



HAL
open science

Applications des foncteurs strictement polynomiaux

van Tuan Pham

► **To cite this version:**

van Tuan Pham. Applications des foncteurs strictement polynomiaux. Topologie algébrique [math.AT]. Université Paris 13, 2015. Français. NNT: . tel-01351328v1

HAL Id: tel-01351328

<https://hal.science/tel-01351328v1>

Submitted on 3 Aug 2016 (v1), last revised 29 Nov 2017 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° attribué par la bibliothèque

| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13Discipline : **Mathématiques**

présentée et soutenue publiquement par

Van Tuan PHAM

le 11 juin 2015

Titre :**Applications des foncteurs
strictement polynomiaux**

Directeur de thèse :

Lionel SCHWARTZ

Co-directeur de thèse :

Antoine TOUZÉ

JURY

| | | |
|----------------------|------------------|--|
| <i>Président :</i> | Patrick POLO | Professeur (Université Paris 6) |
| <i>Rapporteurs :</i> | Randy McCARTHY | Professeur (Université de l'Illinois à Urbana-Champaign) |
| | Christine VESPA | Maître de conférence (HDR) (Université de Strasbourg) |
| <i>Examineurs :</i> | Christian AUSONI | Professeur (Université Paris 13) |
| | Benoit FRESSE | Professeur (Université Lille 1) |
| | Patrick POLO | Professeur (Université Paris 6) |
| | Lionel SCHWARTZ | Professeur (Université Paris 13) |
| | Antoine TOUZÉ | Maître de conférence (HDR) (Université Paris 13) |
| | Christine VESPA | Maître de conférence (HDR) (Université de Strasbourg) |

Remerciements

Ce mémoire est l'occasion de saluer toutes les personnes qui m'ont permis, m'ont accompagné par leurs conseils ou leur soutien, de réaliser ce travail pendant quatre ans de doctorat au laboratoire analyse, géométrie et applications (LAGA) de l'université Paris 13.

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus sincères à mes deux directeurs de thèse, Messieurs Lionel Schwartz et Antoine Touzé, de m'avoir accepté comme étudiant. La grande disponibilité, les conseils précieux et les soutiens constants de Lionel m'ont apporté les chances de poursuivre mes études en France et m'ont orienté vers les travaux d'Antoine Touzé. Je le remercie également pour m'avoir initié au domaine de la topologie algébrique notamment à travers le cours de topologie algébrique et le stage de M2. Antoine Touzé m'a confié un sujet vraiment intéressant et riche. Il m'a non seulement guidé, encouragé, conseillé pendant quatre ans avec la patience, la disponibilité mais aussi laissé une grande liberté après ses idées, ses questions. Cela me fait penser à une parole de Georg Cantor : *To ask the right question is harder than to answer.*

Je remercie Christian Ausoni, Benoit Fresse, Patrick Polo et Christine Vespa qui m'ont fait l'honneur d'être membres de mon jury. Je tiens à remercier particulièrement mes deux rapporteurs : Randy McCarthy et Christine Vespa. Ils ont minutieusement lu une première version du manuscrit et y ont relevé des erreurs, des incohérences. Leurs nombreuses remarques et suggestions ont beaucoup amélioré la qualité du manuscrit.

Je suis très reconnaissant au LAGA et plus particulièrement aux membres de l'équipe de Topologie Algébrique. J'ai grandement apprécié la qualité de l'environnement scientifique qu'ils m'ont fourni avec les activités scientifiques dynamiques. J'aimerais profiter de cette occasion pour remercier le personnel administratif et technique pour sa disponibilité, son efficacité et sa gentillesse.

Le plaisir que j'ai pu avoir à faire des mathématiques n'aurait pas été le même sans nombreux échanges passionnants avec Nguyen Dang Ho Hai, Nguyen The Cuong et Le Minh Ha. J'ai discuté des problèmes de mathématique tout au long de ma thèse avec Cuong et Hai. En particulier, faisant référence à [CHN10] après une suggestion de Hai m'a aidé d'éviter beaucoup de calculs non nécessaires. C'est aussi Hai qui m'a aidé d'établir le théorème 4.2.23.

Ces remerciements seraient incomplets sans mentionner la présence, tout au long de mes études en France, de mes amis vietnamiens : Hung, Khue, Tuan, Cuong, Phong, Diep, Quyet, Chiên, Tien, chi Phuong, Nga,...

Un grand merci à Minh Hoang pour ton soutien constant et ta présence tout au long de ce travail.

Enfin, j'adresse toute mon affection à mes parents, mes grand-parents, mon frère et ma soeur, qui m'ont accompagné, encouragé et supporté depuis le début.

Merci à ceux qui, de près ou de loin, m'ont soutenu et encouragé.

À Minh Hoàng

Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse concernent l'étude des représentations et la cohomologie des foncteurs strictement polynomiaux d'une ou plusieurs variables sur un corps \mathbb{k} de caractéristique p positive. Ces foncteurs d'une variable ont été introduits par Friedlander-Suslin dans leur article fondamental [FS97]. Des variantes à plusieurs variables sont définies dans [SFB97, FFSS99, FF08, Tou10].

Dans une première partie de la thèse (chapitre 2), nous étudions l'influence de la torsion de Frobenius sur les groupes d'extensions dans les catégories $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$ des foncteurs strictement polynomiaux. Notre résultat principal dans cette partie est le calcul d'extensions $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(X^{p^r d} \circ \boxtimes^n, G^{(r)})$, où X désigne l'un des symboles S, Λ, Γ ; le foncteur $G^{(r)}$ est la r -torsion de Frobenius d'un foncteur G quelconque et $\boxtimes^n \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$ est le foncteur $(V_1, \dots, V_n) \mapsto V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

Dans une deuxième partie de la thèse (chapitre 3), nous utilisons les calculs du chapitre 2 pour établir explicitement, sous les conditions $n \geq p^r \ell$, $p > 2$, l'algèbre de cohomologie $H_{\text{rat}}^*(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n \vee (r) \oplus \ell}))$ où G_n désigne le groupe orthogonal $O_{n,n}$ ou le groupe symplectique Sp_n et G_n agit naturellement sur \mathbb{k}^{2n} par multiplication matricielle.

Dans une dernière partie (chapitre 4), nous utilisons la théorie des blocs de la catégorie $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ des foncteurs strictement polynomiaux pour obtenir des résultats d'annulation dans la théorie des foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe [DP61] ou dans la théorie des approximations de Taylor d'un foncteur selon Johnson-McCarthy [JM04] (Goodwillie algébrique).

Table des matières

| | |
|--|-----|
| Chapitre 0. Introduction | 11 |
| 0.1. Foncteurs strictement polynomiaux | 11 |
| 0.2. Calculs des groupes d'extensions de foncteurs strictement polynomiaux | 13 |
| 0.3. Cohomologie rationnel des groupes classiques | 17 |
| 0.4. Des résultats d'annulation | 20 |
| Chapitre 1. Rappels sur les catégories des foncteurs strictement polynomiaux | 27 |
| 1.1. Introduction | 27 |
| 1.2. Rappels généraux sur les catégories | 27 |
| 1.3. Catégories des foncteurs strictement polynomiaux | 35 |
| 1.4. Schémas en groupes affines et cohomologie rationnelle | 46 |
| Chapitre 2. Calculs des groupes d'extensions de foncteurs strictement polynomiaux | 51 |
| 2.1. Introduction | 51 |
| 2.2. Brefs rappels sur les catégories dérivées | 53 |
| 2.3. Structure monoïdale de $\mathcal{P}_{(d_1, \dots, d_n)}$ | 57 |
| 2.4. Groupes d'extensions de la forme $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F, G^{(r)})$ | 59 |
| 2.5. Définition de la classe $\mathfrak{formel}(r, n)$ et premières propriétés | 62 |
| 2.6. Formalité et \mathbb{k} -invariants | 65 |
| 2.7. Étude de la classe $\mathfrak{formel}(r, n)$ | 70 |
| Chapitre 3. Cohomologie des groupes classiques | 77 |
| 3.1. Introduction | 77 |
| 3.2. Préparation | 78 |
| 3.3. Calcul des groupes d'extensions $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^*(\Gamma^{p^r d} \circ X, S^{\mu(r)})$ | 81 |
| 3.4. Cohomologie des groupes orthogonaux et symplectiques | 88 |
| Chapitre 4. Des résultats d'annulation | 93 |
| 4.1. Introduction | 93 |
| 4.2. Théorie des blocs dans $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ | 96 |
| 4.3. Foncteurs dérivés non-additifs et calcul de Goodwillie algébrique | 108 |
| 4.4. Résultats (quasiment) explicites de $L_q S^d(-, n)$ et $H_q(D_n S^d)$ | 117 |
| 4.5. Blocs de $L_q S^d(-, n)$ et $H_q(D_n S^d)$, et résultats d'annulation | 123 |
| Bibliographie | 133 |

Conventions

Nous utilisons les conventions de notation suivantes :

- \mathbb{k} est un corps de caractéristique $p > 0$.
- \mathbb{F}_p est un corps de p éléments et $\overline{\mathbb{F}}_p$ est une clôture algébrique de \mathbb{F}_p .
- \mathbb{Z} est l'ensemble des entiers, \mathbb{N} est le sous-ensemble de \mathbb{Z} des entiers naturels, $\mathbb{Z}_{>0}$ est le sous-ensemble de \mathbb{N} des entiers strictement positifs.
- \mathfrak{S}_d est le groupe symétrique de d lettres.
- E_r est le \mathbb{k} -espace vectoriel gradué de dimension finie, tel que $(E_r)^i$ est égal à \mathbb{k} si $i = 0, 2, \dots, 2p^r - 2$ et 0 sinon.
- $\lfloor - \rfloor$ est la fonction partie entière.
- Si d est un entier naturel, on note $\alpha_p(d)$ la somme des chiffres dans la décomposition p -adique de d .
- Si \mathcal{A} est une catégorie abélienne, on note $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes sur \mathcal{A} .

CHAPITRE 0

Introduction

Contents

| | |
|--|-----------|
| 0.1. Foncteurs strictement polynomiaux | 11 |
| 0.1.1. Représentations rationnelles du groupe général linéaire | 11 |
| 0.1.2. L'algèbre de Schur | 12 |
| 0.1.3. Foncteurs strictement polynomiaux | 13 |
| 0.2. Calculs des groupes d'extensions de foncteurs strictement polynomiaux | 13 |
| 0.2.1. Problème général | 13 |
| 0.2.2. L'adjoint à gauche de la précomposition par la torsion de Frobenius et la classe formelle | 14 |
| 0.2.3. Formalité et \mathbf{k} -invariants | 15 |
| 0.2.4. Résultats principaux | 16 |
| 0.3. Cohomologie rationnel des groupes classiques | 17 |
| 0.3.1. Le problème et résultat principal | 17 |
| 0.3.2. Lien avec les groupes d'extensions dans $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ | 18 |
| 0.3.3. Étape 1 | 19 |
| 0.3.4. Étape 2 | 19 |
| 0.4. Des résultats d'annulation | 20 |
| 0.4.1. Le problème | 20 |
| 0.4.2. La théorie des blocs de \mathcal{P}_d et le critère d'annulation | 21 |
| 0.4.3. Les foncteurs $L(-, n)$ et D_n | 22 |
| 0.4.4. Résultats (quasiment) explicites de $L_q S^d(-, n)$ et $H_q(D_n S^d)$ | 23 |
| 0.4.5. Résultats principaux | 24 |

0.1. Foncteurs strictement polynomiaux

Les travaux présentés dans cette thèse concernent l'étude des représentations et la cohomologie des foncteurs strictement polynomiaux d'une ou plusieurs variables. Ces foncteurs d'une variable ont été introduits par Friedlander-Suslin dans leur article fondamental [FS97]. Des variantes à plusieurs variables sont définies dans [SFB97, FFSS99, FF08, Tou10]. Nous introduisons brièvement dans la section 0.1.1 les foncteurs strictement polynomiaux. Une présentation détaillée est donnée dans le chapitre 1. Dans les trois sections suivantes, nous présenterons nos résultats principaux qui correspondent aux trois chapitres 2, 3 et 4.

0.1.1. Représentations rationnelles du groupe général linéaire. On fixe un corps \mathbf{k} de caractéristique p positive. On désigne par $GL_{n, \mathbf{k}}$ le groupe algébrique général linéaire. On rappelle qu'une représentation rationnelle d'un groupe

algébrique G est un \mathbb{k} -espace vectoriel V muni d'un morphisme de groupes algébriques $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_V$. Un morphisme de représentations de source V et de but W de G est une application \mathbb{k} -linéaire $f : V \rightarrow W$ telle que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}_W \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathrm{GL}_V & & \end{array}$$

La représentation rationnelle (V, ρ) est dite polynomiale si le morphisme ρ peut s'étendre en un morphisme de monoïdes $\mathrm{End}_{n, \mathbb{k}} \rightarrow \mathrm{End}_V$.

On désigne par $\mathcal{Rat}_{\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}}$ (resp. $\mathcal{Pol}_{\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}}$) la catégorie abélienne des représentations rationnelles (resp. polynomiales) de $\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}$. Par définition, $\mathcal{Pol}_{\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{Rat}_{\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}}$. D'après Friedlander-Suslin [FS97], l'inclusion $\mathcal{Pol}_{\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}} \hookrightarrow \mathcal{Rat}_{\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}}$ induit des isomorphismes de groupes d'extensions.

THÉORÈME 0.1.1. *Soient M, N deux représentations polynomiales de $\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}$. Le morphisme canonique suivant est un isomorphisme :*

$$(0.1.1) \quad \mathrm{Ext}_{\mathcal{Pol}_{\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}}}^*(M, N) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{Rat}_{\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}}}^*(M, N).$$

Dans la suite, nous ne nous intéressons qu'aux représentations polynomiales de $\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}$.

Une des propriétés importantes du groupe $\mathrm{GL}_{1, \mathbb{k}}$ est la semisimplicité de ses représentations polynomiales. Précisément, si V est une représentation polynomiale de $\mathrm{GL}_{1, \mathbb{k}}$, alors (V, ρ) se décompose en une somme directe $(V, \rho) = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} (V_d, \rho_d)$ de sous-représentations, où l'action de $\mathrm{GL}_{1, \mathbb{k}}$ sur V_d est donnée par $\rho_d(\lambda)(v) = \rho(\lambda)^d(v)$ où $\lambda \in \mathrm{GL}_{1, \mathbb{k}}$ et $v \in V_d$.

Soit (V, ρ) une représentation polynomiale de $\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}$. On restreint l'action au sous-groupe $\mathrm{GL}_{1, \mathbb{k}}$ des homothéties, on obtient une décomposition $(V, \rho) = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} (V_d, \rho_d)$. Comme les homothéties appartiennent au centre de $\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}$, les V_d sont stables par l'action de $\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}$. La représentation (V, ρ) est dite homogène de degré d si $V = V_d$.

On note $\mathcal{Pol}_{d, \mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Pol}_{\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}}$ dont les objets sont des représentations homogènes de degré d . On a donc une décomposition

$$(0.1.2) \quad \mathcal{Pol}_{\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}} = \prod_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{Pol}_{d, \mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}}.$$

0.1.2. L'algèbre de Schur. La catégorie $\mathcal{Pol}_{d, \mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}}$ est équivalente à la catégorie des modules sur une algèbre de dimension finie, appelée *algèbre de Schur*. Ces algèbres apparaissent dans les travaux de Schur [Sch73a] sur les représentations polynomiales de $\mathrm{GL}_{n, \mathbb{C}}$. Le rôle de cette algèbre est souligné par Green [Gre07].

Précisément, le groupe symétrique \mathfrak{S}_d agit sur $(\mathbb{k}^n)^{\otimes d}$ par permutation des facteurs. L'algèbre de Schur $S_{\mathbb{k}}(n, d)$ est l'algèbre des endomorphismes \mathfrak{S}_d -équivariants de $(\mathbb{k}^n)^{\otimes d}$, c'est-à-dire qu'on a $S_{\mathbb{k}}(n, d) = \mathrm{End}_{\mathbb{k}\mathfrak{S}_d} \left((\mathbb{k}^n)^{\otimes d} \right)$. On a donc une équivalence de catégories [Gre07] :

$$(0.1.3) \quad \mathcal{Pol}_{d, \mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}} \simeq S_{\mathbb{k}}(n, d)\text{-Mod}.$$

0.1.3. Foncteurs strictement polynomiaux. Dans ce paragraphe, nous introduisons les foncteurs strictement polynomiaux en suivant Pirashvili [Pir03].

Le foncteur canonique $S(n, d)\text{-Mod} \rightarrow S(n+1, d)\text{-Mod}$ qui envoie un $S(n, d)$ -module M vers $\text{Hom}_{\mathbb{k}\mathfrak{S}_d}((\mathbb{k}^n)^{\otimes d}, (\mathbb{k}^{n+1})^{\otimes d}) \otimes_{S(n, d)} M$ est une équivalence de catégories si $n \geq d$ [Gre07]. On cherche une catégorie qui ne dépend que de d et qui contient les informations stables des représentations sur $S(n, d)$.

De façon analogue à la théorie des représentations génériques de Kuhn [Kuh94], on considère la catégorie de Schur $\Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Les objets de $\Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ sont ceux de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, c'est-à-dire les \mathbb{k} -espaces vectoriels de dimension finie. Les morphismes dans $\Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ sont donnés par $\text{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}}}(V, W) = \text{Hom}_{\mathbb{k}\mathfrak{S}_d}(V^{\otimes d}, W^{\otimes d})$.

Par la définition, on a $\text{End}_{\Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}}}(\mathbb{k}^n) = S_{\mathbb{k}}(n, d)$. Un *foncteur strictement polynomial* homogène de degré d est un foncteur \mathbb{k} -linéaire de $\Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ vers $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. On note \mathcal{P}_d la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux homogènes de degré d et $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ la somme directe des catégories \mathcal{P}_d avec $d = 0, 1, \dots$

$$(0.1.4) \quad \mathcal{P}_{\mathbb{k}} = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_d.$$

Soit $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ un n -uplet d'entiers naturels. On note $\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ la catégorie $\bigotimes_{i=1}^n \Gamma^{d_i} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. On note par $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ la catégorie des foncteurs \mathbb{k} -linéaires de $\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ vers la catégorie $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Un objet de cette catégorie est appelé un foncteur strictement polynomial homogène de degré \underline{d} . On note $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(\underline{d})$ la somme des catégories $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ pour tous les n -uplets d'entiers naturels \underline{d} .

NOTATION 0.1.2 (Section 1.3). Soient $F, G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$ et \underline{V} un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$.

- (1) On désigne respectivement $\otimes^d, S^d, \Lambda^d, \Gamma^d$ le foncteur d -ième puissance tensorielle, d -ième puissance symétrique, d -ième puissance extérieure, d -ième puissance divisée.
- (2) Le dual F^{\sharp} du foncteur F est défini par $F^{\sharp}(\underline{V}) = F(\underline{V}^{\vee})^{\vee}$ où $(-)^{\vee}$ est la dualité \mathbb{k} -linéaire.
- (3) Le foncteur à paramètre $F_{\underline{V}}$ est défini par $F_{\underline{V}}(\underline{W}) = F(V_1 \otimes W_1, \dots, V_n \otimes W_n)$, où \underline{W} est un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. On désigne par $F^{\underline{V}}$ le foncteur $F_{\underline{V}^{\vee}}$.
- (4) Le foncteur Hom-interne $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(F, G) \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$ est défini par

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(F, G)(\underline{V}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(F, G_{\underline{V}}).$$

- (5) On note $\mathbf{Ch}(\mathcal{P}_{\underline{d}})$ la catégorie des complexes sur $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ et $\mathbf{D}^b(\mathcal{P}_{\underline{d}})$ la catégorie dérivée bornée de la catégorie $\mathcal{P}_{\underline{d}}$.
- (6) On note $\mathbf{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(-, -)$ le foncteur dérivé total à droite du foncteur Hom-interne.

0.2. Calculs des groupes d'extensions de foncteurs strictement polynomiaux

0.2.1. Problème général. Dans le chapitre 2, nous étudions l'influence de la torsion de Frobenius sur les groupes d'extensions dans les catégories des foncteurs strictement polynomiaux. La précomposition par le foncteur de r -ième torsion de

Frobenius $I^{(r)} \in \mathcal{P}_{p^r}$ induit un foncteur $(-)^{(r)} : \mathcal{P}_{\underline{d}} \rightarrow \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$. Le problème que nous considérons est le suivant.

PROBLÈME 0.2.1. *Étudier des groupes d'extensions de la forme suivante, où $F \in \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$ et $G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$:*

$$(0.2.1) \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}^* \left(F, G^{(r)} \right).$$

Pourquoi nous intéressons-nous aux groupes d'extensions de la forme abstraite (0.2.1)? La réponse est que pour calculer des cohomologies du groupe orthogonal $O_{n,n}$ et symplectique Sp_n dans le chapitre suivant, nous avons besoin de calculer des groupes d'extensions de la forme

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \otimes^n, G^{(r)} \right).$$

On donne des cas particuliers de (0.2.1).

- L'étude des groupes d'extensions de la forme

$$(0.2.2) \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_{p^r d}}^* \left(F^{(r)}, G^{(r)} \right)$$

a été effectuée dans [FS97, FFSS99, Cha05, Cha11, Tou12, Tou13a].

- L'étude des groupes d'extensions de la forme

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{p^r d}}^* \left(\Lambda^{p^r d}, G^{(r)} \right), \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_{p^r d}}^* \left(S^{p^r d}, G^{(r)} \right)$$

est une application de la théorie de dualité de Ringel développée par Chalupnik [Cha08] sous le nom "dualité de Koszul", voir aussi [Tou13c].

- L'étude des groupes d'extensions de la forme

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{(p^r d, p^r d)}}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^2, G^{(r)} \right)$$

a été effectuée dans [Tou13a].

Pour obtenir des calculs d'extensions du type (0.2.1) (voir le théorème 0.2.13) on adaptera la méthode développée dans [Cha11, Tou13a] et aussi les résultats ci-dessus dans les cas particuliers.

0.2.2. L'adjoint à gauche de la précomposition par la torsion de Frobenius et la classe formelle. Pour calculer les groupes d'extensions (0.2.2), l'idée de Chalupnik est d'utiliser l'adjoint de la précomposition par la torsion de Frobenius.

Pour chaque entier naturel r , on note $\ell^r : \mathcal{P}_{p^r \underline{d}} \rightarrow \mathcal{P}_{\underline{d}}$ l'adjoint à gauche du foncteur $(-)^{(r)} : \mathcal{P}_{\underline{d}} \rightarrow \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$. La formule explicite de ℓ^r est la suivante :

$$\ell^r(F)^\sharp(V) = \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}} \left(F, \left(S_{\underline{V}}^{\boxtimes \underline{d}} \right)^\sharp \right)$$

L'isomorphisme d'adjonction induit des isomorphismes naturels en $F \in \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$ et $G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$, où $\mathbf{L}\ell^r$ est le foncteur dérivé total à gauche de ℓ^r :

$$(0.2.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}} \left(F, G^{(r)} \right) &\simeq \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}} \left(\mathbf{L}\ell^r(F), G \right), \\ \mathbf{L}\ell^r(F)^{(r)} &\simeq \mathbf{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}} \left(F, S^{\boxtimes \underline{d}(r)} \right). \end{aligned}$$

Comme une application de (0.2.3), on a le résultat suivant.

PROPOSITION 0.2.2 (Corollaire 2.4.7). Soient $F \in \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$ et $G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$. Si le complexe $\mathbf{L}^r(F)$ est formel, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme $\mathbf{L}^r(F) \simeq H_* \mathbf{L}^r(F)$ dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}^b(\mathcal{P}_{\underline{d}})$, alors pour tout k on a un isomorphisme naturel en G :

$$(0.2.4) \quad \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}^k(F, G^{(r)}) \simeq \bigoplus_{i+j=k} \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^i(H_j \mathbf{L}^r(F), G)^{(r)}.$$

La proposition 0.2.2 conduit à introduire les notations suivantes.

DÉFINITION 0.2.3 (Définition 2.5.1). Soient r, n deux entiers naturels, $n > 0$. On désigne par $\mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, n)$ la classe des foncteurs strictement polynomiaux F de n variables tels que le complexe $\mathbf{L}^r(F)$ est formel.

Nous donnons quelques exemples et quelques propriétés simples de la classe $\mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, n)$.

- EXEMPLE 0.2.4 (Exemple 2.5.3). (1) La classe $\mathfrak{F}\mathrm{ormel}(0, n)$ contient tous les foncteurs strictement polynomiaux.
- (2) Si $F \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$ est un foncteur homogène de degré \underline{d} qui n'est pas un multiple de p , alors $F \in \mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, n)$ pour tout r .
- (3) Si le foncteur F est projectif, il appartient à $\mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, n)$ pour tout r .

PROPOSITION 0.2.5 (Propositions 2.5.5, 2.5.8).

- (1) La classe $\mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, n)$ est stable par les opérations suivantes : la somme directe, le produit tensoriel, le foncteur à paramètre.
- (2) Si $F \in \mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, n)$ alors $F \circ \Delta_n \in \mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, 1)$, où $\Delta_n : \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n}$ est le foncteur diagonal.

0.2.3. Formalité et \mathbb{k} -invariants. En utilisant la théorie des \mathbb{k} -invariants algébriques de Dold [Dol60], on peut démontrer le résultat général suivant.

THÉORÈME 0.2.6 (Théorème 2.6.5). Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux catégories abéliennes. Soit $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact. Les deux conditions suivantes sur le foncteur ϕ sont équivalentes :

- (1) Le complexe $C \in \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ est formel dès que le complexe $\phi(C)$ est formel.
- (2) Pour $i \geq 2$, les applications $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A, B) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^i(\phi A, \phi B)$ induites par ϕ sont des monomorphismes.

En utilisant ce théorème et l'injectivité de la torsion de Frobenius, on obtient le théorème suivant qui est une généralisation à plusieurs variables d'un résultat de van der Kallen [vdK13].

THÉORÈME 0.2.7 (Théorème 2.6.12). Soient $C \in \mathbf{Ch}(\mathcal{P}_{\underline{d}})$ un complexe fini et r un entier naturel. Le complexe C est formel si et seulement si le complexe $C^{(r)}$ l'est aussi.

Une autre application directe du théorème 0.2.6 est le résultat suivant, qui donne un lien entre la formalité et la paramétrisation.

PROPOSITION 0.2.8 (Proposition 2.6.14). Soient $C \in \mathbf{Ch}(\mathcal{P}_{\underline{d}})$ un complexe fini et r un entier naturel. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) Le complexe C est formel.

- (2) Le complexe $C_{\underline{V}}$ est formel pour tous les n -uplets \underline{V} d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$.
- (3) Il existe un n -uplet \underline{V} d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ tel que $V_i \neq 0$ pour tout i et que le complexe $C_{\underline{V}}$ est formel.

0.2.4. Résultats principaux. Nous continuons d'étudier la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$. De plus, pour obtenir des calculs explicites, il faut également déterminer explicitement $H_*\mathbf{L}\ell^r(F)$ pour $F \in \mathfrak{Formel}(r, n)$.

Pour chaque entier naturel r , on note E_r le \mathbb{k} -espace vectoriel gradué de dimension totale finie défini par $(E_r)^i$ étant égal à \mathbb{k} si $i = 0, 2, \dots, 2p^r - 2$ et 0 sinon. Le résultat important suivant est la version à paramètre d'un cas particulier de [Tou12, Lemma 4.4 et Theorem 4.6] (voir aussi [Tou13a, Proposition 13]).

THÉORÈME 0.2.9 (Touzé). *Soit $F \in \mathcal{P}_d$. Il existe un isomorphisme naturel en F :*

$$\mathbf{RHom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F^{(r)}, S^{d(r)}) \simeq (F^{E_r})^{\sharp(r)}.$$

Dans le théorème suivant, nous généralisons le théorème 0.2.9 à plusieurs variables et nous en tirons les conséquences pour la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$.

THÉORÈME 0.2.10 (Théorème 2.7.3). *Soient F, G deux foncteurs strictement polynomiaux de n variables.*

- (1) Le foncteur $F^{(r)}$ appartient à $\mathfrak{Formel}(r, n)$ et $H_*\mathbf{L}\ell^r(F^{(r)}) \simeq F^{\Delta_n(E_r)}$.
- (2) Il existe un isomorphisme naturel en G

$$\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F^{(r)}, G^{(r)}) \simeq \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F^{\Delta_n(E_r)}, G)^{(r)}.$$

- (3) Si F appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$ alors $F^{(1)}$ appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r+1, n)$. De plus, on a $H_*\mathbf{L}\ell^{r+1}(F^{(1)}) \simeq H_*\mathbf{L}\ell^r(F)^{\Delta_n(E_1)}$.
- (4) Réciproquement, si un foncteur $F^{(1)}$ appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r+1, n)$, alors F appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$.

Ensuite, nous rappelons un théorème de Chahupnik [Cha08]. Si X désigne l'un des symboles Γ, Λ, S , on note ϵ_X l'entier 0, 1, 2 respectivement.

THÉORÈME 0.2.11 (Chahupnik). *Soit X l'un des symboles Γ, Λ, S . On a un isomorphisme*

$$\mathbf{RHom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(X^{p^r d}, S^{d(r)}) \simeq X^{d\sharp(r)}[\epsilon_X(p^r d - d)].$$

Pour démontrer notre résultat final, nous avons besoin d'une formule qui généralise le résultat suivant de Franjou-Friedlander [FF08, Proposition 2.2], où F_1, F_2 sont des objets de $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ et $F_1 \boxtimes F_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(2)$ est le foncteur $(V_1, V_1) \mapsto F_1(V_1) \otimes F_2(V_2)$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(2)}(\Gamma^d \circ \boxtimes^2, F_1 \boxtimes F_2) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F_1^{\sharp}, F_2), \\ \mathbf{RHom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(2)}(\Gamma^d \circ \boxtimes^2, F_1 \boxtimes F_2) &\simeq \mathbf{RHom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F_1^{\sharp}, F_2). \end{aligned}$$

On définit $F_1 \otimes_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}} F_2$ le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F_1, F_2^{\sharp})^{\sharp}$. On obtient un produit monoïdal symétrique de \mathcal{P}_d . On note $\otimes_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^{\mathbf{L}}$ le foncteur dérivé total à gauche de $\otimes_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}$.

THÉORÈME 0.2.12 (Théorème 2.7.5). Soient F_1, \dots, F_n et F des objets de \mathcal{P}_d . On a des isomorphismes naturels en F_1, \dots, F_n et F :

$$(0.2.5) \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(F \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n F_i \right) \simeq \left(F \otimes_{\mathcal{P}_k} F_1^\# \otimes_{\mathcal{P}_k} \cdots \otimes_{\mathcal{P}_k} F_n^\# \right)^\# \circ \boxtimes^n,$$

$$(0.2.6) \quad \underline{\mathrm{RHom}}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(F \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n F_i \right) \simeq \left(F \otimes_{\mathcal{P}_k}^{\mathbf{L}} F_1^\# \otimes_{\mathcal{P}_k}^{\mathbf{L}} \cdots \otimes_{\mathcal{P}_k}^{\mathbf{L}} F_n^\# \right)^\# \circ \boxtimes^n.$$

En utilisant les théorèmes 0.2.11 et 0.2.12, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 0.2.13 (Théorème 2.7.10). Soit X l'un des symboles Γ, Λ, S . Soient $F \in \mathcal{P}_k$ et $G \in \mathcal{P}_k(n)$.

- (1) Le foncteur $X^d \circ \boxtimes^n$ appartient à $\mathfrak{Formel}(r, n)$ pour tout r et $\mathbf{L}^r(X^d \circ \boxtimes^n)$ est isomorphe à $X^{e, E_r^{\otimes n-1}}[\epsilon_X(d-e)] \circ \boxtimes^n$ si d est de la forme $p^r e$, $e \in \mathbb{N}$ et à 0 sinon.
- (2) Le foncteur $X^d \circ \otimes^n$ appartient à $\mathfrak{Formel}(r, 1)$ pour tout r et $\mathbf{L}^r(X^d \circ \otimes^n)$ est isomorphe à $X^{e, E_r^{\otimes n-1}}[\epsilon_X(d-e)] \circ \otimes^n$ si d est de la forme $p^r e$, $e \in \mathbb{N}$ et à 0 sinon.
- (3) Il existe des isomorphismes gradués naturels en F, G :

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(X^{p^r d} \circ \boxtimes^n, G^{(r)} \right) &\simeq \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_k(n)}^{*-\epsilon_X(p^r d-d)} \left(X^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n, G \right)^{(r)}, \\ \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_k}^* \left(X^{p^r d} \circ \otimes^n, F^{(r)} \right) &\simeq \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_k}^{*-\epsilon_X(p^r d-d)} \left(X^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \otimes^n, F \right)^{(r)}. \end{aligned}$$

0.3. Cohomologie rationnel des groupes classiques

0.3.1. Le problème et résultat principal. Dans ce chapitre, on suppose que la caractéristique p du corps \mathbb{k} est *impaire*. Le but de cette section est de calculer complètement un exemple d'algèbres de cohomologie pour les groupes algébriques symplectiques Sp_n ou orthogonaux $\mathrm{O}_{n,n}$. Plus précisément, si $G_n = \mathrm{Sp}_n$ ou $\mathrm{O}_{n,n}$, alors G_n agit naturellement sur l'espace vectoriel \mathbb{k}^{2n} (par multiplication matricielle).

En appliquant le r -ème foncteur de torsion de Frobenius (pour $r \geq 0$), et en prenant ℓ copies de la représentation obtenue, on obtient donc une action de G_n sur $\mathbb{k}^{2n(r) \oplus \ell}$, donc une action par automorphismes d'algèbres sur la \mathbb{k} -algèbre $S^*(\mathbb{k}^{2n\nu(r) \oplus \ell})$ des polynômes sur $\mathbb{k}^{2n(r) \oplus \ell}$, où $\mathbb{k}^{2n\nu}$ désigne la représentation duale de \mathbb{k}^{2n} . Le problème auquel nous nous intéressons dans ce chapitre est le suivant.

PROBLÈME 0.3.1. Calculer explicitement l'algèbre de cohomologie :

$$(0.3.1) \quad H_{\mathrm{rat}}^* \left(G_n, S^* \left(\mathbb{k}^{2n\nu(r) \oplus \ell} \right) \right).$$

Les sous-algèbres de cohomologie (0.3.1) de degré zéro, ne dépendent pas de r (car appliquer la torsion de Frobenius ne change pas les invariants). Si $r = 0$, la cohomologie est nulle en degré strictement positif, et les théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants des groupes symplectiques et orthogonaux [dCP76] donnent des générateurs et des relations explicites des \mathbb{k} -algèbres (0.3.1). Nous rappelons maintenant ces énoncés. Pour traiter les deux cas simultanément, on introduit quelques notations. On désigne par (e_i^\vee) la base duale de la base canonique de \mathbb{k}^{2n} . Pour chacun des groupes G_n on définit un foncteur X_G , un élément particulier $\omega_{G_n} \in X_G(\mathbb{k}^{2n})$ et un ensemble de paires d'indices entiers \mathcal{J}_{G_n} de la façon suivante.

| | | |
|---------------------|---|--|
| G_n | Sp_n | $\mathrm{O}_{n,n}$ |
| X_G | Λ^2 | S^2 |
| ω_{G_n} | $\sum_{i=1}^n e_i^\vee \wedge e_{n+i}^\vee$ | $\sum_{i=1}^n e_i^\vee e_{n+i}^\vee$ |
| \mathcal{J}_{G_n} | $\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq \ell\}$ | $\{(i, j) : 1 \leq i \leq j \leq \ell\}$ |

On définit des invariants $(i|j)_{G_n} \in S^2(\mathbb{k}^{2n\nu\oplus\ell})$ avec $(i, j) \in \mathcal{J}_{G_n}$ sous l'action de G_n en posant

$$(i|j)_{G_n}(x_1, \dots, x_\ell) = \omega_{G_n}(x_i, x_j).$$

Les théorèmes fondamentaux donnent l'algèbre d'invariants $H_{\mathrm{rat}}^0(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n\nu\oplus\ell}))$ en fonction des éléments $(i|j)_{G_n}$.

THÉORÈME 0.3.2 ([dCP76]). *L'ensemble $\{(i|j)_{G_n} : (i, j) \in \mathcal{J}_{G_n}\}$ est un système de générateurs de l'algèbre $H_{\mathrm{rat}}^0(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n\nu\oplus\ell}))$. De plus, si $n \geq \ell$, il n'y a pas de relation entre les $(i|j)_{G_n}$.*

Notre résultat principal dans ce chapitre 3 est le théorème suivant.

THÉORÈME 0.3.3 (Théorème 3.4.11). *Si $n \geq p^r \ell$, l'algèbre de cohomologie $H_{\mathrm{rat}}^*(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n\nu(r)\oplus\ell}))$ est une algèbre symétrique sur un ensemble de générateurs*

$$(0.3.2) \quad (h|i|j)_{G_n} \in H_{\mathrm{rat}}^{2h}(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n\nu(r)\oplus\ell}))$$

où $0 \leq h < p^r, 0 \leq i \leq j \leq \ell$ et $i \neq j$ si G_n est le groupe symplectique Sp_n . De plus, il n'y a pas de relation entre les $(h|i|j)_{G_n}$.

Le cas $r = 0$ du théorème 0.3.3 correspond à un cas particulier du théorème 0.3.2. Nous ne savons pas si les éléments $(h|i|j)$ forment un système de générateurs de l'algèbre (0.3.1) si $n < p^r \ell$.

Nous remarquons enfin que pour $n \geq p^r \min\{k, \ell\}$ l'algèbre de cohomologie $H_{\mathrm{rat}}^*(\mathrm{GL}_{n, \mathbb{k}}, S^*(\mathbb{k}^{n\nu(r)\oplus k} \oplus \mathbb{k}^{n(r)\oplus\ell}))$ est calculée dans [Tou12, Theorem 6.15] par Touzé. En fait, le théorème 0.3.3 ci-dessus est la version pour les groupes symplectiques et orthogonaux d'un résultat de Touzé.

0.3.2. Lien avec les groupes d'extensions dans $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$. Nous rappelons, d'après [Tou10], le lien entre la cohomologie des groupes symplectiques et orthogonaux et les calculs d'extensions dans $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$. La forme standard $\omega_G \in X_G(\mathbb{k}^{2n})$ est invariante sous l'action de G_n . On a donc une application G_n -équivariante $\iota_d : \mathbb{k} \rightarrow \Gamma^d(X_G(\mathbb{k}^{2n\nu}))$ qui envoie λ sur $\lambda\omega_{G_n}^{\otimes d}$.

On définit alors une application graduée compatible aux cup produits, notée $\phi_{G_n, F}$, par évaluation sur $\mathbb{k}^{2n\nu}$ et par restriction le long de ι_d :

$$(0.3.3) \quad \phi_{G_n, F} : \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ X_G, F \right) \rightarrow H_{\mathrm{rat}}^*(G_n, F(\mathbb{k}^{2n\nu})).$$

THÉORÈME 0.3.4 ([Tou10]). *Soit F un foncteur strictement polynomial homogène de degré d . Si $2n \geq d$ alors le morphisme $\phi_{G_n, F}$ de (0.3.1) est un isomorphisme.*

L'algèbre de cohomologie (0.3.1) peut être décomposée dans la forme suivante :

$$\begin{aligned} H_{\text{rat}}^* \left(G_n, S^* \left(\mathbb{k}^{2n \vee (r) \oplus \ell} \right) \right) &= \bigoplus_{d \geq 0} H_{\text{rat}}^* \left(G_n, S^d \left(\mathbb{k}^{2n \vee (r) \oplus \ell} \right) \right) \\ &= \bigoplus_{d \geq 0} H_{\text{rat}}^* \left(G_n, S_{\mathbb{k}^\ell}^{d(r)} \left(\mathbb{k}^{2n \vee} \right) \right). \end{aligned}$$

En utilisant les morphismes (0.3.3) et la décomposition ci-dessus, on obtient un morphisme de \mathbb{k} -algèbres graduées $\Phi_{G_n} = \bigoplus_{d \geq 0} \phi_{G_n, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)}}$:

$$(0.3.4) \quad \bigoplus_{d \geq 0} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ X_G, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)} \right) \xrightarrow{\Phi_{G_n}} H_{\text{rat}}^* \left(G_n, S^* \left(\mathbb{k}^{2n \vee (r) \oplus \ell} \right) \right).$$

La démonstration du théorème 0.3.3 est donc divisée en deux étapes :

Étape 1 : Nous calculons l'algèbre à la source du morphisme Φ_{G_n} .

Étape 2 : Nous montrons que le morphisme Φ_{G_n} est un isomorphisme si $n \geq p^r \ell$. Pour cela, on utilise la notion des foncteurs n -corésolus introduite par Touzé [Tou12] pour résoudre un problème analogue.

0.3.3. Étape 1. L'objectif de cette étape est de démontrer le lemme suivant, où E_r est l'espace vectoriel gradué donné par $(E_r)^i = \mathbb{k}$ si $i = 0, 2, \dots, 2p^r - 2$ et 0 sinon.

LEMME 0.3.5 (Lemme 3.4.4). *Il existe un isomorphisme d'algèbres*

$$\bigoplus_{d \geq 0} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ X_G, S_{\mathbb{k}^\ell}^{d(r)} \right) \simeq S^* \left(E_r \otimes X_G(\mathbb{k}^\ell) \right).$$

Pour la démonstration, on remarque que X_G est un facteur direct de \otimes^2 car $p > 2$. Il suffit alors de calculer les groupes d'extensions compatibles avec les produits et naturels en \otimes^2 :

$$(0.3.5) \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \otimes^2, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)} \right).$$

D'après le chapitre 2, ce groupe (0.3.5) est isomorphe à $\text{Hom}_{\mathcal{P}_k} \left(\Gamma^{d, E_r^{\otimes}} \circ \otimes^2, S_{\mathbb{k}^{2\ell}}^{2d} \right)$. Mais nous ne savons pas démontrer la compatibilité de cet isomorphisme avec les produits et l'action de \mathfrak{S}_2 . Il faut donc établir un isomorphisme similaire qui est compatible avec les produits et l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_2 . La construction du nouvel isomorphisme utilise de façon essentielle l'ancien isomorphisme.

0.3.4. Étape 2. Pour calculer les algèbres de cohomologie (0.3.1), nous avons besoin de calculer des groupes de cohomologie de la forme $H_{\text{rat}}^* \left(G_n, F(\mathbb{k}^{2n \vee}) \right)$ pour $2n < \deg F$, c'est à dire en dehors des valeurs de n dans le théorème 0.3.4. Nous allons cependant montrer que pour ces mauvaises valeurs de n , le morphisme $\phi_{G_n, F}$ reste un isomorphisme pour les foncteurs F considérés. Nous utilisons pour cela la notion de foncteur n -corésolu introduite dans [Tou12]. Soient $F \in \mathcal{P}_d$ et n un entier positif. On rappelle que le morphisme $\theta_F = \theta_{F, \mathbb{k}^n} : \Gamma^{d, \mathbb{k}^n} \otimes F(\mathbb{k}^n) \rightarrow F$ est défini pour tout $V \in \mathcal{V}_k$ par

$$\Gamma^d(\text{Hom}(\mathbb{k}^n, V)) \otimes F(\mathbb{k}^n) \rightarrow F(V), \quad f \otimes x \mapsto F(f)(x).$$

De façon duale, on a un morphisme $(\theta_{F^\#})^\sharp : F \rightarrow S_{\mathbb{k}^n}^d \otimes F(\mathbb{k}^{n \vee})$.

DÉFINITION 0.3.6 (Définition 3.4.5). Un foncteur $F \in \mathcal{P}_d$ est dit n -coengendré si $\theta_{F^\#}$ est un épimorphisme, ou de manière équivalente, si $(\theta_{F^\#})^\#$ est un monomorphisme.

Un foncteur $F \in \mathcal{P}_d$ est dit n -corésolu s'il existe une corésolution injective J_F^\bullet de F telle que les foncteurs injectifs J_F^i sont des foncteurs n -coengendrés.

Les corésolutions de Troesch [Tro05] des foncteurs $S_{\mathbb{k}^\ell}^{d(r)}$ sont des p^r -corésolutions.

THÉORÈME 0.3.7 (Théorème 3.4.10). Soit $F \in \mathcal{P}_d$ un foncteur $2n$ -corésolu. Le morphisme $\phi_{G_n, F}$ est alors un isomorphisme.

Par conséquent, si $n \geq p^r \ell$, le morphisme Φ_{G_n} est un isomorphisme.

0.4. Des résultats d'annulation

Dans ce chapitre 4, on utilise la théorie des blocs de la catégorie $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ des foncteurs strictement polynomiaux pour obtenir des résultats d'annulation dans la théorie des foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe [DP61] ou dans la théorie des approximations de Taylor d'un foncteur selon Johnson-McCarthy [JM04] (Goodwillie algébrique).

0.4.1. Le problème. Soit $F : \text{Vect}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$ un foncteur. Pour étudier le foncteur F , on dispose de plusieurs théories de dérivation de F :

- (1) La théorie des foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe [DP61]. Pour chaque paire (q, n) d'entiers naturels, on a un foncteur $L_q F(-, n) : \text{Vect}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$ par la formule

$$(0.4.1) \quad L_q F(V, n) = H_q \mathcal{NFK}(V[-n]), \quad V \in \text{Vect}_{\mathbb{k}}$$

où les foncteurs $\mathcal{N} : s \text{Vect}_{\mathbb{k}} \rightleftarrows \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\text{Vect}_{\mathbb{k}}) : \mathcal{K}$ sont donnés par l'équivalence de Dold-Kan.

- (2) La théorie des approximations de Taylor d'un foncteur selon Johnson-McCarthy [JM04] (Goodwillie algébrique). Pour chaque paire (q, n) d'entiers naturels, on a un foncteur $H_q(D_n F) : \text{Vect}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$.

$$(0.4.2) \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ P_3 F \longleftarrow D_3 F \\ \downarrow \\ P_2 F \longleftarrow D_2 F \\ \downarrow \\ F \longrightarrow P_1 F \longleftarrow D_1 F \end{array}$$

Les deux théories sont reliées par les isomorphismes suivants :

$$(0.4.3) \quad H_q(D_1 F) \simeq L_{q+n} F(-, n), \quad n \geq q.$$

Le problème général est le suivant.

PROBLÈME 0.4.1. Calculer explicitement les foncteurs dérivés $L_q F(-, n)$ et $H_q(D_n F)$.

Le cas central est le cas $F = S^d$. Le calcul des foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe $L_q S^d(-, n)$ est effectué par Cartan [Car55], Dold-Puppe [DP61], [Bou67b], Touzé [Tou14]. Ils ont obtenu des formules explicites pour $L_q S^d(-, n)$. Ces calculs sont compliqués. Récemment, dans [BM11], les auteurs ont donné une démonstration simple pour certains cas particuliers. Pour les approximations de Taylor $H_q(D_n S^d)$ le résultat est incomplet.

- Dans le cas $n = 1$, on peut interpréter $H_q(D_1 S^d)$ comme des foncteurs dérivés stables au sens de Dold-Puppe [JM98], et le résultat est donc connu d'après Cartan [Car55], Bousfield [Bou67b], ou Betley [Bet01].
- Dans le cas $n = d$, on peut interpréter $H_q(D_d S^d)$ comme l'homologie du groupe symétrique \mathfrak{S}_d à coefficients dans \otimes^d . Cette homologie est calculée récemment par Cohen-Hemmer-Nakano [CHN10].
- Dans les cas où $1 < n < d$, en utilisant les résultats de [JM04, JM08], nous proposons une suite spectrale pour calculer $H_q(D_n S^d)$.
- Si $n > d$ alors $H_q(D_n S^d) = 0$ pour des raisons de degré.

Les résultats pour les foncteurs dérivés de S^d sont compliqués, et il est encore plus difficile de calculer les foncteurs $L_q F(-, n)$ et $H_q(D_n F)$ pour un foncteur F quelconque. Dans le chapitre 4, on considère le problème suivant.

PROBLÈME 0.4.2. *Donner un critère effectif sur le foncteur F et le \mathbb{k} -espace vectoriel V pour que les espaces vectoriels $L_q F(V, n)$ et $H_q(D_n F)(V)$ s'annulent.*

Si F est un foncteur strictement polynomial, les foncteurs $L_q F(-, n)$ et $H_q(D_n F)$ le sont aussi (voir [Bou67a] pour les foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe). Dans la suite, on suppose que $F \in \mathcal{P}_d$ et alors les foncteurs $L_q F(-, n), H_q(D_n F)$ sont également des foncteurs strictement polynomiaux.

0.4.2. La théorie des blocs de \mathcal{P}_d et le critère d'annulation. Les blocs de la catégorie des représentations des algèbres de Schur sont connus d'après Donkin [Don87]. Comme les catégories \mathcal{P}_d des foncteurs strictement polynomiaux homogènes de degré d sont équivalentes à des catégories de modules sur l'algèbre de Schur [FS97], on a la théorie des blocs dans la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux.

On associe à chaque foncteur strictement polynomial F un ensemble de partitions $\mathfrak{B}\mathfrak{I}(F)$, l'ensemble des blocs de F . Le résultat clé de la théorie des blocs dont on a besoin est le suivant.

LEMME 0.4.3 (Critère d'annulation, Lemme 4.2.30). *Soient F et G deux objets de \mathcal{P}_d . Si $\mathfrak{B}\mathfrak{I}(F) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{I}(G) = \emptyset$ alors $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(F, G) = 0$.*

L'idée d'utiliser cette théorie pour d'obtenir des résultats d'annulation provient de Touzé [Tou13c]. Cependant, la méthode que l'on utilisera est différente de celle de [Tou13c]. On remarque qu'il existe un autre résultat d'annulation, le résultat de Pirashvili [FS97, théorème 2.13] qui dit que si A est un foncteur additif et F, G sont des foncteurs réduits alors

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_d}^*(A, F \otimes G) = 0 .$$

Ce résultat d'annulation est de nature différente du résultat d'annulation du lemme 0.4.3.

La proposition suivante donne des idées par lesquelles on peut déterminer les blocs $\mathfrak{B}\mathfrak{I}(F)$. Pour une partition λ , on note S_λ (resp. L_λ) le foncteur de Schur (resp. foncteur simple) correspondant à λ .

PROPOSITION 0.4.4 (Proposition 4.2.20). *Soient λ, μ deux partitions, F un objet de $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ et G un sous-objet de F . On a :*

$$\begin{aligned}\mathfrak{Bl}(S_\lambda) &= \mathfrak{Bl}(L_\lambda), \\ \mathfrak{Bl}(L_\lambda) &= \mathfrak{Bl}(L_{\lambda+p\mu}), \\ \mathfrak{Bl}(F) &= \mathfrak{Bl}(G) \cup \mathfrak{Bl}(F/G), \\ \mathfrak{Bl}(F^\sharp) &= \mathfrak{Bl}(F), \\ \mathfrak{Bl}(F^{(1)}) &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } F = 0, \\ \{(0)\} & \text{si } F \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

En général, nous ne savons pas comment déterminer $\mathfrak{Bl}(F \otimes G)$ à partir des blocs $\mathfrak{Bl}(F)$ et $\mathfrak{Bl}(G)$. Heureusement, pour la suite, on n'a besoin que de savoir les blocs des foncteurs du type S_V^d ou $\mathfrak{Bl}(F \otimes G^{(1)})$. En utilisant la règle de Pieri et le théorème du produit tensoriel de Steinberg, on a le résultat clé suivant.

THÉORÈME 0.4.5 (Théorème 4.2.23, Proposition 4.2.21). *Soient F, G deux foncteurs strictement polynomiaux.*

- (1) *Si $G \neq 0$ alors $\mathfrak{Bl}(F \otimes G^{(1)}) \simeq \mathfrak{Bl}(F)$.*
- (2) *On peut déterminer explicitement $\mathfrak{Bl}(S_V^d)$ à partir de d et $\dim V$.*

De plus, on démontre que le foncteur de changement de base préserve les blocs.

PROPOSITION 0.4.6 (Proposition 4.2.28). *Soient $\mathbb{k} \subset \mathbb{K}$ une extension de corps et $F \in \mathcal{P}_{d, \mathbb{k}}$. Si on note ${}_{\mathbb{K}}F$ l'image de F par le foncteur de changement de base $\mathbb{K}(-) : \mathcal{P}_{d, \mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{P}_{d, \mathbb{K}}$, on a $\mathfrak{Bl}(F) = \mathfrak{Bl}({}_{\mathbb{K}}F)$.*

0.4.3. Les foncteurs $L(-, n)$ et D_n . Pour chaque entier naturel n , on note $L(-, n)$ le foncteur de $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ vers $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_{\mathbb{k}})$ qui envoie un foncteur F vers $\mathcal{NFK}(-[n])$. Par définition, on a des isomorphismes des foncteurs strictement polynomiaux $L_q F(-, n) \simeq H_q L(F, n)$.

Le résultat simple suivant sur les foncteurs $L(-, n)$ et D_n est essentiel pour pouvoir appliquer le critère d'annulation.

PROPOSITION 0.4.7 (Propositions 4.3.11, 4.3.22, Définition 4.2.32). *Si on note Φ l'un des deux foncteurs $L(-, n)$ et D_n , on a alors :*

- (1) *le complexe ΦS^d est un complexe d'injectifs ;*
- (2) *il existe une équivalence d'homotopie $\Phi F \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F^\sharp, \Phi S^d)$ naturelle en F .*

Par conséquence, il existe une suite spectrale de foncteurs strictement polynomiaux, naturelle en F

$$(0.4.4) \quad E_2^{i,j}(F) = \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_a}^i(F^\sharp, H_{-j}(\Phi S^d)) \Rightarrow H_{-i-j}(\Phi F).$$

En utilisant cette proposition et le critère d'annulation, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 0.4.8 (Théorème 4.2.35). *Soit $F \in \mathcal{P}_a, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. On note Φ l'un des deux foncteurs $L(-, n)$ et D_n . Alors $(H_q(\Phi F))(V) = 0$ dès qu'on a*

$$(0.4.5) \quad \mathfrak{Bl}(F) \cap \bigcup_{q \leq j \leq q + \text{inj. dim } F} \mathfrak{Bl}(H_j(\Phi S^d)_V) = \emptyset.$$

0.4.4. Résultats (quasiment) explicites de $L_q S^d(-, n)$ et $H_q(D_n S^d)$.

On rappelle les définitions des mots p -admissibles de Cartan [Car55, pages 9-01 et 10-01]. Dans la suite, seuls les mots p -admissibles de première espèce nous seront utiles. Nous appellerons donc plus simplement mots p -admissibles les mots p -admissibles de première espèce.

DÉFINITION 0.4.9. (1) Cas $p = 2$. Un mot 2-*admissible* \underline{w} est une suite finie de lettres σ, γ_2 telle que : \underline{w} n'est pas vide, la première lettre de \underline{w} est σ et les deux dernières lettres de \underline{w} sont σ, σ .

(2) Cas $p > 2$. Un mot p -*admissible* \underline{w} est une suite finie de lettres σ, γ_p, ϕ_p telle que : \underline{w} n'est pas vide, la première lettre de \underline{w} est σ ou ϕ_p et la dernière lettre de \underline{w} est σ , pour chaque lettre γ_p ou ϕ_p du mot, le nombre de lettres σ situées à droite est pair.

On note \mathcal{W}_p l'ensemble des mots p -admissibles. La *hauteur* $h(\underline{w})$ d'un mot \underline{w} sera, par définition, le nombre de lettres du mot \underline{w} égales à σ ou à ϕ_p ; la *torsion* $t_{\underline{w}}$ de \underline{w} sera, par définition, le nombre de lettres du mot \underline{w} égales à γ_p ou à ϕ_p . Le *degré* d'un mot \underline{w} se définit par récurrence :

$$\begin{aligned} \deg \emptyset &= 0, & \deg(\sigma \underline{w}) &= 1 + \deg \underline{w}, \\ \deg(\gamma_p \underline{w}) &= p \deg \underline{w}, & \deg(\phi_p \underline{w}) &= 2 + p \deg \underline{w}. \end{aligned}$$

NOTATION 0.4.10. Soit V un espace vectoriel gradué de dimension finie en chaque degré, on définit les espaces vectoriels gradués $U(V)$ et $U^\sharp(V)$ respectivement par les formules :

$$\begin{aligned} U(V) &= \begin{cases} \Gamma(V) & \text{si } p = 2, \\ \Gamma(V_{\text{pair}}) \otimes \Lambda(V_{\text{impair}}) & \text{si } p > 2, \end{cases} \\ U^\sharp(V) &= \begin{cases} S(V) & \text{si } p = 2, \\ S(V_{\text{pair}}) \otimes \Lambda(V_{\text{impair}}) & \text{si } p > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

THÉORÈME 0.4.11 ([Tou14, Theorem 10.14]). *On a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux :*

$$\bigoplus_{q, d \in \mathbb{N}} L_q S^d(-, n+2) \simeq U \left(\bigoplus_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} I^{(t_{\underline{w}})}[\deg \underline{w}] \right).$$

Ensuite, nous présentons le résultat de $H_q(D_n S^d)$. Dans le cas $n = 1$, on a besoin juste du résultat suivant.

PROPOSITION 0.4.12 (Proposition 4.4.9). (1) *Si d n'est pas une puissance de p ou si $q < 2(p^r - 1)$, on a $H_q(D_1 S^d) = 0$.*

(2) *Si $q = 2(p^r - 1)$, on a un isomorphisme $H_q(D_1 S^{p^r}) \simeq I^{(r)}$.*

Dans le cas $n = d$, en utilisant les travaux [JM04, CHN10], on a le théorème suivant. On rappelle que \mathbf{P} est l'ensemble de toutes les partitions. On désigne par $\mathbf{P}^{0,1}$ l'ensemble des paires $(\epsilon; \lambda)$ telles que $\lambda \in \mathbf{P}$ et $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{\ell(\lambda)}) \in \{0, 1\}^{\ell(\lambda)}$, $\epsilon_1 = 0$. Le degré d'une partition λ ou d'une paire $(\epsilon; \lambda)$ est respectivement par définition :

$$\deg(\lambda) := \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} 2^{\ell(\lambda)-i} \lambda_i, \quad \deg(\epsilon; \lambda) := \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} p^{\ell(\lambda)-i} (-\epsilon_i + \lambda_i(p-1)).$$

De plus, on définit la longueur de $(\epsilon; \lambda) \in \mathbf{P}^{0,1}$ par $\ell(\epsilon; \lambda) = \ell(\lambda)$. On désigne par $\tilde{\mathbf{P}}$ l'ensemble \mathbf{P} si $p = 2$ et l'ensemble $\mathbf{P}^{0,1}$ si $p > 2$.

THÉORÈME 0.4.13 ([CHN10, Theorem 8.1.4]). *Il existe un isomorphisme bi-gradué dans la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbb{F}_p}$, où la partie $H_q(\mathfrak{S}_d, \otimes^d)$ est de degré (d, q) et $I^{(\ell(\alpha))}[\deg(\alpha)]$ est de degré $(p^{\ell(\alpha)}, \deg(\alpha))$:*

$$\bigoplus_{q, d \in \mathbb{N}} H_q(\mathfrak{S}_d, \otimes^d) \simeq \mathbf{U}^\# \left(\bigoplus_{\alpha \in \tilde{\mathbf{P}}} I^{(\ell(\alpha))}[\deg(\alpha)] \right).$$

Dans le cas $1 < n < d$, on propose une suite spectrale calculant l'homologie du complexe $D_k S^d$.

NOTATION 0.4.14. On note $\tilde{\mathcal{J}}(d, n)$ l'ensemble des suites $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels telles que $d = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i p^i$ et $n = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i$.

PROPOSITION 0.4.15 (Proposition 4.4.21). *Il existe une suite spectrale $E_{k,\ell}^2(D_n S^d) \Rightarrow H_{k+\ell}(D_n S^d)$ où la deuxième page est donnée par :*

$$E_{k,\ell}^2(D_n S^d) = \bigoplus_{\mu \in \tilde{\mathcal{J}}(d,n)} H_k \left(\mathfrak{S}_\mu, H_\ell \left(\bigotimes_{i=0}^{\infty} (D_1 S^{p^i})^{\otimes \mu_i} \right) \right),$$

où \mathfrak{S}_μ est le produit $\prod_{i=0}^{\infty} \mathfrak{S}_{\mu_i}$ un sous-groupe de \mathfrak{S}_n .

0.4.5. Résultats principaux. Dans cette étape, nous utilisons les descriptions de $L_q S^d(-, n)$ et $H_q(D_n S^d)$ de l'étape précédente et les résultats de l'étape 1 pour déterminer $\mathfrak{BI}((H_*(\Phi S^d))_V)$ pour les deux théories qui nous intéressent : les foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe et les étages de la tour de Taylor. En combinant ces calculs avec le théorème 0.4.8, on obtient les résultats suivants.

NOTATION 0.4.16. Soient d, n deux entiers naturels.

- (1) Pour $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{d}{p} \rfloor$, on désigne par j_k le nombre $2d+n(kp + \alpha_p(d - kp))$.
On obtient une suite croissante

$$0 < j_0 < j_1 < \dots < j_{\lfloor \frac{d}{p} \rfloor}.$$

- (2) On note $m_{d,n}$ le plus grand entier naturel μ_0 tel qu'il existe des entiers naturels μ_1, μ_2, \dots satisfaisant $d = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i p^i$ et $n = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i$

THÉORÈME 0.4.17 (Théorème 4.5.18). *Soient F un objet de \mathcal{P}_d et V un objet de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. On a $L_q F(V, n) = 0$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- (1) $q + \text{inj. dim } F < j_0$,
(2) $j_k \leq q + \text{inj. dim } F < j_{k+1}$ et il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{BI}(F)$ tel que $|\lambda| \leq d_0 + kp$, et $\begin{cases} \ell(\lambda) \leq \dim V & \text{si } p = 2 \text{ ou } n \text{ est pair} \\ \lambda_1 \leq \dim V & \text{sinon.} \end{cases}$
(3) $q + \text{inj. dim } F \geq j_{\lfloor \frac{d}{p} \rfloor}$ et il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{BI}(F)$ tel que $\begin{cases} \ell(\lambda) \leq \dim V & \text{si } p = 2 \text{ ou } n \text{ est pair} \\ \lambda_1 \leq \dim V & \text{sinon.} \end{cases}$

THÉORÈME 0.4.18 (Théorème 4.5.20). *Soient $F \in \mathcal{P}_d$ et V un objet de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. On a trois cas.*

- (1) *Le cas $n = 1$. On a $H_q(D_1F) = 0$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*
- (a) $q + \text{inj. dim } F < 2d - 2$,
 - (b) d n'est pas une puissance de p ,
 - (c) $(0) \notin \mathfrak{B}\mathfrak{I}(F)$.
- (2) *Le cas $n = d$. On a $H_q(D_dF)(V) = 0$ s'il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{B}\mathfrak{I}(F)$ tel que $\ell(\lambda) \leq \dim V$.*
- (3) *Le cas $1 < n < d$. On a $H_q(D_nF)(V) = 0$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite*
- (a) $q + \text{inj. dim } F < 2(d - n)$
 - (b) *il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{B}\mathfrak{I}(F)$ tel que $|\lambda| \leq m_{d,n}$ et $\ell(\lambda) \leq \dim V$.*

CHAPITRE 1

Rappels sur les catégories des foncteurs strictement polynomiaux

Contents

| | |
|---|-----------|
| 1.1. Introduction | 27 |
| 1.2. Rappels généraux sur les catégories | 27 |
| 1.2.1. Notations et exemples | 28 |
| 1.2.2. Catégories \mathbb{k} -linéaires | 28 |
| 1.2.3. Adjonctions | 29 |
| 1.2.4. Catégories \mathbb{k} -linéaires monoïdales | 30 |
| 1.2.5. Algèbres, cogèbres, algèbres de Hopf | 31 |
| 1.2.6. La catégorie \mathcal{F} | 32 |
| 1.2.7. Algèbres symétriques, extérieures et à puissances divisées | 33 |
| 1.3. Catégories des foncteurs strictement polynomiaux | 35 |
| 1.3.1. Catégories $\Gamma^{(d_1, \dots, d_n)} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ | 35 |
| 1.3.2. Catégories $\mathcal{P}_{(d_1, \dots, d_n)}$ | 37 |
| 1.3.3. Projectifs et injectifs dans $\mathcal{P}_{(d_1, \dots, d_n)}$ | 39 |
| 1.3.4. Adjonction à la source | 41 |
| 1.3.5. Torsion de Frobenius | 43 |
| 1.3.6. Lien avec les algèbres de Schur | 45 |
| 1.3.7. Le foncteur d'oubli de \mathcal{P}_d vers \mathcal{F} | 45 |
| 1.4. Schémas en groupes affines et cohomologie rationnelle | 46 |
| 1.4.1. Schémas en groupes affines algébriques | 46 |
| 1.4.2. Exemples, groupes classiques | 46 |
| 1.4.3. Représentations des schémas en groupes affines algébrique | 48 |
| 1.4.4. Représentations du groupe général linéaire et algèbres de Schur | 48 |
| 1.4.5. Cohomologies de schémas en groupes | 49 |

1.1. Introduction

Ce chapitre donne nos notations et rappelle des résultats bien connus sur les objets généraux, en particulier sur les foncteurs strictement polynomiaux, que nous utiliserons le plus couramment.

1.2. Rappels généraux sur les catégories

Notre référence principale sera MacLane [ML98] pour ce qui concerne les catégories quelconques ; pour les catégories abéliennes, nous suivons Weibel [Wei94, Appendix A]. Pour l'algèbre homologique, nous renvoyons plutôt à Weibel [Wei94] et MacLane [ML95].

1.2.1. Notations et exemples. Soit \mathcal{A} une catégorie. Si A et B sont des objets de \mathcal{A} , on notera $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ l'ensemble des morphismes de source A et de but B . L'indice \mathcal{A} sera omis lorsqu'aucune confusion n'est possible. Si A est un objet de \mathcal{A} , on notera $\text{End}_{\mathcal{A}}(A)$ le monoïde $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$ des endomorphismes de A . Le groupe des automorphismes de A sera désigné par $\text{Aut}_{\mathcal{A}}(A)$. La flèche identique d'un objet A de \mathcal{A} vers lui-même sera notée Id_A , ou Id s'il n'y a pas d'ambiguïté. Si f et g sont des morphismes de \mathcal{A} tels que la source de f est égale au but de g , on notera $f \circ g$ ou fg leur composée.

1.2.1. On notera \mathcal{A}^{op} la catégorie opposée d'une catégorie \mathcal{A} . La catégorie \mathcal{A}^{op} est la catégorie qui a les mêmes objets que \mathcal{A} et dont les morphismes sont donnés par la formule $\text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{op}}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)$.

On notera $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ le produit de deux catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} dont les objets sont des couples (A, B) où $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, et dont les morphismes sont donnés par la formule

$$\text{Hom}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((A_1, B_1), (A_2, B_2)) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B_1, B_2).$$

Plus généralement, si I est un ensemble et $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de catégories indexée par I , $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ désignera le produit des catégories \mathcal{A}_i .

EXEMPLE 1.2.2. On introduit quelques exemples classiques.

- (1) On désignera par Ens la catégorie des ensembles.
- (2) Si A est un anneau, on désignera par $A\text{-Mod}$ la catégorie des A -modules à gauche et par $\text{Mod-}A$ la catégorie des A -modules à droite.
- (3) Si A est une \mathbb{k} -algèbre on note $A\text{-mod}$ (resp. $\text{mod-}A$) la sous-catégorie pleine de $A\text{-Mod}$ (resp. $\text{Mod-}A$) dont les objets sont des modules de dimension finie sur \mathbb{k} .
- (4) La catégorie des \mathbb{k} -espaces vectoriels sera plutôt notée $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$. La sous-catégorie pleine des espaces vectoriels de dimension finie sera notée $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$.

1.2.2. Catégories \mathbb{k} -linéaires.

DÉFINITION 1.2.3. Une *catégorie \mathbb{k} -linéaire* est une catégorie dont les ensembles de morphismes sont des \mathbb{k} -espaces vectoriels et où la composition est \mathbb{k} -bilinéaire. De plus, si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des catégories \mathbb{k} -linéaires, un foncteur \mathbb{k} -linéaire de \mathcal{A} dans \mathcal{B} est un foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que les morphismes structurels $F_{A_1, A_2} : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A_1), F(A_2))$ sont \mathbb{k} -linéaires.

- EXEMPLE 1.2.4. (1) La catégorie opposée d'une catégorie \mathbb{k} -linéaire est également une catégorie \mathbb{k} -linéaire. Le produit direct d'un ensemble de catégories \mathbb{k} -linéaires est également une catégorie \mathbb{k} -linéaire.
- (2) Les catégories $\text{Vect}_{\mathbb{k}}, \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ sont \mathbb{k} -linéaires.
 - (3) Si A est une \mathbb{k} -algèbre, les catégories $A\text{-Mod}, \text{Mod-}A, A\text{-mod}$ et $\text{mod-}A$ sont \mathbb{k} -linéaires.
 - (4) Le foncteur d'inclusion $\mathcal{V}_{\mathbb{k}} \hookrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$ est \mathbb{k} -linéaire.
 - (5) Si \mathcal{A} est une catégorie \mathbb{k} -linéaire et A est un objet de \mathcal{A} , les foncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$ et $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A) : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$ sont \mathbb{k} -linéaires.

LEMME 1.2.5 (La version \mathbb{k} -linéaire du lemme de Yoneda). *Soit \mathcal{A} une catégorie \mathbb{k} -linéaire. Pour tout objet A de \mathcal{A} , toute transformation naturelle α de $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -)$ sur un foncteur \mathbb{k} -linéaire $F : \mathcal{A} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$ est uniquement déterminée par l'élément*

$\alpha_A(\text{Id}_A)$ de $F(A)$. En particulier, pour tout couple (A, B) d'objets de \mathcal{A} , on a un isomorphisme :

$$\text{Nat}\left(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -), \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, -)\right) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)$$

$$\alpha \mapsto \alpha_A(\text{Id}_A).$$

NOTATION 1.2.6. (1) Soient $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ des catégories \mathbb{k} -linéaires. On note $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ la catégorie avec les mêmes objets que le produit $\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ dont les morphismes sont donnés par

$$\text{Hom}_{\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i}\left((A_i), (B_i)\right) = \bigotimes_{i=1}^n \text{Hom}_{\mathcal{A}_i}(A_i, B_i).$$

Pour chaque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a un isomorphisme de catégories $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i \simeq \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_{\sigma(i)}$ par permutation des facteurs.

(2) Soit $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de catégories \mathbb{k} -linéaires abéliennes. Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On note $\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{A}_i$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\prod_{i=0}^n \mathcal{A}_i$ dont les objets sont des uplets (A_0, A_1, \dots) tels que $A_i = 0$ pour i assez grand.

1.2.3. Adjonctions. Dans ce paragraphe, nous rappelons des propriétés élémentaires des adjonctions. Nos références principales seront [ML98, Chapter IV] et [Pir03].

On considérera deux catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} et deux foncteurs $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ tels que F est adjoint à gauche à G (on dira, indifféremment, que G est adjoint à droite à F ou que (F, G) est une paire d'adjoint), de sorte que l'on a une bijection naturelle en les objets A de \mathcal{A} et B de \mathcal{B} :

$$(1.2.1) \quad v_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)).$$

NOTATION 1.2.7. On notera η la transformation naturelle $\text{Id}_{\mathcal{A}} \rightarrow G \circ F$ telle que, pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, $v_{A, F(A)}(\text{Id}_{F(A)}) = \eta_A$ (unité de l'adjonction) et ϵ la transformation naturelle $F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{B}}$ telle que, pour tout objet B de \mathcal{B} , $v_{G(B), B}(\epsilon_B) = \text{Id}_{G(B)}$ (coïté de l'adjonction).

EXEMPLE 1.2.8. (1) Pour chaque $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, le foncteur $V \otimes - : \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ est adjoint à gauche au foncteur $\text{Hom}(V, -) = V^\vee \otimes - : \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$.

(2) Soit $\phi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. On note B_ϕ le (B, A) -bimodule qui coïncide avec B en tant que B -module à gauche et dont la multiplication à droite par un scalaire $a \in A$ étant donnée par $b \cdot a := b\phi(a)$. Le foncteur $B_\phi \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$ est donc adjoint à gauche au foncteur $\text{Hom}_B(B_\phi, -) : B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$.

PROPOSITION 1.2.9. Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux catégories abéliennes. Soit $F : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : G$ une paire d'adjoints.

- (1) Le foncteur F est exact à droite et G est exact à gauche.
- (2) Si F est exact, G préserve les objets injectifs. Si G est exact, F préserve les objets projectifs.

DÉMONSTRATION. L'assertion (1) est une conséquence de l'isomorphisme d'adjonction (1.2.1) et l'exactitude à gauche du foncteur Hom . Par définition, si $A \in \mathcal{A}$ est est projectif alors le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -)$ est exact, si $B \in \mathcal{B}$ est injectif alors le

foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-, B)$ est exact. En combinant avec l'isomorphisme d'adjonction (1.2.1), on en déduit l'assertion (2). \square

PROPOSITION 1.2.10 ([Pir03, Lemma 1.4]). *Supposons que \mathcal{A} et \mathcal{B} sont abéliennes et possèdent soit toutes deux suffisamment d'objets injectifs, soit toutes deux assez d'objets projectifs. Soit $F : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : G$ une paire d'adjoints. Si F et G sont exacts, alors l'isomorphisme d'adjonction $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$ s'étend en un isomorphisme naturel gradué*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^*(F(A), B) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^*(A, G(B)).$$

DÉMONSTRATION. On considère le cas où les deux catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} possèdent suffisamment d'objets injectifs. Soit J une corésolution injective de B dans \mathcal{B} . Comme le foncteur G est exact, le complexe $G(J)$ est une corésolution de $G(B)$ dans \mathcal{A} . D'autre part, par la proposition 1.2.9, le foncteur G préserve les objets injectifs. Par conséquent, $G(J)$ est un complexe d'injectifs. Ce complexe est donc une corésolution injective de $G(B)$ dans \mathcal{A} . L'isomorphisme d'adjonction induit un isomorphisme de complexes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), J) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(J)).$$

En prenant l'homologie, on obtient le résultat. \square

1.2.4. Catégories \mathbb{k} -linéaires monoïdales. Dans cette sous-section, notre référence principale sera MacLane [ML98, Chapter VII].

DÉFINITION 1.2.11 (Catégories monoïdales symétriques). Soit \mathcal{A} une catégorie. Une *structure monoïdale symétrique* sur \mathcal{A} est la donnée :

- (1) d'un foncteur $\square : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ appelé en général produit monoïdal ;
- (2) d'isomorphismes naturelles $\alpha_{A,B,C} : (A \square B) \square C \xrightarrow{\simeq} A \square (B \square C)$;
- (3) d'un objet I , appelé unité et d'un morphisme naturel $\rho_A : A \square I \rightarrow A$;
- (4) d'isomorphismes naturels $\tau_{A,B} : A \square B \xrightarrow{\simeq} B \square A$

astreints à vérifier des conditions de cohérence pour lesquelles nous renvoyons à [ML98, Chapter VII].

DÉFINITION 1.2.12 (Foncteurs monoïdaux relâchés). Soient $(\mathcal{A}, \square, I)$ et $(\mathcal{A}', \square, I)$ deux catégories monoïdales symétriques. Un *foncteur monoïdal relâché*¹ de \mathcal{A} vers \mathcal{A}' est la donnée :

- (1) d'un foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$,
- (2) d'une transformation naturelle $\phi_{A,B} : F(A) \square F(B) \rightarrow F(A \square B)$,
- (3) d'un morphisme $\phi : I \rightarrow F(I)$

vérifiant des conditions de cohérence pour lesquelles nous renvoyons à [ML98, Chapter VII]. Si de plus les morphismes $F(A) \square F(B) \rightarrow F(A \square B)$ et $I \rightarrow F(I)$ sont des isomorphismes, le foncteur F est appelé foncteur monoïdal strict.

Soient $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ des foncteurs monoïdaux relâchés. Une transformation monoïdale de F vers G est une transformation $F \rightarrow G$ telle que les diagrammes

1. En anglais : lax monoidal foncteur

suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} F(A) \square F(B) & \longrightarrow & F(A \square B) & & I & \longrightarrow & F(I) \\ \downarrow & & \downarrow & & \searrow & & \downarrow \\ G(A) \square G(B) & \longrightarrow & G(A \square B), & & & & G(I). \end{array}$$

DÉFINITION 1.2.13 (Catégories \mathbb{k} -linéaires monoïdales symétriques). Soit \mathcal{A} une catégorie \mathbb{k} -linéaire. Une structure monoïdale \mathbb{k} -linéaire symétrique sur \mathcal{A} est une structure monoïdale symétrique sur \mathcal{A} telle que le produit monoïdal est \mathbb{k} -bilinéaire.

EXEMPLE 1.2.14. (1) Les catégories $(\text{Vect}_{\mathbb{k}}, \otimes, \mathbb{k})$ et $(\mathcal{V}_{\mathbb{k}}, \otimes, \mathbb{k})$ sont des catégories \mathbb{k} -linéaires monoïdales symétriques.

(2) La catégorie opposée d'une catégorie \mathbb{k} -linéaire monoïdale symétrique est encore \mathbb{k} -linéaire monoïdale symétrique.

1.2.5. Algèbres, cogèbres, algèbres de Hopf. Soit $(\mathcal{A}, \square, I, \tau)$ une catégorie \mathbb{k} -linéaire monoïdale symétrique.

DÉFINITION 1.2.15. (1) Une algèbre dans \mathcal{A} est un objet A muni :

- (a) d'un morphisme $\mu_A : A \square A \rightarrow A$ appelé multiplication que l'on suppose associatif;
- (b) d'un morphisme $\eta_A : I \rightarrow A$ appelé unité tel que $\mu_A \circ (\text{Id}_A \square \eta_A) = \text{Id}_A = \eta_A \circ (\eta_A \square \text{Id}_A)$.

On dit que A est commutative si $\mu_A = \mu_A \circ \tau_{A,A}$.

(2) Une cogèbre dans \mathcal{A} est une algèbre dans \mathcal{A}^{op} , c'est-à-dire, un objet C de \mathcal{A} muni :

- (a) d'un morphisme $\delta_C : C \rightarrow C \square C$ appelé comultiplication que l'on suppose coassociatif;
- (b) d'un morphisme $\epsilon_C : C \rightarrow I$ appelé counité tel que $(\text{Id}_C \square \epsilon_C) \circ \delta_C = \text{Id}_C = (\epsilon_C \square \text{Id}_C) \circ \delta_C$.

On dit que C est cocommutative si $\delta_C = \tau_{C,C} \circ \delta_C$.

EXEMPLE 1.2.16. Soient A_1, A_2 deux algèbres dans \mathcal{A} . L'objet $A_1 \square A_2$ est aussi une algèbre dans \mathcal{A} dont la multiplication et l'unité sont données respectivement par les morphismes composés suivants :

$$\begin{aligned} (A_1 \square A_2) \square (A_1 \square A_2) &\xrightarrow{\text{Id} \square \tau \square \text{Id}} A_1 \square A_1 \square A_2 \square A_2 \xrightarrow{\mu_{A_1} \square \mu_{A_2}} A_1 \square A_2, \\ I &\xrightarrow{\simeq} I \square I \xrightarrow{\eta_{A_1} \square \eta_{A_2}} A_1 \square A_2. \end{aligned}$$

Dualement, si C_1 et C_2 sont des cogèbres dans \mathcal{A} , l'objet $C_1 \square C_2$ est canoniquement une cogèbre.

EXEMPLE 1.2.17. Une \mathbb{k} -algèbre (resp. \mathbb{k} -cogèbre) est une algèbre (resp. cogèbre) dans la catégorie \mathbb{k} -linéaire monoïdale $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$.

DÉFINITION 1.2.18. Soit A une algèbre dans \mathcal{A} . Un A -module à gauche est un objet M de \mathcal{A} muni d'une flèche $\phi_M : A \square M \rightarrow M$, appelée multiplication, tel que $\phi_M \circ (\mu_A \square \text{Id}_M) = \phi_M \circ (\text{Id}_A \square \phi_M)$ et $\phi_M \circ (\eta_A \square \text{Id}_M) = \text{Id}_M$.

On définit dualement les notions de comodule à droite sur une cogèbre C .

- 1.2.19. (1) On a une notion claire de morphismes de modules à gauche. On notera $A\text{-Mod}$ la catégorie des modules à gauche sur une algèbre A .
- (2) Dualement, on dispose de la catégorie $\text{Comod-}C$ des comodules à droite sur une cogèbre.
- (3) On a des notions analogues de modules à droite et comodules à gauche, on note $\text{Mod-}A$ et $C\text{-Comod}$ les catégories analogues ainsi obtenues. Lorsque l'algèbre (resp. cogèbre) de base est commutative (resp. cocommutative), il n'y a pas lieu de distinguer les modules (resp. comodules) à droite et à gauche.

DÉFINITION 1.2.20. Une algèbre de Hopf dans \mathcal{A} est un objet H de \mathcal{A} muni :

- (1) d'une multiplication $\mu : H \square H \rightarrow H$,
- (2) d'une unité $\eta : I \rightarrow H$,
- (3) d'une comultiplication $\delta : H \rightarrow H \square H$,
- (4) d'une coïunité $\epsilon : H \rightarrow I$ et
- (5) d'un morphisme $S : H \rightarrow H$ (appelé l'antipode)

tels que (H, μ, η) soit une algèbre, (H, δ, ϵ) soit une cogèbre, qui vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

- (1) δ et ϵ sont des morphismes d'algèbres,
- (2) μ et η sont des morphismes de cogèbres,

et des égalités :

$$\mu \circ (S \square \text{Id}_H) \circ \delta = \eta \circ \epsilon = \mu \circ (\text{Id}_H \square S) \circ \delta.$$

1.2.6. La catégorie \mathcal{F} . On rappelle que $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$ est la catégorie des \mathbb{k} -espaces vectoriels et $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ est la sous-catégorie pleine de $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$ dont les objets sont des espaces vectoriels de dimension finie.

DÉFINITION 1.2.21. La catégorie $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbb{k}}$ est la catégorie des foncteurs de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ dans $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$. Plus précisément, les objets de \mathcal{F} sont les foncteurs de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ dans $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$ et les morphismes de \mathcal{F} sont les transformations naturelles entre foncteurs, et la loi de composition est donnée par la composition des transformations naturelles.

On dit qu'un objet F de \mathcal{F} est *réduit* (ou sans terme constant) si $F(0) = 0$.

Comme $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$ est une catégorie \mathbb{k} -linéaire abélienne, la catégorie \mathcal{F} est également une catégorie \mathbb{k} -linéaire abélienne : la somme directe, le produit direct, les noyaux et conoyaux sont définis dans la catégorie but, par exemple $(F \oplus G)(V) = F(V) \oplus G(V)$.

- EXEMPLE 1.2.22. (1) Le *foncteur constant* est le foncteur qui à $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ associe un \mathbb{k} -espace vectoriel fixé.
- (2) On note I le foncteur inclusion de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ dans $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$, c'est-à-dire le foncteur qui à $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ associe lui-même.
- (3) Le produit tensoriel $F \otimes G$ de deux foncteurs $F, G \in \mathcal{F}$ est défini dans la catégorie but, c'est-à-dire que $(F \otimes G)(V) = F(V) \otimes G(V)$. En particulier, le foncteur $I^{\otimes d}$ est appelé *d-ième puissance tensorielle*, et noté \otimes^d . On a un isomorphisme $\otimes^{d_1} \otimes \otimes^{d_2} \simeq \otimes^{d_1+d_2}$.
- (4) Pour deux objets $F, G \in \mathcal{F}$, où G prend des valeurs de dimension finie, on note $F \circ G$ le foncteur qui à $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ associe l'espace vectoriel $F(G(V))$.

La catégorie \mathcal{F} munie du produit monoïdal \otimes est une catégorie \mathbb{k} -linéaire monoïdale symétrique.

DÉFINITION 1.2.23. Pour chaque entier naturel n , on note $\mathcal{F}(n)$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n}$ vers la catégorie $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$.

Par définition, on a $\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}$.

1.2.7. Algèbres symétriques, extérieures et à puissances divisées. Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement la construction et les propriétés des algèbres symétriques, extérieures et à puissances divisées.

Soit V un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie. L'algèbre tensorielle sur V est le \mathbb{k} -espace vectoriel gradué $T(V) := \bigoplus_{d=0}^{\infty} V^{\otimes d}$ muni de la multiplication

$$T(V) \otimes T(V) \rightarrow T(V)$$

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \otimes (v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_\ell) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_\ell$$

et avec unité $1 \in \mathbb{k} = V^{\otimes 0}$. Pour chaque $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ on a une \mathbb{k} -algèbre graduée $T(V)$, naturelle en V .

DÉFINITION 1.2.24. Soit V un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie.

- (1) L'algèbre symétrique $S^*(V)$ est l'algèbre graduée obtenue comme quotient de l'algèbre tensorielle $T(V)$ par l'idéal homogène engendré par les éléments de la forme $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 \in V^{\otimes 2}$ avec $v_1, v_2 \in V$.

On note $v_1 \cdots v_d$ l'image de l'élément $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \in V^{\otimes d}$ par la projection $T(V) \rightarrow S^*(V)$. On désigne par $S^d(V)$ la partie homogène de degré d de l'algèbre $S^*(V)$.

- (2) L'algèbre extérieure $\Lambda^*(V)$ est l'algèbre graduée définie comme quotient de l'algèbre tensorielle sur V par l'idéal homogène engendré par les éléments $v \otimes v \in V^{\otimes 2}$ avec $v \in V$.

On note $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ l'image de l'élément $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \in V^{\otimes d}$ par la projection $T(V) \rightarrow \Lambda^*(V)$. On désigne par $\Lambda^d(V)$ la partie homogène de degré d de l'algèbre $\Lambda^*(V)$.

PROPOSITION 1.2.25. Soient $V, W \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ et $d \in \mathbb{N}$. Si la lettre X désigne l'un des deux symboles S ou Λ , on a un isomorphisme naturel en V, W :

$$f : \bigoplus_{i=0}^d X^i(V) \otimes X^{d-i}(W) \simeq X^d(V \oplus W),$$

où l'application f est induite par les applications composées suivantes (où la première application est induite par les inclusions canoniques $V \hookrightarrow V \oplus W$ et $W \hookrightarrow V \oplus W$, et la deuxième est la multiplication)

$$X^i(V) \otimes X^{d-i}(W) \rightarrow X^i(V \oplus W) \otimes X^{d-i}(V \oplus W) \xrightarrow{\mu} X^d(V \oplus W).$$

Par conséquence, les espaces vectoriels gradués $S^*(V)$ et $\Lambda^*(V)$ sont des cogèbres gradués.

1.2.26. Soit V un objet de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$.

- (1) On note R_S le sous- \mathbb{k} -espace vectoriel de $V^{\otimes 2}$ engendré par $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$ pour $v_1, v_2 \in V$. D'après la définition 1.2.24, $S^d(V)$ est isomorphe à \mathbb{k} si $d = 0$ à V si $d = 1$ et au quotient $V^{\otimes d} / \sum_{i+2+j=d} V^{\otimes i} \otimes R_S \otimes V^{\otimes j}$ si $d \geq 2$.

On a donc des isomorphismes $S^d(V) \simeq (V^{\otimes d})_{\mathfrak{S}_d}$ naturels en V de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, où le groupe symétrique \mathfrak{S}_d agit naturellement sur $V^{\otimes d}$ par permutation des facteurs du produit tensoriel : $\sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)}$.

- (2) On note R_Λ le sous- \mathbb{k} -espace vectoriel de $V^{\otimes 2}$ engendré par $v \otimes v$ pour $v \in V$. D'après la définition 1.2.24, $\Lambda^d(V)$ est isomorphe à \mathbb{k} si $d = 0$, à V si $d = 1$ et au quotient $V^{\otimes d} / \sum_{i+2+j=d} V^{\otimes i} \otimes R_\Lambda \otimes V^{\otimes j}$ si $d \geq 2$.

Dans le cas où $2 \neq 0$ dans \mathbb{k} , c'est-à-dire que la caractéristique p de \mathbb{k} est impaire, l'espace vectoriel R_Λ est engendré par les $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1$ pour $v_1, v_2 \in V$. Donc $\Lambda^d(V)$ est isomorphe au quotient de $V^{\otimes d}$ par l'action alternée du groupe symétrique \mathfrak{S}_d , naturel en $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$:

$$\Lambda^d(V) \simeq (V^{\otimes d} \otimes \mathbb{k}^{\text{sgn}})_{\mathfrak{S}_d}.$$

DÉFINITION 1.2.27. L'algèbre à puissance divisée $\Gamma^*(V)$ sur un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie V est l'algèbre graduée définie par le dual gradué de $S^*(V^\vee)$. On note $\Gamma^d(V)$ la partie homogène de degré d de l'algèbre $\Gamma^*(V)$.

PROPOSITION 1.2.28. Soient $V, W \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ et $d \in \mathbb{N}$. On a un isomorphisme naturel en V, W :

$$f : \bigoplus_{i=0}^d \Gamma^i(V) \otimes \Gamma^{d-i}(W) \simeq \Gamma^d(V \oplus W),$$

où l'application f est induite par les applications composées suivantes (où la première application est induite par les inclusions canoniques $V \hookrightarrow V \oplus W$ et $W \hookrightarrow V \oplus W$, et la deuxième est la multiplication)

$$\Gamma^i(V) \otimes \Gamma^{d-i}(W) \rightarrow \Gamma^i(V \oplus W) \otimes \Gamma^{d-i}(V \oplus W) \xrightarrow{\mu} \Gamma^d(V \oplus W).$$

Par conséquence, l'espace vectoriel gradué $\Gamma^*(V)$ est une cogèbre graduée.

- 1.2.29. (1) Il existe des isomorphismes $\Gamma^d(V) \simeq (V^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$ naturels en $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, où le groupe symétrique \mathfrak{S}_d agit naturellement sur $V^{\otimes d}$ par permutation des facteurs du produit tensoriel.

- (2) Pour $d \in \mathbb{N}$ et $v \in V$, on note $\gamma_d(v)$ l'élément $v^{\otimes d}$ de $V^{\otimes d}$. Comme $\gamma_d(v)$ est invariant sous l'action de \mathfrak{S}_d , $\gamma_d(v) \in \Gamma^d(V)$. On a des relations entre les $\gamma_d(v)$ [Bou81, Proposition 3, Chapitre IV page 43] :

- (a) $\gamma_0(v) = 1$ et $\gamma_1(v) = v$;
 (b) la puissance d -ième de v calculée dans $\Gamma^*(V)$ est égale à $d! \gamma_d(v)$;
 (c) si $v_1, v_2 \in V$, on a

$$\gamma_d(v_1 + v_2) = \sum_{d_1+d_2=d} \gamma_{d_1}(v_1) \gamma_{d_2}(v_2);$$

- (d) $\gamma_d(\lambda v) = \lambda^d \gamma_d(v)$ pour $\lambda \in \mathbb{k}$;
 (e) si d_1, d_2 sont des entiers naturels, on a

$$\gamma_{d_1}(v) \gamma_{d_2}(v) = \frac{(d_1 + d_2)!}{d_1! d_2!} \gamma_{d_1+d_2}(v).$$

(3) D'après [Bou81, Proposition 4(i), Chapitre IV page 44], on a le résultat :

Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de V alors $\gamma_{\underline{d}}(\underline{v}) := \prod_{i=1}^n \gamma_{d_i}(v_i)$ pour $\underline{d} \in \mathbb{N}^n$ est une base du \mathbb{k} -espace vectoriel $\Gamma^(V)$. En particulier, l'algèbre $\Gamma^*(V)$ est engendrée par la famille des éléments $\gamma_d(v)$ pour $d \in \mathbb{N}$ et $v \in V$; les éléments $\gamma_{\underline{d}}(\underline{v})$ pour $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $d_1 + \dots + d_n = d$ est une base du \mathbb{k} -espace vectoriel $\Gamma^d(V)$.*

DÉFINITION 1.2.30. La d -ième puissance symétrique S^d (resp. d -ième puissance extérieure Λ^d , d -ième puissance divisée Γ^d) est le foncteur qui à $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ associe le \mathbb{k} -espace vectoriel $S^d(V)$ (resp. $\Lambda^d(V), \Gamma^d(V)$).

1.2.31. (1) Il existe des isomorphismes naturels en $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$:

$$\Gamma^d(V^\vee) \simeq S^d(V)^\vee, \quad \Lambda^d(V^\vee) \simeq \Lambda^d(V)^\vee, \quad S^d(V^\vee) \simeq \Gamma^d(V)^\vee.$$

(2) Si $p = 2$, le foncteur Λ^d est l'image de la norme

$$S^d \simeq (\otimes^d)_{\mathfrak{S}_d} \rightarrow (\otimes^d)^{\mathfrak{S}_d} \simeq \Gamma^d, \\ v_1 \cdots v_d \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}.$$

1.3. Catégories des foncteurs strictement polynomiaux

Nous introduisons dans cette section les catégories $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ des foncteurs strictement polynomiaux d'une ou plusieurs variables. Nos références principales seront [FS97, SFB97, FFSS99, Tou10]

1.3.1. Catégories $\Gamma^{(d_1, \dots, d_n)} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$.

NOTATION 1.3.1. (1) Soient $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ et $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ deux n -uplets d'entiers naturels. On note $\underline{d} + \underline{e}$ (resp. $\underline{d} \cdot \underline{e}$) le n -uplet $(d_1 + e_1, \dots, d_n + e_n)$ (resp. $(d_1 e_1, \dots, d_n e_n)$).

(2) Soient $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ un n -uplet d'entiers naturels et $\underline{e} = (e_1, \dots, e_m)$ un m -uplet d'entiers naturels. On désigne par $(\underline{d}, \underline{e})$ le $(n + m)$ -uplet $(d_1, \dots, d_n, e_1, \dots, e_m)$.

(3) Le poids d'un n -uplet d'entiers naturels $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ est $|\underline{d}| = \sum_{i=1}^n d_i$.

(4) Pour un n -uplet d'entiers naturels $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$. On note $\mathfrak{S}_{\underline{d}}$ le groupe produit $\prod_{i=1}^n \mathfrak{S}_{d_i}$. On a un monomorphisme canonique de groupes $\mathfrak{S}_{\underline{d}} \rightarrow \mathfrak{S}_{|\underline{d}|}$.

Soit d un entier naturel. Pour chaque paire (V, W) d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, on définit un morphisme $\Gamma^d(V) \otimes \Gamma^d(W) \rightarrow \Gamma^d(V \otimes W)$ naturel en V, W comme le morphisme composé

$$(V^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d} \otimes (W^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d} \simeq (V^{\otimes d} \otimes W^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d} \hookrightarrow ((V \otimes W)^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}.$$

DÉFINITION 1.3.2. Soient d un entier naturel et $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ un n -uplet d'entiers naturels. Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux catégories \mathbb{k} -linéaires et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur \mathbb{k} -linéaire. On note $\Gamma^d \mathcal{A}$ la catégorie ayant les mêmes objets que \mathcal{A} , dont les morphismes sont donnés par $\text{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{A}}(A, B) = \Gamma^d \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ et dont la loi de

composition est donnée par le composé suivant, où le deuxième morphisme est induit par la composition dans \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \Gamma^d \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C) \otimes \Gamma^d \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) &\rightarrow \Gamma^d \left(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \right) \\ &\rightarrow \Gamma^d \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C). \end{aligned}$$

On définit le foncteur \mathbb{k} -linéaire $\Gamma^d F : \Gamma^d \mathcal{A} \rightarrow \Gamma^d \mathcal{B}$ comme un foncteur qui envoie $A \in \Gamma^d \mathcal{A}$ sur $F(A)$ et les morphismes structurels $(\Gamma^d F)_{A, B}$ sont définis comme $\Gamma^d(F_{A, B})$. On désigne par $\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{A}$ le produit tensoriel $\bigotimes_{i=1}^n \Gamma^{d_i} \mathcal{A}$. On remarque que $\Gamma^1 \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

1.3.3. Soient d, n deux entiers naturels. Soit \mathcal{A} une catégorie \mathbb{k} -linéaire. D'après la proposition 1.2.28, on a une décomposition de catégories \mathbb{k} -linéaires, où la somme directe est indexée par les n -uplets d'entiers naturels \underline{d} tels que $|\underline{d}| = d$:

$$\Gamma^d (\mathcal{A}^{\times n}) \simeq \bigoplus_{\underline{d}} \Gamma^{\underline{d}} \mathcal{A}.$$

1.3.4. Pour chaque entier naturel d , par l'assertion (1) du paragraphe 1.2.29 on a un isomorphisme $\Gamma^d \text{Hom}(V, W) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{k}\mathfrak{S}_d}(V^{\otimes d}, W^{\otimes d})$ naturel en $V, W \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Cet isomorphisme induit un plongement plein de catégories $\Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod}$, $V \mapsto V^{\otimes d}$, où $\mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod}$ est la catégorie des $\mathbb{k}\mathfrak{S}_d$ -modules de dimension finie.

1.3.5. Soient d, e deux entiers naturels. On définit un morphisme $\Delta_{d, e} : \Gamma^{d+e} \rightarrow \Gamma^d \otimes \Gamma^e$ comme le morphisme composé suivant, où le premier morphisme est induit par l'inclusion $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e \hookrightarrow \mathfrak{S}_{d+e}$:

$$(\otimes^{d+e})^{\mathfrak{S}_{d+e}} \hookrightarrow (\otimes^{d+e})^{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e} \simeq (\otimes^d)^{\mathfrak{S}_d} \otimes (\otimes^e)^{\mathfrak{S}_e}.$$

Le morphisme $\Delta_{d, e}$ induit naturellement un foncteur \mathbb{k} -linéaire $\Delta_{d, e} : \Gamma^{d+e} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \otimes \Gamma^e \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Ce foncteur envoie V sur la paire (V, V) et les morphismes structurels $(\Delta_{d, e})_{V, W}$ sont donnés par

$$\Gamma^{d+e} \text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\Delta_{d, e}} \Gamma^d \text{Hom}(V, W) \otimes \Gamma^e \text{Hom}(V, W).$$

De plus, pour deux n -uplets d'entiers naturels $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ et $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$, on a un foncteur $\Delta_{\underline{d}, \underline{e}} : \Gamma^{\underline{d}+\underline{e}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \otimes \Gamma^{\underline{e}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ défini comme le foncteur composé

$$\Gamma^{\underline{d}+\underline{e}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} = \bigotimes_{i=1}^n \Gamma^{d_i+e_i} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{\bigotimes_{i=1}^n \Delta_{d_i, e_i}} \bigotimes_{i=1}^n \Gamma^{d_i} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \otimes \Gamma^{e_i} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \simeq \Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \otimes \Gamma^{\underline{e}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}.$$

1.3.6. Soient d, e deux entiers naturels. On définit un morphisme $c_{d, e} : \Gamma^{de} \rightarrow \Gamma^d \circ \Gamma^e$ comme la composée

$$(\otimes^{de})^{\mathfrak{S}_{de}} \hookrightarrow (\otimes^{de})^{(\Delta_d \mathfrak{S}_e) \times \mathfrak{S}_d} \xrightarrow{\simeq} \left((\otimes^{de})^{\Delta_d \mathfrak{S}_e} \right)^{\mathfrak{S}_d} \xrightarrow{\simeq} \left(((\otimes^e)^{\mathfrak{S}_e})^{\otimes d} \right)^{\mathfrak{S}_d},$$

où le groupe $\Delta_d \mathfrak{S}_e$ est l'image de l'application composée $\mathfrak{S}_e \xrightarrow{\Delta_d} (\mathfrak{S}_e)^{\times d} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{de}$, où Δ_d est le foncteur diagonal. Le morphisme $c_{d, e}$ induit naturellement un foncteur \mathbb{k} -linéaire $c_{d, e} : \Gamma^{de} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \Gamma^d (\Gamma^e \mathcal{V}_{\mathbb{k}})$. Ce foncteur envoie V vers V et les morphismes structurels $(c_{d, e})_{V, W}$ sont donnés par

$$\Gamma^{de} \text{Hom}(V, W) \xrightarrow{c_{d, e}} \Gamma^d (\Gamma^e \text{Hom}(V, W)).$$

1.3.2. Catégories $\mathcal{P}_{(d_1, \dots, d_n)}$.

DÉFINITION 1.3.7. Soient d un entier naturel, $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ un n -uplet d'entiers naturels. La catégorie $\mathcal{P}_{\underline{d}} = \mathcal{P}_{\underline{d}; \mathbb{k}}$ est la catégorie des foncteurs \mathbb{k} -linéaires de $\Gamma^{\underline{d}}\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ dans $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Les morphismes sont les transformations naturelles. On définit les catégories $\mathcal{P}_d(n) = \mathcal{P}_{d; \mathbb{k}}(n)$ et $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$ par les formules :

$$\mathcal{P}_d(n) = \bigoplus_{|\underline{d}|=d} \mathcal{P}_{\underline{d}}, \quad \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}_d(n).$$

Un objet de $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ (resp. $\mathcal{P}_d(n)$) est appelé foncteur strictement polynomial homogène de degré \underline{d} (resp. foncteur strictement polynomial de degré total d). De plus, un objet de $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$ est appelé foncteur strictement polynomial de n -variables.

Si $n = 1$, les catégories $\mathcal{P}_d(1), \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(1)$ seront plus simplement notées respectivement $\mathcal{P}_d, \mathcal{P}_{\mathbb{k}}$.

Comme $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ est une catégorie \mathbb{k} -linéaire abélienne, la catégorie $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ est également une catégorie \mathbb{k} -linéaire abélienne : la somme directe, le produit direct, les noyaux et conoyaux sont définis dans la catégorie but, par exemple $(F \oplus G)(V) = F(V) \oplus G(V)$.

EXEMPLE 1.3.8. Soit d un entier naturel. On rappelle que, par définition, le foncteur $\iota_d : \Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod}, V \mapsto V^{\otimes d}$ est un plongement plein. Chaque foncteur \mathbb{k} -linéaire $\psi : \mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ induit donc un foncteur strictement polynomial $\psi \circ \iota_d \in \mathcal{P}_d$. De plus, si on a une transformation naturelle $\tau : \psi_1 \rightarrow \psi_2$ entre deux foncteurs \mathbb{k} -linéaires $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, on obtient un morphisme $\psi_1 \circ \iota_d \rightarrow \psi_2 \circ \iota_d$ dans la catégorie \mathcal{P}_d . Nous donnons maintenant une liste de cas particuliers.

- (1) Si ψ est le foncteur d'oubli $\mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, le foncteur $\psi \circ \iota_d$ est noté \otimes^d et appelé foncteur d -ième puissance tensorielle.
- (2) Si ψ est le foncteur des points fixes $(-)^{\mathfrak{S}_d}$, le foncteur $(-)^{\mathfrak{S}_d} \circ \iota_d$ est noté Γ^d et appelé foncteur d -ième puissance divisée. Plus généralement, si ψ est le foncteur cohomologique $H^n(\mathfrak{S}_d, -) : \mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, le foncteur $H^n(\mathfrak{S}_d, -) \circ \iota_d$ est noté $H^n(\mathfrak{S}_d, \otimes^d)$.
- (3) Soit \underline{d} un n -uplet d'entiers naturels tel que $|\underline{d}| = d$. Si ψ est le foncteur $(-)^{\mathfrak{S}_{\underline{d}}} : \mathbb{k}\mathfrak{S}_{\underline{d}}\text{-mod} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, le foncteur $(-)^{\mathfrak{S}_{\underline{d}}} \circ \iota_d$ est noté $\Gamma^{\underline{d}}$. Plus généralement, si ψ est le foncteur $H^n(\mathfrak{S}_{\underline{d}}, -) : \mathbb{k}\mathfrak{S}_{\underline{d}}\text{-mod} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, le foncteur $H^n(\mathfrak{S}_{\underline{d}}, -) \circ \iota_d$ est noté $H^n(\mathfrak{S}_{\underline{d}}, \otimes^{\underline{d}})$.

De plus, les transformations naturelles canoniques $(-)^{\mathfrak{S}_d} \rightarrow (-)^{\mathfrak{S}_{\underline{d}}}$ et $(-)^{\mathfrak{S}_{\underline{d}}} \rightarrow (-)^{\mathfrak{S}_d}$ induisent des morphismes de foncteurs strictement polynomiaux $\Delta_{\underline{d}} : \Gamma^d \rightarrow \Gamma^{\underline{d}}$ et $m_{\underline{d}} : \Gamma^{\underline{d}} \rightarrow \Gamma^d$.

- (4) Si ψ est le foncteur $(-)_{\mathfrak{S}_d}$, le foncteur $(-)_{\mathfrak{S}_d} \circ \iota_d$ est noté S^d et appelé foncteur d -ième puissance symétrique. Plus généralement, si ψ est le foncteur homologique $H_n(\mathfrak{S}_d, -) : \mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, le foncteur $H_n(\mathfrak{S}_d, -) \circ \iota_d$ est noté $H_n(\mathfrak{S}_d, \otimes^d)$.
- (5) Soit \underline{d} un n -uplet d'entiers naturels tel que $|\underline{d}| = d$. Si ψ est le foncteur $(-)_{\mathfrak{S}_{\underline{d}}} : \mathbb{k}\mathfrak{S}_{\underline{d}}\text{-mod} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, le foncteur $(-)_{\mathfrak{S}_{\underline{d}}} \circ \iota_d$ est noté $S^{\underline{d}}$. Plus généralement, si ψ est le foncteur $H_n(\mathfrak{S}_{\underline{d}}, -) : \mathbb{k}\mathfrak{S}_{\underline{d}}\text{-mod} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, le foncteur $H_n(\mathfrak{S}_{\underline{d}}, -) \circ \iota_d$ est noté $H_n(\mathfrak{S}_{\underline{d}}, \otimes^{\underline{d}})$.

De plus, les transformations naturelles canoniques $(-)_{\mathfrak{S}_d} \rightarrow (-)_{\mathfrak{S}_{\underline{d}}}$ et $(-)_{\mathfrak{S}_{\underline{d}}} \rightarrow (-)_{\mathfrak{S}_d}$ induisent des morphismes de foncteurs strictement polynomiaux $\Delta_{\underline{d}} : S^d \rightarrow S^{\underline{d}}$ et $m_{\underline{d}} : S^{\underline{d}} \rightarrow S^d$.

- (6) On suppose que p est impair. Si ψ est le foncteur composé $\mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod} \xrightarrow{\mathbb{k}^{\text{sgn}} \otimes -} \mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod} \xrightarrow{(-)_{\mathfrak{S}_d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ où \mathbb{k}^{sgn} est la représentation signature de \mathfrak{S}_d , le foncteur $\psi \circ \iota_d$ est noté par Λ^d et appelé foncteur d -ième puissance extérieure.
- (7) Dans le cas où $p = 2$, on définit le foncteur d -ième puissance extérieure Λ^d comme l'image du morphisme composé $S^d \xrightarrow{\Delta_{(1, \dots, 1)}} \otimes^d \xrightarrow{m_{(1, \dots, 1)}} \Gamma^d$.
- (8) On suppose que p est impair. Soit \underline{d} un n -uplet d'entiers naturels tel que $|\underline{d}| = d$. Si ψ est le foncteur composé $\mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod} \xrightarrow{\mathbb{k}^{\text{sgn}} \otimes -} \mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod} \xrightarrow{(-)_{\mathfrak{S}_{\underline{d}}}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, le foncteur $\psi \circ \iota_d$ est noté $\Lambda^{\underline{d}}$.

De plus, les transformations naturelles canoniques $(-)_{\mathfrak{S}_d} \rightarrow (-)_{\mathfrak{S}_{\underline{d}}}$ et $(-)_{\mathfrak{S}_{\underline{d}}} \rightarrow (-)_{\mathfrak{S}_d}$ induisent des morphismes de foncteurs strictement polynomiaux $\Delta_{\underline{d}} : \Lambda^d \rightarrow \Lambda^{\underline{d}}$ et $m_{\underline{d}} : \Lambda^{\underline{d}} \rightarrow \Lambda^d$.

NOTATION 1.3.9. (1) Le foncteur strictement polynomial $\boxtimes^n \in \mathcal{P}_{(1, \dots, 1)}$ est le foncteur qui à $(V_1, \dots, V_n) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\otimes n}$ associe le produit tensoriel $\bigotimes_{i=1}^n V_i$. On note I le foncteur $\boxtimes^1 \in \mathcal{P}_1$.

- (2) Soient $\underline{d}, \underline{e}$ deux uplets d'entiers naturels et $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}, G \in \mathcal{P}_{\underline{e}}$. On définit un foncteur strictement polynomial $F \boxtimes G \in \mathcal{P}_{(\underline{d}, \underline{e})}$ comme le foncteur composé

$$\Gamma^{(\underline{d}, \underline{e})} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} = \Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \otimes \Gamma^{\underline{e}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{F \otimes G} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \otimes \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{\boxtimes^2} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}.$$

En particulier, on a $\boxtimes^n \boxtimes \boxtimes^m \simeq \boxtimes^{n+m}$. Si X désigne l'un des symboles Γ, Λ et S , on désigne par $X^{\boxtimes \underline{d}}$ le foncteur $\boxtimes_{i=1}^n X^{d_i} \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$.

- (3) Soient $\underline{d}, \underline{e}$ deux n -uplets d'entiers naturels et $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}, G \in \mathcal{P}_{\underline{e}}$. On définit un foncteur strictement polynomial $F \otimes G \in \mathcal{P}_{\underline{d} + \underline{e}}$ comme le foncteur composé

$$\Gamma^{\underline{d} + \underline{e}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{\Delta_{\underline{d}, \underline{e}}} \Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \otimes \Gamma^{\underline{e}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{F \otimes G} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}.$$

En particulier, on a $\otimes^d \otimes \otimes^e \simeq \otimes^{d+e}$. De plus, si X désigne l'un des symboles Γ, Λ ou S , on a des isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux $X^{\underline{d}} \simeq \bigotimes_{i=1}^n X^{d_i}$.

- (4) Soient $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$ et $G \in \mathcal{P}_{\underline{e}}$. On définit le foncteur strictement polynomial $F \circ G \in \mathcal{P}_{\underline{d}\underline{e}}$ comme le foncteur composé

$$\Gamma^{\underline{d}\underline{e}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{c_{\underline{d}, \underline{e}}} \Gamma^{\underline{d}} (\Gamma^{\underline{e}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}) \xrightarrow{\Gamma^{\underline{d}} G} \Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{F} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}.$$

Plus généralement, soient $\underline{d}, \underline{e}$ deux n -uplets d'entiers naturels $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$ et $G_i \in \mathcal{P}_{\underline{e}_i}$ pour $i = 1, \dots, n$. On définit un foncteur strictement polynomial $F \circ (G_1, \dots, G_n) \in \mathcal{P}_{\underline{d}\underline{e}}$ comme le foncteur composé

$$\Gamma^{\underline{d}\underline{e}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \simeq \bigotimes_{i=1}^n \Gamma^{d_i \underline{e}_i} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{\otimes_{i=1}^n c_{d_i, \underline{e}_i}} \bigotimes_{i=1}^n \Gamma^{d_i} (\Gamma^{\underline{e}_i} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}) \xrightarrow{\otimes_{i=1}^n \Gamma^{d_i} G_i} \bigotimes_{i=1}^n \Gamma^{d_i} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{F} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}.$$

- (5) Soient \underline{d} un n -uplet d'entiers naturels, $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$ et $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$ un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Pour chaque i , le foncteur \mathbb{k} -linéaire $V_i \otimes - : \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ peut être vu comme un foncteur strictement polynomial $V_i \otimes - \in \mathcal{P}_1$. Le foncteur obtenu par la composition $F \circ (V_1 \otimes -, \dots, V_n \otimes -)$ est noté $F_{\underline{V}}$ et appelé foncteur à paramètre de F par \underline{V} . On désigne par $F^{\underline{V}}$ le foncteur $F_{\underline{V}^{\vee}}$ où $\underline{V}^{\vee} = (V_1^{\vee}, \dots, V_n^{\vee})$ est la dualité \mathbb{k} -linéaire de \underline{V} . Par définition, la paramétrisation par \underline{V} définit un foncteur exact $\mathcal{P}_{\underline{d}} \rightarrow \mathcal{P}_{\underline{d}}$.

Puisque le produit monoïdal \otimes de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ est exact en chaque variable, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 1.3.10. *Les foncteurs $(F, G) \mapsto F \otimes G$ et $(F, G) \mapsto F \boxtimes G$ sont exacts en chaque variable.*

DÉFINITION 1.3.11. Soit $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$. On désigne par F^{\sharp} le foncteur composé suivant, où le premier et le troisième morphisme sont induits par la dualité \mathbb{k} -linéaire $(-)^{\vee} : \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$:

$$\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\text{op}} \xrightarrow{F} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}.$$

En particulier, on a $F^{\sharp}(\underline{V}) = F(\underline{V}^{\vee})^{\vee}$. Le foncteur F^{\sharp} est appelé *dualité de Kuhn* de F . On obtient ainsi un foncteur de dualité $\mathcal{P}_{\underline{d}}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{P}_{\underline{d}}$, $F \mapsto F^{\sharp}$.

Par définition, on a des isomorphismes $S^{d\sharp} \simeq \Gamma^{\underline{d}}, \Lambda^{d\sharp} \simeq \Lambda^{\underline{d}}$ et $\Gamma^{d\sharp} \simeq S^{\underline{d}}$. Comme le foncteur $V \mapsto V^{\sharp}$ est exact, le foncteur de dualité $F \mapsto F^{\sharp}$ est également exact. De plus, les isomorphismes $(V^{\sharp})^{\sharp} \simeq V$ naturels en $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ induisent des isomorphismes naturels en $F, G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$, où $i \in \mathbb{N}$:

$$(F^{\sharp})^{\sharp} \simeq F, \quad \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^i(F, G) \simeq \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^i(G^{\sharp}, F^{\sharp}).$$

EXEMPLE 1.3.12. Soient $F, G \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n), H \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(m)$ et \underline{V} un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, et $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}$. On a des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} (F \oplus G)^{\sharp} &\simeq F^{\sharp} \oplus G^{\sharp}, \\ (F \otimes G)^{\sharp} &\simeq F^{\sharp} \otimes G^{\sharp}, \\ (F \boxtimes H)^{\sharp} &\simeq F^{\sharp} \boxtimes H^{\sharp}, \\ (F_{\underline{V}})^{\sharp} &\simeq (F^{\sharp})^{\underline{V}}, \\ (F \circ (G_1, \dots, G_n))^{\sharp} &\simeq F^{\sharp} \circ (G_1^{\sharp}, \dots, G_n^{\sharp}). \end{aligned}$$

1.3.3. Projectifs et injectifs dans $\mathcal{P}_{(d_1, \dots, d_n)}$. On fixe un n -uplet d'entiers naturels $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$. On rappelle que, par définition, $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ est la catégorie des foncteurs \mathbb{k} -linéaires de $\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ dans $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Pour chaque n -uplet \underline{V} d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, on a un isomorphisme $\Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}}(W) \simeq \text{Hom}_{\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}}(\underline{V}, W)$ naturel en F . Par la version \mathbb{k} -linéaire du lemme de Yoneda (lemme 1.2.5), il existe un isomorphisme naturel en $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$ et $\underline{V} \in \Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$:

$$(1.3.1) \quad \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(\Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}}, F) \simeq F(\underline{V}).$$

PROPOSITION 1.3.13. (1) *Le foncteur $\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{P}_{\underline{d}}, \underline{V} \mapsto \Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}}$ est un plongement (appelé plongement de Yoneda).*

(2) *Le foncteur $\Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}}$ est projectif pour tout $\underline{V} \in \Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. De plus, ces foncteurs forment un système de générateurs projectifs de $\mathcal{P}_{\underline{d}}$.*

1.3.14. Soient $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$ et \underline{V} un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Par définition, F est un foncteur \mathbb{k} -linéaire de $\Gamma^{\underline{d}}\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ dans $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. On a une application \mathbb{k} -linéaire naturelle en $\underline{W} \in \Gamma^{\underline{d}}\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$:

$$\Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}}(\underline{W}) = \text{Hom}_{\Gamma^{\underline{d}}\mathcal{V}_{\mathbb{k}}}(\underline{V}, \underline{W}) \xrightarrow{F_{\underline{V}, \underline{W}}} \text{Hom}(F(\underline{V}), F(\underline{W})).$$

Cette application induit un morphisme $\theta_{F, \underline{V}} : F(\underline{V}) \otimes \Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}} \rightarrow F$ dans la catégorie $\mathcal{P}_{\underline{d}}$. De plus, ce morphisme est un épimorphisme si $\dim V_i \geq d_i$ pour tout i .

1.3.15. Une conséquence directe de la proposition 1.3.13 est que le produit $F \boxtimes G$ est projectif lorsque les foncteurs $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}, G \in \mathcal{P}_{\underline{e}}$ sont projectifs. D'autre part, pour chaque entier naturel ℓ , on a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux, où la somme directe est indexée par les n -uplets d'entiers naturels $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ tels que $|\mu| = \ell$:

$$(1.3.2) \quad \Gamma^{d, \mathbb{k}^{\ell}} \simeq \bigoplus_{\mu} \Gamma^{\mu}.$$

Les foncteurs Γ^{μ} sont donc projectifs. Par conséquence, si $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}, G \in \mathcal{P}_{\underline{e}}$ sont deux foncteurs projectifs où $\underline{d}, \underline{e}$ sont deux n -uplets d'entiers naturels, alors le foncteur produit tensoriel $F \otimes G \in \mathcal{P}_{\underline{d}+\underline{e}}$ est également un foncteur projectif.

En utilisant le foncteur de dualité $F \mapsto F^{\sharp}$ de $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ on peut établir des propriétés de foncteurs injectifs à partir de celles de foncteurs projectifs.

PROPOSITION 1.3.16. (1) *Il existe un isomorphisme naturel en $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$ et en $\underline{V} \in \Gamma^{\underline{d}}\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$:*

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(F, S_{\underline{V}}^{\boxtimes \underline{d}}) \simeq F^{\sharp}(\underline{V}).$$

(2) *Le foncteur $\Gamma^{\underline{d}}\mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{P}_{\underline{d}}, \underline{V} \mapsto S_{\underline{V}}^{\boxtimes \underline{d}}$ est un plongement (appelé plongement de Yoneda).*

(3) *Le foncteur $S_{\underline{V}}^{\boxtimes \underline{d}}$ est injectif pour tout $\underline{V} \in \Gamma^{\underline{d}}\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. De plus, ces foncteurs forment un système de cogénérateurs injectifs de $\mathcal{P}_{\underline{d}}$.*

PROPOSITION 1.3.17. *Soient \underline{d} un n -uplet d'entiers naturels et $F_i, G_i \in \mathcal{P}_{d_i}$ pour $i = 1, \dots, n$. On a un isomorphisme gradué naturel en $F_i, G_i, i = 1, \dots, n$:*

$$(1.3.3) \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^* \left(\bigotimes_{i=1}^n F_i, \bigotimes_{i=1}^n G_i \right) \simeq \bigotimes_{i=1}^n \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d_i}}^*(F_i, G_i).$$

DÉMONSTRATION. On montre tout d'abord l'isomorphisme (1.3.3) pour les Hom. On définit un morphisme :

$$\begin{aligned} \phi : \bigotimes_{i=1}^n \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_i}}(F_i, G_i) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}\left(\bigotimes_{i=1}^n F_i, \bigotimes_{i=1}^n G_i\right) \\ f_1 \otimes \dots \otimes f_n &\mapsto f_1 \boxtimes \dots \boxtimes f_n. \end{aligned}$$

On considère la source et le but du morphisme ϕ comme deux foncteurs en les variables (F_1, \dots, F_n) . Comme ces deux foncteurs sont exacts à gauche, pour démontrer que ϕ est un isomorphisme, on peut supposer que pour chaque i , le foncteur F_i est projectif, de la forme Γ^{d_i, V_i} . Dans ce cas-là, ϕ est un isomorphisme parce que le

diagramme suivant est commutatif, où les applications verticales sont induites par le lemme de Yoneda (l'isomorphisme (1.3.1)) :

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^n \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_i}}(\Gamma^{d_i, V_i}, G_i) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}\left(\bigboxtimes_{i=1}^n \Gamma^{d_i, V_i}, \bigboxtimes_{i=1}^n G_i\right) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \bigotimes_{i=1}^n G_i(V_i) & \xlongequal{\quad} & \left(\bigboxtimes_{i=1}^n G_i\right)(V_1, \dots, V_n). \end{array}$$

On obtient l'isomorphisme (1.3.3) pour les Hom. Soit P^i une résolution projective de F_i dans \mathcal{P}_{d_i} , $i = 1, \dots, n$. Comme le foncteur \boxtimes est exact en chaque variable et préserve les projectifs, le complexe $\bigboxtimes_{i=1}^n P^i$ est une résolution projective de $\bigboxtimes_{i=1}^n F_i$ dans $\mathcal{P}_{\underline{d}}$. De plus, l'isomorphisme ϕ induit un isomorphisme de complexes :

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}\left(\bigboxtimes_{i=1}^n P^i, \bigboxtimes_{i=1}^n G_i\right) \simeq \bigotimes_{i=1}^n \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_i}}(P^i, G_i).$$

En prenant l'homologie, on obtient le résultat. \square

1.3.4. Adjonction à la source.

Le résultat suivant est dû à Pirashvili [Pir03, Lemma 1.3]. Il donne une façon générale pour établir de paires d'adjoints.

PROPOSITION 1.3.18. *Soient $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ deux catégories essentiellement petites, \mathcal{A} une catégorie quelconque. Soit $\alpha_1 : \mathcal{A}_1 \rightleftarrows \mathcal{A}_2 : \alpha_2$ une paire d'adjoints. Les précompositions par α_1, α_2 donnent une paire d'adjoints*

$$\alpha_2^* : \text{Fct}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}) \rightleftarrows \text{Fct}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}) : \alpha_1^*.$$

De plus, pour $F_i \in \text{Fct}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A})$, $i = 1, 2$, l'isomorphisme d'adjonction est caractérisé par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Fct}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A})}(F_1 \circ \alpha_2, F_2) & \xleftarrow{(\dagger_2)} & \text{Hom}_{\text{Fct}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A})}(F_1 \circ \alpha_2, F_2 \circ \alpha_1 \circ \alpha_2) \\ \downarrow (\dagger_1) & \swarrow v_{F_1, F_2} & \uparrow (\dagger_4) \\ \text{Hom}_{\text{Fct}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A})}(F \circ \alpha_2 \circ \alpha_1, F_2 \circ \alpha_1) & \xrightarrow{(\dagger_3)} & \text{Hom}_{\text{Fct}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A})}(F_1, F_2 \circ \alpha_1), \end{array}$$

où l'application (\dagger_1) (resp. (\dagger_4)) est induite par la précomposition par α_1 (resp. α_2) et l'application (\dagger_2) (resp. (\dagger_3)) est induite par la coïunité $\epsilon : \alpha_1 \circ \alpha_2 \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}_2}$ (resp. l'unité $\eta : \text{Id}_{\mathcal{A}_1} \rightarrow \alpha_2 \circ \alpha_1$) d'adjonction.

COROLLAIRE 1.3.19. *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ trois catégories \mathbb{k} -linéaires telles que \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont essentiellement petites. Soit $\alpha_1 : \mathcal{A}_1 \rightleftarrows \mathcal{A}_2 : \alpha_2$ une paire d'adjoints. On suppose que les foncteurs α_1 et α_2 sont \mathbb{k} -linéaires. Les précompositions par α_1, α_2 donnent alors une paire d'adjoints*

$$\alpha_2^* : \text{Fct}_{\mathbb{k}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}) \rightleftarrows \text{Fct}_{\mathbb{k}}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}) : \alpha_1^*.$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 1.3.18, on a une paire d'adjoints $\alpha_2^* : \text{Fct}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}) \rightleftarrows \text{Fct}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}) : \alpha_1^*$. Par définition, pour $i = 1, 2$, la catégorie $\text{Fct}_{\mathbb{k}}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A})$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\text{Fct}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A})$. De plus,

comme les foncteurs α_1 et α_2 sont \mathbb{k} -linéaires, les foncteurs α_1^*, α_2^* préservent les foncteurs \mathbb{k} -linéaires. On obtient donc la paire d'adjoints souhaitée. \square

EXEMPLE 1.3.20. Soient n_1, n_2 deux entiers strictement positifs et d un entier naturel. Soit $\alpha_1 : \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n_1} \rightleftarrows \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n_2} : \alpha_2$ une paire d'adjoints, où α_1, α_2 sont \mathbb{k} -linéaires. On en déduit une paire d'adjoints $\Gamma^d \alpha_1 : \Gamma^d(\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n_1}) \rightleftarrows \Gamma^d(\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n_2}) : \Gamma^d \alpha_2$. D'après le corollaire 1.3.19, on obtient une paire d'adjoints

$$(\Gamma^d \alpha_2)^* : \mathcal{P}_d(n_1) \rightleftarrows \mathcal{P}_d(n_2) : (\Gamma^d \alpha_1)^*.$$

Soient $F_1 \in \mathcal{P}_d(n_1)$ et $F_2 \in \mathcal{P}_d(n_2)$. Les foncteurs $F_1 \circ \Gamma^d \alpha_2$ et $F_2 \circ \Gamma^d \alpha_1$ seront plus simplement notés $F_1 \circ \alpha_2$ et $F_2 \circ \alpha_1$. On a un isomorphisme naturel en F_1, F_2 :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d(n_2)}(F_1 \circ \alpha_2, F_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d(n_1)}(F_1, F_2 \circ \alpha_1).$$

De plus, par la proposition 1.2.10, l'isomorphisme d'adjonction précédent s'étend en un isomorphisme naturel gradué

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_d(n_2)}^*(F_1 \circ \alpha_2, F_2) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_d(n_1)}^*(F_1, F_2 \circ \alpha_1).$$

On donne ensuite une liste de cas particuliers.

- (1) Soit n un entier strictement positif. On désigne par Δ_n le foncteur $\mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n}, V \mapsto (V, \dots, V)$ et par \boxplus^n le foncteur $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}, (V_1, \dots, V_n) \mapsto \bigoplus_{i=1}^n V_i$. Ce sont des foncteurs \mathbb{k} -linéaires. On a deux paires d'adjoints (Δ_n, \boxplus^n) et (\boxplus^n, Δ_n) . Par conséquence, on a des isomorphismes gradués naturels en $F \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ et $G \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F \circ \boxplus^n, G) &\simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^*(F, G \circ \Delta_n), \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^*(G \circ \Delta_n, F) &\simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(G, F \circ \boxplus^n). \end{aligned}$$

- (2) Soient n un entier strictement positif, \underline{d} un n -uplet d'entiers naturels et $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$ un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. On note $\underline{V} \otimes -$ le foncteur $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n}, \underline{W} \mapsto (V_1 \otimes W_1, \dots, V_n \otimes W_n)$. On a une paire d'adjoints $\underline{V}^{\vee} \otimes - : \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n} \rightleftarrows \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n} : \underline{V} \otimes -$. On obtient donc un isomorphisme gradué naturel en $F, G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$:

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^*(F^{\underline{V}}, G) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^*(F, G^{\underline{V}}).$$

- (3) Soient n un entier strictement positif, A un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, n\}$. On suppose que $A = \{i_1, \dots, i_\ell\}$, où $i_1 < \dots < i_\ell$. On désigne par $\mathrm{pr}_{n,A}$ le foncteur $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times \ell}, (V_1, \dots, V_n) \mapsto (V_{i_1}, \dots, V_{i_\ell})$ et par $\iota_{n,A}$ le foncteur $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times \ell} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n} : (W_1, \dots, W_\ell) \mapsto (W_1, \dots, W_n)$ où $W_j = 0$ si $j \notin A$ et $W_{i_1} = W_1, \dots, W_{i_\ell} = W_\ell$. On obtient deux paires d'adjoints $(\mathrm{pr}_{n,A}, \iota_{n,A})$ et $(\iota_{n,A}, \mathrm{pr}_{n,A})$. On a des isomorphismes naturels en $F \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(\ell)$ et $G \in \mathcal{P}_n$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F \circ \mathrm{pr}_{n,A}, G) &\simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(\ell)}^*(F, G \circ \iota_{n,A}), \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(\ell)}^*(G \circ \iota_{n,A}, F) &\simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(G, F \circ \mathrm{pr}_{n,A}). \end{aligned}$$

DÉFINITION 1.3.21. Un foncteur exponentiel (gradué) est une suite $\{E^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'objets de $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ telle que $E^0 \simeq \mathbb{k}$ et qu'on dispose des isomorphismes naturels en $V, W \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$

$$E^n(V \oplus W) \simeq \bigoplus_{i=0}^n E^i(V) \otimes E^{n-i}(W)$$

compatible aux isomorphismes d'associativité. Autrement dit, $V \mapsto \bigoplus_{n=0}^{\infty} E^n(V)$ définit un foncteur monoïdal strict de $(\mathcal{V}_{\mathbb{k}}, \oplus, 0)$ vers $(\text{Vect}_{\mathbb{k}}, \otimes, \mathbb{k})$.

EXEMPLE 1.3.22. Les suites de foncteurs $\{\Gamma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\Lambda^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{S^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont des foncteurs exponentiels gradués.

PROPOSITION 1.3.23. Soient $F_i \in \mathcal{P}_{d_i}$, $i = 1, 2$ et $F \in \mathcal{P}_{d_1+d_2}$. Soit $\{E^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un foncteur exponentiel tel que $E^n \in \mathcal{P}_n$ pour tout n . On définit $d = d_1 + d_2$. On a un isomorphisme naturel en F_1, F_2 et F :

$$(1.3.4) \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_d}^*(F_1 \otimes F_2, F) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d(2)}}^*(F_1 \boxtimes F_2, F \circ \boxplus^2),$$

$$(1.3.5) \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_d}^*(F_1 \otimes F_2, E^{d_1+d_2}) \simeq \bigotimes_{i=1}^2 \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d_i}}^*(F_i, E^{d_i}).$$

DÉMONSTRATION. L'isomorphisme (1.3.4) provient de l'exemple 1.3.20(1) et l'égalité $F_1 \otimes F_2 = (F_1 \boxtimes F_2) \circ \Delta_2$. Comme $\{E^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un foncteur exponentiel et $E^n \in \mathcal{P}_n$, la partie homogène de degré (d_1, d_2) de $E^{d_1+d_2} \circ \boxplus^2$ est $E^{d_1} \boxtimes E^{d_2}$. On en déduit l'isomorphisme (1.3.5) \square

1.3.5. Torsion de Frobenius. Comme \mathbb{k} est un corps de caractéristique p , le morphisme de Frobenius $\phi : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}, a \mapsto a^p$ est un morphisme d'anneaux. On note \mathbb{k}_{ϕ} le \mathbb{k} -bimodule qui coïncide avec \mathbb{k} en tant que \mathbb{k} -module à gauche et dont la multiplication à droite par un scalaire λ est donnée par $a \cdot \lambda = a\phi(\lambda) = a\lambda^p$. Si V est un \mathbb{k} -espace vectoriel, on définit le \mathbb{k} -espace vectoriel $V^{(1)}$ comme le produit tensoriel $\mathbb{k}_{\phi} \otimes V$. On obtient un foncteur \mathbb{k} -linéaire

$$(-)^{(1)} = \mathbb{k}_{\phi} \otimes - : \text{Vect}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}.$$

Comme \mathbb{k} est un corps, ce foncteur est exact. Si $v \in V$, on note $v^{(1)}$ l'élément $1 \otimes v \in V^{(1)}$. Alors $V^{(1)}$ est le \mathbb{k} -espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{v^{(1)} : v \in V\}$ quotienté par les relations, où $\lambda \in \mathbb{k}$ et $v, w \in V$:

$$v^{(1)} + w^{(1)} = (v + w)^{(1)}, \quad (\lambda v)^{(1)} = \lambda^p v^{(1)}.$$

On donne quelques propriétés élémentaires des torsions de Frobenius [FS97, page 212].

PROPOSITION 1.3.24. Soit V, W deux \mathbb{k} -espaces vectoriels de dimension finie.

- (1) Si V est un \mathbb{k} -espace vectoriel de base $\{v_1, \dots, v_n\}$ alors $V^{(1)}$ est un \mathbb{k} -espace vectoriel de base $\{v_1^{(1)}, \dots, v_n^{(1)}\}$.
- (2) Il existe une unique application \mathbb{k} -linéaire $V^{(1)} \otimes W^{(1)} \rightarrow (V \otimes W)^{(1)}$ qui à $v^{(1)} \otimes w^{(1)}$ associe $(v \otimes w)^{(1)}$ pour $v \in V$ et $w \in W$ et cette application est un isomorphisme.
- (3) Il existe une unique application \mathbb{k} -linéaire

$$\left(\text{Hom}(V, W) \right)^{(1)} \rightarrow \text{Hom}\left(V^{(1)}, W^{(1)} \right)$$

qui à $a \otimes f$ associe $(a \text{Id}_{\mathbb{k}_{\phi}}) \otimes f$ et cette application est un isomorphisme. En particulier, on a un isomorphisme $(V^{\vee})^{(1)} \xrightarrow{\simeq} (V^{(1)})^{\vee}$.

DÉMONSTRATION. (1) Comme $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de V , on a un isomorphisme \mathbb{k} -linéaire $f : \mathbb{k}^n \rightarrow V$ qui à (a_1, \dots, a_n) associe $a_1v_1 + \dots + a_nv_n$. L'homomorphisme composé

$$V^{(1)} = \mathbb{k}_\phi \otimes V \xrightarrow{\cong} \mathbb{k}_\phi \otimes \mathbb{k}^n \xrightarrow{\cong} (\mathbb{k}_\phi)^n$$

est un isomorphisme qui à $(a_1v_1 + \dots + a_nv_n)^{(1)}$ associe (a_1, \dots, a_n) . La famille $\{v_1^{(1)}, \dots, v_n^{(1)}\}$ est donc une base de $V^{(1)}$.

(2) On a un isomorphisme

$$V^{(1)} \otimes W^{(1)} = (\mathbb{k}_\phi \otimes V) \otimes (\mathbb{k}_\phi \otimes W) \simeq (V \otimes \mathbb{k}_\phi) \otimes (\mathbb{k}_\phi \otimes W).$$

En utilisant l'associativité du produit tensoriel ce dernier produit s'identifie successivement à $V \otimes (\mathbb{k}_\phi \otimes \mathbb{k}_\phi) \otimes W$, à $(V \otimes \mathbb{k}_\phi) \otimes W$, à $(\mathbb{k}_\phi \otimes V) \otimes W$ et finalement à $\mathbb{k}_\phi \otimes (V \otimes W) = (V \otimes W)^{(1)}$, on obtient le résultat annoncé.

(3) Comme V et W sont des \mathbb{k} -espaces vectoriels de dimension finie, on a un isomorphisme

$$(\text{Hom}(V, W))^{(1)} = \mathbb{k}_\phi \otimes \text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(V, \mathbb{k}_\phi \otimes W).$$

De plus, par adjonction, on a un isomorphisme

$$\text{Hom}(V, \mathbb{k}_\phi \otimes W) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(\mathbb{k}_\phi \otimes V, \mathbb{k}_\phi \otimes W) = \text{Hom}(V^{(1)}, W^{(1)}).$$

On en déduit le résultat. \square

La torsion de Frobenius est liée à l'algèbre symétrique.

PROPOSITION 1.3.25. *Soit V un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie. Il existe une application \mathbb{k} -linéaire $V^{(1)} \rightarrow S^p(V)$ naturelle en V , qui à $v^{(1)}$ associe v^p et cette application est un monomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Puisque $p = 0$ dans \mathbb{k} , on a des relations dans $S^p(V)$

$$(v + w)^p = v^p + w^p, \quad (\lambda v)^p = \lambda^p v^p.$$

Il existe alors une unique application \mathbb{k} -linéaire $f_V : V^{(1)} \rightarrow S^p(V)$ qui à $v^{(1)}$ associe v^p et cette application est naturelle en V . Il est clair que $f_{\mathbb{k}}$ est un isomorphisme. De plus, si $V = V_1 \oplus V_2$, l'application f_V est le composé

$$V^{(1)} = V_1^{(1)} \oplus V_2^{(1)} \xrightarrow{f_{V_1} \oplus f_{V_2}} S^p(V_1) \oplus S^p(V_2) \hookrightarrow S^p(V).$$

On en déduit, par récurrence sur la dimension de V , que f_V est un monomorphisme. \square

Soit V un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie. L'inclusion $V^{(1)} \hookrightarrow S^p(V)$, $v^{(1)} \mapsto v^p$ induit un morphisme d'algèbres $S^*(V^{(1)}) \rightarrow S^*(V)$. On obtient donc un monomorphisme $S^n(V^{(1)}) \hookrightarrow S^{pn}(V)$, $v_1^{(1)} \cdots v_n^{(1)} \mapsto v_1^p \cdots v_n^p$. Dualelement, on obtient un épimorphisme $\Gamma^{pn}(V) \twoheadrightarrow \Gamma^n(V^{(1)})$ qui à $\gamma_{pn}(v)$ associe $\gamma_n(v^{(1)})$.

DÉFINITION 1.3.26. La torsion de Frobenius est le foncteur strictement polynomial $I^{(1)} \in \mathcal{P}_p$ qui associe à un $V \in \Gamma^p \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ le \mathbb{k} -espace vectoriel $V^{(1)}$ et les morphismes structurels $(I^{(1)})_{V, W}$ sont définis comme les morphismes composés :

$$\Gamma^d \text{Hom}(V, W) \twoheadrightarrow (\text{Hom}(V, W))^{(1)} \simeq \text{Hom}(V^{(1)}, W^{(1)}).$$

DÉFINITION 1.3.27. Soient \underline{d} un n -uplet d'entiers naturels et $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$. On définit $F^{(1)}$ un foncteur strictement polynomial dans $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ comme le foncteur composé

$$F^{(1)} = F \circ \left(\underbrace{I^{(1)}, \dots, I^{(1)}}_n \right).$$

En itérant r fois ce procédé, on obtient la r -ième torsion de Frobenius d'un foncteur F , défini récursivement par $F^{(r)} = F^{(r-1)} \circ (I^{(1)}, \dots, I^{(1)})$.

1.3.6. Lien avec les algèbres de Schur. Soient \underline{d} et \underline{m} deux n -uplets d'entiers naturels. Soit $S(\underline{d}, \underline{m}) = S_{\mathbb{k}}(\underline{d}, \underline{m}) = \bigotimes_{i=1}^n \text{End}_{\mathbb{k}^{\mathfrak{S}_{d_i}}}(\mathbb{k}^{m_i})$ l'algèbre de Schur associée au \underline{d} et au \underline{m} . Cette algèbre de Schur est isomorphe à l'algèbre d'endomorphismes $\text{End}_{\Gamma_{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}}(\mathbb{k}^{\underline{m}})$, où $\mathbb{k}^{\underline{m}} = (\mathbb{k}^{m_1}, \dots, \mathbb{k}^{m_n})$ est un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$.

THÉORÈME 1.3.28 ([FS97, Theorem 3.2]). *Si $m_i \geq d_i$ pour tout i , alors l'évaluation sur $\mathbb{k}^{\underline{m}}$ induit une équivalence de catégories :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{\underline{d}} & \xrightarrow{\simeq} & S(\underline{d}, \underline{m})\text{-mod} \\ F & \mapsto & F(\mathbb{k}^{\underline{m}}). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Comme $m_i \geq d_i$ pour tout i alors le foncteur projectif $\Gamma_{\underline{d}, \mathbb{k}^{\underline{m}}}$ est un générateur de la catégorie $\mathcal{P}_{\underline{d}}$. D'après un théorème de Gabriel-Freyd-Mitchell [Mit72, Corollary 3.2] (voir aussi [Bas68, Theorem (1.3)]), le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(\Gamma_{\underline{d}, \mathbb{k}^{\underline{m}}}, -) : \mathcal{P}_{\underline{d}} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(\Gamma_{\underline{d}, \mathbb{k}^{\underline{m}}})\text{-mod}$, $F \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(\Gamma_{\underline{d}, \mathbb{k}^{\underline{m}}}, F)$ est une équivalence de catégories. On en déduit le résultat souhaité. \square

Une application importante du théorème 1.3.28 est la proposition suivante.

PROPOSITION 1.3.29. *Si $m_i \geq d_i$ pour tout i , alors l'évaluation sur $\mathbb{k}^{\underline{m}}$ induit un isomorphisme gradué naturel en $F, G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$*

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^*(F, G) \simeq \text{Ext}_{S(\underline{d}, \underline{m})}^*(F(\mathbb{k}^{\underline{m}}), G(\mathbb{k}^{\underline{m}})).$$

1.3.7. Le foncteur d'oubli de $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ vers \mathcal{F} . Soit d un entier naturel. On note γ_d le foncteur de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ vers $\Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ qui à V de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ associe lui-même. Il associe à une application \mathbb{k} -linéaire $f : V \rightarrow W$ l'application $f^{\otimes d} \in \Gamma^d \text{Hom}(V, W)$. Ce foncteur γ_d est \mathbb{k} -linéaire si et seulement si $d = 1$.

DÉFINITION 1.3.30. Soit $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$. On note $\mathcal{O}(F)$ l'objet de \mathcal{F} obtenu en précomposant F par le foncteur γ_d . On obtient un foncteur, appelé foncteur d'oubli, de $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ vers \mathcal{F} :

$$\mathcal{O} : \mathcal{P}_{\underline{d}} \rightarrow \mathcal{F}, \quad F \mapsto \mathcal{O}(F) = F \circ \gamma_d.$$

Ce foncteur induit un foncteur, aussi appelé foncteur d'oubli, de $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ vers \mathcal{F} .

Par convention, si F est un objet de $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$, on notera également F son image dans \mathcal{F} par le foncteur d'oubli $\mathcal{O} : \mathcal{P}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{F}$.

1.3.31. Soient F, G deux objets de $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$.

(1) On a des isomorphismes dans \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(F \oplus G) &\simeq \mathcal{O}(F) \oplus \mathcal{O}(G), & \mathcal{O}(F \otimes G) &\simeq \mathcal{O}(F) \otimes \mathcal{O}(G), \\ \mathcal{O}(F \circ G) &\simeq \mathcal{O}(F) \circ \mathcal{O}(G), & \mathcal{O}(F_V) &\simeq \mathcal{O}(F)_V. \end{aligned}$$

- (2) Le foncteur d'oubli $\mathcal{O} : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{F}$ est un foncteur fidèle. De plus, pour un morphisme $f : F \rightarrow G$ dans \mathcal{P}_d , f est un monomorphisme (resp. épimorphisme, isomorphisme) si et seulement si $\mathcal{O}(f)$ l'est aussi.
- (3) Si le corps \mathbb{k} est infini, le foncteur d'oubli $\mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{F}$ est un plongement plein. Cette propriété provient du fait que l'ensemble $\{v^{\otimes d}, v \in V\}$ est une famille génératrice de $\Gamma^d V$ pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ si le corps \mathbb{k} est infini.

1.4. Schémas en groupes affines et cohomologie rationnelle

Dans cette section, nous rappelons la définition et quelques propriétés des schémas en groupes affines algébriques et de la cohomologie rationnelle. Nous prenons pour référence les livres Demazure-Gabriel [DG70] et Jantzen [Jan03].

1.4.1. Schémas en groupes affines algébriques.

DÉFINITION 1.4.1 (\mathbb{k} -foncteurs en groupes). Un \mathbb{k} -foncteur en groupes G sur \mathbb{k} est un foncteur

$$G : (\mathbb{k}\text{-Alg. comm}) \rightarrow \text{Grp}$$

de la catégorie des \mathbb{k} -algèbres commutatives dans la catégorie des groupes. Un morphisme de \mathbb{k} -foncteurs en groupes est une transformation naturelle entre de tels foncteurs.

DÉFINITION 1.4.2 (Schémas en groupes affines algébriques). Un *schéma en groupes affine algébrique* sur \mathbb{k} est un \mathbb{k} -foncteur en groupes G sur \mathbb{k} tel que le foncteur composé

$$(\mathbb{k}\text{-Alg. comm}) \xrightarrow{G} \text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$$

est représentable par une \mathbb{k} -algèbre de type fini, où le deuxième foncteur est le foncteur d'oubli. On appelle *l'algèbre des coordonnées* de G la \mathbb{k} -algèbre commutative de type fini $\mathbb{k}[G]$ qui représente G . Un morphisme de schémas est une transformation naturelle entre de tels foncteurs.

1.4.3. Soit G un schéma en groupes affine algébrique. Le foncteur $G \mapsto \mathbb{k}[G]$ est un foncteur contravariant de la catégorie des schémas en groupes affines algébriques sur \mathbb{k} dans la catégorie des \mathbb{k} -algèbres de type fini. De plus, le fait que G soit un foncteur vers les groupes (non pas simplement vers les ensembles) induit sur l'algèbre $\mathbb{k}[G]$ une structure d'algèbre de Hopf commutative sur \mathbb{k} . Inversement, si on a une algèbre de Hopf commutative de type fini A sur \mathbb{k} , le foncteur $\text{Sp}_{\mathbb{k}} A := \text{Hom}_{\mathbb{k}\text{-Alg}}(A, -)$ est un schéma en groupes affine algébrique.

D'après le lemme de Yoneda, on a une anti-équivalence de la catégorie des \mathbb{k} -algèbres de Hopf commutative de type fini vers la catégorie des schémas en groupes affines algébriques.

1.4.2. Exemples, groupes classiques. Dans ce paragraphe, on donne des définitions de groupes classiques : groupes généraux linéaires, groupes symplectiques et groupes orthogonaux.

EXEMPLE 1.4.4. (1) Le *groupe additif* G_a est un schéma en groupes affine algébrique sur \mathbb{k} qui à une \mathbb{k} -algèbre commutative A associe le groupe additif $(A, +)$. L'algèbre de coordonnées de G_a est $\mathbb{k}[G_a] = \mathbb{k}[X]$, avec le coproduit δ donné par la formule

$$\delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X,$$

l'antipode S donné par la formule $S(X) = -X$ et la coïunité ϵ donnée par la formule $\epsilon(X) = 0$.

- (2) Le *groupe multiplicatif* G_m est un schéma en groupes affine algébrique sur \mathbb{k} qui à une \mathbb{k} -algèbre commutative A associe le groupe multiplicatif (A^\times, \cdot) . L'algèbre de coordonnées de G_m est $\mathbb{k}[G_m] = \mathbb{k}[X, 1/X]$ avec le coproduit δ donné par la formule

$$\delta(X) = X \otimes X,$$

l'antipode S donné par la formule $S(X) = 1/X$ et la coïunité ϵ donnée par la formule $\epsilon(X) = 1$.

- (3) Soit V un \mathbb{k} -espace vectoriel. On note V_a le schéma en groupes sur \mathbb{k} qui à une \mathbb{k} -algèbre commutative A associe le groupe additif $V \otimes A$. Si V est de dimension finie, V_a est un schéma en groupes affine algébrique. L'algèbre de coordonnées de V_a est $\mathbb{k}[V_a] = S^*(V^\vee)$ avec le coproduit δ donné par le morphisme composé

$$S^*(V^\vee) \rightarrow S^*(V^\vee \oplus V^\vee) \xrightarrow{\cong} S^*(V^\vee) \otimes S^*(V^\vee),$$

l'antipode S donné par les formules $S(v) = -v$ et la coïunité ϵ donnée par la formule $\epsilon(v) = 0$ pour tout $v \in V$.

Dans le cas $V = \mathbb{k}$, par définition, le schéma V_a est le groupe additif G_a .

1.4.2.1. Groupes généraux linéaires.

DÉFINITION 1.4.5. Soit V un \mathbb{k} -espace vectoriel. Le *groupe général linéaire* sur V , noté GL_V , est le \mathbb{k} -foncteur en groupes sur \mathbb{k} qui à une \mathbb{k} -algèbre commutative A associe le groupe $\mathrm{Aut}_A(V \otimes A)$.

Si V est de dimension finie, $V \simeq \mathbb{k}^n$, on note GL_V par $\mathrm{GL}_{n,\mathbb{k}}$.

Le \mathbb{k} -foncteur en groupes $\mathrm{GL}_{n,\mathbb{k}}$ est un schéma en groupes affine algébrique. L'algèbre de coordonnées de $\mathrm{GL}_{n,\mathbb{k}}$ est

$$\mathbb{k}[\mathrm{GL}_{n,\mathbb{k}}] = \frac{\mathbb{k}[X_{i,j}, T]_{1 \leq i,j \leq n}}{\langle T \det[X_{i,j}] - 1 \rangle}.$$

Si $n = 1$, le schéma en groupes affine algébrique $\mathrm{GL}_{1,\mathbb{k}}$ est isomorphe au groupe multiplicatif G_m .

1.4.2.2. *Groupes symplectiques.* Soit $n > 0$ un entier. On définit une *forme bilinéaire alternée* ω_n sur \mathbb{k}^{2n} par

$$\omega_n := \sum_{i=1}^n e_i^\vee \wedge e_{n+i}^\vee \in \Lambda^2(\mathbb{k}^{2n\vee}).$$

On obtient une application \mathbb{k} -bilinéaire $\omega_n : \mathbb{k}^{2n} \times \mathbb{k}^{2n} \rightarrow \mathbb{k}$ qui envoie (v, w) vers $\sum_{i=1}^n (v_i w_{n+i} - v_{n+i} w_i)$. Pour une \mathbb{k} -algèbre commutative A , comme $\Lambda^2(\mathbb{k}^{2n\vee}) \otimes A \simeq \Lambda_A^2(A^{2n\vee})$, on obtient une forme A -bilinéaire alternée $\omega_{n,A} := \omega_n \otimes 1_A$ sur A^{2n} .

DÉFINITION 1.4.6. Le *groupe symplectique* $\mathrm{Sp}_{n,\mathbb{k}}$ est le schéma en groupes affine algébrique sur \mathbb{k} qui à une \mathbb{k} -algèbre de type fini A associe le groupe d'endomorphismes dans $\mathrm{End}_A(A^{2n})$ préservant la forme bilinéaire $\omega_{n,A}$.

Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}_{n,\mathbb{k}}$ est un sous-groupe du groupe général linéaire $\mathrm{GL}_{2n,\mathbb{k}}$.

1.4.2.3. *Groupes orthogonaux.* Dans ce paragraphe, on suppose que $p \neq 2$. Soit $n > 0$ un entier. On définit une *forme quadratique* q_n sur \mathbb{k}^{2n} par

$$q_n := \sum_{i=1}^n e_i^\vee e_{n+1}^\vee \in S^2(\mathbb{k}^{2n^\vee}).$$

On a une application \mathbb{k} -bilineaire $q_n : \mathbb{k}^{2n} \times \mathbb{k}^{2n} \rightarrow \mathbb{k}$ qui envoie (v, w) vers $\sum_{i=1}^n (v_i w_{n+i} + v_{n+i} w_i)$. Pour une \mathbb{k} -algèbre commutative de type fini A , comme $S^2(\mathbb{k}^{2n^\vee}) \otimes A \simeq S_A^2(A^{2n^\vee})$, on obtient une forme quadratique $q_{n,A} := q_n \otimes 1_A$ sur A^{2n} .

DÉFINITION 1.4.7. Le *groupe orthogonal* $O_{n,n;\mathbb{k}}$ est le schéma en groupes affine algébrique sur \mathbb{k} qui à une \mathbb{k} -algèbre de type fini A associe le groupe d'endomorphismes dans $\text{End}_A(A^{2n})$ préservant la forme quadratique $q_{n,A}$.

Le groupe orthogonal $O_{n,n;\mathbb{k}}$ est un sous-groupe du groupe général linéaire $\text{GL}_{2n,\mathbb{k}}$.

1.4.3. Représentations des schémas en groupes affines algébrique.

DÉFINITION 1.4.8. Soit G un schéma en groupes affine algébrique sur \mathbb{k} . Une représentation (on dira indifféremment, un module) de G est un \mathbb{k} -espace vectoriel V muni d'une transformation naturelle de \mathbb{k} -foncteurs en groupes $G \rightarrow \text{GL}_V$. Un morphisme de représentations de source V et de but W de G est une application \mathbb{k} -linéaire $f : V \rightarrow W$ telle que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \text{GL}_W \\ \downarrow & \nearrow & \\ \text{GL}_V & & \end{array}$$

Soient G un schéma en groupes affine algébrique et V un G -module. L'application \mathbb{k} -linéaire composée

$$V \rightarrow G(\mathbb{k}[G]) \otimes V \otimes \mathbb{k}[G] \rightarrow V \otimes \mathbb{k}[G]$$

où la première application associe à $v \in V$ l'élément $\text{Id}_{\mathbb{k}[G]} \otimes v \otimes 1$, donne une structure de comodule à droite sur $\mathbb{k}[G]$ et cette structure de comodule détermine complètement le G -module V [Jan03, Chapter 2, section 2.8]. On a donc une équivalence de catégories

$$G\text{-Mod} \rightarrow \text{Comod-}\mathbb{k}[G]$$

de la catégorie de G -modules vers la catégorie de $\mathbb{k}[G]$ -comodules à droite.

1.4.4. Représentations du groupe général linéaire et algèbres de Schur.

Soient n, d des entiers naturels. On rappelle que le groupe général linéaire $\text{GL}_{n,\mathbb{k}}$ est présenté par l'algèbre

$$\mathbb{k}[\text{GL}_{n,\mathbb{k}}] = \frac{\mathbb{k}[X_{i,j}, T]_{1 \leq i,j \leq n}}{\langle T \det[X_{i,j}] - 1 \rangle}.$$

On note $A(n, d)$ l'espace vectoriel de tous les polynômes homogènes de degré d en $X_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n$. Alors $A(n, d)$ est une sous- \mathbb{k} -cogèbre de $\mathbb{k}[\text{GL}_{n,\mathbb{k}}]$. On en déduit un foncteur

$$\text{Comod-}A(n, d) \rightarrow \text{Comod-}\mathbb{k}[G].$$

D'autre part, la cogèbre $A(n, d)$ est le dual de l'algèbre de Schur $S(d, n)$ [Gre07, Chapter 2, section 2.3]. On a donc une équivalence de catégories $S(d, n)\text{-Mod} \rightarrow \text{Comod-}A(n, d)$. En composant ces foncteurs, on obtient un foncteur

$$(1.4.1) \quad S(d, n)\text{-Mod} \rightarrow \text{GL}_{n, \mathbb{k}}\text{-Mod}.$$

1.4.5. Cohomologies de schémas en groupes. Comme \mathbb{k} est un corps, la catégorie des modules sur un schéma en groupes affine algébrique G est abélienne et elle possède assez d'objets injectifs. On peut alors faire de l'algèbre homologique sur cette catégorie. En particulier, on a les foncteurs d'extensions.

$$\text{Ext}_G^i : (G\text{-Mod})^{\text{op}} \times G\text{-Mod} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$$

pour $i \in \mathbb{N}$. On note $H^*(G, V)$ le groupe d'extensions $\text{Ext}_G^*(\mathbb{k}^{\text{triv}}, V)$ où \mathbb{k}^{triv} est le G -module trivial.

THÉORÈME 1.4.9 ([FS97, Corollary 3.12.1]). *Le foncteur $S(d, n)\text{-Mod} \rightarrow \text{GL}_{n, \mathbb{k}}\text{-Mod}$ de (1.4.1) préserve les groupes d'extensions, c'est-à-dire qu'on a un isomorphisme naturel en $M, N \in S_{\mathbb{k}}(n, d)\text{-Mod}$:*

$$\text{Ext}_{S_{\mathbb{k}}(n, d)}^*(M, N) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_{\text{GL}_{n, \mathbb{k}}}^*(M, N).$$

CHAPITRE 2

Calculs des groupes d'extensions de foncteurs strictement polynomiaux

Contents

| | |
|--|-----------|
| 2.1. Introduction | 51 |
| 2.2. Brefs rappels sur les catégories dérivées | 53 |
| 2.2.1. Catégories homotopiques | 53 |
| 2.2.2. Catégories dérivées | 54 |
| 2.2.3. Catégories triangulées | 55 |
| 2.2.4. Foncteurs dérivés | 56 |
| 2.2.5. Formalité | 57 |
| 2.3. Structure monoïdale de $\mathcal{P}_{(d_1, \dots, d_n)}$ | 57 |
| 2.3.1. Structure \mathbb{k} -linéaire monoïdale de $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. | 57 |
| 2.3.2. Structure \mathbb{k} -linéaire monoïdale de $\mathcal{P}_{(d_1, \dots, d_n)}$ | 58 |
| 2.4. Groupes d'extensions de la forme $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F, G^{(r)})$ | 59 |
| 2.4.1. Propriétés de la torsion de Frobenius | 59 |
| 2.4.2. L'adjoint à gauche de la précomposition par $I^{(r)}$ | 60 |
| 2.5. Définition de la classe $\mathfrak{formel}(r, n)$ et premières propriétés | 62 |
| 2.5.1. Définition et exemples | 62 |
| 2.5.2. Premières propriétés de la classe formelle $\mathfrak{formel}(r, n)$ | 63 |
| 2.6. Formalité et \mathbb{k}-invariants | 65 |
| 2.6.1. Théorie des \mathbb{k} -invariants de Dold | 65 |
| 2.6.2. Application à la formalité | 67 |
| 2.6.3. Formalité et injectivité de la torsion de Frobenius | 68 |
| 2.6.4. Formalité et paramétrisations | 70 |
| 2.7. Étude de la classe $\mathfrak{formel}(r, n)$ | 70 |
| 2.7.1. La compatibilité de la classe $\mathfrak{formel}(r, n)$ avec la précomposition par la torsion de Frobenius | 70 |
| 2.7.2. La compatibilité de la classe $\mathfrak{formel}(r, n)$ avec la précomposition par \boxtimes^n, \otimes^n | 72 |

2.1. Introduction

Dans ce chapitre, on calcule des groupes d'extensions dans les catégories des foncteurs strictement polynomiaux à une ou à plusieurs variables. Parmi nos résultats, nous obtenons dans le théorème 2.7.10 un isomorphisme gradué naturel en $F \in \mathcal{P}_{dn}$,

où X désigne l'un des symboles exponentiels S , Λ , ou Γ ; et $\epsilon = 0, 1, 2$ si $X = \Gamma, \Lambda, S$ respectivement :

$$(2.1.1) \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_{p^r d_n}}^* \left(X^{p^r d} \circ \otimes^n, F^{(r)} \right) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d_n}}^{*-\epsilon(p^r d-d)} \left(X^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \otimes^n, F \right).$$

Ce résultat est bien connu pour les paires (X, n) suivantes : $(S, 1)$, $(\Lambda, 1)$, $(\Gamma, 1)$ ou $(\Gamma, 2)$. En effet, pour ces paires, l'isomorphisme se déduit des résultats des travaux [Cha08, Cha11, Tou12, Tou13a, vdK13] de A. Touzé, M. Chalupnik et W. van der Kallen. Le principal résultat de ce chapitre est le théorème 2.7.10, qui généralise l'isomorphisme (2.1.1) dans un contexte à plusieurs variables.

Soient $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ un n -uplet d'entiers strictement positifs et r un entier naturel. Soient $F \in \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$ et $G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$. La technique de calcul utilisée suit la méthode initiée par Chalupnik, et concerne plus généralement les groupes d'extensions de la forme suivante :

$$(2.1.2) \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}^* \left(F, G^{(r)} \right).$$

Dans une première étape, nous rappelons l'existence d'un adjoint à gauche ℓ^r au foncteur $\text{Fr}_r : \mathcal{P}_{\underline{d}} \rightarrow \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$ donné par la précomposition par le foncteur $I^{(r)}$ (en chaque variable). Cet adjoint peut se dériver en un foncteur $\mathbf{L}\ell^r : \mathbf{D}^b(\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{P}_{\underline{d}})$, et on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE (Corollaire 2.4.7). *Soient $F \in \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$ et $G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$. Si le complexe $\mathbf{L}\ell^r(F)$ est formel, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme $\mathbf{L}\ell^r(F) \simeq H_* \mathbf{L}\ell^r(F)$ dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}^b(\mathcal{P}_{\underline{d}})$, alors pour tout k on a un isomorphisme naturel en G :*

$$(2.1.3) \quad \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}^k \left(F, G^{(r)} \right) \simeq \bigoplus_{i+j=k} \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^i (H_j \mathbf{L}\ell^r(F), G)^{(r)}.$$

On est donc conduit à chercher des foncteurs F tels que $\mathbf{L}\ell^r(F)$ est formel (et dont on cherche l'homologie $H_* \mathbf{L}\ell^r(F)$). On introduit donc les classes $\mathfrak{F}\text{ormel}(r, n)$ dans la définition 2.5.1 :

DÉFINITION (Définition 2.5.1). *Soient r, n deux entiers naturels, $n > 0$. On désigne par $\mathfrak{F}\text{ormel}(r, n)$ la classe des foncteurs strictement polynomiaux F de n variables tels que le complexe $\mathbf{L}\ell^r(F)$ est formel.*

Dans une deuxième étape (qui est l'étape principale) on étudie les propriétés de la classe $\mathfrak{F}\text{ormel}(r, n)$. Plus précisément nous donnons des exemples explicites d'éléments des classes $\mathfrak{F}\text{ormel}(r, n)$, et nous étudions la stabilité de ces classes par diverses opérations. Parmi les outils techniques de cette étude, nous utilisons le résultat suivant.

THÉORÈME (Théorème 2.6.12). *Soient $C \in \mathbf{Ch}(\mathcal{P}_{\underline{d}})$ un complexe fini et r un entier naturel. Le complexe C est formel si et seulement si le complexe $C^{(r)}$ est formel.*

Ce résultat est une généralisation à plusieurs variables d'un résultat de W. Van de Kallen [vdK13]. Mais nous proposons une méthode différente pour l'obtenir, qui remplace l'utilisation de suites spectrales par la théorie des k -invariants de Dold [Dol60] dans la section 2.6.

Un de nouveaux résultats démontrés ici est le théorème 2.7.7, qui indique que la propriété de formalité est préservée par la composition par \otimes^n ou \boxtimes^n . En combinant

ce résultat aux exemples classiques de foncteurs des classes $\mathfrak{Formel}(r, n)$, on obtient notre résultat principal, le théorème 2.7.10. Dans ce théorème, E_r est le \mathbb{k} -espace vectoriel gradué de dimension finie, tel que $(E_r)^i$ est égal à \mathbb{k} si $i = 0, 2, \dots, 2p^r - 2$ et 0 sinon. De plus, on note ϵ_X l'entier 0, 1, 2 si $X = \Gamma, \Lambda, S$ respectivement.

THÉORÈME (Théorème 2.7.10). *Soit X l'un des symboles Γ, Λ, S . Soient $F \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ et $G \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$.*

- (1) *Le foncteur $X^d \circ \boxtimes^n$ appartient à $\mathfrak{Formel}(r, n)$ pour tout r et $\mathbf{L}^r(X^d \circ \boxtimes^n)$ est isomorphe à $X^{e, E_r^{\otimes n-1}}[\epsilon_X(d-e)] \circ \boxtimes^n$ si d est de la forme $p^r e$, $e \in \mathbb{N}$ et 0 sinon.*
- (2) *Le foncteur $X^d \circ \otimes^n$ appartient à $\mathfrak{Formel}(r, 1)$ pour tout r et $\mathbf{L}^r(X^d \circ \otimes^n)$ est isomorphe à $X^{e, E_r^{\otimes n-1}}[\epsilon_X(d-e)] \circ \otimes^n$ si d est de la forme $p^r e$, $e \in \mathbb{N}$ et 0 sinon.*
- (3) *Il existe des isomorphismes gradués naturels en F, G :*

$$\begin{aligned} \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(X^{p^r d} \circ \boxtimes^n, G^{(r)}) &\simeq \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^{*-\epsilon_X(p^r d-d)}(X^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n, G)^{(r)}, \\ \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^*(X^{p^r d} \circ \otimes^n, F^{(r)}) &\simeq \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^{*-\epsilon_X(p^r d-d)}(X^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \otimes^n, F)^{(r)}. \end{aligned}$$

2.2. Brefs rappels sur les catégories dérivées

Dans cette section, on rappelle les propriétés de la catégorie dérivée dont on aura besoin dans la suite. Nos références principales sont Weibel [Wei94, Chapter 10], et Kashiwara-Schapira [KS06, Chapters 10-13].

2.2.1. Catégories homotopiques. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Par exemple, \mathcal{A} est la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux d'une ou plusieurs variables.

On note $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes sur \mathcal{A} . Un complexe (C, d) est la donnée d'une suite d'objets C^i de \mathcal{A} et d'une famille d'homomorphismes, appelés opérateurs de bord $d^i : C^i \rightarrow C^{i+1}$, telle que $d \circ d = 0$. La catégorie des complexes $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ est une catégorie abélienne. On note $C_i = C^{-i}$ et $d_i = d^{-i}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

- 2.2.1. (1) Si A est un objet de \mathcal{A} , on note $A[0]$ le complexe sur \mathcal{A} dont $A[0]^0 = A$ et $A[0]^n = 0$ pour tout $n \neq 0$. Le foncteur $A \mapsto A[0]$ de \mathcal{A} vers $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ est un plongement.
- (2) Soient (C, d) un complexe sur \mathcal{A} et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n -ème *translaté* de (C, d) le complexe $(C[n], d[n])$ défini par $C[n]^i = C^{i-n}$ et $d[n] = (-1)^n d$. On obtient un endofoncteur $C \mapsto C[n]$ de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. On a par définition : $C[0] = C$ et $(C[n])[m] = C[n+m]$.

Soit (C, d) un complexe sur \mathcal{A} . Puisque $d \circ d = 0$, on a $\text{Im}(d) \subset \ker(d)$, et l'objet gradué quotient $H_*(C, d) := \ker(d)/\text{Im}(d)$ est appelé l'homologie de (C, d) . On obtient des foncteurs $H^n = H_{-n} : \mathbf{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$. On a $H(C[n]) = H(C)[n]$.

On désigne par $\mathbf{Ch}^{-b}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ dont les objets sont les complexes (C, d) tels que $C^n = 0$ pour $n \gg 0$ et $H^n(C) = 0$ pour $n \ll 0$. C'est une catégorie abélienne.

On note $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ et les morphismes sont les classes d'homotopie de morphismes de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. On a un foncteur quotient canonique $\pi : \mathbf{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A})$. La catégorie $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ est une catégorie additive, mais

pas une catégorie abélienne en général. On note $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ obtenue comme image de $\mathbf{Ch}^{-,b}(\mathcal{A})$ par le foncteur π .

Si f et g sont deux morphismes homotopes de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$, alors $H(f) = H(g)$. Les foncteurs d'homologie $H^n : \mathbf{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ induisent donc des foncteurs $H^n : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$, qui s'insèrent dans des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ch}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{H^n} & \mathcal{A} \\ & \searrow \pi & \nearrow H^n \\ & \mathbf{K}(\mathcal{A}) & \end{array}$$

2.2.2. Catégories dérivées. Un morphisme $f : C \rightarrow D$ dans la catégorie $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ ou dans la catégorie $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ est dit un *quasi-isomorphisme* si $H(f) : H(C) \rightarrow H(D)$ est un isomorphisme.

2.2.2. Soit $f : C \rightarrow D$ un morphisme dans $\mathbf{Ch}^{-,b}(\mathcal{A})$.

- (1) Si f est une équivalence d'homotopie alors f est un quasi-isomorphisme mais la réciproque est fautive en général.
- (2) Si f est un quasi-isomorphisme et si deux complexes C et D sont projectifs alors f est une équivalence d'homotopie, voir [Wei94, Proof of Theorem 10.4.8] ou [Dol60, Korollar 3.3].

DÉFINITION 2.2.3. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. La catégorie dérivée bornée de \mathcal{A} , que l'on note $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, est la catégorie localisée de $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ par rapport aux quasi-isomorphismes.

Par définition, les objets de $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ sont ceux de $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ et l'ensemble des morphismes de C vers D est $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{A})}(C, D) = \mathrm{colim}_{\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})} \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})}(C, D')$ où la colimite est indexée par les quasi-isomorphismes $D \rightarrow D'$ dans $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$. Autrement dit, un morphisme de C vers D dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ est une classe de diagramme $C \rightarrow D' \leftarrow D$ où $D \rightarrow D'$ est un quasi-isomorphisme, sous la relation d'équivalence suivante : les deux diagrammes $C \rightarrow D' \leftarrow D$ et $C \rightarrow D'' \leftarrow D$ sont équivalents s'il existe un diagramme $C \rightarrow \bar{D} \leftarrow D$ et des morphismes $D \rightarrow \bar{D}, D'' \rightarrow \bar{D}$ tels que le diagramme suivant dans $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & D' & & \\ & \nearrow & \downarrow & \nwarrow & \\ C & \longrightarrow & \bar{D} & \longleftarrow & D \\ & \searrow & \uparrow & \swarrow & \\ & & D'' & & \end{array}$$

Un modèle de la catégorie dérivée bornée de \mathcal{A} est la sous-catégorie pleine $\mathbf{K}^{-,b}(\mathrm{Proj}_{\mathcal{A}})$ de $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ dont les objets sont des complexes projectifs.

- 2.2.4. (1) Le foncteur composé $\mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ch}^{-,b}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ est un plongement.
- (2) On a un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{A})}(C, D) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(P, D)$ où P est une résolution projective de C dans la catégorie $\mathbf{Ch}^{-,b}(\mathcal{A})$, c'est-à-dire, $P \in$

$\mathbf{Ch}^{-,b}(\mathcal{A})$ est un complexe de projectifs et il existe un quasi-isomorphisme $P \rightarrow C$, voir [Wei94, Proof of Theorem 10.4.8] ou [Dol60, Korollar 3.8].

- (3) Soit un diagramme $C \xrightarrow{f} D' \leftarrow D$ où $D \rightarrow D'$ est un quasi-isomorphisme. Alors la classe de ce diagramme dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ est un isomorphisme si et seulement si f est un quasi-isomorphisme.

2.2.3. Catégories triangulées. Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition de catégories triangulées dû à Verdier [Ver96] et nous rappelons la structure triangulée de la catégorie dérivée bornée d'une catégorie abélienne. Nous n'utilisons que cette structure dans la section 2.6.

Soient \mathcal{D} une catégorie additive et $X \mapsto X[-1]$ un automorphisme de \mathcal{D} . On appelle *triangle* tout diagramme du type

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[-1].$$

Soient $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[-1]$ et $X' \rightarrow Y' \rightarrow Z' \rightarrow X'[-1]$ deux triangles. Un morphisme de triangles est un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[-1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[-1] \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X'[-1] \end{array}$$

On rappelle la définition des catégories triangulées, voir [Ver96, Définition 1.1.1 Chapitre II], [Nee01, Definition 1.1.1 Chapter 1], [KS06, Definition 10.1.6] ou [Wei94, Definition 10.2.1].

DÉFINITION 2.2.5. Une *catégorie triangulée* \mathcal{D} est une catégorie additive munie d'un ensemble de triangles appelés triangles distingués, possédant les propriétés suivantes :

TR0: Tout triangle de \mathcal{D} isomorphe à un triangle distingué est un triangle distingué.

TR1: Pour tout objet X de \mathcal{D} , le triangle $X \xrightarrow{\text{Id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[-1]$ est distingué.

TR2: Tout morphisme $u : X \rightarrow Y$ de \mathcal{D} est contenu dans un triangle distingué $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow X[-1]$.

TR3: Un triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1]$ de \mathcal{D} est distingué si et seulement si le triangle $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1] \xrightarrow{-u[-1]} Y[-1]$ est distingué.

TR4: Pour tout couple de triangles distingués :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1], \quad X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[-1]$$

et tous les morphismes $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y'$ tels que $g \circ u = u' \circ f$, il existe un morphisme $h : Z \rightarrow Z'$ tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[-1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[-1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z & \xrightarrow{w'} & X'[-1] \end{array}$$

REMARQUE 2.2.6. On n'a pas besoin de l'axiome octaédrique [Ver96, TRIV, page 94] dans la suite.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. On désigne par $\text{Cone}(f)$ le cône du morphisme f :

$$\text{Cone}(f)^n = Y^n \oplus X^{n+1}, \quad d_{\text{Cone}(f)}^n = \begin{pmatrix} d_Y^n & f^{n+1} \\ 0 & -d_X^{n+1} \end{pmatrix}.$$

On obtient une suite exacte courte $0 \rightarrow Y \rightarrow \text{Cone}(f) \rightarrow X[-1] \rightarrow 0$ dans $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$.

DÉFINITION 2.2.7. Un triangle de $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ ou dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ sera dit distingué s'il est isomorphe à un triangle de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \text{Cone}(f) \rightarrow X[-1].$$

THÉORÈME 2.2.8 ([Wei94, Corollaries 10.2.5, 10.4.3]). *Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Les catégories $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ et $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ munies des triangles distingués de la définition ci-dessus sont des catégories triangulées.*

PROPOSITION 2.2.9 ([KS06, Proposition 13.1.13], [Wei94, Exemple 10.4.9]). *Soit $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ une suite exacte courte dans $\mathbf{Ch}^{-,b}(\mathcal{A})$. Il existe un triangle distingué $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow X[-1]$ dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, et Z est isomorphe à $\text{Cone}(f)$ dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$.*

REMARQUE 2.2.10. La proposition 2.2.9 n'est pas vraie si on remplace la catégorie dérivée $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ par la catégorie homotopique $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$.

2.2.4. Foncteurs dérivés. Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux catégories abéliennes et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif. On suppose que les catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} ont assez d'objets injectifs et d'objets projectifs.

Grâce à l'additivité, le foncteur F induit un foncteur, que l'on note aussi F , de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ vers $\mathbf{K}(\mathcal{B})$ qui envoie le complexe (C, d) vers le complexe $F(C, d)$ avec $F(C, d)_n = F(C_n)$ et $d_{F(C, d)} = F(d)$. On note $\mathbf{L}F : \mathbf{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{B})$ (resp. $\mathbf{R}F : \mathbf{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{B})$) le foncteur dérivé total à gauche (resp. le foncteur dérivé total à droite) de F . Ce foncteur est défini par la formule $\mathbf{L}F(C) \simeq F(P)$, où P est une résolution projective de C .

REMARQUE 2.2.11. (1) Par définition, $\mathbf{L}F$ est l'extension de Kan à gauche du composé $\mathbf{K}^{-,b} \xrightarrow{F} \mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{B})$ le long de $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$.

(2) Soit A un objet de \mathcal{A} . On a un isomorphisme naturel $H_n(\mathbf{L}F(A)) \simeq L_n F(A)$ où $L_n F$ est le n -ième dérivé à gauche de F .

THÉORÈME 2.2.12 ([Wei94, Theorem 10.8.2]). *Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} et \mathcal{C} trois catégories abéliennes ayant assez d'objets projectifs. Soient $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ et $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ deux foncteurs additifs.*

(1) *Il existe une unique transformation naturelle*

$$\zeta = \zeta_{F, G} : \mathbf{L}(F \circ G) \rightarrow \mathbf{L}F \circ \mathbf{L}G.$$

(2) *Si $L_i F(G(P)) = 0$ pour tout objet projectif P de \mathcal{A} et tout $i > 0$, alors la transformation $\zeta : \mathbf{L}(F \circ G) \rightarrow \mathbf{L}F \circ \mathbf{L}G$ est un isomorphisme.*

Nous aurons besoin des deux cas particuliers suivants.

COROLLAIRE 2.2.13. *Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} et \mathcal{C} des catégories abéliennes ayant assez d'objets projectifs. Soient $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ et $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ deux foncteurs additifs. Si le foncteur F est exact ou le foncteur G préserve les projectifs, la transformation naturelle canonique $\zeta : \mathbf{L}(F \circ G) \rightarrow \mathbf{L}F \circ \mathbf{L}G$ est un isomorphisme.*

2.2.5. Formalité. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne ayant assez d'objets injectifs et projectifs. Soient C et D deux objets de $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ ou de la catégorie $\mathbf{Ch}^{-,b}(\mathcal{A})$. On dit qu'il existe un quasi-isomorphisme entre C et D s'il existe un isomorphisme $C \simeq D$ dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. Par définition, il existe un quasi-isomorphisme entre C et D si et seulement s'il existe un diagramme de quasi-isomorphismes $C \rightarrow D' \leftarrow D$ dans la catégorie $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$.

DÉFINITION 2.2.14. Un objet C de la catégorie $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ ou de la catégorie $\mathbf{Ch}^{-,b}(\mathcal{A})$ est dit *formel* s'il existe un quasi-isomorphisme entre C et $H_*(C)$.

EXEMPLE 2.2.15. Soient C et D deux objets de $\mathbf{Ch}^{-,b}(\mathcal{A})$.

- (1) Si le complexe C est concentré en un seul degré, il est formel.
- (2) Si C est acyclique, il est formel.
- (3) Si le complexe C est formel et s'il existe un quasi-isomorphisme entre C et D alors le complexe D est également formel.
- (4) Soient $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact et C un complexe dans \mathcal{A} . Si C est formel alors $\alpha(C)$ l'est aussi.

LEMME 2.2.16. *Soit C un complexe dans \mathcal{A} . Si la cohomologie $H^*(C)$ est concentrée en un degré alors le complexe C est formel.*

DÉMONSTRATION. On suppose que $H^i(C) = 0$ pour tout $i \neq m$. On considère tout d'abord le cas où $C^i = 0$ pour tout $i > m$. Dans ce cas-là, $H^m(C) = C^m/B^m(C)$ est un quotient de C^m . Le morphisme canonique $C \rightarrow H^m(C)[m]$ est un quasi-isomorphisme. Le complexe C est donc formel. Dans le cas général, on définit un sous-complexe D de C par la formule

$$D^i = \begin{cases} C^i & \text{si } i < m, \\ Z^m(C) & \text{si } i = m, \\ 0 & \text{si } i > m, \end{cases} \quad d_D^i = \begin{cases} d_C^i & \text{si } i < m, \\ 0 & \text{si } i \geq m. \end{cases}$$

Comme l'inclusion canonique $D \hookrightarrow C$ est un quasi-isomorphisme, la cohomologie du complexe D est concentrée en le degré m . De plus, on a $D^i = 0$ pour $i > m$. On en déduit que le complexe D est formel. Le complexe C est donc formel. \square

2.3. Structure monoïdale de $\mathcal{P}_{(d_1, \dots, d_n)}$

2.3.1. Structure \mathbb{k} -linéaire monoïdale de $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Soit $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ une n -uplet d'entiers naturels. On rappelle que la catégorie $\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} := \Gamma^{d_1} \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \otimes \dots \otimes \Gamma^{d_n} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ est une catégorie \mathbb{k} -linéaire.

La structure \mathbb{k} -linéaire monoïdale symétrique fermée canonique sur $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ induit une structure \mathbb{k} -linéaire monoïdale symétrique fermée sur $\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ dont le produit $\otimes_{\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}}$ et le Hom-interne $\underline{\text{Hom}}_{\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}}$ sont donnés sur les objets par les formules :

$$V \otimes_{\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}} W := V \otimes W, \quad \underline{\text{Hom}}_{\Gamma^{\underline{d}} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}}(V, W) := \text{Hom}(V, W).$$

Les morphismes structurels des foncteurs $\otimes_{\Gamma^d \mathcal{V}_k}$ et $\underline{\text{Hom}}_{\Gamma^d \mathcal{V}_k}$ sont définis respectivement par les morphismes composés suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma^d \text{Hom}(V_1, V_2) \otimes \Gamma^d \text{Hom}(W_1, W_2) &\xrightarrow{(\dagger_1)} \Gamma^d (\text{Hom}(V_1, V_2) \otimes \text{Hom}(W_1, W_2)) \\ &\xrightarrow{(\dagger_2)} \Gamma^d \text{Hom}(V_1 \otimes W_1, V_2 \otimes W_2) \\ &\simeq \Gamma^d \text{Hom}(V_1 \otimes_{\Gamma^d \mathcal{V}_k} W_1, V_2 \otimes_{\Gamma^d \mathcal{V}_k} W_2), \\ \Gamma^d \text{Hom}(V_2, V_1) \otimes \Gamma^d \text{Hom}(W_1, W_2) &\xrightarrow{(\dagger_3)} \Gamma^d (\text{Hom}(V_2, V_1) \otimes \text{Hom}(W_1, W_2)) \\ &\xrightarrow{(\dagger_4)} \Gamma^d \text{Hom}(\text{Hom}(V_1, W_1), \text{Hom}(V_2, W_2)) \\ &\simeq \Gamma^d \text{Hom}(\underline{\text{Hom}}_{\Gamma^d \mathcal{V}_k}(V_1, W_1), \underline{\text{Hom}}_{\Gamma^d \mathcal{V}_k}(V_2, W_2)), \end{aligned}$$

où les applications (\dagger_1) , (\dagger_3) sont induites par l'application canonique $\Gamma^d V \otimes \Gamma^d W \rightarrow \Gamma^d(V \otimes W)$; les applications (\dagger_2) , (\dagger_4) sont induites par les morphismes structurels de \otimes et Hom . On a un isomorphisme, naturel en V_1, V_2 et V_3 de $\Gamma^d \mathcal{V}_k$:

$$\text{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_k}(V_1 \otimes_{\Gamma^d \mathcal{V}_k} V_2, V_3) \simeq \text{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_k}(V_1, \underline{\text{Hom}}_{\Gamma^d \mathcal{V}_k}(V_2, V_3)).$$

Le foncteur $\gamma_d : \mathcal{V}_k \rightarrow \Gamma^d \mathcal{V}_k$ est un foncteur monoïdal strict : on a des isomorphismes $\gamma_d(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}$ et $\gamma_d(V \otimes W) \simeq \gamma_d(V) \otimes_{\Gamma^d \mathcal{V}_k} \gamma_d(W)$ naturels en $V, W \in \mathcal{V}_k$.

Les structures \mathbb{k} -linéaires monoïdales sur les catégories $\Gamma^{d_i} \mathcal{V}_k$ induisent une structure \mathbb{k} -linéaire monoïdale sur $\Gamma^d \mathcal{V}_k = \bigotimes_{i=1}^n \Gamma^{d_i} \mathcal{V}_k$: pour \underline{V} et \underline{W} deux objets de $\Gamma^d \mathcal{V}_k$, on définit :

$$\begin{aligned} \underline{V} \otimes_{\Gamma^d \mathcal{V}_k} \underline{W} &= (V_1 \otimes_{\Gamma^{d_1} \mathcal{V}_k} W_1, \dots, V_n \otimes_{\Gamma^{d_n} \mathcal{V}_k} W_n), \\ \underline{\text{Hom}}_{\Gamma^d \mathcal{V}_k}(\underline{V}, \underline{W}) &= (\underline{\text{Hom}}_{\Gamma^{d_1} \mathcal{V}_k}(V_1, W_1), \dots, \underline{\text{Hom}}_{\Gamma^{d_n} \mathcal{V}_k}(V_n, W_n)). \end{aligned}$$

Dans la suite, on écrit simplement \otimes, Hom au lieu de $\otimes_{\Gamma^d \mathcal{V}_k}$ et $\underline{\text{Hom}}_{\Gamma^d \mathcal{V}_k}$.

2.3.2. Structure \mathbb{k} -linéaire monoïdale de $\mathcal{P}_{(d_1, \dots, d_n)}$. Soit $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ une n -uplet d'entiers naturels. On rappelle que la catégorie $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ est la catégorie des foncteurs \mathbb{k} -linéaires de $\Gamma^d \mathcal{V}_k$ vers \mathcal{V}_k . On a donc un plongement de Yoneda

$$\Gamma^d \mathcal{V}_k^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{P}_{\underline{d}}$$

qui à un objet \underline{V} de $\Gamma^d \mathcal{V}_k$ associe le foncteur projectif $\Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}} = \Gamma^{d_1, V_1} \boxtimes \dots \boxtimes \Gamma^{d_n, V_n}$. La catégorie $\Gamma^d \mathcal{V}_k^{\text{op}}$ est une catégorie monoïdale symétrique (dont la structure est décrite à la section précédente). Dans une telle situation, la structure monoïdale symétrique peut s'étendre à toute la catégorie $\mathcal{P}_{\underline{d}}$. Ce résultat est dû à Day [Day70], et a été énoncé dans le cadre des foncteurs strictement polynomiaux à une variable par Krause [Kra13]. Le produit monoïdal symétrique obtenu sur $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ s'appelle le produit de convolution de Day, et nous le notons $\otimes_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}$. L'énoncé suivant récapitule les principales propriétés de la structure monoïdale symétrique fermée obtenue.

THÉORÈME 2.3.1 ([Day70, Kra13]). *Il existe une structure monoïdale symétrique fermée*

$$\left(\mathcal{P}_{\underline{d}}, \otimes_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}, \Gamma^{\boxtimes \underline{d}}, \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}} \right)$$

telle que le plongement de Yoneda $\Gamma^d \mathcal{V}_k^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{P}_{\underline{d}}$ soit un foncteur symétrique monoïdal. Le produit monoïdal est caractérisé par les deux propriétés suivantes.

- (1) *Le bifoncteur $\otimes_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}$ est exact à droite en chaque variable.*
- (2) *Il existe un isomorphisme $F \otimes_{\mathcal{P}_{\underline{d}}} \Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}} \simeq F^{\underline{V}}$ naturel en F et \underline{V} .*

De même, le Hom-interne est caractérisé par les deux propriétés suivantes.

- (1) Le bifoncteur $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}$ est exact à gauche en chaque variable.
- (2) Il existe un isomorphisme $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^{\boxtimes d, V}, F) \simeq F_{\underline{V}}$ naturel en F et \underline{V} .

On note $\otimes_{\mathcal{P}_d}^{\mathbf{L}}$ (resp. $\mathbf{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}$) le foncteur dérivé total à gauche (resp. à droite) du foncteur $\otimes_{\mathcal{P}_d}$ (resp. $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}$). On désigne par $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_d}^i$ la i -ème cohomologie du $\mathbf{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}$. La proposition suivante donne des formules explicites pour le Hom-interne et du produit de convolution de Day, qui nous seront utiles pour la suite.

PROPOSITION 2.3.2. Soient F, G deux objets de \mathcal{P}_d et $\underline{V} \in \Gamma^d \mathcal{V}_k$. On a des isomorphismes naturels en F, G et \underline{V} :

$$(2.3.1) \quad \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F, G)(\underline{V}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F^{\underline{V}}, G),$$

$$(2.3.2) \quad \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_d}^i(F, G)(\underline{V}) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P}_d}^i(F^{\underline{V}}, G),$$

$$(2.3.3) \quad \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F, G) \simeq (F \otimes_{\mathcal{P}_d} G^{\#})^{\#},$$

$$(2.3.4) \quad \mathbf{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F, G) \simeq (F \otimes_{\mathcal{P}_d}^{\mathbf{L}} G^{\#})^{\#}.$$

DÉMONSTRATION. On considère chaque côté de l'isomorphisme (2.3.1) comme un foncteur en la variable F . D'après le lemme de Yoneda et d'après la caractérisation du Hom-interne donnée dans le théorème 2.3.1, ces deux foncteurs sont isomorphes (naturellement en G) sur la sous-catégorie pleine des projectifs de \mathcal{P}_d . Comme ces deux foncteurs sont exacts à gauche, l'isomorphisme s'étend à un isomorphisme naturel en F, G et \underline{V} valable pour tous les foncteurs F . On obtient l'isomorphisme (2.3.1). Cet isomorphisme induit l'isomorphisme (2.3.2).

Puisque le foncteur $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}$ est exact à gauche et le foncteur $\otimes_{\mathcal{P}_d}$ est exact à droite, pour démontrer l'isomorphisme (2.3.3), sans perte de généralité, on peut supposer que $F = \Gamma^{\boxtimes d, \underline{V}}$. D'après le théorème 2.3.1 et l'isomorphisme (2.3.1), on a des isomorphismes naturels

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^{\boxtimes d, \underline{V}}, G) \simeq G_{\underline{V}} \simeq (\Gamma^{\boxtimes d, \underline{V}} \otimes_{\mathcal{P}_d} G^{\#})^{\#},$$

d'où l'isomorphisme (2.3.3). Cet isomorphisme induit l'isomorphisme (2.3.4). \square

2.4. Groupes d'extensions de la forme $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^*(F, G^{(r)})$

2.4.1. Propriétés de la torsion de Frobenius. Dans la proposition suivante, on montre que le foncteur de précomposition par la torsion de Frobenius $(-)^{(r)} : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{P}_{p^r d}$ est un plongement de catégories.

PROPOSITION 2.4.1 (Comparer avec [Tou12, Lemma 2.2]). Soient F, G deux objets de \mathcal{P}_d et H un objet de $\mathcal{P}_{p^r d}$. Les morphismes suivants sont alors des isomorphismes naturels en F, G et H

$$(2.4.1) \quad \text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F, G) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d}}(F^{(r)}, G^{(r)}),$$

$$(2.4.2) \quad \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d}}(H \otimes_{\mathcal{P}_{p^r d}} \Gamma^{\boxtimes d(r)}, G^{(r)}) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d}}(H, G^{(r)}),$$

où le premier morphisme est induit par la torsion de Frobenius $\text{Fr}_r : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{P}_{p^r d}$ et le deuxième est induit par le morphisme composé $H \xrightarrow{\simeq} H \otimes_{\mathcal{P}_{p^r d}} \Gamma^{\boxtimes p^r d} \rightarrow H \otimes_{\mathcal{P}_{p^r d}} \Gamma^{\boxtimes d(r)}$.

DÉMONSTRATION. Par exactitude à gauche de $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}$ et $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}$, il suffit de prouver que les morphismes (2.4.1) et (2.4.2) sont des isomorphismes lorsque F et H sont respectivement des générateurs projectifs de $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ et $\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$, c'est-à-dire que F et H sont de la forme : $F = \Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}^{(r)}}$ et $H = \Gamma^{\boxtimes p^r \underline{d}, \underline{V}}$. On a $\Gamma^{\boxtimes p^r \underline{d}, \underline{V}} \otimes_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}} \Gamma^{\boxtimes \underline{d}(r)} \simeq (\Gamma^{\boxtimes \underline{d}(r)})^{\underline{V}}$ et $(\Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}^{(r)}})^{(r)} \simeq (\Gamma^{\boxtimes \underline{d}(r)})^{\underline{V}}$. Il suffit donc de démontrer que les morphismes suivants sont des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}} \left(\Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}^{(r)}}, G \right) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}} \left((\Gamma^{\boxtimes \underline{d}(r)})^{\underline{V}}, G^{(r)} \right), \\ \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}} \left((\Gamma^{\boxtimes \underline{d}(r)})^{\underline{V}}, G^{(r)} \right) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}} \left(\Gamma^{\boxtimes p^r \underline{d}, \underline{V}}, G^{(r)} \right). \end{aligned}$$

Par exactitude à gauche de $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}$ le deuxième morphisme est un monomorphisme. Il suffit alors de montrer que le morphisme composé suivant de ces deux morphismes est un isomorphisme :

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}} \left(\Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}^{(r)}}, G \right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}} \left(\Gamma^{\boxtimes p^r \underline{d}, \underline{V}}, G^{(r)} \right).$$

Cela vient de la commutativité du diagramme suivant, où le morphisme horizontal en haute est le composé ci-dessus et les deux morphismes verticaux sont donnés par le lemme de Yoneda :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}} \left(\Gamma^{\boxtimes \underline{d}, \underline{V}^{(r)}}, G \right) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}} \left(\Gamma^{\boxtimes p^r \underline{d}, \underline{V}}, G^{(r)} \right) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ G(V^{(r)}) & \xlongequal{\hspace{2cm}} & G^{(r)}(V). \end{array}$$

On obtient le résultat. \square

COROLLAIRE 2.4.2. *Soient F et G deux objets de $\mathcal{P}_{\underline{d}}$ ou de la catégorie $\mathbf{Ch}(\mathcal{P}_{\underline{d}})$. Si $F^{(r)} \simeq G^{(r)}$, alors $F \simeq G$.*

2.4.2. L'adjoint à gauche de la précomposition par $I^{(r)}$.

La précomposition par le foncteur de torsion de Frobenius $I^{(r)}$ induit un foncteur exact $(-)^{(r)} : \mathcal{P}_{\underline{d}} \rightarrow \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}, F \mapsto F^{(r)}$. D'après Chałupnik [Cha11, page 3] (voir aussi [Tou13a, page 548]), on définit pour chaque entier naturel r un foncteur $\ell^r : \mathcal{P}_{p^r \underline{d}} \rightarrow \mathcal{P}_{\underline{d}}$.

DÉFINITION 2.4.3. Soient $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ un n -uplet d'entiers naturels et r un entier naturel. On définit un foncteur $\ell^r : \mathcal{P}_{p^r \underline{d}} \rightarrow \mathcal{P}_{\underline{d}}$ par la formule suivante, où $F \in \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$; \underline{V} est un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}$ et $S_{\underline{V}}^{\boxtimes \underline{d}}$ désigne le produit $\prod_{i=1}^n S_{V_i}^{d_i} \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$:

$$\ell^r(F)^{\sharp}(\underline{V}) = \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}} \left(F, \left(S_{\underline{V}}^{\boxtimes \underline{d}} \right)^{(r)} \right).$$

PROPOSITION 2.4.4. *Soit $F \in \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$. Il existe un isomorphisme naturel en F :*

$$(2.4.3) \quad \ell^r(F)^{\sharp(r)} \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}} \left(F, S^{\boxtimes \underline{d}(r)} \right).$$

DÉMONSTRATION. Soit \underline{V} un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Par définition et l'isomorphisme $\left(S_{\underline{V}^{(r)}}^{\boxtimes d}\right)^{(r)} \simeq (S^{\boxtimes d(r)})_{\underline{V}}$, on a des isomorphismes naturels en F, \underline{V} :

$$\begin{aligned} \ell^r(F)^{\sharp(r)}(\underline{V}) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d}} \left(F, \left(S_{\underline{V}^{(r)}}^{\boxtimes d} \right)^{(r)} \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d}} \left(F, \left(S^{\boxtimes d(r)} \right)_{\underline{V}} \right). \end{aligned}$$

On en déduit le résultat. \square

PROPOSITION 2.4.5. *Le foncteur ℓ^r est adjoint à gauche à Fr_r . On a des isomorphismes naturels en $F \in \mathcal{P}_{p^r d}$ et $G \in \mathcal{P}_d$:*

$$(2.4.4) \quad \text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\ell^r(F), G) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d}}(F, G^{(r)}),$$

$$(2.4.5) \quad \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(\ell^r(F), G)^{(r)} \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{p^r d}}(F, G^{(r)}).$$

DÉMONSTRATION. On définit un morphisme $F \rightarrow \ell^r(F)^{(r)}$ comme le composé suivant, où le deuxième morphisme est induit par la projection canonique $\Gamma^{\boxtimes p^r d} \rightarrow \Gamma^{\boxtimes d(r)}$ et le troisième est l'isomorphisme (2.4.3) dans la proposition 2.4.4 :

$$F \simeq F \otimes_{\mathcal{P}_{p^r d}} \Gamma^{\boxtimes p^r d} \rightarrow F \otimes_{\mathcal{P}_{p^r d}} \Gamma^{\boxtimes d(r)} \simeq \ell^r(F)^{(r)}.$$

Ce morphisme induit un morphisme $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d}}(\ell^r(F)^{(r)}, G^{(r)}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d}}(F, G^{(r)})$. Par la proposition 2.4.1, ce morphisme et le morphisme induit par la torsion de Frobenius $\text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\ell^r(F), G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d}}(\ell^r(F)^{(r)}, G^{(r)})$ sont des isomorphismes. En composant ces deux isomorphismes, on en déduit l'isomorphisme (2.4.4). Le foncteur ℓ^r est donc adjoint à gauche à Fr_r .

Soit \underline{V} un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. L'isomorphisme (2.4.4) induit des isomorphismes naturels en F, G et \underline{V} :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\ell^r(F), G_{\underline{V}^{(r)}}) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d}} \left(F, \left(G_{\underline{V}^{(r)}} \right)^{(r)} \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d}} \left(G, \left(G^{(r)} \right)_{\underline{V}} \right). \end{aligned}$$

L'isomorphisme (2.4.5) en découle. \square

On note $\mathbf{L}\ell^r$ le foncteur dérivé total à gauche du foncteur exact à droite ℓ^r . On a donc un foncteur $\mathbf{L}\ell^r : \mathbf{D}^b(\mathcal{P}_{p^r d}) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{P}_d)$. L'isomorphisme (2.4.6) dans la proposition suivante est la version dérivée de l'isomorphisme (2.4.5) dans la proposition 2.4.5.

PROPOSITION 2.4.6. *Soient $F \in \mathcal{P}_{p^r d}$ et $G \in \mathcal{P}_d$. Soient r, s deux entiers naturels. Il existe des isomorphismes naturels en F et G :*

$$(2.4.6) \quad \mathbf{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{p^r d}}(F, G^{(r)}) \simeq \mathbf{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(\mathbf{L}\ell^r(F), G)^{(r)},$$

$$(2.4.7) \quad \mathbf{L}\ell^r(F)^{\sharp(r)} \simeq \mathbf{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{p^r d}}(F, S^{\boxtimes d(r)}),$$

$$(2.4.8) \quad \mathbf{L}\ell^r \circ \mathbf{L}\ell^s \simeq \mathbf{L}\ell^{r+s}.$$

DÉMONSTRATION. Le foncteur ℓ^r est, d'après la proposition 2.4.5, adjoint à gauche au foncteur exact Fr_r , alors il préserve les projectifs. D'autre part, l'isomorphisme (2.4.5) de la proposition 2.4.5 induit un isomorphisme naturel en G :

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}(-, G^{(r)}) \simeq \text{Fr}_r \circ \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(-, G) \circ \ell^r.$$

Comme le foncteur ℓ^r préserve les projectifs et le foncteur Fr_r est exact, on peut utiliser les formules de composition des foncteurs dérivés rappelées dans le corollaire 2.2.13. On obtient des isomorphismes naturels en G :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}(-, G^{(r)}) &\simeq \mathbf{R}(\text{Fr}_r \circ \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(-, G) \circ \ell^r) \\ &\simeq \text{Fr}_r \circ \mathbf{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(-, G) \circ \mathbf{L}\ell^r. \end{aligned}$$

L'isomorphisme (2.4.6) en découle. En remplaçant G par $S^{\boxtimes \underline{d}}$ dans l'isomorphisme (2.4.6) et utilisant le lemme de Yoneda, on obtient l'isomorphisme (2.4.7).

D'après la proposition 2.4.5 et l'égalité $\text{Fr}_r \circ \text{Fr}_s = \text{Fr}_{r+s}$, on a un isomorphisme $\ell^r \circ \ell^s \simeq \ell^{r+s}$. De plus, comme le foncteur ℓ^s préserve les projectifs, on peut alors utiliser les formules de composition des foncteurs dérivés rappelées dans le corollaire 2.2.13. On obtient des isomorphismes :

$$\mathbf{L}\ell^r \circ \mathbf{L}\ell^s \simeq \mathbf{L}(\ell^r \circ \ell^s) \simeq \mathbf{L}\ell^{r+s}.$$

On obtient l'isomorphisme (2.4.8). □

COROLLAIRE 2.4.7. *Soient $F \in \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$ et $G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$. Si le complexe $\mathbf{L}\ell^r(F)$ est formel, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme $\mathbf{L}\ell^r(F) \simeq H_*\mathbf{L}\ell^r(F)$ dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}^b(\mathcal{P}_{\underline{d}})$, alors pour tout k on a un isomorphisme naturel en G :*

$$(2.4.9) \quad \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}^k(F, G^{(r)}) \simeq \bigoplus_{i+j=k} \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^i(H_j\mathbf{L}\ell^r(F), G)^{(r)}.$$

DÉMONSTRATION. Puisque le complexe $\mathbf{L}\ell^r(F)$ est formel, il est isomorphe à son homologie $H_*\mathbf{L}\ell^r(F)$ dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}^b(\mathcal{P}_{\underline{d}})$. L'isomorphisme (2.4.6) induit donc un isomorphisme $\mathbf{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}(F, G^{(r)}) \simeq \mathbf{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}(H_*\mathbf{L}\ell^r(F), G)^{(r)}$ naturel en G . En prenant l'homologie, on obtient l'isomorphisme (2.4.9). □

2.5. Définition de la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$ et premières propriétés

2.5.1. Définition et exemples. Le corollaire 2.4.7 conduit à introduire la définition suivante.

DÉFINITION 2.5.1. Soient r, n deux entiers naturels, $n > 0$. On désigne par $\mathfrak{Formel}(r, n)$ la classe des foncteurs strictement polynomiaux F de n variables tels que le complexe $\mathbf{L}\ell^r(F)$ est formel.

Le résultat suivant est une reformulation du corollaire 2.4.7 en utilisant la définition ci-dessus.

COROLLAIRE 2.5.2. *Soit F un foncteur strictement polynomial de n variable. Si F appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$, alors pour tout k on a un isomorphisme naturel en $G \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$:*

$$\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}^k(F, G^{(r)}) \simeq \bigoplus_{i+j=k} \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^i(H_j\mathbf{L}\ell^r(F), G)^{(r)}.$$

Dans la suite de cette section, nous donnons quelques exemples et quelques propriétés simples de la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$.

EXEMPLE 2.5.3. (1) Comme le foncteur $\Gamma^{\boxtimes d(0)}$ est isomorphe à $\Gamma^{\boxtimes d}$ qui est un foncteur projectif, la classe $\mathfrak{Formel}(0, n)$ possède donc tous les foncteurs strictement polynomiaux, c'est-à-dire que $\mathfrak{Formel}(0, n)$ est égale à la classe d'objets de $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$.

(2) Si le foncteur F est projectif, il appartient à $\mathfrak{Formel}(r, n)$ pour tout r .

(3) Si $F \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$ est un foncteur homogène de degré d qui n'est pas un multiple de p , alors $F \in \mathfrak{Formel}(r, n)$ pour tout r .

Dans la proposition suivante, on donne un autre exemple de foncteurs appartenant à $\mathfrak{Formel}(r, n)$ pour tout $r \geq 1$. Cette proposition utilise la notion de bloc, rappelée dans la section 4.2 du chapitre 4. Elle n'est donnée ici qu'à titre d'exemple et ne sera pas utilisée ensuite.

PROPOSITION 2.5.4. *Soit F un foncteur strictement polynomial. Si aucun des blocs des facteurs de composition du foncteur F n'est le bloc trivial, alors F appartient à $\mathfrak{Formel}(r, n)$ pour tout $r \geq 1$.*

DÉMONSTRATION. On suppose que l'ensemble des blocs du foncteur F ne possède pas le bloc trivial. Il existe alors une résolution projective P de F telle que l'ensemble des blocs de P_i ne possède pas le bloc trivial pour tout i . Il existe, par définition, un isomorphisme $\mathbf{L}^r(F) \simeq \ell^r(P)$. D'autre part, par la proposition 2.4.4 et le fait que le bloc trivial n'appartient pas à l'ensemble des blocs de P_i , on a

$$\ell^r(P_i)^{\sharp(r)} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}(P_i, S^{\boxtimes d(r)}) = 0.$$

On obtient donc $\mathbf{L}^r(F) = 0$. On en déduit que le foncteur F appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$ pour tout $r \geq 1$. \square

2.5.2. Premières propriétés de la classe formelle $\mathfrak{Formel}(r, n)$.

PROPOSITION 2.5.5. *Soient F et G des éléments de la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$ et soit \underline{V} un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Alors les foncteurs $F_{\underline{V}}, F \oplus G$ et $F \otimes G$ appartiennent à $\mathfrak{Formel}(r, n)$. De plus, on a des isomorphismes gradués naturels*

$$H_* \mathbf{L}^r(F_{\underline{V}}) \simeq (H_* \mathbf{L}^r(F))_{\underline{V}^{(r)}}$$

$$H_* \mathbf{L}^r(F \oplus G) \simeq H_* \mathbf{L}^r(F) \oplus H_* \mathbf{L}^r(G)$$

$$H_* \mathbf{L}^r(F \otimes G) \simeq H_* \mathbf{L}^r(F) \otimes H_* \mathbf{L}^r(G)$$

DÉMONSTRATION. Comme les foncteurs $(-)\underline{V}, \oplus, \otimes$ sont exacts, ils préservent les complexes formels. Pour prouver cette proposition, il suffit de démontrer qu'il existe des isomorphismes naturels en F, G :

$$(2.5.1) \quad \mathbf{L}^r(F_{\underline{V}}) \simeq (\mathbf{L}^r(F))_{\underline{V}^{(r)}}, \quad \mathbf{L}^r(F \oplus G) \simeq \mathbf{L}^r(F) \oplus \mathbf{L}^r(G),$$

$$(2.5.2) \quad \mathbf{L}^r(F \otimes G) \simeq \mathbf{L}^r(F) \otimes \mathbf{L}^r(G).$$

D'après le corollaire 2.4.2 et la proposition 2.4.4, on a des isomorphismes naturels en F, G :

$$\ell^r(F_{\underline{V}}) \simeq \ell^r(F)_{\underline{V}^{(r)}}, \quad \ell^r(F \oplus G) \simeq \ell^r(F) \oplus \ell^r(G), \quad \ell^r(F \otimes G) \simeq \ell^r(F) \otimes \ell^r(G).$$

De plus, les foncteurs $(-)\underline{V}, \oplus, \otimes$ sont exacts et préservent les projectifs. On en déduit les isomorphismes (2.5.5) et (2.5.6). \square

LEMME 2.5.6. *Soient $F \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$ et $G \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}$. On a des isomorphismes naturels en F, G :*

$$(2.5.3) \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F \circ \Delta_n, G) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}(F, G \circ \boxplus^n) \circ \Delta_n,$$

$$(2.5.4) \quad \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F \circ \Delta_n, G) \simeq \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}(F, G \circ \boxplus^n) \circ \Delta_n.$$

DÉMONSTRATION. Par l'adjonction somme-diagonale $- \circ \Delta_n : \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n) \rightleftarrows \mathcal{P}_{\mathbb{k}} : - \circ \boxplus^n$, on a des isomorphismes naturels en F, G, V , où V est un objet de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F \circ \Delta_n, G_V) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}(F, G_V \circ \boxplus^n) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}\left(F, (G \circ \boxplus^n)_{\Delta_n(V)}\right). \end{aligned}$$

On en déduit l'isomorphisme (2.5.3). Cet isomorphisme induit un isomorphisme naturel en G :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(-, G) \circ (- \circ \Delta_n) \simeq (- \circ \Delta_n) \circ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}(-, G \circ \boxplus^n).$$

Comme le foncteur $- \circ \Delta_n$ est exact et préserve les projectifs, on peut utiliser les formules de composition des foncteurs dérivés rappelées dans le corollaire 2.2.13. On obtient un isomorphisme naturel en G :

$$\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(-, G) \circ (- \circ \Delta_n) \simeq (- \circ \Delta_n) \circ \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}(-, G \circ \boxplus^n).$$

L'isomorphisme (2.5.4) en découle. \square

LEMME 2.5.7. *Soient F, G deux foncteurs strictement polynomiaux de n variables, et soit \underline{V} un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. On a des isomorphismes naturels en F, G et \underline{V} :*

$$(2.5.5) \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}(F, G)(\underline{V}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}(F^{\underline{V}}, G) \circ \Delta_n(\mathbb{k}),$$

$$(2.5.6) \quad \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}(F, G)(\underline{V}) \simeq \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}(F^{\underline{V}}, G) \circ \Delta_n(\mathbb{k}).$$

DÉMONSTRATION. En utilisant la définition du foncteur Hom-interne et l'isomorphisme canonique $\underline{V} \otimes \Delta_n(\mathbb{k}) \simeq \underline{V}$, on obtient (2.5.5). Soit J une corésolution injective du foncteur G . L'isomorphisme (2.5.5) induit un isomorphisme des complexes :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}(F, J)(\underline{V}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}(F^{\underline{V}}, J) \circ \Delta_n(\mathbb{k}).$$

On en déduit l'isomorphisme (2.5.6). \square

PROPOSITION 2.5.8. *Si le foncteur $F \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$ appartient à la classe $\mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, n)$ alors $F \circ \Delta_n \in \mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, 1)$ et $H_*\mathbf{L}\ell^r(F \circ \Delta_n) \simeq H_*\mathbf{L}\ell^r(F) \circ \Delta_n$.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition 2.4.4, l'isomorphisme (2.5.3) du lemme 2.5.6 et le fait que $S^{\boxplus \underline{d}}$ est la partie homogène de degré \underline{d} du foncteur $S^{\underline{d}} \circ \boxplus^n$ où \underline{d} est la somme $d_1 + \dots + d_n$, on a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \ell^r(F \circ \Delta_n)^{\sharp(r)} &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}\left(F \circ \Delta_n, S^{d(r)}\right) \circ \Delta_n \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}\left(F, S^{d(r)} \circ \boxplus^n\right) \circ \Delta_n \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}\left(F, S^{\underline{d}(r)}\right) \circ \Delta_n \\ &\simeq (\ell^r(F))^{\sharp(r)} \circ \Delta_n \\ &\simeq (\ell^r(F) \circ \Delta_n)^{\sharp(r)}. \end{aligned}$$

En combinant avec le corollaire 2.4.2, on a un isomorphisme $\ell^r(F \circ \Delta_n) \simeq \ell^r(F) \circ \Delta_n$ naturel en F . Comme le foncteur $- \circ \Delta_n : \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(n) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ est exact et préserve les projectifs, il existe un isomorphisme $\mathbf{L}\ell^r(F \circ \Delta_n) \simeq \mathbf{L}\ell^r(F) \circ \Delta_n$ naturel en F . On en déduit le résultat. \square

2.6. Formalité et \mathbf{k} -invariants

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème 2.6.12 qui est une généralisation à plusieurs variables d'un résultat de van der Kallen [vdK13]. Mais nous proposons une méthode différente pour l'obtenir, qui remplace l'utilisation de suites spectrales par la théorie des \mathbf{k} -invariants de Dold [Dol60]. Une application du théorème 2.6.12 est la proposition 2.6.13, qui donne un critère permettant d'établir des propriétés plus compliquées des classes formelles $\mathfrak{F}\text{ormel}(r, n)$.

Les \mathbf{k} -invariants sont bien connus dans la topologie algébrique. Plus précisément, pour chaque CW complexe, on peut définir des classes de cohomologie $\mathbf{k}^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$ appelées \mathbf{k} -invariants de X . Nous renvoyons à [Hat02, Chapter 4, page 338] pour le résultat typique suivant.

PROPOSITION. *Soit X un CW complexe. Il existe une équivalence d'homotopie entre X et un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane si et seulement si tous les \mathbf{k} -invariants de X sont nuls.*

Il faut comparer cette proposition avec la proposition 2.6.4 qui nous intéresse. La version algébrique (pour les complexes sur une catégorie abélienne) de \mathbf{k} -invariants est donnée par Dold [Dol60].

2.6.1. Théorie des \mathbf{k} -invariants de Dold. D'abord, on fait quelques rappels la théorie des \mathbf{k} -invariants de Dold [Dol60]. En fait, on traduit ses résultats dans le langage de la catégorie dérivé. On fixe \mathcal{A} une catégorie abélienne. Si $C \in \mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ est un complexe, et n est un entier, on désigne par $\tau_{\leq n}(C)$ le complexe

$$(\tau_{\leq n}(C))_i = \begin{cases} C_i, & i \leq n, \\ C_{n+1} / \ker(C_{n+1} \rightarrow C_n), & i = n+1, \\ 0, & i \geq n+2, \end{cases}$$

et par $p_n : C \rightarrow \tau_{\leq n}(C)$, $q_n : \tau_{\leq n}(C) \rightarrow \tau_{\leq n-1}(C)$ des épimorphismes canoniques. On obtient un diagramme commutatif (la tour de Postnikov)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C & & & \\ & & & \swarrow & \downarrow p_n & \searrow & \\ \cdots & \longrightarrow & \tau_{\leq n+1}(C) & \xrightarrow{q_{n+1}} & \tau_{\leq n}(C) & \xrightarrow{q_n} & \tau_{\leq n-1}(C) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

La proposition suivante est une conséquence directe de la définition précédente.

PROPOSITION 2.6.1. (1) *On a des suites exactes dans la catégorie $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$*

$$0 \rightarrow H_n(C)[-n] \rightarrow \tau_{\leq n}(C) \xrightarrow{q_n} \tau_{\leq n-1}(C) \rightarrow 0.$$

(2) *L'application $H_i(p_n) : H_i(C) \rightarrow H_i(\tau_{\leq n}(C))$ est un isomorphisme si $i \leq n$ et $H_i(\tau_{\leq n}(C)) = 0$ si $i \geq n+1$. En particulier, si $H_i(C) = 0$ pour tout $i \geq n+1$ alors le morphisme $p_n : C \rightarrow \tau_{\leq n}(C)$ est un quasi-isomorphisme.*

Ensuite, on a besoin de la structure triangulée de la catégorie dérivée bornée $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, voir sous-section 2.2.3. D'après les propositions 2.2.9 et 2.6.1(1), pour chaque entier n et chaque complexe $C \in \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, il existe un triangle distingué dans la catégorie $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$:

$$(2.6.1) \quad H_n(C)[-n] \rightarrow \tau_{\leq n}(C) \xrightarrow{q_n} \tau_{\leq n-1}(C) \rightarrow H_n(C)[-n-1].$$

DÉFINITION 2.6.2. Soient $C \in \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ et n un entier. On note $\mathbf{k}^n(C)$ le morphisme $\tau_{\leq n-1}(C) \rightarrow H_n(C)[-n-1]$ dans le triangle distingué (2.6.1), et on appelle $\mathbf{k}^n(C)$ le n -ème \mathbf{k} -invariant de C .

En principe, les \mathbf{k} -invariants décrivent comment on peut reconstruire un complexe à partir de son homologie. C'est compliqué de calculer explicitement les \mathbf{k} -invariants d'un complexe. Mais ces invariants sont utiles pour établir des propriétés théoriques. La proposition suivante donne un lien entre les \mathbf{k} -invariants et la formalité. Elle est démontrée par Dold [Dol60].

PROPOSITION 2.6.3. Soient $C \in \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ et n un entier. Le complexe $\tau_{\leq n}(C)$ est formel si et seulement si le complexe $\tau_{\leq n-1}(C)$ est formel et le \mathbf{k} -invariant $\mathbf{k}^n(C)$ est nul.

DÉMONSTRATION. (\Rightarrow) Comme le complexe $\tau_{\leq n}(C)$ est formel, il existe un isomorphisme $f : \tau_{\leq n}(C) \rightarrow H(\tau_{\leq n}(C)) = \tau_{\leq n}(H(C))$ dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. En appliquant le foncteur $\tau_{\leq n-1}$, on obtient un isomorphisme

$$\tau_{\leq n-1}(f) : \tau_{\leq n-1}(C) \simeq \tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq n}(H(C))) = \tau_{\leq n-1}(H(C)).$$

Le complexe $\tau_{\leq n-1}(C)$ est donc formel. Le n -ième \mathbf{k} -invariant $\mathbf{k}^n(C)$ du complexe C est nul grâce à la commutativité du diagramme suivant dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(C)[-n] & \longrightarrow & \tau_{\leq n}(C) & \longrightarrow & \tau_{\leq n-1}(C) & \xrightarrow{\mathbf{k}^n(C)} & H_n(C)[-n-1] \\ \parallel & & f \downarrow \simeq & & \tau_{\leq n-1}(f) \downarrow \simeq & & \parallel \\ H_n(C)[-n] & \longrightarrow & \tau_{\leq n}(H(C)) & \xrightarrow{q_n} & \tau_{\leq n-1}(H(C)) & \xrightarrow{0} & H_n(C)[-n-1]. \end{array}$$

(\Leftarrow) Comme $\tau_{\leq n-1}(C)$ est formel, il existe un isomorphisme $g : \tau_{\leq n-1}(C) \xrightarrow{\simeq} \tau_{\leq n-1}(H(C))$ dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. De plus, comme $\mathbf{k}^n(C) = 0$, le diagramme suivant est commutatif, où les deux lignes sont des triangles distingués dans la catégorie $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\leq n-1}(C)[-1] & \xrightarrow{0} & H_n(C)[-n] & \longrightarrow & \tau_{\leq n}(C) & \longrightarrow & \tau_{\leq n-1}(C) \\ \downarrow g[-1] & & \parallel & & & & \downarrow g \\ \tau_{\leq n-1}(H(C))[-1] & \xrightarrow{0} & H_n(C)[-n] & \longrightarrow & \tau_{\leq n}(H(C)) & \xrightarrow{q_n} & \tau_{\leq n-1}(H(C)). \end{array}$$

Par **TR4** de la définition 2.2.5, il existe un isomorphisme $\tau_{\leq n}(C) \simeq \tau_{\leq n}(H(C))$ dans la catégorie $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. Par définition, le complexe $\tau_{\leq n}(C)$ est formel. \square

PROPOSITION 2.6.4. Soit $C \in \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. Le complexe C est formel si et seulement si $\mathbf{k}^n(C) = 0$ pour tout n .

DÉMONSTRATION. (\Rightarrow) Comme le complexe C est formel, les complexes $\tau_{\leq n}(C)$ sont également formels. D'après la proposition 2.6.3, les \mathbf{k} -invariants $\mathbf{k}^n(C)$ sont nuls.

(\Leftarrow) Puisque C est un objet de $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, son homologie est bornée. Il existe donc un entier m strictement positif tel que $p_m : C \rightarrow \tau_{\leq m}(C)$ est un isomorphisme dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ et que le complexe $\tau_{\leq -m}(C)$ est acyclique. Le complexe $\tau_{\leq -m}(C)$ est alors formel. De plus par l'hypothèse, $\mathbf{k}^n(C) = 0$ pour tout n . En utilisant la proposition 2.6.3 et un raisonnement par récurrence, le complexe $\tau_{\leq m}(C)$ est formel. Le complexe C est donc formel. \square

2.6.2. Application à la formalité. On utilise maintenant la théorie des \mathbf{k} -invariants pour démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.6.5. *Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux catégories abéliennes. Soit $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact. Les deux conditions suivantes sur le foncteur ϕ sont équivalentes :*

- (1) *Le complexe $C \in \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ est formel dès que le complexe $\phi(C) \in \mathbf{D}^b(\mathcal{B})$ est formel.*
- (2) *Pour $i \geq 2$, les applications $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A, B) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^i(\phi A, \phi B)$ induites par ϕ sont des monomorphismes.*

Comme une application de ce théorème, on obtiendra un résultat de van der Kallen [vdK13] dans la section suivante.

REMARQUE 2.6.6. Avant de prouver le théorème 2.6.5, on remarque que, sous l'hypothèse du théorème, le complexe $\phi(C)$ est formel si le complexe C l'est aussi. En effet, puisque le complexe C est formel, $C \simeq H(C)$. On obtient un isomorphisme $\phi(C) \simeq \phi(H(C))$. D'autre part, l'exactitude de ϕ implique que l'homologie du complexe $\phi(C)$ est égale à $\phi(H(C))$. On a donc un isomorphisme $\phi(C) \simeq H(\phi(C))$, d'où le résultat.

LEMME 2.6.7. *Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux catégories abéliennes. Soient $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact et C un objet de $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. On a alors $\phi(\mathbf{k}^n(C)) = \mathbf{k}^n(\phi(C))$.*

DÉMONSTRATION. D'après la définition 2.6.2, il existe un triangle distingué dans la catégorie $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$

$$H_n(C)[-n] \rightarrow \tau_{\leq n}(C) \xrightarrow{q_n} \tau_{\leq n-1}(C) \xrightarrow{\mathbf{k}^n(C)} H_n(C)[-n-1].$$

Puisque le foncteur ϕ est exact, on a $H_n(\phi(C)) \simeq \phi(H_n(C))$ et $\tau_{\leq n}(\phi(C)) \simeq \phi(\tau_{\leq n}(C))$. En appliquant le foncteur exact ϕ , on obtient le triangle distingué suivant dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{B})$

$$H_n(\phi(C))[-n] \rightarrow \tau_{\leq n}(\phi(C)) \xrightarrow{q_n} \tau_{\leq n-1}(\phi(C)) \xrightarrow{\phi(\mathbf{k}^n(C))} H_n(\phi(C))[-n-1].$$

On a alors $\mathbf{k}^n(\phi(C)) = \phi(\mathbf{k}^n(C))$. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.6.5. (2) \Rightarrow (1). Puisque C est un objet de $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, il existe des entiers i_1, i_2 tels que $H_n(C) = 0$ dès que $n \leq i_1$ ou $n \geq i_2$. Par conséquence, le morphisme $p_n : C \rightarrow \tau_{\leq n}(C)$ est un isomorphisme si $n \geq i_2$ et le complexe $\tau_{\leq n}(C)$ est acyclique si $n \leq i_1$. En particulier, le complexe $\tau_{\leq n}(C)$ est formel si $n \leq i_1$, et si le complexe $\tau_{\leq n}(C)$ est formel pour $n \geq i_2$ quelconque alors le complexe C est formel. Il suffit de montrer que le complexe $\tau_{\leq n}(C)$ est formel si le complexe $\tau_{\leq n-1}(C)$ est formel.

On suppose que $\tau_{\leq n-1}(C)$ est formel avec $n-1 \geq i_1$. Il existe alors un isomorphisme $\tau_{\leq n-1}(C) \simeq \bigoplus_{i=i_1}^{n-1} H_i(C)[-i]$ dans la catégorie $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. Comme le foncteur ϕ est exact, on a un isomorphisme $\tau_{\leq n-1}(\phi(C)) \simeq \bigoplus_{i=i_1}^{n-1} H_i(\phi(C))[-i]$ dans la catégorie $\mathbf{D}^b(\mathcal{B})$. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{A})}(\tau_{\leq n-1}(C), H_n(C)[-n-1]) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{B})}(\tau_{\leq n-1}(\phi(C)), H_n(\phi(C))[-n-1]) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \bigoplus_{i=i_1}^{n-1} \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1-i}(H_i(C), H_n(C)) & \xrightarrow{\phi_*} & \bigoplus_{i=i_1}^{n-1} \mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^{n+1-i}(H_i(\phi(C)), H_n(\phi(C))) \end{array}$$

Par l'assertion (2), l'application ϕ_* est un monomorphisme. D'autre part, puisque le complexe $\phi(C)$ est formel, d'après la proposition 2.6.4, on a $\mathbf{k}^n(\phi(C)) = 0$. En combinant avec le lemme 2.6.7, on a donc $\mathbf{k}^n(C) = 0$. Par la proposition 2.6.3, le complexe $\tau_{\leq n}(C)$ est formel.

(1) \Rightarrow (2). Soit $e \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A, B)$ un élément tel que $\phi_*(e) \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^i(\phi(A), \phi(B))$ soit nul. Puisque $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A, B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{A})}(A[0], B[-i])$, on peut voir e comme un morphisme $A[0] \rightarrow B[-i]$ dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. Il existe donc un triangle distingué dans la catégorie $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$

$$B[-i+1] \rightarrow C \rightarrow A[0] \xrightarrow{e} B[-i].$$

Puisque le foncteur ϕ est exact, on obtient un triangle distingué dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{B})$

$$\phi(B)[-i+1] \rightarrow \phi(C) \rightarrow \phi(A)[0] \xrightarrow{\phi_*(e)} \phi(B)[i].$$

Comme $\phi_*(e) = 0$, le complexe $\phi(C)$ est formel. D'après l'assertion (1), le complexe C est également formel. Le morphisme e est donc nul. \square

Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème 2.6.5. Ce résultat est classique, et nous renvoyons à [KS06, Corollary 13.1.20] pour une autre démonstration de ce résultat. De plus, le corollaire 2.6.8 explique pourquoi on a l'hypothèse “ $i \geq 2$ ” dans l'assertion (2) du théorème 2.6.5.

COROLLAIRE 2.6.8. *Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. On suppose que la catégorie \mathcal{A} est héréditaire, c'est-à-dire qu'on a $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A, B) = 0$ pour $i \geq 2$ et $A, B \in \mathcal{A}$. Soit $C \in \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. Il existe un isomorphisme dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$:*

$$(2.6.2) \quad C \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i(C)[-i].$$

DÉMONSTRATION. On définit un endofoncteur $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ par $\phi(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Il est évident que ϕ est un foncteur exact et que le complexe $\phi(C)$ est formel. De plus, comme la catégorie est héréditaire, les applications $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A, B) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(\phi(A), \phi(B))$ induites par ϕ sont des monomorphismes pour $i \geq 2$. Par le théorème 2.6.5, le complexe C est formel. Le complexe C est donc isomorphe à son homologie, d'où le résultat. \square

2.6.3. Formalité et injectivité de la torsion de Frobenius. Dans ce paragraphe, on applique la théorie développée dans les sections précédentes au contexte des foncteurs strictement polynomiaux et de la torsion de Frobenius. On vérifie d'abord dans la proposition suivante que le foncteur de torsion de Frobenius vérifie les hypothèses du théorème 2.6.5.

PROPOSITION 2.6.9. *Soient $F, G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$. L'application suivante induite par le foncteur exact $\text{Fr}_r : \mathcal{P}_{\underline{d}} \rightarrow \mathcal{P}_{p^r \underline{d}}$ suivant est un monomorphisme :*

$$(2.6.3) \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}^*(F^{(r)}, G^{(r)}).$$

La démonstration de cette proposition repose sur l'injectivité de la torsion de Frobenius en cohomologie connue pour les groupes algébriques réductifs. Pour un uplet d'entiers naturels $\underline{m} = (m_1, \dots, m_n)$, on désigne par $\text{GL}_{\underline{m}, \mathbf{k}}$ le produit $\prod_{i=1}^n \text{GL}_{m_i, \mathbf{k}}$ et par $\mathbb{k}^{\underline{m}}$ l'objet $(\mathbb{k}^{m_1}, \dots, \mathbb{k}^{m_n})$. On a le foncteur d'évaluation en $\mathbb{k}^{\underline{m}}$

$$\mathcal{P}_{\underline{d}} \rightarrow \text{GL}_{\underline{m}, \mathbf{k}}\text{-Mod}, \quad F \mapsto F(\mathbb{k}^{\underline{m}}).$$

Le lemme suivant est démontré dans [Tou10, Lemma 2.3].

LEMME 2.6.10. *Soient $F, G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$. If $\underline{m} \geq \underline{d}$, c'est-à-dire, $m_i \geq d_i, i = 1, \dots, n$, le foncteur d'évaluation en $\mathbb{k}^{\underline{m}}$ induit un isomorphisme :*

$$(2.6.4) \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\text{GL}_{\underline{m}, \mathbf{k}}}^*(F(\mathbb{k}^{\underline{m}}), G(\mathbb{k}^{\underline{m}})).$$

DÉMONSTRATION. Par un argument de δ -foncteur, il suffit de considérer le cas où F et G sont de type séparé, c'est-à-dire, $F = \boxtimes_{i=1}^n F_i$ et $G = \boxtimes_{i=1}^n G_i$. Le diagramme suivant est commutatif, où les flèches verticales sont des morphismes canoniques et le morphisme horizontal en haut est le morphisme (2.6.4) :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^*(F, G) & \xrightarrow{\quad} & \text{Ext}_{\text{GL}_{\underline{m}, \mathbf{k}}}^*(F(\mathbb{k}^{\underline{m}}), G(\mathbb{k}^{\underline{m}})) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \bigotimes_{i=1}^n \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d_i}}^*(F_i, G_i) & \xrightarrow{(\dagger)} & \bigotimes_{i=1}^n \text{Ext}_{\text{GL}_{m_i, \mathbf{k}}}^*(F_i(\mathbb{k}^{m_i}), G_i(\mathbb{k}^{m_i})). \end{array}$$

Puisque $m_i \geq d_i, i = 1, \dots, n$, d'après [FS97, Corollary 3.13], l'application (\dagger) est un isomorphisme. L'application (2.6.4) est donc un isomorphisme. \square

Si M est un $\text{GL}_{\underline{m}, \mathbf{k}}$ -module, on désigne par $M^{[r]}$ la r -torsion de M , voir [Jan03, Section I.9.10]. Il existe un isomorphisme $F^{(r)}(\mathbb{k}^{\underline{m}}) \simeq F(\mathbb{k}^{\underline{m}})^{[r]}$ naturel en F . De plus, on a le résultat suivant.

LEMME 2.6.11. *Soient $F, G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$. Le diagramme suivant est commutatif, où les flèches verticales $(\dagger_1), (\dagger_2)$ sont induites par le foncteur d'évaluation en $\mathbb{k}^{\underline{m}}$:*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\underline{d}}}^*(F, G) & \xrightarrow{(2.6.3)} & \text{Ext}_{\mathcal{P}_{p^r \underline{d}}}^*(F^{(r)}, G^{(r)}) \\ \downarrow (\dagger_1) & & \downarrow (\dagger_2) \\ \text{Ext}_{\text{GL}_{\underline{m}, \mathbf{k}}}^*(F(\mathbb{k}^{\underline{m}}), G(\mathbb{k}^{\underline{m}})) & \xrightarrow{(\dagger_3)} & \text{Ext}_{\text{GL}_{\underline{m}, \mathbf{k}}}^*(F(\mathbb{k}^{\underline{m}})^{[r]}, G(\mathbb{k}^{\underline{m}})^{[r]}). \end{array}$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.6.9. On considère le diagramme commutatif dans le lemme 2.6.11. Puisque $\underline{m} \geq \underline{d}$, par le lemme 2.6.10, les applications $(\dagger_1), (\dagger_2)$ sont des isomorphismes. De plus, par [Jan03, Section II.10.16], l'application (\dagger_3) est aussi un isomorphisme. On en déduit le résultat. \square

THÉORÈME 2.6.12. *Soient $C \in \mathbf{Ch}(\mathcal{P}_{\underline{d}})$ un complexe fini et r un entier naturel. Le complexe C est formel si le complexe $C^{(r)}$ l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. On désigne par $\phi : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{P}_{p^r d}$ le foncteur de précomposition par $I^{(r)}$. Ce foncteur est exact. De plus, on a $\phi(C) = C^{(r)}$. D'après la proposition 2.6.9, l'application $\text{Ext}_{\mathcal{P}_d}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{p^r d}}^*(F^{(r)}, G^{(r)})$ induite par ϕ est un monomorphisme. Par le théorème 2.6.5, on obtient le résultat. \square

PROPOSITION 2.6.13. *Soit F un foncteur strictement polynomial de n variables. S'il existe un objet gradué C tel que $\mathbf{L}^r(F)^{(r)} \simeq C^{(r)}$ alors F appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$ et $H_*\mathbf{L}^r(F) \simeq C$.*

DÉMONSTRATION. Soit C un objet gradué dans $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$. On suppose qu'il existe un isomorphisme $\mathbf{L}^r(F)^{(r)} \simeq C^{(r)}$. Comme le complexe $C^{(r)}$ est formel, par le théorème 2.6.12, le complexe $\mathbf{L}^r(F)$ est formel. De plus, on a un isomorphisme gradué $(H_*\mathbf{L}^r(F))^{(r)} \simeq C^{(r)}$. Cet isomorphisme induit un isomorphisme gradué $H_*\mathbf{L}^r(F) \simeq C$ car la précomposition par la torsion de Frobenius est un plongement de catégories. \square

2.6.4. Formalité et paramétrisations. Dans ce paragraphe, on applique la théorie développée dans les sections 2.6.1 et 2.6.2 au contexte des foncteurs strictement polynomiaux et de la paramétrisation.

PROPOSITION 2.6.14. *Soient $C \in \mathbf{Ch}(\mathcal{P}_d)$ un complexe fini et r un entier naturel. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) *Le complexe C est formel.*
- (2) *Le complexe $C_{\underline{V}}$ est formel pour tout n -uplet \underline{V} d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$.*
- (3) *Il existe un n -uplet \underline{V} d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ tel que $V_i \neq 0$ pour tout i et que le complexe $C_{\underline{V}}$ est formel.*

DÉMONSTRATION. L'implication (2) \Rightarrow (3) est évidente. Puisque le foncteur $(-)_{\underline{V}}$ est exact, on a que (1) \Rightarrow (2). Il reste à montrer (3) \Rightarrow (1). Soit \underline{V} un n -uplet d'objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ tel que $V_i \neq 0$ pour tout i . Puisque V_i est non-nul, \mathbb{k} est un facteur direct de V_i . Le foncteur F est donc un facteur direct du foncteur $F_{\underline{V}}$ pour tout foncteur strictement polynomial F . Par conséquence, les applications $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F_{\underline{V}}, G_{\underline{V}})$ sont toujours des monomorphismes. Par le théorème 2.6.5, le complexe C est formel. \square

2.7. Étude de la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$

L'objectif de cette section est d'étudier la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$. De plus, pour obtenir des calculs explicites, il faut également déterminer explicitement $H_*\mathbf{L}^r(F)$ pour $F \in \mathfrak{Formel}(r, n)$.

2.7.1. La compatibilité de la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$ avec la précomposition par la torsion de Frobenius. La notation suivante sera très souvent utilisée dans la suite. Pour chaque entier naturel r , on note E_r le \mathbb{k} -espace vectoriel gradué de dimension finie défini par $(E_r)^i$ est égale à \mathbb{k} si $i = 0, 2, \dots, 2p^r - 2$ et 0 sinon. Le résultat important suivant est la version à paramètre d'un cas particulier de [Tou12, Lemma 4.4 et Theorem 4.6] (voir aussi [Tou13a, Proposition 13]). Nous le donnons sans démonstration.

THÉORÈME 2.7.1 (Touzé). *Soit $F \in \mathcal{P}_d$. Il existe un isomorphisme naturel en F :*

$$\mathbf{RHom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F^{(r)}, S^{d(r)}) \simeq (F^{E_r})^{\sharp(r)}.$$

COROLLAIRE 2.7.2. *Soit F un foncteur strictement polynomial d'une variable. On a $F^{(r)} \in \mathfrak{Formel}(r, 1)$ et $H_*\mathbf{L}\ell^r(F) = F^{E_r}$.*

DÉMONSTRATION. Par l'isomorphisme (2.4.7) et le théorème 2.7.1, le complexe $\mathbf{L}\ell^r(F^{(r)})^{(r)}$ est isomorphe à $(F^{E_r})^{(r)}$ qui est un complexe formel. Par la proposition 2.6.13, $F^{(r)}$ appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r, 1)$ et $H_*\mathbf{L}\ell^r(F) \simeq F^{E_r}$. \square

Dans le théorème suivant, nous généralisons le théorème 2.7.1 et le corollaire 2.7.2 à plusieurs variables et nous en tirons les conséquences pour la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$.

THÉORÈME 2.7.3. *Soient F, G deux foncteurs strictement polynomiaux de n variables.*

- (1) *Le foncteur $F^{(r)}$ appartient à $\mathfrak{Formel}(r, n)$ et $H_*\mathbf{L}\ell^r(F^{(r)}) \simeq F^{\Delta_n(E_r)}$.*
- (2) *Il existe un isomorphisme naturel en G*

$$\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_k(n)}^*(F^{(r)}, G^{(r)}) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_k(n)}^*(F^{\Delta_n(E_r)}, G)^{(r)}.$$

- (3) *Si F appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$ alors $F^{(1)}$ appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r+1, n)$. De plus, on a $H_*\mathbf{L}\ell^{r+1}(F^{(1)}) \simeq H_*\mathbf{L}\ell^r(F)^{\Delta_n(E_1)}$.*
- (4) *Réciproquement, si un foncteur $F^{(1)}$ appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r+1, n)$, alors F appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r, n)$.*

DÉMONSTRATION. L'assertion (2) du théorème est une conséquence de la première assertion et du corollaire 2.5.2.

(1) On suppose que F est un objet de $\mathcal{P}_{\underline{d}}$. On note d la somme $d_1 + \cdots + d_n$. Par l'isomorphisme (2.4.7) de la proposition 2.4.6 et le fait que $S^{\boxtimes \underline{d}}$ est la partie homogène de degré \underline{d} du foncteur $S^d \circ \boxplus^n$, on a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\ell^r(F^{(r)})^{\sharp(r)} &\simeq \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_k(n)}(F^{(r)}, S^{\boxtimes \underline{d}(r)}) \\ &\simeq \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_k(n)}(F^{(r)}, S^{d(r)} \circ \boxplus^n). \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise successivement le lemme 2.5.6, l'isomorphisme (2.5.6) du lemme 2.5.7 pour obtenir d'isomorphismes suivants, où \underline{V} est un n -uplet d'objets de \mathcal{V}_k :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\ell^r(F^{(r)})^{\sharp(r)}(\underline{V}) &\simeq \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_k(n)}(F^{(r)}, S^{d(r)} \circ \boxplus^n)(\underline{V}) \\ &\simeq \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_k(n)}\left(\left(F^{(r)}\right)^{\underline{V}}, S^{d(r)} \circ \boxplus^n\right)(\Delta_n(\mathbb{k})) \\ &\simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_k}\left(\left(F^{(r)}\right)^{\underline{V}} \circ \Delta_n, S^{d(r)}\right) \\ &\simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_k}\left(\left(F^{\underline{V}^{(r)}} \circ \Delta_n\right)^{(r)}, S^{d(r)}\right) \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant successivement le théorème 2.7.1, l'isomorphisme d'adjonction somme-diagonale, le lemme de Yoneda et le fait que $S_{\Delta_n(E_n)}^{\boxtimes \underline{d}}$ est la partie homogène

de degré \underline{d} de $S_{E_n}^{\underline{d}} \circ \boxplus^n$, on obtient des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\ell^r \left(F^{(r)} \right)^{\sharp(r)} (\underline{V}) &\simeq \mathbf{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_k} \left(F^{\underline{V}^{(r)}} \circ \Delta_n, S_{E_r}^{\underline{d}} \right) \\ &\simeq \mathbf{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(F^{\underline{V}^{(r)}}, S_{E_r}^{\underline{d}} \circ \boxplus^n \right) \\ &\simeq \mathbf{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(F^{\underline{V}^{(r)}}, S_{\Delta_n(E_n)}^{\boxtimes \underline{d}} \right) \\ &\simeq \mathbf{R}\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(F^{\Delta_n(E_r)}, S^{\boxtimes \underline{d}} \right) \left(\underline{V}^{(r)} \right) \\ &\simeq \left(F^{\Delta_n(E_r)} \right)^{\sharp(r)} (\underline{V}). \end{aligned}$$

Le complexe $\mathbf{L}\ell^r \left(F^{(r)} \right)^{\sharp(r)}$ est donc formel et son homologie est isomorphe à l'objet gradué $\left(F^{\Delta_n(E_r)} \right)^{\sharp(r)}$. Par la proposition 2.6.13, le foncteur $F^{(r)}$ appartient à $\mathfrak{F}\mathfrak{ormel}(r, n)$ et $H_* \mathbf{L}\ell^r \left(F^{(r)} \right) \simeq F^{\Delta_n(E_r)}$.

(3) et (4). Par la proposition 2.4.6 et l'assertion (1), on a des isomorphismes :

$$\mathbf{L}\ell^{r+1} \left(F^{(1)} \right) \simeq \mathbf{L}\ell^r \left(\mathbf{L}\ell^1 \left(F^{(1)} \right) \right) \simeq \mathbf{L}\ell^r \left(F^{\Delta_n(E_1)} \right) \simeq \left(\mathbf{L}\ell^r(F) \right)^{\Delta_n(E_1)}.$$

Si F appartient à $\mathfrak{F}\mathfrak{ormel}(r, n)$, alors le complexe $\mathbf{L}\ell^r(F)$ est formel. Le complexe $\mathbf{L}\ell^{r+1} \left(F^{(1)} \right)$ est donc formel et son homologie est isomorphe à $H_* \mathbf{L}\ell^r(F)^{\Delta_n(E_1)}$. Le foncteur $F^{(1)}$ appartient à $\mathfrak{F}\mathfrak{ormel}(r+1, n)$ et $H_* \mathbf{L}\ell^{r+1} \left(F^{(1)} \right) \simeq H_* \mathbf{L}\ell^r(F)^{\Delta_n(E_1)}$.

Si $F^{(1)}$ appartient à $\mathfrak{F}\mathfrak{ormel}(r+1, n)$, alors le complexe $\mathbf{L}\ell^{r+1} \left(F^{(1)} \right)$ est formel. Par la proposition 2.6.14, le complexe $\mathbf{L}\ell^r(F)$ est également formel. Le foncteur F appartient donc à $\mathfrak{F}\mathfrak{ormel}(r, n)$. \square

EXEMPLE 2.7.4. Soient \underline{V} un n -uplet d'objets de \mathcal{V}_k et $F, G \in \mathcal{P}_{\underline{d}}$. On a des isomorphismes gradués :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\left(\Gamma^{\boxtimes \underline{d}} \underline{V} \right)^{(r)}, G^{(r)} \right) &\simeq G(V_1 \otimes E_r, \dots, V_n \otimes E_r), \\ \operatorname{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(F^{(r)}, \left(S_{\underline{V}}^{\boxtimes \underline{d}} \right)^{(r)} \right) &\simeq F^{\sharp}(V_1 \otimes E_r, \dots, V_n \otimes E_r). \end{aligned}$$

2.7.2. La compatibilité de la classe $\mathfrak{F}\mathfrak{ormel}(r, n)$ avec la précomposition par \boxtimes^n, \otimes^n . Pour démontrer notre résultat final, nous avons besoin d'une formule clé qui généralise [FF08, Proposition 2.2] de Franjou-Friedlander.

THÉORÈME 2.7.5. Soient F_1, \dots, F_n et F des objets de $\mathcal{P}_{\underline{d}}$. On a des isomorphismes naturels en F_1, \dots, F_n et F :

$$(2.7.1) \quad \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(F \circ \boxtimes^n, \boxtimes_{i=1}^n F_i \right) \simeq \left(F \otimes_{\mathcal{P}_k} F_1^{\sharp} \otimes_{\mathcal{P}_k} \dots \otimes_{\mathcal{P}_k} F_n^{\sharp} \right)^{\sharp} \circ \boxtimes^n,$$

$$(2.7.2) \quad \mathbf{R}\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(F \circ \boxtimes^n, \boxtimes_{i=1}^n F_i \right) \simeq \left(F \otimes_{\mathcal{P}_k}^{\mathbf{L}} F_1^{\sharp} \otimes_{\mathcal{P}_k}^{\mathbf{L}} \dots \otimes_{\mathcal{P}_k}^{\mathbf{L}} F_n^{\sharp} \right)^{\sharp} \circ \boxtimes^n.$$

DÉMONSTRATION. Comme chaque côté de l'isomorphisme (2.7.1) est un foncteur exact à gauche en chaque variable F_1, \dots, F_n , pour prouver cet isomorphisme, on peut supposer que le foncteur F_i est de la forme $F_i = S_{V_i}^{\underline{d}_i}$ pour $i = 1, \dots, n$.

D'après le lemme de Yoneda et le théorème 2.3.1, on a des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(F \circ \boxtimes^n, \boxtimes_{i=1}^n S_{V_i}^d \right) &\simeq \left((F \circ \boxtimes^n)^\sharp \right)_{(V_1, \dots, V_n)} \\ &\simeq (F^{V_1 \otimes \dots \otimes V_n})^\sharp \circ \boxtimes^n \\ &\simeq (F \circ \otimes_{\mathcal{P}_k} \Gamma^{d, V_1} \otimes_{\mathcal{P}_k} \dots \otimes_{\mathcal{P}_k} \Gamma^{d, V_n})^\sharp \circ \boxtimes^n. \end{aligned}$$

L'isomorphisme (2.7.1) en découle. Pour prouver (2.7.2), soit P^{F_i} une résolution projective de F_i dans la catégorie \mathcal{P}_d pour $i = 1, \dots, n$. Les complexes $(P^{F_i})^\sharp$ sont donc des corésolutions injectives des foncteurs F_i^\sharp . De plus, l'isomorphisme (2.7.1) induit un isomorphisme des complexes :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(F \circ \boxtimes^n, \boxtimes_{i=1}^n P^{F_i} \right) \simeq \left(F \otimes_{\mathcal{P}_k} (P^{F_1})^\sharp \otimes_{\mathcal{P}_k} \dots \otimes_{\mathcal{P}_k} (P^{F_n})^\sharp \right)^\sharp \circ \boxtimes^n.$$

On en déduit l'isomorphisme (2.7.2). \square

REMARQUE 2.7.6. En appliquant le théorème 2.7.5 au cas où $n = 2$, $F = \Gamma^d$ et en utilisant les isomorphismes (2.3.3), (2.3.4) démontrés dans la proposition 2.3.2, on retrouve [FF08, Proposition 2.2].

THÉORÈME 2.7.7. *Soit $F \in \mathcal{P}_{p^r d}$. On suppose que le foncteur F appartient à la classe $\mathfrak{Formel}(r, 1)$.*

- (1) *Le foncteur $F \circ \boxtimes^n$ appartient à $\mathfrak{Formel}(r, n)$ et on a un isomorphisme $H_* \mathbf{L}^r(F \circ \boxtimes^n) \simeq H_* \mathbf{L}^r(F)^{E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n$.*
- (2) *Le foncteur $F \circ \otimes^n$ appartient à $\mathfrak{Formel}(r, 1)$ et on a un isomorphisme $H_* \mathbf{L}^r(F \circ \otimes^n) \simeq H_* \mathbf{L}^r(F)^{E_r^{\otimes n-1}} \circ \otimes^n$.*

DÉMONSTRATION. L'assertion (2) est une conséquence directe de l'assertion (1) et la proposition 2.5.8. Il reste à démontrer la première assertion. Par l'isomorphisme (2.4.7) de la proposition 2.4.5 et l'isomorphisme (2.7.2) du théorème 2.7.5, on a des isomorphismes :

$$(2.7.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}^r(F \circ \boxtimes^n)^{\sharp(r)} &\simeq \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(F \circ \boxtimes^n, \left(S^{d(r)} \right)^{\boxtimes n} \right) \\ &\simeq \left(F \otimes_{\mathcal{P}_k} \underbrace{\mathbf{L} \Gamma^{d(r)} \otimes_{\mathcal{P}_k} \dots \otimes_{\mathcal{P}_k} \mathbf{L} \Gamma^{d(r)}}_n \right)^\sharp \circ \boxtimes^n. \end{aligned}$$

D'autre part, le théorème 2.7.1 et l'isomorphisme (2.3.4) de la proposition 2.3.2 induisent un isomorphisme $F^{(r)} \otimes_{\mathcal{P}_k} \mathbf{L} \Gamma^{d(r)} \simeq (F^{E_r})^{(r)}$ naturel en $F \in \mathcal{P}_{p^r d}$. En utilisant cet isomorphisme, on obtient un isomorphisme

$$(2.7.4) \quad \underbrace{\mathbf{L} \Gamma^{d(r)} \otimes_{\mathcal{P}_k} \dots \otimes_{\mathcal{P}_k} \mathbf{L} \Gamma^{d(r)}}_n \simeq \left(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \right)^{(r)}.$$

Par l'isomorphisme (2.4.7) de la proposition 2.4.6, l'isomorphisme (2.3.4) de la proposition 2.3.2 et les isomorphismes (2.7.3), (2.7.4) ci-dessus, on obtient des isomorphismes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\ell^r(F \circ \boxtimes^n)^{\sharp(r)} &\simeq \left(F \otimes_{\mathcal{P}_k}^{\mathbf{L}} \left(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \right)^{(r)} \right)^{\sharp} \circ \boxtimes^n \\
&\simeq \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_k} \left(F, \left(S_{E_r^{\otimes n-1}}^d \right)^{(r)} \right) \circ \boxtimes^n \\
&\simeq \left(\mathbf{L}\ell^r(F)^{\sharp(r)} \right)_{E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n \\
&\simeq \left(\mathbf{L}\ell^r(F)^{E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n \right)^{\sharp(r)}.
\end{aligned}$$

Comme F appartient à $\mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, 1)$, le complexe $\mathbf{L}\ell^r(F)$ est formel. Le complexe $\mathbf{L}\ell^r(F \circ \boxtimes^n)^{(r)}$ est donc formel et son homologie est isomorphe à l'objet gradué $\left(H_* \mathbf{L}\ell^r(F)^{E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n \right)^{(r)}$. Par la proposition 2.6.13, le foncteur $F \circ \boxtimes^n$ appartient à $\mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, n)$ et $H_* \mathbf{L}\ell^r(F \circ \boxtimes^n) \simeq H_* \mathbf{L}\ell^r(F)^{E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n$. \square

Ensuite, on rappelle un résultat de Chalupnik [Cha08] (voir aussi [Tou13c]). Dans la suite, si X désigne l'un des symboles Γ, Λ, S , on note ϵ_X l'entier $0, 1, 2$ respectivement.

THÉORÈME 2.7.8 (Chalupnik). *Soit X désigne l'un des symboles Γ, Λ, S . On a un isomorphisme*

$$\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_k} \left(X^{p^r d}, S^{d(r)} \right) \simeq X^{d\sharp(r)} [\epsilon_X (p^r d - d)].$$

COROLLAIRE 2.7.9. *Soit X désigne l'un des symboles Γ, Λ, S . Le foncteur X^d appartient à $\mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, 1)$ pour tout r et $\mathbf{L}\ell^r(X^d)$ est isomorphe à $X^e [\epsilon_X (d - e)]$ si d est de la forme $p^r e, e \in \mathbb{N}$ et à 0 sinon.*

DÉMONSTRATION. Si d n'est pas un multiple de p^r alors $\mathbf{L}\ell^r(F) = 0$ par la définition du foncteur ℓ^r . Alors $X^d \in \mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, 1)$. Ensuite, on suppose que d est de la forme $p^r e$ pour $e \in \mathbb{N}$. Par l'isomorphisme (2.4.7) de la proposition 2.4.6 et le théorème 2.7.8, le complexe $\mathbf{L}\ell^r(X^d)^{(r)}$ est isomorphe à $X^{e(r)} [\epsilon_X (d - e)]$. Par la proposition 2.6.13, le foncteur X^d appartient à $\mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, 1)$ et $\mathbf{L}\ell^r(X^d) \simeq X^e [\epsilon_X (d - e)]$. \square

Notre résultat final (théorème 2.7.10) est une généralisation du théorème 2.7.8 et du corollaire 2.7.9. Il est une clé pour calculer les algèbres de cohomologie dans le chapitre suivant.

THÉORÈME 2.7.10. *Soit X désigne l'un des symboles Γ, Λ, S . Soient $F \in \mathcal{P}_k$ et $G \in \mathcal{P}_k(n)$.*

- (1) *Le foncteur $X^d \circ \boxtimes^n$ appartient à $\mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, n)$ pour tout r et $\mathbf{L}\ell^r(X^d \circ \boxtimes^n)$ est isomorphe à $X^{e, E_r^{\otimes n-1}} [\epsilon_X (d - e)] \circ \boxtimes^n$ si d est de la forme $p^r e, e \in \mathbb{N}$ et à 0 sinon.*
- (2) *Le foncteur $X^d \circ \otimes^n$ appartient à $\mathfrak{F}\mathrm{ormel}(r, 1)$ pour tout r et $\mathbf{L}\ell^r(X^d \circ \otimes^n)$ est isomorphe à $X^{e, E_r^{\otimes n-1}} [\epsilon_X (d - e)] \circ \otimes^n$ si d est de la forme $p^r e, e \in \mathbb{N}$ et à 0 sinon.*

(3) Il existe des isomorphismes gradués naturels en F, G :

$$\begin{aligned} \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(X^{p^r d} \circ \boxtimes^n, G^{(r)} \right) &\simeq \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_k(n)}^{*-\epsilon_X(p^r d-d)} \left(X^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n, G \right)^{(r)}, \\ \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_k}^* \left(X^{p^r d} \circ \otimes^n, F^{(r)} \right) &\simeq \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_k}^{*-\epsilon_X(p^r d-d)} \left(X^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \otimes^n, F \right)^{(r)}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Les assertions (1) et (2) sont des conséquences du théorème 2.7.7 et le corollaire 2.7.9. Pour obtenir la dernière assertion du théorème on utilise les deux assertions (1), (2) et le corollaire 2.5.2. \square

EXEMPLE 2.7.11. (1) On a des isomorphismes gradués :

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^{p^r} \circ \boxtimes^n, \boxtimes^{n(r)} \right) &\simeq (E_r)^{\otimes n-1}, \\ \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Lambda^{p^r} \circ \boxtimes^n, \boxtimes^{n(r)} \right) &\simeq (E_r)^{\otimes n-1} [p^r - 1], \\ \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(S^{p^r} \circ \boxtimes^n, \boxtimes^{n(r)} \right) &\simeq (E_r)^{\otimes n-1} [2p^r - 2]. \end{aligned}$$

(2) Soit $V \in \mathcal{V}_k$. On a des isomorphismes gradués :

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \otimes^n, (S_V^{nd})^{(r)} \right) &\simeq S^d \left(V^{\otimes n} \otimes (E_r)^{\otimes n-1} \right), \\ \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* \left(\Lambda^{p^r d} \circ \otimes^n, (S_V^{nd})^{(r)} \right) &\simeq \Lambda^d \left(V^{\otimes n} \otimes (E_r)^{\otimes n-1} \right) [p^r d - d], \\ \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* \left(S^{p^r d} \circ \otimes^n, (S_V^{nd})^{(r)} \right) &\simeq \Gamma^d \left(V^{\otimes n} \otimes (E_r)^{\otimes n-1} \right) [2p^r d - 2d]. \end{aligned}$$

Cohomologie des groupes classiques

Contents

| | |
|---|-----------|
| 3.1. Introduction | 77 |
| 3.2. Préparation | 78 |
| 3.2.1. Cup produits | 78 |
| 3.2.2. Actions du groupe symétrique | 79 |
| 3.3. Calcul des groupes d'extensions $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ X, S^{\mu(r)})$ | 81 |
| 3.3.1. Compatibilité avec les produits et les actions de \mathfrak{S}_n | 81 |
| 3.3.2. Version à une variable | 84 |
| 3.3.3. Calculs de $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ X, S^{\mu(r)})$ | 87 |
| 3.4. Cohomologie des groupes orthogonaux et symplectiques | 88 |
| 3.4.1. Lien avec groupes d'extensions dans \mathcal{P}_k | 89 |
| 3.4.2. Foncteurs n -corésolus | 90 |
| 3.4.3. Théorème principal | 91 |

3.1. Introduction

L'objectif du chapitre est de calculer les algèbres de cohomologie suivantes lorsque $n \geq p^r \ell$ et $p > 2$:

$$(3.1.1) \quad H_{\text{rat}}^* \left(G_n, S^* \left(\mathbb{k}^{2n \vee(r) \oplus \ell} \right) \right)$$

où G_n est le schéma en groupes symplectique Sp_n ou le schéma en groupes orthogonal $\text{O}_{n,n}$, et G_n agit naturellement sur l'espace vectoriel \mathbb{k}^{2n} par multiplication matricielle. Notre résultat principal est le théorème suivant.

THÉORÈME (Théorème 3.4.11). *On suppose que $p > 2$. Si $n \geq p^r \ell$ alors l'algèbre de cohomologie $H_{\text{rat}}^* \left(G_n, S^* \left(\mathbb{k}^{2n \vee(r) \oplus \ell} \right) \right)$ est une algèbre symétrique sur un ensemble fini de générateurs $(h|i|j)_{G_n} \in H_{\text{rat}}^{2h} \left(G_n, S^* \left(\mathbb{k}^{2n \vee(r) \oplus \ell} \right) \right)$ où $0 \leq h < p^r$, $0 \leq i \leq j \leq \ell$ et $i \neq j$ si G_n est le groupe symplectique Sp_n .*

De plus, il n'y a pas de relation entre les $(h|i|j)_{G_n}$.

D'abord, en utilisant le lien entre la cohomologie des groupes symplectiques et orthogonaux et les calculs d'extensions dans \mathcal{P}_k [Tou10], on obtient l'isomorphisme d'algèbre suivant où X_G désigne S^2 si $G_n = \text{O}_{n,n}$ et Λ^2 si $G_n = \text{Sp}_n$ (voir (3.4.2)) :

$$\Phi_{G_n} : \bigoplus_{d \geq 0} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ X_G, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)} \right) \rightarrow H_{\text{rat}}^* \left(G_n, S^* \left(\mathbb{k}^{2n \vee(r) \oplus \ell} \right) \right).$$

Le calcul d'algèbre (3.1.1) est donc divisé en deux étapes.

Étape 1. On calcul dans le lemme 3.4.4 l'algèbre à la source du morphisme Φ_{G_n} . Pour cela, on remarque que X_G est un facteur direct de \otimes^2 car $p > 2$. Il suffit alors de calculer les groupes d'extensions $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \otimes^2, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)} \right)$ compatibles avec les produits et naturels en \otimes^n . On fait ce calcul dans la section 3.3. Plus généralement, nous calculons dans le théorème 3.3.8 le groupe d'extensions $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \otimes^n, S^{\mu(r)} \right)$.

Étape 2. Nous montrons dans la section 3.4 que le morphisme Φ_{G_n} est un isomorphisme si $n \geq p^r \ell$. Pour cela, on utilise la notion des foncteurs n -corésolus introduite par Touzé [Tou12] pour résoudre un problème analogue pour le schéma en groupes général linéaire.

3.2. Préparation

3.2.1. Cup produits. On rappelle la définition de cup produits. Soit (\mathcal{M}, \otimes) une catégorie abélienne ayant assez d'objets injectifs, munie d'un produit monoïdal biexact \otimes qui préserve les injectifs. Ce produit monoïdal induit un produit tensoriel sur les groupes d'extensions de \mathcal{M} :

$$(3.2.1) \quad \otimes : \text{Ext}_{\mathcal{M}}^*(A_1, B_1) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{M}}^*(A_2, B_2) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{M}}^*(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2).$$

Soit deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow B_1 \rightarrow M_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \rightarrow A_1 \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow B_2 \rightarrow N_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow N_0 \rightarrow A_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

présentant les éléments $e_1 \in \text{Ext}_{\mathcal{M}}^m(A_1, B_1)$ et $e_2 \in \text{Ext}_{\mathcal{M}}^n(A_2, B_2)$. Le produit monoïdal de deux complexes $0 \rightarrow B_1 \rightarrow M_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow B_2 \rightarrow N_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow N_0 \rightarrow 0$, est le complexe $0 \rightarrow B_1 \otimes B_2 \rightarrow (M_{m-1} \otimes B_2) \oplus (B_1 \otimes N_{n-1}) \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \otimes N_0 \rightarrow 0$. La cohomologie de ce complexe est $A_1 \otimes A_2$ en degré zéro et nulle ailleurs. On définit $e_1 \otimes e_2$ la classe du complexe $0 \rightarrow B_1 \otimes B_2 \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \otimes N_0 \rightarrow A_1 \otimes A_2 \rightarrow 0$.

On peut également utiliser les corésolutions injectives pour définir le produit tensoriel (3.2.1). En effet, soient $J_{B_i}^\bullet$ une corésolution injective de B_i dans \mathcal{M} , pour $i = 1, 2$. Comme le produit monoïdal \otimes est biexact et préserve les injectifs alors le produit $J_{B_1}^\bullet \otimes J_{B_2}^\bullet$ est une corésolution injective de $B_1 \otimes B_2$. Le produit tensoriel (3.2.1) est la cohomologie du morphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}}(A_1, J_{B_1}^\bullet) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{M}}(A_2, J_{B_2}^\bullet) \xrightarrow{\otimes} \text{Hom}_{\mathcal{M}}(A_1 \otimes A_2, J_{B_1}^\bullet \otimes J_{B_2}^\bullet).$$

La catégorie des foncteurs strictement polynomiaux d'une ou plusieurs variables $(\mathcal{P}_k(n), \otimes)$ ou la catégorie $(G\text{-Mod}, \otimes)$ des modules rationnels sur un schéma en groupes algébrique G ont un produit tensoriel sur les groupe d'extensions.

Soit $C = (C^0, C^1, \dots)$ une cogèbre graduée dans (\mathcal{M}, \otimes) . On désigne par $\Delta_{d,e} : C^{d+e} \rightarrow C^d \otimes C^e$ le morphisme de diagonal. On définit le cup produit

$$\begin{aligned} \smile : \text{Ext}_{\mathcal{M}}^*(C^d, B_1) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{M}}^*(C^e, B_2) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{M}}^*(C^{d+e}, B_1 \otimes B_2) \\ e_1 \otimes e_2 &\mapsto e_1 \smile e_2 := \Delta_{d,e}^*(e_1 \otimes e_2). \end{aligned}$$

Le lemme suivant énonce les propriétés élémentaires des produits dont on a besoin ensuite.

LEMME 3.2.1. (1) *Soit $\phi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ un foncteur exact. On suppose que ϕ est un foncteur monoïdal strict. Le morphisme $\phi : \text{Ext}_{\mathcal{M}_1}^*(A, B) \rightarrow$*

$\text{Ext}_{\mathcal{M}_2}^*(\phi A, \phi B)$ induit par ϕ est compatible avec les produits, c'est-à-dire qu'on a $\phi(c_1 \smile c_2) = (\phi c_1) \smile (\phi c_2)$.

- (2) Soit $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ un foncteur monoïdal strict. Soit $\phi \rightarrow \text{Id}$ une transformation naturelle qui est compatible au produit monoïdal. Le morphisme induit par cette transformation naturelle $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^*(A, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{M}}^*(\phi A, B)$ est compatible avec les produits.

3.2.2. Actions du groupe symétrique.

DÉFINITION 3.2.2. Soit σ un élément du groupe symétrique \mathfrak{S}_n .

- (1) On désigne par $\sigma_{\otimes} : \otimes^n \rightarrow \otimes^n$ le morphisme qui envoie l'élément $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ sur $v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$. On obtient une action de \mathfrak{S}_n sur le foncteur $\otimes^n \in \mathcal{P}_n$.
- (2) On note $\sigma_{\mathcal{V}} : \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n}$ le morphisme qui envoie l'objet (V_1, \dots, V_n) de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n}$ sur $(V_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, V_{\sigma^{-1}(n)})$. On obtient une action de \mathfrak{S}_n sur la catégorie $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n}$.
- (3) On désigne par $\sigma_{\boxtimes} : \boxtimes^n \rightarrow \boxtimes^n \circ \sigma_{\mathcal{V}}$ le morphisme qui envoie l'élément $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ sur $v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$.
- (4) On note $\sigma_{\oplus} : \oplus^n \rightarrow \oplus^n$ le morphisme qui envoie l'élément $(v_1, \dots, v_n) \in V^{\oplus n}$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ sur $(v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(n)})$. On obtient une action de \mathfrak{S}_n sur le foncteur $\oplus^n \in \mathcal{P}_1$.
- (5) On désigne par $\sigma_{\boxplus} : \boxplus^n \rightarrow \boxplus^n \circ \sigma_{\mathcal{V}}$ le morphisme qui envoie l'élément $(v_1, \dots, v_n) \in V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ sur $(v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(n)})$.

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a toujours que $\boxtimes^n \circ \sigma_{\mathcal{V}} \circ \Delta_n = \otimes^n$ et $\boxplus^n \circ \sigma_{\mathcal{V}} \circ \Delta_n = \oplus^n$. Par la définition 3.2.2, σ_{\otimes} et σ_{\oplus} sont respectivement les composés suivants :

$$\begin{aligned} \otimes^n &= \boxtimes^n \circ \Delta_n \xrightarrow{\sigma_{\boxtimes}(\Delta_n)} \boxtimes^n \circ \sigma_{\mathcal{V}} \circ \Delta_n = \otimes^n, \\ \oplus^n &= \boxplus^n \circ \Delta_n \xrightarrow{\sigma_{\boxplus}(\Delta_n)} \boxplus^n \circ \sigma_{\mathcal{V}} \circ \Delta_n = \oplus^n. \end{aligned}$$

Soit F et G deux objets de la catégorie $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$. Les foncteurs $F \circ - : \mathcal{P}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ et $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^i(F \circ -, G) : \mathcal{P}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ envoient l'action de \mathfrak{S}_n sur \otimes^n sur l'action de \mathfrak{S}_n sur les objets $F \circ \otimes^n$ et $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^i(F \circ \otimes^n, G)$. Plus précisément, un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ agit sur $F \circ \otimes^n$ par $F(\sigma_{\otimes})$ et agit sur $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^i(F \circ \otimes^n, G)$ par $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^i(F(\sigma_{\otimes}^{-1}), G)$. De plus, chaque morphisme $f : F_1 \rightarrow F_2$ dans $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ induit des morphismes \mathfrak{S}_n -équivariants :

$$F_1 \circ \otimes^n \rightarrow F_2 \circ \otimes^n, \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^i(F_2 \circ \otimes^n, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^i(F_1 \circ \otimes^n, G).$$

DÉFINITION 3.2.3. Soient $F, G \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)$. Pour chaque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit l'action de σ sur $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F \circ \boxtimes^n, G \circ \boxplus^n)$ par l'application composée :

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F \circ \boxtimes^n, G \circ \boxplus^n) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F \circ \boxtimes^n \circ \sigma_{\mathcal{V}}^{-1}, G \circ \boxplus^n \circ \sigma_{\mathcal{V}}^{-1}) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F \circ \boxtimes^n, G \circ \boxplus^n) \end{aligned}$$

où la première application est induite par la précomposition par $\sigma_{\mathcal{V}}^{-1}$, et la deuxième est l'application $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F(\sigma_{\boxtimes}^{-1}), G(\sigma_{\boxplus}))$. On obtient une action de \mathfrak{S}_n sur le groupe d'extensions $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F \circ \boxtimes^n, G \circ \boxplus^n)$. On peut définir de façon analogue l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}^n sur les groupes d'extensions :

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F \circ \boxtimes^n, G \circ \boxtimes^n), \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F \circ \boxplus^n, G \circ \boxplus^n), \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}(n)}^*(F \circ \boxplus^n, G \circ \boxtimes^n).$$

Par cette définition, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $f : F \circ \boxtimes^n \rightarrow G \circ \boxplus^n$, le morphisme $\sigma \cdot f$ est le composé :

$$F \left(\bigotimes_{i=1}^n V_i \right) \xrightarrow{F(\sigma_{\boxtimes}^{-1})} F \left(\bigotimes_{i=1}^n V_{\sigma(i)} \right) \xrightarrow{f} G \left(\bigoplus_{i=1}^n V_{\sigma(i)} \right) \xrightarrow{G(\sigma_{\boxplus})} G \left(\bigoplus_{i=1}^n V_i \right).$$

En particulier, on a une action de \mathfrak{S}_n sur l'espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)}(\boxtimes^n, \boxplus^n)$. Le lemme de Yoneda induit un isomorphisme $\text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)}(\boxtimes^n, \boxplus^n) \simeq \boxplus^n(\mathbb{k}, \dots, \mathbb{k}) = \mathbb{k}^n$. Cet isomorphisme est \mathfrak{S}_n -équivariant où le groupe \mathfrak{S}_n agit canoniquement sur \mathbb{k}^n , c'est-à-dire que $\sigma \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \lambda_{\sigma^{-1}(n)})$ pour $\lambda_i \in \mathbb{k}$.

3.2.4. Soient F, G deux foncteurs strictement polynomiaux. La précomposition par \boxplus^n induit un morphisme gradué $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^*(F \circ \boxplus^n, G \circ \boxplus^n)$. Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit trivialement sur $\text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(F, G)$ et agit sur l'espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)}(F \circ \boxplus^n, G \circ \boxplus^n)$ comme dans la définition 3.2.3. Ce morphisme est donc \mathfrak{S}_n -équivariant.

Le morphisme gradué $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^*(F \circ \boxtimes^n, G \circ \boxtimes^n)$ induit par la précomposition par \boxtimes^n est également \mathfrak{S}_n -équivariant si \mathfrak{S}_n agit trivialement sur la source du morphisme et son action sur le but du morphisme est donnée par la précomposition par \boxtimes^n .

Soient F_1, \dots, F_n des foncteurs strictement polynomiaux et soit σ un élément de \mathfrak{S}_n . On désigne par $\sigma_{(F_1, \dots, F_n)}$ l'application $\bigotimes_{i=1}^n F_i(V_i) \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n F_{\sigma^{-1}(i)}(V_{\sigma^{-1}(i)})$ induite par la permutation des facteurs du produit tensoriel. Le morphisme $\sigma_{(F_1, \dots, F_n)}$ est alors une transformation naturelle de $\bigotimes_{i=1}^n F_i \rightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^n F_{\sigma^{-1}(i)} \right) \circ \sigma_{\mathcal{V}}$. En particulier, si $F_1 = \dots = F_n = I$ alors $\sigma_{(I, \dots, I)}$ est égale au morphisme σ_{\boxtimes} défini dans la définition 3.2.2.

DÉFINITION 3.2.5. Soient F_1, \dots, F_n des foncteurs strictement polynomiaux. Soit σ un élément de \mathfrak{S}_n . On définit un morphisme $\sigma \cdot : \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^d \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n F_i \right) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^d \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n F_{\sigma^{-1}(i)} \right)$ par l'application composée

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^d \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n F_i \right) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^d \circ \boxtimes^n \circ \sigma_{\mathcal{V}}^{-1}, \left(\bigotimes_{i=1}^n F_i \right) \circ \sigma_{\mathcal{V}}^{-1} \right) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^d \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n F_{\sigma^{-1}(i)} \right) \end{aligned}$$

où la première application est induite par la précomposition par $\sigma_{\mathcal{V}}^{-1}$, et la deuxième est l'application $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^d(\sigma_{\mathcal{V}}^{-1}), \sigma_{(F_1, \dots, F_n)} \right)$.

Par cette définition, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $(V_1, \dots, V_n) \in \mathcal{V}_k^{\times n}$ et $f : \Gamma^d \circ \boxtimes^n \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n F_i$, le morphisme $\sigma \cdot f$ est le morphisme composé :

$$\Gamma^d \left(\bigotimes_{i=1}^n V_i \right) \xrightarrow{\Gamma^d(\sigma_{\mathcal{V}}^{-1})} \Gamma^d \left(\bigotimes_{i=1}^n V_{\sigma(i)} \right) \xrightarrow{f} \bigotimes_{i=1}^n F_i(V_{\sigma(i)}) \xrightarrow{\sigma_{(F_1, \dots, F_n)}} \bigotimes_{i=1}^n F_{\sigma^{-1}(i)}(V_i).$$

3.3. Calcul des groupes d'extensions $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* (\Gamma^{p^r d} \circ X, S^{\mu(r)})$

Dans cette section, on calcule des groupes d'extensions du type $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* (\Gamma^{p^r d} \circ X, S^{\mu(r)})$ lorsque X est un facteur direct du foncteur \otimes^n et μ est un uplet d'entiers naturels de poids dn . Le résultat principal est le théorème 3.3.9 qui donne un isomorphisme entre $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* (\Gamma^{p^r d} \circ X, S^{\mu(r)})$ et $\text{Hom}_{\mathcal{P}_k} (\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ X, S^\mu)$ naturel en S^μ et compatible avec les produits. Une application de cet isomorphisme est de calculer dans le corollaire 3.3.10 les groupes d'extensions $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* (\Gamma^{p^r d} \circ X_G, S^{\mu(r)})$ pour $X_G = S^2$ ou Λ^2 si la caractéristique p du corps \mathbb{k} est impaire. L'intérêt du calcul est que les groupes d'extensions $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^* (\Gamma^{p^r d} \circ X_G, S^{\mu(r)})$ calculent la cohomologie du groupe orthogonal ou symplectique à coefficient dans $S^\mu(\mathbb{k}^{2n\nu(r)})$.

3.3.1. Compatibilité avec les produits et les actions de \mathfrak{S}_n . On a montré dans le théorème 2.7.10 qu'il existe un isomorphisme naturel par rapport aux foncteurs S^{μ^i} :

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, \boxtimes_{i=1}^n S^{\mu^i(r)} \right) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n, \boxtimes_{i=1}^n S^{\mu^i} \right).$$

Nous ne savons pas démontrer la compatibilité avec les produits et l'action de \mathfrak{S}_n en général. L'objectif de cette section est d'établir un isomorphisme similaire qui est compatible avec les produits et l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Ce nouvel isomorphisme est obtenu dans le théorème 3.3.5, et la démonstration du théorème 3.3.5 utilise de façon essentielle l'ancien isomorphisme du théorème 2.7.10 sous la forme du corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.3.1. *Soient μ^2, \dots, μ^n des uplets d'entiers naturels. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, le foncteur de \mathcal{P}_k vers \mathcal{V}_k suivant est exact :*

$$(3.3.1) \quad F \mapsto \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^k \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, F^{(r)} \boxtimes \boxtimes_{i=2}^n S^{\mu^i(r)} \right).$$

Pour démontrer ce corollaire, on démontre tout d'abord le lemme suivant qui sera utilisé une fois encore dans la preuve du théorème 3.3.5 ci-dessous

LEMME 3.3.2. *Soient J^2, \dots, J^n des foncteurs strictement polynomiaux injectifs, et $V \in \mathcal{V}_k$. Le foncteur $F \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{d, V} \circ \boxtimes^n, F \boxtimes \boxtimes_{i=2}^n J^i \right)$ de \mathcal{P}_k vers \mathcal{V}_k est un foncteur exact.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 2.7.5, on a un isomorphisme naturel en F :

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{d, V} \circ \boxtimes^n, F \boxtimes \boxtimes_{i=2}^n J^i \right) \simeq (F^\sharp \otimes_{\mathcal{P}_k} J^{2\sharp} \otimes_{\mathcal{P}_k} \cdots \otimes_{\mathcal{P}_k} J^{n\sharp})^\sharp(V).$$

De plus, le foncteur $- \otimes_{\mathcal{P}_k} J^{i\sharp}$ est un foncteur exact car $J^{i\sharp}$ est un foncteur projectif. Le foncteur à droite de l'isomorphisme ci-dessus est alors exact par rapport à F . On obtient le résultat. \square

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 3.3.1. Par le théorème 2.7.10, le foncteur (3.3.1) est isomorphe au foncteur

$$F \mapsto \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^k \left(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n, F \boxtimes \boxtimes_{i=2}^n S^{\mu^i} \right).$$

De plus, d'après le lemme 3.3.2, ce foncteur est exact. On en déduit le résultat. \square

Le deuxième ingrédient que nous utilisons pour démontrer le théorème 3.3.5 est la corésolution injective T explicite de $I^{(r)}$ construite par Friedlander-Suslin [FS97] si $p = 2$ et par Troesch [Tro05] en général. L'idée d'utilisation cette corésolution de Troesch pour calculer des groupes d'extensions dans la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux est due à Touzé [Tou12]. Nous décrivons la corésolution injective T comme objet gradué dans le lemme suivant (nous n'aurons pas besoin de la description explicite de la différentielle de T dans la suite).

LEMME 3.3.3 ([Tou12],[Tro05]). *Comme foncteur gradué, on a une décomposition, où le foncteur T' est une somme des S^μ pour des uplets d'entiers naturels μ qui ne sont pas des multiples de p^r :*

$$T = \left(E_r \otimes S^{p^r} \right) \oplus T'.$$

DÉMONSTRATION. Pour un entier naturel i , on note $\mathcal{I}(i)$ l'ensemble des uplets d'entiers naturels $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p^r-1})$ tels que $\sum_{j=0}^{p^r-1} \mu_j = p^r$ et $\sum_{j=0}^{p^r-1} j\mu_j = p^r \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + p^{r-1} (i - 2 \lfloor \frac{i}{2} \rfloor)$. Par [Tro05], la partie de degré cohomologique i du complexe T est $T^i = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{I}(i)} S^\mu$.

Soit μ un élément de $\mathcal{I}(i)$. On a que $\sum_{j=0}^{p^r-1} \mu_j = p^r$ et $\mu_j \in \mathbb{N}$. Alors p^r divise μ si et seulement si μ est de la forme $(0, \dots, 0, p^r, 0, \dots, 0)$. On a alors $p^r \in \mathcal{I}(i)$ si et seulement si $i \in \{0, 2, \dots, 2p^r - 2\}$. De plus, pour tout $\mu \in \mathcal{I}(i) \setminus \{p^r\}$, p^r ne divise pas μ . On en déduit la décomposition comme un foncteur gradué de T . \square

Le troisième ingrédient pour la démonstration du théorème 3.3.5 est la généralisation suivante de [Tou12, Lemma 2.2, 2.3].

LEMME 3.3.4. *Soient μ^2, \dots, μ^n des uplets d'entiers naturels et F, F_1, \dots, F_n des objets de \mathcal{P}_k .*

(1) *S'il existe i tel que p^r ne divise pas μ^i alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, F^{(r)} \boxtimes S^{\mu^2} \dots \boxtimes S^{\mu^n} \right) = 0.$$

(2) *Le morphisme suivant, induit par la torsion de Frobenius, est un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^d \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n F_i \right) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_k} \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n F_i^{(r)} \right).$$

(3) *Le morphisme suivant qui est induit par les inclusions canoniques $S^{\mu^i(r)} \hookrightarrow S^{p^r \mu^i}$, $i = 2, \dots, n$, est un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, F^{(r)} \bigotimes_{i=1}^n S^{\mu^i(r)} \right) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, F^{(r)} \bigotimes_{i=1}^n S^{p^r \mu^i} \right).$$

DÉMONSTRATION. L'isomorphisme (2.3.3) de la proposition 2.3.2 induit un isomorphisme $(F^\sharp \otimes_{\mathcal{P}_k} G^\sharp)^\sharp(V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_k}(F^\sharp, G_V)$ naturel en $F, G \in \mathcal{P}_k$ et $V \in \mathcal{V}_k$. En utilisant cet isomorphisme avec [Tou12, Lemma 2.2, 2.3], on obtient les résultats suivants :

(1) si μ n'est pas un multiple de p^r alors $F^{(r)} \otimes_{\mathcal{P}_k} \Gamma^\mu = 0$;

(2) le morphisme induit par la torsion de Frobenius $(F \otimes_{\mathcal{P}_k} G)^{(r)} \rightarrow F^{(r)} \otimes_{\mathcal{P}_k} G^{(r)}$ est un isomorphisme ;

- (3) le morphisme $F^{(r)} \otimes_{\mathcal{P}_k} \Gamma^{p^r \mu} \rightarrow F^{(r)} \otimes_{\mathcal{P}_k} \Gamma^{\mu(r)}$ induit par la projection canonique $\Gamma^{p^r \mu} \rightarrow \Gamma^{\mu(r)}$ est un isomorphisme.

D'autre part, d'après le théorème 2.7.5, on a un isomorphisme naturel en $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{P}_k$:

$$(3.3.2) \quad \text{Hom}_{\mathcal{P}_k} \left(\Gamma^d \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n F_i \right) \simeq \left(F_1^\sharp \otimes_{\mathcal{P}_k} \cdots \otimes_{\mathcal{P}_k} F_n^\sharp \right)^\sharp (\mathbb{k}).$$

En combinant les isomorphismes, on obtient les résultats souhaités. \square

THÉORÈME 3.3.5. *Soient μ^1, \dots, μ^n des uplets d'entiers naturels de poids d . Soit r un entier naturel. Il existe un isomorphisme gradué $\theta = \theta(S^{\mu^1}, \dots, S^{\mu^n})$, naturel en $S^{\mu^i}, i = 1, \dots, n$*

$$\theta : \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n S^{\mu^i(r)} \right) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n S^{\mu^i} \right).$$

De plus, $\theta(S^{\mu^1}, \dots, S^{\mu^n})$ satisfait les propriétés suivantes.

- (1) $\theta(S^{\mu^1}, \dots, S^{\mu^n})$ est compatible avec les produits, c'est-à-dire qu'on a

$$\theta(S^{\mu^1} \otimes S^{\lambda^1}, \dots, S^{\mu^n} \otimes S^{\lambda^n})(c_1 \smile c_2) = \theta(S^{\lambda^1}, \dots, S^{\lambda^n})(c_1) \otimes \theta(S^{\mu^1}, \dots, S^{\mu^n})(c_2).$$

- (2) $\theta(S^{\mu^1}, \dots, S^{\mu^n})$ est \mathfrak{S}_n -équivariant, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et les applications verticales sont définies dans la définition 3.2.5 :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n S^{\mu^i(r)} \right) & \xrightarrow[\simeq]{\theta} & \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n S^{\mu^i} \right) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n S^{\mu^{\sigma^{-1}(i)}(r)} \right) & \xrightarrow[\simeq]{\theta} & \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n, \bigotimes_{i=1}^n S^{\mu^{\sigma^{-1}(i)}} \right). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. On démontre d'abord le cas où $S^{\mu^1} = \dots = S^{\mu^n} = \otimes^d$. On désigne par $T(\otimes^d)$ le complexe $T^{\otimes d}$. Comme T est une corésolution injective du foncteur $I^{(r)}$, et le produit tensoriel est exact en chaque variable et préserve les injectifs, alors $T(\otimes^d)$ est une corésolution injective de $\otimes^{d(r)}$: on a un quasi-isomorphisme $\phi_d : \otimes^{d(r)} \rightarrow T(\otimes^d)$. Par définition le morphisme ϕ_d est compatible au produit tensoriel, c'est-à-dire qu'on a $\phi_d \otimes \phi_e = \phi_{d+e}$. Le complexe $\otimes^{d(r)} \boxtimes T(\otimes^d)^{\boxtimes n-1}$ est donc une corésolution de $\otimes^{d(r)} \boxtimes^n$. De plus, par le lemme 3.3.2, ce complexe est $\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n$ -acyclique. On peut donc obtenir $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^*(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, (\otimes^{d(r)})^{\boxtimes n})$ comme l'homologie du complexe

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, \otimes^{d(r)} \boxtimes T(\otimes^d)^{\boxtimes n-1} \right).$$

D'après le lemme 3.3.4(1), ce complexe est nul en degré impair. On définit un isomorphisme $\bar{\theta}$ tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
W_1 & \xrightarrow{\simeq} & \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, \otimes^{d(r)} \boxtimes T(\otimes^d)^{\boxtimes n-1} \right) \\
\downarrow \bar{\theta} & & \simeq \uparrow (\dagger_1) \\
& & \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, \otimes^{d(r)} \boxtimes \left(E_r^{\otimes d} \otimes (S^{p^r})^{\otimes d} \right)^{\boxtimes n-1} \right) \\
& & \simeq \uparrow (\dagger_2) \\
W_2 & \xrightarrow{\simeq} & \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, \otimes^{d(r)} \boxtimes \left(E_r^{\otimes d} \otimes d(r) \right)^{\boxtimes n-1} \right),
\end{array}$$

où l'application (\dagger_1) est induite par l'inclusion canonique $E_r \otimes S^{p^r} \hookrightarrow T$ (voir le lemme 3.3.3), et l'application (\dagger_2) est induite par l'inclusion $\otimes^{d(r)} \hookrightarrow (S^{p^r})^{\otimes d}$, et de plus on désigne par W_1 l'espace vectoriel $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, (\otimes^{d(r)})^{\boxtimes n} \right)$, et par W_2 l'espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n \otimes d(r)^{\boxtimes n}, (E_r^{\otimes d})^{\otimes n-1} \right)$. Le morphisme $\bar{\theta}$ est compatible aux produits et est \mathfrak{S}_n -équivariant. Par le lemme 3.3.4, on a un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, \otimes^{d(r)^{\boxtimes n}} \right) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^d \circ \boxtimes^n, \otimes^{d \boxtimes n} \right).$$

On définit $\theta(\otimes^d, \dots, \otimes^d)$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, (\otimes^{d(r)})^{\boxtimes n} \right) & \xrightarrow{\theta(\otimes^d, \dots, \otimes^d)} & \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n, (\otimes^d)^{\boxtimes n} \right) \\
\downarrow \bar{\theta} & & \simeq \downarrow (\dagger_3) \\
\text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, \otimes^{d(r)^{\boxtimes n}} \right) \otimes (E_r^{\otimes d})^{\otimes n-1} & \xrightarrow[\simeq]{(\dagger_4)} & \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)} \left(\Gamma^d \circ \boxtimes^n, \otimes^{d \boxtimes n} \right) \otimes (E_r^{\otimes d})^{\otimes n-1}.
\end{array}$$

Comme les morphismes (\dagger_3) , (\dagger_4) et $\bar{\theta}$ sont compatibles aux produits et sont \mathfrak{S}_n -équivariants, le morphisme $\theta(\otimes^d, \dots, \otimes^d)$ l'est aussi.

Nous pouvons maintenant démontrer le cas général. Par le corollaire 3.3.1, le foncteur de $\mathcal{P}_k \rightarrow \mathcal{V}_k$ suivant est exact à gauche

$$(3.3.3) \quad F \mapsto \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, F^{(r)} \boxtimes \boxtimes_{i=2}^n S^{\mu^i(r)} \right).$$

Pour définir les isomorphismes $\theta(S^{\mu^1}, \dots, S^{\mu^n})$ on utilise l'isomorphisme $\theta(\otimes^d, \dots, \otimes^d)$ construit ci-dessus, l'exactitude du foncteur (3.3.3) et le fait que le foncteur S^μ admet une présentation de la forme $T_1^\mu \rightarrow T_0^\mu \rightarrow S^\mu$ ou $T_0^\mu = \otimes^d, T_1^\mu = \oplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_\mu} \otimes^d$. L'isomorphisme $\theta(S^{\mu^1}, \dots, S^{\mu^n})$ est compatible aux produits et l'action du groupe \mathfrak{S}_n parce que l'isomorphisme $\theta(\otimes^d, \dots, \otimes^d)$ l'est aussi. \square

3.3.2. Version à une variable. L'objectif de cette section est d'établir le théorème 3.3.8 ci-dessous. Ce théorème est l'analogie du théorème 3.3.5 pour les foncteurs à une variable.

Soit G un foncteur strictement polynomial homogène de degré d et soit U un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie. L'adjonction somme-diagonale $-\circ \Delta_n : \mathcal{P}_k(n) \rightleftarrows$

$\mathcal{P}_k : - \circ \boxplus^n$ induit un isomorphisme gradué, naturel en G (voir l'exemple 1.3.20(1)) :

$$\beta(G) : \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{d,U} \circ \otimes^n, G) \xrightarrow{\simeq} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^*(\Gamma^{d,U} \circ \boxtimes^n, G \circ \boxplus^n).$$

La proposition suivante donne deux propriétés de cet isomorphisme.

LEMME 3.3.6. *L'isomorphisme $\beta(G)$ satisfait les propriétés suivantes.*

(1) *Il est compatible avec les produits, c'est-à-dire qu'on a*

$$\beta(G_1)(c_1) \smile \beta(G_2)(c_2) = \beta(G_1 \otimes G_2)(v_1 \smile c_2).$$

(2) *Il est \mathfrak{S}_n -équivariant (relativement aux actions définies dans la définition 3.2.3).*

DÉMONSTRATION. L'isomorphisme $\beta(G)$ est défini comme l'application composée suivante :

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{d,U} \circ \otimes^n, G) &\xrightarrow{(\dagger_1)} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^*(\Gamma^{d,U} \circ \otimes^n \circ \boxplus^n, G \circ \boxplus^n) \\ &\xrightarrow{(\dagger_2)} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^*(\Gamma^{d,U} \circ \boxtimes^n, G \circ \boxplus^n) \end{aligned}$$

où la première application est induite par la précomposition par \boxplus^n , et la deuxième est induite par l'application (où $\eta : \text{Id} \rightarrow \Delta_n \circ \boxplus^n$ désigne l'unité d'adjonction) :

$$\boxtimes^n(\eta) : \boxtimes^n \rightarrow \boxtimes^n \circ \Delta_n \circ \boxplus^n = \boxtimes^n \circ \boxplus^n.$$

Par le lemme 3.2.1 les applications (\dagger_1) et (\dagger_2) sont compatibles avec les produits. Pour finir de démontrer la proposition, il reste à vérifier que la composée $(\dagger_2) \circ (\dagger_1)$ est \mathfrak{S}_n -équivariante. Pour cela, on définit une action de \mathfrak{S}_n sur $E := \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^*(\Gamma^{d,U} \circ \otimes^n \circ \boxplus^n, G \circ \boxplus^n)$ et ensuite, on montre que les applications (\dagger_1) et (\dagger_2) sont \mathfrak{S}_n -équivariantes

Il y a deux actions de \mathfrak{S}_n sur le groupe d'extensions E : la première est induite par l'action de \mathfrak{S}_n sur \otimes^n et la deuxième est induite par la précomposition par \boxplus^n (voir la définition 3.2.3). Comme les deux composés $\otimes^n \circ \boxplus^n \xrightarrow{\sigma_{\otimes}(\boxtimes^n)} \otimes^n \circ \boxplus^n \xrightarrow{\otimes^n(\sigma_{\boxplus})} \otimes^n \circ \boxplus^n \circ \sigma_{\mathcal{V}}$ et $\otimes^n \circ \boxplus^n \xrightarrow{\otimes^n(\sigma_{\boxplus})} \otimes^n \circ \boxplus^n \circ \sigma_{\mathcal{V}} \xrightarrow{\sigma_{\otimes}(\boxplus^n \circ \sigma_{\mathcal{V}})} \otimes^n \circ \boxplus^n \circ \sigma_{\mathcal{V}}$ sont égaux, ces deux actions sont commutatives. On obtient une action de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ sur E . En prenant l'action diagonale, on obtient une action de \mathfrak{S}_n sur E .

Pour démontrer que (\dagger_1) est une \mathfrak{S}_n -équivariante, on montre plutôt que (\dagger_1) est $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ -équivariante où le deuxième facteur de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ agit trivialement sur la source de (\dagger_1) . La compatibilité de (\dagger_1) avec la première action de \mathfrak{S}_n provient de la précomposition par \boxplus^n et la compatibilité avec la deuxième action de \mathfrak{S}_n est indiquée dans le paragraphe 3.2.4.

D'après les définitions 3.2.2 et 3.2.3, pour démontrer que l'application (\dagger_2) est équivariante il suffit de vérifier que l'application $\boxtimes^n(\eta)$ est compatible avec l'action de \mathfrak{S}_n , c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \boxtimes^n & \xrightarrow{\sigma_{\boxtimes}} & \boxtimes^n \circ \sigma_{\mathcal{V}} \\ \boxtimes^n(\eta) \downarrow & & \downarrow \boxtimes^n(\eta) \\ \otimes^n \circ \boxplus^n & \xrightarrow{\sigma_{\otimes}(\boxplus^n)} \otimes^n \circ \boxplus^n \xrightarrow{\otimes^n(\sigma_{\boxplus})} & \otimes^n \circ \boxplus^n \circ \sigma_{\mathcal{V}}. \end{array}$$

Comme les transpositions forment un système de générateurs du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . On peut supposer que σ est une transposition. Dans ce cas-là, on peut supposer de plus que $n = 2$. On fait des calculs concrets : $v_1 \otimes v_2 \xrightarrow{\sigma_{\boxtimes}} v_2 \otimes v_1 \xrightarrow{\boxtimes^2(\eta)} (v_2, 0) \otimes$

$(0, v_1)$ et $v_1 \otimes v_2 \xrightarrow{\boxtimes^2(\eta)} (v_1, 0) \otimes (0, v_2) \xrightarrow{\sigma_{\boxtimes}(\boxtimes^2)} (0, v_2) \otimes (v_1, 0) \xrightarrow{\boxtimes^2(\sigma_{\boxtimes})} (v_2, 0) \otimes (0, v_1)$.
Le diagramme ci-dessus est alors commutatif. \square

REMARQUE 3.3.7. Dans la définition de $\beta(G)$, on peut remplacer Γ^d par Λ^d ou S^d , ou plus généralement par une famille de foncteurs strictement polynomiaux C^d munie d'une structure de cogèbre. Dans ce cas l'isomorphisme

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(C^{d,U} \circ \otimes^n, G) = \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(C^{d,U} \circ \boxtimes^n \circ \Delta_n, G) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(2)}^*(C^{d,U} \circ \boxtimes^n, G \circ \boxplus^n)$$

vérifie toutes les propriétés du lemme 3.3.6 (la démonstration est identique). Cependant, nous n'utiliserons que le cas $C^d = \Gamma^d$ dans la suite.

THÉORÈME 3.3.8. *Soit μ un uplet d'entiers naturels de poids nd . Soit r un entier. Il existe un isomorphisme gradué, naturel en S^μ*

$$(3.3.4) \quad \alpha(S^\mu) : \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ \otimes^n, S^{\mu(r)}) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \otimes^n, S^\mu).$$

De plus, $\alpha(S^\mu)$ satisfait les propriétés suivantes.

- (1) $\alpha(S^\mu)$ est compatible avec les produits, c'est-à-dire qu'on a

$$\alpha(S^\mu)(c_1) \otimes \alpha(S^\lambda)(c_2) = \alpha(S^\mu \otimes S^\lambda)(c_1 \smile c_2).$$

- (2) $\alpha(S^\mu)$ est \mathfrak{S}_n -équivariant (relativement aux actions définies dans la définition 3.2.3).

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 3.3.6, on a un isomorphisme

$$\beta(S^{\mu(r)}) : \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ \otimes^n, S^{\mu(r)}) \xrightarrow{\simeq} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, S^{\mu(r)} \circ \boxplus^n)$$

qui est compatible avec les produits et est \mathfrak{S}_n -équivariant. L'isomorphisme exponentiel $S^d(V \oplus W) \simeq \bigoplus_{i=0}^d S^i(V) \otimes S^{d-i}(W)$ induit un isomorphisme $S^\mu \circ \boxplus^n \simeq \bigoplus_{\sum \mu^i = \mu} \boxtimes_{i=1}^n S^{\mu^i}$ qui est compatible avec les produits. De plus, cet isomorphisme est compatible avec les actions de \mathfrak{S}_n , c'est-à-dire qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^\mu \circ \boxplus^n & \xrightarrow{\simeq} & \bigoplus_{\sum \mu^i = \mu} \boxtimes_{i=1}^n S^{\mu^i} \\ \downarrow S^\mu(\sigma_{\boxplus}) & & \downarrow \\ S^\mu \circ \boxplus^n \circ \sigma_{\mathcal{V}} & \xrightarrow{\simeq} & \bigoplus_{\sum \mu^i = \mu} \left(\boxtimes_{i=1}^n S^{\mu^i} \right) \circ \sigma_{\mathcal{V}} \end{array}$$

où σ est un élément de \mathfrak{S}_n et le morphisme vertical à droite est induit par les isomorphismes $\sigma_{(S^{\mu^1}, \dots, S^{\mu^n})} : \boxtimes_{i=1}^n S^{\mu^i} \rightarrow \left(\boxtimes_{i=1}^n S^{\mu^{\sigma^{-1}(i)}} \right) \circ \sigma_{\mathcal{V}}$. D'après l'isomorphisme

induit par l'isomorphisme exponentiel ci-dessus et le théorème 3.3.5, on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^*(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, S^{\mu(r)} \circ \boxplus^n) &\simeq \bigoplus_{\sum \mu^i = \mu} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k(n)}^*(\Gamma^{p^r d} \circ \boxtimes^n, \boxtimes_{i=1}^n S^{\mu^i(r)}) \\ &\simeq \bigoplus_{\sum \mu^i = \mu} \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n, \boxtimes_{i=1}^n S^{\mu^i}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n, S^\mu \circ \boxplus^n). \end{aligned}$$

Ces isomorphismes sont compatibles avec les produits et sont \mathfrak{S}_n -équivariants. On note $\chi(S^\mu)$ le composé. D'autre part, par le lemme 3.3.6, on a un isomorphisme

$$\beta(S^\mu) : \text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \otimes^n, S^\mu) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_k(n)}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \boxtimes^n, S^\mu \circ \boxplus^n).$$

On définit par $\alpha(S^\mu)$ le composé $\beta(S^\mu)^{-1} \circ \chi(S^\mu) \circ \beta(S^{\mu(r)})$. Il est compatible avec les produits et est \mathfrak{S}_n -équivariant. On obtient l'isomorphisme souhaité. \square

3.3.3. Calculs de $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ X, S^{\mu(r)})$.

THÉORÈME 3.3.9. *Soit μ un uplet d'entiers naturels. Soit X un facteur direct de \otimes^n . Il existe un isomorphisme gradué naturel en S^μ , et compatible avec les produits :*

$$\alpha(S^\mu, X) : \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ X, S^{\mu(r)}) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ X, S^\mu).$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 3.3.8, on a un isomorphisme

$$\alpha(S^\mu) : \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ \otimes^n, S^{\mu(r)}) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \otimes^n, S^\mu).$$

Cet isomorphisme est compatible avec les produits et est \mathfrak{S}_n -équivariant. De plus, on a l'isomorphisme $\text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(\otimes^n, \otimes^n) \simeq \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$, alors $\beta(S^\mu)$ est naturel en \otimes^n . D'autre part, comme X est un facteur direct de \otimes^n , il existe un idempotent f de \otimes^n dont l'image est X . Le diagramme suivant est alors commutatif

(3.3.5)

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ \otimes^n, S^{\mu(r)}) & \xrightarrow{\alpha(S^\mu)} & \text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \otimes^2, S^\mu) \\ \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d}(f), S^{\mu(r)}) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}}(f), S^\mu) \\ \text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ \otimes^n, S^{\mu(r)}) & \xrightarrow{\alpha(S^\mu)} & \text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \otimes^2, S^\mu). \end{array}$$

Les images des applications verticales sont donc isomorphe. Comme f est un idempotent de \otimes^n dont l'image est X , alors $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d}(f), S^{\mu(r)})$ est un idempotent de $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ \otimes^n, S^{\mu(r)})$ dont l'image est $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ X, S^{\mu(r)})$ et l'application $\text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}}(f), S^\mu)$ est un idempotent de $\text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ \otimes^n, S^\mu)$ dont l'image est $\text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ X, S^\mu)$. On obtient donc un isomorphisme $\alpha(S^\mu, X)$ de $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^*(\Gamma^{p^r d} \circ X, S^{\mu(r)})$ vers $\text{Hom}_{\mathcal{P}_k}(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ X, S^\mu)$. De plus, comme les applications dans le diagramme (3.3.5) sont compatibles avec les produits alors le morphisme est également compatible avec les produits. \square

COROLLAIRE 3.3.10. *Soit μ un uplet d'entiers naturels. Soit L un foncteur simple dans la catégorie \mathcal{P}_n des foncteurs strictement polynomiaux homogène de degré n . On suppose que la caractéristique p du corps \mathbb{k} est strictement supérieure à n . Il existe alors un isomorphisme gradué naturel en S^μ*

$$\alpha(S^\mu, L) : \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ L, S^{\mu(r)} \right) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}} \left(\Gamma^{d, E_r^{\otimes n-1}} \circ L, S^\mu \right)$$

qui est compatible avec les produits.

DÉMONSTRATION. Comme $p > n$ le foncteur simple L est un facteur direct du foncteur produit tensoriel \otimes^n . En effet, d'après Friedlander-Suslin [FS97, Theorem 3.2], l'évaluation sur \mathbb{k}^n induit une équivalence de catégories $\mathcal{P}_n \rightarrow S(n, n)\text{-mod}$ où $S(n, n)$ est l'algèbre de Schur et $S(n, n)\text{-mod}$ est la catégorie des représentations de dimension finie de $S(n, n)$. De plus, comme $p > n$, d'après Schur [Sch73a, Sch73b] (voir aussi [Gre07, Corollary 2.6e]), l'algèbre $S(n, n)$ est semi-simple. Le module simple $L(\mathbb{k}^n)$ est alors un facteur direct de $(\mathbb{k}^n)^{\otimes n}$. On en déduit que L est un facteur direct de \otimes^n . En appliquant le théorème 3.3.9, on obtient le résultat souhaité. \square

3.4. Cohomologie des groupes orthogonaux et symplectiques

Dans cette section, on suppose que la caractéristique p du corps \mathbb{k} est *impaire*. Le but de cette section est de calculer complètement un exemple d'algèbres de cohomologie pour les schémas en groupes symplectiques Sp_n ou orthogonaux $\text{O}_{n,n}$. Plus précisément, si $G_n = \text{Sp}_n$ ou $\text{O}_{n,n}$, alors G_n est par définition un sous-schéma en groupes de GL_{2n} , et agit donc naturellement sur l'espace vectoriel \mathbb{k}^{2n} (par multiplication matricielle). En appliquant le r -ème foncteur de torsion de Frobenius (pour $r \geq 0$), et en prenant ℓ copies de la représentation obtenue, on obtient donc une action de G_n sur $\mathbb{k}^{2n(r) \oplus \ell}$, donc une action par automorphismes d'algèbres sur la \mathbb{k} -algèbre $\mathbb{k}[\mathbb{k}^{2n(r) \oplus \ell}]$ des polynômes sur $\mathbb{k}^{2n(r) \oplus \ell}$. On remarque que cette algèbre de polynômes peut également s'écrire (comme G_n -module) sous la forme $S^*(\mathbb{k}^{2n \vee(r) \oplus \ell})$ où $\mathbb{k}^{2n \vee}$ désigne la représentation duale de \mathbb{k}^{2n} . Dans cette section, nous calculons (dans le théorème 3.4.11) les algèbres de cohomologie suivantes lorsque $n \geq p^r \ell$:

$$(3.4.1) \quad H_{\text{rat}}^* \left(G_n, S^* \left(\mathbb{k}^{2n \vee(r) \oplus \ell} \right) \right) .$$

Les sous-algèbres de cohomologie de degré zéro, ne dépendent pas de r (car appliquer la torsion de Frobenius ne change pas les invariants). Pour $r = 0$, ces algèbres d'invariants sont décrites par les théorèmes fondamentaux de la théorie classique des invariants. Notre apport est donc de décrire la cohomologie de degré supérieur, avec la structure d'algèbre.

Nous rappelons maintenant les énoncés des théorèmes fondamentaux pour les schémas en groupes symplectiques et orthogonaux. Pour traiter les deux cas simultanément, on introduit quelques notations. On désigne par (e_i^\vee) la base duale de la base canonique de \mathbb{k}^{2n} . Pour chacun des groupes G_n on définit un foncteur X_G , un élément particulier $\omega_{G_n} \in X_G(\mathbb{k}^{2n})$ et un ensemble de paires d'indices entiers \mathcal{J}_{G_n} de la façon suivante.

On définit des invariants $(i|j)_{G_n} \in S^2(\mathbb{k}^{2n \vee \oplus \ell})$ avec $(i, j) \in \mathcal{J}_{G_n}$ sous l'action de G_n en posant

$$(i|j)_{G_n}(x_1, \dots, x_\ell) = \omega_{G_n}(x_i, x_j).$$

| | | |
|---------------------|---|--|
| G_n | Sp_n | $\mathrm{O}_{n,n}$ |
| X_G | Λ^2 | S^2 |
| ω_{G_n} | $\sum_{i=1}^n e_i^\vee \wedge e_{n+i}^\vee$ | $\sum_{i=1}^n e_i^\vee e_{n+i}^\vee$ |
| \mathcal{J}_{G_n} | $\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq \ell\}$ | $\{(i, j) : 1 \leq i \leq j \leq \ell\}$ |

Les théorèmes fondamentaux donnent l'algèbre d'invariants $H_{\mathrm{rat}}^0(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n\vee \oplus \ell}))$ en fonction des éléments $(i|j)_{G_n}$.

THÉORÈME 3.4.1 (Théorème fondamental pour les groupes Sp_n et $\mathrm{O}_{n,n}$ [dCP76]).

L'ensemble $\{(i|j)_{G_n} : (i, j) \in \mathcal{J}_{G_n}\}$ est un système de générateurs de l'algèbre $H_{\mathrm{rat}}^0(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n\vee \oplus \ell}))$. De plus, si $n \geq \ell$, il n'y a pas de relation entre les $(i|j)_{G_n}$.

3.4.1. Lien avec groupes d'extensions dans $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$. Nous rappelons tout d'abord le lien entre la cohomologie des groupes symplectiques et orthogonaux et les calculs d'extensions dans $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$. La forme standard $\omega_G \in X_G(\mathbb{k}^{2n})$ est invariante sous l'action de G_n . On a donc une application G_n -équivariante $\iota_d : \mathbb{k} \rightarrow \Gamma^d(X_G(\mathbb{k}^{2n\vee}))$ qui envoie λ sur $\lambda \omega_{G_n}^{\otimes d}$.

DÉFINITION 3.4.2. Soit $F \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}$. On définit un morphisme $\phi_{G_n, F}$ par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^*(\Gamma^{p^r d} \circ X_G, F) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_{\mathbb{k}^{2n\vee}}} & \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_n}^*(\Gamma^{p^r d} \circ X_G(\mathbb{k}^{2n\vee}), F(\mathbb{k}^{2n\vee})) \\
 \downarrow \phi_{G_n, F} & & \downarrow \mathrm{res}_{G_n}^{\mathrm{GL}_n} \\
 & & \mathrm{Ext}_{G_n}^*(\Gamma^{p^r d} \circ X_G(\mathbb{k}^{2n\vee}), F(\mathbb{k}^{2n\vee})) \\
 & & \downarrow \iota_{d p^r}^* \\
 H_{\mathrm{rat}}^*(G_n, F(\mathbb{k}^{2n\vee})) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Ext}_{G_n}^*(\mathbb{k}, F(\mathbb{k}^{2n\vee})).
 \end{array}$$

Le résultat clé suivant est dû à Touzé [Tou10, Subsections 3.2, 3.3].

THÉORÈME 3.4.3. Soit $F \in \mathcal{P}_d$. Le morphisme

$$\phi_{G_n, F} : \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^*(\Gamma^{p^r d} \circ X_G, F) \rightarrow H_{\mathrm{rat}}^*(G_n, F(\mathbb{k}^{2n\vee}))$$

satisfait les propriétés suivantes.

- (1) $\phi_{G_n, F}$ est une application graduée naturelle en F et compatible avec les produits.
- (2) $\phi_{G_n, -}$ est un morphisme de δ -foncteurs universels.
- (3) $\phi_{G_n, F}^0$ est un épimorphisme si F est un monomorphisme.
- (4) $\phi_{G_n, F}$ est un isomorphisme dès que $2n \geq \deg F$.

L'algèbre de cohomologie (3.4.1) peut être décomposée dans la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 H_{\mathrm{rat}}^*(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n\vee(r) \oplus \ell})) &= \bigoplus_{d \geq 0} H_{\mathrm{rat}}^*(G_n, S^d(\mathbb{k}^{2n\vee(r) \oplus \ell})) \\
 &= \bigoplus_{d \geq 0} H_{\mathrm{rat}}^*(G_n, S_{\mathbb{k}^\ell}^{d(r)}(\mathbb{k}^{2n\vee})).
 \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.4.3(1), on obtient un morphisme de \mathbb{k} -algèbres graduées :

$$(3.4.2) \quad \Phi_{G_n} = \bigoplus_{d \geq 0} \phi_{G_n, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)}} : \bigoplus_{d \geq 0} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ X_G, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)} \right) \rightarrow H_{\text{rat}}^* \left(G_n, S^* \left(\mathbb{k}^{2n\nu(r) \oplus \ell} \right) \right).$$

LEMME 3.4.4. *Il existe un isomorphisme d'algèbres*

$$\bigoplus_{d \geq 0} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ X_G, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)} \right) \simeq S^* \left(E_r \otimes X_G(\mathbb{k}^\ell) \right).$$

DÉMONSTRATION. Comme $p > 2$ et $X_G \in \{S^2, \Lambda^2\}$ alors X_G est un foncteur simple dans la catégorie \mathcal{P}_2 . D'après le corollaire 3.3.10, il existe des isomorphismes

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ X_G, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)} \right) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}} \left(\Gamma^{d, E_r} \circ X_G, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d} \right).$$

D'autre part, par le lemme de Yoneda, on a des isomorphismes

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}} \left(\Gamma^{d, E_r} \circ X_G, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d} \right) \simeq S^d \left(E_r \otimes X_G^\sharp(\mathbb{k}^\ell) \right) \simeq S^d \left(E_r \otimes X_G(\mathbb{k}^\ell) \right).$$

De plus, ces isomorphismes sont compatibles avec les produits. On obtient donc un isomorphisme d'algèbres $\bigoplus_{d \geq 0} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ X_G, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)} \right) \simeq S^* \left(E_r \otimes X_G(\mathbb{k}^\ell) \right)$. \square

3.4.2. Foncteurs n -corésolus. Pour calculer les algèbres de cohomologie des groupes symplectiques et orthogonaux évoquées dans l'introduction de la section 3.4, nous avons besoin de calculer des groupes de cohomologie de la forme $H_{\text{rat}}^* \left(G_n, F(\mathbb{k}^{2n\nu}) \right)$ pour $2n < \deg F$, c'est à dire en dehors des valeurs de n pour lesquelles le théorème 3.4.3 nous donne un isomorphisme :

$$\phi_{G_n, F} : \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^* \left(\Gamma^{p^r d} \circ X_G, F \right) \xrightarrow{\simeq} H_{\text{rat}}^* \left(G_n, F(\mathbb{k}^{2n\nu}) \right).$$

Nous allons cependant montrer que pour ces mauvaises valeurs de n , le morphisme $\phi_{G_n, F}$ reste un isomorphisme pour les foncteurs F considérés. Nous utilisons pour cela la notion de foncteur n -corésolu introduite dans [Tou12]. Soient $F \in \mathcal{P}_d$ et n un entier positif. On rappelle le morphisme $\theta_F = \theta_{F, \mathbb{k}^n} : \Gamma^{d, \mathbb{k}^n} \otimes F(\mathbb{k}^n) \rightarrow F$ défini pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ par

$$\Gamma^d \left(\text{Hom}(\mathbb{k}^n, V) \right) \otimes F(\mathbb{k}^n) \rightarrow F(V), \quad f \otimes x \mapsto F(f)(x).$$

De façon duale, on a un morphisme $(\theta_{F^\sharp})^\sharp : F \rightarrow S_{\mathbb{k}^n}^d \otimes F(\mathbb{k}^{n\nu})$.

DÉFINITION 3.4.5. Un foncteur $F \in \mathcal{P}_d$ est dit n -coengendré si θ_{F^\sharp} est un épimorphisme, ou de manière équivalente, si $(\theta_{F^\sharp})^\sharp$ est un monomorphisme.

LEMME 3.4.6 ([Tou12], Lemme 6.8). *Soit $J \in \mathcal{P}_d$ un foncteur n -coengendré injectif.*

- (1) $J(\mathbb{k}^n)$ est injectif dans la catégorie $S(n, d)$ -mod.
- (2) Pour $F \in \mathcal{P}_d$, l'application d'évaluation induit un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}} (F, J) \simeq \text{Hom}_{S(n, d)} (F(\mathbb{k}^n), J(\mathbb{k}^n)).$$

LEMME 3.4.7. *Soit $J \in \mathcal{P}_{2d}$ un foncteur $2n$ -coengendré injectif. Alors $\phi_{G_n, J}^0$ est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Par le théorème 3.4.3(3), il suffit de montrer que $\phi_{G_n, J}^0$ est un monomorphisme. On désigne par $\tilde{\theta}$ le morphisme composé

$$\begin{aligned} \Gamma^{2d, \mathbb{k}^{n\vee} \oplus \mathbb{k}^{n\vee}} &\rightarrow \Gamma^d(\mathrm{Hom}(\mathbb{k}^{n\vee}, -)) \otimes \Gamma^d(\mathrm{Hom}(\mathbb{k}^{n\vee}, -)) \\ &\xrightarrow{\cong} \Gamma^d(\mathrm{Hom}(-^\vee, \mathbb{k}^{n\vee})) \otimes \Gamma^d(\mathrm{Hom}(\mathbb{k}^{n\vee}, -)) \\ &\rightarrow \Gamma^d(\mathrm{Hom}(-^\vee, -)) \xrightarrow{\cong} \Gamma^d \circ \otimes^2. \end{aligned}$$

Puisque p est impaire, $\otimes^2 = \Lambda^2 \oplus S^2$. On note $\tilde{\theta}_{G_n}$ le morphisme composé $\Gamma^{2d, \mathbb{k}^{n\vee} \oplus \mathbb{k}^{n\vee}} \rightarrow \Gamma^d \circ \otimes^2 \rightarrow \Gamma^d \circ X_G$. Par définition, $\tilde{\theta}_{\mathbb{k}^{2n\vee}}$ est un épimorphisme. Alors les $(\tilde{\theta}_{G_n})_{\mathbb{k}^{2n\vee}}$ sont des épimorphismes. Par le lemme 3.4.6, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\Gamma^d \circ X_G, J) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\tilde{\theta}_{G_n}, J)} & \mathrm{Hom}(\Gamma^{2d, \mathbb{k}^n \oplus \mathbb{k}^n}, J) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathrm{Hom}(\Gamma^d \circ X_G(\mathbb{k}^{2n\vee}), J(\mathbb{k}^{2n\vee})) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}((\tilde{\theta}_{G_n})_{\mathbb{k}^{2n\vee}}, J(\mathbb{k}^{2n\vee}))} & \mathrm{Hom}(\Gamma^{2d, \mathbb{k}^n \oplus \mathbb{k}^n}(\mathbb{k}^{2n\vee}), J(\mathbb{k}^{2n\vee})). \end{array}$$

Alors $\mathrm{Hom}(\tilde{\theta}_{G_n}, J)$ est un monomorphisme. De plus, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\Gamma^{2d}, \mathbb{k}^{n\vee} \oplus \mathbb{k}^{n\vee}, J) & \xrightarrow[\mathrm{Yoneda}]{\cong} & J(\mathbb{k}^{2n\vee}) \\ \mathrm{Hom}((\tilde{\theta})_{G_n}, J) \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Hom}(\Gamma^d \circ X_G, J) & \xrightarrow{\phi_{G_n, J}^0} & H_{\mathrm{rat}}^0(G_n, J(\mathbb{k}^{2n\vee})). \end{array}$$

On obtient donc la conclusion. \square

DÉFINITION 3.4.8. Un foncteur $F \in \mathcal{P}_d$ est dit n -corésolu s'il existe une corésolution injective J_F^\bullet de F telle que les foncteurs injectifs J_F^i sont des foncteurs n -coengendrés.

Les corésolutions de Troesch [Tro05] des foncteurs $S^{d(r)}$ sont des p^r -corésolutions. On en déduit le résultat suivant.

LEMME 3.4.9 ([Tou12], Proposition 6.11). *Les foncteurs $S_{\mathbb{k}^\ell}^{d(r)}$ sont $p^r \ell$ -corésolus.*

THÉORÈME 3.4.10. *Soit $F \in \mathcal{P}_d$ un foncteur $2n$ -corésolu. Alors $\phi_{G_n, F}$ est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Comme $F \in \mathcal{P}_d$ un foncteur $2n$ -corésolu, par définition, il existe une corésolution injective J^\bullet de F telle que les foncteurs injectifs J^i sont des foncteurs $2n$ -coengendrés. D'après le lemme 3.4.6, l'évaluation sur \mathbb{k}^{2n} induit une corésolution injective $J^\bullet(\mathbb{k}^{2n})$ de $F(\mathbb{k}^{2n})$. De plus, par le lemme 3.4.7, on a un isomorphisme des complexes $\phi_{G_n, J^\bullet}^0 : \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(\Gamma^d \circ X_G, J^\bullet) \rightarrow \mathrm{Hom}_{G_n}(\mathbb{k}, J^\bullet(\mathbb{k}^{2n}))$. En prenant l'homologie, on obtient le résultat. \square

3.4.3. Théorème principal.

THÉORÈME 3.4.11. *Soit $n \geq p^r \ell$. On suppose que la caractéristique p du corps \mathbb{k} est impaire. L'algèbre de cohomologie $H_{\mathrm{rat}}^*(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n\vee(r) \oplus \ell}))$ est une algèbre symétrique sur un ensemble de générateurs $(h|i|j)_{G_n} \in H_{\mathrm{rat}}^{2h}(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n\vee(r) \oplus \ell}))$ où $0 \leq h < p^r, 0 \leq i \leq j \leq \ell$ et $i \neq j$ si G_n est le groupe symplectique Sp_n .*

De plus, il n'y a pas de relation entre les $(h|i|j)_{G_n}$.

DÉMONSTRATION. D'après (3.4.2) et le lemme 3.4.4, il existe un morphisme d'algèbres

$$(3.4.3) \quad \Phi_{G_n} : S^*(E_r \otimes X_G(\mathbb{k}^\ell)) \rightarrow H_{\text{rat}}^*(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n\nu(r)\oplus\ell})).$$

De plus, ce morphisme est un isomorphisme si les morphismes suivants sont des isomorphismes pour tout $d \in \mathbb{N}$:

$$\phi_{G_n, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)}} : \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}^*(\Gamma^{p^r d} \circ X_G, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)}) \rightarrow H_{\text{rat}}^*(G_n, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)}(\mathbb{k}^{2n\nu})).$$

Par le lemme 3.4.9, $S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)}$ est $2p^r\ell$ -corésolu. D'après l'hypothèse $n \geq p^r\ell$ et le théorème 3.4.10, les morphismes $\phi_{G_n, S_{\mathbb{k}^\ell}^{2d(r)}}$ sont des isomorphismes. Le morphisme d'algèbres Φ_{G_n} est donc un isomorphisme.

Comme E_r est un espace vectoriel gradué donné par $(E_r)^i = \mathbb{k}$ si $i = 0, 2, \dots, 2p^r - 2$ et 0 sinon, E_r a une base $\epsilon_h, h = 0, 1, \dots, p^r - 1$ avec $\epsilon_h \in (E_r)^{2h}$. On note $e_i, i = 1, 2, \dots, \ell$ une base de \mathbb{k}^ℓ . Alors $\epsilon_h \otimes (e_i \wedge e_j)$ avec $0 \leq h < p^r$ et $1 \leq i < j \leq n$ est une base de l'algèbre $S^*(E_r \otimes \Lambda^2(\mathbb{k}^\ell))$, et $\epsilon_h \otimes (e_i e_j)$ avec $0 \leq h < p^r$ et $1 \leq i \leq j \leq n$ est une base d'algèbre $S^*(E_r \otimes S^2(\mathbb{k}^\ell))$. Pour $0 \leq h < p^r, (i, j) \in \mathcal{J}_{G_n}$ on définit une classe cohomologique $(h|i|j)_{G_n} \in H_{\text{rat}}^{2h}(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n\nu(r)\oplus\ell}))$ par

$$(h|i|j)_{G_n} = \begin{cases} \Phi_{\text{Sp}_n}(\epsilon_h \otimes (e_i \wedge e_j)) & G_n = \text{Sp}_n, \\ \Phi_{\text{O}_{n,n}}(\epsilon_h \otimes (e_i e_j)) & G_n = \text{O}_{n,n}. \end{cases}$$

Comme le morphisme (3.4.3) est un isomorphisme, les éléments $(h|i|j)_{G_n}$ avec $0 \leq h < p^r$ et $(i, j) \in \mathcal{J}_{G_n}$ est une base d'algèbre $H_{\text{rat}}^*(G_n, S^*(\mathbb{k}^{2n\nu(n)\oplus\ell}))$. Cela termine la démonstration. \square

CHAPITRE 4

Des résultats d'annulation

Contents

| | |
|---|------------|
| 4.1. Introduction | 93 |
| 4.2. Théorie des blocs dans \mathcal{P}_k | 96 |
| 4.2.1. Partitions | 96 |
| 4.2.2. Foncteurs de Schur et foncteurs simples | 99 |
| 4.2.3. Blocs de la catégorie \mathcal{P}_k | 101 |
| 4.2.4. Changement de base | 104 |
| 4.2.5. Un critère d'annulation | 106 |
| 4.3. Foncteurs dérivés non-additifs et calcul de Goodwillie algébrique | 108 |
| 4.3.1. Objets Simpliciaux | 108 |
| 4.3.2. Effets croisés | 109 |
| 4.3.3. Foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe | 110 |
| 4.3.4. La tour de Taylor d'un foncteur | 111 |
| 4.4. Résultats (quasiment) explicites de $L_q S^d(-, n)$ et $H_q(D_n S^d)$ | 117 |
| 4.4.1. Calcul de $L_q S^d(-, n)$ | 117 |
| 4.4.2. Calcul de $H_q(D_1 S^d)$ | 120 |
| 4.4.3. Calcul de $H_q(D_d S^d)$ | 121 |
| 4.4.4. Calcul de $H_q(D_n S^d)$ avec $1 < n < d$ | 122 |
| 4.5. Blocs de $L_q S^d(-, n)$ et $H_q(D_n S^d)$, et résultats d'annulation | 123 |
| 4.5.1. Blocs de $L_q S^d(-, n)$ | 123 |
| 4.5.2. Blocs de $H_q(D_n S^d)$ | 126 |
| 4.5.3. Des critères d'annulation | 129 |

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, on utilise la théorie des blocs de la catégorie \mathcal{P}_k des foncteurs strictement polynomiaux pour obtenir des résultats d'annulation dans la théorie des foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe [DP61] et dans la théorie des approximations de Taylor d'un foncteur selon Johnson-McCarthy [JM04] (Goodwillie algébrique).

Soit $F : \text{Vect}_k \rightarrow \text{Vect}_k$ un foncteur, où Vect_k désigne la catégorie des k -espaces vectoriels. Pour étudier le foncteur F , on dispose de plusieurs théories de dérivation de F :

- (1) La théorie des foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe [DP61]. Pour chaque paire (q, n) d'entiers naturels, on a un foncteur $L_q F(-, n) : \text{Vect}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$.
- (2) La théorie des approximations de Taylor d'un foncteur selon Johnson-McCarthy [JM04] (Goodwillie algébrique). Pour chaque paire (q, n) d'entiers naturels, on a un foncteur $H_q(D_n F) : \text{Vect}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$.

Le problème général est le suivant.

PROBLÈME. *Calculer explicitement les dérivées $L_q F(-, n)$ et $H_q(D_n F)$.*

Le cas central est le cas $F = S^d$. Le calcul des foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe $L_q S^d(-, n)$ est effectué par Cartan [Car55], Dold-Puppe [DP61], Touzé [Tou14]. Pour les approximations de Taylor $H_q(D_n S^d)$ le résultat est incomplet. Dans le cas $n = 1$, on peut interpréter $H_q(D_1 S^d)$ comme des foncteurs dérivés stables au sens de Dold-Puppe, et le résultat est donc connu d'après Cartan [Car55], Bousfield [Bou67b], ou Betley [Bet01]. Dans le cas $n = d$, on peut interpréter $H_q(D_d S^d)$ comme l'homologie du groupe symétrique \mathfrak{S}_d à coefficients dans \otimes^d . Cette homologie est calculée récemment par Cohen-Hemmer-Nakano [CHN10]. Dans les cas où $1 < n < d$, nous proposons une suite spectrale pour calculer $H_q(D_n S^d)$. Si $n > d$ alors $H_q(D_n S^d) = 0$ pour des raisons de degré.

Les résultats pour les dérivés de S^d sont compliqués, et il est encore plus difficile de calculer les foncteurs $L_q F(-, n)$ et $H_q(D_n F)$ pour un foncteur F quelconque. L'objectif de ce chapitre est de donner un critère effectif pour le foncteur F et \mathbb{k} -espace vectoriel V pour que les espaces vectoriels $L_q F(V, n)$ et $H_q(D_n F)(V)$ s'annulent.

Si F est un foncteur strictement polynomial, les foncteurs $L_q F(-, n)$ et $H_q(D_n F)$ le sont aussi. On peut donc utiliser la théorie des blocs dans cette catégorie. Les blocs de la catégorie $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ sont connus d'après Donkin [Don87]. En fait, l'idée d'utiliser cette théorie pour obtenir des résultats d'annulation provient de Touzé [Tou13c]. Cependant, la méthode que l'on utilisera est différente de celle de [Tou13c].

Nos principaux résultats sont les théorèmes 4.5.18 et 4.5.20. Pour donner une idée des énoncés obtenus, nous donnons un cas particulier du théorème 4.5.18.

THÉORÈME (Théorème 4.5.18). *Soient F un objet de \mathcal{P}_d , V un objet de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, et q, n deux entiers naturels. Soit $\alpha_p(d)$ la somme des chiffres dans la décomposition p -adique de d . Si $q + \text{inj. dim } F < 2d + n\alpha_p(d)$ alors $L_q F(V, n) = 0$ pour tout V .*

Les résultats d'annulation s'obtiennent en plusieurs étapes.

Étape 1. On rappelle que deux simples de \mathcal{P}_d correspondent au même bloc de la catégorie si et seulement si les partitions qui les indexent ont le même p -cœur [Don87]. Cela définit l'application suivante, où $\mathbf{P}_{p\text{-cœur}}$ défini dans la sous-section 4.2.1.2 est l'ensemble des p -cœurs :

$$\mathfrak{B}l : \text{Obj}(\mathcal{P}_{\mathbb{k}}) \rightarrow 2^{\mathbf{P}_{p\text{-cœur}}}.$$

Si F est un foncteur strictement polynomial, on note $\mathfrak{B}l(F)$ l'ensemble des p -cœurs correspondant aux partitions qui indexent les simples d'une série de composition de F .

Dans cette première étape, on utilise les règles de Pieri, de Nakayama et le produit tensoriel de Steinberg pour obtenir dans la proposition 4.2.21 et le théorème

4.2.23 des propriétés de \mathfrak{BI} qui permettent de la calculer facilement. De plus, on démontre que le foncteur de changement de base préserve les blocs.

PROPOSITION (Proposition 4.2.21 et Théorème 4.2.23). *Soient $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ et $F, G \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}, G \neq 0$. On a les égalités suivantes :*

- (1) $\mathfrak{BI}(S_V^d) = \{\lambda \in \mathbf{P}_{p\text{-coeur}} : \ell(\lambda) \leq \dim V, |\lambda| \leq d \text{ et } |\lambda| \equiv d \pmod{p}\}$
- (2) $\mathfrak{BI}(F \otimes G^{(1)}) = \mathfrak{BI}(F)$,

où $\ell(\lambda)$ et $|\lambda|$ est la longueur et le poids de $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, c'est-à-dire que $\ell(\lambda) = \min\{n \in \mathbb{N} : \lambda_i = 0, \forall i > n\}$ et $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$.

PROPOSITION (Proposition 4.2.28). *Soient $\mathbb{k} \subset \mathbb{K}$ une extension de corps et $F \in \mathcal{P}_{d, \mathbb{k}}$. Si on note ${}_{\mathbb{K}}F$ l'image de F par le foncteur de changement de base ${}_{\mathbb{K}}(-) : \mathcal{P}_{d, \mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{P}_{d, \mathbb{K}}$, on a $\mathfrak{BI}(F) = \mathfrak{BI}({}_{\mathbb{K}}F)$.*

Étape 2. Dans cette seconde étape, on explique comment utiliser la théorie des blocs pour obtenir des résultats d'annulation. Soit $X \in \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_{\mathbb{k}})$ un complexe d'injectifs de $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$. Nos résultats d'annulation s'appliquent plus généralement aux foncteurs du type :

$$(\mathfrak{J}) \quad \begin{aligned} \Phi &= \Phi_X : \mathcal{P}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_{\mathbb{k}}) \\ F &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F^{\sharp}, X). \end{aligned}$$

Nous montrons dans les propositions 4.3.11 et 4.3.22 que les foncteurs D_n et $L(-, n)$ sont de ce type. On montre ensuite le résultat suivant.

THÉORÈME (Théorème 4.2.35). *Soient $F \in \mathcal{P}_d, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ et Φ un foncteur de type (\mathfrak{J}) . Alors $(H_q(\Phi F))(V) = 0$ dès que*

$$\mathfrak{BI}(F) \cap \bigcup_{q \leq j \leq q + \text{inj. dim } F} \mathfrak{BI}((H_j(\Phi S^d))_V) = \emptyset.$$

Étape 3. Cette étape consiste à extraire dans la section 4.3 des travaux de Cartan [Car55], Touzé [Tou14], Cohen-Hemmer-Nakano [CHN10] et Johnson-McCarthy [JM04, JM08], les calculs (quasiment) explicites de $L_q S^d(-, n)$ et $H_q(D_n S^d)$.

Étape 4. Dans cette étape, nous utilisons les descriptions de $L_q S^d(-, n)$ et $H_q(D_n S^d)$ de l'étape précédente et les résultats de l'étape 1 pour déterminer $\mathfrak{BI}((H_*(\Phi S^d))_V)$ pour les deux théories qui nous intéressent : les foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe et les étages de la tour de Taylor. Par exemple, on obtient dans le théorème 4.5.7 le résultat suivant.

THÉORÈME (Théorème 4.5.7). *Soient d, n deux entiers naturels et V un objet de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. On a une égalité :*

$$\bigcup_{q=0}^j \mathfrak{BI}((L_q S^d(-, n))_V) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } j < j_0 \\ \mathfrak{BI}(E_V^{d_0 + kp}) & \text{si } j_k \leq j < j_{k+1}, \\ \mathfrak{BI}(E_V^d) & \text{si } j > j_{\lfloor \frac{d}{p} \rfloor}, \end{cases}$$

où d_0 est le reste de la division de d par p , et $j_k = 2d + n(kp + \alpha_p(d - kp))$ pour $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{d}{p} \rfloor$, et $\alpha_p(d - kp)$ est la somme des chiffres dans la décomposition p -adique de $d - kp$. De plus, la notation E désigne le foncteur Γ si $p = 2$ ou n est pair, et le foncteur Λ sinon.

En utilisant les résultats de l'étape 2 et les calculs des blocs, nous obtenons dans les théorèmes 4.5.18 et 4.5.20 nos résultats d'annulation pour ces deux théories de dérivation.

4.2. Théorie des blocs dans \mathcal{P}_k

Les blocs de la catégorie \mathcal{P}_k sont connus d'après Donkin [Don87]. Dans cette section, on présente les propriétés des blocs dont on a besoin dans la suite. Dans les deux premières sous-sections, on rappelle la théorie des partitions et des propriétés essentielles de foncteurs de Schur et foncteurs simples. Dans la troisième sous-section, on définit l'application \mathfrak{BI} qui calcule des blocs d'un foncteur strictement polynomial et on explique comment on peut calculer cette application. Enfin, un critère d'annulation est donné dans la sous-section 4.2.5.

4.2.1. Partitions. Les objets simples de la catégorie \mathcal{P}_k sont indexés par les partitions et les blocs de \mathcal{P}_k correspondent aux p -cœurs de ces partitions. Dans cette sous-section, on donne donc un bref rappel sur la théorie des partitions et des p -cœurs. Notre référence est le livre de James et Kerber [JK81].

4.2.1.1. *Partitions.* Une partition est une suite $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ d'entiers naturels tels que $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ pour tout i et $\lambda_i = 0$ pour i assez grand. On note \mathbf{P} l'ensemble des partitions. Si λ est une partition avec $\lambda_{n+1} = 0$, on notera simplement λ par $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Pour chaque partition λ , le *diagramme de Young* $Y(\lambda)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{>0}^{\times 2}$ défini par

$$Y(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}_{>0}^{\times 2} : j \leq \lambda_i\}.$$

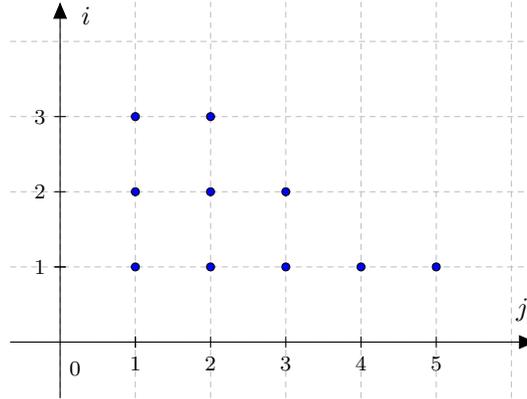


FIGURE 1. $Y(5, 3, 2)$

Puisque $\lambda_n = 0$ pour n assez grand, $Y(\lambda)$ est un ensemble fini. De plus, comme λ_i est le nombre d'entiers j strictement positifs satisfaisant $(i, j) \in Y(\lambda)$, la correspondance $\lambda \mapsto Y(\lambda)$ est injective. Un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{>0}^{\times 2}$ est appelé une partition s'il est de la forme $Y(\lambda)$ pour une partition λ quelconque. Il est clair qu'un sous-ensemble Y de $\mathbb{Z}_{>0}^{\times 2}$ est une partition si et seulement s'il satisfait la propriété suivante : si (i, j) et (i', j') sont deux éléments de $\mathbb{Z}_{>0}^{\times 2}$ satisfaisant $i \leq i', j \leq j'$ et $(i', j') \in Y$, alors $(i, j) \in Y$.

On définit la longueur $\ell(\lambda)$ et le poids $|\lambda|$ d'une partition λ par les formules :

$$\ell(\lambda) = \min\{n \in \mathbb{N} : \lambda_i = 0, \forall i > n\}, \quad |\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i.$$

Si $\lambda \neq (0)$, on a $\ell(\lambda) = \max\{i : (i, 1) \in Y(\lambda)\}$. De plus, on a $|\lambda| = \#Y(\lambda)$. Si $|\lambda| = n$, on dit que λ est une partition de n . On désigne par $\mathbf{P}(n)$ le sous-ensemble de \mathbf{P} des partitions de n . Par exemple, $\mathbf{P}(0) = \{(0)\}$, $\mathbf{P}(1) = \{(1)\}$, et $\mathbf{P}(2) = \{(2), (1, 1)\}$, $\mathbf{P}(3) = \{(3), (2, 1), (1, 1, 1)\}$. On a $\mathbf{P}(n) \cap \mathbf{P}(m) = \emptyset$ si $n \neq m$ et $\mathbf{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(n)$.

Soit $\lambda \in \mathbf{P}$ une partition. La partition conjuguée de λ est la partition λ' définie par $\lambda'_i = \#\{j : \lambda_j \geq i\}$. La conjugaison des partitions définit une application $(-)' : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$. Par définition, on a

$$(\lambda')' = \lambda, \quad |\lambda'| = |\lambda|, \quad \ell(\lambda) = \lambda'_1, \quad \ell(\lambda') = \lambda_1.$$

De plus $\lambda'_j = \#\{i : (i, j) \in Y(\lambda)\}$ et $(i, j) \in Y(\lambda)$ si et seulement si $(j, i) \in Y(\lambda')$. Une partition λ est dite p -restreinte si $\lambda_i - \lambda_{i+1} < p$ pour tout $i \geq 1$. Si λ et μ sont des partitions et n est un entier naturel, on note $\lambda + \mu$ la partition $(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \dots)$ et $n\lambda$ la partition $(n\lambda_1, n\lambda_2, \dots)$.

EXEMPLE 4.2.1. Soit $\lambda = (5, 3, 2)$. On a $|\lambda| = 10$ alors λ est une partition de 10. De plus, on a des égalités :

$$\ell(\lambda) = 3, \quad \lambda' = (3, 3, 2, 1, 1), \quad \ell(\lambda') = \lambda_1 = 5.$$

Par définition, λ est p -restreinte si et seulement si $p \geq 3$.

Le résultat suivant est bien connu, voir par exemple [JK81, (6.1.4)-(6.1.7)] pour un résultat analogue. C'est la version de la division euclidienne pour les partitions.

LEMME 4.2.2. Soit $\lambda \in \mathbf{P}$ une partition. Il existe une unique partition p -restreinte μ et une unique partition ν telles que $\lambda = \mu + p\nu$.

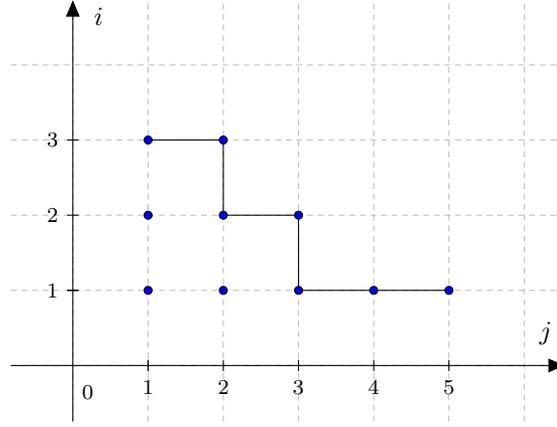
DÉMONSTRATION. (1) Pour une partition λ , on note $R(\lambda) := \{i \geq 1 : \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq p\}$. On montre l'existence par récurrence sur le cardinal $\#R(\lambda)$ de cet ensemble. Si $\#R(\lambda) = 0$, alors λ est une partition p -restreinte. On peut choisir $\mu = \lambda$ et $\nu = 0$. Si $\#R(\lambda) \geq 1$, on note r l'élément maximum de $R(\lambda)$. Alors $\lambda = \mu^1 + p\nu^1$ où $\nu^1 = (a^r)$ avec $a = \left\lfloor \frac{\lambda_r - \lambda_{r+1}}{p} \right\rfloor$. De plus $R(\lambda^1) = R(\lambda) \setminus \{r\}$, alors $\#R(\lambda^1) < \#R(\lambda)$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une partition p -restreinte μ^2 et une partition ν^2 telles que $\mu^1 = \mu^2 + p\nu^2$. On pose $\mu = \mu^2$ et $\nu = \nu^1 + \nu^2$.

(2) Supposons que l'on a deux décompositions $\lambda = \mu^1 + p\nu^1 = \mu^2 + p\nu^2$ où μ^1, μ^2 sont des partitions p -restreintes et $\mu^1 \neq \mu^2$. Soit n le plus grand entier satisfaisant $\mu_n^1 \neq \mu_n^2$. On pose $k = \mu_{n+1}^1 = \mu_{n+1}^2$. Comme μ^i est p -restreinte, alors μ_n^1 et μ_n^2 appartiennent à l'ensemble $\{k, k+1, \dots, k+p-1\}$. De plus, comme $\mu_n^1 + p\nu_n^1 = \mu_n^2 + p\nu_n^2$, on a $\mu^1 \equiv \mu^2 \pmod{p}$, contradiction. \square

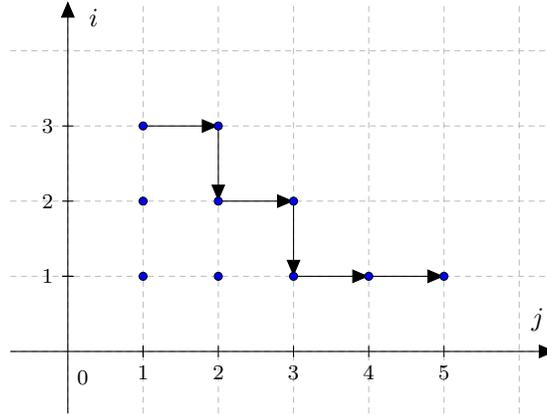
4.2.1.2. p -caeurs. Soit $Y \subset \mathbb{Z}_{>0}^{\times 2}$ une partition. Le bord de Y que l'on note ∂Y , est l'ensemble des éléments (i, j) de Y tel que $(i+1, j+1)$ n'appartient pas à Y :

$$\partial Y = \{(i, j) \in Y : (i+1, j+1) \notin Y\}.$$

On définit une relation binaire \prec sur $\mathbb{Z}_{>0}^{\times 2}$ de la façon suivante. Soient (i_1, j_1) et (i_2, j_2) deux éléments de $\mathbb{Z}_{>0}^{\times 2}$. On note $(i_1, j_1) \prec (i_2, j_2)$ si $i_1 \geq i_2$ et $j_1 \leq j_2$. Puisque \leq est une relation d'ordre sur \mathbb{Z} , \prec est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}_{>0}^{\times 2}$. De plus, si

FIGURE 2. $\partial(Y(5, 2, 1))$

$Y \subset \mathbb{Z}_{>0}^{\times 2}$ est une partition, la relation d'ordre \prec est totale sur ∂Y . Un *intervalle* de ∂Y est un sous-ensemble de ∂Y de la forme $\{(i, j) \in \partial Y : (i_1, j_1) \prec (i, j) \prec (i_2, j_2)\}$ pour $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \partial Y$ quelconque.

FIGURE 3. La relation d'ordre totale \prec sur $\partial(Y(5, 2, 1))$

Soient λ, μ deux partitions. On note $\lambda \subset \mu$ si $Y(\lambda) \subset Y(\mu)$, ou de manière équivalente si $\lambda_i \leq \mu_i$ pour tout i . Cette relation binaire est une relation d'ordre partielle sur l'ensemble \mathbf{P} des partitions. On définit également une autre relation d'ordre \leq_p sur l'ensemble \mathbf{P} comme suit. Soient λ, μ deux partitions. On note $\lambda \leq_p \mu$ s'il existe une suite des partitions ν^1, \dots, ν^n avec $\nu^1 = \lambda$ et $\nu^2 = \mu$ satisfaisant les conditions : $\nu^i \subset \nu^{i+1}$ et $Y(\nu^{i+1}) \setminus Y(\nu^i)$ est un intervalle de $\partial(Y(\nu^{i+1}))$ de p éléments pour $i = 1, \dots, n-1$.

LEMME 4.2.3. *Soient λ et μ deux partitions. On a $\lambda \leq_p \lambda + p\mu$. En particulier, on a $(0) \leq_p p\lambda$.*

DÉMONSTRATION. Il existe (de façon non-unique) de partitions distinctes μ^k avec $0 \leq k \leq |\mu|$ telles que $(0) = \mu^0 \subset \mu^1 \subset \dots \subset \mu^{|\mu|-1} \subset \mu^{|\mu|} = \mu$. On

pose $\nu^i = p\mu^i$ pour tout i . On obtient une suite des partitions $\nu^0, \dots, \nu^{|\mu|}$ avec $\nu^0 = \lambda, \nu^{|\mu|} = \mu$, de plus, $\nu^i \subset \nu^{i+1}$ et $Y(\nu^{i+1}) \setminus Y(\nu^i)$ est un intervalle de $\partial(Y(\nu^{i+1}))$ de p éléments pour tout i . On a alors $\lambda \leq_p \lambda + p\mu$. \square

DÉFINITION 4.2.4. Une partition λ est appelée un p -cœur si λ est un élément minimal de \mathbf{P} par rapport à la relation \leq_p . On note $\mathbf{P}_{p\text{-cœur}}$ l'ensemble des p -cœurs.

Si $p = 2$, l'ensemble $\mathbf{P}_{p\text{-cœur}}$ est très simple. En effet, un 2-cœur est une partition λ telle que $\lambda_n = \lambda_{n+1} + 1$ si $\lambda_n \neq 0$. Autrement dit, une partition est un 2-cœur si et seulement si λ et λ' sont des partitions 2-restreintes. Pour p quelconque, si la partition λ est un p -cœur, les partitions λ et λ' sont toujours p -restreintes, mais cette condition ne caractérise pas les p -cœurs. Par exemple, si $\lambda = (3, 2)$ alors λ et λ' sont 3-restreintes mais λ n'est pas un 3-cœur car $(1, 1) \leq_3 (3, 2)$. Le résultat fondamental sur la relation d'ordre \leq_p est le suivant. Une démonstration de ce résultat peut être trouvée dans [JK81, Theorem 2.7.16].

THÉORÈME 4.2.5. Soit λ une partition. Alors l'ensemble $\{\mu \in \mathbf{P} : \mu \leq_p \lambda\}$ possède un plus petit élément.

DÉFINITION 4.2.6. Si $\lambda \in \mathbf{P}$ est une partition, on note $\mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda)$ le p -cœur de λ , c'est-à-dire le plus petit élément de l'ensemble $\{\mu \in \mathbf{P} : \mu \leq_p \lambda\}$. On obtient une application $\mathfrak{C}\mathfrak{o}_p : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}_{p\text{-cœur}}$ qui fixe tous les éléments de $\mathbf{P}_{p\text{-cœur}}$.

PROPOSITION 4.2.7. Soient λ et μ deux partitions.

- (1) On a $\mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda) = \mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda + p\mu)$. En particulier, on a $\mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(p\mu) = (0)$.
- (2) La partition $\mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda')$ est la partition conjuguée de $\mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda)$.

DÉMONSTRATION. (1) D'après la définition 4.2.6 et le théorème 4.2.5, on a que $\mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda + p\mu) = \mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\nu)$ si la partition ν satisfait l'inégalité $\nu \leq_p \lambda + p\mu$. Par le lemme 4.2.3, la partition λ satisfait cette condition. On a donc $\mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda) = \mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda + p\mu)$. Dans le cas $\lambda = 0$, on a que $\mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(p\mu)$ est le p -cœur de la partition (0) , qui est (0) par définition.

(2) Par définition de la partition conjuguée, on a $Y(\lambda') = \{(i, j) : (j, i) \in Y(\lambda)\}$. De plus, l'application $(i, j) \mapsto (j, i)$ est une bijection de $\partial Y(\lambda')$ sur $\partial Y(\lambda)$. De plus, cette bijection est strictement décroissante. On a, par définition de la relation d'ordre, que $\mu \leq_p \lambda$ si et seulement si $\mu' \leq_p \lambda'$. On en déduit le résultat. \square

4.2.2. Foncteurs de Schur et foncteurs simples.

4.2.2.1. Foncteurs de Schur. On rappelle que l'ordre lexicographique est l'ordre total sur $\mathbb{Z}_{>0}^{\times 2}$ défini par $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$ si $i_1 < i_2$ ou si $i_1 = i_2$ et $j_1 \leq j_2$.

Pour tout sous-ensemble non-vide A de $\mathbb{Z}_{>0}^{\times 2}$ on note α_A l'unique bijection de A vers $\{1, 2, \dots, \#A\}$ préservant les ordres. Si $\lambda \in \mathbf{P}(d)$, on note $\sigma_\lambda : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ la composée suivante, où le deuxième morphisme envoie (i, j) vers (j, i) :

$$\{1, \dots, d\} \xrightarrow{\alpha_{Y(\lambda)}^{-1}} Y(\lambda) \rightarrow Y(\lambda') \xrightarrow{\alpha_{Y(\lambda')}} \{1, \dots, d\}.$$

On obtient ainsi une application $\mathbf{P}(d) \rightarrow \mathfrak{S}_d$. On a évidemment que $\sigma_{\lambda'}$ est l'inverse de σ_λ pour toute partition λ . D'autre part, on a une application $\mathfrak{S}_d \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\otimes^d, \otimes^d)$ qui à une permutation τ associe la transformation naturelle qui

envoie $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d$ vers $v_{\tau^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau^{-1}(d)}$. La composée de ces deux applications fournit une application

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(d) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\otimes^d, \otimes^d) \\ \lambda &\mapsto \sigma_\lambda. \end{aligned}$$

- EXEMPLE 4.2.8. (1) On considère la partition $\lambda = (3, 1)$ de 4, on a $\sigma_{(3,1)} : \otimes^4 \rightarrow \otimes^4, v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4 \mapsto v_1 \otimes v_4 \otimes v_2 \otimes v_3$.
- (2) Par définition, si $\lambda = (d)$ ou $\lambda = (1^d)$, c'est-à-dire si $\ell(\lambda) = 1$ ou $\ell(\lambda') = 1$, on a $\sigma_\lambda = \text{Id}$.

On rappelle que si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est un uplet d'entiers naturels (par exemple une partition) et X désigne l'un des symboles S, Λ, Γ , on note X^λ le produit tensoriel $X^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes X^{\lambda_n}$. La définition suivante est due à Akin-Buchsbaum-Weyman [ABW82, section II].

DÉFINITION 4.2.9. Soit λ une partition de d . Le foncteur de Schur S_λ est l'image du morphisme composé

$$\Lambda^{\lambda'} \hookrightarrow \otimes^d \xrightarrow{\sigma_{\lambda'}} \otimes^d \twoheadrightarrow S^\lambda.$$

REMARQUE 4.2.10. Le foncteur de Schur S_λ est noté $L_{\lambda'}$ dans [ABW82], voir aussi [Wey03, Section 2.1]. Nous ne suivons pas cette notation et réservons la lettre ' L ' pour désigner les objets simples de \mathcal{P}_d .

Si λ est une partition de d , le foncteur de Schur S_λ est un objet de \mathcal{P}_d , car \mathcal{P}_d est une catégorie abélienne. Si la longueur de λ ou λ' est 1, le foncteur de Schur associé à λ correspond à des foncteurs bien connus : $S_{(d)} = S^d$ et $S_{(1^d)} = \Lambda^d$.

THÉORÈME 4.2.11 (Règle de Pieri [AB85, section 3]). *Soit λ une partition et soit d un entier naturel.*

- (1) *Le foncteur $S_\lambda \otimes S^d$ possède une filtration telle que $\text{Gr}(S_\lambda \otimes S^d) = \bigoplus_\nu S_\nu$ où la somme directe est indexée par les partitions ν satisfaisant les conditions : $|\nu| = |\lambda| + d$ et $\lambda'_i \leq \nu'_i \leq \lambda'_i + 1$ pour tout i .*
- (2) *Le foncteur $S_\lambda \otimes \Lambda^d$ possède une filtration telle que $\text{Gr}(S_\lambda \otimes \Lambda^d) = \bigoplus_\nu S_\nu$ où la somme directe est indexée par les partitions ν satisfaisant les conditions : $|\nu| = |\lambda| + d$ et $\lambda_i \leq \nu_i \leq \lambda_i + 1$ pour tout i .*

EXEMPLE 4.2.12. (1) Soient $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$. Le foncteur $S^{d_1} \otimes S^{d_2}$ possède une filtration telle que

$$\text{Gr}(S^{d_1} \otimes S^{d_2}) = \bigoplus_{i=0}^{\min\{d_1, d_2\}} S_{(d_1+d_2-i, i)}.$$

(2) Le foncteur $S_{(2,1)} \otimes S^2$ possède une filtration telle que

$$\text{Gr}(S_{(2,1)} \otimes S^2) = S_{(4,1)} \oplus S_{(3,2)} \oplus S_{(3,1,1)} \oplus S_{(2,2,1)}.$$

4.2.2.2. *Foncteurs simples.* Soit $d \in \mathbb{N}$. Un objet F de \mathcal{P}_d est dit *simple* s'il est non nul et s'il ne contient aucun sous-foncteur distinct de F et 0. Un objet est dit *semi-simple* s'il est isomorphe à une somme directe d'objets simples. Le *socle* d'un foncteur F , noté $\text{soc}(F)$, est le plus grand sous-foncteur semi-simple de F .

DÉFINITION 4.2.13. Si λ est une partition, on désigne par L_λ le socle du foncteur de Schur S_λ .

THÉORÈME 4.2.14 ([Gre07],[Mar93]). (1) Pour toute partition λ , L_λ est un foncteur simple.

(2) Si F est un objet simple de \mathcal{P}_d , il existe une unique partition $\lambda \in \mathbf{P}(d)$ telle que $F \simeq L_\lambda$.

(3) Les foncteurs simples sont autoduaux, c'est-à-dire que l'on a un isomorphisme $L_\lambda^\# \simeq L_\lambda$.

D'après ce théorème, les classes d'isomorphisme de foncteurs simples de \mathcal{P}_d sont indexées par les partitions de d .

THÉORÈME 4.2.15 (Théorème du produit tensoriel de Steinberg [Jan03, Mar93]). Soit λ une partition p -restreinte et soit μ une partition quelconque. On a un isomorphisme $L_\lambda \otimes L_\mu^{(1)} \simeq L_{\lambda+p\mu}$.

Comme une application du théorème 4.2.15, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.2.16. Si $F \in \mathcal{P}_k$ est un foncteur simple associé à la partition λ alors $F^{(r)}$ est un foncteur simple associé à $p^r \lambda$.

Soit $F \in \mathcal{P}_k$ un foncteur strictement polynomial. On appelle *série de composition* de F toute suite finie (F_0, F_1, \dots, F_r) de sous-foncteurs de F telle que

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{r-1} \subset F_r = F$$

et que, pour tout $i = 1, 2, \dots, r$ le quotient F_i/F_{i-1} est un foncteur simple. Tout foncteur strictement polynomial admet au moins une série de composition. Si L est un foncteur simple, on note $[F : L]$ le nombre des facteurs de composition dans une série de composition de F qui est isomorphe à L . D'après le théorème de Jordan-Hölder, ce nombre est bien déterminé [ARO97, Section I.1].

4.2.3. Blocs de la catégorie \mathcal{P}_k .

4.2.3.1. *Blocs.* Les blocs de la catégorie \mathcal{P}_k ont été déterminés par Donkin [Don87]. Avant de donner le résultat, nous rappelons les définitions élémentaires relatives aux blocs.

DÉFINITION 4.2.17. Soient F et G deux foncteurs simples de \mathcal{P}_d . On note $F \sim G$ s'il existe une suite L_0, L_1, \dots, L_n de foncteurs simples de \mathcal{P}_d satisfaisant $L_0 = F, L_n = G$ et $\text{Ext}_{\mathcal{P}_k}^1(L_i, L_{i+1}) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

La relation binaire \sim est une relation d'équivalence sur les simples de \mathcal{P}_d . Un bloc de \mathcal{P}_d est une classe d'équivalence des simples sous cette relation d'équivalence. On note \mathcal{B}_d l'ensemble des blocs de \mathcal{P}_d . Pour $b \in \mathcal{B}_d$, on désigne par $(\mathcal{P}_d)_b$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{P}_d formée des foncteurs F dont tous les facteurs de composition sont dans le bloc b . On a une décomposition :

$$\mathcal{P}_d = \bigoplus_{b \in \mathcal{B}_d} (\mathcal{P}_d)_b.$$

Cela signifie que tout foncteur se décompose de manière unique en une somme directe $F = \bigoplus_{b \in \mathcal{B}_d} F_b$ où $F_b \in (\mathcal{P}_d)_b$, et de plus $\text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F_1, F_2) = 0$ si $F_i \in (\mathcal{P}_d)_{b_i}$, $i = 1, 2$ et $b_1 \neq b_2$. En particulier, si F est indécomposable, il existe un seul élément $b \in \mathcal{B}_d$ satisfaisant $F \in (\mathcal{P}_d)_b$. Le théorème suivant donne une description combinatoire des blocs de la catégorie \mathcal{P}_d .

THÉORÈME 4.2.18 (Règle de Nakayama [Don87], [Mar93, Theorem 5.1.1]).

Soient λ et μ deux partitions de poids d . Les deux simples L_λ et L_μ sont dans le même bloc si et seulement si les deux partitions λ et μ ont le même p -cœur.

On indexe donc les blocs de \mathcal{P}_d par les p -cœurs des partitions de poids d , le bloc contenant L_λ est indexé par le p -cœur de λ . On obtient une bijection entre \mathcal{B}_d et l'ensemble des partitions λ telles que $|\lambda| \leq d$ et $|\lambda| \equiv d \pmod{p}$.

4.2.3.2. L'application \mathfrak{B} .

DÉFINITION 4.2.19. Si F est un foncteur strictement polynomial, on note $\mathfrak{B}(F)$ l'ensemble des p -cœurs des partitions indexant les simples d'une série de composition de F . On obtient donc une application :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} : \text{Obj}(\mathcal{P}_{\mathbb{k}}) &\rightarrow 2^{\mathbf{P}\text{-cœur}} \\ F &\mapsto \mathfrak{B}(F) = \{\mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda) : \lambda \in \mathbf{P}, [F : L_\lambda] > 0\}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.2.20. Soient λ, μ deux partitions, F un objet de $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ et G un sous-objet de F . On a :

$$(4.2.1) \quad \mathfrak{B}(S_\lambda) = \mathfrak{B}(L_\lambda),$$

$$(4.2.2) \quad \mathfrak{B}(L_\lambda) = \mathfrak{B}(L_{\lambda+p\mu}),$$

$$(4.2.3) \quad \mathfrak{B}(F) = \mathfrak{B}(G) \cup \mathfrak{B}(F/G),$$

$$(4.2.4) \quad \mathfrak{B}(F^\sharp) = \mathfrak{B}(F),$$

$$(4.2.5) \quad \mathfrak{B}(F^{(1)}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } F = 0, \\ \{(0)\} & \text{si } F \neq 0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Comme le socle de S_λ est un foncteur simple, le foncteur S_λ est indécomposable. Cela implique que $S_\lambda \in (\mathcal{P}_d)_b$ où b est le bloc contenant le foncteur simple L_λ . On obtient donc la formule (4.2.1). D'après le corollaire 4.2.7, on a $\mathfrak{B}(L_{\lambda+p\mu}) = \mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda + p\mu) = \mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda) = \mathfrak{B}(L_\lambda)$, d'où la formule (4.2.2).

Comme G est un sous-foncteur de F , un simple L est un facteur de composition de F si et seulement si L est un facteur de composition de G ou de F/G . On obtient la formule (4.2.3). Pour obtenir (4.2.4), on utilise (4.2.2) et le fait que les foncteurs simples sont autoduaux. Il reste à montrer la formule (4.2.5). Cette formule est évidente dans le cas où $F = 0$. Si $F \neq 0$, soit $0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = F$ une série de composition de F avec $F_i/F_{i-1} \simeq L_{\lambda^i}$. On a donc $0 = F_0^{(1)} \subset F_1^{(1)} \subset \dots \subset F_n^{(1)} = F^{(1)}$ avec $F_i^{(1)}/F_{i-1}^{(1)} \simeq L_{\lambda^i}^{(1)} \simeq L_{p\lambda^i}$. Par le corollaire 4.2.7, on a $\mathfrak{B}(L_{p\lambda^i}) = \mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(p\lambda^i) = \{(0)\}$. On obtient (4.2.5). \square

On connaît $\mathfrak{B}(S^d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}$. En effet, $S^d = S_{(d)}$ est un foncteur de Schur. Par la proposition (4.2.1), $\mathfrak{B}(S^d) = \mathfrak{B}(L_{(d)}) = \{(r)\}$ où r est le reste de la division de d par p . La règle de Pieri permet de déterminer plus généralement $\mathfrak{B}(S_V^d)$ pour tout espace vectoriel V .

PROPOSITION 4.2.21. Soient d un entier naturel et $V \neq 0$ un objet de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. On a les égalités :

$$(4.2.6) \quad \mathfrak{B}(S_V^d) = \{\lambda \in \mathbf{P}_{p\text{-cœur}} : |\lambda| \leq d, |\lambda| \equiv d \pmod{p}, \ell(\lambda) \leq \dim V\},$$

$$(4.2.7) \quad \mathfrak{B}(\Gamma_V^d) = \mathfrak{B}(S_V^d),$$

$$(4.2.8) \quad \mathfrak{B}(\Lambda_V^d) = \{\lambda \in \mathbf{P}_{p\text{-cœur}} : \lambda' \in \mathfrak{B}(S_V^d)\}.$$

DÉMONSTRATION. On note ℓ la dimension de V . Comme les foncteurs S, Λ, Γ sont des foncteurs exponentiels, si E désigne l'un des symboles S, Λ, Γ , on a la décomposition suivante, où la somme directe est indexée par les ℓ -uplets d'entiers naturels \underline{d} de poids d :

$$(4.2.9) \quad E_V^d \simeq \bigoplus_{\underline{d}} E^{\underline{d}}.$$

En utilisant cet isomorphisme et l'égalité (4.2.4) de la proposition 4.2.20, on obtient l'égalité (4.2.7). Pour une partition λ et un entier naturel k , on note $A(\lambda; k)$ l'ensemble des partitions ν telles que $|\nu| = |\lambda| + d$ et $\lambda'_i \leq \nu'_i \leq \lambda'_i + 1$ pour tout i . Par définition, on a les deux propriétés suivantes de l'ensemble $A(\lambda; k)$.

- (1) Pour $\nu \in A(\lambda; k)$, on a $\ell(\nu) \leq \ell(\lambda) + 1$.
- (2) Si $k \leq \lambda_{\ell(\lambda)}$ alors $\nu := (\lambda, k)$ appartient à $A(\lambda; k)$.

D'autre part, par la règle de Pieri (théorème 4.2.11), il existe des filtrations de $S_\lambda \otimes S^k$ et $S_{\lambda'} \otimes \Lambda^k$ telles qu'on a des isomorphismes :

$$(4.2.10) \quad \text{Gr}(S_\lambda \otimes S^k) \simeq \bigoplus_{\nu \in A(\lambda; k)} S_\nu, \quad \text{Gr}(S_{\lambda'} \otimes \Lambda^d) \simeq \bigoplus_{\nu \in A(\lambda; k)} S_{\nu'}.$$

Pour un m -uplet d'entiers naturels $\underline{d}, m \geq 1$, on définit un ensemble de partitions $B(\underline{d})$ par récurrence sur m . Si $m = 1$, on pose $B(\underline{d}) = \{(d_1)\}$. Dans le cas où $m \geq 2$, on pose $B(\underline{d}) = \bigcup_{\lambda \in B((d_1, \dots, d_{m-1}))} A(\lambda; d_m)$. Par cette définition et les isomorphismes (4.2.10) on en déduit qu'il existe des filtrations de $S^{\underline{d}}$ et $\Lambda^{\underline{d}}$ telles qu'on a des isomorphismes :

$$(4.2.11) \quad \text{Gr}(S^{\underline{d}}) \simeq \bigoplus_{\nu \in B(\underline{d})} S_\nu, \quad \text{Gr}(\Lambda^{\underline{d}}) \simeq \bigoplus_{\nu \in B(\underline{d})} S_{\nu'}.$$

Par les isomorphismes (4.2.9), (4.2.11) et l'égalité (4.2.1), on obtient l'égalité 4.2.8. Il reste à montrer l'égalité (4.2.6). Par la propriété (1), on a $\ell(\nu) \leq \ell$ pour tout ℓ -uplet d'entiers naturels \underline{d} et $\nu \in B(\underline{d})$. On a alors

$$\mathfrak{BI}(S_V^{\underline{d}}) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{P}_{p\text{-coeur}} : |\lambda| \leq d, |\lambda| \equiv d \pmod{p}, \ell(\lambda) \leq \dim V\}.$$

Pour l'inclusion réciproque, prenons un élément λ du membre de droite dans (4.2.6). On note μ la partition $(\lambda_1 + d - |\lambda|, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$. On a $\mathfrak{C}_{\mathfrak{O}_p}(\lambda) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{O}_p}(\mu)$. De plus, par la propriété (2), la partition μ appartient à l'ensemble $B(\mu)$. D'après les isomorphismes (4.2.11), on a $\mathfrak{C}_{\mathfrak{O}_p}(\mu) \in \mathfrak{BI}(S^\mu)$. On obtient le résultat. \square

COROLLAIRE 4.2.22. Soient d un entier naturel et V un objet de \mathcal{V}_k . Si E désigne l'un des symboles Γ, Λ, S , on a

$$\mathfrak{BI}(E^d) = \mathfrak{BI}(E^{d+p}), \quad \mathfrak{BI}(E_V^d) \subseteq E_V^{d+p}.$$

On termine cette sous-section par le résultat important suivant qui est une application du théorème du produit tensoriel de Steinberg (théorème 4.2.15).

THÉORÈME 4.2.23. Soient $F, G \in \mathcal{P}_k, G \neq 0$. Alors $\mathfrak{BI}(F \otimes G^{(1)}) = \mathfrak{BI}(F)$.

DÉMONSTRATION. On démontre tout d'abord le cas où F est un foncteur simple, de la forme L_λ . On a deux cas.

- (1) Si λ est une partition p -restreinte. Si G est un foncteur simple, $G = L_\alpha$. Par le théorème de Steinberg et la proposition 4.2.7, on a $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(F \otimes G^{(1)}) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(L_\lambda \otimes L_\alpha^{(1)}) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(L_{\lambda+p\alpha}) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(L_\lambda)$. Dans le cas général, soit $0 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G$ une série de composition de G . Par la proposition 4.2.20, on a $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(F \otimes G) = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{B}\mathfrak{l}(F \otimes (G_i/G_{i-1})) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(F)$.
- (2) Si λ est une partition quelconque, d'après le lemme 4.2.2 il existe une partition p -restreinte μ et une partition ν telles que $\lambda = \mu + p\nu$. D'après le théorème de Steinberg, on a $L_\lambda = L_\mu \otimes L_\nu^{(1)}$. On a donc $F \otimes G^{(1)} = L_\mu \otimes (L_\nu \otimes G)^{(1)}$. Par la proposition 4.2.20, on a $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(F \otimes G^{(1)}) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(L_\mu) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(L_\lambda) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(F)$.

On démontre maintenant le cas où F est un foncteur quelconque. Soit $0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = F$ une série de composition de F . Par la proposition 4.2.20 et la partie (1), on a $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(F \otimes G^{(1)}) = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{B}\mathfrak{l}((F_i/F_{i-1}) \otimes G^{(1)}) = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{B}\mathfrak{l}(F_i/F_{i-1}) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(F)$. \square

4.2.4. Changement de base. Soit \mathbb{K} un sur-corps du corps \mathbb{k} . Dans cette sous-section, on rappelle le foncteur de changement de base $\mathbb{K}(-) : \mathcal{P}_{d,\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$ en suivant [SFB97]. L'inclusion $\mathbb{k} \hookrightarrow \mathbb{K}$ induit un foncteur exact $\mathbb{K} \otimes - : \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$. Ce foncteur induit un foncteur $\mathbb{K} \otimes - : \Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$.

DÉFINITION 4.2.24. Soit $F \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}$. On définit le foncteur ${}_{\mathbb{K}}F \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$ en utilisant la colimite. Chaque $V' \in \Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ détermine une catégorie $\mathcal{A}(V')$. Les objets de cette catégorie sont des paires (V, f) où $V \in \Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ et $f \in \Gamma^d \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K} \otimes V, V')$. Un morphisme de (V, f) vers (W, g) est un morphisme $\alpha : \mathbb{K} \otimes V \rightarrow \mathbb{K} \otimes W$ dans la catégorie $\Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ tel que $g \circ \alpha = f$. Le \mathbb{K} -espace vectoriel $({}_{\mathbb{K}}F)(V')$ est donc la colimite du foncteur $\mathcal{A}(V') \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}, (V, f) \mapsto \mathbb{K} \otimes F(V)$. De plus, chaque morphisme $h : V' \rightarrow W'$ dans la catégorie $\Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ induit naturellement un foncteur $\mathcal{A}(h) : \mathcal{A}(V') \rightarrow \mathcal{A}(W')$. On en déduit une application \mathbb{K} -linéaire $({}_{\mathbb{K}}F)(V') \rightarrow ({}_{\mathbb{K}}F)(W')$.

Comme la catégorie $\Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ est essentiellement petite et comme la catégorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ est cocomplète, le foncteur ${}_{\mathbb{K}}F$ est bien défini. De plus, il est un foncteur \mathbb{K} -linéaire. Par définition, pour $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, $(V, \text{Id}_{\mathbb{K} \otimes V})$ est objet final de la catégorie $\mathcal{A}(\mathbb{K} \otimes V)$. On a donc un isomorphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels

$$(4.2.12) \quad ({}_{\mathbb{K}}F)(\mathbb{K} \otimes V) \simeq \mathbb{K} \otimes F(V)$$

Pour chaque $V' \in \Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$, on a donc un isomorphisme $({}_{\mathbb{K}}F)(V') \simeq \mathbb{K} \otimes F(\mathbb{k}^{\dim_{\mathbb{K}} V'})$. Par conséquent, le foncteur \mathbb{K} -linéaire ${}_{\mathbb{K}}F : \Gamma^d \mathcal{V}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ prend des valeurs de dimension finie. Le foncteur ${}_{\mathbb{K}}F$ est donc un objet de la catégorie $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$. On obtient ainsi un foncteur de changement de base

$$\mathbb{K}(-) : \mathcal{P}_{d,\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$$

EXEMPLE 4.2.25. Le changement de base envoie les foncteurs $\Gamma^{d,V}$ (resp. S_V^d, Λ_V^d) de $\mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}$ sur les foncteurs $\Gamma^{d,\mathbb{K} \otimes V}$ (resp. $S_{\mathbb{K} \otimes V}^d, \Lambda_{\mathbb{K} \otimes V}^d$) de $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$. De plus, si on note $I_{\mathbb{k}}^{(r)}$ (resp. $I_{\mathbb{K}}^{(r)}$) le r -ième foncteur de torsion de Frobenius dans la catégorie $\mathcal{P}_{p^r,\mathbb{k}}$ (resp. $\mathcal{P}_{p^r,\mathbb{K}}$) alors il existe un isomorphisme ${}_{\mathbb{K}}(I_{\mathbb{k}}^{(r)}) \simeq I_{\mathbb{K}}^{(r)}$ dans la catégorie $\mathcal{P}_{p^r,\mathbb{K}}$.

PROPOSITION 4.2.26 ([SFB97, Proposition 2.6, Corollary 2.7]). *Soit $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{K}$ une extension de corps.*

- (1) Le foncteur de changement de base $\mathbb{k}(-) : \mathcal{P}_{d,\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$ est exact et préserve les projectifs.
- (2) Pour chaque entier naturel n , il existe un isomorphisme naturel en $F, G \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}$:

$$(4.2.13) \quad \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}}^n(\mathbb{k}F, \mathbb{k}G) \simeq \mathbb{K} \otimes \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}}^n(F, G).$$

DÉMONSTRATION. L'exactitude du foncteur de changement de base $\mathbb{k}(-)$ provient de l'exactitude du foncteur $\mathbb{K} \otimes - : \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ et l'isomorphisme (4.2.12). Soit $F \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}$ un foncteur projectif. Il existe $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ tel que F est un facteur direct de $V \otimes \Gamma^{d,\mathbb{k}^d}$. Le foncteur $\mathbb{k}F$ est donc un facteur direct du foncteur $V \otimes \Gamma^{d,\mathbb{K}^n}$. On en déduit que F est un foncteur projectif. Il reste à montrer l'assertion (2). D'après l'assertion (1), il suffit de démontrer l'isomorphisme (4.2.13) pour $n = 0$ et F est de la forme $\Gamma^{d,V}$ pour $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Dans ce cas-là, on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}}(\mathbb{k}(\Gamma^{d,V}), \mathbb{k}G) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}}(\Gamma^{d,\mathbb{K} \otimes V}, \mathbb{k}G) \simeq (\mathbb{k}G)(\mathbb{K} \otimes V) \\ &\simeq (\mathbb{k}G)(V) \simeq \mathbb{K} \otimes \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}}(\Gamma^{d,V}, G). \end{aligned}$$

On obtient le résultat. \square

THÉORÈME 4.2.27 ([Jan87, Corollary 2.9, page 203]). Soit $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{K}$ une extension de corps. Le foncteur de changement de base $\mathbb{k}(-) : \mathcal{P}_{d,\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$ préserve les foncteurs simples. Plus précisément si $L_{\lambda,\mathbb{k}}$ (resp. $L_{\lambda,\mathbb{K}}$) est le simple de $\mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}$ (resp. $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$) correspond à une partition λ alors on a un isomorphisme $\mathbb{k}(L_{\lambda,\mathbb{k}}) \simeq L_{\lambda,\mathbb{K}}$ dans la catégorie $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$.

PROPOSITION 4.2.28. Soient $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{K}$ une extension de corps et $F \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}$. On a une égalité $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(F) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(\mathbb{k}F)$.

DÉMONSTRATION. On démontre tout d'abord le cas où F est un foncteur simple, de la forme $L_{\lambda,\mathbb{k}}$. Par le théorème 4.2.27, il existe un isomorphisme $\mathbb{k}(L_{\lambda,\mathbb{k}}) \simeq L_{\lambda,\mathbb{K}}$. On a des égalités :

$$\mathfrak{B}\mathfrak{l}(L_{\lambda,\mathbb{k}}) = \mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(L_{\lambda,\mathbb{K}}) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(\mathbb{k}(L_{\lambda,\mathbb{k}})).$$

On démontre maintenant le cas où F est un foncteur quelconque. Soit $0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = F$ est une série de composition de F . Comme le foncteur de changement de base $\mathbb{k}(-) : \mathcal{P}_{d,\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$ préserve les simples et est exact, $0 = \mathbb{k}F_0 \subset \mathbb{k}F_1 \subset \dots \subset \mathbb{k}F_n = \mathbb{k}F$ est une série de composition de $\mathbb{k}F$ et on a des isomorphismes $(\mathbb{k}F_i)/(\mathbb{k}F_{i-1}) \simeq \mathbb{k}(F_i/F_{i-1})$. On a des égalités

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}\mathfrak{l}(F) &= \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{B}\mathfrak{l}(F_i/F_{i-1}) = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{B}\mathfrak{l}(\mathbb{k}(F_i/F_{i-1})) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{B}\mathfrak{l}((\mathbb{k}F_i)/(\mathbb{k}F_{i-1})) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(\mathbb{k}F). \end{aligned}$$

On obtient le résultat. \square

COROLLAIRE 4.2.29. Soient $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{K}$ une extension de corps et $F, G \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}$. On suppose que \mathbb{K} est infini. S'il existe un isomorphisme $\mathbb{k}F \simeq \mathbb{k}G$ dans la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$, on a alors une égalité $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(F) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(G)$.

DÉMONSTRATION. Comme le corps \mathbb{K} est infini, le foncteur d'oubli $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ est un plongement plein. L'isomorphisme ${}_{\mathbb{K}}F \simeq {}_{\mathbb{K}}G$ dans $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ induit alors un isomorphisme ${}_{\mathbb{K}}F \simeq {}_{\mathbb{K}}G$ dans la catégorie $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$. Par définition, on a une égalité $\mathfrak{B}\mathfrak{l}({}_{\mathbb{K}}F) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}({}_{\mathbb{K}}G)$. D'autre part, d'après la proposition 4.2.28, on a des égalités $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(F) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}({}_{\mathbb{K}}F)$, $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(G) \simeq \mathfrak{B}\mathfrak{l}({}_{\mathbb{K}}G)$. On en déduit le résultat. \square

4.2.5. Un critère d'annulation.

LEMME 4.2.30 (Lemme d'annulation). *Soient F et G deux objets de \mathcal{P}_d . Si $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(F) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{l}(G) = \emptyset$ alors $\text{Ext}_{\mathcal{P}_d}^*(F, G) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, on suppose que $F \in (\mathcal{P}_d)_{b_1}$ et $G \in (\mathcal{P}_d)_{b_2}$ avec $b_1 \neq b_2$. Comme $\mathcal{P}_d = \bigoplus_{b \in \mathcal{B}_d} (\mathcal{P}_d)_b$, on a $\text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F, G) = 0$. Soit P_{\bullet} une résolution projective de F dans \mathcal{P}_d . On obtient une résolution $(P_{\bullet})_{b_1} = \cdots \rightarrow (P_1)_{b_1} \rightarrow (P_0)_{b_1} \rightarrow 0$ de F . De plus, cette résolution est une résolution projective car $(P_i)_{b_1}$ est un facteur direct du foncteur projectif P_i . On a donc $\text{Ext}_{\mathcal{P}_d}^*(F, G) = H^*(\text{Hom}_{\mathcal{P}_d}((P_{\bullet})_{b_1}, G))$. De plus, le complexe $\text{Hom}_{\mathcal{P}_d}((P_{\bullet})_{b_1}, G)$ est nul. On obtient le résultat. \square

4.2.31. Il existe un autre résultat d'annulation, le résultat de Pirashvili [FS97, théorème 2.13] qui dit que si A est un foncteur additif et F, G sont des foncteurs réduits, c'est-à-dire $F(0) = 0 = G(0)$, alors

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_d}^*(A, F \otimes G) = 0.$$

Ce résultat d'annulation est de nature différente du résultat d'annulation du lemme 4.2.30, comme le montrent les deux exemples suivants.

- (1) Si $\mathbb{k} = \mathbb{F}_2$, $A = I^{(1)}$ et $F = G = S^1$, on a $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(A) = \mathfrak{B}\mathfrak{l}(F \otimes G) = \{(0)\}$. Alors $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(A) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{l}(F \otimes G) \neq \emptyset$. Cependant, par le résultat de Pirashvili, on a $\text{Ext}_{\mathcal{P}_2}^*(A, F \otimes G) = 0$.
- (2) Si $\mathbb{k} = \mathbb{F}_5$, $A = I^{(1)}$ et $F = \mathbb{k}, G = S_{(3,2)}$. Le foncteur F n'est pas réduit. Cependant on a $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(A) = \{(0)\}$ et $\mathfrak{B}\mathfrak{l}(F \otimes G) = \{(3,2)\}$ et le lemme 4.2.30 donne $\text{Ext}_{\mathcal{P}_5}^*(A, F \otimes G) = 0$.

DÉFINITION 4.2.32. Soit $\Phi : \mathcal{P}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_{\mathbb{k}})$ un foncteur. On dit que Φ est de *type* (\mathfrak{J}) s'il existe un complexe $X \in \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_{\mathbb{k}})$ d'objets injectifs et une équivalence d'homotopie $\Phi F \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F^{\sharp}, X)$ naturelle en F .

4.2.33. Soit $\Phi : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d)$ un foncteur de type (\mathfrak{J}) . Par définition, il existe un complexe $X \in \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d)$ d'objets injectifs et une équivalence d'homotopie $\Phi F \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^{\sharp}, X)$ naturelle en F . En particulier, on a une équivalence d'homotopie de complexes $\Phi(S^d) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^d, X) \simeq X$, et le foncteur Φ est entièrement déterminé par sa valeur sur S^d . Inversement, supposons qu'il existe une équivalence d'homotopie $\Phi F \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^{\sharp}, \Phi S^d)$ naturelle en F . S'il existe un complexe d'injectifs $X \in \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d)$ et une équivalence d'homotopie $\Phi S^d \rightarrow X$ alors le foncteur Φ est de type (\mathfrak{J}) .

On montrera dans la section suivante que les foncteurs dérivés $F \mapsto L(F, n)$ et $F \mapsto D_n F$ sont de type (\mathfrak{J}) . Dans la proposition ci-dessous, on donne une suite spectrale qui converge vers l'homologie d'un complexe de la forme ΦF , où Φ est un foncteur de type (\mathfrak{J}) .

PROPOSITION 4.2.34. *Soit $\Phi : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d)$ un foncteur de type (3). On a une suite spectrale de foncteurs strictement polynomiaux, naturelle en F :*

$$(4.2.14) \quad E_2^{i,j}(F) = \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_d}^i(F^\sharp, H_{-j}(\Phi S^d)) \Rightarrow H_{-i-j}(\Phi F).$$

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, on peut supposer que le foncteur Φ est de la forme $\Phi F = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, X)$ où $X \in \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d)$ est un complexe d'injectif.

Soit P_\bullet une résolution projective de F^\sharp dans la catégorie \mathcal{P}_d . On considère le bicomplexe

$$E_0^{i,j} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(P_i, X^j), \quad i \geq 0, j \leq 0.$$

Comme la dimension homologique de la catégorie \mathcal{P}_d est finie [Don86, AB88, Tot97], on peut supposer que le P_\bullet est fini. Alors le bicomplexe E_0 n'a qu'un nombre fini de colonnes. On dispose de deux suites spectrales associées à ce bicomplexe, qui convergent vers l'homologie du complexe total. Les première et deuxième pages de la première suite spectrale sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} I_1^{i,j} &= H^j(E_0^{i,\bullet}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(P_i, H^j X). \\ I_2^{i,j} &= H^i(I_1^{\bullet,j}) = \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_d}^i(F^\sharp, H^j X) = \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_d}^i(F^\sharp, H_{-j} X). \end{aligned}$$

La première page de la seconde suite spectrale est de la forme :

$$\begin{aligned} \Pi_1^{i,j} &= H^i(E_0^{\bullet,j}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(H_i(P_\bullet), X^j) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, X^j) & \text{si } i = 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0, \\ (\Phi F)^j & \text{si } i = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Le deuxième page est donc de la forme :

$$\Pi_2^{i,j} = H^j(\Pi_1^{i,\bullet}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0, \\ H^j(\Phi F) = H_{-j}(\Phi F) & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Alors cette page est concentrée sur une seule colonne. Par lacunarité on obtient donc $\Pi_\infty^{i,j} = H_{-i-j}(\Phi F)$. On obtient la suite spectrale (4.2.14). \square

Le théorème suivant permet d'obtenir un résultat d'annulation générale à partir du calcul de $\mathfrak{Bl}(H_*(\Phi S^d)_V)$.

THÉORÈME 4.2.35. *Soient $F \in \mathcal{P}_d, V \in \mathcal{V}_k$ et $\Phi : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d)$ un foncteur de type (3). Alors $(H_q(\Phi F))(V) = 0$ dès que*

$$\mathfrak{Bl}(F) \cap \bigcup_{q \leq j \leq q + \mathrm{inj. dim} F} \mathfrak{Bl}((H_j(\Phi S^d))_V) = \emptyset.$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 4.2.34, $(H_q(\Phi F))(V) = 0$ dès que $E_2^{i,j}(F)(V) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_d}^i(F^\sharp, (H_{-j}(\Phi S^d))_V) = 0$ si $-i-j = q$. On en déduit le résultat. \square

4.3. Foncteurs dérivés non-additifs et calcul de Goodwillie algébrique

Dans cette section, on rappelle quelques résultats sur les foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe et le calcul de Goodwillie algébrique. Nos références principales sont l'article de Dold et Puppe [DP61], les articles de Johnson et McCarthy [JM04, JM08] et le livre de Weibel [Wei94]. Classiquement, ces foncteurs dérivés sont définis pour les objets de \mathcal{F} . Mais les définitions (et les principales propriétés) s'adaptent sans changement par les foncteurs strictement polynomiaux. Pour donner une présentation uniforme de ces concepts, on utilisera souvent la notation suivante.

NOTATION 4.3.1. Soient n un entier strictement positif et d un entier naturel. On désigne par $\mathfrak{C}(n)$ l'une des deux catégories $\mathcal{F}(n)$ ou $\mathcal{P}_d(n)$. On note $\mathfrak{C}_*(n)$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{C}(n)$ dont les objets sont des foncteurs réduits en chaque variable, c'est-à-dire des foncteurs $F \in \mathfrak{C}(n)$ tels que $F(V_1, \dots, V_n) = 0$ si on a au moins un des V_1, \dots, V_n est nul. Si $n = 1$, les catégories $\mathfrak{C}(1)$ et $\mathfrak{C}_*(1)$ seront plus simplement notées respectivement par \mathfrak{C} et \mathfrak{C}_* .

4.3.1. Objets Simpliciaux.

DÉFINITION 4.3.2. La catégorie Δ est la petite catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés finis $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ avec $0 < 1 < \dots < n$, $n \in \mathbb{N}$ et dont les morphismes sont les applications croissantes.

On pose $\epsilon_i^n : [n-1] \rightarrow [n]$ pour $0 \leq i \leq n$ l'application croissante injective qui évite i , et on note $\eta_i^n : [n+1] \rightarrow [n]$ l'application croissante qui envoie i et $i+1$ sur i et qui est injective partout ailleurs :

$$\epsilon_i^n(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i, \\ j+1 & \text{si } j \geq i, \end{cases} \quad \eta_i^n(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i, \\ j-1 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

DÉFINITION 4.3.3. Soit \mathcal{A} une catégorie. La catégorie $s\mathcal{A}$ est la catégorie des foncteurs de Δ^{op} dans \mathcal{A} . Les morphismes sont les transformations naturelles. Les éléments de $s\mathcal{A}$ sont appelés objets simpliciaux dans \mathcal{A} .

Si A est un objet de \mathcal{A} , on a un objet simplicial constant canonique de \mathcal{A} ; cette correspondance induit un foncteur $\mathcal{A} \rightarrow s\mathcal{A}$. De plus, chaque foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ induit un foncteur $F \circ - : s\mathcal{A} \rightarrow s\mathcal{B}$. On écrit simplement ce foncteur par F .

NOTATION 4.3.4. Soit X est un objet simplicial dans la catégorie \mathcal{A} .

- (1) On désigne par X_n l'objet $X([n])$.
- (2) On note $\partial_i^n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ le morphisme $X(\epsilon_i^n)$.
- (3) On note $\sigma_i^n : X_n \rightarrow X_{n+1}$ le morphisme $X(\eta_i^n)$.

Si la catégorie \mathcal{A} est abélienne alors la catégorie $s\mathcal{A}$ l'est aussi : les noyaux, conoyaux, sommes directes et produits sont calculés au but.

DÉFINITION 4.3.5. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne.

- (1) Le foncteur des chaînes $\mathcal{C} : s\mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ associée à un objet simplicial X de \mathcal{A} le complexe $\mathcal{C}X$ tel que $(\mathcal{C}X)_n = X_n$ et dont la différentielle $d_n : (\mathcal{C}X)_n \rightarrow (\mathcal{C}X)_{n-1}$ est la somme alternée des opérateurs de faces $\partial_i^n : X_n \rightarrow X_{n-1}$:

$$d_n = \partial_1^n - \partial_0^n + \dots + (-1)^n \partial_n^n.$$

- (2) Le foncteur des chaînes normalisées $\mathcal{N} : s\mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ associe à un objet simplicial X de \mathcal{A} le complexe $\mathcal{N}X$ tel que $(\mathcal{N}X)_n$ est l'intersection $\bigcap_{i=1}^n \ker(\partial_i^n : X_n \rightarrow X_{n-1})$ et dont la différentielle $d_n : (\mathcal{N}X)_n \rightarrow (\mathcal{N}X)_{n-1}$ est induite par le premier opérateur de face ∂_0^n .

PROPOSITION 4.3.6 ([DP61, Satz 3.22],[ML95, Chapter VIII, Theorem 6.1]). *Soit X un objet simplicial de la catégorie abélienne \mathcal{A} . Alors l'inclusion canonique $\mathcal{N}X \hookrightarrow \mathcal{C}X$ est une équivalence d'homotopie naturelle en X . De plus, il existe une inverse à gauche $\mathcal{C}X \rightarrow \mathcal{N}X$ (naturel en X) de $\mathcal{N}X \hookrightarrow \mathcal{C}X$ tel que $\mathcal{C}X \rightarrow \mathcal{N}X$ est également une équivalence d'homotopie.*

THÉORÈME 4.3.7 (Correspondance de Dold-Kan). *Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Alors le foncteur des chaînes normalisées $\mathcal{N} : s\mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ est une équivalence de catégories.*

On désigne par \mathcal{K} l'inverse de \mathcal{N} . Nous renvoyons à [Wei94, 8.4.4 page 271] pour une formule explicite de \mathcal{K} .

4.3.2. Effets croisés. Dans cette section on rappelle la notion d'effet croisé à la Eilenberg-MacLane [EML54] pour les foncteurs usuels et on donne une adaptation dans le cas des foncteurs strictement polynomiaux, voir par exemple [Tou13b].

On utilise la notation 4.3.1, la lettre \mathfrak{C} renvoie donc à la catégorie \mathcal{F} ou à la catégorie \mathcal{P}_d . On définit les effets croisés $\text{cr}_n : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}(n)$ par récurrence sur n . On définit tout d'abord $\text{cr}_1 F$ comme le noyau du morphisme canonique $F \rightarrow F(0)$. Supposons qu'on a défini cr_{n-1} . Pour $i = 0, 1, 2$ on définit un foncteur $\pi_{n,i} : \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{n-1}$ par les formules :

$$(4.3.1) \quad \text{pr}_{n,i}(V_1, V_2, V_3, \dots, V_n) = \begin{cases} (V_1, V_3, \dots, V_n) & \text{si } i = 1, \\ (V_2, V_3, \dots, V_n) & \text{si } i = 2, \\ (V_1 \oplus V_2, V_3, \dots, V_n) & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

De plus, on a des transformations naturelles canoniques $\text{pr}_{n,0} \rightarrow \text{pr}_{n,i}$, $i = 1, 2$. Ces foncteurs et transformations naturelles induisent des foncteurs $-\circ \text{pr}_{n,i} : \mathfrak{C}(n-1) \rightarrow \mathfrak{C}(n)$ et des transformations naturelles $-\circ \text{pr}_{n,0} \rightarrow -\circ \text{pr}_{n,i}$, $i = 1, 2$. En composant avec le $(n-1)$ -ème effet croisé $\text{cr}_{n-1} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}(n-1)$, on obtient des foncteurs $(-\circ \text{pr}_{n,i}) \circ \text{cr}_{n-1} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}(n)$ et des transformations naturelles $(-\circ \text{pr}_{n,0}) \circ \text{cr}_{n-1} \rightarrow (-\circ \text{pr}_{n,i}) \circ \text{cr}_{n-1}$, $i = 1, 2$. On définit le n -ème effet croisé $\text{cr}_n : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}(n)$ comme le noyau de la transformation naturelle

$$(4.3.2) \quad (-\circ \text{pr}_{n,0}) \circ \text{cr}_{n-1} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^2 (-\circ \text{pr}_{n,i}) \circ \text{cr}_{n-1}.$$

Par définition, on peut voir $\text{cr}_n F(V_1, \dots, V_n)$ comme le noyau de l'application

$$\text{cr}_{n-1} F(V_1 \oplus V_2, V_3, \dots, V_n) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^2 \text{cr}_{n-1} F(V_i, V_3, \dots, V_n)$$

induite par les projections canoniques $(V_1 \oplus V_2, V_3, \dots, V_n) \rightarrow (V_i, V_3, \dots, V_n)$, $i = 1, 2$. Les foncteurs $\text{cr}_n : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(n)$ sont donc les effets croisés définis par Eilenberg-MacLane [EML54]. Par définition, les foncteurs $\text{cr}_n : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{P}_d(n)$ et $\text{cr}_n : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(n)$ sont compatibles avec les foncteurs d'oubli $\mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{F}, \mathcal{P}_d(n) \rightarrow \mathcal{F}(n)$, c'est-à-dire qu'on a un diagramme commutatif, où les morphismes verticaux sont les

foncteurs d'oubli :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_d & \xrightarrow{\text{cr}_n} & \mathcal{P}_d(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{cr}_n} & \mathcal{F}(n). \end{array}$$

DÉFINITION 4.3.8. Soit n un entier naturel. On dit qu'un objet $F \in \mathfrak{C}$ est de degré d'Eilenberg-MacLane inférieur ou égal à n si $\text{cr}_{n+1} F = 0$.

PROPOSITION 4.3.9. Soient $F \in \mathfrak{C}$ et n un entier strictement positif.

(1) On a un isomorphisme dans $\mathfrak{C}(n)$, naturel en F :

$$(4.3.3) \quad F \circ \boxplus^n \simeq F(0) \oplus \bigoplus_A \left((\text{cr}_{|A|} F) \circ \text{pr}_{n,A} \right),$$

où la somme directe est indexée par les sous-ensembles non vides A de $\{1, 2, \dots, n\}$, $|A|$ désigne le cardinal de A , et $\text{pr}_{n,A} : \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times |A|}$ est la projection canonique.

(2) Le foncteur $\text{cr}_n F$ est réduit en chaque variable.

(3) Le n -ème effet croisé $\text{cr}_n F$ est symétrique, c'est-à-dire que l'application suivante qui est induite par l'isomorphisme (4.3.3), est un isomorphisme où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$:

$$\text{cr}_n F(V_1, \dots, V_n) \xrightarrow{\simeq} \text{cr}_n F(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(n)}).$$

PROPOSITION 4.3.10. On a deux paires d'adjoints

$$\Delta_n^* : \mathfrak{C}_*(n) \rightleftarrows \mathfrak{C}_* : \text{cr}_n, \quad \text{cr}_n : \mathfrak{C}_* \rightleftarrows \mathfrak{C}_*(n) : \Delta_n^*,$$

où Δ_n^* est la précomposition par le foncteur diagonal $\Delta_n : \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{\times n}$, et les catégories \mathfrak{C}_* , $\mathfrak{C}_*(n)$ définies dans la notation 4.3.1 sont respectivement des sous-catégories pleines des catégories \mathfrak{C} , $\mathfrak{C}(n)$ dont les objets sont des foncteurs réduits en chaque variable.

4.3.3. Foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe. Dans cette sous-section, on désigne par \mathfrak{C} l'une des deux catégories $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ ou \mathcal{F} comme indiqué dans la notation 4.3.1. On rappelle que pour chaque catégorie abélienne \mathcal{A} , on a, d'après Dold-Kan, des équivalences de catégories

$$(4.3.4) \quad \mathcal{N} : s\mathcal{A} \rightleftarrows \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A}) : \mathcal{K}.$$

Pour chaque n , on note $K(n)$ l'objet simplicial $\mathcal{K}(\mathbb{k}[-n]) \in s\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. Pour $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, on a $\mathcal{K}(V[-n]) \simeq V \otimes K(n)$. La paramétrisation $\mathfrak{C} \times \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathfrak{C}$, $(F, V) \mapsto F_V$ induit canoniquement des foncteurs $(-)_K(n) : \mathfrak{C} \rightarrow s\mathfrak{C}$. On note $L(-, n)$ le foncteur composé

$$(4.3.5) \quad \mathfrak{C} \xrightarrow{(-)_K(n)} s\mathfrak{C} \xrightarrow{\mathcal{N}} \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathfrak{C}).$$

De plus, on désigne par $L_q F(-, n)$ la q -ème homologie du complexe $L(F, n)$. Les diagrammes suivants sont commutatifs, où les flèches verticales sont des foncteurs

d'oubli :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_{\mathbb{k}} & \xrightarrow{L(-,n)} & \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_{\mathbb{k}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F} & \xrightarrow{L(-,n)} & \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{F}),
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_{\mathbb{k}} & \xrightarrow{F \mapsto L_q F(-,n)} & \mathcal{P}_{\mathbb{k}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F} & \xrightarrow{F \mapsto L_q F(-,n)} & \mathcal{F}.
\end{array}$$

Par définition, on a $L_q F(V, n) = H_q(\mathcal{N}FK(V[-n]))$. Pour un foncteur $F \in \mathcal{F}$, les foncteurs $L_q F(-, n) \in \mathcal{F}$ sont donc les foncteurs dérivés de F au sens de Dold-Puppe [DP61].

Pour pouvoir appliquer le théorème 4.2.35 aux foncteurs dérivés au sens de Dold-Puppe, nous vérifions que le foncteur $L_q F(-, n)$ satisfait les conditions de la définition 4.2.32.

PROPOSITION 4.3.11. *Soient $F \in \mathcal{P}_d$ et $n \in \mathbb{N}$. Le foncteur $L(-, n) : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d)$ est de type (\mathfrak{J}) .*

DÉMONSTRATION. Comme $L(S^d, n) = \mathcal{N}S_{K(n)}^d$ est un facteur direct du complexe $\mathcal{C}S_{K(n)}^d$ et comme S_V^d est un foncteur injectif pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, le complexe $L(S^d, n)$ est donc un complexe d'injectifs. L'isomorphisme $F_V \simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, S_V^d)$ naturel en $F \in \mathcal{P}_d, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ induit un isomorphisme des complexes de foncteurs strictement polynomiaux $\mathcal{C}F_{K(n)} \simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, \mathcal{C}S_{K(n)}^d)$ naturel en F . De plus, on a des équivalences d'homotopie $\mathcal{C}S_{K(n)}^d \rightarrow \mathcal{N}S_{K(n)}^d$ et $\mathcal{N}F_{K(n)} \rightarrow \mathcal{C}F_{K(n)}$ naturelles en F . On obtient donc une équivalence d'homotopie $L(F, n) \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, L(S^d, n))$ naturelle en F comme le composé des équivalences d'homotopie suivantes :

$$\mathcal{N}F_{K(n)} \rightarrow \mathcal{C}F_{K(n)} \simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, \mathcal{C}S_{K(n)}^d) \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, \mathcal{N}S_{K(n)}^d).$$

Le foncteur $L(-, n)$ est donc de type (\mathfrak{J}) pour tout entier naturel n . \square

4.3.4. La tour de Taylor d'un foncteur. Dans cette sous-section, nous rappelons les constructions du calcul de Goodwillie algébrique selon Johnson-McCarthy [JM04]. Cette théorie s'adapte aux foncteurs strictement polynomiaux, et nous désignons donc par \mathfrak{C}_* l'une des deux catégories \mathcal{F}_* ou $\mathcal{P}_d, d > 0$, comme indiqué dans la notation 4.3.1.

4.3.4.1. Comonade et objets simpliciaux. On rappelle qu'une comonade sur une catégorie \mathcal{A} est un triplet $(\perp, \epsilon, \delta)$ formé d'un endofoncteur \perp de \mathcal{A} et de transformations naturelles $\epsilon : \perp \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}}$ et $\delta : \perp \rightarrow \perp^2$ telles que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$(4.3.6) \quad
\begin{array}{ccc}
& & \perp \\
& \swarrow & \searrow \\
\perp & & \perp^2 \\
& \swarrow & \searrow \\
& & \perp
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\perp & \xrightarrow{\delta} & \perp^2 \\
\downarrow \delta & & \downarrow \perp(\delta) \\
\perp^2 & \xrightarrow{\delta_\perp} & \perp^3
\end{array}$$

Par définition, le triplet $(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \text{Id}, \text{Id})$ est une comonade sur la catégorie \mathcal{A} .

Soient $(\perp, \epsilon, \delta)$ et $(\tilde{\perp}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})$ deux comonades sur la même catégorie \mathcal{A} . Un morphisme de $(\perp, \epsilon, \delta)$ vers $(\tilde{\perp}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})$ est une transformation naturelle $\phi : \perp \rightarrow \tilde{\perp}$ telle

que les diagrammes suivants sont commutatifs

$$(4.3.7) \quad \begin{array}{ccc} \perp & \xrightarrow{\phi} & \tilde{\perp} \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow \tilde{\epsilon} \\ \text{Id} & \xlongequal{\quad} & \text{Id} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \perp & \xrightarrow{\phi} & \tilde{\perp} \\ \downarrow \delta & & \downarrow \tilde{\delta} \\ \perp^2 & \xrightarrow{\phi^2} & \tilde{\perp}^2 \end{array}$$

En utilisant les diagrammes commutatifs (4.3.6), la transformation naturelle $\epsilon : \perp \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}}$ est un morphisme de $(\perp, \epsilon, \delta)$ vers $(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \text{Id}, \text{Id})$.

En utilisant les comonades, on peut construire des objets simpliciaux, puis des complexes. En effet, soit $(\perp, \epsilon, \delta)$ une comonade sur \mathcal{A} . On définit un foncteur $S^\perp : \mathcal{A} \rightarrow s\mathcal{A}$ par les formules :

$$\begin{aligned} S_n^\perp &:= \perp^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \partial_i : S_n^\perp &= \perp^{n+1} \xrightarrow{\perp^i \epsilon \perp^{n-i}} \perp^n = S_{n-1}^\perp, \\ \sigma_i : S_n^\perp &= \perp^{n+1} \xrightarrow{\perp^i \delta \perp^{n-i}} \perp^{n+2} = S_{n+1}^\perp. \end{aligned}$$

En particulier, $S^{\text{Id}} : \mathcal{A} \rightarrow s\mathcal{A}$ est l'inclusion canonique qui envoie chaque objet A sur l'objet simplicial constant en A .

Si $\phi : (\perp, \epsilon, \delta) \rightarrow (\tilde{\perp}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})$ est un morphisme de comonades, par les diagrammes commutatifs (4.3.7), $S^\phi = (\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une transformation naturelle de S^\perp vers $S^{\tilde{\perp}}$. En particulier, chaque comonade $(\perp, \epsilon, \delta)$ de \mathcal{A} induit une transformation $S^\epsilon : S^\perp \rightarrow S^{\text{Id}}$ des foncteurs $\mathcal{A} \rightarrow s\mathcal{A}$.

Si \mathcal{A} est une catégorie abélienne, par composition avec le foncteur des chaînes \mathcal{C} et le foncteur des chaînes normalisées \mathcal{N} , on obtient, pour chaque comonade $(\perp, \epsilon, \delta)$ de \mathcal{A} , des foncteurs :

$$\mathcal{N} \circ S^\perp, \mathcal{C} \circ S^\perp : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A}).$$

De plus, d'après la proposition 4.3.6, l'inclusion canonique $\mathcal{N} \circ S^\perp \hookrightarrow \mathcal{C} \circ S^\perp$ et la projection canonique $\mathcal{C} \circ S^\perp \rightarrow \mathcal{N} \circ S^\perp$ sont des équivalences d'homotopie. Si $\phi : (\perp, \epsilon, \delta) \rightarrow (\tilde{\perp}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})$ est un morphisme de comonades, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$(4.3.8) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{N} \circ S^\perp & \longrightarrow & \mathcal{N} \circ S^{\tilde{\perp}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C} \circ S^\perp & \longrightarrow & \mathcal{C} \circ S^{\tilde{\perp}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} \circ S^\perp & \longrightarrow & \mathcal{C} \circ S^{\tilde{\perp}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{N} \circ S^\perp & \longrightarrow & \mathcal{N} \circ S^{\tilde{\perp}} \end{array}$$

DÉFINITION 4.3.12. Soit $(\perp, \epsilon, \delta)$ une comonade de \mathcal{A} . Un objet A de \mathcal{A} est dit \perp -projectif si le morphisme $\epsilon_A : \perp A \rightarrow A$ a une section, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $f : A \rightarrow \perp A$ tel que $\epsilon_A \circ f = \text{Id}_A$.

Comme $\perp \xrightarrow{\delta} \perp^2 \xrightarrow{\perp(\epsilon)} \perp$ est l'identité de \perp alors, par définition, $\perp A$ est \perp -projectif pour tout objet A de \mathcal{A} . La proposition importante suivante est démontrée dans [Wei94, Proposition 8.6.8], voir aussi [JM04, Proposition 2.5].

PROPOSITION 4.3.13. Soit $(\perp, \epsilon, \delta)$ une comonade de catégorie \mathcal{A} . Si $A \in \mathcal{A}$ est \perp -projectif alors $S^\epsilon : S^\perp(A) \rightarrow S^{\text{Id}}(A)$ est une équivalence d'homotopie. En conséquence, l'augmentation $\epsilon : \mathcal{N} \circ S^\perp(A) \rightarrow A$ est une équivalence d'homotopie.

4.3.4.2. *Comonades* \perp_n .

NOTATION 4.3.14. Pour chaque entier strictement positif n , on note $(\perp_n, \epsilon_n, \delta_n)$ la comonade de la catégorie \mathfrak{C}_* induite par la paire d'adjoints $\Delta_n^* : \mathfrak{C}_*(n) \rightleftarrows \mathfrak{C}_* : \text{cr}_n$. En particulier, \perp_n est le foncteur composé $\Delta_n^* \circ \text{cr}_n$.

PROPOSITION 4.3.15. *Soient $F \in \mathfrak{C}_*$ et n un entier strictement positif.*

(1) *On a un isomorphisme dans \mathfrak{C}_* , naturel en F*

$$F \circ \oplus^n \simeq \perp_n F \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\perp_k F)^{\oplus \binom{n}{k}}.$$

(2) *Le foncteur \perp_n est l'adjoint des deux côtés à lui même. En particulier, \perp_n est un foncteur exact.*

(3) *Le foncteur F est de degré $\leq n-1$ si et seulement si $\perp_n F = 0$.*

DÉMONSTRATION. L'assertion (1) est une conséquence directe de l'assertion (1) de la proposition 4.3.9. Pour $F, G \in \mathfrak{C}_*$, la proposition 4.3.10 induit des isomorphismes naturels

$$\text{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(\Delta_n^* \circ \text{cr}_n F, G) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{C}_*(n)}(\text{cr}_n F, \text{cr}_n G) \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathfrak{C}_*}(F, \Delta_n^* \circ \text{cr}_n G).$$

On en déduit l'assertion (2). Il reste à montrer l'assertion (3). Par définition, le degré du foncteur F est inférieur ou égale à $n-1$ si et seulement si $\text{cr}_n F = 0$. Comme $\perp_n = \Delta_n^* \circ \text{cr}_n$, alors $\perp_n F = 0$ si $\text{cr}_n F = 0$. On suppose maintenant que $\perp_n F = 0$. Soient V_1, \dots, V_n des \mathbb{k} -espaces vectoriels. On note $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$. Comme V_i est un facteur direct de V pour tout $i = 1, \dots, n$, alors $\text{cr}_n F(V_1, \dots, V_n)$ est également un facteur direct de $\text{cr}_n F(V, \dots, V) = \perp_n F(V) = 0$. On obtient donc l'assertion (3). \square

PROPOSITION 4.3.16. *Soient d, n deux entiers strictement positifs. Soit $F \in \mathcal{P}_d$. On a des isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux naturels en F :*

$$(4.3.9) \quad (\perp_n F)^\sharp \simeq \perp_n (F^\sharp)$$

$$(4.3.10) \quad \perp_n F \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, \perp_n S^d).$$

DÉMONSTRATION. Par l'assertion (1) de la proposition 4.3.15, on a des isomorphismes :

$$\perp_n \Gamma^d = \bigoplus_{\mu} \Gamma^\mu, \quad \perp_n S^d \simeq \bigoplus_{\mu} S^\mu,$$

où les sommes directes sont indexées par les n -uplets $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ tels que μ_i sont des entiers strictement positifs et $\sum_{i=1}^n \mu_i = d$. De plus, on a des isomorphismes $\Gamma^{\mu^\sharp} \simeq S^\mu$. On obtient l'isomorphisme (4.3.9) dans le cas $F = S^d$. En utilisant cet isomorphisme et l'assertion (2) de la proposition 4.3.15, on a des isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux, naturels en F :

$$\begin{aligned} \perp_n F &\simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^d, \perp_n F) \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(\perp_n \Gamma^d, F) \\ &\simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, (\perp_n \Gamma^d)^\sharp) \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, \perp_n S^d), \end{aligned}$$

d'où l'isomorphisme (4.3.10). De plus, par l'assertion (2) de la proposition 4.3.15, l'isomorphisme $(F^\sharp)^\sharp$ et l'isomorphisme (4.3.10) induisent des isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux naturels en F :

$$\perp_n (F^\sharp) \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F, \perp_n S^d) \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(\perp_n F, S^d) \simeq (\perp_n F)^\sharp.$$

On obtient donc l'isomorphisme (4.3.9). \square

Par définition, le foncteur \perp_1 est l'identité $\text{Id} : \mathfrak{C}_* \rightarrow \mathfrak{C}_*$. On peut donc voir ϵ_2 comme une transformation naturelle de \perp_2 vers \perp_1 . On définit des transformations naturelles $\bar{\epsilon}_{n+1} : \perp_{n+1} \rightarrow \perp_n, n \geq 1$ par le morphisme composé suivant, où le premier morphisme est l'inclusion canonique et le deuxième est induit par la somme $V \oplus V \rightarrow V$:

$$\text{cr}_{n+1} F(V, \dots, V) \hookrightarrow \text{cr}_n F(V \oplus V, V, \dots, V) \rightarrow \text{cr}_n F(V, \dots, V).$$

Par définition, on a $\bar{\epsilon}_2 = \epsilon_2$ et de plus, $\bar{\epsilon}_{n+1}$ est un morphisme de $(\perp_{n+1}, \epsilon_{n+1}, \delta_{n+1})$ vers $(\perp_n, \epsilon_n, \delta_n)$. En particulier, on a que les diagrammes suivants sont commutatifs

$$(4.3.11) \quad \begin{array}{ccc} \perp_{n+1} & \xrightarrow{\epsilon_{n+1}} & \text{Id} \\ \downarrow \bar{\epsilon}_{n+1} & & \parallel \\ \perp_n & \xrightarrow{\epsilon_n} & \text{Id} \end{array}$$

Ensuite, on donne une version naïve de la tour de Taylor d'un foncteur.

DÉFINITION 4.3.17. Soient $F \in \mathfrak{C}_*$ et n un entier strictement positif.

- (1) On définit $\mathfrak{p}_n F$ comme le conoyau de morphisme $\epsilon_{n+1} : \perp_{n+1} F \rightarrow F$, on a une suite exacte $\perp_{n+1} F \xrightarrow{\epsilon_{n+1}} F \rightarrow \mathfrak{p}_n F \rightarrow 0$.
- (2) On définit $\mathfrak{d}_n F$ comme le noyau du morphisme $\mathfrak{p}_n F \rightarrow \mathfrak{p}_{n-1} F$ qui est induit par le diagramme commutatif (4.3.11).

Par définition, on a des diagrammes commutatifs

$$(4.3.12) \quad \begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \perp_4 & \longrightarrow & \text{Id} & \longrightarrow & \mathfrak{p}_3 \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \perp_3 & \longrightarrow & \text{Id} & \longrightarrow & \mathfrak{p}_2 \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \perp_2 & \longrightarrow & \text{Id} & \longrightarrow & \mathfrak{p}_1 \longrightarrow 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \downarrow & & \\ \mathfrak{p}_3 & \longleftarrow & \mathfrak{d}_3 \\ \downarrow & & \\ \mathfrak{p}_2 & \longleftarrow & \mathfrak{d}_2 \\ \downarrow & & \\ \text{Id} & \longrightarrow & \mathfrak{p}_1 \longleftarrow \mathfrak{d}_1 \end{array}$$

La proposition suivante résume des propriétés bien connues des endofoncteurs $\mathfrak{p}_n : \mathfrak{C}_* \rightarrow \mathfrak{C}_*$.

PROPOSITION 4.3.18 ([JM04, Exemple 1.7]). Soient n un entier strictement positif et $F \in \mathfrak{C}_*$.

- (1) Le foncteur $\mathfrak{p}_n F \in \mathfrak{C}_*$ est un foncteur de degré d'Eilenberg-MacLane inférieur ou égal à n .
- (2) Si le degré d'Eilenberg-MacLane de F est inférieur ou égal à n alors le morphisme canonique $F \rightarrow \mathfrak{p}_n F$ est un isomorphisme.

- (3) Soit $G \in \mathfrak{C}_*$ un foncteur de degré d'Eilenberg-MacLane inférieur ou égal à n . L'application induite par le morphisme canonique $F \rightarrow \mathfrak{p}_n F$ est un isomorphisme naturel en F, G :

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(\mathfrak{p}_n F, G) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(F, G).$$

DÉMONSTRATION. Par la définition du foncteur \mathfrak{p}_n et l'exactitude du foncteur \perp_{n+1} , on a une suite exacte :

$$\perp_{n+1}^2 F \xrightarrow{\perp_{n+1}(\epsilon_{n+1})} \perp_{n+1} F \rightarrow \perp_{n+1} \mathfrak{p}_n F \rightarrow 0.$$

De plus, le morphisme $\perp_{n+1}(\epsilon_{n+1})$ est un épimorphisme parce qu'il admet le morphisme $\delta_{n+1} : \perp_{n+1} F \rightarrow \perp_{n+1}^2 F$ comme un inverse à droite. On en déduit que $\perp_{n+1} \mathfrak{p}_n F = 0$, d'où l'assertion (1). Si le degré d'Eilenberg-MacLane de F est inférieur ou égal à n , alors $\perp_{n+1} F = 0$. Dans ce cas-là, par la définition du foncteur \mathfrak{p}_n , le morphisme canonique $F \rightarrow \mathfrak{p}_n F$ est un isomorphisme. Il reste à montrer l'assertion (3). Par l'exactitude à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(-, G)$, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(\mathfrak{p}_n F, G) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(F, G) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(\perp_{n+1} F, G).$$

De plus, comme le degré d'Eilenberg-MacLane de G est inférieur ou égal à n et par l'assertion (2) de la proposition 4.3.15, on a $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(\perp_{n+1} F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(F, \perp_{n+1} G) = 0$. On en déduit donc l'assertion (3). \square

4.3.4.3. Tour de Taylor d'un foncteur.

DÉFINITION 4.3.19 ([JM04]). Soient n un entier strictement positif et $F \in \mathfrak{C}_*$. On définit un foncteur $P_n : \mathfrak{C}_* \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathfrak{C}_*)$ comme le cône du morphisme

$$\mathcal{N} \circ S^{\perp_{n+1}} \xrightarrow{\mathcal{N}S^{\epsilon_{n+1}}} \mathcal{N} \circ S^{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}[0].$$

On note $p_n F$ l'inclusion canonique $F \hookrightarrow P_n F$. On note $q_n F$ le morphisme de $P_n F \rightarrow P_{n-1} F$ induit par le morphisme de comonades $\bar{c}_n : \perp_n \rightarrow \perp_{n-1}$. On définit un foncteur $D_n : \mathfrak{C}_* \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathfrak{C}_*)$ comme la suspension du cône du morphisme $q_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$.

Pour un foncteur $F \in \mathfrak{C}_*$, le diagramme suivant est appelé tour de Taylor de F

$$\begin{array}{ccccccc} & & & F & & & \\ & & & \downarrow p_n F & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_{n+1} F & \longrightarrow & P_n F & \xrightarrow{q_n F} & P_{n-1} F \longrightarrow \cdots \end{array}$$

De plus, pour chaque entier strictement positif d , on a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_d \xrightarrow{P_n} \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d) & & \mathcal{P}_d \xrightarrow{D_n} \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_* \xrightarrow{P_n} \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{F}_*) & & \mathcal{F}_* \xrightarrow{D_n} \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{F}_*). \end{array}$$

PROPOSITION 4.3.20 ([JM04, Lemma 2.11]). Soit $F \in \mathfrak{C}_*$. Le complexe $P_n F$ est de degré homologique inférieur ou égal à n .

DÉMONSTRATION. L'exactitude du foncteur \perp_{n+1} et la définition du foncteur P_n induisent que le complexe $\perp_{n+1}F$ est le cône du morphisme $\mathcal{N} \circ S^{\perp_{n+1}}(\perp_{n+1}F) \rightarrow \perp_{n+1}F$. Comme $\perp_{n+1}F$ est \perp_{n+1} -projectif, d'après la proposition 4.3.13, ce morphisme est une équivalence d'homotopie. Alors le complexe $\perp_{n+1}P_nF$ est nul-homotopique. On en déduit que le degré homologique de P_nF est inférieur ou égal à n . \square

On démontre dans la proposition 4.3.22 ci-dessous que les foncteurs $D_n, P_n : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d)$ vérifient les conditions de la définition 4.2.32 et qu'on peut donc leur appliquer le théorème d'annulation 4.2.35. Pour démontrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant.

LEMME 4.3.21. *Soient d, n, k des entiers strictement positifs. Soit $F \in \mathcal{P}_d$.*

- (1) *Si le foncteur F est injectif, alors $\perp_n F$ est également un foncteur injectif.*
- (2) *On a un isomorphisme $\perp_n^k F \simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, \perp_n^k S^d)$ naturel en F .*

DÉMONSTRATION. (1) Comme un foncteur injectif de \mathcal{P}_d est toujours un facteur direct d'un foncteur injectif de la forme $V \otimes S_{\mathbb{k}^d}^d$ avec $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, il suffit alors de démontrer que le foncteur $\perp_n(S_{\mathbb{k}^d}^d)$ est injectif. L'assertion (1) de la proposition 4.3.15 induit que $\perp_n(S_{\mathbb{k}^d}^d)$ est un facteur direct du foncteur $S_{\mathbb{k}^d}^d \circ \oplus^n$. Par l'isomorphisme exponentiel, ce foncteur est isomorphe au foncteur injectif $\bigoplus_{\mu} \bigotimes_{i=1}^n S_{\mathbb{k}^d}^{\mu_i}$, où la somme directe est indexée par les n -uplets d'entiers naturels $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ tels que $\sum_{i=1}^n \mu_i = d$. On obtient donc l'assertion (1). L'assertion (2) est démontrée par récurrence en utilisant la proposition 4.3.16 et la paire d'adjoints (\perp_n, \perp_n) donnée dans la proposition 4.3.15. En effet, si on a $\perp_n^k F \simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, \perp_n^k S^d)$, on obtient des isomorphismes naturels en F :

$$\begin{aligned} \perp_n^{k+1} F &\simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{P}_d} \left((\perp_n F)^\sharp, \perp_n^k S^d \right) \simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{P}_d} \left(\perp_n(F^\sharp), \perp_n^k S^d \right) \\ &\simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{P}_d} \left(F^\sharp, \perp_n^{k+1} S^d \right), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. \square

PROPOSITION 4.3.22. *Soient d, n deux entiers strictement positifs. Les foncteurs P_n, D_n de \mathcal{P}_d vers $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d)$ sont de type (\mathfrak{J}) .*

DÉMONSTRATION. Par la définition 4.2.32 d'un foncteur de type (\mathfrak{J}) , on a que :

- (1) si Φ est un foncteur de type (\mathfrak{J}) alors la suspension $\Phi[1]$ est également un foncteur de type (\mathfrak{J}) ;
- (2) le cône d'un morphisme entre deux foncteurs de type (\mathfrak{J}) est un foncteur de type (\mathfrak{J}) .

En utilisant ces deux propriétés et les définitions des foncteurs P_n, D_n , pour démontrer cette proposition, il suffit de montrer que le foncteur $\mathcal{P}_d \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d), F \mapsto \mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(F)$ est de type (\mathfrak{J}) . La démonstration est presque identique à la preuve que le foncteur dérivé $L(F, n) = \mathcal{N}F_{K(n)}$ est de type (\mathfrak{J}) dans la proposition 4.3.11.

Comme $\mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(F)$ est un facteur direct du complexe $\mathcal{C}S^{\perp_{n+1}}(F)$, l'assertion (1) du lemme 4.3.21 induit que le complexe $\mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(S^d)$ est un complexe d'injectifs. Par l'assertion (2) du lemme 4.3.21, on a un isomorphisme des complexes de foncteurs strictement polynomiaux $\mathcal{C}S^{\perp_{n+1}}(F) \simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, \mathcal{C}S^{\perp_{n+1}}(S^d))$ naturel en F . De plus, on a des équivalences d'homotopie $\mathcal{C}S^{\perp_{n+1}}(S^d) \rightarrow \mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(S^d)$ et $\mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(F) \rightarrow \mathcal{C}S^{\perp_{n+1}}(F)$ naturelles en F . On obtient donc une équivalence

d'homotopie $\mathcal{N}S^{\perp n+1}(F) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, \mathcal{N}S^{\perp n+1}(S^d))$ naturelle en F comme le composé des équivalences d'homotopie suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}S^{\perp n+1}(F) &\rightarrow \mathcal{C}S^{\perp n+1}(F) \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, \mathcal{C}S^{\perp n+1}(S^d)) \\ &\rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(F^\sharp, \mathcal{N}S^{\perp n+1}(S^d)). \end{aligned}$$

Le foncteur $F \mapsto \mathcal{N}S^{\perp n+1}(F)$ est donc de type (\mathfrak{J}) . □

CONVENTION 4.3.23. Soient F_0, F_1, \dots une suite de foncteurs et t_0, t_1, \dots une suite d'entiers naturels. Si $t_i = 0$ pour i assez grand, on désigne par $\bigotimes_{i=0}^{\infty} F_i^{\otimes t_i}$ le produit $\bigotimes_{i \geq 0, t_i > 0} F_i^{\otimes t_i}$.

Le théorème important suivant de Johnson-McCarthy [JM08, Theorem 2.9] décrit le n -ième étage de la tour de Taylor du foncteur S^d en utilisant le premier étage.

THÉORÈME 4.3.24. *Soient d, n deux entiers strictement positifs, $n \leq d$. Il existe un quasi-isomorphisme entre $D_n S^d$ et $\bigoplus_{\underline{t}} \bigotimes_{i=1}^{\infty} \left((D_1 S^i)^{\otimes t_i} \right)_{h_{\mathfrak{S}_{t_i}}}$ dans la catégorie $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{F}_*)$, où la somme directe est indexée par les suites $\underline{t} = (t_1, t_2, \dots)$ d'entiers naturels telles que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = n$ et $\sum_{i=1}^{\infty} it_i = d$; et $(-)_h_{\mathfrak{S}_{t_i}}$ est le foncteur dérivé $\mathbb{k} \otimes_{\mathfrak{S}_{t_i}}^{\mathbf{L}} -$.*

En particulier, il existe un quasi-isomorphisme entre $D_d S^d$ et $(\otimes^d)_{h_{\mathfrak{S}_d}}$ dans la catégorie $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{F}_)$*

4.4. Résultats (quasiment) explicites de $L_q S^d(-, n)$ et $H_q(D_n S^d)$

4.4.1. **Calcul de $L_q S^d(-, n)$.** Le calcul des foncteurs dérivés $L_q S^d(-, n)$ est effectué par les travaux de Cartan [Car55], Dold-Puppe [DP61], Bousfield [Bou67a] et Touzé [Tou14].

PROPOSITION 4.4.1. *On a les isomorphismes :*

$$\begin{aligned} L_q S^d(-, 0) &\simeq \begin{cases} S^d & \text{si } q = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}, \quad L_q S^d(-, 1) \simeq \begin{cases} \Lambda^d & \text{si } q = d, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ L_q S^d(-, 2) &\simeq \begin{cases} \Gamma^d & \text{si } q = 2d, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Comme objet simplicial $K(0) = \mathcal{K}(\mathbb{K}[0]) \in s\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ est constant, on a que $L(F, 0) = \mathcal{N}F_{K(0)} \simeq F[0]$ pour tout $F \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}$. Par conséquence, le foncteur $L_q F(-, 0)$ est isomorphe à F si $q = 0$ et 0 sinon. De plus, par le théorème de décalage (Bousfield [Bou67a, Theorems 7.1, 7.2], Touzé [Tou13c, Proposition 6.4]), on a des isomorphismes :

$$L_q S^d(-, 1) \simeq L_{q-d} \Lambda^d(-, 0), \quad L_q S^d(-, 2) \simeq L_{q-2d} \Gamma^d(-, 0).$$

On en déduit le résultat. □

Pour annoncer les calculs de $L_q S^d(-, n)$ pour $n \geq 2$, on rappelle tout d'abord les définitions des mots p -admissibles de Cartan [Car55, pages 9-01 et 10-01]. Dans la suite, seuls les mots p -admissibles de première espèce nous seront utiles. Nous appellerons donc plus simplement mots p -admissibles les mots p -admissibles de première espèce.

- DÉFINITION 4.4.2. (1) Cas $p = 2$. Un mot 2 -admissible \underline{w} est une suite finie de lettres σ, γ_2 telle que : \underline{w} n'est pas vide, la première lettre de \underline{w} est σ et les deux dernières lettres de \underline{w} sont σ, σ .
- (2) Cas $p > 2$. Un mot p -admissible \underline{w} est une suite finie de lettres σ, γ_p, ϕ_p telle que : \underline{w} n'est pas vide, la première lettre de \underline{w} est σ ou ϕ_p et la dernière lettre de \underline{w} est σ , pour chaque lettre γ_p ou ϕ_p du mot, le nombre de lettres σ situées à droite est pair.

On note \mathcal{W}_p l'ensemble des mots p -admissibles. La hauteur $h(\underline{w})$ d'un mot \underline{w} sera, par définition, le nombre de lettres du mot \underline{w} égales à σ ou à ϕ_p ; la torsion $t_{\underline{w}}$ de \underline{w} sera, par définition, le nombre de lettres du mot \underline{w} égales à γ_p ou à ϕ_p . Le degré d'un mot \underline{w} se définit par récurrence :

$$\begin{aligned} \deg \emptyset &= 0, & \deg(\sigma \underline{w}) &= 1 + \deg \underline{w}, \\ \deg(\gamma_p \underline{w}) &= p \deg \underline{w}, & \deg(\phi_p \underline{w}) &= 2 + p \deg \underline{w}. \end{aligned}$$

Pour un entier naturel n , on désigne par $\mathcal{W}_p(n)$ le sous-ensemble de \mathcal{W}_p des mots p -admissibles de hauteur n . Les ensembles $\mathcal{W}_p(n)$ forment une partition de \mathcal{W}_p .

- EXEMPLE 4.4.3. (1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\underline{w} = \sigma^{n+2}$ est un mot p -admissible. Il est de hauteur $n + 2$, de torsion 0 et degré $n + 2$. De plus, ce mot est l'unique mot p -admissible de degré $n + 2$ et de la torsion 0.
- (2) Pour $n, t \geq 1$, le mot $\underline{w} = \sigma^n \gamma_p^t \sigma^2$ est p -admissible. On a $h(\underline{w}) = n + 2$, $t_{\underline{w}} = t$ et $\deg \underline{w} = 2p^t + n$. Ce mot va être caractérisé dans le lemme 4.5.3.
- (3) On considère le cas $p = 2$. Un mot 2 -admissible \underline{w} s'écrit sous la forme $\underline{w} = \sigma \gamma_2^{t_1} \sigma \gamma_2^{t_2} \cdots \sigma \gamma_2^{t_n} \sigma \sigma$ où t_1, \dots, t_n sont des entiers naturels. En fait, on obtient une bijection de W_2 sur l'ensemble $\{t = (t_1, \dots, t_n) : n \in \mathbb{N}, t_i \in \mathbb{N}\}$. De plus, si $\underline{w} = \sigma \gamma_2^{t_1} \sigma \gamma_2^{t_2} \cdots \sigma \gamma_2^{t_n} \sigma \sigma$, on a $h(\underline{w}) = n + 2$, $t_{\underline{w}} = \sum_{i=1}^n t_i$ et

$$\deg \underline{w} = 1 + 2^{t_1} + 2^{t_1+t_2} + \cdots + 2^{t_1+\cdots+t_{n-1}} + 2^{t_1+\cdots+t_n+1}.$$

NOTATION 4.4.4. Soit V un espace vectoriel gradué de dimension finie en chaque degré, on définit les espaces vectoriels gradués $U(V)$ et $U^\sharp(V)$ respectivement par les formules :

$$\begin{aligned} U(V) &= \begin{cases} \Gamma(V) & \text{si } p = 2, \\ \Gamma(V_{\text{pair}}) \otimes \Lambda(V_{\text{impair}}) & \text{si } p > 2, \end{cases} \\ U^\sharp(V) &= \begin{cases} S(V) & \text{si } p = 2, \\ S(V_{\text{pair}}) \otimes \Lambda(V_{\text{impair}}) & \text{si } p > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

THÉORÈME 4.4.5 ([Tou14, Theorem 10.14]). On a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux :

$$\bigoplus_{q, d \in \mathbb{N}} L_q S^d(-, n+2) \simeq U \left(\bigoplus_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} I^{(t_{\underline{w}})}[\deg \underline{w}] \right).$$

NOTATION 4.4.6. On note $I(q, d, n)$ l'ensemble

$$\left\{ a = (a_{\underline{w}})_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} : a_{\underline{w}} \in \mathbb{N}, d = \sum_{\underline{w}} a_{\underline{w}} p^{t_{\underline{w}}}, q = \sum_{\underline{w}} a_{\underline{w}} \deg \underline{w} \right\}.$$

Pour un mot p -admissible \underline{w} et un entier naturel $a_{\underline{w}}$, on désigne par $X^{a_{\underline{w}}(\underline{w})}$ le foncteur suivant

$$X^{a_{\underline{w}}(\underline{w})} = \begin{cases} \Gamma^{a_{\underline{w}}(\underline{w})} & \text{si } p = 2 \text{ ou } \deg(\underline{w}) \text{ est pair,} \\ \Lambda^{a_{\underline{w}}(\underline{w})} & \text{sinon.} \end{cases}$$

COROLLAIRE 4.4.7. *On a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux :*

$$L_q S^d(-, n+2) = \bigoplus_{a \in I(q, d, n)} \bigotimes_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} X^{a_{\underline{w}}(\underline{w})}.$$

EXEMPLE 4.4.8. (1) Soient $d, n \in \mathbb{N}$. Par la démonstration de la proposition 4.5.5 du manuscrit, l'ensemble $I(q, d, n)$ est vide si $q < 2d + \alpha_p(d)$. De plus, si $q = 2d + n\alpha_p(d)$, cet ensemble contient un seul élément $a = (a_{\underline{w}})_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)}$ où

$$a_{\underline{w}} = \begin{cases} d_t & \text{si } \underline{w} = \sigma^n \gamma_p^t \sigma^2, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où les entiers naturels $d_t, t \in \mathbb{N}$ sont déterminés par $0 \leq d_t < p$ et $\sum_{t=0}^{\infty} d_t p^t = d$. Par conséquence, on a $L_q S^d(-, n+2) = 0$ si $q < 2d + n\alpha_p(d)$; et

$$L_{2d+n\alpha_p(d)} S^d(-, n+2) \simeq \begin{cases} \bigotimes_{t=0}^{\infty} \Gamma^{d_t(t)} & \text{si } p = 2 \text{ ou } n \text{ pair,} \\ \bigotimes_{t=0}^{\infty} \Lambda^{d_t(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, si $p = 2$ et $d = 5$ et $q, n \in \mathbb{N}$, on a

$$L_q S^5(-, n+2) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } q < 2n + 10, \\ I \otimes I^{(2)} & \text{si } q = 2n + 10. \end{cases}$$

Si $p = 3$ et $d = 5$ et $q, n \in \mathbb{N}$, on a

$$L_q S^5(-, n+2) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } q < 3n + 10, \\ \Gamma^2 \otimes I^{(1)} & \text{si } q = 3n + 10 \text{ et } n \text{ pair,} \\ \Lambda^2 \otimes I^{(1)} & \text{si } q = 3n + 10 \text{ et } n \text{ impair.} \end{cases}$$

(2) Supposons que $p = 2$. On détermine $L_q S^d(-, 3)$. Un élément de $\mathcal{W}_2(3)$ est de la forme $\underline{w} = \sigma \gamma_2^t \sigma^2$ avec $t \in \mathbb{N}$. Par conséquence, on a

$$L_q S^d(-, 3) \simeq \bigoplus_{(a_t)_{t \in \mathbb{N}}} \bigotimes_{t=0}^{\infty} I^{a_t(t)}$$

où la somme directe est indexée par les suites $(a_t)_{t \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels satisfaisant les deux conditions suivantes : $\sum_{t=0}^{\infty} a_t 2^t = d$ et $\sum_{t=0}^{\infty} a_t = q - 2d$. En particulier, si $p = 2$ et $d = 5$, on a

$$L_q S^5(-, 3) \simeq \begin{cases} I \otimes I^{(2)} & \text{si } q = 12, \\ I \otimes \Gamma^{2(1)} & \text{si } q = 13, \\ \Gamma^3 \otimes I^{(1)} & \text{si } q = 14, \\ \Gamma^5 & \text{si } q = 15, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.4.2. Calcul de $H_q(D_1S^d)$. Dans cette sous-section, on démontre la proposition suivante.

PROPOSITION 4.4.9. *Soient d un entier strictement positif et $F \in \mathcal{P}_d$.*

(1) *Le foncteur $H_q(D_1F)$ est de la forme $H_q(D_1F)(\mathbb{k}) \otimes I^{(r)}$ pour $r \in \mathbb{N}$. Par conséquent, si d n'est pas une puissance de p , alors $H_q(D_1F) = 0$ pour tout q , c'est-à-dire que le complexe D_1F est acyclique.*

(2) *Si $d = p^r$, on a des isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux :*

$$H_q(D_1S^d) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } q < 2(d-1), \\ I^{(r)} & \text{si } q = 2(d-1). \end{cases}$$

Pour démontrer la proposition 4.4.9, on peut utiliser les foncteurs dérivés stables de Dold-Puppe et le lien entre ces foncteurs et l'homologie du complexe D_1F [JM98, JM04]. Mais nous allons démontrer directement cette proposition.

LEMME 4.4.10. *Soient $F_i \in \mathcal{P}_{d_i}, i = 1, 2$. Le complexe $D_1(F_1 \otimes F_2)$ est acyclique.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition 4.3.22, le foncteur D_1 est de type (J). En utilisant la proposition 4.2.34, on a une suite spectrale

$$E_2^{i,j} = \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{P}_{d_1+d_2}}^i(F_1^\# \otimes F_2^\#, H_{-j}(D_1S^{d_1+d_2})) \Rightarrow H_{-i-j}(D_1(F_1 \otimes F_2)).$$

Pour obtenir le résultat souhaité, il suffit donc de démontrer que la deuxième page de cette suite spectrale s'annule. D'après la proposition 4.3.20, le complexe $D_1S^{d_1+d_2}$ est homogène de degré homologique 1; alors $H_{-j}(D_1S^{d_1+d_2})$ sont des foncteurs additifs. De plus, les foncteurs F_1, F_2 sont réduits. En appliquant le critère d'annulation de Pirashvili [FS97, Theorem 2.13], on a que $E_2^{i,j}$ s'annule pour tout i, j . On en déduit le résultat. \square

LEMME 4.4.11. *On a des isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux*

$$H_q(D_1S^d) \simeq H_{q-(d-1)}(D_1\Lambda^d) \simeq H_{q-2(d-1)}(D_1\Gamma^d).$$

DÉMONSTRATION. Comme le foncteur $\perp_{n+1} : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{P}_d$ est exact, le foncteur $P_n : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{P}_d)$ est également un foncteur exact. En particulier, le foncteur $D_1 = P_1$ préserve les suites exactes courtes. En utilisant ce fait avec le résultat d'annulation dans le lemme 4.4.10 et les suites exactes de Koszul

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Lambda^d \rightarrow \Lambda^{d-1} \otimes S^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^1 \otimes S^{d-1} \rightarrow S^d \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \Gamma^d \rightarrow \Gamma^{d-1} \otimes \Lambda^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma^1 \otimes \Lambda^{d-1} \rightarrow \Lambda^d \rightarrow 0, \end{aligned}$$

on en déduit le résultat. \square

Le dernier ingrédient pour la démonstration de la proposition 4.4.9 est la classification des foncteurs strictement polynomiaux additifs [Tou13b, Proposition 3.5] de Touzé.

PROPOSITION 4.4.12 (Touzé). *Soient d un entier strictement positif et $F \in \mathcal{P}_d$. Si le foncteur F est additif, alors il est de la forme $F(\mathbb{k}) \otimes I^{(r)}$ pour un entier naturel r . En particulier, si d n'est pas une puissance de p alors F s'annule.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.4.9. Par la proposition 4.3.20, les foncteurs $H_q(D_1 F)$ sont additifs. De plus, ces foncteurs strictement polynomiaux sont homogènes de degré d . En utilisant la proposition 4.4.12, on obtient l'assertion (1).

D'autre part, par le lemme 4.4.11, on a $H_q(D_1 S^d) \simeq H_{q-2(d-1)} \Gamma^d$. Comme le complexe $D_1 \Gamma^d$ est positif, alors $H_{q-2(d-1)} \Gamma^d = 0$ si $q < 2(d-1)$. De plus, par définition, le foncteur $H_0(D_1 \Gamma^d)$ est isomorphe au foncteur $\mathbf{d}_1 \Gamma^d$ qui est, par définition, le conoyau du morphisme $\perp_2 \Gamma^d \rightarrow \Gamma^d$. Puisque $d = p^r$ est une puissance de p et $\perp_2 \Gamma^d = \bigoplus_{i=1}^{d-1} \Gamma^i \otimes \Gamma^{d-i}$, ce conoyau est isomorphe à $I^{(r)}$. On obtient l'assertion (2). \square

4.4.3. Calcul de $H_q(D_d S^d)$.

PROPOSITION 4.4.13. *Il existe un isomorphisme dans la catégorie \mathcal{F}_* :*

$$H_q(D_d S^d) \simeq H_q(\mathfrak{S}_d, \otimes^d).$$

DÉMONSTRATION. Par le théorème 4.3.24, on a un quasi-isomorphisme entre $D_d S^d$ et $(\otimes^d)_{h\mathfrak{S}_d}$ dans la catégorie $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{F}_*)$. En prenant l'homologie, on obtient le résultat. \square

Ce résultat est important. Il nous permet d'utiliser la théorie d'homologie du groupe symétrique. D'après un résultat récent de Cohen-Hemmer-Nakano, on a le théorème 4.4.15 suivant.

NOTATION 4.4.14. On rappelle que \mathbf{P} est l'ensemble de toutes les partitions. On désigne par $\mathbf{P}^{0,1}$ l'ensemble des paires $(\epsilon; \lambda)$ telles que $\lambda \in \mathbf{P}$ et $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{\ell(\lambda)}) \in \{0, 1\}^{\ell(\lambda)}$, $\epsilon_1 = 0$. Le degré d'une partition λ ou d'une paire $(\epsilon; \lambda)$ est respectivement par définition :

$$\deg(\lambda) := \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} 2^{\ell(\lambda)-i} \lambda_i, \quad \deg(\epsilon; \lambda) := \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} p^{\ell(\lambda)-i} (-\epsilon_i + \lambda_i(p-1)).$$

De plus, on définit la longueur de $(\epsilon; \lambda) \in \mathbf{P}^{0,1}$ par $\ell(\epsilon; \lambda) = \ell(\lambda)$. On désigne par $\tilde{\mathbf{P}}$ l'ensemble \mathbf{P} si $p = 2$ et l'ensemble $\mathbf{P}^{0,1}$ si $p > 2$.

THÉORÈME 4.4.15 ([CHN10, Theorem 8.1.4]). *Il existe un isomorphisme bi-gradué dans la catégorie $\mathcal{F}_{\tilde{\mathbf{P}}_p}$, où U^\sharp est défini à la notation 4.4.4, la partie $H_q(\mathfrak{S}_d, \otimes^d)$ est de degré (d, q) et $I^{(\ell(\alpha))}[\deg(\alpha)]$ est de degré $(p^{\ell(\alpha)}, \deg(\alpha))$:*

$$\bigoplus_{q, d \in \mathbb{N}} H_q(\mathfrak{S}_d, \otimes^d) \simeq U^\sharp \left(\bigoplus_{\alpha \in \tilde{\mathbf{P}}} I^{(\ell(\alpha))}[\deg(\alpha)] \right).$$

NOTATION 4.4.16. On note $J(q, d)$ l'ensemble

$$\left\{ (a_\alpha)_{\alpha \in \tilde{\mathbf{P}}} : a_\alpha \in \mathbb{N}, d = \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbf{P}}} a_\alpha p^{\ell(\alpha)}, q = \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbf{P}}} a_\alpha \deg(\alpha) \right\}.$$

Pour $\alpha \in \tilde{\mathbf{P}}$ et un entier naturel a_α , on définit un foncteur $X^{\sharp a_\alpha(\ell(\alpha))}$ par la formule

$$X^{\sharp a_\alpha(\ell(\alpha))} = \begin{cases} S^{a_\alpha(\ell(\alpha))} & \text{si } p = 2 \text{ ou } \deg(\alpha) \text{ est pair,} \\ \Lambda^{a_\alpha(\ell(\alpha))} & \text{sinon.} \end{cases}$$

COROLLAIRE 4.4.17. *Soient q et d deux entiers naturels. On a un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{F}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ ou dans la catégorie $\mathcal{P}_{d, \overline{\mathbb{F}}_p}$:*

$$H_q(D_d S^d) \simeq \bigoplus_{a \in J(q, d)} \bigotimes_{\alpha \in \overline{\mathbb{F}}} X^{\#a_\alpha(\ell(\alpha))}.$$

EXEMPLE 4.4.18. (1) Si $q = 0$, on a $H_0(D_d S^d) \simeq S^d$.

(2) On suppose que $p = 2$. Si λ est une partition, on a

$$\begin{aligned} \deg(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \lambda = (0) \\ \deg(\lambda) = 1 &\Leftrightarrow \lambda = (1) \\ \deg(\lambda) = 2 &\Leftrightarrow \lambda = (2) \\ \deg(\lambda) = 3 &\Leftrightarrow \lambda \in \{(3), (1, 1)\}. \end{aligned}$$

Par conséquence, on a les isomorphismes :

$$\begin{aligned} H_1(D_d S^d) &\simeq S^{d-2} \otimes I^{(1)}, \\ H_2(D_d S^d) &\simeq \left(S^{d-4} \otimes S^{2(1)} \right) \oplus \left(S^{d-2} \otimes I^{(1)} \right), \\ H_3(D_d S^d) &\simeq \left(S^{d-6} \otimes S^{3(1)} \right) \oplus \left(S^{d-4} \otimes \otimes^2(1) \right) \\ &\quad \oplus \left(S^{d-2} \otimes I^{(1)} \right) \oplus \left(S^{d-4} \otimes I^{(2)} \right). \end{aligned}$$

4.4.4. Calcul de $H_q(D_n S^d)$ avec $1 < n < d$. Dans les deux sous-sections 4.4.2 et 4.4.3 précédentes, nous avons obtenu des calculs explicites de $H_q(D_1 S^d)$ et $H_q(D_d S^d)$. Au contraire, nous ne pouvons pas déterminer explicitement les foncteurs strictement polynomiaux $H_q(D_n S^d)$ pour $1 < n < d$. Nous proposons dans la proposition 4.4.21 une suite spectrale pour calculer $H_q(D_n S^d)$. Nous avons besoin du résultat élémentaire suivant.

LEMME 4.4.19. *Soient $C \in \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{F})$ un complexe et \mathfrak{S} un groupe. On suppose que le groupe \mathfrak{S} agit sur le complexe C . Il existe alors une suite spectrale*

$$E_{k, \ell}^2 = H_k(\mathfrak{S}, H_\ell(C)) \Rightarrow H_{k+\ell}(C_{h\mathfrak{S}}).$$

DÉMONSTRATION. Par définition, $C_{h\mathfrak{S}} = C \otimes_{\mathbb{k}\mathfrak{S}} P$ où P est une résolution projective de $\mathbb{k}\mathfrak{S}$ -module trivial \mathbb{k} . On considère le bicomplexe $E_{k, \ell}^0 = C_\ell \otimes_{\mathbb{k}\mathfrak{S}} P_k$. On dispose d'une suite spectrale associée à ce bicomplexe, qui converge vers l'homologie du complexe total. La première et la deuxième page de la suite spectrale sont donnés respectivement par :

$$\begin{aligned} E_{k, \ell}^1 &= H_\ell(E_{k, \bullet}^0) = H_\ell(C) \otimes_{\mathbb{k}\mathfrak{S}} P_k, \\ E_{i, j}^2 &= H_k(E_{\bullet, \ell}^1) = H_k(\mathfrak{S}, H_\ell(C)). \end{aligned}$$

De plus, l'homologie du complexe total calcule l'homologie du complexe $C_{h\mathfrak{S}}$. On en déduit l'affirmation. \square

NOTATION 4.4.20. On note $\tilde{J}(d, n)$ l'ensemble des suites $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels telles que $d = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i p^i$ et $n = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i$.

PROPOSITION 4.4.21. *Il existe une suite spectrale $E_{k,\ell}^2(D_n S^d) \Rightarrow H_{k+\ell}(D_n S^d)$ où la deuxième page est donnée par :*

$$E_{k,\ell}^2(D_n S^d) = \bigoplus_{\mu \in \tilde{J}(d,n)} H_k \left(\mathfrak{S}_\mu, H_\ell \left(\bigotimes_{i=0}^{\infty} (D_1 S^{p^i})^{\otimes \mu_i} \right) \right),$$

où \mathfrak{S}_μ est le groupe produit $\prod_{i=0}^{\infty} \mathfrak{S}_{\mu_i}$, un sous-groupe de \mathfrak{S}_n .

DÉMONSTRATION. Dans cette démonstration, on désigne par $J(d, n)$ l'ensemble des suites $\underline{t} = (t_1, t_2, \dots)$ d'entiers naturels telles que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = n$ et $\sum_{i=1}^{\infty} i t_i = d$. La proposition 4.3.24 induit un isomorphisme :

$$H_q(D_n S^d) \simeq \bigoplus_{\underline{t} \in J(d,n)} H_q \left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} ((D_1 S^i)^{\otimes t_i})_{h \mathfrak{S}_{t_i}} \right).$$

En combinant avec le lemme 4.4.19, il existe une suite spectrale

$$E_{k,\ell}^2(D_n S^d) = \bigoplus_{\underline{t} \in J(d,n)} H_k \left(\mathfrak{S}_{\underline{t}}, H_\ell \left(\bigotimes_{i=0}^{\infty} (D_1 S^i)^{\otimes t_i} \right) \right) \Rightarrow H_{k+\ell}(D_n S^d).$$

De plus, par l'assertion (1) de la proposition 4.4.9 et le fait que le foncteur \otimes est exact en chaque variable, le complexe $\bigotimes_{i=0}^{\infty} (D_1 S^i)^{\otimes t_i}$ est acyclique s'il existe au moins un i tel que t_i n'est pas une puissance de p . On en déduit le résultat. \square

4.5. Blocs de $L_q S^d(-, n)$ et $H_q(D_n S^d)$, et résultats d'annulation

Nous fixons un entier naturel j et un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie $V, V \neq 0$. Nous calculons dans ces sous-sections 4.5.1 et 4.5.2 les ensembles des partitions suivants :

$$\bigcup_{q=0}^j \mathfrak{Bl}((L_q S^d(-, n))_V), \quad \bigcup_{q=0}^j \mathfrak{Bl}((H_q(D_n S^d))_V).$$

En utilisant ces calculs, on obtient des résultats d'annulation dans la sous-section 4.5.3.

4.5.1. Blocs de $L_q S^d(-, n)$.

Le calcul de $\bigcup_{q=0}^j \mathfrak{Bl}((L_q S^d(-, n))_V)$ (théorème 4.5.7) est divisé en deux étapes. Dans la première étape, en utilisant les propriétés d'application \mathfrak{Bl} dans la sous-section 4.2.3 et le calcul explicite du foncteur $L_q S^d(-, n)$ dans la sous-section 4.4.1, on obtient l'égalité (4.5.1), où l'entier naturel m_j est défini par l'ensemble des mots p -admissibles. Dans la deuxième étape, on déterminera explicitement dans la proposition 4.5.5 l'entier m_j .

NOTATION 4.5.1. On définit $m_j \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ par la formule

$$m_j = \sup \left\{ a_{\sigma^{n+2}} : a \in \bigcup_{q=0}^j I(q, d, n) \right\}.$$

De plus, si $d = -\infty$, et X désigne l'un des symboles Γ, Λ, S on définit $X^d = 0$.

PROPOSITION 4.5.2. *On a alors une égalité, où la notation E désigne le foncteur Γ si $p = 2$ ou n est pair, et le foncteur Λ sinon :*

$$(4.5.1) \quad \bigcup_{q=0}^j \mathfrak{B}l((L_q S^d(-, n+2))_V) = \mathfrak{B}l(E_V^{m_j}).$$

DÉMONSTRATION. Pour un mot $\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)$, on a $t_{\underline{w}} \geq 0$ et $t_{\underline{w}} = 0$ si et seulement si $\underline{w} = \sigma^{n+2}$. En combinant ce fait avec le corollaire 4.4.7, l'isomorphisme (4.2.3) de la proposition 4.2.20 et le théorème 4.2.23, on a des égalités

$$(4.5.2) \quad \begin{aligned} \bigcup_{q=0}^j \mathfrak{B}l((L_q S^d(-, n+2))_V) &= \bigcup_{q=0}^j \mathfrak{B}l \left(\bigoplus_{a \in I(q,d,n)} \bigotimes_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} (X^{a_{\underline{w}}(t_{\underline{w}})})_V \right) \\ &= \bigcup_{q=0}^j \bigcup_{a \in I(q,d,n)} \mathfrak{B}l \left(\bigotimes_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} (X^{a_{\underline{w}}(t_{\underline{w}})})_V \right) \\ &= \bigcup_{q=0}^j \bigcup_{a \in I(q,d,n)} \mathfrak{B}l(X_V^{a_{\sigma^{n+2}}}). \end{aligned}$$

Pour $a \in I(q,d,n)$, on a $d = \sum_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} a_{\underline{w}} p^{t_{\underline{w}}} \equiv a_{\sigma^{n+2}} \pmod{p}$. L'égalité (4.5.2) et le corollaire 4.2.22 induisent l'égalité souhaitée (4.5.1). \square

Pour déterminer l'entier m_j , on a besoin du lemme suivant. Ce résultat est élémentaire et il est démontré directement à partir de la définition 4.4.2 des mots p -admissibles.

LEMME 4.5.3. *Soit $\underline{w} \in \mathcal{W}_p$. On suppose que $h(\underline{w}) = n+2$ et $t_{\underline{w}} = t$. Alors $\deg \underline{w} \geq 2p^t + n$. De plus, $\deg \underline{w} = 2p^t + n$ si et seulement si $\underline{w} = \sigma^n \gamma_p^t \sigma^2$.*

DÉMONSTRATION. On note E_p l'ensemble des mots p -admissibles \underline{w} tels que $h(\underline{w}) = n+2$ et $t_{\underline{w}} = t$. Cet ensemble n'est pas vide, il contient toujours le mot $\sigma^n \gamma_p^t \sigma^2$, le degré $\deg(\sigma^n \gamma_p^t \sigma^2)$ de $\sigma^n \gamma_p^t \sigma^2$ est $2p^t + n$. De plus, si $t = 0$, on a $E_p = \{\sigma^2\}$. Par la définition des fonctions h et t , l'ensemble E_p est fini. Alors il existe un mot \underline{w} de E_p tel que $\deg(\underline{w}) = \min_{E_p} \deg$. Alors il suffit de montrer que $\underline{w} = \sigma^n \gamma_p^t \sigma^2$.

(1) Cas $p = 2$. Le mot \underline{w} n'est pas de la forme $\underline{w} = \underline{w}^1 \gamma_2 \sigma^k \gamma_2 \underline{w}^2$ où \underline{w}^1 et \underline{w}^2 sont des mots et $k \geq 1$. En effet, si \underline{w} a cette forme, on définit un mot $\underline{w}' = \underline{w}^1 \sigma \gamma_2 \sigma^{k-1} \gamma_2 \underline{w}^2$. Ce mot appartient à E_p et $\deg \underline{w}' < \deg \underline{w}$, contradiction. On a donc $\underline{w} = \sigma^{n_1} \gamma_2^t \sigma^{n_2}$. Par définition, $n_2 \geq 2$. Si $n_2 > 2$, on définit $\underline{w}' = \underline{w} = \sigma^{n_1+1} \gamma_2^t \sigma^{n_2-1}$, on a $\underline{w}' \in E_p$ et $\deg \underline{w}' < \deg \underline{w}$, contradiction. On obtient le résultat.

(2) Cas $p > 2$. Le mot \underline{w} n'est pas de la forme $\underline{w} = \underline{w}^1 \gamma_p \sigma^2 \underline{w}^2$ (resp. $\underline{w} = \underline{w}^1 \phi \sigma^2 \underline{w}^2$) avec \underline{w}^1 et \underline{w}^2 sont des mots et \underline{w}^2 n'est pas vide. En effet, si \underline{w} a cette forme, on définit un mot $\underline{w}' = \underline{w}^1 \sigma^2 \gamma_p \underline{w}^2$ (resp. $\underline{w}' = \underline{w}^1 \sigma^2 \phi \underline{w}^2$). Ce mot appartient à E_p et $\deg \underline{w}' < \deg \underline{w}$, contradiction. On a donc $\underline{w} = \sigma^n \underline{w}^1 \sigma^2$ où le mot \underline{w}^1 ne contient que les lettres γ_p et ϕ . Il suffit de montrer que $\underline{w}^1 = \gamma_p^t$. On suppose que \underline{w}^1 n'a pas cette forme. Alors \underline{w}^2 contient au moins une lettre ϕ . Alors il est de la forme $\underline{w}^1 = \gamma_p^{t_1} \phi \underline{w}^2$ avec $t_1 \geq 0$. On définit $\underline{w}' = \sigma^{n+1} \gamma_p^{t_1+1} \underline{w}^2 \sigma^2$. On a $\underline{w}' \in E_p$ et $\deg \underline{w}' < \deg \underline{w}$, contradiction. \square

NOTATION 4.5.4. Soit d un entier naturel. On désigne par $\alpha_p(d)$ la somme des chiffres dans la décomposition p -adique de d , c'est-à-dire que si on a la décomposition $d = \sum_{t=0}^{\infty} d_t p^t$ avec $0 \leq d_t < p$, on a $\alpha_p(d) = \sum_{t=0}^{\infty} d_t$.

PROPOSITION 4.5.5. *L'entier m_j est égal à $d_0 + kp$, où d_0 est le reste de la division de d par p et k est le plus grand entier satisfaisant l'inégalité*

$$j \geq 2d + n(kp + \alpha_p(d - kp)).$$

DÉMONSTRATION. Si a est un élément de $I(q, d, n)$ pour q quelconque alors $d = \sum_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} a_{\underline{w}} p^{t_{\underline{w}}}$. On en déduit que $a_{\sigma^{n+2}} \leq d$ et $a_{\sigma^{n+1}} \equiv d \pmod{p}$. Par la définition de m_j , on a :

$$(4.5.3) \quad 0 \leq m_j \leq d, \quad m_j \equiv d \pmod{p}.$$

Il reste à déterminer le plus grand k tel que $m_j \geq kp$. Par la définition 4.4.6 des ensembles $I(q, n, d)$, la définition de m_j et les égalités $t_{\sigma^2} = 0$, $\deg(\sigma^{n+1}) = n+2$, pour un entier naturel $k \leq \frac{d}{p}$, on a l'inégalité $m_j \geq kp$ si et seulement s'il existe des entiers naturels $x_{\underline{w}}$ avec $\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)$ tels que

$$(4.5.4) \quad \begin{cases} \sum_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} x_{\underline{w}} p^{t_{\underline{w}}} & = d - kp, \\ \sum_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} x_{\underline{w}} \deg(\underline{w}) & \leq j - kp(n+2). \end{cases}$$

D'autre part, pour $a \in I(q, d, n)$, en utilisant le lemme 4.5.3, on a

$$\begin{aligned} q &= \sum_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} a_{\underline{w}} \deg(\underline{w}) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+1), t_{\underline{w}}=t} a_{\underline{w}} \right) p^t \\ &\geq \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+1), t_{\underline{w}}=t} a_{\underline{w}} \right) (2p^t + n) \\ &= 2 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{t_{\underline{w}}=t} a_{\underline{w}} \right) p^t + n \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{t_{\underline{w}}=t} a_{\underline{w}} \\ &\geq 2 \left(\sum_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} a_{\underline{w}} p^{t_{\underline{w}}} \right) + n \alpha_p(d) = 2d + n \alpha_p(d), \end{aligned}$$

où $\alpha_p(d)$ est la somme des chiffres dans la décomposition p -adique de d , c'est-à-dire que si on a la décomposition $d = \sum_{t=0}^{\infty} d_t p^t$ avec $0 \leq d_t < p$, on a $\alpha_p(d) = \sum_{t=0}^{\infty} d_t$. De plus, on a $q = 2d + n \alpha_p(d)$ si et seulement si $a_{\underline{w}}$ est égal à d_t si $\underline{w} = \sigma^n \gamma_p^t \sigma^2$ et 0 sinon. Le système (4.5.4) admet donc une solution $x_{\underline{w}} \in \mathbb{N}$ si et seulement si $j - kp(n+2) \geq 2d + n \alpha_p(d - kp)$, c'est-à-dire qu'on a $j \geq 2d + n(kp + \alpha_p(d - kp))$. \square

REMARQUE 4.5.6. On en déduit, d'après la démonstration de la proposition 4.5.5 que le plus petit q tel que $L_q S^d(-, n+2) \neq 0$ est $2d + n \alpha_p(d)$.

D'après les proposition 4.5.2 et 4.5.5, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 4.5.7. *Soient d, n deux entiers naturels et V un objet de $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. On a une égalité :*

$$\bigcup_{q=0}^j \mathfrak{B}l((L_q S^d(-, n+2))_V) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } j < j_0 \\ \mathfrak{B}l(E_V^{d_0+kp}) & \text{si } j_k \leq j < j_{k+1}, \\ \mathfrak{B}l(E_V^d) & \text{si } j > j_{\lfloor \frac{d}{p} \rfloor}, \end{cases}$$

où d_0 est le reste de la division de d par p , et $j_k = 2d + n(kp + \alpha_p(d - kp))$ pour $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{d}{p} \rfloor$, et $\alpha_p(d - kp)$ est la somme des chiffres dans la décomposition p -adique de $d - kp$. De plus, la notation E désigne le foncteur Γ si $p = 2$ ou n est pair, et le foncteur Λ sinon.

4.5.2. Blocs de $H_q(D_n S^d)$. Dans cette sous-section, nous démontrons le théorème suivant.

THÉORÈME 4.5.8. *Soient d, n deux entiers naturels, $1 < n < d$. Si on note $m_{d,n}$ le plus grand entier naturel μ_0 tel qu'il existe des entiers naturels μ_1, μ_2, \dots satisfaisant $d = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i p^i$ et $n = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i$, on a :*

$$(4.5.5) \quad \bigcup_{q=0}^j \mathfrak{B}l((H_q(D_1 S^d))_V) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } d \notin p^{\mathbb{N}} \text{ ou } j < 2d - 2, \\ \{(0)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(4.5.6) \quad \bigcup_{q=0}^j \mathfrak{B}l((H_q(D_d S^d))_V) = \mathfrak{B}l(S_V^d)$$

$$(4.5.7) \quad \bigcup_{q=0}^j \mathfrak{B}l((H_q(D_n S^d))_V) \subseteq \begin{cases} \emptyset & \text{si } j < 2(d - n) \\ \mathfrak{B}l(S_V^{m_{d,n}}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION DE L'ÉGALITÉ (4.5.5) DU THÉORÈME 4.5.8. Par l'assertion (1) de la proposition 4.4.9, le foncteur $H_q(D_1 S^d)$ est de la forme $W \otimes I^{(r)}$ pour $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}, r \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$\mathfrak{B}l((H_q(D_1 S^d))_V) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } H_q(D_1 S^d) = 0, \\ \{(0)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En combinant avec la proposition 4.4.9 on en déduit le résultat. \square

LEMME 4.5.9. *Soient $n \leq d$ deux entiers strictement positifs et q un entier naturel. Soient \mathbb{k}, \mathbb{K} deux corps de caractéristique p . On a une égalité*

$$\mathfrak{B}l(H_q(D_n S_{\mathbb{k}}^d)) = \mathfrak{B}l(H_q(D_n S_{\mathbb{K}}^d)).$$

DÉMONSTRATION. On peut supposer que \mathbb{k} est un sous-corps de \mathbb{K} . Par l'exactitude de foncteur de changement de base $\mathbb{k}(-) : \mathcal{P}_{d,\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$, on a un isomorphisme $H_q(D_n S_{\mathbb{K}}^d) \simeq_{\mathbb{K}} (H_q(D_n S_{\mathbb{k}}^d))$ dans la catégorie $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$. Comme le foncteur de changement de base préserve les blocs (proposition 4.2.28), on obtient le résultat. \square

D'après 4.5.9, pour démontrer le théorème 4.5.8, on peut supposer que le corps \mathbb{k} est égal à \mathbb{F}_p .

DÉMONSTRATION DE L'ÉGALITÉ (4.5.6) DU THÉORÈME 4.5.8. Pour un élément α de l'ensemble $\tilde{\mathbf{P}}$ défini à la notation 4.4.14, on a $\ell(\alpha) \geq 0$ et $\ell(\alpha) = 0$ si et seulement si $\alpha = (0)$. En combinant ce fait avec le corollaire 4.4.17, l'isomorphisme (4.2.3) de la proposition 4.2.20 et le théorème 4.2.23, on a des égalités

$$\begin{aligned}
(4.5.8) \quad \bigcup_{q=0}^j \mathfrak{Bl}((H_q(D_d S^d))_V) &= \bigcup_{q=0}^j \mathfrak{Bl} \left(\bigoplus_{a \in J(q,d)} \bigotimes_{\alpha \in \tilde{\mathbf{P}}} (X^{\#a_\alpha(\ell(\alpha))})_V \right) \\
&= \bigcup_{q=0}^j \bigcup_{a \in J(q,d)} \mathfrak{Bl} \left(\bigotimes_{\alpha \in \tilde{\mathbf{P}}} (X^{a_{\underline{w}}(t_{\underline{w}})})_V \right) \\
&= \bigcup_{q=0}^j \bigcup_{a \in J(q,d)} \mathfrak{Bl}(X_V^{a(0)}).
\end{aligned}$$

Pour $a \in J(q, d)$, on a $d = \sum_{\alpha} a_{\alpha} p^{\ell(\alpha)}$. On en déduit que $a_{(0)} \leq d$ et $a_{(0)} \equiv d \pmod{p}$. De plus, l'ensemble $J(0, d)$ contient, par définition, l'élément $(a_{\alpha})_{\alpha \in \tilde{\mathbf{P}}}$ où a_{α} est égal à d si $\alpha = (0)$ et à 0 sinon. En combinant ces faits avec l'égalité (4.5.8) et le corollaire 4.2.22, on obtient l'égalité souhaité (4.5.6). \square

Il nous reste à montrer l'inclusion (4.5.7) du théorème 4.5.8. Pour cela, on considère la suite spectrale $E_{k,\ell}^2(D_n S^d) \Rightarrow H_{k+\ell}(D_n S^d)$ donnée par la proposition 4.4.21. La deuxième page de cette suite spectrale est donnée par

$$(4.5.9) \quad E_{k,\ell}^2(D_n S^d) = \bigoplus_{\mu \in \tilde{J}(d,n)} H_k \left(\mathfrak{S}_{\mu}, H_{\ell} \left(\bigotimes_{i=0}^{\infty} (D_1 S^{p^i})^{\otimes \mu_i} \right) \right).$$

Nous renvoyons à la convention 4.3.23 pour le produit tensoriel du type $\bigotimes_{i=0}^{\infty}$. Pour déterminer les blocs de l'aboutissement, nous aurons besoin des résultats suivants.

LEMME 4.5.10. *On a une inclusion*

$$(4.5.10) \quad \bigcup_{q=0}^j \mathfrak{Bl}((H_q(D_d S^d))_V) \subseteq \bigcup_{0 \leq m+n \leq j} \mathfrak{Bl}((E_{m,n}^2(D_n S^d))_V).$$

DÉMONSTRATION. Par définition de la suite spectrale (voir par exemple [Wei94, Définition 5.2.1]), $E_{k,\ell}^{r+1}(D_n S^d)$ est un quotient d'un sous-objet de $E_{m,n}^r(D_n S^d)$. Par l'isomorphisme (4.2.3) de la proposition 4.2.20, on a

$$\mathfrak{Bl} \left((E_{k,\ell}^{r+1}(D_n S^d))_V \right) \subseteq \mathfrak{Bl} \left((E_{k,\ell}^r(D_n S^d))_V \right).$$

Cela implique $\mathfrak{Bl} \left((E_{k,\ell}^{\infty}(D_n S^d))_V \right) \subset \mathfrak{Bl} \left((E_{k,\ell}^2(D_n S^d))_V \right)$. D'autre part, il y a une filtration de $H_q(D_n S^d)$ telle que $\text{Gr}(H_q(D_n S^d)) = \bigoplus_{k+\ell=q} E_{k,\ell}^{\infty}(D_n S^d)$. En combinant avec l'isomorphisme (4.2.3) de la proposition 4.2.20, on a

$$\mathfrak{Bl}((H_q(D_n S^d))_V) \subseteq \bigcup_{k+\ell=q} \mathfrak{Bl} \left((E_{k,\ell}^2(D_n S^d))_V \right).$$

On en déduit l'inclusion souhaitée. \square

NOTATION 4.5.11. Pour un élément μ de l'ensemble $\tilde{J}(d, n)$ défini dans la notation 4.4.20, on définit

$$E_{k, \ell, \mu}^2(D_1 S^d) = H_k \left(\mathfrak{S}_\mu, H_\ell \left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} (D_1 S^{p^i})^{\otimes \mu_i} \right) \right).$$

En comparant avec (4.5.9), on a $E_{k, \ell}^2(D_1 S^d) = \bigoplus_{\mu \in \tilde{J}(d, n)} E_{k, \ell, \mu}^2(D_1 S^d)$.

LEMME 4.5.12. Soient $F \in \mathcal{P}_k$ et W un $\mathbb{k}\mathfrak{S}_d$ -module de dimension finie. On a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux, où le groupe symétrique \mathfrak{S}_d agit sur \otimes^d par permutation des facteurs :

$$(4.5.11) \quad H_n(\mathfrak{S}_d, W \otimes (\otimes^d \circ F)) \simeq H_n(\mathfrak{S}_d, W \otimes \otimes^d) \circ F$$

DÉMONSTRATION. On peut supposer que le foncteur F est homogène de degré e . Par définition, F est un foncteur \mathbb{k} -linéaire de $\Gamma^e \mathcal{V}_k$ dans \mathcal{V}_k . On en déduit un foncteur \mathbb{k} -linéaire $\Gamma^d F : \Gamma^{de} \mathcal{V}_k \rightarrow \Gamma^d \mathcal{V}_k$. Le foncteur \otimes^d peut être vu comme un foncteur \mathbb{k} -linéaire $\otimes^d : \Gamma^d \mathcal{V}_k \rightarrow \mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod}$. Soit $\psi : \mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod} \rightarrow \mathcal{V}_k$ un foncteur \mathbb{k} -linéaire. On obtient deux foncteurs \mathbb{k} -linéaires $\psi \circ (\otimes^d \circ \Gamma^d F)$, $(\psi \circ \otimes^d) \circ \Gamma^d F$ de $\Gamma^{de} \mathcal{V}_k$ dans \mathcal{V}_k et un isomorphisme $\psi \circ (\otimes^d \circ \Gamma^d F) \simeq (\psi \circ \otimes^d) \circ \Gamma^d F$. Pour $\psi = H_n(\mathfrak{S}_d, W \otimes -) : \mathbb{k}\mathfrak{S}_d\text{-mod} \rightarrow \mathcal{V}_k$, il existe donc un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux $H_n(\mathfrak{S}_d, W \otimes (\otimes^d \circ F)) \simeq H_n(\mathfrak{S}_d, W \otimes \otimes^d) \circ F$. \square

LEMME 4.5.13. Le foncteur strictement polynomial $H_k(\mathfrak{S}_d, H_\ell((D_1 S^{p^r})^{\otimes d}))$ est isomorphe à un foncteur de la forme $G^{(r)}$.

DÉMONSTRATION. Par la proposition 4.4.9, on a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux $H_q(D_1 S^{p^r}) \simeq H_q(D_1 S^{p^r})(\mathbb{k}) \otimes I^{(r)}$. On en déduit un isomorphisme \mathfrak{S}_d -équivariant de foncteurs strictement polynomiaux, où le groupe \mathfrak{S}_d agit sur chaque côté de l'isomorphisme par permutation des facteurs :

$$(4.5.12) \quad H_\ell \left((D_1 S^{p^r})^{\otimes d} \right) \simeq H_\ell \left((D_1 S^{p^r})^{\otimes d} \right) (\mathbb{k}) \otimes \otimes^{d(r)}.$$

On note W le $\mathbb{k}\mathfrak{S}_d$ -module $H_\ell \left((D_1 S^{p^r})^{\otimes d} \right) (\mathbb{k})$. Par le lemme 4.5.12, on a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} H_k \left(\mathfrak{S}_d, H_\ell \left((D_1 S^{p^r})^{\otimes d} \right) \right) &\simeq H_k \left(\mathfrak{S}_d, W \otimes \otimes^{d(r)} \right) \\ &\simeq H_k \left(\mathfrak{S}_d, W \otimes (\otimes^d \circ I^{(r)}) \right), \\ &\simeq H_k \left(\mathfrak{S}_d, W \otimes \otimes^d \right)^{(r)} \end{aligned}$$

On en déduit le résultat. \square

PROPOSITION 4.5.14. Soit $\mu \in \tilde{J}(d, n)$. On a une égalité :

$$(4.5.13) \quad \bigcup_{0 \leq k + \ell \leq j} \mathfrak{Bl} \left((E_{k, \ell, \mu}^2(D_n S^d))_V \right) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } j < 2(d - n), \\ \mathfrak{Bl} \left(X_V^{\#\mu_0} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux :

$$(4.5.14) \quad E_{k, \ell; \mu}^2(D_1 S^d) \simeq \bigoplus_{\sum k_i = k, \sum \ell_i = \ell} \underbrace{\bigotimes_{i=0}^{\infty} H_{k_i} \left(\mathfrak{S}_{\mu_i}, H_{\ell_i} \left((D_1 S^{p^i})^{\otimes \mu_i} \right) \right)}_{H(\underline{k}, \underline{\ell})}.$$

De plus, comme l'homologie du complexe $D_1 S^{p^0} = D_1 I$ est concentrée en degré 0 et $H_0(D_1 I) = I$, par le lemme 4.5.13 et le théorème 4.2.23, si $H(\underline{k}, \underline{\ell}) \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}l(H(\underline{k}, \underline{\ell})_V) &= \mathfrak{B}l \left(H_{k_0} \left(\mathfrak{S}_{\mu_0}, H_{\ell_0} \left((D_1 S^{p^0})^{\otimes \mu_0} \right) \right) \right)_V \\ &= \begin{cases} \mathfrak{B}l(H_{k_0}(\mathfrak{S}_{\mu_0}, \otimes^{\mu_0})_V) & \text{si } \ell_0 = 0, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases} \\ &\subseteq \mathfrak{B}l(S_V^{\mu_0}) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$(4.5.15) \quad \bigcup_{0 \leq k + \ell \leq j} \mathfrak{B}l \left((E_{k, \ell; \mu}^2(D_n S^d))_V \right) = \bigcup_{k_0 \in A} \mathfrak{B}l \left((H_{k_0}(D_{\mu_0} S^{\mu_0}))_V \right) \subseteq \mathfrak{B}l(S_V^{\mu_0}).$$

où A est l'ensemble des entiers naturels k_0 tels qu'il existe des entiers naturels $k_1, k_2, \dots, \ell_0, \ell_1, \dots$ pour que $\sum_{i=0}^{\infty} (k_i + \ell_i) \leq j$ et que le foncteur $H(\underline{k}, \underline{\ell})$ soit non-nul. On remarque que $d - n = \sum_{i=0}^{\infty} (p^i - 1) \mu_i$.

- (1) Si $j < 2(d - n)$, alors l'ensemble A est vide. En effet, si $H(\underline{k}, \underline{\ell}) \neq 0$, par la proposition 4.4.9, on a $\ell_i \geq 2\mu_i(p^i - 1)$ pour tout i . On en déduit donc $\sum_{i=0}^{\infty} \ell_i \geq 2(d - n)$.
- (2) Si $j \geq 2(d - n)$, alors $0 \in A$. En effet, pour $k_1 = k_2 = \dots = 0$ et $\ell_i = 2\mu_i(p^i - 1)$, on a que $H(\underline{k}, \underline{\ell})$ est non-nul. Par l'égalité (4.5.6) du théorème 4.5.8 et (4.5.15), on a $\bigcup_{0 \leq k + \ell \leq j} \mathfrak{B}l \left((E_{k, \ell; \mu}^2(D_n S^d))_V \right) = \mathfrak{B}l(S_V^{\mu_0})$.

On obtient donc l'égalité (4.5.13). \square

DÉMONSTRATION DE L'INCLUSION (4.5.7) DU THÉORÈME 4.5.8. D'après le lemme 4.5.10, il suffit de démontrer que les membres à droite des (4.5.7) et (4.5.10) sont égaux. D'autre part, la proposition 4.5.14 induit une égalité

$$(4.5.16) \quad \bigcup_{0 \leq k + \ell \leq j} \mathfrak{B}l \left((E_{k, \ell}^2(D_n S^d))_V \right) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } j < 2(d - n), \\ \bigcup_{\mu \in \tilde{J}(d, n)} \mathfrak{B}l(S_V^{\mu_0}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $\mu \in \tilde{J}(d, n)$, on a $\mu_0 \equiv d \pmod{d}$. Par le corollaire 4.2.22, on a $\bigcup_{\mu \in \tilde{J}(d, n)} \mathfrak{B}l(S_V^{\mu_0}) =$

$\mathfrak{B}l(S_V^{m_{d, n}})$ où $m_{d, n} = \max \{ \mu_0 : \mu \in \tilde{J}(d, n) \}$. On obtient le résultat souhaité. \square

4.5.3. Des critères d'annulation. Par la proposition 4.4.1 et le théorème 4.2.35, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 4.5.15. *Soient $F \in \mathcal{P}_d$ et $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$.*

- (1) (a) *Si $q > 0$ alors $L_q F(-, 0) = 0$.*

- (b) *S'il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{BI}(F)$ tel que $\ell(\lambda) \leq \dim V$ alors $L_*F(V, 0) = 0$.*
- (2) (a) *Si $q > d$ ou $q < d - \text{inj. dim } F$ alors $L_qF(-, 1) = 0$.*
 (b) *S'il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{BI}(F)$ tel que $\lambda_1 \leq \dim V$ alors $L_*F(V, 1) = 0$.*
- (3) (a) *Si $q > 2d$ ou $q < 2d - \text{inj. dim } F$ alors $L_qF(-, 2) = 0$.*
 (b) *S'il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{BI}(F)$ tel que $\ell(\lambda) \leq \dim V$ alors $L_*F(V, 2) = 0$.*

EXEMPLE 4.5.16. (1) On suppose que $d \geq 3, p \geq 3$ et $p \nmid d$. Si $\lambda = (3, 1^{d-3})$, on a :

$$L_*S_\lambda(\mathbb{k}^2, 2) = 0 = L_*S_\lambda(\mathbb{k}, 2).$$

(2) Si $d \geq 4$ et $q < 2d - 2$, on a

$$L_qS_{(d-2,2)}(-, 2) = 0.$$

NOTATION 4.5.17. Soient d, n deux entiers naturels.

- (1) Pour $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{d}{p} \rfloor$, on désigne par j_k le nombre $2d+n(kp + \alpha_p(d - kp))$. On obtient une suite croissante

$$0 < j_0 < j_1 < \dots < j_{\lfloor \frac{d}{p} \rfloor}.$$

- (2) On note $m_{d,n}$ le plus grand entier naturel μ_0 tel qu'il existe des entiers naturels μ_1, μ_2, \dots satisfaisant $d = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i p^i$ et $n = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i$

Le théorème 4.2.35 nous donne un critère d'annulation de l'homologie de ΦF , où Φ est un foncteur de type (\mathcal{J}) en fonction de l'homologie de ΦS^d . D'après la proposition 4.3.11, la dérivation au sens de Dold-Puppe est un foncteur de type (\mathcal{J}) . Enfin, on a calculé les blocs de $L_qS^d(-, n)$ dans le théorème 4.5.7. On obtient donc le théorème suivant.

THÉORÈME 4.5.18. *Soient F un objet de \mathcal{P}_d et V un objet de \mathcal{V}_k . On a $L_qF(V, n+2) = 0$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- (1) $q + \text{inj. dim } F < j_0$,
- (2) $j_k \leq q + \text{inj. dim } F < j_{k+1}$ et il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{BI}(F)$ tel que $|\lambda| \leq d_0 + kp$, et $\begin{cases} \ell(\lambda) \leq \dim V & \text{si } p = 2 \text{ ou } n \text{ est pair} \\ \lambda_1 \leq \dim V & \text{sinon.} \end{cases}$
- (3) $q + \text{inj. dim } F \geq j_{\lfloor \frac{d}{p} \rfloor}$ et il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{BI}(F)$ tel que $\begin{cases} \ell(\lambda) \leq \dim V & \text{si } p = 2 \text{ ou } n \text{ est pair} \\ \lambda_1 \leq \dim V & \text{sinon.} \end{cases}$

EXEMPLE 4.5.19. (1) On suppose que $p = 2$. La partition $(3, 2, 1)$ est un 2-cœur. On obtient :

$$L_*S_{(3,2,1)}(\mathbb{k}, n) = 0 = L_*S_{(3,2,1)}(\mathbb{k}^2, n).$$

- (2) On suppose que $p = 2$ et $d = 3$. On a $j_0 = 2d + n\alpha_p(d) = 2n + 6$, et $j_1 = 2d + n(p + \alpha_p(d - p)) = 3n + 6$. De plus, on a $\text{inj. dim } S_{(2,1)} \leq 1$. Par conséquence, si $q < j_1 - 1 = 3n + 5$, on a $L_qS_{(2,1)}(-, n+2) = 0$.

De même, d'après les théorèmes 4.2.35, 4.5.8 et la proposition 4.3.11, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 4.5.20. *Soient $F \in \mathcal{P}_d$ et V un objet de \mathcal{V}_k . On a trois cas.*

- (1) *Le cas $n = 1$. On a $H_q(D_1 F) = 0$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*
 - (a) $q + \text{inj. dim } F < 2d - 2$,
 - (b) d n'est pas une puissance de p ,
 - (c) $(0) \notin \mathfrak{BI}(F)$.
- (2) *Le cas $n = d$. On a $H_q(D_d F)(V) = 0$ s'il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{BI}(F)$ tel que $\ell(\lambda) \leq \dim V$.*
- (3) *Le cas $1 < n < d$. On a $H_q(D_n F)(V) = 0$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite*
 - (a) $q + \text{inj. dim } F < 2(d - n)$
 - (b) *il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{BI}(F)$ tel que $|\lambda| \leq m_{d,n}$ et $\ell(\lambda) \leq \dim V$.*

EXEMPLE 4.5.21. (1) On suppose que $p = 2$. Si $\lambda = (5, 2, 1)$, on a $\mathfrak{C}\mathfrak{o}_p(\lambda) = (3, 2, 1) \neq 0$. On a donc $H_*(D_1 S_\lambda) = 0$.

(2) On suppose que $p = 3$. Comme $\lambda = (4, 2, 1, 1)$ est un 3-cœur, on a

$$H_*(D_n S_\lambda)(\mathbb{k}^\ell) = 0$$

si $n > 1$ et $\ell \leq 3$.

(3) On suppose que $d \geq 2$. Si $1 < n < d$ et $q < 2(d - n) - 1$ alors

$$H_q(D_n S_{(d-1,1)}) = 0.$$

Bibliographie

- [AB85] Kaan Akin and David A. Buchsbaum. Characteristic-free representation theory of the general linear group. *Adv. in Math.*, 58(2) :149–200, 1985.
- [AB88] Kaan Akin and David A. Buchsbaum. Characteristic-free representation theory of the general linear group. II. Homological considerations. *Adv. in Math.*, 72(2) :171–210, 1988.
- [ABW82] Kaan Akin, David A. Buchsbaum, and Jerzy Weyman. Schur functors and Schur complexes. *Adv. in Math.*, 44(3) :207–278, 1982.
- [ARO97] Maurice Auslander, Idun Reiten, and SmaløSverre O. *Representation theory of Artin algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Corrected reprint of the 1995 original.
- [Bas68] Hyman Bass. *Algebraic K-theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.
- [Bet01] Stanisław Betley. Stable derived functors, the Steenrod algebra and homological algebra in the category of functors. *Fund. Math.*, 168(3) :279–293, 2001.
- [BM11] Lawrence Breen and Roman Mikhailov. Derived functors of nonadditive functors and homotopy theory. *Algebr. Geom. Topol.*, 11(1) :327–415, 2011.
- [Bou67a] A. K. Bousfield. Homogeneous functors and their derived functors. *Mimeographed notes*, 1967.
- [Bou67b] A. K. Bousfield. Operations on derived functors of non-additive functors. *Mimeographed notes*, 1967.
- [Bou81] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique*, volume 864 of *Lecture Notes in Mathematics*. Masson, Paris, 1981. Algèbre. Chapitres 4 à 7. [Algebra. Chapters 4–7].
- [Car55] *Séminaire Henri Cartan de l’Ecole Normale Supérieure, 1954/1955. Algèbres d’Eilenberg-MacLane et homotopie*. Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris, 1955.
- [Cha05] Marcin Chałupnik. Extensions of strict polynomial functors. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(5) :773–792, 2005.
- [Cha08] Marcin Chałupnik. Koszul duality and extensions of exponential functors. *Adv. Math.*, 218(3) :969–982, 2008.
- [Cha11] Marcin Chałupnik. Derived kan extension for strict polynomial functors. *arXiv :1106.3362v2*, 2011.
- [CHN10] Frederick R. Cohen, David J. Hemmer, and Daniel K. Nakano. On the cohomology of Young modules for the symmetric group. *Adv. Math.*, 224(4) :1419–1461, 2010.
- [Day70] Brian Day. On closed categories of functors. In *Reports of the Midwest Category Seminar, IV*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 137, pages 1–38. Springer, Berlin, 1970.
- [dCP76] C. de Concini and C. Procesi. A characteristic free approach to invariant theory. *Advances in Math.*, 21(3) :330–354, 1976.
- [DG70] Michel Demazure and Pierre Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*. Masson & Cie, Éditeur, Paris; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970. Avec un appendice it Corps de classes local par Michiel Hazewinkel.
- [Dol60] Albrecht Dold. Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe. *Math. Ann.*, 140 :278–298, 1960.

- [Don86] S. Donkin. On Schur algebras and related algebras. I. *J. Algebra*, 104(2) :310–328, 1986.
- [Don87] Stephen Donkin. On Schur algebras and related algebras. II. *J. Algebra*, 111(2) :354–364, 1987.
- [DP61] Albrecht Dold and Dieter Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 11 :201–312, 1961.
- [EML54] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.
- [FF08] Vincent Franjou and Eric M. Friedlander. Cohomology of bifunctors. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 97(2) :514–544, 2008.
- [FFSS99] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :663–728, 1999.
- [FS97] Eric M. Friedlander and Andrei Suslin. Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 127(2) :209–270, 1997.
- [Gre07] J. A. Green. *Polynomial representations of GL_n* , volume 830 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, augmented edition, 2007. With an appendix on Schensted correspondence and Littelmann paths by K. Erdmann, Green and M. Schocker.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Jan87] Jens Carsten Jantzen. *Representations of algebraic groups*, volume 131 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1987.
- [Jan03] Jens Carsten Jantzen. *Representations of algebraic groups*, volume 107 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2003.
- [JK81] Gordon James and Adalbert Kerber. *The representation theory of the symmetric group*, volume 16 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981. With a foreword by P. M. Cohn, With an introduction by Gilbert de B. Robinson.
- [JM98] Brenda Johnson and Randy McCarthy. Linearization, Dold-Puppe stabilization, and Mac Lane’s Q -construction. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(4) :1555–1593, 1998.
- [JM04] B. Johnson and R. McCarthy. Deriving calculus with cotriples. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(2) :757–803 (electronic), 2004.
- [JM08] Brenda Johnson and Randy McCarthy. Taylor towers of symmetric and exterior powers. *Fund. Math.*, 201(3) :197–216, 2008.
- [Kra13] Henning Krause. Koszul, Ringel and Serre duality for strict polynomial functors. *Compos. Math.*, 149(6) :996–1018, 2013.
- [KS06] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Kuh94] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I. *Amer. J. Math.*, 116(2) :327–360, 1994.
- [Mar93] Stuart Martin. *Schur algebras and representation theory*, volume 112 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [Mit72] Barry Mitchell. Rings with several objects. *Advances in Math.*, 8 :1–161, 1972.
- [ML95] Saunders Mac Lane. *Homology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1975 edition.
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [Nee01] Amnon Neeman. *Triangulated categories*, volume 148 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [Pir03] Teimuraz Pirashvili. Introduction to functor homology. In *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, volume 16 of *Panor. Synthèses*, pages 1–26. Soc. Math. France, Paris, 2003.

- [Sch73a] Issai Schur. *Gesammelte Abhandlungen. Band I*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. Herausgegeben von Alfred Brauer und Hans Rohrbach.
- [Sch73b] Issai Schur. *Gesammelte Abhandlungen. Band III*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. Herausgegeben von Alfred Brauer und Hans Rohrbach.
- [SFB97] Andrei Suslin, Eric M. Friedlander, and Christopher P. Bendel. Infinitesimal 1-parameter subgroups and cohomology. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(3) :693–728, 1997.
- [Tot97] Burt Totaro. Projective resolutions of representations of $GL(n)$. *J. Reine Angew. Math.*, 482 :1–13, 1997.
- [Tou10] Antoine Touzé. Cohomology of classical algebraic groups from the functorial viewpoint. *Adv. Math.*, 225(1) :33–68, 2010.
- [Tou12] Antoine Touzé. Troesch complexes and extensions of strict polynomial functors. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 45(1) :53–99, 2012.
- [Tou13a] A. Touzé. A construction of the universal classes for algebraic groups with the twisting spectral sequence. *Transform. Groups*, 18(2) :539–556, 2013.
- [Tou13b] Antoine Touzé. A functorial control of integral torsion in homology. *Preprint*, arXiv :1310.2877 [math.RT], 2013.
- [Tou13c] Antoine Touzé. Ringel duality and derivatives of non-additive functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 217(9) :1642–1673, 2013.
- [Tou14] Antoine Touzé. Bar complexes and extensions of classical exponential functors. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 64, 2014.
- [Tro05] Alain Troesch. Une résolution injective des puissances symétriques tordues. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55(5) :1587–1634, 2005.
- [vdK13] Wilberd van der Kallen. Nantes lectures on bifunctors and CFG. *arXiv :1208.3097v3 [math.RT]*, 2013.
- [Ver96] Jean-Louis Verdier. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque*, (239) :xii+253 pp. (1997), 1996. With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Wey03] Jerzy Weyman. *Cohomology of vector bundles and syzygies*, volume 149 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.