savoir,

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{d} V^k, \quad \dim \Lambda(V) = \sum_{k=0}^{n} \binom{d}{k} = 2^d \qquad [4.5]$$

Les vecteurs dans $\Lambda(V)$ sont des combinaisons linéaires des tenseurs de pas variés, y compris $V^{(0)}$ ou $V^{(d)}$ qui coïncident avec □ .

Le *join* de deux tenseurs est associé à l'union de leurs sous-espaces vectoriels.
Soit $\mathbf{A} = \mathbf{a_1} \vee \mathbf{a_2} \vee \ldots \vee \mathbf{a_i} = \mathbf{a_1}\mathbf{a_2}\ldots\mathbf{a_i}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{b_1} \vee \ldots \vee \mathbf{b_j} = \mathbf{b_1}\mathbf{b_2}\ldots\mathbf{b_j}$ des tenseurs dans V de pas i et j, respectivement. Leur join $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ est défini comme:

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \mathbf{a}_1 \vee \mathbf{a}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{a_i} \vee \mathbf{b}_1 \vee \mathbf{b}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{b_j} = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a_i}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b_j} \qquad [4.6]$$

$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ est un tenseur de pas $i+j$. Ce tenseur est non nul tant que les vecteurs $\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},..., \mathbf{a_i},\mathbf{b_1},\mathbf{b_2},..., \mathbf{b_j}\}$ sont linéairement indépendants. Dans ce cas:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} + \overline{B} = span\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \qquad [4.7]$$

En outre, si $i+j=d$, alors $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ est un scalaire qui correspond à $V^{(d)}$.

Le *meet* de deux tenseurs est associé à l'intersection entre leurs sous-espaces vectoriels.

Si **A** et **B** sont les deux tenseurs précités, avec $i+j \geq d$, alors si $\overline{A} \cup \overline{B} = V$, le meet $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ est un tenseur de pas $i+j-d$ défini comme:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \sum_{\sigma} \left[a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(d-j)} b_1 b_2 \ldots b_{\mathrm{j}} \right] a_{\sigma(d-j+1)} \ldots a_{\sigma(\mathrm{i})} \qquad [4.8]$$

où la somme est prise sur toutes les permutations σ de $\{1,2,..., i\}$ tel que, $\sigma(1)<\sigma(2)<\ldots<\sigma(d-j)$ et $\sigma(d-j+1)<\sigma(d-j+2)<\ldots<\sigma(i)$.

Une notation alternative [**White 94**] est d'écrire un point au-dessus des éléments permutés au lieu d'utiliser σ avec l'addition et le signe (σ) implicite:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \left[\dot{a}_1 \dot{a}_2 \ldots \dot{a}_{\mathrm{d-j}} b_1 b_2 \ldots b_{\mathrm{j}} \right] \dot{a}_{\mathrm{d-j+1}} \ldots \dot{a}_{\mathrm{i}} \qquad [4.9]$$

En outre, si $i+j>d$, $\overline{A} \cap \overline{B} \neq 0$ et $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. En revanche, si $i+j=d$, $\overline{A} \cap \overline{B} = 0$ et $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \in V^{(0)}$ est un scalaire de pas 0. En plus, si $\overline{A} \cup \overline{B} \neq V$, alors $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = 0$.

Il est important de noter que les operateurs *join* et *meet* sont associatifs et distributifs pour l'addition. Cependant, ils ne sont pas commutatifs. En effet,

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = (-1)^{ij} \mathbf{B} \vee \mathbf{A} \qquad [4.10]$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (-1)^{(\mathrm{d}-i)(\mathrm{d}-j)} \mathbf{B} \wedge \mathbf{A} \qquad [4.11]$$

Nous donnons maintenant trois exemples sur des conditions géométriques transformées en expressions algébriques par l'intermédiaire de l'AGC. Ses expressions seront utilisées dans le paragraphe 2.3 pour obtenir les conditions géométriques d'existence des singularités de trois classes de manipulateurs à mobilités restreintes.

Exemples– Intersection entre des droites et des plans dans l'espace:

Soit **A**=**abc** et **B**=**def** deux tenseurs de pas 3 ($i=j=3$), où $\overline{A}$ et $\overline{B}$ représentent deux plans dans l'espace projectif P^3 ($d=4$). Nous supposons que ces deux plans ne sont pas coplanaires, c.-à-d. $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \neq 0$. En conséquence, $\overline{A} \cup \overline{B} = \mathsf{P}^3$, $\overline{A} \cap \overline{B} \neq 0$ et le *meet* $\mathbf{X} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ est un tenseur de pas $i+j-d=2$, à savoir,

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (\mathbf{abc})(\mathbf{def}) = [adef]bc - [bdef]ac - [cdef]ba = \left[\dot{a}\, def \right] \dot{b}\, \dot{c} \qquad [4.12]$$

où $\overline{X}$ représente la droite d'intersection de $\overline{A}$ et $\overline{B}$. Notons que cette intersection est encore une droite quand $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont parallèles, mais à l'infini.

Soit **C**=**gh** un tenseur de pas 2, avec $\overline{C}$ désignant une droite dans P^3. Le *meet* $\mathbf{X} \wedge \mathbf{C}$ est un tenseur de pas 0 (un scalaire) défini par:

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{C} = \left[\dot{a}\, def\right]\left[\dot{b}\,\dot{c}\, gh\right] = [adef][bcgh] - [bdef][acgh] - [cdef][bagh] \qquad [4.13]$$

En utilisant la propriété du crochet défini dans l'Eq. [4.4], il apparaît que :

$$[adef][bcgh] = [bdef][acgh] + [cdef][bagh] + [gdef][bcah] + [hdef][bcga] \qquad [4.14]$$

En conséquence, en combinant l'Eq. [4.13] et l'Eq. [4.14] nous obtenons l'expression suivante :

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{C} = [gdef][bcah] + [hdef][bcga] = [defg][habc] - [defh][gabc] = \left[def\, \dot{g}\right]\left[\dot{h}\, abc\right]$$

Maintenant, considérons un autre tenseur de pas 2, **Y**, obtenu par l'intersection de deux tenseurs de pas 3, **D**=***ijk*** et **E**=***lmn***, où $\overline{D}$ et $\overline{E}$ représentent deux plans non-coplanaires dans P^3. Le *meet* $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ est un tenseur de pas 0 ou un scalaire défini par:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} &= (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{D} \wedge \mathbf{E}) = ((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{D}) \wedge \mathbf{E} \\ &= \left(\left[\dot{a}\, def\right]\left[\dot{b}\, ijk\right]\dot{c}\right) \wedge \left(l\, mn\right) = \left[\dot{a}\, def\right]\left[\dot{b}\, ijk\right]\left[\dot{c}\, l\, mn\right] \end{aligned} \qquad [4.15]$$

Cela signifie que $\overline{X \wedge Y}$ représente l'intersection de quatre plans dans l'espace projectif P^3. Le cas dégénéré apparaît quand ces quatre plans se coupent en un point commun.

2.1.3. La décomposition du superbracket

Les colonnes de la transposée de la matrice jacobienne inverse d'un manipulateur parallèle sont les coordonnées de Plücker de six droites dans l'espace projectif P^3. Chacune de ces droites est le support d'un tenseur de pas 1 dans l'espace projectif de dimension 5, P^5. Le *join* de ces six tenseurs est égal au crochet de leurs support dans l'AGC $\Lambda(V^{(2)})$ qui est exprimée dans l'espace projectif P^5 [**White 83**]. Ce crochet ou superbracket est égal au déterminant de la transposée de la matrice jacobienne inverse à un scalaire multiple près. Donc, une singularité se produit quand ces six vecteurs de Plücker sont dépendants, ce qui est équivalent à un superbracket nul.

[**White 83**] et [**McMillan 90**] ont utilisé une méthode combinatoire pour décomposer le superbracket en une expression contenant des crochets de douze points sélectionnés sur ces droites. Soit [*ab, cd, ef, gh, ij, kl*] le superbracket dont les colonnes sont six tenseurs de pas 2.

Ces tenseurs représentent les droites respectives *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, *ij*, *kl* dans l'espace projectif $\mathbb{P}^3$. L'expression de ce superbracket prise de [**Ben-Horin 06**], [**McMillan 90**] est définie comme suit,

$$\begin{aligned}\left[ab,cd,ef,gh,ij,kl\right] &= \left[abc\,d\right]\left[ef\,\overset{1}{g}\,\overset{2}{i}\right]\left[\overset{1}{h}\,\overset{2}{j}\,kl\right]-\left[ab\,\overset{3}{c}\,\overset{4}{e}\right]\left[\overset{3}{d}\,\overset{4}{f}\,gh\right]\left[i\,j\,kl\right]\\ &-\left[ab\,\overset{5}{c}\,\overset{6}{e}\right]\left[\overset{5}{d}\,gh\,\overset{7}{i}\right]\left[\overset{6}{f}\,\overset{7}{j}\,kl\right]+\left[ab\,\overset{8}{c}\,\overset{9}{g}\right]\left[\overset{8}{d}\,ef\,\overset{10}{i}\right]\left[\overset{9}{h}\,\overset{10}{j}\,kl\right]\end{aligned} \qquad [4.16]$$

où $\left[abc\,d\right]\left[ef\,\overset{1}{g}\,\overset{2}{i}\right]\left[\overset{1}{h}\,\overset{2}{j}\,kl\right]$ signifie $\sum_{1,2} sign(1,2)\left[abc\,d\right]\left[ef\,\overset{1}{g}\,\overset{2}{i}\right]\left[\overset{1}{h}\,\overset{2}{j}\,kl\right]$

1,2 sont les permutations des ensembles de 2 éléments {*g*, *h*} et {*i*, *j*}, respectivement; 3,4 sont les permutations des ensembles de 2 éléments {*c*, *e*} et {*d*, *f*}, respectivement; 5,6,7 sont les permutations des ensembles de 2 éléments {*c*, *e*}, {*d*, *i*} et {*f*, *j*}, respectivement; 8,9,10 sont les permutations des ensembles de 2 éléments {*c*, *g*}, {*d*, *i*} et {*h j*}, respectivement.

L'équation [4.16] peut être transformée en une combinaison linéaire de 24 monômes de crochets, chaque monôme de crochets est le produit de trois crochets :

$$\left[ab,cd,ef,gh,ij,kl\right] = \sum_{i=1}^{24} y_i \qquad [4.17]$$

Les monômes de [4.17] définis dans [**Ben-Horin 06**], **[McMillan 90**] sont exprimés dans l'Annexe B.

2.2. ESPACE PROJECTIF ET THEORIE DES VIS

2.2.1. Espace projectif de dimension trois

Dans la géométrie projective, le plan à l'infini, Π_∞, est un plan projectif ajouté à l'espace affine, $\mathbb{R}^3$. Le résultat de l'union de $\mathbb{R}^3$ avec Π_∞ est l'espace projectif de dimension trois, $\mathbb{P}^3$.

Toute paire de droites parallèles dans $\mathbb{P}^3$ se croisent en un point dans Π_∞. Ce point est appelé point à l'infini. Aussi, chaque droite dans $\mathbb{P}^3$ coupe Π_∞ en un point unique à l'infini. Ce point est déterminé seulement par la direction de la droite. Toute paire de plan parallèles dans $\mathbb{P}^3$ se croisent en une même droite projective dans Π_∞. Cette droite est appelée droite à l'infini. Aussi, chaque plan coupe Π_∞ en une droite unique à l'infini. Cette droite est déterminée seulement par le vecteur normal à son plan.

En réalité, Π_∞ contient tous les points à l'infini et toutes les droites à l'infini de l'espace projectif. Ce plan est obtenu par la définition de trois points à l'infini non colinéaire. En conséquence, une droite à l'infini passe par deux points à l'infini et contient tous les points à l'infini qui appartient à la même famille des plans parallèles. En outre, deux plans non-parallèles se croisent en une droite dans P^3. En plus, cette droite coupe Π_∞ en un point à l'infini. Ce point appartient à ces deux plans non-parallèles aussi bien qu'à leurs droites à l'infini. Donc, toutes les droites à l'infini se coupent entre elles et appartiennent à un même plan, c.-à-d. Π_∞.

Dans ce chapitre, le concept d'éléments à l'infini dans P^3, nous permet de représenter les forces et les moments par des droites gouvernantes et de traiter leurs relations géométriques. Notamment, les points et les droites à l'infini rendent possible la représentation des moments de contraintes et des forces pures ayant des supports parallèles.

2.2.2. Les coordonnées homogènes et les coordonnées de Plücker

Soit $x=(x_1,\ldots x_3)^T$ un point exprimé dans $\mathbb{R}^3$ par ses coordonnées Cartésiennes. Les coordonnées homogènes de x sont obtenues en ajoutant une 4ème coordonnée qui est égal à 1. Ce point peut être aussi représenté à un scalaire multiple prés par $\lambda(x_1\ldots x_3,1)^T$, où λ est un scalaire non nul. Si nous autorisons les points qui ont leur dernière coordonnée égale à 0 de représenter les points à l'infini, nous obtenons l'espace projectif de dimension trois, P^3 qui contient $\mathbb{R}^3$. Cette construction est utile pour représenter les torseurs cinématiques et statiques. Par exemple une articulation pivot devient équivalente à une articulation prismatique quand son axe n'est pas constitué que de points à l'infini.

Une droite L qui passe par deux points a et b où $a = (a_1, a_2, a_3, 1)^T$ et $b=(b_1, b_2, b_3, 1)^T$ est représentée par un vecteur de Plücker $\mathbf{P_L}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_L &= \left(P_{4,1},P_{4,2},P_{4,3},P_{2,3},P_{3,1},P_{3,2}\right)^T = \left(\mathbf{S},\mathbf{r}\times\mathbf{S}\right)^T \\ &= \left(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3,a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1\right)^T\end{aligned} \qquad [4.18]$$

Où $\mathbf{S}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ représente la direction de L, le produit vectoriel $(\mathrm{r}\times\mathrm{S})$ donne le moment de L autour de l'origine, et $\mathbf{r}$ est un point quelconque sur L.

Un vecteur de Plücker $\mathbf{P}_L$ d'une droite L doit obligatoirement vérifier la condition de Klein [**Wolf 03** et **Staffetti 06**] défini par la relation suivante:

$$\mathbf{S}.(\mathbf{r}\times\mathbf{S}) = P_{4,1}P_{2,3} + P_{4,2}P_{3,1} + P_{4,3}P_{3,2} = 0 \qquad [4.19]$$

Toute droite finie possède un point unique à l'infini. Pour la droite *L*, ce point est défini à un scalaire multiple prés par ses coordonnées homogènes $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3, 0)^T$.

Le vecteur de Plücker d'une droite à l'infini qui passe par deux points à l'infini *c* et *d* où c = $(c_1, c_2, c_3, 0)^T$ et d = $(d_1, d_2, d_3, 0)^T$, est déterminé à scalaire multiple prés par:

$$\mathbf{P}_{L_\infty} = (0,0,0,c_2d_3 - c_3d_2, c_3d_1 - c_1d_3, c_1d_2 - c_2d_1)^T = (0,0,0,\mathbf{r}\times\mathbf{S})^T \qquad [4.20]$$

2.2.3. Les applications de la théorie de vis réciproques

Dans cette thèse, les visseurs sont des torseurs cinématiques utilisés pour représenter le mouvement produit par des articulations constituant les chaînes cinématiques tandis que leurs visseurs réciproques sont des torseurs statiques appliqués par ces chaînes cinématiques à la plate-forme mobile. Ces torseurs statiques, énoncés comme les droites gouvernantes d'un manipulateur parallèle, constituent les colonnes de la transposée de la matrice jacobienne inverse. Dans ce paragraphe, nous rappelons les concepts de base de la théorie des vis réciproques et ses applications. Pour plus de détails sur cette théorie, il existe les références suivantes : [**Hunt 78, Hao 98** et **Joshi 02**].

Un visseur est un élément géométrique qui est défini par son axe, une droite, et son pas, un scalaire λ. En conséquence, un visseur unitaire $\hat{\$}$ est composé de deux vecteurs [**Ball 1900**], à savoir,

$$\hat{\$} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r}\times\mathbf{s} + \lambda\mathbf{s} \end{bmatrix} = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad S_5 \quad S_6]^T \qquad [4.21]$$

L'axe du visseur est exprimé par les coordonnées de Plücker par $\mathbf{L} = [\mathbf{s}, \mathbf{r}\times\mathbf{s}]^T$, **s** est un vecteur unitaire suivant la direction de l'axe du visseur et **r** est un vecteur de position de tout point sur l'axe du visseur en respectant l'origine d'un repère, le produit vectoriel $\mathbf{r}\times\mathbf{s}$ est le moment de l'axe du visseur par rapport à l'origine du même repère. Un visseur d'intensité ρ peut être écrit comme $\$ = \rho\hat{\$}$.

Un visseur portera un torseur cinématique (en anglais *twist*) s'il représente un mouvement instantané d'un corps rigide autour et suivant un même axe. Ainsi, la vitesse angulaire **w** et la vitesse linéaire **v** d'un point appartenant à un corps rigide sont des vecteurs de dimension trois qui peuvent être assemblés dans un vecteur de dimension six nommé *twist*. Le dernier peut

être écrit comme $\mathbf{T} = [\mathbf{w}, \mathbf{p} \times \mathbf{w} + \mathbf{v}]^T = \mathrm{q}\hat{\$}$, q est son intensité et $\hat{\$}$ est son visseur unitaire. Le pas λ du twist, est défini comme le rapport entre la vitesse linéaire et la vitesse angulaire. En conséquence, le visseur unitaire associé à la rotation pure d'une liaison pivot est un visseur de pas zéro (en anglais zero pitch screw), c.-à-d. $\lambda = 0$, $\hat{\$} = [\mathbf{s}, \mathbf{r} \times \mathbf{s}]^T$, qui est une droite finie qui pointe selon l'axe de la liaison. Également, le visseur unitaire $\hat{\$}$ associé à la translation pure d'une liaison prismatique est un visseur de pas infini, c.-à-d. $\lambda = \infty$, et $\hat{\$} = [\mathbf{0}, \mathbf{s}]^T$ est une droite à l'infini, **s** est la direction du mouvement.

Un visseur portera un torseur statique (en anglais *wrench*) s'il représente un système de forces/couples agissant sur un corps rigide. D'après [**Joshi 02**], le système de forces/couples appliqués sur un corps rigide peut être réduit à une force résultante et un couple autour d'un point et il est aussi possible de trouver un axe unique pour la force résultante, **f**, et le couple résultant, **t**. Ainsi, la force résultante **f** et couple **t** appliqués à l'origine du repère peuvent être assemblés dans un vecteur de dimension six appelé *wrench*. Ce dernier peut être écrit comme $\mathbf{W} = [\mathbf{f}, \mathbf{p} \times \mathbf{f} + \mathbf{t}]^T = \rho\hat{\$}_r$, ρ est son intensité et $\hat{\$}_r$ est son visseur unitaire. Le pas λ_r d'un *wrench* est défini comme le rapport entre son couple et sa force. En plus, une force pure est représentée par un visseur de pas zero, en anglais *zéro pitch screw* (une droite finie), c.-à-d. $\lambda_r = 0$, tandis qu'un couple est représenté par un visseur de pas infini, en anglais *infinite pitch screw* (une droite à l'infini), c.-à-d. $\lambda_r = \infty$.

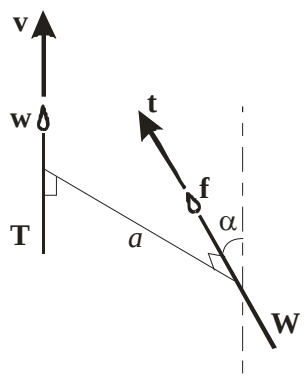


Figure 4.1 : Représentation géométrique d'un twist T et d'un wrench W appliqués à un corps rigide

Deux visseurs, représentant un *twist*, **T**, et un *wrench*, **W**, respectivement, sont réciproques, si le *wrench* agit sur un corps rigide sans produire de travail pendant que le corps subit un mouvement infinitésimal. Cela veut dire que ces visseurs sont réciproques tant que le

travail virtuel du *wrench* **W** qui agit sur le twist **T** est nul. La réciprocité entre les visseurs **T** et **W** est défini comme,

$$\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\check{\mathbf{T}} = 0 \qquad [4.22]$$

$\check{\mathbf{T}}$ défini dans [**Hao 98**, **Lipkin 85**] est écrit de la manière suivante :

$$\check{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} T_4 & T_5 & T_6 & T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix}^T \qquad [4.23]$$

La signification géométrique de la condition de réciprocité est exprimée comme suit :

$$(\lambda + \lambda_r)\cos(\alpha) - a\sin(\alpha) = 0 \qquad [4.24]$$

a est la distance la plus courte entre les axes des visseur et α est leur angle relatif [**Hunt 78**].

Cette équation étant symétrique, les deux visseurs réciproques peuvent être échangés. En outre, dans le cas où les deux visseurs sont des droites, c.-à-d., droites finies ou droites à l'infini, dans l'espace projectif P^3, elles deviennent réciproques quand elles se croisent, sont colinéaires ou parallèles. Notons qu'une force pure (visseur de pas zéro) est réciproque à un *twist* associé à une liaison prismatique (visseur de pas infini) quand sa droite est orthogonale à la direction du mouvement de la liaison prismatique. En d'autres termes, les droites associées à ces deux visseurs se croisent. A partir des relations géométriques précédentes, nous pouvons trouver les visseurs réciproques à ceux associées aux liaisons possédant un mouvement de 1 ddl (liaisons pivots et prismatiques). Nous pouvons trouver aussi les visseurs réciproques à un système de deux visseurs de pas zéro associé au mouvement d'une liaison cardan (une liaison cardan est équivalent à deux liaisons pivots d'axes concourants), et celui d'un système de trois-visseurs de pas zéro associé au mouvement d'une liaison sphérique (une liaison sphérique est équivalente à trois liaisons pivots d'axes concourants mais non coplanaires), aussi bien que pour des chaînes cinématiques composées des liaisons précédentes [**Joshi 02**].

L'équation de réciprocité impose une contrainte, alors tous les visseurs réciproques à un système de n visseurs forment un système de (6-n) visseurs, [**Hunt 78**]. En outre un système de n visseurs peut être remplacé par un autre système de n visseurs équivalent en appliquant une transformation linéaire à la base du premier [**Zhao 02**].

2.3. LES CONDITIONS GEOMETRIQUES DE SINGULARITES PARALLELES

2.3.1. Trois classes de manipulateurs parallèles

Cette étude vise à élargir l'application de la géométrie des droites pour analyser les singularités des manipulateurs parallèles à mobilités restreintes. Dans cette étude, ces manipulateurs n'ont pas besoin de liaisons sphériques passives et leurs chaînes appliquent des torseurs statiques d'actionnement et de contrainte à la plate-forme mobile. Par conséquent, les colonnes de la transposée de leur matrice jacobienne inverse de dimension 6×6 sont les coordonnées de Plücker des vecteurs représentant des droites finies ou des droites à l'infini. Les configurations singulières se produisent quand les droites gouvernantes qui constituent la matrice jacobienne inverse sont linéairement dépendantes ce qui est équivalent à un superbracket nul. Dans ce paragraphe, nous utilisons les opérateurs de l'AGC et la décomposition du superbracket pour déterminer les conditions géométriques de singularités de trois classes de manipulateurs parallèles définies selon leurs droites gouvernantes. Ces droites gouvernantes représentent les torseurs statiques appliqués sur la plate-forme mobile, à savoir,

Classe I : Trois forces d'actionnement et trois moments de contraintes (Figure 4.2);

Classe II : Quatre forces d'actionnement et deux moments de contraintes dont deux paires de droites gouvernantes finies sont concourantes (Figure 4.3);

Classe III : Six forces d'actionnement ayant au moins deux paires de droites gouvernantes qui sont parallèles (Figure 4.4);

2.3.2. Les manipulateurs avec trois forces d'actionnement et trois moments de contraintes

Les manipulateurs appartenant à la première classe sont caractérisés par une plate-forme mobile soumise à trois forces d'actionnement (visseur de pas zéro), c.-à-d. $\hat{\mathbf{F}}_i = \left[\mathbf{s}_i^T \quad (\mathbf{r}_i \times \mathbf{s}_i)^T\right]^T$, (i=1, 2, 3), et à trois moments de contrainte (visseur de pas infini), c.-à-d. $\hat{\mathbf{M}}_i = \left[0_{1\times3} \quad \mathbf{n}_i^T\right]^T$, (i=1, 2, 3), $\mathbf{s_i}$ est un vecteur unitaire suivant la direction de la droite d'application de la force d'actionnement, $\mathbf{r_i}$ est un vecteur de position d'un point sur cette droite et $\mathbf{n_i}$ est la direction du couple associé au moment de contrainte. Ces forces d'actionnement et ces moments de contrainte ont les coordonnées de Plücker des vecteurs représentant des droites finies et des droites infinies, respectivement, dans l'espace projectif

P^3. En conséquence, les colonnes de la transposée de la matrice jacobienne inverse de dimension 6×6 sont les coordonnées de Plücker des vecteurs de trois droites finies (forces d'actionnement) et trois droites infinies (moments de contrainte). La dépendance entre ces droites correspond à la dégénérescence de la matrice jacobienne inverse qui est équivalent à un superbracket nul.

Soit *ab*, *cd*, *ef*, les droites finies qui représentent les trois forces d'actionnement (i=1, 2, 3), *a*, *c*, *e* sont des points finis et $\underline{b}$, $\underline{d}$, $\underline{f}$ sont des points à l'infini, la lettre soulignée caractérise un point à l'infini. Le choix des points $\underline{b}$, $\underline{d}$, $\underline{f}$ à l'infini et non pas sur la plate-forme mobile nous permet d'obtenir plus de simplification dans l'expression de la décomposition du superbracket car tous les points à l'infini sont coplanaires. Ces points sont exprimés par leurs coordonnées homogènes, c.-à-d. $\underline{b} = \left(\mathbf{s}_1^T \;\; 0\right)^T$, $\underline{d} = \left(\mathbf{s}_2^T \;\; 0\right)^T$, $\underline{f} = \left(\mathbf{s}_3^T \;\; 0\right)^T$. Puisque toutes les droites à l'infini se rencontrent entre elles, les trois moments de contrainte (i=1, 2, 3) peuvent être représentées par trois droites à l'infini $\underline{gh}$, $\underline{gi}$ et $\underline{hi}$, respectivement où les points $\underline{g}$, $\underline{h}$ et $\underline{i}$ sont définis par leurs vecteurs $\mathbf{g} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, $\mathbf{h} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_3$ et $\mathbf{i} = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3$, respectivement.

A partir de l'Eq. [4.16] et grâce à la répétition de points dans le même crochet, nous pouvons simplifier l'expression du superbracket en un nombre réduit de monômes non nuls. Par conséquent, la décomposition du superbracket de ce type de manipulateur est réduite à :

$$\left[a\underline{b},\, c\underline{d},\, e\underline{f},\, \underline{g}\underline{h},\, \underline{g}\underline{i},\, \underline{h}\underline{i}\right] = \left[ab\underline{df}\right]\left[c\underline{gh}\underline{i}\right]\left[e\underline{gh}\underline{i}\right] \qquad [4.25]$$

avec

$$\left[a\underline{bdf}\right] = \left(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2\right)\cdot \mathbf{s}_3 \quad \text{et} \quad \left[e\underline{gh}\underline{i}\right] = \left[c\underline{gh}\underline{i}\right] = \left(\left(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\right)\cdot \mathbf{n}_3\right)^2 \qquad [4.26]$$

où $$\left[a\underline{bdf}\right] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 & f_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix} = \left|\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \quad \mathbf{s}_3\right| = \left(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2\right)\cdot \mathbf{s}_3$$

et

$$\left[e\underline{gh}\underline{i}\right] = \left[c\underline{gh}\underline{i}\right] = \begin{vmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \\ g_2 & h_2 & i_2 \\ g_3 & h_3 & i_3 \end{vmatrix} = \left|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_3 \quad \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3\right| = \left(\left(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\right)\cdot \mathbf{n}_3\right)^2$$

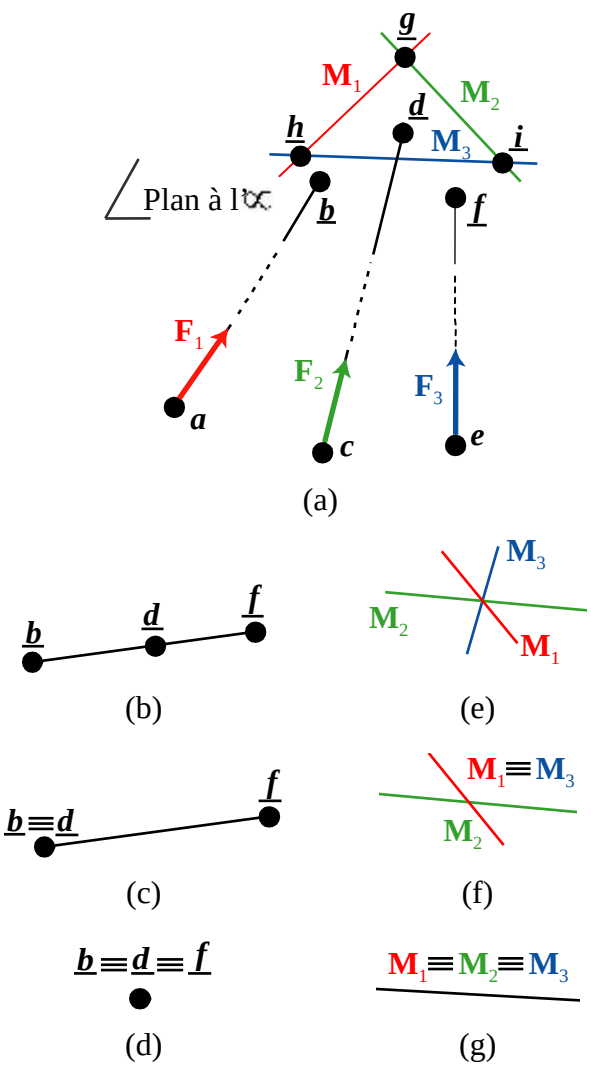


Figure 4.2 : Conditions géométriques des singularités parallèles des manipulateurs avec trois forces d'actionnement et trois moments de contraintes

En conséquence, le manipulateur étudié passe par une singularité quand $(\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}) \cdot \mathbf{s_3} = 0$ ou $(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n_2}) \cdot \mathbf{n_3} = 0$, c.-à-d. quand les surfaces des triangles <u>*ghi*</u> ou <u>*bdf*</u> sont nulles. Ces deux conditions incluent les cas (b-g) de la Figure 4.2. Chaque sommet du triangle <u>*bdf*</u> est un point à l'infini représentant la direction d'une force d'actionnement. Dans les cas (b,c), les trois points à l'infini <u>*b*</u>, <u>*d*</u> et <u>*f*</u> sont colinéaires, donc les trois vecteurs $\mathbf{s_i}$ sont coplanaires. Les cas (c,d) se produisent quand au moins deux points à l'infini se coïncident, c.-à-d., quand deux vecteurs $\mathbf{s_i}$ sont parallèles. Chaque coté du triangle <u>*ghi*</u> est une droite à l'infini définie par l'intersection à l'infini d'une famille de plans parallèles, les vecteurs $\mathbf{n_i}$ (i=1, 2, 3) sont normaux à ces plans. Les cas (e,f) se produisent quand les trois droites à l'infini se croisent, c.-à-d., quand les vecteurs $\mathbf{n_i}$ sont coplanaires. Dans les cas (f,g), au moins deux droites à l'infini sont colinéaires, ce qui implique que leurs plans sont parallèles donc au moins deux

vecteurs $\mathbf{n_i}$ sont parallèles. Notons qu'une autre condition peut apparaître si au moins un moment de contrainte dégénère, ce qui signifie qu'au moins l'une des droites *gh*, *gi* ou *hi* dégénère en un point. Cette condition est plus en rapport avec l'arrangement des liaisons dans chaque chaîne.

Notons qu'une méthodologie permettant de trouver géométriquement le mouvement gagné instantanément aux configurations singulières de la première classe est présentée en annexe C.

2.3.3. Les manipulateurs avec quatre forces d'actionnement et deux moments de contraintes

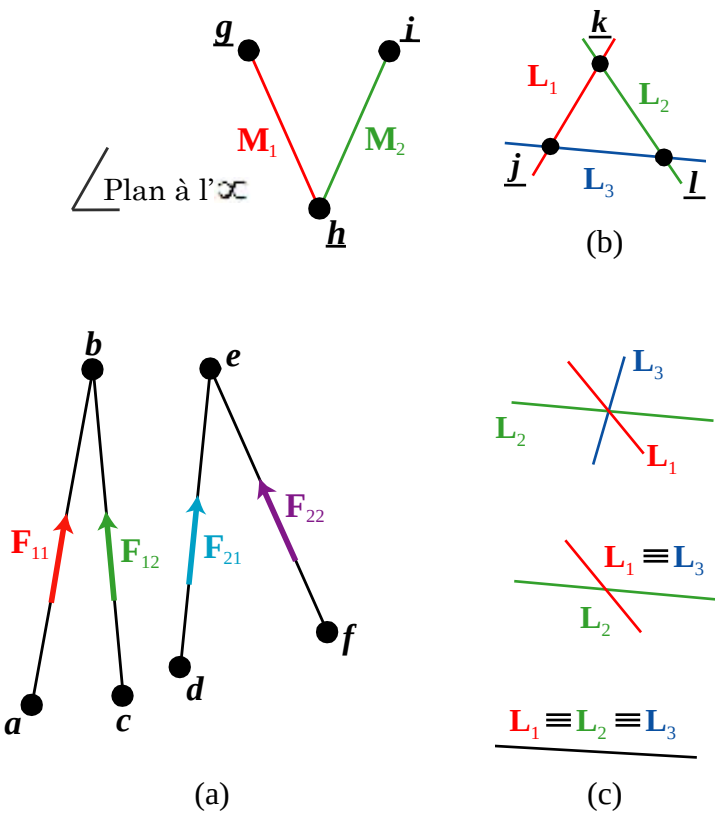


Figure 4.3 : Conditions géométriques de singularités de manipulateurs ayant quatre forces d'actionnement et deux moments de contraintes

Les manipulateurs appartenant à la deuxième classe sont caractérisés par une plate-forme mobile soumis à deux paires de forces concourantes (visseurs de pas zéro) et à deux moments de contrainte (visseurs de pas infini).

Soit *ab*, *cb*, *de*, *fe*, les droites finies représentant les quatre forces $\hat{\mathbf{F}}_{ij}$ (i=1, 2, j= 1, 2) et soit *gh*, *ih*, les droites infinies représentant respectivement les deux moments de contrainte

$\hat{\mathbf{M}}_i = \left[0_{1\times3} \quad \mathbf{n}_i^T \right]^T$ (i=1, 2), le vecteur $\mathbf{n_i}$ représente la direction du couple associé au moment de contrainte $\hat{\mathbf{M}}_i$. A partir de l'Eq. [4.16] et à cause de la répétition de points dans le même crochet, l'expression du superbracket est réduite à:

$$\left[ab,\ cb,\ de,\ fe,\ \underline{gh},\ \underline{ih} \right] = [abcd][bfe\underline{h}]\left[e\underline{g}\,\underline{ih} \right] - [abce][bfe\underline{h}]\left[d\underline{g}\,\underline{ih} \right] - [abcf][bde\underline{h}]\left[e\underline{g}\,\underline{ih} \right] + [abce][bde\underline{h}]\left[f\underline{g}\,\underline{ih} \right] \quad [4.27]$$

Après collection des crochets égaux et application de l'Eq. [4.9] causée par la permutation des points *d*, *e* et *f*, nous obtenons:

$$\left[ab,\ cb,\ de,\ fe,\ gh,\ ih \right] = \left[abc\,d \right]\left[b\,f\,eh \right]\left[e\,gih \right] \quad [4.28]$$

Le terme de droite de l'Eq. [4.28] est le résultat de l'intersection des quatre plans, (*abc*), (*dfe*), (*be*$\underline{h}$) et ($\underline{gih}$) comme démontré dans l'Eq. [4.15]. Le dernier plan étant à l'infini, ses intersections avec les trois autres plans sont trois droites à l'infini, $L_i = \left[\mathbf{0}_{1\times3} \quad \mathbf{m}_i^T \right]^T$ (i=1, 2, 3), respectivement, $\mathbf{m_i}$ (i=1, 2, 3) sont les vecteurs normaux au plan finies. La condition géométrique d'existence de singularités de cette classe de manipulateurs parallèles inclut les cas suivants:

- L'un de ces plans dégénère en une droite, $\|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\| \|\mathbf{m_1}\| \|\mathbf{m_2}\| \|\mathbf{m_3}\| = 0$;
- les quatre plans se coupent en un point commun. Ce cas apparaît quand le triangle $\underline{jkl}$ disparaît, où les point $\underline{j}$, $\underline{k}$ et $\underline{l}$ sont définis par leurs vecteurs $\mathbf{j} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_3$, $\mathbf{k} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ et $\mathbf{l} = \mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_3$, respectivement (voir la Figure 4.3).

Finalement, la condition d'existence de singularités parallèles peut être exprimée vectoriellement par la relation suivante :

$$\left(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \right) \cdot \mathbf{m}_3 = 0 \quad [4.29]$$

2.3.4. Les manipulateurs avec six forces d'actionnement

Les manipulateurs appartenant à la troisième classe sont caractérisés par une plate-forme mobile soumise à six forces (visseurs de pas zéro) avec au moins deux paires de forces ayant des supports parallèles.

Soit *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, *ij*, *kl*, les droites finies représentant les six forces $\mathbf{F}_{ij}$ (i=1, 2, 3, j=1, 2), respectivement, où *a*, c, e, *g*, *i*, *k* sont les points d'attache des droites à la base et les point *b*, *d*,

f, h, j, l sont les points d'attache des droites à la plate-forme mobile (voir la Figure 4.4a). Nous supposons que les droites *ef* et *gh* sont parallèles et se coupent donc à l'infini. De même, les droites *ij* et *kl* sont parallèles et se coupent à l'infini. La décomposition du superbracket de ces droites est réduite à:

$$[ab,\ cd,\ ef,\ gh,\ ij,\ kl] = [a\underline{m},\ c\underline{n},\ e\underline{o},\ g\underline{o},\ i\underline{p},\ k\underline{p}] = 0 \qquad [4.30]$$

où les points à l'infini $\underline{m}$, $\underline{n}$, $\underline{o}$, $\underline{p}$ sont représentés par leurs vecteurs $\mathbf{m} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{n} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$, $\mathbf{o} = \mathbf{ef} \wedge \mathbf{gh} = \mathbf{f} - \mathbf{e} = \mathbf{h} - \mathbf{g}$ et $\mathbf{p} = \mathbf{ij} \wedge \mathbf{kl} = \mathbf{j} - \mathbf{i} = \mathbf{l} - \mathbf{k}$.

La forme la plus courte de la décomposition du superbracket est obtenue en utilisant l'algorithme décrit dans [**Ben-Horin 08**]. Cette expression correspond aux monômes non nuls suivants:

$$\begin{aligned}&[\underline{o}eg\underline{m}][\underline{on}c\underline{p}][ai\underline{p}k] - [\underline{o}ega][\underline{on}c\underline{p}][\underline{m}i\underline{p}k] - \\ &\quad [\underline{o}eg\underline{n}][\underline{om}a\underline{p}][ci\underline{p}k] + [\underline{o}egc][\underline{om}a\underline{p}][\underline{n}i\underline{p}k] = 0\end{aligned} \qquad [4.31]$$

Après collection des crochets égaux et application de l'Eq. [4.9] causée par les permutations des points $\underline{m}$, *a* et $\underline{n}$, *c*, nous obtenons:

$$[\underline{on}c\underline{p}]\left[\underline{o}eg\,\underline{m}^{\square}\right]\left[a^{\square}i\underline{p}k\right] - [\underline{om}a\underline{p}]\left[\underline{o}eg\,\underline{n}^{\square}\right]\left[c^{\square}i\underline{p}k\right] = 0 \qquad [4.32]$$

En remplaçant les termes de l'Eq. [4.32] de la façon suivante,

$$\left[a^{\square}i\underline{p}k\right] = \left[a^{\square}i(j-i)k\right] = \left[a^{\square}ijk\right] - \left[a^{\square}iik\right] = \left[a^{\square}ijk\right] \qquad [4.33]$$

nous pouvons remplacer quelques points à l'infini par des points finis dans l'Eq. [4.32] et obtenir l'expression suivante :

$$[ab,\ cd,\ ef,\ gh,\ ij,\ kl] = [\underline{on}c\underline{p}]\left[feg\,b^{\square}\right]\left[a^{\square}ijk\right] - [\underline{om}a\underline{p}]\left[feg\,d^{\square}\right]\left[c^{\square}ijk\right] \qquad [4.34]$$

L'équation [4.34] est détaillée en annexe D;

En utilisant l'Eq. [4.13], nous prouvons que :

$$\begin{aligned}&\left[feg\,b^{\square}\right]\left[a^{\square}ijk\right] = (\mathbf{ijk} \wedge \mathbf{feg}) \wedge \mathbf{ba} = \mathbf{tu} \wedge \mathbf{ba} = [tuba] \text{ et} \\ &\left[feg\,d^{\square}\right]\left[c^{\square}ijk\right] = (\mathbf{ijk} \wedge \mathbf{feg}) \wedge \mathbf{dc} = \mathbf{tu} \wedge \mathbf{dc} = [tudc]\end{aligned} \qquad [4.35]$$

tu est la droite d'intersection entre les plans des chaînes II et III, c.-à-d., $\mathbf{tu} = (\mathbf{ef} \times \mathbf{eg}) \times (\mathbf{ij} \times \mathbf{ik})$.

De plus, nous remarquons que:

$$\left[\underline{o}\underline{n}c\underline{p}\right]=\begin{vmatrix} o_1 & n_1 & c_1 & p_1 \\ o_2 & n_2 & c_2 & p_2 \\ o_3 & n_3 & c_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} o_1 & p_1 & n_1 \\ o_2 & p_2 & n_2 \\ o_3 & p_3 & n_3 \end{vmatrix}=\left[\underline{o}e\underline{p}\underline{n}\right]=\left[fe\left(e+\underline{p}\right)\left(e+\underline{p}+\underline{n}\right)\right]=\left[feqr\right] \quad [4.36]$$

$$\left[\underline{o}\underline{m}a\underline{p}\right]=\left[\underline{o}e\underline{p}\underline{m}\right]=\left[\left(f-e\right)e\left(e+\underline{p}\right)\left(e+\underline{p}+\underline{m}\right)\right]=\left[feqs\right] \quad [4.37]$$

où les point *q*, *r* et *s* sont représentés par leurs vecteurs $\mathbf{q}=\mathbf{e}+\mathbf{p}$, $\mathbf{r}=\mathbf{q}+\mathbf{n}$ et $\mathbf{s}=\mathbf{q}+\mathbf{m}$.

En conséquence, l'expression algébrique invariante associée à l'existence de singularités parallèles du manipulateur étudié est exprimée sous la forme suivante:

$$\left[feqr\right]\left[tuba\right]-\left[feqs\right]\left[tudc\right]=0 \quad [4.38]$$

où $\left[tuba\right]=\mathbf{tu}\cdot\left(\mathbf{ub}\times\mathbf{ab}\right)$ et $\left[tudc\right]=\mathbf{tu}\cdot\left(\mathbf{ud}\times\mathbf{cd}\right)$ avec $\mathbf{tu}=\left(\mathbf{ef}\times\mathbf{eg}\right)\times\left(\mathbf{ij}\times\mathbf{ik}\right)$ alors :

$$\left[feqr\right]=\mathbf{cd}\cdot\mathbf{N} \text{ et,} \quad [4.39]$$

$$\left[feqs\right]=\mathbf{ab}\cdot\mathbf{N} \quad [4.40]$$

où $\mathbf{N}=\mathbf{ef}\times\mathbf{ij}$

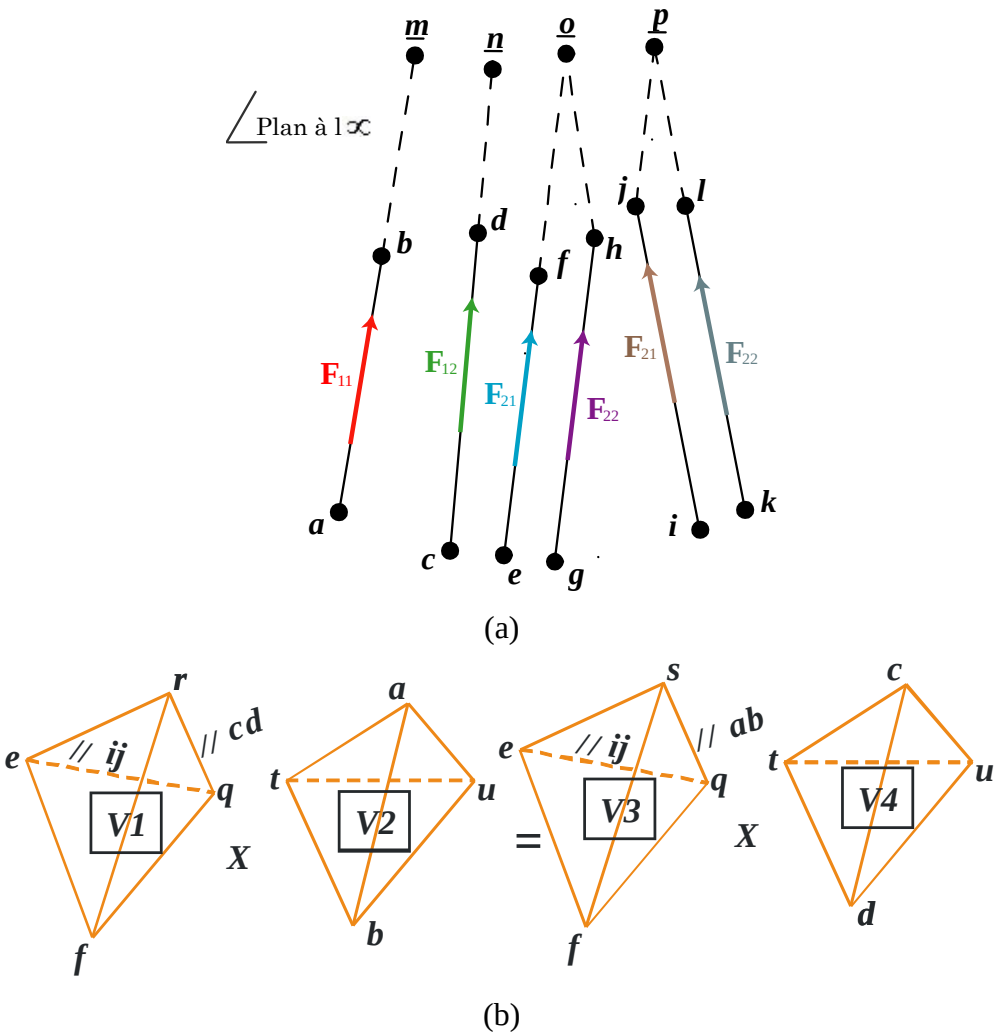


Figure 4.4: Conditions géométriques de singularités de manipulateurs parallèles avec six six forces d'actionnement

L'expression ci dessus est géométriquement équivalente à la différence entre les produits de deux paires de volume de tétraèdres dont les sommets sont exprimés en fonction des points *a*,*b*,... *l* (voir la Figure 4.4a). Cette condition géométrique inclut les cas suivants:

- les plans des paires de droites parallèles (*ab*, *cd*) et (*ef*, *gh*) sont coplanaires ou parallèles donc $\|\mathbf{tu}\| = \mathbf{0}$;
- les droites *ef* et *ij* sont parallèles donc $\|\mathbf{N}\| = \mathbf{0}$;
- les paires de droites (*ef*, *cd*) et (*ij*, *ab*) sont parallèles ou les paires de droites (*ef*, *ab*) et (*ij*, *cd*) sont parallèles;
- les droites *ab* et *cd* se croisent avec *tu* et les six forces d'actionnement forment un complexe linéaire singulier;

- les droites (*ef*, *cd*) sont parallèles et les droites (*tu*, *cd*) sont coplanaires ou les droites (*ij*, *cd*) sont parallèles et les droites (*tu*, *cd*) sont coplanaires ou les droites (*ij*, *ab*) sont parallèles et les droites (*tu*, *ab*) sont coplanaires ou les droites (*ef*, *ab*) sont parallèles et les droites (*tu*, *ab*) sont coplanaires;
- les six forces d'actionnement forment un complexe linéaire général exprimé dans l'Eq. [4.41].

$$\left[\mathbf{cd}\cdot\mathbf{N}\right]\left[\mathbf{tu}\cdot\left(\mathbf{ub}\times\mathbf{ab}\right)\right]-\left[\mathbf{ab}\cdot\mathbf{N}\right]\left[\mathbf{tu}\cdot\left(\mathbf{ud}\times\mathbf{cd}\right)\right] \qquad [4.41]$$

2.4. EXEMPLES D'APPLICATION

Pour illustrer les résultats obtenus dans le paragraphe 2.3, nous analysons les singularités de quatre manipulateurs:

- Le manipulateur 3-UPU;
- le robot Delta-Linéaire;
- le manipulateur SMG de McGill;
- le module parallèle de la machine Verne;

2.4.1. Analyse de singularités du manipulateur 3-UPU

Le manipulateur 3-UPU présenté dans la Figure 4.5 a été étudié dans [**Merlet 05**], [**Joshi 02**], [**Wolf 03**], [**Di Gregorio 98**].

La plate-forme mobile est contrôlée par l'intermédiaire de trois actionneurs linéaires montés sur trois chaînes identiques et le mouvement de translation est obtenu par un arrangement spécial des liaisons cardans (les axes des liaisons cardan liées à la base sont parallèles à ceux liées à la plate-forme de la même chaîne).

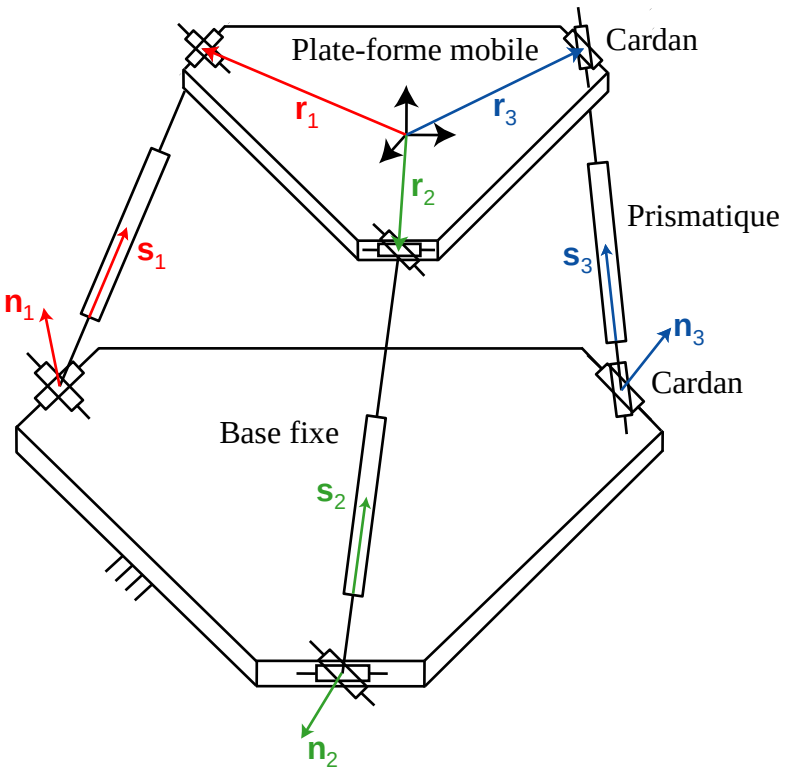


Figure 4.5 : Le manipulateur 3-UPU

Chaque chaîne a cinq degrés de liberté. En conséquence, elle applique une force d'actionnement $\hat{\mathbf{F}}_i = \left[\mathbf{s}_i^T \quad (\mathbf{r}_i \times \mathbf{s}_i)^T\right]^T$ (i=1, 2, 3), et un moment de contrainte $\hat{\mathbf{M}}_i = \left[\mathbf{0}_{1\times3} \quad \mathbf{n}_i^T\right]^T$ à la plate-forme mobile, ($\mathbf{s_i}$ est un vecteur unitaire selon la direction de la chaîne i, $\mathbf{r_i}$ est un vecteur de position d'un point sur cette chaîne, $\mathbf{n}_i$ est le produit vectoriel des deux vecteurs associé aux axes de la liaison cardan de base de la chaîne i, il représente aussi la direction du couple associée au moment de contrainte $\hat{\mathbf{M}}_i$). Chaque force d'actionnement $\hat{\mathbf{F}}_i$ est un visseur de pas zéro réciproque à tous les twists associés aux liaisons de la chaîne *i* sauf à celui associé à la liaison prismatique actionnée de la même chaîne. Chaque moment de contrainte $\hat{\mathbf{M}}_i$ est un visseur de pas infini réciproque à tous les visseurs associés aux liaisons de la chaîne *i*. En conséquence, la transposée de la matrice jacobienne inverse du manipulateur 3-UPU peut être exprimée comme suit [**Joshi 02**],

$$\mathbf{J}^{-T} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & 0_{1\times3} & 0_{1\times3} & 0_{1\times3} \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_3 & \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1 & \hat{\mathbf{F}}_2 & \hat{\mathbf{F}}_3 & \hat{\mathbf{M}}_1 & \hat{\mathbf{M}}_2 & \hat{\mathbf{M}}_3 \end{bmatrix} \qquad [4.42]$$

De part la forme de cette matrice jacobienne inverse, le manipulateur 3-UPU peut être considéré comme topologiquement équivalent à un manipulateur avec trois droites

gouvernantes finies et trois autres infinies. Il appartient donc à la première classe de manipulateurs parallèles.

Selon le paragraphe 2.3.2, *ab*, *cd*, *ef*, sont des droites finies qui représentent les trois forces $\hat{\mathbf{F}}_i$ (i=1, 2, 3) et *gh*, *gi* et *hi*, sont des droites à l'infini représentant les trois moments de contrainte $\mathbf{M_i}$ (i=1, 2, 3). Par conséquent, le manipulateur 3-UPU passe par une singularité lorsque ($\mathbf{s_1}$x$\mathbf{s_2}$). $\mathbf{s_3}$=0, ce qui se produit pour les cas (b-d) présentés sur la Figure 4.2. Par ailleurs, le manipulateur atteint une singularité de contrainte lorsque ($\mathbf{n_1}$x$\mathbf{n_2}$).$\mathbf{n_3}$=0 ce qui se produit pour les cas (e-g) (Figure 4.2). Notons qu'une autre condition peut apparaître quand au moins un moment de contrainte dégénère, résultant de la dégénérescence d'une des droites *gh*, *gi* et *hi* en un point. Pour le manipulateur 3-UPU, cela se produit si et seulement si une articulation de type cardan est remplacée par deux liaisons pivots avec des axes parallèles.

2.4.2. Analyse de singularités du robot Delta linéaire

Le robot Delta-Linéaire est composé de trois chaînes identiques (voir la Figure 4.6). Le mouvement de la plate-forme mobile est contrôlé grâce à trois parallélogrammes spatiaux et par l'intermédiaire de trois actionneurs linéaires montés sur la base. Grâce à ces parallélogrammes, le manipulateur exécute un mouvement de translation pure dans l'espace. En absence de singularités sérielles, la transposée de la matrice jacobienne inverse de ce manipulateur peut être exprimée comme suit,

$$\mathbf{J}^{-T} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{11} & \hat{\mathbf{F}}_{12} & \hat{\mathbf{F}}_{21} & \hat{\mathbf{F}}_{22} & \hat{\mathbf{F}}_{31} & \hat{\mathbf{F}}_{32} \end{bmatrix} \qquad [4.43]$$

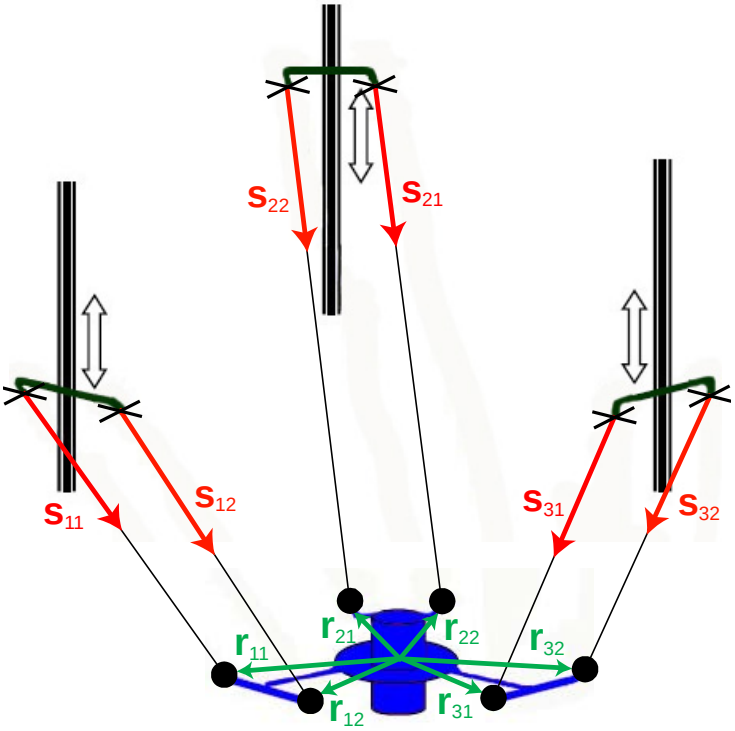


Figure 4.6 : Le robot Delta linéaire

Les colonnes de $\mathbf{J}^{-T}$ sont des visseurs de pas zéro, $\hat{\mathbf{F}}_{ij} = \left[\mathbf{s}_{ij}^T \quad (\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{s}_{ij})^T\right]^T$ (i=1, 2, 3, j=1, 2), représentés par des droites finies selon les six segments, $\mathbf{s_{ij}}$ est un vecteur unitaire représentant la direction du segment *j* de la chaîne *i*, tandis que $\mathbf{r_{ij}}$ est un vecteur de position d'un point sur ce segment. Chaque force d'actionnement est un visseur réciproque à tous les *twists* associés aux liaisons du segment *j* de la chaîne i sauf au *twist* associé à la liaison prismatique actionnée de la même chaîne. Il est important de noter que les deux forces d'actionnement dans chaque chaîne sont parallèles.

En outre, ces six forces d'actionnement forment un système de 6 visseurs qui peut être remplacé par un autre système équivalent de 6 visseurs en appliquant une transformation linéaire à la base du premier système [**Zhao 02**]. Donc, chaque système de 2 visseurs de pas zero parallèles $\hat{\mathbf{F}}_{i1} = \left[\mathbf{s}_{i1}^T \quad (\mathbf{r}_{i1} \times \mathbf{s}_{i1})^T\right]^T$ et $\hat{\mathbf{F}}_{i2} = \left[\mathbf{s}_{i2}^T \quad (\mathbf{r}_{i2} \times \mathbf{s}_{i2})^T\right]^T$, peut être remplacé par un autre système équivalent de 2 visseurs dont l'un est un visseur de pas zéro $\hat{\mathbf{F}}_{ei} = \hat{\mathbf{F}}_{i1}$ et l'autre est un visseur de pas infini $\hat{\mathbf{M}}_{ei} = \hat{\mathbf{F}}_{i1} - \hat{\mathbf{F}}_{i2}$.

Le robot de Delta peut être considéré selon le choix de sa matrice jacobienne inverse, topologiquement équivalent à un manipulateur de la classe I avec trois droites gouvernantes finies et trois autres infinies, ou bien équivalent à un autre de la classe III avec six droites

gouvernantes finies. Il est important de noter que nous obtenons les mêmes conditions d'existence de singularités dans les deux cas.

Premièrement, considérerons que ce manipulateur appartient à la première classe de manipulateurs parallèles. Selon le paragraphe 2.3.2, *ab*, *cd*, *ef*, sont des droites finies représentant trois forces $\hat{\mathbf{F}}_{ei}$ (i=1, 2, 3) et *gh*, *gi* et *hi*, sont des droites infinies représentant trois moments de contrainte $\hat{\mathbf{M}}_{ei}$ (i=1, 2, 3). Ici, les points *b*, *d*, *f* illustrés sur la Figure 4.2a appartiennent aux droites *gh*, *gi* et *hi*, respectivement. Dans ce cas, les configurations singulières se produisent pour les cas (b-g) de la Figure 4.2. En conséquence, le robot Delta linéaire passe par une singularité quand $(\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}) \cdot \mathbf{s_3} = \mathbf{0}$ ou $(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n_2}) \cdot \mathbf{n_3} = \mathbf{0}$.

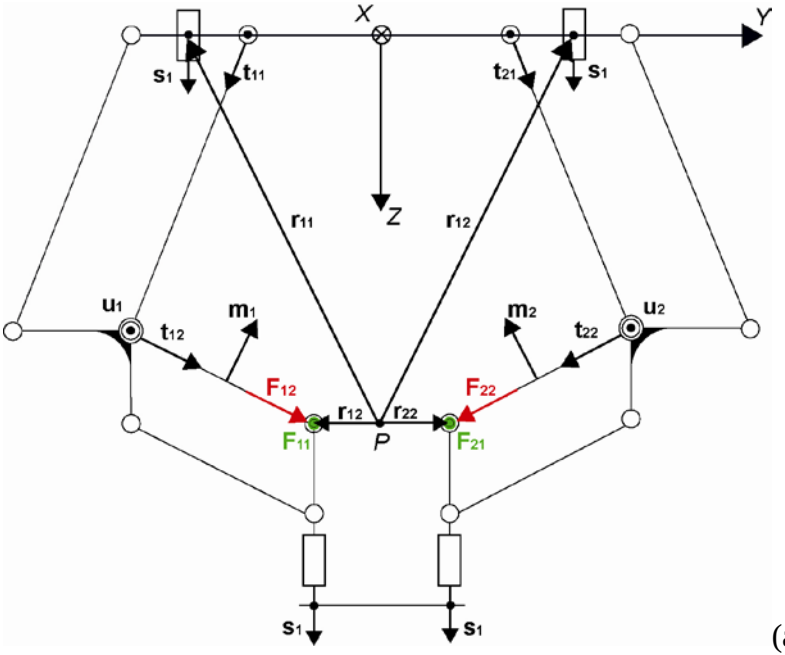
Maintenant, supposons que le robot Delta linéaire appartient à la troisième classe de manipulateurs parallèles. Selon le paragraphe 2.3.4, *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, *ij*, *kl* sont des droites finies qui représentent les six forces $\hat{\mathbf{F}}_{ij}$ (i=1, 2, 3, j=1, 2). Notons que dans ce cas $\mathbf{cd} = \mathbf{ab}$. Par conséquent, à partir de l'Eq. [4.41], nous obtenons les mêmes conditions singulières que celles obtenues dans le paragraphe 2.3.2, à savoir,

$$[\mathbf{ab} \cdot \mathbf{N}][\mathbf{tu} \cdot (\mathbf{db} \times \mathbf{ab})] = [(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{s}_3][(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_3] \qquad [4.44]$$

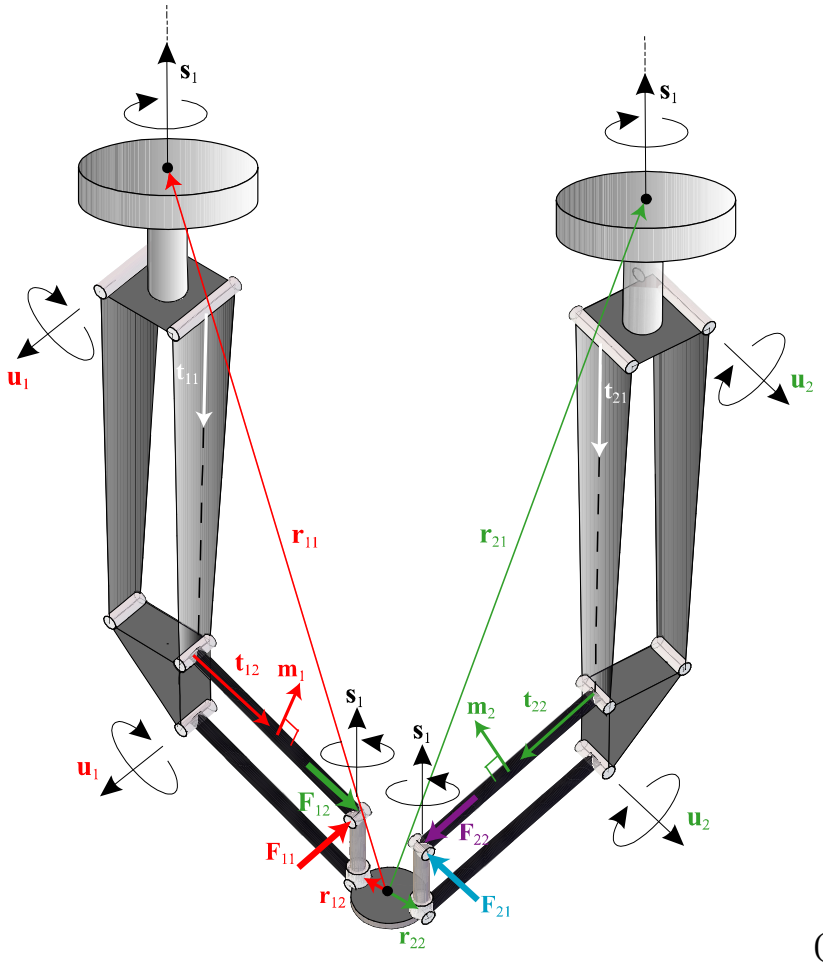
où $\mathbf{N} = \mathbf{ef} \times \mathbf{ij}$.

En conséquence, le robot Delta linéaire passe par une singularité quand $(\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}) \cdot \mathbf{s_3} = \mathbf{0}$ ou $(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n_2}) \cdot \mathbf{n_3} = \mathbf{0}$. Ainsi, on peut prouver que même en considérant que le robot Delta linéaire appartient à deux classes différentes, on obtient les mêmes conditions de singularités.

2.4.3. Analyse de singularités du manipulateur SMG de McGill



(a)



(b)

Figure 4.7 : vue de face(a) et représentation CAO (b) du McGill Schönflies-Mouvement Générateur (SMG)

Le générateur de mouvement de Schönflies de McGill (SMG) a été introduit dans [**Angeles 06**] et est illustré par la Figure 4.7. Ce manipulateur est composé de deux chaînes cinématiques identiques possédant chacune quatre ddls. Ces deux chaînes partagent une base et une plate-forme mobile communes. Chaque chaîne est composée d'une liaison pivot, suivi de deux liaisons coplanaires de type parallélogrammes et d'une autre liaison pivot. Dans ces deux chaînes, les deux premières liaisons sont actionnées alors que les deux autres liaisons sont passives. En conséquence, les chaînes transmettent un mouvement de quatre ddls à la plate-forme mobile, à savoir, trois translations indépendantes et une rotation autour d'un axe de direction fixe.

Donc, chaque chaîne possédant deux actionneurs et quatre degrés de liberté, applique deux forces d'actionnement et deux moments de contrainte. Comme les droites gouvernantes de ce manipulateur n'avaient jamais été introduites auparavant, ils sont présentés en détail dans ce paragraphe.

Pour la chaîne i, les *twists* des deux liaisons pivots sont définis par la direction de leurs axes et par la position d'un point sur ces axes. Par conséquent, ils sont exprimés comme suit, $\hat{\mathbf{T}}_{i1} = \left[\mathbf{s}_1^T \quad (\mathbf{r}_{i1} \times \mathbf{s}_1)^T\right]^T$ et $\hat{\mathbf{T}}_{i4} = \left[\mathbf{s}_1^T \quad (\mathbf{r}_{i2} \times \mathbf{s}_1)^T\right]^T$, $\mathbf{s_1}$ est l'axe de rotation de la liaison pivot tandis que $\mathbf{r_{i1}}$ et $\mathbf{r_{i2}}$ sont montrés sur la Figure 4.7. De plus, les deux liaisons parallélogrammes planaires peuvent seulement exécuter un mouvement de translation et leurs *twists* sont définis comme suit, $\hat{\mathbf{T}}_{i2} = \left[\mathbf{0}_{1\times 3} \quad (\mathbf{t}_{i1} \times \mathbf{u}_i)^T\right]^T$ et $\hat{\mathbf{T}}_{i3} = \left[\mathbf{0}_{1\times 3} \quad (\mathbf{t}_{i2} \times \mathbf{u}_i)^T\right]^T$, $\mathbf{u_i}$ est un vecteur normal aux plans des liaisons parallélogrammes de la chaîne *i* et il est représenté par la direction des axes des pivots, tandis que $\mathbf{t_{i1}}$ et $\mathbf{t_{i2}}$ sont les vecteurs représentant la direction des liaisons parallélogrammes comme présenté sur la Figure 4.7.

Les forces d'actionnement et les moments de contrainte sont obtenus en appliquant la réciprocité aux *twists* des liaisons. La force d'actionnement de chacune des chaînes *i* est définie comme suit, $\hat{\mathbf{F}}_{i1} = \left[\mathbf{u}_i^T \quad (\mathbf{r}_{i2} \times \mathbf{u}_i)^T\right]^T$ (*i*=1, 2). $\mathbf{F_{i1}}$ est réciproque à tous les *twists* des liaisons de la chaîne *i* sauf à celui associé à la liaison pivot actionnée, c.-à-d. $\hat{\mathbf{T}}_{i1}$. De même, $\hat{\mathbf{F}}_{i2} = \left[\mathbf{t}_{i2}^T \quad (\mathbf{r}_{i2} \times \mathbf{t}_{i2})^T\right]^T$ (*i*=1,2) est réciproque à tous les *twists* des liaisons de la chaîne i sauf à celui associé à la liaison parallélogramme actionnée, c.-à-d. $\hat{\mathbf{T}}_{i2}$. De plus, chaque chaîne applique deux moments de contrainte à la plate-forme mobile. Ces moments sont caractérisés par la direction de leur couple. Notons que si le dernier est orthogonal à $\mathbf{s_1}$, son moment de

contrainte est réciproque à tous les *twists* des liaisons. Ici, nous avons quatre couples coplanaires, $\mathbf{s_1}$ étant la normal à leur plan. Cependant, le manipulateur est sur-contraint et seulement deux couples sont nécessaires pour représenter ces moments de contrainte. En conséquence, nous choisissons les axes X et Y comme les directions de ces couples, c.-à-d., $\hat{\mathbf{M}}_i = \left[\mathbf{0}_{1\times3} \quad \mathbf{u}_i^T\right]^T$ et $\hat{\mathbf{M}}_i = \left[\mathbf{0}_{1\times3} \quad \mathbf{u}_i^T\right]^T$. Ainsi, en l'absence de singularités sérielles, la transposée de la matrice jacobienne inverse de ce manipulateur peut être exprimée comme suit,

$$\mathbf{J}^{-T} = \left[\hat{\mathbf{F}}_{11} \quad \hat{\mathbf{F}}_{12} \quad \hat{\mathbf{F}}_{21} \quad \hat{\mathbf{F}}_{22} \quad \hat{\mathbf{M}}_1 \quad \hat{\mathbf{M}}_2\right] \qquad [4.45]$$

A partir du paragraphe 2.3.3, *ab*, *cb*, *de*, *fe* sont des droites finies qui représentant les quatre forces $\hat{\mathbf{F}}_{ij}$ (i=1, 2, j = 1, 2) et <u>*gh*</u>, <u>*ih*</u>, sont des droites infinies qui représentent les deux moments de contrainte $\mathbf{M_i}$ (i=1,2). Comme présenté sur la Figure 4.7, $\mathbf{m_1}$ est normal au plan (*abc*), celui ci contient $\mathbf{F_{11}}$ et $\mathbf{F_{12}}$ tandis que $\mathbf{m_2}$ est normal au plan (*dfe*), celui ci contient $\mathbf{F_{21}}$ et $\mathbf{F_{22}}$. En plus, $\mathbf{m_3}$ est normal au plan contenant les vecteurs $\mathbf{s_1}$ et $\mathbf{r_{12}}$. À partir de l'Eq. [4.29], le SMG passe par une singularité parallèle toutes les fois que $(\mathbf{m_1} \mathrm{x} \mathbf{m_2}).\mathbf{m_3}=0$. Seulement deux configurations singulières parallèles sont accessibles par le prototype de SMG, elles sont présentées dans la Figure 4.8. Ces deux singularités sont obtenues quand les vecteurs $\mathbf{m_1}$ et $\mathbf{m_2}$ sont parallèles, c.-à-d., leur produit vectoriel devient nul. Il y en a peut être d'autre en fonction des dimensions de la machine.

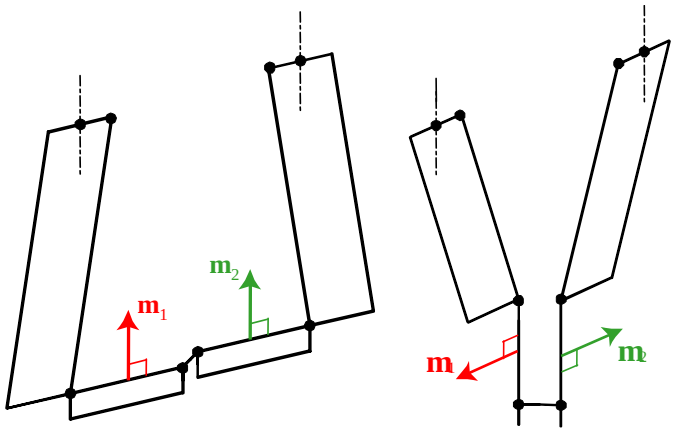


Figure 4.8 : Deux configurations singulières parallèles

2.4.4. Analyse de singularités du module parallèle de la machine Verne

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons seulement à l'étude des singularités parallèles du module parallèle de la machine Verne (voir Figure 4.9). Donc, en supposant que nous

sommes en dehors des singularités sérielles, nous pouvons exprimer la transposée de la matrice jacobienne inverse de ce manipulateur comme suit,

$$\mathbf{J}^{-T} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{11} & \hat{\mathbf{F}}_{12} & \hat{\mathbf{F}}_{21} & \hat{\mathbf{F}}_{22} & \hat{\mathbf{F}}_{31} & \hat{\mathbf{F}}_{32} \end{bmatrix} \qquad [4.46]$$

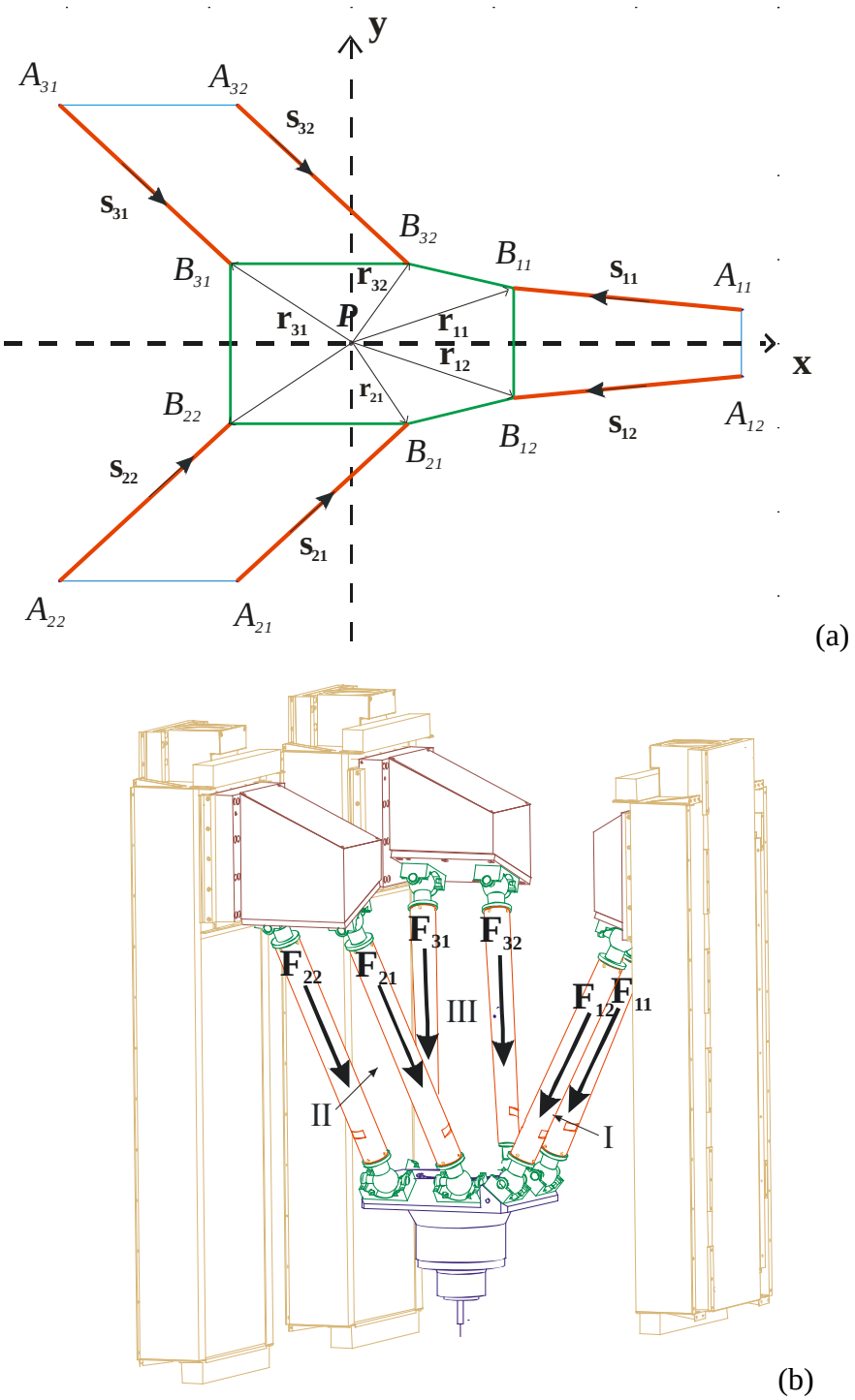


Figure 4.9 : Vue de dessus du schéma (a) et représentation CAO (b) du module parallèle de la machine Verne

Les colonnes de $\mathbf{J}^{-T}$ sont des visseurs de pas zéro, $\hat{\mathbf{F}}_{ij} = \left[\mathbf{s}_{ij}^T \quad \left(\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{s}_{ij} \right)^T \right]^T$ (i=1, 2, 3, j=1, 2), représentés par des droites finies portées par les six segments, $\mathbf{s_{ij}}$ est un vecteur unitaire suivant la direction du segment j de la chaîne i et $\mathbf{r_{ij}}$ est un vecteur de position d'un point sur ce segment. Chacun de ces visseurs est une force d'actionnement réciproque à tous les *twists* associés aux liaisons du segment j de la chaîne i à l'exception du *twist* associé à la liaison prismatique actionnée de la même chaîne. Il est important de noter que les deux paires de forces d'actionnement des chaînes II et III sont parallèles, donc $\mathbf{s}_{21} = \mathbf{s}_{22}$ et $\mathbf{s}_{31} = \mathbf{s}_{32}$. Le module parallèle de la machine Verne, possédant une telle matrice jacobienne inverse, appartient à la troisième classe de manipulateurs parallèles. Cette classe de manipulateurs a été analysée dans le paragraphe 2.3.4. Ici, *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, *ij*, *kl* sont des droites finies qui représentent les six forces $\hat{\mathbf{F}}_{ij}$ (i=1, 2, 3, j=1, 2) et les configurations singulières se produisent pour les six cas (*i*-*vi*) analysés dans le paragraphe 2.3.4 et illustrés sur la Figure 4.4b.

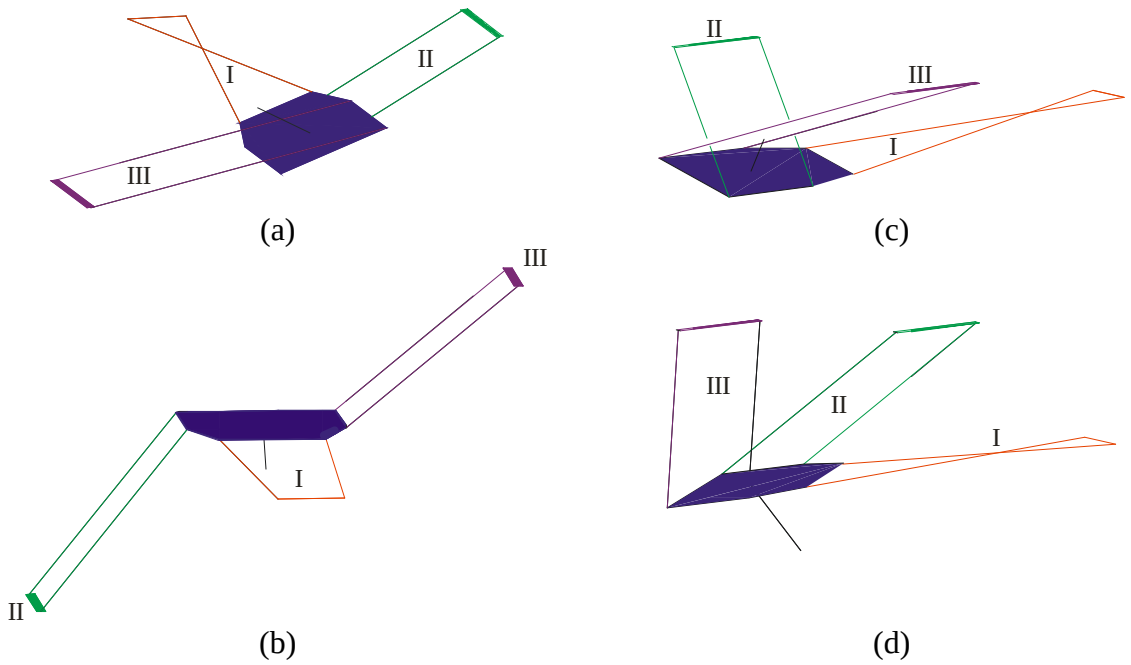


Figure 4.10 : Quatre configurations singulières parallèles de la machine Verne

Cependant pour la machine Verne, les configurations singulières existent seulement dans les cas suivants :

- les plans des chaînes II et III sont coplanaires ou parallèles donc $\|\mathbf{tu}\| = \mathbf{0}$ avec *tu* la droite d'intersection entre ces deux plans (voir Figure 4.10a);
- les droites $A_{ij}B_{ij}$ (i=2,3 et j=1,2) sont parallèles (voir Figure 4.10b);

- les six forces d'actionnement forment un complexe linéaire général exprimé dans l'Eq. [4.41] (voir Figure 4.10c, d).

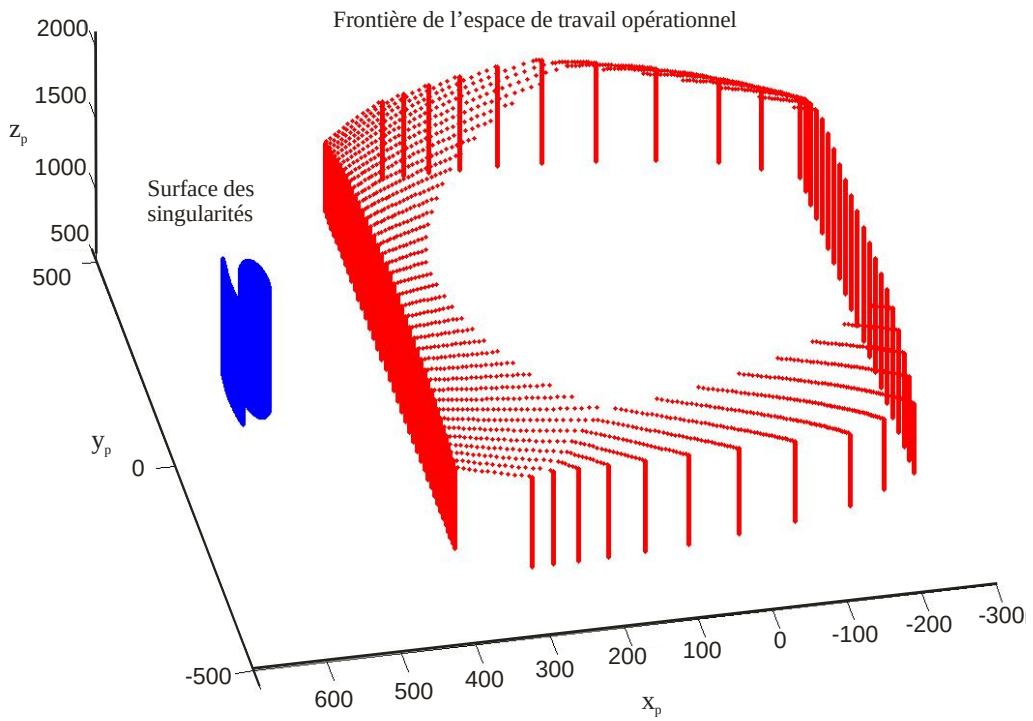


Figure 4.11 : Surface des singularités parallèles et la frontière de l'espace de travail de la machine Verne dans l'espace opérationnel

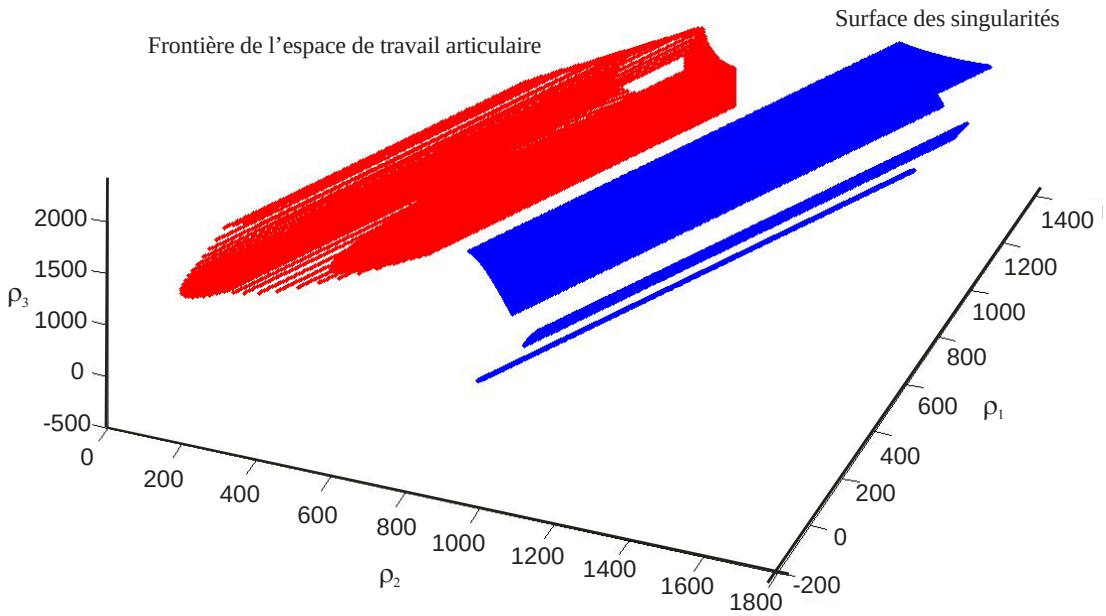


Figure 4.12 : Surface des singularités parallèles et la frontière de l'espace de travail de la machine Verne dans l'espace articulaire

Les conditions géométriques nous permettent de visualiser les configurations singulières et même de factoriser le déterminant de la matrice jacobienne pour obtenir des expressions moins compliquées à résoudre et utiles au stade de la conception préliminaire. Cependant, il reste indispensable de vérifier que les singularités parallèles ne sont pas dans l'espace de travail d'où l'importance des méthodes numériques. Ainsi, nous développons un algorithme numérique applicable seulement à une classe de manipulateurs ayant une liaison prismatique active comme première liaison dans chaque jambe comme la machine Verne. Nous utilisons cet algorithme présenté en annexe E pour vérifier l'absence des singularités parallèles dans l'espace de travail de la machine. Les figures 4.11 et 4.12 montrent que l'espace de travail de la machine Verne est bien exempt des singularités parallèles.

3. CONCLUSION

Ce chapitre a introduit une méthodologie basée sur l'Algèbre de Grassmann-Cayley pour déterminer géométriquement les configurations singulières de manipulateurs parallèles à mobilités restreintes. Il est important de noter que les chaînes de ces manipulateurs peuvent transmettre des forces et/ou couples à la plate-forme mobile. Les manipulateurs à mobilités restreintes et ceux dont certaines chaînes ne possèdent pas de liaison sphérique passive appartiennent à cette catégorie. Dans les travaux précédents, l'analyse des singularités parallèles par l'intermédiaire de l'AGC a été limitée aux manipulateurs dont les chaînes ne transmettent que des forces pures à la plate-forme mobile. En plus le concept des éléments à l'infini permet d'analyser les singularités parallèles des manipulateurs possédant des droites gouvernantes parallèles. Cette caractéristique est propre aux manipulateurs possédant des chaînes sous forme des parallélogrammes. L'analyse des singularités parallèles par l'intermédiaire de l'AGC est utile dans l'étape de la conception préliminaire des manipulateurs où les paramètres géométriques ne sont pas connus. Dans ce chapitre, trois classes de manipulateurs parallèles à mobilités restreintes ont été traités suivant les caractéristiques de leurs droites gouvernantes. La première classe inclut les manipulateurs à trois forces d'actionnement et trois moments de contraintes. La deuxième classe inclut des manipulateurs à deux paires de forces d'actionnement concourantes et deux moments de contraintes. La troisième classe inclut des manipulateurs à six forces d'actionnement ayant au moins deux paires de leurs droites gouvernantes parallèles. De plus, les singularités de quatre manipulateurs: i*)* le manipulateur 3-UPU, *ii)* le robot Delta-Linéaire, *iii)* le robot générateur du mouvement de Schönflies de l'université de McGill (SMG) et *iv)* le module parallèle de la

machine Verne, ont été analysées comme exemples applicatifs. Finalement, une signification physique et une interprétation géométrique des configurations singulières de ces trois classes de manipulateurs parallèles à mobilités restreintes ont été déterminées.

CHAPITRE 5

MODELISATION DYNAMIQUE DES MANIPULATEURS PARALLELES A MOBILITES RESTREINTES

NOTATIONS

n	Nombre de degrés de liberté,
m	nombre de jambes de la structure parallèle,
n_i	nombre des variables articulaires de la jambe i de la structure arborescente équivalente
N	nombre des variables articulaires actives du manipulateur parallèle,
$\mathbf{q}_{iu}$	vecteur ($n_i \times 1$) des variables articulaires de la jambe i de la structure arborescente
$\mathbf{q}_i$	vecteur (6×1) des variables articulaires réelles et fictives de la chaîne cinématique i de la structure parallèle
$\mathbf{q}_{au}$	vecteur ($N \times 1$) des variables articulaires actives du manipulateur parallèle,
$\mathbf{q}_a$	vecteur des variables articulaires actives et fictives du manipulateur parallèle,
$\mathbf{X}_i$	vecteur des coordonnées opérationnelles du dernier corps de la chaîne cinématique i,
$\mathbf{X}$	vecteur des coordonnées opérationnelles du manipulateur parallèle,
$\mathbf{v}_P$	vitesse linéaire de la plate-forme mobile par rapport à sa base
$\boldsymbol{\omega}_P$	vitesse angulaire de la plate-forme mobile par rapport à sa base
$\mathbb{v}_P$	vecteur (6×1) du torseur cinématique de la plate-forme mobile,
$\mathbb{v}_{Bi}$	vecteur de la vitesse cartésienne terminale de la jambe i
$\mathbf{J_P}$	matrice jacobienne cinématique ($6 \times N$) du robot, qui exprime la vitesse de la plate-forme mobile $\mathbb{v}_{\mathbf{P}}$ en fonction des vitesses des articulations actives, $\mathbf{q}_{au}$. On utilisera la notation suivante : $\mathbf{J_P} = \partial \mathbb{v}_{\mathbf{P}} / \partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{au}}$.
$\mathbf{J_i}$	matrice jacobienne cinématique de la jambe i
$\mathbf{J_{vi}}$	matrice permettant de ramener $\mathbb{v}_{\mathbf{P}}$ au point d'attache entre la jambe i et la plate-forme
$\mathbb{F}_{\mathbf{P}}$	résultante des efforts (forces et moments) requis pour bouger la plate-forme mobile,
$\boldsymbol{\Gamma}$	forces/couples des articulations motorisées,

1. INTRODUCTION

Les robots parallèles sont utilisés dans des nombreuses applications, en particulier la manutention, l'usinage à grande vitesse, la peinture, la soudure et l'assemblage mécanique. Ces applications requièrent des caractéristiques très élevées en termes de performances dynamiques, que seuls les robots parallèles sont capables d'atteindre, ce qui a suscité une abondante littérature sur la modélisation dynamique des manipulateurs parallèles pour leur commande. Deux problèmes sont liés à la modélisation dynamique : le modèle dynamique inverse qui donne les forces/couples des actionneurs requis pour produire un mouvement selon une trajectoire donnée, ce modèle est utilisé dans la commande des robots; le modèle dynamique direct qui donne l'accélération de la plate-forme du robot correspondant aux forces/couples actionneurs donnés en suivant une trajectoire et une vitesse imposée à la plate-forme, ce modèle est souvent utilisé dans les algorithmes de simulation des robots. Le problème dynamique inverse est plus simple à développer que le problème dynamique direct.

Plusieurs études de recherche ont été menées pour la modélisation dynamique des robots à structures complexes, citons les travaux de **[Wittenburg 77, Orin 81, Luh 85, Kleinfinger 86, Nakamura 88]** sur la modélisation dynamique des chaînes cinématiques à structure fermée; les travaux de [**Hoffman 79, Fichter 86, Do 88, Reboulet 91, Nguyen 92, Ji 93, Lebret 93, Dasgupta 98a et 98b, Guegan 03**] qui ont traité le cas de la plate-forme de Gough-Stewart, un robot parallèle à six degrés de liberté; les travaux de **[Sugimoto 87, Sugimoto 89, Ma 89, et Codourey 91]** qui portent sur la modélisation dynamique des robots à trois degrés de liberté planaires et spatiaux. [**Clavel 91, Pierrot 91**] se sont intéressés à un robot spatial à 4 degrés de liberté, le robot Delta. **[Pierrot 91, Bégon 95]** ont travaillé sur le robot Hexaglide, un robot spatial à six degrés de liberté.

Différents formalismes mécaniques ont été utilisés pour obtenir le modèle dynamique d'un robot parallèle, par exemple [**Lee 88, Miller 92**, **Geng 92, Lebret 93, Ait-Ahmed 93, Bhattacharya 97 et 98, Liu 00**] ont employé le formalisme de Lagrange-Euler. Le principe du travail virtuel a été employé par [**Clavel 91, Codourey 97, Tsai 00**], cette technique a l'avantage de ne pas ouvrir la structure fermée. Le principe de Hamilton a été employé dans la modélisation dynamique par [**Miller 95 et 04**]. D'autre part, le formalisme de Newton-Euler a été utilisé par [**Do 88**, **Pierrot 89, Sugimoto 89, Codourey 91, Reboulet 91, Ji 93, Gosselin 93, Gugliemetti 94, Dasgupta 98a, 98b, et 99, Khalil 04a, Ibrahim 04**].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux modèles dynamiques établis dans [**Ibrahim 06**]. Ces modèles sont obtenus en termes de modèles dynamiques des jambes exprimés en fonction des variables articulaires (variables lagrangiennes) et de la dynamique de la plate-forme exprimée en fonction des variables cartésiennes (variables eulériennes). Les modèles dynamiques des jambes et de la plate-forme sont ensuite projetés sur les axes des articulations motorisées (actives) par l'intermédiaire de matrices jacobiennes appropriées. Les jambes étant perçues dans leur points de connections avec la plate-forme, leurs modèles dynamiques et cinématiques sont obtenus en utilisant les méthodes classiques des robots série. Cependant, la dynamique de la plate-forme est obtenue par les équations de Newton-Euler qui donnent la résultante des forces et moments appliqués sur un corps solide en mouvement.

Dans ce travail, nous reprenons la méthode établie dans [**Khalil 06, Ibrahim 06**] pour la modélisation dynamique directe et inverse des robots parallèles. Cette méthode permet de modéliser les robots parallèles de façon complète en considérant l'ensemble des corps du mécanisme. Nous adaptons cette méthode pour pouvoir l'appliquer aux robots à mobilités complexes. Nous ajustons les matrices jacobiennes utilisées dans la modélisation dynamique de ces robots de façon à ne pas perdre leur sens physique et de rendre l'étude plus systématique. Cette démarche va nous permettre de calculer les modèles dynamiques de la machine Verne, un robot à mobilité complexe, sans ajouter des contraintes supplémentaires.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans le paragraphe 2, nous généralisons la méthode établie dans [**Khalil 06, Ibrahim 06**] en proposant une nouvelle méthode pour obtenir les matrices jacobiennes utilisées dans le calcul des modèles dynamiques. Dans le paragraphe 3, nous appliquons cette méthode pour obtenir les modèles dynamiques inverse et direct de la machine Verne.

2. MODELES DYNAMIQUES DES ROBOTS PARALLELES

2.1. MODELE DYNAMIQUE INVERSE DES ROBOTS PARALLELES

Le modèle dynamique inverse (MDI) d'un robot parallèle représente la relation entre les forces/couples des articulations motorisées et les positions, vitesses, accélérations opérationnelles de la plate-forme. Ce modèle s'exprime par la relation suivante :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{f}\left({}^{0}\mathbf{T}_{\mathbf{P}},\ \mathbf{v}_{\mathbf{P}},\ \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{P}}\right) \qquad [5.1]$$

$^{0}\mathbf{T_P}$ Matrice de transformation qui définit le repère R_{pl} fixé à la plate-forme mobile dans le repère de base R_0

$\mathbf{v_P}$ vecteur (6×1) du torseur cinématique de la plate-forme composé des vitesses linéaires et angulaires du repère R_{pl} :

$$\mathbf{v_P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v_P^T} & \boldsymbol{\omega}_\mathbf{P}^\mathbf{T} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad [5.2]$$

$\mathbf{v_P}$ vecteur (3×1) de la vitesse linéaire de l'origine du repère R_{pl},

$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{P}$ vecteur (3×1) de la vitesse angulaire du repère R_{pl},

$\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{P}$ vecteur (6×1) composé des accélérations linéaires et angulaires du R_{pl} :

$$\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{P}^\mathbf{T} & \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{P}^\mathbf{T} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad [5.3]$$

$\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{P}$ vecteur (3×1) de l'accélération linéaire de l'origine du repère R_{pl},

$\dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{P}$ vecteur (3×1) de l'accélération angulaire du repère R_{pl}.

Le modèle dynamique inverse des robots parallèles à mobilités restreintes est exprimé en fonction des positions, vitesse et accélération correspondant aux ddls indépendants de la plate-forme. Ce modèle est calculé à partir de l'Eq. [5.1] en exprimant, respectivement, $\mathbf{v_P}$ et $\dot{\mathbf{v}}_\mathrm{P}$ en fonction des éléments de vitesses et d'accélérations indépendants du repère de la plate-forme :

$$\mathbf{v}_\mathrm{P} = \mathbf{a}_\mathrm{r}\mathbf{v}_\mathrm{r} \qquad [5.4]$$

$$\dot{\mathbf{v}}_\mathrm{P} = \mathbf{a}_\mathrm{r}\dot{\mathbf{v}}_\mathrm{r} + \dot{\mathbf{a}}_\mathrm{r}\mathbf{v}_\mathrm{r} \qquad [5.5]$$

$\mathbf{v}_\mathrm{r}$ Vecteur ($\mathrm{n}\times 1$) de la vitesse de la plate-forme correspondant aux n ddls indépendants,

$\dot{\mathbf{v}}_\mathrm{r}$ vecteur ($\mathrm{n}\times 1$) de l'accélération de la plate-forme correspondant aux ddls indépendants,

$\mathbf{a}_\mathrm{r}$ matrice ($6\times \mathrm{n}$) exprimant $\mathbf{v}_\mathrm{P}$ en fonction de $\mathbf{v}_\mathrm{r}$.

2.1.1. Méthode du calcul du modèle dynamique inverse

La méthode développée dans [**Khalil 04, Ibrahim 06**] pour la modélisation dynamique des robots parallèles aboutit à l'équation compacte suivante :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{J}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}}\left(\mathbb{F}_{\mathbf{P}} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}}\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}}}{\partial \mathbb{v}_{\mathbf{P}}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{H}_{\mathbf{i}}\right) \qquad [5.6]$$

$\mathbb{F}_{\mathbf{P}}$ résultante des efforts (forces et moments) appliqués sur la plate-forme mobile,

m nombre de jambes de la structure parallèle,

$\mathbf{J}_{\mathbf{P}}$ matrice jacobienne cinématique du robot (6×N), qui exprime la vitesse de la plate-forme mobile $\mathbb{v}_{\mathbf{P}}$ en fonction des vitesses des articulations actives $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{au}}$:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}} = \frac{\partial \mathbb{v}_{\mathbf{P}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{au}}} \qquad [5.7]$$

N nombre des variables articulaires actives du manipulateur parallèle

Cette équation consiste à décomposer la structure parallèle en deux sous systèmes : la plate-forme et la structure arborescente composée de la base et des jambes. La dynamique de la plate-forme, $\mathbb{F}_{\mathbf{P}}$, est calculée en fonction des variables opérationnelles (vitesse et accélération cartésiennes de la plate-forme), tandis que les modèles dynamiques des jambes, $\mathbf{H}_{\mathbf{i}}$, sont calculés en fonction des variables articulaires $\left(\mathbf{q}_{\mathbf{iu}}, \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}}, \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}}\right)$ sans considérer les articulations passives entre la plate-forme et les jambes. Le modèle dynamique inverse du robot exprimé dans l'espace opérationnel est obtenu par la somme de la dynamique de la plate-forme et des dynamiques des jambes après avoir projeté ces derniers dans l'espace opérationnel. Les couples articulaires actifs sont obtenus par la projection du modèle dynamique du robot exprimé dans l'espace opérationnel sur les axes des articulations actives. Pour projeter les dynamiques des jambes dans l'espace opérationnel, on utilise la jacobienne $\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}} / \partial \mathbb{v}_{\mathbf{P}}$ liant l'espace articulaire (sans les articulations passives entre la plate-forme et les jambes) et l'espace opérationnel, et pour projeter la dynamique du robot dans l'espace des articulations actives on la multiplie par la transposée de la matrice jacobienne du robot, $\mathbf{J}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}}$.

Dans la suite, nous utilisons le terme chaîne pour designer la structure sérielle ouverte liant la base à la plate-forme, et le terme jambe pour designer la partie de la chaîne n'incluant pas les articulations passives fixés à la plate-forme. En conséquence, on définit dans l'espace articulaire les variables suivantes :

$\mathbf{q}_i$ vecteur composé de toute les variables articulaires de la chaîne i,

$\mathbf{q}_{iu}$ vecteur ($n_i \times 1$) composé des variables articulaires de la jambe i sans considérer les articulations entre les jambes et la plate-forme.

2.1.2. Dynamique de la plate-forme

La résultante des efforts (forces et moments) appliqués au centre de la plate-forme mobile, $\mathbb{F}_\mathbf{P}$, est calculée en utilisant les équations de Newton-Euler suivantes [**Featherstone 83, Khalil 99**] :

$$\mathbb{F}_\mathbf{P} = \mathbb{I}_\mathbf{P} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{P} - \mathbf{g} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_\mathbf{P} \times (\boldsymbol{\omega}_\mathbf{P} \times \mathbf{MS}_\mathbf{P}) \\ \boldsymbol{\omega}_\mathbf{P} \times (\mathbf{I}_\mathbf{P} \boldsymbol{\omega}_\mathbf{P}) \end{bmatrix} \qquad [5.8]$$

où

$\mathbf{g}$ accélération de la pesanteur,

$\mathbf{I}_{\mathbf{d3}}$ matrice identité de dimension (3×3),

[5.9]

$\mathbb{I}_\mathbf{P}$ matrice d'inertie spatiale (6×6) de la plate-forme :

$$\mathbb{I}_\mathbf{P} = \begin{bmatrix} M_P \mathbf{I}_{\mathbf{d3}} & -\widehat{\mathbf{MS}}_\mathbf{P} \\ \widehat{\mathbf{MS}}_\mathbf{P} & \mathbf{I}_\mathbf{P} \end{bmatrix} \qquad [5.10]$$

M_P masse de la plate-forme,

$\mathbf{I}_\mathbf{P}$ matrice d'inertie (3×3) de la plate-forme autour de l'origine du repère R_{pl},

$$\mathbf{I}_\mathbf{p} = \begin{bmatrix} XX_P & XY_P & XZ_P \\ XY_P & YY_P & YZ_P \\ XZ_P & YZ_P & ZZ_P \end{bmatrix} \qquad [5.11]$$

$\mathbf{MS}_\mathbf{P}$ premier moment d'inertie de la plate-forme autour de l'origine du repère R_{pl} :

$$\mathbf{MS}_\mathbf{P} = \begin{bmatrix} MX_P & MY_P & MZ_P \end{bmatrix}^T$$

$\hat{\mathbf{MS}}_{\mathbf{P}}$ désigne la matrice antisymétrique (3×3) associée au vecteur $\mathbf{MS_P}$:

$$\hat{\mathbf{MS}}_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & -MZ_P & MY_P \\ MZ_P & 0 & -MX_P \\ -MY_P & MX_P & 0 \end{bmatrix} \qquad [5.12]$$

2.1.3. Dynamique des jambes

Le modèle dynamique inverse d'une jambe i, $\mathbf{H_i}$, est exprimé en fonction des variables articulaires de la jambe i $\left(\mathbf{q}_{iu}, \dot{\mathbf{q}}_{iu}, \ddot{\mathbf{q}}_{iu}\right)$. Ces variables sont obtenues en fonction des positions, vitesse et accélération de la plate-forme en utilisant les modèles géométriques et cinématiques inverses des jambes. On note que $\mathbf{H_i}$ est indépendant des articulations passives entre les jambes et la plate-forme, donc $\mathbf{q}_{iu}$ n'inclut pas ces variables.

Dans cette étude, nous calculons $\mathbf{H_i}$ en utilisant le logiciel de calcul symbolique SYMORO+ (SYmbolic MOdelling of RObots). Ce logiciel utilise les techniques de calculs symboliques avec des variables intermédiaires [**Khalil 97**], l'algorithme récursif de Newton-Euler et calcule les paramètres inertiels de base [**Khalil 87**], ce qui nous permet de réduire le coût en nombre d'opérations du modèle obtenu. Notons qu'il existe dans la littérature de nombreuses autres méthodes pour le calcul de $\mathbf{H_i}$, [**Hollerbach 80, Luh 80, Craig 86, Khalil 87, Renaud 80, Ploen 99**].

2.1.4. Matrices Jacobiennes

L'un des problèmes fréquents dans l'étude cinématique des manipulateurs parallèles à mobilités restreintes est de pouvoir établir une matrice jacobienne du manipulateur de dimension 6×6. L'obtention d'une matrice de telle dimension permet de détecter toutes les singularités parallèles de ces manipulateurs mais en même temps elle nous permet d'obtenir une forme compacte et générale du modèle dynamique valable pour tous les manipulateurs sans se soucier de leurs degrés de liberté.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode qui nous permet de calculer systématiquement la matrice jacobienne parallèle 6×6 d'un manipulateur parallèle à mobilités restreintes. Un tel manipulateur est constitué des chaines cinématique à moins de six ddls chacune, cependant, pour pouvoir établir une matrice jacobienne de dimension 6×6, il faut traiter ces chaines comme des chaînes à six ddls. Pour cette raison des articulations fictives

supplémentaires sont ajoutées à chaque chaîne de moins de six ddls. Ces articulations fictives sont bloquées [**Tanev 08**]. Nous affectons une vitesse nulle à chacune des articulations fictives. La matrice jacobienne obtenue lie le vecteur du torseur cinématique de la plate-forme, $\mathbf{v}_P$, aux vitesses des articulations actives réelles et fictives, $\dot{\mathbf{q}}_a$. La matrice jacobienne cinématique du robot (6×N) est obtenue en sélectionnant les colonnes de la matrice jacobienne 6×6 correspondant aux variables articulaires actives réelles, $\dot{\mathbf{q}}_{au}$.

2.1.4.1. La jacobienne d'une chaine cinématique i

Le modèle cinématique direct du premier ordre d'une chaîne cinématique i donne la vitesse $\mathbf{v}_{Bi}$ du repère Σ_{Bi} fixé à la plate-forme mobile en B_i (B_i est le point d'attache entre la chaîne i et la plate-forme) et parallèle à R_{pl}. La vitesse $\mathbf{v}_{Bi}$ est exprimée en fonction des vitesses articulaires de la chaîne cinématique i, $\dot{\mathbf{q}}_i$ (en considérant les vitesses articulaires entre les chaînes et la plate-forme) :

$$\mathbf{v}_{Bi} = \mathbf{J_i}\,\dot{\mathbf{q}}_i \qquad [5.13]$$

La forme vectorielle de la jacobienne d'une chaîne cinématique ouverte à six articulations est la suivante [**Khalil 02**] :

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \sigma_1\,\mathbf{a_1} + \overline{\sigma}_1\left(\mathbf{a_1}\times\mathbf{L_{1,6}}\right) & \cdots & \sigma_k\,\mathbf{a_k} + \overline{\sigma}_k\left(\mathbf{a_k}\times\mathbf{L_{k,6}}\right) & \cdots & \sigma_6\,\mathbf{a}_6 + \overline{\sigma}_6\left(\mathbf{a}_6\times\mathbf{L}_{6,6}\right) \\ \overline{\sigma}_1\,\mathbf{a_1} & \cdots & \overline{\sigma}_k\,\mathbf{a_k} & \cdots & \overline{\sigma}_6\,\mathbf{a}_6 \end{bmatrix} \qquad [5.14]$$

avec :

a_j vecteur unitaire porté par l'axe z_j de l'articulation j et que $\sigma_j = 1$ ($\overline{\sigma}_j = 0$) si l'articulation j est prismatique et $\sigma_j = 0$ ($\overline{\sigma}_j = 1$) si elle est rotoïde

$\mathbf{L_{j,6}}$ vecteur d'origine O_j (origine du repère Σ_j) et d'extrémité B_i (origine du repère Σ_{Bi}).

Le calcul de $\partial\dot{\mathbf{q}}_{iu}/\partial\mathbf{v}_{Bi}$ est obtenu en inversant la matrice jacobienne de la chaîne cinématique i, $\mathbf{J_i}$, puis en sélectionnant les lignes correspondant aux vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}_{iu}$ utilisées dans le calcul du modèle dynamique inverse de la jambe i.

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}_{iu}}{\partial\mathbf{v}_{Bi}} = \mathbf{J_i^{-1}}\left(1..n_i,:\right) \qquad [5.15]$$

où

n_i nombre des articulations utilisées dans le calcul du MDI d'une chaine cinématique i

La notation $(1..n_i,:)$ représente les lignes de $\mathbf{J}_i^{-1}$ correspondant aux articulations utilisées dans le calcul du MDI d'une jambe i.

Le modèle cinématique inverse d'une jambe i exprime les vitesses de ces articulations $\dot{\mathbf{q}}_{iu}$ en fonction de la vitesse du repère Σ_{Bi}. Ce modèle est obtenu à partir de l'Eq. [5.15] par la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{q}}_{iu} = \mathbf{J}_i^{-1}(1..n_i,:)\, v_{Bi} \qquad [5.16]$$

2.1.4.2. La jacobienne liant la vitesse de la plate-forme à la vitesse du Σ_{Bi}

La matrice jacobienne, $\mathbf{J}_{vi}$, permet d'exprimer la vitesse du repère Σ_{Bi}, v_{Bi} (6×1), en fonction de la vitesse de la plate-forme, v_P, en utilisant la relation de transfert du torseur cinématique :

$$v_{Bi} = \mathbf{J}_{vi}\, v_P \qquad [5.17]$$

$$\mathbf{J}_{vi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I_{d3}} & -\hat{\mathbf{PB}}_i \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{I_{d3}} \end{bmatrix} = \frac{\partial v_{Bi}}{\partial v_P} \qquad [5.18]$$

où

$\mathbf{0_3}$ matrice nulle de dimension (3×3)

$\mathbf{PB}_i$ vecteur entre l'origine de la plate-forme mobile et le point d'articulation B_i

$\hat{\mathbf{PB}}_i$ matrice antisymétrique de préproduit vectoriel associé au vecteur $\mathbf{PB}_i$:

$$\hat{\mathbf{PB}}_i = \begin{bmatrix} 0 & -PB_{i,3} & PB_{i,2} \\ PB_{i,3} & 0 & -PB_{i,1} \\ -PB_{i,2} & PB_{i,1} & 0 \end{bmatrix} \qquad [5.19]$$

2.1.4.3. La jacobienne du robot

La matrice jacobienne (6×6) du robot lie la vitesse de la plate-forme, v_P, aux vitesses des articulations actives et fictives, $\dot{\mathbf{q}}_a$. L'inverse de cette matrice est exprimée par la relation suivante :

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a}}}{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{P}}} = \left[\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a}1}}{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{P}}} \right)^{\mathbf{T}} \quad \cdots \quad \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a}k}}{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{P}}} \right)^{\mathbf{T}} \quad \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a}6}}{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{P}}} \right)^{\mathbf{T}} \right]^{\mathbf{T}} \qquad [5.20]$$

Le calcul de $\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a}k} / \partial \mathbf{v}_{\mathbf{P}}$ (1×6) est obtenu en exploitant la structure de la chaîne cinématique contenant l'articulation active k, en utilisant la relation suivante :

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a}k}}{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{P}}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a}k}}{\partial \mathbf{v}_{\mathrm{Bi}}} \frac{\partial \mathbf{v}_{\mathrm{Bi}}}{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{P}}} = \mathbf{J}_{\mathbf{i}}^{-1} \left(\mathbf{a}_{\mathrm{k}}, : \right) \mathbf{J}_{\mathbf{vi}} \qquad [5.21]$$

La notation $\left(\mathbf{a}_{\mathrm{k}}, : \right)$ représente les lignes $\mathbf{a}_{\mathrm{k}}$ correspondant aux articulations actives et fictives dans la chaîne cinématique i.

La transposée de la matrice jacobienne inverse (6×6) est obtenue en introduisant les termes de l'Eq. [5.21] dans l'Eq. [5.20] :

$$\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a}}}{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{P}}} \right)^{\mathbf{T}} = \left[\mathbf{J}_{\mathbf{vi}}^{\mathbf{T}} \mathbf{J}_{\mathbf{i}}^{-\mathbf{T}} \left(\mathbf{a}_{1}, : \right) \quad \cdots \quad \mathbf{J}_{\mathbf{vi}}^{\mathbf{T}} \mathbf{J}_{\mathbf{i}}^{-\mathbf{T}} \left(\mathbf{a}_{\mathrm{k}}, : \right) \quad \mathbf{J}_{\mathbf{vi}}^{\mathbf{T}} \mathbf{J}_{\mathbf{i}}^{-\mathbf{T}} \left(\mathbf{a}_{6}, : \right) \right] \qquad [5.22]$$

La matrice jacobienne (6×N), $\mathbf{J}_{\mathbf{P}}$, utilisée dans le calcul du MDI est obtenue en inversant la matrice $\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a}} / \partial \mathbf{v}_{\mathbf{P}}$ exprimée par l'Eq. [5.22] et en ne retenant que les colonnes correspondant aux variables articulaires actives puisque la vitesse des articulations fictives est nulle.

Pour mieux illustrer la méthodologie utilisée pour le calcul des matrices jacobiennes, nous calculons la matrice jacobienne du robot 3 R<u>P</u>S en annexe F.

2.1.5. Equation Générale du MDI des robots parallèles

En introduisant la relation [5.22] dans l'Eq. [5.6] et en tenant compte des Eqs. [5.15, 5.18], l'expression du MDI défini par l'Eq. [5.6] est obtenue sous la forme suivante [**Khalil 06, Ibrahim 06**] :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{H}^{\mathrm{a}} + \mathbf{J}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}} \left(\mathbb{F}_{\mathbf{P}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathbf{J}_{\mathbf{vi}}^{\mathbf{T}} \mathbf{J}_{\mathrm{i}}^{-\mathbf{T}} \left(:, \mathbf{p}_{\mathrm{i}} \right) \mathbf{H}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{p}} \right) \qquad [5.23]$$

où :

$\mathbf{H}^{\mathrm{a}}$ vecteur des forces/couples des actionneurs de la structure ouverte, il correspond aux valeurs des composantes de $\mathbf{H}_{\mathbf{i}}$ relatives aux articulations motorisées (pour i = 1 à m)

$\mathbf{H}_i^p$ vecteur des forces/couples des articulations passives de la jambe i pour i= 1 à m

La notation $(:,\mathbf{p}_i)$ représente les colonnes $\mathbf{p}_i$ correspondant aux articulations passives dans la jambe i (notation MATLAB),

Finalement le MDI défini par l'Eq. [5.23] est exprimé sous la forme compacte suivante [**Ibrahim 06**]:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^a \\ \mathbf{H}_2^a \\ \vdots \\ \mathbf{H}_m^a \end{bmatrix} + \mathbf{J}_\mathbf{P}^\mathbf{T} \left(\mathbb{F}_\mathbf{P} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v1}^\mathbf{T}\mathbf{J}_1^{-\mathbf{T}}(:,\mathbf{p}_1) & \mathbf{J}_{v2}^\mathbf{T}\mathbf{J}_2^{-\mathbf{T}}(:,\mathbf{p}_2) & \cdots & \mathbf{J}_{vm}^\mathbf{T}\mathbf{J}_m^{-\mathbf{T}}(:,\mathbf{p}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^p \\ \mathbf{H}_2^p \\ \vdots \\ \mathbf{H}_m^p \end{bmatrix} \right) \qquad [5.24]$$

Cette forme simplifie davantage le modèle en évitant les multiplications des forces/couples actives par les matrices de projection.

En interprétant physiquement chaque terme de cette équation, nous constatons que les termes à l'intérieur des parenthèses représentent la somme totale entre les forces/couples nécessaires pour bouger la plate-forme, $\mathbb{F}_\mathbf{P}$, et les forces/couples transmis par les articulations passives pour pouvoir bouger les chaînes cinématiques. Le terme $\mathbf{J}_{vi}^\mathbf{T}\mathbf{J}_i^{-\mathbf{T}}(:,\mathbf{p}_i)$ est le vecteur du torseur statique transmis par l'intermédiaire de la liaison passive $\mathbf{p}_i$ ayant $\mathbf{H}_i^p$ comme intensité. Ainsi, la matrice $\mathbf{J}_\mathbf{P}^\mathbf{T}$ permet la projection de ces forces/ couples selon les axes des articulations actives. $\mathbf{H}_i^a$ est l'intensité du torseur statique transmis par l'articulation active $\mathbf{a}_k$.

2.2. MODELE DYNAMIQUE DIRECT DES ROBOTS PARALLELES

Le modèle dynamique direct (MDD) d'un robot donne l'accélération cartésienne de la plate-forme $\dot{v}_\mathbf{P}$ en fonction des forces/couples des actionneurs $\mathbf{\Gamma}$ et en fonction de la position, ${}^0\mathbf{T}_\mathbf{P}$ et la vitesse $v_\mathbf{P}$ de la plate-forme :

$$\dot{v}_\mathbf{P} = \mathbf{f}\left({}^0\mathbf{T}_\mathbf{P}, v_\mathbf{P}, \mathbf{\Gamma}\right) \qquad [5.25]$$

2.2.1. Méthode de Calcul du modèle dynamique direct

Le modèle dynamique direct d'un robot parallèle est obtenu à partir du modèle dynamique inverse [**Ibrahim 06**] en substituant les accélérations articulaires des jambes $\ddot{\mathbf{q}}_{iu}$

en fonction des accélérations de la plate-forme $\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{P}}$ dans l'expression du modèle dynamique inverse $\mathbf{H}_{\mathbf{i}}$ de la jambe i.

2.2.2. Décomposition du modèle dynamique inverse de la jambe i

Le modèle dynamique $\mathbf{H}_{\mathbf{i}}$ de la jambe i est décomposé en utilisant le formalisme de Lagrange sous la forme :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{i}}\left(\mathbf{q}_{\mathbf{iu}}, \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}}, \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}}\right) = \mathbf{A}_{\mathbf{i}}\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}} + \mathbf{h}_{\mathbf{i}}\left(\mathbf{q}_{\mathbf{iu}}, \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}}\right) \qquad [5.26]$$

où

$\mathbf{A}_{\mathbf{i}}$ matrice d'inertie de la jambe i, ses éléments sont fonction des variables articulaires $\mathbf{q}_{\mathbf{i}}$

$\mathbf{h}_{\mathbf{i}}$ vecteur des forces de Coriolis, centrifuges et de gravité

2.2.3. Calcul des accélérations articulaires de la jambe i

Les accélérations articulaires $\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}$ de la chaîne i sont calculées en utilisant le modèle cinématique du second ordre de cette chaîne. Ce modèle est obtenu après dérivation de l'équation [5.13], tel que :

$$\dot{\mathrm{v}}_{\mathrm{Bi}} = \mathbf{J}_{\mathbf{i}}\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}} + \dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{i}}\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}} \qquad [5.27]$$

L'équation [5.17] permet après dérivation d'exprimer l'accélération du Σ_{Bi} en fonction de la vitesse et de l'accélération de centre de la plate-forme:

$$\dot{\mathrm{v}}_{\mathrm{Bi}} = \dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{vi}}\mathrm{v}_{\mathbf{P}} + \mathbf{J}_{\mathbf{vi}}\dot{\mathrm{v}}_{\mathbf{P}} \qquad [5.28]$$

A partir des Eqs. [5.27] et [5.28] on obtient l'expression des accélérations articulaires de la chaîne i:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{J}_{\mathbf{i}}^{-1}\left(\dot{\mathrm{v}}_{\mathrm{Bi}} - \dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{i}}\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}\right) = \mathbf{J}_{\mathbf{i}}^{-1}\left(\dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{vi}}\mathrm{v}_{\mathbf{P}} + \mathbf{J}_{\mathbf{vi}}\dot{\mathrm{v}}_{\mathbf{P}} - \dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{i}}\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}\right) \qquad [5.29]$$

Les accélérations articulaires de la jambe i sont obtenues en sélectionnant les n_i premières lignes dans la matrice jacobienne inverse de la chaîne i de l'Eq. [29]:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}} = \mathbf{J}_{\mathbf{i}}^{-1}\left(1..\mathrm{n}_{\mathrm{i}},:\right)\left(\dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{vi}}\mathrm{v}_{\mathbf{P}} + \mathbf{J}_{\mathbf{vi}}\dot{\mathrm{v}}_{\mathbf{P}} - \dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{i}}\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}\right) \qquad [5.30]$$

2.2.4. Equation General du MDD des robots parallèles

Le modèle dynamique direct est obtenu en substituant [5.8], [5.26] et [5.30] dans [5.6]. En conséquence l'accélération de la plate-forme $\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{P}}$ est exprimée par la relation suivante [**Ibrahim 06**] :

$$\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{P}} = \mathbf{A}_{\mathbf{robot}}^{-1}\left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{au}}}{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{P}}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{\Gamma} - \mathbf{h}_{\mathbf{robot}}\right) \qquad [5.31]$$

avec :

$$\mathbf{A}_{\mathbf{robot}} = \mathbb{I}_{\mathbf{P}} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{J}_{\mathbf{vi}}^{\mathbf{T}} \mathbf{A}_{\mathbf{Xi}} \mathbf{J}_{\mathbf{vi}} \qquad [5.32]$$

$$\mathbf{h}_{\mathbf{robot}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{P}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{P}} \times \mathbf{MS}_{\mathbf{P}}\right) \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{P}} \times \left(\mathbf{I}_{\mathbf{P}} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{P}}\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{M}_{\mathrm{P}} \mathbf{I}_{\mathbf{d3}} \\ \hat{\mathbf{MS}}_{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \mathbf{g} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} \left\{ \mathbf{J}_{\mathbf{vi}}^{\mathbf{T}} \left(\mathbf{A}_{\mathbf{Xi}} \left(\dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{vi}} \mathbf{v}_{\mathbf{P}} - \dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{i}} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}} \right) + \mathbf{h}_{\mathbf{Xi}} \right) \right\} \qquad [5.33]$$

$\mathbf{A}_{\mathbf{robot}}$ matrice d'inertie totale du robot dans l'espace cartésien

$\mathbf{A}_{\mathbf{Xi}}$ matrice d'inertie de la jambe i exprimée dans l'espace cartésien de son repère terminal :

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Xi}} = \mathbf{J}_{\mathbf{i}}^{-\mathbf{T}}\left(:,1..\mathrm{n}_{\mathrm{i}}\right) \mathbf{A}_{\mathbf{i}} \mathbf{J}_{\mathbf{i}}^{-1}\left(1..\mathrm{n}_{\mathrm{i}},:\right) \qquad [5.34]$$

$\mathbf{h}_{\mathbf{Xi}}$ vecteur des forces de Coriolis, centrifuge et de gravité exprimé dans l'espace cartésien du point terminal de la jambe i :

$$\mathbf{h}_{\mathbf{Xi}} = \mathbf{J}_{\mathbf{i}}^{-\mathbf{T}}\left(:,1..\mathrm{n}_{\mathrm{i}}\right) \mathbf{h}_{\mathbf{i}} \qquad [5.35]$$

$\mathbf{h}_{\mathbf{i}}$ est calculé en utilisant le modèle dynamique inverse de la jambe i avec $\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{h}_{\mathbf{i}} = \mathbf{H}_{\mathbf{i}}\left(\mathbf{q}_{\mathbf{iu}}, \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}}, \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}} = \mathbf{0}\right) \qquad [5.36]$$

Le terme $\dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{i}} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}$ est calculé directement en dérivant la matrice jacobienne de la chaîne cinématique i et en la multipliant par la vitesse des variables articulaires $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}$. Une autre façon moins coûteuse en nombre d'opérations consiste à exprimer $\dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{i}} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}$ en fonction de l'accélération du Σ_{Bi} en utilisant le modèle cinématique du second ordre de la chaîne cinématique i défini par l'Eq. [5.27] avec $\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$ [**Khalil 87**]. L'accélération du Σ_{Bi} est exprimée en fonction des vitesses et des accélérations articulaires en utilisant le formalisme de Newton-Euler.

$$\dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{i}} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{Bi}}\left(\mathbf{q}_{\mathbf{i}}, \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}, \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{0}\right) \qquad [5.37]$$

Finalement, pour obtenir l'accélération de la plate-forme correspondant aux ddls indépendants, nous substituons l'Eq.[5.5] dans l'Eq.[5.31]

$$\dot{v}_r = \left(a_r^T \mathbf{A}_{\mathbf{robot}} a_r\right)^{-1} a_r^T \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{au}}}{\partial v_{\mathbf{P}}}\right)^T \mathbf{\Gamma} - \mathbf{h}_{\mathbf{robot}} - \mathbf{A}_{\mathbf{robot}} \dot{a}_r v_r\right) \qquad [5.38]$$

3. APPLICATION DES MODELES A LA MACHINE VERNE

3.1. DESCRIPTION DU MODULE PARALLELE DE LA MACHINE VERNE

Le module parallèle de la machine Verne exécute un mouvement complexe défini comme une combinaison simultanée de translation et de rotation (Figure 5.1). Ce mouvement complique la modélisation dynamique de la machine Verne.

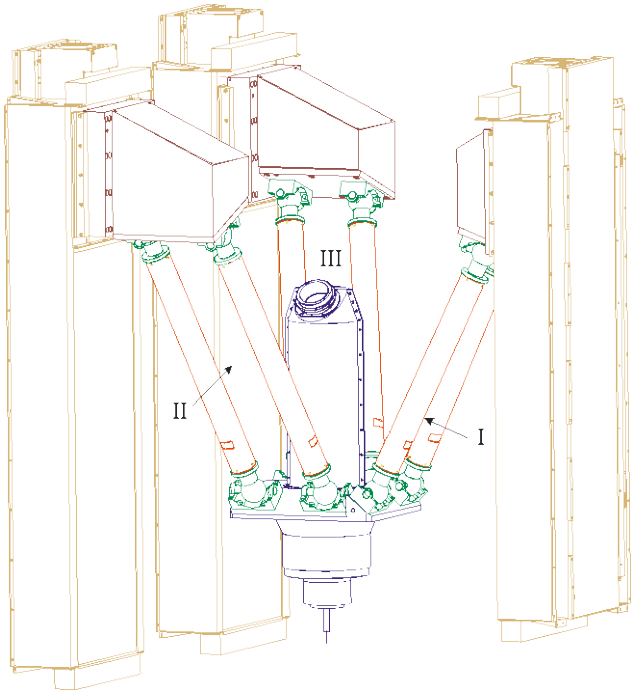


Figure 5.1 : Le module parallèle de la machine Verne

Dans le contexte de ce travail, nous supposons que le module parallèle possède six ddls au lieu de trois en coupant virtuellement chacune de ces chaines cinématiques en deux. Nous obtenons un nouveau manipulateur composé de six chaînes cinématiques. Chaque chaîne est constituée d'une jambe liant une partie de la liaison prismatique à la plate-forme mobile par l'intermédiaire de deux liaisons sphériques. Nous affectons une vitesse égale pour chacune des parties de la même liaison prismatique. L'intérêt de couper chaque liaison prismatique en deux est de ne pas avoir à modéliser des chaînes cinématiques à boucle fermée et d'avoir en

même temps des chaînes à six ddls. Nous appliquons l'Eq. [5.6] au nouveau manipulateur pour obtenir, après arrangement de la matrice jacobienne du robot, les modèles dynamiques du module parallèle de la machine Verne.

3.2. DESCRIPTION GEOMETRIQUE DE LA STRUCTURE ARBORESCENTE

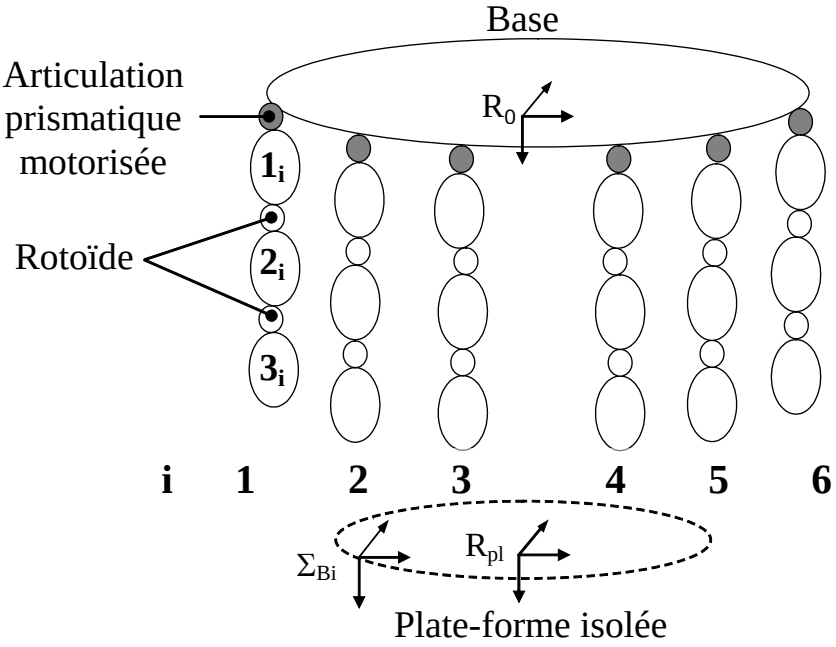


Figure 5.2 : Structure arborescente équivalente minimale du module parallèle de la machine Verne

La structure arborescente équivalente minimale est obtenue en isolant la plate-forme [**Ait-Ahmed 93**] (Figure 5.2). Chaque chaîne k est divisée en 2 jambes notées 2k-1 et 2k pour k=1, 2, 3. Ainsi la chaîne I est constituée des jambes 1 et 2, la chaîne II est constituée des jambes 3 et 4 et la chaine III est constituée des jambes 5 et 6. En conséquence, cette structure est composée de six jambes dont chacune possède une articulation prismatique motorisée et 2 articulations rotoïdes passives. En effet, les rotules liées à la plate-forme mobile ont été supprimées.

3.2.1. Description géométrique des jambes de la structure arborescente

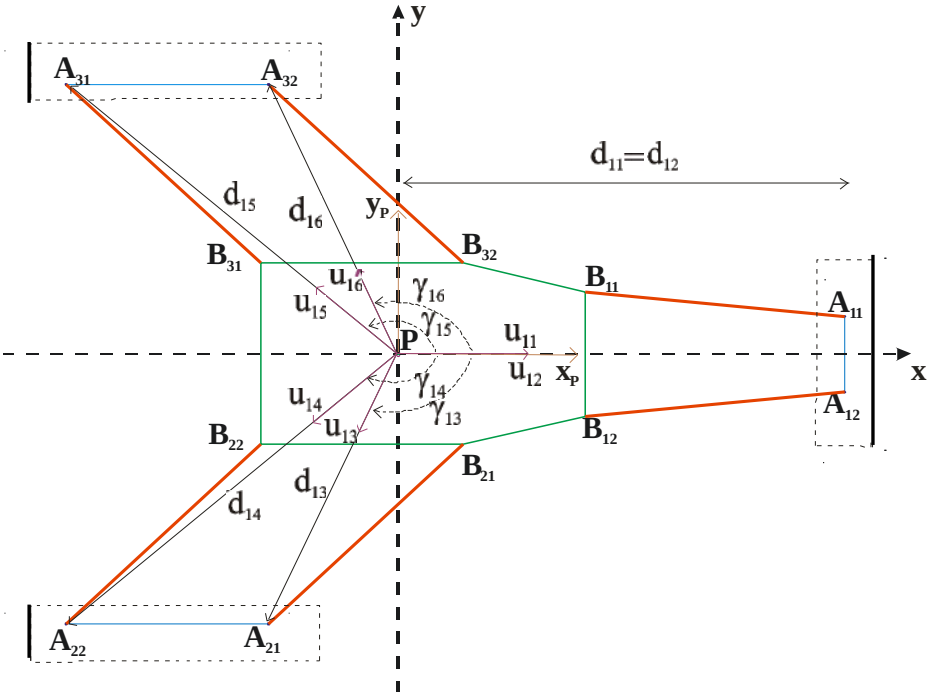


Figure 5.3 : Les paramètres permettant de placer les repères des liaisons prismatiques par rapport au repère de la base

Chaque jambe de la structure arborescente est une structure série composée de trois articulations et de trois corps (voir Figure 5.2). Les axes des liaisons prismatiques de chaque jambe sont parallèles et passent par les points A_{ij} comme indiqué sur la Figure 5.3.

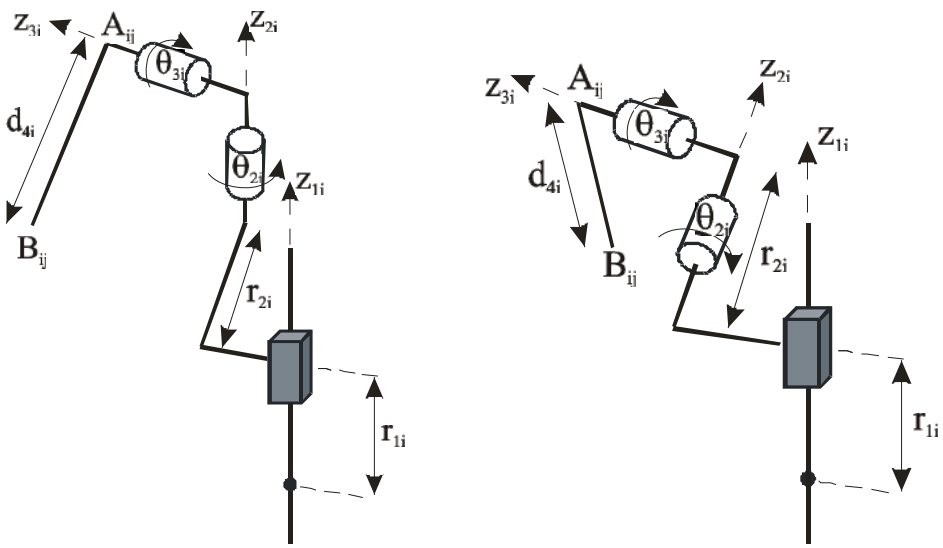


Figure 5.4 : Placement des repères des jambes : (a), i=1,2 et (b), i=3..6

La notation de [**Khalil 86**] est utilisée pour placer les repères liés aux corps de chaque jambe par rapport au repère de la base (voir Figure 5.4) :

- l'axe z_j est porté par l'axe de l'articulation j ;
- l'axe x_j est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_j et un des axes des articulations suivantes ;
- u_j est porté par la perpendiculaire commune aux axes $z_{a(j)}$ et z_j. Pour une structure série l'axe $x_{a(j)}$ est colinéaire à u_j, sinon $x_{a(j)}$ est choisi selon un des axes u_j.

J_i	$a(j_i)$	μ_{ji}	σ_{ji}	γ_{ji}	b_{ji}	α_{ji}	d_{ji}	θ_{ji}	r_{ji}
1i	0	1	1	γ_{1i}	0	0	d_{1i}	θ_{1i}	$r_{1i}=q_{1iu}$
2i	1i	0	0	0	0	α_{2i}	0	q_{2iu}	r_{2i}
3i	2i	0	0	0	0	α_{3i}	0	q_{3iu}	0
4i	3i	0	2	0	0	α_{4i}	d_{4i}	0	0

Pour i = 1, …, 6 et $\gamma_{11} = \gamma_{12} = \alpha_{14} = \alpha_{24} = \alpha_{32} = \alpha_{42} = \alpha_{52} = \alpha_{62} = 0$

Tableau 5.1 : Paramètres géométriques de la jambe i (pour i = 1 à 6)

Les transformations entre ces différents repères sont déterminées en fonction des paramètres géométriques (voir Tableau 5.1). Ces paramètres sont les suivants :

- j_i représente le corps j de la jambe i.
- a(j) représente le repère antécédent au repère j;
- $\mu(j)$ et $\sigma(j)$ décrivent le type de l'articulation : $\mu(j) = 1$ si l'articulation j est motorisée et $\mu(j) = 0$ si elle est passive; $\sigma(j) = 1$ si l'articulation est prismatique $\sigma(j) = 0$ si elle est rotoïde;
- α_j est l'angle entre $\mathbf{z}_{a(j)}$ et $\mathbf{z}_j$ autour de $\mathbf{x}_i$ avec i=a(j) et d_j est la distance entre $\mathbf{z}_i$ et $\mathbf{z}_j$ selon l'axe $\mathbf{x}_i$;
- θ_j est l'angle entre $\mathbf{x}_i$ et $\mathbf{x}_j$ autour de $\mathbf{z}_j$ et r_j est la distance entre $\mathbf{x}_i$ et $\mathbf{x}_j$ selon l'axe $\mathbf{z}_j$;
- γ_j est l'angle entre $\mathbf{x}_i$ et $\mathbf{u}_j$ autour de $\mathbf{z}_i$ et b_j est la distance entre $\mathbf{x}_i$ et $\mathbf{u}_j$ selon l'axe $\mathbf{z}_i$;

3.2.2. Modèle géométrique direct des jambes

Le modèle géométrique direct (MGD) d'une jambe i donne les cordonnées du point B_i dans le repère de la base en fonction des variables articulaires ($\mathbf{q}_{iu} = \begin{bmatrix} r_{1i} & \theta_{2i} & \theta_{3i} \end{bmatrix}^T$ pour i=1

à 6). Notons que $\rho_k = r_{2k-1} = r_{2k}$ pour (k=1, 2, 3). La matrice de transformation, ${}^{0}\mathbf{T}_{4i}$, est utilisée pour amener le repère d'origine B_i au repère de base :

$$ {}^{0}\mathbf{T}_{4i} = {}^{0}\mathbf{T}_{1i}\left(r_{1i}\right){}^{1i}\mathbf{T}_{2i}\left(\theta_{2i}\right){}^{2i}\mathbf{T}_{3i}\left(\theta_{3i}\right){}^{3i}\mathbf{T}_{4i} \qquad [5.39] $$

où la matrice ${}^{j-1}\mathbf{T}_j$ définit le repère $\sum_j$ dans le repère $\sum_{j-1}$. Cette matrice, composée des paramètres géométriques définis dans le Tableau 5.1, est donnée par [**Khalil 02**]:

$$ {}^{j-1}\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} {}^{j-1}\mathbf{R}_j & {}^{j-1}\mathbf{P}_j \\ \mathbf{0}_{(1\times3)} & 1 \end{bmatrix} \qquad [5.40] $$

avec

${}^{j-1}\mathbf{R}_j$ matrice (3×3) qui définit l'orientation du repère $\sum_j$ dans le repère $\sum_{j-1}$

${}^{j-1}\mathbf{P}_j$ vecteur de position (3×1) qui définit l'origine du repère $\sum_j$ dans le repère $\sum_{j-1}$

$$ {}^{j-1}\mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} C\gamma_j C\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -C\gamma_j S\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & S\gamma_j S\alpha_j \\ S\gamma_j C\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -S\gamma_j S\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & -C\gamma_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j \end{bmatrix} \qquad [5.41] $$

et

$$ {}^{j-1}\mathbf{P}_j = \begin{bmatrix} d_j C\gamma_j + r_j S\gamma_j S\alpha_j \\ d_j S\gamma_j - r_j C\gamma_j S\alpha_j \\ r_j C\alpha_j + b_j \end{bmatrix} \qquad [5.42] $$

C. et S. désignent respectivement cos(.) et sin(.).

3.2.3. Modèle géométrique inverse des jambes

Le modèle géométrique inverse (MGI) d'une jambe i donne les variables articulaires (r_{1i}, θ_{2i}, θ_{3i} pour i = 1 à 6) en fonction des coordonnées cartésiennes du point B_i exprimées dans le repère R_0. La position du point B_i est défini par ${}^{0}\mathbf{P}_{4i}$ obtenu en appliquant les Eqs [5.39], [5.40] et [5.42].

3.2.3.1. Modèle géométriques inverse des jambes 1 et 2

Les points B_1 et B_2 sont exprimés en fonction de leurs variables articulaires en utilisant le MGD de leurs jambes défini par ${}^{0}\mathbf{P}_{4i}$. En conséquence, les solutions du MGI des jambes 1 et 2 sont obtenues en résolvant respectivement deux systèmes de trois équations à trois inconnues:

$$\begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ z_{B1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} + d_{41}C\theta_{21}C\theta_{31} \\ r_{21} + d_{41}S\theta_{31} \\ r_{11} - d_{41}C\theta_{31}S\theta_{21} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} x_{B2} \\ y_{B2} \\ z_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} + d_{42}C\theta_{22}C\theta_{32} \\ -r_{22} + d_{42}S\theta_{32} \\ r_{12} + d_{42}C\theta_{32}S\theta_{22} \end{bmatrix} \quad [5.43]$$

A partir de l'Eq. [5.43] et en ajoutant les contraintes assurant l'emplacement de chaque jambe dans l'espace de travail de la machine, nous obtenons les solutions suivantes :

$$\theta_{31} = \arcsin\left(\frac{y_{B_1} - r_{21}}{d_{41}}\right) \text{ et } \theta_{32} = \arcsin\left(\frac{y_{B_2} + r_{22}}{d_{42}}\right) \text{où } \theta_{3i} = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad [5.44]$$

$$\theta_{2i} = \arccos\left(\frac{x_{B_i} - d_{1i}}{d_{4i}\, C\theta_{3i}}\right) \text{ où } \theta_{21} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \theta_{22} = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \quad [5.45]$$

$$r_{11} = z_{B1} + d_{41}C\theta_{31}S\theta_{21} \text{ et } r_{12} = z_{B2} - d_{42}C\theta_{32}S\theta_{22} \quad [5.46]$$

3.2.3.2. Modèle géométrique inverse des jambes 3 et 4

Les solutions du MGI des jambes 3 et 4 sont obtenues à partir du système des trois équations à trois inconnues correspondant à leurs MGD :

$$\begin{bmatrix} x_{Bi} \\ y_{Bi} \\ z_{Bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1i}C\gamma_{1i} + d_{4i}C\left(\gamma_{1i} + \theta_{1i} + \theta_{2i}\right)C\theta_{3i} \\ d_{1i}S\gamma_{1i} + d_{4i}S\left(\gamma_{1i} + \theta_{1i} + \theta_{2i}\right)C\theta_{33} \\ r_{1i} + d_{4i}S\theta_{3i} \end{bmatrix} \quad [5.47]$$

A partir de l'Eq. [5.47] et en ajoutant les contraintes assurant l'emplacement de chaque jambe dans l'espace de travail de la machine, nous obtenons les solutions suivantes :

$$\theta_{3i} = \arccos\left(\sqrt{V_{1i}^{\ 2} + V_{2i}^{\ 2}}\right) \text{ où } \theta_{3i} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad [5.48]$$

$$\theta_{2i} = \arctan\left(V_{1i} / V_{2i}\right) - \gamma_{1i} - \theta_{1i} \text{ où } \theta_{2i} = \left[-\pi, 0\right] \quad [5.49]$$

$$r_{1i} = z_{Bi} - d_{4i}S\theta_{3i} \quad [5.50]$$

avec :

$$V_{1i} = \frac{x_{Bi} - d_{1i}C\gamma_{1i}}{d_{4i}} \text{ et } V_{2i} = \frac{y_{Bi} - d_{1i}S\gamma_{1i}}{d_{4i}} \quad [5.51]$$

3.2.3.3. Modèle géométrique inverse des jambes 5 et 6

Les solutions du MGI des jambes 5 et 6 sont obtenues à partir du système des trois équations à trois inconnues correspondant à leurs MGD :

$$\begin{bmatrix} x_{Bi} \\ y_{Bi} \\ z_{Bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1i}C\gamma_{1i} + d_{4i}C\left(\gamma_{1i} + \theta_{1i} + \theta_{2i}\right)C\theta_{3i} \\ d_{1i}S\gamma_{1i} + d_{4i}S\left(\gamma_{1i} + \theta_{1i} + \theta_{2i}\right)C\theta_{33} \\ r_{1i} - d_{4i}S\theta_{3i} \end{bmatrix} \quad [5.52]$$

A partir de l'Eq. [5.52] et en ajoutant les contraintes assurant l'emplacement de chaque jambe dans l'espace de travail de la machine, nous obtenons les solutions suivantes :

$$\theta_{3i} = \arccos\left(\sqrt{V_{1i}{}^2 + V_{2i}{}^2}\right) \text{ où } \theta_{3i} = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \quad [5.53]$$

$$\theta_{2i} = \arctan\left(V_{1i} / V_{2i}\right) - \gamma_{1i} - \theta_{1i} \text{ où } \theta_{2i} = \left[0, \pi\right] \quad [5.54]$$

$$r_{1i} = z_{Bi} + d_{4i}S\theta_{3i} \quad [5.55]$$

avec :

$$V_{1i} = \frac{x_{Bi} - d_{1i}C\gamma_{1i}}{d_{4i}} \text{ et } V_{2i} = \frac{y_{Bi} - d_{1i}S\gamma_{1i}}{d_{4i}} \quad [5.56]$$

3.3. MODELE DYNAMIQUE INVERSE DE LA MACHINE VERNE

Le modèle dynamique inverse du module parallèle de la machine Verne est obtenu en appliquant l'Eq. [5.23] dans le repère de base de la machine :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{H}^a + {}^0\mathbf{J}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}}\left({}^0\mathbb{F}_{\mathbf{P}} + \sum_{i=1}^{m=6} {}^0\mathbf{J}_{\mathbf{vi}}^{\mathbf{T}}\,{}^0\mathbf{J}_i^{-\mathbf{T}}\left(:, \mathbf{p}_i\right)\mathbf{H}_i^p\right) \quad [5.57]$$

Sachant que :

$$\mathbf{H}^a = \left[\mathbf{H}_{11}^a + \mathbf{H}_{12}^a \quad \mathbf{H}_{13}^a + \mathbf{H}_{14}^a \quad \mathbf{H}_{15}^a + \mathbf{H}_{16}^a\right]^T \quad [5.58]$$

$$\mathbf{H}_i^p = \left[\mathbf{H}_{2i}^p \quad \mathbf{H}_{3i}^p\right]^T \quad [5.59]$$

Ce modèle est compliqué à obtenir pour deux raisons : la mobilité complexe du module parallèle définie par l'orientation parasite de la plate-forme et l'existence de plusieurs solutions au modèle géométrique inverse de ce manipulateur. Pour résoudre ce problème nous identifions la solution unique du MGI accepté par l'utilisateur en se servant des algorithmes développés dans le chapitre 2. Ce modèle exprime les variables articulaires actives ρ_k (k=1, 2, 3) et l'orientation α en fonction des coordonnés du centre de la plate-forme.

Le mouvement de la plate-forme du robot est défini respectivement par la trajectoire, la vitesse et l'accélération de l'extrémité de l'outil dans le repère de la table, ${}^t\mathbf{T}_{\mathbf{u}}$, ${}^t v_{\mathbf{u}}$, ${}^t \dot{v}_{\mathbf{u}}$. En conséquence, la procédure à suivre pour le calcul du modèle dynamique inverse du module parallèle repose sur les étapes suivantes :

- on calcule le MGI de la machine Verne pour obtenir la trajectoire ${}^{0}\mathbf{T_p}$, l'orientation α et les variables articulaires actives $\mathbf{q_{au}} = \begin{bmatrix}\rho_1 & \rho_2 & \rho_3\end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ dans le repère de base;
- puis les MCI du premier ordre et du second ordre pour obtenir respectivement ${}^{t}\mathrm{v}_{\mathbf{p}}$ et ${}^{t}\dot{\mathrm{v}}_{\mathbf{p}}$;
- on calcule le MGI des jambes de la structure arborescente pour obtenir $\mathbf{q_{iu}} = \begin{bmatrix}\mathrm{r}_{1i} & \theta_{2i} & \theta_{3i}\end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$;
- on calcule le MCI des jambes pour obtenir $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}}$;
- on calcule le MCI du second ordre des jambes pour obtenir $\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{iu}}$;
- on calcule le MDI des jambes pour obtenir $\mathbf{H_i}$; (*vii*) on calcule les matrices jacobiennes $\mathbf{J_{vi}}$, $\mathbf{J_i^{-1}}$ et $\mathbf{J_P^T}$;
- on calcule les forces/moments $\mathbb{F}_{\mathbf{p}}$ requis pour déplacer la plate-forme ;
- finalement les couples $\mathbf{\Gamma}$ désirés sont obtenus en utilisant l'Eq. [5.24].

3.3.1. Dynamique des jambes de la structure arborescente équivalente

Les modèles dynamiques des jambes sont exprimés linéairement en fonction des paramètres inertiels standards des corps constituant ces jambes [**Khosla 86, Gautier 90**]. Les paramètres inertiels d'un corps j sont représentés par sa masse M_j, ses premiers moments d'inertie autour de l'origine de son repère Σ_j, MX_j, MY_j, MZ_j, et les six éléments de sa matrice d'inertie exprimée par rapport à son repère Σ_j, XX_j, XY_j, XZ_j, YY_j, YZ_j, ZZ_j.

J_i	XX_{ji}	XY_{ji}	XZ_{ji}	YY_{ji}	YZ_{ji}	ZZ_{ji}	MX_{ji}	MY_{ji}	MZ_{ji}	M_{ji}	Ia_{ji}
1i	XX_{1i}	0	0	YY_{1i}	0	ZZ_{1i}	0	0	MZ_{1i}	M_{1i}	Ia_{1i}
2i	XX_{2i}	0	0	YY_{2i}	0	ZZ_{2i}	0	0	MZ_{2i}	M_{2i}	0
3i	XX_{3i}	0	0	YY_{3i}	0	ZZ_{3i}	MX_{3i}	0	0	M_{3i}	0
4i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 5.2 : Paramètres dynamiques de la jambe i (pour i = 1 à 6)

Les paramètres inertiels de base représentent le jeu minimal de paramètres nécessaires au calcul du modèle dynamique. L'utilisation de ces paramètres diminue le nombre d'opérations nécessaires pour le calcul du modèle dynamique [**Khosla 86, Khalil 87**].

J_i	XX_{ji}	XY_{ji}	XZ_{ji}	YY_{ji}	YZ_{ji}	ZZ_{ji}	MX_{ji}	MY_{ji}	MZ_{ji}	M_{ji}	Ia_{ji}
1i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	M_{1Ri}	Ia_{1i}
2i	0	0	0	0	0	ZZ_{2Ri}	0	0	0	0	0
3i	XX_{3Ri}	0	0	0	0	ZZ_{3i}	MX_{3i}	0	0	0	0
4i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 5.3 : Paramètres dynamiques de base de la jambe i (pour i = 1 à 6)

Les paramètres inertiels de base de la structure arborescente de la machine Verne sont obtenus à partir des paramètres inertiels standards des corps du robot, en éliminant ceux qui n'ont pas d'effet sur le modèle dynamique et en les regroupant de la façon suivante :

$$M_{1Ri} = M_{1i} + M_{2i} + M_{3i} \qquad [5.60]$$

$$ZZ_{2Ri} = YY_{2i} + ZZ_{2i} \qquad [5.61]$$

$$XX_{3Ri} = XX_{3i} - YY_{3i} \qquad [5.62]$$

3.3.2. Dynamique de la plate-forme mobile

La résultante des efforts (forces et moments) appliqués sur la plate-forme mobile, ${}^{0}\mathbb{F}_{\mathbf{P}}$, est exprimée dans le repère de base en projetant les éléments de l'Eq. [5.8] dans ce repère :

$${}^{0}\mathbb{F}_{\mathbf{P}} = {}^{0}\mathbb{I}_{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} {}^{0}\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{P}} - {}^{0}\mathbf{g} \\ {}^{0}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{P}} \times \left({}^{0}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{P}} \times {}^{0}\mathbf{MS}_{\mathbf{P}} \right) \\ {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{P}} \times \left({}^{0}\mathbf{I}_{\mathbf{P}}\, {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{P}} \right) \end{bmatrix} \qquad [5.63]$$

Les vitesses et accélérations linéaires et angulaires du repère Σ_P sont obtenues à partir des relations [5.2-5.5] :

$$\mathrm{v}_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}} & \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{\mathrm{p}} & \dot{y}_{\mathrm{p}} & \dot{z}_{\mathrm{p}} & \dot{\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad [5.64]$$

$$\dot{\mathrm{v}}_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}} & \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{\mathrm{p}} & \ddot{y}_{\mathrm{p}} & \ddot{z}_{\mathrm{p}} & \ddot{\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad [5.65]$$

${}^{\mathbf{0}}\mathbf{I}_{\mathbf{p}}$ tenseur d'inertie (3×3) de la plate-forme exprimé dans le repère R_0 :

$${}^{0}\mathbf{I}_{\mathbf{P}} = {}^{0}\mathbf{R}_{\mathbf{P}}\, {}^{\mathbf{P}}\mathbf{I}_{\mathbf{P}}\, {}^{0}\mathbf{R}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}} \qquad [5.66]$$

${}^{\mathbf{P}}\mathbf{I_P}$ tenseur d'inertie (3×3) de la plate-forme exprimé dans le repère R_0 obtenu à partir de la relation [5.11]

${}^{0}\mathbf{R_P}$ matrice d'orientation qui exprime la rotation du repère R_{pl} d'un angle α autour de l'axe x du repère de base R_0

$$ {}^{0}\mathbf{R_P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{C}\alpha & -\mathrm{S}\alpha \\ 0 & \mathrm{S}\alpha & \mathrm{C}\alpha \end{bmatrix} \qquad [5.67] $$

${}^{0}\mathbf{MS_P}$ premier moment d'inertie de la plate-forme autour de l'origine du repère R_{pl} :

$$ {}^{0}\mathbf{MS_P} = {}^{0}\mathbf{R_P}\ {}^{\mathbf{P}}\mathbf{MS_P} \qquad [5.68] $$

3.3.3. Calcul des matrices jacobiennes

3.3.3.1. Matrice jacobienne inverse des jambes

La forme vectorielle de la jacobienne d'une chaîne cinématique i de la machine Verne est obtenue à partir de l'Eq. [5.14] :

$$ \mathbf{J}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a}_{2\mathrm{i}} \times \mathbf{L}_{2\mathrm{i},6} & \mathbf{a}_{3\mathrm{i}} \times \mathbf{L}_{3\mathrm{i},6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{2\mathrm{i}} & \mathbf{a}_{3\mathrm{i}} & \mathbf{a}_{4\mathrm{i}} & \mathbf{a}_{5\mathrm{i}} & \mathbf{a}_{6\mathrm{i}} \end{bmatrix} \qquad [5.69] $$

Le calcul de $\partial\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{iu}} / \partial \mathrm{v}_{\mathrm{Bi}}$ est obtenu en inversant la matrice jacobienne de la chaîne cinématique i, $\mathbf{J_i}$, puis en sélectionnant les lignes correspondant aux vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{iu}}$ utilisées dans le calcul du modèle dynamique inverse de la jambe i.

$$ \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{iu}}}{\partial \mathrm{v}_{\mathrm{Bi}}} = \mathbf{J_i^{-1}}(1..3,:) = \left[\left[\mathbf{a_1} \quad \mathbf{a}_{2i} \times \mathbf{L}_{2i,6} \quad \mathbf{a}_{3i} \times \mathbf{L}_{3i,6} \right]^{-1} \;\vdots\; \mathbf{0}_{(1\times3)} \right] \qquad [5.70] $$

Les matrices jacobiennes inverses des jambes de la structure arborescente sont exprimées analytiquement sous la forme suivante:

$$ \underset{(\mathrm{i}=1,2)}{\mathbf{J}_{\mathrm{i}}^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc:c} \kappa\dfrac{\mathrm{C}\theta_{2\mathrm{i}}}{\mathrm{S}\theta_{2\mathrm{i}}} & \kappa\dfrac{\mathrm{S}\theta_{3\mathrm{i}}}{\mathrm{S}\theta_{2\mathrm{i}}\mathrm{C}\theta_{3\mathrm{i}}} & 1 & \\ -\dfrac{1}{\mathrm{d}_{4\mathrm{i}}\mathrm{S}\theta_{2\mathrm{i}}\mathrm{C}\theta_{3\mathrm{i}}} & -\dfrac{\mathrm{C}\theta_{2\mathrm{i}}\mathrm{S}\theta_{3\mathrm{i}}}{\mathrm{d}_{4\mathrm{i}}\mathrm{S}\theta_{2\mathrm{i}}\mathrm{C}\theta_{3\mathrm{i}}\mathrm{C}\theta_{3\mathrm{i}}} & 0 & \mathbf{0}_{(1\times3)} \\ 0 & \dfrac{1}{\mathrm{d}_{4\mathrm{i}}\mathrm{C}\theta_{3\mathrm{i}}} & 0 & \end{array} \right] \qquad [5.71] $$

$$\mathbf{J}_i^{-1} \underset{(i=3..6)}{=} \left[\begin{array}{ccc:c} \kappa\dfrac{C(\gamma_{1i}+\theta_{1i}+\theta_{2i})C\theta_{3i}}{S\theta_{3i}} & \kappa\dfrac{C\theta_{3i}S(\gamma_{1i}+\theta_{1i}+\theta_{2i})}{S\theta_{3i}} & 1 & \\ -\dfrac{S(\gamma_{1i}+\theta_{1i}+\theta_{2i})}{d_{4i}C\theta_{3i}} & \dfrac{C(\gamma_{1i}+\theta_{1i}+\theta_{2i})}{d_{4i}C\theta_{3i}} & 0 & \mathbf{0}_{(1\times3)} \\ -\dfrac{C(\gamma_{1i}+\theta_{1i}+\theta_{2i})}{d_{4i}S\theta_{3i}} & -\dfrac{S(\gamma_{1i}+\theta_{1i}+\theta_{2i})}{d_{4i}S\theta_{3i}} & 0 & \end{array}\right] \qquad [5.72]$$

avec : $\kappa = 1$ pour i=2, 3, 4 et $\kappa = -1$ pour i=1, 5, 6

3.3.3.2. La jacobienne du module parallèle de la machine Verne

La matrice jacobienne (6×6) du module parallèle lie la vitesse de la plate-forme, v_P, aux vitesses des articulations actives $\dot{\rho}_k = \dot{r}_{2k-1} = \dot{r}_{2k}$ pour k=1, 2, 3. La transposée de l'inverse de cette matrice est obtenue en utilisant la relation [5.22] :

$$\left(\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial v_P}\right)^T = \left[\mathbf{J}_{v1}^T\,\mathbf{J}_1^{-T}(1,:) \quad \ldots \quad \mathbf{J}_{vi}^T\,\mathbf{J}_i^{-T}(1,:) \quad \ldots \quad \mathbf{J}_{v6}^T\,\mathbf{J}_6^{-T}(1,:)\right] \qquad [5.73]$$

La matrice $\partial\dot{\rho}/\partial v_P$ est exprimée en fonction des paramètres géométriques de la machine Verne dans l'annexe G.

La matrice jacobienne (6×N), $\mathbf{J}_P$, utilisée dans le calcul du MDI est obtenue en inversant la matrice $\partial\dot{\rho}/\partial v_P$ exprimée par l'Eq. [5.73] et en additionnant les colonnes correspondant aux même variables articulaires actives :

$$\mathbf{J}_P = \left[\frac{\partial v_P}{\partial\dot{\rho}}(1,:) + \frac{\partial v_P}{\partial\dot{\rho}}(2,:) \quad \frac{\partial v_P}{\partial\dot{\rho}}(3,:) + \frac{\partial v_P}{\partial\dot{\rho}}(4,:) \quad \frac{\partial v_P}{\partial\dot{\rho}}(5,:) + \frac{\partial v_P}{\partial\dot{\rho}}(6,:)\right] \qquad [5.74]$$

3.4. MODELE DYNAMIQUE DIRECT DE LA MACHINE VERNE

Le modèle dynamique direct exprime les accélérations cartésiennes indépendantes de la plate-forme, $\dot{v}_r$, en fonction des positions, vitesse de la plate-forme et les forces des articulations motorisées. Ce modèle est obtenu en appliquant la procédure décrite dans le paragraphe 2.2.4 définie par l'équation suivante :

$$\dot{v}_r = \left(a_r^T\mathbf{A}_{robot}a_r\right)^{-1} a_r^T\left(\left(\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial v_P}\right)^T\mathbf{\Gamma} - \mathbf{h}_{robot} - \mathbf{A}_{robot}\dot{a}_r v_r\right) \qquad [5.75]$$

Le calcul de tous les termes de cette équation a été présenté dans les paragraphes précédents sauf la matrice $\mathbf{a}_r$. Cette matrice (6×N) qui exprime $\mathbf{v_P}$ en fonction des composantes de vitesses indépendantes de la plate-forme, $\mathbf{v}_r$, est définie de la façon suivante:

$$\mathbf{a}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I_{d3}} \\ \mathrm{C}^{-1}\mathrm{D} \\ \mathbf{0}_{(2\times3)} \end{bmatrix} \qquad [5.76]$$

C est un paramètre et D est une matrice, ensemble ils traduisent la vitesse de rotation parasite α de la plate-forme en fonction des composantes de la vitesse linéaire de la plate-forme. Rappelons que x_p, y_p et z_p sont les coordonnées du point P, centre de la plate-forme et R_1, D_1, d_1, r_1 et L_1 sont des paramètres de conception de la machine Verne définis sur la Figure 2.3 dans le chapitre 2.

$$\begin{aligned}\mathrm{C} = {} & 2R_1^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)\left(\left(x_P + D_1 - d_1\right)^2 + \left(R_1^2 + r_1^2 - L_1^2 - 2R_1 r_1 \cos(\alpha)\right)\right) \\ & + 2R_1 r_1 \sin(\alpha)\left(y_P^{\,2} + R_1^2 \sin(\alpha)\right)\end{aligned} \qquad [5.77]$$

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 2R_1^2 \sin^2(\alpha)\left(x_P + D_1 - d_1\right) & 2y_P\left(r_1^2 - 2R_1 r_1 \cos(\alpha) + R_1^2\right) & 0 \end{bmatrix} \qquad [5.78]$$

3.5. SIMULATION NUMERIQUE DES MODELES DYNAMIQUES

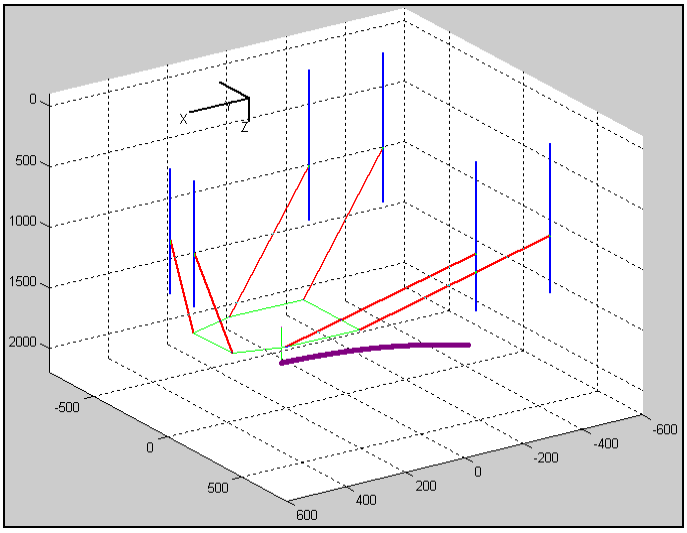


Figure 5.5 : Trajectoire parcourue par le module parallèle de la machine Verne

Un générateur de mouvement est utilisé dans la simulation pour produire un déplacement entre deux points arbitraires de l'espace de travail de la machine Verne (voir Figure 5.5). Ce générateur calcule les consignes en position, vitesse et accélération en suivant une fonction du 5ème degré entre deux instants t_0 et t_f :

$$r(t) = 10\left(\frac{t}{t_f}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{t_f}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{t_f}\right)^5 \qquad [5.79]$$

Le temps minimum utilisé pour passer de la configuration initiale à la configuration finale tout en respectant les contraintes de vitesse et d'accélération est obtenu à partir de l'équation suivante :

$$t_{fj} = \mathrm{Max}\left[\frac{15\left|D_j\right|}{8\,k_{vj}}, \sqrt{\frac{10\left|D_j\right|}{\sqrt{3}\,k_{aj}}}\right] \qquad [5.80]$$

k_{vj} Correspond aux paramètres qui représentent les vitesses maximales pour les mouvements en translation (j=1) et en rotation (j=2),

k_{aj} correspond aux paramètres qui représentent les accélérations maximales pour les mouvements en translation (j=1) et en rotation (j=2),

D_j correspond à la distance parcourue entre la position initiale et finale d'une trajectoire rectiligne de l'extrémité de l'outil.

Dans cette simulation, nous engendrons une trajectoire rectiligne entre deux points, X_i et X_f situés dans l'espace de travail de la machine et exprimés dans le repère de la table (voir Figure 5.6 pour les trajectoires, vitesses et accélérations linéaires et Figure 5.7 pour les trajectoires, vitesses et accélérations angulaires). Rappelons que x_u, y_u et z_u sont les coordonnées du centre de l'outil (TCP), *U*, dans le repère lié à la table tilting R_t et (ϕ_1, ϕ_2) sont deux angles qui définissent l'orientation de l'outil dans le repère R_t.

$$X = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u & \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix}^T \qquad [5.81]$$

$$X = X_i + r(t)\,dX,\ \dot{X} = \dot{r}(t)\,dX \text{ et } \ddot{X} = \ddot{r}(t)\,dX \qquad [5.82]$$

où $dX = X(t_f) - X(0)$

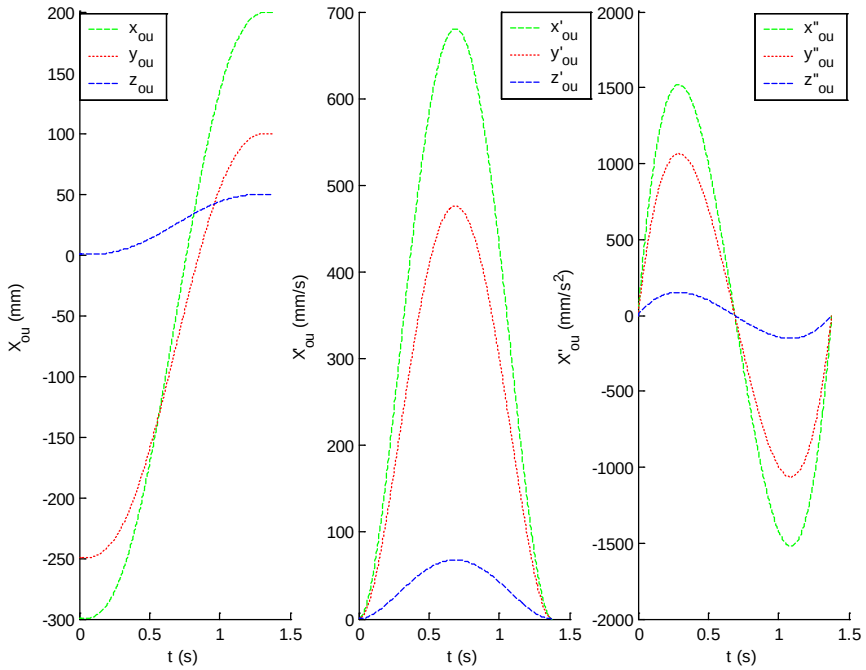


Figure 5.6 : Trajectoires, vitesses et accélérations linéaires de l'outil dans le repère de la table R_t

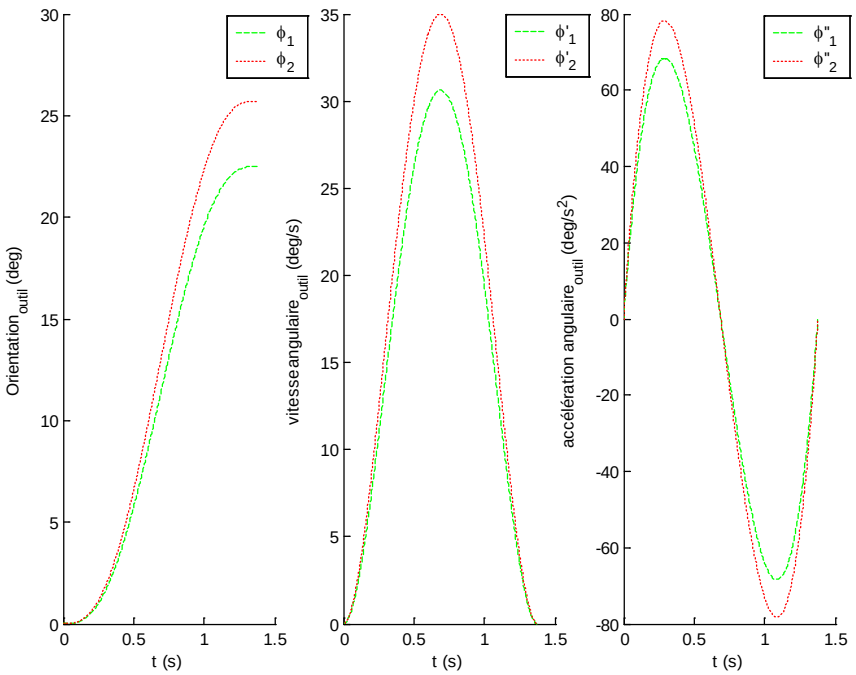


Figure 5.7 : Trajectoires, vitesses et accélérations angulaires de l'outil par rapport à la table

Les coordonnées du centre de la plate-forme sont exprimées en fonction des coordonnées de l'extrémité de l'outil en appliquant une matrice de passage du repère R_t au repère R_{pl} :

$$x_p = \cos(\phi_2)\, x_u + \sin(\phi_2)\, y_u \qquad [5.83]$$

$$y_p = \sin(\theta_1)\left(z_u - d_t\right) + \cos(\theta_1)\left(\sin(\phi_2)\, x_u - \cos(\phi_2)\, y_u\right) + \Delta \sin(\theta_1 + \phi_1) \qquad [5.84]$$

$$z_p = \sin(\theta_1)\left(\sin(\phi_2)\, x_u - \cos(\phi_2)\, y_u\right) - \cos(\theta_1)\left(z_u - d_t\right) + d_a - \Delta\cos(\theta_1 + \phi_1) \qquad [5.85]$$

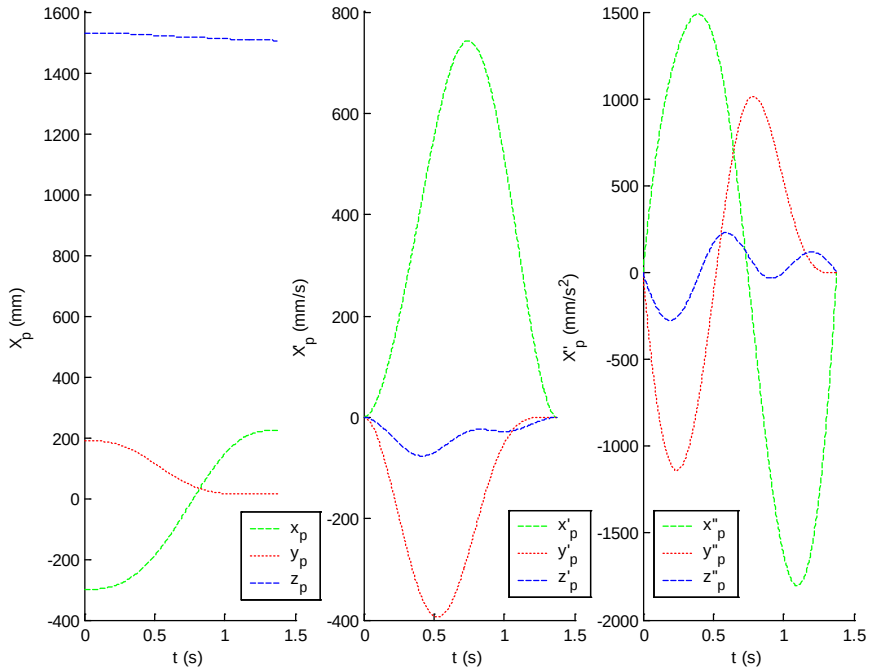


Figure 5.8 : Trajectoires, vitesses et accélérations linéaires du centre de la plate-forme dans R_0

Les positions, vitesses et accélérations angulaires de la plate-forme sont obtenues à partir des relations liant l'orientation angulaire α à la position du centre de la plate-forme.

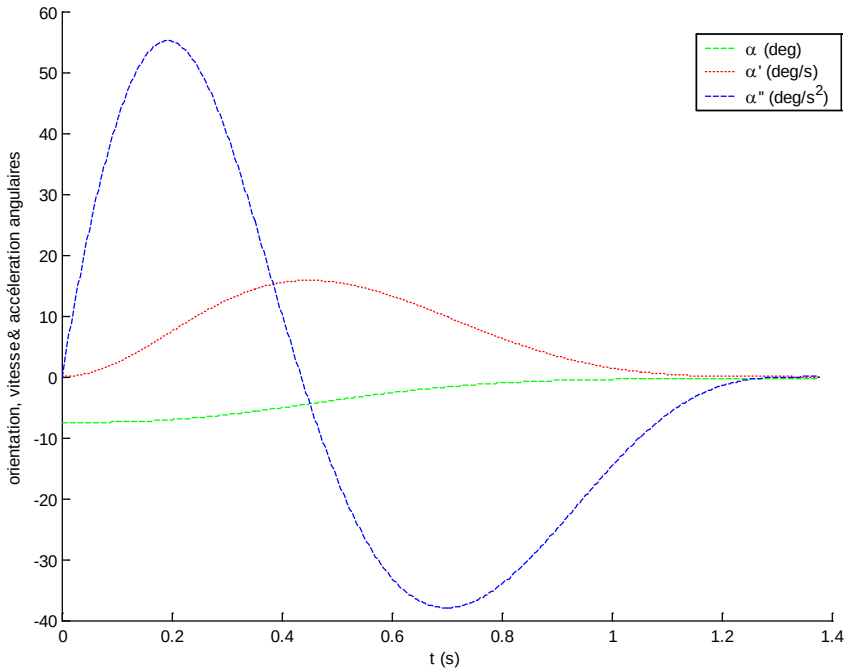


Figure 5.9 : Trajectoires, vitesses et accélérations angulaires de la plate-forme dans R_0

Les forces/couples nécessaires pour bouger les jambes (voir Figure 5.11) et la plate-forme (voir Figure 5.10) sont obtenus en appliquant respectivement les procédures décrites dans les paragraphes 3.3.1 et 3.3.2.

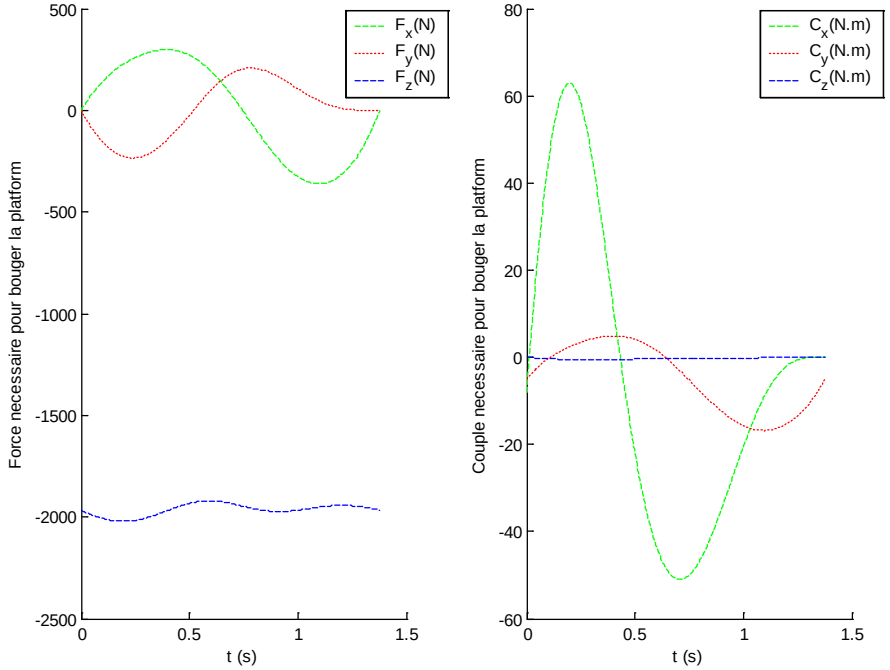


Figure 5.10 : Forces et couples nécessaires pour bouger la plate-forme mobile

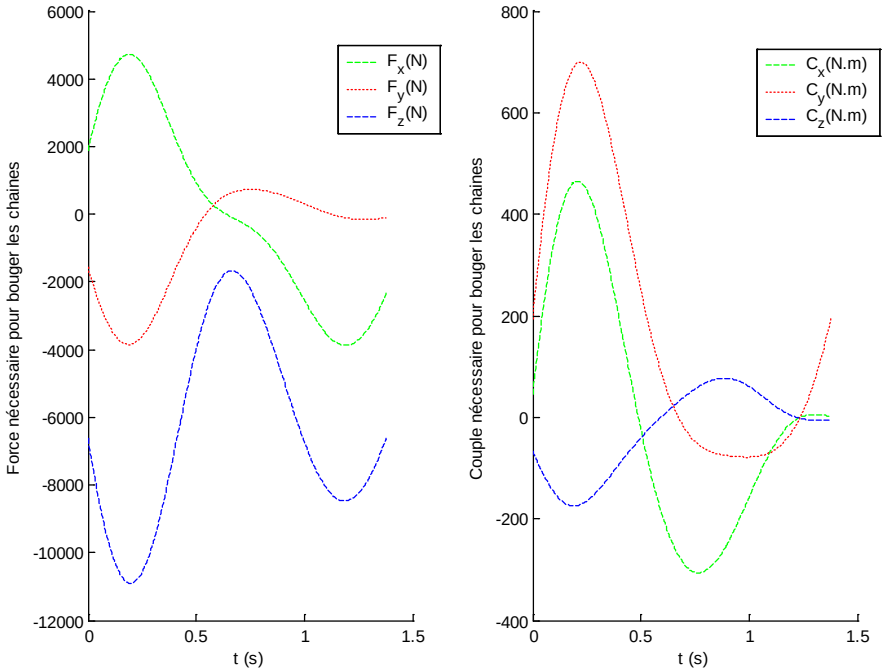


Figure 5.11 : Forces et couples nécessaires pour bouger les jambes

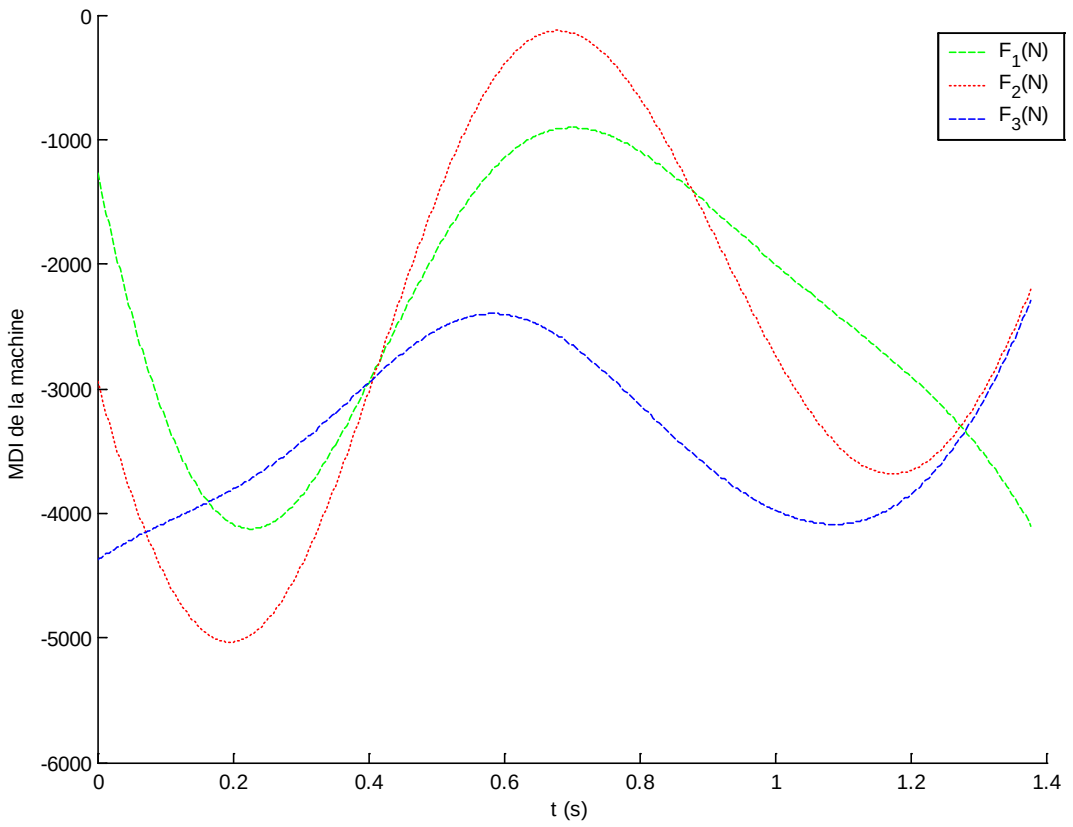


Figure 5.12 : Forces des actionneurs calculés par le MDI

Afin de vérifier la concordance entre les éléments calculés par les deux algorithmes MDI et MDD, on cherche la différence entre les accélérations calculées par le MDD et celles utilisées dans le MDI. On obtient une différence très faible (de l'ordre de 10^{-14}) proche du zéro numérique, ce qui confirme la concordance des modèles obtenus.

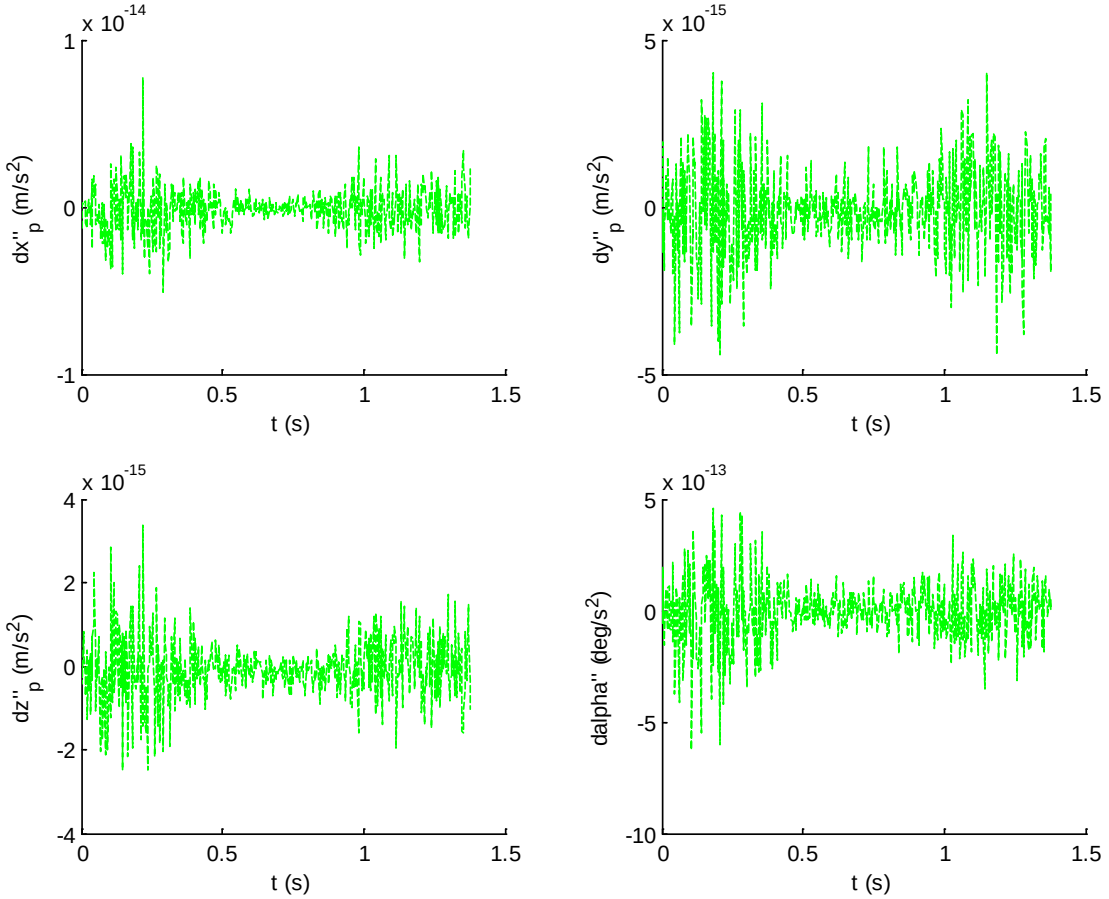


Figure 5.13 : Ecart entre les accélérations désirées et celles calculées par le MDD

4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons repris la méthode établie dans [**Ibrahim 06**] pour le calcul des modèles dynamiques inverse et direct des robots parallèles. Les modèles sont calculés en fonction de la dynamique des jambes, de la dynamique de la plate-forme et aussi des matrices jacobiennes de ces éléments. Nous avons modifié les jacobiennes utilisées dans ces modèles afin de rendre leur obtention systématique et en même temps conserver leur signification physique. Le calcul de tous les éléments nécessaires pour l'obtention des modèles utilise des techniques classiques qui ont été développées auparavant pour les robots série. Cette méthode a été appliquée à la machine Verne et peut être appliquée à la majorité des robots parallèles non redondants.

CONCLUSION GENERALE

Les travaux exposés dans ce mémoire concernent la modélisation et l'étude des manipulateurs parallèles à mobilités restreintes.

Les contributions majeures de ces recherches sont :

- Le calcul d'espace de travail et des modèles géométriques d'une machine complexe du commerce.
- l'analyse des singularités parallèles des manipulateurs parallèles à mobilités restreintes.
- la modélisation dynamique des manipulateurs parallèles à mobilités restreintes.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé les notions et les concepts de base en robotique parallèle et nous avons présenté les limites des machines sérielles conventionnelles ainsi que les avantages et inconvénients des PKMs. La modélisation géométrique, l'espace de travail et les singularités des manipulateurs parallèles ont été exposés. Différentes propriétés caractérisant ces manipulateurs ont été évoquées.

Le deuxième chapitre a été consacré au calcul des modèles géométriques direct et inverse d'une machine-outil hybride à 5 ddls, la machine Verne [**Kanaan 07a et 07b**]. Cette machine possède un mouvement complexe causé par l'architecture asymétrique de son module parallèle où l'une de ses chaînes est différente des deux autres. Les modèles géométriques inverse et direct ont été établis. Le modèle géométrique direct a été résolu avec une méthode de substitution. Il s'avère que le modèle géométrique inverse possède seize solutions tandis que le modèle géométrique direct peut avoir jusqu'à six solutions réelles. Ce travail présente un intérêt important pour la commande de la machine. Notons que la machine Verne est utilisée actuellement pour usiner des pièces complexes, surtout pour la fabrication de moules. Il est donc important de travailler sur l'amélioration de ses performances. Les équations symboliques obtenues dans ce travail sont implémentées actuellement dans « Visual

Components », un logiciel de simulation de PKMs développé par une société britannique, AMTRI.

Dans le troisième chapitre, nous avons proposé une méthode pour calculer plusieurs types d'espace de travail de la machine pour différentes longueurs d'outils [**Kanaan 06a et 07c**]. Cette méthode prend en considération toutes les contraintes qui ont une influence réelle sur l'espace de travail du module parallèle : les longueurs des segments, les singularités sérielles, les limites mécaniques sur les articulations passives et actives, les collisions entre les différents éléments de la machine et la contrainte de fermeture de la chaîne I. Cette contrainte est particulière pour la machine Verne et est due à la forme irrégulière de la chaîne I qui n'est pas un parallélogramme. Nous avons calculé l'espace de travail total du module parallèle de la machine Verne ainsi que l'espace de travail 3-axes obtenu lorsque l'axe de l'outil reste perpendiculaire à la pièce. Plusieurs types d'espace de travail peuvent être obtenus en fixant deux paramètres parmi les cinq paramètres représentant les degrés de liberté de la machine. Des algorithmes utiles pour la détermination des différents types d'espace de travail ont été aussi présentés. Ces algorithmes ont été implantés dans le logiciel Maple 10®. Des exemples ont été fournis pour illustrer les résultats. Cette méthode a été appliquée à la machine Verne. Cependant elle peut toujours être appliquée à toutes les machines de type PSS (ou PUS) avec quelques modifications dans l'algorithme selon la forme des chaînes et le nombre de degrés de liberté de la machine.

Le quatrième chapitre a introduit une méthodologie basée sur l'Algèbre de Grassmann-Cayley pour déterminer géométriquement les configurations singulières de manipulateurs parallèles à mobilités restreintes [**Kanaan 08a et 08b**]. Ces manipulateurs sont caractérisés par des chaînes cinématiques qui transmettent des forces et/ou couples à la plate-forme mobile. Trois classes de manipulateurs parallèles à mobilités restreintes ont été traitées. Ces manipulateurs sont classés selon les relations existantes entre les droites gouvernantes supportant les forces et/ou couples appliquées à la plate-forme mobile. La première classe inclut les manipulateurs avec trois droites gouvernantes finies et trois autres infinies. La deuxième classe inclut des manipulateurs avec deux paires de droites finies concourantes et deux droites infinies. La troisième classe inclut des manipulateurs avec six droites gouvernantes finies ayant au moins deux paires de droites qui sont parallèles. De plus, les singularités de quatre manipulateurs: i) le manipulateur 3-UPU, ii) le robot Delta-Linéaire, iii) le robot SMG de McGill et iv) le module parallèle de la machine Verne, ont été analysées comme exemples applicatifs. Une signification physique et une interprétation géométrique

des configurations singulières de ces trois classes de manipulateurs parallèles à mobilités restreintes ont été déterminées.

Dans le cinquième chapitre, nous avons repris la méthode établie dans [**Ibrahim 06**] pour la modélisation dynamique des robots parallèles. Les modèles sont calculés en fonction de la dynamique des jambes, de la dynamique de la plate-forme et aussi des matrices jacobiennes de ces éléments. Le modèle dynamique de la plate-forme est calculé en fonction des variables cartésiennes, tandis que les modèles dynamiques des jambes sont calculés en fonction des variables articulaires, et pour tous ces modèles les équations de Newton-Euler sont appliquées. Dans ce chapitre, nous avons étendu l'application de la méthode proposée dans [**Ibrahim 06**] en modifiant les dimensions des matrices jacobiennes utilisées dans ces modèles. Ces matrices jacobiennes de dimension 6×6 contiennent l'information sur les forces d'actionnement et les moments de contraintes appliqués sur le centre de la plate-forme mobile. L'obtention des matrices de telle dimension est systématique et nous permet d'obtenir une forme compacte et générale du modèle dynamique valable pour tous les manipulateurs sans se soucier de leurs degrés de liberté. Cette méthode a été appliquée en particulier à la machine Verne et une simulation numérique des modèles dynamiques direct et inverse de cette machine a été réalisée sous Matlab dans le cadre du projet NEXT.

Les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse entrent dans les cahiers des charges du projet NEXT pour la modélisation et le développement des PKMs et du projet SiRoPa pour l'étude des singularités des robots parallèles.

PERSPECTIVES

Les perspectives de ce travail peuvent se décomposer suivant dix grandes voies.

- Étude comparative complète entre notre méthode symbolique et l'approche itérative utilisées dans la modélisation géométrique de la machine Verne et intégration de la méthode analytique dans le logiciel de contrôle de la machine.
- Utilisation des espaces de travail obtenus sur la machine Verne et élargissement du champ d'application de la méthode géométrique en développant des bibliothèques géométriques. Ces bibliothèques permettront de définir à partir des paramètres de conception des PKMs les formes géométriques liées aux contraintes mécaniques limitant les espaces de travail de ces machines.
- Intégration de notre approche géométrique de l'étude des singularités parallèles des PKMs dans une interface de simulation. Cette interface permettra aux concepteurs et aux utilisateurs des machines de vérifier l'absence des singularités sans avoir besoin de connaître les développements mathématiques de la méthode. Ce travail entre dans le cadre du projet ANR SiRoPa.
- Classification des manipulateurs parallèles en différentes familles selon les relations existantes entre les forces et/ou moments appliqués au centre de la plate-forme. Cette étude vise à identifier les manipulateurs parallèles possédant des propriétés similaires (nature du mouvement, rigidité) et ayant des architectures différentes. Ce travail permettra au concepteur de proposer des nouvelles architectures en s'inspirant du succès de certaines architectures parallèles.
- Définition des limites de l'utilisation des méthodes géométriques dans le calcul des singularités parallèles des manipulateurs, plus spécifiquement la méthode basée sur la géométrie de Grassmann et celle basée sur l'algèbre de Grassmann-Cayley.

- Développement de l'utilisation de la théorie des vis combinée avec la géométrie de Grassmann et l'algèbre de Grassmann-Cayley pour trouver le mouvement gagné instantanément dans les configurations singulières.
- Intégration des algorithmes du chapitre 5 dans le logiciel de calcul symbolique SYMORO [**Khalil 97**]. Ce logiciel est dédié à la génération de modèles géométriques, cinématiques et dynamiques des robots série arborescents et comportant des boucles fermées. Ce logiciel permet déjà de calculer un grand nombre d'éléments utilisés dans la modélisation des robots parallèles et hybrides. Ainsi, en implémentant nos méthodes de modélisation dynamique, nous permettrons aux utilisateurs d'obtenir directement les modèles dynamiques des robots parallèles.
- Obtention d'un modèle dynamique plus réel pour l'étude du comportement du robot en introduisant une flexibilité localisée des articulations. En effet, les robots parallèles ou les structures hybrides peuvent présenter une élasticité non négligeable dans les articulations ou dans les structures des jambes.
- Application des modèles dynamiques aux robots redondants dont le nombre d'articulations actives est plus grand que le nombre de degrés de liberté de la plate-forme.
- Développement d'un outil de simulation automatique dans le cadre du projet IP no 011815 NEXT. En effet, les travaux présentés dans ce mémoire constituent une première étape pour l'élaboration d'un outil de simulation automatique pour les robots parallèles.

BIBLIOGRAPHIE

[Ait-Ahmed 93] Ait-Ahmed M., “Contribution à la modélisation géométrique et dynamique des robots parallèles”, Thèse de doctorat, LAAS, Toulouse, 1993.

[Angeles 06] Angeles J., Caro S., Khan W., Morozov A., “The Design and Prototyping of an Innovative Schonflies Motion Generator”, Proceedings of the Journal of Mechanical Engineering Science, special issue: Kinematics, Kinematic Geometry and their applications, Vol. 220, No C7, pp. 935–944, Juillet 2006.

[Angeles 07] Angeles J., “Fundamentals of Robotic Mechanical Systems”, Theory, Methods and Algorithms, Springer, -549p., 2007.

[Ball 1900] Ball S. R. S., “Theory of Screws”, Cambridge University Press, 1900.

[Bégon 95] Bégon P., “Commande des robots parallèles rapides : application au robot Hexa”, Thèse de doctorat, Université de Montpelier, Juin 1995.

[Ben-Horin 05] Ben-Horin P., Shoham M., “Singularity Analysis of Parallel Robots Based on Grassmann-Cayley Algebra”, International Workshop on Computational Kinematics, Cassino, 4-6 Mai 2005.

[Ben-Horin 06] Ben-Horin P., Shoham, M., “Singularity condition of six degree-of freedom three-legged parallel robots based on Grassmann-Cayley algebra”, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 22, No. 4, pp. 577-590, 2006.

[Ben-Horin 08] Ben-Horin P., Shoham M., Caro S., Chablat D., Wenger Ph., "A Graphical user interface for the singularity analysis of parallel robots based on Grassmann-Cayley Algebra", Advances in robot kinematics, J. Lenarcic and P. Wenger, Eds. Norwell, MA: Kluwer, pp. 49-58, 2008.

[Bhattacharya 97] Bhattacharya S., Hatwal H., Ghosh A., "An on-line estimation scheme for generalized Stewart platform type parallel manipulators", Journal Mechanism and Machine Theory, Vol. 32, No. 1, pp.79-89, Janvier 1997.

[Bhattacharya 98] Bhattacharya S., Nenchev D.N., Uchiyama M., "A recursive formula for the inverse of the inertia matrix of a parallel manipulator", Journal Mechanism and Machine Theory, Vol. 33, No. 7, pp.957-964, Octobre 1998.

[Bonev 99] Bonev I.A., Ryu J., "Workspace Analysis of 6-PRRS Parallel Manipulators based on the vertex space concept", ASME Design Engineering Technical Conference, Las Vegas, 1999.

[Bonev 01] Bonev I.A., "Delta parallel robot—The story of success", article en ligne : http://www.parallemic.org/Reviews/Review002.html, 2001.

[Bonev 02] Bonev I.A., "Geometric Analysis of Parallel Mechanisms", Thèse de doctorat, Université Laval, Novembre 2002.

[Bonev 07] Bonev I.A., "Les robots parallèles : de la recherche vers les applications", Journées Nationales de la Recherche en Robotique, Obernai, France, 9–12 Octobre, 2007.

[Caro 06] Caro S., Wenger P., Bennis F. et Chablat D., "Sensitivity Analysis of the Orthoglide, A 3-DOF Translational Parallel Kinematic Machine", ASME Journal of Mechanical Design, Vol.128, pp. 392–402, Mars 2006.

[Chablat 98] Chablat D., "Domaines d'Unicité et Parcourabilité pour les Manipulateurs Pleinement Parallèles", Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, Novembre 1998.

[Chablat 03] Chablat D., Wenger Ph., “Architecture Optimization of a 3-DOF Parallel Mechanism for Machining Applications, the Orthoglide”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 19/3, pp. 403-410, Juin 2003.

[Chablat 04] Chablat D., Wenger Ph., “Device for the movement and orientation of an object in space and use thereof in rapid machining”, Brevet Européen EP1597017, 23/11/2005; Brevet Canadien CA2515024, (26/08/2004). Demande PCT: WO2004071705, 26/08/2004. Déposant : Centre National de la Recherche Scientifique CNRS/Ecole Centrale de Nantes. Mandataire : Cabinet LAVOIX.

[Chablat 05] Chablat D., Wenger P., “Design of a spherical wrist with parallel architecture: application to vertebrae of an eel robot”, Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation, pp.3347-3352, Barcelone, 2005.

[Charentus 89] Charentus S., Renaud M., “Modeling and controle of a modular redundant robot manipulator”, First International Symposium on Experimental Robotics, Monreal, Canada, Juin 1989.

[Chen 94] Chen S.-t. “Dynamic model of a hybrid robot manipulator based on Stewart platform”, DE-Vol. 72, Robotics: Kinematics, Dynamics and Controls, ASME, pp. 249-253, 1994.

[Clavel 88] Clavel R., “DELTA, A Fast Robot with Parallel Geometry”, Proceedings of 18th international symposium on industrial robots, Lausanne, pp. 91-100, 1988.

[Clavel 91] Clavel R., “Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté”, Thèse de Doctorat, EPFL, Lausanne, 1991.

[Codourey 91] Codourey A., Clavel R., Burckhardt C. W., “Control Algorithm and Controller for the Direct Drive DELTA robot”, International 3rd IFAC/IFIP/IMAGS Symposium Syroco 91, pp.169-175, Vienne, 16-18 septembre 1991.

[Codourey 97] Codourey A., Burdet E., “A body oriented method for finding a linear form of the dynamic equations of fully parallel robot”, IEEE Conference on Robotics and Automation, pp.1612-1619, Albuquerque, New Mexico, U.S., 1997.

[Company 00] Company O., Pierrot F., Launay F., Fioroni C., “Modeling and preliminary design issues of a 3-axis parallel machine tool”, Proceedings International Conference PKM 2000, pp. 14–23, Ann Arbor, MI, 2000.

[Company 02] Company O., Pierrot F., “Modelling and Design Issues of a 3-axis Parallel Machine-Tool”, Mechanism and Machine Theory, Vol. 37, pp 1325-1345, 2002.

[Craig 86] Craig J.J., “Introduction to robotics: mechanics and control”, Addison Wesley Publishing Company, Reading, USA, 1986.

[Dandurand 84] Dandurand A., “The rigidity of compound spatial grid”, Structural Topology 10, pp. 43-55, 1984.

[Dasgupta 98a] Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S., “Closed-form dynamic equations of the general Stewart platform through the Newton-Euler approach”, Journal Mechanism and Machine Theory, Vol. 33, No. 7, pp.993-1012, Octobre 1998.

[Dasgupta 98b] Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S., “A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator”, Journal Mechanism and Machine Theory Vol. 33, No. 8, pp.1135-1152, Novembre 1998.

[Dashy 02] Dashy A. K., Yeoy S. H., Yangz G., Cheny I.-M. “Workspace analysis and singularity representation of three-legged parallel manipulators”, Seventh International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, pp. 962–967, Singapore, 2002.

[Dheeman 97] Dheeman B., Ashitava G., “Singularity Analysis of Platform-Type Multi-Loop Spatial Mechanisms”, Mechanism and Machine Theory, Vol.33, pp.375-389, 1997.

[Di Gregorio 98] Di Gregorio R., Parenti-Castelli V., “A translational 3-DOF parallel manipulator”, Advances in robot kinematics, pp. 49-58, 1998.

[Dieudonne 72] Dieudonne J. E., Parrish R. V., Bardusch R. E., “An actuator extension transformation for a motion simulator and an inverse transformation applying Newton–Raphson’s method”, NASA Langley Research Center, Hampton, VA, Tech. Rep. NASA TND-7067, 1972.

[Do 88] Do W.Q.D., Yang D.C.H., “Inverse dynamic analysis and simulation of a platform type of robot”, Journal of Robotic Systems, Vol. 5, No. 3, pp. 209-227, 1988.

[Featherstone 83] Featherstone R., “The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias", The International Journal of Robotics Research, Vol. 2, No. 3, pp.87-101, 1983.

[Ferraresi 95] Ferraresi C., Montacchini G., et Sorli M., “Workspace and dexterity evaluation of 6 d.o.f. spatial mechanisms”, 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, pp. 57–61, Milan, 1995.

[Fichter 86] Fichter E. F., “A Stewart platform based manipulator: general theory and practical construction”, International Journal of Robotics Research, Vol. 5, No. 2, pp.157-181, Octobre 1986.

[Gautier 90] Gautier M., “Contribution à la modélisation et à l'identification des robots”, Thèse d'état, Université de Nantes, ENSM, Mai 1990.

[Geng 92] Geng, Z., Haynes, S., Lee, J. D. Carrol, R. L., “On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms”, Robotics and Autonomous Systems 9, pp.237-254, 1992.

[Gogu 05] Gogu G., “Fully-isotropic T1R2-type parallel robots with three degrees of freedom”, Proceedings International design Engineering Technical Conferences & Computers and information in Engineering Conference, Long Beach, 2005.

[Gogu 07] Gogu G., “Fully-isotropic three-degree-of-freedom parallel wrists”, Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, Rome, pp.895-900, 2007.

[Gogu 08] Gogu G., “Structural Synthesis of Parallel Robots, Part 1: Methodology”, Solid Mechanics and its Applications, Vol. 149, Springer, -706 p., 2008.

[Gosselin 90] Gosselin C.M., Angeles J., “Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol.6, pp.281-290, Juin 1990.

[Gosselin 93] Gosselin C. M., “Parallel computationnal algorithms for the kinematics and dynamics of parallel manipulators”, IEEE International. Conference on Robotics and Automation, Vol. 1, pp.883-889, New York 1993.

[Gosselin 95] Gosselin C.M., Wang J., “Singular Loci of Planar Parallel Manipulators”, 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Vol.3, Milan, Italie, Aôut/Septembre 1995.

[Gough 62] Gough V.E., Whitehall S.G., “Universal tyre test machine”, Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress, pp. 117–137, 1962.

[Guegan 03] Guegan S., “Contribution à la modélisation et l’identification dynamique des robots parallèles”, Thèse de doctorat, ECN, Nantes, 2003.

[Gugliemetti 94] Gugliemetti P., Longchamp R., “A Closed form Inverse Dynamic Model ofthe Delta Parallel Robot”, 4th IFAC Symp. on Robot Control, Syroco, pp. 51-56, Capri, 19-21 Septembre 1994.

[Gwinnett 31] Gwinnett J.E., “Amusement device”, Brevet américain No. 1 789 680, déposé le 1er octobre 1928, émis le 20 janvier 1931.

[Han 95] Han K., Chung W., Youm Y., “Local structurization for the forward kinematics of parallel manipulators using extra sensor data”, Proceedings IEEE International Conference Robotics, Automation, pp. 514–520, 1995.

[Hao 98] Hao F., et McCarthy J.M., “Conditions for Line-Based Singularities in Spatial Platform Manipulators”, Journal of Robotic Systems, Vol. 15, No.1, pp. 43-55, 1998.

[Haugh 95] Haugh R.J., Adkins F.A.; Luh C.M., “Domain of Operation and Interference for Bodies in Mechanisms and Manipulators”, J-P.Merlet, B. Ravani editor, Computational Kinematics, Kluwer, pp. 193-202, 1995.

[Hervé 91] Hervé J. M., Sparacino F., “Structural synthesis of parallel robots generating spatial translation”, Proceedings 5th Int. Conf. Advanced Robotics, Vol. 1, pp. 808–813, 1991.

[Hoffman 79] Hoffman, R. et Hoffman, M., “Vibrational modes of an aircraft simulator motion system”, Proceedings 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, pp. 603-606, Montreal, Juillet 1979.

[Hollerbach 80] Hollerbach J.M., “An iterative lagrangian formulation of manipulators dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity”, IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics SMC-10 (11), pp.730-736, 1980.

[Hunt 78] Hunt K.H., “Kinematic Geometry of Mechanisms”, Oxford University Press, 1978.

[Hunt 83] Hunt K. H., “Structural kinematics of in-parallel-actuated robot arms”, ASMR Transaction, Journal Mechanics Transmissions Automatation Design 105, pp.705-7012, 1983.

[Ibrahim 04] Ibrahim O., Khalil W., Guegan S., “Dynamic modeling of some parallel robots”, ISR International Symposium. Robotics, Paris, France, 2004.

[Ibrahim 06] Ibrahim O., Khalil W., “Inverse Dynamic Modeling of Serial-Parallel Hybrid Robots”, International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 2156-2161, Pékin, Chine, 9-15 Octobre 2006.

[Ibrahim 07] Ibrahim O., Khalil W., “Kinematic and dynamic modelling of the 3-RPS parallel manipulator” 12 IFToMM World Congress, Besancon, June 2007.

[Innocenti 91] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. “Direct Kinematics of the 6-4 fully parallel manipulator with position and orientation uncoupled”, European Robotics and Intelligent Systems Conference, Corfou, 23-28 Juin 1991.

[Innocenti 92] Innocenti C., Parenti-Castelli V., “Direct kinematics of the 6-4 fully parallel manipulator with position and orientation decoupled”, Robotic Systems, S. G. Tzafestas, Ed. Norwell, MA: Kluwer, pp. 3–10, 1992.

[Ji 01] Ji P., Wu H., “A closed-form forward kinematics solution for the 6 - 6 Stewart platform”, IEEE Transaction Robotic Automatation, Vol. 17, pp. 522–526, Aout 2001.

[Ji 93] Ji Z., “Study of the effect of leg inertia in Stewart platform”, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, pp. 121-126, Mai 1993.

[Jo 89] Jo D.Y., Haug E.J., “Workspace Analysis of Closed-Loop Mechanisms with Unilateral Constraints”, ASME Design and Automation Conference, Mars 1989.

[Joshi 02] Joshi S. A., Tsai L. W., “Jacobian analysis of limited-DOF parallel manipulators”, ASME Journal of Mechanical Design, No. 124, pp. 254–258, 2002.

[Kanaan 06] Kanaan D., Wenger Ph. et Chablat D., “Workspace Analysis of the Parallel Module of the VERNE Machine”, Problems of Mechanics, Vol. 4, No. 25, pp. 26-42, 2006.

[Kanaan 06] Kanaan D., Wenger Ph. et Chablat D., “Workspace Analysis of the Parallel Module of the VERNE Machine”, Problems of Mechanics, Vol. 4, No. 25, pp. 26-42, 2006.

[Kanaan 07a] Kanaan D., Wenger P. et Chablat D., “Kinematics analysis of the parallel module of the Verne machine”, Proceedings of the 12th IFToMM World Congress, Besançon-France, 18-21 Juin, 2007.

[Kanaan 07b] Kanaan D., Wenger P. et Chablat D., “Workspace and Kinematic Analysis of the Verne machine”, Proceedings of IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, ETH Zürich, Suisse, 4-7 Septembre, 2007.

[Kanaan 08a] Kanaan D., Wenger P. et Chablat D., “Kinematic Analysis of a Serial – Parallel Machine Tool: the VERNE machine”, Mechanism and Machine Theory, *in press*, 2008.

[Kanaan 08b] Kanaan D., Wenger Ph., et Chablat D., “Singularity Analysis of Limited-DOF Parallel Manipulators using Grassmann-Cayley Algebra”, Advances in robot kinematics, J. Lenarcic and P. Wenger, Eds. Norwell, MA: Kluwer, pp.59-68, 2008.

[Khalil 86] Khalil W., Kleinfinger J.-F., “A new geometric notation for open and closed-loop robots”, Proceedings IEEE Conference on Robotics and Automation, pp. 1174-1180, San Francisco, Avril 1986.

[Khalil 87] Khalil W., Kleinfinger J.-F., “Minimum operations and minimum parameters of the dynamic model of tree structure robots”, IEEE Journal of Robotics and Automation RA-3(6), pp.517-526, Décembre 1987.

[Khalil 96] Khalil W., Murareci D., “Kinematic Analysis and Singular Configurations of a Class of Parallel Robots”, Mathematics and Computers in Simulation, pp.377-390, 1996.

[Khalil 97] Khalil W., Creusot D., “SYMORO+: a system for the symbolic modelling of robots”, Robotica 15, pp.153-161, 1997.

[Khalil 99] Khalil W., Besnard S., “Self calibration of Stewart-Gough parallel robots without extra sensors”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, pp.1116-1121, Vol. 15(6), 1999.

[Khalil 02] Khalil W., Dombre E., Modeling, “identification and control of robots”, Hermès Penton, London-Paris, 2002.

[Khalil 04a] Khalil W., Guegan S., “Inverse and Direct Dynamic Modeling of Gough-Stewart Robots”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 20, No. 4, pp.754-762, Aout 2004.

[Khalil 04b] Khalil W., Ibrahim O., “General Solution for the Dynamic Modeling of Parallel Robots”, IEEE International Conference on Robotics and Automatio, Vol. 4, pp. 3665-3670, New Orleons 2004.

[Khalil 06] Khalil W., Ibrahim O., “General Solution for the Dynamic Modeling of Parallel Robots”, Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2006.

[Khosla 86] Khosla P.K., “Real-time control and identification of direct drive manipulators”, Ph. D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA, 1986.

[Kim 02] Kim, H.S., et Tsai, L.W., “Evaluation of a Cartesian manipulator”, Advances in Robot Kinematic, J. Lenarcic and F. Thomas, Eds. Norwell, MA: Kluwer, pp. 21-38, 2002.

[Kim 03] Kim H. S., Tsai L-W., “Kinematic Synthesis of a Spatial 3-RPS Parallel Manipulator”, Journal of mechanical design, Vol. 125, pp. 92-97, Mars 2003.

[Kleinfinger 86] Kleinfinger J.-F., Khalil W., “Dynamic modelling of closed-chain robots”, 16th International Symposium on Industrial Robots, pp. 401-412, Bruxelles, 1986.

[Kong 02] X. Kong et C. M. Gosselin, “Type synthesis of linear translational parallel manipulators”, Advances in Robot Kinematic, J. Lenarcic and F. Thomas, Eds. Norwell, MA: Kluwer, pp. 453–462, 2002.

[Krut 03] Krut S., “Contributions à l'étude des robots parallèles légers, 3T-1R et 3T-2R, à forts débattements angulaires”, Thèse de Doctorat, LIRMM, Université de Montpellier II, Octobre 2003.

[Lebret 93] Lebret G., Liu G. K., Lewis, F. L., “Dynamic analysis and control of a Stewart platform manipulator”, Journal of Robotic Systems, Vol. 10, No. 5, pp.629-655, Juillet 1993.

[Lee 88] Lee, K. M., Shah, D. K., “Dynamic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator”, IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. 4, No. 3, pp.361-368, Juin 1988.

[Lipkin 85] Lipkin H., et Duffy J., “The elliptic polarity of screws”, ASME Journal Mechanisms, Transmissions, Automation in Design, Vol. 107, No. 3, pp. 377-387, 1985.

[Liu 93] Liu K., Fitzgerald J. M., Lewis F. L., “Kinematic analysis of a Stewart platform manipulator”, IEEE Transaction Ind. Electron., Vol. 40, pp. 282–293, Février 1993.

[Liu 00] Liu M-J., Li C-X., Li C-N., “Dynamics analysis of the Gough-Stewart platform manipulator”, IEEE Transaction on Robotics and Automation, Vol. 16, No. 1, pp.94-98, Février 2000.

[Liu 01] Liu X.J., Wang J.S., Gao F., Wang L.P., “On the analysis of a new spatial three-degree-of freedom parallel manipulator”, IEEE Trans. Robotics Automation 17 (6) 959–968, Décembre 2001.

[Luh 80] Luh J.Y.S., Walker M.W., Paul R.C.P., “On-line computational scheme for mechanical manipulators”, Transaction of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 102, No. 2, pp.69-76, 1980.

[Luh 85] Luh J.Y.S., Zheng, J. F., “Computation of Input generalized Forces for Robots with Closed Kinematic Chain mechanisms”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. RA-12, pp.95-103, 1985.

[Ma 89] Ma O., Angeles J., “Direct kinematics and dynamics of a planar three-dof parallel manipulator”, ASME Design and Automation Conference, Montréal, Vol. 3, pp. 313-320, 17-20 Septembre 1989.

[Ma 91] Ma O., Angeles J., “Architecture Singularities of Platform Manipulators”, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.1542-1547, Sacramento, Californie, Avril 1991.

[Majou 04] Majou F., “Analyse Cinétostatique des Machines Parallèles à Translations”, Thèse de doctorat de l’Ecole Centrale de Nantes, 2004.

[Martin 06] Martin Y. S., Giménez M., Rauch M., Hascoët J.-Y., “A new 5-axes hybrid architecture machining center”, 5th Chemnitzer Parallel kinematic Seminar, pp. 657-676, Chemnitz, 25-26 Avril 2006.

[McMillan 90] McMillan T., “Invariants of Antisymmetric Tensors”, PhD Dissertation University of Florida, 1990.

[Merlet 89] Merlet J. P., “Singular Configurations of Parallel Manipulators and Grassmann Geometry”, The International Journal of Robotics Research, Vol. 8, No. 5, 1989.

[Merlet 93] Merlet J. P., “Direct kinematics of parallel manipulator”, IEEE Transaction Robotic Automation, Vol. 9, pp. 842–846, Décembre 1993.

[Merlet 95] Merlet J.-P. “Determination of the orientation workspace of parallel manipulators”, Journal of Intelligent and Robotic Systems Vol 13, No 1, pp.143-160, 1995.

[Merlet 00] Merlet J.P., “Parallel Robots, Solid Dynamics and its Applications”, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[Merlet 01] Merlet J.P., “An Improved Design Algorithm Based on Interval Analysis for Parallel Manipulator with Specified Workspace”, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul, 23-25 Mai 2001.

[Merlet 05] Merlet J-P., “Parallel robots”, 2ème Edition, Heidelberg, Springer, - 394 p., 2005.

[Miller 92] Miller K., Clavel R., “The Lagrange-based model of Delta-4 robot dynamics”, Robotersysteme, Vol. 8, No 1, pp. 49-54, 1992.

[Miller 95] Miller K., “Modeling of dynamics and model-based control of Delta direct-drive parallel robot”, Journal of Robotics and Mechatronics, Vol. 17, No 4, pp. 334-352, 1995.

[Miller 04] Miller K., “Optimal Design and Modeling of Spatial Parallel Manipulators”, The International. Journal of Robotics Research, Vol. 23, No 2, pp.127-140, Février 2004.

[Nair 94] Nair R. et Maddocks J.H., “On the forward kinematics of parallel manipulators”, International Journal Robotics Res. Vol. 13, No 2, pp. 171–188, 1994.

[Nakamura 88] Nakamura Y., Ghodoussi M., “A computational scheme of closed link robot dynamics derived by d'Alembert Principle”, International Conference on robotics and automation, IEEE, pp.1354-1360, Philadelphia 1988.

[Neumann 88] K. E. Neumann, Robot. U. S. Patent 4 732 525, 22 Mars 1988.

[Nguyen 92] Nguyen C.C., “Trajectory planning and control of a Stewart platform base end-effector with passive compliance for part assembly”, Journal of Intelligent and Robotic Systems, Vol. 6(2-3), pp. 263-281, Décembre 1992.

[Orin 81] Orin D. E., Oh S. Y., “Control of force distrubution in robotic mechanism containing closed kinematic chains”, Journal of Dynamic system Measure and Control, Vol. 102, pp. 134-141, Juin 1981.

[Parikh 05] Parikh P.J., Lam S.S.Y., “A hybrid strategy to solve the forward kinematics problem in parallel manipulators”, IEEE Transaction on Robotics and Automation, Vol. 21, No 1, pp.18-25, Février 2005.

[Pashkevich 05] Pashkevich A., Wenger Ph., Chablat D., “Design Strategies for the Geometric Synthesis of Orthoglide-type Mechanisms”, Journal of Mechanism and Machine Theory, Vol. 40, Issue 8, pp. 907-930, August 2005.

[Pashkevich 06] Pashkevich A, Chablat D. et Wenger P., “Kinematics and Workspace Analysis of a Three-Axis Parallel Manipulator: the Orthoglide”, Robotica, Volume 24, Issue 1, pp. 39-49, Janvier 2006

[Pierrot 89] Pierrot F., Fournier A., “The Delta robot : towards the dynamic control”, SIFIR'89, pp. 97-101, Saragosse, Espagne, 1989.

[Pierrot 91] Pierrot F., “Robots pleinement parallèles légers : conception, modélisation et commande”, Thèse de doctorat, université Montpellier II, 1991.

[Pierrot 02] Pierrot F., “Parallel mechanisms and redudancy”, In 1st Int. Colloquium, Collaborative Research Centre 562, pp. 261-277, Braunschweig, 29-30 Mai 2002.

[Ploen 99] Ploen S.R, Park F.C., “Coordinate-Invariant Algorithms for Robot Dynamics”, IEEE Transaction on Robotics and automation, Vol. 15, No 6, pp.1130-1135, Décembre 1999.

[Pollard 42] Pollard W.L.V., “Position controlling apparatus”, Brevet américain No. 2 286 571, depose le 22 avril 1938, émis le 16 juin 1942.

[Pott 04] Pott A., Franitza D. et Hiller M., “Orientation workspace verification for parallel kinematic machines with constant legs length”, Mechatronics and Robotics Conference, pp. 984-989, Aachen, 2004.

[Pottmann 99] Pottmann H., Peternell M., et Ravani B., “An Introduction to Line Geometry with Applications”, Computer Aided Design, Vol. 31, No. 1 pp. 3-16, 1999.

[Reboulet 91] Reboulet C., Berthomieu T., “Dynamic models of a six degree of freedom parallel manipulators”, ICAR, Pise, pp.1153-1157, Juin 1991.

[Renaud 80] Renaud M., “Contribution à la modélisation et à la commande dynamique des robots manipulateurs”, Thèse d’état, UPS, Toulouse, septembre 1980.

[Sefrioui 93] Sefrioui J., Gosselin C.M., “Singularity Analysis and Representation of Planar Parallel Manipulators”, Robotic and Autonomous Systems, pp.209-224, 1993.

[Staffetti 06] Staffetti E., et Thomas F., “Analysis of rigid body interactions for compliant motion tasks using the Grassmann-Cayley algebra”, Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robotic System, 2000.

[Stewart 65] Stewart D., “A platform with six degrees of freedom”, Proceedings of the IMechE, Vol. 180, Pt. 1, No. 15, pp. 371–385, 1965.

[Sugimoto 87] Sugimoto K., “Kinematic and dynamic analysis of parallel manipulators by means of motor algebra”, Journal of Mechanisms, Transmissions and automation in Design, Vol. 109, pp. 3-7, Mars 1987.

[Sugimoto 89] Sugimoto K., “Computational scheme for dynamic analysis of parallel manipulators”, Transaction of the ASME, Journal of mechanics, Transmission and Automation in Design, Vol. 111, pp.29-33, 1989.

[Tancredi 95] Tancredi L., Teillaud M., Merlet J-P, “Extra sensors data for solving the forward kinematics problem of parallel manipulators”, 9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, pp. 2122-2126, Milan, Septembre, 1995.

[Tanev 08] Tanio K. Tanev, “Geometric Algebra Approach to singularity of parallel manipulators with limited mobility”, Advances in robot kinematics, J. Lenarcic and P. Wenger, Eds. Norwell, MA: Kluwer, pp. 39-48, 2008.

[Terrier 05] Terrier M., Giménez M., Hascoët J.-Y., “VERNE – A five axis Parallel Kinematics Milling Machine”, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B, Journal of Engineering Manufacture, Vol. 219, No. 3, pp. 327-336, Mars, 2005.

[Tlusty 99] Tlusty J., Ziegert J.C., Ridgeway S., “Fundamental comparison of the use of serial and parallel kinematics for machine tools”, Annals of the CIRP, Vol. 48, No. 1, pp. 351–356, 1999.

[Toyoama 98] Toyama T. et al., “Machine tool having parallel structure”, U. S. Patent 5 715 729, February. 10, 1998.

[Tsai 99] Tsai L.W., “Robot Analysis: the Mechanics of Serial and Parallel Manipulators”, New York, John Wiley and Sons, -505p., 1999.

[Tsai 00] Tsai L-W., “Solving the inverse dynamics of a Stewart-Gough manipulator by the principle of virtual work”, Journal of Mechanical design, Vol. 122, pp.3-9, Mars 2000.

[Waldron 89] Waldron K. J., Raghavan M., et Roth B., “Kinematics of a hybrid series-parallel manipulation system”, Journal of Dynamic System, Measuring, Control., Vol.111, No. 2, pp. 211–221, 1989.

[Weck 02] Weck M., et Staimer M., “Parallel Kinematic Machine Tools – Current State and Future Potentials”, Annals of the CIRP, Vol. 51, No. 2, pp. 671-683, 2002.

[Wenger 99] Wenger Ph., Gosselin C. et Maille B., “A comparative study of serial and parallel mechanism topologies for machine tools”, Proceedings of PKM’99, pp. 23–32, Milan, Italy, 1999.

[White 75] White, N., “The Bracket Ring of a Combinatorial Geometry I”, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 202, pp. 79-95, 1975.

[White 83] White N., “The Bracket of 2-Extensors”, Congressus Numerantium, Vol. 40, pp. 419-428, 1983.

[White 94] White N., “Grassmann-Cayley Algebra and Robotics”, Journal of Intelligent and Robotics Systems, Vol. 11, pp. 91-107, 1994.

[White 05] White N., “Grassmann-Cayley Algebra and Robotics Applications”, Handbook of Geometric Computing. Corrochano E. B., Ed. Springer Berlin Heidelberg., part VIII, pp. 629-656, 2005.

[Wittenburg 77] Wittenburg. J., “Dynamics of Systems of Rigid Bodies”, BG, Teubner, 1977.

[Wolf 03] Wolf A., Shoham M., “Investigation of parallel manipulators using linear complex approximation”, ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 125, pp. 564–572, 2003.

[Zein 07] Zein M., “Analyse Cinématique des Manipulateurs Sériels 3R Orthogonaux et des manipulateurs Parallèles Plans”, Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, Juillet 2007.

[Zhao 02] Zhao T.-S., Dai J. S., Huang Z., “Geometric Analysis of Overconstrained Parallel Manipulators with Three and Four Degrees of Freedom”, JSME International Journal Ser C Mechanical Systems, Machine Elements Manufacturing, Vol. 45, No. 3, pp.730-740, 2002.

[Zlatanov 94] Zlatanov D., Fenton R.G., Benhabib B., “Singularity analysis of mechanism and Robots via a Velocity Equation Model of the Instantaneous Kinematics”, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 986-991, San Diego, 1994.

[Zlatanov 01] Zlatanov D., Bonev I.A., Gosselin C.M., “Constraint singularities”, Web review , www.parallemic.orgReviews/Review005.html, Laboratoire de robotique de l'Université Laval, Canada, 2001.

PUBLICATIONS PERSONNELLES

Publications dans des revues internationales avec comités de lecture

1. Kanaan D., Wenger P. et Chablat D., "Workspace Analysis of the Parallel Module of the Verne Machine", Problems of Mechanics, Vol.4. N°.25, pp. 26-42, 2006.

2. Kanaan D., Wenger P. et Chablat D., "Kinematic Analysis of a Serial – Parallel Machine Tool: the VERNE machine", Mechanism and Machine Theory, *sous-presse*, 2008.

3. Kanaan D., Wenger P., Caro S. et Chablat D., "Singularity Analysis of Lower-Mobility Parallel Manipulators Using Grassmann-Cayley Algebra", IEEE Transactions on Robotics, *2ème relecture*, 2008.

Publications dans des conférences internationales

1. Kanaan D., Wenger P. et Chablat D., "Kinematics analysis of the parallel module of the Verne machine", Proceedings of the 12th IFToMM World Congress, Besançon-France, 18-21 Juin, 2007.

2. Kanaan D., Wenger P. et Chablat D., "Workspace and Kinematic Analysis of the Verne machine", Proceedings of IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, ETH Zürich, Suisse, 4-7 Septembre, 2007.

3. Kanaan D., Wenger P. et Chablat D., "Singularity Analysis of Limited-DOF Parallel Manipulators using Grassmann-Cayley Algebra", Advances in robot kinematics, J. Lenarcic and P. Wenger, Eds. Norwell, MA: Kluwer, pp.59-68, 2008.

ANNEXE A

Dans cette annexe, nous présentons une version allégée du programme utilisée pour le calcul du modèle géometrique inverse du module parallèle de la machine Verne. Une version complète est presentée dans [**Kanaan 06b**]

```
#Programme crée le 20 septembre 2006
restart:
```

Librairie

```
with(linalg): with(Groebner): with(plots): with(DEtools):
```

Les données

```
r1:=80: r4:=565: R1:=130: R2:=190: D1:=230: D2:=80: r2:=125:
d1:=550: d2:=-160: r3:=125: L1:=850: L3:=950: L2:=950:
```

Les variables articulaires

```
ro1:=674: ro2:=685: ro3:=250:
```

Coordonnées

```
B11:=[X_p+D1,Y_p+R1*cos(alpha),Z_p+R1*sin(alpha)]:
B12:=[X_p+D1,Y_p-R1*cos(alpha),Z_p-R1*sin(alpha)]:
B21:=[X_p+D2,Y_p-R2*cos(alpha),Z_p-R2*sin(alpha)]:
B22:=[X_p+D2-2*r2,Y_p-R2*cos(alpha),Z_p-R2*sin(alpha)]:
B31:=[X_p+D2-2*r3,Y_p+R2*cos(alpha),Z_p+R2*sin(alpha)]:
B32:=[X_p+D2,Y_p+R2*cos(alpha),Z_p+R2*sin(alpha)]:
```

```
A11:=[d1,r1,rho1]:A12:=[d1,-r1,rho1]:

A21:=[d2,-r4,rho2]: A22:=[d2-2*r2,-r4,rho2]:

A31:=[d2-2*r3,r4,rho3]: A32:=[d2,r4,rho3]:
```

Les équations de contraintes

```
EQ_2.3a:=(B11[1]-A11[1])^2+(B11[2]-A11[2])^2+(B11[3]-A11[3])^2-L1^2:

EQ_2.3b:=(B12[1]-A12[1])^2+(B12[2]-A12[2])^2+(B12[3]-A12[3])^2-L1^2:

EQ_2.4:=(B21[1]-A21[1])^2+(B21[2]-A21[2])^2+(B21[3]-A21[3])^2-L2^2:

EQ_2.5:=(B32[1]-A32[1])^2+(B32[2]-A32[2])^2+(B32[3]-A32[3])^2-L3^2:
```

Calcul du modèle géometrique direct du module parallèle de la machine Verne

```
sys1:= [EQ_2.3a, EQ_2.3b, EQ_2.4, EQ_2.5]:

EQ_2.14:=solve(EQ_2.3a-EQ_2.3b,Y_p):

conds:=[denom(sy)]:

sys2:=numer(subs(Y_p=EQ_2.14,sys1)):

EQ_2.18:=solve(sys2[3]-sys2[4],Z_p):

conds:=[op(conds),denom(sz)]:

sys3:=numer(subs(Z_p=EQ_2.18,sys2)):

EQ_2.19:=sys3[1]: EQ_2.20:=sys3[3]:

EQ_2.21:=solve(EQ_2.20-EQ_2.19,X_p):

conds:=[op(conds),denom(sx)]:

sys4:=numer(subs(X_p=EQ_2.21,sys3)):

s_x_t:=subs(sin(alpha)=2*t/(1+t^2),cos(alpha)=((1-t^2)/(1+t^2)),EQ_2.21):

s_y_t:=subs(sin(alpha)=2*t/(1+t^2),cos(alpha)=((1-t^2)/(1+t^2)),EQ_2.14):

s_z_t:=factor(subs(sin(alpha)=2*t/(1+t^2),cos(alpha)=((1-t^2)/(1+t^2))
,EQ_2.18)):

p4:=numer(subs(sin(alpha)=2*t/(1+t^2),cos(alpha)=((1-t^2)/(1+t^2)),
sys4[1])):

c4:=[numer(subs(sin(alpha)=2*t/(1+t^2),cos(alpha)=((1-t^2)/(1+t^2)),conds)
)]:

poly_t:= proc(rho1, rho2, rho3) p4; end proc:
```

```
poly_x_t:= proc(rho1, rho2, rho3, t) s_x_t; end proc:

poly_y_t:= proc(rho1, rho2, rho3, t, Z_p) s_y_t; end proc:

poly_z_t:= proc(rho1, rho2, rho3, t) s_z_t; end proc:

poly_t(ro1, ro2, ro3):

sol_t:=[fsolve(poly_t(ro1, ro2, ro3),t)]:

sol(alpha):=seq(arctan(sol_t[i]),i=1..4)*2:

nb_t:=nops(sol_t):

for i from 1 by 1 to nb_t do

      sol_x[i]:=poly_x_t(ro1, ro2, ro3,sol_t[i]):

      sol_z[i]:=poly_z_t(ro1, ro2, ro3,sol_t[i]):

      sol_y[i]:=poly_y_t(ro1,  ro2,  ro3,sol_t[i],  poly_z_t(ro1,  ro2,  ro3,
      sol_t[i])):

end do:

[seq(sol_x[i],i=1..nb_t)]:

[seq(sol_z[i],i=1..nb_t)]:

[seq(sol_y[i],i=1..nb_t)]:
```

ANNEXE B

Dans cette annexe, nous exposons l'expression de décomposition du superbracket définie dans l'Eq. [4.17] :

$$[ab,cd,ef,gh,ij,kl]=\sum_{i=1}^{24} y_i \qquad [4.17]$$

$y_1=[abcd][efgi][hjkl]$ $y_2=-[abcd][efhi][gjkl]$ $y_3=-[abcd][efgi][hikl]$

$y_4=-[abcd][efhj][gikl]$ $y_5=-[abce][dfgh][ijkl]$ $y_6=-[abde][cfgh][ijkl]$

$y_7=[abcf][degh][ijkl]$ $y_8=-[abdf][cegh][ijkl]$ $y_9=-[abce][dghi][fjkl]$

$y_{10}=[abde][cghi][fjkl]$ $y_{11}=[abcf][dghi][ejkl]$ $y_{12}=[abce][dghj][fikl]$

$y_{13}=-[abdf][cghi][ejkl]$ $y_{14}=-[abde][cghj][fikl]$ $y_{15}=[abdf][cghj][eikl]$

$y_{16}=-[abcf][dghj][eikl]$ $y_{17}=[abcg][defi][hjkl]$ $y_{18}=-[abdg][cefi][hjkl]$

$y_{19}=-[abch][defi][gjkl]$ $y_{20}=-[abcg][defj][hikl]$ $y_{21}=[abdh][cefi][gjkl]$

$y_{22}=[abdg][cefj][hikl]$ $y_{23}=[abch][defj][gikl]$ $y_{24}=-[abdh][cefj][gikl]$

ANNEXE C

Dans cette annexe, nous introduisons une méthodologie qui permet de trouver géométriquement le mouvement gagné instantanément aux configurations singulières. Cette méthode est appliquée à la première classe des manipulateurs étudiés dans le chapitre 4. Cette classe est définie par trois forces d'actionnement et trois moments de contraintes comme le manipulateur 3-UPU et le robot Delta-Linéaire. Pour appliquer cette méthode à d'autres classes, des développements supplémentaires sont nécessaires.

Considérons six vecteurs de Plücker $\mathbf{L}_\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_i^T & \overline{\mathbf{l}}_i^T \end{bmatrix}^T$ (i=1..6) représentant six droites L_i, respectivement. Dans les configurations singulières, ces droites peuvent former un système de 5 visseurs, appelé un complexe linéaire, **X** [**Pottmann 99** et **Wolf 03**]. En conséquence ce complexe linéaire peut être défini comme un visseur réciproque à ces 6 droites, à savoir,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \overline{\mathbf{x}}^T \end{bmatrix}^T \text{ avec } \mathbf{x} \cdot \overline{\mathbf{l}}_i + \overline{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{l}_i = 0 \qquad \text{[C.1]}$$

En outre, le mouvement instantané de la plate-forme mobile est défini par le degré de liberté associé à ce complexe linéaire.

Les singularités parallèles se produisent quand les forces d'actionnement $\hat{\mathbf{F}}_i$ et les moments de contraintes $\hat{\mathbf{M}}_i$ (i=1..6) sont linéairement dépendantes.

A partir de l'Eq. [C.1], ces forces et ces moments forment un complexe linéaire **X** en respectant les équations suivantes :

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{s}_i) + \overline{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{s}_i = 0 \ (i=1,2,3) \qquad \text{[C.2]}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_i = 0 \ (i=1,2,3) \qquad \text{[C.3]}$$

Puisque les forces et les moments forment un système de 5 visseurs dans les cas (b, c, e, f) de la Figure 4.2, le mouvement gagné est déterminé par la direction du complexe linéaire et par son pas.

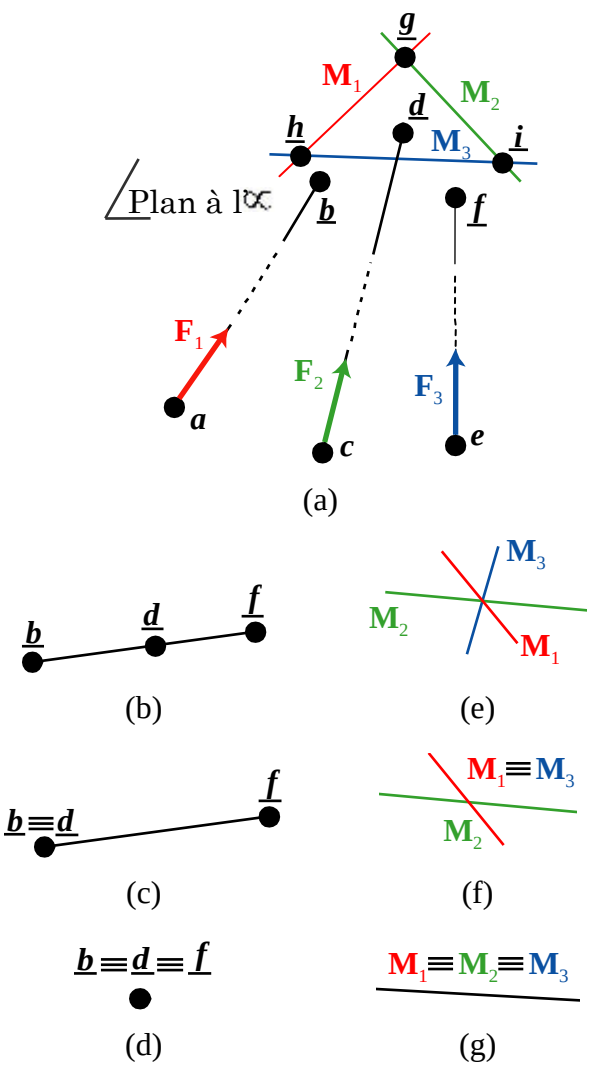


Figure 4.2 : Conditions géométriques de singularités parallèles des manipulateurs avec trois forces d'actionnement et trois moments de contraintes

A partir de l'Eq. [C.3], **x** est orthogonale aux vecteurs $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ et $\mathbf{n}_3$. Néanmoins quand les points $\underline{b}$, $\underline{d}$ et $\underline{f}$ sont colinéaires, ces vecteurs ne sont pas coplanaires et $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ainsi, selon l'Eq. [C.2] $\bar{\mathbf{x}}$ est orthogonale à $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ et $\mathbf{s}_3$. Puisque ces vecteurs sont coplanaires alors $\bar{\mathbf{x}}$ est normal au plan défini par les vecteurs $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ et $\mathbf{s}_3$. En conséquence, le complexe linéaire est un visseur de pas infini qui passe par les points $\underline{b}$, $\underline{d}$ et $\underline{f}$ et le mouvement instantané de la plate-forme mobile est une translation pure selon la direction du vecteur $\bar{\mathbf{x}}$. Dans ce cas, les actionneurs ne peuvent pas contrôler ce ddl de translation.

En outre, quand les droites représentant les moments de contrainte $\mathbf{M_i}$ (i=1, 2, 3) se croisent en un point, les vecteurs $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ et $\mathbf{n}_3$ sont coplanaires. Donc, le complexe linéaire est une visseur ayant **x** normal au plan défini par les vecteurs $\mathbf{n}_i$ (i=1, 2, 3). Dans le cas particulier des trois droites $a\underline{b}$, $c\underline{d}$ et $e\underline{f}$ concourantes en un même point fini, les vecteurs $\mathbf{r}_i$ (i=1, 2, 3)

peuvent être choisit les mêmes et le vecteur $\overline{\mathbf{x}}$ devient normal aux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{r}_i$ (voir Eq. [C.2]). Le complexe linéaire devient un visseur de pas zéro représenté par une droite finie qui passe par le point d'intersection et ayant la direction du vecteur $\mathbf{x}$. Donc le manipulateur gagne instantanément un mouvement de rotation autour de cette droite.

En plus, dans les cas (d, g) de la Figure 4.2, les droites L_i (i=1..6) forment un système de 4 visseurs contenus dans une variété de dimension 4 appelée congruence et définie par l'intersection de deux complexes linéaires. Donc, si $\underline{b} \equiv \underline{d} \equiv \underline{f}$, ces deux complexes linéaires sont des visseurs de pas infini qui passe par le point $\underline{b}$. Dans ce cas, les actionneurs ne peuvent pas contrôler le mouvement de translation dans un plan normal à $\mathbf{s_i}$ (i=1, 2, 3). Si $\mathbf{M_1} \equiv \mathbf{M_2} \equiv \mathbf{M_3}$ le manipulateur gagne instantanément un mouvement de rotation à 2 ddls autour de deux axes de directions orthogonales à $\mathbf{n_i}$. Pour le cas particulier des trois droites $a\underline{b}$, $c\underline{d}$ et $e\underline{f}$ concourantes en un point fini, le mouvement de rotation supplémentaire est obtenu autour de deux droites passant par ce point et ayant une direction orthogonal à $\mathbf{n_i}$ (i=1, 2, 3).

Ces conditions sont vraies pour tous les manipulateurs ayant une matrice jacobienne inverse composée de trois forces d'actionnement et trois moments de contrainte, comme le manipulateur 3-UPU et le robot Delta-Linéaire.

ANNEXE D

Dans cette annexe, nous développons l'Eq. [4.34] en utilisant les propriétés de l'algèbre de Grassmann-Cayley. Cette équation est nécessaire pour obtenir l'expression algébrique finale de la décomposition du superbracket de la classe III. Nous rappelons que la troisième classe inclut des manipulateurs avec six forces d'actionnement ayant au moins deux paires de leurs droites gouvernantes qui sont parallèles. Le module parallèle de la machine Verne et le robot Delta linéaire appartiennent à cette classe.

$$\left[\underline{o}n\underline{c}\underline{p}\right]\left[\underline{o}eg\,\underline{m}\right]\left[\overset{\square}{a}\,\underline{i}\underline{p}k\right]-\left[\underline{o}\underline{m}a\underline{p}\right]\left[\underline{o}eg\,\underline{n}\right]\left[\overset{\square}{c}\,\underline{i}\underline{p}k\right]=0 \qquad [4.\ 32]$$

En appliquant la relation suivante,

$$\left[(b-a)cde\right]=\left[bcde\right]-\left[acde\right] \qquad [4.32a]$$

nous obtenons les équations [4.32a], [4.32b], [4.32c] et [4.32d],

$$\left[\underline{o}eg\,\underline{m}\right]=\left[(f-e)eg\,(b\overset{\square}{-}a)\right]=\left[feg\,(b\overset{\square}{-}a)\right]=\left[feg\,\overset{\square}{b}\right]-\left[feg\,\overset{\square}{a}\right] \qquad [4.33a]$$

$$\left[\overset{\square}{a}\,\underline{i}\underline{p}k\right]=\left[\overset{\square}{a}\,i(j-i)k\right]=\left[\overset{\square}{a}\,ijk\right] \qquad [4.32b]$$

$$\left[\underline{o}eg\,\underline{n}\right]=\left[(f-e)eg\,(d\overset{\square}{-}c)\right]=\left[feg\,(d\overset{\square}{-}c)\right]=\left[feg\,\overset{\square}{d}\right]-\left[feg\,\overset{\square}{c}\right] \qquad [4.32c]$$

$$\left[\overset{\square}{c}\,\underline{i}\underline{p}k\right]=\left[\overset{\square}{c}\,i(j-i)k\right]=\left[\overset{\square}{c}\,ijk\right] \qquad [4.32d]$$

Nous pouvons maintenant remplacer quelques points à l'infini par des points finis dans l'Eq. [4.32] et obtenir l'expression suivante:

$$\left[ab,\ cd,\ ef,\ gh,\ ij,\ kl\right] = \left[\underline{on}\underline{cp}\right]\left(\left[feg\,\overset{\square}{b}\right] - \left[feg\,\overset{\square}{a}\right]\right)\left[\overset{\square}{a}\,ijk\right] -$$
$$\left[\underline{om}\underline{ap}\right]\left(\left[feg\,\overset{\square}{d}\right] - \left[feg\,\overset{\square}{c}\right]\right)\left[\overset{\square}{c}\,ijk\right] = \left[\underline{on}\underline{cp}\right]\left[feg\,\overset{\square}{b}\right]\left[\overset{\square}{a}\,ijk\right] - \left[\underline{om}\underline{ap}\right]\left[feg\,\overset{\square}{d}\right]\left[\overset{\square}{c}\,ijk\right] \qquad [4.34]$$

ANNEXE E

Dans cette annexe nous développons une méthode numérique applicable seulement à une classe de manipulateurs ayant une liaison prismatique active comme première liaison dans chaque jambe. Cette méthode permet d'obtenir les positions singulières dans l'espace de travail du manipulateur étudié. Pour mieux illustrer cette méthode, nous l'appliquons directement à la machine Verne.

Nous avons montré dans le paragraphe 2.4.4 du chapitre 4 que les colonnes de la transposée de la matrice jacobienne inverse $\mathbf{J}^{-T}$ du module parallèle de la machine Verne sont les vecteurs de Plücker des droites passant par les jambes de ce manipulateur. A partir de l'Eq. [4.18], nous pouvons exprimer le déterminant de $\mathbf{J}^{-T}$ en fonction des variables articulaires (ρ_i , $i = 1,\ 2,\ 3$) et des variables opérationnelles ($x_P,\ y_P,\ z_P$) comme suit,

$$\det(\mathbf{J}^{-T}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{32} \\ \mathbf{PB}_{11} \times \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{PB}_{12} \times \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{12} & \dots & \mathbf{PB}_{32} \times \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{32} \end{vmatrix} \qquad [D.1]$$

Cependant après application de la méthode basée sur l'algèbre de Grassmann-Cayley à la machine Verne, nous avons obtenu les conditions d'existence des singularités parallèles sous forme vectorielle. Ces conditions peuvent être exprimées en fonction des variables articulaires (ρ_i , $i = 1,\ 2,\ 3$) et des variables opérationnelles ($x_P,\ y_P,\ z_P$) comme suit,

$$\det(\mathbf{J}^{\mathbf{-T}}) = \mathbf{F_1}\left(y_p, z_p, \rho_2, \rho_3\right)\mathbf{F_2}\left(x_p, y_p, z_p, \rho_1, \rho_2, \rho_3\right) \qquad [D.2]$$

$$\mathbf{F_1}\left(y_p, z_p, \rho_2, \rho_3\right) = y_p\left(\rho_3 - \rho_2 - 2R_2\sin(\alpha)\right) - \left(\rho_3 + \rho_2 - 2z_p\right)\left(R_2\cos(\alpha) - r_4\right) \qquad [D.3]$$

La fonction $\mathbf{F_1}\left(y_p, z_p, \rho_2, \rho_3\right)$ correspond au cas où les plans des chaînes II et III sont coplanaires ou parallèles. Cette condition contient aussi le cas particulier où les droites $A_{ij}B_{ij}$ (i=2,3, j=1,2) sont parallèles.

La fonction $\mathbf{F_2}\left(x_p, y_p, z_p, \rho_1, \rho_2, \rho_3\right)$ est définie par l'Eq. [4.41] et correspond au cas où les six forces d'actionnement appliquées par les jambes à la plate-forme forment un complexe linéaire général.

Les conditions géométriques nous permettent de visualiser les configurations singulières et même de factoriser le déterminant de la matrice jacobienne pour obtenir des expressions moins compliquées à résoudre mais il reste indispensable de vérifier numériquement l'absence des singularités dans l'espace de travail.

Dans le cas du module parallèle de la machine Verne, les positions singulières sont obtenues en résolvant un système $\left(Sy_1\right)$ de cinq équations à sept inconnues. Les quatre premières équations de ce système sont les équations de contrainte, Eqs. [2.3a, 2.3b 2.4 et 2.5] et la quatrième est l'expression du déterminant de la matrice jacobienne, Eq [D.3]. Tandis que les inconnues sont les variables articulaires ρ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$, les coordonnées du centre de la plate-forme x_p, y_p, z_p et l'orientation α de la plate-forme. Pour pouvoir résoudre ce système il faut réduire les nombres d'inconnues à cinq.

Puisque les chaînes de la machine Verne sont liées à la base par l'intermédiaire des liaisons prismatiques montées sur des rails verticaux. Alors, les variables articulaires ρ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ sont exprimées linéairement en fonction de z_P. Donc nous pouvons procéder au changement de variables suivant :

$$\rho_i - z_p = \sigma_i \left(i = 1,\ 2,\ 3\right) \qquad [D.4]$$

Ce changement de variables permet de réduire le nombre des inconnues à six et diminuer la complexité des équations. Ainsi en fixant l'une des variables, par exemple α, nous obtenons un système $\left(Sy_2\right)$ de cinq équations à cinq inconnues. Nous faisons varier α entre $-\pi$ et π avec un pas constant et pour chaque valeur de α nous résolvons ce système en utilisant une méthode de substitution.

Pour détecter les singularités parallèles, nous éliminons successivement σ_1, σ_2 et σ_3 de l'Eq [D.3] du système $\left(Sy_2\right)$ pour obtenir une équation exprimée en fonction des variables x_p, y_p et en fonction de l'orientation α de la plate-forme. Pour réaliser cela, nous éliminons la variable σ_1 entre les Eqs. [D.3-2.3a] pour avoir l'Eq. [D.5], puis nous éliminons la variable σ_2 entre les Eqs. [D.5-2.4] pour avoir l'Eq. [D.6] et à la fin nous éliminons la variable σ_3

entre les Eqs. [D.6-2.5] pour avoir l'Eq. [D.7]. Dans ces trois étapes, nous utilisons la fonction *Resultant* de Maple. Ensuite, nous éliminons la variable y_p entre les Eqs. [D.7-2.6] pour avoir l'Eq. [D.8], qui est en fonction de x_p et α.

Nous faisons varier α entre -π et π avec un pas constant et pour chaque valeur de α nous résolvons l'Eq. [D.8] pour x_p en utilisant la fonction *fsolve* de Maple. Chaque racine $x_{p,k}$ du polynome [D.8] est substituée dans l'Eq. [2.6] qui à son tour est résolue pour y_p. Ainsi, à chaque $x_{p,k}$ correspondent deux racines de $y_{p,l}$. En conséquence, nous obtenons plusieurs couples solutions ($x_{p,k}, y_{p,l}$). Nous substituons les valeurs de chaque couple solution ($x_{p,k}, y_{p,l}$) dans l'Eq. [D.7]. Nous conservons les couples qui satisfont l'égalité dans cette équation et nous rejetons les autres couples.

Les couples solutions conservés ($x_{p,k}, y_{p,l}$) doivent donner les coordonnées des points singuliers. Pour vérifier cela, nous calculons les solutions $\sigma_i \left(i = 1,\ 2,\ 3\right)$ au modèle géométrique inverse pour chacun des couples solutions. Sachant qu'il existe seize solutions au MGI, nous choisissons celle utilisée par la machine Verne. Cependant, ils restent aussi des solutions qui ne sont pas associées à des points singulières. Nous ne conservons que les solutions ($x_{p,k}, y_{p,l}, \sigma_{i,m}$ i=1, 2 ,3) qui satisfont l'équation d'existence des singularités parallèles [D.3], et nous rejetons les autres solutions.

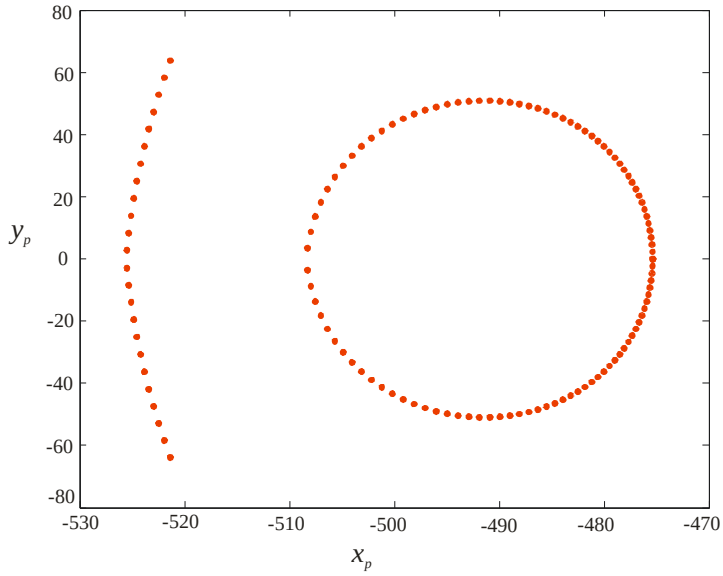


Figure E.1 : Courbes des singularités dans l'espace opérationnel

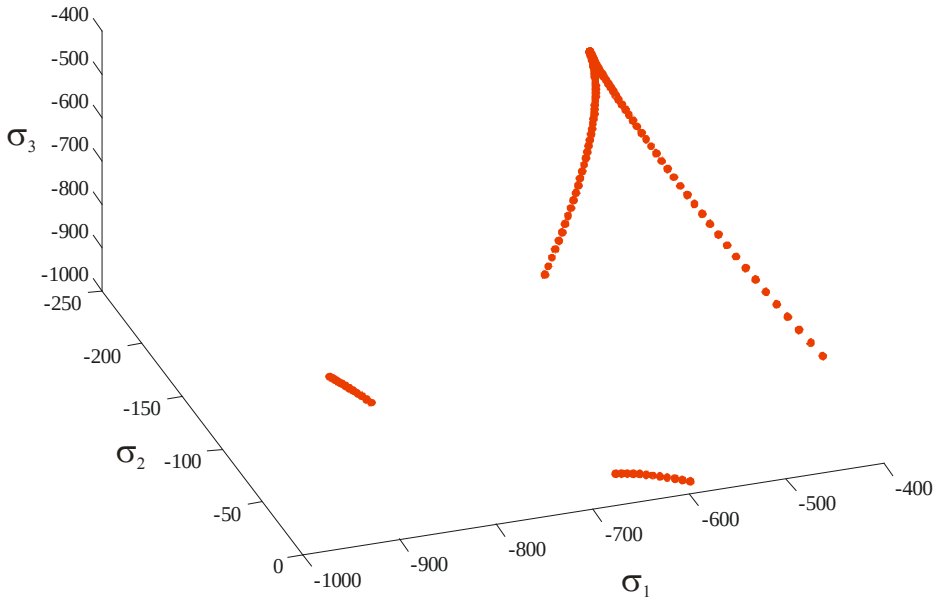


Figure E.2 : Courbes des singularités dans l'espace articulaire

Les solutions retenues forment des courbes de singularités parallèles pour une variable z_p donnée (voir les Figures E.1 et E.2). Les surfaces des singularités sont obtenues en faisant varier z_p avec un pas constant entre ses bornes inférieures et supérieures (les bornes de z_p sont calculés dans le paragraphe 2.3 du chapitre 3). Ainsi la surface des singularités dans l'espace opérationnel est obtenue en appliquant une extrusion verticale aux courbes singulières (voir la Figure E.3). Tandis que la surface des singularités parallèles dans l'espace articulaire est obtenue en appliquant une extrusion le long d'une directrice avec un pente de $\pi/4$, cela revient à utiliser l'Eq. [D.4] pour calculer les variables articulaires $\rho_i\left(i=1,\ 2,\ 3\right)$ en variant z_p entre ses bornes inférieures et supérieures (voir la Figure E.4). Les Figures E.3 et E.4 montrent que l'espace de travail de la machine Verne est exempt des singularités parallèles.

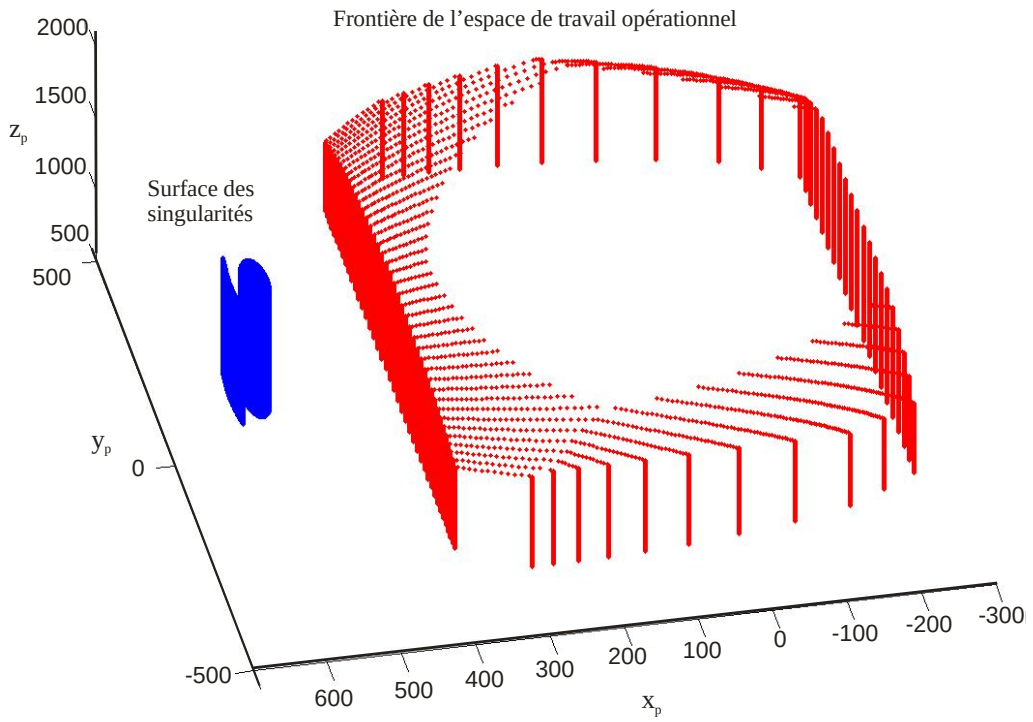


Figure E.3 : Surface des singularités parallèles et la frontière de l'espace de travail de la machine Verne dans l'espace opérationnel

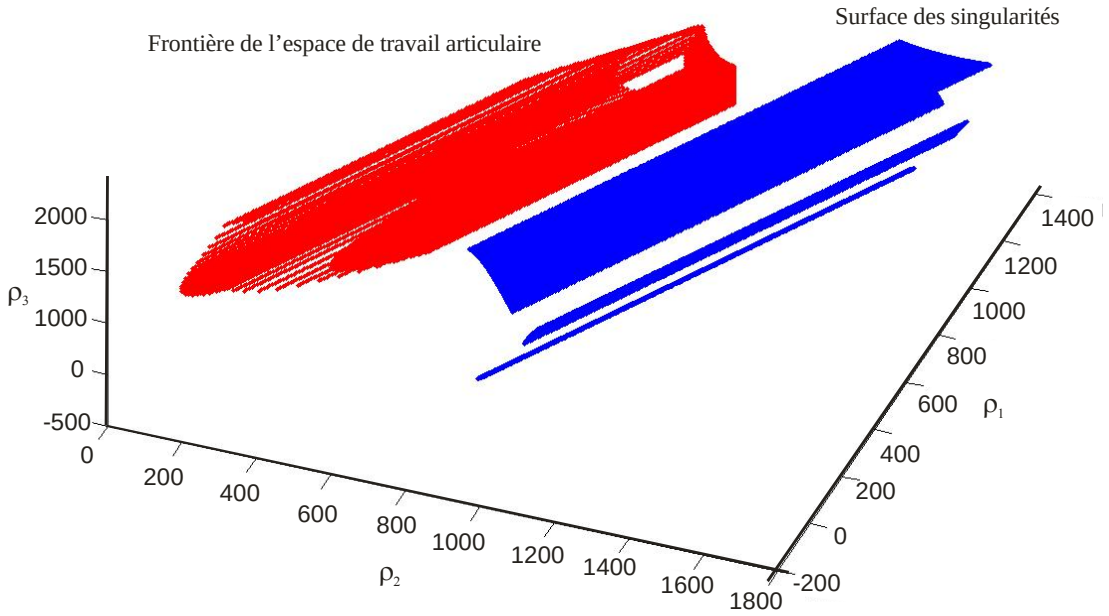


Figure E.4 : Surface des singularités parallèles et la frontière de l'espace de travail de la machine Verne dans l'espace articulaire

ANNEXE F

Dans cette annexe, nous calculons la matrice jacobienne 6×3 du robot 3-R<u>P</u>S en se basant sur ses caractéristiques structurales et sur les considérations décrites dans le paragraphe 3.3.3 du chapitre 5. Cette matrice $\mathbf{J}_P$ est utilisée dans le calcul des modèles dynamiques direct et inverse du robot. Pour réaliser cela, nous calculons d'abord les matrices jacobiennes des chaînes cinématiques i de ce robot, $\mathbf{J}_i$ et la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{vi}$ liant la vitesse de la plate-forme à la vitesse du repère Σ_{Bi}.

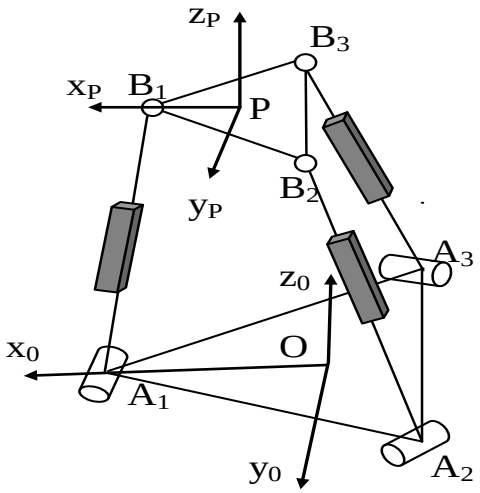


Figure F.1 : le robot 3 R<u>P</u>S

Le robot 3-R<u>P</u>S est un robot parallèle à trois degrés de liberté complexes. Les paramètres d'orientation et de position de ce robot sont au nombre de six, cependant seulement trois sont indépendants. Ce robot présenté sur la Figure F.1 est composé d'une plate-forme mobile et d'une base fixe, les deux ont la forme d'un triangle équilatéral, elles sont reliées par trois chaînes identiques composées chacune d'une articulation rotoïde (R), d'une articulation prismatique (<u>P</u>) motorisée et d'une liaison sphérique (S) attachée à la plate-forme (les trois

axes des rotoïdes de la base sont disposés à 120 degrés et l'axe de chaque rotoïde est parallèle au coté opposé du triangle de la base).

Chaque chaîne du robot 3 RPS possède cinq ddls. En conséquence, il faut ajouter une articulation fictive par chaîne pour pouvoir établir une matrice jacobienne 6×6 du robot. Notre approche consiste donc à déterminer les efforts appliqués par chacune des chaînes sur la plate-forme. Ainsi, à partir de la connaissance de ces efforts nous choisissons le type de l'articulation à ajouter et son emplacement dans chacune de ces chaînes.

Chaque chaîne applique une force d'actionnement et une force de contrainte sur la plate-forme comme indiqué sur la Figure F.2. Les trois forces d'actionnement $\mathbf{F_i}$ (i=1, 2, 3) sont portées par les chaînes cinématiques i et passent par les points B_i. Tandis que les forces de contraintes $\mathbf{F_i}$ (i=4, 5, 6) sont parallèles aux axes des liaisons pivots de base et passent par les points B_i (i=1, 2, 3), respectivement. Pour trouver ses forces, il suffit d'appliquer la théorie des vis réciproques présentée en détail dans le paragraphe 2.2.3 du chapitre 4.

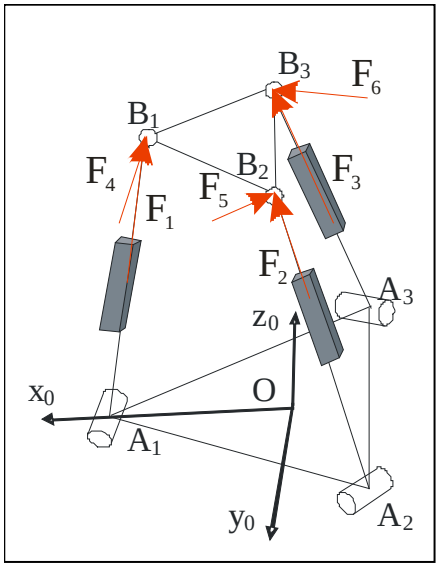


Figure F.2 : Les forces appliquées par les chaînes cinématiques à la plate-forme mobile

Maintenant, nous ajoutons une liaison prismatique fictive à chaque chaîne i (i=1, 2, 3). L'axe de cette articulation doit être parallèle à l'axe de l'articulation pivot de la même chaîne i et passe par le point B_i. (voir la Figure F.3) En conséquence, les trois articulations prismatiques fictives qui sont bloquées vont empêcher le mouvement de la plate-forme le long des axes des trois forces de contraintes.

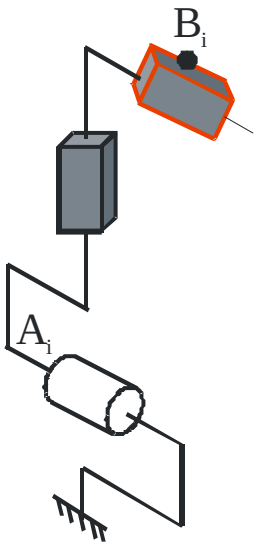


Figure F.3 : La chaîne cinématique i

La forme vectorielle de la jacobienne d'une chaîne cinématique i du robot 3-RPS est obtenue à partir de l'Eq. [5.14] :

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1i} \times \mathbf{L}_{1i,6} & \mathbf{a}_{2i} & \mathbf{a}_{3i} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{a}_{1i} & 0 & 0 & \mathbf{a}_{4i} & \mathbf{a}_{5i} & \mathbf{a}_{6i} \end{bmatrix} \qquad [F.1]$$

avec :

a_j vecteur unitaire porté par l'axe z_j de l'articulation j et que $\sigma_j = 1$ ($\bar{\sigma}_j = 0$) si l'articulation j est prismatique et $\sigma_j = 0$ ($\bar{\sigma}_j = 1$) si elle est rotoïde

$\mathbf{L}_{j,6}$ vecteur d'origine O_j (origine du repère Σ_j) et d'extrémité B_i (origine du repère Σ_{Bi}).

La matrice jacobienne, $\mathbf{J}_{vi}$, permet d'exprimer la vitesse du repère Σ_{Bi}, v_{Bi} (6×1), en fonction de la vitesse de la plate-forme, v_P, en utilisant la relation de transfert du torseur cinématique :

$$v_{Bi} = \mathbf{J}_{vi}\, v_P \qquad [F.2]$$

$$\mathbf{J}_{vi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I_{d3}} & -\widehat{\mathbf{PB_i}} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{I_{d3}} \end{bmatrix} = \frac{\partial v_{Bi}}{\partial v_P} \qquad [F.3]$$

La matrice jacobienne (6×6) du robot 3-RPS lie la vitesse de la plate-forme, v_P, aux vitesses des articulations actives et fictives $\dot{r}_{2i}$ et $\dot{r}_{3i}$ pour k=1, 2, 3. La transposée de l'inverse de cette matrice est obtenue en utilisant la relation [5.22] et les Eqs. [F.1 et F.3] :

$$\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathrm{v}_{\mathbf{P}}}\right)^{\mathbf{T}} = \left[\mathbf{J}_{\mathbf{v}1}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}_{1}^{-\mathbf{T}}(2,:) \quad \mathbf{J}_{\mathbf{v}1}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}_{1}^{-\mathbf{T}}(3,:) \quad \mathbf{J}_{\mathbf{v}2}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}_{2}^{-\mathbf{T}}(2,:) \quad \mathbf{J}_{\mathbf{v}2}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}_{2}^{-\mathbf{T}}(3,:) \quad \mathbf{J}_{\mathbf{v}3}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}_{3}^{-\mathbf{T}}(2,:) \quad \mathbf{J}_{\mathbf{v}3}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}_{3}^{-\mathbf{T}}(3,:)\right] \quad [F.4]$$

La matrice jacobienne (6×3), $\mathbf{J}_{\mathbf{P}}$, utilisée dans le calcul du MDI est obtenue en inversant la matrice $\partial\dot{\mathbf{r}}/\partial \mathrm{v}_{\mathbf{P}}$ exprimée par l'Eq. [F.4] et en sélectionnant les colonnes correspondant aux variables articulaires actives :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}} = \left[\frac{\partial \mathrm{v}_{\mathbf{P}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(1,:) \quad \frac{\partial \mathrm{v}_{\mathbf{P}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(2,:) \quad \frac{\partial \mathrm{v}_{\mathbf{P}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(3,:)\right] \quad [F.5]$$

Le modèle dynamique inverse du robot 3-RPS est obtenu en appliquant l'Eq. [5.23] dans le repère de base de la machine :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{H}^{\mathrm{a}} + {}^{0}\mathbf{J}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}}\left({}^{0}\mathbb{F}_{\mathbf{P}} + \sum_{i=1}^{m=3} {}^{0}\mathbf{J}_{\mathbf{v}i}^{\mathbf{T}\,0}\mathbf{J}_{i}^{-\mathbf{T}}(:,1)\mathbf{H}_{i}^{\mathrm{p}}\right) \quad [F.6]$$

Sachant que :

$$\mathbf{H}^{\mathrm{a}} = \left[\mathbf{H}_{21}^{\mathrm{a}} \quad \mathbf{H}_{22}^{\mathrm{a}} \quad \mathbf{H}_{23}^{\mathrm{a}}\right]^{\mathrm{T}} \quad [F.7]$$

$$\mathbf{H}_{i}^{\mathrm{p}} = \mathbf{H}_{1i}^{\mathrm{p}} \quad [F.8]$$

Le modèle dynamique direct exprime les accélérations cartésiennes indépendantes de la plate-forme, $\dot{\mathrm{v}}_{\mathrm{r}}$, en fonction des positions, vitesse de la plate-forme et les forces des articulations motorisées. Ce modèle est obtenu en appliquant la procédure décrite dans le paragraphe 2.2.4 du chapitre 5 définie par l'équation suivante :

$$\dot{\mathrm{v}}_{\mathrm{r}} = \left(\mathrm{a}_{\mathrm{r}}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}_{\mathbf{robot}}\mathrm{a}_{\mathrm{r}}\right)^{-1}\mathrm{a}_{\mathrm{r}}^{\mathbf{T}}\left(\left(\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \mathrm{v}_{\mathbf{P}}}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{\Gamma} - \mathbf{h}_{\mathbf{robot}} - \mathbf{A}_{\mathbf{robot}}\dot{\mathrm{a}}_{\mathrm{r}}\mathrm{v}_{\mathrm{r}}\right) \quad [F.9]$$

ANNEXE G

Dans cette annexe, nous exprimons la matrice jacobienne inverse obtenue à partir de l'Eq. [5.73]du chapitre 5

$$\mathbf{J_P^{-1}} = \begin{bmatrix} X_I & C_1 - r_a & S_1 - \sigma_1 & r_a S_1 - \sigma_1 C_1 & \sigma_1 D_1 d_a S_1 & -d_a C_1 - D_1 r_a \\ X_I & -C_1 + r_b & -S_1 - \sigma_1 & r_b S_1 + \sigma_1 C_1 & \sigma_1 D_1 - d_a S_1 & d_a C_1 + D_1 r_b \\ X_{II} & -C_2 + r_c & -S_2 - \sigma_2 & r_c S_2 + \sigma_2 C_2 & \sigma_2 D_2 - d_b S_2 & d_b C_2 + D_2 r_c \\ X_{II} & -C_2 + r_c & -S_2 - \sigma_2 & r_c S_2 + \sigma_2 C_2 & \sigma_2 (D_2 - 2r_2) - d_c S_2 & d_c C_2 + r_c (D_2 - 2r_2) \\ X_{III} & C_2 - r_d & S_2 - \sigma_3 & r_d S_2 - \sigma_3 C_2 & \sigma_3 (D_2 - 2r_2) + d_c S_2 & -d_c C_2 - r_d (D_2 - 2r_2) \\ X_{III} & C_2 - r_d & S_2 - \sigma_3 & r_d S_2 - \sigma_3 C_2 & \sigma_3 D_2 + d_b S_2 & -d_b C_2 - D_2 r_d \end{bmatrix}$$

avec :

$C_1 = R_1 C(\alpha)$, $C_2 = R_2 C(\alpha)$ $S_1 = R_1 S(\alpha)$ et $S_2 = R_2 S(\alpha)$

$d_a = x_p - d_1$, $d_b = x_p - d_2$ et $d_c = x_p - d_2 + 2r_2$

$X_I = d_a + D_1$, $X_{II} = X_{III} = d_b + D_2$

$\sigma_i = \rho_i - z_p \left(i = 1,\ 2,\ 3\right)$

$r_a = r_1 - y_p$, $r_b = r_1 + y_p$, $r_c = r_4 + y_p$ et $r_d = r_4 - y_p$