HAL open science

Chaos dynamique dans le problème à trois corps restreint

Guillaume Rollin

▶ **To cite this version:**

Guillaume Rollin. Chaos dynamique dans le problème à trois corps restreint. Astrophysique [astro-ph]. Université de Franche-Comté, 2015. Français. NNT : 2015BESA2028 . tel-01344435v2

HAL Id: tel-01344435

https://hal.science/tel-01344435v2

Submitted on 11 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ
ÉCOLE DOCTORALE CARNOT-PASTEUR

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Université de Franche-Comté

Spécialité : Physique/Astrophysique

Présentée par

Guillaume Rollin

Chaos dynamique dans le problème à trois corps restreint

préparée à l'institut UTINAM, UMR CNRS/UFC 6213
soutenue à l'Observatoire des Sciences de l'Univers THETA, Besançon
le 2 novembre 2015

devant le jury composé de :

Pr. Massimiliano Guzzo	Universitá degli Studi di Padova	Rapporteur
Dr. José Lages	Université de Franche-Comté	Directeur de thèse
Dr. Jean-Marc Petit	Université de Franche-Comté	Président
Pr. Eugène de Prunelé (excusé)	Université de Franche-Comté	Co-directeur de thèse
Dr. Dima Shepelyansky	Université de Toulouse	Examinateur
Dr. Ivan Shevchenko	Pulkovo Observatory	Rapporteur
Pr. Mauri Valtonen	University of Turku	Examinateur

Chaos dynamique dans le problème à trois corps restreint

Guillaume ROLLIN

2 Novembre 2015

À mes parents,

“Je vous le dis : il faut porter encore en soi un chaos, pour pouvoir mettre au monde une étoile dansante.”

Ainsi parlait Zarathoustra,
Friedrich Nietzsche

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite remercier José Lages pour m'avoir accepté comme étudiant de thèse. Je le remercie infiniment de m'avoir accompagné sur les chemins de la connaissance des systèmes chaotiques. Je lui suis également reconnaissant d'avoir supporté mon caractère plus qu'angoissé durant ces trois années. Merci à Dima Shepelyansky pour sa bienveillance, sa collaboration et ses conseils précieux concernant ce travail. Merci à lui de m'avoir fait découvrir son professeur, Boris Chirikov, dont les travaux pionniers ont malheureusement été peu enseignés dans le cursus de physique que j'ai pu suivre. Merci aux examinateurs de mon jury, Mauri Valtonen et Jean-Marc Petit d'avoir accepté d'être présents lors de ma soutenance. Merci aux rapporteurs de ce manuscrit, Massimiliano Guzzo et Ivan Shevchenko pour leurs rapports et leurs indications. Merci à Eugène de Prunelé et Agnès Fienga pour la co-direction de cette thèse.

Je remercie tous les chercheurs du laboratoire UTINAM. En particulier Vincent Pouthier pour sa constante bienveillance à mon égard ainsi que pour nos nombreuses discussions à la pause-café. Sa présence marque, sans conteste, un point important dans l'espace des phases de ma dynamique personnelle. Je remercie Sylvain Picaud pour m'avoir fait confiance lors de ma nomination au CL. Bien que je sois resté peu bavard, j'y ai compris le fossé qui sépare parfois théorie et pratique, idéal et pragmatisme, en matière de gestion de la vie d'un labo. Je remercie Pierre Joubert pour ses infos sur la gestion de l'équipe mais aussi concernant l'enseignement. Merci à David Viennot pour ses précieux conseils concernant les techniques de mesure de la dimension fractale. Merci à Delphine qui a partagé mon bureau.

Merci aux étudiants qui m'ont permis de faire mes premières armes dans le milieu de l'enseignement. Merci à certain pour leurs gentils courriels qui m'ont fait comprendre que j'avais réussi à transmettre quelque chose. Je remercie Antoine et Saad que j'ai eu le privilège de co-encadrer durant leur stage de L3. Je pense qu'ils se souviendront longtemps de la méthode des moindres carrés, certes pas pour les meilleures raisons... Merci à Pierre pour sa contribution au sujet de la dynamique des comètes et aussi pour nos longues discussions philosophiques.

Je remercie le Personnel technique d'UTINAM : Carole et Eliane sans qui tout travail de recherches serait tout bonnement impossible. Je remercie Sadia qui permet à chacun de trouver chaque jour un bureau propre, propice au travail. Je la remercie également pour ses délicieuses cerises et délicieux gateaux.

Merci à tous les doctorants que j'ai croisés durant ces trois années et spécialement à Vivek, Lucile, David et Anthony.

Je remercie mes Professeurs de Physique et de Philosophie de terminale, respectivement Mr. Thiebaud et Mr. Uhrig. Je ne compte pas les minutes de récréation "sacrifiées" en compagnie du premier pour discourir de la nature de la lumière et de l'énergie. Avec le second, j'ai appris, comme l'étymologie l'indique : "l'amour de la sagesse". Cela n'allait pas de soi dans le milieu des classes scientifiques. "Choisissez-vous un philosophe à lire" nous proposait-il. L'essai sur le libre arbitre de Schopenhauer a renversé ma vision du monde et mes certitudes.

Je remercie mes amis, Vosgiens, "le G8" : Jérèm, Amandine, Maïté, Noé, Kiwi, Caro et Yul. Mention particulière pour cette dernière. Je lui suis infiniment reconnaissant de tout ce qu'elle a fait pour moi, elle qui m'a soutenu durant mes baisses de moral a notamment dû supporter mes longues jérémiades "Skypienne" durant les soirs de débogage de mes codes : "J'suis nul, j'y arriverais jamais, segmentation fault, core dumped : Pourquoi ? Hein pouquoi ! ?". Toute personne ayant codé un jour comprendra cette dernière phrase... Merci à Rémi, mon fidèle complice depuis l'époque spinalienne puis nancéenne : "Un rapport sur l'oscillateur harmonique en MQ ? Baaah c'est bon ! On va faire cela avec le Tome 3 du Landau :" je sais que tu t'en souviens... Globalement, merci à tous les acteurs de cette même époque : Romain, Benoit, Jenny, Laura, Marine, Lionel, Tommy...

Merci à Anne-Sophie qui montre qu'une rencontre à Besançon entre une Sociologue, Bretonne, Yffiniacaise et un Physicien, Lorrain, Sanchéen est plus que fructueuse. Il te reste qu'une chose à faire : "explose ma grande, explose !".

Enfin, merci infiniment à mes parents pour absolument tout. Merci à eux pour leur présence sans faille dans les moments lumineux comme dans les moments plus sombres de ma vie. Qu'ils trouvent ici ma profonde reconnaissance et la promesse d'une fidélité inconditionnelle aux valeurs qu'ils m'ont transmises.

Table des matières

Introduction **13**

1 Notions de Mécanique Analytique **17**
1.1 Introduction . . . 17
1.2 Formalisme lagrangien . . . 18
1.2.1 Etat du système . . . 18
1.2.2 Principe de moindre action . . . 18
1.2.3 Forme du lagrangien . . . 20
1.3 Formalisme hamiltonien . . . 21
1.3.1 Les équations de Hamilton . . . 21
1.3.2 Transformation canonique . . . 22
1.3.3 Crochets de Poisson . . . 23
1.4 Trajectoire dans l'espace des phases . . . 24
1.4.1 Notion d'intégrabilité d'un système . . . 24
1.4.2 Théorème de Liouville . . . 24
1.4.3 Variables angle-action . . . 25
1.4.4 Théorie des perturbations et systèmes presques intégrables . . . 26
1.5 Outils d'analyse et de simplification . . . 28
1.5.1 Exposant de Lyapunov . . . 28
1.5.2 Section de Poincaré . . . 29
1.5.3 Les applications symplectiques . . . 31
1.5.4 Approche diffusive . . . 34
1.6 Conclusion du chapitre . . . 34

2 La dynamique chaotique des comètes **37**
2.1 Introduction . . . 37
2.2 Application symplectique . . . 38
2.2.1 Hamiltonien de la dynamique . . . 38
2.2.2 Méthode perturbative . . . 40
2.2.3 Travail sur la séparatrice . . . 43
2.3 Méthodes numériques employées . . . 46
2.3.1 L'intégration . . . 46
2.3.2 L'itération . . . 48
2.4 Résultats et analyse . . . 48
2.4.1 Étude de la fonction perturbatrice de Jupiter . . . 48
2.4.2 Étude de la dynamique en présence de Jupiter . . . 52
2.4.3 Étude de la fonction perturbatrice du Système Solaire . . . 55
2.4.4 Étude de la dynamique en présence d'autres planètes . . . 56
2.4.5 Robustesse de l'utilisation de l'application symplectique . . . 61
2.5 Conclusion du chapitre . . . 62

3 La dynamique chaotique de la matière noire **65**
3.1 Introduction . . . 65
3.2 L'application sombre ("Dark Map") . . . 67
3.3 Le modèle utilisé . . . 69
3.3.1 Modèle simplifié . . . 69
3.3.2 Paramètres du halo de matière noire . . . 71
3.3.3 Section efficace de capture . . . 71
3.3.4 Densité et masse capturée . . . 74
3.4 Méthode numérique employée . . . 75
3.5 Résultats et analyses . . . 77
3.5.1 Section de Poincaré pour le modèle simplifié . . . 77
3.5.2 Propriétées des particules capturées . . . 77
3.5.3 Densité des particules capturées . . . 80
3.5.4 Accroissement de densité . . . 83
3.5.5 Systèmes multiples . . . 86
3.6 Conclusion du chapitre . . . 87

4 Dynamique fractale **89**
4.1 Introduction . . . 89
4.2 La théorie . . . 90
4.2.1 Hamiltonien de Jacobi . . . 90
4.2.2 Régularisation . . . 93
4.2.3 Dimension fractale . . . 95
4.3 Méthodes numériques employées . . . 96
4.3.1 L'intégration . . . 96
4.3.2 Méthode du "Box-Counting" . . . 98
4.4 Résultats et analyses . . . 99
4.4.1 Sections de Poincaré . . . 99
4.4.2 Analyse fractale . . . 103
4.4.3 Probabilité de survie . . . 108
4.5 Densité de présence dans l'espace réel . . . 111
4.6 Conclusion du chapitre . . . 113

Conclusion générale **115**

A Publications **119**

B Femmes et Physique **121**

Bibliographie **133**

Table des figures

Figures du chapitre 1 **17**
1.1 Schéma du principe variationnel 19
1.2 Schéma d'une représentation des variables angle-action 25
1.3 Schéma de la divergence de deux trajectoires dont les conditions initiales sont très proches 29
1.4 Représentation schématique d'une trajectoire dans un espace des phases/Section de Poincaré 30
1.5 Section de Poincaré du modèle de Hénon-Heiles/Exposant de Lyapunov . . . 31
1.6 Sections de Poincaré pour l'application standard pour $K = 0$, $K = 1.928$, $K = 7$ 32
1.7 Sections de Poincaré pour l'application standard pour $K = 0.8$, $K = 1.4$ 33

Figures du chapitre 2 **37**
2.1 Schéma de la trajectoire typique des comètes 38
2.2 Schéma du problème à trois corps restreint en $2D$ 39
2.3 Schéma du problème dans le repère sidéral 40
2.4 Valeurs de l'énergie dans le repère sidéral 42
2.5 Schéma des éléments orbitaux 45
2.6 Pseudo-code du programme d'itération de l'application symplectique pour les comètes 49
2.7 Fonction perturbant l'énergie de la comète de Halley/Orbite de la comète en projection sur le plan de l'écliptique 50
2.8 Fonction perturbatrice 52
2.9 Section de Poincaré de la dynamique de la comète de Halley en présence de Jupiter 53
2.10 Fonctions perturbatrices pour les 8 planètes du système solaire 57
2.11 Évolution du maximum normalisé de la fonction perturbatrice avec la variation de q 58
2.12 Section de Poincaré pour une orbite en présence de Jupiter et Saturne 59
2.13 Fonctions perturbatrices calculées par intégration numérique 60
2.14 Variation en énergie de la comète au cours du temps 61

Figures du chapitre 3 **65**
3.1 Courbe de rotation de galaxie normalisée à R_{25} 66
3.2 Exemple d'un processus de capture-évolution-éjection d'une particules par un binaire 68
3.3 Variation de l'amplitude de la fonction perturbatrice sinusoïdale 70
3.4 Schéma d'un processus de diffusion à deux corps 72
3.5 Section efficace de capture en fonction de l'énergie/Distribution différentielle en énergie dN/dw du nombre de particules capturables 74
3.6 Pseudo-code de l'algorithme utilisé pour suivre la capture 76
3.7 Sections de Poincaré caractéristiques 78

3.8 Nombre de particules capturées N_{cap} en fonction du temps/Distribution des énergies après la saturation . . . 79
3.9 Densité radiale $\rho(r)$ . . . 80
3.10 Densité radiale $\rho(r)$/Densité volumique en fonction du rayon . . . 81
3.11 Densité de matière noire capturée au temps t_{snap}/T_2 . . . 82
3.12 Facteurs ζ et ζ_g, d'accroissement de la densité de matière noire . . . 83
3.13 Fonction ζ_g pour J et u/v_2 . . . 85
3.14 Distribution en valeur de périastre après saturation de la capture . . . 86
3.15 Densité radiale et volumique pour un modèle à 8 corps perturbateurs . . . 87

Figures du chapitre 4 **89**
4.1 4 exemples de dynamique dans l'espace des phases . . . 90
4.2 Zones de vitesses interdites . . . 92
4.3 Schéma des zones de régularisation . . . 93
4.4 Pseudo-code de l'algorithme d'intégration . . . 97
4.5 Illustration de la méthode du box-counting . . . 98
4.6 Calcul de la dimension fractale de l'atracteur d'Ikeda . . . 99
4.7 Section de Poincaré (x, y), $\mu = 0.3$, $E = -1.5$ . . . 100
4.8 Section de Poincaré (p_x, x), $\mu = 0.3$, $E = -1.5$ . . . 101
4.9 Section de Poincaré (x, y), $\mu = 0.3$, $E = -1.3$, $E = -1.5$, $E = -1.6$, $E = -1.7$, $E = -1.8$, $E = -2$ . . . 102
4.10 Boxcounting $\mu = 0.3$, $\mu = 0.4$, $E = -1.3$, $E = -1.5$ $E = -1.7$ $R_s = 10$ . . . 103
4.11 Boxcounting $\mu = 0.3$, $\mu = 0.4$, $E = -1.5$, $R_s = 100$ . . . 104
4.12 Section de Poincaré (x, y), $\mu = 0.5$, $E = -0.5$ . . . 106
4.13 Section de Poincaré (x, y), $\mu = 0.3$, $E = -1.5$ . . . 107
4.14 Probabilité de survie des particules, $\mu = 0.3$, $\mu = 0.4$, $\mu = 0.5$ . . . 108
4.15 Section de Poincaré (x, y), $t > 100$ . . . 109
4.16 Probabilité de survie des particules, $R_s = 100$ . . . 110
4.17 Probabilité de survie des particules, $\mu = 0.3$, $E = -1.3$, $E = -1.5$, $E = -1.7$ . . . 111
4.18 Densité de présence des particules dans l'espace réel . . . 112

Introduction

Il y a 125 ans Henri Poincaré publiait un ouvrage : *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*[76] qui était la version remaniée du mémoire lui ayant fait gagner le concours de mathématiques international créé par le roi Oscar II de Suède. Par ces travaux, Henri Poincaré fut l'un des précurseurs de ce qui allait devenir le chaos dynamique. En effet, il a montré que dans le problème à trois corps il n'y a pas de solution analytique (sauf cas particuliers) mais également qu'il se produisait une grande sensibilité aux conditions initiales autour de certains points qui amène l'existence d'orbites très compliquées (aujourd'hui appelées orbites chaotiques). Il pose ainsi le germe d'une nouvelle théorie dans l'étude des systèmes dynamiques où interviennent ces sensibilités aux conditions initiales : la théorie du chaos, qui ne sera désignée sous ce nom que bien plus tard. Dans sa thèse [73], L. Petitgirard revient sur l'origine de la notion de chaos qui par ses périgrinations historico-géographiques n'est pas simple à situer.

Les travaux de H. Poincaré ont provoqué un changement de vision dans la communauté scientifique. En effet, en étudiant un apparent simple problème à trois corps, il mit au jour une complexité dynamique que l'on pensait précédemment réservée aux problèmes avec un très grand nombre de degrés de liberté. Pendant de nombreuses années, les propriétés particulières de ces systèmes furent essentiellement étudiées par les mathématiciens, sans forcément prendre en considération un système physique, notons par exemple les noms des mathématiciens suivants : G. Birkhoff, M. L. Cartwright, J. E. Littlewood, S. Smale et beaucoup de noms de l'école Russe des années 60 en particulier A. N. Kolmogorov ou V. Arnold. Selon, E. Ott [68] l'une des raisons de l'arrivée tardive de la physique dans ce développement est due à la complexité des énoncés mathématiques difficilement pénétrables sans être purement du domaine. Ce qui change la donne est l'arrivée des premiers ordinateurs et la possibilité de calculer numériquement certains de ces processus d'intérêts physiques.

La première expérience numérique est celle de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou [32] réalisée entre 1953 et 1955. Il s'agissait de mesurer la thermalisation d'un système de $N = 64$ oscillateurs couplés avec comme condition initiale une excitation uniquement sur un mode. Bien entendu, quand le système est harmonique, il est intégrable, mais l'idée de l'expérience ici était justement d'introduire une petite anharmonicité et de vérifier si l'énergie se répartissait sur l'ensemble des modes d'oscillations. Le système étant quasi-périodique, l'expérience répondit par la négative à cette dernière question. Ce fut une grosse surprise à l'époque où l'on supposait que la théorie ergodique s'appliquait aux systèmes perturbés.

Une seconde expérience numérique fut celle réalisée par M. Hénon et C. Heiles en 1961 [39]. Ils s'intéressaient alors à la dynamique d'une étoile dans une galaxie axisymétrique. Ils étaient alors à la recherche d'une troisième intégrale du mouvement. Le résultat fut tout autre, M. Hénon et C. Heiles observèrent un comportement erratique pour certains paramètres, qu'ils appelèrent "trajectoires ergodiques". Ces types de trajectoires lorsque proches semblaient diverger exponentiellement. Ils observèrent aussi ainsi un régime mixte entre ces "trajectoires ergodiques" et des trajectoires régulières. Nous parlerons brièvement de ce modèle dans le chapitre 1 de cette thèse.

En 1963 E. Lorenz publie un article important sur la prédictibilité des systèmes [54]. Il utilise pour cela un "Toy model" visant à modéliser l'atmosphère. Plus tard en 1972, dans une communi-

cation intitulée *Predictability : Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas ?* [55] Edward LORENZ expose ses résultats sur la sensibilité aux conditions initiales d'un système dynamique. Le titre de la conférence contribua très certainement au retentissement que "L'effet Papillon" a dans notre culture aujourd'hui, la théorie du chaos étant inextricablement liée dans la mémoire collective à cet effet.

Dans cette thèse nous allons aborder le cas du problème à trois corps. Pour restreindre le domaine d'étude, ce travail portera sur le problème à trois corps restreint et sur les applications que l'on peut en faire dans des cas de la dynamique céleste. Le problème à trois corps restreint constitue un système dynamique lié par la gravitation où l'on ne s'intéresse qu'au mouvement d'un seul des trois corps, les deux autres étant supposés connus et ne se modifiant pas sous l'action gravitationnelle du corps auquel on s'intéresse. Pour cela, il faut que le troisième corps ne crée pas de perturbation notable dans la dynamique des deux autres, sa masse que nous noterons m_3 se doit donc d'être faible par rapport aux deux autres masses M_1 et M_2. Ainsi, nous traiterons ici typiquement du cas d'un corps de masse négligeable que nous appellerons "particule" soumise à la gravitation de deux autres corps de masse bien plus grande. Les représentations de ce type de dynamique sont très nombreuses, par exemple, le cas d'une planète en interaction avec un système d'étoiles binaires, celui d'un satellite artificiel soumis à la gravitation conjuguée de la Terre et de la Lune, ou encore celui d'une comète en orbite dans le système solaire où l'on ne prendrait en considération que le Soleil et la planète Jupiter...

Si nous diminuons la masse de l'un des deux corps principaux pour avoir $m_3 \ll M_2 \ll M_1$. Alors la dynamique se comporte comme une perturbation du système à deux corps dont les solutions sont analytiques. Dans cette thèse nous évoquerons comment, par une théorie des perturbations, nous pouvons réduire cette dynamique à l'itération d'une application symplectique connue sous le nom d'application de KEPLER [75, 74, 20, 45, 47, 57, 88, 89], qui a aussi été utilisé pour étudier la ionisation des atomes d'hydrogène [10, 87] et l'autoionisation des états de RYDBERG de molécule [30]. Cette simplification fait perdre la précision sur la dynamique telle qu'on pourrait l'attendre de prédictions d'éphémérides par exemple. Cependant, d'un point de vue statistique, cette application en conserve les propriétés principales : mer chaotique, courbes invariantes... De plus, elle permet des interprétations plus simples de certains comportements de cette dynamique.

Nous avons choisi d'appliquer cette méthode symplectique à deux problèmes ; celui de la dynamique des comètes dans le système solaire et celui du problème de la matière noire dans la galaxie. A priori, ces deux problèmes semblent totalement étrangers. Pourtant dans le cadre que nous venons de définir, la dynamique d'une comète comme celle d'une particule de matière noire peut être régie par l'application de KEPLER.

L'idée repose sur le fait qu'une comète a une orbite quasi-parabolique. Loin des autres corps (Soleil et planète) le système se comporte comme un problème à deux corps analytique ou l'énergie est constante. Lorsque la comète passe à proximité du Soleil elle ressent une perturbation brève dans le temps qui modifie son orbite. Nous avons ici un processus itératif où à chaque retour la comète voit son orbite légèrement modifiée. Le même processus se produit pour la capture, la dynamique et l'éjection d'une particule de matière noire.

Nous prendrons comme objet d'étude la dynamique de la comète de HALLEY. En suivant le chemin tracé par PETROSKY, CHIRIKOV et VESHESLAVOV [75, 74, 20] nous verrons comment obtenir une fonction perturbatrice au système à deux corps dont nous étudierons la structure. Nous montrerons que la méthode employée pour obtenir cette fonction correspond très bien aux résultats basés sur des observations/simulations utilisées dans [26]. Grâce à ces résultats, nous serons en mesure de déterminer certaines caractéristiques de la dynamique. Enfin nous opérerons à une intégration numérique des équations du mouvement et nous verrons les limites de la technique mise en œuvre. Ces limites nous serons notamment imposées par l'existence d'événements non pris en compte par le modèle. Par exemple, la possibilité pour la comète d'effectuer des rencontres proches avec les planètes.

De la même façon, si l'on suppose que la matière noire est composée de particules non-

baryoniques, interagissant seulement avec la gravité, on a alors des points matériels parfaits et leurs dynamiques peuvent aussi être décrites par l'application de Kepler. Dans ce second cas nous étudierons la capture, l'évolution puis l'éjection des particules de matière noire dans des systèmes binaires. Notons que ce cas d'étude comporte une légitimité supplémentaire, en ce sens que pour ces particules de matière noire, on s'affranchit de tout autre force que celle de la gravité, dans le cas des comètes il existe une dynamique interne, du dégazage, une pression de radiation solaire... Notre travail fait écho aux travaux A. Peter et S. Tremaine [69], A. Peter [70, 71, 72], I. B. Kriplovitch et D. L. Shepelyansky [45], J. Lages et D. L. Shepelyansky [47] qui traitent de la capture de matière noire dans le système solaire, mais également de L. Brayeur and P. Tinyakov [9] qui traitent de particules capturées par des étoiles binaires. Les travaux [69, 70, 71, 72, 9] sont basés sur une intégration directe et massive des équations du mouvement. Ici nous suivrons l'approche par application symplectique développée par J. Lages et D. L. Shepelyansky [47] eux mêmes faisant suite aux travaux analytiques de I.B. Khriplovich et D. L. Shepelyansky [45].

Dans un troisième temps nous étudierons l'éjection de matière par un système binaire dont les deux masses sont comparables. Cette fois, nous intégrerons numériquement les équations du mouvement et nous nous intéresserons à l'aspect fractal du répulseur étrange engendré par les trajectoires de particules ionisées du système binaire. Dans ce cas de figure nous aurons affaire à un système à trois corps restreint où la particule est liée au départ et se retrouve éjectée au bout d'un certain temps. Notons qu'il ne s'agit pas ici à proprement parlé de système hamiltonien, mais de système ouvert par le fait même que la particule peut être ionisée du système. Ce type de systèmes ouverts fait partie de la classe des systèmes chaotiques sur des échelles finies de temps [1] et a notamment été étudié par J. Nagler [65, 66] où il s'intéresse à la perte des particules par collision avec l'une des masses du système binaire. Dans le cas où les deux masses sont identiques, ce problème est appelé Problème De Copenhague. Dans notre cas, nous nous intéresserons au repulseur étrange caractérisé par les trajectoires éjectées du système. Cette étude fera cette fois écho à des travaux de D. L. Shepelyansky dans le domaine du chaos quantique concernant la loi de Weyl fractale [86].

Cette thèse se divise donc en 4 chapitres :

- Chapitre 1 : *Notions de Mécanique Analytique.* Nous ferons un bref aperçu de mécanique analytique où nous reviendrons sur les principales méthodes utilisées pour caractériser la dynamique classique.

- Chapitre 2 : *La dynamique chaotique des comètes.* Nous nous intéresserons à la dynamique chaotique des comètes dans le système solaire par le biais de l'application de Kepler. Nous prendrons pour cas d'étude la comète de Halley.

- Chapitre 3 : *La dynamique chaotique de la matière noire.* Nous explorerons le problème de la capture-dynamique-éjection de particules de matière noire par des systèmes binaires en rotation ultra rapide.

- Chapitre 4 : *Dynamique fractale.* Nous parlerons des propriétés fractales de la dynamique des orbites éjectées d'un système binaire.

Enfin, dans la conclusion finale nous synthétiserons les résultats obtenus au cours de ce travail de thèse et nous parlerons des perspectives d'études envisageables.

Chapitre 1

Notions de Mécanique Analytique

> Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile ; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle.
>
> Henri Poincaré, *Science et méthode*

1.1 Introduction

Depuis l'antiquité, on trouve trace de la volonté des hommes à comprendre et prédire les phénomènes du monde qui les entoure. Ce besoin de compréhension trouve déjà la marque d'une démarche scientifique chez les présocratiques [25] dans leur volonté d'expliquer le monde par un enchaînement de causes et de conséquences. Dans les fragments de manuscrits restant de ces derniers, on peut remarquer que tout le spectre des sciences est représenté : physique, chimie, météorologie, biologie etc... Parmi ces disciplines, l'une d'elle tient une place importante, celle de la compréhension de la dynamique des corps et du monde. On y trouve pèle-mêle des arguments sur le mouvement des astres ou encore le sens physique des éclipses. Après les présocratiques, la quête se poursuivra au travers de philosophes antiques plus connus comme Aristote.

L'étude de la mécanique des corps ne prendra vraiment la forme qu'on lui connaît qu'à partir du 17ème siècle avec les travaux de Johannes Kepler et de Galilée. Au 18ème les *Philosophiae naturalis principia mathematica* d'Isaac Newton, traduit en français par Madame Emilie Du Châtelet offriront une nouvelle vision du monde. A cette époque, les débats dans les milieux scientifiques portent sur la *Vis Viva* (la force vive) proposée par Gottfried Leibniz. Le débat de l'époque était de savoir quelles quantités physiques étaient conservées dans le mouvement. On voit déjà que la notion de quantité conservée prend de l'importance et elle sera cruciale par la suite. En effet à chaque quantité conservée, correspond une symétrie du problème, comme le montrera Emmy Noether (voir annexes) bien plus tard. Les travaux de Lagrange et ceux de Hamilton amèneront une autre formulation des équations du mouvement données par Newton.

En dynamique, on distingue deux types de système, les systèmes dits *intégrables* et les systèmes dits *non-intégrables*. Un système intégrable se distingue par le fait que ses équations sont analytiquement solubles, c'est par exemple le cas du problème à deux corps dont la solution est connue depuis Newton qui donna une l'explication claire des lois de Kepler. En revanche, le cas typique du problème à trois corps est un système non-intégrable. Son étude remonte au problème de la stabilité du système solaire, étudié par Henri Poincaré [76] au 19ème siècle. Outre le fait que l'on ne peut résoudre les équations du mouvement analytiquement, l'étude de ces systèmes a fait naître le concept de chaos qui caractérise la sensibilité aux conditions initiales. Dans ces systèmes des conditions initiales très peu différentes mèneront, à terme, à des trajectoires très différentes.

L'avénement de l'informatique et des méthodes numériques de calcul ont permis au 20ème siècle une étude massive de ces systèmes. Ces études se poursuivent de nos jours et le contenu de cette thèse s'inscrit dans ce cadre. Une des découvertes majeure du domaine fut donnée par l'expérience numérique de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou [32] qui montra l'existence de trajectoires quasi-périodiques au milieu du chaos. Cette découverte sera expliquée par le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (théorème KAM) [2]. Des travaux d'importance capitales seront aussi réalisés par Boris Chirikov [15] travaux que l'on utilisera tout au long de cette thèse. Le but de ce premier chapitre est de dresser un panorama un peu plus formel des concepts évoqués précédemment. Ce chapitre n'est pas exhaustif mais tentera d'exposer les concepts de base exploités dans cette thèse.

1.2 Formalisme lagrangien

Dans cette section, nous allons aborder une notion de base de la mécanique. Nous parlerons d'abord de la notion d'état d'un système puis, nous verrons que les équations qui régissent le mouvement d'un point matériel peuvent découler d'un principe plus fondamental qui est le *principe de moindre action.* Nous verrons qu'une fonction dite *fonction lagrangienne* découle de ce principe et nous en décrirons la forme.

1.2.1 Etat du système

Pour paraphraser [48] "Une des notion fondamentales de la Mécanique est celle de *point matériel*". Il s'agit d'un concept où l'objet étudié se limite à un point ; on peut négliger ses dimensions propres. On sait que l'état d'un tel système à l'instant t est totalement connu si l'on connaît sa position désignée par les coordonnées x_i, où $i = 1, ..., N$, mais aussi ses dérivés par rapport au temps. Ce sont respectivement les coordonnées et les vitesses du système. Ici N est appelé le nombre de degrés de liberté. La connaissance de ces grandeurs nous donne l'ensemble de l'information nécessaire à la connaissance de la dynamique passée et future. Les $2N$ informations des positions et vitesses du point matériel évoluent dans le temps. Elles constituent une trajectoire dans un espace à $2N$ dimensions donnant à chaque instant l'état du point matériel.

Les équations du mouvement sont les équations qui lient les deux types de coordonnées, position et vitesse, par l'intermédiaire de l'accélération $\ddot{\boldsymbol{x}}$. Le second principe de Newton qui dans la traduction des *Philosophiae naturalis principia mathematica* d'Emilie du Châtelet nous dit en fançais moderne : *Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée* que l'on peut écrire aujourd'hui

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

où $d\boldsymbol{p}/dt$ est la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps, $\boldsymbol{F}$ est la force s'exerçant sur ce point. Historiquement, c'est dans ce sens que les équations du mouvement ont été décrites pour la première fois. Dans la suite du chapitre, nous allons cependant aborder le problème avec comme loi fondamentale le principe dit de *moindre action* [48].

1.2.2 Principe de moindre action

Selon le principe de moindre action, un système mécanique est généralement décrit par un lagrangien L qui est une fonction des coordonnées généralisées $\{q_1(t), ..., q_N(t)\}$, vitesses généralisées $\{\dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_N(t)\}$ et du temps t. Le chemin $\tilde{C}$ effectivement suivi par le système entre les instants t_A, et t_B, et défini par les N coordonnées $\{\tilde{q}_1(t), ..., \tilde{q}_N(t)\}$, est tel que

$$S(\tilde{C}) = \int_{t_A}^{t_B} L(\tilde{q}_1, ..., \tilde{q}_N, \dot{\tilde{q}}_1, ..., \dot{\tilde{q}}_N, t)dt \tag{1.2}$$

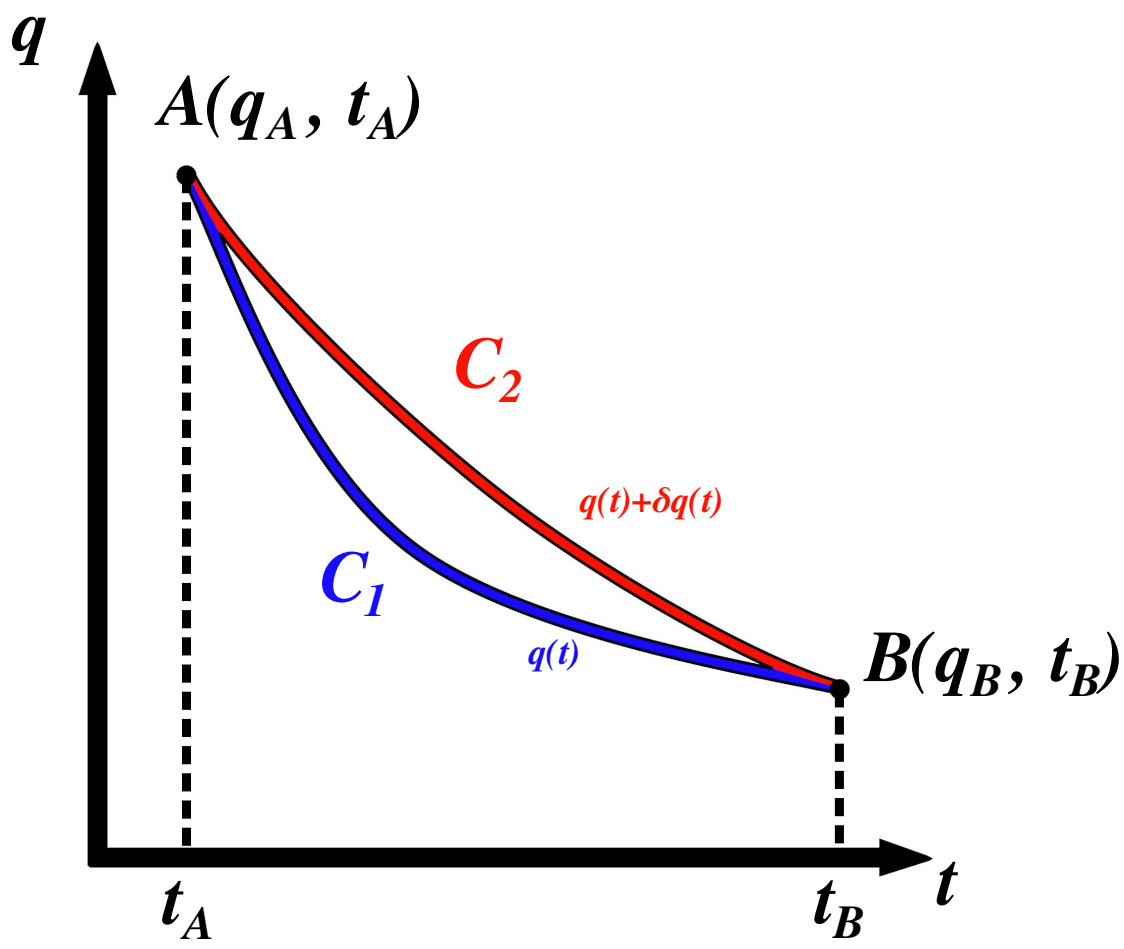

FIGURE 1.1 – Schéma du principe variationnel.

est extrémale. Imposons par conséquent que (1.2) soit extrémale. Pour alléger l'écriture nous noterons simplement q pour les q_i et $\dot{q}$ pour les $\dot{q}_i$. On a

$$\delta S(C) = \delta \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t) = 0 \quad \forall \delta q(t) \tag{1.3}$$

L'équation se réécrit

$$\int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 \quad \forall \delta q(t) \tag{1.4}$$

où $\delta q(t)$ est un déplacement virtuel infinitésimal de $q(t)$. En intégrant par partie et tenant compte du fait que $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$, on obtient

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_B}^{t_A} + \int_{t_B}^{t_A} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad \forall \delta q(t) \tag{1.5}$$

Le premier terme est nul car on impose $\delta q(t_A) = \delta q(t_B) = 0$ (voir Fig. 1.1). Il reste alors les N équations d'Euler-Lagrange

$$\left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \right\}_{i=1,\dots,N} \tag{1.6}$$

dont la résolution donne la solution cherchée $\{\tilde{q}_1(t), ..., \tilde{q}_N(t)\}$ définissant la trajectoire $\tilde{C}$ effectivement suivie par le système.

L'important dorénavant est de déterminer la forme du lagrangien. Dans le cadre de la mécanique classique (non relativiste) nous pouvons prendre comme point de départ le cas d'une particule libre, et donc par définition, soumise à aucune interaction. A partir du principe de relativité de Galilée, on peut tirer une forme valide de la forme du lagrangien pour ce type de système. Notons qu'on peut montrer [48] que le lagrangien n'est déterminé qu'à une dérivée totale par rapport au temps d'une fonction quelconque près.

1.2.3 Forme du lagrangien

Nous allons traiter le cas d'un point matériel de masse m en se plaçant dans un référentiel galiléen, qui est un référentiel où une particule qui n'est soumise à aucune force se déplace avec une vitesse constante. On comprend que la fonction de Lagrange, pour cette particule libre, ne dépend ni du temps ni de la position (l'espace et le temps sont uniformes ici). Il ne reste plus que la vitesse... Or, par isotropie de l'espace, sa direction n'a pas d'importance. Par conséquent il ne reste que sa norme. En conséquence, si l'on note $\boldsymbol{v}$ le vecteur vitesse, $\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = v^2$, on a donc

$$L = L(v^2) \tag{1.7}$$

Par un changement de référentiel galiléen, une fonction de Lagrange se voit transformée comme $L(v^2) \to L(v'^2)$, où v' est la vitesse dans le second référentiel. Supposons que la différence entre les vitesses soit faibles $\boldsymbol{v'} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\epsilon}$. En négligeant les termes en $\boldsymbol{\epsilon}$ d'ordre supérieur à 1 on obtient

$$L(v'^2) = L(v^2) + 2\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{v}\frac{\partial L}{\partial v^2} \tag{1.8}$$

Le principe de relativité de Galilée requiert que la fonction L ne dépende pas du rérérentiel Galiléen choisi et donc que le second terme du membre de droite de (1.8) peut s'écrire comme une dérivée totale par rapport au temps $\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{x}\frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2}\right)$ si $L \propto v^2$. En choisissant la constante de proportionalité on reconnait l'énergie cinétique d'un point matériel de masse m.

$$L = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.9}$$

Pour un système général où le point matériel est en interaction avec son environnement par le biais d'une fonction scalaire de sa position (cas qui nous intéressera dans la suite), on ajoute une fonction dépendante de la position et éventuellement du temps $-U(\boldsymbol{x}, t)$ à la fonction de Lagrange. On a

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.10}$$

En utilisant les équations de Lagrange (1.6) avec la forme précédemment établie on trouve :

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}U \tag{1.11}$$

qui sont les équations de Newton avec $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}U$ où U est désigné sous le terme d'énergie potentielle. Les dérivées de la fonction de Lagrange par rapport aux vitesses généralisées $(\dot{q}_1, ..., \dot{q}_N)$

$$\left\{ p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right\}_{i=1,\dots,N} \tag{1.12}$$

sont les moments canoniquement associés aux coordonnées généralisées et les dérivées par rapport aux coordonnées généralisées $(q_1, ..., q_N)$

$$\left\{ \mathcal{F}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \right\}_{i=1,\ldots,N} \tag{1.13}$$

sont appelées les forces généralisées.

1.3 Formalisme hamiltonien

Nous venons de voir qu'il était possible de formuler les équations du mouvement au travers de la fonction de Lagrange. Il est également possible de les formuler sous une autre forme appelée formalisme hamiltonien. C'est cette forme que nous allons aborder dans cette section.

1.3.1 Les équations de Hamilton

Nous souhaitons que les équations du mouvement établies précédemment ne dépendent plus des coordonnées et vitesses généralisées $(q_i, \dot{q}_i)$ mais des coordonnées généralisées et des moments conjugués qui leurs sont canoniquement associés (q_i, p_i). La trajectoire décrite par ces $2N$ variables forme une trajectoire dans un espace dit *espace des phases*. Il nous faut établir une fonction analogue à la fonction de Lagrange $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ dépendant des q_i et des p_i. Cette fonction est appelée le hamiltonien du système, on la notera $H(q_i, p_i, t)$. On peut obtenir cette fonction par une transformation de Legendre du lagrangien L [35]

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{1.14}$$

A partir de cette égalité, nous allons déterminer les équations du mouvement appelées équations de Hamilton de la dynamique. En différenciant la fonction de Lagrange on a

$$dL(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{1.15}$$

En utilisant les équations de Lagrange (1.6) et la définition des moments canoniques (1.12) on a l'équation

$$dL(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{N} \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^{N} p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{1.16}$$

que l'on peut réécrire

$$d\left(\sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - L \right) = -\sum_{i=1}^{N} \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{1.17}$$

On reconnaît la différentielle de H (1.14). Par identification, on obtient les équations de Hamilton

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q}_i & = & \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \\ \dot{p}_i & = & -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right\}_{i=1,\ldots,N} \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.18}$$

Ces équations sont les analogues des équations du mouvement (1.1) et (1.6) sauf que l'on obtient ici un système de $2N$ équations couplées du premier ordre au lieu de N équations du deuxième ordre.

1.3.2 Transformation canonique

Dans cette section, nous allons voir brièvement la notion de transformation canonique [35]. En effet, les coordonnées (q_i, p_i) peuvent, en réalité, représenter n'importe quel type de grandeur définissant de manière univoque la trajectoire dans l'espace des phases. Il est donc toujours possible de transformer les variables (q_i, p_i) en d'autres grandeurs (Q_i, P_i) susceptibles de simplifier les équations de la dynamique. Ce changement de variable laissera inchangée la structure symplectique des équations. On dira de ces transformations quelles sont canoniques. Cela signifie que les équations de Hamilton prendront la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{Q}_i & = & \dfrac{\partial H'}{\partial P_i} \\ \\ \dot{P}_i & = & -\dfrac{\partial H'}{\partial Q_i} \end{array} \right\}_{i=1,\ldots,N} \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.19}$$

où $H' = H'(Q_i, P_i, t)$ est le nouvel hamiltonien. En vertu du principe de moindre action qui s'applique aussi aux nouvelles variables, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \delta \int \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - H \right) dt &= 0 \\ \delta \int \left(\sum_{i=1}^{N} P_i \dot{Q}_i - H' \right) dt &= 0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

La seule solution pour que les équations de (1.20) soit vérifiées consiste à ce que les deux expressions sous l'intégrale ne diffèrent que de la dérivée totale d'une fonction quelconque par rapport au temps $\frac{dF}{dt}$. La différentielle totale exacte de F est par conséquent

$$dF = \left[\sum_{i=1}^{N} p_i dq_i \right] - \left[\sum_{i=1}^{N} P_i dQ_i \right] + (H' - H)dt \tag{1.21}$$

La fonction F est appelée fonction génératrice de la transformation. Elle dépend d'un mélange des anciennes et des nouvelles variables. En particulier, pour le cas où la fonction F a la forme naturelle $F = F_1(q_i, Q_i, t)$ on peut écrire :

$$dF_1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{1.22}$$

et par identification avec (1.21)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_i & = & \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ \\ P_i & = & -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{array} \right\}_{i=1,\ldots,N} \qquad H'(P_i, Q_i, t) - H(p_i, q_i, t) = \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{1.23}$$

Il existe tout un jeu de fonctions génératrices, fonctions des anciennes et nouvelles variables. On peut dénombrer 4 types de fonction génératrice $F_1(q_i, Q_i, t)$, $F_2(q_i, P_i, t)$, $F_3(p_i, Q_i, t)$, $F_4(p_i, P_i, t)$ dont découlent des équations très similaires. A titre d'exemple, pour $F_2(q_i, P_i, t)$ on peut voir que cette fonction est issue de la transformation de Legendre [35] de F_1 grâce à la seconde relation

de (1.23). On a donc $F_2(q_i, P_i, t) = \sum_{i=1}^{N} Q_i P_i + F_1$, on peut donc écrire sa différentielle sous la forme

$$\begin{aligned} dF_2 &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_2}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^{N} p_i dq_i + \sum_{i=1}^{N} Q_i dP_i + (H' - H) dt \end{aligned} \tag{1.24}$$

et donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_i &=& \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ \\ Q_i &=& \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} \end{array} \right\}_{i=1,\ldots,N} \qquad H'(P_i, Q_i, t) - H(p_i, q_i, t) = \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{1.25}$$

Une transformation qui simplifierait grandement les équations du mouvement serait de choisir $H'(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t) = 0$. En effet, dans ce cas $\partial H'/\partial Q_i = \dot{P}_i = 0$ et $\partial H'/\partial P_i = \dot{Q}_i = 0$ les nouvelles variables sont alors des constantes du mouvement et la résolution devient triviale. La question est de trouver la fonction génératrice permettant cette manipulation. Plaçons-nous dans le cas de la fonction génératrice F_1 que nous notons S, notation usuelle dont on ne détaillera pas l'origine ici. Nous avons alors d'après (1.23)

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, Q_i, t) + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, Q_i, t), t\right) = 0 \tag{1.26}$$

qui est l'equation de Hamilton-Jacobi dont la résolution nous donne les équations du mouvement. On a une fois de plus changé l'approche de la résolution en transformant $2N$ équations aux dérivées partielles en une équation aux dérivées partielles. La résolution de cette équation n'est pas triviale, il s'agit d'un problème mathématique complexe, sauf dans le cas où les variables sont séparables.

1.3.3 Crochets de Poisson

Soit une fonction $f(q_i, p_i, t)$, en utilisant les équation de Hamilton, sa dérivée totale par rapport au temps est

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \tag{1.27}$$

que l'on réécrit

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \tag{1.28}$$

où

$$\{g, f\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \tag{1.29}$$

est ce que l'on appelle le crochet de Poisson. Il s'en suit immédiatement que pour qu'une grandeur soit une constante du mouvement, elle ne doit pas explicitement dépendre du temps et son crochet de Poisson avec le hamiltonien doit être nul

$$\{H, f\} = 0 \tag{1.30}$$

En particulier, on a les relations suivantes entre les crochets de Poisson des coordonnées généralisées et des moments canoniquement associés

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \{q_i, q_j\} & = & 0 \\ \{p_i, p_j\} & = & 0 \\ \{p_i, q_j\} & = & \delta_{ij} \end{array} \right\}_{i,j=1,\ldots,N} \tag{1.31}$$

1.4 Trajectoire dans l'espace des phases

Dans cette section, nous allons aborder les caractéristiques de la trajectoire dans l'espace des phases, notamment le critère d'intégrabilité d'un système. Nous verrons aussi une méthode permettant d'effectuer une transformation amenant un hamiltonien, dont les variables sont périodiques, à être exprimé sous forme de variables appelées *angle-action*. Cette transformation simplifiera l'analyse du mouvement dans le cas où le système est quasi-intégrable.

1.4.1 Notion d'intégrabilité d'un système

Un système est dit intégrable si sa trajectoire dans l'espace des phases est analytiquement soluble. La possibilité de résolution est limitée par certains critères. Ces critères sont donnés par le théorème de Arnold-Liouville [2] que nous ne démontrerons pas ici mais dont nous allons seulement énoncer les conclusions.

Un système dynamique régit par un Hamiltonien H est dit intégrable s'il respecte les trois points suivants [2] :

1. on peut définir N fonctions I_i de l'espace des phases qui sont des intégrales du mouvement, $\{H, I_i\} = 0$,

2. ces N intégrales du mouvement sont indépendantes les unes des autres,

3. ces N intégrales du mouvement sont en involution, chacune d'entre elles peut jouer le rôle de hamiltonien du système, $\{I_i, I_j\} = 0 \quad \forall i, j \leq N$

1.4.2 Théorème de Liouville

Le théorème de Liouville (voir par exemple la démonstration dans [2]) assure que le flot hamiltonien défini par

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{avec } \boldsymbol{x} = (q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N) \text{ et } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (\partial H/\partial q, -\partial H/\partial p) \tag{1.32}$$

déforme à volume constant n'importe quel domaine fini de l'espace des phases. Ainsi, l'ensemble des points d'un domaine fini de l'espace des phases peut être considéré comme un fluide dont le volume reste constant à mesure que le temps passe. En notant ρ la densité du fluide on a

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{H, \rho\} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \rho \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \tag{1.33}$$

La structure symplectique des équations de Hamilton 1.18 implique

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0 \tag{1.34}$$

autrement dit le fluide dont le flot est défini par (1.32) est incompressible. Ainsi deux trajectoires dans l'espace des phases possédant des conditions initiales différentes ne peuvent se croiser. On comprend instinctivement que si c'était le cas, deux trajectoires dont les conditions initiales sont différentes pourraient aboutir au même résultat ou inversement que deux conditions initiales rigoureusement identiques pourraient aboutir à deux résultats différents. En utilisant la propriété d'incompressibilité (1.34), il est alors possible d'écrire l'équation de continuité

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{j} \tag{1.35}$$

où $\boldsymbol{j} = \rho \dot{\boldsymbol{x}}$ est la densité de courant du fluide défini par le flot (1.32).

1.4.3 Variables angle-action

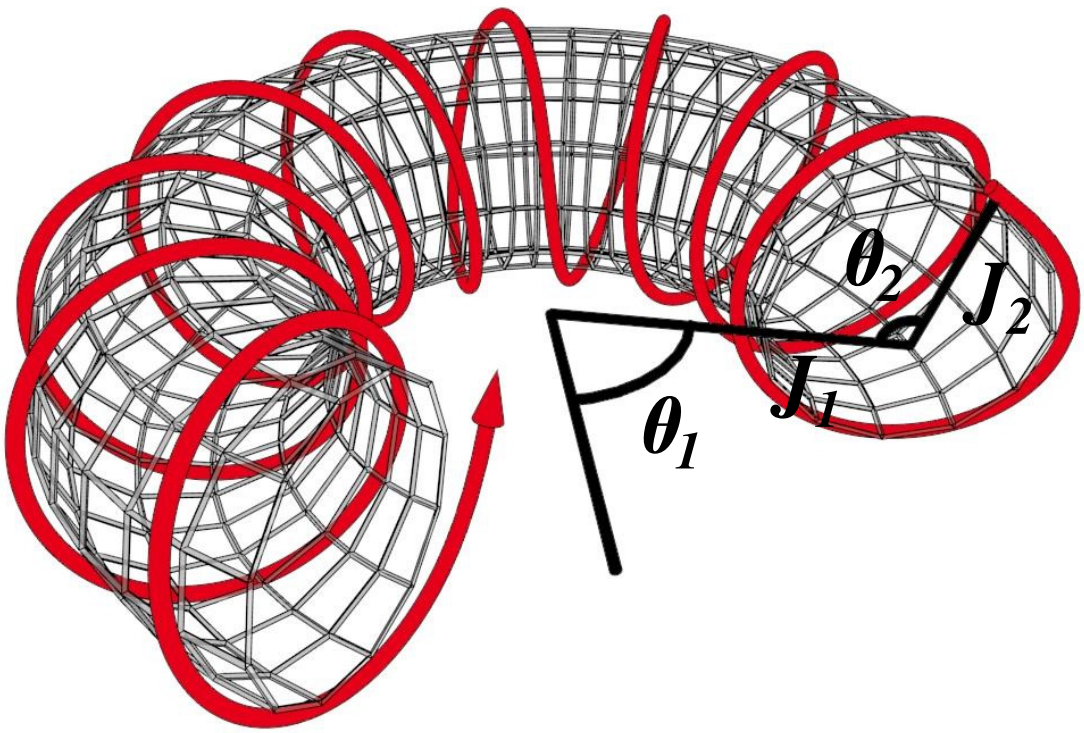

FIGURE 1.2 – Schéma d'une représentation des variables angle-action. Le mouvement d'un système dynamique à $N = 2$ degrés de liberté est confiné sur la surface d'un tore $\mathbb{T}^2$. La trajectoire dans l'espace des phases est périodique.

Prenons l'exemple d'un système autonome (hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps) à $N = 1$ degré liberté. Deux types de mouvements périodiques sont possibles pour ce système (dont l'achétype est le pendule).

- Le mouvement de libration : la trajectoire dans l'espace des phases est fermée.

- Le mouvement de rotation : la trajectoire dans l'espace des phases est périodique.

La notion de périodicité pour un système à N degrés de libertés est basée sur les notions de périodicité d'un système à $N = 1$ degré de liberté. Ainsi on dira d'un système à N degrés de liberté qu'il est périodique si la projection de la trajectoire sur les plans (q_i, p_i) est périodique. Elle est dite simplement périodique si toutes les périodes pour les différents degrés de liberté sont les mêmes et multiplement périodiques ou quasi-périodique si elles ne sont pas les mêmes. Ces types de systèmes étant périodiques, leurs hamiltoniens ne dépendent pas du temps et sont des intégrales du mouvement.

Nous avons vu que les systèmes intégrables à N degrés de liberté sont munis de N intégrales du mouvement. L'idée est de faire une transformation canonique dont les nouveaux moments conjugués P_i serons des fonctions arbitraires de ces constantes du mouvement. Les nouvelles coordonnées Q_i n'apparaîtront pas dans le nouvel hamiltonien H', on dira de ces coordonnées qu'elles sont cycliques. Pour résumé nous aurons :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{P}_i & = & -\dfrac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 \\ \\ \dot{Q}_i & = & \dfrac{\partial H'}{\partial P_i} = \omega_i(P_i) \end{array} \right\}_{i=1,\ldots,N} \qquad H' = H \tag{1.36}$$

Il s'ensuit que $Q_i = \omega_i t + \beta_i$ où β_i est une constante. Rappelons que nous traitons d'un système périodique donc les coordonnées Q_i ne peuvent croître indéfiniment dans le temps. Il s'agit par conséquent de variables de type "angle" 2π périodiques. Nous les noterons dorénavant θ_i. Comme $\omega_i = \partial H/\partial P_i$ et que H est l'énergie du système (système autonome par construction), P_i, que nous noterons dorénavant J_i, à la dimension de l'action. Ces nouvelles variables portent donc le nom de variable angle-action. Avec ces nouvelles variables, le mouvement d'un système dynamique à N degrés de liberté est confiné sur la surface d'un hyper-tore$\mathbb{T}^N$.

1.4.4 Théorie des perturbations et systèmes presques intégrables

Nous venons d'évoquer un changement de variable transformant des coordonnées quelconques de l'espace des phases (p_i, q_i) en coordonnées du type angle action (J_i, θ_i). Cette transformation fait clairement apparaître, au travers des $\theta_i = \omega_i t + \beta_i$ les fréquences ω_i caractéristiques de la dynamique. Ces fréquences auront un rôle crucial dans l'apparition du chaos que nous verrons par la suite. Les systèmes que nous allons étudier ici sont typiquement des systèmes périodiques (par exemple un mouvement lié dans un champ de gravitation). Ces systèmes sont donc particulièrement adaptés au changement de variable angle-action. Cependant, les systèmes que nous allons étudier seront perturbés par la présence d'un corps supplémentaire. Cette perturbation peut être modélisée au sein de la théorie des perturbations que nous allons aborder ici. Dans ces conditions les hyper-tores $\boldsymbol{\mathbb{T}^N}$ dont nous avons parlé se verront modifiés, déformés. Il s'agit en fait d'une part importante de l'analyse de la dynamique des systèmes complexes. Commençons par poser un hamiltonien totalement intégrable, légèrement modifié par la présence d'un autre hamiltonien perturbateur. Nous avons alors la forme

$$H(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\boldsymbol{J}) + \epsilon H_1(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) \tag{1.37}$$

où H_0 est l'hamiltonien totalement intégrable (il ne dépend donc que des J_i) et H_1 est l'hamiltonien perturbatif exprimé en fonction des J_i et θ_i, ϵ est quant à lui un paramètre perturbatif tel que $\epsilon \ll 1$. Pour résoudre le problème, nous allons encore une fois utiliser une transformation canonique qui vise à transformer l'hamiltonien $H(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta})$ en un hamiltonien fonction de l'action transformée $\boldsymbol{J'}$ seulement. Il est bien évident que si cela était possible de façon stricte, le problème serait totalement résolu. Or, cela n'étant pas le cas, nous allons donc agir par développement en série de ϵ.

Pour 1 dimension

Commençons par un problème à 1 dimension, nous généraliserons aux cas à N dimensions ensuite. Développons la fonction génératrice de la transformation $S(J', \theta)$, ainsi que l'hamiltonien produit de cette transformation, en série de ϵ.

$$\begin{aligned} S &= J'\theta + \epsilon S_1 + ... \\ H' &= H'_0 + \epsilon H'_1 + ... \end{aligned} \tag{1.38}$$

En prenant en compte les 3 équations (1.22) et en tenant compte du fait que l'on a un hamiltonien autonome, on a en rassemblant les ordres en ϵ

$$\begin{aligned} H_0\left(J' + \epsilon\frac{\partial S_1(J',\theta')}{\partial\theta'} + ...\right) &= H_0(J') + \epsilon\frac{\partial H_0(J')}{\partial J'}\frac{\partial S_1(J',\theta')}{\partial\theta'} + ... \\ \epsilon H_1\left(J' + \epsilon\frac{\partial S_1(J',\theta')}{\partial\theta'}, \theta' - \epsilon\frac{\partial S_1(J',\theta')}{\partial J'}\right) &= \epsilon H_1(J',\theta') + ... \end{aligned} \tag{1.39}$$

En utilisant l'équation $H'(J',\theta') = H(J(J',\theta'),\theta(J',\theta'))$ de (1.22) nous trouvons immédiatement en fonction des ordres

$$\begin{aligned} H'_0 &= H_0(J') \\ H'_1 &= \omega(J')\frac{\partial S_1(J',\theta')}{\partial\theta'} + H_1(J',\theta') \end{aligned} \tag{1.40}$$

où nous cherchons une solution telle que H' ne dépende que de J'. Pour ce faire, notons $\langle H_1\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta' H_1(J',\theta')$ et $\widetilde{H}_1 = H_1 - \langle H_1\rangle$ la partie oscillante (il s'agit d'objets périodiques développables sous cette forme). En considérant que H' ne doit dépendre que de J' on voit immédiatement que

$$\begin{aligned} H'_1 &= \langle H_1\rangle \\ \widetilde{H}_1 &= -\omega\frac{\partial S_1}{\partial\theta'} \end{aligned} \tag{1.41}$$

et nous avons donc

$$H'(J') = H_0(J') + \epsilon\langle H_1(J',\theta')\rangle + ... \tag{1.42}$$

Nous venons de voir comment à 1 dimension il était possible de trouver une transformation canonique telle qu'à l'ordre 1 nous obtenons un hamiltonien perturbé ne dépendant plus que de l'action. Le même processus (procédure de Poincaré-Von Zeipel) peut être employé à des ordres plus élevés, les équations sont simplement plus longues et compliquées. Nous allons maintenant voir très brièvement le résultat du même calcul mais pour un système à N dimensions. Nous verrons que le résultat va nous placer face au problème des petits diviseurs que nous rencontrerons dans la suite de cette thèse lorsque nous établirons l'application symplectique qui est la base d'une grande partie de notre travail.

Pour 2N dimensions

En employant la même procédure que précédemment pour l'hamiltonien $H(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta}) = H_0(\boldsymbol{J}) + \epsilon H_1(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta})$ et en développant $H_1(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta})$ en série de Fourier on arrive à une fonction génératrice de la transformation de cette forme

$$S(\boldsymbol{J'},\boldsymbol{\theta'}) = \boldsymbol{J'}\cdot\boldsymbol{\theta'} + \epsilon i\sum_{\boldsymbol{m}\neq 0}\frac{H_{1\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{J'})}{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega_0}(\boldsymbol{J'})}\exp\{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\theta'}\} + ... \tag{1.43}$$

où $i = \sqrt{-1}$, $\boldsymbol{m}$ est un vecteur dont les composantes sont des entiers, $\omega_0 = \partial H_0(\boldsymbol{J})/\partial \boldsymbol{J}$ est le vecteur des fréquences du système non perturbé. Nous voyons clairement que le problème des petits diviseurs apparaît. En effet ici, il est toujours possible que $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\omega_0}(\boldsymbol{J}) = 0$ il sagit des tores résonnant du système non perturbé. Beaucoup de ces tores sont détruits par la présence de la perturbation $\epsilon \neq 0$. C'est le théorème de KAM (pour Kolmogorov-Arnold-Moser [2]) qui donne une explication à la persistance de ces tores. Il est important de noter qu'un autre problème se pose, il faut que la suite (1.43) converge. Le théorème KAM utilise une méthode plus sophistiquée que le développement présenté ici, cela assure une convergence plus rapide. L'idée à retenir de ce théorème est que certains tores de l'hamiltonien non perturbé résistent. On parle de tores résistant à la perturbation s'il existe des tores avec la relation $\boldsymbol{\omega}(\epsilon) = k(\epsilon)\boldsymbol{\omega_0}$ où k va continûment vers 1 quand $\epsilon \to 0$ et où $\boldsymbol{\omega}(\epsilon)$ est le nouveau vecteur de fréquence perturbé $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N)$. Nous avons alors $\omega_{0j}/\omega_{01} = \omega_j(\epsilon)/\omega_1(\epsilon)$, les ratios entre fréquence composant le vecteur fréquence non-perturbé et ceux composant le vecteur fréquence perturbé sont les mêmes. Pour les zones non occupées par ces tores c'est le chaos qui domine.

Le problème des petits diviseurs est un problème classique de la théorie des perturbations. Nous verrons comment y faire face quand nous développerons l'obtention de l'application symplectique utilisée dans nos travaux.

A travers cette section, nous venons de voir comment obtenir une solution (à un degré de précision près) pour des systèmes faiblement perturbés qui ne s'éloignent pas trop de leur solution intégrable. Nous allons à présent aborder des méthodes de caractérisation des trajectoires dans l'espace des phases. Deux types de trajectoire seront évoqués : les trajectoires de type régulière ou périodique et les trajectoires de type chaotique.

1.5 Outils d'analyse et de simplification

Dans cette section, nous allons aborder les outils permettant d'analyser les trajectoires complexes de la dynamique d'un système. Nous verrons tout d'abord deux outils d'analyse qui permettent de caractériser et de se représenter les trajectoires. La première technique que nous verrons utilise le calcul des exposants de Lyapunov de la trajectoire, ils nous diront si la trajectoire est chaotique ou régulière. La seconde technique d'analyse consiste à réduire un espace à $2N$ dimensions à une section à 2 dimensions qui conserve toute les subtilités de la dynamique, à savoir le comportement régulier ou chaotique dans certaines portions de l'espace des phases. Ensuite nous aborderons la notion d'application symplectique qui permet (entres autres) de simplifier des dynamiques complexes en passant à un temps discret et en diminuant les degrés de liberté à observer dans le même temps. Enfin nous parlerons de l'approche diffusive des trajectoires chaotiques qui offre une autre vision de la dynamique.

1.5.1 Exposant de Lyapunov

La caractérisation de la trajectoire est donnée par les valeurs de ses exposants de Lyapunov. En effet, étudions la divergence entre deux trajectoires dont les conditions initiales sont très proches. Si la distance entre ces deux trajectoires croît avec un taux exponentiel alors la trajectoire est dite chaotique. Ces taux de divergence sont les exposants de Lyapunov notés λ_i avec $i = 1, ..., 2N$. Une des méthodes employée pour déterminer cette divergence est de calculer le jacobien d'une trajectoire test. En effet, pour un système différentiel de la forme $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{V}(\mathbf{z})$ et si nous appelons $\boldsymbol{w} = \Delta \boldsymbol{z}$ le vecteur entre deux points proches, alors nous avons

$$\dot{\boldsymbol{w}} = J(\boldsymbol{z}(t)) \cdot \boldsymbol{w} \tag{1.44}$$

où J est la matrice jacobienne de $\boldsymbol{V}$ par rapport à $\boldsymbol{z}$. Nous avons ainsi l'équation d'évolution de la divergence entre deux trajectoires proches. On comprend que la solution d'une telle équation

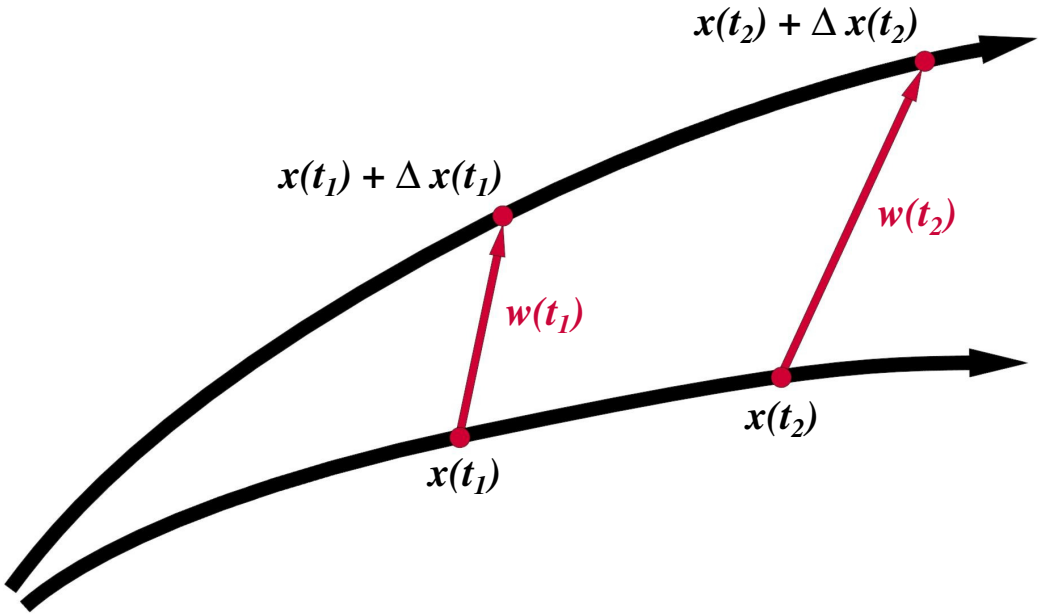

FIGURE 1.3 – Schéma de la divergence de deux trajectoires dont les conditions initiales sont très proches.

sera de forme exponentielle et que les valeurs propres de la matrice J constitueront les taux de divergence dans chacune des directions relatives au vecteur propre de cette même matrice.

La divergence finit toujours par tendre vers la direction où l'exposant de LYAPUNOV λ_i est le plus fort, nous allons chercher à quantifier uniquement cet exposant. C'est lui qui sera l'indicateur du chaos. Pour trouver l'exposant de LYAPUNOV le plus fort, il suffira d'intégrer l'équation (1.44). Cependant un problème apparaît avec l'intégration numérique, la divergence étant exponentielle dans le cas du chaos, il conviendra de renormaliser le résultat régulièrement pour éviter une explosion numérique des valeurs. La solution quant à elle sera donnée par [52]

$$\lambda_{max} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(|\boldsymbol{w}_i|\right) \tag{1.45}$$

où n est le nombre de renormalisation et où τ est le temps entre chaque renormalisation. Ici $\boldsymbol{w}_i$ est le vecteur $\boldsymbol{w}$ renormalisé i fois. Si nous itérons un grand nombre de fois l'équation (1.45), la solution converge vers l'exposant de LYAPUNOV le plus fort que nous avons appelé ici λ_{max}.

Nous allons maintenant aborder une méthode d'analyse des systèmes non-intégrables appelée section de POINCARÉ. Cette manière de visualiser la dynamique d'un système complexe nous amènera ensuite naturellement à la notion d'application symplectique où la dynamique est calculée selon un temps discret sans intégration direct des équations du mouvement mais avec une série d'itérations.

1.5.2 Section de POINCARÉ

Si nous prenons en considération un système à N degrés de liberté, nous comprenons bien que l'espace des phases dans lequel va se dérouler la dynamique sera à $2N$ dimensions. Il est impossible

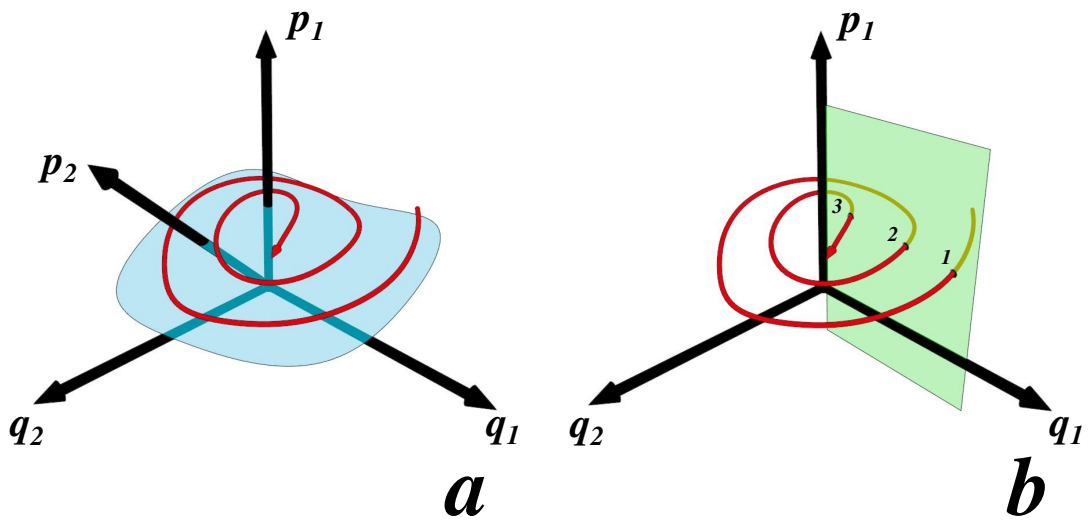

FIGURE 1.4 – *a*) Représentation schématique d'une trajectoire dans un espace des phases à 4 dimensions. Le mouvement se faisant à énergie constante la trajectoire se trouve sur une surface à 3 dimensions (surface bleue) *b*) Section de POINCARÉ (p_1, q_1) (plan vert). La trajectoire perce la section de POINCARÉ en les points 1, 2, 3, ...

de visualiser mentalement la forme que peut avoir la trajectoire si le nombre de dimensions dépasse 3. Une méthode intéressante consiste à sectionner cet espace par un plan en 2 dimensions et à observer les points laissés par la trajectoire lorsque celle-ci coupe le plan. C'est ce que l'on appelle une section de POINCARÉ (Fig. 1.4). Toutes les caractéristiques de la dynamique restent conservées dans ce schéma. Des trajectoires régulières sur le tore laisseront apparaître des points suivant une courbe régulière alors que des trajectoires chaotiques provoqueront un remplissage stochastique de toute la région considérée.

A titre d'exemple nous allons observer une des sections de POINCARÉ d'un système hamiltonien connu sous le nom de modèle de HENON-HEILES. Ce modèle a été développé par M. HÉNON et C. HEILES [39] pour décrire le comportement d'une étoile dans une galaxie axisymétrique. Ce modèle est intéressant car, bien que simple, il peut montrer un comportement chaotique des trajectoires. L'hamiltonien de HÉNON-HEILES a la forme

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right) + \epsilon(q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3) = E \tag{1.46}$$

il s'agit d'un hamiltonien de la forme $H = H_0 + \epsilon H_1$ où $H_0 = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right)$ et $\epsilon H_1 = \epsilon(q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3)$. Ce hamiltonien est à 4 dimensions mais comme il est autonome, il est bien évident que n'importe quelle variable (q_1, q_2, p_1, p_2) peut s'exprimer en fonction des trois autres. La trajectoire se déplace donc sur une surface à 3 dimensions d'énergie constante. Pour observer son comportement, nous pouvons effectuer une section de POINCARÉ de la dynamique dans le plan (p_y, y) (Fig. 1.5 pour un paramètre $E = \frac{1}{8}$). Clairement nous voyons deux types de trajectoire dans l'espace des phases :

- Des trajectoires régulières qui dessinent des courbes pleines car il n'y a pas de résonance entre les différentes fréquences du mouvement. Ces trajectoires régulières sont piégées à l'intérieur d'îlots de stabilité.

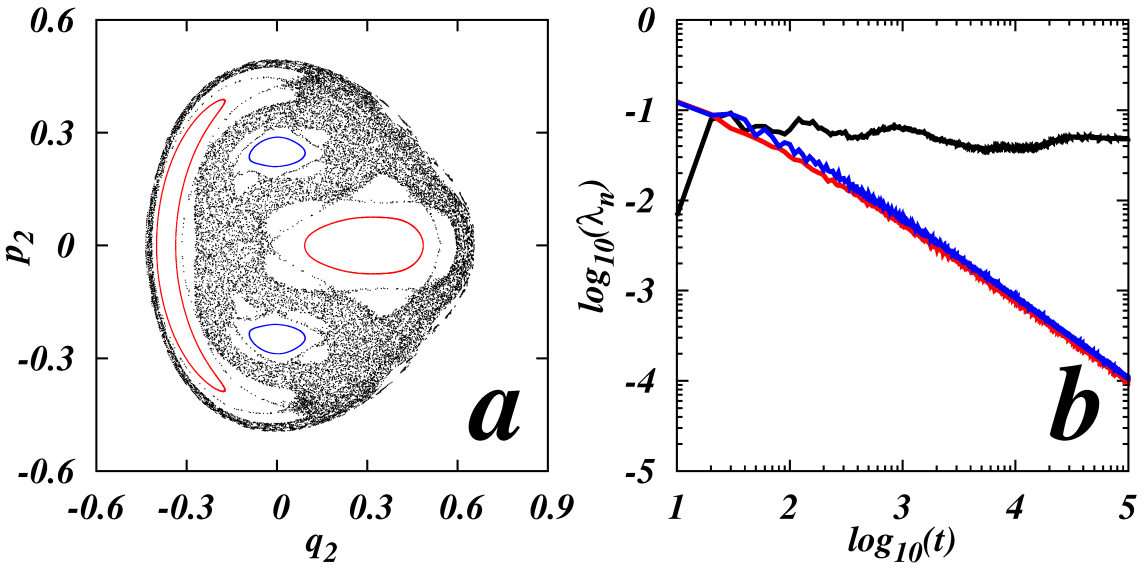

FIGURE 1.5 – *a*) Section de POINCARÉ du modèle de HÉNON-HEILES (1.46). Les courbes bleues et rouges sont les orbites régulières, les points noirs les orbites chaotiques. *b*) Exposant de LYAPUNOV pour les deux types de trajectoires : régulières (bleu et rouge) et chaotiques (noire).

- Des trajectoires totalement irrégulières où les points apparaissent de manière totalement stochastique, il s'agit des zones où la dynamique est chaotique.

Typiquement, la différence entre les trajectoires régulières et irrégulières est bien montrée par les exposants de LYAPUNOV (Fig. 1.5*b*). L'exposant de LYAPUNOV correspondant à une trajectoire régulière ne sature jamais. Concrètement le taux de divergence des trajectoires est plus faible qu'une divergence exponentielle et elle tend vers 0. La courbe qui sature converge bien vers un exposant de LYAPUNOV témoin de la divergence exponentielle de la trajectoire. Nous voyons donc bien que l'étude d'un système hamiltonien peut passer par l'analyse de ses sections de POINCARÉ. Nous utiliserons cette méthode dans la suite.

Une chose importante est à noter ici ; la présence des courbes invariantes. Il s'agit de l'un des résultat le plus important des deux siècles passés. Une des première expérience numérique ayant eu un impact majeur dans le domaine est l'expérience numérique de FERMI-PASTA-ULAM-TSINGOU [32]. Celle-ci montra pour la première fois qu'il existe ce type de comportement régulier au sein du chaos. Ces trajectoires régulières évoluent sur un tore que nous appelons tore invariant de KAM.

Intéressons-nous à un concept proche dans sa structure aux sections de POINCARÉ. Ce concept est la notion d'applications symplectiques (symplectic map en anglais).

1.5.3 Les applications symplectiques

Abordons le problème de manière physique. Imaginons que nous ayons à faire face à un système physique intégrable, dont on connaît les équations mais qu'à certains moments, ce système se trouve perturbé de manière brève dans le temps. Il en résulterait un système qui ne serait plus nécessairement intégrable mais dont la trajectoire connue dans l'espace des phases se verrait modifiée de manière périodique et brève. Là est le coeur de l'utilisation que nous ferons des applications symplectiques. On peut imaginer un grand nombre de systèmes répondant à ce type de critère.

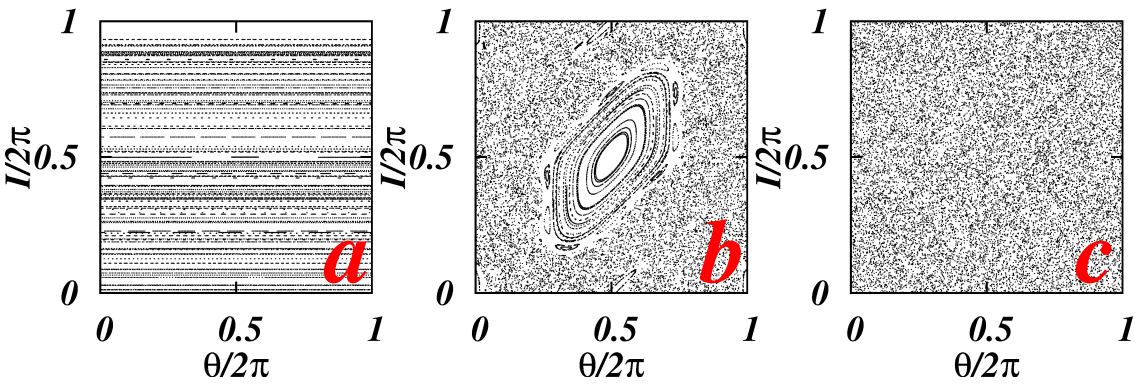

FIGURE 1.6 – Sections de POINCARÉ pour l'application standard (1.50) a) pour $K = 0$, b) Pour $K = 1.928$, c) Pour $K = 7$.

En guise d'exemple, prenons une balle qui rebondit entre deux murs. Jusque-là rien de très compliqué si l'on se place d'un point de vue purement théorique, en négligeant les frottements et en supposant des chocs parfaitement élastiques, nous imaginons bien cette balle rebondir indéfiniment entre les deux murs. Si maintenant nous introduisons une fonction perturbatrice brève dans le temps en supposant que l'un des deux murs oscille légèrement la balle se retrouve alors à gagner ou à perdre de l'énergie et sa dynamique peut être représentée par une application symplectique à 2 dimensions. Ce système est l'application de FERMI [31, 91] qui s'écrit de façon simplifiée sous la forme

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + f(\Psi_n) \\ \Psi_{n+1} &= \Psi_n + \frac{2\pi M}{u_{n+1}} \end{aligned} \tag{1.47}$$

où u est relatif à l'énergie de la particule (il s'agit de sa vitesse), Ψ à la "phase" du mur oscillant, $f(\Psi_n)$ est la fonction caractérisant le choc (fonction perturbatrice) et M est un paramètre représendant la distance moyenne entre les deux murs. L'indice n représente la $n$ième itération de l'application (ici le nombre de chocs avec le mur mouvant). On a construit ici une application symplectique.

Symplectique signifie que nous conservons certaines propriétés de la structure hamiltonienne du problème dans la transformation qui nous fait passer des valeurs n vers les valeurs à $n+1$. Nous pouvons détailler cela de la façon suivante, soit $T(u, \phi)$ la transformation, alors on peut montrer qu'une transformation est symplectique si

$$J \Gamma J^t = \Gamma \tag{1.48}$$

où J est la matrice jacobienne de la transformation $T(u, \phi)$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$ où $\mathbb{1}$ est la matrice identité. De plus on a

$$\det\left(J \Gamma J^t\right) = \det(J) \det\left(J^t\right) = \det(J) = 1 \tag{1.49}$$

On en conclut qu'une application symplectique conserve le volume dans l'espace des phases et aussi les crochets de POISSON. Il existe une multitude d'application de ce type, nous en construirons une dans cette thèse pour notre étude de la dynamique de la comète de HALLEY que nous réexploiterons dans notre étude de la dynamique des particules de matière noire. Parmi l'ensemble de ces applications, l'une d'entre elle tient une importance capitale ; il s'agit de l'application standard (standard

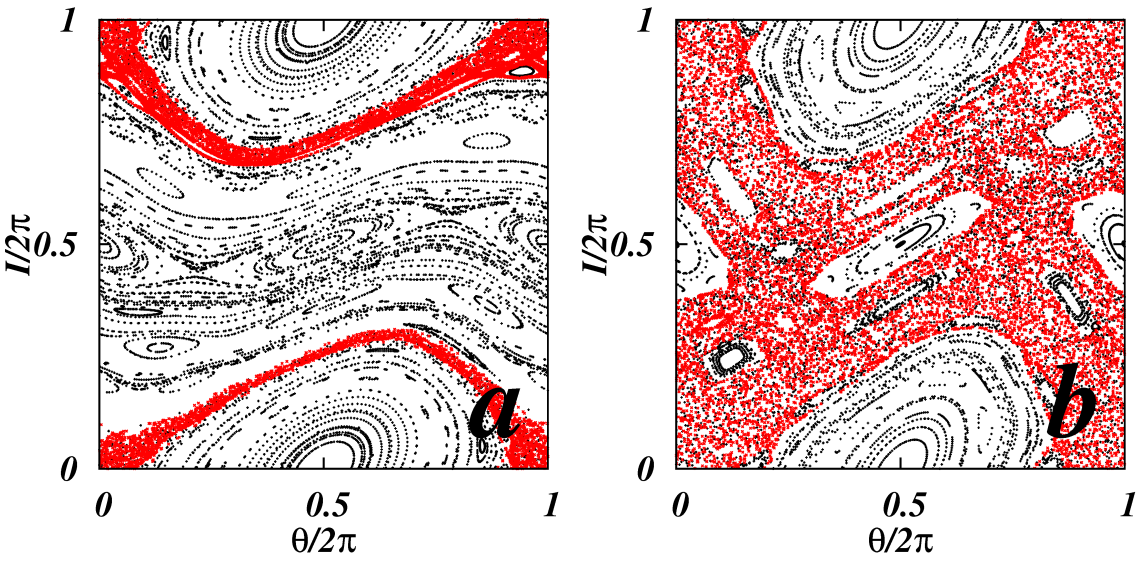

FIGURE 1.7 – Sections de POINCARÉ pour l'application standard (1.50). *a*) Pour $K = 0.8$, en rouge, le chaos reste localisé sur la séparatrice autour des deux résonances. *b*) Pour $K = 1.2$, en rouge, le chaos a envahi toute la zone suite au recouvrement des résonances autour de $K \sim 1$, c'est le chaos généralisé.

map) établie par BORIS CHIRIKOV [15]. Cette application prend parti d'étudier un rotateur rigide frappé régulièrement par une perturbation extérieure.

L'utilisation de cette application est très répandue depuis l'étude des particules frappées au sein d'un accélérateur de particules [42] ou encore dans les problèmes de particules chargées dans un piège mangétique [15, 14, 16]. Elle est aussi utilisée pour décrire des objets quantiques frappés comme des atomes perturbés par un champ électrique [10, 30].

Beaucoup d'applications peuvent localement par linéarisation se réduire à l'application standard. Le critère de recouvrement des résonances de CHIRIKOV [15] est alors directement applicable. On peut par conséquent savoir pour quelle valeurs des paramètres une résonance va céder au chaos. L'application standard prend la forme suivante

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + K \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1} \pmod{2\pi} \end{aligned} \tag{1.50}$$

où K est le paramètre qui va régir le passage au chaos, on le voit bien sur la Fig. 1.6 où trois types de comportements sont montrés

- Le comportement intégrable pour $K = 0$.
- Le comportement mixte où l'on retrouve du chaos et des courbes invariantes ($K = 1.928$ pour Fig.1.6*b*).
- Le comportement totalement chaotique ($K = 7$ pour Fig.1.6*c*).

Un critère, développé par CHIRIKOV [15], prédit pour quelle valeur de K le chaos est généralisé. Cela se produit lorsque deux séparatrices (analogue aux séparatrices d'un pendule) entre deux résonances primaires de l'application standard se rencontrent. On voit sur la Fig.1.7*a* que pour

$K = 0.8$ les deux séparatrices ne se sont pas encore rencontrées, la trajectoire montrée en rouge, bien que chaotique reste localisée autour d'une résonance (ici on a décalé l'application de π en I). En revanche pour $K = 1.2$ (Fig.1.7b) on voit que la trajectoire est libre de sauter chaotiquement entre les deux résonances, c'est le chaos généralisé. Chirikov a montré que le recouvrement des resonances se produisait lorsque $K \sim 1$. Pour $K = 7$ (Fig.1.6c) nous voyons un comportement complètement chaotique.

1.5.4 Approche diffusive

Nous l'avons vu, sur les sections des applications symplectiques, que lorsque la trajectoire est chaotique, celle-ci prend un aspect totalement stochastique. Il est possible de traiter cette trajectoire comme relevant d'un processus Markovien et ainsi de voir un "paquet" de trajectoire suivre une équation de diffusion.

Prenons par exemple le cas de l'application symplectique (1.47). Dans le cadre de l'approximation des phases aléatoires, en l'occurence Ψ dans (1.47), la variable dynamique u_n est régie par un processus de Markov. La valeur u_{n+1} à l'itération $n+1$ ne dépend que de la valeur u_n à l'itération n. On peut définir [52] une probabilité $P(u, n)$ d'obtenir la valeur u à l'itération n obéissant à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial u}(BP) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}(DP) \tag{1.51}$$

où B est le coefficient dit de dérive, il rend compte de la tendance qu'ont les probabilités de présence à aller dans un certain sens. Le coefficient de diffusion D rend compte de la vitesse d'étalement des probabilités. Cette équation est appelée équation de Fokker-Planck. Dans le cas d'un système hamiltonien on peut montrer [52] que $B = \frac{1}{2}\frac{dD}{du}$ ce qui fait que nous pouvons simplifier l'équation (1.51) en

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D}{2}\frac{\partial P}{\partial u}\right) \tag{1.52}$$

qui est une équation de diffusion qui se met sous sa forme isotrope quand D ne dépend pas de u et qui est dite anisotropique quand D dépend de u. Ce type d'équation est facilement soluble analytiquement quand D ne dépend pas de u mais peut être plus délicate à résoudre lorsque le coefficient de diffusion comporte une dépendance en u. Une des méthodes numériques pour la résoudre est la méthode de Crank-Nicolson [22].

Dans le cas des applications symplectiques, on peut considérer pour certaines zones de la section de Poincaré, que la phase se comporte de manière aléatoire, elle apparaît non corrélée d'une iteration à la suivante. On peut alors faire la moyenne sur toutes les phases pour obtenir le coefficient de diffusion associé à une région chaotique et on a

$$D(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\Psi\,(\Delta u)^2 \tag{1.53}$$

où $\Delta u = u_{n+1} - u_n$. Cette formulation offre une autre façon de définir la dynamique dans l'espace des phases. Cependant cette méthode diffusive ne peut être employée que dans les zones où le chaos est généralisé. Il faut que les îlots de KAM dans ces régions soient de volume nul. En effet, la description markovienne ne convient plus lorsque la trajectoire est engluée autour des îlots de stabilité.

1.6 Conclusion du chapitre

Voilà qui achève notre chapitre d'introduction sur les notions de mécaniques analytiques utiles à la lecture de cette thèse. Nous allons à présent entrer dans le vif du sujet et étudier des systèmes

réels ou supposés l'être, matière noire (chapitre 3), avec les outils que nous venons de décrire. Dans un premier temps nous allons nous intéresser à la dynamique chaotique de la comète de Halley (chapitre 2), pour ce faire nous emploierons une application symplectique dont la construction sera détaillée dans la partie théorique. Nous verrons ensuite quels résultats nous pouvons tirer de cette utilisation.

Chapitre 2

La dynamique chaotique des comètes

> [...] Je suis un peu couvert d'éther. J'ai voyagé !
> J'ai les yeux tout remplis de poudre d'astres. J'ai
> Aux éperons, encor, quelques poils de planètes !
> Tenez, sur mon pourpoint, un cheveu de comète ! [...]
>
> Edmond Rostand, *Cyrano de Bergerac*,
> Acte 3 Scène XIII

2.1 Introduction

Notre étude des systèmes dynamiques complexes va porter sur la dynamique des systèmes à trois corps. Par ailleurs, nous allons nous limiter dans cette thèse à la dynamique du problème à trois corps restreint. Dans ce type de problème, nous considérons la dynamique d'un point matériel dans le potentiel de deux masses. Le point matériel sera de masse négligeable par rapport aux deux corps principaux, si bien que sa présence ne modifiera en rien leurs dynamiques. Une des dynamique qui répond à ce critère est le comportement des comètes dans un système planétaire. En effet, si nous prenons l'exemple du système solaire, une comète en orbite autour de celui-ci ne modifiera en rien la dynamique des autres corps en présence : Soleil ou planète. Il s'agit donc d'un système réel très intéressant pour développer notre modèle avec les outils du chapitre précédent.

Les comètes ont de tout temps fasciné les hommes. Ils voyaient parfois leur présence dans le ciel comme un bon ou un mauvais présage, par exemple on trouve déjà la comète de Halley représentée au XIème siècle sur la tapisserie de Bayeux. L'étude de leurs dynamiques et la prédiction de leurs retours peuvent déjà être calculés avec les lois de Kepler. Ces lois trouvent leurs sources dans les équations de Newton. Cependant, ces calculs ne sont qu'approximatifs, ils ne peuvent être exécutés de façon exacte qu'en ne considérant que deux corps, la comète et le Soleil ; la présence des autres corps étant négligée. Considérer ne serait-ce qu'un corps supplémentaire rend le système intraitable de façon analytique. En effet, le système à trois corps a été étudié par H. Poincaré [76] qui démontrera, il y a plus de 125 ans maintenant, qu'il s'agit d'un problème non intégrable.

Dans la suite nous allons tenter de décrire la majeure partie du comportement de la dynamique du problème à trois corps restreint en opérant certaines simplifications. Il est important de noter, comme le montre la Fig.2.1, que l'orbite des comètes est extrêmement excentrique. Une des simplification qui vient instinctivement à l'esprit est de partir des équations où la perturbation due au second corps M_2 ne se fait sentir qu'au voisinage de M_1. Nous aurons alors un problème similaire à l'application symplectique du chapitre 1. Nous verrons que l'utilisation d'une théorie des perturbations sur ce type de système mène à ce résultat.

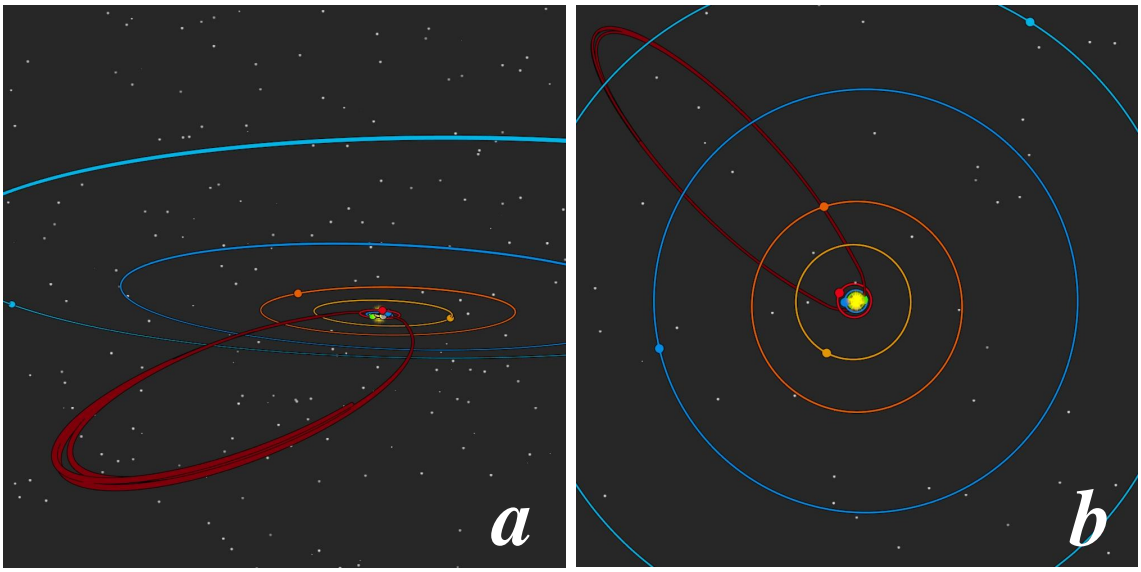

FIGURE 2.1 – Schéma de la trajectoire typique des comètes (ici pour la comète de HALLEY). Sur les deux figures la trajectoire rouge est celle de la comète pour 3 passages à l'aphélie. Les autres trajectoires de couleurs sont celles des 8 planètes du système solaire. *a*) Point de vue arbitraire. *b*) Projection de l'orbite sur le plan de l'écliptique.

2.2 Application symplectique

Dans cette section nous allons voir deux méthodes qui mènent à réduire la dynamique des comètes à la simple itération d'une application symplectique.

La première méthode est celle développée par PETROSKY et BROUCK [75]. Ils utilisent une théorie des perturbations sur le hamiltonien du problème. Nous verrons que cette technique nous mènera face au problème des petits diviseurs que nous avons mentionnés au chapitre 1. La seconde méthode a été développée par LIU et SUN [53, 96]. Celle-ci est basée sur l'intégration numérique du travail de la force perturbatrice. Ce travail est alors calculé le long d'un chemin constitué de la trajectoire non perturbée (orbite osculatrice). Commençons par établir les équations du mouvement relatives au problème.

2.2.1 Hamiltonien de la dynamique

Le problème Fig. 2.2 est donc constitué de deux masses M_1 et M_2. Dans les calculs qui suivent, nous nous intéressons au problème à trois corps restreint circulaire. En conséquence, M_1 et M_2 seront en rotation circulaire autour du centre de masse. Le système est également composé d'une particule de masse m_3 négligeable devant M_1 et M_2. Nous considérons uniquement le cas $2D$ où la dynamique est restreinte au plan (q_x, q_y), la généralisation à trois dimensions est simple à obtenir. Le hamiltonien à $2D$ d'un point matériel dans le potentiel créé par deux masses est le suivant

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(q_x, q_y, t) \tag{2.1}$$

où $V(q_x, q_y) = -(1-\mu)/R_1 - \mu/R_2$. Ici nous adimensionnons le problème de telle façon que la masse totale $M = M_1 + M_2 = 1$ et donc $\mu = M_2/(M_1 + M_2)$ est la masse du second corps M_2 relativement à cette convention. Nous fixons la constante de gravitation $G = 1$ et prenons

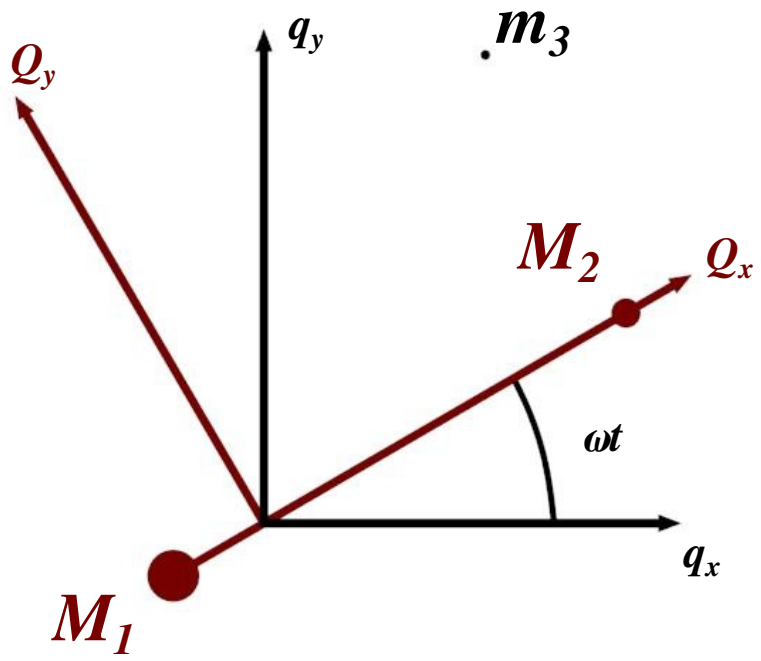

FIGURE 2.2 – Schéma du problème à trois corps restreint en $2D$. Ici q_x, q_y sont les coordonnées dans le repère du centre de masse (repère sidéral). Q_x, Q_y sont les coordonnées dans le repère tournant (repère synodique).

pour référence de longueur la distance entre les corps de masse M_1 et M_2. A chaque fois que nous ferons mention de variables réduites, nous nous référerons à ces conventions. Le potentiel $V(q_x, q_y, t)$ dépend du temps par le biais de R_1, R_2, respectivement la distance aux corps de masse M_1, M_2, ceux-ci étant en rotation autour du centre de masse. Nous avons donc affaire à un hamiltonien non-autonome, H n'est pas une constante du mouvement a contrario du problème à deux corps. L'énergie de la particule de masse m_3, dans le repère sidéral, va donc varier. En conséquence, la particule est susceptible de sombrer dans le puits de potentiel de la masse principale en obtenant une énergie négative et ainsi de se retrouver capturée. Inversement, elle pourra être éjectée du système en obtenant une énergie positive. Il existe une transformation canonique telle que le nouvel hamiltonien $\widetilde{H}$ soit conservé. On aura alors apparition de la constante de JACOBI définie comme $C_J = -2\widetilde{H}$. Cette transformation canonique fait passer le problème dans le repère tournant ou repère synodique. Pour cela, nous utilisons une transformation canonique dont la fonction génératrice est la suivante

$$F = -\boldsymbol{p}^t \boldsymbol{M}_{\omega t} \boldsymbol{Q} \tag{2.2}$$

où $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)$ et $\boldsymbol{p} = (q_x, q_y)$ sont respectivement le vecteur quantité de mouvement et le vecteur position dans le repère sidéral et $\boldsymbol{P} = (P_x, P_y)$ et $\boldsymbol{Q} = (Q_x, Q_y)$ sont respectivement le vecteur moment et le vecteur position dans le repère synodique, $\boldsymbol{M}_{\omega t} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$ est la matrice de rotation d'un angle ωt. Dans notre système d'unité, la fréquence de rotation du binaire est $\omega = 1$. En utilisant les équations des transformations canoniques du chapitre 1 (section 1.3.2) pour une fonction génératrice $F_3(p_i, Q_i, t)$ et en remarquant que $q_x^2 + q_y^2 = Q_x^2 + Q_y^2$ et $p_x^2 + p_y^2 =$

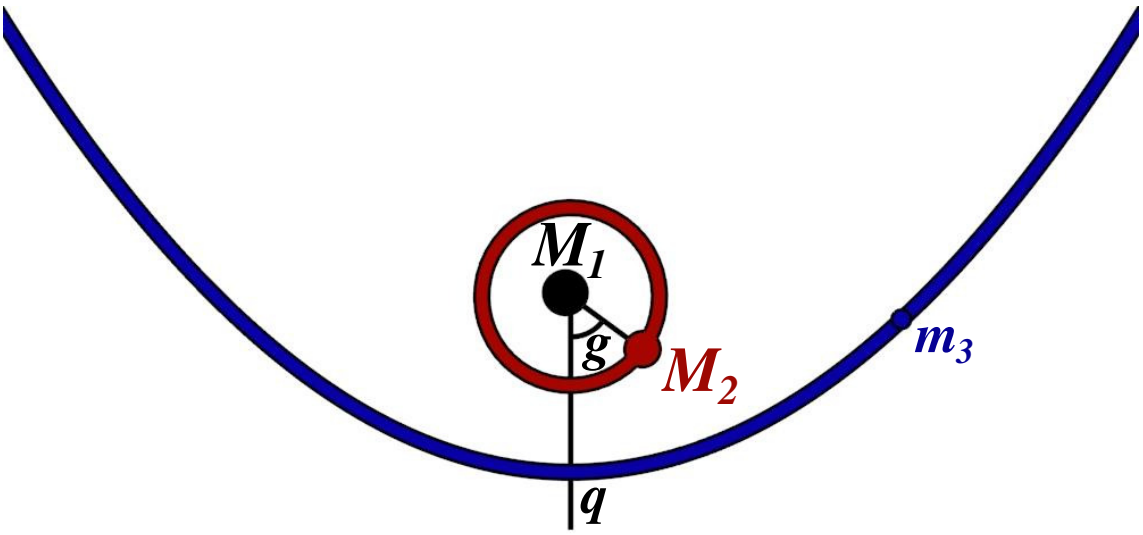

FIGURE 2.3 – Schéma du problème dans le repère sidéral. Les masses M_1 et M_2 sont les masses du binaire, g est l'argument du périhélie, m_3 est la comète enfin q est la position du périhélie.

$P_x^2 + P_y^2$ nous obtenons le nouvel hamiltonien suivant

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\left(P_x^2 + P_y^2\right) + \sigma\left(P_x Q_y - P_y Q_x\right) - \left(\frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}\right) \tag{2.3}$$

où $\sigma = \pm 1$ en fonction du sens de rotation de la particule par rapport au binaire (prograde ou rétrograde), $R_1 = \left[(Q_x+\mu)^2 + Q_y^2\right]^{\frac{1}{2}}$ et $R_2 = \left[(Q_x+\mu-1)^2 + Q_y^2\right]^{\frac{1}{2}}$, en écrivant cet hamiltonien en coordonnées polaires nous avons

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2}\right) - \sigma P_\theta - \left(\frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}\right) \tag{2.4}$$

ici $R_1 = \left[r^2 - 2\mu r\cos(\theta) + \mu^2\right]^{\frac{1}{2}}$ et $R_2 = \left[r^2 + 2(1-\mu)r\cos(\theta) + (1-\mu)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. On peut développer une théorie des perturbations dans le cas où $\mu \ll 1$.

2.2.2 Méthode perturbative

Les orbites des comètes du type de HALLEY ont une excentricité très grande, ainsi qu'un demi-grand axe important ce qui implique une énergie très faible (Fig.2.3). Typiquement pour la comète de HALLEY à notre époque : le demi-grand axe est $a \simeq 17.941$ ua et l'excentricité $e \simeq 0.967$. Leurs orbites, bien qu'étant des ellipses liées dans le puits de potentiel du Soleil, se rapprochent d'une orbite parabolique. L'idée est donc d'étudier l'hamiltonien (2.3), (2.4) pour un ratio de masse faible, par exemple $\mu \sim 1/1000$ dans le cas du couple Jupiter-Soleil. En utilisant une transformation canonique pour exprimer le hamiltonien en variable angle-action. PETROSKY et BROUCKE [75] obtiennent

$$H_{\mathcal{P}} = \frac{P}{2} - \sigma G + \mu V \tag{2.5}$$

où les variables sont proches des variables de DELAUNAY connues des mécaniciens célestes [63]. Le couple (g, G) sont les variables de DELAUNAY classiques, où g est l'argument du périhélie et

G est le moment angulaire. Le second couple de variables est (Q, P) où P est l'énergie et Q est la variable angle conjuguée. On voit clairement que l'hamiltonien (2.5) s'exprime comme la somme d'un hamiltonien intégrable $H_0 = P/2 - \sigma G$ et d'une perturbation. Dans le cas elliptique, on peut exprimer cette perturbation en série de FOURIER sur les angles Q et g : $\mu V = \mu \Delta k \sum_{k_1,k_2} V_{k_1,k_2}(P, G; \mu) \exp\{i\,(k_1 Q + k_2 g)\}$ où $\Delta k = 2(-P)^{\frac{3}{2}}$ est la fréquence de rotation de la particule sans perturbation. Ici Q a la période $\pi/(-P)^{3/2}$ sans perturbation et g a la période 2π. Une théorie des perturbations peut s'appliquer au problème avec la fonction génératrice F_1 suivante

$$F_1(Q, g, P, G) = \Delta k \sum_{k_1,k_2} \frac{-iV_{k_1,k_2}(P, G; 0)}{k_1\omega_1 + k_2\omega_2} \exp\{i\,(k_1 Q + k_2 g)\} \tag{2.6}$$

où nous ne traitons la perturbation qu'à l'ordre 1 en μ, $k_1 = n\Delta k$ avec n un entier $\in [-\infty; +\infty]$, k_2 est un entier $\in [-\infty; +\infty]$. On a aussi $Q(t) = \omega_1(t - t_0)$ qui est l'angle associé à la rotation de m_3 et $g(t) = \omega_1(t - t_0) + g_0$ qui est l'angle associé à la rotation des corps de masse M_1 et M_2 autour du centre de masse. Le temps au périastre (au plus proche du corps principal du binaire) est t_0.

Pour obtenir ce résultat PETROSKY n'a pas utilisé une méthode de POINCARÉ-VON ZIEPEL comme vu au chapitre 1 mais une transformation utilisant des opérateurs de LIE. La démarche est relativement similaire, elle utilise un formalisme opératoriel basé sur les crochets de POISSON [52]. Une fois cette fonction génératrice obtenue, nous sommes confrontés au problème des petits diviseurs. Ce problème est récurrent en théorie des perturbations. En effet, une résonance entre les fréquences de l'angle Q et l'angle g entraîne inéluctablement une divergence de la fonction génératrice, on aurait $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$. Pour pallier à ce problème, PETROSKY utilise une méthode d'analyse complexe.

En nous plaçant dans le cas parabolique, la période tend vers l'infini et on a $\Delta k \to 0$. On a donc un spectre en fréquence continue. La somme sur k_1 se transforme en une intégrale. Au final, cela se ramène à une intégrale de CAUCHY dans le plan complexe. On peut outrepasser le problème de la résonance au dénominateur, qui rend l'intégrale impropre, en ajoutant une petite contribution complexe ϵi et en imposant $\epsilon \to 0$. On suppose également que $P \to P_0$ pour $t \to +\infty$ où P_0 est la valeur non perturbée. Cela a un sens dans la mesure où loin des deux corps la perturbation tend à disparaître. En utilisant la fonction génératrice, on trouve asymptotiquement

$$P^{\pm}(t) = P_0 - \mu \sum_{k_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \frac{k_1 V_{k_1,K_2}(P, G; 0)}{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \pm i\epsilon} \exp\{i\,(k_1 Q(t) + k_2 g(t))\} \tag{2.7}$$

On peut utiliser ici le théorème de SOKHOTSKI–PLEMELJ [64], il stipule que le dénominateur peut se mettre sous la forme

$$v.p. \left(\frac{1}{k_1\omega_1 + k_2\omega_2}\right) \pm i\pi\delta\,(k_1\omega_1 + k_2\omega_2) \tag{2.8}$$

où $v.p.$ désigne la valeur principale de CAUCHY en analyse complexe et δ est la distribution de DIRAC. Le dénominateur se divise donc en deux parties. La contribution δ ne dépendant pas du temps, elle "sélectionne" le moment résonnant $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$. La valeur principale donnera une valeur oscillante au temps court $\omega_1(t - t_0) \lesssim 1$. Au temps long en revanche, $\omega_1(t - t_0) \gg 1$ on aura uniquement la contribution autour de $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$. L'oscillation très rapide avec k_1 détruisant le reste. On en conclut qu'au temps court proche de t_0 on observe une oscillation de $P^{\pm}$ qui est relative à l'énergie de la comète. Ce fait est visible sur la Fig. 2.4. Les calculs visent ensuite à estimer la différence asymptotique de l'énergie après le passage au périhélie. Il convient pour cela d'estimer les valeurs des coefficients de FOURIER relatifs à V_{k_1,k_2}. Sans entrer dans les détails de calculs assez longs, PETROSKY obtient

$$P_{as} = P_0 + 2\sigma\mu \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j \sin(j g_0) \tag{2.9}$$

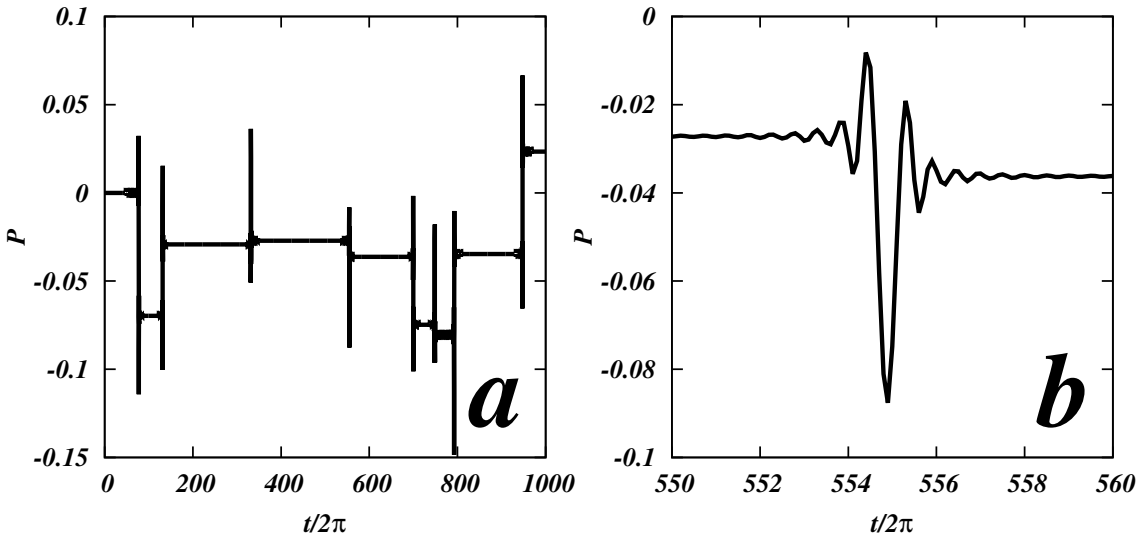

FIGURE 2.4 – Valeurs de l'énergie dans le repère sidéral pour $\mu = 0.01$ en fonction du temps. De larges oscillations sont observables en raison de la résonance entre les deux fréquences.

où Δ est une fonction des coefficients de FOURIER du potentiel relatif à l'angle g_0. On ne les écrit pas ici, mais on peut simplement dire qu'ils sont proportionnels à $\exp\left\{-Aq^{3/2}\right\}$ où A est une constante et q est la valeur du périastre. Cette information sera importante pour la suite. Notons que la procédure utilisée est proche de l'ajout de friction ou de viscosité dans les équations de Hamilton. Cet ajout a des solutions appelées "weak solutions" [29] qui sont délicates à obtenir.

Au final l'énergie se voit donc modifiée asymptotiquement d'une grandeur proportionnelle à μ mais aussi proportionnelle à $\exp\{-Aq^3/2\}$ et fonction de l'angle g_0. En appliquant ce résultat au cas elliptique avec une énergie faible, proche de l'orbite parabolique, ce changement ayant lieu aux temps courts (proche de t_0), la comète voit une brève impulsion en énergie à chacun de ses passages. On dira de cette dynamique qu'elle est frappée. Asymptotiquement l'énergie tend vers la valeur non perturbée. L'utilisation de la troisième loi de KEPLER nous donne le temps de retour et donc la phase du binaire à cet instant. On obtient une application symplectique de la forme

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n + 2\sigma\mu \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_1 \sin(jg_n) \\ g_{n+1} &= g_n + \frac{2\pi\sigma}{(-P_{n+1})^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{2.10}$$

où n est le label numérotant le passage au périastre, P_n est l'énergie de la comète au passage n, g_n la phase du second corps au passage n et $2\pi\sigma/(-P_{n+1})^{3/2}$ est la troisième loi de KEPLER. On peut vérifier que cette application est symplectique via le critère (1.48) du chapitre 1. Notons qu'on considère que q ne change pas de valeur à chaque passage de la comète au périastre. Cela peut être étayé en étudiant le même changement mais avec G : le moment angulaire. On montre alors que ce changement est aussi proportionnel à μ ce qui implique une variation de la distance du périhélie en μ^2. En accord avec la théorie des perturbations développée au premier ordre en μ, les variations de q sont négligées. L'application précédemment définie a été baptisée par PETROSKY et BROUCKE : application de KEPLER (Kepler map en anglais) étudiée ou utilisée par de nombreux auteurs [45, 47, 57, 88, 89].

Nous venons de voir comment, par le biais du formalisme hamiltonien et de la théorie des

perturbations, nous arrivions à décrire la dynamique d'un système à trois corps restreint sous la forme d'un temps discret (temps pris à chaque périastre), ce qui engendre une application symplectique. La formulation que nous venons de voir est cependant un peu lourde, notamment en ce qui concerne la fonction perturbatrice de l'énergie. Historiquement c'est ainsi que cette approche s'est construite. Pour simplifier celle-ci, nous allons dans la prochaine section, voir une autre méthode menant au même résultat. Cette approche permettra de manière très rapide, numériquement parlant, d'obtenir la forme de la fonction perturbatrice.

2.2.3 Travail sur la séparatrice

La méthode présentée ici consiste à calculer la variation d'énergie en suivant un chemin qui est la séparatrice entre l'état lié et l'état libre du système : la parabole. Autrement dit, nous allons calculer l'énergie nécessaire pour que la comète suive l'orbite parabolique tout en étant soumise au potentiel gravitationnel du binaire. Cette énergie est fonction de la phase du binaire lorsque la comète passe au periastre. Nous pouvons mettre le hamiltonien du système sous la forme $H = H_0 + \mu H_1$ où H_0 est un hamiltonien à 2 corps où toute la masse $M_1 + M_2$ est concentrée au centre du repère. On ne se préoccupe pas de la forme du hamiltonien perturbatif μH_1. Par souci de cohérence avec la suite nous allons poser dès maintenant la formulation que nous utilisons.

$$w = -\frac{r_{♃}}{a} = -\frac{2\mathcal{E} r_{♃}}{G M_{\odot} m_c} \tag{2.11}$$

où w est en fait l'énergie adimentionnée où a est le demi-grand axe de l'ellipse/parabole dans le cas non perturbé (problème à deux corps), G est la constante gravitationnelle, $r_{♃}$ est le rayon de l'orbite de Jupiter, $\mathcal{E}$ est l'énergie de la comète correspondant au hamiltonien à 2 corps, $M_{\odot}$ est la masse du Soleil enfin m_c celle de la comète. Comme précédemment, lorsque nous parlons d'unités réduites nous choisissons les unités telles que $M_{\odot} + M_{♃} \simeq M_{\odot} = 1$, $G = 1$ et $r_{♃} = 1$ cela implique que la vitesse de Jupiter $v_{♃} = 1$ et donc que $w = -2\mathcal{E}/m_c$. Dorénavant, nous appellerons w énergie. La différence d'énergie, après un passage, en obligeant la comète à avoir une trajectoire parabolique est la suivante, en employant w en unité réduite

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= -\frac{\Delta w}{2} \\ &= \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\nabla} H_1 dt \\ &= \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\nabla} \left(H - H_0\right) dt \end{aligned} \tag{2.12}$$

où $\boldsymbol{p}$ est le vecteur quantité de mouvement de la comète dans le repère sidéral. Comme l'intégrale $-\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\nabla} H_0 = 0$, la force dérivant du potentiel ne travaillant pas, on a alors :

$$\Delta w = 4\pi\mu \sum_{i=1}^{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{q}_i \ddot{q}_i dx \tag{2.13}$$

où x est la phase de rotation du binaire ($x = t/2\pi$). Les $\dot{q}_i$ sont les vitesses sur l'orbite osculatrice. Les $\ddot{q}_i$ sont les accélérations ressenties suite à la présence du binaire (les seules forces qui travaillent). Au final, nous calculons le travail de la force engendrée par le binaire en forçant la trajectoire sur une orbite à deux corps et donc, la quantité d'énergie que la comète, venant de l'infinie, a reçu ou perdu à cause de la structure formée par le binaire.

En intégrant cette formule numériquement, nous pouvons construire la fonction perturbatrice en fonction de cette phase. Nous regarderons par la suite s'il existe une différence entre deux orbites osculatrices : la parabole et l'ellipse de forte excentricité. Nous pouvons noter que ce calcul est

similaire à une intégrale dite de Melnikov [53, 15, 52] sur la séparatrice. L'intégrale de Melnikov est utilisée à proximité de la séparatrice pour obtenir le changement en énergie du pendule soumis à une perturbation périodique. Nous pouvons constater que l'utilisation d'une orbite fermée elliptique ou d'une orbite parabolique pour le calcul donne le même résultat (Fig.2.7). A terme, il émerge une application symplectique de la forme :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n + F(x_n) \\ x_{n+1} &= x_n + w_{n+1}^{-3/2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Cette application est la même que l'application de Petrosky et Broucke elle est simplement mise sous la forme que nous utiliserons tout au long de cette thèse. Ici les résultats sont exprimés en unité adimensionnée mais nous pouvons remarquer que $F(x_n) \propto \mu = M_{♃}/M_{\odot}$. Si nous nous référons à la définition de w (2.11), $F(x_n) \propto v_{♃}^2$ en unité standard, en effet, $GM_{\odot}/r_{♃} = v_{♃}^2$.

La fonction perturbatrice $F(x_n)$ est obtenue par le calcul successif des Δw de l'équation (2.13). Pour cela il nous faut connaître les équations donnant les positions et les vitesses sur une parabole et sur une ellipse.

Parabole en 2D :

Soit $E = \tan(f/2)$ où f est l'anomalie vraie (l'angle polaire) et E est appelé anomalie excentrique. Alors l'équation équivalente de l'équation de Kepler pour le cas parabolique, est appelée équation de Baker. Elle s'écrit :

$$2E + \frac{2}{3}E^3 = \sqrt{2}q^{-3/2}(t - t_0) \tag{2.15}$$

où q est la distance au périhélie. Contrairement à l'équation de Kepler, cette équation n'est pas transcendantale, on peut la résoudre et la solution nous donne (ici nous avons pris le temps au périhélie $t_0 = 0$)

$$E(q,t) = \left(\frac{\sqrt{\frac{9\,t^2+8\,q^3}{q}}}{2^{3/2}\,q} + \frac{3\,t}{2^{3/2}\,q^{3/2}} \right)^{1/3} - \left(\frac{\sqrt{\frac{9\,t^2+8\,q^3}{q}}}{2^{3/2}\,q} + \frac{3\,t}{2^{3/2}\,q^{3/2}} \right)^{-1/3} \tag{2.16}$$

Les équations de la position et de la vitesse sur la parabole sont données par

$$\begin{aligned} q_1 &= q\left(1 - E^2\right) \\ q_2 &= 2qE \\ \dot{q}_1 &= -2qE\dot{E} \\ \dot{q}_2 &= 2q\dot{E} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Nous allons à présent aborder le cas de l'ellipse.

Ellipse en 2D :

Dans le cas de l'orbite elliptique c'est l'équation de Kepler qui régit la position et la vitesse sur l'ellipse, nous aurons

$$E - e\sin(E) = a^{3/2}\,(t - t_0) \tag{2.18}$$

C'est une équation transcendantale. Il faut utiliser une méthode numérique pour avoir une valeur approchée de la solution E. Les équations de la position et de la vitesse sont les suivantes

$$\begin{aligned} q_1 &= a\left(\cos\left(E\right) - e\right) \\ q_2 &= a\sqrt{1-e^2}\sin\left(E\right) \\ \dot{q}_1 &= -\frac{\sin\left(E\right)}{\sqrt{a}\left(1 - e\cos\left(E\right)\right)} \\ \dot{q}_2 &= \frac{\sqrt{1-e^2}\cos\left(E\right)}{\sqrt{a}\left(1 - e\cos\left(E\right)\right)} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Passage à la 3D :

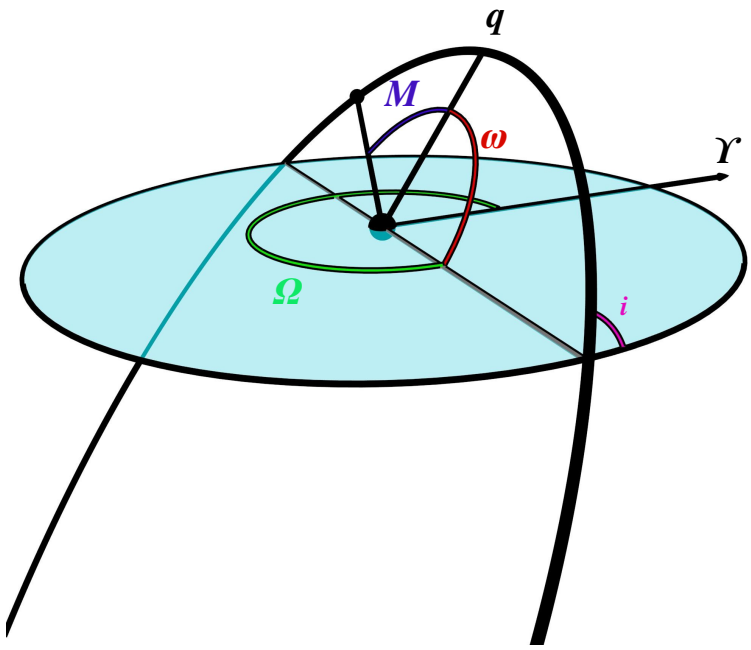

FIGURE 2.5 – Schéma des éléments orbitaux. i est l'inclinaison, ω est l'argument du périhélie, Ω est la longitude du nœud ascendant, M est l'anomalie moyenne, q est la position du périhélie et enfin Υ est la direction du point vernal.

Pour passer en $3D$ à partir des coordonnées et vitesse dans le plan de la parabole/ellipse on peut utiliser une matrice basée sur les angles d'EULER. En mécanique céleste, ces angles sont les éléments orbitaux (i, Ω, ω) où i est l'inclinaison de l'orbite, Ω est la longitude du nœud ascendant et ω est l'argument du périastre [63]. Ces éléments sont résumés dans la Fig. 2.5. Ils permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q_{3D}} &= \boldsymbol{M_{eo}} \cdot \boldsymbol{q_{2D}} \\ \boldsymbol{\dot{q}_{3D}} &= \boldsymbol{M_{eo}} \cdot \boldsymbol{\dot{q}_{2D}} \end{aligned} \tag{2.20}$$

avec

$$\boldsymbol{M_{eo}} = \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\cos i\sin\omega & -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos i\cos\omega & \sin\Omega\sin i \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\cos i\sin\omega & -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos i\cos\omega & -\cos\Omega\sin i \\ \sin i\sin\omega & \sin i\cos\omega & \cos i \end{pmatrix}$$

Une fois calculée la fonction perturbatrice, nous pourrons itérer l'application (2.14) et tirer des informations sur la dynamique de la comète. C'est ce que nous verrons dans la section associée à nos résultats. Avant cela, nous allons nous pencher brièvement sur les méthodes numériques employées pour réaliser notre étude.

2.3 Méthodes numériques employées

Nous allons ici détailler rapidement les méthodes numériques utilisées pour effectuer nos simulations. Tous nos programmes ont été rédigés en Fortran 77/90 et du code Python a parfois été rédigé pour traiter les données. Nos calculs sont effectués sur un cluster de calcul Linux de 21 noeuds Xeon pour un total de 160 coeurs. Nous allons voir dans un premier temps les méthodes d'intégrations employées : la méthode d'intégration de la dynamique et la méthode d'intégration utilisée pour obtenir la fonction perturbatrice. Dans un deuxième temps nous nous pencherons sur la structure du programme utilisé pour itérer l'application.

2.3.1 L'intégration

Dans ces études concernant les comètes nous avons eu recours à des méthodes d'intégrations numériques tout à fait standard. Pour l'intégration numérique des équations du mouvement, nous avons employé une méthode Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4).

Méthode Runge-Kutta

Soit un système d'équation du type problème de Cauchy. Pour plus de simplicité nous écrirons le système avec une unique équation $y(t)$ mais le raisonnement serait en tout point identique avec un système de N équations différentielles.

$$\dot{y} = f(y, t) \tag{2.21}$$

En effectuant une discrétisation du temps, il est possible d'approcher la valeur de la fonction $y(t)$ au temps t_{n+1} en utilisant un développement de Taylor.

$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + \tau f(y, t) \tag{2.22}$$

où τ est le pas de discrétisation du problème. On obtient ainsi une méthode d'intégration de la fonction $y(t)$ appelée méthode d'Euler qui est d'ordre 1 en τ.

La méthode Runge-Kutta vise à améliorer l'ordre d'intégration en effectuant des pas intermédiaires à l'intérieur du pas τ. Ici nous nous intéressons à la méthode $RK4$ qui nous donne une méthode d'intégration à l'ordre 4 en τ. L'obtention de la formule analogue à l'équation 2.22 est un peu fastidieuse, nous écrirons seulement le résultat

$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{2.23}$$

avec :

$$\begin{aligned}
k_1 &= \tau f\left(t_n, y(t_n)\right) \\
k_2 &= \tau f\left(t_n + \frac{1}{2}\tau, y(t_n) + \frac{1}{2}k_1\right) \\
k_3 &= \tau f\left(t_n + \frac{1}{2}\tau, y(t_n) + \frac{1}{2}k_2\right) \\
k_4 &= \tau f\left(t_n + \tau, y(t_n) + k_3\right)
\end{aligned}$$

On peut justifier l'emploi de cette méthode par le fait que nous sommes intéressés à un temps relativement court. Pour les temps d'intégration plus longs, une méthode symplectique est requise. Avec la méthode $RK4$ l'énergie a tendance à subir une dérive numérique due à l'accumulation des erreurs. Notons simplement que certain type d'intégrateur évite ce problème. Par exemle, au cours d'autres études que nous n'évoquerons pas dans cette thèse, nous avons utilisé des intégrateurs de type symplectique. Citons par exemple l'intégrateur à l'ordre 6 de Yoshida [95].

Pour l'intégration de la fonction perturbatrice, lorsque nous prenons pour orbite osculatrice une ellipse, nous devons déterminer l'anomalie excentrique E dans l'équation de Kepler (2.18). Cette équation étant transcendantale nous avons employé une méthode de Newton-Raphson pour la résoudre.

Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson se base sur un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $y(x)$ dont on cherche la racine. Pour ce faire, on choisit un point x_0 de départ et on effectue le développement de Taylor à l'ordre 1 autour de ce point, on obtient

$$y(x) \simeq y(x_0) + \frac{dy}{dx}(x - x_0) \tag{2.24}$$

qui n'est autre que la tangente de la fonction au point x_0. On cherche ensuite $y(x) = 0$. Une fois ce point trouvé, on l'appellera x_1. On réitère le processus avec pour point de départ le point x_1. En itérant ce processus n fois, le point x_n convergera vers la racine de la fonction $y(x)$. Le processus itératif prendra donc la forme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y(x_n)}{y'(x_n)} \tag{2.25}$$

où $y'(x_n) = \frac{dy}{dx}\mid_{x=x_n}$. Dans notre cas l'équation à évaluer pour le cas elliptique sera $a^{3/2}t - E + e\sin(E) = 0$ où a est le demi-grand axe de l'ellipse.

Après avoir effectué la méthode Newton-Raphson (ou utilisé l'équation (2.15) pour le cas parabolique) afin d'obtenir la position et la vitesse de la particule sur son orbite osculatrice, nous avons intégré numériquement l'équation (2.12) avec une méthode de Simpson.

Méthode de Simpson

L'intégrale d'une fonction peut être réalisée numériquement par la méthode des trapèzes. Cette méthode permet, en choisissant un pas d'intégration h, de réaliser une intégrale entre deux points proches de la fonction en assimilant l'aire sous la courbe à l'aire d'un trapèze.

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x)dx = h\left[\frac{1}{2}y(x_1) + \frac{1}{2}y(x_2)\right] + O(h^3) \tag{2.26}$$

La somme de l'ensemble des trapèzes nous donne l'intégrale de la fonction sur la plage de x désirée. Cette méthode comporte l'inconvénient d'avoir une erreur d'ordre 3 en h. La méthode de Simpson

suit simplement une autre règle d'intégration à trois points de la forme

$$\int_{x_1}^{x_3} y(x)dx = h\left[\frac{1}{3}y(x_1) + \frac{4}{3}y(x_2) + \frac{1}{3}y(x_3)\right] + O(h^5) \tag{2.27}$$

où cette fois l'erreur est d'ordre 5 en h. En fait cet algorithme peut être vu comme une succession d'application de la méthode du trapèze. Pour plus de détails voir [77].

Les deux techniques d'intégrations précédentes nous permettent d'obtenir la fonction $F(x)$ par deux méthodes différentes. Ces deux méthodes seront détaillées dans la section concernant nos résultats numériques. La méthode Runge-Kutta nous permet aussi d'obtenir une simulation au temps court de la dynamique de la comète. Cela montrera les limites de la méthode d'itération de l'application symplectique. L'intégration dévoile en effet des phénomènes non pris en compte dans la fonction perturbatrice qui encode l'interaction à trois corps.

2.3.2 L'itération

Pour réaliser la méthode d'itération, les résultats obtenus par intégration numérique ont été ajustés. Pour cela nous avons ajusté $F(x)$, obtenue en utilisant une méthode des moindres carrés avec une série de Fourier. La fonction perturbatrice doit être périodique. En effet, lorsque le binaire retourne à sa position d'origine après une rotation, la fonction $F(x)$ est identique. L'ajustement par une série de Fourier semble, par conséquent, tout à fait adéquat. Pour ce faire, nous avons réalisé un script Scilab pour ajuster la courbe.

Nous avons ensuite itéré l'application dont les résultats nous ont révélé la section de Poincaré en énergie en phase de rotation du couple Soleil-Jupiter. Le pseudo-code du programme utilisé est visible sur la Figure 2.6. Plusieurs conditions initiales sont injectées dans la section, en prenant soin de toujours rester en deçà de la dernière courbe invariante de KAM ainsi qu'a l'extérieur des îlots de stabilité. Les conditions initiales de la comète (w_0, x_0) sont par conséquent toujours injectées dans la mer chaotique. Une injection dans l'un des îlots de KAM ou au dessus de la courbe invariante de KAM aurait un comportement périodique qui empêcherait toute sortie. Nous laissons ensuite le programme itérer un nouveau w_n et un nouveau x_n. Nous considérons que la comète est éjectée du système lorsque $w < 0$. En effet, dans ces conditions son énergie $\mathcal{E}$ est positive et la comète passe d'une orbite elliptique à une orbite hyperbolique. Ceci constitue l'arrêt de la dynamique et l'injection d'une nouvelle particule.

2.4 Résultats et analyse

Dans cette section nous allons traiter des résultats obtenus en mettant en application les méthodes numériques précédentes. Comme stipulé plus avant, la comète de Halley sera notre objet d'étude. Les résultats obtenus feront écho aux travaux réalisés par Chirikov et Vecheslavov [20], Dvorak et Kribbel [26]. Nous commencerons par nous intéresser au cas où Jupiter seul est présent dans le système solaire. Ce cas nous ramène au problème à trois corps discuté plus haut. Par la suite, nous verrons que les équations pour le système solaire et ses 8 planètes peuvent se mettre sous la forme d'une somme de fonctions perturbatrices à trois corps Soleil-planète-comète.

2.4.1 Étude de la fonction perturbatrice de Jupiter

Jupiter est la planète la plus massive du système solaire. Sa masse est de $M_{♃} = 1898.6 \times 10^{24}$ kg. Cette planète a une orbite quasiment circulaire, son excentricité n'étant que de $e = 0.04850$. Le Soleil, quant à lui, a une masse de $M_{\odot} = 1988900 \times 10^{24}$ kg. Relativement à nos conventions, nous avons $\mu = \frac{M_{♃}}{M_{\odot}+M_{♃}} \simeq 9.54 \times 10^{-4} \sim 10^{-3}$. Ce système constitue donc un exemple type pour notre approche. Les éléments orbitaux de la comète de Halley pour l'orbite actuelle (9 février

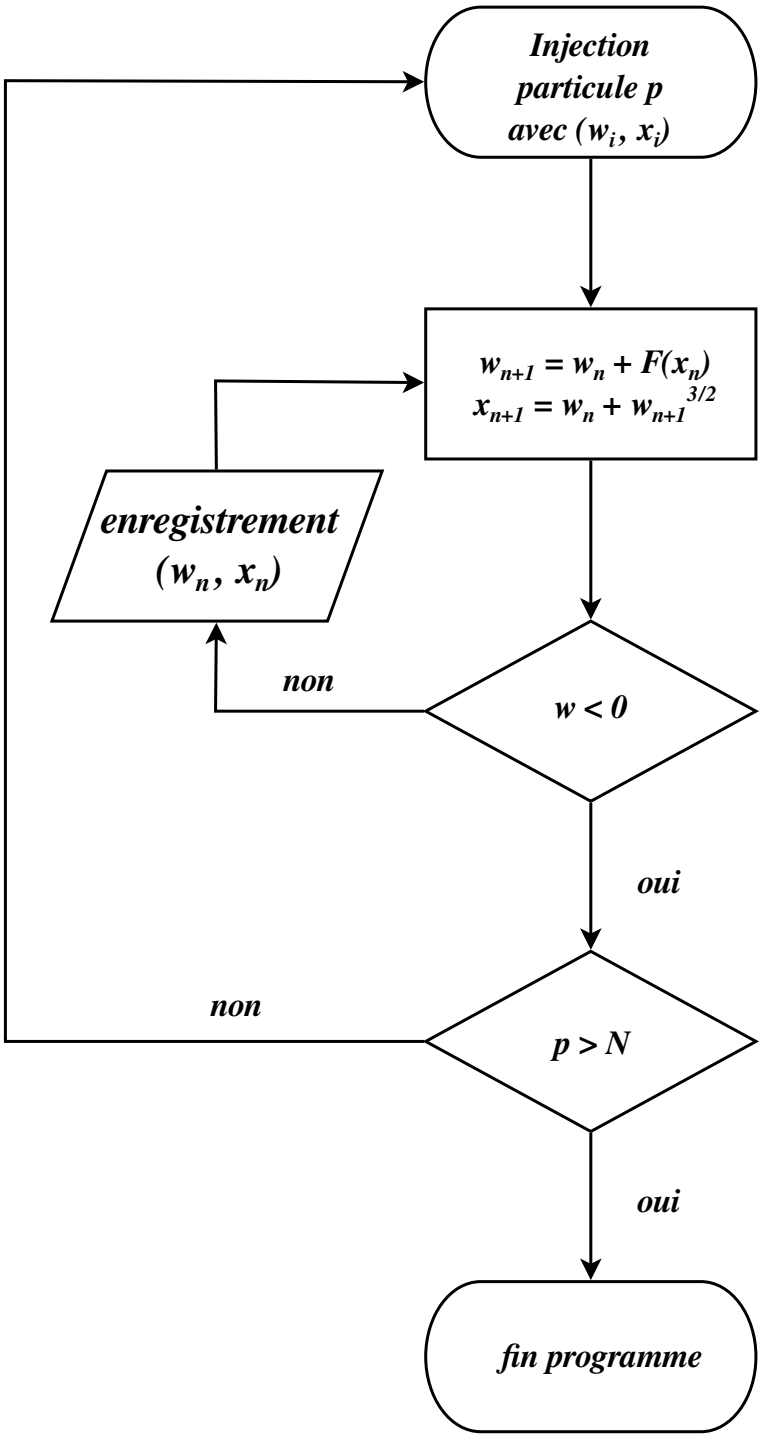

FIGURE 2.6 – Pseudo-code du programme d'itération de l'application symplectique pour les comètes.

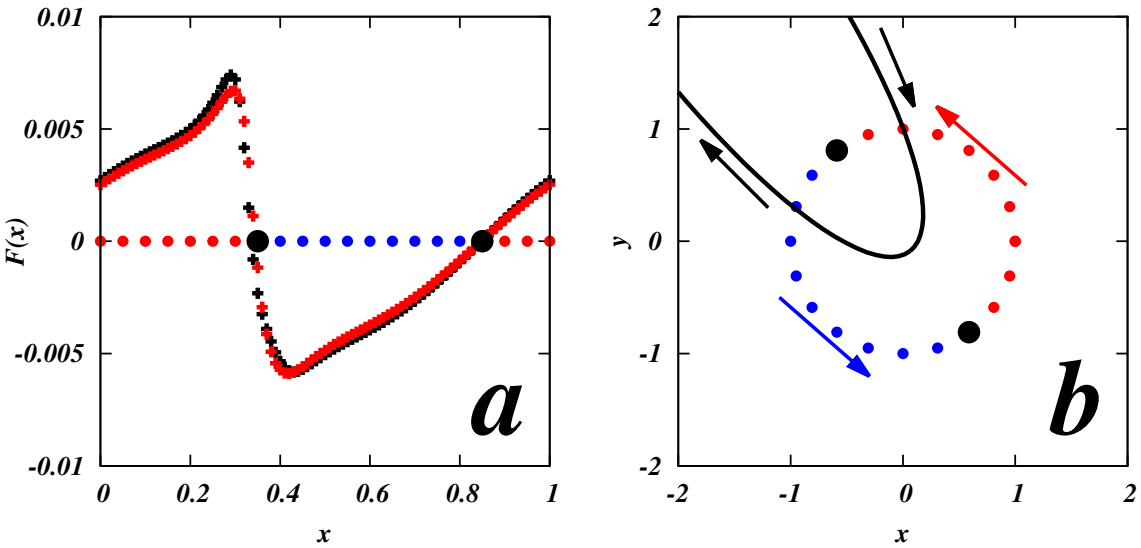

FIGURE 2.7 – *a*) Fonction perturbant l'énergie de la comète de HALLEY quand celle-ci suit une trajectoire parabolique (croix noires) ou l'orbite elliptique osculatrice actuelle (croix rouges) *b*) En noir, l'orbite de la comète en projection sur le plan de l'écliptique. Les points rouges font référence aux phases de Jupiter ou la comète gagne de l'énergie, les points bleus aux phases ou la comète perd de l'énergie. Les flèches indiquent les sens de rotation des corps en présences.

1986, 2456600.5 JJ) sont les suivants [41]

$$\begin{array}{lll} a \simeq 17.9412369\ ua & e \simeq 0.9672763 & q \simeq 0.5871033\ ua \\ i \simeq 162.2422326^\circ & \omega \simeq 111.8656445^\circ & \Omega \simeq 58,8600456^\circ \end{array}$$

Dans les unité réduites, la longueur de référence utilisée est le rayon de l'orbite de Jupiter $r_{♃} = 5.202603\ ua$. Dans ce système de référence, nous avons $q \simeq 0.1128$ et $w \simeq 0.29$. Nous pouvons constater sur la Fig.2.7 que la fonction perturbatrice $F(x)$ ressentie par la comète de HALLEY à son passage au périhélie diffère très peu si l'orbite osculatrice est l'orbite elliptique actuelle de la comète ou si nous regardons le cas idéal d'une orbite parabolique.

La Fig.2.7*a* a été obtenue en employant l'équation (2.13) pour deux orbites osculatrices différentes. La première orbite osculatrice est une parabole avec les angles i, ω, Ω associés aux angles actuels de l'orbite de la comète de HALLEY, la seconde utilise l'orbite osculatrice actuelle de la comète. Nous pouvons voir que le résultat est sensiblement le même, avec une petite différence au niveau de l'amplitude atteinte. L'orbite parabolique fait apparaître une amplitude de $J_{pa} \simeq 7.4024 \times 10^{-3}$ alors que l'orbite réelle a une amplitude $J_{el} \simeq 6.7043 \times 10^{-3}$ soit 9% de différence. Bien que la théorie développée plus haut l'ait été dans le cas idéal de l'orbite parabolique, nous pouvons constater que cette méthode peut s'appliquer aux comètes ou objets célestes réels en orbites liées, à partir du moment où ceux-ci possèdent une faible énergie et une forte excentricité.

La Fig 2.7*b* nous montre les configurations où la comète subit un accroissement de son énergie lors de son passage au périhélie (en rouge) ainsi que les configurations où celle-ci subit un abaissement de son énergie (en bleu). Nous constatons que les zéros de la fonction perturbatrice correspondent aux phases où Jupiter se trouve suivant le demi-grand axe de la comète (en projection). La comète gagne en w quand les deux corps ont tendance à être dans une phase de rapprochement l'un de l'autre (elle tombe donc dans le puits de potentiel). Inversement, elle perd en w quand ils ont tendance à être dans une phase d'éloignement (la comète se rapproche de l'énergie $\mathcal{E} = 0$).

n	année	date de passage (JJ)	Phase de Jupiter X_n
1	1986	2446470.9518	0
2	1910	2418781.6777	6.39083584
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
45	-1333	1234416.0059	279.748908
46	-1403	1208900.1811	285.638100

TABLE 2.1 – Tableau de données des passages de la comète de HALLEY à son périhélie, X_n est la phase de Jupiter à ce moment.

Nous allons à présent comparer les résultats obtenus avec ceux résultant des travaux de CHIRIKOV et VECHESLAVOV [20]. La méthode employée par ces auteurs pour obtenir la fonction perturbatrice est différente ; ils ont utilisé des données d'éphémérides réalisées par YEOMAN et al. [94]. Il s'agit d'une compilation d'observations et de résultats de calculs numériques. Ces données compilées se présentent sous la forme du Tab. 2.1. où X_n est la phase de Jupiter au moment du passage au périhélie. Il s'agit en fait du nombre de tour qu'a effectué Jupiter entre chaque passage avec pour référence la date du 9 février 1986. Ce nombre de tours peut évidement être ramené à un angle. Nous avons $X_n = \frac{t_n}{P_{♃}}$ où t_n est la date du $n^{\text{ième}}$ passage au périhélie et P_J est la période de Jupiter effective en considérant son orbite comme circulaire. Ici nous avons $w_n = \left(P_n/P_{♃}\right)^{-2/3} = \left(X_n - X_{n-1}\right)^{-2/3} = -2\mathcal{E}/m_H$, P_n est la pseudo-période de la comète au $n^{\text{ième}}$ passage, $\mathcal{E}$ est l'énergie de la comète et m_H sa masse. La fonction perturbatrice est alors d'après (2.14) $F(x_n) = w_{n+1} - w_n$ où $x_n = X_n \pmod 1$. Il est donc facile de déterminer cette fonction à partir des données du tableau. Sur la Fig 2.8a nous voyons la fonction $F(x)$ obtenue par CHIRIKOV et VECHESLAVOV [20] pour la planète Jupiter seule (croix bleues). Cette fonction est issue de l'analyse des données brutes du Tab. 2.1. Il apparaît également la fonction perturbatrice obtenue à l'aide de (2.13) sur une orbite osculatrice elliptique. La phase des deux fonctions a été ajustée après coup d'une valeur $\Delta x = 0.25$ pour la superposition. Cette valeur a été établie en déterminant les zéros des deux fonctions. Nous voyons également la fonction obtenue par intégration des équations du mouvement réalisée par nos soins. Dans ce dernier cas, nous avons utilisé les positions réelles de Jupiter et intégré 145 passages de la comète en avant depuis 1986 et 145 passages de la comète en arrière. Cette fonction a été ajustée en phase sur celle de CHIRIKOV et VECHESLAVOV [20] après coup d'une valeur $\Delta x = 0.022$.

Dans le premier cas, les données sont ajustées en terme de phase, car ici nous usons d'une orbite purement circulaire pour Jupiter. Les phases sur une orbite planétaire réelle sont donc sensiblement différentes. Conscients de ce fait, nous n'avons pas prêté attention à la phase initiale pour calculer $F(x)$, c'est pourquoi les zéros sont ajustés après coup.

Dans le cas de l'intégration réelle, nous voyons que l'ajustement est très faible. En effet, ici nous avons positionné Jupiter précisément à sa position de 1986 et nous avons usé de son orbite réelle. On pourrait cependant s'étonner de ne pas retrouver les mêmes phases que CHIRIKOV et VECHESLAVOV. Cela peut être expliqué par le fait que notre méthode d'intégration est sommaire comparée à la méthode utilisée par YEOMAN et al. [94] qui produit les données utilisées dans cet article. De plus les effets de forces non gravitationnelles [60] dus au dégazage de la comète à chacune de ses approches du Soleil ne sont pas ici implémentées. Ces deux points expliquent probablement la différence de phase trouvée. Bien entendu, ici nous visons une vérification sommaire de nos résultats et non une précision extrême. Nous constatons que l'intégration $RK4$ donne malgré tout des résultats convaincants en ce qui concerne cette fonction perturbatrice.

Malgré les différences de phases, les trois courbes sont toutes en bon accord et conservent une forme et une amplitude relativement proche. On a : $J_{CV} \simeq 5.5468 \times 10^{-3}$, $J_{LS} \simeq 6.7413 \times 10^{-3}$ et $J_{si} \simeq 5.8145 \times 10^{-3}$ où J_{CV} est l'amplitude déterminée par CHIRIKOV et VECHESLAVOV [20],

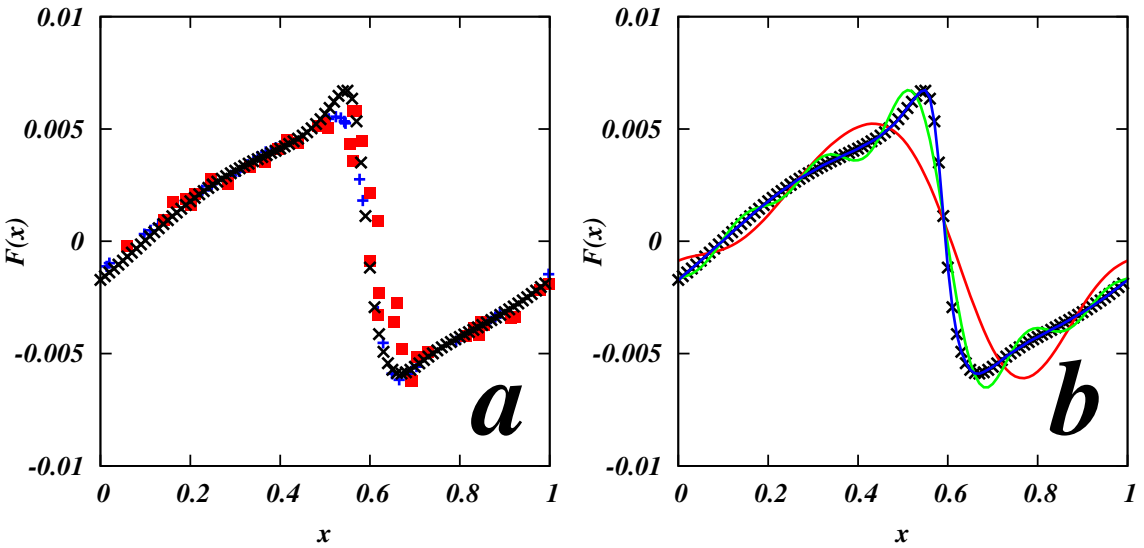

FIGURE 2.8 – a)Les points bleus représentent la fonction perturbatrice avec les points obtenus par CHIRIKOV et VECHESLAVOV [20]. Les croix noires représentent cette même fonction obtenue avec (2.13) avec comme orbite osculatrice une orbite elliptique. Les carrés rouges représentent la fonction perturbatrice obtenue par intégration des équations du mouvement en prenant les positions réelles de Jupiter. b) Ajustement de la fonction perturbatrice, en rouge avec 5 coefficients de FOURIER, en vert avec 10 coefficients et en bleu avec 40 coefficients.

J_{LS} est l'amplitude déterminée par le travail sur la séparatrice avec (2.13) et l'amplitude J_{si} est déterminée par la simulation avec intégration des équations du mouvement. Chacune de ces amplitudes a un écart de moins de 18% avec les deux autres.

La courbe de $F(x)$ a été ajustée par une méthode des moindres carrés pour avoir une fonction utilisable dans notre programme itératif. Le choix de la fonction pour l'ajustement s'est porté sur une série de FOURIER. Nous avons donc ajusté les points obtenus précédemment par la formule suivante

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x) \tag{2.28}$$

où le coefficient a_0 est nul, l'intégrale de cette fonction devant être nulle pour qu'il n'y ait pas de sens de diffusion privilégié en itérant l'application. Les résultats obtenus sont visibles sur la Fig. 2.8b. Nous pouvons constater qu'il faut au minimum 40 coefficients pour reproduire fidèlement la fonction perturbatrice et éviter toutes oscillations. Ces oscillations peuvent entraîner une différence dans la détermination du seuil du chaos dont nous parlerons par la suite.

2.4.2 Étude de la dynamique en présence de Jupiter

Nous pouvons à présent itérer l'application symplectique pour simuler la dynamique de la comète de HALLEY. Il serait légitime de remettre en question la méthode utilisée en stipulant que la dynamique réelle est très simplifiée, signalons cependant que nous ne visons pas ici une grande précision sur la trajectoire de la comète, comme on pourrait l'attendre de calculs d'éphémérides. Nous recherchons une réalité statistique de temps de survie du troisième corps dans le système binaire. L'itération de cette application permet de produire une section de POINCARÉ (w, x) pour une valeur du perihélie q considérée comme constante pour les raisons évoquées plus haut (théorie

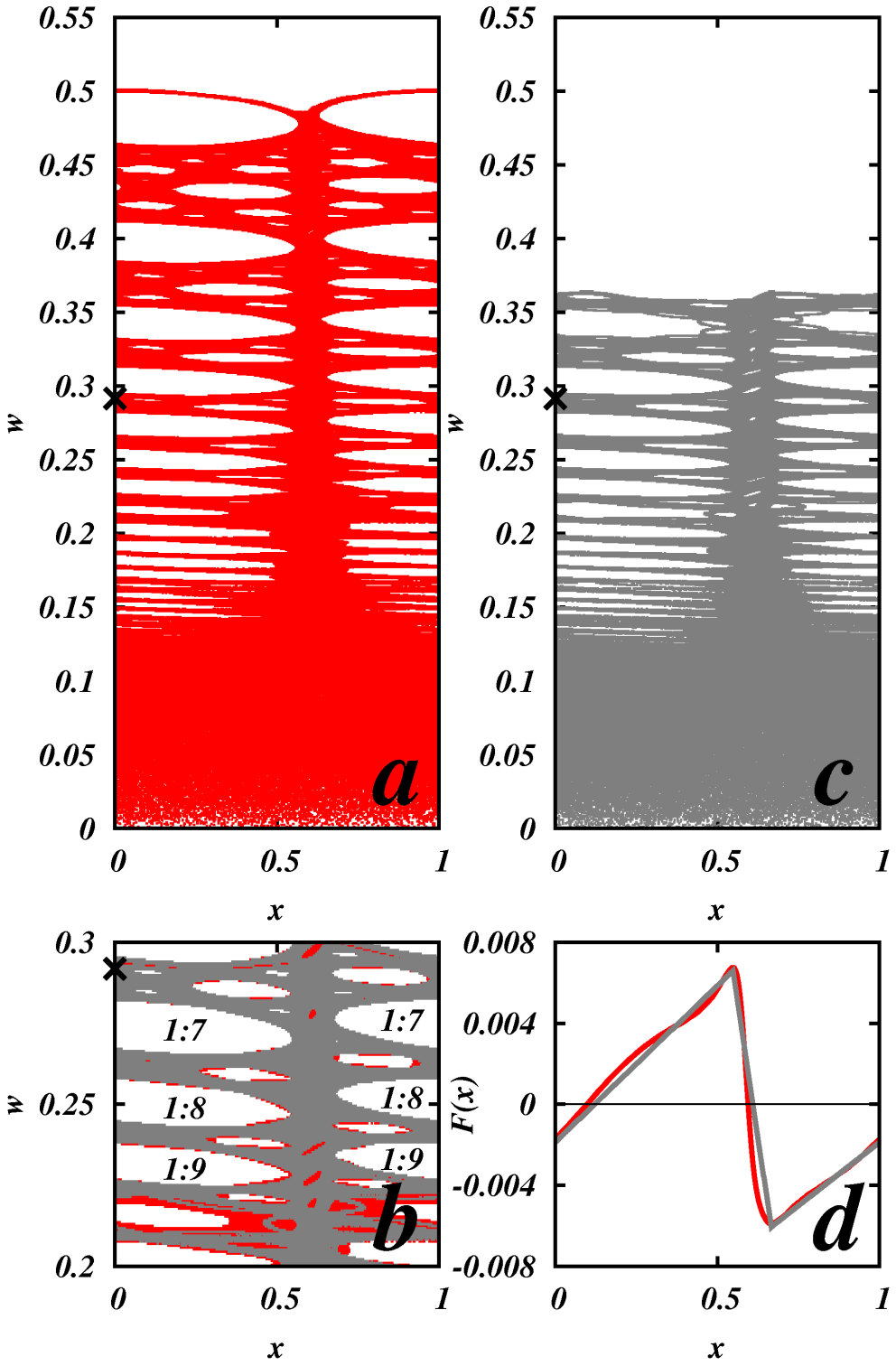

FIGURE 2.9 – *a*) Section de POINCARÉ de la dynamique de la comète de HALLEY en présence de Jupiter. Les courbes noires sont une illustration de la dynamique périodique au sein des îlots inaccessibles à la comète. La croix noire représente la position de la comète de HALLEY lors de son passage a son périhélie en 1986. En rouge la section calculée avec $F(x)$ réelle, en gris foncé l'approximation par une fonction en dent de scie. *b*) En rouge la fonction réelle, en vert l'approximation par une fonction en dent de scie. *c*) Zoom sur le panneau *a*) affichant les résonances primaires.

	Jupiter réel	approx dent de scie	Chirikov et Vecheslavov [20]
t_{max} (années)	$\sim 1 \times 10^9$	$\sim 4 \times 10^9$	/
t_{min} (années)	$\sim 5 \times 10^5$	$\sim 1 \times 10^6$	/
$\bar{t}$ (années)	$\sim 1 \times 10^7$	$\sim 4 \times 10^7$	$\sim 6 \times 10^7$
n_{max}	$\sim 1 \times 10^6$	$\sim 7 \times 10^7$	/
n_{min}	$\sim 1 \times 10^3$	$\sim 5 \times 10^3$	/
$\bar{n}$	$\sim 4 \times 10^4$	$\sim 4 \times 10^5$	$\sim 6 \times 10^5$

Table 2.2 – Tableau de données des statistiques de temps et itérations de survie de la comète en présence de Jupiter.

des perturbations à l'ordre 1 en μ). La Fig. 2.9a nous montre que la dynamique de la comète est totalement chaotique en dessous d'une énergie $w \approx 0.125$. Pour des énergies supérieures, le régime mixte chaos/stabilité prend place. Le bord du chaos généralisé se situe à $w \approx 0.5$. La dynamique ne peut dépasser cette barrière. Cela peut s'expliquer par le critère de recouvrement des résonances de Chirikov [20] vu au chapitre précédent. La présence de Jupiter crée une perturbation qui vient détruire les invariants de KAM par recouvrement des résonances. La limite observée à $w \approx 0.5$ témoigne de l'amplitude de la perturbation mais aussi de sa forme.

Pour évaluer la différence pouvant émerger de l'utilisation de fonction de formes différentes, même proche, nous avons approximé la fonction perturbatrice de Jupiter par une courbe en dent de scie Fig. 2.9b de la même façon que Chirikov et Vecheslavov dans leur article [20]. Nous pouvons constater que bien que très proche, la section issue de l'utilisation d'une fonction en dent de scie laisse apparaître plus d'îlots de KAM que la section issue de l'utilisation de la fonction perturbatrice réelle Fig. 2.9b et c. Nous verrons que nous allons attribuer à cette particularité, une différence notable dans la durée du temps de vie de la comète.

Pour la fonction réelle, au delà de la limite $w \approx 0.5$, les résonances ne se sont pas recouvertes, le chaos n'est pas généralisé et reste localisé autour de chacune d'entre elles. La dynamique au sein des îlots présente un comportement périodique (Fig. 2.9a îlots blancs), mais la trajectoire entre les résonances est accessible (chaos généralisé). Nous pouvons constater que l'ensemble des points correspondant au régime chaotique sont les endroits accessibles à la dynamique de la comète. Les zones stables sont à jamais inaccessibles. Sur la Fig. 2.9b les résonances primaires sont annotées $p : n$ où p est le nombre de rotations de la comète de Halley et n le nombre de rotations de Jupiter dans le même temps. C'est autour de chaque résonance que se forment les îlots inaccessibles. Le calcul de ces résonances est possible en considérant l'application (2.14) en l'absence de perturbation ($F(x_n) = 0$), alors nous obtenons pour un même w des résonances telles que $w_r = (p/n)^{-2/3}$ où p et n sont des entiers.

En prenant $N = 1000$ conditions initiales (x_i, w_i), dans une région ellipsoïde de demi-grand axe $\Delta x = 5 \times 10^{-3}$ et demi-petit axe $\Delta w = 5 \times 10^{-5}$ autour de la dernière position de la comète de Halley à son périhélie ($w \simeq 0.29$ croix noire sur la Fig. 2.9a) et en itérant l'application, nous obtenons les résultats numériques du Tab. 2.2. Nous pouvons remarquer que les résultats de temps moyen et du nombre d'itération moyen respectivement $\bar{t}$ et $\bar{n}$ que nous obtenons sont globalement inférieurs à ceux obtenus par Chirikov et Vecheslavov, sauf lorsque nous approximons notre fonction perturbatrice par une fonction en dent de scie. Dans ce cas de figure les résultats sont plus proches.

La Fig. 2.9c montre une plus grande richesse d'îlots dans le cas d'une fonction perturbatrice en dent de scie. Nous pouvons en conclure que les îlots supplémentaires agissent comme un frein à la dynamique, cela empêche la comète de s'échapper du système. Nos simulations utilisant la fonction perturbatrice réelle confirment l'importance de la forme de la fonction perturbatrice sur les temps de vie de la comète. Avec nos résultats nous obtenons un temps de vie plus faible de la comète au sein du système.

Nous pouvons cependant remarquer une grande différence dans les minima et maxima de ces valeurs. Ces chiffres sont peu signifiants car ils dépendent beaucoup du nombre de particules injectées. En effet dans leur article Chirikov et Vecheslavov lancent seulement 40 trajectoires. On peut donc conclure que parmi nos 1000 trajectoires injectées, l'une d'elle a pu "se perdre" à proximité d'un des îlots de stabilité où la dynamique est beaucoup plus lente. Elle a pu y rester piégée un grand laps de temps et d'itération, ce qui contribue à une valeur extrémale importante.

Nous pouvons finalement effectuer une étude par processus de diffusion. Nous avons vu au chapitre 1 qu'il était possible d'exprimer un coefficient de diffusion à partir de la fonction perturbatrice en faisant l'hypothèse de phase aléatoire à chaque retour de la comète. Nous avons alors

$$D(w) = \int_0^1 F(x)^2 dx = 1.46 \times 10^{-5} \tag{2.29}$$

Ce coefficient de diffusion est proche de celui obtenu par approximation d'une fonction en dent de scie de Chirikov et Vecheslavov (1.3×10^{-5}). Maintenant si nous considérons que la comète diffuse depuis sa position actuelle $w \simeq 0.29$ vers le bas de la section pour finir par être éjectée nous avons alors : $\bar{D} = w^2/\bar{n} = 5.8 \times 10^{-6}$. Nous pouvons remarquer qu'il y a un facteur 10 entre la détermination de ces deux coefficients. Nous pouvons poser l'hypothèse que cette différence est due à la présence d'îlots de KAM de volume non nul dans la partie supérieure de la section de Poincaré. En effet, le coefficient déterminé par (2.29) se situe dans le régime purement stochastique. Dans le second cas, nous utilisons la durée de vie moyenne qui est tributaire des particules ayant visité la proximité des îlots où elles restent "collées" plus longuement. Avec ce raisonnement il est compréhensible que la diffusion soit plus rapide dans le premier cas.

Nous allons à présent utiliser la même méthode pour traiter la perturbation de chacune des planètes du système solaire. En effet, nous montrerons qu'il est possible de découpler la fonction $F(x)$ totale comme la somme des systèmes à trois corps Soleil-planète-comète.

2.4.3 Étude de la fonction perturbatrice du Système Solaire

Nous nous plaçons en unité réduite et considérons les 8 planètes du système solaire avec leurs masses μ_i avec $i = 1, ..., 8$ et le Soleil dont la masse vaut $1 - \mu = 1 - \sum_{i=1}^{8} \mu_i$. La masse du système solaire est donc égale à 1 et la masse des planètes $\mu \ll 1$ constitue la perturbation à la dynamique à deux corps comète-Soleil. Comme précédemment Jupiter est pris pour référence avec son demi-grand axe $a_5 = 1$ et sa vitesse $v_5 = 1$. Suite à la présence de ces masses, la position du Soleil dans le référentiel barycentrique suit la loi : $(1-\mu)\,\boldsymbol{r}_\odot = -\sum_{i=1}^{8} m u_i \boldsymbol{r}_i$. Le potentiel $\Phi(\boldsymbol{r})$ ressenti par la comète est donc

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1-\mu}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\odot|} - \sum_{i=1}^{8} \frac{\mu_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|} \\ &= \Phi_0 \left[1 + \sum_{i=1}^{8} \mu_i \left(-1 - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_i}{r^2} + \frac{r}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|} \right) \right] + o\left(\mu^2\right) \end{aligned} \tag{2.30}$$

où $\Phi_0 = -1/r$ est le potentiel gravitationnel en considérant toute la masse du système solaire sur le barycentre. Les termes suivants sont les termes perturbatifs développés au premier ordre en μ. En utilisant la méthode du travail sur la séparatrice, que nous appellons $\mathcal{C}_0$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}(x_1, ..., x_8) &\simeq \sum_{i=1}^{8} \mu_i \oint_{\mathcal{C}_0} \nabla \left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_i}{r^3} - \frac{1}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i||} \right) \cdot d\boldsymbol{r} \\ &\simeq \sum_{i=1}^{8} \Delta\mathcal{E}_i\left(x_i\right) \end{aligned} \tag{2.31}$$

où nous voyons que la fonction perturbatrice du système solaire correspond à la somme des fonctions perturbatrices des différentes planètes lorsque la comète passe au périhélie. Cette fonction perturbatrice est multivaluée. En effet, pour une phase de Jupiter donnée x_5, une infinité de variations d'énergie est possible due à la phase des autres planètes. Bien entendu, ces variations se produisent autour de la valeur correspondant au $F(x)$ de Jupiter, qui de par sa masse conséquente, forme la "fonction perturbatrice porteuse". Nous pouvons également remarquer que la fonction perturbatrice est composée de deux contributions, une partie correspondant au potentiel keplerien $\propto 1/r$ mais également un terme de type dipolaire $\propto 1/r^3$ qui est dû au mouvement du Soleil par rapport au barycentre. Le calcul de la fonction perturbatrice pour les différentes planètes est visible sur la Fig.2.10. Sur cette figure nous pouvons remarquer que les fonctions perturbatrices de Venus, de la Terre et de Mars sont essentiellement dominées par la contribution keplerienne. Pour Jupiter et Saturne, le terme dipolaire joue un rôle important dans la forme totale de la fonction. Enfin, nous constatons que, plus l'orbite de la planète a un rayon important par rapport à la distance du périhélie de la comète, plus la contribution keplerienne perd de sa valeur et c'est le terme dipolaire qui domine. Sur la Fig.2.11a nous avons considéré l'orbite osculatrice de la comète de Halley et nous avons fait varier la distance au périhélie q. Nous avons enfin tracé le maximum de $F(x)$ en fonction de q (normalisé par rapport au demi-grand axe de la planète). Nous remarquons des pics caractéristiques de rencontres proches pour un q compris entre 0 et le demi-grand axe de la planète. Ensuite les deux contributions tombent avec une décroissance exponentielle $\propto \exp\{-2.7q/a\}$ ce qui est en bon accord avec les calculs théoriques de Petrosky et Brouck [75] dans le modèle $2D$.

Sur la Fig.2.11b nous regardons la valeur maximale de gain ou de perte d'énergie en fonction de la configuration du système solaire. En effet, comme nous l'avons déjà dit, la fonction perturbatrice est multivaluée, elle est cependant bornée par une valeur maximale et minimale correspondant à des configurations différentes du système solaire. Nous constatons que les valeurs d'éphémérides et de simulations utilisées par Chirikov et Vecheslavov s'inscrivent bien dans la fenêtre tracée par ces valeurs.

A présent, nous allons aborder l'étude de la dynamique itérée de la comète de Halley en présence des différentes planètes du système solaire.

2.4.4 Étude de la dynamique en présence d'autres planètes

La présence d'au moins un corps supplémentaire provoque une multivaluation de la fonction perturbatrice. Il faudrait des fréquences de rotation purement rationnelles entre elles pour conserver une fonction $F(x)$ parfaitement périodique, ce n'est évidement pas le cas. La Fig. 2.12 nous montre la trajectoire d'une particule en présence de Jupiter et de Saturne (L'étude pour le système solaire complet, peu différente est disponible dans l'article [78]). Nous y voyons aussi la section engendrée par Jupiter seul. Nous constatons que la dynamique en présence de Saturne (points noirs) à une caractéristique intéressante. Dans la mesure où les îlots dus à Jupiter restent en partie présents, ils deviennent accessibles. En effet, à la faveur d'une configuration particulière du système la comète peut entrer dans les structures de KAM associées à Jupiter seul. La comète se retrouvera donc piégée pendant un certain temps dans ces îlots jusqu'à ce qu'une autre configuration du système l'en extirpe. Les îlots de KAM ne sont désormais plus interdits à la dynamique, ils constituent même des pièges à celle-ci. Comme évoqué dans [20] nous pouvons noter que l'ajout de la perturbation de Saturne revient à utiliser une dimension supplémentaire à l'application. En effet, ici la phase de Saturne joue aussi un rôle. La représentation Fig. 2.12 (points noirs) constitue donc une projection sur l'espace à 2 dimension (w, x) d'une trajectoire dans un espace de dimension supérieure. En prenant $N = 1000$ conditions initiales (x_i, w_i), dans une région ellipsoïde de demi-grand axe $\Delta x = 5 \times 10^{-3}$ et demi-petit axe $\Delta w = 5 \times 10^{-5}$ autour de la dernière position de la comète de Halley à son périhélie soit $w \simeq 0.29$ et $x = 0$ et en itérant l'application nous obtenons les résultats numériques du Tab. 2.3.

Nous observons donc que la présence de Saturne, par rapport à un système avec Jupiter seul,

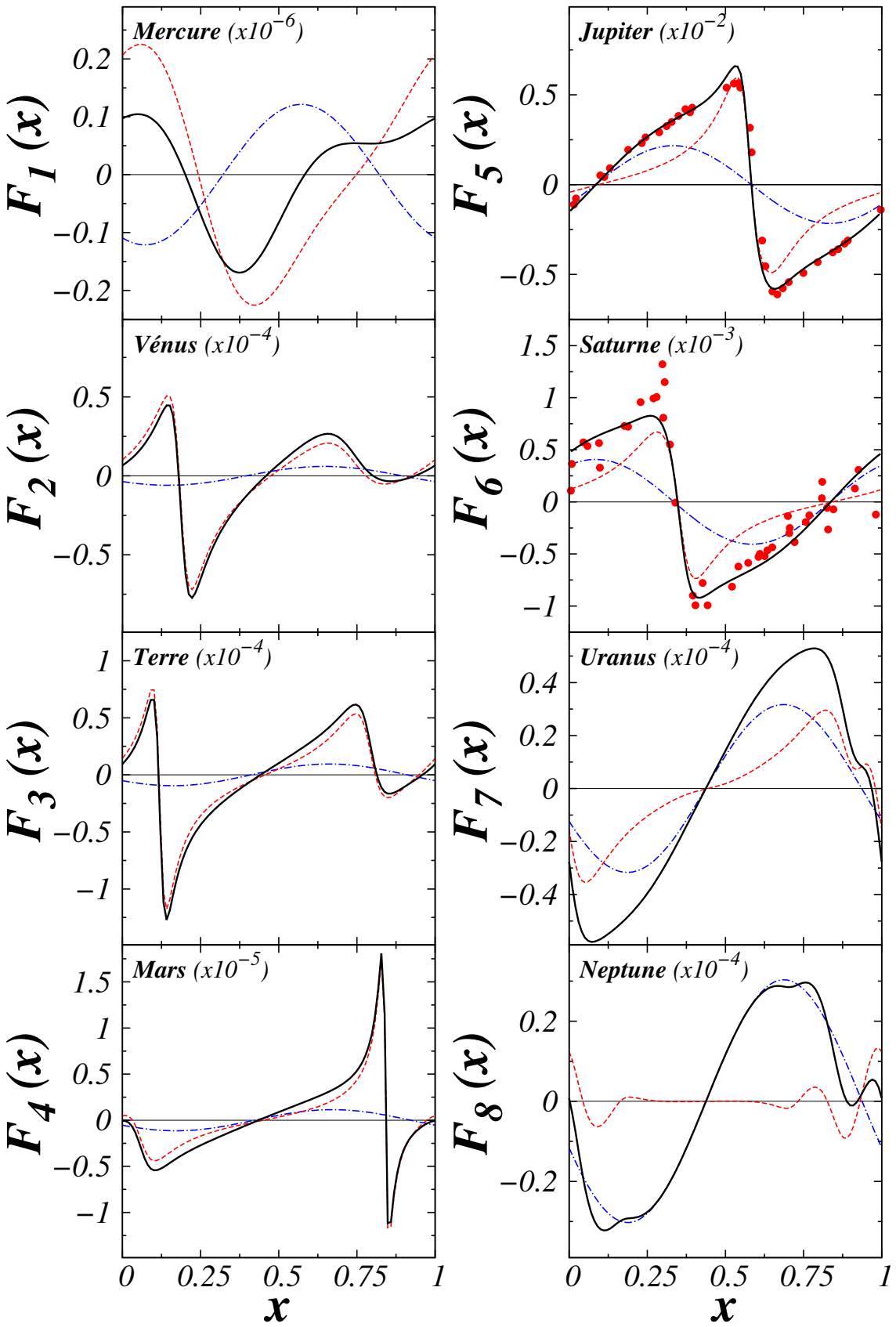

FIGURE 2.10 – Fonctions $F(x)$ pour les 8 planètes du système solaire. En noir la fonction perturbatrice totale, en pointillé bleu la contribution dipolaire, en pointillé rouge la contribution keplerienne de la planète considérée. Pour Jupiter et Saturne les points rouges sont les résultats obtenus par CHIRIKOV et VECHESLAVOV [20].

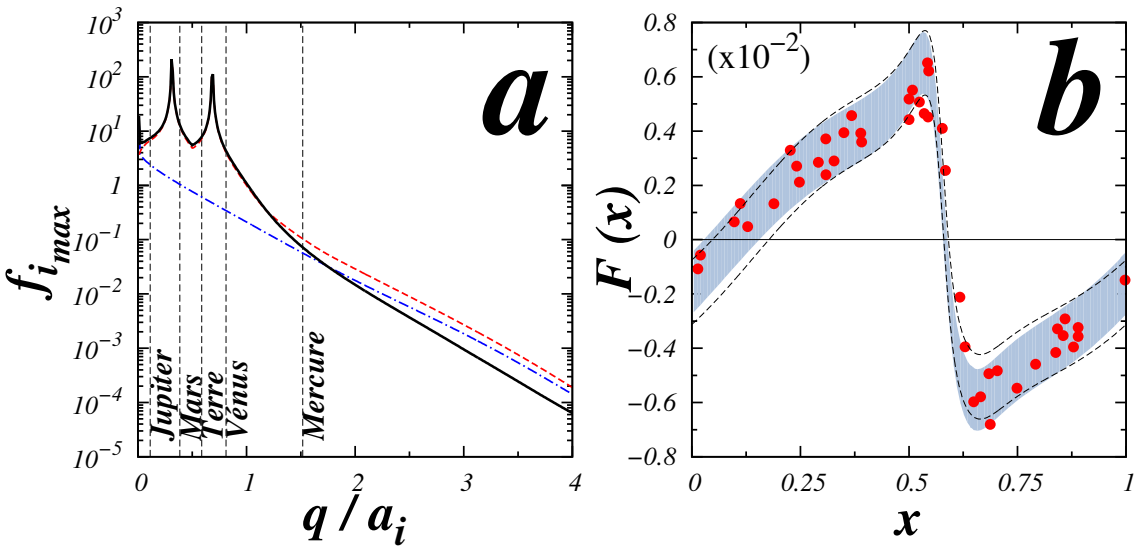

FIGURE 2.11 – *a*) Évolution du maximum normalisé de la fonction perturbatrice avec la variation de q. Dans cette figure nous utilisons l'orbite osculatrice de la comète de HALLEY où nous faisons évoluer q la distance au périhélie. *b*) Présentation de la fonction perturbatrice de Jupiter avec l'encadrement donné par les contributions maximales et minimales des autres planètes. Les points rouges représentent la fonction perturbatrice totale évaluée par CHIRIKOV et VECHESLAVOV [20].

conserve l'ordre de grandeur du temps de survie de la comète. Une légère diminution du temps et du nombre d'itérations est cependant notable. Comme CHIRIKOV et VECHESLAVOV [20] nous pouvons conclure que cela est dû au piégeage de la comète dans des îlots de haute énergie et donc de courte période. Cependant gardons à l'esprit que nous avons montré que des différences notables peuvent apparaître en fonction de la forme de la fonction perturbatrice (Tab. 2.2). Cela pourrait expliquer que les différences relevées par CHIRIKOV et VECHESLAVOV [20] lors de l'ajout de la présence de Saturne sont d'une plus grande amplitude que celles relevées dans nos calculs où nous utilisons des fonctions perturbatrices plus précises.

	Jupiter + Saturne	Jupiter	CHIRIKOV et VECHESLAVOV [20]
t_{max} (années)	$\sim 6 \times 10^8$	$\sim 1 \times 10^9$	$\sim 2 \times 10^7$
t_{min} (années)	$\sim 3 \times 10^5$	$\sim 5 \times 10^5$	$\sim 5 \times 10^5$
$\bar{t}$ (années)	$\sim 9 \times 10^6$	$\sim 1 \times 10^7$	$\sim 4 \times 10^6$
n_{max}	$\sim 1 \times 10^7$	$\sim 1 \times 10^6$	$\sim 1 \times 10^5$
n_{min}	$\sim 6 \times 10^2$	$\sim 1 \times 10^3$	$\sim 1 \times 10^3$
$\bar{n}$	$\sim 9 \times 10^4$	$\sim 3 \times 10^4$	$\sim 2 \times 10^4$

TABLE 2.3 – Tableau de données des statistiques de temps et itérations de survie de la comète en présence de Jupiter seul, de Jupiter et Saturne et les résultats de CHIRIKOV et VECHESLAVOV [20] pour Jupiter et Saturne.

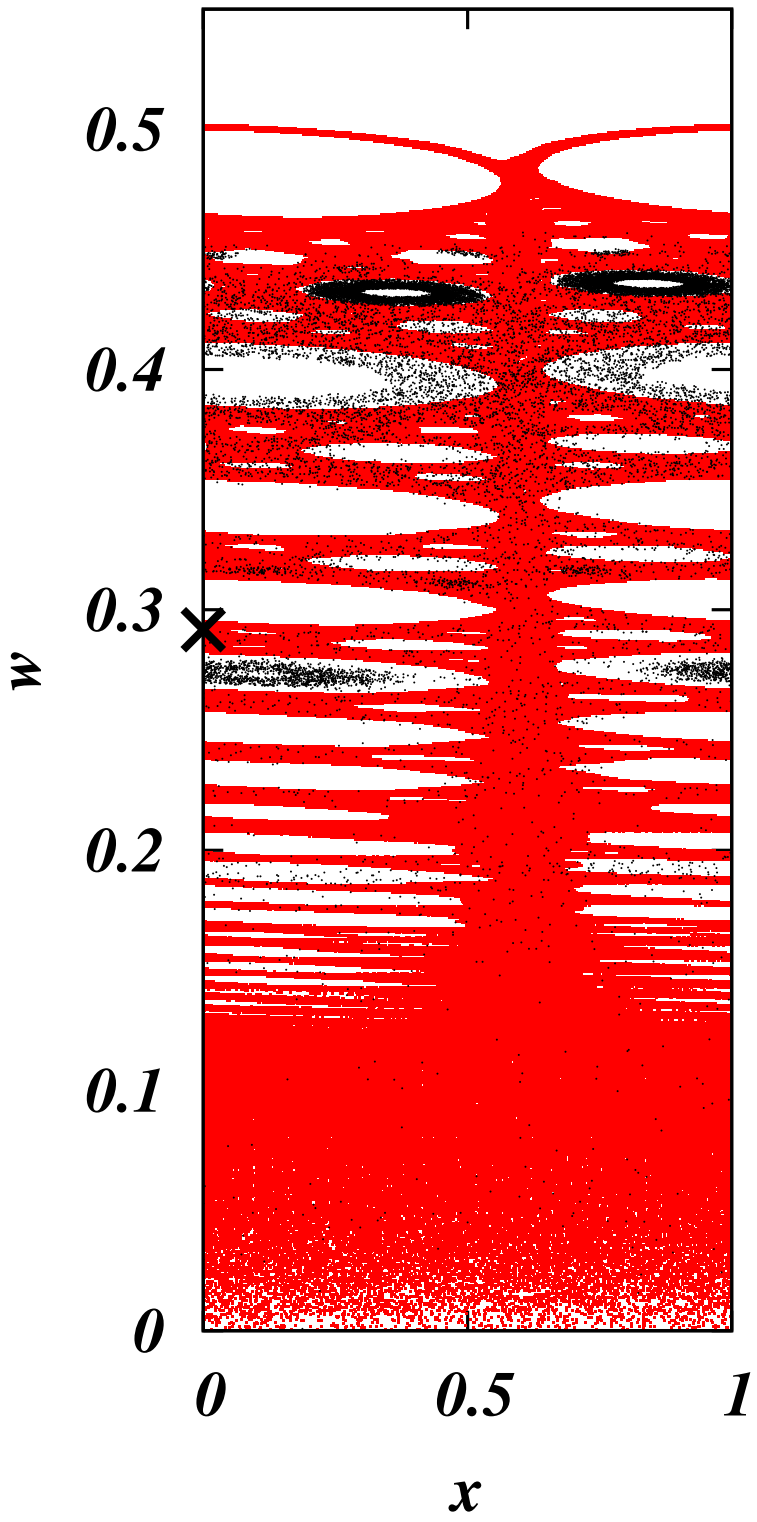

FIGURE 2.12 – Section de POINCARÉ pour une orbite en présence de Jupiter et Saturne, principale perturbation secondaire (points noirs). En rouge, la section accessible à la comète en présence de Jupiter seul. Pour la trajectoire noire nous avons représenté un point toute les 5 itérations pour plus de clarté.

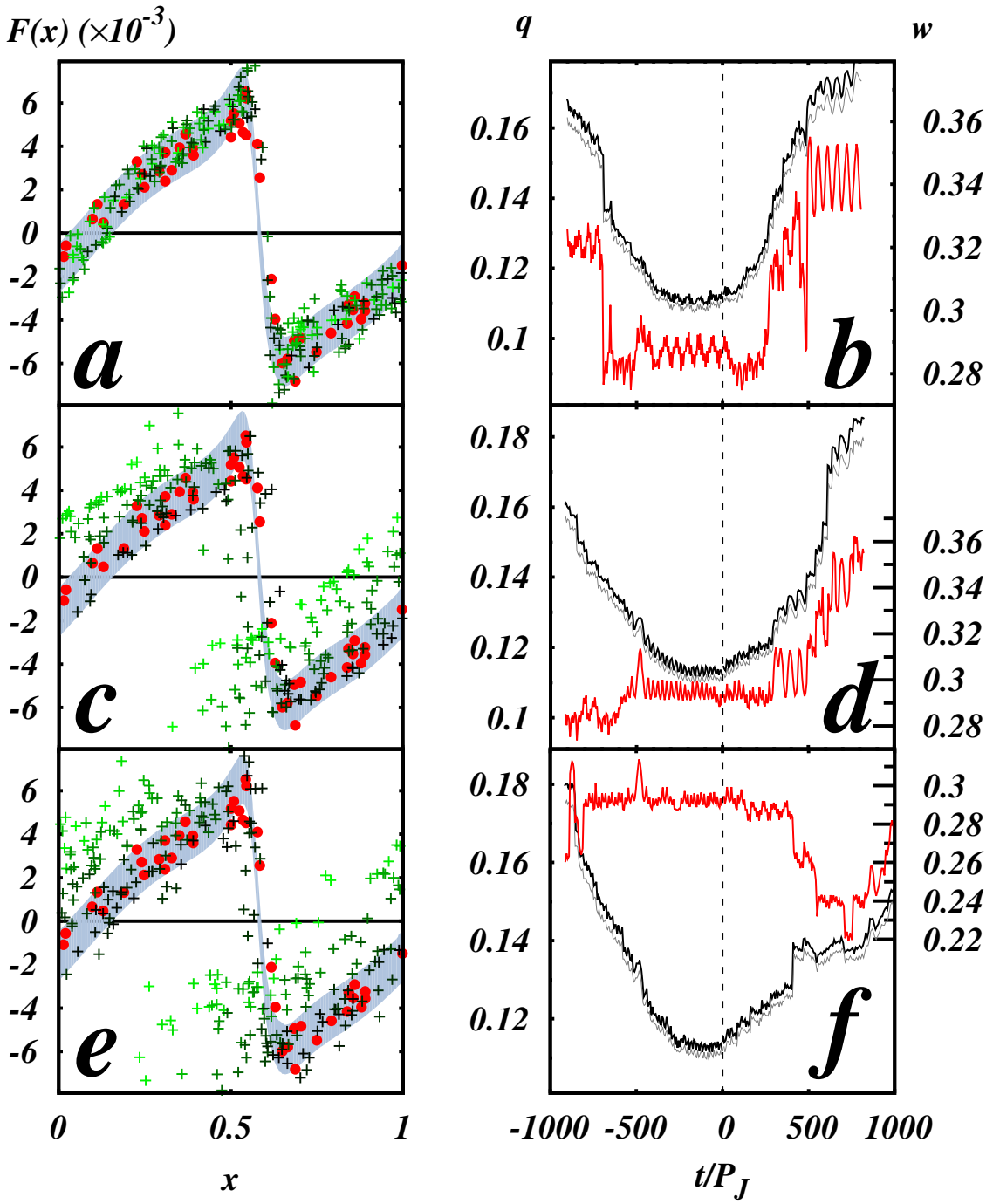

FIGURE 2.13 – A gauche $a-c-e$ fonctions perturbatrices calculées par intégration numérique des équations du mouvement./Evolution de w, q et l a) Toutes les planètes du système solaire sur des orbites planes et circulaires. c) Jupiter seul sur son orbite réelle. e) Toutes les planètes du système solaire sur leurs orbites réelles. La coloration en gradient des points, noir à vert clair, témoigne du temps où ces points sont tracés. A droite $b-d-f$ évolution de w en rouge, q en noir planétaires des panneaux $a-c-e$. Les courbes grises rendent compte du calcul $l^2/2$ où l est le moment cinétique.

2.4.5 Robustesse de l'utilisation de l'application symplectique

Il serait, à présent, intéressant de tester la validité et la robustesse de cette approche. Il est en particulier d'un grand intérêt de vérifier l'allure de la fonction perturbatrice réelle en simulant la dynamique de la comète par intégration numérique des équations du mouvement.

La Fig. 2.13 nous montre à gauche l'allure de la fonction perturbatrice en présence des 8 planètes du système solaire sur des orbites circulaires (panneau a). Le panneau b de la Fig. 2.13 donne l'évolution de q la distance au périhélie de la comète en noir et de w l'énergie en rouge. La courbe grise est l'évolution de $l^2/2$ où l est le moment cinétique. Sa grande ressemblance avec l'évolution de q témoigne que l'orbite est proche d'une parabole car dans le cas parabolique $q = l^2/2$. Les 4 autres figures ont les mêmes caractéristiques sauf qu'il s'agit de Jupiter seul sur son orbite réelle en c et d et des 8 planètes du système solaire sur leurs orbites réelles en e et f. La simulation est réalisée à partir de la position réelle de la comète en l'an 2000 et nous effectuons une intégration numérique de 145 rotations de Jupiter en avant et en arrière. Les fonctions perturbatrices sont quant à elles obtenues en utilisant la méthode de calcul mise en oeuvre par Chirikov et Vecheslavov [20] à partir des temps de passage au périhélie. Il est important de noter que seuls les points de $F(x)$ supérieurs à -0.008 et inférieurs à 0.008 sont représentés. Sur le graphique a nous voyons que $F(x)$

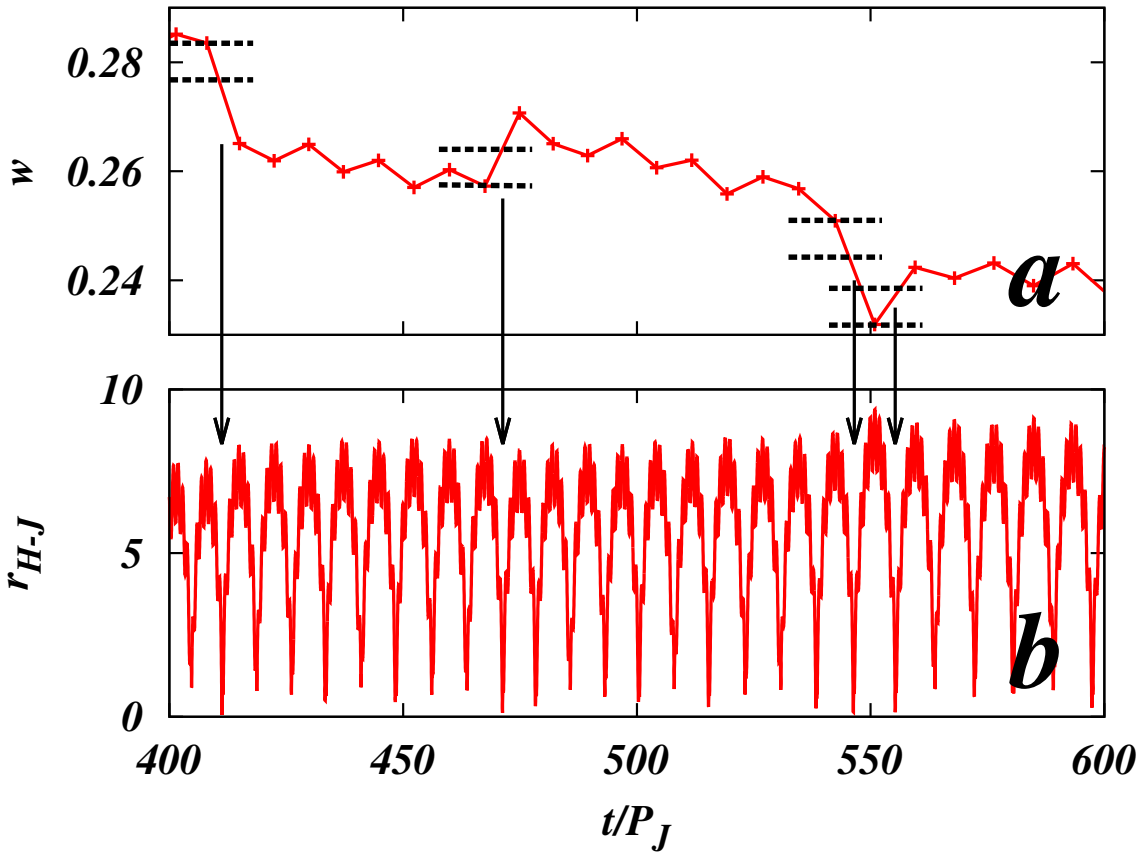

Figure 2.14 – a) Variation en énergie de la comète au cours du temps. Zoom sur le panneau f de la Fig. 2.13. Pour les sauts importants nous avons matérialisé le maximum de $F(x)$ accessible par des traits pointillés noirs. b) Évolution de la distance comète de Halley-Jupiter r_{H-J} en fonction du temps. Les flèches noires indiquent des rencontre proches correspondant aux sauts importants du panneau a.

conserve sa forme durant toute la simulation et qu'elle reste globalement dans la zone maximale et minimale de $F(x)$ décrite plus haut. On constate également sur b que dans la durée des éphémérides étudiée par Chirikov et Vecheslavov la valeur d'énergie subit des sauts mais reste globalement stable. On observe cependant de grands sauts supérieurs à l'amplitude de $F(x)$ qui témoignent de phénomènes autres qu'une situation frappée classiquement. Il s'agit en fait de rencontres proches comme en témoigne la Fig. 2.14. Nous observons à chaque saut en énergie plus important que le maximum de $F(x)$ une rencontre proche avec une planète. Dans ce cas précis, il s'agit de Jupiter. Ces rencontres proches se produisent suite au changement des éléments orbitaux qui, à terme, contribuent à un rapprochement de l'orbite de la comète avec celle des planètes, en particulier de Jupiter. L'application ne prend pas en compte ce type de phénomènes, elle est construite pour des cas où q évolue très peu.

Sur le graphique c nous constatons que l'utilisation d'orbites réelles pour Jupiter rompt la symétrie du problème. A terme, $F(x)$ subit une "dérive". Le gradient de couleur noir à vert clair témoigne du temps écoulé au moment de l'enregistrement des points. On remarque que $F(x)$ dans les premières années reste stable dans les bornes fixées sur la Fig. 2.11. Elle est également proche de la fonction utilisées par Chirikov et Vecheslavov. En revanche, avec le temps, la fonction perturbatrice subit cette dérive. Avec les 8 planètes, $F(x)$ subit une dérive encore plus importante. Sur les figures d et f la présence de rencontres proches est également à souligner. Cette dérive est attribuée à la perte de symétrie du système. En effet, lorsque les orbites sont circulaires, peu importe que la comète subisse une précession, elle verra globalement à chacun de ses retours une fonction $F(x)$ identique. En revanche si les orbites des planètes sont réelles, alors la nature elliptique de ces orbites vient rompre cette symétrie au cours de la précession.

Nous pouvons tirer de ces résultats que l'utilisation de l'application symplectique de manière brute, telle que nous l'avons appliquée, ne peut se faire que sur un temps de présence dans le système relativement court. Elle témoigne donc de la dynamique localisée dans le temps. Ensuite, des phénomènes tels que les rencontres proches sont susceptibles de venir perturber le comportement frappé de la comète. De plus, nous arrivons également à la conclusion que la perte de symétrie de l'orbite de l'objet perturbateur a aussi un rôle dans la dérive de $F(x)$. Cette dérive est le témoin de la précession de l'orbite de la comète.

2.5 Conclusion du chapitre

Au travers de ce chapitre, nous avons montré qu'une technique basée sur l'utilisation d'une application symplectique était susceptible de donner dans les grandes lignes et, au moins d'un point de vue statistique, le comportement d'objets prisonniers formant un système à trois corps restreint. Ces résultats nous seront d'un grand apport dans notre étude concernant les particules de matière noire capturées par les systèmes binaires que nous verrons au chapitre suivant.

Bien que séduisante, car rapide et peu coûteuse en ressources numériques, cette technique comporte tout de même des limites dans son utilisation. Elle ne vise qu'une première approche d'un système complexe et dans une zone localisée de ses paramètres, en particulier si nous cherchons à déterminer des grandeurs statistiques. La présence d'autres phénomènes entrant en ligne de compte, dont les rencontres proches, peut en effet conduire à une destruction de la fonction perturbatrice telle qu'on la connaît.

Tout en ayant conscience de ces faiblesses, nous pouvons noter que les principaux résultats du comportement d'une comète en présence d'une perturbation ressortent de l'utilisation de l'application. L'un des exemples est l'évolution de son énergie sous forme de sauts qui est très similaire aux évolutions d'énergie obtenues à l'aide d'intégration complexe [96]. De plus, le piégeage des trajectoires dans les structures de KAM engendré par un corps perturbateur principal et par l'intermédiaire d'un corps perturbateur secondaire, émerge bien de nos simulations. Ce type de piégeage a bien été montré par des simulations numériques plus lourdes [26]. On peut ajouter qu'une

application symplectique de degré plus élevé, qui prend en compte, par exemple, une équation régissant la variation du moment cinétique, serait certainement plus précise.

Ce travail effectué sur les comètes est l'un de nos point de départ pour le chapitre suivant où nous voulons traiter un flux de plusieurs centaines de milliards de particules de matière noire traversant un système binaire.

Chapitre 3

La dynamique chaotique de la matière noire

> Anaximène disait que la substance des astres est ignée, mais que certains corps terreux les entourent et sont entrainés dans leur rotation, tout en demeurant invisibles.
>
> Aétius, *Opinions* II, XIII,10

3.1 Introduction

Le concept de matière noire a une longue histoire [84]. Le développement de cette théorie débute en 1933 lorsque l'astronome suisse F. Zwicky postule la présence de matière supplémentaire non visible au sein de l'amas de Coma [97]. Cette hypothèse répond à la nécessité de rendre cet amas stable. Les vitesses radiales des galaxies en présence, comparées à leurs masses visibles, apparaissaient à Zwicky beaucoup trop élevées pour que l'amas ait pu survivre au temps. Il aurait dû s'être disloqué depuis bien longtemps. En employant le théorème du viriel Zwicky estima une masse dynamique de $3 \times 10^{14}\ M_\odot$ où $M_\odot$ est la masse du Soleil. Or ses observations ne dévoilaient que $10^{12}\ M_\odot$ et Zwicky de conclure "Falls sich dies bewahrheiten sollte, würde sich also das überraschende Resultat ergeben, das dunkle Materie in sehr viel grösserer Dichte vorhanden ist als leuchtende Materie." ("Si cet excès de masse est confirmé, nous en arriverons à la surprenante conclusion que de la matière noire est présente avec une densité bien plus grande que la matière lumineuse"). Par la suite, Zwicky [98] analysa à nouveau ce système et arriva à la même conclusion. Il évoquera alors plusieurs possibilités : si l'amas n'est pas stable, le théorème du viriel ne s'applique pas ; soit l'amas est dominé par l'énergie cinétique, alors il aurait dû se dissiper, soit il est dominé par son énergie potentielle, alors la masse présente est encore plus grande.

Durant les 30 années qui suivirent le premier article de Zwicky, seuls quelques articles sporadiques évoquèrent confirmations et réfutations de la présence de masse invisible [90, 3, 85]. Cependant, durant les années suivantes, la possibilité de relevé observationnel nouveau vît le jour : les courbes de rotation des galaxies. Les courbes de rotation donnent les vitesses de rotation de la substance galactique autour de son centre. Les premières courbes basées sur la vitesse de rotation des étoiles visibles commencèrent à montrer une anomalie. On peut en voir un exemple sur la Fig.3.1*a* (points noirs). Il s'agit de la courbe de *UGC* 2885 optiquement observée par V. C. Rubin, W. K. Ford Jr et N. Thonnard [81]. Ce graphique est normalisé en rayon à R_{25} qui est la limite où la brillance de surface d'une galaxie atteint 25 magnitude par seconde d'arc au carré. Nous

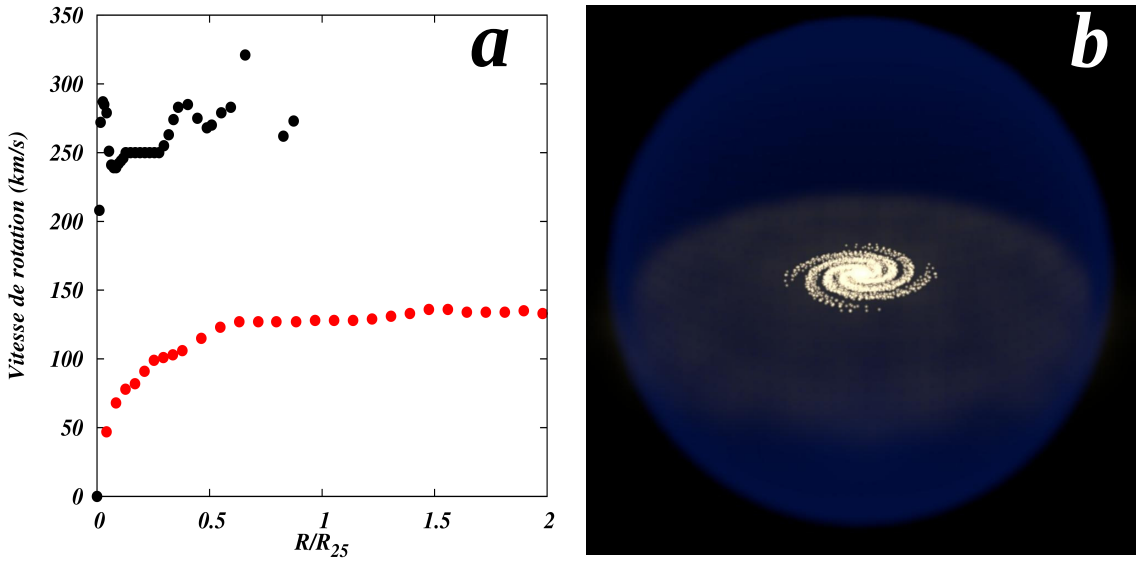

FIGURE 3.1 – *a*) Courbe de rotation de galaxie normalisée à R_{25}, limite où la brillance de surface d'une galaxie atteint 25 magnitude par seconde d'arc au carré. En noire la courbe de *UGC* 2885 extraite des données [81], en rouge *NGC* 2403 extraite des données [5]. *b*) Illustration d'un halo de matière noire (en bleu) englobant une galaxie.

considérons cette distance comme la limite optique du disque galactique. Cette courbe semble laisser apparaître une vitesse de rotation constante après une certaine distance. Cela est contraire au principe qui voudrait que la vitesse décroisse de manière keplerienne avec R. Bien que troublante, les courbes optiques ne permettent pas de totalement statuer sur une présence de masse invisible. En effet, celles-ci sont limitées par le faible rayon de galaxie optiquement accessible. Il a été montré [44] qu'il n'était en rien étonnant de trouver une courbe plate dans le disque visible en ajustant la masse dans ce disque (approximation du disque maximum).

La courbe de rotation basée sur la raie de $21cm$ de l'hydrogène neutre changeât la donne. Il s'agit ici de mesurer la raie d'émission associée à la différence d'énergie entre le spin up et le spin down d'un électron dans l'atome d'hydrogène. L'atome d'hydrogène étant massivement présent dans le milieu galactique, cela permit d'effectuer des mesures de vitesses bien au delà du disque visible des galaxies. On en voit également un exemple sur la Fig. 3.1*a* (points rouges). Il s'agit ici de la courbe de rotation de *NGC* 2403 mesurée par K. G. BEGEMAN [5]. Ces courbes de rotation exhibent un caractère "plat" bien au delà du disque visible. Ce n'est pas toujours aussi criant que sur la Fig. 3.1*a*. Cela étant, dans tout les cas, la décroissance keplerienne que l'on attend pour la vitesse de rotation "loin" du disque visible n'est pas présente. Il s'agit encore une fois d'un indice pouvant indiquer la présence de matière sombre au sein même des galaxies.

Un autre élément troublant, cette fois théorique, vient étayer la thèse de la masse manquante. Les années 60 furent propice aux calculs sur ordinateur et aux premières simulations numériques. Parmi celles-ci, les dynamiciens simulèrent les galaxies au travers de l'intégration de processus à N corps. Le système tout entier était, au même titre que les galaxies réelles, en rotation autour de son centre, la force centrifuge agissant comme force compensatoire à la gravité. L'enseignement de ces simulations est l'instabilité d'une telle structure. La "galaxie numérique" commence d'abord par ressembler à une galaxie réelle, mais sa structure ne se conserve pas. En fait, dans ces simulations, les particules sont d'abord dans un état d'équilibre en rotation circulaire puis se mettent à avoir des trajectoires de plus en plus allongées. Les galaxies ne sont pas constituées uniquement d'étoiles,

le gaz présent est susceptible d'entrer en collision et de perdre de l'énergie. Pour simuler ce fait, on effectua des "expériences numériques" qui consistaient en la diminution de la température des particules simulant le gaz. Les bras spiraux caractéristiques des galaxies apparaissent alors, cependant cela ne change rien du point de vue des étoiles...

C'est à ce moment, en 1973, que J. Ostriker et J. Peebles, émirent l'hypothèse qu'une sphère de matière invisible, s'étendant bien au large des galaxies, pourrait soutenir cette structure [67]. C'est alors que vînt le concept de matière noire tel qu'on le connaît aujourd'hui. Ce concept est illustré sur la Fig. 3.1*b* où l'on voit un vaste halo de matière noire sphérique englober la galaxie avec un rayon plusieurs fois supérieur à celui de cette dernière.

Pour terminer cette section introductive, nous notons que R. H. Sanders [84] cite le 100e symposium de l'Union Astronomique Internationale organisé à Besançon, lieu même où s'est effectué ce présent travail de thèse. Il voit ce colloque comme étant l'endroit où le concept des halos de matière noire était en voie de devenir le "paradigme central sur la structure dynamique des galaxies".

C'est dans le contexte que nous venons de brièvement introduire que se place l'étude que nous avons réalisée. Supposons que les galaxies sont enchâssées dans un halo sphérique de matière noire [7, 34, 62]. Supposons maintenant que cette matière noire soit composée de particules non baryoniques n'interagissant pas avec le champ électromagnétique mais uniquement avec la gravitation. Dans ces circonstances, les aspects dynamiques que nous avons abordés dans les chapitres précédents sont totalement valides. Mieux, la particule n'interagissant qu'avec le champ gravitationnel elle est un point matériel parfait !

Notre travail fait suite aux travaux de A. Peter et S. Tremaine [69], A. Peter [70, 71, 72], I. B. Kriplovitch et D. L. Shepelyansky [45], J. Lages et D. L. Shepelyansky [47] qui traitent de la capture de matière noire dans le système solaire, mais également aux travaux de de L. Brayeur et P. Tinyakov [9] qui traitent de particules capturées par des étoiles binaires.

Dans la suite, nous chercherons à déterminer comment cette matière noire est susceptible d'être capturée par des systèmes binaires. En effet, au même titre que les comètes vu précédemment, ces particules exotiques sont susceptible d'être capturées, d'évoluer et d'être éjectées du binaire que l'on considère. Leur dynamique sera par conséquent chaotique. Nous chercherons ici à traiter un très grand nombre de particules pouvant avoir des orbites très excentriques et ce sur un temps long. Cela impliquerait des temps d'intégration très longs. On comprend bien immédiatement l'intérêt de l'approche de l'application symplectique que nous avons vu plus haut. Qui plus est, cette approche permet des interprétations simples, voir analytiques des résultats obtenus.

Il est important de faire remarquer que la matière noire n'est pas la seule solution au problème de la "masse manquante". Une théorie concurrente basée sur la modification des lois de Newton, que nous n'aborderons pas dans cette thèse, est également encline à expliquer les courbes de rotations plates. Cette théorie porte le nom de théorie MoND (Modified Newtonian Dynamics). Soulignons également que les courbes de rotations plates des galaxies ne sont pas le seul élément en faveur de l'existence de matière noire. Nous avons vu avec Zwicky que les structures plus grandes peuvent être affectées par sa présence. Les modèles cosmologiques ont aussi besoin de cette brique élémentaire pour fonctionner, par exemple l'explication de la formation des galaxies nécessite sa présence. Cette introduction n'a donc rien d'exhaustive, elle vise simplement à mettre en avant les processus dynamiques que nous allons étudier.

3.2 L'application sombre ("Dark Map")

Avant d'aborder notre modèle, revenons sur les propriétées de celui déjà employé par J. Lages et D. L. Shepelyansky [47] pour traiter de la matière noire capturée gravitationnellement dans le système solaire. Situons d'abord le problème, nous supposons un vaste halo de matière noire englobant la Galaxie. Les particules de matière noire évoluant dans ce halo sont susceptibles de rencontrer les divers composants de la Galaxie, parmi ceux-ci, le Soleil et sa cohorte de planètes.

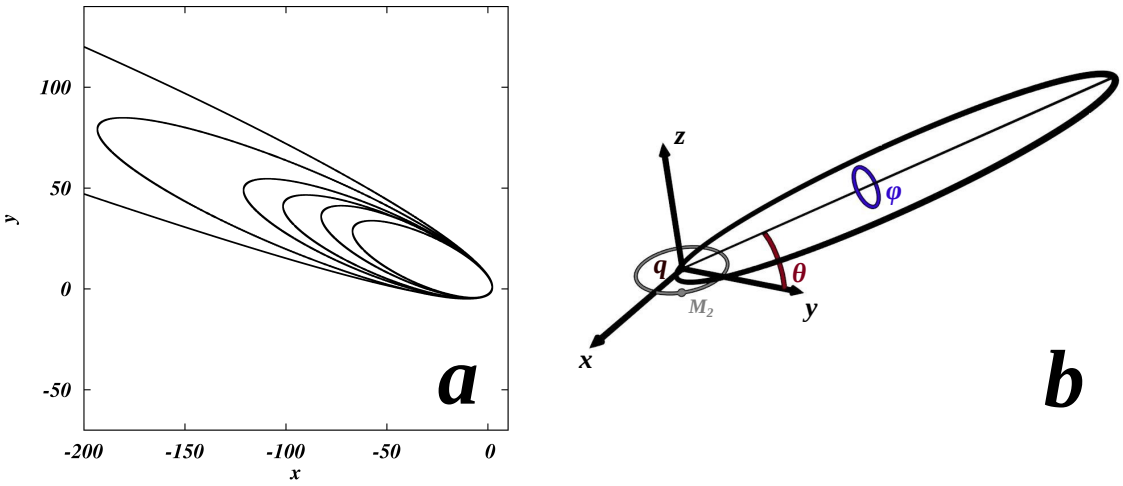

FIGURE 3.2 – *a*) Exemple d'un processus de capture-évolution-éjection d'une particules par un binaire avec $\mu = 0.01$. Le centre de masse du binaire, ici non représenté, est en $x = 0$ $y = 0$. *b*) Angles utilisés pour l'application "dark map" [47].

Les particules venant de l'infini et rencontrant un corps unique comme une étoile sont simplement diffusées par celui-ci. En effet, l'énergie w (voir conventions utilisées chapitre 2, section 2.2.3) est conservée dans le problème à deux corps, la particule avec $w < 0$ subit simplement une diffusion que l'on pourrait qualifier de diffusion RUTHERFORD gravitationnelle. Dès lors, aucune capture n'est possible. En revanche, si une planète ou un corps massif secondaire (de masse faible par rapport au corps massif primaire) se trouve en orbite autour de ce corps primaire, alors la dynamique à trois corps s'applique et l'énergie w n'est plus conservée. La particule, via l'effet du corps secondaire, est susceptible de plonger dans le puits de potentiel du corps primaire et de se retrouver piégée ($w > 0$). Par la suite, la diffusion en énergie va se poursuivre jusqu'à ce que la particule retrouve une énergie w négative et une orbite hyperbolique. Ce processus est fidèle à l'image du processus itéré de l'application de KEPLER dont nous avons déjà parlé (chapitre 2) . C'est cette séquence complète, capture-évolution-éjection qui nous intéresse ici. Elle est illustrée sur la Fig. 3.2*a* où la particule arrive avec une orbite parabolique puis se voit capturée par le binaire, elle décrit ensuite une série d'orbite elliptique avant d'être éjectée.

L'idée d'utiliser une application symplectique pour calculer la masse de matière noire dans le système solaire prend racine dans les travaux réalisés en 2009 par I. K. KRIPLOVITCH et D. L. SHEPELYANSKY [47]. Ces travaux analytiques déterminent une estimation de la section efficace de capture et par conséquent une estimation de la masse capturée. Ces travaux montrent également qu'en unité réduite l'amplitude de la fonction perturbatrice est donnée par $5M_1v_2^2/M_2$ où M_1 est la masse du corps principal du binaire, M_2 est la masse du corps secondaire et v_2 la vitesse de rotation de ce corps. Dans les travaux de J. LAGES et D. L. SHEPELYANSKY [47] l'application de KEPLER est utilisée avec des fonctions perturbatrices adaptées à chaque type d'orbite. Cette application est baptisée l'application sombre ou "dark map". Ici c'est Jupiter qui fait office de corps secondaire, les autres planètes étant négligées. La particule démarre de l'infini avec une énergie $w \lesssim 0$, son orbite hyperbolique est donc quasi-parabolique. Les auteurs ont déterminé leurs fonctions perturbatrices à l'aide d'une intégration numérique $RK4$ des équations du mouvement et ce pour des orbites elliptiques quasi-parabolique avec $w > 0$ proche de 0. Ils ont ainsi constitué une bibliothèque

de fonction perturbatrice suivant une grille composée des éléments θ, ϕ, q. Ces éléments sont représentés pour une ellipse sur la Fig. 3.2b : θ est l'angle d'inclinaison de l'orbite parabolique de départ, ϕ est l'angle de rotation par rapport au demi-grand axe, enfin q est la distance au périhélie. Il est important de noter qu'ici les éléments cités ne sont pas les éléments orbitaux traditionnels.

Par la suite, on choisit une fonction perturbatrice dans cette bibliothèque et on lance la dynamique frappée. En effectuant cela un très grand nombre de fois, nous obtenons le nombre de particules capturées par le système solaire, mais également leur distribution en w. Rappelons que dans l'hypothèse de l'application de Kepler, les éléments q, θ, ϕ ne changent pas, seul w subit une diffusion. Il est ainsi possible de reconstruire une densité de particule dans l'espace. Il suffit de choisir un laps de temps Δt et de positionner les particules sur leurs ellipses dans ce laps de temps via la loi de Kepler. Nous verrons en détail comment procéder lorsque nous évoquerons notre propre modèle. Suite à ce travail, J. Lages et D. L. Shepelyansky [47] ont évalué une section efficace de capture, une masse de matière noire capturée par le système solaire et également un profil de densité radiale et volumique. Ces résultats seront comparés à ceux de notre modèle par la suite.

Il convient ici de faire remarquer que, comme nous l'avons vu au chapitre 2, l'amplitude de la fonction perturbatrice est tributaire du ratio de masse, mais également de la vitesse de rotation du corps secondaire. La limite concernant la masse est assez rigide à notre analyse. En effet, l'application sombre comme l'application de Kepler est basée sur une théorie des perturbations. Elle suppose la masse du second corps faible par rapport à la masse du corps primaire. Nous ne modifierons, par conséquent que très peu ce paramètre ($\mu \simeq 0.001$ pour le couple Soleil-Jupiter). En revanche, la vitesse de rotation est un paramètre modifiable sans problème. Dans le cas du système solaire, la vitesse de Jupiter est relativement lente ($\simeq 12\ km/s$) par rapport à la vitesse moyenne des particule de matière noire du halo ($u = 220\ km/s$). Si nous envisageons un autre système, par exemple du type trou noir-étoile, alors la vitesse de rotation de l'étoile atteint une valeur intéressante pour un rayon d'orbite faible. Elle pourrait s'élever jusque 2 à 3% de c, la vitesse de la lumière dans le vide. Comme nous l'avons vu au chapitre 2 la vitesse du corps secondaire agit sur l'amplitude de la fonction perturbatrice, par conséquent, ce type de système en rotation rapide est un véritable aspirateur à matière noire ! Dans notre modèle nous allons traiter toute la plage des vitesses allant de celle de Jupiter à celle de ces systèmes en rotation ultra rapide, mais en simplifiant la forme de la fonction $F(x)$.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que lorsque nous parlons de variables réduites nous utilisons les conventions précédemment établies $G = 1$, $M_1 + M_2 \simeq M_1 = 1$, ce qui implique $v_2 = 1$, où G est la constante gravitationnelle, M_1 la masse du corps principal du binaire, M_2 la masse secondaire du binaire enfin v_2 est la vitesse de rotation du second corps du binaire. A défaut de cette indication, les variables seront traitées de manière standard.

3.3 Le modèle utilisé

3.3.1 Modèle simplifié

Le modèle que nous allons utiliser va faire l'économie des angles θ et ϕ de l'application sombre. Notre modèle se résume donc à un modèle à une dimension effective où la fonction perturbatrice est réduite à une simple fonction $F(x) = A(q)\sin(2\pi x)$. La Fig. 3.3bcd montre la comparaison entre différent $F(x)$ réels et ceux que nous utiliserons. Ici, il s'agit, encore moins qu'avant, de traiter les orbites des particules de manière exacte. Nous souhaitons simplement déterminer statistiquement un taux de capture. Nous verrons que malgré la différence dans la forme des fonctions $F(x)$ la masse de matière capturée, ainsi que les profils de densité volumique, seront proches de ceux donnés dans [47]. De plus, le choix d'une fonction de cette forme n'est pas aberrant dans la mesure où T. Petrosky et R. Broucke [75] où encore I. Shevchenko[88] ont montré que pour $q \gg r_2$ la fonction perturbatrice adopte un régime sinusoïdale dont l'amplitude décroît exponentiellement

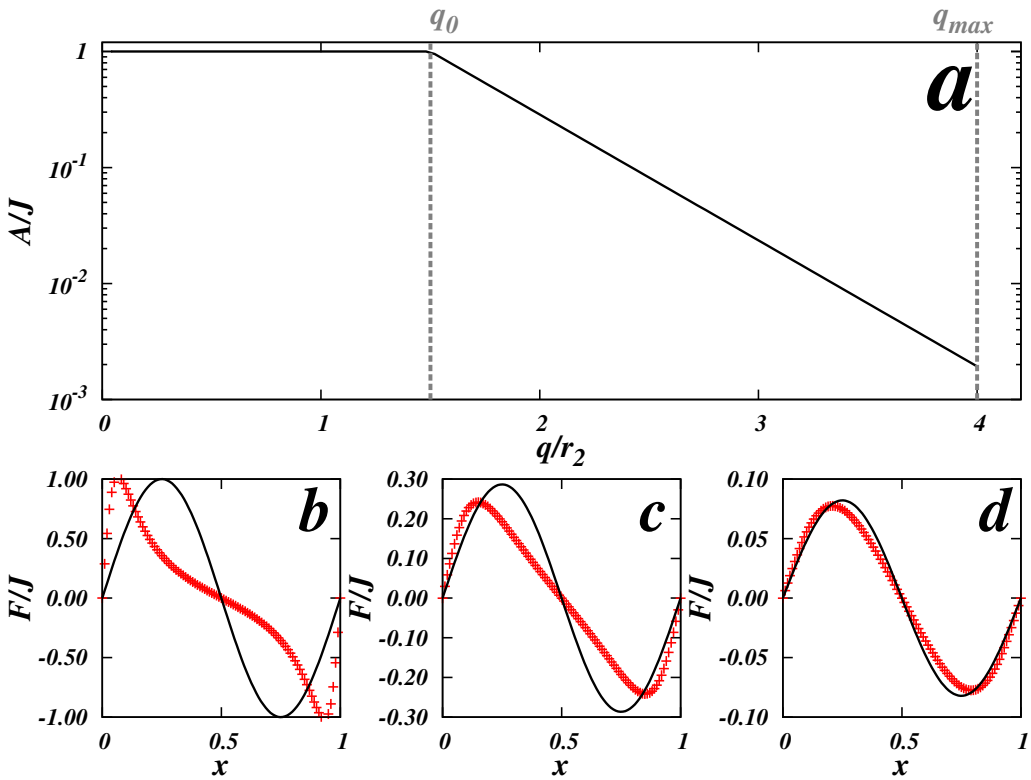

FIGURE 3.3 – *a*) Variation de l'amplitude (3.2) de la fonction perturbatrice sinusoïdale avec q en échelle *semi* − log. b) Comparaison pour $q = 1.5$ entre la fonction perturbatrice $F_{q,\theta,\phi}(x)$ obtenue pour une orbite quasi parabolique de paramètres $\theta = 0$, $\phi = 0$ (croix rouges) et la fonction perturbatrice $F(x)$ sinusoïdale dont l'amplitude est donnée par (3.2) (courbe noire). c) Idem pour $q = 2$. d) Idem pour $q = 2.5$.

avec q. Au final, l'application symplectique utilisée sera de la forme :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n + A(q)\sin(2\pi x_n) \\ x_{n+1} &= x_n + w_{n+1}^{-3/2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

où comme vu au chapitre 2, $w_n = -2\mathcal{E}r_2/(GM_1m_3)$ est l'énergie de la particule au $n^{\text{ième}}$ passage au périastre. La variable x_n est la phase du second corps du binaire exprimée en nombre de tour et enfin nous avons :

$$A(q) = \begin{cases} J & \text{si } q \leq q_0 \\ J\exp\{\alpha(q-q_0)\} & \text{si } q_0 \leq q \leq q_{max} \end{cases} \tag{3.2}$$

Ici le taux de décroissance exponentielle α a été déterminé à partir des résultats d'évolution du maximum de la fonction perturbatrice construite par J. Lages et D. L. Shepelyansky [47]. Ce taux $\alpha \simeq -2.5$ (valeur que nous conserverons dans ce chapitre) est peu sensible aux paramètres θ et ϕ. En particulier pour le cas de la comète de HALLEY (Chapitre 2), on retrouve la même valeur pour ce taux α associé aux amplitudes des fonctions pertubatrices engendrées par les différentes planètes du système solaire. Ainsi le profil (3.2) de l'amplitude $A(q)$ représenté à la Fig.3.3*a* schématise le profil réél donné par exemple au Chapitre 2 Fig.2.11. La valeur q_0 détermine le paramètre de

"rupture" de la ccourbe c'est-à-dire l'endroit où la fonction perturbatrice commence à décroître de façon exponentielle. Il sera fixé à $q_0 = 1.5r_2$, valeur éstimée à partir des données de [47]. Enfin q_{max} est le paramètre au delà duquel la fonction $F(x)$ est si faible qu'aucune capture significative n'est possible, nous choisissons $q_{max} = 4r_2$. La Fig. 3.3a résume tous ces paramètres.

3.3.2 Paramètres du halo de matière noire

Maintenant que l'interaction particule-binaire est établie, penchons nous sur le comportement du halo de matière noire à une distance infinie de ce binaire. Supposons que la vitesse à l'infini dans la région du Soleil suive une distribution vectorielle de Mawxell-Boltzman. Cette supposition peut être étayée par le fait qu'il y a une correspondance entre un gaz parfait et une sphère isotherme auto-gravitante [8].

La probabilité de trouver une particule dont la vitesse est comprise dans un volume donné $d^3\mathbf{v}$ est

$$f(\mathbf{v})d^3\mathbf{v} \propto \exp\left\{-\frac{|\boldsymbol{v}^2|}{2\varepsilon^2}\right\} d^3\boldsymbol{v} \tag{3.3}$$

où ϵ est la dispersion des vitesses. Cette distribution est couramment utilisée pour décrire la distribution des vitesses locales du halo de matière noire de la galaxie [8, 4]. Cependant, il est important de noter que ce type de profil, supposant une distribution isotropique des vitesses pour les halos, est improbable [4]. Ce n'est pas notre propos ici et nous employons cette distribution pour plus de simplicité. La distribution du module du vecteur vitesse est par isotropie

$$f(v)dv \propto v^2 \exp\left\{-\frac{v^2}{2\varepsilon^2}\right\} dv \tag{3.4}$$

Nous voudrions à présent déterminer la constante ε de la dispersion des vitesses. Pour cela calculons la vitesse quadratique moyenne

$$< v^2 >= \frac{\int_0^\infty v^2 f(v)dv}{\int_0^\infty f(v)dv} = 2\varepsilon^2 \frac{\int_0^\infty x^4 \exp\left\{-x^2\right\} dx}{\int_0^\infty x^2 \exp\left\{-x^2\right\} dx} = 2\varepsilon^2 \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{4}}{\frac{3\sqrt{\pi}}{8}} = 3\varepsilon^2 \tag{3.5}$$

Nous voyons grâce à cette dernière équation que nous avons $v_{rms} = \sqrt{3}\varepsilon$ où v_{rms} est la racine de la moyenne quadratique. C'est un élément caractéristique de la distribution. Finalement la distribution en vitesse est

$$f(v)dv = \sqrt{\frac{54}{\pi}}\frac{v^2}{u^3} \exp\left\{-\frac{3}{2}\frac{v^2}{u^2}\right\} \tag{3.6}$$

où on choisit $u \simeq 220\ km/s = v_{rms}$ la vitesse donnée par la courbe de rotation à $r = r_\odot$ dans la Galaxie. En vérité, si l'on suit une distribution de masse auto-gravitante isotherme pour le halo, on a plutôt $u = \sqrt{3/2}v_\odot \simeq 270\ km/s$ [8] . Cependant, nous nous sommes placés dans la suite des travaux de I. B. Khriplovich et D. L. Shepelyansky [45] qui utilisent la première valeur. Cependant, cela ne modifie pas significativement nos résultats finaux.

3.3.3 Section efficace de capture

Supposons un flux de particules venant de l'infini. Ce flux suit une loi de distribution maxwellienne de vitesse comme nous l'avons vu précédemment. A l'infini, la particule peut être considérée comme libre par rapport au binaire, son énergie est uniquement cinétique, nous avons $\mathcal{E} = 1/2m_3v_\infty^2$ et par conséquent, $w_\infty = v_\infty^2/v_2^2$ en effet $GM_1 = v_2^2 r_2$. Nous avons alors affaire à un principe de diffusion gravitationnelle sur un foyer de masse M, ici une diffusion à deux corps où le deuxième corps effectif à la masse $M = M_1 + M_2$. L'ensemble de l'interaction se produit dans un plan, c'est

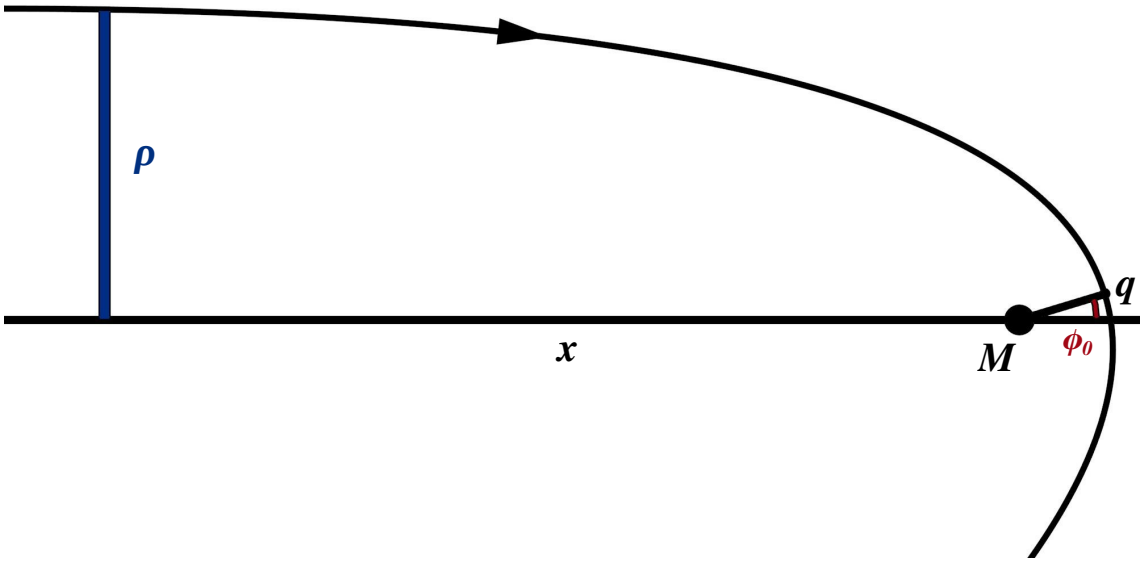

FIGURE 3.4 – Schéma d'un processus de diffusion à deux corps entre la particule et la masse $M = M_1 + M_2$ avec ρ le paramètre d'impact et ϕ_0 l'angle polaire au moment du passage au périhélie q où nous considérons qu'intervient ponctuellement la fonction perturbatrice.

ce qui est illustré sur la Fig. 3.4. Au moment du périhélie, la fonction perturbatrice rendra compte de l'interaction à 3 corps. Nous avons pour le moment cinétique

$$L = m_3 v_\infty \rho \tag{3.7}$$

où m_3 est la masse de la particule et ρ est est appelé le paramètre d'impact. La section efficace de diffusion pour une particule est par définition [48] :

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = \pi d\rho^2 \tag{3.8}$$

Exprimons (3.8) en fonction de q. Nous avons d'après (3.7) $\rho = L/m_3 v_\infty$. Si nous considérons le cas général de l'hyperbole pour l'état d'arrivée diffusif non lié nous avons les relations suivantes

$$q = \frac{p}{(e+1)} = a(e-1) \tag{3.9}$$

où a est le "demi-grand axe" de l'hyperbole, e son excentricité et où $p = L^2/(G(M_1+M_2)m_3) \simeq L^2/(GM_1m_3)$ avec G la constante gravitationnelle, M_1 et M_2 sont respectivement la masse du corps principal et secondaire du binaire. Il vient naturellement de ces relations que

$$\begin{aligned} a &= \frac{GM_1m_3}{2\mathcal{E}} = \frac{GM_1}{v_\infty^2} \\ e &= \frac{qv_\infty^2}{GM_1} + 1 \\ p &= q\left(\frac{qv_\infty^2}{GM_1} + 2\right) \\ \rho^2 = \frac{L^2}{m_3^2 v_\infty^2} &= \frac{GM_1 q}{v_\infty^2}\left(\frac{qv_\infty^2}{GM_1} + 2\right) = q^2 + 2q\frac{GM_1}{v_\infty^2} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Il suit que la section efficace de diffusion est la suivante

$$\sigma = \pi \int_{q=0}^{q=4r_2} d\left(q^2 + \frac{2qGM_1}{v_\infty^2}\right) = 16\pi r_2^2 + \frac{8\pi GM_1}{v_\infty^2} r_2 \tag{3.11}$$

où nous nous intéressons à la diffusion pour $q \in [0; 4r_2]$. Afin d'avoir une idée des énergies et vitesses mises en jeu, effectuons une brève estimation. Considérons que la masse principale du binaire M_1 est celle du Soleil $M_\odot \sim 1.9 \times 10^{30}$ kg et que le corps secondaire est Jupiter $r_2 \sim 7.8 \times 10^8$ km. L'énergie w caractéristique des particules capturables correspond au maximum de l'amplitude de la fonction perturbatrice. Cette amplitude est proportionnelle à la vitesse du second corps au carré. Dans le cas de Jupiter, nous avons $F_{max} \simeq 6 \times 10^{-3} v_2^2$. Ainsi, les particules effectivement capturables ont une vitesse à l'infini v_∞ de l'ordre de $v_{cap} \sim \sqrt{F_{max}} \sim 1\ km.s^{-1}$. Ce résultat est en accord avec [72]. Par conséquent, le second terme de (3.11) est largement prépondérant devant le premier, si bien que l'on peut négliger ce dernier. Le constat serait le même avec une masse M_1 de type trou-noir et une étoile hyperveloce gravitant autour. En effet, cela se voit bien en passant aux variables réduites. Nous obtenons alors une amplitude pour la fonction perturbatrice ne changeant pas. En revanche, le paramètre u de la distribution maxwellienne va devenir faible. Cela implique de facto que l'ensemble des vitesses de la distribution est accessible au maximum de l'amplitude et donc à la capture.

Nous concluons de ce qui précède que les particules capturables dans notre système ont un comportement quasi-parabolique $w \lesssim 0$. Si nous avions traité directement le cas avec des orbites quasi-paraboliques, en utilisant la relation $q = p/2$, le résultat précédent aurait bien été de $8\pi GM_1 r_2/v_\infty^2$. Finalement, dans les unités réduites nous avons donc

$$\sigma = \frac{8\pi}{|w_\infty|} \tag{3.12}$$

où $w_\infty = -v_\infty^2$. Définissons à présent la section efficace de capture

$$\sigma_{cap} = \frac{2\pi}{|w_\infty|} \int_{q_1}^{q_2} dq P(w_\infty, q) \tag{3.13}$$

où σ_{cap} est la section efficace de capture d'une particule dont l'orbite initiale quasi-parabolique a un périastre q compris entre q_1 et q_2, $P(w_\infty, q)$ est la probabilité de capturer une particule dont l'énergie est w_∞ et passant au périastre q. Il nous faut définir cette probabilité. La probabilité de capture $P(w_\infty, q)$ est la mesure de l'ensemble $\{x | w_\infty + F(x) > 0\}$. On comprend donc que les particules dont l'énergie w_∞ est telle que $w_\infty + \max_{x\in[0,1]}(F(x)) = w_\infty + A(q) < 0$ ne peuvent être capturées, $P(w_\infty, q) = 0$. Le calcul analytique de $P(w_\infty, q)$ nous donne pour $w_\infty \leq 0$

$$P(w_\infty, q) = \begin{cases} 0 & \text{si } w_\infty \leq -A(q) \\ \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{w_\infty}{A(q)}\right)\right| & \text{si } w_\infty \geq -A(q) \end{cases} \tag{3.14}$$

Nous pouvons à présent calculer la section efficace de capture en intégrant (3.14).

$$\sigma_{cap} = \frac{1}{|w_\infty|}\left(3\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{w_\infty}{J}\right)\right) + \pi\left(q_{max} - \frac{3}{2}\right) + \frac{2}{\alpha}\int_{w_\infty/J}^{1} d\gamma \frac{\arcsin(\gamma)}{\gamma}\right) \tag{3.15}$$

où $\gamma = w_\infty K \exp\{\alpha q\}/J$ avec $K = \exp\{-3\alpha/2\}$. L'intégrale ne peut se réduire en termes simples [37] elle sera déterminée numériquement. La Fig. 3.5a expose la section efficace de capture précédemment calculée en rouge et et la section efficace de capture issue de la "dark map" en noir [47]. Nous observons que les deux courbes exhibent une décroissance caractéristique $\propto w^{-1}$ pour $w < w_{cap}$. Ici nous avons pris $w_{cap} = 0.001$ qui est du même ordre que $J = 0.005$ amplitude

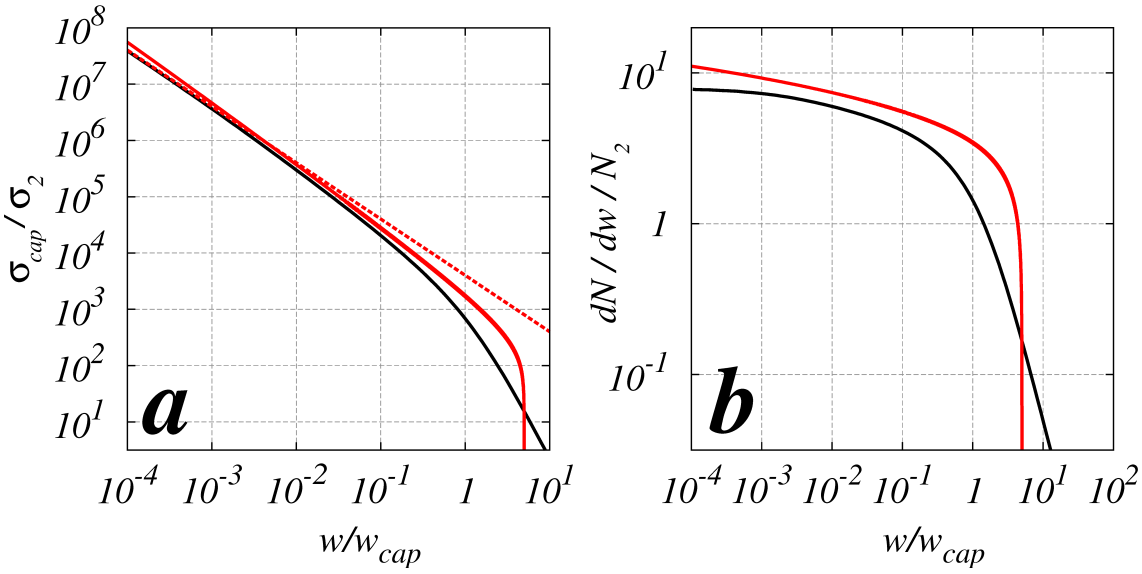

FIGURE 3.5 – *a*) Section efficace de capture en fonction de l'énergie $w = |w_\infty|$ de la particule. Ici $w_{cap} = 0.001$ et les paramètres sont : $J = 0.005$, $q_{max} = 4$ et $\alpha = -2.5$. *b*) Distribution différentielle en énergie dN/dw du nombre de particules capturables normalisée par N_2 le nombre de particules venant de l'infini qui traversent le système. Les paramètres ont les même que pour le panneau *a*).

typique de la fonction perturbant l'énergie de la comète de HALLEY. Pour notre modèle, la section efficace tombe brutalement à 0 pour $w/w_{cap} = 0.005$ ce qui correspond au maximum de la fonction perturbatrice J utilisée ici. Ce n'est pas le cas pour la "dark map". En effet, des fonctions perturbatrices de plus grandes amplitudes peuvent être présentes. Ce sont les fonctions perturbatrices associées aux orbites approchant les masses du système binaire, dans certains cas ces fonctions peuvent même diverger pour une phase donnée du binaire (rencontre proche, voir par exemple les deux pics Fig.2.11*a* chapitre 2). Nous pouvons cependant remarquer sur les courbes noires de la Fig. 3.5*a* que la section efficace de capture tombe plus rapidement après cette limite. Dans [47] il est indiqué que, après w_{cap}, la section efficace de capture σ_{cap} est proportionelle à $1/w^2$. Ce fait indique que la probabilité de capture des énergies hautes nécessitant une rencontre proche est très faible. Ce dernier constat nous conforte dans l'idée de négliger ce type de capture. La distribution différentielle en énergie des particules capturables entre w et $w + dw$, normalisée par le nombre de particules N_2 passant dans un rayon $r_2 = 1$, est visible sur la Fig. 3.5*b*. Ici aussi nous constatons un comportement similaire entre les deux approches.

3.3.4 Densité et masse capturée

Dans cette section nous allons aborder les calculs qui nous permettront, à terme, de déterminer une masse et une densité de matière noire capturée. Le nombre de particule dN passant dans le système binaire durant un temps dt est

$$dN = n_g \sigma(v) v f(v) dv dt \tag{3.16}$$

où n_g est la densité volumique réelle de particules, $\sigma(v)$ est la section efficace de diffusion, v la vitesse des particules, $f(v)$ est la distribution de particule à l'infini. En utilisant (3.4), en posant

$w = |w_\infty|$, et en considérant $v = \sqrt{w}v_2$ on a

$$dN = n_s 8\pi r_2^2 v_2^4 \sqrt{\frac{27}{2\pi}} \frac{1}{u^3} \exp\left\{\frac{-3wv_2^2}{2u^2}\right\} dwdt \tag{3.17}$$

En intégrant (3.17) sur une durée T_{tot} et entre deux énergies $[w_1, w_2]$ nous obtenons

$$N_{w_1-w_2} = \frac{8\sqrt{6\pi}T_{tot}n_g r_2^2 v_2^2}{u}\left(\exp\left\{\frac{-3w_1v_2^2}{2u^2}\right\} - \exp\left\{\frac{-3w_2v_2^2}{2u^2}\right\}\right) \tag{3.18}$$

Ce qui implique que le nombre total N_{tot} et la masse totale M_{tot} de particules ayant traversé le système pendant le temps T_{tot} sont les suivants

$$\begin{aligned} N_{tot} = N_{0-\infty} &= \frac{8\sqrt{6\pi}T_{tot}n_g r_2^2 v_2^2}{u} \\ M_{tot} &= \frac{8\sqrt{6\pi}T_{tot}\rho_g r_2^2 v_2^2}{u} \end{aligned} \tag{3.19}$$

où ρ_g est la densité volumique de masse locale de matière noire. Déterminons à présent le ratio $\kappa = N_{tot}/N_{0-J}$ entre le nombre de particules traversant le système et le nombre de particules potentiellement capturables. Cette estimation nous sera utile pour l'analyse de nos résultats.

$$N_{0-J} = \frac{8\sqrt{6\pi}T_{tot}n_g r_2^2 v_2^2}{u}\left(1 - \exp\left\{\frac{-3Jv_2^2}{2u^2}\right\}\right) \tag{3.20}$$

Ici N_{0-J} est le nombre de particules que nous injecterons dans nos simulations. En effet, il est inutile d'injecter des particules qui n'ont aucune chance d'accéder à la capture. Finalement nous avons

$$\kappa = \frac{1}{1 - \exp\left\{\frac{-3Jv_2^2}{2u^2}\right\}} \tag{3.21}$$

Nous voyons ici une implication immédiate, si $Jv_2^2 \ll u$ comme c'est le cas pour le système Soleil-Jupiter alors $\kappa \simeq 2u^2/(3Jv_2^2)$ et le nombre de particules du flux traversant le système est très grand par rapport au nombre de particules capturables. En revanche si $Jv_2^2 \sim u$ alors $\kappa \simeq 1$ ici toutes les particules sont des particules capturables. Ce constat vient du fait que plus la rotation du binaire est rapide, plus le flux de particules entrant est susceptible d'être aspiré dans le système. Nous comprenons que les paramètres responsables de ce comportement sont v_2 et u. Dans nos simulations nous employons les variables réduites si bien que la variation de u sera reliée à la variation de vitesse du binaire.

Notons N_{is} le nombre de particules injectées dans la simulation avec une énergie entre $[-J, 0]$. Le nombre total de particules injectées pour reproduire le bon ratio non-capturable/capturable est donc $N_{ts} = \kappa N_{is}$. Le ratio entre le nombre de particules capturées dans la simulation notée N_{AC} et le nombre total de particules injectées est $\eta_{AC} = N_{AC}/N_{ts}$. Nous allons déterminer la densité moyenne pour un rayon r_i donné (avec $i = 0.2r_2, r_2, 6r_2$). Nous avons enfin le ratio $\eta_{r1} = N_{r1}/N_{AC}$ où N_{r1} est le nombre de particules compris dans la sphère $r < r_i$ et N_{AC} le nombre total de particules capturées, ces deux nombres se référant à la simulation. Pour finir nous avons une masse dans la sphère de rayon $r < r_i$ pour le système réel de

$$M_{r_i} = \eta_{r_i}\eta_{AC}M_{tot} \tag{3.22}$$

3.4 Méthode numérique employée

La méthode d'itération est la même que celle utilisée dans le chapitre précédent à la différence que la fonction perturbatrice utilisée est un sinus et que nous ajoutons un flux de particules constant

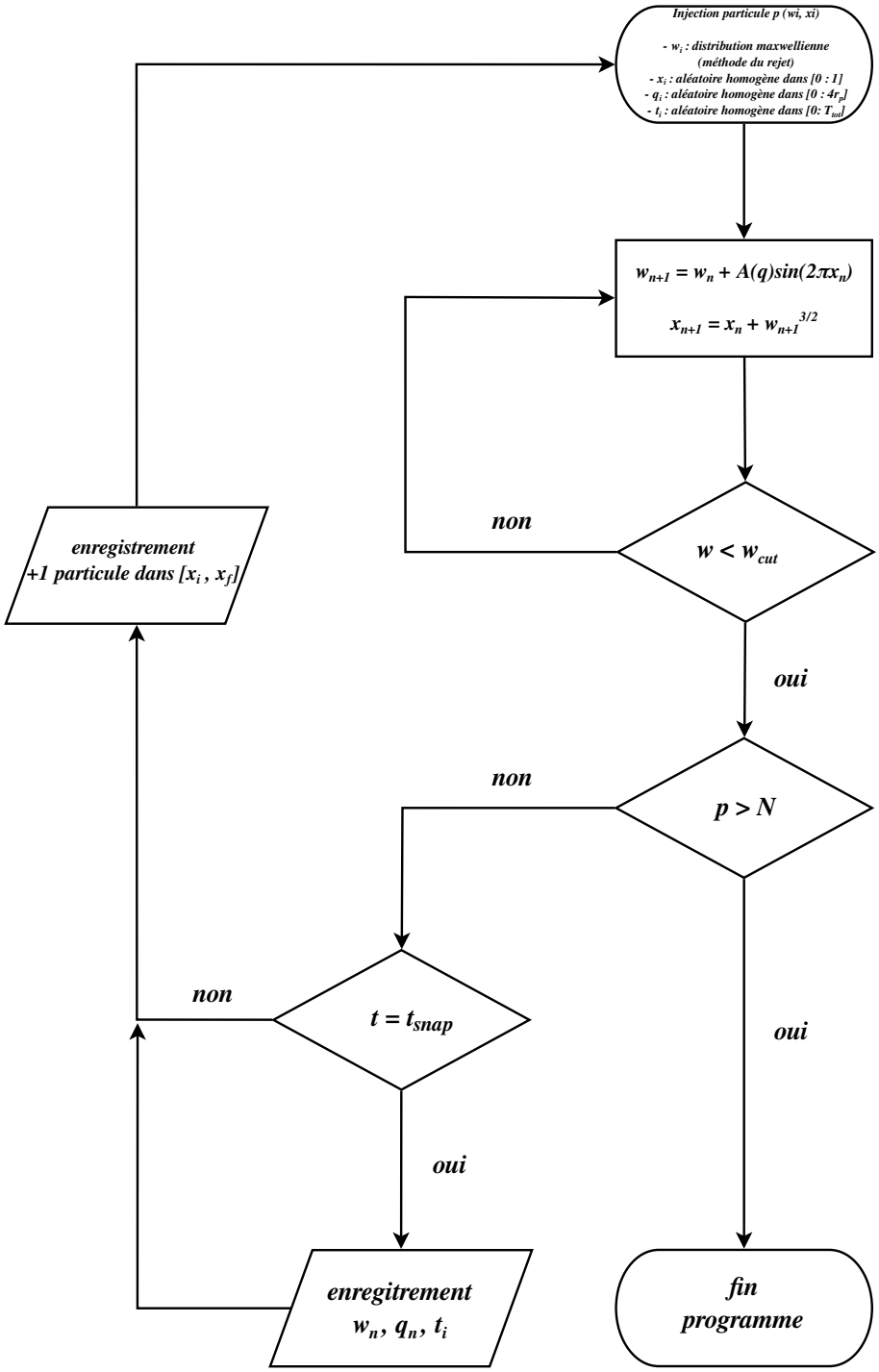

FIGURE 3.6 – Pseudo-code de l'algorithme utilisé pour suivre la capture, l'évolution et l'éjection équivalente à $\sim 10^{16}$ particules dans le système binaire. Ici, w_{cut} est l'énergie en deça de laquelle la particule est considérée éjectée, w_i, x_i, q_i et t_i sont les paramètres initiaux, à $t = t_{snap} > t_s$ on enregistre les paramètres des particules présentes.

dans le temps entrant dans le système. Dans l'algorithme Fig.3.6 nous injectons une particule a un temps de départ aléatoire $t \in [0; T_{tot}]$ où T_{tot} est le temps de simulation total. Nous prendrons $T_{tot} = 4.5 \times 10^9$ ans, l'âge approximatif du système solaire, ce qui correspond à 3.8×10^8 révolutions actuelles de Jupiter. Nous garderons ce nombre total de révolutions pour tous les systèmes binaires que nous considérerons. La date t_i de départ de la particule est choisie aléatoirement entre $[0 : T_{tot}]$ elle définira aussi la phase de départ x_i.

La particule est lancée dans une gamme d'énergie $-J < w < 0$ en suivant la distribution maxwellienne caractérisée par u, la particule se trouve être capturée ou non par la première rencontre avec le système binaire. Par la suite, son évolution frappée est itérée et la particule ressort du système avec un temps ou phase finale x_f que nous mémorisons. Ce temps permet de réaliser un histogramme du nombre de particule présent en fonction du temps t. Le nombre de particules entrant et sortant du système finit par s'équilibrer au cours du temps, l'instant où cela se produit sera noté t_s. L'énergie w ainsi que la valeur du périastre q au moment t_s sont également conservés pour permettre de réaliser un histogramme de la distribution des énergies et des périastres.

Les particules n'interagissant pas entre elles la simulation est découplée entre chacune et nous les simulons séparément. Après la sortie d'une particule nous itérons le processus avec une nouvelle particule. Un critère de sortie est ajouté. Nous considérons la particule éjectée pour un w_{cut} particulier dont nous verrons plusieurs exemples par la suite.

3.5 Résultats et analyses

3.5.1 Section de Poincaré pour le modèle simplifié

Sur la Fig. 3.7*a* la section de Poincaré est celle d'une orbite dont les caractéristiques sont celles de la comète de Halley. Elle nous montre une plus grande richesse d'îlots intégrables comparée à la section de Poincaré de notre modèle avec la valeur $J = 0.007$. Nous remarquons également que le dernier invariant de KAM est différent entre les deux applications. Cela est bien cohérent avec l'idée que nous avons mis en exergue dans le chapitre 2 concernant les différences dues à la forme de la fonction perturbatrice. Hormis ces deux différences, nous constatons que les deux applications fournissent une structure similaire de l'espace des phases, c'est-à-dire une succession d'îlots intégrables de plus en plus volumineux avec l'augmentation de w. Ces îlots sont susceptibles de stopper la dynamique ou de la ralentir. Nous allons à présent aborder les propriétés des particules capturées.

3.5.2 Propriétées des particules capturées

Dans cette sous section nous analysons les résultats de simulation associés à la capture. Sur la Fig. 3.8*a* nous voyons l'évolution du nombre de particules capturées en fonction du temps. Ici 4×10^{11} particules sont injectées. Le paramètre de distribution est $u = 17$, ce paramètre correspond, en unité réduite, à la vitesse v_{rms} du halo de matière noir. Nous constatons que malgré l'apparente simplicité de notre modèle, les résultats sont similaires à ceux obtenus avec la "dark map" [47]. Les différentes courbes présentées le sont pour $w_{cut} = 0$ pour la courbe noire, $w_{cut} = 4 \times 10^{-5}$ pour la courbe rouge et $w_{cut} = 1/20$ pour la courbe bleue. Ils correspondent respectivement à une orbite parabolique pour la première, un demi-grand axe correspondant à la moitié de la distance Soleil-Alpha Centauri pour la seconde et d'une distance $a = 100\ UA$ pour la troisième. Sur la courbe noire il n'y a pas de phénomène de saturation du nombre de particule, cela s'explique par le fait que des orbites avec un demi-grand axe infiniment grand peuvent être présentes. Pour les courbes rouges et bleues, il y a d'abord une augmentation de $N_{cap}(t)$ puis une saturation correspondant à une compensation entre les particules entrantes et sortantes du système. A partir de ce moment nous sommes dans le régime stationnaire du système, nous indicerons les variables correspondantes à ce régime avec les initiales AC. Le temps de saturation arrive approximativement à $t_s = 10^7$

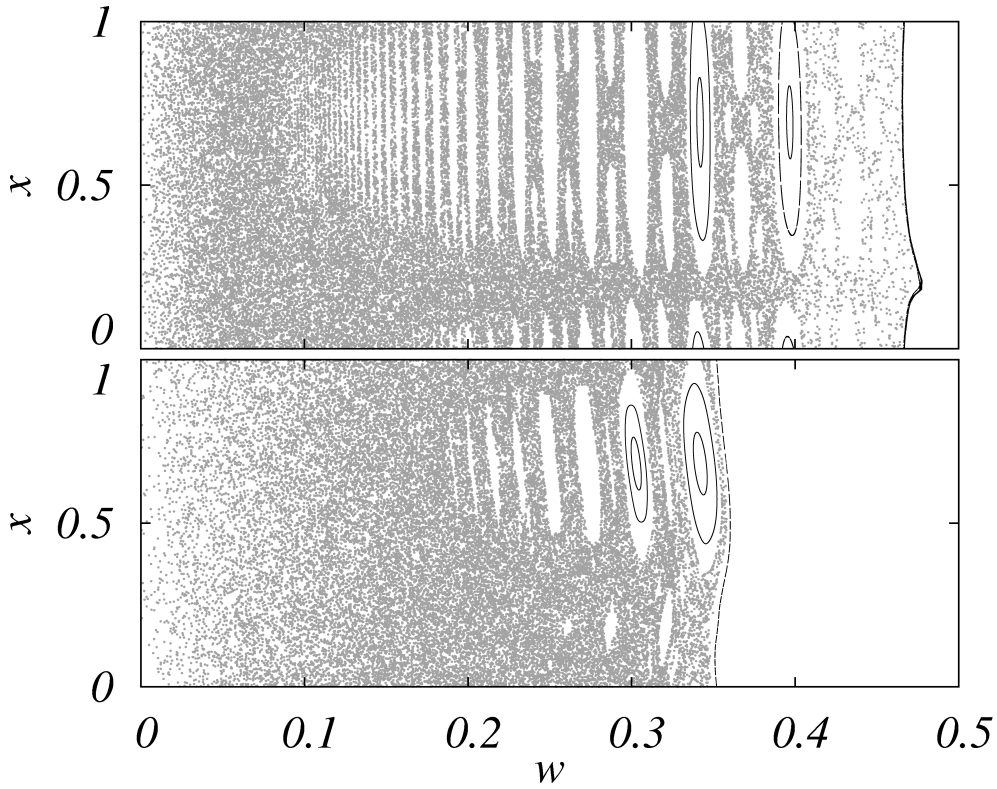

FIGURE 3.7 – Section de POINCARÉ caractéristique. *a*) Section de POINCARÉ associée à la fonction perturbatrice réelle de la comète de HALLEY. *b*) Section de POINCARÉ associée à la fonction perturbatrice de notre modèle $J\sin(2\pi x)$ avec $J = 0.007$.

années. Ce temps de saturation est exactement le temps de diffusion moyen $t_d = 10^7$ calculé dans [20] avec la KEPLER map pour une fonction perturbatrice en dent de scies. Ce temps de diffusion étant le temps de vie moyen de la comète de HALLEY dans le système solaire. C'est également ce temps ce temps que nous avons calculé au chapitre 2. Le temps de diffusion dans la section de POINCARÉ est donc le paramètre caractéristique qui régit la saturation de capture d'un système binaire traversé par un flux de particule.

La Fig. 3.8*b* montre la distribution en énergie $\rho(w)$ des particules après saturation pour un temps $t > t_s$. La partie supérieure de la figure montre la distribution normalisée à $\int_0^\infty \rho dw = 1$ où nous pouvons constater qu'elle suit une loi proportionnelle à $w^{-3/2}$. Le temps de séjour d'une particule sur une orbite unique de paramètre w est, d'après les lois de KEPLER, égal à $w^{-3/2}$, nous pouvons en conclure que l'hypothèse ergodique est vérifiée. En effet, la densité des millions de particules présentes est proportionnelle à leurs temps de séjour sur une orbite. La partie inférieure de la Fig. 3.8*b* montre la section de POINCARÉ associée à la fonction perturbatrice d'amplitude J. Nous constatons que les îlots de stabilité viennent perturber la distribution en énergie. Celle-ci subit des oscillations à l'endroit même où sont présents ces îlots alors qu'elle est très régulière en deçà de $w = 0.15$ où la dynamique est totalement chaotique. Nous pouvons également remarquer que la distribution stoppe pour une valeur de $w_{ch} = 0.3$. Cette valeur peut s'interpréter grâce au

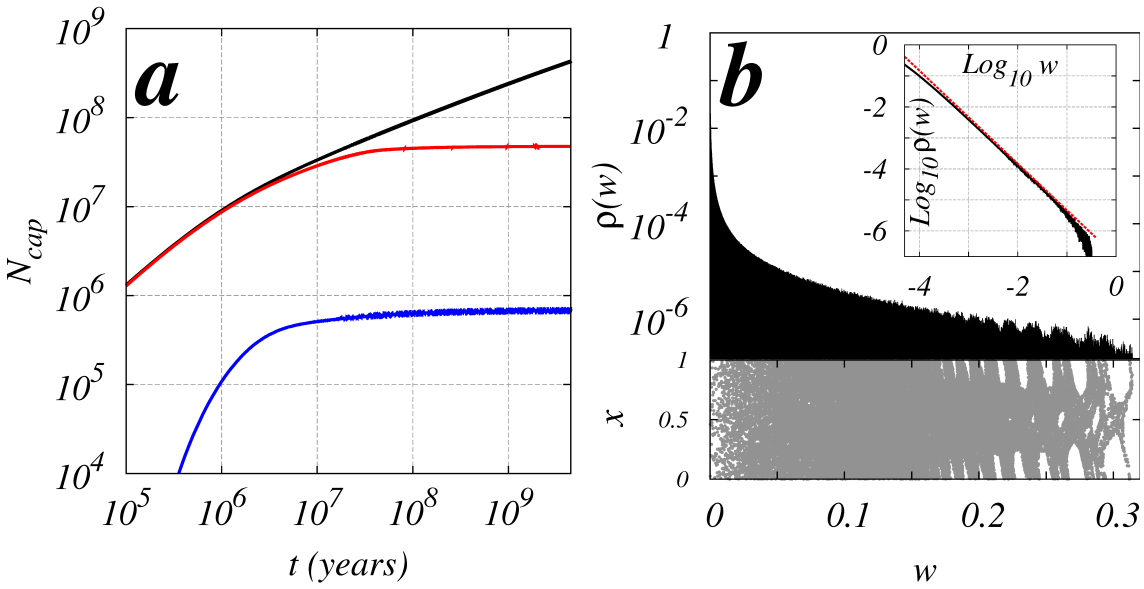

FIGURE 3.8 – *a*) Nombre de particules capturées N_{cap} en fonction du temps. En noir, les particules sont considérées éjectées quand $w < 0$, en rouge quand $w < 4 \times 10^{-5}$ c'est-à-dire quand le demi grand axe de l'orbite osculatrice des particules devient comparable à la distance Soleil-Alpha Centauri, en bleu quand $w < 1/20$ c'est-à-dire quand le demi-axe de l'orbite osculatrice des particules devient supérieur à 100 AU. Durant cette simulation $N = 4 \times 10^{11}$ particules sont injectées avec un paramètre pour la distribution des vitesses de $u = 17$ (système solaire). *b*) Distribution des énergies après la saturation des courbes présentées au panneau *a*). La partie supérieure du panneau montre la même figure mais en échelle log – log, en pointillé rouge la droite $\propto w^{-3/2}$.

critère de recouvrement des résonances de CHIRIKOV [15, 14]. En effet, en utilisant l'application :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n + J\sin(X_n) \\ X_{n+1} &= X_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{aligned} \tag{3.23}$$

où X_n est ici la phase représentée par un angle et non par le nombre de tours x_n. En linéarisant autour d'une résonance nous avons $w_{n+1} = w_r + \Delta w_{n+1}$ avec w_r l'énergie correspondant à une résonance alors :

$$X_{n+1} = X_n \overbrace{-3\pi w_r^{-5/2}\Delta w_{n+1}}^{I_{n+1}} \tag{3.24}$$

Par conséquent : $\Delta I = I_{n+1} - I_n = -3\pi w_r^{-5/2} \underbrace{(\Delta w_{n+1} - \Delta w_n)}_{J\sin(X_n)}$, nous avons donc la nouvelle application linéarisée suivante :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + K\sin(X_n) \\ X_{n+1} &= X_n + I_{n+1} \end{aligned} \tag{3.25}$$

qui n'est autre que l'application standard de CHIRIKOV [15, 14] avec $K = 3\pi J/w_r^{5/2}$ (le signe $-$ provoquant simplement un déphasage du sinus). Selon le critère de recouvrement des résonances de CHIRIKOV[15, 14] le chaos généralisé se produit pour $K \sim 1$. La dernière résonance affectée par ce processus est donc $w_{ch} = (3\pi J)^{2/5} \simeq 0.29$. Cela explique donc bien qu'il n'y ait aucune particule

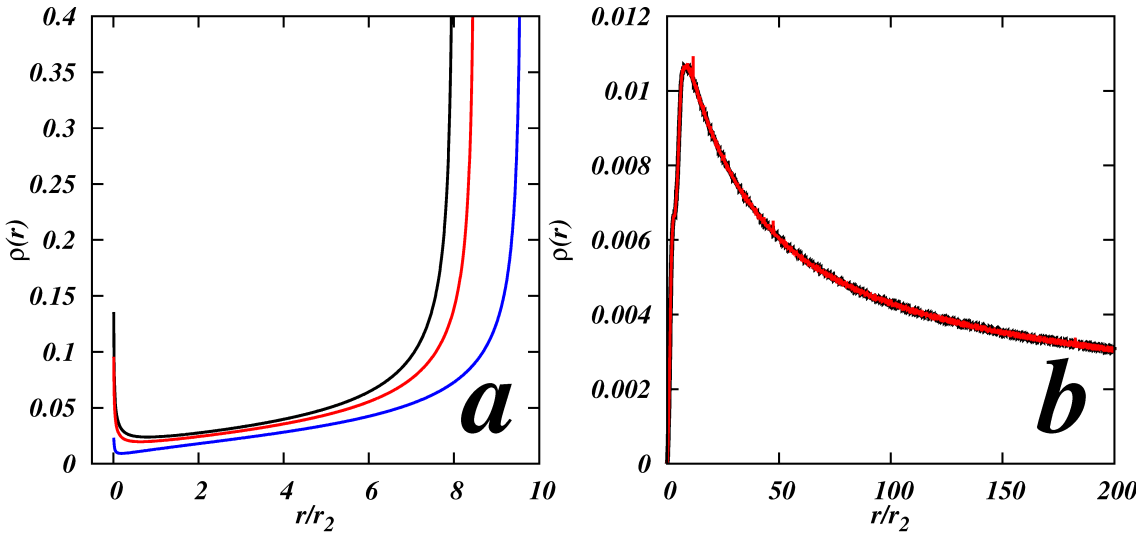

FIGURE 3.9 – *a*) Densité radiale $\rho(r)$ associée à une distribution homogène en anomalie moyenne sur une demi-ellipse de demi-axe $a = 5$ et d'excentricité $e = 0.8$ (courbe noire), $e = 0.85$ (courbe rouge), $e = 0.96$ (courbe bleue). *b*) Densité radiale $\rho(r)$ obtenue avec la méthode 2 (courbe rouge), à savoir en sommant les densités radiales du type de celles présentées au panneau *a*) et correspondant aux N_{AC} particules présentes dans le système après la date t_s. Sur ce panneau nous avons aussi la densité radiale $\rho(r)$ obtenue avec la méthode 1 (en noir). Pour les deux panneaux $\rho(r)$ est normalisé tel que $\int_0^{200} \rho(r)dr = 1$.

au dessus de cette limite où le chaos généralisé ne règne pas. A présent, nous allons inspecter la densité radiale et volumique des particules capturées.

3.5.3 Densité des particules capturées

Une fois la simulation terminée, comme nous venons de le voir, nous disposons des énergies présentes pour $t > t_s$ dont nous allons reconstruire les orbites elliptiques réelles associées. Pour cela, deux méthodes sont possibles :

- Méthode 1 : La première est la méthode employée par J. LAGES et D. L. SHEPELYANSKY [47]. Elle consiste à considérer les N_{AC} particules présentes dans le système durant un laps de temps $\Delta t \ll t_s$ autour de la date t_s. A chacune de ces particules est associée une énergie w qui correspond, q étant fixé, à une orbite elliptique. On distribue ensuite 1000 particules sur chacune de ces orbites elliptiques de façon homogène en anomalie moyenne (homogénéité dans le temps). Cette étape s'effectue en utilisant l'équation de KEPLER.

- Méthode 2 (méthode ergodique) : La seconde méthode consiste à supposer que toutes le orbites associées aux N_{AC} particules sont peuplées homogènement dans le laps de temps Δt et à calculer analytiquement la densité de particules présentes. Nous cherchons à obtenir la distribution radiale $\rho(r)$. Soit $\tilde{\rho}(E)$ la distribution angulaire où E est l'anomalie excentrique de l'orbite. Nous avons alors pour dP la probabilité de trouver une particule dans l'intervalle $[E; E + dE]$:
$$dP = \tilde{\rho}(E)dE = C_1 dt = C_2 dx \tag{3.26}$$
où C_1 est une constante et $C_2 = 2\pi C_1$, en vertu de $dx = dt/2\pi$. Comme $dx/dE =$

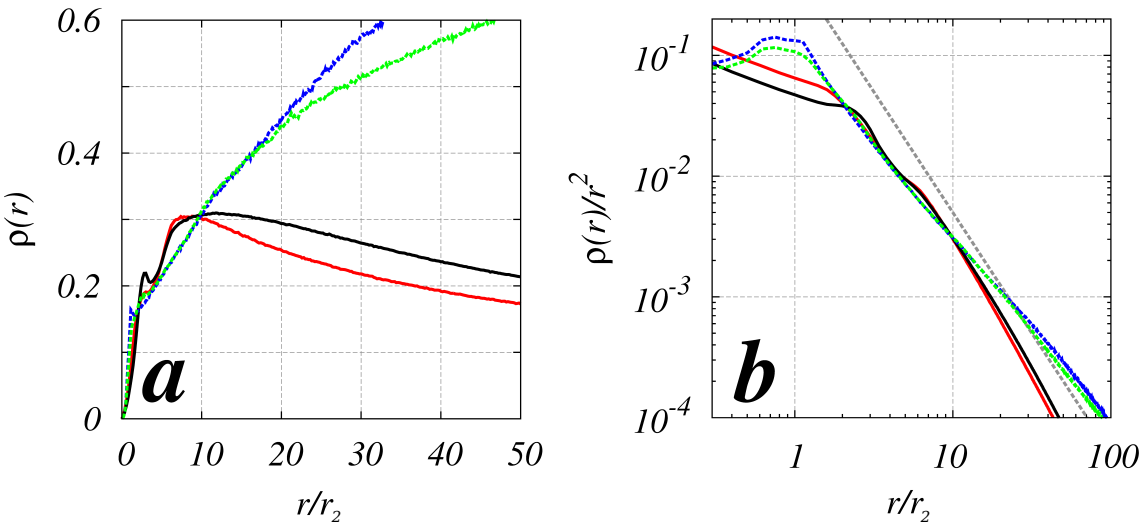

FIGURE 3.10 – *a*) Densité radiale $\rho(r)$ obtenue pour $u = 17$ (courbe noire) et $u = 0.035$ (courbe rouge). La densité radiale calculée à l'aide de la "dark map" est présentée pour $u = 17$ (courbe en pointillés bleue) et pour $u = 0.035$ (courbe en pointillés verte). *b*) Densité volumique en fonction du rayon obtenue ici en traçant $\rho(r)/r^2$. La droite pointillée grise est $\propto r^{-2}$.

$(1 - e\cos(E))a^{3/2}/2\pi$ où e est l'excentricité de l'orbite et a son demi-grand axe. Grâce à l'équation de KEPLER : $t(E) = (E - e\sin(E))a^{3/2}$ nous avons après normalisation de la distribution entre $E \in [0 : 2\pi]$:

$$\tilde{\rho}(E) = \frac{1}{2\pi}\,(1 - e\cos(E)) \tag{3.27}$$

En utilisant la relation $r = a\,(1 - e\cos(E))$ et $E = \arccos((a - r)/ae)$ nous obtenons la distribution radiale suivante :

$$\rho(r) = \frac{r}{2\pi a^2 e\sqrt{1 - (\frac{a-r}{ae})^2}} \tag{3.28}$$

cette distribution radiale est définie pour une demi-ellipse et possède deux divergences en $a(1 - e)$ et $(1 + e)$ respectivement le périastre et l'apoastre. Trois exemples de cette distribution sont visibles sur la Fig. 3.9*a*. Sur la Fig. 3.9*b* nous voyons le résultat $\sum_{i=1}^{N_{AC}} \rho^i(r)$ avec les paramètres collectés à un temps $t_{snap} > t_s$. Nous obtenons bien la même densité radiale qu'avec la méthode précédente (en noire) ce qui prouve l'ergodicité impliquant $\rho(r)dr = w^{3/2}dt/2\pi$ pour $t > t_s$.

Nous pouvons voir sur la Fig. 3.10*a* (courbe rouge et noire), que la variation de u change peu les résultats. En effet, pour $u = 17$ (vitesse de rotation de Jupiter) et pour $u = 0.035$ (binaire en rotation rapide) les profils de densité radiale normalisée $\rho(r)$ sont quasiment identiques. Nous observons en revanche une grande différence avec les profils de densité obtenue avec la "dark map" (courbe bleue et verte). Alors que dans le premier cas la densité radiale possède un accroissement maximum caractéristique pour un r_{max} donné, le second cas semble présenter un accroissement continu de densité radiale. Nous avons vérifié numériquement que pour notre modèle r_{max} est lié à w_{ch} par la relation $r_{max} \simeq 2/w_{ch}$. Dans le cas de la "dark map" w_{ch} n'est pas fixe en raison des nombreuses formes des fonctions perturbatrices en présence. Nous comprenons donc pourquoi

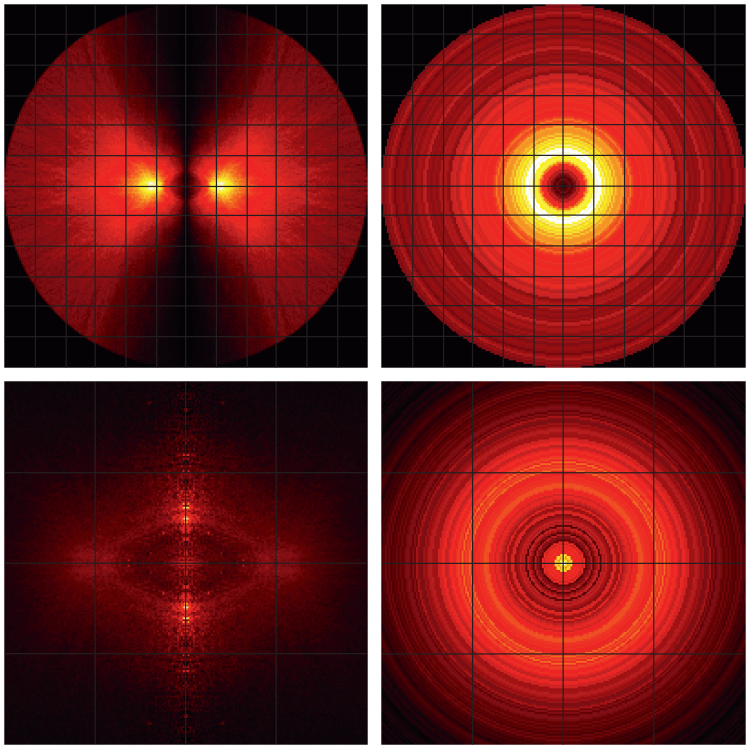

FIGURE 3.11 – Densité de matière noire capturée au temps $t_{snap}/T_2 \simeq 4 \times 10^8$ (T_2 est la période du système binaire) générée par l'application sombre pour $\mu = 0.001$ et $u = 0.035$. Panneaux du haut : à gauche : densité surfacique de matière noire capturée $dN/dr_s dz$ dans le plan (O, y, z) perpendiculaire au plan contenant l'orbite du système binaire (ici $r_s = \sqrt{x^2 + y^2}$). A droite : densité surfacique de matière noire capturée $dN/dxdy$ dans le plan (O, x, y) contenant l'orbite du système binaire. Sur les deux paneaux du haut seule la région $|r| < 6$ est représentée. Panneaux du bas : densité volumique de matière noire capturée $dN/dxdydz$ dans le plan (O, y, z) (à gauche) et dans le plan $(0, x, y)$ (à droite). Sur les panneaux du bas seule la région $|r| < 2$ est représentée. La couleur est associée aux valeurs des densités, la couleur jaune représentant le maximum et la couleur noir représentant une densité nulle.

r_{max} est très différent d'un modèle à l'autre. La forme de la densité volumique ρ/r^2 Fig. 3.10*b* dans notre modèle à symétrie sphérique est proche de la densité volumique obtenue avec la "dark map". Nous obtenons un ajustement de cette courbe de la forme $\propto 1/r^\beta$ avec $\beta \simeq 2.25 \pm 0.003$ pour notre modèle alors qu'il était de $\beta \simeq 1.52 \pm 0.002$ pour la "dark map", nous attribuons cette différence au plus grand nombre d'îlots de KAM présents pour la fonction perturbatrice réelle. Pour une itération, les particules évoluent au maximum de $\pm J$, ce saut a pour longueur associée typique $r \sim 1/J = 200$.

Dans notre modèle nous avons éliminé les angle θ et φ nous avons par conséquent perdu toutes les structures spatiales visibles dans [47], notre modèle est isotrope dans l'espace. C'est le tribut que nous avons choisi de payer dès le départ lorque nous avons décidé de ne pas prendre en compte ces angles. Afin d'analyser l'évolution des structure spatiales de [47] pour $u = 0.035$ nous avons effectué une simulation en utilisant la "dark map" à $t > t_s$ avec $u = 0.035$. Le résultat est visible sur la Fig. 3.11. Nous pouvons constater que comme pour $\rho(r)$ la distribution spatiale n'est pas modifiée significativement par rapport aux résultats obtenues avec $u = 17$ dans [47](Fig.5). On

peut l'expliquer par le fait que $\rho(r)$ est déterminé par la dynamique des particules pour $w > 0$ qui est pratiquement insensible à la distribution des particules d'énergie $-J < w < 0$ capturées par une itération de l'application.

3.5.4 Accroissement de densité

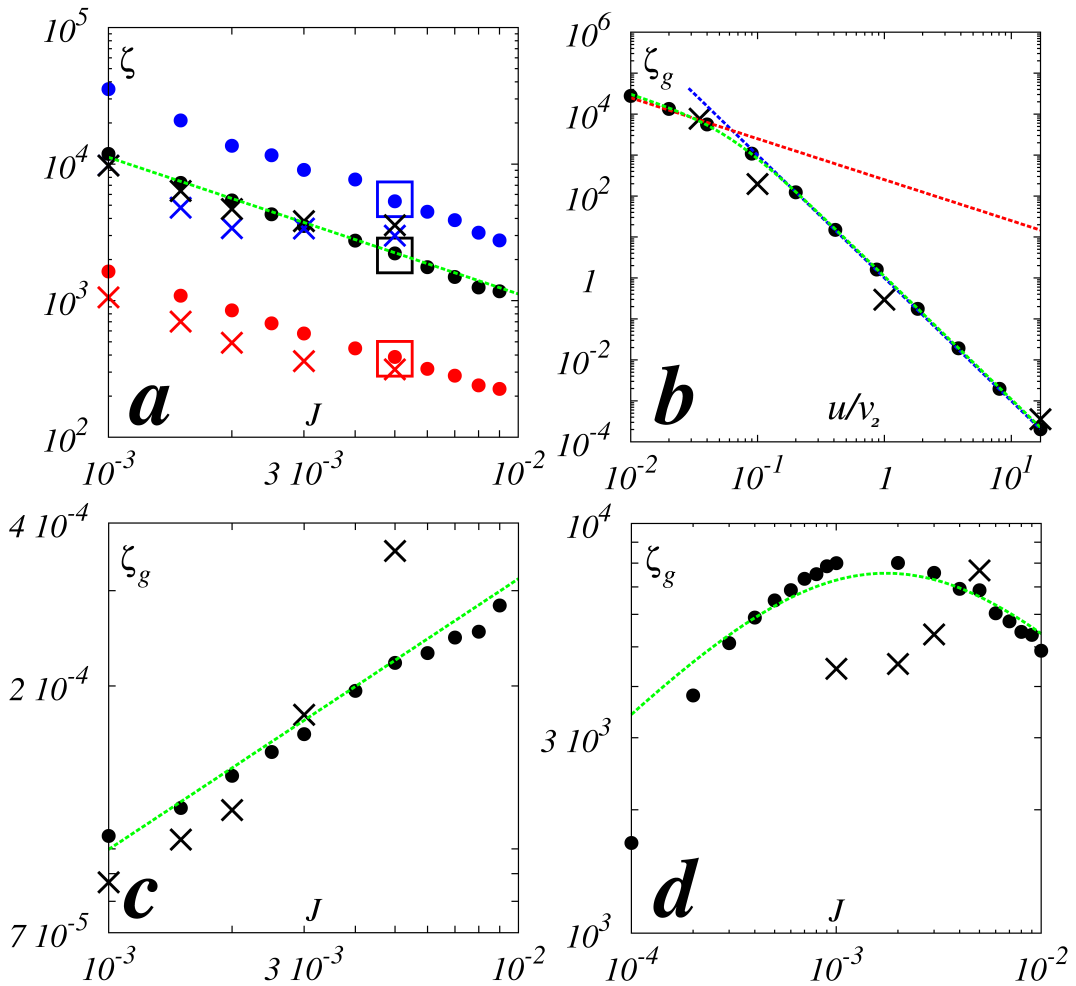

FIGURE 3.12 – Facteurs, ζ et ζ_g, d'accroissement de la densité de matière noire en fonction de J et u/v_2. *a*) ζ en fonction de J pour le paramètre $u/v_2 = 17$ calculé dans pour une sphère de rayon $r = 0.2r_2$ (couleur bleue), $r = r_2$ (couleur noir), et $r = 6r_2$ (couleur rouge). Les points de couleur correspondent à notre modèle simplifié alors que les croix correspondent à la "dark map". *b*) ζ_g en fonction de u/v_2 calculé à $r = r_2$. Les points noires correspondent à notre modèle alors que les croix noires correspondent à la "dark map". La ligne en pointillé bleue est $\propto u^{-3}$. La ligne en pointillé rouge est $\propto u^{-1}$. *c*) ζ_g en fonction de J pour le paramètre $u = 17$. Les points noires correspondent au modèle simplifié alors que les croix noires correspondent à la "dark map". *d*) ζ_g en fonction de J pour le paramètre $u = 0.035$. Les points noirs correspondent à notre modèle alors que les croix noires correspondent à la "dark map". Pour les 4 graphiques la courbe en pointillé verte est la courbe théorique établie (3.29).

Nous arrivons à présent aux résultats les plus intéressants issus de cette étude. Ils montrent que la densité de matière noire capturée à proximité d'un système binaire en rotation ultrarapide est grandement accrue. Pour obtenir ce résultat nous avons calculé la fraction $\eta_{ri} = N_{r_i}/(1000N_{AC})$ pour $r_i = 0.2r_2; r_2; 6r_2$. Il s'agit du rapport entre le nombre de particules présentes dans un volume de rayon $r < r_i$ par rapport au nombre de particules présentes dans le système pour un temps de saturation $t > t_s$. Le nombre N_{r_i} est obtenu par intégration de la courbe de la Fig. 3.10a. C'est la première méthode de reconstruction des orbites qui a été choisie. Le facteur 1000 provient du fait que nous avons distribué 1000 particules sur chaque orbite. Comme mentionné plus haut, nous avons également calculé le rapport N_{AC}/N_{ts} avec $N_{ts} = \kappa N_{is}$ où N_{is} est le nombre de particules injectées dans la simulation avec une énergie $-J < w < 0$. La masse réelle moyenne dans un rayon $r < r_i$ est donnée par (3.22). Il est également intéressant de calculer les facteurs d'accroissement de densité. Nous notons ces facteurs $\zeta = \rho_{r_i}/\rho_{gJ}$ et $\zeta_g = \rho_{r_i}/\rho_g$ où $\rho_{r_i} = M_{r_i}/(4\pi r_i^3/3)$ est la densité moyenne de matière dans une sphère de rayon r_i, $\rho_{gJ} = \rho_g \int_0^{\sqrt{J}} f(v)dv$ avec $\rho_g = 4 \times 10^{-25}\ g.cm^{-3}$ [47, 45] est la densité moyenne de particules dans le halo pour une gamme d'énergie capturable.

Pour voir comment nous avons procédé, présentons deux exemples complémentaires celui d'une vitesse caractéristique pour les particules du halo $v_{rms} \gg v_2$, en unités réduites nous prendrons $u = 17$ (cas du système solaire) et celui d'une vitesse caractéristique pour les particules du halo $v_{rms} \ll v_2$ en unités réduites nous prendrons $u = 0.035$.

- $u = 17$, $J = 0.005$ cas du système solaire. Nous injectons $N_{is} = 4 \times 10^{11}$ particules entre $-J < w < 0$ durant $\sim 3.8 \times 10^8$ rotations de M_2. Cela correspond à l'injection de $N_{ts} = 1.54 \times 10^{16}$ particules traversant le système toutes énergies confondues. Nous récoltons respectivement $N_{r_{0.2}} = 58.759$, $N_{r_1} = 2837.06$ et $N_{r_6} = 107708.351$ particules. La masse totale traversant le système est de $M_{tot} = 4.62 \times 10^{-7} M_1$. La masse capturée dans un rayon r_1 est donc $M_{r_1} = 8.51 \times 10^{-20} M_1$ ce qui implique $\zeta = 2140$ et $\zeta_g = 2.14 \times 10^{-4}$. Par conséquent, selon ces calculs il y a une densité 2000 fois plus importante de particules dans la gamme capturable que dans le halo moyen pour cette même gamme. Ces résultats sont du même ordre de grandeur que ceux calculés pour le système solaire avec la "dark map" où nous avions $\zeta_{gJ} \sim 4 \times 10^3$ [47]. Le facteur ζ_g correspondant à toute les gammes en énergie est négligeable. On peut noter, dans ce régime, que le passage ζ vers ζ_g peut s'effectuer en utilisant la relation $\rho_{gJ} = \rho_g \sqrt{6/\pi}(v_2^3/u^3)J^{3/2}$ et donc $\zeta = \sqrt{\pi/6}(u^3/v_2^3)/J^{3/2}$.

- $u = 0.035$, $J = 0.005$, cas d'un système en rotation ultra rapide. Nous injectons $N_{is} = 4 \times 10^9$ particules durant $\sim 3.8 \times 10^8$ rotations de M_2. Cela correspond à l'injection de $N_{ts} = 4 \times 10^9$ ($\kappa = 1$) particules traversant le système toutes énergies confondues. Avec ce paramètre u, toutes les particules sont candidates à la capture. Nous récoltons respectivement $N_{r_{0.2}} = 1.094$, $N_{r_1} = 48.789$ et $N_{r_6} = 2457.311$ particules. La masse totale traversant le système est de $M_{tot} = 1.82 \times 10^{-20} M_1$. Nous obtenons alors $\zeta = \zeta_g = 6918$. Nous avons donc ici un accroissement de l'ordre de 7×10^3 de la densité de matière noire dans le rayon r_1. C'est un fait remarquable car le facteur ζ correspond bien à toute la gamme d'énergie présente dans le halo et c'est la densité moyenne galactique qui se voit localement grandement accrue.

Dans la suite nous avons fait évoluer les paramètres u et J pour étudier la variation des facteurs ζ et ζ_g en fonction de ceux-ci, ces résultats sont résumés sur la Fig. 3.12.

Pour $(u/v_2)^2 \gg J$ nous constatons que $\zeta \gg 1$ et $\zeta_g \ll 1$. Dans ces conditions, seules les particules dans une zone d'énergie réduite sont accumulées dans le système. Par conséquent, seul ζ est important et la densité totale capturée par rapport à la densité du halo reste faible. Pour $u/v_2 = 17$ les ajustements donnent une dépendance en $1/J$ ($1/J^\alpha$ avec $\alpha = 1.04 \pm 0.01$) pour ζ et en $\sqrt{J}$ (J^α avec $\alpha = 0.46 \pm 0.1$ pour ζ_g). Les croix noires montrent que les résultats du calcul en utilisant la "dark map" donnent approximativement la même dépendance. On peut remarquer qu'en ce qui concerne la "dark map" les croix bleues et noires se superposent quasiment. Cela s'explique

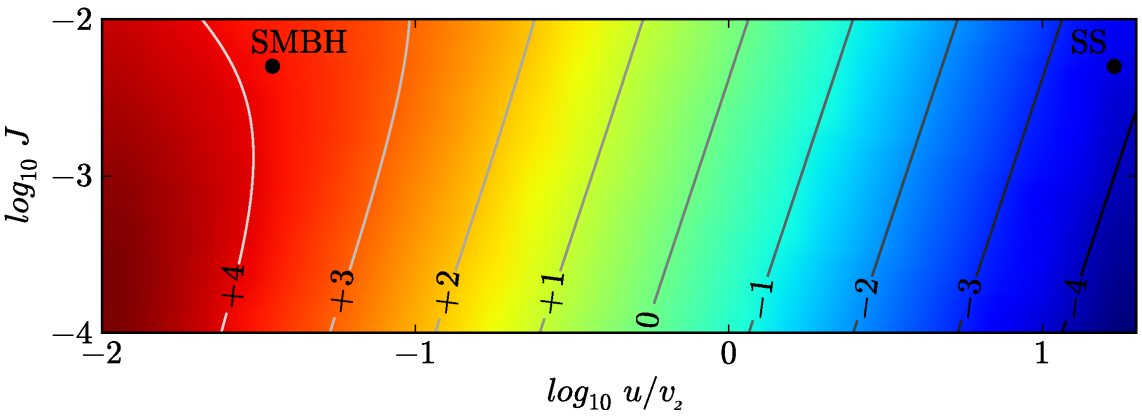

FIGURE 3.13 – Fonction établie dans (3.29) pour J et u/v_2 en échelle $\log_{10} - \log_{10}$. Le point noir annoté SS correspond aux paramètres du système solaire. Le point noir annoté SBH à ceux d'une étoile gravitant autour d'un trou noir super massif.

par le fait que pour les valeurs $r < 1$ la "dark map" donne une densité volumique quasi-constante. En ce qui concerne la dépendance avec (u/v_2) la ligne bleue nous montre une dépendance en $1/u^3$ alors que la ligne rouge nous montre une dépendance en $1/u$ et ce pour une valeur de $J = const$. Ces résultats peuvent s'exprimer fidèlement sous la forme de la formule suivante

$$\zeta_g = \frac{A\sqrt{J}\left(\frac{v_2}{u}\right)^3}{1 + BJ\left(\frac{v_2}{u}\right)^2} \tag{3.29}$$

avec $A \simeq 15.5$ et $B \simeq 0.7$ obtenue par ajustement. L'équation (3.27) assure bien la transition entre le régime $(v_2/u)^2 \gg J$ et $(v_2/u)^2 \ll J$. Nous pouvons expliquer cette tendance par quelques arguments simples : M_{cap} est accumulé durant le temps de diffusion $t_d = t_s$, avec une énergie de l'ordre de Jv_2^2, il est proportionnel à M_{tot} qui traverse le système durant le temps T_{tot}. Par conséquent nous avons $M_{cap} \sim Jv_2^2 t_d M_{tot}/\pi u^2 T_{tot}$ en omettant tout les coefficients numériques (π ici fait référence à la partie de l'espace des phases capturables en une itération de l'application). En remplaçant M_{tot} par son expression (3.19), nous obtenons $M_{cap} \sim \rho_g J \tau_d (v_2^3/u^3) r_2^3$ où $\tau_d = t_d/T_2$ avec T_2 la période du système binaire. La masse s'accumule dans un rayon caractéristique $r_{cap} \sim 1/J$, la densité volumique dans cet espace est donc $\rho_v(r = 1/J) \sim M_{cap}/r_{cap}^3 \sim \rho_g J^2 w_{ch}^2 (v_p/u)^3 \sim \rho_{gJ} J^{1/2} w_{ch}^2 \sim \rho_{gJ} J^{1.3}$, où on utilise la relation $\tau_d \sim w_{ch}/J^2 \sim J^{-6/5}$ qui est une approximation du temps de diffusion depuis w_{ch} jusqu'à $w < 0$ (nous avons effectué les calculs pour la capture avec le temps compté en nombre d'itérations et nous obtenons bien un temps de diffusion qui varie comme $J^{-6/5}$ pour les petits J). En utilisant le profil de densité empirique obtenu Fig.3.10*b*, qui donnait $\rho_v \propto 1/r^\beta$ avec $\beta = 2.25 \pm 0.003$, nous obtenons $\zeta \sim 1/J^{0.95}$ ce qui est proche de $\zeta \sim 1/J$ et nous avons $\zeta_g \sim J^{1/2}/(u/v_2)^3$ de l'équation (3.29) pour $u^2 \gg J$. Pour le régime $(u/v_2)^2 \ll J$ la totalité du flux de particule traversant le système est capturée par une itération de l'application et M_{cap} est accru d'un facteur $(u/v_2)^2/J$, ce qui conduit à un accroissement de ζ_g d'un même facteur, et nous avons $\zeta_g \propto v_2/(u\sqrt{J})$ conformément à 3.29. Le facteur d'accroissement ζ_g de l'équation (3.29) est visible en fonction des deux paramètres u et J sur la Fig. 3.13. Nous nous sommes également intéressés à la distribution du périastre des orbites présentes à un instant de saturation $t = t_{snap} > t_s$. Dans les deux régimes $u/v_2 = 17$ et $u/v_2 = 0.035$ nous pouvons constater des propriétés complexes pour les distributions en q. Pour le cas $u/v_2 = 17$ Fig.3.14*a* nous avons une chute relativement douce de la distribution pour $q > 1.5r_2$. En revanche, dans le cas de la Fig.3.14*b* où $u/v_2 = 0.04$ il y a un accroissement d'un facteur 3 de la distribution autour

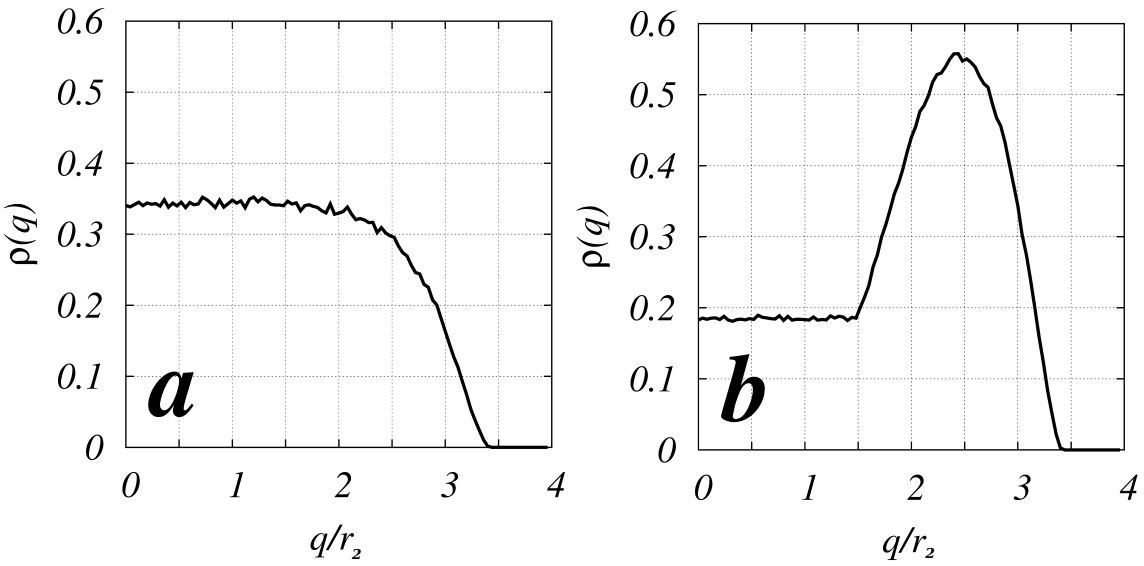

FIGURE 3.14 – Distribution en valeur de périastre après saturation de la capture. a) pour le paramètre $u = 17$. b) pour le paramètre $u = 0.035$. Les deux courbes sont normalisées tel que l'on ai $\int_0^{4r_2} dq\rho(q) = 1$.

de $q = 2.5r_2$ par rapport à la distribution entre $q < 0 < 1.5$. Nous attribuons ce résultat au fait que pour $u/v_2 = 17$, seules les particules de faible énergie peuvent être capturées et extraites de la distribution en une seule itération. En revanche dans le cas $u/v_2 = 0.04$ toutes les particules deviennent capturables et éjectables en une itération. La forme de la distribution doit alors jouer un rôle dans la distribution en q des orbites en présence à $t = t_s$. Il est à noter également que les particules diffusent plus lentement quand q augmente (la fonction perturbatrice est de plus faible amplitude). Les effets conjoints de la distribution d'entrée non-homogène en w et de différent temps de diffusion doit donc jouer un rôle de sélection des grandes valeurs de q restantes dans le système. Cet effet de sélection doit aussi être présent pour $u/v_2 \gg 1$ il n'est cependant pas visible en raison de la distribution en w qui est ici comme en q homogène.

3.5.5 Systèmes multiples

Pour terminer cette étude nous avons choisi de décrire l'effet de l'ajout d'autres corps dans le système. Pour cela nous avons construit une fonction perturbatrice à 8 corps avec les valeurs d'amplitude $J_i \propto (m_i/M)(v_i/v_5)^2$ où v_5 est la vitesse que nous employons depuis le début du chapitre et qui est prise comme référence (vitesse de Jupiter). Nous avons alors envoyé $N = 2.8 \times 10^{10}$ particules pour les cas $u/v_5 = 17$ et $u/v_5 = 0.035$ dans un système où les amplitudes des fonctions perturbatrices provoquées par les 8 corps sont $J_1 = 2.5 \times 10^{-4}$, $J_2 = 5 \times 10^{-4}$, $J_3 = 7.5 \times 10^{-4}$, $J_4 = \times 10^{-3}$, $J_5 = 2.5 \times 10^{-3}$, $J_6 = 6.5 \times 10^{-4}$, $J_7 = 5 \times 10^{-4}$, $J_8 = 1.25 \times 10^{-4}$. L'idée de cette simulation est de modéliser de manière très simplifiée 8 étoiles en orbite autour d'un trou noir central, le tout dans les conditions r_i/r_5 du système solaire. Pour $u/v_2 = 17$ le modèle simule dans les conditions d'un système planétaire de type système solaire et pour $u = 0.035$ celle d'un système où règne un trou noir super massif [38] entouré de 8 étoiles. Les distributions radiales ρ et volumiques ρ/r^2 des particules capturées sont visibles sur la Fig.3.15. Cette figure nous montre des résultats sensiblement proches de ceux dont nous avons déjà discuté où seulement un corps perturbateur est présent. Nous notons tout de même une légère modification de la densité

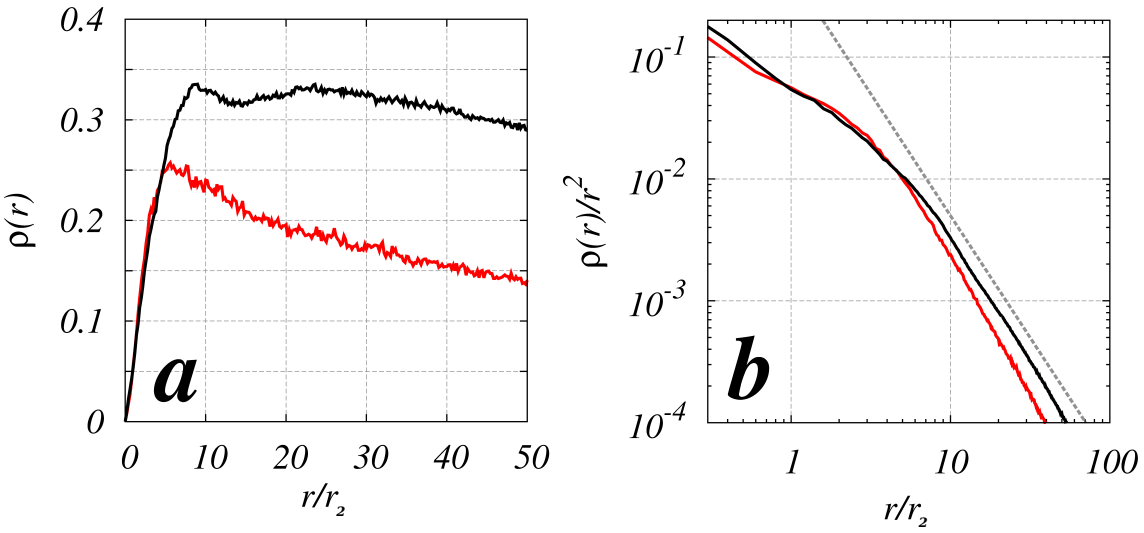

FIGURE 3.15 – Densité radiale et volumique pour un modèle à 8 corps perturbateurs. *a*) Courbe rouge : densité radiale pour le paramètre $u = 17$ et courbe noire : densité radiale pour le paramètre $u = 0.035$. *b*) Courbe rouge : densité volumique pour le paramètre $u = 17$ et courbe noire : densité radiale pour le paramètre $u = 0.0035$.

volumique de particules qui tend vers une sphère de densité radiale homogène, l'ajustement est $\propto 1/r^{\beta}$ avec $\beta = 2.08 \pm 0.002$. Pour le système planétaire $\zeta = 3 \times 10^3$ alors que pour le système galactique nous avons $\zeta_g = 3 \times 10^4$. Nous remarquons donc que l'essentiel de la dynamique des particules capturées dans un système multiple, avec un ratio de masse de 1000 entre l'objet central et les corps perturbateurs, est décrit par un simple système à trois corps.

3.6 Conclusion du chapitre

Au travers de ce chapitre nous nous sommes intéressés à la capture de matière dans les systèmes binaires. Plus particulièrement, nous nous sommes penchés sur le problème de la matière noire susceptible d'être capturée par ces systèmes. Afin de simplifier notre analyse, nous avons choisi de simuler la capture des particules par le biais d'une application symplectique qui reproduit en grande partie le comportement de la dynamique du problème à trois corps restreint. Nous avons de plus simplifié le problème en supposant une fonction perturbatrice périodique sinusoïdale dans toutes les directions. Grâce à cette méthode nous avons montré un accroissement de densité locale de matière noire au sein des systèmes binaires. Notons ici que ce résultat est très différent des précédentes analyses où il est affirmé par des arguments analytiques qu'un tel accroissement de matière n'est pas possible [36, 56]. La raison évoquée est le théorème de LIOUVILLE. Comme nous l'avons vu au chapitre 1 ce théorème stipule que dans un système Hamiltonien, le volume dans l'espace des phases est conservé. Il faut cependant noter que les systèmes étudiés sont des systèmes ouverts. Des particules peuvent être capturées et éjectées à l'infini. L'analyse montre que pour des périastres long $q \gg 1$ les particules ne peuvent être capturées. Cependant, si les périastres sont plus courts $q \sim 1$ ils le sont sans la nécessité de rencontres proches. Par diffusion, ces particules pénètrent des zones énergétiques liées qui leur sont normalement inaccessibles et elles y restent piégées durant un certain temps. Ce temps de piégeage entraîne un accroissement de la densité locale de matière noire par effet de capture cumulatif dans une région sphérique dont le rayon

caractéristique est $r \sim 1/J$ où J est l'amplitude de la fonction perturbatrice.

Cette étude confirme des résultats déjà établis dans les articles [47] concernant le système solaire, en particulier l'augmentation locale de densité des particules de matière noire dans une gamme d'énergie capturable. Le résultat important qui ressort de notre étude est le suivant : dans le cas dans le cas de système en rotation très rapide de type étoile-étoile, étoile-trou noir ou trou noir-trou noir ayant pour ratio de masse 1/1000, la densité de matière noire du halo se voit accrue d'un facteur $\sim 10^4$. Nous avons également montré que pour un système multiple, de type étoiles gravitant autour d'un trou noir hyper-massif, les profils de densité sont très proches de ceux que l'on observe en ne considérant qu'un corps. Qui plus est, nous notons la similitude des profils obtenus en $1/r^\beta$ où $\beta = 2.25$ avec ceux des profils de densité des halos de matière noire autour des galaxies où $2.25 < \beta < 2.5$ [62]. Les résultats et les analyses que nous venons de développer sont disponibles dans [79].

Ajoutons que le procédé utilisé dans cette étude est complètement générique. Il peut tout à fait être exploité pour étudier la capture de matière ordinaire en s'assurant qu'aucune force autre que la gravité n'entre en jeu. Il peut être également utilisé pour étudier le comportement des échanges de matière entre les systèmes. Notons qu'il existe 60% de système binaire dans la Galaxie. Ce type de formulation peut être employé dans le cadre de la théorie de la panspermie [6], pour étudier statistiquement les processus d'échange de matière entre ces différents systèmes.

Chapitre 4

Dynamique fractale

> Nothing is too wonderful to be true, if it be consistent with the laws of nature.
>
> Michael Faraday

4.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre nous allons traiter la dynamique du problème à trois corps restreint en intégrant de façon numérique les équations du mouvement. Nous nous intéresserons aux caractéristiques géométriques fractales de répulseur étrange engendré par les orbites éjectées du système binaire. Par analogie avec la mécanique quantique, nous parlerons parfois d'orbites ionisées. Le répulseur étrange est l'analogue de l'attracteur étrange [68] sauf que contrairement à celui-ci, il repousse les orbites au lieu de les attirer. La notion d'attracteur peut être comprise en considérant un système où les trajectoires dans l'espace des phases tendent à se diriger vers un point fixe.

La Fig. 4.1a montre un portrait de phase du pendule classique qui est un système hamiltonien où le théorème de Liouville est respecté. Ce système est fermé, le volume dans l'espace des phase reste constant. Trois types de trajectoire à énergie constante sont visible : les mouvements de libration (en noir), le mouvement sur la séparatrice (en rouge) et les mouvements de rotation (en vert). Ce système ne comporte pas d'attracteur, seulement des points fixes stables en $(0, 0)$ et instables en $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. Sur la Fig. 4.2b on voit le portrait de phase du pendule amorti. Cette dynamique tend vers le point fixe situé en $(0, 0)$. Ce système dynamique n'est pas hamiltonien, le système est ouvert. Il échange de l'énergie avec l'environnement par frottement visqueux et le volume dans l'espace des phases n'est pas conservé. Le point fixe $(0, 0)$ constitue donc un attracteur. Le pendant de ces points attracteurs sont les points qui repoussent les trajectoires, on parlera de répulseur. Comme le suggère ces exemples, les attracteurs apparaissent seulement dans les systèmes ouverts.

Il existe d'autres types d'attracteurs (ou répulseurs) que les points fixes dans les systèmes ouverts, c'est le cas des cycles limites. Les cycles limites sont définis comme une zone attractive (ou répulsive) autour de laquelle s'enroule la dynamique. Nous en voyons un exemple sur la Fig. 4.1c qui représente la dynamique de l'oscillateur de Van Der Pol. Indépendamment de leurs conditions initiales les trajectoires convergent vers un cycle limite (voir courbes noire et rouge Fig.4.1c).

Dans les précédents exemples que nous venons d'aborder, nous avons uniquement parlé de système non chaotique. Dans le cas où le système est chaotique, on peut avoir affaire à un type d'attracteur appelé *attracteur étrange*. Cet attracteur a été mis en évidence par E. Lorenz dans un modèle météorologique simplifié [54, 55]. Le modèle de Lorenz est un modèle à trois dimensions.

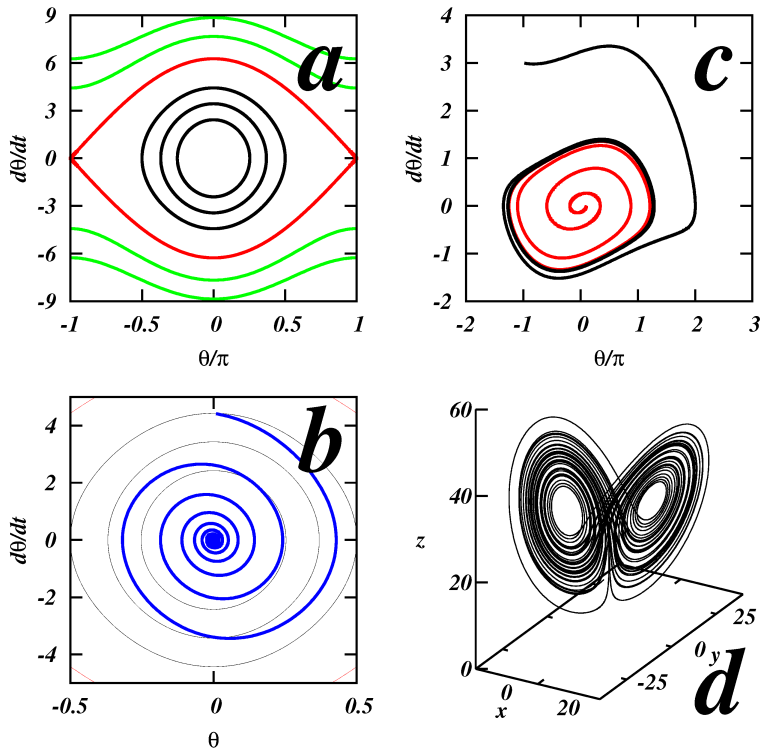

FIGURE 4.1 – 4 exemples de dynamique dans l'espace des phases. *a*) Portrait de phase du pendule simple. Les lignes noires représentent les mouvements de librations pour trois énergies différentes, la ligne rouge est la séparatrice, les lignes vertes sont les mouvements de rotation. *b*) Portrait de phases du pendule simple amorti en bleu. Les lignes noires sont le portrait de phase du pendule simple non amorti. *c*) Portrait de phase de l'oscillateur de VAN DER POL. La ligne rouge montre une trajectoire dont les coordonnées initiales sont à l'intérieur du cycle limite, la ligne noire à l'extérieur. *d*) Trajectoire de l'attracteur étrange de LORENZ en trois dimensions selon les trois variables le caractérisant.

Nous avons représenté un exemple de trajectoire sur la Fig.4.1*d*. Ce modèle est chaotique au sens où les conditions initiales importent sur l'évolution différente de deux trajectoires proches. Cependant, statistiquement nous pouvons voir que les trajectoires s'enroulent aléatoirement autour de l'un ou l'autre de ses points fixes. Ces systèmes ouverts possèdent des orbites dont la géométrie est fractale.

La géométrie fractale est le propre d'objets auto-similaires à différentes échelles. Elle a été décrite pour la première fois par B. MANDELBROT [59] dans sa théorie de la rugosité. Nous verrons dans la partie théorique de ce chapitre comment caractériser cette géométrie.

4.2 La théorie

4.2.1 Hamiltonien de JACOBI

Dans ce chapitre, nous traitons d'une masse négligeable m_3 soumise au potentiel d'un système binaire de masse respective M_1 et M_2. Nous sommes donc dans un système en tout point identique avec celui traité dans les deux chapitres précédents. Nous traiterons ici le problème à trois corps restreint et plan. Comme nous l'avons déjà écrit au chapitre 2, le hamiltonien autonome de ce

système dans le référentiel synodique est le suivant

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + yp_x - p_y x - V(x,y) \tag{4.1}$$

où $V(x,y) = \frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}$ avec $R_1 = \left[(x-\mu)^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}}$ et $R_2 = \left[(x+(1-\mu))^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Nous n'avons pas écrit les équations du mouvement de ce hamiltonien dans les chapitres précédents car nous ne comptions pas les résoudre numériquement. L'objectif de ce chapitre est d'intégrer numériquement ces équations pour déterminer la structure fractale des trajectoires restant aux temps longs à proximité du système binaire et évoluant sur le répulseur étrange. Ces équations sont les suivantes

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= p_x + y \\
\dot{y} &= p_y - x \\
\dot{p}_x &= p_y + (1-\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R_1}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R_2}\right) \\
\dot{p}_y &= -p_x + (1-\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R_1}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R_2}\right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Ce système étant à quatre dimensions nous calculerons des sections de Poincaré afin de simplifier la visualisation de la dynamique tout en conservant sa richesse.

Avant d'étudier la structure fractale à proprement parler, penchons nous sur certaines caractéristiques du hamiltonien qui nous intéresse ici et que nous n'avons pas encore développé dans les chapitres précédents.

Points de Lagrange

Commençons par étudier les points fixes de ce hamiltonien. Pour ce faire nous imposons que les équations (4.2) soient nulles. Il arrive immédiatement $p_x = -y$ et $p_y = x$. Par suite nous avons le couple d'équations suivant

$$\begin{aligned}
x &= \frac{(x-\mu)(1-\mu)}{R_1^3} + \frac{\mu(x+1-\mu)}{R_2^3} \\
y &= y\left(\frac{1-\mu}{R_1^3} + \frac{\mu}{R_2^3}\right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Deux cas sont alors possibles :

- si $y = 0$: Nous avons seulement la première équation. Cette équation est un polynôme de degré 5, mais seulement 3 solutions sont physiquement pertinentes. En effet, R_1^2 et R_2^2 se doivent d'être positifs. En fonction de la position le long de l'axe x nous avons trois équations valables

$$\begin{aligned}
x - \frac{1-\mu}{(x-\mu)^2} - \frac{\mu}{(x+1-\mu)^2} &= 0 \text{ si } \mu < \text{x} \\
x + \frac{1-\mu}{(x-\mu)^2} - \frac{\mu}{(x+1-\mu)^2} &= 0 \text{ si } -(1-\mu) < x < \mu \\
x + \frac{1-\mu}{(x-\mu)^2} + \frac{\mu}{(x+1-\mu)^2} &= 0 \text{ si } x < -(1-\mu)
\end{aligned}$$

  Ces équations ne peuvent être résolues analytiquement mais leurs solutions peuvent être obtenues numériquement par une méthode de Newton-Raphson par exemple. Ce sont les points notés L_1, L_2 et L_3.

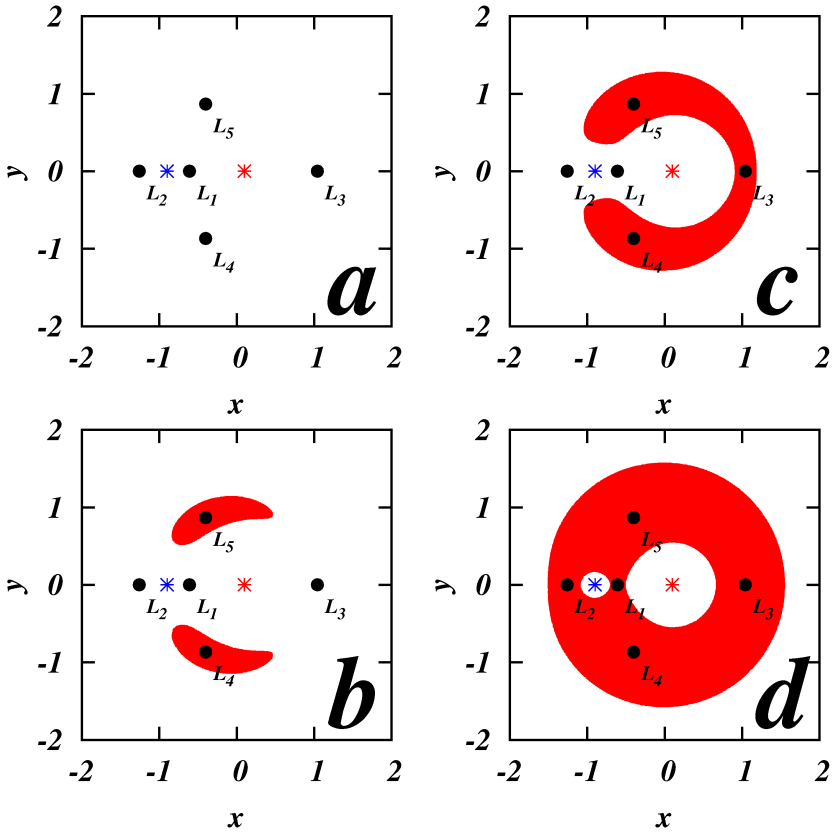

FIGURE 4.2 – En rouge les zones où les vitesses sont interdites ici pour $\mu = 0.1$. *a*) $E = -1.45$, *b*) $E = -1.5$, *c*) $E = -1.575$, *d*) $E = -1.85$. L'étoile rouge ($*$) est la masse M_1, l'étoile bleue ($*$) la masse M_2.

- si $y \neq 0$: Nous avons un polynôme de degré 2 couplé à la première équation (4.3) qui nous donne les solutions : $L_4 : x = \mu - \frac{1}{2}$, $y = +\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $L_5 : x = \mu - \frac{1}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ici L_1, L_2, L_3, L_4 et L_5 sont appelés les points de LAGRANGE du système à trois corps restreint [92]. Nous ne recalculerons pas ici la stabilité de ces points, nous admettrons simplement que les points L_1, L_2 et L_3 sont qualifiés d'instables alors que les points L_4 et L_5 sont qualifiés de stables. Notons que ces points ne sont pas anodins en physique spatiale puisque les astéroïdes nommés troyens occupent les points L_4 et L_5 du système Soleil-Jupiter. Le point L_2 du système Terre-Lune est quant à lui occupé par certains satellites artificiels à visée d'observation astronomique afin d'économiser l'énergie nécessaire à leur maintien sur orbite.

Zone de vitesses interdites

Nous l'avons dit au chapitre 2, ce hamiltonien est autonome, son énergie E est donc une constante du mouvement [43]. En utilisant le fait que $p_x + y = \dot{x}$ et $p_y - x = \dot{y}$ le hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) - V(x, y) \tag{4.4}$$

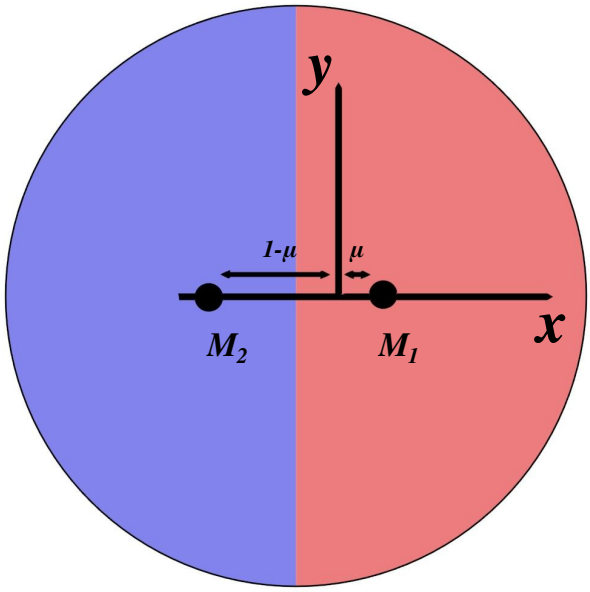

FIGURE 4.3 – Schéma des zones de régularisation. En rouge, l'algorithme régularisera les potentiels sur M_1, en bleu sur M_2. La limite entre les deux régularisations est fixée à $x = \mu - 1/2$.

où le terme $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ n'est autre que le carré de la vitesse dans le repère synodique. Ce terme se doit d'être toujours positif ce qui restreint spatialement la dynamique. En réarrangeant les termes de (4.4) nous avons

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = x^2 + y^2 + 2V - C_J \tag{4.5}$$

où v est la vitesse dans le repère synodique et $C_J = -2H = -2E$ est appelé constante de JACOBI. En traçant les zones de vitesses interdites, c'est-à-dire les zones pour lesquelles $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 < 0$, pour une même valeur de μ et plusieurs valeurs de E, nous obtenons les résultats de la Fig.4.2.

Nous voyons qu'avec la diminution de E et donc l'augmentation de C_J, des zones interdites se développent. Nous avons d'abord des zones interdites qui se développent autour des points L_4 et L_5 puis qui se joignent autour de L_3. Finalement, cette zone devient unique et empêche le passage entre M_1 et M_2, la dynamique est alors soit localisée autour de l'une des deux masses soit à l'extérieur de la zone interdite.

Nous allons à présent voir comment intégrer les équations du mouvement numériquement. Les équations du mouvement associées à ce hamiltonien divergent sur la position des deux masses en $(x = -1+\mu, y = 0)$ et en $(x = \mu, y = 0)$. Nous allons donc effectuer une régularisation des potentiels connue sous le nom de régularisation de LEVI-CIVITA [51, 13, 12]. Ce type de régulatisation a notamment été utilisé dans [49] pour l'étude des rencontres proches dans le problème à trois corps restreint.

4.2.2 Régularisation

La régularisation des potentiels s'effectue selon le schéma de la Fig. 4.3. Lorsque la particule est du côté de la zone rouge, nous régularisons sur la masse M_1, lorsqu'elle est du côté de la zone bleue, nous régularisons sur la masse M_2. Pour cela, il faut considérer la transformation canonique $(p_x, p_y, x, y) \to (P_x, P_y, X, Y)$ dont la fonction génératrice $W(p_x, p_y, X, Y)$ est

$$W(p_x, p_y, X, Y) = p_x f(X, Y) + p_y g(X, Y) \tag{4.6}$$

avec pour une régularisation sur M_1 : $f(X,Y) = X^2 - Y^2 + \mu_2$ et $g(X,Y) = 2XY$ avec $\mu_2 = \mu$ et pour une régularisation sur M_2 : $f(X,Y) = X^2 - Y^2 - \mu_1$ et $g(X,Y) = 2XY$ avec $\mu_1 = 1 - \mu$. On a alors

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\partial W}{\partial p_x} = f(X,Y) \\
y &= \frac{\partial W}{\partial p_y} = g(X,Y) \\
P_x &= \frac{\partial W}{\partial X} = p_x \frac{\partial f}{\partial X} + p_y \frac{\partial g}{\partial X} = 2p_x X + 2p_y Y \\
P_y &= \frac{\partial W}{\partial Y} = p_x \frac{\partial f}{\partial Y} + p_y \frac{\partial g}{\partial Y} = -2p_x Y + 2p_y X
\end{aligned} \tag{4.7}$$

A l'aide des équations (4.7), on montre facilement que $P_x^2 + P_y^2 = D\left(p_x^2 + p_y^2\right)$ et que

$$yp_x - p_y x = \frac{1}{2D}\left[P_x \frac{\partial}{\partial Y}\left(f^2 + g^2\right) - P_y \frac{\partial}{\partial X}\left(f^2 + g^2\right)\right]$$

où $D = 4(X^2 + X^2)$. Le hamiltonien (4.1) s'écrit alors

$$\tilde{H}(P_x, P_y, X, Y) = \frac{1}{2D}\left[P_x^2 + P_y^2 + P_x \frac{\partial}{\partial Y}\left(f^2 + g^2\right) - P_y \frac{\partial}{\partial X}\left(f^2 + g^2\right)\right] - \hat{V}(X,Y) \tag{4.8}$$

avec $\hat{V}(X,Y) = V(f(X,Y), g(X,Y))$. Du hamiltonien (4.8) découlent les équations du mouvement suivantes

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \frac{1}{2D}\left[2P_x + \frac{\partial}{\partial Y}\left(f^2 + g^2\right)\right] \\
\dot{Y} &= \frac{1}{2D}\left[2P_y + \frac{\partial}{\partial X}\left(f^2 + g^2\right)\right] \\
\dot{P}_x &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial X} \\
\dot{P}_y &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Y}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Nous allons travailler dans l'espace des phases étendu [35] où nous considérons $\tilde{H}$ et t comme des variables dynamiques conjuguées à part entière, ici $-\tilde{H}$ sera noté T variable conjuguée de t. Dans l'espace des phases étendu, le hamiltonien devient

$$\Gamma = T + \frac{1}{2D}\left[P_x^2 + P_y^2 + P_x \frac{\partial}{\partial Y}\left(f^2 + g^2\right) - P_y \frac{\partial}{\partial Y}\left(f^2 + g^2\right)\right] - \hat{V}\left(X,Y\right) \tag{4.10}$$

Nous allons maintenant introduire un temps fictif noté s dont la relation avec le temps réel est $dt = Dds$. Ce temps fictif permettra d'éviter la divergence de la vitesse lorsque la trajectoire du petit corps passera très près d'une des deux masses. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{Q}} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{P}} = \frac{d\boldsymbol{Q}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{D}\frac{d\boldsymbol{Q}}{ds} \\
\dot{\boldsymbol{P}} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{Q}} = \frac{d\boldsymbol{P}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{D}\frac{d\boldsymbol{P}}{ds}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

où $\boldsymbol{Q}$ est le vecteur (X,Y), $\boldsymbol{P}$ est le vecteur (P_x, P_y). Ce qui nous permet de définir $\Gamma^* = D\Gamma$ le hamiltonien associé à la nouvelle base de temps s. Nous avons alors

$$\Gamma^* = D\Gamma = DT + \frac{1}{2}\left[P_x^2 + P_y^2 + P_x \frac{\partial}{\partial Y}\left|\Phi\right|^2 - P_y \frac{\partial}{\partial Y}\left|\Phi\right|^2\right] - D\hat{V}\left(X,Y\right) \tag{4.12}$$

en posant $\Phi(X,Y) = f(X,Y) + ig(X,Y)$ où $i = \sqrt{-1}$ les nouvelles équations du mouvement sont alors

$$\begin{aligned}
X' &= P_x + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial Y}|\Phi|^2 \\
Y' &= P_y - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X}|\Phi|^2 \\
t' &= D \\
P_x' &= -T\frac{\partial D}{\partial X} - \frac{1}{2}\left[P_x\frac{\partial^2|\Phi|^2}{\partial X\partial Y} - P_y\frac{\partial^2|\Phi|^2}{\partial Y}\right] + \frac{\partial}{\partial X}\left(D\hat{V}\right) \\
P_y' &= -T\frac{\partial D}{\partial Y} - \frac{1}{2}\left[P_x\frac{\partial^2|\Phi|^2}{\partial Y} - P_y\frac{\partial^2|\Phi|^2}{\partial Y\partial X}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left(D\hat{V}\right) \\
T' &= 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

où $'$ désigne la dérivée par rapport au temps fictif s. Nous ne le démontrerons pas ici mais ces nouvelles équations du mouvement ne possèdent plus de divergences. Pour une démonstration complète voir [77]. Nous possédons donc de nouvelles équations du mouvement régularisées sur l'une ou l'autre des deux masses.

Notons qu'il est possible de régulariser sur les deux masses en même temps, cependant pour le problème qui nous intéresse ici cela n'est pas nécessaire. En effet, la particule n'est jamais à la fois proche des deux corps. Ce type de régularisation globale serait intéressant dans le cadre d'une intégration numérique de trois corps de même masse qui influent l'un sur l'autre et où une triple collision est possible. Ici dans le cadre du problème restreint nous nous en dispenserons.

Nous allons dans la section suivante donner une définition de la dimension fractale dans le cadre de la dynamique chaotique.

4.2.3 Dimension fractale

Une des manières de caractériser un attracteur est d'en étudier sa dimension. Par dimension, nous entendons l'espace qu'occupe un attracteur. Par exemple, l'attracteur dans le cas du pendule amorti est un point, sa dimension sera donc naturellement 0. Autre exemple, l'attracteur formé par le cycle limite dans l'oscillateur de Van Der Pol est une ligne, sa dimension sera donc 1. La notion de fractalité d'un objet a été introduite par B. Mandelbrot dans son étude de la rugosité [59]. Les objets manufacturés par l'homme ont presque toujours des dimensions entières, un disque sera de dimension 2, une boule de dimension 3 etc... Si l'on effectue des trous dans ces objets la dimension sera aussi conservé, l'exemple classique est un tore.

En revanche les objets de la nature : arbres, rochers, rythme cardiaque... ne peuvent être décrits par ces courbes lisses et la notion de dimension n'est plus caractérisée par un entier. Un exemple célèbre est celui du calcul de la dimension de la côte ouest de la Grande-Bretagne ($D \approx 1.25$) [58]. Un attracteur de type chaotique sera également caractérisé par une forme de type fractal. La structure compliquée de ce type d'objet se repliant sur lui même indéfiniment est auto-similaire.

Il existe un grand nombre de définitions de la dimension (dimension de Hausdorff, de corréllation, ...). Parmi celles-ci, nous choisirons la dimension dite de Minkowski–Bouligand, où "Box-Counting", qui est la plus commune mais aussi une des plus simple à calculer numériquement. Il s'agit de compter le nombre de "boîte" qu'occupe un objet en diminuant la taille de la boîte à chaque itération du processus. Nous verrons comment procéder dans la section suivante. Dans la limite où la taille de la boîte tend vers 0, le logarithme du nombre de boîtes occupées par l'objet divisé par le logarithme de l'inverse de la taille linéaire d'une boîte tend vers la dimension de l'objet

$$D = \lim_{b\to 0}\frac{\log(N_b)}{\log(1/b)} \tag{4.14}$$

où D est la dimension de l'objet, b est l'échelle de découpage des boîtes tel que la taille linéaire d'une boîte $dl = bdl_0$ avec dl_0 la taille linéaire de la boîte initiale. Enfin nous avons $N_b(b)$ le nombre de boîtes nécessaires pour couvrir le motif dessiné par l'objet pour un b donné. Avec ce processus, les points, les lignes ou les objets pleins donneront des valeurs de dimension entières respectivement 0, 1 et 2 ou 3. Pour des objets "rugueux" en revanche, les dimensions seront non entières et qualifiées de fractales. C'est ce procédé que nous allons utiliser dans le calcul de la dimension fractale du répulseur étrange du problème à trois corps restreint.

4.3 Méthodes numériques employées

L'objectif de cette section, comme dans les chapitres précédents, est d'aborder les méthodes numériques que nous avons employées.

4.3.1 L'intégration

Pour l'intégration des équations du mouvement (4.13), nous avons employé un algorithme $RK4$ à pas variable. Pour gérer la modification du pas nous avons employé la méthode présentée dans [77] (avec les routines *rkqs*, *rkck* et *odein*). Dans le cadre du problème de Cauchy présenté dans le chapitre 2, il s'agit de déterminer l'estimation de $y^*(t+h)$ donnée à l'ordre 4 puis l'estimation de $y(t+h)$ donnée à l'ordre 5. Nous avons pour un système à N équations différentielles

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 + c_5k_5 + c_6k_6 + O(h^6) \\ y^*_{n+1} &= y_n + c^*_1k_1 + c^*_2k_2 + c^*_3k_3 + c^*_4k_4 + c^*_5k_5 + c^*_6k_6 + O(h^5) \end{aligned} \tag{4.15}$$

où les coefficients k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 et k_6 sont donnés dans [77], les coefficients c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 et c^*_1, c^*_2, c^*_3, c^*_4, c^*_5, c^*_6 ont été déterminés par J. R. Cash et A. H. Karp [11]. L'estimation de l'erreur Δ entre les deux méthodes est donc

$$\Delta = y_{n+1} - y^*_{n+1} = \sum_{i=1}^{6} (c_i - c^*_i)\, k_i \tag{4.16}$$

Ce que nous souhaitons c'est que cette erreur reste dans une limite bornée. Par conséquent, en plus de l'obtention d'une valeur sur l'erreur commise, cette estimation donne la modification qu'il faut apporter au pas. Grâce aux équations (4.15) nous savons que l'erreur évolue en h^5. Si nous prenons un pas h_1 qui génère une erreur Δ_1 alors le pas h_0 qui aurait donné une autre valeur d'erreur Δ_0 peut être estimé par 4.17

$$h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{1/5} \tag{4.17}$$

Par conséquent, il suffit de prendre Δ_0 comme étant la précision souhaitée. Si $\Delta_1 > \Delta_0$ alors on réduit le pas à l'inverse si $\Delta_1 < \Delta_0$ on l'augmente. Ce mécanisme permet de ne pas user énormément de ressources numériques lorsque l'intégration ne nécessite pas de pas trop petits.

Dans la suite, nous calculons ainsi la trajectoire des particules et dans le même temps, nous effectuons des sections de Poincaré suivant le plan (p_x, x) et (x, y). Nous décrirons les propriétés de ces sections dans la partie consacrée à nos résultats. Le pseudo-code du programme de simulation est montré sur la Fig. 4.4.

Nous injectons N particule avec $R_1 \leq r \leq R_2$ où r est le module du vecteur position dans le repère synodique, R_1 est le rayon intérieur de l'anneau d'injection et R_2 le rayon extérieur. Pour cette injection nous tirons aléatoirement x et y avec $-R_2 < x < R_2$ et $-R_2 < y < R_2$ et utilisons une méthode de rejet tel que $R_1 < \sqrt{x^2+y^2} < R_2$. Les coordonnées x, y, p_x sont choisies aléatoirement tandis que la coordonnée p_y est choisie de telle façon à avoir une constante de Jacobi identique pour toutes les particules injectées. Nous testons ensuite le côté où se trouve la particule

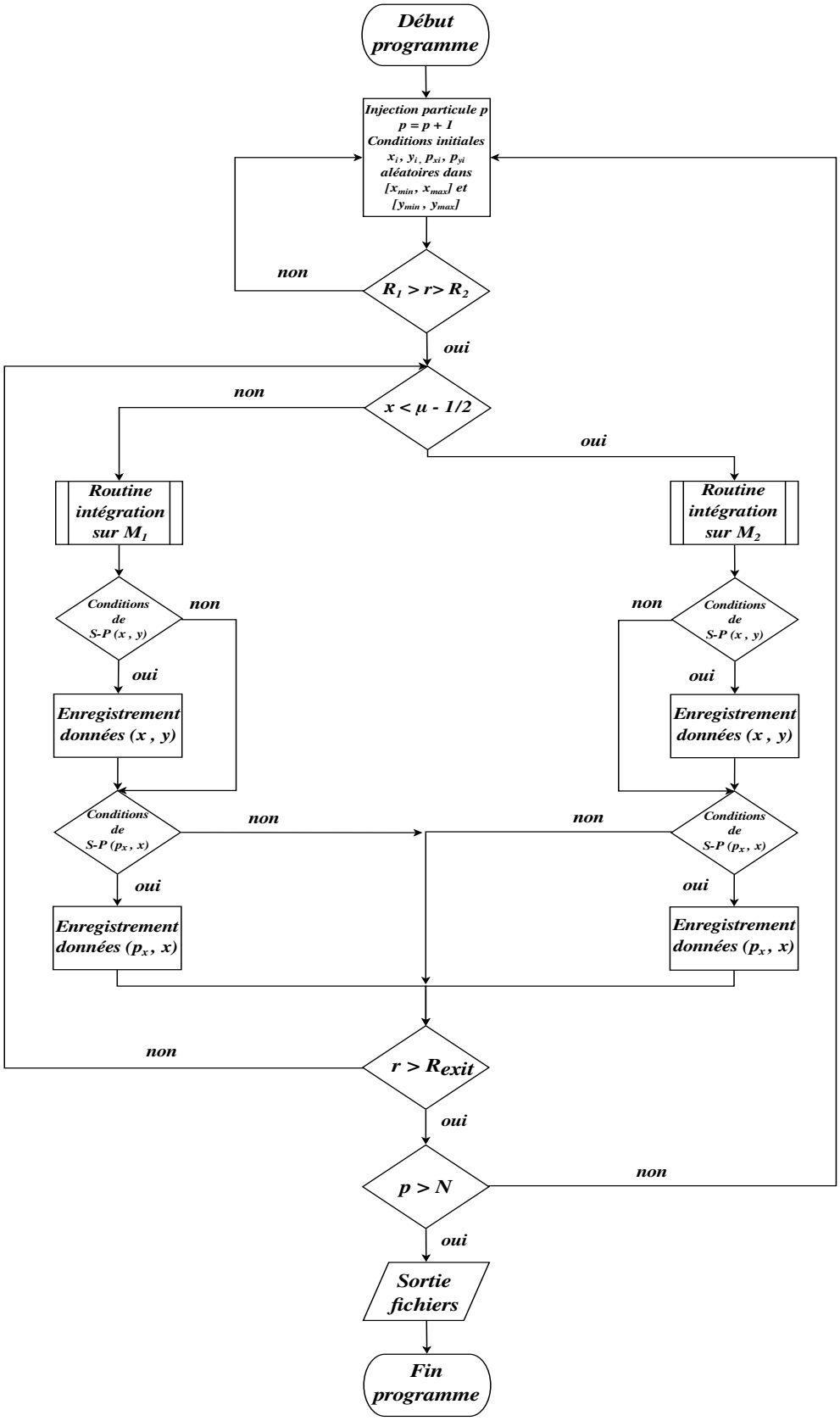

FIGURE 4.4 – Pseudo-code de l'algorithme d'intégration utilisé dans cette étude.

(côté de M_1 ou de M_2). Nous lançons alors la sous-routine d'intégration avec les équations du mouvement associées au côté résultant de ce test. A chaque pas, nous testons si l'orbite n'a pas traversé l'une ou l'autre des sections de Poincaré souhaitées (p_x, x) ou (x, y). Ensuite, nous testons la ionisation de la particule et donc si $r > R_s$. Dans l'affirmative, le processus recommence avec une nouvelle particule, dans la négative nous testons le côté où se trouve la particule et relançons le code en fonction de la réponse.

4.3.2 Méthode du "Box-Counting"

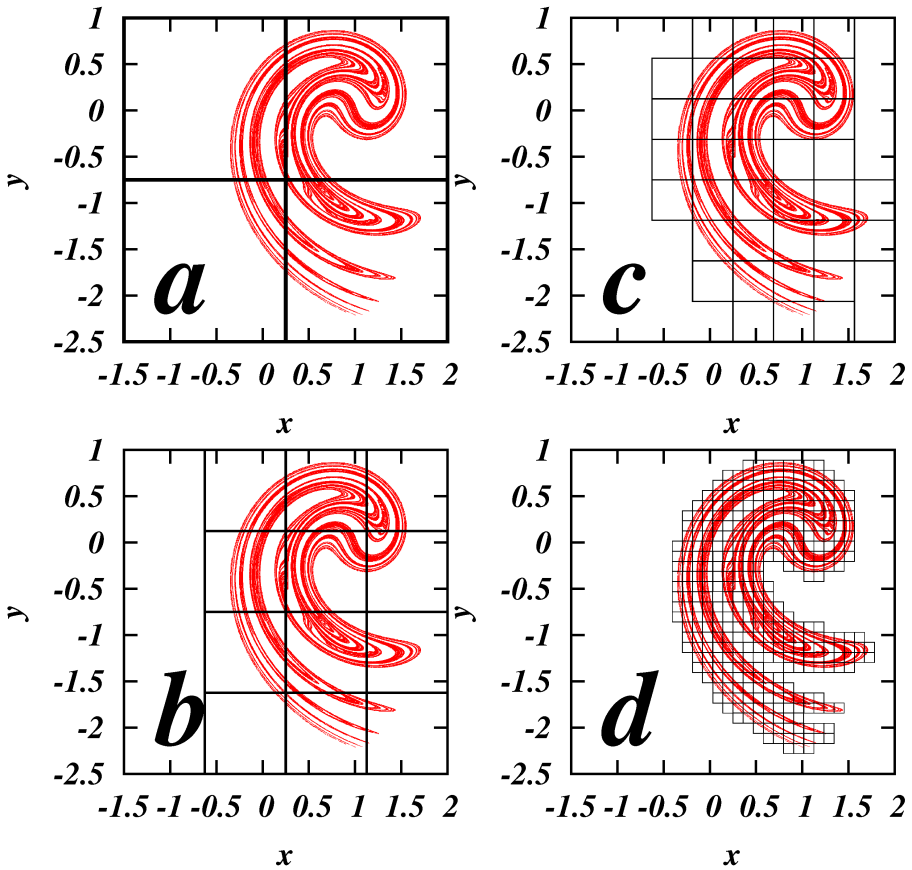

Figure 4.5 – Illustration de la méthode du box-counting appliquée à l'attracteur fractal d'Ikeda. En rouge l'attracteur, en noir les différentes tailles de boîtes utilisées au cours de l'algorithme. En notant $b = dl/dl_0$ où dl est la taille d'une boîte et dl_0 la taille linéaire de la boîte de départ : *a*) La division de la boîte de départ est telle que $b = 1/2^1$. *b*) La division de la boîte de départ est telle que $b = 1/2^2$. *c*) La division de la boîte de départ est telle que $b = 1/2^3$. *d*) La division de la boîte de départ est telle que $b = 1/2^5$.

Dans cette sous section, nous allons voir comment calculer la dimension fractale des sections de Poincaré obtenues par intégration numérique. La méthode que nous allons utiliser est la méthode du box-counting. La méthode est simple, elle consiste en la division de la section obtenue en petites boîtes de même taille. On commence par diviser la section en 4 boîtes de même taille et l'on compte le nombre des boîtes occupées par des points de la section de Poincaré. D'après (4.14) cela donne la dimension de l'objet pour une taille de boîte donnée.

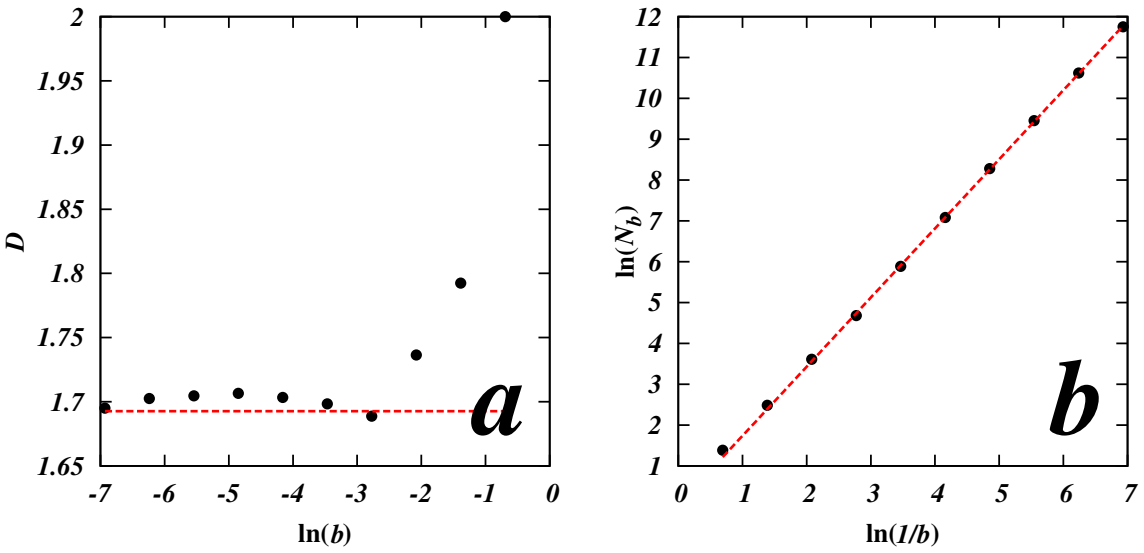

FIGURE 4.6 – Calcul de la dimension fractale. *a*) D (4.14) en fonction de $\ln(b)$ où b est la définition donnée dans la Fig. 4.5. La droite rouge pointillée représente la valeur $D = 1.6927$. *b*) $\ln N_b$ en fonction de $\ln(1/b)$ où N_b est le nombre de boîtes contenant au moins 1 point de l'attracteur. La droite rouge pointillée est la régression linéaire en excluant les deux premiers points des données, elle vaut : $\ln(N_b) = D\ln(1/b) + const$ avec $D = 1.6927 \pm 0.0081$.

On recommence ensuite l'opération le plus grand nombre de fois possible. Dans ce processus, nous sommes limités en nombre d'itérations par le nombre de points obtenus dans la section. En effet, au bout d'un certain nombre d'itérations la taille des boîtes atteint la granularité de notre image. Il est inutile alors de continuer. Il faut donc qu'avant cette limite, la dimension D de l'objet ait convergé. La Fig. 4.5 montre une représentation de la méthode du box-counting appliquée à l'attracteur étrange d'IKEDA[40].

Avec cette méthode, nous obtenons les deux tracés visibles sur la Fig. 4.6. Sur le panneau Fig. 4.6*a* il s'agit de la représentation de la dimension de D en fonction de $\ln(b)$ où b est l'échelle de découpage des boîtes où la boite initiale à la taille linéaire dl_0. Sur Fig. 4.6*b* c'est une représentation de la droite $\ln(N(b))$ (le nombre de boîtes qui contiennent au moins un point) en fonction de $\ln(1/b)$. Le coefficient directeur de cette droite nous donne une estimation de la dimension fractale de l'attracteur. Nous avons trouvé 1.6927 ± 0.0081 ce qui coïncide à la valeur de convergence obtenue à la Fig. 4.6*a*. La valeur numérique estimée dans la littérature est de $D = 1.7$. Nous avons par conséquent un bon accord compris dans les barres d'erreurs.

4.4 Résultats et analyses

4.4.1 Sections de POINCARÉ

Nous avons injecté les particules dans un anneau de rayon intérieur $R_1 = 1.3$ et de rayon extérieur $R_2 = 2.5$ afin de rester dans les zones chaotiques et éviter les zones stables autour des deux masses. Toutes ces particules sont injectées à énergie constante E. Elles sont disposées dans l'anneau avec x et y aléatoirement déterminés par méthode de rejet. Dans le repère synodique, nous choisissons pour condition de vitesse radiale initiale $\dot{r} = 0$, en terme d'orbite elliptique cela serait un périastre ou apoastre local.

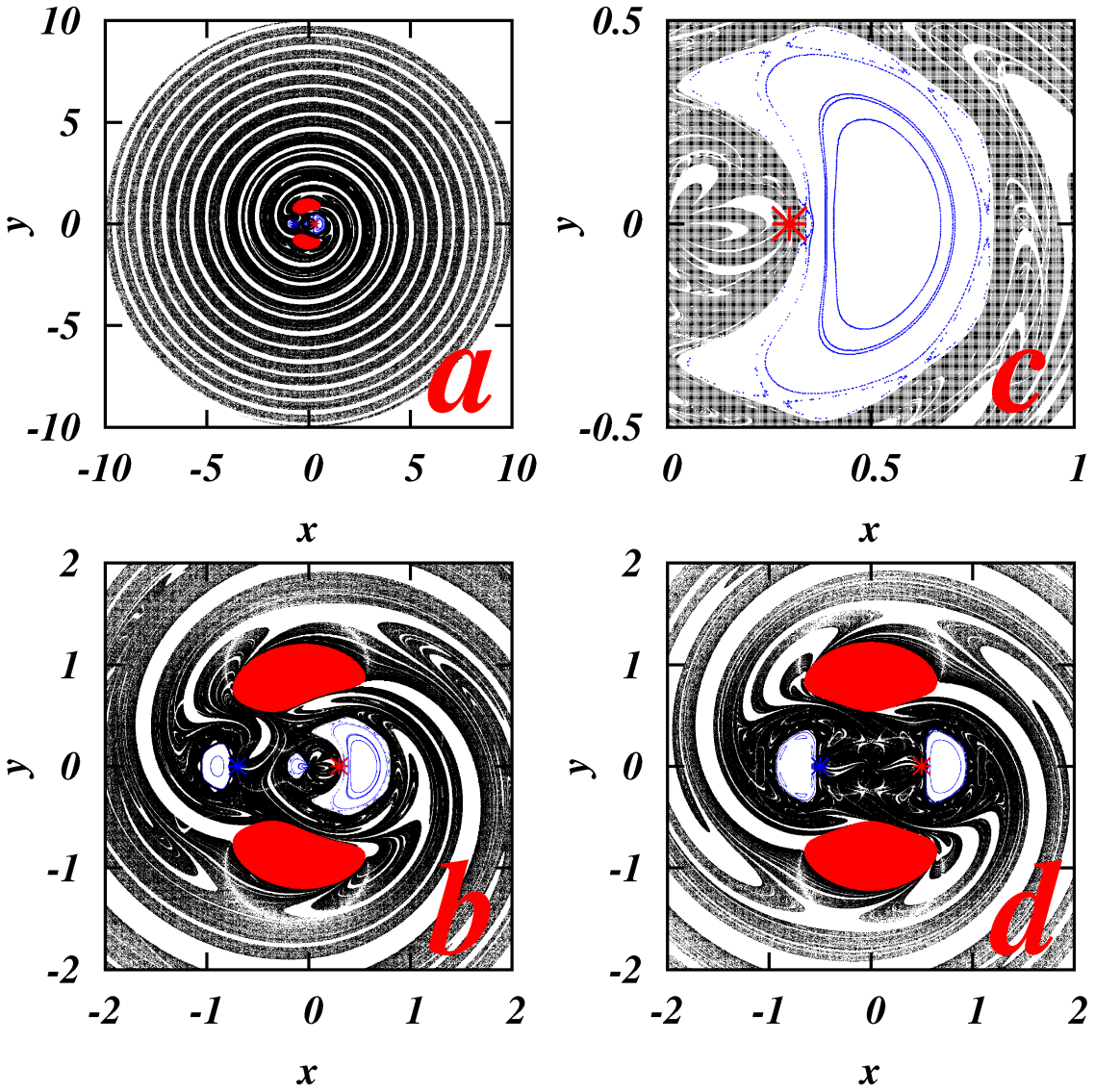

FIGURE 4.7 – Section de POINCARÉ (x, y) engendrée par les particules n'ayant pas quitté le système (n'ayant pas franchi la limite $r = R_s = 10$) à $t = 10$ (en noir). L'étoiles rouges ($*$) représentent la masse $M_1 = 1 - \mu$ et l'étoiles bleue ($*$) la masse $M_2 = \mu$. Les zones rouges sont interdites, les lignes bleues sont les courbes invariantes de KAM. *a*) $\mu = 0.3$, $E = -1.5$ pour $-10 < x < 10$ et $-10 < y < 10$. *b*) idem agrandissement sur $-2 < x < 2$ et $-2 < y < 2$. *c*) idem agrandissement sur $0 < x < 1$ et $-0.5 < y < 0.5$. *d*) $\mu = 0.5$, $E = -1.5$ pour $-2 < x < 2$ et $-2 < y < 2$.

Les sections de POINCARÉ que nous avons réalisées sont d'abord des sections en (x, y) lorsque $\dot{r} = 0$ et la vitesse angulaire $\dot{\phi} < 0$ (représentation similaire à [65, 66]). Nous nous intéressons aux particules non encore ionisées du système (de taille $r = R_s = 10$). Nous obtenons alors pour deux paramètres μ différents la Fig. 4.7. Sur ces sections nous remarquons les comportements dynamiques que nous avons déjà abordés tout au long de cette thèse, zones chaotiques et zones stables en régime mixte. Nous remarquons en plus un enroulement spirale des points qui a une

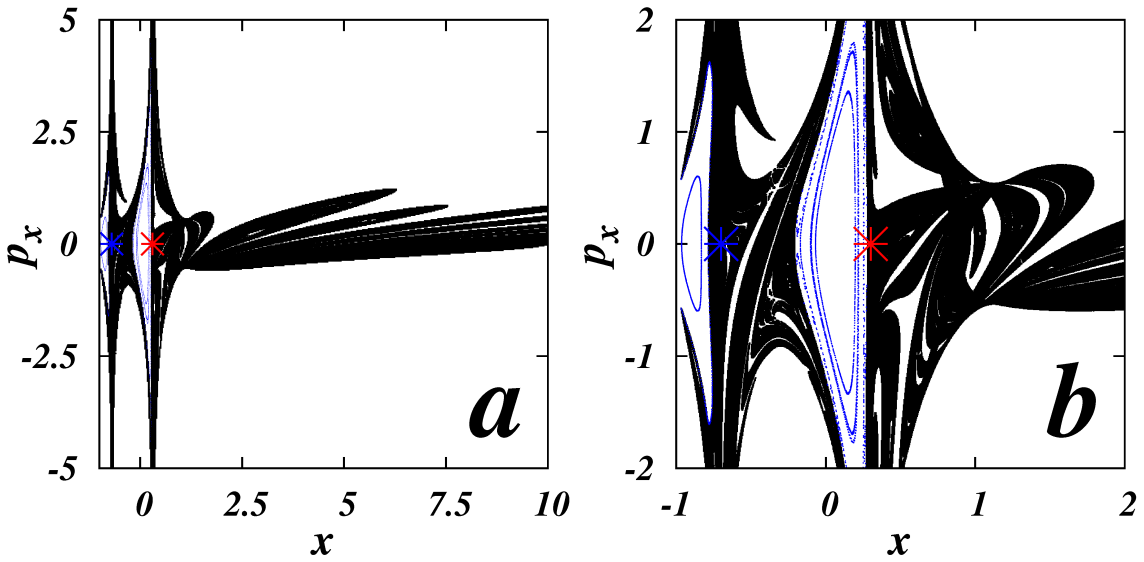

FIGURE 4.8 – Section de POINCARÉ (p_x, x) engendrée par les particules n'ayant pas quitté le système (n'ayant pas franchi la limite $r = R_s = 10$) à $t = 10$ (en noir). L'étoiles rouges ($*$) représentent la masse $M_1 = 1 - \mu$ et l'étoiles bleue ($*$) la masse $M_2 = \mu$. Les lignes bleues sont les courbes invariantes de KAM. Ici $\mu = 0.3$, $E = -1.5$ $a)$ $-1 < x < 10$ et $-5 < p_x < 5$. $b)$ agrandissement sur $-1 < x < 2$ et $-2 < p_x < 2$.

nature fractale. Il s'agit du répulseur étrange du système. Cette nature est d'ailleurs confirmée lorsque l'on regarde le système à différentes échelles Fig. 4.7a,b,c. Pour $E = -1.5$ et $\mu = 0.3$ ou $\mu = 0.5$, le système exhibe deux larges zones interdites (Fig.4.7a,b et d) dont nous avons évoqué la nature précédemment. Nous notons également des îlôts de stabilité particulièrement visibles sur la Fig.4.7c. A l'intérieur de ces ilôts la dynamique est soit régulière sur les courbes invariantes de KAM soit chaotique entre celles-ci. Nous avons déjà rencontré ce type de dynamique au chapitre 2 et 3 lorsque que nous avons étudié l'application de KEPLER et l'application sombre.

Nous nous sommes également intéressés à la section de POINCARÉ (p_x,x) engendrée par ces même particules. Nous obtenons alors la Fig. 4.8. Nous pouvons constater sur les deux panneaux de la Fig. 4.8a, b que $|p_x|$ reste borné aux alentours de 1 sur quasiment l'ensemble de la section de POINCARÉ sauf à proximité des deux masses en $x = 1 - \mu$ et $x = -\mu$. En effet, rappelons que $\dot{x} = p_x + y$, suite aux rencontres proches avec les masses la vitesse dans le repère synodique augmente ce qui explique ce phénomène. Ces sections exhibent également des îlots de stabilité à proximité des deux masses.

Voyons à présent comment évolue le répulseur étrange lorsque l'on modifie l'énergie des particules (où la constante de JACOBI). Sur la Fig. 4.9 l'énergie E augmente au fil des panneaux a, b, c, d, e, f pour passer progressivement de $E = -1.3$ à $E = -2$. Nous pouvons remarquer que la zone chaotique constituant le répulseur étrange (en noir) est progressivement isolée de l'immédiate proximité des deux masses et que de larges zones stables (en bleu) apparaissent. Pour les panneaux a, b, c, d, c'est le répulseur qui domine, pour e et f sa présence est bien moins importante. Cela a un effet sur la structure fractale de l'objet que nous étudions. Nous verrons par la suite l'évolution de cette dimension fractale avec E. On a également une augmentation importante des zones interdites qui viennent isoler les deux masses de l'extérieur. Cela aura son importance lorsque nous traiterons des probabilités de survie des particules.

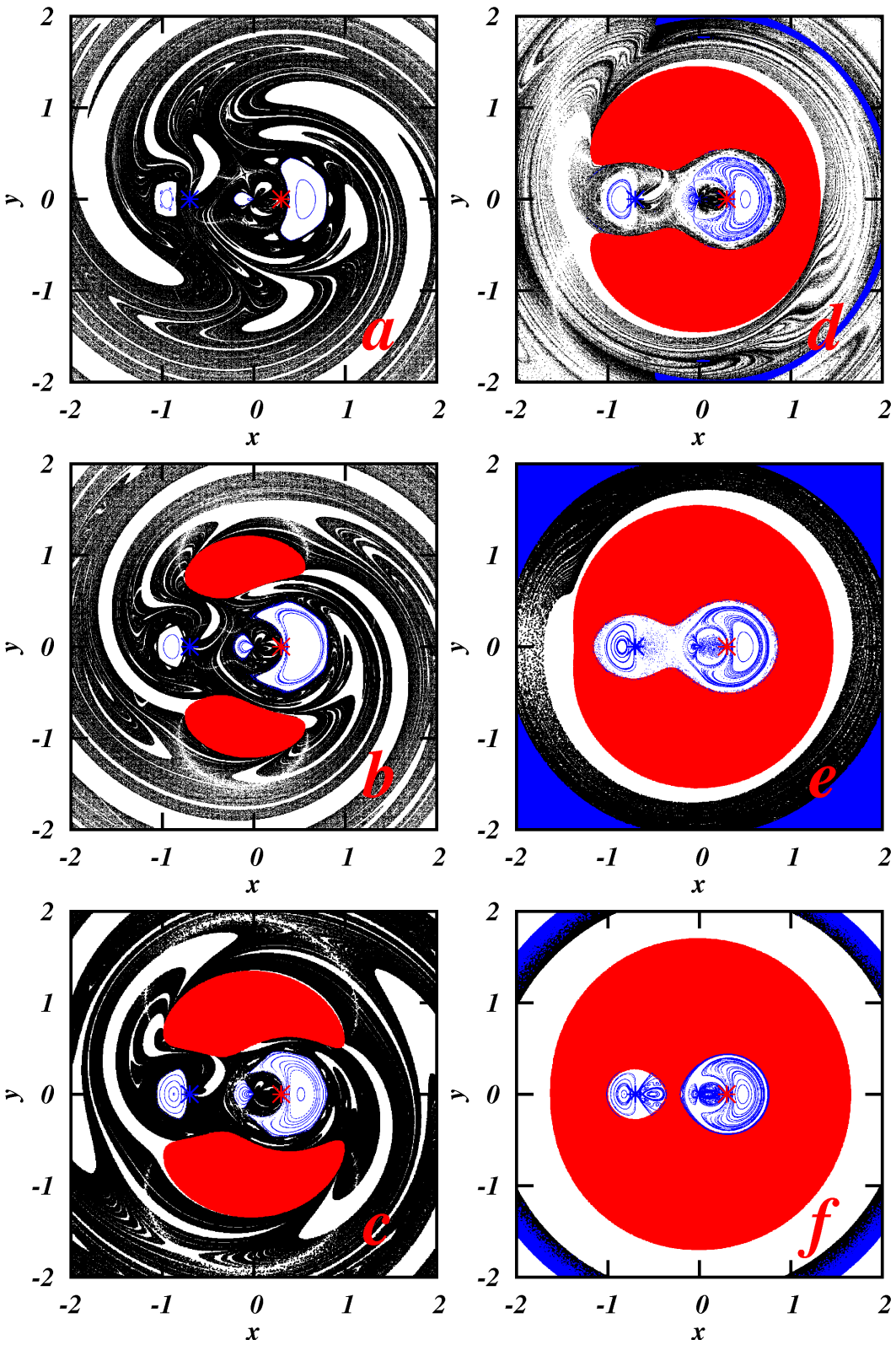

FIGURE 4.9 – Section de POINCARÉ (x, y) engendrée par les particules n'ayant pas quitté le système (n'ayant pas franchi la limite $r = R_s = 10$) à $t = 10$ (en noir). L'étoiles rouges ($*$) représentent la masse $M_1 = 1 - \mu$ et l'étoiles bleue ($*$) la masse $M_2 = \mu$. Les zones rouges sont interdites, les lignes bleues sont les courbes invariantes de KAM. Ici $\mu = 0.3$ et la section centrée en $-2 < x < 2$ et $-2 < y < 2$. *a*) $E = -1.3$. *b*) $E = -1.5$. *c*) $E = -1.6$. *d*) $E = -1.7$. *e*) $E = -1.8$. *f*) $E = 2$.

4.4.2 Analyse fractale

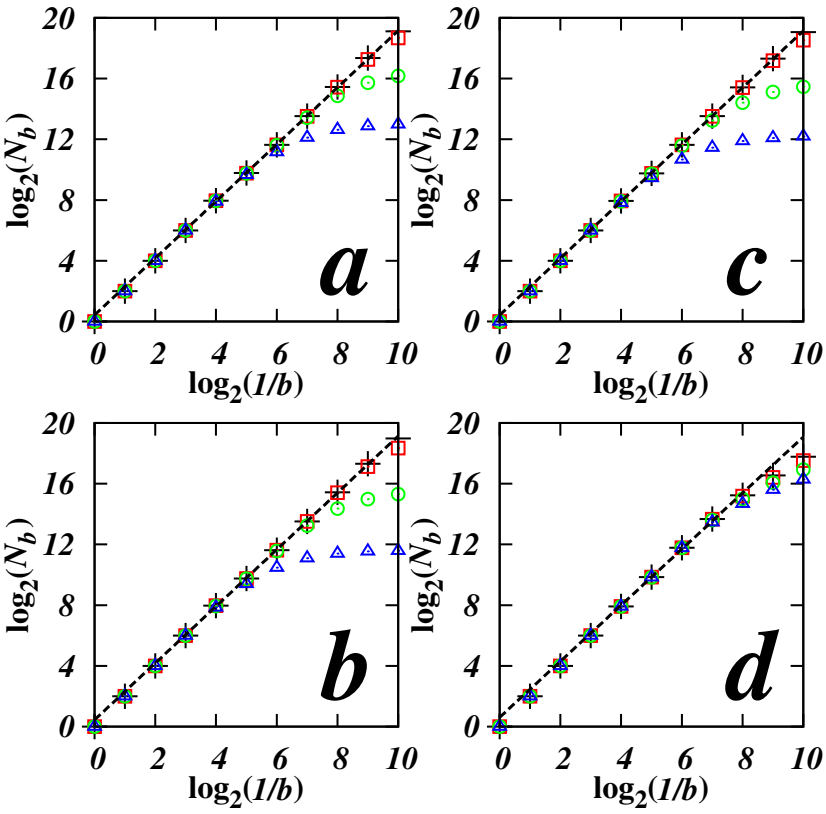

FIGURE 4.10 – Nombre de boîtes N_b occupées par le répulseur en fonction de la taille de ces boîtes en échelle $\log_2 - \log_2$. Pour les 4 panneaux, les croix noires représentent les points dessinant le répulseur pour $t > 3$, les carrés rouges pour $t > 10$, les ronds verts pour $t > 30$ et les triangles bleus pour $t > 50$. La droite pointillée noire est un exemple d'ajustement réalisé sur les points à $t > 3$. Le coefficient directeur de la droite nous donne la dimension fractale de l'objet. Le calcul est réalisé pour $R_s = 10$. $a)$ $\mu = 0.3$, $E = -1.5$, $D = 1.8711 \pm 0.0100$ $(t > 10)$ $(D = 1.8732 \pm 0.0105)(t > 3)$ $b)$ $\mu = 0.4$, $E = -1.5$, $D = 1.8657 \pm 0.0117$ $(D = 1.8690 \pm 0.0129)$ $c)$ $\mu = 0.3$, $E = -1.3$, $D = 1.8700 \pm 0.0077$ $(D = 1.8722 \pm 0.0084)$ $d)$ $\mu = 0.3$, $E = -1.7$, $D = 1.8349 \pm 0.0484$ $(D = 1.8464 \pm 0.0436)$. Pour ces simulations, nous avons utilisé $N = 10^8$ particules initialement positionnées dans l'anneau de départ comme décrit au début de la section 1.4.1. Les nombres de points présents dans les sections sont : (a) $N_{t>3} = 39526570$, $N_{t>10} = 9933333$, $N_{t>30} = 768282$, $N_{t>50} = 83290$ points, (b) $N_{t>3} = 26743797$, $N_{t>10} = 6550163$, $N_{t>30} = 372871$, $N_{t>50} = 25037$ points, (c) $N_{t>3} = 37610948$, $N_{t>10} = 8721338$, $N_{t>30} = 419296$, $N_{t>50} = 39891$ points, (d) $N_{t>3} = 8569720$, $N_{t>10} = 5447406$, $N_{t>30} = 2245927$, $N_{t>50} = 1083887$ points.

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'analyse fractale des sections de POINCARÉ présentées plus avant. Pour réaliser cette analyse dans l'espace (x, y) nous avons appliqué la méthode du box-counting sur un anneau carré dont le carré principal a les dimensions $-3.9 < x, y < 3.9$ et le trou carré central a les dimensions $-1.3 < x, y < 1.3$. Le trou central est imposé pour empêcher d'effectuer l'analyse fractale sur les îlots de stabilités. Avec cette configuration nous disposons donc de 8 carrés de côté $dl_0 = 1.3$ entourant le carré central de même dimension mais laissé vide. L'algorithme consiste à découper à chaque échelle $b = 1, 1/2, 1/4...$ chacun des 8 carrés en $1/b^2$

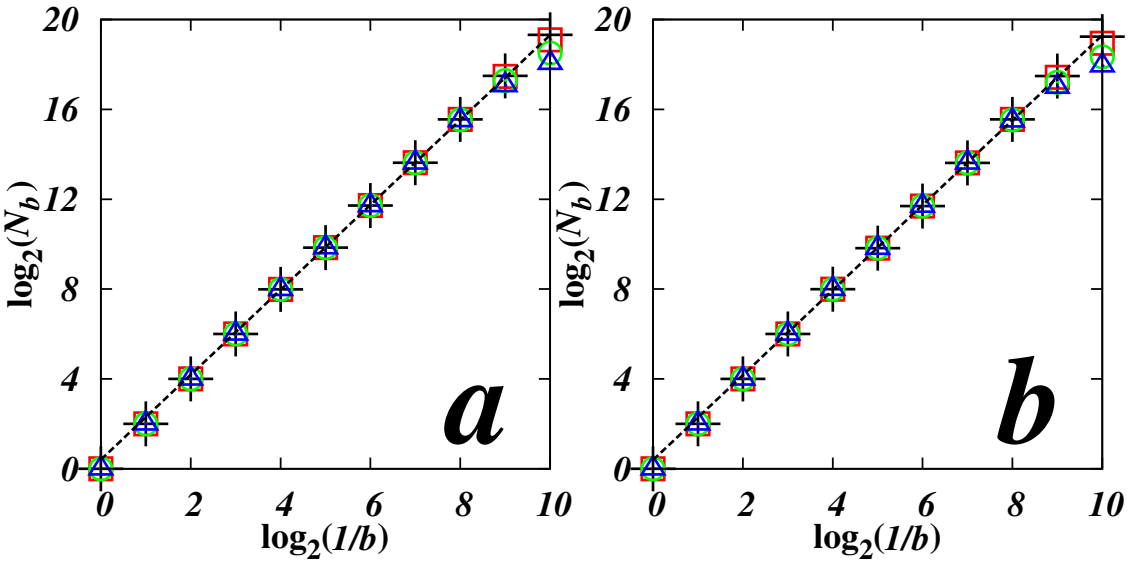

FIGURE 4.11 – Nombre de boîtes N_b occupées par répulseur en fonction de la taille de ces boîtes en échelle $\log_2 - \log_2$. Pour les 4 panneaux, les croix noires représentent les points dessinant le répulseur pour $t > 3$, les carrés rouges pour $t > 10$, les ronds verts pour $t > 30$ et les triangles bleus pour $t > 50$. La droite pointillée noire est l'ajustement réalisé sur les points à $t > 3$. Le calcul est réalisé pour un $R_s = 100$. *a)* $\mu = 0.3$, $E = -1.5$, $D_{t>3} = 1.8908 \pm 0.00876$, $D_{t>10} = 1.8900 \pm 0.00858$, $D_{t>30} = 1.8874 \pm 0.00754$, $D_{t>50} = 1.8799 \pm 0.00480$ et *b)* $\mu = 0.4$, $E = -1.3$, $D_{t>3} = 1.8916 \pm 0.0129$, $D_{t>10} = 1.8911 \pm 0.0127$, $D_{t>30} = 1.8869 \pm 0.0110$, $D_{t>50} 1.8786 \pm 0.0086$. Les nombres de points présents dans les sections sont : *a)* $N_{t>3} = 38090345$, $N_{t>10} = 18470667$, $N_{t>30} = 7588914$, $N_{t>50} = 4574705$ *b)* $N_{t>3} = 27206778$, $N_{t>10} = 14259496$, $N_{t>30} = 6542192$, $N_{t>50} = 4286763$.

cases de côté $dl = bdl_0$. Si l'on teste cet algorithme sur un anneau carré plein, le nombre de cases occupées à l'échelle b est $N_b = 8 \times (1/b)^2$ et la dimension vaut $D = \ln(N_b)/\ln(1/b) = \ln(8)/\ln(1/b) + 2$ qui est donc supérieur à 2. Évidemment, quand $b \to 0$ cette dimension tend bien vers 2 mais très lentement. En effet, pour que l'erreur sur la dimension $\ln(8)/\ln(1/b)$ soit inférieure à 1%, il faut que $\log_{10}(1/b) > 100 \times \log_{10}(8) \sim 90.3$ soit $1/b \gtrsim 10^{90}$ ce qui amène un nombre de cases ahurissant. Pour pallier ce problème nous avons choisi de retrancher l'erreur $ln(8)/ln(1/b)$ à chaque détermination de D. Cela revient à diviser N_b par 8 à chaque étape de division des boîtes dans le calcul. Les résultats des calculs effectués sur les sections de POINCARÉ en (x, y) sont visibles sur la Fig.4.10.

Sur la Fig.4.10, nous pouvons voir que la dimension fractale du repulseur étrange reste sensiblement la même pour les trajectoires survivantes après $t > 3$ et après $t > 10$. La dimension fractale du répulseur pour des temps supérieurs est difficile à mettre en œuvre, car il faudrait beaucoup plus de points que ceux restant dans la section de POINCARÉ et par conséquent des simulations plus longues. Cependant, nous pouvons remarquer sur les 4 panneaux de la Fig.4.10 que pour les points restant à $t > 30$ et $t > 50$ la tendance de la droite semble être la même que celle dessinée par les points $t > 3$ et $t > 10$. La chute des droites (ronds verts et triangles bleus) que nous observons est due à ce manque de points. Les ajustements réalisés sont effectués pour $\log_2(1/b) \in [4, 8]$, en effet nous évitons ainsi les premières valeurs où toutes les cases sont remplies ainsi que les dernières où le nombre de points fait défaut.

Globalement, nous pouvons en conclure que le répulseur étrange est déjà formé en totalité pour les temps courts ($t > 3$) et que sa dimension fractale est comprise entre 1.8 et 1.9. Si nous effectuons

le même calcul mais pour un rayon de ionisation $R_s = 100$ nous obtenons les mêmes résultats que pour $R_s = 10$. Ces calculs sont visibles sur la Fig.4.11. Le nombre de points étant supérieur, un ajustement des courbes sur tous les temps est possible.

Ces ajustements semblent montrer qu'il y a une légère diminution de la dimension fractale lorsque t augmente. Cependant la variation est trop faible pour pouvoir conclure qu'il s'agit d'un phénomène significatif et pas simplement d'une erreur d'ajustement liée au nombre de points disponibles. Nous arrivons donc aux mêmes conclusions que pour $R_s = 10$, c'est-à-dire que la structure fractale est établie très vite ($t > 3$) et perdure dans le temps pour une valeur comprise entre $D = 1.85 - 1.90$. La relation connue pour les attracteurs étranges fractals (voir [68]) indique que la dimension fractale D_0 du repulseur invariant constitué des orbites qui ne sortent jamais ni dans le passé ni dans le futur est $D_0 = 2(D - 1)$. Pour une valeur typique mesurée ici de $D = 1.87$ nous obtenons $D_0 = 1.74$.

Des études concernant ce type de problème avaient déjà été effectuées dans [65, 66]. Bien que les trajectoires associées au répulseur étrange étaient présente dans ces travaux, la dimension fractale de celui-ci n'avait pas été analysée. En effet, dans ces travaux [65, 66] l'auteur s'intéresse en particulier aux probabilités de survie des particules avant le crash sur l'un des membres du binaire. Afin de confirmer nos simulations, nous avons adopté les mêmes paramètres que ceux utilisés dans un exemple de [65], c'est-à-dire un rayon pour les masses composant le binaire de $r_b = 10^{-2}$, une masse $\mu = 0.5$ et une énergie $E = -0.5$. Nous avons enfin observé les structures créées par les bassins de crash. Les résultats sont visibles sur la Fig.4.12. On constate bien des figures très similaires à celles mises au jour par J. Nagler dans [65], les bassins de crash sont en tout point identique. Encore une fois, nous constatons que la structure fractale est établie très vite $t \sim 1$. Nous remarquons également que dans le cas représenté ici pour $r_b = 10^{-2}$, qu'une grosse partie des orbites figurant sur le répulseur constituent les orbites de crash. Dans les exemples que nous avons présentés auparavant, Fig.4.7,4.8,4.9 les rayons des masses valent r_b valaient 10^{-5}, les crashs participaient donc faiblement à la perte des particules. A titre d'exemple, le même type de figure mais pour les paramètres caractéristiques de notre étude $\mu = 0.3$ et $E = -1.5$ est visible sur la Fig.4.13, où les mêmes conclusions peuvent être tirées.

Nous allons à présent aborder la notion de probabilité de survie des particules au sein du système à trois corps restreint.

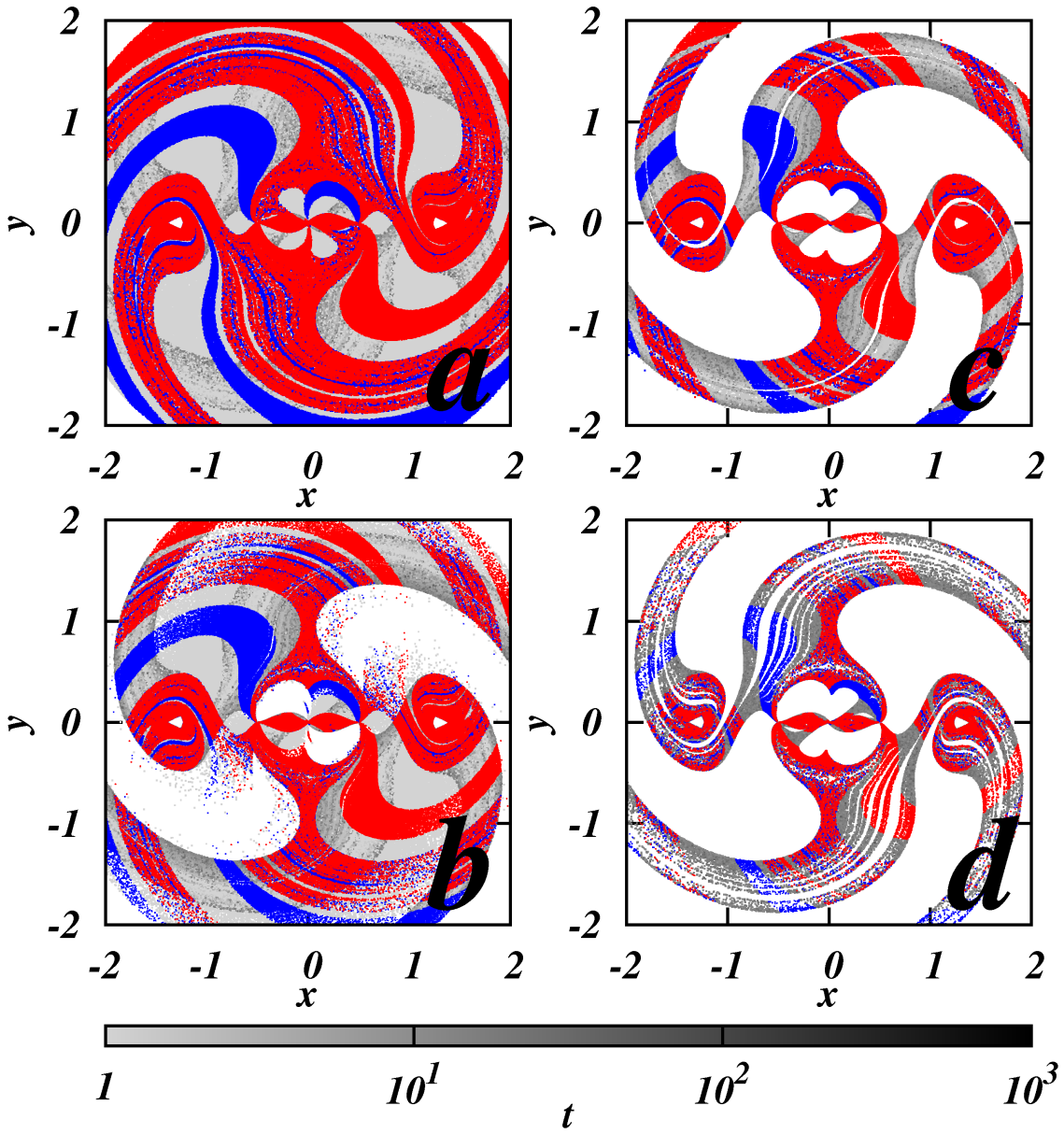

FIGURE 4.12 – Section de POINCARÉ (x, y) pour les paramètres : $\mu = 0.5$, $E = -0.5$ (voir 4ème panneau de la Fig.5 de [65]) avec un rayon matériel $r_b = 10^{-2}$ des masses M_1 et M_2. En rouge, les bassins de crash sur la masse M_1, en bleu sur la masse M_2. *a*) orbites n'ayant pas été éjectées à $t = 0$ *b*) orbites n'ayant pas été éjectées à $t = 0.01$ *c*) orbites n'ayant pas été éjectées à $t = 1$ *d*) orbites n'ayant pas été éjectées à $t = 10$. Les nuances de gris donnent les temps de survie des particules.

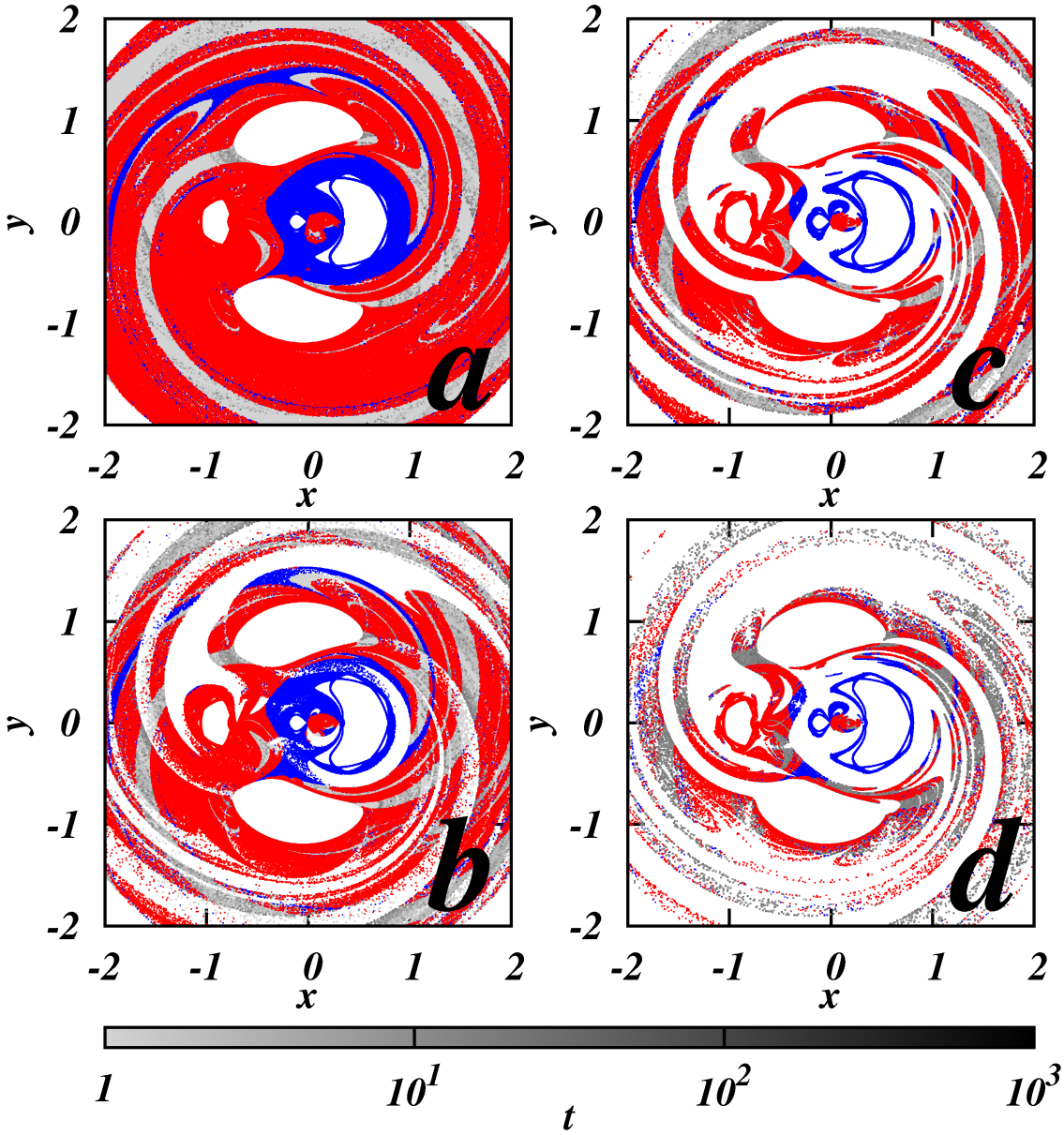

FIGURE 4.13 – Section de POINCARÉ (x, y) pour les paramètres : $\mu = 0.3$, $E = -1.5$ avec un rayon matériel $r_b = 10^{-2}$ des masses M_1 et M_2. En rouge, les bassins de crash sur la masse M_1, en bleu sur la masse M_2. *a*) orbites n'ayant pas été éjectées à $t = 0$ *b*) orbites n'ayant pas été éjectées à $t = 0.01$ *c*) orbites n'ayant pas été éjectées à $t = 1$ *d*) orbites n'ayant pas été éjectées à $t = 10$. Les nuances de gris donnent les temps de survie des particules.

4.4.3 Probabilité de survie

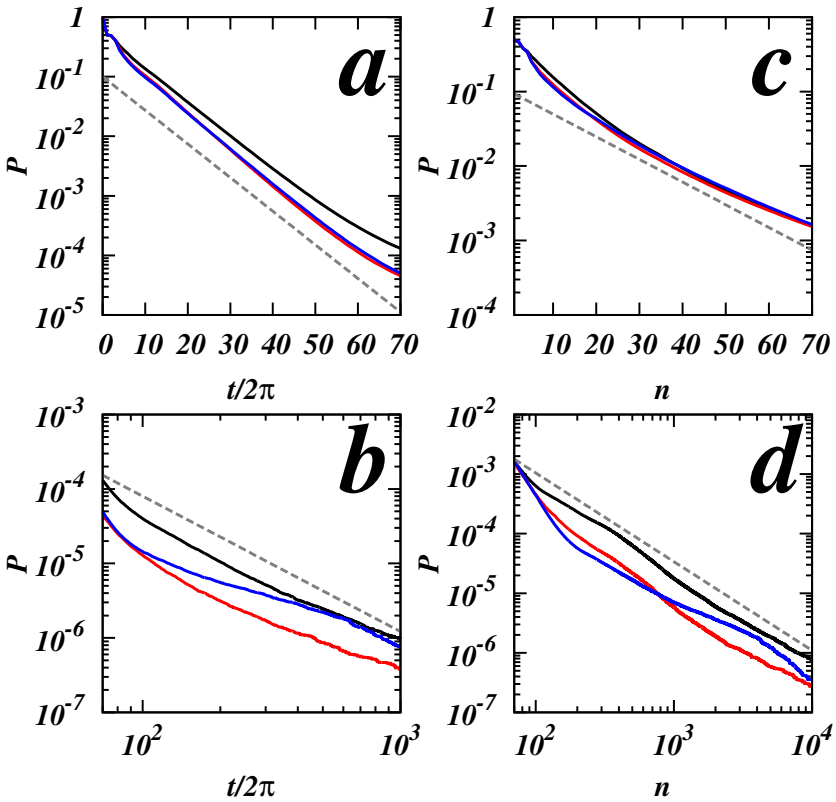

FIGURE 4.14 – Probabilité de survie des particules en fonction du temps compté en nombre de rotation du binaire $t/2\pi$ et en fonction du nombre d'apparitions n sur la section (x, y). La courbe noire est pour $\mu = 0.3$, la courbe rouge pour $\mu = 0.4$, et la courbe bleue pour $\mu = 0.5$. L'énergie est $E = -1.5$. *a*) décroissance exponentielle en fonction du temps $P(t) \propto \{-t/\tau_s\}$ avec $1/\tau_s = 0.13$. *b*) décroissance algébrique en fonction du temps $P(t) \propto 1/t^\beta$ avec $\beta = 1.82$. *c*) décroissance exponentielle $P(n) \propto \{-n/\tau_s\}$ avec $1/\tau_s = 0.07$. *d*) décroissance algébrique $P(n) \propto 1/n^\beta$ avec $\beta = 1.49$. Le rayon de ionisation est $R_s = 10$.

Dans cette section nous nous intéressons aux probabilités de survie des particules dessinant le répulseur. Soit $P(t) = N_t/N$ la probabilité pour une particule d'être dans un rayon inférieur à $R_s = 10$ au temps t. Cette probabilité est alors proportionnelle à la probabilité intégrée des récurrences de POINCARÉ [19]. Sur la Fig.4.14 nous voyons l'évolution des temps de survie en fonction du temps pour trois types de paramètre de masse $\mu = 0.3$ (noir), $\mu = 0.4$ (rouge) et $\mu = 0.5$ (bleu) et pour une énergie $E = 1.5$. Le temps est compté en nombre de rotation du système binaire de période 2π (panneaux *a* et *b*) mais aussi en nombre d'apparition de la trajectoire sur la section de POINCARÉ, nous notons ce nombre n (panneaux *c* et *d*).

Nous constatons que les probabilités de survie ont sensiblement la même évolution quelque soit μ. Nous notons en temps réel une décroissance exponentielle aux temps courts ($t/2\pi \lesssim 100$) tel que $P \propto \exp\{-t/\tau_s\}$ avec $1/\tau_s = 0.13$ et une décroissance algébrique tel que $P \propto 1/t^\beta$ au temps long ($t/2\pi \gtrsim 100$) avec $\beta = 1.82$. Avec n le nombre d'apparition sur la section, nous avons $P(n) \propto \exp\{-n/\tau_s\}$ avec $1/\tau_s = 0.07$ pour $n \lesssim 100$ et $P(t) \propto 1/t^\beta$ au temps long ($n \gtrsim 100$) avec $\beta = 1.49$.

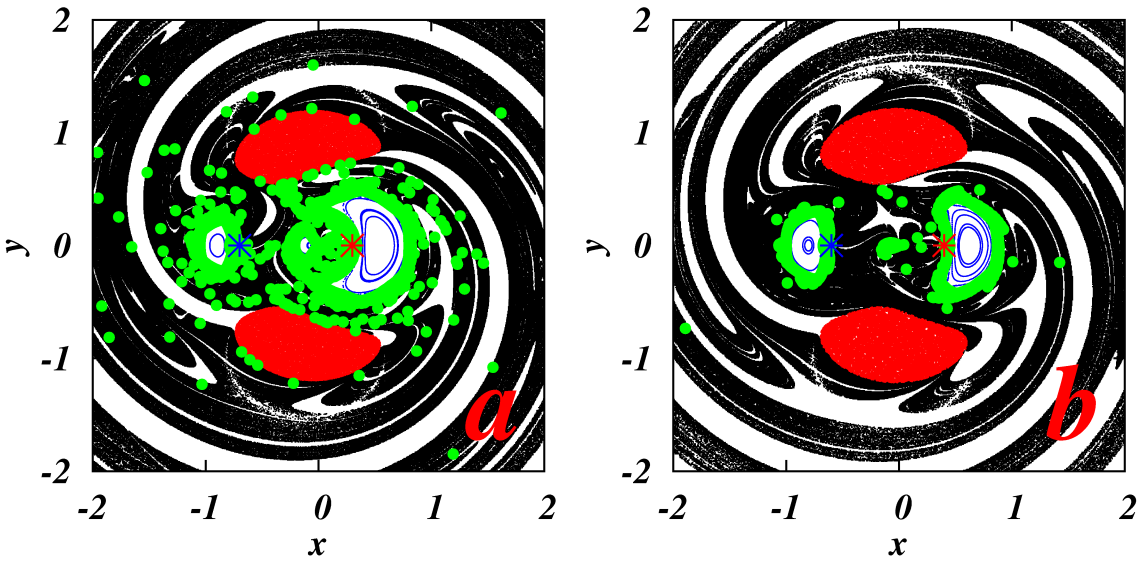

FIGURE 4.15 – Section de POINCARÉ (x, y) pour $\dot{r} = 0$ et $\dot{\phi} < 0$ pour $a)$ $\mu = 0.3$, $E = -1.5$ et $b)$ $\mu = 0.4$, $E = -1.5$. Les zones rouges représentent les zones où les modules des vitesses sont imaginaires (zones interdites) et les lignes bleus sont les trajectoires périodiques invariantes. Les points verts représentent la localisation des particules sur la section pour $t > 100$.

La nature exponentielle de la décroissance avec un temps caractéristique de l'ordre de $\tau_s \sim 10$ est typique des objets de type attracteur étrange [18]. En revanche, pour les temps plus longs, la décroissance algébrique vient de la décroissance des probabilités des récurrences de POINCARÉ (voir [19, 23, 33]). Lorsque le temps est compté en nombre d'apparition sur la section, nous avons une décroissance algébrique typique de $\beta = 1.49$ qui est très proche de la valeur $\beta = 1.5$ usuellement trouvée dans l'étude des applications symplectiques. Lorsque le temps est mesuré en nombre de rotation du binaire, cette valeur est accrue ($\beta = 1.82$). Ces temps de décroissances algébriques s'expliquent par la présence de particules restant "collées" aux îlots de KAM. Nous pouvons le constater sur la Fig.4.15 où nous avons représenté en vert les points de la section occupé par les particules à $t/2\pi > 100$ pour $\mu = 0.3$ (panneau a), $\mu = 0.4$ (panneau b) et $E = -1.5$ (panneaux a et b). Nous constatons bien que ces points se concentrent autour des îlots de stabilités. Ce mécanisme de maintien des particules autour des îlots durant un laps de temps important est responsable de la décroissance algébrique des probabilités de survie. Notons que les processus exacts à l'origine de ce mécanisme sont encore non totalement compris [61].

Pour comprendre pourquoi la décroissance algébrique en temps réel $t/2\pi$ ($\beta = 1.82$) et la décroissance algébrique en nombre d'apparition sur la section n ($\beta = 1.49$) sont différentes, on peut réaliser une simulation pour un rayon d'éjection $R_s = 100$. Nous constatons alors une décroissance exponentielle pour $P(t)$ dont le coefficient est $1/\tau_s = 0.012$ aux temps courts ($t/2\pi \lesssim 1000$) et une décroissance algébrique caractéristique avec $\beta = 1.11$ au temps longs ($t/2\pi \gtrsim 1000$). En ce qui concerne le temps compté en nombre d'apparitions sur la section, nous avons un $P(n)$ qui subit une décroissance exponentielle caractérisée par $1/\tau_s = 0.062$ aux temps courts ($t/2\pi \lesssim 1000$) et une décroissance algébrique caractérisée par $\beta = 1.40$ aux temps longs ($t/2\pi \gtrsim 1000$). Dans ce cas de figure le coefficient β est plus petit que pour $R_s = 10$. Les résultats de ces calculs sont visibles sur la Fig.4.16. Cela s'explique par le fait que les temps de présence sont déterminés par la période keplerienne d'une orbite. En effet, plus R_s est grand, plus des orbites de grande taille avec de grande période peuvent dominer et donc modifier le temps de survie dans la section. Comme

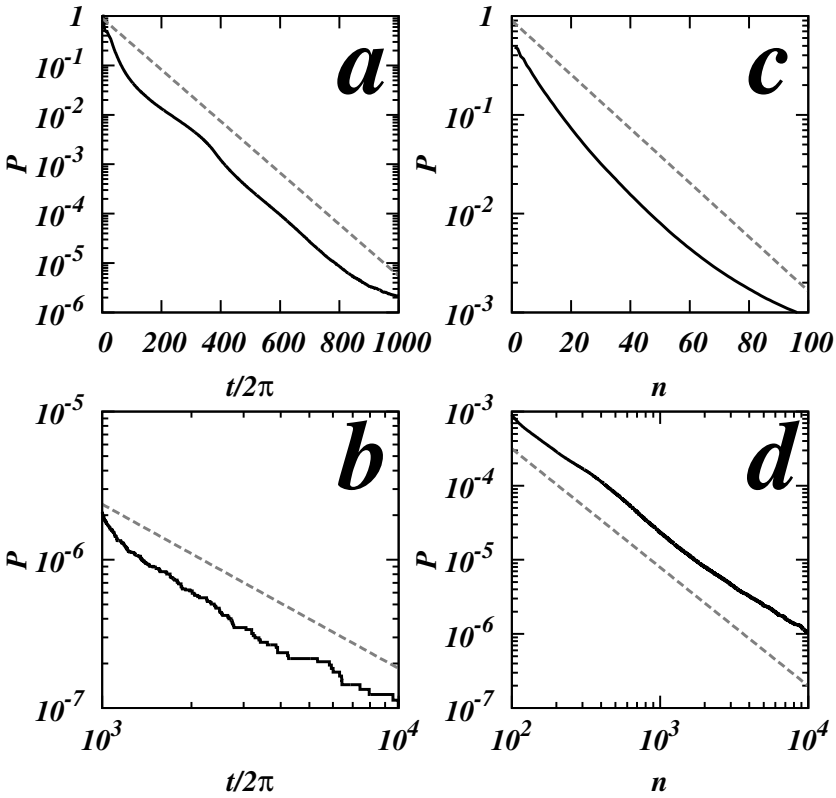

FIGURE 4.16 – Probabilité de survie des particules en fonction du temps compté en nombre de rotation du binaire $t/2\pi$ et en fonction du nombre d'apparitions n sur la section (x, y). Les paramètres sont $\mu = 0.3$ et $E = -1.5$. *a*) décroissance exponentielle en fonction du temps $P(t) \propto \{-t/\tau_s\}$ avec $1/\tau_s = 0.012$. *b*) décroissance algébrique en fonction du temps $P(t) \propto 1/t^\beta$ avec $\beta = 1.11$. *c*) décroissance exponentielle $P(n) \propto \{-n/\tau_s\}$ avec $1/\tau_s = 0.062$. *d*) décroissance algébrique $P(n)1/n^\beta$ avec $\beta = 1.40$. Le rayon de ionisation est $R_s = 100$.

discuté dans [28] on peut s'attendre à $\beta = 2/3$. En revanche, pour ce qui concerne $P(n)$ les taux de décroissances restent sensiblement identiques. Le nombre de retour sur la section n'est pas affecté par les processus dont nous venons de parler et donc $\beta \approx 1.5$. Notons que de récentes études concernant la probabilité de survie dans le problème à trois corps restreint arrivent également à $\beta \approx 1.5$ [46]. Nous avons également fait varier la valeur des énergies des particules pour voir les variations induites sur la probabilité de survie. Sur la Fig.4.17 nous voyons les probabilités de survie $P(t)$ aux temps courts ($t/2\pi < 50$) (panneau *a*) et aux temps longs ($t/2\pi > 50$) (panneau *b*) ainsi que les probabilités de survie $P(n)$ aux temps courts ($n < 50$) (panneau *c*) et aux temps longs ($n > 50$) (panneau *d*), pour les paramètres $\mu = 0.3$, $E = -1.3$ (noir), $E = -1.5$ (rouge) et $E = -1.7$ (bleu). Nous remarquons alors que la variation de la probabilité de survie ne subit pas de changement majeur pour les énergies plus faibles $E = -1.3$ et $E = -1.5$. Nous avons toujours les deux types de comportements, une décroissance exponentielle et algébrique. En temps réel $1/\tau_s = 0.14$ et $\beta = 1.87$. Nous avons aussi $P(n)$ qui varie exponentiellement avec $1/\tau_s = 0.09$ aux temps courts et algébriquement avec $\beta = 1.6$ pour les temps longs. Ces résultats peuvent s'expliquer avec les arguments que nous avons déjà donnés précédemment pour la variation de $P(t)$ et $P(n)$ avec la masse μ. En revanche, le cas $E = -1.7$ fournit un nouveau comportement. Nous constatons qu'il subit une décroissance presque uniquement exponentielle avec $1/\tau_s = 0.04$.

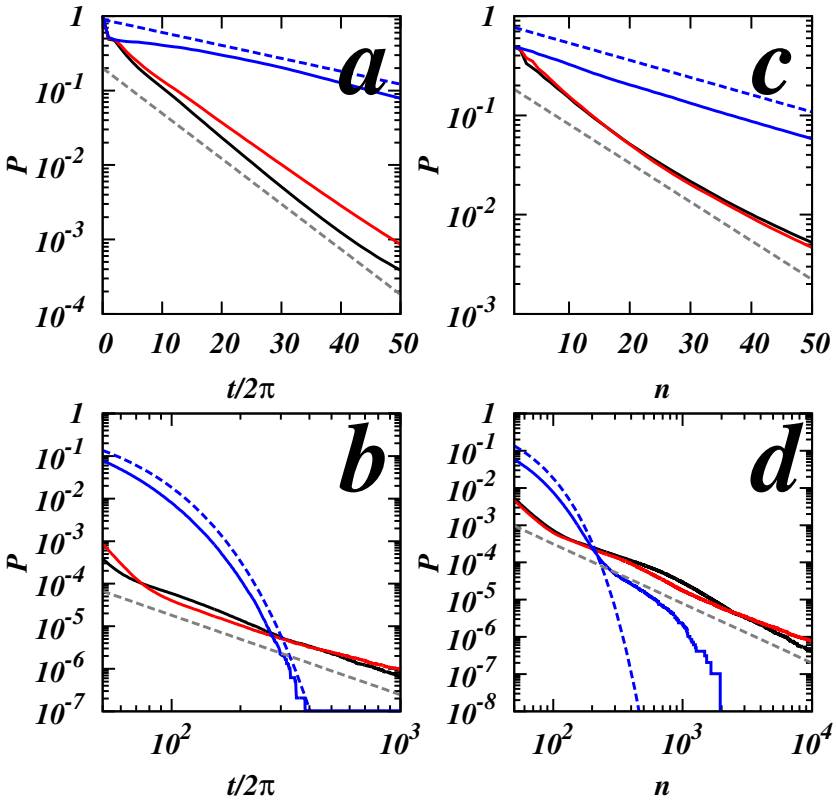

FIGURE 4.17 – Probabilité de survie des particules en fonction du temps compté en nombre de rotation du binaire $t/2\pi$ et en fonction nombre d'apparitions n sur la section (x, y). La courbe noire est pour $E = -1.3$, la courbe rouge pour $E = -1.5$, et la courbe bleue pour $E = -1.7$. Le paramètre de masse est ici $\mu = 0.3$. *a*) décroissance exponentielle en fonction du temps $P(t) \propto \{-t/\tau_s\}$ avec $1/\tau_s = 0.13$. *b*) décroissance algébrique en fonction du temps $P(t) \propto 1/t^\beta$ avec $\beta = 1.82$. *c*) décroissance exponentielle $P(n) \propto \{-n/\tau_s\}$ avec $1/\tau_s = 0.07$. *d*) décroissance algébrique $P(n)1/n^\beta$ avec $\beta = 1.49$. Le rayon de ionisation est $R_s = 10$.

Nous pouvons expliquer ce résultat par la rédiction de la composante chaotique de l'attracteur pour les hautes valeurs d'énergie Fig.4.9*d* où elle forme quasiment un anneau. Il est donc naturel que le changement dans la structure de l'attracteur induise un changement radical du comportement des probabilités de survie, en particulier de la composante algébrique provoquée par la présence des îlots de KAM.

4.5 Densité de présence dans l'espace réel

Il est intéressant d'observer si la nature fractale en spirale, visible sur les sections de POINCARÉ, influe sur la densité de présence des particules dans l'espace réel. Pour ce faire, nous avons réalisé un cliché de la position des particules pour un temps $t/2\pi = 10$ et nous avons tracé la densité des points présents, le résultat est visible sur la Fig.4.18.

Nous pouvons constater sur la Fig.4.18 que la structure bien visible sur les sections de POINCARÉ conserve sa nature spiralée dans l'espace réel. En effet, sur 4.18*a* les zones de densité plus élevées montrent bien une structure en forme de spirale à deux bras. Bien entendu, cette structure est

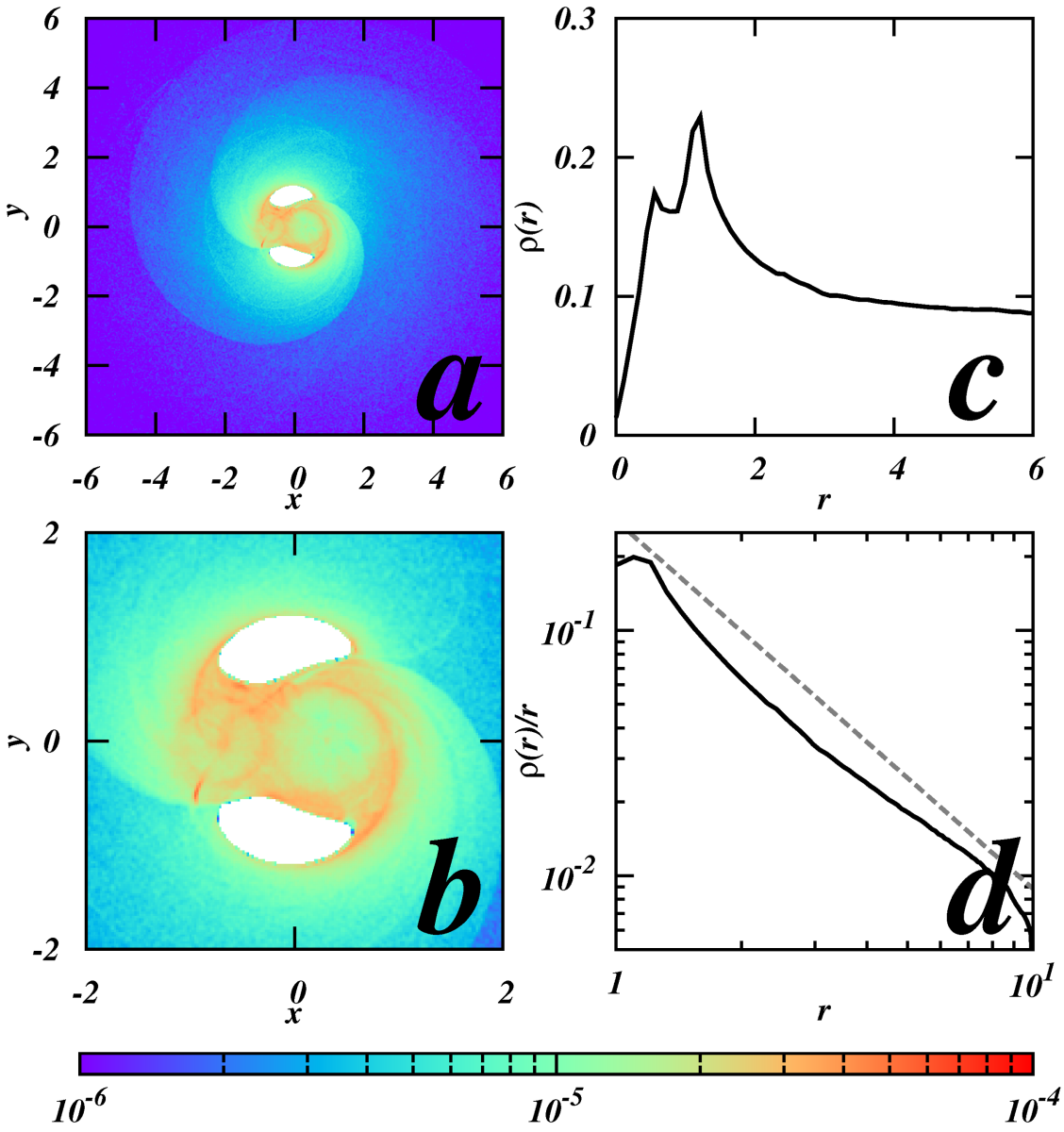

FIGURE 4.18 – Densité de présence des particules dans l'espace réel à $t = 10$ pour $\mu = 0.3$ et $E = -1.5$. Le nombre de particules initialements injectées dans l'anneau d'injection est $N = 10^8$ particules. A $t = 10$, $N_t = 13302225$ particules sont restées dans le système. *a*) et *b*) la barre de couleur montre la proportion de ces N_t particules présentes dans ces panneaux. *c*) évolution de la densité linéaire $\rho(r) = dN/dr$ avec r. *d*) densité de surface moyennée sur l'angle polaire $\rho(r)/r$. La ligne pointillée grise est $\propto 1/r^{3/2}$

très brouillée par rapport aux sections de POINCARÉ où seules les particules dont les variables $\dot{r} = 0$ et $\dot{\phi} < 0$ sont tracées. Il n'en reste pas moins que la structure conserve certaines de ces caractéristiques.

La Fig.4.18*b* et *c* montre la densité radiale et surfacique du système pour à $t/2\pi = 10$. La droite pointillée grise 4.18*d* est proportionnelle à $1/r^{3/2}$, ces résultats sont en adéquation avec les résultats obtenus pour la capture de matière noire avec utilisation d'applications symplectiques dont nous avons parlé dans le chapitres précédent (chapitre 3 [47, 79]).

4.6 Conclusion du chapitre

Au travers de ce chapitre, nous avons exploré le problème à trois corps restreint en considérant le système ouvert. Les propriétés émergentes d'un tel système montrent dans un premier temps la présence d'un répulseur étrange engendré par les particules restant dans le système sur des trajectoires chaotiques. Nous avons constaté que ce répulseur est fractal et avons établi une dimension de $D_0 \sim 1.74$ pour cet objet dans le cas d'énergies typiques de l'ordre de $E = 1.5$.

Nous avons également constaté que la nature spiralée de ces structures persistent dans l'espace réel. Une nature spiralée a déjà été trouvée dans [24], dans la même optique une analyse géomètrique de la forme des spirales trouvées serait intéressante. Notons que les structures des galaxies donnent une dimension fractale en spirale $D_g \approx 1.3-1.7$ [27, 82, 83]. Nous n'excluons pas qu'il puisse y avoir un lien entre le répulseur étrange mis au jour dans le système à trois corps restreint et la nature des bras spiraux des galaxies elles-mêmes. Bien entendu, cela nécessiterait des investigations plus poussées concernant à la fois la structure des galaxies mais aussi la nature du répulseur, notamment dans l'espace à trois dimensions. L'existence de ce lien pourait être établi en étudiant la structure invariante dans des modèles utilisant les potentiels de galaxie barrée par exemple. Ceux-ci laissent émerger une forme spiralée [21, 93].

Les variations des probabilités de survie des particules ont également été établies pour les différents paramètres de masses et d'énergies. Pour faire le lien avec les chapitres précédents de la thèse, il est important de noter que de nombreuses caractéristiques observées ici peuvent également l'être avec l'utilisation des applications symplectiques, notamment la décroissance algébrique en $1/n^\beta$ avec $\beta \approx 1.5$ due à la présence des îlots de KAM. Signalons ici que l'étude des récurrences de Poincaré dans le cas de la "standard map" et de la "separatrix map" a été traitée dans [17]. Cette étude montre notamment que la décroissance exponentielle des temps de récurrences de Poincaré constitue la jonction entre deux décroissances algébriques. Notons cependant que dans les cas classiques où l'on utilise l'application de Kepler $\mu \ll 1$ les particules en présence sont faiblement liées et ont des temps de séjours extrêmement longs. Notons également que l'analyse fractale n'est pas adaptée à ces cas, car la dimension est $D_0 = D = 2$ [68, 50].

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons abordé le problème à trois corps restreint sous deux angles différents. L'étude par utilisation d'une application symplectique et l'étude par intégration directe des équations du mouvement. Au cours de ce travail, nous avons abordé trois étapes de la dynamique d'une particule de faible masse par rapport aux masses composant le système binaire. Le schéma d'étude capture-évolution-éjection a alors été suivi.

Dans le premier chapitre, nous avons posé les bases de la construction d'une application symplectique. Cette application est le fruit de plusieurs travaux [74, 75, 53, 96] visant à étudier le comportement des comètes en présence du Soleil et de la planète Jupiter, le principal perturbateur. Nous avons vu que la dynamique des comètes est une dynamique frappée en tout point similaire à l'application de Fermi qui vise l'étude de particules frappées. La différence réside dans le second terme de l'application qui suit la loi de Kepler.

Nous avons vu qu'avec le modèle simplifié de la dynamique des comètes qu'est l'application de Kepler, les principales caractéristiques de la dynamique sont très bien rendues. L'ensemble du processus capture-évolution-éjection peut y être étudié d'un point de vue statistique. L'application de Kepler rend un grand service quand à la description des phénomènes mis en jeu dans ce type de dynamique. En effet, la nature des orbites : chaotique, invariante, ou mixe des deux y est représentée de façon fidèle.

Dans notre étude, nous avons utilisé l'application de Kepler pour décrire le mouvement de la comète de Halley [78]. Cette étude a fait suite aux travaux de [20]. La différence et le caractère original de ces travaux résident dans l'utilisation de la fonction perturbatrice réelle de Jupiter et de toutes les planètes du système solaire alors que jusque là, dans ce type d'étude, une fonction perturbatrice simplifiée en dent de scie avait été utilisée. Nous avons également employé une méthode numérique basée sur le calcul du travail de la force pour calculer numériquement la forme de cette fonction perturbatrice. Ce dernier élément nous a permis :

- de calculer très précisément la forme de l'ensemble des fonctions perturbatrices du système solaire et de montrer que la perturbation globale d'une comète réside dans la somme de ces fonctions.
- de démontrer que cette fonction perturbatrice est composée de deux termes : un terme keplerien en $1/r$ et un terme dipolaire en $1/r^2$. Le premier terme correspond à la perturbation de la planète, le second au mouvement du Soleil par rapport au centre de masse du système.

Il a également été possible de montrer de façon très simple que le piégeage dynamique de la comète au sein des îlots de stabilité de la perturbation engendrée par Jupiter était possible. Il suffit pour cela simplement d'ajouter un autre élément perturbateur au système (Saturne) pour obtenir des phénomènes déjà mis en avant avec des simulations numériques plus lourdes [26]. Un autre élément est l'importance de la forme de la fonction perturbatrice sur la structure de la section de Poincaré engendrée par l'application. En effet, nous avons pu voir qu'une fonction perturbatrice en dent de scie tend à laisser plus d'îlots invariants de KAM dans la section qu'une fonction plus lisse. Elle a aussi une importance dans la hauteur du dernier invariant de KAM.

Fort de l'expérience acquise dans l'étude de l'application de Kepler, nous l'avons utilisée pour

simuler un flux de plusieurs milliards de particules de matière noire traversant un système double [79]. Ce travail était centré sur la capture de matière par des systèmes binaires, il fait suite aux travaux réalisées par I. I. Khriplovich et D. L. Shepelyansky [45] ainsi que ceux de J. Lages et D. L. Shepelyansky [47], l'idée étant de déterminer un taux de particules de matière noire capturées au sein des systèmes binaires. Nous avons pu montrer que la distribution des énergies des particules capturées suivait une loi en $1/w^{-3/2}$ caractéristique d'une distribution ergodique de ces particules, ce fait ayant déjà été souligné dans [47]. Les études antérieures, qu'elles soient basées sur l'utilisation de l'application symplectique [45, 47], sur des arguments analytiques [36, 45] ou sur l'intégration directe des équations du mouvement [70, 71, 72] montraient qu'il n'était en général pas possible de capturer une masse importante de matière noire autour de système binaire avec une faible vitesse de rotation du type Soleil-Jupiter. Notre étude a montré, via certaines simplifications, que le phénomène de capture est majeur pour les systèmes binaires rapides. En effet, l'accroissement local de la densité de matière noire de la Galaxie peut atteindre un facteur 10^4 pour ces systèmes ! Nous avons de plus estimé ce facteur pour différentes valeurs de vitesses de rotations ainsi que de rapports de masse. Un autre élément important est la forme de la densité volumique que produisent les halos capturés que nous avons générés par nos simulations. Nous notons qu'ils ont un comportement compatible avec la forme des halos de matière noire des galaxies eux-mêmes et n'excluons pas la possibilité d'un lien entre la dynamique à trois corps que nous avons décrite numériquement et la forme des halos réels de matière noire.

Dans un troisième temps, nous avons étudié l'éjection de particules en intéraction dans un système à trois corps restreint. Cette fois nous n'avons pas procédé à la simplification usant de l'application symplectique mais intégré directement les équations du mouvement [80]. Ici, plus aucune restriction sur le rapport de masse entre les éléments du binaire n'est imposée. Pour éviter tout problème de divergence sur les masses du système binaire nous avons employé un régularisation de type Levi-Civita [51, 13, 12] et avons intégré massivement les équations du mouvement de 10^8 particules avec un cluster de calcul. En considérant un rayon limite à partir duquel la particule est ionisée, le système devient un système ouvert et nous avons pu étudier la nature du repulseur étrange généré dans la section de Poincaré (x, y) par les particules restant dans le système. Ce type de répulseur était déjà visible dans certaines études [65, 66] mais n'avait pas encore fait l'objet d'une étude systématique. Nous avons pu montrer une nature fractale dont la dimension est $D_0 \sim 1.74$ pour ce repulseur pour des paramètres de masse et d'énergie caractéristique $\mu = 0.3$, $E = -1.5$. Nous avons également pu voir que la probabilité de survie de ces particules suivait, pour les temps longs, une loi algébrique universelle [19, 23, 33] en $\sim 1/n^{1.5}$ ou n est le nombre d'apparitions sur la section, déjà établie pour les applications symplectiques. Nous avons également montré des profils de densité surfacique proches de ceux obtenus dans l'étude de la capture des particules de matière noire [47, 79]. Nous avons également remarqué le caractère spiralé de ces structures et n'excluons pas un lien avec la nature en spirale des structures des galaxies elles-mêmes.

A ce jour, de nombreuses perspectives peuvent émerger de ces travaux. Par exemple, l'utilisation de l'application symplectique pour étudier les mécanismes de transfert de matière entre différents systèmes de nature double pourrait être très intéressante et permettrait de raffiner certaines études récentes concernant la panspermie [6]. Une autre approche viserait à ajouter certains paramètres à l'application symplectique de Kepler pour, par exemple prendre en compte l'évolution du moment cinétique de la particule. Notons, que de récents calculs effectués par nos soins tendent à montrer que la fonction perturbatrice subit une décroissance non négligeable de son amplitude au cours de la dynamique. Cela pourrait avoir pour effet de considérablement diminuer la hauteur en énergie du dernier invariant de KAM. Une autre perspective, sans doute liée à cette dernière, serait d'étudier la dynamique en prenant en considération une équation de type Fokker-Planck qui est valable lorsque la dynamique est purement chaotique. Ce type de formalisme serait sans doute susceptible de fournir plus de résultats analytiques que les simulations réalisées dans cette thèse.

Annexes

Annexe A

Publications

Symplectic map description of Halley's comet dynamics

G. Rollin, P. Haag, J. Lages, Phys. Letters A, 379 :14–15 (2015).

Abstract : We determine the two-dimensional symplectic map describing 1P/Halley chaotic dynamics. We compute the Solar system kick function, i.e. the energy transfer to 1P/Halley along one passage through the Solar system. Each planet contribution to the Solar system kick function appears to be the sum of a Keplerian potential and of a rotating gravitational dipole potential due to the Sun movement around Solar system barycenter. The Halley map gives a reliable description of comet dynamics on time scales of 10^4 yr while on a larger scales the parameters of the map are slowly changing due to slow oscillations of orbital momentum.

Chaotic enhancement of dark matter density in binary systems

G. Rollin, J. Lages, and D. L. Shepelyansky, Astron. Astrophys., 576, A40 (2015).

Abstract : We study the capture of galactic dark matter particles (DMP) in two-body and few-body systems with a symplectic map description. This approach allows modeling the scattering of 10^{16} DMPs after following the time evolution of the captured particle on about 10^9 orbital periods of the binary system. We obtain the DMP density distribution inside such systems and determine the enhancement factor of their density in a center vicinity compared to its galactic value as a function of the mass ratio of the bodies and the ratio of the body velocity to the velocity of the galactic DMP wind. We find that the enhancement factor can be on the order of tens of thousands.

Fractal structures for the Jacobi Hamiltonian of restricted three-body problem

G. Rollin, J. Lages and D. L. Shepelyansky, arXiv :1509.07638 (2015)

Abstract : We study the dynamical chaos and integrable motion in the planar circular restricted three-body problem and determine the fractal dimension of the spiral strange repeller set of non-escaping orbits at different values of mass ratio of binary bodies and of Jacobi integral of motion. We find that the spiral fractal structure of the Poincaré section leads to a spiral density distribution of particles remaining in the system. We also show that the initial exponential drop of survival probability with time is followed by the algebraic decay related to the universal algebraic statistics of Poincaré recurrences in generic symplectic maps.

Annexe B

Femmes et Physique

> Chères conquérantes de terres inconnues — et non encore complètement conquises —, reposez en paix. Vos filles ne vous oublieront pas [...]
>
> Elisabeth Badinter
> Emilie, Emilie : l'ambition féminine au XVIIIème siècle

Souvent éclipsées, maltraitées par l'histoire ou parfois même non citées sur certaines publications scientifiques malgré leurs contributions, j'ai eu envie d'écrire une annexe à cette thèse dédiée à quelques femmes physiciennes ou mathématiciennes. Ces femmes ont toutes eu un lien important avec les développements et/ou les perspectives liés à ce présent travail de thèse.

	Enseignement Supérieur [1]			CNRS [2]		
	MdC	Prof	Section CNU	CR	DR	institut
Math et inf.	26.4 %	14.5 %	s25-s27	13.8 %	15.3 %	INM
Phys. mat.	28.0 %	12.8 %	s28+s30	23.1 %	16.7 %	INP
Phys. part. élém.	23.5 %	8.8 %	s29	27.0 %	16.7 %	IN2P3

Table B.1 – Pourcentage de femmes dans le millieu de la recherche française [3] (Données gracieusement fournies par Véronique Pierron-Bohnes, Présidente de la Commission *Femmes et Physique* de la SFP).

Il y a 2 ans, pour la première fois, le prix Henri Poincaré était décerné à deux femmes : Mesdames Nalini Anantharaman et Sylvia Serfaty pour leurs travaux en mathématiques. En 2014, l'irano-américaine Maryam Mirzakhani était la première femme à recevoir la médaille Fields. La proximité de ces événements — qui montrent la possibilité de tels actes pionniers au XXIème siècle — tend à dévoiler l'existence de certaines frictions sur le parcours des femmes semblant gêner leur dynamique. Cela peut d'ailleurs être confirmé, pour le cas de la France, par le tableau des pourcentages de femmes présentes dans le milieu de la Recherche Tab.B.1.

Essayer de rendre hommage à quelques noms parfois oubliés était, je le crois, important. La suite de cette annexe comporte le portrait de 6 femmes ayant marqué l'histoire des idées.

1. Source : Enseignants-chercheurs : répartition par discipline, région et sexe :
http://sd-2.archive-host.com/membres/up/38164215153597045/_Stat_CNU_Sexuee_IDF_Regions.pdf
2. Source : la parité dans les métiers du CNRS 2008/09 :
http://www.cnrs.fr/mpdf/IMG/pdf/livretparite20082009_bd.pdf.pdf
3. Source : Femmes et Physique, la commission reprend du service :
http://www.refletsdelaphysique.fr/articles/refdp/pdf/2011/05/refdp201127p32.pdf

Emilie Du Châtelet [1]

On associe trop souvent de manière rapide le nom d'Emilie du Châtelet à celui de Voltaire avec qui elle a vécu une histoire d'amour passionnée. On en oublie ainsi toute la personnalité et l'importance de ses travaux scientifiques. Née le 17 décembre 1706 à Paris, fille de Louis Nicolas Le Tonnelier De Breteuil et de Gabrielle Anne De Froulay, Madame du Châtelet tire parti de sa naissance dans la noblesse. C'est ce statut social qui lui permettra de devenir la savante qu'elle sera. Cependant, il serait rapide de limiter son futur à ce simple état de fait.

Durant son enfance Emilie sera toujours poussée en avant par des parents, en particulier un père, qui a une passion dévorante pour les connaissances. Aucun savoir ne sera interdit à Emilie. A la maison, 3 pièces seront "sacrifiées" pour y loger une bibliothèque. Assez vite, elle pourra participer aux salons que tient son père entouré des plus grand esprits de l'époque. A un peu plus de 10 ans elle parlait déjà physique et astronomie avec Fontenelle. Ces faits sont rares pour l'époque où les connaissances étaient plutôt réservées aux fils de la famille. Toute sa vie elle restera une insoumise et une anticonformiste. Magré tout, elle sera mariée à Florent Claude, marquis Du Châtelet (choix de son père), ce qui lui confère son titre de marquise et le nom qu'on lui connait.

A 17 ans elle a reçu une éducation dans tous les domaines et a assez de connaissances en langue pour lire le philosophe John Locke dans le texte. Son père lui fera donner des cours de métaphysique et de mathématique, domaines dans lesquels se porte le plus son appétit. L'un de ses précepteur sera Maupertuis.

Son ambition de l'époque est de devenir la première femme savante de l'histoire. C'est un bourreau de travail qui ne dort que 2 heures par nuit ! Emilie a tous les traits de caractère que l'on donne parfois aux hommes ambitieux. Elle est extrêmement colérique, possessive et tyrannique. Anecdote amusante ; lors de son histoire passionnée avec Voltaire, elle met sous clef certain des ouvrages en construction de l'auteur estimant qu'il perdait son temps avec la poésie et qu'il ferait mieux de se concentrer sur les oeuvres de Newton ! Ce dernier obtempère...

En 1738, elle choisira la physique définitivement comme sujet d'étude. Epicurienne, elle voit dans cette science une manière de mieux être. Il n'y a pas chez elle une volonté de vérité absolue, mais une véritable jouissance au décryptage du monde. Cette année est aussi l'année de sa première publication. Il s'agit d'un mémoire sur le feu pour le prix de l'Académie des Sciences. Voltaire, protecteur de toujours, demandera que le mémoire soit publié en précisant bien qu'il s'agit de l'œuvre d'une femme.

A cette époque la science n'est pas qu'une occupation de spécialistes, elle est hautement politique et il y a débats entre les partisans de Leibniz et ceux des nouvelles idées de Newton. Le premier nous parle de la conservation des forces vives (*vis-vivas*) qui en terme moderne correspond au double de l'énergie cinétique d'un système. Le second, associé aux idées de Descartes est partisan de la conservation de la quantité de mouvement. Dans son ouvrage *Les Institutions de Physique* Emilie se placera du côté des théories leibniziennes. A cette époque, pour des raisons philosophiques et sans entrer dans le détail des conclusions de Leibniz, c'est un sacrilège pour beaucoup en particulier pour Voltaire. La polémique enfle en rappelant que Madame du Châtelet s'était plutôt montrée newtonnienne dans son mémoire sur le feu. Ce dernier élément fait douter de son sérieux. Emilie ne prendra jamais totalement partie pour l'une ou l'autre des deux visions. Elle tentera cependant toute sa vie de concilier les deux. L'histoire lui donnera raison.

En 1745 elle relira Newton et sa décision sera prise de traduire les *Philosophiae naturalis principia mathematica*, travail auquel elle s'adonnera jusqu'à la toute fin de sa vie. Elle rendra un immense service à la communauté scientifique de l'époque en effectuant ces traductions, c'est ce qui la fera entrer dans l'histoire. Elle meurt le 9 septembre 1749. Plus tard, la femme de lettre Louise Collet rappellera l'importance de Madame Emilie du Châtelet pour le milieu scientifique mais aussi pour la diffusion des sciences en France au XVIIIème siècle.

1. Emilie, Emilie : l'ambition féminine au XVIIIème siècle, Elisabeth Badinter

Sofia Kovalevskaïa [2] [3]

Sofia Kovalevskaïa est née le 15 janvier 1850 à Moscou. Elle est issue d'une famille aristocratique. Son père est le Général Vasily Vassilievitch Korvin-Krukovsky et sa mère Elisabeth Shubert. Quelque temps après, la famille part vivre à la campagne. A cette époque Sofia se voit devenir poète. Elle écrit des poèmes mais ne les conserve que dans sa mémoire, cette activité étant plutôt mal vu par son institutrice. Elle lit beaucoup également.

Les deux personnes qui l'a feront basculer dans l'amour des activités intellectuelles sont sans conteste ses deux oncles Pierre Vassilievitch Korvin-Krukovsky et Théodor Schubert. Le premier est un être très particulier, excentrique mais d'une grande culture. Sa venue est toujours la promesse de grands débats à la maison. Il parle notamment de mathématiques dont il a quelques notions. Le second discute également beaucoup avec Sofia de science. Autre origine de fascination scientifique : le papier peint venant à manquer dans la chambres des enfants, les murs étaient couverts d'anciens cours de calcul intégral et différentiel d'Ostrogradsky. La jeune Sofia ne comprendra rien à ces écritures mais les observera longtemps, essayant de rapiécer les différentes parties éparpillées sur le mur. Elle raconte que cela l'a aidé lors de ses premiers cours de calcul différentiel car rien ne lui était étranger.

Entre 1860 et 1870 se produit une scission des générations en Russie. De nouvelles idées venues des villes inondent les campagnes. Les filles cherchent alors à se libérer du joug patriarcal. C'est dans ce cadre que sa sœur Aniouta, se met à écrire. C'est ainsi qu'après une forte réticence, son père accepte qu'Aniouta rencontre Dostoïevski qui trouve son travail intéressant. Sofia fera partie du voyage, cela nourrira sans nul doute sa curiosité littéraire.

Convaincu par un ami de la famille qui a remarqué les dons de Sofia, Vasily Vassilievitch laisse sa fille faire des études en sciences. En 1868 elle se marie à un jeune géologue Voldmar Kovalevsky. Il s'agit d'un mariage blanc contracté afin d'obtenir son indépendance. Elle restera cependant très proche de cet homme. En 1869 ils partent tous les deux à Heidelberg où elle étudiera les mathématiques. En 1870 elle part à Berlin suivre les cours de Weierstrass. L'Université est alors interdite aux femmes et elle demandera des cours particuliers au père de l'analyse. Il l'a mettra à l'épreuve et avant de l'accepter comme élève, lui soumettra quelques problèmes difficiles. En une semaine Sofia a réussi à les résoudre aussi bien que les meilleurs élèves de Weierstrass.

Elle obtiendra son doctorat en 1874, grâce notamment à un travail : *Sur la théorie des équations aux différences partielles*, et ce sans se présenter en personne. Elle exprime ses motivations à ne pas passer l'examen oral dans une lettre adressée au Doyen de la faculté de Göttingen ; il y est question de manque d'assurance à l'oral et d'une faible maîtrise de la langue allemande. La valeur de ses dissertations ainsi que les excellentes recommandations dont elle dispose lui feront obtenir cette rare dispense. Ce manque d'assurance ainsi qu'une inaptitude totale à toute activité d'ordre pratique marqueront son caractère durant toute sa vie.

Après un retour en Russie et l'arrêt de son activité scientifique, le professeur Gösta Mittag-Leffler, militant pour l'égalité homme-femme lui obtient le droit de donner des conférences privées à Stockholm. Ce droit se muera d'abord en un poste de professeur pour une durée de 5 ans puis en un poste permanent. A cette même époque, il était encore interdit à Sofia de simplement suivre des cours à Berlin. Elle reprend alors un travail scientifique et en parallèle commence une collaboration littéraire avec Anne-Charlotte Leffer la sœur de Gösta.

En 1888 elle reçoit le prix Brodin dont le sujet était : *Perfectionner en un point important la théorie du mouvement d'un corps solide.* Elle meurt en 1891 d'une infection pulmonaire. Anne-Charlotte Leffer écrira d'elle : "[...] elle a vécu avec intensité, bu à la coupe du bonheur et de la tristesse, nourri son intelligence aux sources de la science, gravi des hauteurs où l'imagination seule peut élever [...]".

2. Sophie Kovalewsky, Souvenirs d'enfance, écrit par elle-même et suivis de sa biographie par A.-Ch. Leffler, Librairie Hachette et Cie, 1895

3. Sophie Kovalevskaia : https://lmb.univ-fcomte.fr/spip.php?article341

Emmy Noether [4] [5]

Emmy Noether est née le 23 mars 1882 à Erlangen en Bavière. Elle est la fille de Max Noether et de Ida Kaufmann. Son environnement intellectuel durant son enfance était plutôt privilégié. En effet, son père était un mathématicien ayant remporté le prix Steiner en 1882.

Au départ, Emmy s'oriente vers l'étude des langues et réussit un examen lui permettant d'enseigner l'anglais et le français dans un établissement féminin. Alors qu'elle s'inscrit à l'université en tant qu'auditrice, les registres de l'époque évoquent, une auditrice et 984 étudiants ! Elle y suivra des cours de langue et d'histoire. Cependant, en 1904 les universités s'ouvrent vraiment totalement aux femmes, elle s'y inscrit à Erlagen après avoir suivi des cours à Göttingen auprès de K. Schwarzchild, F. Klein et D. Hilbert. Cette fois elle se consacre uniquement aux mathématiques.

Poursuivant ses études, c'est sous la direction de P. Gordon qu'elle effectue sa thèse. Il semblerait que ce ne fût pas une expérience très agréable pour elle. En parlant de cette thèse elle dira : "... qu'il valait mieux ne pas en parler...". Elle travaillera ensuite bénévolement en mathématique à Erlangen pour aider son père à la santé fragile.

En 1915, elle est invitée à Göttingen par F. Klein et D. Hilbert. Du coté de la physique, le trio résoudra le problème de l'apparente non-conservation de l'énergie de la théorie des champs classiques qu'est la Relativité Générale. La solution est issue des théorèmes qui seront nommés d'un commun accord *Théorème de* Nother. C'est essentiellement ce qui reste d'elle à l'esprit du physicien moderne. A cette époque Einstein écrivit à Hilbert pour lui dire le plus grand bien qu'il pensait des travaux de Emmy. Il est vrai que ce théorème joue un grand rôle dans la mécanique aussi bien classique que quantique. Dans ce présent travail de thèse, il est passé sous silence mais il est une pierre angulaire de la compréhension des quantités conservées dans un système dynamique et de leurs rapports aux symétries d'un système. D'un point de vue purement mathématiques les développements d'Emmy semblent, d'après P. Dubreuil, bien plus importants. Elle est, pour lui, la véritable mère de toute l'algèbre moderne. Le mathématicien lira avec profit les pages qu'il a dédiées à ces developpements mathématiques que l'on peut retrouver dans l'un des *Cahiers de séminaires d'histoire des mathématiques*[4].

Il est important de faire remarquer que durant un gros laps de temps, Madame Noether publia et travailla à Göttingen sans salaire et sans poste parce qu'elle était une femme. Cela mit très en colère Hilbert. On raconte qu'il aurait déclaré en pleine séance du conseil de l'Université : "Je ne vois pas en quoi le sexe d'un candidat est un argument contre son admission. Après tout nous sommes une Université pas un bain publique !". En 1919 on lui accordera son habilitation à donner des conférences et à être payée pour cela.

En 1933 elle sera à nouveau interdite d'exercer, parce que juive mais aussi parce que femme, ainsi le veut le Reich naissant : "Kirche, Kinder, Kürche" pour la gente féminine.

Elle immigrera alors en Pennsylvanie en 1934 où elle travaillera dans un collège pour filles à Bryn Mawr. Elle sera assez dépaysée par cet environnement, loin de la recherche de pointe. Elle effectuera quand même des conférences à Princeton. Elle meurt brutalement le 14 avril 1935 des suites d'une complication post-opératoire. Elle n'aura jamais bénéficié d'un poste à Princeton où elle se sentait bien plus dans son élément. La prestigieuse Université lui préférera un homme, R. Brauer, pour son groupe d'algèbre. H. Weyl dira d'elle : "Elle fut un grand mathématicien [...] Mais elle fut aussi une femme de grande classe".

4. Women in Physics in Fermi's Time, Nina Bayers (Proceedings of the International Conference "Enrico Fermi and the Universe of Physics", Rome, September 29 – October 2, 2001)

5. Emmy Noether, Paul Dubreil, Cahier de séminaire d'histoire des mathématiques, tome 7 (1986) : 15-27.

Phyllis Nicolson [6] [7]

Phyllis Nicolson est née en 1917 sous le nom de jeune fille Lockett. Elle reçoit un doctorat de physique de l'Université de Manchester en 1946. Durant cette période, elle sera membre du groupe de recherche dirigé par D. Hartree.

Sa contribution majeure fût faite avec J. Crank dans leur article de 1947 *A pratical method for numerical evaluation of solution of partial différential equation of the heat-conduction type.* Cette méthode de résolution est d'importance majeure dans l'une des perspectives des travaux présentés dans cette thèse. Elle permet en effet de résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles paraboliques du type

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}P(x,t)\right)$$

cette équation décrivant la diffusion de la chaleur de façon anisotrope, aussi bien que la diffusion d'une particule dans l'application de Kepler (cas de l'approximation des phases aléatoires loin des îlots de KAM).

Phyllis Nicolson meurt en 1968. Bien que sa méthode de résolution développée avec J. Crank reste célèbre et très utilisée aujourd'hui, il y a malheureusement peu de biographie exhaustive concernant Madame Nicolson.

Mary Tsingou [8]

Née le 14 octobre 1928 dans le Wisconsin, Mary Tsingou passe son enfance aux Etat-Unis. Elle déménage ensuite en Europe où son père possède une propriété, elle sera assez vite de retour au USA chassée par la guerre.

En 1952 son diplôme de mathématiques (BS) en poche elle rentre au *Los Alamos National Laboratory*, elle obtiendra un autre diplôme en mathématiques (MS) en 1955. A cette époque, les femmes ne sont pas vraiment écouragées à poursuivre dans la voie mathématique, elle bénéficiera des postes laissés vacants par les hommes partis pour la guerre de Corée.

Elle travaille alors sur le nouvel ordinateur MANIAC I, bien qu'étant utilisé pour des questions d'armement, de temps à autre (surtout les week-ends), les chercheurs du laboratoire utilisent les performances de la machine pour réaliser des programmes d'échecs ou résoudre des problèmes de physique. C'est dans cet environnement que Mary entrera en contact avec Pasta, Ulam et dans une moindre mesure avec Fermi. C'est ce dernier qui aura l'idée d'utiliser l'ordinateur pour réaliser des expériences numériques.

La celèbre expérience de Fermi-Pasta-Ulam (FPU), dont nous avons parlée dans cette thèse et dont le résultat concernant les systèmes presque intégrables sera tant surprenant, est aussi en partie l'oeuvre de Mary. Bien que le rapport de l'époque n'évoque son nom que dans deux lignes de remerciements, c'est elle qui sera à l'origine de la programmation, non triviale à l'époque, de cette expérience.

Par la suite, Mary travaillera toujours avec des ordinateurs sur des expériences numériques en lien avec l'équation de Schrödinger où encore avec John von Neumann sur la mécanique des fluides. Elle deviendra une spécialiste du langage Fortran créé pas IBM et aujourd'hui massivement utilisé.

Elle part en retraite en 1991 et vit de nos jours à Los Alamos non loin de l'endroit où a été réalisée la fameuse expérience FPU. Aujourd'hui, des physiciens comme Thierry Dauxois militent pour que la dite expérience porte le nom Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou.

6. History of Mathematics at Manchester :
http://www.maths.manchester.ac.uk/about-us/history/phyllis-nicolson/
7. Phyllis Nicolson : http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nicolson.html
8. Thierry Dauxois, *Fermi, Pasta, Ulam, and a mysterious lady*, Physics Today, Janvier 2008 p. 55-57

Vera Rubin [9] [10] [11] [12]

Vera Rubin est née le 23 juillet 1928 en Pennsylvanie et a grandi à Washington D.C. C'est son père qui l'encouragea à poursuivre dans la voie de la recherche scientifique. Il l'aidera notamment à construire son propre télescope (son père était ingénieur). Elle suivit des cours au Vessar College en particulier parce qu'à l'époque c'était une des seules institutions enseignant l'astronomie qui acceptait des femmes. Quand elle postula à Princeton elle fut refusée avec la mention : "we do not accept woman". Elle obtient un doctorat de l'Université de Georgetown sous la direction de George Gamow. Elle a ensuite enseigné à Georgetown et au County Junior College.

Plus tard elle rejoignit W. Kent Ford Jr. l'un des auteurs du celèbre article écrit avec N. Thonnard : *Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range luminositis and radii, from NGC 4405 (R = 4 kpc) to UGC 2885 (R = 122 kpc).* W. Kent Ford Jr. est l'inventeur d'un tube spectrographe pour étudier et mesurer les courbes de rotations des galaxies dont nous avons parlé dans l'introduction du chapitre 3 de cette thèse.

Les études qu'elle a menées sont l'une des origine du concept de halo de matière noire tel qu'on le connait à l'heure actuelle. Vera Rubin sera, dans les années 60, la première femme à utiliser le télescope du Mont Palomar légalement. A l'époque, l'utilisation du télescope est interdite aux femmes et les équipes de recherches étaient exclusivement composées d'hommes. Ce qui valait au quartier d'habitation du télescope le surnom de "Monastère".

Aujourd'hui Vera Rubin est membre émérite du Département de Magnétisme Terrestre de la Carnegie Institution de Washington. C'est une militante pour l'encouragement des femmes et des minorités à la poursuite de leurs ambitions scientifiques.

Elle a remporté la Médaille Bruce en 2003.

9. The Bruce Medalist : http://www.phys-astro.sonoma.edu/brucemedalists/rubin/
10. Page perso : https://home.dtm.ciw.edu/users/rubin/
11. Mount Wilson and Palomar : http://apps.carleton.edu/campus/observatory/research/cindystudents/1998mn/history/mtwilson/
12. Reprint du *Mercury Magazine*, Astronomical Society of the Pacific, *Women in Astronomy* par Sally Stephen ed. 1992 http://w.astro.berkeley.edu/ gmarcy/women/history.html

Bibliographie

[1] E. G. Altmann, J. S. E. Portela, and T. Tél. Leaking chaotic systems. *Rev. Mod. Phys.*, 85 :869, 2013.

[2] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer-verlag edition, 2nd edition-1989.

[3] H. Babcock. The rotation of the Andromeda nebula. *Lick Obs. Bill.*, 498 :41–51, 1939.

[4] A. N. Baushev. Principal properties of the velocity distribution of dark matter particles near the solar system. *Journal of Physics : Conference Series*, 375(012048), 2012.

[5] K. G. Begeman. *HI rotation curves of spiral galaxies, Thèse de doctorat.* Université de Groningue edition, 1987.

[6] E. Belbruno, A. Moro-Martin, R. Malhotra, and D. Savransky. Chaotic Exchange of Solid Material Between Planetary Systems : Implications for Lithopanspermia. *Astrobiology*, 12(8) :754–774, 2012.

[7] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk. Particle dark matter : evidence, candidates and constraints. *Phys. Rep.*, 405 :279, 2005.

[8] J. Binney and S. Tremaine. *Galactics Dynamics.* Princeton University Press edition, 2008.

[9] L. Brayeur and P. Tiniakov. Enhancement of dark matter capture by neutron stars in binary systems. *Phys. Rev. Lett.*, 109(061301), 2012.

[10] G. Casati, I. Guarneri, and D. L. Shepelyansky. Hydrogen atom in monochromatic field : chaos and dynamical photonic localization. *IEEE J. of Quant. Elect.*, 24 :1420, 1988.

[11] J. R. Cash and A. H. Karp. A variable order runge-kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 16 :201–222, 1990.

[12] A. Celletti. *Singularities in Gravitational Systems.* Springer edition, 2002.

[13] A. Celletti. *Stability and Chaos in Celestial Mechanics.* Praxis Publishing edition, 2010.

[14] B. V. Chirikov. Resonance processes in magnetic traps. *J. Nucl. Energy Part C : Plasma Phys.*, 1 :253, 1960.

[15] B. V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Letters*, 52(5) :263–379, 1979.

[16] B. V. Chirikov. Particle confinement and adiabatic invariance. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 413 :145, 1987.

[17] B. V. Chirikov. Poincaré Recurrences in Microtron and the Global Critical Structure. *arXiv :nlin/0006013v1*, 2000.

[18] B. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky. Correlation Properties of Dynamical Chaos in Hamiltonian Systems. *Physica D*, 13 :395–400, 1984.

[19] B. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky. Asymptotic Statistics of Poincaré Recurrences in Hamiltonian Systems with Divided Phase Space. *Phys. Rev. Lett.*, 82(528), 1999.

[20] B. V. Chirikov and V. V. Vecheslavov. Chaotic dynamics of comet Halley. *Astron. Astrophys.*, 221 :146–154, 1989.

[21] G. Contopoulos and P. A. Patsis. *Chaos in astronomy.* Springer edition, 2007.

[22] J. Crank and P. Nicolson. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 43 (1) :50–67, 1947.

[23] G. Cristadoro and R. Ketzmerick. Universality of Algebraic Decays in Hamiltonian Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 100(184101), 2008.

[24] T. V. Demidova and I. I. Shevchenko. Spiral patterns in planetesimal circumbinary disks. *The Astrophysical Journal*, 805(1) :38, 2015.

[25] J.P. Dumont. *Les Présocratiques.* Gallimard edition, 1988.

[26] R. Dvorak and J. Kribbel. Dynamics of Halley-like comet for 1 million years. *Astron. Astrophys.*, 227 :227–270, 1990.

[27] B. G. Elmegreen and D. M. Elmegreen. Fractal Structure in Galactic Star Fields. *Astr. J.*, 121 :1507–1511.

[28] I. Guarneri F. Borgonovi and P. Sempio. Long-Time Decay Properties of Kepler Map. *Il Nuovo Cimento*, 102B(151).

[29] A. Fathi. *Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics.* Cambridge University Press edition, 2012.

[30] F.Benvenuto, G.Casati, and D.L.Shepelyansky. Chaotic autoionization of molecular rydberg states. *Phys. Rev. Lett.*, 72 :1919, 1994.

[31] E. Fermi. On the origin of cosmic radiation. *Physical review*, 75(1169), 1949.

[32] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam. Studies of nonlinear problems. *Document Los Alamos 1940*, 1955.

[33] K.M. Frahm and D.L. Shepelyansky. Poincaré recurrences and Ulam method for the Chirikov standard map. *Eur. Phys. J. B*, 86 :322, 2013.

[34] K. Garett and G. Duda. Dark Matter : A Primer. *Adv. Astron.*, 8(968283), 2011.

[35] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics.* Addison-wesley edition, 3th edition-2001.

[36] A. Gould and S. M. Alam. Can Heavy WIMPs Be Captured by the Earth. *ApJ*, 549(72), 2001.

[37] I. S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of integrals, serie, and product.* Academic Press edition, 1980.

[38] M. J. Graham, S. G. Djorgovski, D. Stern, and al. A possible close supermassive black-hole binary in a quasar with optical periodicity. *Nature*, 518(74), 2015.

[39] M. Hénon and C. Heiles. The applicability of the third integral of motion : Some numerical experiments. *The Astrophysical Journal*, 69 :73–79, 1964.

[40] K. Ikeda, H. Daido, and O. Akimoto. Optical turbulence : Chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 45 :709, 1980.

[41] IMCCE. Institut de Mécanique Céléste et de Calcul des Ephémérides. `http://www.imcce.fr/fr/ephemerides/donnees/comets/FICH/CIF0742.php`.

[42] F. M. Izraelev. Nearly linear mappings and their applications. *Physica D*, 1(3) :243, 1980.

[43] C. G. J. Jacobi. Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problème des trois corps. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 3 :59–61, 1836.

[44] A. J. Kalnajs. *IAU Symp. 100 : Internal Kinematics and Dynamics of Glalaxies.* E. Athanassoula, Reidel(Dordrecht) edition, 1983.

[45] I. B. Khriplovich and D. L. Shepelyansky. Capture of dark matter by the solar system. *International Journal of Modern Physics D*, 18(1903), 2009.

[46] T. Kovacs and Z. Regaly. Transient chaos and fractal structures in planetary feeding zones. *The Astrophysical Journal Letters*, 798(1) :L9, 2015.

[47] J. Lages and D. L. Shepelyansky. Dark matter chaos in the solar system. *MNRAS*, 430(L25), 2013.

[48] L. Landau and E. Lifchitz. *Mecanique.* Mir edition, 1981.

[49] E. Lega, M. Guzzo, and C. Froeschlé. Detection of close encounters and resonances in three-body problems through Levi-Civita regularization. *Montly Notice Roy. Astron. Soc.*

[50] L.Ermann and D.L.Shepelyansky. Ulam method and fractal Weyl law for Perron-Frobenius operators. *Eur. Phys. J. B*, 75 :299–304.

[51] T. Levi-Civita. Sur la régularisation du problème des trois corps. *Acta mathematica*, 42 :99–144, 1920.

[52] A.J Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics.* Springer edition, 1992.

[53] J. Liu and Y. S. Sun. Chaotic motion of comets in near-parabolic orbit : Mapping approaches. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 60 :3–28, 1994.

[54] E. N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20 :130, 1963.

[55] E. N. Lorenz. Predictability : Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas ? *American Association for the advancement of science*, 130th meeting, 1972.

[56] J. Lundberg and J. Edsjö. Weakly interacting massive particle diffusion in the solar system including solar depletion and its effect on earth capture rates. *Phys. Rev. D*, 69(123505), 2004.

[57] L. Malyshkin and S. Tremaine. The Keplerian Map for the Planar Restricted Three-Body Problem as a Model of Comet Evolution. *Icarus*, 141(2), 1999.

[58] B. Mandelbrot. How Long Is the Coast of Britain ? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Sciences*, 156(3775) :636–638, 1967.

[59] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature.* Henry Holt and Company edition, 1983.

[60] B. G. Marsden. *Nongravitational Effects on Comets : The Current Status.* Springer netherlands edition, 1972.

[61] J. D. Meiss. Thirty Years of Turnstiles and Transport. *Chaos(9)*, (097602), 2015.

[62] D. Merritt. *Dynamics and Evolution of Galactic Nuclei.* Princeton university press edition, 2013.

[63] A. Morbidelli. *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics.* Taylor et Francis edition, 2002.

[64] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics.* Mcgraw-hill edition, 1953.

[65] Jan Nagler. Crash test for the Copenhagen problem. *Phys. Rev. E*, 69(066218), 2004.

[66] Jan Nagler. Crash test for the restricted three-body problem. *Phys. Rev. E*, 71(026227), 2005.

[67] J. P. Ostriker and P. J. E. Peebles. A numerical study of flatttened galaxies : or can cold galaxies survive. *Astrophys. J.*, 186 :467–480, 1973.

[68] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems.* Cambrige University Press edition, 2002.

[69] A. Peter and S. Tremaine. Dynamics of WIMPs in the solar system and implications for direct and indirect detection. *arXiv :0806.2133*, 2008.

[70] A. H. G. Peter. Dark matter in the Solar System I : The distribution function of WIMPs at the Earth from solar capture. *Phys. Rev. D*, 79(103531), 2009.

[71] A. H. G. Peter. Dark matter in the Solar System II : Wimp annihilation rates in the sun. *Phys. Rev. D*, 79(103532), 2009.

[72] A. H. G. Peter. Dark matter in the Solar System III : The distribution function of WIMPs at the earth from gravitational capture. *Phys. Rev. D*, 79(103533), 2009.

[73] L. Petitgirard. *Le chaos : des question théorique aux enjeux sociaux.* Thèse de Doctorat, Université Lumière Lyon 2, 2004.

[74] T. Y. Petrosky. Chaos and cometary clouds in the solar system. *Phys. Letters A*, 117(328), 1986.

[75] T. Y. Petrosky and R. Broucke. Area-preserving mapping and determistic chaos for nearby parabolic motion. *Celestial Mechanics*, 42 :53–79, 1988.

[76] H. Poincaré. Sur le problème des trois corps and les équations de la dynamique. *Acta mathematica*, 13 :1–270, 1890.

[77] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77 : The Art of Scientific Computing.* 2nd edition, 1992.

[78] G. Rollin, P. Haag, and J. Lages. Symplectic map description of Halley's comet dynamics. *Phys. Letters A*, 379 :14–15, 2015.

[79] G. Rollin, J. Lages, and D. L. Shepelyansky. Chaotic enhancement of dark matter density in binary systems. *A&A*, 576 :A 40, 2015.

[80] G. Rollin, J. Lages, and D. L. Shepelyansky. Fractal structures for the jacobi hamiltonian of restricted three-body problem. *arXiv :1509.07638*, 2015.

[81] V. C. Rubin, W. K. Ford, and N. Thonnard. Rotational properties of 21 sc galaxies with a large range luminositis and radii, from NGC 4405 (r = 4 kpc) to UGC 2885 (r = 122 kpc). *Astrophys. J.*, 238 :471–487, 1980.

[82] N. Sanchez, E.J. Alfaro, F. Elias, A.J. Delgado, and J. Cabrera-Cano. The Nature of the Gould Belt from a Fractal Analysis of its Stellar Population . *Astr. J.*, 667 :213.

[83] N. Sanchez, N. Anez, E.J. Alfaro, and M.C. Odekon. The Fractal Dimension of Star-Forming Region at Different Spatial Scales in M33. *Astr. J.*, 720 :541.

[84] R. H. Sanders. *A la recherche de la matière noire.* de boeck edition, 2012.

[85] M. Schwarzchild. Mass distribution and mass-luminosity ratios in galaxies. *Astron. J.*, 59 :273–284, 1954.

[86] D. L. Shepelyansky. Fractal Weyl law for quantum fractal eigenstates. *Phys. Rev. E*, 77(015202(R)), 2008.

[87] D.L. Shepelyansky. Microwave ionization of hydrogen atoms. *Scholarpedia*, 7 (1)(9795), 2012.

[88] Ivan I. Shevchenko. Kepler map in the three-body problem. *New Astronomy*, 16 :94–99, 2011.

[89] Ivan I. Shevchenko. Chaotic zones around gravitating binaries. *The Astrophysical Journal*, 799(1) :8, 2015.

[90] S. Smith. The mass of the Virgo cluster. *Astrophys. J.*, 83 :23–30, 1936.

[91] S. Ulam. *Proc. 4th Berkeley Symp. on Mathematical Statistics and Probability.* University of california press edition, 1961.

[92] M. Valtonen and H. Karttunen. *The Three-Body Problem.* Cambridge University Press edition, 2005.

[93] N. Voglis, P. Tsoutsis, and C. Efthymiopoulos. Invariant manifolds, phase correlations of chaotic orbits and the spiral structure of galaxies. *Montly Notice Roy. Astron. Soc.*, 373 :280–294, 2006.

[94] D. K. Yeomans and T. Kiang. The long-term of comet Halley. *Montly Notice Roy. Astron. Soc.*, 197(633), 1981.

[95] H. Yoshida. Construction of higher order symplectic integrators. *Phys. Letters A*, 150(5,6,7), 1990.

[96] J. L. Zhou, Y. S. Sun, J. Q. Zheng, and M. J. Valtonen. The transfer of comets from near-parabolic to short-period orbits : map approach. *Astron. Astrophys.*, 364 :887–893, 2000.

[97] F. Zwicky. Die rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6 :110, 1933.

[98] F. Zwicky. On masses of nebulae and clusters of nebulae. *Astrophys. J.*, 86 :217–246, 1937.

Chaos dynamique dans le problème à trois corps restreint

Résumé

Nous nous intéressons au problème à trois corps restreint et en particulier au processus de capture-évolution-éjection de particules par des systèmes binaires (étoile-planète, étoile binaire, étoile-trou noir supermassif, trou noir binaire, ...).

Dans une première partie, en utilisant une généralisation de l'application de Kepler, nous décrivons, au travers du cas de 1P/Halley, la dynamique chaotique des comètes dans le système solaire. Le système binaire, alors considéré, est composé du Soleil et de Jupiter. L'application symplectique utilisée permet de rendre compte des différentes caractéristiques de la dynamique : trajectoires chaotiques, îlots invariants de KAM associés aux résonances avec le mouvement orbital de Jupiter, ... Nous avons déterminé de façon exacte et semi-analytique l'énergie échangée (fonction kick) entre le système solaire et la comète de Halley à chaque passage au périhélie. Cette fonction kick est la somme des contributions des problèmes à trois corps Soleil-planète-comète associés aux 8 planètes du système solaire. Nous avons montré que chacune de ces contributions peut être décomposée en un terme keplerien associé au potentiel gravitationnel de la planète et un terme dipolaire dû au mouvement du Soleil autour du centre de masse du système solaire.

Dans une deuxième partie, nous avons utilisé la généralisation de l'application de Kepler pour étudier la capture de particules de matière noire au sein des systèmes binaires. La section efficace de capture a été calculée et montre que la capture à longue portée est bien plus efficace que la capture due aux rencontres proches. Nous montrons également l'importance de la vitesse de rotation du système binaire dans le processus de capture. Notamment, un système binaire en rotation ultrarapide accumulera en son sein une densité de matière jusqu'à 10^4 fois celle du flot de matière le traversant.

Dans la dernière partie, en intégrant les équations du mouvement du problème à trois corps restreint plan, nous avons étudié l'éjection des particules capturées par un système binaire. Dans le cas d'un système binaire dont les deux corps sont de masses comparables, alors que la majorité des particules sont éjectées immédiatement, nous montrons, sur les sections de Poincaré, que la trace des particules restant indéfiniment aux abords du système binaire forme une structure fractale caractéristique d'un répulseur étrange associé à un système chaotique ouvert. Cette structure fractale, également présente dans l'espace réel, a une forme de spirale à deux bras partageant des similitudes avec les structures spiralées des galaxies comme la nôtre.

Mots clés : problème à trois corps, chaos, application de Kepler, comète, comète de Halley, matière noire, répulseur étrange, récurrences de Poincaré, intégration numérique, régularisation

Dynamical chaos in the restricted three body problem

Abstract

This work is devoted to the study of the restricted 3-body problem and particularly to the capture-evolution-ejection process of particles by binary systems (star-planet, binary star, star-supermassive black hole, binary black hole, ...).

First, using a generalized Kepler map, we describe, through the case of 1P/Halley, the chaotic dynamics of comets in the Solar System. The here considered binary system is the couple Sun-Jupiter. The symplectic application we use allows us to depict the main characteristics of the dynamics: chaotic trajectories, KAM islands associated to resonances with Jupiter orbital motion, ... We determine exactly and semi-analytically the exchange of energy (kick function) between the Solar System and 1P/Halley at its passage at perihelion. This kick function is the sum of the contributions of 3-body problems Sun-planet-comet associated to the eight planets. We show that each one of these contributions can be split in a keplerian term associated to the planet gravitational potential and a dipolar term due to the Sun movement around Solar System center of mass.

We also use the generalized Kepler map to study the capture of dark matter particles by binary systems. We derive the capture cross section showing that long range capture is far more efficient than close encounter induced capture. We show the importance of the rotation velocity of the binary in the capture process. Particularly, a binary system with an ultrafast rotation velocity accumulates a density of captured matter up to 10^4 times the density of the incoming flow of matter.

Finally, by direct integration of the planar restricted 3-body problem equations of motion, we study the ejection of particles initially captured by a binary system. In the case of a binary with two components of comparable masses, although almost all the particles are immediately ejected, we show, on Poincaré sections, that the trace of remaining particles in the vicinity of the binary form a fractal structure associated to a strange repeller associated to chaotic open systems. This fractal structure, also present in real space, has a shape of two arm spiral sharing similarities with spiral structures observed in galaxies such as the Milky Way.

Keywords : three body problem, chaos, Kepler map, comet, Halley's comet, dark matter, strange repeller, Poincaré recurrences, numerical integration, regularization