

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

# Modèles minimaux aux interfaces de la physique.

Guillaume Grégoire



Guillaume Grégoire

a présenté publiquement le 8 septembre 2016  
ses travaux pour l'obtention de

l'Habilitation à diriger des recherches

# Modèles minimaux aux interfaces de la physique.

Président	
Rapporteurs	Sara Ducci Philippe Marcq Sriram Ramaswamy
Examineurs	Éric Clément Olivier Dauchot Clément Sire
invité	Francisco Chinesta

Ce document a été réalisé avec la  
classe classeUPD, elle-même  
fondée sur la classe memoir.  
Cette classe est libre d'utilisation  
et de diffusion



## Résumé

Les mouvements collectifs d'animaux, les déserts de dunes mobiles et les écoulements de micelles géantes ont ceci de commun que l'injection d'énergie au niveau local conduit à une dynamique collective complexe. Les interactions au niveau microscopique peuvent être inconnues, ou alors sont tellement complexes qu'il est nécessaire de simplifier les ingrédients élémentaires. La modélisation permet de comprendre le poids de chacun des ingrédients sur la dynamique globale. On en obtient ainsi un tableau causal intelligible. C'est le premier intérêt des modèles minimaux.

Mais les concepts d'universalité et de modèles minimaux ont une signification bien établie et plus restreinte dans le cadre de la physique statistique des systèmes à l'équilibre. Ils sont attachés à l'existence de transitions continues. Un cadre théorique équivalent à celui des phénomènes critiques n'existe pas lorsque le système est maintenu loin de l'équilibre. L'analyse des données issues des simulations numériques est habituellement réalisée par analogie en suivant les résultats analytiques obtenus à l'équilibre.

Nous présentons trois cas à différentes étapes du projet de recherche. Dans le cas des mouvements collectifs, nous montrons que les analogies avec les matériaux ferromagnétiques ont mené à des conclusions erronées. Une longue étude critique des simulations numériques a montré que la transition est discontinue. Une instabilité dans les assemblées en mouvement produit un motif spatio-temporel similaire à une onde solitaire. D'autres études récentes proposent une nouvelle analogie avec les phases smectiques.

Les modèles de déserts de dunes permettent d'ordonner les effets des différentes interactions entre dunes. Ainsi, nous avons donné une explication à l'auto-organisation des déserts. Lorsque les modèles sont étudiés sans prendre en compte leur dimension géophysique, nous obtenons des comportements déjà observés dans d'autres modèles de physique statistique hors d'équilibre : percolation, réaction-diffusion, transfert de masse. Cependant nous montrons qu'aucune analogie ne permet d'expliquer de manière convainquante nos résultats.

Enfin, considérant les écoulements de solutions de micelles géantes, nous proposons un modèle minimal permettant de mieux comprendre les mécanismes à l'œuvre dans les écoulements en bande de cisaillement.

## Abstract

Collective motions, deserts of mobile dunes and flows of giant micelles share in common the fact that the local injection of energy leads to complex collective dynamics. At a microscopic level, interactions may remain unknown or they reach a such level of complexity that it is necessary to simplify the elementary ingredients. Models allow to understand the weight of each ingredients on the global dynamics. We then get an understandable picture. This is the main goal of minimal models.

But the underlying ideas on universality and minimal models have a narrower and a more accurate meaning in the framework of at-equilibrium statistical physics. Such concepts are linked to the existence of continuous transition. Similar theoretical results do not exist for driven systems. Then the data analysis of numerical simulations are usually done following analogies with critical phenomena.

Here, we present three cases at three different steps of study. For collective motions, we show that analogies with ferromagnetic materials lead to wrong conclusions. A long careful study of numerical simulations reveals a discontinuous phase transition. An instability leads to a non-linear dynamical pattern which gets similar characteristics to solitary waves. Other recent studies make analogies with smectic phases.

Models of deserts of dunes allow to understand the effects of the different dunes interactions. Thus we explained how deserts could self-organise in time and in space. When models are used far from the geophysical hypotheses, we get behaviours which have already been observed in other out-of-equilibrium physical systems : percolation, reaction-diffusion, mass transfer. However we show that none of those analogies are fully conclusive in regard to our results.

Last, in considering flows of solutions of giant micelles, we propose a minimal model in the aim to give a better understanding of the mechanisms of shear banding.

À Raphaël, Gabriel, Marie, Thomas et  
Stéphanie



---

# Table des matières

---

Résumé	iii
Abstract	iv
Titres et travaux	xi
Curriculum Vitae	xiii
Coordonnées . . . . .	xiii
Cursus universitaire . . . . .	xiii
Parcours professionnel . . . . .	xiv
Encadrement . . . . .	xiv
Responsabilités scientifiques . . . . .	xiv
Collaborations financées . . . . .	xv
Animation scientifique . . . . .	xv
Communications scientifiques	xvii
Publications . . . . .	xvii
Interventions en séminaires et conférences . . . . .	xix
Enseignement	xxi
Responsabilités . . . . .	xxi
Cours . . . . .	xxi
Travaux dirigés . . . . .	xxi
Travaux pratiques . . . . .	xxi
Interrogations orales . . . . .	xxii
I. – Propos liminaire	1
I.1. – L’organisation du monde . . . . .	1
I.2. – De l’émergence aux modèles minimaux . . . . .	2
I.3. – L’apport des transitions de phase . . . . .	3
I.4. – Hors de l’équilibre . . . . .	5
I.5. – De plus en plus complexe . . . . .	6

Partie I. – Mouvements collectifs	9
II. – Contexte biologique	11
II.1. – Omniprésence . . . . .	11
II.2. – L'étude des causes . . . . .	12
II.3. – Propriétés des troupeaux . . . . .	15
II.4. – Hors de la biologie . . . . .	17
III. – Modélisation des mouvements collectifs	19
III.1. – Différents points de vue . . . . .	19
III.2. – Les différentes échelles . . . . .	21
III.3. – La topologie . . . . .	22
III.4. – Les cadres de pensée . . . . .	23
III.5. – Ingrédients . . . . .	25
IV. – Le modèle de Vicsek	27
IV.1. – Modèle de Vicsek . . . . .	27
IV.2. – Revisiter la transition continue . . . . .	29
IV.3. – De l'embarras . . . . .	31
V. – Équations hydrodynamiques	33
V.1. – Modèle à temps continu . . . . .	33
V.2. – Théorie cinétique . . . . .	34
V.3. – Les équations hydrodynamiques . . . . .	35
V.4. – Diagramme des phases . . . . .	36
V.5. – Solitons . . . . .	37
V.6. – Conclusion . . . . .	37
VI. – Développements récents et ouverture	39
VI.1. – Dernières explications . . . . .	39
VI.2. – Perspectives . . . . .	40
Partie II. – Déserts de barchanes	43
VII. – Les déserts de barkhanes	45
VII.1. – La barkhane . . . . .	45
VII.2. – Le paradoxe de barkhanes . . . . .	46
VII.3. – La modélisation . . . . .	47
VIII. – Un modèle de barkhanes	49
VIII.1. – Présentation du modèle . . . . .	49
VIII.2. – Variables et dimensionnement . . . . .	52
VIII.3. – Structures des déserts . . . . .	53
VIII.4. – Conservation du sable . . . . .	56
VIII.5. – Diagramme des phases . . . . .	62
IX. – Analogies	63
IX.1. – Percolation . . . . .	63
IX.2. – Processus de réaction-diffusion . . . . .	66

---

IX.3. – Modèles avec redistribution de masse . . . . .	71
IX.4. – Bilan et ouvertures . . . . .	76
IX.5. – Conclusion . . . . .	80
Partie III. – Bandes de cisaillement	83
X. – Bandes de cisaillement	85
X.1. – Polymères et micelles . . . . .	85
X.2. – Instabilités et mécanismes . . . . .	86
X.3. – Modélisation et projet . . . . .	87
XI. – Conclusion	91
Articles importants	93
A. – Mouvements collectifs	95
B. – Déserts de barchanes	149
C. – Bandes de cisaillement	157
Table des figures	181
Table des illustrations	181
Liste des tableaux	185
Bibliographie	187





Titres et travaux



---

# Curriculum Vitae

---

GUILLAUME GRÉGOIRE, 43 ans, marié, quatre enfants.

## Coordonnées

**adresse** Matière et Systèmes Complexes (MSC UMR 7057)  
Université Paris-Diderot-Paris 7  
case 7056  
10, rue Thomas Mann  
75205 Paris Cedex 13  
  
École Centrale de Nantes  
Institut de Calcul Intensif  
bureau T214  
1, rue de la Noë  
BP 92101  
44321 Nantes Cedex 3

**mél** guillaume.gregoire@univ-paris-diderot.fr  
guillaume.gregoire@ec-nantes.fr

**tél.** 02 40 37 25 48

## Cursus universitaire

**1999–2002** thèse de physique statistique au Service de Physique de l'État Condensé du CEA (SPEC) ayant pour titre : *Comportements collectifs d'animaux et physique hors d'équilibre*, soutenue le 18 décembre 2002 et obtenue avec la mention très honorable et avec les félicitations du jury.

**1997–1998** DEA *Champs, Particules, Matière* (Paris 7), option matière, ordre et désordre ;

**1997** diplôme d'ingénieur de l'École Centrale de Nantes ;

**1996–1997** option physique de la matière de l'École Centrale de Paris ;

## Parcours professionnel

- 2003–** maître de conférence à l’université Paris–Diderot auprès du laboratoire Matière et Systèmes Complexes (UMR 7057, Paris 7–CNRS) ;
- 2015–2016** Congé pour Recherche et Conversion Thématique, un an à temps plein, CNU 28 ;
- 2009** Délégation au CNRS à temps plein ;
- 2002–2003** ATER à l’université Paris 7–Denis Diderot (demi–service) auprès du Laboratoire de Physique Statistique (UMR 8550, ENS–CNRS) ;
- 1999–2002** thèse au Service de Physique de l’État Condensé du CEA Saclay (SPEC/DRECAM/DSM/CEA) ;
- 1998–1999** volontaire au service national en administration (VSNA) auprès du CERN, Genève.

## Encadrement

- 2014** stage de M2 de G. BRIAND : *modélisation des déserts de barkhane avec conditions aux bords de type absorbantes* ;  
stage de M1 de R. POUSSE : *simulations des équations hydrodynamiques de mouvements collectifs* ;
- 2013** stage *recherche* pour l’École des Ponts et chaussées, F. Gence : *mouvements coordonnés de myxobactéries* ;  
stage de L3 magister, P. Becquet : *des mouvements dirigés par un chef, ou créant une instabilité spatiale ?*
- 2010–2013** Thèse de M. Génois : *simulation de champs de dunes par modèle d’agents* ;
- 2010** stage de M2, M. Génois : *simulation de champs de dunes par modèle d’agents* ;  
stage post-doctoral, S. Léonard : *études numériques des équations hydrodynamiques issues de la dynamique de particules auto–propulsées* ;
- 2005–2009** Thèse de F. Raynaud portant sur *les modèles de mouvements collectifs tri-dimensionnels* ;
- 2007** stage de L3, J. Grynberg : *modélisation de mouvements collectifs de poissons dans un aquarium*.
- 2005** stage de M2 de F. Raynaud : *Pavage de Voronoï tridimensionnel* ;

## Responsabilités scientifiques

- 2012–2015** membre du conseil scientifique de l’Institut des Humanités de Paris ;
- 2011–2015** membre du conseil scientifique de l’UFR de Physique ;
- 2006–2015** co–administrateur des serveurs informatiques du laboratoire ;
- 2004–2006** membre élu du conseil du laboratoire Matière et Systèmes Complexes (UMR 7057).

## Collaborations financées

- 2008–2011** groupe Dycoact, financé par l'ANR SYSCOMM, étudiant les mouvements collectifs de particules actives ;
- 2004–2008** réseau européen STARFLAG mené par G. Parisi (Istituto Nazionale per la Fisica della Materia, à Rome), portant sur l'étude des vols d'étourneaux, leur observation, la reconstruction tri-dimensionnelle de leur vol et leur modélisation.

## Animation scientifique

### Groupes de réflexion et de diffusion du savoir

- 2012** groupe de réflexion concernant les mouvements collectifs en interne au laboratoire MSC ;
- 2008** membre d'un groupe de rédaction de posters de vulgarisation *cf* <http://www.msc.univ-paris-diderot.fr/GrandPublic/> ;
- 2006–2009** co-organisateur d'un groupe de réflexion scientifique transversale au laboratoire ;
- 2003–2004** co-organisateur des séminaires du laboratoire.

### Travail de rapporteur

- 2016–** rapporteur à Journal of Theoretical Biology ;
- 2013–** rapporteur à PLOS ;
- 2009–** rapporteur à Journal of the Royal Society–Interface ;
- 2007-2011** membre du Groupe d'Experts Thématiques à l'UFR de Physique (groupe proposant les comités de sélection, notamment) ;
- 2004–** rapporteur à Physical Review Letter ;
- 2003–** rapporteur à Physical Review E.



---

# Communications scientifiques

---

## Publications

h-index : 17,

article le plus cité : Phys. Rev. Lett, **92**, 025702 (2004), 310 citations,  
moyenne du nombre de citations par article : 55.

## Revue à comité de lecture

- 2016** Génois M., Hersen P., Bertin É., Courrech du Pont S., et Grégoire G., *Out of equilibrium stationary states, percolation, and subcritical instabilities in a fully non conservative system*, soumis à Phys. Rev. E.
- 2014** Perna A., Grégoire G. et Mann R. P., *A note on the duality between interaction responses and mutual positions in flocking and schooling*, Movement ecology, **2**, 22 ;  
Bertin É., Chaté H., Ginelli F., Grégoire G., Léonard S. et Peshkov A., *Comment on Ihle, "Towards a quantitative kinetic theory of polar active matter"*, EPJ - Special Topics, **223**, 1419 ;
- 2013** Génois M., Courrech du Pont S., Hersen P. et Grégoire G., *An agent-based model of dune interactions produces the emergence of patterns in deserts*, Geophys. Res. Lett., **40**, 3909 ;  
Génois M., Hersen P., Courrech du Pont S. et Grégoire G., *Spatial structuring and size selection as collective behaviours in an agent-based model for barchan fields.*, Eur. Phys. Journal B., **86**, 447 ;
- 2012** Fardin M.-A., Ober T. J., Gay C., *et al.*, *Potential "ways of thinking" about the shear-banding phenomenon*, Soft Matter, **8**, 910 ;
- 2011** Fardin M.-A., Ober T. J., Gay C., *et al.*, *Criterion for purely elastic Taylor-Couette instability in the flows of shear-banding fluids*, Europ. Phys. Lett., **96**, 44004 ;
- 2010** Fardin M.-A., Lopez D., Croso J., Grégoire G., Cardoso O., McKinley G. H. and Lerouge S., *Elastic Turbulence in Shear Banding Wormlike Micelles*, Phys. Rev. Lett. **104**, 178303 ;
- 2009** Bertin É, Droz M. and Grégoire G., *Hydrodynamic equations for self-propelled particles : microscopic derivation and stability analysis*, J. Phys. A : Math. Theor. **42** 445001 ;

- Fardin M.-A., Lasne B., Cardoso O., Grégoire G., Argentina M., Decruppe J.-P. and Lerouge S., *Taylor-like vortices in Shear Banding Flow of Giant Micelles*, Phys. Rev. Lett. **103**, 028302 ;
- 2008** Lerouge S., Fardin M.-A., Argentina M., Grégoire G. and Cardoso O., *Interface dynamics in shear-banding flow of giant micelles*, Soft Matter **4**, 1808 ;
- Chaté H., Ginelli F., Grégoire G. and Raynaud E., *Collective motion of self-propelled particles interacting without cohesion*, Phys. Rev. E. **77**, 046113 ;
- 2007** Chaté H., Ginelli F., and Grégoire G., *Comment on “Phase transitions in systems of self-propelled agents and related network models”*, Phys. Rev. Lett., **99** 229601 ;
- 2006** Bertin E., Droz M., and Grégoire G., *Boltzmann and hydrodynamic description for self-propelled particles*, Phys. Rev. E, **74** 022101 ;
- 2004** Grégoire G. and Chaté H., *Onset of collective and cohesive motion*, Phys. Rev. Lett. **92**, 025702 ;
- 2003** Grégoire G., Chaté H. and Tu Y., *Moving and staying together without a leader*, Physica D **181**, 157 ;
- 2002** Prigent A., Grégoire G., Chaté H., Dauchot O. and van Saarloos W., *Large-scale Finite-Wavelength modulation of turbulent shear flows*, Phys. Rev. Lett. **89**, 014501 ;
- 2001** Grégoire G., Chaté H. and Tu Y., *Active and passives particle : Modeling beads in a bacterial bath*, Phys. Rev. E **64**, 011902 ;
- Grégoire G., Chaté H. and Tu Y., *Comment on “Particle Diffusion in a Quasi-Two-Dimensional Bacterial Bath”*, Phys. Rev. Lett. **86**, 556 ;
- 1999** Chaix P., Piovela N. and Grégoire G., *Superradiant, single-mode and nonlinear regimes of short pulse free electron laser oscillators*, Phys. Rev. E **59**, 1136.

### Compte-rendus de conférence

- 2008** Chaté H., Ginelli F., Grégoire G., Peruani F. and Raynaud E., *Modeling Collective Motion : Variations on the Vicsek model*, Euro. Phys. Journal B **64**, 451-456 ;
- 2003** Prigent A., Grégoire G., Chaté H. and Dauchot O., *Long wavelength modulation of turbulent shear flows*, Physica D **174**, 100 ;
- 2000** Fournier P. *et al*, *Status of CO<sub>2</sub> laser ion source at CERN*, Rev. Sci. Instr **71**, 924 ;
- Grégoire G. *et al*, *Aberrations due to solenoid focusing of a multiple charged high-current ion beam*, Rev. Sci. Instr **71**, 1097 ;

### Affiche

- 2013** Génois M., Courrech S., Hersen P. et Grégoire G., *Modeling the evolution of a barchan field*, workshop Saladyn (IPGP), 2013, Paris ;
- 2012** Génois M., Courrech S., Hersen P. et Grégoire G., *Modeling the evolution of a barchan field*, Rencontres du non-linéaire, 2012, Paris ;



- 2006** Raynaud F., Grégoire G., Chaté H., *Traveling Bands in SPP Models*, pour la conférence : Workshop on Driven States in Soft and Biological Matter, ICTP, Trieste ;

### Ouvrage pédagogique

- 2010** Chaté H., Grégoire G., *Forms Emerging from Collective Motion*, in Lesne A., Bourguine P. (éd.), *Morphogenesis : Origins of Patterns and Shapes*, Berlin, Springer ;
- 2006** Chaté H., Grégoire G., *Les formes émergeant du mouvement collectif*, in Lesne A., Bourguine P. (éd.), *Morphogénèse, l'origine des formes*, Paris : les éditions Belin ;

### Articles de vulgarisation

- 2004** Grégoire G., Chaté H., *La forme des groupements animaux*, Pour La Science, hors-série, juillet–septembre ;
- 2003** Plévert L., Grégoire G., *Les poissons de Panurge*, Pour la science **309**, 14.

## Interventions en séminaires et conférences

- 2015** Grégoire G. *et al*, *Apport de la physique à la compréhension des mouvements collectifs*, séminaire du Laboratoire EMH, Ifremer, Nantes ;  
Grégoire G. *et al*, *Objets auto-propulsés : deux exemples de modèles minimaux aux interfaces de la physique.*, séminaire du Laboratoire GeM, École Centrale Nantes ;
- 2014** Grégoire G. *et al*, *Apport de la physique à la compréhension des mouvements collectifs*, séminaire du Laboratoire Lemar, Ifremer-CNRS-UBO, Brest ;  
Grégoire G. *et al*, *Objets auto-propulsés et modèles minimaux*, séminaire du Laboratoire de Physique Statistique, ENS ;  
Grégoire G. *et al*, *Objets auto-propulsés et modèles minimaux*, séminaire du laboratoire d'Astro-particules et cosmologie , université Paris-Diderot ;
- 2012** Génois M., Courrech S., Hersen P. et Grégoire G., *Modeling the evolution of a barchan field*, Eur. Conf. on complex Systems, Brussels ;
- 2011** Génois M., Courrech S., Hersen P. et Grégoire G., *Modélisation de l'évolution d'un champ de barkhanes*, les Journées de Physique Statistique, Paris ;
- 2010** Léonard S., Dantan Ph., Chaté H., Bertin É. and Grégoire G., *Hydrodynamic description of collective motion for polar self-propelled particles*, Cairns (19–23 juillet) ;
- 2009** Grégoire G., *Un modèle minimal de mouvements collectifs*, séminaire Buffon-Condorcet, Paris (28 septembre) ;  
Grégoire G., Bertin É., Droz M., *How do herds move ?*, in ICCSA, le Hâvre (29 juin–2 juillet, conf. invité) ;

- Grégoire G., Bertin É., Droz M., *Polar self-propelled particles : A comparison of kinetic approach and agent-based model*, in Self-organization and dynamics of active matter, Paris (26–30 janvier, conf. invité) ;
- 2008** Fardin M.A., Lasne B., Cardoso O., Grégoire G., Argentina M., Decruppe J.P., et Lerouge S., *Taylor-like vortices in Shear-Banding Flow*, the XV<sup>th</sup> international congress of rheology, Monterey (5–8 août) ;
- 2007** Lerouge S., Argentina M., Decruppe J.P., Grégoire G., Fardin M.A., Cardoso O., *Interface dynamics in the shear-banding flow of giant micelles*, Euromech colloquium 492 : shear-banding phenomena in entangled systems, Londres (3-5 septembre) (conf. invitée) ;
- Chaté H., Raynaud F., Grégoire G. and Ginelli F., *Collective properties of active particles*, Statphys23, Gênes (9-13 juillet) ;
- Chaté H., Raynaud F., Grégoire G. and Ginelli F., *Collective properties of active particles*, 'Nonlinear Collective Behaviour : Networks, Swarming and Reaction Diffusion Dynamics', Lorentz Center, Leiden (11-15 juin) ;
- Lerouge S., Argentina M., Decruppe J.P., Grégoire G., *Interface instability in the shear-banding flow of wormlike micelles*, 4th Annual European Rheology Conference, Naples, (12-14 avril) ;
- 2006** Chaté H., Raynaud F., Grégoire G., *Collective dynamics of polar and apolar self-propelled particles*, Workshop on Driven States in Soft and Biological Matter, ICTP Trieste, (18-28 avril) ;
- Chaté H., Grégoire G., *Phase transitions in nonequilibrium stationary states*, le IV<sup>ème</sup> Séminaire Transalpin de Physique, Champex-Lac, Suisse (5-11 mars) ;
- 2005** Grégoire G., Chaté H., *Phase transition in self-propelled-particles*, séminaire devant les membres du réseau européen STARFLAG, Rome ;
- 2003** Grégoire G., Chaté H., *Mouvements collectifs animaux et physique hors d'équilibre*, l'école thématique de Berder sur l'auto-organisation en biologie (invité) ;
- Grégoire G., Chaté H., *Pas besoin de chef pour aller de l'avant*, séminaire Matière Molle et Biologie, organisé par les laboratoires LMDH, LMCP, LI2C et LBHP, Paris ;
- Grégoire G., Chaté H., *Pas besoin de chef pour aller de l'avant*, séminaire du Laboratoire de Physique Statistique de l'ENS, Paris ;
- 2002** Grégoire G., Chaté H. et Tu Y., *Modèles de particules auto-propulsées*, Journées de Physique Statistique, à l'ESPCI, Paris ;
- 2001** Grégoire G., Chaté H. et Tu Y., *Modèles de particules auto-propulsées*, séminaire de l'Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors d'Équilibre, Marseilles ;
- Grégoire G., Chaté H. and Tu Y., *Active and passives particle : Modeling beads in a bacterial bath*, Dynamics Days Europe 2001, Dresden, Allemagne.

---

# Enseignement

---

## Responsabilités

- 2012–2015** membre élu au conseil du Département Sciences Exactes ;  
**2011–2014** membre de la commission d'admission en Licence ;  
**2007–2008** responsabilité des salles de TP de physique en L1–L2.

## Cours

- 2014–2015** hydrodynamique avancé, M1 ;  
**2011–2014** modélisation des mouvements collectifs, M2, parcours recherche  
*Matière et biologie* ;  
**2010–2013** introduction à la physique au premier semestre de première  
année de Licence (L1) ;  
**2009–2010** introduction à la physique pour des non-scientifiques, M1, par-  
cours Lophiss, mention *Histoire et philosophie des sciences*.

## Travaux dirigés

- 2005–2007** thermodynamique en L2, préparation aux concours des écoles  
d'ingénieurs ;  
**2003–2005** mécanique physique en L1 ;  
**2000–2001** statistiques et probabilités, à l'IUT de Saint-Denis (Paris 13), en  
formation continue de techniques de communication ;  
**1999–2002** fiabilité–analyse de données à l'IUP de Bobigny (Paris 13) ;  
**1999–2000** mathématiques financières, à l'IUT de Saint-Denis (Paris 13),  
en 1<sup>re</sup> année de Gestion en Entreprise et en Administration (GEA) ;

## Travaux pratiques

- 2014–2015** hydrodynamique physique en S1, M1 ;

- 2013–2015** physique pour l'enseignement S1 et S2, M1 préparation à la nouvelle forme de l'épreuve d'admission du CAPES ;
- 2010–2013** physique pour l'enseignement S1, M1 préparation au montage pour le CAPES ;
- 2010–2013** panorama de la physique moderne, L1 ;
- 2011–2012** mécanique physique, L1 ;
- 2005–2008** mécanique physique, L1 ;
- 2005–2008** informatique pour physicien, L2 (langage C) ;
- 2002–2005** projet de physique expérimentale.

## Interrogations orales

- 2009–2010** physique en L1 ;
- 2001–2002** physique en mathématiques supérieures (PCSI) au lycée Stanislas (Paris 6<sup>e</sup>) ;
- 1996–1998** physique en mathématiques supérieures (PCSI) au lycée Stanislas (Paris 6<sup>e</sup>).

---

## Propos liminaire

---

*Expliquer*, ce n'est jamais que décrire une manière de *Faire* : ce n'est que refaire par la pensée. Le *Pourquoi* et le *Comment*, qui ne sont que des expressions de ce qu'exige cette idée, s'insèrent à tout propos, commandent qu'on les satisfasse à tout prix. La métaphysique et la science ne font que développer *sans limite* cette exigence.

---

Paul VALÉRY [340]

Le travail présenté dans ce document concerne la modélisation, d'une part des mouvements collectifs d'animaux, d'autres parts de la structure spatio-temporelle des déserts de barkhanes. Pour ces deux études, une seule méthode sera appliquée. Il s'agit, pour *un système complexe* particulier, d'imaginer *des modèles minimaux* et de montrer comment *émergent* ses propriétés macroscopiques.

Auparavant nous considèrerons un par un les termes de cette méthode afin d'en donner des définitions et de les situer dans leur contexte historique et scientifique. Cette introduction historique ne se veut pas rigoureuse, ni exhaustive. Mais la concordance et l'enchaînement historique montrent l'intrication des notions utilisées.

### I.1. – L'organisation du monde

La philosophie et la métaphysique ont tenté, ou tentent encore de fournir des grands principes qui mènent notre monde. La question de savoir s'il faut un ordonnateur, externe à la matière, ou si des lois fondamentales, mais universellement partagées, suffisent à organiser et à créer la diversité du monde traverse l'histoire. Vitalisme contre réductionnisme, créationnisme contre évolutionnisme, cette dualité de la réflexion n'est pas qu'un fait historique passé. Elle s'impose encore, peut-être inconsciemment, dans les descriptions scientifiques, par exemple dans le fait de savoir s'il faut un chef pour ordonner les groupes d'animaux, ou dans les expressions du vulgarisateur qui utilise l'anthropomorphisme, ou des aphorismes tel « Dame Nature n'a pas jugé utile de ... »



Illustr. I.1. – Coquille de *Nautilus macromphalus*.



Illustr. I.2. – D'ARCY WENTWORTH THOMPSON (1860-1948)

1. De telles études ont un écho dans les recherches contemporaines. Par exemple, l'analogie entre la phyllotaxie et le séchage des gels [78, 37] et celle entre mousses et tissus [167, 203, 184] ont été considérées récemment avec attention.

2. Il cite notamment les travaux de S. LEDUC [219] sur la diffusion et le moyen d'imiter les structures vivantes.

Il est bon de relire la partie V du *Discours de la méthode* [96] pour se rappeler combien il fut dangereux de soutenir le concept d'auto-organisation face à une société religieuse et anthropocentrée. Derrière bien des précautions littéraires, DESCARTES présente le fait que la matière a ses lois propres qui lui suffisent à s'organiser à partir d'une situation désordonnée. Cependant, le propos reste général.

C'est peut-être D'ARCY THOMPSON [327, 46] qui, en 1917, en comparant les formes issues du monde inanimé et celles des êtres vivants, généralise l'idée d'auto-organisation. Il montre les analogies entre des molécules qui subissent des transitions de phase et s'organisent suivant une direction privilégiée, et les structures du vivant qui subissent aussi des brisures de symétries. Il les compare aux formes obtenues sous un champ hydrostatique<sup>1</sup>, par des écoulements hydrodynamiques, par des impacts de gouttes, *etc.* L'hypothèse sous-jacente de toutes ces comparaisons est que le monde vivant s'organise à l'image du monde physique.

Mais ces travaux restent au niveau de l'analogie formelle et bien que D'ARCY THOMPSON connaisse les effets de la diffusion<sup>2</sup>, et bien qu'il connaisse aussi l'importance des réactions auto-catalytiques, il faut attendre les études de TURING [339] pour que la morphogénèse soit écrite en langage mathématique. De même D'ARCY THOMPSON connaît les expériences de H. BÉNARD [24] concernant les motifs de convection. Il y a donc aussi dans son livre les prémices du rôle des instabilités. Cependant, même la physique d'alors est surtout une physique de l'équilibre, voire du faiblement hors d'équilibre où les modèles linéaires s'appliquent. Ensuite, le renouveau de la physique non-linéaire et le rayonnement de PRIGOGINE [262] ont mis en exergue l'importance d'une source de *hors d'équilibre*, contre-balancée par un puits de dissipation, dans l'apparition des motifs spatiaux et dynamiques.

Au cours de ce rapide historique, il apparaît que la notion d'organisation croise celles des transitions de phase, puis de la physique non-linéaire avec les outils associés que sont les bifurcations. Il en reste, peut-être de manière erronée, une impression que l'organisation est un phénomène relativement continu menant du *chaos* (au sens métaphysique) au monde ordonné. L'organisation de la matière peut se révéler source de surprises où connaître les propriétés d'un des niveaux microscopiques de la matière ne permet pas de déduire facilement l'état macroscopique final. En quelque sorte, le tout peut se révéler supérieur à la somme de ces parties. On parle alors d'*émergence*.

## I.2. – De l'émergence aux modèles minimaux

Ce concept est, lui aussi, d'abord défini par les philosophes. Certains l'attribuent à ARISTOTE. Dans son enquête sur la substance (livre VIII, 1045a, [6]), il définit l'unicité des choses malgré la multiplicité des composants.

Il faut cependant attendre les évolutionnistes qui définissent et utilisent la notion d'émergence afin de défendre les idées de DARWIN contre le créationnisme et contre le lamarckisme. Ainsi, le philosophe victorien G. H. LEWES [228] en donne une définition très proche du concept moderne en 1875. Il présente un processus émergent comme le produit irréductible de l'interaction de

composants et en opposition à une simple résultante, différence ou somme. L'importance de l'émergence dans le processus de l'évolution des formes de vie est réaffirmée par les biologistes Julian et Thomas HUXLEY dans une série de conférences données en 1941 [193].

Le concept quitte ensuite la sphère de la philosophie et prend un caractère plus opératoire. Il est utilisé pour comprendre les fonctions biologiques d'auto-régulation, ou homéostasie [7, 349]<sup>3</sup>. Dans les mêmes années, lors des conférences MACY (mars 1946 – avril 1953), naît la cybernétique. Ces réunions permettent un brassage étonnant de compétences, mêlant psychologues, psychiatres, biologistes, physiciens et mathématiciens. Parmi les fondateurs de la cybernétique, citons W. R. ASHBY (psychiatre), N. WIENER (mathématicien), J. VON NEUMANN. Ce dernier physicien est notamment l'un des précurseurs de deux autres aventures : la naissance de l'informatique<sup>4</sup> et l'étude des modèles minimaux. En effet, il est l'inventeur des automates cellulaires avec S. ULAM [33].

La cybernétique étant la science des systèmes et de leur régulation *via* les interactions entre leurs parties, il est naturel qu'elle soit le lieu de convergence entre les notions d'émergence, de bruit [349], de réseau [245], de modèles-jouets et la naissance de l'informatique. C'est une histoire qui s'est poursuivie dans la science des jeux<sup>5</sup>, dans la création de l'idée d'intelligence artificielle<sup>6</sup>.

### I.3. – L'apport des transitions de phase

D'une certaine manière, l'expression *modèle minimal*, citée auparavant, est une tautologie pour les physiciens, puisque le but de la physique moderne est d'écrire le monde sous forme mathématique le plus simplement possible.

Dans ce sens, l'interaction gravitationnelle newtonienne est un modèle minimal, qui se trouve être extrêmement bien vérifié. Cependant les découvertes scientifiques se succédant, le risque de superposer les raffinements aux théories est réel et ce mécanisme complexifie les modèles. Alors, soit il faut faire table rase de l'existant, changer de paradigme et ré-écrire une nouvelle théorie, soit il faut se contenter de simplifier au maximum en supprimant des ingrédients parmi tous ceux qui sont connus et ne garder que ceux qui sont pertinents pour l'étude considérée.

Le ferromagnétisme en est un exemple. Le physicien sait décrire la structure d'une molécule, les interactions entre molécules au sein du matériau considéré, le moment magnétique des molécules, *etc.* Mais est-ce nécessaire pour comprendre le comportement de l'aimantation du matériau sous un champ magnétique donné et à une température donnée ?

Pendant sa thèse, E. ISING [199] propose son célèbre modèle où un aimant résulte de la seule compétition entre l'agitation thermique et les interactions des moments magnétiques microscopiques, chaque site de l'espace portant un unique nombre valant  $-M$  ou  $+M$ , et chacun des sites étant couplé à ses plus proches voisins de manière uniforme. Tout détail microscopique disparaît donc, au point que ce modèle peut aussi représenter l'organisation spatiale d'un alliage binaire, et on parle alors du modèle de BRAGG et WILLIAMS. La validité, la comparaison ou la transposition des résultats de ce modèle dans le monde de l'expérience pose évidemment problème.



Illustr. I.3. – G. H. LEWES (1817-1878), peintre inconnu

3. On voit par la présence du mot de *self-organization* dans le titre de ces références que la distinction entre émergence et auto-organisation est spécifique.

4. Il faudrait y adjoindre de nombreux participants des conférences MACY, et A. TURING, déjà cité.

5. voir l'invention du jeu de la vie par J. H. CONWAY [136].

6. Parmi les contributeurs on reconnaît C. W. REYNOLDS [295], auteur du film *Stanley & Stella in Breaking the Ice* (1987) et d'un modèle de banc de poissons.

7. Pour une revue extensive on pourra se reporter à l'introduction de [232].

8. Ici, ce sont les exposants du modèle de Heisenberg qui sont mesurés pour les matériaux  $\text{CrBr}_3$ ,  $\text{Ni}$ ,  $\text{EuO}$ ,  $\text{Pd}_3\text{Fe}$

9. Cet article considère les liquides suivants :  $\text{Ne}$ ,  $\text{Ar}$ ,  $\text{Kr}$ ,  $\text{Xe}$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{CO}$ ,  $\text{CH}_4$

10. À chaque terme, on pourrait ajouter l'adjectif *critique*, que l'on associera aux seules transitions continues.

11. par exemple la température de Curie d'un alliage donné pour les propriétés ferromagnétiques de ce matériau.

Depuis P. CURIE [85], il est connu que le matériau ferromagnétique subit une transition continue près d'une température donnée. Mais après la seconde guerre mondiale, l'étude des transitions de phase trouve un regain d'intérêt<sup>7</sup>. Les transitions continues semblent donner lieu à une suite de lois algébriques qui ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais dont les exposants sont reliés entre eux [119, 107, 355]. Seul un petit nombre d'exposants suffit donc pour définir un type de transition : deux pour les propriétés statiques et un pour les corrélations temporelles. De plus, des matériaux différents présentent des jeux d'exposants semblables, pour les transitions ferromagnétiques [248]<sup>8</sup> mais aussi pour les points critiques liquide-gaz [163]<sup>9</sup>. On parle alors d'universalité [287].

Enfin, dans les années 70, WILSON [359] applique la technique du groupe de renormalisation aux phénomènes critiques, ce qui assoit la notion d'universalité : près d'une transition continue, l'absence d'échelle typique liée au système étudié permet d'en ignorer les détails microscopiques. Seuls deviennent pertinents les exposants<sup>10</sup> des lois d'échelles que suivent le paramètre d'ordre, la susceptibilité, *etc.*

L'utilisation de modèles minimaux est là entièrement justifiée et permet d'accéder aux jeux des exposants critiques, ce qui est lié à la classe d'universalité considérée, mais pas à la valeur du paramètre de contrôle au point critique lui-même<sup>11</sup>, qui dépend du système étudié. Ce n'est vrai cependant que pour les systèmes thermodynamiques à l'équilibre, ou dans leur cinétique de retour à l'équilibre, puisque HOHENBERG et HALPERIN [189] ont montré qu'il est possible de classer ces dynamiques en huit modèles en fonction de propriétés générales.

L'application des modèles minimaux aux phénomènes critiques est un grand succès, mais ce cas d'étude peut être vu comme pathologique. Tout d'abord ces transitions sont extrêmement difficiles à observer expérimentalement. Ensuite, elles ne constituent généralement qu'une limite singulière dans un diagramme des phases où dominant les transitions discontinues. Cependant, hors du cadre des phénomènes critiques, la démarche intellectuelle consistant à tester différents mécanismes et à les jauger les uns par rapport aux autres dans l'objectif de comprendre les comportements d'un système physique reste valable. Elle a l'immense avantage de fournir une interprétation qualitative, même si les modèles ainsi obtenus donnent moins souvent accès à des prédictions quantitatives. Nous distinguons donc deux types de modèles minimaux : une forme *faible*, car associée à la contrainte très restrictive de la présence d'une transition du second ordre, et une forme *forte*, car toujours utilisable mais peu prédictive.

Remarquons par ailleurs que le fait que les modèles soient minimaux (faibles ou forts) n'implique pas que leurs études soient simples, si peu simples pour certains d'entre eux que les seuls résultats disponibles sont numériques, c'est-à-dire obtenus par des moyens informatiques. Or les classes d'universalité ne sont strictement définies que pour un système infini, dit à la limite thermodynamique. Aux tailles atteignables par l'outil informatique, les résultats sont à corriger de déviations systématiques, effets dits de *tailles finies* [287].



## I.4. – Hors de l'équilibre

Nous voyons donc que le contexte des transitions de phase vues par les physiciens, la notion d'émergence introduite pour la biologie évolutive, puis l'informatique naissante concourent, au travers de la cybernétique, à l'établissement d'une nouvelle méthode scientifique : l'étude de modèles minimaux par les simulations numériques.

L'accès des physiciens à la biophysique<sup>12</sup>, mais plus généralement à tous les domaines de recherche transversaux, pose aussi de nouveaux défis, puisque la plupart de ces systèmes sont hors d'équilibre. Ils peuvent être stationnaires, comme l'activité cellulaire<sup>13</sup>, ou instationnaires mais allant d'état métastable en état métastable, comme l'avancée d'une dune en présence d'un vent unidirectionnel.

Par ailleurs, les phénomènes naturels recèlent quantité de lois d'échelle [238], soit dans leur distribution statistique, soit dans leur série temporelle, soit encore dans leur répartition spatiale<sup>14</sup>. Après le succès des phénomènes critiques, il est tentant de faire l'analogie entre les transitions de phase à l'équilibre et ces exemples hors d'équilibre.

Lorsqu'un paramètre de contrôle est identifiable, l'analogie est évidente et il apparaît vite qu'elle est féconde. Citons, par exemple, l'invasion d'un matériau poreux par un liquide et le modèle de la percolation de lien [134, 50], la compétition inter-espèce et le modèle des électeurs [75] qui suivent effectivement des lois algébriques près d'un point de changement de comportement, point possédant des propriétés analogues à celles d'un phénomène critique d'un système à l'équilibre.

Souvent les systèmes naturels ne semblent pas dépendre d'un paramètre de contrôle qui pourrait être réglé vers un point critique et pourtant ces systèmes suivent aussi des lois algébriques. Dans les années quatre-vingts naît le concept de *phénomène critique auto-organisé*<sup>15</sup>. BAK *et al.* proposent que la séparation des temps de forçage et de dissipation soit l'explication de tels phénomènes [15, 321], prenant comme exemple les dunes pour lesquelles l'apport du sable, lent et continu, provoque un amoncellement métastable, qui finit par s'effondrer lors d'avalanches rapides.

La dynamique serait alors pilotée par la compétition de ces temps, mais elle devient elle-même *critique* parce que la dissipation ne possède pas d'échelle caractéristique. Elle n'est souvent limitée que par la présence d'un certain degré de désordre. Dans le même exemple des dunes [14], les avalanches sont limitées par le hasard des dépôts de sable précédents. Un feu de forêt [111] est limité par la présence aléatoire des arbres ou des clairières, et ainsi de suite.

Il s'ensuit une famille nouvelle de modèles dite SOC, de l'acronyme anglais. Mais vient aussi une méthode d'analyse de ces systèmes, puisque ses auteurs [321] prennent le parti d'utiliser strictement le cadre des phénomènes critiques à l'équilibre : les mêmes lois d'échelles, les mêmes relations entre les exposants sont utilisées sur les observables des systèmes hors d'équilibre.

12. Leó SZILÁRD et Victor F. WEISSKOPF (deux physiciens), James D. WATSON et John KENDREW (deux biochimistes) lancent l'idée de la création de l'EMBL en 1962.

13. la stationnarité n'empêchant pas la présence de grandes fluctuations.

14. B. MANDELBROT [238] cite la longueur des côtes bretonnes, l'aire des cratères lunaires, celle des trous dans l'Appenzell, ou celle des gouttes de rosée sur une vitre.

15. traduction de *Self-Organized Criticality*.

## I.5. – De plus en plus complexe

16. dans le cadre des phénomènes critiques auto-organisés, ou en présence de paramètre de contrôle.

Utiliser les relations issues des phénomènes critiques pour décrire le comportement de systèmes hors d'équilibre <sup>16</sup> s'est révélé être une réussite comme l'atteste des revues récentes [232, 241]. C'est donc aussi un succès pour la forme faible des modèles minimaux. Cependant la discussion portée précédemment sur les modèles à l'équilibre s'applique pour une grande part sur leurs versions hors d'équilibre.

Ainsi la difficulté d'étudier analytiquement les transitions hors d'équilibre est d'autant plus importante qu'il n'existe pas de cadre général applicable. À chaque situation, il faut adapter une stratégie particulière. Bien sûr, il existe des outils généraux issus de la physique statistique <sup>17</sup>, cependant leurs applications posent de nombreuses questions, nous en verrons un exemple chapitre V, et la difficulté inhérente au travail analytique reste vraie.

17. tels la théorie cinétique, les équations de BOLTZMANN, de FOKKER-PLANCK ou de CHAPMANN-ENSKOG, ou les équations stochastiques, par exemple de LANGEVIN

D'autre part, l'analyse numérique des modèles est faussement simple. Nous l'avons déjà dit, les systèmes étudiés restent finis, voire petits, et les effets de taille ne suivent pas toujours la théorie des systèmes à l'équilibre. Nous pouvons en avoir une bonne idée en consultant la bibliographie concernant le modèle dit du *tas de sable*, imaginé en 1987 [15], dont la classe d'universalité semble se définir en 1991 [239], mais qui est constamment remise en cause. Encore récemment la polémique ne semble pas éteinte [20, 100]. Nous revenons sur ce cas particulier au chapitre IX et nous en donnons un autre exemple au chapitre IV.

La dernière difficulté relevée pour les systèmes à l'équilibre (paragraphe I.3) concernait la faible représentation des transitions continues par rapport aux transitions du premier ordre. Pour une grande part, la question est posée différemment dans les systèmes que nous considérons. En quelque sorte elle est plus fondamentale, ou plus en amont dans le travail du scientifique, puisque la difficulté est tout d'abord d'obtenir des mesures.

Or, pour une grande part, les systèmes étudiés en biophysique, ou en géophysique le sont *via* des observations : difficile dans ces cas-là de connaître la réponse d'un système à une contrainte donnée. Il est donc difficile de mesurer l'équivalent d'une susceptibilité, et encore moins d'en donner la variation en fonction d'un paramètre de contrôle.

Parmi les nouveaux systèmes étudiés, nombre d'entre eux ont aussi une nouvelle caractéristique. Ils possèdent des échelles différentes couplées. Il ne s'agit pas d'une dépendance montante, dans le sens où les plus grandes échelles sont décrites par les plus petites, ni de la dépendance inverse, dans laquelle une variation d'une grandeur macroscopique influe sur la microscopie du système, mais d'une interdépendance entre des niveaux différents d'échelles.

Par exemple, l'embrasement de la végétation dépend des châblis, clairières créées par la chute des grands arbres, probablement ceux qui ont échappé aux feux de forêt précédents. De même, l'arrêt d'une avalanche dépend de l'histoire des dépôts précédents, mais elle prépare aussi la dynamique des avalanches futures. Enfin l'écoulement macroscopique des solutions micellaires augmente l'alignement des tubes micellaires, diminuant la viscosité du liquide [57], *etc.*

Tous ces systèmes sont hiérarchiques. La connaissance de leurs comportements macroscopiques nécessite une description microscopique<sup>18</sup>. Mais, en sus, l'échelle macroscopique agit sur une échelle plus petite. Ces systèmes sont dits *complexes*.

Il est possible de lire qu'une propriété de la complexité est qu'elle est difficilement décrite en termes mathématiques ; c'est être pessimiste pour l'avenir de ce domaine scientifique et il faut espérer que ce n'est que temporaire. En revanche, il est vrai que l'usage de l'outil informatique, a fortement permis l'exploration des systèmes complexes.

Par la suite, nous allons résumer deux études portant sur deux systèmes complexes, d'une part les mouvements collectifs d'animaux, d'autre part les déserts de barkhanes. Chaque étude a un but particulier propre, soit à la biologie, soit à la géophysique. Toutes deux héritent aussi du même contexte scientifique et historique décrit jusqu'ici.

Enfin nous avons participé à un groupe de travail sur les écoulements des solutions de micelles géantes. L'étude de ce système n'a pas suivi la même méthodologie, mais nous proposons en conclusion un modèle d'agents des micelles géantes. En annexe, le lecteur trouvera les articles-clefs de ces travaux.

18. Par microscopique, il faut comprendre l'échelle la plus petite restant pertinente pour l'étude du système considéré. L'échelle microscopique pour étudier, par exemple, les avalanches est le grain de sable. Celle de la description du désert entier pourrait être la dune.



*Première partie*

## Mouvements collectifs



---

## Contexte biologique

---

The convergence of birds in response to external physical factors presents, in itself, no great problems to the student of bird behavior.

---

Emlen, John T. Jr [118]

La grégarité peut prendre des formes très diverses, des plus simples jusqu'à des manifestations très complexes, comme la réalisation d'une tâche collective — par exemple le nettoyage d'un cimetière de fourmis [39] ou la construction d'un nid de termites [277], comme l'établissement de liens sociaux — par exemple le matriarcat chez certains singes [172]. Nous nous intéressons ici à une des formes de la grégarité, peut-être la plus simple, le mouvement en groupe.

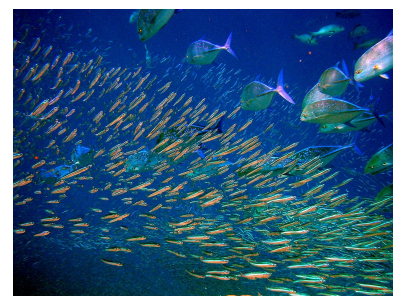
### II.1. – Omniprésence

Le banc (voir illustrations II.1 et II.2), le vol (ill. II.3, II.4, et II.5), l'essaim (ill. II.6 et II.7) et le troupeau (ill. II.8 et II.11) sont des aspects évidents de la vie animale, évidents puisque chacun a pu être témoin de quelques-unes de ces réalisations. En effet, une grande partie de la biomasse vit et se déplace en groupe. Par exemple, le quart des poissons adultes vivrait en banc. Pour les alevins, la moitié d'entre eux serait grégaire [274]. La plupart des oiseaux se réunit, au moins de manière temporaire et en fonction des conditions climatiques, de la période de reproduction et de la luminosité [118]. Certains animaux sont intrinsèquement grégaires, ils sont dits sociaux, comme les fourmis [38]. D'autres ont une vie individualisée, comme les merles [118], mais cela n'exclut pas qu'ils vivent par moments en groupe. On parle alors parfois de *grégarité égoïste*. Même les hommes ont leurs mouvements de foule [253].

Tout le règne animal est touché par ce phénomène, des poissons aux cétacés, des rongeurs aux grands herbivores, des oiseaux aux chauve-souris, des chenilles aux papillons en passant par les amibes. Par là-même, on observe que cela ne dépend pas du milieu, qu'il soit marin, terrestre ou aérien.



Illustr. II.1. – Poissons-lune à l'aquarium de la Rochelle.



Illustr. II.2. – Anchois et carangues bleues (auteur B. DE GIUSTI).

Les cellules animales ont aussi des mouvements d'ensemble soit *in vitro* ([1, 160, 320] et ill. II.10), soit *in vivo*, lors de la gastrulation [266], de la cicatrisation, ou de l'oncogénèse [322], ce qui fait que les mouvements grégaires sont présents sur un intervalle d'échelles de tailles de près de sept décades.

Les mouvements collectifs semblent stables en espace et en temps. Les mouvements migratoires voient le déplacement de groupes sur de très grandes distances<sup>1</sup>. Les oies (ill. II.3) peuvent parcourir trois milles kilomètres entre le Groenland et l'Angleterre, soit environ  $10^7$  fois leurs tailles.

Les tailles de ces groupes varient beaucoup. S'il n'y a que quelques individus pour les mêmes vols d'oies, les étourneaux [17, 62] sont plusieurs centaines et les travailleurs à bec rouge (ill. II.5) des milliers à voler ensemble. Les gnous (ill. II.8 et [309]), l'amibe *Dictyostelium discoideum* [43] migrent en groupe de l'ordre d'une dizaine de milliers, et les harengs concentrent jusqu'à deux cent cinquante millions d'individus [234], près du Cap Cod en Atlantique nord.

1. mais les routes migratoires, elles, ne sont pas éternelles et disparaissent notamment sous la pression anthropique [104, 357].



Illustr. II.3. – Oies en migration.



Illustr. II.4. – Vol d'alcidées en Alaska (auteur D. DIBENSKI).

2. voir l'exemple du banc de sardines longeant les côtes du Cap en Afrique du sud [52].

## II.2. – L'étude des causes

L'omniprésence des mouvements collectifs soulève des problématiques multiples en fonction des points de vue adoptés [325].

### II.2.1. – La sélection naturelle

Tout d'abord, l'occurrence des mouvements collectifs peut être comprise comme le signe que ce comportement est une réponse universelle de l'évolution, ou de la sélection naturelle [328] à une, ou plusieurs questions de survie. Est-ce pour faciliter la reproduction ? Est-ce pour se protéger de la prédation [135] ?

Il est plus facile de trouver son partenaire sexuel dans un groupe pré-existant, mais, si le groupe est trop petit et ne se renouvelle pas, l'endogamie peut mener à un appauvrissement génétique du groupe.

Par ailleurs la vigilance de quelques-uns peut sauver tout le groupe des attaques des prédateurs. Et même si ce dernier attrape un individu, le risque individuel est dilué sur l'ensemble des membres du groupe. On peut même imaginer qu'un individu se sente à l'abri en gardant toujours un de ces congénères entre lui et la source de danger [166]. Enfin, le nombre des proies est souvent présenter comme pouvant mener à un effet de confusion : en quelque sorte le prédateur ne saurait pas où donner de la gueule. Mais si le groupe est très grand, il devient le lieu de rendez-vous des prédateurs de toute sorte, perdant ainsi son caractère protecteur [273]<sup>2</sup>.

Les questions de sélection restent souvent théoriques et il est difficile de trouver l'équilibre entre les causes ultimes et les fluctuations spatio-temporelles dues aux naissances, maladies, abondance de nourriture ou période de disette.

### II.2.2. – Les causes proximales

Le point de vue opposé consiste à trouver les raisons *proximales* [2], ou conjoncturelles associées à chaque espèce, voire à des situations différentes



pour une espèce donnée, et qui permettent d'expliquer l'émergence des mouvements collectifs. Par exemple, l'agressivité des adultes mènent les jeunes mouflons à se regrouper [142] ; les besoins en eau des femelles zèbres allaitantes provoquent les mouvements des troupes [132]. La cause proximale est la cause la plus proche du comportement final. Pour autant, elle-même peut rester inexplicite.

Ce qui étonne le plus dans les mouvements d'ensemble, c'est l'apparente coordination du mouvement sur de grandes populations. Ainsi, les étourneaux volent à une distance de leur voisin le plus proche de l'ordre de 1 m, à une vitesse approximative de  $10 \text{ m.s}^{-1}$  [18]. Cela signifie que le temps minimal de collision est de 50 ms. Pourtant, ils prennent des changements de direction en un temps de l'ordre de 70 ms ; sachant de plus que leur temps de réaction individuel a été mesuré à 110 ms environ, on pourrait s'attendre à des collisions entre les oiseaux. Mais elles ne sont pas observées [13]. Aussi de nombreuses causes ont été imaginées : des facultés télépathiques, ou quelque chose s'en approchant [306], un champ électromagnétique créé par le frottement de l'air sur le bout des ailes [175], mais aussi un effet collectif où le vol d'oiseaux s'apparenterait à un orchestre, collection de musiciens aux aguets [284].

### II.2.3. – Le chef

Une manière intuitive d'expliquer cette coordination est d'introduire un centre de régulation, un champ externe, ou un chef. Il est vrai que les loups ont un chef de meute, que les bactéries *Escherichia coli* réagissent au gradient de concentration de l'adénosine mono-phosphate cyclique (cAMP) [25]. *Dictyostelium* [43, 23] se regroupe aussi par chimiotactisme au cAMP pour former un être multicellulaire ressemblant à une sorte de limace. Cette dernière semble être guidée par une zone particulière, en tête [353], au niveau de laquelle les amibes sont très actives et continuent à produire le cAMP alors que le reste de la population adopte un autre comportement.

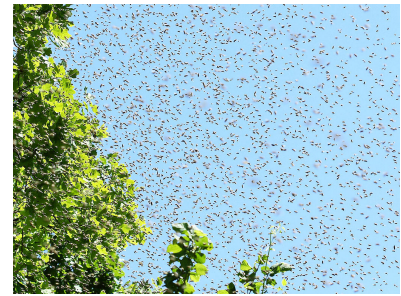
En considérant l'illustration II.8, le troupeau de gnous semble aussi être tiré par un tout petit nombre d'animaux. De même, dans un dispositif *in vitro* simulant une blessure et sa cicatrisation [285], une couche de cellules épithéliales se met en mouvement de manière inhomogène, puis une zone de quelques cellules se singularise en une protubérance qui semble diriger le reste du tissu. En première approximation, il est tentant de considérer qu'il y a un ou plusieurs chefs menant ces groupes.

Dans un second temps, d'autres causes, menant aux mêmes effets, sont imaginables. Ainsi, pour les cellules épithéliales, une instabilité du front à l'avant du tissu pourrait créer l'équivalent d'une digitation. Ce ne serait que l'interprétation du scientifique qui mènerait à assimiler chaque doigt à une zone motrice du mouvement [242].

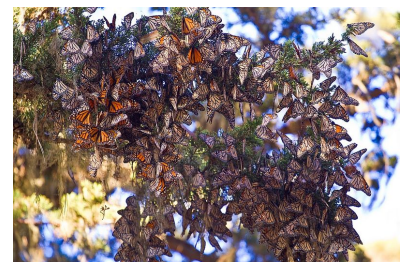
Dans le cas précité des troupes de gnous, il y a un biais, puisque d'autres herbivores se mêlent à leurs groupes, principalement des zèbres. Les différentes espèces ont des vitesses préférentielles différentes. La plus véloce se sépare des plus lentes, alors que ces dernières continuent sur leur lancée. Ce jeu d'agrégation, de déformation des groupes et de ségrégation est aussi



Illustr. II.5. – Travailleurs à bec rouge *Quelea quelea* (auteur A. RAE).



Illustr. II.6. – Essaim d'abeilles



Illustr. II.7. – Papillons monarques *Danaus plexippus* (auteur Agunther).

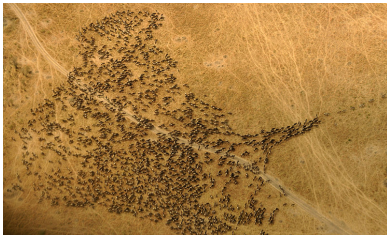
observé parmi les oiseaux des grandes volières [165]. À un instant donné, bien choisi, cela peut donner l'impression qu'il y a une région meneuse.

Mais d'autres espèces encore, connues pour leur caractère individualiste présentent des relations assimilables à celles d'un réseau hiérarchique. À y regarder de plus près, elles changent peut-être de comportement le long de trajectoires près desquelles certains individus sont déjà passés<sup>3</sup>, ou pour lesquelles certains individus sont informés de la présence d'une source de nourriture<sup>4</sup>. La mémoire, la possession d'une information entrent alors dans le jeu des interactions.

Le cadre de pensée associé au chef, en tant qu'individu ou de zone à l'intérieur du groupe, a quelque chose de rassurant. Il représente une cause unique d'organisation. En réalité, ce schéma est réducteur, parfois incomplet, voire trompeur. Dans certains cas, nous l'avons vu, d'autres hypothèses peuvent être avancées avec des résultats équivalents. Enfin, il est difficile de trancher de manière unique pour une explication plutôt que pour une autre. Par exemple l'amibe *Dictyostelium* réagit effectivement au cAMP [221]. Mais des amibes dont l'externalisation du cAMP est inhibée continuent de se réunir, pourvu que la densité en amibes soit suffisamment élevée [351].

3. voir les pigeons [255, 279].

4. voir les guppys [81].



Illustr. II.8. – Gnous (*Connochaetes gnou*) dans le parc national du Serengeti (auteur S. RAMAN).

## II.2.4. – Les causes physiques

Précédemment, nous avons introduit le *chimiotactisme* comme la faculté de remonter des gradients de concentration du cAMP, mais cela s'applique pour d'autres éléments chimiques, le dioxygène, par exemple [44]. Le fait de se diriger vers un signal est plus général, ainsi il existe le phototactisme [23] — la possibilité de se diriger vers une source de lumière, le thermotactisme [133] — pour se diriger vers des températures plus élevées. Il existe aussi des *tropismes* — la capacité de se tourner vers un signal. Bien connu, l'héliotropisme est suivi par certaines plantes [112].

Des champs physiques<sup>5</sup> de toutes sortes peuvent donc produire des agrégations d'animaux, l'orientation de plantes, des déplacements de micro-organismes. Lorsqu'il est question de l'interaction entre les groupes animaux et les phénomènes physiques, le vol en V des oies (voir ill. II.3) est probablement le premier qui vient à l'esprit. Les auditoires des conférences de vulgarisation sur les mouvements collectifs ne manquent jamais de citer ces vols, en général avec une référence au peloton de cyclistes. Lorsqu'il faut parler des progrès dus au biomimétisme, on nous promet des avions volant en formation, comme les oies, pour faire des économies de carburant [73].

Les oies, donc, voleraient en V pour économiser leurs forces lorsqu'elles fendent les airs, cela est invoqué dès Pline l'Ancien [282]. Mais ce raisonnement est largement dû à notre moyen de locomotion : la marche, le cheval, ou le vélo, nous nous appuyons généralement sur le sol pour nous mouvoir. L'air n'est donc jamais qu'une source de dissipation de l'énergie dont il faut se protéger.

Le sillage d'un obstacle, à faible nombre de Reynolds<sup>6</sup>, est constitué d'une allée de tourbillons, dite allée de von Karman (ill. II.9). La bulle de recirculation immédiatement derrière l'obstacle est donc un lieu où l'écoulement a une plus

5. les champs mécaniques aussi : les courants marins entraînent le zooplankton [324], les substrats plus ou moins d'élastiques dirigent le mouvement des cellules [230], phénomène appelé *durotactisme*.

6. une oie cendrée mesure environ 80 cm et vole dans l'air à une vitesse approximative de  $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , cela correspond à un nombre de Reynolds de  $5 \cdot 10^5$ . On s'attend donc à un écoulement entièrement turbulent.

faible vitesse, cet obstacle pouvant être le cycliste, ou l'aile de l'oie immédiatement devant. Mais les oiseaux, pour économiser leurs efforts, peuvent soit diminuer leur traînée, à l'image des cyclistes, soit augmenter leur portance. En se situant dans une zone de plus faible vent, on diminue la traînée, mais aussi la portance<sup>7</sup>. Un oiseau pourrait peut-être profiter de la partie de l'écoulement qui a une plus forte composante verticale dans le vortex. Mais cela correspond à une zone de l'espace qui est relativement petite. Le motif qui en découlerait serait donc très contraint.

L'hypothèse du gain aérodynamique obtenu par le vol en V en utilisant le vortex derrière l'aile du prédecesseur est proposée au début du XX<sup>e</sup> siècle [356]. Au cours des cinquantes dernières années, les études ont essayé de chiffrer le gain énergétique de cette disposition. De 70%, ce rendement est maintenant évalué à 5% [13]. De plus les mesures de terrain n'ont pas révélé la régularité attendue de la disposition des oies en vol. Les auteurs de la revue [13] rapportent que la position des oies les unes par rapport aux autres semble être obtenue avec trop de variabilité pour être due à la position du vortex<sup>8</sup>.

Plus que pour une raison aérodynamique, il semble que les oies volent en ligne pour des raisons éthologiques, tout comme les pigeons volent côte à côte [279] et que les poissons (guppy sauvages (*Gambusia affinis*) [176], ou d'autres [161]) nagent tête à queue. Certaines structures naissent tout simplement de l'imitation des congénères, ou allélomimétisme [325].

Cela ne signifie pas qu'ils faillent ignorer tout à fait les interactions hydrodynamiques, mais ils semblent qu'elles soient plus particulièrement pertinentes en régime de Stokes, par exemple chez les bactéries [77, 240], en tant qu'élément organisateur du mouvement collectif. On peut aussi soulever l'idée que l'hydrodynamique, dans le régime turbulent, désorganise ces structures animales.

7. Les courses à la voile en sont une bonne illustration : si un bateau reste dans le sillage de la voile de son prédecesseur, alors il va moins vite et il remonte moins bien au vent.

8. par ailleurs, comment être sûr du vent rencontré par les oies lors de ces mesures, et donc de la position du vortex ?



Illustr. II.9. – Allée de von Karman.

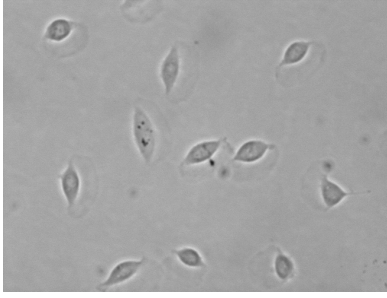
## II.3. – Propriétés des troupes

Malgré la diversité des espèces et, peut-être, grâce à la multiplicité des causes, les animaux se meuvent en groupe. Omniprésents, divers, multiples, les mouvements collectifs ont aussi un caractère commun : la grégarité.

### II.3.1. – Difficultés d'étude

Le groupe se décline sur le terrain de mille façons. Pourtant il se désigne, dans notre langue, avec peu de mots : banc, vol, voire nuage ou nuée, essaim, troupeau, voire harde ou meute. Ces mots désignent des regroupements dans des milieux différents — aquatique, aérien ou terrestre — parfois pour des catégories différentes — des vols pour les oiseaux, les nuées pour les insectes, les troupes pour les animaux domestiques.

Même si ces mots évoquent parfois des formes, car on peut imaginer un banc allongé ou un nuage pommelé, on ne les applique pas en fonction de la géométrie du groupe, ni en fonction de toute autre caractéristique. Ainsi le vol désigne des oies en formation, comme des étourneaux se déplaçant en volute, mais les pigeons n'iront jamais en banc. La langue anglaise possède



Illustr. II.10. – Keratocytes (auteur B. LA-DOUX).

un contre-exemple, puisqu'un banc désorganisé est appelé *shoal*, alors que des poissons allant dans la même direction sont regroupés en *school*. Ce détail lexical illustre la difficulté de discuter des groupes animaux pour les éthologues eux-mêmes [95].

La seconde difficulté est plus spécifique à la biologie. Il est relativement facile de faire du naturalisme, c'est-à-dire de décrire les mouvements collectifs *in situ*. Mais l'observation quantitative des troupes n'a été atteinte que récemment et elle a considérablement changé ce domaine d'étude tant par les techniques développées que les résultats obtenus [8, 17, 255, 336]. Cette pratique reste cependant marginale tant les contraintes instrumentales sont importantes : les groupes sont constitués d'un grand nombre d'individus, répartis dans les trois directions de l'espace, dans un environnement plus ou moins occultant et suivant une dynamique rapide et complexe. Enfin l'observation doit être la moins invasive possible.

Il est encore plus difficile d'effectuer de l'expérimentation sur les troupes, c'est-à-dire de perturber le système de manière contrôlée et d'en mesurer la réponse [22, 53, 55, 80, 81, 176, 320]. Cela signifie généralement de passer dans un environnement artificiel tout en espérant rester pertinent vis-à-vis de ce qui se passe hors de ce cadre. On rencontre en quelque sorte la discussion sur le bien-fondé des expériences *in vitro* et le choix des systèmes modèles.

### II.3.2. – Définition et exemple

Un troupeau est une structure localisée dans l'espace et le temps. Il possède ainsi trois caractéristiques :

- une trajectoire d'ensemble, représentée, par exemple, par la position de son centre de masse au cours du temps ;
- une enveloppe fixant les contours du groupe. Cette enveloppe dépend, elle aussi, de l'instant considéré ;
- une structure interne, reflétant les positions relatives, ou les orientations relatives des individus les uns par rapport aux autres.

Ces trois données sont, à nouveau, diversement étudiées en fonction du point de vue du scientifique, de l'espèce considérée, voire du moment auquel les observations sont réalisées durant la vie du groupe.

Lors des migrations, ou pendant les déplacements entre le point de nidification et la source de nourriture, les trajectoires sont plutôt ballistiques, c'est-à-dire les plus directes possibles vers le but à atteindre. Alors que durant les phases de regroupement, les groupes volent de manière plus diffuse, aléatoire<sup>9</sup> ou créant des mouvements de rotation globale<sup>10</sup>, et changent rapidement de comportement.

Puis un groupe qui tourne, avec une déplétion de la densité en son centre — comme un donut [289] — a une apparence globale différente de celle des groupes qui avancent. Mais même ceux-ci n'ont pas une unique forme. Des groupes peuvent être oblongs [171, 275, 281], ou plutôt plats [17, 18], denses et ramassés, ou gouvernés par une dynamique de fusion et d'éclatement [164]. Le groupe peut s'étendre dans la direction perpendiculaire à son déplacement d'ensemble, ce front étant sujet aussi à une dynamique propre [162, 309].

9. les étourneaux volent ainsi différemment qu'ils aillent se nourrir ou qu'ils se préparent à rejoindre leurs perchours [61]

10. ces *vortex* sont observés au niveau moléculaire [318], chez *Dictyostelium* [23], les colonies de flamands roses, et de nombreuses espèces de poissons [55, 273, 338], comme le montrent les documentaires animaliers pour le grand public.

La structure interne peut, en suivant le vocabulaire classique des états de la matière, être cristalline (ill. II.2 et II.3), *i.e.* dans laquelle les positions entre voisins sont figées [274, 315], ou liquide [62]. Ce dernier peut être compressible. Ainsi la densité interne est souvent inhomogène, notamment avec un excès d'individus à l'avant des bancs de poissons [170, 244]. Mais les vols d'étourneaux semblent posséder un gradient de densité des bords vers l'intérieur, sans anisotropie avant-arrière. L'inhomogénéité interne peut aussi se manifester sur d'autres grandeurs que la densité, par exemple l'*activité*<sup>11</sup> des individus [353], l'âge des animaux [142], *etc.*

Les systèmes étudiés présentent tous un axe privilégié, et se déplacent, en général, selon cet axe donnant lieu à un ordre de type nématique [240, 301, 332]. Les animaux ont de plus une direction particulière, si bien que les groupes possèdent aussi des organisations proches de celles des matériaux ferromagnétiques (ill. II.1, II.2, II.3 et II.11) où l'on peut définir une polarisation effective. Bien sûr, la vitesse d'un animal ne se confond pas toujours avec son axe tête-queue et les modes de déplacement sont très riches du vol plané aux ondulations. Cependant, les études ne prennent pas encore en compte ce niveau de raffinement dans la description des systèmes.

Les différentes structures décrites précédemment ne semblent pas être associées définitivement à une espèce, ou à une catégorie donnée. Il s'agit d'états hautement dynamiques avec des passages d'une trajectoire à une autre [338], des changements de forme de l'enveloppe et des variations de la structure interne, sans que l'on sache vraiment lequel des ingrédients pilote l'adaptation des deux autres. Par exemple, chez les poissons, la vitesse de déplacement des individus et l'alignement relatif des membres du groupe jouent l'un sur l'autre un rôle mal défini et parfois contradictoire d'une espèce à l'autre [250, 315].

La taille des groupes a une influence qui, dans certains cas, semble stabilisatrice. Ainsi les bancs de harengs de taille plus importante sont plus oblongs [9] et, pour les poissons en général, les groupes sont aussi plus denses [275]. Dans d'autres cas, le nombre d'individus pilote l'apparition d'une bifurcation, notamment dans la réalisation de tâches collectives chez les termites [38] et avec des robots [317]. Dans les mouvements collectifs mêmes, certains auteurs, par des arguments de type évolutionniste, rapportent la nécessité de l'existence d'une taille optimale des groupes animaux [273].

## II.4. – Hors de la biologie

Les mouvements collectifs d'objets biologiques sont présents partout, à toute échelle de temps et d'espace, en grande quantité répartie dans la biosphère, avec un grand nombre d'individus réunis sur une petite portion de l'espace, pour des causes très diverses, souvent multiples, sous des formes mouvantes dynamiques mais avec quelques caractères identifiables. Et tout cela interagit, interfère dans un environnement complexe.

C'est là que le physicien intervient : il faut simplifier à l'extrême les systèmes étudiés, pour en comprendre l'essentiel. Deux méthodes sont également possibles : la modélisation (voir le chapitre III), et l'expérimentation. Dans

11. ce qui peut se traduire par un coefficient de diffusion plus important que dans le reste du groupe



Illustr. II.11. – Harde d'impalas, Tanzanie.

ce second cas, il ne s'agit pas d'étudier des mouvements collectifs naturels, dont nous avons évoqué la difficulté d'étude, mais des systèmes physiques possédant des analogies avec les systèmes vivants. L'intérêt est d'obtenir des systèmes dont on contrôle les paramètres et que l'on peut perturber afin d'en mesurer la réponse. Diverses voies ont été explorées. Il y a celle des objets mécaniques dont le mouvement horizontal provient de vibrations verticales du support—batonnets rigides verticaux s'arrangeant en tourbillons [36, 214], objets allongés s'organisant nématiquement [258], objets géométriquement isotropes mais dont la cinématique est anisotrope [97]. Plus récemment, des dispositifs de colloïdes [326], sous champ électrostatique [48], ou activés par la lumière [270], ont utilisé les propriétés physico-chimiques de la matière pour obtenir le mouvement de ces objets micrométriques. Enfin il y a aussi des systèmes chimiques mis en place par des techniques de micro-rhéologie [200]

Dans d'autres domaines scientifiques, des robots [317] ont été utilisés. Les questions posées ne sont pas de la même nature, ce qui intéresse ici est le partage d'information. Enfin la biochimie a fourni des systèmes de filaments (actine [301] ou microtubule [318]) couplés au substrat par des moteurs moléculaires. Apparaissent alors des organisations dynamiques de ces filaments.

# Modélisation des mouvements collectifs

---

La réunion de particules mobiles sous des contraintes physiques n'a rien d'évident, et cette question a suscité de nombreuses études et en suscite encore [23, 59, 324], alors que dire des regroupements d'animaux qui ne semblent être que sous l'influence de causes biologiques? La modélisation des interactions biologiques est un problème en soi : l'écriture mathématique en est-elle possible? les concepts physiques de force, de potentiel, *etc.*, sont-ils pertinents<sup>1</sup>? Ces questions dépassent largement le but de notre propos, mais se retrouvent au cœur des interactions entre scientifiques de domaines différents et induisent des choix multiples de modélisation.

D'autres parts, effectuer une bibliographie exhaustive de ces modèles, même seulement au travers de la période contemporaine, n'a rien d'évident. Ici la transdisciplinarité du sujet ajoute à la difficulté. En lieu et place d'un état de l'art concernant la modélisation des mouvements collectifs, nous proposons donc de parler de méthodologie et de voir comment sont conçus les différents modèles. Cela nous permettra aussi d'en présenter les aspects les plus saillants, sans devoir trancher la question de leur antériorité.

Écrire un modèle, c'est poser des questions, mais c'est aussi faire des choix pour aborder le problème posé. Parmi ces choix, nous retenons le fait de considérer un point de vue particulier, de se placer à une, ou à plusieurs échelles, de se fixer un cadre technique particulier, pouvant être traité à différents niveaux de formalisme.

1. voir l'introduction de [162] selon laquelle l'utilisation du concept de force serait moins proche de la nature qu'une description en terme de déplacement.

## III.1. – Différents points de vue

Les points de vue sont, à notre avis, beaucoup reliés aux domaines scientifiques d'origine des auteurs du modèles. Adopter un point de vue, c'est se fixer un objectif, même inatteignable, une feuille de route idéale façonnée par l'histoire des sciences. La classification proposée est issue de nos lectures. Elle n'est pas fondée sur un jugement relatif des domaines les uns par rapport aux autres, ni sur une étude épistémologique. C'est une classification qui permet de présenter des tendances parmi les modèles existants.



### III.1.1. – Imiter la nature

Le ressort de l'imitation est la vraisemblance. La communauté qui nous semble suivre ce but est celle des infographistes. Tout particulièrement C. W. REYNOLDS [295] a proposé un modèle dont le but est de créer des animations graphiques d'animaux pour lesquels le comportement grégaire doit être le plus vraisemblable possible à l'œil du spectateur. Et il faut croire que le but a été atteint puisqu'au moins trois films ont profité de ce modèle : *Stanley & Stella in Breaking the ice* (1987), *Batman returns* (1992) et *The King Lion* (1994), ainsi que des jeux informatiques<sup>2</sup>.

2. voir le site de REYNOLDS <http://www.red3d.com/cwr/boids/>

Il faut aussi souligner le rôle d'initiateur de cette communauté. Derrière l'apparente futilité du but initial, on doit mettre en avant les recherches autour de la vie artificielle, non plus seulement sur la seule question de l'intelligence artificielle, mais autour du comportement et des relations inter-individus. De plus, ces travaux informatiques ont dynamisé les études des mouvements collectifs dans les autres domaines scientifiques en montrant que les grands troupeaux peuvent être calculés *in silico*. Enfin REYNOLDS a laissé un néologisme anglais pour désigner un être grégaire virtuel : *boid*.

### III.1.2. – Reproduire la nature

L'imitation peut suffire au néophyte, car un spectateur n'agit pas comme quelqu'un d'informé, de spécialiste en éthologie. Les travaux dont nous parlons maintenant s'intéressent à des traits spécifiques, à des cas particuliers scientifiquement recensés. Il s'agit de reproduire le comportement des oiseaux [118, 174], des poissons [5, 47, 192, 294, 358], ou celui des criquets [115]. Chez les poissons, on voudra reproduire informatiquement la forme de leurs bancs, plus ou moins oblongs [170], ailleurs ce sera le front d'avancée des gnous [162].

Si ces études sont longtemps restées descriptives, fautes de pouvoir réaliser des observations quantitatives précises, elles se sont multipliées ces dernières années grâce à de grands progrès dans les dispositifs expérimentaux (voir [17]).

### III.1.3. – Modéliser la nature

Le mot de modèle a différents sens en fonction du domaine scientifique. Ici nous retenons la question de la définition, du calcul et de la mesure de grandeurs effectives permettant de quantifier une réalité expérimentale.

Imaginons des bactéries nageant dans un film de savon, est-il possible de définir un fluide *bactérien*, et surtout est-il possible de lui associer une viscosité effective, une température, *etc.* (voir [83, 156, 361]) ? Si un vol d'oiseaux semble traverser par des ondes, il est imaginable de le considérer comme un gaz de particules possédant un coefficient de compressibilité.

Excepté dans le cas des bains de bactéries, ou de certaines molécules (actine [301] et microtubules [318]), il y a très peu d'expériences suffisamment quantitatives pour étayer cette démarche théorique.



### III.1.4. – Aspects minimaux et universels

Après avoir lu le chapitre II de ce mémoire, le pessimiste pourra retenir la complexité et la diversité des mouvements collectifs naturels. *A contrario*, l'optimiste le résumera par l'omniprésence des mouvements collectifs à travers le vivant, les milieux et les échelles. De l'omniprésence à l'universalité, il n'y a qu'un pas aisément franchissable d'un syllogisme. Il serait tellement plus facile de considérer que, ce que (quasiment) tous les animaux font, ils le font de la même manière, au moins au sens de l'universalité faible, définie dans le chapitre I.

Si c'était avéré, un modèle minimal permettrait de rendre compte de toutes les situations naturelles, mais près d'un point de transition entre deux états asymptotiques d'un ordre à définir. Ce point de vue a été adopté par T. VICSEK *et al.* [84, 86, 87, 88, 346, 348] d'une part, et par J. TONER et Y. TU [329, 330, 331, 333] d'autres parts, et cela a permis de diffuser la thématique des mouvements collectifs auprès des physiciens.

### III.1.5. – Prétextes

Les différents points de vue discutés jusqu'à maintenant ne sont pas exclusifs les uns des autres. Écrire un modèle minimal peut impliquer la définition d'une quantité effective sur le troupeau et permettre de reproduire une propriété des mouvements, voire de créer des images indiscernables de photographies d'animaux (voir la page de garde et [293]).

Ces points de vue peuvent être considérés comme une porte d'entrée dans la théorie des mouvements collectifs. Mais, inversement, cette grégarité est un prétexte à l'application d'un point de vue donné, déjà testé sur d'autres problèmes scientifiques, et confronté à une nouvelle question, masquée par celle de la grégarité. Ainsi, l'infographie permet de faire de belles images de bancs de poissons. Mais les poissons sont un prétexte pour montrer que l'ordinateur peut gérer des interactions complexes.

D'autres, usant de la physique statistique, espèrent fournir un modèle universel des mouvements collectifs. Ces mouvements permettent de tester les concepts d'universalités et de transition de phase, issus de la physique des systèmes à l'équilibre, alors que les systèmes biologiques sont des systèmes ouverts, hors d'équilibre.

## III.2. – Les différentes échelles

La question du choix d'une échelle de description est plus classique dans la construction d'une théorie. De la plus petite vers la plus grande, elle peut être :

### III.2.1. – microscopique

Une échelle microscopique serait l'échelle pertinente la plus petite. La question, épineuse, consiste à reconnaître cette *pertinence*. Dans le cas des mouvements qui ont lieu dans un *medium*<sup>3</sup>, il faut pouvoir décrire des mou-

3. l'eau pour les poissons, l'air pour les oiseaux, un milieu plus complexe pour les bactéries.

vements de ce milieu à des échelles plus grandes que la molécule définissant le milieu, mais plus petite que celle de l'animal considéré.

Par exemple, nous avons parlé des oies dans le chapitre I dont la portance pourrait être affectée par les tourbillons créés par les voisines de vol. S'il fallait choisir une échelle microscopique du fluide, elle devrait être inférieure à ce tourbillon pour qu'il soit correctement calculé.

Peu d'études descendent à ce niveau de précision, citons celle de la locomotion des bactéries dans laquelle les auteurs annoncent le projet de simuler les mouvements de bactéries à partir du champ de vitesse du fluide calculé à une échelle inférieure à celle du flagelle [77].

Les difficultés inhérentes à ce niveau de descriptions sont évidentes : la quantité d'information à traiter est énorme, puisqu'il faut passer d'une échelle petite devant celle de l'animal, à celle de la taille des troupeaux.

### III.2.2. – l'animal

L'échelle de l'animal à proprement parlée est très souvent prise comme échelle du modèle [3, 55, 162, 192, 227, 110, 319, 338, 346]. C'est l'échelle naturelle lorsque le rôle de l'environnement physique peut être négligé, ou modélisé de façon simple, par exemple par l'ajout d'une force — force de Stokes, traînée turbulente, *etc.*

### III.2.3. – La particule fluide

S'il s'agit de déterminer les propriétés des troupeaux de grandes tailles, voire de connaître les propriétés statistiques à la limite thermodynamique, *i.e.* pour des systèmes infinis, on se place à une échelle supérieure à celle de l'animal. C'est un sous-troupeau qui est considéré, l'équivalent d'une particule fluide en hydrodynamique, et on parle alors d'hydrodynamique des mouvements collectifs. Le fluide ici est composé des animaux, il s'agit donc de descriptions mésoscopiques [31, 83, 195, 265, 249, 330].

## III.3. – La topologie

Nous avons fixé l'échelle spatiale en fonction de l'échelle animal. Remarquons tout d'abord que l'échelle temporelle minimale est rarement discutée ; il est sous-entendu qu'elle est fixée par la vitesse des individus. Cependant les dynamiques de groupe sont étudiées afin d'en connaître les limites stationnaires, ou les comportements à temps longs. On pourrait donc imaginer que l'échelle minimale soit l'objet d'une discussion plus fouillée.

Ensuite, trois aspects, au moins, sont nécessaires à la représentation théorique des mouvements collectifs : un espace, des instants et une population d'animaux. Ces grandeurs peuvent être étudiées comme des variables discrètes ou continues, et, *a priori*, toutes les combinaisons des triplets d'un espace–instant–population sont possibles.

Ainsi on peut voir des études sur des individus se déplaçant sur un réseau de manière synchrone à une fréquence donnée [84], ou bien sur un espace

continu, mais toujours pour des temps discrets [300, 295, 346], ou encore en laissant le temps s'écouler de manière continu [31]. Enfin on peut étudier un champ continu, eulérien ou lagrangien, représentant la population, ce qui rejoint la discussion des échelles.

Les espaces physiques étudiés ont différentes dimensionnalités, en fonction des systèmes étudiés : les cils auriculaires sont comme des rails parcourus par des moteurs moléculaires [19], de même les filaments de microtubule [260], ou d'actine [301]. Les piétons sur des trottoirs ont aussi une dynamique quasi-unidimensionnelle [169]. Les exemples d'animaux se déplaçant dans les espaces à deux, ou trois dimensions sont évidents.

De même les études théoriques se sont placées dans des espaces à une [86, 268], deux, ou trois dimensions [68, 88, 148]. Cependant, tous ces espaces sont euclidiens. Or les géométries des espaces naturels peuvent être plus complexes, puisque les animaux vivant au sol parcourent collines, montagnes ou cuvettes. Le substrat peut être aussi une sphère pour les cellules d'un embryon [266]. Mais, pour l'instant, les études sur des espaces non euclidiens sont rares (voir l'exception [310]).

La topologie d'un espace peut aussi se caractériser par la façon dont les liens se tissent entre les individus. Ainsi les interactions peuvent avoir lieu entre tous les individus, on parlera alors de théorie de champ moyen, ou seulement avec des individus d'un *voisinage*. Ce mot est à prendre au sens large. Il peut être une sphère de rayon donné [346], et on parle alors de modèle *métrique* en référence à la présence de cette longueur caractéristique. Les voisins peuvent désigner les individus les plus proches, déterminés en considérant un pavage de Voronoï [17, 143, 264]. Enfin, les voisins peuvent être tirés au hasard dans une liste, il s'agit alors de réseau aléatoire [3, 67].

## III.4. – Les cadres de pensée

Le choix du formalisme d'écriture des équations physiques est souvent lié à la formation initiale de celui qui étudie un système. Même si un bon physicien devrait être capable de changer d'outils à la demande [128], et que nous aspirons à être de bons ouvriers, nous avons tous nos habitudes, nos manies. Cependant, beaucoup de groupes différents ont travaillé sur le sujet des mouvements collectifs. Au final beaucoup de formalismes différents ont été utilisés.

### III.4.1. – Modèles microscopiques

La mécanique newtonienne [47, 227, 271, 308] dans laquelle les animaux sont des objets soumis à des forces semblent être la première méthode à être utilisée, notamment en 1952 par Emlen [118]. L'enjeu était alors d'objectiver le problème. Si on considère les animaux en dehors des sciences éthologiques (de l'époque), on permet leur description mathématique.

La mécanique hamiltonienne [145, 146] a permis de réintroduire une source externe d'énergie. Les objets qui ont un mouvement perpétuel, éventuellement collectif, puisent leur énergie dans le milieu. Cette source se renouvelle, mais suivant une dynamique propre. Le couplage entre la dynamique de

l'énergie disponible dans le milieu et l'énergie utilisée lors du mouvement des marcheurs mène à des solutions classiques des systèmes dynamiques : point fixe, cycle, chaos, mais sur la dynamique collective des marcheurs.

L'autre aspect de la mécanique hamiltonienne est la proximité avec la physique statistique à l'équilibre et la thermodynamique. Cela a permis d'étudier la stabilité des troupeaux formés sous des potentiels d'interaction *mous* [110], c'est-à-dire sans divergence pouvant se produire à l'approche d'un cœur dur par exemple.

Au passage, deux autres formalismes ont été cités, celui des systèmes dynamiques utilisés notamment lorsque l'état collectif est écrit par l'intermédiaire d'équations différentielles [35]. La thermodynamique classique, quant à elle, a été utilisée pour étudier des théories de champ moyen de modèles stochastiques [54, 84], sans trop de succès.

### III.4.2. – Modèles stochastiques

Les systèmes stochastiques représentent la grande majorité des modèles [76, 162, 218]. Le premier argument avancé pour écrire un modèle stochastique, ou probabiliste est de dire que les systèmes biologiques subissent une grande variabilité. Le second argument est que la dynamique n'est pas entièrement connue, ou résulte de processus plus élémentaires inconnus dont la résultante est équivalente à bruit, de manière analogue au bruit moléculaire intervenant dans une équation de Langevin. Le terme *stochastique* est employé pour différents formalismes. Il peut s'agir d'une quantité aléatoire intervenant dans une équation d'évolution, comme l'équation de Langevin. Ainsi une force aléatoire est souvent un des ingrédients des modèles microscopiques [110, 146, 289], ou mésoscopiques dans les modèles d'hydrodynamique fluctuante [71, 330]. Les équations différentielles stochastiques du type de processus de Wiener sont utilisées pour calculer la vitesse de translation des particules, ou la vitesse de rotation, dans ce cas on parle de processus d'Ornstein-Uhlenbeck [55, 254].

Le bruit peut aussi apparaître via des probabilités de changement d'état, par exemple entre des criquets qui tournent vers la droite plutôt que vers la gauche [115, 268, 292]. Dans [311], l'état microscopique interne est défini par un *spin*. Celui-ci permet de calculer un taux de changement de direction, et il est lui-même mis à jour en fonction d'une probabilité similaire à un poids de Boltzmann, à l'image du modèle d'Ising.

Les grandeurs cinématiques peuvent aussi être tirées directement d'une fonction de distribution choisie de manière ad'hoc, par exemple le module de la vitesse [5, 192, 198], ou l'angle de rotation [81]. Enfin, les interactions des animaux peuvent être modélisées par des choix probabilistes [76], ou une sorte d'algorithme interne [162].

### III.4.3. – Modèles mésoscopiques

Un des biais historiques inhérents aux méthodes stochastiques est de proposer des études statistiques de ces modèles, c'est-à-dire d'étudier des moyennes des observables. Ces moyennes peuvent être calculées à une certaine échelle spatio-temporelle, à l'image de la particule fluide introduite en

mécanique des milieux continus, ou sur les différentes configurations du bruit, comme des moyennes d'ensemble. Les équations obtenues portent donc sur des champs mésoscopiques et sont similaires aux équations hydrodynamiques mais comportent des termes inhabituels. Elles peuvent être postulées à partir d'arguments de symétries nécessairement conservées par les règles microscopiques [330, 83]. Dans ce cas, les coefficients de transport, intervenant devant les termes différentiels, sont phénoménologiques. Leurs valeurs sont inconnues, et les dépendances possibles avec les paramètres microscopiques sont négligées (voir la section V), ce qui empêche de déterminer les points de transition. Par des arguments heuristiques, et une bonne connaissance des résultats concernant les modèles microscopiques, il est possible de ré-introduire ces dépendances [60, 249, 312, 314].

La dernière méthode pour obtenir ces équations est de partir de la microscopie et d'effectuer réellement les moyennes nécessaires. Pour cela, il faut trouver la forme du modèle microscopique adéquate au travail de resommation. Cela passe aussi par des hypothèses supplémentaires au niveau des interactions microscopiques, par exemple sous la forme d'interactions binaires [31]. On obtient alors des équations probabilistes sur le modèle microscopique : équation de Boltzmann [31], ou de Fokker-Planck, ou de Smoluchowski [250], ou de Chapman-Kolmogorov [195]. On intègre ensuite ces équations, à des hypothèses supplémentaires près (relation de fermeture, voir la section V). Ce travail a été réalisé à peu près au même moment par au moins trois équipes concurrentes [29, 30, 32, 196, 197].

#### III.4.4. – Le degré de formalisme

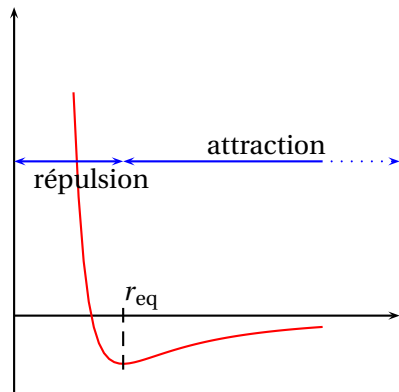
Les choix des méthodes sont multiples et ont été presque tous utilisés. En suite, nous avons insisté sur les études publiées dans les journaux de sciences physiques, ou dans ceux qui sont dit interdisciplinaires. Mais d'autres disciplines se sont emparées de ce champ d'études. Notons particulièrement les mathématiques. Les mouvements collectifs ont été le prétexte d'études concernant les équations aux dérivées partielles [251, 334, 335] et l'équation de Boltzmann [93, 94, 56]. Ces derniers travaux montrent notamment que les mathématiciens ont repris l'étude des équations déterminées par des physiciens avec leurs propres outils.

D'autres auteurs [215, 291, 290] ont considéré le modèle de Vicsek (voir chap. IV) en tant que discrétisation d'un modèle microscopique continu bien posé et ils ont cherché à déterminer ce dernier modèle.

### III.5. – Ingrédients

En effectuant la bibliographie de ce sujet, on peut être surpris par le fait que tous les ingrédients des différents modèles sont assez stables dans le temps. Ils ont été postulés très rapidement [118, 300, 319, 295]. Par la suite, ce qui a varié est plutôt contenu dans les outils d'études, que nous avons décrits dans la section III.4.

4. le potentiel contient déjà ces différences spatiales, voir les flèches sur l'illustration III.1.



Illustr. III.1. – Potentiel de Lennard-Jones : illustration du potentiel d'attraction-répulsion

Les modèles les plus courants décrivent des points en interaction, c'est-à-dire qui subissent une attraction de voisin à voisin si leur distance est suffisamment grande, ou une répulsion à courte distance. Ils subissent donc l'équivalent d'un potentiel de Lennard-Jones (illustr. III.1). Souvent cette interaction est montrée comme s'appliquant dans des zones bien déterminées [5, 174, 192, 81], par exemple des couronnes concentriques pour des modèles bidimensionnelles, la répulsion ayant lieu dans le disque le plus intérieur. Mais on peut comprendre cette description comme la discrétisation du même potentiel de Lennard-Jones [157]<sup>4</sup>. Dans de rares cas, un caractère anisotrope est ajouté [162, 297]. Il faut noter enfin que la divergence du potentiel en zéro, qui donne la taille de l'animal, n'est pas toujours utilisée. Des études considèrent aussi des potentiels mous [110]. Dans ce cas, les animaux peuvent être empilés les uns sur les autres.

Le second ingrédient le plus représentés est l'alignement : deux animaux voisins ont tendance à orienter un vecteur selon une direction commune. Généralement ce vecteur est la vitesse, mais c'est un choix par souci de simplicité. Parfois, il s'agit du vecteur d'orientation de l'animal [308]. L'idée est que les animaux semblent se diriger vers une direction commune lorsqu'ils bougent en groupe. Il y a donc comme un ordre ferromagnétique. L'écriture de ce terme peut prendre la forme d'une rotation [5, 192, 198], d'une force en  $\vec{\omega} \wedge \vec{v}$  avec  $\vec{\omega}$  un pseudo-vecteur et  $\vec{v}$  la vitesse de l'animal [215, 308]. La force peut aussi être proportionnelle à la vitesse relative entre voisin [271], ou bien le déplacement lui-même peut être proportionnel à la vitesse moyenne locale [81].

La source d'énergie, nécessaire au mouvement, est écrite comme une force propulsive [308] dont la direction est soit colinéaire à la vitesse initiale, soit aléatoire. Enfin il y a la possibilité que cette source soit cachée. Le caractère perpétuel du mouvement est alors inscrit dans la vitesse elle-même, soit en ayant un module fixé [346, 227], soit en ayant une distribution de moyenne non nulle [5]

D'autres ingrédients sont présents : le bruit, comme nous l'avons vu précédemment III.4.2, mais aussi un amortissement fluide [308] et dernièrement des essais d'introduction d'un fluide ambiant.

---

## Le modèle de Vicsek

---

En regardant la bibliographie, on s’aperçoit que la plupart des modèles sont déjà proposés en 1995. Pourtant, l’article de T. VICSEK *et al* [346] a retenu l’attention des physiciens, et il est cité par toutes les études sur le sujet depuis.

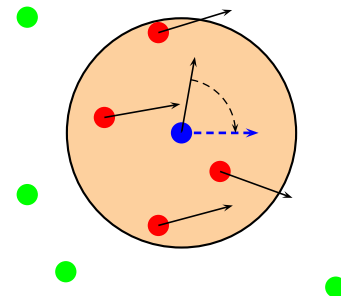
### IV.1. – Modèle de Vicsek

#### IV.1.1. – Présentation

Ici, ce sont les grands groupes que l’on cherche à modéliser, sans chef, ni autre champ organisateur. Délibérément, ces auteurs ont retenu le point de vue de l’universalité pour comprendre les mouvements collectifs. D’une part, si des interactions locales peuvent organiser un système physique, elles doivent pouvoir le faire pour un groupe d’animaux. D’autre part, l’omniprésence des mouvements collectifs est peut-être le signe d’une universalité. Il faut donc chercher un phénomène critique, à l’image des transitions de phase ferromagnétique [348]. Il y a cependant une difficulté : le théorème de Mermin-Wagner [246] interdit toute brisure spontanée d’une symétrie continue pour un système physique à l’équilibre dont la dimensionalité est inférieure ou égale à deux.

Mais il y a une possibilité de contourner cette difficulté, car les animaux constituent un système hors d’équilibre. Les auteurs modélisent alors les animaux comme des dipôles en interaction locale et ils associent le dipôle lui-même au vecteur-vitesse de chacun des animaux. Pour maintenir le système hors d’équilibre, les auteurs imposent un module constant  $v_0$  à toutes les vitesses.

Le système est donc composé de  $N$  points sur un espace carré bidimensionnel de taille  $L$ , avec des conditions aux bords bipériodiques. Le voisinage  $\mathcal{V}$  est défini comme l’ensemble des points appartenant au disque de rayon  $R$  centré sur le point dont on cherche les voisins (illustr. IV.1). Chacun des points est libre de se déplacer continuellement sur l’espace. En revanche la dynamique est à temps discret, de pas  $\Delta t$ . Les interactions sont calculées à chaque pas. Pour cela, la moyenne des vitesses sur le voisinage est calculée. L’animal change de direction pour suivre cette vitesse moyenne à un bruit près. On a



Illustr. IV.1. – Modèle de Vicsek. Le point central voit sa vitesse s’aligner sur les vitesses des voisins, voisins pris sur le disque coloré.

donc besoin de la direction  $\vartheta$  de la vitesse de chaque animal et d'un opérateur qui calcule proprement cette direction. Sur l'espace bidimensionnel, on peut associer un vecteur à un nombre complexe, la direction du vecteur étant l'argument du complexe.

On obtient alors les règles pour un individu d'indice  $j$  :

$$\vec{v}_j^t = v_0 e^{i\vartheta_j^t} \quad (\text{IV.1})$$

$$\vec{r}_j^{t+\Delta t} = \vec{r}_j^t + \Delta t \vec{v}_j^t, \quad (\text{IV.2})$$

$$\vartheta_j^{t+\Delta t} = \text{Arg} \left[ \sum_{k \in \mathcal{V}_j} \vec{v}_k^t \right] + \eta \xi_j^t, \quad (\text{IV.3})$$

où  $\eta$  est un paramètre contrôlant l'amplitude du bruit  $\xi$ , qui est décorrélé et de distribution uniforme sur  $]-\pi; \pi[$ .

L'équation IV.2 pourrait être comprise comme une discrétisation d'Euler de la cinématique continue. Mais l'interprétation, autre que qualitative, de l'équation IV.3 à pas discret n'est pas triviale, et des études différentes [83, 215] donnent des interactions à temps continu différentes. De plus, les auteurs du travail original [346] parlent de simulations *Monte-Carlo*. Les équations IV.1-IV.3 constituent donc une dynamique effective de processus, potentiellement complexes, ayant lieu durant le temps caractéristique  $\Delta t$ .

Les ingrédients de cette dynamique sont que :

- d'après les équations IV.1 et IV.2, le temps typique d'amortissement des oscillations dynamiques est petit devant  $\Delta t$  ;
- d'après l'équation IV.3, le temps de rotation des vecteurs vitesses est petit devant  $\Delta t$  ;
- d'après l'équation IV.3, le temps typique d'interaction est petit devant  $\Delta t$ .

Un des effets de cette dynamique est que les particules peuvent se croiser. Cela ne signifie pas qu'elles n'ont pas d'existence ou de cœur dur, mais que ce sont des interactions à plus petites échelles en espace et en temps et qui donc ne sont pas prises en compte.

### IV.1.2. – Résultats

Jusqu'en 2004, toutes les études [87, 89, 345, 346, 347], même en  $d = 3$  [88], concluent que le modèle décrit précédemment possède une transition de phase équivalente à celle d'un système critique à l'équilibre. Elle a lieu entre une phase désordonnée constituée de marcheurs aléatoires indépendants et une phase ordonnée où les individus se déplacent selon une direction commune, mais qui apparaît de manière aléatoire. Il y a donc brisure spontanée d'une symétrie continue – la symétrie de rotation – même en  $d = 2$ , sans chef, ni anisotropie spatiale, pourvu que le système soit maintenu hors d'équilibre.

Les paramètres de contrôle sont l'amplitude du bruit  $\eta$ , et la densité globale  $\rho_0$ . On comprend le rôle de la densité en se rappelant que le voisinage est un disque de rayon fixé. Si on augmente la densité, on augmente le nombre de voisins et on favorise les interactions.



Références	$\beta$	$\gamma$	$\nu$
[87]	0,42(3)	1, ou 2, ou 4	2
[154]	0,34(6)	1,40(7)	$\sim 1$
[10]	0,45(3)	2,3(4)	1,6(3) ou 1,3(3)

TABLE IV.1 – Tableau récapitulatif des exposants mesurés en supposant que le modèle de Vicsek suit une transition continue.

Les auteurs définissent une nouvelle classe d'universalité en observant la vitesse globale moyenne, équivalent de l'aimantation si les vitesses individuelles jouent le rôle du spin :

$$\varphi^t = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \vec{v}_i^t \right|, \quad (\text{IV.4})$$

et qui est moyennée au cours du temps, ce qui fournit le paramètre d'ordre et l'exposant  $\beta$  correspondant  $\langle \varphi \rangle \propto (\eta - \eta_t)^\beta$ , avec  $\eta_t$  le bruit de transition à une densité donnée. En supposant qu'il y a un équivalent du théorème de fluctuation-dissipation, les auteurs de ces études mesurent la variance de  $\varphi$  pour en déduire l'exposant  $\gamma$ . En effectuant cette procédure à différente densité  $\rho_0$ , on obtient un diagramme des phases où  $\eta_t \propto \sqrt{\rho_0}$ .

Les exposants obtenus soulèvent cependant des problèmes, voir les valeurs dans le tableau IV.1. En effet,  $\beta$  est proche de la valeur 1/2, classiquement obtenue en champ moyen. La valeur de l'exposant  $\gamma$  change en fonction de la méthode de mesure. Les valeurs des exposants n'ont pas la résolution nécessaire pour vérifier s'ils suivent les relations d'échelle habituelles.

## IV.2. – Revisiter la transition continue

### IV.2.1. – De nouvelles incohérences

En 1998, nous commençons notre travail de thèse [154] sur les mouvements des troupeaux avec pour base les travaux de T. VICSEK. Nous étudions des variantes aux modèles de Vicsek en ajoutant des interactions de corps, répulsives seulement ou d'attraction-répulsion. Enfin nous nous attachons à l'étude d'un modèle proposé par Y. TU *et al* [333, 337]. Le point important dans ce nouveau modèle est que le bruit est du type vectoriel, ainsi l'équation IV.3 devient :

$$\vartheta_j^{t+\Delta t} = \text{Arg} \left[ \sum_{k \in \mathcal{V}} \vec{v}_j^t + \mathcal{N}_j^t \eta \vec{e}_j^t \right], \quad (\text{IV.5})$$

où  $\mathcal{N}_i^t$  est le nombre de voisins de l'individu  $i$  à l'instant  $t$ , et  $\vec{e}_i^t$  est un vecteur unitaire de direction aléatoire.

La conclusion de la thèse ajoutait de la confusion [154]. Dans celle-ci, le modèle de Vicsek (avec un bruit angulaire, éq. IV.3) semble effectivement avoir une transition continue mais avec des corrections aux effets de taille qui décalent le point critique en  $L^{-\omega}$ , avec  $\omega \sim 0,14$ , c'est-à-dire très lentement. Mais les valeurs des exposants (voir table IV.1) semblent cohérents avec les relations d'échelle.

En revanche, le modèle avec bruit vectoriel (éq. IV.5) suit clairement une transition dynamique discontinue. Notre intuition était que ce changement d'implémentation du bruit ne devait pas être si important que cela, et que les transitions devaient être identiques entre les deux modèles. Nous avons également observé que les effets de taille se faisaient plus ou moins sentir en fonction du type de bruit et en fonction de la force ajoutée. Les effets de taille pourraient donc masquer la nature de la transition.

### IV.2.2. – Une seule transition sous-critique

La méthode numérique suivie pour vérifier cette intuition a été de mettre en place une étude des effets de taille finie sur de très grands systèmes<sup>1</sup>, analysés dans le cadre des transitions du premier ordre. Une telle théorie n'existe pas pour un système hors d'équilibre, et elle dépend en partie du système étudié dans le cas des systèmes à l'équilibre. Il y a cependant des invariants [45, 220]. Dans le cadre des ferromagnétiques, le point de transition mesuré sur l'aimantation  $\langle m \rangle$  tend exponentiellement vers sa valeur asymptotique  $\eta(L) \sim \eta_\infty + O(e^{-aL})$ , la susceptibilité, et le cumulante de Binder  $G = 1 - \langle m^4 \rangle / (3\langle m^2 \rangle^2)$  subissent une correction dépendant du volume du système  $\eta(L) \sim \eta_\infty + O(L^{-d})$ . Enfin, et surtout, le cumulante de Binder possède un minimum au point de transition, contrairement à ce qui est observé pour les transitions continues [34, 287].

Près du point de transition, nous avons enregistré les histogrammes du paramètre d'ordre cumulés sur de longues durées de calcul afin d'observer une possible coexistence de phase. Enfin nous avons observé la nature de la phase ordonnée car il paraissait clair que, si nous ne comprenions pas la nature de la transition de phase, c'était parce que nous n'avions pas une bonne image des phases asymptotiques en compétition. Aussi nous avons enregistré l'aspect des champs locaux de densité et de vitesse.

Nous avons fait cette étude sur le modèle de Vicsek avec bruit angulaire, ou avec bruit vectoriel, sans force d'interaction de corps, ou avec force répulsive. Nous avons fait varier la densité globale  $\rho_0$  et le module de la vitesse  $v_0$ . Nous avons utilisé des conditions aux bords bi-périodiques, ou périodique dans une direction et élastique dans l'autre. Nous avons changé les tailles du système de manière décorrélée pour obtenir des rectangles (en  $d = 2$ ) de différents rapports  $\ell_x / \ell_y$ . Nous avons aussi étudié un cas tridimensionnel.

En résumé (voir [68, 155] en annexe), nous avons toujours observé une transition du premier ordre avec, près de cette transition, un cumulante de Binder qui possède un minimum, une vitesse globale dont la courbe tend vers un saut, des histogrammes bimodaux. La phase *ordonnée* n'est pas quasi-homogène avec des fluctuations comme on l'imaginait auparavant [330, 346], mais possède une succession de bandes dont l'extension est perpendiculaire au mouvement globale. Cette structure longitudinale est robuste au changement de conditions aux bords. Enfin, cette phase semble métastable au point de transition puisqu'il est possible de parcourir un cycle d'hystérèse.

Le point surprenant de notre étude [68] tient au fait que les petits systèmes semblent toujours suivre les effets de taille d'une transition continue et qu'il existe une taille  $L^*$  de changement de comportement au-delà de laquelle la transition est sous-critique.

1. notamment en améliorant les algorithmes permettant le calcul numériques des interactions.

## IV.3. – De l'embarras

Suite au premier article [155] est née une polémique. La nature continue de la transition permettait d'imaginer que les résultats portés par le modèle minimal de Vicsek étaient universels. Une transition discontinue anéantit tout cela.

De nouvelles études sont venues corroborer la nature continue de la transition [3, 11, 148, 256, 348] et son caractère multi-échelle [191]. L'une d'elle est expérimentale [320]. Plusieurs artefacts ont été proposés pour expliquer notre observation [11] : les conditions aux bords périodiques qui stabiliseraient les ondes longitudinales observées, la valeur de la vitesse, le schéma numérique de mise à jour utilisé dans l'équation IV.2.

Nous avons testé toutes ces propositions, et nous avons toujours trouvé une taille  $L^*$  de changement de comportement, qui n'était généralement pas atteinte dans les études pré-citées. Ces tests ont montré également que cette taille varie en fonction des détails testés, ce qui n'est pas surprenant [68].

Cependant, pour sortir de la polémique, il était nécessaire d'obtenir des arguments analytiques pouvant étayer les résultats numériques.



# Équations hydrodynamiques

Le travail présenté ici est issue d'une collaboration avec ÉRIC BERTIN depuis nos thèses respectives. Dès les années 2000, nous nous interrogeons pour ré-écrire le modèle de Vicsek en vue d'une étude analytique [154].

## V.1. – Modèle à temps continu

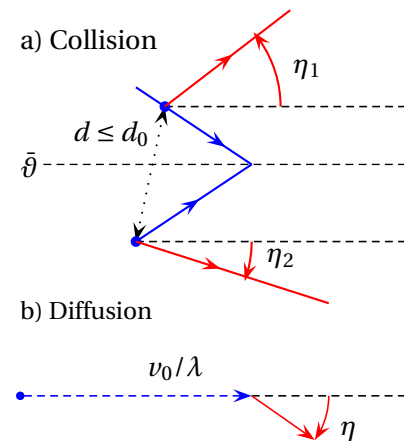
Dans [31, 32] (voir annexe), nous avons proposé un modèle à temps continu ayant les mêmes symétries que le modèle de Vicsek. Au chapitre IV, nous avons affirmé le caractère *effectif* du modèle de Vicsek, soulignant sa qualité de modèle minimale. Le pas de temps  $\Delta t$  a donc une importance comme limite inférieure sous laquelle se révèlent les détails microscopiques. Nous minimisons ici l'importance de ce temps de coupure en choisissant un modèle à temps continu.

Cependant, une étude postérieure [278] a montré que la prise en compte de l'équation discrète IV.2 fait apparaître, à une échelle mésoscopique, l'effet d'une diffusion sur la position des particules. Ce résultat est vrai dans le cas général d'une cinématique ballistique à pas discret. Mais, les coefficients de diffusion dépendent du choix de la distribution du bruit.

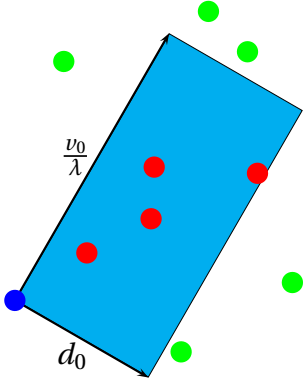
La différence principale entre le modèle de Vicsek et le nôtre réside dans les collisions. Potentiellement, elles mettent en jeu de nombreux animaux dans le modèle de Vicsek – tous ceux qui sont dans le disque d'interaction – alors qu'elles sont toujours binaires dans notre travail.

Dans ce modèle, les animaux sont des points dans un espace bidimensionnel. Ils suivent une cinématique ballistique à vitesse constante  $v_0$ . Lorsque deux individus s'approchent à une distance inférieure à  $d_0$ , ils interagissent et changent leur direction de déplacement. La nouvelle direction est la direction moyenne des deux vecteurs vitesses avant la collision à un bruit angulaire près (voir illustr. V.1). En dehors de tout voisin, ils subissent aussi des rotations dont l'angle et l'instant sont aléatoires. Cet événement a une probabilité par unité de temps  $\lambda$ . Ce sont donc des marcheurs aléatoires avec un temps de persistance.

Lors des collisions et pendant le mouvement diffusif, les bruits sont des rotations aléatoires, dont l'angle est distribués selon une gaussienne de variance



Illustr. V.1. – Modèle à temps continu du modèle de Vicsek



Illustr. V.2. – Paramètre d'ordre du modèle à temps continu

$\sigma$ , formellement différente pour chacun des processus. Il est à remarquer que les rotations ont lieu infiniment rapidement.

Au niveau dimensionnel, on peut remarquer qu'il y a deux distances typiques fournies par les détails microscopiques de la dynamique : le vol ballistique moyen  $v_0/\lambda$ , la distance d'interaction  $d_0$ . On en déduit un seul nombre sans dimension réglant les paramètres du modèle :

$$B = \frac{v_0}{\lambda d_0}. \quad (\text{V.1})$$

Ce nombre mesure la capacité d'un animal à sortir de l'interaction d'un voisin avant la prochaine rotation. Si  $B$  est grand, on peut supposer alors qu'il n'y a pas de re-collision entre deux individus, et donc on peut supposer qu'il n'y a pas d'effet mémoire entre les collisions.

La densité globale  $\rho_0$  permet de construire une troisième distance : la distance moyenne entre individus  $1/\sqrt{\rho_0}$ , d'où le nombre sans dimension mesurant la dilution des individus sur l'espace :

$$H = \frac{1}{d_0 \sqrt{\rho_0}}. \quad (\text{V.2})$$

Si  $H \gg 1$ , il est peu probable de trouver deux individus en interaction, et d'autant plus on s'attend à n'avoir que des collisions binaires.

Le raisonnement menant à la définition de  $H$  est statique. Mais le modèle est dynamique. Pour connaître la potentialité des collisions, il faut donc compter les individus sur une trajectoire typique (voir l'illustration V.2). À un coefficient 2 près, ce nombre vaut :

$$p_0 = \frac{\rho_0 d_0 v_0}{\lambda}. \quad (\text{V.3})$$

Plus  $p_0$  augmente, plus il y a de collisions et donc plus le mouvement collectif est à même d'apparaître. Ce nombre sans dimension est donc un paramètre de contrôle. Les derniers nombres sans dimension sont les variances des bruits angulaires. On les prend égales pour les processus de collision et de diffusion dans la suite. Cette amplitude  $\sigma$  est le second paramètre de contrôle.

## V.2. – Théorie cinétique

D'après la discussion précédente, si  $B \gg 1$  et  $H \gg 1$ , alors les animaux auront des collisions binaires indépendantes. Il est donc raisonnable d'utiliser les outils de la théorie cinétique. L'équation de Boltzmann régissant la densité de probabilité  $f(\vec{r}, \vartheta, t)$  pour qu'un animal soit à l'instant  $t$ , à la position  $\vec{r}$  et se dirige selon la direction  $\vartheta$  [31, 32] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_0 \vec{e}(\vartheta) \cdot \nabla f = I_{\text{diff}}^{\text{out}} + I_{\text{diff}}^{\text{in}} + I_{\text{col}}^{\text{out}} + I_{\text{col}}^{\text{in}} \quad (\text{V.4})$$

où les termes de droite tiennent compte des processus de diffusion et de collision (illustr. V.1) qui permettent d'atteindre ou de quitter la direction  $\vartheta$ . Ces termes sont intégraux. L'équation V.4 dans sa globalité est difficile à utiliser.

Soit on simplifie l'équation autour d'une solution connue [32], soit on l'intègre pour chercher les équations hydrodynamiques associées.

Le module de la vitesse étant fixé, l'espace étant bidimensionnel, on peut utiliser la relation entre vecteur et nombre complexe. On observe alors que les coefficients de Fourier de la densité de probabilité, respectivement à l'ordre zéro et à l'ordre un, s'écrivent :

$$\hat{f}_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\vec{r}, \vartheta, t) d\vartheta = \rho \quad (\text{V.5})$$

$$\hat{f}_1 = \int_{-\pi}^{\pi} v_0 e^{i\vartheta} f(\vec{r}, \vartheta, t) d\vartheta = \vec{w} \quad (\text{V.6})$$

Le vecteur  $\vec{w}$  est une densité de quantité de mouvement, et il est dimensionnellement équivalent au produit d'une densité par une vitesse.

On en conclut que le développement en modes de Fourier de l'équation V.4 fournit l'équation des champs vérifiés par  $\rho$  et  $\vec{w}$ . Il y a cependant un détail : ce développement couple les différents modes. Il faut donc avoir un argument pour négliger les modes d'ordre supérieur. Dans le travail [31, 32], nous avons supposé une hiérarchisation des modes du type  $\hat{f}_k = \mathcal{O}(\varepsilon^{|k|})$ . Nous avons utilisé les trois premiers ordres et négligé les suivants. Cela donne accès à trois équations couplées, dont une permet l'élimination du mode le plus élevé, la relation de fermeture. Puis nous avons testé numériquement cette hypothèse.

L'étude de A. PESHKOV *et al.* [278] a formalisé cette hiérarchie en utilisant un raisonnement de séparation des échelles à la Ginzburg-Landau pour déterminer les termes pertinents en fonction de l'écart au seuil de la transition. Ils obtiennent la même relation de fermeture.

## V.3. – Les équations hydrodynamiques

En se plaçant suffisamment près du seuil de la transition, c'est-à-dire en supposant que la vitesse locale reste petit  $v = w/\rho \sim 0$ , on obtient les équations hydrodynamiques suivantes<sup>1</sup> :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{w} = 0, \quad (\text{V.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \gamma(\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} &= -\frac{1}{2} \nabla p + \kappa \left[ \frac{1}{2} \nabla \vec{w}^2 - (\nabla \cdot \vec{w}) \vec{w} \right] + \nu \nabla^2 \vec{w} \\ &+ (\mu - \xi \vec{w}^2) \vec{w}, \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

où l'on a utilisé les variables sans dimension suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{\lambda}{v_0} x, \\ \tilde{t} &= \lambda t, \\ \tilde{w} &= \frac{d_0}{\lambda} w, \\ p &= \frac{v_0 d_0}{\lambda} \rho. \end{aligned}$$

1. il faut noter que l'étude [32] donne trop de termes dans la seconde équation.

2. avec l'adimensionnement proposé, ils ne dépendent que de ces deux ingrédients

Le point important est que les coefficients de transport  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $\mu$ ,  $\xi$  et  $\nu$  dépendent de la variance du bruit  $\sigma$  et du champ local de densité  $p^2$ . C'est la différence majeure avec les méthodes phénoménologiques utilisées pour obtenir les équations hydrodynamiques [330].

Les coefficients  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $\nu$  et  $\xi$  sont de la forme  $1/(C + Dp)$  et le terme linéaire en  $w$  est  $\mu \propto (p - p_t)$ , avec  $p_t$  qui dépend de  $\sigma$ . Ces dépendances permettent d'étudier le diagramme des phases des équations hydrodynamiques.

## V.4. – Diagramme des phases

Le dernier terme de l'équation V.8 est un terme de saturation produisant des solutions homogènes stationnaires :

$$w_1 = 0 \text{ pour } p \leq p_t, \quad (\text{V.9})$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\xi}} \text{ pour } p \geq p_t, \quad (\text{V.10})$$

qui sont linéairement stables vis-à-vis des perturbations homogènes sur chacun des domaines de définition ce qui donne une transition supercritique. Sur la figure V.3, on observe que la quantité de mouvement, et donc la vitesse, est nulle pour des bruits forts et suit une transition d'exposant 1/2 près d'une valeur  $\sigma_t$ , connue exactement.

À ces solutions, il est possible d'ajouter une modulation spatio-temporelle :

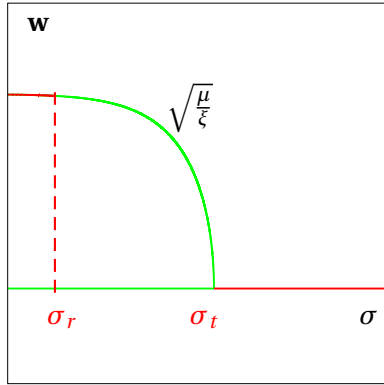
$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \delta\rho_0 e^{st+i\vec{q}\cdot\vec{r}}, \quad \vec{w}(\vec{r}, t) = \vec{w}_0 + \delta\vec{w}_0 e^{st+i\vec{q}\cdot\vec{r}}.$$

et de quantifier la réponse du système en linéarisant les équations V.7 et V.8 autour de ces solutions de base.

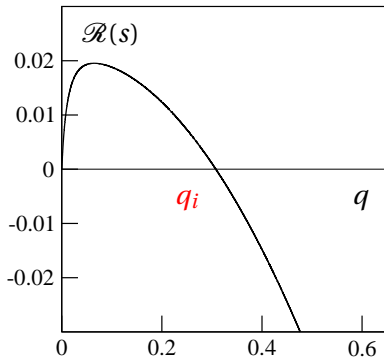
Dans le cas des perturbations longitudinales, la partie réelle du gain  $\mathcal{R}(s)$  de ces perturbations est négative pour les bruits forts et pour des bruits extrêmement faibles. Dans ces zones, les solutions homogènes sont stables. Mais pour des valeurs intermédiaires de bruit  $\sigma_r \leq \sigma \leq \sigma_t$ , le gain possède des parties réelles positives (voir illustr. V.4), ce qui indique une instabilité de la phase homogène stationnaire tout le long de la ligne de transition de mise en mouvement. La bifurcation supercritique n'existe donc pas.

On remarque aussi que cette instabilité n'excite que des modes  $q \leq q_i$ . Des systèmes plus petits devant la longueur d'onde  $2\pi/q_i$  n'explorent que des vecteurs d'onde plus grands et sont donc stables. Il existe donc une taille de système  $L^* \sim 2\pi/q_i$  au-delà de laquelle le système devient instable. C'est exactement le type d'effets de taille observés numériquement dans le modèle de Vicsek, ou ses variantes (voir chap. IV).

Pour être complet sur la question de l'instabilité, notre étude porte sur les modes longitudinaux. Ce sont les plus excités et cela correspond aussi aux motifs en bandes observés dans les simulations numériques. Mais contrairement à nos conclusions [32], d'autres modes peuvent être instables [278]. Cependant, cela arrive plus profondément dans la phase dite *ordonnée* du diagramme des phases. Étant donné que les équations V.7 et V.8 ont été dérivées près du seuil de stabilité de la phase sans mouvement, on peut se demander si ces résultats sont très fiables.



Illustr. V.3. – Bifurcation dans les équations hydrodynamiques actives : solutions homogènes stationnaires en fonction du bruit.



Illustr. V.4. – Instabilité des solutions des équations hydrodynamiques.



## V.5. – Solitons

La solution non-liéaire obtenue dans la zone instable du diagramme des phases est forcément grande devant la vitesse calculée près du seuil supercritique. Pour déterminer ces solutions, on utilise les équations en dehors de la gamme de validité de nos hypothèses. Nous supposons de plus que seul le mode longitudinal est instable. L'écoulement est alors invariant selon la direction transverse au mouvement. Dans ce cas, le système est unidimensionnel et le terme  $\kappa [\frac{1}{2}\nabla\vec{w}^2 - (\nabla\cdot\vec{w})\vec{w}]$  de l'équation V.8 s'annule.

Supposons aussi que la solution recherchée est propagative, *i.e.* en mouvement stationnaire à une vitesse  $c$ . Par changement de référentiel dans l'équation V.7, on montre que les profils de densité  $R$  et de quantité de mouvement  $W$  sont similaires et dépendent d'une densité  $\rho^*$  :  $W = c(R - \rho^*)$ . Cette relation peut être injectée dans les coefficients de transport. Après un peu d'algèbre sur l'éq. V.8, on montre que le profil de quantité de mouvement  $W$  suit une équation du type :

$$\ddot{W} = -g(W, \dot{W})\dot{W} - \frac{d\Phi}{dW}, \quad (\text{V.11})$$

où  $\Phi$  est un potentiel quartique et  $g$  une fonction linéaire. La dérivée est effectuée selon l'abscisse dans le référentiel en mouvement.

Le profil  $W$  suit donc l'équation du mouvement d'un point dans le potentiel  $\Phi$  et subissant un amortissement non trivial où le coefficient de frottement dépend de la position et de la vitesse. Une des cocasseries de ce problème est que le terme d'amortissement peut changer de signe et donc réintroduire de l'énergie dans le système. Comme le coefficient de frottement est linéaire en  $W$  et  $\dot{W}$ , le système n'est pas symétrique autour de l'origine.

Une des solutions à cette équation est un soliton [280]. Les simulations du modèle de Vicsek (voir chap. IV) montrent effectivement des profils non symétriques se déplacer sur une mer de marcheurs aléatoires. Des mesures plus précises montrent que ce sont des structures propagatives, avec des queues exponentielles, et une célérité vérifiant  $c > v_0/\sqrt{2}$  en accord avec les prédictions analytiques [32]. Nous avons aussi fait des expériences de collision de profils [69] qui pourraient être cohérentes avec une dynamique de solitons.

## V.6. – Conclusion

Ce travail a donné un cadre de compréhension aux comportements du modèle de Vicsek. Les petits systèmes suivent une bifurcation supercritique. Au-delà d'une certaine taille de système, une instabilité du champ de la quantité de mouvement se déclenche, ce qui détruit la précédente branche stable. Un motif non-linéaire, probablement longitudinal, apparaît et il suit une équation proche de celle du soliton.

À la fin de notre étude, il reste de nombreuses questions. Tout d'abord, les simulations directes de l'équation V.11 ne donnent pas des solutions aussi asymétriques que ce qui est observé avec le modèle de Vicsek. Ensuite on peut identifier la densité  $\rho^*$  à la densité minimale atteinte par le soliton, ce que nous avons nommée *densité de vapeur saturante* [32, 68] par analogie avec les

transitions liquides-gaz. Dans le modèle de Vicsek, cette densité, ainsi que la célérité semblent être sélectionnés par le niveau du bruit, et non par la densité globale. L'excès d'animaux par rapport à la densité de vapeur saturante serait donc condensé dans les solitons. Ce processus fait penser à une séparation de phase, et non à une dynamique de solitons indépendants. Mais l'aspect des profils est similaire à celui d'un soliton, pas à celui d'un îlot en croissance, d'autant plus que le nombre de solitons semblent augmenter avec la taille du système [68]. La question de la nature de la phase dans la zone instable pour un système infini est donc encore ouverte à la fin de cette étude.

## Développements récents et ouverture

---

### VI.1. – Dernières explications

#### VI.1.1. – Des ondes partout

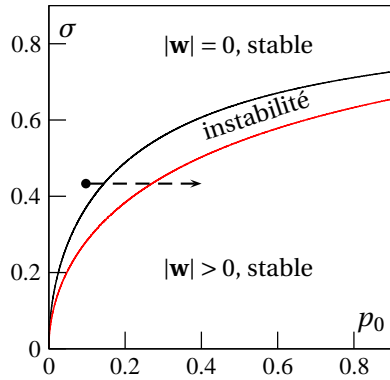
Entre 2004 et 2008, l'instabilité longitudinale du modèle de Vicsek est surtout présentée comme un aspect artificiel des simulations numériques. Depuis les ondes ont été observées dans de très nombreux modèles : modèle de Vicsek [60], équations des champs du type que nous avons étudiées [31] mais simplifiées [60], équations hydrodynamiques obtenues par d'autres méthodes [196, 249], modèle avec des interactions de corps *mou* [263], modèle dit de *Ising actif* [311, 313]<sup>1</sup>, modèle avec moment d'inertie [63], modèle d'objets mécaniques en mouvement anisotrope [97, 352]. *A posteriori*, l'instabilité d'éclatement des troupeaux apparaissant dans les modèles avec une force de cohésion [157] s'explique par l'existence des ondes.

Les expériences ont montré également des ondes ou des structures solitaires, par exemple avec des colloïdes [48], des systèmes moléculaires d'actine [301], des tissus de cellules épithéliales [307]. Bien sûr, il est naturel qu'il y ait des ondes dans un milieu permettant les fluctuations de densité. Il faudrait donc discriminer les ondes des motifs non-linéaires asymétriques tels qu'observés dans les travaux théoriques. Enfin il serait intéressant de connaître l'influence de ce mécanisme sur la forme des troupeaux comme illustrée par la photographie II.8 et dans les articles [162, 309].

1. L'interaction dipolaire modifie le mouvement diffusif sans que le dipôle soit identifié à la vitesse. Le sens du spin est mis à jour en suivant le modèle d'Ising.

#### VI.1.2. – Transitions

Dans le chapitre V, nous avons noté l'analogie possible avec une transition liquide-gaz. Celle-ci permet effectivement de comprendre l'instabilité dans le modèle d'Ising actif [311], avec notamment l'existence d'un point critique pour une densité  $\rho_c \rightarrow \infty$ . Mais cette analogie ne s'applique finalement pas au modèle de Vicsek. Les derniers travaux montrent que c'est le nombre de bandes, quasi-identiques qui augmentent et qui forment une succession quasi-périodique. On parle alors de *smectiques actifs* [313].



Illustr. VI.1. – Diagramme des phases issu de l'étude des équations hydrodynamiques.

Les articles [60, 312] donnent une étude générale des solutions non-linéaires en indiquant qu'il y a trois types de solutions : ondes solitaires, ondes périodiques correspondant à la phase smectique, îlots comme solutions de croissance de domaines. Le problème reste à savoir comment l'une des solutions est sélectionnée par rapport aux autres. Selon [313], les fluctuations de densité seraient la clef de l'explication. Le bruit serait assez fort pour casser les domaines de croissance dans le cas où le champ portant la transition est vectoriel.

Reprenons notre diagramme des phases. Nous nous situons à un bruit fixé et faisons varier la densité réduite globale depuis les faibles valeurs jusqu'à la phase en mouvement (voir illustr. VI.1, la flèche y montre le chemin parcouru). Nous avons vu que le soliton dépend du bruit, mais ne semble pas dépendre de la densité globale (chap. V). Le long de cette ligne, toute augmentation de densité  $\rho_0 - \rho^*$  se condense dans les profils. Cela se traduit par la linéarité de la quantité de mouvement en fonction de la densité :

$$|w| = \frac{1}{L\ell} \left| \sum_i^N \vec{v}_i \right| = v_0 \rho_0 \varphi, \quad (\text{VI.1})$$

alors que le paramètre d'ordre habituel du modèle de Vicsek  $\varphi$  (éq IV.4), hérité des systèmes ferromagnétiques, semble critique [313]. Ce résultat récent montre donc que le paramètre d'ordre adéquat est celui qui apparaît dans les équations hydrodynamiques V.7 et V.8.

## VI.2. – Perspectives

### VI.2.1. – Nouveaux modèles

Le modèle de Vicsek sous-estime l'importance du temps de rotation. Dernièrement des études ont introduit de nouveaux modèles corrigeant cette caractéristique. La modélisation proche des poissons [55, 137, 138] pour lesquelles la direction des vitesses est continue, puis celle des mouvements de rotation dans des systèmes de microtubules [254, 318] ont fait force de nécessité. De même les vols d'oiseaux ne font pas que se déplacer vers le même but mais tournent en bloc. Un modèle avec moment d'inertie [63] a été écrit dans le but de prendre en compte ce phénomène. En conséquence, des nouvelles dynamiques [63], de nouvelles phases structurales [254] sont à l'étude dans ces nouveaux modèles.

D'autres modèles alternatifs existent en fonction des expériences et des animaux étudiés, comme les criquets qui tournent dans une arène [115], modélisés par des processus de réaction-diffusion. Dans [206], les auteurs se demandent si les poissons interagissent en sommant ou en moyennant les forces. Enfin, pour les mouvements de foule, certains [253] interrogent la possibilité de modèles à la fois cinématique et heuristique.

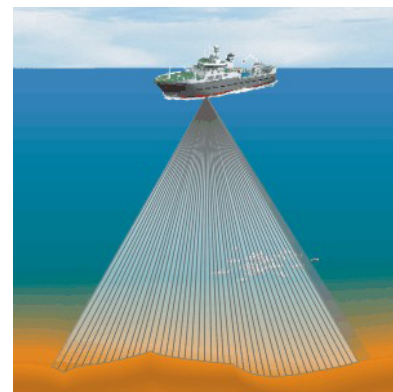
### VI.2.2. – L'échelle du groupe

Dans de très rares cas expérimentaux, nous avons accès à des groupes de tailles statistiques. Dans le cadre du suivi des stocks halieutiques, l'Ifremer

utilise un sonar multifaisceau embarqué sur un navire qui permet d'observer une tranche de la colonne d'eau ( $\sim 100$  m de profondeur) selon une géométrie de peigne de  $150^\circ$  d'ouverture (illustr. VI.2). Le bateau faisant route à une vitesse bien plus élevée que celle des groupes de poissons observés, la reconstruction de ces tranches le long de la route du bateau constitue une vue tri-dimensionnelle des bancs de poissons [336] .

Les échogrammes obtenus sont très difficiles à interpréter pour des poissons de tailles peu différentes, comme le sont les sardines et les anchois. Économiquement, c'est pourtant très important. Les quotas de pêche dépendent de la mesure de la ressource en chaque espèce prise en particulier. Une idée serait de connaître la forme des bancs afin de les identifier au sonar. Des connaissances spécifiques sont déjà amassées, notamment en ce qui concerne la cinématique des anchois, qui avancent par saut, par rapport à la sardine qui est un animal filtreur et qui donc a un déplacement plus continu.

Dans un modèle proche de celui de Vicsek, nous avons montré [157] qu'en fonction de l'alignement le banc passe d'un aspect isotrope à une forme de filament, puis à un groupe en triangle aplati. Est-ce que la dynamique des bancs change aussi en fonction des paramètres cinématiques ? C'est une question qui a été abordée lors de travaux interdisciplinaires [231]. En fait cette question revient à détecter le particularisme de chaque regroupement. Mais puisque l'universalisme du modèle de Vicsek a été mis à mal, cette question a tout son sens.



Illustr. VI.2. – Navire Thalassa et son sonar multi-faisceau.



*Deuxième partie*

Déserts de barchanes





## Chapitre – VII

---

# Les déserts de barkhanes

---

J'ai toujours aimé le désert. On s'assoit sur une dune de sable. On ne voit rien. On n'entend rien. Et cependant quelque chose rayonne en silence...

A. de Saint-Exupéry [299]

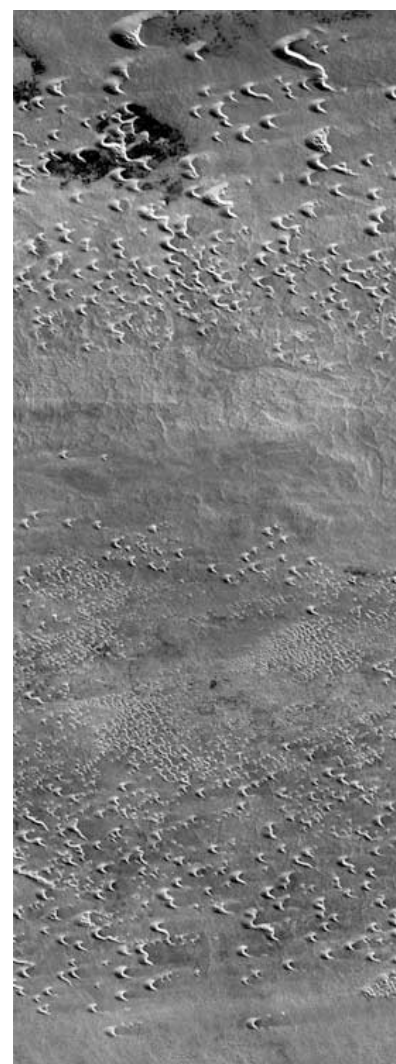
Les tas de sable peuvent prendre une grande variété de formes. L'une de ces dunes symbolise le désert : la barkhane. En forme de croissant, elle se déplace d'environ sa taille en un an, traverse les routes et submerge les maisons. Enfin, vus d'avion, les déserts de barkhanes semblent posséder une structure.

### VII.1. – La barkhane

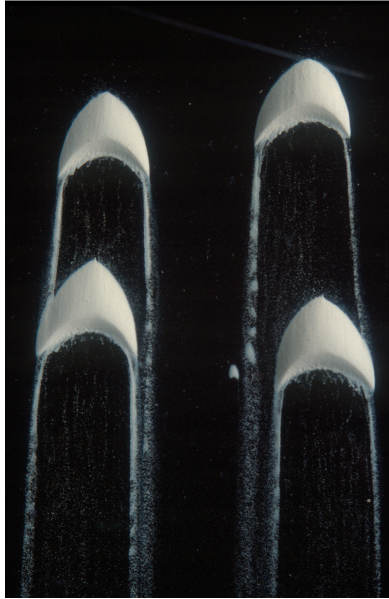
Le désert est en terrain de jeu rêvé pour les géologues et les géophysiciens : ils ont directement accès à leur matière première. Ce n'est pas pour autant que c'est un environnement statique. Pour peu qu'il y ait du sable, le vent module les formes des amas de sable. En cône, en étoile, allongé perpendiculairement, ou dans le sens du vent, les morphologies des tas de sable sont étudiées depuis longtemps [12]. Elles restent une source d'émerveillement et un sujet de recherche actif (voir par exemple [66]).

Le tas de sable change de forme en fonction du régime des vents. Selon que le vent souffle selon un certain nombre de directions et en fonction l'écartement angulaire entre ces directions, les formes changent. Puis la quantité de sable disponible joue aussi. Les dunes qui nous intéressent, les barkhanes, apparaissent en présence d'une seule direction du vent synoptique et d'une petite quantité de sable sur un sol peu érodible.

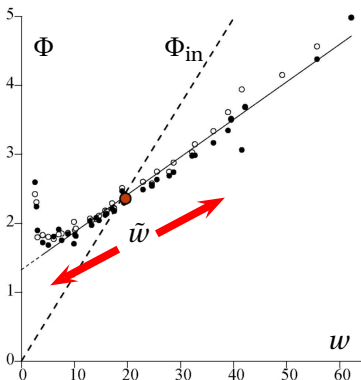
Les dunes sont le résultat de l'interaction entre le vent, le grain et la dune elle-même. Tout d'abord, quand on parle de transport éolien, il ne faut pas imaginer une tempête de sable. Les grains de sable sont poussés par le vent. Lorsqu'ils acquièrent suffisamment d'énergie, ils font un saut et le vent les portent un peu. On parle de mouvement par saltation. Au moment de leur chute, ils fournissent de l'énergie à quelques grains, qui sautent et qui sont à leur tour poussés par le vent. La couche d'air proche du sol se trouve alors



Illustr. VII.1. – Désert marocain de La'ayoune.



Illustr. VII.2. – Dunes obtenues en aquarium (P. Hersen)



Illustr. VII.3. – Comparaison des termes source et puits en fonction de la largeur de la barkhane, d'après [179].

chargée en grain, jusqu'à une densité de saturation. Celle-ci est limitée par le fait que les grains dissipent de l'énergie lors de leurs chocs et par la quantité de sable disponible sur le sol [79].

Cette dissipation limite le transport des grains de sable à une taille typique, dite longueur de saturation [183, 181]. Lorsqu'il y a un tas de sable dans cet écoulement, sa longueur est à comparer à cette taille typique. S'il est plus petit, le vent va éroder le tas et le souffler. S'il est plus grand, le vent se charge de sable de manière stationnaire et déplace le sable sur ce tas en le redéposant au fur et à mesure. Ce raisonnement unidimensionnel permet de comprendre qu'il y a une taille minimale pour les barkhanes [183].

En remarquant ensuite que la distance qu'il faut considérer est l'abscisse curviligne le long de la ligne de courant du vent, on comprend qu'un tas cône n'est pas une solution stationnaire. Au niveau du sol, on s'attend à ce que l'écoulement contourne le tas de sable. Celui-ci va être étiré au niveau du sol en direction du vent et produit des cornes. Dans la partie centrale, le sable va être remonté le long de la ligne de plus grande pente et redéposé au fur et à mesure. De plus le flux d'air est accéléré, et décroche au niveau de la ligne de crête. La bulle de recirculation qui se crée sous le vent entrechoque les grains de sable qui s'y trouvent piégés. Les grains se déposent sur cette crête. Il y a alors un excès de sable et la crête s'en purge par des avalanches successives sur la face avant et sur les côtés en direction des cornes. On obtient donc une forme anisotrope (voir Illustr. VII.2). Les bords sont étirés par le vent. La face au vent monte en pente douce, érodée par le vent. La face sous le vent est façonnée par les avalanches [178].

Les mesures de terrain, ainsi que les expériences en aquarium [181, 182, 305] indiquent que ces dunes sont presque auto-similaires. Si on note la longueur  $\ell$ , la largeur  $w$  et la hauteur  $h$ , alors  $\ell \sim w \sim 10h$ . La cinématique d'une dune, comme objet intrinsèque, a été déterminée par des observations, des expériences et des arguments analytiques [4, 181, 182]. La vitesse est inversement proportionnelle à sa taille, ce qui se comprend facilement puisqu'il faut déplacer tout le sable qui la compose pour la déplacer.

## VII.2. – Le paradoxe de barkhanes

La barkhane isolée est assez bien comprise, pourtant elle comporte un paradoxe. Elle est instable. En effet, elle gagne du sable par sa face avant, et donc ce terme source est linéaire avec sa largeur. En revanche, la perte de sable qui a lieu au niveau des cornes dépend peu de sa taille [179]. L'équilibre global donne une taille typique  $\tilde{w}$  qui est instable (voir Illustr. VII.3). Sous cette taille, la dune rétrécit. Au-dessus de cette taille, elle croît.

Pourtant les déserts de barkhanes existent, en grand nombre, sur tous les continents et même sur Mars et sur Titan (voir [139] et ses références). Les distributions de taille de dune ont été scrutées [113, 114], et les dunes de grandes tailles ne semblent pas sur-représentées.

En revanche, les barkhanes isolées sont très rares. L'hypothèse, communément admise mais non prouvée, est que le mécanisme de stabilisation des dunes est à rechercher dans les interactions entre dunes. En effet, on observe

sur le terrain, dans les expériences en aquarium ou en simulations numériques que les dunes échangent du sable. Tout d'abord, le vent entraîne du sable au niveau des cornes, comme l'attestent les traînées sur l'illustration VII.2. Ensuite, si deux dunes sont suffisamment proches l'une de l'autre, la dune au vent modifie l'écoulement de l'air au niveau de la seconde de manière non-triviale, ce qui mène à une déstabilisation du motif initial de dune. Le caractère *non trivial* se manifeste dans le fait qu'il est difficile de prédire le résultat de cette collision.

Quatre types de collisions sont généralement décrites [113, 205]. Les dunes peuvent sembler se traverser : la dune au vent se rapproche déstabilise la dune collisionnée qui émet une nouvelle dune en aval, plus petite. En amont, tout le sable restant se recombine en une seule dune [304]. Ce mécanisme est décrit pour deux dunes qui sont dans l'axe l'une de l'autre, ou bien décalées. La partie qui se déstabilise est soit la partie centrale, soit une des cornes de la dune impactée. Dans la troisième collision, les dunes initiales ont des trajectoires rasantes et restent indépendantes. La corne qui a été déstabilisée devient une dune à part entière [113, 180]. La dernière collision mène à la réunion des dunes initiales. Elle a lieu lorsque les dunes sont quasiment sur le même axe.

Un autre argument en faveur de ces interactions est que les déserts semblent avoir une structure. Les dunes peuvent être les unes derrière les autres (structure en *échelle*), ou un peu décalées (structure en *chevron*, voir l'illustration VII.2 et [12, 229]). Mais surtout, les déserts contiennent des grandes zones contenant peu de dunes, mais où elles sont de tailles plutôt importantes, et des zones contenant beaucoup de petites dunes (voir Illustr.VII.1). Ces zones, nommées *corridors*, sont orientées selon l'axe du vent. En revanche, aucun autre processus physique, topographique, ou météorologique ne semble expliquer cette organisation [117].



Illustr. VII.4. – Collision aquatique de deux dunes constituées de sable de couleurs différentes, auteur H. Raguey [181].

## VII.3. – La modélisation

Toute la dynamique des barchanes tient dans la dynamique du vent et du grain de sable. Considérant que le nombre de grains de sable pour former une dune est gigantesque, que les collisions des dunes ne sont que le résultat de l'échange de sable (voir Illustr. VII.4), il est naturel de penser à une modélisation en terme de champs décrivant le vent, le flux de sable et le profil de sable [102, 177, 178, 212, 304, 305]. La réussite de ces études réside dans la modélisation de la dune isolée. Les difficultés inhérentes à ces méthodes sont le choix de la finesse de la description de l'écoulement aérodynamique – notamment pour décrire la bulle de recirculation – et la loi décrivant le flux saturé de sable. Celui-ci est une loi phénoménologique. Enfin, il y a la finesse du réseau. La taille de ce qui est calculable actuellement est de l'ordre de quelques dunes en interaction durant quelques années.

Pour augmenter la taille de description, les automates cellulaires ont été très utilisés en géophysique [354, 204, 259]. L'idée de définir des cellules et des règles d'interaction entre cellule : érosion, transport et déposition [259], une loi d'avalanche [15, 205], *etc.* La difficulté est de choisir correctement les taux de transition entre cellule pour obtenir une barchane. À cette fin, soit les

taux suivent une loi phénoménologique qui dépend de la hauteur locale de sable [205], soit ils dépendent dépendent de l'écoulement du vent, lui-même calculé par des modèles plus simple que les équations de Navier-Stokes, par exemple un gaz sur réseau, voir [259]. Les automates cellulaires ont à peu près les mêmes inconvénients et avantages que les modèles continus dans ce problème précis. Notamment, les échelles de temps et d'espace simulées restent restreintes vis-à-vis des échelles spatio-temporelles d'un désert. Par exemple dans [205], pour simuler une collision de deux dunes, il faut un réseau de  $800 \times 300$  pendant des temps de simulation allant de 10000 à 60000 pas de temps.

Les modèles d'agent considèrent la dune comme l'élément microscopique de base. La simulation morphogénétique de la dune n'est donc plus en question. Les simulations s'intéressent à l'échelle inter-dunes et à la structure du désert elle-même. Dans [229], il a été montré que les échanges éoliens de sable sont suffisants pour stabiliser un couloir de dunes. Dans [113], c'est l'effet des collisions qui a été testé avec une hypothèse de champ moyen sur le choix du type de collision. Enfin l'étude [114] a considéré un modèle mélangeant des dunes-agents et une dynamique de collision provenant d'un modèle en champ continu, mais en ignorant les collisions qui augmentent le nombre de dunes. Aucune de ces trois études ne permettent de comprendre l'apparition de couloirs de corrélation entre densité et taille de dunes.

Enfin un dernier modèle [360], dont l'étude a eu lieu pendant la nôtre considère que le moteur de la stabilisation des dunes est l'instabilité d'écrêtage (en anglais *calving*). L'idée est que la barkhane est instable en elle-même sous l'effet d'onde de surface [116]. Quand la dune est assez grande, les ondes déstabilisent ses cornes et créent un chapelet de dunes filles, de même taille et dans le même axe, ce qui expliquerait la structure en corridor.

## Un modèle de barkhanes

L'observation de terrain et les expériences aquatiques ont permis d'amas- ser un savoir phénoménologique. Le paradoxe de la barkhane reste incompris malgré deux pistes possibles : l'écrêtage et l'effet des collisions. Nous propo- sons ici un modèle de dynamique de la dune isolée, de la prise en compte de l'instabilité de sa taille, et de la dynamique de groupe des barkhanes. Nous faisons l'hypothèse que l'écrêtage spontané est négligeable.

### VIII.1. – Présentation du modèle

#### VIII.1.1. – Cinématique

On définit une dune d'indice  $i$  comme un point de l'espace bidimension- nel et repéré par ses coordonnées  $(x_i^t, y_i^t)$  à l'instant  $t$ . L'espace est supposé continu. Le vent, qui est l'axe de déplacement des dunes, et l'axe des  $y$  sont de même direction mais de sens opposés, voir Illustration VIII.1. Le temps discrétisé avec pas  $\Delta t$  et la dynamique est choisie synchrone.

La dune se déplace de manière entièrement déterministe selon l'invers de sa taille [181] :

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\alpha}{w}, \quad (\text{VIII.1})$$

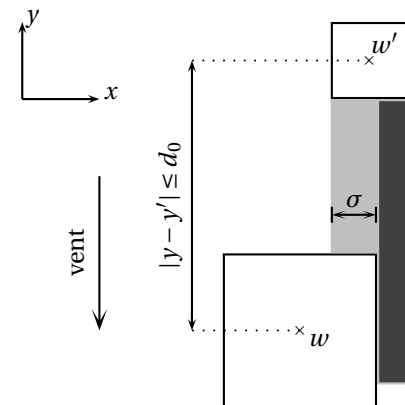
où  $\alpha$  est un paramètre phénoménologique.

#### VIII.1.2. – Transport éolien

Puisque le flux de sable en sortie des cornes dépend peu de la largeur des dunes  $w$ , on néglige cette dépendance. Le volume d'une dune isolée suit alors la relation :

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{\text{seule}} = -\Phi, \quad (\text{VIII.2})$$

où  $\Phi$  est une constante du temps et de l'espace. Ce sable va être poussé par le vent, il peut donc être potentiellement récupéré par une dune en aval. On suppose que le mouvement du grain de sable est extrêmement diffusif – à cause du mouvement de saltation et de la nature du sol – et donc que l'origine de la source de sable (la corne) est très rapidement oubliée. Par souci de



Illustr. VIII.1. – Variables décrivant la dy- namique de deux dunes en interaction éolienne.

simplification, on pose que ce sable se répartit sur toute la largeur de la dune émettrice et qu'il parcourt une distance  $d_0$  en un pas de temps. Deux dunes échangent donc du sable si leurs ordonnées sont distantes au plus de  $d_0$ . De plus, la quantité de ce sable est proportionnelle à la largeur de recouvrement de la dune amont sur la dune avale, notée  $\sigma$  (Illustr. VIII.1). Pour obtenir tout le sable échangé, on somme sur toutes les dunes situées en amont. Il vient :

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{\text{éole}} = + \sum_i \frac{\sigma_i}{w_i} \Phi. \quad (\text{VIII.3})$$

Dans la suite, cette interaction est qualifiée d'*éolienne*.

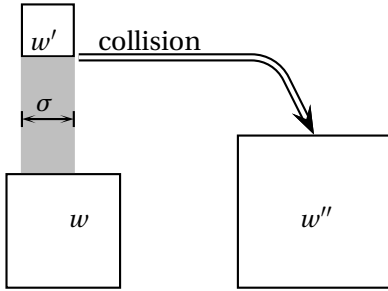
On suppose ensuite que le sable est perdu. Ce puits de matière est contraire à la conservation de masse, mais c'est une hypothèse raisonnable si l'on considère qu'il y a très peu de sable disponible dans les déserts de barkhanes. C'est un effet de la dilution extrême des grains de sable *libres* sur le sol. D'autre part, la topographie des déserts est chahutée, et il y a aussi un peu de végétation. Tous ces accidents de la surface peuvent induire des effets de rétention de sable. Au-delà d'une certaine quantité de sable piégé, ces lieux deviennent des sources de dunes. Pour pallier à la non-conservation de la matière et tenir compte du désordre de la surface, nous introduisons une nucléation de dunes aléatoire de probabilité  $\lambda$  par unité de temps et d'espace. Nous la choisissons homogène en temps et en espace ; les dunes ainsi créées ont une taille  $w_0$ .

Enfin nous avons vu qu'il existe une taille critique sous laquelle la barkhane cesse d'exister. Le tas de sable est alors soufflé et dispersé par le vent. On appelle cette taille minimale  $w_m$ . Toute dune plus petite sera alors retirée du champ.

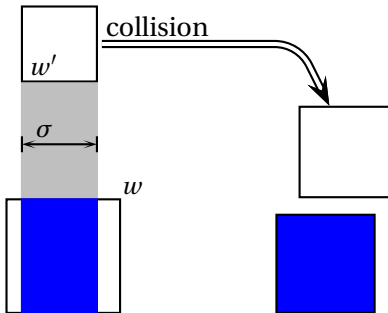
### VIII.1.3. – Collisions des dunes

En plus de l'interaction éolienne, qui agit à distance, nous avons vu que deux dunes changent de conformation lorsqu'elles se rencontrent. Du sable est échangé, le nombre de dunes évolue. En discussion avec les expérimentateurs, nous avons retenu quatre collisions fondamentales, et nous supposons que les autres collisions sont issues de la composition de celles-ci. Ces quatre collisions sont issues de la même instabilité selon deux points de vue différents : lorsque les dunes sont en recouvrement total ( $\sigma = w'$ , ou  $s = \sigma/w' = 1$ ), il faut savoir si la dune située en amont est assez haute, en relatif, pour déstabiliser la dune aval. Si ce n'est pas le cas, les deux dunes se réunissent, on parle de *coalescence* (Illustr. VIII.2). Cette collision fait baisser le nombre de dunes et en augmente la taille.

Lorsque la dune amont est suffisamment grande, il y a une dune qui est éjectée de la dune aval et les morceaux qui restent se refondent, voir Illustr. VIII.3. La règle choisie pour calculer le volume éjecté est de considérer la partie en influence :  $\sigma w^2$ . Cette règle redistribue le sable et peut mener à l'augmentation ou à la diminution du volume de la dune aval en fonction des rapports des volumes initiaux [139, 141]. Pour choisir parmi la première ou la deuxième collision, on fixe un seuil  $\varepsilon_t$  sur le rapport des tailles des dunes  $r = \sigma/w = w'/w$ .



Illustr. VIII.2. – Collision de coalescence,  $s = 1, r < \varepsilon_t$ .



Illustr. VIII.3. – Collision d'échange de sable pour des dunes en recouvrement total,  $s = 1, r > \varepsilon_t$ .



Lorsque la collision est rasante ( $\sigma \leq w'$  ou  $s = \sigma/w' \leq 1$ ), il y a instabilité si la partie de la dune aval sous influence, *i.e.* de largeur  $\sigma$ , est assez petite. Dans ce cas, elle est éjectée très rapidement et les deux dunes-mères n'ont pas le temps de se recoller. Il y a alors augmentation du nombre de dunes. La dune en aval voit son volume diminuer, la dune en amont n'est pas modifiée. On appelle cette collision *la fragmentation*, Illustr. VIII.4.

La collision restante (Illustr. VIII.5) a lieu pour une conformation rasante, avec un grand recouvrement, et elle est le produit du décollement de la partie sous influence de la dune aval et du recollement des dunes-mères. Il s'agit seulement de la redistribution des volumes de sable, qui agit de manière non triviale en fonction du rapport des dunes initiales et de leur écartement relatif. De même, pour choisir si c'est la fragmentation ou l'échange de sable qui intervient, on compare  $r = \sigma/w$  à un seuil  $\varepsilon_p$ .

Les collisions se déroulent de manière à conserver le volume des dunes en présence. Les dunes formées sont des découpes des cubes initiaux, mais on considère qu'il y a réarrangement immédiat, c'est-à-dire en un temps négligeable devant  $\Delta t$ . Les objets sont donc toujours cubiques. Leurs centres de masse se déplacent en respectant les règles barycentriques. Il y a donc un mouvement de diffusion latérale, mais qui est négligeable devant le mouvement selon l'axe du vent.

#### VIII.1.4. – Implémentation

Puisque le temps est discrétisé, les collisions ont lieu si des dunes sont en situation de se dépasser dans l'intervalle de temps  $\Delta t$ , soit pour deux dunes d'ordonnées  $y$  et  $y'$  telles que  $y < y'$ , et de largeurs  $w$  et  $w'$  telles que  $w' < w$  :

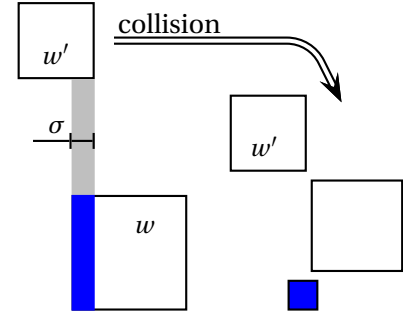
$$y' - y < \alpha \Delta t \left( \frac{1}{w'} - \frac{1}{w} \right),$$

et il y a une indétermination sur le moment et le lieu de fin de la collision. Aussi choisit-on arbitrairement de placer le produit des collisions à l'ordonnée de la dune la plus en aval.

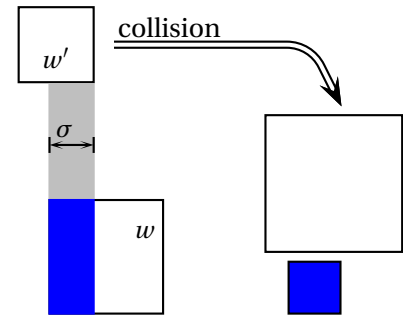
En résumé, en notant entre accolade une dune et son volume, et entre crochet une conformation possible de plusieurs dunes en interaction, le bilan des interactions s'écrit :

$$\left[ \begin{array}{l} \{w^3\} \\ \{w'^3\} \end{array} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \{w^3 + w'^3\} \right] \quad \text{si } s = 1, r < \varepsilon_t \\ \left[ \begin{array}{l} \{\sigma w^2\} \\ \{w^2(w - \sigma)\} \\ \{w'^3\} \end{array} \right] \quad \text{si } s < 1, r < \varepsilon_p \\ \left[ \begin{array}{l} \{\sigma w^2\} \\ \{w^2(w - \sigma) + w'^3\} \end{array} \right] \quad \text{si } s = 1, r > \varepsilon_t \\ \quad \text{ou si } s < 1, r > \varepsilon_p \end{array} \right. \quad (\text{VIII.4})$$

Toutes ces interactions ont été décrites en terme de collision binaire. Cependant, rien n'interdit que des situations plus complexes n'existent. Aussi les interactions précédentes, éoliennes ou collisionnelles, sont codées de manière



Illustr. VIII.4. – Collision de fragmentation,  $s < 1$ ,  $r < \varepsilon_p$ .



Illustr. VIII.5. – Collision en recouvrement partiel avec échange de sable,  $s < 1$ ,  $r > \varepsilon_p$ .

	dimension	signification	valeurs
$w_m$	$L$	taille minimale	0.01
$w_0$	$L$	taille à la nucléation	0.1
$d_0$	$L$	distance limite des interactions	1
$\Phi$	$L^3 T^{-1}$	taux volumique de perte de sable	—
$\lambda$	$L^{-2} T^{-1}$	taux surfacique de nucléation	—
$\alpha$	$L^2 T^{-1}$	mobilité des dunes	0.001
$\varepsilon_t$	$\emptyset$	seuil de collision en recouvrement total	0.5
$\varepsilon_p$	$\emptyset$	seuil de collision en recouvrement partiel	0.5

TABLE VIII.1 – Paramètres du modèle.

à tenir compte d'un nombre arbitraire d'intervenants et du jeu des écrantages de proche en proche.

Enfin les conditions initiales sur les positions des dunes sont choisies homogènes et aléatoires sur tout l'espace disponible, espace de longueur  $L$  et de largeur  $\ell$ . Les tailles des dunes initiales sont choisies sur une distribution constante avec un minimum à  $w_m$  et une moyenne à  $w_0$ .

## VIII.2. – Variables et dimensionnement

Le bilan des paramètres introduits dans ce modèle se trouve dans la table VIII.1. Elle comprend trois longueurs, donnant lieu à la définition à deux rapports :

$$\delta = \frac{w_m}{w_0}, \quad (\text{VIII.5})$$

$$\Delta = \frac{w_0}{d_0}, \quad (\text{VIII.6})$$

et dont l'impact a été étudié dans [139, 141].

Il y a ensuite trois variables comprenant une composante temporelle, ce qui permet de construire un temps typique de nucléation :

$$\tau_n = \frac{1}{\lambda d_0^2}, \quad (\text{VIII.7})$$

un temps de vie pour une dune seule :

$$\tau_d = \frac{w_0^3 - w_m^3}{\Phi}, \quad (\text{VIII.8})$$

et un temps typique de collision entre la dune la plus petite, et donc la plus rapide, et une dune nouvellement nucléée :

$$\tau_c = \frac{d_0}{\alpha} \left( \frac{1}{w_m} - \frac{1}{w_0} \right)^{-1}. \quad (\text{VIII.9})$$

Ces trois temps sont le reflet des trois phénomènes essentiels du modèle, nous nous sommes donc attardés à l'étude du diagramme des phases dans



l'espace des paramètres associés aux deux nombres sans dimension qui en découlent : d'une part celui qui mesure le poids de la perte de sable (appelée aussi *dissipation* dans la suite) par rapport à l'injection :

$$\xi = \frac{\tau_d}{\tau_n} = \frac{w_0^3 - w_m^3}{\Phi} \lambda d_0^2, \quad (\text{VIII.10})$$

et d'autre part celui qui compare la dissipation aux collisions :

$$\eta = \frac{\tau_d}{\tau_c} = \frac{w_0^3 - w_m^3}{\Phi} \frac{\alpha}{d_0} \left( \frac{1}{w_m} - \frac{1}{w_0} \right). \quad (\text{VIII.11})$$

Pour compléter cette liste de nombres sans dimension, il faut citer les seuils définissant le passage d'un type de collision à un autre  $\varepsilon_t$  et  $\varepsilon_p$ . Ceux-ci influencent la répartition du sable et l'écartement des dunes après les collisions ainsi que les fréquences relatives des collisions. Comme montré dans [139, 141], le choix arbitraire initial  $\varepsilon_t = \varepsilon_p = 1/2$  favorise la coalescence et la fragmentation devant l'échange de sable sans modification du nombre de dunes..

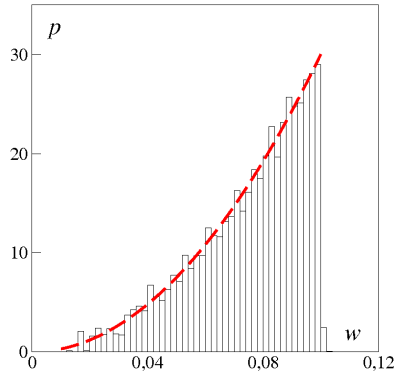
Bien sûr le modèle obtenu est simpliste. La physique de l'interaction entre le grain et le vent couple probablement les phénomènes. Par exemple, la perte de sable  $\Phi$  et la mobilité des dunes  $\alpha$  dépendent probablement toutes deux de l'intensité du vent. Mais cette relation constitue un sous-espace de l'espace des paramètres. En revanche d'autres hypothèses, comme la forme mathématique des dunes formées dans les collisions ont une grande part d'arbitraire par souci de simplicité.

## VIII.3. – Structures des déserts

Dans les premières études [139, 140, 141], le but était d'abord d'étudier la question géophysique de la stabilité des assemblées de dunes. Les paramètres furent fixés de manière à être relativement vraisemblables dans ce cadre. L'intervalle de temps  $\Delta t$  représenterait environ une dizaine d'années d'un véritable désert, et les simulations s'étaleraient sur plus de cinq cent milles ans. D'après les géologues, les plus vieux déserts auraient environ vingt-cinq milles ans. Une part d'arbitraire reste cependant dans le choix de la fréquence de la nucléation que nous avons fixée à une valeur basse devant les autres paramètres temporelles ( $\tau_n \approx 100\tau_d$ ), dans les simulations de départ.

Au niveau spatial, la distance de coupure des interactions éoliennes  $d_0$  est fixée à une valeur très élevée devant la taille des dunes (voir table VIII.1), ceci pour limiter l'effet artificiel de la perte du sable au-delà de cette distance. Mais la taille des systèmes étudiés est un paramètre que l'on a fait varier pour déterminer les comportements statistiquement pertinents.

Enfin, pour faire varier  $\xi$  et  $\eta$ , nous avons modifié la valeurs du paramètre de perte de sable  $\Phi$ , ce qui impose  $\xi \propto \eta$ .



Illustr. VIII.6. – Distribution des tailles des dunes dans le régime dilué. La ligne discontinue rouge est la solution analytique.

### VIII.3.1. – Régime dilué

Lorsque la dissipation est le processus principal de la dynamique, on observe un régime dit *dilué*. C'est un état stationnaire homogène entièrement descriptible par la dynamique d'une dune solitaire. Toutes les observables sont stationnaires, notamment le nombre total de dunes  $N$  et le nombre de collisions par unité de temps  $n$  [140]. La densité se déduit directement des taux de mort et de naissance des dunes et suit raisonnablement la loi :  $\rho = \xi / d_0$  [140]. La densité de probabilité des tailles de dunes se calcule exactement à partir de la perte de sable VIII.2 :  $p(w) = \frac{3w^2}{w_0^3 - w_m^3}$  (voir [140] et illustr. VIII.6).

Le régime transitoire entre la condition initiale et l'état stationnaire est le produit de deux processus indépendants – disparition des dunes initiales  $N_i$  et mise en place de la distribution stationnaire des tailles de dunes à partir de leur nucléation  $N_n$  – se calcule exactement [141]. La distribution stationnaire est équilibrée en  $\tau_d$ , temps nécessaire pour qu'une dune typique disparaisse ; le régime transitoire disparaît donc toujours au profit du même état stationnaire, quelle que soit la condition initiale.

Enfin le régime stationnaire est gaussien. Cela s'observe par exemple sur les fluctuations du nombre de dunes [141].

### VIII.3.2. – Régime dense

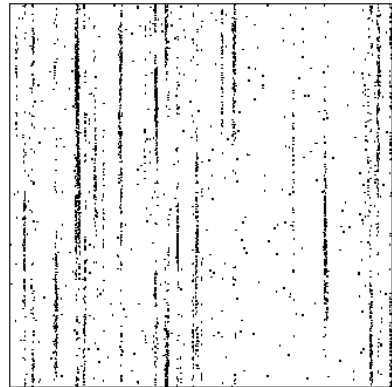
En diminuant  $\Phi$ , ce qui revient à augmenter  $\xi$  et  $\eta$ , on atteint un régime *dense*. C'est un régime stationnaire inhomogène dans lequel on a identifié l'auto-organisation des déserts en *corridors*, et la stabilisation de la distribution des tailles des dunes autour d'un mode différent des tailles introduites dans le modèle.

Le caractère dense se manifeste par une augmentation du nombre de dunes  $N$  telle que la densité ne suit plus la loi de champ moyen :  $\rho > \xi / d_0$  [140]. De même le nombre de collisions par unité de temps  $n$  augmente très sensiblement. La distribution des tailles change complètement d'aspect et possède un mode  $\tilde{w}$  près de la taille inférieure  $w_m$ . L'apparition de cette nouvelle taille semble être due à la compétition entre la diminution de la taille des dunes par perte éolienne de sable, et la fragmentation des dunes [139].

Le désert n'est plus homogène mais est structuré en agrégats allongés dans l'axe de déplacement principal. Ces agrégats peuvent être définis très simplement comme l'ensemble des dunes en interaction, *i.e* distantes au plus de  $d_0$  [140]. Toutes les mesures mènent à penser que ces agrégats sont le lieu qui concentre le caractère *dense*, en coexistence avec le caractère dilué hors des agrégats. Dans les agrégats, les dunes sont plus nombreuses, plus petites. La distribution des tailles  $w$  réduite aux clusters est piquée autour de  $\tilde{w}$ . Les collisions y sont plus nombreuses, et plus dans la catégorie des fragmentations que dans les autres catégories de collisions (voir les illustrations VIII.2, VIII.3, VIII.4 et VIII.5).

On obtient donc une coexistence spatiale entre des zones denses en petites dunes, et d'autres avec un petit nombre de grosses dunes, comme dans les observations *in situ*.

Tous ces résultats sont d'autant plus marqués que les agrégats considérés contiennent un plus grand nombre de dunes, ce qui n'est pas surprenant.



Illustr. VIII.7. – Aspect des déserts denses

Enfin, les fluctuations du nombre de dunes ont une dynamique qui s'écarte nettement de la gaussienne aux temps longs, alors que la dynamique de collisions, aux temps courts, reste normale [140].

### VIII.3.3. – Transition de densification

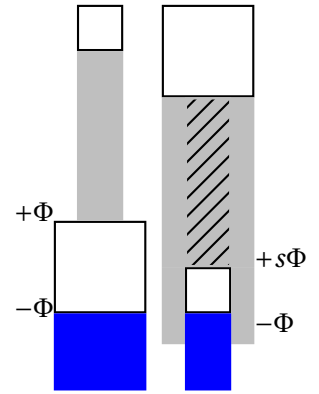
Ayant défini des états différents, il est tentant de chercher une transition de phase entre ceux-ci. Dans [141, 139], nous avons testé le comportement de différentes observables. Mais aucune n'a de point singulier dans le passage entre les états dilué et dense. Aucun effet de taille pouvant masquer cette transition n'a été détecté. Bien sûr, il est possible d'argumenter que nous n'avons pas essayé le paramètre d'ordre idoine. Cependant, nous avons d'autres arguments pour penser que ce passage n'est pas une transition de phase.

Dans sa thèse, M. GÉNOIS [139] a défini des modèles de champ moyen dans lesquels les collisions entre dunes sont tirées de manière aléatoire. Ces modèles permettent de calculer les distributions de taille des dunes sans calculer toute la dynamique présentée dans la section VIII.1, et avec un accord qualitatif, ce qui laisse supposer qu'aucun phénomène critique n'est à l'œuvre.

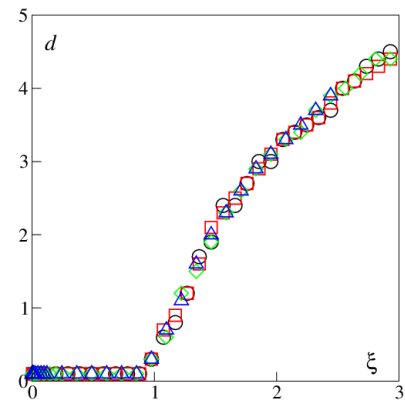
De plus, il est possible de supprimer, ou d'ajouter un ingrédient dans notre modèle. On montre ainsi que l'interaction éolienne influence peu les distributions de taille des dunes dans l'état dense. En revanche, sans cette interaction, les agrégats n'existent quasiment plus [141]. L'effet de l'interaction éolienne se comprend si l'on considère aussi la loi cinématique VIII.1 qui stipule que la vitesse est inversement proportionnelle à la taille des dunes. Soit deux dunes en interaction éolienne (voir illustr. VIII.8), supposons aussi que la plus petite est en amont. La plus petite transmet du sable à la plus grosse. La première diminue de taille et donc accélère, alors que la dune en amont voit sa taille stabilisée. La vitesse relative entre les deux dunes augmente, ce qui mène à une collision. Dans le cas où la dune en amont est la plus grosse des deux dunes, celle-ci perd du sable et accélère. La dune en aval, plus petite, voit sa taille stabilisée par l'échange de sable. La vitesse relative diminue donc.

L'interaction éolienne stabilise donc la conformation où les petites dunes sont en aval, et favorise les collisions dans l'autre conformation. Or les collisions majoritaires produisent d'autres dunes par fragmentations. Cette interaction favorise donc l'apparition des agrégats et les stabilise. Toutefois, les agrégats ne peuvent atteindre qu'un état de stabilité *marginale* : lorsque les dunes aval et amont ont exactement la même taille et sont exactement les unes derrière les autres. Ceci explique l'allongement des agrégats dans le sens de déplacement principal.

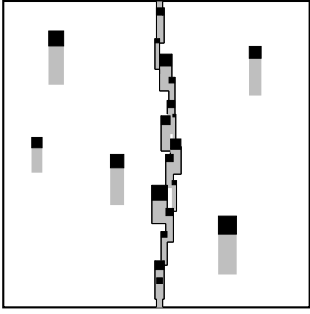
Mais la diffusion latérale et le caractère stochastique de la nucléation font que les agrégats ne sont jamais stables pour la gamme de paramètres étudiés ici. Les dunes se décalent sur les bords de l'agrégat et finissent par disparaître en atteignant la taille minimale  $w_m$ . Par conséquent, on peut imaginer que la distance de corrélation associée à l'apparition des agrégats ne diverge pas. Effectivement, on observe que cette distance reste bornée, voir illustr. VIII.9.



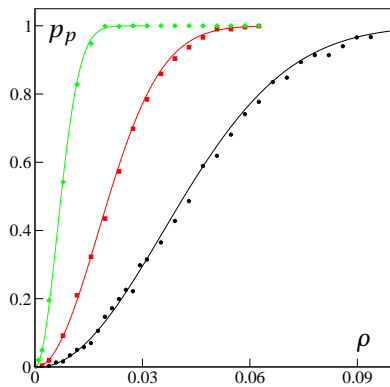
Illustr. VIII.8. – Effets de l'interaction éolienne sur les bilans de masse. (a) : la dune en aval est la plus grande, (b) : la dune en aval est la plus petite. On rappelle que  $s = \sigma / w' \leq 1$ , avec  $w'$  la taille de la dune en amont et  $\sigma$  la distance de recouvrement.



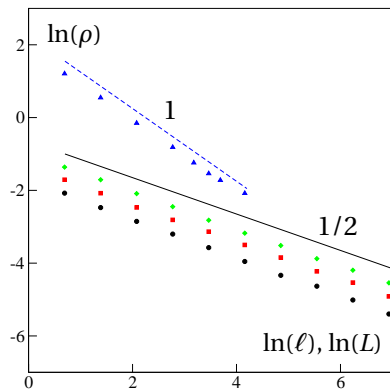
Illustr. VIII.9. – Distance de corrélation calculée à partir de la fonction de corrélation à deux points pour la densité locale. Les différents symboles correspondent à des systèmes de taille  $L = 32, 64, 128$  et  $256$ .



Illustr. VIII.10. – Exemple de percolation, les dunes en noir, la zone d'interaction en gris, l'amas percolé entouré d'une ligne noire.



Illustr. VIII.11. – Probabilité de percolation en fonction de la densité initiale, avec  $\Phi = 0$ ,  $\lambda = 0$ , la longueur  $L = 16$  et les largeurs  $\ell = 32$  (•),  $128$  (■),  $1024$  (◆). Les courbes continues sont calculées avec l'éq. VIII.16.



Illustr. VIII.12. – Effets de taille sur la percolation des dunes à différentes valeurs de probabilité en fonction de la longueur  $L$  (avec  $p_0 = 0.978$ ,  $\ell = 2$  ▲) et en fonction de la largeur  $\ell$  (avec  $p_0 = 1/4$  (•),  $1/2$  (■),  $3/4$  (◆),  $L = 16$ ).

## VIII.4. – Conservation du sable

Dans ce modèle avec aussi peu de lois de conservation et des interactions locales, il n'y a donc pas de transition et cela semble dû au temps de vie finis des amas. Pour augmenter ce temps de vie, intuitivement, il y a trois manières :

- rendre l'interaction éolienne à portée infinie,
- rapprocher le modèle d'un système conservatif,
- augmenter les apports en sable.

Les deux premières visent à éviter les pertes de sable, la deuxième à les compenser. Nous avons essayé les deux dernières méthodes et nous présentons ici les résultats associés. Remarquons que pour tester ces hypothèses nous parcourons toute la gamme de valeurs des paramètres sans se poser la question de la pertinence géophysique de celles-ci.

### VIII.4.1. – percolation

Le modèle de départ est extrêmement non conservatif et ne semble pas posséder de transition, nous commençons donc par ré-introduire une forme de loi de conservation : nous supprimons tout échange éolien de sable  $\Phi = 0$  et  $\lambda = 0$ . La disparition des dunes lorsque  $w \leq w_m$  est cependant gardée dans le modèle, car cela impose une borne supérieure à la vitesse des dunes et on conserve ainsi le caractère local des interactions.

Pour un système de taille donnée, dès qu'il y a suffisamment de dunes, il se crée un chapelet de dunes par des collisions successives. Comme les conditions aux bords sont périodiques, ce train d'objets boucle sur lui-même, et on obtient un amas percolé de dunes sur toute la longueur du désert (voir illustr. VIII.10). Contrairement aux états précédents, on obtient des structures à l'échelle macroscopique qui semblent dépendre de la condition initiale.

Cette sensibilité aux conditions initiales se traduit par le fait que la percolation est plus ou moins probable. La probabilité de percoler  $p_p$  augmente en fonction du nombre de dunes initiales (voir illustr. VIII.11).

Les effets de taille décalent le seuil de percolation vers les petites valeurs de densité, voir les illustrations VIII.11 et VIII.12. Soit la densité  $\rho$  nécessaire pour atteindre une probabilité de percolation  $p_p = p_0$  donnée, alors on observe les relations d'échelle :

$$\rho \propto \ell^{-1/2}, \text{ avec } L = \text{cste}, \quad (\text{VIII.12})$$

$$\rho \propto L^{-1}, \text{ avec } \ell = \text{cste}. \quad (\text{VIII.13})$$

La relation VIII.12 a été testée pour  $p_0 = 1/4$ ,  $1/2$  et  $3/4$ , ce qui signifie que la courbe se raidit de plus en plus (voir aussi l'illustration VIII.12). Si ces relations se vérifiaient quelles que soient les tailles, alors la transition de percolation serait à seuil nul, et du premier ordre. On présentera au paragraphe VIII.4.2 des points à vérifier avant d'être totalement affirmatif dans ces conclusions.

Il faut noter qu'il s'agit d'une transition dynamique, puisque l'amas est instationnaire. En effet, les tailles de dunes diminuent au fil des collisions, jusqu'à atteindre des tailles inférieures  $w_m$ . Sans nucléation, l'état final est un état dilué dans lequel il ne reste que quelques dunes n'ayant aucune voisine de taille différente dans leur colonne.

### VIII.4.2. – Modèle de percolation

L'amas percolé est le résultat d'une avalanche de collisions à partir de la condition initiale. Nous construisons ici un modèle probabiliste de collision menant à la percolation. L'hypothèse de champ moyen est que toutes les dunes ont une taille égale à la taille moyenne de la population initiale.

#### Description du modèle

Soit  $N$  dunes de taille  $w_0$ , placées aléatoirement dans un espace de dimensions  $\ell \times L$ . Elles interagissent par une collision de fragmentation si elles sont dans un couloir de largeur  $\varepsilon_p w_0$  (voir illustr. VIII.4 et éq. VIII.4). Par symétrie par rapport à l'axe d'avancement, la section efficace est le double de cette largeur. On discrétise donc l'espace en colonnes de largeur  $d = 2\varepsilon_p w_0$ , et au nombre de  $k = \ell/d$ .

Pour qu'il y ait percolation, il faut qu'il y ait assez de sable disponible pour permettre la situation minimale de percolation –uniquement des dunes de taille  $w_m$  distantes de  $d_0$  selon l'axe de déplacement et créées par la collision initiale de  $\mathcal{N}$  dunes de taille  $w_0$  :

$$\frac{L}{d_0} w_m^3 \leq \mathcal{N} w_0^3. \quad (\text{VIII.14})$$

La longueur maximale de l'amas percolé  $L_{\mathcal{N}}$  dépend donc du nombre de dunes initialement présentes dans la section efficace de collision :

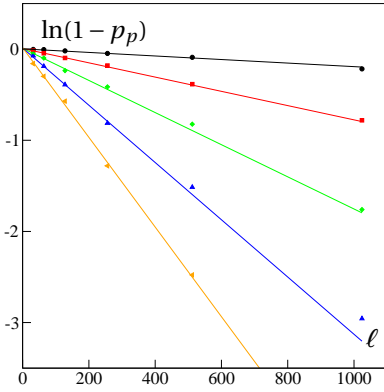
$$L_{\mathcal{N}} = \mathcal{N} d_0 \left( \frac{w_0}{w_m} \right)^3. \quad (\text{VIII.15})$$

Pour  $\mathcal{N} = 2$ , on obtient un amas maximal  $L_{\mathcal{N}} = 2000$  avec les valeurs usuelles de taille dans les simulations (table VIII.1).

Sachant que les longueurs de systèmes simulés jusqu'à maintenant n'ont jamais dépassé cette valeur ( $L \leq 64$ , voir [139]), nous supposons qu'une collision à deux dunes suffit donc à créer un évènement de percolation dans nos simulations. Il faut déterminer la probabilité d'avoir au moins deux dunes dans la même colonne. Raisonons sur la probabilité jointe  $p(n \leq 1)$  : la probabilité de trouver au plus une dune par boîte de largeur  $d$ . Supposons aussi que  $N \leq \ell/d$ , sinon  $p(n \leq 1) = 0$ . Pour calculer  $p(n \leq 1)$  il faut dénombrer les configurations où il y a une particule dans les  $k = \ell/d$  cases, et toutes les configurations possibles :

$$p(n \leq 1) = \frac{k(k-1)\dots(k-N+1)}{k^N} = \frac{k!}{k^N(k-N)!} \quad (\text{VIII.16})$$

La probabilité  $p_p = 1 - p(n \leq 1)$  est tracée en continu avec les données de simulation directe sur la figure VIII.11. Sans ajustement de paramètre, les courbes sont très proches les unes des autres.



Illustr. VIII.13. – Percolation en fonction de la largeur à densité fixée. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de la densité. Les droites sont tracées en utilisant la relation VIII.18.

### Effets de taille

Les effets de taille sont à regarder avec prudence à cause de la conservation du sable (l'éq. VIII.14) et la présence du terme  $(k - N)$  dans l'éq. VIII.16. Nous allons considérer séparément les effets de la largeur et ceux de la longueur.

Introduisons la quantité  $\alpha = \rho L d$  maintenue constante, alors  $k - N = k(1 - \alpha)$  ne dépend plus que de  $k$ .  $\forall \alpha < 1$ , on peut trouver  $\ell$  pour que  $k(1 - \alpha)$  soit suffisamment grand. On utilise alors la formule de Stirling, et on en déduit :

$$p(n \leq 1) \sim (1 - \alpha)^{-\left(\frac{1}{2} + (1 - \alpha)k\right)} e^{-\alpha k} \rightarrow 0, \text{ quand } k \rightarrow \infty \quad (\text{VIII.17})$$

Comme  $\alpha < 1$ , cette limite est obtenue à petite densité. On obtient que la probabilité de percoler  $1 - p \rightarrow 1$  à toute densité pour des tailles transverses suffisamment grandes, et donc que la transition est à seuil nul. La relation VIII.17 est purement exponentielle selon la taille (ou selon  $k$ ) et à densité fixée :

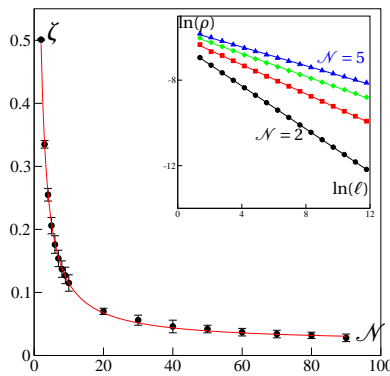
$$\ln(p(n \leq 1)) \sim -[(1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) + \alpha] k - \frac{1}{2} \ln(1 - \alpha), \quad (\text{VIII.18})$$

c'est ce qui est raisonnablement observé sur la figure VIII.13, puisqu'aucun ajustement de paramètre n'est effectué.

Si on fixe la largeur  $\ell$ , et que l'on change la longueur  $L$ , on observe que, quand  $N \sim k$ , alors  $p(n \leq 1) \sim 0$ . Autrement dit, la percolation devient certaine pour  $N = \rho L \ell \sim k$ , d'où, en utilisant la définition  $k = \ell / d$  :

$$\rho(p_p \sim 1) \sim \frac{1}{Ld}, \quad (\text{VIII.19})$$

C'est ce qui apparaissait dans l'étude numérique pour  $L \leq 64$  (illustr. VIII.12), mais il serait intéressant de connaître le comportement pour toute taille.



Illustr. VIII.14. – Effets de taille sur la percolation du modèle probabiliste en fonction du nombre de dunes nécessaires  $\mathcal{N}$ , l'exposant  $\zeta$  est ajusté par la fonction  $0,02 + 0,95/\mathcal{N}$  ; en insert la variation de la densité de percolation en fonction de la taille pour différents  $\mathcal{N}$ , à  $p_0 = 1/2$ .

### Système infini

On a vu auparavant qu'il faut une quantité de sable suffisante pour faire un amas percolant (éq. VIII.15), dans la colonne correspondant à la section efficace de collision. Cette dernière dépend *a priori* du nombre de dunes.

Pour avoir une collision de fragmentation, la condition à vérifier est  $r = \sigma / w \leq \varepsilon_p$ , où  $\sigma$  est la largeur de recouvrement de la dune amont sur la dune aval. Considérons une dune aval de taille  $w_0$ . Tant que la dune amont a une taille suffisante ( $w' \geq \varepsilon_p w_0$ ), l'écart de positions latérales menant à une collision fragmentante est maximale et vaut  $\varepsilon_p w_0$ . Si la dune amont est plus petite, l'écart relatif menant à une fragmentation vaut sa propre taille.

Prenons le cas d'une collision à trois dunes, quasiment de même taille  $w_0$ . En réalité, il s'agit d'un chapelet de collisions : les deux premières dunes en créent une quatrième (plus petite) qui heurte la troisième et en crée encore une nouvelle ; ces cinq dunes se rencontrent à nouveau par le jeu des conditions périodiques, etc. Pour déterminer la section efficace, il faut donc considérer le choc entre la dune produite par la première collision et la troisième dune.

Le premier choc a lieu entre deux dunes de taille  $w_0$  et leur position latérale relative est aléatoire sur l'intervalle  $[0; \varepsilon_p w_0]$ . La position moyenne est  $\varepsilon_p w_0 / 2$  ce qui crée, en moyenne, une dune de volume  $\varepsilon_p w_0^3 / 2$ , ou de taille

$w_{\text{neuve}} = w_0(\varepsilon_p/2)^{1/3}$ . Or  $w_{\text{neuve}} \geq \varepsilon_p w_0$  dès que  $\varepsilon_p \leq \sqrt{2}/2$ . Dans les simulations réalisées  $\varepsilon_p = 0,5$  (voir table VIII.1), nous sommes donc bien dans le cas où les paramètres de la collision est fixée par la dune aval. Cela signifie donc que la section efficace reste égale à  $2\varepsilon_p w_0$ .

Le raisonnement mené avec trois dunes initiales est valable pour un nombre quelconque de dunes car la taille de la dune créée ne dépend que du recouvrement. En revanche, ce raisonnement suppose qu'il suffit de connaître les chocs initiaux, et que les chocs qui suivent n'induisent pas des conditions supplémentaires.

Par le même raisonnement que pour une collision binaire, on peut calculer la probabilité d'avoir au moins une case ayant plus de  $\mathcal{N} = 3, 4, \dots$ , dunes dans une case de taille  $d = 2\varepsilon_p w_0$ , sur un système de largeur  $k = \ell/d$  cases :  $p(n \geq \mathcal{N})$ . C'est analytiquement de plus en plus difficile à manier, mais numériquement, cela ne pose pas de problème. Il faut remarquer que la longueur n'est pas un paramètre pertinent de ces calculs probabilistes, mais nous avons besoin de la fixer pour calculer la densité de dunes sur nos déserts. Par convention, nous fixons la longueur du système égale à celle du plus grand amas percolé  $L = L_{\mathcal{N}}$ . La probabilité d'une collision initiale de  $\mathcal{N} > 2$  dunes devrait permettre de calculer la probabilité de percolation de systèmes de taille  $]L_{\mathcal{N}-1}; L_{\mathcal{N}}]$ .

En fixant un seuil en probabilité  $p_0$ , on définit une densité de percolation,  $\rho(p(n \geq \mathcal{N}) = p_0)$ . On observe que, à  $\mathcal{N}$  fixé, la densité de percolation diminue avec la largeur selon une loi algébrique :

$$\rho(p(n \geq \mathcal{N}) = p_0) \propto \ell^{-\zeta_{\mathcal{N}}},$$

où l'exposant  $\zeta_{\mathcal{N}}$  diminue avec le seuil  $\mathcal{N}$ , mais ne semble pas s'annuler (voir illustr. VIII.14). Cela signifie que pour une longueur  $L$  arbitrairement grande, on peut trouver une largeur suffisamment grande pour percoler un système de densité donnée.

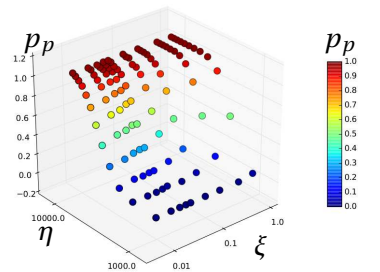
Il faut insister sur le fait que ce résultat s'applique sur le modèle probabiliste en champ moyen, et non directement sur le modèle initial. Mais, le fait que les modèles de champ moyen fonctionnent très bien pour décrire notre modèle d'agents (voir [141, 139], et les illustr. VIII.11, VIII.12 et VIII.13) pousse à la confiance pour affirmer que cette transition existe à toute taille.

### VIII.4.3. – Percolation dans un système non conservatif

Le cas où il n'y a pas d'échange éolien de sable est singulier dans notre espace des phases ( $\eta; \xi$ ). Mais il est possible de contrôler ces échanges et de favoriser la dynamique de collisions :

$$\xi \ll 1 \text{ et } \eta \rightarrow +\infty$$

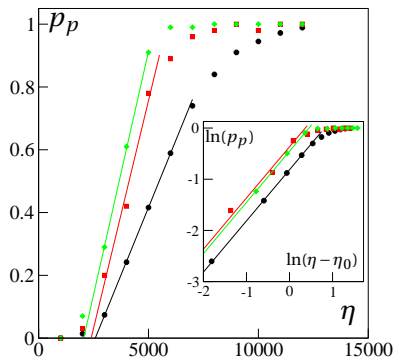
Dans cette limite, les amas percolés continuent à exister malgré la source de dissipation. Sur des petits déserts, il semble qu'il y ait trois paramètres de contrôle ;  $\eta$ ,  $\xi$ , et la densité initiale  $\rho$  et on peut en tracer un diagramme des phases comme sur l'illustration VIII.15.



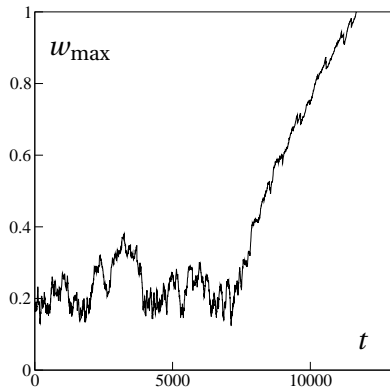
Illustr. VIII.15. – Percolation d'un système avec échange éolien, probabilité en fonction de  $\eta$  et de  $\xi$  (en échelle logarithmique), avec  $\ell = L = 32$ ,  $\rho = 1/8$ .



1. mais inférieure au seuil de percolation isotrope [158]



Illustr. VIII.16. – Percolation d'un système avec échange éolien, probabilité en fonction de  $\eta$ , avec  $\xi = 0,01$ ,  $L = 32$ ,  $\rho = 1/8$ , pour différentes tailles  $\ell = 32$ , 64 et 128. En insert, les mêmes courbes en échelle ln-ln.



Illustr. VIII.17. – Taille maximale des dunes  $w_{\max}$  en fonction du temps  $t$  près de la transition de condensation. Paramètres :  $\eta = 1$ ,  $\rho_0 = 1/8$ ,  $L = \ell = 32$ .

À  $\xi$  et  $\rho$  fixés, il est possible de tracer la probabilité de percolation en fonction du paramètre de collisions  $\eta$  (voir illustr. VIII.16). À faible  $\eta$ , la dynamique de collisions est peu représentée, et l'amas percolé n'existe jamais, quelle que soit la densité initiale<sup>1</sup>. Les effets de taille sont compatibles avec l'existence d'une transition avec un seuil non trivial dans l'espace des paramètres. En première étude, l'exposant du paramètre d'ordre  $\beta$  est proche de l'unité, ce qui est aussi la valeur de l'exposant de la percolation dirigée en champ moyen.

La position de la ligne de transition n'est pas perturbée par la valeur initiale de la densité, seule la valeur de la probabilité change. Cette dernière est elle-même soumise à des effets de taille (voir illustr. VIII.16). Ces deux éléments mis ensemble nous suggèrent que la dépendance vis-à-vis de la densité initiale disparaît pour les grands systèmes.

L'existence des amas percolés et la transition associée continuent d'exister pour des plus grandes valeurs de dissipation et malgré le bruit induit par la nucléation. L'apparition de dunes supplémentaires permet de s'extraire de la condition initiale et de créer des amas percolés au cours du temps. Il semble qu'il y ait même deux comportements en fonction de la valeur du paramètre  $\xi$ . Pour les faibles valeurs, la percolation est très rare, peut-être intermittente, alors que des amas percolés apparaissent fréquemment pour  $\xi \geq 1$ . Une étude de ce changement de comportement serait nécessaire. Il y a cependant des parallèles entre ce passage et le passage de l'état stationnaire dilué à celui qui est dense (voir le paragraphe VIII.3.3). Cette analogie nous indiquerait qu'il n'y a pas de transition associée à ce changement de dynamique.

#### VIII.4.4. – Injection de sable

Pour rendre le modèle quasi-conservatif, nous avons d'abord annulé les échanges éoliens de sable. Une autre possibilité est de forcer la nucléation pour compenser les pertes.

Nous rappelons que les simulations ont été faites en changeant la perte de sable  $\Phi$  et la nucléation de dunes  $\lambda$ . Changer le paramètre  $\eta$ , avec  $\eta \propto \alpha/\Phi$  qui compare l'échange de sable éolien et à la fréquence des collisions, revient à changer  $\Phi$ . En revanche  $\xi \propto \lambda/\Phi$  est piloté par  $\lambda$  lorsque  $\eta$  est maintenu constant. Si  $\eta < 1$ , ce sont les échanges éoliens qui prédominent. Si  $\xi < 1$ , la dynamique est globalement diluée car les pertes de sable sont majoritaires.

#### Instabilité de condensation

Lorsque la nucléation domine la dynamique ( $\xi \geq 1$ ), une instabilité apparaît dans laquelle quelques dunes voient leur volume augmenter continuellement jusqu'à  $d_0^3$  qui est une limite algorithmique de nos programmes de simulation. Ces condensats apparaissent après un temps aléatoire au cours duquel la dynamique semble identique à celle de l'état stationnaire, voir illustr. VIII.17.

La nature de l'instabilité de condensation semble sous-critique. Nous en avons un indice avec les séries temporelles et la durée nécessaire au déclenchement de la condensation. On peut aussi réaliser des simulations à durée fixée et moyenniser la densité finale de ces différentes réalisations. À  $\eta$  constant et  $\xi$  croissant, c'est la nucléation  $\lambda$  qui augmente linéairement. Un système



sans interaction verrait donc sa densité croître linéairement, c'est le cas avant l'instabilité (voir illustr. VIII.18). Puis, on observe deux branches distinctes pour un même intervalle de paramètre  $\xi$ , ce qui fait penser à une coexistence de phases. C'est un argument supplémentaire en faveur du caractère sous-critique de l'instabilité. Après la limite de l'instabilité, la densité possède un régime de croissance fortement non-linéaire que l'on devine piloté par les interactions entre dunes.

#### Régimes plus ou moins collisionnels

À nouveau, des régimes dilué et dense peuvent être définis. Ce dernier apparaît en diminuant  $\Phi$ , et il reconnaissable à la fréquence des collisions plus importante et qui croît au moment de la condensation, à l'aspect du champ constitué d'amas très denses, à la densité globale plus élevée et enfin à la forme de la distribution des tailles de dunes. Si le régime dilué possède une distribution piquée autour de la taille de nucléation  $w_0$  avec quelques événements rares entre  $w_0$  et  $d_0$ , la même distribution dans le régime dense est continue et possède une queue quasi-exponentielle [139]. Comme précédemment, le passage d'un régime à l'autre semble lisse en étudiant les différentes observables du système. Enfin l'instabilité de condensation semble inchangée que l'on se situe dans le régime dense ou celui qui est dilué.

Il faut noter que la phase de condensation est différente des régimes que nous avons appelé *dilué* et *dense* en comparaison l'un avec l'autre.

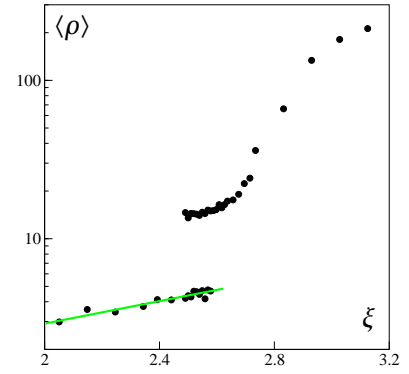
#### Mécanismes de l'instabilité de condensation

À cause de la présence des collisions dans cette partie du diagramme, il est naturel de leur attribuer le mécanisme de l'instabilité en première approximation. Nous pensons que cette intuition est fautive. D'une part, le nombre de collisions augmente de manière importante en considérant le régime dense plutôt que le régime dilué. Mais la croissance de taille de quelques dunes dans le champ ne semble pas être modifiée dans l'un ou l'autre régime.

D'autre part, seule la collision de coalescence change de manière systématique la taille d'une dune vers son augmentation. Or un modèle numérique de champ moyen dans lequel les positions relatives entre les dunes sont choisies de manière aléatoire ne mène jamais à l'explosion de condensation. En effet, la collision de fragmentation est toujours suffisante pour casser les grandes dunes [141].

Plus raisonnablement, le mécanisme de l'instabilité est à rechercher dans l'échange éolien de sable. En effet, nous explorons la partie du diagramme des phases correspondant à  $\xi \geq 1$  et  $\eta$  est de valeur modérée, ou  $\Phi$  et  $\lambda$  plutôt grands. De plus l'échange de sable éolien est très asymétrique, car la perte est toujours de  $+\Phi\Delta t$  alors que le gain n'est pas borné (voir illustr VIII.8). En effet, imaginons une grosse dune de taille  $w$  rattrapée par de très nombreuses dunes de taille  $w_m$ , le bilan est du type :

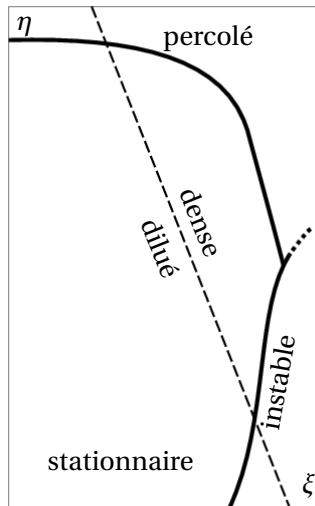
$$dV = \left(-1 + \frac{w}{w_m}\right)\Phi\Delta t \quad (\text{VIII.20})$$



Illustr. VIII.18. – Densité moyenne de dunes  $\langle\rho\rangle$  en fonction de  $\xi$  près de la transition de condensation. La ligne droite de couleur est un ajustement linéaire sur la branche inférieure. Paramètres :  $\eta = 1$ ,  $\rho_0 = 1/8$ ,  $L = \ell = 32$ .

qui est positif dès que  $w > w_m$ . Si les petites dunes n'ont pas le temps d'avoir une collision directe avec la grosse dune, elles se vident dans celle-ci et la grosse dune devient instable.

## VIII.5. – Diagramme des phases



Tout ce qui a été présenté précédemment se résume par le diagramme des phases VIII.19. On y reconnaît la partition entre régime dilué et régime dense, qui ne définissent pas des phases au sens où aucune transition ne peut être définie au changement de régime. Il y a une phase stationnaire qui correspond à un point stable entre la dynamique d'échange éolien du sable, la répartition du sable par les collisions, la nucléation des dunes et leur disparition sous la taille minimale.

Puis, il y a une phase où les dunes forment des amas qui percolent sur un espace aux conditions périodiques. Ces événements sont ponctuels dans le temps, mais se répètent en fonction du taux de nucléation de nouvelles dunes. Leur dynamique semble réglée par les collisions binaires et une loi de conservation du sable sur l'extension de l'amas, même si c'est numériquement difficile à tester.

Enfin, il y a une zone où les dunes sont instables vis-à-vis de l'échange éolien de sable, ce qui se traduit par une croissance continue de quelques dunes parmi les plus grandes.

Illustr. VIII.19. – Diagramme des phases complet : schéma réalisé à partir des simulations numériques.

## Analogies

---

Le modèle décrit au paragraphe VIII.1 est extrêmement non conservatif. Du sable est perdu lors des interactions éoliennes et lors de la disparition des petites dunes, mais du sable est gagné grâce aux évènements de nucléation. De même le nombre de dunes fluctue à cause de leurs collisions, de leur nucléation et de leur disparition.

La vitesse suit une relation inhabituelle avec la taille de la dune, ce qui induit que la quantité de mouvement totale et l'énergie cinétique totale sont reliées aux moments  $\langle w^n \rangle$  de la distribution de probabilité de la taille des dunes [139]. Devant cette grande complexité, nous sommes relativement démunis pour traiter théoriquement et directement notre modèle.

Par ailleurs, nous avons déjà souligné l'importance des analogies dans l'histoire de la physique hors d'équilibre. Nous proposons ici une lecture de notre modèle de dunes à l'aune d'autres modèles de physique statistique. Nous oublions donc toute référence à la géophysique, mais nous considérons les mécanismes d'interaction, ou les symétries des états accessibles pour trouver des modèles analogues et confronter nos résultats à l'état de l'art. Grâce à cette confrontation, nous proposons des pistes de recherche pour dépasser les difficultés de notre modèle.

### IX.1. – Percolation

La première analogie vient d'une observation visuelle de nos simulations de déserts : pour une certaine gamme de paramètres, des amas traversent l'espace et se reconnectent aux bords par le jeu des conditions périodiques. Cette *percolation* est toujours dirigée selon l'axe du vent. Cette simple constatation nécessite de la confronter aux notions bien établies de percolation, isotrope et dirigée.

#### IX.1.1. – Percolation isotrope

Tout d'abord, la percolation, c'est soixante-dix ans d'histoire [134, 49, 50]. Nous n'allons donc pas faire la totalité de l'état de l'art concernant ce domaine. Mais nous allons rappeler les résultats qui nous intéressent au premier chef.

Soit un espace discret, un réseau dont on considère les sommets et entre lesquels on tisse aléatoirement des liens. On définit une probabilité de lien  $p$  entre deux sites voisins, ou bien on définit une certaine densité de liens  $\rho$  comme le nombre de liens par unité de volume. L'ensemble des points du réseau connectés par ces liens constitue un amas et sa taille varie en fonction du paramètre de contrôle ( $p$  ou  $\rho$ ).

La question de la percolation est de savoir s'il existe un amas de taille infinie. On montre que l'on peut alors définir une densité critique  $\rho_c$  (respectivement une probabilité critique) telle qu'une densité inférieure à  $\rho_c$  (ou sous-critique) verra des amas de taille finie. Pour une densité supérieure à  $\rho_c$  (surpercritique), il existera un ou des amas de taille infinie. Par exemple, en dimension  $d = 2$  pour un réseau carré [207], la densité critique est  $\rho_c = 1/2$ .

La transition de percolation est une transition continue, définie comme les transitions phases des systèmes à l'équilibre [185, 287], pour laquelle il suffit de deux exposants critiques, tous les autres étant calculables par les relations d'échelle. Par exemple, on peut retenir comme observables la probabilité de trouver un amas de taille infinie  $P_\infty$  et la longueur de corrélation  $\xi$  :

$$P_\infty \propto (\rho - \rho_c)^\beta, \quad (\text{IX.1})$$

$$\xi \propto (\rho - \rho_c)^{-\nu}. \quad (\text{IX.2})$$

En dimension  $d = 2$ , la théorie conforme permet de calculer exactement les exposants [158] :

$$\beta = 5/36, \quad (\text{IX.3})$$

$$\nu = 4/3. \quad (\text{IX.4})$$

Par ailleurs, la théorie de champ moyen fournit :

$$\beta = 1 \quad (\text{IX.5})$$

$$\nu = 1/2 \quad (\text{IX.6})$$

Ce que nous avons décrit là est la percolation isotrope, puisque sans direction privilégiée, et sur réseau. Mais il existe des variantes. Il y a notamment le problème du lotus [158, 288] : des plants de lotus poussent aléatoirement sur un étang, espace continu, mais de manière synchrone. La question est de savoir s'il existe une taille de feuille telle qu'il sera possible de traverser l'étang en gardant les pieds au sec. L'espace est continu, mais les liens sont isotropes et ont tous la même taille. Cette dernière propriété permet d'établir une relation entre l'espace continu et un espace discret sous-jacent. Le problème du lotus appartient donc à la même classe d'universalité que la percolation sur réseau [158]. Dans d'autres variantes, la forme des objets qui établissent les liens peut varier : carrés, cubes [16, 211], ou encore bâtonnets [247], le seuil de percolation change mais la nature de la transition est inchangée.

Les variantes sur un espace continu avec des objets de formes anisotropes sont à rapprocher de nos dunes. Elles se meuvent sur un espace continu. Les objets qui percolent sur nos déserts virtuels sont des rectangles comprenant l'emprise de la dune et sa section efficace d'interaction. Ces objets ont eux-mêmes une taille continue mais ils ont une orientation constante, dirigée selon l'axe du vent.

Cependant la dynamique sous-jacente qui mène aux amas percolés est entièrement anisotrope et les amas (voir illustr. VIII.10) n'ont jamais leur extension principale dirigée perpendiculairement au vent. Les amas sont *dirigés* selon cet axe.

### IX.1.2. – Percolation dirigée

Dans la percolation dirigée, il y a une direction neutre, que nous noterons  $x$ , souvent désignée comme l'espace, et une direction privilégiée, notée  $t$ , selon laquelle s'effectue les liens. Cette direction est souvent désignée comme le temps, et on parle de percolation en dimension  $d = 1 + 1$ . Nous supposons que ces deux dimensions sont discrétisées et nous cherchons à construire les amas de liens entre ces sites.

Deux points de vue sont couramment utilisés. Ou chaque étape de cette construction peut être vue comme la dynamique à temps discret de particules sur un espace unidimensionnel. Ou bien on peut penser à un espace bidimensionnel, dont on construit l'état en partant de l'amont vers l'aval en partant d'une condition initiale donnée sur la direction  $x$ . La figure de l'amas apparaît sur l'espace bidimensionnel. Pour comprendre ces points de vue, on peut soit penser en terme d'épidémie : un site malade, appelé plus généralement *actif*, peut contaminer un de ses sites voisins. Ou bien on peut imaginer un matériau poreux dans lequel un liquide s'écoule sous l'effet de la gravité.

La présentation plus formelle de la percolation dirigée est de dire qu'un site quelconque a une probabilité  $p$  d'être actif, s'il possède au moins un voisin actif situé en amont (*i.e.* selon la direction  $-t$ ), elle est nulle sinon (voir figure IX.1 sur un réseau carré diagonal).

Outre l'anisotropie, il y a une autre différence entre les deux percolations. La première est soluble analytiquement, alors que la percolation dirigée ne possède pas d'étude analytique fournissant les exposants. Seules existent des mesures par simulations numériques.

Il y a deux façons d'observer numériquement la transition de percolation : soit on considère au temps  $t = 0$  une ligne selon la direction  $x$  remplie de sites actifs pour lesquels on observe la probabilité de *survie* de l'activité ; soit on part d'un seul site actif en  $(t = 0, i)$  et on observe *l'épidémie* de l'activité au cours du temps.

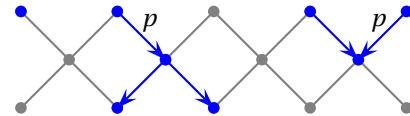
Le paramètre d'ordre est la densité de sites actifs  $\rho$ , le paramètre de contrôle est la probabilité  $p$  de lier un lien entre deux sites voisins, ou la probabilité réduite  $\varepsilon = p/p_c - 1$ . Dans la phase sous-critique, l'épidémie arrête son expansion au contraire de ce qui se passe dans la phase supercritique. Deux longueurs de corrélation sont définies, une selon la direction privilégiée  $\xi_{\parallel}$ , et une autre selon la direction perpendiculaire  $\xi_{\perp}$ . La transition est continue, et on définit dans la phase stationnaire pour un système infini les relations :

$$\rho \propto \varepsilon^{\beta}, \quad \beta \simeq 0.276, \quad (\text{IX.7})$$

$$\xi_{\parallel} \propto |\varepsilon|^{-\nu_{\parallel}}, \quad \nu_{\parallel} \simeq 1.734, \quad (\text{IX.8})$$

$$\xi_{\perp} \propto |\varepsilon|^{-\nu_{\perp}}, \quad \nu_{\perp} \simeq 1.096, \quad (\text{IX.9})$$

$$\xi_{\parallel} \propto \xi_{\perp}^z, \quad \text{avec } z = \frac{\nu_{\parallel}}{\nu_{\perp}}, \quad (\text{IX.10})$$



Illustr. IX.1. – Percolation dirigée de probabilité  $p$

où les valeurs des exposants sont données dans le cadre d'un espace de dimension  $d = 1 + 1$ .

Un autre paramètre d'ordre est de considérer la probabilité  $P(t)$  de survie de l'activité, c'est-à-dire d'avoir parcouru un amas de sites actifs durant un temps  $t$  en étant parti d'un site actif pris de manière aléatoire. La percolation se traduit par le fait que cet amas est de taille infini et la probabilité associée se comporte en :

$$P_{\infty} \propto \varepsilon^{\beta'}. \quad (\text{IX.11})$$

Les deux paramètres d'ordre présentés sont intuitivement associées aux deux conditions initiales utilisées pour observer la percolation dirigée. La densité  $\rho$  de sites actifs est la mesure réalisée à partir d'une condition initiale entièrement active, alors que la probabilité de survie  $P$  quantifie l'épidémie à partir d'un unique site actif. Ces grandeurs, correspondant à des situations différentes, pourraient donner lieu à des comportements différents, mais, dans le cas de la percolation,  $\beta' = \beta$ .

Il y a d'autres relations d'échelle intéressantes, notamment le long de la direction privilégiée, mais dont les exposants d'écoulement des trois précédents [185]. Il est également possible de considérer les relations d'échelle à un instant donné  $t$  pour un système de taille finie  $L$ . Dans ce cas, la probabilité de survie d'un amas actif après un temps  $t$  et la densité de sites actifs en fonction du temps suivent :

$$\rho(t) \simeq t^{-\beta'/\nu_{\parallel}} f\left(\varepsilon t^{1/\nu_{\parallel}}, t^{d/z} L^{-d}\right) \quad (\text{IX.12})$$

$$P(t) \simeq t^{-\beta'/\nu_{\parallel}} g\left(\varepsilon t^{1/\nu_{\parallel}}, t^{d/z} L^{-d}\right) \quad (\text{IX.13})$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions universelles.

La dimension critique supérieure de la percolation dirigée est  $d_c^{\text{sup}} = 4$ , et au-delà de celle-ci on retrouve les exposants de champ moyen :

$$\beta = \beta' = 1, \quad \nu_{\parallel} = 1, \quad \nu_{\perp} = 1/2. \quad (\text{IX.14})$$

## IX.2. – Processus de réaction-diffusion

### IX.2.1. – introduction

L'analogie de l'épidémie permet de décrire la percolation dirigée autrement que par ses aspects géométriques. Sur la figure IX.1, nous avons illustré les quatre processus qui sont en mesure d'avoir lieu :

1. un amas actif progresse dans la direction  $t$  ;
2. un amas actif s'arrête ;
3. un amas actif donne lieu à une fourche ;
4. deux amas actifs peuvent se rejoindre.

Au lieu de considérer l'amas sur le plan bidimensionnel, supposons suivre la dynamique d'une particule active, notée  $A$ , sur un espace unidimensionnel et dont la direction  $t$  est la ligne temporelle. Alors le premier processus n'est

qu'une diffusion brownienne. Les trois processus suivants peuvent s'écrire en terme d'annihilation, de dissociation ou de coagulation de particules :



La percolation dirigée est maintenant traduite en terme de réaction-diffusion. On ne s'occupe pas de connaître les propriétés des entités présentes. Ce sont des points qui diffusent, au besoin de manière biaisée, et qui interagissent. Aucune grandeur extensive associée, énergie, quantité de mouvement, ou masse n'est pertinente, seul le nombre de particules actives nous intéresse.

En ce qui concerne les dunes, on pourrait adopter ce point de vue à condition d'oublier qu'elles sont définies par un volume de sable. Les collisions, de coalescence (fig. VIII.2), d'échange de sable (fig. VIII.3 et VIII.5) et de fragmentation (fig. VIII.4) se ré-écrivent alors :



De manière intuitive, dans le contexte où le volume de sable n'est plus une quantité pertinente, l'équation IX.19 représentant les échanges de sable n'est pas à considérer. En revanche, nous avons ajouté l'équation IX.21 qui décrit la nucléation et la disparition des dunes. Les paramètres  $k_i$  sont les taux des différentes réactions.

### IX.2.2. – Importance de DP

La bibliographie concernant les processus de réaction-diffusion est extrêmement étendue. Ces systèmes entrent en jeu, naturellement, en chimie [302], mais aussi en physique des particules [51, 151] et ont été intensivement étudiés. Les réactions sont simples à écrire et possèdent des transitions dont la nature change en fonction du nombre de réactifs [150]. Mais leur simplicité cache des difficultés de compréhension et d'étude.

Parmi tous ces systèmes, il est vite apparu que la percolation dirigée tient une place à part puisque les exposants critiques de la percolation étaient mesurés dans un grand nombre de modèles [185]. Elle constituerait en quelque sorte une super classe d'universalité. Aussi Janssen [201] et Grassberger [150] ont affirmé que tout modèle vérifiant les conditions suivantes appartient à la classe d'universalité de la percolation dirigée<sup>1</sup> :

1. le modèle subit une transition continue entre une phase fluctuante et un unique état absorbant ;
2. le paramètre d'ordre de la transition est un scalaire positif ;

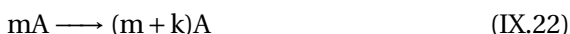
1. Ceci a été appelé *conjecture de Grassberger*

3. les interactions ne sont qu'à courte portée ;
4. le système n'a pas de symétrie supplémentaire, de source de désordre figé, *etc.*

Ainsi la percolation est la transition de phase qui sépare deux états. L'un est inactif, car ce sont les réactions de coagulation IX.17 et d'annihilation IX.15 qui y dominent. Cette phase est dite *absorbante* car toute dynamique inactive y finit. L'autre phase est dominée par le branchement (éq. IX.16). Mais à cause des deux autres réactions, cette phase est un état dynamique stationnaire autour d'une densité de particules actives d'équilibre. Elle possède donc aussi des fluctuations. On parle de phase *fluctuante*.

### IX.2.3. – Processus binaires

Dans la section VIII.4.1, pour observer des agrégats de dunes dont la taille diverge, nous avons choisi les paramètres de manière à limiter les variations de la quantité de sable. Cela revient à annuler les taux de réactions  $k_3$  et  $k_4$  de l'équation IX.21, et dans ce cas notre ensemble de réactions se limite à des collisions binaires. En première approche, ce système vérifie les conditions d'application de la conjecture de Grassberger, et donc ce système devrait suivre la classe d'universalité DP. Mais Kockelkoren et Chaté [210] ont semé le doute en étudiant les systèmes de réaction-diffusion en faisant varier le nombre de réactifs ( $m, n$ ) et celui des produits ( $k, l$ ) :



Ils ont alors détecté deux autres classes d'universalité pour  $m = 2$  et  $n = 2$  d'une part, et  $m = 3$  et  $n = 3$  d'autre part. Ces classes ont été nommées *Pair Contact Process with Diffusion* (PCPD) et *Triplet Contact Process with Diffusion* (TCPD). Ils ont montré également que le nombre de produits ( $k$  et  $l$ ) ne joue pas de rôle significatif.

En ce qui concerne notre modèle de dunes, la dynamique dynamique la plus proche serait celle de PCPD. Ces systèmes subiraient donc une transition absorbante avec une classe d'universalité à part entière dont les exposants, dans un espace de dimension  $d = 1 + 1$ , seraient :

$$\beta = 0,37 \quad \nu_{\parallel} = 1,85 \quad \nu_{\perp} = 1,09 \quad (\text{IX.24})$$

L'existence d'une classe PCPD donne lieu à une controverse extrêmement longue [108, 153, 173, 186, 272, 303] et qui ne semble pas totalement éteinte. Un des arguments des partisans de DP est de dire qu'il n'y a pas de symétrie supplémentaire dans PCPD. En revanche, ils pointent des effets non-triviaux apparaissant dans les simulations numériques, par exemple une première dynamique qui masquerait la dynamique asymptotique.

Les outils analytiques sont multiples mais ne donnent pas de résultats clairs. L'étude la plus récente [153], par groupe de renormalisation non perturbatif, conclut que le comportement peut être DP ou en être différent. Les auteurs de cette étude précisent que le choix de l'action effective en est difficile.



Dans ce travail, ils choisissent un seul champ représentant la dynamique des sites actifs, mais en conclusion ils indiquent qu'il faudrait peut-être faire un autre choix, comme proposé dans des études précédentes [108, 272].

L'idée est de séparer dans les deux réactions, par exemple les éq. IX.18 et IX.20, la réaction elle-même du processus de formation de la paire de réactifs. Celle-ci apparaît alors sous la forme d'une nouvelle particule, notée ici  $B$  :



Ici, la réaction de création aboutit à la formation de quadruplets  $2B = 4A$ , alors que l'équation IX.20 crée  $3A$ , et la perte de matière passe par une annihilation pure et simple au lieu d'une coalescence (éq. IX.18). Cependant l'étude [210] montrait que les exposants de la classe PCPD ne dépendent pas du nombre de particules produites ou consommées d'une part. D'autre part, puisque seules les paires de particules interagissent, il est compréhensible que c'est la production ou la disparition d'un nombre paire de particules qui va agir sur la dynamique. Le système est maintenant la dynamique de deux espèces de particules, contrairement à la dynamique sous-jacente à DP.

D'autres arguments sont avancés. La dimension critique supérieure de PCPD est  $d_c = 2$  [108, 153], contrairement à DP ( $d_c = 4$  [185]). Mais s'il y a un biais dans la diffusion, elle est tombée à  $d_c = 1$  [272]. En règle générale, un biais n'induit aucun changement sur les modèles bosoniques, car les équations des champs sont invariantes par une symétrie de Galilée [272]. Ils semblent que ce ne soit pas le cas lorsque la phénoménologie est non bosonique. Ce changement de dimension critique sur PCPD est observé numériquement [272] et sur des études de théories des champs effectives [108]. En revanche, il faut remarquer que la percolation est décrite par des réactions unaires et donc est bosonique.

#### IX.2.4. – Phase inactive fluctuante

Les modèles précédents ont deux phases asymptotiques, l'une active, l'autre absorbante sans fluctuation, *i.e.* sans terme de nucléation à parti du vide. Or notre modèle de dunes possède un tel terme de nucléation dans l'équation IX.21.

D'autres modèles ont deux phases fluctuantes. Parmi ceux-ci, il y a les deux modèles de Schlögel [302]. Ces modèles de chimie décrivent des systèmes avec un catalyseur  $C$  et un inhibiteur  $I$  qui jouent sur la production de particules actives  $A$ . Le premier s'écrit :



et le second :



Si le catalyseur et l'inhibiteur sont en excès, leurs concentrations respectives resteront quasiment constantes. On peut négliger alors la présence de ces entités et obtenir des équations où seul intervient  $A$ . Dans ce cas le premier modèle de Schlögel est similaire à celui de la percolation dirigée (voir éq. IX.15, IX.16 et IX.17) avec un terme en plus, de création à partir du vide.

Grassberger [150] étudie le second modèle de Schlögel dans la limite d'un réservoir infini de catalyseur :



Le champ moyen donne une transition du premier ordre et un point critique pour une nucléation non-nulle. L'étude d'une théorie de champ à un seul champ<sup>2</sup> et les simulations de la version sur réseau indique que les fluctuations détruisent les états métastables et déplacent le point critique pour une nucléation quasiment nulle. Les fluctuations empêcheraient donc la transition.

Une étude plus récente [286] montre que, pour le même modèle en  $d = 1$  et en  $d = 2$ , le système est bistable (par champ moyen) mais choisit toujours la solution de plus faible densité (par simulation directe). En étudiant l'équation maîtresse, ils en déduisent qu'une bonne description en terme d'équation de Langevin contiendrait un terme de bruit additif et un terme de bruit multiplicatif :

$$\partial_t \rho = -\partial_\rho V(\rho) + \xi_1(t) + \alpha \rho \xi_0(t),$$

où  $V$  est le potentiel quartique. Ils en déduisent l'équation de Fokker-Planck, en déterminent la solution stationnaire et montrent que le potentiel effectif a bien une solution stable plus basse que celle du potentiel sans bruit. Ce modèle n'a donc pas de transition, mais juste une évolution douce de la solution du potentiel effectif. En revanche, selon la même étude, le premier modèle de Schlögel avec nucléation, garderait une transition critique, mais de seuil déplacé.

Dickman *et al* [101] étudient un système avec collisions binaires (dit Pair Contact Process, sans diffusion) avec source :



Leur résultat est que la source de particules déplace le seuil, déplace la densité asymptotique, mais ne change pas le comportement au point critique, y compris les exposants (à la résolution des simulations près). Les fluctuations semblent donc avoir des effets différents en fonction du système étudié.

2. mais est-ce suffisant? voir la discussion précédente autour du modèle PCPD et les éq. IX.25–IX.29.

## IX.3. – Modèles avec redistribution de masse

L'étude des déserts a mis en avant le rôle de la conservation du volume des dunes au moment des collisions. Cela a notamment permis d'évaluer la taille des agrégats percolés (voir éq. VIII.15) et de comprendre un mécanisme d'instabilité des dunes (voir éq. VIII.20). On peut alors penser aux dunes comme à un certain volume de sable que la dynamique des collisions et l'échange éolien redistribuent entre dunes voisines.

Volume, masse, énergie, les systèmes caractérisés par une grandeur extensive sont légions. Parmi ceux-ci, deux modèles minimaux hors d'équilibre ont retenu notre attention : celui de Bak-Tang-Wiesenfeld (BTW) et celui dit d'échange de masse.

### IX.3.1. – Le modèle de Bak-Tang-Wiesenfeld

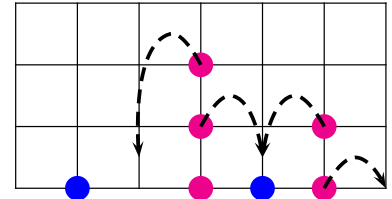
Soit des grains de matière, ou d'énergie, répartis sur un réseau de dimension  $d$ . On autorise leurs empilements, mais ceux-ci sont instables – on dit aussi *actifs* – au-delà d'un certain seuil  $K$ . Sur la figure IX.2, le seuil choisi est  $K = 2$ . Cette *activité* se traduit par la *répartition* d'un certain nombre de grains du site instable vers les sites voisins. À cette règle de répartition, on ajoute une règle de *dépôt* qui gère l'injection de matière en temps et en espace, et une condition de disparition de cette matière, appelé aussi *dissipation*.

Initialement, le modèle BTW [15] possède une répartition des grains homogène et isotrope aux plus proches voisins. Une de ces limites est absorbante, alors qu'une autre limite sert de lieu dépôt à la fin de chaque avalanche et de manière à compenser exactement les pertes. Mais, depuis sa définition, de nombreuses variantes du modèle ont été proposées concernant tour à tour les définitions de l'activité, du dépôt, de la dissipation et de la répartition.

**L'activité** Un empilement de  $z$  grains est actif, ou instable, dès qu'il dépasse un seuil  $z \geq K$ . La valeur du seuil apparaît d'abord comme un paramètre, puis on comprend que la valeur minimale  $K = 2$  suffit pour obtenir la dynamique d'avalanches [239, 321]. La notion d'activité est ensuite élargie. L'article [298] définit un site actif comme possédant des voisins. Le seuil  $K$  vaut 1 et un site inactif est un site sans voisin. Un autre étude [243] propose que l'activité soit mesurée sur un voisinage. Un site inactif peut alors se trouver activé par ses voisins.

**Le dépôt** Il peut être aléatoire sur tout l'espace [321, 239, 344], ou n'être présent que sur un bord [321] comme si le système était en contact avec un réservoir de particules. Bien sûr, on peut s'affranchir d'un dépôt [342]. Enfin le dépôt peut être conditionné à l'état local d'activité, par exemple en étant restreint aux sites voisins d'un site actif [21] ;

**La dissipation** elle s'est d'abord manifestée par une condition aux bords absorbantes [321] : les particules disparaissent le long de cette limite. Mais elle peut être aussi aléatoire au sein de tout l'espace [344], ou bien restreinte aux sites actifs [21], ou encore être annulée [342] ;



Illustr. IX.2. – Modèle de Manna discret et conservatif

3. cette répartition est aussi appelée déterministe

**la répartition** Elle peut être systématique et homogène sur les  $2d$  plus proches voisins [321]<sup>3</sup>, ou bien aléatoire isotrope [239], ou encore dirigée selon un axe [98, 194]. L'étude [252] ajoute de l'inertie dans le modèle, c'est-à-dire que le site actif possède une certaine probabilité de ne pas relaxer. Enfin l'article [20] propose une variante où la quantité échangée est continue.

Le foisonnement de ces variantes est essentiellement lié à la difficulté de comprendre les effets des ingrédients des modèles. De longues polémiques en sont nées, et toutes n'ont pas abouti à un consensus, comme en témoignent des études encore récentes [20, 21, 100, 223].

Nous avons noté quatre questions scientifiques concernant :

1. l'existence de la criticalité auto-organisée, en opposition aux transitions de phases des systèmes hors d'équilibre ;
2. l'existence de classes d'universalité différentes en fonction de la nature, déterministe ou stochastique, de la répartition ;
3. l'application de la conjecture de Grassberger et la définition des classes d'universalité ;
4. l'effet du caractère isotrope ou anisotrope de la répartition.

**SOC** Le modèle initial est pensé dans le cadre de la criticalité auto-organisée [15, 321]. Dans cette théorie, deux processus antagonistes, dépôt et dissipation, dont les échelles de temps sont découplées, poussent le modèle vers un point critique. Mais l'étude des systèmes thermodynamiques nécessitent de considérer des couples dépôt-dissipation qui s'annulent aux grandes tailles. En effet, si le système est critique, le temps de propagation de l'information, ici les avalanches de grain, divergent au point critique. Il n'y a donc pas de nécessité d'ajouter, ou de retirer, des grains pour que les avalanches perdurent infiniment.

Les auteurs de [344] prouvent que le SOC, dans ce cas, est en fait un système hors d'équilibre avec des paramètres de contrôle. Ils définissent une version avec conservation du nombre de grains [342], appelée *Fixed Energy Sand pile* (FES). Celui-ci subit une transition avec un état absorbant. Si la densité de particules est trop faible, l'état final est celui de particules inactives réparties sur l'espace. Il y a donc une infinité d'états absorbants.

Une procédure est définie pour étudier un système du type SOC, en passant par une variante donnant lieu à une transition vers un état absorbant et en se plaçant au point critique de cette dernière. Les exposants ainsi déterminés sont identiques dans les deux versions [42, 74, 344].

**Déterminisme ou hasard de la répartition** Le modèle BTW [15, 321] suppose que la répartition des grains d'un site actif est homogène isotrope sur les sites voisins, alors que Manna [239] a proposé une répartition aléatoire. La question est de savoir si cette différence de la loi locale est suffisante pour changer le comportement critique du système.

Au niveau de la théorie des champs, selon [342], ce changement de répartition agit de manière non pertinente, *i.e* cela ne devrait pas agir sur l'appartenance du modèle à une classe d'universalité. La même équipe [72] montre par une étude numérique que le comportement critique est le même

dans les modèles BTW et de Manna en dimension  $d = 2$ . Cependant d'autres études [90, 323] présentent BTW comme un système multifractal, et qui ne suit donc pas les effets de taille critiques classiques.

Les auteurs de [213], par arguments de marche aléatoire, de formation d'arbres et de simulations numériques directes montrent que les avalanches de sites actifs sur le modèle BTW se font par vagues, qui, prises individuellement, suivent les effets de taille critiques habituels. La difficulté d'obtenir les exposants critiques des avalanches est donc comprises comme l'enchevêtrement des ondes, très probable en  $d = 2$ , puis de moins en moins importantes en augmentant la dimension, jusqu'à la dimension critique  $d_c = 4$  où on retrouve les résultats d'une théorie de champ moyen. L'intrication des ondes en faible dimension mènerait à un comportement multifractal.

Cette vision est confirmée par une étude numérique [91] qui obtient des effets de taille en dimension  $d \geq 3$  identiques pour les modèles de Manna et de BTW, mais différents en  $d = 2$ .

**Percolation dirigée** Comme il a été montré que les modèles appartenant à la classe du SOC peuvent trouver un équivalent dans les systèmes avec un état absorbant, il est tentant de dire qu'ils appartiennent à la classe d'universalité de la percolation dirigée. Parmi les critères de la conjecture de Grassberger [150], seule celui concernant les symétries supplémentaires doit être discuté.

Or, si l'état absorbant de la percolation est entièrement vide, celui de la classe de Manna [239] comporte des sites inactifs contenant une particule et des sites entièrement vides. Pour un système thermodynamique, il y a une infinité d'états absorbants. De plus il est connu que la percolation dirigée est sensible à du désordre figé [185]. On pourrait imaginer qu'une condition initiale donnée va déboucher sur un état absorbant donné qui constituerait donc une conformation du désordre. Mais cet argument n'est pas totalement recevable, car si on perturbe un état absorbant en déplaçant une particule inactive pour faire un site actif, l'avalanche qui en résulte le déplace et fabrique un tout nouvel état absorbant.

L'argument qui est relativement bien répandu est qu'il faut concevoir une dynamique à deux champs [298, 342, 344] : des sites actifs dont le nombre diminue avec la dynamique et qui sont mobiles, et des sites inactifs qui ne diffusent pas eux-même. La dynamique globale conserve le nombre de particules. La percolation dirigée étant une dynamique à un seul champ<sup>4</sup>, on peut avoir une classe d'universalité différente de DP, qui est appelée classe de Manna, ou de la percolation dirigée conservée (cDP).

Les exposants de cDP ont été mesurés en  $d = 1$  [99], en  $d = 2$  [343] pour le modèle FES, sur un modèle de gaz conservatif sur réseau (CGL), et de processus conservatif à transfert de seuil en  $d = 2$  [298]. Tous ces exposants sont différents de ceux de la percolation dirigée. Ils semblent effectivement définir une classe d'universalité puisque des modèles différents possèdent le même jeu d'exposants. Ces mesures directes ont été confortées par l'intégration des équations de Langevin associées à cette dynamique [109].

Une autre raison pour séparer les classes de DP et de cDP est que les exposants de contamination (*spreading*) de cDP changent en fonction des conditions aux bords, pas ceux de DP [41, 188].

4. on retrouve l'argument apparu lors de la polémique concernant PCPD.

Un des arguments en faveur d'une classe d'universalité unique (DP) a été que rajouter des ingrédients, comme de l'inertie [252], ou une activité définie sur un voisinage [243] semble donner des exposants conformes à ceux de DP. Mais d'autres études [42, 41] ont retrouvé les exposants de Manna dans ces modèles.

Dans toutes ces études, une difficulté est due au fait que les exposants de cDP et de DP sont proches les uns des autres. La seconde difficulté est qu'il faut étudier de grands systèmes sur des longs temps de simulation pour dépasser les effets de taille. Une étude sur les avalanches de grains [187] a pu aussi influencer le débat puisqu'elle montre, dans ce modèle particulier, que le comportement de lois de puissance de DP et d'abord caché par celui de la percolation compacte [106].

Aussi, des études récentes ont essayé de montrer que le comportement cDP débouche sur les lois de DP après de longs transitoires [20]. Elles ont été discutées et infirmées [222, 223, 100].

Malgré quelques tentatives en faveur de DP [21], il semble qu'il ait un consensus en faveur de l'existence d'une classe d'universalité cDP différente de la percolation dirigée.

**Effet d'un biais** Très rapidement, les modèles de tas de sable avec une direction privilégiée ont eu un statut particulier. Ils sont pratiquement les seuls à avoir des développements analytiques exacts aussi bien dans le cas de la répartition déterministe [98, 194] que stochastique [209, 269]. Les exposants critiques analytiques ont été comparés à ceux des études numériques [41, 276]. Les études sont cohérentes et fournissent des exposants différents de ceux de la percolation dirigée et de la classe de Manna.

Dans un premier temps, on pourrait être surpris du fait que les exposants de ces modèles SOC changent en fonction du biais. Ce sont des modèles bosoniques, comme DP, et l'argument de Park [272] (vu au paragraphe IX.2.3) devrait s'appliquer. Cependant, Park *et al.* raisonnaient sur une théorie à un seul champ. En revanche, si on considère une théorie avec deux champs, dont un qui ne diffuse pas, il est clair qu'un changement de référentiel agit sur ce dernier.

Une dernière explication est donnée en [42] : en considérant la direction du biais comme une direction temporelle, la conservation locale de la matière contenue dans la règle de répartition n'est plus applicable. On change donc de symétrie et de classe d'universalité.

En dernière remarque, il faut indiquer que d'autres pistes encore ont été proposées, notamment sur les modèles d'interface linéaire. On pourrait imaginer que le désert n'est qu'une interface fluctuante [257], mais ce point de vue serait équivalent avec celui des transitions de phase absorbantes [40].

### IX.3.2. – Transfert de masse

Les modèles du type BTW étudient l'aspect de la relaxation à partir d'une multitude d'instabilités locales. Ce point de vue est à rapprocher de l'étude des collisions dans notre modèle de dunes. Cependant le transfert éolien de sable (voir illustr. VIII.1) est systématique et permanent. La perte de sable est

constante, alors que le gain de sable prend des valeurs continues inférieures ou supérieures à cette perte (voir illustr. VIII.8). Or il existe une famille de modèles hors d'équilibre dont le ressort est le seul échange d'une quantité extensive : les modèles à transfert de masse.

Historiquement, le premier d'entre eux est le processus de niveau zéro ou *Zero-Range-Process* (ZRP) [316, 120, 121]. Il est constitué d'un réseau dont chaque site d'indice  $i$  contient une certaine quantité de masse  $m_i$ . Celle-ci est discrète de pas  $\delta m = 1$ . À chaque instant, le site  $i$  peut perdre une masse  $\delta m$  au profit du site  $i + 1$  et cet évènement a lieu avec un taux  $u(m_i)$ , qui dépend de la masse du site  $i$  de départ (voir illustr. IX.3). Ce modèle est asymétrique, puisque il y a un flux vers les abscisses croissantes. Mais on peut écrire un modèle avec un déplacement symétrique.

Dans un système à masse totale fixée, en fonction de la forme du taux de transition  $u$ , l'état stationnaire peut être une densité homogène aussi grande que l'on veut, ou bien il atteint une densité critique  $\rho_c$  et l'excès de masse se condense sur un site. Ce condensat est fixe dans l'espace, mais sa localisation est aléatoire.

Le point important de ces modèles est qu'en écrivant l'équation maîtresse qui régit la dynamique de transfert, il apparaît une relation de proportionnalité entre les taux de transfert et des fonctions poids  $f$ . Ces dernières permettent d'écrire la probabilité stationnaire de conformation du système sous forme factorisée. Cela signifie notamment qu'avec les outils classiques de la physique statistique (notion d'ensemble, fonction de partition, *etc.*) on peut déterminer les caractéristiques thermodynamiques de ce système, pourtant maintenu hors d'équilibre. Par exemple, si on fixe la forme des taux de transfert du type  $u(m) \simeq 1 + \gamma/m$ , on sait qu'un condensat apparaît pour  $\gamma > 2$ .

Il n'y a pas de solution universelle, mais tout dépend de la forme des taux de transfert, sauf en ce qui concerne la dynamique. La croissance des domaines, mesurée par la masse moyenne des condensats en fonction des temps, dépend de la densité et du caractère symétrique, ou non, des transferts :

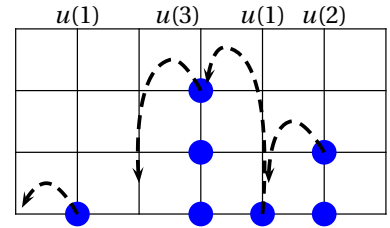
$$\langle m(t) \rangle \propto t^{1/3}, \quad (\text{IX.39})$$

en dynamique symétrique sur un espace unidimensionnel ( $d = 1$ ), et

$$\langle m(t) \rangle \propto t^{1/2}, \quad (\text{IX.40})$$

dans tous les autres cas [121].

Des variantes de ce modèle existent. Notamment, la masse peut être prise comme une variable continue [122]. Le temps et l'espace restent discrétisés. À chaque instant une portion aléatoire de masse  $\mu_i$  est retirée du site  $i$  ayant une masse  $m$  et donnée au site  $i + 1$  selon une distribution  $\varphi(\mu_i|m_i)$ . Le même travail de recherche de solutions stationnaires, factorisables est effectué. Dans [122], les auteurs trouvent une condition suffisante sur la forme de  $\varphi$  pour que la factorisation soit possible. Dans [362], la même équipe donne la forme des poids participant à la factorisation. Enfin [233] étudie la nature du condensat en fonction du comportement des poids  $f$  de la factorisation. Les auteurs montrent que la taille du condensat peut alors suivre une densité de



Illustr. IX.3. – Modèle ZRP

probabilité normale ou anormale. Enfin ce même travail est réalisé avec des échanges sur graphe [123].

Dans le dernier modèle, dit modèle du misanthrope [121, 350, 124], le taux de transition dépend de l'occupation du site de départ  $m_i$  et du site d'arrivée  $m_{i+1} : u(m_i, m_{i+1})$ . Dans ce cas, le condensat peut se déplacer sur le réseau. Dans [350, 124], le taux de transition prend la forme  $u(m, n) \propto (mn)^\gamma$ , avec une forme qui assure la factorisation. Alors le plus gros condensat se vide toujours plus rapidement dans un petit, stocke de la masse et accélère, ce qui fait qu'un condensat finit par vider l'espace de la matière disponible avec une vitesse qui se comporte en  $L^\gamma$ ,  $L$  étant la taille du système.

**Différences entre ZRP et BTW** Les modèles ZRP, d'échange continue de masse et du misanthrope sont dans le même esprit que les modèles BTW. La différence est le point de vue. Dans le modèle BTW, de Manna ou leurs variantes, on s'intéresse au passage d'un système dilué à un système dense quasi-stationnaire avec la définition d'une densité critique. On étudie surtout la relaxation, les états instationnaires et le système d'avalanches qui se met en place.

Dans les modèles de transfert de masse, on recherche essentiellement les états stationnaires denses et leur caractérisation aussi bien lorsqu'il y a une densité quasi-homogène ou un condensat.

Il ne semble pas qu'il y ait de différences conceptuelles entre les BTWs et les modèles avec transfert de masse (MTM) :

- concernant leurs définitions respectives, les taux de transitions définis dans les MTM pourraient être utilisés sur BTW, par exemple si  $u(m \leq z_c) = 0$  et  $u(m > z_c) = \infty$  ;
- BTW est défini avec une quantité variable de grains, mais nous avons vu qu'il existe une grande variété de modèles avec des définition d'apport et de dissipation très différente. Nous n'avons parlé que des MTM à masse fixée, mais il existe des versions dans l'ensemble grand canonique, où il y a un réservoir de particules aux limite. Enfin, de la création et de l'annihilation ont aussi été introduit dans les modèles de transfert de masse [121] ;
- dernier point de définition, ZRP est plutôt un modèle où les grains s'écoulent selon une direction privilégiée, mais nous avons aussi discuté des résultats des modèles symétriques, tout comme un biais peut être, ou ne pas être, ajouté dans les règles de BTW.

## IX.4. – Bilan et ouvertures

De toutes ces analogies, de ces modèles très proches, mais différents tout de même émerge, une surprise. Le modèle de dunes possèdent plusieurs caractéristiques des modèles dont on a donné un tableau bibliographique. Il les inclut tous et permet de mettre l'accent sur l'une ou l'autre en réglant les deux paramètres de contrôle  $\eta$  et  $\xi$  : pour  $\eta \gg 1$  c'est le caractère collisionnel qui prend le pas sur les échanges éoliens et la percolation apparaît, alors qu'à



$\eta \ll 1$  et  $\xi \simeq 1$  ce sont les échanges de sable qui prédominent et donnent lieu à l'instabilité de condensation.

Pourtant aucune transition de phase dont on a discuté la nature précédemment ne semble se retrouver dans nos résultats, aucune ou si peu : nous avons une transition du premier ordre entre un état absorbant et un état percolé en changeant la densité, une transition semblant suivre les exposants de champ moyen entre un état dilué faiblement fluctuant et un état percolé lorsque  $\eta$  est le paramètre de contrôle, et enfin une transition sous-critique de condensation.

Pour faire le bilan de ces différences et proposer des axes de recherche afin de mieux les comprendre, nous reprenons les points saillants des études précédentes et les appliquons à notre modèle :

- la dimension de l'espace
- les biais dans la dynamique ;
- la nature de l'état absorbant ;
- la présence de fluctuations ;
- la nature des collisions.
- le type de répartition ;

### IX.4.1. – Dimensions et biais

La loi cinématique (éq. VIII.1) est purement unidimensionnelle. Les collisions (illustr. VIII.2, VIII.3, VIII.4 et VIII.5), et les échanges de sable éoliens (illustr. VIII.1) sont biaisés dans la direction du vent.

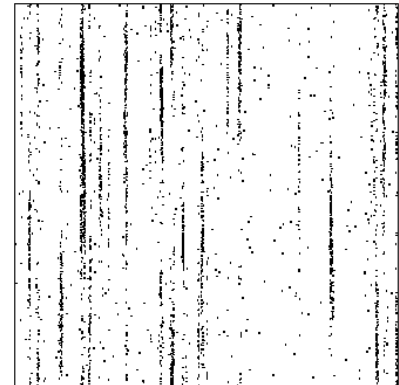
Cependant, il y a une petite diffusion transverse, due au fait que les centres de masse de dunes se déplacent lorsque les dunes interagissent. Et les collisions sont déterminées en fonction de l'écartement latéral.

La vision globale de la percolation et de l'apparition des agrégats est tout de même quasiment unidimensionnelle. La mesure des longueurs de corrélation et celles de la taille des agrégats ne laissent aucune place au doute [139]. Les agrégats dans la phase stationnaire – non percolés – sont cent fois moins larges et que longs. L'apparence de l'agrégat percolé est une ligne (voir illustr. IX.4). S'il fallait donner une idée de l'exposant transvers,  $\nu_{\perp} \sim 0$  serait notre première réponse.

On peut aussi noter que le modèle de champ moyen sans fluctuation (voir paragraphe VIII.4.2) donne aussi une idée de la dimension nécessaire à la description. La longueur n'y apparaît que pour fixer le bilan de masse. Une fois que deux dunes suffisamment grandes sont en présence, la percolation aura lieu. La longueur du désert n'est presque qu'un délai nécessaire à l'apparition de l'amas percolé. L'axe des  $x$  joue peu, l'axe des  $y$  est en fait lié à celui du temps, la dimension de l'espace est donc

$$d = 0 + 1.$$

Or, les modèles de réaction-diffusion et les modèles échange de masse sont sensibles à la dimension de l'espace et à la présence d'un biais. Si effectivement, le modèle peut être décrit en terme de réactions binaires comme PCPD – ou PCP si on considère que la diffusion ne joue strictement aucun



Illustr. IX.4. – Champ de dunes dans la phase percolée dense.

rôle – alors on peut s’attendre à des résultats du type champ moyen. Effectivement la transition de percolation avec fluctuations, c’est-à-dire avec  $\eta$  comme paramètre de contrôle, semble être de ce type. Il faudrait en améliorer l’étude des effets de taille et la mesure des exposants.

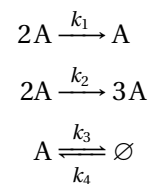
Une autre piste consiste à donner une ou des variantes de notre modèle afin d’en tester les ingrédients. On notera que ce travail a été exploré par M. Génois lors de sa thèse [139]. Notamment une diffusion latérale a été testée en ajoutant un bruit sur la seule direction de la vitesse instantanée des dunes. L’effet est d’élargir les agrégats, mais cela ne change pas la nature du passage entre le régime stationnaire dilué et celui qui est dense : ce n’est pas une transition de phase.

D’une part, tout le diagramme des phases de cette variante n’a pas été exploré. Nous ne connaissons donc pas l’effet de l’ajout de la diffusion sur la percolation, ni sur la condensation. D’autre part, cette forme de bruit peut être discutée, il aurait peut-être mieux valu commencer par ajouter un bruit à la composante  $y$  afin d’augmenter la dimension d’une seule unité, au lieu de passer tout de suite au cas bi-dimensionnel. Ajouter un terme de bruit sur la cinématique des objets ne change pas l’existence d’un biais sur les collisions et sur les échanges éoliens. On peut donc aussi lier la direction de l’interaction à celle de la vitesse relative des objets. Nous nous attendrions alors à observer des amas percolants avec une largeur significative.

Le dernier point à noter à ce sujet est que le seul processus vraiment bi-dimensionnel présent dans notre modèle est lié à l’instabilité de condensation. En effet, une dune devient géante car elle reçoit du sable de plusieurs dunes. Or il y a de l’écrantage. Il faut donc que les petites dunes soient décalées les unes par rapport aux autres. Si les interactions ont une direction plus isotrope, il est difficile de prévoir l’effet sur la transition de condensation.

#### IX.4.2. – Collisions et fluctuations

Nous avons vu que les collisions retenues pour notre modèle sont du type binaire, et on a donné une version des collisions sous forme de réaction (éq. IX.18, IX.20 et IX.21), que nous rappelons ici :



**Champ moyen** Ces équations mènent à une équation de champ moyen :

$$\partial_t \rho = (-k_1 + k_2)\rho^2 - k_3\rho + k_4, \quad (\text{IX.41})$$

où  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  et  $k_4$  sont les taux des réactions, constants et positifs. En choisissant astucieusement la base de temps, on peut fixer  $k_3 = 1$  et prendre pour paramètres de contrôle  $k_4$  et  $k_0 = -k_1 + k_2$ .

On peut chercher les solutions stationnaires :

$$k_0\rho^2 - \rho + k_4 = 0, \quad (\text{IX.42})$$

qui dépendent du discriminant  $\Delta = 1 - 4k_4k_0$ . Il y a deux alternatives (voir Fig. IX.6) :

- si  $k_0 < 0$ , alors  $\Delta > 0$ , mais il n'y a qu'une solution positive :

$$\rho_0^- = \frac{1}{2|k_0|} \left( -1 + \sqrt{1 + 4k_4|k_0|} \right)$$

- si  $k_0 > 0$  et  $k_4 < 1/4k_0$ , il y a deux solutions positives :

$$\rho_0^\pm = \frac{1}{2k_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4k_4k_0} \right).$$

**Stabilité** on pose  $\rho = \rho_0 + \bar{\rho}$ , où  $\rho_0$  est une des solutions stationnaires de l'éq. IX.41. Avec  $\bar{\rho} \ll \rho_0$ , celle-ci devient alors :

$$\partial_t \bar{\rho} = (2\rho_0k_0 - 1)\bar{\rho} = \pm \sqrt{1 - 4k_4k_0}$$

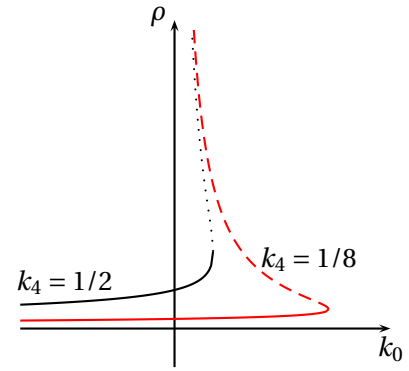
- si  $k_0 < 0$ , alors  $\rho_0 = \rho_0^-$  et donc  $\partial_t \bar{\rho} = -\sqrt{1 - 4k_4k_0} < 0$ , la solution est linéairement stable.
- si  $k_0 > 0$  et  $k_4 < 1/4k_0$ , et
  - $\rho_0 = \rho_0^-$  la solution reste stable,
  - $\rho_0 = \rho_0^+$ ,  $\partial_t \bar{\rho} = +\sqrt{1 - 4k_4k_0}$  la solution est instable.

**Interprétation** Le facteur  $k_0$  mesure le poids relatif de la coalescence et de la fragmentation. Ce paramètre est négatif si la coalescence prime, positif si la fragmentation prédomine. Pour un taux de disparition  $k_3$  constant, la nucléation spontanée  $k_4$  pilote alors le niveau de la densité. Plus  $k_4$  est élevé, plus la densité l'est aussi (voir Illustr. IX.5). Mais lorsque la fragmentation domine ( $k_0 > 0$ ), la solution unique se dédouble en une solution stable de faible densité, et une solution instable. Lorsqu'on dépasse la limite  $4k_0k_4 = 0$ , toutes les solutions sont instables : le système se remplit infiniment de dunes (voir le diagramme des phases IX.6).

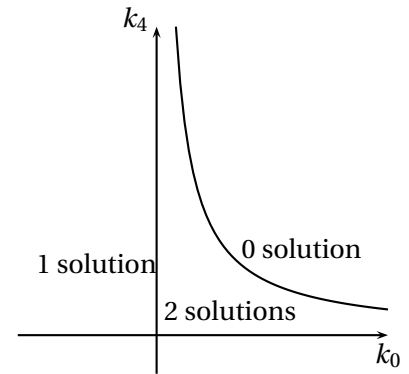
Cette théorie de champ moyen n'est pas satisfaisante pour plusieurs raisons. D'abord, pour les simulations d'agents déjà effectuées, la fragmentation domine toujours  $k_0 = k_2 - k_1 > 0$ . Or nous n'avons pas observé de phase explosive de ce type, car la conservation locale de volume empêche la fragmentation des dunes de perdurer.

Ensuite, nous savons, d'après les simulations numériques, que les probabilités de chacune des collisions varient avec les paramètres de contrôle  $\eta$  et  $\xi$  mais aussi avec les seuils  $\varepsilon_p$  et  $\varepsilon_t$  (voir [141]), ce qui nous donne les dépendances :  $k_1(\xi, \eta, \varepsilon_p)$ ,  $k_2(\xi, \eta, \varepsilon_t)$ ,  $k_3(\xi, \eta)$ ,  $k_4(\xi)$  (la nucléation n'intervient que dans  $\xi$ ).

Cependant elle est intéressante, car le régime dense possède, en fonction des conditions initiales, une phase explosive *transitoire* qui relaxe ensuite vers la solution stationnaire [139]. Tous ces arguments vont dans le sens de la nécessité d'une théorie ré-introduisant la conservation locale de volume. Cela pourrait se traduire par une équation couplant le nombre de dunes avec la quantité de volume disponible.



Illustr. IX.5. – Champ moyen du modèle de réaction-diffusion : solutions stationnaires en fonction de  $k_0$  pour  $k_4 = 1/8$  et  $1/2$ . Les courbes continues sont les solutions stables, les courbes discontinues sont instables.



Illustr. IX.6. – Champ moyen du modèle de réaction-diffusion : diagramme des phases stationnaires homogènes dans l'espace  $(k_0, k_4)$ .

Une autre voie possible est d'écrire une théorie cinétique tenant compte des collisions, par exemple une équation de Boltzmann comme ce qui a été fait pour les particules auto-propulsées [31]. Dans sa thèse [139], M. Génois a essayé cette voie mais il s'est heurté à la forme complexe des sections efficaces de collision. Paradoxalement, ces collisions sont encore trop compliquées. Hormis l'équation de la cinétique de réaction IX.41, il est à noter qu'il y a une grande adéquation des théories de champ moyen avec les simulations. Cela laisse penser qu'une théorie à la Fokker-Planck ou Boltzmann serait adaptée pour représenter la dynamique.

Il faut donc repenser les collisions et leur forme très déterministe. Une version stochastique serait probablement plus facile à utiliser. L'autre point concernant les collisions est qu'aucune étude n'a été réalisée en faisant varier le poids relatif de la coalescence par rapport à celui de la fragmentation, c'est-à-dire en variant les seuils  $\varepsilon_t$  et  $\varepsilon_p$ . Or la présente théorie de champ moyen (Éq. IX.41) a montré l'importance de ce poids dans la dynamique.

Tout ceci donnera des informations sur le comportement du modèle actuel. Mais nous avons plaidé précédemment pour la ré-introduction de mouvements diffusifs et/ou d'isotropie dans les interactions du modèle. L'effet escompté est d'obtenir des transitions critiques comparables à celles de notre étude bibliographique. Dans ce cas, les études de champ moyen seront inutiles et le point-clef deviendra la nature du bruit et l'influence des fluctuations. La question a son importance au niveau théorique, puisque nous avons vu précédemment que la détermination des équations de Langevin de ces systèmes critiques n'a rien d'évident. Mais elle a également son importance pour la géologie, car il y a débat pour savoir si ce sont les collisions ou le *calving* [360], instabilité des cornes des dunes, qui stabilisent la taille des barchanes. Dans ce dernier processus, les dunes laissent s'échapper des morceaux de leur propre corne. Le terme de nucléation serait alors du type  $A \rightarrow 2A$ , qui est un terme de fluctuation similaire au terme de celui de la percolation dirigée.

## IX.5. – Conclusion

Nous avons proposé des études complémentaires à nos travaux précédents en faisant varier des paramètres, ou en proposant des outils théoriques, ou bien encore en changeant des ingrédients du modèle de barchanes : bruit sur la cinématique, anisotropie des interactions, nucléation liée à la présence d'une autre dune. Le modèle résultant n'aurait pas grand-chose à voir avec notre système de départ. Nous ne nous intéresserions plus à la question de géophysique.

Cependant, nous avons conservé à la fois la conservation locale du volume lors des collisions, le caractère binaire de ces collisions et l'échange éolien. Le but est de comprendre l'influence de ces deux propriétés du système qui mène à la fois à une transition de percolation, et à une instabilité de condensation. Ces transitions ont lieu en des lieux différents du diagramme des phases. Mais ces zones se rejoignent en un point du diagramme. La question de la caractérisation de ce point reste ouverte. Entre un agrégats percolés et un condensat, il est difficile d'imaginer quelle est la phase résultante au point d'intersection.

Changer les ingrédients permet de comprendre ce qui pilote la nature des transitions de notre modèle. Il ne s'agit pas tant de trouver un comportement critique que de comprendre pourquoi il apparaît, ou n'apparaît pas.

Enfin ce modèle, imaginé dans le contexte des barchanes et dérivé à la lecture de la physique statistique hors d'équilibre, a peut-être des prolongements expérimentaux. Par exemple on peut penser à une averse sur une vitre d'un véhicule en mouvement. La physique des gouttes d'eau sur un plan n'est pas très éloignée [283]. Le volume d'eau tient lieu du volume de sable. Les gouttes, en se déplaçant, laissent un chapelet de gouttelettes le long de leur trajectoire, phénomène équivalent de la perte de sable éolien. Une goutte peut grossir de taille en absorbant d'autres gouttes. La cinématique des gouttes peut être complexe car elle dépend de la contrainte extérieure, la vitesse du vent, celle du véhicule, les accélérations possibles. Elle dépend de la qualité de surface du plan et de sa mouillabilité. En bref on peut aussi avoir beaucoup d'effets dynamiques très intéressants, sans l'anisotropie, inhérente aux barchanes.



*Troisième partie*

## Bandes de cisaillement





## Bandes de cisaillement

This model will be a simplification and a idealization, and consequently a falsification. It is to be hoped that the features retained for discussion are those of greatest importance in the present state of knowledge.

A. Turing[339]

Contrairement aux fluides newtoniens, les fluides complexes ont une structure à un niveau mésoscopique correspondant, par exemple, à la longueur entre nœuds d'un réseau de polymères enchevêtrés, ou la taille des bulles d'une mousse. À cette échelle les temps de relaxation sont comparables aux temps typiques des écoulements, ce qui implique des interactions entre la structure du milieu complexe avec le fluide qui le porte, d'où de nouvelles organisations spatio-temporelles surprenantes.

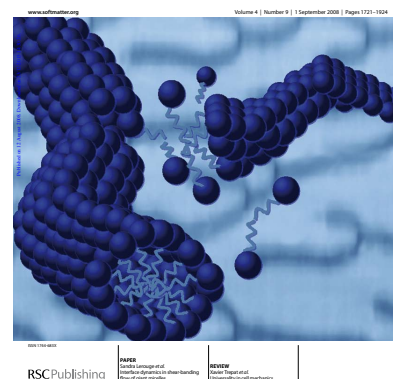
Parmi l'une d'elles, les écoulements en bandes de cisaillement sont un phénomène assez courant [103, 147], observés dans les solutions de surfactants, les polymères téléchéliques [28], les émulsions, les matériaux granulaires, les mousses [202]. Les micelles géantes [225] tiennent une place à part dans cet inventaire. D'abord, elles ont été abondamment étudiées. Ensuite elles sont régulièrement citées comme l'archétype de fluides donnant lieu aux bandes de cisaillement. Enfin leur structure microscopique les rapproche des polymères en solution.

### X.1. – Polymères et micelles

Des polymères ajoutés en petite quantité à un solvant newtonien change radicalement son comportement en lui ajoutant une composante élastique. Le polymère à l'équilibre est comme une pelote plus ou moins débobinée en fonction de son affinité avec le solvant [105]. Lorsque ce dernier est mis en mouvement, le polymère suit l'écoulement en déroulant la pelote, puis en s'alignant selon les lignes de courant, avec un temps de relaxation  $\tau$ , voire une distribution de ces temps.

En comparant le temps de relaxation  $\tau$  avec le temps caractéristique de l'écoulement  $1/\dot{\gamma}$ , où  $\dot{\gamma}$  est le taux de cisaillement, on construit le nombre de

# Soft Matter



Illustr. X.1. – Vue d'artiste d'une micelle géante [226].

Weissenberg :

$$Wi = \tau \dot{\gamma}, \quad (X.1)$$

qui indique quelle contribution est prédominante dans l'écoulement étudié, entre celle de l'écoulement lui-même ou celle de la relaxation du polymère. Lorsque  $Wi$  est de l'ordre de l'unité, on s'attend à l'apparition d'une instabilité élastique [217]. D'instabilité en instabilité, on atteint un état complètement désordonné similaire à l'état turbulent [159] mais qui reste à faible nombre de Reynolds (noté  $Re$  dans la suite). Une des difficultés expérimentales est que les contraintes appliquées sont tellement élevées que les polymères se dénaturent lors de ces expériences. Cela rend la reproductibilité de ces expériences problématique.

Un autre type d'agencements moléculaires sont les micelles. Ils sont le résultat de l'agencement de molécules amphiphiles, elles-mêmes contenant une tête hydrophile et une queue hydrophobe. Ces molécules s'assemblent, en fonction du solvant, tête à tête, ou queue à queue, de manière à diminuer leur énergie d'interaction [26]. Puis, en fonction de leur densité, ces assemblages s'assemblent à leur tour en sphères et en cylindres (Figure X.1), voire en structures plus compliquées – oignons et bicouches – si l'expérimentateur joue avec les solvants. Les cylindres ont une dynamique très similaire à celle des polymères, et on peut définir une longueur de persistance  $\xi$  et un temps de relaxation  $\tau$ . Mais les micelles ont un caractère labile, puisque ses éléments peuvent se dés-assembler et se ré-assembler de manière réversible. Ainsi on qualifie parfois les micelles de *polymères vivants*.

Dans l'entrefer de deux cylindres co-axiaux, ou dispositif de Taylor-Couette, et à partir d'une certaine vitesse de rotation du cylindre intérieur, le cylindre extérieur étant maintenu fixe, l'écoulement a lieu comme si deux fluides de viscosités différentes étaient en présence et stratifiés (voir [103, 225] et Illustr. X.2). La plus faible viscosité apparente est située au plus près du centre. Cette co-existence n'est pas sans rappeler une transition de phase discontinue puisque la courbe d'écoulement suit un plateau de contrainte quasi-constante lorsque le taux de cisaillement global  $\dot{\gamma}$  augmente. Tout le long de ce plateau, la fraction de la bande la plus fluide augmente lorsque  $\dot{\gamma}$  augmente, jusqu'à envahir tout l'entrefer.

La compréhension microscopique de la bande de cisaillement réside dans l'organisation des micelles selon les lignes de courant, à l'image de l'orientation de l'aimantation ferromagnétique sous un champ, ou de l'organisation nématique [27]. Cependant il est très difficile de l'observer expérimentalement. La biréfringence [92] et la diffusion des neutrons [26] en sont des signatures.



Illustr. X.2. – Vue de l'entrefer d'un dispositif de Taylor-Couette, le cylindre intérieur tournant est à gauche. On observe les rouleaux de Taylor dans la bande illuminée par une nappe laser. La seconde bande est diffusante [127].

## X.2. – Instabilités et mécanismes

Contrairement à ce qui est observé selon l'axe des cylindres, la structure en bandes n'est pas une suite de phases concentriques. L'observation des plans contenant l'axe de rotation  $(\vec{r}, \vec{k})$ , comme la photographie X.2, montre une interface qui ondule [224]. Dans la phase la plus fluide, il apparaît des rouleaux dont l'axe est orthoradial [127]. À plus fort cisaillement encore, les rouleaux interagissent en une dynamique rappelant celle de l'équation de phase de

Kuramoto-Sivashinskii [224]. Enfin, l'écoulement devient entièrement turbulent, à faible nombre de Reynolds  $Re$ , *via* une transition sous-critique [125]. Présenté ainsi, tout semble suivre la route habituelle par instabilités successives : instabilité primaire, doublement de période, dynamique chaotique, et enfin turbulence, même si le paramètre de contrôle n'est pas le nombre de Taylor  $Ta = Re^2 d/R_i$ , associé aux instabilités des fluides newtoniens, mais son équivalent élastique  $\Sigma_i^2 = (\tau\dot{\gamma})^2 d/R_i$ , où  $d$  est l'entrefer et  $R_i$  le rayon intérieur.

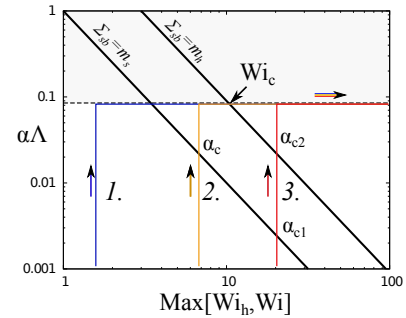
Cependant certains cas ne suivent pas ce mécanisme général, et on y observe une restabilisation de l'écoulement [125] – les tourbillons disparaissent – avant la poursuite de la route vers la turbulence pour des valeurs de paramètre de contrôle encore plus élevées. Nous avons re-visité le mécanisme général en observant que les tourbillons apparaissent dans la bande de viscosité effective la plus faible. C'est une instabilité élastique ayant lieu dans un milieu homogène, en opposition à une instabilité de surface entre les deux bandes [130, 131, 261]. La bande la plus fluide a une largeur qui croît en augmentant  $\dot{\gamma}$ . C'est donc aussi un problème aux frontières. Le milieu subissant l'instabilité à une frontière fixe, le cylindre intérieur, et une frontière libre, la limite de la bande. Or, les seuils d'instabilités sont généralement abaissés avec des conditions aux bords libres par rapport aux conditions confinées [65, 208].

L'idée pour introduire un nouveau critère est de corriger l'ancien paramètre de contrôle par la proportion de la bande instable par rapport à l'entrefer  $\alpha = r/d$  :

$$\Sigma_i^2 = \alpha (\tau\dot{\gamma})^2 d/R_i = \alpha \Lambda Wi^2,$$

avec  $\Lambda = d/R_i$  et  $Wi = \tau\dot{\gamma}$  nombre de Weissenberg. Puis on définit un seuil  $m_s$  pour le problème à bord libre, et  $m_h$  pour celui à géométrie confinée par le rayon extérieur. Sur la figure X.3, on a tracé trois exemples de chemin suivi par un système subissant un écoulement en bande de cisaillement en fonction du nombre de Weissenberg dans la bande fluide (de plus haut taux de cisaillement)  $Wi_h$ .

1. le système en bande n'atteint aucun des deux seuils et reste donc stable. Le fluide homogène se déstabilise à plus haut taux de cisaillement, lorsque  $Wi \geq Wi_c$  ;
2. la bande la plus fluide se déstabilise lorsque  $\alpha = \alpha_c$ , puis se restabilise lorsque la bande la plus fluide a atteint le cylindre extérieur. Comme précédemment, le fluide est homogène lorsque  $Wi \geq Wi_c$  ;
3. le système en bande est instable et le reste.



Illustr. X.3. – Illustration de trois routes possibles en fonction de trois nombres de Weissenberg  $Wi = \tau\dot{\gamma}$  de départ, lorsque la proportion  $\alpha$  de la bande la moins visqueuse augmente, et où  $\Lambda = d/R_i$ .

## X.3. – Modélisation et projet

De nombreuses études rhéologiques des solutions de micelles géantes ont été produites parce que ces systèmes étaient le système modèle des bandes de cisaillement. L'absence d'observation directe du plan  $(\vec{r}, \vec{k})$  et une réflexion très mésoscopique ont fait que l'instabilité de rouleaux n'a été observée et comprise que près de vingt ans après l'observation des bandes de cisaillement [58, 127].

Ce système se prête à l'interprétation microscopique. Ainsi, il y a eu des hypothèses de coexistence de phases [129, 267], de modification de l'ordre nématique [64]. Mais le modèle qui a donné le plus de résultat est un modèle purement polymérique, il s'agit du modèle de Johnson-Segalman [152, 126] corrigé d'un terme non-local. Les micelles peuvent effectivement être modélisées comme des polymères sauf qu'elles changent dynamiquement de longueur. Or ce paramètre n'est pas pris en compte. Le modèle de Johnson-Segalman ne dépend que d'un seul temps de relaxation et d'un seul paramètre de glissement. Une quelconque polydispersité due au changement de taille n'intervient donc pas. C'est en quelque sorte une théorie de champ moyen sur le comportement *polymérique* des micelles.

Il existe des modèles prenant en compte le caractère dynamique de la structure des micelles, soit en passant par la physique statistique d'une population de *monomères* qui réagissent et s'interconnectent pour former des structures de toute taille [57], soit en limitant ce modèle à deux tailles de micelles, une courte et une longue, dont les distributions relatives s'adaptent sous écoulement [82, 341]. Le premier modèle est presque trop riche pour être utilisé, alors que le second nécessiterait d'être corroboré par des considérations microscopiques. L'observation directe des micelles, tant expérimentales que numériques est donc une nécessité pour confirmer, ou infirmer la description actuelle de ces chaînes.

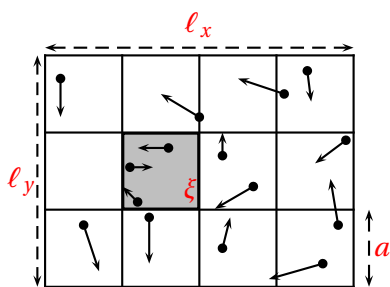
Si on veut appliquer le même schéma de pensée que dans les deux sujets précédents, il faut imaginer des agents reproduisant la dynamique micellaire. Mais les instabilités rencontrées sont dues au couplages entre la microstructure des micelles avec le fluide. Or les modèles d'agents incorporent très rarement des interactions médiées par des champs hydrodynamiques [240], et cela passe alors par la résolution d'équations aux dérivées partielles avec le défaut de réintroduire une grille de discrétisation dont sont initialement exempts les modèles d'agents.

D'autres méthodes, phénoménologiques, ont été imaginées : il s'agit de simuler la dynamique de particules fictives dont le comportement mésoscopique s'apparente à un fluide réel. Dans cette classe, citons les méthodes *smoothed-particle hydrodynamics* SPH [70, 144], *dissipative particles dynamics* DPD [190]. Ces méthodes cherchent plutôt à résoudre les équations hydrodynamiques. La méthode SPH est la version lagrangienne de l'équation de Fokker-Planck. La dynamique des particules DPD est choisie, réglée dans le but de suivre une équation d'état particulière.

En 1999, Kapral et Malevanets [235] proposent un algorithme très simple permettant de mimer un fluide : *multi-particles collision dynamics* (MPCD). Il s'agit d'une population de  $N$  particules se déplaçant par sauts successifs pendant un intervalle de temps constant  $\Delta t$  :

$$\vec{r}_i^{t+\Delta t} = \vec{r}_i^t + \Delta t \vec{v}_i^t \quad (\text{X.2})$$

Afin de recréer le chaos moléculaire, à chaque pas de temps, les particules subissent des *collisions* dont l'effet est de tourner les vitesses d'un angle aléatoire autour de la vitesse  $V$  du centre de masse. Cette dynamique est réalisée à l'échelle locale. Pour cela, l'espace est divisé en cellules (voir figure X.4). En



Illustr. X.4. – Schéma présentant les paramètres des simulations MPCD.

résumé, pour des particules de masse  $m_i$ , dans une cellule  $\xi$  :

$$\vec{V}_\xi^t = \frac{1}{\sum m_i} \sum_{i \in \xi} m_i \vec{v}_i^t \quad (\text{X.3})$$

$$\vec{v}_i^{t+\Delta t} = \vec{V}_\xi^t + \Omega_\xi^t [\vec{v}_i^t - \vec{V}_\xi^t] \quad (\text{X.4})$$

où  $\Omega$  est un opérateur de rotation. Par simplicité et efficacité numérique, cette rotation peut être réduite à deux angles  $\pm\alpha$  choisis aléatoirement à chaque pas de temps et dans chaque cellule.

Insistons sur le fait que le module de la vitesse de chaque particule est libre et que la grille précédemment citée ne sert qu'à déterminer le voisinage. Les particules sont donc libres de se déplacer continûment.

On vérifie analytiquement, et numériquement, que cette règle de rotation aléatoire conserve la quantité de mouvement et l'énergie cinétique. Une condition initiale quelconque, par exemple des particules réparties de manière homogène et aléatoire sur l'espace avec des vitesses de direction aléatoire mais de module identique, mène à une répartition gaussienne des vitesses (Illustr. X.5) dont on peut mesurer la température avec les fluctuations de vitesse ( $\text{Var}(v_x) = k_B T / m$ ) et les fluctuations de l'énergie ( $\text{Var}(e_c) = (k_B T)^2$ ), voir Illustr. X.6). La kurtosis,  $\kappa = 1 - \langle v_x^4 \rangle / (3 \langle v_x^2 \rangle^2)$  mesurant l'aplatissement d'une distribution par rapport à la gaussienne, tend vers zéro en  $20\Delta t$  (Illustr. X.7). Cela correspond au temps de thermalisation du système.

La dynamique étant stochastique, le système étant fini, les signaux sont bruités, voir Illustr. X.6. Mais l'amplitude des fluctuations décroît comme le théorème central limite le prévoit : en  $1/\sqrt{N}$ . Sur la figure X.6, pour  $N = 16384$ , les fluctuations de température sont de l'ordre de 0,8%, et les  $20\Delta t$  nécessaires à la thermalisation correspondent à 0,02 s de calcul sur un ordinateur portable actuel sans optimisation particulière. C'est dire si c'est une méthode efficace pour simuler un fluide.

Les travaux sur ce sujet (voir les revues [149, 237]) ont déterminé les coefficients de transport de l'hydrodynamique linéarisée suivie par ces particules : viscosité, diffusivité thermique, diffusivité massique. Il suffit presque de choisir le jeu de paramètres correspondant au fluide dont on dispose et de faire les simulations. En réalité, si l'on veut simuler un fluide newtonien incompressible, l'algorithme MPCD possède des restrictions sur les écoulements considérés en terme de nombre de Reynolds  $Re$ , nombre de Péclet  $Pe$ , nombre de Ma, et sur la densité de particules  $\rho$  et sur la vitesse typique des particules  $v$ , ce qui a une influence sur les coefficients de transport et la température :

$$Re = \frac{Lv}{\nu} \in [0.1; 10]; \quad (\text{X.5})$$

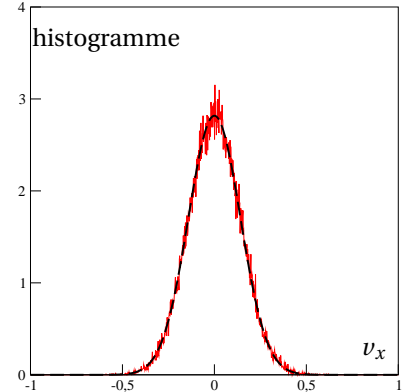
$$Pe = \frac{Lv}{D} \in [0.1; 10]; \quad (\text{X.6})$$

$$Ma = \frac{v}{c} \ll 1; \quad (\text{X.7})$$

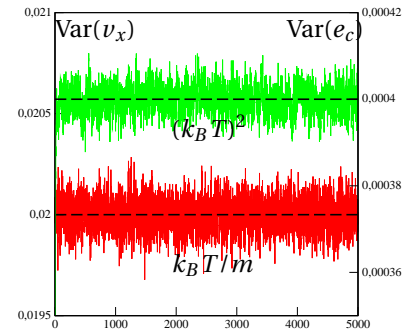
$$\rho \in [3; 30]; \quad (\text{X.8})$$

$$v \geq \frac{a}{2} \quad (\text{X.9})$$

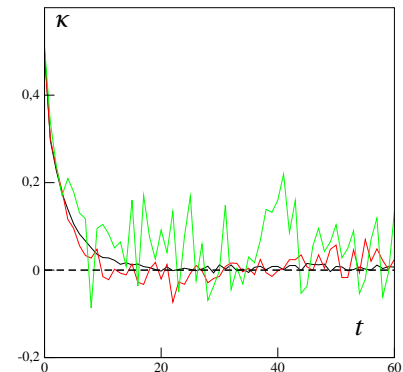
Il existe aussi des algorithmes correctifs qui permettent de dépasser ces limitations. Le fluide obtenu dans ces simulations est essentiellement un gaz



Illustr. X.5. – Fluide MPCD : histogramme de la composante de la vitesse  $v_x$ , la courbe en trait interrompu étant un ajustement avec une loi normale dont le paramètre est la variance. On mesure  $k_B T = 0.02$  avec une bonne précision, ce qui correspond à la température de la condition initiale.



Illustr. X.6. – Variance de la vitesse (axe de gauche, courbe rouge) et de l'énergie cinétique (axe de droite, courbe verte) d'un fluide MPCD. Les lignes interrompues sont respectivement les courbes attendues pour une distribution de Maxwell-Boltzmann.



Illustr. X.7. – Kurtosis d'une composante de la vitesse d'un fluide MPCD en fonction du temps et pour des systèmes de taille  $\ell_x = \ell_y = 32, 64$  et  $128$ .

parfait. Les restrictions X.5-X.9 visent à contrôler la compressibilité, les modes acoustiques, ainsi que les corrélations anormales. Pour que le fluide respecte la conservation du moment cinétique il faut ajouter des règles calculatoires sur l'opérateur de rotation stochastique  $\Omega$ . Et si le modélisateur souhaite étudier des fluides aux équations d'état plus exotiques, par exemple des fluides denses, il est possible de reformuler les règles de collision X.3-X.4 de manière *ad'hoc* [149].

Les travaux qui ont utilisé la méthode MPCD ont montré qu'elle est parfaitement adaptée aux simulations :

- hydrodynamiques d'objets immergés [216] –eux-mêmes modélisés par des espaces d'exclusion avec des conditions aux limites adaptées ;
- de colloïdes [168] –pour lesquels il faut coupler l'algorithme MPCD à une procédure de dynamique moléculaire pour calculer les interactions entre colloïdes, le potentiel tenant compte des interactions électrostatiques et de van der Waals ;
- de molécules en solution [236, 296] –une molécule est modélisée par des sphères interagissant par un potentiel de Lennard-Jones ;
- de systèmes binaires [149] ;

En conclusion, un modèle simplifié de chaîne micellaire pourrait être un ensemble de bâtonnets capables de se connecter les uns aux autres par leurs extrémités. La longueur du bâtonnet est reliée à la longueur de persistance des chaînes micellaires, son diamètre est le diamètre de la micelle. On fixe une énergie de liaison entre extrémités et une énergie de rotation entre bâtonnets. L'idée est de permettre les appariements, les cassures, et les rotations de chaînes.

Ensuite le fluide est traité selon l'algorithme MPCD, mais en tenant compte des micelles comme d'objets mécaniques. Les particules du fluide ont des collisions avec les bâtonnets, leur transmettent de la quantité de mouvement et donc les déplacent, les tournent, les séparent, *etc.* En retour les bâtonnets modifient les trajectoires des particules et donc l'écoulement du fluide effectif. On pourrait donc suivre les propriétés microscopiques du solvant, des micelles, et, en moyennant, les propriétés du fluide global.

## Conclusion

---

Nous avons fait une description subjective de nos travaux concernant les modèles minimaux appliqués aux mouvements collectifs d'animaux et aux déserts de barchanes. Dans chacun de ces sujets, il n'y a aucun phénomène critique. La démarche de minimalité est instructive puisqu'elle permet de comprendre le rôle des différents ingrédients des modèles. Elle apporte une meilleure connaissance du système étudié, ou les bancs de poissons, ou les barchanes. Mais elle apporte aussi une meilleure compréhension de la physique en générale.

Le rôle des analogies a été porté loin depuis les années 1990 jusqu'à maintenant. Elles ont été fructueuses dans l'étude des systèmes hors d'équilibre. Mais nous avons montré comment elles ont débouché sur des erreurs de compréhension dans l'étude du modèle de Vicsek. Le modèle de référence était le modèle de Heisenberg, pourtant la phase obtenue est plus similaire à un smectique qu'à un ferromagnétique. La polarisation, ou l'aimantation était le paramètre d'ordre choisi, alors que la quantité de mouvement est l'observable qui donne le plus d'information.

Connaissant les chausse-trappes que produisent les analogies, nous les avons pourtant envisagées pour enrichir notre étude des déserts de dunes. Ce n'est peut-être qu'une impasse de plus qui mérite d'être explorée, même si ce n'est que pour comprendre nos erreurs.





Articles importants



*Annexe – A*

---

# Mouvements collectifs

---

# Onset of collective and cohesive motion

Guillaume Grégoire and Hugues Chaté

CEA – Service de Physique de l’État Condensé, CEN Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France and  
Pôle Matière et Systèmes Complexes CNRS FRE 2348, Université Paris VII, Paris, France.

(Dated: January 12, 2004)

We study the onset of collective motion, with and without cohesion, of groups of noisy self-propelled particles interacting locally. We find that this phase transition, in two space dimensions, is always discontinuous, including for the minimal model of Vicsek et al. [Phys. Rev. Lett. **75**,1226 (1995)] for which a non-trivial critical point was previously advocated. We also show that cohesion is always lost near onset, as a result of the interplay of density, velocity, and shape fluctuations.

PACS numbers: 64.60.Cn,05.70.Ln,82.20.-w,89.75.Da

Collective motion can be observed at almost every scale in nature, from the familiar human crowds[1], bird flocks and fish schools [2], to unicellular organisms like amoebae and bacteria [3], individual cells [4], and even at microscopic level in the dynamics of actin and tubulin filaments and molecular motors [5, 6]. Whereas biologists tend to build detailed representations of a particular case, the ubiquity of the phenomenon suggests underlying universal features and thus gives weight to the bottom-up modeling approach usually favored by physicists [7].

In this respect, the simple model introduced by Vicsek and collaborators [8] stands out because of its minimal character and the a priori least-favorable conditions in which it is defined. In the Vicsek model (VM), identical pointwise particles move at constant velocity and interact locally by trying to align their direction with that of neighbors. Remarkably, even in the presence of noise and in the absence of leaders and global forces, orientational long-range order arises, i.e. collective motion emerges, if the density of particles is high enough or, equivalently, if the noise is weak enough. The existence of the ordered phase was later “proved” by a renormalisation-group approach based on a phenomenological mesoscopic equation [9]. More recently, this work was extended to the case where the ambient fluid is taken into full account, yielding novel mesoscopic equations for suspensions of self-propelled particles [10].

The nature of the non-equilibrium phase transition to collective motion, however, is not well established. Vicsek et al. concluded from numerical simulations in two and three dimensions that it is continuous (“second-order”) and characterized by a set of critical indices, but these results remain somewhat crude [11], even though the undeniably minimal character of the VM makes it a good candidate for representing a universality class.

Moreover, from a modeling point of view, an often desirable ingredient missing in the VM is *cohesion*: when put together in an infinite space, particles do not stay together and fly apart. In other words, no collective motion is possible in the zero-density limit of the VM. Recently, we have shown how one can ensure cohesion in simple models derived from the VM without resorting to leader

particles or long-range or global forces [12].

In this Letter, we study the onset of collective motion with and without cohesion in this very general setting, trying to assess the universality of the results of Vicsek et al. In both cases, we find that the onset of collective motion in the VM and related models is actually *discontinuous* (“first-order”) and that its apparent continuous character is due to strong finite-size effects. We also show that without cohesion, the transition point is nevertheless accompanied by a non-trivial superdiffusive behavior of particles which, we argue, could be measured experimentally. In the presence of cohesion, our study reveals that the onset of collective motion is the theater of a complex interplay between density, velocity, sound and shape modes, giving rise to fascinating dynamics.

The original VM is defined as follows: identical pointwise particles move synchronously at discrete timesteps  $\Delta t = 1$  by a fixed distance  $v_0$ . In two space dimensions —to which we restrict ourselves in the following— the direction of motion of particle  $j$  is just an angle  $\theta_j$ , calculated from the previous directions of all particles  $k$  within an interaction range  $r_0 = 1 > v_0 \Delta t$ :

$$\theta_j^{t+1} = \arg \left[ \sum_{k \sim j} e^{i\theta_k^t} \right] + \eta \xi_j^t, \quad (1)$$

where  $\xi_j^t$  is a delta-correlated white noise ( $\xi \in [-\pi, \pi]$ ). This introduces a tendency to align with neighboring particles, with two simple limits: in the absence of noise, interacting particles align perfectly, quickly leading to complete orientational order. For maximal noise ( $\eta = 1$ ), particles follow random walks. The transition that necessarily lies in between these two regimes can be characterized by the following instantaneous order parameter:

$$\varphi^t \equiv \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j^t} \right| \quad (2)$$

where  $N$  is the total number of particles.

Varying either the noise strength  $\eta$  or the particle density  $\rho = N/L^2$  in periodic domains of linear size  $L$ , Vicsek et al. found that  $\langle \varphi \rangle$  varies continuously across the

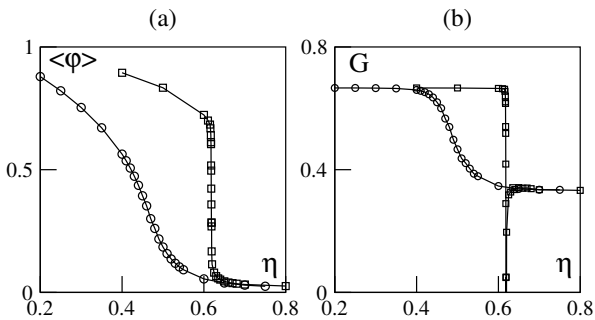


FIG. 1: Onset of collective motion in cohesion-less models (1) (original VM, circles) and (3) (vectorial noise, squares). Variation of order parameter  $\varphi$  (a) and Binder cumulant  $G$  (b) with the noise strength  $\eta$ . ( $v_0 = 0.5$ ,  $L = 32$ ,  $\rho = 2$ , and equivalent statistics for both models.)

transition, suggesting the existence of a critical point [8]. Studying finite-size effects, they estimated a set of scaling exponents. Interested in assessing the universality of these results and possibly improving these estimates, we first introduced simple modifications of the original VM such as changing  $v_0$  or adding a repulsive force between particles to give them a finite extent. Using the finite-size scaling Ansatz appropriate for XY-model like systems, domain sizes, and particle numbers similar to those used in [8], but with much better, well-controlled statistics, we were only able to estimate a roughly coherent set of critical exponents after allowing for rather strong corrections to scaling [13].

For modeling reasons, we also changed the way noise is incorporated in the system. In (1), particles make an error when trying to take the new direction they have perfectly calculated (“angular noise”). One could argue that, rather, errors are made when estimating the interactions, for example because of a noisy environment. This leads to change Eq.(1) into, e.g.:

$$\theta_j^{t+1} = \arg \left[ \sum_{k \sim j} e^{i\theta_k^t} + \eta n_j^t e^{i\xi_j^t} \right] \quad (3)$$

where  $n_j^t$  is the current number of neighbors of particle  $j$ . In this case of “vectorial noise”, the onset of collective motion is *discontinuous*: for large-enough system sizes,  $\langle\varphi\rangle$  jumps abruptly to zero as  $\eta$  is decreased, whereas it varies smoothly in the original VM (Fig. 1a). This is perhaps best seen from the behavior of the so-called Binder cumulant  $G = 1 - \langle\varphi^4\rangle/3\langle\varphi^2\rangle^2$  (Fig. 1b). In the case of vectorial noise,  $G$  falls to negative values near  $\eta_c$ , the sign of a discontinuous transition, together with the phase coexistence expected then.

Going from angular to vectorial noise is indeed a less innocent modification than those mentioned earlier: in model (3), locally-ordered regions are subjected to weaker noise than disordered ones. However, it was unclear to us what precisely would be the mechanism to

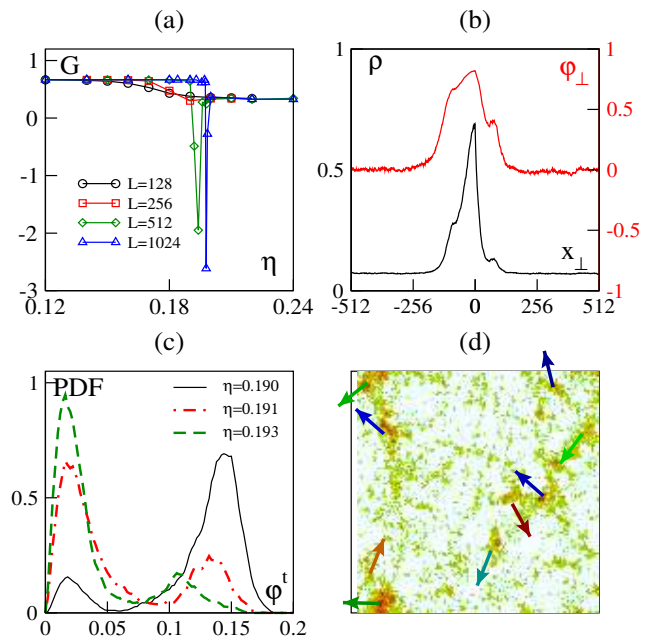


FIG. 2: Discontinuous character of the onset of collective motion in the original VM at  $\rho = \frac{1}{8}$ . (a):  $G$  vs  $\eta$  at various system sizes. (b): transverse density (bottom curve) and order-parameter profile (top curve) in the ordered phase ( $L = 1024$ ,  $\eta = 0.18$ ) (c): histograms (PDF) of  $\varphi^t$  near the transition point,  $t \in [\tau; 500\tau]$ , here the correlation time is  $\tau \simeq 10^5$  [13],  $L = 512$ . (d) snapshot of coarse-grained density field in disordered phase at threshold,  $\rho = 2$ ,  $L = 256$ . The arrows indicate the direction of motion of dense, ordered regions.

change the order of the transition upon introducing this nonlinear term. Considering in addition the strong corrections to scaling found with angular noise, we strived to reach larger system sizes in some of these cases, albeit at the cost of statistical accuracy [13]. The conclusion of these numerical efforts is that the transition is discontinuous in *all* cases, with finite-size effects being somewhat weaker at low densities. As an example, the behavior of  $G$  with increasing system size shown in Fig. 2a for the original VM at  $\rho = \frac{1}{8}$  reveals the characteristic fall to negative values. The distribution function of  $\varphi^t$  is bimodal around threshold, without any intermediate unimodal regime (Fig. 2c). Thus, the continuous transition reported by Vicsek et al. is only apparent.

In the ordered phase, the particles are organized in density waves moving steadily in a disordered “vapour pressure” background of well-defined asymptotic density (Fig. 2b). These solitary waves become metastable to a long-wavelength longitudinal instability below the density threshold  $\eta_c$  (defined to be located at the minimum of  $G$ ), leading to an hysteresis loop. At threshold and below, the disordered phase consists of nucleated ordered patches competing in space and time (Fig. 2d).

At threshold, in the disordered phase, a universal non-trivial algebraic scaling law is nevertheless found: the

superdiffusive behavior of particles already reported by us in [14] is valid in all cases. Trajectories then consist of “flights”, occurring when a particle is caught in a moving ordered patch, separated by normal diffusion in the disordered regions. The mean square displacement of particles  $\langle \delta r^2 \rangle$  varies like  $t^\alpha$  with  $\alpha = 1.65(5)$ .

We now turn to the onset of collective motion in the presence of cohesion. As shown in [12], the cohesion of a population of particles can be maintained without resolving to long-range or global interactions. In the spirit of the VM, and following [15], a two-body short-range interaction force competing with the alignment tendency is introduced, leading to the following model:

$$\theta_j^{t+1} = \arg \left[ \alpha \sum_{k \sim j} e^{i\theta_k^t} + \beta \sum_{k \sim j} f_{jk}^t e^{i\theta_{jk}^t} + \eta n_j^t e^{i\epsilon_j^t} \right] \quad (4)$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  control the strength of alignment and cohesion,  $\theta_{jk}^t$  is the direction of the vector linking particle  $j$  to particle  $k$ . The interaction force between these two particles, of amplitude  $f_{jk}^t$ , is actually repulsive up to an intermediate equilibrium distance  $r_e$ , with a short-range hard-core at  $r_c$  and attractive up to the interaction range  $r_0$ . In the following, as in [12], we used:

$$f_{jk} = \begin{cases} -\infty & \text{if } r_{jk} < r_c, \\ \frac{1}{4} \frac{r_{jk} - r_e}{r_a - r_c} & \text{if } r_c < r_{jk} < r_a, \\ 1 & \text{if } r_a < r_{jk} < r_0. \end{cases} \quad (5)$$

where  $r_{jk}$  is the distance between  $j$  and  $k$ , with  $r_c = 0.2$ ,  $r_e = 0.5$ , and  $r_a = 0.8$ . Note that vectorial noise was chosen in (4), in the hope of reaching asymptotic properties more easily.

The above model has three main parameters,  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\eta$ , only two of which are independent. The phase diagram in the  $(\alpha, \beta)$  plane (with  $\eta = 1$  fixed arbitrarily) was presented in [12], where, moreover, only neighbors in the Voronoi sense are considered in the sums of (4)). For large-enough  $\beta$ , cohesion is maintained, even in the zero-density limit. This “gas/liquid” transition is followed, at larger  $\beta$  values, by the onset of positional (quasi-) order, i.e. a “liquid/solid” transition. For large  $\alpha$ , these liquid or solid cohesive groups move, whereas they remain static (up to finite-size fluctuations) for small  $\alpha$ .

In the “liquid case” (intermediate  $\beta$  values), the onset of motion is accompanied by a loss of cohesion: while small groups set in motion smoothly without breaking up (Fig. 3a, dashed lines), larger groups gradually subdivide into several parts of roughly equivalent size linked by filamentary structures, in contrast with their more compact shapes before and after onset (Fig. 4). The filaments themselves are quite static (Fig. 4d) but are displaced by the subgroups which move coherently so that they eventually break up, as indicated by the dip in the normalized largest connected cluster size  $n/N$  in Fig. 3a. Increasing  $\alpha$ , large groups follow the same precursor of the transition as smaller groups, but when their fragmentation

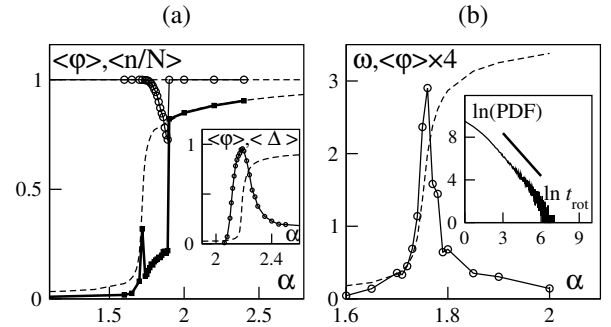


FIG. 3: Onset of motion of cohesive groups in model (4) with  $\eta = 1$ ,  $v_0 = 0.05$ . (a)  $\langle \varphi \rangle$  and  $n/N$  (normalized size of largest connected cluster) vs  $\alpha$  ( $\rho = \frac{1}{16}$ ,  $\beta = 20$  (liquid phase), dashed lines:  $N = 4096$ ; solid lines:  $N = 16384$ ). Inset: solid group ( $\beta = 84$ ) of  $N = 4096$  particles; dashed line:  $\langle \varphi \rangle$ ; solid line: relative diffusion of initially neighboring particles  $\Delta \equiv \langle \frac{1}{n_j} \sum_{k \sim j} (1 - r_{jk}^2(t)/r_{jk}^2(t+T)) \rangle_{j,t}$  where  $T \approx 20N$  ( $\Delta \simeq 1$  in the liquid phase, while  $\Delta \simeq 0$  in the solid phase, see [12]). (b) variation with  $\alpha$  of the maximal absolute rotation angle  $|\omega|$  averaged over 100 samples of 1000 vortices ( $N = 2048$ ,  $\rho = \frac{1}{32}$ ,  $\beta = 30$  (liquid phase)). Dashed line:  $\langle \varphi \rangle$  during the same runs. Inset: distribution of rotation times at the transition with decay exponent  $\sim 1.3$ .

occurs the order parameter falls back, leaving an intermediate peak (around  $\alpha = 1.7$  in Fig. 3a). Increasing  $\alpha$  further,  $\langle \varphi \rangle$  rises again and finally jumps to  $\langle \varphi \rangle = 1$  when full cohesion is recovered (for  $\alpha = 1.88$  in Fig. 3a). This discontinuous jump is the true location of the transition: For an infinite group, the onset of motion must occur abruptly near this value, as the precursory features described above disappear because the population divides into infinitely-many subgroups whose influences average themselves out. Meanwhile, cohesion is only lost *at* the transition point in this asymptotic picture.

The breakup of large cohesive groups around threshold is probably closely related to what happens in the case without cohesion: the subgroups connected by filaments may correspond to the ordered patches seen in the disordered phase near threshold in Fig. 2d. The breakup itself can be seen as resulting from the maximal effect of acoustic modes on the shape of the group [13]. Also affecting the shape dynamics are rotational modes: the subgroups seen in Fig. 4a not only move but they also rotate slowly [16]. Rotation is not steady, but intermittent. We recorded the rotation times and their corresponding angles. Extremal statistics analysis reveal that the tendency to rotate is maximal at the onset of motion (Fig. 3b). Moreover, at threshold, the distribution of rotation times is algebraic with a decay exponent such that it has no finite mean (inset of Fig. 3b).

The onset of motion of the “solid” groups (large  $\beta$  values) is accompanied by a loss of positional order: these crystals melt near the transition (inset of Fig. 3a). Given the above results in the liquid case, one can expect very

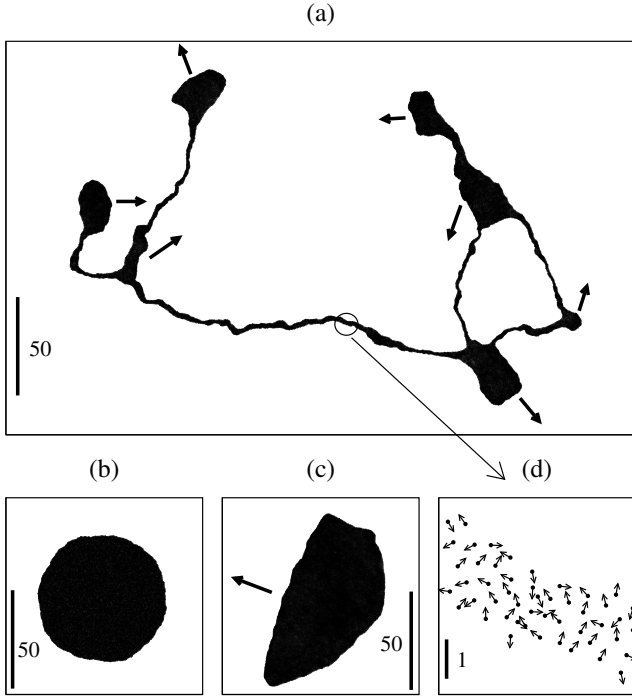


FIG. 4: Typical shape of a liquid cohesive group of 16384 particles (model (4),  $\rho = \frac{1}{16}$ ,  $\beta = 20$  arrows indicate direction of motion). (a): at onset before loss of cohesion,  $\alpha = 1.78$ . (b): static phase, round shape,  $\alpha = 0.5$ . (c): in moving phase, typical triangular form (see [12]),  $\alpha = 2.5$ . (d): close-up of a filament: no local order is apparent.

large solid groups to melt and then subdivide and lose cohesion in the transition region, making the onset of motion asymptotically discontinuous.

To summarize, the onset of collective motion in the VM as well as in related models with and without cohesion is always discontinuous, and the critical behavior reported in [8] is only apparent and due to (strong) finite-size effects. Without cohesion, the ordered phase consists in density waves propagating steadily in a disordered background. With a short-range repulsion/attraction interaction, the cohesion ensured both in the disordered and ordered phases is broken at the onset of motion under the competing influence of sound, density, and shape modes. The resulting mesoscopic subgroups are linked by filaments which, however, we believe to be probably non-universal, model-dependent structures.

At the theoretical level, ongoing work is directed towards the understanding of the complex interplay between shape (surface tension) and acoustic modes, and of the stability properties of the density waves. At the experimental level, it remains difficult to study quantitatively bird flocks and fish schools, and moreover we have no specific prediction as to the onset of motion of these cohesive groups [17]. Without cohesion, however, the universal superdiffusive behavior observed in the disordered phase near threshold could be observed experi-

mentally. As already suggested in [14], bacteria such as *E. Coli* might be good self-propelled particles. Human melanocytes also look promising in this respect as shown remarkably by the group of Gruler [4]. Finally, “motility assays” consisting of grafted molecular motors such as kinesin (resp. myosin) moving filaments made of tubulin (resp. actin) might provide the simplest setting in which to investigate superdiffusion at onset, given the available observation techniques [5, 6].

- 
- [1] See, e.g.: D. Helbing, I. Farkas, and T. Vicsek, *Nature* **407**, 487 (2000); *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1240 (2000).
  - [2] J.K. Parrish and W.M. Hamner (Eds.), *Three dimensional animals groups*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997), and references therein.
  - [3] J.T. Bonner, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **95**, 9355 (1998); M.T. Laub and W.F. Loomis, *Mol. Bio. of the Cell* **9**, 3521 (1998).
  - [4] R. Kemkemer *et al.*, *Eur. Phys. J. E* **3**, 101 (2000).
  - [5] F. Nédélec, Ph.D. thesis, Université Paris 11, 1998; F. Nédélec, T. Surrey, A.C. Maggs, and S. Leibler, *Nature* **389**, 305 (1997).
  - [6] H. Yokota, private communication; see also: Y. Harada, A. Noguchi, A. Kishino, and T. Yanagida, *Nature* **326**, 805 (1987); Y. Toyoshima *et al.*, *Nature* **328**, 536 (1987); S.J. Kron and J.A. Spudich, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **83**, 6272 (1986).
  - [7] N. Shimoyama *et al.*, *Phys. Rev. Lett* **76**, 3870 (1996); G. Flierl, D. Grünbaum, S.A. Levin, and D. Olson, *J. Theor. Biol.* **196**, 397 (1999); D. Chao and S. A. Levin, *Fields Inst. Comm.* **21**, 81 (1999); Mikhailov A. S. and Zanette D. H., *Phys. Rev. E* **60**, 4571 (1999); H. Levine, W.-J. Rappel and I Cohen, *Phys. Rev. E* **63**, 017101 (2001); F. Schweitzer, W. Ebeling, B. Tilch, *Phys. Rev. E* **64**, 021110 (2001); I. Couzin *et al.*, *J. theor. Biol* **218**, 1 (2002).
  - [8] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen and O. Shochet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1226 (1995); A. Czirók, H. E. Stanley, T. Vicsek, *J. Phys. A* **30**, 1375 (1997).
  - [9] J. Toner and Y. Tu, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4326 (1995); *Phys. Rev. E* **58**, 4828 (1998); J. Toner, Y. Tu and Ulm, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4819 (1998).
  - [10] S. Ramaswamy and R.A. Simha, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 058101 (2002).
  - [11] Notably, the hyperscaling relation  $2\beta + \gamma = d\nu$  is far from being satisfied.
  - [12] G. Grégoire, H. Chaté, and Y. Tu, *Physica D* **181**, 157 (2003).
  - [13] A full-length account of our results is under preparation.
  - [14] X.-L. Wu and A. Libchaber, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3017 (2000); *Phys. Rev. Lett.* **86**, 557 (2001); G. Grégoire, H. Chaté, and Y. Tu, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 556 (2001); *Phys. Rev. E* **64**, 011902 (2001).
  - [15] C. W. Reynolds, *Comput. Graph.* **21**, 25 (1987).
  - [16] Mpeg movies are available on request to gregoire@drecam.saclay.cea.fr.
  - [17] In the other hand, interesting predictions were made by Tu and Toner [9] for the *ordered* phase.

## Collective motion of self-propelled particles interacting without cohesion

Hugues Chaté and Francesco Ginelli

CEA—Service de Physique de l'État Condensé, Centre d'Etudes de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France

Guillaume Grégoire

Matière et Systèmes Complexes, CNRS UMR 7057, Université Paris-Diderot, Paris, France

Franck Raynaud

CEA—Service de Physique de l'État Condensé, Centre d'Etudes de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France  
and Matière et Systèmes Complexes, CNRS UMR 7057, Université Paris-Diderot, Paris, France

(Received 12 December 2007; published 18 April 2008)

We present a comprehensive study of Vicsek-style self-propelled particle models in two and three space dimensions. The onset of collective motion in such stochastic models with only local alignment interactions is studied in detail and shown to be discontinuous (first-order-like). The properties of the ordered, collectively moving phase are investigated. In a large domain of parameter space including the transition region, well-defined high-density and high-order propagating solitary structures are shown to dominate the dynamics. Far enough from the transition region, on the other hand, these objects are not present. A statistically homogeneous ordered phase is then observed, which is characterized by anomalously strong density fluctuations, superdiffusion, and strong intermittency.

DOI: [10.1103/PhysRevE.77.046113](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.046113)

PACS number(s): 05.65.+b, 64.70.qj, 87.18.Gh

### I. INTRODUCTION

Collective motion phenomena in nature have attracted the interest of scientists and other authors for quite a long time [1]. The question of the advantage of living and moving in groups, for instance, is a favorite one among evolutionary biologists [2]. In a different perspective, physicists are mostly concerned with the mechanisms at the origin of collective motion, especially when it manifests itself as a true, nontrivial, emerging phenomenon, i.e., in the absence of some obvious cause like the existence of a leader followed by the group, a strong geometrical constraint forcing the displacement, or some external field or gradient felt by the whole population. Moreover, the ubiquity of the phenomenon at all scales, from intracellular molecular cooperative motion to the displacement in groups of large animals, raises, for physicists at least, the question of the existence of some universal features possibly shared among many different situations.

One way of approaching these problems is to construct and study minimal models of collective motion: if universal properties of collective motion do exist, then they should appear clearly within such models and thus could be efficiently determined there, before being tested for in more elaborate models and real-world experiments or observations. Such is the underlying motivation of recent studies of collective motion by a string of physicists [3–8]. Among them, the group of Vicsek has put forward what is probably the simplest possible model exhibiting collective motion in a nontrivial manner.

In the Vicsek model [9], point particles move off lattice at constant speed  $v_0$ , adjusting their direction of motion to that of the average velocity of their neighbors, up to some noise term accounting for external or internal perturbations (see below for a precise definition). For a finite density of particles in a finite box, perfect alignment is reached easily in

the absence of noise: in this fluctuationless collective motion, the macroscopic velocity equals the microscopic one. On the other hand, for strong noise particles are essentially noninteracting random walkers and their macroscopic velocity is zero, up to statistical fluctuations.

Vicsek *et al.* showed that the onset of collective motion occurs at a finite noise level. In other words, there exists, in the asymptotic limit, a fluctuating phase where the macroscopic velocity of the total population is, on average, finite. Working mostly in two space dimensions, they concluded, on the basis of numerical [5,9] simulations, that the onset of this ordered motion is well described as a novel nonequilibrium continuous phase transition leading to long-range order, at odds with equilibrium where the continuous  $XY$  symmetry cannot be spontaneously broken in two space dimensions and below [10]. This brought support to the idea of universal properties of collective motion, since the scaling exponents and functions associated with such phase transitions are expected to bear some degree of universality, even out of equilibrium.

The above results caused a well-deserved stir and prompted a large number of studies at various levels [3,4,6–8,11–37]. In particular, two of us showed that the onset of collective motion is in fact discontinuous [38], and that the original conclusion of Vicsek *et al.* was based on numerical results obtained at too small sizes [5,9]. More recently, the discontinuous character of the transition was challenged in two publications, one by Vicsek and co-workers [39] and another by Aldana *et al.* [40].

Here, after a definition of the models involved (Sec. II), we come back, in Sec. III, to this central issue and present a rather comprehensive study of the onset of collective motion in Vicsek-style models. In Sec. IV, we describe the ordered, collective motion phase. Section V is devoted to a general discussion of our results together with some perspectives. Most of the numerical results shown were obtained in two



space dimensions, but we also present three-dimensional results. Wherever no explicit mention is made, the default space dimension is 2. Similarly, the default boundary conditions are periodic in a square or cubic domain.

## II. THE MODELS

### A. Vicsek model: Angular noise

Let us first recall the dynamical rule defining the Vicsek model [9]. Point particles labeled by an integer index  $i$  move off lattice in a space of dimension  $d$  with a velocity  $\vec{v}_i$  of fixed modulus  $v_0 = |\vec{v}_i|$ . The *direction* of motion of particle  $i$  depends on the average velocity of all particles (including  $i$ ) in the spherical neighborhood  $\mathcal{S}_i$  of radius  $r_0$  centered on  $i$ . The discrete-time dynamics is synchronous: the direction of motion and the positions of all particles are updated at each time step  $\Delta t$ , in a driven, overdamped manner,

$$\vec{v}_i(t + \Delta t) = v_0(\mathcal{R}_\eta \circ \vartheta) \left( \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \vec{v}_j(t) \right), \quad (1)$$

where  $\vartheta$  is a normalization operator [ $\vartheta(\vec{w}) = \vec{w}/|\vec{w}|$ ] and  $\mathcal{R}_\eta$  performs a random rotation uniformly distributed around the argument vector: in  $d=2$ ,  $\mathcal{R}_\eta \vec{v}$  is uniformly distributed around  $\vec{v}$  inside an arc of amplitude  $2\pi\eta$ ; in  $d=3$ , it lies in the solid angle subtended by a spherical cap of amplitude  $4\pi\eta$  and centered around  $\vec{v}$ . The particle positions  $\vec{r}_i$  are then simply updated by streaming along the chosen direction as in

$$\vec{r}_i(t + \Delta t) = \vec{r}_i(t) + \Delta t \vec{v}_i(t + \Delta t). \quad (2)$$

Note that the original updating scheme proposed by Vicsek *et al.* in [9] defined the speed as a backward difference, although we are using a forward difference. The simpler updating above, now adopted in most studies of Vicsek-style models, is not expected to yield different results in the asymptotic limit of infinite size and time.

### B. A different noise term: Vectorial noise

The ‘‘angular’’ noise term in the model defined above can be thought of as arising from the errors committed when particles try to follow the locally averaged direction of motion. One could argue, on the other hand, that most of the randomness stems from the evaluation of each interaction between particle  $i$  and one of its neighbors, because, e.g., of perception errors or turbulent fluctuations in the medium. This suggests the replacement of Eq. (1) by

$$\vec{v}_i(t + \Delta t) = v_0 \vartheta \left( \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \vec{v}_j(t) + \eta \mathcal{N}_i \vec{\xi} \right), \quad (3)$$

where  $\vec{\xi}$  is a random unit vector and  $\mathcal{N}_i$  is the number of particles in  $\mathcal{S}_i$ . It is easy to realize that this ‘‘vectorial’’ noise acts differently on the system. While the intensity of angular noise is independent of the degree of local alignment, the influence of the vectorial noise decreases with increasing local order.

### C. Repulsive force

In the original formulation of the Vicsek model as well as in the two variants defined above, the only interaction is

*alignment*. In a separate work [22], we introduced a two-body repulsion or attraction force, to account for the possibility of maintaining the cohesion of a flock in an infinite space (something the Vicsek model does not allow). Here, we only study models without cohesion. Nevertheless, we have considered, in the following, the case of a pairwise repulsion force, to estimate in particular the possible influence of the absence of volume exclusion effects in the basic model, which leaves the local density actually unbounded. We thus introduce the short ranged, purely repulsive interaction exerted by particle  $j$  on particle  $i$ :

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{e}_{ij} \times [1 + \exp(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|/r_c - 2)]^{-1}, \quad (4)$$

where  $\vec{e}_{ij}$  is the unit vector pointing from particle  $i$  to  $j$  and  $r_c < r_0$  is the typical repulsion range. Equations (1) and (3) are then respectively generalized to

$$\vec{v}_i(t + \Delta t) = v_0(\mathcal{R}_\eta \circ \vartheta) \left( \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \vec{v}_j(t) + \beta \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \vec{f}_{ij} \right) \quad (5)$$

and

$$\vec{v}_i(t + \Delta t) = v_0 \vartheta \left( \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \vec{v}_j(t) + \beta \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \vec{f}_{ij} + \eta \mathcal{N}_i \vec{\xi} \right), \quad (6)$$

where  $\beta$  measures the relative strength of repulsion with respect to alignment and noise strength.

### D. Control and order parameters

The natural order parameter for our polar particles is simply the macroscopic *mean velocity*, conveniently normalized by the microscopic velocity  $v_0$ ,

$$\vec{\varphi}(t) = \frac{1}{v_0} \langle \vec{v}_i(t) \rangle_i, \quad (7)$$

where  $\langle \cdot \rangle_i$  stands for the average over the whole population. Here, we mostly consider its modulus  $\varphi(t) = |\vec{\varphi}(t)|$ , the *scalar order parameter*.

In the following, we set, without loss of generality,  $\Delta t = 1$  and  $r_0 = 1$ , and express all time and length scales in terms of these units. Moreover, the repulsive force will be studied by fixing  $r_c = 0.127$  and  $\beta = 2.5$ .

This leaves us with two main parameters for these models: the noise amplitude  $\eta$  and the global density of particles  $\rho$ . Recently, the microscopic velocity  $v_0$  has been argued to play a major role as well [39]. All three parameters ( $\eta$ ,  $\rho$ , and  $v_0$ ) are considered below.

## III. ORDER-DISORDER TRANSITION AT THE ONSET OF COLLECTIVE MOTION

As mentioned above, the original Vicsek model attracted a lot of attention mostly because of the conclusions drawn from the early numerical studies [5,9]: the onset of collective motion was found to be a novel continuous phase transition spontaneously breaking rotational symmetry. However, it was later shown in [38] that beyond the typical sizes considered originally the *discontinuous* nature of the transition emerges, irrespective of the form of the noise term. Recently,

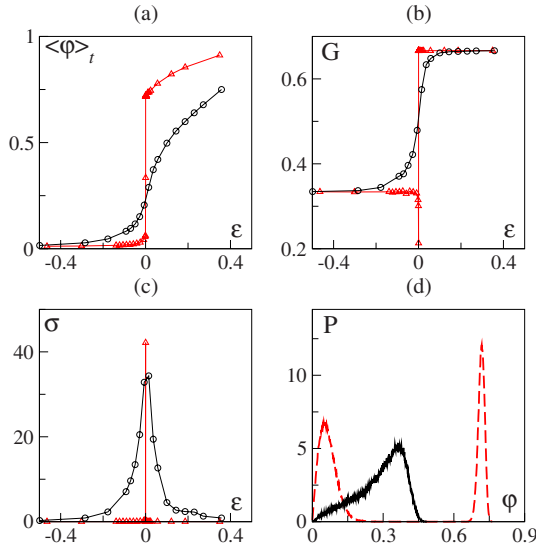


FIG. 1. (Color online) Typical behavior across the onset of collective motion for moderate-sized models ( $\rho=2$ ,  $v_0=0.5$ ,  $L=64$ ) with angular (black circles) and vectorial noise (red triangles). The reduced noise amplitude  $\varepsilon=1-\eta/\eta_t$  is shown on the abscissa (transition points estimated at  $\eta_t=0.6144(2)$ —vectorial noise—and  $\eta_t=0.478(5)$ —angular noise). (a) Time-averaged order parameter  $\langle \varphi(t) \rangle_t$ . (b) Binder cumulant  $G$ . (c) Variance  $\sigma$  of  $\varphi$ . (d) Order parameter distribution function  $P$  at the transition point. Bimodal distribution for vectorial noise dynamics (red dashed line); unimodal shape for angular noise (black solid line). Time averages have been computed over  $3 \times 10^5$  time steps.

the discontinuous character of the transition was argued to disappear in the limit of small  $v_0$  [39]. We now address the problem of the nature of the transition in full detail.

Even though there is no rigorous theory for finite-size scaling (FSS) for out-of-equilibrium phase transitions, there exists now ample evidence that one can safely rely on the knowledge gained in equilibrium systems [41–43]. The FSS approach [44,45] involves the numerical estimation of various moments of the order parameter distribution as the linear system size  $L$  is systematically varied. Of particular interest are the variance

$$\sigma(\eta, L) = L^d (\langle \varphi^2 \rangle_t - \langle \varphi \rangle_t^2)$$

and the so-called Binder cumulant

$$G(\eta, L) = 1 - \frac{\langle \varphi^4 \rangle_t}{3 \langle \varphi^2 \rangle_t^2}, \quad (8)$$

where  $\langle \cdot \rangle_t$  indicates time average. The Binder cumulant is especially useful in the case of continuous phase transitions, because it is one of the simplest ratios of moments which takes a universal value at the critical point  $\eta_t$ , where all the curves  $G(\eta, L)$ , obtained at different system sizes  $L$ , cross each other. At a first-order transition point, on the other hand, the Binder cumulant exhibits a sharp drop toward negative values [46]. This minimum is due to the simultaneous contributions of the two phases coexisting at threshold. Moreover, it is easy to compute that  $G(\eta, L) \approx 2/3$  in the ordered phase, while for a disordered state with a continuous rota-

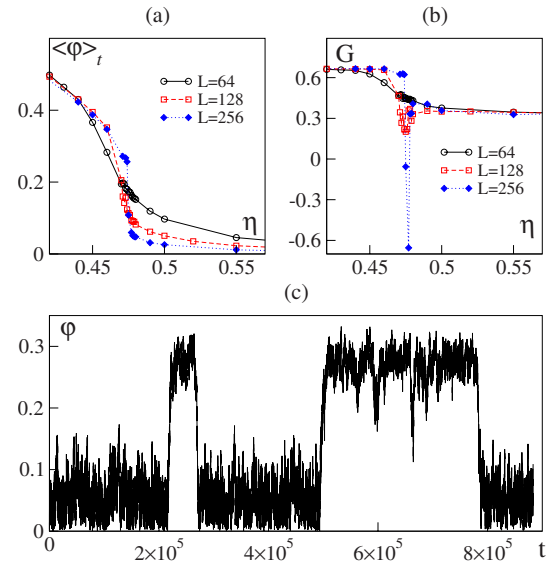


FIG. 2. (Color online) FSS analysis of angular noise dynamics ( $\rho=2$ ,  $v_0=0.5$ , time averages computed over  $2 \times 10^7$  time steps). Time-averaged order parameter (a) and Binder cumulant (b) as a function of noise for various system sizes  $L$ . (c) Piece of an order parameter time series close to the transition point ( $L=256$ ,  $\eta=0.476$ ).

tional symmetry one has  $G(\eta, L) \approx 1/3$  in  $d=2$  and  $G(\eta, L) \approx 4/9$  in  $d=3$ .

### A. Overture

As an overture, we analyze systems of moderate size in two dimensions ( $N \approx 10^4$  particles) at the density  $\rho=2$ , typical of the initial studies by Vicsek *et al.*, but with the slightly modified update rule (2) and for both angular and vectorial noise. The microscopic velocity is set to  $v_0=0.5$ .

For angular noise, the transition looks indeed continuous, as found by Vicsek *et al.* On the other hand, the time-averaged scalar order parameter  $\langle \varphi \rangle_t$  displays a sharp drop for vectorial noise, and the Binder cumulant exhibits a minimum at the transition point, indicating a discontinuous phase transition [Figs. 1(a) and 1(b)]. Simultaneously, the variance is almost  $\delta$  peaked. The difference between the two cases is also recorded in the probability distribution function (PDF) of  $\varphi$  which is bimodal (phase coexistence) in the vectorial noise case [Figs. 1(c) and 1(d)].

The qualitative difference observed upon changing the way noise is implemented in the dynamics is, however, only a finite-size effect. As shown in [38], the transition in the angular noise case reveals its asymptotic discontinuous character provided large enough system sizes  $L$  are considered [Figs. 2(a) and 2(b)]. Remaining for now at a qualitative level, we show in Fig. 2(c) a typical time series of the order parameter for the angular noise case in a large system in the transition region. The sudden jumps from the disordered phase to the ordered one and vice versa are evidence for metastability and phase coexistence.

Note that the system size beyond which the transition reveals its discontinuous character for the angular noise case at

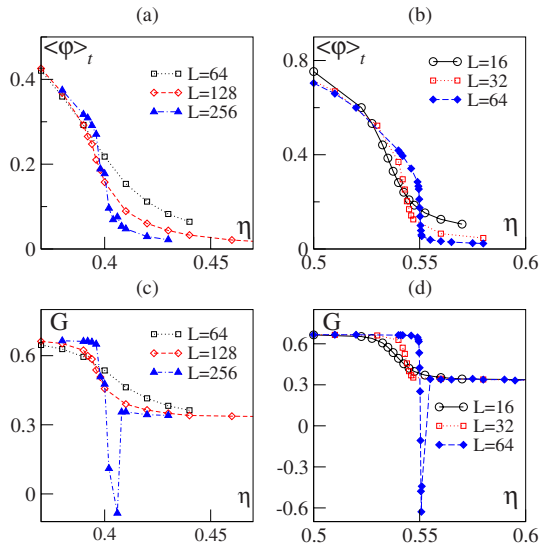


FIG. 3. (Color online) Transition to collective motion with short-range repulsive interactions. Left panels: angular noise. Right panels: vectorial noise. (a),(b) Order parameter vs noise amplitude at different system sizes. (c),(d) Binder cumulant  $G$  as a function of noise amplitude. ( $\rho=2$ ,  $v_0=0.3$ , time averages carried over  $10^7$  time steps.)

density  $\rho=2$  and velocity  $v_0=0.5$ —the conditions of the original papers by Vicsek *et al.*—is of the order of  $L=128$ , the maximum size then considered. It is clear also from Fig. 1 that the discontinuous nature of the transition appears earlier, when the system size is increased, for vectorial noise than for angular noise. Thus, finite-size effects are stronger for angular noise. The same is true when one is in the presence of repulsive interactions (Fig. 3). Finally, the same scenario holds in three space dimensions, with a *discontinuous* phase transition separating the ordered from the disordered phases for both angular and vectorial noise (Fig. 4).

Before proceeding to a study of the complete phase diagram, we detail now how a comprehensive FSS study can be performed on a particular case.

### B. Complete FSS analysis

For historical reasons, the following study has been performed on the model with vectorial noise and repulsive force [Eq. (6)]. It has not been repeated in the simpler case of the “pure” Vicsek model because its already high numerical cost would have been prohibitive due to the strong finite-size effects.

As a first step, we estimated the correlation time  $\tau(L)$ , whose knowledge is needed to control the quality of time averaging: the duration  $T$  of numerical simulations has been taken much larger than  $\tau(L)$  ( $T=100\tau$  in the largest systems, but typically  $10\,000\tau$  for smaller sizes). Moreover,  $\tau$  is also useful to correctly estimate the statistical errors on the various moments (as  $\langle \phi \rangle_t$ ,  $\sigma$ , and  $G$ ) of the PDF of the order parameter, for which we used the jackknife procedure [47]. The correlation time was estimated near the transition (where it is expected to be largest) as function of system size  $L$

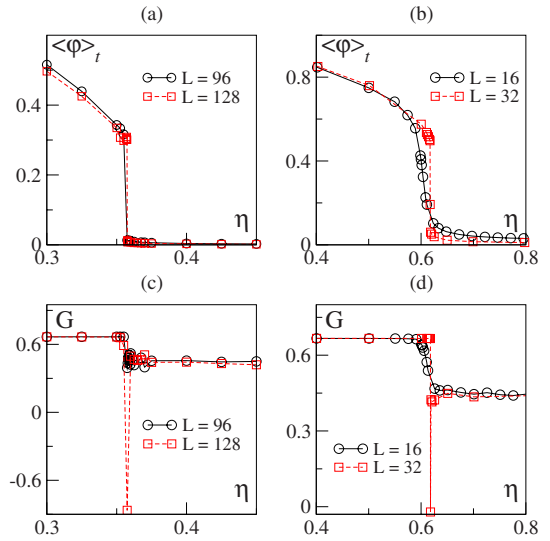


FIG. 4. (Color online) Transition to collective motion in three spatial dimensions. Left panels: angular noise. Right panels: vectorial noise. (a),(b) Time-averaged order parameter vs noise amplitude at different system sizes. (c),(d) Binder cumulant  $G$  as a function of noise amplitude. ( $\rho=0.5$ ,  $v_0=0.5$ , time averages carried over  $10^5$  time steps.)

measuring the exponential decay rate of the correlation function [Fig. 5(a)]

$$C(t) = \langle \phi(t_0)\phi(t_0+t) \rangle_t - \langle \phi(t_0) \rangle_t^2 \sim \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (9)$$

We found  $\tau$  to vary roughly linearly with  $L$  [see Fig. 5(b)]. It is interesting to observe that, at equilibrium, one would expect  $\tau$  to scale as [48]

$$\tau = L^{d/2} \exp(\kappa L^{d-1}),$$

where  $\kappa$  is the surface tension of the metastable state. Therefore, our result implies a very small or vanishing surface tension  $\kappa \ll 1/L$ , a situation reminiscent of observations made in the cohesive case [22], where the surface tension of a cohesive droplet was found to vanish near the onset.

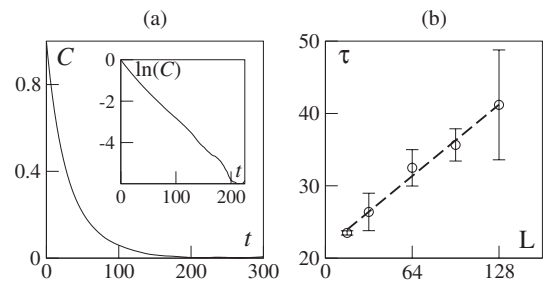


FIG. 5. Correlation time  $\tau$  of the order parameter near the transition point for vectorial noise dynamics with repulsion. System parameters are  $\rho=2$ ,  $v_0=0.5$ , and  $\eta \approx \eta_c$ . (a) Time correlation function  $C(t)$  at  $L=128$ . The lin-log inset shows the exponential decay. (b) Correlation time  $\tau$  as a function of system size  $L$ . The dashed line marks linear growth with  $L$ . Correlation functions were computed on samples of  $\approx 10^6$  realizations for typically  $10^3$  time steps.

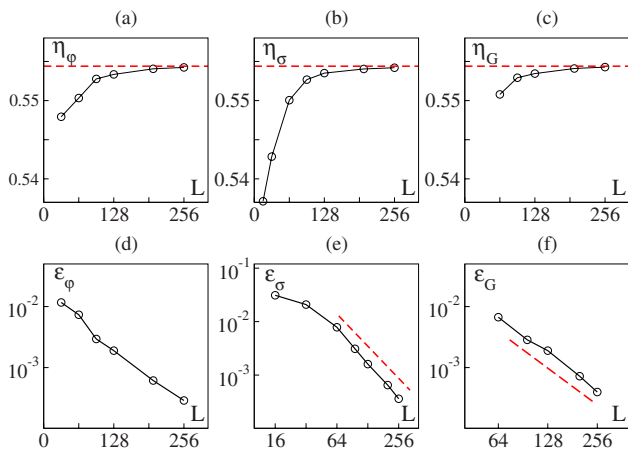


FIG. 6. (Color online) FSS analysis of vectorial dynamics with short-range repulsive force ( $\rho=2$ ,  $v_0=0.3$ ). Convergence of the finite-size transition points measured from different moments of the order parameter FSS to the asymptotic transition point  $\eta_t$  (see Fig. 3). Upper panels: finite-size transition points estimated from (a) time average, (b) variance, and (c) Binder cumulant. The horizontal dashed line marks the estimated asymptotic threshold  $\eta_t = 0.5544(1)$ . Lower panels: scaling of the finite-size reduced noise  $\varepsilon = 1 - \eta/\eta_t$ , transition point. (d) Exponential convergence for the jump location in the time-averaged order parameter. (e) Power-law behavior of the variance peak position. (f) Power-law behavior of the Binder cumulant minimum. The dashed lines in (e) and (f) mark the estimated exponents  $\gamma_\sigma = \gamma_G = 2$ .

Following Borgs and Kotecky [49], the asymptotic coexistence point  $\eta_t$  (i.e., the first-order transition point) can be determined from the asymptotic convergence of various moments of the order parameter PDF. First, the observed discontinuity in  $\langle \varphi(t) \rangle_t$ , located at  $\eta_\varphi(L)$ , is expected to converge exponentially to  $\eta_t$  with  $L$ . Second, the location of the susceptibility peak  $\eta_\sigma(L)$ —which is the same as the peak in  $\sigma$  provided some fluctuation-dissipation relation holds (see the Appendix)—also converges to  $\eta_t$ , albeit algebraically with an exponent  $\gamma_\sigma$ . Third, the location of the minimum of  $G$ ,  $\eta_G(L)$ , is also expected to converge algebraically to  $\eta_t$  with an exponent  $\gamma_G = \gamma_\sigma$ .

Interestingly, the value taken by these exponents actually depends on the number of phases and of the dimension  $d$  of the system: for two-phase coexistence one has  $\gamma_G = \gamma_\sigma = 2d$ , while for more than two phases  $\gamma_G = \gamma_\sigma = d$ . In Fig. 6, we show that our data are in good agreement with all these predictions. The three estimates of  $\eta_t$  are consistent with each other within numerical accuracy. Moreover,  $\eta_\varphi(L)$  is found to converge exponentially to the transitional noise amplitude, while both  $\eta_\sigma(L)$  and  $\eta_G(L)$  show algebraic convergence with an exponent close to 2. This agrees with the fact that, due to the continuous rotational symmetry, the ordered phase is degenerate and amounts to an infinite number of possible phases.

### C. Hysteresis

One of the classical hallmarks of discontinuous phase transitions is the presence, near the transition, of the hysteresis

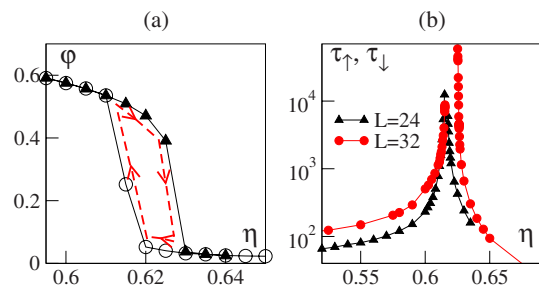


FIG. 7. (Color online) Hysteresis in three spatial dimensions with vectorial noise. (a) Order parameter vs noise strength along the hysteresis loop observed with a ramp rate of  $2 \times 10^{-6}$  per time step ( $\rho=1/2$ ,  $v_0=0.5$ ,  $L=32$ ). Empty circles mark the path along the adiabatic increase of noise amplitude; full triangles for adiabatic decrease. (b) Nucleation times from the disordered phase to the ordered phase ( $\tau_\uparrow$ , left curves) and vice versa ( $\tau_\downarrow$ , right curves) for two system sizes [other parameters as in (a)]. Each point is averaged over 1000 realizations.

phenomenon: on ramping the control parameter at a fixed (slow) rate up and down through the transition point, a hysteresis loop is formed, inside which phase coexistence is manifest [see Fig. 7(a) for the  $d=3$  case with vectorial noise]. The size of such hysteresis loops varies with the ramping rate. An intrinsic way of assessing phase coexistence and hysteresis is to study systematically the nucleation time  $\tau_\uparrow$  needed to jump from the disordered phase to the ordered one, as well as  $\tau_\downarrow$ , the decay time after which the ordered phase falls into the disordered one. Figure 7(b) shows, in three space dimensions, how these nucleation and decay rates vary with  $\eta$  at two different sizes. A sharp divergence is observed, corresponding to the transition point. At a given time value  $\tau$ , one can read, from the distance between the “up” and the “down” curves, the average size of hysteresis loops for ramping rates of the order of  $1/\tau$ .

### D. Phase diagram

The above detailed FSS study would be very tedious to realize when the main parameters  $\eta$ ,  $\rho$ , and  $v_0$  are varied systematically, as well as the nature of the noise and the presence or not of repulsive interactions. From now on, to characterize the discontinuous nature of the transition, we rely mainly on the presence, at large enough system sizes  $L$ , of a minimum in the variation of the Binder cumulant  $G$  with  $\eta$  (all other parameters being fixed). We call  $L^*$  the crossover size marking the emergence of a minimum of  $G(\eta)$ .

We are now in the position to sketch the phase diagram in the  $(\eta, \rho, v_0)$  parameter space. The numerical protocol used is, at given parameter values, to run a large enough system so that the discontinuous character of the transition is seen (i.e.,  $L > L^*$ ). For larger sizes, the location of the transition point typically varies very little, so that, for most practical purposes, locating the (asymptotic) transition point from systems sizes around  $L^*$  is satisfactory.

The results presented below are in agreement with simple mean-field-like arguments in the diluted limit: in the small- $\rho$  regime, one typically expects that the lower the density, the



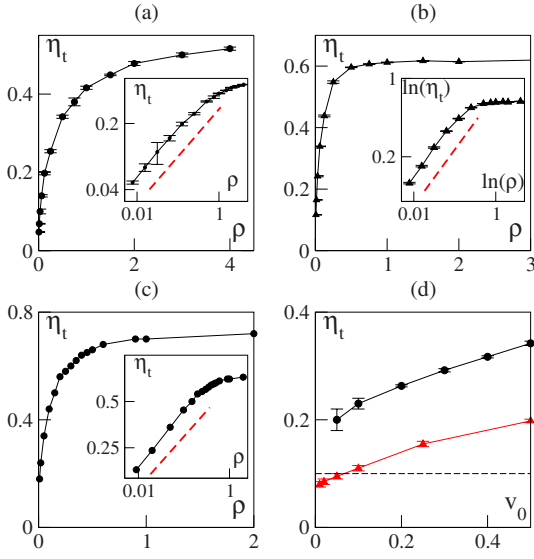


FIG. 8. (Color online) Asymptotic phase diagrams for the transition to collective motion. (a) Two space dimensions: threshold amplitude  $\eta_t$  for angular noise as a function of density  $\rho$  at  $v_0 = 0.5$ . Inset: Log-log plot to compare the low-density behavior with the mean-field predicted behavior  $\eta_t \sim \sqrt{\rho}$  (dashed red line). (b) As in (a), but with vectorial noise dynamics. (c) Noise-density phase diagram in three dimensions for vectorial noise dynamics at fixed velocity  $v_0 = 0.5$ . In the log-log inset the transition line can be compared with the predicted behavior  $\eta_t \sim \rho^{1/3}$  (dashed red line). (d) Two space dimensions: threshold amplitude  $\eta_t$  for angular noise as a function of particle velocity  $v_0$  at fixed density  $\rho = 1/2$  (black circles) and  $1/8$  (red triangles). The horizontal dashed line marks the noise amplitude considered in Ref. [39] (see Sec. III F).

lower the transitional noise amplitude  $\eta_t$ . Indeed, for  $\Delta t v_0$  of the order of or not much smaller than the interaction range  $r_0$  and in the low-density limit  $\rho \ll 1/r_0^d$ , the system can be seen as a dilute gas in which particles interact by short-range ordering forces only. In this regime, the persistence length of an isolated particle (i.e., the distance traveled before its velocity loses correlation with its initial direction of motion) varies as  $v_0/\eta$ . To allow for an ordered state, the noise amplitude should be small enough so that the persistence length remains larger than the average interparticle distance, i.e.,  $1/\rho^{1/d}$ . Thus the transition noise amplitude is expected to behave as

$$\eta_t \sim v_0 \rho^{1/d}. \quad (10)$$

In [5], it was indeed found that  $\eta_t \sim \rho^\alpha$  with  $\alpha \approx \frac{1}{2}$  in two dimensions. Our own data [Figs. 8(a)–8(c)] now confirm Eq. (10) for both the angular and vectorial noise in two and three spatial dimensions, down to very small  $\rho$  values. The data deviate from the square-root behavior as the average interparticle distance becomes of the order of or smaller than the interaction range.

Finally, we also investigated the transition line when  $v_0$  is varied [Fig. 8(d)]. For the vectorial noise case, at fixed density, the threshold noise value  $\eta_t$  is almost constant (data obtained at  $\rho = \frac{1}{2}$ , not shown). For the angular noise, in the small- $v_0$  limit where the above mean-field argument does not

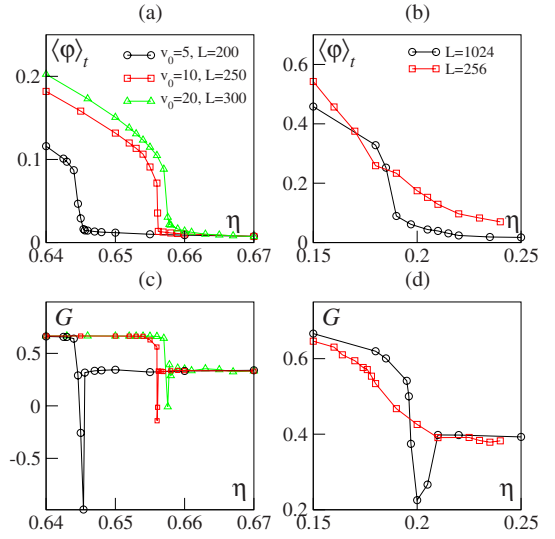


FIG. 9. (Color online) First-order transition for angular noise dynamics at high (left panels) and low (right panels) velocity  $v_0$ . Typical averaging time is  $\approx 10^6$  time steps. (a) Time-averaged order parameter and (c) Binder cumulant at large particle velocity for angular noise in two spatial dimensions at increasing velocities and  $L \geq L^*(\rho=2)$ . (b) Time-averaged order parameter and (d) Binder cumulant for  $v_0 = 0.05$  and two increasing system sizes ( $\rho = 1/2$ ).

apply, we confirm the first-order character of the phase transition down to  $v_0 \approx 0.05$  for both angular and vectorial noise [Figs. 9(b) and 9(d)]. For even smaller values of  $v_0$ , the investigation becomes numerically too costly (see the next subsection). Note that  $\eta_t$  seems to be finite when  $v_0 \rightarrow 0^+$ , a limit corresponding to the XY model on a randomly connected graph. Still, for angular noise, the large-velocity limit is also difficult to study numerically. Again, we observe that the transition is discontinuous as far as we can probe it, i.e.,  $v_0 = 20$  [Figs. 9(a) and 9(b)].

### E. Special limits and strength of finite-size effects

We now discuss particular limits of the models above together with the relative importance of finite-size effects. Recall that these are quantified by the estimated value of the crossover size  $L^*$  beyond which the transition appears discontinuous. All the following results have been obtained for  $d=2$ . Partial results in three dimensions indicate that the same conclusions should hold there. Keep in mind that in all cases reported the transition is discontinuous. We are just interested here in how large a system one should use in order to reach the asymptotic regime.

Figure 10(a) shows that finite-size effects are stronger for angular noise than for vectorial noise for all densities  $\rho$  at which we are able to perform these measurements. Note in particular that, at  $\rho = 2$ , the density originally used by Vicsek *et al.*,  $L^* \sim 128$  for angular noise, while it is very small for vectorial noise, confirming the observation made in Sec. III A.

In the small- $\rho$  limit, the discontinuous character of the transition appears later and later, with  $L^*$  roughly diverging

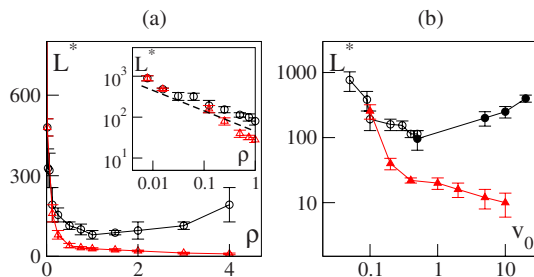


FIG. 10. (Color online) Crossover system size  $L^*$  above which the discontinuous character of the transition appears [as testified by the existence of a minimum in the  $G(\eta)$  curve]. Black circles: angular noise. Red triangles: vectorial noise. (a)  $L^*$  vs  $\rho$  for  $v_0=0.5$ . Inset: the low-density behavior in log-log scales; the dashed line marks a power-law divergence proportional to  $1/\sqrt{\rho}$ . (b)  $L^*$  vs  $v_0$  at fixed density (open symbols,  $\rho=1/2$ ; filled symbols,  $\rho=2.0$ ).

as  $1/\sqrt{\rho}$  [inset of Fig. 10(a)]. Note that this means that in the small- $\rho$  limit one needs approximately the same number of particles to start observing the discontinuity.

The large- $\rho$  limit reveals a difference between angular and vectorial noise: while  $L^*$  remains small for vectorial noise, it seems to diverge for angular noise [Fig. 10(a)], making this case difficult to study numerically.

We also explored the role of the microscopic velocity  $v_0$  in the strength of finite-size effects. Qualitatively, the effects observed are similar to those just reported when the density is varied [Fig. 10(b)]. In the small- $v_0$  limit, we record a strong increase of  $L^*$  as  $v_0 \rightarrow 0$  for both types of noise. In the large-velocity limit,  $L^*$  decreases for vectorial noise, whereas it increases for angular noise.

#### F. Summary and discussion

The summary of the above lengthy study of the order-disorder transition in Vicsek-like models is simple: for any finite density  $\rho$ , any finite velocity  $v_0$ , and both types of noise introduced, the transition is discontinuous. This was observed even in the numerically difficult limits of large or small  $\rho$  or  $v_0$ . These results contradict recent claims made about the angular noise case (original Vicsek model). We now comment on these claims.

Vicsek and co-workers [39] showed that, when the density and the noise intensity are kept fixed, a qualitative change is observed when  $v_0$  is decreased: for not too small  $v_0$  values, in the ordered phase, particles diffuse anisotropically (and the transition is discontinuous), while diffusion becomes isotropic at small  $v_0$ , something interpreted as a sign of a continuous transition in this region. Rather than the convoluted arguments presented there, what happens is in fact rather simple: by decreasing  $v_0$  at fixed  $\rho$  and  $\eta$ , one can in fact cross the transition line, passing from the ordered phase (where particles obviously diffuse anisotropically due to the transverse superdiffusive effects discussed in Sec. IV C) to the disordered phase. Our Fig. 8(d), obtained in the same conditions as in [39] (apart from harmless change of the time-updating rule), shows that if one keeps  $\eta=0.1$  (as in [39]), one crosses the transition line at about  $v_0 \approx 0.1$ , the

value invoked by Vicsek and co-workers to mark a crossover from discontinuous to “continuous” transitions.

In a recent Letter [40], Aldana *et al.* study order-disorder phase transitions in random network models and show that the nature of these transitions may change with the way noise is implemented in the dynamics (they consider the angular and vectorial noises defined here). Arguing that these networks are limiting cases of Vicsek-like models, they claim that the conclusions reached for the networks carry over to the transition to collective motion of the Vicsek-model-like systems. They conclude in particular that in the case of “angular” noise the transition to collective motion is continuous. We agree with the analysis of the network models, but the claim that they are relevant as limits of Vicsek-like models is just wrong: the data presented there (Fig. 1 of [40]) to substantiate this claim are contradicted by our Figs. 9(a) and 9(c) (see also [50]) obtained at larger system sizes. Again, for large enough system sizes, the transition is indeed discontinuous. Thus, at best, the network models of Aldana *et al.* constitute a singular  $v_0 \rightarrow \infty$  limit of Vicsek-like models.

#### IV. NATURE OF THE ORDERED PHASE

We now turn our attention to the ordered, symmetry-broken phase. In previous analytical studies, it has often been assumed that the density in the ordered phase is spatially homogeneous, albeit with possibly large fluctuations (see, e.g., [8]). This is indeed what has been reported in early numerical studies, in particular by Vicsek *et al.* [9]. In the following, we show that this is not true in large enough systems, where, for a wide range of noise amplitudes near the transition point, density fluctuations lead to the formation of localized, traveling, high-density, and high-order structures. At low enough noise strength, though, a spatially homogeneous ordered phase is found, albeit with unusually strong density fluctuations.

##### A. Traveling in bands

Numerical simulations of the ordered phase dynamics ( $\eta < \eta_c$ ), performed at large enough noise amplitudes, are characterized by the emergence of high-density moving bands ( $d=2$ ) or sheets ( $d=3$ ). Typical examples are given in Figs. 11 and 12. These moving structures appear for large enough systems after some transient. They extend transversally with respect to the mean direction of motion, and have a center of mass velocity close to  $v_0$ . While particles inside bands are ordered and, in the asymptotic regime, move coherently with the global mean velocity, particles lying outside bands—in low-density regions—are not ordered and perform random walks.

As shown in Fig. 11(a)–11(c) for the angular noise dynamics (1), there exists a typical system size  $L_b$ , below which the bands or sheets cannot be observed. Numerical simulations indicate that  $L_b$  depends only weakly on the noise amplitude and is of the same order of magnitude as the crossover size marking the appearance of the discontinuous character of the transition:  $L_b \approx L^*$ . It is therefore numerically

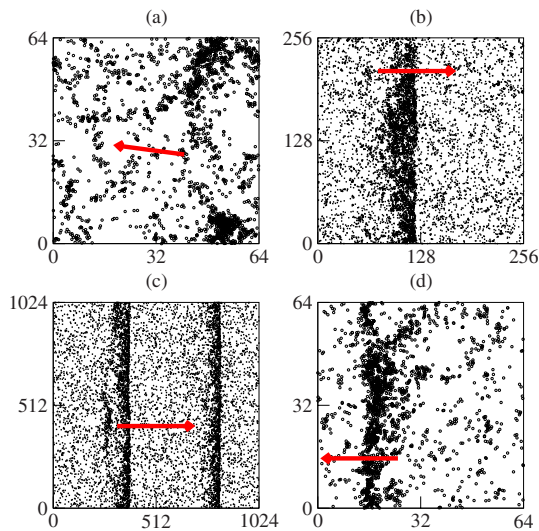


FIG. 11. (Color online) Typical snapshots in the ordered phase. Points represent the position of individual particles and the red arrow points along the global direction of motion. (a)–(c) Angular noise,  $\rho=1/2$ ,  $v_0=0.5$ ,  $\eta=0.3$ , and increasing system sizes, respectively,  $L=64$ , 256, and 1024. Sharp bands can be observed only if  $L$  is larger than the typical bandwidth  $w$ . (d) Vectorial noise,  $\rho=1/2$ ,  $v_0=0.5$ ,  $\eta=0.55$ , and  $L=64$ : bands appear at relatively small system sizes for this type of noise. For clarity, only a representative sample of 10 000 particles is shown in (b) and (c). Boundary conditions are periodic.

easier to observe bands in the ordered phase of vectorial noise dynamics (3), as in Fig. 11(d).

Bands may be observed asymptotically without and with a repulsive interaction [Fig. 12(c)] and for both kinds of noise. They appear for various choices of boundary conditions [see, for instance, Figs. 12(a) and 12(b), where reflecting boundary conditions have been employed], which may play a role in determining the symmetry-broken mean direction of motion. For instance, bands traveling parallel to one of the axes are favored when periodic boundary conditions are employed in a rectangular box (they represent the simplest way in which an extended structure can wrap around a torus, and are thus reached more easily from disordered initial conditions), but bands traveling in other directions may also appear, albeit with a smaller probability.

Bands can be described quantitatively through local quantities, such as the local density  $\rho_\ell(\vec{x}, t)$ , measured inside a domain  $\mathcal{V}(\vec{x})$  centered around  $\vec{x}$ , and the local order parameter

$$\varphi_\ell(\vec{x}, t) = \frac{1}{v_0} |\langle \vec{v}_i(t) \rangle_{\vec{r}_i \in \mathcal{V}(\vec{x})}|. \quad (11)$$

Further averaging these local quantities perpendicularly to the mean velocity (7), one has the *density profile*  $\rho_\perp(x_\parallel, t) = \langle \rho_\ell(\vec{x}, t) \rangle_\perp$  and the *order parameter profile*  $\varphi_\perp(x_\parallel, t) = \langle \varphi_\ell(\vec{x}, t) \rangle_\perp$ , where  $x_\parallel$  indicates the longitudinal direction with respect to the mean velocity. Bands are characterized by a sharp kink in both the density and the order parameter profiles [see Figs. 13(a), 13(c), and 13(d)]. They are typically

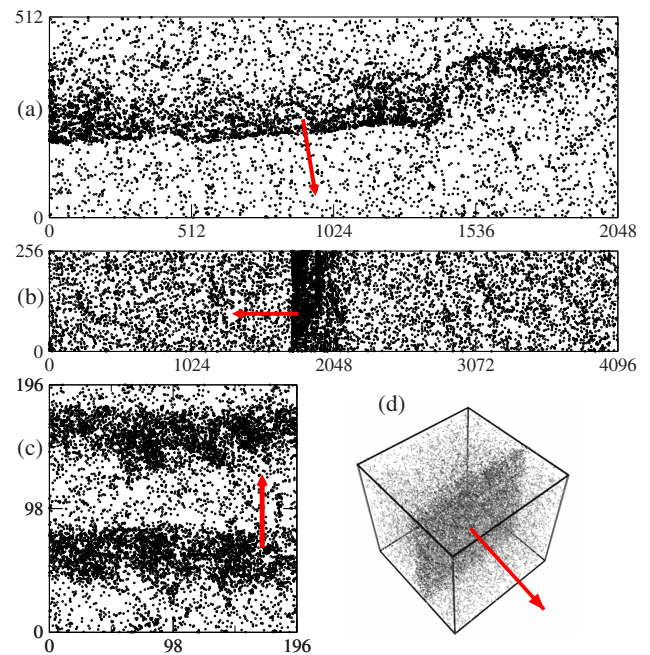


FIG. 12. (Color online) Same as Fig. 11 but in different geometries and boundary conditions or space dimensions. (a),(b) Vectorial noise ( $\eta=0.325$ ,  $\rho=1/8$ , and  $v_0=0.5$ ); boundary conditions are periodic along the  $y$  (vertical) axis and reflecting in  $x$ . (a) A long single band travels along the periodic direction. (b) The domain size along the periodic direction is too small to accommodate bands, and a single band bouncing back and forth along the nonperiodic direction is observed. (c) Angular noise, repulsive force, and periodic boundary conditions ( $\rho=2$ ,  $\eta=0.23$ , and  $v_0=0.3$ ). (d) High-density sheet traveling in a three-dimensional box with periodic boundary conditions (angular noise with amplitude  $\eta=0.355$ ,  $\rho=1/2$ , and  $v_0=0.5$ ).

asymmetric, as can be expected for moving structures, with a rather sharp front edge, a well-defined mid-height width  $w$ —which typically is of the same order as  $L_b$ —and an exponentially decaying tail with a characteristic decay length of the order of  $w$  [Fig. 13(b)].

Large systems may accommodate several bands at the same time, typically all moving in the same direction [see, for instance, Fig. 11(c) and the density profile in Fig. 14(e)]. However, they do not form well-defined wave trains, but rather a collection of solitary objects, as hinted by the following numerical experiments.

We investigated the instability of the density-homogeneous, ordered state in a series of numerical simulations starting from particles uniformly distributed in space but strictly oriented along the major axis in a large rectangular domain. Figures 14(a) and 14(b) show space-time plots of the density profile: initially flat, it develops structures with no well-defined wavelength [Fig. 14(c)]. Density fluctuations destroy the initially ordered state in a rather unusual way: a dynamical Fourier analysis of the density profile show a weakly peaked, wide band of wavelengths growing *subexponentially* [Fig. 14(d)]. This is at odds with a finite-wavelength supercritical instability, which would lead to a wave train of traveling bands. Furthermore, the asymptotic



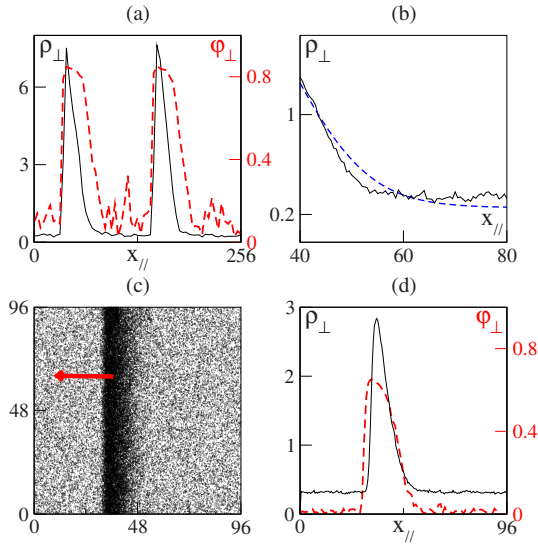


FIG. 13. (Color online) (a) Typical density (black line) and order parameter (dashed red line) profiles for bands in two dimensions (vectorial noise,  $\rho=2$ ,  $\eta=0.6$ , and  $v_0=0.5$ ). (b) Tail of the density profile shown in (d) (black line) and its fit (blue dashed line) by the formula  $\rho_{\perp}(x_{\parallel}, t) \approx a_0 + a_1(t)\exp(-x_{\parallel}/w)$ , with  $w \approx 6.3$  (lin-log scale). (c),(d) Traveling sheet in three dimensions (angular noise,  $\rho=1/2$ ,  $\eta=0.355$ , and  $v_0=0.5$ ). (c) Projection of particle positions on a plane containing the global direction of motion (marked by red arrow). (d) Density (black line) and order parameter (dashed red line) profiles along the direction of motion  $x_{\parallel}$ .

(late-time) power spectra of the density profiles are not peaked around a single frequency either, but rather broadly distributed over a large range of wave numbers [Fig. 14(f)]. In the asymptotic regime, bands are extremely long-lived metastable (or possibly stable) objects, which are never equally spaced [a typical late-time configuration is shown in Fig. 14(e)].

To summarize, the emerging band or sheet structure in the asymptotic regime is not a regular wave train characterized by a single wavelength, but rather a collection of irregularly spaced localized traveling objects, probably weakly interacting through their exponentially decaying tails.

### B. Low-noise regime and giant density fluctuations

As the noise amplitude is decreased away from the transition point, bands are less sharp, and eventually disappear, giving way to an ordered state characterized by a homogeneous local order parameter and large fluctuations of the local density.

A quantitative measure of the presence, in the ordered phase, of structures spanning the dimension transverse to the mean motion (i.e., bands or sheets) is provided by the variances of the density and order parameter profiles:

$$\Delta\rho_{\perp}^2(t) = \langle [\rho_{\perp}(x_{\parallel}, t) - \langle \rho_{\perp}(x_{\parallel}, t) \rangle_{\parallel}]^2 \rangle_{\parallel},$$

$$\Delta\varphi_{\perp}^2(t) = \langle [\varphi_{\perp}(x_{\parallel}, t) - \langle \varphi_{\perp}(x_{\parallel}, t) \rangle_{\parallel}]^2 \rangle_{\parallel}, \quad (12)$$

where  $\langle \cdot \rangle_{\parallel}$  indicates the average of the profile in the longitudinal direction with respect to mean velocity. Indeed, these

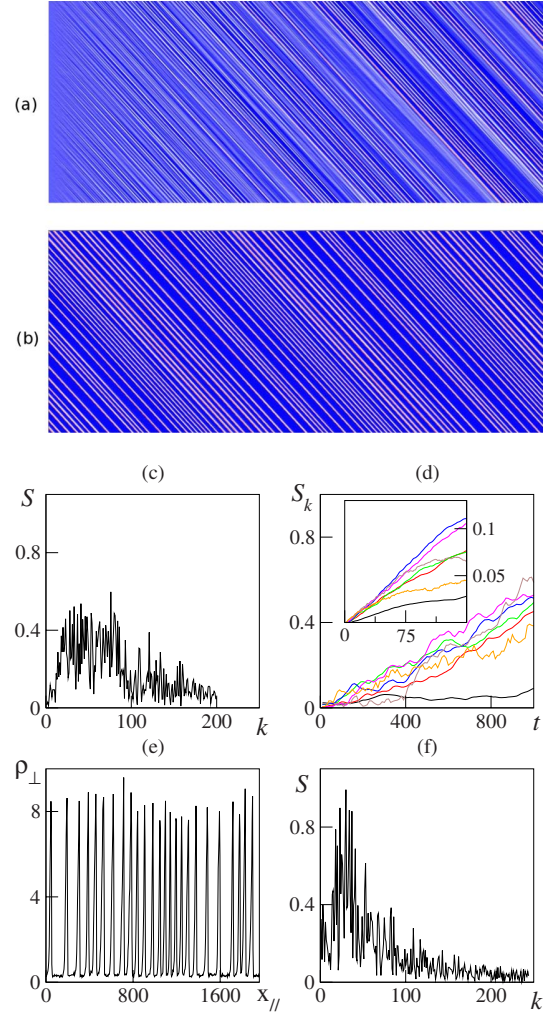


FIG. 14. (Color online) Emergence of high-density high-order traveling bands ( $d=2$ ) from a spatially homogeneous (uniformly distributed random positions) initial condition with all particle velocities oriented along the major axis of a  $196 \times 1960$  domain with periodic boundary conditions. Vectorial noise of amplitude  $\eta=0.6$ , density  $\rho=2$ , and  $v_0=0.5$ . (a) Space-time plot of the density profile. Time is running from left to right from  $t=0$  to 12 000, while the longitudinal direction is represented on the ordinates. Color scale from blue (low values) to red (high values). (b) Same as (a) but at later times (from  $t=148\,000$  to  $160\,000$ ). (c) Spatial Fourier power spectrum  $S$  of an early density profile ( $t=12\,000$ ). (d) Early-time evolution of selected Fourier modes  $k=10, 23, 28, 33, 41, 76$ , and  $121$  (the black lowest curve is for  $k=10$ , the other curves are not significantly different). Inset: average over 50 different runs. (e) Density profile at a late time [ $t=160\,000$ , final configuration of (b)]. (f) Same as (c) but for the late-time density profile of (e).

profile widths vanish in the infinite-size limit except if band or sheet structures are present.

In Figs. 15(a) and 15(b), we plot these profile widths averaged over time as a function of noise amplitude. Both quantities present a maximum close to the transition point in the ordered phase, and drop drastically as soon as the disordered phase is entered. Lowering the noise away from the transition point, these profiles decrease steadily: bands and



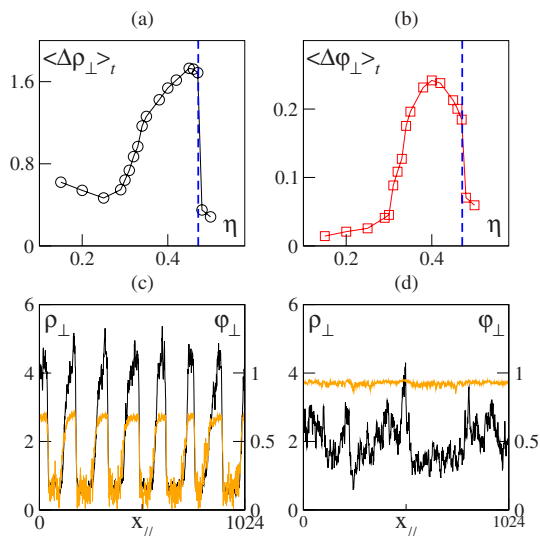


FIG. 15. (Color online) (a),(b) Time-averaged profile width for both density (a) and order parameter (b) as a function of noise amplitude in the ordered phase (angular noise,  $1024 \times 256$  domain, global motion along the major axis,  $\rho=2$ , and  $v_0=0.5$ ). The dashed vertical blue line marks the order-disorder transition. (c),(d) Typical instantaneous profiles along the long dimension of the system described in (a) and (b) for intermediate noise value [(b)  $\eta=0.4$ ] and in the bandless regime [(c)  $\eta=0.15$ ].

sheets stand less sharply out of the disordered background [Fig. 15(c)]. At some point [ $\eta \approx 0.3$  for the parameter values considered in Figs. 15(a) and 15(b)], bands rather abruptly disappear and are no longer well-defined transversal objects. It is difficult to define this point accurately, but it is clear that for lower noise intensities the local order parameter is strongly homogeneous in space. Nevertheless, fluctuations in the density field are strong [Fig. 15(d)], but can no longer give rise to (meta)stable long-lived transverse structures.

Density fluctuations in the bandless regime are in fact anomalously strong: measuring number fluctuations in subsystems of linear size  $\ell$ , we find that their root mean square  $\Delta n$  does not scale like the square root of  $n = \rho \ell^d$ , the mean number of particles they contain; rather we find  $\sigma(n) \propto n^{\alpha}$  with  $\alpha \approx 0.8$  both in  $d=2$  and in  $d=3$  [Fig. 16(a)]. This is reminiscent of the recent discovery of “giant density fluctuations” in active nematics [14,51,52]. However, the theoretical argument which initially predicted such fluctuations [53] cannot be invoked directly in the present case. (Indeed, the above value of  $\alpha$ , although needing to be refined, does not seem to be compatible with the prediction  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{d}$  made in [53].) More work is needed to fully understand under what circumstances the coupling between density and order in systems of “active” self-propelled particles gives rise to such anomalous density fluctuations.

### C. Transverse superdiffusion

According to the predictions of Toner and Tu [8,33,34], the dynamics of the symmetry-broken ordered phase of polar

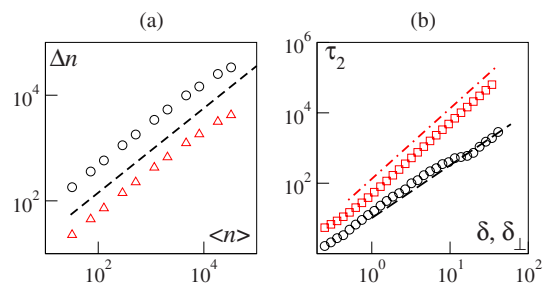


FIG. 16. (Color online) Giant density fluctuation and transverse superdiffusion in the bandless ordered phase. (a) Anomalous density fluctuations (see text):  $\Delta n$  scales approximately like  $n^{0.8}$  (the dashed line has slope 0.8) both in two dimensions (black circles,  $L=256$ ,  $\rho=2$ ,  $v_0=0.5$ , angular noise amplitude  $\eta=0.25$ ) and in three dimensions (red triangles,  $L=64$ ,  $\rho=1/2$ ,  $v_0=0.5$ , vectorial noise amplitude  $\eta=0.1$ , values shifted for clarity). (b) Average doubling time  $\tau_2$  of the transverse (with respect to mean velocity) interparticle distance  $\delta_{\perp}$ . Black circles: ordered bandless regime ( $\rho=4$ , angular noise amplitude  $\eta=0.2$  in a rectangular box of size  $1024 \times 256$ ). The black dashed line marks the expected growth  $\tau_2 \sim \delta_{\perp}^{3/2}$ . Red squares: same but deep in the disordered phase ( $\rho=4$ , angular noise amplitude  $\eta=1$ ,  $L=512$ ). The dot-dashed red line shows normal diffusive behavior:  $\tau_2 \sim \delta^2$ .

active particles should be characterized by a superdiffusive mean square displacement

$$\Delta x_{\perp} = \sqrt{\langle [x_{\perp}(t) - x_{\perp}(0)]^2 \rangle_i} \quad (13)$$

in the direction(s) transversal to the mean velocity. In particular, in  $d=2$  one has [34]

$$\Delta x_{\perp}^2 \sim t^{\nu} \quad (14)$$

with  $\nu=4/3$ . While this analytical result has been successfully tested by numerical simulations of models with cohesive interactions [34,38], numerical simulations in models without cohesion present substantial difficulties, mainly due to the presence of continuously merging and splitting sub-clusters of particles moving coherently (as discussed in Sec. IV D). As a consequence, an ensemble of test particles in a cohesionless model is exposed to different “transport” regimes (with respect to center of mass motion) which are not well separated in time. When the mean displacement is averaged at fixed time, this tends to mask the transverse superdiffusion.

To overcome this problem, we chose to follow [54] and to measure  $\tau_2$ , the average time taken by two particles to double their transverse separation distance  $\delta_{\perp}$ . From Eq. (14) one immediately has

$$\tau_2 \sim \delta_{\perp}^{2/\nu} \quad (15)$$

with  $2/\nu=3/2$  in  $d=2$ . In order to easily separate the transverse from the parallel component, we considered an ordered system in a large rectangular domain with periodic boundary conditions and the mean velocity initially oriented along the long side. The mean direction of motion then stays oriented along this major axis, so that we can identify the transverse direction with the minor axis. Furthermore, a high density and a small (angular) noise amplitude (corresponding to the

bandless regime) have been chosen to avoid the appearance of large, locally disordered patches.

Our results [Fig. 16(b)] confirm the prediction of Toner and Tu: transverse superdiffusion holds at low enough noise, while normal diffusion is observed in the disordered, high-noise phase. Note that the systematic deviation appearing in our data at some large scale is induced by large fluctuations in the orientation of the global mean velocity during our numerical simulations (not shown here).

We take the opportunity of this discussion to come back to the superdiffusive behavior of particles observed in the transition region [21]. There, subclusters emerge and propagate ballistically and isotropically due to the absence of a well-established global order. Particle trajectories consist in “ballistic flights,” occurring when a particle is caught in one of these coherently moving clusters, alternated with ordinary diffusion in disordered regions. The mean square displacement of particles exhibits the scaling  $\Delta x^2 = \langle |\vec{x}(t) - \vec{x}(0)|^2 \rangle_i \propto t^{5/3}$  [21]. In view of our current understanding of the discontinuous nature of the transition, we now tend to believe that this isotropic superdiffusion is probably not asymptotic.

#### D. Internal structure of the ordered region

We now turn our attention to the internal structure of the ordered regimes. As we noted in the previous section, these regimes do not consist of a single cluster of interacting particles moving coherently. Even in the case where high-density bands or sheets are present, these are in fact dynamical objects made of splitting and merging clusters. Note that, for the models considered here, clusters are unambiguously defined thanks to the strictly finite interaction range  $r_0$ .

As noticed first by Aldana and Huepe [7], clusters of size  $n$  are distributed algebraically in the ordered region, i.e.,  $P(n) \sim n^{-\mu}$ . But a closer look reveals that the exponent  $\mu$  characterizing the distribution of cluster sizes changes with the distance to the transition point. For noise intensities not too far from the threshold, when bands are observed, we find  $\mu$  values larger than 2, whereas  $\mu < 2$  in the bandless regimes present at low noise intensities [Fig. 17(a) and 17(b)].

Thus, bands are truly complex, nontrivial structures emerging out of the transverse dynamics of clusters with a well-defined mean size (since  $\mu > 2$ ). It is only in the bandless regime that one can speak, as do Aldana and Huepe, of “strong intermittency.” We note in passing that the parameter values they considered correspond in fact to a case where bands are easily observed (at larger sizes than those considered in [7]). Thus, clusters do have a well-defined mean size in their case. Consequently, the probability distribution  $P(\varphi)$  of the order parameter  $\varphi$  does not show the behavior reported in Fig. 1 of [7] as soon as the system size is large enough. Whether in the band and sheet regime or not,  $P(\varphi)$  shows essentially Gaussian tails, is strongly peaked around its mean, and its variance decreases with increasing system size [Figs. 17(c) and 17(d)].

Although the picture of intermittent bursts between “laminar” intervals proposed by Aldana and Huepe has thus to be abandoned, the anomalous density fluctuations reported in the previous section are probably tantamount to the strong

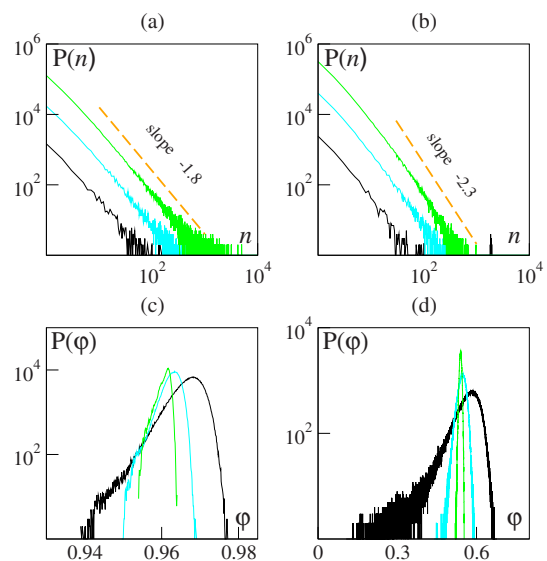


FIG. 17. (Color online) (a),(b) Cluster size distributions (arbitrary units) for domain sizes  $L=32$  (black), 128 (cyan), and 512 (green) from left to right ( $d=2$ ,  $\rho=2$ ,  $v_0=0.5$ , angular noise). (c),(d) Probability distribution functions of the order parameter  $\varphi$  (arbitrary units) for the same parameters and system sizes as in (a) and (b). (The most peaked distributions are for the largest size  $L=512$ .) Left panels (a),(c),  $\eta=0.1$ , bandless regime; Right panels (b),(d), regime with bands at  $\eta=0.4$ .

intermittency of cluster dynamics in the bandless regime. Again, these phenomena, reported also in the context of active nematics [14,51,53], deserve further investigation.

#### E. Phase ordering

The ordered regimes presented above are the result of some transient evolution. In particular, the bands and sheets are the typical asymptotic structures appearing in *finite* domains with appropriate boundary conditions. In an infinite system, the phase ordering process is, on the other hand, infinite, and worth studying for its own sake.

Numerically, we have chosen to start from highly disordered initial conditions which have a homogeneous density and vanishing local order parameter. In practice, we quench a system “thermalized” at strong noise to a smaller, subcritical,  $\eta$  value. Typical snapshots show the emergence of structures whose typical scale seems to increase fast (Fig. 18). During this domain growth, we monitor the two-point spatial correlation function of both the density and velocity fields. These fields are defined by a coarse-graining over a small length scale  $\ell$  (typically 4). These correlation functions have an unusual shape [Fig. 19(a)]: after some rather fast initial decay, they display an algebraic behavior whose effective exponent decreases with time, and finally display a near-exponential cutoff. As a result, they cannot be easily collapsed on a single curve using a simple, unique, rescaling length scale. Nevertheless, using the late exponential cutoff, a correlation length  $\xi$  can be extracted. Such a length scale  $\xi$  grows roughly linearly with time [Fig. 19(b)]. Qualitatively

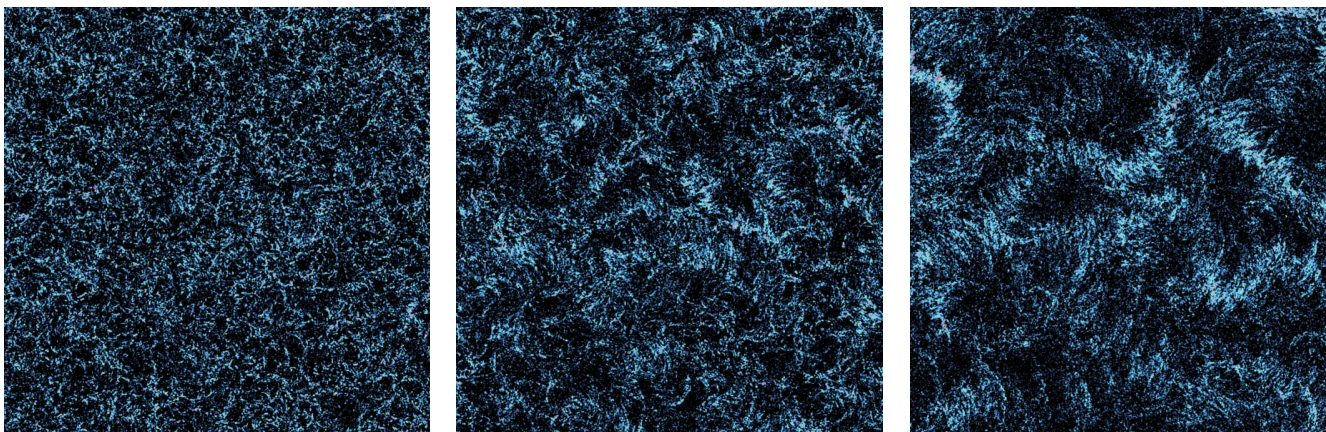


FIG. 18. (Color online) Phase ordering from disordered initial conditions ( $d=2$ , angular noise amplitude  $\eta=0.08$ ,  $\rho=1/8$ ,  $v_0=0.5$ , system size  $L=4096$ ). Snapshots of the density field coarse grained on a scale  $\ell=8$  at times  $t=160$ ,  $320$ , and  $640$  from left to right.

similar results are obtained whether or not the noise strength is in the range where bands and sheets appear in finite boxes.

We note that the above growth law is reminiscent of that of the so-called model H of the classification of Halperin and Hohenberg [55]. Since this model describes, in principle, the phase separation in a viscous binary fluid, the fast growth observed could thus be linked to the hydrodynamic modes expected in any continuous description of Vicsek-like models [8,56].

## V. GENERAL DISCUSSION AND OUTLOOK

### A. Summary of main results

We now summarize our main results before discussing them at a somewhat more general level.

We have provided ample evidence that the onset of collective motion in Vicsek-style models is a discontinuous

(first-order) phase transition, with all expected hallmarks, in agreement with [38]. We have made the (numerical) effort of showing this in the limits of small and large velocity and/or density.

We have shown that the ordered phase is divided into two regions: near the transition and down to rather low noise intensities, solitary structures spanning the directions transverse to the global collective velocity (the bands or sheets) appear, leading to an inhomogeneous density field. For weaker noise, on the other hand, no such structures appear, but strong, anomalous density fluctuations exist and particles undergoes superdiffusive motion transverse to the mean velocity direction.

Finally, we have reported a linear growth (with time) of ordered domains when a disordered configuration is quenched in the ordered phase. This fast growth can probably be linked to the expected emergence of long-wavelength hydrodynamic modes in the ordered phase of active polar particles models.

### B. Role of bands and sheets

The high-density high-order traveling bands or sheets described here appear central to our main findings. They seem to be intimately linked to the discontinuous character of the transition which can, to some extent, be considered as the stability limit of these objects. In the range of noise values where they are observed, the anomalous density fluctuations present at lower noise intensities are suppressed.

One may then wonder about the universality of these objects. Simple variants of the Vicsek-style models studied here (e.g., with interactions restricted to binary ones involving only the nearest neighbor) do exhibit bands and sheets [11]. Moreover, the continuous deterministic description derived by Bertin *et al.* [11] does possess localized, propagating solitary solutions rather similar to bands [57]. Although the stability of these solutions needs to be further investigated, these results indicate that the objects are robust and that their existence is guaranteed beyond microscopic details. However, the emergence of regular, stable, bands and sheets is obviously conditioned to the shape and the boundary condi-

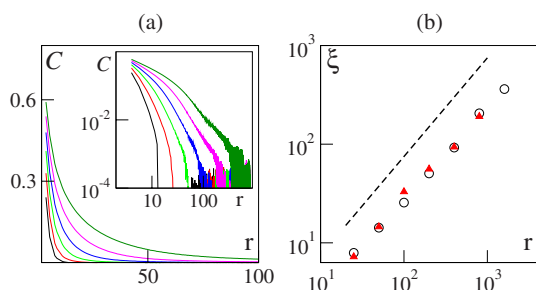


FIG. 19. (Color online) Phase ordering as in Fig. 18 ( $L=4096$ ,  $\rho=1/2$ ,  $v_0=0.5$ ). (a) Two-point density correlation function  $C(r,t) = \langle \rho_\ell(\vec{x},t) \rho_\ell(\vec{x} + \vec{r},t) \rangle_{\vec{r}}$  (coarse grained over a scale  $\ell=4$ ) as a function of distance  $r=|\vec{r}|$  at different time steps: from left to right  $t=50, 100, 200, 400, 800, 1600$ . Noise amplitude is  $\eta=0.25$ ; data have been further averaged over  $\approx 40$  different realizations. Inset: log scales reveal the intermediate near-algebraic decay and the quasiexponential cutoff. (b) Length scale  $\xi$ , estimated from the exponential cutoff positions, as a function of time. Empty black circles:  $\eta=0.25$  as in (a) (i.e., regime in which bands are observed asymptotically). Red full triangles:  $\eta=0.1$  (i.e., in the bandless regime). The dashed black line marks linear growth.



tions of the domain in which the particles are allowed to move. In rectangular domains with at least one periodic direction, these objects can form, span across the whole domain, and move. But in, say, a circular domain with reflecting boundary conditions, they cannot develop freely, being repeatedly frustrated. Nevertheless, simulations performed in such a geometry indicate that the transition remains discontinuous, with the ordered phase consisting of one or several dense packets traveling along the circular boundary. Note, though, that these packets intermittently emit elongated structures (bands) traveling toward the interior of the disk before colliding on the boundary. To sum up, bands appear as the “natural” objects in the transition region, but they may be prevented by the boundaries from developing into full-size straight objects.

At any rate, time series of the order parameter such as the one presented in Fig. 2 clearly show that the transition is discontinuous irrespective of the geometry and boundaries of the domain, and thus of whether bands and sheets can develop into stable regular structures or not: the sudden, abrupt, jumps from the disordered state to some ordered structure are tantamount to a nucleation phenomenon characteristic of a discontinuous transition.

### C. A speculative picture

We would now like to offer the following speculative general picture. The key feature of the Vicsek-like models studied here—as well as of other models for active media made of self-propelled particles [11,35,56,58,59]—is the coupling between density and order. Particles are forced to move, and, since they carry information about the order, advection, density fluctuations, and order are intimately linked. High density means strong local order (if the noise is low enough) because the many particles in a given neighborhood will adopt roughly the same orientation. The reverse is also true: in a highly ordered region, particles will remain together for a long time and thus will sweep many other particles, leading to a denser and denser group.

At a given noise level, one can thus relate, in the spirit of some local equilibrium hypothesis, local density to local order. In practice, such an “equation of state” approach can be justified by looking, e.g., at a scatter plot of local order parameter vs local density. Figure 20 reveals that, in the ordered bandless regime, such a scatter plot is characterized by a plateau over a large range of local density values corresponding to order, followed, below some crossover density, by more disordered local patches. The regions in space where local density is below this crossover level do not percolate in the bandless regime, and order can be maintained very steadily in the whole domain [this is corroborated by the fact that, in spite of the large, anomalous density fluctuations, the order parameter field is, on the other hand, rather constant; see Fig. 15(c)]. The noise intensity at which bands emerge roughly corresponds to the value where the low-density disordered regions percolate. The remaining disconnected, dense patches then eventually self-organize into bands or sheets. The emergence of these elongated structures is rather natural: moving packets elongate spontaneously be-

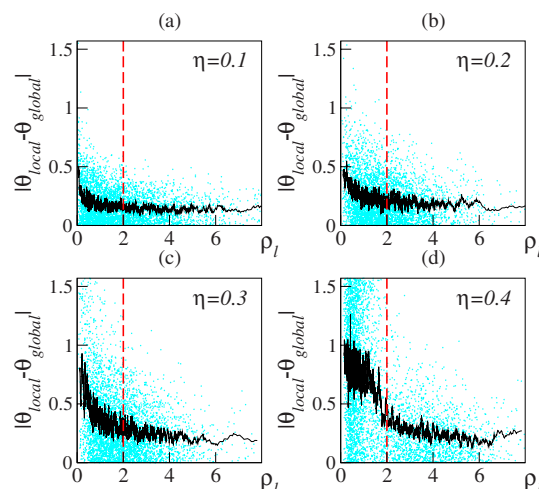


FIG. 20. (Color online) Scatter plots of local order parameter vs local density in the ordered phase [angular noise,  $\rho=2$ ,  $v_0=0.5$ , in a domain of size  $1024 \times 256$ —the same parameters as in Fig. 15(a)]. The local quantities were measured in boxes of linear size  $\ell=8$ . Here, the local order is represented by the angle between the orientation  $\Theta_{\text{local}}$  of the local order parameter and the global direction of motion  $\Theta_{\text{global}}$ . The black solid lines are running averages of the scatter plots. The red solid lines indicate the global density  $\rho=2$  (and thus mark the percolation threshold in a two-dimensional square lattice). (a),(b)  $\eta=0.1$  and  $0.2$ : in the bandless regime, the ordered plateau starts below  $\rho=2$ , i.e., ordered regions percolate. (c) Approximately at the limit of existence of bands: the start of the plateau is near  $\rho=2$ . (d) At higher noise amplitude in the presence of bands.

cause they collect many particles; superdiffusion in the directions perpendicular to the mean motion endows these nascent bands and sheets with some “rigidity.” At still stronger noise, the bands and sheets are destroyed and global order disappears.

The above features are at the root of the approach by Toner and Tu [8,33,34]. Their predictions of strong density fluctuations, transverse superdiffusion, and peculiar sound propagation properties are correct as long as bands or sheets do not exist, i.e., for not too strong noise intensities. This is indeed in agreement with their assumption that the density field is statistically homogeneous in the frame moving at the global velocity (albeit with strong fluctuations), which is true only in the bandless regime.

### D. Outlook

The results presented here are almost entirely numerical. Although they were obtained with care, they need to be ultimately backed up by more analytical results. A first step is the derivation of a continuous description in terms of a density and a velocity field (or some combination of the two), which would allow one to go beyond microscopic details. In that respect the deterministic equation derived by Bertin *et al.* from a Boltzmann description in the dilute limit [11] is encouraging. However, one may suspect that intrinsic fluctuations are crucial in the systems considered here if only because some of the effective noise terms will be multiplica-

tive in the density. A mesoscopic, stochastic equation description is thus *a priori* preferable. This is especially true in view of the “giant” anomalous fluctuations present in the bandless ordered phase. These fluctuations clearly deserve further investigation, all the more so as they seem to be generic features of active particle models [14,51].

Ongoing work is devoted to both these general issues.

### ACKNOWLEDGMENTS

Most of this research has been funded by the European Union via the FP6 StarFLAG project. Partial support from the French ANR Morphoscale project is acknowledged. We thank A. Vulpiani and M. Cencini for introducing us to the method outlined in Ref. [54].

### APPENDIX: FLUCTUATION-DISSIPATION RELATION

In [5], Vicsek *et al.* also studied the validity of the fluctuation-dissipation theorem and concluded, from numerical analysis, that it is violated. Here we approach this question again, using the “dynamical” approach put forward in [60], rather than the equilibrium used in [5]. The fluctuation-dissipation relation is expressed as

$$R(t-t_0) = \frac{1}{T_{\text{eff}}} \frac{\partial C(t-t_0)}{\partial t}, \quad (\text{A1})$$

where  $R$  is the response,  $C$  the associated correlation function, and  $T_{\text{eff}}$  some “effective temperature.”

In both cases, at any rate, the key point is to investigate the effect of an external field on the ordering process. Since here one cannot rely on any Hamiltonian structure, the external field remains somewhat arbitrary, as it cannot be unambiguously defined as the conjugate variable of the order parameter.

In [5], the field  $\vec{h}$  was directly confronted with the local average velocity, and the governing equation was replaced by

$$\vec{v}_i(t+\Delta t) = v_0(\mathcal{R}_\eta \circ \vartheta) \left( \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \vec{v}_j(t) + \vec{h} \right). \quad (\text{A2})$$

This manner of introducing  $\vec{h}$  leads to an effective intensity which depends on the local ordering:  $\vec{h}$  is comparatively stronger in disordered regions (an important effect at the early stages of ordering) than in ordered regions. This could in fact prevent the necessary linear regime from occurring, even at very low field values (see, for instance, Fig. 6 of [5]). A mean-field analysis has confirmed this view, showing a logarithmic variation of the response with the field intensity [61].

To bypass this problem, we have preferred to use the following equation:

$$\vec{v}_i(t+\Delta t) = v_0 \vartheta \left( \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \vec{v}_j(t) + \left| \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \vec{v}_j(t) \right| \vec{h} + \eta N_i \vec{\xi} \right), \quad (\text{A3})$$

where the vectorial noise was chosen because, as shown above, it leads more easily to the asymptotic regime. The

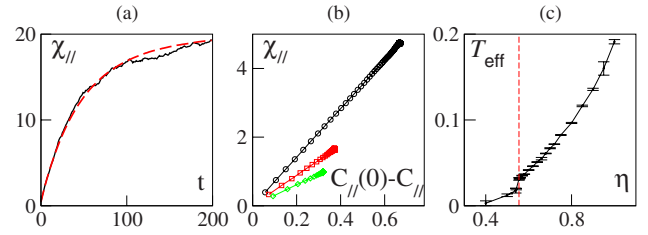


FIG. 21. (Color online) Test of the fluctuation-dissipation relation on the vectorial model with repulsive force ( $\rho=2$ ,  $v_0=0.3$ ,  $L=128$ ). (a) Susceptibility vs time at reduced noise amplitude  $\varepsilon=1 - \eta/\eta_i=0.005$ ,  $|\vec{h}|=10^{-2}$  (dashed red line), and  $|\vec{h}|=10^{-3}$  (plain black line). (b) Susceptibility vs correlation at  $|\vec{h}|=10^{-3}$  and  $\varepsilon=0.08, 0.26$ , and  $0.44$  from top to bottom. (c) Effective temperature vs noise amplitude. The vertical dashed line marks the transition point.

effective intensity of the field is now proportional to the local order.

Two (scalar) response functions can be defined in our problem: the longitudinal response  $R_{\parallel}$  along the field direction, and the transverse response  $R_{\perp}$ . We consider the former. In practice, we quenched, at time  $t_0$ , a strong-noise, highly disordered system  $\varphi(t_0) \approx 0$  to a smaller noise value and started applying the constant homogeneous field  $\vec{h}$  immediately. We then followed the response of the system by monitoring the growth of the order parameter. We measured the susceptibility  $\chi_{\parallel}$ , which is nothing but the integrated response function:  $\chi_{\parallel}(t, t_0) = \int_{t_0}^t R_{\parallel}(t, t') dt'$ . In practice, we have

$$\chi_{\parallel}(t-t_0) = \frac{1}{|\vec{h}|} \vec{\varphi}(t) \cdot \vartheta[\vec{h}]. \quad (\text{A4})$$

In a well-behaved system, the susceptibility should be independent of the amplitude of the field, at least at small enough values (“linear” regime). This is what we observed, as shown in Fig. 21(a).

Correspondingly, the correlation function is defined as

$$C(t-t_0) = \frac{1}{v_0^2} \langle \vec{v}_i(t_0) \cdot \vec{v}_i(t) \rangle_i. \quad (\text{A5})$$

The fluctuation-dissipation relation (A1) can then be written in its integrated form:

$$\chi_{\parallel}(t-t_0) = \frac{1}{T_{\text{eff}}} [C(0) - C(t-t_0)]. \quad (\text{A6})$$

In Fig. 21(b), we show that  $\chi_{\parallel}$  and  $C$  are related linearly in time, confirming the validity of this relation and allowing an estimation of  $T_{\text{eff}}$ .

This well-defined—although not uniquely defined—effective temperature varies as expected in parameter space. In particular, it increases systematically with the noise strength  $\eta$  [Fig. 21(c)], although this variation is not linear. Note also, that, intriguingly, there is a small jump of  $T_{\text{eff}}$  at the noise value corresponding to the transition in this case ( $\eta_i \approx 0.55$ ).

- [1] Pliny, *Natural History*, translated by H. Rackham (Harvard University Press, 1968), Vol. III, book 10, xxxii, p. 63.
- [2] *Animal Groups in Three Dimensions*, edited by J. K. Parrish and W. M. Hamner (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1997).
- [3] E. V. Albano, Phys. Rev. Lett. **77**, 2129 (1996).
- [4] I. D. Couzin and J. Krause, Adv. Stud. Behav. **32**, 1 (2003).
- [5] A. Czirók, H. E. Stanley, and T. Vicsek, J. Phys. A **30**, 1375 (1997).
- [6] G. Grégoire, H. Chaté, and Y. Tu, Phys. Rev. E **64**, 011902 (2001).
- [7] C. Huepe and M. Aldana, Phys. Rev. Lett. **92**, 168701 (2004).
- [8] J. Toner and Y. Tu, Phys. Rev. Lett. **75**, 4326 (1995).
- [9] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1226 (1995).
- [10] N. D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
- [11] E. Bertin, M. Droz, and G. Grégoire, Phys. Rev. E **74**, 022101 (2006).
- [12] B. Birmir, J. Stat. Phys. **128**, 535 (2007).
- [13] H. J. Bussemaker, A. Deutsch, and E. Geigant, Phys. Rev. Lett. **78**, 5018 (1997).
- [14] H. Chaté, F. Ginelli, and R. Montagne, Phys. Rev. Lett. **96**, 180602 (2006).
- [15] I. D. Couzin, J. Theor. Biol. **218**, 1 (2002).
- [16] I. D. Couzin, J. Krause, N. Franks, and S. Levin, Nature (London) **433**, 513 (2005).
- [17] Z. Csahók and T. Vicsek, Phys. Rev. E **52**, 5297 (1995).
- [18] A. Czirók, A.-L. Barabási, and T. Vicsek, Phys. Rev. Lett. **82**, 209 (1999).
- [19] A. Czirók, M. Vicsek, and T. Vicsek, Physica A **264**, 299 (1999).
- [20] Y. L. Duparcmeur, H. Herrmann, and J. P. Troadec, J. Phys. I **5**, 1119 (1995).
- [21] G. Grégoire, H. Chaté, and Y. Tu, Phys. Rev. Lett. **86**, 556 (2001).
- [22] G. Grégoire, H. Chaté, and Y. Tu, Physica D **181**, 157 (2003).
- [23] J. Hemmingsson, J. Phys. A **28**, 4245 (1995).
- [24] H. Levine, W.-J. Rappel, and I. Cohen, Phys. Rev. E **63**, 017101 (2000).
- [25] A. S. Mikhailov and D. H. Zanette, Phys. Rev. E **60**, 4571 (1999).
- [26] A. Mogilner and L. Edelstein-Keshet, J. Math. Biol. **38**, 534 (1999).
- [27] O. J. O'Loan and M. R. Evans, J. Phys. A **32**, L99 (1999).
- [28] M. R. D'Orsogna, Y. L. Chuang, A. L. Bertozzi, and L. S. Chayes, Phys. Rev. Lett. **96**, 104302 (2006).
- [29] N. Shimoyama, K. Sugawara, T. Mizuguchi, Y. Hayakawa, and M. Sano, Phys. Rev. Lett. **76**, 3870 (1996).
- [30] R. A. Simha and S. Ramaswamy, Physica A **306**, 262 (2002).
- [31] R. A. Simha and S. Ramaswamy, Phys. Rev. Lett. **89**, 058101 (2002).
- [32] B. Szabó, G. J. Szolosi, B. Gonci, Z. Juranyi, D. Selmeczi, and T. Vicsek, Phys. Rev. E **74**, 061908 (2006).
- [33] J. Toner and Y. Tu, Phys. Rev. E **58**, 4828 (1998).
- [34] Y. Tu, J. Toner, and M. Ulm, Phys. Rev. Lett. **80**, 4819 (1998).
- [35] C. M. Topaz and A. L. Bertozzi, SIAM J. Appl. Math. **65**, 152 (2004).
- [36] C. Topaz, A. Bertozzi, and L. M.A., Bull. Math. Biol. **68**, 1601 (2006).
- [37] T. Vicsek, A. Czirók, I. J. Farkas, and D. Helbing, Physica A **274**, 182 (1999).
- [38] G. Grégoire and H. Chaté, Phys. Rev. Lett. **92**, 025702 (2004).
- [39] M. Nagy, I. Daruka, and T. Vicsek, Physica A **373**, 445 (2007).
- [40] M. Aldana, V. Dossetti, C. Huepe, V. M. Kenkre, and H. Laralde, Phys. Rev. Lett. **98**, 095702 (2007).
- [41] S. Lübeck, Int. J. Mod. Phys. B **18**, 3977 (2004).
- [42] P. Marcq, H. Chaté, and P. Manneville, Phys. Rev. Lett. **77**, 4003 (1996).
- [43] P. Marcq, H. Chaté, and P. Manneville, Phys. Rev. E **55**, 2606 (1997).
- [44] K. Binder, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and M. S. Green (Academic Press, 1976).
- [45] *Finite Size Scaling and Numerical Simulations of Statistical Systems*, edited by V. Privman (World Scientific, Singapore, 1990).
- [46] K. Binder, Rep. Prog. Phys. **60**, 487 (1997).
- [47] B. Efron, *The Jackknife, The Bootstrap and Other Resampling Plans* (SIAM, Philadelphia, 1982).
- [48] J. C. Niel and J. Zinn-Justin, Nucl. Phys. B **280**, 355 (1987).
- [49] C. Borgs and R. Kotecky, J. Stat. Phys. **61**, 79 (1990).
- [50] H. Chaté, F. Ginelli, and G. Grégoire, Phys. Rev. Lett. **99**, 229601 (2007).
- [51] S. Mishra and S. Ramaswamy, Phys. Rev. Lett. **97**, 090602 (2006).
- [52] V. Narayan, S. Ramaswamy, and N. Menon, Science **317**, 105 (2007).
- [53] S. Ramaswamy, R. A. Simha, and J. Toner, Europhys. Lett. **62**, 196 (2003).
- [54] G. Boffetta, A. Celani, M. Cencini, G. Lacorata, and A. Vulpiani, Chaos **10**, 50 (2000).
- [55] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. **49**, 435 (1977).
- [56] J. Toner, Y. Tu, and S. Ramaswamy, Ann. Phys. (N.Y.) **318**, 170 (2005).
- [57] E. Bertin, M. Droz, and G. Grégoire, (unpublished).
- [58] Z. Csahók and A. Czirók, Physica A **243**, 304 (1997).
- [59] E. Ben-Jacob, I. Cohen, and H. Levine, Adv. Phys. **49**, 395 (2000).
- [60] L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, and L. Peliti, Phys. Rev. E **55**, 3898 (1997).
- [61] E. Bertin (private communication).

# Hydrodynamic equations for self-propelled particles: microscopic derivation and stability analysis

Eric Bertin,<sup>1,2</sup> Michel Droz<sup>2</sup> and Guillaume Grégoire<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Université de Lyon, Laboratoire de Physique, ENS Lyon, CNRS, 46 Allée d'Italie, F-69007 Lyon

<sup>2</sup> Department of Theoretical Physics, University of Geneva, CH-1211 Geneva 4, Switzerland

<sup>3</sup> Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC), UMR 7057, CNRS-Université Paris-Diderot, F-75205 Paris Cedex 13, France

**Abstract.** Considering a gas of self-propelled particles with binary interactions, we derive the hydrodynamic equations governing the density and velocity fields from the microscopic dynamics, in the framework of the associated Boltzmann equation. Explicit expressions for the transport coefficients are given, as a function of the microscopic parameters of the model. We show that the homogeneous state with zero hydrodynamic velocity is unstable above a critical density (which depends on the microscopic parameters), signaling the onset of a collective motion. Comparison with numerical simulations on a standard model of self-propelled particles shows that the phase diagram we obtain is robust, in the sense that it depends only slightly on the precise definition of the model. While the homogeneous flow is found to be stable far from the transition line, it becomes unstable with respect to finite-wavelength perturbations close to the transition, implying a non trivial spatio-temporal structure for the resulting flow. We find solitary wave solutions of the hydrodynamic equations, quite similar to the stripes reported in direct numerical simulations of self-propelled particles.

PACS numbers: 05.70.Ln, 05.20.Dd, 64.60.Cn

## 1. Introduction

In the recent years, a lot of effort has been expended with the aim of explaining the collective behaviour of living systems [1]. Such collective behaviours can be observed on many different scales including mammal herds [2], crowds of pedestrians [3, 4], bird flocks [5], fish schools [6], insect swarms [7], colonies of bacteria [8], molecular motors [9, 10] and even interacting robots [11]. It turns out that the collective properties of such systems seem to be quite robust and universal. Accordingly, this field attracted the interest of the statistical physics community with the challenge of introducing minimal models that could capture the emergence of collective behaviour. One important class of models consists of the so-called self-propelled particles models, for which the onset of collective motion without a leader is present. Vicsek *et al.* [12, 13] introduced a simple model defined on a continuous plane, where agents (or animals) are represented as point particles with a velocity of constant amplitude. Noisy interaction rules tend to align the velocity of any given particle with its neighbors. Extensive numerical simulations of this model have been performed [14, 15], showing the presence of a phase transition from a disordered state, at high enough noise,

to a state with collective motion. A different approach is to consider the problem at a coarsened-grained level and to describe the dynamics in terms of hydrodynamic fields. The equations governing the evolution of these hydrodynamic fields can be either postulated phenomenologically [16], on the basis of symmetry and conservation laws considerations [17, 18], or derived from specific microscopic models [19, 20]. The equations of motion of the hydrodynamic field are derived from the microscopic model through a Boltzmann approach.

Following an earlier publication [19], the motivation of the present work is to derive, from a microscopic model, the hydrodynamic equations describing at a coarse-grained level the flow of self-propelled particles (SPP), and to compare the resulting description with numerical simulations of an agent-based model of SPP. The analytical framework we use is that of the Boltzmann equation. Accordingly, a suitable microscopic model for such a treatment is a continuous time model with interactions reducing to binary collisions. In order to show that the most salient features of the coarse-grained analytical description are not specific to a binary collision model, we use for the numerical simulations a standard agent-based model [12, 13], that has been well characterized in the literature [14, 15]. Note that some comparison with numerical simulations of an agent-based model with binary interaction have already been presented in Ref. [19].

## 2. Microscopic models of interacting self-propelled particles

### 2.1. Definition of the models

*2.1.1. Continuous time model with binary collisions.* Following Ref. [19], we introduce a simple model that captures the essential physics of assemblies of self-propelled particles, while being suitable for a description in terms of a Boltzmann equation. We consider the evolution of self-propelled point-like particles on a two-dimensional plane. The displacement of each particle  $i$  is governed by a velocity vector  $\mathbf{v}_i$ . In order to account for the self-propelling property, we assume that the modulus of the velocity vector is fixed to a value  $v_0$ , identical for all the particles, so that only the direction of the vector plays a role in the dynamics. The relevant dynamical variables are then the angles  $\theta_i$  that the vectors  $\mathbf{v}_i$  form with a fixed reference direction. It is important to note at this stage, that fixing the modulus of the velocity breaks the Galilean invariance of the system. Hence one should not expect that the eventually obtained hydrodynamic equations obey such an invariance, contrary to what happens in usual flows.

Apart from the ballistic evolution according to their velocity vector, particles also experience stochastic events that punctuate their dynamics. These stochastic events are of two different types. The simplest ones are self-diffusion events, that is, the angle  $\theta$  of an isolated particle changes, with a probability  $\lambda$  per unit time, to  $\theta' = \theta + \eta$ , where  $\eta$  is a noise with distribution  $p_0(\eta)$  and variance  $\sigma_0^2$ . In the following, we consider a Gaussian distribution for  $p_0(\eta)$ , also taking into account the periodicity of  $\theta$ . This type of stochastic events lead to a diffusive behaviour at large scale, thus preventing the system from having a trivial (pseudo)collective motion, of purely ballistic nature. To drive the system into an organised state where a genuine collective motion sets in, one has to introduce interactions between the particles. Given that we wish to use a Boltzmann approach to study the model, it is natural to consider binary interactions between particles. These binary interactions are introduced as follows. When two



particles get closer than a threshold distance  $d_0$ , their velocity angle  $\theta_1$  and  $\theta_2$  are changed into  $\theta'_1$  and  $\theta'_2$  according to:

$$\theta'_1 = \bar{\theta} + \eta_1[2\pi], \quad \theta'_2 = \bar{\theta} + \eta_2[2\pi], \quad (1)$$

where  $\bar{\theta}$  is defined by:

$$\bar{\theta} = \arg(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}). \quad (2)$$

The noises  $\eta_1$  and  $\eta_2$  are independent Gaussian variables with variances  $\sigma^2$ . Note that  $\sigma^2$  may differ from the variance  $\sigma_0^2$  of the noise associated to the self-diffusion of particles.

*2.1.2. Agent-based model for numerical simulations.* In order to compare the results of the analytical approach based on the binary collision model to direct numerical simulations, we use a slight generalization of the standard Vicsek model [12, 13]. The motivation for simulating numerically a model different from the one we used in the analytical approach is twofold. First, the Vicsek model has been thoroughly characterized in the literature [13, 14, 15], making it a useful benchmark for comparison. Second, and most importantly, a model with continuous time dynamics and binary collisions is well-suited for a Boltzmann equation approach, but very inefficient from the point of view of direct numerical simulations. In contrast, the Vicsek model, with a discrete time dynamics and multi-neighbour interactions, is much more efficient to simulate.

The agent-based model we consider consists in  $N$  particles on a two-dimensional space of area  $L \times L$ , with periodic boundary conditions. Each particle  $j$  at any instant  $t$  has a constant modulus speed  $v_0$ . This property allows the mapping of velocity on complex numbers. Then a particle is located by a two-coordinate vector  $\mathbf{x}_j^t$  and an angle  $\vartheta_j^t$  which gives its speed direction. We define the vicinity  $\mathcal{V}_j^t$  of  $j$  at time  $t$  as the disk centred on  $j$  with a radius  $d_0$ . Then the direction of  $j$  at the next instant  $t + \Delta t$  is simply the direction of the averaged speed over all particles which are embedded in its vicinity, including  $j$  itself, up to a noise term. If there is no neighbour in the disk of interaction, self-diffusion occurs randomly:

$$\theta_j^{t+\Delta t} = \begin{cases} \arg\left[\sum_{k \in \mathcal{V}_j^t} e^{i\theta_k^t}\right] + \eta\xi_j^t, & \text{if } \mathcal{V}_j^t \neq \{j\}, \\ \theta_j^t + \eta_0\xi_j^t, & \text{with probability } \lambda\Delta t, \text{ if } \mathcal{V}_j^t = \{j\}, \\ \theta_j^t, & \text{with probability } 1 - \lambda\Delta t, \text{ if } \mathcal{V}_j^t = \{j\}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{x}_i^t + v_0\mathbf{e}(\theta_j^{t+\Delta t})\Delta t, \quad (4)$$

where  $\mathbf{e}(\theta)$  is the unit vector of direction  $\theta$ . The parameters  $\eta$  and  $\eta_0$  are the noise amplitudes for collision and self-diffusion respectively. The random number  $\xi_j^t$  is uncorrelated in time and from one particle to another. Its distribution is flat on  $[-\pi, \pi]$ . The slight generalization with respect to the standard Vicsek model consists in the introduction of the parameter  $\lambda$ , which characterizes the probability of self-diffusion per unit time. In the original model,  $\lambda\Delta t = 1$ . Note that, whenever possible, we have defined the agent-based model with notations consistent with that of the binary collision model, in order to facilitate comparison between the two models.

The Vicsek model has been studied in details in the literature [12, 14, 15]. A transition toward collective motion has been reported in early studies [12], and

later shown to exhibit strong finite size effects [14]. In Appendix A, we recall the methodology used to study the transition, and in particular the finite size scaling effects.

## 2.2. Dimensionless parameters

A first step in the understanding of the models is to identify the relevant dimensionless parameters and the possible regimes. Let us first consider the different length scales appearing in this problem: the interaction range  $d_0$ , the ballistic length  $\ell_{\text{bal}} = v_0/\lambda$ , and the typical distance between particles  $\ell_{\text{pp}} = 1/\sqrt{\rho}$ . With these three different lengths, one can form the following dimensionless numbers  $H$  and  $B$ :

$$H = \frac{\ell_{\text{pp}}}{d_0} = \frac{1}{d_0\sqrt{\rho}}, \quad B = \frac{\ell_{\text{bal}}}{d_0} = \frac{v_0}{d_0\lambda}. \quad (5)$$

$H$  characterises whether a system is diluted ( $H \gg 1$ ) or dense. One can see  $B$  as the relative weight of stand-alone flight over interaction. If  $B$  is large, ballistic flight is more important than collision and we can expect that particles are less correlated locally.

These numbers turn out to play an important role in the identification of the regimes of validity of the approximations we use, as seen in the following. The model also exhibits different behaviours for the different regimes which are defined by these numbers. At fixed noise intensity and fixed  $B$ , a more (resp. less) dense system is expected to move (resp. not) in a collective manner. At fixed noise and fixed dilution  $H$ , increasing  $B$  makes the flights more ballistic, which should favor collective motion. So one can guess that a relevant control parameter will be a combination of  $H$  and  $B$  (see section 4.1).

## 2.3. Summary of the main results

The paper is organised as follows. Section 3 is devoted to the derivation from the Boltzmann equation, through a specific approximation scheme, of the hydrodynamic equations for the continuous time binary collision model. Section 4 deals with the analysis of the phase diagram of the binary collision model, by looking at the stationary homogeneous solutions and studying their linear stability. A transition toward collective motion is observed, but the spatially homogeneous motion turns out to be unstable in the validity domain of the hydrodynamic equations, namely close to the transition line. A comparison with the agent-based model is presented, showing that the transition lines of both models are qualitatively similar, and share some quantitative properties. Then, Section 5 investigates the behaviour of the binary collision model beyond the strict domain of validity of the hydrodynamic equations. A direct stability analysis shows that far from the transition line, the spatially homogeneous motion is stable. We then test whether the hydrodynamic equations could be used, in this domain, as a semi-quantitative description. We find that the restabilization phenomenon is indeed observed in the hydrodynamic equations, although the predicted location of the transition line between stable and unstable motion does not match quantitatively with a perturbative treatment of the kinetic theory. We also show that there exist solitary wave solutions of the hydrodynamic equations, that resemble the travelling stripes of higher density observed in the agent-based model. Finally, Section 6 discusses the main conclusions and perspectives of the present work. Some technical aspects related to the agent-based model and to

the stability analysis of the homogeneous motion are reported in Appendix A and Appendix B respectively.

### 3. Boltzmann approach and hydrodynamic equations

#### 3.1. Description in terms of Boltzmann equation

One of the main goals of this work is to derive analytically from the microscopic dynamics, within an appropriate approximation scheme, the equations governing the evolution of the hydrodynamic fields, namely the density and velocity fields. A standard approach to obtain these hydrodynamic equations is to write, as a first step, the Boltzmann equation describing the evolution of the one-particle probability distribution in phase-space (i.e., the probability that a particle is at a given point, with a given velocity), and then to derive hydrodynamic equations by computing the first moments of the Boltzmann equation. Note however that such a procedure often yields a hierarchy of equations, so that a closure assumption has to be used.

Let us start by deriving the Boltzmann equation for the above model. This equation relies on the standard assumption that the gas is diluted, meaning that the typical distance  $\ell_{pp}$  between particles is large compared to the interaction distance  $d_0$ , that is  $H \gg 1$ . In the present context, one also needs to assume that the ballistic distance  $\ell_{bal}$  is much larger than  $d_0$ , namely  $B \gg 1$ . It ensures that there is no memory effect from one collision to the other. The Boltzmann equation governs the evolution of the distribution  $f(\mathbf{r}, \theta, t)$ , that gives the probability that a particle is at point  $\mathbf{r}$  with a velocity along the direction defined by the angle  $\theta$ . On general grounds, this equation can be written as

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{r}, \theta, t) + v_0 \mathbf{e}(\theta) \cdot \nabla f(\mathbf{r}, \theta, t) = I_{dif}[f] + I_{col}[f, f]. \quad (6)$$

The different terms in the equation can be interpreted as follows. The second term in the l.h.s. corresponds to the ballistic motion of particles between two stochastic events (self-diffusion or collision). In the r.h.s., the term  $I_{dif}[f]$  accounts for the self-diffusion events, and it reads

$$\begin{aligned} I_{dif}[f] = & -\lambda f(\mathbf{r}, \theta, t) + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' \int_{-\infty}^{\infty} d\eta p_0(\eta) \\ & \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\theta' + \eta - \theta + 2m\pi) f(\mathbf{r}, \theta', t). \end{aligned} \quad (7)$$

The sum of  $\delta$ -distributions accounts for the periodicity of angles. Finally, the term  $I_{col}[f, f]$  describes the effects of collisions. It can be derived in the following way. A collision between two particles occurs if their relative distance becomes less than  $d_0$ . Although the two particles a priori play a symmetric role, it is convenient to choose one particle, and to observe the situation in the referential of this particle –say particle 1. In this frame, the velocity of particle 2 is  $\tilde{\mathbf{v}}_2 = v_0(\mathbf{e}(\theta_2) - \mathbf{e}(\theta_1))$ . Hence, in order to collide with particle 1 between  $t$  and  $t + dt$ , particle 2 has to lie at time  $t$  (in the referential of particle 1) in a rectangle of length  $|\tilde{\mathbf{v}}_2|dt$  and of width  $2d_0$ . Coming back to the laboratory frame, this rectangle deforms into a parallelogram, but keeps the same surface, given by  $2d_0v_0|\mathbf{e}(\theta_2) - \mathbf{e}(\theta_1)|dt$ . The collision term  $I_{col}[f, f]$  is then obtained from the bilinear functional  $I_{col}[g, h]$ :

$$I_{col}[g, h] = -2d_0v_0g(\mathbf{r}, \theta, t) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' |\mathbf{e}(\theta') - \mathbf{e}(\theta)|h(\mathbf{r}, \theta', t) \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 & + 2d_0v_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta p(\eta) |\mathbf{e}(\theta_2) - \mathbf{e}(\theta_1)| \\
 & \times g(\mathbf{r}, \theta_1, t) h(\mathbf{r}, \theta_2, t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\bar{\theta} + \eta - \theta + 2m\pi),
 \end{aligned}$$

with again the notation  $\bar{\theta} = \arg(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2})$ , and where  $g$  and  $h$  are arbitrary phase-space distributions.

It is straightforward to check that the uniform one-particle distribution  $f_0(\mathbf{r}, \theta, t) = \rho_0/2\pi$ , associated to a uniform density of particles  $\rho_0$ , is a stationary solution of the Boltzmann equation, for any values of the noise parameters  $\sigma$  and  $\sigma_0$ , since each term in Eq. (6) vanishes independently. If a transition to a state with collective motion occurs, another distribution should be a steady-state solution of the Boltzmann equation. Yet, finding this non-trivial distribution through non-perturbative analytical method is a hard task. One could turn to numerical approaches, but we would rather like to obtain analytical results, at least in some specific regime. We thus use in the following an alternative approach, which consists in deriving hydrodynamic equations for the density and velocity fields from the Boltzmann equation, in the limit of small hydrodynamic velocity. A stability analysis can then be performed on these hydrodynamic equations in order to check the onset of collective motion.

### 3.2. Derivation of the hydrodynamic equations

*3.2.1. Hydrodynamic fields and continuity equation.* The hydrodynamic fields are on the one hand the density field:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta f(\mathbf{r}, \theta, t), \quad (9)$$

and on the other hand the velocity field:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{v_0}{\rho(\mathbf{r}, t)} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta f(\mathbf{r}, \theta, t) \mathbf{e}(\theta). \quad (10)$$

The equations governing the evolution of these hydrodynamic fields are derived by taking the successive moments of the Boltzmann equation. A simple integration of Eq. (6) over  $\theta$  directly leads the evolution equation for  $\rho(\mathbf{r}, t)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (11)$$

which is nothing but the usual continuity equation accounting for the conservation of the number of particles.

*3.2.2. Angular Fourier expansion of the phase-space distribution.* The derivation of the evolution equation for the velocity field is actually much more complicated, and one has to resort to approximation schemes. As  $f(\mathbf{r}, \theta, t)$  is a periodic function of  $\theta$ , it is convenient to work with its Fourier series expansion, defined as:

$$\hat{f}_k(\mathbf{r}, t) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta f(\mathbf{r}, \theta, t) e^{ik\theta}. \quad (12)$$

Conversely,  $f(\mathbf{r}, \theta, t)$  can be expressed as a function of the Fourier coefficients through the relation:

$$f(\mathbf{r}, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k(\mathbf{r}, t) e^{-ik\theta}. \quad (13)$$

In this framework, the uniform distribution  $f_0(\mathbf{r}, \theta, t) = (2\pi)^{-1}\rho_0$  corresponds to  $\hat{f}_k(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-1}\rho_0 \delta_{k,0}$ .

Let us use as a basis of the plane the two orthogonal vectors  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}(0)$  and  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}(\pi/2)$ . The components of  $\mathbf{e}(\theta)$  in this basis are obviously  $e_1(\theta) = \cos\theta$  and  $e_2(\theta) = \sin\theta$ . In order to obtain an evolution equation for the velocity field, we multiply Eq. (6) by  $\mathbf{e}(\theta)$  and integrate over  $\theta$ ; one gets in tensorial notations ( $j = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e_j(\theta) f(\mathbf{r}, \theta, t) + v_0 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e_j(\theta) e_l(\theta) f(\mathbf{r}, \theta, t) = \quad (14) \\ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e_j(\theta) (I_{\text{dif}}[f] + I_{\text{col}}[f, f]). \end{aligned}$$

To proceed further, it is convenient to identify complex numbers with two-dimensional vectors, in such a way that  $\mathbf{e}(\theta)$  is mapped onto  $e^{i\theta}$ . Then, in the same way,  $v_0 \hat{f}_1(\mathbf{r}, t)$  is associated to the momentum field  $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Hence, we wish to rewrite Eq. (14) in such complex notations. For later use, we shall write it in a slightly more general form, replacing  $e^{i\theta}$  with  $e^{ik\theta}$  ( $k$  being an integer):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{ik\theta} f(\mathbf{r}, \theta, t) + v_0 \sum_{\ell=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\ell} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{ik\theta} e_\ell(\theta) f(\mathbf{r}, \theta, t) = \quad (15) \\ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{ik\theta} (I_{\text{dif}}[f] + I_{\text{col}}[f, f]). \end{aligned}$$

Eq. (14) is recovered for  $k = 1$ , up to the mapping between complex number and two-dimensional vectors. The first term in the l.h.s. is simply  $\partial \hat{f}_k / \partial t$ . The r.h.s. of Eq. (15) is computed by inserting the Fourier series expansion (13) into Eqs. (7) and (8). After a rather straightforward calculation, one finds:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{ik\theta} (I_{\text{dif}}[f] + I_{\text{col}}[f]) = -\lambda \left(1 - e^{-k^2 \sigma_0^2 / 2}\right) \hat{f}_k(\mathbf{r}, t) \quad (16) \\ - \frac{2}{\pi} d_0 v_0 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(I_q - e^{-k^2 \sigma^2 / 2} I_{q-k/2}\right) \hat{f}_q(\mathbf{r}, t) \hat{f}_{k-q}(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

where the coefficients  $I_q$  are defined as:

$$I_q = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \cos q\theta. \quad (17)$$

From this definition, it is obvious that  $I_{-q} = I_q$ . For integer  $q$ ,  $I_q$  is given by:

$$I_q = \frac{4}{1 - 4q^2}, \quad (18)$$

while for half-integer  $q = m + \frac{1}{2}$  ( $m$  integer) one has:

$$I_{\frac{1}{2}} = I_{-\frac{1}{2}} = 2, \quad (19)$$

$$I_{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{m(m+1)} [(-1)^m (2m+1) - 1], \quad m \neq -1, 0. \quad (20)$$

The second term in the l.h.s. of Eq. (15) can be evaluated as follows. For  $l = 1, 2$  and  $k$  integer, let us define the complex quantity  $Q_l^{(k)}(\mathbf{r}, t)$  as:

$$Q_l^{(k)}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{ik\theta} e_l(\theta) f(\mathbf{r}, \theta, t). \quad (21)$$

The following relations are then easily obtained:

$$Q_1^{(k)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}[\hat{f}_{k+1}(\mathbf{r}, t) + \hat{f}_{k-1}(\mathbf{r}, t)], \quad (22)$$

$$Q_2^{(k)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2i}[\hat{f}_{k+1}(\mathbf{r}, t) - \hat{f}_{k-1}(\mathbf{r}, t)]. \quad (23)$$

*3.2.3. Velocity field equation in the small velocity regime.* Up to now, the calculations made are exact, apart from the approximations underlying the Boltzmann equation. As already mentioned, the Fourier coefficient  $\hat{f}_0(\mathbf{r}, t)$  is nothing but the density field  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , and  $\hat{f}_1(\mathbf{r}, t)$  can be mapped onto the momentum field  $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$  through the identification of complex numbers with two-dimensional vectors. A similar mapping also holds for  $\hat{f}_{-1}(\mathbf{r}, t)$ , which is the complex conjugate of  $\hat{f}_1(\mathbf{r}, t)$ . In contrast, Fourier coefficient  $\hat{f}_k(\mathbf{r}, t)$  with  $|k| > 1$  cannot be mapped onto the hydrodynamic fields. As it turns out that such coefficients appear both in the expression of  $Q_l^{(k)}(\mathbf{r}, t)$  and in the r.h.s. of Eq. (15), an approximation scheme has to be found in order to obtain from Eq. (15) a closed hydrodynamic equation, involving only the fields  $\rho(\mathbf{r}, t)$  and  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

In the following, we assume that the distribution  $f(\mathbf{r}, \theta, t)$  is close to an isotropic distribution, namely, it depends only slightly on  $\theta$ . This amounts to assuming that the hydrodynamic velocity is much smaller than the velocity of individual particles. In terms of Fourier coefficients, the hydrodynamic velocity is given by  $\|\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\| = v_0 |\hat{f}_1(\mathbf{r}, t)| / \rho(\mathbf{r}, t)$ . We introduce a small parameter  $\epsilon$  such that  $\|\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\| = \mathcal{O}(\epsilon)$ . For instance,  $\epsilon$  can be chosen as  $\bar{u}/v_0$ , where  $\bar{u}$  is the spatial average of  $\|\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\|$  at some initial time  $t = t_0$ . Then the key assumption we use to build an approximation scheme is

$$\hat{f}_k(\mathbf{r}, t) = \mathcal{O}(\epsilon^{|k|}). \quad (24)$$

Such a scaling ansatz is consistent with the property  $\hat{f}_{-k}(\mathbf{r}, t) = \hat{f}_k(\mathbf{r}, t)^*$ , with the scaling properties of  $\hat{f}_0(\mathbf{r}, t)$  and  $\hat{f}_1(\mathbf{r}, t)$ , and with Eq. (16). We shall identify more precisely in Section 4.1.2 the validity domain of this scaling ansatz, and thus of the hydrodynamic equations we will derive from it.

Using the above scaling ansatz, the sum in the r.h.s. of Eq. (16), for  $k = 1$ , can be truncated, only keeping terms with  $q = 0, 1$  or  $2$ , that are at most of order  $\epsilon^3$ , while discarding the other terms, being of higher order in  $\epsilon$ . Gathering all terms, one obtains the following equation for the evolution of  $\hat{f}_1$  (we drop the explicit dependence upon  $\mathbf{r}$  and  $t$  to simplify the notations):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial t} + \frac{v_0}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\hat{f}_2 + \rho) + \frac{v_0}{2i} \frac{\partial}{\partial x_2} (\hat{f}_2 - \rho) = \\ - \left[ \lambda \left( 1 - e^{-\sigma_0^2/2} \right) + \frac{8}{\pi} d_0 v_0 \left( \frac{2}{3} - e^{-\sigma^2/2} \right) \rho \right] \hat{f}_1 \\ - \frac{8}{\pi} d_0 v_0 \left( e^{-\sigma^2/2} - \frac{2}{5} \right) \hat{f}_1^* \hat{f}_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Hence, the resulting equation involves  $\hat{f}_0 = \rho$ ,  $\hat{f}_1$  and  $\hat{f}_2$ . Accordingly, it turns out that one needs to find a closure relation to express  $\hat{f}_2$  as a function of  $\hat{f}_0$  and  $\hat{f}_1$  (or, equivalently, in terms of  $\rho$  and  $\mathbf{u}$ ). Such a relation is given by the evolution equation for  $\hat{f}_2$ , that is, Eq. (15) with  $k = 2$ . From Eq. (16), one sees that Fourier coefficients  $\hat{f}_q$  with  $|q| > 2$  are a priori involved, but they can actually be discarded as being of order higher than  $\epsilon^2$ , whereas  $\hat{f}_2 = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Similarly, the quantity  $Q_i^{(2)}$  can be expressed as a function of  $\hat{f}_1$  and  $\hat{f}_3$ , and here again,  $\hat{f}_3$  can be neglected. One thus ends up with the following equation for  $\hat{f}_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial t} + \frac{v_0}{2} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial x_1} - \frac{v_0}{2i} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial x_2} = \\ - \left[ \lambda \left( 1 - e^{-2\sigma_0^2} \right) + \frac{16}{3\pi} d_0 v_0 \left( \frac{7}{5} + e^{-2\sigma^2} \right) \rho \right] \hat{f}_2 \\ + \frac{8}{\pi} d_0 v_0 \left( \frac{1}{3} + e^{-2\sigma^2} \right) \hat{f}_1^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Within our hydrodynamic description, it is also natural to assume that the phase-space probability density  $f(\mathbf{r}, \theta, t)$ , or equivalently, its Fourier coefficients  $\hat{f}_k(\mathbf{r}, t)$ , vary significantly only over time and length scales that are much larger than the microscopic ones. Relevant microscopic time scales are the typical collision time  $\tau_{\text{col}} = 1/(\rho d_0 v_0)$ , and the typical ballistic time  $\tau_{\text{bal}} = 1/\lambda$  between self-diffusion events. It is thus legitimate to neglect the term  $\partial \hat{f}_2 / \partial t$  in Eq. (26), as it is much smaller than  $\hat{f}_2 / \tau_{\text{col}}$  and  $\hat{f}_2 / \tau_{\text{bal}}$ . In contrast, the terms containing the spatial derivatives have to be retained, as they involve  $\hat{f}_1$  which is much larger than  $\hat{f}_2$ .

From Eq. (26) –without the time-derivative term– one can express  $\hat{f}_2$  as a function of  $\rho$  and  $\hat{f}_1$ . Then plugging this expression for  $\hat{f}_2$  into Eq. (15), with  $k = 1$ , leads to a closed hydrodynamic equation governing the evolution of  $\hat{f}_1$ , and involving only  $\hat{f}_1$  and  $\rho$ . Mapping back complex numbers onto two-dimensional vectors,  $v_0 \hat{f}_1$  can be identified with the “momentum” field  $\mathbf{w} = \rho \mathbf{u}$ , and one obtains the following hydrodynamic equation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \gamma (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} = - \frac{v_0^2}{2} \nabla \rho + \frac{\kappa}{2} \nabla \mathbf{w}^2 + (\mu - \xi \mathbf{w}^2) \mathbf{w} + \nu \nabla^2 \mathbf{w} \\ - \kappa (\nabla \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} + 2\nu' \nabla \rho \cdot \mathbf{M} - \nu' (\nabla \cdot \mathbf{w}) \nabla \rho, \end{aligned} \quad (27)$$

with  $\nu' = \partial \nu / \partial \rho$ , and where  $\mathbf{M} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^{\text{T}})$  is the symmetric part of the momentum gradient tensor. The different coefficients appearing in this equation are given by:

$$\nu = \frac{v_0^2}{4} \left[ \lambda \left( 1 - e^{-2\sigma_0^2} \right) + \frac{16}{3\pi} d_0 v_0 \rho \left( \frac{7}{5} + e^{-2\sigma^2} \right) \right]^{-1}, \quad (28)$$

$$\gamma = \frac{16\nu d_0}{\pi v_0} \left( \frac{16}{15} + 2e^{-2\sigma^2} - e^{-\sigma^2/2} \right), \quad (29)$$

$$\kappa = \frac{16\nu d_0}{\pi v_0} \left( \frac{4}{15} + 2e^{-2\sigma^2} + e^{-\sigma^2/2} \right), \quad (30)$$

$$\mu = \frac{8}{\pi} d_0 v_0 \rho \left( e^{-\sigma^2/2} - \frac{2}{3} \right) - \lambda \left( 1 - e^{-\sigma_0^2/2} \right), \quad (31)$$

$$\xi = \frac{256\nu d_0^2}{\pi^2 v_0^2} \left( e^{-\sigma^2/2} - \frac{2}{5} \right) \left( \frac{1}{3} + e^{-2\sigma^2} \right). \quad (32)$$

Eq. (27) may be considered as a generalization of the Navier-Stokes equation to a case where on the one hand, the global momentum of the assembly of particles is not conserved by the microscopic dynamics, and on the other hand, the dynamics breaks the Galilean invariance. This shows up in the appearance of new terms in the equation, as well as in the presence of the coefficient  $\gamma$ , generically different from the Navier-Stokes value  $1/\rho$ , in front of the  $(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{w}$  term. For instance, if  $\lambda \ll \rho d_0 v_0$ ,  $\gamma\rho$  remains close to 0.6 for any value of  $\sigma$ .

The different terms in the r.h.s. of Eq. (27) may be interpreted as follows. Neglecting the density dependence of  $\kappa$ , the first two terms can be considered as a pressure gradient, where the effective pressure  $P_{\text{eff}}$  obeys the equation of state  $P_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(v_0^2\rho - \kappa\mathbf{w}^2)$ . The third term accounts for the local relaxation of the momentum field  $\mathbf{w}$ , and this term plays an important role in the onset of a collective behaviour, as we shall see in the following section (note that  $\xi > 0$  when  $\mu > 0$ ). The fourth term describes the viscous damping, like in the usual Navier-Stokes equation. The parameter  $\nu$  can thus be interpreted as a kinematic viscosity. It decreases when  $\rho$  increases, but the 'dynamic' viscosity  $\rho\nu$  increases with  $\rho$ . The fifth term may be thought of as a nonlinear feedback on the momentum field of the compressibility of the flow. Finally, the two last terms correspond to a coupling between the density and momentum gradients.

It is also important to note that the above hydrodynamic equation (27) is consistent with the phenomenological equation postulated by Toner and Tu on the basis of symmetry considerations [17]. Specifically, expanding the expression of  $\mathbf{w} = \rho\mathbf{u}$  in that equation, we find the same terms involving the velocity gradients as in Ref. [17]. But it turns out that the term  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{w})$ , that would be allowed from symmetry considerations, does not appear in the present approach, that is, the coefficient in front of it vanishes. Note also that the term  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)^2\mathbf{u}$  considered by Toner and Tu [17], does not appear here for being of higher order than the terms retained in the expansion. Last, hydrodynamic equations which have been derived through the kinetic approach are entirely deterministic, while Toner and Tu studied stochastic equations. However some additional terms also appear, like the coupling terms between density and velocity gradients. Most importantly, the present approach provides a microscopic justification to the hydrodynamic equation of motion, and yields explicit expressions, as a function of the microscopic parameters, for the different coefficients appearing in the equations (transport coefficients).

## 4. Noise-density phase diagram from the hydrodynamic equations

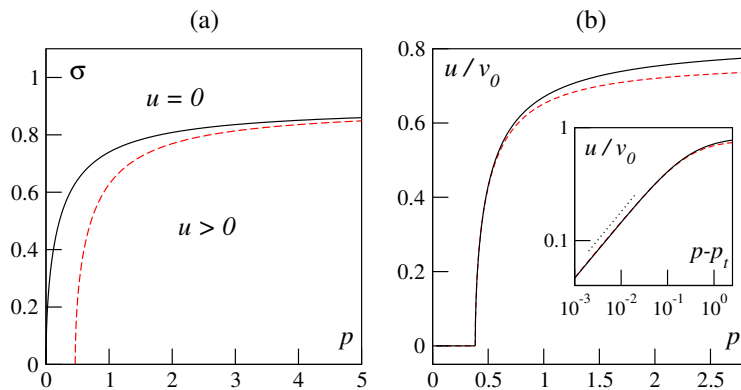
### 4.1. Spatially homogeneous stationary solutions

4.1.1. *Transition toward collective motion.* Now that the hydrodynamic equations of motion have been derived, it is natural to look for the different possible stationary solutions and to test their stability. Let us first look for the spatially homogeneous stationary solutions. Dropping all space and time derivatives, one ends up with the simple equation:

$$(\mu - \xi\mathbf{w}^2)\mathbf{w} = 0. \quad (33)$$

Hence a trivial homogeneous stationary solution is  $\mathbf{w} = 0$  for all values of the parameters. When  $\mu > 0$ , a second solution appears, namely  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 = \sqrt{\mu/\xi}\mathbf{e}$ , where  $\mathbf{e}$  is a unit vector pointing in an arbitrary direction. The stability against





**Figure 1.** (a) Phase diagram of the model in the plane  $(p, \sigma)$ , with  $p = \rho v_0 d_0 / \lambda$ . A transition line (full line:  $\sigma_0 = \sigma$ ; dashed line:  $\sigma_0 = 1$ ) indicates the linear instability threshold of the state  $u = |\mathbf{u}| = 0$ . (b) Hydrodynamic velocity  $u$  in the homogeneous state for  $\sigma = \sigma_0 = 0.6$ , computed numerically from the Boltzmann equation (full line) and analytically from the hydrodynamic equations (dashed line). Inset: same data on logarithmic scales (dots: slope  $1/2$ ).

spatially homogeneous perturbations is easily tested by assuming that the flow is homogeneous, but time-dependent in Eq. (27), yielding:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = (\mu - \xi \mathbf{w}^2) \mathbf{w}. \quad (34)$$

It follows that  $\mathbf{w} = 0$  is a stable solution when  $\mu < 0$ , while it becomes unstable for  $\mu > 0$ . In the latter case, the emerging solution  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$  is stable against homogeneous perturbations. From the expression (31) of  $\mu$ , we see that the sign of  $\mu$  is related to a competition between density and self-diffusion. When the self-diffusion probability  $\lambda$  is high,  $\mu < 0$  and there is no flow. In contrast, when the density is high,  $\mu > 0$  and a spontaneous flow appears, due to the numerous interactions between particles. The value  $\mu = 0$  defines a transition line in the phase diagram noise versus density: for given values  $\sigma$  and  $\sigma_0$  of the noises, the nonzero solution  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$  appears for a density  $\rho > \rho_t$ , where the threshold density  $\rho_t$  is given by:

$$\rho_t = \frac{\pi \lambda (1 - e^{-\sigma_0^2/2})}{8 d_0 v_0 (e^{-\sigma^2/2} - \frac{2}{3})}. \quad (35)$$

In terms of the dimensionless parameter (or reduced density)

$$p = \frac{B}{H^2} = \frac{d_0 \ell_{\text{bal}}}{\ell_{\text{pp}}^2} = \frac{\rho d_0 v_0}{\lambda}, \quad (36)$$

the threshold is expressed as

$$p_t = \frac{\pi (1 - e^{-\sigma_0^2/2})}{8 (e^{-\sigma^2/2} - \frac{2}{3})}. \quad (37)$$

This last result is interesting, as it shows that the threshold  $p_t$ , which could a priori depend on the three dimensionless numbers  $\sigma$ ,  $\sigma_0$  and  $B$ , actually does not depend on  $B$ . The transition line is plotted in Fig. 1(a) for the two cases  $\sigma_0 = \sigma$  and  $\sigma_0 = 1$ . Instead of considering the transition as a function of the density, one may also look for the transition by varying the noises at a given fixed density. If the two noise intensities

$\sigma_0$  and  $\sigma$  are equal, the instability of  $\mathbf{w} = 0$  occurs for any (non-zero) density, and the threshold noise  $\sigma_t$  behaves in the low density limit  $p \rightarrow 0$  as  $\sigma_t \sim p^{1/2}$ . This nontrivial prediction can be verified in direct numerical simulations (see below). In contrast, when  $\sigma_0$  is kept fixed while varying  $\sigma$ , no transition occurs as a function of  $\sigma$  if the reduced density is lower than a limit  $p_t^0$  given by:

$$p_t^0 = \frac{3\pi}{8}(1 - e^{-\sigma_0^2/2}). \quad (38)$$

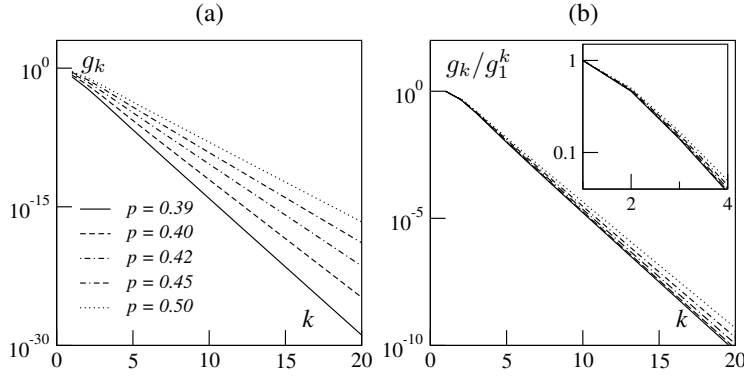
Finally, in the opposite limit of high density, the threshold noise  $\sigma_t$  saturates to a value  $\sigma_t^\infty = (2 \ln \frac{3}{2})^{1/2} \approx 0.90$ .

*4.1.2. Validity domain of the hydrodynamic equations.* The hydrodynamic equations rely on the scaling ansatz (24). In order to verify a posteriori the validity of the hydrodynamic equations, we compare the stationary homogeneous solutions with non-zero velocity obtained from the hydrodynamic equations to that numerically computed from the Boltzmann equation. The hydrodynamic velocity  $u$ , computed as  $u = u_1 \equiv \rho^{-1} \sqrt{\mu/\xi}$ , is plotted on Fig. 1(b) as a function of the reduced density  $p$ . Note that  $u/v_0$  is a function of the dimensionless numbers  $p$ ,  $\sigma$  and  $\sigma_0$  only. As expected, the velocity  $u$  computed from the hydrodynamic equation matches perfectly, in the small velocity regime (i.e., close to the transition line) the numerical data from the Boltzmann equation. However, it turns out that even quite far from the transition, when  $u$  becomes of the order of  $v_0$ , the value  $u_1$  computed from the hydrodynamic equation remains a good estimate of the value obtained from the Boltzmann equation. In particular, it is interesting to note that  $u_1$  also saturates at large  $\rho$  to a finite value  $u_1^\infty(\sigma) < 1$ , given by

$$u_1^\infty(\sigma) = v_0 \left[ \frac{2 \left( e^{-\sigma^2/2} - \frac{2}{3} \right) \left( \frac{7}{15} + \frac{1}{3} e^{-2\sigma^2} \right)}{\left( e^{-\sigma^2/2} - \frac{2}{5} \right) \left( \frac{1}{3} + e^{-2\sigma^2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (39)$$

(see Fig. 1(b)). Hence, even beyond their domain of validity, which is restricted to small values of the hydrodynamic velocity, the hydrodynamic equations we have derived yield a rather good approximation of the exact dynamics. Specifically, they fulfill the condition that the hydrodynamic velocity should remain smaller than the individual velocity  $v_0$  of the particles, although this result was not a priori obvious given the approximations made.

To further test the validity of the hydrodynamic equations, we have also checked explicitly, from a numerical calculation, that the scaling ansatz (24) is correct. Specifically, we computed from a numerical integration the stationary and spatially homogeneous solution  $\hat{f}_k^{\text{st}}$  of the Boltzmann equation. In order to work with dimensionless quantities, we plot on Fig. 2(a) the quantities  $g_k = \hat{f}_k^{\text{st}}/\rho$  (instead of  $\hat{f}_k^{\text{st}}$ ) as a function of  $k$ . We observe that  $g_k$  decays almost exponentially with  $k$ , as soon as  $k \gtrsim 4$ . To test the scaling ansatz, we first reformulate it in a more specific way. The ansatz is obeyed if there exists for all  $k$  a constant  $c_k$  such that  $g_k \approx c_k g_1^k$  in a parameter regime where  $g_1 \ll 1$ . We thus plot on Fig. 2(b) the ratio  $g_k/g_1^k$  for different values of the density, close to the transition, and we observe a reasonable collapse of the data. Let us however emphasize that a strict collapse of the data is not necessary in order to apply the approximation scheme used in the derivation of the hydrodynamic equations. The essential requirement is that the quantities  $g_k$  with  $k > 2$  could be neglected. As the ratio  $g_k/g_1^k$  decays rapidly with  $k$ , neglecting terms with  $k > 2$  is a safe approximation.



**Figure 2.** Test of the scaling ansatz  $\hat{f}_k = \mathcal{O}(\epsilon^{|k|})$ . (a)  $g_k = \hat{f}_k^{\text{st}}/\rho$  versus  $k$ , for  $\sigma = \sigma_0 = 0.6$  and different values of the reduced density  $p$ , close to the transition density ( $p_t = 0.3837$ ); an exponential decay is observed. (b)  $g_k/g_1^k$  as a function of  $k$ , showing that for a given  $k$ ,  $g_k$  is essentially proportional to  $g_1^k$  when the density is varied ( $\lambda = 0.5$ ,  $d_0 = 0.5$ ,  $v_0 = 1$ ). Inset: zoom on the small  $k$  region.

#### 4.2. Stability against inhomogeneous perturbations of the homogeneous stationary solutions

*4.2.1. Evolution equation for the perturbations.* We have shown that above a threshold density  $\rho_t$ , or equivalently, below a threshold noise  $\sigma_t$ , the solution with zero velocity becomes unstable, and a stable solution with finite velocity emerges. Yet, only the stability with respect to homogeneous perturbations (i.e., with infinite wavelength) has been tested up to now. Hence this does not ensure that the finite velocity solution is really stable, as it may be destabilized by finite wavelength perturbations. We now check this issue, by introducing small perturbations around the homogeneous stationary solutions  $\rho_0$  and  $\mathbf{w}_0$ , namely

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{w}_0 + \delta\mathbf{w}(\mathbf{r}, t). \quad (40)$$

Note that  $\mathbf{w}_0$  may either be equal to zero or to the nonzero solution  $\mathbf{w}_1$ . Plugging these expressions into the hydrodynamic equations (11) and (27), we can expand the resulting equations to first order in the perturbation fields  $\delta\rho(\mathbf{r}, t)$  and  $\delta\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$ , also taking into account the density dependence of the different coefficients. This yields the following linearized equations:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\rho + \nabla \cdot \delta\mathbf{w} = 0, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta\mathbf{w} + \gamma(\mathbf{w}_0 \cdot \nabla) \delta\mathbf{w} = & -\frac{v_0^2}{2} \nabla \delta\rho + \kappa \nabla(\mathbf{w}_0 \cdot \delta\mathbf{w}) \\ & + [(\mu' - \xi' \mathbf{w}_0^2) \delta\rho - 2\xi \mathbf{w}_0 \cdot \delta\mathbf{w} - \kappa \nabla \cdot \delta\mathbf{w}] \mathbf{w}_0 \\ & + (\mu - \xi \mathbf{w}_0^2) \delta\mathbf{w} + \nu \nabla^2 \delta\mathbf{w}, \end{aligned} \quad (42)$$

where  $\mu'$  and  $\xi'$  are shorthand notations for  $\partial\mu/\partial\rho$  and  $\partial\xi/\partial\rho$ . Note that  $\partial\mu/\partial\rho$  is actually a constant, i.e., it is independent of  $\rho$ . Then we make the following ansatz

$$\delta\rho(\mathbf{r}, t) = \delta\rho_0 e^{st+i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad \delta\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = \delta\mathbf{w}_0 e^{st+i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (43)$$

where  $\delta\mathbf{w}_0$  is a vector (with real components), and  $\delta\rho_0$  is a complex amplitude that takes into account a possible phase shift between density and momentum perturbation

fields. Both  $|\delta\mathbf{w}_0|$  and  $|\delta\rho_0|$  are assumed to be small. The wavenumber  $\mathbf{q}$  is assumed to have real components, whereas the growth rate  $s$  is a priori complex. In addition,  $\mathbf{q}$  is considered to be given, and one looks for the dispersion relation  $s(\mathbf{q})$ . If the real part  $\Re[s(\mathbf{q})] > 0$ , the mode with wavenumber  $\mathbf{q}$  is unstable. Then Eqs. (41) and (42) become:

$$s \delta\rho_0 + i\mathbf{q} \cdot \delta\mathbf{w}_0 = 0, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} [s + \gamma(\mathbf{w}_0 \cdot i\mathbf{q}) - (\mu - \xi\mathbf{w}_0^2) + \nu\mathbf{q}^2]\delta\mathbf{w}_0 = \\ - \frac{1}{2}(v_0^2 \delta\rho_0 - 2\kappa\mathbf{w}_0 \cdot \delta\mathbf{w}_0)i\mathbf{q} \\ + [(\mu' - \xi'\mathbf{w}_0^2)\delta\rho_0 - (2\xi\mathbf{w}_0 + \kappa i\mathbf{q}) \cdot \delta\mathbf{w}_0]\mathbf{w}_0. \end{aligned} \quad (45)$$

Note that, due to linearity, the above equations can be re-expressed as a function of the ratio of amplitudes  $\delta\mathbf{w}_0/\delta\rho_0$ .

*4.2.2. Stability of the zero-velocity solution.* Let us first check the stability against inhomogeneous perturbations of the solution  $\mathbf{w}_0 = 0$ , which is known to be stable against homogeneous perturbations in the low density phase  $\rho < \rho_t$  (corresponding to  $\mu < 0$ ). In this case, Eq. (45) simplifies to:

$$(s + \nu\mathbf{q}^2 - \mu)\delta\mathbf{w}_0 = -\frac{i}{2}v_0^2\delta\rho_0\mathbf{q}. \quad (46)$$

Thus  $\delta\mathbf{w}_0$  is along the same direction as  $\mathbf{q}$ . Writing  $\mathbf{q} = q\mathbf{e}$  and  $\delta\mathbf{w}_0 = \delta w_0\mathbf{e}$ , where  $\mathbf{e}$  is an arbitrary unit vector, one can eliminate the ratio  $\delta w_0/\delta\rho_0$  from Eq. (44), yielding:

$$s^2 + (\nu q^2 - \mu)s + \frac{v_0^2}{2}q^2 = 0. \quad (47)$$

The discriminant of this second order polynomial equation reads (note that  $\mu < 0$ ):

$$\Delta = (|\mu| + \nu q^2)^2 - 2v_0^2 q^2. \quad (48)$$

If  $\Delta \geq 0$ , the roots are real, and one finds for the largest one  $s_+$ :

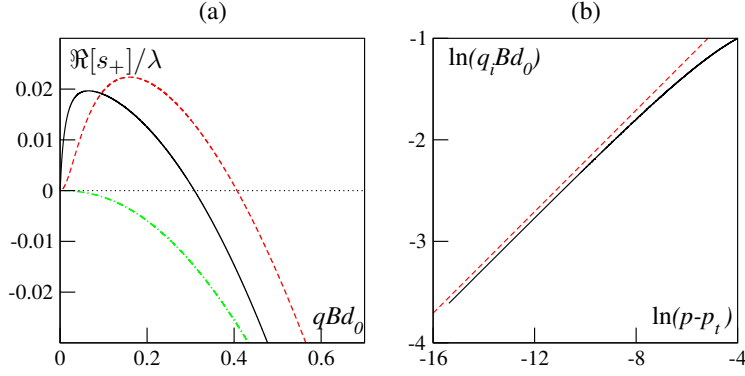
$$s_+ = \frac{1}{2} \left[ -(|\mu| + \nu q^2) + \sqrt{(|\mu| + \nu q^2)^2 - 2v_0^2 q^2} \right] < 0. \quad (49)$$

In the opposite case  $\Delta < 0$ , the roots  $s_{\pm}$  are complex conjugates, and their real part is given by:

$$\Re[s_{\pm}] = -\frac{1}{2}(|\mu| + \nu q^2) < 0. \quad (50)$$

As a consequence, the homogeneous fields  $\mathbf{w}_0 = 0$  is stable with respect to finite wavelength perturbations in the region  $\rho < \rho_t$ .

*4.2.3. Stability of homogeneous collective motion.* We now turn to the stability analysis of the stationary homogeneous flow  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_1$ , obtained for  $p > p_t$ . For the hydrodynamic equations to be valid, we restrict our study to values of  $p$  very close to  $p_t$ , with  $p > p_t$ . One could a priori consider vectors  $\mathbf{q}$  and  $\delta\mathbf{w}_0$  that make arbitrary angles with respect to  $\mathbf{w}_1$ . However, it can be shown (see Appendix B) that only some specific angles are allowed. Further, for all allowed perturbation modes such that  $\mathbf{q}$  and  $\delta\mathbf{w}_0$  are not along the direction of  $\mathbf{w}_1$ , the real part of the growth rate  $s$  is negative, so that these modes are stable (Appendix B). The only instability that appears is for longitudinal perturbations, such that  $\mathbf{q}$ ,  $\delta\mathbf{w}_0$  and  $\mathbf{w}_1$  all have the same direction. We thus focus on this specific case in the following.



**Figure 3.** Longitudinal instability. (a)  $\Re[s_+]/\lambda$  versus  $q$  for  $p = 0.22$  (full line),  $0.30$  (dashed) and  $p = 0.4$  (dot-dashed), and  $\sigma = \sigma_0 = 0.5$  ( $p_t = 0.2138$ ). The maximum growth rate decreases when  $p$  is increased. (b)  $(q_i B d_0)$  vs  $(p - p_t)$  in logarithmic scales. The dashed line indicates the scaling  $q_i \propto (p - p_t)^{1/4}$ .

Considering a longitudinal perturbation, we write  $\mathbf{w}_1 = w_1 \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{q} = q \mathbf{e}$  and  $\delta \mathbf{w}_0 = \delta w_0 \mathbf{e}$ , where  $\mathbf{e}$  is a unit vector. Under these assumptions, Eqs. (44) and (45) become:

$$s \delta \rho_0 + i q \delta w_0 = 0, \quad (51)$$

$$(s + \gamma i q w_1 + \nu q^2) \delta w_0 = -\frac{i q}{2} (v_0^2 \delta \rho_0 - 2 \kappa w_1 \delta w_0) + w_1 [(\mu' - \xi' w_1^2) \delta \rho_0 - (2 \xi w_1 + i q \kappa) \delta w_0], \quad (52)$$

where we also take into account that  $\mu - \xi w_1^2 = 0$ . From Eq. (51), one gets  $\delta w_0 / \delta \rho_0 = -s / i q$ , which we report in Eq. (52). This yields a polynomial of second degree in  $s$

$$s^2 + s [(\nu q^2 + 2\mu) + i q \gamma w_1] + \left[ \frac{q^2 v_0^2}{2} + i q w_1 (\mu' - \xi' w_1^2) \right] = 0, \quad (53)$$

from which two solutions  $s_{\pm}$  can be obtained. Denoting as  $s_+$  the solution with the largest real part, we find

$$\Re[s_+] = -\frac{1}{2} (\nu q^2 + 2\mu) + \sqrt{\frac{1}{8} \left( J_1 + \sqrt{J_1^2 + J_2^2} \right)}, \quad (54)$$

with

$$J_1 = (\nu q^2 + 2\mu)^2 - q^2 (\gamma^2 w_1^2 + 2v_0^2) \\ J_2 = 2w_1 q [\gamma (\nu q^2 + 2\mu) - 2\mu' + 2\xi' w_1^2].$$

To deal with this complicated expression, we first plot  $\Re[s_+]$  as a function of  $q$  for some specific values of the parameters (see Fig. 3(a)). Near the threshold  $p_t$  of collective motion, there exists a threshold value  $q_i$  such that  $\Re[s_+]$  is positive for  $q < q_i$  and negative for  $q > q_i$ . Hence the homogeneous flow turns out to be unstable with respect to long wavelength perturbations.

This result is confirmed by a small  $q$  expansion of Eq. (54). Expanding  $\Re[s_+]$  up to second non-trivial order in  $q$ , that is to order  $q^4$  since only even powers of  $iq$  appear in the expansion of the real part of  $s_+$ , we get<sup>‡</sup>.

$$\Re[s_+] = \frac{\mu'^2}{8\xi\mu^2} q^2 - \frac{5\mu'^4}{128\xi^2\mu^5} q^4 + \mathcal{O}(q^6). \quad (55)$$

The positivity of the coefficient of the  $q^2$  term confirms that, close to the transition line, long wavelength modes are unstable. Note that the expansion (55) is consistent as long as the fourth order term remains small with respect to the second order one, yielding the condition  $q \ll q^*$  which defines the wavenumber  $q^*$ :

$$q^* = d_0^{-1} B^{-1} (p - p_t)^{\frac{3}{2}} \Psi(p). \quad (56)$$

The function  $\Psi(p)$  goes to a constant value for  $p \rightarrow 0$ , and  $\Psi(p) \sim p^{-1/2}$  for  $p \rightarrow \infty$ . The wave vector  $q^*$  defines the region where the first term of the expansion of  $\Re[s_+]$  is dominant.

Interestingly, we observe that other wavenumbers characterizing  $\Re[s_+]$  have a different scaling with  $p - p_t$ , the deviation from the threshold. For instance, it can be shown analytically that the wavenumber  $q_i$ , defined by  $\Re[s_+] = 0$ , scales as  $q_i \sim w_1^{1/2} \sim (p - p_t)^{1/4}$ , as illustrated on Fig. 3(b). The wavenumber  $q_i$  delimitates the domain of unstable modes. Another example is given by the wavenumber  $q_m$  that maximizes  $\Re[s_+]$ , and thus corresponds to the most unstable modes:  $q_m$  is found to scale as  $q_m \sim w_1 \sim (p - p_t)^{1/2}$ . The existence of these different scaling regimes is an illustration of the complexity of the dynamics close to the transition line.

Finally, we emphasize that the perturbations that destabilize the homogeneous collective motion (that is, the long-range order) are different from the ones that destabilize long-range order in the XY-model, an equilibrium model with essentially the same symmetries as in the present model. In our model, motion is destabilized by longitudinal waves, while in the XY-model, long-range order is destabilized by spin-waves, that is, by a small change in the spin direction from one spin to the neighbouring ones.

### 4.3. Comparison with the phase diagram of the agent-based model

**4.3.1. Numerics and parameters.** All simulations are performed using models defined on a square domain, with periodic conditions on both boundaries. The initial conditions always consist in randomly dispersed particles, with a uniformly chosen random speed direction. Then all measurements are performed after a sufficiently long time so that a stationary state is reached.

In the above framework of the Boltzmann equation, we considered diluted systems with small correlations between particles, which is expressed in terms of the dimensionless number  $H$  and  $B$  as:

$$H \gg 1, \quad B \gg 1. \quad (57)$$

<sup>‡</sup> To simplify the resulting expressions, we approximate the coefficients of the expansion in  $q$  by their leading order in  $1/\mu$ , as  $\mu$  is small close to the transition line. The full expression of the coefficient  $s_2$  of the  $q^2$  term reads:

$$s_2 = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{\xi} \left( \frac{\mu'}{\mu} - \frac{\xi'}{\xi} - \gamma \right)^2 - \frac{\gamma^2}{\xi} - \frac{2v_0^2}{\mu} \right].$$

This expression will be used in Fig. 5 to compare with numerical results.

In the numerical agent-based model, we do not have access to very large values of  $H$  and  $B$ , due to simulation constraints. However, to be as consistent as possible with the kinetic theory approach, we mainly explored a parameter range such that  $H \geq 4$  and  $B \geq 4$ . Among the three dependent dimensionless numbers  $B$ ,  $H$  and  $p$ , we decided to keep  $B$  to characterize the set of parameters, and  $p$  as the control parameter.

Throughout the study, we fix  $\Delta t = 1$ . We defined some sets of parameters  $(d_0, v_0, \lambda)$  and, for each of them, we studied the behaviour of the system in the parameters space  $(\rho, \eta)$ . To make the comparison between analytical and numerical results easier, we characterize the noise amplitude by its *rms*-value  $\sigma$  (or equivalently its variance  $\sigma^2$ ). For a uniform noise on the interval  $[-\eta\pi, \eta\pi]$ , we have  $\sigma = \eta\pi/\sqrt{3}$ . The self-diffusion noise is kept equal to the collision noise ( $\sigma_0 = \sigma$ ), except for one set of parameters in which the angle of diffusion  $\eta_0\xi_j^t$  is chosen over the whole circle. We call its *rms*-value  $\sigma_0^{\max}$ . All the parameter values are summarised in Table 1.

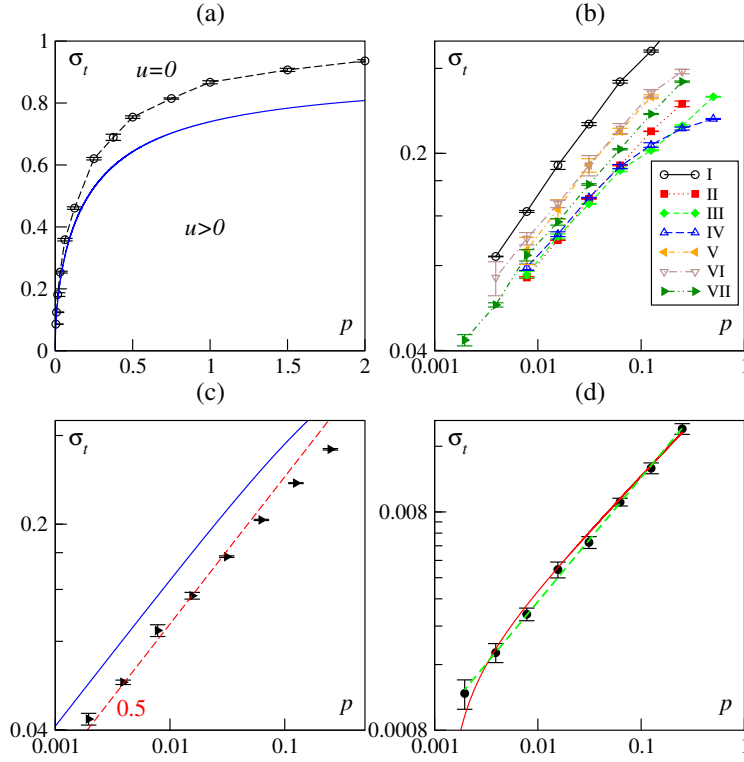
*4.3.2. Transition line.* When the noise amplitudes for collision and self-diffusion are equal, the general aspect of the phase diagram is the same both for the kinetic theory, and the agent-based model (Fig. 4(a)). We have drawn the transition line for different sets of parameters on Figure 4(b). All curves seem to be bounded between configurations I ( $B = 0.5$ ) and II ( $B = 4$ ).

Looking at the influence of the different parameters, we can make the following observations. First, there are small variations as the self-diffusion probability  $\lambda$  changes with a factor of eight from configuration II to IV (Fig. 4(b)). When the dimensionless parameter  $B$  is kept constant (Sets V and VI), the transition points corresponding to the same value of  $p$  are equal within the error bars. Apart from Set I for which  $B < 1$ , it turns out that the measured values of  $\sigma_t$  differ by less than 15% for any given  $p$ , while  $B$  is varied by a factor of 16 between Set II ( $B = 4$ ) and Set VII ( $B = 64$ ). However, we are not able to conclude that the curves merge into a single master curve. In particular, the observed evolution of  $\sigma_t$  when increasing  $B$  at fixed  $p$  is not monotonous (Fig. 4(b)).

In the low  $p$  region, the transition noise varies as a power law with  $p$ ,  $\sigma \propto p^\beta$  when  $p \rightarrow 0$ . We have measured the exponent  $\beta$  for the largest dimensionless number  $B$  ( $B = 64$ , set VII), yielding  $\beta = 0.46 \pm 0.04$  (Fig. 4(c)). This value is compatible with a square-root behaviour as found analytically in the binary collision model (Fig. 1). Quantitatively, the transition line computed from the kinetic approach and the one

set of parameters	$\sigma_0$	$d_0$	$v_0$	$\lambda$	$\rho$	$p$	B
I	$\sigma$	1	$2^{-1}$	1	$[2^{-7}; 2^2]$	$[2^{-6}; 2]$	$2^{-1}$
II	$\sigma$	1	$2^{-1}$	$2^{-3}$	$[2^{-9}; 2^{-4}]$	$[2^{-7}; 2^{-2}]$	$2^2$
III	$\sigma$	1	$2^{-1}$	$2^{-4}$	$[2^{-10}; 2^{-4}]$	$[2^{-7}; 2^{-1}]$	$2^3$
IV	$\sigma$	1	$2^{-1}$	$2^{-5}$	$[2^{-11}; 2^{-4}]$	$[2^{-7}; 1]$	$2^4$
V	$\sigma$	1	1	$2^{-5}$	$[2^{-10}; 2^{-6}]$	$[2^{-7}; 2^{-3}]$	$2^5$
VI	$\sigma$	$2^{-1}$	$2^{-1}$	$2^{-5}$	$[2^{-11}; 2^{-5}]$	$[2^{-8}; 2^{-2}]$	$2^5$
VII	$\sigma$	$2^{-2}$	$2^{-1}$	$2^{-5}$	$[2^{-11}; 2^{-4}]$	$[2^{-9}; 2^{-2}]$	$2^6$
VIII	$\sigma_0^{\max}$	$2^{-2}$	$2^{-1}$	$2^{-5}$	$[2^{-12}; 2^{-5}]$	$[2^{-10}; 2^{-2}]$	$2^6$

**Table 1.** Physical parameters of agent-based simulations; set I corresponds to the values used in [15]. Parameters are chosen as multiple or sub-multiple of 2;  $\sigma_0^{\max} = \pi/\sqrt{3}$  corresponds to the same variance as a uniform noise on  $[-\pi; \pi]$ .



**Figure 4.** Phase diagram of agent-based models. (a) Overview of the phase diagram. The continuous line is the transition line of the continuous model given in Eq. (37); data for symbols  $\circ$  are obtained with the parameter set I. (b) Diagrams for all configurations with the self-diffusion noise  $\sigma_0 = \sigma$  (plot in log-log scales). (c) Scaling of the transition line at small  $p$  with the set of parameters VII ( $B = 64$ ) in log-log scales. The continuous line is the transition line (37) obtained from the kinetic theory. The dashed line is a square-root fit of the numerical results. (d) Model with a constant and maximum noise amplitude for self-diffusion in log-log scales (set VIII,  $B = 64$ ). The continuous line corresponds to a fit of the numerical points with the law  $\sigma_t = \alpha(p - p_t^0)^{1/2}$ . The dashed line is a fit with a power law  $\beta = 0.57$  (see Table 1 for values of the other parameters).

which we measure in the agent-based model are relatively close one to the other; their largest relative difference is about 30%.

**4.3.3. Maximal self-diffusion.** When we set the amplitude of self-diffusion noise to its maximum ( $\eta_0 = 1$  or  $\sigma_0 = \pi/\sqrt{3}$ ), the behaviour of the model remains qualitatively similar to the case  $\sigma = \sigma_0$  that we studied above, with only a few quantitative differences. The transition line is shifted to a lower noise amplitude:  $\sigma_t$  differs by two orders of magnitude between the two comparable parameter sets VII and VIII. Fitting the two curves by a power law, the exponents are significantly different:  $\beta \approx 0.46$  for set VII ( $\sigma = \sigma_0$ ), while  $\beta \approx 0.57$  for set VIII ( $\sigma_0 = \sigma_0^{\max}$ ). One possible explanation for such a difference would be that, as in the hydrodynamic equations, there exists a threshold  $p_t^0$  below which no collective motion occurs, whatever the noise amplitude  $\sigma$ . A fit with the function  $p = \alpha\sqrt{p - p_t^0}$  gives a value  $p_t^0 = 0.00133$  (Fig. 4(d)), much



smaller than the theoretical value  $p_t^0 = 3\pi/8 \approx 1.18$ . Given the presently available data, we are not able to discriminate between the two fits, and to conclude on the existence of a non-zero threshold value  $p_t^0$ . Trying to find a phase transition for a very low value of  $p$  ( $p = 2^{-10}$ ), below the fitted value  $p_t^0$ , we could hardly define a threshold. However, it might be necessary to reach larger system sizes to detect a phase transition in this regime.

## 5. Beyond the strict validity domain of the hydrodynamic equations

In Section 4, we concluded from a linear stability analysis that the homogeneous flow is unstable with respect to long wavelength perturbations, in the validity domain of the hydrodynamic equations, namely close to the transition line. When getting farther from the transition line, previous theoretical approaches [18] suggest that the homogeneous motion should be stable. To come to a conclusion in the present framework, it is thus necessary to come back to an analysis of the Boltzmann equation. It is also natural to wonder whether the hydrodynamic equations could yield, out of their strict validity domain, a qualitative description of the phenomenology of the moving phase. We address these issues in the present section. We find in particular a restabilization of the homogeneous flow far from the transition line, as well as solitary waves that we compare with the travelling stripes already reported in numerical simulations of the agent-based model [14].

### 5.1. Stability analysis from the Boltzmann equation

In order to analyse the stability of the finite velocity solution beyond the validity domain of the hydrodynamic equations, we come back to the Boltzmann equation, and we resort to a semi-analytical treatment.

We start with a formal expansion of the phase-space distribution  $f(\mathbf{r}, \theta, t)$  around the homogeneous stationary solution  $f_0(\theta)$ :

$$f(\mathbf{r}, \theta, t) = f_0(\theta) + \delta f(\mathbf{r}, \theta, t). \quad (58)$$

Considering a perturbation of wavevector  $\mathbf{q}$  of the form:

$$\delta f(\mathbf{r}, \theta, t) = \delta \rho_0 G(\theta, \mathbf{q}) e^{st + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad (59)$$

with  $\int_{-\pi}^{\pi} d\theta G(\theta, \mathbf{q}) = 1$ . Assuming, as in Sect. 4.2.3, that both  $\mathbf{q}$  and the velocity perturbation are along the same direction  $\mathbf{e}$  as the collective velocity, the function  $G(\theta, \mathbf{q})$  satisfies the following linearized Boltzmann equation:

$$sG(\theta, \mathbf{q}) + iqv_0 \cos \theta G(\theta, \mathbf{q}) = I_{\text{dif}}[G] + I_{\text{col}}[G, f_0] + I_{\text{col}}[f_0, G]. \quad (60)$$

Setting  $\mathbf{q} = q\mathbf{e}$ , we are interested in a small  $q$  expansion of Eq. (60), in order to compare with the results of Eq. (55). We then expand  $s$  and  $G(\theta, \mathbf{q})$  in the following way:

$$s = is_1q + s_2q^2 + \mathcal{O}(q^3), \quad (61)$$

$$G(\theta, \mathbf{q}) = G_0(\theta) + iqG_1(\theta) + q^2G_2(\theta) + \mathcal{O}(q^3), \quad (62)$$

with the normalization conditions:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta G_0(\theta) = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\theta G_1(\theta) = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\theta G_2(\theta) = 0. \quad (63)$$

Then  $G_0$ ,  $G_1$  and  $G_2$  are solutions of the hierarchy of equations:

$$I_{\text{dif}}[G_0] + I_{\text{col}}[G_0, f_0] + I_{\text{col}}[f_0, G_0] = 0, \quad (64)$$

$$s_1 G_0(\theta) + v_0 \cos \theta G_0(\theta) = I_{\text{dif}}[G_1] + I_{\text{col}}[G_1, f_0] + I_{\text{col}}[f_0, G_1], \quad (65)$$

$$\begin{aligned} -s_1 G_1(\theta) + s_2 G_0(\theta) - v_0 \cos \theta G_1(\theta) = \\ I_{\text{dif}}[G_2] + I_{\text{col}}[G_2, f_0] + I_{\text{col}}[f_0, G_2]. \end{aligned} \quad (66)$$

Using the properties of  $I_{\text{dif}}$  and  $I_{\text{col}}$ , namely

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta I_{\text{dif}}[g] = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\theta I_{\text{col}}[g, f_0] = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta I_{\text{col}}[f_0, g] = 0 \quad (67)$$

for any function  $g$ , we obtain

$$s_1 = -v_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cos \theta G_0(\theta), \quad (68)$$

$$s_2 = v_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cos \theta G_1(\theta). \quad (69)$$

Hence the determination of  $G_2$  is not necessary to compute  $s_2$ . We only need to compute the hierarchy of functions up to  $G_1$ . It is actually convenient to work in Fourier space, introducing the Fourier series expansion  $\hat{G}_{0,k}$  and  $\hat{G}_{1,k}$  of  $G_0(\theta)$  and  $G_1(\theta)$  respectively. In terms of this Fourier expansion, one finds  $s_1 = -\hat{G}_{0,k=1}$  and  $s_2 = \hat{G}_{1,k=1}$ , assuming that  $G_0(\theta)$  and  $G_1(\theta)$  are even functions.

The integral equations (64) and (65) can be solved numerically, once expressed in terms of Fourier coefficients. To this purpose, we use the following Fourier expansion of the integral operators  $I_{\text{dif}}$  and  $I_{\text{col}}$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{ik\theta} I_{\text{dif}}[g] = -\lambda \left(1 - e^{-k^2 \sigma_0^2 / 2}\right) \hat{g}_k, \quad (70)$$

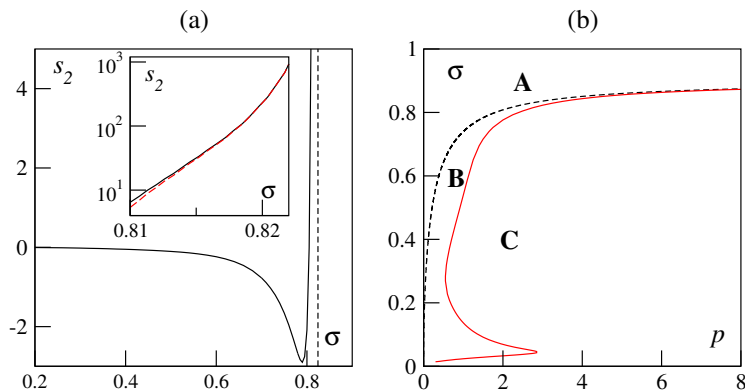
$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{ik\theta} I_{\text{col}}[g, h] = \frac{2d_0 v_0}{\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(e^{-k^2 \sigma^2 / 2} I_{q-\frac{k}{2}} - I_q\right) \hat{g}_{k-q} \hat{h}_q. \quad (71)$$

Numerical results are reported in Fig. 5(a), where  $s_2$  is shown as a function of  $\sigma$  for  $\sigma = \sigma_0$ , all other parameters being kept fixed. Consistently with the results obtained from the hydrodynamic equations, we observe that close to the transition line,  $s_2$  is positive and diverging. But for smaller values of the noise amplitude  $\sigma$ ,  $s_2$  becomes negative. Hence the homogeneous state of motion becomes stable in this range with respect to long wavelength perturbations.

As summarized on Fig. 5(b), there are from the point of view of stability three regions in the phase diagram (we focus here on the case  $\sigma = \sigma_0$ ). These three regions can be described as follows:

- A** At low  $p$  or high  $\sigma$ , no collective motion occurs.
- B** For  $p_t < p < p_r$ , a homogeneous stationary solution with nonzero velocity exists, but it is unstable under longitudinal compression modes.
- C** For  $p > p_r$ , the homogeneous and stationary moving phase is linearly stable under any small perturbation.

$p_r$  is defined as the value of the reduced density such that  $s_2 = 0$ . Note that  $p_r$  is not a monotonous function of  $\sigma$ . In the **B** region, the system cannot converge to a homogeneous stationary solution, and one thus expects the system to organize into more complicated spatio-temporal structures, that we shall try to describe in Section 5.3.



**Figure 5.** (a) Dependence of  $s_2$  on  $\sigma$  for  $p = 2.5$  and  $\sigma_0 = \sigma$ . For  $\sigma$  below a given threshold  $\sigma_r$ ,  $s_2$  becomes negative, indicating that the homogeneous state of motion is stable with respect to long wavelength perturbations. In contrast, close to the transition line, this state is unstable since  $s_2 > 0$ . The vertical dashed line corresponds to the transition value  $\sigma_t$ . Inset: comparison, close to  $\sigma_t$ , of  $s_2$  obtained numerically from the Boltzmann equation (full line) and analytically from the hydrodynamic equations (dashed line), showing a good agreement. (b) Phase diagram indicating, for  $\sigma = \sigma_0$ , the three different regions: no motion (**A**), unstable homogeneous motion (**B**), stable homogeneous motion (**C**). The full line has been obtained numerically from a stability analysis of the Boltzmann equation. The dashed one is the transition line shown in Fig. 1(a).

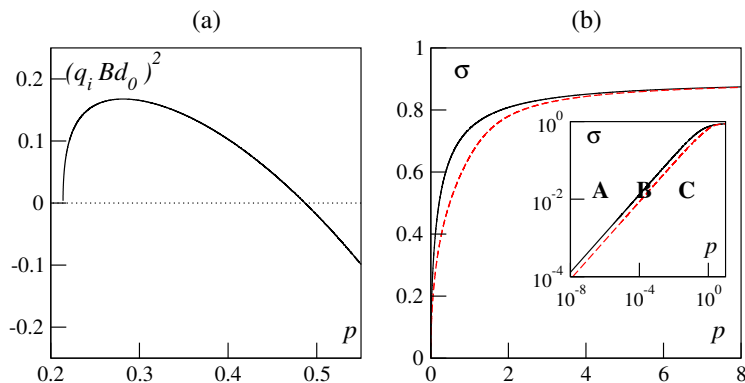
### 5.2. Restabilization of the homogeneous flow in the hydrodynamic equations

The above stability analysis from the Boltzmann equation shows that the homogeneous flow becomes linearly stable when getting farther from the transition line  $p_t$ . Although this region of restabilization is, strictly speaking, out of the validity domain of the hydrodynamic equations, it would be interesting to know whether these equations already contain, at a qualitative level of description, the restabilization phenomenon.

One possible way to investigate this stability issue is study the sign of the coefficient  $s_2$  of the  $q^2$  term in the small  $q$  expansion of  $\Re[s_+]$ . An equivalent procedure, that we follow here, is to look for the domain of existence of the wavenumber  $q_i$  (defined as  $\Re[s_+] = 0$  for  $q_i \neq 0$ ), when the control parameter  $p$  is increased at a given noise amplitude  $\sigma$ . In order to achieve this task, we solve the equation  $\Re[s_+] = 0$ , using expression (54). The solutions are naturally expressed in terms of the variable  $q_i^2$ . After some algebra, we find for the largest solution:

$$q_i^2 = \frac{\mu}{\nu v_0^2} \left[ -\gamma w_1^2 \left( \frac{\mu'}{\mu} - \frac{\xi'}{\xi} \right) - 2v_0^2 + w_1 \left( \frac{\mu'}{\mu} - \frac{\xi'}{\xi} \right) \sqrt{\gamma^2 w_1^2 + 2v_0^2} \right], \quad (72)$$

where the term  $\left( \frac{\mu'}{\mu} - \frac{\xi'}{\xi} \right)$  is positive. The expression in the right hand side of Eq. (72) is positive for  $p$  close enough to  $p_t$ , and becomes negative for larger  $p$  (see Fig. 6(a)), in which case a real solution  $q_i$  does not exist. As a result, there exists a value  $p_r$  of the control parameter  $p$  such that  $q_i$  is no longer defined. For  $p > p_r$ ,  $\Re[s_+]$  remains negative for all values of  $q$  (Fig. 3(a)), so that all perturbations are linearly stable. Using equations (28)-(32), we can compute the restabilization line  $p_r(\sigma)$  and show



**Figure 6.** Restabilization in the hydrodynamic framework. (a)  $(q_i B d_0)^2$  such that  $\Re[s] = 0$  versus  $p$ , same parameters as Fig. 3. (b) Phase diagram. The full line corresponds to the onset of motion,  $\sigma_t$ . The dashed line is the transition between stable and unstable homogeneous flows,  $\sigma_r$ . Regions **A**:  $w = 0$ , **B**:  $w \neq 0$  and  $\Re[s] > 0$  when  $q < q_i$ , **C**:  $w \neq 0$  and  $\Re[s] < 0$  for all  $\mathbf{q}$  and for all direction of perturbation. Inset: same as (b) in log-log scale.

that  $p_r$  depends only on  $\sigma$  and  $\sigma_0$ , but not on  $B$ . We also find that  $p_r(\sigma)$  behaves for small noise amplitude as  $p_r \propto \sigma^{1/2}$  (see Fig. 6(b) and its inset).

Altogether, the hydrodynamic equations seem to lead to the correct phenomenology even when used beyond their strict validity domain. Yet, the locations of the transition line  $p_r(\sigma)$  predicted from the hydrodynamic equations on one side, and the one predicted from a long wavelength perturbative treatment of the Boltzmann equation on the other side are quantitatively different, as illustrated on Figs. 5(b) and 6(b).

### 5.3. Inhomogeneous travelling solutions and solitary waves

For  $p$  slightly larger than  $p_t$ , the homogeneous solutions  $\mathbf{w} = 0$  and  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$  are unstable, and one should look for the onset of spatio-temporal structures rather than purely stationary states. In this respect, one may be guided by the observations made in numerical simulations [14, 15], where ‘stripes’ of higher density moving over a low density background have been reported. Such structures are rather similar to soliton solutions that have been observed in many different physical contexts [21].

**5.3.1. Stationary hydrodynamic equation in a moving frame.** Let us now look for possible soliton solutions of the hydrodynamic equations (11) and (27). To this aim, we assume for  $\rho$  and  $\mathbf{w}$  the following ‘propagative’ form, with propagation velocity  $c > 0$ , along an arbitrary axis  $x$  of unit vector  $\mathbf{e}$ :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = R(x - ct), \quad \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = W(x - ct) \mathbf{e}, \quad (73)$$

with  $\zeta = x - ct$  and  $W(\zeta) > 0$ . Using Eqs. (11), one finds the simple relation  $R' = W'/c$ , leading to:

$$R(\zeta) = \frac{1}{c} W(\zeta) + \rho^*, \quad (74)$$

where  $\rho^*$  is up to now an arbitrary constant density. In the following, we consider velocity profiles that vanish for  $\zeta \rightarrow \pm\infty$ , so that  $\rho^* = \lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} R(\zeta)$ . Inserting this

form in Eq. (27), one can eliminate  $R(\zeta)$  and obtain the following ordinary differential equation for  $W(\zeta)$ , also taking into account the density dependence of the transport coefficients §:

$$W'' = -(a_0 - a_1W - a_2W')W' - b_1W - b_2W^2 - b_3W^3. \quad (75)$$

The different coefficients in Eq. (75) read

$$a_0 = \left(c - \frac{v_0^2}{2c}\right)(D_1 + D_2\rho^*) \quad (76)$$

$$a_1 = \tilde{\gamma} + D_2 \left(\frac{v_0^2}{2c^2} - 1\right) \quad (77)$$

$$a_2 = \frac{D_2}{c(D_1 + D_2\rho^*)} \quad (78)$$

$$b_1 = \mu'(\rho^* - \rho_t)(D_1 + D_2\rho^*) \quad (79)$$

$$b_2 = \frac{\mu'}{c} [D_1 + D_2(2\rho^* - \rho_t)] \quad (80)$$

$$b_3 = \frac{\mu'D_2}{c^2} - \tilde{\xi} \quad (81)$$

with

$$D_1 = \frac{4\lambda}{v_0^2} \left(1 - e^{-2\sigma_0^2}\right) \quad (82)$$

$$D_2 = \frac{64d_0}{3\pi v_0} \left(\frac{7}{5} + e^{-2\sigma^2}\right), \quad (83)$$

and  $\tilde{\gamma} = \gamma/\nu$ ,  $\tilde{\xi} = \xi/\nu$ . As often in the study of solitons [21], Eq. (75) may be reinterpreted as the equation of motion of a fictive particle with position  $W$  at time  $\zeta$ . Here, this virtual particle has a unit mass, and moves in a potential

$$\Phi(W) = \frac{b_1}{2}W^2 + \frac{b_2}{3}W^3 + \frac{b_3}{4}W^4, \quad (84)$$

with a non-linear friction force  $-(a_0 - a_1W - a_2W')W'$ . Depending on the sign of the effective friction coefficient  $(a_0 - a_1W - a_2W')$ , the friction force may either dissipate or supply energy to the particle. Note that this friction term breaks the symmetry  $\zeta \rightarrow -\zeta$ , so that the resulting momentum profile cannot be symmetric.

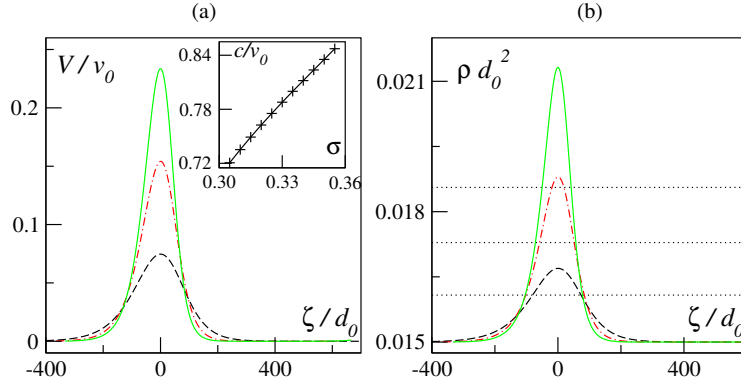
*5.3.2. Numerical integration of the velocity and density profiles.* To find a solution for  $W(\zeta)$ , we integrate numerically Eq. (75) for given values of the parameters  $a_i$  and  $b_i$ . The following constraints are imposed to the solution:  $W(\zeta)$  should be positive for all values of  $\zeta$ , and  $W(\zeta)$  should go to 0 for  $\zeta \rightarrow \pm\infty$ . Hence for large values of  $|\zeta|$ ,  $W(\zeta)$  should be small, and should satisfy, to a good accuracy, the linearized version of Eq. (75), namely:

$$W'' + a_0W' + b_1W = 0. \quad (85)$$

This equation has two exponential solutions  $W_{\pm}(\zeta) = A_{\pm} \exp(r_{\pm}\zeta)$ , with:

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - 4b_1}\right). \quad (86)$$

§ We however neglect the density dependence of the ratio  $\nu'/\nu$ , as it would lead to terms of higher order than that retained in our hydrodynamic description.

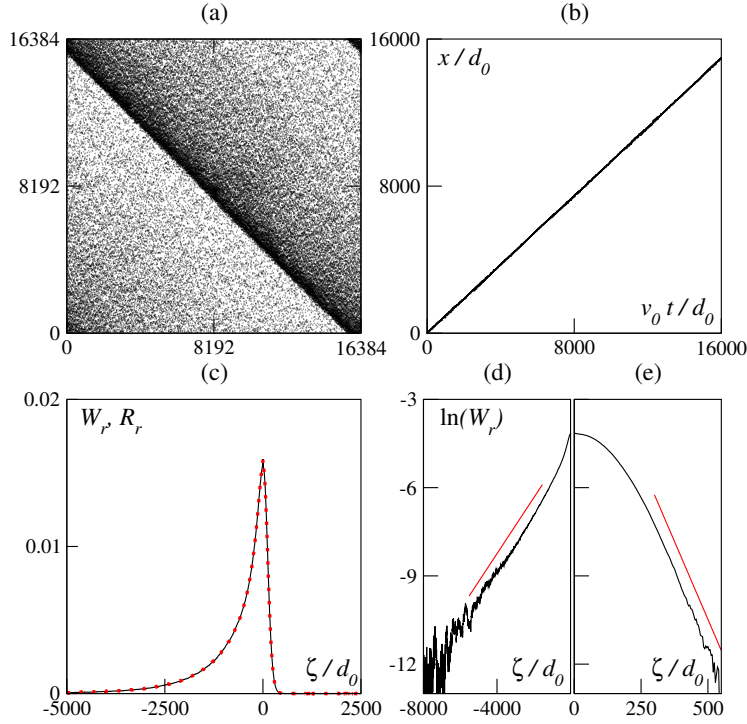


**Figure 7.** (a) Velocity profile  $v(x, t) = V(\zeta)$ , with  $\zeta = x - ct$ , for  $\rho^* = 0.06$  and  $\sigma = \sigma_0 = 0.31$  (dashed line),  $0.32$  (dot-dashed line) and  $0.33$  (full line). Inset: propagation velocity  $c$  as a function of  $\sigma$ . (b) Density profile  $\rho(x, t) = R(\zeta)$  for the same values of the parameters. Horizontal dotted lines correspond to the density  $\rho_t$  for  $\sigma = \sigma_0 = 0.31, 0.32$  and  $0.33$  (bottom to top). Other parameters:  $\lambda = 0.5$ ,  $d_0 = 0.5$  and  $v_0 = 1$ .

For  $W(\zeta)$  to be positive, one needs that the roots  $r_{\pm}$  be real, which implies  $a_0^2 - 4b_1 \geq 0$ . Further, for  $W(\zeta)$  to vanish both for  $\zeta \rightarrow -\infty$  and  $\zeta \rightarrow +\infty$ , one should have both an increasing and a decreasing solution for Eq. (85), namely  $r_+ > 0$  and  $r_- < 0$ , which corresponds to  $b_1 < 0$ .

The free parameters in Eq. (75) are  $c$  and  $\rho^*$  (this point will be briefly discussed in Section 5.4, in connection with numerical results). The noises  $\sigma$  and  $\sigma_0$  are external control parameters. The overall density  $\rho$  is computed afterwards from the profile  $R(\zeta)$ . Assuming that we are in the low noise region of parameter space  $\sigma < \sigma_t^\infty$ , then  $[\exp(-\sigma^2/2) - 2/3] > 0$  and the condition  $b_1 < 0$  implies  $\rho^* < \rho_t$ . In addition, as the trajectory of the particle starts and ends at the same position  $W = 0$  with zero velocity ( $W' = 0$ ), its energy is the same, which means that the friction force has to dissipate energy on some part of the trajectory and to supply energy otherwise. Assuming  $a_0 > 0$  implies  $c - v_0^2/(2c) > 0$ , that is  $c > v_0/\sqrt{2}$ . On the other hand, one intuitively expects  $c$  to be smaller than the microscopic velocity  $v_0$  of the particles.

The numerical procedure we implement is the following. Choosing a given value for  $\rho^*$  and for  $c$ , we start at  $\zeta = \zeta_0 < 0$  ( $|\zeta_0| \gg 1$ ), with a small value  $W(\zeta_0) = W_0 \ll 1$ , and with a derivative  $W'(\zeta_0) = r_+ W_0$ . This choice of initial conditions ensures that we select a solution with an exponential tail  $W(\zeta) = A_+ \exp(r_+ \zeta)$  for  $\zeta < \zeta_0$ . Then we integrate numerically the differential equation for  $\zeta > \zeta_0$ , until reaching large enough positive values of  $\zeta$ . At this stage, two behaviours may appear. One should first notice that for  $b_1 < 0$  (and at least if  $b_3$  does not take a large negative value) the effective potential  $\Phi(W)$  has a local maximum in  $W = 0$  and a local minimum at a value  $W = W_{\min}$ . Then, if the dissipated energy is larger than the injected energy, the particle ends up at  $W_{\min}$  for  $\zeta \rightarrow \infty$ , yielding a profile  $W(\zeta)$  that does not fulfil the condition required. In the opposite case, if energy injection dominates, the particle crosses the local maximum at  $W = 0$  and goes to negative values. It is only in the marginal case where dissipation exactly compensates injection that the correct profile  $W(\zeta)$  is found. As friction is mainly controlled by the parameter  $c$ , we keep  $\rho^*$  fixed and perform a loop over the value of  $c$  in order to converge toward the marginal solution.



**Figure 8.** Solitons in the numerical model. (a) Instantaneous snapshot, the band is moving south-west; lengths are scaled by  $d_0$ . (b) Example of trajectory in the direction of the averaged velocity. (c) Mean profiles along the direction of the main motion. We plot the reduced dimensionless density  $R_r = (\langle \rho(x-ct) \rangle - \rho^{\text{sat}}) d_0^2 c / v_0$  (dotted line) and the dimensionless momentum  $W_r = \langle w(x-ct) \rangle d_0^2 / v_0$  (plain line), both being time-averaged in the comoving frame of the soliton. (d) and (e) Same data as (c) on semi-log scales, emphasizing the exponential decay. The scales are identical on vertical axes, but different on abscissas. Parameter values are  $p = 2^{-3}$ ,  $\sigma = 0.163$ ,  $L = 4096$ ; the other ones correspond to set VII in Table 1.

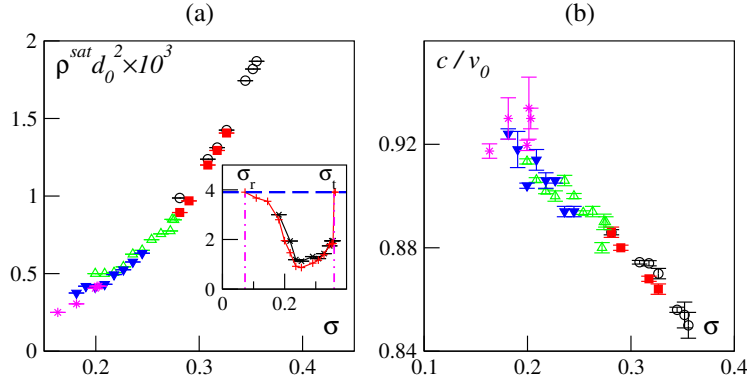
Note however that if  $b_3 < 0$ ,  $\Phi(W) \rightarrow -\infty$  when  $W \rightarrow +\infty$ , so that one should also take care that the particle does not “escape” to large positive values of  $W$ .

Using the above procedure, we obtain a family of profiles  $W(\zeta)$  with three control parameters, namely the “background” density  $\rho^*$  and the noises  $\sigma$  and  $\sigma_0$ . In the following, we restrict ourselves to the case  $\sigma_0 = \sigma$ . The density profile is computed from the relation  $R(\zeta) = \rho^* + W(\zeta)/c$ , and the velocity profile  $V(\zeta)$  is obtained from the momentum profile  $W(\zeta)$  through  $V(\zeta) = W(\zeta)/R(\zeta)$ . Examples of such velocity profiles are presented in Fig. 7, for different values of  $\sigma$  and for a given value of  $\rho^*$ .

A remaining open issue is the stability of these solitary waves with respect to small perturbations. A formal stability analysis like the one performed for the homogeneous state of motion is a difficult task here, and we leave this question for future work.

#### 5.4. Solitary waves in the agent-based model

We now compare the solitary waves computed in the hydrodynamic equations with the travelling stripes observed in direct numerical simulations of the agent-based model (see Fig. 8(a)). We focus again on the case  $\sigma_0 = \sigma$ . The stripped structures are



**Figure 9.** Solitons in numerical model. (a) Density of saturated vapour for different  $p$  ( $p = 2^{-2}$ ,  $\circ$ ,  $5^{-1}$ ,  $\blacksquare$ ,  $2^{-3}$ ,  $\triangle$ ,  $10^{-1}$ ,  $\blacktriangledown$  and  $2^{-4}$ ,  $*$ ). Inset: finite size effects on soliton,  $p = 2^{-4}$ ,  $L = 1024$   $\times$  and  $L = 2048$   $+$ . The dashed line marks the value of the global density ( $\rho = 2^{-5}$ ). The dotted lines underline the threshold of the collective motion  $\sigma_t$  and of the homogeneous moving population  $\sigma_r$ . (d) Speed of the solitons (same parameters). The other parameters are the ones of set VII (see table 1).

composed by several localised, randomly spaced bands. They are not part of a regular pattern, nor a wave train [15]. They are all moving along the direction of the main motion, although during the transient period they can pass through each other with only few interactions. The space between two bands is filled with particles moving independently (the hydrodynamic momentum vanishes), and homogeneously (the density is constant). In analogy to the liquid-gas coexistence, we denote this state as the *saturating vapour*.

We observe that the bands move at a constant speed, at least on the duration necessary to travel through the system size (Fig. 8(b)). From the trajectories, we measured the velocity  $c$  of the solitons. On the density profiles, we extracted the value  $\rho^{\text{sat}}$  of the density outside the peak. If these structures are only propagative and if the continuity equation is valid at a coarse-grained level in the agent based model (which is expected from mass conservation), the density and momentum profiles should be related by  $W = c(R - \rho^{\text{sat}})$ , as in Section 5.3. Plotting on Figure 8(c) both the reduced density  $c(R - \rho^{\text{sat}})$  and the momentum  $W$ , we observe that both curves match perfectly, confirming the propagative nature of this stripped pattern.

These solitary waves are quite similar to the soliton we found in the hydrodynamic equations (see section 5.3), with in particular an exponential decay of the momentum profile on both sides (Fig. 8(d-e)). However, the asymmetry of the profile is much more pronounced than in the analytical model: the exponential decay is much steeper in front of the profile than in the rear part.

We now study how the two main characteristics of the solitary waves, namely the velocity  $c$  and the density  $\rho^{\text{sat}}$ , vary with the control parameters  $p$  and  $\sigma$ . Since we perform a numerical study, we need to be aware of finite size effects. Plotting the density of saturating vapour versus noise for a given density but for different sizes, we can make three observations (inset of Fig. 9). First, the system size hardly changes  $\rho^{\text{sat}}$  provided that the noise amplitude remains near the threshold. Moreover, at a lower noise amplitude, the density  $\rho^{\text{sat}}$  increases and become sensitive to the system size. Lastly, there is a noise  $\sigma_r$  below which we cannot observe solitons anymore (see



also [15]) and the system becomes homogeneous at a coarse-grained level. The result is qualitatively consistent with the restabilization of the homogeneous flow described in Sections 5.1 and 5.2.

The study of the very low noise amplitude region of the phase diagram is an ongoing work. So we mainly focused in the present article on the region relatively close to the transition to collective motion. For different global densities, both  $\rho^{\text{sat}}$  and  $c$  fall onto the same curve when plotted as a function of  $\sigma$ , as shown on Fig. 9(a) and (b). Therefore, once the noise amplitude  $\sigma$  is given, the characteristics  $(c, \rho^{\text{sat}})$  of the solitary waves are determined, and the number of solitary waves is adjusted by the dynamics in order to match the global density of the system.

This is a major difference with the solitary waves obtained from the hydrodynamic equations in section 5.3. These solitary waves depend on two control parameters, namely the noise amplitude  $\sigma$  and the density at infinity  $\rho^*$ . Hence there is a priori no way to determine the number of solitons in a large but finite system with a given density. At a heuristic level, we might guess that the solitary waves may be stable only for some specific values of  $\rho^*$ , which would give a selection mechanism for the density  $\rho^{\text{sat}}$ . Such a mechanism would make the connection between the analytical and numerical models clearer, but we presently have no clue to confirm this tentative scenario. Obviously, further studies of the dynamics of the solitary waves in the context of the hydrodynamic equations are needed.

## 6. Conclusion

In summary, we have derived in this article hydrodynamic equations for a model of self-propelled particles with binary interactions, in the regime of low hydrodynamic velocity. We also compared the results of the hydrodynamic description to the numerical simulations of a standard agent-based model. In the analytical model, the homogeneous state with zero velocity is a stationary solution for any values of the microscopic parameters (the noise amplitude and the overall density), but this state is linearly unstable for a reduced density  $p$  greater than a transition density  $p_t(\sigma)$ , or equivalently, for a noise smaller than a transition value  $\sigma_t(p)$ .

When the zero velocity solution is unstable, another homogeneous state, with a nonzero hydrodynamic velocity, appears. This state is linearly stable with respect to spatially homogeneous perturbations. However, close to the transition line  $\sigma_t(p)$ , this state turns out to be linearly unstable with respect to finite wavelength perturbations. As the validity of the hydrodynamic equations is, strictly speaking, restricted to the vicinity of the transition line, we also studied the stability of the homogeneous state of motion directly from the Boltzmann equation. We found that, far enough from the transition line, the homogeneous motion becomes linearly stable. Interestingly, this restabilization phenomenon is also qualitatively observed in the hydrodynamic equations, although this regime is beyond their domain of validity. All these results agree semi-quantitatively with the numerical simulations of the agent based model.

When the homogeneous state of motion is unstable, more complex spatio-temporal structures should appear. A candidate for such structure is the solitary waves we obtained from the hydrodynamic equations. These solitary waves resemble the moving stripes observed in the numerical agent-based model, apart from the asymmetry which is more pronounced in the latter. A word of caution is however needed here, as on the one hand the solitary waves have a finite amplitude, so that the hydrodynamic equations might not be valid, and more importantly, their stability

has not been tested yet. On the basis of the numerical simulations of the agent-based model, it is however likely that these solitary waves should be stable at least in a given region of the phase diagram.

As for future work, it would be interesting to investigate the stability of the solitary waves, and to look for possible “multi-soliton” solutions, in case the stability would be confirmed. Specifically, it would be interesting to be able to determine the number of solitons, their celerity and the background density as a function of the global density (for a finite volume) and of the noise amplitude, if such a relation exists, as suggested by the numerical simulations of the agent-based model.

## Acknowledgements

This research work has been partly supported by the French ANR project “DyCoAct” and by the Swiss National Science Foundation.

## Appendix A. Agent-based model

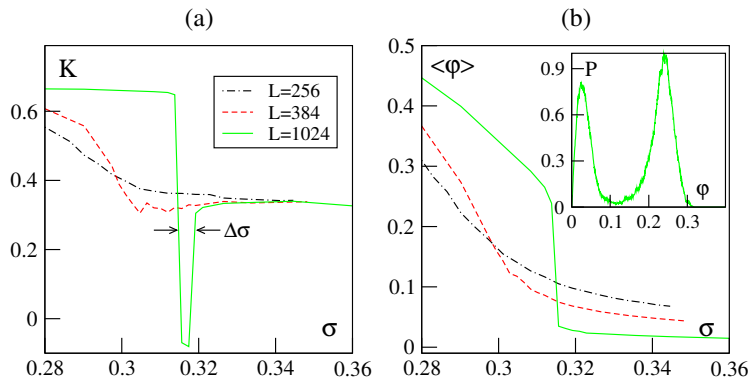
### Appendix A.1. Looking at the model further

The numerical system we looked at is very similar to the one defined by Vicsek *et al* [12]. This is a very minimal model, easy to implement. In contrast, a real direct simulation would have been coded following a molecular dynamics algorithm, which would have cost much more cpu time than our Monte Carlo-like program. The numerical choice is also related to the fact that collective motion of self-propelled particles has been mainly studied in this framework during the last ten years [22, 23, 24, 15, 25, 13, 26, 27, 14, 28, 29, 30]. Thus we would like to take profit from this large background and the knowledge of the system we already got.

To fully understand the results presented in this paper, we must explain the differences between the numerical system we used and a direct simulation. In what we have done, collisions are computed at fixed time step. So every other collision that could have occurred within  $\Delta t$  is neglected. On the other hand, collisions can involved many individuals. Another implication of the discrete time step is that decreasing the time step increases the collision frequency. Then the noise does not act on the system with the same manner for two different time steps. Hence, in its present formulation, the agent-based model is not a discretized version of a continuous time model. To reach this goal, the noise amplitude should be renormalized in some way with the time step.

The balance of the above different effects is difficult to imagine a priori. We do not expect any *quantitative* matching between the theory we developed and the simulations we presented. But we still want to test the robustness of the predictions made for large system sizes.

We must also emphasize that some studies in the literature were aimed at giving an exact continuous theory of Vicsek’s model [31, 32, 33]. Up to now, this difficult problem has been dealt in the framework of perturbative theories at a first order in speed differences. In addition, the role of the noise is not properly taken into account in these studies: it is either ignored [31], or described by a phenomenological diffusive term [32]. Finally, the transport coefficients of the hydrodynamic equation do not contain any dependence on the microscopic parameters of the model.



**Figure A1.** Phase transition in numerical simulation and finite size effects. We plotted (a) the Binder cumulant  $K$  and (b) the averaged order parameter  $\langle \varphi \rangle$  vs noise *rms*-value, for three different sizes. In the inset, we show the histogram of the order parameter  $\varphi$  at the transition point for a system size  $L = 1024$ . On figure (a), we emphasized the depth of the well  $\Delta\sigma$ : approximation of the errors in determining the transition point. Parameters are the ones of configuration  $n^\circ$  III with  $\rho = 1/16$  or  $p = 1/2$ .

### Appendix A.2. Phase transition

As in usual versions of self-propelled particles systems, the behaviour of the system roughly falls into two different categories. Either there is no collective motion: every particle move randomly without clear correlation with its neighbours; or there is a non-zero global velocity in an arbitrary direction.

Since the analogy with magnetic systems is quite obvious, the habits is to consider the equivalent averaged magnetization of our system, namely the global normalized velocity  $\varphi^t$ :

$$\varphi^t = \left\| \frac{1}{Nv_0} \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j^t \right\|, \quad (\text{A.1})$$

considered as an order parameter. To determine the characteristics of the phase transition, we study the statistical properties of the order parameter  $\varphi^t$ , considering its mean  $\langle \varphi \rangle$ , its variance  $\chi$  and its Binder cumulant  $K$  [34]:

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varphi^t, \quad (\text{A.2})$$

$$\chi = L^2 (\langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2), \quad (\text{A.3})$$

$$K = 1 - \frac{\langle \varphi^4 \rangle}{3\langle \varphi^2 \rangle^2}. \quad (\text{A.4})$$

The brackets  $\langle \dots \rangle$  indicate an averaging over time. The duration of the simulation has to be large to inhibit memory effects. Ideally, the correlation time for each set of parameters  $(\rho, \sigma, \sigma_0, v_0, d_0, \lambda)$  should be computed from the auto-correlation function [35]. However, this is a tantamount task $\parallel$ . Practically, in order to have a rough approximation of the correlation time, we measured the transition time from

$\parallel$  The cumulative consumed cpu time already reaches fifty years.

the initial condition to the stationary state. Then we performed averaging on time which are hundred times greater than that transition time.

For all sets of parameters I to VII (Table 1), we observed that the system exhibits a phase transition from a non-moving to a globally moving population when decreasing the noise amplitude at a fixed density. At small enough size  $L$ , all statistical variables ( $\langle\varphi\rangle, \chi, K$ ) remain continuous, while a singular point appears when the system is larger than a typical size  $L_t$  (see Fig. A1(a) and (b), as well as Refs. [14, 15]).

The main observations are the following: the order parameter curve exhibits a jump (Fig. A1(b)), the variance is delta-peaked (not shown here), the Binder cumulant has a minimum (Fig. A1(a)) which goes to larger negative values when the system size is increased, and the histogram of the order parameter is bimodal (see inset of figure A1(b)). All these sign plead in favour of a first-order phase transition.

It is now well known that a finite size system exhibits a rounded transition, at equilibrium [36, 37] or far from the equilibrium [38, 39]. The scaling laws are normally sufficient to detect the order of the transition. In our case, the finite size scaling laws correspond to a continuous transition below  $L_t$  [40, 41], and to a discontinuous transition above  $L_t$  [15].

To estimate the transition point, we measured the location where the Binder cumulant minimum becomes negative. We neglected the finite size effects at higher size. We determined the error bars on that location as the width of the well (see Fig. A1(a)).

## Appendix B. Stability against arbitrary perturbations

In this appendix, we study within the framework of the hydrodynamic equations the stability of the stationary homogeneous flow. Starting from Eqs. (41) and (42), we consider the case where  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_1 \neq \mathbf{0}$ , solution of Eq. (33). The rotational symmetry is broken when the collective motion appears, and we take  $\mathbf{e}_\parallel = \mathbf{w}_1/|\mathbf{w}_1|$  as a first vector of the geometrical basis. Then we define two angles  $\vartheta_1$  and  $\vartheta_2$  between  $\mathbf{e}_\parallel$  and the directions of  $\delta\mathbf{w}_0$  and  $\mathbf{q}$  respectively. We denote as  $\mathbf{e}_\perp$  the unit vector orthogonal to  $\mathbf{e}_\parallel$ , and such that  $(\mathbf{e}_\parallel, \mathbf{e}_\perp)$  form a direct basis.

From Eqs. (44) and (45), we project the resulting vectorial equation onto  $\mathbf{e}_\parallel$  and  $\mathbf{e}_\perp$ , and we eliminate the ratio  $\delta\mathbf{w}_0/\delta\rho_0$  from the continuity equation, yielding:

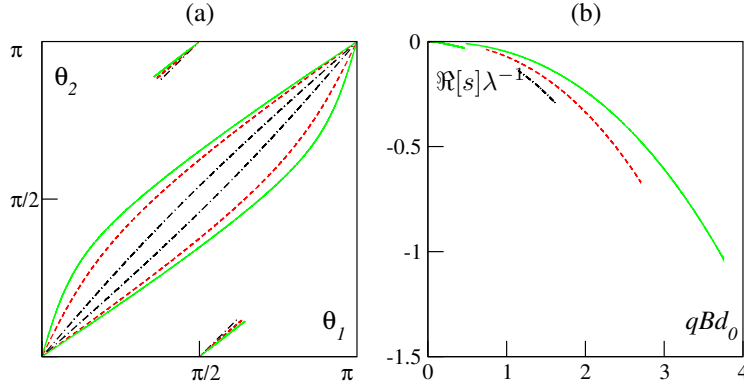
$$s [s + i\gamma w_1 q \cos \vartheta_2 + \nu q^2] \cos \vartheta_1 = \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{1}{2} v_0^2 q \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i s \kappa w_1 \cos \vartheta_1 \right] q \cos \vartheta_2 \\ & - [2s \xi w_1^2 \cos \vartheta_1 + i (\mu' - \xi' w_1^2 + s \kappa) q w_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)], \\ s [s + i\gamma w_1 q \cos \vartheta_2 + \nu q^2] \sin \vartheta_1 = \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

$$\left[ -\frac{1}{2} v_0^2 q \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i s \kappa w_1 \cos \vartheta_1 \right] q \sin \vartheta_2,$$

where  $q$  and  $w_1$  are real and positive. These are two polynomial equations that we will study at a given point  $(\rho, \sigma)$  of the phase diagram, for a set of physical variables  $(d_0, \lambda, v_0)$  and for different pairs  $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ . For all fixed parameters, the solutions of those equations will be a discrete number of sets  $(q, s)$ .

First, one can check that this set of equations is invariant when  $\delta\mathbf{w}_0$  is rotated with an angle of  $\pi$  ( $\vartheta_1 \rightarrow \vartheta_1 + \pi$ ). Note also that every real term depends on an even power of  $q$ . So one can expect that the real part of the growth rate  $\Re[s]$  only depends



**Figure B1.** Stability against inhomogeneous perturbations, solutions of Eqs (B.3) and (B.4) so that  $\Im[q] = 0$ . (a)  $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ , with  $\sigma = \sigma_0 = 0.5$ ,  $p = 0.22$  (dot-dashed line), 0.30 (dashed), 0.40 (full line). (b)  $\Re[s]$  vs  $q$ , same parameters as (a),  $\Re[s]$  increases when  $p$  increases.

on even powers of  $q$ , and that  $\Re[s]$  remains invariant when  $\vartheta_2$  is changed into  $\vartheta_2 + \pi$ . That is why we will study Eqs. (B.1) and (B.2) for  $(\vartheta_1, \vartheta_2) \in [0, \pi[ \times [0, \pi[$ .

A third property arises clearly when we introduce the expressions (28)-(32) of the transport coefficients in Eqs. (B.1) and (B.2): the wavenumber  $q$  appears only through the product  $q B d_0$ , meaning that the solutions  $q$  are proportional to  $1/B d_0$ . As already mentioned, the framework of the kinetic approach implies that  $B$  is large, and therefore it implies that we are studying long wavelength perturbations. This analysis also shows that the growth rate depends only on the dimensionless control parameter  $p$ , the noise amplitudes  $\sigma$  and  $\sigma_0$ , and the self-diffusion rate  $\lambda$  which gives the proper unit to  $s$ . Let us also mention that a trivial solution of the system of equations is  $s = 0$  for  $q = 0$ . This solution is actually an artefact of the calculation procedure (namely a multiplication by  $s$ ), as it is not a solution of the original equations (41) and (42). Hence we will not consider this extra solution in the following.

For some parameters  $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ , one or several terms can vanish, and the degree of the polynomials may decrease. We will first study the general equations and those particular cases will be considered later. If we combine  $((B.1) \times \sin \vartheta_1 - (B.2) \times \cos \vartheta_1)$ , we get a linear equation in  $s$  :

$$s = - \frac{q \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{2w_1} \times \frac{qv_0^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + 2iw_1 (\mu' - \xi' w_1^2) \sin \vartheta_1}{2\xi w_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 + iq\kappa \sin \vartheta_2} \quad (B.3)$$

Indeed, we verify that  $\Re[s]$  is an even function of  $q$ . Now we can replace  $s$  by its expression in Eq. (B.2). The resulting equation is a third degree polynomial, that can be formally written as:

$$d_3 q^3 + id_2 q^2 + d_1 q + id_0 = 0, \quad (B.4)$$

where the coefficients  $d_i$  are real functions of  $(p, \sigma, \sigma_0, B)$  and of  $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ . The last three coefficients are rather difficult to manipulate. But this equation can be easily

solved, using Cardano's method for instance. In the case where

$$d_3 = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (\text{B.5})$$

does not vanish, we compute the solutions. The resulting values  $q$  are complex numbers, so that they cannot correspond to physical solutions. Yet, for some sets of angles  $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ , the solutions for  $q$  are real. We are interested only in these modes. Determining the angles  $(\vartheta_1, \vartheta_2)$  for which  $q$  is real, we then compute the growth rate  $\Re[s_+]$  using Eq. (B.3). There are four different branches (see Figs. B1(a)), whose lengths increase when the control parameter is chosen deeper in the collectively moving phase (*i.e.* at low  $\sigma$  or at high  $p$ ). For all sets of parameters for which we have computed the growth rate, its real part remains negative (Fig. B1(b)). Thus the homogeneous moving phase is stable against finite wavelength perturbations in the general case.

The above calculation relies on the assumption that  $d_3 \neq 0$ . This assumption is not valid in either of the four following cases:

- a longitudinal instability ( $\sin \vartheta_1 = 0$ ),
- a wave vector  $\mathbf{q}$  colinear to the direction of the main motion ( $\sin \vartheta_2 = 0$ ),
- a perturbation  $\delta \mathbf{w}_0$  colinear to the wave vector  $\mathbf{q}$  ( $\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0$ ).
- a perturbation  $\delta \mathbf{w}_0$  perpendicular to the wavevector  $\mathbf{q}$  ( $\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0$ ).

We first consider the study of stability under a longitudinal perturbation:  $\mathbf{w}_1$  and  $\delta \mathbf{w}_0$  are colinear. Then the Eq. (B.2) vanishes in two cases:

$$s = -\frac{iqv_0^2 \cos \vartheta_2}{2\kappa w_1}, \quad \text{or} \quad \sin \vartheta_2 = 0. \quad (\text{B.6})$$

Replacing  $s$  by the first expression in equation (B.1), we can show that there is no authorised mode, in other words  $\Im[q] \neq 0$ . So, Eq. (B.2) vanishes only for  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ . The corresponding stability analysis is presented in details in Section 4.2.3.

For any of the last three cases, we solve equations B.2 and B.2, and we find that either there is no authorized mode ( $q$  is complex), or  $\Re[s_+] \leq 0$ . Thus none of those cases is related to an unstable mode.

To sum up, this study of the stability of the homogeneous stationary moving phase shows that the longitudinal direction is the only mode which can be unstable. This result is consistent with the observations made in numerical simulations [14, 15].

## References

- [1] Toner J, Tu Y and Ramaswamy S 2005 *Annals Of Physics* **318** 170
- [2] Parrish J K and Hamner W M (eds) 1997 *Animal Groups in Three Dimensions* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [3] Helbing D, Farkas I and Vicsek T 2000 *Nature* **407** 487
- [4] Helbing D, Farkas I J and Vicsek T 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1240
- [5] Feare C 1984 *The Starlings* (Oxford: Oxford University Press)
- [6] Hubbard S, Babak P, Sigurdsson S and Magnusson K 2004 *Ecol. Model.* **174** 359
- [7] Rauch E, Millonas M and Chialvo D 1995 *Phys. Lett. A* **207** 185
- [8] Ben-Jacob E, Cohen I, Shochet O, Czirók A and Vicsek T 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 2899
- [9] Harada Y, Nogushi A, Kishino A and Yanagida T 1987 *Nature (London)* **326** 805
- [10] Badoual M, Jülicher F and Prost J 2002 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **99** 6696
- [11] Sugawara K, Sano M and Watanabe T 2002 *Proc. of 2002 FIRA Robot World Congress* 36
- [12] Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, Cohen I and Shochet O 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1226
- [13] Czirók A, Stanley H E and Vicsek T 1997 *J. Phys. A* **30** 1375
- [14] Grégoire G and Chaté H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 025702

- [15] Chaté H, Ginelli F, Grégoire G and Raynaud F 2008 *Phys. Rev. E* **77** 046113
- [16] Csahók Z and Czirók A 2002 *Physica A* **243** 304
- [17] Toner J and Tu Y 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4326
- [18] Toner J and Tu Y 1998 *Phys. Rev. E* **58** 4828–4858
- [19] Bertin E, Droz M and Grégoire G 2006 *Phys. Rev. E* **74** 022101
- [20] Baskaran A and Marchetti M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 268101
- [21] Dauxois T and Peyrard M 2006 *Physics of solitons* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [22] Albano E V 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2129
- [23] Aldana M, Dossetti V, Huepe C, Kenkre V M and Larralde H 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 095702
- [24] Aldana M and Huepe C 2003 *J. Stat. Phys.* **112** 135
- [25] Couzin I D 2002 *J. Theor. Biol.* **218** 1
- [26] Duparcmeur Y L, Herrman H and Troadec J P 1995 *J. Phys. I France* **5** 1119
- [27] Grégoire G, Chaté H and Tu Y 2001 *Phys. Rev. E* **64** 011902
- [28] Levine H, Rappel W J and Cohen I 2000 *Phys. Rev. E* **63** 017101
- [29] Mikhailov A S and Zanette D H 1999 *Phys. Rev. E* **60** 4571
- [30] Shimoyama N, Sugawara K, Mizuguchi T, Hayakawa Y and Sano M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 3870
- [31] Ratushnaya V I, Bedeaux D, Kulinskii V L and Zvelindovsky A V 2007 *Physica A* **381** 39–46
- [32] Degond P and Motsch S 2007 *Comptes-rendus Mathématiques* **345** 555–560
- [33] Degond P and Motsch S 2008 *Journal of Statistical Physics* **131** 989–1021
- [34] Binder K 1976 *Phase transitions and critical phenomena* ed Domb C and Green M S (Academic Press)
- [35] Müller-Krumbhaar H and Binder K 1973 *J Stat. Phys.* **8** 1
- [36] Privman V (ed) 1990 *Finite size scaling and numerical simulations of statistical systems* (Singapor: ed. World scientific)
- [37] Borgs C and Kotecký R 1990 *J Stat. Phys.* **61** 79
- [38] Lübeck S 2004 *Int. J. of Mod. Phys. B* **18** 3977–4118
- [39] Marcq P, Chaté H and Manneville P 2006 *Prog. Theor. Phys. suppl* **161** 244
- [40] Grégoire G 2002 *Mouvement collectif et physique hors d'équilibre* Ph.D. thesis Université Paris 7–Denis Diderot
- [41] Baglietto G and Albano E V 2008 *Phys. Rev. E* **78** 021125





*Annexe – B*

---

## Déserts de barchanes

---

## An agent-based model of dune interactions produces the emergence of patterns in deserts

Mathieu Génois,<sup>1</sup> Sylvain Courrech du Pont,<sup>1</sup> Pascal Hersen,<sup>1</sup> and Guillaume Grégoire<sup>1,2</sup>

Received 13 June 2013; revised 9 July 2013; accepted 12 July 2013; published 7 August 2013.

[1] Crescent-shaped barchan dunes are highly mobile dunes which are ubiquitous on Earth and other solar system bodies. Although they are unstable when considered separately, they form large assemblies in deserts and spatially organize in narrow corridors that extend in the wind direction. Collision of barchans has been proposed as a mechanism to redistribute sand between dunes and prevent the formation of very large dunes. Here we use an agent-based model with elementary rules of sand redistribution during collisions to access the full dynamics of very large barchan fields. We tune the dune field density by changing the sand load/lost ratio and follow the transition between dilute fields, where barchans barely interact, and dense fields, where dune collisions control and stabilize the dune field. In this dense regime, barchans have a small, well-selected size and form flocks: the dune field self-organizes in narrow corridors of dunes, as it is observed in real dense barchan deserts. **Citation:** Génois M., S. Courrech du Pont, P. Hersen, and G. Grégoire (2013), An agent-based model of dune interactions produces the emergence of patterns in deserts, *Geophys. Res. Lett.*, 40, 3909–3914, doi:10.1002/grl.50757.

### 1. Introduction

[2] Depending on the variability of the local winds and sand availability, dunes can adopt various shapes [Wasson and Hyde, 1983]. When viewed from above, they mimic large stars, long linear ridges, or crescent structures [Bagnold, 1941; Pye and Tsoar, 1990]. The crescent-shaped dune, called barchan, is a prototypical model of sand dune dynamics, and its properties as an isolated object are now well understood [Bagnold, 1941; Finkel, 1959; Kroy *et al.*, 2002; Hersen, 2004]. However, barchans are usually found in large dune assemblies, counting typically tens of thousands of dunes [Elbelrhiti *et al.*, 2008; Bagnold, 1941; Cooke *et al.*, 1993]. Barchan fields are observed in regions with a nonerodible floor and submitted to a prevalent unidirectional fluid flow. These conditions are often met, and barchan fields are observed on Earth, Mars, Titan, and even underseas [Breed *et al.*, 1979; Bourke and Goudie, 2009; Radebaugh

*et al.*, 2010]. Barchan width ranges from a few meters to several hundreds of meters. They are usually close to each other, and thus, their dynamics, and in particular the evolution of their size through time, may be altered by dune-dune interactions. This has to be taken into consideration if one wants to understand the long-term evolution of barchan fields. In particular, the very existence of a barchan field is in apparent contradiction with the fact that barchan dynamics display an unstable fixed point. Dunes will either grow or shrink if their size departs from their equilibrium size, which is set by the balance between sand loss and sand capture. In contrast with this unstable behavior, dune size distribution within a field does not display a lack of small dunes or an anomalous number of huge barchans [Elbelrhiti *et al.*, 2008; Durán *et al.*, 2009, 2011]. Furthermore, barchan fields may spatially be structured in narrow corridors, which extend in the wind direction. As observed on Figure 1, these corridors organize the dune field in zones of dense barchan areas, where dunes are smaller, and dilute areas with larger dunes. Dense and sparse regions coexist nearby on the same field without any obvious reason, neither the local conditions such as wind velocity or grain size, nor the boundary conditions differ [Elbelrhiti *et al.*, 2008]. This spatial organization is strongly different from a simple field confinement or barchan alignment [Bagnold, 1941], i.e., the classical diagonal or echelon arrangement, which can be simulated considering remote exchange of sand only as shown by Lima *et al.* [2002].

[3] A coexistence in time and in space of these regions of different barchan densities and sizes could be interpreted as the signature of a self-organized system. Sediment transport often leads to the formation of self-organized patterns like sand seas or watersheds [Rodriguez-Iturbe and Rinaldo, 1997; Dodds and Rothman, 2000; Devauchelle *et al.*, 2012]. However, barchans are very mobile objects, which gives them a character of their own. The dynamical clusters they form on the field are, to some extent, reminiscent of collective movements as observed for schools of fish or flocks of birds. It is thus natural to use the formalism and the tools of this study field [Vicsek *et al.*, 1995; Chaté *et al.*, 2008], to consider barchans as agents, which interact through collisions. Indeed, it is commonly thought that dune-dune interactions, such as collisions, are at play to sustain a dune field over a long time, to structure the field in corridors and to select the dune size [Kocurek *et al.*, 2010]. Field studies [Elbelrhiti *et al.*, 2005; Hugenbholz and Barchyn, 2012; Vermeesch, 2011] and underwater experiments [Endo *et al.*, 2004; Hersen and Douady, 2005] have shown that dunes do exchange sand during collision events. Dune collision lead to merging or splitting mechanisms, which can be stabilizing providing that large dunes are regularly split into smaller ones, as proposed using a mean field approach

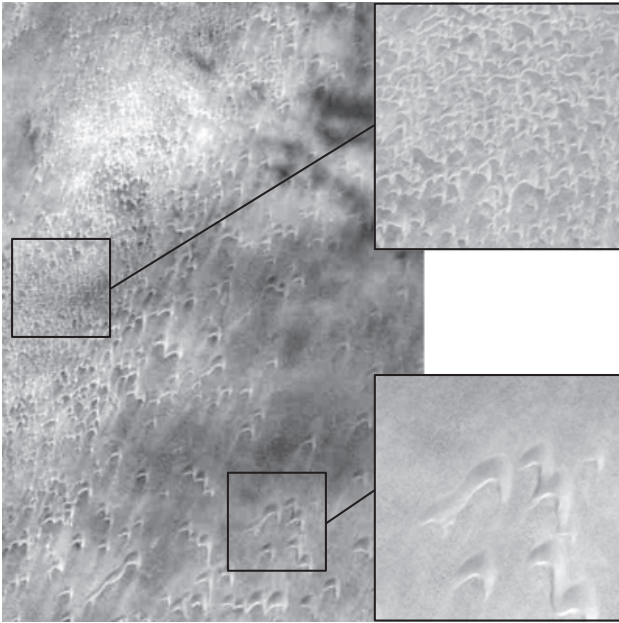
Additional supporting information may be found in the online version of this article.

<sup>1</sup>Laboratoire Matière et Systèmes Complexes, University of Paris Diderot, Paris, France.

<sup>2</sup>Academy of Bradylogists (<http://bradylogist.info/>).

Corresponding author: S. Courrech du Pont, Laboratoire Matière et Systèmes Complexes, Université Paris-Diderot, Bâtiment Condorcet, 10 rue A. Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris CEDEX 13, France. (sylvain.courrech@univ-paris-diderot.fr)

©2013. American Geophysical Union. All Rights Reserved.  
0094-8276/13/10.1002/grl.50757



**Figure 1.** La'ayoune desert in south of Morocco (27.3°N, -13.21°E), in which (top left) dense regions coexist with (bottom right) sparse regions. Square zooms are 1 km wide. (from Google Earth).

[Hersen and Douady, 2005]. This idea is only a first step to fully understand how collisions set the structure and affect the stability of a large assembly of dunes. Numerical studies implementing phenomenological rules of collisions have been run in order to forecast the statistical properties of a large dune field in which collisions take place [Durán et al., 2009]. The barchan size selection successfully emerges from these numerical models but not the critical aspect of spatial organization of dunes in corridors. It is a general problem in which the large-scale emergent property comes from the complex, local, interactions of many objects, which perfectly falls within the scope of an agent-based model.

## 2. A Barchan Field as an Agent Population

[4] Here we use an agent-based model, implementing dune collisions over the whole dune field, to infer the dynamical statistical behavior of a large dune field in the limit of long observation time, its stationary state and the possible emergence of spatial structures. In order to identify the physical mechanisms involved in the emergent properties of the dune fields, this model is restricted to the minimum ingredients of dune dynamics and interactions.

[5] The barchan shape is characterized by a low-slope upwind back and an avalanche face downwind, which is framed by two horns pointing in the wind direction (see Figures 2a–2b). The width, length, and height of barchans are linearly related to each other so that their morphological state can be defined by one parameter only. Sand erosion and deposition force barchans to move downwind. Their propagation velocity, which increases with the wind shear stress and decreases with the sediment influx, is inversely proportional to the dune size. The avalanche face acts as a sand trap, and barchans can propagate over long distances without losing much sand. Yet small sand loss occurs at the tip of the

barchan horns [Bagnold, 1941; Pye and Tsoar, 1990]. The resulting output sand flux can be described by a linear relationship with the dune size. Starting with a nonnull value, the sand loss increases only very weakly with increasing dune size, and can be considered as a constant [Hersen et al., 2004]. On the other hand, the input sand flux is proportional to the dune width. As a result, the fixed point (where loss and gain are balanced) is unstable and an isolated barchan can only grow or shrink and disappear [Hersen et al., 2004]. Indeed, below a critical size, the barchan loses its avalanche face, turns into a dome-like structure, and quickly vanishes.

[6] In our model, dunes are described by their width  $w$  only and, for the sake of simplicity, are cubic. They propagate downwind at a speed  $v$ :

$$v = \frac{\alpha}{w}, \quad (1)$$

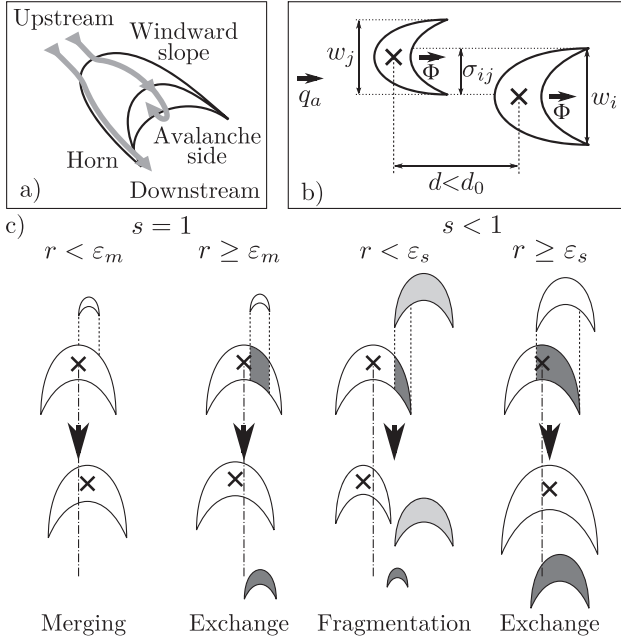
where  $\alpha$  is a volumic sediment flux per unit of length. It accounts for the wind speed and the sand transport threshold. We assume that dunes lose sand homogeneously along their downwind face. We call  $\Phi$  the volume lost per unit of time because of wind erosion. Barchans can also grow, due to an incoming sand influx per unit of length transverse to the wind,  $q_a$ . The volume  $V$  of an isolated dune will then vary in function of time as:

$$\frac{dV}{dt} = -\Phi + q_a w. \quad (2)$$

Equation (2) contains the fundamental instability of one isolated barchan of unstable equilibrium size  $\tilde{w} = \Phi/q_a$ . If the dune shrinks below the dome size  $w_c$ , it is removed from the field. The model does not conserve mass.

[7] One hypothesis to reconcile the unstable behavior of an isolated dune (equation (2)) with the existence of dense barchan fields is to consider dune collisions. Small dunes propagate faster than large ones (equation (1)) and can collide with them, leading to a transfer of mass between dunes [Hersen and Douady, 2005; Durán et al., 2009]. This mass exchange is not fully understood yet. However, numerical studies [Schwämmle and Herrmann, 2003; Katsuki et al., 2005; Diniega et al., 2010], experiments under water [Endo et al., 2004; Hersen and Douady, 2005], and field observations [Elbelrhiti et al., 2005; Hugenbholz and Barchyn, 2012] have shown that barchan collisions lead to merging and splitting depending on the relative size of dunes and their lateral alignment. If the incoming dune is very small, it is simply absorbed by the larger, slower one. If the dunes are of similar sizes, a redistribution of mass occurs, and one (or several) small dunes are emitted at the front, while a larger dune is formed at the back.

[8] In our model, two dunes are considered in interaction if they are closer than a distance  $d_0$  in the wind direction and if their width projections overlap, as shown in Figure 2b. We consider two types of interactions: a distant one through capture of emitted sand and sand flux screening, and a close one through collision. The distance  $d_0$  reflects a typical distance for the sand flux to get diluted laterally due to sand grains collisions on the ground, equivalent to a diffusion process. Let us consider two dunes  $i$  and  $j$ ,  $i$  being the downwind dune and  $j$  the upwind one. The width of  $i$  is noted  $w_i$  and the overlapped width  $\sigma_{ij}$ . We define the upward projection  $s = \frac{\sigma_{ij}}{w_j}$  and the downward projection  $r = \frac{\sigma_{ij}}{w_i}$ . The leeward dune catches a part  $s$  of the sand lost by the upwind dune.



**Figure 2.** Elementary rules for barchan field modeling (a) Morphology of a barchan. (b) Parameters used to describe an interaction: two dunes of size  $w_i$  and  $w_j$  interact when they are closer than  $d_0$  and within a cross section of  $\sigma_{ij}$ . Each dune loses a volume per unit of time  $\Phi$ , and it is fed by a sand influx  $q_a$ . (c) The four cases of binary dune collisions. Depending on the upward projection  $s = \frac{\sigma_{ij}}{w_j}$ , the collision is total ( $s = 1$ ) or lateral ( $s < 1$ ). Then, the downward projection  $r = \frac{\sigma_{ij}}{w_i}$  regarding to a merging  $\varepsilon_m$  or a splitting  $\varepsilon_s$  threshold sets the type of the collision. The volume of sand is conserved during a collision. Grey levels show the sand redistribution.

In the same time, the upwind dune screens the leeward dune on the width  $\sigma_{ij}$  from any flux coming upwind of  $i$  and  $j$ . If the upwind dune  $j$  is the only one that is closer than  $d_0$  to the downwind dune  $i$ , the volume of the latter varies as  $dV_i/dt = s \times \Phi + q_a(w_i - \sigma_{ij}) - \Phi$ . Note that in our model, these eolian mass exchanges do not affect the aspect ratio of the dune (cubic) nor their position. This simplification, along with a sand loss spread over the full dune width (not limited to the horns), prevent the barchans to align in echelons.

[9] Two dunes collide when the upwind one passes the downwind one, following the rules shown in Figure 2c. When  $s = 1$  (perfect overlap),  $r$  is the width ratio. The two dunes merge if  $r$  is smaller than the merging threshold  $\varepsilon_m$ , and the new dune gets a volume:  $V_i^{t+\Delta t} = (w_i^t)^3 + (w_j^t)^3$ . When  $s = 1$  and  $r \geq \varepsilon_m$ , the total sand is redistributed into two new dunes of volume:  $V_i^{t+\Delta t} = (w_i^t)^3 + (w_j^t)^3 - \sigma_{ij}w_i^2$  and  $V_j^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}w_i^2$ . When  $s < 1$  (partial overlap), the sand is redistributed into two or three dunes, respectively, for  $r$  values bigger or smaller than the splitting threshold  $\varepsilon_s$ . When  $s < 1$  and  $r \geq \varepsilon_s$ , the two dunes exchange sand the same way as when  $s = 1$  and  $r \geq \varepsilon_m$ . When  $s < 1$  and  $r < \varepsilon_s$ , the bumping dune  $i$  is unaffected while the bumped dune is split in two dunes. The ejected dune  $k$  gets a volume:  $V_k^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}w_i^2$  while  $V_j^{t+\Delta t} = (w_j^t)^3$  and  $V_i^{t+\Delta t} = (w_i^t)^3 - \sigma_{ij}w_i^2$ . Here the new  $i$  and  $j$  dunes at  $t + \Delta t$  may be the upwind or downwind dunes

depending on their size, the smaller being the new downwind dune. Note that the center of mass of the new dunes are set at the barycentric positions of the incoming sand, which may shift the dunes laterally.

[10] To compensate for sand loss, dunes can appear by nucleation anywhere in the dune field with a probability per unit time and per unit of surface  $\lambda$ . Their width is arbitrarily set to  $w_0$ . These nucleations are the trace of topographical defects that promote sand deposition [Pye and Tsoar, 1990; Bagnold, 1941]. This choice maximizes the effect of noise. Thus, any emerging behaviors will be robust.

[11] Looking for stationary behavior of large dune fields, the dune field boundaries are periodic and the field is long compared to the typical distance of dune interactions ( $L \gg d_0$ ). Since dunes move along the wind direction, we expect that the perpendicular direction  $l$  does not play a major role in dune-dune dynamics. The field is initially filled with dunes at random and homogeneously chosen positions. Their size follow a constant probability which is centered on  $w_0$  and with a minimum cutoff value  $w_c$ . The numerical method used to compute the assembly of dunes in this large field is based on a synchronous algorithm and off-lattice dynamics as in self-propelled particle models [Chaté et al., 2008]. By their nontrivial kinematics, dunes can indeed be considered as self-propelled particles, which exchange mass—or momentum—with their neighborhood. Values of the different parameters used in the simulations are reported in Table 1. In particular, we assume that there is little sand around the dunes, so that the ambient influx is null ( $q_a = 0$ ). It implies that an isolated dune always vanishes. From a simulation to another, the dune density of the field is tuned through a fixed nucleation rate  $\lambda$  and a changing erosion rate  $\Phi$ .

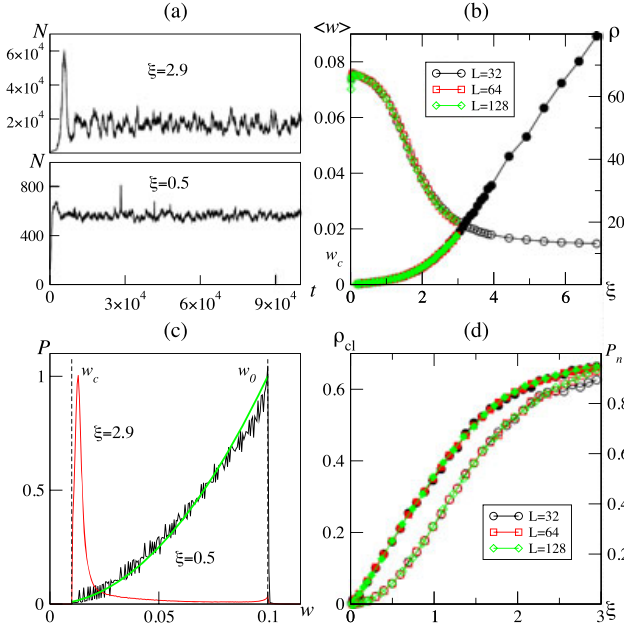
[12] Although variables such as  $\alpha$ ,  $q_a$ ,  $\Phi$ , or  $\lambda$  are partly physically linked (in a nontrivial manner), by the wind magnitude, for example, they are decoupled in our model. This helps to identify the physical ingredients that pilot the emergence of structures. The decoupling of the variables implies that it will be artificial to fix accurately their values with real figures. However, if dunes of minimum width  $w_c$  correspond to  $\sim 1$  m dunes in real fields, they travel about 10 times their width length in a year time [see Cooke et al., 1993]. This gives an order of magnitude for dune sizes and velocities in our simulations (see Table 1).

### 3. Results and Discussion. Dense Dune Fields Auto-Organize in Corridors.

[13] From the model parameters, seven independent dimensionless numbers can be built. There are three ratios of lengths (for example,  $w_0/d_0$ ,  $w_c/d_0$ , and  $\tilde{w}/d_0 = \Phi/(q_a d_0)$ , which is infinite here), the two parameters  $\varepsilon_s$  and  $\varepsilon_m$ , which control the dynamics of collisions and 2 times ratios. These

**Table 1.** Parameters of the Simulations

$d_0$	$w_0$	$w_c$	$\ell$	$L$	$\Delta t$
1	0.1	0.01	32	[32;128]	1
$\varepsilon_s$	$\varepsilon_m$	$\lambda^{-1}$	$\alpha$	$\Phi \times 10^7$	$q_a$
0.5	0.5	2048	$10^{-3}$	[1.5;500]	0



**Figure 3.** Characteristics of dilute and dense dune field. (a) Number of dunes in the field as a function of time for a dense (top) and dilute (bottom) regime. (b) Mean width  $\langle w \rangle$  (empty symbols) and dune density  $\rho$  ( $\rho = N/(L\ell)$ , filled symbols) in the field versus  $\xi$  for different system lengths. (c) Size distribution of dunes in a dilute (red) and in a dense (black) regime field. The continuous green line is the analytic law of dilute field distribution, equation (4). (d) Density of clusters  $\rho_{cl}$  within the field (empty symbols) and probability  $P_n$  for a dune to be in a cluster (filled symbols) versus  $\xi$  for different system sizes.

last two dimensionless numbers are set with three relevant times which we identified as the time of disappearance of an isolated dune of size  $w_0$ :  $t_{col} = (w_0^3 - w_c^3)/\Phi$ , the typical nucleation time:  $t_{nuc} = (\lambda \times d_0^2)^{-1}$  and a collision time:  $t_{col}$ , which could be evaluated as the shortest time for two dunes to collide when they are under influence:  $t_{col} = d_0/(\alpha/w_c - \alpha/w_0)$ . In the present study, all parameters but  $\Phi$ , the sand loss per unit time of a barchan, are kept constant (see Table 1):  $t_{nuc} = 2048$  and  $t_{col} \simeq 11$  while  $t_{col} \in [20; 6.7 \times 10^3]$ . An isolated dune of size  $w_0$  travels a distance 2 to 660 times its initial size before disappearing. We define the control parameter  $\xi$ :

$$\xi = \frac{t_{col}}{t_{nuc}} = \frac{w_0^3 - w_c^3}{\Phi} \lambda d_0^2. \quad (3)$$

It measures the balance between the disappearance of dunes due to sand loss (function of  $\Phi$ ) and dune nucleation (fixed).

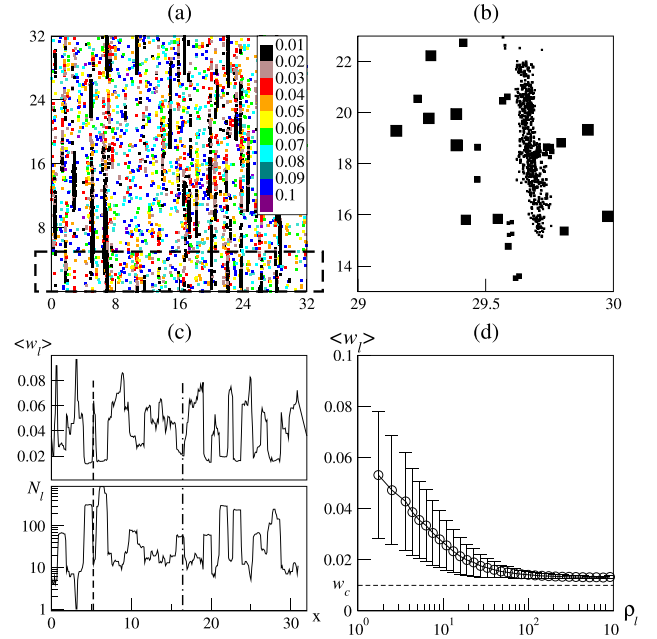
[14] Although out of equilibrium, the dune field always reaches a stationary state within our range of parameters (see Figure 3a). For small  $\xi$ , the barchan field is dilute, a few dunes are dispersed across the whole field, the density is very low, and dune collisions are rare. Dunes can be considered as separate, unstable objects whose disappearance is balanced by nucleation only.  $\xi$  is actually the exact dimensionless stationary density in the limit of  $\xi \ll 1$ . The normalized

distribution of size  $P(w)$  (see Figure 3c) follows the analytic distribution:

$$P(w) = \frac{3w^2}{w_0^3 - w_c^3}, \text{ for } w \in [w_c; w_0], \quad (4)$$

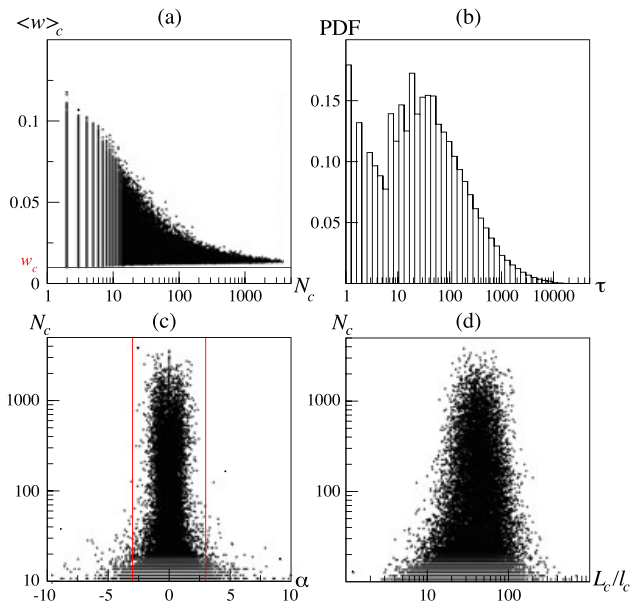
which can be derived from the individual dynamics (equation (2)). Therefore, the typical size of dune is about  $3/4 w_0$ , when  $w_c$  is small enough. Such a field with low interaction between dunes compares well to dilute deserts such as the barchan field of La Pampa de la Joya in Peru [Elbelrhiti et al., 2008].

[15] Decreasing the sand loss  $\Phi$ , and thus increasing  $\xi$ , increases the frequency of collisions. For large densities ( $\xi \geq 1$ ), dune collisions tend to increase the number  $N$  of dunes in the field more rapidly than the effect of nucleation itself as shown on Figure 3b. With  $\varepsilon_s$  and  $\varepsilon_m$  set to 0.5, the effective predominant collision type is the fragmenting one that creates an additional dune (Figure 2c). These collisions dispatch sand in a nontrivial manner. The field state remains stationary (Figure 3a) but the size distribution is fundamentally altered and shifted to small sizes (Figures 3b and 3c). The most probable size is close to but larger than the minimum size of dunes  $w_c$  (Figure 3c). A dense assembly of dunes is not a trivial homogeneous field with frequent



**Figure 4.** Spatial organization of a dense dune field with  $\xi = 2.9$  and  $L = 32$ . (a) Snapshot of a computed desert. Colors represent the dune size. (b) Close-up of a cluster of Figure 4a. (c) Transverse profiles of local mean width  $\langle w \rangle_l$  and local number  $N_l$  of dunes of the surrounded region of the field (Figure 4a).  $\langle w \rangle_l$  and  $N_l$  show anticorrelation, see dashed and dash-dotted lines, for example. (d) Local mean width  $\langle w \rangle_l$  as a function of the local dune density  $\rho_l$ .  $\langle w \rangle_l$  and  $\rho_l$  are computed for boxes of size  $w_0 \times w_0$ . Values are averaged over the whole field and over a long period of time. Error bars stand for standard deviation. The size of dunes is smaller and better selected as the density increases. Movies showing the dynamics of barchan fields are available as supporting information.





**Figure 5.** Some properties of clusters in a dense regime,  $\xi = 2.9$  and  $L = 32$ . (a) Mean size of dunes  $\langle w \rangle_c$  in a cluster versus the number  $N_c$  of dunes of the same cluster. The red line marks the size of vanishing dunes  $w_c$ . (b) Distribution of the cluster lifetime. (c) Number  $N_c$  of dunes in a cluster versus the angle between the main axis of the same cluster and the wind direction. The two red lines show an amplitude of  $6^\circ$ , which corresponds to five standard deviations. (d) Number  $N_c$  of dunes in a cluster versus the aspect ratio of the same cluster.

collisions. On the contrary, dense spatial clusters of small interacting dunes (i.e., with interdunes distance smaller than  $d_0$ ) develop and gather most of the dunes when  $\xi$  increases (Figure 3d). As shown in Figures 4 and 5, these clusters have sharp boundaries and are elongated along the wind direction. Thus, the field is self-structured in a corridor-like pattern where the local density is a highly fluctuating quantity. If we restrict our measurements to local low density, the dune size distribution shows a maximum at  $w_0$  as in a dilute desert. The local dune size is directly correlated to the local density of dunes and decreases when this latter increases (Figure 4). A dense field looks like a dilute field of big dunes with dense corridors of small dunes. These spatial structures and relation between dune size and dilution are similar to what is observed in the long barchan field that extends in the Atlantic Sahara (Morocco), see *Elbelrhiti et al.* [2008] and Figure 1.

[16] The formation of corridors in dense dune fields is robust and to that respect, observed for a range of the three characteristic times  $t_{\text{col}}$ ,  $t_{\text{nuc}}$ , and  $t_{\text{col}}$  when fragmenting collisions are allowed, i.e., when  $\epsilon_s > 0$ . These results demonstrate that a dune fragmentation mechanism, which seems to lack in previous studies, is a key process in setting the dune size but also in the emergence of dense barchan corridors within a dune field. Here the fragmentation mechanism is provided by collisions but one can think of other barchan destabilization mechanism such as calving of small dunes from the arms of big barchans [*Elbelrhiti et al.*, 2005; *Zhang et al.*, 2009]. However, the selection of size and the blowup of the number of dunes in corridors result from a dynamical effect. Collisions produce small dunes that go

faster and collide downwind dunes in an avalanche-like process (Figure 5a). Note that these small dunes would have a very limited lifetime if isolated but that they do not lose sand in a corridor where all dunes exchange sand and sustain each other. A corridor loses sand only at its downwind boundary.

[17] Transitory times are also very different between dilute and dense deserts. Whereas the number of dunes relaxes normally in dilute deserts, dense deserts exhibit nearly periodic blowup of their population (not shown here). Therefore, cluster properties are not Gaussian statistical fluctuations but are reinforced by dune-to-dune interaction. This behavior is consistent with a process of phase transition. However, the finite lifetime of clusters (Figure 5b) finally inhibits any long range order that could appear at a phase transition.

[18] Increasing  $\xi$  further, both the number of clusters and cluster size increase (Figure 3). The dunes are smaller, corridors are more aligned in the wind direction, and their aspect tends to a line (about 40 times longer than wide). However, note that our model may not be relevant for very high sand density for which barchans may laterally link into barchanoid ridges and eventually form transverse dunes [*Wasson and Hyde*, 1983; *Kocurek et al.*, 2010]. Such a mechanism is not included in our model. Indeed, although transverse dunes are known to be unstable on a nonerodible floor when there is no sand supply [*Reffet et al.*, 2010; *Parteli et al.*, 2011; *Guignier et al.*, 2013], they might be stabilized by a sand input. The dune field might also not reach stationary state then.

#### 4. Conclusion

[19] We introduced a minimal agent-based model of barchans in interactions, in which kinematics and interactions are set in considering experimental evidence of dune collisions. Its domain of validity cannot extend outside the framework of statistical physics: infinite size and infinite time of observations. However, varying the lifetime of barchans by tuning the sand loss, we showed a smooth crossover from dilute deserts to dense ones where dunes aggregate in elongated clusters. The computed deserts self-organize in corridor-like patterns where dense regions are composed by small dunes, and dilute spaces show larger dunes. This is observed in dense barchan fields on Earth. Our model, although minimal, was able to capture the emergence of such heterogeneous patterning. We demonstrated in particular that the fragmenting collision between barchans, which is a dynamical effect that produces dunes in cascade, is a mechanism that can explain the formation of dense corridors of barchan with a small, well-selected size. One can now think to add complexity to even better represent real-world scenarios. In particular, it would be interesting to add an ambient influx, to limit the barchan sand loss to the arms only, and to consider the long range remote sand exchange. Experiments and numerical studies would also be fruitful to better constrain the phase diagram of collisions, the linking of barchans into transverse dunes, and the respective breaking, inverse transition.

[20] **Acknowledgments.** Reviews by D. Jerolmack and an anonymous reviewer were valuable. S. Courrech du Pont is supported by Agence Nationale de la Recherche grant ANR 12 BS05 001 02/EXO-DUNES.

[21] The Editor thanks two anonymous reviewers for assistance evaluating this manuscript.

## References

- Bagnold, R. A. (1941), *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes*, Chapman and Hall, London.
- Bourke, M., and A. Goudie (2009), Varieties of barchan form in the Namib Desert and on Mars, *Aeolian Res.*, *1*(1–2), 45–54, doi:10.1016/j.aeolia.2009.05.002.
- Breed, C. S., M. J. Grolier, and J. F. McCauley (1979), Morphology and distribution of common “sand” dunes on Mars: Comparison with the Earth, *J. Geophys. Res.*, *84*(B14), 8183–8204, doi:10.1029/JB084iB14p08183.
- Chaté, H., F. Ginelli, G. Grégoire, and F. Raynaud (2008), Modeling collective motion: Variations on the Vicsek model, *Eur. Phys. J. B*, *64*, 451, doi:10.1140/epjb/e2008-00275-9.
- Cooke, R. U., A. Warren, and A. S. Goudie (1993), *Desert Geomorphology*, UCL Press Limited, University College London, London, U. K.
- Devauchelle, O., A. P. Petroff, H. F. Seybold, and D. H. Rothman (2012), Ramification of stream networks, *PNAS*, *109* (51), 20,832–20,836, doi:10.1073/pnas.1215218109.
- Diniega, S., K. Glasner, and S. Byrne (2010), Long-time evolution of models of aeolian sand dune fields: Influence of dune formation and collision, *Geomorphology*, *121*, 55–68, doi:10.1016/j.geomorph.2009.02.010.
- Dodds, P., and D. Rothman (2000), Scaling, universality, and geomorphology, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, *28*(1), 571–610, doi:10.1146/annurev.earth.28.1.571.
- Durán, O., V. Schwammle, and P. G. Lind (2009), The dune size distribution and scaling relations of barchan dune fields, *Granular Matter*, *11*(1), 7–11, doi:10.1007/s10035-008-0120-4.
- Durán, O., V. Schwammle, P. G. Lind, and H. J. Herrman (2011), Size distribution and structure of barchan dune fields, *Nonlinear Processes Geophys.*, *18*(4), 455–467, doi:10.5194/npg-18-455-2011.
- Elbelrhiti, H., P. Claudin, and B. Andreotti (2005), Field evidence for surface-wave-induced instability of sand dunes, *Nature*, *437*, 720–723, doi:10.1038/nature04058.
- Elbelrhiti, H., B. Andreotti, and P. Claudin (2008), Barchan dune corridors: Field characterization and investigation of control parameter, *J. Geophys. Res.*, *113*, F02S15, doi:10.1029/2007JF000767.
- Endo, N., Taniguchi K., and Katsuki A. (2004), Observation of the whole process of interaction between barchans by flume experiments, *Geophys. Res. Lett.*, *31*, L12503, doi:10.1029/2004GL020168.
- Finkel, H. (1959), The barchans of southern Peru, *J. Geol.*, *67*, 614–647.
- Guignier, L., H. Niiya, H. Nishimori, D. Lague, and A. Valance (2013), Sand dunes as migrating strings, *Phys. Rev. E*, *87*, 052206, doi:10.1103/PhysRevE.87.052206.
- Hersen, P. (2004), On the crescentic shape of barchan dune, *Eur. Phys. J. B*, *37*, 507–514, doi:10.1140/epjb/e2004-00087-y.
- Hersen, P., and S. Douady (2005), Collision of barchan dunes as a mechanism of size regulation, *Geophys. Res. Lett.*, *32*, L21403, doi:10.1029/2005GL024179.
- Hersen, P., K. H. Andersen, H. Elbelrhiti, B. Andreotti, P. Claudin, and S. Douady (2004), Corridors of barchan dunes: Stability and size selection, *Phys. Rev. E*, *69* (1), 011–304, doi:10.1103/PhysRevE.69.011304.
- Hugenbholz, C., and T. Barchyn (2012), Real barchan dune collisions and ejections, *Geophys. Res. Lett.*, *39*, L02306, doi:10.1029/2011GL050299.
- Katsuki, A., N. Endo, and K. Taniguchi (2005), Collision dynamics of two barchan dunes simulated by a simple model, *J. Phys. Soc. Japan*, *37*, 507–514, doi:10.1143/JPSJ.74.538.
- Kocurek, G., R. Ewing, and D. Mohrig (2010), How do bed form patterns arise? New views on the role of bed form interactions within a set of boundary conditions, *ESPL*, *35*(1), 51–63, doi:10.1002/esp.1913.
- Kroy, K., G. Sauermann, and H. J. Herrmann (2002), Minimal model for aeolian sand dunes, *Phys. Rev. E*, *66*, 031–302, doi:10.1103/PhysRevE.66.031302.
- Lima, A., H. Sauermann, H. Herrmann, and K. Kroy (2002), Modelling a dune field, *Physica A*, *310*, 487–500, doi:10.1016/S0378-4371(02)00546-0.
- Parteli, E., J. Andrade, and H. Herrmann (2011), Transverse instability of dunes, *Phys. Rev. Lett.*, *107*(188), 001, doi:10.1103/PhysRevLett.107.188001.
- Pye, K., and H. Tsoar (1990), *Aeolian Sand and Sand Dunes*, Unwin Hyman, London.
- Radebaugh, J., R. Lorenz, T. Farr, P. Paillou, C. Savage, and C. Spencer (2010), Linear dunes on Titan and Earth: Initial remote sensing comparisons, *Geomorphology*, *121*(1–2), 122–132, doi:10.1016/j.geomorph.2009.02.022.
- Reffet, E., S. Courrech du Pont, P. Hersen, and S. Douady (2010), Formation and stability of transverse and longitudinal sand dunes, *Geology*, *39*(6), 491–494, doi:10.1130/G30894.1.
- Rodriguez-Iturbe, I., and A. Rinaldo (1997), *Fractal River Basins: Chance and Self-Organization*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.
- Schwammle, V., and H. J. Herrmann (2003), Solitary wave behaviour of sand dunes, *Nature*, *426*, 619–620, doi:10.1038/426619a.
- Vermeesch, P. (2011), Solitary wave behavior in sand dunes observed from space, *Geophys. Res. Lett.*, *38*, L22, doi:10.1029/2011GL049610.
- Vicsek, T., A. Czirok, E. Benjacob, I. Cohen, and O. Shochet (1995), Novel type of phase-transition in a system of self-driven particles, *Phys. Rev. Lett.*, *75*(6), 1226–1229, doi:10.1103/PhysRevLett.75.1226.
- Wasson, R., and R. Hyde (1983), Factors determining desert dune type, *Nature*, *304*, 337–339, doi:10.1038/304337a0.
- Zhang, D., C. Narteau, and O. Rozier (2009), Morphodynamics of barchan and transverse dunes using a cellular automaton model, *J. Geophys. Res.*, *115*, F03041, doi:10.1029/2009JF001620.





*Annexe – C*

---

## Bandes de cisaillement

---

## Criterion for purely elastic Taylor-Couette instability in the flows of shear-banding fluids

This content has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text.

2011 EPL 96 44004

(<http://iopscience.iop.org/0295-5075/96/4/44004>)

View [the table of contents for this issue](#), or go to the [journal homepage](#) for more

Download details:

IP Address: 81.194.30.216

This content was downloaded on 31/07/2014 at 10:20

Please note that [terms and conditions apply](#).

# Criterion for purely elastic Taylor-Couette instability in the flows of shear-banding fluids

M. A. FARDIN<sup>1,2</sup>, T. J. OBER<sup>2</sup>, C. GAY<sup>1</sup>, G. GRÉGOIRE<sup>1</sup>, G. H. MCKINLEY<sup>2</sup> and S. LEROUGE<sup>1(a)</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire Matière et Systèmes Complexes, CNRS UMR 7057, Université Paris Diderot  
10 rue Alice Domont et Léonie Duquet, 75205 Paris Cédex 13, France, EU*

<sup>2</sup> *Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology - 77 Massachusetts Avenue,  
MA 02139-4307 Cambridge, USA*

received 12 August 2011; accepted in final form 5 October 2011

published online 9 November 2011

PACS 47.50.-d – Non-Newtonian fluid flows

PACS 47.20.-k – Flow instabilities

PACS 83.60.-a – Material behavior

**Abstract** – In the past twenty years, shear-banding flows have been probed by various techniques, such as rheometry, velocimetry and flow birefringence. In micellar solutions, many of the data collected exhibit unexplained spatio-temporal fluctuations. Recently, it has been suggested that those fluctuations originate from a purely elastic instability of the flow. In cylindrical Couette geometry, the instability is reminiscent of the Taylor-like instability observed in viscoelastic polymer solutions. In this letter, we describe how the criterion for purely elastic Taylor-Couette instability should be adapted to shear-banding flows. We derive three categories of shear-banding flows with curved streamlines, depending on their stability.

Copyright © EPLA, 2011

“The stability of viscous liquids contained between two rotating cylinders” of radii  $R_i$  and  $R_o$  —or Taylor-Couette (TC) flow— is the benchmark problem for instability of flows with curved streamlines. It was the title of a seminal paper by Taylor in 1923 [1], wherein the author showed that the purely annular flow eventually becomes unstable. Above a critical rotation speed, a secondary vortex flow sets in, with periodicity  $\lambda \sim d$  along the vorticity direction, where  $d \equiv R_o - R_i$ . The original study by Taylor concerned simple incompressible Newtonian fluids. But many fluids are non-Newtonian and exhibit viscoelastic contributions to the stress [2]. In 1990, Larson, Shaqfeh and Muller showed that the TC flow of polymer solutions could also become unstable to a Taylor-like instability [3]. The kinematics of the unsteady flow are roughly similar to those of the Newtonian case, *i.e.* after a critical threshold, Taylor vortices appear, but the destabilizing mechanisms are very different, depending on two different kinds of non-linearities.

It is well known that Newtonian fluids can exhibit increasingly unstable flows for large values of the Reynolds number. When only the inner cylinder is rotating, the Reynolds number depends on the rotation rate of the

inner cylinder  $\Omega_i$ , such that  $Re \equiv \frac{\Omega_i R_i d}{\nu}$ , where  $\nu$  is the kinematic viscosity of the fluid [4]. In a simple Newtonian fluid, the constitutive relation is the simple linear relation between stress and shear rate. Then, the only non-linearity in the equations of motion comes from the advective term on the velocity  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ , in the equation of motion to ensure consistency between Eulerian and Lagrangian descriptions of fluid motion. The Reynolds number  $Re$  is linked to the relative magnitude of this term with respect to the dissipation terms [4].

In polymer solutions, and in many non-Newtonian fluids, the primary non-linearity usually comes from the constitutive relation rather than from the momentum balance. The constitutive equation is dynamical, *i.e.* it relates to the stress relaxation dynamics and typically includes a convected derivative on the stress  $\mathbf{T}$  [2]. In this convected derivative, consistency between Eulerian and Lagrangian descriptions requires a convective term, now applied on the stress  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{T}$ , and material frame independence requires additional terms of similar dimensionality  $\nabla\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$  [2,3]. The dimensionless group linked to the magnitude of those new non-linear terms is the Weissenberg number  $Wi \equiv \tau\dot{\gamma}$ , where  $\dot{\gamma} \equiv \frac{\Omega_i R_i}{d}$  is the typical shear rate in the flow and  $\tau$  is the stress relaxation time [5]. The similarity between  $Wi$  and  $Re$  is more apparent by

<sup>(a)</sup>E-mail: sandra.lerouge@univ-paris-diderot.fr

defining  $Re$  as a function of the viscous diffusion time  $\tau_{vd} \equiv \frac{d^2}{\nu}$ ,  $Re = \tau_{vd}\dot{\gamma}$  [6].  $Re$  controls the magnitude of the “inertial non-linearity”, while  $Wi$  controls the magnitude of the “elastic non-linearity” [7]. In general, both  $Re$  and  $Wi$  are non-zero, but in many practical cases for polymer solutions and melts, the elasticity number  $\mathcal{E} \equiv \frac{Wi}{Re} = \frac{\tau}{\tau_{vd}}$  is large, leading to negligible inertial effects.

In the simplest TC flow, where only the inner cylinder is rotating, and in the small gap limit, *i.e.*  $d \ll R_i$ , there exist two dimensionless groups, one relevant to the “purely inertial TC instability”  $\Sigma_i \equiv \sqrt{\Lambda}Re$ —derived and observed by Taylor [1]—and one to the “purely elastic TC instability”  $\Sigma_e \equiv \sqrt{\Lambda}Wi$ —derived and observed by Larson *et al.* [3]. Here,  $\Lambda \equiv \frac{d}{R_i}$  is the geometrical ratio linked to the streamline curvature, necessarily finite for the instability to be linear [1,7]. Note that the Taylor number is usually defined as  $Ta \equiv \Sigma_i^2$  [4]. In the purely inertial case, the flow becomes unstable for  $\Sigma_i > m'$ . In the purely elastic case, the flow becomes unstable for  $\Sigma_e > m$ . Both  $m'$  and  $m$  are coefficients of order unity, with precise values that depend on the boundary conditions [4,8].

In this letter, we extend the expression of the instability criterion for viscoelastic “shear-banding flows”. Shear-banding is yet another curious but ubiquitous phenomenon occurring in complex fluids [9,10]. When a fluid material is sheared, the strain rate gradient can be very large in narrow zones of the sample. Adjacent domains of markedly different strain rates are identifiable. This phenomenon has been observed in a variety of systems but in this letter, we focus on the steady shear-banding phenomenon of “wormlike micelles” [9,10]. Entangled wormlike micellar solutions are model rheological fluids due to their linear Maxwellian behaviour for small deformations, characterized by a single relaxation time  $\tau$  and elastic modulus  $G_0$  [2]. Furthermore, the robustness of their shear-banding behaviour makes them attractive for the general study of banding phenomena in complex fluids [11]. Roughly speaking, a shear-banding flow is reminiscent of a first-order phase transition. Above a lower critical Weissenberg number  $Wi_l$ , the shear stress plateaus. Then, until a second higher critical Weissenberg number  $Wi_h$ , the flow is inhomogeneous, split into two bands with local Weissenberg numbers  $Wi_l$  and  $Wi_h$ . To leading order, for  $Wi \in [Wi_l, Wi_h]$ , an increase in the value of the macroscopic Weissenberg  $Wi$  only increases the proportion  $\alpha \in [0, 1]$  of the high- $Wi$  band, following a “lever rule”  $Wi \simeq \alpha Wi_h + (1 - \alpha)Wi_l$  [9,10]. This scenario has been roughly confirmed experimentally with various techniques *e.g.*, pure viscometry, velocimetry, birefringence, etc. [10] but many fluctuating behaviours were observed in all the gathered data [10].

In a series of recent experiments [12–15] we have shown that the interface between the bands undulates due to an underlying secondary vortex flow that is mainly localised in the high Weissenberg number ( $Wi_h$ ) band. Elastic instabilities similar to the one observed in polymer solutions could be the source of many of the

observed spatio-temporal fluctuations. This rationale was reinforced by a recent linear stability analysis of the diffusive Johnson-Segalman (dJS) model [16], a viscoelastic constitutive model widely used to study shear-banding flows [17]. In this letter we wish to rationalize experimental data on the shear-banding TC flow of wormlike micelles by determining the appropriate form of the instability criterion in the case of shear-banding flow.

**Rheological and geometric scaling of purely elastic flow instabilities.** – In the introduction, we discussed the TC instability of the purely Newtonian fluid and the purely elastic fluid, which are both idealizations that facilitate our analysis, but which capture only the behaviour of very specific fluids. In general, however, non-Newtonian fluids can exhibit other attributes such as a Newtonian solvent contribution to the stress, a spectrum of relaxation times instead of a single relaxation time  $\tau$ , and/or “shear thinning”, *i.e.*, a decreasing viscosity with increasing shear rate [2]. Experiments conducted on such non-Newtonian fluids have documented the effects of such fluid rheology on the elastic TC instability [18]. To rationalize these observations as well as to generalize the elastic instability criterion to different kinds of flows with curved streamlines, McKinley and coworkers established a general criterion for elastic instabilities [19,20]. If  $Re \simeq 0$ , then, viscoelastic fluids are unstable if  $\frac{N_1}{T_{xy}} \frac{\ell}{\mathcal{R}} > m^2$ , where  $N_1 \equiv T_{xx} - T_{yy}$  is the first normal stress difference [2],  $T_{xy}$  is the shear stress,  $\ell$  is the characteristic distance over which perturbations relax along a streamline [19], and  $\mathcal{R}$  is the characteristic radius of curvature of the streamlines. For a purely viscoelastic fluid,  $\ell \equiv U\tau \sim \Omega_i R_i \tau = Wi d$ ,  $\mathcal{R} \sim R_i$  and  $\frac{N_1}{T_{xy}} = \frac{N_1}{T_{\theta r}} \sim Wi$  [19] and we recover the criterion of Larson *et al.* for the purely elastic instability:  $\Lambda Wi^2 > m^2 \Leftrightarrow \sqrt{\Lambda} Wi > m$  [3].

In turn, framed with respect to the general criterion derived by McKinley *et al.* [19,20], our goal is to determine the functional form of the dimensionless ratio  $\frac{N_1}{T_{xy}} \frac{\ell}{\mathcal{R}}$  in terms of measurable quantities in the case of shear-banding flows. By analogy with polymer solutions, we would expect that this ratio can be expressed in terms of a relevant geometric ratio and an appropriately defined Weissenberg number.

**Effective gap.** – The relevant geometric ratio can indeed be inferred from experiments through the notion of an *effective gap*. In our recent experiments [14,15], we recognized that the vortices were mainly localized in the high- $Wi$  band, and that each interfacial wavelength between the bands corresponded to a pair of counter-rotating vortices [14], as illustrated in fig. 1(a). In our previous publications, we had noticed that the wavelength increases upon the increase of the global shear rate, so one could infer the scaling  $\lambda/d \sim Wi$  [13,14]. Then, by combining this scaling and the lever rule we can establish that  $\lambda = nad$  instead of  $\lambda = nd$ , where  $n$  is a number of order unity, whose precise value depends on the boundary

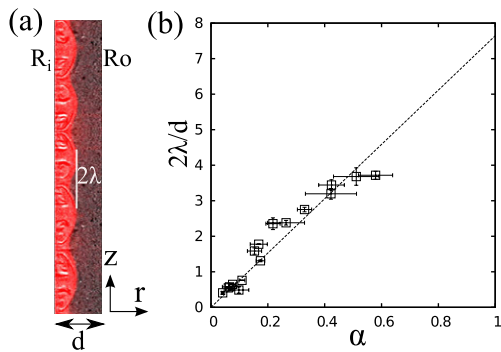


Fig. 1: (Color online) Effective gap scaling. (a) Overlay of two visualization techniques showing the secondary vortex flow in the high- $Wi$  band for  $\alpha \simeq 0.4$  [14]. (b) Wavelength scaling, following  $\lambda = n\alpha d$ , with  $n = 3.8 \pm 0.1$ . For  $\alpha > 0.6$ , the spatio-temporal dynamics of the vortex flow do not allow us to extract a single wavelength [13,14]. For  $\alpha < 0.05$ , the size of the band is smaller than our spatial resolution.

conditions. The extent of the high- $Wi$  band acts as the effective gap. Increasing the global  $Wi$  increases  $\alpha$  and so increases  $\lambda$ . The validity of this scaling is shown in fig. 1(b) by re-plotting  $2\lambda/d$ , *i.e.* twice the wavelength of vortices, against  $\alpha$  instead of  $Wi$  [13].

**Local Weissenberg number.** – As explained in the introduction, in a shear-banding flow, the global value of  $Wi$  is not a good measure of the local Weissenberg number in the parts of the flow that are unstable. Instead, the dimensionless group relevant to the flow instability is the local value of  $Wi_h$  in the high shear rate band. In the instability criterion, one must replace  $Wi$  by  $Wi_h$ . Accordingly, the criterion for elastic instabilities in shear-banding flows should involve the term

$$\Sigma^* = \sqrt{\alpha\Lambda} Wi_h. \quad (1)$$

It has been observed in experiments that increasing the concentration ( $c$ ) of surfactant, or decreasing the temperature ( $\theta$ ) tends to increase the value of  $Wi_h$ . This fact is illustrated in fig. 2(a) in the flow curves of two different surfactant systems [21,22]. Note that as  $c$  increases, the dimensionless stress plateau decreases and its range of Weissenberg numbers increases. In particular,  $Wi_h$  shifts to higher values. For the most concentrated solutions, viscometric measurements had to be aborted because the sample was ejected from the rheometer. We believe that this phenomenon is due to an instability of the free surface of the system, driven by the underlying bulk viscoelastic instability. However, we also note that the instability of the free surface could be triggered by second normal stress differences [23]. From eq. (1), we note that solutions of high  $c$  or at low  $\theta$  are more likely to be unstable, owing to the larger values of  $Wi_h$ .

**The case of dJS.** – So far, we have suggested a new relevant dimensionless group for elastic instabilities in shear-banding flows, without appealing to any particular

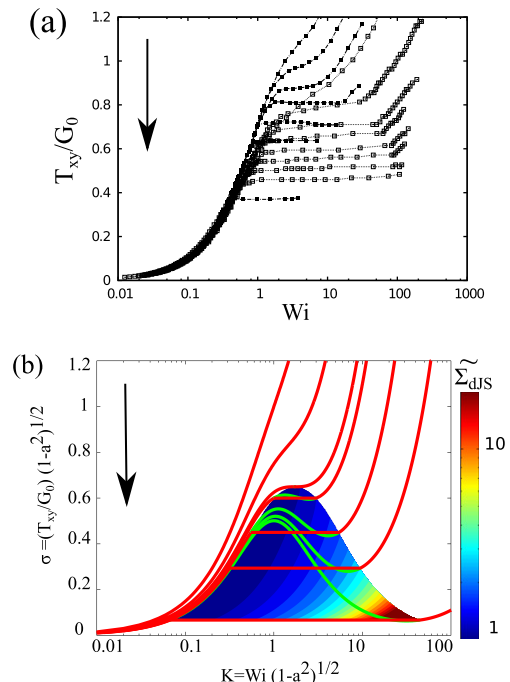


Fig. 2: (Color online) Experimental and theoretical “flow-phase diagrams” [21]. (a) Open symbols: Measured dimensionless flow curves for varying [CTAB] = 3, 7, 10, 12, 15, 17, 18, 22 wt.% at fixed [NaNO<sub>3</sub>] = 0.3 M (replotted data adapted from Cappelaere *et al.* [22], permission from Springer). Closed symbols: Measured dimensionless flow curves for varying [CPCl + 0.2NaSal] = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 21 wt.% (courtesy of Berret *et al.* [21]). The arrow points in the direction of higher  $c$  or lower  $\theta$  [21]. In both cases, measurements were done using a cone-and-plate device. The flow curves of the two systems do not overlap, even when the stress and the shear rate are scaled with  $G_0$  and  $\tau$ , respectively, *i.e.* in the framework of the dJS model, the two systems have a different value of the coefficient “ $a$ ”. (b) Analytical dimensionless flow curves obtained for the dJS model in simple shear [24]. The different flow curves are obtained for varying  $\eta$ . The color map gives the value of the scaled dimensionless criterion  $\widetilde{\Sigma}_{dJS} \equiv \Sigma_{dJS} \sqrt{\frac{1-a^2}{\Lambda}}$ . The arrow points in the direction of lower  $\eta$ .

rheological model. To reinforce our argument, we can investigate the form of the instability criterion for the diffusive Johnson-Segalman (dJS) model, which has been widely used to study shear-banding flows [17]. Recently, it has even been used in numerical simulations confirming the presence of a secondary vortex flow triggered by a bulk viscoelastic instability in the high- $Wi$  band [16]. In this model, the stress is taken as the sum of a “polymeric” part  $\mathbf{T}^p$  and a “solvent” part  $\mathbf{T}^s$ . The total viscosity of the fluid is the sum of a polymeric and solvent part  $\eta_0 = \eta_p + \eta_s$ , with the zero shear rate value of the polymeric viscosity given by  $\eta_p^0 \equiv \tau G_0$ . The polymeric stress varies non-monotonically with imposed shear rate and goes to zero at large  $Wi$ , such that  $\eta_s$  is the asymptotic value of viscosity for  $Wi \rightarrow \infty$ .

To evaluate the expression  $\frac{N_1}{T_{xy}} \frac{\ell}{\mathcal{R}}$ , we need an analytic expression for the stress ratio in the high- $Wi$  band. Let us symbolize this ratio by  $[\frac{N_1}{T_{xy}}]_h$ . In the small gap limit, we can assume that the stress profile across the gap is close to the profile in a plane Couette geometry. We can then use the inhomogeneous plane Couette solution recently derived by Sato *et al.* [24].

In the plane Couette flow of the dJS model, it is common to express the total shear stress as  $T_{xy} = \frac{G_0}{\sqrt{1-a^2}} \sigma$ , and the first normal stress difference as  $N_1 = \frac{2G_0}{1-a^2} N$  [24]. The parameter  $a$  is the ‘‘slip parameter’’ of the dJS equation. Shear-banding happens if  $|a| \neq 1$  and  $\eta \equiv \frac{\eta_s}{\eta_p} < \frac{1}{8}$  [17,24].  $N$  is a dimensionless normal stress difference and  $\sigma$  is a dimensionless total shear stress. In the plane Couette flow, the momentum balance imposes that  $\sigma$  is a constant across the gap, but  $N(y)$  is a function of the position  $y$  in the gap [24]. For steady flow in the shear-banding regime, Sato *et al.* established that

$$\sigma = 3 \frac{\sqrt{\eta - \eta^2}}{\sqrt{2}}, \quad (2)$$

$$N = KS = K(\sigma - \eta K), \quad (3)$$

where  $K(y) \equiv \sqrt{1-a^2} Wi(y)$  and  $S(y) \equiv \sqrt{1-a^2} \frac{T_{xy}(y)}{G_0}$  are, respectively, a dimensionless shear rate and a polymeric shear stress, both functions of the position in the gap. In dimensionless form, the addition of the polymeric and solvent shear stress is expressed by  $\sigma \equiv S(y) + \eta K(y)$  [24]. In the shear-banding regime, Sato *et al.* have found an analytic solution for the dimensionless shear rate profile  $K(y)$  that follows a hyperbolic tangent profile between  $K_l$  and  $K_h$  [24], with  $K_l < K_h$  given by

$$K_l = \frac{\sqrt{1/\eta - 2} - \sqrt{1/\eta - 8}}{\sqrt{2}}, \quad (4)$$

$$K_h = \frac{\sqrt{1/\eta - 2} + \sqrt{1/\eta - 8}}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

In the high shear rate band,  $K \simeq K_h = \sqrt{1-a^2} Wi_h$ . Thus, from eqs. (2), (3) and (5) we can obtain the following expressions:

$$\left[ \frac{N_1}{T_{xy}} \right]_h = \left[ \frac{N}{\sigma} \right]_h \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \quad (6)$$

$$= \frac{K_h(\sigma - \eta K_h)}{\sigma} \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \quad (7)$$

$$= \frac{2}{3} Wi_h \left( 2 - \sqrt{\frac{1-8\eta}{1-2\eta}} \right). \quad (8)$$

Then, overall, if we set  $\ell \sim Wi_h \alpha d$  and  $\mathcal{R} \sim R_i$ , we get

$$\Sigma_{dJS} = \sqrt{\alpha} \Lambda Wi_h f(\eta) = \Sigma^* f(\eta). \quad (9)$$

Therefore, the result we obtain using dJS is slightly more complex than the naive criterion  $\Sigma^*$  since it also

depends on the viscosity ratio. For shear-banding we require  $\eta < 1/8$ , so we have  $0.7 \lesssim f(\eta) \lesssim 1.3$ . This result is indeed not surprising, since we had obtained  $\Sigma^*$  in analogy with the purely elastic case derived using the upper convected Maxwell model, where  $\eta = 0$  [3]. In the homogeneous and non-shear-banding elastic case, adding a Newtonian solvent also modifies the dimensionless group by the addition of a function  $f^*(\eta) \simeq \sqrt{\frac{2}{1+\eta}}$  [19].

Note that the expression for  $\Sigma_{dJS}$  can also be expressed in terms of the two dimensionless variables  $K$  and  $\sigma$ . Indeed, from the lever rule,  $\alpha = \frac{K-K_l}{K_h-K_l}$ , and from eqs. (4) and (5),  $K_l$  and  $K_h$  can be expressed in terms of  $\eta$ , which can be subsequently expressed in terms of  $\sigma$  using eq. (2). Ultimately, one can reach the following equivalent alternative expression for  $\Sigma_{dJS}$ :

$$\Sigma_{dJS} = \sqrt{\frac{\Lambda}{1-a^2}} \widetilde{\Sigma}_{dJS}(K, \sigma), \quad (10)$$

where  $\widetilde{\Sigma}_{dJS}(K, \sigma) = (2\sqrt{\frac{K}{3\sigma}} - \sqrt{\frac{\sigma}{3K}}) + \mathcal{O}[\sigma^{3/2}]$  is a function of  $K$  and  $\sigma$  only, whose precise functional form is a little too cumbersome to be written explicitly. Figure 2(b) plots the flow curves computed from eqs. (2), (4) and (5) [24], together with the magnitude of  $\widetilde{\Sigma}_{dJS}$ . We can see that as the shear rate is increased, the proportion of the high- $Wi$  band increases, the magnitude of the scaled criterion  $\widetilde{\Sigma}_{dJS}$  increases and the flow is increasingly prone to instability. By comparing the experimental flow curves in fig. 2(a) and the flow curve derived in the case of dJS in fig. 2(b) one can see that the effect of decreasing the Newtonian solvent contribution  $\eta$  to the total stress is similar to the effect of increasing the concentration of surfactant, or decreasing the temperature.

**Boundary conditions and classes of unstable shear-banding flows.** – Generally, we expect the relevant dimensionless group for elastic instability in shear-banding flows to be  $\Sigma_{sb} \equiv \Sigma^* f^*(\eta)$ , where  $f^*$  is a function of the ratio between the zero shear and infinite shear viscosities. We expect the specific form of  $f^*$  to depend on the constitutive model used to study shear-banding [9]. Elastic instabilities will generate a secondary vortex flow with wavelength  $\lambda = n\alpha d$  for  $\Sigma_{sb} > m$ . As mentioned already, the precise values of  $n$  and  $m$  depend on the boundary conditions. Of prime importance are the values of  $m$  obtained for ‘‘soft’’ ( $m_s$ ) or for ‘‘hard’’ ( $m_h$ ) boundary conditions [15]. Essentially, the ‘‘hard’’ case usually corresponds to a no-slip Dirichlet boundary condition, while the ‘‘soft’’ case usually corresponds to imposing only continuity of the stress, *i.e.* a Neumann boundary condition. In both the purely inertial case [4] and the purely elastic case [8], it is known that  $m_s < m_h$ . In ref. [8], Khayat performed stability analysis of the Oldroyd-B fluid for two different sets of boundary conditions. In the first case, one boundary was soft, the other hard, and the threshold was found to be 5.77. In the second case, both boundaries were hard and the threshold was found



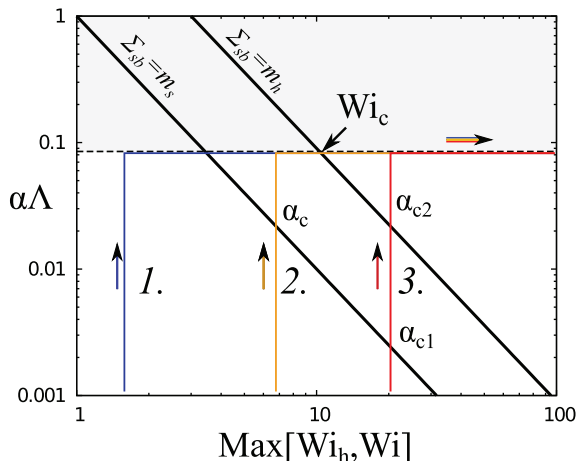


Fig. 3: (Color online) Schematic instability diagram in the plane  $(\text{Max}[Wi_h, Wi], \alpha\Lambda)$ . The black lines represent the stability limits for soft and hard boundaries,  $\Sigma_{sb} = m_s \Leftrightarrow \alpha\Lambda = (m_s/Wi_h)^2$  and  $\Sigma_{sb} = m_h \Leftrightarrow \alpha\Lambda = (m_h/Wi_h)^2$ . To enhance the visibility of the different categories of shear-banding, we have arbitrarily chosen  $m_s = 1$  and  $m_h = 3$ . The dashed black line represent the value of  $1 \times \Lambda = 1.13/13.33$ , the maximum curvature corresponding to our recent experiments [15–18]. Above this line, the shaded region is inaccessible. The three paths 1., 2. and 3. illustrate the three possible types of shear-banding. The direction of the arrows represent the path followed by the state of the flow as the global Weissenberg  $Wi$  is increased.  $\alpha_c$ ,  $\alpha_{c1}$  and  $\alpha_{c2}$  are the critical proportions of the high- $Wi$  band at which the flow state crosses a stability limit.  $Wi_c$  is the threshold at which the type-1. trajectory becomes unstable for the first time, and at which the type-2. trajectory becomes unstable after a short relaminarization.

to be 5.92. For a banded flow with  $Wi \in [Wi_l, Wi_h]$ , the interface with the low- $Wi$  band should act as a sort of soft boundary for the high- $Wi$  band. But for  $Wi \geq Wi_h$ ,  $\alpha = 1$ , the flow becomes homogeneous again and the boundary switches from soft to hard. The thresholds  $m_s$  and  $m_h$ , in the case of shear-banding flows would most likely be different than the values computed for the homogeneous flow of the Oldroyd-B fluid. Nonetheless, we still expect  $m_s < m_h$ , and maybe a larger difference of values  $m_h - m_s$ .

Therefore, for a given geometry, *i.e.* a given value of  $\Lambda$ , we can use basic Boolean logic to classify shear-banding flows into three possible categories depending only on the value of  $Wi_h$ :

1. For sufficiently low  $Wi_h$  —*i.e.* high  $\theta$  and low  $c$ — the shear-banding flow is stable for any  $\alpha$ , since  $\Sigma_{sb} < m_s$  even for  $\alpha = 1$ . The flow can then become unstable for Weissenberg numbers above a critical value  $Wi_c > Wi_h$  as in the case of a regular viscoelastic fluid, *i.e.* following the scaling  $\Sigma_i = \sqrt{\Lambda}Wi$ .
2. For intermediate values of  $Wi_h$  —*i.e.* intermediate  $\theta$  and  $c$ — the shear-banding flow is unstable above a critical value  $\alpha_c$  when  $\Sigma_{sb} > m_s$  for  $\alpha > \alpha_c$ . Then as the imposed shear rate is increased and  $\alpha \rightarrow 1$

the boundary conditions change and the flow is stabilized, because the flow is below the threshold  $m_h$ . Eventually for  $Wi > Wi_c > Wi_h$  the flow becomes unstable again. This case was the one we observed in our recent experiments [15].

3. Finally, if  $Wi_h$  is high enough —*i.e.* for low  $\theta$  and high  $c$ — we have two critical band widths  $\alpha_{c1}$  and  $\alpha_{c2}$ . For  $\alpha > \alpha_{c1}$ ,  $\Sigma_{sb} > m_s$ . And for  $\alpha > \alpha_{c2}$ ,  $\Sigma_{sb} > m_h$ . In this case, there is no stabilization for  $Wi > Wi_h$ . The flow remains unstable, although the spatio-temporal characteristics may change.

The three possible shear-banding scenarios can be illustrated on a stability diagram in the plane  $(\text{Max}[Wi_h, Wi], \alpha\Lambda)$ , as presented in fig. 3. When the global Weissenberg number  $Wi$  is increased above  $Wi_l$ , the flow state is given by a constant abscissa depending on the value of  $Wi_h$  (which is a function of the concentration and temperature of the solution). As  $Wi$  increases, the thickness of the high shear rate band  $\alpha$  increases and so the state of the flow moves vertically to larger ordinates. Once the entire gap is filled,  $\alpha\Lambda$  reaches its maximum depending on the geometry of the chosen TC system. Then, since  $Wi > Wi_h$ , the state of the flow is given by a constant ordinate  $\Lambda$  and moves horizontally as  $Wi$  increases. Any flow state with  $\alpha\Lambda < \Lambda$  will be stable if below the stability limit  $\Sigma_{sb} = m_s$ , and unstable if above  $\Sigma_{sb} = m_s$  and *a fortiori* if above  $\Sigma_{sb} = m_h$ . Any flow state with  $\alpha\Lambda = \Lambda$  will be stable if on the left of the stability limit  $\Sigma_{sb} = m_h$ , and unstable otherwise.

**Interaction with interface modes.** — So far, we have only considered elastic instabilities arising in the bulk of the high- $Wi$  band. But there exist other elastic instability mechanisms [25]. In particular, Fielding has shown that the jump in normal stresses between the bands could generate interfacial modes, even in the plane Couette flow [17]. In her recent study in TC flow, Fielding suggested that the interfacial and bulk elastic modes lie in two separate regions of the space  $(\Lambda, N_{1|h})$ , *i.e.* of the space  $(\Lambda, Wi_h)$  [16]. The bulk mode prevails at high  $Wi_h$  and high curvature  $\Lambda$ . The interfacial mode prevails at low  $Wi_h$  and low  $\Lambda$ . Fielding’s study would suggest the existence of another unstable region in the lower left corner of the stability diagram sketched in fig. 3. Nonetheless, only axisymmetric perturbations were considered in Fielding’s study [16], and the stability analysis was performed for a single value of  $\alpha$  and  $\eta$ . Interfacial and bulk modes may actually interact through non-axisymmetric mechanisms [26].

**Wall slip and non-local effects.** — We believe that the instability criterion we have derived for shear-banding flows can be a powerful guide to interpret experiments on wormlike micelles. Nonetheless, the criterion is fallible. In particular, we think that two additional phenomena can strongly compromise the validity of our scaling, since

both have been shown to be relevant in some experimental situations. In both phenomena the local Weissenberg value in the high shear rate band may not be equal to the upper boundary of the shear-banding regime on the flow curve. The first phenomenon is wall slip, which has been reported recently and may actually be a common feature of many shear-banding flows [27]. The second phenomenon is geometric confinement. The present scaling may be inadequate if “non-local effects” become dominant [28]. “Non-local effects” are apparent in confined geometries when the size  $d$  becomes comparable to the typical interfacial width  $\xi \sim \mu\text{m}$ , linked to the stress diffusion coefficient [17,24]. Even in a macroscopic geometry with  $d \gg \xi$ , non-local effects can be important when the lateral extent of one of the bands is very small, *i.e.*  $\alpha \simeq 0$  or  $\alpha \simeq 1$ . Those effects were ignored in the analytic solution for dJS proposed by Sato *et al.* but can actually be derived directly from the dJS equations [29]. Non-local effects and wall slip in the context of the dJS equations are discussed in a recent tutorial review on “ways of thinking” about the shear-banding phenomenon [29].

In summary, we have derived a useful dimensionless criterion to rationalize the onset of secondary flows in the base shear-banding flow of wormlike micelles. The validity of the criterion for the case of dJS could be checked by numerical simulations for various value of the solvent ratio  $\eta$ , and for a range of gap spacings ( $\Lambda$ ) and Weissenberg numbers. On the experimental side, we are currently undertaking a large study of the stability of shear-banding flows for many different surfactant types, concentrations and temperatures. Preliminary results confirm the existence of the three distinct scenarios that we derived here. Ultimately, the criterion could be extended to other flows with curved streamlines, if the localization and number of bands are known.

\*\*\*

The authors thank S. ASNACIOS, O. CARDOSO, S. M. FIELDING, A. N. MOROZOV, S. J. MULLER and C. WAGNER for fruitful discussions. MAF thanks the Fulbright Commission for its support. TJO acknowledges the NSF-GRF for funding.

## REFERENCES

- [1] TAYLOR G. I., *Philos. Trans. R. Soc. A*, **223** (1923) 289.
- [2] LARSON R. G., *The Structure and Rheology of Complex Fluids* (Oxford University Press) 1999.
- [3] LARSON R. G., SHAQFEH E. S. J. and MULLER S. J., *J. Fluid Mech.*, **218** (1990) 573.
- [4] CHANDRASEKHAR S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Dover, New York) 1981.
- [5] DEALY J. M., *Rheol. Bull.*, **79** (2010) 2.
- [6] GROISMAN A. and STEINBERG V., *Philos. Mag. B*, **78** (1998) 253.
- [7] MOROZOV A. N. and VAN SAARLOOS W., *Phys. Rep.*, **447** (2007) 112.
- [8] KHAYAT R. E., *J. Fluid Mech.*, **400** (1999) 33.
- [9] CATES M. E. and FIELDING S. M., *Adv. Phys.*, **55** (2006) 799.
- [10] LEROUGE S. and BERRET J. F., *Adv. Polym. Sci.*, **225** (2010) 1.
- [11] REHAGE H. and HOFFMANN H., *Mol. Phys.*, **74** (1991) 933.
- [12] LEROUGE S., ARGENTINA M. and DECRUPPE J. P., *Phys. Rev. Lett.*, **96** (2006) 088301.
- [13] LEROUGE S., FARDIN M. A., ARGENTINA M., GRÉGOIRE G. and CARDOSO O., *Soft Matter*, **4** (2008) 1808.
- [14] FARDIN M. A., LASNE B., CARDOSO O., GRÉGOIRE G., ARGENTINA M., DECRUPPE J. P. and LEROUGE S., *Phys. Rev. Lett.*, **103** (2009) 028302.
- [15] FARDIN M. A., LOPEZ D., CROSO J., GRÉGOIRE G., CARDOSO O., MCKINLEY G. H. and LEROUGE S., *Phys. Rev. Lett.*, **104** (2010) 178303.
- [16] FIELDING S. M., *Phys. Rev. Lett.*, **104** (2010) 198303.
- [17] FIELDING S. M., *Soft Matter*, **2** (2007) 1262.
- [18] LARSON R. G., MULLER S. J. and SHAQFEH E. S. J., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **51** (1994) 195.
- [19] PAKDEL P. and MCKINLEY G. H., *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 2459.
- [20] MCKINLEY G. H., PAKDEL P. and ÖZTEKIN A., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **67** (1996) 19.
- [21] BERRET J. F., PORTE G. and DECRUPPE J. P., *Phys. Rev. E*, **55** (1997) 1668.
- [22] CAPPELAERE E. and CRESSELY R., *Colloid Polym. Sci.*, **275** (1997) 407.
- [23] SKORSKI S. and OLMSTED P. D., *J. Rheol.*, **55** (2011) 1219.
- [24] SATO K., YUAN X. F. and KAWAKATSU T., *Eur. Phys. J. E*, **31** (2010) 135.
- [25] LARSON R. G., *Rheol. Acta*, **31** (1992) 213.
- [26] NICOLAS A. and MOROZOV A. N., submitted to *Phys. Rev. Lett.* (2011).
- [27] LETTINGA M. P. and MANNEVILLE S., *Phys. Rev. Lett.*, **103** (2009) 248302.
- [28] MASSELON C., SALMON J. B. and COLIN A., *Phys. Rev. Lett.*, **100** (2008) 038301.
- [29] FARDIN M. A., OBER T. J., GAY C., GRÉGOIRE G., MCKINLEY G. H. and LEROUGE S., to be published in *Soft Matter* (2011) DOI: 10.1039/C1SM06165H.



# Potential “ways of thinking” about the shear-banding phenomenon

M.A. Fardin,<sup>1,2</sup> T.J. Ober,<sup>2</sup> C. Gay,<sup>1</sup> G. Grégoire,<sup>1</sup> G.H. McKinley,<sup>2</sup> and S. Lerouge<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire Matière et Systèmes Complexes, CNRS UMR 7057*

*Université Paris Diderot, 10 rue Alice Domont et Léonie Duquet, 75205 Paris Cédex 13, France*

<sup>2</sup>*Department of Mechanical Engineering*

*Massachusetts Institute of Technology, 77 Massachusetts Avenue, MA 02139-4307 Cambridge, USA*

(Dated: September 13, 2011)

Shear-banding is a curious but ubiquitous phenomenon occurring in soft matter. The phenomenological similarities between the shear-banding transition and phase transitions has pushed some researchers to adopt a ‘thermodynamical’ approach, in opposition to the more classical ‘mechanical’ approach to fluid flows. In this heuristic review, we describe why the apparent dichotomy between those approaches has slowly faded away over the years. To support our discussion, we give an overview of different interpretations of a single equation, the diffusive Johnson-Segalman (dJS) equation, in the context of shear-banding. We restrict ourselves to dJS, but we show that the equation can be written in various equivalent forms usually associated with opposite approaches. We first review briefly the origin of the dJS model and its initial rheological interpretation in the context of shear-banding. Then we describe the analogy between dJS and reaction-diffusion equations. In the case of anisotropic diffusion, we show how the dJS governing equations for steady shear flow are analogous to the equations of the dynamics of a particle in a quartic potential. Going beyond the existing literature, we then draw on the Lagrangian formalism to describe how the boundary conditions can have a key impact on the banding state. Finally, we reinterpret the dJS equation again and we show that a rigorous effective free energy can be constructed, in the spirit of early thermodynamic interpretations or in terms of more recent approaches exploiting the language of irreversible thermodynamics.

By ‘shear-banding’, scientists can mean several things. For some non-Hookean solid materials, ‘shear-banding’ refers to the notion of strain localisation. When a solid material is deformed, the strain can take large values in narrow zones of the sample. Similarly, for some non-Newtonian fluids ‘shear-banding’ refers to the notion of strain rate localisation. When a fluid material is sheared, the strain rate can take large values in narrow zones of the sample. In both case, for solids or for fluids, shear-banding is linked to a sharp inhomogeneity in the deformation or deformation rate field. Clear domains of different strains or strain rates are identifiable. This phenomenology is associated with ‘complex materials’ as it is clearly distinct from the simpler homogeneous deformation or deformation rate fields in ideal Hookean solids and Newtonian fluids, or even weakly plastic or weakly shear thinning materials [1].

Even if we restrain ourselves to fluids, the phenomenon has been observed in a variety of systems. Recent experiments include shear-banding in telechelic polymers [4, 5], emulsions [6, 7], dispersions [3], granular materials [8] or even foams [9]. There is still no universal framework to describe shear-banding in all of those various systems and there is still no consensus on the mesoscopic mechanisms involved in shear-banding across systems. A persistent idea is that there exists some kind of underlying ‘flow-structure’ coupling. Mechanisms for such coupling include entanglement effects, breakage, liquid-

crystalline effects, changes in charge and association, or changes in topology [10]. Shear-banding may even be a generic macroscopic phenomenon, able to spring out of many different underlying mechanisms. For instance, it was thought for some time that shear-banding was necessarily associated with non-monotonic constitutive relations [11, 12], but it has subsequently been realized that other mechanisms such as stress inhomogeneity inherent to the geometry—in large gap Taylor-Couette geometry for instance—or boundary effects can lead to shear-banding-like flows [13].

In this paper, we describe the steady shear-banding phenomenon in micellar solutions [14–16]. In the concentration and temperature ranges where micellar solutions exhibit shear-banding, the micelles are structured in long polymer-like flexible chains, which can break and recombine [15]. Those so-called ‘wormlike micelles’ entangle in a highly viscoelastic network, Maxwellian in the linear regime, *i.e.* possessing a single relaxation time and elastic modulus [1]. Their simple linear rheology, and the robustness of the shear-banding states in those materials has elevated them to a status of model systems for the understanding of shear-banding in fluids [17]. And many see a solid understanding of shear-banding in micellar fluids as a necessary first step toward a clearer view of the phenomenon in general. In other systems such as dispersions, foams or granular materials, the shear-banding phenomenon, even if observed in various contexts, is not as well characterized empirically [18], and most models are not tensorial [19, 20]. In micellar solutions, since the seminal study by Rehage and Hoffmann [17], much theoretical and experimental effort has

---

\*Corresponding author ; Electronic address: [sandra.lerouge@univ-paris-diderot.fr](mailto:sandra.lerouge@univ-paris-diderot.fr)

been devoted to gain comprehension on the phenomenon. The most recent review on the subject [16] referenced more than three hundred articles, and it is sometimes challenging to find one’s way through such an enormous amount of literature. In particular, from a theoretical perspective, many approaches of shear-banding have been proposed and it is sometimes hard to understand their connections.

For wormlike micelles, the original idea of an underlying non-monotonic flow curve is most likely to be relevant to almost all experimental situations investigated so far. Theoretically, this is justified by the strong reductionist rationale provided by the reptation-reaction model [15]. This statistical theory of micelles is an adaptation of the reptation theory of polymers, including micellar breaking and recombination processes [15]. This theory can both predict linear rheology with great accuracy and the onset of shear-banding, due to an underlying inhomogeneity of the flow curve [15]. Nonetheless, this model becomes highly intractable in the non-linear flow regime where shear-banding occur, and it has been of little or no help to understand shear-banding in more details. To reach better tractability in the non-linear flow regime, constitutive models have been used [1, 15, 21]. Constitutive models, which rely on very general material frame indifference principles, do not usually contain all the information on the microstructure dynamics and deal with coarse-grained quantities defined at the macroscopic scale. They usually at least include a tensorial stress field, and a tensorial velocity gradient field [1].

In the last few years, one particular constitutive model has been used extensively, namely, the diffusive Johnson-Segalman (dJS) equation and its mechanistic interpretation [15, 21]. It is most likely one of the simplest tensorial model able to predict shear banding. Because it is a quasi-linear model [22] with only few parameters, it is analytically tractable in many cases. Thus, notwithstanding some known shortfalls—especially its violation of the Lodge-Meissner relationship, and its troubles in extensional flows and step strains [23]—the dJS model has generally been a very useful rational guide to interpret empirical data and to initiate new experiments. Under the impulse of Olmsted, Lu, Radulescu, Fielding and others [21], it has been used to predict the onset of shear-banding in various flow geometries [24–26], to discuss transient effects [27] and most importantly, to realize that shear-banding flows could themselves become unstable to elastic instabilities, *i.e.* effects linked to normal stresses and normal stresses differences across bands [28–30].

It is clearly an achievement to be able to explain many different aspects of shear-banding flows using a single model. But, what do we really mean by “using a single model”? If different authors have used the same equation, they have not necessarily interpreted the equation in a single way. There are different “ways of thinking” about the shear-banding phenomenon using

the dJS equation. We put quotes on ‘ways of thinking’ because we borrowed the term from Feynman, who had expressed, very lively and at several occasions, the importance of a change in perspective on a problem or even on an equation [31]. We think that when assessing the success of the dJS model, it is crucial to distinguish its syntactic power—*i.e.* linked to its mathematical structure—from its various physical interpretations. This point is crucial to better understand the distinction that has often been made between a ‘mechanical’ and a ‘thermodynamical’ approach [32–34]. Traditionally, the dJS model is thought of as a ‘mechanical’ approach. Nonetheless, Fielding has already shown that it is possible to construct models including ingredients from both perspectives [35]. The so-called dJS- $\phi$  model includes a ‘mechanical subspace’ and a ‘concentration subspace’, coupled to each others [35]. More broadly, Cates and Fielding have recently remarked that the distinction between ‘mechanical’ banding instabilities and shear-induced structural instabilities is likely to be less clear-cut than was once thought [15]. Later, Olmsted added that in practice there is little difference between the two [10]. This claim was made even clearer last year by Sato *et al.* [36]. In their paper, they derived a pseudo-thermodynamic potential from the dJS model. Unfortunately, we think that this achievement is tempered by the fact that they use a reduction of the number of degrees of freedom, obtaining an equation that is not strictly equivalent to the original dJS model. In this heuristic review, we describe why the apparent opposition between those approaches has slowly faded away over the years. To support our discussion, we give an almost historical account of different interpretations of a single equation, the diffusive Johnson-Segalman (dJS) equation, in the context of shear-banding. We restrict ourselves to dJS, but we show that the equation can be written in various equivalent forms usually associated with opposite approaches. We first review briefly the origin of the dJS model and its initial rheological interpretation in the context of shear-banding. Then we describe the analogy between dJS and reaction-diffusion equations. In the case of anisotropic diffusion, we show how the dJS governing equations for steady flow are analogous to the equations of the dynamics of a particle in a quartic potential. Going beyond the existing literature, we then draw on the Lagrangian formalism to describe how the boundary conditions can have a key impact on the banding state. Finally, we show for the first time without any algebraic simplification that a rigorous effective free energy can be constructed from the dJS model, in the spirit of early thermodynamic interpretations [32–34, 37] or of more recent approaches exploiting the language of irreversible thermodynamics [38–40].

This paper is not an exhaustive review of the many approaches to shear-banding and their various achievements. More detailed reviews already exist on the matter [15, 21]. We believe that instead, this paper

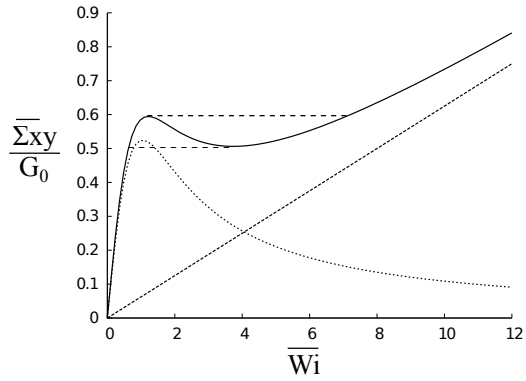


FIG. 1: Non-monotonic homogeneous flow curve for simple steady shear of the JS model, for  $a = 0.3$  and  $\eta = 1/16$ .  $\overline{Wi} \equiv \frac{U\lambda}{d}$  is the global Weissenberg number. The fine dashed lines are the polymeric and solvent contributions to the shear stress. The horizontal dashed lines highlight the range of stress in which the flow curve is multivalued. Without any ‘plateau selection rule’, the stress can take any value in between the two horizontal dashed lines.

can provide a translation scheme between different approaches. Along the way this translation effort allows us to derive some interesting new features of shear-banding flows.

### I. JS MODEL AND SKETCH OF SHEAR-BANDING

The model originally proposed by Johnson and Segalman [41] was a modification to the Upper Convected Maxwell model (UCM), the canonical rheological model for viscoelasticity [1, 22]. In order to allow rate-dependent material properties in steady simple shear, the JS model supposes that network strands in the material can slip with respect to a purely affine deformation. This slipping yields an effective velocity gradient field which is given by

$$\mathbf{L} \equiv \nabla \vec{v} - 2\zeta \mathbf{D} \quad (1)$$

where  $\zeta$  is a scalar slip coefficient in the range  $0 \leq \zeta \leq 1$ ,  $\nabla \vec{v}$  is the velocity gradient tensor, and  $\mathbf{D} \equiv \frac{1}{2}((\nabla \vec{v})^t + \nabla \vec{v})$  is the strain rate tensor. The new convected derivative operator is

$$\widehat{(\cdot)} \equiv \frac{D(\cdot)}{Dt} - \mathbf{L}^t \cdot (\cdot) - (\cdot) \cdot \mathbf{L} \quad (2)$$

where  $\frac{D(\cdot)}{Dt} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(\cdot)$  is the material derivative. The resulting constitutive equation for the polymeric stress tensor  $\mathbf{T}$ , is written

$$\mathbf{T} + \lambda \widehat{\mathbf{T}} = 2\eta_p \mathbf{D} \quad (3)$$

where  $\lambda$  is the ‘polymer’ relaxation time and  $\eta_p \equiv G_0 \lambda$  is the ‘polymer’ viscosity, defined with respect to the ‘polymer’ elastic modulus.

In recent publications [21], Eq. (3) is usually rewritten in an equivalent form involving a rescaled ‘slip parameter’  $a \equiv 1 - 2\zeta$ , where  $-1 \leq a \leq 1$ :

$$\frac{D\mathbf{T}}{Dt} + \frac{\mathbf{T}}{\lambda} = a(\mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + 2G_0 \mathbf{D} \quad (4)$$

where  $\boldsymbol{\Omega} \equiv \frac{1}{2}((\nabla \vec{v})^t - \nabla \vec{v})$  is the vorticity tensor. For the case of  $a = 1$ , we obtain the UCM model, if  $a = -1$  we have the lower convected Maxwell model, and if  $a = 0$  we have the co-rotational Maxwell model [22]. In a steady simple shear flow, we have  $\vec{v} = [u(y), 0, 0]$ , and gradients in the flow properties exist only in the  $y$ -direction, between  $y = 0$  and  $y = d$ . We choose a reference frame in which the plate at  $y = 0$  is fixed, *i.e.*  $u(0) = 0$ , while the plate at  $y = d$  is moving with  $u(d) = U$ . Then, we can define the characteristic global shear rate as  $\bar{\gamma} \equiv \frac{U}{d}$ , itself frame independent. The homogeneous solution for this flow is defined as the solution in which the local shear rate is constant  $\dot{\gamma}(y) = \bar{\gamma}$  [42]. Then, if  $|a| \neq 1$ , the polymeric shear stress, obtained from eq. (4) and shown in Fig. 1, is non monotonic, and drops to zero. To cure this pathology, the common practice is to add a ‘solvent’ contribution to the stress. Then, the total deviatoric stress of the material is given by the sum of the polymeric stress and the solvent stress  $\boldsymbol{\Sigma} \equiv \mathbf{T} + 2\eta_s \mathbf{D}$ . In a simple shear geometry, the momentum balance imposes the value of the local deviatoric shear stress to be constant  $\Sigma_{xy}(y) = \overline{\Sigma_{xy}}$ , where  $\Sigma_{ij}$  are the components of  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Then, as pictured in Fig. 1, the global flow curve  $\overline{\Sigma_{xy}} = f(\bar{\gamma})$  is known to be non-monotonic if  $\eta \equiv \frac{\eta_s}{\eta_p} < \frac{1}{8}$  [15, 21, 43, 46], which was identified early as being one of the sufficient criteria for triggering shear-banding [11, 12]. Motivated by early studies on the JS model [43–45], by empirical observations [17] and by exploiting an analogy with first order phase transitions [32]—especially the pressure/specific volume graphs—it was realized that this non-monotonic flow curve was the signature of an instability of the homogeneous flow. Quickly, it was understood that in a range of global shear rates  $[\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2]$ , in the vicinity of the decreasing part of the flow curve, the flow would become inhomogeneous, *i.e.*  $\dot{\gamma}(y) \neq \bar{\gamma}$ . For global shear rates ‘in the shear-banding regime’, *i.e.* for  $\bar{\gamma}_1 < \bar{\gamma} < \bar{\gamma}_2$ , the flow would be split in domains with local shear rates  $\bar{\gamma}_1$  and  $\bar{\gamma}_2$ , with the proportion of the sample in high ( $\alpha$ ) or low  $(1 - \alpha)$  shear rates domains defined as following a ‘lever rule’:

$$\bar{\gamma} = \alpha \bar{\gamma}_2 + (1 - \alpha) \bar{\gamma}_1 \quad (5)$$

From the momentum balance, the total stress must stay homogeneous in simple shear. Thus, during the entire shear-banding regime, increasing the global shear rate will not induce any global shear stress increase, just change the relative proportions of the two bands. The additional injected power is used in turning more of the

sample into the high shear rate domain, *i.e.* in increasing  $\alpha$ . But in contrary to first order phase transitions where the Maxwell equal area law [47] gives a criterion to select precise values of  $[\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2]$  and thus also the ‘plateau’ value of the stress, it was unclear what criterion could be used in the context of the JS model. For some time, it was even believed that such ‘plateau selection’ would be doomed in any mechanical approach such as JS [34].

## II. DJS AND PLATEAU SELECTION

After the first few studies of shear-banding using the JS model, it was quickly realized that some key ingredient was missing. The degeneracy in the selection of the plateau value was linked to the absence in the JS model of a characteristic length scale that would set the interface thickness between the shear bands, a point raised earlier in consideration of a simpler but similar model [48]. Subsequently, many arguments, inspired from dynamical systems [25] or from kinetic considerations [24, 27] were proposed to rationalize this new length scale as arising from a diffusion term—or ‘non-local term’—missing in the JS equation. Rheological equations such as JS or UCM can be derived from the kinetic theory of dumbbells [1, 22]. And indeed, a careful treatment of the Fokker Planck equation underlying the kinetic theory leading to the JS models—or even the UCM model—brings a diffusion term coming from the finite size of the dumbbells [49]. From those considerations, the JS model was modified to account for this diffusion term, leading to the so-called diffusive JS model (dJS). If we allow for anisotropic stress diffusion, the diffusion term takes the form  $\nabla \cdot \mathcal{D} \cdot \nabla \mathbf{T}$  [50]. Then, we can define the dJS model as:

$$\frac{D\mathbf{T}}{Dt} + \frac{\mathbf{T}}{\lambda} = a(\mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + 2G_0\mathbf{D} + \nabla \cdot \mathcal{D} \cdot \nabla \mathbf{T} \quad (6)$$

Evidently, the units of the diffusion coefficients  $\mathcal{D}_{ij}$  are  $[\text{m}^2/\text{s}]$ . From each diffusion coefficient we can define a diffusion length scale  $\ell_{ij} \equiv \sqrt{\mathcal{D}_{ij}\lambda}$ , which will be involved in the scaling of the typical width of the interface between shear bands.

The additional governing equations for the isothermal and incompressible flow are the continuity equation and the Cauchy momentum equation:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (7)$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = \nabla \cdot \left( \mathbf{T} + 2\eta_s \mathbf{D} - p\mathbf{I} \right) \quad (8)$$

$p$  is the isotropic pressure and  $\rho$  is the density of the fluid, including the polymeric and the solvent part.  $\mathbf{I}$  is the unit tensor.

## III. SIMPLE SHEAR AND DIMENSIONLESS GROUPS

In simple shear flow, the governing equations for the polymer stress take the form given by:

$$\tau_{xx} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \tau_{xx} - (1+a)\lambda\dot{\gamma}\tau_{xy} = \ell_{xx}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tau_{xx} \quad (9)$$

$$\tau_{yy} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \tau_{yy} + (1-a)\lambda\dot{\gamma}\tau_{xy} = \ell_{yy}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tau_{yy} \quad (10)$$

$$\tau_{zz} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \tau_{zz} = \ell_{zz}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tau_{zz} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \tau_{xy} + \frac{1}{2}\lambda\dot{\gamma} \left[ (1-a)\tau_{xx} - (1+a)\tau_{yy} \right] \\ = \eta_p \dot{\gamma} + \ell_{xy}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (12)$$

Finally, we take the  $x$ -component of the momentum equation Eq. (8),

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \eta_s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (13)$$

Eq. (9-13) are the governing equations of the fluid dynamics in simple shear flow. Those equations are still dimensional, and seem to involve many quantities (variables and parameters). Dimensional analysis suggests dimensionless groups that reduce the apparent number of quantities [51]. We can recast the different variables and parameters in six categories, using stress, time, viscosity, length and density as independent units. Then, from there we can easily construct the relevant dimensionless groups. The stress variables turn into  $\tau_{xx}/G_0$ ,  $\tau_{yy}/G_0$ ,  $\tau_{zz}/G_0$ ,  $\tau_{xy}/G_0$ . The time variable turns into the inverse of the Deborah number  $De^{-1} \equiv t^* \equiv t/\lambda$  and we introduce the local Weissenberg number  $Wi \equiv \lambda\dot{\gamma}(y) = \lambda \frac{\partial u}{\partial y}$  [52]. We have already defined the viscosity ratio  $\eta \equiv \eta_s/\eta_p$ . The length variable turns into  $y^* = y/d$  and we introduce Knudsen numbers for stress diffusion  $\xi_{ij} \equiv \ell_{ij}/d$ . A Knudsen number is a ratio of the ‘mean free path’ associated with a diffusive process to a macroscopic length. From the density, we could construct the usual Reynolds number, but since we are mainly interested in the creeping flow regime, we instead use the elasticity number  $\mathcal{E} \equiv \frac{\overline{Wi}}{Re} \equiv \frac{\lambda^2 G_0}{\rho d^2}$ .  $\overline{Wi} \equiv \frac{U\lambda}{d}$  is the global Weissenberg number, and  $\overline{Re} \equiv \frac{\rho d U}{\eta_p}$  is the global Reynolds number. Conventionally, the Reynolds number is constructed from the total viscosity of the fluid  $\eta_p + \eta_s$ , but in effect we are interested in cases where  $\eta_p \gg \eta_s$  and so this does not really matter for our purpose. Finally, we also need to retain the slip parameter  $a$  (already dimensionless).

#### IV. REACTION-DIFFUSION INTERPRETATION

To simplify even more the form of the governing equations, we can use dimensionless variables introduced previously by Radulescu *et al.* [24],  $K \equiv \sqrt{1 - a^2} Wi$ ,  $S \equiv \sqrt{1 - a^2} \frac{\tau_{xy}}{G_0}$ ,  $N \equiv (1 - a) \frac{\tau_{xx}}{2G_0} - (1 + a) \frac{\tau_{yy}}{2G_0}$  and  $Z \equiv (1 - a) \frac{\tau_{xx}}{2G_0} + (1 + a) \frac{\tau_{yy}}{2G_0}$ . The total dimensionless stress is then  $\sigma \equiv S + \eta K$  and is equal to its global value  $\bar{\sigma}$  everywhere in the sample, for a steady simple shear flow. Moreover, Radulescu *et al.* used a constant Knudsen number  $\xi_0$  for every stress component. Then, after ignoring the z-component, we can transform the governing equations (9-13) into their dimensionless counterparts:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} N = KS - N + \xi_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} N \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} Z = -Z + \xi_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} Z \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} S = -KN + K - S + \xi_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} S \quad (16)$$

$$\frac{1}{\mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial t^*} K = \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} (S + \eta K) \quad (17)$$

Where the last equation is obtained by differentiating 13 with respect to  $y$ . The utility of those equations is their independence from the value of the slip parameter,  $a$ , when  $|a| \neq 1$  [24, 26]. When the problem was expressed in this form, its connection to the more general class of reaction-diffusion problems was noticed by Radulescu *et al.* [24]. The governing equation for  $Z$  being decoupled, its analysis is not usually carried out [24, 26]. Moreover, in most experimental situations we have  $\mathcal{E} \gg 1$ . Thus, from Eq. (17), it is apparent that the dynamics of  $K$  happen on a much shorter time scale than the dynamics of  $S$  and  $N$ . For this reason, the evolution of the kinematics with time is not seen as an independent dynamical variable in the limit  $\mathcal{E} \rightarrow \infty$ , and the reaction-diffusion problem is written in terms of only two degrees of freedom, a dimensionless shear stress  $S$  and a dimensionless normal stress difference  $N$  [24, 26]:

$$\partial_t \begin{pmatrix} S \\ N \end{pmatrix} = \xi_0^2 \partial_{y^*}^2 \begin{pmatrix} S \\ N \end{pmatrix} + \mathbb{C}(S, N; K), \quad (18)$$

where

$$\mathbb{C}(S, N; K) \equiv \begin{pmatrix} -S + K - KN \\ -N + KS \end{pmatrix}$$

Within this framework, Radulescu *et al.* derived a variety of important properties of shear banding flows [24, 26]. We will reassess those properties in a different approach in the following, but we will make repeated connections with the approach of Radulescu *et al.*

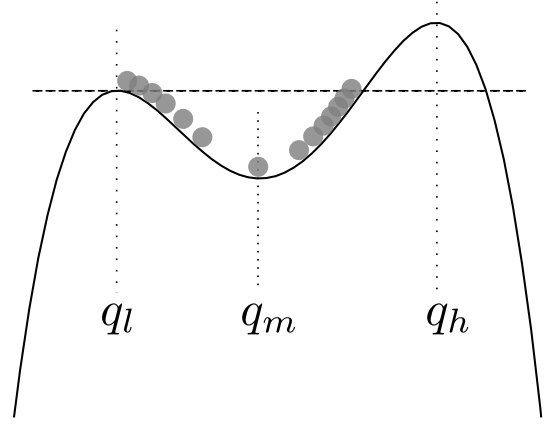


FIG. 2: Sketch of the quartic potential with regions of fast moving and slow moving particle.  $q_l < q_m < q_h$  are the equilibrium points. The dashed line is the total energy line above which the motion is unbounded, because the particle may escape the local potential well from the left.

#### V. STEADY SIMPLE SHEAR AND THE PARTICLE ANALOGY

In the following, we consider steady flows, *i.e.*  $De = 0$  [52]. Transient effects have already been discussed [24, 27], and an update is on the way [54]. For steady flows, Eq. (18) gives

$$\xi_0^2 \partial_{y^*}^2 \begin{pmatrix} S \\ N \end{pmatrix} = -\mathbb{C}(S, N; K) \quad (19)$$

Radulescu *et al.* [24] noted that this equation is analogous to Newton's second law for the movement of a fictitious particle. The same analogy had been used previously by Spenley *et al.* [48], also in the context of shear banding, and more generally by Pomeau [53]. But with two degrees of freedom  $S$  and  $N$ , the complexity of Eq. (19) prevented Radulescu *et al.* from seeking an analytic solution to the inhomogeneous shear-banding flow.

If the diffusion in the non-linear flow regime becomes anisotropic, we cannot use a single Knudsen number  $\xi_0$ . If diffusion only concerns the shear component of the stress, then  $\xi_{ij} = 0$  for every  $i$  and  $j$  except  $\xi_{xy} = \xi$ . In this case, dimensional considerations would suggest that the diffusion can be expressed in terms of the shear rate tensor, rather than the stress tensor. In this alternate version of dJS, the diffusion term is of the form  $2\eta_p \mathcal{D}_0 \nabla^2 \mathbf{D}$ , with  $\mathcal{D}_0 \equiv \frac{\xi^2 d^2}{\lambda}$ . Note that the sign of this term has to be taken in accordance with the definition of the sign of the shear rate. This type of term was used recently by Sato *et al.* [36], because it is much more mathematically tractable, as was already apparent in a simpler diffusive model used by Dhont [37]. A clear physical argument justifying a dominant diffusion on shear components is still lacking, and the use of a diffusion coefficient on the shear rate is mostly motivated by its computational advantage. Note that in general, the ad-

dition of diffusive terms, on the stress or on the shear rate, has always been motivated first by computational considerations. Experimental characterisation of diffusion on stress or shear rate is still sparse.

Since we wish to present and build on the recent developments by Sato *et al.* [36], in the following, we will assume the diffusion to be of the anisotropic kind. More informations on the differences with taking an isotropic stress diffusion as in Radulescu *et al.* [24, 26] are discussed in the appendices of Sato *et al.* [36].

With diffusion on the shear rate, and for steady flow ( $De = 0$ ), the system of Eqs. (14-17) is replaced by

$$N = KS \quad (20)$$

$$Z = 0 \quad (21)$$

$$\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} K = -KN + K - S \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} (S + \eta K) = 0 \quad (23)$$

Eq. (23) is redundant with the homogeneity of the stress discussed above. Eq. (21) is trivial. We can use Eq. (20) to replace  $N$  in Eq. (22). Then, it is convenient to regard  $K$  as the main variable of our problem, and by using  $\sigma = \bar{\sigma} = S + \eta K$ , we express  $S$  as a function of  $K$  and we reach

$$\begin{aligned} K(1 - K(\bar{\sigma} - \eta K)) - (\bar{\sigma} - \eta K) - \xi^2 \frac{\partial^2 K}{\partial y^{*2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \xi^2 \frac{\partial^2 K}{\partial y^{*2}} = \eta K^3 - \bar{\sigma} K^2 + (1 + \eta)K - \bar{\sigma} \end{aligned} \quad (24)$$

If  $y^*$  is reinterpreted as a time variable, then Eq. (24) is analogous to the equation of the motion of a particle of mass  $m \leftrightarrow \xi^2$  and position  $q \leftrightarrow K$  under a force deriving from a quartic potential energy function  $V(q)$  depending on the parameters  $\bar{\sigma}$  and  $\eta$ . This analogy was stated explicitly in the recent study by Sato *et al.* [36], building on the idea invoked earlier with Eq. (19) [24]. Using the chain rule, we can transform Eq. (24) into its ‘energy form’:

$$\frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) = E \quad (25)$$

$$\begin{aligned} V(q) &\equiv Fq^4 + Dq^3 + Cq^2 + Bq + A \\ &\equiv -\frac{1}{4}\eta q^4 + \frac{1}{3}\bar{\sigma} q^3 - \frac{1}{2}(1 + \eta)q^2 + \bar{\sigma} q \end{aligned} \quad (26)$$

Where  $E$  is the total energy of the system, which is conserved. And we have used  $\dot{q} \leftrightarrow \frac{dK}{dy^*}$ . To make the analogy explicit, we drop our previous usage of  $t$  and use  $t \leftrightarrow y^*$ . By using ‘ $\leftrightarrow$ ’ or ‘stands for’ to define the quantities in the particle analogy, we want to differentiate these definitions with regular definitions using ‘ $\equiv$ ’. When using ‘ $\leftrightarrow$ ’, the new quantities are linked with a new interpretation of the syntactic object. In the language of mathematicians, we ‘define a new model’ for the dJS equation [55]. This is what we mean by ‘making an analogy’. In some sense,

we could have even used  $\leftrightarrow$  in defining the dimensionless variables  $K, S, N$  and  $Z$ , since they carried the new meaning given in the framework of reaction-diffusion by Radulescu *et al.* [24].

We will see that this new interpretation helps us realize the full syntactic power of the dJS equation, but before exploiting further the analogy, from Eq. (24), we can already obtain the non-monotonic homogeneous flow curve we mentioned previously. If we force the flow to be homogeneous,  $K(y) = \bar{K} \equiv (1 - a^2)^{1/2} \bar{W}i$ . Then  $\partial_{y^{*2}} K \equiv 0$  (where we use  $\partial_{y^{*2}}$  to stand for  $\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}$ ) and Eq. (24) reaches

$$\begin{aligned} \eta \bar{K}^3 - \bar{\sigma} \bar{K}^2 + (1 + \eta) \bar{K} - \bar{\sigma} &= 0 \\ \bar{\sigma} &= \frac{\bar{K}}{1 + \bar{K}^2} + \eta \bar{K} \end{aligned} \quad (27)$$

Note that this solution can also be obtained by taking  $\xi^2 = 0$ , *i.e.* the particle has no mass. This is another way of thinking about why the inhomogeneous flow curve can only be obtained by the addition of a diffusive term in JS.

## VI. PROPERTIES OF THE POTENTIAL

In the particle analogy, it is important to realize that regions where the shear rate changes abruptly correspond to time intervals where the particle is moving fast, *i.e.* near local minima of the potential  $V(q)$ —the ‘inner solution’ described by Radulescu *et al.* [24, 26]. On the contrary, regions of fairly constant shear rate, *i.e.* linear velocity profile, correspond to time intervals where the particle is moving slowly, near the ‘turning points’ of the potential  $V(q)$  [57]—the ‘outer solution’ [24, 26]. The potential  $V(q)$  is a quartic potential. The general solution of the motion of a particle in a quartic potential is well known and involves elliptic functions for  $q(t)$ . A short recent summary of important analytical results can be found in Sanchez *et al.* [58]. In particular, Sanchez *et al.* [58] describe the various possible shapes for the quartic potential, depending on relations between the coefficients of the potential ( $A, B, C, D, F$ ). Evidently, the shape of the potential is critical in determining the solution. To simplify the study of the shape of the potential, we follow Sanchez *et al.* in the following two steps. Firstly, we define the three equilibrium points, roots of the algebraic equation  $\frac{dV(q)}{dq} = 0$ . Lets name the equilibrium locations following the ordering  $q_l < q_m < q_h$ . Those solutions are real if  $\eta < 1/8$ , *i.e.* when the homogeneous flow curve is non-monotonic. Since  $F < 0$ ,  $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} V(q) = -\infty$ , and by continuity, we already know that  $q_l$  and  $q_h$  are unstable equilibrium points whereas  $q_m$  is a stable equilibrium, as illustrated on Fig. 2. The particle will move fast near  $q_m$  and slowly near  $q_l$  and  $q_h$ .

To be able to use tabulated coefficient relations [58], it is

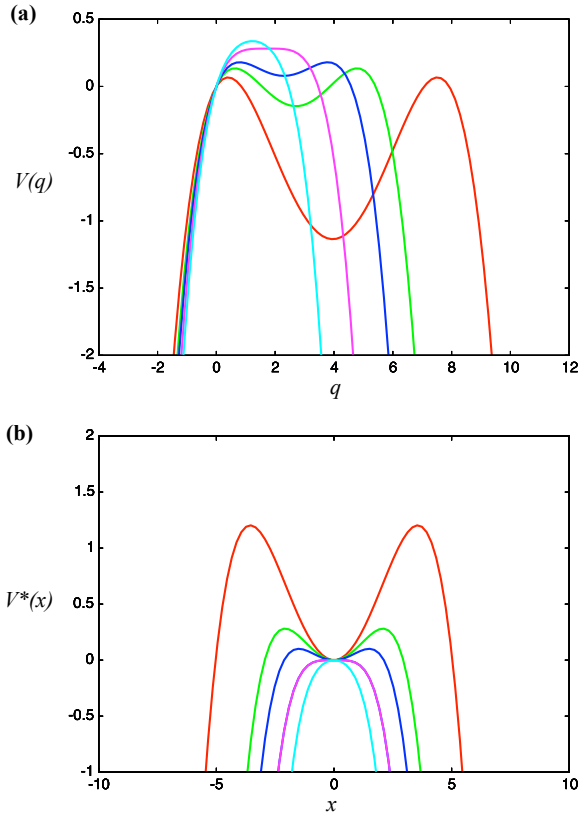


FIG. 3: Plot of (a) the original quartic potential  $V(q)$  and (b) the rescaled potential  $V^*(x)$ , for  $\eta = 0.03, 0.06, 0.08, 1/8, 0.2$ .

convenient to rescale our variable  $q$  to eliminate the linear term of the potential. We can make use of the middle root  $q_m$  of the equation  $\frac{dV(q)}{dq} = 0$ . The idea is to translate the coordinate system such that it is centred on the middle root value. We introduce the variable  $x \equiv q - q_m$ . Then, from Sanchez *et al.* [58] we can introduce a new potential  $V^*(x) \equiv A^*x^2 + B^*x^3 + C^*x^4$ , such that

$$\text{Eq. (25)} \iff \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V^*(x) = E^* = E - V(q_m) \quad (28)$$

With,

$$\begin{cases} A^* \equiv C + 3Dq_m + 6Fq_m^2 = -\frac{\eta+1}{2} + \bar{\sigma}q_m - (3/2)\eta q_m^2 \\ B^* \equiv D + 4Fq_m = \bar{\sigma}/3 - \eta q_m \\ C^* \equiv F = -\eta/4 \end{cases} \quad (29)$$

In the rheological framework, we know that the stress has to be homogeneous. Nonetheless, we anticipate the local shear rate to be inhomogeneous. The shear rate associated with a given stress can take a range of values. On the global scale this leads to the so-called ‘stress-plateau’. For a value of  $\bar{\sigma}$  one can realize several values of  $\bar{K}$ . This degeneracy means that given a value of stress in the bulk  $\bar{\sigma}$ , there is no ‘bulk mechanism’ capable of selecting a

value of  $\bar{K}$ . As it will become clearer in section VIII, this means that the solution  $q(t)$  contains an arbitrary parameter linked to the arbitrariness of the value of  $\bar{K}$ . As a particular consequence, the equilibrium points  $q_l$  and  $q_h$  need to have the same relative stability, *i.e.*, as stated in Sato *et al.* the potential  $V(q)$  or  $V^*(x)$  needs to be symmetric [36].

For the potential to be symmetric, the coefficients must be related by the relation  $B^{*2} = 4A^*C^*$  [58]. Using Eqs. (29), this equation, together with  $\frac{dV}{dq}\big|_{q_m} = 0$  reads

$$B^{*2} = 4A^*C^* \iff \frac{\bar{\sigma}^2}{9} - \frac{\eta^2 q_m^2}{2} + \frac{\eta \bar{\sigma} q_m}{3} - \frac{\eta(\eta+1)}{2} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{dV}{dq}\big|_{q_m} = 0 \iff \eta q_m^3 - \bar{\sigma} q_m^2 + (1+\eta)q_m - \bar{\sigma} = 0 \quad (31)$$

We therefore have a system of two algebraic equations with unknowns  $(q_m, \bar{\sigma})$ . From those two equations, we can eliminate the variable  $q_m$  to reach

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(9\eta - 18\eta^2 - 2\bar{\sigma}^2) &= 0 \\ \Rightarrow \bar{\sigma} &= \pm \frac{3\sqrt{\eta - 2\eta^2}}{\sqrt{2}} \quad \text{or} \quad \bar{\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

The negative and positive values correspond to the arbitrariness of the stress sign. Thereafter, we keep  $\bar{\sigma} > 0$  by convention. From Eq. (32) it is evident that for a given value of the material parameter  $\eta$ , there is a unique value of stress  $\bar{\sigma}$  corresponding to the non homogeneous solution.

If we seek the complete solution to the inhomogeneous flow, we should then replace any instance of the mean stress  $\bar{\sigma}$  by its value depending on  $\eta$ . In particular, we can now find the expression for the three equilibrium points of the potential:

$$\begin{cases} q_l = \frac{\sqrt{1/\eta-2} - \sqrt{1/\eta-8}}{\sqrt{2}} \\ q_m = \frac{\sqrt{1/\eta-2}}{\sqrt{2}} \\ q_h = \frac{\sqrt{1/\eta-2} + \sqrt{1/\eta-8}}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (33)$$

Note that since the potential is symmetric,  $q_m = \frac{q_l + q_h}{2} = \frac{\bar{\sigma}}{3\eta}$ .

From Eq. (32,33), we can rewrite  $A^*$ ,  $B^*$  and  $C^*$  as functions of  $\eta$  only,

$$\begin{cases} A^* = \frac{1-8\eta}{4} \\ B^* = 0 \\ C^* = -\eta/4 \end{cases} \quad (34)$$

Fig. 3 draws the original potential  $V(q)$  and the rescaled potential  $V^*(x)$ , for a few values of  $\eta$ . As already mentioned, the potential  $V(q)$  as a unique equilibrium point  $q_m$  when  $\eta \geq 1/8$ . At the point  $\eta = 1/8$ ,  $q_m$  is a multiple

root and  $A^* = 0$ . We call this point, the ‘critical point’. The characteristic frequency of the particle near  $q_m$  is given by the harmonic approximation of  $V(x)$  near  $x = 0$ , *i.e.* by  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1-8\eta}{4m}}$ .  $1/\omega_0$  is the time scale of the problem. This is a crucial point, as the time interval  $[0, 1]$  was indefinite and we now recognize that the ‘time’ for the particle to translate from  $q_l$  to  $q_h$  is in units of the harmonic period near  $q_m$ . Note that at the critical point,  $\omega_0 = 0$ , because the lowest order of the potential near  $q_m$  is quartic, the particle time scale diverges.

Returning to the original rheological framework, we can identify the inverse of the harmonic frequency with the dimensionless width of the interface between domains of different shear rates,  $w \leftrightarrow 1/\omega_0$ . This correspond to the ‘inner solution’ in the reaction-diffusion framework [26]. Thus, the interface width appears to diverge as  $\eta$  approaches the critical point [59].

### VII. NAIVE FLOW CURVE AND LAW OF EQUAL DISTANCES

Returning to the rheological framework, the values  $K_l \leftrightarrow q_l$  and  $K_h \leftrightarrow q_h$  are the outer solutions. As explained already in [24, 26], in the limit where  $\xi \ll 1$ , one has to seek matching between the homogeneous solution with the shear-banding solution at  $K_l$  and  $K_h$ . Then,  $K_l$  and  $K_h$  are identified as the boundary of the stress plateau with magnitude  $\bar{\sigma}$ . Fig. 4 displays the homogeneous and inhomogeneous flow curves for  $\eta = 0.04$ , highlighting the connections points  $K_l$  and  $K_h$  between the two solutions. Ultimately, we would expect the flow curve measurable for a steady simple shear to read,

$$\bar{\sigma}(\bar{K}) = \begin{cases} \frac{\bar{K}}{1+\bar{K}^2} + \eta\bar{K} & \text{if } \eta \geq \frac{1}{8} \text{ or } \bar{K} \notin [K_l, K_h] \\ \frac{3\sqrt{\eta-2\eta^2}}{\sqrt{2}} & \text{if } \eta < \frac{1}{8} \text{ and } \bar{K} \in [K_l, K_h] \end{cases} \quad (35)$$

The plateau intersects the homogeneous flow curve at three locations  $K_l$ ,  $K_m$  and  $K_h$ . Then, the symmetry of the potential implies  $K_m = \frac{K_l+K_h}{2}$ . Thus the plateau is such that  $K_m - K_l = K_h - K_m$ . By analogy with the law of equal areas, we can call this the ‘law of equal distances’. A similar law was found by Dhont on a scalar model analogue to dJS [37]. This would be an easy criterion, but it does not seem to be recovered by numerical simulations of the dJS model [21, 28]. We have forgotten a key ingredient in our derivation. This key ingredient was also missing in Sato’s derivations [36].

### VIII. SATO’S CONSTRAINED SOLUTION

In Sato *et al.*, the authors make use of the naive flow curve to obtain a solution for the shear rate profile. Just considering the order of Eq. (24), they consider two boundary conditions for  $K$ ,  $\partial_{y^*}K = 0$  at  $y^* = 0$  and 1, assumed to come from  $\partial_{y^*}S|_{0,1} = 0$ , which is supposed

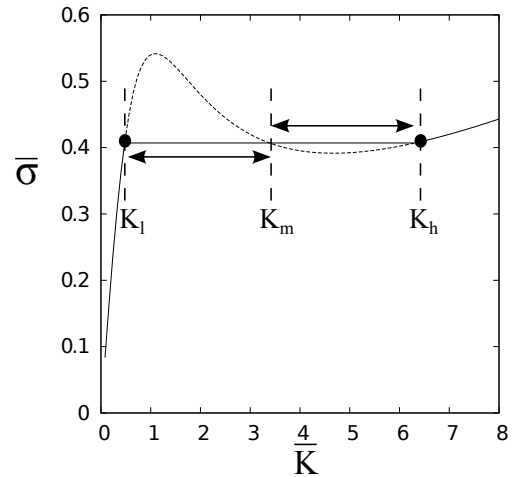


FIG. 4: Dimensionless homogeneous and inhomogeneous flow curve for  $\eta = 0.04$ . The dashed line is the unstable homogeneous solution. The black circles highlight the connection points  $K_l$  and  $K_h$  between the inhomogeneous and homogeneous solution. The connection points are related by  $K_m - K_l = K_h - K_m$ .

to represent the fact that there is no flux of polymeric components at the wall [36, 56]. In the particle analogy, the boundary conditions translate into the requirement that the particle starts with no initial velocity at  $t = 0$  and ends with no velocity at  $t = 1$  (in units of  $1/\omega_0$ .) If we require that the outer part of the inhomogeneous solutions connect with the homogeneous solutions [24, 26], then we assume that  $q(0) = q_l$  and  $q(1) = q_h$  and  $\dot{q}(0) = 0$  and  $\dot{q}(1) = 0$ , the particle is moving ‘from left to right’ on the potential. Note that by symmetry we could have chosen  $q(0) = q_h$  and  $q(1) = q_l$  as well, *i.e.* the particle moves from right to left. Since the total energy of the particle is conserved, its value is given by the value of the potential at  $q_l$  or  $q_h$ . Then, in the reduced variable  $x$ , the energy of the system is given by,

$$E^* = V^*(q_l - q_m) = \frac{(8\eta - 1)^2}{16\eta} \quad (36)$$

We can then return to Eq. (28), which reads,

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \left(\frac{1-8\eta}{4}\right)x^2 - \frac{\eta}{4}x^4 = \frac{(8\eta-1)^2}{16\eta} \quad (37)$$

This equation is separable,  $[E^* - V^*(x)]^{-1/2}dx = \sqrt{\frac{2}{m}}dt$ . Using our convention that the particle moves from left to right, we can obtain the solution, written with the particle notation  $x(t)$ , or with the dimensionless rheological



notation  $K(y^*)$ ,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{q_h - q_l}{2} \tanh \left[ \omega_0(t - t_0) \right] \\ \Leftrightarrow q(t) &= \frac{q_h + q_l}{2} + \frac{q_h - q_l}{2} \tanh \left[ \omega_0(t - t_0) \right] \\ \Leftrightarrow K(y^*) &= \frac{K_h + K_l}{2} + \frac{K_h - K_l}{2} \tanh \left[ \frac{y^* - y_0^*}{w} \right] \\ K(y^*) &= K_m + \frac{\Delta K}{2} \tanh \left[ \frac{y^* - y_0^*}{w} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

where we have defined the plateau range  $\Delta K \equiv K_h - K_l$ . At this point,  $y_0^*$  is an unknown constant which represents the location of the interface between bands in the gap. Following the naive shear-banding scenario described in the introduction, from Eq. (5), we expect that  $y_0^* = (1 - \alpha) = \frac{K_h - \bar{K}}{K_h - K_l}$ . Indeed, it is the value set in Sato *et al.* [36]. But as we will see in section IX, this value is not strictly rigorous.

### IX. MODIFICATION OF THE LEVER RULE BY NON-LOCAL EFFECTS

The rigorous value of  $y_0^*$  needs to be deduced from the requirement that the integral of the shear rate in the sample should be equal to its macroscopic value. This was indeed noted by Sato *et al.* and stated in dimensionless form (eq. (7) of [36]):

$$\int_0^1 K(y^*) dy^* = \bar{K} \quad (39)$$

By integrating the profile obtained in Eq. (38) we can obtain a rigorous expression for  $y_0^*$ ,

$$y_0^* = \frac{w}{2} \log \left[ \frac{e^{\frac{1}{w}} - e^{\frac{2\alpha-1}{w}}}{e^{\frac{2\alpha-1}{w}} - e^{-\frac{1}{w}}} \right] \quad (40)$$

Then, only at the lowest order in  $(2\alpha - 1)$  and  $1/w$ , we find  $y_0^* = 1 - \alpha$ , *i.e.* the interface is located at the position expected from the lever rule. If the interface is too close to the walls, and/or if the width of the interface  $w$  starts to be large, this approximation is invalid. This was explicitly stated in the reaction-diffusion framework by Radulescu *et al.* [24], in terms of “non-asymptotic effects”. The case where  $w$  becomes large can be induced if the Knudsen number  $\xi$  is not negligible. It corresponds to the limit where “non-local effects” are important [60, 61]. Fig. 5 shows the modification of the lever rule  $y_0^*(\alpha)$  by non-local effects for various values of  $w$ . A key point is that if  $w \neq 0$ , there are always non-local effects when one of the shear bands—low or high—is small. In this limit, our assumption that  $K(0) = K_l$ ,  $K(1) = K_h$ ,  $\partial_{y^*} K(0) = 0$  and  $\partial_{y^*} K(1) = 0$  is inconsistent, because the width of the interface is such that the shear rate cannot reach its asymptotic values  $K_h$  and  $K_l$  in the gap interval  $y^* \in [0, 1]$ . As stated in Radulescu *et al.*, matching rigorously happens only if  $y^* \in [-\infty, \infty]$  [24]. Moreover, the errors

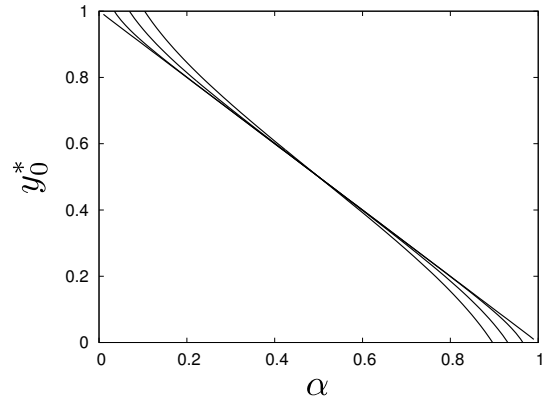


FIG. 5: Modification of the lever rule  $y_0^*(\alpha)$  for various values of  $w = 0.01, 0.1, 0.2, 0.3$ . To the best of our knowledge, the dJS model had been used only once to study non-local effects, in a numerical simulation never published but communicated in a conference in 2008 [62]. In this respect, Eq. (40) is the first analytical result showing the modification of the lever rule by non-local effects. Nonetheless, this analytic result has only a heuristic purpose since the precise incorporation of the constraint on the average value of the shear rate—described in section X—would modify the form of this result.

we seem to have made on our boundary conditions are related. For instance, if the interface is close to the wall at  $y^* = 0$ , then  $K(0) = K_l$  and  $\partial_{y^*} K(0) = 0$  will be poorly satisfied whereas  $K(1) = K_h$  and  $\partial_{y^*} K(1) = 0$  will be approximately correct. Where does this pathology come from?

### X. LAGRANGIAN FORMALISM AND HOLONOMIC CONSTRAINT

In the particle analogy, it seems that we could not impose  $q(0) = q_l$  and  $q(1) = q_h$  and  $\dot{q}(0) = 0$  and  $\dot{q}(1) = 0$ . In the analogy, Eq. (39) correspond to a constraint on the average position of the particle during the time interval  $[0, 1]$ . Actually, if one exploits the analogy to its full potential, one realizes that the conditions we had imposed on the motion of our particle were violating causality. If the particle starts at the equilibrium location  $q(0) = q_l$ , with no initial velocity, there is no mechanism—it seems—that would control the particle dynamics such that it ends at  $q(1) = q_h$  with no velocity. We are missing the cause of the motion and trying to impose it after the fact, enforcing Eq. (39). This anomaly comes from the fact that the integral equation (39) has to be understood as a holonomic constraint [63], *i.e.* a constraint on the degrees of freedom of the particle. A classical example of mechanics problem involving a holonomic constraint is the dynamics of a particle in a gravitational field  $\vec{g} = g\hat{z}$ , constrained to move on a hoop of radius  $R$  perpendicular to the ground. The original statement of the problem may consider two degrees of freedom  $(x, y)$ , but the holonomic constraint  $x^2 + y^2 = R^2$ , reduces the effective number of

degrees of freedom to one, usually taken to be the angle  $\psi$  away from the vertical direction ( $\hat{z}$ ). Consequentially, since the equation of motion is of second order, the number of boundary conditions one would naively impose is  $4 = 2 \times 2$  (for  $x$  and  $y$ ), but only two boundary conditions can be imposed (on  $\psi$  and  $\dot{\psi}$ ). Similarly, in our case, the holonomic constraint on the average position of the particle  $\bar{q}$  during the time interval  $[0, 1]$ , reduces the number of degrees of freedom and the number of boundary conditions one can impose.

Generally, the integral constraint can be understood as providing an additional force that ‘push on the particle’ in a way that would satisfy the requirement on the time average of the position. This fact was not incorporated in the study by Sato *et al.* [36]. The inclusion of the holonomic constraint can be done in a consistent way by expressing the particle dynamics in the Lagrangian formalism using the principle of least action [57, 63],

$$\delta \mathcal{S}_c(q, \dot{q}, t) \equiv \delta \left\{ \int_0^1 \mathcal{L}_c(q, \dot{q}, t) dt \right\} = 0$$

$$\mathcal{G}(q) \equiv \left\{ \int_0^1 q dt \right\} - \bar{q} = 0 \quad (41)$$

where  $\mathcal{S}_c$  and  $\mathcal{L}_c(q, \dot{q}, t) \equiv T - V \equiv \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$  are the action and Lagrangian constrained by  $\mathcal{G}$ . To solve for Eqs. (41) we can use the method of Lagrange multipliers [63]. We introduce a new ‘unconstrained action’  $\mathcal{S}_0$  and a new ‘unconstrained Lagrangian’  $\mathcal{L}_0$  taking the constraint into account through the addition of a Lagrange multiplier  $h$ .

$$\text{Eqs. (41)} \Leftrightarrow \delta \mathcal{S}_0(q, \dot{q}, t) \equiv \delta \left\{ \int_0^1 \mathcal{L}_0(q, \dot{q}, t) dt \right\} = 0 \quad (42)$$

With  $\mathcal{L}_0(q, \dot{q}, t) \equiv \mathcal{L}_c(q, \dot{q}, t) + hq$ . From the least action principle on the unconstrained action, we can obtain the unconstrained equivalent of Eq. (24) or Eq. (25) using the Euler-Lagrange equation [57, 63]. We then solve the unconstrained Euler-Lagrange equation to get  $q(t)$  up to a constant determined by satisfying the constraint [63]. The unconstrained equivalent of Eq.(25) is

$$\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q) - hq = E_u \quad (43)$$

Where  $E_u$  is the unconstrained value of the energy, fully taking into account the integral constraint. From here, the procedure we described previously regarding the naive unconstrained solution would be similar. Since it goes beyond the scope of this review, the full solution to the unconstrained problem will be given elsewhere [64], but we can understand already the impact of imposing the integral constraint in a consistent way.

## XI. MODIFICATION OF THE FLOW CURVE

The first effect of the holonomic constraint is the introduction of the Lagrange multiplier that provides the

additional force necessary to recover causality in the motion of the particle, by modifying the relative stability of the equilibrium points  $q_l$  and  $q_h$ . Typically, if we keep the same convention for the direction of motion of the particle (from left to right), we expect  $h$  to be close to zero if  $\bar{q} \simeq q_l$  and largest when  $\bar{q} \simeq q_h$ . So typically,  $h$  will be a monotonic function of  $\bar{q}$ . And then, since  $\bar{\sigma}$  and  $q_l$ ,  $q_m$  and  $q_h$  are now functions of  $h$ , it means that they are also functions of  $\bar{q}$ . In the rheological framework, this means that the value of the stress plateau and of what we thought of before as the plateau boundaries  $K_l$  and  $K_h$  are actually changing as  $\bar{K}$  varies. Typically, since  $h = 0$  if  $\bar{K} = K_l$ , we expect the naive value of the plateau given in Eq. (32) to be the value of the stress for  $\bar{K} = K_l$ , and  $K_l$  given by Eq. (33) to be the actual value of the local shear rate in the sample. But as  $\bar{K}$  increases to values larger than  $K_l$ , then  $h \neq 0$  and both the stress and  $K_h$  can change. When taken together with the fact that simulations are usually conducted with a fully isotropic stress diffusion- $\mathcal{D}_0 \nabla^2 \mathbf{T}$ - the effect of the Lagrange multiplier could explain why the flow curve obtained in simple steady shear flow by numerically solving the dJS model do not follow the naive law of equal distances [21, 28]. Also, the local value of shear rate in the high shear rate band can change slightly as the proportion of the high shear rate band increases, *i.e.* as  $\bar{K}$  increases. This has been noticed recently in experiments [65, 66], and it would be interesting to see if numerical simulations capture this behaviour as well. To the best of our knowledge, a plot giving the local value of  $K_h$  in the high shear rate band, as a function of  $\bar{K}$  has never been drawn out of simulations for the dJS model.

## XII. “COMPETITION BETWEEN SHEAR-BANDING AND WALL SLIP”

The second effect of the holonomic constraint is to reduce the number of effective degrees of freedom in the problem. We cannot impose initial and final positions and velocities independently of the value of  $\bar{q}$  *i.e.* of  $h$ . For instance, if we impose the initial velocity and position, the final position and velocity will be a function of both those initial conditions and  $h$ , *i.e.*  $\bar{q}$ . Based on experiments [65] and in order to insure continuity with the homogeneous solution at  $\bar{K} = K_l$ , we suggest that a robust boundary condition is  $K(0) = K_l$  for any  $\bar{K}$  in the banding regime, *i.e.* the shear rate in the low shear rate band is consistently constant. We can then apply one more boundary condition. If we impose  $\partial_{y^*} K(0) = 0$ , as proposed by Sato *et al.* [36], then we will not be able to control the values of  $K(1)$  and  $\partial_{y^*} K(1)$ . This point can be understood in the particle analogy with the help of Fig. 6. If the particle starts at  $q(0) = q_l$ , with no velocity, then, for a given value of  $\bar{q}$ , the Lagrange multiplier tilts the potential, and at  $t = 1$ , the position and velocity of the particle are imposed by the dynamics. This point will be developed further in a future publication [64], but

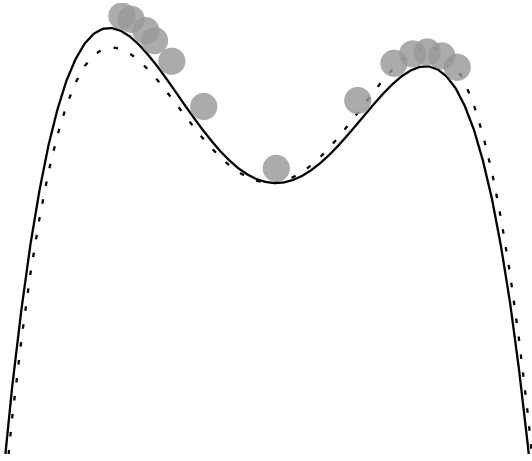


FIG. 6: Sketch of the dynamics of a particle in a tilted quartic potential. The particle starts with  $q(0) = q_l$  and  $\dot{q}(0) = 0$ , and the final velocity and position at  $t = 1$  are imposed by the dynamics.

we believe that this is a strong indication that an apparent slip at the boundary with the high shear rate band may be a genuine feature of shear-banding flows. Because, as can be intuited from Fig. 6, if the potential is tilted, the particle motion near  $t = 1$  can start accelerating again. In the rheological framework, it means that we can have a thin layer of larger shear rate near  $y^* = 1$ . In general, by lowering the number of boundary conditions we can impose, the holonomic constraint leads to much more freedom on shear-banding states that are possible. In what we just discussed, we took the perspective of fixing two boundary conditions with no slip and then looking at the impact on the other boundary, as a function of  $h$ , *i.e.*  $\bar{q}$ . But in other experimental situations, the reverse perspective could be just as instructive. Typically, if the material sheared is expected to slip a lot at the moving wall, we can impose slip boundary conditions (on  $K(1)$  and on  $\partial_{y^*}K(1)$ ) and then study the resulting state as a function of  $h$ , *i.e.*  $\bar{q}$ . This perspective would allow the investigation of the effect of large values of the Lagrange multiplier  $h$ . Remember that in the particle analogy,  $h$  has the effect of tilting the potential. For some large values of  $h$ , the shape of the potential may change dramatically, *i.e.* the number of equilibrium points may go from three ( $q_l$ ,  $q_m$  and  $q_h$ ) to only one. In this case, the dynamics of the particle would become unbounded [57, 63] and the very assumption of steadiness of the flow would be compromised. This case may be relevant to the dynamics described by Wang *et al.* in terms of “phase diagrams” for steady shear-banding or wall slip dominated flows [70].

The large range of possible shear-banding states was exhibited in a recent numerical study of the dJS model for various boundary conditions [67]. The necessity of boundary layers was also pointed out in a recent publication exploiting another model of shear-banding [68]. Ex-

perimentally, the idea of a “competition between shear-banding and wall slip” was explicit in the study by Lettinga and Manneville [65]. Generally, the fact that wall slip is usually a genuine but understudied feature of complex fluid flows was expressed recently by R. Buscall [69]. Overall, we believe that the Lagrangian interpretation of the particle analogy to the dJS governing equations in simple shear could give the first rigorous analytic rationale for the relations between boundary conditions and shear-banding. The sensitivity of shear-banding states was already mentioned in early studies by Lu, Olmsted and Radulescu, in terms of “weak-universality” [24, 25], but it is still an area of investigation that needs more theoretical and experimental effort.

### XIII. REVIVAL OF THE THERMODYNAMIC INTERPRETATION

For readers coming from a more ‘thermodynamic’ rather than ‘mechanistic’ background, it may be apparent already that the Lagrangian formalism for the particle dynamics analogy can readily be re-interpreted (again!) in terms of an effective free energy. In some sense, this effective free energy is reminiscent of early thermodynamical approaches, but stress and deformation are not simple conjugate variables [34]. From Eq. (42) one just needs to map the mechanical variables of the particle analogy, back to their original values. To make the syntax even more transparent, let us use  $\phi \leftrightarrow K$  and  $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{S}_0$ . Then instead of interpreting  $\delta\mathcal{S}_0 = 0$  as the least action principle on the particle dynamics, we can interpret  $\delta\mathcal{F} = 0$  as the minimization of a free energy defined as

$$\mathcal{F} \equiv \int_0^1 dy^* \left\{ \frac{1}{2} \xi^2 \nabla \phi^2 + F \phi^4 + D \phi^3 + C \phi^2 + B \phi - h \phi \right\} \quad (44)$$

With the coefficient values given by Eq. (25) and the external field  $h$  whose value facilitates the conservation of the spatially averaged value of the field  $\phi$ :

$$\int_0^1 dy^* \phi = \bar{\phi} \quad (45)$$

This is none other than a conservative ‘ $\phi^4$ ’ model, or Ginzburg-Landau, with an external field  $h$  [71]. This model has been studied in countless frameworks and many derivations from the literature may be readily re-interpreted in the context of shear-banding. The free energy Eq. (44), together with the conservative dynamics imposed by the constraint Eq. (45) belong to the class of ‘model B’, or Cahn-Hilliard dynamics [72]. The essential point is that the dJS model can be interpreted in a ‘thermodynamic way’ without the need for the algebraic simplifications proposed in Sato *et al.* [36]—where they reduced the number of degrees of freedom by studying

shear-banding infinitesimally close to the critical point at  $\eta = 1/8$ .

#### XIV. BRIDGING THE GAP WITH THE BMP MODEL

One of the side effects of having a successful canonical model to approach a problem is that this model may overshadow other ‘concurrent’ but promising approaches. The dJS model has been very successful so far, and we have even seen in this paper how far reaching this simple ‘quasi-linear’ [22] model can be. Nonetheless, other approaches have been published and successfully compared to experimental data [15]. In this last section, we wish to connect to one of those particular models, the Bautista-Manero-Puig model (BMP) [38–40]. The BMP approach interprets the shear-banding as explicitly linked to a transition in the mesoscopic structure of the fluid. The idea is to use the UCM model, but with a viscosity locally changing with the strain rate. Together with the UCM mechanical balance expressed as a function of the fluid total viscosity, one constructs an evolution equation for the fluidity  $\varphi$ —*i.e.* the inverse viscosity—of the material:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi_0 - \varphi}{\lambda_0} + k_0(1 + \vartheta \dot{\gamma})(\varphi_\infty - \varphi) \mathbf{T} : \mathbf{D} \quad (46)$$

where  $\varphi_0$  and  $\varphi_\infty$  are the fluidity—*i.e.* inverse viscosity—for zero and infinite shear,  $\lambda_0$  is the typical relaxation time for the mesoscopic structure to relax to equilibrium, “ $k_0$  is the kinetic parameter at zero-shear strain and the proportionally factor  $\vartheta$  is the shear-banding intensity parameter’ [39]. For a steady simple shear flow, the momentum balance and the UCM equation together with Eq. (46) reduce to a single equation [39]:

$$\bar{\sigma} - K + k_0 \lambda_0 (\lambda + \vartheta K) (\varphi_\infty - \frac{K}{\bar{\sigma}} \varphi_0) \bar{\sigma}^2 G_0^2 \frac{K}{\lambda} = 0 \quad (47)$$

where  $\bar{\sigma}$  and  $K$  have the values defined previously for  $a = 1$ . The parameters  $\lambda$  and  $G_0$  are the relaxation time and elastic modulus in the linear regime such that  $\eta_0 = \varphi_0^{-1} = \lambda G_0$ . This is a cubic equation for  $K$ , in a similar format than Eq. (24) with  $\xi = 0$ . If we set  $\varphi_\infty^{-1} \equiv \lambda_\infty G_0$  and  $k \equiv k_0 \lambda_0 G_0$ , and with some algebraic manipulations, we can make the syntactic similarity more transparent,

$$\bar{\sigma} - \left[1 - \bar{\sigma}^2 \frac{k}{\lambda_\infty}\right] K + \left[\frac{k}{\lambda} \left(\frac{\vartheta}{\lambda_\infty} \bar{\sigma} - 1\right) \bar{\sigma}\right] K^2 - \left[\frac{k \vartheta}{\lambda^2} \bar{\sigma}\right] K^3 = 0 \quad (48)$$

Within the framework of the BMP model Eq. (47) or equivalently Eq. (48) are seen as having been derived from a quartic potential. Then, the plateau selection also corresponds to the requirement that this potential be symmetric [38]. To the best of our knowledge, it was never proven thoroughly that this requirement brings a single value for  $\bar{\sigma}$ . Overall, it seems that the BMP and dJS model in simple shear differ only by the values of

the coefficients of the potential. Nonetheless—again—this last mapping directly merits some comments. Firstly, Eq. (48) is generally more complex than Eq. (24) with  $\xi = 0$ , in the sense that it has more parameters ( $k$ ,  $\vartheta$ ,  $\lambda_\infty$ , etc...).

Secondly, the equation is also more complex because it is second order in  $\bar{\sigma}$  rather than linear. This is a key point, since, if we couple Eq. (48) with the new symmetry requirement  $B^{*2} = 4A^*C^*$ —with the new values for the coefficients—then, after eliminating the new equivalent of  $q_m$ , we would get an equation for  $\bar{\sigma}$  that is much more complex than Eq. (32). The algebra is left to the reader, but ultimately one obtains a quartic equation for  $\bar{\sigma}$ . This is of critical importance, since the fact that we obtained a single possible value for the plateau previously really depended on the fact that Eq. (32) is of the form  $\bar{\sigma} f(\bar{\sigma}^2) = 0$ . It is then obvious that we get a singled valued plateau, since  $\bar{\sigma} = 0$  is the necessary trivial solution of no flow and  $f(\bar{\sigma}^2) = 0$  gives the symmetric positive and negative solutions required by the orientation symmetry. The BMP model leads to an equation of the form  $\bar{\sigma} f(\bar{\sigma}^3) = 0$ . The no flow solution is present, but  $f(\bar{\sigma}^3) = 0$  would suggest an asymmetry between positively and negatively defined stresses.

Another curious fact is that the BMP model supposes  $\xi = 0$  and so it is hard to imagine an analytic procedure to obtain the profile  $K(y^*)$ . And the BMP model makes no mention of the effect of the constraint on the global value of the shear rate, and we have seen that this integral constraint has a key role.

#### XV. SUMMARY AND OUTLOOK

In this article we have adopted an ambivalent tone about the use of the dJS model to rationalize some behaviours of fluids exhibiting shear-banding. This ambivalence is linked to the inherent ambiguity of what we mean when we say that we “use the dJS model”.

1. If ‘using the dJS model’ is using it in a purely mechanical approach, in simple shear, it mostly means using the usual syntax of Eqs. (9-12) and interpreting everything in a strict rheological framework. This approach is the closest to the usual vocabulary used to describe experiments around polymeric material, and therefore it would be known by most of the researchers in the field—‘experimentalists’ or ‘theorists’. This approach was essentially underlying most of the recent numerical studies of dJS [21, 28, 30]. We outlined this approach in the first three sections (I-III).

2. In earlier studies, in particular by Radulescu *et al.* [24, 26], the dimensionless groups that we recall in section III were introduced. Those dimensionless groups have two important impacts. Firstly, the dimensionless groups make us realize that the impact of  $a$  is identical whatever the precise value of  $a$ , as long as  $|a| \neq 1$ . Secondly, the governing equations rewritten for the dimensionless variables allowed Radulescu *et al.* to

make very useful connections with general aspects of reaction-diffusion equations [24, 26]. Radulescu *et al.* ‘used the dJS model’, but in their context it carried a slightly different meaning, influenced by the background on reaction-diffusion equations outlined in section IV. In one of the first studies exploiting the analogy between the dJS governing equations and reaction-diffusion equations, Radulescu *et al.* noted that “covariant local constitutive equations or microscopic models lead to reaction-diffusion equations with at least two order parameters (shear stress and normal stress difference)” [24]. Actually, there is an exception to this rule, when the stress diffusion only concerns the shear component.

3. In the case where the stress diffusion only concerns shear stresses, it can be expressed in terms of a diffusion on the symmetric part of the velocity gradient tensor. In this case, Sato *et al.* have shown very recently that the dJS governing equations in simple shear can be synthesised into one single equation for the dimensionless shear rate, Eq. (24) [36]. And they have shown how this equation can be interpreted as representing the motion of a particle in a quartic potential. In this new framework, they are still ‘using the dJS model’. We have detailed the analytic solution obtained by Sato *et al.* in sections VI-VIII. We believe that this analytic solution already carries a lot of useful informations. Nevertheless, this solution is inconsistent with the integral constraint given by the value of the global shear rate Eq. (39), often imposed by the operator in an experimental situation. In particular, we have discussed in section IX how this solution becomes increasingly inconsistent as non-local effects become dominant.

4. To include the integral constraint in a consistent way, we describe in section X how to use the Lagrangian formalism corresponding to the particle analogy used by Sato *et al.* [36]. In the Lagrangian formalism, the integral constraint is interpreted as a holonomic constraint. The rigorous solution of the dJS governing equation is the solution to the optimization problem expressed in Eq. (41). The complete solution will be given elsewhere [64], but we have seen already in sections XI and XII how the Lagrangian framework allows us to discuss the notion of genuine apparent wall slip and its interaction with the shear-banding state. Following this new trend, we are still ‘using the dJS model’.

5. From the Lagrangian formalism of the particle analogy to the dJS governing equations, we just had to make a small step to re-interpret everything in a more ‘thermodynamic’ framework. This was done in section XIII. The fact that connections exist between the usual ‘mechanistic/rheological’ approach of dJS and a more ‘thermodynamic’ framework was made clear already in the second part of Sato’s study [36]. But the strength of their message was diluted somewhat by the fact that their result was only rigorous close to the critical point  $\eta = 1/8$ . In contrast the free energy we define in Eq. (44) still conveys the full potential of the

original framework. We are still ‘using the dJS model’! Within this framework we attempted in section XIV to make connections with the BMP model [38–40]. In doing so, we highlighted some points that we hope will stimulate more studies on the connections between the BMP model and more classical rheological frameworks.

In summary, we hope that the approaches we detailed here will have given the reader different “ways of thinking” about the shear-banding phenomenon. In every approach we are ‘using the dJS model’, but we have been able to go from what could have been thought of as a purely mechanical approach (1.), to an approach very reminiscent of statistical field theory and thermodynamics (5.). The distinction between the two is obviously less clear cut than was once thought. An interesting point can be made by studying the relative logical implications between the different approaches (1.-5.). The most general formulation of the law governing the motion of mechanical systems is the principle of least action [57], in the sense that the differential equations of motion are implied by the integral formulation. Therefore, the integral thermodynamic approach seems to be more ‘powerful’. Nonetheless, this approach is only made possible by the use of an anisotropic diffusion coefficient, except near the critical point [36]. If one wishes to embrace fully this thermodynamic approach, more care should be taken in justifying the use of an anisotropic diffusion, and experiments should be conducted in order to confirm or refute the hypothesis. Experiments should also study the possible dependence of the diffusion coefficient(s) on the global shear-rate, which could compromise the Lagrangian approach. Note nonetheless that such a shear rate dependence was not raised by the few experimental studies available [60, 61]. Maybe more importantly from a theoretical perspective, a limitation of the thermodynamic approach comes from the fact that the form of the potential used in the Lagrangian is dependent on the flow geometry. In contrast, the original mechanical approach starts from Eq. (6), which can be evaluated in any geometry. In this respect, the mechanical approach seems to be more powerful. But maybe there exist a systematic procedure to generate the correct potential for any geometry. In particular, as can be derived quickly from Radulescu *et al.* [26], the spatial inhomogeneity of the stress in a Poiseuille or cylindrical Couette flow [1, 22] will translate into a time dependent potential. We are currently investigating how canonical transformations in the Hamiltonian approach [57, 63] can help us introduce new generalized coordinates to solve the problem by making the explicit time dependence of the potential vanish [64].

Finally, we have constrained ourselves by using only the dJS model, because it is the most widely used model for shear banding and because, in our opinion, it is one of the simplest tensorial models able to capture shear banding. But the reader should not be constrained by

our conservatism. Much more can be done around the dJS model, or around another different basis. For instance, the VCM model is a promising new approach [73].

## Acknowledgments

The authors thanks M. Argentina, S. Asnacios, J.F. Berret, N. Biais, O. Cardoso, A. Colin, S. Fielding, P. Lettinga, S. Manneville, A.N. Morozov, J. Ortin and C. Wagner for fruitful discussions, and the ANR JCJC-0020 for financial support. M.A.F. thanks the Fulbright Commission for their support. T.J.O. acknowledges the NSF Graduate Research Fellowship for funding.

- 
- [1] R.G. Larson, *The Structure and Rheology of Complex Fluids*, Oxford University Press (1999)
- [2] P. Tapadia and S. Q. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 016001 (2006).
- [3] T. Divoux, D. Tamarit, C. Barentin and S. Manneville, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 208301 (2010).
- [4] S. Manneville *et al.*, *Phys. Rev. E* **75**, 061502 (2007).
- [5] J. Sprakel *et al.*, *Soft Matter* **4**, 1696 (2008).
- [6] P. Coussot *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 218301 (2002).
- [7] L. Bécu *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 138302 (2006).
- [8] W. Losert *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1428 (2000).
- [9] C. Gilbreth *et al.*, *Phys. Rev. E* **74**, 051406 (2006).
- [10] P.D. Olmsted, *Rheol. Acta* **47**, 283-300 (2008).
- [11] J. Hunter and M. Slemrod, *Phys. Fluids*, **26**, 2345 (1983).
- [12] T.C.B. McLeish and R.C. Ball, *J. Poly. Sci., B, Polym. Phys.* **24**, 1735 (1986).
- [13] This was discussed at large by Adams and Olmsted in a recent paper followed by a discussion with Wang. J.M. Adams and P.D. Olmsted, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 067801 (2009); S.Q. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 219801 (2009); and J.M. Adams and P.D. Olmsted, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 219802 (2009).
- [14] J.F. Berret, Rheology of wormlike micelles : Equilibrium properties and shear-banding transition, Molecular gels, Elsevier (2005).
- [15] M.E. Cates and S.M. Fielding, *Advances in Physics* **55**, 799-879 (2006).
- [16] S. Lerouge and J.F. Berret, Shear-Induced Transitions and Instabilities in Surfactant Wormlike Micelles, *Adv. Polym. Sci.*, Springer Berlin/Heidelberg (2009).
- [17] H. Rehage and H. Hoffmann, *Molecular Physics* **74**, 933-973 (1991).
- [18] For instance, see discussion on shear-banding in simple yield stress fluids in T. Divoux, C. Barentin and S. Manneville, *Soft Matter*, **7**, 8409-8418 (2011).
- [19] P. Coussot and G. Ovarlez, *Eur. Phys. J. E* **33**, 183-188 (2010).
- [20] L. Bocquet, A. Colin and A. Ajdari, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 036001 (2009).
- [21] S.M. Fielding, *Soft Matter* **2**, 1262-1279 (2007).
- [22] R.B. Bird, R.C. Armstrong and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids: Volume 1*, John Wiley & Sons, Inc. (1987).
- [23] R.G. Larson, *Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions*, Butterworths Series in Chemical Engineering (1988).
- [24] O. Radulescu and P.D. Olmsted, *Rheol. Acta* **38**, 606-613 (1999).
- [25] C-Y.D. Lu, P.D. Olmsted and R.C. Ball, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 642-645 (2000).
- [26] O. Radulescu and P.D. Olmsted, *JNNFM* **91**, 141-162 (2000).
- [27] O. Radulescu *et al*, *Europhys. Lett.* **62**, 230-236 (2003).
- [28] S.M. Fielding, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 134501 (2005).
- [29] S.M. Fielding, *Phys. Rev. E* **76**, 016311 (2007).
- [30] S. M. Fielding, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 198303 (2010).
- [31] For instance, watch the interview with R. Feynman, chapter "Ways of thinking" from the BBC TV series 'Fun to Imagine' (1983).
- [32] J.F. Berret, D.C. Roux and G. Porte, *J Phys II (France)* **4**, 1261-1279 (1994).
- [33] V. Schmitt, C.M. Marques and F. Lequeux, *Phys Rev E* **52**, 4009-4015 (1995).
- [34] G. Porte, J.F. Berret and J.L. Harden, *Journal de Phys. II* **7** 459-472 (1997).
- [35] S.M. Fielding and P.D. Olmsted, *Eur. Phys. J. E* **11**, 65-83 (2003).
- [36] K. Sato, X.F. Yuan and T. Kawakatsu, *Eur. Phys. J. E* **31**, 135-144 (2010).
- [37] J.K.G. Dhont, *Phys.Rev.E* **60**, 4534-4544 (1999).
- [38] F. Bautista *et al.*, *J. Phys. Chem. B* **106**, 13018-13026 (2002).
- [39] O. Manero *et al.*, *JNNFM* **146**, 22-29 (2007).
- [40] F. Bautista *et al.*, *JNNFM* **144**, 160-169 (2007).
- [41] M.W. Johnson and D.A. Segalman, *JNNFM* **2**, 255-270 (1977).
- [42] Note that in geometries where there exists an inherent inhomogeneity of the stress, this definition will need to be modified to account for the inherent inhomogeneity of the shear rate. This point is connected to the discussion between Adams, Olmsted and Wang [12].
- [43] R.W. Kolkka, D.S. Malkus, M.G. Hansen, G.R. Ierley and R.A. Worthing, *JNNFM* **29**, 303 (1988).
- [44] M. Renardy, W. Hrusa and J. Nohel, *Mathematical Problems in Viscoelasticity*, Longman Sci. & Tech., Essex, England (1987).
- [45] Y. Y. Renardy, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **7**, 463 (1995).
- [46] P. Espanol, X.F. Yuan and R.C. Ball, *JNNFM* **65**, 93-109 (1996).
- [47] Berkeley physics course, Volume 5, Statistical physics, by F. Reif, New York, McGraw-Hill (1965).
- [48] N.A. Spenley, X.F. Yuan and M.E. Cates, *Journal de Phys. II* **6**, 551-571 (1996).
- [49] A.W. El-Kareh and L.G. Leal, *JNNFM* **33**, 257 (1989).
- [50] R.B. Bird, W.E. Stewart and E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena* (Revised Second Edition ed.). John Wiley & Son (2007).
- [51] E. Buckingham, *Phys. Rev.* **4**, 345-376 (1914).
- [52] J.M. Dealy, "Wi and De numbers - Their definition and use.", *Rheol. Bul.* **79**, 2 (2010).
- [53] Y. Pomeau, *Physica D* **32**, 3-11 (1986).
- [54] O. Radulescu, in collaboration with S. Lerouge and M.A.

- Fardin (in preparation).
- [55] W. Hodges, *A Shorter Model Theory*, Cambridge University Press (1997).
- [56] L.F. Rossi, G.H. McKinley and L.P. Cook, *JNNFM* **136**, 79-92 (2006).
- [57] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics (Course of theoretical physics; v. 1)*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 3rd ed. (1976).
- [58] A.M. Sanchez, J.D. Bejarano and D.C. Marzal, *J. Sound and Vibration* **161**, 19-31 (1993).
- [59] This divergence was discussed previously by S.M. Fielding and P.D. Olmsted, *Eur. Phys. J. E* **11**, 65 (2003). Actually, this divergence is removed if the constraint on the average value of the shear rate is correctly incorporated. The consistent inclusion of the constraint is discussed in the next sections. Details on how it modifies the interface width will be given elsewhere.
- [60] C. Masselon, J. B. Salmon and A. Colin, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 038301 (2008).
- [61] C. Masselon, A. Colin and P. Olmsted, *Phys. Rev. E* **81**, 021502 (2010).
- [62] J. Dambrine, "Numerical study of viscoelastic flows in microchannels", CANUM (2008).
- [63] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, New York, 3rd ed. (2002).
- [64] M.A. Fardin *et al.* (in preparation).
- [65] M.P. Lettinga and S. Manneville, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 248302 (2009).
- [66] K.W. Feindel and P.T. Callaghan, *Rheol. Acta* **49**, 1003-1013 (2010).
- [67] J.M. Adams, S.M. Fielding and P.D. Olmsted, *JNNFM* **151**, 101-118 (2008).
- [68] M. Cromer, L.P. Cook and G.H. McKinley, *JNNFM* **166**, 180-193 (2011).
- [69] R. Buscall, *J. Rheol.* **546**, 1177-1183 (2010).
- [70] S.Q. Wang, S. Ravindranath and P. E. Boukany, *Macromolecules* **44**, 183-190 (2011).
- [71] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transition and the Renormalization Group*, UK, Frontiers in physics 85 (1992).
- [72] P.C. Hohenberg and B.I. Halperin, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435-479 (1977).
- [73] P.A. Vasquez, G.H. McKinley and L.P. Cook, *JNNFM* **144**, 122-139 (2007).





---

## Table des figures

---

---

## Table des illustrations

---

I.1. – Coquille de <i>Nautilus macromphalus</i> . . . . .	1
I.2. – D'ARCY WENTWORTH THOMPSON . . . . .	2
I.3. – G. H. LEWES (1817-1878) . . . . .	3
II.1. – Poissons-lune . . . . .	11
II.2. – Bancs de poissons . . . . .	11
II.3. – Vol en V . . . . .	12
II.4. – Vol de pingouins . . . . .	12
II.5. – Travailleurs à bec rouge . . . . .	13
II.6. – Essaim d'abeilles . . . . .	13
II.7. – Papillons monarques . . . . .	13
II.8. – Troupeau de gnous . . . . .	14
II.9. – Allée de von Karman. . . . .	15
II.10. – Keratocytes . . . . .	16
II.11. – Harde d'impalas . . . . .	17
III.1. – Potentiel de Lennard-Jones : illustration du potentiel d'attraction- répulsion . . . . .	26
IV.1. – Modèle de Vicsek. . . . .	27
V.1. – Modèle à temps continu du modèle de Vicsek . . . . .	33

V.2. – Paramètre d'ordre du modèle à temps continu . . . . .	34
V.3. – Bifurcation dans les équations hydrodynamiques actives . . . . .	36
V.4. – Instabilité des solutions des équations hydrodynamiques. . . . .	36
VI.1. – Diagramme des phases issu de l'étude des équations hydrodynamiques. . . . .	40
VI.2. – Navire Thalassa et son sonar multi-faisceau. . . . .	41
VII.1. – Désert marocain de La'ayoune. . . . .	45
VII.2. – Dunes obtenues en aquarium (P. Hersen) . . . . .	46
VII.3. – Comparaison des termes source et puits en fonction de la largeur de la barkhane. . . . .	46
VII.4. – Collision aquatique de deux dunes. . . . .	47
VIII.1. – Variables décrivant la dynamique de deux dunes en interaction éolienne. . . . .	49
VIII.2. – Collision de coalescence . . . . .	50
VIII.3. – Collision d'échange de sable pour des dunes en recouvrement total . . . . .	50
VIII.4. – Collision de fragmentation . . . . .	51
VIII.5. – Collision en recouvrement partiel avec échange de sable . . . . .	51
VIII.6. – Distribution des tailles des dunes dans le régime dilué. . . . .	54
VIII.7. – Aspect des déserts denses . . . . .	54
VIII.8. – Effets de l'interaction éolienne. . . . .	55
VIII.9. – Distance de corrélation . . . . .	55
VIII.10. – Exemple de percolation . . . . .	56
VIII.11. – Probabilité de percolation en fonction de la densité initiale . . . . .	56
VIII.12. – Effets de taille sur la percolation des dunes . . . . .	56
VIII.13. – Percolation en fonction de la largeur à densité fixée . . . . .	58
VIII.14. – Effets de taille sur la percolation du modèle probabiliste . . . . .	58
VIII.15. – Percolation d'un système avec échange éolien . . . . .	59
VIII.16. – Percolation d'un système avec échange éolien . . . . .	60
VIII.17. – Instabilité de condensation . . . . .	60
VIII.18. – Coexistence de phase et instabilité de condensation . . . . .	61
VIII.19. – Diagramme des phases complet. . . . .	62
IX.1. – Percolation dirigée de probabilité $p$ . . . . .	65
IX.2. – Modèle de Manna discret et conservatif . . . . .	71
IX.3. – Modèle ZRP . . . . .	75
IX.4. – Champ de dunes dans la phase percolée dense. . . . .	77
IX.5. – Champ moyen du modèle de réaction-diffusion . . . . .	79
IX.6. – Champ moyen du modèle de réaction-diffusion . . . . .	79
X.1. – Vue d'artiste d'une micelle géante [226]. . . . .	85
X.2. – Bande de cisaillement . . . . .	86
X.3. – Instabilités des bandes de cisaillement . . . . .	87
X.4. – Schéma présentant les paramètres des simulations MPCD. . . . .	88
X.5. – Fluide MPCD : histogramme des vitesses. . . . .	89
X.6. – Fluide MPCD : test thermodynamique . . . . .	89

---

X.7. – Thermalisation de simulations MPCD . . . . .	89
-----------------------------------------------------	----



---

## Liste des tableaux

---

IV.1. – Tableau récapitulatif des exposants mesurés en supposant que le modèle de Vicsek suit une transition continue. . . . .	29
VIII.1. – Paramètres du modèle. . . . .	52



---

# Bibliographie

---

- [1] Ester AÑÓN, Xavier SERRA-PICAMAL, Pascal HERSEN, N. GAULTHIER, M. SHEETZ, Xavier TREPAT et Benoît LADOUX : Cell crawling mediates collective cell migration to close undamaged epithelial gaps. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 109(27):10891, juillet 2012.
- [2] John ALCOCK : *Animal behaviour : an evolutionary approach*. Sinauer, Sunderland, Massachussets, 1975.
- [3] M. ALDANA, V. DOSSETTI, C. HUEPE, V. M. KENKRE et H. LARRALDE : Phase transitions in systems of self-propelled agents and related network models. *Physical Review Letters*, 98:095702, mars 2007.
- [4] Bruno ANDREOTTI, Philippe CLAUDIN et Stéphane DOUADY : Selection of dune shapes and velocities part 1 : Dynamics of sand, wind and barchans. *European Physical Journal B*, 28(3):321, août 2002.
- [5] Ichiro AOKI : A simulation study on the schooling mechanism in fish. *Bulletin of Japanese Society of Scientific Fisheries*, 48(8):1081, 1982.
- [6] ARISTOTE : *Métaphysique*. GF Flammarion, 335-323 avant J.-C. traduction de Mare-Paule Duminil et Annick Jaulin.
- [7] William Rosse ASHBY : Principles of the self-organizing dynamic system. *Journal of General Psychology*, 37:125–128, 1947.
- [8] Alessandro ATTANASI, Andrea CAVAGNA, Lorenzo DEL CASTELLO, Irena GIARDINA, Stefania MELILLO, Leonardo PARISI, Oliver POHL, Bruno ROSSARO, Bruno ROSSARO, Edward SHEN, Edmondo SILVESTRI et Massimiliano VIALE : Finite-size scaling as a way to probe near-criticality in natural swarms. *Physical Review Letters*, 113(23):238102, décembre 2014.
- [9] Bjørn Erik AXELSEN, Tycho ANKER-NILSSEN, Petter FOSSUM, Cecillie KVAMME et Leif MØTTESTAD : Pretty patterns but a simple strategy : predator-prey interactions between juvenile herring and atlantic puffins observed with multibeam sonar. *Canadian Journal of Zoology*, 79:1586, 2001.

- [10] Gabriel BAGLIETTO et Ezequiel V. ALBANO : Finite-size scaling analysis and dynamic study of the critical behavior of a model for the collective displacement of self-driven individuals. *Physical Review E*, 78:021125, août 2008.
- [11] Gabriel BAGLIETTO et Ezequiel V. ALBANO : Nature of the order-disorder transition in the vicsek model for the collective motion of self-propelled particles. *Physical Review E*, 80:050103, novembre 2009.
- [12] R. A. BAGNOLD : *The physics of blown sand and desert dunes*. Chapman and Hall, London, 1941.
- [13] Iztok Lebar BAJEC et Frank H. HEPPNER : Organized flight in birds. *Animal Behaviour*, 78:777, août 2009.
- [14] Per BAK et Kim SNEPPEN : Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. *Physical Review Letters*, 71:4083, décembre 1993.
- [15] Per BAK, Chao TANG et Kurt WIESENFELD : Self-organized criticality : An explanation of the  $1/f$  noise. *Physical Review Letters*, 59:381–384, juillet 1987.
- [16] Don R. BAKER, Gerald PAUL, Sameet SREENIVASAN et H. Eugene STANLEY : Continuum percolation threshold for interpenetrating squares and cubes. *Physical Review E*, 66:046136, octobre 2002.
- [17] Michele BALLERINI, Nicola CABIBBO, Raphael CANDELIER, Andrea CAVAGNA, Evaristo CISBANI, Irene GIARDINA, Vivien LECOMTE, Alberto ORLANDI, Gioro PARISI, Andrea PROCACCINI, Massimiliano VIALE et Vladimir ZDRAVKOVIC : Interaction ruling animal collective behavior depends on topological rather than metric distance : Evidence from a field study. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 105(4):1232, janvier 2008.
- [18] Michele BALLERINI, Nicola CABIBBO, Raphael CANDELIER, Andrea CAVAGNA, Evaristo CISBANI, Irene GIARDINA, Alberto ORLANDI, Giorgio PARISI, Andrea PROCACCINI, Massimiliano VIALE et Vladimir ZDRAVKOVIC : Empirical investigation of starling flocks : a benchmark study in collective animal behaviour. *Animal Behaviour*, 76(1):201, juillet 2008.
- [19] Jérémie BARRAL, Kai DIERKES, Benjamin LINDNER, Frank JÜLICHER et Pascal MARTIN : Coupling a sensory hair-cell bundle to cyber clones enhances nonlinear amplification. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 107(18):8079, 2010.
- [20] Mahashweta BASU, Urna BASU, Sourish BONDYOPADHYAY, P. K. MOHANTY et Haye HINRICHSEN : Fixed-energy sandpiles belong generically to directed percolation. *Physical Review Letters*, 109:015702, juillet 2012.
- [21] Urna BASU et P. K. MOHANTY : Self-organised criticality in stochastic sandpiles : Connection to directed percolation. *Europhysics Letters*, 108(6):60002, 2014.



- [22] Ch. BECCO, Nicolas VANDEWALLE, Johann DELCOURT et P. PONCIN : Experimental evidences of a structural and dynamical transition in fish school. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, 367:487, 2006.
- [23] E. BEN-JACOB, I. COHEN et H. LEVINE : Cooperative self-organization in microorganisms. *Advances in Physics*, 49:395, 2000.
- [24] Henri BÉNARD : Tourbillons cellulaires. *Annales de Chimie*, 7(XXIII):62–144, 1901.
- [25] H. C. BERG : *Random walk in biology*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1983.
- [26] Jean-François BERRET : *Molecular gels : Materials with Self-Assembled Fibrillar Networks*, chapitre Rheology of wormlike micelles : equilibrium properties and shear-banding transition, page 667. Springer, 2006.
- [27] Jean-François BERRET, Didier ROUX et Grégoire PORTE : Isotropic-to-nematic transition in wormlike micelles under shear. *Journal de Physique II*, 4(8):1261–1279, 1994.
- [28] Jean-François BERRET et Y. SERERO : Evidence of shear-induced fluid fracture in telechelic polymer networks. *Physical Review Letters*, 87(4): 048303, juillet 2001.
- [29] Éric BERTIN, Aparna BASKARAN, Hugues CHATÉ et M. Cristina MARCHETTI : Comparison between smoluchowski and boltzmann approaches for self-propelled rods. *Physical Review E*, 92(4):042141, octobre 2015.
- [30] Éric BERTIN, Hugues CHATÉ, Francesco GINELLI, Guillaume GRÉGOIRE, Sébastien LÉONARD et Anton PESHKOV : Comment on ihle, "towards a quantitative kinetic theory of polar active matter". *European Physical Journal - Special Topics*, 223(7):1419, juin 2014.
- [31] Éric BERTIN, Michel DROZ et Guillaume GRÉGOIRE : Boltzmann and hydrodynamic description for self-propelled particles. *Physical Review E*, 74:022101, 2006.
- [32] Éric BERTIN, Michel DROZ et Guillaume GRÉGOIRE : Hydrodynamic equations for self-propelled particles : microscopic derivation and stability analysis. *Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*, 42(44), novembre 2009.
- [33] William A. BEYER, Peter H. SELLERS et Michael S. WATERMAN : Stanislaw M. Ulam's contributions to theoretical biology. *Letters in Mathematical Physics*, 10:231–242, 1985.
- [34] K. BINDER : Monte carlo investigations of phase transitions and critical phenomena. In Cyril DOMB et M S GREEN, éditeurs : *Phase transitions and critical phenomena*. Academic Press, 1976.
- [35] Bjoern BIRNIR : An ode model of the motion of pelagic fish. *Journal of Statistical Physics*, 128:535, juillet 2007.

- [36] D. L. BLAIR, T. NEICU et A. KUDROLI : Vortices in vibrated granular rods. *Physical Review E*, 67:031303, mars 2003.
- [37] Stefen BOHN, Stéphane DOUADY et Yves COUDER : Four sided domains in hierarchical space dividing patterns. *Physical Review Letters*, 94(5): 054503, février 2005.
- [38] Éric BONABEAU et Guy THÉRAULAZ : Auto-organisation et comportements collectifs : la modélisation des sociétés d'insectes. In Guy THÉRAULAZ et François SPITZ, éditeurs : *Auto-organisation et comportement*. Hermès, Paris, 1997.
- [39] Eric BONABEAU, Guy THÉRAULAZ, Vincent FOURCASSIÉ et Jean-Louis DENEUBOURG : Phase-ordering kinetics of cemetery organization in ants. *Physical Review E*, 57(4):4568–4571, avril 1998.
- [40] Juan A. BONACHELA, Hugues CHATÉ, Ivan DORNIC et Miguel A. MUÑOZ : Absorbing states and elastic interfaces in random media : Two equivalent descriptions of self-organized criticality. *Physical Review Letters*, 98:155702, avril 2007.
- [41] Juan A. BONACHELA et Miguel A. MUÑOZ : Confirming and extending the hypothesis of universality in sandpiles. *Physical Review E*, 78:041102, octobre 2008.
- [42] Juan A. BONACHELA, José J. RAMASCO, Hugues CHATÉ, Ivan DORNIC et Miguel A. MUÑOZ : Sticky grains do not change the universality class of isotropic sandpiles. *Physical Review E*, 74:050102, novembre 2006.
- [43] J. T. BONNER : The migration stage of *Dictyostelium* : Behavior without muscles or nerves. *FEMS Microbiology Lett.*, 120:1, 1994.
- [44] J. T. BONNER, L. SEGEL et E. C. COX : Oxygen and differentiation in *Dictyostelium discoideum*. *J. Biosci.*, 23:177, 1998.
- [45] C. BORGS et R. KOTECKÝ : A rigorous theory of finite size scaling at first-order transitions. *Journal of Statistical Physics*, 61:79, 1990.
- [46] Yves BOULIGAND : Niveaux d'organisation et morphogénèse : le point de vue de d'Arcy Thompson. In P. BOURGINE et A. LESNE, éditeurs : *Morphogénèse : l'origine des formes*, pages 264–287. Belin, Paris, échelles édition, 2006.
- [47] Jr. BREDER, C. M. : Equations descriptive of fish schools and other animal aggregations. *Ecology*, 35(3):361, juillet 1954.
- [48] Antoine BRICARD, Jean-Baptiste CAUSSIN, Nicolas DESREUMAUX, Olivier DAUCHOT et Denis BARTOLO : Emergence of macroscopic directed motion in population of motile colloids. *Nature*, 503:95, 2013.
- [49] Simon R. BROADBENT : In discussion of symposium on monte carlo methods. *Journal of the royal statistical society*, 1954.
- [50] Simon R. BROADBENT et John M. HAMMERSLEY : Percolation processes i. crystals and mazes. In *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 53, page 629, 1957.

- [51] Richard C. BROWER, Miguel A. FURMAN et Moshe MOSHE : Critical exponents for the reggeon quantum spin model. *Physics Letters B*, 76(2): 213, 1978.
- [52] Rolf BRUENIG : Sardine run. film, 2002. RB Filmproduction.
- [53] J. BUHL, D.J.T. SUMPTER, I. D. COUZIN, J. HALE, E. DESPLAND, E. MILLER et S.J. SIMPSON : From disorder to order in marching locusts. *Science*, 312:1402, 2006.
- [54] Harmen J. BUSSEMAKER, Andreas DEUTSCH et Edith GEIGANT : Mean-field analysis of a dynamical phase transition in a cellular automaton model for collective motion. *Physical Review Letters*, 78(26):5018–5021, juin 1997.
- [55] Daniel S. CALOVI, Ugo LOPEZ, Sandrine NGO, Clément SIRE, Hugues CHATÉ et Guy THÉRAULAZ : Swarming, schooling, milling : phase diagram of a data-driven fish school model. *New Journal of Physics*, 16(1):015026, 2014.
- [56] Eric CARLEN, Maria C. CARVALHO, Pierre DEGOND et Bernt WENNBORG : A boltzmann model for rod alignment and schooling fish. *Nonlinearity*, 28(6):1783, mai 2015.
- [57] M. E. CATES et S. M. FIELDING : Rheology of giant micelles. *Advances in Physics*, 55(7-8):799–879, 2006. Cates, M. E. Fielding, S. M.
- [58] M.E. CATES : Nonlinear viscoelasticity of wormlike micelles (and other reversibly breakable polymers). *Journal of Physical Chemistry*, 94:371–375, 1990.
- [59] Mike E. CATES et Julien TAILLEUR : Motility-induced phase separation. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 6(1), avril 2015.
- [60] Jean-Baptiste CAUSSIN, Alexandre SOLON, Anton PESHKOV, Hugues CHATÉ, Thierry DAUXOIS, Julien TAILLEUR, Vincenzo VITELLI et Denis BARTOLO : Emergent spatial structures in flocking models : A dynamical system insight. *Physical Review Letters*, 112:148102, avril 2014.
- [61] Andrea CAVAGNA : réseau européen starflag. communication privée, 2005.
- [62] Andrea CAVAGNA, Alessio CIMARELLI, Irene GIARDINA, Alberto ORLANDI, Giorgio PARISI, Andrea PROCACCINI, Raffaele SANTAGATI et Fabio STEFANINI : New statistical tools for analyzing the structure of animal groups. *Mathematical Biosciences*, 214:32, 2008.
- [63] Andrea CAVAGNA, Irene GIARDINA, Thomas S. GRIGERA, Asja JELIC, Dov LEVINE, Sriram RAMASWAMY et Massimiliano VIALE : Silent flocks : Constraints on signal propagation across biological groups. *PRL*, 114: 218101, mai 2015.
- [64] B. CHAKRABARTI, M. DAS, C. DASGUPTA, S. RAMASWAMY et A. K. SOOD : Spatiotemporal rheochaos in nematic hydrodynamics. *Physical Review Letters*, 92(5), 2004.

- [65] Subrahmanyan CHANDRASEKHAR : *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, New York, 1981.
- [66] Benjamin CHARNAY, Erika BARTH, Scot RAFKIN, Clement NARTEAU, Sebastien LEBONNOIS, Sebastien RODRIGUEZ, Sylvain Courrech du PONT et Antoine LUCAS : Methane storms as a driver of titan's dune orientation. *Nature Geoscience*, 8:362, avril 2015.
- [67] Hugues CHATÉ, Francesco GINELLI et Grégoire G. : Comment on "phase transitions in systems of self-propelled agents and related network models". *Physical Review Letters*, 99:229601, novembre 2007.
- [68] Hugues CHATÉ, Francesco GINELLI, Guillaume GRÉGOIRE et Franck RAYNAUD : Collective motion of self-propelled particles interacting without cohesion. *Physical Review E*, 77(4):046113, avril 2008.
- [69] Hugues CHATÉ, Francesco GINELLI, Guillaume GRÉGOIRE et Franck RAYNAUD : Modeling collective motion : variations on the vicsek model. *European Physical Journal B*, 64:451, 2008.
- [70] C. CHAUBAL, A. SRINIVASAN, Ö EGECIOGLU et L. G. LEAL : Smoothed particle hydrodynamics techniques for the solution of kinetic theory problems. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 70(1-2):125, mai 1997.
- [71] Leiming CHEN, John TONER et Chiu Fan LEE : Critical phenomenon of the order-disorder transition in incompressible active fluids. *New Journal of Physics*, 17(4):042002, avril 2015.
- [72] Alessandro CHessa, H. Eugene STANLEY, Alessandro VESPIGNANI et Stefano ZAPPERI : Universality in sandpiles. *Physical Review E*, 59:R12, janvier 1999.
- [73] Denis CHEYSSOUS : Co<sub>2</sub> mon amour. émission de France-Inter, mai 2014.
- [74] Kim CHRISTENSEN, Nicholas R. MOLONEY, Ole PETERS et Gunnar PRUESSNER : Avalanche behavior in an absorbing state oslo model. *Physical Review E*, 70:067101, décembre 2004.
- [75] Peter CLIFFORD et Aidan SUDBURY : A model for spatial conflict. *Biometrika*, 60(3):581, 1973.
- [76] Bertrand COLLIGNON, Axel SÉGURET et José HALLOY : A stochastic vision-based model inspired by zebrafish collective behaviour in heterogeneous environments. *Royal Society Open Science*, 3(1):150473, janvier 2016.
- [77] R. CORTEZ, L. FAUCI, N. COWEN et R. DILLON : Simulation of swimming organisms : coupling internal mechanics with external fluid dynamics. *Computing en Science and Engineering*, 6(3):38, mai 2004.
- [78] Yves COUDER, Ludovic PAUCHARD, Catherine ALLAIN, Mokhtar ADDA-BEDIA et Stéphane DOUADY : The leaf venation as formed in a tensorial field. *European Physical Journal B*, 28:135–138, 2002.

- [79] Sylvain Courrech du PONT : Dune morphodynamics. *Comptes-Rendus Physique*, 16(1):118, janvier 2015.
- [80] I. D. COUZIN : Collective memory and spatial sorting in animal groups. *Journal of Theoretical Biology*, 218:1, 2002.
- [81] I. D. COUZIN, J. KRAUSE, N.R. FRANKS et S.A. LEVIN : Effective leadership and decision making in animal groups on the move. *Nature*, 433:513, 2005.
- [82] Michael CROMER, L. Pamela COOK et Gareth H. MCKINLEY : Interfacial instability of pressure-driven channel flow for a two-species model of entangled wormlike micellar solutions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 566(11):566, juin 2011.
- [83] Z. CSAHÒK et A. CZIRÒK : Hydrodynamics of bacterial motion. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, 243:304, 2002.
- [84] Zoltán CSAHÓK et Tamás VICSEK : Lattice-gas model for collective biological motion. *Physical Review E*, 52(5):5297–5303, novembre 1995.
- [85] Pierre CURIE : Propriétés magnétiques des corps à diverses températures. *Journal de Physique*, IV:197–212, 263–272, mai 1895.
- [86] András CZIRÓK, Albert-László BARABÁSI et Tamás VICSEK : Collective motion of self-propelled particles : Kinetic phase transition in one dimension. *Physical Review Letters*, 82(1):209–212, janvier 1999.
- [87] András CZIRÓK, H. Eugene STANLEY et Tamás VICSEK : Spontaneously ordered motion of self-propelled particles. *Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*, 30:1375, 1997.
- [88] András CZIRÓK, Mária VICSEK et Tamás VICSEK : Collective motion of organisms in three dimensions. *Physica A*, 264:299, 1999.
- [89] András CZIRÓK et Tamás VICSEK : Collective behavior of interacting self-propelled particles. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, 281(1-4):17, juin 2000.
- [90] Mario DE MENECH : Comment on “universality in sandpiles”. *Physical Review E*, 70:028101, août 2004.
- [91] Mario DE MENECH et Attilio L. STELLA : From waves to avalanches : two different mechanisms of sandpile dynamics. *Physical Review E*, 62:R4528, octobre 2000.
- [92] J. P. DECRUPPE, R. CRESSELY, R. MAKHLOUFI et E. CAPPELAERE : Flow birefringence experiments showing a shear-banding structure in a ctab solution. *Colloid and Polymer Science*, 273(4):346–351, 1995.
- [93] Pierre DEGOND et Sebastien MOTSCH : Macroscopic limit of self-driven particles with orientation interaction. *Comptes-rendus Mathématiques*, 345(10):555–560, novembre 2007.
- [94] Pierre DEGOND et Sebastien MOTSCH : Large scale dynamics of the persistent turning walker model of fish behavior. *Journal of Statistical Physics*, 131(6):989–1021, juin 2008.

- [95] Johann DELCOURT et Pascal PONCIN : Shoals and schools : back to the heuristic definitions and quantitative references. *Reviews in Fish Biology and Fisheries*, 22(3):595, septembre 2012.
- [96] René DESCARTES : *le discours de la méthode*. Gallimard, Paris, tel édition, 2009. première édition en 1637 à Leyden.
- [97] Julien DESEIGNE, Olivier DAUCHOT et Hugues CHATÉ : Collective motion of vibrated polar disks. *Physical Review Letters*, 105:098001, août 2010.
- [98] Deepak DHAR et Ramakrishna RAMASWAMY : Exactly solved model of self-organized critical phenomena. *Physical Review Letters*, 63:1659, octobre 1989.
- [99] Ronald DICKMAN, Mikko ALAVA, Miguel A. MUÑOZ, Jarkko PELTOLA, Alessandro VESPIGNANI et Stefano ZAPPERI : Critical behavior of a one-dimensional fixed-energy stochastic sandpile. *Physical Review E*, 64:056104, octobre 2001.
- [100] Ronald DICKMAN et S. D. da CUNHA : Particle-density fluctuations and universality in the conserved stochastic sandpile. *Physical Review E*, 92:020104, août 2015.
- [101] Ronald DICKMAN, Wilson R. M. RABÊLO et Géza ÓDOR : Pair contact process with a particle source. *Physical Review E*, 65:016118, décembre 2001.
- [102] Serina DINIEGA, Karl GLASNER et Shane BYRNE : Long-time evolution of models of aeolian sand dune fields : Influence of dune formation and collision. *Geomorphology*, 121:55–68, février 2010.
- [103] Thibaut DIVOUX, Marc A. FARDIN, Sébastien MANNEVILLE et Sandra LEROUGE : Shear banding of complex fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 48(1):81, juillet 2016.
- [104] Andrew P. DOBSON, Markus BORNER, Anthony R. E. SINCLAIR, Peter J. HUDSON, T. Michael ANDERSON, Gerald BIGURUBE, Tim B. B. DAVENPORT, James DEUTSCH, Sarah M. DURANT, Richard D. ESTES, Anna B. ESTES, John FRYXELL, Charles FOLEY, Michelle E. GADD, Dan HAYDON, Ricardo HOLDO, Robert D. HOLT, Katherine HOMEWOOD, J. Grant C. HOPCRAFT, Ray HILBORN, George L. K. JAMBIYA, M. Karen LAURENSEN, Lota MELAMARI, Alais Ole MORINDAT, Joseph O. OGUTU, George SCHALLER et Eric WOLANSKI : Road will ruin serengeti. *Nature*, 467(7313):272, septembre 2010.
- [105] M. DOI et S. F. EDWARDS : *The theory of polymer dynamics*. Oxford press, New-York, 1986.
- [106] Eytan DOMANY et Wolfgang KINZEL : Equivalence of cellular automata to ising models and directed percolation. *Physical Review Letters*, 53:311, juillet 1984.
- [107] Cyril DOMB et D. L. HUNTER : On the critical behaviour of ferromagnets. *Proceedings of the Physical Society*, 86(5):1147, novembre 1965.

- [108] Ivan DORNIC, Hugues CHATÉ et Miguel A. MUÑOZ : Effective langevin equations for the pair contact process with diffusion. arXiv :cond-mat/0505171 [cond-mat.stat-mech], mai 2005.
- [109] Ivan DORNIC, Hugues CHATÉ et Miguel A. MUÑOZ : Integration of langevin equations with multiplicative noise and the viability of field theories for absorbing phase transitions. *Physical Review Letters*, 94:100601, mars 2005.
- [110] M. R. D'ORSOGNA, Y. L. CHUANG, A. L. BERTOZZI et L. S. CHAYES : Self-propelled particles with soft-core interactions : Patterns, stability, and collapse. *Phys. Rev. Lett.*, 96(10):104302, mars 2006.
- [111] B. DROSSEL et F. SCHWABL : Self-organized critical forest-fire model. *Physical Review Letters*, 69:1629, septembre 1992.
- [112] J.-L. DROUET et B. MOULIA : Spatial re-orientation of maize leaves affected by initial plant orientation and density. *Agricultural and Forest Meteorology*, 88:85, 1997.
- [113] Orencio DURÁN, Veit SCHWÄMMLE, Pedro G. LIND et Hans J. HERRMAN : The dune size distribution and scaling relations of barchan dune fields. *Granular Matter*, 11(1):7–11, janvier 2009.
- [114] Orencio DURÁN, Veit SCHWÄMMLE, Pedro G. LIND et Hans J. HERRMAN : Size distribution and structure of barchan dune fields. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 18(4):455–467, 2011.
- [115] Louise DYSON, Christian A. YATES, Jerome BUHL et Alan J. MCKANE : Onset of collective motion in locusts is captured by a minimal model. *Physical Review E*, 92:052708, novembre 2015.
- [116] Hicham ELBELRHITI, Philippe CLAUDIN et Bruno ANDREOTTI : Field evidence for surface-wave-induced instability of sand dunes. *Nature*, 437:720, sep 2005.
- [117] Hisham ELBELRHITI, Bruno ANDREOTTI et Philippe CLAUDIN : Barchan dune corridors : Field characterization and investigation of control parameter. *Journal of Geophysical Research*, 113(F02S15), 2008.
- [118] John T. Jr EMLEN : Flocking behavior in birds. *The Auk*, 69(2):160, avril 1952.
- [119] John W. ESSAM et Michael E. FISHER : Padé approximant studies of lattice gas and ising ferromagnet below critical point. *Journal of Chemical Physics*, 38:802, 1963.
- [120] Martin R. EVANS : Phase transitions in one-dimensional nonequilibrium systems. *Brazilian Journal of Physics*, 30(1):42, mars 2000.
- [121] Martin R. EVANS et T. HANNEY : Nonequilibrium statistical mechanics of the zero-range process and related models. *Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*, 38(19):R195, avril 2005.

- [122] Martin R. EVANS, Satya N. MAJUMDAR et R. K. P. ZIA : Factorized steady states in mass transport models. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 37(25):L275, juin 2004.
- [123] Martin R. EVANS, Satya N. MAJUMDAR et R. K. P. ZIA : Factorised steady states in mass transport models on a arbitrary graph. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 39(18):4859, 2006.
- [124] Martin R. EVANS et B. WACLAW : Condensation in stochastic mass transport models : beyond the zero-range process. *Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*, 47(9):095001, février 2014.
- [125] M.-A. FARDIN, D. LOPEZ, J. CROSO, G. GRÉGOIRE, O. CARDOSO, G. H. MCKINLEY et S. LEROUGE : Elastic turbulence in shear banding wormlike micelles. *Physical Review Letters*, 104(17):178303, avril 2010.
- [126] M.-A. FARDIN, T. J. OBER, C GAY, G. GRÉGOIRE, G. H. MCKINLEY et S. LEROUGE : Potential "ways of thinking" about the shear-banding phenomenon. *Soft Matter*, 8(4):910, 2012.
- [127] Marc-Antoine FARDIN, Benoit LASNE, Olivier CARDOSO, Guillaume GRÉGOIRE, Médéric ARGENTINA, J. P. DECRUPPE et Sandra LEROUGE : Taylor-like vortices in shear-banding flow of giant micelles. *Phys. Rev. Lett.*, 103(2):028302, juillet 2009.
- [128] Richard FEYNMAN : *The character of physical law*. The 1964 Messenger Lectures. MIT Press, 1967.
- [129] S. M. FIELDING et P. D. OLMSTED : Flow phase diagrams for concentration-coupled shear banding. *European Physical Journal E*, 11(1):65–83, 2003.
- [130] S. M. FIELDING et P. D. OLMSTED : Nonlinear dynamics of an interface between shear bands. *Phys. Rev. Lett.*, 96(10):104502, mars 2006.
- [131] Suzanne M. FIELDING : Vorticity structuring and velocity rolls triggered by gradient shear bands. *Physical Review E*, 76(1):016311, juillet 2007.
- [132] Ilya R. FISCHHOFF, Siva R. SUNDARESAN, Justine CORDINGLEY, Heather M. LARKIN, Marie-Jeanne SELLIER et Daniel I. RUBENSTEIN : Social relationships and reproductive state influence leadership roles in movements of plains zebra, *Equus burchellii*. *Animal Behaviour*, 73(5):825, 2007.
- [133] G. FLIERL, D. GRÜNBAUM, S. LEVIN et D. OLSON : From individuals to aggregations : The interplay behavior and physics. *Journal of Theoretical Biology*, 196:397, 1999.
- [134] P. John FLORY : Molecular size distribution in three-dimensional gelation i-iii. *Journal of the American Chemical Society*, 63:3083, 1941.
- [135] P. FRÉON, F. GERLOTTO et M. SORIA : Variability of *Harengula spp.* school reactions to boats or predators in shallow water. *ICES Mar. Sci. Symp.*, 196:30, 1993.



- [136] Martin GARDNER : Mathematical games — the fantastic combinations of John Conway's new solitaire game *life*. *Scientific American*, 223:120–123, 1970.
- [137] Jacques GAUTRAIS, Francesco GINELLI, Richard FOURNIER, Stéphane BLANCO, Marc SORIA, Hugues CHATÉ et Guy THÉRAULAZ : Deciphering interactions in moving animal groups. *PLoS Computational biology*, 8(9):e1002678, septembre 2012.
- [138] Jacques GAUTRAIS, Christian JOST, Marc SORIA, Alexandre CAMPO, Sébastien MOTSCH, Richard FOURNIER, Stéphane BLANCO et Guy THÉRAULAZ : Analysing fish movement as a persistent turning walker. *Journal of Mathematical Biology*, 58(3):429, mars 2009.
- [139] Mathieu GÉNOIS : *Modèle de champ de barkhanes : étude des dynamiques d'un système non conservatif*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, 2013.
- [140] Mathieu GÉNOIS, Sylvain COURRECH, Pascal HERSEN et Guillaume GRÉGOIRE : An agent-based model of dune interactions produces the emergence of patterns in deserts. *Geophysical Research Letters*, 40:3909, 2013.
- [141] Mathieu GÉNOIS, Pascal HERSEN, Sylvain Courrech du PONT et Guillaume GRÉGOIRE : Spatial structuring and size selection as collective behaviours in an agent-based model for barchan fields. *European Physical Journal B*, 86:447, novembre 2013.
- [142] Jean-François GÉRARD : émergences collectives chez les ongulés sauvages. In Guy THÉRAULAZ et François SPITZ, éditeurs : *Auto-organisation et comportement*. Hermès, Paris, 1997.
- [143] Francesco GINELLI et Hugues CHATÉ : Relevance of metric-free interactions in flocking phenomena. *Physical Review Letters*, 105:168103, octobre 2010.
- [144] R. A. GINGOLD et J. J. MONAGHAN : Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 46(3):429, juin 1982.
- [145] Alexander GLÜCK, Helmuth HÜFFEL et Saša Ilijić : Canonical active brownian motion. *Physical Review E*, 79:021120, février 2009.
- [146] Alexander GLÜCK, Helmuth HÜFFEL et Saša Ilijić : Swarms with canonical active brownian motion. *Physical Review E*, 83:051105, mai 2011.
- [147] J. D. GODDARD : Material instability in complex fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35:113–133, 2003.
- [148] B. GOENCI, Máté NAGY et Tamás VICSEK : Phase transition in the scalar noise model of collective motion in three dimensions. *European Physical Journal - Special Topics*, 157:53–59, avril 2008.

- [149] Gerhard GOMPPER, Thomas IHLE, Daniel M. KROLL et Roland G. WINKLER : Multi-particle collision dynamics : A particle-based mesoscale simulation approach to the hydrodynamics of complex fluids. In Christian HOLM et Kurt KREMER, éditeurs : *Advanced Computer Simulation Approaches for Soft Matter Sciences III*, volume 221 de *Advances in Polymer Science*, page 1. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [150] Peter GRASSBERGER : On phase transitions in Schlögl's second model. *Zeitschrift für Physik - Condensed Matter*, 47:365, 1982.
- [151] Peter GRASSBERGER et K. SUNDERMEYER : Reggeon field theory and markov processes. *Physics Letters B*, 77:220, 1978. a lire.
- [152] F. GRECO et R. C. BALL : Shear-band formation in a non-newtonian fluid model with a constitutive instability. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 69(2-3):195–206, 1997.
- [153] Damien GREDAT, Hugues CHATÉ, Bertrand DELAMOTTE et Ivan DORNIC : Finite-scale singularity in the renormalization group flow of a reaction-diffusion system. *Physical Review E*, 89:010102, janvier 2014.
- [154] Guillaume GRÉGOIRE : *Mouvement collectif et physique hors d'équilibre*. Thèse de doctorat, Université Paris 7–Denis Diderot, 2002.
- [155] Guillaume GRÉGOIRE et Hugues CHATÉ : Onset of collective and cohesive motion. *Physical Review Letters*, 92:025702, 2004.
- [156] Guillaume GRÉGOIRE, Hugues CHATÉ et Yuhai TU : Active and passive particles : modeling beads in a bacterial bath. *Physical Review E*, 64(1): 011902, juin 2001.
- [157] Guillaume GRÉGOIRE, Hugues CHATÉ et Yuhai TU : Moving and staying together without a leader. *Physica D-Nonlinear Phenomena*, 181:157, 2003.
- [158] Geoffrey GRIMMETT : *Percolation*, volume 321 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, second édition, 1999.
- [159] A. GROISMAN et V. STEINBERG : Elastic turbulence in a polymer solution flow. *Nature*, 405(6782):53–55, mai 2000.
- [160] H. GRULER, U. DEWALD et M. EBERHARDT : Nematic liquid crystals formed by living amoeboid cells. *European Physical Journal B*, 11:187, 1999.
- [161] E. W. GUDGER : Fishes that swim heads to tails in single file. *Copeia*, 1944:152–154, 1944.
- [162] Shay GUERON, Simon A. LEVIN et Daniel I. RUBENSTEIN : The dynamics of herds : From individuals to aggregations. *Journal of Theoretical Biology*, 182(1):85, 1996.
- [163] Edward A. GUGGENHEIM : The principle of corresponding states. *Journal of Chemical Physics*, 13(7):253, 1945.

- [164] Vishweshha GUTTAL et Iain D. COUZIN : Leadership, collective motion and the evolution of migratory strategies. *Communicative and integrative Biology*, 4(3):294, mai 2011.
- [165] Francis HALLÉ : école thématique de BERDER. communication privée, avril 2002.
- [166] William D. HAMILTON : Geometry of selfish herd. *Journal of Theoretical Biology*, 31(2):295, 1971.
- [167] Takashi HAYASHI et Richard W. CARTHEW : Surface mechanics mediate pattern formation in the developing retina. *Nature*, 431:647–652, octobre 2004.
- [168] Martin HECHT, Jens HARTING, Markus BIER, Jörg REINSHAGEN et Hans J. HERRMANN : Shear viscosity of claylike colloids in computer simulations and experiments. *Physical Review E*, 74:021403, août 2006.
- [169] D. HELBING, I. J. FARKAS et Tamás VICSEK : Freezing by heating in a driven mesoscopic system. *Physical Review Letters*, 84(6):1240, février 2000.
- [170] Charlotte K. HEMELRIJK et Hanno HILDENBRANDT : Self-organized shape and frontal density of fish schools. *Ethology*, 114(3):245, 2008.
- [171] Charlotte K. HEMELRIJK, Hanno HILDENBRANDT, José REINDERS et Eize J. STAMHUIS : Emergence of oblong school shape : Models and empirical data of fish. *Ethology*, 116(11):1099, 2010.
- [172] Charlotte K. HEMELRIJK, Jan WANTIA et Isler KARIN : Female dominance over males in primates : Self-organisation and sexual dimorphism. *PLoS One*, 3(7):e2678, juillet 2008.
- [173] Malte HENKEL et Haye HINRICHSSEN : The non-equilibrium phase transition of the pair-contact process with diffusion. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 37(28):R117, 2004.
- [174] Frank H. HEPPNER et U. GREANDER : A stochastic nonlinear model for coordinated bird flocks. In S. KRASNER, éditeur : *The ubiquity of chaos*, page 233. American association for the advancement of science, Washington D. C., 1990.
- [175] Frank H. HEPPNER et John D. HAFFNER : Communication in bird flocks : an electromagnetic model. In J. G. LLAURADO, A. SANCES et J. H. BATTOCLETTI, éditeurs : *Biological and clinical effects of low-frequency magnetic and electrical fields*, page 147. Charles C. Thomas, Springfield, Illinois, 1974.
- [176] James E. HERBERT-READ, Andrea PERNA, Richard P. MANN, Timothy M. SCHAEFER, David J. T. SUMPTER et Ashley J. W. WARD : Inferring the rules of interaction of shoaling fish. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 108(46):18726, novembre 2011.
- [177] Hans J. HERRMANN : Evolution and shapes of dunes. *Comptes-Rendus Physique*, 3(2):197, avril 2002.

- [178] P. HERSEN : On the crescentic shape of barchan dunes. *European Physical Journal B*, 37(4), février 2004.
- [179] P. HERSEN, K. H. ANDERSEN, H. ELBELRHITI, B. ANDREOTTI, P. CLAUDIN et S. DOUADY : Corridors of barchan dunes : Stability and size selection. *Physical Review E*, 69(1):011304, janvier 2004.
- [180] P. HERSEN et S. DOUADY : Collision of barchan dunes as a mechanism of size regulation. *Geophysical Research Letters*, 32(L21403), 2005.
- [181] Pascal HERSEN : *Morphogénèse et dynamique des barchanes*. Thèse de doctorat, Université Paris VII-Denis Diderot, 2004.
- [182] Pascal HERSEN : Flow effects on the morphology and dynamics of aeolian and subaqueous barchan dunes. *Journal of Geophysical Research-Earth Surface*, 110:F4, novembre 2005.
- [183] Pascal HERSEN, Stéphane DOUADY et Bruno ANDREOTTI : Relevant length scale of barchan dunes. *Physical Review Letters*, 89(26):264301, décembre 2002.
- [184] Sascha HILGENFELDT, Sinem ERISKEN et Richard W. CARTHEW : Physical modeling of cell geometric order in an epithelial tissue. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 105(3):907–911, janvier 2008.
- [185] Haye HINRICHSEN : Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Advances in Physics*, 49(7):815, 2000.
- [186] Haye HINRICHSEN : The phase transition of diffusive pair contact. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, 361:457, 2006.
- [187] Haye HINRICHSEN, Andrea JIMÉNEZ-DALMARONI, Yadin ROZOV et Eytan DOMANY : Flowing sand—a possible physical realization of directed percolation. *Journal of Statistical Physics*, 98(5-6):1149, 2000.
- [188] Arthur HIPKE, Sven LÜBECK et Haye HINRICHSEN : Absorbing boundaries in the conserved manna model. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2009(07):P07021, 2009.
- [189] Pierre C. HOHENBERG et Bertrand I. HALPERIN : Theory of dynamic critical phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 49:435, 1977.
- [190] P. J. HOOPERBRUGGE et J. M. V. A. KOELMAN : Simulating microscopic hydrodynamic phenomena with dissipative particle dynamics. *Europhysics Letters*, 19(3):155, juin 1992.
- [191] Cristián HUEPE et Maximino ALDANA : Intermittency and clustering in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 92:168701, avril 2004.
- [192] A. HUTH et C. WISSEL : The simulation of the movement of fish schools. *Journal of Theoretical Biology*, 156(3):365–385, juin 1992.
- [193] Julian S. HUXLEY et Thomas Henry HUXLEY : *Evolution and Ethics*. The Pilot Press, London, 1947.

- [194] Terence HWA et Mehran KARDAR : Dissipative transport in open systems : An investigation of self-organized criticality. *Physical Review Letters*, 62:1813, avril 1989.
- [195] Thomas IHLE : Kinetic theory of flocking : Derivation of hydrodynamic equations. *Physical Review E*, 83:030901, mars 2011.
- [196] Thomas IHLE : Invasion-wave-induced first-order phase transition in systems of active particles. *Physical Review E*, 88:040303, octobre 2013.
- [197] Thomas IHLE : Towards a quantitative kinetic theory of polar active matter. *European Physical Journal - Special Topics*, 223(7):1293, juin 2014.
- [198] Yoshinobu INADA et Keiji KAWACHI : Order and flexibility in the motion of fish schools. *Journal of Theoretical Biology*, 214(3):371, février 2002.
- [199] Ernst ISING : Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31:253–258, 1925.
- [200] Ziane IZRI, Marjolein N. van der LINDEN, Sébastien MICHELIN et Olivier DAUCHOT : Self-propulsion of pure water droplets by spontaneous marangoni-stress-driven motion. *Physical Review Letters*, 113:248302, décembre 2014.
- [201] Hans-Karl JANSSEN : On the nonequilibrium phase transition in reaction-diffusion systems with an absorbing stationary state. *Zeitschrift für Physik - Condensed Matter*, 42:151, 198A.
- [202] Alexandre KABLA et Georges DEBRÉGEAS : Local stress relaxation and shear banding in a dry foam under shear. *Physical Review Letters*, 90(25): 258303, juin 2003.
- [203] Jos KÄFER, Takashi HAYASHI, Athanasius F. M. MAREE, Richard W. CARTHEW et Francois GRANER : Cell adhesion and cortex contractility determine cell patterning in the drosophila retina. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 104(47):18549–18554, novembre 2007.
- [204] A. KATSUKI, Nishimori H., N. ENDO et K. TANIGUCHI : Collision dynamics of two barchan dunes simulated by a simple model. *Journal of the Physical Society of Japan*, 37:507–514, 2005.
- [205] Atsunari KATSUKI, Macoto KIKUCHI, Hiraku NISHIMORI, Noritaka ENDO et Keisuke TANIGUCHI : Cellular model for sand dunes with saltation, avalanche and strong erosion : collisional simulation of barchans. *Earth Surface Processes and Landforms*, 36:372, mars 2011.
- [206] Yael KATZ, Kolbjørn TUNSTRØM, Christos C. IOANNOU, Cristián HUEPE et Iain D. COUZIN : Inferring the structure and dynamics of interactions in schooling fish. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(46):18720, 2011.
- [207] Harry KESTEN : *Percolation Theory for Mathematicians*. Birkhäuser, Boston, 1982.

- [208] Roger E. KHAYAT : Finite-amplitude Taylor-vortex flow of viscoelastic fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 400:33, décembre 1999.
- [209] Morten KLOSTER, Sergei MASLOV et Chao TANG : Exact solution of a stochastic directed sandpile model. *Physical Review E*, 63:026111, janvier 2001.
- [210] Julien KOCKELKOREN et Hugues CHATÉ : Absorbing phase transitions of branching-annihilating random walk. *Physical Review Letters*, 90:125701, mars 2003.
- [211] Zbigniew KOZA, Grzegorz KONDRAT et Karol SUSZCZYŃSKI : Percolation of overlapping squares or cubes on a lattice. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2014(11):P11005, novembre 2014.
- [212] K. KROY : Minimal model for aeolian sand dunes. *Physical Review E*, 66:031302, 2002.
- [213] D. V. KTITAREV, S. LÜBECK, P. GRASSBERGER et V. B. PRIEZZHEV : Scaling of waves in the Bak-Tang-Wiesenfeld sandpile model. *Physical Review E*, 61:81, janvier 2000.
- [214] Arshad KUDROLLI, Geoffroy LUMAY, Dmitri VOLFSOŃ et Lev S. TSIMRING : Swarming and swirling in self-propelled polar granular rods. *Physical Review Letters*, 100:058001, février 2008.
- [215] V.L. KULINSKII, V.I. RATUSHNAYA, A.V. ZVELINDOVSKY et D. BEDEAUX : Collective behavior in the system of self-propelling particles with non-holonomic constraints. *Europhysics Letters*, 71(2):207, juillet 2005.
- [216] Antonio LAMURA, Gerhard GOMPPER, Thomas IHLE et Daniel M. KROLL : Multi-particle collision dynamics : Flow around a circular and a square cylinder. *Europhysics Letters*, 56(3):319, 2001.
- [217] R.G. LARSON : Instabilities in viscoelastic flows. *Rheologica Acta*, 31(3):213, 1992.
- [218] Cecile LEDUC, Nenad PAVIN, Frank JÜLICHER et Stefan DIEZ : Collective behavior of antagonistically acting kinesin-1 motors. *Physical Review Letters*, 105:128103, septembre 2010.
- [219] Stéphane LEDUC : *Théorie physico-chimique de la Vie*. A. Poinat, Paris, 1910.
- [220] Jooyoung LEE et J. M. KOSTERLITZ : Finite-size scaling and Monte Carlo simulations of first-order phase transitions. *Physical Review B*, 43:3265, février 1991.
- [221] K. J. LEE, E. C. COX et R. E. GOLDSTEIN : Competing patterns of signaling activity in *Dictyostelium discoideum*. *Physical Review Letters*, 76(7):1174, février 1996.
- [222] Sang Bub LEE : Comment on “fixed-energy sandpiles belong generically to directed percolation”. *Physical Review Letters*, 110:159601, avril 2013.

- [223] Sang Bub LEE : Universality class of the conserved manna model in one dimension. *Physical Review E*, 89:060101, juin 2014.
- [224] S. LEROUGE, M. ARGENTINA et J. P. DECRUPPE : Interface instability in shear-banding flow. *Physical Review Letters*, 96(8):088301, février 2006.
- [225] Sandra LEROUGE et Jean-François BERRET : Shear-induced transitions and instabilities in surfactant wormlike micelles. In Karel DUSEK et Jean-François JOANNY, éditeurs : *Polymer Characterization*, volume 230 de *Advances in Polymer Science*, page 1. Springer Berlin / Heidelberg, 2010.
- [226] Sandra LEROUGE, Marc-Antoine FARDIN, Médéric ARGENTINA, Guillaume GRÉGOIRE et Olivier CARDOSO : Interface dynamics in shear-banding flow of giant micelles. *Soft Matter*, 4(9):1808, septembre 2008.
- [227] Herbert LEVINE, Wouter-Jan RAPPEL et Inon COHEN : Self-organization in systems of self-propelled particles. *Physical Review E*, 63(1):017101, décembre 2000.
- [228] George H. LEWES : *Problems of Life and Mind*, volume 2 de *First*. Trübner, London, 1875.
- [229] A. LIMA, H. SAUERMAN, H. HERRMANN et K. KROY : Modelling a dune field. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, 310:487–500, 2002.
- [230] Chun-Min LO, Hong-Bei WANG, Micah DEMBO et Yu-li WANG : Cell movement is guided by the rigidity of the substrate. *Biophysical Journal*, 79, juillet 2000.
- [231] Ugo LOPEZ : *Étude expérimentale et modélisation des déplacements collectifs chez deux espèces de poissons, Khulia mugil et Hemigrammus rhodostomus*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse 3 Paul Sabatier, 2015.
- [232] Sven LÜBECK : Universal behavior of non-equilibrium phase transitions. *International Journal of Modern Physics B*, 18(31-32):3977–4118, décembre 2004.
- [233] Satya N. MAJUMDAR, M. R. EVANS et R. K. P. ZIA : Nature of the condensate in mass transport models. *Physical Review Letters*, 94:180601, mai 2005.
- [234] Nicholas C. MAKRIS, Purnima RATILAL, Srinivasan JAGANNATHAN, Zheng GONG, Mark ANDREWS, Olav Rune BERTSATOS, Ioannis and Godoe, Redwood W. NERO et J. Michael JECH : Critical population density triggers rapid formation of vast oceanic fish shoals. *Science*, 323(5922):1734, mars 2009.
- [235] Anatoly MALEVANETS et Raymond KAPRAL : Mesoscopic model for solvent dynamics. *Journal of Chemical Physics*, 110(17):8605, mai 1999.

- [236] Anatoly MALEVANETS et Raymond KAPRAL : Solute molecular dynamics in a mesoscale solvent. *Journal of Chemical Physics*, 112(16):7260, avril 2000.
- [237] Anatoly MALEVANETS et Raymond KAPRAL : Mesoscopic multi-particle collision model for fluid flow and molecular dynamics. In Mikko KARTTUNEN, Ari LUKKARINEN et Ilpo VATTULAINEN, éditeurs : *Novel Methods in Soft Matter Simulations*, volume 640 de *Lecture Notes in Physics*, page 116. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [238] Benoît MANDELBROT : *Les Objets fractals : forme, hasard, et dimension*. Flammarion, Paris, 1975. Texte remanié de conférences prononcées au Collège de France et à Cambridge university, en 1974.
- [239] Subhrangshu Sekhar MANNA : Two-state model of self-organized criticality. *Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*, 24:L363, avril 1991.
- [240] M. Cristina MARCHETTI, Jean-François JOANNY, Sriram RAMASWAMY, Tanniemola B. LIVERPOOL, Jacques PROST, Madam RAO et R. Aditi SIMHA : Hydrodynamics of soft active matter. *Reviews of Modern Physics*, 85(3):1143, juillet 2013.
- [241] Philippe MARCQ, Hugues CHATÉ et Paul MANNEVILLE : Critical properties of phase transitions in lattices of coupled logistic maps. *Progress of Theoretical Physics supplement*, 161:244, 2006.
- [242] Shirley MARK, Roie SHLOMOVITZ, Nir S. GOV, Mathieu POUJADE et Erwan GRASLAND-MONGRAIN : Physical model of the dynamic instability in an expanding cell culture. *Biophysical Journal*, 98:361, février 2010.
- [243] Sergei MASLOV et Yi-Cheng ZHANG : Self-organized critical directed percolation. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, 223(1-2):1, janvier 1996.
- [244] W. MC FARLAND et A. OKUBO : Metabolic models of fish behavior—the need for quantitative observations. In Parrish J. K. et HAMNER W. M., éditeur : *Animal Groups in Three Dimensions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [245] Warren MCCULLOCH et Walter PITTS : A logical calculus of ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5:115–133, 1943.
- [246] N. D. MERMIN et H. WAGNER : Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic heisenberg models. *Physical Review Letters*, 17(22):1133–1136, novembre 1966.
- [247] Stephan MERTENS et Christopher MOORE : Continuum percolation thresholds in two dimensions. *Physical Review E*, 86:061109, décembre 2012.
- [248] Sava MILOŠEVIĆ et H. Eugene STANLEY : Equation of state near the critical point. ii. comparison with experiment and possible universality with respect to lattice structure and spin quantum number. *Physical Review B*, 6:1002–1009, août 1972.



- [249] Shradha MISHRA, Aparna BASKARAN et M. Cristina MARCHETTI : Fluctuations and pattern formation in self-propelled particles. *Physical Review E*, 81(6, Part 1), juin 2010.
- [250] Shradha MISHRA, Kolbjørn TUNSTRØM, Iain D. COUZIN et Cristián HUEPE : Collective dynamics of self-propelled particles with variable speed. *Physical Review E*, 86:011901, juillet 2012.
- [251] A. MOGILNER et L. EDELSTEIN-KESHET : A non-local model for a swarm. *J. Math. Biol.*, 38:534, 1999.
- [252] P. K. MOHANTY et Deepak DHAR : Generic sandpile models have directed percolation exponents. *Physical Review Letters*, 89:104303, août 2002.
- [253] Mehdi MOUSSAÏD, Dirk HELBING et Guy THÉRAULAZ : How simple rules determine pedestrian behavior and crowd disasters. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 108(17):6884, avril 2011.
- [254] Ken H. NAGAI, Yutaka SUMINO, Raul MONTAGNE, Igor S. ARANSON et Hugues CHATÉ : Collective motion of self-propelled particles with memory. *Physical Review Letters*, 114:168001, avril 2015.
- [255] Máté NAGY, Zsuzsa ÁKOS, Dora BIRO et Tamás VICSEK : Hierarchical group dynamics in pigeon flocks. *Nature*, 464:890, avril 2010.
- [256] Máté NAGY, István DARUKA et Tamás VICSEK : New aspects of the continuous phase transition in the scalar noise model (snm) of collective motion. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, 373:445, 2006.
- [257] Onuttom NARAYAN et A. Alan MIDDLETON : Avalanches and the renormalization group for pinned charge-density waves. *Physical Review B*, 49:244–256, janvier 1994.
- [258] Vijay NARAYAN, Sriram RAMASWAMY et Narayanan MENON : Long-lived giant number fluctuations in a swarming granular nematic. *Science*, 317:105, juillet 2007.
- [259] C. NARTEAU, D. ZHANG, O. ROZIER et P. CLAUDIN : Setting the length and time scales of a cellular automaton dune model from the analysis of superimposed bed forms. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, 114(F3), juillet 2009. F03006.
- [260] François NÉDÉLEC, Thomas SURREY, Antony C. MAGGS et Stanislas LEIBLER : Self-organization of microtubules and motors. *Nature*, 389:305, septembre 1997.
- [261] Alexandre NICOLAS et Alexander MOROZOV : Nonaxisymmetric instability of shear-banded taylor-couette flow. *Physical Review Letters*, 108:088302, février 2012.
- [262] Grégoire NICOLIS et Ilya PRIGOGINE : *Self-organization in non-equilibrium systems*. Wiley, New-York, 1977.
- [263] T. OHTA et S. YAMANAKA : Traveling bands in self-propelled soft particles. *European Physical Journal - Special Topics*, 223(7):1279, juin 2014.

- [264] Atsuyuki OKABE, Barry BOOTS, Kokichi SUGIHARA et Sung Nok CHIU : *Spatial Tessellations : Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. J. Wiley and sons, 1992.
- [265] A OKUBO : Dynamical aspects of animal grouping : swarms, schools, flocks, and herds. *Advances in Biophysics*, 22:1, 1986.
- [266] Nicolas OLIVIER, Miguel A. LUENGO-OROZ, Louise DULOQUIN, Emmanuel FAURE, Thierry SAVY, Israël VEILLEUX, Xavier SOLINAS, Delphine DÉBARRE, Paul BOURGINE, Andrés SANTOS, Nadine PEYRIÉRAS et Emmanuel BEAUREPAIRE : Cell lineage reconstruction of early zebrafish embryos using label-free nonlinear microscopy. *Science*, 329(5994):967, août 2010.
- [267] P. D. OLMSTED : Dynamics and flow-induced phase separation in polymeric fluids. *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, 4(2):95–100, 1999.
- [268] O. J. O’LOAN et M. R. EVANS : Alternating steady state in one-dimensional flocking. *Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*, 32(8):L99, 1999.
- [269] Maya PACZUSKI et Kevin E. BASSLER : Theoretical results for sandpile models of self-organized criticality with multiple topplings. *Physical Review E*, 62:5347, octobre 2000.
- [270] J. PALACCI, S. SACANNA, A. P. STEINBERG, D. J. PINE et P. M. CHAIKIN : Living crystals of light-activated colloidal surfers. *Science*, 339:936, 2013.
- [271] Eirikur PALSSON et Hans G. OTHMER : A model for individual and collective cell movement in *Dictyostelium discoideum*. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 97(19):10448, 2000.
- [272] Su-Chan PARK et Hyunggyu PARK : Driven pair contact process with diffusion. *Physical Review Letters*, 94:065701, février 2005.
- [273] J. K. PARRISH et L. EDELSTEIN-KESHET : Complexity, pattern, and evolutionary trade-offs in animal aggregation. *Science*, 284(5411):99–101, avril 1999.
- [274] J. K. PARRISH et W. M. HAMNER, éditeurs. *Animal Groups in Three Dimensions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [275] B.L. PARTRIDGE : The effect of school size on the structure and dynamics of minnow schools. *Animal Behaviour*, 28(1):68 – IN3, 1980.
- [276] Romualdo PASTOR-SATORRAS et Alessandro VESPIGNANI : Critical behavior and conservation in directed sandpiles. *Physical Review E*, 62:6195, novembre 2000.
- [277] Andrea PERNA, Christian JOST, Étienne COUTURIER, Sergi VALVERDE, Stéphane DOUADY et Guy THÉRAULAZ : The structure of gallery networks in the nests of termite cubitermes spp. revealed by x-ray tomography. *Naturwissenschaften*, 95(9):877, septembre 2008.

- [278] Anton PESHKOV, Éric BERTIN, Francesco GINELLI et Hugues CHATÉ : Boltzmann-ginzburg-landau approach for continuous descriptions of generic vicsek-like models. *European Physical Journal - Special Topics*, 223(7):1315, juin 2014.
- [279] Benjamin PETTIT, Andrea PERNA, Dora BIRO et David J. T. SUMPTER : Interaction rules underlying group decisions in homing pigeons. *Journal of the royal society-Interface*, 10(89):20130529, décembre 2014.
- [280] Michel PEYRARD et Thierry DAUXOIS : *La Physique des Solitons*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, août 2004.
- [281] Tony J. PITCHER : Some ecological consequences of fish school volumes. *Freshwater Biology*, 10:579, 1980.
- [282] PLIN L'ANCIEN : *L'histoire naturelle (Naturalis historia)*. Les Belles Lettres, 79. Traduction réalisée par J. André (1950).
- [283] Britton PLOURDE, Franco NORI et Michael BRETZ : Water droplet avalanches. *Physical Review Letters*, 71:2749, octobre 1993.
- [284] Wayne K. POTTS : The chorus-line hypothesis of manoeuvre coordination in avian flocks. *Nature*, 309:344, mai 1984.
- [285] Mathieu POUJADE, Erwan GRASLAND-MONGRAIN, A HERTZOG, J JOUANNEAU, P CHAVRIER, Benoit LADOUX, Axel BUGUIN et Pascal SILBERZAN : Collective migration of an epithelial monolayer in response to a model wound. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 104:15988, mai 2007.
- [286] S. PRAKASH et G. NICOLIS : Dynamics of the schlögl models on lattices of low spatial dimension. *Journal of Statistical Physics*, 86(5-6):1289, 1997.
- [287] Vladimir PRIVMAN, éditeur. *Finite size scaling and numerical simulations of statistical systems*. ed. World scientific, Singapor, 1990.
- [288] J. QUINTANILLA, S. TORQUATO et R. M. ZIFF : Efficient measurement of the percolation threshold for fully penetrable discs. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 33(42):L399, 2000.
- [289] W.-J. RAPPEL, A. NICOL, A. SARKISSIAN, H. LEVINE et W. F. LOOMIS : Self-organized vortex state in two-dimensional *Dictyostelium* dynamics. *Physical Review Letters*, 83(6):1247, août 1999.
- [290] V.I. RATUSHNAYA, D. BEDEAUX, V.L. KULINSKII et A.V. ZVELINDOVSKY : Collective behavior of self-propelling particles with kinematic constraints : The relation between the discrete and the continuous description. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, 381:39, juillet 2007.
- [291] V.I. RATUSHNAYA, V.L. KULINSKII, A.V. ZVELINDOVSKY et D. BEDEAUX : Hydrodynamic model for the system of self propelling particles with conservative kinematic constraints ; two dimensional stationary solutions. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, 366:107, juillet 2006.

- [292] J. R. RAYMOND et M. R. EVANS : Flocking regimes in a simple lattice model. *Physical Review E*, 73:036112, mars 2006.
- [293] Frank RAYNAUD : *Modèles de comportements collectifs tri-dimensionnels*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, 2009.
- [294] Hauke REUTER et Broder BRECKLING : Selforganization of fish schools : an object-oriented model. *Ecological Modelling*, 75-76:147, 1994.
- [295] Craig W. REYNOLDS : Flocks, herds and schools : a distributed behavioural model. *Computer Graphics*, 21:25–34, 1987. SIGGRAPH '87 Conference Proceedings.
- [296] M. RIPOLL, R.G. WINKLER et G. GOMPPER : Hydrodynamic screening of star polymers in shear flow. *European Physical Journal E*, 23(4):349, août 2007.
- [297] Pawel ROMANCZUK, Iain D. COUZIN et Lutz SCHIMANSKY-GEIER : Collective motion due to individual escape and pursuit response. *Physical Review Letters*, 102:010602, janvier 2007.
- [298] Michela ROSSI, Romualdo PASTOR-SATORRAS et Alessandro VESPIGNANI : Universality class of absorbing phase transitions with a conserved field. *Physical Review Letters*, 85:1803, août 2000.
- [299] Antoine SAINT-EXUPÉRY : *Le Petit Prince*. Reynal and Hitchcoc, 1943.
- [300] S. SAKAI : A model for group structure and its behavior. *Biophysics*, 13:82–90, 1973.
- [301] Volker SCHALLER, Christoph WEBER, Christine SEMMRICH, Erwin FREY et Andreas R. BAUSCH : Polar patterns of driven filaments. *Nature*, 467:73–77, septembre 2010.
- [302] F. SCHLÖGEL : Chemical reaction models for nonequilibrium phase-transitions. *Zeitschrift für physik*, 253(2):147, 1972.
- [303] R. D. SCHRAM : Reaction-diffusion model monte carlo simulations on the gpu. *Journal of Computational Physics*, 241:95, février 2013.
- [304] V. SCHWÄMMLE et H. J. HERRMANN : Solitary wave behaviour of sand dunes. *Nature*, 426:619–620, 2003.
- [305] V. SCHWÄMMLE et H. J. HERRMANN : A model of barchan dunes including lateral shear stress. *European Physical Journal E*, 16:57, janvier 2005.
- [306] Edmund SELOUS : *Thought-transference (or what ?) in birds*. Constable & Co, London, 1931.
- [307] Xavier SERRA-PICAMAL, Vito CONTE, Romaric VINCENT, Ester AÑÓN, Dhananjay T. TAMBE, Elsa BAZELLIERES, James P. BUTLER, Jeffrey J. FREDBERG et Xavier TREPAT : Mechanical waves during tissue expansion. *Nature Physics*, 8:628, août 2012.
- [308] N. SHIMOYAMA, Ken SUGAWARA, T. MIZUGUCHI, Y. HAYAKAWA et Masaki SANO : Collective motion in a system of motile elements. *Physical Review Letters*, 76(20):3870, mai 1996.

- [309] Anthony R. E. SINCLAIR : *The African Buffalo. A Study in regulation of populations*. Chicago University Press, Chicago, 1977.
- [310] Rastko SKNEPNEK et Silke HENKES : Active swarms on a sphere. *Physical Review E*, 91:022306, février 2015.
- [311] A. P. SOLON et J. TAILLEUR : Revisiting the flocking transition using active spins. *Physical Review Letters*, 111:078101, août 2013.
- [312] Alexandre P. SOLON, Jean-Baptiste CAUSSIN, Denis BARTOLO, Hugues CHATÉ et Julien TAILLEUR : Pattern formation in flocking models : A hydrodynamic description. *Physical Review E*, 92:062111, décembre 2015.
- [313] Alexandre P. SOLON, Hugues CHATÉ et Julien TAILLEUR : From phase to microphase separation in flocking models : The essential role of nonequilibrium fluctuations. *Physical Review Letters*, 114:068101, février 2015.
- [314] Alexandre P. SOLON et Julien TAILLEUR : Flocking with discrete symmetry : The two-dimensional active ising model. *Physical Review E*, 92:042119, octobre 2015.
- [315] Marc SORIA : Bancs de poissons. In Guy THÉRAULAZ et François SPITZ, éditeurs : *Auto-organisation et comportement*. Hermès, Paris, 1997.
- [316] Franck SPITZER : Interaction of markov processes. *Advances in Mathematics*, 5(2):246, octobre 1970.
- [317] Ken SUGAWARA et Masaki SANO : Cooperative acceleration of task performance : foraging behavior of interacting multi-robots system. *Physica D-Nonlinear Phenomena*, 100:343, août 1997.
- [318] Yutaka SUMITO, Ken H. NAGAI, Yuji SHITAKA, Dan TANAKA, Kenichi YOSHIKAWA, Hugues CHATÉ et Kazuhiro OIWA : Large-scale vortex lattice emerging from collectively moving microtubules. *Nature*, 483:448, mars 2012.
- [319] R. SUZUKI et Sakai S. : Movement of a group of animals. *Biophysicis*, 13:281–282, 1973.
- [320] B. SZABÓ, G. J. SZÖLLÖSI, B. GÖNCSI, Zs. JURÁNYI, D. SELMECZI et Tamas VICSEK : Phase transition in the collective migration of tissue cells : Experiment and model. *Physical Review E*, 74:061908, décembre 2006.
- [321] Chao TANG et Per BAK : Critical exponents and scaling relations for self-organized critical phenomena. *Physical Review Letters*, 60:2347–2350, juin 1988.
- [322] I TATISCHEFF : Upon the use of *Dictyostelium discoideum* for cancer research. In *BIOforum International*, volume 1, page 43. BIOforum International, 2002.
- [323] Claudio TEBALDI, Mario DE MENECH et Attilio L. STELLA : Multifractal scaling in the bak-tang-wiesenfeld sandpile and edge events. *Physical Review Letters*, 83:3952, novembre 1999.

- [324] Tamás TÉL, György KÁROLYI, Áron PÉNTEK, István SCHEURING, Zoltán TOROCZKAI, Celso GREBOGI et James KADTKE : Chaotic advection, diffusion, and reactions in open flows. *Chaos*, 10:89, 2000.
- [325] Guy THÉRAULAZ : Auto-organisation et comportements collectifs dans les sociétés animales. In Guy THÉRAULAZ et François SPITZ, éditeurs : *Auto-organisation et comportement*, page 79. Hermès, Paris, 1997.
- [326] I. THEURKAUFF, C. COTTIN-BIZONNE, J. PALACCI, C. YBERT et L. BOCQUET : Dynamic clustering in active colloidal suspensions with chemical signaling. *Physical Review Letters*, 108:268303, juin 2012.
- [327] d'Arcy Wentworth THOMPSON : *On Growth and Form*. Cambridge University Press, 1917.
- [328] Nikolaas TINBERGEN : *The herring gull's world. A story of the social behaviour of birds*. Collins, London, 1963.
- [329] John TONER : Birth, death and flight : a theory of malthusian flocks. *Physical Review Letters*, 102(8):088102, 2012.
- [330] John TONER et Yuhai TU : Long-range order in a two-dimensional dynamical  $xy$  model : How birds fly together. *Physical Review Letters*, 75(23):4326, décembre 1995.
- [331] John TONER et Yuhai TU : Flocks, herds, and schools : A quantitative theory of flocking. *Physical Review E*, 58(4):4828–4858, octobre 1998.
- [332] John TONER, Yuhai TU et S. RAMASWAMY : Hydrodynamic and phases of flocks. *Annals Of Physics*, 318:170, 2005.
- [333] John TONER, Yuhai TU et Markus ULM : Sound wave and the absence of galilean invariance in flocks. *Physical Review Letters*, 58(4):4828, octobre 1998.
- [334] C. M. TOPAZ et A. L. BERTOZZI : Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(1):152, 2004.
- [335] C.M. TOPAZ, A.L. BERTOZZI et Lewis M.A. : A nonlocal continuum model for biological aggregation. *Bulletin of Mathematical Biology*, 68(7):1601, 2006.
- [336] Verena M. TRENKEL, Laurent BERGER, Sébastien BOURGUIGNON, Mathieu DORAY, Ronan FABLET, Jacques MASSÉ, Valérie MAZAURIC, Cyrille PONCELET, Gael QUEMENER, Carla SCALABRIN et Hector VILLALOBOS : Overview of recent progress in fisheries acoustics made by ifremer with examples from the bay of biscay. *Aquatic Living Resources*, 22(4):433, oct 2009.
- [337] Yuhai TU : Phases and phase transitions in flocking systems. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, 281(1-4):30, juin 2000.
- [338] Kolbjørn TUNSTRØM, Yael KATZ, Christos C. IOANNOU, Christian HUEPE, Matthew J. LUTZ et Iain D. COUZIN : Collective states, multistability and transitional behavior in schooling fish. *PLoS Computational biology*, 9(2):e100915, février 2013.

- [339] Allan TURING : The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society B-Biological Sciences*, 237:37–72, 1952.
- [340] Paul VALÉRY : *Variété V*, chapitre L'homme et la coquille. Gallimard, 1944.
- [341] P. A. VASQUEZ, G. H. MCKINLEY et L. P. COOK : A network scission model for wormlike micellar solutions - i. model formulation and viscometric flow predictions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 144(2-3):122–139, 2007. Vasquez, Paula A. McKinley, Gareth H. Cook, L. Pamela.
- [342] Alessandro VESPIGNANI, Ronald DICKMAN, Miguel A. MUÑOZ et Stefano ZAPPERI : Driving, conservation, and absorbing states in sandpiles. *Physical Review Letters*, 81:5676, décembre 1998.
- [343] Alessandro VESPIGNANI, Ronald DICKMAN, Miguel A. MUÑOZ et Stefano ZAPPERI : Absorbing-state phase transitions in fixed-energy sandpiles. *Physical Review E*, 62:4564, octobre 2000.
- [344] Alessandro VESPIGNANI et Stefano ZAPPERI : Order parameter and scaling fields in self-organized criticality. *Physical Review Letters*, 78:4793, juin 1997.
- [345] Tamas VICSEK : A question of scale. *Nature*, 411:421, 2001.
- [346] Tamas VICSEK, A. CZIRÓK, E. BEN-JACOB, Inon COHEN et O. SHOCHET : Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 75(6):1226, août 1995.
- [347] Tamas VICSEK, A. CZIRÓK, I. J. FARKAS et D. HELBING : Application of statistical mechanics to collective motion in biology. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, 274:182, 1999.
- [348] Tamás VICSEK et Anna ZAFEIRIS : Collective motion. *Physics Reports*, 517(3-4):71, 2012.
- [349] Heinz von FOERSTER et George W. Jr. ZOPF, éditeurs. *Principles of Self-Organization*. Information Systems Branch, U.S. Office of Naval Research, 1962.
- [350] Bartłomiej WACLAW et Martin R. EVANS : Explosive condensation in a mass transport model. *Physical Review Letters*, 108:070601, février 2012.
- [351] Bin WANG et Adam KUSPA : *Dictyostelium* development in the absence of camp. *Science*, 277:251, juillet 1997.
- [352] C. A. WEBER, T. HANKE, J. DESEIGNE, S. LÉONARD, O. DAUCHOT, E. FREY et H. CHATÉ : Long-range ordering of vibrated polar disks. *Physical Review Letters*, 110:208001, mai 2013.
- [353] C. J. WEIJER : Morphogenetic cell movement in *Dictyostelium*. *Semin. Cell Dev. Biol.*, 10:609, 2000.
- [354] B. T. WERNER et D. T. GILLESPIE : Fundamentally discrete stochastic model for wind ripple dynamics. *Physical Review Letters*, 71:3230, novembre 1993.

- [355] Benjamin WIDOM : Equation of state in the neighborhood of the critical point. *Journal of Chemical Physics*, 43(11):3898, 1965.
- [356] C. WIESELBERGER : Beitrag zur Erklärung des Winkelfluges einiger Zugvögel. *Zeitschrift für Motor*, 1914.
- [357] David S. WILCOVE et Martin WIKELSKI : Going, going, gone : Is animal migration disappearing? *PLoS Biology*, 6(7):e188, juillet 2008.
- [358] G. C. WILLIAMS : Measurement of consociation among fishes and comments on the evolution of schooling. *Michigan St. Univ. Bio. Series*, 2:349, 1964.
- [359] Kenneth WILSON : The renormalization group : Critical phenomena and the koudo problem. *Reviews of Modern Physics*, 47:774, 1975.
- [360] S. WORMAN, A.B. MURRAY, R. LITTLEWOOD, B. ANDREOTTI et P. CLAUDIN : Modeling emergent large-scale structures of barchan dune fields. *Geology*, 41:1059, octobre 2013.
- [361] Xiao-Lun WU et Albert LIBCHABER : Particle diffusion in a quasi-two-dimensional bacterial bath. *Physical Review Letters*, 84(13):3017, mars 2000.
- [362] R. K. P. ZIA, M. R. EVANS et Satya N. MAJUMDAR : Construction of the factorized steady state distribution in models of mass transport. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2004(10):L10001, 2004.