



HAL
open science

Sur la théorie de la diffusion pour l'équation de Dirac massive en espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter

Guillaume Idelon-Riton

► **To cite this version:**

Guillaume Idelon-Riton. Sur la théorie de la diffusion pour l'équation de Dirac massive en espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter. Physique mathématique [math-ph]. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : 2016GREAM094 . tel-01370116

HAL Id: tel-01370116

<https://hal.science/tel-01370116>

Submitted on 22 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 Août 2006

Présentée par

Guillaume Idelon-Riton

Thèse dirigée par **Dietrich Häfner**

préparée au sein **Institut Fourier**
et de **MSTII**

Sur la théorie de la diffusion pour l'équation de Dirac massive en espace-temps Schwarzschild-Anti- de Sitter

Thèse soutenue publiquement le **06 Juillet 2016**,
devant le jury composé de :

Mr. Alain Bachelot

Professeur, Université de Bordeaux, Rapporteur

Mr. Philippe LeFloch

Directeur de Recherche, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Rapporteur

Mme. Cécile Huneau

Chargée de recherche, Université Grenoble Alpes, Examineur

Mr. Thierry Daudé

Maître de Conférence, Université de Cergy-Pontoise, Examineur

Mr. Jérémie Faupin

Professeur, Université de Lorraine, Examineur

Mr. Jean-Philippe Nicolas

Professeur, Université de Brest, Examineur

Mr. Jacques Smulevici

Maître de Conférence, Université Paris-Sud, Examineur

Mr. Dietrich Häfner

Professeur, Université de Grenoble Alpes, Directeur de thèse



Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Dietrich Häfner pour avoir accepté de m'encadrer pendant cette thèse. Ses conseils éclairés et sa vision des mathématiques m'ont beaucoup fait évoluer durant ces quatre années. Je n'oublierais pas non plus son optimisme et ses nombreuses anecdotes qui m'ont permis d'éliminer un peu de mon stress dans les périodes difficiles.

Je remercie mes deux rapporteurs Alain Bachelot et Philippe LeFloch pour leur relecture attentive qui n'a pas dû être de tout repos. Je remercie également les autres membres du jury que sont Cécile Huneau, Thierry Daudé, Jérémy Faupin, Jean-Philippe Nicolas et Jacques Smulevici. Je suis très reconnaissant à chacun d'entre eux d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je souhaite aussi remercier tous les membres de l'Institut Fourier. Ceux-ci contribuent à créer une ambiance agréable nécessaire pour pouvoir travailler en toute sérénité. J'ai une pensée particulière pour toutes les personnes avec qui j'ai pu discuter au détour d'un couloir ou à la cafétéria.

Je remercie chaleureusement mes amis dont la présence m'a beaucoup aidé tout au long de cette thèse. Je pense tout spécialement à Vincent Berlioux pour tous les déjeuners, ponctués de discussions fort sympathiques et stimulantes, que nous avons pris ensemble. Je pense également à Qie Yu qui m'a transmis son goût pour le cinéma et qui m'a permis d'améliorer ma prononciation du chinois. Je remercie aussi Sébastien, Benoît, Anupam, Laura, Brahim, Vincent ainsi que tous ceux que j'oublie et qui, je l'espère, me pardonneront.

Mes derniers remerciements vont à ma famille pour son soutien tout au long de mon parcours. Je pense tout particulièrement à mes parents qui ont toujours été présents et qui m'ont donné la force de m'accrocher dans les moments difficiles de la thèse mais aussi de la vie en général.

Résumé

Ce mémoire est consacré à la théorie de la diffusion pour l'équation de Dirac massive dans l'espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter. L'espace-temps Schwarzschild-Anti-De-Sitter est une solution des équations d'Einstein dans le vide avec constante cosmologique négative contenant un trou noir. Le caractère non globalement hyperbolique de cet espace-temps rend, dans un premier temps, nécessaire une étude du caractère bien posé de l'équation de Dirac. Après une analyse du domaine naturel de notre Hamiltonien, nous décrivons les domaines nécessaires à la résolution du problème de Cauchy et remarquons que ceux-ci dépendent de la comparaison de la masse avec la constante cosmologique. Nous nous intéressons ensuite à la théorie de la diffusion dépendante du temps pour cette équation. Par l'intermédiaire de la théorie de Mourre, nous prouvons la complétude asymptotique et nous montrons que la vitesse de notre champ est asymptotiquement égale à 1.

Dans un second temps, nous souhaitons étudier les résonances pour notre système. Nous commençons par construire des quasimodes exponentiellement précis pour notre Hamiltonien. Nous définissons ensuite les résonances en tant que pôles de la résolvante et prouvons leur existence utilisant la théorie de Fredholm méromorphe. Nous donnons ensuite une formule explicite pour la résolvante. Enfin nous construisons des solutions BKW avec des développements précis dans le paramètre semiclassique h .

Abstract

This thesis is dealing with scattering theory for the massive Dirac equation on the Schwarzschild-Anti-de Sitter space-time. The Schwarzschild-Anti-De Sitter spacetime is a solution of the vacuum Einstein equations with negative cosmological constant containing a black hole. As this space-time is not globally hyperbolic, we first have to study the well posedness of the equation. After the study of the natural domain of our Hamiltonian, we describe the domains which allow us to solve the Cauchy problem and remark that these domains depend on the ratio between the mass of the field and the cosmological constant. We then investigate time dependent scattering theory for this equation. Using Mourre theory, we are able to prove asymptotic completeness. As a consequence, we prove that the asymptotic velocity of our fields is 1.

In the second chapter, we wish to study the resonances for our system. We first construct exponentially accurate quasimodes for our Hamiltonian. Then, we prove the existence of resonances as poles of the resolvent using meromorphic Fredholm theory. We next give an explicit formula for the resolvent. We eventually construct WKB solutions with precise asymptotics in the semi-classical parameter h .

Table des matières

Introduction	6
1 Complétude asymptotique pour les champs de Dirac massif en espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter	21
1.1 Introduction	21
1.2 Espace-temps Anti-de Sitter Schwarzschild et équation de Dirac associée	26
1.2.1 L'espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter	26
1.2.2 L'équation de Dirac en espace-temps Anti-de Sitter Schwarzschild	28
1.2.3 Généralisation	32
1.3 Etude de l'Hamiltonien	34
1.3.1 Description du domaine	34
Les harmoniques sphériques	34
Un résultat dû à A.Bachelot	36
Transformation unitaire de l'opérateur H_m	38
Comportement asymptotique des éléments du domaine	39
Description du domaine	44
1.3.2 Caractère auto-adjoint à harmoniques fixées	44
Cas $2ml \geq 1$	45
Cas $2ml < 1$	48
1.3.3 Caractère auto-adjoint de \tilde{H}_m	51
Cas $2ml \geq 1$	51
Cas $2ml < 1$	52
Caractère auto-adjoint de H_m	54
1.3.4 Le problème de Cauchy	55
1.3.5 Absence de valeurs propres	55
1.4 Lemme de compacité	57
1.4.1 Opérateurs asymptotiques	57
Opérateur H_-	57
Opérateur H_+	59
1.4.2 Compacité de $f(x)(H_- - z)^{-1}$	60
1.4.3 Compacité de $(H_+ - z)^{-1}$	62
1.4.4 Preuve de la proposition 1.4.1	68
1.5 Estimations de Mourre	69
1.5.1 Rappels de la théorie de Mourre	69
1.5.2 Estimations de Mourre pour l'opérateur de Dirac	70
1.6 Estimations de propagation	74
1.6.1 Estimations de propagation abstraites	74

	Le principe de base	75
	Estimation de vitesse minimale abstraite	75
1.6.2	Estimations de propagation pour l'opérateur de Dirac	76
1.7	Complétude asymptotique	81
1.7.1	Opérateur de comparaison	82
1.7.2	Complétude asymptotique	82
1.8	Vitesse asymptotique	84
1.8.1	Théorie abstraite	84
1.8.2	Vitesse asymptotique pour H_c	85
1.8.3	Vitesse asymptotique pour H_m	87
2	Contributions à l'étude des résonances pour les champs de Dirac en espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter	89
2.1	Introduction	89
2.2	Quasimodes	95
2.2.1	Étude des différents opérateurs considérés	96
2.2.2	Estimées d'Agmon	106
2.2.3	Estimation pour les valeurs propres de P^+	113
2.2.4	Construction des quasimodes	114
2.2.5	Borne inférieure pour l'énergie locale	115
2.3	Extension méromorphe de la résolvante	116
2.3.1	Cas d'une variété asymptotiquement hyperbolique à symétrie sphérique	117
	Existence des solutions de Jost	118
	Extension méromorphe de $(H_c - \lambda)^{-1}$	120
	Extension méromorphe de $(\tilde{H} - \lambda)^{-1}$	123
2.3.2	Extension méromorphe de la résolvante pour l'opérateur de Dirac dans l'espace-temps de Schwarzschild Anti-de Sitter	128
2.4	Formule explicite de la résolvante	130
2.4.1	Solutions de Jost	130
2.4.2	Solutions avec condition au bord	133
2.4.3	Formule de la résolvante	142
2.5	Solutions BKW	153
2.5.1	Analyse des lignes de Stokes	153
2.5.2	Solutions BKW loin des points tournants	159
2.5.3	Solutions de Jost BKW	177
2.5.4	Solutions BKW avec condition au bord	186
2.6	Résumé et perspectives concernant les résonances	195
	Appendices	198
.1	Calcul de l'équation de Dirac	199
.2	Asymptotiques de r en fonction de x	201

Introduction

Les résultats présentés dans ce mémoire concernent quelques propriétés spectrales de l'équation de Dirac massive dans un espace-temps de type trou noir. Nous commencerons cette introduction par rappeler quelques faits historiques concernant la relativité générale afin d'arriver aux équations d'Einstein dont nous décrirons les solutions de Schwarzschild et Anti-de Sitter. Nous poursuivrons par une introduction à la théorie de la diffusion dont nous aborderons plus particulièrement la théorie dépendante du temps. Nous terminerons par une introduction à la théorie des résonances et à ses motivations.

Un point de vue historique sur la relativité générale

La théorie de la relativité générale a été une des avancées majeures du 20ème siècle. Cent ans plus tard, elle reste la théorie de la gravitation la plus aboutie à notre disposition. Nous allons essayer d'en saisir quelques idées en retraçant, de manière simplifiée et certainement incomplète, le cheminement qu'a suivi Albert Einstein pour construire cette théorie et qui a abouti quelques années plus tard à la formalisation du concept de trou noir.

Face au manque de cohérence entre les équations de Maxwell et la mécanique Newtonienne ainsi qu'au manque de confirmation expérimentale de la présence de l'éther, Albert Einstein publie en 1905 son article concernant ce que l'on nomme de nos jours la théorie de la relativité restreinte. Cet article met fin à nombre de recherches entamées entre la fin du 19ème et le début du 20ème siècle par des physiciens tels que Hendrik Lorentz ou Henri Poincaré pour ne citer qu'eux. Celle-ci repose sur les deux postulats suivants :

- les lois de la physique sont identiques dans tous les repères non accélérés,
- la vitesse de la lumière est la même pour tout observateur dans un tel repère.

En 1907, suite à des travaux initiés par Henri Poincaré qui considérait le temps comme étant imaginaire, Hermann Minkowski donne une nouvelle formulation de la relativité restreinte utilisant l'espace-temps qui porte aujourd'hui son nom. Nous en donnerons une description en des termes contemporains. L'espace-temps de Minkowski est une variété différentielle \mathcal{M} de dimension 4 qu'on peut décrire, dans un certain système de coordonnées, par :

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z.$$

Cette variété différentielle est munie de la métrique η définie par :

$$\eta = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Ceci signifie qu'en chaque point $p \in \mathcal{M}$, nous pouvons définir un espace vectoriel appelé espace tangent et noté $T_p(\mathcal{M})$. Un vecteur $V = (V_t, V_x, V_y, V_z) \in T_p(\mathcal{M})$ aura donc une "norme" égale à :

$$\eta(V, V) = V_t^2 - V_x^2 - V_y^2 - V_z^2.$$

La métrique nous permet ainsi de mesurer les distances, les aires et les volumes dans notre espace-temps. Ceci est similaire, dans le principe, à la géométrie mieux connue qu'est la géométrie Riemannienne, avec néanmoins des différences notables. Celle qui semble être la plus notable est liée au fait qu'en relativité restreinte, un observateur ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière. Il nous faut donc être capable de mesurer le fait d'aller plus ou moins vite que la vitesse de la lumière. Réintroduire cette vitesse c dans notre métrique donne :

$$\eta = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

La vitesse d'un observateur au point $p \in \mathcal{M}$ est alors donnée par un vecteur tangent $V \in T_p(M)$ qui admet trois comportements différents :

- Soit $\eta(V, V) > 0$ auquel cas la vitesse de notre observateur est strictement inférieure à celle de la lumière. Nous parlerons d'un "vecteur de type temps".
- Soit $\eta(V, V) = 0$ qui correspond à un observateur voyageant à la vitesse de la lumière. Nous dirons que ces vecteurs sont "de type lumière" ou "isotropes".
- Soit $\eta(V, V) < 0$ correspondant à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Nous appellerons ces vecteurs "de type espace".

Un observateur dans l'espace-temps de Minkowski suit alors une courbe, notée $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, qui admet en tout point de \mathcal{M} un vecteur tangent (ou une vitesse) de l'un des types cités ci-dessus. D'après les postulats de la relativité restreinte, seul un observateur allant à une vitesse inférieure ou égale à celle de la lumière a un sens physique. Les vecteurs tangents à γ seront alors soit de type temps, soit de type lumière. Ce genre de vecteur est appelé un "vecteur causal" et la courbe correspondante une "courbe causale". Une courbe dont les vecteurs tangents ne changent pas de type prendra le nom du type correspondant. En outre, en relativité restreinte, nous distinguons certains observateurs dont le mouvement se poursuit sans accélération. De tels observateurs suivent alors des courbes appelées les géodésiques. Nous pouvons nous demander quels vont être les points d'arrivée de tels observateurs dans l'espace-temps.

Pour analyser ceci, nous cherchons dans un premier temps à nous ramener à distance finie par un changement de coordonnées. Ainsi, nous pouvons observer d'où proviennent et où vont arriver les différents types de géodésiques. Ceci peut être mieux visualisé dans un diagramme de Penrose 1 où l'on a retiré deux dimensions et où il est préférable d'utiliser la métrique sous la forme suivante :

$$\eta = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2),$$

où $t \in \mathbb{R}$, $r \in]0, +\infty[$, $\theta \in]0, \pi[$, $\varphi \in]0, 2\pi[$. Dans ce diagramme, un point représente une sphère et nous pouvons voir que les géodésiques de type temps sont issues d'une sphère, noté i^- , et se dirigent toutes vers une sphère i^+ . Les géodésiques de type espace sont issues du point i^0 et se dirigent vers ce même point. Par contre, les géodésiques de type lumière sont issues d'une hypersurface de type lumière (c'est-à-dire que l'espace tangent en tout point de cet hypersurface contient un vecteur de type lumière) et finissent sur une hypersurface de type lumière. Enfin, comme en géométrie Riemannienne, nous pouvons définir les tenseurs de courbure de Riemann R_{abcd} , de Ricci R_{ab} et la courbure scalaire. Une des propriétés les plus importantes de l'espace-temps de Minkowski est que sa courbure est nulle, nous parlons d'un espace-temps plat.

Revenons maintenant à l'année 1907. La théorie de la relativité restreinte souffrait d'un problème majeur à ce moment là : elle n'intégrait pas les lois de la gravitation telles qu'elles étaient formulées par Newton. Ces lois affirmaient qu'un changement dans la distribution de matière de l'univers devrait influencer instantanément le champ gravitationnel dans tout l'univers, ce qui va notamment à l'encontre du second postulat ci-dessus. C'est dans cette année qu'Einstein eu ce qu'il a appelé "the happiest thought of my life" en réalisant que les lois de Galilée sur la chute

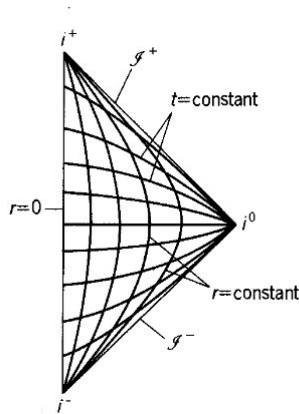


FIGURE 1 – Diagramme de Penrose de l'espace-temps de Minkowski

des corps pouvaient lui permettre de généraliser le principe de relativité à la gravitation. Ces lois affirment l'égalité de la masse inerte (qui quantifie la résistance d'un corps à une accélération) avec la masse grave (qui apparaît dans les lois de la gravitation) dans un bon choix d'unité. Cette égalité a été vérifiée expérimentalement avec un haut degré de précision et laisse entrevoir un lien étroit entre la gravité et l'accélération des corps. Einstein va plus loin dans cette analogie en formulant son principe d'équivalence qui affirme que la gravitation est équivalente à de l'accélération. Nous pouvons nous convaincre de cette équivalence grâce à ce qu'Einstein appelait une "expérience de pensée" qui a beaucoup évolué depuis sa conception originale et qui prend souvent la forme suivante de nos jours :

- 1) Considérons un observateur dans une cabine hermétique attachée quelque part dans l'espace. En l'absence de toute force, cette personne va flotter dans la cabine. De la même façon, s'il lâche deux pierres, elles vont aussi flotter avec lui.
- 2) Maintenant, supposons qu'une fusée tire soudainement le câble depuis l'extérieur avec une accélération constante. L'observateur ainsi que les pierres vont alors toucher le sol de la cabine.
- 3) Considérons maintenant cette même cabine dans un champ gravitationnel constant. Alors, de nouveau, l'observateur ainsi que les pierres vont toucher le sol de la cabine. L'observateur ne peut faire aucune expérience lui permettant de décider s'il touche le sol à cause du champ gravitationnel ou à cause de l'accélération de la fusée.
Nous voyons ainsi que, localement (c'est-à-dire dans la cabine pour l'exemple qui nous intéresse), les effets de la gravité et d'une accélération sont indistinguables.
- 4) Maintenant, si quelqu'un coupe le câble de la cabine, alors la cabine va tomber en chute libre et notre observateur ainsi que ses pierres vont flotter dans la cabine comme c'est le cas en l'absence de gravité.
Ainsi, localement, les effets de la gravité peuvent être éliminés en utilisant un repère de référence en chute libre.
- 5) Dans la discussion précédente, nous avons bien pris garde de préciser que l'accélération était constante et que les déductions étaient vraies "localement". En effet, si notre observateur dans sa cabine était soumis au champ gravitationnel de la Terre, qui n'est pas constant et pointe en direction du centre de la Terre, alors les pierres iraient en direction de ce centre et se rapprocheraient l'une de l'autre.

6) Ainsi, si quelqu'un coupe de nouveau le câble, l'observateur et les pierres flotteraient toujours mais l'observateur remarquerait que les pierres se rapprochent l'une de l'autre. Il pourrait en conclure qu'une force serait responsable de ceci.

Dans un champ gravitationnel non uniforme, les effets de la gravité ne peuvent être éliminés en utilisant un système de coordonnées en chute libre. Ceci n'est possible que localement, à une échelle où le champ de gravitation est essentiellement constant.

À travers cette expérience de pensée, nous voyons non seulement apparaître l'équivalence de l'accélération avec la gravitation mais aussi le fait que cette équivalence n'est valable que localement. Avec les connaissances que nous avons de nos jours, ceci laisse entrevoir une analogie avec la géométrie différentielle. Mais en 1907, les idées d'Einstein pour généraliser le principe de relativité à la gravitation n'étaient pas tout à fait claires dans son esprit et il fallu attendre 1911 avant qu'une formulation rigoureuse du principe d'équivalence soit donnée. Il existe différentes versions de ce principe qui dépendent des lois de la nature considérées. Nous en énonçons néanmoins deux formulations :

- En tout point d'un espace-temps présentant un champ gravitationnel arbitraire, il est possible de choisir un système de coordonnées inertiel local tel que, dans une région suffisamment petite voisine de ce point, les lois de la nature ont la même forme que dans un système de coordonnées Cartésien non accéléré en l'absence de gravitation.
- Les expériences réalisées dans un laboratoire en chute libre, suffisamment petit et sur une période de temps suffisamment petite, donnent lieu à des résultats indistinguables des résultats de ces mêmes expériences dans un repère inertiel dans l'espace vide.

C'est le principe d'équivalence qui amène Einstein à l'interprétation qu'on connaît aujourd'hui de la gravité comme courbure de l'espace-temps. Nous pouvons tout d'abord comprendre pourquoi le temps est courbé grâce au paradoxe des jumeaux qui dit que si un des deux jumeaux prend un avion et subit une accélération pendant que l'autre reste au repos, le premier sera plus jeune lorsqu'il rencontrera de nouveau son frère. Ce type de paradoxe était connu avant la formulation de la relativité générale et ce n'est pas le seul phénomène qui a amené Einstein à s'intéresser à la notion de courbure. En étudiant un système de coordonnées en rotation uniforme, on voit apparaître le phénomène de contraction des longueurs qui indique que même au niveau spatial, il semblerait que la géométrie à mettre en place pour obtenir une théorie de la gravitation soit non-euclidienne. À cette époque, Einstein connaissait la théorie de Gauss sur la courbure des surfaces et il était au fait de la reformulation de la théorie de la relativité restreinte qu'avait faite Hermann Minkowski en utilisant un tenseur métrique. En 1912, Einstein interroge son ami de longue date Marcel Grossmann, mathématicien à Zürich, sur l'existence d'un tenseur indépendant du système de coordonnées et qui dépendrait uniquement des dérivées du tenseur métrique. Un jour plus tard, Grossmann lui répond qu'il existe une telle quantité et qu'elle a été étudiée par Riemann, Ricci, Levi-Civita et Bianchi entre autres dans ce qui s'appelle aujourd'hui la géométrie Riemannienne. Après plusieurs années de recherche, Einstein arrive finalement à la forme finale des équations de la gravitation qu'il publie en 1915 :

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (0.0.1)$$

où R_{ab} est le tenseur de courbure de Ricci, R est la courbure scalaire, g_{ab} est le tenseur métrique et T_{ab} est le tenseur énergie-impulsion qui mesure la quantité de matière présente dans l'univers.

Grâce à cette équation, il serait maintenant théoriquement possible de déterminer les champs qui régissent la gravitation dans l'univers. Dans la pratique, les équations de champs de la relativité générale sont des équations non linéaires qui n'admettaient d'autre solution que l'espace-temps plat de Minkowski dans lequel aucun phénomène gravitationnel n'était présent. Pour

Einstein, l'une des premières validations de sa théorie serait de trouver une solution modélisant un phénomène gravitationnel. Étant donné la structure de ses équations, ce travail semblait impossible à Einstein. Néanmoins, quelques mois seulement après la publication de ces équations, un physicien allemand du nom de Karl Schwarzschild réussit, alors qu'il était à l'hôpital pour une maladie qu'il avait contracté sur le front lors de la première guerre mondiale, à donner une solution explicite des équations d'Einstein, solution qui porte désormais son nom. Pour ce faire, il commence par faire des simplifications par rapport aux équations originales en supposant tout d'abord que le tenseur énergie-impulsion est nul, ce qui signifie que la solution obtenue sera exempte de matière. En outre, il suppose son espace-temps statique, c'est-à-dire que l'espace apparaît toujours le même quelque soit le temps auquel on se place, et à symétrie sphérique, ce qui signifie qu'il n'y a pas de direction privilégiée de l'espace. Il en déduit la métrique suivante :

$$ds_{Schw}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2). \quad (0.0.2)$$

La variable t est interprétée comme représentant le temps, tandis que la variable r représenterait la distance au centre. Les variables θ et φ sont alors les coordonnées sur la sphère. Bien que cette métrique soit une solution dans le vide des équations d'Einstein, elle présente des phénomènes intéressants. Nous pouvons remarquer que cette métrique n'est pas définie pour les valeurs de r égales à 0 et $2M$, ce qu'on appelle une singularité dans la métrique. La singularité en $\{r = 2M\}$ est souvent appelée la singularité de Schwarzschild. En fait, pour les objets célestes qui nous concernent directement, tels que la Terre ou le Soleil, le rayon $r = 2M$ est à l'intérieur de tels objets où la solution de Schwarzschild n'est plus valable puisque le tenseur-énergie impulsion n'est plus nul. À l'extérieur, par contre, il n'y a pas de matière et le tenseur énergie impulsion est nul. La solution de Schwarzschild est alors raisonnable pour modéliser l'extérieur d'objets sphériques. Le paramètre M dans la métrique est ainsi interprété comme représentant la masse de l'objet qui, dans les cas précédemment cités, n'était pas confinée dans des volumes suffisamment petits pour que la singularité $\{r = 2M\}$ ne soit atteignable. Bien que cette singularité ne nous touche pas directement, son analyse, ainsi que celle de la singularité en 0, nous permet, d'un point de vue mathématique, de savoir si elle est liée aux coordonnées utilisées ou si elle provient de la géométrie qui devient singulière à cet endroit de l'espace-temps. D'un point de vue physique, on présume que, lorsqu'une étoile suffisamment massive n'a plus assez de carburant pour que les réactions thermonucléaires compensent les effets gravitationnels dus à sa masse, l'étoile s'effondrerait sur elle-même donnant lieu à une masse suffisamment confinée pour que le rayon $\{r = 2M\}$ apparaisse. Pour analyser cette singularité, nous pouvons tout d'abord nous intéresser à l'évolution d'un explorateur en chute libre qui se dirigerait vers celle-ci de manière radiale. Nous pouvons calculer qu'un tel observateur mettrait un temps fini, où le temps est ici celui qu'indiquerait une horloge qu'il transporterait avec lui tout au long du voyage, pour l'atteindre. Remarquons au passage que, pour un observateur au repos qui regarderait notre explorateur tomber vers $\{r = 2M\}$, celui-ci n'atteindrait jamais cette singularité puisque notre observateur au repos mesurerait le temps de parcourt de l'explorateur en terme de la coordonnée t et ce dernier met un temps t infini pour atteindre $\{r = 2M\}$. Revenons maintenant à notre explorateur qui, en se rapprochant de $\{r = 2M\}$, peut effectuer des mesures durant son voyage et ainsi tester quel type de singularité nous avons. Précisons tout de suite qu'il existe différentes sortes de singularités en relativité générale dont nous ne donnerons pas une liste ici. Pour ce qui est de l'analyse générale des singularités en relativité générale, on pourra se référer au livre de S. Hawking et G. Ellis [31]. Dans notre cas, un bon indicateur de la présence d'une vraie singularité de la géométrie est la mesure des forces de marée, qui correspondent aux composantes du tenseur de courbure de Riemann. Au voisinage de $\{r = 2M\}$, les mesures effectuées sur les forces de marée par notre explorateur sont finies, et heureusement pour lui ! Ceci laisse à penser

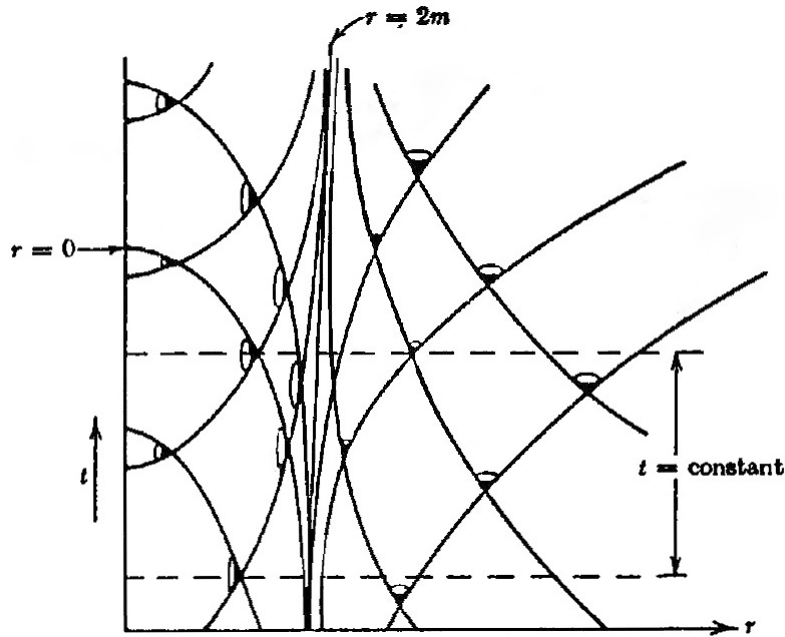


FIGURE 2 – Évolution des cônes de lumières près de la singularité de Schwarzschild

que $\{r = 2M\}$ n'est pas une singularité de la géométrie. Par contre, si notre explorateur pouvait s'approcher suffisamment près de $r = 0$, il verrait son appareil de mesure s'affoler devant des forces de marée gigantesques. En $r = 0$, nous avons une vraie singularité de la géométrie. Il reste maintenant à obtenir un système de coordonnées adapté, s'il existe, qui nous permettrait de mieux comprendre la géométrie de l'espace-temps de Schwarzschild dans son entier. Regardant la métrique (0.0.2), le premier problème qui apparaît en $r = 2M$ est le changement de causalité que l'on peut mieux voir dans la figure 2 ci-dessus. Dans la région $\{r > 2M\}$, la coordonnée t est de type temps c'est-à-dire que le vecteur ∂_t est de norme positive et est orienté vers les t croissants. Dans cette région, la coordonnée d'espace r est de type espace. Lorsqu'on traverse $\{r = 2M\}$ et que l'on se retrouve dans la région $\{r < 2M\}$, la situation a bien changé. La coordonnée t est devenue de type espace et la coordonnée r est devenue de type temps orientée vers les r décroissants. Ainsi, tout comme un observateur dans la région $\{r > 2M\}$ voit sa vie défilier inlassablement sans pouvoir rien faire contre l'avancée de son âge, un observateur dans la région $\{r < 2M\}$ voit sa coordonnée r diminuer invariablement pour finir "spaghettifié" en $r = 0$. L'analyse de la connection physique entre ces deux régions commence par l'étude des géodésiques radiales de type lumière. Celles-ci montrent que $\{r = 2M\}$ est atteint pour $t = \pm\infty$ et laissent à penser qu'un système de coordonnées mieux adapté déploierait ces "points à l'infini" en des droites. Historiquement, beaucoup de systèmes de coordonnées ont été utilisés pour visualiser l'espace-temps de Schwarzschild. En 1924, Arthur Eddington, qui avait notamment mis en place une expédition en 1919 pour observer une éclipse de soleil et ainsi mesurer le phénomène, prédit par la relativité générale, de déviation de la lumière lorsqu'elle passe proche d'un objet massif, donne un système de coordonnées qui ne fait plus apparaître de problème en $r = 2M$, mais il ne semble pas en avoir reconnu la signification à l'époque. Lemaître semble avoir été le premier, en 1933, à reconnaître qu'il n'y avait pas de singularité en $\{r = 2M\}$. Cependant, les systèmes de coordonnées introduits par Eddington et Lemaître ne couvrent que la moitié de la géométrie

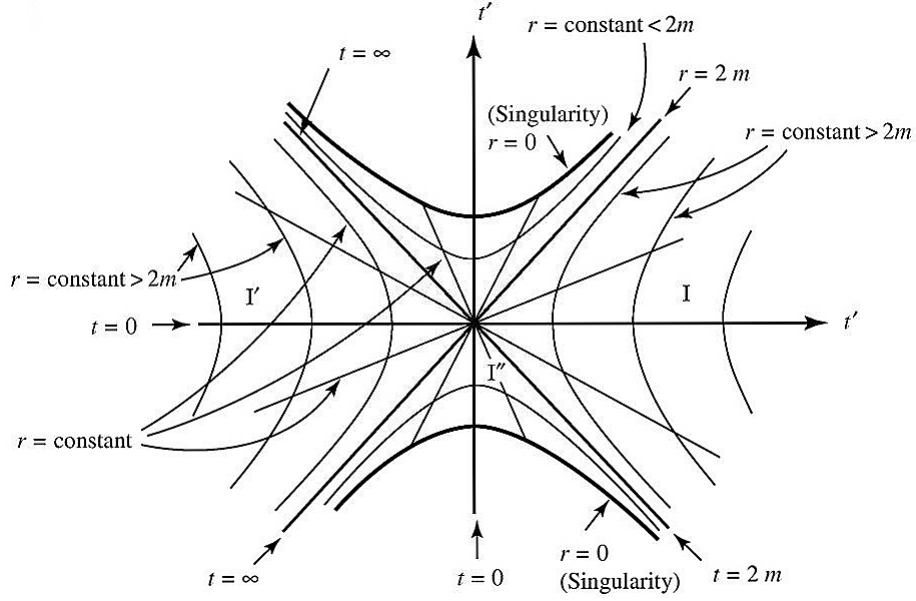


FIGURE 3 – Représentation des différentes régions qui composent l'espace-temps de Schwarzschild

de Schwarzschild. Le premier à avoir donné un système de coordonnées qui couvre la géométrie entière semble avoir été Synge en 1950. Le système de coordonnées actuellement adopté pour donner une représentation entière de la géométrie de Schwarzschild est celui de Kruskal-Szekeres dont la métrique admet la forme :

$$ds_{Schw}^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (dv^2 - du^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)$$

où l'on voit r comme une fonction de u et v . La région correspondant initialement à $\{r > 2M\}$ est devenue $u > |v|$. La surface $\{r = 2M\}$ est appelée l'horizon des événements et correspond à $\{u = v\}$. La région $\{r < 2M\}$, qui correspond à $\{v > |u|\}$, est appelée l'intérieur du trou noir. Dans cette région, un observateur se dirige inévitablement vers la singularité $\{r = 0\}$. Nous voyons aussi apparaître deux autres régions dont la première, correspondant à $\{-u > |v|\}$, est une copie de la région $u > |v|$ et la deuxième, déterminée par $\{-|u| > v\}$, est appelée un trou blanc. Contrairement au trou noir, on ne peut que s'échapper de cette région. Ces différentes régions sont explicitées dans le diagramme 3.

Maintenant qu'une solution non triviale de ses équations a été découverte, Einstein commence à s'intéresser à l'étude de la structure, l'origine et l'évolution de l'Univers, ou, en d'autres termes, à la cosmologie. Pour Einstein, la courbure était déterminée uniquement par la distribution de la matière dans l'univers. Il en déduit alors que l'univers devrait être fini spatialement et fermé. Les observations de l'époque laissaient aussi à penser que l'univers était statique. Cependant, ces hypothèses n'étaient pas compatibles avec ses équations de champs originales. Pour pallier à ce défaut, Einstein décide de les modifier dans un article de 1917. La seule modification qui reste en accord avec les principes de la relativité générale est alors de rajouter un certain multiple de la métrique. Le coefficient multiplicateur est appelé la constante cosmologique, habituellement notée Λ . Il obtient l'équation :

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}.$$

Cette même année, un physicien du nom de Willem de Sitter découvre une solution de cette équation dans le vide. Pour une constante cosmologique positive, l'univers serait alors en expansion, ce qui est contraire aux pensées d'Einstein à cette époque. Malgré les travaux de Friedmann en 1922 et 1924, ainsi que ceux de Lemaître en 1927, il fallut encore quelques années pour que cette idée soit acceptée. De nos jours, l'espace-temps de de Sitter est utilisé comme modèle approché de l'inflation cosmique dans l'univers primitif. Avec les observations des satellites tels qu'Hubble, par exemple, l'univers semble être en expansion ce qui favoriserait une constante cosmologique positive. Néanmoins, l'étude des espaces-temps avec constante cosmologique négative, dont le modèle de base est donné par l'espace-temps Anti-de Sitter, a pris un nouvel essor ces dernières années, notamment grâce aux recherches actives d'une théorie de la gravité quantique. Citons quelques exemples où l'espace-temps Anti-de Sitter est utilisé. Lorsqu'on s'intéresse à des théories de supergravité de jauge, l'espace-temps Anti-de Sitter fait parti des états fondamentaux naturels pour de telles théories. En outre, l'espace Anti-de Sitter représente la géométrie proche de l'horizon de trous noirs extrêmes. C'est aussi la géométrie de p-branes extrême en M-théorie ce qui a amené Maldacena à conjecturer la correspondance AdS/CFT (Anti-de Sitter/ Conformal Field Theory) qui reste la raison principale de l'étude de cet espace-temps. Cette correspondance nous dit qu'une théorie conforme des champs en dimension 4 est équivalente à une théorie des cordes dans l'espace $AdS_5 \times S^5$ ce qui permet de réaliser les calculs dans l'un ou l'autre des modèles et de les simplifier dans certains cas. L'espace-temps Anti-de Sitter va faire partie de la géométrie de fond sur laquelle nous allons étudier la propagation de certains champs dans cette thèse. Nous profitons de cette introduction pour en donner quelques propriétés. Nous choisirons ici $\Lambda > 0$ et la véritable valeur de la constante cosmologique est donc l'opposé de Λ . Cet espace-temps est défini par :

$$AdS = S_T^1 \times [0, +\infty[_r \times S_{\theta, \varphi}^2$$

muni de la métrique :

$$ds_{AdS}^2 = \left(1 + \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dT^2 - \left(1 + \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)$$

Nous remarquons tout d'abord que cet espace-temps admet des courbes de type temps fermées, ce qui rend la causalité peu agréable. La manipulation habituelle dans de telles situations consiste à considérer le recouvrement universel défini par :

$$CAdS = \mathbb{R}_T \times [0, +\infty[_r \times S_{\theta, \varphi}^2$$

De plus, l'espace hyperbolique admettant la métrique :

$$ds_{H^3}^2 = \left(1 + \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)$$

nous pouvons utiliser sa représentation en tant que boule de Poincaré pour obtenir :

$$AdS = \mathbb{R}_T \times [0, 1[_\rho \times S_{\theta, \varphi}^2$$

muni de la métrique :

$$ds_{AdS}^2 = \left(\frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2}\right)^2 dT^2 - \frac{3}{\Lambda} \frac{4}{(1 - \rho^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)).$$

Nous pouvons alors effectuer la factorisation :

$$ds_{AdS}^2 = \frac{1}{(1 - \rho^2)} d\bar{s}^2$$

où

$$d\bar{s}^2 = 1 + \rho^2 dT^2 - \frac{12}{\Lambda} (d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)).$$

Ceci nous permet d'analyser le bord $\partial CAdS = \mathbb{R}_T \times \{\rho = 1\} \times S_{\theta, \varphi}^2$ dont on voit qu'il possède un vecteur de type temps, on parle d'infini de type temps. Cette dernière propriété est une contrainte géométrique forte, notamment lorsqu'on souhaite étudier les phénomènes de propagation de particules dans ce type d'espace-temps. Dans ce genre de problème, nous cherchons à ce qu'une donnée initiale sur une hypersurface $\{T = \text{constante}\}$ permette de déterminer la dynamique dans tout l'espace-temps. Ceci est généralement faisable dans des espace-temps \mathcal{M} globalement hyperbolique, c'est-à-dire qui admettent une décomposition de la forme $\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times \Sigma$ où Σ est de type espace. Dans ce type d'espace-temps, toute géodésique causale va couper une et une seule fois l'hypersurface Σ . En étudiant les géodésiques de type lumière radiales dans Anti-de Sitter, nous constatons qu'il est possible d'atteindre l'infini $\{\rho = 1\}$ en un temps T fini. Ainsi, il n'existera aucune hypersurface similaire à Σ dans un tel espace-temps et, au moins pour des objets qui ont les propriétés de la lumière, une donnée initiale sur une hypersurface $\{T = \text{constante}\}$ ne déterminera l'évolution que dans une portion de l'espace-temps. Il semblerait alors nécessaire d'imposer des conditions à l'infini pour déterminer de manière unique notre dynamique. Ceci a été étudié dans le cas scalaire par Avis, Isham et Storey [2]. Pour le cas massif, les géodésiques de type temps ne sont plus fermées mais seulement périodiques. Ceci laisse à penser qu'il n'est pas nécessaire d'imposer de telles conditions. En fait, la situation est plus subtile et dépend de la comparaison entre la masse et la constante cosmologique. Ce phénomène a été découvert par Breitenlohner et Freedman [14], [13], qui ont montré l'existence de deux valeurs critiques, les bornes B-F, pour des champs scalaires. A. Bachelot a obtenu une borne similaire sur la masse des champs pour l'équation de Dirac dans [8]. Dans cette thèse, nous nous intéressons à la propagation de champs de Dirac dans l'espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter et mettons en évidence un phénomène similaire. Nous poursuivons l'étude de ces champs en donnant certaines propriétés spectrales de ceux-ci.

Introduction à la théorie de la diffusion dépendante du temps

Plus particulièrement, nous nous intéresserons aux propriétés liées à la diffusion des champs qui nous concerneront. Le but de la théorie de la diffusion est d'obtenir une description de l'évolution des champs que l'on considère en temps long. Pour cela, il est nécessaire d'étudier la partie de ces champs pour lesquels la diffusion a un sens, c'est-à-dire celle qui ne reste pas dans une région bornée de l'espace-temps. Nous dirons que ces champs diffusent. Il est alors possible de comparer la dynamique générale de ces parties du champ avec une dynamique simplifiée, mais dont le comportement est similaire à la dynamique de départ dans les régions asymptotiques de l'espace-temps.

Mathématiquement, un champ est représenté par un élément d'un espace de Hilbert \mathcal{H} qu'on appelle un état. Dans les cas qui vont nous préoccuper, l'espace de Hilbert sera l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur notre espace-temps \mathcal{M} , noté $\mathcal{L}^2(\mathcal{M})$. Dans ce formalisme, nous pouvons interpréter un état de norme 1 comme étant une densité de probabilité qui nous indique quelles sont les chances de trouver une particule, associée à notre champ, à un endroit donné. Les quantités que l'on peut mesurer concernant ce champ sont alors représentées par des opérateurs H auto-adjoints sur cet espace de Hilbert. La dynamique des champs considérés est alors donnée par une équation que l'on peut généralement mettre sous la forme de l'équation différentielle suivante :

$$-i\partial_t \psi(t, x) = H\psi(t, x).$$

où l'opérateur H n'est défini que sur un sous-espace $D(H)$ de l'espace de Hilbert, appelé le domaine de l'opérateur H , et ψ est un élément de ce domaine. Puisque H est supposé auto-adjoint, les solutions de cette équation sont données par $\psi(t, x) = e^{itH}\phi(x)$ où $\phi(x) = \psi(0, x)$. Dans de nombreux cas, l'opérateur H admet la forme particulière suivante :

$$H = H_0 + V(x)$$

où H_0 est un opérateur dont l'évolution e^{itH_0} est bien connue, et V désigne le potentiel qui est ici considéré comme une perturbation de H_0 . Les propriétés de diffusion sont alors liées aux propriétés de décroissance à l'infini de V . Typiquement, cette décroissance est de la forme :

$$V(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} C(1+x^2)^{-\alpha}$$

où $\alpha > 0$. Ainsi, la partie du champ qui diffuse va se retrouver, pour des temps très grands, dans les régions de l'espace-temps où l'effet du potentiel est faible. La dynamique de H est alors bien décrite par celle de H_0 . Dans tout ceci, il est nécessaire d'avoir une idée assez précise des parties du champ qui diffusent. Nous pouvons déterminer celles-ci en analysant le spectre de l'opérateur H . On voit facilement que pour un vecteur propre φ de H pour la valeur propre λ , la dynamique est donnée par $e^{it\lambda}\varphi$ qui ne modifie pas le support de la fonction φ . Un état qui était initialement dans des régions bornées le reste. Il faut donc chercher nos états dans ceux associés au spectre continu de l'opérateur H , et plus particulièrement, dans le spectre absolument continu puisque le spectre singulier continu est supposé ne pas avoir de sens physique. Nous noterons $\mathcal{H}_{a.c.}(H)$ l'espace associé au spectre absolument continu de H qui représente les états qui diffusent. Etant donné un élément φ dans \mathcal{H} , dire que les comportements asymptotiques de H et H_0 sont les mêmes reviendrait alors à trouver des éléments φ_{\pm} dans $\mathcal{H}_{a.c.}(H_0)$ tels que :

$$\|e^{itH}\varphi - e^{itH_0}\varphi_{\pm}\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Comme l'opérateur e^{itH} est unitaire, ceci revient à prouver que :

$$\varphi = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-itH} e^{itH_0} \varphi_{\pm} \tag{0.0.3}$$

pour des φ_{\pm} bien choisis dans $\mathcal{H}_{a.c.}(H_0)$. Nous avons utilisé ici la notation $s - \lim$ pour indiquer que nous prenons la limite pour la topologie forte. Nous pouvons introduire les opérateurs W^{\pm} , appelés opérateurs d'onde, tels que $W^{\pm}\varphi_{\pm} = \varphi$. Ces opérateurs sont des isométries partielles dont on note \mathcal{H}_{\pm} les images. La relation de commutation suivante :

$$HW^{\pm} = W^{\pm}H_0$$

est vérifiée et $\mathcal{H}_{\pm} \subset \mathcal{H}_{a.c.}(H)$. Cette dernière inclusion peut être stricte ce qui montre qu'il pourrait exister des états qui diffusent pour H mais qui ne seraient pas décrits asymptotiquement par la dynamique donnée par H_0 . Évidemment, nous cherchons à éviter ce dernier point en choisissant un opérateur H_0 pour lequel nous pouvons prouver que $\mathcal{H}_{\pm} = \mathcal{H}_{a.c.}(H)$. Ceci s'appelle la complétude des opérateurs d'onde et revient à montrer que les opérateurs d'onde inverses existent. Autrement dit, prouver la complétude revient à montrer que :

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-itH_0} e^{itH} \varphi_{\pm} \tag{0.0.4}$$

existe pour φ_{\pm} dans $\mathcal{H}_{a.c.}(H)$ cette fois-ci. Enfin, la dernière étape consiste à éliminer la partie non physique qu'engendrerait la présence de spectre singulier continu. Lorsque le spectre singulier

continu est vide, on parle alors de complétude asymptotique des opérateurs d'onde.

La première étape ci-dessus, qui consiste à prouver l'existence des opérateurs d'onde, est souvent traitée grâce à la méthode de Cook qui repose sur le fait que, si :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (e^{-itH} e^{itH_0} \varphi) &= e^{-itH} (-iV) e^{itH_0} \varphi, \\ \frac{d}{dt} (e^{-itH_0} e^{itH} \varphi) &= e^{-itH_0} (iV) e^{itH}\end{aligned}$$

sont intégrables pour φ dans un domaine dense de \mathcal{H} , alors les opérateurs d'onde existent. En général, il est plus facile de prouver (0.0.3) étant donné que l'opérateur H_0 est suffisamment simple pour qu'on puisse obtenir une formule explicite pour la dynamique. L'étude de la limite (0.0.4) est souvent beaucoup plus compliquée. Pour remédier à ce problème, des méthodes ont été mises au point. Nous pouvons citer celles reposant sur l'expression de e^{itH} en fonction de la résolvante $(H - \lambda)^{-1}$. Il est alors possible d'utiliser les opérateurs de classe trace comme dans la théorie de Kato-Birman, mais aussi des principes d'absorption limite ou la théorie des opérateurs lisses, comme la théorie des opérateurs H -lisses de Kato. Pour mettre en place cette dernière théorie, il est nécessaire d'avoir une bonne compréhension du spectre de l'opérateur H_0 , tandis que les méthodes de type trace n'utilisent pas ces propriétés mais nécessitent une décroissance à l'infini en générale plus importante pour le potentiel. Les méthodes de type trace ont été utilisées dans les premiers travaux concernant la diffusion dans les espaces-temps de type trou noir effectués par Dimock [22] et Dimock-Kay [24], [23] et [25], concernant des champs scalaires dans l'espace-temps de Schwarzschild. Ces travaux ont été poursuivis dans les années 90 par A. Bachelot [3], [4] pour les champs de Maxwell et de Klein-Gordon, puis par J.P Nicolas [68] pour des champs de Dirac sans masse. W.M. Jin construit les opérateurs d'onde dans le cas massif [59] et F. Melnyk [62], [63], obtient une théorie de la diffusion complète pour des champs de Dirac massifs chargés.

Dans cette thèse, nous avons utilisé des méthodes différentes que l'on dit dépendantes du temps. Nous cherchons alors à évaluer le comportement asymptotique de certaines observables, comme la position ou la vitesse, le long de l'évolution e^{itH} pour des énergies finies. De manière générale, nous souhaitons prouver des estimations de la forme :

$$\int_1^\infty \|B(t) e^{itH} \psi\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|\psi\|^2.$$

Lorsque notre fonction B peut s'écrire sous la forme $B(t) = f\left(\frac{x}{t}\right)$, nous obtenons ainsi des informations sur la vitesse asymptotique de nos champs. Lorsque le support de f est dans $]-\infty, a[$, ces estimations nous disent que la vitesse le long de notre évolution ne peut pas être plus faible que a . Nous parlons d'estimations de vitesse minimale. Celles-ci sont obtenues grâce à des estimations de commutateurs positifs sur des intervalles d'énergie finis appelées les estimations de Mourre. En effet, si l'on note $A = x$, l'évolution de A le long de la dynamique est donnée par l'opérateur $e^{itH} A e^{-itH}$ et nous avons :

$$\frac{d(e^{itH} A e^{-itH})}{dt} = e^{itH} [H, iA] e^{-itH}.$$

Ainsi, si $[H, iA] > 1$, par exemple, nous obtenons une vitesse minimale égale à 1 par intégration. La méthode de Mourre repose sur cette heuristique mais est néanmoins plus générale dans le sens qu'il suffit d'obtenir de telles estimations de commutateurs positifs pour des états de la forme $\chi(H)\varphi$ où χ est une fonction lisse à support compact. Lorsque f est à support dans $]b, +\infty[$, nous parlons d'estimations de vitesse maximale. Enfin, pour des vitesses comprises entre

a et b , nous pouvons approcher l'observable $\frac{x}{t}$ par l'opérateur de vitesse classique. Nous parlons d'estimation de vitesse microlocale. Pour obtenir de telles estimations, les méthodes utilisées sont liées à des majorations et minorations de dérivées de Heisenberg de la forme $\mathbb{D}\Phi(t) := \frac{d}{dt}\Phi(t) + i[H, \Phi(t)]$ pour des observables $\Phi(t)$ bien choisies. Muni de telles estimations, nous pouvons prouver l'existence et la complétude des opérateurs d'onde. Les estimations de Mourre permettent alors d'éliminer le spectre singulier continu sur tout intervalle d'énergie ne contenant pas de valeur propre ce qui entraîne la complétude asymptotique des opérateurs d'onde. Il est ensuite possible d'en déduire l'existence de l'opérateur de vitesse asymptotique qui, comme son nom l'indique, nous donne des informations sur la vitesse de notre champ dans les régions asymptotiques de l'espace-temps. Dans le cadre de l'étude de champs en relativité générale, ce genre de méthodes a été utilisé pas D. Häfner [44] pour l'équation des ondes dans des espaces-temps stationnaires et asymptotiquement plats ainsi que pour l'équation de Klein-Gordon dans Kerr [45]. J.P Nicolas et D. Häfner [47] obtiennent une description complète de la théorie de la diffusion pour l'équation de Dirac dans Kerr en utilisant une quantité conservée présente pour l'équation de Dirac mais pas pour l'équation de Klein-Gordon et T. Daudé [18], [19], donne une théorie de la diffusion pour les champs de Dirac chargés dans l'espace-temps de Kerr-Newman ainsi que pour l'équation de Dirac dans le trou noir de Reissner-Nordström. Récemment, C. Gérard, V. Georgescu et D. Häfner [39] ont obtenu des résultats de complétude asymptotique pour l'équation de Klein-Gordon superradiante dans la métrique de Kerr-de Sitter. Une théorie de la diffusion complète pour l'équation des ondes sur l'extérieur d'un trou noir de Kerr a été obtenu par M. Dafermos, I. Rodnianski et Y. Shlapentokh-Rothman [17] utilisant la théorie de la diffusion conforme dont les idées remontent à Friedlander [34] et qui ont été reprises dans le contexte de la théorie de la diffusion dans des espaces-temps de type trou noir par J.P. Nicolas [67].

Après l'obtention de ces résultats de complétude asymptotique, nous pouvons nous tourner vers d'autres phénomènes tels que l'effet Hawking au voisinage de trous noirs. En 1975, S. W. Hawking publie un papier prédisant l'effet, qui porte aujourd'hui son nom, de création de particules au voisinage d'un trou noir. Cet effet était bien compris par les physiciens vers la fin des années 70 mais il manquait une formulation mathématique précise d'un tel effet. Il faut attendre les travaux d'A. Bachelot [5], [6], [7] pour obtenir la première description mathématique rigoureuse d'un tel phénomène. A la suite de ces premiers résultats, F. Melnyk décrit l'effet Hawking pour les champs de Dirac [65], [64] et D. Häfner donne une description complète de cet effet pour des champs de Dirac dans l'espace-temps de Kerr-Newman [46]. Ce sujet, bien que passionnant, ne sera pas abordé dans la suite de cette thèse. Nous nous intéresseront plutôt à un autre phénomène qu'est celui des résonances et que nous allons aborder dans la suite de cette introduction.

Introduction à la théorie des résonances

Nous passons maintenant au sujet qui va nous concerner plus spécifiquement dans le deuxième chapitre de cette thèse où nous allons nous intéresser aux résonances. Tout d'abord, il existe différentes manières de les définir qui sont, en générale, équivalentes. L'une des possibilités est d'utiliser les opérateurs d'onde pour construire l'opérateur de scattering $S = W_{\pm}^* W_{\pm}$ qui relie les états φ_0^- aux états φ_0^+ . En utilisant la décomposition spectrale de cet opérateur, nous obtenons la matrice de scattering $S(\lambda)$ dont les pôles sont appelés les résonances. Grâce à cette définition, C. Gérard et A. Grigis [40] utilisent des méthodes semi-classiques, dites méthodes BKW exactes, pour analyser les résonances à distance plus grande que h du maximum du potentiel

d'un opérateur de Schrödinger défini par :

$$H = -h^2 \partial_x^2 + V(x)$$

où h est un paramètre qui va tendre vers 0. Utilisant ces mêmes méthodes ainsi que des méthodes d'analyse microlocale, T. Ramond [72] obtient des estimations sur les résonances à une distance inférieure à h . Le cas de deux maximums a été étudié par S. Fujiié et T. Ramond [36]. Par ces mêmes méthodes, S. Fujiié, C. Lasser et L. Nédélec [33] ont étudié le problème des résonances pour une équation de Schrödinger matricielle. Ces méthodes reposent sur le fait que l'on peut obtenir des formules explicites pour les coefficients de la matrice de scattering dont les pôles sont alors les points d'annulation d'un certain Wronskien entre les solutions BKW. En ce qui concerne les résonances pour l'opérateur de Schrödinger, il existe une littérature très fournie dont nous ne ferons pas une liste exhaustive puisque cette équation n'est pas le sujet principal de notre étude. Néanmoins, citons les travaux de B. Helffer et J. Sjöstrand, en particulier leur livre [48]. En ce qui concerne l'équation de Dirac, la méthode BKW a été utilisée par A. Khochman [61] afin d'étudier le paradoxe de Klein pour cette équation.

Pour étudier les résonances, il est aussi possible de partir d'une autre définition basée sur la résolvante $(H - \lambda)^{-1}$. Lorsque H est un opérateur auto-adjoint, ce que l'on supposera dans la suite, son spectre est inclus dans \mathbb{R} . Pour $\text{Im}(\lambda) > 0$, la résolvante est bien définie et analytique de $\mathcal{L}^2(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{M})$. Nous souhaiterions pouvoir prolonger cet opérateur à travers l'axe réel mais ceci n'est pas possible à cause du spectre de l'opérateur H . Il est néanmoins possible de modifier les espaces de départ et d'arrivée de notre résolvante. Notre nouvel opérateur peut alors se prolonger jusqu'à $\{\text{Im}(\lambda) < 0\}$ (et souvent seulement sur une bande dans le demi-plan inférieur) mais seulement de manière méromorphe. Les pôles de cet opérateur sont appelés les résonances. Pour prouver que ce prolongement est réalisable, différentes techniques ont été mises au point. Il est tout d'abord possible d'obtenir, dans certain cas, une formule explicite de la résolvante. En dimension 1, par exemple, des solutions particulières de l'équation $(H - \lambda)\varphi = 0$ appelées solutions de Jost et qui admettent un comportement exponentiellement décroissant à l'infini permettent souvent d'obtenir de telles formules. Rajouter des poids exponentiels à la résolvante permet alors de la prolonger et nous obtenons une description explicite des résonances en terme de zéro d'un Wronskien. Un cadre plus général pour prolonger la résolvante est celui du "black box" où l'on partage l'espace en une partie compacte, sur laquelle la résolvante se comporte bien, et une partie asymptotique où l'opérateur admet une forme particulière. Sous ces hypothèses, la méthode du "complex scaling" permet de définir les résonances. Utilisant ce cadre de travail, S. Tang et M. Zworski [77] obtiennent des estimations sur la localisation des résonances proches de l'axe réel. Cette méthode repose sur de bonnes estimations concernant la résolvante et sur l'existence de quasimodes, c'est-à-dire de solutions approchées de l'équation aux valeurs propres $(H - \lambda)\varphi = 0$. Lorsque H s'écrit $H = H_0 + V$ où V admet un puit et qu'une particule dans ce puit admet une énergie plus faible que le maximum de celui-ci, alors, d'un point de vue classique, cette particule va rester prisonnière de ce puit. Les régions où le potentiel est trop fort sont alors classiquement interdites. D'un point de vue quantique, les champs dans ces régions décroissent exponentiellement, ce sont les estimations de Agmon que nous pouvons obtenir en restreignant notre opérateur au voisinage du puit. Cet opérateur restreint admet alors des valeurs propres dont nous pouvons prolonger les vecteurs propres par 0 en dehors du puit à l'aide d'une troncature. Un tel état vérifie alors l'équation aux valeurs propres de manière approchée avec un terme d'erreur supporté dans la région classiquement interdite et qui décroît exponentiellement. Utilisant cette méthode, O. Gannot [38], [37], trouve des résonances exponentiellement proches de l'axe réel pour l'équation de Klein-Gordon dans l'espace-temps de Schwarzschild-Anti-de Sitter ainsi que dans celui de Kerr-Anti-de Sitter. Les quasimodes permettent aussi d'obtenir une borne inférieure pour la décroissance de l'énergie locale. C'est par ce procédé que G. Holzegel et J. Smulevici [51] ont

prouvé que l'énergie locale pour l'équation de Klein-Gordon dans l'espace-temps de Kerr-Anti-de Sitter ne pouvait décroître plus que logarithmiquement. En fait, les résonances représentent un très bon moyen pour obtenir des estimations de décroissance pour les champs que l'on étudie. Intéressons nous à ce dernier point et introduisons l'exemple de l'équation de Schrödinger en dimension 1 :

$$(-i\partial_t + H)\varphi = F.$$

De manière formelle, nous pouvons utiliser la transformée de Fourier en temps pour obtenir l'équation stationnaire :

$$(H - \lambda)\hat{\varphi} = \hat{F}.$$

Lorsque $(H - \lambda)$ est inversible, ce qui est le cas si H est auto-adjoint et $\text{Im}(\lambda) > 0$, nous pouvons utiliser la transformée de Fourier inverse pour obtenir une solution de l'équation :

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Im}(\lambda)=c} e^{it\lambda} (H - \lambda)^{-1} \hat{F} d\lambda,$$

où $c > 0$. Maintenant, si notre résolvante se prolonge à $\text{Im}(\lambda) < 0$, nous pouvons déformer le contour d'intégration de cette dernière intégrale. La présence de pôles pour la résolvante permet d'obtenir des résultats sur la décroissance des champs considérés par le théorème des résidus. Pour une présentation plus complète de ces techniques, on pourra se référer au livre de S. Dyatlov et M. Zworski [30] qui est actuellement en cours d'écriture.

Historiquement, l'étude mathématique des résonances en relativité générale commence avec les travaux d'A. Bachelot et A. Motet-Bachelot [10] et a été poursuivie par A. Sà Barreto et M. Zworski [74] pour des trous noirs à symétrie sphérique. Utilisant ce résultat de localisation des résonances, J.F. Bony et D. Häfner [12] sont capables d'obtenir un résultat de décroissance de l'énergie locale qui sera ensuite étendu à des variétés et des données initiales plus générales par R. Melrose, A. Sà Barreto et A. Vasy [66]. Des résultats récents concernant les résonances et la décroissance de l'énergie locale pour l'équation des ondes linéaire ont été obtenus par S. Dyatlov [28], [27], [29], pour l'espace-temps de Kerr-de Sitter, qu'il a étendus à des espaces-temps proches de Kerr-de Sitter [26] en utilisant des méthodes développées par A. Vasy [79]. Ce dernier papier est d'une importance particulière puisqu'il permet de définir les résonances pour une classe d'espaces-temps assez large, contenant notamment Kerr-de Sitter. Pour des espaces-temps de type Anti-de Sitter, G. Holzegel et J. Smulevici [51] ont prouvé l'existence de quasimodes exponentiellement précis pour l'équation de Klein-Gordon dans la métrique de Kerr-Anti-de Sitter, ce qui leur permet d'obtenir une décroissance au plus logarithmique pour l'énergie locale comme il l'a été remarqué plus haut. Ces mêmes auteurs avaient prouvé précédemment que la décroissance de cette énergie était au moins logarithmique [49]. C. Warnick [81] donne une définition des modes quasi-normaux dans des trous noirs asymptotiquement Anti-de Sitter et O. Gannot prouve l'existence de résonances exponentiellement proches de l'axe réel, tout d'abord pour l'espace-temps de Schwarzschild-Anti-de Sitter [38], puis pour l'espace-temps de Kerr-Anti-de Sitter [37]. Nous donnons maintenant une présentation rapide du contenu de ce manuscrit.

Chapitre 1

Dans ce premier chapitre, nous étudierons la complétude asymptotique pour des champs de Dirac massifs dans la géométrie de l'espace-temps de Schwarzschild-Anti-de Sitter. Nous commencerons par une présentation de cette géométrie où nous mettrons en exergue les particularités qui font que l'étude mathématique des champs dans de tels espaces-temps n'est pas triviale, notamment la présence d'un infini de type temps. Nous poserons ensuite l'équation qui permet d'étudier

la propagation de ces champs sous une forme spectrale, comme vue plus haut, ce qui ramènera le problème de Cauchy à l'étude du caractère auto-adjoint d'un certain opérateur H_m , où m désigne la masse du champ, muni d'un certain domaine. Après réduction de notre équation via les harmoniques sphériques, nous étudions le domaine naturel $D(H_m) = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid H_m \varphi \in \mathcal{H}\}$, où \mathcal{H} est l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable pour une harmonique fixée, en utilisant les résultats obtenus dans [8]. Par des méthodes similaires à celles présentées dans cet article, nous prouvons le caractère auto-adjoint de H_m et ainsi l'existence et l'unicité d'une solution à condition initiale donnée. Nous étudions ensuite le spectre de notre opérateur en prouvant tout d'abord l'absence de valeurs propres. Nous donnons alors les estimations de Mourre pour notre champ qui utilisent un résultat de compacité pour la résolvante de notre opérateur. Ces estimations nous permettent d'obtenir l'absence de spectre singulier continu. Ce type d'estimation nous permet aussi d'obtenir des estimations de vitesse minimale pour notre champ. Par suite, nous décrivons la vitesse maximale ce qui nous permet d'obtenir la complétude asymptotique des opérateurs d'onde pour l'opérateur de comparaison H_c qui modélise un transport le long de chacune des coordonnées. Nous en déduisons finalement l'opérateur de vitesse asymptotique qui n'est autre que l'opérateur identité.

Chapitre 2

Dans ce deuxième chapitre, nous commençons par étudier les quasimodes pour notre opérateur H_m à harmonique fixée. Utilisant l'inverse de cette harmonique comme paramètre semi-classique h , nous étudions le carré de l'opérateur semi-classique ainsi obtenu et réalisons la même étude que dans [38]. Malheureusement, prendre le carré de notre opérateur ne nous donne pas tout à fait l'opérateur des ondes mais une perturbation de celui-ci. Néanmoins, nous prouvons une estimation d'Agmon qui nous donne la décroissance exponentielle d'un vecteur propre dans la zone classiquement interdite pour un opérateur modifié. Ce vecteur propre nous permet de construire une solution approchée de l'équation aux valeurs propres pour notre opérateur semi-classique. Nous étudions ensuite l'existence des résonances par prolongement méromorphe de la résolvante $(H_m - \lambda)^{-1}$. Nous redémontrons dans le cas de la dimension 1 un résultat obtenu dans [43] concernant le prolongement méromorphe de la résolvante sur des variétés asymptotiquement hyperboliques. Nous partageons ensuite la résolvante de H_m en une résolvante correspondant à une variété asymptotiquement hyperbolique et une résolvante compacte. Un argument d'opérateurs de Fredholm méromorphes nous permet de conclure. Les pôles de cette résolvante sont les résonances pour notre système. Afin de localiser ces résonances, nous avons besoin d'une bonne caractérisation de celles-ci, et les arguments par perturbation avec les opérateurs de Fredholm ne donnent, en général, pas des résultats satisfaisants. Nous exploitons la forme de notre équation pour donner une formule explicite de la résolvante. Une résonance est alors une racine d'un Wronskien entre des solutions asymptotiques de $(H_m - \lambda)\varphi = 0$, c'est-à-dire des solutions avec un comportement donné à l'infini, dites solutions de Jost, et des solutions vérifiant les conditions au bord. Enfin, nous revenons à notre opérateur semi-classique pour lequel nous construisons des solutions à l'équation aux valeurs propres admettant un développement en terme du paramètre h dans certaines régions du plan complexe. Ces solutions sont construites par la méthode BKW exacte que nous utilisons sous la forme matricielle que l'on peut trouver dans [33] et [61]. La difficulté principale alors est de pouvoir joindre ces différentes solutions pour pouvoir calculer les Wronskiens. La distance entre les points tournants est alors un obstacle à l'extension de ces solutions ce qui ne nous permet pas de localiser les résonances directement par cette méthode.

Chapitre 1

Complétude asymptotique pour les champs de Dirac massif en espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord la géométrie de l'espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter dont la métrique est donnée par :

$$g_{ab} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Nous notons $F(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)$. Nous parlons dans cette partie de son caractère non globalement hyperbolique et de la possibilité d'arriver à l'infini Anti-de Sitter en temps fini, où le temps est ici celui des coordonnées, le long des géodésiques de type lumière. Nous posons ensuite l'équation de Dirac dans cet espace-temps en utilisant la formulation spinorielle dont on peut trouver une description dans [71]. Grâce au formalisme de Newman-Penrose, nous arrivons à la forme $-i\partial_t\psi = H_m\psi$ de l'équation de Dirac, forme qui nous permettra d'utiliser des arguments de théorie spectrale. Les détails des calculs pour l'équation sont donnés dans l'appendice A. Nous donnons ici la forme de l'opérateur H_m :

$$H_m = i\gamma^0\gamma^1\partial_x + i\frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r}\mathcal{D}_{\mathbb{S}^2} - m\gamma^0F(r)^{\frac{1}{2}},$$

Dans ce premier chapitre, nous nous intéresserons au caractère bien posé de l'équation qui nous concerne ainsi qu'à la théorie de la diffusion pour les champs correspondants. L'étude de ces deux problèmes ne nécessite que la connaissance des comportements asymptotiques, c'est-à-dire proche du trou noir et proche de l'infini Anti-de Sitter, pour les potentiels. Par conséquent, nous donnons une généralisation de l'opérateur de Dirac dans laquelle nous considérons des potentiels dont seul les comportements asymptotiques sont donnés. Nous notons de nouveau cet opérateur

H_m qui prend désormais la forme :

$$H_m = \Gamma^1 D_x + iA(x)\mathcal{D}_{S^2} - m\gamma^0 B(x),$$

où x est une nouvelle coordonnée introduite pour ramener l'infini de type Anti-de Sitter à un bord. Nous avons $x \in]-\infty, 0[$ où 0 correspond à l'infini Anti-de Sitter et $-\infty$ à l'horizon du trou noir.

Ayant introduit notre équation, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité des solutions. La forme de l'équation laisse à penser que nous pouvons utiliser des arguments de théorie spectrale en prouvant que l'opérateur H_m est auto-adjoint puis en utilisant le théorème de Stone. Pour cela, nous commençons par réduire notre problème en utilisant la symétrie sphérique de notre espace-temps qui fait apparaître un opérateur de Dirac sur la sphère dans l'expression de H_m . Nous pouvons utiliser les harmoniques sphériques spinorielles dont une présentation est faite dans [8] et dont nous reprenons les grandes lignes ici. Nous nous sommes dès lors réduit à un problème de dimension 1 avec un opérateur noté $H_m^{s,n}$ où s et n désignent les harmoniques sur lesquelles nous travaillons. Comme une transformation unitaire ne change pas le caractère auto-adjoint de l'opérateur, nous utilisons une telle transformation pour obtenir un opérateur que nous notons $\tilde{H}_m^{s,n}$ ce qui nous permet d'analyser le comportement à l'infini Anti-de Sitter des éléments du domaine naturel $D_{nat}(\tilde{H}_m^{s,n}) = \{\varphi \in \mathcal{H}_{s,n} \mid \tilde{H}_m^{s,n}\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}\}$ où $\mathcal{H}_{s,n}$ est l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable. Pour l'opérateur entier \tilde{H}_m , nous obtenons :

Proposition 1.1.1. *Soit $\psi \in D(\tilde{H}_m)$. Nous avons les comportements suivant :*

- Pour $m > \frac{1}{2l}$, on a

$$\|\psi(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = O(\sqrt{-x}), \quad x \rightarrow 0.$$

- Pour $m = \frac{1}{2l}$, on a

$$\|\psi(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = O(\sqrt{(-x) \ln(-x)}), \quad x \rightarrow 0.$$

- Pour $0 < m < \frac{1}{2l}$, il existe des fonctions $\psi_- \in W_-^{\frac{1}{2}}$, $\chi_- \in W_+^{\frac{1}{2}}$, $\psi_+, \chi_+ \in L^2(S^2)$ et $\phi \in C^0(]-\infty, 0]_x; L^2(S^2; \mathbb{C}^4))$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \psi(x, \theta, \varphi) &= (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} \psi_-(\theta, \varphi) \\ \chi_-(\theta, \varphi) \\ -i\psi_-(\theta, \varphi) \\ i\chi_-(\theta, \varphi) \end{pmatrix} + (-x)^{ml} \begin{pmatrix} \psi_+(\theta, \varphi) \\ \chi_+(\theta, \varphi) \\ i\psi_+(\theta, \varphi) \\ -i\chi_+(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ &\quad + \phi(x, \theta, \varphi), \end{aligned}$$

$$\|\phi(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = o(\sqrt{-x}), \quad x \rightarrow 0.$$

Réciproquement, pour tout $\psi_- \in W_-^{\frac{1}{2}+m}$, $\chi_- \in W_+^{\frac{1}{2}+m}$, $\psi_+ \in W_-^{\frac{1}{2}-m}$, $\chi_+ \in W_+^{\frac{1}{2}-m}$, il existe $\psi \in D(H_m)$ satisfaisant les deux dernières équations.

Comme dans l'article [8], nous voyons apparaître une borne (dépendante de la constante cosmologique qui est ici représentée par le paramètre l) sur la masse au delà de laquelle les éléments du domaine naturel tendent vers 0 à l'infini Anti-de Sitter. Lorsque la masse est trop petite, nous n'avons pas une telle décroissance à l'infini. Dans ce cas, le domaine sur lequel considérer notre opérateur doit inclure des conditions à l'infini qui sont des conditions au bord dans notre système de coordonnées. Plusieurs conditions ont été considérées dans [8]. Nous avons

choisi de nous restreindre aux conditions du type MIT-bag qui sont explicitement formulées ici. Utilisant les domaines adaptés, nous sommes alors en mesure de prouver le caractère auto-adjoint de $H_m^{s,n}$ pour toute masse positive par des arguments standards. Nous pouvons ensuite sommer sur les harmoniques afin d'obtenir le caractère auto-adjoint de l'opérateur entier H_m . Nous obtenons ainsi l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation que nous nous étions fixée dans le théorème principal de cette partie :

Théorème 1.1.2. *Étant donné $\psi_0 \in \mathcal{H}$, il existe une unique solution ψ à l'équation :*

$$\partial_t \psi = iH_m \psi$$

telle que

$$\psi \in C^0(\mathbb{R}_t; \mathcal{H}),$$

et vérifiant :

$$\begin{aligned} \psi(t=0, \cdot) &= \psi_0(\cdot) \\ \forall t \in \mathbb{R}, \|\psi(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} &= \|\psi_0(\cdot)\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Nous terminons cette partie par l'étude des valeurs propres pour notre opérateur dont nous prouvons qu'il n'en admet aucune.

Maintenant que nous avons une unique solution à notre équation, nous pouvons nous intéresser à son comportement asymptotique en temps. Nous commençons cette étude par une partie technique où nous prouvons que la résolvante de $H_m^{s,n}$, multipliée par une fonction f avec de suffisamment bonnes propriétés, est compacte :

Proposition 1.1.3. *Soit f une fonction continue tendant vers 0 en $-\infty$ et admettant une limite finie en 0. Soit $z \in \rho(H_m^{s,n})$ où $\rho(H_m^{s,n})$ est l'ensemble résolvant de $H_m^{s,n}$. Alors l'opérateur $f(x)(H_m^{s,n} - z)^{-1}$ est compact sur \mathcal{H} pour tout $m > 0$.*

Pour cela, nous utilisons le comportement asymptotique de notre potentiel qui est confinant en 0 et exponentiellement décroissant en $-\infty$. Nous introduisons deux opérateurs intermédiaires dont l'un admet un potentiel confinant sur toute la demi-droite qui est égal à notre potentiel au voisinage de 0, et l'autre admet un potentiel qui décroît vers 0 en $-\infty$ exactement comme notre potentiel, mais aussi en 0. Le premier opérateur admet une résolvante compacte tandis qu'il est nécessaire de multiplier le second par notre fonction f pour obtenir sa compacité. Nous sommes alors capables d'exprimer la résolvante de $H_m^{s,n}$ en terme des deux résolvantes des opérateurs que nous avons introduits, ce qui permet de prouver que notre opérateur est compact.

Nous nous intéressons dans la partie suivante à prouver une estimation de Mourre pour notre opérateur. Nous commençons par donner un rappel de la théorie. Puis, nous utilisons le lemme technique pour prouver une estimation de Mourre de la forme suivante :

Proposition 1.1.4. *Définissons $\mathcal{A} = \Gamma x$. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact non vide. Alors, pour tout $m > 0$, nous avons l'estimation de Mourre :*

$$\mathbb{1}_I(H_m^{s,n})[H_m^{s,n}, i\mathcal{A}]\mathbb{1}_I(H_m^{s,n}) \geq \mathbb{1}_I^2(H_m^{s,n}) + \mathbb{1}_I(H_m^{s,n})K\mathbb{1}_I(H_m^{s,n}),$$

où $\mathbb{1}_I$ est la fonction indicatrice de l'intervalle I et K est un opérateur compact.

Ici, \mathcal{A} est ce qu'on appelle un opérateur conjugué. Cette estimation n'admet un sens que lorsque certaines conditions sont imposées sur les opérateurs $H_m^{s,n}$ et \mathcal{A} . Un certain nombre de conditions ont été formulées pour qu'une estimation de Mourre ait un sens, notamment dans [1]. Nous avons choisi d'utiliser les conditions de Mourre qui sont vérifiées dans cette partie pour

les opérateurs $H_m^{s,n}$ et \mathcal{A} . L'une des premières conséquences de ces estimations est l'absence de spectre singulier continu sur tout intervalle sur lequel une estimation de Mourre est vérifiée sans la présence de l'opérateur compact. En ce qui nous concerne, étant donné l'absence de valeur propre pour notre opérateur, nous sommes en mesure de prouver qu'une telle estimation est vérifiée en enlevant l'opérateur compact, quitte à diminuer la taille de l'intervalle et à ce que la constante devant $\mathbf{1}_I^2(H_m^{s,n})$ soit désormais $1 - \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ où ϵ dépend de la taille de l'intervalle choisi. Ainsi, nous n'avons pas de spectre sigulier continu pour notre opérateur. Ce type d'estimation admet l'interprétation intéressante suivante : l'opérateur \mathcal{A} , qui est ici l'opérateur de position, croît le long de la dynamique pour des énergies dans un intervalle compact. En effet, de manière informelle, nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-itH_m^{s,n}} \mathcal{A} e^{itH_m^{s,n}} \right) = e^{-itH_m^{s,n}} [H_m^{s,n}, i\mathcal{A}] e^{itH_m^{s,n}} \geq 1 - \epsilon.$$

En intégrant cette dernière inégalité, nous obtenons :

$$e^{-itH_m^{s,n}} \frac{\mathcal{A}}{t} e^{itH_m^{s,n}} \geq 1 - \epsilon$$

où $\frac{\mathcal{A}}{t}$ est l'opérateur représentant la vitesse. Ainsi, le long de la dynamique, la vitesse est au moins $1 - \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. Nous appelons ces estimations des estimations de vitesse minimale. Ces estimations informelles admettent une formulation rigoureuse qui est le sujet de la partie suivante.

Dans cette partie, nous nous intéressons aux estimations de propagation. Plus particulièrement, nous commençons par introduire la théorie concernant ces estimations et, en particulier, celle concernant les estimations de vitesse minimale abstraite qui correspondent aux arguments heuristiques donnés ci-dessus. L'estimation de Mourre nous donne alors l'estimation de vitesse minimale suivante :

Lemme 1.1.5. *Soit $J_- \in C^\infty$ telle que le support de J_- soit inclus dans $]-\infty, 1 - \epsilon[$ et $J_-(x) = 1$ pour tout $x \in]-\infty, 1 - 2\epsilon[$ et soit $\chi \in C_0^\infty$. Alors, pour tout $m > 0$, nous avons :*

$$\int_1^\infty \left\| J_- \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \chi(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} u \right\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J_- \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} u = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n}.$$

Utilisant la théorie des dérivées de Heisenberg, nous pouvons prouver l'estimation de vitesse maximale suivante :

Proposition 1.1.6. *Soit $J \in C^\infty$ telle que $\text{supp}(J) \subset]1 + \epsilon, \infty[$ avec $\epsilon > 0$ et telle que $J(x) = 1$ pour tout $x \in]1 + 2\epsilon, \infty[$. Soit $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $m > 0$, nous avons :*

$$\int_1^\infty \left\| J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} \zeta(H_m^{s,n}) u \right\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n}$$

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} = 0.$$

Utilisant ces deux dernières estimations ainsi que l'absence de spectre singulier continu et de valeur propre, nous pouvons prouver la complétude asymptotique avec comme opérateur de comparaison l'opérateur $H_c = i\gamma^0\gamma^1\partial_x$ dont le domaine est donné par :

$$D(H_c) = \{\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}; H_c\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}, \varphi_1(0) = -\varphi_3(0), \varphi_2(0) = \varphi_4(0)\}.$$

La dynamique associée à cet opérateur est un transport dont certaines coordonnées se reflètent au bord pour apparaître sur d'autres coordonnées d'après les conditions au bord. Nous obtenons tout d'abord ce théorème à harmonique fixée puis nous sommes sur les harmoniques pour obtenir le résultat principal de cette section :

Théorème 1.1.7. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$ et pour tout $m > 0$, les limites :*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} e^{-itH_m} \varphi \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} e^{-itH_c} \varphi \end{aligned}$$

existent. Désignons par :

$$\begin{aligned} \Omega\varphi &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} e^{-itH_m} \varphi \\ W\varphi &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} e^{-itH_c} \varphi \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$. Alors nous avons :

$$\Omega^* = W.$$

Nous voyons ainsi qu'asymptotiquement en temps, l'opérateur H_m se comporte comme un transport vers le trou noir, puisque tout est reflété au niveau du bord. Nous pouvons même rajouter que la vitesse à laquelle s'effectue le transport est 1, ce qui est le sujet de la prochaine partie.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous nous intéressons à la vitesse asymptotique à laquelle se déplace notre champ. Nous commençons par analyser quelle est la vitesse asymptotique pour l'opérateur H_c grâce à une formule explicite pour le propagateur. Sans surprise, nous obtenons que notre transport s'effectue à vitesse 1. Nous pouvons alors utiliser le fait que la propagation pour notre opérateur est asymptotiquement en temps la même que celle pour H_c . Nous obtenons ainsi que la vitesse asymptotique est 1 :

Théorème 1.1.8. *Soit $J \in C_\infty(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $m > 0$, la limite :*

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} J \left(\frac{A}{t} \right) e^{-itH_m}$$

existe. De plus, si $J(0) = 1$, alors

$$s - \lim_{R \rightarrow \infty} \left(s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} J \left(\frac{A}{Rt} \right) e^{-itH_m} \right) = 1.$$

Si l'on définit

$$s - C_\infty - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} \frac{A}{t} e^{-itH_m} =: P_m^+,$$

alors P_m^+ est défini de manière dense et il commute avec l'hamiltonien H_m . L'opérateur P_m^+ est appelé la vitesse asymptotique.

1.2 Espace-temps Anti-de Sitter Schwarzschild et équation de Dirac associée

Dans cette section, nous présentons tout d'abord l'espace-temps Schwarzschild-Anti de Sitter puis nous donnons l'équation de Dirac dans cet espace-temps ainsi que sa généralisation naturelle pour les problèmes qui nous concernent.

1.2.1 L'espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter

Soit $\Lambda > 0$. Définissons $l^2 = \frac{3}{\Lambda}$. Notons M la masse du trou noir.

La métrique dans les coordonnées de Boyer-Lindquist est donnée par :

$$g_{ab} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.2.1)$$

On note $F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}$. Utilisant la méthode de Cardan, nous pouvons voir que F admet deux racines complexes conjuguées ainsi que la racine réelle $r = r_{SAdS}$ dont l'expression est donnée ci-dessous.

Nous en déduisons que cette métrique admet des singularités en $r = 0$ et $r = r_{SAdS} = p_+ + p_-$ où $p_{\pm} = \left(Ml^2 \pm \left(M^2 l^4 + \frac{l^6}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$. (Voir [50]) C'est un espace-temps de type trou noir. La singularité en $r = 0$ est une singularité due à la géométrie mais celle en $r = r_{SAdS}$ est une singularité liée aux coordonnées.

Afin de mieux comprendre la géométrie de cet espace-temps, nous allons étudier les géodésiques isotropes radiales sortantes (respectivement entrantes) (c'est-à-dire pour lesquelles $\frac{dr}{dt} > 0$ (respectivement $\frac{dr}{dt} < 0$)). Notons c une telle géodésique avec :

$$c'(\lambda) = \frac{dt}{d\lambda} \partial_t + \frac{dr}{d\lambda} \partial_r \quad (1.2.2)$$

puisque la géodésique est radiale. D'autre part, comme la géodésique est isotrope, nous avons :

$$F(r) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - F(r)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (1.2.3)$$

ce qui nous donne $\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = F(r)^{-2}$. Pour les géodésiques isotropes radiales sortantes, nous obtenons donc :

$$\frac{dt}{dr} = F(r)^{-1} \quad (1.2.4)$$

et pour les géodésiques isotropes radiales entrantes :

$$\frac{dt}{dr} = -F(r)^{-1} \quad (1.2.5)$$

Introduisons une nouvelle coordonnée r_* telle que $t - r_*$ et $t + r_*$ soient constants le long des géodésiques isotropes radiales sortantes et entrantes respectivement, c'est-à-dire telle que

$$\frac{dr_*}{dr} = F(r)^{-1} \quad (1.2.6)$$

Les coordonnées $(t, r_*, \theta, \varphi)$ sont communément appelées les coordonnées de Regge-Wheeler.

Nous obtenons l'expression suivante pour r_* :

$$r_*(r) = \ln \left((r - r_{SAdS})^{\alpha_1} (r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)^{-\frac{\alpha_1}{2}} \right) + \frac{l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{(3r_{SAdS}^2 + l^2) (3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \arctan \left(\frac{2r + r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (1.2.7)$$

où :

$$\alpha_1 = \frac{r_{SAdS}l^2}{3r_{SAdS}^2 + l^2} = \frac{1}{2\kappa}. \quad (1.2.8)$$

Pour un trou noir statique (ce qui est le cas ici), κ est la limite à l'horizon (c'est-à-dire en $r = r_{SAdS}$) de la force qu'il est nécessaire d'exercer pour garder un objet de masse 1 en place à l'infini. C'est donc ce qu'on appelle la gravité de surface.

On note :

$$C = \frac{l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{(3r_{SAdS}^2 + l^2) (3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.2.9)$$

Nous obtenons donc :

$$\lim_{r \rightarrow r_{SAdS}} r_*(r) = -\infty \quad (1.2.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r_*(r) = C \frac{\pi}{2}. \quad (1.2.11)$$

Nous considérerons dans la suite la variable $x = r_* - C \frac{\pi}{2}$ plutôt que r_* . Nous avons alors :

$$\lim_{r \rightarrow r_{SAdS}} x(r) = -\infty \quad (1.2.12)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} x(r) = 0. \quad (1.2.13)$$

Cette dernière limite nous montre que, le long des géodésiques isotropes radiales, une particule atteint l'infini de type temps en temps de Boyer-Lindquist fini (rappelons que le long de ces géodésiques, $t - r_*$ et $t + r_*$ sont constants). Cette dernière propriété géométrique va être un problème majeur dans notre étude. En effet, la démonstration de théorèmes d'existence globaux pour des solutions d'équations hyperboliques utilise habituellement la notion, introduite par Leray, de globale hyperbolicité dont nous allons rappeler la définition.

Tout d'abord, rappelons qu'un sous-ensemble S d'une variété lorentzienne \mathcal{M} est dit achronal si pour tous points $p, q \in S$, il n'existe aucune courbe causale (c'est-à-dire isotrope ou de type temps) orientée vers le futur de p vers q .

Soit maintenant un ensemble S fermé et achronal, nous pouvons définir le domaine de dépendance futur de S :

$$D^+(S) = \{p \in \mathcal{M} | \text{Toute courbe causale inextensible issue de } p \text{ et orientée vers le passé intersecte } S\}.$$

Nous pouvons alors définir le domaine de dépendance passé $D^-(S)$ en remplaçant passé par futur et enfin le domaine de dépendance de S est défini par : $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$.

Un ensemble fermé achronal Σ vérifiant $D(\Sigma) = \mathcal{M}$ est appelé une surface de Cauchy. Nous pouvons maintenant donner la définition suivante :

Définition 1.2.1. Nous dirons qu'un espace-temps (\mathcal{M}, g_{ab}) est globalement hyperbolique s'il existe une surface de Cauchy Σ .

Ceci signifie que tous les évènements de l'espace-temps sont déterminées à partir des conditions sur Σ .

Nous voyons maintenant que le comportement des géodésiques isotropes dans l'espace temps de Schwarzschild Anti-De-Sitter en fait un espace-temps non globalement hyperbolique. Une situation similaire a déjà été rencontrée par A.Bachelot dans son article [8] concernant l'équation de Dirac dans l'espace-temps Anti-De-Sitter. Nous nous attendons à devoir faire une analyse similaire en ce qui concerne le caractère bien posé de l'équation. Pour la théorie de la diffusion, dans un espace-temps de type trou noir avec un extérieur asymptotiquement Minkowski ou de Sitter, nous devons considérer deux régions asymptotiques, l'une étant celle du trou noir et l'autre étant celle pour laquelle r tend vers l'infini. Dans ce cas, il faut utiliser deux dynamiques différentes dans ces deux régions pour comparer avec notre dynamique. Ici, l'une des régions peut être atteinte par certaines particules et est donc vue comme un bord. Nous nous attendons à n'avoir qu'une seule dynamique de comparaison.

1.2.2 L'équation de Dirac en espace-temps Anti-de Sitter Schwarzschild

Dans la notations des spineurs à deux composantes, l'équation de Dirac prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \nabla^{AA'} \phi_A = \mu \chi^{A'} \\ \nabla^{AA'} \chi_{A'} = \mu \phi^A \end{cases} \quad (1.2.14)$$

ou encore

$$\begin{cases} \nabla_{AA'} \phi^A = -\mu \chi_{A'} \\ \nabla_{AA'} \chi^{A'} = -\mu \phi_A \end{cases} \quad (1.2.15)$$

où $\mu = \frac{m}{\sqrt{2}}$ et $m \geq 0$ est la masse du champs.

Grâce au formalisme de Newman-Penrose, nous pouvons obtenir cette équation sous forme d'un système d'équations aux dérivées partielles. Nous introduisons pour cela une tétrade isotrope $(l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$, c'est-à-dire telle que

$$l_a l^a = n_a n^a = m_a m^a = \bar{m}_a \bar{m}^a = l_a m^a = n_a \bar{m}^a = 0, \quad (1.2.16)$$

qui forme une base du complexifié de l'espace tangent. Nous dirons que cette tétrade est normalisée si :

$$l_a n^a = 1, \quad m_a \bar{m}^a = -1. \quad (1.2.17)$$

Les vecteurs l^a et n^a correspondent à des directions le long desquelles les rayons lumineux vont à l'infini (nous pourrions choisir l^a comme étant un vecteur isotrope sortant et n^a rentrant dans notre cas). Le vecteur m^a admet des courbes intégrales bornées. Les vecteurs m^a et \bar{m}^a vont, en général, correspondre aux générateurs des rotations. Dans notre cas, nous considérerons :

$$\begin{aligned} l^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} F(r)^{-\frac{1}{2}} (\partial_t + \partial_x) \\ n^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} F(r)^{-\frac{1}{2}} (\partial_t - \partial_x) \\ m^a &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\partial_\theta - \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi \right) \\ \bar{m}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi \right). \end{aligned}$$

Cette tétrade est normalisée. Le vecteur l^a est bien isotrope et, en analysant les géodésiques isotropes radiales ayant ce vecteur comme vecteur tangent et λ comme paramètre affine, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}}F(r)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{dr}{d\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}}F(r)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (1.2.18)$$

le long de ces géodésiques, puisque $\partial_x = F(r)\partial_r$. Nous en déduisons alors que $\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr} = F(r)^{-1}$. Notre vecteur est donc bien sortant. Nous voyons aussi que m^a est seulement exprimé en terme des coordonnées sur la sphère. Nous donnons maintenant les vecteurs duaux associés :

$$\begin{aligned}l_a &= \frac{1}{\sqrt{2}}F(r)^{\frac{1}{2}}(dt - dx) \\ n_a &= \frac{1}{\sqrt{2}}F(r)^{\frac{1}{2}}(dt + dx) \\ m_a &= \frac{r}{\sqrt{2}}(-d\theta + i\sin(\theta)d\varphi) \\ \bar{m}_a &= \frac{r}{\sqrt{2}}(-d\theta - i\sin(\theta)d\varphi).\end{aligned}$$

Utilisant cette tétrade, il est alors possible de décomposer la dérivée covariante en dérivées directionnelles le long de ces directions. On introduit alors les symboles suivants :

$$D = l^a\nabla_a, \quad D' = n^a\nabla_a, \quad \delta = m^a\nabla_a, \quad \delta' = \bar{m}^a\nabla_a.$$

Les coefficients de la connection sont au nombre de douze et sont appelés les coefficients de spin. Ils sont définis par :

$$\begin{aligned}\hat{\kappa} &= m^a D l_a, \quad \rho = m^a \delta' l_a, \quad \sigma = m^a \delta l_a, \quad \tau = m^a D' l_a, \\ \epsilon &= \frac{1}{2}(n^a D l_a + m^a D \bar{m}_a), \quad \alpha = \frac{1}{2}(n^a \delta' l_a + m^a \delta' \bar{m}^a), \\ \beta &= \frac{1}{2}(n^a \delta l_a + m^a \delta \bar{m}^a), \quad \gamma = \frac{1}{2}(n^a D' l_a + m^a D' \bar{m}_a), \\ \pi &= -\bar{m}^a D n_a, \quad \lambda = -\bar{m}^a \delta' n_a, \quad \mu = -\bar{m}^a \delta n_a, \quad \nu = -\bar{m}^a D' n_a,\end{aligned}$$

où $\hat{\kappa}$ désigne le coefficient de spin habituellement noté κ , afin de ne pas confondre avec la gravité de surface. Nous pouvons maintenant exprimer l'équation (1.2.15) comme un système d'équations différentielles. Ces équations agiront sur les composantes des spineurs $\phi^A, \chi^{A'}$ dans une base spinorielle (o^A, ι^A) normalisée (c'est-à-dire telle que $o_A \iota^A = 1$). Pour choisir notre base spinorielle, nous utilisons la tétrade isotrope que nous venons de définir. En effet, nous pouvons définir une base spinorielle (o^A, ι^A) , unique à un signe près, grâce aux conditions suivantes :

$$o^A \bar{o}^{A'} = l^a, \quad \iota^A \bar{\iota}^{A'} = n^a, \quad o^A \bar{\iota}^{A'} = m^a, \quad \iota^A \bar{o}^{A'} = \bar{m}^a, \quad o_A \iota^A = 1.$$

La base duale est donnée par :

$$\epsilon_A^0 = -\iota_A; \epsilon_A^1 = o_A. \quad (1.2.19)$$

Soit $\phi^0, \phi^1, \chi^{0'}, \chi^{1'}$ telles que $\phi^A = \phi^0 o^A + \phi^1 \iota^A$ et $\chi^{A'} = \chi^{0'} o^{A'} + \chi^{1'} \iota^{A'}$ où $(o^{A'}, \iota^{A'})$ est la base conjuguée de (o^A, ι^A) .

Les composantes de ϕ_A et $\chi_{A'}$ sont respectivement :

$$\begin{aligned}\phi_0 &= -\phi^1, \quad \phi_1 = \phi^0 \\ \chi_{0'} &= -\chi^{1'}, \quad \chi_{1'} = \chi^{0'}\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} l^a \partial x_a \phi_1 - \bar{m}^a \partial x_a \phi_0 + (\epsilon - \rho) \phi_1 - (\pi - \alpha) \phi_0 = \frac{m}{\sqrt{2}} \chi^{1'} \\ m^a \partial x_a \phi_1 - n^a \partial x_a \phi_0 + (\beta - \tau) \phi_1 - (\mu - \gamma) \phi_0 = -\frac{m}{\sqrt{2}} \chi^{0'} \\ l^a \partial x_a \chi^{0'} + m^a \partial x_a \chi^{1'} + (\bar{\epsilon} - \bar{\rho}) \chi^{0'} + (\bar{\pi} - \bar{\alpha}) \chi^{1'} = -\frac{m}{\sqrt{2}} \phi_0 \\ \bar{m}^a \partial x_a \chi^{0'} + n^a \partial x_a \chi^{1'} + (\bar{\beta} - \bar{\tau}) \chi^{0'} + (\bar{\mu} - \bar{\gamma}) \chi^{1'} = -\frac{m}{\sqrt{2}} \phi_1. \end{cases} \quad (1.2.20)$$

Utilisant le spineur à quatre composantes :

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \chi^{0'} \\ \chi^{1'} \end{pmatrix}, \quad (1.2.21)$$

nous obtenons :

$$\left(\partial_t + \gamma^0 \gamma^1 \left(F(r) \partial_r + \frac{F(r)}{r} + \frac{F'(r)}{4} \right) + \frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r} \mathcal{D}_{\mathbb{S}^2} + im \gamma^0 F(r)^{\frac{1}{2}} \right) \psi = 0. \quad (1.2.22)$$

où $\mathcal{D}_{\mathbb{S}^2}$ est l'opérateur de Dirac sur la sphère. Dans le système de coordonnées $(\theta, \varphi) \in [0; 2\pi] \times [0; \pi]$, nous obtenons la formule suivante : $\mathcal{D}_{\mathbb{S}^2} = \gamma^0 \gamma^2 (\partial_\theta + \frac{1}{2} \cot \theta) + \gamma^0 \gamma^3 \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi$. Des singularités dues aux coordonnées apparaissent, nous pouvons les enlever grâce à un changement de carte. Nous travaillerons dans ce système de coordonnées par la suite.

Rappelons que les matrices de Dirac γ^μ , $0 \leq \mu \leq 3$, uniques à transformation unitaire près, sont données par les relations suivantes :

$$\gamma^{0*} = \gamma^0; \quad \gamma^{j*} = -\gamma^j, \quad 1 \leq j \leq 3; \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad 0 \leq \mu, \nu \leq 3. \quad (1.2.23)$$

La forme de ces matrices est donnée par les formules suivantes :

$$\gamma^0 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ -\sigma^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.2.24)$$

où les matrices de Pauli sont données par :

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.25)$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma^1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^0 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \gamma^0 \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

Introduisons enfin la matrice suivante :

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (1.2.27)$$

qui vérifie les relations :

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0, \quad 0 \leq \mu \leq 3. \quad (1.2.28)$$

L'équation que nous avons obtenu est similaire, à transformation unitaire près pour les matrices de Dirac, à celle obtenue par A. Bachelot [8]. La fonction F se comporte en $+\infty$ comme $1 + \frac{r^2}{l^2}$ qui est la fonction rencontrée lorsqu'on étudie l'équation de Dirac dans l'espace-temps Anti-de Sitter. Nous pouvons utiliser les même transformation que celles présentées dans cet article pour notre équation :

$$\tilde{\phi}(t, r, \theta, \varphi) = rF(r)^{\frac{1}{4}}\psi(t, r, \theta, \varphi). \quad (1.2.29)$$

Nous obtenons l'équation suivante :

$$\left(\partial_t + \gamma^0\gamma^1 F(r)\partial_r + \frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r} \mathcal{D}_{S^2} + im\gamma^0 F(r)^{\frac{1}{2}} \right) \tilde{\phi} = 0.$$

Puis en posant :

$$\phi(t, x, \theta, \varphi) := \tilde{\phi}(t, r, \theta, \varphi) \quad (1.2.30)$$

Nous obtenons :

$$\left(\partial_t + \gamma^0\gamma^1 \partial_x + \frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r} \mathcal{D}_{S^2} + im\gamma^0 F(r)^{\frac{1}{2}} \right) \phi = 0.$$

Finalement, il vient :

$$\partial_t \phi = i \left(i\gamma^0\gamma^1 \partial_x + i \frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r} \mathcal{D}_{S^2} - m\gamma^0 F(r)^{\frac{1}{2}} \right) \phi \quad (1.2.31)$$

Nous introduisons l'espace de Hilbert :

$$\mathcal{H} := [L^2]-\infty, 0[_x \times S^2_\omega, dx d\omega]]^4 \quad (1.2.32)$$

et cherchons à résoudre cette équation. En notant :

$$H_m = i\gamma^0\gamma^1 \partial_x + i \frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r} \mathcal{D}_{S^2} - m\gamma^0 F(r)^{\frac{1}{2}},$$

nous nous réduisons à prouver que H_m est auto-adjoint sur un domaine à déterminer. Le domaine naturel d'un tel opérateur est $D_{nat}(H_m) = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid H_m\varphi \in \mathcal{H}\}$. La première étape pour la preuve du caractère auto-adjoint d'un tel opérateur consiste à prouver qu'il est symétrique sur son domaine. Nous voyons qu'il sera nécessaire d'obtenir le comportement asymptotique des éléments de ce domaine. Comme noté ci-dessus, les coefficients de l'équation se comporte, quand r tend vers l'infini, comme ceux de l'équation de Dirac dans l'espace-temps Anti-de Sitter. L'analyse faite par A. Bachelot [8] sera nécessaire pour obtenir le caractère auto-adjoint de notre opérateur. Cette analyse ne repose que sur le comportement à l'infini des éléments du domaine et pas sur la forme des potentiels à l'intérieur de l'espace-temps. Par conséquent, nous utiliserons une généralisation de cette équation où nous ne donnerons que les comportement asymptotique des deux potentiels qui composent notre équation. Nous présentons maintenant cette généralisation.

1.2.3 Généralisation

Nous commençons par définir quelles seront les décroissances que nous souhaitons. Nous donnons ces décroissances en terme de la variable x puis nous vérifierons que le modèle du paragraphe précédent admet bien les mêmes décroissances. Soient $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, définissons les espaces $T^{q,n}$ par :

$$T^{q,n} = \left\{ f \in C^\infty (]-\infty; 0]) \mid \forall \omega \in \mathbb{N}, |\partial_x^\omega f(x)| \lesssim \begin{cases} e^{qx} & , \text{ quand } x \rightarrow -\infty \\ (-x)^n & , \text{ quand } x \rightarrow 0 \end{cases} \right\} \quad (1.2.33)$$

Soient A_0, B_0 des fonctions lisses telles que :

$$A_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{l} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$B_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{l}{-x} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

L'opérateur que nous considérons est le suivant :

$$H_m = \Gamma^1 D_x + iA(x)\mathcal{D}_{\mathbb{S}^2} - m\gamma^0 B(x) \quad (1.2.34)$$

où m est la masse du champs et :

$$A - A_0 \in T^{\vartheta,2} \quad (1.2.35)$$

$$B - B_0 \in T^{\beta,1} \quad (1.2.36)$$

$$\Gamma^1 = -\gamma^0 \gamma^1$$

$$D_x = \frac{1}{i} \partial_x$$

où ϑ, β sont des nombres positifs. Nous nous intéressons donc à l'équation :

$$\partial_t \phi = iH_m \phi \quad (1.2.37)$$

La troisième partie de ce chapitre sera voué à la définition d'une solution unique :

$$\phi \in C^0(\mathbb{R}_t; \mathcal{H}), \quad (1.2.38)$$

de cette équation, où \mathcal{H} est défini dans (1.2.32), telle que :

$$\phi(0, \cdot) = \phi_0(\cdot), \quad (1.2.39)$$

avec ϕ_0 dans le domaine de l'opérateur H_m . De plus, la relation suivante devra être vérifiée :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\phi(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} = \|\phi_0(\cdot)\|_{\mathcal{H}}. \quad (1.2.40)$$

Dans la quatrième partie ce chapitre, nous utilisons des techniques dépendantes du temps pour prouver un résultat de complétude asymptotique pour les champs vérifiant cette équation. Notons que les potentiels sont exponentiellement décroissants au niveau du trou noir. Nous avons vu plus haut que, étant donné que l'infini Anti-de Sitter pouvait être considéré comme un bord, nous n'avions qu'à considérer l'infini proche du trou noir pour obtenir une dynamique de comparaison en temps long. Au vu des comportements des potentiels, nous nous attendons à obtenir un transport à vitesse 1 pour cette dernière dynamique.

Nous nous proposons maintenant de vérifier que le cas Schwarzschild-Anti-de Sitter est bien inclus dans notre modèle abstrait. Introduisons la constante :

$$D_4 = e^{-2\kappa C \arctan\left(\frac{3r_{SAdS}}{(3r_{SAdS})^2 + 4l^2}\right) + C\pi\kappa}.$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} r - r_{SAdS} &= (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} D_4 e^{2\kappa x} - \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - 3r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)} D_4^2 e^{4\kappa x} \\ &+ o(e^{4\kappa x}) \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

Et d'autre part, au voisinage de 0, nous avons :

$$r = -\frac{l^2}{x} + \frac{1}{3}(x) + o(-x). \quad (1.2.42)$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, nous obtenons le comportement suivant :

$$\begin{aligned} F(r)^{\frac{1}{2}} &= \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{4}} D_4^{\frac{1}{2}}}{r_{SAdS}^{\frac{1}{2}} l} e^{\kappa x} + C_3 e^{3\kappa x} + o(e^{3\kappa x}), \\ \frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r} &= \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{4}} D_4^{\frac{1}{2}}}{r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l} e^{\kappa x} + C_4 e^{3\kappa x} + o(e^{3\kappa x}) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{3r_{SAdS}^{\frac{5}{2}} (3r_{SAdS}^2 + l^2) - \left(2\kappa l^2 r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) + 2l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} D_4^{\frac{3}{4}}\right)}{4r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}}, \\ C_4 &= \frac{3r_{SAdS}^{\frac{5}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2) - 2\kappa l^3 r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{4r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}} \\ &- \frac{6D_4^{\frac{3}{4}} (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} (2r_{SAdS}^2 + l^2)}{4r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}}. \end{aligned}$$

Au voisinage de 0, nous avons :

$$\begin{aligned} F(r)^{\frac{1}{2}} &= -\frac{l}{x} - \frac{x}{6l} + o(x) \\ \frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r} &= \frac{1}{l} + \frac{x^2}{2l^3} + o(x^2). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r} - A_0 &\in T^{\kappa,2} \\ F(r)^{\frac{1}{2}} - B_0 &\in T^{\kappa,1} \end{aligned} \quad (1.2.43)$$

L'équation de Dirac dans l'espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter est bien un cas particulier de notre modèle général.

1.3 Etude de l'Hamiltonien

Dans cette section, nous nous intéressons au caractère bien posé de l'équation que nous avons décrite précédemment.

Dans une première partie, nous décrivons le domaine de notre opérateur H_m donné dans (1.2.34). Nous nous ramenons tout d'abord à l'étude d'un Hamiltonien en dimension 1 en diagonalisant l'opérateur de Dirac sur la sphère à l'aide des harmoniques sphériques. Notre opérateur ayant une forme similaire à celle de l'opérateur étudié par A. Bachelot dans [8], nous utilisons une transformation unitaire qui nous permet d'obtenir une description précise des éléments du domaine naturel de notre opérateur à harmonique fixée. Ceci met en évidence une différence entre le cas où la masse est grande en comparaison avec la constante cosmologique ($2m\sqrt{\frac{-3}{\Lambda}} \geq 1$) où aucune condition au bord n'est nécessaire, et le cas à masse petite ($2m\sqrt{\frac{-3}{\Lambda}} < 1$) où il nous faut imposer des conditions au bord.

Dans une deuxième partie, nous prouvons le caractère auto-adjoint de nos opérateurs à harmonique fixée. De nouveau, nous voyons qu'à masse grande, l'opérateur est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(]-\infty, 0])$ alors qu'à masse petite nous avons le caractère auto-adjoint uniquement sur le domaine avec condition au bord.

Dans la troisième partie, nous prouvons que H_m est auto-adjoint sur son domaine en sommant sur les harmoniques sphériques.

Dans la quatrième partie, nous utilisons le théorème de Stone pour résoudre le problème de Cauchy pour cette équation.

Enfin, dans une cinquième partie, nous étudions la présence de valeur propre pour notre opérateur.

1.3.1 Description du domaine

Les harmoniques sphériques

Nous utiliserons dans la suite les harmoniques sphériques spinoïdales (on pourra se référer à [8] pour une présentation plus complète de ces harmoniques) qui nous permettent de décomposer l'espace \mathcal{H} comme suit :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{(s,n) \in I} \mathcal{H}_{s,n} \quad (1.3.1)$$

où :

$$I := \left\{ (s, n); s \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, s - |n| \in \mathbb{N} \right\} \quad (1.3.2)$$

Les espaces $\mathcal{H}_{s,n}$ sont de la forme :

$$\mathcal{H}_{s,n} = (L^2(x, dx))^4 \otimes Y_{s,n} \quad (1.3.3)$$

où $Y_{s,n}$ est engendré par :

$$\begin{pmatrix} T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ T_{\frac{1}{2},n}^s \\ T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ T_{\frac{1}{2},n}^s \end{pmatrix}. \quad (1.3.4)$$

Les $T_{\pm\frac{1}{2},n}^s$ sont des fonctions définies sur la sphère dont l'expression est donnée par :

$$T_{\pm\frac{1}{2},n}^s = e^{-in\varphi} P_{\pm\frac{1}{2},n}^s(\cos(\theta)),$$

avec :

$$P_{\pm\frac{1}{2},n}^s(X) = A_{\pm,n}^s (1-X)^{\frac{\pm 1-2n}{4}} (1+X)^{\frac{\mp 1-2n}{4}} \frac{d^{s-n}}{dX^{s-n}} \left[(1-X)^{s\mp\frac{1}{2}} (1+X)^{s\pm\frac{1}{2}} \right],$$

et la constante :

$$A_{\pm,n}^s = \frac{(-1)^{s\mp\frac{1}{2}} i^{n\mp\frac{1}{2}}}{2^s (s\mp\frac{1}{2})!} \sqrt{\frac{(s\mp\frac{1}{2})!(s+n)!}{(s\pm\frac{1}{2})!(s-n)!}} \sqrt{\frac{2s+1}{4\pi}}.$$

Comme n est un demi-entier relatif, les fonctions $T_{\pm\frac{1}{2},n}^s$ ne sont pas lisses sur la sphère puisque $T_{\pm\frac{1}{2},n}^s(\theta, 2\pi) = -T_{\pm\frac{1}{2},n}^s(\theta, 0) \neq 0$. D'autre part, ces fonctions vérifient les relations (voir [8]) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2\tan\theta} \right) T_{\pm\frac{1}{2},n}^s = \pm \frac{n}{\sin\theta} T_{\pm\frac{1}{2},n}^s - i \left(s + \frac{1}{2} \right) T_{\mp\frac{1}{2},n}^s, \quad (1.3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} T_{\pm\frac{1}{2},n}^s = -in T_{\pm\frac{1}{2},n}^s. \quad (1.3.6)$$

De plus, les fonctions $\left(T_{\frac{1}{2},n}^s \right)_{(s,n)\in I}$ engendrent $L^2(S^2)$ ainsi que les fonctions $\left(T_{-\frac{1}{2},n}^s \right)_{(s,n)\in I}$. Ainsi, toute fonction $f \in L^2(S^2)$ admet un développement de la forme :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{(s,n)\in I} u_{\pm,n}^s(f) T_{\pm\frac{1}{2},n}^s(\theta, \varphi), \quad u_{\pm,n}^s(f) \in \mathbb{C}.$$

La formule de Plancherel donne :

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{(s,n)\in I} |u_{+,n}^s(f)|^2 = \sum_{(s,n)\in I} |u_{-,n}^s(f)|^2.$$

Introduisons maintenant les espaces de Hilbert W_{\pm}^d pour $d \in \mathbb{R}$ comme la fermeture de l'espace

$$W_f^{\pm} := \left\{ \sum_{finie} u_{\pm,n}^s T_{\pm\frac{1}{2},n}^s; \quad u_{\pm,n}^s \in \mathbb{C} \right\} \quad (1.3.7)$$

pour la norme

$$\|f\|_{W_{\pm}^d}^2 := \sum_{(s,n)\in I} \left(s + \frac{1}{2} \right)^{2d} |u_{\pm,n}^s(f)|^2.$$

On pourra se référer à [8] pour une présentation plus détaillée de ces espaces dont nous donnons ici quelques propriétés. Tout d'abord, nous avons :

$$d \geq 0 \implies W_{\pm}^d = \left\{ f \in L^2(S^2); \quad \|f\|_{W_{\pm}^d} < \infty \right\},$$

et le dual de W_{\pm}^d peut être identifié à W_{\pm}^{-d} :

$$d \in \mathbb{R}, \quad (W_{\pm}^d)' = W_{\pm}^{-d}.$$

De plus, l'ensemble des fonctions tests sur $]0, \pi[_\theta \times]0, 2\pi[_\varphi$ est contenu dans W_{\pm}^d . En lien avec la décomposition (1.3.4), nous introduisons l'espace de Hilbert :

$$\mathcal{W}^d = W_-^d \times W_+^d \times W_-^d \times W_+^d \quad (1.3.8)$$

muni de la norme :

$$\|\Phi\|_{\mathcal{W}^d}^2 = \sum_{j=1}^4 \sum_{(s,n) \in I} \left(s + \frac{1}{2}\right)^{2d} |u_{j,n}^s|^2 \quad (1.3.9)$$

où :

$$\Phi(\theta, \varphi) = \sum_{(s,n) \in I} \begin{pmatrix} u_{1,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s(\theta, \varphi) \\ u_{2,n}^s T_{+\frac{1}{2},n}^s(\theta, \varphi) \\ u_{3,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s(\theta, \varphi) \\ u_{4,n}^s T_{+\frac{1}{2},n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Un résultat dû à A.Bachelot

Nous présentons maintenant un résultat obtenu par A.Bachelot (voir [8]). Après certaines transformations de coordonnées, l'Hamiltonien considéré dans cet article est de la forme :

$$H_m^B := i\gamma_B^0 \gamma_B^1 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{i}{\sin \zeta} \left[\gamma_B^0 \gamma_B^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2 \tan \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \gamma_B^0 \gamma_B^3 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] - \frac{m}{\cos \zeta} \gamma_B^0. \quad (1.3.10)$$

Son domaine naturel est :

$$D(H_m^B) := \{ \Phi \in \mathcal{L}^2; H_m^B \Phi \in \mathcal{L}^2 \}. \quad (1.3.11)$$

où $m = \tilde{m} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ avec \tilde{m} la masse du champ et Λ l'opposé de la constante cosmologique. L'espace de Hilbert \mathcal{L}^2 est défini par :

$$\mathcal{L}^2 := \left[L^2 \left(\left[0, \frac{\pi}{2} \right]_{\zeta} \times \left[0, \pi \right]_{\theta} \times \left[0, 2\pi \right]_{\varphi}, \sin \theta d\zeta d\theta d\varphi \right) \right]^4, \quad (1.3.12)$$

Ici, les matrices de Dirac $\gamma_B^0, \gamma_B^1, \gamma_B^2, \gamma_B^3$ prennent la forme :

$$\gamma_B^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_B^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_B^k \\ -\sigma_B^k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.3.13)$$

où les matrices de Pauli sont données par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_B^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Le résultat qui nous intéresse est celui concernant le comportement asymptotique des éléments du domaine naturel défini ci-dessus. Plusieurs versions sont énoncées dans l'article selon le système de coordonnées utilisé. Ici, le résultat est le suivant (voir [8]) :

Théorème 1.3.1. *Pour tout $\Phi \in D(H_m^B)$, nous avons :*

$$\Phi \in C^0 \left(\left[0, \frac{\pi}{2} \right]_{\zeta}; \mathcal{W}^{\frac{1}{2}} \right), \quad (1.3.14)$$

$$\|\Phi(\zeta, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{\frac{1}{2}}} = O(\sqrt{\zeta}), \quad \zeta \rightarrow 0, \quad (1.3.15)$$

et pour $m > 0$, nous avons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\Phi(\zeta, \cdot)\|_{\mathcal{W}^1}^2 \frac{d\zeta}{\sin \zeta} \leq \|H_m \Phi\|_{\mathcal{L}^2}^2. \quad (1.3.16)$$

Pour $m > \frac{1}{2}$, nous avons

$$\|\Phi(\zeta, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = O\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} - \zeta}\right), \quad \zeta \rightarrow \frac{\pi}{2}. \quad (1.3.17)$$

Pour $m = \frac{1}{2}$, nous avons

$$\|\Phi(\zeta, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = O\left(\sqrt{\left(\zeta - \frac{\pi}{2}\right) \ln\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right)}\right), \quad \zeta \rightarrow \frac{\pi}{2}. \quad (1.3.18)$$

Pour $0 < m < \frac{1}{2}$, il existe des fonctions $\psi_- \in W_-^{\frac{1}{2}}$, $\chi_- \in W_+^{\frac{1}{2}}$, $\psi_+, \chi_+ \in L^2(S^2)$ et $\phi \in C^0\left([0, \frac{\pi}{2}]_\zeta; L^2(S^2; \mathbb{C}^4)\right)$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta, \theta, \varphi) &= \left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right)^{-m} \begin{pmatrix} \psi_-(\theta, \varphi) \\ \chi_-(\theta, \varphi) \\ -i\psi_-(\theta, \varphi) \\ i\chi_-(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ &+ \left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right)^m \begin{pmatrix} \psi_+(\theta, \varphi) \\ \chi_+(\theta, \varphi) \\ i\psi_+(\theta, \varphi) \\ -i\chi_+(\theta, \varphi) \end{pmatrix} + \phi(\zeta, \theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

$$\|\phi(\zeta, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = o\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} - \zeta}\right), \quad \zeta \rightarrow \frac{\pi}{2}. \quad (1.3.20)$$

Réciproquement, pour tout $\psi_- \in W_-^{\frac{1}{2}+m}$, $\chi_- \in W_+^{\frac{1}{2}+m}$, $\psi_+ \in W_-^{\frac{1}{2}-m}$, $\chi_+ \in W_+^{\frac{1}{2}-m}$ ils existent $\Phi \in D(H_m^B)$ satisfaisant (1.3.19) et (1.3.20).

Pour $m = 0$, on a

$$\Phi \in C^0\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]_\zeta; \mathcal{W}^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (1.3.21)$$

Remarque. Nous avons énoncé le résultat pour l'opérateur entier. En fait, il est possible de réaliser une décomposition en harmoniques sphériques qui ramène le problème à l'étude d'équations différentielles ordinaires. Le résultat énoncé ci-dessus est d'abord prouvé à harmonique fixée avant de sommer sur les harmoniques. Nous utiliserons dans la suite ce même résultat mais seulement pour des harmoniques fixées.

C'est ici que nous voyons apparaître des comportements différents selon la masse du champ. En effet, nous voyons que pour une masse du champ suffisamment grande en comparaison avec la constante cosmologique, les états tendent vers 0 au bord, ce qui suggère que nous n'aurions pas besoin de mettre de conditions au bord pour obtenir une extension auto-adjointe de notre opérateur et ainsi avoir un problème de Cauchy bien posé.

Malheureusement, pour une masse trop petite en comparaison avec la constante cosmologique,

nous voyons que les états du système ne décroissent pas au bord (à cause de la présence du terme $(\frac{\pi}{2} - x)^{-m}$) ce qui suggère que nous devons ajouter des conditions au bord pour assurer que le problème de Cauchy soit bien posé.

Cette différence entre les masses est liée aux contraintes d'intégrabilité que nous avons mises sur les états que nous considérons. Ce genre de comportements avait été découvert par Breitenlohner et Freedman (voir [14],[13]) pour les champs scalaires. Ils avaient alors prouvé l'existence de deux valeurs critiques appelées "B-F bounds". A. Bachelot [8] a mis en évidence des bornes similaires pour l'équation de Dirac. Nous souhaitons maintenant utiliser le résultat cité plus haut dans notre cadre. Pour cela, nous allons utiliser une transformation unitaire qui ramène notre opérateur sous une forme similaire à celle étudiée dans [8].

Transformation unitaire de l'opérateur H_m

Dans cette partie, nous réalisons la transformation unitaire annoncée précédemment. Nous commençons par introduire les domaines sur lesquels nous allons considérer notre opérateur :

- Si $m \geq \frac{1}{2l}$:

$$D(H_m) = \{\phi \in \mathcal{H}; H_m \phi \in \mathcal{H}\}. \quad (1.3.22)$$

- Si $m < \frac{1}{2l}$, nous avons vu qu'il serait nécessaire d'imposer des conditions au bord. Nous imposons aux éléments du domaine de vérifier une condition MIT-bag généralisée (où $\alpha \in \mathbb{R}$ est appelé angle de Chiral et $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ (voir [8])) :

$$D(H_m) = \left\{ \phi \in \mathcal{H}; H_m \phi \in \mathcal{H}, \left\| \left(\gamma^1 + ie^{i\alpha\gamma^5} \right) \phi \right\|_2 = o(\sqrt{-x}), x \rightarrow 0 \right\} \quad (1.3.23)$$

D'autres conditions ont été analysées dans [8]. Dans cette thèse, nous nous sommes restreints à l'étude de la seule condition au bord présentée ci-dessus.

Dans un premier temps, nous cherchons à obtenir une condition au bord indépendante de α dans le cas $ml < \frac{1}{2}$, ce qui évitera la présence d'un paramètre supplémentaire. Pour cela, nous constatons que la matrice $e^{i\alpha\gamma^5}$ est unitaire. D'autre part, la relation de commutation suivante :

$$e^{i\alpha\gamma^5} \gamma^1 = \gamma^1 e^{-i\alpha\gamma^5} \quad (1.3.24)$$

est vérifiée. La condition au bord devient :

$$\begin{aligned} \left\| \left(\gamma^1 + ie^{i\alpha\gamma^5} \right) \phi \right\|_2 &= \left\| e^{-i\frac{\alpha}{2}\gamma^5} \left(\gamma^1 + ie^{i\alpha\gamma^5} \right) \phi \right\|_2 \\ &= \left\| \left(\gamma^1 + i \right) e^{i\frac{\alpha}{2}\gamma^5} \phi \right\|_2 \end{aligned}$$

Introduisons l'opérateur :

$$H_m^\alpha = e^{i\frac{\alpha}{2}\gamma^5} H_m e^{-i\frac{\alpha}{2}\gamma^5}. \quad (1.3.25)$$

Il est facile de voir que, pour $ml < \frac{1}{2}$, $\varphi \in D(H_m)$ si et seulement si $e^{i\frac{\alpha}{2}\gamma^5} \varphi \in D(H_m^\alpha)$ où :

$$D(H_m^\alpha) = \left\{ \phi \in \mathcal{H}; H_m^\alpha \phi \in \mathcal{H}, \left\| \left(\gamma^1 + i \right) \phi \right\|_2 = o(\sqrt{-x}), x \rightarrow 0 \right\}$$

Les opérateurs H_m et H_m^α étant unitairement équivalents, nous pouvons traiter uniquement le cas $\alpha = 0$. Dans le cas $\alpha \neq 0$, nous réalisons la transformation unitaire ci-dessus et prouvons de la même manière que notre opérateur est auto-adjoint. Dans toute la suite, nous supposons donc $\alpha = 0$.

Nous allons maintenant modifier la forme de notre hamiltonien afin de pouvoir exploiter le résultat énoncé plus haut. Posons :

$$\tilde{t} = -t$$

qui nous permet d'obtenir l'équation suivante (par abus de notation, nous continuerons à noter t notre variable de temps correspondant à \tilde{t}) :

$$\partial_t \phi = i(-H_m) \phi. \quad (1.3.26)$$

Posons ensuite :

$$\tilde{H}_m = \gamma_B^5 P^{-1} (-H_m) P \gamma_B^5 \quad (1.3.27)$$

où :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} \text{Id} & \text{Id} \\ -i\text{Id} & i\text{Id} \end{pmatrix}, \quad \text{Det}(P) = 1 \\ P^* &= P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} \text{Id} & i\text{Id} \\ \text{Id} & -i\text{Id} \end{pmatrix} \\ \gamma_B^5 &= \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et Id est la matrice identité d'ordre 2.

La matrice P vérifie les relations suivantes :

$$\gamma^0 = P \gamma_B^0 P^{-1}; \quad \gamma^j = -P \gamma_B^j P^{-1}, \quad 1 \leq j \leq 3, \quad (1.3.28)$$

où les matrices de Dirac sont définies par (1.3.13) et (1.2.24). La matrice γ_B^5 vérifie :

$$\gamma_B^5 \gamma_B^\mu = -\gamma_B^\mu \gamma_B^5, \quad \forall 0 \leq \mu \leq 3. \quad (1.3.29)$$

L'expression de l'opérateur \tilde{H}_m est alors :

$$\tilde{H}_m = i\gamma_B^0 \gamma_B^1 \partial_x + i\gamma_B^0 \gamma_B^2 A(x) \left(\partial_\theta + \frac{1}{2} \cot \theta \right) + i\gamma_B^0 \gamma_B^3 A(x) \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi - m\gamma_B^0 B(x). \quad (1.3.30)$$

Cet opérateur admet la même forme que l'opérateur H_m^B (1.3.10). Nous pouvons maintenant nous intéresser au comportement asymptotique des éléments de notre domaine.

Comportement asymptotique des éléments du domaine

Dans cette partie, nous cherchons à comparer notre opérateur avec celui obtenu dans [8] lorsque r tend vers l'infini. Pour faire cette comparaison, nous allons utiliser une des formes particulières que peut prendre l'opérateur de Dirac. Celle qui nous intéresse correspond aux coordonnées $(t, r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ et admet la forme :

$$H_m^B = i\gamma_B^0 \gamma_B^1 F_B(r) \left(\partial_r + \frac{1}{r} + \frac{F_B'(r)}{4F_B(r)} \right) + i \frac{F_B(r)^{\frac{1}{2}}}{r} \not{D}_{S^2} - m\gamma_B^0 F_B(r)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.31)$$

où :

$$F_B(r) = 1 + \frac{r^2}{l^2} \quad (1.3.32)$$

Cette forme est similaire à celle obtenue pour H_m dans (1.2.22). De plus, pour $r \gg r_{SAdS}$, le comportement asymptotique des fonctions définissant le potentiel est identique. Nous allons donc essayer de comparer ces deux opérateurs dans la limite $r \gg r_{SAdS}$ afin d'obtenir le

comportement asymptotique des éléments du domaine de H_m à partir du comportement asymptotique des éléments du domaine de H_m^B cité plus haut. Pour cela, nous considérons H_m^B pour r dans $]r_{SAdS}; +\infty[$ puis nous effectuons le changement de variable $r \rightarrow r_*$, où r_* est tel que $\frac{dr_*}{dr} = F(r)^{-1}$ et F est définie sur $]r_{SAdS}; +\infty[$ par $F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}$, dans l'opérateur H_m^B pour obtenir :

$$H_m^B = i\gamma_B^0 \gamma_B^1 g(r_*) \partial_{r_*} + i\gamma_B^0 \gamma_B^1 \left(\frac{F(r)}{r} + \frac{F'(r)}{4} \right) + i\gamma_B^0 \gamma_B^1 \frac{3M}{2r^2} + A_B(r_*) D_{S^2} - m\gamma_B^0 B_B(r_*) \quad (1.3.33)$$

où r est compris comme étant une fonction de r_* . Nous posons :

$$x = r_* - C \frac{\pi}{2}$$

pour obtenir :

$$H_m^B = i\gamma_B^0 \gamma_B^1 g(x) \partial_x + i\gamma_B^0 \gamma_B^1 \left(\frac{F(r)}{r} + \frac{F'(r)}{4} \right) + i\gamma_B^0 \gamma_B^1 \frac{3M}{2r^2} + A_B(x) D_{S^2} - m\gamma_B^0 B_B(x) \quad (1.3.34)$$

et :

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \frac{2M}{l^4} (-x)^3 + o((-x)^3) \\ A_B(x) &= \frac{1}{l} + \frac{1}{2l^3} (-x)^2 + o((-x)^2) \\ B_B(x) &= \frac{l}{-x} + \frac{1}{6l} (-x) + o(-x) \\ \frac{F(r)}{r} &= \frac{1}{-x} + \frac{2}{3l^2} (-x) + o(-x) \\ F'(r) &= \frac{2}{-x} - \frac{2}{3l^2} (-x) + o(-x) \end{aligned}$$

Soit $P_{s,n}$ la projection de \mathcal{H} sur le sous-espace $\mathcal{H}_{s,n}$ et soit $\tilde{H}_m^{s,n} = \tilde{H}_{m|\mathcal{H}_{s,n}}$, $H_m^{s,n,B} = H_{m|\mathcal{H}_{s,n}}^B$ pour un certain couple $(s,n) \in I$. On note

$$\psi_{s,n} = P_{s,n}(\psi) = \begin{pmatrix} \psi_{1,n}^s(x) T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ \psi_{2,n}^s(x) T_{\frac{1}{2},n}^s \\ \psi_{3,n}^s(x) T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ \psi_{4,n}^s(x) T_{\frac{1}{2},n}^s \end{pmatrix}.$$

On munit $H_m^{s,n,B}$ du domaine suivant :

- Si $m \geq \frac{1}{2l}$:

$$D(H_m^{s,n,B}) = \{ \varphi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}; H_m^{s,n,B} \varphi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n} \} \quad (1.3.35)$$

- Si $m < \frac{1}{2l}$:

$$\begin{aligned} D(H_m^{s,n,B}) &= \{ \varphi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}; H_m^{s,n,B} \varphi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}, \\ &\| (\gamma_B^1 + i) \varphi_{s,n}(x, \cdot) \|_{\mathcal{W}^0} = o(\sqrt{-x}), x \rightarrow 0 \}. \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

Lemme 1.3.2. Soit $\psi \in D(\tilde{H}_m)$. Soit $\chi \in C_0^\infty(]-2\epsilon, 0])$ telle que $\chi = 1$ sur $]-\epsilon, 0]$ avec $\epsilon > 0$. Alors $\chi\psi \in D(H^B)$.

Preuve. Montrons tout d'abord que $P_{s,n}(\chi\psi) \in D(H_m^{s,n,B})$. Comme $P_{s,n}(\chi\psi) = \chi\psi_{s,n}$, nous avons :

$$\begin{aligned} H_m^{s,n,B}P_{s,n}(\chi\psi) &= g(x)\tilde{H}_m^{s,n}P_{s,n}(\chi\psi) + \left(H_m^{s,n,B}P_{s,n}(\chi\psi) - g(x)\tilde{H}_m^{s,n}P_{s,n}(\chi\psi)\right) \\ &= g(x)\tilde{H}_m^{s,n}P_{s,n}(\chi\psi) + i\gamma_B^0\gamma_B^1\left(\frac{F(r)}{r} + \frac{F'(r)}{4}\right)(1-g(x))\chi\psi_{s,n} \\ &\quad + i\gamma_B^0\gamma_B^1\frac{3M}{2r^2}\chi\psi_{s,n} + \gamma_B^0\gamma_B^2(A_B(x) - g(x)A(x))\left(s + \frac{1}{2}\right)\chi\psi_{s,n} \\ &\quad - m\gamma_B^0(B_B(x) - g(x)B(x))\chi\psi_{s,n}. \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

Comme $\psi \in D(\tilde{H}_m)$, g est bornée au voisinage de 0 et $\chi \in C_0^\infty(]-2\epsilon, 0]_x)$, le premier terme est bien dans $L^2(x, dx)$. Le développement au voisinage de 0 de g et (1.2.35) donnent :

$$\begin{aligned} A_B(x) - g(x)A(x) &= o(-x), \\ B_B(x) - g(x)B(x) &= O(-x), \\ \left(\frac{F(r)}{r} + \frac{F'(r)}{4}\right)(1-g(x)) &= o(-x) \end{aligned}$$

au voisinage de 0. Nous en déduisons que :

$$H_m^{s,n,B}P_{s,n}(\chi\psi) \in \mathcal{H}_{s,n} \quad (1.3.38)$$

En particulier, $\chi\psi_{s,n} \in D(H_m^{s,n,B})$. D'après (1.3.37), afin de montrer que $\chi\psi \in D(H^B)$, il nous faut voir que $(s + \frac{1}{2})\|\chi\psi_{s,n}\|_{L^2(-\frac{1}{2}, 0)}$ est de carré sommable (nous pouvons supposer que le support de χ est inclus dans $(-\frac{1}{2}, 0)$). Comme $\psi \in D(\tilde{H}_m)$, il existe $f \in \mathcal{H}$ telle que :

$$\tilde{H}_m\psi = f \quad (1.3.39)$$

Alors, nous pouvons écrire :

$$f = \sum_{(s,n) \in I} \begin{pmatrix} f_{1,n}^s(x)T_{-\frac{1}{2},n}^s(\theta, \varphi) \\ f_{2,n}^s(x)T_{+\frac{1}{2},n}^s(\theta, \varphi) \\ f_{3,n}^s(x)T_{-\frac{1}{2},n}^s(\theta, \varphi) \\ f_{4,n}^s(x)T_{+\frac{1}{2},n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} i(\chi\psi_{3,n}^s)' + (s + \frac{1}{2})A(x)\chi\psi_{4,n}^s - mB(x)\chi\psi_{1,n}^s = f_{1,n}^s, \\ -i(\chi\psi_{4,n}^s)' + (s + \frac{1}{2})A(x)\chi\psi_{3,n}^s - mB(x)\chi\psi_{2,n}^s = f_{2,n}^s, \\ i(\chi\psi_{1,n}^s)' + (s + \frac{1}{2})A(x)\chi\psi_{2,n}^s + mB(x)\chi\psi_{3,n}^s = f_{3,n}^s, \\ -i(\chi\psi_{2,n}^s)' + (s + \frac{1}{2})A(x)\chi\psi_{1,n}^s + mB(x)\chi\psi_{4,n}^s = f_{4,n}^s. \end{cases}$$

Suivant le même raisonnement que dans [8], nous multiplions ces équations par $\psi_{j,n}^{\bar{s}}$ pour $j = 1, \dots, 4$, nous obtenons :

$$\begin{cases} i\overline{\chi\psi_{4,n}^s}(\chi\psi_{3,n}^s)' + (s + \frac{1}{2})A(x)|\chi\psi_{4,n}^s|^2 - mB(x)\overline{\chi\psi_{4,n}^s}\chi\psi_{1,n}^s = \overline{\chi\psi_{4,n}^s}f_{1,n}^s, \\ -i\overline{\chi\psi_{3,n}^s}(\chi\psi_{4,n}^s)' + (s + \frac{1}{2})A(x)|\chi\psi_{3,n}^s|^2 - mB(x)\overline{\chi\psi_{3,n}^s}\chi\psi_{2,n}^s = \overline{\chi\psi_{3,n}^s}f_{2,n}^s, \\ i\overline{\chi\psi_{2,n}^s}(\chi\psi_{1,n}^s)' + (s + \frac{1}{2})A(x)|\chi\psi_{2,n}^s|^2 + mB(x)\overline{\chi\psi_{2,n}^s}\chi\psi_{3,n}^s = \overline{\chi\psi_{2,n}^s}f_{3,n}^s, \\ -i\overline{\chi\psi_{1,n}^s}(\chi\psi_{2,n}^s)' + (s + \frac{1}{2})A(x)|\chi\psi_{2,n}^s|^2 + mB(x)\overline{\chi\psi_{1,n}^s}\chi\psi_{4,n}^s = \overline{\chi\psi_{1,n}^s}f_{4,n}^s. \end{cases}$$

Additionnant ces équations, et prenant la partie réelle, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \operatorname{Im} (\chi\psi_{1,n}^s \overline{\chi\psi_{2,n}^s} + \chi\psi_{3,n}^s \overline{\chi\psi_{4,n}^s}) + \left(s + \frac{1}{2}\right) A(x) \sum_{j=1}^4 |\chi\psi_{j,n}^s|^2 \\ & = \operatorname{Re} (\overline{\chi\psi_{4,n}^s} f_{1,n}^s + \overline{\chi\psi_{3,n}^s} f_{2,n}^s + \overline{\chi\psi_{2,n}^s} f_{3,n}^s + \overline{\chi\psi_{1,n}^s} f_{4,n}^s). \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

Nous avons vu que $\chi\psi_{s,n} \in D(H_m^{s,n,B})$, nous pouvons donc utiliser les résultats obtenus dans [8] pour $\chi\psi_{s,n}$, et en particulier :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Im} (\chi\psi_{1,n}^s \overline{\chi\psi_{2,n}^s} + \chi\psi_{3,n}^s \overline{\chi\psi_{4,n}^s}) = 0. \quad (1.3.41)$$

Comme $\chi\psi_{j,n}^s$ est nulle en $-\frac{1}{2}$ pour tout $j = 1, \dots, 4$, en intégrant (1.3.40) entre $-\frac{1}{2}$ et 0, nous obtenons :

$$\left(s + \frac{1}{2}\right) \int_{-\frac{1}{2}}^0 A(x) \sum_{j=1}^4 |\chi\psi_{j,n}^s|^2 dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \operatorname{Re} (\overline{\chi\psi_{4,n}^s} f_{1,n}^s + \overline{\chi\psi_{3,n}^s} f_{2,n}^s + \overline{\chi\psi_{2,n}^s} f_{3,n}^s + \overline{\chi\psi_{1,n}^s} f_{4,n}^s) dx.$$

En outre, multipliant par $(s + \frac{1}{2})l$:

$$\begin{aligned} & \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 lA(x) \sum_{j=1}^4 |\chi\psi_{j,n}^s|^2 dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \operatorname{Re} \left(\overline{\left(s + \frac{1}{2}\right) \chi\psi_{4,n}^s l f_{1,n}^s} + \overline{\left(s + \frac{1}{2}\right) \chi\psi_{3,n}^s l f_{2,n}^s} \right. \\ & \left. + \overline{\left(s + \frac{1}{2}\right) \chi\psi_{2,n}^s l f_{3,n}^s} + \overline{\left(s + \frac{1}{2}\right) \chi\psi_{1,n}^s l f_{4,n}^s} \right) dx. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\overline{\left(s + \frac{1}{2}\right) \chi\psi_{4,n}^s l f_{1,n}^s} + \overline{\left(s + \frac{1}{2}\right) \chi\psi_{3,n}^s l f_{2,n}^s} + \overline{\left(s + \frac{1}{2}\right) \chi\psi_{2,n}^s l f_{3,n}^s} + \overline{\left(s + \frac{1}{2}\right) \chi\psi_{1,n}^s l f_{4,n}^s} \right) \\ & \leq \sum_{j=1}^4 \frac{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 |\chi\psi_{j,n}^s|^2}{2} + \frac{l^2 |f_{j,n}^s|^2}{2}, \end{aligned}$$

donc :

$$\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2lA(x) - 1) \sum_{j=1}^4 |\chi\psi_{j,n}^s|^2 dx \leq \int_{-\frac{1}{2}}^0 \sum_{j=1}^4 l^2 |f_{j,n}^s|^2 dx.$$

Rappelons maintenant le comportement asymptotique de A :

$$A(x) = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^3} (-x)^2 + o((-x)^2)$$

de sorte que $A(x) \geq \frac{1}{l}$ au voisinage de 0. Ainsi nous pouvons choisir ϵ telle que $2lA(x) - 1 \geq 1$ sur le support de χ . Ceci nous permet d'obtenir :

$$\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \sum_{j=1}^4 |\chi\psi_{j,n}^s|^2 dx \leq l^2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \sum_{j=1}^4 |f_{j,n}^s|^2 dx. \quad (1.3.42)$$

Par hypothèse, $f \in \mathcal{H}$ donc le membre de droite est sommable ce qui assure que le membre de gauche l'est aussi. Par conséquent, $(A_B(x) - f(x)A(x)) (s + \frac{1}{2}) \chi\psi_{s,n}$ est de carré sommable

puisque $|A_B(x) - f(x)A(x)| \leq 1$ au voisinage de 0. D'autre part, $(B_B(x) - f(x)B(x))\chi\psi_{s,n}$ et $\left(\frac{F(r)}{r} + \frac{F'(r)}{4}\right)(1-g(x))\chi\psi_{s,n}$ sont sommables puisque $(B_B(x) - f(x)B(x)), \left(\frac{F(r)}{r} + \frac{F'(r)}{4}\right)$ sont bornés au voisinage de 0 et $\chi\psi \in \mathcal{H}$. Nous en déduisons que :

$$\left(H_m^{s,n,B}P_{s,n}(\chi\psi) - f(x)\tilde{H}_m^{s,n}P_{s,n}(\chi\psi)\right) \quad (1.3.43)$$

est de carré sommable. Par conséquent, $\chi\psi \in D(H^B)$.

Q.E.D

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème 1.3.1 à $\chi\psi$ et obtenir le comportement asymptotique suivant pour ψ :

Proposition 1.3.3. *Soit $\psi \in D(\tilde{H}_m)$. Nous avons les comportements suivant :*

- Pour $m > \frac{1}{2l}$, on a

$$\|\psi(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = O(\sqrt{-x}), \quad x \rightarrow 0. \quad (1.3.44)$$

- Pour $m = \frac{1}{2l}$, on a

$$\|\psi(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = O\left(\sqrt{(-x)\ln(-x)}\right), \quad x \rightarrow 0. \quad (1.3.45)$$

- Pour $0 < m < \frac{1}{2l}$, il existe des fonctions $\psi_- \in W_-^{\frac{1}{2}}$, $\chi_- \in W_+^{\frac{1}{2}}$, $\psi_+, \chi_+ \in L^2(S^2)$ et $\phi \in C^0([-\infty, 0]_x; L^2(S^2; \mathbb{C}^4))$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \psi(x, \theta, \varphi) = & (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} \psi_-(\theta, \varphi) \\ \chi_-(\theta, \varphi) \\ -i\psi_-(\theta, \varphi) \\ i\chi_-(\theta, \varphi) \end{pmatrix} + (-x)^{ml} \begin{pmatrix} \psi_+(\theta, \varphi) \\ \chi_+(\theta, \varphi) \\ i\psi_+(\theta, \varphi) \\ -i\chi_+(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ & + \phi(x, \theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.3.46)$$

$$\|\phi(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = o(\sqrt{-x}), \quad x \rightarrow 0. \quad (1.3.47)$$

Réciproquement, pour tout $\psi_- \in W_-^{\frac{1}{2}+m}$, $\chi_- \in W_+^{\frac{1}{2}+m}$, $\psi_+ \in W_-^{\frac{1}{2}-m}$, $\chi_+ \in W_+^{\frac{1}{2}-m}$, il existe $\psi \in D(H_m)$ satisfaisant (1.3.46) et (1.3.47).

En tant que corollaire, nous donnons ce résultat à harmonique fixée. Nous utiliserons celui-ci dans la suite :

Corollaire 1.3.4. *Soient s, n fixés et $\psi_{s,n} \in D(\tilde{H}_m^{s,n})$, nous avons :*

- Si $m > \frac{1}{2l}$, alors :

$$\|\psi_{s,n}(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = O(\sqrt{(-x)}), \quad x \rightarrow 0. \quad (1.3.48)$$

- Si $m = \frac{1}{2l}$, alors :

$$\|\psi_{s,n}(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = O\left(\sqrt{x \ln(-x)}\right), \quad x \rightarrow 0. \quad (1.3.49)$$

- Si $0 < m < \frac{1}{2l}$, il existe des fonctions $\psi_- \in W_-^{\frac{1}{2}}$, $\chi_- \in W_+^{\frac{1}{2}}$, $\psi_+, \chi_+ \in L^2(S^2)$ et $\phi \in C^0(]-\infty, 0]_x; L^2(S^2; \mathbb{C}^4))$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} \psi_{s,n}(x, \theta, \varphi) = & (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} \psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ \chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ -i\psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ i\chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} + (-x)^{ml} \begin{pmatrix} \psi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \\ \chi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \\ i\psi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \\ -i\chi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ & + \phi_n^s(x, \theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.3.50)$$

où :

$$\|\phi_n^s(x, \theta, \varphi)\|_{\mathcal{W}^0} = o(\sqrt{-x}), \quad x \rightarrow 0. \quad (1.3.51)$$

D'autre part :

$$\|\psi_{s,n}(x, \cdot)\|_{\mathcal{W}^0} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (1.3.52)$$

Preuve. Il nous reste à prouver la deuxième partie. Comme A et B se comportent comme $e^{2\kappa x}$ en $-\infty$, nous pouvons choisir une fonction $\chi_2 \in C^\infty(]-\infty, 0])$ telle que $\chi_2 = 1$ pour $x \in]-\infty, 2\omega[$, $\text{supp}(\chi_2) \subset]-\infty, \omega[$ où $\omega < 0$. Nous avons alors $\chi_2 \psi_{s,n} \in D(\tilde{H}_m^{s,n})$. Il existe ainsi $h \in \mathcal{H}_{s,n}$ telle que :

$$\tilde{H}_m^{s,n} \chi_2 \psi_{s,n} = h.$$

Nous avons alors :

$$i\gamma_B^0 \gamma_B^1 \partial_x \chi_2 \psi_{s,n} = -\gamma_B^0 \gamma_B^2 \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) \chi_2 \psi_{s,n} + m\gamma_B^0 B(x) \chi_2 \psi_{s,n} + h.$$

Par conséquent, $\chi_2 \psi_{s,n} \in H^1(]-\infty, 0])$ puisque A et B sont bornés sur $]-\infty, \omega[$. Nous en déduisons que $\chi_2 \psi_{s,n}$ est continue sur $]-\infty, 0[$. Comme $\chi_2 \psi_{s,n}$ est dans L^2 par hypothèse, nous obtenons le résultat souhaité. Q.E.D

Description du domaine

Nous sommes maintenant en mesure de donner les domaines des opérateurs $H_m^{s,n}$. Rappelons que les opérateurs H_m et \tilde{H}_m sont liés par une transformation unitaire qui ne change donc pas la norme des observables. Nous obtenons :

- Si $2ml \geq 1$, alors

$$D(H_m^{s,n}) = \{\psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}; H_m^{s,n} \psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}\}. \quad (1.3.53)$$

- Si $2ml < 1$, alors

$$\begin{aligned} D(H_m^{s,n}) = & \left\{ \psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}; H_m^{s,n} \psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}, \left\| (\gamma^1 + i) \psi_{s,n} \right\|_{\mathcal{H}_{s,n}} = o(\sqrt{-x}), x \rightarrow 0 \right\} \\ = & \left\{ \psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}; H_m^{s,n} \psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}, \right. \\ & \left. \psi_{s,n} = (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} \psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ i\chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ -\psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ i\chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} + \phi_n^s(x, \theta, \varphi) \right\}. \end{aligned} \quad (1.3.54)$$

1.3.2 Caractère auto-adjoint à harmoniques fixées

Dans cette section, s et n sont fixés.

Cas $2ml \geq 1$

Nous commençons cette partie par prouver une estimation elliptique dans le cas $2ml > 1$ qui nous sera utile pour donner une description en terme d'espace de Sobolev pour le domaine de notre opérateur.

Lemme 1.3.5 (Estimation elliptique). *Supposons que $2ml > 1$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varphi \in C_0^\infty]-\infty, 0[$, nous avons :*

$$\| -i\partial_x \varphi \|^2 \leq C \left(\|H_m^{s,n} \varphi\|^2 + \|\varphi\|^2 \right). \quad (1.3.55)$$

Preuve. Nous écrivons $D_x = -i\partial_x$ et $\Gamma^1 = -\gamma^0 \gamma^1$. Rappelons que :

$$H_m^{s,n} = \Gamma^1 D_x + \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) \gamma^0 \gamma^2 - mB(x) \gamma^0.$$

Nous noterons $V(x) = \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) \gamma^0 \gamma^2 - mB(x) \gamma^0$. Considérons une partition de l'unité χ_1, χ_2 telle que $\chi_1 + \chi_2 = 1$, $\text{supp}(\chi_1) \subset]-\infty, -\epsilon[$ et $\chi_1 = 1$ sur $] -\infty, -2\epsilon[$, $\text{supp}(\chi_2) \subset] -2\epsilon, 0[$ et $\chi_2 = 1$ sur $] -\epsilon, 0[$. Nous choisissons $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que, si γ_B^5 et P sont les matrices unitaires définies dans (1.3.27), $\gamma^5 P^{-1} \chi_2 \varphi \in D(H_m^B)$ quand $\varphi \in D(H_m^{s,n})$ (ceci est possible d'après le lemme 1.3.2). Rappelons que m est la masse du champ et l correspond à la constante cosmologique. Utilisant l'équation III.32 dans le théorème III.4 de [8], (1.3.27) et (1.3.37), nous obtenons :

$$\| D_x (\gamma_B^5 P^{-1} \chi_2 \varphi) \| \leq C_{m,l} \left\| g(x) \tilde{H}_m^{s,n} (\gamma_B^5 P^{-1} \chi_2 \varphi) \right\| + \tilde{C}_{m,l} \|\chi_2 \varphi\|,$$

où $C_{m,l}$ et $\tilde{C}_{m,l}$ sont des constantes dépendant de m et l . Comme g est bornée au voisinage de 0 et $\gamma_B^5 P^{-1}$ est unitaire et commute avec D_x , nous obtenons :

$$\| D_x (\chi_2 \varphi) \| \leq C_{m,l,\epsilon} \|H_m^{s,n} (\chi_2 \varphi)\| + \tilde{C}_{m,l} \|\chi_2 \varphi\|. \quad (1.3.56)$$

D'autre part, nous avons :

$$\| D_x (\chi_1 \varphi) \| \leq \|H_m^{s,n} (\chi_1 \varphi)\| + C_{V,\epsilon} \|\varphi\|.$$

avec $C_{V,\epsilon}$ une constante. Comme χ_1, χ_2 commutent avec V et sont bornées ainsi que leurs dérivées, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \| D_x \varphi \|^2 &\leq C \left(\|H_m^{s,n} (\chi_1 \varphi)\|^2 + \|H_m^{s,n} (\chi_2 \varphi)\|^2 \right) + C' \|\varphi\|^2 \\ &\leq \tilde{C} \|H_m^{s,n} \varphi\|^2 + \tilde{C}' \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Q.E.D

Remarque. Nous avons la même estimations avec $\tilde{H}_m^{s,n}$ à la place de $H_m^{s,n}$ quitte à modifier la constante.

Nous pouvons maintenant prouver que notre opérateur est auto-adjoint et utiliser l'estimation elliptique précédente pour décrire le domaine de $\tilde{H}_m^{s,n}$ dans le cas $2ml > 1$.

Proposition 1.3.6. *Pour $2ml \geq 1$, l'opérateur $\tilde{H}_m^{s,n}$ est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty]-\infty, 0[$. De plus, si $2ml > 1$, le domaine de cet opérateur est $H_0^1]-\infty, 0[$.*

Preuve. Rappelons que :

$$\begin{aligned}\tilde{H}_m^{s,n} &= i\gamma_B^0\gamma_B^1\partial_x + \gamma_B^0\gamma_B^2\left(s + \frac{1}{2}\right)A(x) - m\gamma_B^0B(x) \\ D\left(\tilde{H}_m^{s,n}\right) &= \left\{\psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}; \tilde{H}_m^{s,n}\psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}\right\},\end{aligned}$$

et que si $\psi_{s,n} \in D\left(\tilde{H}_m^{s,n}\right)$, nous avons :

- Si $2ml > 1$, alors

$$\|\psi_{s,n}(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = O\left(\sqrt{-x}\right), \quad x \rightarrow 0. \quad (1.3.57)$$

- Si $2ml = 1$, alors

$$\|\psi_{s,n}(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = O\left(\sqrt{x \ln(-x)}\right), \quad x \rightarrow 0. \quad (1.3.58)$$

Dans les deux cas, nous avons :

$$\|\psi_{s,n}(x, \cdot)\|_{\mathcal{W}^0} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (1.3.59)$$

Nous allons maintenant prouver que $\tilde{H}_m^{s,n}$ est symétrique sur son domaine. Pour cela, remarquons que :

$$\left(\gamma_B^0\gamma_B^2\right)^* = \left(\gamma_B^2\right)^* \left(\gamma_B^0\right)^* = -\gamma_B^2\gamma_B^0 = \gamma_B^0\gamma_B^2.$$

Et, de même, nous avons :

$$\begin{aligned}\left(\gamma_B^0\gamma_B^1\right)^* &= \gamma_B^0\gamma_B^1 \\ \left(\gamma_B^0\right)^* &= \gamma_B^0.\end{aligned}$$

Considérons deux éléments $\phi_{s,n}, \psi_{s,n}$ du domaine de $\tilde{H}_m^{s,n}$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left\langle \gamma_B^0\gamma_B^2A(x)\left(s + \frac{1}{2}\right)\phi_{s,n}, \psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} &= \left\langle A(x)\left(s + \frac{1}{2}\right)\phi_{s,n}, \left(\gamma_B^0\gamma_B^2\right)^*\psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} \\ &= \left\langle A(x)\left(s + \frac{1}{2}\right)\phi_{s,n}, \left(\gamma_B^0\gamma_B^2\right)\psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} \\ &= \left\langle \phi_{s,n}, \left(\gamma_B^0\gamma_B^2\right)A(x)\left(s + \frac{1}{2}\right)\psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}},\end{aligned}$$

puisque A est à valeurs réelles. De même :

$$\left\langle \gamma_B^0B(x)\phi_{s,n}, \psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} = \left\langle \phi_{s,n}, \gamma_B^0B(x)\psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}}.$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned}&\left\langle \tilde{H}_m^{s,n}\phi_{s,n}, \psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} - \left\langle \phi_{s,n}, \tilde{H}_m^{s,n}\psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} \\ &= \left\langle i\gamma_B^0\gamma_B^1\partial_x\phi_{s,n}, \psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} - \left\langle \phi_{s,n}, i\gamma_B^0\gamma_B^1\partial_x\psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} \\ &= \left\langle \partial_x\phi_{s,n}, -i\left(\gamma_B^0\gamma_B^1\right)^*\psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} - \left\langle \phi_{s,n}, i\gamma_B^0\gamma_B^1\partial_x\psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} \\ &= \left\langle \partial_x\phi_{s,n}, -i\gamma_B^0\gamma_B^1\psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} - \left\langle \phi_{s,n}, i\gamma_B^0\gamma_B^1\partial_x\psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} \\ &= i\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left\langle \phi_{s,n}(x, \cdot), \gamma_B^0\gamma_B^1\psi_{s,n}(x, \cdot) \right\rangle_{\mathcal{W}^0} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\langle \phi_{s,n}(x, \cdot), \gamma_B^0\gamma_B^1\psi_{s,n}(x, \cdot) \right\rangle_{\mathcal{W}^0}\right) \\ &\quad + \left\langle \phi_{s,n}, i\gamma_B^0\gamma_B^1\partial_x\psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} - \left\langle \phi_{s,n}, i\gamma_B^0\gamma_B^1\partial_x\psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}}.\end{aligned} \quad (1.3.60)$$

Utilisant les résultats sur le comportement asymptotique, les termes de bords sont nuls. Nous en déduisons que :

$$\left\langle \tilde{H}_m^{s,n} \phi_{s,n}, \psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} = \left\langle \phi_{s,n}, \tilde{H}_m^{s,n} \psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}}. \quad (1.3.61)$$

Ainsi, $\tilde{H}_m^{s,n}$ est symétrique sur son domaine.

Considérons maintenant un nouvel opérateur H qui admet la même expression que $\tilde{H}_m^{s,n}$ en coordonnées mais défini sur $D(H) = C_0^\infty]-\infty, 0[$. Nous avons alors, par un argument de distribution, que H^* admet la même expression que $\tilde{H}_m^{s,n}$ mais H^* est muni du domaine $D(H^*)$ qui est alors un sous-ensemble du domaine $D_{nat}(\tilde{H}_m^{s,n})$. En effet, si $\psi \in D(H^*)$, alors il existe $\chi \in \mathcal{H}_{s,n}$ tel que pour tout $\phi \in C_0^\infty$, nous avons :

$$\langle H\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \chi \rangle.$$

Alors, comme $H = H_m^{s,n}$, nous avons au sens des distributions :

$$\langle H\phi, \psi \rangle = \langle H_m^{s,n} \phi, \psi \rangle = \langle \phi, H_m^{s,n} \psi \rangle.$$

Par conséquent, ψ vérifie $H_m^{s,n} \psi = \chi \in \mathcal{H}_{s,n}$. Donc si $\psi \in D(H^*)$ alors $\psi \in D(H_m^{s,n})$.

Soit maintenant $\phi_\pm \in \ker(H^* \pm iId)$. Alors, comme $\tilde{H}_m^{s,n}$ est symétrique, nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \tilde{H}_m^{s,n} \phi_\pm, \phi_\pm \right\rangle - \left\langle \phi_\pm, \tilde{H}_m^{s,n} \phi_\pm \right\rangle \\ &= \langle H^* \phi_\pm, \phi_\pm \rangle - \langle \phi_\pm, H^* \phi_\pm \rangle \\ &= \langle \mp i \phi_\pm, \phi_\pm \rangle - \langle \phi_\pm, \mp i \phi_\pm \rangle \\ &= \mp 2i \|\phi_\pm\|_{\mathcal{H}_{s,n}}^2. \end{aligned} \quad (1.3.62)$$

Donc $\phi_\pm = 0$. Ceci prouve le caractère essentiellement auto-adjoint de notre opérateur.

D'après le lemme précédent, si $2ml > 1$, nous avons : $D(H_m^{s,n}) \subset H_0^1]-\infty, 0[$. D'autre part, notons $V(x)$ le potentiel tel que $H_m^{s,n} = i\gamma^0 \gamma^1 \partial_x + V(x)$ où :

$$V(x) = \gamma^0 \gamma^2 \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) - m\gamma^0 B(x), \quad (1.3.63)$$

où les comportements de A et B sont donnés par (1.2.35). Utilisant une partition de l'unité similaire au lemme précédent, nous avons, pour tout $\varphi \in C_0^\infty]-\infty, 0[$, l'inégalité :

$$\|H_m^{s,n} \varphi\|_{\mathcal{H}_{s,n}} \leq \|\partial_x \varphi\|_{\mathcal{H}_{s,n}} + \|V(x) \chi_1^2 \varphi\|_{\mathcal{H}_{s,n}} + \|V(x) \chi_2^2 \varphi\|_{\mathcal{H}_{s,n}}.$$

Utilisant le comportement de V donné ci-dessus, nous avons :

$$\|V(x) \chi_1^2 \varphi\|_{\mathcal{H}_{s,n}} \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{H}_{s,n}}.$$

De plus, le terme restant vérifie :

$$\begin{aligned} \|V(x) \chi_2^2 \varphi\|_{\mathcal{H}_{s,n}} &\leq \left(s + \frac{1}{2} \right) \|A \chi_2^2 \varphi\|_{\mathcal{H}_{s,n}} + m \|B \chi_2^2 \varphi\|_{\mathcal{H}_{s,n}} \\ &\leq C_{s,m,l} \|\varphi\|_{\mathcal{H}_{s,n}} + ml \left\| \frac{1}{|x|} \chi_2^2 \varphi \right\|_{\mathcal{H}_{s,n}}. \end{aligned}$$

Il nous reste donc à majorer le terme $\left\| \frac{1}{|x|} \chi_2^2 \varphi \right\|$. Rappelons maintenant une estimation obtenue par A. Bachelot dans la démonstration du théorème *iii.4* dans [8] :

$$\forall \Psi \in H_0^1(\mathbb{B}), \quad \int_{\mathbb{B}} |\Psi(y)|^2 \frac{1}{(1-|y|^2)^2} dy \leq \int_{\mathbb{B}} |\nabla_y \Psi(y)|^2 dy. \quad (1.3.64)$$

Utilisant l'équivalence unitaire de notre opérateur avec celui qu'obtient A. Bachelot, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{|x|} \chi_2^2 \varphi \right\|_{\mathcal{H}_{s,n}} &= \left\| P \gamma^5 \frac{1}{|x|} \gamma^5 P^{-1} (P \gamma^5 \chi_2^2 \varphi) \right\|_{\mathcal{H}_{s,n}} \\ &\leq \left\| -i \partial_x (P \gamma^5 \chi_2^2 \varphi) \right\|_{\mathcal{H}_{s,n}} \\ &\leq c (\|\varphi\| + \|-i \partial_x \varphi\|)_{\mathcal{H}_{s,n}}. \end{aligned} \quad (1.3.65)$$

Nous en déduisons ainsi que $H_0^1 \subset D(H_m^{s,n})$ par densité, ce qui termine la preuve. Q.E.D

Cas $2ml < 1$

Rappelons que si $0 < 2ml < 1$, alors pour $\psi_{s,n} \in D(\tilde{H}_m^{s,n})$, il existe des fonctions $\psi_{-,n}^s \in W_-^{\frac{1}{2}}$, $\chi_{-,n}^s \in W_+^{\frac{1}{2}}$, $\psi_{+,n}^s, \chi_{+,n}^s \in L^2(S^2)$ et $\phi_n^s \in C^0([0, \frac{\pi}{2}]_x; L^2(S^2; \mathbb{C}^4))$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} \psi_{s,n}(x, \theta, \varphi) &= (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} \psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ \chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ -i \psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ i \chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} + (-x)^{ml} \begin{pmatrix} \psi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \\ \chi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \\ i \psi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \\ -i \chi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ &\quad + \phi_n^s(x, \theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.3.66)$$

où :

$$\|\phi_n^s(x, \theta, \varphi)\|_{W^0} = o(\sqrt{-x}), \quad x \rightarrow 0. \quad (1.3.67)$$

Notons $\tilde{H}_{s,n}^{MIT}$ l'opérateur $\tilde{H}_m^{s,n}$ muni du domaine :

$$\begin{aligned} D(\tilde{H}_{s,n}^{MIT}) &= \left\{ \psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}; \tilde{H}_m^{s,n} \psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}, \left\| (\gamma_B^1 + i) \psi_{s,n}(x, \cdot) \right\|_{\mathcal{H}_{s,n}} = o(\sqrt{-x}) \right\} \\ &= \left\{ \psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}; \tilde{H}_m^{s,n} \psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}, \psi_{+,n}^s = \chi_{+,n}^s = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (1.3.68)$$

En effet, nous avons utilisé γ_B^1 plutôt que γ^1 puisque nous travaillons avec $\tilde{H}_{s,n}^{MIT}$ qui est unitairement équivalent à $H_{s,n}^{MIT}$ et d'autre part, nous avons :

$$(\gamma_B^1 + i) \psi_{s,n} = (-x)^{ml} \begin{pmatrix} 2i \psi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \\ 2i \chi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \\ -2 \psi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \\ 2 \chi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} + (\gamma_B^1 + i) \phi_n^s(x, \theta, \varphi),$$

où :

$$\left\| (\gamma_B^1 + i) \phi_n^s \right\|_{\mathcal{H}_{s,n}} = o(\sqrt{-x}).$$

Comme $2ml < 1$, nous avons $\psi_{+,n}^s = \chi_{+,n}^s = 0$. Nous passons maintenant à la proposition principale de cette partie :

Proposition 1.3.7. *L'opérateur $\tilde{H}_{s,n}^{MIT}$ est auto-adjoint sur son domaine $D(\tilde{H}_{s,n}^{MIT})$.*

Preuve. Soient $\phi_{s,n}, \psi_{s,n} \in D(\tilde{H}_{s,n}^{MIT})$. Montrons que $\tilde{H}_{s,n}^{MIT}$ est symétrique. Comme précédemment, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \left\langle \tilde{H}_{s,n}^{MIT} \phi_{s,n}, \psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} - \left\langle \phi_{s,n}, \tilde{H}_{s,n}^{MIT} \psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} \\
&= \left\langle (i\gamma_B^0 \gamma_B^1 \partial_x) \phi_{s,n}, \psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} - \left\langle \phi_{s,n}, i\gamma_B^0 \gamma_B^1 \partial_x \psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} \\
&= i \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left\langle \phi_{s,n}(x, \cdot), \gamma_B^0 \gamma_B^1 \psi_{s,n}(x, \cdot) \right\rangle_{\mathcal{W}^0} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\langle \phi_{s,n}(x, \cdot), \gamma_B^0 \gamma_B^1 \psi_{s,n}(x, \cdot) \right\rangle_{\mathcal{W}^0} \right) \\
&\quad + \left\langle \phi_{s,n}, i\gamma_B^0 \gamma_B^1 \partial_x \psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}} - \left\langle \phi_{s,n}, i\gamma_B^0 \gamma_B^1 \partial_x \psi_{s,n} \right\rangle_{\mathcal{H}_{s,n}}, \tag{1.3.69}
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
\phi_{s,n}(x, \theta, \varphi) &= (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} \phi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ \xi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ -i\phi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ i\xi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} + \varphi_n^s(x, \theta, \varphi) \\
\psi_{s,n}(x, \theta, \varphi) &= (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} \psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ \chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ -i\psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ i\chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} + \sigma_n^s(x, \theta, \varphi),
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n^s\|_{L^2(S^2)} &= o\left(\sqrt{-x}\right), \quad x \rightarrow 0 \\
\|\sigma_n^s\|_{L^2(S^2)} &= o\left(\sqrt{-x}\right), \quad x \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, au voisinage de 0, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left\langle \phi_{s,n}(x, \cdot), \gamma_B^0 \gamma_B^1 \psi_{s,n}(x, \cdot) \right\rangle_{\mathcal{W}^0} &= (-x)^{-ml} \left\langle \begin{pmatrix} \phi_{-,n}^s \\ \xi_{-,n}^s \\ -i\phi_{-,n}^s \\ i\xi_{-,n}^s \end{pmatrix}, \gamma_B^0 \gamma_B^1 \sigma_n^s(x, \cdot) \right\rangle_{\mathcal{W}^0} \\
&\quad + (-x)^{-ml} \left\langle \varphi_n^s(x, \cdot), \begin{pmatrix} -i\psi_{-,n}^s \\ -i\chi_{-,n}^s \\ \psi_{-,n}^s \\ -\chi_{-,n}^s \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{W}^0} \\
&\quad + \left\langle \varphi_n^s(x, \cdot), \gamma_B^0 \gamma_B^1 \sigma_n^s(x, \cdot) \right\rangle_{\mathcal{W}^0}. \tag{1.3.70}
\end{aligned}$$

Nous voyons que le terme le plus dangereux, c'est-à-dire comportant deux fois $(-x)^{ml}$, n'apparaît pas. Ceci provient de l'action de la matrice $\gamma_B^0 \gamma_B^1$ donnée par :

$$\gamma_B^0 \gamma_B^1 \psi_{s,n}(x, \cdot) = (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} -i\psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ -i\chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ \psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ -\chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} + \gamma_B^0 \gamma_B^1 \sigma_n^s(x, \theta, \varphi),$$

Ainsi, nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned}
& \left\langle (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} \phi_{-,n}^s \\ \xi_{-,n}^s \\ -i\phi_{-,n}^s \\ i\xi_{-,n}^s \end{pmatrix}, (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} -i\psi_{-,n}^s \\ -i\chi_{-,n}^s \\ \psi_{-,n}^s \\ -\chi_{-,n}^s \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{W}^0} \\
&= (-x)^{-2ml} \left\langle \begin{pmatrix} \phi_{-,n}^s \\ \xi_{-,n}^s \\ -i\phi_{-,n}^s \\ i\xi_{-,n}^s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i\psi_{-,n}^s \\ -i\chi_{-,n}^s \\ \psi_{-,n}^s \\ -\chi_{-,n}^s \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{W}^0} \\
&= (-x)^{-2ml} (i \langle \phi_{-,n}^s, \psi_{-,n}^s \rangle + i \langle \xi_{-,n}^s, \chi_{-,n}^s \rangle - i \langle \phi_{-,n}^s, \psi_{-,n}^s \rangle - i \langle \xi_{-,n}^s, \chi_{-,n}^s \rangle) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Utilisant le comportement en 0 de φ_n^s, σ_n^s et en $-\infty$ de $\phi_{s,n}, \psi_{s,n}$, nous en déduisons que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \langle \phi_{s,n}(x, \cdot), \gamma_B^0 \gamma_B^1 \psi_{s,n}(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{W}^0} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \langle \phi_{s,n}(x, \cdot), \gamma_B^0 \gamma_B^1 \psi_{s,n}(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{W}^0} = 0. \quad (1.3.71)$$

Par conséquent, $\tilde{H}_{s,n}^{MIT}$ est bien symétrique.

Soit $\psi_{s,n} \in D(\tilde{H}_{s,n}^{MIT,*})$. Alors, comme $D(\tilde{H}_{s,n}^{MIT,*}) \subset D_{nat}(\tilde{H}_m^{s,n})$ où le domaine $D_{nat}(\tilde{H}_m^{s,n}) = \{\psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}; \tilde{H}_m^{s,n} \psi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}\}$, ψ admet une décomposition, au voisinage de 0, de la forme :

$$\begin{aligned}
\psi_{s,n}(x, \theta, \varphi) &= (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} \psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ \chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ -i\psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ i\chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} + (-x)^{ml} \begin{pmatrix} \psi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \\ \chi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \\ i\psi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \\ -i\chi_{+,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\
&+ \sigma_n^s(x, \theta, \varphi),
\end{aligned}$$

où :

$$\|\sigma_{s,n}\|_{L^2(S^2)} = o(\sqrt{-x}), \quad x \rightarrow 0.$$

De plus, $\tilde{H}_{s,n}^{MIT,*} = \tilde{H}_m^{s,n}$ sur $D(\tilde{H}_{s,n}^{MIT,*})$ par un argument de distribution. Etant donné que nous avons :

$$\left\langle \tilde{H}_{s,n}^{MIT} \phi_{s,n}, \psi_{s,n} \right\rangle - \left\langle \phi_{s,n}, \tilde{H}_{s,n}^{MIT,*} \psi_{s,n} \right\rangle = 0,$$

pour tout $\phi_{s,n} \in D(\tilde{H}_{s,n}^{MIT})$ et $\psi_{s,n} \in D(\tilde{H}_{s,n}^{MIT,*})$, nous en déduisons que le seul terme restant vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\langle (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} \phi_{-,n}^s \\ \xi_{-,n}^s \\ -i\phi_{-,n}^s \\ i\xi_{-,n}^s \end{pmatrix}, (-x)^{ml} \begin{pmatrix} \psi_{+,n}^s \\ \chi_{+,n}^s \\ i\psi_{+,n}^s \\ -i\chi_{+,n}^s \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

d'après le calcul utilisé pour la symétrie. En d'autres termes :

$$2 \left\langle \begin{pmatrix} \phi_{-,n}^s \\ \xi_{-,n}^s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_{+,n}^s \\ \chi_{+,n}^s \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \quad (1.3.72)$$

Or pour tout $\phi_{-,n}^s, \xi_{-,n}^s \in C_0^\infty(Y_{s,n})$, nous pouvons trouver $\phi \in D(\tilde{H}_{s,n}^{MIT})$ qui admet ces composantes comme coordonnées. Ainsi $\psi_{+,n}^s = \chi_{+,n}^s = 0$ et $D(\tilde{H}_{s,n}^{MIT,*}) \subset D(\tilde{H}_{s,n}^{MIT})$. L'opérateur $\tilde{H}_{s,n}^{MIT}$ est bien auto-adjoint sur son domaine.

Q.E.D

1.3.3 Caractère auto-adjoint de \tilde{H}_m

Dans cette partie, nous utilisons les résultats à harmonique fixée de la partie précédente et nous sommes sur les harmoniques pour prouver que l'opérateur \tilde{H}_m est auto-adjoint sur le domaine considéré.

Cas $2ml \geq 1$

Munissons \tilde{H}_m du domaine suivant :

$$\begin{aligned} D(\tilde{H}_m) &= \left\{ u \in \mathcal{H}; \tilde{H}_m u \in \mathcal{H} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{(s,n) \in I} \begin{pmatrix} u_{1,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{2,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \\ u_{3,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{4,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \end{pmatrix}; \forall (s,n) \in I, u_n^s \in L^2(-\infty, 0]_{[x, dx)}, \right. \\ &\quad \left. \tilde{H}_m^{s,n} \begin{pmatrix} u_{1,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{2,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \\ u_{3,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{4,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \end{pmatrix} \in L^2, \sum_{(s,n) \in I} \left\| (\tilde{H}_m^{s,n} \pm i) \begin{pmatrix} u_{1,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{2,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \\ u_{3,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{4,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \end{pmatrix} \right\|_{L^2}^2 < \infty \right\}. \end{aligned} \quad (1.3.73)$$

Nous pouvons prouver la :

Proposition 1.3.8. *Supposons que $2ml \geq 1$. Dans ce cas, l'opérateur \tilde{H}_m est auto-adjoint sur son domaine.*

Preuve. L'opérateur \tilde{H}_m est symétrique. En effet, soient $\varphi, \psi \in D(\tilde{H}_m)$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{(s,n) \in I} \varphi_{s,n} \\ \psi &= \sum_{(s,n) \in I} \psi_{s,n}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H}_m \varphi, \psi \rangle &= \sum_{(s,n) \in I} \langle \tilde{H}_m^{s,n} \varphi_{s,n}, \psi_{s,n} \rangle \\ &= \sum_{(s,n) \in I} \langle \varphi_{s,n}, \tilde{H}_m^{s,n} \psi_{s,n} \rangle \\ &= \langle \varphi, \tilde{H}_m \psi \rangle, \end{aligned} \quad (1.3.74)$$

puisque $\tilde{H}_m^{s,n}$ est symétrique. Nous pouvons prouver de même que \tilde{H}_m est fermé. Soit $x = \sum_{(s,n) \in I} x_{s,n} \in \mathcal{H}$. Comme $\tilde{H}_m^{s,n}$ est auto-adjoint, il existe $y_{s,n} \in D(\tilde{H}_m^{s,n})$ tel que $(\tilde{H}_m \pm i)y_{s,n} = (\tilde{H}_m^{s,n} \pm i)y_{s,n} = x_{s,n}$. Ainsi :

$$x = \sum_{(s,n) \in I} (\tilde{H}_m \pm i)y_{s,n}, \quad (1.3.75)$$

où $y = \sum_{(s,n) \in I} y_{s,n} \in D(\tilde{H}_m)$ puisque :

$$\sum_{(s,n) \in I} \left\| \tilde{H}_m^{s,n} y_{s,n} \right\|^2 + \|y_{s,n}\|^2 = \sum_{(s,n) \in I} \left\| (\tilde{H}_m^{s,n} \pm i) y_{s,n} \right\|^2 = \sum_{(s,n) \in I} \|x_{s,n}\|^2 < \infty.$$

Ainsi $(y_{s,n})_{(s,n) \in I}$ est sommable et $x \in \text{Im}(\tilde{H}_m \pm i)$ donc $\text{Im}(\tilde{H}_m \pm i) = \mathcal{H}$ et \tilde{H}_m est auto-adjoint. Q.E.D

Cas $2ml < 1$

Notons \tilde{H}_m^{MIT} l'opérateur \tilde{H}_m muni du domaine :

$$\begin{aligned} D(\tilde{H}_m^{MIT}) &= \left\{ u \in \mathcal{H}; \tilde{H}_m^{MIT} u \in \mathcal{H}, \left\| (\gamma_B^1 + i) u(x, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2 = o(\sqrt{-x}), x \rightarrow 0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{(s,n) \in I} \begin{pmatrix} u_{1,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{2,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \\ u_{3,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{4,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \end{pmatrix}; \forall (s,n) \in I, u_n^s \in L^2(]-\infty, 0[_x, dx), \right. \\ &\quad \left. \tilde{H}_m^{s,n} \begin{pmatrix} u_{1,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{2,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \\ u_{3,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{4,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \end{pmatrix} \in L^2, \sum_{(s,n) \in I} \left\| (\tilde{H}_m^{s,n} \pm i) \begin{pmatrix} u_{1,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{2,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \\ u_{3,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{4,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \end{pmatrix} \right\|_{L^2}^2 < \infty \right. \\ &\quad \left. \sum_{(s,n) \in I} \left\| (\gamma_B^1 + i) \begin{pmatrix} u_{1,n}^s(x, \cdot) T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{2,n}^s(x, \cdot) T_{\frac{1}{2},n}^s \\ u_{3,n}^s(x, \cdot) T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{4,n}^s(x, \cdot) T_{\frac{1}{2},n}^s \end{pmatrix} \right\|_{L^2(S^2)}^2 = o(\sqrt{-x}), x \rightarrow 0 \right\}. \quad (1.3.76) \end{aligned}$$

Proposition 1.3.9. *Supposons que $2ml < 1$. Dans ce cas, l'opérateur \tilde{H}_m^{MIT} est auto-adjoint sur son domaine $D(\tilde{H}_m^{MIT})$.*

Preuve. Remarquons tout d'abord que, si $\sum_{(s,n) \in I} \left\| (\gamma_B^1 + i) \begin{pmatrix} u_{1,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{2,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \\ u_{3,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{4,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \end{pmatrix} \right\|_{L^2}^2 = o(\sqrt{-x}), x \rightarrow 0$

alors $\left\| (\gamma_B^1 + i) \begin{pmatrix} u_{1,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{2,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \\ u_{3,n}^s T_{-\frac{1}{2},n}^s \\ u_{4,n}^s T_{\frac{1}{2},n}^s \end{pmatrix} \right\|_{L^2}^2 = o(\sqrt{-x}), x \rightarrow 0$ pour tout $(s,n) \in I$. Nous pouvons alors

prouver, comme dans la démonstration de la proposition 1.3.8, que \tilde{H}_m^{MIT} est symétrique sur son domaine. Montrer que \tilde{H}_m^{MIT} est fermé nécessite un peu plus de travail. En effet, choisissons

une suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D\left(\tilde{H}_m^{MIT}\right)$ telle que :

$$\begin{aligned}\varphi_j &\rightarrow \varphi \\ \tilde{H}_m^{MIT} \varphi_j &\rightarrow \psi\end{aligned}$$

où $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ et la convergence est réalisée pour la norme de \mathcal{H} . Par un argument de distribution, nous avons $\tilde{H}_m^{MIT} \varphi = \psi \in \mathcal{H}$ mais il nous reste à montrer que φ vérifie la condition au bord pour pouvoir affirmer que $\varphi \in D\left(\tilde{H}_m^{MIT}\right)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi_j &= \sum_{(s,n) \in I} \varphi_j^{s,n} \\ \varphi &= \sum_{(s,n) \in I} \varphi^{s,n} \\ \psi &= \sum_{(s,n) \in I} \psi^{s,n},\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}\varphi_j^{s,n} &\rightarrow \varphi^{s,n} \\ \tilde{H}_{s,n}^{MIT} \varphi_j^{s,n} &\rightarrow \psi^{s,n}\end{aligned}$$

pour la norme de $\mathcal{H}_{s,n}$. Ainsi, $\varphi^{s,n} \in D\left(\tilde{H}_{s,n}^{MIT}\right)$ puisque $\tilde{H}_{s,n}^{MIT}$ est fermé et $\varphi^{s,n}$ admet une décomposition de la forme :

$$\varphi^{s,n}(x, \theta, \varphi) = (-x)^{-ml} \begin{pmatrix} \phi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ \xi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ -i\phi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ i\xi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} + \phi_n^s(x, \theta, \varphi),$$

où les fonctions $\phi_n^s = \begin{pmatrix} \phi_{1,n}^s \\ \phi_{2,n}^s \\ \phi_{3,n}^s \\ \phi_{4,n}^s \end{pmatrix}$ vérifient

$$\sum_{(s,n) \in I} \left(\|\phi_{1,n}^s\|_{\mathcal{W}^0}^2 + \|\phi_{2,n}^s\|_{\mathcal{W}^0}^2 + \|\phi_{3,n}^s\|_{\mathcal{W}^0}^2 + \|\phi_{4,n}^s\|_{\mathcal{W}^0}^2 \right) = o(-x),$$

quand $x \rightarrow 0$, d'après la démonstration du théorème V.1 dans [8] (voir les formules après l'équation V.28). Remarquons que

$$(\gamma_B^1 + i) \varphi^{s,n} = \begin{pmatrix} i\phi_{1,n}^s + \phi_{3,n}^s \\ i\phi_{2,n}^s - \phi_{4,n}^s \\ -\phi_{1,n}^s + i\phi_{3,n}^s \\ \phi_{2,n}^s + i\phi_{4,n}^s \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\|(\gamma_B^1 + i) \varphi(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)}^2 &= \sum_{(s,n) \in I} \|(\gamma_B^1 + i) \varphi^{s,n}\|_{\mathcal{W}^0}^2 \\
&= \sum_{(s,n) \in I} \left(\|i\phi_{1,n}^s + \phi_{3,n}^s\|_{\mathcal{W}^0}^2 + \|i\phi_{2,n}^s - \phi_{4,n}^s\|_{\mathcal{W}^0}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|-\phi_{1,n}^s + i\phi_{3,n}^s\|_{\mathcal{W}^0}^2 + \|\phi_{2,n}^s + i\phi_{4,n}^s\|_{\mathcal{W}^0}^2 \right) \\
&\leq 2 \sum_{(s,n) \in I} \left(\|\phi_{1,n}^s\|_{\mathcal{W}^0}^2 + \|\phi_{2,n}^s\|_{\mathcal{W}^0}^2 + \|\phi_{3,n}^s\|_{\mathcal{W}^0}^2 + \|\phi_{4,n}^s\|_{\mathcal{W}^0}^2 \right) = o(-x)
\end{aligned} \tag{1.3.77}$$

ce qui prouve que la condition au bord est vérifiée et que l'opérateur \tilde{H}_m^{MIT} est fermé. Pour montrer le caractère auto-adjoint de \tilde{H}_m^{MIT} , nous suivons le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 1.3.8 où nous devons prouver que $y = \sum_{(s,n) \in I} y_{s,n} \in D(\tilde{H}_m^{MIT})$. La seule différence avec la preuve de la proposition 1.3.8 est de nouveau le fait que la condition au bord doit être vérifiée. Comme $y_{s,n} \in D(\tilde{H}_m^{s,n,MIT})$, nous pouvons de nouveau décomposer $y_{s,n}$ comme pour $\varphi^{s,n}$ ci-dessus. Un raisonnement similaire nous montre que y vérifie bien les conditions au bord. Ainsi \tilde{H}_m^{MIT} est auto-adjoint sur $D(\tilde{H}_m^{MIT})$.

Q.E.D

Caractère auto-adjoint de H_m

Rappelons le domaine de H_m :

- Si $2ml \geq 1$, alors :

$$D(H_m) = \{\phi \in \mathcal{H}; H_m \phi \in \mathcal{H}\}.$$

- Si $0 < m < \frac{1}{2l}$, nous considérons cet opérateur muni d'un domaine dont les éléments vérifient une condition MIT. Nous noterons donc H_m^{MIT} l'opérateur H_m muni du domaine :

$$D(H_m^{MIT}) = \left\{ \phi \in \mathcal{H}; H_m \phi \in \mathcal{H}, \|(\gamma^1 + i) \phi(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = o(\sqrt{-x}), x \rightarrow 0 \right\}.$$

D'autre part, rappelons que $\tilde{H}_m = \gamma_B^5 P^{-1} (-H_m) P \gamma_B^5$ où γ_B^5 et P sont des matrices unitaires. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 1.3.10. - Pour tout $m \geq \frac{1}{2l}$, l'opérateur H_m muni de $D(H_m)$ est auto-adjoint.

- Pour tout $m < \frac{1}{2l}$, l'opérateur H_m^{MIT} muni de $D(H_m^{MIT})$ est auto-adjoint.

Preuve. D'après les rappels précédant le théorème, nous avons : $H_m = P \gamma_B^5 (-\tilde{H}_m) \gamma_B^5 P^{-1}$. Il est alors clair que $\psi \in D(H_m)$ si et seulement si $\gamma_B^5 P^{-1} \psi \in D(\tilde{H}_m)$ pour $m \geq \frac{1}{2l}$. D'autre part, rappelons que $\gamma^1 = -P \gamma_B^1 P^{-1}$ et $\gamma_B^1 \gamma_B^5 = -\gamma_B^5 \gamma_B^1$ d'après (1.3.28) et (1.3.29). Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
\|(\gamma^1 + i) \psi\| &= \|(-P \gamma_B^1 P^{-1} + i) P \gamma_B^5 \gamma_B^5 P^{-1} \psi\| \\
&= \|P \gamma_B^5 (\gamma_B^1 + i) \gamma_B^5 P^{-1} \psi\| \\
&= \|(\gamma_B^1 + i) \gamma_B^5 P^{-1} \psi\|.
\end{aligned}$$

Ainsi $\psi \in D(H_m)$ si et seulement si $\gamma_B^5 P^{-1} \psi \in D(\tilde{H}_m)$ pour tout $m > 0$. Étant donné que les opérateurs sont unitairement équivalents et que les domaines correspondent, ceci nous assure que H_m est auto-adjoint lorsqu'il est muni du domaine qui convient. Q.E.D

1.3.4 Le problème de Cauchy

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le :

Théorème 1.3.11. *Étant donné $\psi_0 \in \mathcal{H}$, il existe une unique solution ψ à l'équation :*

$$\partial_t \psi = iH_m \psi \quad (1.3.78)$$

telle que

$$\psi \in C^0(\mathbb{R}_t; \mathcal{H}), \quad (1.3.79)$$

et vérifiant :

$$\psi(t=0, \cdot) = \psi_0(\cdot) \quad (1.3.80)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|\psi(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} = \|\psi_0(\cdot)\|_{\mathcal{H}}. \quad (1.3.81)$$

Preuve. Comme H_m est auto-adjoint sur son domaine, nous pouvons utiliser le théorème de Stone. Q.E.D

1.3.5 Absence de valeurs propres

Dans cette partie, nous nous intéressons aux valeurs propres de l'opérateur H_m et prouvons que, muni des domaines cités ci-dessus, cet opérateur n'admet aucune valeur propre. Ceci permettra par la suite d'obtenir l'absence de spectre singulier continu via les estimations de Mourre. Nous introduisons tout d'abord la notion d'exponentielle ordonnée en temps, définie dans [21] notamment. Nous commençons par rappeler la définition de produit ordonné en temps que nous utiliserons :

Définition 1.3.12. Soient $x_1, \dots, x_n \in I = [\tilde{x}, x] \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans l'ensemble des matrices 4×4 à coefficients complexes telle que $f(x_i)$ et $f(x_j)$ ne commutent pas pour $i \neq j$. Nous définissons :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}(f(x_n) \cdots f(x_1)) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(x_{\sigma(n)}) \cdots f(x_{\sigma(1)}) \mathbf{1}_{\{x_{\sigma(n)} > \cdots > x_{\sigma(1)} \geq \tilde{x}\}}(x_n, \dots, x_1). \end{aligned} \quad (1.3.82)$$

L'exponentielle ordonnée en temps est alors définie de la manière suivante :

Définition 1.3.13. Nous définissons :

$$\mathcal{T}\left(e^{\int_{\tilde{x}}^x f(t) dt}\right) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_{\tilde{x}}^x \int_{\tilde{x}}^x \cdots \int_{\tilde{x}}^x \mathcal{T}(f(x_n) \cdots f(x_1)) dx_1 \cdots dx_n$$

Nous allons utiliser cette notion dans la démonstration de la :

Proposition 1.3.14. *Pour tout $m > 0$, l'opérateur de Dirac H_m , défini précédemment, n'admet pas de valeurs propres réelles.*

Preuve. Nous allons tout d'abord montrer l'absence de valeurs propres pour les opérateurs $H_m^{s,n}$ pour tout $m > 0$ et tout $(s, n) \in I$. Comme l'opérateur $H_m^{s,n}$ est auto-adjoint sur son domaine, les valeurs propres (si elles existent) de $H_m^{s,n}$ sont réelles. Supposons donc qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in D(H_m^{s,n})$ tels que $H_m^{s,n}\varphi = \lambda\varphi$.

Définissons la fonction :

$$w(x) = e^{i\lambda\gamma^0\gamma^1x}\varphi(x),$$

de sorte que

$$w'(x) = i\lambda\gamma^0\gamma^1w(x) + e^{i\lambda\gamma^0\gamma^1x}\varphi'(x).$$

Or :

$$\begin{aligned} H_m^{s,n}\varphi - \lambda\varphi = 0 &\Leftrightarrow i\gamma^0\gamma^1\varphi'(x) = (\lambda - V(x))\varphi(x) \\ &\Leftrightarrow \varphi'(x) = i\gamma^0\gamma^1(V(x) - \lambda)\varphi(x), \end{aligned}$$

où $V(x) = \gamma^0\gamma^2A(x)(s + \frac{1}{2}) - m\gamma^0B(x)$.

Nous obtenons :

$$w'(x) = i\gamma^0\gamma^1e^{i\lambda\gamma^0\gamma^1x}V(x)e^{-i\lambda\gamma^0\gamma^1x}w(x). \quad (1.3.83)$$

Posons $W(x) = i\gamma^0\gamma^1e^{i\lambda\gamma^0\gamma^1x}V(x)e^{-i\lambda\gamma^0\gamma^1x}$. Pour résoudre l'équation précédente, nous souhaiterions utiliser la fonction exponentielle mais pour $x \neq t$, $W(x)$ et $W(t)$ ne commutent pas. Nous n'obtiendrions pas une solution. Nous allons remplacer la fonction exponentielle par la notion introduite plus haut d'exponentielle ordonnée en temps. Soit $S \in]-\infty, 0[$, nous utilisons :

$$w(x) = \mathcal{T}\left(e^{\int_S^x W(t)dt}\right)w(S).$$

Remarquons alors que pour tout $c < 0$, $A, B \in L^2(]-\infty, c[)$ donc $\varphi \in H^1(]-\infty, c[)^4$. Ainsi φ est continue sur $]-\infty, c[$ et $\varphi \in L^2(]-\infty, c[)^4$. Nous en déduisons que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ (plus précisément, chacune des composantes de φ admet ce comportement). Ainsi $w(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

D'autre part, pour tout $x < 0$, $\int_{-\infty}^x |W(t)|dt < \infty$ (comme $\gamma^0\gamma^1$ est diagonale, cette estimation signifie que chacune des composantes vérifie cette même estimation), donc :

$$\lim_{S \rightarrow -\infty} \mathcal{T}\left(e^{\int_S^x W(t)dt}\right) = \mathcal{T}\left(e^{\int_{-\infty}^x W(t)dt}\right)$$

existe et est finie. Par conséquent :

$$\lim_{S \rightarrow -\infty} \mathcal{T}\left(e^{\int_S^x W(t)dt}\right)w(S) = 0.$$

Nous en déduisons que $w(x) = 0$ pour tout $x < 0$ ce qui implique :

$$\forall x < 0, \varphi(x) = 0. \quad (1.3.84)$$

Par conséquent $H_m^{s,n}$ n'admet pas de valeurs propres.

Considérons maintenant le cas de H_m . Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de H_m alors il existe $\varphi \in D(H_m)$ telle que :

$$(H_m - \lambda)\varphi = 0.$$

Décomposant φ en harmoniques sphériques, nous obtenons :

$$\sum_{(s,n) \in I} (H_m^{s,n} - \lambda)\varphi_{s,n} = 0.$$

Par conséquent, si φ est non nul, il existe $(s, n) \in I$ telle que $\varphi_{s,n} \neq 0$ et $(H_m^{s,n} - \lambda) \varphi_{s,n} = 0$. Ceci est impossible puisque $H_m^{s,n}$ n'admet pas de valeurs propres. Ainsi φ est la fonction nulle. Nous en déduisons donc que H_m n'admet pas de valeurs propres pour tout $m > 0$.

Q.E.D

1.4 Lemme de compacité

Dans cette section, nous cherchons à démontrer le résultat suivant :

Proposition 1.4.1. *Soit f une fonction continue tendant vers 0 en $-\infty$ et admettant une limite finie en 0. Soit $z \in \rho(H_m^{s,n})$ où $\rho(H_m^{s,n})$ est l'ensemble résolvant de $H_m^{s,n}$. Alors l'opérateur $f(x)(H_m^{s,n} - z)^{-1}$ est compact sur \mathcal{H} pour tout $m > 0$.*

Rappelons que

$$H_m^{s,n} = \Gamma^1 D_x + \left(s + \frac{1}{2}\right) A(x) \gamma^0 \gamma^2 - m \gamma^0 B(x). \quad (1.4.1)$$

avec A et B dont le comportement est donné par :

$$\begin{aligned} A - A_0 &\in T^{\vartheta, 2} \\ B - B_0 &\in T^{\beta, 1} \end{aligned}$$

avec $\vartheta, \beta > 0$. D'autre part, $\Gamma^1 = -\gamma^0 \gamma^1$ où l'expression de $\gamma^0 \gamma^1$ est donné en (1.2.26).

Afin de prouver cette proposition, nous allons introduire deux opérateurs intermédiaires H_- et H_+ .

Le premier opérateur admet un potentiel V_- dont le comportement est le même que celui de l'opérateur $H_m^{s,n}$ lorsque x tend vers $-\infty$ mais nous changeons le potentiel lorsque x est proche de 0 de sorte que V_- tend vers 0 en 0. Nous pouvons alors prouver que cet opérateur est auto-adjoint sur le domaine de $H_c = \Gamma^1 D_x$. Puis, en symétrisant notre opérateur ainsi que les éléments du domaine de cet opérateur, nous pouvons prouver que $f(x)(H_- - z)^{-1}$ est compact pour z dans l'ensemble résolvant de H_- .

En ce qui concerne H_+ , nous modifions le potentiel de $H_m^{s,n}$ en un potentiel V_+ tel que V_+ soit confinant. La résolvante de H_+ est alors elle-même un opérateur compact.

Dans la dernière partie, nous réunissons les résolvantes de H_+ et H_- pour trouver une expression pour la résolvante de $H_m^{s,n}$ qui est alors compacte par le théorème de Fredholm.

1.4.1 Opérateurs asymptotiques

Dans cette section, nous décrivons de manière précise les opérateurs H_- et H_+ qui nous permettront d'exprimer la résolvante de $H_m^{s,n}$.

Opérateur H_-

Introduisons tout d'abord l'opérateur $H_c = i\gamma^0 \gamma^1 \partial_x$ où $\gamma^0 \gamma^1 = \text{diag}(-1, 1, 1, -1)$. Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 1.4.2. *L'opérateur $H_c = i\gamma^0 \gamma^1 \partial_x$ est auto-adjoint sur le domaine défini par :*

$$D(H_c) = \{\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}; H_c \varphi \in \mathcal{H}_{s,n}, \varphi_1(0) = -\varphi_3(0), \varphi_2(0) = \varphi_4(0)\}$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que $D(H_c) \subset H^1(]-\infty, 0])$. Nous pouvons donc en déduire que les éléments de $D(H_c)$ tendent vers 0 en $-\infty$ (en tant que fonctions L^2 continues). Vérifions que H_c muni du domaine $D(H_c)$ est symétrique. Soient $\varphi, \psi \in D(H_c)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle H_c \varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, H_c \psi \rangle &= \langle -i\partial_x \varphi_1, \psi_1 \rangle - \langle \varphi_1, -i\partial_x \psi_1 \rangle + \langle i\partial_x \varphi_2, \psi_2 \rangle \\ &\quad - \langle \varphi_2, i\partial_x \psi_2 \rangle + \langle i\partial_x \varphi_3, \psi_3 \rangle - \langle \varphi_3, i\partial_x \psi_3 \rangle \\ &\quad + \langle -i\partial_x \varphi_4, \psi_4 \rangle - \langle \varphi_4, -i\partial_x \psi_4 \rangle \\ &= -i\varphi_1(0)\overline{\psi_1(0)} + i\varphi_2(0)\overline{\psi_2(0)} + i\varphi_3(0)\overline{\psi_3(0)} - i\varphi_4(0)\overline{\psi_4(0)} = 0, \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

par intégration par parties et utilisation des conditions au bord. Ainsi H_c est symétrique. De plus, soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $D(H_c)$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \varphi_n &\xrightarrow{\mathcal{H}_{s,n}} \varphi \\ H_c \varphi_n &\xrightarrow{\mathcal{H}_{s,n}} \psi, \end{aligned}$$

où $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{s,n}$. Alors, comme $H_c \varphi_n \rightarrow H_c \varphi$ au sens des distributions, nous en déduisons que $H_c \varphi = \psi \in \mathcal{H}_{s,n}$. Par conséquent, $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $H^1(]-\infty, 0])$. En outre, utilisant le fait que

$H^1(]-\infty, 0]) \subset C^0(]-\infty, 0])$ et notant $\varphi_n = \begin{pmatrix} \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \\ \varphi_n^3 \\ \varphi_n^4 \end{pmatrix}$, nous obtenons :

$$\varphi_n^i(0) \rightarrow \varphi^i(0),$$

pour tout $i \in \{1, \dots, 4\}$, ce qui implique que φ vérifie les conditions au bord. Ainsi $\varphi \in D(H_c)$ et H_c est un opérateur fermé.

D'autre part, comme $C_0^\infty(]-\infty, 0]) \subset D(H_c)$, nous avons :

$$\langle \psi, H_c \varphi \rangle = \langle H_c \psi, \varphi \rangle$$

au sens des distributions, pour tout $\varphi \in C_0^\infty$ et tout $\psi \in D(H_c^*)$. Ainsi, $H_c^* = H_c$ sur $D(H_c^*)$. Ici, l'égalité est à prendre dans le sens où les deux opérateurs ont la même expression.

Soit $\psi \in \ker(H_c^* + i)$. Alors les composantes de ψ vérifient :

$$\begin{aligned} \partial_x \psi_1 &= \psi_1 \\ -\partial_x \psi_2 &= \psi_2 \\ -\partial_x \psi_3 &= \psi_3 \\ \partial_x \psi_4 &= \psi_4. \end{aligned}$$

Comme $x \rightarrow e^{-x}$ n'est pas une fonction appartenant à $L^2(]-\infty, 0])$, nous obtenons :

$$\ker(H_c^* + i) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix} \right\} \cap D(H_c^*).$$

Or, si $\psi \in D(H_c^*)$, alors, pour tout $\varphi \in D(H_c)$, nous avons :

$$\langle H_c \varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, H_c^* \psi \rangle = 0,$$

où :

$$\langle H_c \varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, H_c^* \psi \rangle = \lim_{x \rightarrow 0} (-i\varphi_1(x) \overline{\psi_1(x)} + i\varphi_2(x) \overline{\psi_2(x)} + i\varphi_3(x) \overline{\psi_3(x)} - i\varphi_4(x) \overline{\psi_4(x)})$$

Nous pouvons choisir φ telle que $\varphi_1(0) \neq 0$. En effet, on peut par exemple considérer une fonction $\chi \in C^\infty$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $[-1, 0]$ et nulle sur $] -\infty, -2[$. Nous pouvons prendre

$$\varphi = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \\ -\chi \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Nous voyons alors que } \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin D(H_c^*). \text{ Ainsi } \ker(H_c^* + i) = \{0\}. \text{ De même, nous}$$

avons $\ker(H_c^* - i) = \{0\}$. Ceci nous montre que H_c est auto-adjoint sur $D(H_c)$.

Q.E.D

Définissons maintenant l'opérateur H_- par :

$$H_- = H_c + V_-(x) \quad (1.4.3)$$

où :

$$V_-(x) = \begin{cases} xI_4 & , \text{ pour } x \geq d \\ \gamma^0 \gamma^2 A(x) (s + \frac{1}{2}) - m\gamma^0 B(x) & , \text{ pour } x \leq c, \end{cases} \quad (1.4.4)$$

où c, d sont deux constantes négatives telles que $c < d$. Remarquons que V_- est borné sur \mathbb{R}_- . Utilisant le théorème de Kato-Rellich, nous obtenons le :

Corollaire 1.4.3. *L'opérateur H_- muni de $D(H_c)$ est auto-adjoint.*

Remarque. L'opérateur H_- admet un potentiel qui se comporte comme le potentiel de $H_m^{s,n}$ en $-\infty$ ce qui justifie la dénomination d'opérateur asymptotique.

Opérateur H_+

Nous définissons maintenant l'opérateur H_+ par :

$$H_+ = \Gamma^1 D_x + V_+(x) \quad (1.4.5)$$

où :

$$V_+(x) = \begin{cases} \gamma^0 \gamma^2 A(x) (s + \frac{1}{2}) - m\gamma^0 B(x) & , \text{ pour } x \geq b. \\ -x^2 \gamma^0 & , \text{ pour } x \leq a. \end{cases} \quad (1.4.6)$$

Cette fois-ci, le potentiel se comporte comme le potentiel de $H_m^{s,n}$ en 0 et croît en $-\infty$, le potentiel est confinant. Ce type de potentiel a été rencontré dans l'article d'A. Bachelot [8] qui a prouvé le caractère auto-adjoint de son opérateur en effectuant une analyse dont nous avons déjà repris les grandes étapes dans l'étude du caractère auto-adjoint de H_m . Nous indiquons seulement la marche à suivre.

Introduisons le domaine :

$$D(H_+) = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \\ \varphi^4 \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R}_*, \mathbb{C}^4); H_+ \varphi \in L^2(\mathbb{R}_*), \right. \\ \left. \|(\gamma^1 + i)\varphi(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = o(\sqrt{x}), x \rightarrow 0 \right\}$$

si $2ml < 1$ et nous enlevons la condition au bord dans le cas $2ml \geq 1$. Nous allons obtenir, dans la preuve de la compacité de $(H_+ - z)^{-1}$, des estimations qui permettront de prouver que notre opérateur est symétrique pour $ml \geq \frac{1}{2}$ puis qu'il est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(]-\infty, 0])$. En effet, comme précédemment, nous pouvons réaliser une transformation unitaire de notre opérateur :

$$H_+ \rightarrow \gamma^5 P^{-1} H_+ P \gamma^5 := \tilde{H}_+. \quad (1.4.7)$$

Nous remarquons de nouveau qu'en choisissant une fonction $\chi \in C_0^\infty(]-1, 0])$ égale à 1 sur $]-\frac{1}{2}, 0]$, alors pour φ un élément du domaine de \tilde{H}_+ , $\chi\varphi$ est un élément du domaine de l'opérateur H_m^B dans (1.3.34), et nous obtenons à nouveau le comportement asymptotique de φ . Ce qui nous permet de conclure dans le cas où $ml \geq \frac{1}{2}$.

Si $ml < \frac{1}{2}$, nous pouvons de nouveau introduire les conditions au bord ainsi qu'une partition de l'unité afin de séparer le comportement en 0 du comportement en $-\infty$. Nous obtenons alors :

Proposition 1.4.4. *L'opérateur H_+ muni de $D(H_+)$ est auto-adjoint.*

1.4.2 Compacité de $f(x)(H_- - z)^{-1}$

Nous aurons besoin des résultats suivants :

Théorème 1.4.5. *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

$$(f(-i\nabla)\varphi)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \check{f}(x-y)\varphi(y) dy$$

pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. L'intégrale converge pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ici, \check{f} est la transformée de Fourier inverse de f .

On se référera au théorème IX.29 dans [73] pour une démonstration de ce théorème. Nous en déduisons les corollaires suivants :

Corollaire 1.4.6. *Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors $f(-i\nabla)g(x)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt et :*

$$\|f(-i\nabla)g(x)\|_2 \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_2 \|g\|_2.$$

La démonstration de ce corollaire repose sur le fait qu'un opérateur à noyau est de Hilbert-Schmidt. Nous avons aussi :

Corollaire 1.4.7. *Supposons $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et :*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} g(\xi) = 0.$$

Alors l'opérateur $f(x)g(-i\nabla)$ est compact.

Preuve. Soit $f_n(x) := \mathbb{1}_{[0, n]}(|x|)f(x)$, $g_n(\xi) := \mathbb{1}_{[0, n]}(|\xi|)g(\xi)$. Alors $f_n(x)g_n(-i\nabla)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt avec norme :

$$\|f_n\|_2 \|g_n\|_2 < \infty$$

d'après le corollaire précédent. De plus, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)g_n(-i\nabla) = f(x)g(-i\nabla)$$

en utilisant le théorème spectral par exemple. Ainsi $f(x)g(-i\nabla)$ est un opérateur compact en tant que limite d'une suite d'opérateurs qui le sont. Q.E.D

Nous nous intéressons maintenant au résultat principal de cette partie :

Lemme 1.4.8. *Soit $f \in C^0(]-\infty, 0])$ telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Sous ces hypothèses, l'opérateur $f(\cdot)(H_- - z)^{-1}$ est un opérateur compact.*

Preuve. Soient $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \in D(H_c)$ et $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = (H_c - z)\varphi$. Les fonctions φ et g sont définies sur $]-\infty, 0[$. Prolongeons les composantes de φ à \mathbb{R} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(x) &= \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } x \leq 0, \\ -\varphi_3(-x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} ; \tilde{\varphi}_2(x) = \begin{cases} \varphi_2(x) & \text{si } x \leq 0, \\ \varphi_4(-x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ \tilde{\varphi}_3(x) &= \begin{cases} \varphi_3(x) & \text{si } x \leq 0, \\ -\varphi_1(-x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} ; \tilde{\varphi}_4(x) = \begin{cases} \varphi_4(x) & \text{si } x \leq 0, \\ \varphi_2(-x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ces fonctions sont maintenant dans $H^1(\mathbb{R})$. On prolonge de même g en $\tilde{g} \in [L^2(\mathbb{R})]^4$. Nous notons \tilde{H}^0 l'opérateur H^0 considéré comme agissant sur des fonctions définies sur \mathbb{R} . Nous avons :

$$\begin{aligned} (\tilde{H}^0 - z)\tilde{\varphi} &= \begin{pmatrix} (-i\partial_x - z)\varphi_1(x) \\ (i\partial_x - z)\varphi_2(x) \\ (i\partial_x - z)\varphi_3(x) \\ (-i\partial_x - z)\varphi_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \\ g_4(x) \end{pmatrix} \quad \text{si } x \leq 0; \\ (\tilde{H}^0 - z)\tilde{\varphi} &= \begin{pmatrix} (-i\partial_x - z)(-\varphi_3(-x)) \\ (i\partial_x - z)\varphi_4(-x) \\ (i\partial_x - z)(-\varphi_1(-x)) \\ (-i\partial_x - z)\varphi_2(-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\partial_x(\varphi_3)(-x) + z\varphi_3(-x) \\ -i\partial_x(\varphi_4)(-x) - z\varphi_4(-x) \\ i\partial_x(\varphi_1)(-x) + z\varphi_1(-x) \\ i\partial_x(\varphi_2)(-x) - z\varphi_2(-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_3(-x) \\ g_4(-x) \\ -g_1(-x) \\ g_2(-x) \end{pmatrix} \\ &\quad \text{si } x \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(H_c - z)\varphi = g$ si et seulement si $(\tilde{H}^0 - z)\tilde{\varphi} = \tilde{g}$ pour tout z dans l'ensemble résolvant de H_c .

Montrons que, pour $f \in C^0(]-\infty, 0])$ qui tend vers 0 en $-\infty$, l'opérateur $f(\cdot)(H_c - z)^{-1}$ est compact.

Considérons une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (L^2(\mathbb{R}^*))^{\mathbb{N}}$ telle que $g_n \rightarrow 0$ et soit $u_n = (H_c - z)^{-1}g_n$. Nous commençons par prolonger g_n et u_n en \tilde{g}_n et \tilde{u}_n comme ci-dessus, de sorte que $\tilde{g}_n \rightarrow 0$ cette fois-ci dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\tilde{u}_n = (\tilde{H}^0 - z)^{-1}\tilde{g}_n$. Comme la fonction $x \rightarrow (x - z)^{-1} \in L^\infty$ et $|x - z|^{-1} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$, nous en déduisons, grâce à une conséquence du théorème IX.29 dans [73], que :

$$\tilde{f}(x) \left(\tilde{H}^0 - z \right)^{-1} \tilde{g}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\mathbb{R})} 0,$$

où \tilde{f} est le prolongement de f par 0 sur \mathbb{R}_+ . Par suite :

$$\mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(x) \tilde{f}(x) \left(\tilde{H}^0 - z \right)^{-1} \tilde{g}_n = \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(x) \tilde{f}(x) \tilde{u}_n = f(x) u_n = f(x) (H_c - z)^{-1} g_n,$$

où $\mathbb{1}_{]-\infty, 0[}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $]-\infty, 0[$.

Nous en déduisons que $f(x)(H_c - z)^{-1}g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\mathbb{R}_+^*)} 0$ et que l'opérateur $f(x)(H_c - z)^{-1}$ est compact.

Nous écrivons maintenant :

$$f(x)(H_- - z)^{-1} = f(x)\left((H_- - z)^{-1} - (H_c - z)^{-1}\right) + f(x)(H_c - z)^{-1}.$$

La formule de la résolvante donne :

$$(H_- - z)^{-1} - (H_c - z)^{-1} = -(H_- - z)^{-1}V_-(x)(H_c - z)^{-1}.$$

Comme V tend vers 0 en $-\infty$ et 0, nous en déduisons que $(H_- - z)^{-1} - (H_c - z)^{-1}$ est compact et par conséquent, que $f(x)(H_- - z)^{-1}$ est lui-même compact. Q.E.D

1.4.3 Compacité de $(H_+ - z)^{-1}$

Lemme 1.4.9. *L'opérateur $(H_+ - z)^{-1}$ est un opérateur compact pour tout $z \in \rho(H_+)$.*

Preuve. Nous allons procéder comme dans [8]. Montrons que l'ensemble :

$$K = \{\varphi \in D(H_+); \|\varphi\| + \|H_+\varphi\| \leq 1\} \tag{1.4.8}$$

est compact. Pour cela, considérons une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. D'après le théorème de Banach-Alaoglu et un raisonnement de distribution, nous obtenons l'existence d'une sous-suite (φ_ν) telle que :

$$\begin{aligned} \varphi_\nu &\xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{} \varphi \\ f_\nu &:= H_+\varphi_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{} H_+\varphi := f. \end{aligned}$$

Etudions l'équation :

$$H_+\varphi_\nu = f_\nu,$$

où $\varphi_\nu, f_\nu \in L^2(]-\infty, 0[)$. Posons :

$$W(x) = \begin{cases} mB(x) = -\frac{ml}{x} + T(x), & \text{pour } x \geq b. \\ x^2, & \text{pour } x \leq a \end{cases}$$

où $a < b$ sont deux constantes telles que le développement de B soit valide et T vérifie :

$$T(x) = O(x),$$

Nous posons de plus :

$$\begin{aligned} g_\nu^1 &= \begin{cases} (s + \frac{1}{2})A(x)\varphi_\nu^2 + f_\nu^1, & \text{pour } x \geq b. \\ f_\nu^1, & \text{pour } x \leq a. \end{cases}, & g_\nu^2 &= \begin{cases} (s + \frac{1}{2})A(x)\varphi_\nu^1 + f_\nu^2, & \text{pour } x \geq b. \\ f_\nu^2, & \text{pour } x \leq a. \end{cases} \\ g_\nu^3 &= \begin{cases} -(s + \frac{1}{2})A(x)\varphi_\nu^4 + f_\nu^3, & \text{pour } x \geq b. \\ f_\nu^3, & \text{pour } x \leq a. \end{cases}, & g_\nu^4 &= \begin{cases} -(s + \frac{1}{2})A(x)\varphi_\nu^3 + f_\nu^4, & \text{pour } x \geq b. \\ f_\nu^4, & \text{pour } x \leq a. \end{cases} \end{aligned}$$

où $f_\nu = \begin{pmatrix} f_\nu^1 \\ f_\nu^2 \\ f_\nu^3 \\ f_\nu^4 \end{pmatrix}$, $\varphi_\nu = \begin{pmatrix} \varphi_\nu^1 \\ \varphi_\nu^2 \\ \varphi_\nu^3 \\ \varphi_\nu^4 \end{pmatrix}$. Posons $g_\nu = \begin{pmatrix} g_\nu^1 \\ g_\nu^2 \\ g_\nu^3 \\ g_\nu^4 \end{pmatrix}$. Utilisant le fait que A soit bornée au voisinage

de 0, nous déduisons que $g_\nu \in L^2(]-\infty, 0])$ et que $g_\nu \rightarrow g$ ou g est définie de la même manière en enlevant les indices ν . Rappelons que les matrices de Dirac admettent les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma^1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; & \gamma^0 \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus, H_+ est donné par :

$$H_+ = -i\gamma^0 \gamma^1 \partial_x + V_+(x) \quad (1.4.9)$$

où :

$$V_+(x) = \begin{cases} \gamma^0 \gamma^2 A(x) (s + \frac{1}{2}) - m\gamma^0 B(x) & , \text{ pour } x \geq b. \\ -\gamma^0 x^2 & , \text{ pour } x \leq a. \end{cases} \quad (1.4.10)$$

Utilisant ces formules, nous obtenons les quatre équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} -i\partial_x \varphi_\nu^1 - (s + \frac{1}{2}) A(x) \varphi_\nu^2 - imB(x) \varphi_\nu^3 = f_\nu^1 \\ i\partial_x \varphi_\nu^2 - (s + \frac{1}{2}) A(x) \varphi_\nu^1 - imB(x) \varphi_\nu^3 = f_\nu^2 \\ i\partial_x \varphi_\nu^3 + (s + \frac{1}{2}) A(x) \varphi_\nu^4 + imB(x) \varphi_\nu^1 = f_\nu^3 \\ -i\partial_x \varphi_\nu^4 + (s + \frac{1}{2}) A(x) \varphi_\nu^3 + imB(x) \varphi_\nu^1 = f_\nu^4. \end{cases}$$

quand $x \geq b$. Quand $x \leq a$, il suffit de retirer les termes avec A et de remplacer $mB(x)$ par x^2 . Nous pouvons maintenant obtenir :

$$\begin{cases} \partial_x (\varphi_\nu^1 + \varphi_\nu^3) + W(x) (\varphi_\nu^1 + \varphi_\nu^3) = i (g_\nu^1 - g_\nu^3) \\ \partial_x (\varphi_\nu^2 - \varphi_\nu^4) + W(x) (\varphi_\nu^2 - \varphi_\nu^4) = -i (g_\nu^2 + g_\nu^4) \\ \partial_x (\varphi_\nu^1 - \varphi_\nu^3) - W(x) (\varphi_\nu^1 - \varphi_\nu^3) = i (g_\nu^1 + g_\nu^3) \\ \partial_x (\varphi_\nu^2 + \varphi_\nu^4) - W(x) (\varphi_\nu^2 + \varphi_\nu^4) = i (g_\nu^4 - g_\nu^2). \end{cases} \quad (1.4.11)$$

Les solutions à ces équations sont données par les formules :

$$(\varphi_\nu^1 + \varphi_\nu^3)(x) = \lambda_\nu^1 e^{-\int_{-1}^x W(u) du} + i \int_{-\infty}^x (g_\nu^1 - g_\nu^3) e^{\int_{-1}^t W(u) du - \int_{-1}^x W(u) du} dt \quad (1.4.12)$$

$$(\varphi_\nu^2 - \varphi_\nu^4)(x) = \lambda_\nu^2 e^{-\int_{-1}^x W(u) du} - i \int_{-\infty}^x (g_\nu^2 + g_\nu^4) e^{\int_{-1}^t W(u) du - \int_{-1}^x W(u) du} dt \quad (1.4.13)$$

$$(\varphi_\nu^1 - \varphi_\nu^3)(x) = \lambda_\nu^3 e^{\int_{-1}^x W(u) du} + i \int_0^x (g_\nu^1 + g_\nu^3) e^{-\int_{-1}^t W(u) du + \int_{-1}^x W(u) du} dt \quad (1.4.14)$$

$$(\varphi_\nu^2 + \varphi_\nu^4)(x) = \lambda_\nu^4 e^{\int_{-1}^x W(u) du} + i \int_0^x (g_\nu^4 - g_\nu^2) e^{-\int_{-1}^t W(u) du + \int_{-1}^x W(u) du} dt, \quad (1.4.15)$$

où λ_ν^j , $j = 1, \dots, 4$, sont des constantes à déterminer.

Prouvons la convergence simple des termes intégraux.

Calculons :

$$\int_{-1}^x W(u)du = \begin{cases} -ml \ln(-x) + \int_{-1}^x T(u)du & , \text{ pour } x \geq b. \\ \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3} + \int_{-1}^a W(u)du & , \text{ pour } x \leq a. \end{cases} \quad (1.4.16)$$

Nous avons également :

$$\left| \int_{-1}^x T(u)du \right| \leq \int_{-1}^x |T(u)| du \leq C_0 \int_{-1}^x -u du \leq C \quad (1.4.17)$$

sur $[b; 0[$ (avec C_0, C deux constantes positives). Nous obtenons ainsi :

$$e^{\int_{-1}^x W(u)du} = \begin{cases} \left(-\frac{1}{x}\right)^{ml} e^{\int_{-1}^x T(u)du} & , \text{ pour } x \geq b. \\ C_1 e^{\frac{x^3}{3}} & , \text{ pour } x \leq a. \end{cases}$$

$$e^{-\int_{-1}^x W(u)du} = \begin{cases} (-x)^{ml} e^{-\int_{-1}^x T(u)du} & , \text{ pour } x \geq b. \\ C_2 e^{-\frac{x^3}{3}} & , \text{ pour } x \leq a, \end{cases}$$

où $C_1 = e^{-\frac{a^3}{3} + \int_{-1}^a W(u)du}$ et $C_2 = e^{\frac{a^3}{3} - \int_{-1}^a W(u)du}$ sont des constantes positives. Ces calculs nous permettent de voir que $e^{\int_{-1}^t W(u)du}$ est de carré intégrable sur $] -\infty, x[$ et que $e^{-\int_{-1}^t W(u)du}$ est de carré intégrable sur $]x, 0[$. Par conséquent, comme g_ν converge faiblement, nous en déduisons que les intégrales suivantes convergent point par point quand $\nu \rightarrow \infty$:

$$\int_{-\infty}^x (g_\nu^1 - g_\nu^3) e^{\int_{-1}^t W(u)du - \int_{-1}^x W(u)du} dt \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x (g^1 - g^3) e^{\int_{-1}^t W(u)du - \int_{-1}^x W(u)du} dt \quad (1.4.18)$$

$$\int_0^x (g_\nu^1 + g_\nu^3) e^{-\int_{-1}^t W(u)du + \int_{-1}^x W(u)du} dt \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \int_0^x (g^1 + g^3) e^{-\int_{-1}^t W(u)du + \int_{-1}^x W(u)du} dt. \quad (1.4.19)$$

Majorons les termes intégraux par des fonctions L^2 indépendantes de ν .

Dans ce qui suit, nous allons traiter $(\varphi_\nu^1 + \varphi_\nu^3)$ et $(\varphi_\nu^1 - \varphi_\nu^3)$ mais nous pouvons faire de même avec $(\varphi_\nu^2 + \varphi_\nu^4)$ et $(\varphi_\nu^2 - \varphi_\nu^4)$. Etudions les différents termes intégraux :

a) Dans un premier temps, nous avons :

$$\left| \int_0^x (g_\nu^1 + g_\nu^3) e^{\int_{-1}^t W(u)du} dt \right|^2 \leq \|g_\nu^1 + g_\nu^3\|_2^2 \left| \int_0^x e^{-2\int_{-1}^t W(u)du + 2\int_{-1}^x W(u)du} dt \right| \quad (1.4.20)$$

Par suite :

i) Si $x \geq b$, il vient :

$$\left| \int_0^x e^{-2\int_{-1}^t W(u)du + 2\int_{-1}^x W(u)du} dt \right| = \left| \int_0^x \left(-\frac{1}{x}\right)^{2ml} e^{2\int_{-1}^x T(u)du} (-t)^{2ml} e^{-2\int_{-1}^t T(u)du} dt \right|$$

$$\leq C \left| \int_0^x \left(-\frac{1}{x}\right)^{2ml} (-t)^{2ml} dt \right| = \frac{-x}{1+2ml}$$

où C est une constant positive et nous avons utilisé (1.4.17).

ii) Si $a \leq x \leq b$, nous intégrons une fonction lisse, la fonction que nous obtenons est alors lisse donc intégrable sur l'intervalle $[a, b]$.

iii) Si $x \leq a$, nous avons :

$$\left| \int_0^x e^{2 \int_t^x W(u) du} dt \right| = (C_1)^2 e^{2 \frac{x^3}{3}} \left(\int_x^a (C_2)^2 e^{-2 \frac{t^3}{3}} dt + \int_a^0 e^{-2 \int_{-1}^t W(u) du} dt \right).$$

Or $(C_1)^2 e^{2 \frac{x^3}{3}} \left(\int_a^0 e^{-2 \int_{-1}^t W(u) du} dt \right)$ est intégrable sur $] -\infty, a]$ et :

$$\begin{aligned} \int_x^a e^{-2 \frac{t^3}{3}} dt &= \int_x^a \frac{-2t^2}{-2t^2} e^{-2 \frac{t^3}{3}} dt \\ &= \left[-\frac{1}{2t^2} e^{-2 \frac{t^3}{3}} \right]_x^a - \int_x^a \frac{1}{t^3} e^{-2 \frac{t^3}{3}} dt \\ &\leq -\frac{1}{2a^2} e^{-2 \frac{a^3}{3}} + \frac{1}{2x^2} e^{-2 \frac{x^3}{3}} - \frac{1}{a^3} \int_x^a e^{-2 \frac{t^3}{3}} dt. \end{aligned}$$

Choissant a suffisamment négatif pour que $1 + \frac{1}{a^3} > 0$, nous obtenons :

$$(C_1)^2 e^{2 \frac{x^3}{3}} \int_x^a (C_2)^2 e^{-2 \frac{t^3}{3}} dt \leq (C_1)^2 (C_2)^2 \frac{\left(e^{2 \frac{x^3}{3}} \left(-\frac{1}{2a^2} \right) e^{-2 \frac{a^3}{3}} + \frac{1}{2x^2} \right)}{1 + \frac{1}{a^3}},$$

de sorte que le terme de droite est intégrable sur $] -\infty, a]$ et tend vers 0 en $-\infty$.

Remarque. Cette estimation est importante pour la symétrie de l'opérateur.

Comme $g_\nu^1 + g_\nu^3$ converge faiblement, cette suite est bornée dans L^2 et nous obtenons :

$$\left| \int_0^x (g_\nu^1 + g_\nu^3) e^{\int_t^x W(u) du} dt \right|^2 \leq \left| \int_0^x e^{-2 \int_{-1}^t W(u) du} + 2 \int_{-1}^x W(u) du \right|^2, \quad (1.4.21)$$

où le terme de droite est intégrable.

b) Dans un second temps, il nous reste :

$$\left| \int_{-\infty}^x (g_\nu^1 - g_\nu^3) e^{\int_t^x W(u) du} dt \right|^2 \leq \|g_\nu^1 - g_\nu^3\|_2^2 \left(\int_{-\infty}^x e^{2 \int_{-1}^t W(u) du} - 2 \int_{-1}^x W(u) du dt \right).$$

Ainsi :

i) Si $x \geq b$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x e^{2 \int_{-1}^t W(u) du} - 2 \int_{-1}^x W(u) du dt &= (-x)^{2ml} e^{-2 \int_{-1}^x T(u) du} \int_{-\infty}^b e^{2 \int_{-1}^t W(u) du} dt \\ &\quad + (-x)^{2ml} e^{-2 \int_{-1}^x T(u) du} \int_b^x \left(-\frac{1}{t} \right)^{2ml} e^{2 \int_{-1}^t T(u) du} dt. \end{aligned}$$

Utilisant (1.4.17), nous voyons que :

- $e^{-2 \int_{-1}^x T(u) du}$ est bornée sur $[b; 0[$.
- $e^{2 \int_{-1}^t T(u) du}$ est bornée sur $[b; 0[$.

Par conséquent :

$$\int_{-\infty}^x e^{2 \int_{-1}^t W(u) du - 2 \int_{-1}^x W(u) du} dt \lesssim (-x)^{2ml} \int_{-\infty}^b e^{2 \int_{-1}^t W(u) du} dt \\ + (-x)^{2ml} \int_b^x \left(-\frac{1}{t}\right)^{2ml} dt.$$

Or $(-x)^{2ml} \int_{-\infty}^b e^{2 \int_{-1}^t W(u) du} dt$ est intégrable sur $[b, 0[$ et si $ml \neq \frac{1}{2}$:

$$(-x)^{2ml} \int_b^x \left(-\frac{1}{t}\right)^{2ml} dt = (-x)^{2ml} \left[-\frac{(-t)^{1-2ml}}{1-2ml} \right]_b^x \\ = \frac{x}{1-2ml} - (-x)^{2ml} \frac{(-b)^{1-2ml}}{1-2ml},$$

donc $(-x)^{2ml} \int_b^x \left(-\frac{1}{t}\right)^{2ml} dt$ est intégrable sur $[b, 0[$.

Si $ml = \frac{1}{2}$, alors :

$$(-x) \int_b^x \left(-\frac{1}{t}\right) dt = (-x) [-\ln(-t)]_b^x$$

et $(-x)^{2ml} \int_b^x \left(-\frac{1}{t}\right)^{2ml} dt$ est borné sur $[b, 0[$ donc intégrable sur ce même intervalle.

- ii) Si $a \leq x \leq b$, nous obtenons une fonction lisse qui est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$.
- iii) Si $x \leq a$, nous avons :

$$\int_{-\infty}^x e^{2 \int_{-1}^t W(u) du - 2 \int_{-1}^x W(u) du} dt = C_2^2 C_1^2 e^{-2 \frac{x^3}{3}} \int_{-\infty}^x \frac{2t^2}{2t^2} e^{\frac{2t^3}{3}} dt \\ = C_2^2 C_1^2 e^{-2 \frac{x^3}{3}} \left(\left[\frac{1}{2t^2} e^{\frac{2t^3}{3}} \right]_{-\infty}^x + \int_{-\infty}^x \frac{1}{t^3} e^{\frac{2t^3}{3}} dt \right) \\ \leq C_2^2 C_1^2 \frac{1}{2x^2},$$

puisque $\int_{-\infty}^x \frac{1}{t^3} e^{\frac{2t^3}{3}} dt \leq 0$.

Comme $g_\nu^1 - g_\nu^3$ est bornée dans L^2 , nous en déduisons que :

$$\left| \int_{-\infty}^x (g_\nu^1 - g_\nu^3) e^{\int_x^t W(u) du} dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^x e^{2 \int_{-1}^t W(u) du - 2 \int_{-1}^x W(u) du} dt, \quad (1.4.22)$$

où le terme de droite est intégrable.

Convergence dans L^2 des termes intégraux.

Nous pouvons maintenant utiliser le théorème de convergence dominée dans les deux cas précédents pour obtenir :

a)

$$\int_0^x (g_\nu^1 + g_\nu^3) e^{-\int_{-1}^t W(u) du + \int_{-1}^x W(u) du} dt \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{L^2} \int_0^x (g^1 + g^3) e^{-\int_{-1}^t W(u) du + \int_{-1}^x W(u) du} dt. \quad (1.4.23)$$

b)

$$\int_0^x (g_\nu^1 - g_\nu^3) e^{-\int_{-1}^t W(u)du + \int_{-1}^x W(u)du} dt \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{L^2} \int_0^x (g^1 - g^3) e^{-\int_{-1}^t W(u)du + \int_{-1}^x W(u)du} dt. \quad (1.4.24)$$

Etudions maintenant la convergence des suites λ_ν^i , $i = 1, \dots, 4$.

a) Tout d'abord, nous regardons convergence de λ_ν^3 et λ_ν^4 .

- Si $ml < \frac{1}{2}$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} & (\lambda_\nu^3 - \lambda^3) \left\| e^{\int_{-1}^x W(u)du} \right\|_{L^2}^2 = \\ & \left\langle \left((\varphi_\nu^1 - \varphi_\nu^3) - \int_0^x (g_\nu^1 + g_\nu^3) e^{-\int_{-1}^t W(u)du + \int_{-1}^x W(u)du} dt \right), e^{\int_{-1}^x W(u)du} \right\rangle_{L^2} \\ & - \left\langle \left((\varphi^1 - \varphi^3) - \int_0^x (g^1 + g^3) e^{-\int_{-1}^t W(u)du + \int_{-1}^x W(u)du} dt \right), e^{\int_{-1}^x W(u)du} \right\rangle_{L^2} \\ & \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

utilisant $e^{\int_{-1}^x W(u)du} \in L^2$, $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ et (1.4.23). Nous en déduisons que $\lambda_\nu^3 \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{} \lambda^3$.

- Si $ml \geq \frac{1}{2}$, $e^{\int_{-1}^x W(u)du} \notin L^2$ et $\lambda_\nu^3 = 0$.

b) Etudions la convergence de λ_ν^1 et λ_ν^2 .

Comme $\varphi_\nu^1 + \varphi_\nu^3 \in L^2$ et $e^{-\int_{-1}^x W(u)du} \notin L^2$, nous en déduisons que $\lambda_\nu^1 = \lambda_\nu^2 = 0$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ puisque le terme intégrale est dans L^2 .

Convergence dans L^2 des suites $\varphi_\nu^1 - \varphi_\nu^3$, $\varphi_\nu^2 + \varphi_\nu^4$, $\varphi_\nu^1 + \varphi_\nu^3$, $\varphi_\nu^2 - \varphi_\nu^4$.

Nous avons vu que $\varphi_\nu^1 - \varphi_\nu^3$ converge point par point et $|\varphi_\nu^1 - \varphi_\nu^3|^2$ est majorée par une fonction intégrable indépendante de ν . Utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous en déduisons que $\varphi_\nu^1 - \varphi_\nu^3 \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{L^2} \varphi^1 - \varphi^3$. De même :

$$\begin{aligned} \varphi_\nu^2 + \varphi_\nu^4 & \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{L^2} \varphi^2 + \varphi^4, \\ \varphi_\nu^1 + \varphi_\nu^3 & \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{L^2} \varphi^1 + \varphi^3 \\ \varphi_\nu^2 - \varphi_\nu^4 & \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{L^2} \varphi^2 - \varphi^4. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente ce qui prouve que l'ensemble K est compact.

Par conséquent, l'opérateur $(H_+ + i)^{-1}$ est un opérateur bien défini et compact puisque K est un ensemble compact. D'autre part, une formule de la résolvante donne :

$$(H_+ - z)^{-1} = (H_+ + i)^{-1} + (i - z)(H_+ + i)^{-1}(H_+ - z)^{-1}$$

pour tout $z \in \rho(H_+)$. Ce qui prouve la compacité de l'opérateur $(H_+ - z)^{-1}$ pour tout $z \in \rho(H_+)$. Q.E.D

1.4.4 Preuve de la proposition 1.4.1

Preuve. Soient maintenant $j_-, j_+ \in C^\infty$ telles que $j_-^2 + j_+^2 = 1$, $\text{supp}(j_-) \subset]-\infty, c[$ et $\text{supp}(j_+) \subset]b, 0[$ avec $b < c$. Définissons l'opérateur :

$$Q(z) = j_-(x) (H_- - z)^{-1} j_-(x) + j_+(x) (H_+ - z)^{-1} j_+(x).$$

Or, sur $] -\infty, c[$, $H_m^{s,n} - z = H_- - z$ et sur $]b, 0[$, $H_m^{s,n} - z = H_+ - z$.

Donc :

$$\begin{aligned} (H_m^{s,n} - z) Q(z) &= [(H_m^{s,n} - z), j_-(x)] (H_- - z)^{-1} j_-(x) + j_-^2(x) + j_+^2(x) \\ &\quad + [(H_m^{s,n} - z), j_+(x)] (H_+ - z)^{-1} j_+(x) \\ &= 1 - w(z), \end{aligned}$$

où :

$$w(z) = - \left([(H_m^{s,n} - z), j_-(x)] (H_- - z)^{-1} j_-(x) + [(H_m^{s,n} - z), j_+(x)] (H_+ - z)^{-1} j_+(x) \right).$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} [(H_m^{s,n} - z), j_-(x)] &= i\gamma^0 \gamma^1 j'_-(x) \\ [(H_m^{s,n} - z), j_+(x)] &= i\gamma^0 \gamma^1 j'_+(x). \end{aligned}$$

Comme j'_-, j'_+ sont nulles en dehors de $]b, c[$, les considérations précédentes nous montrent que $w(z)$ est un opérateur compact pour tout $z \in \rho(H)$. D'autre part, $w : \rho(H) \rightarrow \mathcal{L}(L^2)$ est analytique.

Montrons que $1 - w(z)$ est inversible pour un certain z .

Remarquons que j'_-, j'_+ sont bornées par des constantes que l'on appelle $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ respectivement et j_-, j_+ sont bornées par 1. Soit $\varphi \in L^2$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|w(z)\varphi\|_2 &\leq \left\| i\gamma^0 \gamma^1 j'_-(x) (H_- - z)^{-1} j_-(x)\varphi \right\|_2 + \left\| i\gamma^0 \gamma^1 j'_+(x) (H_+ - z)^{-1} j_+(x)\varphi \right\|_2 \\ &\leq \frac{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2}{|\text{Im } z|} \|\varphi\|_2. \end{aligned}$$

Choisissons z imaginaire pure de sorte que $\frac{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2}{|\text{Im } z|} < 1$. Par suite, $1 - w(z)$ est inversible. Le théorème analytique de Fredholm nous dit alors que $1 - w(z)$ est inversible pour tout $z \in \rho(H) \setminus S$ où S est un ensemble discret sans point limite.

Pour de tels z , nous en déduisons que :

$$(H_m^{s,n} - z)^{-1} = Q(z) (1 - w(z))^{-1}. \quad (1.4.25)$$

Soit $f \in C^0(]-\infty, 0])$ une fonction tendant vers 0 en $-\infty$. Alors, les considérations sur H_- et H_+ nous assurent que $f(x)Q(z)$ est compact (puisque $f j_-$ tend vers 0 en $-\infty$ et 0 et $(H_+ - z)^{-1}$ est compact). Ainsi pour $z \in \rho(H) \setminus S$, $f(x) (H_m^{s,n} - z)^{-1}$ est compact. Si $s \in S$, nous choisissons une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\rho(H_m^{s,n}) \setminus S)^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$. Alors, par analyticité de $z \rightarrow (H_m^{s,n} - z)^{-1}$, nous avons :

$$(H_m^{s,n} - z_n)^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}(L^2)} (H_m^{s,n} - s)^{-1}.$$

Par conséquent, $f(x) (H_m^{s,n} - s)^{-1}$ est compact pour tout $s \in S$ comme limite en norme d'opérateurs compacts. Ceci nous permet de conclure que $f(x) (H_m^{s,n} - z)^{-1}$ est compact pour tout $z \in \rho(H_m^{s,n})$. Q.E.D

1.5 Estimations de Mourre

Dans cette section, nous donnons tout d'abord quelques rappels de la théorie de Mourre.

Nous vérifions ensuite que le couple $(H_m^{s,n}, \mathcal{A})$ satisfait les conditions de Mourre où l'opérateur conjugué est donné par $\mathcal{A} = \Gamma x$ avec $\Gamma = -\gamma^0 \gamma^1 = \text{diag}(1, -1, -1, 1)$. Le calcul du commutateur des opérateurs $H_m^{s,n}$ et \mathcal{A} nous donne alors une estimation de Mourre

$$\mathbb{1}_I(H_m^{s,n}) [H_m^{s,n}, i\mathcal{A}] \mathbb{1}_I(H_m^{s,n}) \geq \mathbb{1}_I^2(H_m^{s,n}) + \mathbb{1}_I(H_m^{s,n}) K \mathbb{1}_I(H_m^{s,n}). \quad (1.5.1)$$

Ici, $\mathbb{1}_I$ est la fonction indicatrice de l'intervalle I et K est un opérateur compact. L'absence de valeurs propres pour notre opérateur nous permet ensuite d'éliminer l'opérateur compact de cette estimation, quitte à diminuer la taille de notre intervalle I . Nous en déduisons l'absence de spectre singulier continu.

1.5.1 Rappels de la théorie de Mourre

Nous donnons ici quelques rappels de la théorie de Mourre. Nous dirons que le couple (H, \mathcal{A}) vérifie les conditions de Mourre si

$$D(\mathcal{A}) \cap D(H) \text{ est dense dans } D(H), \quad (1.5.2)$$

$$e^{it\mathcal{A}} \text{ préserve } D(H) \text{ pour } t > 0, \sup_{|t| \leq 1} \|H e^{it\mathcal{A}} u\| < \infty, \forall u \in D(H), \quad (1.5.3)$$

$$\begin{aligned} [iH, \mathcal{A}] \text{ définie comme forme quadratique sur } D(H) \cap D(\mathcal{A}) \\ \text{s'étend en un opérateur borné de } D(H) \text{ dans } \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Les conditions de Mourre sont plus fortes que la régularité $C^1(\mathcal{A})$ dont nous rappelons la définition :

Définition 1.5.1. On dit que $H \in C^1(\mathcal{A})$ s'il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ tel que

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it\mathcal{A}} (z - H)^{-1} e^{-it\mathcal{A}} \quad (1.5.5)$$

est C^1 pour la topologie forte de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Remarque. En remplaçant C^1 par C^k , nous obtenons la définition de $H \in C^k(\mathcal{A})$.

Nous avons alors le lemme (voir [1, Proposition 5.1.2, Théorème 6.3.4]) :

Lemme 1.5.2. *Supposons que (H, \mathcal{A}) vérifie les conditions de Mourre. Alors $H \in C^1(\mathcal{A})$.*

Nous en profitons pour rappeler un lemme concernant la régularité $C^2(\mathcal{A})$:

Lemme 1.5.3. *Supposons que $H \in C^1(\mathcal{A})$ et que le commutateur $[i\mathcal{A}, H]$ s'étend en un opérateur borné de $D(H)$ dans \mathcal{H} . Notons $[i\mathcal{A}, H]_0$ cette extension. Si de plus le commutateur $[i\mathcal{A}, [i\mathcal{A}, H]_0]$ défini comme forme quadratique sur $D(\mathcal{A}) \cap D(H)$ s'étend en un opérateur borné de $D(H)$ dans $D(H)^*$, alors $H \in C^2(\mathcal{A})$.*

Nous définissons maintenant les estimations de Mourre :

Définition 1.5.4. On dit qu'un opérateur auto-adjoint H vérifie une estimation de Mourre sur un intervalle I s'il existe un opérateur auto-adjoint \mathcal{A} tel que :

- 1) Le couple (H, \mathcal{A}) vérifie les conditions de Mourre.

2) Il existe $c > 0$ et un opérateur compact K tels que :

$$\mathbf{1}_I(H) [H, i\mathcal{A}] \mathbf{1}_I(H) \geq c \mathbf{1}_I(H) + K.$$

On dit que H vérifie une estimation de Mourre au point $\lambda \in \mathbb{R}$ s'il existe un intervalle I contenant λ tel qu'une estimation de Mourre soit vérifiée par H sur I .

Remarque. Il est possible d'affaiblir les conditions pour qu'une telle estimation soit vérifiée.

Utilisant les hypothèse du lemme 1.5.3 et les estimations de Mourre lorsque $K = 0$, il est possible de prouver l'absence de spectre singulier continu :

Corollaire 1.5.5. *Supposons que le couple (H, \mathcal{A}) vérifie les conditions de Mourre et que les hypothèses du lemme 1.5.3 soient vérifiées. Alors H a un spectre absolument continu dans l'ensemble (ouvert) où une estimation de Mourre est vérifiée avec $K = 0$.*

1.5.2 Estimations de Mourre pour l'opérateur de Dirac

Nous allons utiliser l'opérateur conjugué suivant :

$$\mathcal{A} = \Gamma x, \tag{1.5.6}$$

où $\Gamma = -\gamma^0 \gamma^1 = \text{diag}(1, -1, -1, 1)$. Nous munissons cet opérateur du domaine :

$$D(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}; \mathcal{A}\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}\}. \tag{1.5.7}$$

L'opérateur \mathcal{A} est auto-adjoint sur son domaine. En effet, il est clairement symétrique. D'autre part,

$$D(\mathcal{A}^*) = \{\psi \in \mathcal{H}_{s,n}; \exists \chi \in \mathcal{H}_{s,n}, \langle \psi, \mathcal{A}\varphi \rangle = \langle \chi, \varphi \rangle \forall \varphi \in D(\mathcal{A})\}.$$

Or, pour tout $\varphi \in C_0^\infty \subset \mathcal{H}_{s,n}$, $\psi \in D(\mathcal{A}^*)$, nous avons :

$$\langle \psi, \mathcal{A}\varphi \rangle = \langle \mathcal{A}\psi, \varphi \rangle = \langle \chi, \varphi \rangle.$$

Comme C_0^∞ est dense dans $\mathcal{H}_{s,n}$, nous en déduisons que $\chi = \mathcal{A}\psi$ et que $D(\mathcal{A}^*) = D(\mathcal{A})$.

Lemme 1.5.6. *Pour tout $m > 0$, le couple $(H_m^{s,n}, \mathcal{A})$ vérifie les conditions de Mourre et nous avons $H_m^{s,n} \in C^1(\mathcal{A})$*

Preuve. Vérifions (1.5.2) :

Cas $2ml < 1$:

Soit χ une fonction C^∞ telle que $\chi = 1$ sur $[-1, 0]$, $\text{supp}(\chi) \subset]-2, 0]$. Posons $\chi_k(x) = \chi\left(\frac{x}{k}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous avons $\chi'_k(x) = \frac{1}{k} \chi'\left(\frac{x}{k}\right)$.

Soit $\varphi \in D(H_m^{s,n})$, montrons que $\chi_k \varphi \in D(\mathcal{A}) \cap D(H_m^{s,n})$.

En effet, $|\mathcal{A}\chi_k \varphi(x)| \leq 2k |\gamma^0 \gamma^1 \varphi(x)|$ donc $\mathcal{A}\chi_k \varphi(x) \in \mathcal{H}_{s,n}$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. D'autre part, $\chi_k \varphi \in \mathcal{H}_{s,n}$ et :

$$H_m^{s,n} \chi_k \varphi = i \chi'_k \gamma^0 \gamma^1 \varphi + \chi_k H_m^{s,n} \varphi,$$

pour tout $\varphi \in D(H_m^{s,n})$. Ainsi $H_m^{s,n} \chi_k \varphi \in \mathcal{H}_{s,n}$. Enfin, nous avons :

$$\|(\gamma^1 + i) \chi_k(x) \varphi(x, \cdot)\|_{\mathcal{W}^0} = \|(\gamma^1 + i) \varphi(x, \cdot)\|_{\mathcal{W}^0},$$

pour $x \in [-k, 0]$. Les conditions au bord sont donc vérifiées. Nous en déduisons que $\chi_k \varphi \in D(H_m^{s,n})$.

Montrons maintenant que $\chi_k \varphi \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi$ pour la norme : $\|\varphi\|_{H_m^{s,n}} = \|\varphi\|_{\mathcal{H}_{s,n}} + \|H_m^{s,n} \varphi\|_{\mathcal{H}_{s,n}}$.
En effet :

$$\chi_k \varphi \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{H}_{s,n}} \varphi,$$

par convergence dominée. D'autre part, $|\chi'_k(x)| \leq \frac{1}{k} C$ où $C = \sup_{x \in]-\infty, 0[} |\chi'(x)|$. Donc :

$$\begin{aligned} \|H_m^{s,n} \varphi - H_m^{s,n} \chi_k \varphi\| &\leq \|\chi'_k \gamma^0 \gamma^1 \varphi\| + \|H_m^{s,n} \varphi - \chi_k H_m^{s,n} \varphi\| \\ &\leq \frac{C_0}{k} \|\varphi\| + \|H_m^{s,n} \varphi - \chi_k H_m^{s,n} \varphi\|. \end{aligned}$$

Ceci donne le résultat voulu en faisant tendre k vers l'infini pour $\varphi \in D(H_m^{s,n})$. Nous en déduisons (1.5.2).

Remarque. Nous noterons $D(H_m^{s,n})_c = \{\chi_k \varphi; \varphi \in D(H_m^{s,n}), k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Cas $2ml \geq 1$:

Dans ce cas, $C_0^\infty]-\infty, 0[$ est inclus dans $D(\mathcal{A}) \cap D(H_m^{s,n})$ et est dense dans $D(H_m^{s,n})$ ce qui prouve (1.5.2).

Montrons (1.5.3) :

Pour tout $s > 0$,

$$e^{it\mathcal{A}} = \text{diag}(e^{itx}, e^{-itx}, e^{-itx}, e^{itx}).$$

Soit $\varphi \in D(H_m^{s,n})$, alors :

- $e^{it\mathcal{A}} \varphi \in \mathcal{H}_{s,n}$.
- $H_m^{s,n} e^{it\mathcal{A}} \varphi = e^{it\mathcal{A}} H_m^{s,n} \varphi + t e^{it\mathcal{A}} \varphi$.

Donc $H_m^{s,n} e^{it\mathcal{A}} \varphi \in \mathcal{H}_{s,n}$ et $\sup_{|t| \leq 1} \|H_m^{s,n} e^{it\mathcal{A}} \varphi\| < \infty$.

Il reste à vérifier les conditions au bord dans le cas $2ml < 1$. Nous avons :

$$\|(\gamma^1 + i) e^{it\mathcal{A}} \varphi(x, \cdot)\|_{\mathcal{W}^0} = \left\| \begin{pmatrix} i e^{itx} \varphi_1 + i e^{-itx} \varphi_3 \\ i e^{-itx} \varphi_2 - i e^{itx} \varphi_4 \\ i e^{itx} \varphi_1 + i e^{-itx} \varphi_3 \\ -i e^{-itx} \varphi_2 + i e^{itx} \varphi_4 \end{pmatrix} \right\|_{[L^2(S^2)]^4}.$$

Considérons par exemple le terme : $\|i e^{itx} \varphi_1 + i e^{-itx} \varphi_3\|_{L^2(S^2)}$ au voisinage de zéro. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \|i e^{itx} \varphi_1 + i e^{-itx} \varphi_3\|_{L^2(S^2)} &= \|i(\varphi_1 + \varphi_3) + tx(\varphi_3 - \varphi_1) + o(x)i(\varphi_1 + \varphi_3)\|_{L^2(S^2)} \\ &\leq \|i(\varphi_1(x, \cdot) + \varphi_3(x, \cdot))\|_{L^2(S^2)} \\ &\quad - 2x \left(\|\varphi_1(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} + \|\varphi_3(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} \right). \end{aligned}$$

Comme $\varphi \in D(H_m^{s,n})$, il existe des fonctions $\psi_- \in W_-^{\frac{1}{2}}$, $\chi_- \in W_+^{\frac{1}{2}}$, ψ_+ , $\chi_+ \in L^2(S^2)$ et $\phi \in C^0([0, \frac{\pi}{2}]_x; L^2(S^2; \mathbb{C}^4))$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} \psi_{s,n} &= (-x^{-ml}) \begin{pmatrix} \psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ \chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ -i \psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ i \chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ &\quad + \phi_n^s(r_*, \theta, \varphi), \end{aligned}$$

où :

$$\|\phi_n^s(r_*, \theta, \varphi)\|_{\mathcal{W}^0} = o\left(\sqrt{-x}\right), \quad x \rightarrow 0.$$

De sorte que :

$$-2x \|\varphi_1(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} \leq 2(-x)^{1-ml} \left\| \begin{pmatrix} \psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ \chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ -i\psi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \\ i\chi_{-,n}^s(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \right\|_{L^2(S^2)} - 2x \left(o\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right) \right).$$

Or $ml < \frac{1}{2}$ donc $1 - ml > \frac{1}{2}$. Ainsi :

$$-2x \|\varphi_1(x, \cdot)\|_{L^2(S^2)} = o\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right). \quad (1.5.8)$$

Nous pouvons faire de même avec les autres composantes. Nous en déduisons que $e^{itA}\varphi \in D(H_m^{s,n})$ pour $\varphi \in D(H_m^{s,n})$. Ceci montre que (1.5.3) est vérifiée.

Montrons (1.5.4) :

Tout d'abord, rappelons les comportements des potentiels A et B donnés dans (1.2.35). Nous remarquons que les fonctions $xA(x)$ et $xB(x)$ sont bornées sur $] -\infty, 0[$. Dans le cas $2ml < 1$, nous considérons $u, v \in D(H_m^{s,n})_c$ et dans le cas $2ml \geq 1$, nous considérons $u, v \in C_0^\infty(] -\infty, 0[)$. Rappelons que $(\gamma^0\gamma^1)^* = \gamma^0\gamma^1$, $(\gamma^0\gamma^2)^* = \gamma^0\gamma^2$ et $(\gamma^0)^* = \gamma^0$, $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} [H_m^{s,n}, i\mathcal{A}](u, v) &= i(\langle \mathcal{A}u, H_m^{s,n}v \rangle - \langle H_m^{s,n}u, \mathcal{A}v \rangle) \\ &= i\left(\left\langle -\gamma^0\gamma^1xu, \left(i\gamma^0\gamma^1\partial_x + \left(s + \frac{1}{2}\right)\gamma^0\gamma^2A(x) - m\gamma^0B(x)\right)v \right\rangle\right. \\ &\quad \left. - \left\langle \left(i\gamma^0\gamma^1\partial_x + \left(s + \frac{1}{2}\right)\gamma^0\gamma^2A(x) - m\gamma^0B(x)\right)u, -\gamma^0\gamma^1xv \right\rangle\right) \\ &= i\left(i(\langle \gamma^0\gamma^1xu, \gamma^0\gamma^1\partial_xv \rangle + \langle \gamma^0\gamma^1\partial_xu, \gamma^0\gamma^1xv \rangle)\right. \\ &\quad \left. - \left\langle \gamma^0\gamma^1xu, \left(s + \frac{1}{2}\right)\gamma^0\gamma^2A(x)v \right\rangle + \left\langle \left(s + \frac{1}{2}\right)\gamma^0\gamma^2A(x)u, \gamma^0\gamma^1xv \right\rangle\right) \\ &\quad + \langle \gamma^0\gamma^1xu, m\gamma^0B(x)v \rangle - \langle m\gamma^0B(x)u, \gamma^0\gamma^1xv \rangle \\ &= i\left(i(-\langle \partial_x(xu), v \rangle + \langle x\partial_xu, v \rangle)\right. \\ &\quad \left. - \left\langle \left(s + \frac{1}{2}\right)\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^1xA(x)u, v \right\rangle + \left\langle \left(s + \frac{1}{2}\right)\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^2xA(x)u, v \right\rangle\right) \\ &\quad + \langle m(\gamma^0)^2\gamma^1xB(x)u, v \rangle - \langle m\gamma^0\gamma^1\gamma^0xB(x)u, v \rangle \\ &= \left\langle u + 2i\left(s + \frac{1}{2}\right)xA(x)\gamma^2\gamma^1u + 2imxB(x)\gamma^1u, v \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Ce qui montre que :

$$|[H_m^{s,n}, i\mathcal{A}](u, v)| \leq C_1 \|u\|_{\mathcal{H}_{s,n}} \|v\|_{\mathcal{H}_{s,n}},$$

pour une certaine constante C_1 . Par densité, (1.5.4) est vérifiée.

Nous en déduisons que les conditions de Mourre sont vérifiées par le couple $(H_m^{s,n}, \mathcal{A})$ et donc que $H_m^{s,n} \in C^1(\mathcal{A})$. Q.E.D

Nous avons ensuite la proposition suivante :

Proposition 1.5.7. *Définissons $A = \Gamma x$. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact non vide. Alors, pour tout $m > 0$, nous avons l'estimation de Mourre :*

$$\mathbf{1}_I(H_m^{s,n})[H_m^{s,n}, iA] \mathbf{1}_I(H_m^{s,n}) \geq \mathbf{1}_I^2(H_m^{s,n}) + \mathbf{1}_I(H_m^{s,n}) K \mathbf{1}_I(H_m^{s,n}), \quad (1.5.10)$$

où $\mathbf{1}_I$ est la fonction indicatrice de l'intervalle I et K est un opérateur compact.

Preuve. Remarquons que :

$$\begin{aligned} xA(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty, 0} 0, \\ xB(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0, \end{aligned}$$

et $xB(x)$ est bornée au voisinage de 0. Ceci est obtenu grâce aux développements de ces potentiels donnés dans (1.2.35). Utilisant (1.5.9), nous obtenons :

$$[H_m^{s,n}, iA] \geq \text{Id} - (2s + 1) xA(x) \gamma^2 \gamma^1 - 2mxB(x) \gamma^1.$$

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et \tilde{I} un intervalle contenant strictement I . Soit $\varsigma \in C_0^\infty(\tilde{I})$ telle que $\varsigma \equiv 1$ sur I . Utilisant le lemme de compacité 1.4.1, nous savons que :

$$\varsigma(H_m^{s,n}) (- (2s + 1) xA(x) \gamma^2 \gamma^1 - 2mxB(x) \gamma^1) \varsigma(H_m^{s,n})$$

est un opérateur compact (que l'on note K) puisque les fonctions $xA(x)$ et $xB(x)$ tendent vers 0 en $-\infty$ et admettent une limite finie en 0. Par conséquent :

$$\varsigma(H_m^{s,n}) [H_m^{s,n}, iA] \varsigma(H_m^{s,n}) \geq \varsigma^2(H_m^{s,n}) + K. \quad (1.5.11)$$

Nous pouvons maintenant multiplier à droite et à gauche par $\mathbf{1}_I(H_m^{s,n})$ où $\mathbf{1}_I$ est la fonction indicatrice de I . Nous obtenons finalement l'estimation de Mourre suivante :

$$\mathbf{1}_I(H_m^{s,n}) [H_m^{s,n}, iA] \mathbf{1}_I(H_m^{s,n}) \geq \mathbf{1}_I^2(H_m^{s,n}) + \mathbf{1}_I(H_m^{s,n}) K \mathbf{1}_I(H_m^{s,n}) \quad (1.5.12)$$

avec K un opérateur compact. Q.E.D

Utilisant l'absence de valeurs propres, nous en déduisons le lemme :

Corollaire 1.5.8. *Pour tout $m > 0$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle compact non vide $I' \subset \mathbb{R}$ contenant λ tel que :*

$$\mathbf{1}_{I'}(H_m^{s,n}) [H_m^{s,n}, iA] \mathbf{1}_{I'}(H_m^{s,n}) \geq (1 - \epsilon) \mathbf{1}_{I'}^2(H_m^{s,n}) \quad (1.5.13)$$

pour tout $0 < \epsilon < 1$. Rappelons que $\mathbf{1}_{I'}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle I' .

Preuve. Nous avons vu que, pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ compact non vide contenant λ , nous avons l'estimation :

$$\mathbf{1}_I(H_m^{s,n}) [H_m^{s,n}, iA] \mathbf{1}_I(H_m^{s,n}) \geq \mathbf{1}_I^2(H_m^{s,n}) + \mathbf{1}_I(H_m^{s,n}) K \mathbf{1}_I(H_m^{s,n}).$$

Soit $I' \subset I$ tel que $\lambda \in I'$. Nous pouvons multiplier des deux côtés par $\mathbf{1}_{I'}(H_m^{s,n})$ pour obtenir :

$$\mathbf{1}_{I'}(H_m^{s,n}) [H_m^{s,n}, iA] \mathbf{1}_{I'}(H_m^{s,n}) \geq \mathbf{1}_{I'}^2(H_m^{s,n}) + \mathbf{1}_{I'}(H_m^{s,n}) K \mathbf{1}_{I'}(H_m^{s,n}).$$

Comme λ n'est pas une valeur propre de $H_m^{s,n}$, $\mathbb{1}_{I'}(H_m^{s,n})$ tend fortement vers 0 quand la taille de I' diminue (grâce au théorème spectral). Comme K est compact, nous en déduisons que $\mathbb{1}_{I'}(H_m^{s,n}) K \mathbb{1}_{I'}(H_m^{s,n})$ tend vers 0 en norme. Nous pouvons alors choisir I' suffisamment petit pour que :

$$\|\mathbb{1}_{I'}(H_m^{s,n}) K \mathbb{1}_{I'}(H_m^{s,n})\| < \epsilon$$

avec $0 < \epsilon < 1$. Nous obtenons ainsi :

$$\mathbb{1}_{I'}(H_m^{s,n}) [H_m^{s,n}, iA] \mathbb{1}_{I'}(H_m^{s,n}) \geq (1 - \epsilon) \mathbb{1}_{I'}^2(H_m^{s,n})$$

pour tout $0 < \epsilon < 1$.

Q.E.D

Ce dernier corollaire nous permet d'obtenir l'absence de spectre singulier continu pour notre opérateur :

Proposition 1.5.9. *Le spectre singulier continu de l'opérateur $H_m^{s,n}$ est vide.*

Preuve. D'après le corollaire précédent, une estimation de Mourre avec $K = 0$ est vérifiée par le couple $(H_m^{s,n}, \mathcal{A})$ sur tout intervalle suffisamment petit $I \subset \mathbb{R}$. D'après le corollaire 1.5.5, nous en déduisons le résultat. Q.E.D

1.6 Estimations de propagation

Dans cette section, nous commençons par introduire le cadre abstrait des estimations de propagation dont nous nous servons dans la deuxième partie pour prouver, dans un premier temps, une estimation de vitesse minimale :

$$\int_1^\infty \left\| J_- \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \chi(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} u \right\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n} \quad (1.6.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J_- \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} u = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n}. \quad (1.6.2)$$

valables pour tout $m > 0$ avec $J_- \in C^\infty$ telle que le support de J_- soit inclus dans $] -\infty, 1 - \epsilon[$, $J_-(x) = 1$ pour tout $x \in] -\infty, 1 - 2\epsilon[$ et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Dans un second temps, nous obtenons l'estimation de vitesse maximale suivante :

$$\int_1^\infty \left\| J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} \zeta(H_m^{s,n}) u \right\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n} \quad (1.6.3)$$

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} = 0, \quad (1.6.4)$$

valable pour tout $m > 0$ avec $J \in C^\infty$ telle que $\text{supp}(J) \subset]1 + \epsilon, \infty[$ avec $\epsilon > 0$, $J(x) = 1$ pour tout $x \in]1 + 2\epsilon, \infty[$ et $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

1.6.1 Estimations de propagation abstraites

Nous présentons ici les estimations de propagation abstraites dont les démonstrations peuvent être trouvées dans [21].

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $(H, D(H))$ un opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H} . Soit $\Phi(t)$ une fonction C^1 uniformément bornée à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie sur \mathbb{R}^+ . Définissons sa dérivée de Heisenberg par :

$$\mathbb{D}\Phi(t) := \frac{d}{dt} \Phi(t) + i[H, \Phi(t)].$$

Le principe de base

Lemme 1.6.1. [21, Lemme B.4.1, B.4.2] Soit $\Phi(t)$ une fonction C^1 uniformément bornée à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie sur \mathbb{R}^+ .

i) S'il existe des fonctions mesurables $B_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec

$$\mathbb{D}\Phi(t) \geq C_0 B^*(t) B(t) - \sum_{i=1}^n B_i^*(t) B_i(t)$$

telles que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\int_1^\infty \|B_i(t) e^{-itH} u\|^2 dt \leq C \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

alors il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\int_1^\infty \|B(t) e^{-itH} u\|^2 dt \leq C_1 \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

ii) Supposons que la fonction Φ satisfait

$$|\langle \psi_2, \mathbb{D}\Phi(t) \psi_1 \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \|B_{2,i}(t) \psi_2\| \|B_{1,i}(t) \psi_1\|,$$

avec

$$\int_1^\infty \|B_{2,i}(t) e^{-itH} u\|^2 dt \leq C_1 \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}$$

et

$$\int_1^\infty \|B_{1,i}(t) e^{-itH} u\|^2 dt \leq C_1 \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{D},$$

où \mathcal{D} est un ensemble dense dans \mathcal{H} . Alors la limite

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH} \Phi(t) e^{-itH}$$

existe.

Estimation de vitesse minimale abstraite

Proposition 1.6.2. [41, Proposition A.1] Soit $H \in C^{1+\epsilon}(\mathcal{A})$. Soit Δ un intervalle tel que

$$\mathbf{1}_\Delta(H) [H, i\mathcal{A}] \mathbf{1}_\Delta(H) \geq c_0 \mathbf{1}_\Delta(H).$$

Alors, pour tout $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp}(g) \subset (-\infty, c_0)$ et tout $f \in C_0^\infty(\Delta)$, nous avons :

$$\int_1^\infty \left\| g\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) f(H) e^{-itH} u \right\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} g\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) f(H) e^{-itH} = 0.$$

1.6.2 Estimations de propagation pour l'opérateur de Dirac

Nous avons vu que $[H_m^{s,n}, i\mathcal{A}]$ admettait une extension bornée de $D(\mathcal{A}) \cap D(H_m^{s,n})$ à $D(H_m^{s,n})$. Notons cette extension $[H_m^{s,n}, i\mathcal{A}]_0$. Calculons le commutateur :

$$[[H_m^{s,n}, i\mathcal{A}]_0, i\mathcal{A}] = 4 \left(\left(s + \frac{1}{2} \right) x^2 A(x) \gamma^2 \gamma^0 + mx^2 B(x) \gamma^0 \right), \quad (1.6.5)$$

de sorte que $[[H_m^{s,n}, i\mathcal{A}]_0, i\mathcal{A}]$ s'étend en un opérateur borné de $D(H_m^{s,n})$ dans $\mathcal{H}_{s,n}$. Utilisant le lemme 1.5.3, nous en déduisons que $H \in C^2(\mathcal{A})$. Ceci couplé à l'estimation de Mourre obtenue dans la proposition 1.5.7 et un argument de partition de l'unité nous donne :

Proposition 1.6.3. *Pour tout $m > 0$, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp}(g) \subset (-\infty, 1 - \delta)$, et tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, nous avons :*

$$\int_1^\infty \left\| g \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) f(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} u \right\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n}, \quad (1.6.6)$$

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} g \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} = 0. \quad (1.6.7)$$

Preuve de la proposition 1.6.3. D'après le corollaire 1.5.8, nous avons :

$$\mathbf{1}_I [H, i\mathcal{A}] \mathbf{1}_I \geq (1 - \epsilon) \mathbf{1}_I$$

avec ϵ aussi petit qu'on veut. Pour $f \in C_0^\infty(I)$, le résultat suit alors directement des estimations de vitesse minimale abstraite. Supposons maintenant que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Nous pouvons alors recouvrir le support de f par un nombre fini d'intervalles I_1, \dots, I_n sur lesquelles une estimation de Mourre est vérifiée. Nous considérons ensuite une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement η_1, \dots, η_n . Notons $f_i = \eta_i f$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \left\| g \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) f(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} u \right\|^2 \frac{dt}{t} &\leq \sum_{i=1}^n \int_1^\infty \left\| g \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) f_i(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} u \right\|^2 \frac{dt}{t} \\ &\leq C_n \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n}, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} s - \lim_{t \rightarrow \infty} g \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) f(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} &= \sum_{i=1}^n s - \lim_{t \rightarrow \infty} g \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) f_i(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notons 1 la fonction constante égale à 1. Nous pouvons choisir une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions $C_0^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $u \in \mathcal{H}_{s,n}$, nous pouvons écrire :

$$g \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} u = g \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} (1 - f_n)(H_m^{s,n}) u + g \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} f_n(H_m^{s,n}) u.$$

Par passage à la limite, nous obtenons :

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} g \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} = 0. \quad (1.6.8)$$

Q.E.D

La proposition 1.6.3 nous permet d'obtenir le lemme :

Lemme 1.6.4. *Soit $J_- \in C^\infty$ telle que le support de J_- soit inclus dans $] -\infty, 1 - \epsilon[$ et $J_-(x) = 1$ pour tout $x \in] -\infty, 1 - 2\epsilon[$ et soit $\chi \in C_0^\infty$. Alors, pour tout $m > 0$, nous avons :*

$$\int_1^\infty \left\| J_- \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \chi(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} u \right\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n} \quad (1.6.9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J_- \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} u = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n}. \quad (1.6.10)$$

Preuve. 1) Soit $\theta_1, \theta_2 \in C^\infty$ telles que $\text{supp}(\theta_1) \subset] -\infty, -1 - \frac{\epsilon}{2}[$, $\text{supp}(\theta_2) \subset] -1 - \epsilon, 1 - \epsilon[$ et $\theta_1 + \theta_2 = 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \left\| J_- \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \chi(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} u \right\|^2 &\leq C \left(\left\| (\theta_1 J_-) \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \chi(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} u \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| (\theta_2 J_-) \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \chi(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} u \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

Ici, le deuxième terme est intégrable par les estimations de vitesse minimale. Soit donc $K \in C^\infty$ telle que $\text{supp}(K) \subset] -\infty, -1 - \frac{\epsilon}{2}[$ et telle que $K(x) = 1$ pour tout $x \in] -\infty, -1 - \epsilon[$. Définissons $F(s) = \int_s^\infty K^2(t) dt$ et $\Phi(t) = \chi(H_m^{s,n}) F\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) \chi(H_m^{s,n})$ de sorte que Φ soit C^1 , uniformément bornée. Rappelons que :

$$F\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) = \begin{pmatrix} F\left(\frac{x}{t}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F\left(-\frac{x}{t}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F\left(-\frac{x}{t}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F\left(\frac{x}{t}\right) \end{pmatrix}.$$

Rappelons également les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^1 &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^0 \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^1 \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma^2 F\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) - F\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) \gamma^0 \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -F\left(\frac{-x}{t}\right) & 0 & 0 \\ -F\left(\frac{x}{t}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F\left(\frac{x}{t}\right) \\ 0 & 0 & F\left(\frac{-x}{t}\right) & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 & -F\left(\frac{x}{t}\right) & 0 & 0 \\ -F\left(\frac{-x}{t}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F\left(\frac{-x}{t}\right) \\ 0 & 0 & F\left(\frac{x}{t}\right) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(F\left(\frac{-x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right) \right) \gamma^1 \gamma^2, \end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned} \gamma^0 F\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) - F\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) \gamma^0 &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & F\left(\frac{-x}{t}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F\left(\frac{x}{t}\right) \\ -F\left(\frac{x}{t}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F\left(\frac{-x}{t}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - i \begin{pmatrix} 0 & 0 & F\left(\frac{x}{t}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F\left(\frac{-x}{t}\right) \\ -F\left(\frac{-x}{t}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F\left(\frac{x}{t}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(F\left(\frac{-x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right) \right) \gamma^1. \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\mathbb{D}\Phi(t) = \frac{1}{t} \chi(H_m^{s,n}) \frac{\mathcal{A}}{t} K^2\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) \chi(H_m^{s,n}) + i \chi(H_m^{s,n}) \left[H_m^{s,n}, F\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) \right] \chi(H_m^{s,n}),$$

où

$$\begin{aligned} \left[H_m^{s,n}, F\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) \right] &= \frac{i}{t} K^2\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) + \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) \left(F\left(\frac{-x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right) \right) \gamma^1 \gamma^2 \\ &\quad - mB(x) \left(F\left(\frac{-x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right) \right) \gamma^1, \end{aligned}$$

avec

$$\left| F\left(\frac{-x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right) \right| \leq -\frac{2x}{t} \sup_{y \in \left[\frac{x}{t}, -\frac{x}{t}\right]} K^2(y).$$

Or ce supremum est non nul seulement si $x \leq \left(-1 - \frac{\epsilon}{2}\right)t$ ce qui nous donne :

$$\sup_{y \in \left[\frac{x}{t}, -\frac{x}{t}\right]} K^2(y) \leq \mathbb{1}_{\{x \leq \left(-1 - \frac{\epsilon}{2}\right)t\}},$$

où $\mathbb{1}$ désigne la fonction indicatrice et $\sup_{y \in \left[\frac{x}{t}, -\frac{x}{t}\right]} K^2(y)$ est vu comme une fonction dépendante des variables x et t . Or nous savons que pour x suffisamment petit, les fonctions A et B décroissent exponentiellement vite, de sorte que, si on se fixe T suffisamment grand, alors pour tout $t \geq T$, nous avons :

$$\begin{aligned} \left| A(x) \left(F\left(\frac{-x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right) \right) \right| &\leq \frac{-2x}{t(-x)^2} \mathbb{1}_{\{x \leq \left(-1 - \frac{\epsilon}{2}\right)t\}} \\ &\leq \frac{C}{t^2} \mathbb{1}_{\{x \leq \left(-1 - \frac{\epsilon}{2}\right)T\}}, \end{aligned}$$

puisque $e^x \leq \frac{1}{-x^2}$ pour x suffisamment petit. Nous pouvons faire de même avec B . Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} -\mathbb{D}\Phi(t) &= \frac{1}{t} \chi(H_m^{s,n}) \left(1 - \frac{\mathcal{A}}{t} \right) K^2\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) \chi(H_m^{s,n}) + O(t^{-2}) \\ &\geq \frac{2 + \frac{\epsilon}{2}}{t} \chi(H_m^{s,n}) K^2\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) \chi(H_m^{s,n}) + O(t^{-2}), \end{aligned}$$

puisque $\frac{\mathcal{A}}{t} \leq -1 - \frac{\epsilon}{2}$ sur le support de K^2 . Ceci nous montre que :

$$\int_1^\infty \left\| K \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \chi(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} u \right\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|u\|^2 \quad (1.6.11)$$

pour tout $u \in \mathcal{H}_{s,n}$. Ainsi nous avons prouvé que le premier terme était bien intégrable ce qui prouve la première partie du lemme.

2) Posons maintenant : $\Phi(t) = \chi(H_m^{s,n}) J_-^2 \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \chi(H_m^{s,n})$. Par un raisonnement similaire, nous avons :

$$\mathbb{D}\Phi(t) \leq \frac{4\epsilon}{t} \chi(H_m^{s,n}) (J'_- J_-) \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \chi(H_m^{s,n}) + O(t^{-2}),$$

où $\text{supp}(J'_- J_-) \subset]1 - 2\epsilon, 1 - \epsilon[$ est intégrable par les estimations de vitesse minimale. Ceci couplé à la première partie, nous donne :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m^{s,n}} \chi(H_m^{s,n}) J_-^2 \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \chi(H_m^{s,n}) e^{-itH_m^{s,n}} u = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n}.$$

puis nous obtenons la deuxième partie du lemme en raisonnant par densité comme dans la proposition précédente.

Q.E.D

Nous avons aussi l'estimation de vitesse maximale suivante :

Proposition 1.6.5. *Soit $J \in C^\infty$ telle que $\text{supp}(J) \subset]1 + \epsilon, \infty[$ avec $\epsilon > 0$ et telle que $J(x) = 1$ pour tout $x \in]1 + 2\epsilon, \infty[$. Soit $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $m > 0$, nous avons :*

$$\int_1^\infty \left\| J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} \zeta(H_m^{s,n}) u \right\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n} \quad (1.6.12)$$

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} = 0. \quad (1.6.13)$$

Preuve de la proposition 1.6.5. Soit $J \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp}(J) \subset (1 + \epsilon, +\infty)$ avec $\epsilon > 0$ et $J(x) = 1$ pour tout $x \in]1 + 2\epsilon, +\infty[$. Soit $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Définissons :

$$F(s) = \int_{-\infty}^s J^2(u) du.$$

Considérons alors l'observable :

$$\Phi(t) = \zeta(H_m^{s,n}) F \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \zeta(H_m^{s,n}).$$

Remarquons que Φ est C^1 et uniformément bornée. Calculons la dérivée de Heisenberg de Φ :

$$\mathbb{D}\Phi(t) = \frac{d}{dt} \Phi(t) + i[H_m^{s,n}, \Phi(t)].$$

Nous avons :

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = -\frac{1}{t} \zeta(H_m^{s,n}) \frac{\mathcal{A}}{t} J^2 \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \zeta(H_m^{s,n})$$

D'autre part, nous avons :

$$[H_m^{s,n}, \Phi(t)] = \zeta(H_m^{s,n}) \left[H_m^{s,n}, F\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) \right] \zeta(H_m^{s,n}),$$

où :

$$\begin{aligned} \left[H_m^{s,n}, F\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) \right] &= -\frac{i}{t} J^2\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) + \left(s + \frac{1}{2}\right) A(x) \left(F\left(-\frac{x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right)\right) \gamma^1 \gamma^2 \\ &\quad - mB(x) \left(F\left(-\frac{x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right)\right) \gamma^1. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} -\mathbb{D}\Phi(t) &\geq \frac{\epsilon}{t} \zeta(H_m^{s,n}) J^2\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) \zeta(H_m^{s,n}) + \zeta(H_m^{s,n}) \left(i \left(s + \frac{1}{2}\right) A(x) \right. \\ &\quad \left. \left(F\left(-\frac{x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right)\right) \gamma^2 \gamma^1 + imB(x) \left(F\left(-\frac{x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right)\right) \gamma^1 \right) \zeta(H_m^{s,n}). \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

Il nous faut estimer les restes. Nous avons :

$$\left| F\left(-\frac{x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right) \right| \leq \frac{-2x}{t} \sup_{y \in \left[\frac{x}{t}, -\frac{x}{t}\right]} J^2(y) \mathbb{1}_{\{1+\epsilon \leq -\frac{x}{t}\}}$$

où $\mathbb{1}$ désigne la fonction indicatrice. Ainsi pour $t > E$ où E est une constante suffisamment grande, nous avons :

$$\begin{aligned} \left| A(x) \left(F\left(-\frac{x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right)\right) \right| &\leq CA(x) \frac{-2x}{t} \mathbb{1}_{\{(1+\epsilon)t \leq -x\}}(x) \\ \left| B(x) \left(F\left(-\frac{x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right)\right) \right| &\leq CB(x) \frac{-2x}{t} \mathbb{1}_{\{(1+\epsilon)t \leq -x\}}(x), \end{aligned}$$

où C est une constante qui pourra changer au cours des calculs. Or, pour x suffisamment petit (ou encore $-x$ suffisamment grand), A et B décroissent exponentiellement vite, par conséquent :

$$\begin{aligned} \left| A(x) \left(F\left(-\frac{x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right)\right) \right| &\leq C e^{\frac{\kappa}{2}x} e^{-\frac{\kappa}{2}(1+\epsilon)t} \frac{-2x}{t} \mathbb{1}_{\{(1+\epsilon)E \leq -x\}}, \\ \left| B(x) \left(F\left(-\frac{x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right)\right) \right| &\leq C e^{\frac{\kappa}{2}x} e^{-\frac{\kappa}{2}(1+\epsilon)t} \frac{-2x}{t} \mathbb{1}_{\{(1+\epsilon)E \leq -x\}}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &\zeta(H_m^{s,n}) \left(i \left(s + \frac{1}{2}\right) A(x) \left(F\left(-\frac{x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right)\right) \gamma^2 \gamma^1 \right. \\ &\quad \left. + imB(x) \left(F\left(-\frac{x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{t}\right)\right) \gamma^1 \right) \zeta(H_m^{s,n}) = O\left(e^{-\frac{\kappa}{2}t}\right). \end{aligned} \quad (1.6.15)$$

Nous en déduisons que :

$$\int_1^\infty \left\| J\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) e^{-itH_m^{s,n}} \zeta(H_m^{s,n}) u \right\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{s,n}. \quad (1.6.16)$$

Choisissons maintenant l'observable suivant :

$$\Phi(t) = \zeta(H_m^{s,n}) J^2 \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \zeta(H_m^{s,n}).$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\Phi(t) &= \frac{2}{t} \zeta(H_m^{s,n}) \frac{-\mathcal{A}}{t} J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) J' \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \zeta(H_m^{s,n}) + \frac{2}{t} \zeta(H_m^{s,n}) J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) J' \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) \zeta(H_m^{s,n}) \\ &+ \zeta(H_m^{s,n}) \left(i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) \left(J^2 \left(\frac{-x}{t} \right) - J^2 \left(\frac{x}{t} \right) \right) \gamma^2 \gamma^1 \right. \\ &\left. + imB(x) \left(J^2 \left(\frac{-x}{t} \right) - J^2 \left(\frac{x}{t} \right) \right) \gamma^1 \right) \zeta(H_m^{s,n}). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont intégrables grâce au support de J et à (1.6.16). Les deux derniers sont aussi intégrables par un raisonnement similaire en utilisant le support de J . Par conséquent, la limite :

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} \zeta(H_m^{s,n})$$

existe et est nulle par (1.6.16). Nous pouvons prouver par un raisonnement de densité similaire à celui réalisé dans la preuve de la proposition 1.6.3 que :

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} = 0 \quad (1.6.17)$$

Q.E.D

1.7 Complétude asymptotique

Dans cette section, nous utilisons les estimations de vitesse minimale et maximale afin d'obtenir un théorème de complétude asymptotique pour l'opérateur $H_m^{s,n}$ avec $H_c = i\gamma^0\gamma^1\partial_x$, où $\gamma^0\gamma^1 = \text{diag}(-1, 1, 1, -1)$, comme opérateur donnant la dynamique libre. Nous sommes ensuite sur les harmoniques sphériques pour obtenir le :

Théorème 1.7.1 (Complétude asymptotique). *Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$ et pour tout $m > 0$, les limites :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} e^{-itH_m} \varphi \quad (1.7.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} e^{-itH_c} \varphi \quad (1.7.2)$$

existent. Désignons par :

$$\Omega\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} e^{-itH_m} \varphi \quad (1.7.3)$$

$$W\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} e^{-itH_c} \varphi \quad (1.7.4)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$. Alors nous avons :

$$\Omega^* = W. \quad (1.7.5)$$

1.7.1 Opérateur de comparaison

Notre opérateur de comparaison sera l'opérateur H_c défini par :

$$H_c = i\gamma^0\gamma^1\partial_x, \quad (1.7.6)$$

où $\gamma^0\gamma^1 = \text{diag}(-1, 1, 1, -1)$ et muni du domaine :

$$D(H_c) = \{\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}; H_c\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}, \varphi_1(0) = -\varphi_3(0), \varphi_2(0) = \varphi_4(0)\}. \quad (1.7.7)$$

D'après la proposition 1.4.2, cette opérateur est auto-adjoint sur son domaine.

1.7.2 Complétude asymptotique

Rappelons qu'ici $A = \Gamma x$ où $\Gamma = -\gamma^0\gamma^1$. Nous sommes maintenant en mesure de prouver le :

Théorème 1.7.2 (Complétude asymptotique à harmonique fixée). *Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}$ et pour tout $m > 0$, les limites :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} e^{-itH_m^{s,n}} \varphi \quad (1.7.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m^{s,n}} e^{-itH_c} \varphi \quad (1.7.9)$$

existent. Désignons par :

$$\Omega_{s,n}\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} e^{-itH_m^{s,n}} \varphi \quad (1.7.10)$$

$$W_{s,n}\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m^{s,n}} e^{-itH_c} \varphi \quad (1.7.11)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}$. Alors nous avons :

$$\Omega_{s,n}^* = W_{s,n} \quad (1.7.12)$$

Preuve. Étant donné que notre opérateur n'admet pas de valeurs propres et que le spectre singulier continu est vide d'après 1.5.9, nous pouvons prouver l'existence des limites du théorème pour $\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}$. Soient $J_-, J_0, J_+ \in C^\infty$ telles que $J_- + J_0 + J_+ = 1$, les supports de J_-, J_+ étant comme dans la proposition 1.6.5 et le lemme 1.6.4, et $J_0 = 1$ sur $]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$, $\text{supp}(J_0) \subset]1 - 2\epsilon, 1 + 2\epsilon[$ avec $\epsilon > 0$. D'après la proposition 1.6.5 et le lemme 1.6.4, ils nous suffit de prouver que, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}$, la limite :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} J_0 \left(\frac{A}{t} \right) e^{-itH_m^{s,n}} \varphi$$

existe. Pour cela, remarquons que $J_0 \left(\frac{x}{t} \right) \neq 0$ si et seulement si $x \geq (1 - 2\epsilon)t > 0$ puisque ϵ est supposé suffisamment petit. Or, dans notre cas, nous savons que $x < 0$, donc ici $J_0 \left(\frac{x}{t} \right) = 0$, pour tout $t > 0$ et tout $x < 0$. Ainsi nous pouvons écrire :

$$J_0 \left(\frac{A}{t} \right) = J_0 \left(\frac{-x}{t} \right) M_0,$$

où M_0 est la matrice dont la diagonale est $(0, 1, 1, 0)$ et le reste des coefficients sont nuls. Définissons :

$$\Phi(t) = \chi(H_c) J_0^2 \left(\frac{A}{t} \right) \chi(H_m^{s,n}),$$

et calculons :

$$\mathbb{D}\Phi(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t) + i(H_c\Phi(t) - \Phi(t)H_m^{s,n}).$$

Ainsi, en notant $V(x) = (s + \frac{1}{2})A(x)\gamma^0\gamma^2 - mB(x)\gamma^0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\Phi(t) &= \frac{2}{t}\chi(H_c)\left(\frac{x}{t} + 1\right)(J'_0J_0)\left(\frac{-x}{t}\right)M_0\chi(H_m^{s,n}) \\ &\quad - i\chi(H_c)J_0^2\left(\frac{-x}{t}\right)M_0V(x)\chi(H_m^{s,n}). \end{aligned}$$

Or sur le support de J'_0J_0 , nous avons $\frac{-x}{t} \geq 1 - 2\epsilon$ de sorte que $\frac{x}{t} + 1 \leq 2\epsilon$. De plus, $J_0\left(\frac{-x}{t}\right) \neq 0$ si et seulement si $-(1 + 2\epsilon)t \leq x \leq -(1 - 2\epsilon)t$. Comme A, B décroissent exponentiellement vite en $-\infty$, nous obtenons :

$$\mathbb{D}\Phi(t) \leq \frac{4\epsilon}{t}\chi(H_c)(J'_0J_0)\left(\frac{A}{t}\right)\chi(H_m^{s,n}) + O(t^{-2}).$$

Utilisant le fait que $\text{supp}(J'_0J_0) \subset]1 - 2\epsilon, 1 - \epsilon[\cup]1 + \epsilon, 1 + 2\epsilon[$, et grâce aux estimations de vitesse minimale (1.6.6) et maximale (1.6.12), nous obtenons l'intégrabilité du membre de droite. Ceci prouve que la première limite de notre théorème existe. Nous pouvons montrer de la même manière que la deuxième limite existe. Enfin, pour tout $t > 0$ et tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{s,n}$, nous avons :

$$\left\langle e^{itH_c}e^{-itH_m^{s,n}}\varphi, \psi \right\rangle = \left\langle \varphi, e^{itH_m^{s,n}}e^{-itH_c}\psi \right\rangle,$$

ce qui prouve la dernière assertion par passage à la limite.

Q.E.D

Par suite, nous obtenons le :

Théorème 1.7.3 (Complétude asymptotique). *Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$ et pour tout $m > 0$, les limites :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c}e^{-itH_m}\varphi \tag{1.7.13}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m}e^{-itH_c}\varphi \tag{1.7.14}$$

existent. Désignons par :

$$\Omega\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c}e^{-itH_m}\varphi \tag{1.7.15}$$

$$W\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m}e^{-itH_c}\varphi \tag{1.7.16}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$. Alors nous avons :

$$\Omega^* = W \tag{1.7.17}$$

Preuve. Nous pouvons décomposer $\varphi = \sum_{(s,n) \in I} \varphi_{s,n}$ où $\varphi_{s,n} \in \mathcal{H}_{s,n}$ et $\sum_{(s,n) \in I} \|\varphi_{s,n}\|_{\mathcal{H}_{s,n}}^2 < \infty$.

Nous avons :

$$e^{itH_c}e^{-itH_m}\varphi = \sum_{(s,n) \in I} e^{itH_c}e^{-itH_m^{s,n}}\varphi_{s,n}$$

Comme $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c}e^{-itH_m^{s,n}}\varphi_{s,n} = \Omega_{s,n}\varphi_{s,n}$ existe pour tout $(s,n) \in I$ et que $e^{itH_c}e^{-itH_m^{s,n}}$ est unitaire, nous en déduisons, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c}e^{-itH_m}\varphi$$

existe et vaut $\sum_{(s,n) \in I} \Omega_{s,n}\varphi_{s,n}$. Nous pouvons faire de même pour W puisque e^{itH_c} conserve $\mathcal{H}_{s,n}$.

Q.E.D

1.8 Vitesse asymptotique

Dans cette section, nous introduisons tout d'abord la théorie dont nous aurons besoin pour étudier la vitesse asymptotique de H_m . Nous étudions ensuite la vitesse asymptotique pour l'opérateur H_c à l'aide d'une formule explicite pour la solution. L'équation vérifiée par H_c étant juste un transport à vitesse 1, il est logique de trouver que la vitesse asymptotique est l'opérateur identité. Utilisant la complétude asymptotique prouvée ci-dessus, nous obtenons alors :

Théorème 1.8.1 (Vitesse asymptotique pour H_m). *Soit $J \in C_\infty(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $m \neq \frac{1}{2i}$, la limite :*

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} J \left(\frac{A}{t} \right) e^{-itH_m} \quad (1.8.1)$$

existe. De plus, si $J(0) = 1$, alors

$$s - \lim_{R \rightarrow \infty} \left(s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} J \left(\frac{A}{Rt} \right) e^{-itH_m} \right) = 1. \quad (1.8.2)$$

Si l'on définit

$$s - C_\infty - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} \frac{A}{t} e^{-itH_m} =: P_m^+, \quad (1.8.3)$$

alors le vecteur d'opérateur auto-adjoints qui commutent P^+ est défini de manière dense et il commute avec l'hamiltonien H_m . L'opérateur P^+ est appelé la vitesse asymptotique.

Nous étudions ensuite le spectre de la vitesse asymptotique ce qui nous permet d'en déduire que P_+ est l'opérateur identité.

1.8.1 Théorie abstraite

Dans cette section, nous suivons l'appendice B.2 dans [21]. Considérons une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs d'opérateurs auto-adjoints qui commutent sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Plus précisément :

$$B_n = (B_n^1, \dots, B_n^m), \quad [B_n^i, B_n^j] = 0, \quad 0 \leq i, j \leq m, \quad n = 1, 2, \dots$$

Nous introduisons l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini $C_\infty(\mathbb{R}^m)$, et nous avons la proposition :

Proposition 1.8.2. *Supposons que, pour tout $g \in C_\infty(\mathbb{R}^m)$, il existe*

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} g(B_n). \quad (1.8.4)$$

Alors il existe un unique vecteur d'opérateurs auto-adjoints

$$B = (B^1, \dots, B^m) \quad (1.8.5)$$

tel que (1.8.4) soit égal à $g(B)$. B est défini de manière dense si, pour un certain $g \in C_\infty(\mathbb{R}^m)$ tel que $g(0) = 1$, nous avons :

$$s - \lim_{R \rightarrow \infty} \left(s - \lim_{n \rightarrow \infty} g(R^{-1}B_n) \right) = 1. \quad (1.8.6)$$

Nous définissons alors :

Définition 1.8.3. Sous les hypothèses de la proposition précédente, nous écrivons :

$$B = s - C_\infty - \lim_{n \rightarrow \infty} B_n. \quad (1.8.7)$$

Si la limite (1.8.4) est une limite en norme d'opérateurs, alors nous écrivons

$$B = C_\infty - \lim_{n \rightarrow \infty} B_n. \quad (1.8.8)$$

1.8.2 Vitesse asymptotique pour H_c

Dans cette section, nous allons étudier la vitesse asymptotique pour l'opérateur H_c défini par :

$$H_c = i\gamma^0\gamma^1\partial_x$$

muni du domaine $D(H_c) = \{\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}; H_c\varphi \in \mathcal{H}_{s,n}, \varphi_1(0) = -\varphi_3(0), \varphi_2(0) = \varphi_4(0)\}$. Rappelons que cet opérateur est auto-adjoint d'après 1.4.2.

Théorème 1.8.4 (Vitesse asymptotique pour H_c). *Soit $J \in C_\infty(\mathbb{R})$. Alors la limite :*

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_c} \quad (1.8.9)$$

existe et est égale à $J(1)\mathbb{1}$ où $\mathbb{1}$ est la fonction identité. De plus, si $J(0) = 1$, alors

$$s - \lim_{R \rightarrow \infty} \left(s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} J \left(\frac{\mathcal{A}}{Rt} \right) e^{-itH_c} \right) = \mathbb{1}. \quad (1.8.10)$$

Si nous définissons

$$s - C_\infty - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} \frac{\mathcal{A}}{t} e^{-itH_c} =: P_c^+, \quad (1.8.11)$$

alors l'opérateur auto-adjoint P_c^+ est défini de manière dense et commute avec H_c . P_c^+ est appelé la vitesse asymptotique.

Preuve. Rappelons que $\mathcal{A} = -\gamma^0\gamma^1x$ où $-\gamma^0\gamma^1 = \text{diag}(1, -1, -1, 1)$. Ainsi, pour $J \in C_\infty(\mathbb{R})$, nous avons $J\left(\frac{\mathcal{A}}{t}\right) = \text{diag}\left(J\left(\frac{x}{t}\right), J\left(-\frac{x}{t}\right), J\left(-\frac{x}{t}\right), J\left(\frac{x}{t}\right)\right)$. De plus, nous avons $H_c = i\gamma^0\gamma^1\partial_x$. Soit $\psi^0 \in D(H_c)$, nous souhaitons résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(t, x) &= iH_c \psi(t, x), \\ \psi(0, \cdot) &= \psi^0(\cdot) = (\psi_1^0(\cdot), \psi_2^0(\cdot), \psi_3^0(\cdot), \psi_4^0(\cdot)) \end{aligned}$$

où $iH_c = \text{diag}(1, -1, -1, 1)\partial_x$. Nous allons prouver que la formule :

$$\psi(t, x) = \begin{pmatrix} \psi_1^0(x+t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x+t) - \psi_3^0(-(x+t))\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x+t) \\ \psi_2^0(x-t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x-t) + \psi_4^0(-x+t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-t) \\ \psi_3^0(x-t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x-t) - \psi_1^0(-x+t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-t) \\ \psi_4^0(x+t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x+t) + \psi_2^0(-(x+t))\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x+t) \end{pmatrix}.$$

donne une solution explicite à ce problème. Puisque $x < 0$ dans notre cas, $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-t) = 0$ pour tout $t > 0$, mais nous avons besoin de ce terme pour la propriété de groupe de cette solution.

Nous prouvons tout d'abord que cette formule donne bien une solution de notre équation. En effet, pour tout $t > 0$, nous voyons que $\psi_3(t, 0) = \psi_3^0(-t)$ et $\psi_1(t, 0) = -\psi_3^0(-t)$ puisque $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(t) = 0$ pour $t > 0$. Ainsi $\psi_3(t, 0) = -\psi_1(t, 0)$. D'un autre côté, nous avons $\psi_2(t, 0) = \psi_2^0(-t)$ et $\psi_4(t, 0) = \psi_2^0(-t)$ ce qui nous donne $\psi_2(t, 0) = \psi_4(t, 0)$. Les conditions au bord sont donc satisfaites. Il reste à prouver que nous avons bien une solution. Pour la première composante, utilisant la condition au bord et dérivant au sens des distributions, nous obtenons :

$$\partial_t \psi_1(t, x) = \psi_1^{0'}(x+t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x+t) + \psi_3^{0'}(-(x+t))\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x+t).$$

Nous avons aussi :

$$\partial_x \psi_1^0(t, x) = \psi_1^{0'}(x+t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x+t) + \psi_3^{0'}(-(x+t))\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x+t)$$

ce qui donne $\partial_t \psi_1(t, x) = \partial_x \psi_1(t, x)$. Pour les deuxièmes et troisièmes composantes, $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x-t)$ est constante donc sa dérivée est 0 et nous pouvons vérifier que $\partial_t \psi_2(t, x) = -\partial_x \psi_2(t, x)$ et $\partial_t \psi_3(t, x) = -\partial_x \psi_3(t, x)$. Pour la quatrième composante, nous obtenons :

$$\partial_t \psi_4(t, x) = \psi_4^0{}'(x+t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x+t) - \psi_2^0{}'(-(x+t)) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x+t).$$

Nous avons la même chose pour $\partial_x \psi_4(t, x)$ de sorte que $\partial_t \psi_4(t, x) = \partial_x \psi_4(t, x)$. Nous avons donc $\partial_t \psi(t, x) = iH_c \psi(t, x)$ au sens des distributions. Comme $\psi^0 \in D(H_c)$, les dérivées sont, en fait, bien définies dans $\mathcal{H}_{s,n}$ et l'égalité est satisfaite dans $\mathcal{H}_{s,n}$. Nous avons donc bien une solution.

Intéressons nous maintenant à la vitesse asymptotique. Nous avons :

$$\begin{aligned} & e^{itH_c} J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_c} \psi^0 \\ &= \begin{pmatrix} J \left(\frac{x}{t} + 1 \right) (\psi_1^0(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x+t) + \psi_1^0(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(-x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x+t)) \\ J \left(-\frac{x}{t} + 1 \right) (\psi_2^0(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x-t)) \\ J \left(-\frac{x}{t} + 1 \right) (\psi_3^0(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x-t)) \\ J \left(\frac{x}{t} + 1 \right) (\psi_4^0(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x+t) + \psi_4^0(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(-x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x+t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ce dernier terme converge vers $J(1) \psi^0(x)$ quand $t \rightarrow \infty$. Comme $J, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}$ sont bornées et $\psi^0 \in \mathcal{H}_{s,n}$, nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_c} \psi^0 = J(1) \psi^0.$$

Si $J \in C_\infty(\mathbb{R})$ with $J(0) = 1$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} J \left(\frac{\mathcal{A}}{Rt} \right) e^{-itH_c} \psi^0 = J \left(\frac{1}{R} \right) \psi^0,$$

et le dernier terme tend vers $J(0) \psi^0 = \psi^0$. Ceci donne donc :

$$s - \lim_{R \rightarrow \infty} \left(s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} J \left(\frac{\mathcal{A}}{Rt} \right) e^{-itH_c} \right) = \mathbf{1}.$$

La dernière partie du théorème suit de la théorie abstraite. Q.E.D

Nous allons maintenant étudier le spectre de l'opérateur P_0^+ :

Proposition 1.8.5. $\sigma(P_0^+) = \{1\}$

Preuve. Soit $J \in C_\infty(\mathbb{R})$ telle que $J(1) = 0$. Nous pouvons approcher J par une suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions $C_0^\infty(\mathbb{R})$ nulles au voisinage de 1 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Par densité, nous pouvons donc supposer que $J \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et que J est nulle au voisinage de 1. Par les estimations de vitesse minimale (1.6.7) et maximale (1.6.13) (nous pouvons obtenir les mêmes estimations pour l'opérateur H_c , en introduisant par exemple les opérateurs d'ondes dont nous savons maintenant qu'ils existent), nous obtenons :

$$J(P_0^+) = s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} J \left(\frac{\mathcal{A}}{t} \right) e^{-itH_c} = 0. \quad (1.8.12)$$

Si, maintenant, nous avons $J(1) \neq 0$. Nous pouvons à nouveau supposer que $J \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est constante, non nulle, au voisinage de 1. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, nous avons :

$$\begin{aligned} J(P_0^+) \varphi - J(1) \varphi &= s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} J\left(\frac{A}{t}\right) e^{-itH_c} \varphi - J(1) \varphi \\ &= s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_c} \left(J\left(\frac{A}{t}\right) - J(1) \right) e^{-itH_c} \varphi. \end{aligned}$$

Comme $J(x) - J(1)$ est nulle au voisinage de 1, nous obtenons :

$$J(P_0^+) \varphi = J(1) \varphi \neq 0. \quad (1.8.13)$$

Ainsi le spectre de P_0^+ est bien réduit au singleton $\{1\}$. Q.E.D

Grâce au théorème spectral, nous en déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 1.8.6. $P_0^+ = \mathbb{1}$

1.8.3 Vitesse asymptotique pour H_m

Nous prouvons maintenant que la vitesse asymptotique pour H_m est 1 :

Théorème 1.8.7 (Vitesse asymptotique pour H_m). *Soit $J \in C_\infty(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $m > 0$, la limite :*

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} J\left(\frac{A}{t}\right) e^{-itH_m} \quad (1.8.14)$$

existe. De plus, si $J(0) = 1$, alors

$$s - \lim_{R \rightarrow \infty} \left(s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} J\left(\frac{A}{Rt}\right) e^{-itH_m} \right) = 1. \quad (1.8.15)$$

Si l'on définit

$$s - C_\infty - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} \frac{A}{t} e^{-itH_m} =: P_m^+, \quad (1.8.16)$$

alors P_m^+ est défini de manière dense et il commute avec l'hamiltonien H_m . L'opérateur P_m^+ est appelé la vitesse asymptotique.

Preuve. Nous pouvons écrire :

$$e^{itH_m} J\left(\frac{A}{t}\right) e^{-itH_m} = e^{itH_m} e^{itH_c} e^{itH_c} J\left(\frac{A}{t}\right) e^{-itH_c} e^{itH_c} e^{-itH_m}$$

Il nous faut donc montrer que la limite :

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} e^{-itH_c} e^{itH_c} J\left(\frac{A}{t}\right) e^{-itH_c} e^{itH_c} e^{-itH_m}$$

existe. Nous allons montrer qu'elle vaut $WJ(P_0^+)\Omega$ où W, Ω sont définis dans les théorèmes 1.7.3. Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, nous avons :

$$\begin{aligned} & e^{itH_m} e^{-itH_c} e^{itH_c} J\left(\frac{A}{t}\right) e^{-itH_c} e^{itH_c} e^{-itH_m} \varphi - WJ(P_0^+) \Omega \varphi \\ &= e^{itH_m} e^{-itH_c} e^{itH_c} J\left(\frac{A}{t}\right) e^{-itH_c} (e^{itH_c} e^{-itH_m} - \Omega) \varphi \\ &+ e^{itH_m} e^{-itH_c} \left(e^{itH_c} J\left(\frac{A}{t}\right) e^{-itH_c} - J(P_0^+) \right) \Omega \varphi + (e^{itH_m} e^{-itH_c} - W) J(P_0^+) \Omega \varphi. \end{aligned}$$

Ainsi, comme nos opérateurs sont uniformément bornés, nous avons :

$$\begin{aligned} & \left\| e^{itH_m} e^{-itH_c} e^{itH_c} J \left(\frac{A}{t} \right) e^{-itH_c} e^{itH_c} e^{-itH_m} \varphi - W J (P_0^+) \Omega \varphi \right\|_{\mathcal{H}} \\ & \leq C \left\| (e^{itH_c} e^{-itH_m} - \Omega) \varphi \right\|_{\mathcal{H}} + \left\| \left(e^{itH_c} J \left(\frac{A}{t} \right) e^{-itH_c} - J (P_0^+) \right) \Omega \varphi \right\|_{\mathcal{H}} \\ & \quad + \left\| (e^{-itH_c} - W) J (P_0^+) \Omega \varphi \right\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

où C est une constante dépendante de J . Nous voyons que tous les termes de droite dans l'inégalité tendent bien vers 0. Par conséquent, la limite :

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_m} J \left(\frac{A}{t} \right) e^{-itH_m} \quad (1.8.17)$$

existe. Nous pouvons faire le même raisonnement pour la deuxième limite. D'après la théorie abstraite, l'opérateur P_m^+ existe et nous avons :

$$J (P_m^+) = W J (P_0^+) \Omega \quad (1.8.18)$$

Q.E.D

Nous en déduisons la :

Proposition 1.8.8. $\sigma (P_m^+) = \{1\}$

Preuve. D'après la preuve précédente, nous avons :

$$J (P_m^+) = W J (P_0^+) \Omega,$$

pour tout $J \in C_\infty (\mathbb{R})$ où Ω, W sont unitaire et :

$$\Omega^{-1} = W.$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, nous avons :

$$\Omega W \varphi - \varphi = (\Omega - e^{itH_c} e^{-itH_m}) W \varphi + e^{itH_c} e^{-itH_m} (W - e^{itH_m} e^{-itH_c}) \varphi,$$

de sorte que :

$$\|\Omega W \varphi - \varphi\|_{\mathcal{H}} \leq \|(\Omega - e^{itH_c} e^{-itH_m}) W \varphi\|_{\mathcal{H}} + \|(W - e^{itH_m} e^{-itH_c}) \varphi\|_{\mathcal{H}}.$$

Ces deux derniers termes tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Par conséquent, $J (P_m^+)$ et $J (P_0^+)$ sont unitairement équivalents pour tout $J \in C_\infty (\mathbb{R})$ et P_m^+ admet donc le même spectre que P_0^+ c'est-à-dire $\sigma (P_m^+) = \{1\}$. Q.E.D

De nouveau grâce au théorème spectral :

Corollaire 1.8.9. $P_m^+ = \mathbf{1}$.

Chapitre 2

Contributions à l'étude des résonances pour les champs de Dirac en espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous souhaitons étudier la théorie des résonances pour notre équation. Pour ce faire, nous considérons notre opérateur H_m à harmonique sphérique fixée, que nous noterons encore H_m et qui admet la forme :

$$H_m = \Gamma^1 D_x + \left(s + \frac{1}{2} \right) \gamma^0 \gamma^2 A(x) - m \gamma^0 B(x).$$

Lorsque s est grand, nous pouvons tout diviser par $s + \frac{1}{2}$ et considérer $\frac{1}{s + \frac{1}{2}}$ comme un paramètre semi-classique que nous noterons h . Nous obtenons l'opérateur semi-classique défini par :

$$H_{m,h} = \Gamma^1 h D_x + \gamma^0 \gamma^2 A(x) - hm \gamma^0 B(x). \quad (2.1.1)$$

Dans un premier temps, nous souhaitons prouver l'existence de quasimodes, c'est-à-dire de solutions approchées de l'équation aux valeurs propres qui, dans notre cas, seront exponentiellement précises. Nous construirons ces quasimodes en considérant le carré P de notre opérateur et en suivant les lignes de l'article d'O. Gannot [38]. Nous étudions les éléments du domaine de ce carré dans le cas où la masse est suffisamment grande. Dans la partie concernant les quasimodes, nous choisissons $ml > 1$ pour des raisons techniques. Nous décrivons ensuite ce même opérateur défini non pas sur la demi-droite $] -\infty, 0[$ mais sur un intervalle J que nous notons P_J . Nous prouvons certaines estimations pour cet opérateur qui nous seront utiles dans les estimations d'Agmon. Enfin, nous décrivons un opérateur \tilde{P} obtenu grâce au comportement en 0 de nos potentiels. Cet opérateur admet une résolvante compacte et, par conséquent, des valeurs propres dont nous montrons qu'une d'entre elle se trouve à distance de l'ordre de h de la limite $\frac{1}{2}$ de A^2 en 0. Nous décrivons ensuite les estimations d'Agmon. Lorsque nous sommes en présence d'un potentiel admettant un puit, les particules ne peuvent pas, en considérant la théorie classique, traverser

la barrière déterminée par le bord du puit. De manière quantique, nous avons néanmoins une très faible probabilité de trouver cette particule là où elle ne peut apparaître classiquement. Les estimations d'Agmon nous disent en effet que, pour un vecteur propre de P^+ où P^+ est défini par la même formule que P sur un intervalle de la forme $]x_+, 0[$, nous avons une décroissance exponentielle de la norme L^2 de notre état dans la zone classiquement interdite. De manière plus précise, pour des voisinages Σ_1 et Σ_2 de cette zone tels que $\Sigma_1 \Subset \Sigma_2$, nous obtenons la proposition :

Proposition 2.1.1. *Soit $S > 0$ tel que $\frac{1}{\ell^2} + S < A^2(x_+)$. Ils existent des constantes $h_0 > 0$, $C > 0$, et $\epsilon > 0$ telles que :*

$$\|\varphi\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq C \left(e^{-\frac{\epsilon}{h}} \|\varphi\|_{L^2(\Sigma_2)} + \|(P^+ - E(h))\varphi\|_{L^2(\Sigma_2)} \right),$$

pour tout $h \in (0, h_0)$, $\varphi \in D(P^+)$, et pour tout $E(h)$ telle que $E(h) < \frac{1}{\ell^2} + S$.

Nous étudions ensuite la position des valeurs propres pour notre opérateur P^+ et prouvons qu'il existe une valeur propre $E^+(h)$ à distance $h^{\frac{1}{2}}$ de celle de \tilde{P} . Ceci nous permet d'obtenir un quasimode pour notre opérateur $H_{m,h}$ en utilisant un vecteur propre de P^+ pour la valeur propre $E^+(h)$ et en prolongeant ce vecteur propre sur la demi-droite $] -\infty, 0[$ grâce à une troncature. Lorsque nous appliquons l'opérateur $H_{m,h} - E^+(h)^{\frac{1}{2}}$ à cet état, il ne nous reste qu'une partie supportée dans la zone classiquement interdite et nous obtenons le résultat principal suivant :

Théorème 2.1.2. *Soit $S > 0$ tel que $\frac{1}{\ell^2} + S < A^2(x_+)$. Ils existent des constantes $h_0 > 0$, $D > 0$, un nombre réel $(E^+(h))^{\frac{1}{2}} > 0$ tel que $E^+(h) < \frac{1}{\ell^2} + S$ et une fonction $\varphi \in D(H_{m,h})$ telle que $\|\varphi\|_{L^2(]-\infty, 0])} = 1$ telle que :*

$$\left\| \left(H_{m,h} - (E^+(h))^{\frac{1}{2}} \right) \varphi \right\|_{L^2(]-\infty, 0])} \leq e^{-\frac{D}{h}},$$

pour tout $h \in (0, h_0)$.

L'existence de tels quasimode a été prouvée pour l'équation des ondes dans l'espace-temps de Schwarzschild-Anti-de Sitter dans [38] et dans l'espace-temps de Kerr-Anti-de Sitter dans [51] ce qui leur permet d'obtenir une borne inférieure sur la décroissance de l'énergie locale. Nous étudions ensuite l'énergie locale pour l'équation de Dirac et prouvons que la décroissance de l'énergie locale admet une borne inférieure logarithmique, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus pour l'équation des ondes dans [49] et [51]. Nous obtenons :

Théorème 2.1.3. *Pour tout compact $K \subset] -\infty, 0[$, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|=1} \ln(t) \|e^{itH} \varphi\|_{L^2(K)} \geq C.$$

Nous définissons ensuite les résonances pour notre opérateur H_m pour toutes les masses positives. Nous les définissons en tant que pôles de la résolvante $(H_m - \lambda)^{-1}$. Utilisant la théorie de Fredholm, nous décrivons tout d'abord l'extension méromorphe de la résolvante pour l'équation de Dirac sur une variété asymptotiquement hyperbolique avec deux bouts (on se place dans le cas où $x \in \mathbb{R}$) et redémontrons par des méthodes de dimension 1 un résultat plus général obtenu par C. Guillarmou, S. Moroianu et J. Park [43]. Nous considérons les opérateurs suivants :

$$H_c = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

où

$$H_1 = i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) \quad (2.1.3)$$

$$H_2 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) \quad (2.1.4)$$

et :

$$H = H_c - im \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} B(x), \quad (2.1.5)$$

où les potentiels A et B sont de nouveaux potentiels dont on suppose qu'ils décroissent exponentiellement en $\pm\infty$. Nous construisons des solutions de Jost l'opérateur H_c , c'est-à-dire des solutions de l'équation aux valeurs propres qui ne sont pas L^2 , puisque notre opérateur n'admet pas de valeurs propres, mais qui admettent un comportement précis en $\pm\infty$. Nous donnons un exemple de comportement attendu pour les solutions de Jost dans le :

Lemme 2.1.4. *Ils existent des solutions ω_{out}^\pm à l'équation $\tilde{H}_1 \varphi = \lambda \varphi$ vérifiant les comportements asymptotiques suivant :*

$$\begin{aligned} \omega_{out}^+(x) & \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} \\ -e^{i\lambda x} \end{pmatrix} \\ \omega_{out}^-(x) & \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ici, \tilde{H}_1 est unitairement équivalent à H_1 . Ceci nous permet de donner une formule pour la résolvante de H_c en utilisant celles obtenues pour les résolvantes de H_1 et H_2 qui, à équivalence unitaire près, sont de la forme :

$$\begin{aligned} (\tilde{H}_1 - \lambda)^{-1} u(x) &= \frac{-i}{W_1(\lambda)} \left(\int_{-\infty}^x \omega_{out}^+(x) (\omega_{out}^-(y))^\tau u(y) dy \right. \\ & \quad \left. + \int_x^{+\infty} \omega_{out}^-(x) (\omega_{out}^+(y))^\tau u(y) dy \right), \end{aligned}$$

où W_1 est un Wronskien donné dans (2.3.13). Nous pouvons ainsi étendre cette résolvante de manière méromorphe depuis le demi-plan supérieur jusqu'à une bande dans le demi-plan inférieur en laissant des pôles qui admettent une caractérisation en terme des Wronskiens de H_1 et H_2 . Pour l'opérateur entier H , nous procédons par perturbation grâce à la formule de la résolvante et au théorème de Fredholm qui nous permettent de prolonger la résolvante de H à travers l'axe réel de nouveau en laissant des pôles qui sont les résonances pour cet opérateur :

Proposition 2.1.5. *L'opérateur $f_\epsilon (H - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ défini pour $\text{Im}(\lambda) > 0$ s'étend de manière méromorphe à $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) > -\epsilon\}$ pour tout $\epsilon < \frac{\kappa}{2}$ où $f_\epsilon(x) = e^{-\epsilon|x|}$.*

Nous utilisons ce résultat pour prouver l'existence de résonances pour notre opérateur de Dirac dans l'espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter. Comme dans le lemme de compacité 1.4.1, nous introduisons deux opérateurs dont l'un admet un potentiel confinant, ce qui nous donne une résolvante compacte dont les pôles sont les valeurs propres de l'opérateur en question, et l'autre admet un potentiel tendant vers 0 en 0 et de manière exponentiellement rapide vers 0 en $-\infty$. Nous symétrisons ce dernier opérateur pour le considérer comme étant défini sur la droite entière et nous utilisons le résultat énoncé ci-dessus pour obtenir le prolongement méromorphe de la

résolvante de cet opérateur. Utilisant la même décomposition que dans le lemme de compacité et le théorème de Fredholm méromorphe, nous pouvons prouver que la résolvante de notre opérateur de Dirac H_m se prolonge de manière méromorphe à travers l'axe réel dans le théorème principal de cette section :

Proposition 2.1.6. *L'opérateur $f_\epsilon (H_m - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ défini pour $\text{Im}(\lambda) > 0$ s'étend de manière méromorphe à $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) > -\epsilon\}$ pour tout $0 < \epsilon < \frac{\kappa}{2}$ où κ est la gravité de surface et :*

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} e^{\epsilon x}, & x \sim -\infty, \\ C, & x \sim 0, \end{cases}$$

avec $C \in \mathbb{R}$ une constante.

Dans une troisième partie, nous étudions la possibilité de donner une formule explicite pour la résolvante de l'opérateur H_m . La motivation principale pour obtenir une telle formule est que la théorie de perturbation utilisée pour définir les résonances ne nous donne pas une bonne caractérisation de ces dernières alors qu'une formule pour la résolvante permet d'en obtenir une. Cette formule est similaire à celle utilisée pour l'expression de la résolvante de H_c . Nous devons néanmoins considérer deux types de solutions différentes dans le cas qui nous concerne

ici. Nous utilisons les solutions de Jost en $-\infty$, notées $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ et $\tilde{\psi} = (-i)\gamma^0\gamma^1\gamma^2\psi$, où les

matrices de Dirac sont données dans (1.2.24), mais aussi des solutions vérifiant les conditions

au bord, notées $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$ et $\tilde{\varphi} = (-i)\gamma^0\gamma^1\gamma^2\varphi$. En notant $\alpha = \varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2 + \varphi_3\psi_4 - \psi_3\varphi_4$,

$\beta = \varphi_1\psi_3 - \psi_1\varphi_3 + \varphi_2\psi_4 - \psi_2\varphi_4$ et :

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \beta \\ -\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

nous obtenons la formule :

Proposition 2.1.7. *Considérons la fonction définie par :*

$$R_m(x, y, \lambda) = \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 \mathbb{1}_{]-\infty, x[}(y) \\ + \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 \mathbb{1}_{]x, 0[}(y).$$

L'opérateur intégral donné par :

$$R_m(\lambda) f(x) = \int_{-\infty}^0 R_m(x, y, \lambda) f(y) dy.$$

vérifie

$$(H_m - \lambda)(R_m(\lambda) f)(x) = f(x).$$

pour tout $f \in [L^2(]-\infty, 0[)]^4$.

Enfin, grâce à cette formule de la résolvante, nous pouvons caractériser le fait d'être une résonance en utilisant les paramètres α et β . Nous souhaitons alors localiser ces résonances en utilisant la méthode BKW exacte. Cette méthode a été utilisée dans [40], [72], [36], [35] pour l'équation de Schrödinger scalaire, dans [33] pour l'équation de Schrödinger matricielle et dans [61] pour analyser le paradoxe de Klein concernant l'équation de Dirac. Dans le cas de l'équation de Schrödinger définie par l'opérateur :

$$H = -\partial_x^2 + V(x),$$

la méthode consiste à introduire une phase définie par $z(x) = \int_{x_0}^x (V(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt$. Nous effectuons alors le changement de variable, $\varphi = e^{-\frac{z}{h}} \psi$ et nous obtenons une nouvelle équation pour ψ en terme du paramètre z que nous pouvons résoudre sous forme d'une série en posant $\psi = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n$ et en obtenant des formules de récurrence sur les ψ_n de la forme :

$$\psi_{2n+1}(z) = \int_{\Gamma(z_0, z)} e^{2\frac{\zeta-z}{h}} W_{2n}(\zeta) d\zeta,$$

où $\Gamma(z_0, z)$ est un chemin joignant $z_0 = z(x_0)$ et z . Afin de pouvoir localiser les résonances, nous souhaitons obtenir des solutions qui admettent un développement en terme du paramètre h . Obtenir de tels développements n'est possible que le long de chemins pour lesquels $\text{Re}(z)$ augmente lorsque nous suivons ces chemins. Ces chemins sont transverses aux chemins vérifiant $\text{Re}(\zeta - z) = 0$ qui sont appelés les lignes de Stokes. Dans la première section de cette partie, nous étudions les lignes de Stokes en utilisant différentes phases selon les solutions que nous cherchons. Par exemple, pour notre opérateur $H_{m,h}$ défini dans (2.1.1), nous souhaitons construire des solutions définies sur un compact du plan complexe. Dans ce cas, nous choisissons la phase $z(x) = \int_{x_\alpha}^x (A^2(y) + h^2 m^2 B^2(y) - E^2)^{\frac{1}{2}} dy$, avec x_α un point du plan complexe. Il est nécessaire dans cette étude de faire un choix pour la détermination de la racine carrée et les points d'annulation de $A^2(y) + h^2 m^2 B^2(y) - E^2$, appelés les points tournants, doivent être évités pour que les formules soient bien définies. Pour donner l'allure des lignes de Stokes, nous simplifions notre problème en nous plaçant au voisinage des points tournants, au voisinage des extrémums du potentiel ainsi qu'au voisinage de 0 et sur un ouvert non borné ne contenant pas de point tournant où l'on peut analyser le comportement en $-\infty$ de ces lignes.

Une fois ces lignes déterminées, nous pouvons étudier l'existence des solutions de $(H_{m,h} - E)\varphi = 0$ admettant un développement en terme de h . Nous commençons ce travail en trouvant de telles solutions sur un sous-ensemble compact d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ ne contenant pas de point tournant. Utilisant des transformations similaires à celles réalisées dans [33] et [61], nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{dw}{dz}(z) = W_{h,m,+}(z) w(z) \quad (2.1.6)$$

où :

$$W_{h,m,+} = \begin{pmatrix} hN_h & M_{H,h} \\ M_{H,h} & -\frac{2}{h}I_2 + hN_h \end{pmatrix}$$

avec $M_{H,h}$ et N_h donnés dans (2.5.13) et (2.5.14). Nous pouvons résoudre ces équations en prenant w de la forme :

$$w = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} w_{4n} \\ w_{4n+1} \\ w_{4n+2} \\ w_{4n+3} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} U_{2n} \\ U_{2n+1} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons alors écrire :

$$U_{\pm}^{even}(x, h) = \sum_{n \geq 0} U_{2n, \pm}(z(x)), \quad U_{\pm}^{odd}(x, h) = \sum_{n \geq 0} U_{2n+1, \pm}(z(x)),$$

et nous obtenons finalement le résultat :

Proposition 2.1.8. *Les équations précédentes définissent des solutions U_{\pm}^{even} et U_{\pm}^{odd} . Pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous avons les développements :*

$$U_{\pm}^{even}(x, h) - \sum_{n=0}^N U_{2n, \pm}(z(x)) = O(h^{N+1})$$

$$U_{\pm}^{odd}(x, h) - \sum_{n=0}^N U_{2n+1, \pm}(z(x)) = O(h^{N+2})$$

uniformément sur tout compact de Ω .

Nous utilisons ces mêmes équations pour déterminer des solutions ayant un comportement précis en $-\infty$ et admettant un développement en terme de h . Nous appelons ces solutions des solutions de Jost BKW et utilisons la phase :

$$z(x) = iEx + \int_{-\infty}^x \frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)(t)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) + iE} dt$$

avec laquelle nous obtenons la :

Proposition 2.1.9. *Soit $\Gamma^l(z)$ un chemin infini se terminant en z , transverse aux lignes de Stokes, tel que $\text{Re}(\zeta - z) > 0$ le long de ce chemin et asymptote à la droite $\text{Im}(\zeta - z) = -\frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{\text{Im}(E) + a \text{Re}(E)} \text{Re}(\zeta - z)$. Le système d'équations récurrentes :*

$$\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ U_{2n+1}(z) = \int_{\Gamma^l(z)} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_-(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta \\ U_{2n+2}(z) = \int_{\Gamma^l(z)} M_{H,h}(\zeta) U_{2n+1}(\zeta) + hN_h(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta \end{cases}$$

admet une solution. De plus, $u = \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} U_{2n} \\ U_{2n+1} \end{pmatrix}$ est analytique dans $\Omega(E)$ où

$$U_{2n}(z) = O(h^n)$$

$$U_{2n+1}(z) = O(h^{n+1}).$$

Finalement, utilisant la transformation de Langer $x = -e^y$ et une analyse similaire à celle faite dans [35], nous prouvons l'existence de solution tendant vers 0 au bord et admettant un développement en h dans la :

Proposition 2.1.10. *Soit Γ_y l'image d'un chemin infini γ_y tel que $\text{Im}(y)$ est constante le long de γ_y . Le système d'équations récurrentes :*

$$\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ U_{2n+1}(z) = \int_{\Gamma_y} e^{\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_+(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta \\ U_{2n+2}(z) = \int_{\Gamma_y} M_{H,h}(\zeta) U_{2n+1}(\zeta) + hN_h(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta \end{cases}$$

admet une solution. De plus, $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \begin{pmatrix} U_{2n} \\ U_{2n+1} \end{pmatrix}$ vérifie :

$$u = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix} + u^0(x, h),$$

où $u^0(x, h) = O\left(\frac{x}{h}\right)$, quand $\frac{x}{h} \rightarrow 0$.

où nous avons utilisé la phase :

$$z(x) = \int_{x_0}^x (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) dt,$$

où x_0 est le point tournant le plus proche de 0.

Nous passons maintenant aux détails de ces différents résultats en commençant par l'analyse des quasimodes.

2.2 Quasimodes

Dans cette section, nous allons étudier l'existence de quasimodes pour l'opérateur :

$$H_{m,h} = i\gamma^0 \gamma^1 h \partial_x + \gamma^0 \gamma^2 A(x) - hm\gamma^0 B(x).$$

Les quasimodes sont des solutions approchées du problème $(H_{m,h} - E)\varphi = 0$. Pour construire ces solutions approchées, nous allons utiliser le carré $P_{m,h} = H_{m,h}^2$ de notre opérateur et suivre le cheminement mis en place dans l'article d'O. Gannot [38].

Nous étudions d'abord le domaine de $P_{m,h}$ puis nous considérons cet opérateur sur un intervalle de la forme $]x_+, 0[$ où x_+ est une constante négative. Nous notons $P_{m,h}^+$ cet opérateur. Enfin, nous introduisons un opérateur $\tilde{P}_{m,h}$ qui admet un potentiel confinant qui correspond au développement en 0 de A et B . Nous prouvons que cet opérateur admet une valeur propre à une distance $O(h)$ de $\frac{1}{l^2}$.

Nous donnons ensuite des estimations de Agmon pour l'opérateur $P_{m,h}^+$. Ces estimations nous disent que, si φ est un vecteur propre de $P_{m,h}^+$, alors la norme de φ décroît exponentiellement dans la zone où le potentiel est plus grand que la valeur propre (zone qui est classiquement interdite).

Dans une troisième partie, nous donnons une estimation permettant d'affirmer que $P_{m,h}^+$ admet une valeur propre à distance $O(h)$ de $\frac{1}{l^2}$.

Dans la quatrième partie, nous construisons les quasimodes à l'aide de l'estimation de Agmon que nous avons prouvée ce qui nous donne le résultat principal de cette section :

Théorème 2.2.1. *Soit $S > 0$ tel que $\frac{1}{l^2} + S < A^2(x_+)$. Ils existent des constantes $h_0 > 0$, $D > 0$, un nombre réel $(E^+(h))^{\frac{1}{2}} > 0$ et une fonction $\varphi \in D(H_{m,h})$ vérifiant $\|\varphi\|_{L^2(]-\infty, 0])} = 1$ telle que :*

$$\left\| \left(H_{m,h} - (E^+(h))^{\frac{1}{2}} \right) \varphi \right\|_{L^2(]-\infty, 0])} \leq e^{-\frac{D}{h}},$$

pour tout $h \in (0, h_0)$.

Finalement, nous en déduisons que l'énergie locale ne peut pas décroître plus rapidement que $\frac{1}{\ln(l)}$.

2.2.1 Étude des différents opérateurs considérés

Nous allons étudier les différents opérateurs dont nous aurons besoin, dans le même esprit que dans l'article d'O. Gannot [38]. Considérons tout d'abord l'opérateur :

$$H = i\gamma^0\gamma^1h\partial_x + \gamma^0\gamma^2A(x) - hm\gamma^0B(x)$$

où nous omettrons les indices m pour la masse et $h = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$, s étant le paramètre correspondant à une harmonique fixée. h est alors considéré comme un paramètre semi-classique. Rappelons les comportements en 0 de A et B :

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{l} + \frac{x^2}{2l^3} + o(x^2), \\ B(x) &= -\frac{l}{x} - \frac{x}{6l} + o(x). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A^2(x) &= \frac{1}{l^2} + \frac{x^2}{l^4} + o(x^2), \\ B^2(x) &= \frac{l^2}{x^2} + \frac{1}{3l} + o(1), \\ A'(x) &= \frac{x}{l^3} + o(x), \\ B'(x) &= \frac{l}{x^2} - \frac{1}{6l} + o(1). \end{aligned}$$

Nous nous placerons dans le cas $ml > 1$ pour lequel le domaine de cet opérateur est :

$$D(H) = \{\varphi \in L^2 \mid H\varphi \in L^2\}.$$

Rappelons que :

$$(\gamma^0)^2 = Id, (\gamma^j)^2 = -Id, \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu,$$

pour $1 \leq j \leq 3$ et $0 \leq \mu, \nu \leq 3$. Nous allons utiliser le carré de H donné par :

$$\begin{aligned} P = H^2 &= (i\gamma^0\gamma^1h\partial_x + \gamma^0\gamma^2A(x) - hm\gamma^0B(x))(i\gamma^0\gamma^1h\partial_x + \gamma^0\gamma^2A(x) - hm\gamma^0B(x)) \\ &= -h^2\partial_x^2 + ih\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^2\partial_x A(x) - ih^2m\gamma^0\gamma^1\gamma^0\partial_x B(x) \\ &\quad + ih\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^1A(x)\partial_x + A^2(x) - hm\gamma^0\gamma^2\gamma^0A(x)B(x) \\ &\quad - ih^2m\gamma^0\gamma^0\gamma^1B(x)\partial_x - hm\gamma^0\gamma^0\gamma^2B(x)A(x) + h^2m^2\gamma^0\gamma^0B^2(x) \\ &= -h^2\partial_x^2 + A^2(x) + h^2m^2B^2(x) \\ &\quad - ih\gamma^1\gamma^2(A'(x) + A(x)\partial_x) + ih^2m\gamma^1(B'(x) + B(x)\partial_x) \\ &\quad - ih\gamma^2\gamma^1A(x)\partial_x + hm\gamma^2A(x)B(x) \\ &\quad - ih^2m\gamma^1B(x)\partial_x - hm\gamma^2A(x)B(x) \\ &= -h^2\partial_x^2 + A^2(x) + h^2m^2B^2(x) - ih\gamma^1\gamma^2A'(x) + ih^2m\gamma^1B'(x) \\ &= -h^2\partial_x^2 + V(x), \end{aligned}$$

où :

$$V(x) = A^2(x) + h^2m^2B^2(x) - ih\gamma^1\gamma^2A'(x) + ih^2m\gamma^1B'(x) \quad (2.2.1)$$

muni du domaine :

$$D(P) = \{\varphi \in L^2 | H\varphi \in L^2, P\varphi \in L^2\}$$

sur lequel cet opérateur est bien défini et auto-adjoint. Nous avons $\gamma^0\gamma^1 = \text{diag}(-1, 1, 1, -1)$ et :

$$\begin{aligned} \gamma^1\gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^0\gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans un premier temps, nous allons étudier les éléments du domaine de P .

Proposition 2.2.2. *Soit $\varphi \in D(P)$. Au voisinage de 0, nous avons :*

- Si $2ml \neq 3$, $\|\varphi(x)\|_{\mathbb{C}^4} = O\left((-x)^{\min(\frac{3}{2}, ml)}\right)$.
- Si $2ml = 3$, $\|\varphi(x)\|_{\mathbb{C}^4} = O\left(\max\left((-x)^{\frac{3}{2}}, (-x)^{ml}(-\ln(-x))\right)\right)$.

Nous avons aussi l'estimation suivante pour $\partial_x\varphi$:

$$\|\partial_x\varphi(x)\| = \begin{cases} O\left(\max\left((-x)^{\frac{1}{2}}, (-x)^{\min(\frac{3}{2}, ml)-1}\right)\right), & \text{si } 2ml \neq 3, \\ O\left(\max\left((-x)^{\frac{1}{2}}, (-x)^{ml-1}(-\ln(-x))\right)\right), & \text{si } 2ml = 3. \end{cases}$$

Preuve. Soit $\varphi \in D(P)$. Nous avons $H^2\varphi \in L^2$ et d'après (1.3.44), nous en déduisons que :

$$\|H\varphi(x)\| = O\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right)$$

au voisinage de 0. Nous pouvons écrire :

$$H\varphi(x) = f(x)$$

avec $f(x) = O\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right)$. Nous obtenons les équations suivante :

$$\begin{cases} -ih\partial_x\varphi_1 - A(x)\varphi_2 - ihmB(x)\varphi_3 = f_1 \\ ih\partial_x\varphi_2 - A(x)\varphi_1 - ihmB(x)\varphi_4 = f_2 \\ ih\partial_x\varphi_3 + A(x)\varphi_4 + ihmB(x)\varphi_1 = f_3 \\ -ih\partial_x\varphi_4 + A(x)\varphi_3 + ihmB(x)\varphi_2 = f_4. \end{cases}$$

Ceci donne les deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} -ih\partial_x(\varphi_1 + \varphi_3) - A(x)(\varphi_2 + \varphi_4) - ihmB(x)(\varphi_1 + \varphi_3) = f_1 - f_3 \\ ih\partial_x(\varphi_2 + \varphi_4) - A(x)(\varphi_1 + \varphi_3) - ihmB(x)(\varphi_2 + \varphi_4) = f_2 - f_4 \\ -ih\partial_x(\varphi_1 - \varphi_3) - A(x)(\varphi_2 - \varphi_4) + ihmB(x)(\varphi_1 - \varphi_3) = f_1 + f_3 \\ ih\partial_x(\varphi_2 - \varphi_4) - A(x)(\varphi_1 - \varphi_3) + ihmB(x)(\varphi_2 - \varphi_4) = f_2 + f_4 \end{cases}$$

que nous pouvons réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} -ih\partial_x(\varphi_1 + \varphi_3) - ihmB(x)(\varphi_1 + \varphi_3) = g_1 \\ -ih\partial_x(\varphi_1 - \varphi_3) + ihmB(x)(\varphi_1 - \varphi_3) = g_2 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$$\begin{cases} ih\partial_x(\varphi_2 + \varphi_4) - ihmB(x)(\varphi_2 + \varphi_4) = g_3 \\ ih\partial_x(\varphi_2 - \varphi_4) + ihmB(x)(\varphi_2 - \varphi_4) = g_4, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

où :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= A(x)(\varphi_2 + \varphi_4) + f_1 - f_3, \\ g_2(x) &= A(x)(\varphi_2 - \varphi_4) + f_1 + f_3, \\ g_3(x) &= A(x)(\varphi_1 + \varphi_3) + f_2 - f_4 \\ g_4(x) &= A(x)(\varphi_1 - \varphi_3) + f_2 + f_4. \end{aligned}$$

Rappelons que A est borné au voisinage de 0 et comme $H\varphi \in L^2$, nous avons que $\|\varphi(x)\| = O\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right)$. Ainsi, $\|g(x)\| = O\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right)$. Etudions les équations (2.2.2).

Première équation

Etudions l'équation :

$$\partial_x(\varphi_1 + \varphi_3) + mB(x)(\varphi_1 + \varphi_3) = \frac{i}{h}g_1.$$

Notons $\varphi_{1,3}^+ = \varphi_1 + \varphi_3$. L'équation homogène associée est :

$$\partial_x\varphi_{1,3}^{+,EH} + mB(x)\varphi_{1,3}^{+,EH} = 0.$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\varphi_{1,3}^{+,EH}(x) = Ce^{-\int_{-\epsilon}^x mB(y)dy}$$

où $\epsilon > 0$ et C est une constante. Cherchons une solution particulière de cette équation sous la forme :

$$\varphi_{1,3}^{+,p}(x) = C(x)e^{-\int_{-\epsilon}^x mB(y)dy}.$$

Nous obtenons :

$$C(x) = \int_{-\epsilon}^x \frac{i}{h}g(y)e^{\int_{-\epsilon}^y mB(z)dz}dy.$$

Rappelons qu'au voisinage de 0, nous avons :

$$B(x) = -\frac{l}{x} - \frac{x}{6l} + o(x)$$

de sorte que :

$$e^{\int_{-\epsilon}^x mB(z)dz} = (-x)^{-ml}O(1).$$

D'où :

$$\begin{aligned} |C(x)| &\leq C \int_{-\epsilon}^x \frac{1}{h} \left|(-y)^{\frac{1}{2}}\right| \left|(-y)^{-ml}\right| dy \\ &= \begin{cases} \frac{C}{h} \left[\frac{(-y)^{\frac{3}{2}-ml}}{\frac{3}{2}-ml} \right]_{-\epsilon}^x, & \text{si } ml \neq \frac{3}{2} \\ \frac{C}{h} [-\ln(-y)]_{-\epsilon}^x, & \text{si } ml = \frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $e^{-\int_{-\epsilon}^x mB(y)dy} = (-x)^{ml} O(1)$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \text{Si } 2ml \neq 3, & \varphi_{1,3}^{+,p}(x) = O\left((-x)^{\frac{3}{2}}\right), \\ \text{Si } 2ml = 3, & \varphi_{1,3}^{+,p}(x) = O\left((-x)^{ml}(-\ln(-x))\right). \end{cases}$$

De plus, $\varphi_{1,3}^{+,EH}(x) = O\left((-x)^{ml}\right)$, ce qui entraîne que :

- Si $2ml \neq 3$, $\varphi_{1,3}^+(x) = O\left((-x)^{\min(\frac{3}{2}, ml)}\right)$.
- Si $2ml = 3$, $\varphi_{1,3}^+(x) = O\left((-x)^{ml}(-\ln(-x))\right)$.

Deuxième équation

Notons $\varphi_{1,3}^- = \varphi_1 - \varphi_3$. Nous avons l'équation :

$$\partial_x \varphi_{1,3}^-(x) - mB(x) \varphi_{1,3}^-(x) = \frac{i}{h} g_2(x).$$

Les solutions de l'équation homogène sont :

$$\varphi_{1,3}^{-,EH}(x) = C e^{\int_{-\epsilon}^x mB(y)dy}$$

où C est une constante. Une solutions particulière est la fonction :

$$\varphi_{1,3}^{-,p}(x) = e^{\int_{-\epsilon}^x mB(y)dy} \int_0^x \frac{i}{h} g_2(y) e^{-\int_{-\epsilon}^y mB(z)dz} dy.$$

Ici, nous avons $e^{-\int_{-\epsilon}^y mB(z)dz} = (-y)^{ml} O(1)$ ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} |\varphi_{1,3}^{-,p}(x)| &\leq C_1 (-x)^{-ml} \int_0^x \frac{1}{h} (-y)^{\frac{1}{2}+ml} dy \\ &\leq C_1 (-x)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

La solution de l'équation homogène admet le comportement suivant :

$$\varphi_{1,3}^{-,EH}(x) = C (-x)^{-ml} O(1).$$

Comme $\varphi \in D(P)$, nous avons $H\varphi \in L^2$ et l'analyse des éléments du domaine de H dans le cas $2ml > 1$ (voir (1.3.44)) nous donne $\|\varphi(x)\| = O\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right)$. Nous devons donc avoir $C = 0$. Nous en déduisons que la solution de l'équation entière vérifie :

$$\varphi_{1,3}^-(x) = O\left((-x)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Nous pouvons maintenant en déduire des estimations pour les fonctions φ_1 et φ_3 :

- Si $2ml \neq 3$, $\varphi_1(x) = O\left((-x)^{\min(\frac{3}{2}, ml)}\right)$ et $\varphi_3(x) = O\left((-x)^{\min(\frac{3}{2}, ml)}\right)$.
- Si $2ml = 3$, $\varphi_1(x) = O\left(\max\left((-x)^{\frac{3}{2}}, (-x)^{ml}(-\ln(-x))\right)\right)$ et la même estimation pour φ_3 .

Nous pouvons faire de même avec φ_2 et φ_4 . Utilisant le fait que, si $\varphi \in D(P)$, nous avons $H\varphi \in D(H)$ et nous en déduisons que $H\varphi(x) = O\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right)$. Grâce à l'expression de H , nous en déduisons que :

$$i\gamma^0\gamma^1\partial_x\varphi(x) = -\gamma^0\gamma^2A(x)\varphi(x) + hm\gamma^0B(x)\varphi(x) + O\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Au vu des estimations précédentes, nous avons :

$$\begin{aligned} -\gamma^0\gamma^2A(x)\varphi(x) &= O\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right) \\ hm\gamma^0B(x)\varphi(x) &= \begin{cases} O\left((-x)^{\min(\frac{3}{2}, ml)-1}\right), & \text{si } 2ml \neq 3, \\ O\left(\max\left((-x)^{\frac{1}{2}}, (-x)^{ml-1}(-\ln(-x))\right)\right), & \text{si } 2ml = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc :

$$\|\partial_x\varphi(x)\| = \begin{cases} O\left(\max\left((-x)^{\frac{1}{2}}, (-x)^{\min(\frac{3}{2}, ml)-1}\right)\right), & \text{si } 2ml \neq 3, \\ O\left(\max\left((-x)^{\frac{1}{2}}, (-x)^{ml-1}(-\ln(-x))\right)\right), & \text{si } 2ml = 3. \end{cases}$$

Q.E.D

Remarque. Dans tous les cas, nous avons :

$$\langle \partial_x\varphi(x), \varphi(x) \rangle_{\mathbb{C}^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Nous considérons maintenant l'opérateur P sur un intervalle $J =]-c, 0[$ où c est à déterminer. Notons cet opérateur P_J et munissons-le du domaine :

$$D(P_J) = \{\varphi \in L^2(J) \mid H\varphi \in L^2(J), P_J\varphi \in L^2(J), \varphi(-c) = 0\}.$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.2.3. *Soit $\varphi \in D(P_J)$. Soit $Y(x)$ telle que $Y(x) = O(x)$, $Y'(x) = O(1)$ en 0. Alors :*

$$\| -ih\partial_x\varphi - iFY\varphi \|^2 = \langle -h^2\partial_x^2\varphi, \varphi \rangle + \langle F^2Y^2\varphi - hF\partial_r(FY)\varphi, \varphi \rangle$$

où $F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}$.

Preuve. Pour $\varphi \in D(P_J)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \| -ih\partial_x\varphi - iFY\varphi \|^2 &= \langle -ih\partial_x\varphi - iFY\varphi, -ih\partial_x\varphi - iFY\varphi \rangle \\ &= \langle -ih\partial_x\varphi, -ih\partial_x\varphi \rangle + h\langle \partial_x\varphi, FY\varphi \rangle + h\langle FY\varphi, \partial_x\varphi \rangle + \langle F^2Y^2\varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle -h^2\partial_x^2\varphi, \varphi \rangle - h\langle \partial_x(FY)\varphi, \varphi \rangle + \langle F^2Y^2\varphi, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

où l'intégration par partie du premier terme est justifiée par le fait $\langle \partial_x\varphi(x), \varphi(x) \rangle_{\mathbb{C}^4}$ tend vers 0 en 0. Au voisinage de 0, nous avons $F(r(x)) = O\left((-x)^{-2}\right)$, $Y(x) = O(-x)$ et $\varphi(x) = o\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right)$ ce qui nous donne $\langle FY\varphi(x), \varphi(x) \rangle_{\mathbb{C}^4}|_{x=0} = 0$ et justifie l'intégration par partie du troisième membre de l'égalité précédente. Rappelons maintenant que $\partial_x = \frac{\partial r}{\partial x}\partial_r = F(r)\partial_r$ et nous obtenons la formule :

$$\| -ih\partial_x\varphi - iFY\varphi \|^2 = \langle -h^2\partial_x^2\varphi, \varphi \rangle + \langle F^2Y^2\varphi - hF\partial_r(FY)\varphi, \varphi \rangle$$

Q.E.D

Lemme 2.2.4. Notons r_+ le nombre tel que pour $r \geq r_+$, nous avons $\frac{F(r)}{4l^2} - \frac{F'(r)^2}{16} \geq 0$ où $F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}$. Notons $x_+ = x(r_+)$ et $P^+ = P]x_+, 0[$. Soit $\varphi \in D(P^+)$, alors :

$$\langle (-h^2\partial_x^2 + h^2m^2B^2(x) + ih^2m\gamma^1B'(x))\varphi, \varphi \rangle \geq 0.$$

Preuve. Nous avons $B^2(x(r)) = F(r)$ et :

$$\partial_x B(x(r)) = \partial_x F(r)^{\frac{1}{2}} = F(r) \partial_r F(r)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} F'(r) F(r)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F'(r) F(r)^{\frac{1}{2}} &= \frac{F'(r)}{2\sqrt{2}m^{\frac{1}{2}}} \sqrt{2}m^{\frac{1}{2}} F(r)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq mF(r) + \frac{F'(r)^2}{16m}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} m^2F(r) + im\gamma^1 \frac{1}{2} F'(r) F(r)^{\frac{1}{2}} &\geq m^2F(r) - \frac{m}{2} F'(r) F(r)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq m^2F(r) - m^2F(r) - \frac{F'(r)^2}{16} \\ &\geq -\frac{F'(r)^2}{16} = -\frac{F'(r)^2}{16} + \frac{F(r)}{4l^2} - \frac{F(r)}{4l^2}, \end{aligned}$$

où les inégalités sont à prendre au sens des formes bilinéaires. Nous avons $F'(r) = 2\left(\frac{M}{r^2} + \frac{r}{l^2}\right)$, $F'(r)^2 = 4\left(\frac{M^2}{r^4} + \frac{2M}{r l^2} + \frac{r^2}{l^4}\right)$ et $\frac{F(r)}{4l^2} = \frac{1}{4l^2} - \frac{M}{2rl^2} + \frac{r^2}{4l^2}$. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{F(r)}{4l^2} - \frac{F'(r)^2}{16} = \frac{1}{4l^2} - \frac{M}{rl^2} - \frac{M^2}{4r^4}.$$

Nous voyons que $\frac{F(r)}{4l^2} - \frac{F'(r)^2}{16} \geq 0$ pour r suffisamment grand. Notons r_+ le nombre tel que pour $r \geq r_+$, nous avons $\frac{F(r)}{4l^2} - \frac{F'(r)^2}{16} \geq 0$. Nous noterons $x_+ = x(r_+)$. Sur $]x_+, 0[$, nous avons donc :

$$h^2m^2B^2(x) + ih^2m\gamma^1\partial_x B(x) \geq -h^2\frac{F(r)}{4l^2}.$$

Considérons $Y(x(r)) = h\frac{r-r_{SAdS}}{2l^2}F^{-1}(r)$. Comme $r = O((-x)^{-1})$ et $F(r) = O((-x)^{-2})$, nous avons $Y(x) = O(x)$. En outre :

$$\begin{aligned} \partial_x Y(x) &= F(r) \partial_r \left(h\frac{r-r_{SAdS}}{2l^2}F^{-1}(r) \right) \\ &= \frac{h}{2l^2} + \frac{h}{2l^2} (r - r_{SAdS}) F(r) \partial_r (F(r)^{-1}) \\ &= \frac{h}{2l^2} - \frac{h}{2l^2} (r - r_{SAdS}) \frac{F'(r)}{F(r)}. \end{aligned}$$

Comme $F'(r(x)) = O((-x)^{-1})$, nous en déduisons que $\partial_x Y(x) = O(1)$.

De plus, nous avons :

$$\partial_r (FY) = \frac{h}{2l^2}$$

et :

$$\begin{aligned} F^2 Y^2 - hF \partial_r (FY) &= h^2 \frac{r^2 - 2rr_{SAdS} + r_{SAdS}^2}{4l^4} - h^2 \frac{F(r)}{2l^2} \\ &\leq -h^2 \frac{F(r)}{4l^2}. \end{aligned}$$

En effet, ceci revient à montrer que :

$$h^2 \frac{r^2 - 2rr_{SAdS} + r_{SAdS}^2}{4l^4} \leq h^2 \frac{F(r)}{4l^2} = \frac{h^2}{4l^2} - \frac{2Mh^2}{4l^2 r} + \frac{h^2 r^2}{4l^4},$$

ce qui est équivalent à montrer que :

$$\frac{-2rr_{SAdS} + r_{SAdS}^2}{4l^4} \leq \frac{1}{4l^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right).$$

Or nous avons $F(r_{SAdS}) = 0$, d'où $1 - \frac{2M}{r_{SAdS}} = -\frac{r_{SAdS}^2}{l^2}$. Le terme de droite vaut donc $-\frac{r_{SAdS}^2}{4l^4}$ en r_{SAdS} ce qui est aussi la valeur du terme de gauche en r_{SAdS} . Comme le terme de gauche est décroissant alors que celui de droite est croissant, nous en déduisons que cette inégalité est vérifiée sur $]r_{SAdS}, +\infty[$ et par conséquent :

$$F^2 Y^2 - hF \partial_r (FY) \leq -h^2 \frac{F(r)}{4l^2}$$

sur $]r_{SAdS}, +\infty[$ et donc en particulier sur $]r_+, +\infty[$. Nous pouvons maintenant conclure que :

$$\begin{aligned} \langle (-h^2 \partial_x^2 + h^2 m^2 B^2(x) + ih^2 m \gamma^1 \partial_x B(x)) \varphi, \varphi \rangle &\geq \left\langle \left(-h^2 \partial_x^2 - h^2 \frac{F}{4l^2} \right) \varphi, \varphi \right\rangle \\ &\geq \langle (-h^2 \partial_x^2 + F^2 Y^2 - hF \partial_r (FY)) \varphi, \varphi \rangle \\ &= \|-ih \partial_x \varphi - iFY \varphi\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

d'après le lemme précédent.

Q.E.D

Rappelons maintenant les comportements asymptotiques des potentiels en 0 :

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{l} + \frac{x^2}{2l^3} + o(x^2), \\ B(x) &= -\frac{l}{x} - \frac{x}{6l} + o(x), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} A^2(x) &= \frac{1}{l^2} + \frac{x^2}{l^4} + o(x^2), \\ B^2(x) &= \frac{l^2}{x^2} + \frac{1}{3l} + o(1), \\ A'(x) &= \frac{x}{l^3} + o(x), \\ B'(x) &= \frac{l}{x^2} - \frac{1}{6l} + o(1). \end{aligned}$$

Nous introduisons l'opérateur :

$$\tilde{H} = i\gamma^0\gamma^1 h\partial_x + \gamma^0\gamma^2 \left(\frac{1}{l^2} + \frac{x^2}{l^4} \right)^{\frac{1}{2}} + hm\gamma^0 \frac{l}{x},$$

puis nous considérons le carré de cette opérateur :

$$\tilde{P} = \tilde{H}^2 = -h^2\partial_x^2 + \left(\frac{1}{l^2} + \frac{x^2}{l^4} \right) - ih\gamma^1\gamma^2 \frac{x}{l^4} \left(\frac{1}{l^2} + \frac{x^2}{l^4} \right)^{-\frac{1}{2}} + h^2 \left(\frac{m^2 l^2}{x^2} + i\gamma^1 \frac{ml}{x^2} \right)$$

sur $] -\infty, 0[$ muni du domaine :

$$D(\tilde{P}) = \{\varphi \in L^2 | \tilde{H}\varphi \in L^2, \tilde{P}\varphi \in L^2\}.$$

Comme pour le lemme de compacité prouvé dans la première partie 1.4.1, l'opérateur \tilde{H} est à résolvante compacte. De plus, nous avons la relation :

$$\left(\tilde{P} - E^2 \right)^{-1} = \left(\tilde{H} + E \right)^{-1} \left(\tilde{H} - E \right)^{-1},$$

ce qui nous prouve que \tilde{P} est un opérateur à résolvante compacte et que E^2 est valeur propre de \tilde{P} si et seulement si $\pm E$ est valeur propre de \tilde{H} .

Proposition 2.2.5. Soit $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{1+4ml(ml+1)}}{2}$. Notons $E_0(h) := \frac{1}{l^2} - \frac{h}{2}$ et $E_2(h) = \frac{1}{l^2} + (2\alpha_1 + 1) \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} h$. Alors \tilde{P} admet une valeur propre $\tilde{E}(h)$ avec $E_0(h) \leq \tilde{E}(h) \leq E_2(h) + \frac{h}{2}$.

Preuve. Utilisant le fait que $\langle \partial_x \varphi(x), \varphi(x) \rangle_{\mathbb{C}^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et le fait que :

$$\frac{m^2 l^2}{x^2} + i\gamma^1 \frac{ml}{x^2} \geq \frac{ml(ml-1)}{x^2} \geq 0,$$

puisque $ml > 1$ par hypothèse sur cette section, nous avons :

$$-h^2\partial_x^2 + h^2 \frac{m^2 l^2}{x^2} + i\gamma^1 \frac{ml}{x^2} \geq 0.$$

D'autre part, remarquons que :

$$\begin{aligned} \left| \left\langle -ih\gamma^1\gamma^2 \frac{x}{l^4} \left(\frac{1}{l^2} + \frac{x^2}{l^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi, \varphi \right\rangle \right| &\leq \frac{h}{2} \left\langle \frac{x^2}{l^8} \left(\frac{1}{l^2} + \frac{x^2}{l^4} \right)^{-1} \varphi, \varphi \right\rangle + \frac{h}{2} \|\varphi\|^2 \\ &\leq \frac{h}{2} \left\langle \frac{x^2}{l^6} \varphi, \varphi \right\rangle + \frac{h}{2} \|\varphi\|^2. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Ceci entraîne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^2} + \frac{x^2}{l^4} - ih\gamma^1\gamma^2 \frac{x}{l^4} \left(\frac{1}{l^2} + \frac{x^2}{l^4} \right)^{-\frac{1}{2}} &\geq \frac{1}{l^2} + \frac{2l^2 x^2 - hx^2}{2l^6} - \frac{h}{2} \\ &\geq \frac{1}{l^2} - \frac{h}{2} = E_0(h), \end{aligned}$$

pour $h > 0$ suffisamment petit. Ainsi :

$$\langle \tilde{P}\varphi, \varphi \rangle \geq E_0(h) \|\varphi\|_{L^2}^2.$$

Utilisant (2.2.4), nous avons :

$$\langle \tilde{P}\varphi, \varphi \rangle \leq \left\langle \left(-h^2 \partial_x^2 + \frac{1}{l^2} + \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right) x^2 + h^2 \left(\frac{m^2 l^2}{x^2} + i\gamma^1 \frac{ml}{x^2} \right) \right) \varphi, \varphi \right\rangle + \frac{h}{2} \|\varphi\|^2.$$

Nous pouvons maintenant diagonaliser γ^1 :

$$\gamma^1 = KDK^{-1}$$

où

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(i, -i, -i, i), \quad K^{-1} = K.$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(-h^2 \partial_x^2 + \frac{1}{l^2} + \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right) x^2 + h^2 \left(\frac{m^2 l^2}{x^2} + i\gamma^1 \frac{ml}{x^2} \right) \right) \varphi, \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \left(-h^2 \partial_x^2 + \frac{1}{l^2} + \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right) x^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + h^2 \left(\frac{m^2 l^2}{x^2} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{ml}{x^2} \right) \right) K^{-1} \varphi, K^{-1} \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant nous intéresser aux équations suivantes :

$$\left(-h^2 \partial_x^2 + \frac{1}{l^2} + \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right) x^2 + h^2 \frac{ml(ml-1)}{x^2} \right) \psi_1 = E_1 \psi_1, \quad (2.2.5)$$

$$\left(-h^2 \partial_x^2 + \frac{1}{l^2} + \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right) x^2 + h^2 \frac{ml(ml+1)}{x^2} \right) \psi_2 = E_2 \psi_2. \quad (2.2.6)$$

Regardons tout d'abord à l'équation (2.2.5). Nous choisissons :

$$\psi_1(x) = h^{-\frac{1}{4}} \left(h^{-\frac{1}{2}} x \right)^{ml} e^{-\left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2h}},$$

où les constantes sont choisies afin de pouvoir normaliser ψ_1 . Alors :

$$\begin{aligned} -h^2 \partial_x^2 \psi_1(x) &= -h^2 \partial_x^2 \left(h^{-\frac{1}{4}} \left(h^{-\frac{1}{2}} x \right)^{ml} e^{-\left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2h}} \right) \\ &= -h^{2-\frac{1}{4}-\frac{ml}{2}} \partial_x \left(mlx^{ml-1} e^{-\left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2h}} - \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^{ml+1}}{h} e^{-\left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2h}} \right) \\ &= -h^2 \left(\frac{ml(ml-1)}{x^2} \psi_1(x) - \frac{ml}{h} \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_1(x) \right. \\ & \quad \left. - \frac{ml+1}{h} \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_1(x) + \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right) x^2 \psi_1(x) \right). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \left(-h^2 \partial_x^2 + \frac{1}{l^2} + \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right) x^2 + h^2 \frac{ml(ml-1)}{x^2} \right) \psi_1(x) \\ &= \left(\frac{1}{l^2} + (2ml+1) \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} h \right) \psi_1(x) \end{aligned}$$

et nous avons $E_1(h) = \frac{1}{l^2} + (2ml+1) \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} h$.

Etudions maintenant l'équation (2.2.6). Pour cela, nous commençons par chercher α tel que $\alpha(\alpha-1) = ml(ml+1)$, c'est-à-dire tel que :

$$\alpha^2 - \alpha - ml(ml+1) = 0.$$

Nous choisissons la solution $\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4ml(ml+1)}}{2}$. Nous considérons la fonction :

$$\psi_2(x) = h^{-\frac{1}{4}} \left(h^{-\frac{1}{2}} x \right)^{\alpha_1} e^{-\left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2h}},$$

où nous choisissons de nouveau les constantes afin de pouvoir normaliser ψ_2 . Nous calculons maintenant :

$$\begin{aligned} -h^2 \partial_x^2 \psi_2(x) &= -h^2 \partial_x^2 \left(h^{-\frac{1}{4}} \left(h^{-\frac{1}{2}} x \right)^{\alpha_1} e^{-\left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2h}} \right) \\ &= -h^{2-\frac{1}{4}-\frac{\alpha_1}{2}} \partial_x \left(\alpha_1 x^{\alpha_1-1} e^{-\left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2h}} - \frac{1}{h} \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\alpha_1+1} e^{-\left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2h}} \right) \\ &= -h^2 \left(\frac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{x^2} \psi_2(x) - \frac{\alpha_1}{h} \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_2(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_1+1}{h} \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_2(x) + \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right) x^2 \psi_2(x) \right). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} & \left(-h^2 \partial_x^2 + \frac{1}{l^2} + \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right) x^2 + h^2 \frac{ml(ml+1)}{x^2} \right) \psi_2 \\ &= \left(\frac{1}{l^2} + (2\alpha_1+1) \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} h \right) \psi_2, \end{aligned}$$

et nous avons $E_2(h) = \frac{1}{l^2} + (2\alpha_1+1) \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} h$.

Nous n'avons donc pas la même valeur propre pour les deux équations. Remarquons que :

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4ml(ml+1)}}{2} \geq \frac{1 + 2ml}{2} > ml.$$

Ceci nous donne $E_2(h) > E_1(h)$. Nous pouvons alors voir que :

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(-h^2 \partial_x^2 + \frac{1}{l^2} + \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right) x^2 + h^2 \left(\frac{m^2 l^2}{x^2} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{ml}{x^2} \right) \right) K^{-1} \varphi, K^{-1} \varphi \right\rangle \\ & \leq \left\langle \left(-h^2 \partial_x^2 + \frac{1}{l^2} + \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right) x^2 + h^2 \left(\frac{m^2 l^2}{x^2} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{ml}{x^2} \right) \right) K^{-1} \varphi, K^{-1} \varphi \right\rangle \\ & + \left\langle (E_2 - E_1)(h) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K^{-1} \varphi, K^{-1} \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Prenons $K^{-1} \varphi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_1(x) \end{pmatrix}$. Nous obtenons ainsi :

$$\langle \tilde{P} \varphi, \varphi \rangle \leq \left(E_2(h) + \frac{h}{2} \right) \|\varphi\|^2.$$

Le théorème spectral nous permet de conclure que \tilde{P} admet une valeur propre entre $E_0(h)$ et $E_2(h) + \frac{h}{2}$. Q.E.D

2.2.2 Estimées d'Agmon

Dans cette section, nous allons étudier l'opérateur $P^+ = P_{[x_+, 0]}$. Nous souhaitons prouver que dans la région classiquement interdite, c'est-à-dire pour laquelle le potentielle est supérieur à la valeur propre que l'on considère, notre vecteur propre décroît exponentiellement. Commençons par le :

Lemme 2.2.6. *Soit $\phi \in C^\infty([x_+, 0])$ et $f \in D(P^+)$ où le domaine est défini comme dans (2.2.1). Alors $e^{-\frac{\phi}{h}} f \in D(P^+)$. De plus, pour tout E , nous avons :*

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\left\langle e^{\frac{\phi}{h}} (-h^2 \partial_x^2 + V - E) e^{-\frac{\phi}{h}} f, f \right\rangle \right) \\ & = \left\langle \left(-h^2 \partial_x^2 + A^2 + h^2 (m^2 B^2 + m \gamma^1 B') - (\phi')^2 - E \right) f, f \right\rangle \\ & - 2h \operatorname{Im} \left(\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A' f, f \right\rangle \right). \end{aligned}$$

où V est défini dans (2.2.1).

Preuve. Nous avons :

$$V(x) = A^2(x) + h^2 m^2 B^2(x) + h^2 m \gamma^1 B'(x) - i h \gamma^1 \gamma^2 A'(x)$$

où A, B, A' et B' sont des fonctions réelles et

$$\gamma^1 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecrivons $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \langle -ih\gamma^1\gamma^2 A'(x) f, f \rangle &= ih (\langle A' f_2, f_1 \rangle - \langle A' f_1, f_2 \rangle \\ &\quad + \langle A' f_4, f_3 \rangle - \langle A' f_3, f_4 \rangle) \\ &= ih (2i \operatorname{Im} (\langle A' f_2, f_1 \rangle) + 2i \operatorname{Im} (\langle A' f_4, f_3 \rangle)) \\ &= -2h (\operatorname{Im} (\langle A' f_2, f_1 \rangle) + \operatorname{Im} (\langle A' f_4, f_3 \rangle)). \end{aligned}$$

Ceci nous donne le dernier terme. Il nous reste donc à étudier le terme contenant l'opérateur de dérivation. Nous avons :

$$\begin{aligned} \partial_x \left(e^{-\frac{\phi}{h}} f \right) &= -\frac{\phi'}{h} e^{-\frac{\phi}{h}} f + e^{-\frac{\phi}{h}} \partial_x f, \\ \partial_x \left(e^{\frac{\phi}{h}} f \right) &= \frac{\phi'}{h} e^{\frac{\phi}{h}} f + e^{\frac{\phi}{h}} \partial_x f; \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \langle -\partial_x^2 \left(e^{-\frac{\phi}{h}} f \right), e^{\frac{\phi}{h}} f \rangle &= \langle \partial_x \left(e^{-\frac{\phi}{h}} f \right), \partial_x \left(e^{\frac{\phi}{h}} f \right) \rangle \\ &= \left\langle -\frac{\phi'}{h} e^{-\frac{\phi}{h}} f + e^{-\frac{\phi}{h}} \partial_x f, \frac{\phi'}{h} e^{\frac{\phi}{h}} f + e^{\frac{\phi}{h}} \partial_x f \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{(\phi')^2}{h^2} f, f \right\rangle - \left\langle f, \frac{\phi'}{h} \partial_x f \right\rangle + \left\langle \frac{\phi'}{h} \partial_x f, f \right\rangle + \langle \partial_x f, \partial_x f \rangle \\ &= \left\langle \left(-\partial_x^2 - \frac{(\phi')^2}{h^2} \right) f, f \right\rangle + 2i \operatorname{Im} \left(\left\langle \frac{\phi'}{h} \partial_x f, f \right\rangle \right). \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle de cette dernière expression, nous obtenons le résultat souhaité.
Q.E.D

Nous avons ensuite :

Lemme 2.2.7. Soit $\varphi \in D(P^+)$ et $\chi \in C_0^\infty([x_+, 0])$. Alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\langle e^{\frac{\phi}{h}} (P^+ - E) \chi \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle &= \operatorname{Re} \left(\left\langle e^{\frac{\phi}{h}} \chi (P^+ - E) \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \right) \\ &\quad + h^2 \left\langle \varphi, e^{2\frac{\phi}{h}} \left(2\frac{\phi'}{h} \chi \chi' + (\chi')^2 \right) \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Preuve. Nous avons :

$$\left\langle e^{\frac{\phi}{h}} (P^+ - E) \chi \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle = \left\langle e^{\frac{\phi}{h}} \chi (P^+ - E) \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle + \left\langle [-h^2 \partial_x^2, \chi] \varphi, e^{2\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle.$$

Calculons la partie réelle du dernier terme :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left(\left\langle [-h^2 \partial_x^2, \chi] \varphi, e^{2\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \right) &= \operatorname{Re} \left(\left\langle -h^2 \partial_x (\chi' \varphi), e^{2\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \right) + \operatorname{Re} \left(-h^2 \left\langle e^{\frac{\phi}{h}} \chi' \varphi', e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(h^2 \left\langle \chi' \varphi, \partial_x \left(e^{2\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right) \right\rangle \right) - \operatorname{Re} \left(h^2 \left\langle e^{\frac{\phi}{h}} \chi' \varphi', e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(h^2 \left\langle \chi' \varphi, \frac{2\phi'}{h} e^{2\frac{\phi}{h}} \chi \varphi + \chi' e^{2\frac{\phi}{h}} \varphi \right\rangle \right) \\
&\quad - \operatorname{Re} \left(h^2 \left\langle e^{\frac{\phi}{h}} \chi' \varphi', e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \right) + \operatorname{Re} \left(h^2 \left\langle \chi' \varphi, e^{2\frac{\phi}{h}} \chi \varphi' \right\rangle \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(h^2 \left\langle \varphi, e^{2\frac{\phi}{h}} \left(2\frac{\phi'}{h} \chi \chi' + (\chi')^2 \right) \varphi \right\rangle \right) \\
&\quad + \operatorname{Re} \left(h^2 \left(\left\langle e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi' \varphi' \right\rangle - \overline{\left\langle e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi' \varphi' \right\rangle} \right) \right) \\
&= h^2 \left\langle \varphi, e^{2\frac{\phi}{h}} \left(2\frac{\phi'}{h} \chi \chi' + (\chi')^2 \right) \varphi \right\rangle,
\end{aligned}$$

puisque les termes sont tous réels. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left\langle e^{\frac{\phi}{h}} (P^+ - E) \chi \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle &= \operatorname{Re} \left(\left\langle e^{\frac{\phi}{h}} \chi (P^+ - E) \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \right) \\
&\quad + h^2 \left\langle \varphi, e^{2\frac{\phi}{h}} \left(2\frac{\phi'}{h} \chi \chi' + (\chi')^2 \right) \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

Q.E.D

Introduisons $x_A(E)$ tel que $A^2(x_A(E)) = E$. Rappelons qu'au voisinage de 0, nous avons :

$$A^2(x) = \frac{1}{l^2} + \frac{x^2}{l^4} + o(x^2).$$

Alors $x_A\left(\frac{1}{l^2} + Th\right)$ vérifie :

$$\frac{x_A^2\left(\frac{1}{l^2} + Th\right)}{l^4} + o\left(x_A^2\left(\frac{1}{l^2} + Th\right)\right) = Th.$$

d'où :

$$\left(\frac{1}{l^4} - \epsilon\right) x_A^2\left(\frac{1}{l^2} + Th\right) \leq \frac{x_A^2\left(\frac{1}{l^2} + Th\right)}{l^4} + o\left(x_A^2\left(\frac{1}{l^2} + Th\right)\right) = Th$$

pour tout $\epsilon > 0$. Ainsi :

$$x_A^2\left(\frac{1}{l^2} + Th\right) = O(h)$$

et :

$$o\left(x_A^2\left(\frac{1}{l^2} + Th\right)\right) = o(h).$$

Par conséquent :

$$\frac{x_A^2\left(\frac{1}{l^2} + Th\right)}{l^4} = Th + o(h).$$

D'où :

$$x_A\left(\frac{1}{l^2} + Th\right) = -l^2 T^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} + o\left(h^{\frac{1}{2}}\right).$$

Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 2.2.8. Soient $T > 0$ et $\delta > 0$. Alors, il existe $k > 0$, $h_0 > 0$ tels que, pour tout $\varphi \in D(P^+)$, nous avons :

$$\left\langle \left(A^2(x) - \left(\frac{1}{l^2} + Th \right) - kx^2 \right) \varphi, \varphi \right\rangle - 2h \operatorname{Im} \left(\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A' \varphi, \varphi \right\rangle \right) > \delta h$$

pour tout $x \in [x_+, x_A \left(\frac{1}{l^2} + Th \right) [$ et $h \in (0, h_0)$.

Preuve. Tout d'abord, nous avons :

$$\left| 2 \operatorname{Im} \left(\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A' \varphi, \varphi \right\rangle \right) \right| \leq \langle |A'(x)| \varphi, \varphi \rangle.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(A^2(x) - \left(\frac{1}{l^2} + Th \right) - kx^2 \right) \varphi, \varphi \right\rangle - 2h \operatorname{Im} \left(\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A' \varphi, \varphi \right\rangle \right) \\ & \geq \left\langle \left(A^2(x) - h |A'(x)| - \left(\frac{1}{l^2} + Th \right) - kx^2 \right) \varphi, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Nous cherchons donc à montrer que ce dernier terme est minoré par δh . Pour cela, nous notons :

$$\begin{aligned} M(x, h) &= A^2(x) - h |A'(x)| - \left(\frac{1}{l^2} + Th \right) - kx^2 \\ &= A^2(x) + h A'(x) - \left(\frac{1}{l^2} + Th \right) - kx^2 \end{aligned}$$

puisque $A'(x) < 0$ sur $[x_+, 0[$ (quitte à augmenter x_+). En effet, rappelons qu'au voisinage de 0, nous avons :

$$A'(x) = \frac{x}{l^3} + o(x).$$

Nous choisissons $k = \frac{\delta}{4l^4(T+2\delta)}$. Alors :

$$\begin{aligned} M \left(x_A \left(\frac{1}{l^2} + (T+2\delta)h \right), h \right) &= \frac{1}{l^2} + (T+2\delta)h + o(h) - h(T+2\delta)^{\frac{1}{2}} l^2 h^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + o \left(h^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{l^2} - Th - k((T+2\delta)l^4 h + o(h)) \\ &= 2\delta h - \frac{\delta}{4}h + o(h) \\ &> \delta h, \end{aligned}$$

pour h suffisamment petit. Notons que $k \leq \frac{1}{8l^4}$. Nous avons :

$$M'(x, h) = (A^2)'(x) + h A''(x) - 2kx,$$

où $(A^2)'(x) = \frac{2x}{l^4} + o(x)$ et $A''(x) = \frac{1}{l^3} + o(1)$. Alors :

$$\begin{aligned} M' \left(x_A \left(\frac{1}{l^2} + (T + 2\delta)h \right), h \right) &= \frac{2x_A \left(\frac{1}{l^2} + (T + 2\delta)h \right)}{l^4} + o \left(x_A \left(\frac{1}{l^2} + (T + 2\delta)h \right) \right) \\ &\quad + h \left(\frac{1}{l^3} + o(1) \right) - 2kx_A \left(\frac{1}{l^2} + (T + 2\delta)h \right) \\ &\leq \frac{6}{4l^4} x_A \left(\frac{1}{l^2} + (T + 2\delta)h \right) + o \left(h^{\frac{1}{2}} \right) \\ &< -\frac{5}{4l^4} l^2 T^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} < 0. \end{aligned}$$

De plus, nous avons :

$$M''(x, h) = (A^2)''(x) + hA^{(3)}(x) - 2k,$$

où $(A^2)''(x) = \frac{2}{l^4} + o(1)$, $A^{(3)}(x) = O(1)$ et $2k \leq \frac{1}{4l^4}$. Ainsi :

$$M''(x, h) \geq \frac{7}{4l^4} + o(1) + hO(1).$$

Comme $\frac{7}{4l^4} + o(1) > 0$ sur un intervalle de la forme $[-2A, 0]$, nous avons :

$$M''(x, h) \geq 0,$$

pour h suffisamment petit, sur $[-A, 0]$. Donc, sur $[-A, x_A \left(\frac{1}{l^2} + (T + 2\delta)h \right)]$, $M' < 0$ et :

$$M(x, h) \geq \delta h.$$

Sur $[x_+, -A]$, nous avons :

$$A^2(x) - \left(\frac{1}{l^2} + Th \right) - kx^2 \geq A^2(x) - \left(\frac{1}{l^2} + Th \right) - kx_+^2 > C_1$$

quitte à diminuer k . Pour h suffisamment petit, nous avons :

$$A^2(x) + hA'(x) - \left(\frac{1}{l^2} + Th \right) - kx^2 > C_1 - hC_A,$$

où $C_A = \sup_{[x_+, -A]} A'(x)$. Donc, pour h suffisamment petit, nous avons :

$$M(x, h) \geq C_2$$

sur $[x_+, -A]$. La constante C_2 doit vérifier :

$$C_2 \geq \delta h,$$

c'est-à-dire que nous devons avoir $C_1 > (\delta + C_A)h$. Le résultat est donc prouvé pour un bon choix de k et de h_0 . Q.E.D

Nous pouvons maintenant prouver l'estimation suivante :

Proposition 2.2.9. *Soit $T > 0$. Ils existent des constantes $h_0 > 0$, $C > 0$, et $c > 0$ telles que :*

$$\left\| e^{\frac{x^2}{ch}} \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])} \leq C \left(\|\varphi\|_{L^2([x_+, 0])} + h^{-1} \left\| e^{\frac{x^2}{ch}} (P^+ - E(h)) \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])} \right)$$

pour tout $h \in (0, h_0)$, $\varphi \in D(P^+)$ et $E(h)$ telle que $E(h) < 1 + Th$.

Preuve. Fixons $\delta > 0$. D'après le lemme précédent, nous pouvons choisir une constante $c > 0$ telle que, si $\phi(x) = \frac{x^2}{c}$, nous avons :

$$\left\langle \left(A^2(x) - \left(\frac{1}{l^2} + Th \right) - (\phi')^2 \right) \varphi, \varphi \right\rangle - 2h \operatorname{Im} \left(\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A' \varphi, \varphi \right\rangle \right) > \delta h$$

Notons $X_1 = -l^2(T + 2\delta)^{\frac{1}{2}} - \epsilon$ et $X_2 = -l^2(T + 2\delta)^{\frac{1}{2}} - 2\epsilon$. Soit $\zeta \in C^\infty$ telle que $\zeta \equiv 0$ sur $[X_1, 0]$ et $\zeta \equiv 1$ sur $[h^{-\frac{1}{2}}x_+, X_2]$. Posons $\chi(x, h) = \zeta\left(h^{-\frac{1}{2}}x; h\right)$ de sorte que χ est à support dans $[x_+, x_A\left(\frac{1}{l^2} + (T + 2\delta)h\right)]$. Choisissons $f = e^{\frac{\phi}{h}}\chi\varphi$. D'après les lemmes précédents, nous avons :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\left\langle e^{\frac{\phi}{h}} (-h^2 \partial_x^2 + V - E) \chi \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \right) &= \left\langle (-h^2 \partial_x^2 + A^2 + h^2 m^2 B^2 + h^2 m \gamma^1 B') e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \\ &\quad + \left\langle (-E - (\phi')^2) e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \\ &\quad - 2h \operatorname{Im} \left(\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A' e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \right) \\ &\geq \left\langle (-h^2 \partial_x^2 + A^2 + h^2 m^2 B^2 + h^2 m \gamma^1 B') e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \\ &\quad + \left\langle (-h|A'| - E - (\phi')^2) e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle \\ &\geq \delta h \left\| e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\|^2 \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\langle e^{\frac{\phi}{h}} (P^+ - E) \chi \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle_{L^2([x_+, 0])} &= \operatorname{Re} \left(\left\langle e^{\frac{\phi}{h}} \chi (P^+ - E) \varphi, e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\rangle_{L^2([x_+, 0])} \right) \\ &\quad + h^2 \left\langle \varphi, e^{2\frac{\phi}{h}} \left(2\frac{\phi'}{h} \chi \chi' + (\chi')^2 \right) \varphi \right\rangle_{L^2([x_+, 0])} \\ &\leq h^2 \left\langle \varphi, e^{2\frac{\phi}{h}} \left(2\frac{\phi'}{h} \chi \chi' + (\chi')^2 \right) \varphi \right\rangle_{L^2([x_+, 0])} \\ &\quad + \left\| e^{\frac{\phi}{h}} \chi (P^+ - E) \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])} \left\| e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \delta h \left\| e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])}^2 &\leq h^2 \left\langle \varphi, e^{2\frac{\phi}{h}} \left(2\frac{\phi'}{h} \chi \chi' + (\chi')^2 \right) \varphi \right\rangle_{L^2([x_+, 0])} \\ &\quad + \left\| e^{\frac{\phi}{h}} \chi (P^+ - E) \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])} \left\| e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])}. \end{aligned}$$

Cette inégalité est de la forme $\delta h p \leq r + p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}$. Ainsi :

$$\delta^2 h^2 p \leq \delta h r + \delta h p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \leq \delta h r + \frac{\delta^2 h^2 p}{2} + \frac{q}{2},$$

ce qui donne $\delta^2 h^2 p \leq 2\delta hr + q$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \left\| e^{\frac{\phi}{h}} \chi \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])}^2 &\leq 2\delta^{-1} h \left\langle \varphi, e^{2\frac{\phi}{h}} \left(2\frac{\phi'}{h} \chi \chi' + (\chi')^2 \right) \varphi \right\rangle_{L^2([x_+, 0])} \\ &\quad + (\delta h)^{-2} \left\| e^{\frac{\phi}{h}} \chi (P^+ - E) \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])}^2. \end{aligned}$$

Nous remarquons ensuite que χ' est non nulle pour $x \in h^{\frac{1}{2}}[X_2, X_1]$. Nous en déduisons que :

$$\sup_{\text{supp}(\chi')} e^{\frac{\phi}{h}} = O(1), \quad \sup_{\text{supp}(\chi')} |\phi'| = O\left(h^{\frac{1}{2}}\right).$$

Nous avons aussi :

$$\chi'(x) = h^{-\frac{1}{2}} \zeta' \left(h^{-\frac{1}{2}} x; h \right),$$

ce qui entraîne que $\sup |\chi'(x)| = O\left(h^{-\frac{1}{2}}\right)$ et $\sup \left| \frac{\phi'}{h} \chi \chi' \right| = O\left(h^{-1}\right)$. Par conséquent :

$$\left\| e^{\frac{\phi}{h}} \varphi \right\|_{L^2([x_+, h^{\frac{1}{2}} X_2])} \leq C_1 \|\varphi\|_{L^2([x_+, 0])} + C_2 h^{-1} \left\| e^{\frac{\phi}{h}} (P^+ - E) \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])}.$$

Le résultat suit maintenant du fait que :

$$\left\| e^{\frac{\phi}{h}} \varphi \right\|_{L^2([h^{\frac{1}{2}} X_2, 0])} \leq C_3 \|\varphi\|_{L^2([x_+, 0])}.$$

Q.E.D

Soit $S > 0$. Nous choisissons $A_1 < A_2 < x_A \left(\frac{1}{l^2} + S\right)$ et nous introduisons $\Sigma_i = [x_+, A_i[$ de sorte que $\Sigma_1 \Subset \Sigma_2 \Subset [x_+, x_A \left(\frac{1}{l^2} + S\right)]$.

Proposition 2.2.10. *Soit $S > 0$ tel que $\frac{1}{l^2} + S < A^2(x_+)$. Ils existent des constantes $h_0 > 0$, $C > 0$, et $\epsilon > 0$ telles que :*

$$\|\varphi\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq C \left(e^{-\frac{\epsilon}{h}} \|\varphi\|_{L^2(\Sigma_2)} + \|(P^+ - E(h)) \varphi\|_{L^2(\Sigma_2)} \right),$$

pour tout $h \in (0, h_0)$, $\varphi \in D(P^+)$, et pour tout $E(h)$ telle que $E(h) < \frac{1}{l^2} + S$.

Preuve. Pour δ petit, nous pouvons supposer que $\Sigma_2 \Subset [x_+, x_A \left(\frac{1}{l^2} + S + 2\delta\right)]$. Soit χ_1 telle que $\chi_1 \equiv 1$ sur Σ_1 et $\text{supp}(\chi_1) \subseteq \Sigma_2$. Soit χ_2 telle que $\chi_2 \equiv 1$ sur $\text{supp}(\chi_1)$ et $\text{supp}(\chi_2) \subseteq \Sigma_2$. Alors, sur Σ_2 , $A^2 - \left(\frac{1}{l^2} + S\right) > \delta$. Pour h suffisamment petit, nous avons donc aussi :

$$A^2 - h|A'| - \left(\frac{1}{l^2} + S\right) > \delta.$$

Nous pouvons donc trouver un $\epsilon > 0$ tel que :

$$A^2 - h|A'| - \left(\frac{1}{l^2} + S\right) - \epsilon^2 (\chi_1')^2 > \delta.$$

Utilisant le même raisonnement que dans la preuve de la proposition précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta \left\| e^{\frac{\phi}{h}} \chi_2 \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])}^2 &\leq h^2 \left\langle \varphi, e^{2\frac{\phi}{h}} \left(2\frac{\epsilon \chi_1'}{h} \chi_2 \chi_2' + (\chi_2')^2 \right) \varphi \right\rangle_{L^2([x_+, 0])} \\ &\quad + \left\| e^{\frac{\phi}{h}} \chi_2 (P^+ - E) \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])} \left\| e^{\frac{\phi}{h}} \chi_2 \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])}, \end{aligned}$$

où nous avons pris $\phi(x) = \epsilon\chi_1(x)$. Comme précédemment, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\| e^{\frac{\phi}{\hbar}} \chi_2 \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])}^2 &\leq 2\delta^{-1} h^2 \left\langle \varphi, e^{2\frac{\phi}{\hbar}} \left(2\frac{\epsilon\chi_1'}{h} \chi_2 \chi_2' + (\chi_2')^2 \right) \varphi \right\rangle_{L^2([x_+, 0])} \\ &\quad + (\delta)^{-2} \left\| e^{\frac{\phi}{\hbar}} \chi_2 (P^+ - E) \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])}^2 \end{aligned}$$

Grâce au choix de χ_1 et χ_2 , nous avons :

$$\begin{aligned} \delta \left\| e^{\frac{\epsilon\chi_1}{\hbar}} \chi_2 \varphi \right\|_{L^2(\Sigma_1)} &= \delta \left\| e^{\frac{\epsilon}{\hbar}} \varphi \right\|_{L^2(\Sigma_1)}, \\ \delta \left\| e^{\frac{\epsilon}{\hbar}} \varphi \right\|_{L^2(\Sigma_1)} &\leq \delta \left\| e^{\frac{\phi}{\hbar}} \chi_2 \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])}. \end{aligned}$$

Etant donné que $\chi_1 \equiv 0$ sur le support de χ_2' , nous obtenons :

$$\left\| e^{\frac{\epsilon}{\hbar}} \varphi \right\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq 2\delta^{-1} h^2 \left\langle \varphi, (\chi_2')^2 \varphi \right\rangle_{L^2([x_+, 0])} + (\delta)^{-2} \left\| e^{\frac{\phi}{\hbar}} \chi_2 (P^+ - E) \varphi \right\|_{L^2([x_+, 0])}^2.$$

Puisque $\epsilon\chi_1 \leq \epsilon$, il vient :

$$\left\| e^{\frac{\epsilon}{\hbar}} \varphi \right\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq 2\delta^{-1} h^2 \sup \left((\chi_2')^2 \right) \|\varphi\|_{L^2(\Sigma_2)} + \delta^{-2} e^{\frac{\epsilon}{\hbar}} \|(P^+ - E) \varphi\|_{L^2(\Sigma_2)}.$$

Multipliant par $e^{-\frac{\epsilon}{\hbar}}$, nous obtenons le résultat souhaité. Q.E.D

Remarquons que cette dernière inégalité montre que la norme d'un vecteur propre de P^+ pour la valeur propre $E(h)$ décroît exponentiellement lorsque nous nous trouvons dans la région où A^2 est plus grand que $E(h)$, région qui est interdite classiquement.

2.2.3 Estimation pour les valeurs propres de P^+

Dans cette section, nous prouvons qu'il est possible de trouver une valeur propre pour l'opérateur P^+ à distance $O(h)$ de la valeur propre de l'opérateur \tilde{P} obtenue dans 2.2.5. Nous avons :

Proposition 2.2.11. *Soit $T > 0$. Il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in (0, h_0)$, il existe une valeur propre $E^+(h)$ de l'opérateur P^+ vérifiant :*

$$|E^+(h) - E_2(h)| < Ch^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{où } E_2(h) = \frac{1}{l^2} + (2\alpha_1 + 1) \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} h$$

Preuve. Nous introduisons l'opérateur :

$$P^\# = -h^2 \partial_x^2 + \frac{1}{l^2} + \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right) x^2 + h^2 \left(\frac{m^2 l^2}{x^2} + i\gamma^1 \frac{ml}{x^2} \right) + (E_2 - E_1)(h) K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K^{-1}$$

$$\text{où } E_1(h) = \frac{1}{l^2} + (2ml + 1) \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6} \right)^{\frac{1}{2}} h \text{ tel que } (E_2 - E_1)(h) > 0 \text{ et } K = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons vu précédemment que cet opérateur admet $E_2(h)$ comme valeur propre. Notons φ_2

un vecteur propre associé. Soit $S > 0$ tel que $\frac{1}{l^2} + S < A^2(x_+)$ et $\mathcal{A} < x_+ (\frac{1}{l^2} + S)$. Soit $\chi \in C^\infty$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $[\mathcal{A}, 0[$ et $\text{supp}(\chi) = [x_+, 0]$. Alors $\chi\varphi_2 \in D(P^+)$ et :

$$(P^+ - E_2(h))(\chi\varphi_2) = (P^+ - P^\#)(\chi\varphi_2) + (P^\# - E_2(h))(\chi\varphi_2) = \chi R(h)\varphi_2 + [-h^2\partial_x^2, \chi]\varphi_2,$$

où :

$$\begin{aligned} R(h) &= A^2(x) - \left(\frac{1}{l^2} + \frac{x^2}{l^4}\right) - h\frac{x^2}{l^6} - ih\gamma^1\gamma^2 A'(x) + h^2m^2 \left(B^2(x) - \frac{l^2}{x^2}\right) \\ &\quad + ih^2m\gamma^1 \left(B'(x) - \frac{l}{x^2}\right) + (E_2 - E_1)(h) K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K^{-1} \\ &= o(x^2) + hO(x^2) + hO(x) + O(h^2) + O(h). \end{aligned}$$

Rappelons que $K^{-1}\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_1(x) \end{pmatrix}$ où $\psi_1(x) = h^{-\frac{1}{4}} \left(h^{-\frac{1}{2}}x\right)^{ml} e^{-\left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2h}}$ et $\psi_2(x) = h^{-\frac{1}{4}} \left(h^{-\frac{1}{2}}x\right)^{\alpha_1} e^{-\left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2h}}$ où $\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4ml(ml+1)}}{2}$. Réalisant le changement de variable $y = h^{-\frac{1}{2}}x$ et utilisant la décroissance exponentielle de notre vecteur propre, nous voyons que :

$$\|\chi R(h)\varphi_2\|_{L^2([x_+, 0])} = O\left(h^{\frac{1}{2}}\right).$$

Le commutateur vaut :

$$[-h^2\partial_x^2, \chi] = -h^2\chi'' - h^2\chi'\partial_x.$$

Le support de χ' et χ'' ainsi que la forme de φ_2 nous donnent $\epsilon > 0$ tel que :

$$\|[-h^2\partial_x^2, \chi]\varphi_2\|_{L^2([x_+, 0])} = O\left(e^{-\frac{\epsilon}{h}}\right).$$

Ceci nous donne donc :

$$\|(P^+ - E_2(h))(\chi\varphi_2)\|_{L^2([x_+, 0])} = O\left(h^{\frac{1}{2}}\right).$$

Comme $\|\chi\varphi_2\|_{L^2([x_+, 0])} = 1 - O\left(e^{-\frac{\epsilon}{h}}\right)$, nous pouvons normaliser $\chi\varphi_2$. Le théorème spectral nous donne l'existence d'une valeur propre $E^+(h)$ de P^+ telle que :

$$|E^+(h) - E_2(h)| \leq Ch^{\frac{1}{2}}$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Q.E.D

2.2.4 Construction des quasimodes

Nous introduisons maintenant l'opérateur H^+ qui n'est autre que l'opérateur H considéré sur $[x_+, 0[$ muni du domaine :

$$D(H^+) = \{\varphi \in L^2([x_+, 0]) \mid H^+\varphi \in L^2([x_+, 0]), \varphi(x_+) = 0\}.$$

Nous avons $P^+ = (H^+)^2$ et $(E^+)^2$ est une valeur propre de P^+ si et seulement si $\pm E^+$ est une valeur propre de H^+ . Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 2.2.12. Soit $S > 0$ tel que $\frac{1}{l^2} + S < A^2(x_+)$. Ils existent des constantes $h_0 > 0$, $D > 0$, un nombre réel $(E^+(h))^{\frac{1}{2}} > 0$ tel que $E^+(h) < \frac{1}{l^2} + S$ et une fonction $\varphi \in D(H)$ telle que $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^-,0]} = 1$ vérifiant :

$$\left\| \left(H - (E^+(h))^{\frac{1}{2}} \right) \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^-,0]} \leq e^{-\frac{D}{h}},$$

pour tout $h \in (0, h_0)$.

Preuve. Soient $A < x_A$ ($(\frac{1}{l^2} + S)$) et $\chi \in C_0^\infty$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $[A, 0[$ et $\text{supp}(\chi) = [x_+, 0[$. Notons φ^+ un vecteur propre de H^+ pour la valeur propre $(E^+(h))^{\frac{1}{2}}$ telle que $E^+(h) < \frac{1}{l^2} + S$. Nous savons qu'une telle valeur propre existe puisque nous avons prouvé dans la partie précédente qu'il existait une valeur propre de P^+ à distance $O(h^{\frac{1}{2}})$ de $E_2(h) = \frac{1}{l^2} + (2\alpha_1 + 1) \left(\frac{1}{l^4} + \frac{h}{2l^6}\right)^{\frac{1}{2}} h$. Nous posons $\varphi = \chi \varphi^+$ où nous prolongeons par 0 en dehors de $[x_+, 0[$. Nous avons donc $\varphi \in D(H)$ et :

$$\left\| \left(H - (E^+(h))^{\frac{1}{2}} \right) \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^-,0]} = \left\| [i\gamma^0 \gamma^1 h \partial_x, \chi] \varphi^+ \right\|_{L^2(\mathbb{R}^-,0]}.$$

Or, nous avons :

$$[i\gamma^0 \gamma^1 h \partial_x, \chi] = i\gamma^0 \gamma^1 h \chi'.$$

Utilisant les estimations de Agmon, nous obtenons :

$$\|i\gamma^0 \gamma^1 h \chi' \varphi^+\| \leq C \left(e^{-\frac{\epsilon}{h}} \|\varphi^+\| + \|(P^+ - E^+(h)) \varphi^+\| \right).$$

Le dernier terme est nul puisque φ^+ est un vecteur propre de H^+ pour la valeur propre $(E^+(h))^{\frac{1}{2}}$ et que $P^+ = (H^+)^2$. Nous obtenons donc :

$$\left\| \left(H - (E^+(h))^{\frac{1}{2}} \right) \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^-,0]} \leq e^{-\frac{D}{h}}.$$

Etant donné que nous pouvons normaliser φ , le résultat est prouvé. Q.E.D

2.2.5 Borne inférieure pour l'énergie locale

Nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 2.2.13. Pour tout compact $K \subset]-\infty, 0[$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|=1} \ln(t) \|e^{itH} \varphi\|_{L^2(K)} \geq C.$$

Preuve. Soit φ_h un quasimode comme dans la proposition précédente. Introduisons la fonction $\psi_h = e^{iE^+(h)t} \varphi_h$. Alors :

$$-i\partial_t \psi_h - H \psi_h = -(H - E^+(h)) \psi_h$$

et $\|(H - E^+(h)) \psi_h\|_{L^2(\mathbb{R}^-,0]} \leq e^{-\frac{D}{h}}$. Nous pouvons ainsi considérer l'équation précédente comme une équation avec second membre de la forme :

$$-i\partial_t \chi - H \chi = F$$

où $\|F\|_{L^2(\mathbb{R}^-,0]} \leq e^{-\frac{D}{h}}$. L'équation homogène associée admet $\tilde{\psi}_h = e^{itH} \varphi_h$ comme solution si l'on prend φ comme condition initiale. Une solution de l'équation précédente est alors donnée par la formule de Duhamel :

$$\chi = e^{itH} \varphi_h + \int_0^t e^{i(t-s)H} \varphi_h F ds.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\left| \|\psi_h\|_{L^2(K)} - \|\tilde{\psi}_h\|_{L^2(K)} \right| &\leq \|\psi_h - \tilde{\psi}_h\|_{L^2(K)} \\
&\leq \int_0^t \left\| e^{i(t-s)H} \varphi_h F \right\|_{L^2(K)} ds \\
&\leq \int_0^t \left\| e^{i(t-s)H} \varphi_h F \right\|_{L^2(]-\infty, 0])} ds \\
&\leq Ct \|F\| \leq Cte^{-\frac{D}{h}}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\|e^{itH} \varphi_h\|_{L^2(K)} \geq \|\psi_h\|_{L^2(K)} - Cte^{-\frac{D}{h}} = \|\varphi_h\|_{L^2(K)} - Cte^{-\frac{D}{h}}.$$

Notons $\lambda = \|\varphi_h\|_{L^2(K)}$. Prenons $t_h = \frac{\lambda-h}{C} e^{\frac{D}{h}}$ de sorte que $\lambda - Ct_h e^{-\frac{D}{h}} = h$. Nous avons donc :

$$\ln(t_h) = \ln\left(\frac{\lambda-h}{C}\right) + \frac{D}{h}.$$

D'où :

$$h = \frac{D}{\ln(t_h)} + \frac{h \ln\left(\frac{\lambda-h}{C}\right)}{\ln(t_h)}.$$

Pour h suffisamment petit, nous avons $|h \ln\left(\frac{\lambda-h}{C}\right)| \leq \frac{D}{2}$ ce qui nous donne :

$$\|e^{it_h H} \varphi_h\|_{L^2(K)} \geq \frac{D}{2 \ln(t_h)},$$

pour t_h de la forme $t_h = \frac{\lambda-h}{C} e^{\frac{D}{h}}$. Quand h tend vers 0, t_h va tendre vers $+\infty$ et il vient :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\varphi \in \mathcal{H}} \ln(t) \|e^{itH} \varphi\|_{L^2(K)} \geq \frac{D}{2} > 0$$

Q.E.D

2.3 Extension méromorphe de la résolvante

Dans cette section, nous considérons la résolvante $(H_m^{s,n} - \lambda)^{-1}$ comme fonction de λ . Nous n'utiliserons pas la version semi-classique de notre opérateur dans cette section. Cette fonction à valeur dans les opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_{s,n}$ est bien définie et analytique pour $\text{Im}(\lambda) > 0$. Nous allons essayer de prolonger cette résolvante à travers l'axe réel. Pour ce faire, nous devons bien sûr considérer la résolvante sur des espaces de Hilbert adaptés et ce prolongement se fera en laissant des pôles qui sont appelés les résonances. Ces pôles sont d'une grande importance puisqu'ils donnent la fréquence et le taux de décroissance en temps long des solutions de notre équation.

Nous commençons cette section par l'étude de l'existence de ces résonances. Nous nous intéressons tout d'abord au cas d'une variété asymptotiquement hyperbolique, cas qui a déjà été traité de manière plus générale dans [43]. Ici, nous considérons le cas où notre opérateur H est une perturbation d'un opérateur H_c qui est diagonale dans le sens où :

$$H_c = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}. \quad (2.3.1)$$

Nous pouvons alors étudier les solutions de Jost pour les opérateurs H_1 et H_2 ce qui nous donne une formule pour la résolvante de ces deux opérateurs. Nous obtenons ainsi une description des résonances de chacun de ces opérateurs en terme de zéros de Wronskiens. Nous en déduisons une description des résonances pour H_c . Le théorème de Fredholm méromorphe s'applique alors pour obtenir l'extension méromorphe de la résolvante de H dans les espaces adaptés.

Nous étudions ensuite l'extension méromorphe de la résolvante pour l'opérateur de Dirac dans notre espace-temps. Comme dans le lemme de compacité, nous introduisons deux opérateurs H_+ (potentiel confinant) et H_- (potentiel décroissant en $-\infty$ et 0). Le premier opérateur admet une résolvante compacte et, en symétrisant l'opérateur H_- , nous pouvons utiliser le résultat prouvé dans la première partie pour prouver le prolongement méromorphe de la résolvante de H_- . Il reste alors à utiliser le théorème de Fredholm pour obtenir le résultat principal de cette section :

Proposition 2.3.1. *L'opérateur $f_\epsilon (H_m^{s,n} - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ défini pour $\text{Im}(\lambda) > 0$ s'étend de manière méromorphe à $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) > -\epsilon\}$ pour tout $0 < \epsilon < \frac{\kappa}{2}$, où κ est la gravité de surface. Ici :*

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} e^{\epsilon x}, & x \sim -\infty, \\ C, & x \sim 0, \end{cases}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

2.3.1 Cas d'une variété asymptotiquement hyperbolique à symétrie sphérique

Nous considérerons les opérateurs suivants :

$$H_c = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

où

$$H_1 = i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(s + \frac{1}{2}\right) A(x) \quad (2.3.3)$$

$$H_2 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(s + \frac{1}{2}\right) A(x) \quad (2.3.4)$$

et :

$$H = H_c - im \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} B(x), \quad (2.3.5)$$

où Id correspond à la matrice identité d'ordre 2. Les potentiels A et B sont définies sur \mathbb{R} et vérifient les conditions suivantes :

$$A, B \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad A(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} e^{-\kappa|x|}, \quad B(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} e^{-\kappa|x|}. \quad (2.3.6)$$

Nous écrivons \sim pour signifier que $A(x) = e^{-\kappa|x|} + o(e^{-\kappa|x|})$. Nous utiliserons cette notation dans la suite. Nous supposons que les dérivées de A et B admettent un comportement asymptotique similaire. Les opérateurs H_c et H sont auto-adjoints sur $[H^1(\mathbb{R})]^4$ par le théorème de Kato-Rellich. De même, les opérateurs H_1 et H_2 sont auto-adjoints sur $[H^1(\mathbb{R})]^2$. Nous pouvons donc considérer leurs résolvantes $(H_c - \lambda)^{-1}$ et $(H - \lambda)^{-1}$. Dans cette section, nous allons considérer la résolvante pour $\text{Im}(\lambda) > 0$ et nous souhaitons prolonger ces résolvantes (dans des espaces de Hilbert appropriés) afin qu'elles soient définies pour $\text{Im}(\lambda) > -\epsilon$ avec $\epsilon > 0$ bien choisi.

Pour cela, nous allons étudier les solutions de Jost pour l'opérateur H_c . Ces solutions vérifient un comportement asymptotique donné et vont nous permettre de donner une expression pour la résolvante. Nous pourrons dès lors étendre la résolvante de H_c et ensuite celle de H par un argument de type Fredholm.

Existence des solutions de Jost

Solutions de Jost pour H_1 Nous allons étudier dans un premier temps l'existence des solutions de Jost pour H_1 . Il est plus simple d'étudier les solutions de Jost pour un opérateur unitairement équivalent à H_1 . Nous introduisons maintenant cet opérateur. Soit la matrice suivante :

$$Q = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}. \quad (2.3.7)$$

Nous avons alors $Q^{-1} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$. Ces matrices sont unitaires et nous introduisons l'opérateur suivant :

$$\tilde{H}_1 = QH_1Q^{-1}$$

unitairement équivalent à H_1 (donc en particulier auto-adjoint sur $QD(H_1)$). Nous avons :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} &= i \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous obtenons l'expression suivante pour \tilde{H}_1 :

$$\tilde{H}_1 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x).$$

Nous souhaitons prouver le :

Lemme 2.3.2. *Ils existent des solutions ω_{out}^\pm à l'équation $\tilde{H}_1\varphi = \lambda\varphi$ vérifiant les comportements asymptotiques suivant :*

$$\begin{aligned} \omega_{out}^+(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} \\ -e^{i\lambda x} \end{pmatrix} \\ \omega_{out}^-(x) &\underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ces comportements nous permettront d'obtenir de l'intégrabilité dans l'expression de la résolvante (pour $\text{Im}(\lambda) > 0$).

Preuve. Calculons :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1^2 &= \left(i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) \right) \left(i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \right. \\ &\quad \left. + i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) \right) \\ &= -\partial_x^2 - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(s + \frac{1}{2} \right) \partial_x A(x) \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) \partial_x - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 \left(s + \frac{1}{2} \right)^2 A^2(x) \end{aligned}$$

$$= -\partial_x^2 + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(s + \frac{1}{2} \right) A'(x) + \left(s + \frac{1}{2} \right)^2 A^2(x),$$

puisque :

$$\begin{aligned} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\varphi \in D(\tilde{H}_1)$ vérifie $\tilde{H}_1\varphi = \lambda\varphi$, alors $\varphi \in D(\tilde{H}_1^2)$ et $\tilde{H}_1^2\varphi = \lambda^2\varphi$. Notant $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} -\partial_x^2\varphi_1 + V_{[1]}(x)\varphi_1 &= \lambda^2\varphi_1, \\ -\partial_x^2\varphi_2 + V_{[2]}(x)\varphi_2 &= \lambda^2\varphi_2, \end{aligned}$$

où $V_{[1]}(x) = -\left(s + \frac{1}{2}\right)A'(x) + \left(s + \frac{1}{2}\right)^2A^2(x)$, $V_{[2]}(x) = \left(s + \frac{1}{2}\right)A'(x) + \left(s + \frac{1}{2}\right)^2A^2(x)$. Utilisant le théorème *XI.57* du livre 3 dans [73], il existe des solutions $\omega_{j,out}^\pm$ pour $j = 1, 2$, appelées solutions de Jost, vérifiant les conditions suivantes :

$$\omega_{j,out}^+(x, \lambda) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{i\lambda x}, \quad (2.3.8)$$

$$\omega_{j,out}^-(x, \lambda) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} e^{-i\lambda x}, \quad (2.3.9)$$

$$\omega_{j,out}^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} - \int_x^\infty \frac{\sin(\lambda(x-y))}{\lambda} V_{[j]}(y) \omega_{j,out}^+(y, \lambda) dy, \quad (2.3.10)$$

$$\omega_{j,out}^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^x \frac{\sin(\lambda(x-y))}{\lambda} V_{[j]}(y) \omega_{j,out}^-(y, \lambda) dy, \quad (2.3.11)$$

pour $j = 1, 2$. De plus, comme $\int_x^\infty e^{\frac{\kappa}{2}y} |V_j(y)| dy < \infty$, nous pouvons prolonger ces fonctions analytiquement pour $\text{Im}(\lambda) > -\frac{\kappa}{2}$. Nous pouvons maintenant exprimer les solutions de Jost pour notre opérateur \tilde{H}_1 . Pour cela, nous noterons cet opérateur comme suit :

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{H}_1^{[1]} \\ \tilde{H}_1^{[2]} & 0 \end{pmatrix},$$

où :

$$\tilde{H}_1^{[1]} = -i\partial_x + i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x),$$

$$\tilde{H}_1^{[2]} = -i\partial_x - i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x).$$

Introduisons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \omega_{out}^+(x) &= \begin{pmatrix} \omega_{1,out}^+(x) \\ \frac{1}{\lambda} \tilde{H}_1^{[2]} \omega_{1,out}^+(x) \end{pmatrix} \\ \omega_{out}^-(x) &= \begin{pmatrix} \omega_{1,out}^-(x) \\ \frac{1}{\lambda} \tilde{H}_1^{[2]} \omega_{1,out}^-(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme $\tilde{H}_1^{[1]} \tilde{H}_1^{[2]} = -\partial_x^2 + V_{[1]}(x)$, nous avons :

$$\tilde{H}_1 \omega_{out}^+(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \lambda^2 \omega_{1,out}^+(x) \\ \lambda \frac{1}{\lambda} \tilde{H}_1^{[2]} \omega_{1,out}^+(x) \end{pmatrix} = \lambda \omega_{out}^+(x).$$

Nous avons de même $\tilde{H}_1 \omega_{out}^-(x) = \lambda \omega_{out}^-(x)$. D'après (2.3.8), nous savons que $\omega_{1,out}^+(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{i\lambda x}$. Utilisant (2.3.10), nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \tilde{H}_1^{[2]} \omega_{1,out}^+(x) &= \frac{i}{\lambda} \partial_x \left(e^{i\lambda x} - \int_x^\infty \frac{\sin(\lambda(x-y))}{\lambda} V_{[j]}(y) \omega_{j,out}^+(y, \lambda) dy \right) \\ &\quad - \frac{i}{\lambda} \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) \omega_{1,out}^+(x) \\ &= -e^{i\lambda x} - i \int_x^{+\infty} \frac{\cos(\lambda(x-y))}{\lambda} V_{[1]}(y) \omega_{out}^+(y) dy \\ &\quad - \frac{i}{\lambda} \left(s + \frac{1}{2} \right) A(x) \omega_{1,out}^+(x). \end{aligned}$$

Utilisant le fait que l'intégrande dans le terme de droite est intégrable sur $]1, +\infty[$ et le comportement asymptotique de A , nous obtenons $\frac{1}{\lambda} \tilde{H}_1^{[2]} \omega_{1,out}^+(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{i\lambda x}$. Finalement, le comportement asymptotique de ω_{out}^+ est :

$$\omega_{out}^+(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} \\ -e^{i\lambda x} \end{pmatrix}$$

ce qui est bien le comportement recherché. Utilisant un raisonnement similaire, le comportement asymptotique de ω_{out}^- est donné par :

$$\omega_{out}^-(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}.$$

Q.E.D

Solutions de Jost pour H_2 Nous remarquons que $H_2 = -H_1$. Par conséquent, nous pouvons réaliser la même transformation unitaire. Le calcul du carré ne change pas et nous pouvons ainsi prouver l'existence des solutions de Jost pour le carré et par conséquent pour H_2 par la même méthode.

Extension méromorphe de $(H_c - \lambda)^{-1}$

Remarquons que, pour tout $\lambda \in \rho(H_c)$, nous avons :

$$(H_c - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} (H_1 - \lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (H_2 - \lambda)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Commençons par étudier $(H_1 - \lambda)^{-1}$.

Rappelons que nous avons $\tilde{H}_1 = Q H_1 Q^{-1}$ où Q est donnée par (2.3.7). Donc $(H_1 - \lambda)^{-1} = Q^{-1} (\tilde{H}_1 - \lambda)^{-1} Q$. Nous allons donner une formule explicite pour $(\tilde{H}_1 - \lambda)^{-1}$. Nous noterons f_ϵ la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f_\epsilon(x) = e^{-\epsilon|x|}, \quad (2.3.12)$$

pour $\epsilon > 0$. D'autre part, nous noterons $\omega_{out}^+(x) = \begin{pmatrix} \omega_1^+(x) \\ \omega_2^+(x) \end{pmatrix}$, $\omega_{out}^-(x) = \begin{pmatrix} \omega_1^-(x) \\ \omega_2^-(x) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}^\tau = \begin{pmatrix} \varphi_1 & -\varphi_2 \end{pmatrix}$ et

$$W_1(\lambda) = \omega_1^+ \omega_2^- - \omega_1^- \omega_2^+. \quad (2.3.13)$$

Nous avons alors le :

Lemme 2.3.3. *Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$, nous avons :*

$$\begin{aligned} \left(\tilde{H}_1 - \lambda\right)^{-1} u(x) &= \frac{-i}{W_1(\lambda)} \left(\int_{-\infty}^x \omega_{out}^+(x) (\omega_{out}^-(y))^\tau u(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{+\infty} \omega_{out}^-(x) (\omega_{out}^+(y))^\tau u(y) dy \right). \end{aligned}$$

Preuve. Notons :

$$\begin{aligned} G_\lambda u(x) &= \frac{-i}{W_1(\lambda)} \left(\int_{-\infty}^x \omega_{out}^+(x) (\omega_{out}^-(y))^\tau u(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{+\infty} \omega_{out}^-(x) (\omega_{out}^+(y))^\tau u(y) dy \right) \end{aligned}$$

Remarquons que G_λ est bien défini puisque nous avons choisi nos solutions de Jost afin que ω^- soit intégrable en $-\infty$ et ω^+ en $+\infty$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 G_\lambda u(x) &= \frac{-i}{W_1(\lambda)} \left(\int_{-\infty}^x \tilde{H}_1 \omega_{out}^+(x) (\omega_{out}^-(y))^\tau u(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{+\infty} \tilde{H}_1 \omega_{out}^-(x) (\omega_{out}^+(y))^\tau u(y) dy \right) \\ &\quad + i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^+ \omega_1^- & -\omega_1^+ \omega_2^- \\ \omega_2^+ \omega_1^- & -\omega_2^+ \omega_2^- \end{pmatrix} (x) u(x) \\ &\quad - i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^- \omega_1^+ & -\omega_1^- \omega_2^+ \\ \omega_2^- \omega_1^+ & -\omega_2^- \omega_2^+ \end{pmatrix} (x) u(x) \\ &= \lambda G_\lambda(x) u(x) + \frac{1}{W_1(\lambda)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^- \omega_2^+ - \omega_1^+ \omega_2^- \\ \omega_1^- \omega_2^+ - \omega_1^+ \omega_2^- & 0 \end{pmatrix} u(x) \\ &= \lambda G_\lambda u(x) + u(x) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc $\left(\tilde{H}_1 - \lambda\right) G_\lambda u(x) = u(x)$.

Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in D(\tilde{H}_1)$, nous avons :

$$(\omega_{out}^-(x))^\tau \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (x) = (\omega_1^- \quad -\omega_2^-) (x) \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix} (x) = \omega_1^-(x) u_2(x) + \omega_2^-(x) u_1(x),$$

et :

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^- \\ \omega_2^- \end{pmatrix} \right)^\tau (x) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (x) &= \begin{pmatrix} \omega_2^- \\ -\omega_1^- \end{pmatrix}^\tau (x) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (x) = (\omega_2^- \quad \omega_1^-) (x) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (x) \\ &= \omega_1^-(x) u_2(x) + \omega_2^-(x) u_1(x). \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned}
G_\lambda \tilde{H}_1 u(x) &= \frac{-i}{W_1(\lambda)} \left(\int_{-\infty}^x \omega_{out}^+(x) (\omega_{out}^-(y))^\tau \tilde{H}_1 u(y) dy \right. \\
&\quad \left. + \int_x^{+\infty} \omega_{out}^-(x) (\omega_{out}^+(y))^\tau \tilde{H}_1 u(y) dy \right) \\
&= \frac{-i}{W_1(\lambda)} \left(-i\omega_{out}^+(x) \int_{-\infty}^x (\omega_1^- \quad -\omega_2^-)(y) \begin{pmatrix} \partial_x u_2 \\ \partial_x u_1 \end{pmatrix}(y) dy \right. \\
&\quad -i\omega_{out}^-(x) \int_x^{+\infty} (\omega_1^+ \quad -\omega_2^+)(y) \begin{pmatrix} \partial_x u_2 \\ \partial_x u_1 \end{pmatrix}(y) dy \\
&\quad + \left(s + \frac{1}{2}\right) A(x) \left(\int_{-\infty}^x \omega_{out}^+(x) (\omega_{out}^-(y))^\tau \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(y) dy \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_x^{+\infty} \omega_{out}^-(x) (\omega_{out}^+(y))^\tau \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(y) dy \right) \right).
\end{aligned}$$

D'après le calcul précédent, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^x (\omega_{out}^-(y))^\tau \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(y) dy &= \int_{-\infty}^x \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega_{out}^- \right)^\tau (y) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(y) dy \\
\int_{-\infty}^x (\omega_{out}^+(y))^\tau \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(y) dy &= \int_{-\infty}^x \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega_{out}^+ \right)^\tau (y) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(y) dy
\end{aligned}$$

D'autre part, calculons :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^x (\omega_1^- \quad -\omega_2^-)(y) \begin{pmatrix} \partial_x u_2 \\ \partial_x u_1 \end{pmatrix}(y) dy &= \int_{-\infty}^x \omega_1^-(y) \partial_x u_2(y) - \omega_2^-(y) \partial_x u_1(y) dy \\
&= \omega_1^-(x) u_2(x) - \omega_2^-(x) u_1(x) \\
&\quad + \int_{-\infty}^x (\partial_x \omega_2^-(y) u_1(y) - \partial_x \omega_1^-(y) u_2(y)) dy \\
&= \omega_1^-(x) u_2(x) - \omega_2^-(x) u_1(x) \\
&\quad + \int_{-\infty}^x (\partial_x \omega_2^- \quad -\partial_x \omega_1^-)(y) u(y) dy \\
&= (-\omega_2^- \quad \omega_1^-)(x) u(x) \\
&\quad + \int_{-\infty}^x \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \omega_{out}^- \right)^\tau (y) u(y) dy,
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} (\omega_1^+ \quad -\omega_2^+)(y) \begin{pmatrix} \partial_x u_2 \\ \partial_x u_1 \end{pmatrix}(y) dy &= \int_x^{+\infty} \omega_1^+(y) \partial_x u_2(y) - \omega_2^+(y) \partial_x u_1(y) dy \\
&= \omega_2^+(x) u_1(x) - \omega_1^+(x) u_2(x) \\
&\quad + \int_x^{+\infty} (\partial_x \omega_2^+(y) u_1(y) - \partial_x \omega_1^+(y) u_2(y)) dy \\
&= (\omega_2^+ \quad -\omega_1^+)(x) u(x) \\
&\quad + \int_x^{+\infty} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \omega_{out}^+ \right)^\tau (y) u(y) dy.
\end{aligned}$$

Finalement, il nous reste :

$$\begin{aligned} G_\lambda \tilde{H}_1 u(x) &= \frac{-i}{W_1(\lambda)} \begin{pmatrix} \omega_1^- \omega_2^+ - \omega_1^+ \omega_2^- & 0 \\ 0 & \omega_1^- \omega_2^+ - \omega_1^+ \omega_2^- \end{pmatrix} (x) u(x) \\ &\quad + \int_{-\infty}^x \omega_{out}^+(x) \left(\tilde{H}_1 \omega_{out}^- \right)^\tau (y) u(y) dy + \int_x^{+\infty} \omega_{out}^-(x) \left(\tilde{H}_1 \omega_{out}^+ \right)^\tau (y) u(y) dy \\ &= u(x) + \lambda G_\lambda(x). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne $G_\lambda \left(\tilde{H}_1 - \lambda \right) u = u$. Par conséquent, $G_\lambda = \left(\tilde{H}_1 - \lambda \right)^{-1}$.

Q.E.D

Remarque. Nous avons une formule similaire pour \tilde{H}_2 où nous utilisons les solutions de Jost ω_{out}^\pm correspondantes et où

$$W_2(\lambda) = \omega_1^- \omega_2^+ - \omega_1^+ \omega_2^-. \quad (2.3.14)$$

Nous en déduisons la :

Proposition 2.3.4. *L'opérateur $f_\epsilon (H_c - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ s'étend de manière méromorphe à :*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) > -\epsilon\}$$

pour $0 < \epsilon < \frac{\kappa}{2}$ où κ vérifie (2.3.6) et f_ϵ est donné par (2.3.12). Les pôles de cette extension sont les racines de W_1 et W_2 où W_1 est donné par (2.3.13) et W_2 par (2.3.14).

Preuve. Rappelons que $\tilde{H}_1 = QH_1Q^{-1}$ de sorte que $\left(\tilde{H}_1 - \lambda \right)^{-1} = Q \left(H_1 - \lambda \right)^{-1} Q^{-1}$. D'autre part, les solutions de Jost sont analytiques pour $\text{Im}(\lambda) > -\frac{\kappa}{2}$ et $f_\epsilon \omega_{out}^\pm \in [L^2(\mathbb{R})]^2$ pour $\text{Im}(\lambda) > -\epsilon$. La formule du lemme précédent nous permet de prolonger $f_\epsilon \left(\tilde{H}_1 - \lambda \right)^{-1} f_\epsilon$ de manière méromorphe pour $\text{Im}(\lambda) > -\epsilon$. Les seuls pôles sont alors les racines de W_1 . Nous pouvons faire de même avec H_2 dont les pôles sont alors les racines de W_2 . Comme

$$(H_c - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} (H_1 - \lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (H_2 - \lambda)^{-1} \end{pmatrix},$$

nous en déduisons la proposition.

Q.E.D

Extension méromorphe de $\left(\tilde{H} - \lambda \right)^{-1}$

Nous commençons par une série de lemmes qui nous permettront d'utiliser la théorie de Fredholm méromorphe. Rappelons tout d'abord une définition :

Définition 2.3.5. Soit f définie sur $O \subset \mathbb{C}$ ouvert à valeur dans les opérateurs bornés sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . On dira que f est méromorphe de type fini sur O si f est méromorphe sur O et, en tout pôle λ_0 de f , nous avons un développement en série de Laurent de la forme :

$$f(\lambda) = \sum_{i=-N}^{+\infty} B_i (\lambda - \lambda_0)^i,$$

où B_j est un opérateur de rang fini pour tout $j = -N, \dots, -1$.

Dans la suite, nous noterons :

$$\begin{aligned} f^{+,-}(x, y, \lambda) &= \omega_{out}^+(x) (\omega_{out}^-(y))^\tau \\ f^{-,+}(x, y, \lambda) &= \omega_{out}^-(x) (\omega_{out}^+(y))^\tau. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant les opérateurs $J_i f_\epsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ définis par :

$$\begin{aligned} (J_{-1} f_\epsilon u)(x, \lambda) &= c \\ (J_i f_\epsilon u)(x, \lambda) &= \int_{-\infty}^x \frac{\partial^k f^{+,-}}{\partial \lambda^k}(x, y, \lambda) f_\epsilon(y) u(y) dy + \int_x^{+\infty} \frac{\partial^k f^{-,+}}{\partial \lambda^k}(x, y, \lambda) f_\epsilon(y) u(y) dy, \end{aligned}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ où c est une constante réelle.

Remarque. La valeur de $J_{-1} f_\epsilon u$ n'est pas importante pour la suite puisqu'elle sert juste à donner une formule de récurrence.

Nous pouvons maintenant énoncer le premier lemme :

Lemme 2.3.6. *Supposons que $W_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{n+1} g(\lambda)$ pour $n \in \mathbb{N}$ où g est une fonction holomorphe au voisinage de $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et telle que $g(\lambda_0) \neq 0$. Alors les opérateurs $J_0 f_\epsilon, \dots, J_n f_\epsilon$ sont des opérateurs de rang fini.*

Preuve. Supposons que $W_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{n+1} g(\lambda)$ avec g holomorphe au voisinage de λ_0 , $g(\lambda_0) \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrons que nous avons la relation suivante :

$$\tilde{H}_1(J_k f_\epsilon u)(x, \lambda_0) = k(J_{k-1} f_\epsilon u)(x, \lambda_0) + \lambda_0(J_k f_\epsilon u)(x, \lambda_0).$$

pour tout $k < n + 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 J_k f_\epsilon u(x, \lambda_0) &= i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial^k f^{+,-}}{\partial \lambda^k}(x, x, \lambda_0) - \frac{\partial^k f^{-,+}}{\partial \lambda^k}(x, x, \lambda_0) \right) (f_\epsilon u)(x) \\ &\quad + \int_{-\infty}^x \frac{\partial^k (\tilde{H}_1 f^{+,-})}{\partial \lambda^k}(x, y, \lambda_0) (f_\epsilon u)(y) dy \\ &\quad + \int_x^{+\infty} \frac{\partial^k (\tilde{H}_1 f^{-,+})}{\partial \lambda^k}(x, y, \lambda_0) (f_\epsilon u)(y) dy. \end{aligned}$$

Etude du terme $\left(\frac{\partial^k f^{+,-}}{\partial \lambda^k}(x, x, \lambda_0) - \frac{\partial^k f^{-,+}}{\partial \lambda^k}(x, x, \lambda_0) \right)$

Rappelons que nous avons $W_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{n+1} g(\lambda) = \omega_1^+ \omega_2^- - \omega_1^- \omega_2^+$ d'après notre hypothèse. De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} f^{+,-}(x, y, \lambda) &= \begin{pmatrix} \omega_1^+(x) \\ \omega_2^+(x) \end{pmatrix} (\omega_1^-(y) \quad -\omega_2^-(y)) \\ &= \begin{pmatrix} \omega_1^+(x) \omega_1^-(y) & -\omega_1^+(x) \omega_2^-(y) \\ \omega_2^+(x) \omega_1^-(y) & -\omega_2^+(x) \omega_2^-(y) \end{pmatrix} \\ f^{-,+}(x, y, \lambda) &= \begin{pmatrix} \omega_1^-(x) \\ \omega_2^-(x) \end{pmatrix} (\omega_1^+(y) \quad -\omega_2^+(y)) \\ &= \begin{pmatrix} \omega_1^-(x) \omega_1^+(y) & -\omega_1^-(x) \omega_2^+(y) \\ \omega_2^-(x) \omega_1^+(y) & -\omega_2^-(x) \omega_2^+(y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons :

$$f^{+,-}(x, x, \lambda) - f^{-,+}(x, x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -W_1(\lambda) \\ -W_1(\lambda) & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_0)^{n+1} g(\lambda) I_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (f^{+,-}(x, x, \lambda) - f^{-,+}(x, x, \lambda)) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (f^{+,-}(x, x, \lambda_0) - f^{-,+}(x, x, \lambda_0)) \\ &\quad + (\lambda - \lambda_0) \left(\frac{\partial f^{+,-}}{\partial \lambda}(x, x, \lambda_0) - \frac{\partial f^{-,+}}{\partial \lambda}(x, x, \lambda_0) \right) + \dots \\ &\quad + (\lambda - \lambda_0)^n \left(\frac{\partial^n f^{+,-}}{\partial \lambda^n}(x, x, \lambda_0) - \frac{\partial^n f^{-,+}}{\partial \lambda^n}(x, x, \lambda_0) \right) + o((\lambda - \lambda_0)^n). \end{aligned}$$

où I_2 est la matrice identité d'ordre 2. Par conséquent, $\frac{\partial^k f^{+,-}}{\partial \lambda^k}(x, x, \lambda_0) - \frac{\partial^k f^{-,+}}{\partial \lambda^k}(x, x, \lambda_0) = 0$ pour tout $k < n + 1$ puisque g est holomorphe au voisinage de λ_0 . Ainsi le premier terme dans le calcul de $\tilde{H}_1 J_k f_\epsilon u(x, \lambda_0)$ est nul.

Etude des termes restants

Rappelons que $\tilde{H}_1 f^{+,-}(x, y, \lambda) = \lambda f^{+,-}(x, y, \lambda)$ et $\tilde{H}_1 f^{-,+}(x, y, \lambda) = \lambda f^{-,+}(x, y, \lambda)$. Montrons donc par récurrence que :

$$\frac{\partial^n (\lambda f^{+,-})}{\partial \lambda^n} = n \frac{\partial^{n-1} f^{+,-}}{\partial \lambda^{n-1}} + \lambda \frac{\partial^n f^{+,-}}{\partial \lambda^n}. \quad (2.3.15)$$

Ceci est vrai pour $n = 0$. Supposons que ceci est vrai pour $k \leq n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1} (\lambda f^{+,-})}{\partial \lambda^{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial^n (\lambda f^{+,-})}{\partial \lambda^n} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(n \frac{\partial^{n-1} f^{+,-}}{\partial \lambda^{n-1}} + \lambda \frac{\partial^n (f^{+,-})}{\partial \lambda^n} \right) \\ &= (n+1) \frac{\partial^n (f^{+,-})}{\partial \lambda^n} + \lambda \frac{\partial^{n+1} (f^{+,-})}{\partial \lambda^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la récurrence. Nous pouvons faire de même avec $f^{-,+}$.

Nous obtenons donc :

$$\tilde{H}_1 (J_k f_\epsilon u)(x, \lambda_0) = k (J_{k-1} f_\epsilon u)(x, \lambda_0) + \lambda_0 (J_k f_\epsilon u)(x, \lambda_0).$$

pour tout $k < n + 1$.

Preuve que J_0, \dots, J_n sont des opérateurs de rang fini

Nous remarquons que J_0 vérifie l'équation :

$$\tilde{H}_1 J_0 f_\epsilon u(x, \lambda_0) = \lambda_0 J_0 f_\epsilon u(x, \lambda_0).$$

$J_0 f_\epsilon u(x, \lambda_0)$ vérifie donc une équation différentielle d'ordre 1. L'espace vectoriel des solutions étant de dimension finie, nous en déduisons que $J_0 f_\epsilon$ est un opérateur de rang fini.

Soit $0 \leq k < n$. Supposons que $J_0 f_\epsilon, \dots, J_k f_\epsilon$ soient des opérateurs de rang fini. Nous introduisons maintenant les opérateurs \mathcal{J}_{k+1} et $\tilde{H}_1^{(k+1)}$ définis par

$$\mathcal{J}_{k+1} f_\epsilon u(x) = \begin{pmatrix} J_{k+1} f_\epsilon u(x) \\ \dots \\ J_0 f_\epsilon u(x) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H}_1^{(k+1)} = \text{diag}(\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_1),$$

où nous avons $k+2$ termes sur la diagonale dans $\tilde{H}_1^{(k+1)}$. Grâce aux considérations précédentes, nous obtenons :

$$\tilde{H}_1^{(k+1)} (\mathcal{J}_{k+1} f_\epsilon u)(x, \lambda_0) = \mathcal{M}_{k+1} (\mathcal{J}_{k+1} f_\epsilon u)(x, \lambda_0),$$

où :

$$\mathcal{M}_{k+1} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \mathbf{I}_2 & (k+1) \mathbf{I}_2 & \dots & & \\ & \ddots & & & \\ & & & \lambda_0 \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ & & & \dots & \lambda_0 \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

avec \mathbf{I}_2 la matrice identité d'ordre 2 et \mathcal{M}_{k+1} une matrice $(k+2) \times (k+2)$. Ainsi $\mathcal{J}_{k+1} f_\epsilon u$ vérifie un système d'équation différentielles du premier ordre. L'espace vectoriel des solutions est de dimension finie et, par hypothèse de récurrence, les opérateurs $J_0 f_\epsilon, \dots, J_k f_\epsilon$ sont de rang finis. Nous en déduisons que $J_{k+1} f_\epsilon$ est un opérateur de rang fini. Par récurrence finie, nous pouvons conclure que $J_0 f_\epsilon, \dots, J_n f_\epsilon$ sont des opérateurs de rang fini.

Q.E.D

Remarque. Nous avons un lemme similaire avec W_1 remplacé par W_2 et les fonction $f^{+,-}, f^{-,+}$ correspondantes.

Nous pouvons en déduire le :

Lemme 2.3.7. *L'opérateur $f_\epsilon (H_c - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ est méromorphe de type fini.*

Preuve. Rappelons que, pour tout λ tel que $\text{Im}(\lambda) > -\frac{\kappa}{2}$, nous avons :

$$f_\epsilon (H_c - \lambda)^{-1} f_\epsilon = f_\epsilon \begin{pmatrix} (H_1 - \lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (H_2 - \lambda)^{-1} \end{pmatrix} f_\epsilon,$$

où $(H_1 - \lambda)^{-1} = Q^{-1} (\tilde{H}_1 - \lambda)^{-1} Q$ et $(H_2 - \lambda)^{-1} = Q^{-1} (\tilde{H}_2 - \lambda)^{-1} Q$ avec Q donnée par (2.3.7). Rappelons aussi que :

$$\begin{aligned} (\tilde{H}_1 - \lambda)^{-1} f_\epsilon u(x) &= \frac{-i}{W_1(\lambda)} \left(\int_{-\infty}^x f^{+,-}(x, y, \lambda) (f_\epsilon u)(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{+\infty} f^{-,+}(x, y, \lambda) (f_\epsilon u)(y) dy \right) \end{aligned}$$

pour tout u tel que $f_\epsilon u \in [L^2(\mathbb{R})]^2$. Utilisant les notations introduites au début de cette section, nous avons :

$$\begin{aligned} (J_0 f_\epsilon u)(x, \lambda) &= \int_{-\infty}^x f^{+,-}(x, y, \lambda) (f_\epsilon u)(y) dy \\ &\quad + \int_x^{+\infty} f^{-,+}(x, y, \lambda) (f_\epsilon u)(y) dy. \end{aligned}$$

Nous allons prouver que $(\tilde{H}_1 - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ est méromorphe de type fini. Rappelons que les pôles de cette résolvante sont les racines de W_1 . Supposons que $W_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{n+1} g(\lambda)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et g holomorphe au voisinage de $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ telle que $g(\lambda_0) \neq 0$.

Remarque. D'après la remarque précédent ce lemme, il en sera de même pour $(\tilde{H}_2 - \lambda)^{-1} f_\epsilon$.

Comme g est holomorphe au voisinage de λ_0 , nous pouvons écrire :

$$g(\lambda) = g(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)g'(\lambda_0) + \cdots + (\lambda - \lambda_0)^n g^{(n)}(\lambda_0) + o((\lambda - \lambda_0)^n).$$

Nous obtenons ainsi au voisinage de λ_0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{W_1(\lambda)} &= \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1} g(\lambda_0)} \left(1 - \left((\lambda - \lambda_0) \frac{g'(\lambda_0)}{g(\lambda_0)} + \cdots + (\lambda - \lambda_0)^n \frac{g^{(n)}(\lambda_0)}{g(\lambda_0)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + (-1)^n \left((\lambda - \lambda_0) \frac{g'(\lambda_0)}{g(\lambda_0)} + \cdots + (\lambda - \lambda_0)^n \frac{g^{(n)}(\lambda_0)}{g(\lambda_0)} \right)^n + o((\lambda - \lambda_0)^n) \right). \end{aligned}$$

D'autre part, au voisinage de λ_0 , nous avons :

$$\begin{aligned} (J_0 f_\epsilon u)(x, \lambda) &= (J_0 f_\epsilon u)(x, \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) (J_1 f_\epsilon u)(x, \lambda_0) + \cdots + (\lambda - \lambda_0)^n (J_n f_\epsilon u)(x, \lambda_0) \\ &\quad + o((\lambda - \lambda_0)^n) \end{aligned}$$

Comme $(\tilde{H}_1 - \lambda)^{-1} f_\epsilon u = \frac{-i}{W_1(\lambda)} (J_0 f_\epsilon u)(x, \lambda)$ et g ainsi que toutes ses dérivées sont à valeurs scalaires, nous en déduisons que les coefficients de $(\lambda - \lambda_0)^i$ pour $i = -(n+1), \dots, -1$ sont des combinaisons linéaires de $J_0 f_\epsilon, \dots, J_n f_\epsilon$ qui sont des opérateurs de rang finis. Par conséquent, $(\tilde{H}_1 - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ est un opérateur méromorphe de type fini. Multiplier par la fonction f_ϵ ne change pas le rang des opérateurs. Nous pouvons donc conclure que $f_\epsilon (\tilde{H}_1 - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ est méromorphe de type fini. Il en est de même pour $f_\epsilon (\tilde{H}_2 - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ en remplaçant W_1 par W_2 et les fonctions $f^{-,+}, f^{+,-}$ par les fonctions correspondantes pour \tilde{H}_2 . Utilisant l'expression de $f_\epsilon (H_c - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ en fonction de $f_\epsilon (\tilde{H}_1 - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ et $f_\epsilon (\tilde{H}_2 - \lambda)^{-1} f_\epsilon$, nous obtenons le lemme.

Q.E.D

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.8. *Notons B l'opérateur de multiplication par $B(x)$. Alors l'opérateur*

$$f_{-\epsilon} B (H_c - \lambda)^{-1} f_\epsilon$$

est compact pour tout $\epsilon < \frac{\kappa}{2}$ et $\lambda \in \rho(H_c)$ tel que $\text{Im}(\lambda) \neq 0$.

Preuve. Rappelons que $B(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} e^{-\kappa|x|}$ et $A(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} e^{-\kappa|x|}$. Ainsi, pour $\epsilon < \frac{\kappa}{2}$, $f_{-\epsilon} B$ est un opérateur borné sur $[L^2(\mathbb{R})]^4$ et tend vers 0 aux deux infinis. Notons $H_0 = i \text{diag}(-1, 1, 1, -1) \partial_x$ défini et auto-adjoint sur $[H^1(\mathbb{R})]^4$. Nous avons :

$$(H_c - \lambda)^{-1} = (H_0 - \lambda)^{-1} - (H_c - \lambda)^{-1} \Gamma^2 A(x) (H_0 - \lambda)^{-1}, \quad (2.3.16)$$

où :

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & -\zeta^2 \end{pmatrix}$$

avec $\zeta^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons donc :

$$f_{-\epsilon}B(H_c - \lambda)^{-1}f_\epsilon = f_{-\epsilon}B(H_0 - \lambda)^{-1}f_\epsilon - f_{-\epsilon}B(H_c - \lambda)^{-1}\Gamma^2A(x)(H_0 - \lambda)^{-1}f_\epsilon.$$

Utilisant une conséquence du lemme IX.29 dans [73], les opérateurs $A(x)(H_0 - \lambda)^{-1}$ et $f_{-\epsilon}B(H_0 - \lambda)^{-1}$ sont compacts. Comme B et $(H_c - \lambda)^{-1}$ sont bornés, nous en déduisons que $f_{-\epsilon}B(H_c - \lambda)^{-1}f_\epsilon$ est un opérateur compact.

Q.E.D

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section :

Proposition 2.3.9. *L'opérateur $f_\epsilon(H - \lambda)^{-1}f_\epsilon$ défini pour $\text{Im}(\lambda) > 0$ s'étend de manière méromorphe à $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) > -\epsilon\}$ pour tout $\epsilon < \frac{\kappa}{2}$.*

Preuve. Nous avons :

$$(H - \lambda)^{-1} = (H_c - \lambda)^{-1} + (H - \lambda)^{-1}im \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} B(x)(H_c - \lambda)^{-1}. \quad (2.3.17)$$

D'où :

$$(H - \lambda)^{-1} \left(1 - im \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} B(x)(H_c - \lambda)^{-1} \right) = (H_c - \lambda)^{-1}.$$

Multipliant par f_ϵ , nous obtenons :

$$f_\epsilon(H - \lambda)^{-1}f_\epsilon \left(1 - im \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} f_{-\epsilon}B(x)f_{-\epsilon}f_\epsilon(H_c - \lambda)^{-1}f_\epsilon \right) = f_\epsilon(H_c - \lambda)^{-1}f_\epsilon.$$

Comme $f_{-\epsilon}B(x)f_{-\epsilon}f_\epsilon(H_c - \lambda)^{-1}f_\epsilon$ est compact d'après le lemme 2.3.8, l'opérateur $\left(1 - im \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} f_{-\epsilon}B(x)f_{-\epsilon}f_\epsilon(H_c - \lambda)^{-1}f_\epsilon \right)$ est de type Fredholm. Utilisant le lemme 2.3.7, cet opérateur est aussi méromorphe de type fini. Grâce à la proposition 4.1.4 dans [42], cet opérateur est inversible et son inverse est méromorphe de type fini et Fredholm. Comme l'opérateur $f_\epsilon(H_c - \lambda)^{-1}f_\epsilon$ s'étend de manière méromorphe pour $\text{Im}(\lambda) > -\epsilon$, nous en déduisons que $f_\epsilon(H - \lambda)^{-1}f_\epsilon$ s'étend de manière méromorphe pour $\text{Im}(\lambda) > -\epsilon$ ce qui est le résultat souhaité.

Q.E.D

2.3.2 Extension méromorphe de la résolvante pour l'opérateur de Dirac dans l'espace-temps de Schwarzschild Anti-de Sitter

Rappelons qu'à harmonique fixée, nous avons :

$$H_m^{s,n} = i\gamma^0\gamma^1\partial_x + \left(s + \frac{1}{2} \right) \gamma^0\gamma^2A(x) - m\gamma^0B(x), \quad (2.3.18)$$

où $\gamma^0\gamma^1 = \text{diag}(-1, 1, 1, -1)$, $\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & -\zeta^2 \end{pmatrix}$ où $\zeta^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\gamma^0 = i \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, nous noterons $\Gamma^1 = -\gamma^0\gamma^1$ et $\Gamma^2 = \gamma^0\gamma^2$. Définissons aussi la fonction :

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} e^{\epsilon x}, & x \sim -\infty, \\ C, & x \sim 0, \end{cases}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 2.3.10. *L'opérateur $f_\epsilon (H_m^{s,n} - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ défini pour $\text{Im}(\lambda) > 0$ s'étend de manière méromorphe à $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) > -\epsilon\}$ pour tout $0 < \epsilon < \frac{\kappa}{2}$ où κ est la gravité de surface.*

Preuve. Rappelons les comportements asymptotiques de A :

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{l} + o(x), \quad x \sim 0 \\ A(x) &= C_A e^{\kappa x} + o(e^{\kappa x}), \quad x \sim -\infty, \end{aligned}$$

et de B :

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{-l}{x} + o(1), \quad x \sim 0 \\ B(x) &= C_B e^{\kappa x} + o(e^{\kappa x}). \end{aligned}$$

Introduisons les opérateurs :

$$\begin{aligned} H_+ &= \Gamma^1 D_x + V_+(x), \\ H_- &= \Gamma^1 D_x + V_-(x), \end{aligned}$$

où $D_x = -i\partial_x$ et :

$$\begin{aligned} V_+(x) &= \begin{cases} \Gamma^2 \left(s + \frac{1}{2}\right) A(x) - m\gamma^0 B(x), & x \sim 0, \\ \Gamma^2 \left(s + \frac{1}{2}\right) A(x) + m\gamma^0 x^2, & x \sim -\infty, \end{cases} \\ V_-(x) &= \begin{cases} \Gamma^2 \left(s + \frac{1}{2}\right) A(x) - m\gamma^0 B(x), & x \sim -\infty, \\ \Gamma^2 \left(s + \frac{1}{2}\right) A(x) + m\gamma^0 x, & x \lesssim 0, \\ \Gamma^2 \left(s + \frac{1}{2}\right) A(-x), & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ces deux opérateurs sont auto-adjoints. En effet, utilisant le théorème de Kato-Rellich, l'opérateur H_- est auto-adjoint sur $[H^1(\mathbb{R})]^4$. Utilisant un raisonnement similaire à celui de la preuve du caractère auto-adjoint de $H_m^{s,n}$, nous pouvons prouver que H_+ est auto-adjoint en tant qu'opérateur agissant sur $[L^2(\cdot - \infty, 0)]^4$.

Introduisons les fonctions $j_-, j_+ \in C^\infty(\cdot - \infty, 0]$ telles que $j_-^2 + j_+^2 = 1$, $\text{supp } j_- \subset] - \infty, c[$, $\text{supp } j_+ \subset] b, 0[$ avec $b < c < 0$ et $H = H_\pm$ sur le support de j_\pm . Considérons maintenant l'opérateur :

$$Q(\lambda) = j_- (H_- - \lambda)^{-1} j_- + j_+ (H_+ - \lambda)^{-1} j_+.$$

Nous avons :

$$(H_m^{s,n} - \lambda) Q(\lambda) = 1 + h(\lambda),$$

où :

$$h(\lambda) = [H_m^{s,n}, j_-] (H_- - \lambda)^{-1} j_- + [H_m^{s,n}, j_+] (H_+ - \lambda)^{-1} j_+$$

Ainsi :

$$f_{-\epsilon} (H_m^{s,n} - \lambda) f_{-\epsilon} f_\epsilon Q(\lambda) f_\epsilon = 1 + f_{-\epsilon} h(\lambda) f_\epsilon.$$

Par conséquent :

$$f_\epsilon (H_m^{s,n} - \lambda)^{-1} f_\epsilon (1 + f_{-\epsilon} h(\lambda) f_\epsilon) = f_\epsilon Q(\lambda) f_\epsilon,$$

où :

$$\begin{aligned} f_\epsilon Q(\lambda) f_\epsilon &= j_- f_\epsilon (H_- - \lambda)^{-1} f_\epsilon j_- + j_+ f_\epsilon (H_+ - \lambda)^{-1} f_\epsilon j_+ \\ f_{-\epsilon} h(\lambda) f_\epsilon &= f_{-\epsilon} [H_m^{s,n}, j_-] f_{-\epsilon} f_\epsilon (H_- - \lambda)^{-1} f_\epsilon j_- + f_{-\epsilon} [H_m^{s,n}, j_+] f_{-\epsilon} f_\epsilon (H_+ - \lambda)^{-1} f_\epsilon j_+. \end{aligned}$$

Extension méromorphe de $f_\epsilon (H_+ - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ et $f_{-\epsilon} [H_m^{s,n}, j_+] f_{-\epsilon} f_\epsilon (H_+ - \lambda)^{-1} f_\epsilon j_+$.

D'après la proposition 1.4.4, l'opérateur $(H_+ - \lambda)^{-1}$ est compact, l'opérateur H_+ admet donc un spectre discret constitué de valeurs propres qui n'admet pas de point d'accumulation fini. D'après le théorème spectral, cet opérateur est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par $\frac{1}{x-\lambda}$ sur un espace $L^2(\sigma(H_+))$. Comme le spectre est ici discret, les seuls pôles de la résolvante sont donc les valeurs propres de l'opérateur. Comme les valeurs propres n'ont pas de point d'accumulation, cette résolvante se prolonge de manière méromorphe de type fini à $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) > -\epsilon\}$. Nous en déduisons qu'il en est de même pour $f_\epsilon (H_+ - \lambda)^{-1} f_\epsilon$ et $f_{-\epsilon} [H_m^{s,n}, j_+] f_{-\epsilon} f_\epsilon (H_+ - \lambda)^{-1} f_\epsilon j_+$ puisque $[H_m^{s,n}, j_+]$ est une fonction à support compact.

Extension méromorphe de $j_- f_\epsilon (H_- - \lambda)^{-1} f_\epsilon j_-$ et $f_{-\epsilon} [H_m^{s,n}, j_-] f_{-\epsilon} f_\epsilon (H_- - \lambda)^{-1} f_\epsilon j_-$.

Introduisons \tilde{f}_ϵ qui est égale à f_ϵ sur $] -\infty, 0[$ et que l'on prolonge par 0. Remarquons que $[H_m^{s,n}, j_-]$ est une fonction à support compact.

Nous avons $j_- f_\epsilon (H_- - \lambda)^{-1} f_\epsilon j_- = j_- \tilde{f}_\epsilon (H_- - \lambda)^{-1} \tilde{f}_\epsilon j_-$. L'opérateur $\tilde{f}_\epsilon (H_- - \lambda)^{-1} \tilde{f}_\epsilon$ vérifie les hypothèses (2.3.5) et (2.3.6) de la section précédente et envoie $L^2(]-\infty, 0[)$ dans $L^2(]-\infty, 0[)$. D'après la proposition 2.3.9, nous en déduisons que $j_- f_\epsilon (H_- - \lambda)^{-1} f_\epsilon j_-$ s'étend de manière méromorphe de type fini à $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) > -\epsilon\}$ et il est Fredholm sur cet ensemble. Il en est de même pour $f_{-\epsilon} [H_m^{s,n}, j_-] f_{-\epsilon} f_\epsilon (H_- - \lambda)^{-1} f_\epsilon j_-$.

Extension méromorphe de $f_\epsilon (H_m^{s,n} - \lambda)^{-1} f_\epsilon$

D'après ce qu'on vient de voir, l'opérateur $(1 + f_{-\epsilon} h(\lambda) f_\epsilon)$ est méromorphe de type fini et Fredholm sur $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) > -\epsilon\}$ puisque $f_{-\epsilon} h(\lambda) f_\epsilon$ est compact grâce aux lemmes 1.4.8 et 1.4.9 et au fait que $[H_m^{s,n}, j_+]$ et $[H_m^{s,n}, j_-]$ soient à supports compacts. Par la proposition 4.1.4 dans [42], nous en déduisons que cet opérateur est inversible et que son inverse est méromorphe de type fini et Fredholm sur $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) > -\epsilon\}$. D'autre part, $f_\epsilon Q(\lambda) f_\epsilon$ est méromorphe de type fini sur $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) > -\epsilon\}$. Puisque $f_\epsilon (H_m^{s,n} - \lambda)^{-1} f_\epsilon = f_\epsilon Q(\lambda) f_\epsilon (1 + f_{-\epsilon} h(\lambda) f_\epsilon)^{-1}$, nous en déduisons la proposition.

Q.E.D

2.4 Formule explicite de la résolvante

Dans cette section, nous obtenons une formule pour la résolvante de notre opérateur à harmonique fixée qui s'inspire des travaux de A. Iantchenko et E. Korotyaev dans [55] et [56].

Nous construisons dans un premier temps les solutions de Jost puis les solutions avec condition au bord pour toutes les masses $m > 0$.

Nous donnons ensuite une formule pour la résolvante qui n'est valable que pour une masse telle que $2ml \geq 1$ et $0 < 2ml < \frac{1}{3}$.

2.4.1 Solutions de Jost

Dans cette section, nous nous intéressons à la résolution de l'équation :

$$H_m \varphi = \lambda \varphi,$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\lambda) > 0$ et :

$$H_m = \Gamma^1 D_x + \left(s + \frac{1}{2}\right) \gamma^0 \gamma^2 A(x) - m \gamma^0 B(x),$$

avec $\Gamma^1 = \text{diag}(1, -1, -1, 1)$, les expressions de $\gamma^0 \gamma^2$ et γ^0 étant données dans (1.2.26). Plus précisément, nous allons chercher des solutions de cette équation ayant un comportement prescrit en $-\infty$. Ce comportement nous est donné en regardant tout d'abord ce qu'il se passe pour $H_c = \Gamma^1 D_x$. Les solutions de l'équation :

$$H_c \varphi_c = \lambda \varphi_c,$$

où $\varphi_c = \begin{pmatrix} \varphi_{1,c} \\ \varphi_{2,c} \\ \varphi_{3,c} \\ \varphi_{4,c} \end{pmatrix}$, vérifient les équations :

$$\begin{aligned} \partial_x (\varphi_{1,c}) &= i\lambda \varphi_{1,c} \\ \partial_x (\varphi_{2,c}) &= -i\lambda \varphi_{2,c} \\ \partial_x (\varphi_{3,c}) &= -i\lambda \varphi_{3,c} \\ \partial_x (\varphi_{4,c}) &= i\lambda \varphi_{4,c}. \end{aligned}$$

Toute solution est une combinaison linéaire des fonctions suivantes :

$$\psi_{1,c}(x) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{2,c}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{3,c}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-i\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{4,c}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{i\lambda x} \end{pmatrix}.$$

Nous chercherons des solutions φ_2, φ_3 à l'équation

$$H_m \varphi = \lambda \varphi$$

telles que

$$\varphi_i \sim \psi_{i,c}$$

en $-\infty$. Nous avons alors la :

Proposition 2.4.1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im}(\lambda) > 0$, il existe des solutions φ_2, φ_3 à l'équation :*

$$H_m \varphi = \lambda \varphi$$

telles que :

$$\varphi_2 \underset{-\infty}{\sim} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi_3 \underset{-\infty}{\sim} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-i\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\varphi_2(x)\| &\leq e^{\text{Im}(\lambda)x} e^{\int_{-\infty}^x \|V_m(t)\| dt}, \\ \|\varphi_3(x)\| &\leq e^{\text{Im}(\lambda)x} e^{\int_{-\infty}^x \|V_m(t)\| dt}. \end{aligned}$$

Preuve. Nous prouvons la proposition pour φ_2 , le cas de φ_3 se traitant de la même manière. Notons :

$$V_m(x) = H_m - H_c = \left(s + \frac{1}{2}\right) \gamma^0 \gamma^2 A(x) - m \gamma^0 B(x).$$

L'équation se réécrit :

$$\partial_x \varphi = i\lambda \Gamma^1 \varphi(x) - i\Gamma^1 V_m(x) \varphi(x).$$

Nous introduisons la matrice fondamentale de solutions :

$$\mathcal{M}_c(x) = \text{diag}(e^{i\lambda x}, e^{-i\lambda x}, e^{-i\lambda x}, e^{i\lambda x}),$$

qui vérifie l'équation :

$$\partial_x (\mathcal{M}_c)(x) = i\lambda \Gamma^1 \mathcal{M}_c(x),$$

ainsi que les relations

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c(x) \mathcal{M}_c(t) &= \mathcal{M}_c(x+t), \\ \mathcal{M}_c(-x) &= \mathcal{M}_c(x)^{-1}, \\ \Gamma^1 \mathcal{M}_c(x) &= \mathcal{M}_c(x) \Gamma^1. \end{aligned}$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned} \partial_x (\mathcal{M}_c(-x) \varphi(x)) &= -i\lambda \Gamma^1 \mathcal{M}_c(-x) \varphi(x) + i\lambda \mathcal{M}_c(-x) \Gamma^1 \varphi(x) - i\mathcal{M}_c(-x) \Gamma^1 V_m(x) \varphi(x) \\ &= -i\mathcal{M}_c(-x) \Gamma^1 V_m(x) \varphi(x). \end{aligned}$$

Nous considérons l'équation intégrale associée à la dernière équation :

$$\mathcal{M}_c(-x) \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - i \int_{-\infty}^x \mathcal{M}_c(-t) \Gamma^1 V_m(t) \varphi_2(t) dt.$$

Ceci donne :

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - i \int_{-\infty}^x \mathcal{M}_c(x-t) \Gamma^1 V_m(t) \varphi_2(t) dt.$$

Nous cherchons une solution de cette équation sous la forme :

$$\varphi_2(x) = \sum_{n \geq 0} \varphi_{2,n}(x).$$

Nous obtenons ainsi les équations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_{2,n+1}(x) &= -i \int_{-\infty}^x \mathcal{M}_c(x-t) \Gamma^1 V_m(t) \varphi_{2,n}(t) dt. \end{aligned}$$

Comme $\text{Im}(\lambda) > 0$, nous avons :

$$\|\mathcal{M}_c(x-t)\| \leq e^{\text{Im}(\lambda)(x-t)}$$

où la norme est le supremum des modules des coefficients et $t \leq x$. Nous allons montrer par récurrence que $\|\varphi_{2,n}(x)\| \leq e^{\text{Im}(\lambda)x} \frac{1}{n!} \left(\int_{-\infty}^x \|V_m(t)\| dt \right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, ceci est vrai pour $\varphi_{2,0}$.

Nous supposons ensuite que $\|\varphi_{2,n}(x)\| \leq e^{\text{Im}(\lambda)x} \frac{1}{n!} \left(\int_{-\infty}^x \|V_m(t)\| dt \right)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Alors :

$$\begin{aligned} \|\varphi_{2,n+1}(x)\| &\leq \int_{-\infty}^0 \|\mathcal{M}_c(x-t) \Gamma^1 V_m(t) \varphi_{2,n}(t)\| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^x e^{\text{Im}(\lambda)(x-t)} \|V_m(t)\| e^{\text{Im}(\lambda)t} \frac{1}{n!} \left(\int_{-\infty}^t \|V_m(t')\| dt' \right)^n dt \\ &= e^{\text{Im}(\lambda)x} \int_{-\infty}^x \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^t \|V_m(t')\| dt' \right)^{n+1} dt \\ &= e^{\text{Im}(\lambda)x} \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_{-\infty}^x \|V_m(t)\| dt \right)^{n+1}, \end{aligned}$$

puisque $V_m = \left(s + \frac{1}{2}\right) \gamma^0 \gamma^2 A(x) - m\gamma^0 B(x)$ est exponentiellement décroissant en $-\infty$ donc intégrable. Ainsi, la série $\varphi_2(x) = \sum_{n \geq 0} \varphi_{2,n}(x)$ est convergente ce qui nous donne une solution de

l'équation aux valeurs propres. En outre, nous obtenons l'estimation :

$$\|\varphi_2(x)\| \leq e^{\text{Im}(\lambda)x} e^{\int_{-\infty}^x \|V_m(t)\| dt}.$$

Q.E.D

2.4.2 Solutions avec condition au bord

Dans cette section, nous nous intéressons tout d'abord à l'existence de solutions de l'équation :

$$H_m \varphi = \lambda \varphi$$

dans le cas $2ml < 1$. Dans ce cas, ces solutions doivent vérifier la condition au bord :

$$\|(\gamma^1 + i) \varphi\| = o\left(\sqrt{-x}\right)$$

qui peut se réécrire :

$$\begin{aligned} |(\varphi_1 + \varphi_3)(x)| &= o\left(\sqrt{-x}\right), \\ |(\varphi_2 - \varphi_4)(x)| &= o\left(\sqrt{-x}\right). \end{aligned}$$

Nous allons prouver la :

Proposition 2.4.2. *Nous supposons que $2ml < 1$ et que $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\text{Im}(\lambda) > 0$. Nous pouvons alors trouver une solution φ de l'équation :*

$$H_m \varphi = \lambda \varphi$$

telle que $\|(\gamma^1 + i)\varphi(x)\| = o(\sqrt{-x})$. De plus, nous avons l'estimation suivante :

$$\left\| \sum_{n \geq 0} \varphi_n(x) \right\| \leq 4N (-x)^{-ml} e^{-\frac{6C_{\lambda,m}(s+\frac{1}{2})}{1-2ml}x}$$

pour tout $x \in]-\infty, 0[$, avec $N = 2 \max(|c|, |d|)$, où $c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} (-x)^{ml} (\varphi_1 - \varphi_3)$,

$d = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} (-x)^{ml} (\varphi_2 + \varphi_4)$, et $C_{\lambda,m} = \max_{x \in]-\infty, 0[} (|\lambda|, |m(B(x) + \frac{l}{x})|, |A(x)|)$. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, nous avons l'estimation :

$$\|\varphi(x)\| \leq Ce^{-\text{Im}(\lambda)x}.$$

Preuve. Tout d'abord, nous réécrivons l'équation sous la forme :

$$\begin{aligned} H_m \varphi = \lambda \varphi &\Leftrightarrow \Gamma^1 D_x \varphi + \left(s + \frac{1}{2}\right) \gamma^0 \gamma^2 A(x) - m \gamma^0 B(x) = \lambda \varphi \\ &\Leftrightarrow \partial_x \varphi + i \left(s + \frac{1}{2}\right) \gamma^1 \gamma^2 A(x) \varphi - im \gamma^1 B(x) \varphi = i \lambda \Gamma^1 \varphi \\ &\Leftrightarrow \partial_x \varphi + i \frac{ml}{x} \gamma^1 \varphi + i \left(s + \frac{1}{2}\right) \gamma^1 \gamma^2 A(x) \varphi - im \gamma^1 \left(B(x) + \frac{l}{x}\right) \varphi = i \lambda \Gamma^1 \varphi \\ &\Leftrightarrow \partial_x \varphi + i \frac{ml}{x} \gamma^1 \varphi = i \lambda \Gamma^1 \varphi - i \left(s + \frac{1}{2}\right) \gamma^1 \gamma^2 A(x) \varphi + im \gamma^1 \left(B(x) + \frac{l}{x}\right) \varphi. \end{aligned}$$

Notons :

$$V_{\lambda,m}(x) = i \lambda \Gamma^1 - i \left(s + \frac{1}{2}\right) \gamma^1 \gamma^2 A(x) + im \gamma^1 \left(B(x) + \frac{l}{x}\right).$$

$V_{\lambda,m}$ est maintenant borné au voisinage de 0 d'après (1.2.35). L'équation que nous allons étudier s'écrit alors de la façon suivante :

$$\partial_x \varphi + i \frac{ml}{x} \gamma^1 \varphi = V_{\lambda,m}(x) \varphi. \quad (2.4.1)$$

Nous commençons par étudier l'équation :

$$\partial_x \psi + i \frac{ml}{x} \gamma^1 \psi = 0.$$

Introduisons les matrices :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons alors :

$$\gamma^1 = P \begin{pmatrix} iI_2 & 0 \\ 0 & -iI_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

où :

$$\gamma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons alors :

$$\psi(x) = P \begin{pmatrix} (-x)^{ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-x)^{ml} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-x)^{-ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-x)^{-ml} \end{pmatrix} P^{-1} \psi_{-1}$$

où ψ_{-1} est une condition donnée sur la valeur de ψ en -1 . Vérifions que nous obtenons bien une solution :

$$\begin{aligned} \partial_x \psi(x) &= P \begin{pmatrix} -ml(-x)^{ml-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ml(-x)^{ml-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ml(-x)^{-ml-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ml(-x)^{-ml-1} \end{pmatrix} P^{-1} \psi_{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \frac{-ml}{-x}(-x)^{ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-ml}{-x}(-x)^{ml} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml}{-x}(-x)^{-ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{ml}{-x}(-x)^{-ml} \end{pmatrix} P^{-1} \psi_{-1} \\ &= \frac{ml}{x} P \begin{pmatrix} (-x)^{ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-x)^{ml} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(-x)^{-ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(-x)^{-ml} \end{pmatrix} P^{-1} \psi_{-1} \\ &= \frac{ml}{x} P \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} (-x)^{ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-x)^{ml} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-x)^{-ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-x)^{-ml} \end{pmatrix} P^{-1} \psi_{-1} \\ &= -i \frac{ml}{x} \gamma^1 \psi(x). \end{aligned}$$

Notons :

$$\mathcal{M}_0(x) = P \begin{pmatrix} (-x)^{ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-x)^{ml} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-x)^{-ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-x)^{-ml} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0(x)^{-1} &= \mathcal{M}_0\left(\frac{1}{x}\right); \quad \mathcal{M}_0(-1) = I_4 \\ \mathcal{M}_0(x) \gamma^1 &= \gamma^1 \mathcal{M}_0(x). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité se prouve grâce à la forme diagonale de γ^1 et le fait que les deux matrices diagonales commutent. D'autre part, nous avons :

$$\partial_x \left(\mathcal{M}_0\left(\frac{1}{x}\right) \right) = i \frac{ml}{x} \gamma^1 \mathcal{M}_0\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, si φ est solution de (2.4.1), alors :

$$\begin{aligned}\partial_x \left(\mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{x} \right) \varphi(x) \right) &= i \frac{ml}{x} \gamma^1 \mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{x} \right) \varphi(x) - \mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{x} \right) i \frac{ml}{x} \gamma^1 \varphi(x) + \mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{x} \right) V_{\lambda,m}(x) \varphi(x) \\ &= \mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{x} \right) V_{\lambda,m}(x) \varphi(x).\end{aligned}$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{x} \right) &= \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-x)^{-ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-x)^{-ml} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-x)^{ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-x)^{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-x)^{-ml} & 0 & (-x)^{ml} & 0 \\ 0 & (-x)^{-ml} & 0 & (-x)^{ml} \\ (-x)^{-ml} & 0 & -(-x)^{ml} & 0 \\ 0 & -(-x)^{-ml} & 0 & (-x)^{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-x)^{-ml} + (-x)^{ml} & 0 & (-x)^{-ml} - (-x)^{ml} & 0 \\ 0 & (-x)^{-ml} + (-x)^{ml} & 0 & -(-x)^{-ml} + (-x)^{ml} \\ (-x)^{-ml} - (-x)^{ml} & 0 & (-x)^{-ml} + (-x)^{ml} & 0 \\ 0 & (-x)^{-ml} + (-x)^{ml} & 0 & (-x)^{-ml} + (-x)^{ml} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{x} \right) \varphi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-x)^{-ml} (\varphi_1 + \varphi_3) + (-x)^{ml} (\varphi_1 - \varphi_3) \\ (-x)^{-ml} (\varphi_2 - \varphi_4) + (-x)^{ml} (\varphi_2 + \varphi_4) \\ (-x)^{-ml} (\varphi_1 + \varphi_3) + (-x)^{ml} (\varphi_3 - \varphi_1) \\ (-x)^{-ml} (\varphi_4 - \varphi_2) + (-x)^{ml} (\varphi_2 + \varphi_4) \end{pmatrix}$$

Utilisant les conditions au bord, les fonctions $(-x)^{-ml} (\varphi_1 + \varphi_3)$ et $(-x)^{-ml} (\varphi_2 - \varphi_4)$ tendent vers 0 en 0. Utilisant (1.3.47), nous voyons que $\frac{1}{2} (-x)^{ml} (\varphi_1 - \varphi_3)$ et $\frac{1}{2} (-x)^{ml} (\varphi_2 + \varphi_4)$ admettent des limites finies que nous notons c et d respectivement, pour des constantes $c, d \in \mathbb{R}$. Comme $V_{\lambda,m}$ est borné en 0, nous pouvons en déduire l'équation intégrale suivante :

$$\mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{x} \right) \varphi(x) = \begin{pmatrix} c \\ d \\ -c \\ d \end{pmatrix} + \int_0^x \mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{t} \right) V_{\lambda,m}(t) \varphi(t) dt,$$

qui donne :

$$\varphi(x) = \mathcal{M}_0(x) \begin{pmatrix} c \\ d \\ -c \\ d \end{pmatrix} + \int_0^x \mathcal{M}_0(x) \mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{t} \right) V_{\lambda,m}(t) \varphi(t) dt.$$

Remarquons que :

$$\mathcal{M}_0(x) \mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{t} \right) = \mathcal{M}_0 \left(-\frac{x}{t} \right).$$

De nouveau, nous cherchons φ sous la forme :

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 0} \varphi_n(x),$$

avec $\varphi_0(x) = \mathcal{M}_0(x) \begin{pmatrix} c \\ d \\ -c \\ d \end{pmatrix}$. Nous obtenons ainsi les relations de récurrence :

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \mathcal{M}_0\left(-\frac{x}{t}\right) V_{\lambda,m}(t) \varphi_n(t) dt.$$

Afin de prouver l'existence de solution à ces équations, nous calculons $\mathcal{M}_0\left(-\frac{x}{t}\right) V_{\lambda,m}(t)$ où :

$$\mathcal{M}_0\left(-\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{x}{t}\right)^{ml} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} & 0 & \left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} & 0 \\ 0 & \left(\frac{x}{t}\right)^{ml} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} & 0 & -\left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml}\right) \\ \left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} & 0 & \left(\frac{x}{t}\right)^{ml} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} & 0 \\ 0 & -\left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml}\right) & 0 & \left(\frac{x}{t}\right)^{ml} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \end{pmatrix}$$

et :

$$V_{\lambda,m}(t) = \begin{pmatrix} i\lambda & i\left(s + \frac{1}{2}\right)A(t) & -m\left(B(t) + \frac{l}{t}\right) & 0 \\ -i\left(s + \frac{1}{2}\right)A(t) & -i\lambda & 0 & m\left(B(t) + \frac{l}{t}\right) \\ -m\left(B(t) + \frac{l}{t}\right) & 0 & -i\lambda & i\left(s + \frac{1}{2}\right)A(t) \\ 0 & m\left(B(t) + \frac{l}{t}\right) & -i\left(s + \frac{1}{2}\right)A(t) & i\lambda \end{pmatrix}$$

Les coefficients de $\mathcal{M}_0\left(-\frac{x}{t}\right) V_{\lambda,m}(t)$ sont donc :

- 1,1 : $\frac{1}{2} \left(i\lambda \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) - m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) \right),$
- 2,1 : $\frac{1}{2} \left(-i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) \right),$
- 3,1 : $\frac{1}{2} \left(i\lambda \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) - m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) \right),$
- 4,1 : $\frac{1}{2} \left(i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) \right),$
- 1,2 : $\frac{1}{2} \left(i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) \right),$
- 2,2 : $\frac{1}{2} \left(-i\lambda \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) - m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) \right),$
- 3,2 : $\frac{1}{2} \left(i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) \right),$
- 4,2 : $\frac{1}{2} \left(i\lambda \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) + m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) \right),$
- 1,3 : $\frac{1}{2} \left(-i\lambda \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) - m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) \right),$
- 2,3 : $\frac{1}{2} \left(i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) \right),$
- 3,3 : $\frac{1}{2} \left(-i\lambda \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) - m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{ml} - \left(\frac{x}{t}\right)^{-ml} \right) \right),$

$$\begin{aligned}
4,3 &: \frac{1}{2} \left(-i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \right), \\
1,4 &: \frac{1}{2} \left(i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \right), \\
2,4 &: \frac{1}{2} \left(-i\lambda \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) + m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \right), \\
3,4 &: \frac{1}{2} \left(i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \right), \\
4,4 &: \frac{1}{2} \left(i\lambda \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) - m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \right)
\end{aligned}$$

Nous réécrivons ceci en introduisant la matrice :

$$W_{\lambda,m}(x,t) = \begin{pmatrix} -m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) & 0 & -i\lambda & i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) \\ 0 & -m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) & i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) & -i\lambda \\ i\lambda & i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) & -m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) & 0 \\ i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) & i\lambda & 0 & -m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) \end{pmatrix}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0 \left(-\frac{x}{t} \right) V_{\lambda,m}(t) &= \frac{1}{2} \left(\left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) V_{\lambda,m}(x,t) \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) W_{\lambda,m}(x,t) \right)
\end{aligned}$$

Notons $N = 2 \max(|c|, |d|)$ et $C_{\lambda,m} = \max_{x \in]-\infty, 0[} (|\lambda|, |m(B(x) + \frac{l}{x})|, |A(x)|)$. Montrons par récurrence que pour $x \in]-\infty, 0[$, nous avons :

$$|\varphi_{n,j}(x)| \leq N (-x)^{-ml} \frac{1}{n!} \left(\frac{6C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right)}{1 - 2ml} (-x) \right)^n$$

pour tout $j = 1, \dots, 4$, avec $\varphi_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n,1} \\ \varphi_{n,2} \\ \varphi_{n,3} \\ \varphi_{n,4} \end{pmatrix}$.

Ceci est vrai pour les composantes de φ_0 puisque :

$$\varphi_0(x) = \begin{pmatrix} 2(-x)^{-ml} c \\ 2(-x)^{-ml} d \\ -2(-x)^{-ml} c \\ 2(-x)^{-ml} d \end{pmatrix}.$$

Supposons que ceci est vrai pour les composantes de φ_n , alors :

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1,1}(x) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^x \left(i\lambda \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) - m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \right) \varphi_{n,1}(t) \right. \\
&\quad \left. + i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \varphi_{n,2}(t) \right. \\
&\quad \left. + \left(-i\lambda \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) - m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \right) \varphi_{n,3}(t) \right. \\
&\quad \left. + i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \varphi_{n,4}(t) dt \right)
\end{aligned}$$

Dans cette expression, nous pouvons majorer :

$$\left| \left(i\lambda \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) - m \left(B(t) + \frac{l}{t} \right) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \right) \right|$$

par :

$$2C_{\lambda,m} \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right),$$

ainsi que :

$$i \left(s + \frac{1}{2} \right) A(t) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right)$$

par :

$$C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right).$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1,1}(x)| &\leq \frac{1}{2} \left(\int_x^0 2C_{\lambda,m} \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \varphi_{n,1}(t) \right. \\ &\quad + C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \varphi_{n,2}(t) \\ &\quad + 2C_{\lambda,m} \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \varphi_{n,3}(t) \\ &\quad \left. + C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \varphi_{n,4}(t) dt \right) \\ &\leq 3C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right) \int_x^0 \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \left(\frac{N}{n!} \left(\frac{6C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right)}{1 - 2ml} \right)^n (-t)^{n-ml} \right) dt \\ &\leq \frac{N}{2n!} \frac{(6C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right))^{n+1}}{(1 - 2ml)^n} \left(\int_x^0 (-x)^{ml} (-t)^{n-2ml} + (-x)^{-ml} (-t)^n dt \right) \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale vaut :

$$\begin{aligned} \int_x^0 (-x)^{ml} (-t)^{n-2ml} + (-x)^{-ml} (-t)^n dt &= (-x)^{ml} \left[-\frac{(-t)^{n+1-2ml}}{n+1-2ml} \right]_x^0 \\ &\quad + (-x)^{-ml} \left[-\frac{(-t)^{n+1}}{n+1} \right]_x^0 \\ &= \frac{(-x)^{n+1-ml}}{(n+1) \left(1 - \frac{2ml}{n+1} \right)} + \frac{(-x)^{n+1-ml}}{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{2ml}{n+1} \leq 2ml$, nous avons $1 - \frac{2ml}{n+1} \geq 1 - 2ml$ et $\frac{1}{1 - \frac{2ml}{n+1}} \leq \frac{1}{1 - 2ml}$. Comme $0 < 1 - 2ml < 1$, $\frac{1}{1 - 2ml} > 1$ et nous obtenons :

$$\int_x^0 (-x)^{ml} (-t)^{n-2ml} + (-x)^{-ml} (-t)^n dt \leq \frac{2}{(n+1)(1 - 2ml)} (-x)^{n+1-ml}$$

Par conséquent :

$$|\varphi_{n+1,1}(x)| \leq \frac{N(-x)^{-ml}}{(n+1)!} \left(\frac{6C_{\lambda,m}(s+\frac{1}{2})}{1-2ml} \right)^{n+1} (-x)^{n+1}$$

Nous pouvons faire de même avec les autres coefficients. Nous en déduisons que la série $\sum_{n \geq 0} \varphi_n(x)$ converge et que :

$$\left\| \sum_{n \geq 0} \varphi_n(x) \right\| \leq 4N(-x)^{-ml} e^{-\frac{6C_{\lambda,m}(s+\frac{1}{2})}{1-2ml}x}.$$

D'autre part, les conditions au bord sont bien vérifiées. En effet, regardant l'expression de φ_0 nous voyons que $\varphi_{0,1} + \varphi_{0,3} = 0$ et $\varphi_{0,2} - \varphi_{0,4} = 0$. De plus, d'après la récurrence, nous savons que la norme de φ_j pour tout $j \geq 1$ est majoré par une constante multipliée par $(-x)^{j-ml}$. Comme $ml < \frac{1}{2}$, nous en déduisons que $\frac{(-x)^{j-ml}}{(-x)^{\frac{1}{2}}} = (-x)^{j-\frac{1}{2}-ml} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et que la condition au bord est vérifiée.

Nous souhaitons maintenant obtenir une estimation de la croissance de φ en $-\infty$. Notons $H_c = \Gamma^1 D_x$ et $V_m(x) = H_m - H_c$. Nous venons de prouver l'existence d'une solution de l'équation :

$$\partial_x \varphi(x) = i\lambda \Gamma^1 \varphi - i\Gamma^1 V_m(x) \varphi(x).$$

Etant donné la valeur de cette solution en -1 , par exemple, que nous noterons φ_{-1} , cette solution peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_{-1} e^{\int_{-1}^x i\lambda \Gamma^1 - i\Gamma^1 V_m(t) dt} \\ &= \varphi_{-1} e^{i\lambda \Gamma^1(x+1) - i\Gamma^1 \int_{-1}^x V_m(t) dt}. \end{aligned}$$

Pour tout $x < -1$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\| &\leq \varphi_{-1} e^{\|i\lambda \Gamma^1(x+1) - i\Gamma^1 \int_{-1}^x V_m(t) dt\|} \\ &\leq \varphi_{-1} e^{-\text{Im}(\lambda)(x+1) + \int_{-1}^x \|V_m(t)\| dt}. \end{aligned}$$

Comme V_m est intégrable sur $] -\infty, -1[$, nous avons :

$$\|\varphi(x)\| \leq \varphi_{-1} e^{-\text{Im}(\lambda) + \int_{-\infty}^{-1} \|V_m(t)\| dt} e^{-\text{Im}(\lambda)x}.$$

En notant $C = \varphi_{-1} e^{-\text{Im}(\lambda) + \int_{-\infty}^{-1} \|V_m(t)\| dt}$, nous obtenons l'estimation voulue. Q.E.D

Nous nous intéressons maintenant au cas $2ml \geq 1$. Nous avons la :

Proposition 2.4.3. *Supposons que $2ml \geq 1$ et que $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\text{Im}(\lambda) > 0$. Il existe une solution de l'équation :*

$$H_m \varphi = \lambda \varphi$$

qui tend vers 0 en 0. De plus, nous avons l'estimation :

$$\|\varphi(x)\| \leq 4N(-x)^{ml} e^{-6C_{\lambda,m}(s+\frac{1}{2})x},$$

où N est une constante positive et $C_{\lambda,m} = \max_{x \in]-\infty, 0[} (|\lambda|, m |B(x) + \frac{1}{x}|, |A(x)|)$. De plus, nous avons la même estimation que dans la proposition précédente :

$$\|\varphi(x)\| \leq C e^{-\text{Im}(\lambda)x},$$

lorsque x est suffisamment petit.

Preuve. Nous pouvons refaire le raisonnement du début de la preuve précédente et nous obtenons de nouveau l'équation :

$$\partial_x \left(\mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{x} \right) \varphi(x) \right) = \mathcal{M}_0 \left(\frac{1}{x} \right) V_{\lambda,m}(x) \varphi(x).$$

Nous obtenons cette fois-ci l'équation intégrale suivante :

$$\varphi(x) = \mathcal{M}_0(x) \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ -b \end{pmatrix} + \int_0^x \mathcal{M}_0 \left(-\frac{x}{t} \right) V_{\lambda,m}(t) \varphi(t) dt,$$

où a, b sont deux constantes réelles. Comme précédemment, nous cherchons φ sous la forme d'une série :

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 0} \varphi_n(x),$$

avec :

$$\varphi_0(x) = \mathcal{M}_0(x) \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a(-x)^{ml} \\ 2b(-x)^{ml} \\ 2a(-x)^{ml} \\ 2b(-x)^{ml} \end{pmatrix},$$

et les équations de récurrence :

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \mathcal{M}_0 \left(-\frac{x}{t} \right) V_{\lambda,m}(t) \varphi_n(t) dt.$$

Ecrivons $\varphi_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n,1} \\ \varphi_{n,2} \\ \varphi_{n,3} \\ \varphi_{n,4} \end{pmatrix}$. Notons $N = 2 \max(|a|, |b|)$ et $C_{\lambda,m}$ comme dans la proposition. Nous

allons montrer par récurrence que :

$$|\varphi_{n,j}(x)| \leq N (-x)^{ml} \frac{1}{n!} \left(6C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right) (-x) \right)^n,$$

pour tout $j = 1, \dots, 4$. En effet, ceci est vrai pour les composantes de φ_0 . Supposons que les composantes de φ_n vérifient ces estimations. Alors, comme dans la démonstration de la proposition précédente, nous avons :

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1,1}(x)| &\leq \frac{1}{2} \left(\int_x^0 2C_{\lambda,m} \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \varphi_{n,1}(t) \right. \\ &\quad + C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right) \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \varphi_{n,2}(t) \\ &\quad \left. + 2C_{\lambda,m} \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \varphi_{n,3}(t) + C_{\lambda,m} \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \varphi_{n,4}(t) dt \right) \\ &\leq 3C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right) \int_x^0 \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{ml} + \left(\frac{x}{t} \right)^{-ml} \right) \left(\frac{N}{n!} \left(6C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right) \right)^n (-t)^{n+ml} \right) dt \\ &\leq \frac{N}{2n!} \left(6C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right) \right)^{n+1} \left(\int_x^0 (-x)^{ml} (-t)^n + (-x)^{-ml} (-t)^{n+2ml} dt \right) \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale vaut :

$$\begin{aligned} \int_x^0 (-x)^{ml} (-t)^n + (-x)^{-ml} (-t)^{n+2ml} dt &= (-x)^{ml} \left[-\frac{(-t)^{n+1}}{n+1} \right] \\ &\quad + (-x)^{-ml} \left[-\frac{(-t)^{n+1+2ml}}{n+1+2ml} \right] \\ &= \frac{(-x)^{n+1+ml}}{n+1} + \frac{(-x)^{n+1+ml}}{n+1+2ml}. \end{aligned}$$

Comme $n+1+2ml \geq n+1$, nous en déduisons que :

$$|\varphi_{n+1,1}(x)| \leq N (-x)^{ml} \frac{1}{(n+1)!} \left(6C_{\lambda,m} \left(s + \frac{1}{2} \right) (-x) \right)^{n+1}.$$

La dernière estimation suit du même raisonnement que celui de la démonstration précédente. Nous obtenons ainsi la proposition. Q.E.D

2.4.3 Formule de la résolvante

Dans cette section, nous noterons ψ la solution de Jost correspondant à φ_3 et φ une solution avec condition au bord. Nous cherchons une solution u à l'équation :

$$(H_m - \lambda)u = f$$

avec $f \in L^2(\cdot - \infty, 0]$.

Introduisons les états $\tilde{\psi} = (-i)\gamma^0\gamma^1\gamma^2\psi$ et $\tilde{\varphi} = (-i)\gamma^0\gamma^1\gamma^2\varphi$ où $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2$ sont les matrices de Dirac donnée dans (1.2.24). Enfin, notons $\alpha = \varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2 + \varphi_3\psi_4 - \psi_3\varphi_4$, $\beta = \varphi_1\psi_3 - \psi_1\varphi_3 + \varphi_2\psi_4 - \psi_2\varphi_4$ et :

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \beta \\ -\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons maintenant donner la formule suivante :

Proposition 2.4.4. *Considérons la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} R_m(x, y, \lambda) &= \left(\varphi(x)\psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x)\tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i\Gamma^1 \mathbf{1}_{]-\infty, x[}(y) \\ &\quad + \left(\psi(x)\varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x)\tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i\Gamma^1 \mathbf{1}_{]x, 0[}(y). \end{aligned}$$

L'opérateur intégral donné par :

$$R_m(\lambda)f(x) = \int_{-\infty}^0 R_m(x, y, \lambda)f(y)dy.$$

vérifie

$$(H_m - \lambda)(R_m(\lambda)f)(x) = f(x).$$

pour tout $f \in [L^2(\cdot - \infty, 0)]^4$.

Preuve. Rappelons les relations vérifiées par les matrices de Dirac :

$$\gamma^{0*} = \gamma^0; \quad \gamma^{j*} = -\gamma^j, \quad 1 \leq j \leq 3; \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad 0 \leq \mu, \nu \leq 3.$$

Nous remarquons que :

$$\begin{aligned} \Gamma^1 (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 &= (-\gamma^0 \gamma^1) (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 = (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^1 = (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 (-\gamma^0 \gamma^1) \\ &= (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \Gamma^1 \\ \gamma^0 \gamma^2 (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 &= (-i) (-\gamma^0 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^0 \gamma^2) = (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 \\ \gamma^0 (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 &= (-i) (-\gamma^0 \gamma^1 \gamma^0 \gamma^2) = (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^0 \\ \gamma^1 (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 &= (-i) (-\gamma^1 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^1) = (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^1, \end{aligned}$$

où :

$$(-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, si χ est tel que $H_m \chi = \lambda \chi$, alors $H_m (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \chi = \lambda (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \chi$. De plus, comme les conditions au bord s'écrivent $\|(\gamma^1 + i) \chi\| = o(\sqrt{-x})$ et que $(-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2$ commutent avec γ^1 et est unitaire, nous en déduisons que $(-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \chi$ vérifie aussi la condition au bord.

Notons $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ et $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \psi = \begin{pmatrix} -\psi_4 \\ \psi_3 \\ \psi_2 \\ -\psi_1 \end{pmatrix} \\ \tilde{\varphi} &= (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \varphi = \begin{pmatrix} -\varphi_4 \\ \varphi_3 \\ \varphi_2 \\ -\varphi_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned} \varphi \psi^t &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} (\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \psi_1 & \varphi_1 \psi_2 & \varphi_1 \psi_3 & \varphi_1 \psi_4 \\ \varphi_2 \psi_1 & \varphi_2 \psi_2 & \varphi_2 \psi_3 & \varphi_2 \psi_4 \\ \varphi_3 \psi_1 & \varphi_3 \psi_2 & \varphi_3 \psi_3 & \varphi_3 \psi_4 \\ \varphi_4 \psi_1 & \varphi_4 \psi_2 & \varphi_4 \psi_3 & \varphi_4 \psi_4 \end{pmatrix}; \\ \psi \varphi^t &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4) = \begin{pmatrix} \psi_1 \varphi_1 & \psi_1 \varphi_2 & \psi_1 \varphi_3 & \psi_1 \varphi_4 \\ \psi_2 \varphi_1 & \psi_2 \varphi_2 & \psi_2 \varphi_3 & \psi_2 \varphi_4 \\ \psi_3 \varphi_1 & \psi_3 \varphi_2 & \psi_3 \varphi_3 & \psi_3 \varphi_4 \\ \psi_4 \varphi_1 & \psi_4 \varphi_2 & \psi_4 \varphi_3 & \psi_4 \varphi_4 \end{pmatrix}; \\ \tilde{\varphi} \tilde{\psi}^t &= \begin{pmatrix} -\varphi_4 \\ \varphi_3 \\ \varphi_2 \\ -\varphi_1 \end{pmatrix} (-\psi_4 \quad \psi_3 \quad \psi_2 \quad -\psi_1) = \begin{pmatrix} \varphi_4 \psi_4 & -\varphi_4 \psi_3 & -\varphi_4 \psi_2 & \varphi_4 \psi_1 \\ -\varphi_3 \psi_4 & \varphi_3 \psi_3 & \varphi_3 \psi_2 & -\varphi_3 \psi_1 \\ -\varphi_2 \psi_4 & \varphi_2 \psi_3 & \varphi_2 \psi_2 & -\varphi_2 \psi_1 \\ \varphi_1 \psi_4 & -\varphi_1 \psi_3 & -\varphi_1 \psi_2 & \varphi_1 \psi_1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\tilde{\psi}\tilde{\varphi}^t = \begin{pmatrix} -\psi_4 \\ \psi_3 \\ \psi_2 \\ -\psi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi_4 & \varphi_3 & \varphi_2 & -\varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_4\varphi_4 & -\psi_4\varphi_3 & -\psi_4\varphi_2 & \psi_4\varphi_1 \\ -\psi_3\varphi_4 & \psi_3\varphi_3 & \psi_3\varphi_2 & -\psi_3\varphi_1 \\ -\psi_2\varphi_4 & \psi_2\varphi_3 & \psi_2\varphi_2 & -\psi_2\varphi_1 \\ \psi_1\varphi_4 & -\psi_1\varphi_3 & -\psi_1\varphi_2 & \psi_1\varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons donc :

$$\varphi\psi^t - \psi\varphi^t = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2 & \varphi_1\psi_3 - \psi_1\varphi_3 & \varphi_1\psi_4 - \psi_1\varphi_4 \\ \varphi_2\psi_1 - \psi_2\varphi_1 & 0 & \varphi_2\psi_3 - \psi_2\varphi_3 & \varphi_2\psi_4 - \psi_2\varphi_4 \\ \varphi_3\psi_1 - \psi_3\varphi_1 & \varphi_3\psi_2 - \psi_3\varphi_2 & 0 & \varphi_3\psi_4 - \psi_3\varphi_4 \\ \varphi_4\psi_1 - \psi_4\varphi_1 & \varphi_4\psi_2 - \psi_4\varphi_2 & \varphi_4\psi_3 - \psi_4\varphi_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\varphi}\tilde{\psi}^t - \tilde{\psi}\tilde{\varphi}^t = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_3\psi_4 - \psi_3\varphi_4 & \varphi_2\psi_4 - \psi_2\varphi_4 & \varphi_4\psi_1 - \psi_4\varphi_1 \\ \varphi_4\psi_3 - \psi_4\varphi_3 & 0 & \varphi_3\psi_2 - \psi_3\varphi_2 & \varphi_1\psi_3 - \psi_1\varphi_3 \\ \varphi_4\psi_2 - \psi_4\varphi_2 & \varphi_2\psi_3 - \psi_2\varphi_3 & 0 & \varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2 \\ \varphi_1\psi_4 - \psi_1\varphi_4 & \varphi_3\psi_1 - \psi_3\varphi_1 & \varphi_2\psi_1 - \psi_2\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $\alpha = \varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2 + \varphi_3\psi_4 - \psi_3\varphi_4$ et $\beta = \varphi_1\psi_3 - \psi_1\varphi_3 + \varphi_2\psi_4 - \psi_2\varphi_4$. Il vient :

$$\varphi\psi^t - \psi\varphi^t + \tilde{\varphi}\tilde{\psi}^t - \tilde{\psi}\tilde{\varphi}^t = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \beta \\ -\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = M_{\alpha,\beta}.$$

Rappelons que φ , ψ , $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ vérifient $H_m\varphi = \lambda\varphi$, $H_m\psi = \lambda\psi$, $H_m\tilde{\varphi} = \lambda\tilde{\varphi}$ et $H_m\tilde{\psi} = \lambda\tilde{\psi}$. Nous pouvons réécrire cette équation sous la forme :

$$\partial_x\varphi(x) = \tilde{V}_{\lambda,m}(x)\varphi(x),$$

où :

$$\tilde{V}_{\lambda,m}(x) = \begin{pmatrix} i\lambda & i(s + \frac{1}{2})A(x) & -mB(x) & 0 \\ -i(s + \frac{1}{2})A(x) & -i\lambda & 0 & mB(x) \\ -mB(x) & 0 & -i\lambda & i(s + \frac{1}{2})A(x) \\ 0 & mB(x) & -i(s + \frac{1}{2})A(x) & i\lambda \end{pmatrix}.$$

Pour les coordonnées de φ , nous obtenons les équations :

$$\begin{aligned} \partial_x\varphi_1(x) &= i\lambda\varphi_1(x) + i\left(s + \frac{1}{2}\right)A(x)\varphi_2(x) - mB(x)\varphi_3(x), \\ \partial_x\varphi_2(x) &= -i\lambda\varphi_2(x) - i\left(s + \frac{1}{2}\right)A(x)\varphi_1(x) + mB(x)\varphi_4(x), \\ \partial_x\varphi_3(x) &= -i\lambda\varphi_3(x) + i\left(s + \frac{1}{2}\right)A(x)\varphi_4(x) - mB(x)\varphi_1(x), \\ \partial_x\varphi_4(x) &= i\lambda\varphi_4(x) - i\left(s + \frac{1}{2}\right)A(x)\varphi_3(x) + mB(x)\varphi_2(x). \end{aligned}$$

Les mêmes équations sont vérifiées par les autres solutions. Vérifions que α et β sont indépendants de x . Nous avons :

$$\begin{aligned} \partial_x\alpha &= \partial_x(\varphi_1\psi_2 + \varphi_1\partial_x(\psi_2) - \partial_x(\psi_1)\varphi_2 - \psi_1\partial_x(\varphi_2) + \partial_x(\varphi_3)\psi_4 + \varphi_3\partial_x(\psi_4) \\ &\quad - \partial_x(\psi_3)\varphi_4 - \psi_3\partial_x\varphi_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(i\lambda\varphi_1 + i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\varphi_2 - mB\varphi_3 \right) \psi_2 + \varphi_1 \left(-i\lambda\psi_2 - i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\psi_1 + mB\psi_4 \right) \\
&\quad - \left(i\lambda\psi_1 + i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\psi_2 - mB\psi_3 \right) \varphi_2 - \psi_1 \left(-i\lambda\varphi_2 - i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\varphi_1 + mB\varphi_4 \right) \\
&\quad + \left(-i\lambda\varphi_3 + i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\varphi_4 - mB\varphi_1 \right) \psi_4 + \varphi_3 \left(i\lambda\psi_4 - i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\psi_3 + mB\psi_2 \right) \\
&\quad - \left(-i\lambda\psi_3 + i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\psi_4 - mB\psi_1 \right) \varphi_4 - \psi_3 \left(i\lambda\varphi_4 - i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\varphi_3 + mB\varphi_2 \right) \\
&= (\varphi_1\psi_2 - \varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2 + \psi_1\varphi_2 - \varphi_3\psi_4 + \varphi_3\psi_4 + \psi_3\varphi_4 - \psi_3\varphi_4) i\lambda \\
&\quad + (\varphi_2\psi_2 - \varphi_1\psi_1 - \psi_2\varphi_2 + \psi_1\varphi_1 + \varphi_4\psi_4 - \varphi_3\psi_3 - \psi_4\varphi_4 + \psi_3\varphi_3) i \left(s + \frac{1}{2} \right) A \\
&\quad + (-\varphi_3\psi_2 + \varphi_1\psi_4 + \psi_3\varphi_2 - \psi_1\varphi_4 - \varphi_1\psi_4 + \varphi_3\psi_2 + \psi_1\varphi_4 - \psi_3\varphi_2) mB \\
&= 0
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\partial_x \beta &= \partial_x (\varphi_1) \psi_3 + \varphi_1 \partial_x (\psi_3) - \partial_x (\psi_1) \varphi_3 - \psi_1 \partial_x (\varphi_3) + \partial_x (\varphi_2) \psi_4 + \varphi_2 \partial_x (\psi_4) \\
&\quad - \partial_x (\psi_2) \varphi_4 - \psi_2 \partial_x (\varphi_4) \\
&= \left(i\lambda\varphi_1 + i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\varphi_2 - mB\varphi_3 \right) \psi_3 + \varphi_1 \left(-i\lambda\psi_3 + i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\psi_4 - mB\psi_1 \right) \\
&\quad - \left(i\lambda\psi_1 + i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\psi_2 - mB\psi_3 \right) \varphi_3 - \psi_1 \left(-i\lambda\varphi_3 + i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\varphi_4 - mB\varphi_1 \right) \\
&\quad + \left(-i\lambda\varphi_2 - i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\varphi_1 + mB\varphi_4 \right) \psi_4 + \varphi_2 \left(i\lambda\psi_4 - i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\psi_3 + mB\psi_2 \right) \\
&\quad - \left(-i\lambda\psi_2 - i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\psi_1 + mB\psi_4 \right) \varphi_4 - \psi_2 \left(i\lambda\varphi_4 - i \left(s + \frac{1}{2} \right) A\varphi_3 + mB\varphi_2 \right) \\
&= (\varphi_1\psi_3 - \varphi_1\psi_3 - \psi_1\varphi_3 + \psi_1\varphi_3 - \varphi_2\psi_4 + \varphi_2\psi_4 + \psi_2\varphi_4 - \psi_2\varphi_4) i\lambda \\
&\quad + (\varphi_2\psi_3 + \varphi_1\psi_4 - \psi_2\varphi_3 - \psi_1\varphi_4 - \varphi_1\psi_4 - \varphi_2\psi_3 + \psi_1\varphi_4 + \psi_2\varphi_3) i \left(s + \frac{1}{2} \right) A \\
&\quad + (-\varphi_3\psi_3 - \varphi_1\psi_1 + \psi_3\varphi_3 + \psi_1\varphi_1 + \varphi_4\psi_4 + \varphi_2\psi_2 - \psi_4\varphi_4 - \psi_2\varphi_2) mB \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Calculons le déterminant de $M_{\alpha,\beta}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\det(M_{\alpha,\beta}) &= -\alpha \det \left(\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & \beta \\ -\beta & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \right) + \beta \det \left(\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & \beta \\ -\beta & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= -\alpha^2 \det \left(\begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \right) + \beta^2 \det \left(\begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \right) \\
&= -\alpha^2 (-\alpha^2 + \beta^2) + \beta^2 (-\alpha^2 + \beta^2) \\
&= ((\alpha - \beta)(\alpha + \beta))^2.
\end{aligned}$$

Cette matrice n'est pas inversible si $\alpha = \beta$ ou $\alpha = -\beta$. Nous allons voir que ceci n'est pas possible. Pour cela, supposons, par exemple, que $\alpha = \beta$. Nous posons :

$$T_m(\lambda) f(x) = \int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) f(y) dy \\ + \int_x^0 \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) f(y) dy.$$

Alors $T_m(\lambda)$ est un opérateur dont le noyau est donné par :

$$T_m(x, y, \lambda) = \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) \mathbf{1}_{]-\infty, x[}(y) + \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) \mathbf{1}_{]x, 0[}(y).$$

Nous obtenons alors :

$$H_m(T_m(\lambda) f)(x) = \int_{-\infty}^x \left(H_m(\varphi)(x) \psi^t(y) + H_m(\tilde{\varphi})(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) f(y) dy \\ + \int_x^0 \left(H_m(\psi)(x) \varphi^t(y) + H_m(\tilde{\psi})(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) f(y) dy \\ - i\Gamma^1 \left(\varphi(x) \psi^t(x) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(x) - \psi(x) \varphi^t(x) - \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(x) \right) f(x) \\ = \lambda T_m(\lambda) f(x) - i\Gamma^1 M_{\alpha, \alpha} f(x).$$

Nous pouvons alors choisir une fonction $v \in L^2(]-\infty, 0[)$ et prendre $f = v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de sorte que :

$$M_{\alpha, \alpha} f = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} f = 0.$$

Nous aurions ainsi trouvé un vecteur propre pour la valeur propre λ ce qui est impossible puisque notre opérateur n'admet pas de valeur propre. Nous pouvons faire de même lorsque $\alpha = -\beta$. Nous pouvons maintenant donner l'expression du noyau de la résolvante :

$$R_m(x, y, \lambda) = \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha, \beta}^{-1} i\Gamma^1 \mathbf{1}_{]-\infty, x[}(y) \\ + \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha, \beta}^{-1} i\Gamma^1 \mathbf{1}_{]x, 0[}(y).$$

L'opérateur correspondant est défini par :

$$R_m(\lambda) f(x) = \int_{-\infty}^0 R_m(x, y, \lambda) f(y) dy.$$

Utilisant le calcul de $H_m(T_m(\lambda) f)(x)$, nous en déduisons que :

$$H_m(R_m(\lambda) f)(x) = \lambda R_m(\lambda) f(x) - i\Gamma^1 M_{\alpha, \beta} M_{\alpha, \beta}^{-1} i\Gamma^1 f(x) \\ = \lambda R_m(\lambda) f(x) + f(x).$$

Nous avons donc obtenu un opérateur $R_m(\lambda)$ tel que :

$$(H_m - \lambda)(R_m(\lambda) f)(x) = f(x).$$

Q.E.D

Nous prouvons maintenant que notre résolvante est bien définie sur les espaces de Hilbert qui nous concernent :

Lemme 2.4.5. *L'opérateur $R_m(\lambda)$ est borné de $\mathcal{H}_m^{s,n}$ dans lui-même.*

Preuve. Nous avons vu dans 2.4.1 que, pour tout $x \in]-\infty, 0[$, nous avons l'estimation :

$$\|\psi(x)\| \leq e^{\operatorname{Im}(\lambda)x} e^{\int_{-\infty}^x \|V_m(t)\| dt}.$$

Soit $\epsilon > 0$. Nous déduisons de l'estimation précédente que, pour tout $x \in]-\infty, -\epsilon[$, nous avons :

$$\|\psi(x)\| \leq C_{m,\epsilon} e^{\operatorname{Im}(\lambda)x}.$$

D'autre part, pour tout $x \in]-\epsilon, 0[$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\psi(x)\| &\leq e^{\operatorname{Im}(\lambda)x} e^{\int_{-\infty}^{-\epsilon} \|V_m(t)\| dt + \int_{-\epsilon}^x \|V_m(t)\| dt} \\ &\leq C_{\epsilon,m} e^{\int_{-\epsilon}^x \left| \frac{ml}{t} \right| dt}. \end{aligned}$$

Comme :

$$\int_{-\epsilon}^x \left| \frac{ml}{t} \right| dt = -ml \int_{-\epsilon}^x \frac{1}{t} dt = -ml [\ln(-t)]_{-\epsilon}^x = \ln \left(\left(\frac{\epsilon}{-x} \right)^{ml} \right),$$

nous en déduisons que :

$$\|\psi(x)\| \leq C_{\epsilon,m} (-x)^{-ml}$$

sur $]-\epsilon, 0[$. Remarquons que ψ est donc dans $L^2(]-\infty, 0[)$ pour $2ml < 1$ (mais ne vérifie alors pas les conditions au bord, sinon nous aurions un vecteur propre). D'autre part, rappelons que pour $2ml < 1$, nous avons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\| &\leq 4N (-x)^{-ml} e^{-6C_{\lambda,m}(s+\frac{1}{2})x}, \\ \|\varphi(x)\| &\leq C e^{-\operatorname{Im}(\lambda)x}, \end{aligned}$$

où la première inégalité est prise proche de 0 et la deuxième quand x tend vers $-\infty$. Dans le cas $2ml \geq 1$, nous avons les estimations :

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\| &\leq 4N (-x)^{ml} e^{-6C_{\lambda,m}(s+\frac{1}{2})x}, \\ \|\varphi(x)\| &\leq C e^{-\operatorname{Im}(\lambda)x}. \end{aligned}$$

Rappelons que :

$$\begin{aligned} R_m(x, y, \lambda) &= \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 \mathbf{1}_{]-\infty, x[}(y) \\ &\quad + \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 \mathbf{1}_{]x, 0[}(y). \end{aligned}$$

Nous allons tout d'abord nous intéresser au cas $2ml \geq 1$.

Nous remarquons tout d'abord que, dans cette formule, x et y jouent un rôle symétrique. En effet, $\mathbf{1}_{]-\infty, x[}(y) = \mathbf{1}_{]y, 0[}(x)$ et $\mathbf{1}_{]x, 0[}(y) = \mathbf{1}_{]-\infty, y[}(x)$. Nous nous concentrerons donc sur $\int_{-\infty}^0 R_m(x, y, \lambda) dy$ qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 R_m(x, y, \lambda) dy &= \int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 dy \\ &\quad + \int_x^0 \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 dy. \end{aligned}$$

La fonction ψ est intégrable sur $] -\infty, x[$ et la fonction φ est intégrable sur $]x, 0[$ donc cette intégrale est bien définie et est bornée pour tout x dans un ensemble compact de $] -\infty, 0[$. Il nous faut donc étudier les limites quand x tend vers $-\infty$ et 0 des deux intégrales précédentes. Nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^x \psi^t(y) dy \right\| &\leq \int_{-\infty}^x \|\psi^t(y)\| dy \\ &\leq \int_{-\infty}^x 2e^{\operatorname{Im}(\lambda)y} dy = \frac{2}{\operatorname{Im}(\lambda)} e^{\operatorname{Im}(\lambda)x}. \end{aligned}$$

En effet, $\int_{-\infty}^x \|V_m(t)\| dt$ tend vers 0 en $-\infty$. Par conséquent, $e^{\int_{-\infty}^x \|V_m(t)\| dt} \leq 2$ pour x suffisamment petit. Utilisant les estimations sur φ (qui sont vraies pour tout $m > 0$), nous en déduisons que $\int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 dy$ est borné en $-\infty$.

Soit $A > 0$ tel que $\|\varphi(x)\| \leq C e^{-\operatorname{Im}(\lambda)x}$ pour $x < A$. Alors, pour tout $x < A$, nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \int_x^0 \varphi^t(y) dy \right\| &\leq \int_x^0 \|\varphi^t(y)\| dy \\ &\leq \int_x^A C e^{-\operatorname{Im}(\lambda)y} dy + \int_A^0 \|\varphi^t(y)\| dy \\ &= \frac{C}{\operatorname{Im}(\lambda)} \left(e^{-\operatorname{Im}(\lambda)x} - e^{-\operatorname{Im}(\lambda)A} \right) + \int_A^0 \|\varphi^t(y)\| dy. \end{aligned}$$

Comme $\|\psi(x)\| \leq e^{\operatorname{Im}(\lambda)x}$ en $-\infty$, nous obtenons bien que

$$\int_x^0 \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 dy$$

est borné en $-\infty$.

Nous étudions maintenant la limite en 0. Nous considérons $x \in] -\infty, 0[$ suffisamment proche de 0. Nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \int_x^0 \varphi^t(y) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 dy \right\| &\leq \int_x^0 \|\varphi(y)\| dy \\ &\leq \int_x^0 C (-y)^{ml} dy \\ &= C \left[-\frac{(-y)^{1+ml}}{1+ml} \right]_x^0 = C (-x)^{1+ml}. \end{aligned}$$

Comme $\|\psi(x)\| \leq C (-x)^{-ml}$, nous obtenons :

$$\int_x^0 \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 dy \leq 2C (-x),$$

qui est donc borné en 0. D'autre part, soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit. Nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^x \psi^t(y) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 dy \right\| &\leq \int_{-\infty}^{-\epsilon} \|\psi(y)\| dy + \int_{-\epsilon}^x \|\psi(y)\| dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{-\epsilon} \|\psi(y)\| dy + \int_{-\epsilon}^x C (-y)^{-ml} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \|\psi(y)\| dy + C \left[-\frac{(-y)^{1-ml}}{1-ml} \right]_{-\epsilon}^x, & \text{si } ml \neq 1 \\ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \|\psi(y)\| dy + C [-\ln(-y)]_{-\epsilon}^x, & \text{si } ml = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \|\psi(y)\| dy + C \left(\frac{(\epsilon)^{1-ml}}{1-ml} - \frac{(-x)^{1-ml}}{1-ml} \right), & \text{si } ml \neq 1 \\ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \|\psi(y)\| dy + C (\ln(\epsilon) - \ln(-x)), & \text{si } ml = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $\|\varphi(x)\| \leq C(-x)^{ml}$, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i\Gamma^1 dy \right\| \\
&\leq \begin{cases} 2(-x)^{ml} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \|\psi(y)\| dy + C \left(\frac{(\epsilon)^{1-ml}}{1-ml} - \frac{(-x)^{1-ml}}{1-ml} \right) \right), & \text{si } ml \neq 1 \\ 2(-x)^{ml} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \|\psi(y)\| dy + C (\ln(\epsilon) - \ln(-x)) \right), & \text{si } ml = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ceci prouve donc que $\int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i\Gamma^1 dy$ est bornée en 0. Nous pouvons maintenant appliquer le lemme de Schur pour prouver que $R_m(\lambda)$ est un opérateur borné de $L^2(\cdot - \infty, 0]$ dans lui-même.

Nous passons maintenant au cas $2ml < 1$. Dans ce cas, φ est intégrable en 0 mais n'est pas bornée. L'argument précédent ne marche pas en 0. Rappelons que :

$$\begin{aligned}
R_m(\lambda) f(x) &= \int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i\Gamma^1 f(y) dy \\
&\quad + \int_x^0 \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i\Gamma^1 f(y) dy,
\end{aligned}$$

et que ψ est une fonction L^2 ne vérifiant pas les conditions au bord. Soit $\epsilon > 0$ petit. Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{1}_{]-\epsilon, 0[} R_m(\lambda) f\|_{\mathcal{H}_m^{s,n}}^2 &= \int_{-\epsilon}^0 \left\| \int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i\Gamma^1 f(y) dy \right. \\
&\quad \left. + \int_x^0 \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i\Gamma^1 f(y) dy \right\|^2 dx \\
&\leq 2 \left(\int_{-\epsilon}^0 \left\| \int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i\Gamma^1 f(y) dy \right\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\| \int_x^0 \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i\Gamma^1 f(y) dy \right\|^2 dx \right) \\
&\leq 4 \left(\int_{-\epsilon}^0 \left(\int_{-\infty}^x \|\varphi(x)\| \|\psi^t(y)\| \|f(y)\| dy \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_x^0 \|\psi(x)\| \|\varphi^t(y)\| \|f(y)\| dy \right)^2 dx \right) \\
&\leq 4 \left(\int_{-\epsilon}^0 \|\varphi(x)\|^2 \|\psi\|_{[L^2(\cdot - \infty, x)]^4}^2 \|f\|_{[L^2(\cdot - \infty, x)]^4}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|\psi(x)\|^2 \|\varphi\|_{[L^2(\cdot, 0)]^4}^2 \|f\|_{[L^2(\cdot, 0)]^4}^2 dx \right) \\
&\leq 8 \|\varphi\|_{[L^2(\cdot - \epsilon, 0)]^4}^2 \|\psi\|_{\mathcal{H}_m^{s,n}}^2 \|f\|_{\mathcal{H}_m^{s,n}}^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{1}_{]-\infty, -\epsilon[} R_m(\lambda) f\|_{L^2(]-\infty, 0])}^2 &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} \left\| \int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha, \beta}^{-1} i \Gamma^1 f(y) dy \right. \\
&\quad \left. + \int_x^0 \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha, \beta}^{-1} i \Gamma^1 f(y) dy \right\|^2 dx \\
&\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \left\| \int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha, \beta}^{-1} i \Gamma^1 f(y) dy \right\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\| \int_x^0 \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha, \beta}^{-1} i \Gamma^1 f(y) dy dx \right\|^2 \right) \\
&\leq 4 \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(\int_{-\infty}^x \|\varphi(x)\| \|\psi^t(y)\| \|f(y)\| dy \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_x^0 \|\psi(x)\| \|\varphi^t(y)\| \|f(y)\| dy \right)^2 dx \right).
\end{aligned}$$

Etudions le premier terme de cette somme :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(\int_{-\infty}^x \|\varphi(x)\| \|\psi^t(y)\| \|f(y)\| dy \right)^2 &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(\int_{-\infty}^x \left(\|\varphi(x)\| \|\psi^t(y)\| \right)^{\frac{1}{2}} \|f(y)\| dy \right)^2 \\
&\leq \int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(\int_{-\infty}^x \|\varphi(x)\| \|\psi(y)\| dy \right) \left(\int_{-\infty}^x \|\varphi(x)\| \|\psi(y)\| \|f(y)\|^2 dy \right) dx
\end{aligned}$$

Comme dans le cas $2ml \geq 1$, nous pouvons montrer que $\int_{-\infty}^x \|\varphi(x)\| \|\psi(y)\| dy$ est borné sur $]-\infty, -\epsilon[$ (en $-\epsilon$, il n'y a maintenant plus le même problème qu'en 0). D'autre part :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{-\epsilon} \int_{-\infty}^x \|\varphi(x)\| \|\psi(y)\| \|f(y)\|^2 dy dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \|\varphi(x)\| \|\psi(y)\| \|f(y)\|^2 \mathbf{1}_{]-\infty, x[}(y) \mathbf{1}_{]-\infty, -\epsilon[}(x) dy dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \mathbf{1}_{]-\infty, -\epsilon[}(y) \|f(y)\|^2 \|\psi(y)\| \left(\int_y^0 \|\varphi(x)\| dx \right) dy
\end{aligned}$$

Comme φ est intégrable en 0, $\|\psi(y)\| \left(\int_y^0 \|\varphi(x)\| dx \right)$ est borné en $-\epsilon$. Grâce à la décroissance de ψ en $-\infty$, nous pouvons montrer, comme dans le cas $2ml \geq 1$, que ce terme est aussi borné en $-\infty$. Nous obtenons donc :

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(\int_{-\infty}^x \|\varphi(x)\| \|\psi^t(y)\| \|f(y)\| dy \right)^2 \leq C_\epsilon \|f\|_{L^2(]-\infty, 0])}^2.$$

Nous nous intéressons maintenant au deuxième terme de cette somme et nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(\int_x^0 \|\psi(x)\| \|\varphi^t(y)\| \|f(y)\| dy \right)^2 &\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(\int_x^{-\epsilon} \|\psi(x)\| \|\varphi(y)\| \|f(y)\| dy \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{-\epsilon}^0 \|\psi(x)\| \|\varphi(y)\| \|f(y)\| dy \right)^2 dx \right).
\end{aligned}$$

Le deuxième terme est borné par :

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(\int_{-\epsilon}^0 \|\psi(x)\| \|\varphi(y)\| \|f(y)\| dy \right)^2 \leq \|\psi\|_{\mathcal{H}_m^{s,n}}^2 \|\varphi\|_{[L^2(]-\epsilon,0])^4}^2 \|f\|_{\mathcal{H}_m^{s,n}}^2.$$

Pour le premier terme, nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(\int_x^{-\epsilon} \|\psi(x)\| \|\varphi(y)\| \|f(y)\| dy \right)^2 \\ & \leq \int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(\int_x^{-\epsilon} \|\psi(x)\| \|\varphi(y)\| dy \right) \left(\int_x^{-\epsilon} \|\psi(x)\| \|\varphi(y)\| \|f(y)\|^2 dy \right) dx. \end{aligned}$$

Sur $] -\infty, -\epsilon[$, $\int_x^{-\epsilon} \|\psi(x)\| \|\varphi(y)\| dy$ est de nouveau borné. Il reste donc à borner :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-\epsilon} \int_x^{-\epsilon} \|\psi(x)\| \|\varphi(y)\| \|f(y)\|^2 dy dx \\ & = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \|\psi(x)\| \|\varphi(y)\| \|f(y)\|^2 \mathbf{1}_{]x, -\epsilon[}(y) \mathbf{1}_{]-\infty, -\epsilon[}(x) dy dx \\ & = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \|f(y)\|^2 \|\varphi(y)\| \left(\int_{-\infty}^y \|\psi(x)\| dx \right) dy. \end{aligned}$$

Comme précédemment, le terme $\|\varphi(y)\| \left(\int_{-\infty}^y \|\psi(x)\| dx \right)$ est borné sur $] -\infty, -\epsilon[$. Nous obtenons donc :

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(\int_x^0 \|\psi(x)\| \|\varphi^t(y)\| \|f(y)\| dy \right)^2 \leq C_\epsilon \|f\|_{\mathcal{H}_m^{s,n}}^2.$$

Par conséquent :

$$\|\mathbf{1}_{]-\infty, -\epsilon[} R_m(\lambda) f\|_{\mathcal{H}_m^{s,n}}^2 \leq C_\epsilon \|f\|_{\mathcal{H}_m^{s,n}}^2.$$

Nous en déduisons que $R_m(\lambda)$ est un opérateur borné sur $L^2(]-\infty, 0])$.

Q.E.D

Nous devons maintenant prouver que les conditions au bord sont vérifiées pour que notre espace d'arrivée soit bien le domaine de notre opérateur. Ceci est fait dans le :

Lemme 2.4.6. *Pour tout $f \in L^2(]-\infty, 0])$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im}(\lambda) > 0$, nous avons :*

- Si $2ml \geq 1$, alors $R_m(\lambda) f(x)$ tend vers 0 en 0.
- Si $2ml < \frac{1}{2}$, alors $\|(\gamma^1 + i) R_m(\lambda) f(x)\| = O(\sqrt{-x})$ en 0.

Preuve. Rappelons que :

$$\begin{aligned} R_m(\lambda) f(x) & = \int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 f(y) dy \\ & \quad + \int_x^0 \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 f(y) dy. \end{aligned}$$

Dans le cas $2ml \geq 1$, lorsque x est proche de 0, nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \int_x^0 \left(\psi(x) \varphi^t(y) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\varphi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 f(y) dy \right\| & \leq 2 \|\psi(x)\| \|\varphi\|_{[L^2(]x,0])^4} \|f\|_{\mathcal{H}_m^{s,n}} \\ & \leq C (-x)^{-ml} (-x)^{\frac{1}{2}+ml} \|f\|_{\mathcal{H}_m^{s,n}}. \end{aligned}$$

En effet :

$$\int_x^0 \|\varphi(y)\|^2 dy \leq C \left[-\frac{(-x)^{1+2ml}}{1+2ml} \right].$$

Nous en déduisons que le deuxième terme dans l'expression de $R_m(\lambda) f$ tend bien vers 0. D'autre part, soit $\epsilon > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) \psi^t(y) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}^t(y) \right) M_{\alpha,\beta}^{-1} i \Gamma^1 f(y) dy \right\| &\leq 2 \|\varphi(x)\| \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \|\psi(y)\| \|f(y)\| dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\epsilon}^x \|\psi(y)\| \|f(y)\| dy \right) \\ &\leq 2C (-x)^{ml} \left(\|\psi\|_{[L^2(-\infty, -\epsilon)]^4} \|f\|_{\mathcal{H}_m^{s,n}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\left[-\frac{(-y)^{1-2ml}}{1-2ml} \right]_{-\epsilon}^x \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathcal{H}_m^{s,n}} \right) \end{aligned}$$

quand $2ml \neq 1$. Le terme de droite tend bien vers 0. Dans le cas $2ml = 1$, nous remplaçons $\frac{(-y)^{1-2ml}}{1-2ml}$ par $\ln(-y)$ et le résultat reste le même.

Dans le cas $2ml < 1$, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons :

$$\left\| \int_{-\infty}^x \psi^t(y) f(y) dy \right\| \leq \|\psi\|_{L^2(-\infty, x]} \|f\|_{L^2(-\infty, 0]}.$$

Utilisant le comportement en 0 de ψ , nous avons :

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L^2(-\infty, x]} &\leq \|\psi\|_{L^2(-\infty, -\epsilon]} + \|\psi\|_{L^2(-\epsilon, x]} \\ &\leq \|\psi\|_{L^2(-\infty, -\epsilon]} + \left(\int_{-\epsilon}^x (-y)^{-2ml} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\psi\|_{L^2(-\infty, -\epsilon]} + \frac{1}{(1-2ml)^{\frac{1}{2}}} \left((-x)^{\frac{1}{2}-ml} + (-\epsilon)^{\frac{1}{2}-ml} \right). \end{aligned}$$

Comme φ vérifie les conditions au bord $\|(\gamma^1 + i) \varphi(x)\| = O\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right)$, et $\frac{1}{2} - ml > 0$, nous en déduisons que :

$$\left\| (\gamma^1 + i) \varphi(x) \int_{-\infty}^x \psi^t(y) f(y) dy \right\| = O\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Pour le deuxième terme, ψ est dans $\mathcal{H}_m^{s,n}$ et vérifie :

$$H_m \psi = \lambda \psi.$$

Ainsi, $\psi \in D_{nat}(H_m) = \{\phi \in \mathcal{H}_m^{s,n} \mid H_m \phi \in \mathcal{H}_m^{s,n}\}$. Utilisant le développement asymptotique de ψ donné dans (1.3.46), nous pouvons calculer $(\gamma^1 + i) \psi$ et nous obtenons $(\gamma^1 + i) \psi = O\left((-x)^{ml}\right)$. Ceci nous donne :

$$\left\| (\gamma^1 + i) \psi(x) \int_x^0 \varphi^t(y) f(y) dy \right\| \leq C (-x)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(x, 0]}.$$

Ainsi $\|(\gamma^1 + i) R_m(\lambda) f(x)\| = O\left((-x)^{\frac{1}{2}}\right)$ et les conditions au bord sont vérifiées.

Q.E.D

2.5 Solutions BKW

Dans cette section, nous construisons des solutions de l'équation $(H - E)\varphi = 0$ où

$$H = i\gamma^0\gamma^1 h\partial_x + \gamma^0\gamma^2 A(x) - hm\gamma^0 B(x).$$

La méthode BKW nous permet d'obtenir des solutions qui admettent un développement en terme du paramètre h (qui est vu comme un paramètre semi-classique) lorsque h est proche de 0 dans certains domaines du plan complexe. Ces domaines sont délimités par les lignes de Stokes qui sont présentés dans la première partie. Nous donnons les lignes de Stokes proches des points tournant, proches de 0 et les lignes de Stokes à l'infini.

La partie suivante introduit la méthode BKW lorsque l'on cherche des développements sur un ensemble compact du plan complexe qui ne contient pas de point tournant, c'est-à-dire pas de point vérifiant $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)(x) = 0$. Cette méthode a été largement étudiée, notamment dans [36], [40] et [72] pour l'opérateur de Schrödinger. La formulation matricielle s'inspire de [33] et [61]. Nous prouvons que nous pouvons trouver une solution à l'équation aux valeurs propres qui admet un développement en terme du paramètre semi-classique h .

Nous nous intéressons ensuite aux solutions de Jost qui admettent un développement en h . Nous utilisons de nouveau la méthode BKW mais nous changeons la phase utilisée afin qu'elle admette le comportement souhaité en $-\infty$. Nous prouvons de nouveau que nous avons bien une solution du problème aux valeurs propres qui admet un développement en h valable dans un ouvert non borné.

Dans la dernière partie de cette section, nous utilisons la transformation de Langer, qui a été utilisée dans [35], pour prouver l'existence d'une solution qui tend vers 0 en 0 et qui admet un développement en h au voisinage de 0.

Dans toute cette section, nous utiliserons la notation $f(x) \sim g(x)$ lorsque $f(x) = g(x) + o(g(x))$. D'autre part, dans cette section, nous utiliserons le fait que le potentiel A se prolonge de manière holomorphe dans un domaine ouvert U du demi-plan complexe contenant l'axe réel négatif et tel que $|\operatorname{Im}(x)| < |\operatorname{Re}(x)|$ lorsque $|x|$ tend vers ∞ . Notons O un voisinage de 0 dans le demi-plan contenant l'axe réel négatif. Nous utiliserons aussi le fait que B se prolonge de manière holomorphe dans $U \setminus O$ et que $xB(x)$ se prolonge de manière holomorphe dans O .

2.5.1 Analyse des lignes de Stokes

Dans la suite de cette section, nous aurons besoin de connaître le comportement des lignes de Stokes afin de pouvoir obtenir des développements en h pour les solutions BKW. Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux lignes de Stokes proches des points tournants, des extremums du potentiel et proche de 0. Nous recherchons alors les courbes vérifiant :

$$\operatorname{Re} \left(\int_y^x (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) dt \right) = 0$$

où E peut être complexe ainsi que x et y . Nous notons \int_y^x pour indiquer que nous intégrons le long d'un chemin allant de y à x .

Plaçons nous dans un premier temps au voisinage des points tournants. Dans notre cas, nous avons trois points tournant que nous noterons x_i avec $i = 0, 1, 2$ tel que x_0 est le plus proche de zéro. Les points tournants sont définis comme étant les zéros de $A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2$. Nous utilisons la détermination de la racine carrée telle que $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} \in i\mathbb{R}_+$ lorsque nous avons $A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2 < 0$ et telle que $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{4}} \in e^{\frac{i\pi}{4}}\mathbb{R}_+$. Nous obtenons le :

Lemme 2.5.1. *Les lignes de Stokes au voisinage des points tournants x_0 et x_2 satisfont :*

$$\arg((x - x_i)) = \frac{\pi}{3} \left[\frac{2\pi}{3} \right].$$

Au voisinage de x_1 , nous avons :

$$\arg((x - x_i)) = 0 \left[\frac{2\pi}{3} \right].$$

Preuve. Nous recherchons les chemins vérifiant :

$$\operatorname{Re} \left(\int_{x_i}^x (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) dt \right) = 0.$$

Au voisinage des points x_i tels que $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)(x_i) = 0$, nous avons :

$$A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2(t) = 2(AA' + h^2 m^2 BB')(x_i)(t - x_i) + o((t - x_i)).$$

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^x (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) dt &= \int_{x_i}^x (2(AA' + h^2 m^2 BB')(x_i)(t - x_i) + o(t - x_i))^{\frac{1}{2}}(t) dt \\ &= \frac{2}{3} (2(AA' + h^2 m^2 BB'))^{\frac{1}{2}}(x_i) (x - x_i)^{\frac{3}{2}} + o\left((x - x_i)^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, les lignes de Stokes issues de x_i vont vérifier :

$$\operatorname{Re} \left((2(AA' + h^2 m^2 BB'))^{\frac{1}{2}}(x_i) (x - x_i)^{\frac{3}{2}} \right) = 0.$$

Nous avons $(AA' + h^2 m^2 BB')(x_2) > 0$ et $(AA' + h^2 m^2 BB')(x_0) > 0$, ce qui nous donne :

$$\arg\left((x - x_i)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi].$$

Au voisinage de x_2 et x_0 , il vient :

$$\arg((x - x_i)) = \frac{\pi}{3} \left[\frac{2\pi}{3} \right].$$

En x_1 , nous avons $(AA' + h^2 m^2 BB')(x_1) < 0$, ce qui nous donne :

$$\arg\left((x - x_i)^{\frac{3}{2}}\right) = 0 [\pi].$$

Au voisinage de x_1 , nous obtenons :

$$\arg((x - x_i)) = 0 \left[\frac{2\pi}{3} \right].$$

Q.E.D

Intéressons nous maintenant à la forme des lignes de Stokes proches des extremums. Nous commencerons par le maximum local $(A^2 + h^2 m^2 B^2)(M) = V_M$ (qui correspond au maximum de A^2). Nous avons alors $(A^2 + h^2 m^2 B^2)'(M) = 0$ et $(A^2 + h^2 m^2 B^2)''(M) < 0$. Il vient :

Lemme 2.5.2. *Il existe $\epsilon > 0$ tel que si x, y sont sur une même ligne de Stokes avec $|x - M| < \epsilon$ et $|y - M| < \epsilon$, alors nous avons :*

$$\arg(x - y) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg(V_M - E^2) [\pi].$$

Preuve. Au voisinage de M , nous pouvons faire le développement suivant :

$$(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)(t) = V_M - E^2 + (A^2 + h^2 m^2 B^2)''(M) \frac{(t - M)^2}{2} + o((t - M)^2).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) &= (V_M - E^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)''(M) (t - M)^2}{V_M - E^2} \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \left. + o((t - M)^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (V_M - E^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)''(M) (t - M)^2}{V_M - E^2} \frac{1}{4} \right. \\ &\quad \left. + o((t - M)^2) \right) \\ &= (V_M - E^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)''(M) (t - M)^2}{(V_M - E^2)^{\frac{1}{2}} 4} + o((t - M)^2). \end{aligned}$$

Par conséquent, au voisinage de M , nous avons :

$$\operatorname{Re} \left(\int_y^x (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) dt \right) \sim \operatorname{Re} \left((V_M - E^2)^{\frac{1}{2}} (x - y) \right),$$

et les lignes de Stokes satisfont :

$$\operatorname{Re} \left((V_M - E^2)^{\frac{1}{2}} (x - y) \right) = 0.$$

Ceci donne donc :

$$\arg \left((V_M - E^2)^{\frac{1}{2}} (x - y) \right) = \frac{\pi}{2} [\pi].$$

Nous en déduisons que :

$$\arg(x - y) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg(V_M - E^2) [\pi].$$

Q.E.D

Pour certaines valeurs de E , il est possible de joindre les points tournants x_2 et x_1 par une ligne de Stokes :

Lemme 2.5.3. *Il existe $\epsilon > 0$ tel que si $|E^2 - V_M| < \epsilon$ et les points tournants x_1 et x_2 sont joints par une ligne de Stokes alors :*

$$\arg(V_M - E^2) = \frac{\pi}{2} [\pi].$$

Preuve. Dans ce cas, les points tournants x_1 et x_2 sont proches de M et les derniers développements sont corrects avec x et y remplacés par x_1 et x_2 . Nous allons chercher une condition sur E pour que les points tournants soient joints par une ligne de Stokes. Pour cela, nous allons étudier la position de x_1 et x_2 par rapport à M . Utilisant le fait que x_1, x_2 satisfont $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)(x_i) = 0$ et le développement au voisinage de M de cette expression, x_1 et x_2 vont approximativement vérifier :

$$V_M - E^2 + (A^2 + h^2 m^2 B^2)''(M) \frac{(x_i - M)^2}{2} = 0.$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned} x_1 &\sim M + \left(\frac{-2(V_M - E^2)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2)''(M)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ x_2 &\sim M - \left(\frac{-2(V_M - E^2)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2)''(M)} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$x_1 - x_2 \sim 2 \left(\frac{-2(V_M - E^2)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2)''(M)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \arg(x_1 - x_2) &\sim \frac{1}{2} \arg(-2(V_M - E^2)) - \frac{1}{2} \arg\left((A^2 + h^2 m^2 B^2)''(M)\right) [2\pi] \\ &= \frac{1}{2} (\pi + \arg(V_M - E^2)) - \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ &= \frac{1}{2} \arg(V_M - E^2) [2\pi]. \end{aligned}$$

Rappelons que nous avons aussi :

$$\arg(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg(V_M - E^2) [2\pi],$$

ou :

$$\arg(x_1 - x_2) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg(V_M - E^2) [2\pi].$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} \arg(V_M - E^2) &= \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \text{ou } \arg(V_M - E^2) &= -\frac{\pi}{2} [2\pi]. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc la condition

$$\arg(V_M - E^2) = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

pour que les points tournants au voisinage de M soient reliés par une ligne de Stokes. Q.E.D

Nous pouvons faire le même raisonnement au voisinage du minimum du potentiel qu'on écrira $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)(m) = V_m$. Cette fois-ci, nous avons $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)''(m) > 0$. Nous avons :

Lemme 2.5.4. *Il existe $\epsilon > 0$ tel que si x, y sont sur une même ligne de Stokes avec $|x - m| < \epsilon$ et $|y - m| < \epsilon$ alors les lignes de Stokes satisfont :*

$$\arg(x - y) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg(V_m - E^2) [\pi].$$

Preuve. Nous obtenons le développement :

$$(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) = (V_m - E^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)''(m)}{(V_m - E^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{(t - m)^2}{4} + o((t - m)^2).$$

Ceci nous donne comme précédemment :

$$\arg(x - y) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg(V_m - E^2) [\pi].$$

Q.E.D

Nous cherchons de nouveau une condition sur E pour que les lignes de Stokes joignent les points tournants qui sont ici x_0 et x_1 . Nous obtenons cette fois-ci le :

Lemme 2.5.5. *Il existe $\epsilon > 0$ tel que si $|E^2 - V_m| < \epsilon$ et si les points tournants x_0 et x_1 sont joints par une ligne de Stokes alors :*

$$\arg(V_m - E^2) = 0 [\pi].$$

Preuve. Utilisant de nouveau le développement ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned} x_0 &\sim m + \left(\frac{-2(V_m - E^2)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)''(m)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ x_1 &\sim m - \left(\frac{-2(V_m - E^2)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)''(m)} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

de sorte que :

$$x_0 - x_1 = 2 \left(\frac{-2(V_m - E^2)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)''(m)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous obtenons :

$$\arg(x_0 - x_1) = \frac{1}{2} (\pi + \arg(V_m - E^2)).$$

Comme précédemment, nous en déduisons la condition

$$\arg(V_m - E^2) = 0 [\pi]$$

afin d'avoir une ligne de Stokes qui joint les points tournants.

Q.E.D

Etudions maintenant les lignes de Stokes près de 0. Nous avons :

Lemme 2.5.6. *Les lignes de Stokes au voisinage de 0 sont proches de cercles de centre 0.*

Preuve. Rappelons qu'au voisinage de 0, nous avons :

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{l} + t^2 + o(t^2) \\ B(t) &= -\frac{l}{t} - \frac{1}{6l}t + o(t). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} A^2(t) &= \frac{1}{l^2} + \frac{2}{l}t^2 + o(t^2) \\ B^2(t) &= \frac{l^2}{t^2} + \frac{1}{3} + o(1). \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)(t) = \frac{h^2 m^2 l^2}{t^2} + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{3l^2} + o(h^2 + 1)$$

au voisinage de zéro. Ainsi :

$$\begin{aligned} (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) &= \frac{hml}{t} \left(1 + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{3h^2 m^2 l^4} t^2 + o\left(\frac{(1+h^2)t^2}{h^2}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{hml}{t} \left(1 + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6h^2 m^2 l^4} t^2 + o\left(\frac{(1+h^2)t^2}{h^2}\right) \right) \\ &= \frac{hml}{t} + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6hml^3} t + o\left((1+h^2)\frac{t}{h}\right). \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\int_y^x (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) dt \right) &= \operatorname{Re} (hml (\log(x) - \log(y))) \\ &\quad + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{12hml^3} (x^2 - y^2) \\ &\quad + o\left((1+h^2)\frac{x^2 - y^2}{h}\right) \end{aligned}$$

et les lignes de Stokes satisfont :

$$hml (\ln(|x|) - \ln(|y|)) = -\operatorname{Re} \left(\frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6hml^3} (x^2 - y^2) + o\left((1+h^2)\frac{x^2 - y^2}{h}\right) \right),$$

d'où :

$$|x| = |y| e^{-\operatorname{Re}\left(\frac{3+h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{12h^2 m^2 l^4} (x^2 - y^2) + o\left((1+h^2)\frac{x^2 - y^2}{h^2}\right)\right)}. \quad (2.5.1)$$

Remarquons que x_0 vérifiant $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)(x_0) = 0$ et utilisant le développement au voisinage de 0 de cette expression, nous voyons que x_0 va vérifier :

$$(3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2) x_0^2 + 3h^2 m^2 l^4 \sim 0.$$

D'où

$$x_0 = -\left(\frac{-3h^2 m^2 l^4}{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}\right)^{\frac{1}{2}} = O(h). \quad (2.5.2)$$

Par conséquent, le développement que l'on fait au voisinage de 0 est fait à une distance en $O(h)$ de 0. Ainsi la partie exponentielle dans notre expression pour les lignes de Stokes va être proche d'une constante. Nous avons donc des courbes qui sont proches de cercles autour de 0. Q.E.D

Finalement, nous allons étudier le comportement des lignes de Stokes en $-\infty$. Nous avons :

Lemme 2.5.7. *En $-\infty$, les lignes de Stokes sont asymptotes à des droites. Plus précisément, nous avons :*

$$\operatorname{Im}(x - y) = -\frac{\operatorname{Im}(E)}{\operatorname{Re}(E)} \operatorname{Re}(x - y)$$

le long de ces lignes de Stokes.

Preuve. La phase utilisée en $-\infty$ est :

$$z(x) = iEx + \int_{-\infty}^x \frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)(t)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) + iE} dt.$$

Nous étudions donc les courbes telles que :

$$\operatorname{Re} \left(iE(x - y) + \int_y^x \frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)(t)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) + iE} dt \right) = 0.$$

Rappelons qu'en $-\infty$, nous avons

$$\begin{aligned} A(x) &= C_A e^{\kappa x} + o(e^{\kappa x}) \\ B(x) &= C_B e^{\kappa x} + o(e^{\kappa x}). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} = (-E^2)^{\frac{1}{2}} + o(e^{\kappa x}) = iE + o(e^{\kappa x}).$$

Par conséquent, en $-\infty$, nous avons :

$$\operatorname{Re} \left(iE(x - y) + \int_y^x \frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)(t)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) + iE} dt \right) \sim \operatorname{Re}(iE(x - y)).$$

Les lignes de Stokes doivent donc vérifier :

$$\operatorname{Re}(iE(x - y)) = 0,$$

ce qui donne :

$$\operatorname{Im}(x - y) = -\frac{\operatorname{Im}(E)}{\operatorname{Re}(E)} \operatorname{Re}(x - y).$$

Les lignes de Stokes sont donc asymptotes à des droites en $-\infty$.

Q.E.D

2.5.2 Solutions BKW loin des points tournants

Nous nous intéressons aux solutions de l'équation :

$$(H_m - \lambda)\varphi = 0,$$

en dehors d'un voisinage des points tournants. Rappelons que $H_m = \Gamma^1 D_x + (s + \frac{1}{2}) \Gamma^2 A(x) - m\gamma^0 B(x)$ avec $\Gamma^1 = \text{diag}(1, -1, -1, 1)$, les expressions de $\Gamma^2 = \gamma^0 \gamma^2$ et γ^0 étant données dans (1.2.26). Nous pouvons alors réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\left(D_x + \left(s + \frac{1}{2} \right) \Gamma^1 \Gamma^2 A(x) - m\Gamma^1 \gamma^0 B(x) - \lambda \Gamma^1 \right) \varphi = 0.$$

Posant $h^{-1} = (s + \frac{1}{2})$, nous obtenons l'équation suivante :

$$hD_x \varphi = (V_m(x) + h\lambda \Gamma^1) \varphi, \quad (2.5.3)$$

où h sera considéré comme un paramètre semi-classique et nous avons :

$$(V_m(x) + h\lambda \Gamma^1) = \begin{pmatrix} h\lambda & A(x) & ihmB(x) & 0 \\ -A(x) & -h\lambda & 0 & -ihmB(x) \\ ihmB(x) & 0 & -h\lambda & A(x) \\ 0 & -ihmB(x) & -A(x) & h\lambda \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, nous noterons $E = h\lambda$. Nous allons mettre notre équation sous une forme qui ressemble à celle obtenue dans l'article [33] en utilisant des transformations similaires. Introduisons la phase $z(x) = \int_{x_\alpha}^x (A^2(y) + h^2 m^2 B^2(y) - E^2)^{\frac{1}{2}} dy$ où x_α est un point dans le demi-plan de gauche et la racine carré est définie loin des points tournants telle que $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} \in i\mathbb{R}_+$ lorsque nous avons $A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2 < 0$ et telle que $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{4}} \in e^{\frac{i\pi}{4}} \mathbb{R}_+$. Nous avons le lemme :

Lemme 2.5.8. *Posons $w(z) = QPM^{-1}e^{-\frac{z}{h}}\varphi$, où P est donnée dans (2.5.7), M dans (2.5.6) et Q dans (2.5.11). Alors, nous obtenons l'équation :*

$$\frac{dw}{dz}(z) = W_{h,m,+}(z)w(z) \quad (2.5.4)$$

où :

$$W_{h,m,+} = \begin{pmatrix} hN_h & M_{H,h} \\ M_{H,h} & -\frac{2}{h}I_2 + hN_h \end{pmatrix}$$

avec $M_{H,h}$ et N_h donnés dans (2.5.13) et (2.5.14). En posant $w(z) = QPM^{-1}e^{\frac{z}{h}}\varphi$, où P est cette fois-ci donnée dans (2.5.16), nous obtenons l'équation :

$$\frac{dw}{dz}(z) = W_{h,m,-}(z)w(z) \quad (2.5.5)$$

où :

$$W_{h,m,-}(z) = Q\Omega_{h,m,-}(z)Q^{-1} = \begin{pmatrix} hN_h & M_{H,h} \\ M_{H,h} & \frac{2}{h}I_2 + hN_h \end{pmatrix}$$

Preuve. Considérons la matrice :

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5.6)$$

dont l'inverse est donné par :

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons alors $\varphi = M\psi$, nous obtenons l'équation :

$$hD_x\psi = \tilde{V}_{E,m}(x)\psi,$$

où :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{E,m}(x) &= M^{-1} (V_m(x) + E\Gamma^1) M \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h\lambda & A(x) & ihmB(x) & 0 \\ -A(x) & -h\lambda & 0 & -ihmB(x) \\ ihmB(x) & 0 & -h\lambda & A(x) \\ 0 & -ihmB(x) & -A(x) & h\lambda \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(A-E) & A+E & ihmB & ihmB \\ -(A-E) & -(A+E) & ihmB & -ihmB \\ ihmB & ihmB & -(A+E) & A-E \\ ihmB & -ihmB & -(A+E) & -(A-E) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & A+E & 0 & ihmB \\ -(A-E) & 0 & ihmB & 0 \\ 0 & ihmB & 0 & A-E \\ ihmB & 0 & -(A+E) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Considérons ensuite la phase z définie dans le lemme. Posant $\psi = e^{\frac{z}{h}} \tilde{w}(z)$, nous obtenons :

$$-ih \frac{z'(x)}{h} e^{\frac{z}{h}} \tilde{w}(z) - ihz'(x) e^{\frac{z}{h}} \tilde{w}'(z) = \tilde{V}_{E,m}(x) e^{\frac{z}{h}} \tilde{w}(z),$$

ce qui donne l'équation suivante :

$$hD_z \tilde{w} = \left(\frac{\tilde{V}_{E,m}(x(z))}{z'(x(z))} + i \right) \tilde{w},$$

où z' est non nulle puisque nous sommes loin des points tournants. Comme $z' = \frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{x'^2} =$

$(z')^2 = A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\det \left(\mu - \left(\frac{\tilde{V}_{E,m}(x(z))}{z'(x(z))} + i \right) \right) &= (\mu - i) \begin{vmatrix} \mu - i & -ihmBx' & 0 \\ -ihmBx' & \mu - i & -(A - E)x' \\ 0 & (A + E)x' & \mu - i \end{vmatrix} \\
&\quad - (A - E)x' \begin{vmatrix} -(A + E)x' & 0 & -ihmBx' \\ -ihmBx' & \mu - i & -(A - E)x' \\ 0 & (A + E)x' & \mu - i \end{vmatrix} \\
&\quad + ihmBx' \begin{vmatrix} -(A + E)x' & 0 & -ihmBx' \\ \mu - i & -ihmBx' & 0 \\ -ihmBx' & \mu - i & -(A - E)x' \end{vmatrix} \\
&= (\mu - i)^4 + (\mu - i)^2 (A^2 - E^2) x'^2 + (\mu - i)^2 h^2 m^2 B^2 x'^2 \\
&\quad + (\mu - i)^2 (A^2 - E^2) x'^2 + h^2 m^2 B^2 (A^2 - E^2) x'^4 \\
&\quad + (A^2 - E^2)^2 x'^4 + h^2 m^2 B^2 (A^2 - E^2) x'^4 \\
&\quad + (\mu - i)^2 h^2 m^2 B^2 x'^2 + h^4 m^4 B^4 x'^4 \\
&= (\mu - i)^4 + 2(\mu - i)^2 ((A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2) x'^2) \\
&\quad + ((A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2) x'^2)^2 \\
&= (\mu - i)^4 + 2(\mu - i)^2 + 1 = \left((\mu - i)^2 + 1 \right)^2.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc 0 et $2i$. Notons $D = \text{diag}(0, 2i, 2i, 0)$ et les matrices de passages sont données par :

$$\begin{aligned}
P^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i(A + E)x'H^{-1} & -i(A + E)x'H^{-1} & hmBx'H & -hmBx'H \\ H^{-1} & H^{-1} & 0 & 0 \\ -hmBx'H^{-1} & hmBx'H^{-1} & -i(A - E)x'H & i(A - E)x'H \\ 0 & 0 & H & H \end{pmatrix} \\
P &= \begin{pmatrix} -i(A - E)x'H & H & -hmBx'H & 0 \\ i(A - E)x'H & H & hmBx'H & 0 \\ hmBx'H^{-1} & 0 & i(A + E)x'H^{-1} & H^{-1} \\ -hmBx'H^{-1} & 0 & -i(A + E)x'H^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}, \tag{2.5.7}
\end{aligned}$$

où $H = \left(\frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}} + E}{(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}} - E} \right)^{\frac{1}{4}}$. Nous avons :

$$P^{-1}D = \begin{pmatrix} 0 & (A + E)x'H^{-1} & ihmBx'H & 0 \\ 0 & iH^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & ihmBx'H^{-1} & (A - E)x'H & 0 \\ 0 & 0 & iH & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
P^{-1}DP &= \begin{pmatrix} 0 & (A+E)x'H^{-1} & ihmBx'H & 0 \\ 0 & iH^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & ihmBx'H^{-1} & (A-E)x'H & 0 \\ 0 & 0 & iH & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -i(A-E)x'H & H & -hmBx'H & 0 \\ i(A-E)x'H & H & hmBx'H & 0 \\ hmBx'H^{-1} & 0 & i(A+E)x'H^{-1} & H^{-1} \\ -hmBx'H^{-1} & 0 & -i(A+E)x'H^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & (A+E)x' & 0 & ihmBx' \\ -(A-E)x' & i & ihmBx' & 0 \\ 0 & ihmBx' & i & (A-E)x' \\ ihmBx' & 0 & -(A+E)x' & i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ceci nous donne donc bien $P^{-1}DP = \left(\frac{\tilde{V}_{E,m}(x(z))}{z'(x(z))} + i \right)$. Nous posons maintenant $\omega = P\tilde{\omega}$, et nous obtenons :

$$hD_z(\omega)(z) = -ih \frac{dP}{dz}(z) P^{-1}(z) \omega(z) + D\omega(z). \quad (2.5.8)$$

Comme $A(x) = A(x(z))$, $B(x) = B(x(z))$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{d\left((A-E)\frac{dx}{dz}H\right)}{dz} &= A'(x) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 H + (A-E) \frac{d^2x}{dz^2} H + (A-E) \frac{dx}{dz} \frac{dH}{dz} \\
\frac{d\left((A+E)\frac{dx}{dz}H^{-1}\right)}{dz} &= A' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 H^{-1} + (A+E) \frac{d^2x}{dz^2} H^{-1} - (A+E) \frac{dx}{dz} \frac{dH}{dz} H^{-2} \\
\frac{d\left(hmB\frac{dx}{dz}H\right)}{dz} &= hmB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 H + hmB \frac{d^2x}{dz^2} H + hmB \frac{dx}{dz} \frac{dH}{dz} \\
\frac{d\left(hmB\frac{dx}{dz}H^{-1}\right)}{dz} &= hmB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 H^{-1} + hmB \frac{d^2x}{dz^2} H^{-1} - hmB \frac{dx}{dz} \frac{dH}{dz} H^{-2}.
\end{aligned}$$

De plus, comme $\frac{dx}{dz} = (A^2 + h^2m^2B^2 - E^2)^{-\frac{1}{2}}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dz}(z) &= \frac{dx}{dz} \frac{\frac{AA'+h^2m^2BB'}{(A^2+h^2m^2B^2)^{\frac{1}{2}}} \left((A^2 + h^2m^2B^2)^{\frac{1}{2}} - E \right) - \frac{AA'+h^2m^2BB'}{(A^2+h^2m^2B^2)^{\frac{1}{2}}} \left((A^2 + h^2m^2B^2)^{\frac{1}{2}} + E \right)}{\left((A^2 + h^2m^2B^2)^{\frac{1}{2}} - E \right)^2} \\
&= -\frac{\frac{1}{4} \left(A^2 + h^2m^2B^2 \right)^{\frac{1}{2}} - E}{\left(A^2 + h^2m^2B^2 \right)^{\frac{1}{2}} + E} H \\
&= -\frac{E \left(AA' + h^2m^2BB' \right)}{2 \left(A^2 + h^2m^2B^2 - E^2 \right)^{\frac{3}{2}} \left(A^2 + h^2m^2B^2 \right)^{\frac{1}{2}}} H \\
&= -\frac{EA'}{2} \left(\frac{dx}{dz} \right)^3 H + \frac{E \left(A' - \left(AA' + h^2m^2BB' \right) \left(A^2 + h^2m^2B^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right)}{2} \left(\frac{dx}{dz} \right)^3 H.
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{AA'}{(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{A'}{\left(1 + \frac{h^2 m^2 B^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= A' - \frac{h^2 m^2 B^2 A'}{2A^2} + o(h^2). \end{aligned}$$

De sorte que :

$$A' - \frac{AA'}{(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}}} = O(h^2).$$

En outre, l'expression de $\frac{dx}{dz}$ donnée ci-dessus nous permet de calculer :

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{dx}{dz} (2AA' + 2h^2 m^2 BB') \left(-\frac{1}{2}\right) (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{-\frac{3}{2}} = -(AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^4.$$

Rappelons que :

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i(A+E)x'H^{-1} & -i(A+E)x'H^{-1} & hmBx'H & -hmBx'H \\ H^{-1} & H^{-1} & 0 & 0 \\ -hmBx'H^{-1} & hmBx'H^{-1} & -i(A-E)x'H & i(A-E)x'H \\ 0 & 0 & H & H \end{pmatrix} \\ P &= \begin{pmatrix} -i(A-E)x'H & H & -hmBx'H & 0 \\ i(A-E)x'H & H & hmBx'H & 0 \\ hmBx'H^{-1} & 0 & i(A+E)x'H^{-1} & H^{-1} \\ -hmBx'H^{-1} & 0 & -i(A+E)x'H^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer les coefficients de la matrice $\frac{dP}{dz} P^{-1}$:

1,1 : En remarquant que $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{dz} P^{-1}\right)_{1,1} &= \frac{1}{2} \left(A'(A+E) \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 - (A^2 - E^2) (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 \right. \\ &\quad \left. + (A^2 - E^2) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz} H^{-1} + \frac{dH}{dz} H^{-1} + h^2 m^2 BB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \right. \\ &\quad \left. - h^2 m^2 B^2 (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 + h^2 m^2 B^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz} H^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(A'(A+E) \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 - (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 + h^2 m^2 BB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{dH}{dz} H^{-1} \right) \\ &= EA' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 - EA' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 + O(h^2) = O(h^2). \end{aligned}$$

2,1 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dP}{dz}P^{-1}\right)_{2,1} &= \frac{1}{2} \left(- \left(A' (A + E) \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 - (A^2 - E^2) (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (A^2 - E^2) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz} H^{-1} \right) + \frac{dH}{dz} H^{-1} - \left(h^2 m^2 BB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - h^2 m^2 B^2 (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 + h^2 m^2 B^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz} H^{-1} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2} (A' (A + E) + h^2 m^2 BB' - AA' - h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 = -\frac{EA'}{2} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \\
&= \frac{dH}{dz} H^{-1} + O(h^2)
\end{aligned}$$

3,1 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dP}{dz}P^{-1}\right)_{3,1} &= \frac{1}{2} \left(\left(hmB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 H^{-1} + hmB \frac{d^2x}{dz^2} H^{-1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + hmB \frac{dx}{dz} \frac{dH}{dz} H^{-2} \right) i (A + E) \frac{dx}{dz} H^{-1} - i \left(A' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 H^{-1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (A + E) \frac{d^2x}{dz^2} H^{-1} + (A + E) \frac{dx}{dz} \frac{dH}{dz} H^{-2} \right) hmB \frac{dx}{dz} H^{-1} \right) \\
&= \frac{ihm \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 H^{-2}}{2} (B' (A + E) - A'B)
\end{aligned}$$

4,1 : Ce coefficient est égal à l'opposé du coefficient (3, 1).

1,2 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dP}{dz}P^{-1}\right)_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-A' (A + E) \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 + (A^2 - E^2) (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 \right. \\
&\quad \left. - (A^2 - E^2) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz} H^{-1} + \frac{dH}{dz} H^{-1} - h^2 m^2 BB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \right. \\
&\quad \left. + h^2 m^2 B^2 (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 - h^2 m^2 B^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz} H^{-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left((-A' (A + E) - h^2 m^2 BB' + AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \right) \\
&= -\frac{EA'}{2} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 = \frac{dH}{dz} H^{-1} + O(h^2)
\end{aligned}$$

2,2 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dP}{dz}P^{-1}\right)_{2,2} &= \frac{1}{2} \left(A'(A+E) \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 - (A^2 - E^2) (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 \right. \\
&\quad + (A^2 - E^2) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz} H^{-1} + \frac{dH}{dz} H^{-1} + h^2 m^2 BB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \\
&\quad \left. - h^2 m^2 B^2 (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 + h^2 m^2 B^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz} H^{-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(EA' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 - EA' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 + O(h^2) \right) = O(h^2).
\end{aligned}$$

3,2 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dP}{dz}P^{-1}\right)_{3,2} &= \frac{1}{2} \left(-i \left(hmB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 H^{-1} + hmB \frac{d^2x}{dz^2} H^{-1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + -hmB \frac{dx}{dz} \frac{dH}{dz} H^{-2} \right) (A+E) \frac{dx}{dz} H^{-1} + i \left(A' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 H^{-1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (A+E) \frac{d^2x}{dz^2} H^{-1} - (A+E) \frac{dx}{dz} \frac{dH}{dz} H^{-2} \right) hmB \frac{dx}{dz} H^{-1} \right) \\
&= -\frac{ihm \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 H^{-2}}{2} (B'(A+E) - A'B)
\end{aligned}$$

4,2 : Ce coefficient vaut l'opposé du coefficient (3, 2).

1,3 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dP}{dz}P^{-1}\right)_{1,3} &= \frac{1}{2} \left(\left(hmB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 H + hmB \frac{d^2x}{dz^2} H + hmB \frac{dx}{dz} \frac{dH}{dz} \right) i (A-E) \frac{dx}{dz} H \right. \\
&\quad \left. - i \left(A' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 H + (A-E) \frac{d^2x}{dz^2} H + (A-E) \frac{dx}{dz} \frac{dH}{dz} \right) hmB \frac{dx}{dz} H^{-1} \right) \\
&= \frac{ihm \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 H^2}{2} ((A-E)B' - A'B)
\end{aligned}$$

2,3 : Ce coefficient vaut l'opposé du coefficient (1, 3).

3,3 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dP}{dz}P^{-1}\right)_{3,3} &= \frac{1}{2} \left(h^2 m^2 BB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 - h^2 m^2 B^2 (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 \right. \\
&\quad \left. - h^2 m^2 B^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz} H^{-1} + A' (A - E) \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \right. \\
&\quad \left. - (A^2 - E^2) (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 \right. \\
&\quad \left. - (A^2 - E^2) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz} H^{-1} - \frac{dH}{dz} H^{-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left((h^2 m^2 BB' + A' (A - E) - AA' - h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 - 2 \frac{dH}{dz} H^{-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-EA' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 + EA' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 + O(h^2) \right) = O(h^2)
\end{aligned}$$

4,3 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dP}{dz}P^{-1}\right)_{4,3} &= \frac{1}{2} \left(-h^2 m^2 BB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 + h^2 m^2 B^2 (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 \right. \\
&\quad \left. + h^2 m^2 B^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz} H^{-1} - A' (A - E) \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \right. \\
&\quad \left. + (A^2 - E^2) (AA' + h^2 m^2 BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 \right. \\
&\quad \left. + (A^2 - E^2) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz} H^{-1} - \frac{dH}{dz} H^{-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-A' (A - E) - h^2 m^2 BB' + AA' + h^2 m^2 BB' \right) \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \\
&= \frac{EA'}{2} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 = -\frac{dH}{dz} H^{-1} + O(h^2)
\end{aligned}$$

1,4 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dP}{dz}P^{-1}\right)_{1,4} &= \frac{1}{2} \left(-i \left(hmB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 H + hmB \frac{d^2x}{dz^2} H + hmB \frac{dx}{dz} \frac{dH}{dz} \right) (A - E) \frac{dx}{dz} H \right. \\
&\quad \left. + i \left(A' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 H + (A - E) \frac{d^2x}{dz^2} H + (A - E) \frac{dx}{dz} \frac{dH}{dz} \right) hmB \frac{dx}{dz} H \right) \\
&= -\frac{ihm \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 H^2}{2} ((A - E) B' - A' B)
\end{aligned}$$

2,4 : Ce coefficient vaut l'opposé du coefficient (1,4).

3,4 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dP}{dz}P^{-1}\right)_{3,4} &= \frac{1}{2} \left(-h^2m^2BB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 + h^2m^2B^2(AA' + h^2m^2BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 \right. \\
&\quad \left. + h^2m^2B^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz}H^{-1} - A'(A-E) \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \right. \\
&\quad \left. + (A^2 - E^2)(AA' + h^2m^2BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 \right. \\
&\quad \left. + (A^2 - E^2) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz}H^{-1} - \frac{dH}{dz}H^{-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} (-A(A-E) - h^2m^2BB' + AA' + h^2m^2BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \\
&= \frac{EA'}{2} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 = -\frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2)
\end{aligned}$$

4,4 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dP}{dz}P^{-1}\right)_{4,4} &= \frac{1}{2} \left(h^2m^2BB' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 - h^2m^2B^2(AA' + h^2m^2BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 \right. \\
&\quad \left. - h^2m^2B^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz}H^{-1} + A'(A-E) \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \right. \\
&\quad \left. - (A^2 - E^2)(AA' + h^2m^2BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^5 \right. \\
&\quad \left. - (A^2 - E^2) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dH}{dz}H^{-1} - \frac{dH}{dz}H^{-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left((h^2m^2BB' + A'(A-E) - AA' - h^2m^2BB') \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 - 2\frac{dH}{dz}H^{-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-EA' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 + EA' \left(\frac{dx}{dz}\right)^3 + O(h^2) \right) = O(h^2)
\end{aligned}$$

Notons $G_+(z) = \frac{(\frac{dx}{dz})^3 H^{-2}}{2} (A'B - B'(A+E))$ et $G_-(z) = \frac{(\frac{dx}{dz})^3 H^2}{2} (A'B - B'(A-E))$. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{dP}{dz}P^{-1} = \begin{pmatrix} O(h^2) & \frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2) & -ihmG_-(z) & ihmG_-(z) \\ \frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2) & O(h^2) & ihmG_-(z) & -ihmG_-(z) \\ -ihmG_+(z) & ihmG_+(z) & O(h^2) & -\frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2) \\ ihmG_+(z) & -ihmG_+(z) & -\frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2) & O(h^2) \end{pmatrix}$$

Utilisant l'équation (2.5.8), nous obtenons :

$$\frac{d\omega}{dz}(z) = \Omega_{h,m,+}(z) \omega(z) \tag{2.5.9}$$

où :

$$\Omega_{h,m,+}(z) = \begin{pmatrix} O(h^2) & \frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2) & -ihmG_-(z) & ihmG_-(z) \\ \frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2) & -\frac{2}{h} + O(h^2) & ihmG_-(z) & -ihmG_-(z) \\ -ihmG_+(z) & ihmG_+(z) & -\frac{2}{h} + O(h^2) & -\frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2) \\ ihmG_+(z) & -ihmG_+(z) & -\frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2) & O(h^2) \end{pmatrix} \quad (2.5.10)$$

Nous posons ensuite $w = Q\omega$ où :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5.11)$$

Nous obtenons alors l'équation :

$$\frac{dw}{dz} = W_{h,m,+}(z)w(z) \quad (2.5.12)$$

où :

$$\begin{aligned} W_{h,m,+}(z) &= Q\Omega_{h,m,+}(z)Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} O(h^2) & ihmG_-(z) & \frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2) & -ihmG_-(z) \\ \frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2) & -ihmG_-(z) & -\frac{2}{h} + O(h^2) & ihmG_-(z) \\ -ihmG_+(z) & -\frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2) & ihmG_+(z) & -\frac{2}{h} + O(h^2) \\ ihmG_+(z) & O(h^2) & -ihmG_+(z) & -\frac{dH}{dz}H^{-1} + O(h^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} hN_h & M_{H,h} \\ M_{H,h} & -\frac{2}{h}I_2 + hN_h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} M_{H,h}(z) &= \begin{pmatrix} -\frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} & -ihmG_-(z) \\ -ihmG_+(z) & \frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{dH}{dz}H^{-1}(z) + O(h^2) & -ihmG_-(z) \\ -ihmG_+(z) & -\frac{dH}{dz}H^{-1}(z) + O(h^2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

$$\begin{aligned} N_h(z) &= \begin{pmatrix} \frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} + \frac{dH}{dz}H^{-1} & imG_-(z) \\ imG_+(z) & -\frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} - \frac{dH}{dz}H^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O(h) & imG_-(z) \\ imG_+(z) & O(h) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

Rappelons que $G_+(z) = \frac{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 H^{-2}}{2} (A'B - B'(A+E))$, $G_-(z) = \frac{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 H^2}{2} (A'B - B'(A-E))$
et $H = \left(\frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}} + E}{(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}} - E} \right)^{\frac{1}{4}}$.

Dans le cas où nous posons $\psi = e^{-\frac{x}{h}} \tilde{w}$, nous obtenons l'équation :

$$hD_z(\tilde{w})(z) = \left(\frac{\tilde{V}_{E,m}(x(z))}{z'(x(z))} - i \right) \tilde{w}(z).$$

Nous pouvons de nouveau calculer le déterminant qui devient :

$$\det \left(\frac{\tilde{V}_{E,m}(x(z))}{z'(x(z))} - i \right) = ((\mu + i)^2 + 1),$$

en remarquant qu'on a juste changé i en $-i$. Les valeurs propres sont maintenant 0 et $-2i$. Nous avons alors $D = \text{diag}(0, -2i, -2i, 0)$:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -i(A+E) \frac{dx}{dz} H^{-1} & i(A+E) \frac{dx}{dz} H^{-1} & -hmB \frac{dx}{dz} H & hmB \frac{dx}{dz} H \\ H^{-1} & H^{-1} & 0 & 0 \\ hmB \frac{dx}{dz} H^{-1} & -hmB \frac{dx}{dz} H^{-1} & i(A-E) \frac{dx}{dz} H & -i(A-E) \frac{dx}{dz} H \\ 0 & 0 & H & H \end{pmatrix} \quad (2.5.15)$$

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i(A-E) \frac{dx}{dz} H & H & hmB \frac{dx}{dz} H & 0 \\ -i(A-E) \frac{dx}{dz} H & H & -hmB \frac{dx}{dz} H & 0 \\ -hmB \frac{dx}{dz} H^{-1} & 0 & -i(A+E) \frac{dx}{dz} H^{-1} & H^{-1} \\ hmB \frac{dx}{dz} H^{-1} & 0 & i(A+E) \frac{dx}{dz} H^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.5.16)$$

Utilisant le changement de variable $\omega = P\tilde{w}$, nous obtenons alors l'équation :

$$\frac{d\omega}{dz}(z) = \Omega_{h,m,-}(z) \omega(z) \quad (2.5.17)$$

où :

$$\Omega_{h,m,-}(z) = \begin{pmatrix} O(h^2) & \frac{dH}{dz} H^{-1} + O(h^2) & -ihmG_-(z) & ihmG_-(z) \\ \frac{dH}{dz} H^{-1} + O(h^2) & \frac{2}{h} + O(h^2) & ihmG_-(z) & -ihmG_-(z) \\ -ihmG_+(z) & ihmG_+(z) & \frac{2}{h} + O(h^2) & -\frac{dH}{dz} H^{-1} + O(h^2) \\ ihmG_+(z) & -ihmG_+(z) & -\frac{dH}{dz} H^{-1} + O(h^2) & O(h^2) \end{pmatrix}. \quad (2.5.18)$$

Nous posons de nouveau $w = Q\omega$ et nous obtenons :

$$\frac{dw}{dz}(z) = W_{h,m,-}(z) w(z) \quad (2.5.19)$$

où :

$$W_{h,m,-}(z) = Q\Omega_{h,m,-}(z)Q^{-1} = \begin{pmatrix} hN_h & M_{H,h} \\ M_{H,h} & \frac{2}{h}I_2 + hN_h \end{pmatrix}$$

Q.E.D

Nous souhaitons maintenant nous intéresser à la résolution de l'équation :

$$\frac{dw_{\pm}}{dz}(z) = W_{h,m,\pm}(z) w_{\pm}(z) \quad (2.5.20)$$

où :

$$W_{h,m,\pm} = \begin{pmatrix} hN_h & M_{H,h} \\ M_{H,h} & \mp \frac{2}{h}I_2 + hN_h \end{pmatrix}. \quad (2.5.21)$$

Nous cherchons une solutions sous la forme :

$$w_{\pm} = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} w_{4n,\pm} \\ w_{4n+1,\pm} \\ w_{4n+2,\pm} \\ w_{4n+3,\pm} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} U_{2n,\pm} \\ U_{2n+1,\pm} \end{pmatrix},$$

avec $U_{0,\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nous obtenons alors les équations suivantes pour ces nouvelles indéterminées :

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} (U_{2n+1,\pm}) = \left(\mp \frac{2}{h} I_2 + h N_h(z)\right) U_{2n+1,\pm} + M_{H,h}(z) U_{2n,\pm} \\ \frac{d}{dz} (U_{2n+2}) = M_{H,h}(z) U_{2n+1,\pm} + h N_h(z) U_{2n,\pm}, \end{cases} \quad (2.5.22)$$

puisque $\frac{dU_{0,\pm}}{dz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Afin de résoudre cette équation, nous allons de nouveau faire usage de la notion d'exponentielle ordonnée en temps, définie plus haut dans le cas réel (1.3.13). Nous commençons par rappeler la définition de produit ordonné en temps que nous utiliserons ici :

Définition 2.5.9. Soient $z_1, \dots, z_n \in \Omega \subset \mathbb{C}$ et f une fonction définie sur \mathbb{C} à valeurs dans l'ensemble des matrices 2×2 et telle que $f(z_i)$ et $f(z_j)$ ne commutent pas pour $i \neq j$. Nous définissons :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_{\pm} (f(z_n) \cdots f(z_1)) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(z_{\sigma(n)}) \cdots f(z_{\sigma(1)}) \mathbb{1}_{\{\pm \operatorname{Re}(z) \geq \pm \operatorname{Re}(z_{\sigma(n)}) > \cdots > \pm \operatorname{Re}(z_{\sigma(1)}) \geq \pm \operatorname{Re}(\tilde{z})\}} (z_n, \dots, z_1). \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

Nous pouvons maintenant définir l'exponentielle ordonnée en temps :

Définition 2.5.10. Soit $\Gamma(\tilde{z}, z)$ un chemin allant de \tilde{z} à z où \tilde{z} est un point fixé dans \mathbb{C} . Nous définissons :

$$\mathcal{T}_{\pm} \left(e^{\int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} f(\zeta) d\zeta} \right) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} \cdots \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} \mathcal{T}_{\pm} (f(z_n) \cdots f(z_1)) dz_1 \cdots dz_n$$

Remarque. - La définition précédente a bien un sens puisque :

$$\left| \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} \cdots \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} \mathcal{T} (f(z_n) \cdots f(z_1)) dz_1 \cdots dz_n \right| \leq \left(\int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} |f(\zeta)| d\zeta \right)^n.$$

Par conséquent :

$$\mathcal{T}_{\pm} \left(e^{\int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} f(\zeta) d\zeta} \right) \leq e^{\int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} |f(\zeta)| d\zeta}.$$

- D'autre part, cette définition correspond à la définition suivante :

$$\mathcal{T}_{\pm} \left(e^{\int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} f(\zeta) d\zeta} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} \int_{\Gamma(\tilde{z}, z_n)} \cdots \int_{\Gamma(\tilde{z}, z_2)} f(z_n) \cdots f(z_1) dz_1 \cdots dz_n.$$

En effet, dans le cas +, nous avons :

$$\mathbb{1}_{[\operatorname{Re}(\tilde{z}), \operatorname{Re}(z)]^n} (z_n, \dots, z_1) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{1}_{\{\operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Re}(z_{\sigma(n)}) > \cdots > \operatorname{Re}(z_{\sigma(1)}) \geq \operatorname{Re}(\tilde{z})\}} (z_n, \dots, z_1).$$

Utilisant (2.5.23), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n!} \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} \cdots \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} \mathcal{T}(f(z_n) \cdots f(z_1)) dz_1 \cdots dz_n \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} \int_{\Gamma(\tilde{z}, z_{\sigma(n)})} \cdots \int_{\Gamma(\tilde{z}, z_{\sigma(1)})} f(z_{\sigma(n)}) \cdots f(z_{\sigma(1)}) dz_{\sigma(1)} \cdots dz_{\sigma(n)} \\
&= \frac{1}{n!} n! \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} \int_{\Gamma(\tilde{z}, z_n)} \cdots \int_{\Gamma(\tilde{z}, z_1)} f(z_n) \cdots f(z_1) dz_1 \cdots dz_n
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant résoudre le système d'équations précédent :

Proposition 2.5.11. *La solution du système (2.5.22) vérifiant $U_{n,\pm}(\tilde{z}) = 0$ pour un choix de point de base \tilde{z} s'écrit :*

$$\begin{aligned}
U_{2n+1,\pm}(z) &= \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} e^{\pm \frac{2}{\hbar}(\zeta-z)I_2} \Upsilon_{\pm}(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n,\pm}(\zeta) d\zeta, \\
U_{2n+2,\pm}(z) &= \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} M_{H,h}(\zeta) U_{2n+1,\pm}(\zeta) + hN_h(\zeta) U_{2n,\pm}(\zeta) d\zeta,
\end{aligned}$$

où $\Gamma(\tilde{z}, z)$ est un chemin joignant \tilde{z} à z tel que $\pm \operatorname{Re}(\zeta)$ augmente le long de ce chemin et $\Upsilon_{\pm}(z, \tilde{z}) = \mathcal{T}_{\pm} \left(e^{\int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} hN_h(\zeta) d\zeta} \right)$.

Remarque. Dans la démonstration de ce lemme, nous donnons une formule explicite pour les solutions.

Preuve. Nous pouvons résoudre la deuxième équation de ce système de la manière suivante :

$$U_{2n+2,\pm}(z) = \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} M_{H,h}(\zeta) U_{2n+1,\pm}(\zeta) + hN_h(\zeta) U_{2n,\pm}(\zeta) d\zeta.$$

Pour la première équation, nous souhaitons tout d'abord résoudre l'équation homogène suivante :

$$\frac{d}{dz} (U_{2n+1,\pm, Hom}) = \left(\mp \frac{2}{\hbar} I_2 + hN_h(z) \right) U_{2n+1,\pm, Hom}. \quad (2.5.24)$$

Bien que $-\frac{2}{\hbar} I_2$ commute avec $N_h(z)$ pour tout z , les matrices $N_h(z)$ et $N_h(z')$ ne commutent pas pour $z \neq z'$. Utilisant l'exponentielle ordonnée en temps que nous avons définie ci-dessus, nous introduisons $\Upsilon_{\pm}(z, \tilde{z}) = \mathcal{T}_{\pm} \left(e^{\int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} hN_h(\zeta) d\zeta} \right)$. Donnons les propriétés de cette exponentielle dans la :

Propriété 2.5.12. *Nous avons :*

- 1) $\Upsilon_{\pm}(z, z) = Id$, $\Upsilon_{\pm}(z, \tilde{z}) \Upsilon_{\pm}(\tilde{z}, w) = \Upsilon_{\pm}(z, w)$, $\Upsilon_{\pm}(z, \tilde{z})^{-1} = \Upsilon_{\pm}(\tilde{z}, z)$.
- 2) $\partial_z (\Upsilon_{\pm}(z, \tilde{z})) = hN_h(z) \Upsilon_{\pm}(z, \tilde{z})$, $\partial_{\tilde{z}} \Upsilon_{\pm}(z, \tilde{z}) = -\Upsilon_{\pm}(z, \tilde{z}) hN_h(\tilde{z})$.

Les solutions de l'équation (2.5.24) s'écrivent donc sous la forme :

$$U_{2n+1,\pm, Hom}(z) = e^{\mp \frac{2}{\hbar}(z-\tilde{z})I_2} \Upsilon_{\pm}(z, \tilde{z}).$$

En effet, étant donné que $e^{\mp \frac{2}{\hbar}(z-\tilde{z})I_2}$ est une matrice diagonale, elle commute avec $hN_h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et nous avons :

$$\frac{d}{dz} U_{2n+1,\pm, Hom}(z) = \mp \frac{2}{\hbar} e^{\mp \frac{2}{\hbar}(z-\tilde{z})I_2} \Upsilon_{\pm}(z, \tilde{z}) + e^{\mp \frac{2}{\hbar}(z-\tilde{z})I_2} hN_h(z) \Upsilon_{\pm}(z, \tilde{z})$$

$$= \left(\mp \frac{2}{h} + hN_h(z) \right) e^{\mp \frac{2}{h}(z-\bar{z})I_2} \Upsilon_{\pm}(z, \bar{z}).$$

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation :

$$\frac{d}{dz} (U_{2n+1, \pm}) = \left(\mp \frac{2}{h} I_2 + hN_h(z) \right) U_{2n+1, \pm} + M_{H,h}(z) U_{2n, \pm}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \Upsilon_{\pm}(\bar{z}, z) e^{\pm \frac{2}{h}(z-\bar{z})I_2} U_{2n+1, \pm}(z) &= -\Upsilon_{\pm}(\bar{z}, z) \left(hN_h \mp \frac{2}{h} \right) (z) e^{\pm \frac{2}{h}(z-\bar{z})I_2} U_{2n+1, \pm}(z) \\ &+ \Upsilon_{\pm}(\bar{z}, z) e^{\pm \frac{2}{h}(z-\bar{z})I_2} \left(\mp \frac{2}{h} + hN_h(z) \right) U_{2n+1, \pm}(z) \\ &+ \Upsilon_{\pm}(\bar{z}, z) e^{\pm \frac{2}{h}(z-\bar{z})I_2} M_{H,h}(z) U_{2n, \pm}(z) \\ &= \Upsilon_{\pm}(\bar{z}, z) e^{\pm \frac{2}{h}(z-\bar{z})I_2} M_{H,h}(z) U_{2n, \pm}(z). \end{aligned}$$

Intégrant sur le chemin $\Gamma(\bar{z}, z)$ et utilisant le fait que $U_{n, \pm}(\bar{z}) = 0$ pour tout $n \geq 1$, nous obtenons :

$$U_{2n+1, \pm}(z) = \int_{\Gamma(\bar{z}, z)} e^{\pm \frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} \Upsilon_{\pm}(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n, \pm}(\zeta) d\zeta.$$

Rappelons que :

$$U_{2n+2, \pm}(z) = \int_{\Gamma(\bar{z}, z)} M_{H,h}(\zeta) U_{2n+1, \pm}(\zeta) + hN_h(\zeta) U_{2n, \pm}(\zeta) d\zeta.$$

Les solutions de ces équations s'écrivent sous une forme explicite (nous écrirons $\int_{\bar{z}}^z$ pour $\int_{\Gamma(\bar{z}, z)}$) :

$$\begin{aligned} U_{2n+1, \pm}(z) &= \int_{\bar{z}}^z \int_{\bar{z}}^{\zeta_{2n+1}} \dots \int_{\bar{z}}^{\zeta_2} e^{\pm \frac{2}{h}(\zeta_1 - \zeta_2 + \dots + \zeta_{2n+1} - z)} \Upsilon_{\pm}(z, \zeta_{2n+1}) M_{H,h}(\zeta_{2n+1}) \dots \\ &\quad \Upsilon_{\pm}(\zeta_2, \zeta_1) M_{H,h}(\zeta_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\zeta_1 \dots d\zeta_{2n+1} \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{\bar{z}}^z \int_{\bar{z}}^{\zeta_{2n+1-j}} \dots \int_{\bar{z}}^{\zeta_2} \sum_{k_j=j}^n \sum_{k_{j-1}=j-1}^{k_j-1} \dots \sum_{k_1=1}^{k_2-1} \\ &\quad e^{\pm \frac{2}{h}(\zeta_{2n+1-j} - z + \dots + \zeta_{2k_j-j+1} - \zeta_{2k_j-j+2} + \zeta_{2k_j-j-2} - \zeta_{2k_j-j-1} + \dots)} \Upsilon_{\pm}(z, \zeta_{2n+1-j}) M_{H,h}(\zeta_{2n+1-j}) \dots \\ &\quad \Upsilon_{\pm}(\zeta_{2k_j-j+2}, \zeta_{2k_j-j+1}) M_{H,h}(\zeta_{2k_j-j+1}) hN_h(\zeta_{2k_j-j}) M_{H,h}(\zeta_{2k_j-j-1}) \dots \\ &\quad \Upsilon_{\pm}(\zeta_{2k_1-1+2}, \zeta_{2k_1-1+1}) M_{H,h}(\zeta_{2k_1-1+1}) hN_h(\zeta_{2k_1-1}) \dots \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\zeta_1 \dots d\zeta_{2n+1-j} \\ U_{2n+2, \pm}(z) &= \int_{\bar{z}}^z \int_{\bar{z}}^{\zeta_{2n+1}} \dots \int_{\bar{z}}^{\zeta_2} e^{\pm \frac{2}{h}(\zeta_1 - \zeta_2 + \dots - \zeta_{2n+2})} M_{H,h}(\zeta_{2n+2}) \dots \\ &\quad \Upsilon_{\pm}(\zeta_2, \zeta_1) M_{H,h}(\zeta_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\zeta_1 \dots d\zeta_{2n+2} \\ &+ \sum_{j=1}^{n+1} \int_{\bar{z}}^z \int_{\bar{z}}^{\zeta_{2n+2-j}} \dots \int_{\bar{z}}^{\zeta_2} \sum_{k_j=j}^{n+1} \sum_{k_{j-1}=j-1}^{k_j-1} \dots \sum_{k_1=1}^{k_2-1} e^{\pm \frac{2}{h}(\dots + \zeta_{2k_j-j+1} - \zeta_{2k_j-j+2} + \zeta_{2k_j-j-2} - \zeta_{2k_j-j-1} + \dots)} \\ &\quad \dots \Upsilon_{\pm}(\zeta_{2k_j-j+2}, \zeta_{2k_j-j+1}) M_{H,h}(\zeta_{2k_j-j+1}) hN_h(\zeta_{2k_j-j}) M_{H,h}(\zeta_{2k_j-j-1}) \dots \\ &\quad \Upsilon_{\pm}(\zeta_{2k_1-1+2}, \zeta_{2k_1-1+1}) M_{H,h}(\zeta_{2k_1-1+1}) hN_h(\zeta_{2k_1-1}) \dots \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\zeta_1 \dots d\zeta_{2n+2-j} \end{aligned}$$

Dans les formules précédentes, la somme sur j permet de compter le nombre de termes de la forme hN_h qui apparaissent et les sommes utilisant k_j nous permettent de placer ces hN_h aux différents endroits où ils peuvent apparaître. Q.E.D

Nous pouvons maintenant étudier la convergence de la série $U_{\pm}(z(x)) = \sum_{n \geq 0} U_{n,\pm}(z(x))$ ainsi que des séries :

$$U_{\pm}^{\text{even}}(x, h) = \sum_{n \geq 0} U_{2n,\pm}(z(x)), \quad U_{\pm}^{\text{odd}}(x, h) = \sum_{n \geq 0} U_{2n+1,\pm}(z(x)). \quad (2.5.25)$$

Nous obtenons le :

Lemme 2.5.13. *Pour tout $h > 0$, la série définissant U_{\pm} converge uniformément sur tout compact de Ω . En outre, U_{\pm}^{even} et U_{\pm}^{odd} sont holomorphes.*

Preuve. Rappelons que nous nous plaçons dans un ouvert simplement connexe Ω sans point tournant. Il en résulte que les fonctions U_n sont bien définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $K \subset \Omega$ un compact. Alors, pour tout $\tilde{z}, z \in z(K)$, nous pouvons trouver une constante $C_h(K)$ telle que :

$$\begin{aligned} \sup_{\zeta \in \Gamma(\tilde{z}, z)} \left| e^{\pm \frac{2}{h} \zeta} U_{\pm}(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) \right| &\leq C_h(K) \\ \sup_{\zeta \in \Gamma(\tilde{z}, z)} |hN_h(\zeta)| &\leq C_h(K). \end{aligned}$$

Notons L_K la longueur maximale des chemins $\Gamma(\tilde{z}, z)$ pour $z \in K$. Alors nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\tilde{z}}^z \int_{\tilde{z}}^{\zeta_{2n+1-j}} \dots \int_{\tilde{z}}^{\zeta_2} e^{\pm \frac{2}{h} (\zeta_{2n+1-j} - z + \dots + \zeta_{2k_j-j+1} - \zeta_{2k_j-j+2} + \zeta_{2k_j-j-2} - \zeta_{2k_j-j-1} + \dots)} \right. \\ &\quad U_{\pm}(z, \zeta_{2n+1-j}) M_{H,h}(\zeta_{2n+1-j}) \dots \\ &\quad U_{\pm}(\zeta_{2k_j-j+2}, \zeta_{2k_j-j+1}) M_{H,h}(\zeta_{2k_j-j+1}) hN_h(\zeta_{2k_j-j}) M_{H,h}(\zeta_{2k_j-j-1}) \dots \\ &\quad \left. U_{\pm}(\zeta_{2k_1-1+2}, \zeta_{2k_1-1+1}) M_{H,h}(\zeta_{2k_1-1+1}) hN_h(\zeta_{2k_1-1}) \dots \binom{1}{1} d\zeta_1 \dots d\zeta_{2n+1-j} \right| \\ &\leq \frac{(C_h(K) L_K)^{2n+1-j}}{(2n+1-j)!} \end{aligned}$$

La borne $C_h(K)^{2n+1-j}$ provient de la borne sur les intégrandes tandis que la borne $\frac{L_K^{2n+1-j}}{(2n+1-j)!}$ provient des intégrations successives de polynômes ayant \tilde{z} pour unique racine.

Nous pouvons obtenir une borne similaire pour $U_{2n+2,\pm}$. A j fixé, le nombre d'intégrales de la forme précédente correspond au nombre de positions différentes possibles pour les j termes de la forme hN_h . D'après la formule de récurrence pour $U_{2n+1,\pm}$, nous commençons nécessairement par un terme de la forme $U_{\pm}(z, \zeta_{2n+1-j}) M_{H,h}(\zeta_{2n+1-j})$. Il nous reste donc $2n-j$ rangs possibles pour placer les j termes hN_h . Le nombre maximal de possibilités est donc $\binom{2n-j}{j}$ (ce nombre est un majorant puisque, par exemple, si au rang $2n-j$ on ne fait pas apparaître hN_h alors on ne pourra le faire apparaître qu'au rang $2n-j-2$). Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} |U_{2n+1,\pm}|(z) &\leq \sum_{j=0}^n \binom{2n-j}{j} \frac{(C_h(K) L_K)^{2n+1-j}}{(2n+1-j)!} \\ |U_{2n+2,\pm}|(z) &\leq \sum_{j=0}^{n+1} \binom{2n+2-j}{j} \frac{(C_h(K) L_K)^{2n+2-j}}{(2n+2-j)!} \end{aligned}$$

Puis :

$$|U_{n,\pm}(z)| \leq \sum_{j=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{2E(\frac{n}{2})-j}{j} \frac{(C_h(K) L_K)^{n-j}}{(n-j)!}$$

où E désigne la fonction partie entière. Comme $n-j \geq E(\frac{n}{2})$, nous avons $\frac{1}{(n-j)!} \leq \frac{1}{E(\frac{n}{2})!}$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} \binom{2E(\frac{n}{2})-j}{j} &= \frac{(2E(\frac{n}{2})-j) \cdots (2E(\frac{n}{2})-2j+1)}{j!} \\ &= \frac{2E(\frac{n}{2}) \cdots (2E(\frac{n}{2})-j+1)}{j!} \frac{(2E(\frac{n}{2})-j) \cdots (2E(\frac{n}{2})-2j+1)}{2E(\frac{n}{2}) \cdots (2E(\frac{n}{2})-j+1)} \\ &= \binom{2E(\frac{n}{2})}{j} \frac{(2E(\frac{n}{2})-j) \cdots (2E(\frac{n}{2})-2j+1)}{2E(\frac{n}{2}) \cdots (2E(\frac{n}{2})-j+1)}. \end{aligned}$$

Cette dernière fraction étant majorée par 1, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{2E(\frac{n}{2})-j}{j} \frac{(C_h(K) L_K)^{n-j}}{(n-j)!} &\leq \sum_{j=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{2E(\frac{n}{2})}{j} \frac{(C_h(K) L_K)^{n-j}}{(n-j)!} \\ &\leq \frac{1}{E(\frac{n}{2})!} \sum_{j=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{j} (C_h(K) L_K)^{n-j} \\ &\leq \frac{1}{E(\frac{n}{2})!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (C_h(K) L_K)^{n-j} \\ &= \frac{(C_h(K) L_K + 1)^n}{E(\frac{n}{2})!}. \end{aligned}$$

D'après la formule de Stirling, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(\frac{n}{2})!}{(2\pi E(\frac{n}{2}))^{\frac{1}{2}} (E(\frac{n}{2}))^{E(\frac{n}{2})} e^{-E(\frac{n}{2})}} = 1.$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(E(\frac{n}{2})!)^{\frac{1}{n}}}{(2\pi E(\frac{n}{2}))^{\frac{1}{2n}} (E(\frac{n}{2}))^{\frac{E(\frac{n}{2})}{n}} e^{-\frac{E(\frac{n}{2})}{n}}} = 1.$$

Nous étudions donc la limite du terme au dénominateur. Tout d'abord, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\pi E(\frac{n}{2}))^{\frac{1}{2n}} = 1$.

D'autre part :

$$0 \geq \frac{E(\frac{n}{2}) - \frac{n}{2}}{n} \geq -\frac{1}{n}.$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(\frac{n}{2}) - \frac{n}{2}}{n} = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(\frac{n}{2})}{n} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{E(\frac{n}{2})}{n}} = e^{-\frac{1}{2}}$. Enfin, $(E(\frac{n}{2}))^{\frac{E(\frac{n}{2})}{n}} = e^{\frac{E(\frac{n}{2})}{n} \ln(E(\frac{n}{2}))}$ tend vers $+\infty$ puisque $\frac{E(\frac{n}{2})}{n}$ tend vers $\frac{1}{2}$ et $\ln(E(\frac{n}{2}))$ tend vers $+\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(C_h(K) L_K + 1)^n}{E(\frac{n}{2})!} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_h(K) L_K + 1}{(E(\frac{n}{2})!)^{\frac{1}{n}}} = 0.$$

D'après le critère de Cauchy, nous en déduisons que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_{n,\pm}(z)$ converge uniformément sur K ce qui prouve le lemme. Q.E.D

Proposition 2.5.14. *Les équations (2.5.25) définissent des solutions U_{\pm}^{even} et U_{\pm}^{odd} . Pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous avons les développements :*

$$U_{\pm}^{even}(x, h) - \sum_{n=0}^N U_{2n,\pm}(z(x)) = O(h^{N+1})$$

$$U_{\pm}^{odd}(x, h) - \sum_{n=0}^N U_{2n+1,\pm}(z(x)) = O(h^{N+2})$$

uniformément sur tout compact de Ω .

Preuve. Nous allons traiter le cas $+$, le cas $-$ se traitant de la même manière. Tout d'abord nous étudions ce qu'il advient d'une intégrale de la forme :

$$I(z, h) = \int_{\tilde{z}}^z e^{\frac{2}{h}(\zeta-z)} U_+(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta,$$

où f est une fonction à valeur dans \mathbb{C}^2 . Remarquons tout d'abord que :

$$U_+(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_{\zeta}^z \int_{\zeta}^z \cdots \int_{\zeta}^z \mathcal{T}_+(hN_h(z_n) \cdots hN_h(z_1)) dz_1 \cdots dz_n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_{\zeta-z}^0 \int_{\zeta-z}^0 \cdots \int_{\zeta-z}^0 \mathcal{T}_+(hN_h(s_n+z) \cdots hN_h(s_1+z)) ds_1 \cdots ds_n$$

Posons $\tilde{N}_{h,z}(u) = N_h(u+z)$ et :

$$\tilde{U}_+(z, \zeta) = \mathcal{T}_+ \left(e^{\int_{\zeta}^z h \tilde{N}_{h,z}(s) ds} \right).$$

Utilisant le changement de variable $s = \frac{\zeta-z}{h}$, nous avons :

$$I(z, h) = \int_{\tilde{z}}^z e^{\frac{2}{h}(\zeta-z)} \tilde{U}_+(0, \zeta-z) f(\zeta) d\zeta$$

$$= h \int_{\frac{\tilde{z}-z}{h}}^0 e^{2s} \tilde{U}_+(0, sh) f(sh+z) ds.$$

Rappelons que $\operatorname{Re} \zeta$ augmente le long du chemin allant de \tilde{z} à z . Ainsi $\operatorname{Re} \frac{\tilde{z}-z}{h} < 0$. Nous avons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^{2s} \tilde{U}_+(0, sh) f(sh+z) \mathbf{1}_{] \frac{\tilde{z}-z}{h}, 0[}(s) = e^{2s} f(z) \mathbf{1}_{]-\infty, 0[}(s).$$

Cette dernière fonction est bien une fonction intégrable. De plus, comme $sh+z \in [\tilde{z}, z]$ lorsque $s \in [\frac{\tilde{z}-z}{h}, 0]$, nous avons :

$$\left\| e^{2s} \tilde{U}_+(0, sh) f(sh+z) \mathbf{1}_{] \frac{\tilde{z}-z}{h}, 0[}(s) \right\| \leq e^{2s} \left\| \tilde{U}_+(0, sh) \right\| \sup_{t \in] \frac{\tilde{z}-z}{h}, z[} \|f(t)\|$$

$$\leq e^{2s} e^{\left\| \int_{sh}^0 h \tilde{N}_h(\zeta) d\zeta \right\|} \sup_{t \in] \frac{\tilde{z}-z}{h}, z[} \|f(t)\|,$$

pour tout $0 < h < h_0$. En outre, pour tout $0 < h < h_0$, nous avons :

$$\left\| \int_{sh}^0 h \tilde{N}_h(\zeta) d\zeta \right\| \leq \int_{\tilde{z}-z}^0 \sup_{h \in]0, h_0[} \left\| h \tilde{N}_h(\zeta) \right\| d\zeta,$$

où l'expression de N_h dans (2.5.14) nous indique que le supremum existe. Ainsi, pour tout $0 < h < h_0$, nous en déduisons que :

$$\left\| e^{2s} \tilde{U}_+(0, sh) f(sh+z) \mathbf{1}_{] \frac{\tilde{z}-z}{h}, 0[}(s) \right\| \leq e^{2s} e^{\int_{\tilde{z}-z}^0 \sup_{h \in]0, h_0[} \left\| h \tilde{N}_h(\zeta) \right\| d\zeta} \sup_{t \in] \tilde{z}, z[} \|f(t)\|$$

qui est intégrable. Nous en déduisons que $I(z, h) = O(h)$ lorsque h tend vers 0. Par conséquent, nous avons $U_{1,+}(z) = O(h)$.

Supposons que $U_{2n,+}(z) = O(h^n)$ et $U_{2n+1,+}(z) = O(h^{n+1})$. Nous écrivons dans la suite $U_{2n,+}(z) = h^n \rho_{2n,+}(z)$ et $U_{2n+1,+}(z) = h^{n+1} \rho_{2n+1,+}(z)$. Alors nous avons :

$$\begin{aligned} U_{2n+2,+}(z) &= \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} M_{H,h}(\zeta) U_{2n+1,+}(\zeta) + h N_h(\zeta) U_{2n,+}(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} M_{H,h}(\zeta) h^{n+1} \rho_{2n+1,+}(\zeta) + h N_h(\zeta) h^n \rho_{2n,+}(\zeta) d\zeta \\ &= h^{n+1} \rho_{2n+2,+}(z) \end{aligned}$$

où $\rho_{2n+2,+} = O(1)$. D'autre part, nous avons :

$$U_{2n+3,+}(z) = \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} e^{\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_+(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n+1,+}(\zeta) d\zeta$$

et par un raisonnement similaire à celui de l'étude de $I(z, h)$, nous obtenons que :

$$\begin{aligned} \|U_{2n+3,+}(z)\| &\leq h \int_{-\infty}^0 e^{2s} ds e^{\int_{\tilde{z}-z}^0 \sup_{h \in]0, h_0[} \left\| h \tilde{N}_h(\zeta) \right\| d\zeta} \sup_{t \in] \tilde{z}, z[} \|U_{2n+2,+}(t)\| \\ &\leq h^{n+2} \int_{-\infty}^0 e^{2s} ds e^{\int_{\tilde{z}-z}^0 \sup_{h \in]0, h_0[} \left\| h \tilde{N}_h(\zeta) \right\| d\zeta} \sup_{t \in] \tilde{z}, z[} \|\rho_{2n+2,+}(t)\| = O(h^{n+2}). \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence et la preuve. Q.E.D

2.5.3 Solutions de Jost BKW

Dans cette section, nous nous plaçons dans un ouvert simplement connexe non borné $\Omega(E)$ où $A^2 + h^2 m^2 B^2 < E^2$ où nous supposons que $\text{Re}(E) \geq 0$ et $\text{Im}(E) \geq 0$. Nous utiliserons la détermination de la racine carrée de telle sorte que $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} \in i\mathbb{R}_+$ et $(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{4}} \in e^{i\frac{\pi}{4}} \mathbb{R}_+$. Etant donnée l'identité :

$$(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) - iE = \frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)(t)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) + iE}.$$

nous allons utiliser la phase suivante :

$$z(x) = iEx + \int_{-\infty}^x \frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)(t)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) + iE} dt.$$

Rappelons les comportements de A et B en $-\infty$:

$$\begin{aligned} A(x) &= c_A e^{\kappa x} + o(e^{\kappa x}) \\ B(x) &= c_B e^{\kappa x} + o(e^{\kappa x}), \end{aligned}$$

où c_A et c_B sont des constantes réelles. Ainsi l'intégrale est bien définie. Lorsque x est réel dans $\Omega(E)$, nous obtenons :

$$z(x) = iEx + i \int_{-\infty}^x \left((|A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2|)^{\frac{1}{2}}(t) - E \right) dt.$$

D'autre part, quand x tend vers $-\infty$, la phase $z(x)$ se comporte comme iEx . De plus, nous avons :

$$\frac{dz}{dx}(x) = (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(x).$$

D'après l'étude faite dans 2.5.7, les lignes de Stokes sont asymptotes aux droites vérifiant l'équation $\text{Im}(x - y) = -\frac{\text{Im}(E)}{\text{Re}(E)} \text{Re}(x - y)$. Remarquons de plus que $\text{Re}(z)$ augmente lorsque $\text{Im}(x)$ diminue le long de ces lignes.

La mise en place de la méthode BKW nécessite l'utilisation de chemins transverses aux lignes de Stokes. Soit $a > 0$. Nous pouvons utiliser les chemins qui se comportent asymptotiquement comme les droites $\text{Im}(x) = \pm a \text{Re}(x)$ avec $\pm a \neq -\frac{\text{Im}(E)}{\text{Re}(E)}$.

Regardons à quoi correspondent ces droites dans le plan des z . Le long de ces droites dans la coordonnée x , nous pouvons écrire $x = u \pm iau$. Etant donné qu'en $-\infty$, nous avons $z(x) \sim iEx$, nous obtenons :

$$z(x) \sim iEx = iE(u \pm iau) = (-\text{Im}(E) \mp a \text{Re}(E) + i(\text{Re}(E) \mp a \text{Im}(E)))u.$$

Ainsi les chemins transverses aux lignes de Stokes que l'on a choisis vont vérifier l'équation $\text{Im}(z) = \frac{\text{Re}(E) \mp a \text{Im}(E)}{-\text{Im}(E) \mp a \text{Re}(E)} \text{Re}(z)$.

Nous nous intéressons toujours à l'équation :

$$hD_x \varphi = (V_m(x) + h\lambda \Gamma^1) \varphi.$$

Comme précédemment, nous posons $w(z) = QPM^{-1}e^{\frac{z}{h}}\varphi$ où M est donné dans (2.5.6), P^{-1} dans (2.5.15) et Q^{-1} dans (2.5.11). Nous cherchons une solution w de la forme $w = \sum_{n \geq 0} W_n$ où

$$W_n = \begin{pmatrix} w_{4n} \\ w_{4n+1} \\ w_{4n+2} \\ w_{4n+3} \end{pmatrix}. \text{ Nous } U_{2n} = \begin{pmatrix} w_{4n} \\ w_{4n+1} \end{pmatrix} \text{ et } U_{2n+1} = \begin{pmatrix} w_{4n+2} \\ w_{4n+3} \end{pmatrix}, \text{ nous obtenons les équations :}$$

$$\begin{cases} \partial_z(U_{2n+1}) = \left(\frac{2}{h}I_2 + hN_h(z)\right)U_{2n+1} + M_{H,h}(z)U_{2n} \\ \partial_z(U_{2n+2}) = M_{H,h}(z)U_{2n+1} + hN_h(z)U_{2n}. \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} M_{H,h}(z) &= \begin{pmatrix} -\frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} & -ihmG_-(z) \\ -ihmG_+(z) & \frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{dH}{dz}H^{-1}(z) + O(h^2) & -ihmG_-(z) \\ -ihmG_+(z) & -\frac{dH}{dz}H^{-1}(z) + O(h^2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_h(z) &= \begin{pmatrix} \frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} + \frac{dH}{dz} H^{-1} & imG_-(z) \\ imG_+(z) & -\frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} - \frac{dH}{dz} H^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} O(h) & imG_-(z) \\ imG_+(z) & O(h) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
G_+ &= \frac{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 H^{-2}}{2} \left(B \frac{dA}{dx} - (A+E) \frac{dB}{dx} \right) \\
G_- &= \frac{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 H^2}{2} \left(B \frac{dA}{dx} - (A-E) \frac{dB}{dx} \right).
\end{aligned}$$

Nous rappelons que :

$$H = \left(\frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}} + E}{(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}} - E} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Remarque. Nous étudions ici les solutions de Jost qui sont de carré intégrable en $-\infty$, c'est pour cela que nous choisissons le changement de variable $\psi = e^{-\frac{z}{h}} P^{-1} w$ plutôt que $\psi = e^{\frac{z}{h}} P^{-1} w$.

Afin d'obtenir des développements en h pour les solutions de Jost, nous choisissons un chemin $\Gamma^l(z)$ infini se terminant en z , transverse aux lignes de Stokes, tel que $\text{Re}(\zeta - z) > 0$ le long de ce chemin et asymptote à la droite $\text{Im}(\zeta - z) = \text{Im}(\zeta - z) = -\frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{\text{Im}(E) + a \text{Re}(E)} \text{Re}(\zeta - z)$. Nous pouvons alors résoudre ces équations :

$$\begin{aligned}
U_{2n+1}(z) &= \int_{\Gamma^l(z)} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_-(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta \\
U_{2n+2}(z) &= \int_{\Gamma^l(z)} M_{H,h}(\zeta) U_{2n+1}(\zeta) + h N_h(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta.
\end{aligned}$$

où :

$$U_-(z, \tilde{z}) = \mathcal{T}_- \left(e^{\int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} h N_h(\zeta) d\zeta} \right)$$

avec :

$$\mathcal{T}_- \left(e^{\int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} f(\zeta) d\zeta} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\Gamma(\tilde{z}, z)} \int_{\Gamma(\tilde{z}, z_n)} \cdots \int_{\Gamma(\tilde{z}, z_2)} f(z_n) \cdots f(z_1) dz_1 \cdots dz_n.$$

Nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.5.15. *Soit $\Gamma^l(z)$ un chemin infini se terminant en z , transverse aux lignes de Stokes, tel que $\text{Re}(\zeta - z) > 0$ le long de ce chemin et asymptote à la droite $\text{Im}(\zeta - z) = -\frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{\text{Im}(E) + a \text{Re}(E)} \text{Re}(\zeta - z)$ avec $a > 0$ et $a \neq -\frac{\text{Im}(E)}{\text{Re}(E)}$. Le système d'équations récurrentes :*

$$\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ U_{2n+1}(z) = \int_{\Gamma^l(z)} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_-(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta \\ U_{2n+2}(z) = \int_{\Gamma^l(z)} M_{H,h}(\zeta) U_{2n+1}(\zeta) + h N_h(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta \end{cases}$$

admet une solution. De plus, $w = \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} U_{2n} \\ U_{2n+1} \end{pmatrix}$ est analytique dans $\Omega(E)$ où

$$\begin{aligned} U_{2n}(z) &= O(h^n) \\ U_{2n+1}(z) &= O(h^{n+1}). \end{aligned}$$

Preuve. Rappelons que :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dx}} = \frac{1}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(x(z))}.$$

Comme $\frac{dA}{dx}$ est exponentiellement décroissant et que $A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2$ tend vers $-E^2$ en $-\infty$, nous en déduisons que :

$$\frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} \sim e^{\kappa x}$$

en $-\infty$. Ici et dans la suite, nous écrivons $f(x) \sim g(x)$ lorsque $f(x) = Cg(x) + o(g(x))$ où C est une constante.

D'autre part, H tend vers $(-1)^{\frac{1}{4}}$ en $-\infty$. Comme B , A et $\frac{dB}{dx}$ sont exponentiellement décroissant en $-\infty$, nous obtenons :

$$G_+ \sim e^{\kappa x}$$

en $-\infty$ et la même estimation pour G_- .

Enfin, nous avons :

$$\frac{dH}{dz} H^{-1} = -\frac{E \left(A \frac{dA}{dx} + h^2 m^2 B \frac{dB}{dx} \right) \left(\frac{dx}{dz} \right)^3}{2(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Par conséquent, nous avons :

$$\frac{dH}{dz} H^{-1} \sim e^{\kappa x}$$

en $-\infty$. Ceci montre que hN_h et $M_{H,h}$ sont exponentiellement décroissants en $-\infty$. En outre, ceci montre que $U(z, \zeta)$ est borné sur $\Gamma^l(z)$.

Nous supposons que U_{2n} est borné et holomorphe dans $\Omega(E)$. Notons $D^l(z)$ la droite telle que $\text{Im}(\zeta - z) = \frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{-\text{Im}(E) - a \text{Re}(E)} \text{Re}(\zeta - z)$. Etant donné qu'il n'y a pas de point tournant dans $\Omega(E)$, les intégrands sont holomorphes dans toutes nos intégrales. Nous introduisons le chemin γ^l qui, partant de $\text{Im}(\zeta) = c$ où c est une constante, suit le chemin $\Gamma^l(z)$ jusqu'à z puis suit le chemin $D^l(z)$ jusqu'à $\text{Im}(\zeta) = c$ et rejoint $\Gamma^l(z)$ le long de la droite $\text{Im}(\zeta) = c$ que l'on note $d^l(c)$. Par le théorème des résidus, nous avons

$$\int_{\gamma^l(z)} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_-(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta = 0.$$

Nous pouvons partager l'intégrale selon les chemins :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^l(z)} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_-(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta &= \int_{\Gamma^l(z)} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_-(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta \\ &+ \int_{D^l(z)} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_-(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta \\ &+ \int_{d^l(z)} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_-(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Lorsque c tend vers $-\infty$, étant donné que Γ^l est asymptote à D^l , la longueur du chemin d^l tend vers 0. L'intégrand étant borné, nous obtenons :

$$\int_{\Gamma^l(z)} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_-(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta = - \int_{D^l(z)} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_-(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta.$$

Comme $D^l(z)$ est la droite $\text{Im}(\zeta - z) = \frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{-\text{Im}(E) - a \text{Re}(E)} \text{Re}(\zeta - z)$ et que $D^l(z)$ est parcouru de z vers $-\infty$, la partie réelle augmente le long de cette droite quand on la parcourt dans ce sens puisque ceci correspond à parcourir le chemin vérifiant $\text{Im}(y - x) = a \text{Re}(y - x)$ de x vers $-\infty$ et nous avons $\text{Re}(\zeta - z) = -\text{Im}(E) \text{Re}(y - x) - \text{Re}(E) \text{Im}(y - x)$ où $\text{Re}(E) \geq 0$ et $\text{Im}(E) \geq 0$. Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} U_{2n+1}(z) &= - \int_{D^l(z)} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_-(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{h}(1 - i \frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{\text{Im}(E) + a \text{Re}(E)})u} I_2 U_-\left(z, z + \left(1 - i \frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{\text{Im}(E) + a \text{Re}(E)}\right)u\right) \\ &\quad M_{H,h}\left(z + \left(1 - i \frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{\text{Im}(E) + a \text{Re}(E)}\right)u\right) \\ &\quad U_{2n}\left(z + \left(1 - i \frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{\text{Im}(E) + a \text{Re}(E)}\right)u\right) \left(1 - i \frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{\text{Im}(E) + a \text{Re}(E)}\right) du \end{aligned}$$

par changement de variable. Nous voyons ainsi que l'intégrale converge uniformément. En effet, dans la formule précédente, nous avons :

$$z = iEx + \int_{-\infty}^x \frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)(t)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) + iE} dt,$$

et nous savons que $M_{H,h}(\zeta(y)) \sim e^{\kappa y}$. De plus :

$$\zeta(y) - z = \left(1 - i \frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{\text{Im}(E) + a \text{Re}(E)}\right) u(y)$$

et

$$\zeta(y) - z \sim iE(y - x)$$

en $-\infty$. Nous obtenons ainsi $u(y) = (-\text{Im}(E) - a \text{Re}(E)) \text{Re}(y - x)$, ce qui donne

$$\text{Re}(y) = -\frac{u}{\text{Im}(E) + a \text{Re}(E)} + \text{Re}(x).$$

Ceci nous prouve l'intégrabilité en u de $M_{H,h}$.

De plus, ceci montre que U_{2n+1} est bornée et analytique dans $\Omega(E)$. Etant donné la décroissance de $M_{H,h}$ et hN_h , nous déduisons que :

$$U_{2n+2}(z) = \int_{\Gamma^l(z)} M_{H,h}(\zeta) U_{2n+1}(\zeta) + hN_h(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta$$

est bornée et holomorphe.

Vérifions que w converge. Nous noterons les intégrales $\int_{-\infty}^z$ pour signifier que l'on intègre sur le

chemin $\Gamma^l(z)$. Nous rappelons les formules :

$$\begin{aligned}
U_{2n+1}(z) &= \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\zeta_{2n+1}} \cdots \int_{-\infty}^{\zeta_2} e^{\pm \frac{2}{h}(\zeta_1 - \zeta_2 + \cdots + \zeta_{2n+1} - z)} U_-(z, \zeta_{2n+1}) M_{H,h}(\zeta_{2n+1}) \cdots \\
&U_-(\zeta_2, \zeta_1) M_{H,h}(\zeta_1) \binom{1}{0} d\zeta_1 \cdots d\zeta_{2n+1} \\
&+ \sum_{j=1}^n \int_{\bar{z}}^z \int_{-\infty}^{\zeta_{2n+1-j}} \cdots \int_{-\infty}^{\zeta_2} \sum_{k_j=j}^n \sum_{k_{j-1}=j-1}^{k_j-1} \cdots \sum_{k_1=1}^{k_2-1} \\
&e^{\pm \frac{2}{h}(\zeta_{2n+1-j} - z + \cdots + \zeta_{2k_j-j+1} - \zeta_{2k_j-j+2} + \zeta_{2k_j-j-2} - \zeta_{2k_j-j-1} + \cdots)} U_-(z, \zeta_{2n+1-j}) M_{H,h}(\zeta_{2n+1-j}) \cdots \\
&U_-(\zeta_{2k_j-j+2}, \zeta_{2k_j-j+1}) M_{H,h}(\zeta_{2k_j-j+1}) hN_h(\zeta_{2k_j-j}) M_{H,h}(\zeta_{2k_j-j-1}) \cdots \\
&U_-(\zeta_{2k_1-1+2}, \zeta_{2k_1-1+1}) M_{H,h}(\zeta_{2k_1-1+1}) hN_h(\zeta_{2k_1-1}) \cdots \binom{1}{0} d\zeta_1 \cdots d\zeta_{2n+1-j} \\
U_{2n+2}(z) &= \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\zeta_{2n+1}} \cdots \int_{-\infty}^{\zeta_2} e^{\pm \frac{2}{h}(\zeta_1 - \zeta_2 + \cdots - \zeta_{2n+2})} M_{H,h}(\zeta_{2n+2}) \cdots \\
&U_-(\zeta_2, \zeta_1) M_{H,h}(\zeta_1) \binom{1}{0} d\zeta_1 \cdots d\zeta_{2n+2} \\
&+ \sum_{j=1}^{n+1} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\zeta_{2n+2-j}} \cdots \int_{-\infty}^{\zeta_2} \sum_{k_j=j}^{n+1} \sum_{k_{j-1}=j-1}^{k_j-1} \cdots \sum_{k_1=1}^{k_2-1} \\
&e^{\pm \frac{2}{h}(\cdots + \zeta_{2k_j-j+1} - \zeta_{2k_j-j+2} + \zeta_{2k_j-j-2} - \zeta_{2k_j-j-1} + \cdots)} \cdots U_-(\zeta_{2k_j-j+2}, \zeta_{2k_j-j+1}) M_{H,h}(\zeta_{2k_j-j+1}) \\
&hN_h(\zeta_{2k_j-j}) M_{H,h}(\zeta_{2k_j-j-1}) \cdots U_-(\zeta_{2k_1-1+2}, \zeta_{2k_1-1+1}) M_{H,h}(\zeta_{2k_1-1+1}) hN_h(\zeta_{2k_1-1}) \\
&\cdots \binom{1}{0} d\zeta_1 \cdots d\zeta_{2n+2-j}.
\end{aligned}$$

Nous allons utiliser le lemme suivant issue de [40] :

Lemme 2.5.16. *Soit f une fonction dans $L^2(]0, +\infty[)$ et définissons, pour tout $n \geq 1$,*

$$\begin{aligned}
I_{2n}(f) &= \int_{0 < s_{2n} < \cdots < s_2 < s_1 < +\infty} e^{-2(1-i \frac{\operatorname{Re}(E)-a \operatorname{Im}(E)}{\operatorname{Im}(E)+a \operatorname{Re}(E)}) \frac{(s_1 - s_2 + \cdots - s_{2n})}{h}} f(s_1) \\
&f(s_2) \cdots f(s_{2n}) ds_1 ds_2 \cdots ds_{2n}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_{2n-1}(f) &= \int_{0 < s_{2n-1} < \cdots < s_2 < s_1 < +\infty} e^{-2(1-i \frac{\operatorname{Re}(E)-a \operatorname{Im}(E)}{\operatorname{Im}(E)+a \operatorname{Re}(E)}) \frac{(s_1 - s_2 + \cdots + s_{2n-1})}{h}} f(s_1) \\
&f(s_2) \cdots f(s_{2n-1}) ds_1 ds_2 \cdots ds_{2n-1}.
\end{aligned}$$

Alors on a :

$$|I_n(f)| \leq \left(\frac{h}{2}\right)^{E \left(\frac{n+1}{2}\right)} \|f\|_{L^2}^n.$$

Preuve. Nous reproduisons ici la preuve donnée dans [40]. Nous avons :

$$|I_{2n}(f)| \leq \left(\int_{0 < s_2 < s_1 < +\infty} e^{-2 \frac{(s_1 - s_2)}{h}} |f(s_1)| |f(s_2)| ds_1 ds_2 \right)^n.$$

Nous réalisons le changement de variable $t = s_2 - s_1$, et obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_{0 < s_2 < s_1 < +\infty} e^{-2\frac{(s_1-s_2)}{h}} |f(s_1)| |f(s_2)| ds_1 ds_2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{s_1} e^{-2\frac{(s_1-s_2)}{h}} |f(s_1)| |f(s_2)| ds_1 ds_2 \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{-s_1}^0 e^{2\frac{t}{h}} |f(s_1)| |f(s_1+t)| ds_1 dt \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{2\frac{t}{h}} \left(\int_{-t}^{+\infty} |f(s_1)| |f(s_1+t)| ds_1 \right) dt \\
&\leq \int_{-\infty}^0 e^{2\frac{t}{h}} \|f\|_{L^2}^2 dt \\
&= \frac{h}{2} \|f\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Dans le cas de I_{2n-1} , nous avons :

$$\begin{aligned}
|I_{2n-1}(f)| &\leq \left(\frac{h}{2}\right)^{n-1} \|f\|_{L^2}^{2(n-1)} \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\frac{s}{h}} |f(s)| ds \right) \\
&\leq \left(\frac{h}{2}\right)^n \|f\|_{L^2}^{2n-1}.
\end{aligned}$$

Q.E.D

Pour U_{2n+1} , nous avons plusieurs intégrales de cette forme. Dans la première n'apparaît aucun terme de la forme hN_h et si l'on note C_- la borne de U_- , nous pouvons majorer cette intégrale par $\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} C_-^{n+1} \|M_{H,h}\|^{2n+1}$. Pour les intégrales suivantes, la borne va dépendre du nombre de hN_h apparaissant. Chaque hN_h remplace un U_- et deux $M_{H,h}$. Quand hN_h apparaît k fois, nous obtenons ainsi la borne $C_-^{n-k+1} \|M_{H,h}\|^{2n+1-2k} \|hN_h\|^k \left(\frac{h}{2}\right)^{E\left(\frac{2n+1-k+1}{2}\right)}$.

Pour U_{2n+2} , nous obtenons la borne $C_-^{n-k+1} \|M_{H,h}\|^{2(n+1-k)} \|hN_h\|^k \left(\frac{h}{2}\right)^{E\left(\frac{2(n+1)-k+1}{2}\right)}$ quand hN_h apparaît k fois.

Remarquons que $h^k \left(\frac{h}{2}\right)^{E\left(\frac{2n+1-k+1}{2}\right)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{E\left(\frac{2n+1-k+1}{2}\right)} h^{n+1}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|U_{2n+1}(z)| &\leq \sum_{j=0}^n \binom{2n-j}{j} h^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{E\left(\frac{2n+1-j+1}{2}\right)} C^{n-j+1} \|M_{H,h}\|^{2n+1-2j} \|N_h\|^j \\
|U_{2n+2}(z)| &\leq \sum_{j=0}^{n+1} \binom{2n+2-j}{j} h^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{E\left(\frac{2n+2-j+1}{2}\right)} C^{n-j+1} \|M_{H,h}\|^{2n+2-2j} \|N_h\|^j.
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors majorer :

$$\|M_{H,h}\|^{2n+1-2j} \leq \max\left(\|M_{H,h}\|, \|M_{H,h}\|^{2n+1}\right)$$

selon la valeur de $\|M_{H,h}\|$ et pour j compris entre 0 et n . Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
|U_{2n+1}(z)| &\leq h^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{E\left(\frac{n+2}{2}\right)} \max\left(\|M_{H,h}\|, \|M_{H,h}\|^{2n+1}\right) C^{1-n} \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n-j}{j} C^{2n-j} \|N_h\|^j \\
&= h^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{E\left(\frac{n+2}{2}\right)} \max\left(\|M_{H,h}\|, \|M_{H,h}\|^{2n+1}\right) C^{1-n} (C + \|N_h\|)^{2n}.
\end{aligned}$$

Ce dernier terme est sommable pour h suffisamment petit en utilisant le critère de Cauchy. En effet, les termes $\|M_{H,h}\|$ et $\|N_h\|$ ont un bon comportement en h en utilisant les expressions (2.5.13) et (2.5.14). Pour U_{2n+2} , nous obtenons :

$$\begin{aligned} |U_{2n+2}(z)| &\leq h^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{E(\frac{n+2}{2})} C^{-(n+1)} \max\left(1, \|M_{H,h}\|^{2n+2}\right) \sum_{j=0}^{2n+2} \binom{2n+2-j}{j} C^{2n+2-j} \|N_h\|^j \\ &= h^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{E(\frac{n+2}{2})} C^{-(n+1)} \max\left(1, \|M_{H,h}\|^{2n+2}\right) (C + \|N_h\|)^{2n+2}. \end{aligned}$$

Ce dernier terme est de nouveau sommable pour h suffisamment petit. Nous en déduisons que la somme est bien définie. Ceci termine la preuve. Q.E.D

Avec le choix de cette condition initiale, nous obtenons le comportement suivant pour notre solution :

Proposition 2.5.17. *La fonction $\varphi = Me^{-\frac{x}{h}}P^{-1}Q^{-1}w$ vérifie :*

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{Ex}{h}} + o\left(e^{-i\frac{Ex}{h}}\right)$$

en $-\infty$. Rappelons que M est donné dans (2.5.6), P^{-1} dans (2.5.15) et Q^{-1} dans (2.5.11)

Remarque. Multipliant cette solution par la matrice $-\gamma^0\gamma^1\gamma^2$, où γ^i , $i = 0, \dots, 2$, sont les matrices de Dirac, nous obtenons une autre solution $\tilde{\varphi}$ telle que :

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{Ex}{h}} + o\left(e^{-i\frac{Ex}{h}}\right)$$

en $-\infty$.

Preuve. Rappelons que la solution φ de notre équation de départ s'écrit :

$$\varphi = Me^{-\frac{x}{h}}P^{-1}Q^{-1}w.$$

Nous avons choisi comme condition initiale $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ afin d'avoir le comportement souhaité.

Rappelons que :

$$w = \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} U_{2n} \\ U_{2n+1} \end{pmatrix}$$

avec $U_{2n} = \begin{pmatrix} w_{4n} \\ w_{4n+1} \end{pmatrix}$ et $U_{2n+1} = \begin{pmatrix} w_{4n+2} \\ w_{4n+3} \end{pmatrix}$. Nous allons montrer dans un premier temps que les termes restant dans le développement sont d'ordre inférieur. Supposons que $U_{2n} = O(e^{n\kappa x})$. Nous utiliserons l'expression :

$$\begin{aligned} U_{2n+1}(z) &= - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{h}(1-i\frac{\operatorname{Re}(E)-a\operatorname{Im}(E)}{\operatorname{Im}(E)+a\operatorname{Re}(E)})u} I_2 U_- \left(z, z + \left(1 - i\frac{\operatorname{Re}(E)-a\operatorname{Im}(E)}{\operatorname{Im}(E)+a\operatorname{Re}(E)} \right) u \right) \\ &\quad M_{H,h} \left(z + \left(1 - i\frac{\operatorname{Re}(E)-a\operatorname{Im}(E)}{\operatorname{Im}(E)+a\operatorname{Re}(E)} \right) u \right) \\ &\quad U_{2n} \left(z + \left(1 - i\frac{\operatorname{Re}(E)-a\operatorname{Im}(E)}{\operatorname{Im}(E)+a\operatorname{Re}(E)} \right) u \right) \left(1 - i\frac{\operatorname{Re}(E)-a\operatorname{Im}(E)}{\operatorname{Im}(E)+a\operatorname{Re}(E)} \right) du. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $z = iEx + \int_{-\infty}^x \frac{A^2 + h^2 m^2 B^2}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} + iE} dt$ et que, le long de notre chemin, nous avons $\text{Im}(z) = -\left(\frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{\text{Im}(E) + a \text{Re}(E)}\right) \text{Re}(z)$ qui correspond à $\text{Im}(x) = a \text{Re}(x)$, nous en déduisons que :

$$\left(1 - i \left(\frac{\text{Re}(E) - a \text{Im}(E)}{\text{Im}(E) + a \text{Re}(E)}\right)\right) u = iE(1 + ia)v + \int_{-\infty}^v \frac{A^2 + h^2 m^2 B^2}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} + iE} (\eta + ia\eta)(1 + ia) d\eta.$$

Ici, v désigne la partie réelle de x donc est définie de $-\infty$ à 0 . Nous noterons v_0 la partie réelle de $x(z)$ par la suite. Ce qui va nous apporter de la décroissance dans l'expression de U_{2n+1} est donc la partie réelle de la dernière expression en $-\infty$. En $-\infty$, le terme intégrale disparaît puisque notre intégrande est intégrable. Il reste $iE(1 + ia)v$ dont la partie réelle est $-(\text{Im}(E) + a \text{Re}(E))v$ qui est positif par hypothèse sur notre chemin d'intégration. Le terme $U_-(z, \zeta)$ est borné par $e^{\int_{D^l(\zeta, z)} hN_h(t) dt}$ où $D^l(\zeta, z)$ est la droite passant par ζ et z . L'intégrale tend vers 0 en $-\infty$ ce qui donne une borne en $-\infty$ sur U_- . Enfin, nous avons $\|M_{H,h}(\zeta(x))\|_{Mat} \sim e^{\kappa x}$ en $-\infty$ (ici, on utilise la notation $\|M_{H,h}(\zeta(x))\|_{Mat}$ pour indiquer que $M_{H,h}$ est une matrice et qu'on ne peut pas simplement prendre le module). Nous obtenons donc que :

$$\begin{aligned} \|U_{2n+1}(z)\| &\leq \int_{-\infty}^{v_0} e^{\frac{2}{h}(\text{Im}(E) + a \text{Re}(E))(v - v_0)} e^{(n+1)\kappa v} (1 + ia) dv \\ &\leq \int_{-\infty}^{v_0} e^{(n+1)\kappa v} (1 + ia) dv. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que $U_{2n+1}(z(x)) = O(e^{(n+1)\kappa \text{Re}(x)})$. Etant donné la décroissance de hN_h , nous obtenons aussi que $U_{2n+2}(z(x)) = O(e^{(n+1)\text{Re}(x)})$. Ceci nous permet de conclure que le terme qui donne le comportement à l'infini va être le premier terme $Me^{-\frac{z}{h}} P^{-1} Q^{-1} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix}$. Nous

avons $Q^{-1} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Utilisant l'expression :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -i(A+E)x'H^{-1} & i(A+E)x'H^{-1} & -hmBx'H & hmBx'H \\ H^{-1} & H^{-1} & 0 & 0 \\ hmBx'H^{-1} & -hmBx'H^{-1} & i(A-E)x'H & -i(A-E)x'H \\ 0 & 0 & H & H \end{pmatrix},$$

nous obtenons :

$$P^{-1} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i(A+E) \frac{dx}{dz} H^{-1} w_0 + i(A+E) \frac{dx}{dz} H^{-1} w_2 - hmB \frac{dx}{dz} H w_3 + hmB \frac{dx}{dz} H w_1 \\ H^{-1} w_0 + H^{-1} w_2 \\ hmB \frac{dx}{dz} H^{-1} w_0 - hmB \frac{dx}{dz} H^{-1} w_2 + i(A-E) \frac{dx}{dz} H w_3 - i(A-E) \frac{dx}{dz} H w_1 \\ H w_3 + H w_1 \end{pmatrix}. \quad (2.5.26)$$

Les coefficients de $MP^{-1}Q^{-1} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ sont alors :

$$\begin{aligned}
1,1 &: (-i(A+E)\frac{dx}{dz}+1)H^{-1}w_0 + (i(A+E)\frac{dx}{dz}+1)H^{-1}w_2 - hmB\frac{dx}{dz}Hw_3 + hmB\frac{dx}{dz}Hw_1 \\
2,1 &: (i(A+E)\frac{dx}{dz}+1)H^{-1}w_0 + (-i(A+E)\frac{dx}{dz}+1)H^{-1}w_2 + hmB\frac{dx}{dz}Hw_3 - hmB\frac{dx}{dz}Hw_1 \\
3,1 &: hmB\frac{dx}{dz}H^{-1}w_0 - hmB\frac{dx}{dz}H^{-1}w_2 + (i(A-E)\frac{dx}{dz}+1)Hw_3 + (-i(A-E)\frac{dx}{dz}+1)Hw_1 \\
4,1 &: -hmB\frac{dx}{dz}H^{-1}w_0 + hmB\frac{dx}{dz}H^{-1}w_2 + (-i(A-E)\frac{dx}{dz}+1)Hw_3 + (i(A-E)\frac{dx}{dz}+1)w_1.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(A^2+h^2m^2B^2-E^2)^{\frac{1}{2}}}$, nous avons $\frac{dx}{dz} \rightarrow \frac{1}{iE}$ en $-\infty$. Comme $A(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
& -i(A+E)\frac{dx}{dz}+1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \\
& i(A+E)\frac{dx}{dz}+1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 2 \\
& -i(A-E)\frac{dx}{dz}+1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 2 \\
& i(A-E)\frac{dx}{dz}+1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.
\end{aligned}$$

Puisque $H = \left(\frac{(A^2+h^2m^2B^2)^{\frac{1}{2}}+E}{(A^2+h^2m^2B^2)^{\frac{1}{2}}-E} \right)^{\frac{1}{4}}$, la limite de H en $-\infty$ est $(-1)^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Nous en déduisons que :

$$MP^{-1} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \begin{pmatrix} 2e^{-i\frac{\pi}{4}}w_2 \\ 2e^{-i\frac{\pi}{4}}w_0 \\ 2e^{i\frac{\pi}{4}}w_3 \\ 2e^{i\frac{\pi}{4}}w_1 \end{pmatrix}.$$

Les composantes w_1 et w_2 sont les composantes de U_1 qui est un terme d'ordre inférieur à U_0 d'après ce qui a été démontré ci-dessus. Comme $z \sim iEx$ en $-\infty$, nous avons $e^{-\frac{z}{h}} \sim e^{-iE\frac{x}{h}}$. L'hypothèse sur les conditions initiales nous permet d'obtenir le comportement donné dans la proposition. Q.E.D

2.5.4 Solutions BKW avec condition au bord

Dans cette section, nous cherchons à construire des solutions BKW avec condition nulle au bord en nous inspirant de [35]. Pour cela, nous rappelons le comportement des potentiels en 0 :

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1}{l} + x^2 + o(x^2), \\
B(x) &= -\frac{l}{x} - \frac{1}{6l}x + o(x).
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les développements suivants pour A^2 et B^2 :

$$\begin{aligned}
A^2(x) &= \frac{1}{l^2} + \frac{2}{l}x^2 + o(x^2), \\
B^2(x) &= \frac{l^2}{x^2} + \frac{1}{3} + o(1).
\end{aligned}$$

Dans la suite, nous utiliserons la phase suivante :

$$z(x) = \int_{x_0}^x (A^2 + h^2m^2B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) dt,$$

où x_0 est le point tournant proche de 0 en $O(h)$ d'après (2.5.2) et où nous avons choisi une détermination de la racine carrée telle que $v^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}_+$ lorsque $v \in \mathbb{R}_+$. Rappelons aussi que :

$$(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)(x) = \frac{h^2 m^2 l^2}{x^2} + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{3l^2} + o(1).$$

Nous cherchons des solutions à l'équation :

$$hD_x \varphi = (-\Gamma^1 \Gamma^2 A(x) + m\Gamma^1 \gamma^0 B(x) + E\Gamma^1) \varphi. \quad (2.5.27)$$

Nous noterons $V_m = -\Gamma^1 \Gamma^2 A(x) + m\Gamma^1 \gamma^0 B(x)$. Nous allons réaliser la transformation de Langer suivante :

$$x = -e^y.$$

Ceci nous donne donc $y = \ln(-x)$ et grâce à cette transformation, le bord $x = 0$ est envoyé en $-\infty$. Réécrivons notre équation dans ce système de coordonnées, nous avons :

$$\partial_x = \frac{dy}{dx} \partial_y = \frac{1}{x} \partial_y = -e^{-y} \partial_y.$$

Notre équation prend alors la forme :

$$hD_y \varphi = -e^y (V_m + E\Gamma^1) \varphi.$$

Notre phase dans la variable y prend la forme :

$$z(y) = - \int_{y_0}^y (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} (-e^t) e^t dt,$$

où y_0 est le point tournant correspondant à x_0 . Nous posons de nouveau $\varphi = M\psi$ avec M comme dans (2.5.6). Nous posons ensuite $\psi = e^{-\frac{z}{h}} P^{-1} Q^{-1} w$ où P^{-1} est donné dans (2.5.15) et Q^{-1}

dans (2.5.11). Nous cherchons une solution w de la forme $w = \sum_{n \geq 0} W_n$ où $W_n = \begin{pmatrix} w_{4n} \\ w_{4n+1} \\ w_{4n+2} \\ w_{4n+3} \end{pmatrix}$. Avec

$U_{2n} = \begin{pmatrix} w_{4n} \\ w_{4n+1} \end{pmatrix}$ et $U_{2n+1} = \begin{pmatrix} w_{4n+2} \\ w_{4n+3} \end{pmatrix}$, nous obtenons les équations :

$$\begin{cases} \partial_z (U_{2n+1}) = \left(\frac{2}{h} I_2 + hN_h(z)\right) U_{2n+1} + M_{H,h}(z) U_{2n} \\ \partial_z (U_{2n+2}) = M_{H,h}(z) U_{2n+1} + hN_h(z) U_{2n}. \end{cases}$$

où, dans la variable x , nous avons :

$$M_{H,h}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} & -ihmG_-(z) \\ -ihmG_+(z) & \frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} \end{pmatrix},$$

$$N_h(z) = \begin{pmatrix} \frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} + \frac{dH}{dz} H^{-1} & imG_-(z) \\ imG_+(z) & -\frac{E \frac{dA}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^3}{2} - \frac{dH}{dz} H^{-1} \end{pmatrix}$$

avec :

$$G_+ = \frac{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 H^{-2}}{2} \left(B \frac{dA}{dx} - (A + E) \frac{dB}{dx} \right)$$

$$G_- = \frac{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 H^2}{2} \left(B \frac{dA}{dx} - (A - E) \frac{dB}{dx} \right).$$

Nous rappelons que :

$$H = \left(\frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}} + E}{(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}} - E} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Nous remarquons que :

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{dy}{dz} e^{y(z)},$$

où :

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{-e^y (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} (-e^y)}.$$

Nous obtenons donc :

$$M_{H,h}(z) = \begin{pmatrix} \frac{E \frac{dA}{dx} (-e^y) \left(\frac{dy}{dz}\right)^3 e^{3y}}{2} & -ihmG_-(z) \\ -ihmG_+(z) & -\frac{E \frac{dA}{dx} (-e^y) \left(\frac{dy}{dz}\right)^3 e^{3y}}{2} \end{pmatrix},$$

$$N_h(z) = \begin{pmatrix} -\frac{E \frac{dA}{dx} (-e^y) \left(\frac{dy}{dz}\right)^3 e^{3y}}{2} + \frac{dH}{dz} H^{-1} & imG_-(z) \\ imG_+(z) & \frac{E \frac{dA}{dx} (-e^y) \left(\frac{dy}{dz}\right)^3 e^{3y}}{2} - \frac{dH}{dz} H^{-1} \end{pmatrix}$$

avec :

$$G_+(y) = -\frac{\left(\frac{dy}{dz}\right)^3 e^{3y} H^{-2}}{2} \left(B \frac{dA}{dx} - (A + E) \frac{dB}{dx} \right) (-e^y)$$

$$G_-(y) = -\frac{\left(\frac{dy}{dz}\right)^3 e^{3y} H^2}{2} \left(B \frac{dA}{dx} - (A - E) \frac{dB}{dx} \right) (-e^y).$$

De plus, nous avons :

$$\frac{dH}{dz} H^{-1} = \frac{dy}{dz} e^y \frac{E \left(A \frac{dA}{dx} + h^2 m^2 B \frac{dB}{dx} \right)}{2 (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2) (A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Enfin, d'après (2.5.1), les lignes de Stokes vérifient :

$$|x| = |u| e^{-\operatorname{Re} \left(\frac{3+h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{12h^2 m^2 l^4} (x^2 - u^2) + o \left(\frac{x^2 - u^2}{h^2} \right) \right)}.$$

Dans le plan de Langer, elles vérifient :

$$\operatorname{Re}(y) = \operatorname{Re}(v) - \operatorname{Re} \left(\frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{12h^2 m^2 l^4} (e^{2y} - e^{2v}) + o \left(\frac{e^{2y} - e^{2v}}{h^2} \right) \right),$$

si $u = -e^v$. Elles sont donc asymptotes en $-\infty$ aux droites telles que $\operatorname{Re}(y) = C$ où C est une constante. Pour appliquer la méthode BKW, nous avons besoin de chemins transverses aux lignes de Stokes. Ici, nous choisissons donc les droites horizontales, c'est-à-dire telles que $\operatorname{Im}(y)$ est constante le long de ces chemins. Nous noterons γ_y un tel chemin qui se termine en y et Γ_y son image dans le plan des z . Notons que le long de γ_y , nous avons $\operatorname{Re}(v) < \operatorname{Re}(y)$ et, par conséquent, $\operatorname{Re}(\zeta - z) < 0$. Nous allons prouver la :

Proposition 2.5.18. Soit Γ_y l'image d'un chemin infini γ_y tel que $\text{Im}(y)$ est constante le long de γ_y . Le système d'équations récurrentes :

$$\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ U_{2n+1}(z) = \int_{\Gamma_y} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_+(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta \\ U_{2n+2}(z) = \int_{\Gamma_y} M_{H,h}(\zeta) U_{2n+1}(\zeta) + hN_h(\zeta) U_{2n}(\zeta) d\zeta \end{cases}$$

admet une solution. De plus, $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \begin{pmatrix} U_{2n} \\ U_{2n+1} \end{pmatrix}$ vérifie :

$$u = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix} + u^0(x, h),$$

où $u^0(x, h) = O\left(\frac{x}{h}\right)$, quand $\frac{x}{h} \rightarrow 0$.

Preuve. Nous allons étudier les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} I_+[f](z) &= \int_{\Gamma_y} e^{-\frac{2}{h}(\zeta-z)I_2} U_+(z, \zeta) M_{H,h}(\zeta) f(\zeta) d\zeta \\ (J \circ I_+)[f](z) &= \int_{\Gamma_y} M_{H,h}(\zeta) I_+[f](\zeta) + hN_h(\zeta) f(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Dans la suite, nous noterons d_z pour $\frac{d}{dz}$. Nous avons alors :

$$d\zeta = \frac{dy}{d_\zeta y}.$$

Nous pouvons réécrire les deux dernières expressions en terme de la variable y :

$$\begin{aligned} I_+[f](z(y)) &= \int_{\gamma_y} e^{-\frac{2}{h} \int_{y_1}^y (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} (-e^u) e^u du} U_+(z(y), \zeta(y_1)) \\ &\quad M_{H,h}(\zeta(y_1)) f(\zeta(y_1)) \frac{dy_1}{d_\zeta y_1} \\ (J \circ I_+)[f](z(y)) &= \int_{\gamma_y} M_{H,h}(\zeta(y_1)) I_+[f](\zeta(y_1)) + hN_h(\zeta(y_1)) f(\zeta(y_1)) \frac{dy_1}{d_\zeta y_1}. \end{aligned}$$

Nous effectuons le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} r &= \frac{|e^y|}{h} \\ \theta &= \text{Im}(y). \end{aligned}$$

Nous avons alors $-hre^{i\theta} = -e^y$ de sorte que $y = \log(hre^{i\theta})$ et, comme θ est constant le long du chemin γ_y , nous en déduisons que :

$$dy_1 = \frac{dy_1}{dr} dr = \frac{dr}{r},$$

où y_1 est la variable d'intégration de la dernière intégrale. Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}
I_+[f](z(y)) &= \int_{\gamma_y} e^{-\frac{2}{h} \int_{r_1}^r (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} (-hr_2 e^{i\theta}) hr_2 e^{i\theta} \frac{dr_2}{r_2}} U_+(z(r), \zeta(r_1)) \\
&\quad M_{H,h}(\zeta(r_1)) f(\zeta(r_1)) \frac{dr_1}{d_\zeta y_1(r_1) r_1} \\
&= \int_{\gamma_y} e^{-2 \int_{r_1}^r (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} (-hr_2 e^{i\theta}) e^{i\theta} dr_2} U_+(z(r), \zeta(r_1)) \\
&\quad M_{H,h}(\zeta(r_1)) f(\zeta(r_1)) \frac{dr_1}{d_\zeta y_1(r_1) r_1}.
\end{aligned}$$

Nous allons vérifier que cette intégrale est bien définie si f est bornée au voisinage de 0. Pour cela, au voisinage de 0, nous avons :

$$d_x A = 2x + o(x) = -2hre^{i\theta} + o(hre^{i\theta}).$$

De plus, nous avons :

$$(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)(x) = \frac{h^2 m^2 l^2}{x^2} + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{3l^2} + o(1),$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}
(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} (-hre^{i\theta}) &= \left(\frac{h^2 m^2 l^2}{h^2 r^2 e^{2i\theta}} + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{3l^2} + o(1) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{ml}{re^{i\theta}} \left(1 + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{3m^2 l^4} r^2 e^{2i\theta} + o(r^2 e^{2i\theta}) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{ml}{re^{i\theta}} \left(1 + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6m^2 l^4} r^2 e^{2i\theta} + o(r^2 e^{2i\theta}) \right) \\
&= \frac{ml}{re^{i\theta}} + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6ml^3} re^{i\theta} + o(re^{i\theta}).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
d_\zeta y &= -\frac{1}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} (-e^y) e^y} \\
&= -\frac{1}{\left(\frac{ml}{re^{i\theta}} + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6ml^3} re^{i\theta} + o(re^{i\theta}) \right) hre^{i\theta}} \\
&= -\frac{1}{hml + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6ml^3} hr^2 e^{2i\theta} + o(hr^2 e^{2i\theta})} \\
&= -\frac{1}{hml \left(1 + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6m^2 l^4} r^2 e^{2i\theta} + o(r^2 e^{2i\theta}) \right)} \\
&= -\frac{1}{hml} \left(1 - \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6m^2 l^4} r^2 e^{2i\theta} + o(r^2 e^{2i\theta}) \right) \\
&= -\frac{1}{hml} + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6m^3 l^5} \frac{r^2 e^{2i\theta}}{h} + o\left(\frac{r^2 e^{2i\theta}}{h} \right) \\
&\sim \frac{C_0}{h}.
\end{aligned}$$

Nous avons aussi :

$$(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}} (-hre^{i\theta}) = \frac{ml}{re^{i\theta}} + \frac{3 + h^2 m^2 l^2}{6ml^3} re^{i\theta} + o(re^{i\theta}),$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} H(z(r)) &= \left(\frac{(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}} (-e^y) + E}{(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}} (-e^y) - E} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(\frac{\left(\frac{ml}{re^{i\theta}} + \frac{3+h^2 m^2 l^2}{6ml^3} re^{i\theta} + o(re^{i\theta}) \right) + E}{\left(\frac{ml}{re^{i\theta}} + \frac{3+h^2 m^2 l^2}{6ml^3} re^{i\theta} + o(re^{i\theta}) \right) - E} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(\frac{\left(ml + \frac{3+h^2 m^2 l^2}{6ml^3} r^2 e^{2i\theta} + o(r^2 e^{2i\theta}) \right) + Ere^{i\theta}}{\left(ml + \frac{3+h^2 m^2 l^2}{6ml^3} r^2 e^{2i\theta} + o(r^2 e^{2i\theta}) \right) - Ere^{i\theta}} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(\left(1 + \frac{Ere^{i\theta}}{ml} + \frac{3 + h^2 m^2 l^2}{6m^2 l^4} r^2 e^{2i\theta} + o(r^2 e^{2i\theta}) \right) \right. \\ &\quad \left. \left(1 + \frac{Ere^{i\theta}}{ml} - \frac{3 + h^2 m^2 l^2}{6m^2 l^4} r^2 e^{2i\theta} + \frac{E^2 r^2 e^{2i\theta}}{m^2 l^2} + o(r^2 e^{2i\theta}) \right) \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(1 + 2 \frac{Ere^{i\theta}}{ml} + \frac{2E^2 r^2 e^{2i\theta}}{m^2 l^2} + o(r^2 e^{2i\theta}) \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= 1 + \frac{Ere^{i\theta}}{2ml} - \frac{E^2 r^2 e^{2i\theta}}{m^2 l^2} + o(r^2 e^{2i\theta}) \\ &\sim C_1 \end{aligned}$$

au voisinage de 0. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{Ed_x A (d_z y)^3 e^{3y} H^{-2}}{2 (d_z y) r} &= \\ \frac{E (-2hre^{i\theta} + o(hre^{i\theta})) \left(\frac{1}{hml} - \frac{3+h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6m^3 l^5} \frac{r^2 e^{2i\theta}}{h} + o\left(\frac{r^2 e^{2i\theta}}{h}\right) \right)^2 h^3 r^3 e^{3i\theta}}{2 \left(1 + \frac{Ere^{i\theta}}{2ml} - \frac{E^2 r^2 e^{2i\theta}}{m^2 l^2} + o(r^2 e^{2i\theta}) \right)^2 r} &= \\ \frac{-2Eh^4 r^4 e^{4i\theta} (1 + o(1)) \frac{1}{h^2 m^2 l^2} \left(1 - \frac{3+h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{3m^2 l^4} r^2 e^{2i\theta} + o(r^2 e^{2i\theta}) \right)}{2 \left(1 + \frac{Ere^{i\theta}}{ml} - \frac{7E^2 r^2 e^{2i\theta}}{4m^2 l^2} + o(r^2 e^{2i\theta}) \right) r} &= \\ \sim ECh^2 r^3 e^{4i\theta} & \end{aligned}$$

au voisinage de 0. Nous calculons ensuite :

$$d_x B = \frac{l}{x^2} + O(1).$$

Au voisinage de 0, nous obtenons donc :

$$B(d_x A) - (A + E)(d_x B) \sim -\frac{C_2}{h^2 r^2 e^{2i\theta}}.$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \frac{ihmG_+}{(d_z y) r} &= \frac{ihm \left(\frac{dy}{dz}\right)^3 e^{3y} H^{-2} \left(B \frac{dA}{dx} - (A + E) \frac{dB}{dx}\right) (-e^y)}{2 (d_z y) r} \\ &\sim \frac{ihm C_2 e^{-2i\theta} C_1 h^3 r^3 e^{3i\theta}}{2 C_0 h^4 r^3} \\ &\sim C \end{aligned}$$

au voisinage de 0. Nous avons de même :

$$\frac{ihmG_-}{(d_z y) r} \sim C$$

au voisinage de 0. Nous en déduisons que $\frac{M_{H,h}(\zeta(r))}{(d_z y) r}$ est borné au voisinage de 0. Etudions maintenant le comportement de U_+ . Rappelons que :

$$\|U_+(z, \zeta)\| \leq e^{\int_{\Gamma_y} \|hN_h(\zeta)\| d\zeta} = e^{\int_0^r \|hN_h(\zeta(r))\| \frac{dr}{(d_z y) r}}.$$

Pour étudier le comportement en 0 de $hN_h(\zeta(r))$, il nous reste à étudier le comportement en 0 de :

$$(d_z H) H^{-1} = (d_z y) e^y \frac{A(d_x A) + h^2 m^2 B(d_x B)}{(A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)(A^2 + h^2 m^2 B^2)^{\frac{1}{2}}} (-e^y).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} A^2 + h^2 m^2 B^2 &\sim \frac{h^2 m^2 l^2}{h^2 r^2 e^{2i\theta}} \sim \frac{m^2 l^2}{r^2 e^{2i\theta}}, \\ A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2 &\sim \frac{m^2 l^2}{r^2 e^{2i\theta}}. \end{aligned}$$

en 0. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} (d_z H) H^{-1} &\sim \frac{C_0}{h} h r e^{i\theta} \frac{\frac{2hr e^{i\theta}}{l} + h^2 m^2 \frac{-l^2}{h^3 r^3 e^{3i\theta}}}{\frac{m^3 l^3}{r^3 e^{3i\theta}}} \\ &\sim \frac{C_0}{h} \frac{r e^{i\theta}}{m l}. \end{aligned}$$

en 0. Par conséquent :

$$\frac{(d_z H) H^{-1}}{(d_z y) r} \sim C.$$

au voisinage de 0 puisque θ est constant le long de notre chemin. Nous en déduisons que $\frac{hN_h}{(d_z y) r}$ est borné et donc intégrable en 0. Il s'ensuit que U_+ est borné. Nous en déduisons que :

$$\|I_+[f](z)\| \leq C \int_0^r e^{-2 \operatorname{Re} \left(\int_{r_1}^r (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} (-hr_2 e^{i\theta}) e^{i\theta} dr_2 \right)} f(\zeta(r_1)) dr_1.$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned}
& r_2 e^{i\theta} (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} (-hr_2 e^{i\theta}) \\
&= r_2 e^{i\theta} \left(\frac{1}{l^2} + \frac{h^2 r_2^2 e^{2i\theta}}{l^4} + o(h^2 r_2^2 e^{2i\theta}) + \frac{h^2 m^2 l^2}{h^2 r_2^2 e^{2i\theta}} + \frac{h^2 m^2 l^2}{3} + h^2 o(1) - E^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= r_2 e^{i\theta} \frac{ml}{r_2 e^{i\theta}} \left(1 + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{3m^2 l^4} r^2 e^{2i\theta} + o(h^2 r^2 e^{2i\theta}) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= ml \left(1 + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6m^2 l^4} r^2 e^{2i\theta} + o(h^2 r^2 e^{2i\theta}) \right) \\
&= ml + \frac{3 + h^2 m^2 l^2 - 3E^2 l^2}{6ml^3} r^2 e^{2i\theta} + o(h^2 r^2 e^{2i\theta}).
\end{aligned}$$

Ainsi, au voisinage de 0, nous obtenons :

$$\operatorname{Re} \left(r_2 e^{i\theta} (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} (-hr_2 e^{i\theta}) \right) \geq C.$$

Par suite :

$$\operatorname{Re} \left(e^{i\theta} (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} (-hr_2 e^{i\theta}) \right) \geq \frac{C}{r_2}.$$

Par conséquent :

$$e^{-2 \operatorname{Re} \left(\int_{r_1}^r (A^2 + h^2 m^2 B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} (-hr_2 e^{i\theta}) e^{i\theta} dr_2 \right)} \leq e^{-2C \ln \left(\frac{r}{r_1} \right)} = \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2C}.$$

Il vient :

$$\|I_+[f](z)\| \leq C_4 \left(\frac{1}{r} \right)^{2C} \int_0^r r_1^{2C} f(\zeta(r_1)) dr_1.$$

Supposons que $|f(\zeta(r_1))| \leq \frac{(1+C_4)^n C_4^n r_1^n}{n!}$, alors :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^r r_1^{2C} f(\zeta(r_1)) dr_1 \right| &\leq \frac{(1+C_4)^n C_4^n r^{n+1+2C}}{(n+1+2C)n!} \\
&\leq \frac{(1+C_4)^n C_4^n r^{n+1+2C}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|I_+[f](z(r))\| \leq \frac{(1+C_4)^n C_4^{n+1} r^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Etant donné que $M_{H,h}$ et hN_h sont bornés au voisinage de 0, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|(J \circ I_+)[f](z(r))\| &\leq C_4 \left(\int_0^r \frac{(1+C_4)^n C_4^{n+1} r_1^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(1+C_4)^n C_4^n r_1^n}{n!} dr_1 \right) \\
&= \frac{(1+C_4)^n C_4^{n+2} r^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{(1+C_4)^n C_4^{n+1} r^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Comme $r^{n+2} \leq r^{n+1}$ au voisinage de 0, nous obtenons :

$$\|(J \circ I_+)[f](z)\| \leq \frac{(1+C_4)^{n+1} C_4^{n+1} r^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nous en déduisons que $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont les termes de deux séries sommables. Le développement de u vient des estimations ci-dessus. Q.E.D

Nous pouvons maintenant en déduire l'existence d'une solution qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0 :

Proposition 2.5.19. *Il existe une solution φ de l'équation 2.5.27 telle que :*

$$\varphi(x, h) = e^{-\frac{z}{h}} MP^{-1}Q^{-1}w(x, h),$$

tend vers 0 en 0 où :

$$w = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix} + w^0(x, h),$$

où $w^0(x, h) = O\left(\frac{x}{h}\right)$, quand $\frac{x}{h} \rightarrow 0$.

Preuve. Utilisant la proposition précédente, nous avons une solution φ telle que :

$$\varphi(x, h) = e^{-\frac{z}{h}} MP^{-1}Q^{-1}w(x, h).$$

Il nous reste à prouver que la solution tend bien vers 0 en 0. Rappelons que nous avons choisi une détermination de la racine carré telle que $\sqrt{v} > 0$ lorsque $v > 0$. De plus, nous avons :

$$A^2(x) + h^2 m^2 B^2(x) - E^2 = \frac{h^2 m^2 l^2}{x^2} + O(1),$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} (A^2(x) + h^2 m^2 B^2(x) - E^2)^{\frac{1}{2}}(x) &= \left(\frac{h^2 m^2 l^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} (1 + O(x^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{hml}{x} (1 + O(x^2)) \\ &= -\frac{hml}{x} + O(x). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} z(x) &= \int_{x_0}^x (A^2(t) + h^2 m^2 B^2(t) - E^2)^{\frac{1}{2}}(t) dt \\ &= \int_{x_0}^x -\frac{hml}{t} + O(t) dt \\ &= -hml (\ln(-x) - \ln(-x_0)) + O(x^2 - x_0^2). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{z}{h}} &= e^{ml(\ln(-x) - \ln(-x_0)) + O\left(\frac{x^2 - x_0^2}{h}\right)} \\ &= (-x)^{ml} (-x_0)^{-ml} e^{O\left(\frac{x^2 - x_0^2}{h}\right)}. \end{aligned}$$

D'autre part, les coefficients de $MP^{-1}Q^{-1}w$ sont :

$$\begin{aligned} 1,1 &: (-i(A + E) \frac{dx}{dz} + 1) H^{-1}w_0 + (i(A + E) \frac{dx}{dz} + 1) H^{-1}w_2 - hmB \frac{dx}{dz} Hw_3 + hmB \frac{dx}{dz} Hw_1 \\ 2,1 &: (i(A + E) \frac{dx}{dz} + 1) H^{-1}w_0 + (-i(A + E) \frac{dx}{dz} + 1) H^{-1}w_2 + hmB \frac{dx}{dz} Hw_3 - hmB \frac{dx}{dz} Hw_1 \\ 3,1 &: hmB \frac{dx}{dz} H^{-1}w_0 - hmB \frac{dx}{dz} H^{-1}w_2 + (i(A - E) \frac{dx}{dz} + 1) Hw_3 + (-i(A - E) \frac{dx}{dz} + 1) Hw_1 \end{aligned}$$

4,1 : $-hmB\frac{dx}{dz}H^{-1}w_0 + hmB\frac{dx}{dz}H^{-1}w_2 + (-i(A-E)\frac{dx}{dz} + 1)Hw_3 + (i(A-E)\frac{dx}{dz} + 1)w_1$
d'après (2.5.26) et les équations qui suivent. Au voisinage de 0, nous avons :

$$A(x) = \frac{1}{l} + x^2 + o(x^2),$$

$$B(x) = -\frac{l}{x} - \frac{1}{6l}x + o(x).$$

et

$$A^2(x) = \frac{1}{l^2} + \frac{2}{l}x^2 + o(x^2),$$

$$B^2(x) = \frac{l^2}{x^2} + \frac{1}{3} + o(1).$$

Nous avons donc :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(A^2 + h^2m^2B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sim \frac{-x}{hml} + o(-x)$$

au voisinage de 0. Etant donné que :

$$H = \left(\frac{(A^2 + h^2m^2B^2)^{\frac{1}{2}} + E}{(A^2 + h^2m^2B^2)^{\frac{1}{2}} - E} \right)^{\frac{1}{4}},$$

il vient :

$$H(z(x)) \sim C.$$

Par conséquent :

$$\left(-i(A+E)\frac{dx}{dz} + 1 \right) H^{-1} \sim -C_{A+E}$$

$$hmB\frac{dx}{dz}H \sim C_B$$

$$hmB\frac{dx}{dz}H^{-1} \sim C'_B$$

$$\left(i(A-E)\frac{dx}{dz} + 1 \right) H \sim -C_{A-E}$$

Comme $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que les termes suivant dans le développement de w sont des $o(1)$, nous en déduisons que φ tend vers 0 en 0 ce qui prouve la proposition. Q.E.D

2.6 Résumé et perspectives concernant les résonances

Dans ce chapitre, nous souhaitons étudier les résonances pour l'équation de Dirac massive en espace-temps Schwarzschild-Anti-de Sitter afin d'obtenir des estimations de décroissance de l'énergie locale pour ces champs similaires à celles obtenues par G. Holzegel et J. Smulevici [49],

[51] pour l'équation de Klein-Gordon en espace-temps Kerr-Anti-de Sitter.

Dans un premier temps, nous avons réussi à donner une borne inférieure pour la décroissance de l'énergie locale grâce à la construction de quasimodes exponentiellement précis en suivant une méthode utilisée dans [38] notamment. Afin d'obtenir une borne supérieure pour la décroissance de cette énergie, nous voulions étudier plus précisément les résonances pour ce système.

Ainsi, dans un second temps, nous avons prouvé l'existence de ces résonances en temps que pôles de la résolvante dans des espaces bien choisis par un argument de perturbation utilisant la théorie de Fredholm méromorphe. La localisation de certaines résonances proches de l'axe réel est alors la suite logique permettant d'obtenir des estimations de décroissance de l'énergie locale. Malheureusement, les méthodes employées pour prouver l'existence des résonances ne permettent pas, en général, de localiser les résonances.

Une des pistes serait alors d'utiliser les quasimodes construits dans la première partie et de prouver un résultat similaire à celui obtenu par S. Tang et M. Zworski [77] pour l'opérateur qui nous concerne. Ce résultat est obtenu dans le cadre du "black box scattering" et affirme la présence de résonances dans une région proche des valeurs propres associées aux quasimodes. Cette correspondance utilise de manière cruciale des estimations a priori sur la résolvante de l'opérateur utilisé. Ce genre d'estimations pour des opérateurs d'ordre 2 vérifiant les conditions de "black box" suivent des travaux de J. Sjöstrand et M. Zworski [76] ainsi que de J. Sjöstrand [75] dans le cas scalaire. Il serait certainement possible de développer le même formalisme pour l'opérateur de Dirac. Nous avons néanmoins préféré emprunter un chemin différent. Pour cela, nous avons, dans une troisième partie, donné une formule explicite pour la résolvante en terme de fonctions de Jost et de fonctions vérifiant les conditions au bord si nécessaire. Malgré cela, nous n'avons pas réussi à obtenir une estimation suffisante qui nous laisserait l'espoir d'obtenir un théorème similaire à celui de Tang et Zworski.

Nous nous sommes alors tournés, dans une quatrième partie, vers la méthode BKW exacte. Cette méthode a largement prouvé son efficacité pour l'opérateur de Schrödinger grâce aux travaux de C. Gérard et A. Grigis [40], T. Ramond [72], S. Fujiee et T. Ramond [36], [35] et par S. Fujiee, C. Lasser et L. Nédélec [33] notamment. Pour mettre en oeuvre ces techniques, il nous fallait une caractérisation précise du fait d'être une résonance. Celle-ci nous était donné par la formule explicite de la résolvante dans laquelle nous voyons apparaître deux Wronskiens en fonction des solutions de Jost et des solutions avec conditions aux bord. Le fait d'être une résonance se caractérise alors par l'annulation de tels Wronskiens. La stratégie est alors de construire des solutions BKW de l'équation aux valeurs propres admettant des développements en terme du paramètre semi-classique h et vérifiant les conditions voulues. Nous pourrions alors obtenir des développements en terme de ce paramètre pour les résonances proches de l'axe réel.

Il nous fallait maintenant construire les solutions BKW qui devrait nous permettre de localiser les résonances. Nous construisons ces solutions non plus sur $] - \infty, 0[$ mais dans un domaine du demi-plan complexe. Pour cela, nous devons choisir une détermination de la racine carrée et réaliser plusieurs changements de variable afin d'obtenir une forme convenable pour notre équation. Nous pouvons alors résoudre cette équation et les solutions ainsi obtenues sont bien définies dans le domaine considéré mais n'admettent des développements en h que dans certaines régions de ce domaine, le long de courbes transverses aux lignes de Stokes. Nous construisons ainsi des solutions admettant des développements sur un sous-ensemble compact sans points tournants ainsi que dans des domaines non bornés sans points tournants (qui correspondent aux solutions de Jost) et des solutions vérifiant les conditions au bord à masse grande qui admettent des développements aux voisinage de 0. Il est important de noter que ces développements ne sont pas valables partout mais uniquement dans certaines régions du demi-plan complexe.

Afin d'obtenir la localisation des résonances, il est alors nécessaire de prolonger les développements obtenus à travers les coupures laissées entre les points tournants par la détermination

de la racine carrée que nous avons choisi. Ceci nous permettrait d'avoir des développements en terme de \hbar pour nos Wronskiens. Afin de réaliser ceci, il est nécessaire de trouver une courbe transverse aux lignes de Stokes passant à travers la coupure et d'analyser les singularités dans la définition des solutions BKW qui empêcheraient ces solutions d'admettre un développement le long de cette courbe. Ces singularités dépendent des intégrales d'action entre les points tournants. Autrement dit, étant donné deux points tournants x_0 et x_1 , les singularités dépendront de $S(E) = \int_{x_0}^{x_1} (V(t) - E)^{\frac{1}{2}} dt$ où V dépend des potentiels présents dans notre opérateur de Dirac. Ceci amène à obtenir des développements pour les Wronskiens en terme de $\frac{\hbar}{S(E)}$ et, lorsque les points tournants sont trop proches les uns des autres, $\frac{\hbar}{S(E)}$ diverge ce qui ne nous donne pas des développements suffisamment précis. C'est ce qu'il se passe dans notre cas. Afin de pallier à cette difficulté, nous pensons pouvoir mettre en place des méthodes microlocales qui ont été utilisées dans [72] et [36], par exemple, pour l'opérateur de Schrödinger.

Appendices

.1 Calcul de l'équation de Dirac

Dans cette partie, nous allons utiliser le formalisme de Newman-Penrose afin d'établir l'équation de Dirac. En coordonnées, l'équation de Dirac (1.2.15) prend la forme :

$$\epsilon_{\mathbf{A}}^{\mathbf{A}'} \epsilon_{\mathbf{B}}^{\mathbf{B}'} \nabla_{\mathbf{A}\mathbf{A}'} \phi^{\mathbf{A}} = \nabla_{\mathbf{A}\mathbf{A}'} \phi^{\mathbf{A}} + \gamma_{\mathbf{A}\mathbf{A}'\mathbf{C}}^{\mathbf{B}} \phi^{\mathbf{C}} \quad (.1.1)$$

où les lettres en caractère gras désignent les composantes des spineurs. Rappelons alors que :

$$\begin{aligned} \nabla_{00'} &= l^a \nabla_a \\ \nabla_{01'} &= m^a \nabla_a \\ \nabla_{10'} &= \bar{m}^a \nabla_a \\ \nabla_{11'} &= n^a \nabla_a \end{aligned}$$

où $l^a \nabla_a = l^a \partial x_a$ lorsque l'on agit sur les fonctions (il en est de même pour les autres composantes). D'autre part, les éléments $\gamma_{\mathbf{A}\mathbf{A}'\mathbf{C}}^{\mathbf{B}}$ sont appelés les coefficients spinoriels et sont notés généralement comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_{00'\mathbf{0}}^{\mathbf{0}} &= \epsilon; & \gamma_{00'\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} &= -\kappa; & \gamma_{00'\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} &= -\tau' = \pi; & \gamma_{00'\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} &= \gamma' = -\epsilon = -\gamma_{00'\mathbf{0}}^{\mathbf{0}} \\ \gamma_{10'\mathbf{0}}^{\mathbf{0}} &= \alpha; & \gamma_{10'\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} &= -\rho; & \gamma_{10'\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} &= -\sigma' = \lambda; & \gamma_{10'\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} &= \beta' = -\alpha = -\gamma_{10'\mathbf{0}}^{\mathbf{0}} \\ \gamma_{01'\mathbf{0}}^{\mathbf{0}} &= \beta; & \gamma_{01'\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} &= -\sigma; & \gamma_{01'\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} &= -\rho' = \mu; & \gamma_{01'\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} &= \alpha' = -\beta = -\gamma_{01'\mathbf{0}}^{\mathbf{0}} \\ \gamma_{11'\mathbf{0}}^{\mathbf{0}} &= \gamma; & \gamma_{11'\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} &= -\tau; & \gamma_{11'\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} &= -\kappa' = \nu; & \gamma_{11'\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} &= \epsilon' = -\gamma = -\gamma_{11'\mathbf{0}}^{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'obtenir l'équation (1.2.20). Il nous faut ensuite calculer les coefficients spinoriels. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \epsilon = \gamma &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{r^3 + Ml^2}{(r^4 + l^2 r^2 - 2Ml^2 r)^{\frac{1}{2}} l r}; & (.1.2) \\ \rho = \mu &= -\frac{1}{\sqrt{2}r} F(r)^{\frac{1}{2}}; \\ \beta = -\alpha &= \frac{1}{2\sqrt{2}r} \cot \theta; \\ \pi = \tau &= 0. \end{aligned}$$

En effet, comme notre base est normalisée, nous avons :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2} (n^a l^b \nabla_b l_a + m^a l^b \nabla_b \bar{m}_a) & (.1.3) \\ \rho &= m^a \bar{m}^b \nabla_b l_a \\ \pi &= -\bar{m}^a l^b \nabla_b n_a \\ \alpha &= \frac{1}{2} (n^a \bar{m}^b \nabla_b l_a + m^a \bar{m}^b \nabla_b \bar{m}_a) \\ \beta &= \frac{1}{2} (n^a m^b \nabla_b l_a + m^a m^b \nabla_b \bar{m}_a) \\ \tau &= m^a n^b \nabla_b l_a \\ \mu &= -\bar{m}^a m^b \nabla_b n_a \\ \gamma &= \frac{1}{2} (n^a n^b \nabla_b l_a + m^a n^b \nabla_b \bar{m}_a) \end{aligned}$$

où, ici, $\nabla_b l_a = \partial_b l_a - \Gamma^c_{ba} l_c$. Nous noterons les indices $\{0, 1, 2, 3\}$ tels que $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, r, \theta, \varphi)$. Rappelons les coefficients de la métrique et de son inverse :

$$\begin{aligned} g_{00} &= F(r); & g_{11} &= -F(r)^{-1}; & g_{22} &= -r^2; & g_{33} &= -r^2 \sin^2(\theta) \\ g^{00} &= F(r)^{-1}; & g^{11} &= -F(r); & g^{22} &= -\frac{1}{r^2}; & g^{33} &= -\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{aligned}$$

les autres termes étant nuls. Nous pouvons ainsi calculer les coefficients de Christoffel. Auparavant, remarquons que nous utilisons la connexion de Levi-Civita, nous n'avons donc pas de torsion et $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. D'autre part, comme $g^{ij} = 0$ si $i \neq j$, nous avons :

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{j0}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{i0}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_0} \right\} \quad (.1.4)$$

Comme aucun des coefficients de la métrique ne dépend du temps, nous avons : $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_0} = 0$ pour tout $i, j \in \{0, \dots, 3\}$. De plus, $\frac{\partial g_{j0}}{\partial x_i}$ n'est non nul que si $j = 0$ et $i = 1$. Utilisant la symétrie, nous voyons que les seuls coefficients non nuls de la forme Γ^0_{ij} avec $i, j \in \{0, \dots, 3\}$ sont :

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2} F(r)^{-1} F'(r) \quad (.1.5)$$

Nous pouvons faire un raisonnement similaire avec Γ^3_{ij} . Les seuls coefficients non nuls sont alors :

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \quad (.1.6)$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot(\theta) \quad (.1.7)$$

Pour Γ^1_{ij} , nous allons distinguer deux cas. Tout d'abord, si $i \neq j$, rappelons que :

$$\Gamma^1_{ij} = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{j1}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1} \right\}. \quad (.1.8)$$

Donc, si aucun des i ou j ne vaut 1, $\Gamma^1_{ij} = 0$. Si, par exemple, i vaut 1, alors, comme $i \neq j$, les deux derniers termes sont nul. Comme g_{11} ne dépend pas de t, θ, φ , le premier terme est aussi nul. Ainsi $\Gamma^1_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Maintenant, si $i = j$, nous avons :

$$\Gamma^1_{ii} = \begin{cases} \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \\ \frac{1}{2} g^{11} \left(-\frac{\partial g_{ii}}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (.1.9)$$

ce qui donne :

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{2} F(r)^{-1} F'(r); \quad \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} F(r) F'(r); \quad \Gamma^1_{22} = -r F(r); \quad \Gamma^1_{33} = -r \sin^2(\theta) F(r) \quad (.1.10)$$

Enfin, nous avons :

$$\Gamma^2_{ij} = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{j2}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_2} \right\}. \quad (.1.11)$$

Par un raisonnement similaire, nous voyons que les seuls coefficients non nuls sont :

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma^2_{33} = -\cos(\theta) \sin(\theta) \quad (.1.12)$$

Nous pouvons maintenant calculer les composantes de $\nabla_b l_a$. Les composantes non nulles sont :

$$\nabla_0 l_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} F(r)^{\frac{1}{2}} F'(r); \quad \nabla_0 l_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} F(r)^{-\frac{1}{2}} F'(r); \quad (.1.13)$$

$$\nabla_2 l_2 = -\frac{r}{\sqrt{2}} F(r)^{\frac{1}{2}}; \quad \nabla_3 l_3 = -\frac{r \sin^2(\theta)}{\sqrt{2}} F(r)^{\frac{1}{2}} \quad (.1.14)$$

De même pour $\nabla_b n_a$, nous obtenons comme coefficient non nuls :

$$\nabla_0 n_1 = -\frac{1}{2} F(r)^{-\frac{1}{2}} F'(r); \quad \nabla_2 n_2 = \frac{r}{\sqrt{2}} F(r)^{\frac{1}{2}}; \quad \nabla_3 n_3 = \frac{r \sin^2(\theta)}{\sqrt{2}} F(r)^{\frac{1}{2}} \quad (.1.15)$$

Enfin, pour $\nabla_b \bar{m}_a$, les coefficients non nuls sont :

$$\nabla_2 \bar{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \nabla_3 \bar{m}_1 = \frac{i \sin(\theta)}{\sqrt{2}} \quad (.1.16)$$

$$\nabla_3 \bar{m}_2 = \frac{ir \cos(\theta)}{\sqrt{2}}; \quad \nabla_3 \bar{m}_3 = \frac{-r \cos(\theta) \sin(\theta)}{\sqrt{2}} \quad (.1.17)$$

Nous pouvons maintenant obtenir des formules pour les expressions (.1.3) qui sont données par (.1.2).

.2 Asymptotiques de r en fonction de x

Rappelons que $F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}$ et $r_{SAdS} = p_+ + p_-$ où $p_{\pm} = \left(Ml^2 \pm \left(M^2 l^4 + \frac{l^6}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}}$.

Commençons par un lemme qui exprime F en fonction de r , r_{SAdS} et l^2 :

Lemme .2.1. *Pour tout $r \in]r_{SAdS}; +\infty[$, nous avons :*

$$F(r) = \frac{(r - r_{SAdS})(r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)}{rl^2}.$$

Preuve. Nous avons :

$$F(r) = \frac{r^3 + rl^2 - 2Ml^2}{rl^2}.$$

Nous devons donc prouver que $r^3 + rl^2 - 2Ml^2 = (r - r_{SAdS})(r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)$. Calculons le terme de droite :

$$\begin{aligned} (r - r_{SAdS})(r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2) &= r^3 + r_{SAdS}r^2 + (r_{SAdS}^2 + l^2)r - r_{SAdS}r^2 \\ &\quad - r_{SAdS}^2r - r_{SAdS}^3 - r_{SAdS}l^2 \\ &= r^3 + l^2r - r_{SAdS}^3 - r_{SAdS}l^2. \end{aligned}$$

Calculons :

$$r_{SAdS}^3 = (p_+ + p_-)^3 = p_+^3 + 3p_+^2p_- + 3p_+p_-^2 + p_-^3,$$

où :

$$p_+^3 + p_-^3 = 2Ml^2$$

$$p_+p_- = \left(M^2l^4 - M^2l^4 - \frac{l^6}{27} \right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{l^2}{3}.$$

D'où :

$$r_{SAdS}^3 = 2Ml^2 - 3\frac{l^2}{3}(p_+ + p_-) = 2Ml^2 - l^2 r_{SAdS}.$$

Nous en déduisons que :

$$(r - r_{SAdS})(r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2) = r^3 + l^2r - 2Ml^2.$$

Ceci prouve donc le lemme. Q.E.D

Donnons maintenant une expression de r_* en fonction de r où r_* vérifie $\frac{dr_*}{dr} = F(r)^{-1}$:

Proposition .2.2. *Pour tout $r \in]r_{SAdS}; +\infty[$, nous avons :*

$$r_*(r) = \ln \left((r - r_{SAdS})^{\alpha_1} (r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)^{-\frac{\alpha_1}{2}} \right) + \frac{l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{(3r_{SAdS}^2 + l^2)(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \arctan \left(\frac{2r + r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (.2.1)$$

Preuve. Utilisant le lemme précédent, nous avons :

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{rl^2}{(r - r_{SAdS})(r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)}.$$

Nous allons chercher $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{rl^2}{(r - r_{SAdS})(r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)} = \frac{\alpha_1}{r - r_{SAdS}} + \frac{\alpha_2 r + \alpha_3}{r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2}.$$

Réduisant au même dénominateur, nous cherchons donc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$l^2 r = (\alpha_1 + \alpha_2) r^2 + (\alpha_1 r_{SAdS} - \alpha_2 r_{SAdS} + \alpha_3) r + \alpha_1 (r_{SAdS}^2 + l^2) - \alpha_3 r_{SAdS}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_2, \\ l^2 &= 2\alpha_1 r_{SAdS} + \alpha_3, \\ \alpha_3 &= \alpha_1 \frac{r_{SAdS}^2 + l^2}{r_{SAdS}}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$l^2 = \alpha_1 \frac{2r_{SAdS}^2 + r_{SAdS}^2 + l^2}{r_{SAdS}},$$

d'où :

$$\alpha_1 = \frac{r_{SAdS} l^2}{3r_{SAdS}^2 + l^2},$$

et :

$$\alpha_3 = \frac{l^2 (r_{SAdS}^2 + l^2)}{3r_{SAdS}^2 + l^2}.$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\frac{dr_*}{dr} &= \frac{\alpha_1}{r - r_{SAdS}} + \frac{-\alpha_1 r + \alpha_3}{r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2} \\ &= \frac{\alpha_1}{r - r_{SAdS}} - \frac{\alpha_1}{2} \frac{2r + r_{SAdS}}{r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2} + \frac{\frac{\alpha_1 r_{SAdS}}{2} + \alpha_3}{r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2}.\end{aligned}$$

Les deux premiers termes admettent pour primitive :

$$\ln \left((r - r_{SAdS})^{\alpha_1} (r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)^{-\frac{\alpha_1}{2}} \right).$$

Etudions le dernier terme, nous avons :

$$\begin{aligned}r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2 &= \left(r + \frac{r_{SAdS}}{2} \right)^2 - \frac{r_{SAdS}^2}{4} + r_{SAdS}^2 + l^2 \\ &= \frac{(2r + r_{SAdS})^2 + 3r_{SAdS}^2 + 4l^2}{4} \\ &= \frac{3r_{SAdS}^2 + 4l^2}{4} \left(1 + \left(\frac{2r + r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right).\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{\frac{\alpha_1 r_{SAdS}}{2} + \alpha_3}{r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2} = \frac{4}{3r_{SAdS}^2 + 4l^2} \frac{\frac{\alpha_1 r_{SAdS}}{2} + \alpha_3}{1 + \left(\frac{2r + r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2}.$$

Calculons :

$$\frac{\alpha_1 r_{SAdS}}{2} + \alpha_3 = \alpha_1 \left(\frac{r_{SAdS}}{2} + \frac{r_{SAdS}^2 + l^2}{r_{SAdS}} \right) = \frac{l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{2 (3r_{SAdS}^2 + l^2)}.$$

D'autre part, une primitive de $\frac{1}{1 + \left(\frac{2r + r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2}$ est :

$$\frac{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \arctan \left(\frac{2r + r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Ainsi, une primitive de $\frac{4}{3r_{SAdS}^2 + 4l^2} \frac{\frac{\alpha_1 r_{SAdS}}{2} + \alpha_3}{1 + \left(\frac{2r + r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2}$ est :

$$\frac{4}{3r_{SAdS}^2 + 4l^2} \frac{l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{2 (3r_{SAdS}^2 + l^2)} \frac{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \arctan \left(\frac{2r + r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Ce qui donne le résultat souhaité.

Q.E.D

Nous allons prouver les asymptotiques suivantes :

Proposition .2.3. *Au voisinage de 0 en x , nous avons :*

$$r = -\frac{l^2}{x} + \frac{1}{3}(x) + o(-x). \quad (.2.2)$$

D'autre part, pour x suffisamment petit et $|x|$ grande, nous avons :

$$r - r_{SAdS} = (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} D_4 e^{2\kappa x} - \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - 3r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)} D_4^2 e^{4\kappa x} + o(e^{4\kappa x})$$

Preuve. Rappelons que $x = r_* - C\frac{\pi}{2}$ où :

$$\begin{aligned} r_*(r) &= \ln \left((r - r_{SAdS})^{\alpha_1} (r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)^{-\frac{\alpha_1}{2}} \right) + C \arctan \left(\frac{2r + r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \alpha_1 \ln \left(\frac{r - r_{SAdS}}{(r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + C \arctan \left(\frac{2r + r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{r_{SAdS}l^2}{3r_{SAdS}^2 + l^2} \\ C &= \frac{l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{(3r_{SAdS}^2 + l^2) (3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Quand r tend vers l'infini, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{r - r_{SAdS}}{(r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1 - \frac{r_{SAdS}}{r}}{\left(1 + \frac{r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \left(1 - \frac{r_{SAdS}}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_{SAdS}}{r} + \frac{3r_{SAdS}^2 - 4(r_{SAdS}^2 + l^2)}{8r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{12(r_{SAdS}^2 + l^2)r_{SAdS} - 5r_{SAdS}^3}{16r^3} + o\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{3r_{SAdS}}{2r} + \frac{3r_{SAdS}^2 - 4l^2}{8r^2} + \frac{9r_{SAdS}^2 - 20l^2}{16r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{r - r_{SAdS}}{(r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} \right) &= - \left(\frac{3r_{SAdS}}{2r} - \frac{3r_{SAdS}^2 - 4l^2}{8r^2} - \frac{9r_{SAdS}^2 - 20l^2}{16r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \right) \\ &\quad - \frac{\left(\frac{3r_{SAdS}}{2r} - \frac{3r_{SAdS}^2 - 4l^2}{8r^2} - \frac{9r_{SAdS}^2 - 20l^2}{16r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \right)^2}{2} \\ &\quad - \frac{\left(\frac{3r_{SAdS}}{2r} - \frac{3r_{SAdS}^2 - 4l^2}{8r^2} - \frac{9r_{SAdS}^2 - 20l^2}{16r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \right)^3}{3} \\ &\quad + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{3r_{SAdS}}{2r} - \frac{3r_{SAdS}^2 + 2l^2}{4r^2} + \frac{r_{SAdS}l^2}{2r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

D'autre part, nous avons :

$$\arctan\left(\frac{2r + r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}}{2r + r_{SAdS}}\right),$$

et nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r + r_{SAdS}} &= \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{1 + \frac{r_{SAdS}}{2r}} \right) \\ &= \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{r_{SAdS}}{2r} + \frac{r_{SAdS}^2}{4r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2r} - \frac{r_{SAdS}}{4r^2} + \frac{r_{SAdS}^2}{8r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \end{aligned}$$

Par suite, nous avons :

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}}}{2r + r_{SAdS}}\right) &= \arctan\left(\left(3r_{SAdS}^2 + 4l^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2r} - \frac{r_{SAdS}}{4r^2} + \frac{r_{SAdS}^2}{8r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)\right)\right) \\ &= \left(3r_{SAdS}^2 + 4l^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2r} - \frac{r_{SAdS}}{4r^2} + \frac{r_{SAdS}^2}{8r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) \\ &\quad - \frac{\left(3r_{SAdS}^2 + 4l^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \left(\frac{1}{2r} - \frac{r_{SAdS}}{4r^2} + \frac{r_{SAdS}^2}{8r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)\right)^3 \\ &\quad + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ &= \frac{\left(3r_{SAdS}^2 + 4l^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2r} - \frac{\left(3r_{SAdS}^2 + 4l^2\right)^{\frac{1}{2}} r_{SAdS}}{4r^2} \\ &\quad + \frac{3\left(3r_{SAdS}^2 + 4l^2\right)^{\frac{1}{2}} r_{SAdS}^2 - \left(3r_{SAdS}^2 + 4l^2\right)^{\frac{3}{2}}}{24r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} r_* &= \alpha_1 \left(-\frac{3r_{SAdS}}{2r} - \frac{3r_{SAdS}^2 + 2l^2}{4r^2} + \frac{r_{SAdS}l^2}{2r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \right) \\ &\quad + \frac{C\pi}{2} - C \left(\frac{\left(3r_{SAdS}^2 + 4l^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2r} - \frac{\left(3r_{SAdS}^2 + 4l^2\right)^{\frac{1}{2}} r_{SAdS}}{4r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\left(3r_{SAdS}^2 + 4l^2\right)^{\frac{1}{2}} r_{SAdS}^2 - \left(3r_{SAdS}^2 + 4l^2\right)^{\frac{3}{2}}}{24r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \right) \end{aligned}$$

Calculons le coefficient devant $\frac{1}{r}$:

$$-\frac{3r_{SAdS}\alpha_1 + C\left(3r_{SAdS}^2 + 4l^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2} = -\frac{\frac{3r_{SAdS}^2 l^2}{3r_{SAdS}^2 + l^2} + \frac{l^2(3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{3r_{SAdS}^2 + l^2}}{2}$$

$$= -\frac{l^2 \frac{6r_{SAdS}^2 + 2l^2}{3r_{SAdS}^2 + l^2}}{2} = -l^2.$$

Calculons le coefficient devant $\frac{1}{r^2}$:

$$\frac{-\alpha_1 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) + C (3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}} r_{SAdS}}{4} = \frac{r_{SAdS} l^2 ((3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - (3r_{SAdS}^2 + 2l^2))}{4(3r_{SAdS}^2 + l^2)} = 0.$$

Calculons le coefficient devant $\frac{1}{r^3}$:

$$\begin{aligned} & \frac{12\alpha_1 r_{SAdS} l^2 - C \left(3(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{1}{2}} r_{SAdS} - (3r_{SAdS}^2 + 4l^2)^{\frac{3}{2}} \right)}{24} \\ &= \frac{12r_{SAdS}^2 l^4 - l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) 3r_{SAdS}^2 + l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) (3r_{SAdS}^2 + 4l^2)}{24(3r_{SAdS}^2 + l^2)} \\ &= \frac{r_{SAdS}^2 l^4 + \frac{l^6}{3}}{3r_{SAdS}^2 + l^2}. \end{aligned}$$

Notons C_2 cette constante. Nous obtenons finalement :

$$x = -\frac{l^2}{r} + \frac{C_2}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Nous remarquons alors que $o(x) = o\left(\frac{1}{r}\right)$. Nous obtenons ainsi :

$$x^3 = -\frac{l^6}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

D'où :

$$\frac{1}{r^3} = -\frac{x^3}{l^6} + o(x^3).$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{r} = -\frac{x}{l^2} - \frac{C_2}{l^8} x^3 + o(x^3).$$

Nous pouvons maintenant obtenir r en fonction de x :

$$\begin{aligned} r &= -\frac{l^2}{x} \frac{1}{1 + \frac{C_2}{l^6} x^2 + o(x^2)} \\ &= -\frac{l^2}{x} \left(1 - \frac{C_2}{l^6} x^2 + o(x^2) \right) \\ &= -\frac{l^2}{x} + \frac{C_2}{l^4} x + o(x), \end{aligned}$$

où :

$$\frac{C_2}{l^4} = \frac{r_{SAdS}^2 + \frac{l^2}{3}}{3r_{SAdS}^2 + l^2} = \frac{3r_{SAdS}^2 + l^2}{3(3r_{SAdS}^2 + l^2)} = \frac{1}{3}.$$

Finalement, on obtient :

$$r = -\frac{l^2}{x} + \frac{1}{3}x + o(x).$$

Ce qui termine la première partie de la preuve.

Remarquons que :

$$e^{\frac{r_*}{\alpha_1}} = e^{\frac{C \arctan\left(\frac{2r+r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\alpha_1} \frac{r-r_{SAdS}}{(r^2+r_{SAdS}r+r_{SAdS}^2+l^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Comme $\alpha_1 = \frac{1}{2\kappa}$ où κ est la gravité de surface, nous obtenons :

$$e^{2\kappa r_*} = e^{2\kappa C \arctan\left(\frac{2r+r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \frac{r-r_{SAdS}}{(r^2+r_{SAdS}r+r_{SAdS}^2+l^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

D'autre part, rappelons que, pour x suffisamment petit (c'est-à-dire $x \rightarrow -\infty$), nous avons r proche de r_{SAdS} . Nous pouvons donc écrire $r = r_{SAdS} + (r - r_{SAdS})$ où $r - r_{SAdS}$ est proche de 0. Calculons le développement suivant :

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{2r+r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}\right) &= \arctan\left(\frac{3r_{SAdS}+2(r-r_{SAdS})}{(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{3r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}{2(3r_{SAdS}^2+l^2)}(r-r_{SAdS}) \\ &\quad - \frac{3r_{SAdS}(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}{4(3r_{SAdS}^2+l^2)^2}(r-r_{SAdS})^2 + o\left((r-r_{SAdS})^2\right). \end{aligned}$$

Calculons :

$$\begin{aligned} &e^{2\kappa C \left(\frac{(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}{2(3r_{SAdS}^2+l^2)}(r-r_{SAdS}) - \frac{3r_{SAdS}(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}{4(3r_{SAdS}^2+l^2)^2}(r-r_{SAdS})^2 + o\left((r-r_{SAdS})^2\right) \right)} \\ &= 1 + \frac{2\kappa l^2(3r_{SAdS}^2+2l^2)}{2(3r_{SAdS}^2+l^2)^2}(r-r_{SAdS}) - \frac{6\kappa l^2(3r_{SAdS}^2+2l^2)r_{SAdS}}{4(3r_{SAdS}^2+l^2)^3}(r-r_{SAdS})^2 \\ &\quad + o\left((r-r_{SAdS})^2\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2\kappa l^2(3r_{SAdS}^2+2l^2)}{2(3r_{SAdS}^2+l^2)^2}(r-r_{SAdS}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{6\kappa l^2(3r_{SAdS}^2+2l^2)r_{SAdS}}{4(3r_{SAdS}^2+l^2)^3}(r-r_{SAdS})^2 + o\left((r-r_{SAdS})^2\right) \right)^2 + o\left((r-r_{SAdS})^2\right) \\ &= 1 + \frac{2\kappa l^2(3r_{SAdS}^2+2l^2)}{2(3r_{SAdS}^2+l^2)^2}(r-r_{SAdS}) \\ &\quad + \frac{\kappa l^2(3r_{SAdS}^2+2l^2)(\kappa l^2(3r_{SAdS}^2+2l^2) - 3r_{SAdS}(3r_{SAdS}^2+l^2))}{2(3r_{SAdS}^2+l^2)^4}(r-r_{SAdS})^2 \\ &\quad + o\left((r-r_{SAdS})^2\right). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
e^{2\kappa C \arctan\left(\frac{2r+r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}\right)} &= e^{2\kappa C \arctan\left(\frac{3r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}\right)} \left(1 + \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)^2} (r - r_{SAdS})\right. \\
&+ \left(\frac{\kappa^2 l^4 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) (3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)^4}\right. \\
&- \left.\frac{3\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)^4}\right) (r - r_{SAdS})^2 \\
&+ o\left((r - r_{SAdS})^2\right).
\end{aligned}$$

Etudions maintenant le développement de $\frac{r - r_{SAdS}}{(r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}$. Nous pouvons, tout d'abord, écrire :

$$r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2 = (r - r_{SAdS})^2 + 3r_{SAdS}(r - r_{SAdS}) + 3r_{SAdS}^2 + l^2.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{r - r_{SAdS}}{(r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{r - r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(r - r_{SAdS})^2 + 3r_{SAdS}(r - r_{SAdS})}{3r_{SAdS}^2 + l^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{r - r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{3r_{SAdS}(r - r_{SAdS})}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)} + o((r - r_{SAdS}))\right) \\
&= \frac{r - r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3r_{SAdS}}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} (r - r_{SAdS})^2 \\
&+ o\left((r - r_{SAdS})^2\right).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
e^{2\kappa r_*} &= e^{2\kappa C \arctan\left(\frac{3r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}\right)} \left(1 + \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)^2} (r - r_{SAdS})\right. \\
&+ o\left((r - r_{SAdS})\right) \times \left(\frac{r - r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3r_{SAdS}}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} (r - r_{SAdS})^2\right. \\
&+ o\left((r - r_{SAdS})^2\right) \\
&= e^{2\kappa C \arctan\left(\frac{3r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2+4l^2)^{\frac{1}{2}}}\right)} \left(\frac{r - r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}\right. \\
&+ \left.\frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - 3r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{2}}}\right) (r - r_{SAdS})^2 + o\left((r - r_{SAdS})^2\right).
\end{aligned}$$

Comme $e^{2\kappa r_*} = e^{2\kappa x} e^{C\kappa\pi}$, il vient :

$$D_4 e^{2\kappa x} = \frac{r - r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - 3r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{2}}} (r - r_{SAdS})^2 + o\left((r - r_{SAdS})^2\right),$$

où :

$$D_4 = e^{-2\kappa C \arctan\left(\frac{3r_{SAdS}}{(3r_{SAdS}^2 + 4l^2)}\right) + C\pi\kappa}.$$

Ainsi :

$$D_4^2 e^{4\kappa x} = \frac{(r - r_{SAdS})^2}{(3r_{SAdS}^2 + l^2)} + o\left((r - r_{SAdS})^2\right).$$

Etant donné que $o((r - r_{SAdS})) = o(e^{2\kappa x})$, nous obtenons finalement :

$$r - r_{SAdS} = (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} D_4 e^{2\kappa x} - \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - 3r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)} D_4^2 e^{4\kappa x} + o(e^{4\kappa x})$$

Ce qui termine la preuve.

Q.E.D

Corollaire .2.4. *Au voisinage de 0, nous avons :*

$$F(r)^{\frac{1}{2}} = -\frac{l}{x} - \frac{x}{6l} + o(x)$$

$$\frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r} = \frac{1}{l} + \frac{x^2}{2l^3} + o(x^2).$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, nous avons :

$$F(r)^{\frac{1}{2}} = \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{4}} D_4^{\frac{1}{2}}}{r_{SAdS}^{\frac{1}{2}} l} e^{\kappa x} + C_3 e^{3\kappa x} + o(e^{3\kappa x}),$$

$$\frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r} = \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{4}} D_4^{\frac{1}{2}}}{r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l} e^{\kappa x} + C_4 e^{3\kappa x} + o(e^{3\kappa x})$$

où :

$$C_3 = \frac{3r_{SAdS}^{\frac{5}{2}} (3r_{SAdS}^2 + l^2) - \left(2\kappa l^2 r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) + 2l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} D_4^{\frac{3}{2}}\right)}{4r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}},$$

$$C_4 = \frac{3r_{SAdS}^{\frac{5}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2) - 2\kappa l^3 r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{4r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}} - \frac{6D_4^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} (2r_{SAdS}^2 + l^2)}{4r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}}.$$

Preuve. 1) Au voisinage de 0, nous avons :

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}.$$

où $\frac{2M}{r} = o(1)$ et $\frac{r^2}{l^2} = \frac{l^2}{x^2} - \frac{2}{3} + o(1)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} F(r)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{l^2}{x^2} + \frac{1}{3} + o(1) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{l}{x} \left(1 + \frac{x^2}{3l^2} + o(x^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{l}{x} \left(1 + \frac{x^2}{6l^2} + o(x^2) \right) \\ &= -\frac{l}{x} - \frac{x}{6l} + o(x) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\frac{1}{r} = -\frac{x}{l^2} - \frac{1}{3l^4}x^3 + o(x^3).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r} &= \left(-\frac{l}{x} - \frac{x}{6l} + o(x) \right) \left(-\frac{x}{l^2} - \frac{1}{3l^4}x^3 + o(x^3) \right) \\ &= \frac{1}{l} + \frac{x^2}{3l^3} + \frac{x^2}{6l^3} + o(x^2) \\ &= \frac{1}{l} + \frac{x^2}{2l^3} + o(x^2). \end{aligned}$$

2) Pour $x \rightarrow -\infty$, nous avons :

$$\begin{aligned} F(r)^{\frac{1}{2}} &= \frac{(r - r_{SAdS})^{\frac{1}{2}} (r^2 + r_{SAdS}r + r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}l} \\ &= \frac{(r - r_{SAdS})^{\frac{1}{2}} \left(3r_{SAdS}^2 + l^2 + 3r_{SAdS}(r - r_{SAdS}) + (r - r_{SAdS})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{l(r_{SAdS} + (r - r_{SAdS}))^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Calculons :

$$\begin{aligned} &\left(3r_{SAdS}^2 + l^2 + 3r_{SAdS}(r - r_{SAdS}) + (r - r_{SAdS})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3r_{SAdS}(r - r_{SAdS}) + (r - r_{SAdS})^2}{3r_{SAdS}^2 + l^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3r_{SAdS}}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)}(r - r_{SAdS}) + o((r - r_{SAdS})) \right) \\ &= (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3r_{SAdS}}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}(r - r_{SAdS}) + o((r - r_{SAdS})). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l(r_{SAdS} + (r - r_{SAdS}))^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{r_{SAdS}^{\frac{1}{2}} l \left(1 + \frac{r - r_{SAdS}}{r_{SAdS}}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{r_{SAdS}^{\frac{1}{2}} l} \left(1 - \frac{r - r_{SAdS}}{2r_{SAdS}} + o((r - r_{SAdS}))\right) \\
&= \frac{1}{r_{SAdS}^{\frac{1}{2}} l} - \frac{1}{2r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l} (r - r_{SAdS}) + o((r - r_{SAdS})).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
F(r)^{\frac{1}{2}} &= (r - r_{SAdS})^{\frac{1}{2}} \left((3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3r_{SAdS}}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} (r - r_{SAdS}) + o((r - r_{SAdS})) \right) \\
&\quad \left(\frac{1}{r_{SAdS}^{\frac{1}{2}} l} - \frac{1}{2r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l} (r - r_{SAdS}) + o((r - r_{SAdS})) \right) \\
&= (r - r_{SAdS})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}{r_{SAdS}^{\frac{1}{2}} l} - \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}{2r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l} (r - r_{SAdS}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3r_{SAdS}^{\frac{1}{2}}}{2l(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} (r - r_{SAdS}) + o((r - r_{SAdS})) \right) \\
&= \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}{r_{SAdS}^{\frac{1}{2}} l} (r - r_{SAdS})^{\frac{1}{2}} + \frac{3r_{SAdS}^2 - (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{2r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} (r - r_{SAdS})^{\frac{3}{2}} \\
&\quad + o\left((r - r_{SAdS})^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}{r_{SAdS}^{\frac{1}{2}} l} (r - r_{SAdS})^{\frac{1}{2}} - \frac{l}{2r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} (r - r_{SAdS})^{\frac{3}{2}} \\
&\quad + o\left((r - r_{SAdS})^{\frac{3}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Rappelons que :

$$\begin{aligned}
r - r_{SAdS} &= (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} D_4 e^{2\kappa x} - \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - 3r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)} D_4^2 e^{4\kappa x} \\
&\quad + o(e^{4\kappa x}).
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
(r - r_{SAdS})^{\frac{1}{2}} &= (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{4}} D_4^{\frac{1}{2}} e^{\kappa x} \left(1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - 3r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} D_4 e^{2\kappa x} + o(e^{2\kappa x}) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{4}} D_4^{\frac{1}{2}} e^{\kappa x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - 3r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{4(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} D_4 e^{2\kappa x} + o(e^{2\kappa x}) \right) \\
&= (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{4}} D_4^{\frac{1}{2}} e^{\kappa x} \\
&\quad - \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - 3r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{4(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}} D_4^{\frac{3}{2}} e^{3\kappa x} + o(e^{3\kappa x}).
\end{aligned}$$

D'où :

$$(r - r_{SAdS})^{\frac{3}{2}} = (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{4}} D_4^{\frac{3}{2}} e^{3\kappa x} + o(e^{3\kappa x}).$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
F(r)^{\frac{1}{2}} &= \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}{r_{SAdS}^{\frac{1}{2}} l} \left((3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{4}} D_4^{\frac{1}{2}} e^{\kappa x} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - 3r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{4(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}} D_4^{\frac{3}{2}} e^{3\kappa x} + o(e^{3\kappa x}) \right) \\
&\quad - \frac{l}{2r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} \left((3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{4}} D_4^{\frac{3}{2}} e^{3\kappa x} + o(e^{3\kappa x}) \right) \\
&= \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{4}} D_4^{\frac{1}{2}} e^{\kappa x}}{r_{SAdS}^{\frac{1}{2}} l} \\
&\quad + \frac{3r_{SAdS}^{\frac{5}{2}} (3r_{SAdS}^2 + l^2) - \left(2\kappa l^2 r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) + 2l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} D_4^{\frac{3}{2}} \right)}{4r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}} e^{3\kappa x} \\
&\quad + o(e^{3\kappa x}).
\end{aligned}$$

Notons $C_3 = \frac{3r_{SAdS}^{\frac{5}{2}} (3r_{SAdS}^2 + l^2) - \left(2\kappa l^2 r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) + 2l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} D_4^{\frac{3}{2}} \right)}{4r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}}$. Comme :

$$\begin{aligned}
r &= r_{SAdS} + (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} D_4 e^{2\kappa x} - \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - 3r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)} D_4^2 e^{4\kappa x} \\
&\quad + o(e^{4\kappa x}),
\end{aligned}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} &= \frac{1}{r_{SAdS} + (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} D_4 e^{2\kappa x} - \frac{2\kappa l^2 (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) - 3r_{SAdS} (3r_{SAdS}^2 + l^2)}{2(3r_{SAdS}^2 + l^2)} D_4^2 e^{4\kappa x} + o(e^{4\kappa x})} \\
&= \frac{1}{r_{SAdS}} \left(1 - \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} D_4}{r_{SAdS}} e^{2\kappa x} + o(e^{2\kappa x}) \right) \\
&= \frac{1}{r_{SAdS}} - \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} D_4}{r_{SAdS}^2} e^{2\kappa x} + o(e^{2\kappa x}).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
\frac{F(r)^{\frac{1}{2}}}{r} &= \left(\frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{4}} D_4^{\frac{1}{2}}}{r_{SAdS}^{\frac{1}{2}} l} e^{\kappa x} + C_3 e^{3\kappa x} + o(e^{3\kappa x}) \right) \left(\frac{1}{r_{SAdS}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} D_4}{r_{SAdS}^2} e^{2\kappa x} + o(e^{2\kappa x}) \right) \\
&= \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{4}} D_4^{\frac{1}{2}}}{r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l} e^{\kappa x} - \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}} D_4^{\frac{3}{2}}}{r_{SAdS}^{\frac{5}{2}} l} e^{3\kappa x} + \frac{C_3}{r_{SAdS}} e^{3\kappa x} + o(e^{3\kappa x}) \\
&= \frac{(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{4}} D_4^{\frac{1}{2}}}{r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l} e^{\kappa x} + C_4 e^{3\kappa x} + o(e^{3\kappa x}),
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
C_4 &= \frac{3r_{SAdS}^{\frac{5}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2) - \left(2\kappa l^3 r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + 2l^2) + 2l^2 (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} D_4^{\frac{3}{2}} \right)}{4r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}} \\
&\quad - \frac{4(3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{2}} D_4^{\frac{3}{2}}}{4r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}} \\
&= \frac{3r_{SAdS}^{\frac{5}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2) - 2\kappa l^3 r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + 2l^2)}{4r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}} \\
&\quad - \frac{6D_4^{\frac{3}{2}} (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} (2r_{SAdS}^2 + l^2)}{4r_{SAdS}^{\frac{3}{2}} l (3r_{SAdS}^2 + l^2)^{\frac{5}{4}}}.
\end{aligned}$$

Q.E.D

Bibliographie

- [1] W.O. AMREIN, A. Boutet de MONVEL et V. GEORGESCU : "*C0-Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-Body Hamiltonians*", volume 135 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1996.
- [2] S.J. AVIS, C.J. ISHAM et D. STOREY : Quantum field theory in anti-de sitter space-time. *Phys. Rev. D*, 18(10):3565–3576, 1978.
- [3] A. BACHELOT : Gravitational scattering of electromagnetic field by a Schwarzschild black hole. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 54:261–320, 1991.
- [4] A. BACHELOT : Asymptotic completeness for the Klein-Gordon equation on the Schwarzschild metric. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 61(4):411–441, 1994.
- [5] A. BACHELOT : Quantum vacuum polarization at the black hole horizon. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 67(2):182–222, 1997.
- [6] A. BACHELOT : The Hawking effect. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 70:41–99, 1999.
- [7] A. BACHELOT : Creation of fermions at the charged black hole horizon. *Ann. H. Poincaré*, 1(6):1043–1095, 2000.
- [8] A. BACHELOT : "The Dirac System On The Anti-De Sitter Universe". *Commun. Math. Phys*, 283(1):127–167, 2008.
- [9] A. BACHELOT : The Klein-Gordon equation in Anti-de Sitter cosmology. *J. Math. Pures Appl.*, 96:527–554, 2011.
- [10] A. BACHELOT et A. MOTET-BACHELOT : Les résonances d'un trou noir de schwarzschild. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 59(1):3–68, 1993.
- [11] D. BATIC : Scattering for massive Dirac fields on the Kerr metric. *J. Math. Phys.*, 48, 2007.
- [12] J.F. BONY et D. HÄFNER : Decay and Non-Decay of the Local Energy for the Wave Equation. *Comm. Math. Phys.*, 282:697–719, 2008.
- [13] P. BREITENLOHNER et D.Z. FREEDMAN : Positive energy in Anti-de Sitter backgrounds and gauged extended supergravity. *Phys. Lett. B*, 115.
- [14] P. BREITENLOHNER et D.Z. FREEDMAN : Stability in gauged extended supergravity. *Ann. Phys.*, 144.
- [15] H.L. CYCON, R.G. FROESE, W. KIRSCH et B. SIMON : *Schrödinger Operators*. Springer, 2008.
- [16] M. DAFERMOS, G. HOLZEGEL et I. RODNIANSKI : Scattering theory construction of dynamical vacuum black holes. arXiv : 1306.5534.
- [17] M. DAFERMOS, I. RODNIANSKI et Y. SHLAPENTOKH-ROTHMAN : Scattering theory for the wave equation on Kerr black hole exteriors. arXiv : 1412.8379.

- [18] T. DAUDÉ : Time-dependent scattering theory for massive charged Dirac fields by a Kerr-Newman black hole. thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, available online at <http://tel.archives-ouvertes.fr>, 2004.
- [19] T. DAUDÉ : Time-dependent scattering theory for massive charged Dirac fields by a Reissner-Nordström black hole. *J. Math. Phys.*, 51, 2010.
- [20] S. DE BIÈVRE, P. HISLOP et I.M. SIGAL : Scattering theory for the wave equation on non-compact manifolds. *Rev. Math. Phys.*, 4:575–618, 1992.
- [21] J. DEREZINSKI et C. GÉRARD : *Scattering Theory of Classical and Quantum N-Particle Systems*. Springer, 1997.
- [22] J. DIMOCK et B.S. KAY : Scattering for the wave equation on the schwarzschild metric. *Gen. Rel. Grav.*, 17(4):353–359, 1985.
- [23] J. DIMOCK et B.S. KAY : Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild metric ii. *J. Math. Phys.*, 27:2520–2525, 1986.
- [24] J. DIMOCK et B.S. KAY : Scattering for massive scalar fields on Coulomb potentials and Schwarzschild metrics. *Class. Quantum Grav.*, 3:71–80, 1986.
- [25] J. DIMOCK et B.S. KAY : Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild metric i. *Ann. Phys.*, 175:366–426, 1987.
- [26] S. DYATLOV : Asymptotics of linear waves and resonances with applications to black holes. arXiv : 1305.1723.
- [27] S. DYATLOV : Exponential energy decay for kerr-de sitter black holes beyond event horizons. *Math. Res. Lett.*, 18:1023–1035, 2011.
- [28] S. DYATLOV : Quasi-normal modes and exponential energy decay for the Kerr-de Sitter black hole. *Comm. Math. Phys.*, 306:119–163, 2011.
- [29] S. DYATLOV : Asymptotic distribution of quasi-normal modes for Kerr-de Sitter black holes. *Ann. Henri Poincaré*, 13:1101–1166, 2012.
- [30] S. DYATLOV et M. ZWORSKI : Mathematical Theory of Scattering Resonances. [http : math.mit.edu/ dyatlov/res/res.pdf](http://math.mit.edu/~dyatlov/res/res.pdf).
- [31] G. F. R. ELLIS et S. W. HAWKING : *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- [32] A. ENCISO et N. KAMRAN : A singular initial-boundary value problem for nonlinear wave equations and holography in asymptotically Anti-de Sitter spaces. *J. Maths. Pure. Appl.*, 103:1053–1091, 2015.
- [33] S. FUJIIÉ et C. LASSER et L. NÉDÉLEC : Semiclassical resonances for two-level Schrödinger operator with a conical intersection, 2005.
- [34] F.G. FRIEDLANDER : Radiation fields and hyperbolic scattering theory. *Mat. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 88:483–515, 1980.
- [35] S. FUJIIÉ et T. RAMOND : Exact WKB analysis and the langer modification with application to barrier top resonances. In C. HOWLS, éditeur : *Towards the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, pages 15–31. Kyoto University Press, 1999.
- [36] T. FUJIIÉ, S. et Ramond : Matrice de scattering et résonances associées à une orbite hétérocline. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 69:31–82, 1998.
- [37] O. GANNOT : Existence of quasinormal modes for Kerr-AdS black holes. arXiv : 1602.08147.
- [38] O. GANNOT : Quasinormal modes for Schwarzschild-ADS black holes : exponential convergence to the real axis. *Commun. Math. Phys.*, 330:771–799, 2014.

- [39] V. GEORGESCU, C. GÉRARD et D. HÄFNER : Asymptotic completeness for superradiant Klein-Gordon equations and applications to the De Sitter Kerr metric. arXiv :1405.5304, 2014.
- [40] C. GÉRARD et A. GRIGIS : Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier. *J. Differ. Eqs.*, 42:149–177, 1988.
- [41] C. GÉRARD et F. NIER : Scattering theory for the perturbations of periodic Schrödinger operators. *J. Math. Kyoto Univ.*, 38(4):595–634, 1998.
- [42] I. GOHBERG et J. LEITERER : "Holomorphic, Operator Functions of One Variable and Applications", volume 192 de *Operator Theory : Advances and Applications*. Birkhäuser, 2009.
- [43] C. GUILLARMOU, S. MOROIANU et J. PARK : Eta invariant and selberg zeta function of odd type over convex co-compact hyperbolic manifolds. *Advances in Math.*, 225:2464–2516, 2010.
- [44] D. HÄFNER : Complétude asymptotique pour l'équation des ondes dans une classe d'espaces-temps stationnaires et asymptotiquement plats. *Ann. Inst. Fourier*, 51(3):779–833, 2001.
- [45] D. HÄFNER : Sur la Théorie de la diffusion pour l'équation de Klein-Gordon dans la métrique de Kerr. *Dissertationes Mathematicae*, 421, 2003.
- [46] D. HÄFNER : Creation of fermions by rotating charged black holes. *Mém. Soc. Math. Fr.*, (117):158 pp, 2009.
- [47] D. HÄFNER et J. P. NICOLAS : Scattering of massless Dirac fields by a Kerr black Hole. *Rev. Math. Phys.*, 16(1):29–123, 2004.
- [48] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND : *Résonances en limite semi-classique*. Mémoires de la Société Mathématique de France, 1986.
- [49] G. HOLZEGEL et J. SMULEVICI : Decay properties of Klein-Gordon fields on Kerr-AdS spacetimes. *Comm. Pure Appl. Math.*, 66(11):1751–1802, 2013.
- [50] G. HOLZEGEL et J. SMULEVICI : Stability of Schwarzschild-AdS for the spherically symmetric Einstein-Klein-Gordon system. *Commun. Math. Phys.*, 317(1):205–251, 2013.
- [51] G. HOLZEGEL et J. SMULEVICI : Quasimodes and a lower bound on the uniform energy decay rate for Kerr-AdS spacetimes. *Anal. PDE*, 7, 2014.
- [52] G. HOLZEGEL et C.M. WARNICK : Boundedness and growth for the massive wave equation on asymptotically Anti-de Sitter black holes. *J. Funct. Anal.*, 266:2436–2485.
- [53] L. HÖRMANDER : *The Analysis of Linear Partial Differential Operators 1-3*. Springer, 1985.
- [54] A. IANTCHENKO : Quasi-normal modes for de Sitter-Reissner-Nordström black holes. arXiv : 1407.3654.
- [55] A. IANTCHENKO et E. KOROTYAEV : Resonances for 1d massless Dirac operators. *J. Difference Equ.*, 256:3038–3066, 2014.
- [56] A. IANTCHENKO et E. KOROTYAEV : Resonances for Dirac operators on the half line. *J. Math. Anal. Appl.*, 420:279–313, 2014.
- [57] A. ISHIBASHI et R.M. WALD : Dynamics in non-globally hyperbolic, static space-times : II. General analysis of prescriptions for dynamics. *Class. Quantum Grav.*, 20, 2003.
- [58] A. ISHIBASHI et R.M. WALD : Dynamics in non-globally hyperbolic, static space-times : III. Anti-de Sitter space-time. *Class. Quantum Grav.*, 21, 2004.
- [59] W.M. JIN : Scattering of massive dirac fields on the schwarzschild black hole. *Class. Quant. Grav.*, 15:3163–3175, 1998.

- [60] A. KHOCHMAN : Resonances and spectral shift function for the semi-classical Dirac operator. *Rev. Math. Phys.*, 19:1071–1115, 2007.
- [61] A. KHOCHMAN : Klein paradox and scattering theory for the semi-classical Dirac equation. *Asymptot. Anal.*, 65:223–249, 2009.
- [62] F. MELNYK : Waves operators for the massive charged linear fields on the Reissner-Nordström metric. *Class. Quant. Grav.*, 17:2281–2296, 2000.
- [63] F. MELNYK : Scattering on Reissner-Nordström metric for massive charged spin- $\frac{1}{2}$ fields. *Ann. Henri Poincaré*, 4(5):813–846, 2003.
- [64] F. MELNYK : The Hawking effect for collapsing star in an initial state of KMS type. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 37:9225–9249, 2004.
- [65] F. MELNYK : The Hawking effect for spin $\frac{1}{2}$ fields. *Comm. Math. Phys.*, 244(3):483–525, 2004.
- [66] R. MELROSE, A. SÀ BARRETO et A. VASY : Asymptotics of solutions of the wave equation on de Sitter-Schwarzschild space. *Comm. in PDE.*, 39:512–529, 2014.
- [67] J.-P. NICOLAS : Conformal scattering on the Schwarzschild metric. arXiv :1312.1386, à paraître dans Annales de l’Institut Fourier.
- [68] J.-P. NICOLAS : Scattering of linear Dirac fields by a spherically symmetric black hole. *Ann. Inst. H. Pioncaré Phys. Théor.*, 62(2):35–58, 1995.
- [69] B. O’NEILL : *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [70] A. PAIS : *Subtle is the lord*. Oxford University Press, 2005.
- [71] R. PENROSE et W. RINDLER : *Spinors and Space-time*, volume I de *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1984.
- [72] T. RAMOND : Semiclassical study of quantum scattering on the line. *Commun. Math. Phys.*, 177:221–254, 1996.
- [73] M. REED et B. SIMON : *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume 1-4. Academic Press, 1975.
- [74] A. SÀ BARRETO et M. ZWORSKI : Distribution of resonances for spherical black holes. *Math. Res. Lett.*, 4:103–122, 1997.
- [75] J. SJÖSTRAND : A trace formula and review of some estimates for resonances. *Microlocal analysis and spectral theory*, 490:377–437, 1997.
- [76] J. SJÖSTRAND et M. ZWORSKI : Complex scaling and distribution of scattering poles. *Jour. Amer. Math. Soc.*, 4:729–769, 1991.
- [77] S. TANG et M. ZWORSKI : From quasimodes to resonances. *Math. Res. Lett.*, 5:261–272, 1998.
- [78] B. THALLER : *The Dirac Equation*. Springer, 1992.
- [79] A. VASY : Microlocal analysis of asymptotically hyperbolic and Kerr-de Sitter spaces. *Inv. Math.*, 194:381–513, 2013.
- [80] R.M. WALD : *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [81] C. WARNICK : On quasinormal modes of asymptotically anti-de sitter black holes. arXiv : 1306.5760, à paraître dans Comm. Math. Phys.
- [82] S. WEINBERG : *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.