HAL
open science

Un modèle de particule à spin de masse nulle dans le champ de gravitation

Pierre Saturnini

To cite this version:

Pierre Saturnini. Un modèle de particule à spin de masse nulle dans le champ de gravitation. Physique des Hautes Energies - Théorie [hep-th]. Université de Provence, 1976. Français. NNT : . tel-01344863

HAL Id: tel-01344863

https://hal.science/tel-01344863v1

Submitted on 12 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TROISIEME CYCLE

D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

THESE DE TROISIEME CYCLE

présentée

A L'UNIVERSITE DE PROVENCE, CENTRE SAINT-CHARLES

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN PHYSIQUE THEORIQUE

par

Pierre SATURNINI

(Maître-ès-Sciences)

UN MODELE DE PARTICULE A SPIN DE MASSE NULLE DANS LE CHAMP DE GRAVITATION

Soutenue à Marseille, le 18 Mars 1976

JURY	M.	J.M. SOURIAU	Président
	MM.	P. CASAL	Examinateurs
		H.P. KÜNZLE	
	Mme	M. SIRUGUE-COLLIN.....	

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Monsieur le Professeur SOURIAU qui m'a accueilli dans son équipe de recherche et a accepté de diriger ce travail.

Je remercie également Messieurs les Professeurs P. CASAL et H.P. KÜNZLE ainsi que Madame le Professeur M. SIRUGUE qui ont accepté de faire partie du Jury.

Je n'oublie pas mes camarades de l'équipe, G. BERENGUIER, G. BIGOT, P. DONATO, Ch. DUVAL, J. ELHADAD et H.H. FLICHE, dont le soutien ne s'est jamais démenti, ainsi que les chercheurs et le personnel du C.P.T.

Je ne saurais omettre enfin de remercier Mlle M. COHEN SOLAL qui s'est acquittée avec sa compétence coutumière du travail de frappe du manuscrit.

– TABLE DES MATIERES –

Pages

I - INTRODUCTION 1

II - RESULTATS PRELIMINAIRES

1 - Le principe de relativité 2

2 - Hyperespace. Principes de la mécanique 3

3 - Équations universelles des particules 6

4 - Lois de conservation 7

III - MODELE DE PARTICULE ELEMENTAIRE DE MASSE NULLE

1 - Hélicité. Spin scalaire 9

2 - Les équations du mouvement 12

3 - Homogénéité en s de degré zéro des équations du mouvement 14

4 - Existence et unicité de la solution 15

5 - Condition $\mathrm{R(S)(S)} \neq 0$ 15

6 - Formalisme symplectique 16

7 - Dimension de l'espace des mouvements 18

8 - Vitesse du photon 18

IV - INTEGRATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

A - Espaces à courbure constante 20

B - Champ de Schwarzschild

1°) Le $\mathrm{d}s^2$ du champ extérieur 23

2°) Structure spatio-temporelle 26

3°) Photons 29

APPENDICE 42

BIBLIOGRAPHIE 49

ANNEXE 50

I - INTRODUCTION

La formulation des Principes Variationnels ne permet pas de décrire des particules[1] douées de propriétés dipolaires, et, en particulier, elle ne fournit pas de modèle de particule élémentaire à spin.

On admet généralement que le mouvement d'une particule dans le champ de gravitation s'obtient en utilisant le principe des géodésiques. Les particules de masse non nulle, soumises à l'influence du champ de gravitation décrivent des géodésiques du genre temps de l'univers. On postule d'autre part que la ligne d'univers d'une particule de masse nulle est une géodésique isotrope.

Ainsi, on néglige le spin des particules élémentaires pour établir les équations de leurs mouvements, et il n'y a pas de distinction entre des particules de même masse et de spins différents (photon et neutrino, par exemple).

Cependant la description - non quantique - d'une particule à spin dans le champ de gravitation peut se faire à l'aide des équations fournies par le formalisme symplectique connaissant la forme symplectique pour une particule élémentaire en relativité restreinte ([12]) on induit l'expression de la forme symplectique en relativité générale pour cette même particule ([4]). Le modèle de particule ainsi obtenu est plus complet, mais ne fait pas apparaître, dans le cas d'une particule de masse non nulle, d'effet gravitationnel nouveau qui soit mesurable dans les conditions usuelles. Cette procédure n'est pas utilisable dans le cas d'une particule de masse nulle.

Une seconde méthode consiste à déduire les équations du mouvement d'une particule à spin à partir d'équations universelles qui sont obtenues par une formulation nouvelle du principe de relativité et des principes fondamentaux de la mécanique ([3]). Elle permet d'étendre la description à des particules à spin qui possèdent une charge électrique et un moment magnétique en traitant simultanément le champ de gravitation et le champ électromagnétique. Il est d'autre part remarquable qu'elle conduise à un formalisme symplectique équivalent au premier, et que le modèle obtenu se prête ainsi à la pré-quantification ([3],[5]).

1. Nous appelons "particule" tout objet de dimensions suffisamment petites et dont on pourra négliger l'influence en tant que source du champ de gravitation.

C'est cette seconde méthode que nous allons utiliser pour construire un modèle de particule élémentaire à spin, de masse nulle, en relativité générale.

La première partie est consacrée à un rappel du formalisme utilisé pour construire ce modèle.

Dans la deuxième partie, nous donnons les équations du mouvement d'une particule élémentaire de masse nulle, et nous traitons le cas simple des mouvements de cette particule dans un espace de De Sitter.

Enfin, dans la troisième partie, nous étudions le cas de l'univers de Schwarzschild, important du point de vue physique, et nous donnons une intégration numérique des équations du mouvement.

II - RESULTATS PRELIMINAIRES

Cette partie reprend les résultats de la référence ([3]) relatifs au champ de gravitation. On se reportera par conséquent à la référence précitée pour les démonstrations.

1 - Le principe de relativité

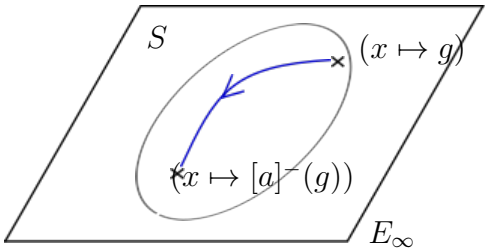
Soit $\mathcal{V}_4$ la variété "univers" de classe C^∞ et de dimension quatre ; la gravitation y est décrite par la donnée d'un champ $x \mapsto g$ différentiable, de tenseurs covariants d'ordre deux, symétriques, réguliers et de signature $+---$. Ce champ définit sur $\mathcal{V}_4$ une géométrie riemannienne hyperbolique normale. Soit S l'ensemble des champs de ce type : c'est une partie de l'ensemble E_∞ des champs de tenseurs covariants d'ordre deux et symétriques de $\mathcal{V}_4$. E_∞ est un espace vectoriel de dimension infinie.

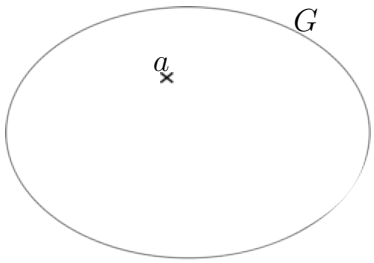
On considère par ailleurs le groupe G des difféomorphismes [2] de $\mathcal{V}_4$ à support compact, i.e., qui se réduisent à l'identité en dehors d'un compact de $\mathcal{V}_4$. L'univers $\mathcal{V}_4$ est supposé connexe et non compact.

2. difféomorphisme : application d'un ouvert de $\mathcal{V}_4$ sur un ouvert de $\mathcal{V}_4$ régulière et différentiable ainsi que son inverse.

Il est facile de définir, par image réciproque, l'action des éléments du groupe G sur les champs $x \mapsto g$. D'autre part, l'image d'un élément de S par un élément de G est encore un élément de S.

Le principe de relativité s'énonce en disant que l'action des éléments du groupe G est inobservable.





2 - Hyper-espace. Principes de la mécanique

L'énoncé précédent du principe de relativité conduit à prendre en considération l'ensemble $H = S/G$ des orbites de G dans S, et qui est appelé "hyper-espace" : il s'interprète comme l'espace des géométries riemanniennes hyperboliques normales de $\mathcal{V}_4$.

Le champ $x \mapsto g$ de $\mathcal{V}_4$ est représenté par un point $p \in S \subset E_\infty$. Soit $x \mapsto \delta g$ une variation à support compact du champ : elle correspond à une variation δp du point p. Comme $p \in E_\infty$ qui est un espace vectoriel, δp est aussi un élément de E_∞.

On définit la projection $\delta p \mapsto \delta\Gamma$ de E_∞ sur l'espace vectoriel tangent à H en supposant que $\delta p \mapsto \delta\Gamma$ est une application linéaire dont le noyau est constitué par l'ensemble des vecteurs tangents à l'orbite du groupe G au point p.

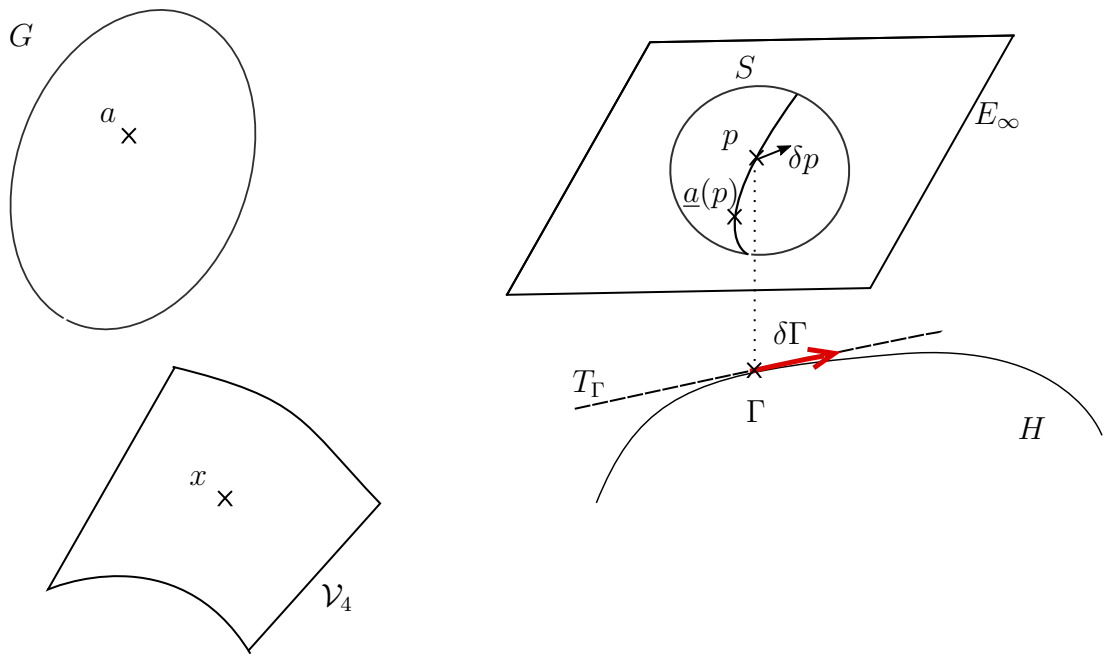
Or l'ensemble $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs à support compact de $\mathcal{V}_4$ joue le rôle d'algèbre de Lie du groupe G - de dimension infinie -, et les vecteurs tangents à l'orbite de G en p sont obtenus par l'action des éléments de $\mathcal{G}$. Soit $x \mapsto \delta x = \mathrm{V}$ un élément de $\mathcal{G}$: son action sur un champ de tenseurs est la dérivée de Lie de ce champ de tenseurs.

En choisissant une carte de $\mathcal{V}_4$, on aura :

$$[\delta_{\mathrm{L}} g]_{\mu\nu} = \widehat{\partial}_\mu \mathrm{V}_\nu + \widehat{\partial}_\nu \mathrm{V}_\mu \tag{1}$$

où le signe ˆ indique la dérivation covariante, et V_μ sont les composantes covariantes du vecteur V dans la carte choisie.

Un élément de l'espace vectoriel tangent à H est donc une variation $x \mapsto \delta g$ à support compact du champ $x \mapsto g$, modulo les variations qui sont des dérivées de Lie pour des champs de vecteurs à support compact. Ainsi, l'espace vectoriel tangent à l'hyperespace H est bien défini, en tant qu'espace vectoriel quotient.



T_Γ est l'espace vectoriel tangent à H au point Γ.

L'espace vectoriel cotangent T^*_Γ en un point Γ de l'hyperespace H se définit par dualité c'est l'ensemble des fonctionnelles linéaires sur les éléments de l'espace vectoriel T_Γ tangent à H en Γ.

Il est utile de calculer une fonctionnelle $\mu \in T^*_\Gamma$ à l'aide d'une fonctionnelle M sur les $p \in E_\infty$, qui vérifie

$$M(\delta p) = \mu(\delta\Gamma) \tag{2}$$

$\delta\Gamma$ étant l'image de δp par la projection $\delta p \mapsto \delta\Gamma$

La fonctionnelle M doit évidemment avoir la propriété

$$M(\delta p) = 0 \text{ pour } \delta\Gamma = 0 \tag{3}$$

C'est-à-dire qu'elle doit s'annuler sur l'ensemble des vecteurs tangents à l'orbite de G en p, qui sont précisément tous les δp correspondant à des $\delta g_{\mu\nu}$ du type (1).

Or, dans le cas des milieux continus, les principes variationnels notamment permettent de faire apparaître un champ de tenseurs contravariants d'ordre deux, symétriques, qui caractérise entièrement les propriétés dynamiques de la matière : c'est le champ $x \mapsto \mathrm{T}^{\mu\nu}$ de tenseurs impulsion-énergie.

Les équations de la mécanique sont, dans ce cas, équivalentes à

$$\widehat{\partial}_\mu \mathrm{T}^{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

équations que l'on écrit aussi

$$\mathrm{div}\ \mathrm{T} = 0 \tag{5}$$

où "div" désigne l'opérateur de divergence riemannienne.
Si l'on choisit pour M la fonctionnelle

$$M(x \mapsto \delta g_{\mu\nu}) = \int_{\mathcal{V}_4} \frac{1}{2} \mathrm{T}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \mathrm{vol} \tag{6}$$

où vol est l'élément de volume riemannien de $\mathcal{V}_4$, on montre facilement que le principe de relativité sous sa forme (3) appliqué à la fonctionnelle définie par (6) est équivalent à (4), et donc aux principes fondamentaux de la dynamique des milieux continus.

Ainsi, la répartition continue de matière dans $\mathcal{V}_4$, caractérisée par le champ $x \mapsto \mathrm{T}^{\mu\nu}$ est mise en correspondance biunivoque avec un élément μ du cotangent de l'hyper-espace H. On généralise ce choix aux cas où la matière est "condensée" sur une sous-variété $\mathcal{M}$ de $\mathcal{V}_4$; mais la fonctionnelle M ne sera plus complètement continue : ce sera un tenseur distribution ou tenseur-mesure

$$\mu(\delta\Gamma) = M(x \mapsto \delta g_{\mu\nu}) = \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\mathrm{vol}_{\mathcal{M}} \tag{7}$$

où les $\Theta^{\mu\nu}$ sont des tenseurs de définis sur $\mathcal{M}$ seulement, et $\mathrm{vol}_{\mathcal{M}}$ est l'élément de volume riemannien de $\mathcal{M}$.

3 - Équations universelles des particules

On suppose en particulier que pour une particule, la matière est condensée sur une ligne d'univers Λ ; on obtient la description d'une particule à moment dipolaire en prenant une distribution d'ordre un :

$$\mu(\delta\Gamma) = M(x \mapsto \delta g_{\mu\nu}) = \int_{\Lambda} \left(\frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Phi^{\mu\nu\rho}\hat{\partial}_{\mu}\delta g_{\mu\nu}\right) \mathrm{d}\tau \tag{8}$$

où τ désigne un paramètre quelconque de Λ.
En écrivant le principe de relativité sous sa forme (3) on trouve que :
en chaque point x de la ligne d'univers Λ, il existe un vecteur P et un tenseur antisymétrique S tels que

$$\begin{cases} 2\Theta^{\mu\nu} = \mathrm{P}^{\mu}\dfrac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} + \mathrm{P}^{\nu}\dfrac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} \\ 2\Phi^{\mu\nu\rho} = \mathrm{S}^{\mu\nu}\dfrac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}\tau} + \mathrm{S}^{\mu\rho}\dfrac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} \end{cases} \tag{9}$$

et qui vérifient les équations universelles [3]

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{\mathrm{d}}\mathrm{P}}{\mathrm{d}\tau} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{S})\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\hat{\mathrm{d}}\mathrm{S}}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{P}\overline{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}} - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\overline{\mathrm{P}} \end{cases} \tag{10}$$

L'homogénéité en $\mathrm{d}\tau$ de ces équations ainsi que celle de l'expression de $M(x \mapsto \delta g_{\mu\nu})$ après la substitution (9), montrent que P et S ne dépendent pas du paramétrage de Λ. On a donc défini des grandeurs physiques qui s'interprètent respectivement comme le vecteur impulsion et le tenseur de spin de la particule.

On peut remarquer que le système d'équations (10) n'est pas déterministe (car il y a moins d'équations que de variables) on doit lui adjoindre des liaisons décrivant le type de particule considérée.

4 - Lois de conservation

Supposons que le champ de gravitation possède un groupe de symétrie G_0 qui agit différentiablement sur $\mathcal{V}_4$. Les éléments obtenus par l'action de l'algèbre de Lie de G_0 sont des champs de vecteurs ayant pour support $\mathcal{V}_4$, tels que la dérivée de Lie correspondante du champ $x \mapsto g$ soit nulle :

$$[\delta_{\mathrm{L}} g]_{\mu\nu} = \widehat{\partial}_\mu \mathrm{V}_\nu + \widehat{\partial}_\nu \mathrm{V}_\mu = 0 \tag{11}$$

Cette équation (11) montre que ces champs $x \mapsto \mathrm{V}$ sont des champs de vecteurs de Killing. On peut faire deux hypothèses supplémentaires, qui n'apportent pas de restriction physique :

3. La barre désigne la transposition dans l'espace euclidien T_x tangent à $\mathcal{V}_4$ en x, dont la métrique est définie par le tenseur g.
D'autre part, on désignera par une même lettre les tenseurs obtenus par "élévation" ou "abaissement" d'indices. Cette identification n'est pas gênante ici, car la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle ($\hat{\mathrm{d}}g = 0$) par définition de la connexion riemannienne. Cela permettra, en particulier, de considérer les tenseurs du 2e ordre tour à tour comme des tenseurs covariants, mixtes (identifiés alors aux opérateurs linéaires sur T_x) et contravariants.
$\mathrm{R}^\lambda_{\mu\nu,\rho}$ étant le tenseur de courbure de $\mathcal{V}_4$ la notation $\mathrm{R}(\mathrm{S})$ désigne le tenseur $\mathrm{R}(\mathrm{S})^\lambda_\rho = \mathrm{R}^\lambda_{\mu\nu,\rho}\mathrm{S}^{\mu\nu}$.

H1. On peut définir, sur l'univers $\mathcal{V}_4$, une variable temporelle $t \in \mathbb{R}$ qui prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, et dont le gradient est du genre temps ; cette hypothèse permet de définir globalement le passé et le futur.

H2. La matière étudiée est bornée dans l'espace.

Sous ces conditions, l'intersection du support de la matière avec un intervalle de temps quelconque est un compact de $\mathcal{V}_4$.

On démontre alors que la quantité

$$p = \mathrm{P}^{\mu}\mathrm{V}_{\mu} + \frac{1}{2}\mathrm{S}^{\mu\nu}\widehat{\partial}_{\mu}\mathrm{V}_{\nu} \tag{12}$$

est une intégrale première du système d'équations universelles.

On peut remarquer que les quantités conservées, dans le cas où les équations du mouvement sont celles des géodésiques, sont

$$p_g = \mathrm{P}^{\mu}\mathrm{V}_{\mu} \tag{13}$$

Elles correspondent aux quantités (12) dans lesquelles on a fait $\mathrm{S} = 0$

III - MODELE DE PARTICULE ELEMENTAIRE DE MASSE NULLE

À partir du système d'équations universelles

$$\text{(E.U.)} \qquad \begin{cases} \hat{\mathrm{d}}\mathrm{P} = -\frac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{S})\,\mathrm{d}x \\ \hat{\mathrm{d}}\mathrm{S} = \mathrm{P}\,\overline{\mathrm{d}x} - \mathrm{d}x\overline{\mathrm{P}} \end{cases}$$

nous allons construire un modèle de particule élémentaire de masse nulle.
Dans les équations (E.U.) d est mis pour $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$ où τ est un paramètre quelconque de la trajectoire.

Nous traduirons tout d'abord le caractère élémentaire de la particule étudiée en postulant que sa description ne nécessite pas d'autres variables que celles qui interviennent dans le système (E.U.).

Nous choisissons d'autre part deux liaisons, classiques dans l'espace-temps de Minkowski pour décrire une particule de masse nulle :

(L1) $\mathrm{P}^{\mu}\mathrm{P}_{\mu} = 0$, P de genre futur en tout point x de la trajectoire, ce qui est l'expression habituelle de la nullité de la masse.

(L2) $\mathrm{S}^{\mu\nu}\mathrm{P}_{\nu} = 0$, $\mathrm{S} \neq 0$ en tout point x de la trajectoire.

La compatibilité des liaisons (L1) et (L2) avec le système (E.U.) sera examinée plus loin.

1°) Hélicité et spin scalaire

Soit T_x l'espace vectoriel tangent à la variété-univers $\mathcal{V}_4$ au point x : c'est un espace vectoriel hyperbolique normal de dimension quatre. Le tenseur S peut être identifié à un opérateur linéaire antihermitien sur T_x, et cet opérateur est de rang pair. Comme $\ker(\mathrm{S})$ contient au moins un vecteur d'après (L2) et que S n'est pas nul, c'est un opérateur de rang 2. D'où

$$\dim(\ker(\mathrm{S})) = \dim(\mathrm{val}(\mathrm{S})) = 2$$

$\ker(\mathrm{S})$ contient un vecteur isotrope et, T_x étant hyperbolique normal, $\ker(\mathrm{S})$ est aussi un espace vectoriel hyperbolique normal de dimension deux. $\mathrm{val}(\mathrm{S})$ est donc un espace vectoriel euclidien négatif de dimension deux.

On a

$$T_x = \mathrm{val}(\mathrm{S}) \cup \ker(\mathrm{S}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{val}(\mathrm{S}) \cap \ker(\mathrm{S}) = \{0\} \tag{14}$$

En appelant $\star(\mathrm{S})$ l'adjoint de S, on a

$$\mathrm{pf}(\mathrm{S}) = \mathrm{S}.\star(\mathrm{S}) = \star(\mathrm{S}).\mathrm{S} = \pm\sqrt{|\det(\mathrm{S})|} = 0 \tag{15}$$

puisque S n'est pas régulier[4].

La relation (15) montre que $\mathrm{val}(\star(\mathrm{S})) \subseteq \ker(\mathrm{S})$. Comme $\ker(\mathrm{S})$ est aussi un opérateur antihermitien de rang 2, on a, plus précisément

$$\mathrm{val}(\star(\mathrm{S})) = \ker(\mathrm{S}) \qquad \text{et} \qquad \ker(\star(\mathrm{S})) = \mathrm{val}(\mathrm{S}) \tag{16}$$

Puisque $\mathrm{val}(\star(\mathrm{S})) = \ker(\mathrm{S})$ est un espace vectoriel hyperbolique normal de dimension deux qui contient le vecteur isotrope P, on peut choisir un second vecteur isotrope J tel que $\mathrm{P}^\mu \mathrm{J}_\mu \neq 0$ et que $[\mathrm{P}, \mathrm{J}]$ soit une base de $\mathrm{val}(\star(\mathrm{S}))$.
Dans ce cas, $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tels que

$$\star(\mathrm{S})\mathrm{P} = \lambda \mathrm{P} + \mu \mathrm{J}$$

Comme $\star(\mathrm{S})$ est anti-hermitien,

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{P}} \star(\mathrm{S})\mathrm{P} = \lambda \overline{\mathrm{P}}\mathrm{P} + \mu \overline{\mathrm{P}}\mathrm{J} &= 0 \\ \mu \overline{\mathrm{P}}\mathrm{J} &= 0 \qquad \text{avec} \qquad \overline{\mathrm{P}}\mathrm{J} \neq 0 \end{aligned}$$

4. l'opérateur scalaire $\mathrm{S}.\star(\mathrm{S}) = \star(\mathrm{S}).\mathrm{S} = \mathrm{pf}(\mathrm{S})$ s'appelle "pfaffien de S".

d'où $\mu = 0$

$$\star(\mathrm{S})\mathrm{P} = \lambda\mathrm{P} \tag{17}$$

On pose $\chi = \text{signe}(\lambda) = \pm 1$
et $s = |\lambda|$.

Nous appellerons respectivement χ et s l'hélicité et le spin scalaire.
D'autre part, $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2) = \mathrm{Tr}\,(\star(\mathrm{S})^2)$,
et on peut écrire $\star(\mathrm{S}) = \alpha(\mathrm{P}\overline{\mathrm{J}} - \mathrm{J}\overline{\mathrm{P}})$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2) &= -\alpha\mathrm{Tr}\,\left(\star(\mathrm{S})(\mathrm{P}\overline{\mathrm{J}} - \mathrm{J}\overline{\mathrm{P}})\right) = -\alpha\left\{\overline{\mathrm{J}}\star(\mathrm{S})\mathrm{P} - \overline{\mathrm{P}}\star(\mathrm{S})\mathrm{J}\right\} \\ &= -\alpha\left\{\overline{\mathrm{J}}\star(\mathrm{S})\mathrm{P} + \overline{\star(\mathrm{S})\mathrm{P}}\mathrm{J}\right\}\end{aligned}$$

en utilisant (17)

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2) = -2\alpha\lambda\overline{\mathrm{J}}\mathrm{P}$$

or $\star(\mathrm{S})\mathrm{P} = \lambda\mathrm{P} = \alpha(\mathrm{P}\overline{\mathrm{J}} - \mathrm{J}\overline{\mathrm{P}})\mathrm{P}$

$\Rightarrow \alpha\overline{\mathrm{J}}\mathrm{P} = \lambda$

d'où

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2) = -2\lambda^2 = -2s^2$$

On calcule, en utilisant la seconde équation du système (E.U.) et la liaison (L2)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2)\right) &= 2\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}\,\hat{\mathrm{d}}\mathrm{S}) \\ &= 2\mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{S}(\mathrm{P}\overline{\mathrm{d}x} - dx\overline{\mathrm{P}})\right) = 2(\overline{\mathrm{d}x}\mathrm{SP} + \overline{\mathrm{SP}}dx) = 0\end{aligned}$$

Le spin scalaire s est donc une constante du mouvement d'une particule de masse nulle. Nous définirons un <u>modèle</u> de particule de masse nulle en ajoutant au système d'équations (E.U.)

et aux liaisons (L1) et (L2) la donnée d'une valeur du spin scalaire s, qui sera la même pour tous les mouvements de la particule ; on rajoute donc la liaison

(L3) $\quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2) = -2s^2, \quad s =$ constante donnée.

On obtiendra ainsi un modèle de photon en choisissant $s = \hbar$, ou un modèle de neutrino en choisissant $s = \dfrac{\hbar}{2}$, etc.

2°) Les équations du mouvement

En différentiant la liaison (L2), on obtient

$\hat{\mathrm{d}}\mathrm{SP} + \mathrm{S}\,\hat{\mathrm{d}}\mathrm{P} = 0$; en utilisant les expressions de $\hat{\mathrm{d}}\mathrm{S}$ et $\hat{\mathrm{d}}\mathrm{P}$ données par le système (E.U.) et la liaison (L1), on a

$$\left(\overline{\mathrm{d}x}\mathrm{P}\right)\mathrm{P} - \frac{1}{2}\mathrm{SR(S)}\,\mathrm{d}x = 0 \tag{18}$$

On multiplie à gauche par S, et, sachant que $\mathrm{SP} = 0$, on obtient
$\mathrm{S}^2\mathrm{R(S)}\,\mathrm{d}x = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{R(S)}\,\mathrm{d}x \in \ker\,(\mathrm{S}^2)$; d'où

$$\mathrm{SR(S)}\,\mathrm{d}x \in \ker\,(\mathrm{S}) \cap \mathrm{val}\,(\mathrm{S}) = \{0\}$$

$$\mathrm{SR(S)}\,\mathrm{d}x = 0 \tag{19}$$

En utilisant (19) et (18), on obtient, puisque $\mathrm{P} \neq 0$

$$\overline{\mathrm{P}}\,\mathrm{d}x = 0 \tag{20}$$

puisque $\mathrm{d}x \in \mathrm{T}_x = \ker\,(\mathrm{S}) \cup \mathrm{val(S)}$, on peut écrire

$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{K} \in \mathrm{T}_x$, tels que

$$\mathrm{d}x = \lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{J} + \mathrm{SK}$$

où $[\mathrm{P}, \mathrm{J}]$ est la base de $\ker(\mathrm{S})$ utilisée précédemment.
On multiplie cette expression à gauche par le covecteur $\overline{\mathrm{P}}$:

$$\overline{\mathrm{P}}\,\mathrm{d}x = \lambda\overline{\mathrm{P}}\mathrm{P} + \mu\overline{\mathrm{P}}\mathrm{J} + \overline{\mathrm{P}}\mathrm{SK}$$

En utilisant (20), (L1), (L2) - car $\overline{\mathrm{P}}\mathrm{S} = -\overline{\mathrm{P}}.\overline{\mathrm{S}} = -\overline{\mathrm{SP}}$ - et le fait que $\overline{\mathrm{P}}\mathrm{J} \neq 0$, on obtient $\mu = 0$, d'où

$$\mathrm{d}x = \lambda\mathrm{P} + \mathrm{SK} \tag{21}$$

En multipliant (21) à gauche par l'opérateur linéaire $\mathrm{SR(S)}$, on obtient, en utilisant (19)

$$0 = \lambda\mathrm{SR(S)P} + \mathrm{SR(S)SK} \tag{22}$$

Les opérateurs S et $\mathrm{R(S)}$ étant anti-hermitiens, on peut utiliser la relation (voir [5], p. 45)

$$\Omega\mathrm{F}\Omega = \mathrm{pf}\,(\Omega) \star (\mathrm{F}) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\Omega\mathrm{F})\Omega \tag{23}$$

qui est valable $\forall\Omega, \mathrm{F} \in \mathcal{L}\,(\mathrm{T}_x)$ tels que $\overline{\Omega} + \Omega = 0$, et $\overline{\mathrm{F}} + \mathrm{F} = 0$.
Ici

$$\mathrm{SR(S)S} = \mathrm{pf}\,(\mathrm{S}) \star (\mathrm{R(S)}) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\big(\mathrm{SR(S)}\big))\mathrm{S}$$

avec $\mathrm{pf}\,(\mathrm{S}) = 0$

$$\mathrm{Tr}\,\big(\mathrm{SR(S)}\big) = -\mathrm{R}_{\lambda\mu,\nu\rho}\mathrm{S}^{\lambda\mu}\mathrm{S}^{\nu\rho} = -\mathrm{R(S)(S)}$$

en reportant dans (22),

$$0 = \lambda\mathrm{SR(S)P} - \frac{1}{2}\mathrm{R(S)(S)}.\mathrm{SK}$$

d' où

$$\mathrm{SK} = 2\lambda \frac{\mathrm{SR(S)P}}{\mathrm{R(S)(S)}} \text{ si } \mathrm{R(S)(S)} \neq 0.$$

d'où l'expression de $\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}x = \mathrm{P} + 2\frac{\mathrm{SR(S)P}}{\mathrm{R(S)(S)}} \tag{24}$$

en choisissant un paramètre τ tel que $\lambda = 1$.
On reporte cette expression (24) dans le système (E.U.) ; en utilisant à nouveau la relation (23) et la relation $\star(\mathrm{S})\mathrm{P} = \chi s \mathrm{P}$, on a

$$\hat{\mathrm{d}}\mathrm{P} = -\chi s \frac{\mathrm{pf}\,(\mathrm{R(S)})}{\mathrm{R(S)(S)}}\mathrm{P} \tag{25}$$

$$\hat{\mathrm{d}}\mathrm{S} = \frac{2}{\mathrm{R(S)(S)}}\left\{\mathrm{P}.\overline{\mathrm{SR(S)P}} - \mathrm{R(S)P}.\overline{\mathrm{P}}\right\} \tag{26}$$

3°) Homogénéité en s, de degré zéro, des équations du mouvement

Si l'on effectue le changement de variables

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{S} & \mapsto & \Omega = \dfrac{\mathrm{S}}{s} \Rightarrow \mathrm{Tr}\left(\Omega^2\right) = -2 \\ \mathrm{P} & \mapsto & \dfrac{\mathrm{P}}{s} \\ \tau & \mapsto & \tau.s \end{array}$$

on obtient, au lieu du système d'équations (24), (25) et (26), le système

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & = & \mathrm{P} + 2\dfrac{\Omega\mathrm{R}(\Omega)P}{\mathrm{R}(\Omega)(\Omega)} \\ \dfrac{\hat{\mathrm{d}}\mathrm{P}}{\mathrm{d}\tau} & = & -\chi\dfrac{\mathrm{pf}\,(\mathrm{R}(\Omega))}{\mathrm{R}(\Omega)(\Omega)}\mathrm{P} \\ \dfrac{\hat{\mathrm{d}}\Omega}{\mathrm{d}\tau} & = & \dfrac{2}{\mathrm{R}(\Omega)(\Omega)}\left\{\mathrm{P}.\overline{\Omega\mathrm{R}(\Omega)\mathrm{P}} - \Omega\mathrm{R}(\Omega)\mathrm{P}.\overline{\mathrm{P}}\right\} \end{array} \tag{27}$$

Les équations du mouvement sont donc homogènes en s, de degré zéro. Ainsi il n'est pas possible de faire un développement du premier ordre en à partir des équations correspondant au cas du spin nul, i.e., des équations des géodésiques isotropes, ou de retrouver ces équations en faisant tendre s vers zéro.

Une autre conséquence est qu'il suffit de traiter le cas où $s = 1$; tous les autres cas s'en déduisent par un simple changement d'unités.
Dans le cas du photon, on choisit donc les unités de sorte que $s = \hbar = 1$

4°) Existence et unicité de la solution

Les équations $\mathrm{SP} = 0$ et $\overline{\mathrm{P}}\mathrm{P} = 0$, associées à la condition $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2) = -2s^2 =$ constante, définissent une sous-variété $\mathcal{V}_9$ de l'espace des conditions initiales $(x, \mathrm{S}, \mathrm{P})$ (cf. Appendice). Il est immédiat de vérifier que le champ de vecteurs défini par le système des équations (24), (25) et (26) est tangent à cette variété $\mathcal{V}_9$. Si l'on se limite à l'étude des solutions dans le cas où la variété-univers $\mathcal{V}_4$ est C^∞, en dehors des singularités de la métrique, le second membre des équations différentielles est aussi C^∞ et, a fortiori, Lipschitzien. Dans ce cas, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité de la solution du système. À chaque condition initiale correspond une solution et l'ensemble de toutes les solutions constitue un feuilletage à une dimension de la variété $\mathcal{V}_9$, espace des conditions initiales.

5°) Condition $\mathrm{R(S)(S)} \neq 0$

La quantité $\mathrm{R(S)(S)}$ n'est pas une constante du mouvement, en général ; si cette quantité vient à s'annuler, une indétermination apparaît et le système d'équations précédent n'est plus valable. Nous convenons d'éliminer de l'espace des conditions initiales celles pour lesquelles $\mathrm{R(S)(S)}$ s'annule. D'un point de vue physique, ceci n'est pas gênant car l'ensemble des mouvements pour lesquels $\mathrm{R(S)(S)}$ s'annule constitue un fermé, image réciproque du nombre zéro par l'application $(x, \mathrm{S}, \mathrm{P}) \mapsto \mathrm{R(S)(S)}$.

6°) Formalisme symplectique

Le modèle de particule qui a été construit est caractérisé par les équations (24), (25) et (26), et les liaisons (L1), (L2), ainsi que par la donnée du spin scalaire s. Nous nous proposons d'étudier l'ensemble des mouvements de cette particule dans un champ gravitationnel donné. Pour cela, nous considérons la variable $y = (x, \mathrm{S}, \mathrm{P})$ (condition initiale) avec $x \in \mathcal{V}_4$, $\mathrm{P} \in \mathrm{T}_x$ et $S \in \mathcal{L}(\mathrm{T}_x)$, sur laquelle portent les équations différentielles avec les liaisons

$$\overline{\mathrm{S}} + \mathrm{S} = 0, \quad \overline{\mathrm{P}}.\mathrm{P} = 0 \ \text{ et } \ \mathrm{P} \text{ de genre futur}, \quad \mathrm{SP} = 0, \quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2) = -2s^2$$

La variable y parcourt l'ensemble $\mathcal{V}_9$ qui est une variété différentiable (voir appendice). Compte-tenu des liaisons, on montre que $\mathcal{V}_9$ est de dimension 9.

Considérons les quantités

$$\begin{aligned} A &= \frac{\hat{\mathrm{d}}\mathrm{P}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{S})\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \\ B &= \frac{\hat{\mathrm{d}}\mathrm{S}}{\mathrm{d}\tau} - \mathrm{P}\overline{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\overline{\mathrm{P}} \\ C &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} - \mathrm{P} - 2\frac{\mathrm{SR}(\mathrm{S})\mathrm{P}}{\mathrm{R}(\mathrm{S})(\mathrm{S})} \end{aligned}$$

Les équations universelles (E.U.) s'écrivent

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \tag{28}$$

L'équation $C = 0$ a été obtenue comme conséquence de (28) compte tenu des liaisons. On calcule l'expression

$$E = \overline{C}\hat{\delta}\mathrm{P} - \overline{A}\hat{\delta}x + \frac{1}{s^2}\mathrm{Tr}\,(B\mathrm{S}\hat{\delta}\mathrm{S}) \tag{29}$$

où $\hat{\delta}x$, $\hat{\delta}\mathrm{P}$ et $\hat{\delta}\mathrm{S}$ définissent une variation arbitraire de $y = (x, \mathrm{S}, \mathrm{P})$ compatible avec les liaisons, c'est-à-dire un élément quelconque δy de l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{V}_9$ au point y.

Les équations du mouvement sont équivalentes à

$$E = 0, \quad \forall \delta y \in \mathrm{T}_y \tag{30}$$

où T_y est l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{V}_9$ en y.

Après quelques transformations, il apparaît que l'expression E vaut

$$E = \frac{\overline{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}\tau}\hat{\delta}P - \frac{\hat{\mathrm{d}}\overline{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}\tau}\hat{\delta}x - \frac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{S})\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)(\delta x) - \frac{1}{s^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\hat{\mathrm{d}}\mathrm{S}}{\mathrm{d}\tau}.\mathrm{S}.\hat{\delta}\mathrm{S}\right) \tag{31}$$

Cette expression E est anti-symétrique par rapport aux deux variations δ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$; on définit donc ainsi un champ $y \mapsto \sigma$ de 2-formes de $\mathcal{V}_9$

$$\sigma\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)(\delta y) = \frac{\overline{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}\tau}\hat{\delta}P - \frac{\hat{\mathrm{d}}\overline{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}\tau}\hat{\delta}x - \frac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{S})\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)(\delta x) - \frac{1}{s^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\hat{d}\mathrm{S}}{d\tau}.\mathrm{S}.\hat{\delta}\mathrm{S}\right) \tag{32}$$

Les équations du mouvement s'écrivent

$$\sigma\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)(\delta y) = 0, \quad \forall \delta y \in \mathrm{T}_y$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} \in \ker(\sigma) \tag{33}$$

Nous avons vu qu'en tout point (sauf si $\mathrm{R}(\mathrm{S})(\mathrm{S}) = 0$) la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}$ est déterminée à un facteur près en raison de l'arbitraire du paramétrage.
Par conséquent

$$\dim(\ker(\sigma)) = 1 \tag{34}$$

D'autre part, le calcul montre (voir appendice) que la dérivée extérieure de σ est nulle :

$$\nabla\sigma = 0 \tag{35}$$

Par conséquent $y \mapsto \ker(\sigma)$ est le feuilletage caractéristique de la forme σ, qui est un invariant intégral de ce feuilletage, que nous supposerons sécable. Le champ $y \mapsto \sigma$ qui possède les propriétés (34) et (35) définit sur $\mathcal{V}_9$ une structure de variété pré-symplectique.
Le quotient de $\mathcal{V}_9$ par le feuilletage $y \mapsto \ker(\sigma)$ est une variété symplectique $\mathcal{V}_8$ de dimension huit appelée "espace des mouvements" ([3],[12]). Le champ de 2-formes qui définit la structure symplectique de $\mathcal{V}_8$ est la projection de $y \mapsto \sigma$ qui "passe au quotient" puisque c'est un invariant intégral.

7°) Dimension de l'espace des mouvements

Nous avons vu que l'espace des mouvements obtenu pour ce modèle de photon est de dimension huit. Or un modèle de photon existe dans le cas de la relativité restreinte, pour lequel l'espace des mouvements est de dimension six. En outre, ce second modèle permet d'obtenir, après quantification, les équations de Maxwell ([12]). Il se pose, par conséquent, un problème pour le passage à la limite : il y a une discontinuité dans le nombre de paramètres nécessaires à la description des mouvements du photon. Ceci est dû au fait que le noyau de la 2-forme σ de l'espace des conditions initiales est de dimension un en relativité générale, et de dimension trois lorsque la courbure est nulle. L'interprétation physique des deux paramètres supplémentaires qui apparaissent dans le modèle décrit ici présente une difficulté majeure ([14]).

8°) Vitesse du photon

Dans le modèle étudié ici, le photon peut avoir une vitesse supérieure à celle de la lumière dans le champ de gravitation. En effet, l'espace vectoriel T_x tangent au point x à la variété-univers $\mathcal{V}_4$ étant hyperbolique normal, les relations $\overline{\mathrm{P}}\mathrm{P} = 0$ et $\overline{\mathrm{P}}\,\mathrm{d}x = 0$ impliquent que

$$\overline{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x \leq 0 \tag{36}$$

D'autre part, il aurait été possible de réduire l'arbitraire du choix des liaisons (L1) et (L2) en tenant compte de la circonstance suivante : la trace du tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique est nulle

$$g_{\mu\nu}\mathrm{T}^{\mu\nu} = 0 \tag{37}$$

Ceci devrait se traduire, dans le formalisme que nous avons utilisé en imposant que la fonctionnelle M écrite en (6) s'annule pour des variations $\delta g_{\mu\nu}$ du type

$$\delta g_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} \tag{38}$$

où λ est une fonction scalaire sur $\mathcal{V}_4$, à support compact.

Dans le modèle ainsi obtenu ([15]) on est conduit à choisir au lieu des liaisons (L1) et (L2), les liaisons

$$\overline{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}\,\mathrm{d}x = 0 \tag{39}$$

Alors la ligne d'univers d'un photon est toujours une géodésique isotrope. L'inconvénient de ce modèle est qu'il correspond à un espace des conditions initiales de dimension onze, ce qui augmente notablement les problèmes d'interprétation physique.

IV - INTEGRATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

A) Espaces à courbure constante ([8])

Définition I ([7])

On appelle courbure sectionnelle associée à un champ de bases $x \mapsto [\,\mathrm{d}x, \delta x, J, K]$ le champ scalaire[5]

$$x \mapsto \kappa = \frac{\mathrm{R}_{ij,km}\,\mathrm{d}x^i \delta x^j\,\mathrm{d}x^k \delta x^m}{(g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk})\,\mathrm{d}x^i \delta x^j\,\mathrm{d}x^k \delta x^m}$$

Définition II ([8])

On appelle espace de De Sitter un espace-temps dont la courbure sectionnelle κ est constante. Dans ce cas

$$\mathrm{R}_{ij}^{lm} = \kappa(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})$$

Théorème :

Un espace de De Sitter vérifie les équations d'Einstein dans le vide, avec une constante cosmologique Λ non-nulle ($\Lambda = 3\kappa$).

Preuve : Le tenseur de courbure d'un espace de De Sitter peut s'écrire

$$\mathrm{R}_{ij,km} = \kappa(g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk})$$

5. $R_{ij,km} = g_{nm}g_{kl}R_{ij}^{ln}$

Tenseur de Ricci

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{jk} &= g^{im}\mathrm{R}_{ij,km} = kg^{im}(g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk}) \\ &= \kappa\left(\delta_{km}g_{jm} - \mathrm{Tr}\ (\mathrm{I})\, g_{jk}\right) = \kappa(g_{jk} - 4g_{jk}) \\ &= -3\kappa g_{jk}\end{aligned}$$

Courbure scalaire

$$\mathrm{R} = g^{jk}\mathcal{R}_{jk} = -3\kappa g^{jk}g_{jk} = -12\kappa$$

Tenseur d'Einstein

$$\mathcal{S}_{ij} = \mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2}\mathrm{R}g_{ij} = -3\kappa g_{ij} + 6\kappa g_{ij} = 3\kappa g_{ij}$$

Équations d'Einstein

$$\mathcal{S}_{ij} - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathrm{T}_{ij}$$

où Λ est la constante cosmologique, T_{ij} est le tenseur énergie-impulsion de la matière.

Dans le vide $\mathrm{T}_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \dfrac{\Lambda}{3}$

Q.E.D.

<u>Équations du mouvement du photon à spin dans un espace de De Sitter</u>

L'expression de $\mathrm{R(S)}$ a une forme particulièrement simple

$$\mathrm{R(S)}^{ij} = \mathrm{R}^{ij}_{kl}\mathrm{S}^{kl} = \frac{\Lambda}{3}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})\mathrm{S}^{kl} = \frac{2\Lambda}{3}S^{ij}$$

(en utilisant l'antisymétrie de S)

Par conséquent

$$\mathrm{R(S)P} = \frac{2}{3}\Lambda \mathrm{SP} = 0$$

et

$$\mathrm{pf}\,(\mathrm{R(S)}) = \mathrm{pf}\,\left(\frac{2\Lambda}{3}\mathrm{S}\right) = \left(\frac{2\Lambda}{3}\right)^2 \mathrm{pf}\,(\mathrm{S}) = 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathrm{R(S)(S)} &= -\mathrm{Tr}\,(\mathrm{SR(S)}) = -\frac{2}{3}\Lambda \mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2) \\ \mathrm{R(S)(S)} &= -\frac{4}{3}\Lambda s^2 \neq 0 \qquad (\text{si } \Lambda \neq 0) \end{aligned}$$

Les équations du mouvement du photon prennent donc la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= \mathrm{P} \\ \frac{\hat{\mathrm{d}}\mathrm{P}}{\mathrm{d}\tau} &= 0 \\ \frac{\hat{\mathrm{d}}\mathrm{S}}{\mathrm{d}\tau} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{avec les liaisons} \quad \left\{\begin{aligned} \overline{\mathrm{P}}\mathrm{P} &= 0 \\ \mathrm{SP} &= 0 \\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2) &= -2s^2 = \text{constante} \end{aligned}\right.$$

Les deux premières équations de ce système montrent que la trajectoire d'espace-temps d'une particule à spin de masse nulle est une géodésique (isotrope grâce à la liaison $\overline{\mathrm{P}}\mathrm{P} = 0$) dans un espace de De Sitter.

La troisième équation indique que le tenseur de spin est transporté parallèlement.

Remarque : Bien que l'espace de Minkowski soit un espace de De Sitter particulier, correspondant au cas où $\Lambda = 0$, on ne peut obtenir les équations du mouvement dans l'espace-temps plat, car la condition $\mathrm{R(S)(S)} \neq 0$ est précisément équivalente à $\Lambda \neq 0$.

B) Le champ de Schwarzschild

La solution de Schwarzschild des équations d'Einstein présente un intérêt physique particulier : elle s'interprète en effet comme la description du champ de gravitation créé par un objet massif à symétrie sphérique, ce qui est le cas, en première approximation, des étoiles et des planètes (le Soleil et la Terre, en particulier).

Les prédictions qui en résultent permettent de concevoir certaines vérifications expérimentales qui constituent quelques-uns des tests les plus probants de la théorie relativiste de la gravitation.

Aucune observation ne permettant de distinguer la valeur de la constante cosmologique des équations d'Einstein de zéro, nous nous bornerons à l'étude du $\mathrm{d}s^2$ de Schwarzschild correspondant à $\Lambda = 0$.

1°) Le $\mathrm{d}s^2$ du champ extérieur

Il existe une carte $F : \begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix} \mapsto x, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad X \in \mathbb{R}^3$, dans laquelle le $\mathrm{d}s^2$ de la variété-univers $\mathcal{V}_4$ s'écrit ([10])

$$\mathrm{d}s^2 = \alpha^2\,\mathrm{d}t^2 - \beta^2\overline{\mathrm{d}X}\cdot\,\mathrm{d}X$$

où l'on a posé [6]

$$\alpha = \frac{1 - \dfrac{b}{4\rho}}{1 + \dfrac{b}{4\rho}} \text{ et } \beta = \left(1 + \frac{b}{4\rho}\right)^2$$

avec $\rho = \|X\|$

6. Dans tout ce qui suit, la barre indique la transposition dans $\mathbb{R}^3$.

D'autre part, les indices grecs prennent les valeurs 1, 2, 3, 4, alors que les indices latins prennent les valeurs 2, 3, 4.

et

$$\begin{aligned} b &= 2\frac{Gm}{c^2} \text{ est le rayon gravitationnel de l'astre} \\ G &= \text{constante de la gravitation (nous choisissons } G=1) \\ c &= \text{célérité de la lumière (nous choisissons } c=1) \\ m &= \text{mesure gravitationnelle de la masse supposée concentrée à l'origine.} \end{aligned}$$

Ces coordonnées (t, X) s'appellent "coordonnées isotropiques".
Cette forme du $\mathrm{d}s^2$ n'est valable que dans le vide, i.e., où le tenseur impulsion-énergie est nul, et à l'extérieur de la singularité de Schwarzschild, c'est-à-dire pour $X \in \Omega$ où Ω est l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\Omega = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \rho = \|X\| > \sup\left(\frac{b}{4}, \rho_A\right) \right\}$$

où ρ_A est la valeur prise par la variable ρ à la surface de l'astre.

<u>a) Composantes du tenseur métrique dans la carte F</u>

$$g_{\lambda\mu} = \begin{array}{c} \lambda \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & -\beta^2 \mathrm{I} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}_{\mu} \quad \text{où } \mathrm{I} \text{ est l'identité sur } \mathbb{R}^3$$

$$g^{\lambda\mu} = \begin{array}{c} \lambda \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \alpha^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & -\beta^{-2} \mathrm{I} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}_{\mu}$$

et

$$\det(g) = -\left(\alpha\beta^3\right)^2$$

b) Symboles de Christoffel

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad \text{(symétriques en } \mu,\ \nu\text{)}$$

$$\Gamma^1_{11} = 0 \quad \Gamma^1_{1j} = \frac{b}{2\alpha\beta\rho^2} X^j \quad \Gamma^1_{jk} = 0$$

$$\Gamma^j_{11} = \frac{\alpha b}{2\beta^3\rho^2} X^j \quad \Gamma^j_{1j} = 0 \quad \Gamma^j_{kl} = \frac{b}{(1+\alpha)\beta\rho^2}\left(\delta_{kl}X^j - \delta_{jk}X^l - \delta_{lj}X^k\right)$$

c) Tenseur de courbure

$$\mathrm{R}^{\lambda\mu}_{\nu\rho} = g^{\mu\sigma}\left\{\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} - \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}\Gamma^\alpha_{\rho\sigma} - \Gamma^\lambda_{\rho\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\right\}$$

Symétries :

$$\mathrm{R}^{\lambda\mu}_{\nu\rho} = -\mathrm{R}^{\lambda\mu}_{\rho\nu} = -\mathrm{R}^{\mu\lambda}_{\nu\rho} = \mathrm{R}^{\nu\rho}_{\lambda\mu}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}^{1j}_{1k} &= \frac{b}{2(\beta\rho)^3}\left\{\delta_{jk} - 3\frac{X^jX^k}{\rho^2}\right\} \\
\mathrm{R}^{1j}_{kl} &= 0 \\
\mathrm{R}^{jk}_{lm} &= \frac{b}{(\beta\rho)^3}\left\{\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{jl}\delta_{km} - \frac{3}{2\rho^2}\left(\delta_{jm}X^kX^l - \delta_{jl}X^kX^m + \delta_{kl}X^jX^m - \delta_{km}X^jX^l\right)\right\}
\end{aligned}$$

2°) Structure spatio-temporelle

Les définitions et les démonstrations des résultats donnés ici sont contenus dans la référence ([13])

L'expression des composantes du tenseur métrique g dans cette carte F montre que :

a) L'univers de Schwarzschild est stationnaire : il possède en effet le groupe d'isométries globales à un paramètre (appelé "groupe des translations temporelles")

$$\underline{a}(x) = \underline{a}\left(F\begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix}\right) = F\begin{bmatrix} t+a \\ X \end{bmatrix}$$

où a est une constante, $\underline{a}$ est l'action d'un élément du groupe sur $\mathcal{V}_4$.

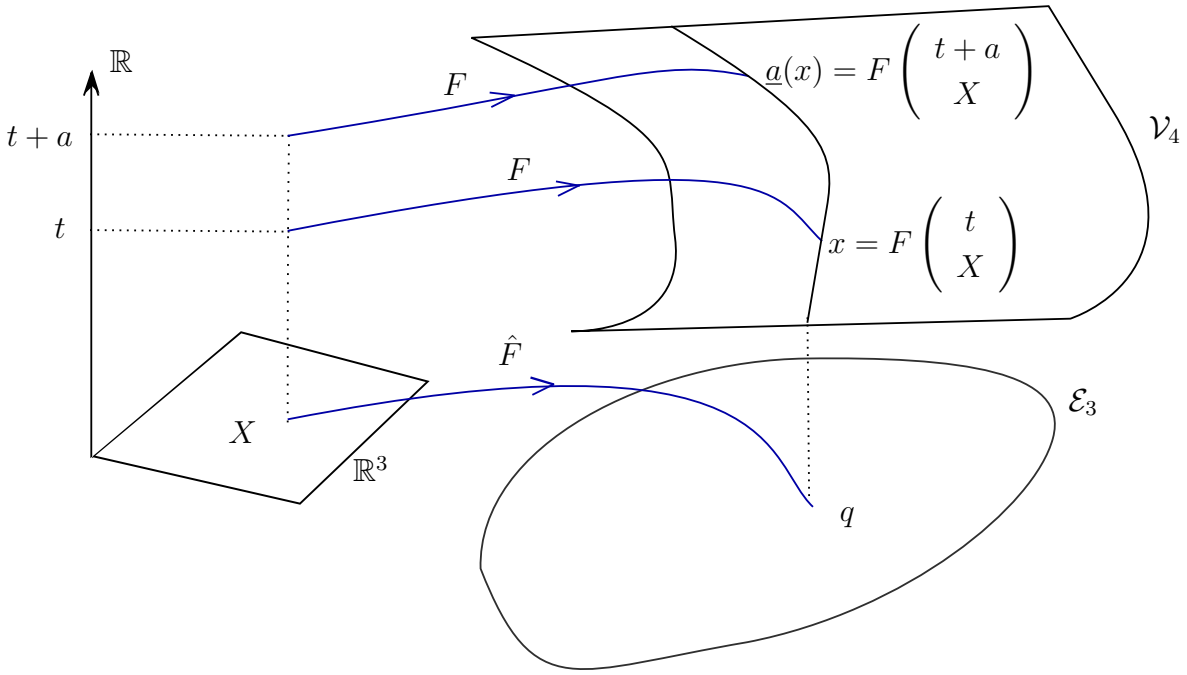
Les dérivées par rapport au paramètre temporel t des composantes dans la carte F du tenseur métrique étant nulles identiquement, la carte F est appelée "carte standard".

D'autre part, les composantes g_{1j} du tenseur métrique étant identiquement nulles dans la carte F, on dit que l'univers de Schwarzschild est statique, et que la carte F est une carte (bi)-transversale en tout point $x \in \mathcal{V}_4$.

Le caractère stationnaire de l'univers de Schwarzschild $\mathcal{V}_4$ lui confère une structure de fibré principal dont la base $\mathcal{E}_3$ est l'ensemble des orbites du groupe des translations temporelles.

À la carte transversale F de $\mathcal{V}_4$ on peut associer la carte $\hat{F}$ de $\mathcal{E}_3$ telle que

$$\hat{F}(X) = q \in \mathcal{E}_3$$



On peut définir sur la variété $\mathcal{E}_3$ - que nous appellerons "espace" dans la suite - une structure riemannienne induite de celle de l'univers $\mathcal{V}_4$ - Le caractère statique de $\mathcal{V}_4$ et la transversalité de la carte F permettent d'obtenir une expression simple des composantes du tenseur métrique $\hat{g}$ de $\mathcal{E}_3$ dans la carte $\hat{F}$:

$$\hat{g}^{jk} = g^{jk} \quad \text{et} \quad \hat{g}_{jk} = g_{jk}$$

et les symboles de Christoffel sont, dans la même carte $\hat{F}$

$$\hat{\Gamma}^j_{kl} = \Gamma^j_{kl}$$

b) Les transformations

$$\underline{\mathcal{A}}\left(F\begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix}\right) = F\begin{bmatrix} t \\ A(X) \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad A \in \mathrm{O}(3)$$

constituent un groupe de symétries de $\mathcal{V}_4$, isomorphe à O(3).
De même

$$\underline{\hat{\mathcal{A}}}\left(\hat{F}(X)\right) = \hat{F}\left(A(X)\right)$$

sont des isométries de l'espace $\mathcal{E}_3$: nous dirons que le champ de Schwarzschild est invariant par l'action du groupe des rotations spatiales (autour du centre du champ).

c) Interprétation

L'élément de longueur en un point q de la variété $\mathcal{E}_3$ est, donné dans la carte $\hat{F}$ par

$$-\,\mathrm{d}\ell^2 = \hat{g}_{jk} dX^j dX^k = -\beta^2\,\mathrm{d}\overline{X}\,\mathrm{d}X$$

Il correspond à la valeur du $\mathrm{d}s^2$ de $\mathcal{V}_4$ lorsque $\mathrm{d}x$ est transversal à la fibre au-dessus de q, i.e., lorsque $\mathrm{d}t = 0$. Ceci nous permet d'interpréter $\mathcal{E}_3$ comme étant "l'espace physique" tel qu'il est perçu par un observateur fixe par rapport à la masse qui crée le champ.

En faisant le changement de variable

(cv) $\quad X \mapsto Y = \beta X$ et en posant $r = \| Y \| = \beta\rho$
on trouve

$$-\,\mathrm{d}\ell^2 = \mathrm{d}\overline{Y}\,\mathrm{d}Y + \frac{b}{r}\,\mathrm{d}r^2$$

Cette forme du $\mathrm{d}\ell^2$ montre que la métrique de l'espace $\mathcal{E}_3$ devient euclidienne lorsque $r \longrightarrow \infty$. On utilise généralement le paramètre[7] r de préférence à ρ pour repérer la "distance au centre du champ", notamment dans l'approximation newtonienne qui donne l'interprétation classique de b.

On obtient d'autre part

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{b}{r}}$$

7. les coordonnées (t, Y) de $\mathcal{V}_4$ sont appelées "coordonnées standard".

ce qui explique le terme de "rayon gravitationnel" utilisé pour désigner le nombre b.

De l'interprétation donnée à $\mathcal{E}_3$, il résulte que les orbites du groupe des translations temporelles sont les lignes d'univers des points fixes de l'espace physique. La valeur du $\mathrm{d}s^2$ correspondant à un $\mathrm{d}x$ tangent à la fibre q (i.e., lorsque $\mathrm{d}q = 0$) est donc

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 \text{ où } \tau \text{ est le temps propre du point fixe } q \in \mathcal{E}_3$$

avec

$$\mathrm{d}\tau = \alpha\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne l'interprétation du paramètre temporel t.

3°) Photons [8]

a) Les liaisons

Soit T la base naturelle associée à la carte F en un point $x \in \mathcal{V}_4$; nous choisissons une orientation de $\mathcal{V}_4$ telle que T soit une base directe, ce qui donne

$$\det(T) = \sqrt{-\det(g)} = \alpha\beta^3$$

où α et β sont les fonctions qui interviennent dans l'expression du $\mathrm{d}s^2$ de Schwarzschild. Nous écrivons l'impulsion du photon dans la base T sous la forme

$$\mathrm{P} = T \begin{bmatrix} a \\ a\dfrac{\alpha}{\beta}V \end{bmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}, V \in \mathbb{R}^3$$

La liaison (L1) : $g_{\mu\nu}\mathrm{P}^\mu\mathrm{P}^\nu = 0$ avec P de genre futur est équivalente à (L'1) $\overline{V} \cdot V = 1$ avec $a > 0$.

8. Nous avons posé $s = \hbar = 1$

Nous écrivons d'autre part les composantes contravariantes du tenseur de spin S dans la même base T sous la forme

$$\mathrm{S}^{\lambda\mu} = -\beta^2 \overset{\lambda}{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta}{\alpha}\overline{E} \\ \frac{\beta}{\alpha}E & j(M) \end{bmatrix}}_{\mu}$$

où [9] $(E, M) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ Le calcul donne

$$\star\,(\mathrm{S})_{\mu\nu} = -\alpha\beta \overset{\mu}{\begin{bmatrix} 0 & -\overline{M} \\ M & \frac{\beta}{\alpha}j(E) \end{bmatrix}}_{\nu}$$

La liaison (L2) $\mathrm{SP} = 0$ ou $\mathrm{S}^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} \mathrm{P}^{\nu} = 0$ s'écrit

(L'2) $\qquad E = j(M)(V)$

et la liaison (équivalente à (L3)) : $\star(\mathrm{S})\mathrm{P} = \chi\mathrm{P}$, ou

$$g^{\mu\sigma} \star (\mathrm{S})_{\sigma\nu} \mathrm{P}^{\nu} = \chi \mathrm{P}^{\mu}$$

donne

(L'3) $\qquad \overline{V}M = \chi$

9. 1°) L'espace vectoriel des tenseurs antisymétriques d'ordre 2 d'un espace de dimension 4 est isomorphe à $\mathbb{R}^6$.

2°) $j : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{A}\left(\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)\right)$ est la bijection de $\mathbb{R}^3$ sur l'ensemble des opérateurs linéaires antisymétriques de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$A : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto j(A) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} ; \qquad j(A)(B) = A \times B : \text{produit vectoriel dans } \mathbb{R}^3$$

b) Les intégrales premières

On obtient un vecteur de Killing de la métrique de $\mathcal{V}_4$, par l'action d'un élément quelconque de l'algèbre de Lie du groupe d'isométries $\mathcal{V}_4$.

Un vecteur de Killing engendré par l'algèbre de Lie du groupe des translations temporelles est

$$I_t = T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La quantité conservée, calculée par la formule (12), qui correspond à ce vecteur de Killing est [10]

(I1) $\quad e = \alpha^2 a + \dfrac{b}{2(\beta\rho)^2}\mathrm{vol}(M)(U)(V) \quad$ où $U = \dfrac{X}{\rho}$

Avec la même notation pour P, cette quantité aurait été, pour une géodésique isotrope :

(IG1) $\quad e = \alpha^2 a$

Nous appellerons "énergie" le nombre e.

D'autre part, l'algèbre de Lie du groupe des rotations spatiales et isomorphe à l'algèbre de Lie de SO(3) dont les éléments sont les opérateurs linéaires antisymétriques de $\mathbb{R}^3$ (et donc de la forme $j(Z)$ où $Z \in \mathbb{R}^3$).

Un vecteur de Killing engendré par l'algèbre de Lie du groupe des rotations spatiales est

$$I_r = T \begin{bmatrix} 0 \\ j(Z)(X) \end{bmatrix}$$

10. $\mathrm{vol}(A)(B)(C)$ désigne le produit mixte dans $\mathbb{R}^3$ des vecteurs A, B et C : $\mathrm{vol}(A)(B)(C) = \overline{A}.j(B)(C)$

où $Z \in \mathbb{R}^3$ est une constante.

La quantité conservée qui correspond à un vecteur de Killing I_r calculée par la formule (12) s'écrit $\overline{Z}L$ (où $L \in \mathbb{R}^3$), avec

(I2) $$L = a\alpha\beta j(V)(X) - \alpha M - \frac{1-\alpha}{\rho^2}(\overline{X}M)X$$

Avec toujours la même notation pour P, on aurait trouvé dans le cas de l'équation d'une géodésique isotrope

(IG2) $$L = a\alpha\beta j(V)(X)$$

Nous appellerons "moment cinétique" (par rapport au centre du champ), l'élément $L \in \mathbb{R}^3$. Outre l'intérêt qu'elles présentent du point de vue de l'interprétation physique, ces quatre intégrales premières permettent de "réduire" le calcul ; on obtient immédiatement les relations suivantes en utilisant les liaisons

(R1) $$\overline{X}L = -\overline{X}M$$

d'où

(R2) $$M = a\alpha\beta j(V)(X) + \frac{1-\alpha}{\alpha}(\overline{U}L)U - \frac{L}{\alpha}$$

(R3) $$a = \frac{e + \dfrac{b}{2(\beta\rho)^2}\dfrac{\mathrm{vol}(L)(U)(V)}{\alpha}}{\alpha^2 - \dfrac{b}{2\beta\rho}\|j(U)(V)\|^2}$$

(R4) $$\mathrm{vol}(M)(U)(V) = \overline{j(U)(V)}M = -\overline{j(U)(V)}\frac{\alpha L - e\beta j(U)(X)}{\alpha^2 - \dfrac{b}{2\beta\rho}\|j(U)(V)\|^2}$$

(R5) $$\overline{V}L + \chi\alpha = (1-\alpha)\overline{U}L \cdot \overline{U}V$$

c) Les équations du mouvement

Nous pouvons remarquer tout d'abord que les neuf paramètres indépendants qui interviennent dans le modèle sont les suivants :

position : $X \in \mathbb{R}^3$

temps : $t \in \mathbb{R}$

Vecteur impulsion-énergie : $\begin{cases} a = & \text{nombre positif} \\ V = & \text{vecteur unitaire de } \mathbb{R}^3 \end{cases}$

tenseur de spin : vecteur $M \in \mathbb{R}^3$ avec la liaison $\overline{V}M = \chi$.

Or les expressions (R3) et (R2) donnent les valeurs des paramètres a et M.
Il reste donc à calculer, à l'aide des équations du mouvement, les fonctions $X(t)$ et $V(t)$.

En vue d'écrire les équations (24) et (25), il est nécessaire de calculer le contracté du tenseur de courbure avec le tenseur de spin.
On pose :

$$\mathrm{R(S)}^{\mu\nu} = \mathrm{R}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}\mathrm{S}^{\lambda\rho} = -\beta^{-2} \begin{array}{c} \mu \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & -\frac{\beta}{\alpha}\overline{\mathcal{E}} \\ \frac{\beta}{\alpha}\mathcal{E} & j(\mathcal{M}) \end{array} \right]_\nu \end{array} \quad \text{où } \mathcal{E} \text{ et } \mathcal{M} \in \mathbb{R}^3$$

Avec l'expression

$$\mathrm{S}^{\lambda\rho} = -\beta^{-2} \begin{array}{c} \lambda \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & -\frac{\beta}{\alpha}\overline{E} \\ \frac{\beta}{\alpha}E & j(M) \end{array} \right]_\mu \end{array}$$

des composantes du tenseur de spin, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{b}{(\rho\beta)^3}\{E - 3(\overline{U}E)\cdot U\} \\ \mathcal{M} &= \frac{b}{(\rho\beta)^3}\{M - 3(\overline{U}M)\cdot U\} \end{aligned}$$

On calcule alors

$$\frac{\mathrm{R(S)(S)}}{2} = \overline{M}\mathcal{M} - \overline{E}\mathcal{E}$$

et

$$\mathrm{pf}\,(\mathrm{R(S)}) = \overline{\mathcal{M}}\mathcal{E}$$

En écrivant l'équation (24) sous la forme

$$\mathrm{d}x = T \begin{bmatrix} \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}X \end{bmatrix} = \left[\mathrm{I} + 2\frac{\mathrm{SR(S)}}{\mathrm{R(S)(S)}}\right]\mathrm{P}$$

on obtient

(E1) $$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha}{\beta}\,(V + \Theta)$$

avec

$$\Theta = j(V)\frac{j(\mathcal{M})(V) - \mathcal{E}}{\overline{V}\mathcal{M}} = j(V)(Z)$$

où $Z = \dfrac{\chi}{\frac{1}{3} + \chi\overline{U}L \cdot \overline{U}V}\left\{\overline{U}L \cdot j(U)(V) - \mathrm{vol}(M)(U)(V) \cdot U\right\}$

L'équation (25) s'écrit

$$\hat{\mathrm{d}}\mathrm{P} = -\chi\frac{\mathrm{pf}\,(\mathrm{R(S)})}{\mathrm{R(S)(S)}}\mathrm{P}$$

et permet de calculer

(E2) $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{2(\rho\beta)^3}\frac{1+3\alpha}{1+\alpha}\left\{\left[U - (\overline{U}V)V\right] - \frac{2\alpha}{1+3\alpha}(\overline{U}V)\Theta\right\}$$

d) Interprétation physique

Position :

La position dans l'espace-temps ne possède pas de signification physique pour le photon, sauf lors de l'interaction avec la matière. Le fait que le photon ait une position exactement définie en relativité générale - c'est aussi le cas du modèle des géodésiques isotropes - peut être attribué à l'existence de l'interaction du photon avec le champ de gravitation.

Bien entendu, les phénomènes quantiques dont ne tiennent pas compte ces modèles ôtent tout sens physique à la notion de position exacte dans l'espace-temps pour le photon, qui ne saurait être localisé avec, au mieux, une précision de l'ordre de la longueur d'onde.

Il s'ensuit que la notion de vitesse du photon ne possède pas non plus de sens physique exact.

Vecteur impulsion-énergie :

Une observation se réduit à l'interaction d'un photon avec un appareil de mesure. Lors de ce processus, l'impulsion joue un rôle privilégié, et ce sont en définitive les composantes de ce vecteur que l'on mesure. La composante temporelle a s'interprète classiquement comme la valeur de l'énergie mesurée dans le référentiel associé à la carte F d'un observateur immobile au point $q \in \mathcal{E}_3$. Elle a en fait les dimensions d'une fréquence angulaire par suite du choix $s = \hbar = 1$.

L'intégrale première énergie correspond donc à la fréquence angulaire mesurée à l'infini $(\rho \to \infty)$ par un observateur placé dans le même référentiel ; en effet, $\alpha \to 1$ et $\dfrac{b}{\rho^3} \to 0$ dans ce cas.

Il s'ensuit que l'effet Einstein ou "red-shift gravitationnel" est mesuré, dans ce même référentiel, par $\dfrac{\delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{e-a}{e}$ où λ est la longueur d'onde : $\lambda = \dfrac{2\pi}{e} \quad (c = 1; \hbar = 1)$

D'autre part, la partie spatiale de l'impulsion joue le rôle du "vecteur-propagation" (ou vecteur d'onde) et le vecteur V repère la direction apparente de propagation du photon à chaque instant : sa variation permet donc de mesurer la déviation de la lumière par une masse grave.

Tenseur de spin :

Le tenseur de spin est paramétré par le vecteur $M \in \mathbb{R}^3$, qui est astreint à la liaison

$$\overline{V}M = \chi$$

Il ne dépend donc en fait que de deux paramètres, qui sont précisément les deux paramètres supplémentaires introduits par ce modèle, et qui ne possèdent pas de signification physique.

Il est cependant nécessaire, en vue de l'intégration numérique des équations (El) et (E2), d'attribuer une valeur initiale au vecteur M ou, ce qui revient au même, d'après (Rl) et (R2), à fixer une valeur à l'intégrale première L (moment cinétique).

Le choix qui semble le moins arbitraire est le suivant : on pose

$$M = \chi V$$

au point de la ligne d'univers où "l'interaction est maximale", c'est-à-dire au périhélie, qui est bien défini sur la trajectoire [11]. Nous affecterons de l'indice 0 les noms des diverses variables pour désigner la valeur qu'elles prennent en ce point. Deux cas peuvent se présenter :

1 - Photons émis (ou reçus) radialement :

- si l'on suppose que $V_0 = \epsilon U_0$, alors $\Theta_0 = 0$. Donc

$$\left.\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0} V_0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_0 = 0$$

11. trajectoire : projection de la ligne d'univers (dans $\mathcal{V}_4$) sur $\mathcal{E}_3$.

d'où $V = V_0 =$ constante.

Il en résulte que $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\alpha}{\beta}V$ et que Θ reste nul.
Les équations, dans ce cas, correspondent à celles d'une géodésique isotrope radiale.

D'autre part, on a

$$L = -M = \chi V_0 : M \text{ reste constant,}$$

et l'énergie prend la forme

$$e = \alpha^2 a$$

ce qui permet de retrouver l'effet Einstein radial habituel.

Le modèle étudié n'apporte donc aucun résultat nouveau dans ce cas.

2 - Photon dont la trajectoire possède un périhélie

La notion de périhélie est bien définie dans l'espace $\mathcal{E}_3$: c'est un point de la trajectoire, que nous supposerons unique, tel que $\left.\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right|_0 = 0$ d'où $\overline{U_0}.\left.\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right|_0 = 0$, c'est-à-dire $\overline{U_0}.V_0 + \overline{U_0}.\Theta_0 = 0$.

En choisissant en ce point $M = \chi V$, on obtient $\Theta_0 = 0$, et donc $\overline{U_0}.V_0 = 0$

$$\begin{aligned} L &= a_0\alpha_0\beta_0 j(V_0)(X_0) - \chi\alpha_0 V_0 \\ e &= \alpha_0 a_0 \end{aligned}$$

Ce choix revient à faire coïncider au premier ordre la ligne d'univers avec une géodésique isotrope au périhélie.

e) Phénomènes nouveaux attendus

Par rapport au modèle des géodésiques isotropes, le modèle étudié comporte les différences suivantes :

Tout d'abord, les déviations des rayons lumineux, ainsi que l'effet Einstein peuvent dépendre de la fréquence des photons.

Si l'on considère d'autre part des photons émis dans des conditions initiales identiques mais d'hélicités opposées, un nouveau phénomène peut apparaître : il est d'abord évident que les trajectoires correspondantes seront symétriques par rapport au "plan" (dans $\mathcal{E}_3$) de la trajectoire qui correspond à la géodésique isotrope. D'autre part, les vecteurs-propagation des deux photons feront au bout d'un certain temps un angle non-nul. Par analogie avec ce qui se passe dans un cristal de quartz où la lumière se propage différemment selon qu'elle est polarisée à droite ou à gauche, nous nommerons ce dernier phénomène "biréfringence gravitationnelle".

f) Intégration numérique des équations

Dans le but d'avoir des expressions plus simples pour faire le calcul numérique, nous sommes passés des coordonnées isotropiques aux coordonnées standard par le changement de variables

$$X \mapsto Y = \beta X \quad \text{d'où } \rho \mapsto r = \beta\rho \quad \text{et} \quad \alpha = \sqrt{1 - \frac{b}{r}}$$

Les expressions des intégrales premières deviennent alors

$$\begin{aligned} e &= \alpha^2 a + \frac{b}{2r^2}\mathrm{vol}(M)(U)(V) \qquad U = \frac{X}{\rho} = \frac{Y}{r} \\ L &= a\alpha\beta j(V)(Y) - \alpha M - \frac{1-\alpha}{r^2}(\overline{Y}M).Y \end{aligned}$$

Les relations (R3) et (R4) deviennent

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{e + \dfrac{b}{2r^2}\overline{j(U)(V)}\dfrac{L}{\alpha}}{\alpha^2 - \dfrac{b}{2r} \parallel j(U)(V) \parallel^2} \\
vol(M)(U)(V) &= -\overline{j(U)(V)}\frac{\alpha L - ej(U)(Y)}{\alpha^2 - \dfrac{b}{2r} \parallel j(U)(V) \parallel^2}
\end{aligned}
$$

L'expression de Θ reste inchangée et les équations (El) et (E2) sont remplacées par

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} &= \alpha \left\{ V + \Theta(1-\alpha)\overline{U}(V+\Theta).U \right\} \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= -\frac{b}{2r^3}\frac{1+3\alpha}{1+\alpha}\left\{ U - (\overline{U}V)V - \frac{2\alpha}{1+3\alpha}(\overline{U}V)\Theta \right\}
\end{aligned}
$$

La seconde (de temps) est l'unité choisie aussi bien pour mesurer les durées que pour les distances.

Le système d'équations a été intégré numériquement à l'aide de l'ordinateur UNIVAC 1110 d'Orsay. La méthode d'intégration utilisée est celle d'Adams-Moulton ([16] et annexe).

Le principe de ce calcul est le suivant :

On considère deux photons d'hélicités opposées émis au périhélie avec des conditions initiales identiques par ailleurs. Leurs équations sont intégrées simultanément ainsi que celle de la géodésique isotrope correspondante : on utilise le fait que les équations de la géodésique isotrope sont obtenues en faisant $\Theta = 0$, ce qui est réalisé formellement en attribuant à cette dernière l'hélicité $\chi = 0$; on multiplie aussi par χ^2 les termes des intégrales premières qui sont nuls pour une géodésique isotrope.

On calcule ensuite dans les trois cas (hélicités $= \pm 1$ et géodésique isotrope) les grandeurs suivantes :

- effet Einstein,

- angle de chacun des vecteurs V avec sa valeur initiale V_0 (déviations).

On calcule aussi

- l'angle, à la même date t, l'angle ϕ entre les deux vecteurs V correspondant aux hélicités $+1$ et -1, que nous appelons "biréfringence" ;

- l'écart ϵ entre les trajectoires des deux photons d'hélicités opposées, à la même date ;

Il a paru intéressant, enfin, de calculer les quantités suivantes :

$f \times \phi$ et $\dfrac{f \times \epsilon \times r_A}{2t}$ où f est la fréquence et r_A la distance minimale de la trajectoire au centre du champ.

Des calculs ont été effectués pour diverses valeurs des paramètres, qui permettent de tirer les conclusions suivantes :

- Le calcul est arrêté (pour non convergence de la méthode) lorsque le pas d'intégration est supérieur aux 3/100 environ de la longueur d'onde. Il est donc nécessaire, pour intégrer sur des distances significatives de choisir de très grandes longueurs d'onde.

- On vérifie bien que les trajectoires des deux photons d'hélicités opposées sont symétriques par rapport à celle qui correspond à la géodésique isotrope.

- Les différences numériques entre les angles de déviations pour des photons d'hélicitès $+$ et -, et la déviation géodésique ne sont pas significatives (de l'ordre de la précision de la machine).

- Les différences entre l'effet Einstein pour des photons à spin et celui du modèle des géodésiques n'est pas significative.

- Les quantités $f \times \phi$ et $\dfrac{f \times \epsilon \times r_A}{2t}$ sont pratiquement indépendantes de f.

Des calculs numériques ont été effectués pour des astres de masse[12] $M_\odot$ ayant respectivement les rayons suivants : $r_A = R_\odot$ (soleil), et $r_A = 10^{-2} R_\odot$ (étoile à neutrons). Les résultats numériques permettent de faire les observations suivantes :

1°) Il n'y a aucune différence significative entre l'effet Einstein géodésique et celui donné par le modèle de photon à spin ;

2°) Le seul cas où l'on peut constater une légère différence entre la déviation géodésique et celle des photons à spin (plus importante de 3 % environ pour ces derniers) est celui de l'étoile à neutrons.

3°) L'effet de biréfringence est extrêmement faible si l'on exprime la longueur d'onde λ en mètres, on obtient empiriquement les ordres de grandeur suivants pour l'angle ϕ (exprimé en secondes)

$$\begin{aligned} r_A = R_\odot \quad &; \quad \phi \sim 2 \times 10^{-9} \lambda \\ r_A = 10^{-1} R_\odot \quad &; \quad \phi \sim 2 \times 10^{-8} \lambda \\ r_A = 10^{-2} R_\odot \quad &; \quad \phi \sim 2 \times 10^{-7} \lambda \end{aligned}$$

Les valeurs obtenues sont inobservables dans tous les cas, même pour des ondes kilométriques.

4°) L'écart entre les positions des photons d'hélicités opposées est donné par la relation empirique

$$\varepsilon = 2 \frac{t}{r_A} \lambda$$

mais les restrictions apportées par la mécanique quantique à la notion de position du photon limitent considérablement la portée de ce résultat.

Cette expérimentation numérique montre donc que les résultats fournis par le modèle de photon à spin ne sont pas incompatibles avec l'observation des divers phénomènes liés à la propagation de la lumière dans les champs de gravitation.

12. On désigne par $M_\odot$ et $R_\odot$ respectivement la masse et le rayon du soleil.

- APPENDICE -

On appelle espace d'évolution l'ensemble $\mathcal{V}_9$ des conditions initiales $y = (\mathrm{S}, \mathrm{P}, x)$ qui vérifient les relations

(1) $\overline{\mathrm{P}} \cdot \mathrm{P} = 0$, P de genre futur

(2) $\overline{\mathrm{S}} + \mathrm{S} = 0 \quad ; \quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2) = -2s^2 \quad ; \quad \mathrm{SP} = 0$

En raison de l'existence de la projection $y \mapsto x$ de $\mathcal{V}_9$ sur $\mathcal{V}_4$, $\mathcal{V}_9$ est un espace fibré au-dessus de la variété univers $\mathcal{V}_4$.

Choisissons un point $x \in \mathcal{V}_9$ et soit T_x l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{V}_4$ en x.

La fibre au-dessus de x est paramétrée par le couple (S, P) qui vérifie les relations (1) et (2) ; on peut choisir de paramétrer cette fibre par le couple $(\star(\mathrm{S}), \mathrm{P})$ au lieu de (S, P), $\star(\mathrm{S})$ vérifiant les relations [13]

$$(3) \quad \left[\begin{array}{rcl} \overline{\star(\mathrm{S})} + \star(\mathrm{S}) & = & 0 \\ \mathrm{Tr}\ (\star(\mathrm{S})^2) & = & -\mathrm{Tr}\ (\mathrm{S}^2) = 2s^2 \\ \star(\mathrm{S}) \cdot \mathrm{P} & = & \chi s \mathrm{P} \end{array} \right.$$

On désigne par J le vecteur propre de $\star(\mathrm{S})$ qui correspond à la valeur propre $-\chi s$ on peut alors écrire $\star(\mathrm{S})$ - qui est de rang 2 - sous la forme

(4) $\star(\mathrm{S}) = \chi s \left[\mathrm{P} \cdot \overline{\mathrm{J}} - \mathrm{J} \cdot \overline{\mathrm{P}}\right]$

J vérifiant les relations

(5) $\overline{\mathrm{J}} \cdot \mathrm{J} = 0$ et $\overline{\mathrm{P}} \cdot \mathrm{J} = 1$

Le produit scalaire des vecteurs P et J étant positif, le vecteur J est aussi de genre futur.

13. On suppose que $\mathcal{V}_4$ est globalement orientable, et qu'une orientation a été choisie.

Les vecteurs

(6) $\mathrm{T}_1 = \dfrac{\mathrm{P}+\mathrm{J}}{\sqrt{2}}$ et $\mathrm{T}_2 = \dfrac{\mathrm{P}-\mathrm{J}}{\sqrt{2}}$ sont tels que

(7) $\overline{\mathrm{T}_1} \cdot \mathrm{T}_1 = 1 \quad ; \quad \overline{\mathrm{T}_2}\mathrm{T}_2 = -1 \quad ; \quad \overline{\mathrm{T}_1} \cdot \mathrm{T}_2 = 0$

(8) $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2}{\sqrt{2}}$ et $\mathrm{J} = \dfrac{\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_2}{\sqrt{2}}$

Le vecteur du genre temps T_1 est aussi un vecteur du genre futur puisqu'il est la somme de deux vecteurs de genre futur. Le vecteur T_2 est du genre espace.

Les relations (7) montrent que l'on peut choisir deux vecteurs T_3 et T_4 du genre espace de façon que $\mathrm{T} = [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3, \mathrm{T}_4]$ soit une base de Lorentz qui ait la propriété

(9) $\det(\mathrm{T}) = \chi$

i.e., T est une base directe si $\chi = 1$, rétrograde si $\chi = -1$.

Les formules (9), (8) et (4) définissent une application surjective de l'ensemble des bases de Lorentz dont le vecteur de temps est de genre futur sur la fibre au-dessus de x. Celle-ci est donc un espace homogène du groupe de Lorentz orthochrone.

Le stabilisateur d'un point de la fibre est le sous-groupe qui laisse invariants les vecteurs T_1 et T_2 ainsi que $\det(\mathrm{T})$: c'est le sous-groupe des rotations spatiales autour de T_2, isomorphe à $\mathrm{SO}(2)$.

La fibre au-dessus de x est donc de dimension 6 - 1 = 5. [14]

D'autre part, elle n'est pas connexe mais possède deux composantes correspondant aux deux valeurs de l'hélicité.

L'espace $\mathcal{V}_9$ des conditions initiales est une variété C^∞ de dimension 5 + 4 = 9.

14. La dimension du groupe de Lorentz est 6, celle du stabilisateur est 1.

Nous avons défini sur $\mathcal{V}_9$ un champ de 2-formes $y \mapsto \sigma$ par :

$$\sigma(\,\mathrm{d}y)(\delta y) = \hat{\delta}\overline{P}\,\mathrm{d}x - \hat{\mathrm{d}}\overline{P}\delta x - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\left(SR(\,\mathrm{d}x)(\delta x)\right) - \frac{1}{s^2}\mathrm{Tr}\,(\,\hat{\mathrm{d}}S \cdot S \cdot \hat{\delta}S)$$

Nous donnons d'abord les identités bien connues que nous utiliserons pour le calcul de la dérivée extérieure $\nabla\sigma$ de la 2-forme σ.

<u>Identités algébriques</u>

(10) $\quad \Omega F \Omega = \mathrm{pf}\,(\Omega) \cdot \star(F) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\Omega F)\Omega \quad \forall \Omega, F \mid \overline{\Omega} + \Omega = \overline{F} + F = 0$

(11) $\quad \mathrm{pf}\,(\mathrm{F}) = \sqrt{\det(\mathrm{F})}$

(12) $\quad \mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(\overline{A}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(A + \overline{A}) \qquad A$: opérateur linéaire quelconque sur T_x

Conséquences

$$\begin{aligned}
\mathrm{pf}\,(\mathrm{S}) &= 0 \quad \text{car } \mathrm{SP} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} \neq 0 \\
\mathrm{S}^3 &= S \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{S} = \mathrm{pf}\,(\mathrm{S}) \cdot \star(\mathrm{S}) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{S}^2\right) \cdot \mathrm{S} \\
\mathrm{S}^3 &= -s^2\mathrm{S} = s^2\overline{\mathrm{S}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{d}\left[\mathrm{S}^3\right] = -s^2\,\mathrm{dS} = \,\mathrm{dS} \cdot \mathrm{S}^2 + \mathrm{S} \cdot \,\mathrm{dS} \cdot \mathrm{S} + \mathrm{S}^2 \cdot \,\mathrm{dS}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\overline{\mathrm{S}} + \,\mathrm{dS} &= 0 \\
\mathrm{S} \cdot \,\mathrm{dS} \cdot \mathrm{S} &= \mathrm{pf}\,(\mathrm{S}) \cdot \star(\,\mathrm{dS}) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}\,\mathrm{dS}) \cdot \mathrm{S} \\
\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}\,\mathrm{dS}) &= \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{S}^2\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

On en déduit

(13) $\mathrm{S}\cdot\ \mathrm{dS}\cdot\mathrm{S}=0$

et

(14) $\mathrm{dS}=\dfrac{1}{s^2}\left[\,\mathrm{dS}\cdot\mathrm{S}^2+\mathrm{S}^2\cdot\mathrm{S}\right]$

d,∂ et δ désignant trois variations quelconques, on obtient, en utilisant (14)

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,(\,\mathrm{dS}\partial\mathrm{S}\delta\mathrm{S}) &= -\frac{1}{s^2}\left\{\mathrm{Tr}\,(\,\mathrm{dS}\cdot\mathrm{S}^2\cdot\partial\mathrm{S}\cdot\delta\mathrm{S})+\mathrm{Tr}\,(\,\mathrm{dS}\cdot\partial\mathrm{S}\cdot\mathrm{S}^2\cdot\delta\mathrm{S})\right\}\\ &= \frac{1}{s^4}\left\{\mathrm{Tr}\,(\,\mathrm{dS}\cdot\mathrm{S}^2\cdot\partial\mathrm{S}\cdot\mathrm{S}^2\cdot\delta\mathrm{S})+\mathrm{Tr}\,(\,\mathrm{dS}\cdot\mathrm{S}^2\cdot\partial\mathrm{S}\cdot\delta\mathrm{S}\cdot\mathrm{S}^2)\right.\\ &+ \left.\mathrm{Tr}\,(\,\mathrm{dS}\cdot\mathrm{S}^2\cdot\partial\mathrm{S}\cdot\mathrm{S}^2\delta\mathrm{S})+\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2\cdot\ \mathrm{dS}\cdot\partial\mathrm{S}\cdot\mathrm{S}^2\cdot\delta\mathrm{S})\right\}\end{aligned}$$

en utilisant le fait que la trace d'un produit d'opérateurs est invariante par permutation circulaire de ces opérateurs, et la relation (13).
On obtient finalement

(15) $\mathrm{Tr}\,(\,\mathrm{dS}\cdot\partial\mathrm{S}\cdot\delta\mathrm{S})=0$ quelles que soient les variations d,∂ et δ

Identités de la relativité générale

(16) $\hat{\mathrm{d}}\delta x-\hat{\delta}\,\mathrm{d}x=[\,\mathrm{d},\delta]_L+T(\,\mathrm{d}x)(\delta x)$

où $[\,\mathrm{d},\delta]_L$ est le crochet de Lie des variations d et δ. La torsion T de la connexion est nulle car celle-ci est une connexion riemannienne.

(17) $\hat{\mathrm{d}}\hat{\delta}\mathrm{P}-\hat{\delta}\,\hat{\mathrm{d}}\mathrm{P}=\widehat{[\,\mathrm{d},\delta]}_L\mathrm{P}+R(\,\mathrm{d}x)(\delta x)\mathrm{P}$

par définition de la courbure R

(18) $R(\,\mathrm{d}x)(\delta x)=-\overline{R(\,\mathrm{d}x)(\delta x)}=-R(\delta x)(\,\mathrm{d}x)$

(19) $\sum_{\circlearrowleft}R(\partial x)(\,\mathrm{d}x)(\delta x)=0$ si [15] $T=0$

(20) $\sum_{\circlearrowleft}\left[\hat{\partial}R\right](\,\mathrm{d}x)(\delta x)=0$: identité de Bianchi.

$x\mapsto A$ étant un champ d'opérateurs linéaires sur $\mathcal{V}_4$, on a

15. $\sum_{\circlearrowleft}$ désigne la somme sur les permutations circulaires des trois variations ∂, d,δ.

(21) $$\hat{\mathrm{d}}\hat{\delta}A - \hat{\delta}\,\hat{\mathrm{d}}A = R(\,\mathrm{d}x)(\delta x)A - A.R(\,\mathrm{d}x)(\delta x)$$

La dérivée extérieure de la 2-forme σ est la 3-forme $\nabla\sigma$ définie par

$$\nabla\sigma(\partial y)(\,\mathrm{d}y)(\delta y) = \sum_{\circlearrowleft} \partial\,[\sigma(\,\mathrm{d}y)(\delta y)]$$

où $\partial,\ \mathrm{d}$ et δ sont trois variations qui commutent, i.e.,

$$[\partial,\,\mathrm{d}]_L = [\,\mathrm{d},\delta]_L = [\delta,\partial]_L = 0$$

Avec l'expression donnée plus haut de la 2-forme σ, on obtient

$$\begin{aligned}\nabla\sigma(\partial y)(\,\mathrm{d}y)(\delta y) &= \sum_{\circlearrowleft} \partial\left(\hat{\delta}\overline{P}\,\mathrm{d}x - \hat{\mathrm{d}}\overline{P}\delta x\right) - \frac{1}{2}\sum_{\circlearrowleft} \mathrm{Tr}\,\left(\hat{\partial}[SR(\,\mathrm{d}x)(\delta x)]\right)\\ &+ \frac{1}{s^2}\sum_{\circlearrowleft} \mathrm{Tr}\,\left(\hat{\partial}[\,\hat{\mathrm{d}}S.S.\hat{\delta}S]\right)\end{aligned}$$

On calcule séparément les trois expressions

$$\begin{aligned}A &= \sum_{\circlearrowleft} \partial[\hat{\delta}\overline{P}\,\mathrm{d}x - \hat{\mathrm{d}}\overline{P}\delta x]\\ B &= \sum_{\circlearrowleft} \mathrm{Tr}\,(\partial[SR(\,\mathrm{d}x)(\delta x)])\\ C &= \sum_{\circlearrowleft} \mathrm{Tr}\,\left(\partial[\,\hat{\mathrm{d}}S.\hat{\delta}S]\right)\end{aligned}$$

On utilise dans ce calcul le fait que l'on peut permuter circulairement les trois variations dans chacune de ces expressions, ainsi que les identités

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{d}}\delta x - \hat{\delta}\,\mathrm{d}x &= [\,\mathrm{d},\delta]_L = 0\\ \hat{\mathrm{d}}\hat{\delta}P - \hat{\delta}\,\hat{\mathrm{d}}P &= R(\,\mathrm{d}x)(\delta x)P\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{\circlearrowleft}(\hat{\partial}\hat{\delta}\overline{P}dx - \hat{\partial}\,\hat{\mathrm{d}}\overline{P}\delta x) + \sum_{\circlearrowleft}(\hat{\delta}\overline{P}\hat{\partial}\,\mathrm{d}x - \hat{\mathrm{d}}\overline{P}\hat{\partial}\delta x) \\
&= -\sum_{\circlearrowleft}(\hat{\mathrm{d}}\hat{\delta}\overline{P} - \hat{\delta}\,\hat{\mathrm{d}}\overline{P})\hat{\partial}x + \sum_{\circlearrowleft}\hat{\partial}\overline{P}(\hat{\mathrm{d}}\delta x - \hat{\delta}\,\mathrm{d}x) \\
&= -\sum_{\circlearrowleft}\overline{R(\mathrm{d}x)(\delta x)P}\partial x \\
&= \overline{P}\sum_{\circlearrowleft}\overline{R(\mathrm{d}x)(\delta x)(\partial x)} \\
A &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \sum_{\circlearrowleft}\mathrm{Tr}\left(\hat{\partial}S.R(\mathrm{d}x)(\delta x)\right) + \mathrm{Tr}\left(S\sum_{\circlearrowleft}[\hat{\partial}R](\mathrm{d}x)(\delta x)\right) \\
&+ \mathrm{Tr}\left(S\sum_{\circlearrowleft}[R(\hat{\partial}\,\mathrm{d}x)(\delta x) + R(\mathrm{d}x)(\hat{\partial}\delta x)\right) \\
&= \sum_{\circlearrowleft}\mathrm{Tr}\left(\hat{\partial}S.R(\mathrm{d}x)(\delta x)\right) + \mathrm{Tr}\left(S\sum_{\circlearrowleft}R(\hat{\mathrm{d}}\delta x - \hat{\delta}\,\mathrm{d}x)\right) \\
B &= \sum_{\circlearrowleft}\mathrm{Tr}\left(\hat{\partial}S.R(\mathrm{d}x)(\delta x)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{\circlearrowleft}\mathrm{Tr}\left(\hat{\mathrm{d}}S.\hat{\delta}S\partial S\right) + \sum_{\circlearrowleft}\mathrm{Tr}\left(\hat{\partial}\,\hat{\mathrm{d}}S.S.\hat{\delta}S + \hat{\mathrm{d}}.S\hat{\partial}\hat{\delta}S\right) \\
&= \sum_{\circlearrowleft}\mathrm{Tr}\left(\hat{\mathrm{d}}\hat{\delta}S.S\partial S\right) + \sum_{\circlearrowleft}\mathrm{Tr}\left(\overline{\hat{\partial}S.S.\hat{\delta}\,\hat{\mathrm{d}}S}\right) \\
&= \sum_{\circlearrowleft}\mathrm{Tr}\left([\hat{\mathrm{d}}\hat{\delta}S - \hat{\delta}\,\hat{\mathrm{d}}S].S\partial S\right) \\
&= \sum_{\circlearrowleft}\mathrm{Tr}\,([R(\mathrm{d}x)(\delta x)S - SR(\mathrm{d}x)(\delta x)].S.\partial S) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\circlearrowleft}\mathrm{Tr}\left(R(\mathrm{d}x)(\delta x)S^2 - S\hat{\partial}S + \overline{R(dx)(\delta x)S^2 - S\hat{\partial}S}\right) \\
&- \sum_{\circlearrowleft}\mathrm{Tr}\left(R(\mathrm{d}x)(\delta x)S\hat{\partial}S.S\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{\circlearrowleft} \mathrm{Tr}\,\Big(R(\,\mathrm{d}x)(\delta x)S^2\hat{\partial}S + \hat{\partial}S.S^2.R(\,\mathrm{d}x)(\delta x)\Big)\\
C &= \frac{1}{2}\sum_{\circlearrowleft} \mathrm{Tr}\,\Big([S^2\hat{\partial}S + \hat{\partial}.S^2].R(\,\mathrm{d}x)(\delta x)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\sigma(\partial y)(\,\mathrm{d}y)(\delta y) &= A - \frac{1}{2}B - \frac{C}{s^2}\\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\left(\left[\hat{\partial}S + \frac{S^2.\hat{\partial}S + \hat{\partial}.S^2}{s^2}\right]R(\,\mathrm{d}x)(\delta x)\right)
\end{aligned}
$$

$\nabla\sigma(\partial y)(\,\mathrm{d}y)(\delta y) = 0$ quelles que soient les trois dérivations $\partial,\ \mathrm{d}$ et δ qui commutent :

$$\nabla\sigma = 0$$

Q.E.D.

Bibliographie

[1] J.M. SOURIAU, *Calcul linéaire*, PUF, Paris, 1964

[2] J.M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1969

[3] J.M. SOURIAU, *Modèle de particule à spin dans le champ électromagnétique et gravitationnel*, Ann. I.H.P., vol. XX, n0 4, p. 315-364, 1974

[4] G. BIGOT, *Relativité générale et particule à spin*,Thèse (Marseille), 1971

[5] Ch. DUVAL, *Un modèle de particule à spin dans un champ électromagnétique et gravitationnel extérieur*, Thèse (Marseille), 1972

[6] L. LANDAU et E. LIFCHITZ, *Théorie des champs*, Edition de Moscou, 1970

[7] SYNGE, *Relativity. The General Theory*, North Holland, 1966

[8] A. WOLF, *Spaces of Constant Curvature*, Mc Graw-Hill, New York, 1967

[9] J.M. SOURIAU, *Géométrie et Relativité*, Hermann, Paris, 1964

[10] J.M. SOURIAU, *Prolongement du champ de Schwarzschild*, Bull. Soc. Math. France 93, p. 193-207, 1965

[11] A. EINSTEIN, *Quatre Conférences sur la théorie de la relativité*, Gauthier-Villars, Paris, 1964

[12] J.M. SOURIAU, *Structure of Dynamical Systems*, (Traduction anglaise de [2]), à paraître [16]

[13] H. JUAN, *Essai d'interprétation en laboratoire des équations de la relativité générale*, Thèse, Marseille, 1970

[14] H.P. KÜNZLE, *Canonical Dynamics of Spinning Particles in Gravitational and Electromagnetic Fields*, J. Math. Phys. vol. 13, n0 5, May 1972

16. J.-M. Souriau, *Structure of Dynamical Systems. A Symplectic View of Physics*, Birkhäuser (1997).

[15] H.H. FLICHE,*non publié*[17]

[16] P. HENRICI, *Elements of Numerical Analysis, John Wiley*, New York, 1967

17. C. Duval et H.H. Fiche, "A conformal invariant model of localized spinning test particles", *J. Math. Phys.* **19** (1978) 749–752.