



**HAL**  
open science

# Représentations et Structures Géométriques

Antonin Guilloux

► **To cite this version:**

Antonin Guilloux. Représentations et Structures Géométriques. Topologie géométrique [math.GT]. UPMC - Université Paris 6 Pierre et Marie Curie, 2015. tel-01370296

**HAL Id: tel-01370296**

**<https://hal.science/tel-01370296>**

Submitted on 4 Oct 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie

**MÉMOIRE**

présenté pour l'obtention de

**l'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

(Spécialité Mathématiques)

**Représentations et Structures Géométriques**

par

Antonin GUILLOUX

**RAPPORTEURS :**

Francis BONAHOON (University of Southern California)

François LABOURIE (Université de Nice - Sophia Antipolos)

Joan PORTI (Universitat Autònoma de Barcelona)

Soutenu le 9 novembre 2015

**JURY :**

Michelle BÜCHER-KARLSSON (Université de Genève)

Martin DERAUX (Université de Grenoble I)

Olivier GUICHARD (Université de Strasbourg)

Pascal HUBERT (Université d'Aix-Marseille)

Julien MARCHÉ (Université de Paris 6)



## Remerciements

Je voudrais profiter de cette occasion de remercier toutes les personnes qui ont rendu possible l'aboutissement de ce mémoire.

En premier lieu, je tiens à remercier très chaleureusement les rapporteurs – F. Bonahon, F. Labourie et J. Porti – qui m'ont fait l'honneur de consacrer du temps à mon travail. Je suis aussi très reconnaissant envers les membres du jury – M. Bucher-Karlsson, M. Deraux, O. Guichard, P. Hubert, J. Marché, J. Porti – dont j'admire les travaux, qui représentent pour moi une grande source d'inspiration.

Depuis septembre 2009, j'ai pu profiter à l'IMJ-PRG d'un cadre de travail particulièrement fécond. Dans cette perspective, je tiens à remercier mes collègues et en premier lieu mes collaborateurs – N. Bergeron, E. Falbel, P.V. Koseleff, F. Rouillier. Leur présence et les innombrables discussions que nous avons eues ont enrichi ma vision des mathématiques plus que je ne saurai l'écrire.

Les rencontres au sein du groupe de travail Phénix ou encore autour d'un morceau de chocolat sont toujours très intéressantes. Je remercie particulièrement, et dans le désordre, M. Wolff, L. Charles, G. Ginot, H. Eynard-Bontemps, V. Humilière, F. Le Roux, A. Oancea, I. Itenberg, S. Diverio, J. Bavard, A. Giralt, M. Zavidovique, F. Paugam, A. Deloro, G. Courtois... Un grand merci aussi à Miguel Acosta, dont je co-dirige la thèse avec M. Deraux : suivre son travail et son cheminement dans la recherche mathématique est une expérience des plus enrichissantes.

Je tiens enfin à exprimer ma gratitude aux équipes administratives de l'IMJ-PRG qui rendent possible au quotidien mon travail.

Nombreux sont les mathématiciens dont le travail m'inspire et me fait avancer. Je tiens à citer en premier lieu Henri-Paul de Saint-Gervais dans toutes ses incarnations (la liste serait longue, les intéressés se reconnaîtront), source infinie de voyages mathématiques à proximité de Poincaré. Son opiniâtreté à rechercher sous quelles formes passer les mathématiques qui nous passionnent, sa joie de faire comprendre une belle idée, sa mauvaise foi à défendre ses héros, toutes ces facettes font du travail en sa compagnie un grand plaisir. Parmi les mathématiciens que j'ai grand plaisir à rencontrer, je souhaite encore mentionner Y. Benoist, dont l'influence sur mes recherches est constante depuis mes premières années de mathématicien, F. Kassel, et sa passion dans les discussions mathématiques, ainsi que L. Marquis, B. Schapira, F. Maucourant, F. Ledrappier, P. Will, M. Görner, C. Zickert.

Enfin, ma gratitude va vers ma famille et mes amis : ces années entre Paris et Lyon ont parfois été difficiles et ils ont toujours su me soutenir, m'accueillir et m'encourager. À Stéphanie, Nalini, Lucio, mes parents, ma sœur et sa famille, à tous ceux que j'aime : merci !



## Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	1
Chapitre 1. Représentations des groupes fondamentaux des variétés de dimension trois	3
1. Description du cas hyperbolique	4
2. Construction combinatoire de représentations	11
3. Représentations et représentations périphériques	27
4. Géométrie des représentations	32
Chapitre 2. Vers une géométrie de Hilbert $p$ -adique	35
1. Les géométries de Hilbert	35
2. Quelques pistes sur les corps locaux	37
3. La géométrie des plans hyperboliques $p$ -adiques	38
Chapitre 3. Survol des travaux concernant l'équidistribution dans les espaces homogènes	39
Bibliographie	41



## Introduction

Les travaux présentés dans ce mémoire rentrent dans le cadre de deux grands thèmes d'un intérêt majeur. D'une part, ils traitent des *structures géométriques* dont on peut munir certaines variétés. La notion de structure géométrique est entendue au sens de  $(G, X)$ -structure, c'est-à-dire de structure localement modelée sur un espace  $X$  sur lequel agit un groupe  $G$ . D'autre part, ils traitent des *sous-groupes discrets des groupes linéaires*. Je précise qu'il faut ici comprendre « groupe linéaire » dans un sens très large : il s'agit des points d'un groupe linéaire sur les corps des réels ou des complexes, ou plus généralement n'importe quel corps local, ou encore sur les adèles. L'application d'idées issues de la géométrie ou de la dynamique à des cadres arithmético-algébriques est un processus qui m'a toujours intéressé au plus haut point et est une caractéristique de mon travail.

Ces deux domaines d'études sont en réalité intimement liés. En effet, on peut considérer qu'ils sont tous les deux en grande partie un prolongement des premiers travaux sur les structures hyperboliques sur les surfaces et le théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe. À cet égard, ma participation au travail collectif sur le théorème d'uniformisation [dSG10] et les deux cours que j'ai donné en M2 en collaboration avec N. Bergeron [BG13a, BG13b] ont représenté une étape importante de mes réflexions.

Ces deux domaines sont liés au point qu'il est difficile d'aborder l'un sans considérer l'autre. Par exemple, un des outils principaux pour montrer qu'un sous-groupe  $\Gamma$  d'un groupe linéaire  $G$  est discret est de l'associer à une structure géométrique via la construction d'un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur un espace  $X$  sur lequel agit  $G$ . C'est le cas par exemple du théorème de Poincaré pour les sous-groupes de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{R})$  ou de ses généralisations, comme le théorème de Vinberg pour  $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{R})$  via les géométries de Hilbert et l'action sur les espaces projectifs (voir par exemple [Ben08]).

Inversement, en présence d'une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$  – on renvoie à [Gol88] pour une présentation générale de ces structures –, son holonomie est un morphisme

$$\pi_1(M) \rightarrow G,$$

bien défini modulo l'action de  $G$  par conjugaison. Une piste pour comprendre les structures possibles est d'alors d'étudier l'ensemble de ces morphismes, c'est-à-dire l'espace des représentations :

$$\mathrm{Rep}_G(M) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G),$$

et son quotient par l'action de  $G$  par conjugaison que nous noterons dans ce mémoire  $\mathrm{Hol}$  :

$$\mathrm{Hol}_G(M) = \mathrm{Rep}_G(M)/G.$$

Notons qu'une variante algébrique de ce quotient est plus connue sous le nom de variété des caractères. Pour comprendre plus précisément la  $(G, X)$ -structure initiale, il est important d'étudier sa représentation d'holonomie. Par exemple, une condition nécessaire pour uniformiser la structure – c'est-à-dire de décrire cette structure sur  $M$  comme le quotient



d'un ouvert de  $X$  sous l'action (libre et propre) de l'holonomie du groupe fondamental  $\pi_1(M)$  – est que l'image de l'holonomie soit un sous-groupe discret de  $G$ .

Concluons cette brève discussion en mentionnant un lien supplémentaire : l'étude des déformations des représentations. Ici, on part de l'espace  $\text{Hol}_G(M)$  présenté ci-dessus, et on considère que le groupe  $G$  est inclus dans un groupe  $G'$ . On a alors par définition  $\text{Hol}_G(M) \subset \text{Hol}_{G'}(M)$ . Et une possibilité pour construire des points de  $\text{Hol}_{G'}(M)$  est de partir d'un point de  $\text{Hol}_G(M)$  et de le déformer. On pense par exemple à la définition des composantes de Hitchin quand  $M$  est une surface et  $G = \text{PGL}(n, \mathbf{R})$ . Dans le cadre des déformations, il est parfois possible de démontrer que le caractère discret d'une représentation est préservé par une petite déformation, en général grâce à la persistance d'un objet géométrique pertinent. On peut penser ici à la preuve par Labourie [Lab06] que les représentations dans les composantes de Hitchin sont fidèles et discrètes – je renvoie aussi à [Gui11] pour une présentation plus générale des espaces de représentations de groupes fondamentaux de surface. On peut aussi penser aux structures projectives convexes sur une variété, dont Koszul [Kos68] montrent qu'elles sont ouvertes. Ainsi la discrétude dans certaines composantes connexes de  $\text{Hol}_{\text{PGL}(n, \mathbf{R})}(M)$  est une propriété ouverte. Notons que dans les deux cas cités, la discrétude est aussi une propriété fermée, comme l'ont montré Labourie [Lab06] dans le premier cas et Benoist [Ben05] dans le second. Notons enfin qu'un cas rentre dans les deux exemples : le cas des structures projectives convexes sur les surfaces. Les résultats mentionnés sont alors dûs à Choi et Goldman [CG93]. On renvoie de nouveau à [Ben08] pour un survol de la littérature sur les structures projectives convexes.

Dans ce cadre général, mes travaux ont suivis trois directions principales et indépendantes. Ces trois directions correspondent aux trois chapitres de ce mémoire. Ces chapitres sont très déséquilibrés, certaines directions n'étant que survolées tandis que je passe plus de temps sur les travaux plus récents et en cours :

- L'étude dynamique de l'action de sous-groupes  $\Gamma$  discrets d'un groupe linéaire  $G$  sur un espace homogène sous  $G$ , c'est-à-dire de la forme  $G/H$ , où  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ . Je ne travaille plus activement dans ce domaine et ma contribution est brièvement présentée au chapitre 3 ;
- la recherche d'un bon espace géométrique sur lequel faire agir le groupe linéaire  $\text{PGL}(2, \mathbf{Q}_p)$ . Ceci est présenté au chapitre 2 ;
- l'étude des espaces  $\text{Hol}_G(M)$  quand  $M$  est une variété de dimension 3 et  $G = \text{PGL}(n, \mathbf{R})$ . C'est le sujet le plus développé de ce mémoire, dans le chapitre 1.

Je conclus cette brève introduction en mentionnant une activité annexe à mon travail de recherche principal. Il s'agit d'une collaboration avec le biologiste J.L. Jestin et le bioinformaticien B. Caudron. Partie de discussions sur les formes quadratiques sur les corps locaux, ma participation effective dans les articles [GJ12, GCJ13b, GCJ13a] relève principalement de la statistique élémentaire.

## CHAPITRE 1

### Représentations des groupes fondamentaux des variétés de dimension trois

Considérons une variété  $M$  et un groupe de Lie  $G$ . Il est naturel, comme je l'ai rappelé dans l'introduction, de considérer les représentations possibles du groupe fondamental de  $M$  dans  $G$ . On définit ainsi l'espace des représentations :

$$\text{Rep}_G(M) = \text{Hom}(\pi_1(M), G).$$

Si nous considérons ces représentations comme étant candidates à être l'holonomie d'une structure géométrique sur  $M$ , nous ne nous intéressons qu'aux représentations à conjugaison près. On définit donc aussi l'espace des représentations modulo conjugaison, noté  $\text{Hol}$  :

$$\text{Hol}_G(M) = \text{Hom}(\pi_1(M), G)/G.$$

Ce quotient pose problème, car l'action du groupe  $G$  par conjugaison est loin d'être libre et propre. Une solution classique est de considérer la variété des caractères, c'est-à-dire la variété algébrique définie par l'anneau des fonctions sur  $\text{Rep}_G(M)$  invariantes sous l'action de  $G$  ; dans ce mémoire je considérerai effectivement le quotient, en gardant en mémoire que la grande majorité des points sont des points lisses de ce quotient. En pratique, je définirai des coordonnées sur des ouverts de cet espace, qui éviteront les points singuliers<sup>1</sup>. Un des cadres naturels d'étude de cet espace est l'étude des structures géométriques sur la variété  $M$ , l'exemple fondateur étant bien sûr le cas où  $M$  est une surface de genre  $g \geq 2$  et  $G = \text{PSL}(2, \mathbf{R})$ . L'espace  $\text{Hol}_G(M)$  contient dans ce cas comme une composante connexe l'espace de Teichmüller de la surface considérée. De nombreux travaux ont été menés sur cet espace et sur les *déformations* des représentations dans d'autres groupes de Lie contenant  $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ . La littérature sur ce sujet est passionnante et foisonnante. Je renvoie à [Gui11] pour une référence en français sur ce sujet.

Nous nous intéresserons ici au cas d'une variété  $M$  de dimension 3. On peut naturellement essayer de construire une structure hyperbolique sur  $M$ , c'est à dire localement modélée sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ . Sa représentation d'holonomie est alors un élément de l'espace  $\text{Hol}_{\text{PGL}(2, \mathbf{C})}(M)$ . Pour construire de telles représentations, Thurston [Thu97] a proposé une méthode combinatoire et algorithmique. Par la suite, ces travaux ont été repris, notamment par Neumann et Zagier [NZ85], Choi [Cho04], Kabaya [Kab07]...

Si on cherche maintenant à déformer ces représentations, on considère d'autres groupes  $G$ . Nous nous attacherons dans ce chapitre plus particulièrement à  $G = \text{PGL}(3, \mathbf{C})$  ou  $\text{PGL}(n, \mathbf{C})$  ( $n \geq 3$ ). Dans la suite, nous simplifierons l'écriture de l'indice ; nous notons pour  $n$  entier :

$$\text{Hol}_n(M) := \text{Hol}_{\text{PGL}(n, \mathbf{C})}(M).$$

Une grande partie du chapitre est consacrée à l'étude de  $\text{Hol}_3(\mathbf{C})$ . Pour faire cette étude, nous reprenons la méthode combinatoire due à Thurston.

---

1. Cette discussion est approfondie dans la première section de l'article [FGK<sup>+</sup>14].

Notre objectif est en fait plus précis que l'étude de cet espace de représentations. Nous considérerons toujours le cas d'une variété  $M$  compacte à bord  $\partial M$ . Remarquons tout de suite que l'exemple des complémentaires de nœuds sera notre exemple favori. Il ne semble pas s'inscrire dans notre choix de variété compacte à bord. En réalité, si  $K$  est un nœud dans  $\mathbb{S}^3$ , nous considérerons comme variété  $M$  le complémentaire d'un voisinage tubulaire du nœud  $K$  (par commodité, nous désignerons tout de même cette variété  $M$  comme le complémentaire du nœud  $K$ ). Cette variété  $M$  a le même groupe fondamental que le plus usuel complémentaire de  $K$ , mais il est utile pour nous de matérialiser son tore périphérique comme le bord de  $M$ .

On fixe une fois pour toute l'inclusion de  $\pi_1(\partial M)$  dans  $\pi_1(M)$ . Il y a alors une application naturelle de restriction au bord

$$\text{Hol}_G(M) \rightarrow \text{Hol}_G(\partial M).$$

Dans le cas du groupe  $G = \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ , et  $M$  un complémentaire de nœud, l'image de cette application<sup>2</sup> est une variété algébrique définie par le fameux  $A$ -polynôme du nœud. Les techniques que nous développerons permettront de bien appréhender cette application de restriction. Nous aborderons ces thèmes dans la section 3. Enfin dans la dernière section 4, nous soulèverons la question de structures géométriques sous-jacentes aux représentations construites.

Ce chapitre décrit principalement les articles [BFG13a, BFG<sup>+</sup>13b, Gui13a, Gui13c, FGK<sup>+</sup>14]. Ce travail s'inscrit dans une dynamique récente, avec les travaux parallèles d'un groupe autour de M. Goerner, S. Garoufalidis et C. Zickert [GTZ11, GGZ12, GZ13] et d'un autre groupe composé de T. Dimofte, M. Gabella et A. Goncharov [DGG13]. Leurs motivations sont légèrement différentes, tirant plus vers la physique mathématique et les invariants algébriques, mais les techniques déployées sont très similaires. Nous reviendrons dans quelques pages sur les différentes contributions.

## 1. Description du cas hyperbolique

Nous décrivons rapidement dans cette partie le cas hyperbolique, c'est-à-dire les résultats obtenus par Thurston [Thu97] et Neumann-Zagier [NZ85] dans le cas où  $G = \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ . Notre exemple de variété  $M$  favori est le complémentaire du nœud de huit. C'est l'exemple original de Thurston, et son étude contient toutes les idées générales.

Nous décrivons ces résultats dans l'idée de faire ressortir ce que nous généraliserons par la suite. De ce fait, la présentation pourra sembler anachronique et les énoncés loin des énoncés originaux. Cependant, tout est dans les travaux cités ; et il nous paraît important de souligner la structure des résultats que nous généraliserons.

Le point de départ de ces travaux est de commencer par construire des coordonnées pour l'espace de représentation  $\text{Hol}_2(M)$ , ou plus précisément pour l'espace des structures hyperboliques (non forcément complètes) que porte  $M$ . Pour ça, on fait du légo : on découpe notre variété, on assigne des formes à chaque pièce, et on les recolle ! Commençons donc par décrire le découpage (la triangulation), puis les formes des pièces (les tétraèdres hyperboliques idéaux) dans le point suivant. On essayera ensuite de les recoller.

**1.1. Triangulation et structures hyperboliques.** Considérons  $M$  une variété compacte à bord, dont le bord  $\partial M$  est un tore. Comme mentionné plus haut, l'exemple à garder en tête est le complémentaire d'un voisinage tubulaire du nœud de huit dans la sphère  $\mathbb{S}^3$ . La

---

2. Vue au niveau de la variété des caractères

première étape, topologique et combinatoire, est de "découper"  $M$ , c'est-à-dire de la décomposer en une union de tétraèdres tronqués. Riley (voir [Ril13] pour un survol de l'histoire de la construction d'une structure hyperbolique sur le complémentaire du noeud de huit) le premier a décrit une telle triangulation dans le cas du noeud de huit, à l'aide de deux tétraèdres. Cette triangulation est décrite dans la figure 1 : il faut appairier les faces ayant la même combinatoire d'arêtes.

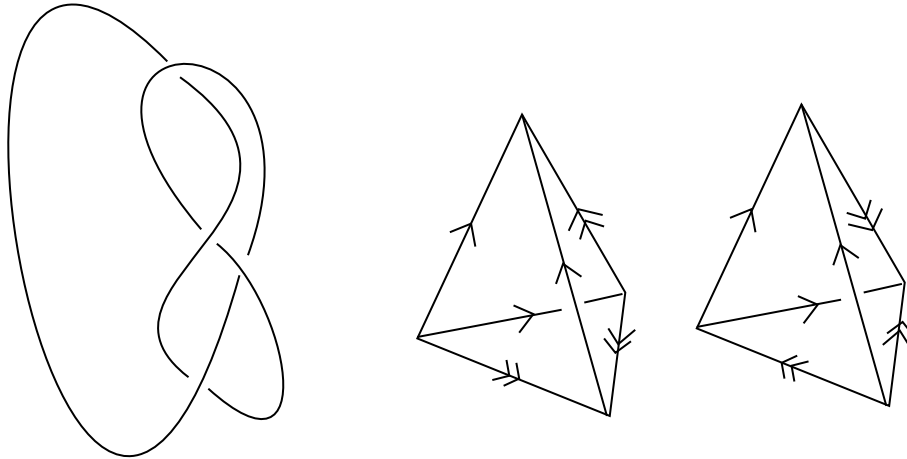


FIGURE 1. Le noeud de huit et la triangulation de son complémentaire

Ainsi, on considère des tétraèdres  $(T_i)_{1 \leq i \leq N}$  et un recollement de faces  $\varphi$  (c'est-à-dire une collection de bijections renversant l'orientation entre les faces des  $T_i$  qui apparie les faces deux à deux). Dans le cas du complémentaire du noeud de huit, ce recollement est défini par la combinatoire des arêtes de la figure 1 ; on note  $\text{Tronc}(T_i)$  les tétraèdres tronqués à chaque sommet. On demande alors qu'il existe un homéomorphisme  $M \simeq \cup_1^N \text{Tronc}(T_i) / \varphi$ . Soyons ambitieux : essayons de construire une structure hyperbolique sur l'intérieur de  $M$  (pas forcément complète). Pour ça, l'idée est de munir chacun des tétraèdres de la triangulation d'une structure de tétraèdre idéal hyperbolique. Il suffit de les tronquer pour obtenir une structure hyperbolique sur un ouvert de  $M$  : l'union des intérieurs des tétraèdres. Nous avons donc donné des formes à chaque brique du légo. Peut-on étendre la structure géométrique, c'est-à-dire encastrent géométriquement les briques comme nous le dicte la combinatoire de la triangulation ?

Pour coller deux briques adjacentes, c'est-à-dire pour étendre la structure hyperbolique à l'intérieur des faces, nous ne rencontrons pas de problème : une face de  $T_i$  est un triangle idéal de  $\mathbb{H}^3$ . Toutes les faces sont donc isométriques (il y a un élément de  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  qui envoie une face sur l'autre). On peut donc les recoller. Remarquons ici que c'est une chance qu'il n'y ait pas de problème. On pourrait très bien (et on le fera) travailler dans des géométries où tous les triangles ne sont pas congrus. Il faut alors mettre des conditions sur les formes des briques pour assurer que ce premier recollement est possible.

Il nous faut encore regarder ce qu'il se passe au niveau des arêtes : on commence à recoller nos briques en tournant autour d'une arête. Quand on est revenu au point de départ au

niveau combinatoire, il faut s'assurer qu'on le fait aussi d'un point de vue géométrique. Autrement dit, il faut mettre une condition sur la structure hyperbolique des  $T_i$  pour s'assurer que la somme des angles diédraux autour d'une arête est<sup>3</sup>  $2\pi$ .

**1.2. Définition des paramètres et condition de recollement.** Comment exprimer ces conditions ? On va commencer par choisir des paramètres.

Un tétraèdre idéal et orienté de  $\mathbb{H}^3$  est décrit par ses quatre sommets. Ce sont quatre points sur le bord de  $\mathbb{H}^3$ , c'est-à-dire la droite projective complexe  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  et muni d'un ordre à permutation paire près. Cette configuration de quatre points est donc décrite (modulo l'action de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ ) par leur birapport. Pour être plus précis, on a un birapport par arête (l'arête prescrivant l'ordre dans lequel on considère les points). Les birapports associés à des arêtes opposées sont égaux. Il en reste donc trois, qui sont de la forme :

$$z, z' := \frac{1}{1-z} \text{ et } z'' := 1 - \frac{1}{z}.$$

Comme le tétraèdre est orienté, on a de plus  $\mathrm{Im}(z) > 0$ .

Arrêtons-nous un instant pour nous intéresser à une surface : le bord du tétraèdre. Il est homéomorphe à une sphère privée de 4 points et est naturellement triangulé. Si on s'intéresse aux structures de surface hyperbolique pliée<sup>4</sup> qu'on peut mettre sur cette surface, on voit qu'on peut aussi les décrire par la donnée un birapport par arête, soumis à des conditions (notamment les birapports des arêtes opposées sont égaux). Il reste donc à nouveau trois birapports  $z, z'$  et  $z''$ , qui sont cette fois soumis à une condition :

$$(1) \quad z z' z'' = -1.$$

En suivant ce point de vue, l'espace des modules des tétraèdres hyperboliques idéaux est une courbe algébrique dans une surface, cette surface étant l'espace de modules d'une structure géométrique sur le bord du tétraèdre. De plus, quand on regarde la condition 1 (oublions un instant le signe négatif à droite – nous y reviendrons dans le cas de  $\mathrm{PGL}(3)$ ), on voit que la surface en question est l'ensemble des triplets  $(\exp(u), \exp(u'), \exp(u''))$  où le vecteur  $ue + e'e' + u''e''$  appartient au sous-espace vectoriel<sup>5</sup>  $J_T^*$  de dimension 2 défini dans  $\mathbb{C}^3 = \mathrm{Vect}(e, e', e'')$  par l'équation  $u + u' + u'' = 0$ . Donc, à ce signe près, c'est ce qu'on appelle une *variété torique*. Nous utiliserons parfois l'expression imagée « exponentielle de l'espace vectoriel ». La condition  $z' = \frac{1}{1-z}$  peut alors être considérée dans cette surface comme une condition de *remplissabilité* par rapport à la condition 1.

Refermons cette parenthèse et revenons à nos conditions d'arêtes. Rappelons qu'on considère une variété  $M$  avec une triangulation  $\mathcal{T}$  par des tétraèdres  $T_1, \dots, T_N$ . Prescrire la forme de chaque tétraèdre fournit des jeux de coordonnées  $z_i, z'_i$  et  $z''_i$  pour chaque  $1 \leq i \leq N$  soumis aux conditions décrites ci-dessus. Nous voulons exprimer que si on recolle les tétraèdres idéaux qui font le tour d'une arête, on doit revenir au point de départ. Pour ça, un simple calcul montre qu'on obtient pour chaque arête de la triangulation une équation,

3. Pour construire une représentation d'holonomie correspondant à une structure branchée, on peut l'autoriser à être un multiple de  $2\pi$ . Nous aurons plutôt ce deuxième point de vue.

4. On peut aussi parler de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ -systèmes locaux.

5. La notation  $J_T^*$  semble compliquée à ce stade, mais on verra plus loin que cet espace est effectivement le dual d'un certain espace  $J_T$ . Je préfère le faire apparaître tout de suite pour faciliter les comparaisons.

dite *équation d'arête*, du type :

$$\prod_1^N z_i^{a_i} (z'_i)^{b_i} (z''_i)^{c_i} = 1,$$

où les puissances  $a_i, b_i, c_i$  sont des entiers déterminés par la combinatoire de la triangulation.

Ainsi, considérons ce qu'on appelle la *variété des déformations*<sup>6</sup> :

$$\text{Deform}_2(M, \mathcal{T}) := \left\{ (z_i, z'_i, z''_i)_{1 \leq i \leq N} \in (\mathbf{C}^\times)^{3N} \text{ vérifiant } \begin{array}{l} \forall i, z'_i = \frac{1}{1-z_i} \text{ et } z''_i = 1 - \frac{1}{z_i} \\ \text{et toutes les équations d'arêtes} \end{array} \right\}$$

Alors, les considérations faites jusqu'à présent montrent qu'à tout élément de  $\text{Deform}_2(M, \mathcal{T})$  qui vérifie  $\text{Im}(z_i) > 0$ , on peut associer une structure hyperbolique non forcément complète. Notamment, on associe une représentation d'holonomie. L'application qui a un tel point de  $\text{Deform}_2(M, \mathcal{T})$  associe une représentation est algébrique et s'étend à tout l'espace  $\text{Deform}_2(M, \mathcal{T})$ .

On a ainsi une application  $\text{Deform}_2(M, \mathcal{T}) \rightarrow \text{Hol}_2(M)$ . Elle nous fournit ce que nous appelons abusivement des coordonnées pour  $\text{Hol}_2(M)$ . Remarquons que cette méthode est algorithmique et est à la base du programme SnapPy pour construire et étudier les structures hyperboliques sur les complémentaires de noeud.

**1.3. L'espace symplectique de Neumann-Zagier.** Motivés par des questions fondamentales sur le volume des variétés hyperboliques et des chirurgies de Dehn, Neumann et Zagier [NZ85, Neu04] vont montrer que  $\text{Deform}_2$  a naturellement une structure de lagrangien dans une variété symplectique. Nous présentons maintenant cette construction de l'espace symplectique de Neumann-Zagier.

À la section précédente, nous avons associé à chaque tétraèdre  $T_i$  un espace  $J_{T_i}^*$  de dimension 2 ; considérons maintenant la somme directe  $J^* = \sum_i^N J_{T_i}^*$  de ces  $J_{T_i}^*$ . Un point de  $\text{Deform}_2$  appartient – au signe près – au produit des surfaces décrites plus haut comme exponentielles des espaces vectoriels  $J_{T_i}^*$ . Notamment, pour ce qui concerne les espaces tangents en n'importe quel point à ce produit de surfaces, ils sont naturellement identifiés à l'espace vectoriel  $J^*$ . On note de plus que les équations d'arêtes se linéarisent. En effet, considérons le sous-espace<sup>7</sup>  $\ker(F^*)$  défini par les équations à coefficients entiers :

$$\sum_1^N a_i u_i + b_i u'_i + c_i u''_i = 0 \text{ pour chaque arête.}$$

Alors, un point de  $\text{Deform}_2(M, \mathcal{T})$  appartient à l'exponentielle  $\exp(\ker(F^*))$  de  $\ker(F^*)$  – c'est-à-dire l'ensemble des points de  $(\mathbf{C}^\times)^{3N}$  de coordonnées  $(\exp(u_i), \exp(u'_i), \exp(u''_i))_{1 \leq i \leq N}$  pour  $(u_i, u'_i, u''_i)_{1 \leq i \leq N}$  dans  $\ker(F^*)$ .

De plus on construit une structure symplectique sur chacun des espaces vectoriels  $J_{T_i}^*$ , comme la restriction de la 2-forme  $\Omega^*$  sur  $\mathbf{C}^3 = \text{Vect}(e, e', e'')$  définie par :

$$\Omega^*(e, e') = 1, \Omega^*(e', e'') = 1 \text{ et } \Omega^*(e'', e) = 1.$$

6. On l'appelle ainsi car elle paramétrise les déformations de l'unique structure hyperbolique complète.

7. Ici aussi, les notations ne prendront leur sens que plus loin. En attendant, ce sous-espace défini par des équations est bien sûr le noyau d'une application, qu'on note  $F^*$ .

On remarque que  $\Omega^*$  est la seule (à normalisation près) forme bilinéaire alternée invariante par permutation circulaire des coordonnées. Dans notre cadre, il est naturel de chercher une forme invariante par une telle permutation, car le choix d'appeler tel birapport  $z$  et les autres  $z', z''$  est arbitraire. Faire un autre choix revient à faire une permutation circulaire. Cette forme bilinéaire symplectique sur  $J_T^*$  induit une forme symplectique la surface définie par  $zz'z'' = -1$  car chaque espace tangent est identifié à  $J_T^*$ . On vérifie alors aisément que la condition de remplissabilité  $z' = \frac{1}{1-z}$  définit une sous-variété lagrangienne dans cette variété symplectique.

En considérant  $J^*$  comme une somme directe orthogonale des espaces symplectiques  $J_T^*$ , on obtient une forme bilinéaire symplectique sur  $J^*$ , toujours notée  $\Omega^*$ . Neumann et Zagier [NZ85, Neu04] montrent dans un langage différent le théorème suivant – voir aussi Choi [Cho04] pour une présentation plus proche de la présente version :

THÉORÈME 1 (Neumann-Zagier [NZ85, 2.2, 2.3 and 2.4]).

- (1) L'orthogonal pour  $\Omega^*$  de  $\ker(F^*)$  dans  $J^*$  est inclus dans  $\ker(F^*)$ .
- (2) Le quotient de  $\ker(F^*)$  par son orthogonal est symplectiquement isomorphe à l'espace  $H^1(\partial M, \mathbf{C})$ , où le dernier espace est équipé du double du cup-produit.

*Remarques :* Ce résultat peut s'exprimer dans un langage plus proche de la géométrie symplectique et des structures de Poisson. Par exemple, le premier résultat énonce que l'espace  $\ker(F^*)$  est coisotrope. On peut le dire aussi sous la forme suivante : les équations de recollement Poisson-commutent. Pour réinterpréter le deuxième point, considérons la variété définie par les seules conditions d'arêtes et conditions  $z_i z'_i z''_i = -1$ . Ses espaces tangents sont tous identifiés à  $J^* \cap \ker(F^*)$  et donc cette variété est munie d'une 2-forme, par restriction de la forme symplectique. Le deuxième point du théorème permet d'identifier la réduction symplectique de cette variété comme  $H^1(M, \mathbf{C}^\times)$  avec sa forme symplectique naturelle. Nous utiliserons dans ce papier le point de vue utilisé dans Neumann-Zagier [NZ85, Neu04] et dans mon travail [BFG13a, Gui13c]. Je donnerai pour les résultats principaux des formulations différentes. Je renvoie par exemple à [DGG13] pour une présentation utilisant ce dernier point de vue.

Pour rendre plus concret le dernier espace vectoriel symplectique, on peut fixer une base symplectique du tore  $\partial M$ . Ça nous donne un isomorphisme  $H^1(\partial M, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^2$ . À travers cet isomorphisme, la forme symplectique devient le double de la forme symplectique standard sur  $\mathbf{C}^2$ .

Remarquons pour finir que comme  $\partial M$  est un tore, son groupe fondamental est commutatif isomorphe à  $\mathbf{Z}^2$ . Et, si on fait abstraction des représentations unipotentes<sup>8</sup>, un point de l'espace  $\text{Hol}_2(\partial M)$  est décrit par les valeurs propres (bien définies seulement modulo  $x \mapsto x^{-1}$ ) d'une base de l'homologie, soit un élément de  $(\mathbf{C}^\times)^2 \simeq H^1(\partial M, \mathbf{C}^\times)$ . On a donc une application de  $(\mathbf{C}^\times)^2$  vers  $\text{Hol}_2(\partial M)$ <sup>9</sup>. On définit une forme symplectique sur  $(\mathbf{C}^\times)^2 = H^1(\partial M, \mathbf{C}^\times)$  en identifiant naturellement tous ses espaces tangents à  $H^1(\partial M, \mathbf{C})$ . Et nous pouvons pousser cette forme sur  $\text{Hol}_2(\partial M)$ . La 2-forme obtenue s'appelle la forme de Weil-Peterson (ou Goldman-Weil-Peterson, ou encore Atiyah-Bott-Goldman-Weil-Peterson). Nous y reviendrons.

8. Par exemple en travaillant au niveau de la variété des caractères.

9. Cette application est donc injective modulo  $(x, y) \rightarrow (x^{-1}, y^{-1})$ .

L'aspect combinatoire de la paramétrisation par les birapports  $z, z', z''$  permet de montrer que l'application  $\ker(F^*) \rightarrow H^1(\partial M, \mathbf{C})$  induit – par passage à l'exponentielle et restriction à la sous-variété  $\text{Deform}_2(M, \mathcal{T})$  – une application  $\text{Deform}_2(M, \mathcal{T}) \rightarrow H^1(\partial M, \mathbf{C}^\times)$  qui rentre dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Deform}_2(M, \mathcal{T}) & \rightarrow & H^1(\partial M, \mathbf{C}^\times) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hol}_2(M) & \rightarrow & \text{Hol}_2(\partial M) \end{array}$$

Autrement dit, on peut considérer que cette application linéaire  $\ker(F^*) \rightarrow H^1(\partial M, \mathbf{C})$  – dûment restreinte aux espaces tangents – linéarise l'application de restriction  $\text{Hol}_2(M) \rightarrow \text{Hol}_2(\partial M)$ .

Pour résumer, l'espace  $\text{Deform}_2(M, \mathcal{T})$  est envisagé dans le produit des surfaces  $z_i z'_i z''_i = -1$  comme l'intersection de la sous-variété lagrangienne définie par les conditions  $z'_i = \frac{1}{1-z_i}$  et de la sous-variété torique

$$\exp(\ker(F^*)).$$

En réalité, l'application de restriction au bord  $\text{Deform}_2(M, \mathcal{T}) \rightarrow \text{Hol}_2(M) \rightarrow \text{Hol}_2(\partial M)$  est étendue à tout  $\exp(\ker(F^*))$  et est envisagée comme une réduction symplectique vers  $\text{Hol}_2(\partial M)$  muni de la forme de Weil-Peterson.

**Applications : volume et rigidité.** La motivation originelle de Neumann et Zagier pour construire cet espace symplectique est de calculer la variation du volume lors de la déformation de la représentation d'holonomie de la structure hyperbolique. Nous renvoyons à l'introduction de leur article [NZ85] pour une description de leur résultat et pour le lien entre le volume et cet espace symplectique.

La remarque qui permet de relier la discussion ci-dessus au volume hyperbolique est le fait que le volume d'un tétraèdre idéal hyperbolique est donné par le dilogarithme de Bloch-Wigner :

$$D(z) = \arg(1-z) \log|z| - \text{Im} \left( \int_0^z \log(1-t) \frac{dt}{t} \right).$$

En effet, pour un tétraèdre hyperbolique tel qu'un birapport de ses quatre sommets est  $z$ , son volume hyperbolique est  $D(z)$ .

Ainsi un élément de  $\text{Deform}_2$  a un volume bien défini : on fait la somme des volumes de chaque tétraèdre. Ces considérations ont d'importantes interprétations en terme de K-théorie, d'invariant de Chern-Simons et de groupe de Bloch. Nous ne reviendrons pas sur ces questions dans ce mémoire – voir par exemple [Neu04].

Le théorème de Neumann-Zagier énoncé ci-dessus permet alors de montrer que la variation du volume lorsqu'on déforme une représentation se comprend uniquement en termes des valeurs propres de deux générateurs de la restriction au tore périphérique. Notamment, cette variation peut se calculer au niveau de la variété  $\text{Hol}_2(\partial M)$ .

Une autre application est le problème de rigidité locale d'une représentation. La question est : peut-on déformer un élément de  $\text{Hol}_2(M)$  sans déformer sa restriction au bord, c'est-à-dire l'élément de  $\text{Hol}_2(\partial M)$  associé. Si ce n'est pas possible, on dit que la représentation est localement rigide. Il y a plusieurs possibilités pour voir que la représentation d'holonomie de la structure hyperbolique complète est localement rigide : le critère de rigidité locale de Weil (via des calculs cohomologiques), ou bien le théorème de rigidité de Mostow.



On peut aussi montrer cette rigidité locale en utilisant nos paramètres : on a vu qu'ils étaient particulièrement bien adaptés pour calculer la représentation périphérique à travers l'application  $\ker(F^*) \rightarrow H^1(\partial M, \mathbf{C})$ . Le deuxième point du théorème de Neumann-Zagier montre que le vecteur tangent à une déformation de la représentation qui ne déformerait pas sa restriction au bord est dans le noyau de cette application linéaire, donc dans le noyau de  $\Omega^*$  restreint à  $\ker(F)$ . Mais ce vecteur tangent doit aussi être tangent à la condition lagrangienne. On montre alors, par des arguments de positivité, qu'en la représentation d'holonomie de la structure hyperbolique complète l'espace tangent à la condition lagrangienne est transverse à ce noyau. Ça montre la rigidité locale, voir Choi [Cho04]. Nous y revenons plus en détail plus loin.

En combinant ces deux applications, Dunfield [Dun99] montre dans le cas d'un complémentaire de noeud le résultat suivant :

THÉORÈME 2 (Dunfield). *L'application de restriction*

$$\mathrm{Hol}_2(M) \rightarrow \mathrm{Hol}_2(\partial M),$$

*restreinte à la composante irréductible de  $\mathrm{Hol}_2(M)$  qui contient l'holonomie de la structure hyperbolique complète, est birationnelle sur son image.*

On connaît par ailleurs des exemples de variétés pour lesquels il existe d'autres composantes de  $\mathrm{Hol}_2(M)$  qui ne vérifient pas cette propriété.

**1.4. Généralisations à d'autres groupes.** Une partie de mon travail récent traite de généralisations de ces travaux aux groupes de rang supérieur. Ces dernières années, ce sujet a été l'objet de nombreux travaux, aux motivations très différentes. Le problème est d'une part de généraliser les coordonnées de birapport et les équations de recollement, d'autre part de comprendre les structures symplectiques.

Le premier travail à apparaître a été le cas de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ , dans notre article [BFG13a] où nous définissons les coordonnées – directement inspirées par Fock et Goncharov – et nous parvenons à généraliser la preuve de Neumann-Zagier. Nous en déduisons une formule variationnelle pour le volume. La rigidité locale est traitée dans le papier [BFG<sup>+</sup>13b]. De manière parallèle, Zickert [Zic] définit des coordonnées similaires sans montrer la généralisation complète du théorème de Neumann-Zagier. Son résultat ne permet notamment pas de retrouver la rigidité locale ou la formule variationnelle pour le volume. Enfin, des réinterprétations du travail de Neumann-Zagier sont faites, voir par exemple Dimofte-Garoufalidis [DG13].

La généralisation naturelle en rang plus grand (le cas de  $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{C})$  pour  $n \geq 4$ ) a eu lieu en plusieurs étapes. D'une part les coordonnées sont définies et une partie du résultat de Neumann-Zagier prouvés (notamment que les équations de recollement Poisson-commutent) indépendamment par Dimofte-Gabella-Goncharov [DGG13] et Garoufalidis-Goerner-Zickert [GGZ12]. Cependant, bien qu'annoncée dans [DGG13, Page 31], la généralisation complète du résultat de Neumann-Zagier n'est pas complètement obtenue dans ces deux travaux. La dernière étape est réalisée par deux travaux indépendants : Garoufalidis et Zickert [GZ13] dans la suite de leur précédent papier et moi-même [Gui13c] dans une optique proche de [DGG13]. Je donne par ailleurs l'application à la rigidité locale.

Je ne parlerai dans ce mémoire que du cas  $n = 3$ .

## 2. Construction combinatoire de représentations

Nous expliquons dans cette section comment reprendre les considérations de la section précédente pour construire des représentations à valeurs dans  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ . Nous commençons par préciser le cadre exact auquel ces idées s'appliquent dans le premier paragraphe. Ensuite, le premier pas à accomplir est de comprendre ce que doivent devenir les tétraèdres idéaux. La notion pertinente est celle de tétraèdre de drapeaux. Nous verrons dans le deuxième paragraphe pourquoi et aussi comment paramétrer ces tétraèdres de drapeaux – i.e. par quoi remplacer les birapports de la section précédente. Ce sera fait en reprenant les idées de Fock et Goncharov pour paramétrer les représentations de groupes de surfaces dans  $\mathrm{PGL}(3)$  : ici la surface qu'on considère est le bord du tétraèdre épointé, soit une sphère à quatre trous. Nous donnons ensuite une vision plus formelle des coordonnées ainsi construites pour un tétraèdre de drapeaux, en reprenant le point de vue du cas hyperbolique : nous envisagerons l'espace des coordonnées pour un tétraèdre de drapeaux comme une sous-variété lagrangienne dans une variété symplectique.

Le paragraphe suivant explique quelles sont les conditions à imposer pour pouvoir recoller les tétraèdres – l'analogie des équations d'arêtes. Ensuite nous expliquerons comment obtenir la représentation d'holonomie associée. Et nous décrivons rapidement comment arriver à la généralisation du résultat de Neumann-Zagier.

Les trois derniers paragraphes sont consacrés d'abord à éclaircir le lien entre le travail fait et la variété des représentations, puis à donner des exemples de calculs explicites (dus à E. Falbel, P.V. Koseleff et F. Rouillier [FKR13]) et enfin à expliquer la généralisation du volume hyperbolique à ce cadre.

Comme expliqué plus haut, toutes ces considérations se généralisent aux représentations à valeurs dans  $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{C})$ , voir [DGG13, GGZ12, Gui13c, GZ13].

**2.1. Variétés triangulées.** On appellera tétraèdre *orienté* un simplexe de dimension 3 avec un ordre sur les sommets à permutation paire près. Étant donné un tétraèdre orienté, on peut orienter le bord du tétraèdre par la « normale sortante » et donc chaque face hérite d'une orientation. Inversement, si on agit sur les sommets du tétraèdre par une permutation impaire, alors on doit renverser l'orientation de son bord.

2.1.1. *Triangulations idéales.* Commençons par définir la notion de triangulation idéale d'une variété.

**DÉFINITION 1.** Une triangulation abstraite, notée  $\mathcal{T}$ , est la donnée d'un nombre fini de tétraèdres orientés  $(T_\mu)_{\mu=1\dots y}$  ainsi que d'une application  $\Phi$  de recollement de faces, c'est-à-dire une collection de bijections renversant l'orientation  $f_i : F_i \sim F'_i$  où les  $F_i$  et  $F'_i$  sont des faces des  $T_\mu$ , toutes différentes.

Pour chaque tétraèdre  $T_\mu$ , on note  $\mathrm{Tronc}(T_\mu)$  le tétraèdre tronqué à chaque sommet.

Topologiquement, on obtient le tétraèdre tronqué en lui retranchant une petite pyramide au voisinage de chaque sommet. C'est donc un objet fermé à huit faces, dont quatre sont des triangles et quatre des hexagones. On peut toujours recoller les tétraèdres tronqués  $\mathrm{Tronc}(T_\mu)$  en suivant  $\Phi$ . On note l'espace quotient :

$$K_{\mathcal{T}} = \sqcup_1^y \mathrm{Tronc}(T_\mu) / \Phi.$$

**DÉFINITION 2.** *Étant donné une variété orientée  $M$  de dimension 3 à bord, on appelle triangulation idéale, ou parfois plus simplement triangulation de  $M$ , la donnée d'une triangulation abstraite  $\mathcal{T}$  et d'un homéomorphisme orienté entre  $M$  et  $K_{\mathcal{T}}$ . On dira aussi que  $M$  est triangulée par  $\mathcal{T}$ .*

2.1.2. *Cas des complexes fermés.* On fera dans ce mémoire une hypothèse supplémentaire, qui permet de simplifier l'exposition : que le complexe de tétraèdres est fermé, ou autrement dit que toutes les faces sont recollées, et que  $K$  n'a qu'un seul sommet dont l'étoile est torique. Dans ce cas, l'intérieur  $M$  de  $K_{\mathcal{T}}$  est une variété à une pointe. Comme c'est l'intérieur d'une variété de dimension 3 à bords toriques, sa caractéristique d'Euler est nulle. En calculant la caractéristique d'Euler du complexe de tétraèdres, on obtient (voir par exemple [NZ85]) :

**FAIT 1.** *Le nombre d'arêtes dans le complexe de tétraèdres est égal au nombre  $v$  de tétraèdres.*

Les exemples fondamentaux, à garder en tête, sont les complémentaires de nœuds. Pour être précis, il faut plutôt parler de complémentaire d'un voisinage ouvert de nœud : le complémentaire du nœud en lui-même n'est pas une variété à bord, mais plutôt l'intérieur d'une variété à bord, de bord un tore. C'est cette variété à bord qu'on triangule, comme dans l'exemple du nœud de huit.

Remarquons que le bord de  $M$ , qui est un tore, est naturellement triangulé par les traces des tétraèdres.

Précisons que même dans ce cas (plus généralement  $M$  une variété compacte dont l'intérieur porte une structure hyperbolique), l'existence d'une triangulation n'est pas complètement garantie. À ma connaissance, les meilleurs résultats dans cette direction sont dus à Petronio et Porti [PP00], qui construisent une triangulation éventuellement dégénérée de  $M$  – grâce à la décomposition d'Epstein et Penner ; et Luo, Schleimer et Tillmann [LST08a] qui montrent qu'un revêtement fini de  $M$  est triangulable. En pratique, pour nos résultats, ce dernier résultat sera suffisant.

Le cadre topologique de nos travaux est maintenant fixé : nous considérons toujours une variété triangulée  $M$  à pointe, et notons  $\mathcal{T} = ((T_{\mu})_{\mu=1\dots v}, \Phi)$  la triangulation abstraite. Dans le cas hyperbolique, comme expliqué dans la section précédente, on construit des représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$  en choisissant pour chaque tétraèdre une structure de tétraèdre hyperbolique idéal soumis à certaines conditions. Dans la section suivante, on explique la notion analogue à celle de tétraèdre idéal dans le cas de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$  : celle de tétraèdre de drapeaux.

**2.2. Tétraèdres de drapeaux.** La façon de fixer la « forme » des tétraèdres est de les décorer en associant un drapeau à chaque sommet (rappelons déjà qu'un drapeau d'un espace vectoriel de dimension 3 est une droite dans un plan). Il nous faut paramétrer l'espace de ces tétraèdres de drapeaux pour obtenir l'analogue des birapports.

2.2.1. *L'espace des drapeaux.* La définition et la paramétrisation des tétraèdres de drapeaux sont très générales. Nous l'expliquons ici pour le groupe  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ , mais on peut faire varier la dimension et le corps (pour une version plus générale, voir [DGG13]), et même le groupe. On note  $V$  le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}^3$ , on note  $V^*$  son dual et  $\mathbf{P}(V)$ ,  $\mathbf{P}(V^*)$  les espaces projectifs associés. L'espace des drapeaux de  $V$  est défini comme :

$$\mathcal{D} := \{([x], [f]) \in \mathbf{P}(V) \times \mathbf{P}(V^*) \mid f(x) = 0\}.$$

Remarquons tout de suite que c'est cohérent avec la définition informelle donnée plus haut : le point projectif  $[x]$  est bien une droite de  $V$ , tandis que le noyau de  $f$  définit un plan (qui ne dépend pas du représentant) ; la condition d'annulation stipule que la droite doit être incluse dans le plan. En notant  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $V$  et  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  la base duale, un exemple de drapeau est la droite engendrée par  $e_1$  dans le plan engendré par  $e_1$  et  $e_2$ . Comme point de  $\mathcal{D}$ , il est représenté par le couple  $([e_1], [e_3^*])$ . Le groupe  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$  agit sur l'espace des drapeaux : en effet il agit naturellement sur  $V$ . Il agit aussi sur  $V^*$  par la représentation duale, définie pour  $g \in \mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ ,  $f \in V^*$  et  $x \in V$  par :

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}(x)).$$

Ainsi, si le couple  $([x], [f])$  est dans  $\mathcal{D}$ , alors on définit le couple :

$$g \cdot ([x], [f]) = ([g(x)], [g \cdot f]).$$

On vérifie immédiatement que c'est encore un point de  $\mathcal{D}$ , ce qui définit l'action de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$  sur  $\mathcal{D}$ . De plus, on vérifie que l'action est transitive et que le stabilisateur du drapeau donné en exemple ci-dessus est le sous-groupe de Borel  $B$  des matrices triangulaires supérieures. Ceci permet d'identifier  $\mathcal{D}$  comme l'espace homogène :

$$\mathcal{D} \simeq \mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})/B.$$

Rappelons enfin qu'une configuration de drapeaux est qualifiée de *générique* s'il n'y a pas d'incidences particulières entre les droites et les plans.

2.2.2. *Triangles de drapeaux.* Avant de considérer les tétraèdres de drapeaux, il est utile de s'arrêter sur les triangles de drapeaux, c'est-à-dire des triplets de drapeaux génériques cycliquement ordonnés (on décore les sommets d'un triangle par des drapeaux). Pour fixer les idées, notons  $a, b$  et  $c$  les sommets d'un triangle, avec l'ordre cyclique  $a < b < c < a$ . Soit  $D_a, D_b, D_c$  un triangle de drapeaux (chacun des  $D_i$  est donc un couple  $([x_i], [f_i])$ ). On définit alors un invariant complet associé à ce triangle :

DÉFINITION 3. *Le trirapport associé au triangle de drapeaux  $(D_i)_{i=a,b,c}$  est le nombre*

$$z = \frac{f_a(x_b)f_b(x_c)f_c(x_a)}{f_a(x_c)f_b(x_a)f_c(x_b)} \in \mathbf{C}^\times.$$

On vérifie bien sûr que ce nombre ne dépend pas des représentants  $x_i$  et  $f_i$  choisis. Le point important est que cet invariant est *complet* :  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$  agit sur les triangles de drapeaux (en agissant sur chaque drapeau) et deux triangles sont dans la même orbite si et seulement s'ils ont le même trirapport.

Une façon de voir ce dernier point est d'associer une base à chaque sommet du triangle de drapeaux. Ça nous sera utile par la suite, donc nous le faisons précisément. Fixons un sommet, par exemple  $b$ . Nous avons maintenant un ordre sur les sommets : on commence par  $b$  et on suit l'ordre cyclique :  $b < c < a$ . Et on peut associer une base de  $V$  à un triplet de drapeaux ordonnés :

FAIT 2. *Soit  $D_b, D_c, D_a$  un triplet de drapeaux ordonnés. Il existe une unique base  $\mathcal{B}_{bca} = (v_1, v_2, v_3)$  de  $V$ , à homothétie près, telle que le premier drapeau (ici  $D_b$ ) est  $([v_1], [v_3^*])$ , le deuxième (ici  $D_c$ ) est  $([v_3], [v_1^*])$ , et le troisième (ici  $D_a$ ) est  $([v_1 - v_2 + v_3], [zv_1^*, (z+1)v_2^*, v_3^*])$ , où  $z$  est le trirapport du triangle de drapeau.*

La preuve de ce fait est élémentaire et repose sur la simple 4-transitivité de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$  sur l'espace projectif  $\mathbf{P}(V)$ .

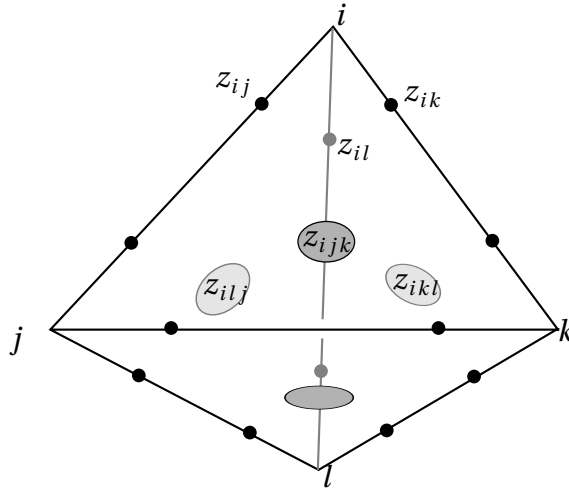


FIGURE 2. Les coordonnées pour un tétraèdre de drapeaux

On peut remarquer que si on inverse l'ordre cyclique, on transforme le trirapport en son inverse.

2.2.3. *Birapports.* On considère maintenant un tétraèdre de drapeaux, c'est-à-dire un quadruplet de drapeaux  $D_1, D_2, D_3, D_4$  en position générique et « cycliquement » ordonné (muni d'un ordre à permutation paire près). Nous allons décrire des coordonnées pour un tel tétraèdre invariantes sous l'action de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ ; ce seront des invariants complets, comme le trirapport. Elles sont directement inspirées des coordonnées de Fock et Goncharov [FG06].

La donnée des quatre drapeaux permet de définir 16 nombres : chaque face hérite d'une orientation (comme le bord du tétraèdre) et on obtient 4 triangles de drapeaux, donc 4 trirapports. De plus, considérons un ordre total  $ijkl$  cohérent avec l'ordre cyclique (c'est-à-dire que la permutation  $1234 \rightarrow ijkl$  est paire). Alors on dispose de 4 droites passant par le point  $[x_i]$  :

$$\ker(f_i), (x_i x_j), (x_i x_k), (x_i x_l).$$

L'espace des droites de  $\mathbf{P}(V)$  passant par un point est une droite projective. La configuration de ces quatre droites concourantes est décrite par leur birapport :

$$z_{ij} = [\ker(f_i), (x_i x_j), (x_i x_k), (x_i x_l)].$$

Un peu de géométrie projective élémentaire permet de montrer la formule [BFG13a, Lemme 2.3.1] plus concrète (le déterminant est pris par rapport à la base canonique) :

$$z_{ij} = \frac{f_i(x_k) \det(x_i x_j x_l)}{f_j(x_l) \det(x_i x_j x_k)}.$$

On peut symboliquement placer les coordonnées sur le tétraèdre comme indiqué dans la figure 2.

2.2.4. *Relations entre coordonnées.* La dimension (complexe) de la variété des drapeaux est 3. Ainsi la dimension de l'espace des tétraèdres de drapeaux modulo l'action de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$  est  $4 \times 3 - 8 = 4$ . Il y a donc des relations entre les 16 coordonnées définies dans la partie précédente. Nous les décrivons ici. Il y a deux types de relations, et nous verrons la différence se refléter tout au long de ce texte.

Il y a tout d'abord deux relations monomiales, qu'on notera <sup>10</sup> (L) :

$$(L) \quad \begin{aligned} z_{ijk} &= -z_{il}z_{jl}z_{kl} \\ z_{ij}z_{ik}z_{il} &= -1. \end{aligned}$$

De plus, la deuxième des équations ci-dessus peut-être raffinée, mais en perdant le caractère monomial. C'est la condition <sup>11</sup> (R)

$$(R) \quad z_{ik} = \frac{1}{1 - z_{ij}}$$

De manière similaire au cas hyperbolique, les relations (L) paramètrent une donnée géométrique sur le bord du tétraèdre : l'espace des représentations décorées <sup>12</sup> du groupe fondamental de la sphère privée de 4 points (homéomorphe au bord du tétraèdre) telles que la monodromie autour de chacun des trous est unipotente. La condition (R) prescrit que ces quatre monodromies (et donc toute la représentation) est l'identité. En termes de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ -systèmes locaux, cette dernière condition est une condition de remplissabilité : elle prescrit que le système local défini a priori sur le bord du tétraèdre peut s'étendre à l'intérieur du tétraèdre.

*2.2.5. Cas des tétraèdres hyperboliques idéaux.* Pour mieux comprendre les coordonnées ci-dessus, il est utile de considérer le cas des tétraèdres idéaux hyperboliques. En effet, la décoration des tétraèdres par des birapports (vérifiant les équations d'arête), comme dans la section 1, d'une triangulation idéale d'une variété  $M$  induit une représentation  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ . Or nous connaissons la représentation adjointe  $\mathrm{Ad} : \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ , donnée par l'action par conjugaison de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$  sur son algèbre de Lie (avec la base usuelle). Ainsi la représentation  $\rho$  induit une représentation :

$$\mathrm{Ad} \circ \rho : \pi_1(M) \xrightarrow{\rho} \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C}) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{PGL}(3, \mathbf{C}).$$

Il semble donc naturel de trouver un moyen direct de construire cette représentation via des tétraèdres de drapeaux (et les règles de calcul d'holonomie présentées en section 2.4). Revenons brièvement sur la représentation adjointe : une matrice de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  est de trace nulle. Nous l'écrivons :

$$\begin{pmatrix} y & x \\ -z & -y \end{pmatrix}.$$

Ces coordonnées donnent l'identification  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \sim \mathbf{C}^3$ . Le déterminant est une forme quadratique qui s'écrit dans ces coordonnées  $xz - y^2$ . La représentation adjointe, étant une action par conjugaison, préserve cette forme (et donc son cône isotrope). Nous noterons dans cette section  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la forme bilinéaire associée.

Il faut maintenant promouvoir un tétraèdre idéal hyperbolique en un tétraèdre de drapeaux. Considérons donc un tétraèdre idéal hyperbolique. Ses quatre sommets sont dans le bord à l'infini, identifié à  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ . Le plongement de Véronèse  $\mathcal{V}$  est donné en coordonnées homogènes par :

$$\mathcal{V} := \begin{cases} \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) & \rightarrow & \mathbf{P}_2(\mathbf{C}) \\ [x : y] & \mapsto & [x^2 : xy : y^2] \end{cases}.$$

10. (L) comme linéarisable.

11. (R) comme remplissable.

12. Voir la section 2.4.3 pour une définition de représentation décorée.

Il envoie  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  sur l'image du cône isotrope du déterminant dans  $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ . Nous pouvons considérer le 1-jet  $T_1\mathcal{V}$  de  $\mathcal{V}$ . Il envoie naturellement  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  dans l'espace des drapeaux. Il s'écrit :

$$T_1\mathcal{V} := \begin{cases} \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) & \rightarrow \mathcal{D} \\ p & \rightarrow (\mathcal{V}(p), \langle \mathcal{V}(p), \cdot \rangle). \end{cases}$$

Le fait que  $\mathcal{V}(p)$  est dans le cône isotrope garantit que l'image de  $T_1\mathcal{V}$  est bien incluse dans les drapeaux. Géométriquement, un point de  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  est vu comme le drapeau composé de l'image de ce point par le plongement de Véronèse et de la droite tangente à l'image de  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ .

Un rapide calcul [BFG13a, section 3.3] indique que si l'arête  $(ij)$  du tétraèdre hyperbolique idéal portait le birapport  $t$ , alors  $z_{ij}$  et  $z_{ji}$  valent  $t$ . De plus, tous les trirapports valent 1.

**2.3. Vision formelle des coordonnées.** Nous présentons ici de manière plus formelle les coordonnées pour des tétraèdres de drapeaux. Cette algébrisation capturera une grande partie des propriétés de nos recollements et permettra de mettre en place le résultat fondamental de ce chapitre, le théorème 3 d'isomorphisme symplectique. Cette partie est directement inspirée des travaux de Fock et Goncharov. Je reprends les notations de [BFG13a]. Le but ici est d'envisager l'espace des jeux de coordonnées pour un tétraèdre de drapeaux comme une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique.

2.3.1. *Z-module et dualité.* Soit  $T$  un tétraèdre et définissons  $J_T^2$  le  $\mathbf{Z}$ -module engendré par les 16 points portant les coordonnées, ou encore par les sommets de la 2-triangulation de chaque face du tétraèdre, en rouge sur la figure 3 :

$$I := \{\text{Sommet de la 2-triangulation des faces}\}.$$

On note  $ij$  le point de  $I$  sur l'arête  $(ij)$  proche de  $i$ . Il représente l'arête orientée (de  $j$

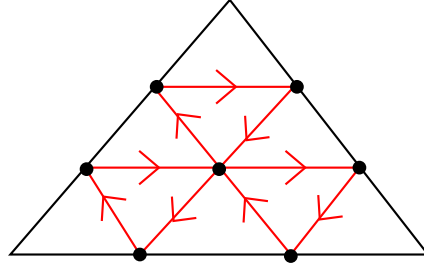


FIGURE 3. La 2-triangulation d'un triangle

vers  $i$ ).  $I$  contient aussi les centres des faces notés  $ijk$ . Ainsi,  $J_T^2 = \mathbf{Z}^I$  possède une base canonique  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ . De plus, la triangulation de la figure 3 est orientée, et on note :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \#\{\text{arêtes de } \alpha \text{ vers } \beta\} - \#\{\text{arêtes de } \beta \text{ vers } \alpha\}.$$

Et on note enfin  $\Omega^2$  la forme bilinéaire sur  $J_T^2$  donnée par :

$$\Omega^2(e_\alpha, e_\beta) = \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Que sont les coordonnées que nous avons définies ? Elles associent à un des points de  $I$  un nombre de  $\mathbf{C}^\times$ . Il est donc assez naturel de les considérer comme un élément de l'espace :

$$\text{Hom}(J_T^2, \mathbf{C}^\times).$$

Je veux insister sur l'importance de voir un jeu de coordonnées comme une fonction définies sur le  $\mathbf{Z}$ -module  $J_T^2$ . Différentes notations utilisent fortement ce point de vue, notamment en composant un jeu de coordonnées avec d'autres applications. On peut cependant donner une vision concrète de cette construction :  $J_T^2$  a une base canonique  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$  et en passant à la base duale, un jeu de décoration  $(z_\alpha)_{\alpha \in I} \in (\mathbf{C}^\times)^I$  définit naturellement un élément  $z$  de  $\text{Hom}(J_T^2, \mathbf{C}^\times)$  par la formule :

$$z \left( \sum_{\alpha \in I} n_\alpha e_\alpha \right) = \prod_{\alpha \in I} z_\alpha^{n_\alpha}.$$

Pour rester au niveau des  $\mathbf{Z}$ -modules (ce sera utile plus tard), notons

$$(J_T^2)^* = \text{Hom}(J_T^2, \mathbf{Z}).$$

Ainsi, un jeu de coordonnées pour un tétraèdre de drapeaux est considéré comme un élément<sup>13</sup> de  $(J_T^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times$ .

On peut être un peu plus précis. Considérons les vecteurs  $v_i$  et  $w_i$  de  $J_T^2$  définis comme suit (voir aussi la figure 4 et [BFG13a, section 4.2.1]) :

$$v_i = e_{ij} + e_{ik} + e_{il} \text{ et } w_i = e_{ji} + e_{ki} + e_{li} + e_{ijk} + e_{ilj} + e_{ikl}.$$

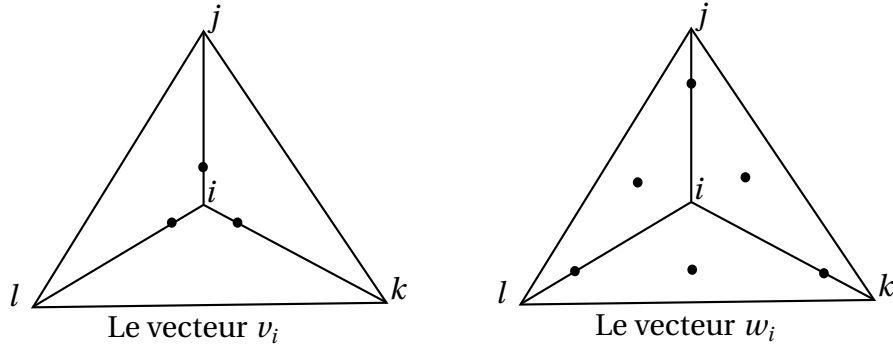


FIGURE 4. Les vecteurs  $v_i$  et  $w_i$  dans  $\text{Ker}(\Omega^2)$

On vérifie que ces vecteurs sont dans le noyau de  $\Omega^2$  et qu'ils en constituent une base. Remarquons que les relations (L) entre les coordonnées se traduisent par le fait suivant :

FAIT 3. Si  $z \in (J_T^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times$  est un jeu de coordonnées d'un tétraèdre  $T$ , on a pour tout sommet  $i$  du tétraèdre :

$$z(v_i) = z(w_i) = -1.$$

En effet, par définition, on a  $z(v_i) = z_{ij}z_{ik}z_{il} = -1$ . L'autre relation s'obtient de même. Considérons donc  $J_T^*$  l'espace de  $(J_T^2)^*$  composé des formes qui s'annulent sur  $\text{ker}(\Omega^2)$ . C'est le dual de l'espace  $J_T = J_T^2 / \text{ker}(\Omega^2)$ . Si dans le fait précédent on avait eu  $z(v_i) = z(w_i) = 1$ , on aurait pu affirmer que tout jeu de coordonnées  $z$  appartient à  $J_T^* \otimes \mathbf{C}^\times$ . En réalité, la sous-variété définie par les conditions  $z(v_i) = z(w_i) = -1$  est un espace homogène sous la variété torique  $J_T^* \otimes \mathbf{C}^\times$ . De plus, ses espaces tangents en tous les points sont naturellement identifiés à  $J_T^* \otimes \mathbf{C}$ . Dans [BFG13a], nous avons choisi de tuer la 2-torsion en tensorisant par  $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$

13. Tous les produits tensoriels de cette section sont sur  $\mathbf{Z}$ .



pour prendre en compte ce problème de signe. je resterai assez proche de cette dernière référence. Répétons que nous ne nous intéresserons dans ce mémoire qu'aux espaces tangents et aux applications tangentes et qu'à ce niveau ces signes disparaissent. De manière générale, si  $A$  est un  $\mathbf{Z}$ -module, on note

$$A[\frac{1}{2}] = A \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}].$$

On peut alors écrire :

PROPOSITION 1. *Si  $z \in (J_T^2)^*$  est un jeu de coordonnées pour un tétraèdre de drapeaux, il appartient au signe près à  $(J_T^*) \otimes \mathbf{C}^\times$ . Notamment, si on tue la 2-torsion, il devient un élément de  $(J_T^*[\frac{1}{2}]) \otimes \mathbf{C}^\times$ .*

Remarquons que cette proposition ne prend en compte que les relations (L) et pas les relations (R) : ce dernières ne sont pas monomiales, donc ne se linéarisent pas bien au niveau des  $\mathbf{Z}$ -modules. C'est pour cette raison que le  $\mathbf{Z}$ -module  $J_T^*$  est de rang 8 et non pas 4 comme la dimension de l'espace des tétraèdres de drapeaux. Comme nous l'avons déjà remarqué dans la section précédente, l'espace homogène sous  $J_T^* \otimes \mathbf{C}^\times$  défini par les relations (L) paramètre une donnée géométrique sur le bord du tétraèdre et la relation (R) est une condition de remplissabilité.

Nous avons ainsi décrit les jeux de coordonnées pour un tétraèdre de drapeaux comme éléments d'une variété homogène sous  $J_T^* \otimes \mathbf{C}^\times$ . Il reste à interpréter la condition (R) comme un lagrangien pour une forme symplectique. Pour ça nous présentons la construction précédente d'un point de vue légèrement différent.

2.3.2. *La condition de remplissabilité définit une sous-variété lagrangienne.* Considérons l'application  $p$  :

$$(2) \quad p := \begin{cases} J_T^2 & \rightarrow (J_T^2)^* \\ v & \mapsto \Omega^2(v, \cdot) \end{cases}$$

Par construction, l'image de  $p$  est exactement  $J_T^*$ . Autrement dit, pour un jeu de coordonnées  $(z_\alpha)_{\alpha \in I}$  correspondant à un tétraèdre de drapeaux, il existe un point  $(a_\alpha)_{\alpha \in I} \in J_T^2 \otimes \mathbf{C}^\times$  tel que  $z$  soit l'image de  $a$  par  $p$  au signe près. Précisons cela. Par définition du produit tensoriel, on a  $J_T^2 \otimes \mathbf{C}^\times = \text{Hom}((J_T^2)^*, \mathbf{C}^\times)$  et  $(J_T^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times = \text{Hom}(J_T^2, \mathbf{C}^\times)$ . De plus  $p$  induit naturellement une application duale, notée  $p^*$  :

$$p^* : \text{Hom}((J_T^2)^*, \mathbf{C}^\times) \rightarrow \text{Hom}(J_T^2, \mathbf{C}^\times).$$

Autrement dit,  $p^*$  est définie comme une application de  $J_T^2 \otimes \mathbf{C}^\times$  vers  $(J_T^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times$ .

Et, en prenant en compte les signes, nous pouvons écrire :

$$z = \pm p^*(a) \in (J_T^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times.$$

Autrement dit, dans le langage de [BFG13a],  $z$  et  $p^*(a)$  sont identifiés dans  $(J_T^2)^*[\frac{1}{2}] \otimes \mathbf{C}^\times$ . On vérifie facilement que si on choisit des représentants affines pour les quatre drapeaux :  $D_i = ([x_i], [f_i])$ , alors on peut prendre pour  $a_\alpha$  :

$$a_{ij} = f_i(x_j) \text{ et } a_{ijk} = \det(x_i x_j x_k).$$

On entrevoit ainsi que  $J_T^2 \otimes \mathbf{C}^\times$  paramétrise les tétraèdres de drapeaux affines et que l'application  $p$  correspond à la projectivisation. On trouvera plus de détails dans [BFG13a].

Ce point de vue permet de comprendre quelle est la forme symplectique naturelle sur  $J_T^*$  : au niveau des formes bilinéaires,  $\Omega^2$  passe au quotient  $J_T = J_T^2 / \ker \Omega^2$  en une forme symplectique  $\Omega$ . Comme  $J_T^*$  est le dual de  $J_T$ , il hérite d'une forme bilinéaire symplectique duale

notée  $\Omega^*$ . Par construction, le tiré en arrière par  $p$  de  $\Omega^*$  est  $\Omega^2$ . Comme tous les espaces tangents de  $(J_T^*) \otimes \mathbb{C}^\times$  (et de l'espace homogène sous cette variété) s'identifient naturellement à l'espace vectoriel symplectique  $(J_T^*) \otimes \mathbb{C}$ , on obtient une structure symplectique sur l'espace homogène sous  $(J_T^*) \otimes \mathbb{C}^\times$  défini par les conditions (L). Enfin, on vérifie à la main que les conditions (R) définissent une sous-variété lagrangienne dans la variété symplectique  $(J_T^*[\frac{1}{2}]) \otimes \mathbb{C}^\times$  avec la forme  $\Omega^*$ , par exemple en suivant le point de vue de [BFG13a, Section 4.3].

Nous avons donc atteint le but annoncé : l'espace des jeux de coordonnées d'un tétraèdre de drapeaux est une sous-variété lagrangienne dans un espace symplectique.

#### 2.4. Recollement et holonomie.

2.4.1. *Holonomie dans un tétraèdre.* Nous avons vu à la sous-section 2.2.2 qu'à un triangle de drapeaux sont associées trois bases. Nous voulons dans cette section décrire les changements de bases en termes des coordonnées  $(z_\alpha)$ .

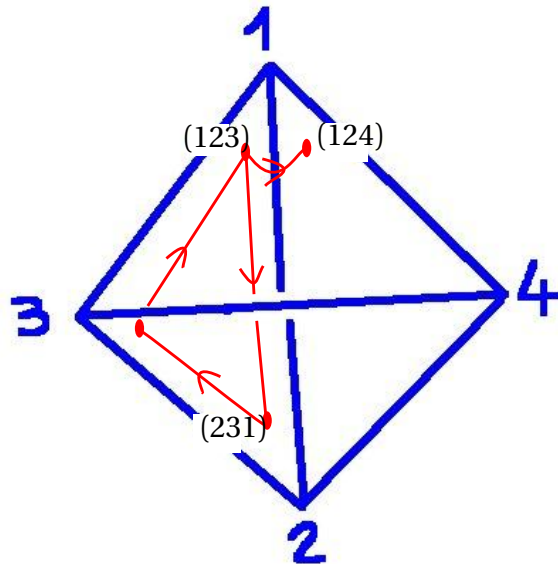


FIGURE 5. Changements de base dans un tétraèdre

Pour ça, traçons un complexe de courbes orientées sur la surface du tétraèdre, dont une partie est esquissée en rouge sur la figure 5 : d'abord trois courbes dans chaque face reliant 3 points situés près de chaque sommet, en suivant l'orientation de la face et, pour chaque arête, une courbe près de chaque sommet qui tourne « à gauche » autour de l'arête (pointant vers le sommet). Nous allons décrire l'holonomie associée à chacun de ces pas élémentaires, ce qui permet de calculer tous les changements de base par composition (les calculs précis sont faits dans [BFG13a, Section 5.4] ; c'est de l'algèbre linéaire élémentaire). À titre d'exemple nous calculerons l'holonomie du chemin qui tourne « à droite » autour d'une arête.

Les chemins à l'intérieur d'une face  $ijk$  réalisent une permutation circulaire des trois drapeaux. Vu les choix de normalisation faits à la sous-section 2.2.2, la matrice de changement de base de chacun des trois chemins est la même et s'exprime en terme du trirapport  $z_{ijk}$  :

$$(3) \quad T_{ijk} = T(z_{ijk}) = \begin{pmatrix} z_{ijk} & z_{ijk} + 1 & 1 \\ -z_{ijk} & -z_{ijk} & 0 \\ z_{ijk} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour être plus précis : si les coordonnées un vecteur  $v$  dans la base de départ  $\mathcal{B}_{ijk}$  sont

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

alors elles seront dans la base d'arrivée  $\mathcal{B}_{jki}$  :

$$T_{ijk} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Pour ce qui est du chemin qui tourne autour de l'arête, il nous faut préciser une subtilité. Nous considérons que le chemin part du triangle de drapeaux orienté comme le bord du tétraèdre pour arriver sur le triangle de drapeaux avec l'orientation inverse. Si on part du point  $ijk$  et qu'on tourne autour de l'arête  $ij$ , on arrive sur le point  $ijl$  (et non  $ilj$  comme on aurait pu s'y attendre). Le changement de base est donné par une matrice diagonale, qui ne dépend que des deux paramètres d'arêtes. C'est le tour à gauche autour de l'arête orientée  $ij$ , qu'on note  $G_{ij}$  :

$$(4) \quad G_{ij} = G(z_{ij}, z_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & z_{ji} & \\ & & z_{ji}z_{ij} \end{pmatrix}.$$

Pour calculer un changement de base dans le tétraèdre, étant donné deux bases dans des faces différentes, il n'y a qu'un seul chemin sans cycle qui se décompose sous la forme : changement de bases dans la face de départ, un tour d'arête, puis changement de bases dans la face d'arrivée (avec l'orientation inverse). Par exemple, pour tourner à droite autour d'une arête, de la base  $ilj$  à la base  $ikj$ , on utilise le chemin :

$$ilj \rightarrow lji \rightarrow jil \rightarrow jik \rightarrow ikj.$$

Pour calculer le changement de bases, on multiplie les matrices. On obtient l'holonomie du tour à droite (autour de l'arête orientée  $ij$ ), notée  $D_{ij}$ . Pour nos besoins, les seules choses importantes sont sa forme triangulaire supérieure et sa diagonale :

$$(5) \quad D_{ij} = T_{ikj} L_{ji} T_{ilj}^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ 0 & (z_{ji}z_{ilj}z_{ijk})^{-1} & & * \\ 0 & 0 & & * \\ 0 & 0 & (z_{ij}z_{ji}z_{ilj}z_{ijk})^{-1} & \end{pmatrix}.$$

**2.4.2. Recollement.** Un des buts de ce travail est de paramétrer des représentations du groupe fondamental de la variété triangulée  $M$  à partir des coordonnées  $z_\alpha$  pour chaque tétraèdre de la triangulation  $\mathcal{T}$ .

Pour ça, en même temps que l'on recolle les tétraèdres suivant les recollements de face de  $\mathcal{T}$ , on recolle les complexes « rouges » de chemins orientés de la section précédente. Et on calculera des holonomies de chemins dans ce complexe « rouge » recollé. Pour ça, une

première condition est nécessaire : les chemins qui font des permutations circulaires dans deux faces identifiées doivent être inverses l'un de l'autre, pour que l'aller-retour d'une base à l'autre ait une holonomie égale à l'identité.

Donc quand deux tétraèdres  $T_\mu$  et  $T_{\mu'}$ , de paramètres  $z_\alpha^\mu$  et  $z_\alpha^{\mu'}$ , ont la face  $ijk$  en commun, on doit avoir  $T(z_{ijk}^\mu) = T^{-1}(z_{ikj}^{\mu'})$ . Ça se traduit en l'équation de face (on remarque que cette équation exprime que les deux triangles de drapeaux sont congrus, donc recollables) :

$$(6) \quad z_{ijk}^\mu z_{ikj}^{\mu'} = 1, \text{ si la face } ijk \text{ est commune à } T_\mu \text{ et } T_{\mu'}.$$

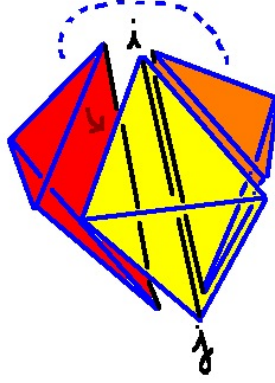


FIGURE 6. Les tétraèdres partageant une arête

Sous la condition précédente, on sait calculer l'holonomie d'un chemin tracé dans le complexe rouge. Pour avoir vraiment une représentation du groupe fondamental de  $M$ , il faut s'assurer d'une condition supplémentaire : le tour des arêtes doit avoir une holonomie égale à l'identité. Soit donc  $T_1, \dots, T_\mu$  la suite des tétraèdres partageant une arête  $ij$  (voir figure 6), et  $z_\alpha^\eta$  leurs jeux de coordonnées respectives, pour  $\eta$  entre 1 et  $\mu$ . Le tour de l'arête à gauche s'écrit (voir section 2.4.1) comme le produit des matrices  $L_{ij}$  relatives à chaque tétraèdre. On obtient donc les équations d'arêtes :

$$(7) \quad \prod_1^\mu z_{ij}^\eta = \prod_1^\mu z_{ji}^\eta = 1, \text{ si les tétraèdres } T_\eta \text{ se partagent l'arête } ij.$$

Ainsi pour reconstruire une représentation du groupe fondamental de  $M$ , il nous faut avoir des coordonnées  $(z_\alpha^\mu)$  pour chaque tétraèdre de  $\mathcal{T}$  qui vérifient :

- les relations internes (L) et (R) pour chaque jeu de coordonnées  $(z_\alpha^\mu)$ ,
- les équations de recollements : de face (6) pour chaque face du complexe de tétraèdre et d'arête (7) pour chaque arête.

**DÉFINITION 4.** On appelle décoration de  $\mathcal{T}$  la donnée d'une collection de paramètres  $(z_\alpha^\mu)$  vérifiant les 4 types de conditions précédentes.

L'ensemble de ces décorations est appelé, par référence au cas hyperbolique, la *variété des déformations* et est noté  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$ . Nous y reviendrons.

2.4.3. *Décoration et holonomie.* Fixons donc une décoration de la triangulation  $\mathcal{T}$  de la variété  $M$ . On choisit un des sommets  $p$  du complexe rouge. Pour calculer l'holonomie d'un lacet dans  $M$ , on commence par déformer ce lacet en un lacet basé en  $p$  et dessiné sur le complexe rouge et sans retour en arrière : ce lacet doit entrer dans un tétraèdre pour sortir par une autre face et ne pas comporter de cycles dans un tétraèdre.

On sait alors calculer son holonomie comme on avait fait pour le virage à droite : on multiplie les matrices de changement de bases. Changer de point base revient à conjuguer la représentation d'holonomie. Les différentes conditions assurent que les matrices obtenues ne dépendent pas du lacet choisi. Autrement dit, une décoration permet de construire une représentation d'holonomie modulo conjugaison, soit un élément de  $\text{Hol}_3(M)$ .

Mais, en réalité, la décoration nous donne plus d'informations que la seule représentation d'holonomie. Pour décrire cette information, considérons le revêtement universel  $\tilde{M}$  de  $M$ , et remontons à son niveau la triangulation  $\mathcal{T}$  en  $\tilde{\mathcal{T}}$ . On choisit aussi un relevé  $\tilde{p}$  de  $p$ . Le choix du point  $\tilde{p}$  permet de décorer les trois sommets du triangle contenant  $\tilde{p}$  de trois drapeaux, comme indiqué dans la section 2.2.2. Les règles du calcul d'holonomie permettent alors de décorer tous les sommets de  $\tilde{\mathcal{T}}$  par des drapeaux. Autrement dit, on a une application des sommets de  $\tilde{\mathcal{T}}$  vers les drapeaux ; et cette application est équivariante sous l'action de  $\pi_1(M)$  (sur  $\tilde{\mathcal{T}}$ , il agit naturellement et sur l'espace des drapeaux via la représentation d'holonomie). Remarquons que les sommets de  $\tilde{\mathcal{T}}$  sont les pointes de la variété  $\tilde{M}$ . On fait facilement le chemin inverse : si on a une telle application des sommets de  $\tilde{\mathcal{T}}$  vers les drapeaux équivariante sous une représentation de  $\pi_1(M)$ , chaque tétraèdre de  $\tilde{\mathcal{T}}$  a un jeu de coordonnées  $z_\alpha$  (sous une condition de généricité). L'équivariance sous  $\pi_1(M)$  implique que deux relevés différents dans  $\tilde{\mathcal{T}}$  d'un même tétraèdre de  $\mathcal{T}$  auront les mêmes coordonnées (les coordonnées sont invariantes sous l'action de  $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ ). Donc on a bien un jeu de coordonnées pour chaque tétraèdre de  $\mathcal{T}$ . Que ces coordonnées vérifient les conditions internes (L) et (R) provient du fait qu'elles sont effectivement associées à un tétraèdre de drapeaux. Que les équations de face et d'arête soient toutes vérifiées est garanti par le fait qu'on provient directement d'une représentation de  $\pi_1(M)$ .

Remarquons que le drapeau qui décore une pointe de  $\tilde{M}$  est invariant sous l'action du stabilisateur de cette pointe, par équivariance. On comprend donc comment à partir d'une représentation seule, on peut essayer de construire une décoration : pour un ensemble fondamental de pointes de  $\tilde{M}$ , on choisit un drapeau invariant par le stabilisateur de cette pointe. Le reste des pointes est décoré en suivant l'action de  $\pi_1(M)$ . Il n'est pas clair que cela permette de donner des coordonnées  $z_\alpha^\mu$  : les coordonnées pour un tétraèdre de drapeaux sont définies si les drapeaux sont en position générique. Il y a donc une condition de transversalité à respecter. Même si nous n'avons développé que très succinctement l'argument, on comprend que l'ensemble des représentations de  $\pi_1(M)$  qui sont les holonomies d'une décoration de  $\mathcal{T}$  est un ouvert de Zariski de l'espace des représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ .

Pour résumer, on a construit une application d'holonomie :

$$\text{Defor}_3(M, \mathcal{T}) \rightarrow \text{Hol}_3(M).$$

2.4.4. *Linéarisation.* Nous avons déjà vu (proposition 1) que la contrainte (L), interne à chaque tétraèdre admettait une linéarisation. La raison en était que cette contrainte est de nature monomiale : un produit de coordonnées doit valoir  $\pm 1$ . Or les deux conditions

d'arête et de face que nous avons définies sont aussi monomiales. Nous expliquons ici comment exploiter ce fait pour les linéariser. Ce travail, que nous faisons au niveau des  $\mathbf{Z}$ -modules, s'avérera crucial pour comprendre les liens avec l'homologie des tores périphériques (voir section 3).

Rappelons qu'à la section 2.3, nous avons associé à un tétraèdre  $T$  un  $\mathbf{Z}$ -module  $J_T^2$  équipé d'une 2-forme  $\Omega^2$ , son dual  $(J_T^2)^*$  ainsi qu'une application

$$J_T^2 \xrightarrow{p} (J_T^2)^*.$$

Nous sommes ici en présence de plusieurs tétraèdres : les  $T_1, \dots, T_\nu$  qui forment la triangulation  $\mathcal{T}$ . Nous définissons donc les sommes orthogonales de ces espaces :

$$J^2 = \bigoplus_1^\nu J_{T_\mu}^2 \text{ et } (J^2)^* = \bigoplus_1^\nu (J_{T_\mu}^2)^* = \text{Hom}(J^2, \mathbf{Z}).$$

On note aussi

$$J^* = \bigoplus_1^\nu (J_{T_\mu}^2)^*.$$

Nous noterons toujours  $\Omega^2$  la 2-forme sur  $J^2$  et aussi toujours  $p$  l'application naturelle

$$J^2 \xrightarrow{p} (J^2)^*.$$

Maintenant que ces espaces sont en place, comment traduire les conditions de face et d'arête ? Remarquons que nous avons une telle condition par face et par arête orientée du complexe de tétraèdres. Nous définissons donc :

**DÉFINITION 5.**  $C_{\text{or}}^1 + C^2$  est le  $\mathbf{Z}$ -module libre engendré par les faces et les arêtes orientées. On note  $e_{ij}$  et  $e_{ijk}$  ses vecteurs de base naturels.

D'après le fait 1, le rang de  $C_{\text{or}}^1 + C^2$  est  $4\nu$ . À chaque vecteur de base de  $C_{\text{or}}^1 + C^2$  est donc associée une équation : le produit des coordonnées  $z_\alpha^\mu$  qui sont associées à ce point doit être égal à 1. La bonne façon de linéariser ces équations est de considérer l'application suivante :

$$(8) \quad F : \begin{cases} C_{\text{or}}^1 + C^2 & \rightarrow & J^2 \\ e_{ij} & \mapsto & \sum e_{ij}^\eta \\ e_{ijk} & \mapsto & e_{ijk}^\mu + e_{ikj}^{\mu'} \end{cases}$$

où les  $e_{ij}^\eta$  de la deuxième ligne sont les vecteurs de base des espaces  $J_{T_\eta}^2$  associés aux tétraèdres tournant autour de l'arête  $ij$  ; et  $e_{ijk}^\mu, e_{ikj}^{\mu'}$  sont les deux vecteurs des espaces  $J_{T_\mu}^2$  et  $J_{T_{\mu'}}^2$  associés aux tétraèdres se partageant la face  $ijk$ .

Pour prendre en compte les phénomènes de dualité, on définit l'application duale

$$F^* : (J^2)^* \rightarrow (C_{\text{or}}^1 + C^2)^*.$$

On identifiera dorénavant  $(C_{\text{or}}^1 + C^2)^*$  à  $C_{\text{or}}^1 + C^2$  grâce à la base canonique de  $C_{\text{or}}^1 + C^2$ . On a donc une ligne d'applications :

$$C_{\text{or}}^1 + C^2 \xrightarrow{F} J^2 \xrightarrow{p} (J^2)^* \xrightarrow{F^*} C_{\text{or}}^1 + C^2.$$

L'application  $F^*$  se décrit facilement : un vecteur de la base de  $(J^2)^*$  duale à la base canonique de  $J^2$  est de la forme  $(e_\alpha^\mu)^*$ . Il correspond à une face ou une arête orientée d'un des

tétraèdres. Soit  $e_\alpha$  l'arête ou la face du complexe de tétraèdre à laquelle elle s'identifie. Alors  $F^*$  est la projection :

$$F^*((e_\alpha^\mu)^*) = e_\alpha.$$

La proposition suivante est donnée par construction :

PROPOSITION 2. *Un élément  $z$  de  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times$  vérifie les conditions de faces et d'arêtes si et seulement si on a*

$$z \in \ker(F^*) \otimes \mathbf{C}^\times.$$

Ainsi une décoration  $z$  de  $\mathcal{T}$  est un élément de l'intersection de la variété homogène sous  $J^* \otimes \mathbf{C}^\times$  (pour prendre en compte les relations (L) dans chaque tétraèdre) et de  $\ker(F^*) \otimes \mathbf{C}^\times$ . Notamment, les espaces tangents à la variété des décorations seront naturellement des sous espaces de  $(J^* \cap \ker(F^*)) \otimes \mathbf{C}$ . Nous y reviendrons.

La preuve consiste surtout à comprendre les notations : remarquons qu'un élément de  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times$  est dans  $\ker(F^*) \otimes \mathbf{C}^\times$  si et seulement si :

$$F^*(z) \in \text{Hom}(C_{\text{or}}^1 + C^2, \mathbf{C}^\times) \text{ vaut } 1.$$

Rappelons que par construction,  $F^*(z)$ , comme application de  $C_{\text{or}}^1 + C^2$  dans  $\mathbf{C}^\times$  est l'application :

$$F^*(z) = z \circ F.$$

Or, si  $e_\alpha$  est un vecteur de base de  $C_{\text{or}}^1 + C^2$  correspondant à une arête (resp. une face), on voit que  $z \circ F(e_\alpha) = 1$  est exactement l'équation d'arête (resp. de face) correspondante.

Pour conclure cette section, on remarque que nous n'avons pas encore tenu compte des conditions (R). Nous allons le faire dans la section suivante en revenant sur la variété des déformations.

## 2.5. Variété des déformations.

2.5.1. *La variété algébrique des déformations.* Résumons la partie précédente pour définir la variété des déformations relatives à une triangulation. Rappelons qu'on a fixé une variété  $M$  de dimension 3, idéalement triangulée par une triangulation  $\mathcal{T}$ , dont  $\nu$  est le nombre de tétraèdres.

Nous construisons une application  $\Psi$  de  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times$  dans  $(\mathbf{C}^\times)^{16\nu}$  qui prend en compte toutes les conditions. Cette application  $\Psi$  se décompose en fait en plusieurs applications :

$$\Psi = ((l_\mu, r_\mu)_{1 \leq \mu \leq \nu}, F^*),$$

où  $F^* : (J^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times \rightarrow \text{Hom}(C_{\text{or}}^1 + C^2, \mathbf{C}^\times) \simeq (\mathbf{C}^\times)^{4\nu}$  est l'application définie à la section précédente (voir éq. 8), et pour chaque tétraèdre  $T_\mu$  (dont les sommets sont notés  $ijkl$ ), on a :

$$l_\mu : \begin{cases} (J_{T_\mu}^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times & \rightarrow & (\mathbf{C}^\times)^8 \\ z_\alpha^\mu & \mapsto & \left( -\frac{z_{ijk}}{z_{il}z_{jl}z_{kl}}, -\frac{z_{ikl}}{z_{ij}z_{kj}z_{lj}}, -\frac{z_{ilj}}{z_{ik}z_{lk}z_{jk}}, -\frac{z_{kjl}}{z_{ki}z_{ji}z_{lj}}, \right. \\ & & \left. -z_{ij}z_{ik}z_{il}, -z_{ji}z_{jk}z_{jl}, -z_{ki}z_{kj}z_{kl}, -z_{li}z_{lj}z_{lk} \right) \end{cases}$$

et

$$r_\mu : \begin{cases} (J_{T_\mu}^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times & \rightarrow & (\mathbf{C}^\times)^4 \\ z_\alpha^\mu & \mapsto & (z_{ik}(1-z_{ij}), z_{jl}(1-z_{ji}), z_{ki}(1-z_{kl}), z_{lj}(1-z_{lk})) \end{cases}$$

Autrement dit, les fonctions  $l_\mu$  et  $r_\mu$  traduisent respectivement les conditions (L) et (R) pour chaque tétraèdre.

La variété des déformations relatives à la triangulation  $\mathcal{T}$  peut alors être de nouveau définie :

DÉFINITION 6. *La variété des déformations  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  relatives à la triangulation  $\mathcal{T}$  est le sous-espace de  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times$  défini par :*

$$\text{Defor}_3(M, \mathcal{T}) = \Psi^{-1}(1, \dots, 1).$$

Le travail accompli dans les sections précédentes permet d'énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 3. *La variété des déformations  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  est une sous-variété algébrique d'une variété homogène sous  $(J^*) \otimes \mathbf{C}^\times$  et de la variété  $\ker(F^*) \otimes \mathbf{C}^\times$ . Notamment, elle se projette comme sous-espace de  $(J^* \cap \ker(F^*))[\frac{1}{2}] \otimes \mathbf{C}^\times$ . Enfin, elle est isotrope pour la forme  $\Omega^*$  définie sur la variété homogène sous  $(J^*) \otimes \mathbf{C}^\times$ .*

En effet, au signe près, la fibre de  $l$  est égale à  $(\text{im}(p)) \otimes \mathbf{C}^\times = J^* \otimes \mathbf{C}^\times$ . Ainsi, notre variété  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  est incluse dans une variété homogène sous  $J^* \otimes \mathbf{C}^\times$  ; de plus, comme  $F^*$  apparaît dans  $\Psi$ , elle est incluse dans  $\ker(F^*) \otimes \mathbf{C}^\times$ . C'est enfin un sous-espace isotrope de la variété symplectique homogène sous  $J^* \otimes \mathbf{C}^\times$  : on a vu que pour chaque tétraèdre  $T_\mu$  la condition de remplissabilité (R) définit une sous-variété lagrangienne. Et  $J^*$  est défini comme la somme directe orthogonale de ces sous-espaces symplectiques. La proposition est donc prouvée.

Pour conclure cette section, mentionnons que l'application  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T}) \rightarrow \text{Hol}_3(M)$  qui à une décoration associe la classe de la représentation d'holonomie est alors une application algébrique. Et les considérations de la section 2.4.3 montrent que son image est un ouvert de Zariski.

2.5.2. *Espace tangent.* Nous expliquons dans cette section comment comprendre l'espace tangent à  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  et notamment quels sont ses points lisses. On verra notamment qu'à ce niveau là, les problèmes de signes disparaissent.

Pour ça, on commence par identifier l'espace tangent à  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times$  en n'importe quel point à l'espace vectoriel  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}$  équipé de la base duale à la base  $(e_\alpha^\mu)_{\alpha \in I, 1 \leq \mu \leq \nu}$  de  $J^2$ , dont les vecteurs sont notés  $\xi_\alpha^\mu$  pour  $1 \leq \mu \leq \nu$ ,  $\alpha \in I$ . Pour bien comprendre cette notation, il faut voir qu'on peut composer un élément de  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C} = \text{Hom}(J^2, \mathbf{C})$  et l'application exponentielle  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^\times$ . Par les propriétés de multiplicativité de l'exponentielle, on obtient ainsi un élément de  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times = \text{Hom}(J^2, \mathbf{C}^\times)$ . Vue ainsi, l'application exponentielle est un difféomorphisme local de  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}$  sur  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times$ . Son inverse  $\log$  n'est pas bien défini, mais sa différentielle  $d \log$  l'est, et identifie l'espace tangent en tout point à  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times$  avec  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}$ . Ainsi  $\xi_\alpha^\mu$  est un élément de  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C} \simeq \text{Hom}(J^2, \mathbf{C})$ , défini par :

$$\xi_\alpha^\mu(e_\beta^{\mu'}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \text{ et } \mu = \mu' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut aussi remarquer que dans les coordonnées  $(z_\alpha^\mu)$  sur  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}^*$ , on a en tout point  $\xi_\alpha^\mu = \frac{1}{z_\alpha^\mu} \frac{\partial}{\partial z_\alpha^\mu}$ .

L'application  $\Psi$  qui permet de définir  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  est composée de 3 applications :  $l$ ,  $r$  et  $F^*$ . Comme les applications  $l$  et  $F^*$  sont monomiales en les  $z_\alpha^\mu$ , leur différentielle en un point  $z$  est une application linéaire à coefficients dans  $\mathbf{Z}$  (dans la base des  $\xi_\alpha^\mu$ ) qui ne dépend pas du point  $z$ . Elle est notamment de rang constant et  $(l, F^*)^{-1}(1, \dots, 1)$  est une sous-variété lisse de  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}^\times$ , qui contient  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$ . De plus, l'espace vectoriel tangent en un point  $z$  à la sous-variété  $(l, F^*)^{-1}(1, \dots, 1)$  est un sous-espace vectoriel de  $(J^2)^* \otimes \mathbf{C}$  qui ne dépend pas de  $z$ . Les propositions 1 et 2 permettent d'identifier ce sous-espace. Il s'agit de :

$$(J^* \cap \ker F^*) \otimes \mathbf{C}.$$



Intéressons-nous maintenant à l'application  $r$ . Cette fois-ci, les différentielles et espaces tangents dépendent du point  $z$ . Dans les coordonnées définies, et en un point  $z = (z_\alpha^\mu)$ , le noyau de  $d_z r$  est le sous-espace [**BFG<sup>+</sup>13b**, lemme 5.3] :

$$\mathcal{R}(z) = \left\{ \xi \in \text{Hom}(J^2, \mathbf{C}) : \text{pour tout tétraèdre, on a } \begin{cases} \xi(e_{ij}^\mu) + z_{il}^\mu \xi(e_{ik}^\mu) = 0 \\ \xi(e_{ji}^\mu) + z_{jk}^\mu \xi(e_{jl}^\mu) = 0 \\ \xi(e_{ki}^\mu) + z_{kl}^\mu \xi(e_{kj}^\mu) = 0 \\ \xi(e_{lj}^\mu) + z_{lk}^\mu \xi(e_{li}^\mu) = 0 \end{cases} \right\}.$$

Nous l'avons déjà dit plusieurs fois, mais il convient à nouveau de noter que  $\mathcal{R}(z) \cap J^* \otimes \mathbf{C}$  est isotrope pour la forme  $\Omega^*$ . Ainsi, pour comprendre  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$ , il faut comprendre l'intersection entre le sous-espace isotrope  $\mathcal{R}(z) \cap J^* \otimes \mathbf{C}$  et le sous-espace  $(J^* \cap \ker F^*) \otimes \mathbf{C}$ . Nous verrons dans la partie suivante de ce chapitre comment analyser cette intersection (voir section 3 et particulièrement 3.3). Pour anticiper un peu sur les résultats que nous obtiendrons, mentionnons qu'une condition suffisante pour que  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  soit lisse en un point  $z$  est que les deux sous-espaces vectoriels soient transverses. Dans ce cas la dimension complexe (locale) de  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  est 4.

**2.6. Exemples.** Un des intérêts de cette définition de  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  est qu'on peut en déterminer explicitement des points, voire des composantes – au moins quand il y a peu (2,3, parfois 4) de tétraèdres.

Je renvoie à [**FKR13**] pour une description des solutions dont la restriction des représentations au bord est unipotente. Le lecteur peut aussi retrouver ces résultats sur le site SGT.

De plus, la prépublication récente [**FGK<sup>+</sup>14**] donne une description assez poussée de la variété des déformations dans le cas du complémentaire du noeud de huit.

J'avise cependant le lecteur qu'il est plus intéressant d'aborder cette question après avoir compris l'application qui à un point de  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  associe le point de  $\text{Hol}_3(\partial M)$  correspondant à la restriction au bord de la représentation d'holonomie. C'est l'objet de la section suivante.

**2.7. Volume.** On peut définir une notion de volume pour les éléments de  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$ , en suivant la définition donnée par Falbel dans [**Fal11**]. Un traitement plus systématique est donné dans [**DGG13**, Section 3.2.4]. En réalité, la notion de volume d'une représentation de  $\pi_1(M)$ , même à valeurs dans  $\text{SL}(2, \mathbf{C})$ , est délicate car  $M$  est supposée compacte à bord. Dans le cas  $\text{SL}(2, \mathbf{C})$ , nous renvoyons à [**Dun99**] pour une discussion. Une autre voie d'accès fait appel à la cohomologie bornée, voir Kim-Kim [**KK13**] ou Bucher-Burger-Iozzi [**BB13**].

Une fois choisie la décoration, en revanche, c'est plus simple et on peut donner une définition combinatoire du volume. Considérons donc un élément  $z$  de  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$ . On a donc une décoration  $z_\alpha(T)$  pour chaque tétraèdre. On considère alors :

$$\text{Vol}(z) = \sum_T D(z_{12}(T) + z_{21}(T) + z_{34}(T) + z_{43}(T)).$$

On montre que cette quantité est invariante par changement de triangulation (mouvement 2–3). Comme dans le cas hyperbolique, tout ceci a d'importantes interprétations en termes de  $K$ -théorie, d'invariant de Chern-Simons (et Cheeger-Chern-Simons pour une variante complexe). Je renvoie à [**BFG13a**] pour le cas  $n = 3$ ; à [**GTZ11**] pour un traitement détaillé, avec une attention portée au lien avec les classes caractéristiques de Cheeger-Chern-Simons, du cas de  $\text{SL}(n, \mathbf{C})$  mais sous une hypothèse restrictive (les représentations doivent

avoir une holonomie périphérique unipotente) ; et à [DGG13] pour un traitement combinatoire du cas général.

Un point important est que la combinatoire mise en place permet de fournir une formule pour la variation du volume le long d'une déformation de la représentation. Pour exprimer ça, considérons un vecteur  $\xi$  tangent à  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  en un point  $z$ . Rappelons que  $z$  est – au signe près – un élément de  $\text{Hom}(J, \mathbf{C}^\times)$ . En prenant son module  $|z|$ , on obtient bien un élément de  $\text{Hom}(J, \mathbf{C}^\times)$ . On peut donc composer cette fonction  $|z| : J \rightarrow \mathbf{R}_+^\times$  avec la fonction  $\ln$  de  $\mathbf{R}_+^\times$  dans  $\mathbf{C}$ . On obtient une fonction, notée  $L(z)$ , de  $J$  dans  $\mathbf{C}$ . De plus, les propriétés de linéarité du logarithme assurent que  $L(z)$  est en fait un élément de  $\text{Hom}(J, \mathbf{C})$ . Alors on a (voir par exemple [BFG13a, Section 3.6 et 11]) :

$$d_z \text{Vol}(\xi) = \text{Im}(\Omega^*(\xi, L(z))).$$

Cette formule permettra de donner une formule pour la variation du volume en fonction de la représentation périphérique.

### 3. Représentations et représentations périphériques

Cette partie est consacrée à l'étude des liens entre la variété des représentations décorées  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  d'une variété de dimension 3 et la variété  $\text{Hol}_3(\partial M)$  des représentations du groupe fondamental de son bord à valeurs dans  $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$ .

Nous avons déjà mentionné l'application de restriction de l'holonomie

$$\text{Defor}_3(M, \mathcal{T}) \rightarrow \text{Hol}_3(\partial M),$$

qui consiste à restreindre la représentation d'holonomie à  $\pi_1(\partial M)$ . Nous qualifierons cette représentation restreinte de représentation périphérique :

**DÉFINITION 7.** *Soit  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(M)$  dans  $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$ . On appelle représentation périphérique de  $\rho$  la restriction  $\rho|_{\pi_1(\partial M)}$ .*

Cette application de restriction sera réinterprétée en termes des coordonnées définies à la section précédente et grâce à ça étendue à toute la variété définie en ne considérant que les conditions (L) et les équations de recollements. Cette dernière variété est l'intersection de  $\ker(F^*) \otimes \mathbf{C}^\times$  et d'une variété homogène sous  $(J^*) \otimes \mathbf{C}^\times$ . Ça permet de montrer que l'image de  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  par l'application de restriction est une sous-variété algébrique lagrangienne pour la forme symplectique naturelle sur l'espace des représentations de  $\pi_1(\partial M)$  – qu'on pourrait qualifier d'Atiyah-Bott-Goldman-Weil-Peterson, voir sous-section 3.1. Plus précisément, on montre que pour l'application tangente à l'application de restriction étendue – qui est donc définie sur  $(J^* \cap \ker(F^*)) \otimes \mathbf{C}$  – la forme  $\Omega^*$  au départ est le tiré en arrière d'Atiyah-Bott-Goldman-Weil-Peterson à l'arrivée. C'est l'objet du théorème 3 qui est le résultat central de cette partie.

Comme application de ce théorème, on peut analyser finement l'espace tangent à  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$ , continuant le travail de la section 2.5.2 : on montrera que sous des conditions « génériques » on ne peut pas déformer une représentation de  $\text{Hol}_3(M)$  sans déformer sa représentation périphérique. Ce phénomène est appelé *rigidité locale* (voir la sous-section 3.3). Nous concluons par une analyse de la variation du volume lors de la déformation d'une représentation en termes de la représentation périphérique.

#### 3.1. Holonomie périphérique.

3.1.1. *Décoration.* Dans la définition de la notion de représentation périphérique, nous avons omis de considérer la décoration : rappelons que nous travaillons sous l'hypothèse où  $\partial M$  est un tore  $T$ , et est l'étoile de l'unique sommet de la triangulation  $\mathcal{T}$  de  $M$ . Il nous sera utile de savoir choisir un drapeau invariant sous l'action de son groupe fondamental. Pour ça, remarquons que l'inclusion fixée une fois pour toute

$$\pi_1(\partial M) \hookrightarrow \pi_1(M)$$

transforme  $\pi_1(\partial M)$  en le stabilisateur d'une pointe  $p$  du revêtement universel  $\tilde{M}$ . Or un point de  $\text{Deform}_3(M, \mathcal{T})$  est la donnée, modulo l'action de  $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$ , d'une représentation  $\rho$  et de la décoration, c'est-à-dire une application, notée  $d$ , équivariante de l'ensemble des pointes vers les drapeaux. Par construction, le drapeau  $d(p)$  est invariant sous l'action de  $\rho(\pi_1(\partial M))$ .

Donc, nous pouvons rendre plus intéressante l'application de restriction en considérant l'espace des représentations décorées  $\text{DecRep}(\partial M)$  défini comme :

$$\{(\rho, D) \in \text{Hom}(\pi_1(\partial M), \text{PGL}(3, \mathbf{C})) \times \mathcal{D} \text{ tel que } \rho \text{ laisse } D \text{ invariant}\},$$

et son quotient sous l'action diagonale naturelle du groupe  $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$  sur l'espace produit  $\text{Hom}(\pi_1(\partial M), \text{PGL}(3, \mathbf{C})) \times \mathcal{D}$  :

$$\text{DecHol}(\partial M) = \text{DecRep}_{\mathcal{D}}(\partial M) / \text{PGL}(3, \mathbf{C}).$$

La discussion précédente permet d'affirmer qu'on a une application bien définie, qui s'écrit avec les notations précédentes<sup>14</sup> :

$$(9) \quad \begin{cases} \text{Deform}_3(M, \mathcal{T}) & \rightarrow & \text{DecHol}(\partial M) \\ [\rho, d] & \mapsto & [\rho, d(p)]. \end{cases}$$

3.1.2. *Réduction au groupe diagonal.* Notons à présent  $A$  le sous-groupe des matrices diagonales de  $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$ . Fixons un élément  $[\rho, D]$  de  $\text{DecHol}(\partial M)$  et un élément  $\gamma$  dans  $\pi_1(\partial M)$ . Dans une base adaptée au drapeau  $D$ ,  $\rho(\gamma)$  est représenté par une matrice qui préserve  $D$  ; elle est donc triangulaire supérieure, de la forme<sup>15</sup> :

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & L_1(\gamma) & \star \\ 0 & 0 & L_1(\gamma)L_2(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Une remarque cruciale est de constater que les valeurs de  $L_1(\gamma)$  et  $L_2(\gamma)$  *ne dépendent pas* de la base adaptée à  $D$  choisie : en effet, changer de base adaptée revient à conjuguer par un élément du stabilisateur de  $D$ , c'est-à-dire une matrice triangulaire supérieure ; ça n'affecte pas la partie diagonale. Nous notons  $\text{Diag}(a, b, c)$  la matrice diagonale de coefficients  $a, b, c$ .

Nous obtenons donc une application bien définie :

$$(10) \quad \begin{cases} \text{DecHol}(\partial M) & \rightarrow & \text{Hom}(\pi_1(\partial M), A) \\ [\rho, D] & \mapsto & (\gamma \mapsto \text{Diag}(1, L_1(\gamma), L_1(\gamma)L_2(\gamma))) \end{cases}$$

14. Les crochets représentent les classes modulo l'action de  $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$ .

15. Ici, nos notations divergent de celles de [BFG13a], et se rapprochent plus de celles de [Gui13a]. Un avantage est de pouvoir imaginer aisément une généralisation en dimension supérieure, comme dans le deuxième article cité et dans [DGG13, Gui13c, GZ13].

En la composant avec l'application de la section précédente, on obtient même une application, dite d'holonomie périphérique :

$$\text{Hol}_{\text{periph}} : \text{Defor}_3(M, \mathcal{T}) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(\partial M), A).$$

Finissons cette section sur quelques remarques sur l'injectivité de cette application. Rappelons qu'un élément de  $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$  est appelé régulier s'il est diagonalisable à valeurs propres distinctes (il a le plus petit normaliseur possible). S'il existe un  $\gamma \in \pi_1(\partial M)$  tel que  $\rho|_{\langle \gamma \rangle}$  est régulière, alors  $\rho|_{\langle \gamma \rangle}$  est conjuguée à la matrice  $\text{Diag}(1, L_1(\gamma), L_1(\gamma)L_2(\gamma))$ . Comme de plus  $\pi_1(\partial M)$  est commutatif, c'est toute la représentation  $\rho|_{\langle \gamma \rangle}$  qui est conjuguée à sa partie diagonale. Autrement dit, l'application (10) est bijective en restriction aux représentations dont au moins une image est régulière. En revanche, la fibre au-dessus d'un point non-régulier (i.e.  $L_1 = 1, L_2 = 1$  ou  $L_1L_2 = 1$ ) est plus compliquée : c'est un  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  au-dessus d'un point différent de  $L_1 = L_2 = 1$ , avec une fibre encore plus particulière au-dessus de  $L_1 = L_2 = 1$ .

3.1.3. *L'espace tangent et sa structure symplectique.* L'espace  $\text{Hom}(\pi_1(\partial M), A)$  est une variété lisse : il s'identifie à  $A^2$  via le choix d'une base de  $\pi_1(M)$ . De plus toute déformation d'une représentation  $\rho$  s'écrit

$$\gamma \rightarrow \exp(\sigma(\gamma))\rho(\gamma),$$

où  $\sigma$  est un morphisme de  $\pi_1(\gamma)$  dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  de  $A$ . Comme  $\pi_1(\partial M)$  est commutatif,  $\sigma$  s'identifie à un élément de  $H_1(\partial M, \mathfrak{a})$ . Ainsi, comme il est classique, l'espace tangent en tout point à  $\text{Hom}(\pi_1(\partial M), A)$  est le groupe de cohomologie  $H^1(\partial M, \mathfrak{a})$ . Ce dernier espace porte une forme bilinéaire symplectique, qui définit la forme symplectique sur  $\text{Hom}(\pi_1(\partial M), A)$  appelée forme de Atiyah-Bott-Goldman-Weyl-Peterson (voir par exemple [Gol84, BS01]) et que nous noterons  $\text{wp}$ . Nous la définissons maintenant.

Pour un élément  $a$  de  $H_1(\partial M, \mathbf{Z})$ , nous notons  $[a]$  son dual dans  $H^1(\partial M, \mathbf{Z})$ . Un élément pur de  $H^1(\partial M, \mathfrak{a})$  est donc de la forme  $[a] \otimes u$ , où  $u$  appartient à  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ . On note  $\iota$  la forme d'intersection sur  $H_1(\partial M, \mathbf{Z})$  et  $K$  la forme de Killing sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{sl}(3)$  :

$$K(u, v) = 6\text{tr}(uv).$$

Rappelons que le cup-produit sur  $H^1(\partial M, \mathbf{Z})$  est le dual de la forme d'intersection. La forme  $\text{wp}$  est définie comme le couplage du cup-produit et de la forme de Killing :

DÉFINITION 8. *La forme  $\text{wp}$ , dite d'Atiyah-Bott-Goldman-Weyl-Peterson, sur  $H^1(\partial M, \mathfrak{a})$  est le couplage du cup-produit avec la forme de Killing sur  $\mathfrak{a}$ . En pratique, on a :*

$$\text{wp}([a] \otimes u, [b] \otimes v) = \iota(a, b)K(u, v).$$

**3.2. L'isomorphisme symplectique.** Une conséquence des discussions de ces dernières sections est que l'application tangente (en un point lisse) à la restriction/projection

$$\text{Defor}_3(M, \mathcal{T}) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(\partial M), A)$$

est une application de l'espace tangent à  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  dans  $H^1(\partial M, \mathfrak{a})$ . On peut décrire cette application tangente en termes des coordonnées sur  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$ . C'est le coeur de l'article [BFG13a]. On procède pour ça en plusieurs étapes :

- (1) Construire l'homologie simpliciale  $H_1(\partial M, \mathfrak{a})$  en choisissant une décomposition cellulaire du tore adaptée à la triangulation  $\mathcal{T}$  [BFG13a, Section 7.1].
- (2) Construire au niveau des chaînes<sup>16</sup> une application  $C_1(\partial M, \mathfrak{a}^*)$  dans le  $\mathbf{Z}$ -module  $J^2$  [BFG13a, Section 7.2].

16. Remarquons que  $\mathfrak{a}^*$  et  $\mathfrak{a}$  sont naturellement les espaces vectoriels engendrés par les  $\mathbf{Z}$ -modules des racines, respectivement coracines, du groupe diagonal  $A$ .

- (3) Montrer que l'application duale, après passage au quotient et tensorisation par  $\mathbf{C}$ , définit une application de  $(J^* \cap \ker(F)) \otimes \mathbf{C}$  dans  $H^1(\partial M, \mathfrak{a})$  qui coïncide avec l'application tangente recherchée sur les espaces tangents à  $\text{Deform}_3(M, \mathcal{T})$  [BFG13a, Section 7.3].
- (4) Montrer que les 2-formes (i.e.  $\Omega^*$  sur  $(J^* \cap \ker(F)) \otimes \mathbf{C}$  et  $\text{wp}$  sur  $H^1(\partial M, \mathfrak{a})$ ) sont préservées par cette application [BFG13a, Section 8] (voir aussi [Gui13c] pour une autre approche de ce point particulier).

Pour obtenir un énoncé précis, un point de vue homologique est nécessaire. Considérons à nouveau le complexe d'applications

$$C_{\text{or}}^1 + C^2 \xrightarrow{F} J^2 \xrightarrow{p} (J^2)^* \xrightarrow{F^*} C_{\text{or}}^1 + C^2.$$

On vérifie combinatoirement que la composition  $F^* \circ p \circ F$  est nulle (voir [BFG13a, Section 7.3]). Comme de plus, la construction par dualité donne facilement que l'orthogonal pour  $\Omega^*$  de  $\ker(F^*)$  dans  $J^*$  est exactement  $\text{im}(p \circ F)$ , nous obtenons que  $\ker(F^*)$  est coisotrope. Une autre façon de présenter ce résultat est d'énoncer que les équations de recollement (faces et arêtes) Poisson-commutent ainsi que les relations internes ( $L$ ). C'est l'analogie du premier point du théorème de Neumann-Zagier énoncé plus tôt.

Nous pouvons donc former deux espaces d'homologies :

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}(J) &= \ker(F^* \circ p) / (\text{im}(F) + \ker p) \\ \mathcal{H}(J^*) &= (\ker(F^*) \cap \text{im}(p)) / \text{im}(p \circ F) \end{aligned}$$

De plus que les 2-formes  $\Omega$  et  $\Omega^*$  descendent sur ces quotients en des formes non-dégénérées et ces deux espaces sont duaux. Comme les espaces tangents à  $\text{Deform}_3(M, \mathcal{T})$  sont isotropes dans  $(\ker(F^*) \cap \text{im}(p)) \otimes \mathbf{C}^\times$  (rappelons que  $J^* = \text{im}(p)$ ), leur image dans l'espace  $\mathcal{H}(J^*) \otimes \mathbf{C}^\times$  sont encore isotropes.

On peut alors énoncer le théorème d'isomorphisme symplectique annoncé. Remarquons que la différentielle en tout point  $z \in \text{Deform}_3(M, \mathcal{T})$  de  $\text{Hol}_{\text{periph}}$  est une application définie sur un sous-espace de  $(\ker(F^*) \cap J^*) \otimes \mathbf{C}$  – l'espace tangent en  $z$  à  $\text{Deform}_3(M, \mathcal{T})$  – et à valeurs dans  $H^1(\partial M, \mathfrak{a})$ . Le théorème suivant indique que cette application tangente :

- (1) passe au quotient  $\mathcal{H}(J^*)$ ,
- (2) y coïncide avec une application définie sur tout  $\mathcal{H}(J^*)$  qui est un isomorphisme symplectique.

Remarquons que le premier point s'interprète comme le fait que les fonctions valeurs propres de l'holonomie périphérique Poisson-commutent aux équations de recollement ; le second point s'interprète comme le fait que leur crochet de Poisson coïncide avec celui de Atiyah-Bott-Goldman-Weil-Peterson. Encore une autre façon de présenter les choses est de dire que  $\text{Hol}_{\text{periph}}$  peut s'étendre à tout l'espace où l'on oublie les conditions lagrangiennes de remplissage (R). Cette extension permet d'identifier la variété symplectique des représentations décorées de  $\partial M$  comme réduction symplectique de ce dernier espace.

**THÉORÈME 3.** *Il existe un isomorphisme symplectique*

$$h^* : (\mathcal{H}(J^*) \otimes \mathbf{C}, \Omega^*) \rightarrow (H^1(\partial M, \mathfrak{a}), \text{wp})$$

*tel que pour tout point  $z \in \text{Deform}_3(M, \mathcal{T})$ , la différentielle en  $z$  à  $\text{Hol}_{\text{periph}}$  passe au quotient en une application définie sur un sous-espace de  $\mathcal{H}(J^*)$  et qui coïncide avec  $h^*$  sur ce sous-espace.*

On en déduit immédiatement que l'image de  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  est isotrope dans  $\text{Hom}(\pi_1(\partial M), A)$ . Comme expliqué précédemment, ce théorème se généralise aux espaces de représentations dans  $\text{PGL}(n, \mathbf{C})$  [Gui13c, GZ13] Nous décrivons maintenant quelques applications de ce théorème. Ces applications aussi se généralisent au cas de  $\text{PGL}(n, \mathbf{C})$ .

**3.3. Rigidité locale.** Supposons que la variété  $M$  porte une structure hyperbolique complète et notons  $\rho_{\text{hyp}}$  une holonomie (à valeurs dans  $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ ). Grâce à la représentation adjointe  $\text{Ad} : \text{PGL}(2, \mathbf{C}) \rightarrow \text{PGL}(3, \mathbf{C})$ , on peut la promouvoir en un point de  $\text{Hol}_3(M)$  : la (classe de la) représentation géométrique  $\rho_{\text{geom}} = \text{Ad} \circ \rho_{\text{hyp}}$ . Dans ce cas, un unique drapeau est fixé par le groupe fondamental du tore périphérique (les matrices sont unipotentes et forment un unique bloc de Jordan) : on obtient ainsi un point  $z_{\text{geom}}$  de  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$ .

Un théorème de Menal-Ferrer et Porti [MP11] énonce un résultat de rigidité locale pour cette représentation :

**THÉORÈME 4** (Menal-Ferrer et Porti). *Au voisinage de  $z_{\text{geom}}$ , l'espace  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  est une variété lisse de dimension (complexe) 2. De plus, pour tout élément non-trivial  $\gamma$  de  $\pi_1(\partial M)$ , les valeurs de la fonction  $z \rightarrow \text{Hol}_{\text{periph}}(z)(\gamma)$  servent de paramétrage local.*

Remarquons tout d'abord que le théorème de Menal-Ferrer et Porti est énoncé au niveau de  $\text{Hol}_3(M)$  et non de  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$ . Le lien entre les deux versions est explicité dans [Gui13a]. De plus, ce théorème énonce un phénomène de rigidité locale : on ne peut pas déformer les représentations proches de  $[\rho_{\text{geom}}]$  sans déformer la représentation périphérique.

Dans [BFG<sup>+</sup>13b], nous donnons une autre preuve de ce théorème basée sur le théorème d'isomorphisme symplectique 3. L'idée est simple et reprend le cas hyperbolique [Cho04] : d'une part, si on avait une déformation tangente à la fibre de la projection  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T}) \rightarrow H^1(\partial M, A)$ , alors le théorème 3 dit que cette déformation doit être tangente au noyau de la forme  $\Omega^*$  sur  $J^*$ . Or, par un argument de positivité, on voit que l'espace tangent à  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  en  $\rho_{\text{geom}}$  a une intersection triviale avec ce noyau : en ce point, on montre que pour tout vecteur tangent  $\xi$ , le vecteur  $\bar{\xi}$  est encore dans  $J^*$  et

$$\Omega^*(\xi, \bar{\xi}) > 0.$$

De plus, l'approche combinatoire développée dans [BFG<sup>+</sup>13b] permet d'énoncer un critère de rigidité locale facile à vérifier sur des exemples : vu l'esquisse de raisonnement ci-dessus, un point  $z$  de  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  vérifie la rigidité locale dès que l'espace tangent à  $\text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  en  $z$ , décrit explicitement plus haut, rencontre trivialement le noyau  $\ker(\Omega^*)$ .

Le théorème de Menal-Ferrer et Porti est énoncé (et prouvé) pour tous les groupes  $\text{SL}(n, \mathbf{C})$  ; l'approche combinatoire fonctionne aussi dans ces cas [Gui13c].

**3.4. Variation du volume.** Le théorème 3 permet aussi de comprendre la variation du volume en termes de la représentation périphérique.

En effet, soit  $z \in \text{Defor}_3(M, \mathcal{T})$  et  $\xi$  un vecteur tangent. Notons respectivement  $x$  et  $v$  leur projection dans  $H^1(\partial M, A)$  par l'application  $\text{Hol}_{\text{periph}}$ . Nous notons comme précédemment  $L(x)$  l'élément de  $H^1(\partial M, A)$  obtenu en composant  $x$  (vu comme application sur  $H^1(\partial M)$  à valeur dans  $A$ ) avec l'application  $\ln(| \cdot |) : A \rightarrow \mathfrak{a}$ .

Alors, la formule pour  $d_z \text{Vol}(\xi)$  donnée à la section 2.7, couplée avec le théorème d'isomorphisme symplectique permet d'obtenir :

$$d_z \text{Vol}(\xi) = \text{Im}(\text{wp}(v, L(x))).$$

Notamment, à partir de la représentation géométrique, dont on connaît le volume (c'est 4 fois le volume hyperbolique), on peut calculer le volume d'une autre représentation dans sa composante connexe par intégration sur  $H^1(M, A)$ . Dans le cas  $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ , cette remarque est un des points qui permet à Dunfield de prouver son théorème d'équivalence birationnelle.

Il serait très intéressant d'explorer si la preuve de Dunfield peut être généralisée au cas de  $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{C})$ . Pour ça, un autre ingrédient est que le volume maximal pour une représentation  $\rho$  est atteint si et seulement si  $[\rho] = [\rho_{\mathrm{geom}}]$ . Bücher, Burger et Iozzi annoncent un tel résultat et il semble raisonnable d'énoncer la conjecture :

**CONJECTURE 1.** *Soit  $M$  une 3-variété hyperbolique à pointes triangulée idéalement par  $\mathcal{T}$ . Alors l'application  $\mathrm{Hol}_{\mathrm{periph}}$ , restreinte à la composante irréductible de  $\mathrm{Deform}_3(M, \mathcal{T})$  contenant la représentation géométrique, est une équivalence birationnelle sur son image.*

#### 4. Géométrie des représentations

La section précédente présentait des outils pour comprendre la géométrie de l'espace des représentations  $\mathrm{Hol}_3(M)$  ou représentations décorées  $\mathrm{Deform}_3(M, \mathcal{T})$  de  $\pi_1(M)$  dans  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ . Nous changeons ici d'échelle et nous cherchons à comprendre quelles sont les propriétés géométriques de représentations particulières.

Nous nous attacherons à deux types de propriétés : d'une part la discrétude des représentations et d'autre part la construction de structures géométriques dont certaines représentations sont les représentations d'holonomie.

**4.1. Discrétude.** Une question naturelle est de décrire l'ensemble des éléments de l'espace  $\mathrm{Hol}_3(M)$  qui correspondent à des représentations *discrètes*.

Comme pour la section précédente, il est utile de revenir au cas plus classique de  $\mathrm{Hol}_2(M)$ , c'est-à-dire les représentations du groupe fondamental de  $M$  dans  $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ . On commence par remarquer qu'une conséquence des théorèmes de rigidité de Mostow, de chirurgie de Dehn hyperbolique de Thurston et de rigidité locale est le fait que la discrétude de l'image de la représentation est entièrement déterminée par une condition algébrique sur la représentation périphérique, au moins au voisinage de la représentation hyperbolique.

En effet, considérons la classe  $[\rho_{\mathrm{hyp}}] \in \mathrm{Hol}_2(M)$  de la représentation d'holonomie de la structure hyperbolique complète sur  $M$ .

Alors dans un voisinage de  $[\rho_{\mathrm{hyp}}]$ , un élément  $[\rho]$  est la classe d'une représentation discrète si et seulement si sa représentation périphérique  $[\rho_{\mathrm{periph}}] \in \mathrm{Hol}_2(\partial M)$  est discrète et primaire (au sens que dans tout groupe à un paramètre dont le temps 1 est l'image d'un élément primitif de  $\pi_1(\partial M)$  l'identité n'est pas atteinte pour un temps non entier).

Donnons un schéma de preuve. Pour simplifier les notations, on suppose que  $M$  n'a qu'une pointe. Notons tout de suite qu'on ne va pas tant travailler avec les représentations qu'avec des structures hyperboliques. En effet, au lieu de travailler au niveau de l'espace des représentations, on peut travailler au niveau de l'espace des déformations  $\mathrm{Deform}_2(M, \mathcal{T})$ . Remarquons qu'à revêtement fini près, il existe une triangulation  $\mathcal{T}$  de  $M$  telle que chaque tétraèdre devient un tétraèdre hyperbolique non dégénéré – c'est-à-dire tel que les birapports associés sont de partie imaginaire strictement positive [LST08b]. Un point dans  $\mathrm{Deform}_2(M, \mathcal{T})$  est la donnée d'un birapport pour chaque tétraèdre de la triangulation  $\mathcal{T}$ , avec les contraintes de recollement. De plus, si on est suffisamment proche de  $[\rho_{\mathrm{hyp}}]$ , chacun des birapports est de partie imaginaire strictement positive. Autrement dit, un point de  $\chi_2(M, \mathcal{T})$  proche de  $[\rho_{\mathrm{hyp}}]$  définit une structure hyperbolique sur  $M$  – en général non complète.

Soit maintenant une représentation décorée  $[\rho, F]$  proche (mais distincte) de  $[\rho_{\text{hyp}}]$ . Supposons de plus que sa représentation périphérique soit discrète. D'abord, par rigidité locale, sa représentation périphérique n'est pas unipotente. Si on est suffisamment proche de  $\rho_{\text{hyp}}$ , cela implique qu'elle est globalement diagonalisable. Donc c'est une représentation du groupe  $\mathbb{Z}^2$  dans le groupe diagonal isomorphe à  $\mathbb{C}^\times$  : elle n'est discrète que si elle n'est pas fidèle. Donc une certaine courbe dans le tore périphérique est « tuée » par  $\rho$ .

Ainsi, la représentation  $\rho$  transite par un quotient de  $\pi_1(M)$ , quotient construit en tuant une courbe périphérique (ici on utilise que la primalité) : en d'autres termes,  $\rho$  transite par le groupe fondamental d'une chirurgie de Dehn sur  $M$ . Or le théorème de chirurgie de Dehn hyperbolique de Thurston nous garantit que la structure hyperbolique sur  $M$  associée à  $[\rho, F]$  se complète en une structure hyperbolique sur cette chirurgie de Dehn, dont la représentation d'holonomie est donnée par  $\rho$ . Comme cette chirurgie de Dehn est compacte, elle n'admet qu'une structure hyperbolique par le théorème de Mostow. Et l'holonomie de cette structure est discrète. Finalement, l'image de  $\rho$  est discrète.

Essayons maintenant de revenir à l'espace  $\text{Hol}_3(M)$ , ou même  $\text{Hol}_n(M)$ . J'ai étudié le problème de la discrétude de la représentation périphérique dans l'article [Gui13a]. Il en ressort que, sur un voisinage de la représentation géométrique, la représentation périphérique est génériquement fidèle et discrète. Ce résultat est assez naturel : génériquement une représentation de  $\mathbb{Z}^2$  dans un groupe linéaire de rang  $\geq 2$  est fidèle et discrète. Notons cependant, en renvoyant à l'article cité pour plus de détails, qu'il existe des composantes entières de  $\text{Hol}_3(M)$  (par exemple pour  $M$  le complémentaire du noeud de huit) pour lesquelles les représentations périphériques ne sont *jamais* fidèles et discrètes.

La question se pose de savoir si l'équivalence du théorème précédent est toujours valide. La principale difficulté pour aborder cette question est que nous n'avons plus de structure géométrique évidente à suivre le long d'une déformation. À l'heure actuelle, la question générale reste ouverte et motive pour moi tout un plan de recherches. Une direction est notamment d'étudier plus précisément les cas particuliers où une structure géométrique existe, comme je vais brièvement le décrire dans la section suivante.

**4.2. Structures géométriques.** Trois sous-groupes de  $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$  agissent naturellement sur une géométrie de dimension 3. Il s'agit de :

- (1) le groupe  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  qui agit sur l'espace hyperbolique réel  $\mathbb{H}^3$  ;
- (2) le groupe  $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$  qui agit sur la variété  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  des drapeaux réels (c'est un fibré en cercles sur le plan projectif réel  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ), en préservant une structure de contact ;
- (3) le groupe  $\text{PU}(2, 1)$  qui agit sur la sphère  $\mathbb{S}^3$  vue comme le bord à l'infini de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Cette action préserve à nouveau une structure de contact. Ce sous-groupe des contactomorphismes de  $\mathbb{S}^3$  est appelé le groupe des automorphismes CR (pour Cauchy-Riemann).

Étant donnée une variété de dimension 3, il est naturel d'essayer de comprendre quelles structures géométriques (au sens des  $(G, X)$ -structures) elle peut porter. On voudrait en premier lieu déterminer si une variété est ou non hyperbolique ; ou plus généralement au problème de la géométrisation des variétés de dimension 3. Les travaux sur ces questions sont évidemment gigantesques et ce n'est pas le lieu ici de tenter de les décrire.

Cependant, à la lisière de ces questions de géométrisation, certaines questions d'apparence simples restent ouvertes. Par exemple on ne sait pas quels complémentaires de noeud



possèdent une structure *CR-sphérique* – c’est-à-dire une  $(\mathrm{PU}(2, 1), \mathbb{S}^3)$ -structure<sup>17</sup> – ou une structure modelé sur la variété des drapeaux : une  $(\mathrm{PGL}(3, \mathbf{R}), \mathcal{D}(\mathbf{R}))$ -structure.

Rappelons à nouveau qu’une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$  induit une représentation – dite d’*holonomie* – de  $\pi_1(M)$  dans  $G$ . En revanche, toute représentation n’est pas représentation d’holonomie d’une  $(G, X)$ -structure.

Nous avons déjà mentionné qu’un des intérêts de la théorie exposée dans ce mémoire était son effectivité : on peut explicitement (pour certaines variétés) calculer des représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ . Parmi celles qu’on trouve, un certain nombre sont à valeurs dans  $\mathrm{PU}(2, 1)$  ou  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{R})$  [Fal08]. Une approche expérimentale des questions soulevées est alors la suivante :

- construire des représentations de groupe fondamental de complémentaire de noeud dans  $\mathrm{PU}(2, 1)$  ou  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{R})$ .
- essayer de déterminer si ces représentations sont des représentations d’holonomie d’une  $(G, X)$ -structure.

Si on sait répondre positivement à la deuxième question, ça ouvre le champ à mieux comprendre la représentation : on peut attaquer la question de la discrétude d’une représentation  $\rho$  en essayant de déterminer si la  $(G, X)$ -structure est *uniformisable*; c’est-à-dire si c’est le quotient d’un ouvert de  $X$  sous l’action de  $\rho(\pi_1(M))$ . On peut aussi aborder des problèmes de déformation de la représentation dans l’esprit du théorème de chirurgie de Dehn hyperbolique de Thurston [Thu97].

Enfin, une autre motivation pour cette étude des structures géométriques est l’espoir de comprendre des phénomènes qui pourraient être généralisés à l’étude de l’espace  $\mathrm{Hol}_3(M)$ . Je pense notamment au problème de la discrétude soulevé dans la section précédente.

Pour toutes ces raisons, je suis de manière active les constructions de structures géométriques dans le cadre de la théorie présentée ici. Je conclus cette section en citant deux théorèmes qui montrent que la stratégie décrite peut être appliquée avec succès, dans le cas des représentations dans  $\mathrm{PU}(2, 1)$  comme dans  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{R})$  :

**THÉORÈME 5** (Deraux-Falbel [DF13]). *Le complémentaire du noeud de huit peut-être muni d’une  $(\mathrm{PU}(2, 1), \mathbb{S}^3)$ -structure (structure CR-sphérique) uniformisable.*

**THÉORÈME 6** (Falbel-Santos Thebaldi [FST03]). *La variété hyperbolique à 1 pointe nommée  $m009$  porte une  $(\mathrm{PGL}(3, \mathbf{R}), \mathcal{D}(\mathbf{R}))$ -structure.*

Pour le deuxième cas, mentionnons que dans un travail en préparation M. Deraux montre que cette variété porte aussi une structure CR-sphérique uniformisable.

Notre compréhension de ces exemples est encore très limitée. Il semble que certaines régularités commencent à émerger ; mais il nous manque encore une vue globale de la situation. Il ne fait pour moi aucun doute qu’une étude plus en profondeur de ces exemples ainsi que la construction d’autres exemples clarifieront cette situation.

---

17. Nous ne reviendrons pas ici sur la notion de  $(G, X)$ -structure. Disons seulement qu’une telle structure sur une variété  $M$  est un atlas de cartes à valeurs dans  $X$ , et changements de carte dans  $G$ . On pourra par exemple se référer aux notes de cours [BG13a]

## Vers une géométrie de Hilbert $p$ -adique

Nous décrivons dans ce chapitre l'article [Gui13d]. Assez singulier dans ma production et s'aventurant dans un domaine presque inexploré, il s'attache à la construction d'un analogue  $p$ -adique au modèle projectif du plan hyperbolique. Les motivations pour la construction de cet objet sont diverses. Il y a, dans une certaine mesure, une motivation d'ordre esthétique : il s'agit de construire un objet géométrique attaché au groupe  $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{Q}_p)$ , c'est-à-dire dont ce groupe soit le groupe de transformations. À cet égard, un objet souvent considéré est l'arbre associé à  $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{Q}_p)$  [Ser77], qui est un objet sur lequel le groupe agit et qui permet de magnifiques raisonnements géométriques, mais qui a le défaut d'avoir un groupe de transformations beaucoup plus gros. Ensuite, par l'introduction d'une notion de géométrie de Hilbert  $p$ -adique, il s'agit d'essayer d'ouvrir la porte à de nouvelles géométries sur ces corps locaux, en empruntant un chemin assez naïf (toutes les constructions sont élémentaires). Sur ce point, le projet en est aux balbutiements car il faudrait arriver à déformer le convexe obtenu comme analogue du plan hyperbolique pour obtenir de nouveaux objets. Enfin, il est tentant de regarder l'immense littérature autour du plan hyperbolique réel (par exemple le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann) avec comme arrière-pensée la question d'un résultat analogue dans le cas  $p$ -adique.

Ces projets demandent un investissement conséquent. Ces dernières années, le travail que j'ai présenté dans le premier chapitre a retenu la majeure partie de mon énergie et je n'ai pas pu réfléchir autant que je l'aurais souhaité à ces questions. Il n'en demeure pas moins que j'espère m'y consacrer plus pleinement dans les prochaines années. Ce projet justifie que je dédie à ce travail quelques pages de ce mémoire.

### 1. Les géométries de Hilbert

Le modèle projectif du plan hyperbolique est l'exemple fondamental de la géométrie de Hilbert. Revenons brièvement sur ces géométries, car c'est la voie que j'ai suivie pour l'analogue  $p$ -adique. On renvoie à l'article original de Hilbert [Hil95] ainsi qu'à [dlH93, Ver05] pour plus de détails et d'autres références sur ces géométries. Mentionnons que la théorie des convexes divisibles, notamment développée par Y. Benoist, rentre pleinement dans le cadre de ces géométries [Ben08]. Je dois d'ailleurs remercier Y. Benoist de m'avoir aiguillé sur cette question au début de ma thèse, même si le travail ici décrit a eu lieu plusieurs années après la fin de cette thèse.

**1.1. Brève présentation.** On considère un ouvert convexe, non vide et borné  $\Omega$  du plan (ou d'un espace euclidien). On munit  $\Omega$  de sa *distance de Hilbert*  $d_\Omega$  : si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $\Omega$  et que la droite  $(xy)$  coupe la frontière de  $\Omega$  en  $a$  et  $b$ , de façon à ce que les points soient dans l'ordre  $a, x, y, b$  (voir figure 1), alors on pose

$$d_\Omega(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{ax}{by} \frac{ay}{bx} \right).$$

On reconnaît à l'intérieur du logarithme le birapport des quatre points (ce sont quatre

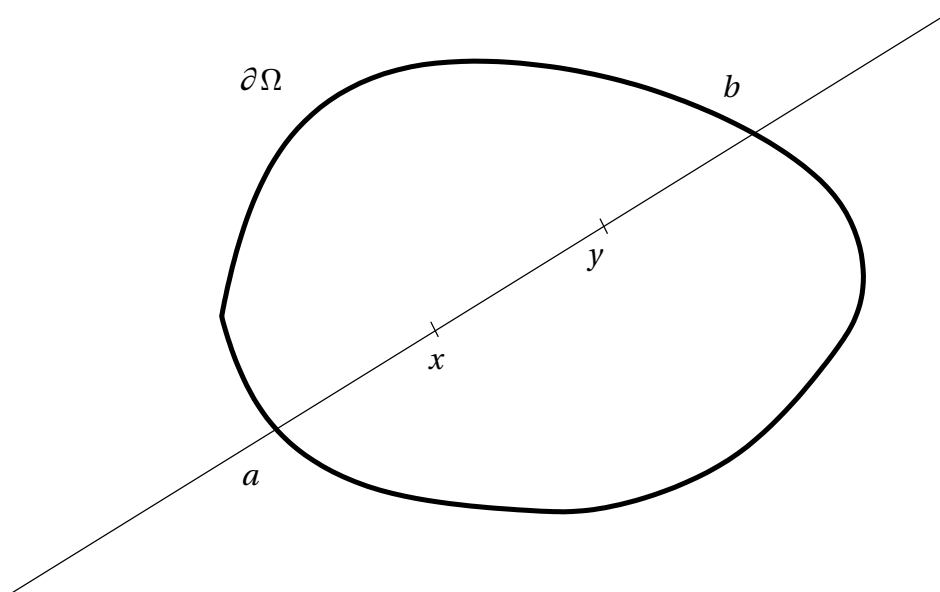


FIGURE 1. La distance de Hilbert

points sur une droite). On vérifie que  $d_\Omega$  est une distance, qui munit  $\Omega$  d'une structure d'espace métrique. Les deux exemples extrêmes sont :

- (1) si  $\Omega$  est l'intérieur d'un triangle, alors  $\Omega, d_\Omega$  est isométrique au plan  $\mathbf{R}^2$  muni de sa norme hexagonale,
- (2) si  $\Omega$  est un disque (ou l'intérieur d'une ellipse), alors  $\Omega, d_\Omega$  est isométrique au plan hyperbolique.

Le deuxième exemple est celui qui retient le plus notre attention et dont nous allons construire un analogue.

**1.2. Dualité.** La présentation faite précédemment semble laisser peu d'espoir à un analogue  $p$ -adique : les corps  $p$ -adiques sont totalement discontinus et, partant, les notions de convexité, connexité ou frontière de  $\Omega$  posent problème. Un angle possible pour concevoir une notion de convexité  $p$ -adique (puis une notion de distance de Hilbert) est de considérer le convexe dual à  $\Omega$ .

Pour ça, il convient de se rappeler qu'un convexe du plan (ou de l'espace) est une intersection de demi-espaces, c'est-à-dire le côté "positif" de formes linéaires. Pour préciser cette définition, notons  $V$  le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel dans lequel on travaille et  $V^\times$  son dual. Définissons les sphères projectives  $\mathbf{S} = V/(\mathbf{R}_+^*)$  et  $\mathbf{S}^\times = V^\times/(\mathbf{R}_+^*)$ . On considère un ouvert convexe du plan comme un ouvert convexe du plan projectif, et on le relève à  $\mathbf{S}$  : il y a deux composantes connexes. On identifie désormais  $\Omega$  avec l'une de ces composantes connexes. Alors le convexe dual  $\Omega^\times$  est défini comme la projection des formes linéaires sur lesquelles tous les éléments de  $\Omega$  sont positifs :

$$\Omega^\times = \{f \in V^\times \mid \forall [v] \in \Omega \subset \mathbf{S}, f(v) > 0\} / (\mathbf{R}_+^*).$$

Remarquons qu'on a équivalence entre les assertions « $\Omega$  est convexe» et « $\Omega$  est son propre bidual :  $(\Omega^\times)^\times = \Omega$ ».

Remarquons enfin très rapidement que la considération du convexe dual permet de donner une autre saveur à la notion même de distance de Hilbert. Commençons par définir une notion naturelle de birapport entre deux formes  $f$  et  $f'$  et deux points  $x$  et  $x'$  :

$$[f, f', x, x'] = \frac{f(x) f'(x')}{f(x') f'(x)}.$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $\Omega$  à distance (pour la distance de Hilbert)  $\ln(t)$ , alors l'ensemble des birapports possibles entre deux formes de  $\Omega^\times$  et les deux points  $x$  et  $y$  est exactement l'intervalle  $[\frac{1}{t}; t]$  :

$$[\frac{1}{t}; t] = \{[f, f', x, y] \mid f, f' \in \Omega^\times\}.$$

Grâce à cette observation, on peut redéfinir la distance de Hilbert à partir de ce dernier ensemble, comme le logarithme de son maximum ou encore, pour éviter la notion de maximum, comme la mesure de Haar (dans  $\mathbf{R}_+^*$ ) de cet ensemble.

**1.3. Le modèle du plan hyperbolique comme orbite de groupe.** Rappelons un chemin classique pour obtenir le modèle du plan hyperbolique comme géométrie de Hilbert : il s'agit de construire un ouvert de la sphère qui soit une orbite de  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ . On considère donc l'action adjointe de  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$  sur son algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ . Sur cette dernière, le déterminant est une forme bilinéaire qui la rend isomorphe à  $\mathbf{R}^3$  avec une forme bilinéaire de signature  $(2, 1)$ . À homothétie positive près, il y a cinq orbites différentes :  $\{0\}$ , le cône isotrope, l'hyperboloïde à une nappe et les deux nappes de l'hyperboloïde à deux nappes. On peut justifier le nom d'hyperboloïde à deux nappes en remarquant que ces deux nappes sont dans la même orbite sous  $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{R})$ .

Alors  $\Omega$  est la projection dans la sphère  $\mathbf{S}$  de l'une des deux nappes de l'hyperboloïde à deux nappes.

## 2. Quelques pistes sur les corps locaux

Pour présenter les résultats, nous travaillons sur le corps  $\mathbf{Q}_p$ , avec  $p \neq 2$ . Le cas d'autres corps  $p$ -adiques ne pose pas problème, mais certains énoncés doivent être adaptés.

**2.1. Positivité et hyperboloïdes.** Un point crucial pour obtenir un analogue  $p$ -adique est donc d'étudier les orbites sous l'action adjointe de  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Q}_p)$  et d'y distinguer des "hyperboloïdes à 1 ou 2 nappes", c'est-à-dire de les comparer aux orbites de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{Q}_p)$ . C'est le travail effectué, par des considérations élémentaires, dans la première section de [Gui13d]. Sans entrer dans les détails, exposons brièvement les résultats :

pour chacun des trois sous-groupes d'indice 2  $H \subset \mathbf{Q}_p^*$ , il existe une unique (modulo multiplication par  $H$ ) orbite sous  $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{Q}_p)$  qui se décompose en deux orbites sous  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Q}_p)$ . Donc, pour chaque notion « raisonnable » de positivité – formellement, on choisit un sous-groupe  $H$  d'indice 2 du groupe multiplicatif – nous avons un candidat comme plan hyperbolique  $p$ -adique : la projection  $\Omega_H$  dans la sphère  $\mathbf{S}_H = \mathbf{Q}_p^3/H$  d'une des nappes de l'hyperboloïde à deux nappes.

**2.2. Dualité et convexité.** À cet instant, nous avons un ouvert d'une sphère projective, mais pas encore de notion de convexité. Mais il n'est pas difficile de définir le dual  $\Omega_H^\times$  de  $\Omega_H$  : c'est l'ensemble des formes linéaires qui prennent des valeurs dans  $H$  (i.e. « positives ») sur les éléments de  $\Omega_H$ . Ensuite, on vérifie que le bidual de  $\Omega_H$  est bien  $\Omega_H$  : en ce sens,  $\Omega_H$  est bien convexe.

De plus, les considérations sur la distance de Hilbert dans le cas réel permettent de munir  $\Omega_H$  d'une distance invariante par  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Q}_p)$  – ainsi que d'une fonction plus précise, nommée distance multiplicative, à valeurs  $p$ -adiques. Sur ce point, il n'est pas sûr que la meilleure définition ait été posée.

### 3. La géométrie des plans hyperboliques $p$ -adiques

La géométrie de ces objets est étudiée dans les dernières sections de [Gui13d]. D'abord, on remarque que cette géométrie est hybride : à courte distance, la distance est ultramétrique, tandis qu'à grande échelle on retrouve la structure d'arbre associé à  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Q}_p)$  : il existe une quasi-isométrie de  $\Omega_H$  vers l'arbre, telle que sur chaque fibre la distance est ultramétrique [Gui13d, Section 5].

Enfin, pour revenir sur les motivations exposées au début de ce chapitre, on montre que le groupe de transformation de cette géométrie (les transformations qui préservent la distance multiplicative) est exactement  $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{Q}_p)$  [Gui13d, Section 6]. L'objectif primaire est donc atteint.

## Survol des travaux concernant l'équidistribution dans les espaces homogènes

Une partie de mon travail a été initiée lors de ma thèse avec Y. Benoist et s'est prolongée pendant quelques années. Il s'agit de l'étude des phénomènes d'équidistribution dans les espaces homogènes et en particulier des liens avec l'arithmétique.

Le cadre général du problème est le suivant : considérons un groupe topologique localement compact  $G$  (par exemple  $SL(2, \mathbf{R})$ ), un réseau  $\Gamma$  (par exemple  $SL(2, \mathbf{Z})$ ) et un sous-groupe fermé  $H$  de  $G$  (par exemple  $H_1 = SO(2, \mathbf{R})$  ou  $H_2$  le sous-groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures). Il s'agit alors d'étudier les orbites de  $\Gamma$  dans l'espace homogène  $G/H$ . Pour  $H_1$ , cet espace homogène est le plan hyperbolique, tandis que pour  $H_2$ , c'est le plan euclidien privé de l'origine. Quand  $\Gamma$  a des propriétés arithmétiques, la description de ces orbites peut permettre de répondre à des questions de théorie des nombres. Un exemple frappant et célèbre de ce champ d'études est le travail de Margulis sur la conjecture d'Oppenheim, résolvant par des considérations dynamiques une conjecture sur les valeurs prises par des formes quadratiques sur les points entiers. Nous renvoyons à [Mar97] pour une présentation de ces travaux.

Une méthode largement suivie pour étudier ce type de problèmes est d'utiliser le phénomène de *dualité* : certaines propriétés de l'action de  $\Gamma$  sur  $G/H$  se reflètent sur l'action de  $H$  sur  $\Gamma \backslash G$ . Le premier exemple est la densité des orbites : l'orbite de  $gH$  sous  $\Gamma$  est dense dans  $G/H$  si et seulement si l'orbite de  $\Gamma g$  sous  $H$  est dense dans  $\Gamma \backslash G$ . Deux techniques sont disponibles et particulièrement efficaces :

- (1) d'une part, le mélange du flot géodésique et ses généralisations, utilisés par Margulis pour étudier l'action de groupes fuchsien sur le plan hyperbolique [Mar69], puis formalisés par Eskin et McMullen [EM93].
- (2) d'autre part, des phénomènes de rigidité pour l'action de groupes unipotents dans  $\Gamma \backslash G$  : grâce aux théorèmes de Ratner [Rat94], on est capable de classifier les mesures ergodiques invariantes. Mentionnons que ces théorèmes ont récemment été largement généralisés par Benoist et Quint [BQ11]. Un exemple d'utilisation de ces théorèmes associés au principe de dualité a été donné par Ledrappier [Led99] dans le cas d'un groupe fuchsien agissant sur le plan. Gorodnik et Weiss [GW07] ont formalisé cette approche.

Un des avantages de ces techniques est qu'elles sont très robustes et qu'elles admettent des généralisations dans des cadres arithmétiques : dans le cadre des adèles pour la première et dans le cadre  $S$ -arithmétique pour la seconde. Je ne préciserai pas ces cadres ici. Je peux renvoyer le lecteur à mon papier tiré de mon mini-cours récent à la conférence « Regards croisés sur la géométrie hyperbolique et l'arithmétique » [Gui13b], où j'explique notamment la généralisation du mélange au cadre adélique.

Une grande partie de mes contributions a été consacré à ces généralisations :

- un exemple d'application du mélange adélique dans [Gui08] : l'ensemble des matrices de dénominateur  $n$  dans le groupe  $SO(k)$  s'équidistribue vers la mesure de Haar de ce groupe.
- une généralisation de l'application de la dualité couplée aux théorèmes de Ratner dans [Gui10b] au cadre  $S$ -arithmétique, généralisant l'article [GW07].

Enfin, je me suis penché plus précisément sur l'exemple de Ledrappier dans [Gui10a], expliquant un phénomène apparaissant sur les expérimentations graphiques. Ce travail est lié à des problèmes de vitesse d'équidistribution, comme ils ont été abordés dans [MW12]. Maucourant et Schapira [MS12] proposent une autre variation sur l'exemple de Ledrappier. Ce champ ne fait plus actuellement partie de mes champs de recherche actifs.

## Bibliographie

- [Ben05] Y. BENOIST – « Convexes divisibles. III », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38** (2005), no. 5, p. 793–832.
- [Ben08] ———, « A survey on divisible convex sets », *Geometry, analysis and topology of discrete groups*, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 6, Int. Press, Somerville, MA, 2008, p. 1–18.
- [BQ11] Y. BENOIST et J.-F. QUINT – « Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes », *Ann. of Math. (2)* **174** (2011), no. 2, p. 1111–1162.
- [BFG13a] N. BERGERON, E. FALBEL et A. GUILLOUX – « Tetrahedra of flags, volume and homology of  $SL(3)$  », *Geometry and Topology* (2013), To appear.
- [BFG<sup>+</sup>13b] N. BERGERON, E. FALBEL, A. GUILLOUX, P.-V. KOSELEFF et F. ROUILLIER – « Local rigidity for  $PGL(3, \mathbf{C})$ -representations of 3-manifold groups », *Exp. Math.* **22** (2013), no. 4, p. 410–420.
- [BG13a] N. BERGERON et A. GUILLOUX – « Géométrie hyperbolique et représentation de groupes de surfaces », (2013), Notes de Cours.
- [BG13b] ———, « Introduction aux surfaces de Riemann », (2013), Notes de Cours.
- [BS01] F. BONAHOON et Y. SÖZEN – « The Weil-Petersson and Thurston symplectic forms », *Duke Math. J.* **108** (2001), no. 3, p. 581–597.
- [BBI13] M. BUCHER, M. BURGER et A. IOZZI – « A dual interpretation of the gromov–thurston proof of mostow rigidity and volume rigidity for representations of hyperbolic lattices », *Trends in Harmonic Analysis*, Springer, 2013, p. 47–76.
- [CG93] S. CHOI et W. M. GOLDMAN – « Convex real projective structures on closed surfaces are closed », *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), no. 2, p. 657–661.
- [Cho04] Y.-E. CHOI – « Positively oriented ideal triangulations on hyperbolic three-manifolds », *Topology* **43** (2004), no. 6, p. 1345–1371.
- [DF13] M. DERAUX et E. FALBEL – « Complex hyperbolic geometry of the figure eight knot », *ArXiv e-prints* (2013).
- [DGG13] T. DIMOFTE, M. GABELLA et A. B. GONCHAROV – « K-decompositions and 3d gauge theories », *arXiv preprint arXiv:1301.0192* (2013).
- [DG13] T. DIMOFTE et S. GAROUFALIDIS – « The quantum content of the gluing equations », *Geom. Topol.* **17** (2013), no. 3, p. 1253–1315.
- [Dun99] N. M. DUNFIELD – « Cyclic surgery, degrees of maps of character curves, and volume rigidity for hyperbolic manifolds », *Invent. Math.* **136** (1999), no. 3, p. 623–657.
- [EM93] A. ESKIN et C. MCMULLEN – « Mixing, counting, and equidistribution in Lie groups », *Duke Math. J.* **71** (1993), no. 1, p. 181–209.
- [FKR13] E. FALBEL, P.-V. KOSELEFF et F. ROUILLIER – « Representations of fundamental groups of 3-manifolds into  $pGL(3, \mathbf{c})$  : Exact computations in low complexity », *arXiv:1307.6697* (2013).
- [Fal08] E. FALBEL – « A spherical CR structure on the complement of the figure eight knot with discrete holonomy », *Journal of Differential Geometry* **79** (2008), p. 69–110.
- [Fal11] ———, « A volume function for spherical CR tetrahedra », *Q. J. Math.* **62** (2011), no. 2, p. 397–415.
- [FGK<sup>+</sup>14] E. FALBEL, A. GUILLOUX, P.-V. KOSELEFF, F. ROUILLIER et M. THISTLETHWAITE – « Character varieties for  $SL(3, \mathbf{C})$  : the figure eight knot », (2014), Prépublication.
- [FST03] E. FALBEL et R. SANTOS THEBALDI – « A Flag structure on a cusped hyperbolic 3-manifold with unipotent holonomy. », 2014-03.



- [FG06] V. FOCK et A. GONCHAROV – « Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2006), no. 103, p. 1–211.
- [GGZ12] S. GAROUFALIDIS, M. GOERNER et C. K. ZICKERT – « Gluing equations for  $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ -representations of 3-manifolds », *ArXiv e-prints* (2012).
- [GTZ11] S. GAROUFALIDIS, D. P. THURSTON et C. K. ZICKERT – « The complex volume of  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ -representations of 3-manifolds », *ArXiv e-prints* (2011).
- [GZ13] S. GAROUFALIDIS et C. K. ZICKERT – « The symplectic properties of the  $\mathrm{pgl}(n, \mathbb{C})$ -gluing equations », *arXiv preprint arXiv:1310.2497* (2013).
- [dSG10] H. P. DE SAINT GERVAIS – *Uniformisation des surfaces de Riemann*, ENS Editions, 2010.
- [Gol84] W. M. GOLDMAN – « The symplectic nature of fundamental groups of surfaces », *Adv. in Math.* **54** (1984), no. 2, p. 200–225.
- [Gol88] ———, « Geometric structures on manifolds and varieties of representations », *Geometry of group representations* (Boulder, CO, 1987), *Contemp. Math.*, vol. 74, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, p. 169–198.
- [GW07] A. GORODNIK et B. WEISS – « Distribution of lattice orbits on homogeneous varieties », *Geom. Funct. Anal.* **17** (2007), no. 1, p. 58–115.
- [Gui11] O. GUICHARD – « Aspects topologiques et géométriques des représentations de groupes de surfaces », (2011), Thèse d’habilitation.
- [Gui08] A. GUILLOUX – « Existence et équidistribution des matrices de dénominateur  $n$  dans les groupes unitaires et orthogonaux », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **58** (2008), no. 4, p. 1185–1212.
- [Gui10a] ———, « A brief remark on orbits of  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  in the Euclidean plane », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **30** (2010), no. 4, p. 1101–1109.
- [Gui10b] ———, « Polynomial dynamic and lattice orbits in  $S$ -arithmetic homogeneous spaces », *Confluentes Math.* **2** (2010), no. 1, p. 1–35.
- [Gui13a] ———, « Deformation of hyperbolic manifolds in  $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$  and discreteness of the peripheral representations », *Proc. of the AMS* (2013), To appear.
- [Gui13b] ———, « Equidistribution in  $S$ -arithmetic and adelic spaces », *Ann. Fac. Sci. Tou.* (2013), À paraître.
- [Gui13c] ———, « Representations of 3-manifold groups in  $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$  and their restriction to the boundary », *arXiv preprint arXiv:1310.2907* (2013).
- [Gui13d] ———, « Yet another  $p$ -adic hyperbolic disc », *Submitted* (2013).
- [GCJ13a] A. GUILLOUX, B. CAUDRON et J.-L. JESTIN – « A method to predict amino acids at proximity of beta-sheet axes from protein sequences », *Applied Mathematics* **5** (2013), p. 79.
- [GCJ13b] ———, « A method to predict edge strands in beta-sheets from protein sequences », *Computational and structural biotechnology journal* **7** (2013).
- [GJ12] A. GUILLOUX et J.-L. JESTIN – « The genetic code and its optimization for kinetic energy conservation in polypeptide chains », *Biosystems* **109** (2012), no. 2, p. 141–144.
- [dlH93] P. DE LA HARPE – « On Hilbert’s metric for simplices », *Geometric group theory, Vol. 1* (Sussex, 1991), *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, vol. 181, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, p. 97–119.
- [Hil95] D. HILBERT – « Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte », *Math. Ann.* **46** (1895), p. 91–96.
- [Kab07] Y. KABAYA – « Pre-Bloch invariants of 3-manifolds with boundary », *Topology Appl.* **154** (2007), no. 14, p. 2656–2671.
- [KK13] S. KIM et I. KIM – « On deformation spaces of nonuniform hyperbolic lattices », *ArXiv e-prints* (2013).
- [Kos68] J.-L. KOSZUL – « Déformations de connexions localement plates », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **18** (1968), no. fasc. 1, p. 103–114.

- [Lab06] F. LABOURIE – « Anosov flows, surface groups and curves in projective space », *Invent. Math.* **165** (2006), no. 1, p. 51–114.
- [Led99] F. LEDRAPPIER – « Distribution des orbites des réseaux sur le plan réel », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329** (1999), no. 1, p. 61–64.
- [LST08a] F. LUO, S. SCHLEIMER et S. TILLMANN – « Geodesic ideal triangulations exist virtually », *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), no. 7, p. 2625–2630.
- [LST08b] ———, « Geodesic ideal triangulations exist virtually », *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), no. 7, p. 2625–2630.
- [Mar69] G. A. MARGULIS – « Certain applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature », *Func. Anal. Appl.* **4** (1969), p. 333–335.
- [Mar97] ———, « Oppenheim conjecture », *Fields Medallists' lectures*, World Sci. Ser. 20th Century Math., vol. 5, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997, p. 272–327.
- [MS12] F. MAUCOURANT et B. SCHAPIRA – « Distribution of orbits in  $\mathbb{R}^2$  of a finitely generated group of  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  », *ArXiv e-prints* (2012).
- [MW12] F. MAUCOURANT et B. WEISS – « Lattice actions on the plane revisited », *Geom. Dedicata* **157** (2012), p. 1–21.
- [MP11] P. MENAL-FERRER et J. PORTI – « Local coordinates for  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$  character varieties of finite volume hyperbolic 3-manifolds », *ArXiv e-prints* (2011).
- [Neu92] W. D. NEUMANN – « Combinatorics of triangulations and the Chern-Simons invariant for hyperbolic 3-manifolds », *Topology '90* (Columbus, OH, 1990), Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., vol. 1, de Gruyter, Berlin, 1992, p. 243–271.
- [Neu04] ———, « Extended Bloch group and the Cheeger-Chern-Simons class », *Geom. Topol.* **8** (2004), p. 413–474 (electronic).
- [NZ85] W. D. NEUMANN et D. ZAGIER – « Volumes of hyperbolic three-manifolds », *Topology* **24** (1985), no. 3, p. 307–332.
- [PP00] C. PETRONIO et J. PORTI – « Negatively oriented ideal triangulations and a proof of Thurston's hyperbolic Dehn filling theorem », *Expo. Math.* **18** (2000), no. 1, p. 1–35.
- [Rat94] M. RATNER – « Invariant measures and orbit closures for unipotent actions on homogeneous spaces », *Geom. Funct. Anal.* **4** (1994), no. 2, p. 236–257.
- [Ril13] R. RILEY – « A personal account of the discovery of hyperbolic structures on some knot complements », *Expo. Math.* **31** (2013), no. 2, p. 104–115.
- [Ser77] J.-P. SERRE – *Arbres, amalgames,  $\mathrm{SL}_2$* , Société Mathématique de France, Paris, 1977, Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [Thu97] W. P. THURSTON – *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, Princeton Mathematical Series, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Edited by Silvio Levy.
- [Ver05] C. VERNICOS – « Introduction aux géométries de Hilbert », Actes de Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 23. Année 2004–2005, Sémin. Théor. Spectr. Géom., vol. 23, Univ. Grenoble I, Saint, 2005, p. 145–168.
- [Zic] C. K. ZICKERT – « The extended Bloch group and algebraic  $K$ -theory », Prépublication <http://arxiv.org/abs/0910.4005v3>.

**Résumé :** Ce mémoire présente mes travaux mathématiques et se concentre plus particulièrement sur l'étude des variétés de caractères de groupes fondamentaux de variétés de dimension 3.

Ces recherches, fortement inspirées d'une part de travaux sur les structures hyperboliques sur les variétés de dimension 3 à pointes (Thurston, Neumann-Zagier...) et d'autre part sur des coordonnées pour les variétés de caractères de groupes fondamentaux de surfaces (Fock-Goncharov...), permettent une étude aussi bien fois expérimentale, via le calcul formel, que théorique de ces variétés de caractères. Ils ouvrent aussi la voie à des questions plus géométriques : constructions de structures géométriques sur des variétés de dimension 3 ou encore étude de la discrétude des représentations.

**Abstract :** This memoir consists in a survey of my mathematical works, focusing essentially on character varieties for fundamental groups of 3-manifolds.

Two major influences converge in these researchs : first the study of hyperbolic structures on 3-manifolds (Thurston, Neumann-Zagier...) and second the construction of coordinates for character varieties of fundamental groups of surfaces (Fock-Goncharov...). The tools I (among others) developed may be used for an experimental study of these character varieties (through formal computations) as well as a more theoretical treatment. Some questions of a more geometric flavor arise, as e.g. the construction of new geometric structures on 3-manifolds or the study of the discreteness of representations.