



**HAL**  
open science

# Modélisation déterministe d'états de mer à grande échelle en profondeur variable

Maïté Gouin

► **To cite this version:**

Maïté Gouin. Modélisation déterministe d'états de mer à grande échelle en profondeur variable. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2016. Français. NNT : . tel-01341772v1

**HAL Id: tel-01341772**

**<https://hal.science/tel-01341772v1>**

Submitted on 4 Jul 2016 (v1), last revised 25 Apr 2017 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

**Maité GOUIN**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'Ecole Centrale de Nantes  
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans*

**École doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture**

**Discipline :** Mécanique des Milieux Fluides

**Unité de recherche :** *Laboratoire de Recherche en Hydrodynamique, Energétique et Environnement Atmosphérique*

**Soutenue le :** 26 avril 2016

## Modélisation déterministe d'états de mer à grande échelle en profondeur variable

### JURY

Président :	<b>Michel BENOIT</b> , Professeur des Universités, Ecole Centrale Marseille, IRPHE, Marseille
Rapporteurs :	<b>Michel BENOIT</b> , Professeur des Universités, Ecole Centrale Marseille, IRPHE, Marseille <b>Fabrice ARDUIN</b> , Directeur de Recherche CNRS, Ifremer, Brest
Examineurs :	<b>Harry BINGHAM</b> , Maître de conférences, Technical University of Denmark, Copenhague <b>Olivier KIMMOUN</b> , Maître de conférences, Ecole Centrale Marseille, IRPHE, Marseille
Directeur de Thèse :	<b>Pierre FERRANT</b> , Professeur des Universités, Ecole Centrale Nantes, LHEEA, Nantes
Co-encadrant de Thèse :	<b>Guillaume DUCROZET</b> , Maître de conférences, Ecole Centrale Nantes, LHEEA, Nantes



# Remerciements

C'est avec un peu de recul et une grande joie que je rédige ces remerciements. Je remercie tout d'abord Guillaume, David et Pierre de m'avoir fait confiance et accueillie au sein du laboratoire, moi qui ne venais pas d'un milieu d'hydrodynamicien. Ce travail de thèse n'est en effet rien sans ses encadrants : je remercie donc Pierre pour la direction de cette thèse, et sa disponibilité malgré la charge de travail importante. Guillaume, un grand merci pour ton écoute, tes nombreux conseils au jour le jour et tes nombreuses relectures. Merci de m'avoir guidée et fait confiance tout au long de ce travail ! Merci à David et à l'IRT pour avoir porté le projet SimAvHy sur lequel je continue de travailler en tant que post-doctorante. Merci également à tous les trois (Guillaume, Pierre et David) pour m'avoir permis de participer à des conférences internationales et par là-même de rencontrer de nombreuses personnes et d'élargir mon champ de vision sur l'hydrodynamique. Merci enfin pour vos nombreux conseils sur l'après-thèse.

Ensuite, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Michel Benoit (également président du jury) et Fabrice Arduin pour leur relecture attentive et leurs nombreux commentaires en tant que rapporteurs. Ils ont notamment permis de clarifier certains points et d'ouvrir de nouvelles pistes de recherche. Merci à Olivier Kimmoun pour sa présence au sein du jury et pour son suivi du travail de thèse durant ces 3 ans. Je remercie Harry Bingham d'avoir accepté de faire partie de mon jury, pour ses nombreuses questions et remarques, ainsi que pour son accueil au sein de DTU en août 2015. J'en profite également pour remercier les collègues doctorants et post-doctorants qui m'ont chaleureusement accueilli à Copenhague ainsi que le LabeXMer pour le financement de ce séjour enrichissant.

Un grand merci également à Yves, Félicien et Adrien Grellier pour leur aide précieuse au cours de ces 3 ans de travail sur des sujets très variés.

J'en viens maintenant aux remerciements moins formels. Je veux remercier tous les amis (enfin j'espère !) que j'ai pu rencontrer durant ces trois ans. Je remercie en premier lieu Pierre B. pour m'avoir mise sur la piste de ce sujet, et si bien intégrée à mon arrivée dans l'équipe coinche. Merci également pour notre cohabitation de 1 an et demi et pour la machine à café (elle marche toujours très bien). Merci à Salvo de m'avoir supportée durant quelques mois et pour l'apprentissage de mots italiens essentiels.

Je remercie ensuite très fort l'équipe de choc de doctorants du LHEEA (désolée pour ceux que j'aurais oubliés) : Camille, Marie et Marie, Francesc, Boris, Corentin, Paulo, Vincent, Baptiste, Benjamin, Gabi (les plus ou moins anciens) et les plus nouveaux qui sont tout aussi sympathiques (n'est ce pas Hélène,

Louis, Vincent, Laëtitia). Leur amitié, les pauses cafés au jour le jour et les soirées diverses ont été indispensables!

Merci à toute l'ancienne équipe de doctorants des différents labos (Touski, David, Kara, Roland, Jad, Zham, Romain, Pierre) pour l'apprentissage de la coinche. Merci à Lauriane, Marie, Touski, Benoit, Zham... pour l'orga du CRIEC qui fut très enrichissante. Merci à Brendan et la team Dizolo (Anthony, Paulo, Marie, Robin, Adrien et David...) pour l'apprentissage et les dégustations de bières plus ou moins réussies. Merci à David M. (et Marie, Adrien, Bertrand, Jérôme, Cyrielle...) pour les soirées débats enflammées. Les doctorants que j'ai croisé sont nombreux mais je remercierai également Ophélie (et Nico) et Romain (et Manon), pour leur gentillesse et rigolades, pour les sorties run et j'en passe.

Merci également à tous les autres doctorants et post-doctorants ainsi qu'à tous les permanents du LHEEA pour leur disponibilité et la bonne ambiance et merci à Thomas d'être le respo BBQ/resto du labo. Un grand merci à Anne, Sonia et Elodie pour leur disponibilité et leur aide toujours précieuse!

Merci aux personnes et endroits qui m'ont fait voyagé et grandir durant cette thèse : Ténérife (merci Cécile!), la Thaïlande et HK (et les wasabi), Copenhague, le Kirghizistan et Ilich, les Pyrénées et le Canigou, les Alpes et l'Alpe-d'Huez, la Bretagne et les plages du 44, les Cévennes et le Mont-Ventoux, Lisbonne, mon vélo, les conf' (Osaka, Vienne, Bristol, Saint John's) et les super rencontres.

Je remercie évidemment ma famille pour leur soutien depuis des années, leur confiance et les we normands qui font toujours du bien (et merci aussi aux Nimois). Également aux amis, de près ou de loin, que sont Céline (et Max je ne t'oublie pas!), les Nantes-LeMonde (Roselyne, Julien, Pierre, Nico, Marion, Maël, Cécile), les randonneurs (Mathilde, Flo, Mél, Audrey, Romain, Fredo, Kmi, Camille et Bruno...et j'en oublie sûrement), la team d'athlètes sans qui je m'éclaterai beaucoup moins (Marine, Sandie, Benoit, Caro, Baptiste... et Patrice bien sûr!) et tous les autres (dont Hélène, Pauline et Gui pour les Kagi Fret, et Antoine et Sylvain pour leurs blagues pas toujours très fines). Enfin, mon dernier mot sera simple et pour Vincent : MERCI.

# Table des matières

<b>Lexique</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>I Méthodes potentielles non-linéaires appliquées à la modélisation déterministe d'états de mer</b>	<b>5</b>
I.1 Formulation du problème potentiel	9
I.1.1 Hypothèses . . . . .	9
I.1.2 Système d'équations à résoudre . . . . .	10
I.1.3 Méthodes potentielles. . . . .	10
I.2 Résolution du problème aux frontières	11
I.3 Résolution du problème complet volumique	15
I.3.1 Méthodes Eléments Finis . . . . .	15
I.3.2 Méthodes utilisant une transformation $\sigma$ dans la verticale . . .	17
I.3.2.1 Différences finies . . . . .	17
I.3.2.2 Méthodes mixtes . . . . .	18
I.3.3 Méthode Cellules à Polynômes Harmoniques. . . . .	20
I.4 Expression du problème sur la surface libre	21
I.4.1 Méthode directe . . . . .	22
I.4.2 Approche mode-coupling et équation de Zakharov . . . . .	23
I.4.3 Méthodes HOS/DNO. . . . .	24
I.4.3.1 Méthode Dirichlet to Neumann Operator (DNO) . . . . .	24
I.4.3.2 Méthode High-Order Spectral (HOS) . . . . .	25
I.4.4 Méthode mixte : pseudo-spectrale/intégrale . . . . .	25
I.5 Autres méthodes	27
I.5.1 Modèles de type Boussinesq . . . . .	27
I.5.2 Méthode modes couplés. . . . .	28
<b>II Présentation de la méthode HOS</b>	<b>31</b>
II.1 Description détaillée de la méthode HOS en fond plat	33
II.1.1 Expression au niveau de la surface libre. . . . .	34

II.1.2	Expression de l'élévation de surface libre et du potentiel par méthode pseudo-spectrale . . . . .	35
II.1.3	Résolution - cœur de la méthode HOS . . . . .	35
II.1.4	Traitement anti-repliement . . . . .	38
II.1.5	Avance en temps . . . . .	40
II.1.6	Initialisation des simulations. . . . .	40
II.1.7	Équivalence avec le formalisme DNO . . . . .	41
II.2	Extension de la méthode HOS à une bathymétrie variable . . . . .	43
II.2.1	Formulation du problème . . . . .	43
II.2.1.1	Hypothèses . . . . .	43
II.2.1.2	Système d'équations à résoudre. . . . .	43
II.2.2	Expression de $\phi$ . . . . .	44
II.2.3	Résolution . . . . .	45
II.2.3.1	Méthode directe. . . . .	46
II.2.3.2	Méthode itérative originelle . . . . .	49
II.2.3.3	Méthode itérative améliorée. . . . .	53
II.2.4	Estimation du temps de calcul. . . . .	56
II.2.5	Equivalence avec le formalisme DNO . . . . .	57
II.2.6	Formulation 3D . . . . .	59
II.2.6.1	Système d'équations . . . . .	59
II.2.6.2	Expression du potentiel des vitesses . . . . .	60
II.2.6.3	Méthode directe. . . . .	60
II.2.6.4	Méthode itérative originelle . . . . .	61
II.2.6.5	Méthode itérative améliorée. . . . .	61
II.2.6.6	Calcul de la vitesse verticale $W$ . . . . .	62
II.2.7	Conclusion . . . . .	63
<b>III</b>	<b>Mise en œuvre</b> . . . . .	<b>65</b>
III.1	Modélisation de cas bidimensionnels . . . . .	69
III.1.1	Zones de relaxation . . . . .	69
III.1.1.1	Relaxation simple. . . . .	70
III.1.1.2	Relaxation avec absorption dans les zones amont et aval . . . . .	72
III.1.2	Introduction de termes sources. . . . .	74
III.1.2.1	Génération de la houle . . . . .	74
III.1.2.2	Absorption de la houle. . . . .	77
III.1.3	Périodicité du fond. . . . .	79
III.2	Spécificités des cas tridimensionnels . . . . .	81
III.2.1	Périodicité du fond. . . . .	81
III.2.2	Résolution à la surface libre. . . . .	81
III.2.2.1	Relaxation dans la direction transverse . . . . .	84
III.2.2.2	Méthode employée dans le modèle HOS bassin . . . . .	86
III.2.2.3	Conditions de réflexion dans la direction transverse . . . . .	88
III.3	Solutions retenues . . . . .	91

<b>IV</b>	<b>Validations</b>	<b>93</b>
IV.1	Applicabilité, limitations et propriétés numériques	97
IV.1.1	Précision obtenue sur la vitesse verticale . . . . .	98
IV.1.1.1	Méthode exacte . . . . .	98
IV.1.1.2	Méthode itérative originelle . . . . .	99
IV.1.1.3	Méthode itérative améliorée . . . . .	102
IV.1.1.4	Comparaison des deux méthodes itératives . . . . .	103
IV.1.2	Avance en temps . . . . .	105
IV.1.3	Temps de calcul des deux méthodes itératives . . . . .	106
IV.1.4	Etude sur l'anti-repliement . . . . .	108
IV.1.5	Conclusion - applicabilité des méthodes fond variable . . . . .	110
IV.2	Validations bidimensionnelles	113
IV.2.1	Réflexion de Bragg . . . . .	113
IV.2.2	Shoaling d'une houle linéaire . . . . .	115
IV.2.3	Conclusion - cas de validation . . . . .	117
<b>V</b>	<b>Applications</b>	<b>119</b>
V.1	Application 2D : marche immergée	121
V.1.1	Pentes faibles . . . . .	121
V.1.1.1	Sondes temporelles . . . . .	123
V.1.1.2	Analyse harmonique . . . . .	124
V.1.2	Pentes fortes . . . . .	127
V.1.3	Conclusion - marche immergée . . . . .	132
V.2	Application 3D : ellipse immergée	133
V.2.1	Description de l'expérience . . . . .	133
V.2.2	Mise en oeuvre . . . . .	134
V.2.3	Houle régulière unidirectionnelle - cas <i>M1</i> . . . . .	136
V.2.3.1	Résultats obtenus avec la méthode HOS . . . . .	137
V.2.3.2	Résultats avec la méthode différences finies . . . . .	139
V.2.4	Houle régulière unidirectionnelle cas <i>M2</i> . . . . .	140
V.2.5	Houle irrégulière unidirectionnelle - cas <i>U3</i> . . . . .	142
V.2.6	Houle irrégulière directionnelle cas <i>N3</i> . . . . .	144
V.2.7	Conclusion - ellipse immergée . . . . .	146
V.3	Bathymétrie réelle	149
V.3.1	Cas de validation : houle régulière . . . . .	152
V.3.2	Cas réel : houle irrégulière directionnelle . . . . .	156
V.3.3	Conclusion - Bathymétrie réelle . . . . .	162
	<b>Conclusion générale</b>	<b>165</b>
	<b>Annexes</b>	<b>169</b>
A.1	Calcul des dérivées . . . . .	169
A.2	Calcul de l'opérateur <i>L</i> de la DNO . . . . .	170





# Table des figures

I.5.1	Comparaisons des principales méthodes potentielles non-linéaires. ++ indique que la méthode est particulièrement adaptée. . . . .	30
II.1.1	Représentation du domaine de calcul en 2D - Fond variable quelconque. . . . .	33
II.1.2	Principe de résolution temporelle des CSL. . . . .	38
II.1.3	Processus itératif du calcul de la vitesse verticale $W$ . . . . .	38
II.1.4	Phénomène de repliement (au milieu) et traitement (à droite). . . . .	39
II.2.1	Représentation du domaine de calcul en 2D pour un fond variable quelconque. . . . .	44
II.2.2	Calcul de la vitesse verticale - fond variable . . . . .	47
II.2.3	Calcul des amplitudes modales - méthode itérative originelle. . . . .	52
II.2.4	Calcul des amplitudes modales - méthode améliorée. . . . .	55
III.1.1	Localisation des zones amont et aval. . . . .	70
III.1.2	Relaxation simple. Localisation des zones et définition du coefficient de relaxation $C_r$ (Échelle non respectée). . . . .	71
III.1.3	Relaxation avec absorption. Localisation des zones et définition des coefficients de relaxation $C_{r_1}$ (pointillés) et $C_{r_2}$ (traits-pointillés). Échelle non respectée. . . . .	72
III.1.4	Initialisation avec une zone d'absorption, suivie d'une zone de génération, de la zone d'étude et d'une deuxième zone d'absorption. Traits pleins : élévation de surface libre. Pointillés : différents coefficients de relaxation $C_r$ (Échelle non respectée). . . . .	73
III.1.5	Amplitudes des 3 premières harmoniques à la surface libre (échelle logarithmique) pour 3 sondes placées à $x = 3\lambda$ , $x = 9\lambda$ et $x = 16\lambda$ le long du domaine d'étude. . . . .	75
III.1.6	Modification de la bathymétrie. Trait plein : bathymétrie initiale - trait pointillé : exemple de bathymétrie modifiée. . . . .	79
III.2.1	Topographie des canyons sous-marins de Scripps et de la Jolla - coordonnées cartésiennes. . . . .	82
III.2.2	Bathymétrie modifiée - canyons sous-marins de Scripps et de la Jolla. . . . .	83
III.2.3	Cas de shoaling 3D périodisé - définition du fond. . . . .	83
III.2.4	Cas de shoaling 3D périodisé - élévation de surface libre. . . . .	84

III.2.5	Initialisation avec solution imposée nulle selon la direction transverse. . . . .	85
III.2.6	Observation du phénomène de diffraction avec absorption dans la direction transverse. Les pointillés délimitent la zone d'étude. . . . .	86
III.2.7	Caractérisation de la zone utile. (a) Cas de référence. (b) Utilisation des zones de relaxation dans la direction transverse. . . . .	87
III.2.8	Conditions de symétrie dans la direction transverse. . . . .	88
III.2.9	Domaine de calcul - en pointillés : zone d'intérêt. . . . .	89
IV.1.1	Cas test de validation à $\beta$ constant. . . . .	98
IV.1.2	Méthode exacte : $kh = 0.92$ , $ka = 0.1$ , tous $\frac{\beta}{h_0}$ . Erreur sur $W$ ( $\log(\epsilon_W)$ ) en fonction de $N$ et $M$ . . . . .	99
IV.1.3	Erreur sur la vitesse verticale en fonction de $N$ et $M$ - $kh = 0.92$ et $ka = 0.1$ ( $ka = 0.33\sigma$ ). Surface inférieure : $\frac{\beta}{h_0} = 0\%$ . Surface supérieure : $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ . . . . .	100
IV.1.4	Erreur sur la vitesse verticale en fonction de $N$ et $M$ - $kh = 0.92$ et $ka = 0.1$ ( $ka = 0.33\sigma$ ). Surface inférieure : $\frac{\beta}{h_0} = 0\%$ . Surface supérieure : $\frac{\beta}{h_0} = 50\%$ . . . . .	101
IV.1.5	Erreur sur la vitesse verticale en fonction de $M$ et $M_b$ - $N = 32$ , $kh = 0.92$ , $ka = 0.1$ et $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ ( $ka = 0.33\sigma$ ). . . . .	102
IV.1.6	Erreur sur la vitesse verticale en fonction de $M$ et $M_b$ - $\frac{\beta}{h_0} = 40\%$ - $kh = 0.92$ et $ka = 0.01 = 0.03\sigma$ . . . . .	104
IV.1.7	Erreur sur la vitesse verticale en fonction de $M$ et $M_b$ - $\frac{\beta}{h_0} = 40\%$ - $kh = 0.92$ et $ka = 0.15 = 0.34\sigma$ . . . . .	104
IV.1.8	Erreur sur la vitesse verticale en fonction de $M$ et $M_b$ - $\frac{\beta}{h_0} = 10\%$ - $kh = 0.92$ et $ka = 0.15 = 0.34\sigma$ . . . . .	104
IV.1.9	Erreur sur la vitesse verticale en fonction de $M$ et $M_b$ - $\frac{\beta}{h_0} = 75\%$ - $kh = 0.92$ et $ka = 0.15 = 0.34\sigma$ . . . . .	104
IV.1.10	Erreur sur la vitesse verticale en fonction de $M$ et $M_b$ - $\frac{\beta}{h_0} = 40\%$ - $kh = 0.5$ et $ka = 0.1 = 0.5\sigma$ . . . . .	105
IV.1.11	Erreur sur la vitesse verticale en fonction de $M$ et $M_b$ - $\frac{\beta}{h_0} = 40\%$ - $kh = 3$ et $ka = 0.1 = 0.23\sigma$ . . . . .	105
IV.1.12	Evolution du déphasage lors de la propagation d'une houle régulière de cambrure $ka = 0.1$ , de profondeur relative $kh = 1$ . . . . .	106
IV.1.13	Temps de calcul en fonction du nombre de modes $N$ . $M = 8$ . . . . .	107
IV.1.14	Temps de calcul en fonction du nombre de modes $N$ . $M = 3$ et $M_b = 7$ . . . . .	107
IV.1.15	Temps de calcul en fonction du nombre de modes $N$ . Comparaison de la méthode originelle ( $M = 8$ ) et de la méthode améliorée ( $M = 3$ et $M_b = 7$ ). $\frac{\beta}{h_0} = 40\%$ . . . . .	108
IV.2.1	Représentation du fond avec 10 sinusoïdes d'amplitude $d = 0.1$ et de cambrure $k_b d = 0.31$ et de la surface libre à l'instant initial. Zones de relaxation de 3 longueurs d'onde. . . . .	114
IV.2.2	Réflexion de Bragg sur un fond de sinusoïdes localisé en $-5\lambda_b \leq x \leq 5\lambda_b$ avec $ka = 0.05$ et $k_b d = 0.31$ . . . . .	115

TABLE DES FIGURES

---

IV.2.3	Élévation de surface libre à l'état stable obtenue numériquement (multipliée par 10) en partant d'une houle linéaire d'amplitude $a_0 = 5.10^{-3}$ m et de longueur d'onde $\lambda = 2$ m se propageant sur un fond de type shoaling. . . . .	116
IV.2.4	Comparaison entre l'enveloppe prévue par la théorie linéaire et l'enveloppe obtenue numériquement. . . . .	117
V.1.1	Représentation de la marche immergée comme décrit dans Dingemans [43]. En rouge : localisation des sondes. . . . .	122
V.1.2	Instantané de l'élévation de surface libre à l'état stationnaire (l'élévation est multipliée par un facteur 3 selon l'axe $z$ ). . . . .	123
V.1.3	Élévations de surface libre mesurées et modélisées à 8 positions différentes. Traits pleins : simulations. Pointillés : mesures expérimentales (Dingemans [43]). . . . .	125
V.1.4	Analyse harmonique - pentes douces. $N = 30/\lambda_0$ , $M = 7$ . . . . .	126
V.1.5	Schéma de la marche immergée comme décrit dans l'expérience de Ohyama <i>et al.</i> [110]. . . . .	127
V.1.6	Élévations de surface libre mesurées et modélisées à 2 positions différentes. Traits pleins : simulations. Pointillés : mesures expérimentales. Ohyama <i>et al.</i> [110]. . . . .	129
V.1.7	Analyse harmonique - pentes fortes. $N = 40/\lambda_0$ , $M = 5$ . . . . .	130
V.1.8	Analyse harmonique - pentes fortes. Comparaisons au modèle FN4 de Gobbi et Kirby [70]. . . . .	131
V.2.1	Définition de l'ellipse immergée. Traits blancs : localisation des transects 4 et 7+9. Sonde 10 : sonde de référence utilisée par Vincent et Briggs [132] . . . . .	134
V.2.2	Représentation du domaine de calcul avec des zones de relaxation selon $x$ et des conditions de réflexion selon $y$ . . . . .	135
V.2.3	Représentation de l'élévation de surface libre au-dessus de l'ellipse (échelle non respectée)- Relaxation avec absorption. . . . .	135
V.2.4	Instantané de l'élévation de surface libre - état stationnaire. Pointillés : localisation de l'ellipse. . . . .	137
V.2.5	HOS - Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle régulière - cas $M1$ . Comparaison des résultats suivant les zones de relaxation utilisées. Zones 1 : solution imposée non-nulle. Zones 2 : solution imposée nulle. . . . .	138
V.2.6	HOS - Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle régulière - cas $M1$ . Prise en compte des effets du fond. . . . .	139
V.2.7	HOS - Hauteur crête à creux le long des Transects 9 et 7 - houle régulière - cas $M1$ . . . . .	140
V.2.8	Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle régulière - cas $M1$ - Comparaisons HOS/OW3D. . . . .	141
V.2.9	Hauteur crête à creux le long des Transects 9 et 7 - houle régulière - cas $M1$ - Comparaisons HOS/OW3D. . . . .	141
V.2.10	Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle régulière - cas $M2$ . . . . .	142
V.2.11	Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle irrégulière unidirectionnelle - cas $U3$ - Comparaisons HOS/OW3D. . . . .	143

V.2.12	Instantané de l'élévation de surface libre - houle irrégulière unidirectionnelle - cas $U3$ - $t = 72T_p$ . Pointillés : localisation de l'ellipse. . . . .	144
V.2.13	Instantané de l'élévation de surface libre - houle irrégulière multidirectionnelle - cas $N3$ - $t = 72T_p$ . Pointillés : localisation de l'ellipse. . . . .	145
V.2.14	Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle irrégulière multidirectionnelle - cas $N3$ . . . . .	145
V.2.15	Hauteur crête à creux normalisée le long du Transect 4 - Comparaison des cas $M1$ , $M2$ , $U3$ et $N3$ . . . . .	146
V.3.1	Localisation des canyons sous-marins de Scripps et de la Jolla en Californie. . . . .	149
V.3.2	Topographie des canyons sous-marins de Scripps et de la Jolla. . . . .	150
V.3.3	Topographie des canyons sous-marins de Scripps et la Jolla - coordonnées cartésiennes. . . . .	150
V.3.4	Domaine de calcul - en pointillés : zone d'intérêt. . . . .	152
V.3.5	Champ de vagues dans le domaine d'étude obtenu avec $N_x = 256$ , $N_y = 1024$ , $M = 1$ , $M_b = 5$ , $h_{min} = 30m$ , $h_0 = 200m$ . . . . .	153
V.3.6	Tracé de rayons - théorie linéaire. Bathymétrie des canyons de Scripps/La Jolla. . . . .	154
V.3.7	Tracé de rayons et élévation de surface libre obtenue avec HOS. $M = 1$ , $M_b = 5$ , $h_{max} = 370m$ et $h_{min} = 30m$ . . . . .	155
V.3.8	Elévation de surface libre obtenue avec le modèle modes couplés (c.f. Gerosthathis <i>et al.</i> [68]). . . . .	156
V.3.9	Cartographie de la surface du bassin représentant l'amplitude adimensionnée des première et deuxième harmoniques. $ka = 0.009$ $M = 1$ et $M_b = 5$ . . . . .	157
V.3.10	Cartographie de la surface du bassin représentant l'amplitude adimensionnée des première et deuxième harmoniques. $ka = 0.036$ . $M = 3$ et $M_b = 5$ . . . . .	158
V.3.11	Spectre fréquentiel au niveau de la bouée Torrey Pines Outer Buoy le 30 Novembre 2003 entre 13h30 et 16h30. . . . .	159
V.3.12	Spectre directionnel au niveau de la bouée Torrey Pines Outer Buoy le 30 Novembre 2003 entre 13h30 et 16h30. . . . .	159
V.3.13	Localisation des sondes 33, 35, 36 et 37 - Canyons de Scripps et La Jolla. . . . .	161
V.3.14	Comparaisons des hauteurs significatives prédites et mesurées le 30 novembre 2003 entre 13h30 et 16h30. Les sondes sont localisées sur la Fig.V.3.13. . . . .	161
V.3.15	Comparaisons des spectres fréquentiels prédits et mesurés le 30 novembre 2003 entre 13h30 et 16h30. Les sondes sont localisées sur la Fig.V.3.13. . . . .	162

# Liste des tableaux

IV.1.1	Erreur relative sur $\epsilon_W$ , $N = 64$ , $M = 8$ . . . . .	101
IV.1.2	Méthode originelle. Erreur sur $W$ avec $N_d = N \frac{M+1}{2}$ . $\frac{N}{\lambda} = 42$ , $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ , $kh = 2$ , $ka = 0.2$ . . . . .	108
IV.1.3	Méthode améliorée. Erreur sur $W$ avec $N_d = N \frac{M+1}{2}$ . $\frac{N}{\lambda} = 42$ , $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ , $kh = 2$ , $ka = 0.2$ . . . . .	109
IV.1.4	Méthode améliorée. Erreur sur $W$ avec $N_d = N \frac{M_b+1}{2}$ . $\frac{N}{\lambda} = 42$ , $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ , $kh = 2$ , $ka = 0.2$ . . . . .	109
IV.1.5	Méthode originelle. Erreur sur $W$ avec $N_d = N \frac{M+1}{2}$ . $\frac{N}{\lambda} = 42$ , $\frac{\beta}{h_0} = 67\%$ , $kh = 2$ , $ka = 0.2$ . . . . .	109
IV.1.6	Méthode améliorée. Erreur sur $W$ avec $N_d = N \frac{M+1}{2}$ . $\frac{N}{\lambda} = 42$ , $\frac{\beta}{h_0} = 67\%$ , $kh = 2$ , $ka = 0.2$ . . . . .	110
IV.1.7	Méthode améliorée. Erreur sur $W$ avec $N_d = N \frac{M_b+1}{2}$ . $\frac{N}{\lambda} = 42$ , $\frac{\beta}{h_0} = 67\%$ , $kh = 2$ , $ka = 0.2$ . . . . .	110
V.2.1	Comparaison des différents cas modélisés. . . . .	147



# Lexique

BEM : Boundary Element Method  
BIE : Boundary Integral Equations  
CPU : Central Processing Unit  
CCSL : Condition Cinématique de Surface Libre  
CDSL : Condition Dynamique de Surface Libre  
CFD : Computational Fluid Dynamics  
CFL : [Condition de] Courant-Friedrichs-Levy  
CSL : Conditions de Surface Libre  
DNO : Dirichlet to Neumann Operator  
DTU : Technical University of Denmark  
ECN : Ecole Centrale Nantes  
FEM : Finite Element Method  
FFTs : Fast Fourier Transforms  
FMA : Fast Multipole Algorithms  
GMRES : Generalized Minimal RESidual [method]  
HOS : High-Order Spectral [method]  
HPC : Harmonic Polynomial Cell [method]  
IRT : Institut de Recherche Technologique  
JONSWAP : JOint North Sea WAve Project  
LHEEA : Laboratoire d'Hydrodynamique, Energétique et Environnement

## Atmosphérique

LU : Lower Upper [decomposition]  
MEL : Mixed Eulerian Lagrangian [method]  
NLS : Non-Linear Schrödinger [equation]  
PDC : Preconditioned Defect Correction [method]  
QALE FEM : Quasi Arbitrary Lagrangian-Eulerian FEM  
RAM : Random Access Memory  
RANS : Reynolds Averaged Navier Stokes [equations]  
RK4 : 4<sup>th</sup> – order Runge Kutta [scheme]





# Introduction Générale

L'objectif de cette thèse *Développement d'un modèle déterministe d'états de mer à grande échelle incluant les variations de bathymétrie* s'inscrit dans le cadre plus général de la résolution d'un problème d'hydrodynamique. En effet, la finalité de ce travail est de pouvoir calculer les interactions entre un écoulement à surface libre et des structures diverses présentes en mer ou à la côte. Celles-ci sont nombreuses et l'on peut par exemple citer les barges et plate-formes off-shore, les navires, les systèmes de récupération d'énergie de la houle et du vent, mais également les jetées et structures portuaires. L'écoulement à surface libre se caractérise principalement par les ondes de gravité qui s'y propagent, c'est-à-dire la houle. Le but est donc de connaître la réponse de ces structures à la houle ainsi que les efforts qui s'y appliquent, afin de pouvoir les dimensionner correctement, connaître leur comportement en conditions de survie ou bien leur efficacité (par exemple le rendement des systèmes de récupération d'énergie, la résistance à l'avancement des navires).

Afin de calculer ces interactions fluide/structure, deux méthodes peuvent être envisagées. La première est de les quantifier par des mesures expérimentales. La seconde privilégie les techniques numériques.

Les mesures expérimentales nécessitent bien souvent l'utilisation de modèles réduits en bassin afin de limiter les coûts et de gagner en simplicité. Cependant, cela suppose de se placer dans des conditions de similitudes partielles auxquelles s'ajoute la difficulté de reproduire correctement un champ de vagues en bassin. De plus, bien que réduit par rapport à l'échelle réelle, le coût de ces expériences reste élevé et chaque nouvelle structure nécessite du temps et de l'investissement. C'est pourquoi la modélisation numérique est de plus en plus employée. Elle présente également un coût mais est plus facilement adaptable. Bien entendu, les mesures expérimentales et les techniques numériques sont complémentaires et permettent de valider l'une ou l'autre des approches.

Afin d'utiliser de telles techniques numériques, il est nécessaire de modéliser fidèlement les états de mer. En effet, la modélisation précise de la houle est la première étape dans la détermination des interactions fluide/structure. Mais qu'entend-on par vagues et houle ?

L'action du vent sur la mer donne naissance aux vagues. La mer du vent est le système de vagues créé à l'endroit même où souffle le vent. En quittant l'endroit où elles ont été générées, les vagues se régularisent et interagissent entre elles afin de former la houle, qui peut se propager sous forme d'ondes de gravité sur de très grandes distances même en l'absence de vent. Ces ondes de gravité sont formées de crêtes et de creux, et peuvent avoir des longueurs d'ondes allant

d'un à plusieurs centaines de mètres. Elles vont ainsi former un état de mer pouvant se propager sur de milliers de kilomètres.

Lors de leur propagation, de nombreux phénomènes physiques complexes entrent en jeu. Tout d'abord, les vagues interagissent entre elles et échangent de l'énergie. Cet échange d'énergie fait notamment croître la période des vagues, qui devient de l'ordre de la dizaine de secondes après des milliers de kilomètres de propagation. Leur modélisation est particulièrement délicate proche des côtes où la bathymétrie est variable. En effet, les vagues se propageant dans des zones de faible profondeur sont alors très impactées par le fond, notamment à travers le phénomène de shoaling. Ainsi, lorsqu'une vague se dirige vers une plage, la profondeur diminue. La vitesse de groupe, proportionnelle à la profondeur, se trouve alors réduite, ce qui conduit à une diminution de la longueur d'onde, et à une augmentation de l'amplitude. Les vagues deviennent alors plus cambrées ce qui conduit la plupart du temps au déferlement, qui est un processus physique complexe durant lequel les vagues dissipent leur énergie. Il correspond à une instabilité de la forme de la vague qui se produit lorsque la vitesse ou l'accélération des particules d'eau au niveau de la crête de la vague dépasse la vitesse de phase. Ce processus a également lieu en pleine mer, et est de nos jours encore mal compris et modélisé. Le phénomène de réfraction entre également en jeu : si une vague arrive obliquement par rapport à une plage alors son extrémité la plus proche de la plage va voir sa vitesse se réduire fortement et la ligne de crête va se tourner face à la plage (de manière à se rapprocher de la direction de l'isobathe).

Le processus de diffraction intervient également en fond variable. Il consiste en un changement de direction de propagation de la houle en absence de toute variation de la vitesse de propagation. Ainsi, lorsque des irrégularités du fond ou une structure en mer arrêtent une partie du front de la houle, on constate des oscillations derrière la structure car la houle contourne cet obstacle. Un dernier phénomène intervient, celui de la réflexion. Lorsque la houle impacte une structure, elle se réfléchit partiellement. Les lois de réflexion en théorie linéaire sont alors identiques à celles de l'optique géométrique (loi de Snell-Descartes).

De plus, lors de la propagation sur un fond variable, des interactions non-linéaires entre les différentes composantes de la houle entrent en jeu. Cela se traduit par la génération d'ondes libres et d'ondes liées, qui ne sont pas reproduites par une théorie linéaire. Un modèle non-linéaire est donc nécessaire afin de reproduire précisément la houle se propageant dans des zones de profondeur variable. Il est également intéressant d'utiliser un modèle déterministe également appelé modèle à phase résolue car il conserve l'information sur les phases des composantes de houle, par opposition aux modèles dit à phase moyennée ou stochastique, tel le modèle WaveWatch III<sup>1</sup>.

Dans ce cadre, le projet de recherche «SimAvHy » (Simulation Avancée en Hydrodynamique), porté par l'Institut de Recherche Technologique Jules Verne, en partenariat avec le LHEEA, ALSTOM, Bureau Veritas, DCNS et STX, s'intéresse au développement de modèles numériques avancés en vue de créer la prochaine génération d'outils de simulation déterministe du génie océanique.

Au sein de ce projet, la thèse a pour objectif le développement d'une mé-

---

1. <http://polar.ncep.noaa.gov/waves/wavewatch/>

thode numérique permettant la simulation déterministe d'états de mer à grande échelle dans des zones géographiques où la profondeur d'eau est limitée et variable. L'intérêt est de modéliser plus finement la propagation de la houle près des côtes où les dispositifs d'énergies marines renouvelables ont vocation à s'implanter (par exemple les éoliennes sur le banc de Guérande).

La méthodologie développée dans cette thèse consiste à enrichir un modèle pseudo-spectral (High-Order Spectral, HOS) développé à l'Ecole Centrale de Nantes par le LHEEA depuis 2003 et qui a fait l'objet de nombreuses thèses (Le Touzé [92], Bonnefoy [25], Ducrozet [46], Blondel [24] et Perignon [113]). Il modélise la propagation d'états de mer de façon déterministe, dans des domaines de grande dimension (jusqu'à  $100km^2$ ) et présentant une profondeur constante. Il permet la résolution du problème non-linéaire complet et a été largement validé et appliqué à la propagation d'états de mer en profondeur constante, arbitraire dans des domaines supposés infinis dans le plan horizontal. Une version parallèle a été développée afin de tirer parti du développement des calculateurs et de pouvoir travailler sur de très grands domaines avec des temps de calculs raisonnables. Ce modèle sera présenté plus en détail dans le manuscrit.

Afin de justifier le choix du modèle HOS et de le situer au sein des différentes méthodes existantes, une étude bibliographique a été menée. C'est l'objet de la première partie. On introduira ainsi dans un premier chapitre les équations régissant notre problème. Les chapitres suivants détailleront les différentes méthodes potentielles non-linéaires permettant de modéliser la propagation de houle sur fond plat et sur fond variable. On s'attachera notamment à mettre en avant leurs avantages et inconvénients. Cette étude bibliographique a ainsi permis d'identifier une méthode similaire à la méthode HOS, sur laquelle nous nous sommes appuyés pour développer le modèle HOS fond variable. Il s'agit de la méthode DNO (Dirichlet-to-Neumann Operator), qui permet la prise en compte d'une bathymétrie variable.

Dans une deuxième partie, la théorie du modèle non-linéaire HOS initial sera détaillée, et comparée à la méthode DNO. L'extension de la méthode HOS à un fond variable sera alors présentée. Ce travail a donné lieu à trois méthodes permettant de résoudre le problème fond variable. Ces trois méthodes seront comparées par la suite et nous verrons que seules deux méthodes seront conservées. Nous mettrons également en avant les aspects relatifs au temps de calcul du modèle HOS, et le surcoût introduit par la prise en compte du fond variable.

La troisième partie s'attachera à décrire la mise en œuvre du modèle. Nous nous intéresserons particulièrement à la façon de conserver la périodicité du modèle HOS lorsque le fond varie. Dans ce cadre, nous présenterons un bref aperçu des méthodes utilisées en 2D afin de générer la houle et de l'absorber, puis nous l'appliquerons à notre modèle. Le fond devant aussi être périodique, nous indiquerons la méthode utilisée pour respecter cette condition. La spécificité des cas tridimensionnels sera également abordée. Ce point, très peu traité dans la littérature, est clé pour nos applications en fond variable. Une méthode originale de symétrisation sera introduite.

La quatrième partie permettra de valider le modèle HOS fond variable. A

l'aide d'un cas test bien choisi, nous examinerons dans un premier chapitre la convergence et la précision du modèle, ainsi que son efficacité par rapport au modèle fond plat. Nous comparerons également en terme de précision et d'efficacité les deux méthodes HOS retenues permettant de prendre en compte une bathymétrie variable. Ensuite, le deuxième chapitre présentera deux cas de validation couramment utilisés dans la littérature : un cas de réflexion de Bragg et un cas de shoaling d'une houle linéaire. Le premier cas permettra de valider le modèle dans des conditions de faibles variations de fond. Le deuxième s'intéressera à de grandes variations de fond et permettra d'étudier uniquement l'influence des non-linéarités du fond sur la surface libre.

Enfin, des cas d'applications avec d'importantes variations du fond seront détaillés dans une cinquième partie. Un cas d'application bidimensionnel de propagation de houle au-dessus d'une marche immergée avec deux types de pente sera tout d'abord présenté dans le chapitre 1. Puis, dans un second chapitre, nous nous intéresserons au cas de propagation tridimensionnel d'une houle régulière et irrégulière au dessus d'un fond elliptique. Nous concluons dans le dernier chapitre par un cas de propagation de houle longue au-dessus des canyons de Scripps/La Jolla en Californie, pour lesquels nous disposons de données expérimentales. Ces cas de validations seront comparés aux résultats expérimentaux et numériques disponibles.

Première partie

Méthodes potentielles  
non-linéaires appliquées à la  
modélisation déterministe  
d'états de mer



# Introduction

Cet état de l'art va permettre d'introduire la modélisation de la propagation des ondes de gravité et les nombreuses méthodes numériques existantes. On s'intéressera tout particulièrement aux méthodes potentielles non-linéaires et on pourra ainsi situer la méthode HOS utilisée au cours de la thèse.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction générale, la modélisation précise et efficace de la propagation d'états de mer est primordiale pour la modélisation des interactions houle/structure ou des processus côtiers (tels que le shoaling, la réfraction, la diffraction, la réflexion et le déferlement).

La modélisation de la propagation de la houle repose sur les équations de Navier-Stokes qui permettent de décrire le mouvement d'un fluide dit newtonien. Ces équations sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires. Des solutions analytiques du problème existent (c.f. Airy [2] et Stokes [126]) si l'on suppose l'écoulement potentiel (voir la définition ci-après). Elles sont fondées sur des hypothèses de faibles cambrures de la houle, mais deviennent très vite inadaptées dès lors que l'on souhaite prendre en compte des non-linéarités importantes ou des processus physiques complexes telle que la variation de fond. Pratiquement, la résolution ne peut donc être effectuée que par l'utilisation de techniques numériques. Les premières méthodes de résolution non-linéaires pour le problème de propagation de vagues sont apparues dans les années 1960 avec les travaux de Phillips [115], Longuet-Higgins [99], Hasselmann [83] et Zakharov [149].

Un très grand nombre de modèles ont été développés depuis, avec différentes hypothèses de résolution. Jusque récemment, la majorité des études réalisées, notamment par les industriels des secteurs naval et énergétique, utilisent des modèles linéaires pour modéliser de grands domaines à un coût raisonnable. Cependant, ces modèles sont limités à des cambrures de houle faibles. De plus, dans les régions côtières où la bathymétrie varie beaucoup, il est nécessaire de modéliser les processus côtiers non-linéaires, notamment le déferlement (processus totalement non-linéaire) et le shoaling (qui est mal représenté par une théorie linéaire lorsque la houle devient très cambrée).

Les modèles CFD (Computational Fluid Dynamics) résolvent les équations de Navier-Stokes complètes. L'utilisation des équations de Navier-Stokes moyennées au sens de Reynolds (RANS) avec un modèle de turbulence afin de fermer les équations permet par exemple de résoudre la dynamique complète de propagation de houle et des interactions avec des structures en mer (c.f. Westphalen *et al.* [138], Lara *et al.* [91]). Néanmoins, la taille du domaine et la résolution spatiale sont fortement limitées par le temps de calcul prohibitif, ce qui empêche



leur utilisation pour des applications pratiques 3D. En effet, lorsque l'on cherche à modéliser la propagation de houle sur un grand domaine, il est nécessaire de résoudre de grandes échelles spatiales et de modéliser une grande variété de longueurs d'onde dans le spectre. De plus, ces méthodes induisent généralement une dissipation numérique qui ne permet pas la simulation de propagation de houle sur des grandes échelles de temps et d'espace.

En faisant les hypothèses d'écoulement non visqueux, irrotationnel (on suppose alors l'écoulement non-déferlant) et de fluide incompressible, ces équations peuvent être résolues par des méthodes dites potentielles. Cette approche dérive de la théorie potentielle apparue aux XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles dans le cadre de problèmes gravitationnels avec les travaux de Lagrange (1773), Legendre (1784 à 1794) et Laplace (1782 à 1799). Ces méthodes nécessitent la résolution du problème de Laplace et supposent que les vitesses dérivent d'un potentiel, on parlera donc de potentiel des vitesses.

Nous allons donc dans un premier temps introduire les hypothèses et le système d'équations régissant les méthodes potentielles. Puis nous présenterons une revue de différentes méthodes potentielles couramment employées afin de positionner la méthode HOS au sein de celles-ci.

# Chapitre I.1

## Formulation du problème potentiel

Cette partie présente de façon succincte la formulation potentielle régissant le problème de propagation de houle. Les hypothèses réalisées ainsi que les équations générales sont introduites.

### I.1.1 Hypothèses

Nous décrivons ici les différentes hypothèses réalisées pour la mise en équation du problème. Nous nous plaçons, par simplification, dans un domaine 2D, défini par les axes  $x$  (horizontal) et  $z$  (vertical vers le haut), comme présenté sur la Fig.II.1.1. L'extension en 3D ne pose aucun problème car la formulation est identique (cette extension sera présentée au paragraphe II.2.6). L'axe  $z$  est défini de telle manière que  $z = 0$  représente le niveau moyen pour lequel il n'y ait pas de perturbation de la surface libre. Notons également  $h(x)$  la profondeur d'eau.

Le fluide étudié sera de l'eau supposée incompressible. De plus, on considère un écoulement non visqueux et irrotationnel. Les effets visqueux (frottements sur le fond, dissipation interne, dissipation à l'interface air/eau) sont en effet négligeables dans la problématique envisagée. L'hypothèse d'irrotationnalité est valide car si l'on part du repos où le rotationnel de la vitesse est nul, les théorèmes de Kelvin Guyon *et al.* [81] ou de Thomson Landau et Lifchitz [90] montrent que pour un fluide parfait barotrope soumis à des forces extérieures dérivant d'un potentiel, le rotationnel restera nul au cours de l'évolution ultérieure de l'écoulement. Ce caractère irrotationnel impose cependant de négliger le déferlement car la singularité créée lors de la reconnexion de la surface libre peut induire une création de vorticité. On se place donc, classiquement, dans le cadre de la théorie des écoulements potentiels. Le champ de vitesse  $\vec{V}$  dérive d'un potentiel  $\phi$  appelée potentiels de vitesse :  $\vec{V} = \vec{grad}(\phi)$ .

## I.1.2 Système d'équations à résoudre

Avec les hypothèses précédentes, les équations régissant notre problème sont données ci-dessous. On introduit pour cela  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$ .

- En théorie potentielle, l'équation de continuité ( $div \mathbf{V} = 0$ ) traduisant l'incompressibilité du fluide devient l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi = 0 \quad (\text{I.1.1})$$

- La Condition sur le fond nous impose un flux nul sur cette frontière :

$$\nabla\phi\nabla\beta - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h. \quad (\text{I.1.2})$$

- En écrivant l'imperméabilité de la surface libre, on obtient la Condition Cinématique de Surface Libre (CCSL) :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\phi.\nabla\eta \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{I.1.3})$$

- Et l'équation de conservation de la quantité de mouvement nous donne accès à la Condition Dynamique de Surface Libre (CDSL) qui traduit le fait que la pression de l'eau à la surface libre est égale à la pression de l'air (les effets de tension superficielle sont négligés) :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} \left| \tilde{\nabla}\phi \right|^2 \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{I.1.4})$$

## I.1.3 Méthodes potentielles

Au sein des méthodes de résolution potentielles, trois grands types de méthodes peuvent être distinguées. Tout d'abord, on trouve les méthodes basées sur une formulation du problème aux frontières, avec la méthode éléments aux frontières (ou BEM). Une autre classe de méthodes se base sur la discrétisation du problème complet volumique. De nombreuses méthodes font partie de cette catégorie : les méthodes Eléments Finis (FEM) ou Différences Finies (FDM) pour ne citer que les plus connues. Enfin, la dernière classe de méthode s'appuie sur une formulation des conditions de surface libre (CSL) à la surface libre, plus connue sous le nom de formulation de Zakharov [149]. Parmi elle se trouve la méthode HOS employée au cours de la thèse. Afin d'être complets par rapport au problème envisagé, nous présenterons également des méthodes réalisant des hypothèses supplémentaires qui sont adaptées à la résolution du problème de propagation de houle en fond variable.

Le but des prochains chapitres est donc de positionner la méthode HOS par rapport aux autres méthodes potentielles non-linéaires couramment employées pour modéliser la propagation de houle.

## Chapitre I.2

# Résolution du problème aux frontières

La méthode des Éléments aux Frontières (Boundary Element Method ou BEM) est une méthode très employée pour résoudre le problème potentiel non-linéaire. Elle est basée sur la formulation intégrale des équations (BIE pour Boundary Integral Equations). La surface libre est décrite par des marqueurs, vus comme des points lagrangiens. Longuet-Higgins et Cokelet [98] furent les premiers à utiliser cette approche en 2D dans un domaine de grande profondeur et périodique dans la direction horizontale.

La formulation BIE permet, à l'aide des fonctions de Green, de transformer le problème tri-dimensionnel en un problème bi-dimensionnel sur les frontières du domaine, qui peuvent être fixes ou mobiles. Ainsi, au lieu de résoudre le potentiel à l'intérieur du domaine fluide, le problème est résolu sur les frontières du volume fluide, en fonction des conditions aux limites. La géométrie traitée peut être quelconque. Pratiquement, on doit résoudre une condition de Dirichlet sur la surface libre et une condition de Neumann sur les autres frontières. Ces conditions sont écrites sous forme intégrale, puis discrétisées.

Numériquement on réduit donc drastiquement le nombre d'inconnues. Néanmoins, cela conduit à des opérateurs matriciels qui, s'ils sont résolus de manière directe, engendrent un temps de calcul prohibitif. Pour résoudre le problème non-linéaire complet, il y a donc besoin à chaque pas de temps d'inverser un système matriciel avec une matrice pleine ce qui est très coûteux en temps de calcul (mais moins que de manière directe). Le temps de calcul n'est alors pas proportionnel au nombre de points. Par contre, si les conditions de surface libre sont linéarisées, cela le réduit beaucoup car le système matriciel se simplifie énormément et l'on peut résoudre les équations dans le domaine fréquentiel. Par exemple, le code NEMOH développé au LHEEA (c.f. Babarit et Delhommeau [5]) utilise cette méthode BEM linéarisée pour résoudre des problèmes de diffraction/radiation.

La mémoire requise par une formulation BEM classique est proportionnelle à  $N^2$ , avec  $N$  le nombre de points sur les frontières du domaine. Une méthode directe comme le pivot de Gauss ou la factorisation LU requiert alors  $N^3$  opérations pour inverser le système matriciel. Des solveurs itératifs typiques, comme la méthode Gauss-Seidel ou la méthode GMRES (Generalized Minimal Residual), mènent à un temps de calcul proportionnel à  $N^2$ . Par conséquent, le

temps de calcul et la mémoire requise pour la méthode BEM classique augmentent énormément avec le nombre d'inconnues, ce qui a été une limitation forte de la méthode, notamment si l'on cherche à modéliser des domaines de grandes dimensions.

Les modèles plus aboutis basés sur la formulation classique de la BEM et permettant de résoudre le problème de propagation de houle ont été introduits par Grilli *et al.* [76] et Grilli *et al.* [77] dans lesquels des modélisations non-linéaire de shoaling d'onde solitaire ou de génération de tsunamis sont réalisées.

Des développements récents de méthodes accélérées ont permis de lever les limitations de ces méthodes. Par exemple, l'utilisation de la méthode pré-corrigée à transformées de Fourier rapides (p-FFT) couplée à la BEM permet d'avoir un temps de calcul et mémoire en  $N \log(N)$  (Korsmeyer *et al.* [85], Korsmeyer *et al.* [86]). De même, dans Fochesato et Dias [60], Liu [97], Teng *et al.* [129], une accélération de la résolution grâce à des algorithmes de résolution rapide par multipôles (FMA pour Fast Multipole Algorithms) introduite par Greengard et Rokhlin [75] est présentée. Leurs tests numériques indiquent que la méthode FMA peut être jusqu'à 6 fois plus rapide que la méthode BEM classique (c.f. Fochesato et Dias [60]). Les applications sont disponibles dans Fochesato *et al.* [61]. La version la plus récente de la FMA présentée dans Harris *et al.* [82] a permis de ramener le temps de calcul proportionnel au nombre de points  $N$ , à la fois pour les multiplications matricielles et les problèmes de stockage, en utilisant le FMA couplé à une méthode aux éléments aux frontières d'ordre plus élevé (c.f. Liu *et al.* [96]).

La scalabilité et l'efficacité de la méthode BEM (Harris *et al.* [82]) peut être comparée à celle d'autres solveurs hydrodynamiques massivement parallèles (Shao et Faltinsen [119], Engsig-Karup *et al.* [53], Engsig-Karup *et al.* [54]) qui atteignent une très bonne précision et une très bonne scalabilité en utilisant des méthodes multigrilles. Néanmoins, à précision constante, la méthode BEM reste moins efficace que les méthodes de discrétisation volumiques aux différences finies et aux éléments finis qui seront introduites par la suite, comme montré dans Wu et Eatock-Taylor [142] et Shao et Faltinsen [119].

L'avantage de cette méthode des éléments aux frontières est qu'elle est totalement non-linéaire et que l'on peut traiter des domaines de géométrie arbitraire, et qu'ainsi la prise en compte de fortes variations de bathymétrie et l'inclusion de corps à géométrie complexe à l'intérieur du domaine sont possibles (c.f. Grilli *et al.* [76], Grilli *et al.* [77]). Cette méthode est d'ailleurs très utilisée pour traiter des problèmes d'interaction non-linéaire fluide/structure (Zhou *et al.* [150]). Elle peut être facilement combinée à un autre solveur, par exemple un solveur éléments finis, qui va permettre de résoudre le champ lointain, tandis que la BEM va résoudre le champ proche d'interaction avec le corps (Wu et R. Eatock-Taylor [144]). De plus, la modélisation de l'initiation du déferlement est possible et peut être intéressante dans certains cas (c.f. Fochesato *et al.* [61]). Néanmoins, le déferlement ne peut pas être modélisé dans sa totalité. En effet, quand la vague déferle, la reconnexion de l'interface n'est pas accessible avec la BEM. Cela peut cependant permettre de déterminer un critère d'initiation du déferlement (Barthelemy *et al.* [7]). Le principal inconvénient est que le temps de calcul reste élevé pour résoudre le problème de propagation de houle à grande échelle (même en utilisant le FMA).

Nous allons donc maintenant nous intéresser aux méthodes basées sur la résolution du problème complet volumique, qui comme leur nom l'indique, nécessitent une discrétisation complète du volume fluide.



## Chapitre I.3

# Résolution du problème complet volumique

Dans ce chapitre, nous décrivons brièvement les méthodes basées sur la résolution du problème complet volumique disponibles et adaptées à la propagation de houle en fond variable. Elles sont basées sur la résolution directe des équations de Laplace, et utilisent une discrétisation du volume complet. Parmi ces méthodes, on distingue trois grandes classes. La première est basée sur l'utilisation d'un maillage complexe et non-structuré avec une discrétisation en éléments finis. La deuxième utilise la transformation  $\sigma$  dans la verticale, introduite par Phillips [114] qui permet de se ramener à un maillage structuré et fixe. Dans cette dernière classe on trouve les méthodes aux différences finies (FDM) et des méthodes mixtes. La troisième est relativement nouvelle et se base sur l'utilisation de polynômes harmoniques. La principale difficulté des méthodes volumiques est qu'il faut inverser un grand système matriciel linéaire car tout le domaine est discrétisé. Cependant, les procédures de discrétisation employées conduisent souvent à des matrices creuses, ce qui permet de réduire le temps de calcul.

La prise en compte du déferlement n'est pas résolue de façon exacte, mais, comme pour toutes les méthodes potentielles, des termes dissipatifs peuvent être ajoutés afin de modéliser le phénomène. Nous verrons que certaines méthodes (par exemple les éléments finis) permettent de modéliser la houle jusqu'au déferlement, comme dans le cas de la méthode des éléments aux frontières.

Nous allons donc présenter plus en détail une revue de ces méthodes et nous insisterons notamment sur la méthode aux différences finies qui a été utilisée au cours de la thèse afin de se comparer, sur un cas d'application, au modèle HOS développé.

### I.3.1 Méthodes Eléments Finis

Ces méthodes sont basées sur une discrétisation en éléments finis (Finite Element Method ou FEM). Le principal problème lié à ces méthodes est que le maillage devient rapidement trop déformé car il suit la surface libre. Il faut donc régénérer le maillage très souvent (parfois à chaque pas de temps) ce qui devient vite prohibitif en termes de temps de calcul.



L'avantage de ces méthodes est que le maillage est non-structuré, cela permet donc une meilleure flexibilité de la géométrie par rapport aux méthodes pseudo-spectrales et aux méthodes basées sur la transformation  $\sigma$  qui utilisent un maillage structuré. Il est ainsi possible de prendre facilement en compte une bathymétrie variable. De plus, on garde l'aspect totalement non-linéaire car aucun développement en série de perturbations n'est réalisé. Le temps de calcul semble légèrement meilleur à celui de la méthode BEM classique, comme démontré par Cai *et al.* [30]. Néanmoins, il reste prohibitif pour des calculs 3D sur de grands domaines et de grandes échelles de temps.

Historiquement, les méthodes éléments finis ont été développées à la fin des années 1950 pour le domaine des structures. Le principe est de discrétiser le domaine fluide en éléments et ensuite d'utiliser des fonctions d'interpolation (ou de forme) pour chaque élément. L'application de ces méthodes pour les problèmes linéaires et non-linéaires de propagation de houle a débuté dans les années 1970 avec notamment les travaux de Bai [6]. Ensuite, la méthode a été utilisée de manière linéaire pour résoudre les problèmes d'interaction fluide-structure. La FEM est alors utilisée pour le corps et le fluide proche du corps et une autre méthode est employée dans le reste du domaine (voir par exemple les travaux de Wu et Eatock-Taylor [140]).

Pour la résolution du problème non-linéaire bidimensionnel, il faut attendre les travaux de Wu et Eatock-Taylor [141]. Une comparaison entre les méthodes BEM et FEM a été réalisée juste après par Cai *et al.* [30] et Wu et Eatock-Taylor [142]. Ces derniers ont notamment montré que la méthode aux éléments finis présente des avantages en termes de temps de calcul et utilisation de la mémoire RAM (Mémoire à Accès Direct). La méthode s'est ensuite répandue avec notamment les travaux de Westhuis [137]. Ensuite, le problème non-linéaire tridimensionnel a été abordé en premier par Wu *et al.* [143] et Ma [103] pour des applications de sloshing, puis par Ma *et al.* [102] et de nombreux autres auteurs.

Comme dit précédemment, le principal problème est que très souvent le maillage se déforme trop en suivant la surface libre. Il est donc nécessaire de régénérer le maillage assez souvent, ce qui est très coûteux. Des travaux récents par Ma et Yan [104] ont rendu la méthode plus efficace avec le modèle QALE-FEM (Quasi Arbitrary Lagrangian-Eulerian FEM) qui permet notamment de ne générer le maillage qu'une seule fois au premier pas de temps. Un algorithme est présenté afin que le maillage suive facilement la structure en fonction du temps et d'estimer de façon plus précise la vitesse du fluide à la surface libre. Yan et Ma [146] ont montré que la méthode QALE-FEM ainsi développée était plus efficace que la méthode FMA-BEM utilisée par Fochesato *et al.* [61]. Cette méthode a été appliquée à la propagation d'états de mer 3D sur des fonds variables avec prise en compte du déferlement par Yan et Ma [146] (néanmoins, comme dans le cas de la BEM, seule la phase de propagation juste avant que la vague ne déferle est modélisée).

### I.3.2 Méthodes utilisant une transformation $\sigma$ dans la verticale

En deux dimensions, il est possible d'utiliser une transformation conforme afin de transformer le problème 2D en un problème 1D résolu sur la surface libre à l'aide de transformée de Fourier (c.f. par exemple Chalikov et Sheinin [32]). Néanmoins, cette technique n'est pas applicable aux cas tridimensionnels.

En 3D, la transformation  $\sigma$  (introduite par Phillips [114]) est très souvent utilisée dans la direction verticale afin de ramener le problème étudié à une géométrie fixe (celle constante du fluide au repos) en écrivant :

$$\sigma(x, z, t) = \frac{z + h(x)}{\eta(x, t) + h(x)} \quad (\text{I.3.1})$$

On a alors  $\sigma = 0$  au fond, et  $\sigma = 1$  à la surface libre. Cela permet donc de se ramener à un maillage fixe, ce qui évite les problèmes de déformation de maillage évoqués précédemment avec les méthodes FEM. Le problème potentiel (Eqs.(I.1.1) à (I.1.4)) peut alors être réécrit en fonction de cette nouvelle variable.

L'avantage est que l'on utilise un maillage fixe, on n'a donc pas besoin de le régénérer à chaque pas de temps comme pour les méthodes FEM par exemple. De plus, on garde l'aspect totalement non-linéaire car aucun développement en série de perturbations n'est réalisé. Enfin, il est possible de prendre en compte une bathymétrie variable. L'inconvénient est que l'équation de Laplace devient une équation de Poisson (similaire mais inhomogène) : il faut donc discrétiser volumiquement le domaine. On a alors une augmentation du temps de calcul par rapport aux méthodes surfaciques, ce qui peut être prohibitif pour des calculs 3D.

#### I.3.2.1 Différences finies

Nous allons ici présenter la méthode aux différences finies. Une review des différents modèles s'appuyant sur cette méthode est donnée par Yu [148]. Ce modèle est inspiré des travaux de Li et Fleming [93] qui furent les premiers à proposer une méthode bas-ordre multigrille pour résoudre les équations potentielles non-linéaires de propagation de houle de façon efficace. Des extensions de leurs travaux concernant la robustesse et l'amélioration de l'efficacité ont été proposées par Bingham et Zhang [23] en 2D et Engsig-Karup *et al.* [55] en 3D au sein du code OceanWave3D<sup>1</sup>. Ainsi, le travail de Li et Fleming [93] a été généralisé par Engsig-Karup *et al.* [53] afin de prendre en compte des discrétisations du schéma d'ordre flexible et de réduire le temps de calcul de la méthode développée. Le fait de pouvoir discrétiser suivant un ordre arbitraire permet une amélioration de la précision et une parallélisation efficace pour des domaines de grandes tailles. Cela a été testé sur une architecture multi-coeurs (c.f. Engsig-Karup [52]).

Avec cette méthode, les dérivées sont donc exprimées par des schémas aux différences finies d'ordre arbitraire. En se basant sur les travaux de Fuhrman

---

1. <http://www2.imm.dtu.dk/~apek/OceanWave3D>

et Bingham [65] et Kreiss et Olinger [88], Bingham et Zhang [23] montrent que l'utilisation de schémas de différences finies d'ordre 4 est optimale. La méthode  $\sigma$ -transform est utilisée dans la verticale.

Le fait de garder l'ordre du schéma de discrétisation spatial flexible permet d'avoir deux stratégies de convergence, nommées  $h-$  (la résolution spatiale est affinée) et  $p-$  (l'ordre du schéma est augmenté). Cela signifie que la précision peut donc être ajustée.

Dans le plan horizontal, un maillage structuré curviligne est utilisé, avec la possibilité de prendre un pas d'espace non-uniforme pour inclure des points supplémentaires où on le souhaite. L'intégration en temps se fait de manière explicite grâce à un schéma Runge-Kutta d'ordre 4. Le modèle présente une condition CFL de stabilité qui est gouvernée uniquement par la physique du problème et non pas par la méthode numérique employée (souvent, pour la plupart des méthodes, la condition CFL impose des pas de temps très petits lorsque la discrétisation spatiale augmente).

Cette méthode est flexible en terme de géométries, mais en tant que méthode volumique elle requiert un grand nombre de nœuds pour représenter le domaine de calcul. Cependant, cette formulation conduit à des matrices creuses, ce qui permet l'utilisation d'algorithmes de résolution numériques efficaces. Ainsi, en 2D, la méthode GMRES (Generalised Minimal RESidual) pré-conditionnée par une solution directe du système second ordre linéaire (indépendant du temps), donne un temps de calcul proportionnel au nombre de points dans la direction de propagation. Les résidus sont réduits d'un ordre 7 en 10 itérations, quelque soient la taille du problème et l'ordre des schémas (c.f. Bingham et Zhang [23]). En 3D, une méthode appelée "Multigrid Preconditioned Defect Correction" (PDC) est employée afin de pré-conditionner la matrice et ensuite d'employer la technique GMRES (c.f. Engsig-Karup *et al.* [55]) afin d'optimiser le temps de calcul de la méthode. Cela permet de réduire le temps de calcul par rapport à la solution sans PDC. Il faut noter que la technique est employée uniquement pour le pré-conditionnement à l'étape initiale. De plus, des points fantômes sont utilisés à l'extérieur du domaine fluide pour garder l'ordre de convergence du schéma et donc la précision, notamment pour des fonds non-uniformes.

Pour résumer, cette méthode permet de traiter des géométries complexes, avec un temps de calcul réduit par rapport aux méthodes FEM et BEM. Elle a notamment été utilisée et validée pour modéliser des cas de propagation d'états de mer 3D en bathymétrie variable, ou bien des interactions houle/structure en mer.

### I.3.2.2 Méthodes mixtes

De nombreuses méthodes utilisant une transformation  $\sigma$  dans la verticale ont été développées en utilisant des discrétisations différentes dans la plan horizontal et dans la direction verticale.

On peut par exemple citer la méthode mixte développée par Yates et Benoit [147]. Elle consiste à utiliser un schéma différences finies dans le plan horizontal, et une résolution pseudo-spectrale dans la verticale.

La résolution pseudo-spectrale dans la verticale s'effectue en 3 étapes. Tout d'abord, le domaine fluide est transformé en domaine rectangulaire grâce à la

transformation  $\sigma$ . Ensuite, les polynômes de Chebyshev sont utilisés pour approximer le potentiel des vitesses dans la verticale. Enfin, la méthode Tau-Chebyshev (variante de la méthode de Galerkin (c.f. Boyd [28])) est appliquée à l'équation de Laplace et à la condition au fond.

Cette méthode présente des avantages par rapport à la méthode différences finies complet car le temps de calcul est amélioré (c.f. Yates et Benoit [147]). De plus, par rapport aux méthodes utilisant une résolution spectrale dans toutes les directions (par exemple les méthodes présentées au paragraphe I.4.3) elle permet a priori de traiter des domaines de géométrie quelconque. Néanmoins, les temps de calcul sont supérieurs à ces méthodes pseudo-spectrales à cause de la résolution différences finies dans le plan horizontal.

Une autre méthode a été introduite par Chern *et al.* [34] et récemment améliorée par Christiansen *et al.* [35]. Elle consiste à utiliser une méthode pseudo-spectrale dans le plan horizontal, et une autre résolution pseudo-spectrale dans la verticale basée sur les polynômes de Chebyshev.

L'approche de Christiansen *et al.* [35] est basée sur la stratégie utilisée dans le code OceanWave3D introduit précédemment (c.f. paragraphe I.3.2.1). La transformation  $\sigma$  est donc également utilisée dans la verticale pour ramener le fluide à un domaine rectangulaire et la résolution différences finies dans le plan horizontal est alors remplacée par une méthode pseudo-spectrale (collocation de Fourier basée sur des modes en cosinus). Cette méthode est combinée à la méthode Tau-Chebyshev dans la direction verticale, ce qui permet de représenter la variation verticale du potentiel par une série tronquée de polynômes de Chebyshev. Ces polynômes sont définis sur des fonctions cosinus. Le problème de Laplace est alors résolu avec la méthode PDC préconditionnée par une discrétisation spectrale du problème linéaire, ce qui permet des propriétés de convergence rapide et une scalabilité optimale. Ainsi, comparée à la méthode HOS présentée dans le prochain chapitre, cette méthode permet l'utilisation d'une géométrie arbitraire, tout en améliorant le temps de calcul de la méthode volumique.

Les travaux récents de Chalikov *et al.* [31] combinent en quelque sorte les caractéristiques de la méthode spectrale hybride (c.f. Christiansen *et al.* [35]) et de la méthode différences finies complet (c.f. Engsig-Karup *et al.* [55]). En effet, ces auteurs proposent d'utiliser une résolution pseudo-spectrale dans le plan horizontal, combinée à une résolution différences finies du second ordre dans la direction verticale (sur une grille structurée). Les grandeurs à la surface libre  $\eta$  et  $\tilde{\phi}$  sont donc exprimées à l'aide d'une décomposition modale (séries de Fourier). Une transformation, légèrement différente de la transformation  $\sigma$ , est utilisée dans la verticale afin de ramener le problème étudié à une géométrie fixe. De plus, afin de faciliter la résolution dans la direction verticale, le potentiel est décomposé en une partie linéaire et une partie non-linéaire.

Cette méthode est selon Chalikov *et al.* [31] beaucoup plus précise pour modéliser l'évolution du spectre sur de grandes périodes temporelles que les méthodes spectrales exprimant le problème à la surface libre (c.f. chapitre I.4).

Enfin, une méthode nommée Eléments Spectraux, introduite par Patera [111], a été récemment améliorée par Engsig-Karup *et al.* [56] avec la possibilité d'utiliser un ordre arbitraire (arbitrary-order Spectral Element Method ou SEM). Elle peut être vue comme une extension de la méthode proposée par

Cai *et al.* [30], bien que l'implémentation diffère beaucoup. En effet, cette méthode utilise une formulation à la surface libre selon le formalisme de Zakharov [149], et une transformation  $\sigma$  dans la direction verticale. Des éléments finis sont ensuite utilisés pour résoudre le problème à la surface libre.

Elle combine donc les meilleurs aspects de la méthode éléments finies (flexibilité du domaine géométrique) et des méthodes pseudo-spectrales (convergence exponentielle de la précision). Il est possible d'utiliser une discrétisation d'ordre élevée (adaptative) ce qui la rend très pratique et efficace pour des applications type propagation de houle.

### I.3.3 Méthode Cellules à Polynômes Harmoniques

Shao et Faltinsen [120] ont également proposé une autre méthode de résolution du problème complet volumique appelée méthode Cellules à Polynômes Harmoniques (Harmonic Polynomial Cell method ou HPC). La surface libre est décrite, comme dans le cas de la BEM classique, par une méthode mixte Eulérienne/Lagrangienne (MEL). Le domaine de calcul est alors discrétisé par des cellules de forme quadrilatérale. Dans chaque cellule, le potentiel des vitesses est représenté par la superposition linéaire de polynômes harmoniques, qui sont chacun des solutions élémentaires de l'équation de Laplace. Cela conduit à un système avec une matrice creuse, qui peut être résolu avec un solveur bien choisi (par exemple le solveur GMRES déjà présenté au paragraphe I.2).

En 2D (c.f. Shao et Faltinsen [120]), la méthode a été utilisée pour reproduire la propagation de houle dans un bassin avec un fond plat ou variable. Dans cette dimension, elle est plus efficace que la BEM classique et que la FMA-BEM.

En 3D, (c.f. Shao et Faltinsen [119]) la méthode a été appliquée à des cas de sloshing, à un cas de focalisation derrière une demi-ellipse, ou bien à de la diffraction derrière un cylindre au fond. Elle est également comparée à la BEM et à la FMA-BEM. Selon les cas traités, la méthode HPC est plus efficace que ces méthodes. La comparaison à la méthode aux différences finies développée par Engsig-Karup *et al.* [55] montre que la convergence de l'erreur est du même ordre. Néanmoins, Shao et Faltinsen [119] indiquent que la méthode HPC devrait présenter un temps de calcul supplémentaire à la méthode différences finies.

## Chapitre I.4

# Expression du problème sur la surface libre

On décrit dans ce chapitre les différentes méthodes potentielles surfaciques non-linéaires basées sur le formalisme de Zakharov [149] fréquemment utilisées pour modéliser des états de mer. Certaines méthodes permettent la prise en compte d'un fond variable. Ces méthodes surfaciques expriment les conditions cinématique et dynamique au niveau de la surface libre. L'évolution temporelle de l'élévation de surface libre  $\eta$  et du potentiel des vitesses à la surface libre  $\tilde{\phi}$  ( $\tilde{\phi}(x, t) = \phi(x, \eta, t)$ ) repose sur la connaissance de la vitesse verticale à la surface libre  $W$ . La principale difficulté de ces méthodes est alors de déterminer la vitesse  $W$  en fonction de  $\eta$  et  $\tilde{\phi}$ , *i.e.* de passer d'un problème de Dirichlet à un problème de Neumann (c.f. par exemple la méthode Dirichlet to Neumann Operator présentée au paragraphe I.4.3).

La formulation de Zakharov [149] est aussi une des premières formulations à exprimer le problème sous forme Hamiltonienne, c'est à dire conservative, qui assure de plus l'obtention d'une description déterministe du système (voir West [135]). Cette formulation consiste à exprimer les conditions de surface libre comme dérivant de manière canonique d'un Hamiltonien, où l'Hamiltonien est l'énergie totale  $E$  (conservée) du système :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial \eta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial \tilde{\phi}} \quad (\text{I.4.1})$$

Cette formulation de Zakharov [149] représente la base sur laquelle s'appuient de nombreuses méthodes surfaciques.

Pour résoudre le problème surfacique, une méthode de discrétisation pseudo-spectrale est très souvent employée. Ces méthodes pseudo-spectrales sont des méthodes globales, par opposition aux méthodes locales où on résout les équations en chaque point du système (par exemple les méthodes des éléments aux frontières, Éléments Finis, Volumes Finis, Différences Finies sont des méthodes locales). Les méthodes locales sont intéressantes car elles permettent de traiter assez facilement des domaines de géométrie complexes, contrairement aux méthodes pseudo-spectrales pour lesquelles les inconnues sont décrites sur des

fonctions de base qui imposent une géométrie contrainte. En effet, lorsque l'on travaille avec des méthodes locales, seule la géométrie du point considéré et de ses voisins a de l'importance. En revanche, avec les méthodes pseudo-spectrales, la géométrie du domaine total revêt une grande importance car ces méthodes reposent sur un changement d'espace entre le domaine physique et le domaine de calcul (de Fourier dans la plupart des cas), et sur un espace de fonctions qui possède plusieurs propriétés et conditions. Ces fonctions doivent être définies sur tout le domaine de calcul, et être le plus régulières possible (c'est-à-dire sans discontinuités). Les méthodes pseudo-spectrales sont très intéressantes car elles présentent des propriétés de convergence améliorées par rapport aux méthodes locales.

Avec ces méthodes, l'inclusion de corps est impossible, mais cela peut être contourné par la méthode SWENSE (c.f. Ferrant *et al.* [59] et Gentaz *et al.* [67]) qui est une méthode spécifique développée au LHEEA. Celle-ci permet de décomposer le problème en deux parties : une partie incidente représentant la propagation de la houle et une partie diffractée représentant la perturbation due à la présence du corps flottant ou immergé. Cette décomposition est alors introduite dans les équations de Navier-Stokes moyennées au sens de Reynolds.

Avant de décrire ces méthodes pseudo-spectrales, nous faisons un bref rappel sur la décomposition d'une onde en modes. En effet, une onde est considérée comme la somme de toutes ses fréquences spatiales. Si on définit le nombre d'onde  $k$ , une onde peut alors être décomposée en modes  $F(k)$  par la relation :

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)e^{-ikx} dk \quad (\text{I.4.2})$$

Ainsi pour une houle réelle, la déformée de la surface libre s'exprime comme une somme de modes linéaires.

## I.4.1 Méthode directe

Cette méthode, introduite par Fenton et Rienecker [58] et reprise par Le Touzé [92] permet de modéliser le problème de façon totalement non-linéaire. Le potentiel est développé sous forme pseudo-spectrale, avec pour fonctions de base les modes naturels du domaine. On suppose ici qu'aucun développement en ordres n'est réalisé et que les conditions de surface libre (CSL) sont appliquées sur la position exacte de surface libre (en  $z = \eta$ ), d'où le nom de méthode directe.

Les algorithmes de FFTs ne sont donc pas applicables (c.f. Le Touzé [92]) et il est alors nécessaire d'inverser un système linéaire avec une matrice pleine. Le temps de calcul est donc très important et surtout beaucoup plus élevé que les autres méthodes pseudo-spectrales présentées ici, ce qui rend son application pratique impossible pour des cas de propagation de houle tri-dimensionnels dans de grands domaines. De plus, cette méthode nécessite le respect de conditions de périodicité au niveau de de la surface libre et du fond.

## I.4.2 Approche mode-coupling et équation de Zakharov

Avec cette méthode, la surface libre est vue comme la conséquence de l'évolution d'un champ de vague linéaire, et les non-linéarités sont interprétées comme la résultante de couplages entre les différentes composantes modales linéaires, d'où le nom de la méthode. Le problème potentiel non-linéaire présenté précédemment est développé en séries de perturbations en supposant la cambrure faible. Ensuite, un passage dans l'espace modal est effectué au moyen de transformées de Fourier. En pratique, le développement en série de perturbations est tronqué, sans tronquer le développement en série de Fourier, afin de limiter le nombre de termes. Pour conserver la cohérence de cet ordre de troncature, les interactions mode à mode des coefficients de Fourier aux différents ordres ne sont pris en compte que jusqu'à cet ordre (les coefficients de Fourier sont indépendants hors de ces interactions). Les interactions linéaires sont donc limitées à un certain nombre de composantes. Cette méthode a pour but de déterminer quelles interactions mode à mode ont une influence sur l'évolution globale du système, et combien de composantes élémentaires sont mises en jeu dans cette évolution. Dans cette approche, les interactions non résonantes sont écartées.

Cette méthode de couplage modal est apparue au début des années 1960 avec les travaux de Phillips [114], Hasselmann [83] et Longuet-Higgins [99] afin de résoudre l'évolution de spectres d'états de mer faiblement non-linéaires (et interagissant faiblement) et l'évolution des transferts d'énergie avec des modèles à phases moyennées. Zakharov [149] établira par la suite les équations d'évolution des modes eux-mêmes, ce qui permettra par exemple de connaître l'évolution de la surface libre de manière déterministe. Pour cela, il introduit la notion de potentiel à la surface libre, notion qui sera reprise par de nombreuses méthodes ensuite. De plus, c'est le premier à écrire le problème sous forme Hamiltonienne, comme vu en introduction de ce chapitre (c.f. Eq.(I.4.1)).

Zakharov [149] introduit également l'équation cubique non-linéaire de Schrödinger (NLS) couramment utilisée en hydrodynamique et dans d'autres champs de la physique. Le lien entre l'équation NLS et l'équation de Zakharov est par exemple décrit par Stiassnie [125]. L'article de Zakharov se limite aux interactions résonantes à 4 vagues, et une extension aux interactions résonantes à 5 vagues a été proposée par Stiassnie et Shemer [124]. Néanmoins, il a été montré par la suite dans West [135] et Watson et West [134] que les interactions non-résonantes qui étaient jusque là négligées, devaient être prises en compte car elles renforcent les interactions résonantes. Ces interactions non-résonantes ont été ajoutées par Krasitskii [87] pour aboutir à une version réduite de l'équation de Zakharov prenant en compte les interactions à 5 vagues. Les explications de l'implémentation numérique sont disponibles dans Annenkov et Shrira [3] et des comparaisons aux expériences sont présentées dans Shemer *et al.* [121]. Des applications concernant la détection de vagues scélérates ont été réalisées par Gibson et Swan [69]. Des travaux récents avec une forme plus compacte ont été présentés par Dyachenko *et al.* [50] et Dyachenko *et al.* [51] et ont été appliquées à la détection de vagues scélérates en pleine mer. Le temps de calcul de cette méthode est très important comparé aux méthodes HOS/DNO présentées dans le prochain paragraphe.



### I.4.3 Méthodes HOS/DNO

Les méthodes HOS et DNO sont équivalentes d'après Le Touzé [92] et Schäfer [118], seul le formalisme est différent. Nous avons donc choisi de les présenter dans un paragraphe commun.

Ces modèles reposent sur les équations de surface libre formulées à la manière de Zakharov [149] à l'aide d'un potentiel de surface  $\tilde{\phi}$ , et font l'hypothèse d'une profondeur constante. La seule inconnue restant dans les Conditions de Surface Libre est la dérivée verticale du potentiel : si ce terme est déterminé, les équations peuvent être avancées en temps. Le cœur de ces méthodes réside donc dans le calcul de cette vitesse verticale. Les grandeurs  $\eta$  et  $\tilde{\phi}$  sont décomposées sur des fonctions de base spectrales bien choisies permettant de respecter les conditions aux frontières. Les techniques utilisées permettent alors l'emploi de FFTs ce qui permet d'améliorer l'efficacité de la résolution et d'avoir des propriétés de convergence exponentielles.

Par rapport à la méthode directe, ces modèles permettent des simulations dans des domaines de grandes dimensions tout en conservant la prise en compte de non-linéarités par l'utilisation d'un processus itératif. De plus ces méthodes présentent une convergence rapide et un coup de calcul faible. En effet, si  $N$  représente le nombre de points de discrétisation dans la direction horizontale, alors le temps de calcul est proportionnel à  $(N \log N)$  (et non à  $(N^2)$  comme pour la résolution d'un système linéaire quelconque). Comme pour la méthode directe, le seul inconvénient concerne la rigidité géométrique du domaine, c'est-à-dire la nécessité de conserver des conditions de périodicité.

#### I.4.3.1 Méthode Dirichlet to Neumann Operator (DNO)

La méthode Dirichlet to Neumann Operator (DNO) permet de relier le potentiel des vitesses  $\tilde{\phi}$  à la surface libre (condition de Dirichlet) à la dérivée normale du potentiel  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  (condition de Neumann) sur cette même surface libre grâce à l'introduction d'un opérateur (appelé  $G$ ). Le problème surfacique est résolu de façon non-linéaire et l'opérateur introduit permet l'utilisation de FFTs pour la résolution. La méthode DNO pour un fond plat a été introduite en 2D par Craig et Sulem [39] puis en 3D par Bateman *et al.* [8]. Elle a été améliorée numériquement par Xu et Guyenne [145].

Entre temps, Smith [123] a introduit un opérateur spécifique avec un formalisme légèrement différent afin de prendre en compte le fond variable. Il introduit également la possibilité de se référer à différents niveaux de profondeurs moyennes, ce qui permettra par la suite de prendre en compte de grandes variations de fond.

Des développements modifiant l'opérateur  $G$  de la DNO ont ensuite été présentés par Craig *et al.* [40] et Guyenne et Nicholls [79] pour résoudre la propagation de houle en fond variable, améliorés par la suite par Guyenne et Nicholls [80]. Des applications de shoaling d'une houle linéaire et de propagation d'une houle régulière au-dessus d'une marche immergée ont notamment été présentées par Guyenne et Nicholls [80]. Des travaux plus récents étudient la modélisation d'évènements extrêmes (c.f. Bateman *et al.* [9]). Cette méthode sera introduite

plus en détail en fond plat au paragraphe II.1.7 et en fond variable au paragraphe II.2.5.

### I.4.3.2 Méthode High-Order Spectral (HOS)

Ce modèle, utilisé au cours de la thèse, a été initialement développé par West *et al.* [136] et Dommermuth et Yue [44] pour résoudre le problème non-linéaire complet surfacique avec un fond plat ou supposé infini. Il se base sur la décomposition proposée par Watson et West [134]. Le cœur de la méthode HOS réside dans le calcul de la vitesse verticale (voir Annenkov et Shrira [3]). Ce modèle a été développé au LHEEA depuis 2003 par Le Touzé [92], Bonnefoy [25], Ducrozet [46], Blondel [24] et Perignon [113]. De nombreuses validations dans différentes configurations pour un fond plat ont été réalisées (voir par exemple Ducrozet *et al.* [49] et Bonnefoy *et al.* [26]). La méthode a été comparée à l'approche mode-coupling dans Tanaka [128].

L'équivalence entre les méthodes DNO et HOS ayant été démontrée par Le Touzé [92] et Schäffer [118], l'extension de la méthode HOS à un fond variable paraît donc possible. Cela a déjà été réalisé par Liu et Yue [95], et une application a été présentée mais seulement pour de faibles variations du fond. L'objectif de la thèse est donc d'implémenter le fond variable dans le code HOS existant (avec d'éventuelles améliorations), et de voir si le modèle est capable de prendre en compte de grandes variations de bathymétrie.

Le chapitre II.1 introduit de manière détaillée la méthode HOS en fond plat et le chapitre II.2 le développement de la méthode en fond variable.

## I.4.4 Méthode mixte : pseudo-spectrale/intégrale

La méthode consiste en une résolution pseudo-spectrale classique avec une formulation surfacique de type Zakharov [149] et une résolution intégrale aux endroits les plus cambrés : cela permet de traiter les fortes non-linéarités dans le champ de vagues avec une extension spatiale du noyau de résolution pouvant être modifiée comme on le souhaite.

Cette méthode a été initiée par Clamond et Grue [37] et Grue [78] en deux dimensions. Elle permet de résoudre le problème non-linéaire complet. Une version 3D a été développée par Fructus *et al.* [62]. Le fond variable en temps et en espace a été implémenté dans Fructus et Grue [63] et Fructus et Grue [64] avec des applications de glissement de terrain sous-marin et de shoaling. La méthode a été récemment reprise par Wang et Ma [133] afin d'améliorer le temps de calcul et la précision.

Cette méthode permet donc de traiter des cas plus cambrés que les autres méthodes pseudo-spectrales, néanmoins, les temps de calcul restent supérieurs aux méthodes HOS et DNO.



# Chapitre I.5

## Autres méthodes

Ce chapitre a pour but de présenter des méthodes potentielles appliquées à la modélisation de propagation de houle utilisant des hypothèses supplémentaires par rapport à celles réalisées au paragraphe I.1.1. Bien que ces méthodes ne soient pas basées sur la théorie potentielle totalement non-linéaire, nous avons choisi de les présenter ici car elles nous paraissent intéressantes dans le cadre de la thèse.

### I.5.1 Modèles de type Boussinesq

Les modèles de type Saint-Venant, fondés sur une hypothèse d'écoulement hydrostatique, sont réservés aux ondes longues (i.e. ondes infra-gravitaires, ondes de surcôtes/décôtes, marée). Ces modèles sont non-dispersifs.

Les modèles dits de Boussinesq (c.f. Boussinesq [27]) ou Serre ont connu un intérêt très marqué au cours des 25 dernières années. Ils ont été développés pour de faibles profondeurs ( $kh \ll 1$ ) et de faibles cambrures ( $ka \ll 1$ ), avec  $h$  la profondeur,  $k$  le nombre d'onde et  $a$  l'amplitude des vagues. Avec ce type de modèle, on réalise une intégration sur la verticale des équations de la quantité de mouvement et de conservation de la masse (pour un fluide incompressible) avec un développement en série de perturbations.

Le premier modèle développé dans ce sens fut celui de Peregrine [112], avec l'hypothèse que la profondeur est constante et que  $a/h$  et  $(kh)^2$  sont du même ordre. Les modèles de ce type étaient donc fondés sur deux hypothèses principales : faible non-linéarité des ondes de surface et faibles effets de la dispersion, ce qui leur conférait un domaine de validité limité aux eaux peu profondes et aux vagues de faibles cambrures.

Ce premier modèle a conduit au développement de différents modèles Boussinesq permettant la prise en compte d'un fond variable : Madsen et Sørensen [106] et Nwogu [109]. Les derniers développements de versions Boussinesq d'ordres élevés par Agnon *et al.* [1], Fuhrman *et al.* [66], Chazel *et al.* [33], Bingham *et al.* [22] et Madsen *et al.* [105] permettent de prendre en compte de plus grandes profondeurs. Ces différents travaux ont donc permis de s'affranchir de l'hypothèse de faible dispersion, permettant ainsi de simuler correctement des ondes fortement non-linéaires jusqu'en eaux profondes. Cependant, le prix à

payer pour cela est un accroissement conséquent de la complexité mathématique et numérique des modèles développés (modèles qui rappelons-le s'appuient sur des développements en série de perturbation), liée notamment à l'utilisation de dérivées spatiales d'ordres élevés.

Des problèmes 2D de shoaling ou de variations de bathymétrie rapides (c.f. Madsen *et al.* [105]), ainsi que des interactions avec une structure fixée au fond (c.f. Bingham *et al.* [22]) ont été traités avec cette méthode. À précision constante et en profondeur importante, ces méthodes sont moins coûteuses que les méthodes des éléments aux frontières ou les méthodes volumiques, néanmoins il est relativement difficile de traiter des domaines de formes complexes et des problèmes d'interactions fluide/structure.

## I.5.2 Méthode modes couplés

Cette méthode a été développée initialement en théorie linéaire par Athanassoulis et Belibassakis [4] en 2D, puis étendue à la 3D par Belibassakis *et al.* [13]. Elle est basée sur une fonction de transfert linéaire permettant de calculer le champ diffracté en fonction de la houle incidente en chaque point du domaine. Ce modèle prend en compte les phénomènes de réflexion, de réfraction et de diffraction, sans aucune simplification exceptée la linéarisation par rapport à une profondeur moyenne. Cette approche permet de calculer le spectre d'élévation de surface libre, de vitesse et de pression en chaque point du domaine. La méthode a ensuite été étendue à la prise en compte de vagues faiblement non-linéaires par Belibassakis et Athanassoulis [11] et totalement non-linéaires (c.f. Belibassakis et Athanassoulis [12]), à la présence de courant (c.f. Belibassakis [10]), et à la dissipation d'énergie due aux frottements sur le fond et au déferlement (c.f. Belibassakis *et al.* [14]). La prise en compte d'une bathymétrie variable avec le modèle linéaire est présentée dans Gerosthathis *et al.* [68] et Magne *et al.* [107] avec le cas des canyons de Scripps/La Jolla en Californie. Une application fond variable (marche immergée) avec le modèle non-linéaire est disponible dans Belibassakis et Athanassoulis [12].

Il n'y a aucune limitation quant à la géométrie de la bathymétrie dans la direction horizontale. De plus, la prise en compte de corps dans le domaine est possible, mais est alors résolue par la théorie linéaire (c.f. Belibassakis *et al.* [13]). Le temps de calcul de la dernière version développée (c.f. Belibassakis et Athanassoulis [12]) sur un cas de propagation de houle non-linéaire sur fond plat est indiqué comme étant légèrement supérieur à celui de la méthode différences finies présentée par Bingham et Zhang [23].

# Synthèse

Afin de conclure sur les grandes familles de méthodes, nous présentons ci-dessous un récapitulatif de leurs avantages et inconvénients. La Fig.I.5.1 permet de visualiser rapidement ces différents aspects.

- méthode Eléments aux frontières
  - résolution sur les frontières du domaine
  - nombre de points  $N$  moyen
  - temps de calcul en  $N^2$  ou  $N \log N$  pour les plus efficaces
  - interactions fluide/structure possibles
  - possibilité d'utiliser un domaine de calcul de géométrie quelconque
- méthodes volumiques Elements Finis
  - résolution sur tout le volume fluide
  - nombre de points  $N$  important
  - temps de calcul en  $N^2$  ou  $N \log N$  pour les plus efficaces
  - interactions fluide/structure possibles
  - possibilité d'utiliser un domaine de calcul de géométrie quelconque
- méthodes volumiques  $\sigma$ -transform
  - résolution sur tout le volume fluide
  - nombre de points  $N$  important
  - temps de calcul en  $N$  (différences finies)
  - interactions fluide/structure possibles
  - possibilité d'utiliser un domaine de calcul de géométrie quelconque
- méthode surfacique pseudo-spectrale HOS/DNO
  - résolution sur la surface libre
  - nombre de points  $N$  réduit
  - temps de calcul en  $N \log(N)$
  - pas d'interactions fluide/structure
  - domaine géométrique rectangulaire avec une profondeur quelconque

Pour les applications visées au cours de la thèse, nous cherchons à modéliser la propagation de houle sur un fond variable, dans de grands domaines, de manière efficace et pour des fonds quelconques. Il apparaît donc que les méthodes HOS et DNO sont très adaptées, même si la géométrie du domaine doit pour l'instant être périodique. Nous verrons dans la partie III comment s'affranchir de cette condition.

	Éléments aux Frontières	Éléments Finis	Volumiques $\sigma$ -transform	HOS/DNO
Fond variable	++	++	++	++
Efficacité	--	-	+	++
Géométrie quelconque	++	++	+	-

FIGURE I.5.1 – Comparaisons des principales méthodes potentielles non-linéaires. ++ indique que la méthode est particulièrement adaptée.

La méthode HOS a donc été replacée dans le contexte plus large des méthodes potentielles non-linéaires, et notamment pseudo-spectrales, utilisées en hydrodynamique. On a pu voir que son utilisation pour la propagation de houle est bien documentée et que de nombreuses validations et optimisations numériques de la méthode ont permis d'en faire un outil fiable, performant et déjà validé en fond plat. C'est sur ce socle, et sur l'équivalence avec la méthode DNO que nous nous proposons d'étendre son champ d'application à la prise en compte d'une bathymétrie variable. Nous allons donc introduire dans la partie suivante la méthode HOS pour un fond plat, telle que disponible avant le début des travaux de thèse, puis nous présenterons le formalisme fond variable développé au cours de la thèse.

Deuxième partie

Présentation de la méthode  
HOS





## Chapitre II.1

# Description détaillée de la méthode HOS en fond plat

La méthode HOS pour un fond plat utilisée au cours de la thèse est décrite dans ce chapitre. Cette méthode, initiée par Dommermuth et Yue [44] et West *et al.* [136], a été développée successivement par Le Touzé [92], Bonnefoy [25], Ducrozet [46], Blondel [24] et Perignon [113] au LHEEA. On se référera donc à ces auteurs pour plus de détails.

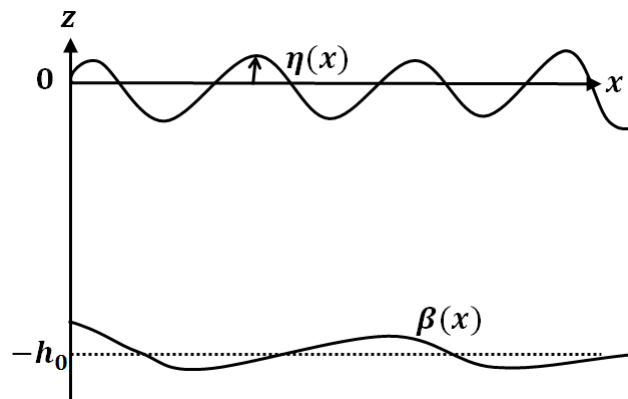


FIGURE II.1.1 – Représentation du domaine de calcul en 2D - Fond variable quelconque.

Avant de rappeler le système d'équations à résoudre introduit au chapitre I.1, notons  $h(x) = h_0 + \beta(x)$  la profondeur d'eau, avec  $h_0$  la profondeur de référence et  $\beta(x)$  la variation du fond autour de  $h_0$ , comme représenté sur la Fig.II.1.1. Nous avons alors, pour tout  $x$ ,  $-h_0 + \beta(x) \leq z < \eta(x)$ . Le système d'équations est alors réécrit ci-dessous.

- Conservation de la masse ou équation de Laplace :

$$\Delta\phi = 0 \tag{II.1.1}$$

- Condition sur le fond :

$$\nabla\phi\nabla\beta - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_0 + \beta(x) \quad (\text{II.1.2})$$

- Condition Cinématique de Surface Libre (CCSL) :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\phi \cdot \nabla\eta \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{II.1.3})$$

- Condition Dynamique de Surface Libre (CDSL) :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} \left| \tilde{\nabla}\phi \right|^2 \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{II.1.4})$$

En fond plat (la variation du fond  $\beta$  est nulle), la condition sur le fond Eq.(II.1.2) devient :

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h = -h_0 \quad (\text{II.1.5})$$

De plus, nous ajoutons à ce système une condition de périodicité dans la direction horizontale  $x$  ( $L_x$  représente la longueur du domaine selon  $x$ ) propre au modèle HOS :

$$\begin{aligned} \phi(x + L_x) &= \phi(x) \\ \eta(x + L_x) &= \eta(x) \end{aligned} \quad (\text{II.1.6})$$

## II.1.1 Expression au niveau de la surface libre

Dans le formalisme HOS, les CSL sont exprimées en quantités surfaciques selon le formalisme de Zakharov [149]. La fonction  $z = \eta(x, t)$  décrit la position de la surface libre qui est ainsi univoque (la description du déferlement n'est donc pas possible). Les CSL sont alors écrites en fonction du potentiel au niveau de la surface libre  $\tilde{\phi}(x, t) = \phi(x, z = \eta, t)$  et de  $\eta$ , ce qui donne :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \left(1 + |\nabla\eta|^2\right) \frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\tilde{\phi} \cdot \nabla\eta \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{II.1.7})$$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} \left| \nabla\tilde{\phi} \right|^2 + \frac{1}{2} \left(1 + |\nabla\eta|^2\right) \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{II.1.8})$$

Le problème est ainsi exprimé au niveau de la surface libre. Le problème initial 2D (respectivement 3D) est donc transformé en un problème 1D (respectivement 2D). Par souci de simplicité, nous présenterons par la suite le formalisme HOS pour les problèmes bidimensionnels, et une extension au 3D sera réalisée au paragraphe II.2.6.

Ces équations peuvent être avancées en temps à condition de connaître la vitesse verticale  $W(x, t) = \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, z = \eta(x, t), t)$ , seule inconnue du système précédent (Eq.(II.1.7) et Eq.(II.1.8)). La méthode HOS va permettre d'évaluer la vitesse verticale en connaissant  $\eta$  et  $\tilde{\phi}$ .

## II.1.2 Expression de l'élévation de surface libre et du potentiel par méthode pseudo-spectrale

À l'aide des équations de Laplace Eq.(II.1.1), de périodicité Eq.(II.1.6) et de la condition au fond Eq.(II.1.5), le potentiel  $\phi$  peut être exprimé à l'aide de développements sur des fonctions de bases bien choisies permettant de satisfaire implicitement ces équations. On obtient pour un fond plat :

$$\phi(x, z, t) = \sum_j A_j(t) \frac{\cosh(k_j(z + h_0))}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \quad (\text{II.1.9})$$

L'élévation de surface libre  $\eta$  et le potentiel surfacique  $\tilde{\phi}$  sont alors exprimés ainsi :

$$\eta(x, t) = \sum_j C_j(t) e^{ik_j x} \quad (\text{II.1.10})$$

$$\tilde{\phi}(x, t) = \sum_j D_j(t) e^{ik_j x} \quad (\text{II.1.11})$$

avec  $k_j = \frac{j 2\pi}{L_x}$  les nombres d'ondes et  $A_j, C_j, D_j$  les amplitudes modales de  $\phi, \eta$  et  $\tilde{\phi}$  respectivement.

## II.1.3 Résolution - cœur de la méthode HOS

Le point clé dans une formulation surfacique est l'évaluation de la vitesse verticale au niveau de la surface libre  $W(x, t)$ , seule inconnue du système des deux conditions de surface libre (Eq.(II.1.7) et Eq.(II.1.8)). Le cœur de la méthode HOS consiste donc à évaluer cette vitesse verticale  $W(x, t)$  à partir de  $\eta$  et  $\tilde{\phi}$ . Dans la méthode de résolution présentée ci-dessous, la profondeur est supposée constante, et l'élévation de surface libre et le potentiel sont définis comme dans le paragraphe précédent II.1.2.

Tout d'abord, le potentiel  $\phi$  est décomposé en série de puissance de  $\eta$ , en supposant  $k\eta \ll 1$  (ce qui signifie que les variations de la surface libre sont faibles devant la longueur d'onde) :

$$\phi(x, z = \eta(x, t), t) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi^{(m)}(x, z = \eta(x, t), t) \quad (\text{II.1.12})$$

On définit alors un ordre M qui permet de tronquer cette somme à une valeur finie (M représente l'ordre de non-linéarité de la méthode et sera appelé par la suite ordre HOS).

Puis on réalise un développement de Taylor en  $z = 0$  de chaque potentiel  $\phi^{(m)}$  :

$$\phi^{(m)}(x, z = \eta(x, t), t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^n \phi^{(m)}}{\partial z^n}(x, z = 0, t) \quad (\text{II.1.13})$$

On peut donc écrire, en tronquant le développement à l'ordre  $M$  :

$$\tilde{\phi}(x, t) = \phi(x, z = \eta, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{M-m} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^n \phi^{(m)}}{\partial z^n}(x, z = 0, t) \quad (\text{II.1.14})$$

En combinant les Eq.(II.1.13) et Eq.(II.1.14), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x, t) &= \phi(x, \eta, t) \\ &= \phi^{(1)}(x, 0, t) + \eta(x, t) \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(x, 0, t) + \frac{\eta^2}{2}(x, t) \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2}(x, 0, t) + \dots \\ &+ \phi^{(2)}(x, 0, t) + \eta(x, t) \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z}(x, 0, t) + \frac{\eta^2}{2}(x, t) \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z^2}(x, 0, t) + \dots \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (\text{II.1.15})$$

Les termes du même ordre en  $\eta$  sont alors regroupés. Nous obtenons le système triangulaire suivant, pour  $m = 1, 2, \dots, M$  :

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x, 0, t) &= \tilde{\phi}(x, t) \\ \phi^{(2)}(x, 0, t) &= -\eta(x, t) \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(x, 0, t) \\ &\dots \\ \phi^{(m)}(x, 0, t) &= -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!}(x, t) \frac{\partial^k \phi^{(m-k)}}{\partial z^k}(x, 0, t) \quad \text{pour } m > 1 \end{aligned} \quad (\text{II.1.16})$$

Chaque ligne du système triangulaire ainsi obtenu représente une itération. Le potentiel est ensuite décomposé sur des fonctions de base comme vu précédemment (Eq.(II.1.9)) :

$$\phi^{(m)}(x, z, t) = \sum_j A_j^{(m)}(t) \frac{\cosh(k_j(z + h_0))}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \quad (\text{II.1.17})$$

Les amplitudes modales à chaque ordre  $A_j^{(m)}(t)$  sont par conséquent déterminées. À partir du système triangulaire précédent, on peut alors former un autre système triangulaire afin de calculer la vitesse verticale  $W(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z = \eta, t)$ . Celle-ci est décomposée en série de perturbation de la façon suivante :

$$W(x, t) = \sum_{m=1}^M W^{(m)}(x, t) \quad (\text{II.1.18})$$

On en déduit alors :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z = \eta, t) = W(x, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} \phi^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(x, 0, t) \quad (\text{II.1.19})$$

Ce qui équivaut au système triangulaire suivant :

$$\begin{aligned}
 W^{(1)}(x, t) &= \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(x, 0, t) \\
 W^{(2)}(x, t) &= \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z}(x, 0, t) + \eta \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2}(x, 0, t) \\
 &\dots \\
 W^{(m)}(x, t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} (x, t) \frac{\partial^{k+1} \phi^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(x, 0, t) \quad \text{pour } m > 1
 \end{aligned} \tag{II.1.20}$$

Grâce aux amplitudes modales  $A_j^{(m)}(t)$  obtenues avec le système (II.1.16) et à ce nouveau processus triangulaire (II.1.20), chaque  $W^{(m)}$  peut alors être évalué de manière itérative et on peut calculer  $W$  à l'ordre  $M$  souhaité :

$$W(x, t) = \sum_{m=1}^M W^{(m)}(x, t) \tag{II.1.21}$$

Les différences entre les approches de Dommermuth et Yue [44] et West *et al.* [136] résident dans l'utilisation de cette vitesse verticale au sein des CSL. En effet, West *et al.* [136] proposent un traitement homogène de la vitesse verticale  $W$  en ordre. Dans la CCSL, afin de garder la consistance en ordre, ils écrivent :

$$(1 + |\nabla \eta|^2) W \simeq W_M + |\nabla \eta|^2 W_{M-2} \tag{II.1.22}$$

Et dans la CDSL :

$$(1 + |\nabla \eta|^2) W^2 \simeq (W^2)_M + |\nabla \eta|^2 (W^2)_{M-2} \tag{II.1.23}$$

Cette formulation diffère de celle de Dommermuth et Yue [44] qui utilisent pour la CCSL :

$$(1 + |\nabla \eta|^2) W \simeq W_M + |\nabla \eta|^2 W_M \tag{II.1.24}$$

Nous utiliserons la formulation de West *et al.* [136] afin de conserver l'homogénéité de la méthode. Il a été montré par Ducrozet [46] que la précision de la résolution du problème est meilleure avec ce choix.

La vitesse verticale  $W$  est donc exprimée au pas de temps  $t$  à partir de  $\eta$  et  $\tilde{\phi}$  qui sont connus. On peut par conséquent évaluer  $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$  et donc avancer les inconnues au pas de temps  $t+dt$  à l'aide d'un schéma d'intégration en temps. Dans le code HOS, le schéma Runge-Kutta Felberg RK4(5) à pas de temps adaptatif est utilisé avec une tolérance à adapter.

Une vue schématique de cette avance en temps est représentée sur la Fig.II.1.2. Les gradients  $\nabla \eta$  et  $\nabla \tilde{\phi}$  sont calculés dans l'espace de Fourier. La vitesse verticale est déterminée à l'aide du processus itératif décrit précédemment et présenté sur la Fig.II.1.3. Les produits de grandeurs physiques sont alors calculés dans l'espace physique avec tous les termes traités contre le repliement. Ce traitement, associé au traitement homogène de la vitesse verticale en ordre dans les

CSL présentée dans West *et al.* [136], est un point essentiel pour la précision de la méthode (c.f. paragraphe II.1.4 sur l'anti-repliement).

De plus, l'utilisation de FFTs pour passer de l'espace physique à l'espace modal (et inversement) permet à la méthode HOS de présenter un temps de calcul proportionnel à  $N_d \log(N_d)$ , comme montré dans Ducrozet [46]. Ce temps de calcul est également proportionnel à  $M^2$  (c.f. Ducrozet *et al.* [49]).

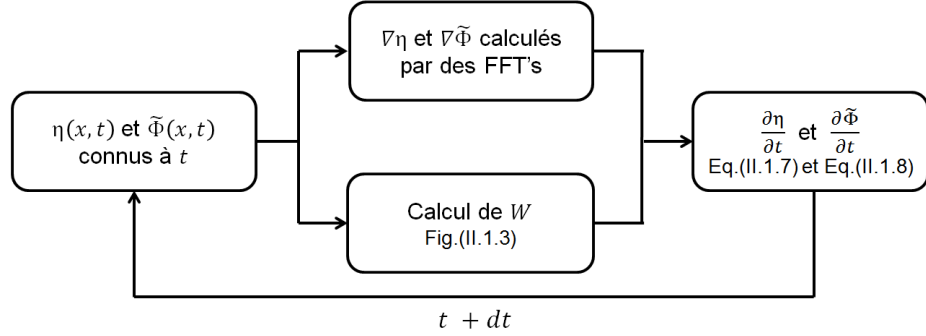


FIGURE II.1.2 – Principe de résolution temporelle des CSL.

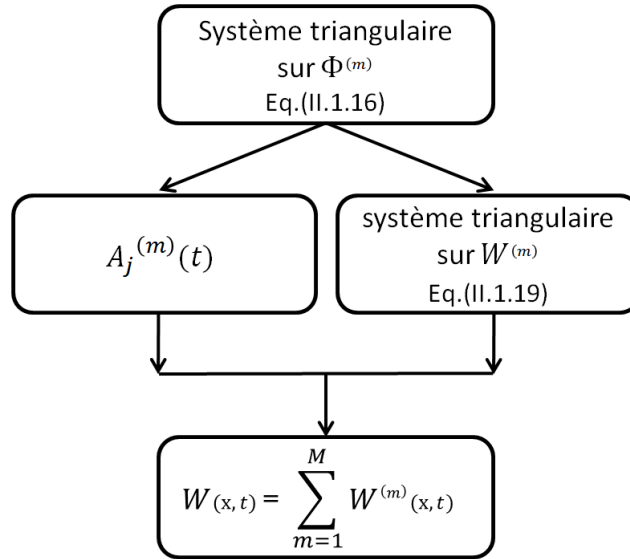


FIGURE II.1.3 – Processus itératif du calcul de la vitesse verticale  $W$ .

## II.1.4 Traitement anti-repliement

La méthode HOS est une méthode pseudo-spectrale : elle relie des points de collocation de l'espace physique à des modes dans l'espace de Fourier (ou espace

modal). Une variable définie sur  $N$  points de collocation peut donc être définie sur  $N$  modes dans l'espace de Fourier.

Néanmoins, un problème apparaît lorsqu'on effectue un produit de grandeurs exprimées par une transformée de Fourier finie : c'est le phénomène de repliement. Un traitement anti-repliement (déaliasing) est alors appliqué.

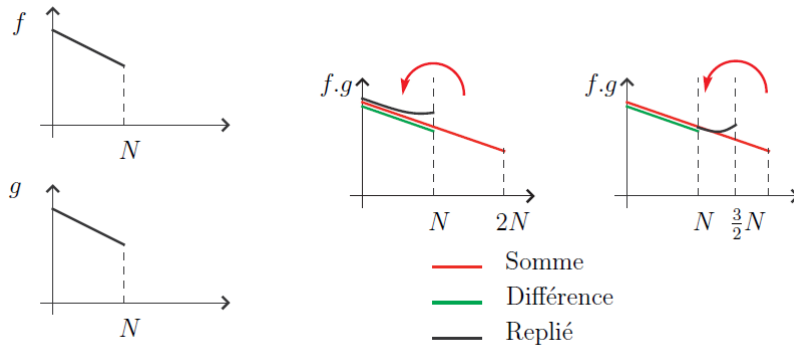


FIGURE II.1.4 – Phénomène de repliement (au milieu) et traitement (à droite).

Nous expliquons ici le cas d'un produit simple. La Fig.II.1.4 illustre le principe dans l'espace de Fourier. Le repliement apparaît lorsqu'on multiplie deux grandeurs discrétisées sur un nombre fini de modes. Dans notre cas, les grandeurs sont exprimées sur  $N$  modes et un produit simple contiendra  $2N$  modes. Les amplitudes de Fourier de deux grandeurs sont représentées à gauche. Au milieu, les amplitudes du produit consistent en des modes sommes en rouge et des modes différence en vert. Les modes  $N + 1$  à  $2N$  ne pouvant pas être représentés si on a pris  $N$  points de discrétisation dans l'espace, ils se replient sur le spectre compris entre 1 et  $N$ . On obtient alors le spectre noir. Les derniers modes proches de  $N$  sont affectés par le repliement. Les premiers modes sont en général peu affectés si le spectre décroît suffisamment rapidement.

Pour éviter que le repliement vienne dégrader la solution, le remède consiste à effectuer les calculs sur un nombre de points plus important. Cette technique est classiquement appelée zero-padding ou remplissage de zéros. Le choix du nombre de points et le phénomène sont expliqués ci-dessous.

Pour un produit d'ordre  $p$ , la méthode est donc la suivante :

- on effectue une transformée de Fourier de  $f$  et  $g$  donnant les  $N$  amplitudes modales.
- on augmente le nombre de modes jusqu'à  $N_d \geq N$ . (Les amplitudes modales comprises entre  $N$  et  $N_d$  sont alors affectées à zéro).
- on effectue une transformée de Fourier inverse pour revenir sur les grandeurs physiques  $f'$  et  $g'$  définies maintenant sur  $N_d$  points.
- on effectue le produit  $f'.g'$ .



- on effectue une nouvelle transformée de Fourier donnant les  $N_d$  amplitudes modales de  $f'.g'$  et on ne retient que les  $N$  premiers modes (les amplitudes modales supérieures à  $N$  sont mises à zéro).

Il faut alors choisir le nombre de points judicieux  $N_d$  pour éliminer le repliement. Deux approches différentes sont possibles : anti-repliement complet et intermédiaire. Le traitement complet consiste en un traitement rigoureux du problème de non-repliement et nécessite de prendre en compte  $N_d = \frac{M+1}{2}N$  points. Ce traitement permet d'éviter tout phénomène de repliement. Cependant, pour des ordres HOS élevés, c'est le plus coûteux numériquement car il conduit à un nombre de points très grand.

Un traitement plus rapide est disponible dans le code HOS. L'anti-repliement intermédiaire considère ainsi un produit d'ordre  $M$  comme une succession de produits d'ordres inférieurs  $p$  (avec  $1 \leq p \leq M$ ) avec  $N_d = \frac{p+1}{2}N$ . Pour certaines valeurs de  $p$  et certains cas traités, il est indiqué par Ducrozet [46] que le niveau de précision de ce traitement est comparable à celui de l'anti-repliement complet, tout en permettant de travailler sur moins de points de calcul. Néanmoins, ce traitement est moins précis que l'anti-repliement complet pour les cas de houles très cambrées (c.f. Ducrozet [46]). Si cela n'est pas précisé, on utilisera donc un anti-repliement complet avec  $p = M$  :  $N_d = \frac{M+1}{2}N$ , car les produits calculés avec la méthode sont au maximum d'ordre  $M$ . Il faut cependant noter l'intérêt du traitement intermédiaire qui permet de s'adapter aux besoins en terme de précision/temps de calcul. L'influence du traitement anti-repliement sur le temps de calcul est disponible dans Ducrozet [46].

## II.1.5 Avance en temps

Le travail effectué par Ducrozet [46] et Perignon [113] afin d'améliorer le schéma d'avance en temps est utilisé. Ces améliorations se divisent en deux parties. Tout d'abord, les CSL sont décomposées en une partie linéaire et une partie non-linéaire, ce qui permet d'intégrer analytiquement la partie linéaire des équations en utilisant la méthode de variation de la constante selon la méthode préconisée par Fructus *et al.* [62]. Les performances du modèle sont nettement améliorées suite à ce traitement (c.f. Ducrozet [46]).

Les équations sont ensuite avancées en temps dans l'espace modal à l'aide d'un schéma classique Runge-Kutta Felberg d'ordre 4 [RK4(5)]. Elle consiste à évaluer à un ordre 5 et à un ordre 4 la quantité à avancer en temps à partir de deux jeux de coefficients de Runge-Kutta différents. En fonction de la différence entre ces deux évaluations, le pas de temps est ajusté pour l'itération suivante.

## II.1.6 Initialisation des simulations

Il est parfois nécessaire de faire une hypothèse de linéarité afin de fournir une solution initiale pour l'élévation  $\eta$  et le potentiel des vitesses à la surface libre  $\tilde{\phi}$ . Par exemple, pour des cas de houles irrégulières, l'initialisation est réalisée de manière linéaire dans un code non-linéaire. Afin d'éviter l'apparition d'ondes parasites, les CSL sont avancées en temps dans l'espace modal comme expliqué

dans Dommermuth [45] et Perignon [113]. On définit pour cela le temps caractéristique de relaxation  $T_a$  et le paramètre de relaxation  $n$  caractérisant la vitesse d'ajustement tels que :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta + G \left( 1 - e^{(-t/T_a)^n} \right) \quad (\text{II.1.25})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = W_{lin} + F \left( 1 - e^{(-t/T_a)^n} \right) \quad (\text{II.1.26})$$

avec  $F$  et  $G$  les termes non-linéaires dans les Eq.(II.1.7) et Eq.(II.1.8), et  $W_{lin}$  la partie linéaire de la vitesse verticale (soit l'ordre 1 du développement HOS). Plus la relaxation sera longue et plus elle sera efficace car elle limitera l'apparition d'instabilités numériques dues à l'initialisation.

## II.1.7 Équivalence avec le formalisme DNO

Comme nous l'avons mentionné plus haut, Le Touzé [92] et Schäffer [118] ont montré l'équivalence entre les formalismes HOS et DNO. Nous allons donc détailler dans ce paragraphe le modèle DNO, afin de comprendre par la suite l'adaptation du formalisme DNO fond variable à la méthode HOS. Le nom de la méthode "Dirichlet to Neumann Operator" signifie qu'à partir de la valeur de la quantité sur une frontière (condition de Dirichlet), on veut exprimer la dérivée normale au niveau de cette frontière (condition de Neumann). Cette transformation est écrite sous la forme d'un opérateur  $G$ , introduit pour un fond plat dans Craig et Sulem [39] par :

$$G(\eta) \tilde{\phi} = (1 + \nabla\eta^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{II.1.27})$$

où  $n$  représente la normale extérieure normalisée à la surface libre.  $\tilde{\phi}$  est donc lié à la condition de Dirichlet en  $z = \eta(x, t)$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  à la condition de Neumann en  $z = \eta(x, t)$ . Ce procédé est très similaire à la méthode HOS où on relie la quantité surfacique  $\tilde{\phi}$  à la vitesse verticale  $W$  (qui est assimilable à une dérivée normale).

Les CSL sont alors réécrites en fonction de  $G$  :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = G(\eta) \tilde{\phi} \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{II.1.28})$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = \frac{-1}{2(1 + \nabla\eta^2)} \left[ \nabla \tilde{\phi}^2 - \left[ G(\eta) \tilde{\phi} \right]^2 - 2\nabla\eta \nabla \tilde{\phi} G(\eta) \tilde{\phi} \right] \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{II.1.29})$$

Coifman et Meyer [38] ont montré que l'on peut écrire  $G(\eta)$  sous la forme d'un développement en série de perturbations :  $G(\eta) = \sum_{l=0}^{\infty} G^{(l)}(\eta)$ .

Pour rappel, la condition Cinématique de Surface Libre s'écrit :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(1 + |\nabla \eta|^2\right) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla \eta \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{II.1.30})$$

Soit, en considérant les fonctions harmoniques  $\phi_k(x, z) = e^{ikx} \cosh(k(z + h_0))$  telles que  $\phi(x, z) = \sum_k A_k \phi_k$  :

$$G(\eta) \tilde{\phi}_k = \left(1 + |\nabla \eta|^2\right) \frac{\partial \phi_k}{\partial z} - \nabla \tilde{\phi}_k \cdot \nabla \eta \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{II.1.31})$$

En développant alors en série de Taylor autour de  $z = -h_0$  les cosinus et sinus hyperboliques intervenants dans les expressions de  $\phi_k$  et de ses dérivées, Craig et Sulem [39] montrent que les expressions (dans le cas d'un fond plat) pour  $G^{(l)}$  peuvent être calculées numériquement à partir d'une formule récursive. Cette formule est disponible dans Craig et Sulem [39]. Les premiers termes sont donnés par :

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= D \tanh(hD) \\ G^{(1)} &= D\eta D - G^{(0)}\eta G^{(0)} \\ G^{(2)} &= \frac{1}{2} \left( G^{(0)} D\eta^2 D - D^2 \eta^2 G^{(0)} - 2G^{(0)}\eta G^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.1.32})$$

où  $D$  est l'opérateur  $-i\partial_x$ . L'opérateur  $G^{(0)}$  équivaut à la multiplication par  $k \tanh(kh_0)$  dans le modèle HOS. Ce système triangulaire est équivalent au système triangulaire HOS sur la vitesse verticale (Eq.(II.1.20)).

## Chapitre II.2

# Extension de la méthode HOS à une bathymétrie variable

Cette partie détaille les apports de la thèse au modèle HOS fond plat introduit précédemment. Les hypothèses utilisées et le système d'équations sont rappelés. Nous avons développé trois méthodes permettant de résoudre le problème en fond variable. La première est une méthode dite directe et les deux suivantes sont des méthodes itératives qui reprennent le principe de résolution HOS fond plat, et qui seront par la suite privilégiées. Nous comparerons également la méthode HOS développée à la méthode DNO pour un fond variable. Ces différents développements ont fait l'objet d'une publication dans une revue internationale à comité de lecture (Gouin *et al.* [74]).

### II.2.1 Formulation du problème

#### II.2.1.1 Hypothèses

Nous nous plaçons ici dans les mêmes hypothèses qu'au paragraphe I.1.1. On suppose donc dorénavant que  $h(x)$  représente la profondeur totale d'eau,  $h_0$  la profondeur de référence et  $\beta(x)$  la variation du fond autour de  $h_0$  :  $h(x) = h_0 + \beta(x)$ . Aucune hypothèse intrinsèque ne découle de cette décomposition. Une vue schématique du domaine de calcul ainsi défini est présentée sur la Fig.II.2.1. A noter qu'on se restreint ici à des fonds constants au cours du temps. Il serait envisageable d'étendre la méthode à des cas de mouvements de fond, comme cela a été réalisé avec la méthode DNO (c.f. Guyenne et Nicholls [80]) dont le formalisme est, rappelons-le, similaire à la méthode HOS.

#### II.2.1.2 Système d'équations à résoudre

Le système d'équations est le même que celui présenté au paragraphe I.1.2. Par rapport à la méthode HOS fond plat, on utilise désormais la condition sur le fond permettant de prendre en compte la variation de bathymétrie :

$$\nabla\phi\nabla\beta - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_0 + \beta(x) \quad (\text{II.2.1})$$

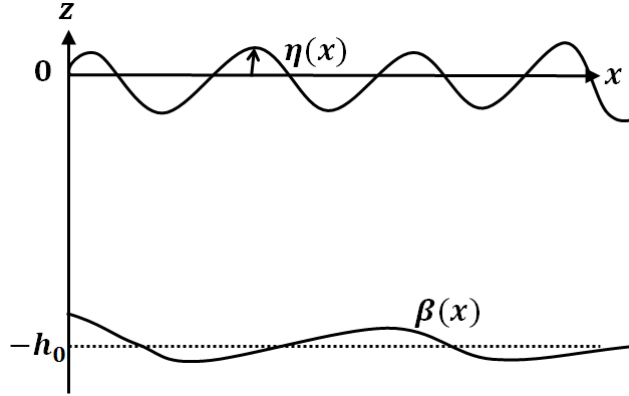


FIGURE II.2.1 – Représentation du domaine de calcul en 2D pour un fond variable quelconque.

On rappelle pour plus de clarté les autres équations composant le système :

- Conservation de la masse :

$$\Delta\phi = 0 \quad (\text{II.2.2})$$

- Condition Cinématique de Surface Libre (CCSL) :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \left(1 + |\nabla\eta|^2\right) \frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\tilde{\phi} \cdot \nabla\eta \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{II.2.3})$$

- Condition Dynamique de Surface Libre (CDSL) :

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2}|\nabla\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{2}\left(1 + |\nabla\eta|^2\right) \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{II.2.4})$$

- Conditions de périodicité dans la direction horizontale  $x$  ( $L_x$  représentant la longueur du domaine selon  $x$ ) :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x + L_x) &= \tilde{\phi}(x) \\ \eta(x + L_x) &= \eta(x) \end{aligned} \quad (\text{II.2.5})$$

## II.2.2 Expression de $\phi$

En suivant l'approche adoptée par plusieurs auteurs dont Smith [123], Craig *et al.* [40], et Guyenne et Nicholls [79] qui utilisent le formalisme DNO, on peut écrire le potentiel  $\phi_{tot}$ , solution du problème complet dans le domaine fond variable, sous la forme :

$$\phi_{tot} = \phi_{h_0} + \phi_{\beta} \quad (\text{II.2.6})$$

$\phi_{h_0}$  est identique au potentiel  $\phi$  introduit dans la résolution HOS initiale et satisfait la condition de Neumann en  $z = -h_0$  :

$$\frac{\partial \phi_{h_0}}{\partial z}(x, z = -h_0, t) = 0 \quad (\text{II.2.7})$$

et  $\phi_\beta$  satisfait la condition de Dirichlet en  $z = 0$  :

$$\phi_\beta(x, z = 0, t) = 0 \quad (\text{II.2.8})$$

Le potentiel  $\phi_{h_0}$  résout le problème dû au fond plat alors que le potentiel  $\phi_\beta$  prend en compte les variations du fond et son influence sur la cinématique du champ de houle étudié.

Afin de satisfaire les Eq.(II.2.7) et Eq.(II.2.8), et en suivant Guyenne et Nicholls [79] et Smith [123], les potentiels (2D) peuvent être définis par :

$$\phi_{h_0}(x, z, t) = \sum_j A_j(t) \frac{\cosh(k_j(z + h_0))}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \quad (\text{II.2.9})$$

$$\phi_\beta(x, z, t) = \sum_j B_j(t) \frac{\sinh(k_j z)}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \quad (\text{II.2.10})$$

avec  $k_j = j \frac{2\pi}{L_x}$  et  $A_j$  et  $B_j$  les amplitudes modales respectives de  $\phi_{h_0}$  et  $\phi_\beta$ .

### II.2.3 Résolution

De la même manière que précédemment pour un fond plat (c.f Eq.(II.1.14)), en supposant  $k\eta \ll 1$ , on peut écrire un développement de Taylor en  $z = 0$  tronqué à l'ordre  $M$  de chaque potentiel  $\phi_{tot}^{(m)}$  :

$$\tilde{\phi}_{tot}(x, t) = \phi_{tot}(x, z = \eta, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{M-m} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^n \phi_{tot}^{(m)}}{\partial z^n}(x, z = 0, t) \quad (\text{II.2.11})$$

On obtient alors le système triangulaire suivant sur  $\phi_{tot}$ , pour  $m = 1, 2, \dots, M$  :

$$\begin{aligned} \phi_{tot}^{(1)}(x, 0, t) &= \tilde{\phi}_{tot}(x, t) \\ \phi_{tot}^{(2)}(x, 0, t) &= -\eta(x, t) \frac{\partial \phi_{tot}^{(1)}}{\partial z}(x, 0, t) \\ &\dots \\ \phi_{tot}^{(m)}(x, 0, t) &= -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!}(x, t) \frac{\partial^k \phi_{tot}^{(m-k)}}{\partial z^k}(x, 0, t) \quad \text{pour } m > 1 \end{aligned} \quad (\text{II.2.12})$$

On peut exprimer  $\phi_{h_0}^{(m)}(x, z, t)$  et  $\phi_\beta^{(m)}(x, z, t)$  grâce aux Eq.(II.2.9) et Eq.(II.2.10) :

$$\phi_{h_0}^{(m)}(x, z, t) = \sum_j A_j^{(m)}(t) \frac{\cosh(k_j(z + h_0))}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \quad (\text{II.2.13})$$

$$\phi_{\beta}^{(m)}(x, z, t) = \sum_j B_j^{(m)}(t) \frac{\sinh(k_j z)}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \quad (\text{II.2.14})$$

Le système triangulaire (II.2.12) permet de déterminer les amplitudes modales  $A_j^{(m)}$  obtenues pour chaque ordre (car  $\phi_{tot}^{(m)}(x, 0, t) = \phi_{h_0}^{(m)}(x, 0, t)$ ). Les amplitudes modales  $B_j^{(m)}$  sont alors déterminées en fonction des  $A_j^{(m)}$  à chaque ordre  $m$  grâce à la condition sur le fond (Eq.(II.2.1)). Cette condition sur le fond (Eq.(II.2.1)) peut être utilisée de plusieurs manières et conduit à trois méthodes de résolution présentées dans les paragraphes suivants.

On peut alors former, comme avec la méthode HOS fond plat (c.f. Eq.(II.1.20)), un autre système triangulaire afin de calculer la vitesse verticale  $W$  :

$$W(x, t) = \sum_{m=1}^M W^{(m)}(x, t) = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial z}(x, \eta, t) \quad (\text{II.2.15})$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} W^{(1)}(x, t) &= \frac{\partial \phi_{tot}^{(1)}}{\partial z}(x, 0, t) \\ W^{(2)}(x, t) &= \frac{\partial \phi_{tot}^{(2)}}{\partial z}(x, 0, t) + \eta \frac{\partial^2 \phi_{tot}^{(1)}}{\partial z^2}(x, 0, t) \\ &\dots \\ W^{(m)}(x, t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} (x, t) \frac{\partial^{k+1} \phi_{tot}^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(x, 0, t) \quad \text{pour } m > 1 \end{aligned} \quad (\text{II.2.16})$$

La vitesse verticale  $W$  est donc exprimée au pas de temps  $t$  à partir de  $\eta$  et  $\tilde{\phi}_{tot}$  qui sont connus. On peut donc évaluer  $\frac{\partial \tilde{\phi}_{tot}}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$  et avancer les CSL au temps  $t+dt$  à l'aide d'un schéma d'intégration en temps. Le schéma Runge-Kutta Felberg RK4(5) est utilisé comme précédemment.

Ainsi, lorsque le fond varie, la vitesse verticale est calculée comme indiqué sur la Fig.II.2.2 et les CSL sont avancées en temps comme dans le cas d'un fond plat (Fig.II.1.2).

Nous allons maintenant présenter les différentes stratégies permettant de relier les amplitudes modales  $B_j^{(m)}(t)$  aux amplitudes modales  $A_j^{(m)}(t)$ .

### II.2.3.1 Méthode directe

Cette méthode est similaire à celle employée par Le Touzé [92] et Fenton et Rieneker [58] car elle utilise le principe de la méthode directe évoquée au paragraphe I.4.1. Le Touzé [92] applique cette méthode à la condition de Dirichlet à la surface libre afin d'obtenir  $W$ , nous proposons ici de l'appliquer à la condition de Dirichlet au fond. La résolution s'opère alors sur la position exacte du fond (tout comme elle s'opérait sur la position instantanée de surface libre dans Le Touzé [92]). Elle a été implémentée dans un premier temps puis abandonnée. En effet, cette méthode ne permet pas l'utilisation de FFTs et nécessite

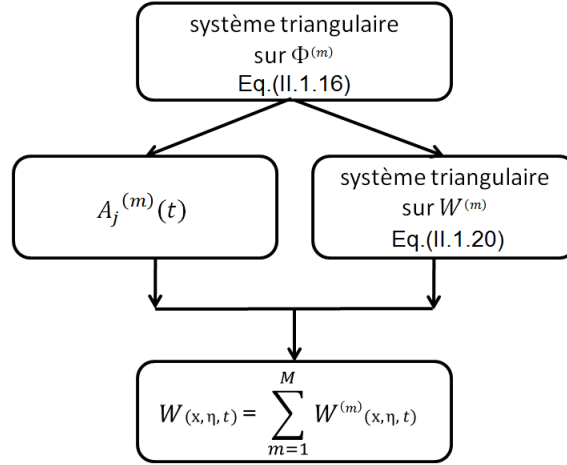


FIGURE II.2.2 – Calcul de la vitesse verticale - fond variable

la résolution d'un système linéaire à chaque sous pas de temps ce qui engendre un coût au moins proportionnel à  $O(N^2)$ . La problématique est donc similaire et le constat concernant l'utilisation pratique de la méthode est le même que celui réalisé dans Le Touzé [92]. Néanmoins, cette méthode présentant une grande simplicité de mise en œuvre, nous détaillons ci-dessous son principe de résolution.

Pour rappel, la condition sur le fond Eq.(II.2.1) stipule :

$$\nabla\phi_{tot}\nabla\beta - \frac{\partial\phi_{tot}}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_0 + \beta(x) \quad (\text{II.2.17})$$

On exprime alors  $\nabla\phi_{tot} = \frac{\partial\phi_{tot}}{\partial x} = \frac{\partial\phi_{h_0}}{\partial x} + \frac{\partial\phi_{\beta}}{\partial x}$  et  $\frac{\partial\phi_{tot}}{\partial z} = \frac{\partial\phi_{h_0}}{\partial z} + \frac{\partial\phi_{\beta}}{\partial z}$  en fonction des amplitudes modales  $A_j^{(m)}(t)$  et  $B_j^{(m)}(t)$  (d'après les Eq.(II.2.9) et Eq.(II.2.10)) :

$$\frac{\partial\phi_{h_0}^{(m)}(x, z, t)}{\partial x} = \sum_j A_j^{(m)}(t) ik_j \frac{\cosh(k_j(z+h_0))}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \quad (\text{II.2.18})$$

$$\frac{\partial\phi_{\beta}^{(m)}(x, z, t)}{\partial x} = \sum_j B_j^{(m)}(t) ik_j \frac{\sinh(k_j z)}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \quad (\text{II.2.19})$$

$$\frac{\partial\phi_{h_0}^{(m)}(x, z, t)}{\partial z} = \sum_j A_j^{(m)}(t) k_j \frac{\sinh(k_j(z+h_0))}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \quad (\text{II.2.20})$$

$$\frac{\partial\phi_{\beta}^{(m)}(x, z, t)}{\partial z} = \sum_j B_j^{(m)}(t) k_j \frac{\cosh(k_j z)}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \quad (\text{II.2.21})$$



En  $z = -h_0 + \beta(x)$  la condition au fond équivaut donc à :

$$\frac{\partial\beta(x)}{\partial x} \left[ \sum_j A_j^{(m)}(t) ik_j \cosh(k_j\beta(x)) + \sum_j B_j^{(m)}(t) ik_j \sinh(k_j(-h_0 + \beta(x))) \right] =$$

$$\sum_j A_j^{(m)}(t) k_j \sinh(k_j\beta(x)) + \sum_j B_j^{(m)}(t) k_j \cosh(k_j(-h_0 + \beta(x))) \quad (\text{II.2.22})$$

Soit en égalisant à chaque ordre  $m$  :

$$A_j^{(m)}(t) \left[ -k_j \sinh k_j \cdot \beta(x) + i \cdot \frac{\partial\beta(x)}{\partial x} k_j \cosh k_j \cdot \beta(x) \right] =$$

$$B_j^{(m)}(x, t) \left[ k_j \cosh k_j (-h_0 + \beta(x)) - i \cdot \frac{\partial\beta(x)}{\partial x} k_j \sinh k_j (-h_0 + \beta(x)) \right] \quad (\text{II.2.23})$$

On notera que dans cette dernière Eq.(II.2.23), les  $B_j^{(m)}$  dépendent maintenant de la position  $x$ . Afin de pouvoir satisfaire à chaque ordre  $m$  la condition au fond, il est donc nécessaire de prendre en compte un terme supplémentaire dans le calcul de  $\frac{\partial\phi_\beta^{(m)}(x, z, t)}{\partial x}$  réalisé ci-dessus (Eq.(II.2.19)) :

$$\frac{\partial\phi_\beta^{(m)}(x, z, t)}{\partial x} = \sum_j B_j^{(m)}(x, t) ik_j \frac{\sinh(k_j z)}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} + \sum_j \frac{\partial B_j^{(m)}(x, t)}{\partial x} \frac{\sinh(k_j z)}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \quad (\text{II.2.24})$$

On obtient donc, à chaque ordre  $m$ , l'équation Eq.(II.2.23) avec un terme supplémentaire en  $\frac{\partial B_j^{(m)}(x, t)}{\partial x}$  :

$$A_j^{(m)}(t) \left[ -k_j \sinh k_j \cdot \beta(x) + i \cdot \frac{\partial\beta(x)}{\partial x} k_j \cosh k_j \cdot \beta(x) \right] =$$

$$B_j^{(m)}(x, t) \left[ k_j \cosh k_j (-h_0 + \beta(x)) - i \cdot \frac{\partial\beta(x)}{\partial x} k_j \sinh k_j (-h_0 + \beta(x)) \right]$$

$$- \frac{\partial\beta(x)}{\partial x} \frac{\partial B_j^{(m)}(x, t)}{\partial x} \sinh [k_j (-h_0 + \beta)] \quad (\text{II.2.25})$$

La détermination de  $B_j^{(m)}(x, t)$  requiert donc l'inversion d'un système linéaire ou une résolution par itérations. La résolution par itérations implique de supposer à la première étape que  $B_j^{(m)}(x, t)$  est indépendant de  $x$ . Il est alors possible de calculer  $\frac{\partial B_j^{(m)}(x, t)}{\partial x}$  et de recalculer un nouveau  $B_j^{(m)}(x, t)$ . Ce processus est répété jusqu'à ce qu'une erreur fixée à l'avance entre le nouveau  $B_j^{(m)}(x, t)$  et l'ancien  $B_j^{(m)}(x, t)$  soit atteinte.

De plus, au vu de la dépendance en  $x$  des coefficients modaux  $B_j^{(m)}(x, t)$ , il n'est pas possible d'utiliser les FFTs pour passer de l'espace physique à l'espace modal. Ainsi, à chaque ordre  $m$ , pour chaque position  $x$ , on doit donc reconstruire l'ensemble des coefficients  $B_j^{(m)}(x, t)$  pour déterminer la vitesse verticale due au fond variable en  $z = 0$  et avancer en temps notre problème complet. Cette méthode qu'on appelle directe permet de satisfaire exactement la condition sur le fond mais on s'attend à un temps de calcul très important par rapport à la méthode HOS initiale.

Comme évoqué précédemment, cette méthode avec inversion d'un système linéaire n'a donc pas été implémentée car le souhait était de garder l'efficacité originelle de la méthode HOS. Néanmoins, nous avons utilisé la méthode dans le cadre d'une variation de fond constante où  $\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$ . Dans ce cas, l'inversion d'un système linéaire n'est pas nécessaire. Ce cas test est bien sûr inutile physiquement car  $\beta$  est alors constant, et l'on peut changer  $h_0$ , mais il sert à valider la méthode (se référer au paragraphe IV.1.1.1). Nous avons vu au début de cette partie sur la méthode directe que Le Touzé [92] a utilisé la méthode directe pour résoudre la condition de Dirichlet à la surface libre. Il a ensuite remplacé cette méthode directe par la méthode HOS. Nous allons faire de même avec la condition de Dirichlet au fond dans les prochains paragraphes.

### II.2.3.2 Méthode itérative originelle

Le coût en temps de calcul s'avère un élément clé pour les applications visées. On cherche ainsi à s'affranchir de l'inversion d'un système linéaire et on souhaite garder la possibilité d'utiliser des FFTs. On s'intéresse donc ici à l'approche proposée dans Liu et Yue [95] permettant de prendre en compte une bathymétrie variable dans le modèle HOS. Comme dans le formalisme fond plat, un développement de Taylor de  $z = \eta$  autour de  $z = 0$  est réalisé, auquel un deuxième développement est ajouté mais cette fois-ci de  $z = -h_0 + \beta$  autour de  $z = -h_0$ . Cette méthode a fait l'objet d'une présentation en conférence (c.f. Gouin *et al.* [73]).

#### II.2.3.2.1 Formulation

On se base sur la condition sur le fond (Eq.(II.2.1)) avec un développement en série de Taylor de  $\phi_{tot}$  tronqué à l'ordre  $M$  :

$$\sum_{m=1}^M \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \sum_{m=1}^M \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_0 + \beta(x) \quad (\text{II.2.26})$$

L'ordre de troncature  $M$  est identique à l'ordre de troncature sur la surface libre (c.f Eq.(II.1.13)).

En supposant alors  $\frac{\beta}{h_0} \ll 1$ , on peut écrire un développement de Taylor

autour de la profondeur moyenne  $z = -h_0$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \left[ \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_{z=-h_0} + \beta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_{z=-h_0} + \dots + \frac{\beta^M}{M!} \frac{\partial^M}{\partial z^M} \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_{z=-h_0} \right] \\ &= \sum_{m=1}^M \left[ \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial z} \right)_{z=-h_0} + \beta \left( \frac{\partial^2 \phi_{tot}^{(m)}}{\partial z^2} \right)_{z=-h_0} + \dots + \frac{\beta^M}{M!} \left( \frac{\partial^{M+1} \phi_{tot}^{(m)}}{\partial z^{M+1}} \right)_{z=-h_0} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.2.27})$$

Sachant que l'on se place dans le cas de la théorie potentielle, on a d'après l'Eq.(II.2.2) :  $\frac{\partial^2 \phi_{tot}}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \phi_{tot}}{\partial x^2}$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \left[ \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_{z=-h_0} + \dots + \frac{\beta^M}{(M)!} \frac{\partial^M}{\partial z^M} \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_{z=-h_0} \right] \\ &= \sum_{m=1}^M \left[ \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial z} \right)_{z=-h_0} - \beta \left( \frac{\partial^2 \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x^2} \right)_{z=-h_0} - \dots - \frac{\beta^M}{M!} \left[ \frac{\partial^{M-1}}{\partial z^{M-1}} \left( \frac{\partial^2 \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x^2} \right) \right]_{z=-h_0} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.2.28})$$

On fait également l'hypothèse que  $O\left(\frac{\beta}{h_0}\right) \equiv O\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) \equiv O(k\eta)$  et on ne garde que les termes d'ordre  $\eta^m$  :

$$\sum_{l=1}^{m-1} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m-l)}}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_{z=-h_0} = \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial z} \right)_{z=-h_0} - \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\beta^l}{l!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left( \frac{\partial^2 \phi_{tot}^{(m-l)}}{\partial x^2} \right)_{z=-h_0} \quad (\text{II.2.29})$$

On retrouve alors les équations présentées dans Liu et Yue [95] :

$$\begin{aligned} m = 1 : & \frac{\partial \phi_{tot}^{(1)}}{\partial z}(x, -h_0, t) = 0 \\ m = 2, \dots, M : & \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial z}(x, -h_0, t) = \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\beta^l}{l!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left( \frac{\partial \phi_{tot}}{\partial x} \right)^{(m-l)} \right]_{z=-h_0} \end{aligned} \quad (\text{II.2.30})$$

Les développements sont tronqués à l'ordre  $M$ . Ce nouveau développement (II.2.30) combiné avec les Eqs.(II.2.9, II.2.10) permet de calculer directement les amplitudes modales  $B_j^{(m)}(t)$  à chaque ordre, en fonction des  $A_j^{(m)}(t)$ , indépendamment de la position  $x$  (le principe est expliqué au paragraphe II.2.3.2.2). Les FFTs peuvent donc être utilisées, permettant ainsi a priori de conserver l'efficacité numérique du modèle HOS initial. Ce point concernant l'efficacité sera démontré au paragraphe IV.1.3.

### II.2.3.2.2 Principe de résolution

Nous reprenons ici les étapes de calcul de la vitesse verticale. Une représentation de ces étapes est disponible sur la Fig.II.2.2.

Le système de reconstruction de la vitesse verticale est le même que pour la méthode HOS initiale :

$$\frac{\partial \phi_{tot}}{\partial z}(x, z = \eta, t) = W(x, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} \phi_{tot}^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(x, 0, t) \quad (\text{II.2.31})$$

mais la vitesse verticale en  $z = 0$  est exprimée comme une somme de deux contributions (surface libre et fond) :

$$\frac{\partial \phi_{tot}}{\partial z}(x, z = 0, t) = \frac{\partial \phi_{h_0}}{\partial z}(x, z = 0, t) + \frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial z}(x, z = 0, t) \quad (\text{II.2.32})$$

La partie due à la variation du fond ( $\frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial z}(x, z = 0, t)$ ) est calculée grâce à la condition au fond :

$$\frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial z}(x, -h_0, t) = \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\beta^l}{l!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left( \frac{\partial \phi_{tot}}{\partial x} \right)^{(m-l)} \right]_{z=-h_0} \quad \text{pour } m=2, \dots, M \quad (\text{II.2.33})$$

Sachant que  $\frac{\partial \phi_{h_0}^{(m)}}{\partial z}(x, -h_0, t) = 0$ , cette équation s'écrit encore :

$$\frac{\partial \phi_{\beta}^{(m)}}{\partial z}(x, -h_0, t) = \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\beta^l}{l!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left( \frac{\partial \phi_{tot}}{\partial x} \right)^{(m-l)} \right]_{z=-h_0} \quad \text{pour } m=2, \dots, M \quad (\text{II.2.34})$$

Les étapes de calcul des amplitudes modales dues au fond, nouvelles dans la formulation HOS, sont expliquées ci-dessous.

Le terme de gauche de l'Eq.(II.2.34) vaut explicitement :

- pour  $m = 1$  :  $\frac{\partial \phi_{\beta}^{(1)}}{\partial z}(x, -h_0, t) = 0$
- pour  $m = 2, \dots, M$  :  $\frac{\partial \phi_{\beta}^{(m)}}{\partial z}(x, -h_0, t) = \sum_j B_j^{(m)}(t) k_j e^{ik_j x}$

Tous les  $B_j^{(m)}(t)$  peuvent donc être déterminés si l'on connaît le terme de droite de l'Eq.(II.2.34). Or ce terme ne dépend que des ordres inférieurs (c'est-à-dire de  $A_j^{(l)}$  et  $B_j^{(l)}$  avec  $l$  variant de 1 à  $m-1$ ), le système peut donc être résolu pour chaque ordre  $m$  ( $m$  croissant successivement).

En écrivant que  $B_j^{(m)} = \sum_{l=1}^{m-1} B_j^{(m,l)}$  et en calculant les dérivées successives de  $\phi_{tot}$  par rapport à  $x$  et  $z$  (c.f. Annexe A.1), on en déduit une formule permettant de calculer les amplitudes modales dues au fond à chaque ordre. Celle-ci est développée ci-dessous suivant si  $l$  est pair ou impair.

Pour  $l$  pair :

$$k_j B_j^{(m,l)} = -i \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} B_j^{(m-l)} k_j k_j^{l-1} + \frac{\beta^l}{l!} B_j^{(m-l)} k_j^2 k_j^{l-1} \quad (\text{II.2.35})$$

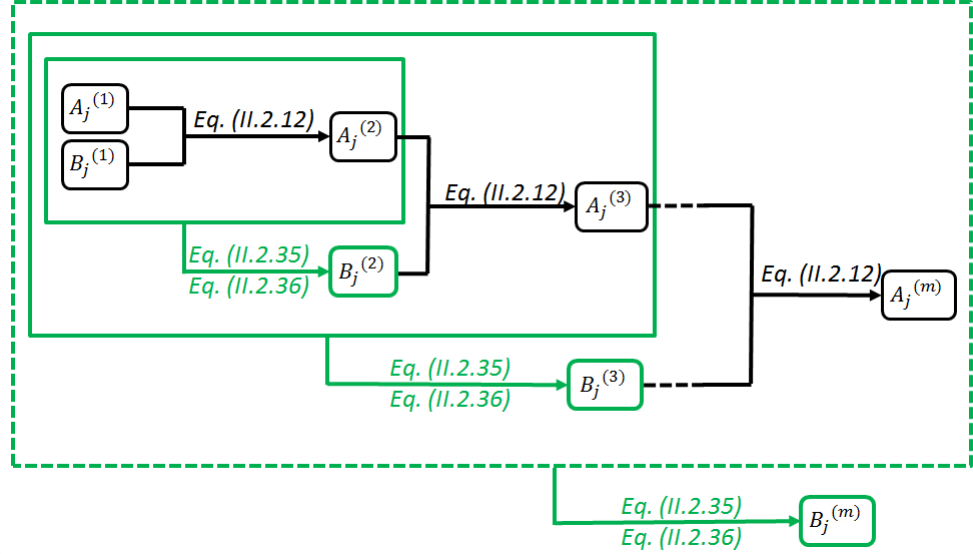


FIGURE II.2.3 – Calcul des amplitudes modales - méthode itérative originelle.

Pour  $l$  impair :

$$\begin{aligned}
 k_j B_j^{(m,l)} = & i \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} A_j^{(m-l)} k_j k_j^{l-1} \operatorname{sech}(k_j h_0) - \frac{\beta^l}{l!} A_j^{(m-l)} k_j^2 k_j^{l-1} \operatorname{sech}(k_j h_0) \\
 & - i \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} B_j^{(m-l)} k_j k_j^{l-1} \tanh(k_j h_0) + \frac{\beta^l}{l!} B_j^{(m-l)} k_j^2 k_j^{l-1} \tanh(k_j h_0)
 \end{aligned}
 \tag{II.2.36}$$

Dans les deux formules précédentes Eq.(II.2.35) et Eq.(II.2.36), les calculs sont réalisés dans l'espace modal, sauf pour les multiplications par les grandeurs  $\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!}$  et  $\frac{\beta^l}{l!}$  qui sont réalisées dans l'espace physique. Des FFTs sont utilisées pour passer d'un espace à l'autre.

Les amplitudes modales  $B_j^{(m)}$  sont donc déterminées à chaque ordre  $m$  en fonction des amplitudes modales  $A_j^{(l)}$  et  $B_j^{(l)}$  aux ordres précédents ( $l$  varie de 1 à  $m-1$ ). A chaque ordre  $m$ , les  $A_j$  et  $B_j$  calculées aux ordres précédents sont donc utilisées, comme on peut le voir sur la Fig.II.2.3.

Ensuite, le calcul de la vitesse verticale à l'aide du système triangulaire (II.2.31) est réalisé de la même manière que pour la méthode HOS fond plat (voir le paragraphe II.1.3).

Ainsi, cette formulation permet de prendre en compte un fond variable tout en conservant l'utilisation de FFTs, qui est une des caractéristiques de la méthode HOS. L'estimation de l'efficacité théorique de cette méthode sera donnée au paragraphe II.2.4. Le lecteur remarquera qu'avec ce nouveau formalisme, les ordres de non-linéarité au fond et à la surface libre sont identiques. Nous allons donc présenter dans le prochain paragraphe une méthode permettant de choisir

des ordres de non-linéarité différents.

### II.2.3.3 Méthode itérative améliorée

Avec la méthode itérative originelle, on remarque que le développement de Taylor de la condition au fond se fait à un ordre  $M$  identique à celui utilisé sur la surface libre. Les termes en  $\frac{\beta}{h_0}^{M+1}$  sont donc négligés. Nous allons voir qu'il est possible de prendre des ordres de non-linéarité différents au fond et à la surface libre dans le développement de la condition au fond.

Cette méthode est une amélioration de la méthode itérative originelle présentée précédemment et est inspirée de la méthode DNO (dont le formalisme en fond variable est expliqué au paragraphe II.2.5). L'équivalence ayant été prouvée entre les méthodes HOS et DNO (Schäffer [118] et Le Touzé [92]), cette dissociation des ordres de non-linéarité semble adaptable à la méthode HOS.

#### II.2.3.3.1 Formulation

En repartant de la condition sur le fond (c.f. Eq.(II.2.26)) et en supposant  $\frac{\beta}{h_0} \ll 1$ , il est possible d'écrire le même développement de Taylor que précédemment (Eq.(II.2.28)) mais à un ordre de troncature différent, noté  $M_b$  (pour rappel,  $M$  représente l'ordre de troncature du développement en série de perturbation à la surface libre) :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \left[ \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_{z=-h_0} + \beta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_{z=-h_0} + \dots + \frac{\beta^{M_b-1}}{(M_b-1)!} \frac{\partial^{M_b-1}}{\partial z^{M_b-1}} \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_{z=-h_0} \right] \\ &= \sum_{m=1}^M \left[ \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial z} \right)_{z=-h_0} - \beta \left( \frac{\partial^2 \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x^2} \right)_{z=-h_0} - \dots - \frac{\beta^{M_b}}{(M_b)!} \left[ \frac{\partial^{M_b-1}}{\partial z^{M_b-1}} \left( \frac{\partial^2 \phi_{tot}^{(m)}}{\partial x^2} \right) \right]_{z=-h_0} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.2.37})$$

Afin de rester consistant dans l'ordre du développement, le membre de gauche de l'Eq. (II.2.37) est développé jusqu'à un ordre  $M_b - 1$  car on fait l'hypothèse que  $O\left(\frac{\beta}{h_0}\right) \equiv O\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)$ . Le membre de gauche est finalement d'ordre  $M_b$  ce qui permet de conserver la consistance avec le membre de droite.

L'Eq. (II.2.37) peut être réécrite par :

$$\sum_{m=1}^M \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m)}}{\partial z} \right)_{z=-h_0} = \sum_{m'=1}^M \sum_{l=1}^{M_b} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\beta^l}{l!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left( \frac{\partial \phi_{tot}^{(m')}}{\partial x} \right) \right]_{z=-h_0} \right\} \quad (\text{II.2.38})$$

On fait alors l'hypothèse que chaque potentiel  $\phi_{\beta}^{(m)}$  peut être écrit comme une somme de composantes  $\phi_{\beta}^{(m,l)}$  d'ordre  $l$ , avec  $l = 1, M_b$  ( $M_b$  représente l'ordre de non-linéarité sur le fond) :

$$\phi_{\beta}^{(m)} = \sum_{l=1}^{M_b} \phi_{\beta}^{(m,l)} \quad (\text{II.2.39})$$

D'après l'Eq.(II.2.10), les amplitudes modales correspondantes sont données par :

$$B_j^{(m)} = \sum_{l=1}^{M_b} B_j^{(m,l)} \quad (\text{II.2.40})$$

Ainsi, à chaque ordre  $m$ , en introduisant  $\phi_{tot}^{(m)} = \phi_{h_0}^{(m)} + \phi_{\beta}^{(m)}$  et en gardant uniquement les termes d'ordre au maximum  $m + M_b$  (et en supposant comme pour la méthode itérative originelle que  $O\left(\frac{\beta}{h_0}\right) \equiv O\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) \equiv O(k\eta)$ ) on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial\phi_{\beta}^{(m)}}{\partial z} \right)_{z=-h_0} = \sum_{l=1}^{M_b} \left( \frac{\partial\phi_{\beta}^{(m,l)}}{\partial z} \right)_{z=-h_0} \\ & = \sum_{l=1}^{M_b} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\beta^l}{l!} \left[ \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left( \frac{\partial\phi_{h_0}^{(m)}}{\partial x} \right) \right]_{z=-h_0} + \sum_{l=1}^{M_b} \sum_{p=1}^{l-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\beta^p}{p!} \left[ \frac{\partial^{p-1}}{\partial z^{p-1}} \left( \frac{\partial\phi_{\beta}^{(m,l-p)}}{\partial x} \right) \right]_{z=-h_0} \end{aligned} \quad (\text{II.2.41})$$

Avec cette nouvelle méthode, les ordres de non-linéarité sur la surface libre et sur le fond peuvent donc être choisis indépendamment. Cette méthode améliorée est donc plus flexible et sera sûrement plus adaptée lorsque l'on s'intéressera à des cas où les ordres de non-linéarité requis sur la surface libre et le fond sont différents. Par exemple, si la houle modélisée est faiblement non-linéaire, il ne sera sûrement pas nécessaire d'avoir un très haut ordre de non-linéarité  $M$  à la surface libre. Par contre, si l'on impose une grande variation de fond, il sera intéressant de conserver un grand nombre de termes dus à cette forte variation.

### II.2.3.3.2 Principe de résolution

En réassemblant tous les termes du même ordre dans l'Eq.(II.2.41), on peut en déduire une formule itérative pour calculer chaque  $B_j^{(m,l)}$  à l'ordre  $m$ . Comme précédemment avec la méthode originelle, les calculs sont réalisés dans l'espace modal, sauf pour les multiplications par les grandeurs  $i\frac{\partial\beta}{\partial x}$  et par les puissances de  $\beta$  qui sont réalisées dans l'espace physique.

La formule est la suivante :

Pour  $l$  impair :

$$\begin{aligned} k_j B_j^{(m,l)} &= -k_j \left[ \frac{\beta^l}{l!} \operatorname{sech}(k_j h_0) k_j^l A_j^{(m)} \right. \\ & \quad \left. - k_j \left[ \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-1} \frac{\beta^p}{p!} k_j^p B_j^{(m,l-p)} - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-2} \frac{\beta^p}{p!} \tanh(k_j h_0) k_j^p B_j^{(m,l-p)} \right] \right. \\ & \quad \left. + ik_j \frac{\partial\beta}{\partial x} \left[ \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \operatorname{sech}(k_j h_0) k_j^{l-1} A_j^{(m)} + \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-1} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} k_j^{p-1} B_j^{(m,l-p)} \right] \right. \\ & \quad \left. + ik_j \frac{\partial\beta}{\partial x} \left[ - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-2} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} \tanh(k_j h_0) k_j^{p-1} B_j^{(m,l-p)} \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{II.2.42})$$

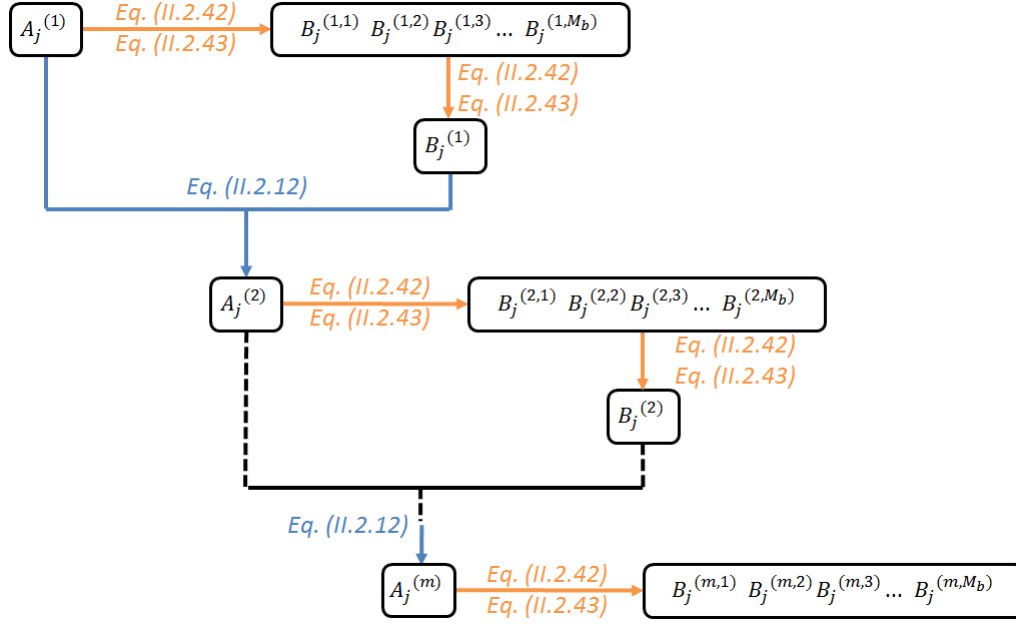


FIGURE II.2.4 – Calcul des amplitudes modales - méthode améliorée.

Et pour  $l$  pair :

$$\begin{aligned}
 k_j B_j^{(m,l)} = & -k_j \left[ \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-2} \frac{\beta^p}{p!} k_j^p B_j^{(m,l-p)} - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-1} \frac{\beta^p}{p!} \tanh(k_j h_0) k_j^p B_j^{(m,l-p)} \right] \\
 & + ik_j \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-2} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} k_j^{p-1} B_j^{(m,l-p)} - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-1} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} \tanh(k_j h_0) k_j^{p-1} B_j^{(m,l-p)} \right]
 \end{aligned} \tag{II.2.43}$$

La Fig.II.2.4 représente le calcul des amplitudes modales à chaque ordre  $m$ . On observe que par rapport à la méthode originelle, les amplitudes modales calculées aux ordres précédents ne sont pas réutilisées. Par exemple, pour les calculs des  $B_j^{(m)}$ , on utilise uniquement les  $A_j^{(m)}$ . De plus, toujours par rapport à la méthode itérative originelle (Eq. (II.2.35) et Eq. (II.2.36)), le calcul des amplitudes modales dues au fond  $B_j^{(m)}(t)$  est possible même pour  $m = 1$  (avec la méthode originelle le calcul des  $B_j^{(m)}(t)$  commence à  $m = 2$ ).

Enfin, si l'on impose  $M_b = M$  avec la méthode améliorée, on pourrait penser que l'on obtient alors les mêmes résultats qu'en utilisant la méthode originelle à un ordre  $M$ . Néanmoins, les résultats sont légèrement différents car on ne calcule pas les mêmes termes à chaque sous-pas  $i = 1, \dots, M$ . Le paragraphe IV.1.1.4 montre les différences atteintes sur la vitesse verticale entre les deux méthodes pour  $M = M_b$ .

Nous allons pour l'instant nous intéresser dans le prochain paragraphe au temps de calcul supplémentaire induit par ces deux nouvelles méthodes itératives permettant la prise en compte d'un fond variable.



## II.2.4 Estimation du temps de calcul

Le but ici est de comparer le temps de calcul théorique des deux méthodes itératives. Nous savons que le temps de calcul est directement lié au nombre de FFTs utilisé dans la procédure HOS. Pour la méthode HOS initiale avec un fond plat (Eq.(II.1.14) et Eq.(II.1.19)), le nombre de FFTs utilisées sans traitement anti-repliement est  $M \frac{M+3}{2}$ . Pour prendre en compte le fond variable, la méthode originelle requiert un nombre de FFTs supplémentaires (toujours sans prendre en compte le traitement anti-repliement) qui vaut d'après l'Eq.(II.2.30) :

$$n = 2M(M - 1) \quad (\text{II.2.44})$$

Et pour la méthode améliorée ce nombre vaut (d'après l'Eq.(II.2.41)) :

$$\begin{aligned} n &= 2M_b^2 M \quad \text{si } M_b \text{ est pair} \\ n &= 2 [M_b^2 + 2M_b + 1] M \quad \text{si } M_b \text{ est impair} \end{aligned} \quad (\text{II.2.45})$$

Le coût additionnel est donc en  $O(M^2)$  pour la méthode originelle, si l'on ne considère aucun traitement anti-repliement. Cela correspond donc au même ordre de grandeur que pour la résolution du problème en fond plat, on est donc confiant quant à l'efficacité de cette méthode itérative qui sera toujours intéressante en terme de temps de calcul comparée aux autres solveurs potentiels non-linéaires.

Par contre le coût additionnel de la méthode améliorée est en  $O(M_b^2 M)$ . En effet, si l'on compare les Eq.(II.2.35),(II.2.36) aux Eq.(II.2.42),(II.2.43)), on remarque que le calcul des amplitudes modales  $B_j^{(m)}$  fait intervenir une somme supplémentaire (sur les indices  $p$ ), ce qui conduit à l'utilisation d'un plus grand nombre de FFTs. De plus, comme dit précédemment, la méthode améliorée ne réutilise pas les amplitudes modales calculées aux ordres précédents. Cela suppose donc qu'elles sont recalculées à chaque ordre, d'où une augmentation du nombre de FFTs.

Cependant, le surcoût dépendra du type de cas considéré. En effet, la méthode améliorée sera plus adaptée que la méthode originelle lorsque :

$$\begin{aligned} M_b &< \sqrt{M - 1} \quad \text{si } M_b \text{ est pair} \\ M_b &< \sqrt{M + 1} \quad \text{si } M_b \text{ est impair} \end{aligned} \quad (\text{II.2.46})$$

Cela signifie que si l'on a de grandes non-linéarités du fond par rapport à la surface libre, il vaut mieux utiliser la méthode originelle. Au contraire, si l'on a de grandes non-linéarités à la surface libre par rapport au fond alors la méthode améliorée sera plus efficace.

En fond plat, le coût du traitement anti-repliement a été quantifié dans Ducrozet [46]. Suivant le traitement anti-repliement utilisé avec les méthodes prenant en compte un fond variable, celui-ci aura plus ou moins d'influence sur le temps de calcul. En effet, si l'on utilise un dealiasing intermédiaire avec  $N_d = N \frac{2+1}{2}$ , le nombre de FFTs supplémentaires est alors de :

$$\begin{aligned} &+ M(M - 1) \quad \text{pour la méthode originelle} \\ &+ [2 + M_b(M_b - 1)] M \quad \text{pour la méthode améliorée} \end{aligned} \quad (\text{II.2.47})$$

Néanmoins, le nombre de points de collocation sera relativement limité par rapport à un traitement anti-repliement complet.

Par contre, si l'on utilise un anti-repliement complet ( $N_d = N \frac{M+1}{2}$ ), le nombre de points utilisés dans la direction horizontale sera important, mais le nombre d'opérations supplémentaires sera plus faible :

$$\begin{aligned} &+ 4 \text{ pour la méthode originelle} \\ &+ 4M \text{ pour la méthode améliorée} \end{aligned} \quad (\text{II.2.48})$$

## II.2.5 Equivalence avec le formalisme DNO

Nous allons expliquer dans cette partie le lien entre les formalismes HOS et DNO en bathymétrie variable.

Pour un fond variable (*i.e.*  $\beta \neq 0$ ) l'opérateur  $G$  de la DNO (c.f. Eq. (II.1.27)) peut être calculé avec la même formule récursive (c.f. Eq. (II.1.32)) en remplaçant le premier terme par :  $G^{(0)} = D \tanh(hD) + DL(\beta)$ . La démonstration est disponible dans Craig *et al.* [40]. Ces auteurs démontrent alors une formule récursive pour le calcul de l'opérateur  $L$  (formules A6 et A7 de l'Annexe A) à partir de la condition au fond (formule A5) en faisant l'hypothèse suivante : le terme  $L_\beta$  est exprimé par  $kL_\beta = \sum_j k_j L_j$ , avec les  $L_j$  d'ordre  $j$  en  $\beta$ . Nous avons redémontré cette formule en Annexe A.2.

Cette démonstration nous a permis de nous rendre compte que dans les formules A6 et A7 de l'Annexe A (c.f. Craig *et al.* [40]) les termes dus au gradient de  $\beta$  sont négligés. Nous avons donc réécrit la formule récursive pour les  $L_j$  en ajoutant ce terme manquant.

On obtient, pour  $j$  impair :

$$\begin{aligned} DL_j = & -\text{sech}(kh_0) \left[ \frac{\beta^j}{j!} \text{sech}(h_0 D) D^{j+1} \right] - \text{sech}(kh_0) \left[ \sum_{l=2, \text{pair}}^{j-1} \frac{\beta^l}{l!} D^l \cosh(kh_0) DL_{j-l} \right] \\ & + \text{sech}(kh_0) \left[ \sum_{l=1, \text{impair}}^{j-2} \frac{\beta^l}{l!} \sinh(h_0 D) D^l DL_{j-l} \right] + \text{sech}(kh_0) i \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ \frac{\beta^{j-1}}{(j-1)!} \text{sech}(h_0 D) D^j \right] \\ & + \text{sech}(kh_0) i \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ \sum_{l=2, \text{pair}}^{j-1} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \cosh(h_0 D) D^{l-1} DL_{j-l} \right] \\ & - \text{sech}(kh_0) i \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ \sum_{l=1, \text{impair}}^{j-2} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \sinh(h_0 D) D^{l-1} DL_{j-l} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.2.49})$$

Et pour  $j$  pair :

$$\begin{aligned}
 DL_j = & -\operatorname{sech}(kh_0) \left[ \sum_{l=2, \text{pair}}^{j-2} \frac{\beta^l}{l!} \cosh(h_0 D) D^l L_{j-l} - \sum_{l=1, \text{impair}}^{j-1} \frac{\beta^l}{l!} \sinh(h_0 D) D^l DL_{j-l} \right] \\
 & + \operatorname{sech}(kh_0) i \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ \sum_{l=2, \text{pair}}^{j-2} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \cosh(h_0 D) D^{l-1} DL_{j-l} \right] \\
 & - \operatorname{sech}(kh_0) i \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ \sum_{l=1, \text{impair}}^{j-1} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \sinh(h_0 D) D^{l-1} DL_{j-l} \right]
 \end{aligned} \tag{II.2.50}$$

Guyenne et Nicholls [80] proposent une formule récursive plus stable numériquement, en calculant des  $F_j$  qui vérifient  $DL_j = \operatorname{sech}(h_0 D) DF_j$ . Cela permet de remplacer les  $\cosh$  et  $\sinh$  par des  $\operatorname{sech}$  et  $\tanh$  qui sont des fonctions bornées (au contraire des fonctions  $\cosh$  et  $\sinh$ ). On a donc, en suivant le conseil de Guyenne et Nicholls [79] :

Pour  $j$  impair :

$$\begin{aligned}
 DF_j = & -D \left[ \frac{\beta^j}{j!} \operatorname{sech}(h_0 D) D^j + \sum_{l=2, \text{pair}}^{j-1} \frac{\beta^l}{l!} D^{l-1} DF_{j-l} - \sum_{l=1, \text{impair}}^{j-2} \frac{\beta^l}{l!} \tanh(h_0 D) D^{l-1} DF_{j-l} \right] \\
 & + i \frac{\partial \beta}{\partial x} D \left[ \frac{\beta^{j-1}}{(j-1)!} \operatorname{sech}(h_0 D) D^{j-1} + \sum_{l=2, \text{pair}}^{j-1} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} D^{l-2} DF_{j-l} \right] \\
 & - i \frac{\partial \beta}{\partial x} D \left[ \sum_{l=1, \text{impair}}^{j-2} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \tanh(h_0 D) D^{l-2} DF_{j-l} \right]
 \end{aligned} \tag{II.2.51}$$

Et pour  $j$  pair :

$$\begin{aligned}
 DF_j = & -D \left[ \sum_{l=2, \text{pair}}^{j-2} \frac{\beta^l}{l!} D^{l-1} DF_{j-l} - \sum_{l=1, \text{impair}}^{j-1} \frac{\beta^l}{l!} \tanh(h_0 D) D^{l-1} DF_{j-l} \right] \\
 & + i \frac{\partial \beta}{\partial x} D \left[ \sum_{l=2, \text{pair}}^{j-2} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} D^{l-2} DF_{j-l} - \sum_{l=1, \text{impair}}^{j-1} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \tanh(h_0 D) D^{l-2} DF_{j-l} \right]
 \end{aligned} \tag{II.2.52}$$

Ces formules pour les  $F_j$  sont à mettre en regard avec celles obtenues auparavant pour le calcul des  $B_j$  (Eq.(II.2.43) et Eq.(II.2.42)). Nous avons réécrit ces deux dernières équations dans le formalisme DNO :

Pour  $l$  impair :

$$\begin{aligned}
 k_B^{(m,l)} = & -k \left[ \frac{\beta^l}{l!} \operatorname{sech}(kh_0) k^{l-1} k \right] \\
 & -k \left[ \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-1} \frac{\beta^p}{p!} k^{p-2} k k_B^{(m,l-p)} - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-2} \frac{\beta^p}{p!} \tanh(kh_0) k^{p-2} k k_B^{(m,l-p)} \right] \\
 & + ik \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \operatorname{sech}(kh_0) k^{l-2} k + \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-1} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} k^{p-3} k k_B^{(m,l-p)} \right] \\
 & + ik \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-2} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} \tanh(kh_0) k^{p-3} k k_B^{(m,l-p)} \right]
 \end{aligned} \tag{II.2.53}$$

Et pour  $l$  pair :

$$\begin{aligned}
 k_B^{(m,l)} = & -k \left[ \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-2} \frac{\beta^p}{p!} k^{p-2} k k_B^{(m,l-p)} - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-1} \frac{\beta^p}{p!} \tanh(kh_0) k^{p-2} k k_B^{(m,l-p)} \right] \\
 & + ik \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-2} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} k^{p-3} k k_B^{(m,l-p)} - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-1} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} \tanh(kh_0) k^{p-3} k k_B^{(m,l-p)} \right]
 \end{aligned} \tag{II.2.54}$$

Si l'on compare les Eq.(II.2.53),(II.2.54) aux développements obtenus par Guyenne et Nicholls [80] (Eq.(2.7a) et (2.7b) de leur papier), on remarque que l'on obtient une partie supplémentaire due au gradient du fond. Les autres termes sont identiques. Les Eq.(II.2.51) et Eq.(II.2.52) devraient donc être utilisées en DNO fond variable.

## II.2.6 Formulation 3D

L'objectif de cette partie est de présenter la résolution du problème tridimensionnel. Nous nous plaçons donc désormais dans un domaine 3D, défini par les axes horizontaux  $x$  et  $y$  et l'axe vertical  $z$ . On obtient alors un nouveau système d'équations présenté ci-dessous (Eq.(II.2.55) à (II.2.59)). Nous redonnons ensuite les grandes étapes de calcul de la vitesse verticale, cœur de la méthode HOS, puis nous présentons le formalisme des 3 méthodes.

### II.2.6.1 Système d'équations

- Conservation de la masse :

$$\Delta \phi = 0 \tag{II.2.55}$$

- Condition au fond :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_0 + \beta(x, y) \tag{II.2.56}$$

- Condition Cinématique de Surface Libre (CCSL) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left( 1 + |\nabla \eta|^2 \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \tag{II.2.57}$$

- Condition Dynamique de Surface Libre (CDSL) :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (\text{II.2.58})$$

- Conditions de périodicité dans les directions horizontale  $x$  et verticale  $y$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x + L_x, y) &= \tilde{\phi}(x, y) \\ \tilde{\phi}(x, y + L_y) &= \tilde{\phi}(x, y) \\ \eta(x + L_x, y) &= \eta(x, y) \\ \eta(x, y + L_y) &= \eta(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.2.59})$$

### II.2.6.2 Expression du potentiel des vitesses

La première étape dans le calcul de la vitesse verticale  $W$  consiste à réaliser un développement de Taylor du potentiel autour de la position moyenne de la surface libre  $z = 0$ . On obtient alors un premier système triangulaire :

$$\begin{aligned} \phi_{tot}^{(1)}(x, y, 0, t) &= \tilde{\phi}_{tot}(x, y, t) \\ \phi_{tot}^{(2)}(x, y, 0, t) &= -\eta(x, y, t) \frac{\partial \phi_{tot}^{(1)}}{\partial z}(x, y, 0, t) \\ &\dots \\ \phi_{tot}^{(m)}(x, y, 0, t) &= -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!}(x, y, t) \frac{\partial^k \phi_{tot}^{(m-k)}}{\partial z^k}(x, y, 0, t) \quad \text{pour } m > 1 \end{aligned} \quad (\text{II.2.60})$$

On exprime alors le potentiel total comme la somme de  $\phi_{h_0}^{(m)}(x, y, z, t)$  et  $\phi_{\beta}^{(m)}(x, y, z, t)$  :

$$\phi_{h_0}^{(m)}(x, y, z, t) = \sum_i \sum_j A_{ij}^{(m)}(t) \frac{\cosh(k_{ij}(z + h_0))}{\cosh(k_{ij}h_0)} e^{ik_{x_i}x + ik_{y_j}y} \quad (\text{II.2.61})$$

$$\phi_{\beta}^{(m)}(x, y, z, t) = \sum_i \sum_j B_{ij}^{(m)}(t) \frac{\sinh(k_{ij}z)}{\cosh(k_{ij}h_0)} e^{ik_{x_i}x + ik_{y_j}y} \quad (\text{II.2.62})$$

Avec  $k_{x_i} = \frac{i 2\pi}{L_x}$ ,  $k_{y_j} = \frac{j 2\pi}{L_y}$  et  $k_{ij} = \sqrt{k_{x_i}^2 + k_{y_j}^2}$ .

On peut alors calculer les amplitudes modales  $B_{ij}$  dues au fond variable, à l'aide de l'une des trois méthodes (exacte, originelle ou améliorée).

### II.2.6.3 Méthode directe

Avec la méthode exacte, les amplitudes modales dues au fond  $B_{ij}^{(m)}(x, y, t)$  sont liées aux amplitudes modales  $A_{ij}^{(m)}(t)$  par :

$$A_{ij}^{(m)}(t) \left[ -k_{ij} \sinh k_{ij} \cdot \beta(x, y) + i \cdot \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial x} k_{x_i} \cosh k_{ij} \cdot \beta(x, y) + i \cdot \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial y} k_{y_j} \cosh k_{ij} \cdot \beta(x, y) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 & B_{ij}^{(m)}(x, y, t) [k_{ij} \cosh k_{ij} (-h_0 + \beta(x, y))] \\
 & + B_{ij}^{(m)}(x, y, t) \left[ -i \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial x} k_{x_i} \sinh k_{ij} (-h_0 + \beta(x, y)) - i \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial y} k_{y_j} \sinh k_{ij} (-h_0 + \beta(x, y)) \right] \\
 & - \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial x} \frac{\partial B_{ij}^{(m)}(x, y, t)}{\partial x} \sinh [k_{ij} (-h_0 + \beta)] - \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial y} \frac{\partial B_{ij}^{(m)}(x, y, t)}{\partial y} \sinh [k_{ij} (-h_0 + \beta)]
 \end{aligned} \tag{II.2.63}$$

### II.2.6.4 Méthode itérative originelle

Avec la méthode itérative originelle, le potentiel  $\phi_\beta$  est exprimé par :

$$\begin{aligned}
 m = 1 : \frac{\partial \phi_\beta^{(1)}}{\partial z}(x, y, -h_0, t) &= 0 \\
 m = 2, \dots, M : \frac{\partial \phi_\beta^{(m)}}{\partial z}(x, y, -h_0, t) &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\beta^i}{i!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial z^{i-1}} \left( \frac{\partial \phi_{tot}}{\partial x} \right)^{(m-i)} \right]_{z=-h_0} \\
 &+ \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\beta^i}{i!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial z^{i-1}} \left( \frac{\partial \phi_{tot}}{\partial y} \right)^{(m-i)} \right]_{z=-h_0}
 \end{aligned} \tag{II.2.64}$$

En écrivant que  $k_{ij} B_{ij}^{(m)} = \sum_{l=1}^{m-1} k_{ij} B_{ij}^{(l)}$ , on a alors la formule suivante pour le calcul des amplitudes modales dues au fond à chaque ordre :

Pour  $l$  pair :

$$k_{ij} B_{ij}^{(l)} = -i \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} B_{ij}^{(m-l)} k_{x_i} k_{ij}^{l-1} - i \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} B_{ij}^{(m-l)} k_{y_j} k_{ij}^{l-1} + \frac{\beta^l}{l!} B_{ij}^{(m-l)} k_{ij}^{l+1} \tag{II.2.65}$$

Pour  $l$  impair :

$$\begin{aligned}
 k_{ij} B_{ij}^{(l)} &= i \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} A_{ij}^{(m-l)} k_{x_i} k_{ij}^{l-1} \operatorname{sech}(k_{ij} h_0) - i \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} B_{ij}^{(m-l)} k_{x_i} k_{ij}^{l-1} \tanh(k_{ij} h_0) \\
 &+ i \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} A_{ij}^{(m-l)} k_{y_j} k_{ij}^{l-1} \operatorname{sech}(k_{ij} h_0) - i \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} B_{ij}^{(m-l)} k_{y_j} k_{ij}^{l-1} \tanh(k_{ij} h_0) \\
 &- \frac{\beta^l}{l!} A_{ij}^{(m-l)} k_{ij}^{l+1} \operatorname{sech}(k_{ij} h_0) + \frac{\beta^l}{l!} B_{ij}^{(m-l)} k_{ij}^{l+1} \tanh(k_{ij} h_0)
 \end{aligned} \tag{II.2.66}$$

### II.2.6.5 Méthode itérative améliorée

La méthode itérative améliorée nous donne le développement suivant pour  $\phi_\beta$  :

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial \phi_\beta^{(m)}}{\partial z} \right)_{z=-h_0} &= \sum_{l=1}^{M_b} \left( \frac{\partial \phi_\beta^{(m,l)}}{\partial z} \right)_{z=-h_0} \\
 &= \sum_{l=1}^{M_b} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\beta^l}{l!} \left[ \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left( \frac{\partial \phi_{h_0}^{(m)}}{\partial x} \right) \right]_{z=-h_0} + \sum_{l=1}^{M_b} \sum_{p=1}^{l-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\beta^p}{p!} \left[ \frac{\partial^{p-1}}{\partial z^{p-1}} \left( \frac{\partial \phi_\beta^{(m,l-p)}}{\partial x} \right) \right]_{z=-h_0} \\
 &+ \sum_{l=1}^{M_b} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\beta^l}{l!} \left[ \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left( \frac{\partial \phi_{h_0}^{(m)}}{\partial y} \right) \right]_{z=-h_0} + \sum_{l=1}^{M_b} \sum_{p=1}^{l-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\beta^p}{p!} \left[ \frac{\partial^{p-1}}{\partial z^{p-1}} \left( \frac{\partial \phi_\beta^{(m,l-p)}}{\partial y} \right) \right]_{z=-h_0}
 \end{aligned} \tag{II.2.67}$$

Et en écrivant que  $k_{ij}B_{ij}^{(m)} = \sum_{l=1}^{M_b} k_{ij}B_{ij}^{(m,l)}$ , on utilise alors les formules suivantes pour calculer les  $B_{ij}$  :

Pour  $l$  pair :

$$\begin{aligned}
 k_{ij}B_{ij}^{(m,l)} = & -k_{ij} \left[ \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-2} \frac{\beta^p}{p!} k_{ij}^p B_{ij}^{(m,l-p)} - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-1} \frac{\beta^p}{p!} \tanh(k_{ij}h_0) k_{ij}^p B_{ij}^{(m,l-p)} \right] \\
 & + ik_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-2} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} k_{x_i} k_{ij}^{p-2} B_{ij}^{(m,l-p)} - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-1} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} \tanh(k_{ij}h_0) k_{x_i} k_{ij}^{p-2} B_{ij}^{(m,l-p)} \right] \\
 & + ik_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial y} \left[ \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-2} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} k_{y_j} k_{ij}^{p-2} B_{ij}^{(m,l-p)} - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-1} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} \tanh(k_{ij}h_0) k_{y_j} k_{ij}^{p-2} B_{ij}^{(m,l-p)} \right]
 \end{aligned} \tag{II.2.68}$$

Et pour  $l$  impair :

$$\begin{aligned}
 k_{ij}B_{ij}^{(m,l)} = & -k_{ij} \left[ \frac{\beta^l}{l!} \operatorname{sech}(k_{ij}h_0) k_{ij}^l \right] A_{ij}^{(m)} \\
 & - k_{ij} \left[ \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-1} \frac{\beta^p}{p!} k_{ij}^p B_{ij}^{(m,l-p)} \right] \\
 & + k_{ij} \left[ \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-2} \frac{\beta^p}{p!} \tanh(k_{ij}h_0) k_{ij}^p B_{ij}^{(m,l-p)} \right] \\
 & + ik_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \operatorname{sech}(k_{ij}h_0) k_{x_i} k_{ij}^{l-2} A_j^{(m)} + \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-1} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} k_{x_i} k_{ij}^{p-2} B_{ij}^{(m,l-p)} \right] \\
 & + ik_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-2} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} \tanh(k_{ij}h_0) k_{x_i} k_{ij}^{p-2} B_{ij}^{(m,l-p)} \right] \\
 & + ik_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial y} \left[ \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \operatorname{sech}(k_{ij}h_0) k_{y_j} k_{ij}^{l-2} A_j^{(m)} + \sum_{p=2, \text{pair}}^{l-1} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} k_{y_j} k_{ij}^{p-2} B_{ij}^{(m,l-p)} \right] \\
 & + ik_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial y} \left[ - \sum_{p=1, \text{impair}}^{l-2} \frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!} \tanh(k_{ij}h_0) k_{y_j} k_{ij}^{p-2} B_{ij}^{(m,l-p)} \right]
 \end{aligned} \tag{II.2.69}$$

### II.2.6.6 Calcul de la vitesse verticale $W$

Une fois les amplitudes modales  $B_{ij}$  déterminées à chaque ordre  $m$  avec l'une des 3 méthodes, on peut calculer la vitesse verticale  $W$  grâce au deuxième système triangulaire :

$$\begin{aligned}
 W^{(1)}(x, y, t) &= \frac{\partial \phi_{tot}^{(1)}}{\partial z}(x, y, 0, t) \\
 W^{(2)}(x, y, t) &= \frac{\partial \phi_{tot}^{(2)}}{\partial z}(x, y, 0, t) + \eta \frac{\partial^2 \phi_{tot}^{(1)}}{\partial z^2}(x, y, 0, t) \\
 &\dots \\
 W^{(m)}(x, y, t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} (x, y, t) \frac{\partial^{k+1} \phi_{tot}^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(x, y, 0, t) \quad \text{pour } m > 1
 \end{aligned} \tag{II.2.70}$$

Ainsi, les conditions de surface libre Eq.(II.2.57) et Eq.(II.2.58) peuvent être avancées en temps et l'on peut calculer les amplitudes modales  $A_{ij}$  au pas de temps suivant.

## II.2.7 Conclusion

Nous avons donc présenté dans cette partie trois méthodes de résolution en fond variable. La première méthode permet de résoudre la condition au fond de manière exacte, mais elle requiert l'inversion d'un système linéaire. Son coût en temps de calcul sera donc bien trop élevé pour les applications souhaitées.

Par conséquent, notre attention s'est portée sur les deux autres méthodes présentées. Celle-ci nous paraissent bien plus prometteuses car elles conservent *a priori* l'efficacité de la méthode HOS initiale grâce à l'emploi de FFTs. La méthode originelle considère le même ordre de non-linéarité  $M$  à la surface libre et au fond, avec un temps de calcul théorique supplémentaire proportionnel à  $M^2$ . La méthode améliorée permet de distinguer deux ordres de non-linéarité : un ordre à la surface libre  $M$  et un ordre au fond  $M_b$ . Le coût en temps de calcul théorique est alors proportionnel à  $M_b^2 M$ .

Ces deux méthodes itératives seront caractérisées dans la partie IV. Nous vérifierons notamment la validité des hypothèses réalisées lors des développements en série de Taylor aux paragraphes II.2.3.2 et II.2.3.3 :  $\frac{\beta}{h_0} \ll 1$  et  $O\left(\frac{\beta}{h_0}\right) \equiv O\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)$ . La précision de ces nouvelles méthodes sera investiguée au paragraphe IV.1.1, et la validité des estimations réalisées sur le temps de calcul sera étudiée au paragraphe IV.1.3. Nous nous intéresserons également au traitement anti-repliement nécessaire avec ces nouvelles méthodes au paragraphe IV.1.4. De plus, avec les deux méthodes proposées, le fond et les gradients du fond doivent être continus. Nous regarderons donc également ce que cela implique lors des cas de validation et d'applications au chapitre IV.2 et dans la partie IV.2.

Auparavant, il s'avère nécessaire de s'intéresser à la condition de périodicité Eq.(II.2.59). En effet, cette condition n'introduisait pas de difficultés particulières dans le cas d'une propagation en océan ouvert sur un fond plat, mais nécessite un traitement particulier des CSL et de la bathymétrie dans le modèle HOS fond variable développé. Ce traitement sera donc introduit dans la prochaine partie.





Troisième partie

Mise en œuvre



Le modèle HOS requiert l'utilisation d'une géométrie périodique au niveau de la surface libre et du fond. En effet, le potentiel et l'élévation de surface libre doivent vérifier des conditions de périodicité dans le plan horizontal d'après l'Eq. (II.2.59). Le fond, de par l'emploi de FFTs, doit également être périodique. L'objectif de cette partie, plus pratique que la partie théorique précédente, est donc d'expliquer concrètement au lecteur la façon de respecter ces conditions. Le problème de périodicité de la surface libre avait déjà été abordé par Bonnefoy *et al.* [26] lors de la génération en bassin. Par contre, le problème au niveau du fond n'existait pas jusqu'ici en fond plat ou infini, c'est donc un aspect important de la thèse.

Au niveau de la surface libre (élévation et potentiel des vitesses), on souhaite contrôler la houle incidente tout en respectant les conditions de périodicité. Des implémentations d'ordre numérique sont donc nécessaires. Une solution facile à implémenter est d'augmenter la taille du domaine dans la direction de propagation, mais cela devient vite prohibitif pour des simulations longues. Nous allons donc présenter les deux grands types de méthodes couramment utilisées dans la littérature. La première méthode est dite de relaxation, car la solution calculée est relaxée sur les frontières du domaine vers une solution imposée et connue. La deuxième méthode consiste à injecter des termes sources et des termes puits dans les conditions de surface libre. Ces méthodes seront présentées et utilisées dans la direction de propagation au chapitre III.1.

De plus, la bathymétrie doit également respecter des conditions de périodicité. En effet, nous avons vu précédemment que le fond et ses différentes dérivées sont définis dans l'espace physique, et que les produits sont calculés dans l'espace de Fourier. Des transformées de Fourier rapides (FFT) sont utilisées lors du calcul du gradient du fond et des produits du fond multipliés par une fonction. Cela implique que le fond  $h(x)$  et donc sa variation  $\beta(x)$  doivent être périodiques. Bien entendu, pour un cas réel (par exemple une houle arrivant sur le rivage), cela sera rarement le cas. Il sera alors nécessaire de rendre artificiellement périodique la bathymétrie, ce que nous présenterons dans le paragraphe III.1.3 en 2D, et au paragraphe III.2.1 en 3D.

Afin de traiter des cas tridimensionnels présentant un fond variable, il est également nécessaire d'employer une méthode numérique dans la direction transverse afin de respecter les conditions de périodicité au niveau de la surface libre dans cette direction. Malheureusement, peu de méthodes sont recensées dans la littérature pour modéliser des configurations réalistes de bathymétrie variable. On recense plus de méthodes permettant de reproduire la réflexion dans un bassin océanique. Nous tenterons donc de définir une méthode adaptée à la propagation de houle en configuration réaliste au paragraphe III.2.2.



## Chapitre III.1

# Modélisation de cas bidimensionnels

Notre but est de générer et de contrôler la houle incidente, tout en conservant les conditions de périodicité à la surface libre. Nous présentons donc dans ce chapitre les méthodes pouvant être utilisées au sein du modèle HOS. On distingue les méthodes de relaxation présentées au paragraphe III.1.1 des méthodes avec introduction de termes sources décrites au paragraphe III.1.2.

De plus, la géométrie du fond doit également respecter des conditions de périodicité. Les modifications de bathymétrie mises en place pour les cas bidimensionnels seront donc présentées au paragraphe III.1.3.

### III.1.1 Zones de relaxation

Nous introduisons ici la méthode de relaxation, utilisée dans notre cas afin de conserver la périodicité de la surface libre dans la direction de propagation  $x$ . Nous verrons que l'on peut faire tendre la solution aux frontières du domaine vers deux grands types de solutions. Nous identifierons alors la solution la plus adaptée à nos simulations en fond variable.

Avec cette méthode, la solution numérique calculée par le modèle  $(\eta, \tilde{\phi})$  est relaxée vers une solution connue aux frontières du domaine. En deux dimensions ces régions sont localisées à droite et à gauche du domaine. Par exemple, si l'on cherche à reproduire la propagation de houle au-dessus d'une marche immergée (ce cas sera traité au chapitre V.1), les zones amont et aval sont localisées comme sur la Fig.III.1.1.

Les zones de relaxations sont créées en définissant un coefficient de relaxation  $C_r(x)$  (avec  $0 \leq C_r(x) \leq 1$ ) et une solution exacte imposée nommée  $(\eta_{imp}, \tilde{\phi}_{imp})$  comme décrit par Bingham et Zhang [23] et Guyenne et Nicholls [80]. Ce type de zones a été introduit par Jensen [84]. Des comparaisons à d'autres méthodes sont également disponibles dans ce papier.

Après chaque sous-pas de temps dans le schéma Runge-Kutta, les conditions

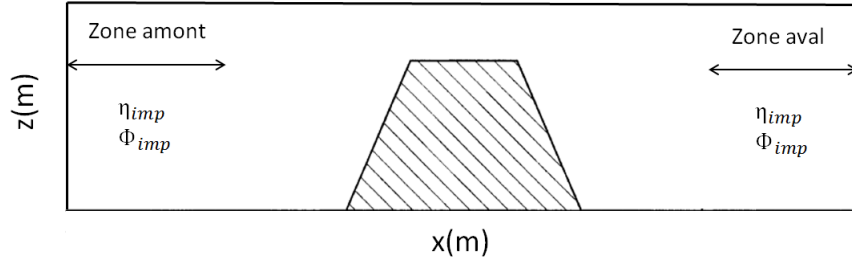


FIGURE III.1.1 – Localisation des zones amont et aval.

suivantes sont imposées sur  $\eta$  et  $\tilde{\phi}$  :

$$\eta(x, t) = (1 - C_r(x)) \cdot \eta_{imp}(x, t) + C_r(x) \cdot \eta(x, t) \quad (\text{III.1.1})$$

$$\tilde{\phi}(x, t) = (1 - C_r(x)) \cdot \tilde{\phi}_{imp}(x, t) + C_r(x) \cdot \tilde{\phi}(x, t) \quad (\text{III.1.2})$$

Afin de limiter la réflexion,  $C_r$  doit être régulier. En pratique on utilise des polynômes d'ordre 3 (tangentes nulles aux deux extrémités) comme présentés sur la Fig.III.1.2, ou bien une fonction tangente hyperbolique (tangente nulle à la jonction).

### III.1.1.1 Relaxation simple

Ces zones permettent une relaxation vers une solution imposée non-nulle. Dans ce cas, une solution est imposée sur tout le domaine à l'instant initial, puis par la suite uniquement dans les zones amont et aval grâce aux fonctions de relaxation, comme représenté sur la Fig.III.1.2. La solution imposée sera la solution que l'on souhaite propager avec le modèle. Cela peut par exemple être la fonction de courant de Rieneker et Fenton [117] dans le cas d'une houle régulière non-linéaire, ou une solution linéaire afin de définir une houle irrégulière, etc.

Ainsi, on impose à l'état initial une élévation et un potentiel de surface libre. Puis, lors du calcul, deux zones de relaxation sont utilisées. La zone amont permet de générer et contrôler les ondes tandis que la zone aval absorbe les perturbations créées lors de la propagation.

#### III.1.1.1.1 Relaxation en temps

Dans le cas d'une houle irrégulière propagée sur un fond plat, la thèse de Perignon [113] aborde le problème de l'initialisation des simulations. En effet, on réalise souvent une hypothèse de linéarité afin de fournir une solution initiale  $(\eta, \tilde{\phi})$  au problème, que l'on propage ensuite de manière non-linéaire (avec un ordre  $M$ ). Cela entraîne la plupart du temps des instabilités et des ondes parasites. Perignon [113] a ainsi mis en évidence l'intérêt d'utiliser la méthode de Dommermuth [45] en fond plat afin d'assurer une transition progressive du linéaire vers le non-linéaire.

Dans notre cas fond variable, l'apparition soudaine du fond peut également entraîner des instabilités numériques. En effet, avec ce type de zones, on impose une solution à l'instant initial sur tout le domaine. Lorsque la variation du fond

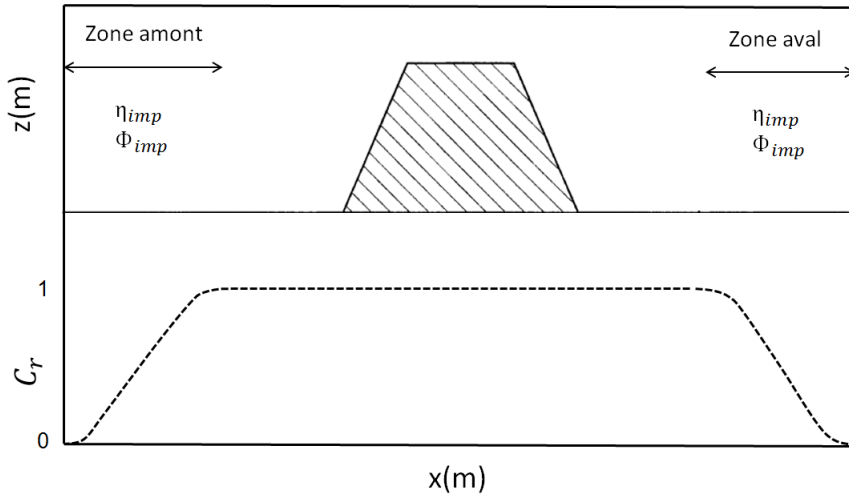


FIGURE III.1.2 – Relaxation simple. Localisation des zones et définition du coefficient de relaxation  $C_r$  (Échelle non respectée).

est importante, il peut donc être intéressant de faire apparaître progressivement le fond afin de limiter ces instabilités numériques. Nous avons donc appliqué le même traitement (méthode de Dommermuth [45]) aux termes non-linéaires des CSL. Cela permet de faire apparaître progressivement en temps les termes non-linéaires, afin d'avoir une variation progressive du fond. Cela revient donc à faire apparaître le fond progressivement. Cette méthode, couplée à des zones utilisant la relaxation vers une solution connue permet donc à la fois une relaxation en temps et en espace de la solution. Cela sera donc utilisé par la suite lorsque l'on utilise ces zones avec une solution imposée linéaire.

#### III.1.1.1.2 Validation 2D : Houle régulière et irrégulière

Afin de valider ces zones, nous avons initialisé le domaine en fond plat avec une houle régulière solution de Rienecker et Fenton [117]. Nous avons simulé une profondeur relative  $kh = 2$  et des cambrures variant entre  $ka = 0.1$  et  $ka = 0.3$ . Des zones de relaxation de 3 longueurs d'onde chacune sont utilisées en amont et en aval. On vérifie alors que la solution reconstruite sur tout le domaine avec  $\eta_{imp}$  et  $\phi_{imp}$  imposés dans les zones amont et aval soit égale à la solution de Rienecker et Fenton sans zones. Pour tous les cas testés, aucun déphasage n'est observé entre les deux solutions, on en déduit donc que ces zones sont efficaces et permettent de reproduire correctement le champ de vagues sans modifier son évolution.

Une validation a également été réalisée avec une houle irrégulière : on initialise cette fois le champ de vagues avec une solution linéaire. La solution imposée en amont et aval est donc également linéaire. Ici nous avons utilisé une houle de période  $T_p = 1.3$  et de hauteur significative  $H_s = 0.025\text{m}$  dans une profondeur d'eau  $h = 0.46\text{m}$ . La cambrure vaut alors  $ka = 0.03$  et la profondeur relative  $kh = 1.27$ . Les zones amont et aval font 3 longueurs d'onde chacune et



la zone d'étude 6 longueurs d'onde. Une relaxation en temps telle que présentée au paragraphe III.1.1.1 est également appliquée.

Afin de comparer le champ de vagues obtenu à la solution sans zones de relaxation, nous avons réalisé une analyse vague par vague en zéro-crossing à l'aide du logiciel Matlab afin d'obtenir la hauteur moyenne crête à creux dans la zone d'étude. Nous avons ainsi pu vérifier que la hauteur significative imposée et reconstruite sont strictement identiques.

### III.1.1.2 Relaxation avec absorption dans les zones amont et aval

L'objectif de ce type de zones de relaxation est de ne pas imposer le champ de vagues sur tout le domaine à l'instant initial, notamment pour éviter les instabilités numériques évoquées au paragraphe III.1.1.1. En effet, avec la méthode de relaxation précédente, la solution de référence est imposée partout, puis le fond apparaît. Le but ici est de regarder d'une manière plus physique l'évolution de la houle lorsqu'elle rencontre un fond variable. Il s'agit donc de générer la houle souhaitée tout en faisant tendre la solution vers zéro dans les zones amont et aval.

Dans ce cas de relaxation où la solution imposée est nulle aux frontières, on impose sur la première zone amont et la zone aval  $\eta_{imp} = 0$  et  $\tilde{\phi}_{imp} = 0$  à l'aide du coefficient de relaxation  $C_{r_1}$ . Ces deux zones servent donc de zones d'absorption. Afin de générer un champ de vagues, il est également nécessaire de définir une zone de génération (zone amont 2) suite à la première zone amont. On y définit alors le coefficient  $C_{r_2}$ . La localisation de ces zones et les différents coefficients de relaxation sont représentés sur la Fig.III.1.3. La solution imposée sur la zone de génération sera comme précédemment la solution connue, par exemple celle de Rienecker et Fenton [117] :  $\eta_{imp} = \eta_{RF}$  et  $\tilde{\phi}_{imp} = \tilde{\phi}_{RF}$ . A l'instant initial, le champ de vagues est tel que présenté sur la Fig.III.1.4.

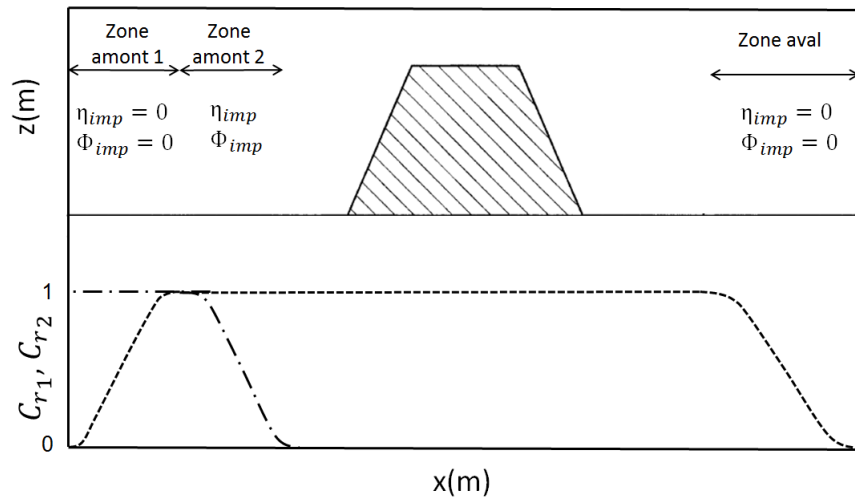


FIGURE III.1.3 – Relaxation avec absorption. Localisation des zones et définition des coefficients de relaxation  $C_{r_1}$  (pointillés) et  $C_{r_2}$  (traits-pointillés). Échelle non respectée.

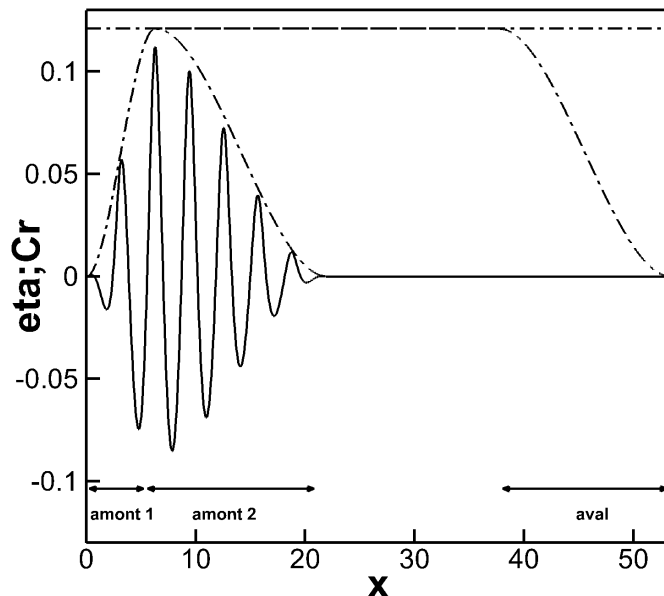


FIGURE III.1.4 – Initialisation avec une zone d’absorption, suivie d’une zone de génération, de la zone d’étude et d’une deuxième zone d’absorption. Traits pleins : élévation de surface libre. Pointillés : différents coefficients de relaxation  $C_r$  (Échelle non respectée).

### III.1.1.2.1 Validation 2D : Houle régulière et irrégulière

Dans ce cas, la solution imposée est zéro dans les zones d’absorption, et la solution de Rienecker et Fenton [117] dans la zone de génération. Une fois la solution propagée sur tout le domaine, nous avons comparé les résultats obtenus avec cette méthode à la solution de Rienecker et Fenton [117] imposée sur tout le domaine sans zones. Nous avons simulé une profondeur relative  $kh = 2$  avec des cambrures variant entre  $ka = 0.1$  et  $ka = 0.3$ . Nous avons pris des zones (amont 1, amont 2 et aval) de 3 longueurs d’onde chacune.

Cette méthode semble valide une fois l’état stationnaire atteint. Néanmoins, comme attendu, elle est instable durant la première partie de propagation. Prenons par exemple un autre cas, celui d’un fond plat ( $h_0 = 400\text{m}$ ) avec une houle régulière de période  $T = 15\text{s}$  et de hauteur  $H = 1\text{m}$  (nous avons alors  $kh = 7.2$  et  $ka = 0.01$ ). Nous définissons alors une première zone d’absorption de 3 longueurs d’onde, une zone de génération de 3 longueurs d’onde et une deuxième zone d’absorption de 3 longueurs d’ondes). Le domaine d’étude représente 16 longueurs d’onde.

Afin de visualiser ce qui se passe dans le domaine d’étude, nous avons tracé sur la Fig. III.1.5, pour un cas modélisé ( $ka = 0.2$  et  $kh = 2$ ) l’amplitude des harmoniques en fonction du temps pour différentes sondes réparties sur le domaine d’étude. On observe que la solution générée devient stable à partir de  $t = 12T$

à  $x = 3\lambda$ , à partir de  $t = 30T$  à  $x = 9\lambda$  et à partir de  $t = 48T$  à la fin du domaine d'étude ( $x = 16\lambda$ ). Ces résultats sont indépendants de la taille de la zone d'étude. On compare ces résultats au temps mis par la houle générée en amont pour se propager sur tout le domaine. Pour cela, il est nécessaire de calculer la vitesse de groupe. Pour  $k_0 h_0 = 7.16$ , la vitesse de groupe vaut  $C_{g_0} = 11.7\text{m/s}$ . Le domaine des zones de relaxation amont représentant  $X_0 = 6\lambda_0$  et le domaine d'étude  $X_1 = 16\lambda_0$ , le temps de propagation pour atteindre la sonde à la sortie du domaine d'étude vaut alors  $t = (X_0 + X_1)/C_{g_0} = 45T$ . Nous voyons donc que les valeurs observées de stabilisation de la solution correspondent au calcul sur la vitesse de groupe. On pourra donc utiliser cette grandeur pour estimer la stabilité de la solution avec ces zones.

De plus, il faut noter que la méthode de relaxation avec absorption induit un petit déphasage lors de la propagation (création d'un courant de retour non physique dans notre cas) qui n'est pas observé avec la première méthode de relaxation.

### III.1.2 Introduction de termes sources

Cette méthode propose de modifier les conditions de surface libre en introduisant des termes sources (qui peuvent être des sources ou bien des puits). Pour cela, on distingue ci-dessous la partie génération de houle de la partie absorption.

#### III.1.2.1 Génération de la houle

La méthode de génération avec introduction d'un terme source a été utilisée par Bonnefoy [25] dans ses travaux de thèse. Elle a connu de récents développements avec les travaux de Liam *et al.* [94] qui ont été repris par Kurnia et van Groesen [89]. Ces derniers introduisent également un terme d'absorption tel que détaillé par van Groesen et van der Kroon [131] (c.f. paragraphe III.1.2.2).

La méthode consiste à introduire un terme source dans les conditions de surface libre au 1er ordre. On différencie le forçage par l'élévation si l'on introduit un terme source  $G_1$  dans la condition cinématique (c.f. Eq.(III.1.3)), et le forçage par le potentiel avec l'introduction de  $G_2$  dans la condition dynamique (Eq.(III.1.4)). Ce terme source est unique si la relation de dispersion est satisfaite et si la source est localisée en un point du domaine (c.f. Liam *et al.* [94]). Une forme générale de la fonction source et des exemples sont disponibles dans Liam *et al.* [94].

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + G_1 \text{ en } z = \eta(x, t) \quad (\text{III.1.3})$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta + G_2 \text{ en } z = \eta(x, t) \quad (\text{III.1.4})$$

Cette introduction de terme source est valable au 1er ordre. Lorsque l'on cherche à simuler des vagues non linéaires, Liam *et al.* [94] introduisent un

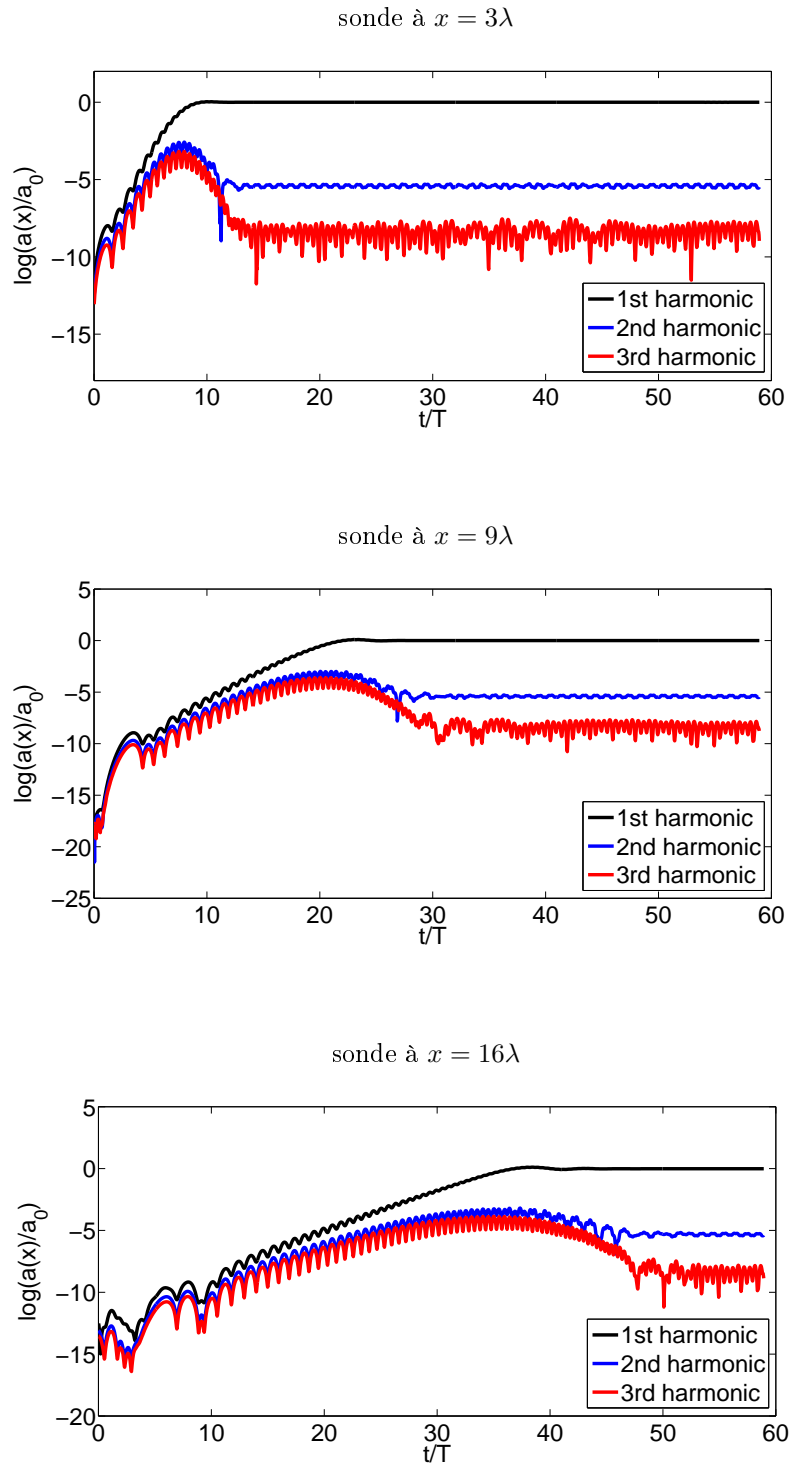


FIGURE III.1.5 – Amplitudes des 3 premières harmoniques à la surface libre (échelle logarithmique) pour 3 sondes placées à  $x = 3\lambda$ ,  $x = 9\lambda$  et  $x = 16\lambda$  le long du domaine d'étude.

schéma d'ajustement similaire à celui de Dommermuth [45] afin d'éviter la génération d'ondes libres non souhaitées. Comme évoqué au paragraphe II.1.6, Dommermuth [45] a en effet montré que des modèles non-linéaires peuvent être initialisés à l'aide d'une solution linéaire si l'on laisse suffisamment de temps au modèle pour traiter la transition linéaire/non-linéaire. Pour cela, les termes non-linéaires, notés  $F$ , sont multipliés par une fonction régulière qui prend ses valeurs de 0 à 1 dans un intervalle de temps  $T_a$  (temps de relaxation), ce qui conduit à l'ajustement suivant :

$$\tilde{F} = [1 - \exp(-(t/T_a)^n)] F \quad (\text{III.1.5})$$

avec  $n$  une puissance positive.

Si  $W_{lin}$  et  $-g\eta$  représentent les termes linéaires des équations de surface libre, celles-ci sont réécrites en introduisant les termes non-linéaires  $N1$  et  $N2$  :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + G_1 + N_1 \text{ en } z = \eta(x, t) \quad (\text{III.1.6})$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta + G_2 + N_2 \text{ en } z = \eta(x, t) \quad (\text{III.1.7})$$

Les CSL deviennent alors :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + G_1 + \chi N_1 \text{ en } z = \eta(x, t) \quad (\text{III.1.8})$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta + G_2 + \chi N_2 \text{ en } z = \eta(x, t) \quad (\text{III.1.9})$$

avec  $\chi(x, L_a)$  qui prend ses valeurs de 0 à 1 dans une zone de longueur  $L_a$ . La fonction  $\chi$  sera de la même forme que le polynôme  $\nu$  introduit au paragraphe III.1.2.2.2. Une étude a été menée par Liam *et al.* [94] pour identifier la longueur minimale de  $L_a$  suivant les valeurs de la cambrure  $ka$  et de  $a/h$ .

Dans van Groesen et van der Kroon [131], le signal imposé désiré de l'élévation de surface libre  $s(t)$  est multiplié par la fonction  $\gamma(x)$  qui est la transformée de Fourier de la vitesse de groupe  $V_g$  centrée au point imposé. La fonction  $\gamma$  a la dimension suivante avec la profondeur  $h$  :  $\gamma(x, h) = \gamma(x/h, 1)/\sqrt{h}$ . Le signal  $s(t)$  est défini dans van Groesen *et al.* [130] pour reproduire un groupe de vagues bichromatique par :  $s(t) = aR(t) [\cos(w_-t) + \cos(w_+t)]$ .

Dans sa thèse, Bonnefoy [25] introduit un patch de pression mobile dans la condition dynamique (qui équivaut donc à  $G_2$ ) représenté par :

$$p(x, y, t) = r(t)P_0P(x - Ut, y - Vt) \quad (\text{III.1.10})$$

La fonction  $r(t)$  est une rampe qui assure la mise en place progressive de la charge mobile.  $P_0$  représente la pression finale à imposer et  $P$  est la forme spatiale du patch. Il se déplace à la vitesse  $(U, V)$  sur la surface libre. Une charge

ponctuelle située en  $(x_0, y_0)$  est définie par  $P(x, y) = \delta(x - x_0, y - y_0)$ . Une charge rectangulaire peut également être appliquée en multipliant la charge ponctuelle par une fonction adéquate. Ici, Bonnefoy [25] choisit de ne pas modifier la condition cinématique de surface libre car l'ajout d'un terme dans cette condition génère une perte de volume fluide.

Les auteurs cités précédemment ont, à l'aide de cette méthode, généré des houles irrégulières en 2D (Kurnia et van Groesen [89], van Groesen et van der Kroon [131]) en fond profond, des cas de propagation de houle longue 2D au-dessus d'une marche (c.f. Kurnia et van Groesen [89]), ou bien de l'interaction de houle oblique tridimensionnelle (Liam *et al.* [94]). Des simulations de houle irrégulière 3D ont été présentées par [25] dans le cas d'un bassin océanique.

Nous n'avons pas mis en œuvre cette méthode au cours de la thèse, notamment car elle nécessite de bien calibrer le terme source imposé, ce qui peut parfois être fastidieux. La méthode de relaxation est plus simple à mettre en œuvre. De plus, lorsque des vagues sont générées dans la direction opposée à la direction de propagation (comme dans Liam *et al.* [94]), les vagues générées dans le sens inverse à la direction de propagation ne seront pas absorbées. Nous avons donc préféré utiliser la méthode de relaxation pour générer de la houle, comme présentée au chapitre III.1.1.

### III.1.2.2 Absorption de la houle

Une fois la houle générée et propagée dans le domaine fluide, il est nécessaire de l'absorber aux frontières du domaine afin de respecter la périodicité de la surface libre.

#### III.1.2.2.1 Modélisation de la plage absorbante

L'absorption de la houle peut être modélisée par un terme supplémentaire de pression dans la condition dynamique de surface libre, comme dans le cas de la génération. On peut interpréter ce terme de pression comme une modification locale de la pression d'air : on l'appellera alors patch de pression (c.f. Eq.(III.1.11)). Ce terme doit permettre l'atténuation de la cinématique tout en conservant le volume total de fluide. Si ce terme est appliqué dans la condition cinématique, le volume fluide est alors modifié. Cette méthode avait été utilisée par Bonnefoy [25] dans sa thèse dans le cas de l'absorption de houle en bassin numérique.

Le patch était alors défini par :

$$p_a = \rho\nu(x)\tilde{\nabla}\phi.n \tag{III.1.11}$$

avec  $n$  un vecteur normal extérieur, et  $a$  l'indice désignant l'absorption. Ce patch de pression permet d'assurer une décroissance de l'énergie dans la zone d'absorption où  $\nu(x) > 0$  (en dehors de la zone d'absorption,  $\nu(x) = 0$ ) car la puissance des forces de pression est alors négative, comme démontré dans Bonnefoy [25].

La condition dynamique de surface libre en 2D s'écrit alors :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - \nu(x) \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \eta \nabla \phi \right) \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{III.1.12})$$

De nombreuses autres méthodes d'absorption sont répertoriées dans la littérature. Clamond *et al.* [36] introduisent par exemple une forme différente de patch de pression. Une autre méthode a été récemment introduite par van Groesen et van der Kroon [131]. Cette fois, un terme est ajouté dans la condition cinématique de surface libre. Cette dernière est alors réécrite ainsi :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left( 1 + |\nabla \eta|^2 \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla \eta - \alpha \eta \chi_{damp} \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (\text{III.1.13})$$

avec  $\alpha > 0$ .  $\chi_{damp}$  est non-nul seulement dans la zone d'absorption. Le terme  $-\alpha \eta \chi_{damp}$  atténue donc la houle dans la zone d'absorption, et ce de manière exponentielle avec un facteur  $\exp(-\alpha l/c)$ , où  $l$  représente la longueur de la zone d'absorption, et  $c$  la vitesse caractéristique des vagues. Selon van Groesen et van der Kroon [131], le meilleur choix pour  $c$  est d'utiliser la vitesse des vagues de plus grandes longueurs d'ondes (à la plus grande profondeur).  $\alpha$  et  $l$  sont choisis tels que l'atténuation des vagues soit de l'ordre de  $10^{-2}$  ou moins. Kur-nia et van Groesen [89] utilisent comme valeurs pour leurs simulations  $\alpha = 1$  et  $l = 7$ .

Néanmoins, nous avons mentionné précédemment que l'ajout d'un terme puits dans la condition cinématique de surface libre génère une perte de volume fluide (c.f. Bonnefoy [25]). Il apparaît plus intéressant de réaliser l'absorption grâce à la condition dynamique de surface libre, car le volume est alors conservé.

### III.1.2.2.2 Géométrie de la zone absorbante

La forme et la taille de la plage absorbante  $\nu(x)$  ont bien entendu de l'importance. La fonction qui la définit doit vérifier certaines propriétés : elle doit être la plus régulière possible, notamment à la jonction entre la zone avec absorption et la zone sans absorption. Si l'on utilise des fonctions polynomiales, on impose une tangente nulle à la jonction. En pratique on utilise des polynômes d'ordre 3 (tangentes nulles aux deux extrémités) ou bien une fonction tangente hyperbolique (tangente nulle à la jonction). Comme l'on souhaite absorber toute l'information (ondes courtes et ondes longues), il est nécessaire d'avoir une zone suffisamment longue pour absorber les modes longs.

Les fonctions de forme ont été définies dans Bonnefoy [25] par deux paramètres indépendants : le premier équivaut à la longueur de la plage, l'autre à l'intensité de l'absorption  $\alpha$ . On peut par exemple définir une fonction  $\nu(x)$  proportionnelle à  $\alpha$  et de forme hyperbolique ou cubique par rapport à la longueur de la plage. Ces fonctions de forme peuvent être choisies de la même façon que les coefficients  $C_r$  définis au paragraphe III.1.1.

### III.1.2.2.3 Comparaison à la méthode de relaxation

Nous avons ensuite comparé la méthode de relaxation avec absorption utilisée au paragraphe III.1.1.2.1 à la méthode d'absorption avec une plage absor-

bante. Cette comparaison a été réalisée uniquement à la sortie du domaine. La génération s'effectue à l'aide d'une zone de relaxation avec absorption en amont dans la première zone amont et égale à la solution de Rienecker et Fenton [117] dans la zone de génération. On ne compare donc ainsi que la partie aval.

L'absorption réalisée avec la méthode de relaxation est identique à celle réalisée au paragraphe III.1.1.2.1. Nous avons donc introduit une plage absorbante telle que définie au paragraphe III.1.2.2. La fonction  $\nu(x)$  était alors définie par :

$$\nu(x) = \alpha u^2(3 - 2u) \quad \text{si } x \geq x_0 \quad (\text{III.1.14})$$

avec  $u = \frac{x-x_0}{L_x-x_0}$ .  $L_x$  représente la taille du domaine selon la direction  $x$  et  $x_0$  représente le début de la zone d'absorption. Le coefficient  $\alpha$  a été calibré à 1 pour ce cas.

Les deux méthodes conduisent aux mêmes résultats qui ont été présentés sur la Fig.III.1.5 pour le cas de la relaxation. Néanmoins, la plage absorbante nécessitant plus de calage empirique, nous utiliserons par la suite la relaxation.

### III.1.3 Périodicité du fond

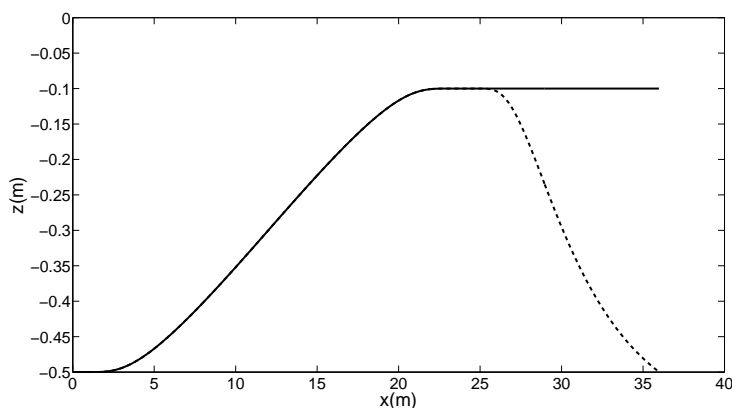


FIGURE III.1.6 – Modification de la bathymétrie. Trait plein : bathymétrie initiale - trait pointillé : exemple de bathymétrie modifiée.

Nous avons vu en introduction de cette partie que l'emploi de FFTs nécessite l'utilisation d'une géométrie périodique. Concrètement, pour les fonds bidimensionnels, cela signifie que les profondeurs en entrée et en sortie de domaine (dans la direction de propagation) doivent être identiques. Cela nous impose donc de modifier la bathymétrie pour que les profondeurs d'entrée et de sortie correspondent. Un exemple est donné sur la Fig.III.1.6. Les pointillés représentent la bathymétrie modifiée. Le lecteur remarquera que la bathymétrie en sortie est ramenée à la profondeur d'entrée de manière progressive afin de ne pas perturber la solution en créant des instabilités numériques. Concrètement, cela est réalisé grâce à un polynôme d'ordre 3. La pente de ce polynôme doit être nulle aux jonctions. Concrètement, cette modification artificielle de profondeur a lieu dans les zones de relaxation afin de ne pas perturber la solution.





## Chapitre III.2

# Spécificités des cas tridimensionnels

### III.2.1 Périodicité du fond

En trois dimensions, les conditions de périodicité du fond doivent également être respectées dans la direction transverse. On rend alors le domaine périodique, de la même façon que dans la direction de propagation : à  $x$  donné, les profondeurs en  $y = 0$  et  $y = L_y$  doivent être identiques. Un exemple est donné sur le cas des canyons de Scripps/La Jolla en Californie qui sera étudié au chapitre V.3 et dont la bathymétrie initiale est présentée sur la Fig.III.2.1. La bathymétrie modifiée afin de rendre le fond périodique selon la direction de propagation et la direction transverse est présentée sur la Fig.III.2.2.

Pratiquement, lorsque l'on cherche à modéliser la propagation de houle sur un fond variable, il est nécessaire de l'interpoler sur une grille cartésienne  $(n_1, n_2)$ , où  $(n_1, n_2)$  représentent la discrétisation dans le plan horizontal. Ainsi, si l'on connaît une bathymétrie définie en format  $(lat, lon, z)$  (latitude, longitude et profondeur), on pourra alors la transformer en coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  grâce au package `m_map` du logiciel Matlab. Ensuite, au sein de notre code HOS, le fichier de coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  est lu puis interpolé sur une grille  $(n_1, n_2/2)$  points. Afin d'utiliser les conditions de symétrie expliquées plus haut, on réalise alors une symétrie par rapport à l'axe  $L_y/2$ . Un exemple est donné au chapitre V.3.

Les conditions de périodicité sur la bathymétrie étant dorénavant respectées, il est maintenant nécessaire de s'assurer que la résolution à la surface libre est correcte. C'est ce que nous allons voir dans les prochains paragraphes.

### III.2.2 Résolution à la surface libre

On souhaite étudier sur un cas simplifié l'influence sur la résolution d'une telle modification du fond dans la direction transverse. En effet, pour les cas 2D, les zones de relaxation permettaient de cacher la bathymétrie modifiée. Pour les

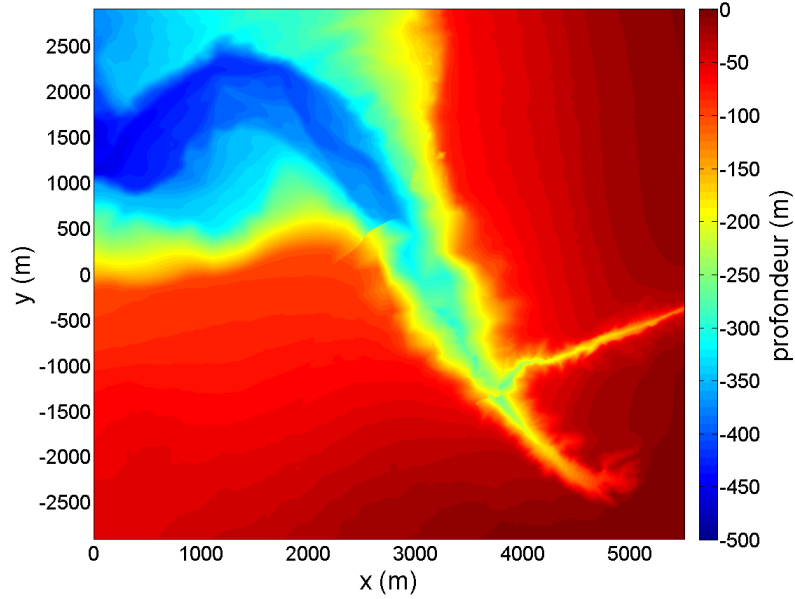


FIGURE III.2.1 – Topographie des canyons sous-marins de Scripps et de la Jolla - coordonnées cartésiennes.

cas 3D, nous avons donc besoin de regarder concrètement ce qui se passe avec cette modification du fond.

Pour cela, on étudie un cas de shoaling tridimensionnel avec une bathymétrie telle que définie par l'Eq.(III.2.1) et présentée sur la Fig.III.2.3. La profondeur  $h_0$  est dans ce cas imposée sur toutes les frontières du domaine.

$$\beta(x) = \frac{h_0 - h_1}{2} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sin(\pi x/L)}{1 - (2x/L)^2} \right) \right], \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (\text{III.2.1})$$

avec  $h_0 = 400\text{m}$  et  $h_1 = 50\text{m}$ .

Avec la bathymétrie ainsi définie, nous avons étudié ce qui se passe au niveau de la résolution à la surface libre. Pour cela, nous avons imposé des zones de relaxation simple dans la direction de propagation uniquement (une zone amont de 3 longueurs d'onde et une zone aval de 3 longueurs d'onde également). La solution imposée est une houle régulière d'amplitude  $a = 0.5\text{m}$  et de longueur d'onde  $\lambda_0 = 350\text{m}$ . La Fig.III.2.4 représente un instantané de l'élévation de surface libre après 20 périodes de propagation. On observe que la houle est réfractée et tourne, de part la définition de la bathymétrie. La zone utile est donc fortement réduite et est de plus détériorée au cours du temps.

Le fait de rendre la bathymétrie périodique dans le plan horizontal et d'utiliser des zones de relaxation dans la direction de propagation n'est donc pas suffisant pour avoir une résolution correcte à la surface libre. Seule une zone restreinte est correctement résolue pendant les premières périodes de propaga-

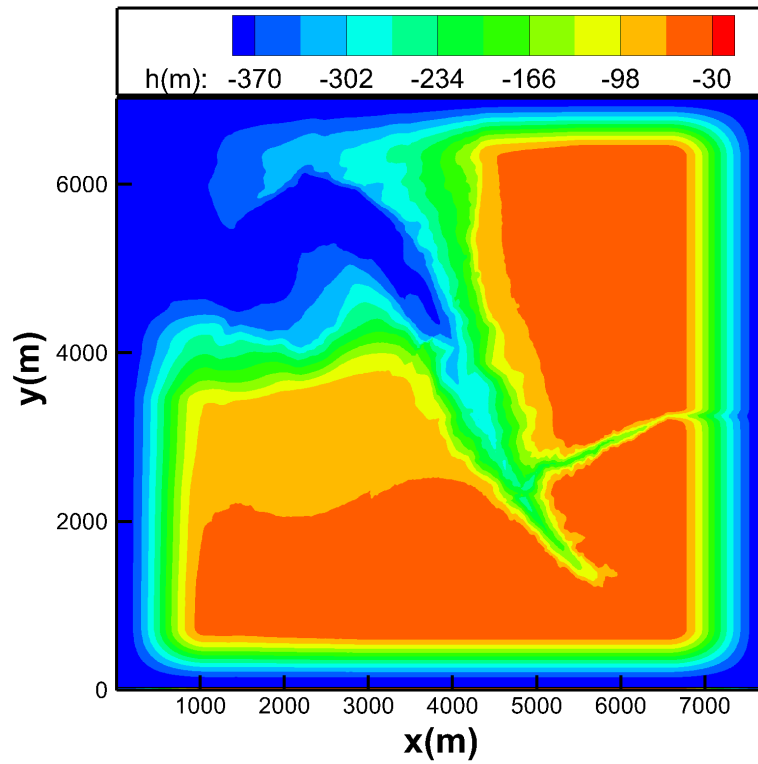


FIGURE III.2.2 – Bathymétrie modifiée - canyons sous-marins de Scripps et de la Jolla.

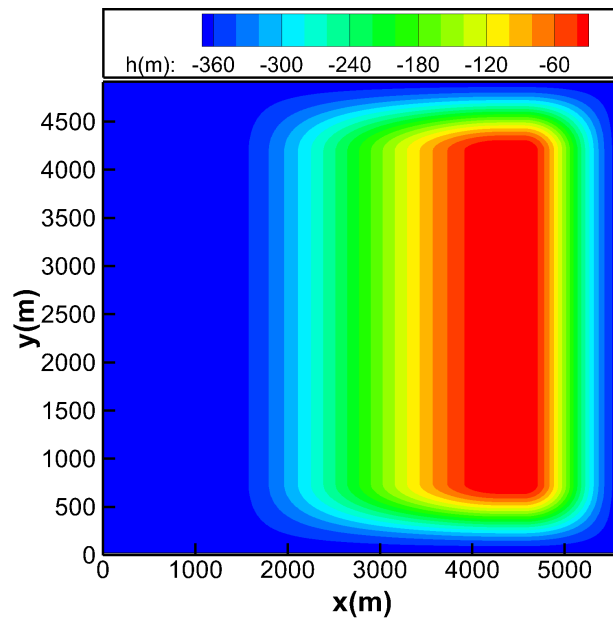


FIGURE III.2.3 – Cas de shoaling 3D périodisé - définition du fond.

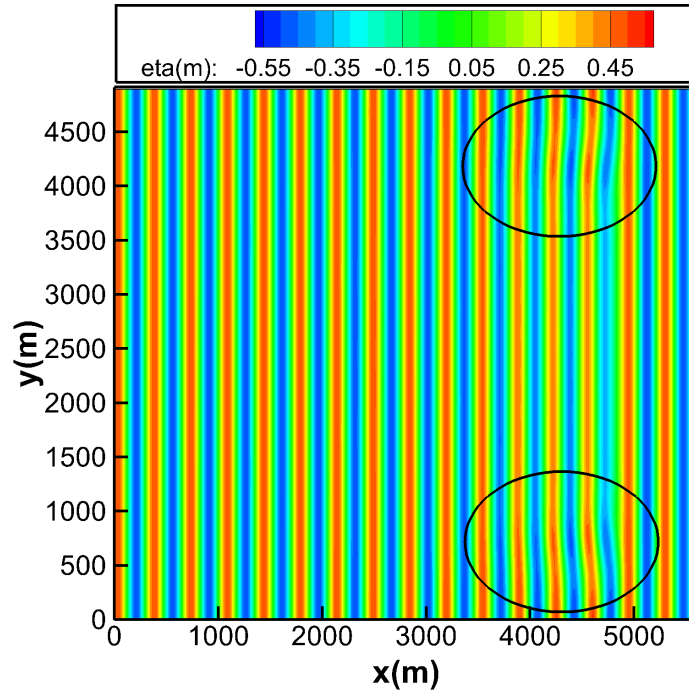


FIGURE III.2.4 – Cas de shoaling 3D périodisé - élévation de surface libre.

tion, jusqu'à détérioration de la solution. Une méthode supplémentaire est donc nécessaire.

### III.2.2.1 Relaxation dans la direction transverse

Pour des cas tri-dimensionnels, nous avons donc étudié la possibilité d'utiliser la relaxation dans la direction transverse. Nous pourrions être tentés de faire tendre la solution vers une solution connue dans cette direction. Néanmoins, cette méthode ne semble pas pertinente car la solution analytique à imposer n'est pas connue du tout. En effet, divers effets se produisent durant la propagation selon  $x$ . Nous avons donc utilisé des zones de relaxation de 2 longueurs d'onde chacune faisant tendre la solution vers zéro dans la direction transverse. Ces zones permettent donc d'absorber la houle, mais aucune génération de vagues n'est réalisée selon cette direction.

Dans la direction de propagation, nous initialisons le domaine avec une houle régulière de période  $T = 15$ s et de hauteur  $H = 1$ m. Le fond est plat et constant. Selon  $x$  nous avons les paramètres des zones suivants : une première zone de génération de 3 longueurs d'onde, une zone d'étude de 10 longueurs d'onde et une zone d'absorption de 3 longueurs d'onde. On utilise donc la relaxation vers une solution imposée non-nulle. Le domaine utilisé est présenté sur la Fig.III.2.5. Des coefficients de relaxation sont utilisés pour assurer un passage progressif de la solution calculée dans le domaine à la solution zéro (selon la direction transverse) et vers la solution imposée (dans la direction de propagation).

Nous savons que lorsque l'on propage une houle unidirectionnelle régulière dans la direction de propagation  $x$ , et que la solution imposée est nulle sur les

côtés, le phénomène de diffraction apparaît. Ici, nous avons le même phénomène avec des coefficients de relaxation permettant de relier la solution imposée à la solution calculée. Sans zones de relaxation avec absorption selon  $y$ , la houle serait naturellement diffractée dans ces zones. Avec l'absorption selon  $y$ , une partie de l'énergie est absorbée et n'est donc pas conservée, comme nous pouvons l'observer sur la Fig.III.2.6 qui représente l'élévation de surface libre dans la plan horizontal après 20 périodes de propagation. Les pointillés délimitent le domaine sans zones de relaxation. Nous observons sur cette figure que la zone utile où la houle est correctement reproduite est très restreinte.

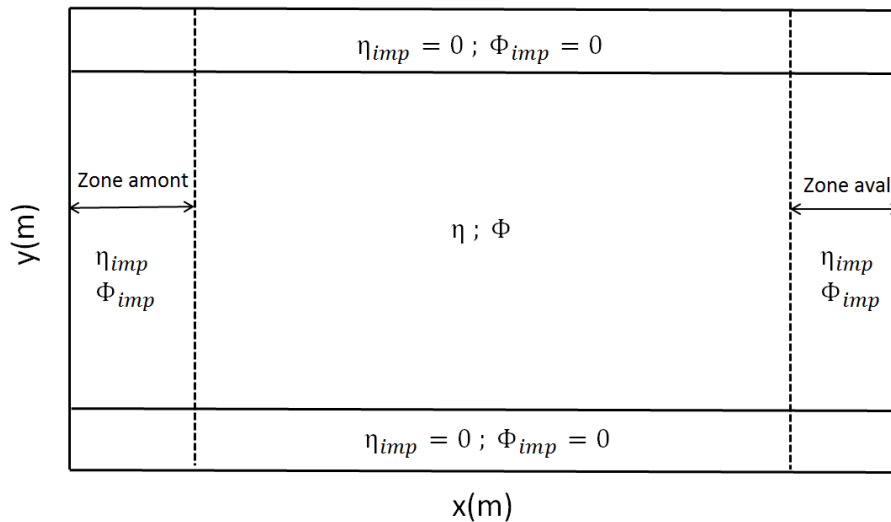


FIGURE III.2.5 – Initialisation avec solution imposée nulle selon la direction transverse.

Afin de mieux quantifier cette notion de zone utile, nous avons comparé cette solution avec absorption selon la direction transverse à la solution sans zones (bien reconstruite vu qu'aucune réflexion ne doit être observée dans ce cas).

Pour cela, la Fig.III.2.7 montre une carte de la surface du domaine de calcul total, où les différents niveaux de contours montrent l'amplitude du fondamental normalisée par l'amplitude cible, et calculée par une transformée de Fourier discrète en chaque point du maillage de la surface libre pour 20 périodes de houle en régime établi. La houle se propage dans ce cas selon la direction  $x$ . En haut (a) se trouve la carte d'amplitude de référence pour le cas sans zone d'absorption dans la direction transverse, et en bas (b) la carte d'amplitude avec utilisation des zones selon  $y$ . Les traits noirs représentent la limite des zones de relaxation et délimitent donc la zone d'étude. On observe clairement que la zone utile se réduit à un trapèze à la sortie de la zone de génération. Nous voyons donc bien que l'utilisation de zones de relaxation selon la direction transverse réduit très fortement la zone d'étude.

Une solution à ce problème pourrait être d'augmenter la taille de la direction transverse pour que la zone utile soit suffisante. Néanmoins, cela impose un grand domaine d'étude et des simulations sur un temps relativement court. En

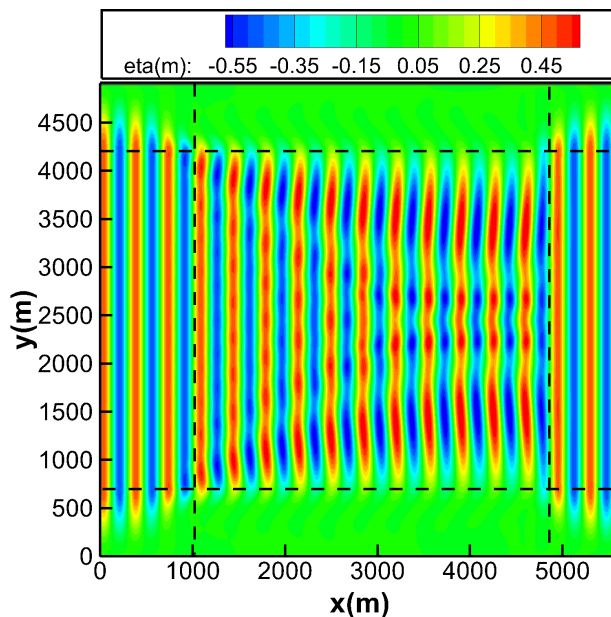


FIGURE III.2.6 – Observation du phénomène de diffraction avec absorption dans la direction transverse. Les pointillés délimitent la zone d'étude.

effet, pour des bathymétries complexes générant beaucoup de réflexions, la zone utile sera réduite au cours du temps, cette méthode ne paraît donc pas adaptée. Il s'avère donc nécessaire d'utiliser une autre méthode.

### III.2.2.2 Méthode employée dans le modèle HOS bassin

Dans le modèle HOS bassin<sup>1</sup> développé au LHHEA (c.f. Ducrozet *et al.* [48]), la houle est générée en modélisant un batteur physique auquel est ajouté une rampe en temps. Une loi de commande permet de reproduire la houle souhaitée. Les lois de commande du batteur sont programmées de manière à définir simplement des états de mer complexes. Une théorie complètement non linéaire de la génération n'existant pas encore, le contrôle du générateur de houle est basé sur des modèles simples linéarisés, second ordre ou troisième ordre (ce qui est fait actuellement dans le modèle HOS bassin). La zone absorbante dans la direction de propagation est modélisée comme décrit précédemment dans le paragraphe III.1.2.2. Une réflexion peut apparaître sur cette plage (le lecteur pourra se référer à Bonnefoy [25] pour plus de détails concernant la génération et l'absorption en bassin).

La génération de houle oblique dans le bassin océanique génère inévitablement de la réflexion sur les murs latéraux. Les ondes réfléchies vont perturber le champ de vague dans le bassin et réduire la dimension de la zone utile où la houle est proche de la consigne. Il est possible de tenir compte de ces réflexions en choisissant une loi de commande adaptée, et d'augmenter ainsi la taille de la

1. <https://github.com/LHHEA/HOS-NWT>

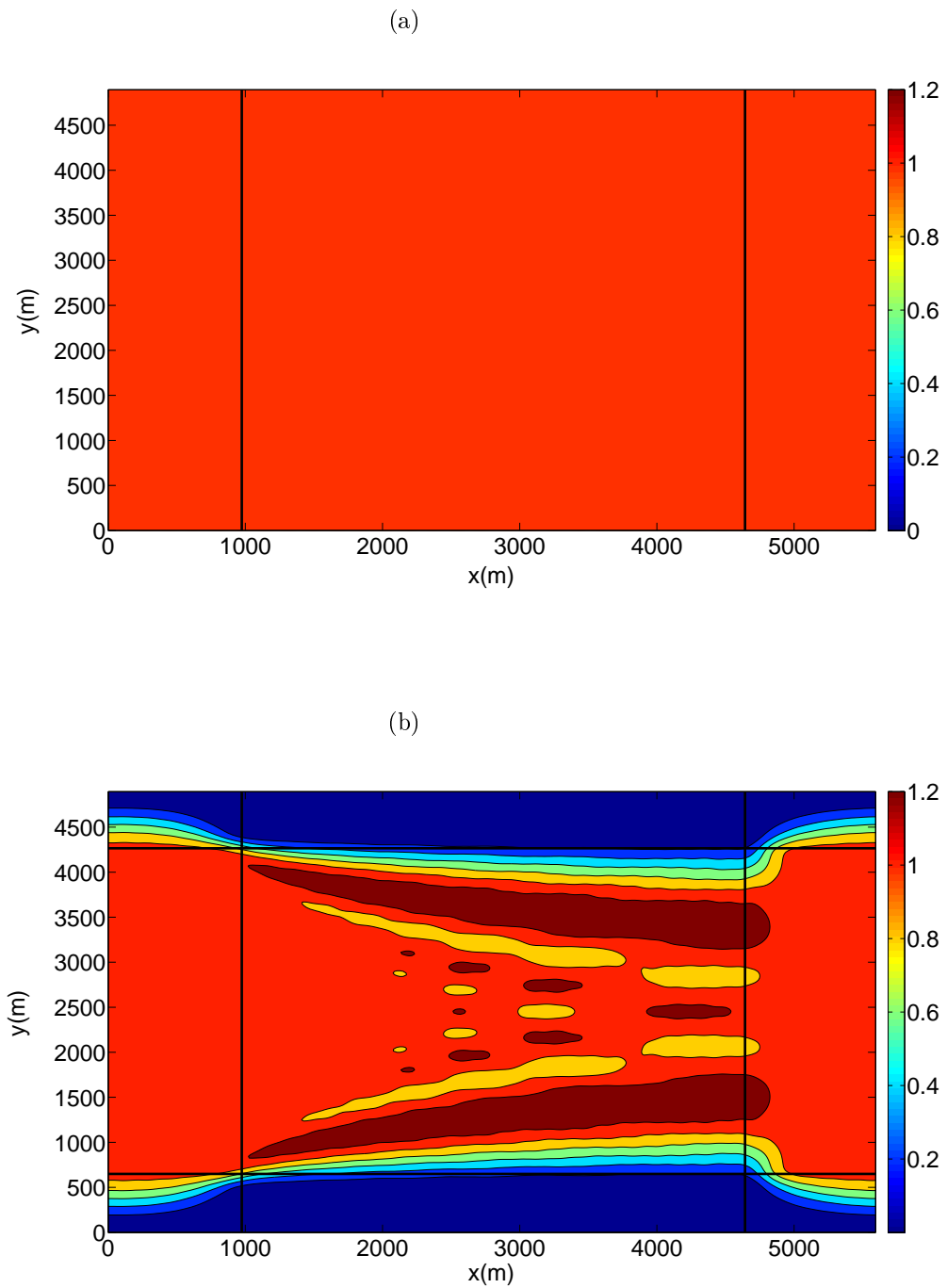


FIGURE III.2.7 – Caractérisation de la zone utile.  
(a) Cas de référence.  
(b) Utilisation des zones de relaxation dans la direction transverse.



zone utile. Ce type de méthode est nécessaire pour obtenir un champ de vague correct en houle oblique, dans une zone utile entourant la zone des mesures, et exploiter ainsi pleinement les capacités du batteur. Plusieurs lois de commande optimisées existent dans la littérature, et la méthode de Dalrymple [41] est une des plus simples à mettre en œuvre, comme expliqué dans Bonnefoy [25]. Cette méthode propose une loi de commande de batteur qui prend en compte les réflexions sur les parois latérales du bassin pour optimiser la zone utile.

On pourrait donc utiliser cette méthode afin d'imposer des conditions de réflexion dans la direction transverse. Néanmoins, l'utilisation des zones de relaxation dans la direction de propagation pour la génération rend l'application de la méthode de Dalrymple [41] plus complexe et n'a donc pas été retenue. Il est donc nécessaire de définir une autre stratégie pour la direction transverse. C'est ce que nous allons voir dans le prochain paragraphe.

### III.2.2.3 Conditions de réflexion dans la direction transverse

Nous avons vu précédemment qu'en océan ouvert, il est nécessaire de trouver une stratégie dans la direction transverse afin de reproduire des conditions de réflexion. L'idée retenue est d'imposer le fond de manière symétrique par rapport à  $L_y/2$  tout en gardant une décomposition du signal sur une série d'exponentielles utilisées pour simuler un océan ouvert. Pour cela, on multiplie par deux la taille du domaine en  $y$  tout en imposant un fond symétrique par rapport à  $L_y/2$ , tel que présenté sur la Fig.III.2.8. On prend alors un nombre de points deux fois plus grand dans cette direction. Ce principe sera utilisé au chapitre V.2 afin de reproduire artificiellement de la réflexion dans un bassin d'essai et également sur un cas de bathymétrie réelle en océan ouvert.

Pour modéliser un océan ouvert avec cette méthode, nous aurons tout de même besoin d'étendre le domaine dans la direction transverse pour éviter la perturbation des ondes réfléchies sur les murs latéraux, comme nous le verrons ci-dessous et au paragraphe V.3.

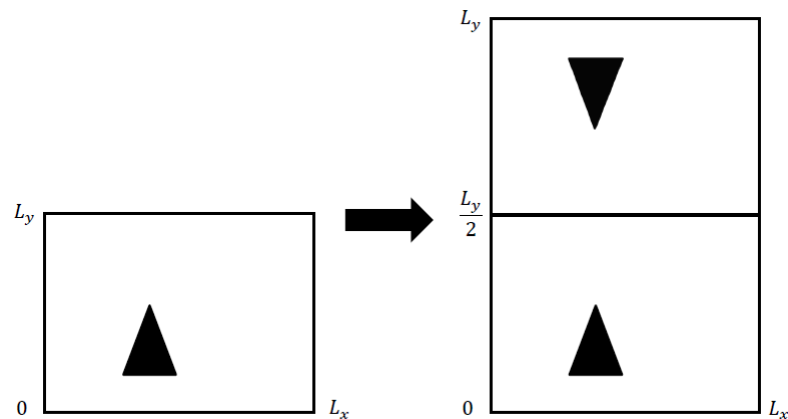


FIGURE III.2.8 – Conditions de symétrie dans la direction transverse.

Donnons un exemple concret de ce cas de symétrisation. Nous utilisons pour cela le cas des canyons de Scripps et de La Jolla introduits au paragraphe III.2.1. Dans la direction  $y$ , nous avons interpolé le domaine présenté sur la Fig.III.2.1 sur une grille  $(\frac{n_x}{2} + 1, n_y)$ . Nous avons ensuite symétrisé ce domaine par rapport à  $\frac{n_x}{2} + 1$  comme présenté sur la Fig.III.2.9. Nous avons ensuite imposé la profondeur  $h = 370\text{m}$  sur toutes les frontières du domaine.

Dans ce cas, il peut se produire de la réflexion en  $y = 0$  et  $y = L_y/2$  qui ne serait pas du tout physique, mais plus caractéristique de ce qui se passe dans un bassin. Afin de limiter cette réflexion numérique, nous définissons alors des zones selon  $y$  de façon à étendre la bathymétrie dans cette direction des iso-contours. Nous avons imposé une zone ainsi étendue de 5 longueurs d'onde en  $y = 0\text{m}$ , et une zone de 5 longueurs d'onde au milieu du domaine en  $L_y/2$ . Nous avons alors autour de  $L_y/2$  une zone de 10 longueurs d'onde où la profondeur est constante à  $x$  fixé. De même en  $y = 0\text{m}$  et en  $y = L_y$ . Le domaine d'étude réel est alors entouré en pointillés. Le lecteur notera que le domaine d'étude représente alors une petite partie du domaine complet (environ 25%). Néanmoins ce cas sera parmi les plus extrêmes simulés, comme nous le verrons au chapitre V.3. Le domaine d'étude représentera dans la plupart des cas un plus grand pourcentage du domaine de simulation total.

De plus, il faut noter que cette méthode a été développée à la fin de la thèse, et n'est pas optimale. En effet, il serait intéressant de regarder par la suite la décomposition du signal sur une série de cosinus, comme ce qui est fait en bassin pour reproduire de la réflexion. Cela permettrait d'éviter une multiplication du domaine par deux, et donc un gain certain en temps de calcul.

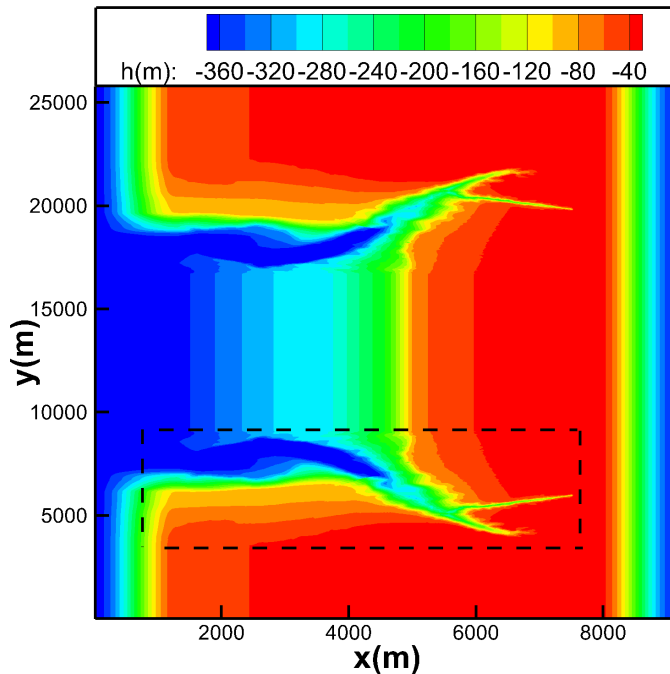


FIGURE III.2.9 – Domaine de calcul - en pointillés : zone d'intérêt.



## Chapitre III.3

# Solutions retenues

Cette partie mise en œuvre a donc permis de présenter des méthodes permettant de conserver la périodicité à la fois de la surface libre et de la bathymétrie, tout en générant le champ de vagues désiré.

Afin de traiter des cas bidimensionnels avec le modèle HOS fond variable, il sera tout d'abord nécessaire de modifier la bathymétrie afin que les profondeurs d'entrée et de sortie soient identiques selon la direction de propagation  $x$ . Ensuite, des zones de relaxation seront utilisées. Nous avons préféré cette méthode à celle d'introduction de termes sources par sa facilité de mise en œuvre. Dans le paragraphe V.2.3 de ce manuscrit, nous comparerons les deux méthodes de relaxation introduites (simple ou avec absorption) sur un cas précis.

Pour les cas tridimensionnels, le fond doit également présenter des profondeurs identiques aux frontières (selon les directions de propagation  $x$  et transverse  $y$ ). Nous emploierons également des zones de relaxation dans la direction de propagation. Néanmoins, cela n'est pas suffisant. La bathymétrie devra aussi présenter un axe de symétrie selon  $L_y/2$ . Cela devrait nous permettre de traiter tout type de bathymétrie, même très complexe, en reproduisant des conditions de réflexion selon la direction  $y$ .

Nous rappelons que la méthode HOS suppose qu'il n'y a pas de déferlement et que la profondeur relative minimum est limitée par ce critère. À l'aide des solutions présentées dans cette partie *Mise en œuvre*, nous allons maintenant pouvoir valider les méthodes HOS fond variable introduites précédemment.



Quatrième partie

Validations



L'objectif de cette partie est de valider les méthodes permettant de prendre en compte un fond variable développées au chapitre II.2. Le lecteur pourra se référer au paragraphe II.2.6 pour la synthèse de la résolution du problème en fond variable. Les trois méthodes présentées (exacte, itérative originelle et itérative améliorée) seront étudiées.

On rappelle la condition sur le fond :  $\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$  en  $z = -h_0 + \beta(x)$ .

Les trois méthodes étudiées sont les suivantes :

- méthode exacte :

Cette méthode utilise la condition sur le fond de manière exacte, dans le sens où aucune approximation en séries de perturbation n'est réalisée dans la condition sur le fond. Elle nécessite l'inversion d'un système linéaire.

Les amplitudes modales dues au fond variable dépendent de la position  $x$ .

- méthode itérative originelle :

Afin de pouvoir écrire les développements en séries de Taylor de la condition au fond au paragraphe II.2.3.2, on suppose  $\frac{\beta}{h_0} \ll 1$  et  $O\left(\frac{\beta}{h_0}\right) \equiv O\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) \equiv O(k\eta)$ .

Les amplitudes modales dues au fond variable sont indépendantes de la position  $x$ . Les ordres de non-linéarité sur la surface libre et sur le fond sont identiques.

- méthode itérative améliorée :

La seule différence avec la méthode précédente est que l'on peut avoir des ordres de non-linéarité différents sur la surface libre et sur le fond.

Afin de caractériser ces méthodes, nous allons tout d'abord examiner l'erreur faite sur la vitesse verticale lorsque l'on propage une houle bidimensionnelle sur un fond plat avec une variation de fond constante. Nous verrons l'influence des différents paramètres : cambrure  $ka$ , profondeur relative  $kh$ , et variation du fond  $\frac{\beta}{h_0}$ . En effet, nous avons fait l'hypothèse dans les paragraphes II.2.3.2 et II.2.3.3, que  $\frac{\beta}{h_0} \ll 1$  et  $O\left(\frac{\beta}{h_0}\right) \equiv O\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)$ . Il faut donc théoriquement que la variation du fond et les gradients du fond ne soient pas trop importants (idéalement très inférieurs à 1). Nous verrons dans cette partie, grâce à un cas test simplifié, les limites d'applicabilité de la méthode en termes de variations du fond. Le paragraphe V.3 de la partie suivante nous montrera un exemple de valeurs de gradients du fond pouvant être modélisées. Nous regarderons également l'influence sur le temps de calcul.

Puis nous présenterons deux cas tests de validation classiques couramment utilisés pour caractériser les méthodes de propagation de houle : un cas de réflexion de Bragg, et un cas de shoaling d'une houle linéaire.





## Chapitre IV.1

# Applicabilité, limitations et propriétés numériques

L'objectif est de déterminer les domaines d'application des méthodes présentées ci-dessus. Pour cela, un cas test de validation a été choisi : la simple propagation d'une houle régulière non-linéaire sur un fond plat de profondeur  $h$ . Nous allons considérer le cas où l'on décompose  $-h = -h_0 + \beta$  avec  $h_0$  qui représente une profondeur moyenne arbitraire et  $\beta$  qui représente la différence entre la profondeur réelle du domaine et la profondeur arbitraire. De manière générale,  $\beta$  est la variation du fond par rapport à  $h_0$ , avec  $\beta$  constant dans ce cas, comme représenté sur la figure IV.1.1.

L'initialisation non-linéaire est réalisée par la méthode de la fonction de courant de Rienecker et Fenton [117] construite pour une profondeur  $h$ . On impose donc  $\eta$  et  $\tilde{\phi}$  solution de Rienecker et Fenton [117] dans un domaine périodique d'une longueur d'onde, sans relaxation. La complexité de ce cas test vient de la définition du potentiel  $\phi_{h_0}$  à la profondeur moyenne  $h_0$ , différente de  $h$ . Le potentiel dû à la différence de profondeur  $\phi_\beta$  doit alors prendre en compte cette différence de profondeur, le potentiel total  $\phi_{tot}$  étant solution du problème à la profondeur totale  $h$ . Cette variation de profondeur est introduite artificiellement, et est supposée constante pour cette étude.

Ce cas test de validation permet de caractériser les trois approches en termes de précision et de temps de calcul et les résultats seront comparés au modèle HOS initial qui a été validé pour un tel cas test avec  $\beta = 0$  (c.f. Bonnefoy *et al.* [26]). L'écart de profondeur  $\beta$  est imposé sur tout le domaine. Nous supposons donc que si les résultats sont corrects dans cette configuration, la méthode sera validée. En effet, la configuration classique sera une variation de profondeur a priori localisée dans le domaine autour d'une profondeur moyenne (voir par exemple le paragraphe V.1).

Afin d'avancer en temps les inconnues à la surface libre  $\eta$  et  $\tilde{\phi}$  grâce aux Eq.(II.2.3) et Eq.(II.2.4), il faut évaluer la vitesse verticale  $W$  (Eq.(II.2.16)). Ce cas test propose d'étudier l'erreur relative  $\epsilon_W = \frac{W - W_{RF}}{W_{RF}}$  faite sur l'évaluation de la vitesse verticale au premier pas de temps ( $W_{RF}$  représente la vitesse verticale de référence obtenue avec la solution de Rienecker et Fenton [117]). C'est une mesure classique de la précision du modèle, couramment utilisée pour caractériser la précision des méthodes potentielles non-linéaires (c.f. par exemple

Ducrozet *et al.* [47]). Si l'erreur reste limitée alors la propagation sera correcte par la suite (c.f. Bonnefoy *et al.* [26]).

La houle régulière est décrite par sa cambrure  $ka$  ( $k$  est le nombre d'onde et  $a$  représente l'amplitude) et sa profondeur relative  $kh$ . On s'intéressera à l'influence de ces paramètres de houle ainsi qu'à l'influence de la variation adimensionnelle du fond  $\frac{\beta}{h_0}$  et des paramètres numériques :  $N$  (nombre de noeuds) et  $M$  et  $M_b$  (ordres de non-linéarités HOS à la surface libre et au fond respectivement).

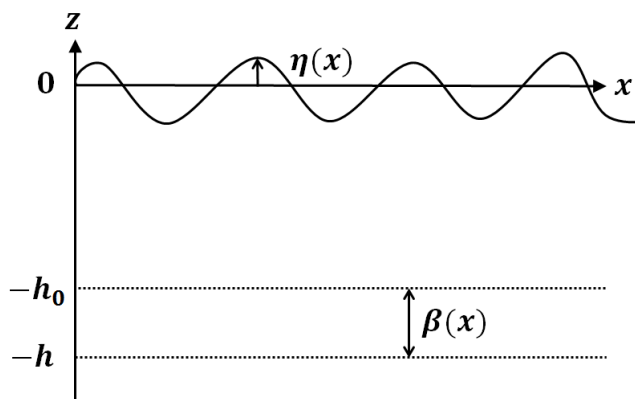


FIGURE IV.1.1 – Cas test de validation à  $\beta$  constant.

En fond plat, on obtient une convergence exponentielle de l'erreur selon  $N$  et  $M$ , comme détaillé dans Ducrozet [46]. On présentera donc les figures de convergence sous la forme d'un logarithme de l'erreur relative en fonction de  $N$  et  $M$ .

## IV.1.1 Précision obtenue sur la vitesse verticale

### IV.1.1.1 Méthode exacte

Pour ce cas test très spécifique, où la variation de profondeur  $\beta$  est constante, une inversion de système linéaire n'est pas nécessaire pour résoudre le problème. En effet, le fond étant plat,  $\beta$  est indépendant de  $x$ , et donc  $\frac{\partial\beta}{\partial x} = 0$ . Le terme en gradient du fond de l'Eq.(II.2.23) étant nul, le système peut être résolu directement, sans inversion de système linéaire. Nous avons donc utilisé cette méthode directe sur ce cas test très particulier afin d'estimer sa précision. Le temps de calcul ne sera pas représentatif d'une configuration réelle et ne sera pas mentionné. On rappelle que ce dernier sera prohibitif en configuration pratique, comme expliqué au paragraphe II.2.3.1.

On a représenté sur la Fig.IV.1.2 le logarithme de l'erreur relative  $\log(\epsilon_W)$  en fonction de  $N$  et  $M$ . On observe sur cette figure des surfaces planes, montrant la convergence exponentielle de la méthode spectrale en fonction du nombre de noeuds  $N$  et de l'ordre HOS  $M$ . Cette méthode a un comportement identique à

la méthode HOS initiale, quelque soit  $\frac{\beta}{h_0}$  à  $kh$  et  $ka$  fixés. Cela est dû au fait que l'on résout la condition au fond de manière exacte, ce qui permet de garder les propriétés de convergence de la méthode HOS initiale.

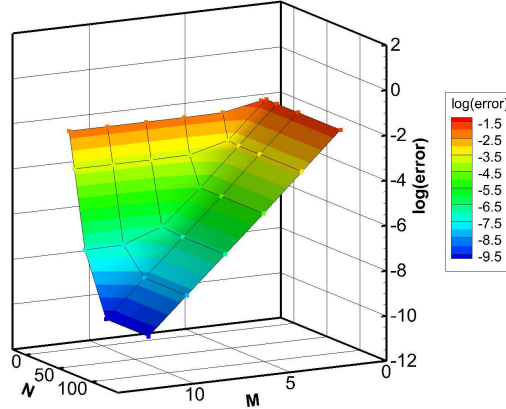


FIGURE IV.1.2 – Méthode exacte :  $kh = 0.92$ ,  $ka = 0.1$ , tous  $\frac{\beta}{h_0}$ . Erreur sur  $W$  ( $\log(\epsilon_W)$ ) en fonction de  $N$  et  $M$ .

Ainsi, cette méthode permet de simuler une houle fortement non-linéaire pour des profondeurs  $\beta$  constantes. Cependant, le coût en temps de calcul augmente très fortement avec cette approche, comparé à la méthode HOS initiale. De plus, rappelons que nous n'inversons pas de système matriciel dans ce cas, le lecteur en déduira facilement que le coût en temps de calcul sera beaucoup plus important pour des variations de fond avec un gradient non nul. Ce cas test nous permet donc d'insister sur le coût prohibitif des méthodes directes. Nous allons maintenant voir la précision atteinte avec les méthodes pseudo-spectrales utilisant des FFTs, puis nous discuterons du coût supplémentaire lié au fond variable pour ces méthodes.

#### IV.1.1.2 Méthode itérative originelle

Nous utilisons dans ce cas l'algorithme de résolution présenté au II.2.3.2. On choisit le cas où  $ka = 0.1$  et  $kh = 0.92$  car il présente une faible profondeur relative et une cambrure moyenne. En effet, la cambrure maximale à  $kh$  donnée est fournie par Williams [139] et par la formule paramétrique de Fenton [57]. Dans ce cas de profondeur relative assez faible ( $kh = 0.92$ ), la cambrure  $ka = 0.1$  représente 33% de la cambrure maximale  $\sigma$  ( $\sigma$  est la valeur de la cambrure maximale à une profondeur relative donnée).

La Fig.IV.1.3 représente le logarithme de l'erreur faite sur  $W$ , notée  $\epsilon_W$ , en fonction de  $N$  et  $M$  pour deux valeurs de  $\frac{\beta}{h_0}$ . La surface inférieure représente la méthode HOS initiale ( $\frac{\beta}{h_0} = 0\%$ ), tandis que la surface supérieure représente la configuration où  $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ . On observe que lorsque  $\frac{\beta}{h_0}$  augmente, l'erreur faite sur la vitesse verticale devient plus grande que celle obtenue en fond plat. Contrairement à la méthode exacte, le comportement de la méthode

itérative originelle dépend donc fortement du rapport  $\frac{\beta}{h_0}$ . Néanmoins, cette approche converge exponentiellement pour une variation de fond de  $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ , même si, comme attendu, la convergence est plus lente que pour la méthode HOS fond plat. Les propriétés pseudo-spectrales (convergence exponentielle) sont donc conservées.

Dans ce cas précis, on remarque que la convergence est plus difficile à atteindre dans la direction  $M$ , à cause de la forte influence du fond. L'ordre de non-linéarité nécessaire pour prendre en compte la variation due au fond doit donc être plus élevé que celui à la surface libre, montrant ainsi un avantage possible de la méthode améliorée présentée par la suite.

On peut également simuler des cas où  $\frac{\beta}{h_0} = 50\%$ . Les résultats sont visibles sur la Fig.IV.1.4. On observe toujours la convergence exponentielle de la méthode, mais de façon plus lente (car, comme nous l'avons vu auparavant, la convergence est plus difficile à atteindre dans la direction  $M$ ). Différentes combinaisons des paramètres  $kh$ ,  $ka$  (directement relié à  $kh$ ),  $\frac{\beta}{h_0}$  ont été testées. Les erreurs atteintes avec  $N = 64$ ,  $M = 8$  et différentes valeurs de  $kh$  sont présentées sur le Tab.IV.1.1.

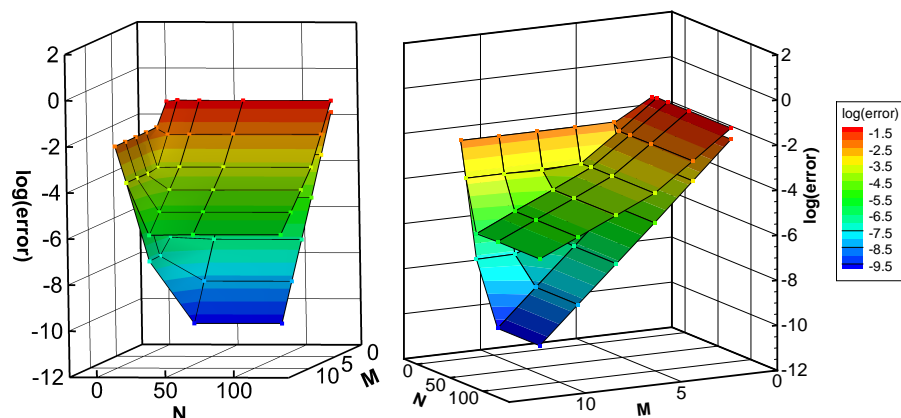


FIGURE IV.1.3 – Erreur sur la vitesse verticale en fonction de  $N$  et  $M$  -  $kh = 0.92$  et  $ka = 0.1$  ( $ka = 0.33\sigma$ ).

Surface inférieure :  $\frac{\beta}{h_0} = 0\%$ . Surface supérieure :  $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ .

On en déduit que pour la méthode originelle, quand  $kh$  augmente (avec  $ka$  à un pourcentage fixe de la cambrure maximale et  $\frac{\beta}{h_0}$  fixés) le taux de convergence augmente également. Ce résultat est attendu puisque quand  $\frac{h}{\lambda} > 2$  (*i.e.*  $kh > \pi$ ), on peut se placer dans le cas profondeur infinie où le fond n'a pas d'influence sur la propagation. Augmenter  $kh$  réduit donc l'importance du fond et le taux de convergence augmente.

Quand  $ka$  et  $\frac{\beta}{h_0}$  augmentent (les autres paramètres étant fixés), la convergence est moins rapide. Il y a évidemment une limite des  $ka$  et  $\frac{\beta}{h_0}$  qui peuvent être simulés. La cambrure ne peut pas excéder la cambrure maximale donnée par la formule de Fenton [57] et la variation relative du fond  $\frac{\beta}{h_0}$  doit rester inférieure à 100%.

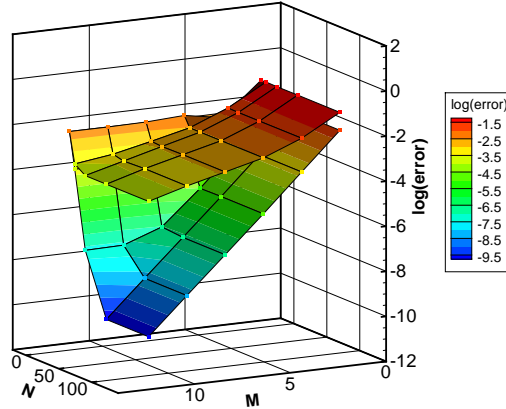


FIGURE IV.1.4 – Erreur sur la vitesse verticale en fonction de  $N$  et  $M$  -  $kh = 0.92$  et  $ka = 0.1$  ( $ka = 0.33\sigma$ ).

Surface inférieure :  $\frac{\beta}{h_0} = 0\%$ . Surface supérieure :  $\frac{\beta}{h_0} = 50\%$ .

$kh = 0.92$			
$\frac{\beta}{h_0}$	$ka = 0.03\sigma$	$ka = 0.17\sigma$	$ka = 0.33\sigma$
0%	$1.7 \cdot 10^{-14}$	$4.0 \cdot 10^{-10}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$
5%	$4.8 \cdot 10^{-12}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	$3.0 \cdot 10^{-7}$
25%	$5.5 \cdot 10^{-8}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$	$3.4 \cdot 10^{-5}$
50%	$3.9 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$
$ka = 0.33\sigma$			
$\frac{\beta}{h_0}$	$kh = 0.67$	$kh = 3$	$kh = 10$
0%	$5.7 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$	$7.8 \cdot 10^{-9}$
5%	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-8}$	$8.0 \cdot 10^{-9}$
25%	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$3.8 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$
50%	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$

TABLE IV.1.1 – Erreur relative sur  $\epsilon_W$ ,  $N = 64$ ,  $M = 8$ .

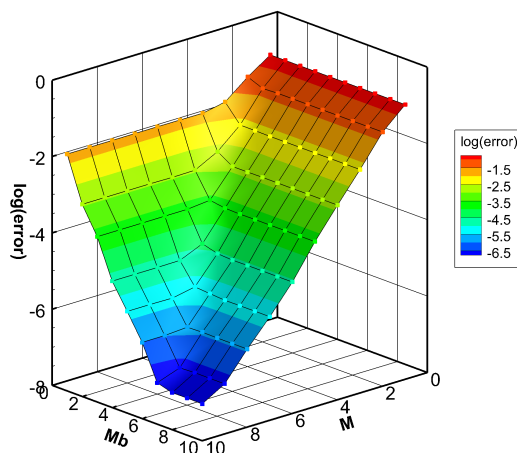


FIGURE IV.1.5 – Erreur sur la vitesse verticale en fonction de  $M$  et  $M_b$  -  $N = 32$ ,  $kh = 0.92$ ,  $ka = 0.1$  et  $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$  ( $ka = 0.33\sigma$ ).

Ainsi, ce cas (qui, rappelons le, est très difficile à simuler car l'écart de profondeur  $\beta$  est imposé sur tout le domaine) montre qu'une large gamme de paramètres peuvent être traités avec la méthode itérative originelle. De plus, le temps de calcul est très fortement réduit comparé à la méthode exacte, ce qui rendra les calculs 3D plus abordables. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe IV.1.3.

### IV.1.1.3 Méthode itérative améliorée

Le cas test réalisé avec la méthode originelle a été traité avec la méthode améliorée. L'influence de  $M_b$  doit donc être analysée en plus des autres paramètres. On fixe ici  $N = 32$  (on a vérifié que cette méthode converge également avec  $N$  de manière exponentielle), et l'on regarde l'influence de  $M$  et  $M_b$  pour différentes valeurs des paramètres  $kh$ ,  $ka$ , et  $\frac{\beta}{h_0}$ .

On avait vu qu'avec la méthode originelle, la convergence dans la direction  $M$  était plus difficile à atteindre dans le cas où  $ka = 0.1$  ( $ka = 0.33\sigma$ ),  $kh = 0.92$  et  $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ . Il est donc logique de supposer qu'avec la méthode améliorée il faudra augmenter  $M_b$  (plus que  $M$ ) pour atteindre la convergence.

L'erreur faite sur la vitesse verticale est présentée sur la Fig.IV.1.5. On observe clairement que la méthode converge exponentiellement avec  $M$  et  $M_b$ , ce qui est une propriété très intéressante de la nouvelle méthode. Comme expliqué juste avant, la méthode converge aussi exponentiellement avec  $N$  (non présenté sur la figure). Les mêmes conclusions que précédemment peuvent être faites lorsque l'on augmente  $kh$ ,  $ka$  et  $\frac{\beta}{h_0}$ .

On peut remarquer que le choix  $M = M_b$  n'est pas forcément le choix optimal, et que cela dépendra du cas test. Nous allons donc maintenant réaliser une comparaison entre les deux approches.

#### IV.1.1.4 Comparaison des deux méthodes itératives

Les deux méthodes itératives convergent de manière exponentielle (suivant  $N$  et les deux ordres de non-linéarité  $M$  et  $M_b$ ), il est donc intéressant de savoir quelle méthode est plus précise suivant les valeurs de  $kh$ ,  $ka$ , et  $\frac{\beta}{h_0}$ .

Les Fig.IV.1.6 et Fig.IV.1.7 présentent l'erreur atteinte sur la vitesse verticale pour les deux méthodes itératives en fonction de  $M$  et  $M_b$  pour  $\frac{\beta}{h_0} = 40\%$ ,  $kh = 0.92$  et deux valeurs de  $ka$ . Sur la Fig.IV.1.6 l'erreur atteinte sur la vitesse verticale est identique pour  $M_b \geq 15$  donc les courbes sont superposées (de même sur la Fig.IV.1.7 pour  $M_b \geq 10$ ). La Fig.IV.1.6 ( $ka = 0.01 = 0.03\sigma$ ) montre qu'à  $M$  fixé, on peut toujours trouver une valeur seuil de  $M_b$  afin d'atteindre (au moins) la même erreur sur la vitesse verticale qu'avec la méthode originelle. De plus, si  $M_b$  est plus grand que cette valeur seuil, la précision devient meilleure. La méthode améliorée permet donc d'obtenir une meilleure précision sur la vitesse verticale. Pour des cas plus cambrés, la Fig.IV.1.7 ( $ka = 0.15 = 0.34\sigma$ ) montre que la méthode améliorée est toujours plus précise que la méthode originelle (si  $M_b > 1$ ). Cela signifie que les non-linéarités de la surface libre sont plus importantes dans le cas présenté sur la Fig.IV.1.7 que dans celui de la Fig.IV.1.6, à cause de la cambrure plus importante.

La Fig.IV.1.6 montre une autre différence entre les deux méthodes. En effet, il aurait été naturel de penser que la méthode originelle avec  $M = 10$  et la méthode améliorée avec  $M = 10$  et  $M_b = 10$  mèneraient aux mêmes résultats. Néanmoins, en calculant les amplitudes modales  $B_j^{(m)}$  pour chaque  $m$ , davantage de termes sont calculés avec la méthode améliorée (si la condition  $M_b > M$  est respectée), ce qui induit une différence dans l'erreur calculée sur la vitesse verticale. Ici, davantage de termes correctifs sont pris en compte, donc l'erreur faite sur la vitesse verticale avec la méthode améliorée est plus faible. La Fig.IV.1.6 montre clairement que l'erreur est gouvernée par l'influence du fond.

L'influence de  $\frac{\beta}{h_0}$  est visible sur les Fig.IV.1.8 et Fig.IV.1.9. Sur la Fig.IV.1.8, pour  $M_b \geq 3$ , les courbes sont confondues. Pour ces deux cas on voit que pour une faible variation du fond (Fig.IV.1.8), les deux méthodes présentent la même précision. Mais quand la variation du fond  $\frac{\beta}{h_0}$  augmente, la méthode améliorée semble plus précise, pour la même raison que précédemment : quand  $\frac{\beta}{h_0}$  est plus important, l'influence du fond est plus grande que celle de la surface libre, donc il est nécessaire d'augmenter  $M_b$ . La Fig.IV.1.9 montre également la capacité de la méthode améliorée à traiter de grandes variations du fond (ici  $\frac{\beta}{h_0} = 75\%$  avec une cambrure  $ka = 0.15 = 0.34\sigma$  et une faible profondeur relative  $kh = 0.92$ ).

L'influence de la profondeur relative  $kh$  est représentée sur la Fig.IV.1.10 et sur la Fig.IV.1.11. Sur la Fig.IV.1.10, pour  $M_b \geq 3$ , les courbes sont superposées (de même sur la Fig.IV.1.11 pour  $M_b \geq 10$ ). Pour de faibles profondeurs relatives, les deux méthodes permettent d'atteindre la même précision car les non-linéarités sur la surface libre sont très importantes, la précision est donc gouvernée par l'ordre  $M$ . Cependant, pour de plus grands  $kh$ , la méthode améliorée permet une meilleure précision car, comme précédemment, l'influence du fond devient plus importante que celle de la surface libre ( $\frac{ka}{\sigma}$  diminue).

Ainsi, la méthode améliorée permet de toujours pouvoir sélectionner les paramètres numériques adéquats afin d'atteindre au moins la même précision que la méthode originelle. De plus, dans certains cas (lorsque l'influence du fond est importante devant celle de la surface libre et inversement), l'utilisation d'un



couple  $(M, M_b)$  plutôt que d'un couple  $(M, M)$  devrait réduire le temps de calcul (tout en conservant la précision).

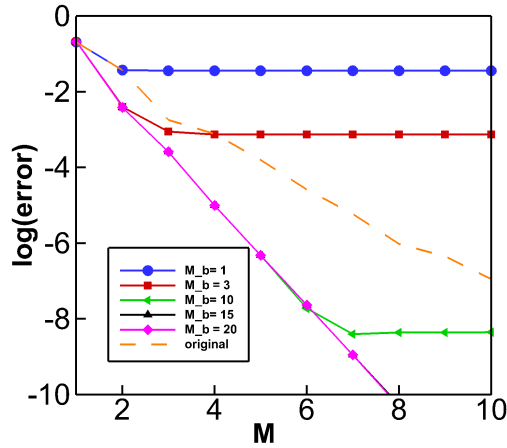


FIGURE IV.1.6 – Erreur sur la vitesse verticale en fonction de  $M$  et  $M_b - \frac{\beta}{h_0} = 40\%$  -  $kh = 0.92$  et  $ka = 0.01 = 0.03\sigma$ .

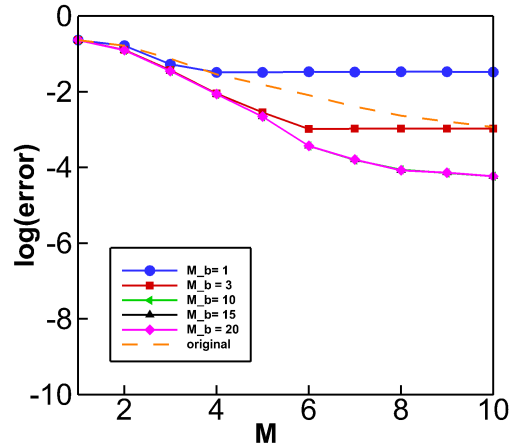


FIGURE IV.1.7 – Erreur sur la vitesse verticale en fonction de  $M$  et  $M_b - \frac{\beta}{h_0} = 40\%$  -  $kh = 0.92$  et  $ka = 0.15 = 0.34\sigma$ .

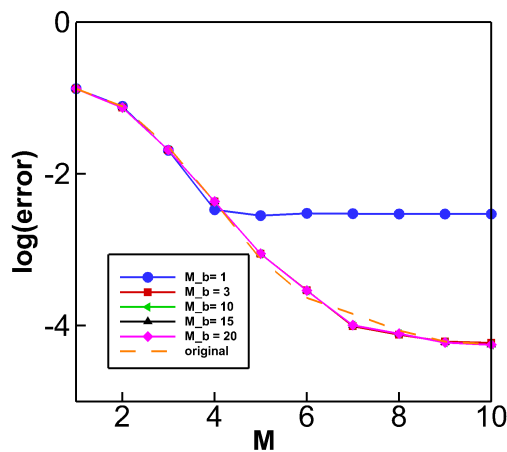


FIGURE IV.1.8 – Erreur sur la vitesse verticale en fonction de  $M$  et  $M_b - \frac{\beta}{h_0} = 10\%$  -  $kh = 0.92$  et  $ka = 0.15 = 0.34\sigma$ .

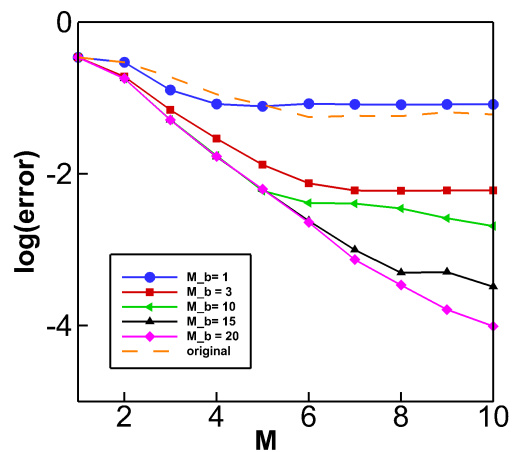


FIGURE IV.1.9 – Erreur sur la vitesse verticale en fonction de  $M$  et  $M_b - \frac{\beta}{h_0} = 75\%$  -  $kh = 0.92$  et  $ka = 0.15 = 0.34\sigma$ .

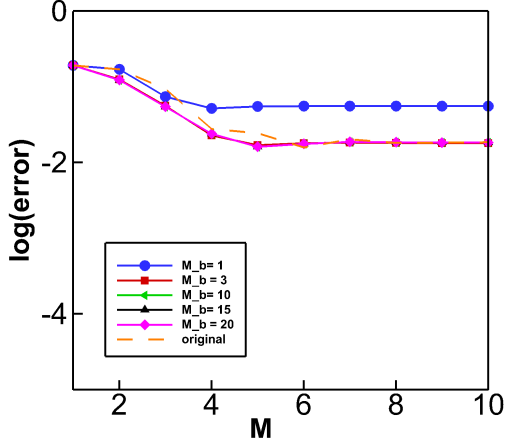


FIGURE IV.1.10 – Erreur sur la vitesse verticale en fonction de  $M$  et  $M_b - \frac{\beta}{h_0} = 40\%$  -  $kh = 0.5$  et  $ka = 0.1 = 0.5\sigma$ .

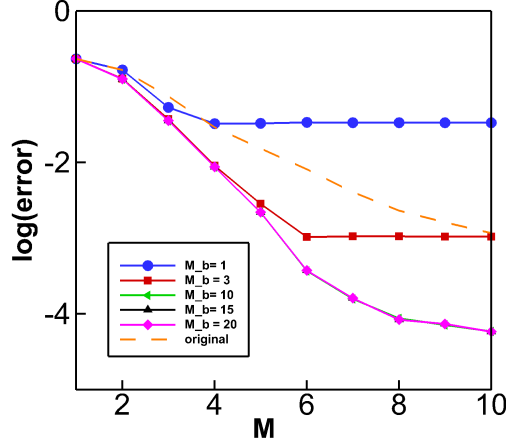


FIGURE IV.1.11 – Erreur sur la vitesse verticale en fonction de  $M$  et  $M_b - \frac{\beta}{h_0} = 40\%$  -  $kh = 3$  et  $ka = 0.1 = 0.23\sigma$ .

## IV.1.2 Avance en temps

Une fois que la vitesse verticale est correctement reconstruite, il est possible d'avancer les équations en temps. Un moyen de vérifier si la propagation est correcte est de comparer le déphasage obtenu à la solution de référence de Rienecker et Fenton [117]. Dans cet exemple, 1000 périodes sont simulées. Ce cas test est assez discriminant en terme de méthodes numériques pour la propagation non-linéaire de vagues. Un déphasage est toujours observé avec toutes les méthodes numériques après un long temps de propagation.

La méthode HOS est très précise au niveau du déphasage. Ce phénomène se produit même si le fond est plat (*ie*  $\frac{\beta}{h_0} = 0\%$ ) comme montré dans Bonnefoy *et al.* [26], les résultats seront donc comparés à ce cas. On utilise  $N = 64$ ,  $M = 8$ ,  $kh = 1.0$ ,  $ka = 0.1$ , une tolérance sur le pas de temps de  $1.10^{-8}$  et l'on regarde l'influence de la variation du fond  $\frac{\beta}{h_0}$ . Les résultats ont été présentés dans Gouin *et al.* [72].

Pour la méthode exacte, le déphasage ne dépend pas de  $\frac{\beta}{h_0}$  et est toujours égal au déphasage obtenu à  $\frac{\beta}{h_0} = 0\%$ . Cependant, le temps de calcul est très important.

Avec la méthode itérative originelle, les résultats dépendent de  $\frac{\beta}{h_0}$  et sont présentés sur la Fig.IV.1.12. En effet, après 1000 périodes, le déphasage est égal à 0.095 degrés pour  $\frac{\beta}{h_0} = 0\%$ , à 0.094 degrés pour  $\frac{\beta}{h_0} = 14\%$ , à 0.28 degrés pour  $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ , et à 2.35 degrés pour  $\frac{\beta}{h_0} = 50\%$ . Ainsi, même avec des variations importantes du fond, le déphasage reste limité, on est donc confiant quant aux capacités du modèle à modéliser la propagation de vagues en fond variable.

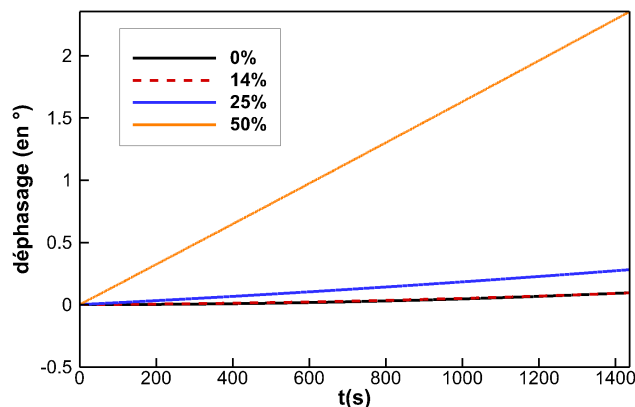


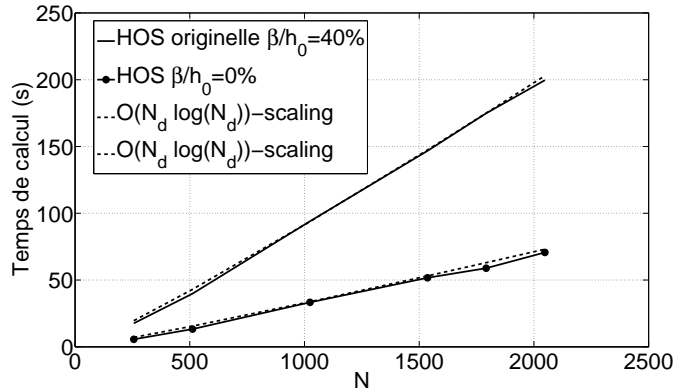
FIGURE IV.1.12 – Evolution du déphasage lors de la propagation d’une houle régulière de cambrure  $ka = 0.1$ , de profondeur relative  $kh = 1$ .

### IV.1.3 Temps de calcul des deux méthodes itératives

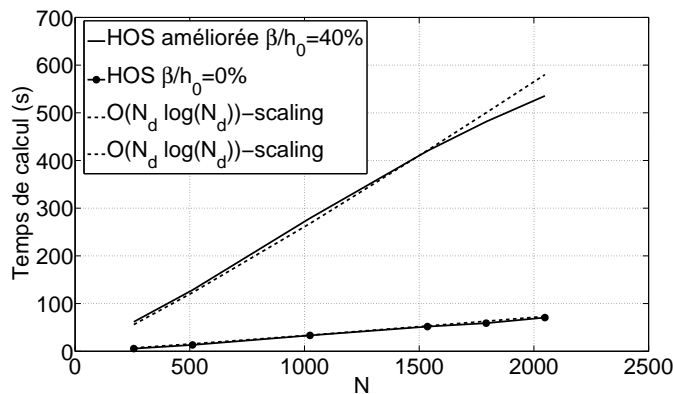
Le but ici est d’estimer le temps de calcul des méthode itératives à l’aide du cas test présenté précédemment ( $\beta$  constant). Nous savons que le temps de calcul est directement lié au nombre de FFTs utilisé dans la procédure HOS, comme expliqué au paragraphe II.2.4.

Afin de confirmer le temps de calcul en  $N_d \log(N_d)$  de la méthode itérative originelle (avec  $N_d$  le nombre de points déaliasés), la Fig.IV.1.13 présente le temps de calcul obtenu pour 100 périodes de propagation en fonction du nombre de modes  $N$  sur un domaine comprenant 50 longueurs d’ondes. Cette figure a été obtenue avec un ordre HOS  $M = 8$ , un anti-repliement complet et une variation du fond  $\frac{\beta}{h_0} = 40\%$ . La méthode HOS initiale avec  $M = 8$  est aussi représentée à titre de comparaison. Les pointillés représentent la loi attendue en  $N_d \log(N_d)$ . On observe que pour les deux méthodes proposées on retrouve un comportement en  $N_d \log(N_d)$ . La propriété très intéressante du comportement en  $N_d \log(N_d)$  de la méthode HOS initiale est donc conservée. On note aussi qu’avec ce couple de paramètres ( $M = 8$  et  $\frac{\beta}{h_0} = 40\%$ ), le temps de calcul nécessaire pour une bathymétrie variable est trois fois plus grand que le temps nécessaire pour un fond plat. Si l’on s’intéresse au nombre de FFTs nécessaires, la méthode initiale pour  $M = 8$  requiert  $n = 44$  FFTs tandis que la méthode originelle requiert  $n = 122 + 44 = 156$  FFTs (c.f. Eq.(II.2.44)). Le rapport théorique est donc de 3.5 ce qui est assez proche du rapport obtenu numériquement qui est de 3.

Afin d’estimer le temps de calcul de la méthode améliorée, nous utilisons le même cas que précédemment avec un ordre  $M = 4$  sur la surface libre et un ordre  $M_b = 7$  sur le fond (dans le but d’obtenir la même erreur sur la vitesse verticale que la méthode originelle au premier pas de temps). Les résultats sont présentés sur la Fig.IV.1.14. On remarque que cette méthode présente également


 FIGURE IV.1.13 – Temps de calcul en fonction du nombre de modes  $N$ .  $M = 8$ .

un comportement en  $N_d \log(N_d)$ . Néanmoins, le temps de calcul sur ce cas précis est environ 3 fois supérieur à la méthode originelle (et donc 9 fois supérieur à la méthode HOS initiale), comme on peut le voir sur la Fig.IV.1.15. Si l'on s'intéresse au nombre de FFTs nécessaires, la méthode initiale pour  $M = 8$  requiert  $n = 44$  FFTs tandis que la méthode améliorée requiert  $n = 512 + 44 = 556$  FFTs (c.f. Eq.(II.2.45)). Le rapport théorique est donc de 12.5 par rapport à la méthode HOS initiale et de 4.5 par rapport à la méthode HOS originelle ce qui est légèrement supérieur aux rapports obtenus numériquement. En effet, avec la méthode améliorée, le traitement anti-repliement complet est réalisé sur moins de points que pour la méthode originelle, comme nous allons le voir dans le paragraphe IV.1.4. Cependant, malgré son temps de calcul plus élevé, la méthode améliorée permet d'atteindre des niveaux de précision supérieurs à la méthode originelle. Les deux méthodes présentent donc un intérêt.


 FIGURE IV.1.14 – Temps de calcul en fonction du nombre de modes  $N$ .  $M = 3$  et  $M_b = 7$ .

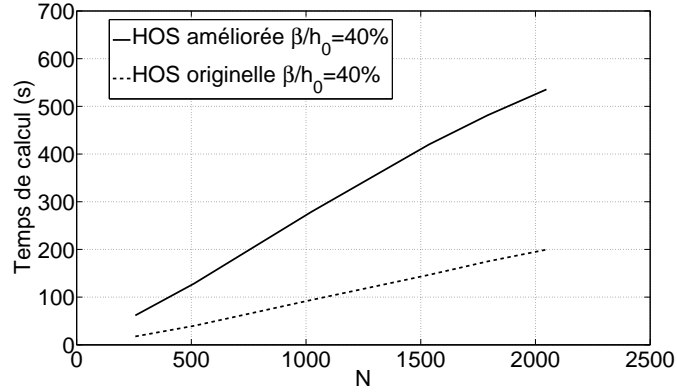


FIGURE IV.1.15 – Temps de calcul en fonction du nombre de modes  $N$ . Comparaison de la méthode originelle ( $M = 8$ ) et de la méthode améliorée ( $M = 3$  et  $M_b = 7$ ).  $\frac{\beta}{h_0} = 40\%$ .

#### IV.1.4 Etude sur l'anti-repliement

Avec la méthode originelle, l'anti-repliement complet se fait avec l'ordre HOS  $M$ . La question est maintenant de savoir quel ordre HOS utiliser avec la méthode améliorée pour l'anti-repliement :  $M$  ou  $M_b$ ? Il est à noter que cet anti-repliement n'est pas vraiment complet car l'ordre maximum des produits rencontrés lors du calcul des amplitudes modales dues au fond  $B_j^{(m)}$  est en  $\eta^M \beta^{M_b}$ . Il faudrait alors utiliser  $M + M_b$  si l'on voulait réaliser un anti-repliement complet, ce qui affecterait beaucoup l'efficacité de la méthode (c.f. Eq.(II.2.46) et Eq.(II.2.47)).

Nous avons donc réalisé une étude d'erreur atteinte sur la vitesse verticale. On réalise notre étude en 2D avec un cas moyennement cambré ( $ka = 0.2$ ), une profondeur relative moyenne  $kh = 2$ , un nombre de points par longueur d'onde  $\frac{N}{\lambda} = 42$  et une variation de fond constante  $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ . Les résultats obtenus avec la méthode originelle et un traitement anti-repliement complet sont présentés sur le Tab.IV.1.2, ceux avec la méthode améliorée, un traitement anti-repliement utilisant un nombre de modes déaliasés  $N_d = N \frac{M+1}{2}$  sont présentés sur le Tab.IV.1.3 et ceux avec  $N_d = N \frac{M_b+1}{2}$  sont visibles sur le Tab.IV.1.4. On remarque que lorsque  $N_d = N \frac{M_b+1}{2}$  et que  $M$  est supérieur à  $M_b$ , la convergence n'est plus assurée. On en déduit donc que l'anti-repliement complet doit s'effectuer avec  $N_d = N \frac{M+1}{2}$  pour ce cas d'étude.

M					
3	5	7	9	11	14
$2.09 \cdot 10^{-3}$	$9.66 \cdot 10^{-5}$	$8.36 \cdot 10^{-6}$	$6.76 \cdot 10^{-7}$	$5.12 \cdot 10^{-8}$	$2.56 \cdot 10^{-9}$

TABLE IV.1.2 – Méthode originelle. Erreur sur  $W$  avec  $N_d = N \frac{M+1}{2}$ .  $\frac{N}{\lambda} = 42$ ,  $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ ,  $kh = 2$ ,  $ka = 0.2$ .

	$M$					
$M_b$	3	5	7	9	11	14
3	$6.92 \cdot 10^{-4}$	$9.26 \cdot 10^{-5}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$
5	$7.42 \cdot 10^{-4}$	$2.79 \cdot 10^{-5}$	$2.46 \cdot 10^{-6}$	$2.61 \cdot 10^{-6}$	$2.61 \cdot 10^{-6}$	$2.61 \cdot 10^{-6}$
7	$7.41 \cdot 10^{-4}$	$2.88 \cdot 10^{-5}$	$1.21 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^{-7}$	$1.18 \cdot 10^{-7}$	$1.18 \cdot 10^{-7}$
9	$7.41 \cdot 10^{-4}$	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-6}$	$4.81 \cdot 10^{-8}$	$2.85 \cdot 10^{-9}$	$2.45 \cdot 10^{-9}$
11	$7.41 \cdot 10^{-4}$	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-6}$	$4.70 \cdot 10^{-8}$	$1.89 \cdot 10^{-9}$	$1.47 \cdot 10^{-10}$
14	$7.41 \cdot 10^{-4}$	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-6}$	$4.70 \cdot 10^{-8}$	$1.92 \cdot 10^{-9}$	$2.17 \cdot 10^{-11}$

TABLE IV.1.3 – Méthode améliorée. Erreur sur  $W$  avec  $N_d = N \frac{M+1}{2}$ ,  $\frac{N}{\lambda} = 42$ ,  $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ ,  $kh = 2$ ,  $ka = 0.2$ .

	$M$					
$M_b$	3	5	7	9	11	14
3	$6.92 \cdot 10^{-4}$	$9.26 \cdot 10^{-5}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$
5	$7.42 \cdot 10^{-4}$	$2.79 \cdot 10^{-5}$	$2.46 \cdot 10^{-6}$	$2.61 \cdot 10^{-6}$	$2.61 \cdot 10^{-6}$	$2.61 \cdot 10^{-6}$
7	$7.41 \cdot 10^{-4}$	$2.88 \cdot 10^{-5}$	$1.21 \cdot 10^{-6}$	$1.28 \cdot 10^{-7}$	$1.18 \cdot 10^{-7}$	$1.18 \cdot 10^{-7}$
9	$7.41 \cdot 10^{-4}$	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-6}$	$4.81 \cdot 10^{-8}$	$1.43 \cdot 10^{-8}$	$1.41 \cdot 10^{-8}$
11	$7.41 \cdot 10^{-4}$	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-6}$	$4.70 \cdot 10^{-8}$	$1.89 \cdot 10^{-9}$	$2.27 \cdot 10^{-8}$
14	$7.41 \cdot 10^{-4}$	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-6}$	$4.70 \cdot 10^{-8}$	$1.92 \cdot 10^{-9}$	$2.17 \cdot 10^{-11}$

TABLE IV.1.4 – Méthode améliorée. Erreur sur  $W$  avec  $N_d = N \frac{M_b+1}{2}$ ,  $\frac{N}{\lambda} = 42$ ,  $\frac{\beta}{h_0} = 25\%$ ,  $kh = 2$ ,  $ka = 0.2$ .

Néanmoins, si l'on réalise la même étude mais avec une variation de fond de  $\frac{\beta}{h_0} = 67\%$ , les résultats sont légèrement différents. Les résultats obtenus avec la méthode originelle et  $N_d = N \frac{M+1}{2}$  sont présentés sur le Tab.IV.1.5, ceux avec la méthode améliorée et un nombre de modes déaliasés  $N_d = N \frac{M+1}{2}$  sont présentés sur le Tab.IV.1.6 et ceux avec  $N_d = N \frac{M_b+1}{2}$  sont visibles sur le Tab.IV.1.7. On voit que lorsque l'on utilise un nombre de modes déaliasés basés sur  $M_b$ , on a également une augmentation de l'erreur sur la vitesse verticale si  $M_b < M$ , mais cette augmentation est très faible. En effet, l'influence du fond est alors prépondérante par rapport à celle de la surface libre. On remarque également que si l'on se base sur  $M$  pour le nombre de modes déaliasés, il y a une légère augmentation de l'erreur lorsque  $M$  est très inférieur à  $M_b$  (en rouge). Il est donc intéressant de définir  $N_d = N \frac{\text{Max}(M, M_b)+1}{2}$  car ce choix permet d'améliorer la précision de la méthode.

$M$					
5	9	11	14	19	21
$3.53 \cdot 10^{-3}$	$4.95 \cdot 10^{-4}$	$2.79 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.10 \cdot 10^{-5}$	$1.20 \cdot 10^{-5}$

TABLE IV.1.5 – Méthode originelle. Erreur sur  $W$  avec  $N_d = N \frac{M+1}{2}$ ,  $\frac{N}{\lambda} = 42$ ,  $\frac{\beta}{h_0} = 67\%$ ,  $kh = 2$ ,  $ka = 0.2$ .

IV.1.5. CONCLUSION - APPLICABILITÉ DES MÉTHODES FOND VARIABLE

	$M$					
$M_b$	5	9	11	14	19	21
5	$7.08 \cdot 10^{-4}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$
9	$3.09 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$
11	$2.92 \cdot 10^{-5}$	$2.34 \cdot 10^{-6}$	$2.34 \cdot 10^{-6}$	$2.34 \cdot 10^{-6}$	$2.34 \cdot 10^{-6}$	$2.34 \cdot 10^{-6}$
14	$3.36 \cdot 10^{-5}$	$4.46 \cdot 10^{-7}$	$4.47 \cdot 10^{-7}$	$4.47 \cdot 10^{-7}$	$4.47 \cdot 10^{-7}$	$4.47 \cdot 10^{-7}$
19	$3.33 \cdot 10^{-5}$	$4.15 \cdot 10^{-8}$	$2.19 \cdot 10^{-8}$	$2.19 \cdot 10^{-8}$	$2.19 \cdot 10^{-8}$	$2.19 \cdot 10^{-8}$
21	$3.97 \cdot 10^{-5}$	$5.03 \cdot 10^{-8}$	$7.39 \cdot 10^{-9}$	$7.14 \cdot 10^{-9}$	$7.14 \cdot 10^{-9}$	$7.14 \cdot 10^{-9}$

TABLE IV.1.6 – Méthode améliorée. Erreur sur  $W$  avec  $N_d = N \frac{M+1}{2}$ .  $\frac{N}{\lambda} = 42$ ,  $\frac{\beta}{h_0} = 67\%$ ,  $kh = 2$ ,  $ka = 0.2$ .

	$M$					
$M_b$	5	9	11	14	19	21
5	$7.08 \cdot 10^{-4}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$
9	$3.09 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$
11	$2.92 \cdot 10^{-5}$	$2.34 \cdot 10^{-6}$	$2.34 \cdot 10^{-6}$	$2.36 \cdot 10^{-6}$	$2.36 \cdot 10^{-6}$	$2.36 \cdot 10^{-6}$
14	$3.36 \cdot 10^{-5}$	$4.46 \cdot 10^{-7}$	$4.47 \cdot 10^{-7}$	$4.47 \cdot 10^{-7}$	$4.54 \cdot 10^{-7}$	$4.54 \cdot 10^{-7}$
19	$3.33 \cdot 10^{-5}$	$4.15 \cdot 10^{-8}$	$2.19 \cdot 10^{-8}$	$2.19 \cdot 10^{-8}$	$2.19 \cdot 10^{-8}$	$2.20 \cdot 10^{-8}$
21	$3.33 \cdot 10^{-5}$	$5.03 \cdot 10^{-8}$	$7.39 \cdot 10^{-9}$	$7.14 \cdot 10^{-9}$	$7.14 \cdot 10^{-9}$	$7.14 \cdot 10^{-9}$

TABLE IV.1.7 – Méthode améliorée. Erreur sur  $W$  avec  $N_d = N \frac{M_b+1}{2}$ .  $\frac{N}{\lambda} = 42$ ,  $\frac{\beta}{h_0} = 67\%$ ,  $kh = 2$ ,  $ka = 0.2$ .

## IV.1.5 Conclusion - applicabilité des méthodes fond variable

Ce cas test nous a permis d'évaluer les deux méthodes itératives en termes de précision et d'efficacité. Nous avons dès le début éliminé la méthode directe *a priori* trop coûteuse, même pour un cas fond plat où l'inversion d'un système linéaire n'est pas nécessaire. On a montré que l'erreur relative faite sur la vitesse verticale convergeait exponentiellement suivant  $N$ ,  $M$  et  $M_b$ . Nous avons également vérifié la convergence exponentielle de la méthode en 3D, selon les directions  $x$  et  $y$  en validant les termes croisés. Nous avons pour cela propagé la houle dans une direction définie par  $\alpha = 45$  degrés entre les axes  $x$  et  $y$ , et vérifié que l'on obtenait également les mêmes résultats sur l'erreur faite sur la vitesse verticale.

Les deux méthodes itératives permettent de simuler différents cas suivant les valeurs de  $\frac{\beta}{h_0}$ ,  $kh$  and  $ka$ . Elles présentent une bonne précision sur la vitesse verticale ainsi qu'un temps de calcul relativement faible. De plus, si la cambrure augmente, l'erreur atteinte sur la vitesse verticale devient plus importante et la convergence, bien que plus lente, existe toujours.

Ensuite, la méthode améliorée est plus flexible car les deux ordres de non-linéarités peuvent être choisis indépendamment. De plus, on peut toujours trouver des paramètres numériques pour la méthode améliorée permettant d'atteindre une meilleure précision que la méthode originelle. Le temps de calcul

pour prendre en compte une bathymétrie variable suit une loi en  $N_d \log(N_d)$ , avec  $N_d$  le nombre de points déaliasés. Ce temps devrait aussi être réduit pour certaines configurations si les ordres de non-linéarités nécessaires sur la surface libre et le fond sont différents.

Nous avons également montré que la méthode originelle présente le plus souvent un temps de calcul inférieur à la méthode améliorée. Le choix de l'une des méthodes dépendra donc du niveau de précision et de l'efficacité souhaités.

Ainsi, ce cas test nous a permis de démontrer la capacité des deux méthodes à simuler d'importantes variations constantes du fond de manière très précise et efficace. On est donc confiant pour l'appliquer à des bathymétries plus réalistes.





## Chapitre IV.2

# Validations bidimensionnelles

Deux cas tests ont été traités afin de démontrer la capacité des méthodes proposées à modéliser la propagation de houle sur une bathymétrie variable dans des configurations réalistes. Le premier cas de validation, représentant des sinusoïdes au fond, est un bon exemple d'une faible variation de fond autour d'une profondeur moyenne. Le second s'attarde sur des variations de fond plus importantes avec le phénomène du shoaling. Ces deux cas tests ont fait l'objet d'une publication archivée (Gouin *et al.* [74]) et de présentations en conférence (Gouin *et al.* [72] et Gouin *et al.* [71]).

### IV.2.1 Réflexion de Bragg

La réflexion de Bragg permet de s'intéresser à la propagation d'une houle dans un domaine présentant une faible variation de fond autour d'une profondeur moyenne afin de respecter les conditions du développement de Taylor (c.f. Eq.(II.2.27)). On s'intéresse au comportement d'une houle incidente et d'une houle réfléchie sur une variation de fond sinusoïdale de nombre d'onde  $k_b$  (voir Fig.IV.2.1). Si la condition de Bragg de classe I est satisfaite, la houle réfléchie doit être amplifiée par une interaction quadratique résonante entre la houle incidente et le fond. Ce cas a été étudié expérimentalement par Davies et Heathershaw [42] et numériquement par Bingham et Zhang [23], Guyenne et Nicholls [80] et Liu et Yue [95].

Une analyse directe des perturbations montre que la résonance apparaît quand les variations sinusoïdales du fond ont une longueur d'onde égale à la moitié de la longueur d'onde incidente, ce qui a été confirmé expérimentalement par Davies et Heathershaw [42]. La condition de résonance de Bragg de classe I implique donc l'interaction entre 3 composantes : deux à la surface libre (une incidente et une réfléchie) et une au fond.

Pour de faibles cambrures de la houle incidente et de faibles variations du fond, la réflexion près de la condition de résonance de Bragg est très bien prédite par la théorie des perturbations multi-échelle de Mei [108], avec une hypothèse de linéarité sur la surface libre. Ici on analyse les effets non-linéaires en utilisant la méthode itérative originelle. La méthode améliorée donne exactement les mêmes résultats. Les conditions de Davies et Heathershaw [42] sont utilisées afin de comparer nos résultats numériques aux expériences.

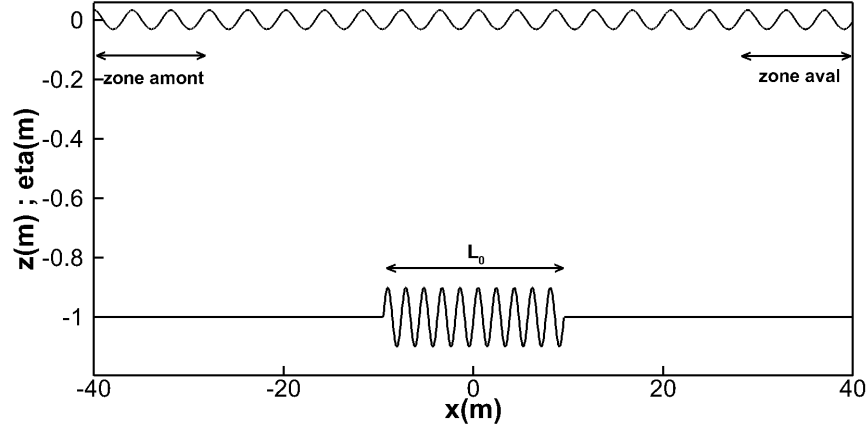


FIGURE IV.2.1 – Représentation du fond avec 10 sinusôides d’amplitude  $d = 0.1$  et de cambrure  $k_b d = 0.31$  et de la surface libre à l’instant initial. Zones de relaxation de 3 longueurs d’onde.

Le patch de sinusôides est défini comme la variation autour de la profondeur moyenne  $h = h_0 + \beta(x)$  par :

$$\beta(x) = d \sin(k_b x) \quad \text{pour} \quad \frac{-L_0}{2} \leq x \leq \frac{L_0}{2} \quad (\text{IV.2.1})$$

et est représenté sur la Fig.IV.2.1. La surface libre est localisée en  $z = 0\text{m}$  et la profondeur moyenne en  $h_0 = -1\text{m}$ . La cambrure associée au fond est  $k_b d = 0.31$ , l’amplitude du fond est de  $d = 0.1\text{m}$  et la longueur du patch de sinusôides est  $\frac{L_0}{\lambda_b} = 10$  (*i.e.* on considère un patch de 10 sinusôides d’amplitude  $\lambda_b = \frac{2\pi}{k_b}$ ). La houle incidente vérifie la condition de résonance  $k = \frac{k_b}{2}$  avec une cambrure  $ka = 0.05$ .

L’initialisation est réalisée avec une houle régulière solution de Rienecker et Fenton [117] avec les paramètres suivants :  $a = 0.032\text{ m}$ ,  $\lambda = 4.05\text{m}$ . Une zone de relaxation de 3 longueurs d’onde à gauche du domaine permet de générer la houle incidente et une autre zone à droite de 3 longueurs d’onde également absorbe la houle afin d’éviter la réflexion et de conserver la périodicité. Ces zones sont présentées sur la Fig.IV.2.1.

Les simulations sont réalisées avec  $N = 16/\lambda$  modes par longueur d’onde et un ordre HOS  $M = 2$  avec la méthode originelle (les mêmes résultats sont obtenus avec  $M = 2$  et  $M_b = 1$  pour la méthode améliorée) et l’on s’assure de réaliser une simulation suffisamment longue pour obtenir un état stable (atteint à  $t = 41T$ ). Le choix de cet ordre de non-linéarité sur la surface libre et sur la fond est suffisant pour obtenir des résultats convergés, car les principaux phénomènes physiques de la réflexion de Bragg sont d’ordre 2 (*c.f.* Liu et Yue [95]) et sont donc pris en compte. Le coefficient de réflexion local  $R(x)$  défini par l’Eq.(IV.2.2) est ensuite obtenu par la méthode de Suh *et al.* [127] et analysé ci-dessous.

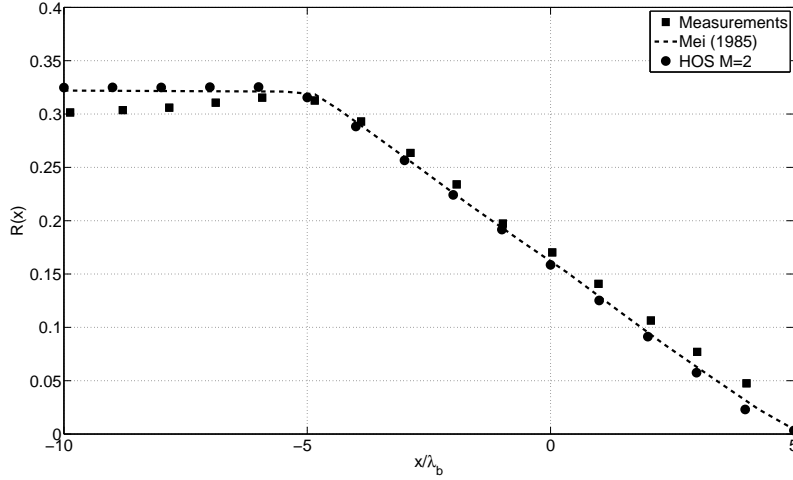


FIGURE IV.2.2 – Réflexion de Bragg sur un fond de sinusoides localisé en  $-5\lambda_b \leq x \leq 5\lambda_b$  avec  $ka = 0.05$  et  $k_b d = 0.31$ .

$$R(x) = \frac{a_r(x)}{a_{init}} \quad (\text{IV.2.2})$$

$a_r(x)$  représente l'amplitude de la houle réfléchiée et  $a_{init}$  l'amplitude de la houle incidente.

Les résultats numériques sont présentés sur la Fig.IV.2.2 avec les résultats expérimentaux de Davies et Heathershaw [42] et la solution donnée par la théorie des perturbations de Mei [108]. Les sinusoides se trouvent en  $x/\lambda_b \in [-5; 5]$ .

On voit très clairement que nos résultats sont fidèles aux expériences et sont en parfait accord avec la théorie des perturbations. Les deux méthodes présentées (originelle et améliorée) donnent exactement les mêmes résultats que ceux présentés dans Liu et Yue [95]. Ces deux méthodes sont donc validées pour une configuration classique avec une faible variation du fond ( $\frac{\beta}{h_0} = 0.1$ ). On va maintenant s'intéresser à des cas présentant de plus grandes variations du fond, afin de vérifier si nos méthodes peuvent traiter des bathymétries réalistes avec des variations de fond importantes.

## IV.2.2 Shoaling d'une houle linéaire

On s'intéresse dans ce paragraphe au shoaling d'une houle linéaire qui est déformée en se propageant de grandes profondeurs vers de faibles profondeurs (c.f. Fig.IV.2.3). Ce cas test a été simulé uniquement avec la méthode améliorée. En effet, la surface libre est résolue linéairement (afin de pouvoir comparer nos résultats à une solution analytique) tandis que les non-linéarités du fond requièrent un ordre  $M_b$  important. Ce qui est testé est donc la capacité du modèle à prendre en compte la variation du fond. Ce cas test a notamment été étudié par Bingham et Agnon [21] et Guyenne et Nicholls [80] avec des paramètres du

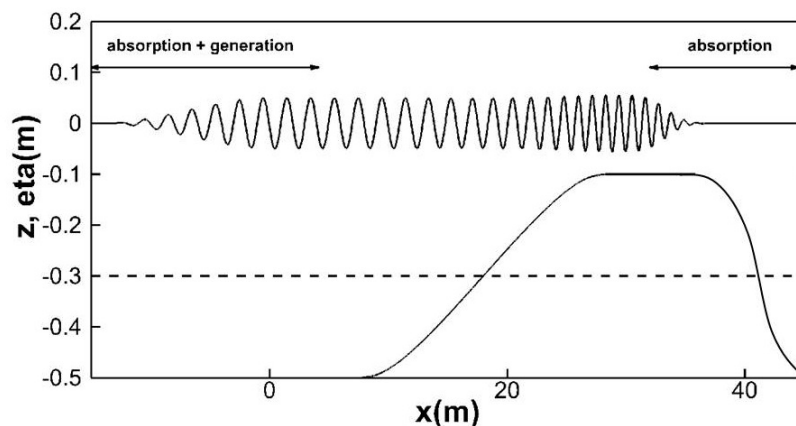


FIGURE IV.2.3 – Elévation de surface libre à l'état stable obtenue numériquement (multipliée par 10) en partant d'une houle linéaire d'amplitude  $a_0 = 5.10^{-3}m$  et de longueur d'onde  $\lambda = 2m$  se propageant sur un fond de type shoaling.

fond légèrement différents.

On impose une variation du fond définie par :

$$\beta(x) = \frac{h_0 - h_1}{2} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sin(\pi x/L)}{1 - (2x/L)^2} \right) \right], \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (\text{IV.2.3})$$

Les paramètres sont les suivants :  $h_0 = 0.5m$ ,  $h_1 = 0.1m$  et  $L = 24m$ . Pour notre cas numérique, la profondeur moyenne  $h_0$  est choisie à  $0.3m$  afin de réduire le maximum du rapport  $\frac{\beta}{h_0}$  (de  $0.8$  à  $0.66$  comme valeur maximum) et ainsi d'assurer la convergence suivant  $M_b$ . Avec  $\frac{\beta}{h_0} = 0.8$ , l'hypothèse faite sur le développement de Taylor dans l'Eq.(II.2.37) n'est pas satisfaite. Néanmoins, on souhaite regarder si la méthode peut simuler de telles variations de bathymétrie. La définition du fond et les conditions incidentes permettent une transition d'une profondeur relative importante à une profondeur relative faible (de  $kh = 1.57$  à  $kh = 0.56$ ). Une houle linéaire d'amplitude  $a_0 = 5.10^{-3} m$  et de longueur d'onde  $\lambda_0 = 2m$  est générée à gauche du domaine et est propagée jusqu'à ce qu'un état stable soit obtenu dans tout le domaine. Des zones de relaxation sont utilisées afin d'éviter la réflexion et de conserver la périodicité. Ces zones de relaxation sont constituées d'une zone d'absorption amont (2 longueurs d'onde), d'une zone de génération (1 longueur d'onde) et d'une zone d'absorption aval (8 longueurs d'onde). La zone d'étude représente 12 longueurs d'onde et le domaine total est visible sur la Fig.IV.2.3. Comme mentionné au paragraphe III, la bathymétrie a été modifiée dans la deuxième zone de relaxation pour être périodique dans la direction  $x$ .

L'état stationnaire est atteint après  $t = 27T$ . La Fig.IV.2.4 présente l'enveloppe de l'élévation de surface libre obtenue pour un état stable et convergé (30 points par longueurs d'onde,  $M = 1$  et  $M_b = 12$  avec  $h_0 = 0.3m$ ) et l'enveloppe prédite par la théorie linéaire sur la base du principe de conservation du flux de

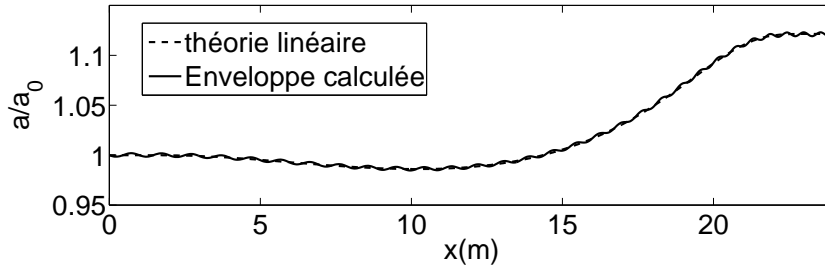


FIGURE IV.2.4 – Comparaison entre l’enveloppe prévue par la théorie linéaire et l’enveloppe obtenue numériquement.

l’énergie :

$$\frac{a}{a_0} = \left[ \frac{k(1 + 2h_0k_0/\sinh(2h_0k_0))}{k_0(1 + 2hk/\sinh(2hk))} \right]^{1/2} \quad (\text{IV.2.4})$$

On observe que l’amplitude diminue légèrement lorsque la pente du fond augmente, puis augmente et se stabilise. On peut remarquer que notre modèle présente des résultats très proches de la théorie linéaire. L’augmentation du nombre d’onde et donc la diminution de la longueur d’onde visible sur la Fig.IV.2.3 lorsque la houle se propage sur le fond variable est un phénomène attendu et justifié (c.f. Bingham et Agnon [21]). De plus, les résultats sont similaires à ceux obtenus dans Bingham et Agnon [21] et Guyenne et Nicholls [80]. Ce cas test nous permet donc de valider la méthode améliorée, avec une résolution linéaire à la surface libre et de très grandes variations du fond.

### IV.2.3 Conclusion - cas de validation

Ces deux cas de validation bi-dimensionnels (réflexion de Bragg et shoaling), ont donc permis de montrer la précision et l’efficacité des deux méthodes itératives. Le premier cas test reproduit la réflexion de Bragg avec de faibles variations du fond et une houle régulière. Les résultats sont très similaires à ceux obtenus par Bingham et Zhang [23], Guyenne et Nicholls [80] et Liu et Yue [95]. Le second cas a été réalisé afin de simuler le shoaling d’une houle linéaire avec une grande variation du fond. De très bons accords sont obtenus avec la solution analytique et avec les résultats numériques présentés dans Bingham et Agnon [21], Guyenne et Nicholls [80]. Nous sommes donc confiants dans la capacité des deux méthodes à traiter des applications plus réalistes qui seront l’objet de la prochaine et dernière partie.



Cinquième partie

**Applications**





## Chapitre V.1

# Application 2D : marche immergée

L'objectif de cette partie est de valider les approches employées dans le cas d'une bathymétrie se rapprochant d'un fond réel. Nous utilisons dans un premier temps un cas bidimensionnel qui a été très étudié expérimentalement et numériquement. Ce cas d'application considère la transformation d'une houle monochromatique non-linéaire se propageant au-dessus d'une barre immergée. Lorsque la houle arrive sur la pente amont de la marche, elle devient très cambrée et les interactions non-linéaires génèrent de hautes harmoniques. Ces hautes harmoniques, composées d'ondes libres et d'ondes liées, modifient fortement la forme des vagues au passage de la marche et produisent un comportement irrégulier derrière la marche. Ce cas test a été utilisé par de nombreux auteurs (notamment Bingham et Zhang [23] et Guyenne et Nicholls [80]) pour caractériser leurs modèles non-linéaires de propagation en fond variable car il requiert la simulation précise de la houle en grande et faible profondeur. Le premier cas test présente une marche avec des pentes faibles tandis que le deuxième s'attarde sur des pentes plus fortes. Le cas pentes douces a également fait l'objet d'une publication en journal (Gouin *et al.* [74]) et de présentations en conférence (Gouin *et al.* [72] et Gouin *et al.* [71]).

### V.1.1 Pentés faibles

Ce cas test a été étudié expérimentalement par Dingemans [43], Luth *et al.* [100] et numériquement par Guyenne et Nicholls [80], Bingham et Zhang [23] et bien d'autres. Avec une profondeur de référence  $h_0$  fixée à 0.4m, la variation du fond  $\beta$  (en mètres) est définie comme suit :

$$\beta(x) = \begin{cases} 0.05(x - 6) & \text{pour } 6\text{m} \leq x \leq 12\text{m}, \\ 0.3 & \text{pour } 12\text{m} \leq x \leq 14\text{m}, \\ 0.3 - 0.1(x - 14) & \text{pour } 14\text{m} \leq x \leq 17\text{m}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{V.1.1})$$

La variation totale du fond  $h(x) = h_0 - \beta$  est représentée sur la figure V.1.1. Ce cas est à l'échelle 1/2 par rapport aux expériences réalisées par Dingemans

[43], comme dans Guyenne et Nicholls [80] et Bingham et Zhang [23]. La similitude de Froude est alors respectée. Les pentes amont et aval sont respectivement de 5% et 10%, ce qui correspond à des ordres de grandeurs classiques observés sur les plateaux continentaux. En effet, afin de voir si ce cas test est réaliste, nous avons comparé les données au site du banc de Guérande où les pentes sont inférieures à 10%, avec une profondeur d'eau comprise entre 13 et 20m :

- pour  $h = 13\text{m}$  :
  - $T = 8.5\text{s}$  (période de houle la plus probable) :  $kh = 0.97$
  - $T = 20\text{s}$  (tempête) :  $kh = 0.37$
- pour  $h = 20\text{m}$  :
  - $T = 8.5\text{s}$  (période de houle la plus probable) :  $kh = 1.29$
  - $T = 20\text{s}$  (tempête) :  $kh = 0.46$

Pour notre cas test,  $kh$  est compris entre 0.32 et 0.67, les cas les plus extrêmes en terme de  $kh$  seront donc simulés.

Si l'on utilise  $h_0 = 0.4\text{m}$  comme profondeur moyenne, la variation relative maximum du fond (au dessus de la marche) est de  $\frac{\beta}{h_0} = 0.75$ . Afin de réduire cette variation maximum du fond on choisit alors comme profondeur moyenne  $h_m = 0.25\text{m}$  ce qui nous donne  $\frac{\beta}{h_m} = 0.6$ .

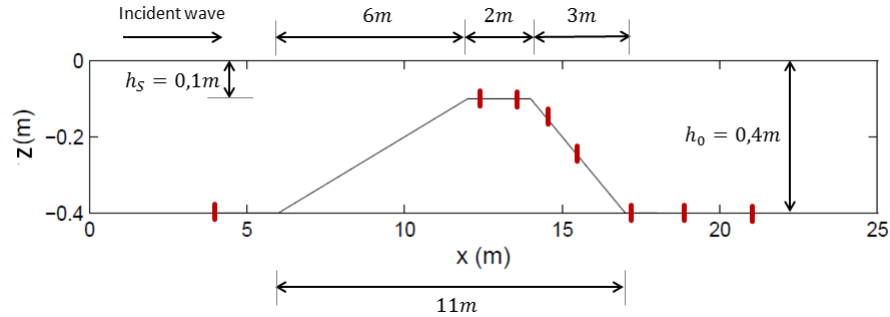


FIGURE V.1.1 – Représentation de la marche immergée comme décrit dans Dingemans [43]. En rouge : localisation des sondes.

L'initialisation est réalisée avec une houle régulière solution de Rienecker et Fenton [117] avec les paramètres suivants :  $T_0 = 2.02$  s,  $a_0 = 0.01$  m,  $h_0 = 0.4$  m. Nous avons donc :  $k_0 h_0 = 0.67$ ,  $k_0 a_0 = 0.017$  et  $\lambda_0 = 3.73$  m. Des zones de relaxation simple (telles que définies au paragraphe III.1.1.1) sont utilisées aux deux extrémités du domaine (3 longueurs d'onde chacune). On a testé que l'on obtenait les mêmes résultats si l'on utilise des zones où l'on fait tendre la solution vers zéro aux deux extrémités.

Afin d'atteindre un état stationnaire, il est nécessaire de s'assurer auparavant que la houle a eu le temps de se propager sur tout le domaine. Pour cela, il est nécessaire de calculer la vitesse de groupe. Pour  $k_0 h_0 = 0.67$  (correspond à la profondeur relative la plus grande), cette vitesse de groupe vaut  $C_{g_0} = 1.62\text{m/s}$ .

Pour  $k_1 h_1 = 0.32$  (correspond à la profondeur relative la plus faible au-dessus de la marche), la vitesse de groupe vaut alors  $C_{g_1} = 0.94\text{m/s}$ .  $k_1$  est calculé à partir de la relation de dispersion pour la profondeur  $h_1$ . Nous supposons que  $C_g$  est égal à  $C_{g_1}$  sur toute la zone d'étude pour estimer le temps de propagation (en réalité la moyenne de  $C_g$  sera plus élevée). Le domaine des zones de relaxation représentant  $X_0 = 6\lambda_0$  et le domaine d'étude  $X_1 = 7\lambda_0$ , le temps de propagation pour parcourir le domaine sera donc inférieur à  $t = X_0/C_{g_0} + X_1/C_{g_1} = 41.5\text{s}$ . Nous analyserons donc les résultats à partir de  $t = 42\text{s}$ .

Avec les deux méthodes itératives l'état convergé est atteint avec un nombre de modes par longueur d'onde  $N = 30/\lambda_0$ . Cette valeur élevée du nombre de modes par longueur d'onde s'explique par le fait que lorsque la profondeur diminue, la longueur d'onde diminue également, et donc une discrétisation suffisamment fine du domaine est nécessaire. La méthode originelle nécessite un ordre HOS  $M = 7$ . En effet, un très grand ordre de non-linéarité est requis pour prendre en compte le fond car son influence est très importante comparée à l'influence de la surface libre (la cambrure est faible). Ainsi, la méthode améliorée requiert seulement d'un ordre  $M = 2$  sur la surface libre et d'un ordre  $M_b = 6$  sur le fond.

Quand l'état stationnaire et la convergence sont atteints, les mêmes résultats sont obtenus avec les deux méthodes. Nous présenterons donc ci-dessous uniquement les résultats obtenus avec la méthode originelle.

### V.1.1.1 Sondes temporelles

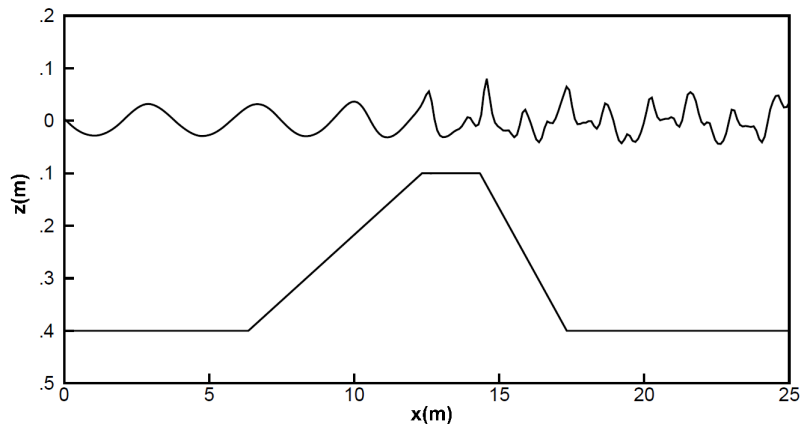


FIGURE V.1.2 – Instantané de l'élévation de surface libre à l'état stationnaire (l'élévation est multipliée par un facteur 3 selon l'axe  $z$ ).

Pour les conditions de houle incidente  $(T_0, a_0) = (2.02\text{s}, 0.01\text{m})$ , un instantané de l'élévation de surface libre (multiplié par un facteur 3 selon l'axe  $z$ ) est présenté sur la Fig.V.1.2 et les élévations de surface libre en fonction du temps relevées pour différentes sondes sont visibles sur la Fig.V.1.3. Les sondes sont localisées en  $x = 4\text{m}$ ,  $x = 12.5\text{m}$ ,  $x = 13.5\text{m}$ ,  $x = 14.5\text{m}$ ,  $x = 15.7\text{m}$ ,  $x = 17.3\text{m}$ ,  $x = 19\text{m}$  et  $x = 21\text{m}$  comme présentée sur la Fig.V.1.1. Les données expérimentales

tales viennent de Dingemans [43]. Le calage temporel a été réalisé en se basant sur la sonde à  $x = 13.5\text{m}$ . La comparaison entre nos résultats numériques et les données expérimentales est très bonne, et similaire aux résultats obtenus avec d'autres méthodes numériques (c.f. Guyenne et Nicholls [80], Bingham et Zhang [23]). Les résultats sont également très proches de ceux obtenus par Benoit *et al.* [16] et Raoult *et al.* [116] avec le code Misthyc même si leurs résultats sont plus précis au niveau de la sonde à  $x = 19\text{m}$ .

En particulier, l'asymétrie de la houle arrivant sur la marche et la génération de hautes harmoniques sont correctement reproduites. On peut remarquer l'existence de deux pics supplémentaires par période en plus du pic principal sur les sondes temporelles. Ces deux pics deviennent de plus en plus importants lorsque l'on se déplace dans le sens des  $x$  positifs. De plus, ces deux pics ont chacun leur vitesse de propagation propre car ils se déphasent en espace par rapport au fondamental. Ces hautes harmoniques sont donc des ondes libres qui sont générées par le passage au dessus de la barre immergée.

Ainsi, à la fois les non-linéarités de la surface libre et du fond sont résolues précisément et on est confiant dans la capacité de nos modèles à traiter précisément de larges variations du fond.

### V.1.1.2 Analyse harmonique

Afin d'analyser les résultats plus en détails, une analyse harmonique est réalisée comme présentée dans Bingham et Zhang [23]. Nos résultats sont visibles sur la Fig.V.1.4 où l'amplitude (normalisée par l'amplitude incidente) des cinq premières harmoniques du champ de vagues est présentée en fonction de la position  $x$ . Comme attendu, on observe distinctement la génération de hautes harmoniques au-dessus de la marche dues aux interactions fortement non-linéaires engendrées par le changement de profondeur. Derrière la marche, on remarque que la deuxième harmonique devient plus importante que la première. De plus, la troisième harmonique est également très présente, ce qui laisse bien suggérer 3 pics par période comme nous l'avons vu précédemment en analysant les sondes temporelles. La comparaison de toutes les harmoniques avec les résultats expérimentaux est bonne jusqu'à la 5ème harmonique, les effets non-linéaires dus au fond sont donc résolus correctement. Les résultats sont aussi très proches de ceux présentés par Bingham et Zhang [23], surtout au niveau des petites différences observées sur la première harmonique. Le modèle de Raoult *et al.* [116] permet d'atteindre une précision supérieure sur la première harmonique. Les oscillations observées sont dues à l'interaction entre la houle incidente et la houle réfléchie sur la première pente de la marche.

On peut également noter que même si la variation relative du fond est importante ( $\frac{\beta}{h_m} = 60\%$ ), la cambrure étant faible ( $ka = 0.017$ ) et la variation du fond n'étant pas présente sur tout le domaine d'étude, le modèle est capable de simuler précisément ce cas. Si l'on s'intéresse au temps de calcul avec un anti-repliement intermédiaire ( $N_d = \frac{2+1}{2}N$ ), on observe que la méthode originelle est plus efficace que la méthode améliorée. En effet, le temps CPU nécessaire pour simuler une période de houle est de 0.31s avec la méthode améliorée ( $M = 2$  et  $M_b = 6$ ) et 0.26s avec la méthode originelle ( $M = 7$ ). On obtient les mêmes résultats avec un anti-repliement complet ( $N_d = \frac{\text{Max}(M, M_b)+1}{2}N$ ) mais on a alors un temps de calcul pour simuler une période qui est de 0.5s avec la méthode améliorée et de 0.36s avec la méthode originelle, pour des résultats identiques

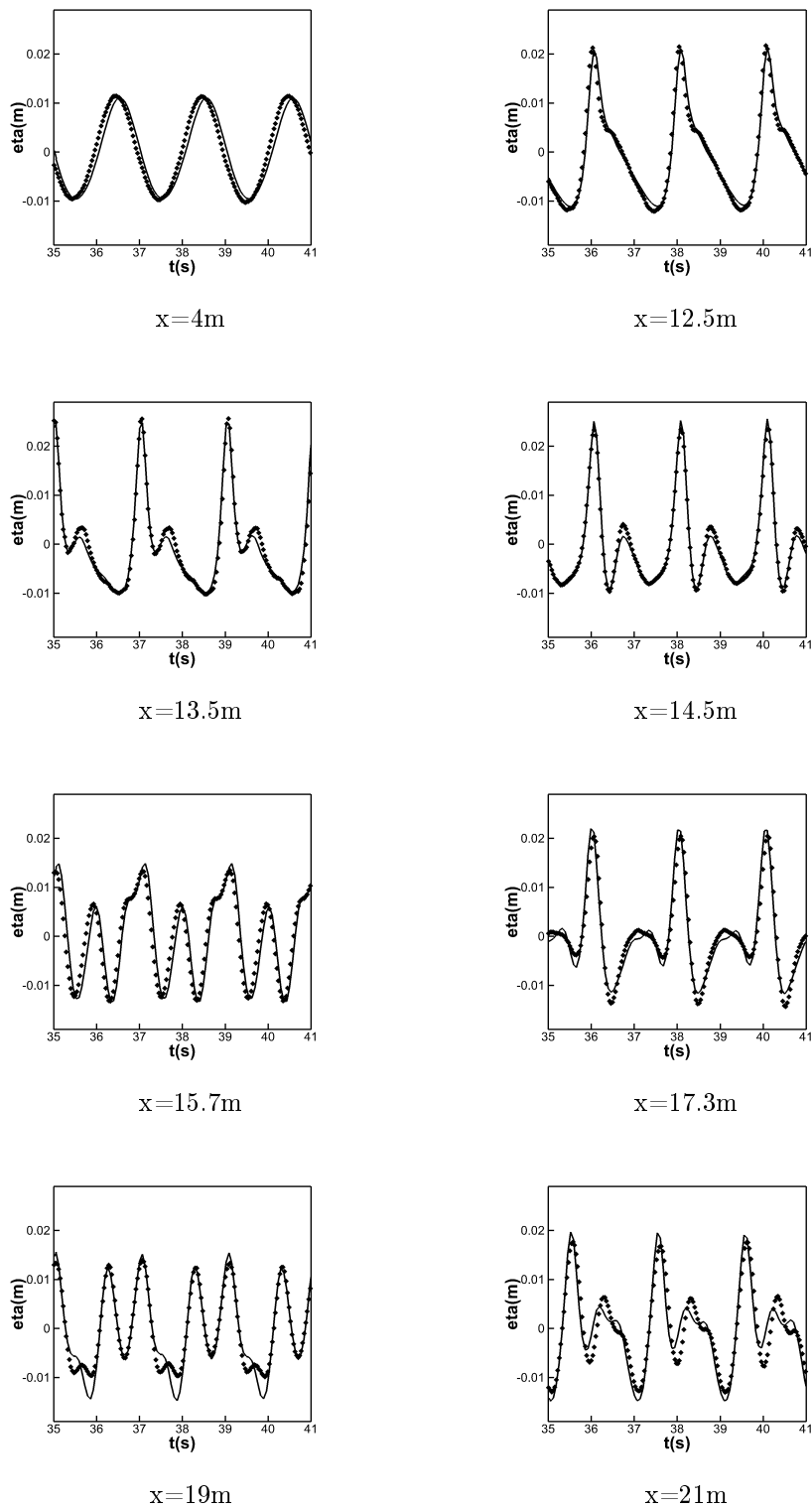


FIGURE V.1.3 – Élévations de surface libre mesurées et modélisées à 8 positions différentes. Traits pleins : simulations. Pointillés : mesures expérimentales (Dingemans [43]).

sur l'analyse harmonique. Ces résultats ont été obtenus en simulant 500 périodes de houle. En 2D, les deux méthodes sont donc très efficaces et plus rapides que le temps de propagation réel.

Les non-linéarités du fond sont très importantes par rapport aux non-linéarités de surface libre, la méthode originelle est donc plus efficace, comme mentionné au paragraphe II.2.4. Numériquement, on a un facteur 1.3 entre les deux méthodes avec le traitement anti-repliement complet et 1.2 avec le traitement intermédiaire.

Théoriquement, si l'on prend en compte un traitement anti-repliement intermédiaire, on peut calculer le nombre de FFTs requis par la méthode originelle (c.f. Eq. (II.2.44) et Eq. (II.2.46)) et par la méthode améliorée (c.f. Eq. (II.2.45) et Eq. (II.2.46)). De plus, il faut prendre en compte le nombre de points déaliasés  $N_d$  utilisés avec chacune des méthodes car le temps de calcul est aussi proportionnel à  $N_d \log(N_d)$  (comme mentionné au chapitre IV.1.3). Pour la méthode originelle on utilise pour ce cas test  $N_d = \frac{7+1}{2}N = 4N$  points alors qu'on en utilise  $N_d = \frac{6+1}{2}N = 3.5N$  avec la méthode améliorée. En prenant en compte tous ces paramètres, le rapport théorique avec un traitement intermédiaire est de 1.4 entre les deux méthodes (la méthode améliorée est 1.4 fois plus lente que la méthode originelle). En faisant la même analyse pour le traitement complet, on obtient un rapport théorique de 1.5 entre les deux méthodes. Les résultats numériques sont donc assez cohérents avec les estimations théoriques faites au paragraphe II.2.4.

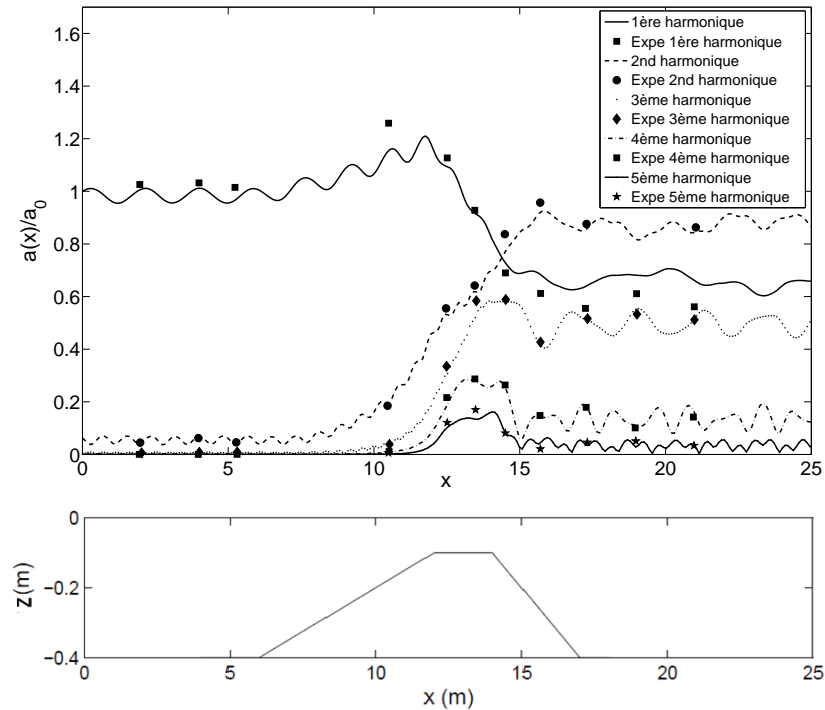


FIGURE V.1.4 – Analyse harmonique - pentes douces.  $N = 30/\lambda_0$ ,  $M = 7$ .

## V.1.2 Pentes fortes

On applique maintenant les deux méthodes HOS fond variable à une marche immergée présentant de plus fortes pentes amont et aval, comme décrit dans l'expérience de Ohyama *et al.* [110]. Dans ce cas, la valeur de la pente est de 50% en amont et en aval : cela va donc nous permettre de vérifier la zone de validité de nos modèles concernant les gradients du fond. Ce cas test expérimental a été utilisé par Shen [122], Gobbi et Kirby [70], Benxia et Xiping [17] afin de valider leurs méthodes numériques. Ce cas a aussi permis de comparer nos résultats à ceux obtenus à partir de codes CFD utilisés dans le cadre du projet Hysmar de l'IRT Jules Verne (Berhault *et al.* [18]).

La variation du fond (en mètres) est représentée sur la Fig.V.1.5 et est définie pour  $h_0 = 0.5\text{m}$  par :

$$\beta(x) = \begin{cases} 0.5(x - 2.6) & \text{pour } 2.6\text{m} \leq x \leq 3.3\text{m}, \\ 0.35 & \text{pour } 3.3\text{m} \leq x \leq 4.8\text{m}, \\ 0.35 - 0.5(x - 4.8) & \text{pour } 4.8\text{m} \leq x \leq 5.5\text{m}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{V.1.2})$$

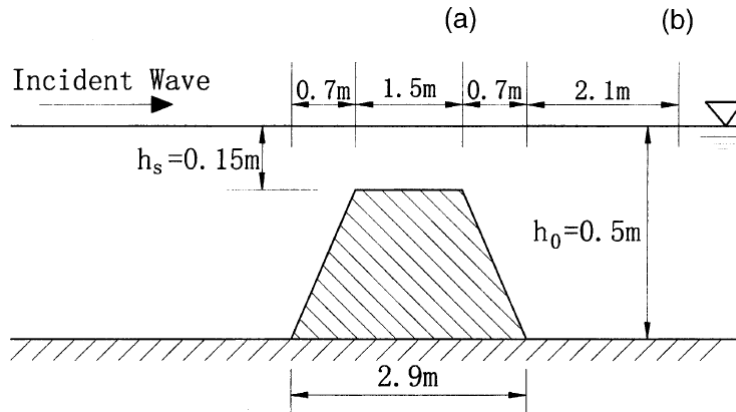


FIGURE V.1.5 – Schéma de la marche immergée comme décrit dans l'expérience de Ohyama *et al.* [110].

Si l'on utilise  $h_0 = 0.5\text{m}$  comme profondeur moyenne, la variation relative maximum du fond (au dessus de la marche) est de  $\frac{\beta}{h_0} = 0.7$ . Afin de réduire cette variation maximum du fond on choisit  $h_m = 0.325\text{m}$  ce qui nous donne  $\frac{\beta}{h_m} = 0.54$ .

$\eta$  et  $\tilde{\phi}$  sont initialisés avec la solution de Rienecker et Fenton [117] de cambrure  $k_0 a_0 = 0.039$  et de profondeur relative  $k_0 h_0 = 0.77$ . La période est fixée à 2.01s ce qui nous donne une amplitude  $a_0 = 0.025\text{m}$ . Les mêmes zones de relaxation que précédemment sont utilisées (génération sur 3 longueurs d'onde et absorption sur 3 longueurs d'onde).

Afin d'atteindre un état stationnaire, il faut s'assurer auparavant que la houle a eu le temps de se propager sur tout le domaine, comme dans le cas pentes



faibles. Pour  $k_0 h_0 = 0.77$  (correspond à la profondeur relative la plus grande), la vitesse de groupe vaut  $C_{g_0} = 1.72\text{m/s}$ . Pour  $k_1 h_S = 0.40$  (correspond à la profondeur relative la plus faible au-dessus de la marche), la vitesse de groupe vaut  $C_{g_1} = 1.13\text{m/s}$ . Nous supposons comme précédemment que  $C_g$  est égal à  $C_{g_1}$  sur toute la zone d'étude pour estimer le temps de propagation. Le domaine des zones représentant  $X_0 = 6$  longueurs d'onde et le domaine d'étude  $X_1 = 4$  longueurs d'onde, le temps de propagation pour parcourir tout le domaine est donc borné par  $t = X_0/C_{g_0} + X_1/C_{g_1} = 29\text{s}$ . Nous analyserons donc les résultats à partir de  $t = 30\text{s}$ .

Les simulations sont alors réalisées jusqu'à ce que l'état stationnaire et convergé soit atteint avec un nombre de modes par longueur d'onde  $N = 40/\lambda_0$  et un ordre HOS  $M = 5$ . La méthode améliorée nécessite un ordre  $M = 3$  sur la surface libre et un ordre  $M_b = 4$  sur le fond pour atteindre l'état convergé. Ce cas avec de fortes pentes nécessite donc un ordre de non-linéarité plus faible sur le fond que le cas faibles pentes. Cela s'explique probablement par le fait que les profondeurs relatives minimum et maximum sont plus importantes ici ( $k_0 h_0 = 0.77$  et  $k_1 h_S = 0.40$ ) que dans le cas précédent ( $k_0 h_0 = 0.67$  et  $k_1 h_1 = 0.32$ ).

Comme précédemment, les résultats sont identiques avec les deux méthodes donc on ne présentera que les résultats obtenus avec la méthode originelle. Si l'on s'intéresse au temps de calcul avec un anti-repliement complet ( $N_d = \frac{\text{Max}(M, M_b) + 1}{2} N$ ), on observe que la méthode originelle est plus efficace. En effet, le temps CPU nécessaire pour simuler une période est de  $0.49\text{s}$  avec la méthode améliorée et  $0.35\text{s}$  avec la méthode originelle. Il y a donc un rapport 1.4 entre les deux méthodes. Ces résultats ont été obtenus en simulant 500 périodes de houle. Pour ce cas à plus fortes pentes, les deux méthodes sont également plus rapides que le temps de propagation réel.

Théoriquement, avec un traitement anti-repliement complet, le rapport théorique entre les deux méthodes est de 2 (c.f. Eq.(II.2.44), Eq.(II.2.45), Eq.(II.2.47) et chapitre IV.1.3). Les résultats numériques sont donc un peu éloignés des estimations théoriques et il faudrait peut-être réaliser une étude sur davantage de périodes de houle.

Pour les conditions incidentes imposées  $(T_0, a_0) = (2.01\text{s}, 0.025\text{m})$ , les élévations de surface libre en fonction du temps aux sondes  $a$  (au-dessus de la marche) et  $b$  (après la marche) (voir Fig.V.1.5 pour la localisation) sont visibles sur la Fig.V.1.6. Les données expérimentales sont disponibles dans Ohyama *et al.* [110].

Pour ce cas plus à plus fortes pentes, la comparaison entre nos résultats numériques et les données expérimentales est également bonne même si on observe des différences plus importantes que le cas précédent par rapport aux mesures. Si l'on se compare au cas pentes faibles, la variation maximum du fond est presque identique ( $\frac{\beta}{h_m} = 54\%$ ) mais le gradient est beaucoup plus important. Les fortes pentes, associées à de fortes variations du fond, sont donc plus difficiles à simuler avec le modèle HOS proposé. Cependant, dans cette configuration extrême, on obtient tout de même des résultats relativement précis sur l'élévation de surface libre.

On remarque notamment l'apparition d'un deuxième et d'un troisième pics

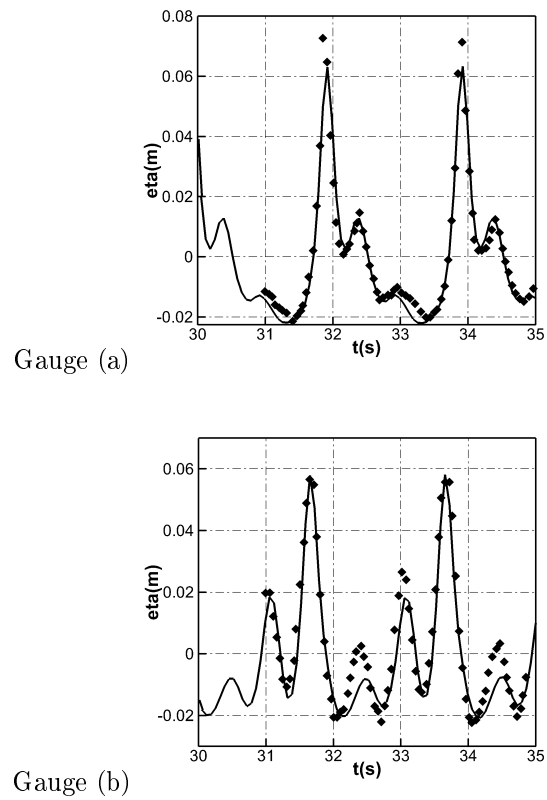


FIGURE V.1.6 – Élévations de surface libre mesurées et modélisées à 2 positions différentes. Traits pleins : simulations. Pointillés : mesures expérimentales. Ohyama *et al.* [110].

par période au passage de la marche, qui s'accroissent derrière la marche. Si l'on s'intéresse à l'analyse harmonique (présenté sur la Fig.V.1.7), on observe une très bonne concordance avec les données expérimentales et de fortes réflexions sur la pente amont de la marche dans les cas numérique et expérimental (caractérisées par les oscillations des harmoniques). Il faut noter que numériquement les zones de relaxation permettent d'absorber la houle réfléchie sur la pente amont alors qu'expérimentalement la houle n'est surement pas absorbée. Nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus par Gobbi et Kirby [70] avec le modèle FN4 qui est un modèle Boussinesq permettant la prise en compte du fond variable. On observe ainsi sur la Fig.V.1.8 que le modèle HOS est plus proche des résultats expérimentaux sur les première et troisième harmoniques. Le modèle FN4 semble notamment induire un petit déphasage sur la première harmonique. Pour la troisième harmonique, les résultats sont similaires et pour la quatrième, le modèle FN4 semble donner de meilleurs résultats. En effet, pour cette harmonique on constate une importante réflexion derrière la marche avec le modèle HOS, caractérisée par des oscillations plus importantes sur la Fig.V.1.8.

De plus, on s'aperçoit que dans ce cas la deuxième et troisième harmoniques sont aussi importantes que la première derrière la marche. Cela signifie donc que les fortes pentes entraînent un comportement fortement non-linéaire après la marche et qu'une résolution fortement non-linéaire est nécessaire.

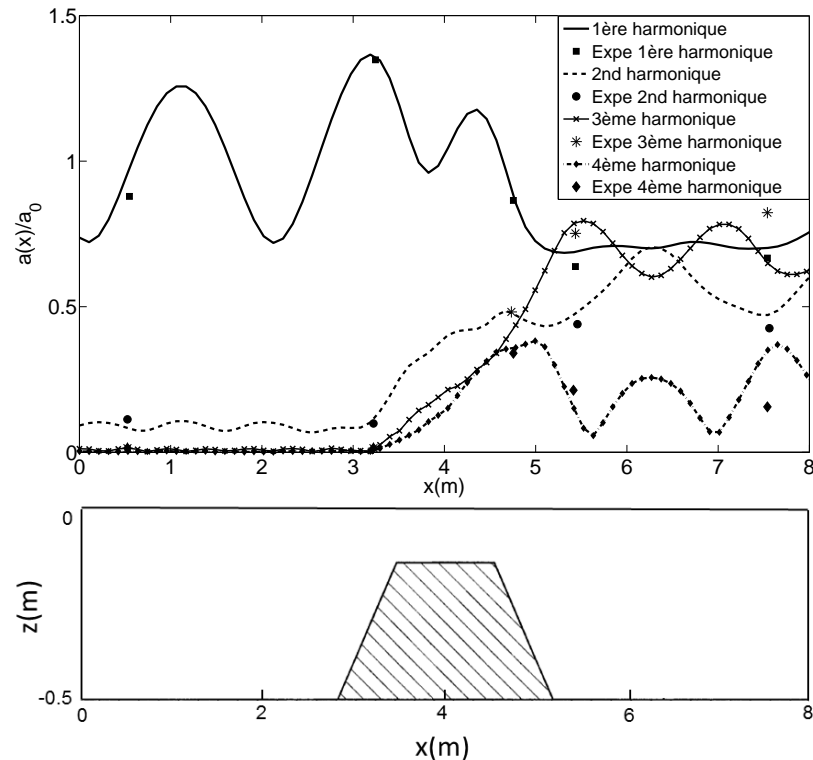


FIGURE V.1.7 – Analyse harmonique - pentes fortes.  $N = 40/\lambda_0$ ,  $M = 5$ .

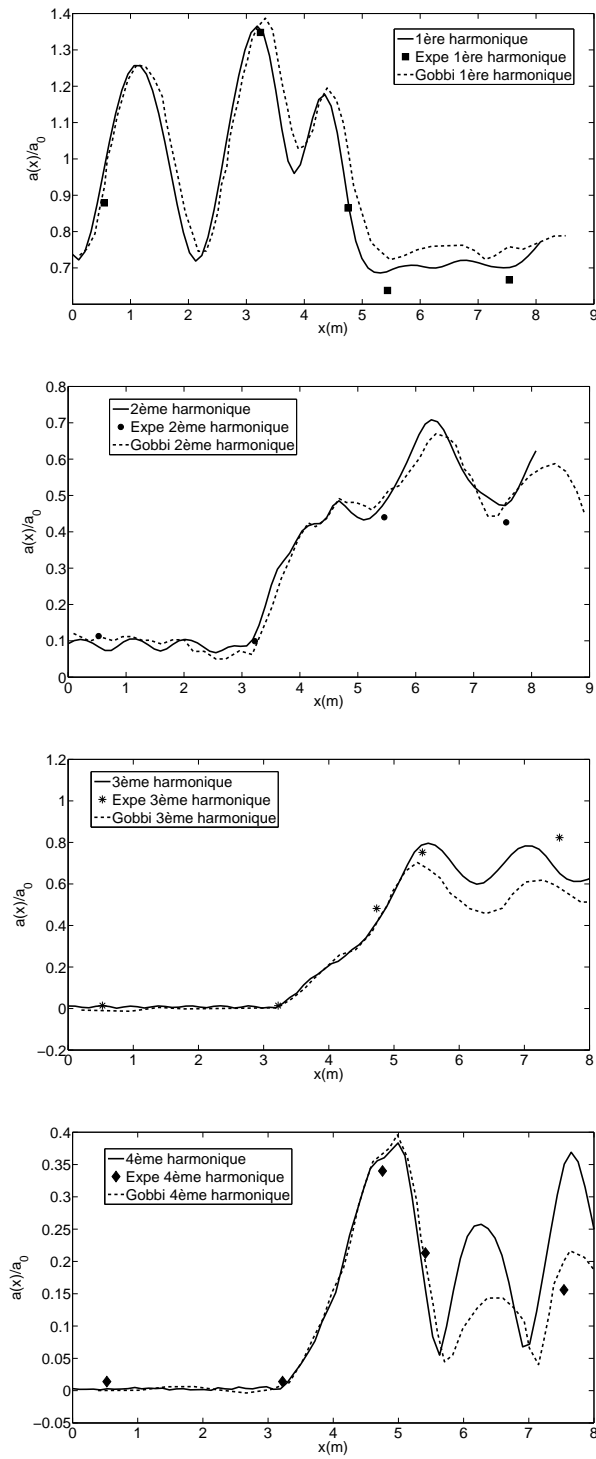


FIGURE V.1.8 – Analyse harmonique - pentes fortes. Comparaisons au modèle FN4 de Gobbi et Kirby [70].

### V.1.3 Conclusion - marche immergée

Nous avons donc vu que la propagation de houle sur une marche immergée conduit à la formation de hautes harmoniques lorsque la houle se propage sur la pente amont de la marche. La houle devient alors plus cambrée, ce qui est caractéristique du phénomène de shoaling. Ces hautes harmoniques sont par la suite relâchées sous forme d'ondes libres, ce qui produit un comportement irrégulier après la marche.

Ce cas de propagation bidimensionnelle a donc permis de montrer un vaste champ d'application de la méthode en termes de variations de fond et de gradients modélisables. En effet, les deux méthodes apparaissent capables de modéliser la propagation de la houle avec des variations et des gradients du fond importants dans des profondeurs d'eau relatives faibles. Seule la montée en cambrure devra être investiguée, mais nous sommes pour le moment limités par le non-déferlement.

Le modèle HOS fond variable a donc été validé en deux dimensions. Nous avons montré que le temps de calcul des deux méthodes était très faible et inférieur au temps réel de propagation pour ces cas bidimensionnels. Il est maintenant intéressant de regarder le comportement du modèle sur des cas tridimensionnels. C'est ce que nous allons étudier dans le prochain chapitre.

## Chapitre V.2

# Application 3D : ellipse immergée

On étudie maintenant un cas tridimensionnel : la transformation d'une houle se propageant au-dessus d'une ellipse immergée. Une focalisation de la houle derrière l'ellipse est observée expérimentalement comme présenté sur la Fig. V.2.3, et les conditions d'expérimentation sont disponibles dans Vincent et Briggs [132]. Cette expérience a été réalisée auparavant par Berkhoff *et al.* [19] sur un fond légèrement incliné. Les résultats de Berkhoff *et al.* [19] ont été utilisés par de nombreux auteurs pour valider des modèles numériques, et notamment par Engsig-Karup [52]. L'expérience de Vincent et Briggs [132] a été moins utilisée, mais on trouve tout de même des applications, par exemple dans Belibassakis *et al.* [14] avec des cas de houles irrégulières.

Nous allons présenter dans ce chapitre plusieurs configurations de houle incidente disponibles dans Vincent et Briggs [132]. Les deux premiers cas reproduisent une houle régulière, le suivant une houle irrégulière unidirectionnelle et le dernier une houle irrégulière directionnelle. Les premiers résultats ont été présentés dans Gouin *et al.* [71].

Les simulations numériques seront comparées aux données expérimentales (disponibles dans le rapport de Briggs [29]) et aux simulations obtenues avec le code différences finies *OceanWave3D*<sup>1</sup> développé à DTU et pris en main au cours de la thèse dans le cadre d'un séjour financé par le LabexMer<sup>2</sup>.

### V.2.1 Description de l'expérience

Le fond elliptique  $\beta$  est défini dans Vincent et Briggs [132] par :

$$\beta(x, y) = -0.4572 + 0.7620 \left[ 1 - \left( \frac{x - x_0}{3.81} \right)^2 - \left( \frac{y - y_0}{4.95} \right)^2 \right]^{0.5} \quad (\text{V.2.1})$$

avec  $(x_0, y_0) = (6.1\text{m}, 13.72\text{m})$  le centre de l'ellipse.

---

1. <http://www2.imm.dtu.dk/~apek/OceanWave3D/>  
2. <http://www.labexmer.eu/fr>

La variation totale du fond vaut alors  $h(x) = h_0 - \beta$ . Une vue du domaine tel que défini par Vincent et Briggs [132] avec  $L_x = 25\text{m}$ ,  $L_y = 30\text{m}$ , et  $h_0 = 0.4572\text{m}$  est visible sur la Fig.V.2.1.

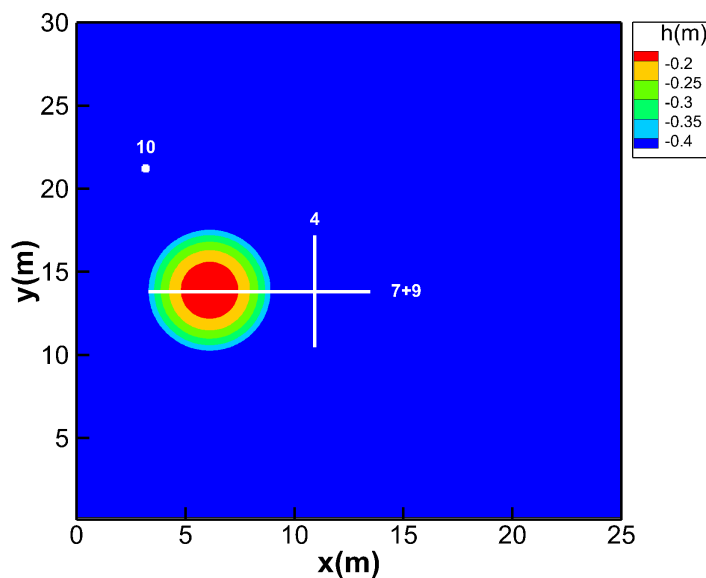


FIGURE V.2.1 – Définition de l'ellipse immergée. Traits blancs : localisation des transects 4 et 7+9. Sonde 10 : sonde de référence utilisée par Vincent et Briggs [132]

Des sondes sont placées à différents endroits le long des transects 4 (perpendiculairement à la direction de propagation) et 7 et 9 (parallèlement à la direction de propagation) (voir Fig.V.2.1). Afin de comparer nos résultats aux données expérimentales, une analyse vague-par-vague en zero-crossing sera réalisée. Cette analyse permet de s'intéresser aux statistiques de vagues individuelles définies par l'intervalle de temps entre deux moments successifs, où, à un point de mesure donné, la vague traverse le niveau moyen en descendant (zero down-crossing) ou en montant (zero up-crossing). On s'intéressera alors à la quantité  $H_{1/3}$ .

## V.2.2 Mise en oeuvre

Pour les cas de houle régulière, on choisit comme longueur d'onde de référence  $\lambda_0$ , et en houle irrégulière on utilise  $\lambda_p$ . Des zones de relaxation sont utilisées dans la direction de propagation  $x$ . Nous avons utilisé deux types de zones, afin de voir l'impact sur les résultats. Pour les zones où la solution imposée est non-nulle (voir Fig.V.2.2), une zone de génération de 3 longueurs d'onde est imposée à gauche du domaine (selon l'axe  $x$ ) et une zone d'absorption de

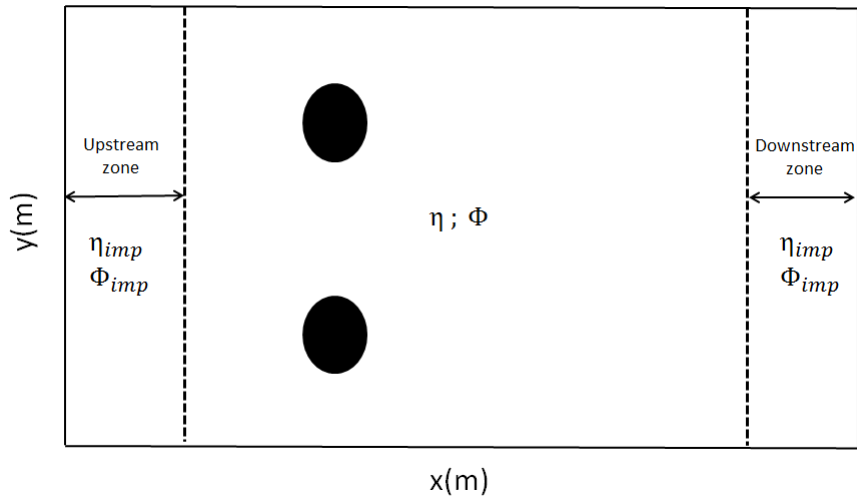


FIGURE V.2.2 – Représentation du domaine de calcul avec des zones de relaxation selon  $x$  et des conditions de réflexion selon  $y$ .

3 longueurs d'onde est utilisée à droite du domaine (le domaine total fait alors 18 longueurs d'onde). Avec cette méthode de relaxation, on utilise également la méthode de Dommermuth [45] permettant de faire apparaître progressivement les termes non-linéaires à la surface libre et au fond telle que décrite dans le paragraphe II.1.6, avec  $T_a = 10T_p$  et  $n = 4$ .

Lorsque l'on impose une solution nulle aux extrémités du domaine dans la direction de propagation, le domaine total représente également 18 longueurs d'onde. La première zone d'absorption est de 1 longueur d'onde, la zone de génération de 1 longueur d'onde, et la deuxième zone d'absorption est de 4 longueurs d'onde, comme représenté sur la Fig.V.2.3.

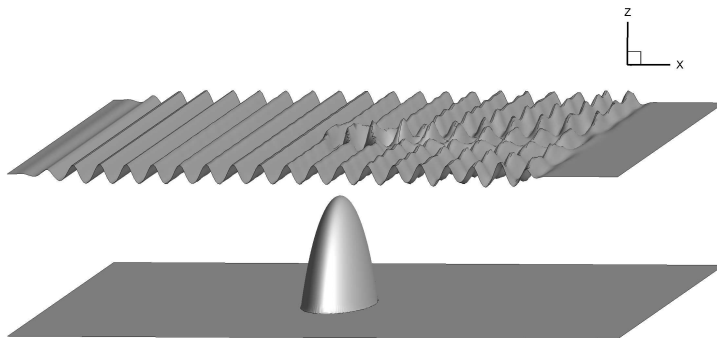


FIGURE V.2.3 – Représentation de l'élévation de surface libre au-dessus de l'ellipse (échelle non respectée)- Relaxation avec absorption.



De plus, on peut remarquer que l'ellipse n'est pas centrée dans la direction  $y$  (le centre de l'ellipse se situe en  $y_0 = 13.72\text{m}$  et la largeur du domaine est  $L_y = 30\text{m}$ ). Afin de reproduire le cas expérimental d'une ellipse décentrée dans la direction transverse, nous avons modifié la bathymétrie en prenant la symétrie de l'ellipse par rapport à  $L_y/2$  (tel que mentionné au paragraphe III.2.2.3) afin de reproduire les conditions de réflexion sur les murs du bassin. Une vue de dessus du domaine de calcul est représentée sur la Fig.V.2.2.

Afin d'atteindre l'état stationnaire, il est nécessaire de s'assurer auparavant que la houle a eu le temps de se propager sur tout le domaine, dans la direction de propagation  $x$ . Pour les cas de houle régulière (*M1* et *M2* décrits ci-dessous), lorsque  $k_0h_0 = 1.27$  (correspond à la profondeur relative la plus grande pour tous les cas traités ci-dessous), cette vitesse de groupe vaut  $C_{g_0} = 1.22\text{m/s}$ . Pour  $k_1h_1 = 0.64$  (correspond à la profondeur relative la plus faible au-dessus de l'ellipse et au nombre d'onde correspondant), la vitesse de groupe vaut alors  $C_{g_1} = 1.02\text{m/s}$ . Nous supposons comme précédemment que  $C_g$  est égal à  $C_{g_1}$  au-dessus de l'ellipse pour estimer le temps de propagation. Le temps de propagation pour parcourir tout le domaine sera donc inférieur à  $t = 34\text{s}$ . Nous analyserons donc les résultats à partir de  $t = 40\text{s}$  pour les cas de houle régulière.

Pour les cas de houle irrégulière (*U3* et *N3* présentés ci-dessous), il faut calculer le temps mis par les plus hautes fréquences du spectre pour parcourir tout le domaine. Pour ces 2 cas, les plus hautes fréquences transportant de l'énergie sont autour de  $f = 1.5\text{Hz}$ . La période associée est  $T = 0.67\text{s}$ . La profondeur relative correspondante est alors  $k_0h_0 = 4.14$  et la vitesse de groupe vaut  $C_{g_0} = 0.61\text{m/s}$ . Si l'on considère la profondeur relative la plus faible ( $k_1h_1 = 1.52$ ) la vitesse de groupe est sensiblement la même ( $C_{g_1} = 0.52\text{m/s}$ ). Le temps mis par les plus hautes fréquences pour se propager sur le domaine de 18 longueurs d'onde est alors  $t = 77\text{s}$ . Nous analyserons donc les résultats à partir de  $t = 80\text{s}$  en houle irrégulière.

### V.2.3 Houle régulière unidirectionnelle - cas *M1*

On utilise ici les résultats de la première expérience (appelée *M1* dans Vincent et Briggs [132]) et décrite ci-dessous.

Une houle monochromatique et unidirectionnelle est propagée dans la direction  $x$ . Afin de se comparer aux résultats expérimentaux, la houle régulière est générée grâce à une solution de Rienecker et Fenton [117] de hauteur  $H_0 = 0.0465\text{m}$  et de profondeur relative  $k_0h_0 = 1.27$ . La période est fixée à  $T_0 = 1.3\text{s}$  et la cambrure vaut alors  $k_0a_0 = 0.065$ . Le lecteur remarquera que la hauteur imposée dans Vincent et Briggs [132] est de  $H_0 = 0.055\text{m}$  pour le cas *M1*. Néanmoins, comme décrit dans Lynett et Liu [101], il est nécessaire de recalculer la valeur de l'amplitude de la houle incidente pour se confronter aux résultats expérimentaux, d'où la valeur choisie de  $0.0465\text{m}$ . Pour cela, nous avons vérifié que l'on obtenait la même amplitude que les essais sur une sonde de référence placée en amont de l'ellipse dans le domaine non-perturbé (sonde 10 de la Fig.V.2.1) à l'aide d'une analyse vague par vague.

### V.2.3.1 Résultats obtenus avec la méthode HOS

La convergence est atteinte avec un nombre de modes par longueurs d'onde ( $N_x = 13/\lambda_0$ ;  $N_y = 5/\lambda_0$ ) soient ( $n_1 = 256$ ,  $n_2 = 128$ ) et un ordre HOS  $M = 5$  pour la méthode originelle. La méthode améliorée nécessite un ordre  $M = 3$  sur la surface libre et un ordre  $M_b = 4$  sur le fond. Sur un Intel(R) Xeon(R) 2.50GHz avec 16.0 Go RAM, le temps CPU par période de houle est de 15s pour la méthode originelle, et de 21s pour la méthode améliorée. Ces valeurs de temps de calcul faibles montrent l'efficacité de ces méthodes en 3D. Dans ce cas, l'utilisation de la méthode améliorée n'est pas justifiée car les ordres de non-linéarité sur le fond et sur la surface libre sont proches. Les deux méthodes avec les paramètres convergés conduisant aux mêmes résultats, nous ne présenterons donc par la suite que les résultats obtenus avec la méthode originelle.

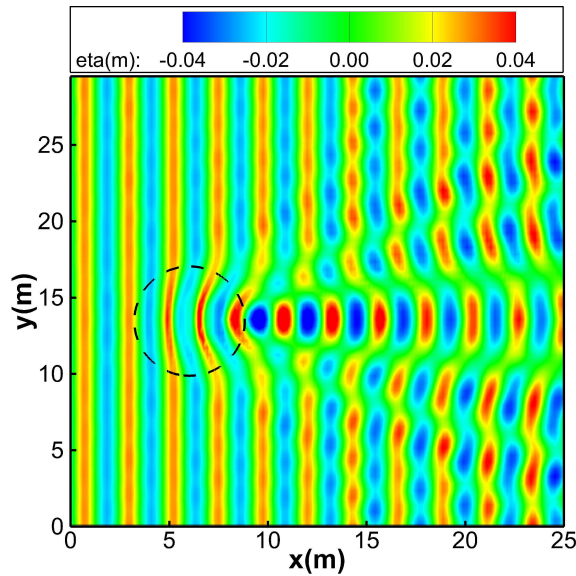


FIGURE V.2.4 – Instantané de l'élévation de surface libre - état stationnaire. Pointillés : localisation de l'ellipse.

Un instantané de l'élévation de surface libre obtenu à l'état stationnaire est présenté sur la Fig.V.2.4. On observe nettement qu'il existe une zone de forte convergence derrière le fond elliptique, avec un facteur d'amplification maximum d'environ 2.2 par rapport à la houle incidente. Il y a donc, comme attendu, une focalisation de la houle derrière l'ellipse. On remarque également l'existence de plusieurs zones, quasiment rectilignes, où la hauteur de houle est plus faible que la hauteur incidente. De plus, on observe de la réflexion sur les parois latérales à partir d'environ  $x = 10$ m. Une comparaison aux données expérimentales est donnée sur la Fig.V.2.5. Celle-ci représente la hauteur moyenne crête à creux le long du transect 4 (placé en aval de l'ellipse, voir Fig.V.2.1 pour la localisation du transect 4) obtenue avec les deux méthodes de relaxation (une méthode avec solution imposée non-nulle et une avec solution imposée nulle). La hauteur moyenne crête à creux est obtenue par une analyse vague par vague en zéro-

crossing. Cette analyse est réalisée à partir de  $t = 40s$  et pendant 28 périodes de houle (soit  $36.4s$ ), afin d'être fidèle aux expériences qui mesuraient 28 périodes de houle (c.f. Vincent et Briggs [132]). Les deux types de zones de relaxation utilisées conduisent au même résultat. Nous utiliserons par la suite les zones de relaxation simple, i.e. une zone amont de 3 longueurs d'onde et une zone aval de 3 longueurs d'onde où la solution de référence est imposée. On observe que nos simulations sont en bon accord avec les mesures expérimentales de Vincent et Briggs [132]. On retrouve la forte amplification observée sur la Fig.V.2.4 qui est d'environ 2.2, ainsi que deux zones où la hauteur de houle moyenne est plus faible que la hauteur incidente. Le lecteur remarquera que les courbes présentent une asymétrie, qui est plus marquée pour les données expérimentales : en effet, comme vu précédemment, l'ellipse n'est pas centrée dans la direction transverse, donc la réflexion sur les murs donne un résultat légèrement différent. Cette asymétrie est faible mais non-négligeable.

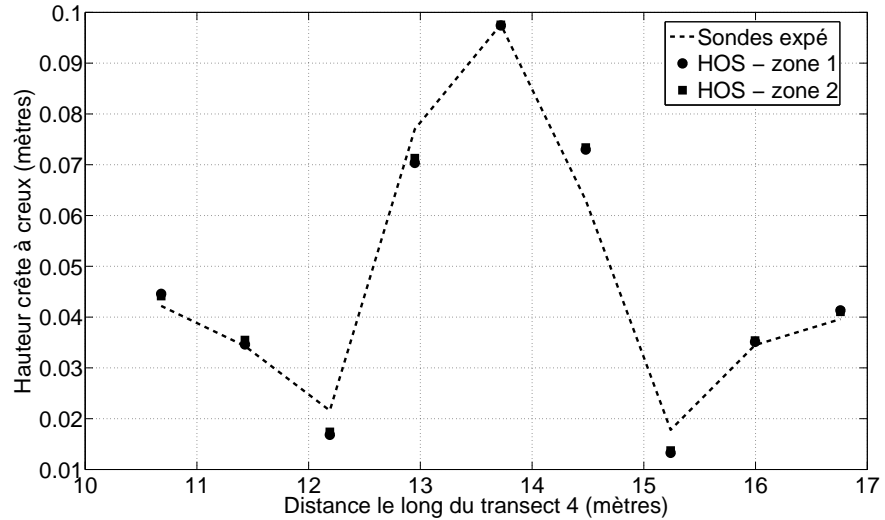


FIGURE V.2.5 – HOS - Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle régulière - cas  $M1$ . Comparaison des résultats suivant les zones de relaxation utilisées. Zones 1 : solution imposée non-nulle. Zones 2 : solution imposée nulle.

A des fins d'analyse, la solution obtenue avec une résolution linéaire de la surface libre ( $M = 1$ ) et un ordre convergé sur le fond ( $M_b = 4$ ) est également représentée sur la Fig.V.2.6. On observe très clairement que les résultats sont assez proches de la solution totalement non-linéaire, cela signifie donc que les effets du fond sont importants. Cependant, la prise en compte des non-linéarités de surface libre permet d'atteindre une très bonne précision (en particulier dans la zone de convergence). En effet, l'amplitude maximale donnée par la solution non-linéaire est plus élevée qu'avec la solution linéaire, la cambrure locale est donc plus importante. De plus, en  $x = 11.5m$  et en  $x = 16m$ , on remarque que les résolutions linéaires et non-linéaires de la surface libre donnent également des résultats différents. Les effets non-linéaires sont donc non-négligeables.

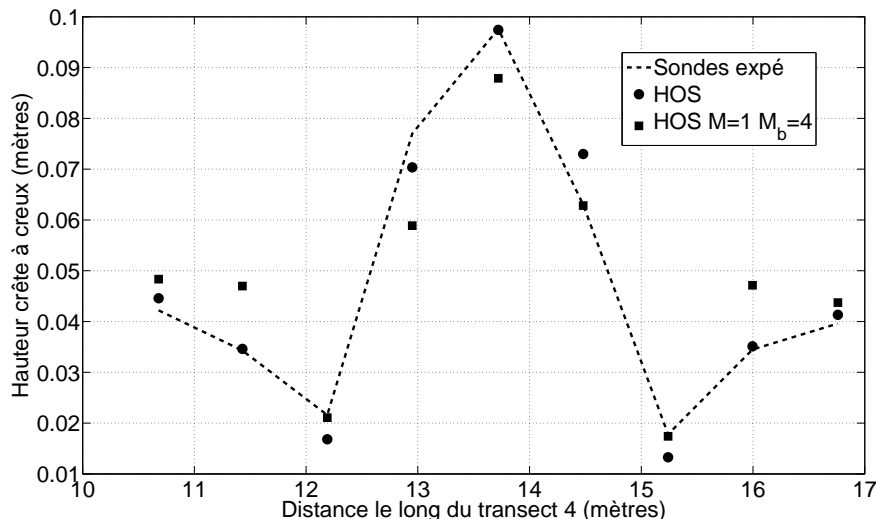


FIGURE V.2.6 – HOS - Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle régulière - cas  $M1$ . Prise en compte des effets du fond.

La Fig.V.2.7 représente également la hauteur crête à creux mais cette fois dans la direction de propagation le long des Transects 7 et 9 (au-dessus du centre de l'ellipse). On compare nos résultats aux expériences et au modèle développé par Lynett et Liu [101]. Ces derniers utilisent un modèle de Boussinesq amélioré en supposant que le fluide est composé de deux couches. On remarque que la hauteur significative donnée par notre modèle est légèrement différente de celle mesurée en bassin et plus précise que celle obtenue avec le modèle de Lynett et Liu [101] (surtout entre  $x=12$  et  $15$ m). De plus, si on regarde la courbe expérimentale entre  $x = 4$ m et  $x = 6$ m sur la Fig.V.2.7, on peut supposer que lors de la génération en bassin réalisée avec un batteur, la réflexion sur la pente amont de l'ellipse n'est pas toujours bien absorbée, alors que c'est le cas avec nos zones de relaxation. Cela pourrait donc expliquer une partie des différences observées.

Ainsi, ces premiers résultats montrent que la méthode HOS fond variable peut être appliquée à des cas 3D avec des variations du fond importantes. Les résultats obtenus sont très précis sur la totalité du champ 3D, comme le montrent les analyses suivant les différents transects. Le modèle est donc validé pour des configurations de houles régulières tridimensionnelles. De plus, le temps de calcul est du même ordre de grandeur que l'échelle réelle, ce qui montre l'efficacité de la méthode développée.

### V.2.3.2 Résultats avec la méthode différences finies

Les résultats obtenus avec la méthode HOS ont été comparés à ceux obtenus avec le code OceanWave3D qui utilise une méthode différence finies.

La convergence est atteinte avec  $(N_x, N_y) = (257, 129)$  pour un domaine plan de  $29 \times 40m^2$  et avec  $N_z = 5$  points dans la verticale. Sur les frontières du

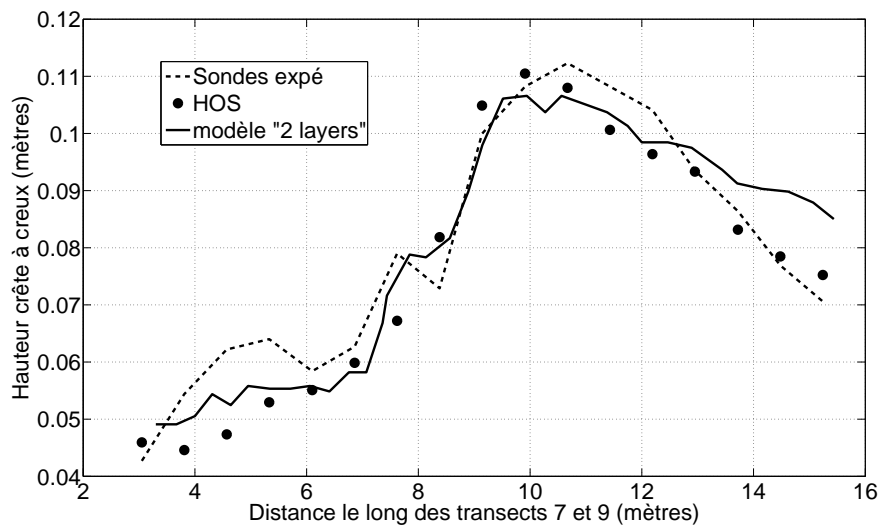


FIGURE V.2.7 – HOS - Hauteur crête à creux le long des Transects 9 et 7 - houle régulière - cas M1.

domaine, on suppose que l'on a des murs solides verticaux du fond jusqu'à la surface libre. Comme pour la méthode HOS, 3120 pas de temps ont été simulés, ce qui représente 78 périodes de houle. Les niveaux de tolérance sont fixés à  $Abstol = 10^{-6}$  en absolu et à  $Reltol = 10^{-4}$  en relatif. Le schéma  $DC + L_2U_2$  (PDC + factorisation LU) est utilisé avec le même pas de temps  $dt = 0.025s$  que pour la méthode HOS. Sur un Intel(R) Xeon(R) 2.50GHz avec 16.0 Go de RAM, le temps CPU par période de houle est de 105s.

Une fois les résultats obtenus, nous réalisons également une analyse vague par vague en zéro-crossing. Les résultats sont présentés sur la Fig.V.2.8 et Fig.V.2.9 et comparés à ceux obtenus avec la méthode HOS. On observe que les deux modèles donnent des résultats très similaires en termes de précision le long des 2 transects.

Si l'on compare maintenant les deux modèles en terme de temps de calcul, le temps CPU est de 15s pour le modèle HOS et de 105s pour le modèle OW3D (il faut noter que l'on n'utilise pas ici le modèle multigrille dans OW3D, les résultats devraient être bien meilleurs en terme d'efficacité avec son utilisation).

Ainsi, les deux méthodes sont très précises pour reproduire la focalisation 3D d'une houle régulière unidirectionnelle. La méthode HOS paraît plus efficace, néanmoins il faudrait s'intéresser au modèle multigrille de OceanWave3D.

## V.2.4 Houle régulière unidirectionnelle cas M2

On reproduit cette fois l'expérience de Vincent et Briggs [132] nommée M2. Celle-ci est exactement la même que le cas M1 mais avec une hauteur de houle  $H_0 = 0.0254m$  (définie par Vincent et Briggs [132]). Afin d'avoir la même amplitude que les expériences dans le champ non perturbé sur la sonde 10 de référence

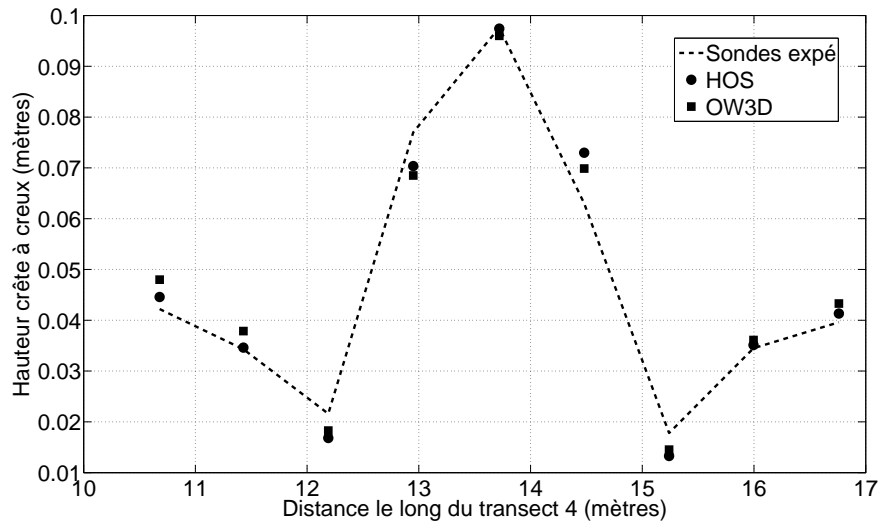


FIGURE V.2.8 – Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle régulière - cas M1 - Comparaisons HOS/OW3D.

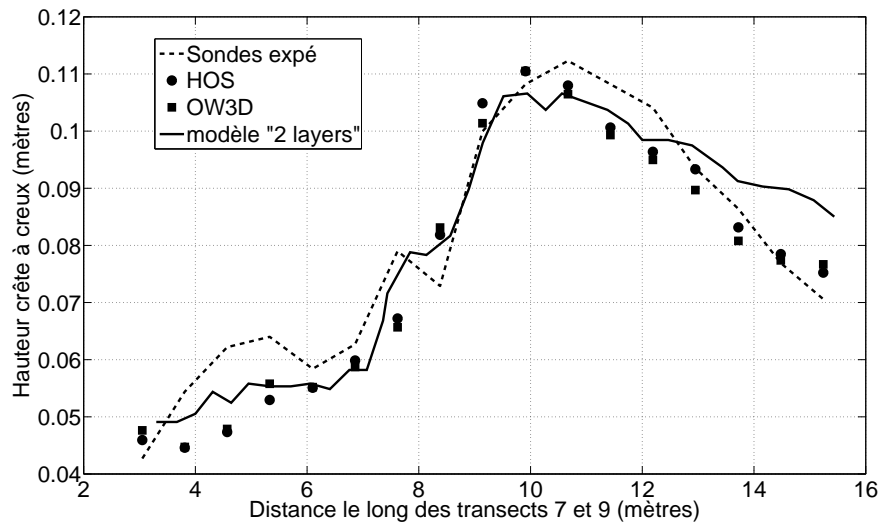


FIGURE V.2.9 – Hauteur crête à creux le long des Transects 9 et 7 - houle régulière - cas M1 - Comparaisons HOS/OW3D.

située en amont (voir la Fig.V.2.1), cette hauteur a été recalée à  $H_0 = 0.0215\text{m}$  pour la simulation numérique. Nous avons alors  $k_0h_0 = 1.27$  et  $k_0a_0 = 0.03$ , c'est-à-dire la même profondeur relative que le cas *M1* mais avec une cambrure plus faible.

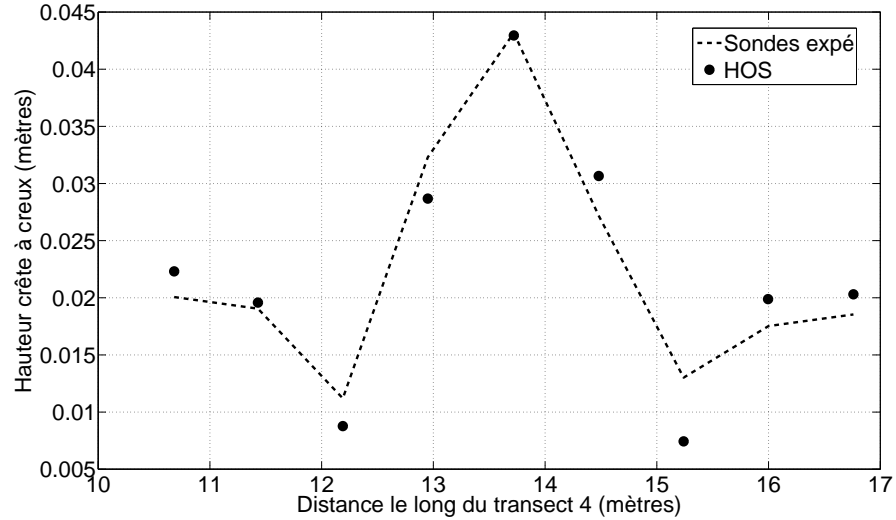


FIGURE V.2.10 – Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle régulière - cas M2.

Avec la méthode HOS originelle, la convergence est atteinte avec un nombre de modes par longueurs d'onde ( $N_x = 13/\lambda_0$ ;  $N_y = 5/\lambda_0$ ) et un ordre HOS  $M = 5$ . Le temps CPU par période de houle est de 14s avec la méthode originelle. Les résultats obtenus selon le transect 4 sont représentés sur la Fig.V.2.10. L'amplification maximale le long du transect 4 est de l'ordre de 2, soit légèrement plus faible que pour le cas *M1*. En houle régulière, le phénomène de focalisation observé est donc dû à la réfraction et à l'existence de phénomènes non-linéaires : en augmentant la cambrure de la houle incidente la valeur de l'amplification maximale augmente. De plus, on remarque de nouveau l'existence de deux zones où la hauteur de houle est plus faible que la hauteur incidente. On observe là encore une très bonne concordance entre les résultats expérimentaux et numériques qui permet la validation de la configuration en houle régulière. Nous allons donc maintenant nous intéresser à la reproduction de ce phénomène de focalisation avec des houles irrégulières.

## V.2.5 Houle irrégulière unidirectionnelle - cas U3

On utilise ici les résultats de l'expérience *U3* de Vincent et Briggs [132]. L'ellipse est définie comme précédemment, seules les conditions de houle incidente changent. Ce cas vise à reproduire la transformation d'une houle irrégulière unidirectionnelle. La houle irrégulière est générée linéairement grâce à un spectre de JONSWAP ( $\gamma = 2$ ) en définissant  $H_s = 0.0254\text{m}$  et  $T_p = 1.3\text{s}$ . La cambrure

vaut alors  $k_p H_s = 0.07$  et la profondeur relative  $k_p h_0 = 1.27$ .

Avec le modèle HOS, la convergence est atteinte avec un nombre de modes par longueurs d'onde au pic ( $N_x = 13/\lambda_p$ ;  $N_y = 10/\lambda_p$ ) et un ordre HOS  $M = 5$  sur la surface libre pour la méthode originelle. Le temps CPU (sur un Intel(R) Xeon(R) 2.50GHz avec 16.0 Go de RAM) par période de houle est de 35s avec cette méthode, montrant une nouvelle fois l'efficacité du modèle numérique développé.

La Fig.V.2.11 présente la hauteur moyenne crête à creux obtenue par une analyse vague par vague en fonction de la position le long du transect 4. L'analyse vague par vague est réalisée une fois que la totalité du spectre incident s'est propagé sur tout le domaine, comme mentionné plus haut, c'est-à-dire à partir de  $t = 80s = 62T_p$  et sur  $100T_p$ . On observe un très bon accord avec les résultats expérimentaux. On remarque que l'amplification est de l'ordre de 2, et que l'on a toujours l'existence de deux zones où la hauteur moyenne est plus faible que la hauteur incidente. De la réflexion est observée selon la direction transverse, comme on peut le voir sur la Fig.V.2.12 qui représente un instantané de surface libre à  $t = 72T_p$ .

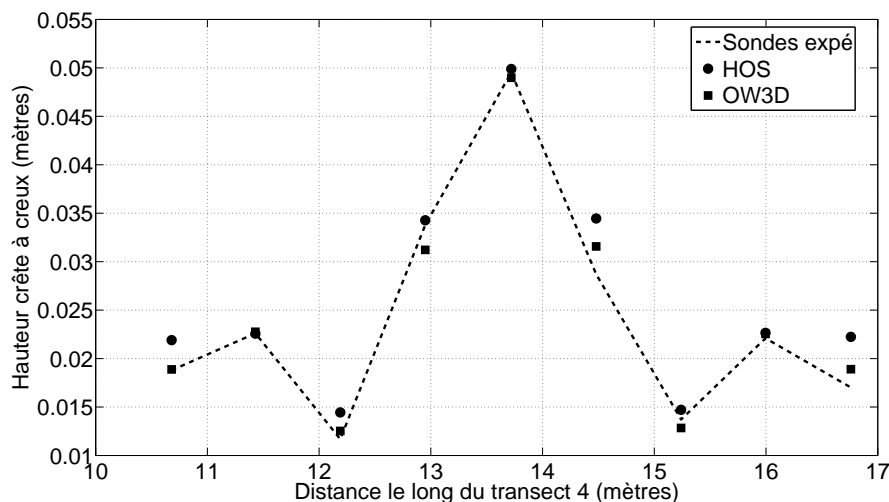


FIGURE V.2.11 – Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle irrégulière unidirectionnelle - cas  $U3$  - Comparaisons HOS/OW3D.

Avec la méthode différences finies, le domaine de  $29 \times 40m^2$  est décrit par  $(N_x, N_y) = (257, 129)$  points et  $N_z = 5$  points sont utilisés dans la verticale. Le temps de calcul par période de houle est alors de 145s. Les résultats sont également présentés sur la Fig.V.2.11 et sont proches des résultats obtenus avec la méthode HOS. On note que les résultats obtenus avec HOS ont toujours des valeurs légèrement supérieures aux résultats obtenus avec OW3D. Cela vient peut être de la prise en compte de la réflexion qui est différente entre les deux modèles.

Ainsi, le modèle HOS est capable de modéliser de façon précise et efficace la propagation de houle irrégulière unidirectionnelle au-dessus d'un fond variable.



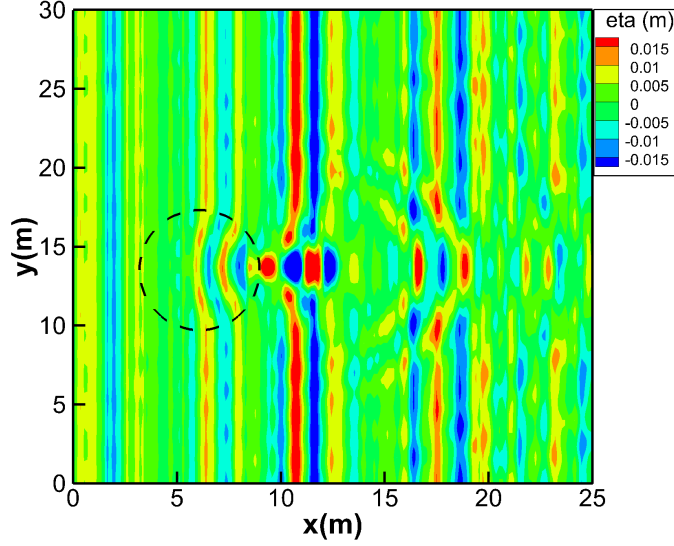


FIGURE V.2.12 – Instantané de l'élévation de surface libre - houle irrégulière unidirectionnelle - cas  $U3$  -  $t = 72T_p$ . Pointillés : localisation de l'ellipse.

Afin d'être complet dans notre étude, nous allons maintenant nous intéresser à la reproduction de houle irrégulière multidirectionnelle.

## V.2.6 Houle irrégulière directionnelle cas $N3$

Il s'agit ici de modéliser une houle directionnelle avec un étalement  $\sigma$  de 10 degrés. On suppose, comme Vincent et Briggs [132], que le spectre directionnel est alors défini par :

$$S(f, \theta) = S_J(f)D(\theta) \quad (\text{V.2.2})$$

Le spectre de JONSWAP  $S_J(f)$  est le même que celui utilisé pour le cas  $U3$  avec  $\gamma = 2$ ,  $H_s = 0.0254\text{m}$  et  $T_p = 1.3\text{s}$ . La cambrure vaut  $k_p H_s = 0.07$  et la profondeur relative  $k_p h_0 = 1.27$ .

La fonction de directionnalité  $D(\theta)$  utilisée par Vincent et Briggs [132] est une fonction normale définie par :

$$D(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^L e^{-\frac{(l\sigma_m)^2}{2}} \cos(l(\theta - \theta_m)) \quad (\text{V.2.3})$$

avec  $\theta_m$  la direction moyenne de propagation à la fréquence  $f$ ,  $\sigma_m$  le paramètre d'étalement à la fréquence  $f$ ,  $L$  le nombre d'harmoniques choisi pour représenter la série de Fourier et  $\theta$  variant entre 0 et  $2\pi$ .

La convergence est atteinte avec un nombre de modes par longueurs d'onde au pic ( $N_x = 13/\lambda_p$ ;  $N_y = 10/\lambda_p$ ) et un ordre HOS  $M = 5$  sur la surface libre pour la méthode originelle. Un instantané de l'élévation de surface libre à

$t = 72T_p$  est visible sur la Fig.V.2.13. Le temps CPU (toujours sur un Intel(R) Xeon(R) 2.50GHz avec 16.0 Go de RAM) par période de houle est alors de 35s, comme pour le cas de houle irrégulière unidirectionnelle  $U3$ .

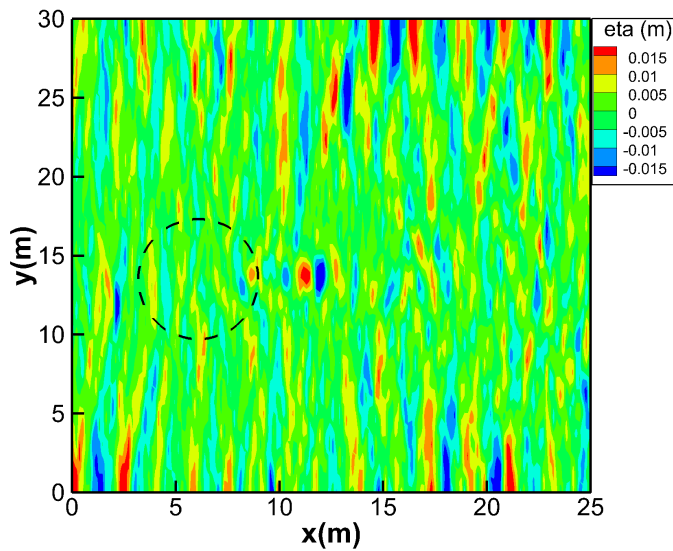


FIGURE V.2.13 – Instantané de l'élévation de surface libre - houle irrégulière multidirectionnelle - cas N3 -  $t = 72T_p$ . Pointillés : localisation de l'ellipse.

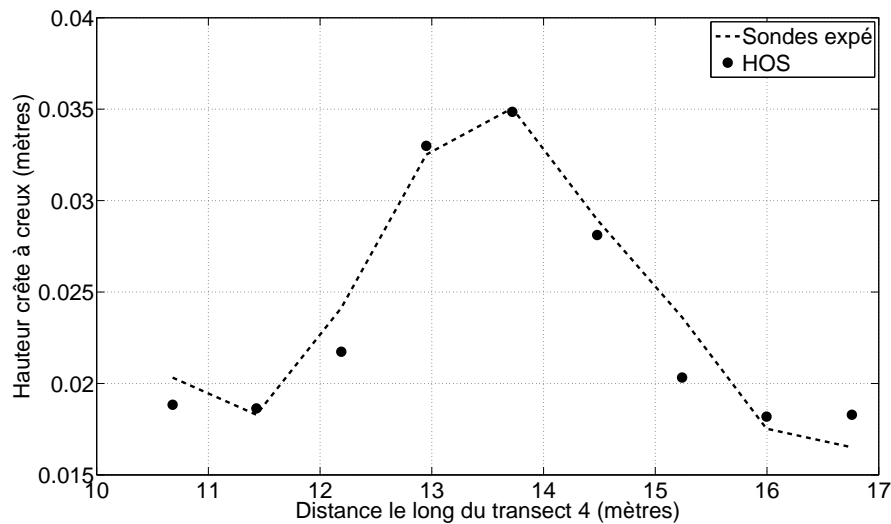


FIGURE V.2.14 – Hauteur crête à creux le long du Transect 4 - houle irrégulière multidirectionnelle - cas N3.

La Fig.V.2.14 représente la hauteur moyenne crête à creux obtenue par une

analyse vague par vague en fonction de la position le long du transect 4. L'analyse vague par vague est ici réalisée à partir de  $t = 62T_p$  sur  $100T_p$ , comme précédemment pour le cas unidirectionnel  $U3$ . On observe une amplification d'environ 1.3 et un très bon accord avec les résultats expérimentaux ce qui signifie que notre méthode de symétrisation est précise pour reproduire la réflexion observée dans un bassin d'essai. De plus, cette fois-ci, l'allure de la courbe le long du transect 4 est différente des cas précédents car aucun creux n'est observé. En effet, dans le cas d'une houle directionnelle, la physique du problème est différente car de l'énergie est propagée dans différentes directions. L'amplification maximum est donc moindre et on n'observe pas de zones avec très peu d'amplification.

Les effets tridimensionnels sont donc très importants dans cette configuration, et sont très précisément reproduits par le modèle HOS développé. De plus, le modèle reste très efficace et est donc validé pour propager des houles irrégulières directionnelles sur des fonds variables.

## V.2.7 Conclusion - ellipse immergée

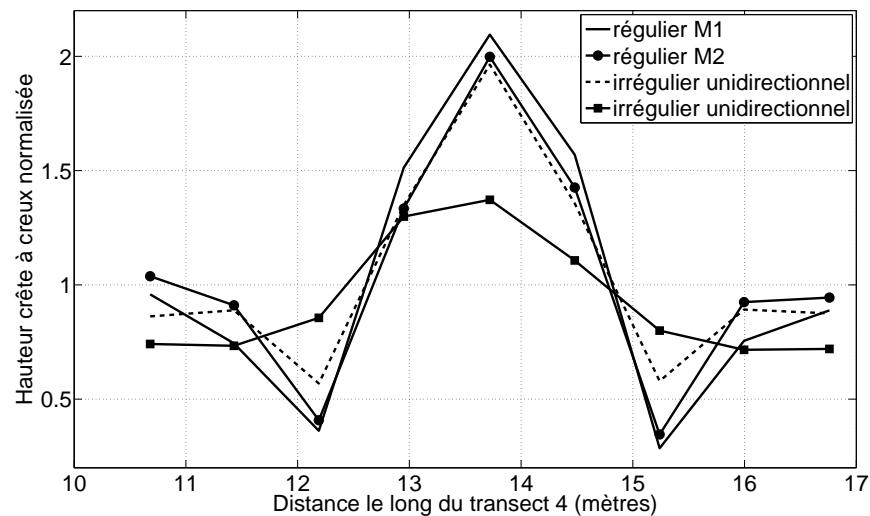


FIGURE V.2.15 – Hauteur crête à creux normalisée le long du Transect 4 - Comparaison des cas  $M1$ ,  $M2$ ,  $U3$  et  $N3$ .

Nous avons donc étudié différents cas de houle incidente se propageant au-dessus d'une ellipse immergée. Ce cas a été choisi car les effets induits par le fond sont importants mais qu'une résolution non-linéaire est tout de même nécessaire, comme nous l'avons vu au paragraphe V.2.3.1. Les simulations considèrent de fortes variations du fond et de faibles profondeurs relatives. Nous avons montré que la méthode HOS était très efficace car le temps de calcul par période de houle est compris entre 15s pour les cas de houle régulière et 35s pour les cas de houle irrégulière directionnelle (voir le Tab.V.2.1). En comparaison, la méthode différence finies présente un temps de calcul 4 à 10 fois supérieur (rappelons que

Cas	Modèle	$N_x$	$N_y$	$N_{\lambda_x}$	$N_{\lambda_y}$	$M$ ou $N_z$	CPU
Régulier	HOS	256	128	13	5	5	15
Régulier	OW3D	257	129	13	10	5	105
Irrégulier unidirectionnel	HOS	256	256	13	10	5	35
Irrégulier unidirectionnel	OW3D	257	129	13	10	5	145
Irrégulier directionnel	HOS	256	256	13	10	5	35

TABLE V.2.1 – Comparaison des différentes cas modélisés.

ce temps de calcul est à nuancer car les calculs n'ont pas été réalisés avec la méthode multigrille).

Nous avons également vu que l'amplification en aval de l'ellipse dépend du type de houle considérée comme nous pouvons le voir sur la Fig.V.2.15. Même s'il est compliqué de comparer des houles régulières et irrégulières, nous partons du principe que  $H_0$  est équivalent à  $H_s$  et que  $T$  est équivalent à  $T_p$ , comme réalisé par Vincent et Briggs [132]. Les 4 cas présentés ont été normalisés par la hauteur de houle incidente. Nous voyons clairement que l'utilisation d'une houle unidirectionnelle (régulière ou irrégulière) produit une amplification supérieure et que ces deux cas présentent le même comportement le long du transect 4 (une amplification et deux creux). De plus, l'amplification maximale le long du transect 4 dépend de la hauteur de houle incidente.

Ce type de structure elliptique reposant sur un fond marin peut être utilisée pour focaliser la houle afin de la récupérer par une structure en mer (houloporteur par exemple). Il faudra donc essayer de se placer dans des conditions se rapprochant le plus d'une houle régulière.

Le modèle HOS étant précis et efficace pour reproduire des houles irrégulières sur une bathymétrie 3D, nous allons nous intéresser dans le prochain et dernier chapitre à la reproduction d'une houle se propageant sur une bathymétrie réelle.



## Chapitre V.3

# Bathymétrie réelle

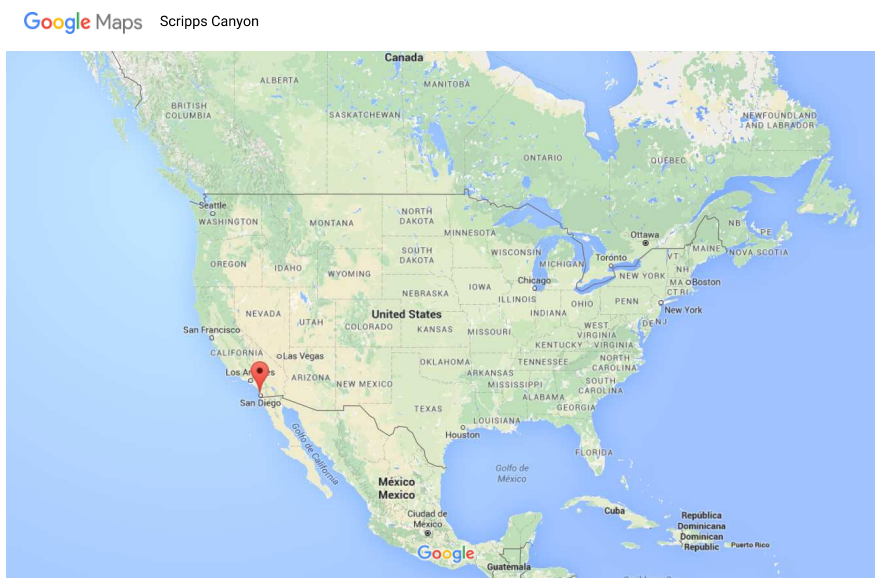


FIGURE V.3.1 – Localisation des canyons sous-marins de Scripps et de la Jolla en Californie.

Les chapitres précédents ont permis de valider le modèle HOS sur des bathymétries expérimentales. Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier la transformation d'une houle se propageant sur une bathymétrie réelle et complexe. Cette bathymétrie est celle des canyons sous-marins de Scripps et de La Jolla en Californie (voir la Fig.V.3.1 pour la localisation) où des mesures à grande échelle ont été réalisées dans le cadre du projet Nearshore Canyon Experiment (NCEX<sup>1</sup>). Les relevés expérimentaux ont montré que la très forte variation de fond a une grande influence sur la propagation de la houle dans cette zone. Ce

1. <http://science.whoi.edu/users/elgar/NCEX/>

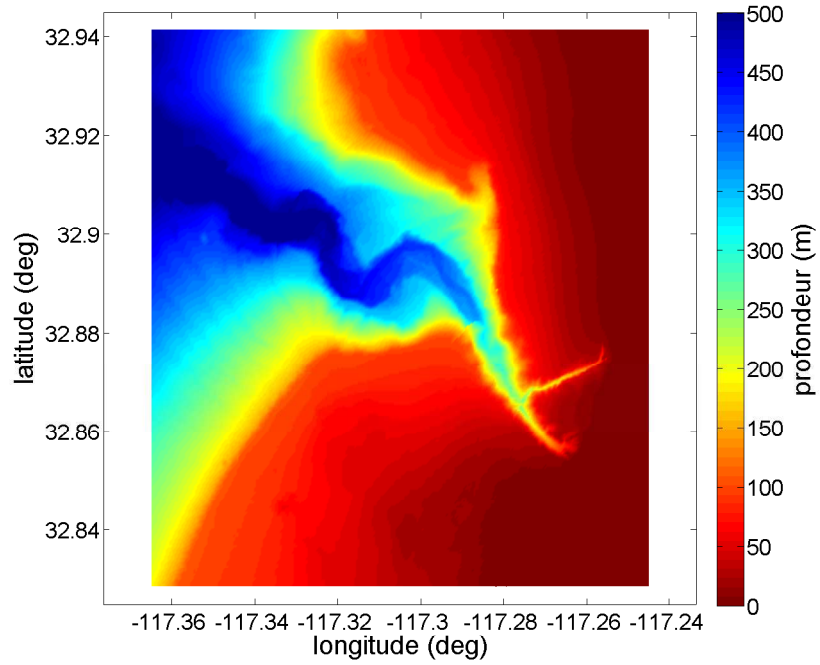


FIGURE V.3.2 – Topographie des canyons sous-marins de Scripps et de la Jolla.

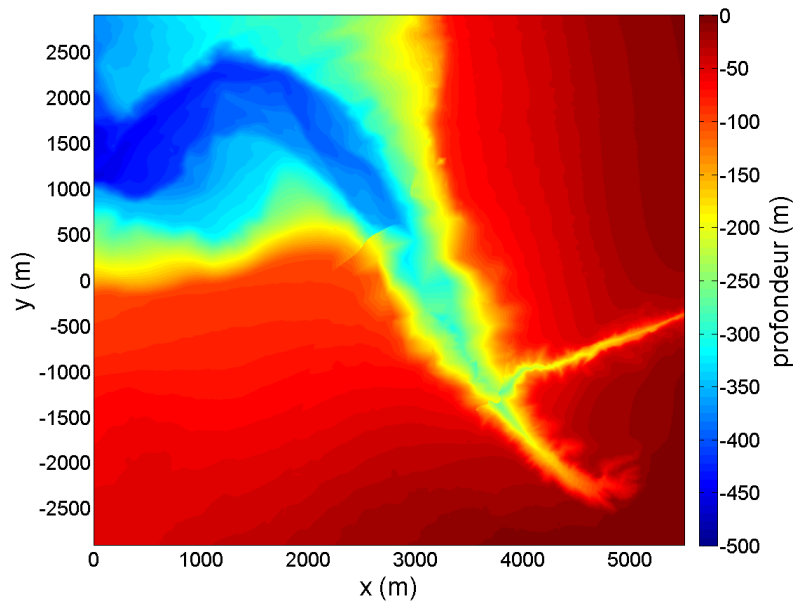


FIGURE V.3.3 – Topographie des canyons sous-marins de Scripps et la Jolla - coordonnées cartésiennes.

cas de bathymétrie réelle a déjà été étudié dans le cadre de la théorie linéaire par Magne *et al.* [107] et par Gerosthathis *et al.* [68] avec le modèle modes couplés présenté au paragraphe I.5.2. Afin de pouvoir se comparer aux résultats de Gerosthathis *et al.* [68], nous utilisons le même domaine de calcul de  $5.5 \times 5 \text{ km}^2$ . Ce domaine est représenté sur la Fig.V.3.2 en coordonnées géométriques et sur la Fig.V.3.3 en coordonnées cartésiennes. Avec le modèle HOS, toute la difficulté réside dans le choix des paramètres d'initialisation et dans le choix du domaine de calcul (important afin de minimiser la réflexion). Ce cas est complexe car il présente une variation de profondeur très importante et des gradients du fond élevés.

En effet, la profondeur maximale sur la Fig.V.3.3 est de 456m et la profondeur minimale est égale à 0m. Néanmoins, si l'on conserve ces valeurs minimales et maximales, la variation relative du fond est trop importante pour être modélisée avec notre modèle HOS, même avec un  $h_0$  bien choisi. Aussi, afin de limiter la variation relative du fond  $\frac{\beta}{h_0}$  et d'assurer la convergence des simulations, nous avons limité la profondeur maximum à  $h_{max} = 370\text{m}$  et la profondeur minimum à  $h_{min} = 30\text{m}$ . Pour les houles étudiées, la limitation de la profondeur à  $h_{max} = 370\text{m}$  aura peu d'influence (cette influence se fera sentir uniquement pour les houles de longueurs d'onde supérieures à 740m ce qui ne sera pas notre cas). De plus,  $h_{min}$  étant limitée à 30m, on n'étudiera pas le comportement de la houle en trop petites profondeurs. On choisit donc de définir notre profondeur moyenne  $h_0 = h_{max} - \frac{(h_{min}-h_{max})}{2} = 200\text{m}$ . Nous avons alors  $\frac{\beta}{h_0} = 85\%$  (au lieu de  $\frac{\beta}{h_0} = 100\%$  si on avait conservé  $h_{max} = 456\text{m}$  et  $h_{min} = 0\text{m}$ ).

De plus, la bathymétrie n'étant pas périodique dans la direction de propagation  $x$  et dans la direction transverse  $y$ , des modifications sont nécessaires, comme souligné dans la partie III. Il est donc nécessaire de choisir une profondeur  $h$  qui sera appliquée sur toutes les frontières et servira également à initialiser le modèle. Nous avons pris cette profondeur comme étant égale à  $h_{max} = 370\text{m}$ .

Ensuite, dans la direction  $y$ , nous avons interpolé le domaine présenté sur la Fig.V.3.3 comme expliqué au paragraphe III.2.2.3. Le domaine final de simulation utilisé est présenté sur la Fig.V.3.4, et le domaine d'étude qui nous intéresse est indiqué en pointillés. On remarque que le domaine de calcul est bien plus grand que le domaine d'étude, afin de minimiser les effets de bord.

Dans la direction de propagation  $x$ , nous utiliserons la méthode de relaxation avec la solution initiale imposée sur tout le domaine. La zone de relaxation amont et la zone de relaxation aval représentent chacune 3 longueurs d'onde.

Nous allons donc tout d'abord présenter au paragraphe V.3.1 un cas de validation en houle régulière qui permettra de comparer notre modèle à celui de Gerosthathis *et al.* [68]. Puis, une fois le modèle validé dans cette configuration simplifiée, nous nous intéresserons à la reproduction de houle irrégulière afin de se comparer aux données expérimentales.



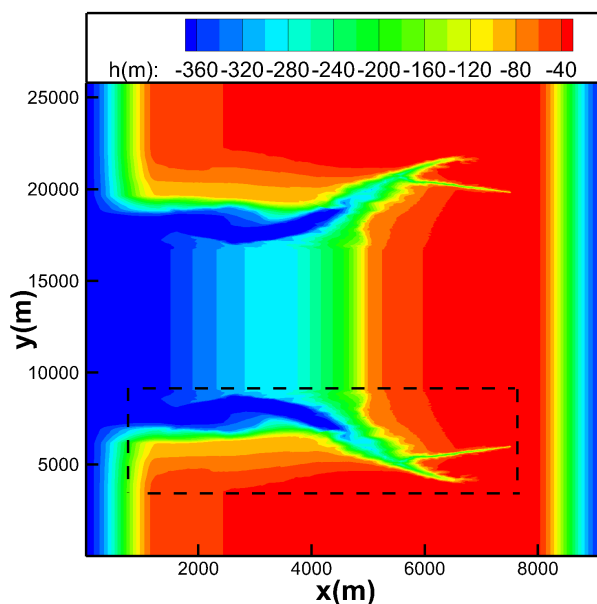


FIGURE V.3.4 – Domaine de calcul - en pointillés : zone d'intérêt.

### V.3.1 Cas de validation : houle régulière

Afin de valider notre domaine de calcul et les zones de relaxation, on étudie tout d'abord le cas d'une houle monochromatique de période  $T = 15$ s et de hauteur  $H = 1$ m, construite à partir de la solution de Rienecker et Fenton [117]. La longueur d'onde en profondeur infinie est alors d'environ 350m, la cambrure initiale vaut  $ka = 0.01$  et la profondeur relative au large  $kh_{max} = 6.62$ . Nous pourrons ainsi comparer nos résultats à ceux obtenus par Gerosthathis *et al.* [68] qui ont réalisé ce même cas test.

Afin d'atteindre l'état stationnaire, il est nécessaire de s'assurer auparavant que la houle a eu le temps de se propager sur tout le domaine (dans la direction de propagation). Pour ce cas de houle régulière, si l'on suppose que la propagation a lieu dans l'hypothèse grande profondeur et sur un fond plat avec  $h = 370$ m, le temps de propagation de la houle sur tout le domaine est donné par :

$$t_{propa} = \frac{X}{C_g} = \frac{X2T}{\lambda} = \frac{22\lambda2T}{\lambda} = 44T \quad (\text{V.3.1})$$

Le fond diminuant dans la direction de propagation, on attendra donc au moins 50 périodes de houle avant de regarder les résultats obtenus.

Avec 22 longueurs d'onde dans la direction  $x$  et 54 longueurs d'onde dans la direction  $y$ , la convergence spatiale est atteinte pour  $n_x = 256$ ,  $n_y = 1024$ , et un traitement anti-repliement intermédiaire avec  $N_d = \frac{2+1}{2}N$ . Si l'on modélise linéairement la surface libre comme réalisé par Gerosthathis *et al.* [68], les simulations sont convergées avec  $M_b = 5$ . Le temps de calcul avec les paramètres définis ci-dessus est de 17s par période de houle, ce qui signifie que la simulation

est très efficace car le temps de calcul est du même ordre de grandeur que la période de houle à échelle réelle ( $T = 15s$ ).

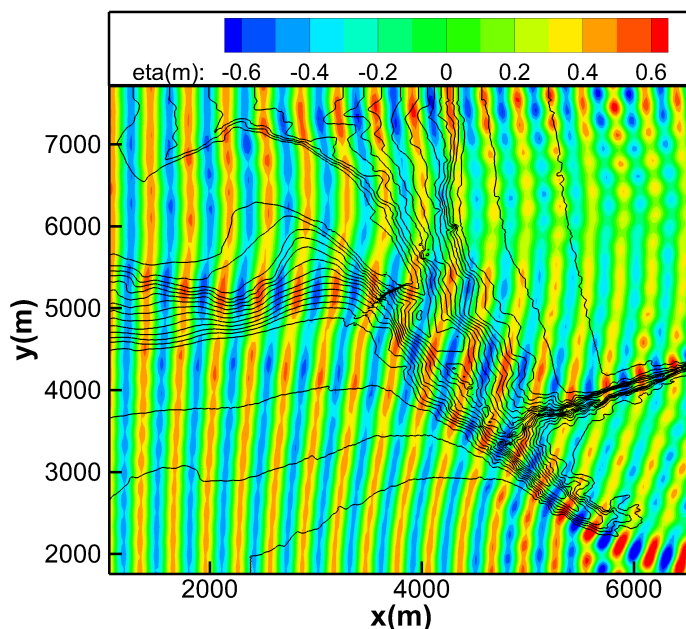


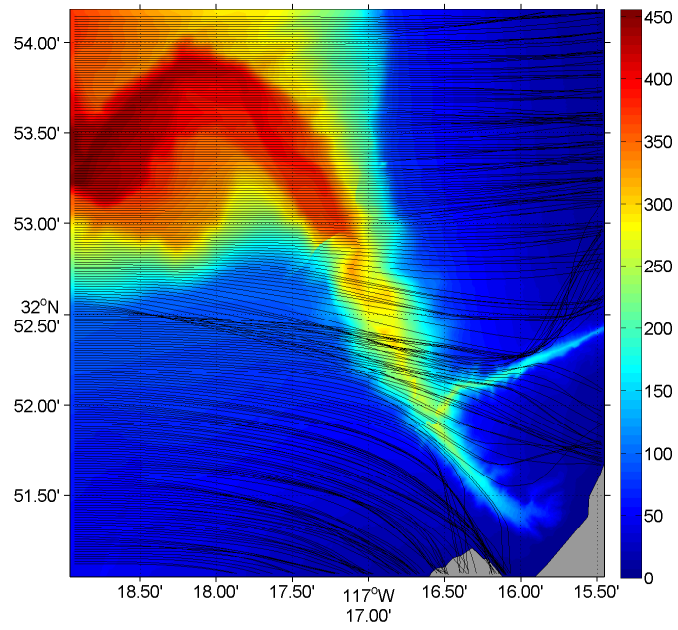
FIGURE V.3.5 – Champ de vagues dans le domaine d'étude obtenu avec  $N_x = 256$ ,  $N_y = 1024$ ,  $M = 1$ ,  $M_b = 5$ ,  $h_{min} = 30m$ ,  $h_0 = 200m$ .

Un snapshot obtenu après 50 périodes de propagation de houle est représenté sur la Fig.V.3.5. On observe très bien le phénomène de réfraction : la houle tourne afin que la ligne de crêtes se rapproche des isobathes. On remarque également que l'amplitude des vagues augmente dans les zones faible profondeur, ce qui est caractéristique du phénomène de shoaling (même si l'on ne voit pas très bien la diminution de longueur d'onde sur cette figure).

En théorie linéaire, le phénomène de réfraction est très bien prédit par un tracé de rayons tel que présenté sur la Fig.V.3.6. Le tracé de rayons pour la bathymétrie initiale de la Fig.V.3.3 est présenté sur la partie supérieure de la figure (a) et celui avec la bathymétrie limitée à  $h_{max} = 370m$  et  $h_{min} = 30m$  sur la partie inférieure (b). Dans ce cas, le code utilisé ne permet pas de tracer les rayons au-delà de la profondeur  $h_{min} = 30m$ . Néanmoins, le comportement est similaire sur les deux figures (a) et (b), donc l'utilisation des profondeurs  $h_{max}$  et  $h_{min}$  est justifiée.

La juxtaposition de ce tracé de rayons à l'élévation de surface libre obtenue avec HOS est présentée sur la Fig.V.3.7. On remarque que la réfraction est très bien reproduite par le modèle HOS et que l'on peut reproduire fidèlement la concentration de l'énergie vers le milieu du domaine. On peut également comparer nos résultats à ceux disponibles dans Gerosthathis *et al.* [68] et représentés sur la Fig.V.3.8. Les résultats obtenus sont analogues, et on remarque notamment que la réfraction de la houle (représentée par la flèche en pointillés) est très similaire. Les effets de convergence de la houle dus à la réflexion et à la diffrac-

(a) bathymétrie initiale



(b) bathymétrie avec  $h_{max} = 370\text{m}$  et  $h_{min} = 30\text{m}$

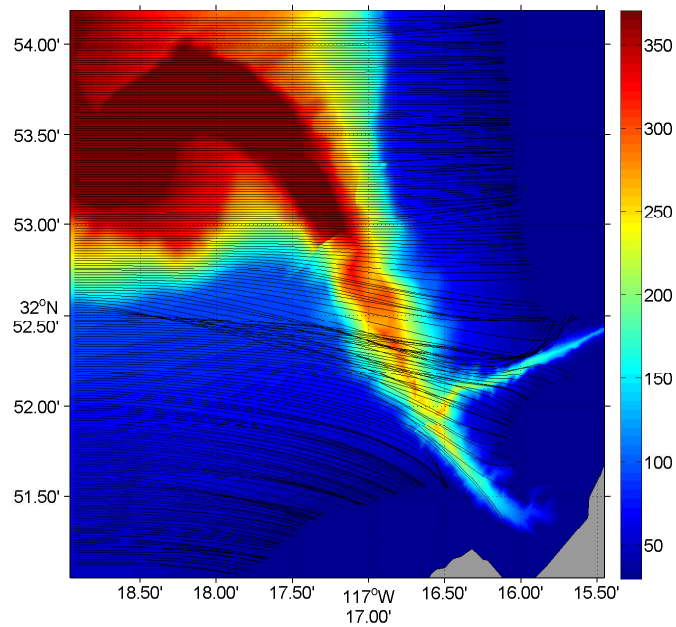


FIGURE V.3.6 – Tracé de rayons - théorie linéaire. Bathymétrie des canyons de Scripps/La Jolla.

tion sont représentés respectivement par les cercles pleins et pointillés. Avec le modèle HOS, les effets de réflexion sont également bien reproduits, seuls les effets de diffraction sont moins visibles car la profondeur minimum a été modifiée.

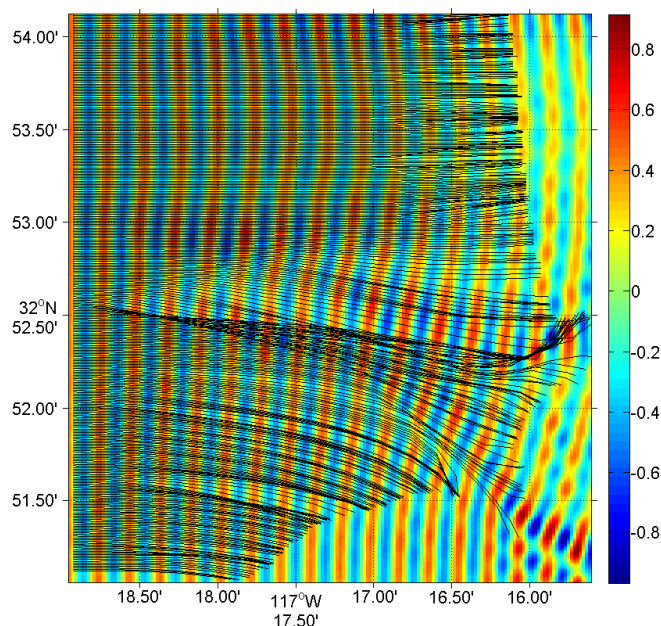


FIGURE V.3.7 – Tracé de rayons et élévation de surface libre obtenue avec HOS.  $M = 1$ ,  $M_b = 5$ ,  $h_{max} = 370\text{m}$  et  $h_{min} = 30\text{m}$ .

Il faut noter que l'utilisation d'un ordre de non-linéarité  $M$  supérieur a très peu d'influence sur l'élévation de surface libre. Cela s'explique notamment par la très faible cambrure initiale modélisée ( $ka = 0.009$ ). Ainsi, on a représenté sur la Fig.V.3.9 une carte de la surface du bassin. Les différents niveaux de contours montrent l'amplitude du fondamental (a) ou de la 2ème harmonique (b), calculées par une transformée de Fourier discrète en chaque point du maillage de la surface libre pour 15 périodes de houle en régime établi et normalisées par l'amplitude incidente. La houle se propage selon la direction  $x$ . Les traits noirs délimitent la zone d'étude. Cette figure nous renseigne sur deux points. Tout d'abord, on remarque que la zone d'étude est très peu perturbée par la réflexion due aux effets de bord. Les zones affectées (entourées en rouge) ne font pas partie du domaine d'étude et très peu de réflexion est observée au centre du domaine symétrisé. Ensuite, nous voyons clairement que la deuxième harmonique est très faible comparée à la première harmonique (jusque 70 fois plus faible pour les plus grandes valeurs). Les mêmes cartes sont obtenues si on utilise un ordre  $M = 3$  à la surface libre.

Afin de s'intéresser aux effets de surface libre, nous avons donc étudié le même cas en multipliant la cambrure par 4 : on a alors  $H = 4\text{m}$ , et  $ka = 0.036$ .

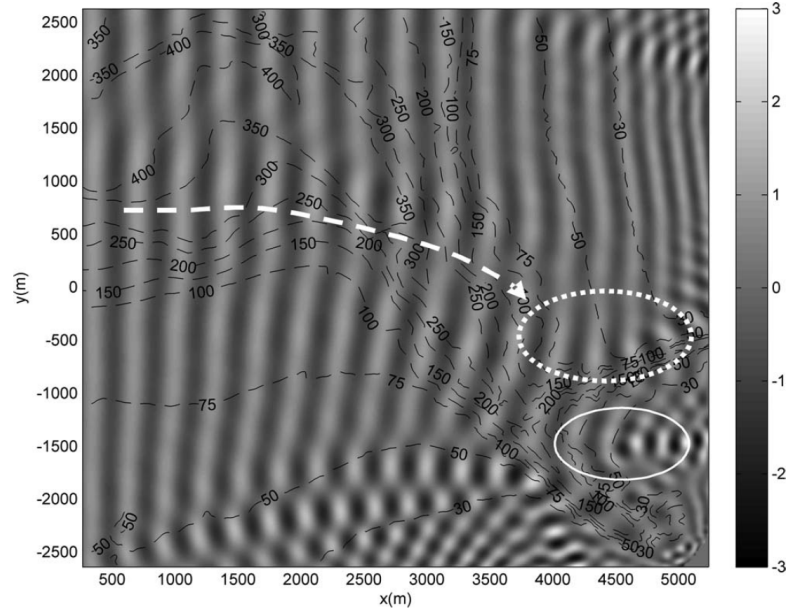


FIGURE V.3.8 – Elévation de surface libre obtenue avec le modèle modes couplés (c.f. Gerosthathis *et al.* [68]).

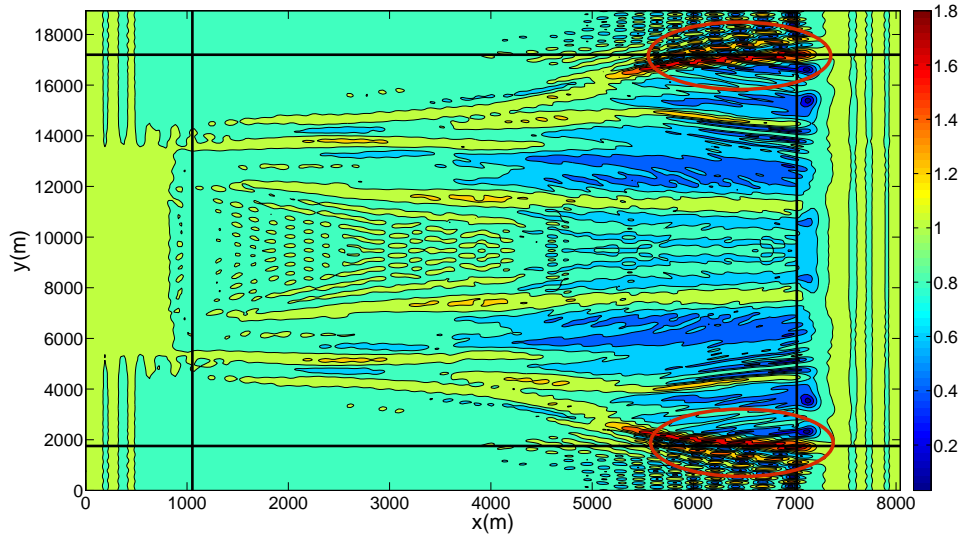
Avec les mêmes paramètres que précédemment, si l'on résout linéairement la surface libre ( $M = 1$  et  $M_b = 5$ ), les résultats obtenus sont identiques à ceux observés avec  $H = 1\text{m}$ . Néanmoins, en augmentant l'ordre de non-linéarité  $M = 3$  à la surface libre, on observe davantage d'effets non-linéaires. La Fig.V.3.10 représente les cartes de la surface du bassin pour cette nouvelle configuration. Nous voyons que la seconde harmonique est ici plus importante et qu'il est donc nécessaire de la prendre en compte, notamment vis-à-vis de la dynamique complexe au niveau du canyon.

Ainsi, cette première étude a permis de montrer que le modèle HOS est très efficace pour modéliser correctement la propagation d'une houle régulière sur une bathymétrie réelle et complexe car le temps de calcul est faible (du même ordre de grandeur que la propagation réelle) et les résultats sont proches de la théorie linéaire et des résultats de Gerosthathis *et al.* [68]. Nous allons maintenant nous intéresser à la reproduction de houles réelles observées au large des canyons de Scripps et de La Jolla.

### V.3.2 Cas réel : houle irrégulière directionnelle

Ce cas représente une première application du code à une configuration complexe avec reproduction de houle réelle. Pour cela, nous nous sommes inspirés de Magne *et al.* [107] qui ont reproduit un cas de houle longue venant de l'ouest daté du 30 Novembre 2003 entre 13h30 et 16h30 UTC où l'on dénote une absence de vents significatifs, afin de modéliser le comportement d'une houle réelle irrégulière directionnelle. Pour cela, ils ont exploités les données des bouées "Datawell

(a) 1ère harmonique



(b) 2ème harmonique

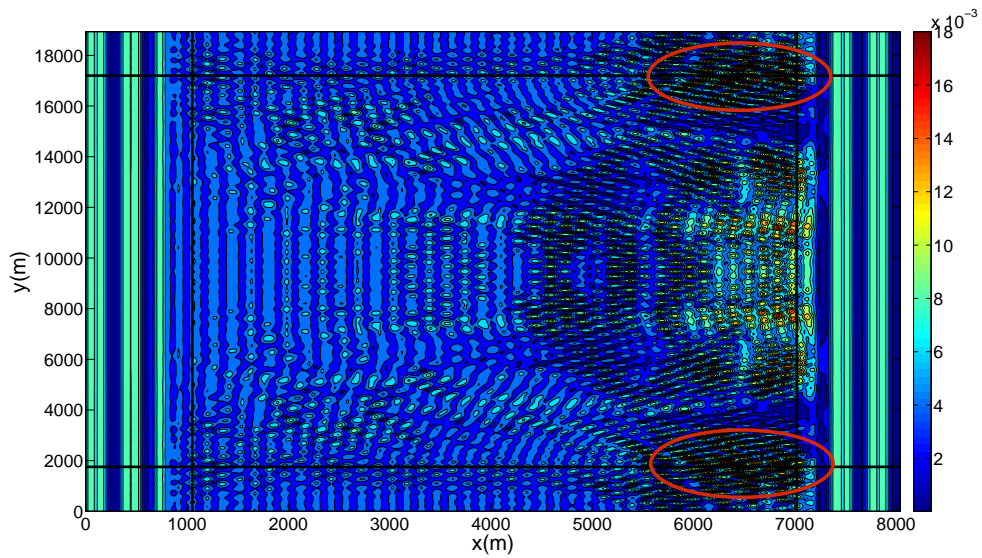
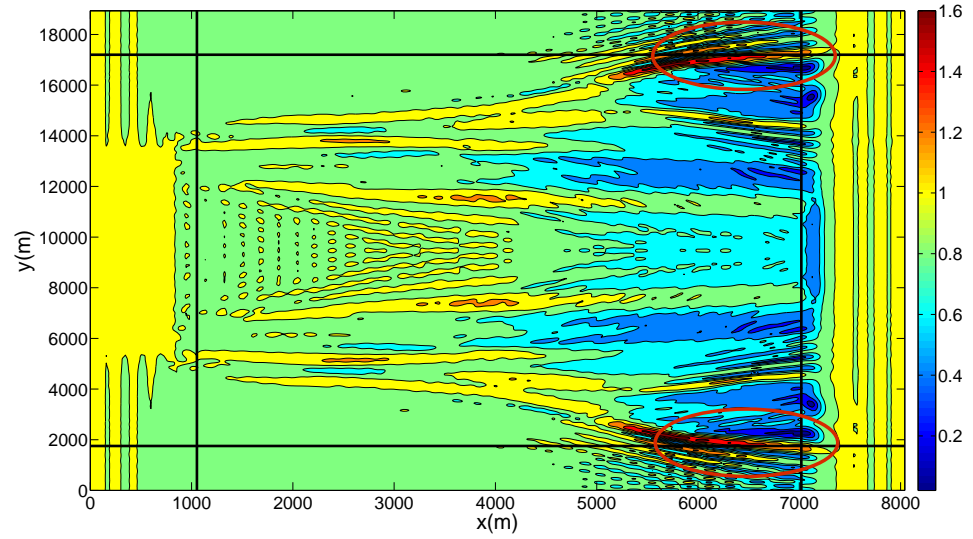


FIGURE V.3.9 – Cartographie de la surface du bassin représentant l'amplitude adimensionnée des première et deuxième harmoniques.  $ka = 0.009$   $M = 1$  et  $M_b = 5$ .

(a) 1ère harmonique



(b) 2ème harmonique

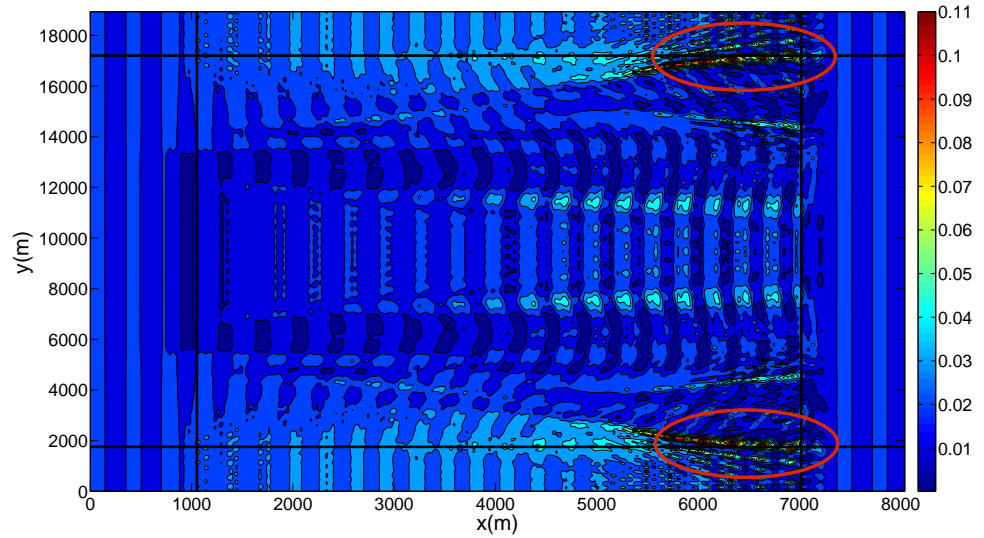


FIGURE V.3.10 – Cartographie de la surface du bassin représentant l'amplitude adimensionnée des première et deuxième harmoniques.  $ka = 0.036$ .  $M = 3$  et  $M_b = 5$ .

Directional Waverider buoys". La "Torrey Pines Outer Buoy" est déployée de façon permanente par le Coastal Data Information Program (CDIP) et est localisée 15km en amont du canyon de Scripps. Cette bouée fournit les données en eau profonde nécessaire à l'initialisation du modèle. Afin de reconstruire notre spectre incident, nous avons récupéré les données de cette bouée disponibles en ligne<sup>2</sup> pour l'évènement du 30 novembre 2003 entre 13h30 et 16h30. Elles nous renseignent sur la répartition d'énergie par fréquence, ce qui nous permet de reconstruire le spectre fréquentiel (représenté sur la Fig.V.3.11). De plus, les coefficients des séries de Fourier  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$  sont fournis : nous pouvons donc calculer le spectre directionnel d'après Benoit *et al.* [15]. Celui-ci est observable sur la Fig.V.3.12. Une fois ce spectre incident reconstruit, nous l'avons ensuite interpolé sur la grille cartésienne HOS. Nous avons donc  $H_s^{init} = 0.8\text{m}$ ,  $T_p^{init} = 15.4\text{s}$  et une houle venant majoritairement de l'Ouest ( $\theta = 270$  deg). La cambrure initiale vaut  $k_p H_s = 0.014$  et la profondeur relative initiale  $k_p h = 6.62$ .

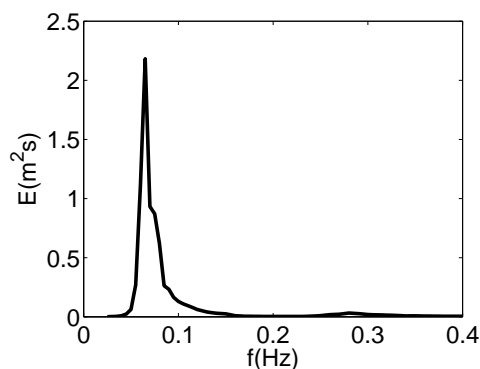


FIGURE V.3.11 – Spectre fréquentiel au niveau de la bouée Torrey Pines Outer Buoy le 30 Novembre 2003 entre 13h30 et 16h30.

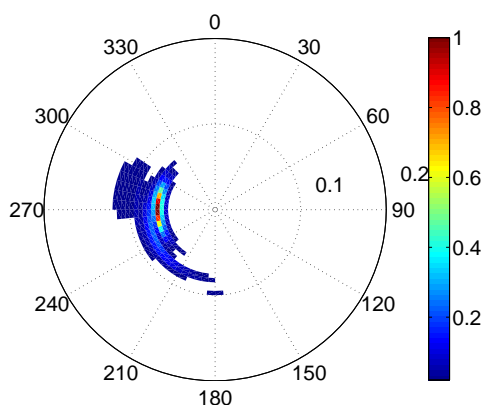


FIGURE V.3.12 – Spectre directionnel au niveau de la bouée Torrey Pines Outer Buoy le 30 Novembre 2003 entre 13h30 et 16h30.

2. <http://cdip.ucsd.edu>



Ensuite, nous avons propagé ce spectre directionnel sur le domaine d'étude de la Fig.V.3.13 avec le modèle HOS. Ce domaine est légèrement différent de celui utilisé en houle régulière car il n'a pas été coupé au niveau du premier canyon. De même que précédemment, des zones de relaxation et des conditions de réflexion ont été implémentées. Les paramètres numériques sont les suivants :  $N_x = 384$ ,  $N_y = 1536$ ,  $M = 1$  et  $M_b = 5$  avec des zones iso-contours selon  $y$  deux fois plus grandes que dans le cas houle régulière.

Afin d'atteindre l'état stationnaire, il est nécessaire de s'assurer auparavant que la houle a eu le temps de se propager sur tout le domaine dans la direction de propagation  $x$ . Pour ce cas de houle irrégulière, il faut donc calculer le temps mis par les plus hautes fréquences du spectre pour parcourir tout le domaine. Sur la Fig.V.3.11, on remarque que les plus hautes fréquences transportant de l'énergie sont autour de  $f = 0.1\text{Hz}$ . La période associée est  $T = 10\text{s}$ . La profondeur relative correspondante est alors  $k_0 h_0 = 14.9$  et la vitesse de groupe vaut  $C_{g_0} = 7.8\text{m/s}$ . Le temps mis par les plus hautes fréquences pour se propager jusqu'au début de la zone de relaxation aval est alors  $t = 900\text{s}$  soit  $59 T_p$ . Nous analyserons donc les résultats à partir de 60 périodes de pic.

Il est alors possible de comparer nos résultats à des données de bouées, comme réalisé par Magne *et al.* [107]. Des relevés ont en effet été réalisés sur 6 sites autour du Canyon de Scripps et les données sont également disponibles en ligne. La profondeur ayant été limitée à 30m avec notre modèle HOS, nous avons utilisé uniquement les bouées localisées dans des profondeurs supérieures, c'est-à-dire les bouées 33, 35, 36 et 37 (profondeurs respectives de 35m, 35m, 100m et 45m) qui sont localisées sur la Fig.V.3.13. A l'aide d'une analyse vague par vague sur ces données de sondes réalisée sur une plage de  $400\text{s} = 26T_p$ , on peut reconstruire la hauteur significative modélisée (c.f Fig.V.3.14). On observe une assez bonne correspondance entre les données expérimentales et numériques, notamment au niveau des sondes 33 et 35. Les sondes 36 et 37 sont moins bien résolues par notre modèle. En effet, on observe bien une diminution de la hauteur significative, mais celle-ci est moins importante qu'expérimentalement.

De plus, les spectres fréquentiels mesurés sont disponibles en chacune de ces bouées. Nous pouvons donc comparer les résultats numériques aux données réelles, comme présenté sur la Fig.V.3.15. On remarque là aussi une bonne concordance entre les données des sondes et le modèle, notamment au niveau de la sonde 35. La sonde 33 donne un  $H_s$  numérique relativement correct, mais le spectre présente deux pics au lieu d'un seul. Au niveau des sondes 36 et 37, on retrouve la diminution de hauteur significative, même si celle-ci est moins importante qu'expérimentalement. Néanmoins, ces sondes se trouvent près de la zone où la bathymétrie a été limitée à  $h_{min} = 30\text{m}$ . Ce phénomène explique sûrement les valeurs légèrement plus élevées obtenues avec le modèle HOS. Des tests ont été réalisés avec une profondeur minimale inférieure (et une profondeur maximale plus faible afin de rester à  $\frac{\beta}{h_0}$  constant) mais n'ont pas été concluants et ils mènent à des instabilités numériques.

On remarquera que les sondes 36 et 37 sont situées dans des profondeurs plus grandes que les sondes 33 et 35, mais dans des zones à plus forts gradients, les limites du modèle HOS sont donc peut-être atteintes. De plus, dues aux limites du code de calcul séquentiel utilisé, la discrétisation maximale accessible ( $N_x \times N_y = 384 \times 1536$ ) n'est peut être pas tout à fait convergée. Enfin, il est possible que la limitation du domaine en amont influe sur la propagation en aval.

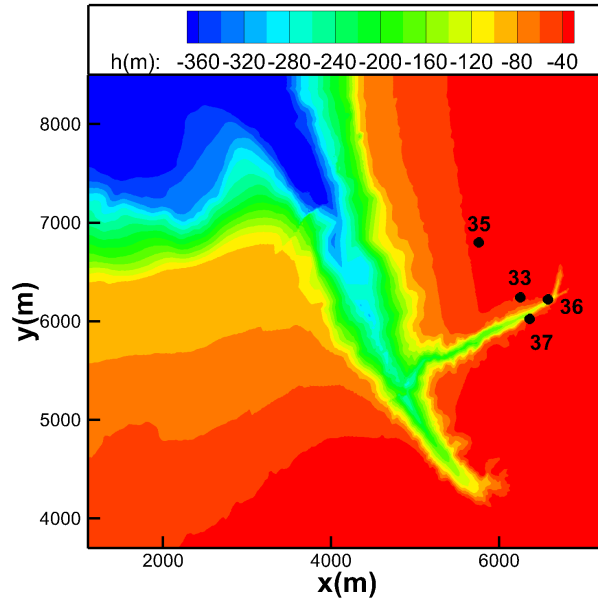


FIGURE V.3.13 – Localisation des sondes 33, 35, 36 et 37 - Canyons de Scripps et La Jolla.

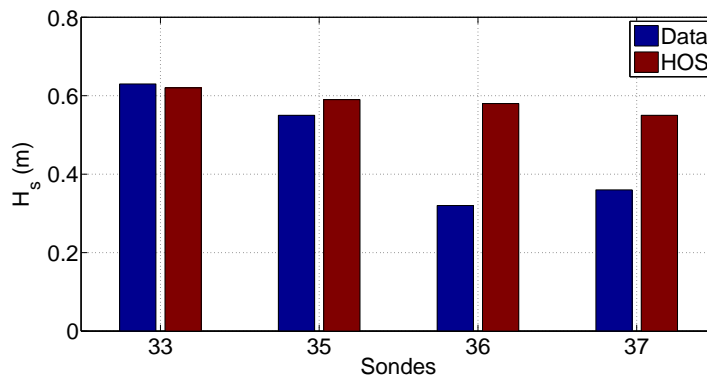


FIGURE V.3.14 – Comparaisons des hauteurs significatives prédites et mesurées le 30 novembre 2003 entre 13h30 et 16h30. Les sondes sont localisées sur la Fig.V.3.13.

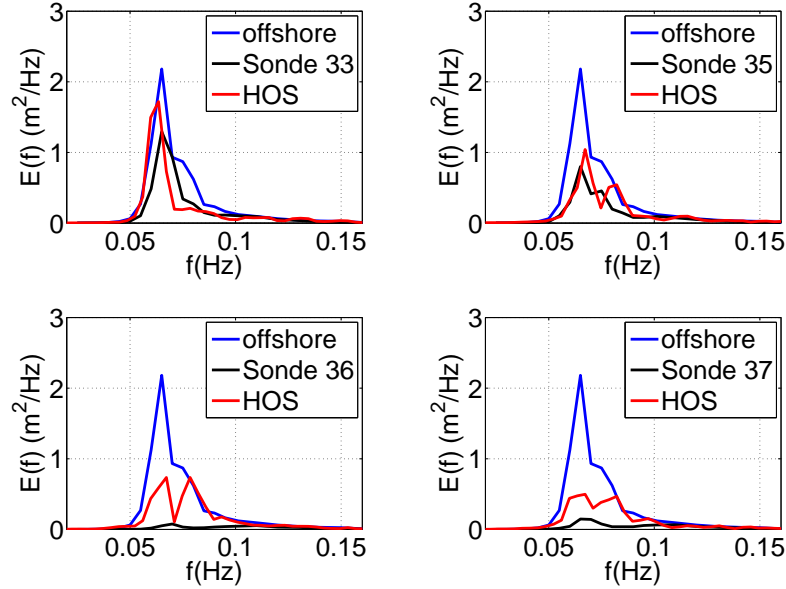


FIGURE V.3.15 – Comparaisons des spectres fréquentiels prédits et mesurés le 30 novembre 2003 entre 13h30 et 16h30. Les sondes sont localisées sur la Fig.V.3.13.

Ainsi, ce cas test montre que le modèle est efficace pour modéliser des houles irrégulières directionnelles sur une bathymétrie réelle très complexe car le temps de calcul par période de houle est de 50s. Néanmoins les valeurs extrêmes des gradients rencontrés et la très forte variation du fond montrent également les limites du modèle pseudo-spectral. Cette première application du modèle demanderait donc à être poursuivie et finalisée pour caractériser exactement les erreurs, identifier leur origine, notamment en travaillant sur un domaine plus raffiné. Des comparaisons au modèle numérique de Magne *et al.* [107] sont également prévues.

### V.3.3 Conclusion - Bathymétrie réelle

Ce cas très complexe de propagation de houle sur une bathymétrie réelle nous a donc permis de mettre en évidence les avantages et inconvénients de la méthode. C'est un cas extrême qui sera rarement rencontré et utilisé avec cette méthode, de part les fortes variations de fond et de ses gradients. Cela nécessite une adaptation très importante du domaine de calcul. Il faut notamment limiter la variation maximum  $\frac{\beta}{h_0}$  (qui est ici assez extrême et sera rarement plus importante dans des cas réels) ce qui nous oblige à limiter la profondeur minimum. De plus, le nombre de longueurs d'onde à prendre en compte montre les limites du calcul séquentiel. La méthode de symétrisation du fond fonctionne, même si des améliorations sont possibles, notamment l'utilisation d'une base cosinus au lieu d'une base exponentielle pour les séries de Fourier.

Néanmoins, le modèle développé semble très efficace pour modéliser la pro-

pagation de houles régulières et irrégulières tridimensionnelles avec de fortes variations relatives du fond et de son gradient, comme le montre le temps de calcul. La prédiction du comportement en houle régulière est notamment très bien reproduite et montre l'efficacité du modèle séquentiel. Le cas de houle irrégulière est un premier cas d'application qui demande à être poursuivi et finalisé, comme vu au paragraphe précédent V.3.2.



# Conclusion générale

Cette thèse de doctorat avait pour objectif principal de développer, sur la base de travaux antérieurs, un modèle potentiel non-linéaire de propagation de houle permettant la prise en compte d'une bathymétrie variable. Ce modèle doit ainsi permettre de simuler des états de mer fortement non-linéaires avec de grandes variations du fond.

Une exploration des différentes méthodes potentielles non-linéaires existantes a tout d'abord été conduite, ce qui a fait l'objet de la première partie de ce manuscrit. Une revue succincte de la littérature a ainsi été menée, et une synthèse est disponible au chapitre I.5.2. Il est apparu que la méthode HOS, développée initialement pour un fond constant, présente une efficacité supérieure aux autres méthodes présentées. Un point limitant est que la prise en compte de corps dans le domaine n'est pas possible. Néanmoins, ce modèle peut être couplé à une autre méthode grâce au formalisme SWENSE, comme montré par exemple dans Ducrozet [46]. Une autre contrainte de ce modèle est la restriction à des vagues non-déferlantes. Cependant, c'est un caractère commun aux méthodes potentielles non-linéaires, et l'ajout de termes dissipatifs empiriques peut permettre la prise en compte du déferlement, ce qui est l'objet de travaux en cours (post-doctorat de Betsy Seiffert dans le cadre du projet SimAvHy).

Le modèle HOS antérieur à la thèse a donc été introduit afin de présenter son principe de résolution et ses principales caractéristiques. C'est l'objet du chapitre II.1. Ce modèle a ensuite été étendu à la prise en compte d'une bathymétrie variable au chapitre II.2. Deux méthodes sont à retenir : les méthodes itératives originelle et améliorée. Les deux méthodes sont basées sur un développement de Taylor de la condition au fond par rapport à une profondeur moyenne. La première méthode utilise le même ordre de non-linéarité sur la surface libre et sur le fond tel que présenté dans Liu et Yue [95] tandis que la deuxième méthode est une extension du travail réalisé par Guyenne et Nicholls [80] au formalisme HOS en considérant deux ordres de non-linéarité différents.

Le modèle HOS requiert l'utilisation d'une géométrie périodique au niveau de la surface libre et du fond. Or, l'utilisation d'une bathymétrie variable couplée à des modélisations tridimensionnelles rompt bien souvent cette condition. La troisième partie nous a donc permis d'introduire des méthodes permettant de contourner ce problème. Nous avons notamment introduit le concept de zones de relaxation, utilisées dans la direction de propagation et permettant de conserver la périodicité de la surface libre dans la direction de propagation  $x$ . La condition de périodicité sur la géométrie du fond impose d'avoir des profondeurs d'entrée et de sortie de domaine identiques, il est donc souvent indispensable de modifier

la bathymétrie initiale. L'utilisation de conditions de réflexion dans la direction transverse est également nécessaire lors de simulations tridimensionnelles de propagation de houle sur des bathymétries complexes.

La quatrième partie de ce manuscrit a ensuite permis de caractériser et de démontrer la validité des deux méthodes introduites en simulant des variations de fond constantes. On a montré que l'erreur relative faite sur la vitesse verticale convergait exponentiellement suivant le nombre de points  $N$  dans la direction horizontale, et les ordres de non-linéarités à la surface libre et au fond  $M$  et  $M_b$ . De plus, le temps de calcul pour prendre en compte une bathymétrie variable suit une loi en  $N_d \log(N_d)$  avec  $N_d$  le nombre de points déaliasés, comme dans le cas de la méthode HOS initiale pour un fond plat.

Puis, à l'aide de deux cas test bi-dimensionnels (réflexion de Bragg et shoaling), nous avons montré la précision et l'efficacité des deux méthodes itératives. Le premier cas test reproduit la réflexion de Bragg avec de faibles variations du fond et présente des résultats similaires à différentes méthodes numériques (c.f. Liu et Yue [95], Bingham et Zhang [23] et Guyenne et Nicholls [80]). Le second cas test a été réalisé afin de simuler le shoaling d'une houle linéaire. De très bons accords sont obtenus avec la solution analytique et avec les résultats numériques présentés dans Bingham et Agnon [21] et Guyenne et Nicholls [80].

Enfin la cinquième partie présente les applications bi-dimensionnelles et tridimensionnelles réalisées au cours de la thèse. La propagation de houle au-dessus d'une barre immergée en 2D nous a permis de tester notre modèle sur de grandes variations du fond. Ce cas présente de très bons accords avec les résultats expérimentaux et numériques, et prouve donc la capacité de nos deux méthodes itératives à modéliser précisément de grandes variations du fond et de son gradient de manière efficace. Le premier cas de propagation de houle en 3D au-dessus d'un fond elliptique recrée numériquement la focalisation de houles régulières et irrégulières et donne des résultats très proches des expériences de Vincent et Briggs [132]. Une comparaison a également été réalisée avec le modèle OceanWave3D développé à DTU (c.f. Engsig-Karup *et al.* [55]). L'efficacité du modèle HOS par rapport au modèle OW3D a ainsi été montrée. Le deuxième cas 3D présente la propagation réelle de houle au-dessus des canyons de Scripps et de La Jolla en Californie. Ce dernier cas montre l'efficacité du modèle développé à modéliser la propagation de houle régulière sur une bathymétrie fortement variable avec un temps de calcul modéré. Le cas de houle irrégulière est un premier cas d'application qui sera poursuivi afin de caractériser plus finement la méthode dans cette configuration très complexe.

Ainsi, nous avons démontré la capacité de notre modèle à simuler de fortes variations de bathymétrie et de fortes pentes. Malgré les limitations dues au développement de Taylor, de très bons résultats sont obtenus même pour des vagues relativement cambrées sur de fortes variations du fond. Le respect des conditions de périodicité implique l'utilisation de zones de relaxation et d'un traitement spécial de la bathymétrie. De plus, les deux méthodes itératives sont très efficaces car le temps de calcul est inférieur à la période réelle de propagation en 2D, et du même ordre de grandeur en 3D. Le choix de l'une ou de l'autre des méthodes dépendra du cas simulé. Elles peuvent toutes les deux être utilisées pour caractériser le champ de vagues dans les régions proches des côtes.

Les efforts appliqués sur les systèmes d'énergies marines renouvelables sont alors calculables. Ces efforts peuvent par exemple être calculés en couplant le modèle HOS avec un solveur CFD via le formalisme SWENSE.

Si l'on s'intéresse maintenant à l'avenir de ce travail et à ses débouchés, de nombreux points peuvent être améliorés ou développés. Tout d'abord, pour des bathymétries réelles tridimensionnelles et non-périodiques dans la direction transverse, une décomposition des séries de Fourier sur une base de cosinus au lieu d'une base exponentielle permettrait un gain certain en temps de calcul, car la méthode de symétrisation introduite afin de reproduire des conditions de réflexion ne sera alors plus nécessaire. La prochaine bathymétrie réelle modélisée sera celle du banc de Guérande, où un champ d'éoliennes offshore posées va bientôt être implanté. Pour cela il est nécessaire de résoudre la propagation de houle sur un large domaine de calcul (environ  $40\text{km} \times 10\text{km}$  soit  $200 \times 50$  longueurs d'onde au pic). Les gradients du fond dans cette zone sont relativement faibles, mais le domaine de calcul est important. Une parallélisation du code permettrait donc la simulation rapide et efficace de différentes conditions de houles incidentes pouvant impacter cette zone.

Ensuite, l'outil développé pourra également servir à une meilleure compréhension des phénomènes non-linéaires ayant lieu en profondeur variable. La simulation de houles extrêmes sur des variations importantes de bathymétrie conduit généralement à des vagues déferlantes. L'ajout d'un modèle de dissipation énergétique apparaît donc comme une perspective nécessaire afin de modéliser des cas plus réalistes. C'est l'objet du post-doctorat de Besty Seiffert (en cours). La prise en compte de l'action du vent, en tant que source, fait également partie des améliorations possibles.

Enfin, une suite de la thèse rentrant dans le cadre du projet SimAvHy permettra de coupler ce modèle HOS fond variable à un code CFD appelé WCCH (c.f. Bigay *et al.* [20]) qui est un solveur volumes finis développé au LHEEA. La méthode SWENSE (décrite dans Ferrant *et al.* [59] et Gentaz *et al.* [67]) sera utilisée afin de réaliser ce couplage.





# Annexes

## A.1 Calcul des dérivées

- Dérivée de  $\phi$  par rapport à  $x$  :

$$\phi_x^{(m)} = \sum_j A_j^{(m)}(t) \frac{\cosh(k_j(z+h_0))}{\cosh(k_j h_0)} i.k_j e^{ik_j x} + \sum_j B_j^{(m)}(t) \frac{\sinh(k_j z)}{\cosh(k_j h_0)} i.k_j e^{ik_j x}$$

Valeur de  $\phi_x^{(m)}$  en  $-h_0$  :

$$\left(\phi_x^{(m)}\right)_{-h_0} = \sum_j A_j^{(m)}(t) i.k_j \operatorname{sech}(k_j h_0) e^{ik_j x} - \sum_j B_j^{(m)}(t) i.k_j \tanh(k_j h_0) e^{ik_j x}$$

- Dérivée de  $\phi_x^{(m)}$  par rapport à  $z$  :

$$\frac{\partial \phi_x^{(m)}}{\partial z} = \sum_j A_j^{(m)}(t) k_j \frac{\sinh(k_j(z+h_0))}{\cosh(k_j h_0)} i.k_j e^{ik_j x} + \sum_j B_j^{(m)}(t) k_j \frac{\cosh(k_j z)}{\cosh(k_j h_0)} i.k_j e^{ik_j x}$$

Valeur de  $\frac{\partial \phi_x^{(m)}}{\partial z}$  en  $-h_0$  :

$$\left(\frac{\partial \phi_x^{(m)}}{\partial z}\right)_{-h_0} = 0 + \sum_j B_j^{(m)}(t) i.k_j^2 e^{ik_j x}$$

- Dérivée seconde de  $\phi_x^{(m)}$  par rapport à  $z$  :

$$\frac{\partial^2 \phi_x^{(m)}}{\partial z^2} = \sum_j A_j^{(m)}(t) k_j^2 \frac{\cosh(k_j(z+h_0))}{\cosh(k_j h_0)} i.k_j^2 e^{ik_j x} + \sum_j B_j^{(m)}(t) k_j^2 \frac{\sinh(k_j z)}{\cosh(k_j h_0)} i.k_j^2 e^{ik_j x}$$

Valeur de  $\frac{\partial^2 \phi_x^{(m)}}{\partial z^2}$  en  $-h_0$  :

$$\left(\frac{\partial^2 \phi_x^{(m)}}{\partial z^2}\right)_{-h_0} = \sum_j A_j^{(m)}(t) i.k_j^3 \operatorname{sech}(k_j h_0) e^{ik_j x} - \sum_j B_j^{(m)}(t) i.k_j^3 \tanh(k_j h_0) e^{ik_j x}$$

- Dérivée troisième de  $\phi_x^{(m)}$  par rapport à  $z$  :

$$\frac{\partial^3 \phi_x^{(m)}}{\partial z^3} = \sum_j A_j^{(m)}(t) k_j^3 \frac{\sinh(k_j(z+h_0))}{\cosh(k_j h_0)} i.k_j^3 e^{ik_j x} + \sum_j B_j^{(m)}(t) k_j^3 \frac{\cosh(k_j z)}{\cosh(k_j h_0)} i.k_j^3 e^{ik_j x}$$

Valeur de  $\frac{\partial^3 \phi_x^{(m)}}{\partial z^3}$  en  $-h_0$  :

$$\left(\frac{\partial^3 \phi_x^{(m)}}{\partial z^3}\right)_{-h_0} = 0 + \sum_j B_j^{(m)}(t) i.k_j^4 e^{ik_j x}$$

## A.2 Calcul de l'opérateur $L$ de la DNO

La condition au fond est la suivante :  $\frac{\partial \phi_{h_0}}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{h_0}}{\partial z} + \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \phi_\beta}{\partial z} = 0$  en  $z = -h_0 + \beta(x)$ .

Les deux potentiels ( $\phi_{h_0}$  et  $\phi_\beta$ ) et leurs dérivées sont alors exprimés ainsi :

$$\begin{aligned}\phi_{h_0}^{(m)} &= \sum_j A_j^{(m)}(t) \frac{\cosh(k_j(z+h_0))}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \\ \phi_\beta^{(m)} &= \sum_j L(\beta) A_j^{(m)}(t) \sinh(k_j z) e^{ik_j x} \\ \frac{\partial \phi_{h_0}^{(m)}(x,z,t)}{\partial x} &= \sum_j A_j^{(m)}(t) ik_j \frac{\cosh(k_j(z+h_0))}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \\ \frac{\partial \phi_\beta^{(m)}(x,z,t)}{\partial x} &= \sum_j L(\beta) A_j^{(m)}(t) ik_j \sinh(k_j z) e^{ik_j x} \\ \frac{\partial \phi_{h_0}^{(m)}(x,z,t)}{\partial z} &= \sum_j A_j^{(m)}(t) k_j \frac{\sinh(k_j(z+h_0))}{\cosh(k_j h_0)} e^{ik_j x} \\ \frac{\partial \phi_\beta^{(m)}(x,z,t)}{\partial z} &= \sum_j L(\beta) A_j^{(m)}(t) k_j \cosh(k_j z) e^{ik_j x}\end{aligned}$$

En  $z = -h_0 + \beta$  la condition au fond équivaut donc à :

$$\begin{aligned}\sum_j A_j^{(m)}(t) k_j \frac{\sinh(k_j \beta)}{\cosh(k_j h_0)} + \sum_j L(\beta) A_j^{(m)}(t) k_j \cosh(k_j (-h_0 + \beta)) = \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} \sum_j A_j^{(m)}(t) \frac{\cosh(k_j \beta)}{\cosh(k_j h_0)} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \sum_j L(\beta) A_j^{(m)}(t) \sinh(k_j (-h_0 + \beta))\end{aligned}\quad (2)$$

On écrit alors les cosinus hyperboliques et les sinus hyperboliques sous la forme d'un développement en série de Taylor :

$$\begin{aligned}k_j \sinh(k_j \beta) &= \sum_{l \text{ impair}} \frac{\beta^l}{l!} k_j^{(l+1)} \\ k_j \cosh(k_j \beta) &= \sum_{l \text{ pair}} \frac{\beta^l}{l!} k_j^{(l+1)} \\ k_j \sinh(k_j (-h_0 + \beta)) &= - \sum_{l \text{ pair}} \frac{\beta^l}{l!} k_j^{(l+1)} \sinh(k_j h_0) + \sum_{l \text{ impair}} \frac{\beta^l}{l!} k_j^{(l+1)} \cosh(k_j h_0) \\ k_j \cosh(k_j (-h_0 + \beta)) &= \sum_{l \text{ pair}} \frac{\beta^l}{l!} k_j^{(l+1)} \cosh(k_j h_0) - \sum_{l \text{ impair}} \frac{\beta^l}{l!} k_j^{(l+1)} \sinh(k_j h_0)\end{aligned}\quad (3)$$

La condition au fond devient :

$$\begin{aligned}\sum_j \sum_{l \text{ impair}} \frac{\beta^l}{l!} k_j^{(l+1)} \operatorname{sech}(k_j h_0) A_j^{(m)} + \sum_j \sum_{l \text{ pair}} \frac{\beta^l}{l!} k_j^{(l+1)} \cosh(k_j h_0) L(\beta) A_j^{(m)} \\ - \sum_j \sum_{l \text{ impair}} \frac{\beta^l}{l!} k_j^{(l+1)} \sinh(k_j h_0) L(\beta) A_j^{(m)} = i \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ \sum_j \sum_{l \text{ pair}} \frac{\beta^l}{l!} k_j^{(l+1)} \operatorname{sech}(k_j h_0) A_j^{(m)} \right] \\ + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ \sum_j \sum_{l \text{ impair}} \frac{\beta^l}{l!} k_j^{(l+1)} \cosh(k_j h_0) L(\beta) A_j^{(m)} - \sum_j \sum_{l \text{ pair}} \frac{\beta^l}{l!} k_j^{(l+1)} \sinh(k_j h_0) L(\beta) A_j^{(m)} \right]\end{aligned}\quad (4)$$

L'hypothèse suivante est alors réalisée : le terme  $L_\beta$  est exprimé par  $kL_\beta = \sum_j kL_j$ , avec les  $L_j$  d'ordre  $j$  en  $\beta$ .

En développant l'Eq.(4) jusqu'à l'ordre 4 en  $\beta$  et en faisant les hypothèses que  $O(\beta) = O\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)$  et que  $L_j$  est d'ordre  $j$  en  $\beta$ , les expressions pour  $L_1, L_2$  et  $L_3$  peuvent être déterminées.

On obtient :

$$\begin{aligned}
 DL_0 &= 0 \\
 DL_1 &= -\operatorname{sech}(kh_0) \left[ \beta k^2 \operatorname{sech}(kh_0) - i \frac{\partial\beta}{\partial x} k \operatorname{sech}(kh_0) \right] \\
 DL_2 &= \operatorname{sech}(kh_0) \left[ \beta k^2 \sinh(kh_0) L_1 - i \frac{\partial\beta}{\partial x} k \sinh(kh_0) L_1 \right] \\
 DL_3 &= -\operatorname{sech}(kh_0) \left[ \frac{\beta^3}{3!} k^4 \operatorname{sech}(kh_0) + \frac{\beta^2}{2!} k^3 \cosh(kh_0) L_1 - \beta k^2 \sinh(kh_0) L_2 \right] \\
 &\quad - \operatorname{sech}(kh_0) \left( -i \frac{\partial\beta}{\partial x} \right) \left[ \frac{\beta^2}{2!} k^3 \operatorname{sech}(kh_0) + \beta k^2 \cosh(kh_0) L_1 - k \sinh(kh_0) L_2 \right]
 \end{aligned} \tag{5}$$

La formule récursive générale pour calculer les  $L_j$  est la suivante :

Pour  $j$  impair :

$$\begin{aligned}
 DL_j &= -\operatorname{sech}(kh_0) \left[ \frac{\beta^j}{j!} \operatorname{sech}(h_0 D) D^{j+1} \right] - \operatorname{sech}(kh_0) \left[ \sum_{l=2, \text{pair}}^{j-1} \frac{\beta^l}{l!} D^l \cosh(kh_0) DL_{j-l} \right] \\
 &+ \operatorname{sech}(kh_0) \left[ \sum_{l=1, \text{impair}}^{j-2} \frac{\beta^l}{l!} \sinh(h_0 D) D^l DL_{j-l} \right] + \operatorname{sech}(kh_0) i \frac{\partial\beta}{\partial x} \left[ \frac{\beta^{j-1}}{(j-1)!} \operatorname{sech}(h_0 D) D^j \right] \\
 &+ \operatorname{sech}(kh_0) i \frac{\partial\beta}{\partial x} \left[ \sum_{l=2, \text{pair}}^{j-1} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \cosh(h_0 D) D^{l-1} DL_{j-l} - \sum_{l=1, \text{impair}}^{j-2} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \sinh(h_0 D) D^{l-1} DL_{j-l} \right]
 \end{aligned} \tag{6}$$

Et pour  $j$  pair :

$$\begin{aligned}
 DL_j &= -\operatorname{sech}(kh_0) \left[ \sum_{l=2, \text{pair}}^{j-2} \frac{\beta^l}{l!} \cosh(h_0 D) D^l L_{j-l} - \sum_{l=1, \text{impair}}^{j-1} \frac{\beta^l}{l!} \sinh(h_0 D) D^l DL_{j-l} \right] \\
 &+ \operatorname{sech}(kh_0) i \frac{\partial\beta}{\partial x} \left[ \sum_{l=2, \text{pair}}^{j-2} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \cosh(h_0 D) D^{l-1} DL_{j-l} - \sum_{l=1, \text{impair}}^{j-1} \frac{\beta^{l-1}}{(l-1)!} \sinh(h_0 D) D^{l-1} DL_{j-l} \right]
 \end{aligned} \tag{7}$$



# Bibliographie

- [1] Y. AGNON, P. A. MADSEN et H. A. SCHÄFFER : A new approach to high-order Boussinesq models. *Journal of Fluid Mechanics*, 399:319–333, 11 1999. ISSN 1469-7645.
- [2] G. AIRY : *Tides and Waves : Extracted from the Encyclopaedia Metropolitana*, vol. 5. B. Fellowes, 1845.
- [3] S. Y. ANNENKOV et V. I. SHRIRA : Numerical modelling of water-wave evolution based on the Zakharov equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 449:341–371, 12 2001. ISSN 1469-7645.
- [4] G. A. ATHANASSOULIS et K. A. BELIBASSAKIS : A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions. *Journal of Fluid Mechanics*, 389:275–301, 6 1999. ISSN 1469-7645.
- [5] A. BABARIT et G. DELHOMMEAU : Theoretical and numerical aspects of the open source BEM solver NEMOH. *In Proceedings of the 11th European Wave and Tidal Energy Conference (EWTEC2015)*, 2015.
- [6] K. BAI : A localized finite-element method for two-dimensional steady potential flows with a free surface. *Journal of Ship Research*, 22:216–230, 1978. ISSN 0022-4502.
- [7] X. BARTHELEMY, M. L. BANNER, W. L. PEIRSON, F. FEDELE, M. ALLIS et F. DIAS : On the local properties of highly nonlinear unsteady gravity water waves. Part 2. Dynamics and onset of breaking, Jul 2015.
- [8] W. J. D. BATEMAN, C. SWAN et P. H. TAYLOR : On the efficient numerical simulation of directionally spread surface water waves. *Journal of Computational Physics*, 174(1):277–305, nov. 2001. ISSN 0021-9991.
- [9] W. BATEMAN, V. KATSARDI et C. SWAN : Extreme ocean waves. part I. the practical application of fully nonlinear wave modelling. *Applied Ocean Research*, 34:209 – 224, 2012. ISSN 0141-1187.
- [10] K. A. BELIBASSAKIS : A coupled-mode model for the scattering of water waves by shearing currents in variable bathymetry. *Journal of Fluid Mechanics*, 578:413–434, 5 2007. ISSN 1469-7645.
- [11] K. A. BELIBASSAKIS et G. A. ATHANASSOULIS : Extension of second-order stokes theory to variable bathymetry. *Journal of Fluid Mechanics*, 464:35–80, 8 2002. ISSN 1469-7645.

- 
- [12] K. BELIBASSAKIS et G. ATHANASSOULIS : A coupled-mode system with application to nonlinear water waves propagating in finite water depth and in variable bathymetry regions. *Coastal Engineering*, 58(4):337 – 350, 2011. ISSN 0378-3839.
- [13] K. BELIBASSAKIS, G. ATHANASSOULIS et T. GEROSTATHIS : A coupled-mode model for the refraction–diffraction of linear waves over steep three-dimensional bathymetry. *Applied Ocean Research*, 23(6):319 – 336, 2001. ISSN 0141-1187.
- [14] K. BELIBASSAKIS, G. ATHANASSOULIS et T. GEROSTATHIS : Directional wave spectrum transformation in the presence of strong depth and current inhomogeneities by means of coupled-mode model. *Ocean Engineering*, 87(0):84 – 96, 2014.
- [15] M. BENOIT, P. FRIGAARD et H. A. SCHÄFFER : Analysing multi-directional wave spectra : A tentative classification of available methods. *In Proceedings of the 27th IAHR Seminar Multidirectional Waves and Their Interaction with Structures, San Francisco, United States, 1997*, p. 131–158.
- [16] M. BENOIT, C. RAOULT et M. YATES : Fully nonlinear and dispersive modeling of surf zone waves : Non-breaking tests. *Coastal Engineering Proceedings*, 1(34):15, 2014. ISSN 2156-1028.
- [17] L. BENXIA et Y. XIPING : Wave decomposition phenomenon and spectrum evolution over submerged bars. *Acta Oceanologica Sinica*, 29(3):82–92, 2009.
- [18] C. BERHAULT, O. THILLEUL, G. DUCROZET et Y. PERIGNON : Etats de mer extrêmes par petit fond et fond variable – état de l’art. *IRT JV/HYSMAR*, (WP1.1), 2013.
- [19] J. BERKHOFF, N. BOOY et A. RADDER : Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. *Coastal Engineering*, 6(3):255 – 279, 1982. ISSN 0378-3839.
- [20] P. BIGAY, A. BARDIN, G. OGER et D. L. TOUZE : A cartesian explicit solver for complex hydrodynamic applications. *In Proceedings of the 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE), San Francisco, United States, 2014*.
- [21] H. B. BINGHAM et Y. AGNON : A Fourier–Boussinesq method for nonlinear water waves. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 24(2):255 – 274, 2005. ISSN 0997-7546.
- [22] H. BINGHAM, D. FUHRMAN, E. JAMOIS et O. KIMMOUN : Nonlinear wave interaction with bottom-mounted structures by a high-order Boussinesq method. *In Proceedings of the 19th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, p. 9–12, 2004. ISBN 88-7617-000-6.
- [23] H. BINGHAM et H. ZHANG : On the accuracy of finite-difference solutions for nonlinear water waves. *Journal of Engineering Mathematics*, 58:211–228, 2007.

- [24] E. BLONDEL : *Reconstruction et prévision déterministe de houle à partir de données mesurées*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Nantes, 2009.
- [25] F. BONNEFOY : *Modélisation expérimentale et numérique des états de mer complexes*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Nantes, 2005.
- [26] F. BONNEFOY, G. DUCROZET, D. LE TOUZE et P. FERRANT : Time-domain simulation of nonlinear water waves using spectral methods. *Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves*, 11, 2010.
- [27] J. BOUSSINESQ : Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées série 2*, 17:55 – 108, 1872.
- [28] J. P. BOYD : *Chebyshev and Fourier Spectral Methods : Second Revised Edition (Dover Books on Mathematics)*. Dover Publications, second edition, revised édn, déc. 2001. ISBN 0486411834.
- [29] M. BRIGGS : Memorandum for record (mfr) : Summary of wet shoal test results. *Unpublished Memorandum for Record, Coastal Engrg. Res. Center, USAE Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS*, 1987.
- [30] X. CAI, H. P. LANGTANGEN, B. F. NIELSEN et A. TVEITO : A finite element method for fully nonlinear water waves. *Journal of Computational Physics*, 143(2):544 – 568, 1998. ISSN 0021-9991.
- [31] D. CHALIKOV, A. BABANIN et E. SANINA : Numerical modeling of 3D fully nonlinear potential periodic waves. *Ocean Dynamics*, 64(10):1469–1486, 2014. ISSN 1616-7341.
- [32] D. CHALIKOV et D. SHEININ : Modeling extreme waves based on equations of potential flow with a free surface. *Journal of Computational Physics*, 210(1):247 – 273, 2005. ISSN 0021-9991.
- [33] F. CHAZEL, M. BENOIT, A. ERN et S. PIPERNO : A double-layer Boussinesq-type model for highly nonlinear and dispersive waves. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 465(2108):2319–2346, 2009. ISSN 1364-5021.
- [34] M. CHERN, A. BORTHWICK et R. TAYLOR : A pseudospectral sigma-transformation model of 2D nonlinear waves. *Journal of fluids and structures*, 13(5):607–630, 1999. ISSN 0889-9746.
- [35] T. CHRISTIANSEN, H. BINGHAM, A. ENGSIG-KARUP, G. DUCROZET et P. FERRANT : Efficient hybrid-spectral model for fully nonlinear numerical wave tank. In *Proceedings of the 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, vol. 9. American Society of Mechanical Engineers, 2013. ISBN 978-0-7918-5543-0.
- [36] D. CLAMOND, D. FRUCTUS, J. GRUE et Øyvind KRISTIANSEN : An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. part II : Generation and absorption. *Journal of Computational Physics*, 205(2):686 – 705, 2005. ISSN 0021-9991.



- 
- [37] D. CLAMOND et J. GRUE : A fast method for fully nonlinear water-wave computations. *Journal of Fluid Mechanics*, 447:337–355, 11 2001. ISSN 1469-7645.
- [38] R. COIFMAN et Y. MEYER : Nonlinear harmonic analysis and analytic dependence. In *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 43, p. 71–78. Proceedings of the American Mathematical Society, 1985.
- [39] W. CRAIG et C. SULEM : Numerical simulation of gravity waves. *Journal of Computational Physics*, 108:73–83, 1993.
- [40] W. CRAIG, P. GUYENNE, D. P. NICHOLLS et C. SULEM : Hamiltonian long-wave expansions for water waves over a rough bottom. vol. 461, p. 839–873. The Royal Society, 2005. ISBN 1471-2946.
- [41] R. A. DALRYMPLE : Directional wavemaker theory with sidewall reflection. *Journal of Hydraulic Research*, 27(1):23–34, 1989.
- [42] A. G. DAVIES et A. D. HEATHERSHAW : Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography. *Journal of Fluid Mechanics*, 144:419–443, 7 1984. ISSN 1469-7645.
- [43] M. DINGEMANS : Comparison of computations with Boussinesq-like models and laboratory measurements. *Delft Hydraulics memo H1684.12.*, 1994.
- [44] D. DOMMERMUTH et D. YUE : A high-order spectral method for the study of non-linear gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 184:267–288, 1987.
- [45] D. DOMMERMUTH : The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme. *Wave Motion*, 32(4):307 – 317, 2000. ISSN 0165-2125.
- [46] G. DUCROZET : *Modélisation des processus non-linéaires de génération et de propagation d'états de mer par une approche spectrale*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Nantes, 2007.
- [47] G. DUCROZET, H. BINGHAM, A. P. ENGSIG-KARUP, F. BONNEFOY et P. FERRANT : A comparative study of two fast nonlinear free-surface water wave models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 69 (11):1818–1834, 2012.
- [48] G. DUCROZET, F. BONNEFOY, D. LE TOUZÉ et P. FERRANT : Implementation and Validation of Nonlinear Wave Maker Models in a HOS Numerical Wave Tank. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 16:pp. 161–167, 2006.
- [49] G. DUCROZET, F. BONNEFOY, D. LE TOUZE et P. FERRANT : 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas. *Natural Hazards and Earth Systems Sciences*, 7:109–122, 2007.
- [50] A. I. DYACHENKO, D. I. KACHULIN et V. E. ZAKHAROV : Freak waves at the surface of deep water. *Journal of Physics : Conference Series*, 510 (1):012050, 2014.

- [51] A. DYACHENKO, D. KACHULIN et V. ZAKHAROV : Freak-waves : Compact equation versus fully nonlinear one. *In Extreme Ocean Waves*, p. 23–44. Springer International Publishing, 2016. ISBN 978-3-319-21574-7.
- [52] A. P. ENGSIG-KARUP : Analysis of efficient preconditioned defect correction methods for nonlinear water waves. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 74(10):749–773, 2014. ISSN 1097-0363.
- [53] A. P. ENGSIG-KARUP, M. G. MADSEN et S. L. GLIMBERG : A massively parallel GPU-accelerated model for analysis of fully nonlinear free surface waves. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 70(1):20–36, 2012. ISSN 1097-0363.
- [54] A. ENGSIG-KARUP, S. GLIMBERG, A. NIELSEN et O. LINDBERG : *Fast hydrodynamics on heterogenous many-core hardware*, p. 251–294. Taylor and Francis, 2013. ISBN 978-1-4665-7162-4. 2013 ; 11.
- [55] A. ENGSIG-KARUP, H. BINGHAM et O. LINDBERG : An efficient flexible-order model for 3D nonlinear water waves. *Journal of Computational Physics*, 228(6):2100 – 2118, 2009. ISSN 0021-9991.
- [56] A. ENGSIG-KARUP, C. ESKILSSON et D. BIGONI : A stabilised nodal spectral element method for fully nonlinear water waves. <http://arxiv.org/2015>, 2015.
- [57] J. FENTON : *Nonlinear wave theories*, p. 3–25. The Sea, Vol.9 : Ocean Engineering Science, 1990.
- [58] J. FENTON et M. RIENECKER : A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems : application to solitary-wave interactions. *Journal of Fluid Mechanics*, 118:411–443, 1982.
- [59] P. FERRANT, L. GENTAZ, B. ALESSANDRINI, D. L. TOUZÉ et E. C. de NANTES : A potential/RANSE approach for regular water wave diffraction about 2D structures. *Ship Technology Research*, 50(4):165–171, 2003.
- [60] C. FOCESATO et F. DIAS : A fast method for nonlinear three-dimensional free-surface waves. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 462(2073):2715–2735, 2006.
- [61] C. FOCESATO, S. GRILLI et F. DIAS : Numerical modeling of extreme rogue waves generated by directional energy focusing. *Wave Motion*, 44(5):395 – 416, 2007. ISSN 0165-2125.
- [62] D. FRUCTUS, D. CLAMOND, J. GRUE et O. KRISTIANSEN : An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. *Journal of Computational Physics*, 205(2):665–685, may 2005. ISSN 0021-9991.
- [63] D. FRUCTUS et J. GRUE : An explicit method for the nonlinear interaction between water waves and variable and moving bottom topography. *Journal of Computational Physics*, 222(2):720 – 739, 2007. ISSN 0021-9991.

- 
- [64] D. FRUCTUS et J. GRUE : *Model for fully nonlinear ocean wave simulations derived using Fourier inversion of integral equations in 3D*, chap. 1, p. 3–25. *Advances in numerical simulation of nonlinear water waves*, 2010.
- [65] D. FUHRMAN et H. BINGHAM : Numerical solutions of fully nonlinear and highly dispersive Boussinesq equations in two horizontal dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 44(3):231–256, 2004. ISSN 0271-2091.
- [66] D. R. FUHRMAN, H. B. BINGHAM et P. A. MADSEN : Nonlinear wave–structure interactions with a high-order Boussinesq model. *Coastal Engineering*, 52(8):655 – 672, 2005. ISSN 0378-3839.
- [67] L. GENTAZ, R. LUQUET, B. ALESSANDRINI et P. FERRANT : Numerical simulation of a 3D viscous flow around a vertical cylinder in nonlinear waves using an explicit wave model. *In Proceedings of the 23rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE), Vancouver, Canada*, 2004.
- [68] T. GEROSTHATHIS, K. A. BELIBASSAKIS et G. A. ATHANASSOULIS : Coupled-mode, phase-resolving model for the transformation of wave spectrum over steep 3d topography. A parallel-architecture implementation. *In Proceedings of the 24th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Halkidiki, Greece*, p. OMAE2005–67075. ASME, New York, N.Y., 2005.
- [69] R. GIBSON et C. SWAN : The evolution of large ocean waves : the role of local and rapid spectral changes. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2077): 21–48, 2007. ISSN 1364-5021.
- [70] M. F. GOBBI et J. T. KIRBY : Wave evolution over submerged sills : Tests of a high-order Boussinesq model. *Coastal Engineering*, 37:57–96, 1998.
- [71] M. GOUIN, G. DUCROZET et P. FERRANT. : 2D and 3D nonlinear wave propagation over a non-uniform bottom by pseudo-spectral method. *In Proceedings of the 11th European Wave and Tidal Energy Conference (EWTEC)*, 2015.
- [72] M. GOUIN, G. DUCROZET et P. FERRANT : Development and validation of a highly nonlinear model for wave propagation over a variable bathymetry. *In Proceedings of the 34th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE), St John's, Canada*, 2015.
- [73] M. GOUIN, G. DUCROZET et P. FERRANT : Validation of a nonlinear spectral model for water waves over a variable bathymetry. *In Proceedings of the 30th international workshop on water waves and floating bodies*, 2015.
- [74] M. GOUIN, G. DUCROZET et P. FERRANT : Development and validation of a non-linear spectral model for water waves over variable depth. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 57:115 – 128, 2016. ISSN 0997-7546.

- [75] L. GREENGARD et V. ROKHLIN : A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, 73(2):325–348, déc. 1987. ISSN 0021-9991.
- [76] S. GRILLI, P. GUYENNE et F. DIAS : A fully non-linear model for three-dimensional overturning waves over an arbitrary bottom. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 35(7):829–867, 2001.
- [77] S. T. GRILLI, S. VOGELMANN et P. WATTS : Development of a 3D numerical wave tank for modeling tsunami generation by underwater landslides. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26(4):301 – 313, 2002. ISSN 0955-7997.
- [78] J. GRUE : On four highly nonlinear phenomena in wave theory and marine hydrodynamics. *Applied Ocean Research*, 24(5):261 – 274, 2002. ISSN 0141-1187.
- [79] P. GUYENNE et D. NICHOLLS : Numerical simulation of solitary waves on plane slopes. *Mathematical and Computers in Simulation*, 69:269–281, 2005.
- [80] P. GUYENNE et D. NICHOLLS : A high-order spectral method for nonlinear water waves over moving bottom topography. *Journal of Scientific Computing*, 30:81–101, 2007.
- [81] E. GUYON, J.-P. HULIN et L. PETIT : *Hydrodynamique Physique*. 1955.
- [82] J. C. HARRIS, E. DOMBRE, M. BENOIT et S. T. GRILLI : Fast integral equation methods for fully nonlinear water wave modeling. *In Proceedings of the 24th International Ocean and Polar Engineering Conference*, August 2014.
- [83] K. HASSELMANN : On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 12:481–500, 1962.
- [84] T. G. JENSEN : Open boundary conditions in stratified ocean models. *Journal of Marine Systems*, 16(3-4):297–322, oct. 1998.
- [85] F. T. KORSMEYER, D. K. P. YUE, K. NABORS et J. WHITE : Multipole-accelerated preconditioned iterative methods for three-dimensional potential problems. *In Proceedings of the Copper Mountain Conference on Iterative Methods*, 1992.
- [86] T. KORSMEYER, T. KLEMAS, J. WHITE et J. PHILLIPS : Fast hydrodynamic analysis of large offshore structures. *In Proceedings of the International Society of Offshore and Polar Engineers*, January 1999.
- [87] V. P. KRASITSKII : On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 272:1–20, 8 1994. ISSN 1469-7645.
- [88] H.-O. KREISS et J. OLIGER : Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations. *Tellus*, 24(3). ISSN 2153-3490.

- 
- [89] R. KURNIA et E. van GROESEN : High order hamiltonian water wave models with wave-breaking mechanism. *Coastal Engineering*, 93:55 – 70, 2014. ISSN 0378-3839.
- [90] L. LANDAU et E. LIFCHITZ : *Physique Théorique – Mécanique des Fluides*, vol. 6. 1989.
- [91] J. LARA, N. GARCIA et I. LOSADA : RANS modelling applied to random wave interaction with submerged permeable structures. *Coastal Engineering*, 53(5–6):395 – 417, 2006. ISSN 0378-3839.
- [92] D. LE TOUZÉ : *Méthodes spectrales pour la modélisation non-linéaire d'écoulements à surface libre instationnaires*. Thèse de doctorat, 2003.
- [93] B. LI et C. A. FLEMING : A three dimensional multigrid model for fully nonlinear water waves. *Coastal Engineering*, 30(3–4):235 – 258, 1997.
- [94] L. S. LIAM, D. ADYTIA et E. van GROESEN : Embedded wave generation for dispersive surface wave models. *Ocean Engineering*, 80:73 – 83, 2014. ISSN 0029-8018.
- [95] Y. LIU et D. YUE : On generalized Bragg scattering of surface waves by bottom ripples. *Journal of Fluid Mechanics*, 356:297–326, 1998.
- [96] Y. H. LIU, C. H. KIM et X. S. LU : Comparison of higher-order boundary element and constant panel methods for hydrodynamic loadings. In *Proceedings of the International Society of Offshore and Polar Engineers*, 1990.
- [97] Y. LIU : *Fast multipole boundary element method : theory and applications in engineering*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. ISBN 978-0-521-11659-6.
- [98] M. S. LONGUET-HIGGINS et E. D. COKELET : The deformation of steep surface waves on water. I. a numerical method of computation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 350(1660):1–26, 1976. ISSN 00804630.
- [99] M. LONGUET-HIGGINS : Resonant interactions between two trains of gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 12:321–332, 1962.
- [100] H. LUTH, G. KLOPMAN et N. KITOU : Kinematics of waves breaking partially on an offshore bar. *Delft Hydraulics memo H1573*, 1994.
- [101] P. LYNETT et P. L. LIU : A two-layer approach to wave modelling. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2049):2637–2669, 2004. ISSN 1364-5021.
- [102] Q. W. MA, G. X. WU et R. EATOCK-TAYLOR : Finite element simulation of fully non-linear interaction between vertical cylinders and steep waves. Part 1 : methodology and numerical procedure. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 36(3):265–285, 2001. ISSN 1097-0363.

- [103] Q. MA : *Numerical simulation of nonlinear interaction between structures and steep waves*. Thèse de doctorat, Department of Mechanical Engineering, University College, London, UK,, 1998.
- [104] Q. MA et S. YAN : Quasi ALE finite element method for nonlinear water waves. *Journal of Computational Physics*, 212(1):52 – 72, 2006.
- [105] P. A. MADSEN, D. R. FUHRMAN et B. WANG : A Boussinesq-type method for fully nonlinear waves interacting with a rapidly varying bathymetry. *Coastal Engineering*, 53(5–6):487 – 504, 2006. ISSN 0378-3839.
- [106] P. A. MADSEN et O. R. SØRENSEN : A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry. *Coastal Engineering*, 18(3):183 – 204, 1992. ISSN 0378-3839.
- [107] R. MAGNE, K. A. BELIBASSAKIS, T. H. C. HERBERS, F. ARDUIN, W. C. O'REILLY et V. REY : Evolution of surface gravity waves over a submarine canyon. *Journal of Geophysical Research*, p. 01002, 2007.
- [108] C. C. MEI : Resonant reflection of surface water waves by periodic sandbars. *Journal of Fluid Mechanics*, 152:315–335, 1985.
- [109] O. NWOGU : Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 119(6):618–638, 1993.
- [110] T. OHYAMA, W. KIOKA et A. TADA : Applicability of numerical models to nonlinear dispersive waves. *Coastal Engineering*, 24(3–4):297 – 313, 1995. ISSN 0378-3839.
- [111] A. T. PATERA : A spectral element method for fluid dynamics : Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54(3):468 – 488, 1984. ISSN 0021-9991.
- [112] D. H. PEREGRINE : Long waves on a beach. *Journal of Fluid Mechanics*, 27:815–827, 3 1967. ISSN 1469-7645.
- [113] Y. PERIGNON : *Modélisation déterministe des états de mer. Application à la rétro-diffusion d'ondes radar*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Nantes, 2011.
- [114] N. A. PHILLIPS : A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J. Meteor.*, 14(2):184–185, avr. 1957.
- [115] O. PHILLIPS : On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1. The elementary interactions. *Journal of Fluid Mechanics*, 9:193–217, 1960.
- [116] C. RAOULT, M. BENOIT et M. L. YATES : Validation of a fully nonlinear and dispersive wave model with laboratory non-breaking experiments. *Coastal Engineering*, 114:194 – 207, 2016. ISSN 0378-3839.
- [117] M. RIENECKER et J. FENTON : A Fourier approximation method for steady water waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 104:119–137, 1981.

- 
- [118] H. SCHÄFFER : Comparison of Dirichlet-Neumann operator expansions for nonlinear surface gravity waves. *Coastal Engineering.*, 55(4):288–294, 2008.
- [119] Y.-L. SHAO et O. M. FALTINSEN : A harmonic polynomial cell (HPC) method for 3D Laplace equation with application in marine hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 274:312–332, oct. 2014. ISSN 0021-9991.
- [120] Y. SHAO et O. FALTINSEN : Towards efficient fully-nonlinear potential-flow solvers in marine hydrodynamics. In *Proceedings of the 31st International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE), Rio de Janeiro, Brazil*, 2012.
- [121] L. SHEMER, H. JIAO, E. KIT et Y. AGNON : Evolution of a nonlinear wave field along a tank : experiments and numerical simulations based on the spatial Zakharov equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 427:107–129, 1 2001. ISSN 1469-7645.
- [122] Y. SHEN : Simulation of wave propagation over a submerged bar using the VOF method with a two-equation  $k$ - $\epsilon$  turbulence modeling. *Ocean Engineering*, 31:87–95, 2004.
- [123] R. SMITH : An operator expansion formalism for nonlinear surface waves over variable depth. *Journal of Fluid Mechanics*, 363:333–347, 1998.
- [124] M. STIASSNIE et L. SHEMER : On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 143:47–67, juin 1984.
- [125] M. STIASSNIE : Note on the modified nonlinear Schrödinger equation for deep water waves. *Wave Motion*, 6(4):431 – 433, 1984. ISSN 0165-2125.
- [126] G. G. STOKES : On the theory of oscillatory waves. In *Mathematical and Physical Papers vol.1*, vol. 1, p. 197–229. Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780511702242. Cambridge Books Online.
- [127] K. D. SUH, W. S. PARK et B. S. PARK : Separation of incident and reflected waves in wave-current flumes. *Coastal Engineering*, 43(3–4):149 – 159, 2001. ISSN 0378-3839.
- [128] M. TANAKA : A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation. *Fluid Dynamics Research*, 28(1):41 – 60, 2001. ISSN 0169-5983.
- [129] B. TENG, D. NING et G. YING : A fast multipole boundary element method for three-dimensional potential flow problems. *Acta oceanologica sinica*, 23(4):747–756, 2004.
- [130] E. van GROESEN, ANDONOWATI, L. S. LIAM et I. LAKHTUROV : Accurate modelling of uni-directional surface waves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(6):1747 – 1756, 2010. ISSN 0377-0427. Eighth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves (Waves 2007).

- [131] E. van GROESEN et I. van der KROON : Fully dispersive dynamic models for surface water waves above varying bottom, part 2 : Hybrid spatial-spectral implementations. *Wave Motion*, 49(1):198 – 211, 2012. ISSN 0165-2125.
- [132] C. VINCENT et M. BRIGGS : Refraction-diffraction of irregular waves over a mound. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 115:269–284, 1989.
- [133] J. WANG et Q. W. MA : Numerical techniques on improving computational efficiency of spectral boundary integral method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(10):1638–1669, 2015. ISSN 1097-0207. nme.4857.
- [134] K. M. WATSON et B. J. WEST : A transport-equation description of nonlinear ocean surface wave interactions. *Journal of Fluid Mechanics*, 70:815–826, 8 1975. ISSN 1469-7645.
- [135] B. WEST : On the simpler aspect of nonlinear fluctuating — deep water gravity waves (weak interaction theory). *Lecture Notes in Physics*, 146, 1981.
- [136] B. WEST, K. BRUECKNER, R. S. JANDA, D. M. MILDER et R. L. MILTON : A new numerical method for the surface hydrodynamics. *Journal of Geophysical Research*, 92:11803–11824, 1987.
- [137] J.-H. WESTHUIS : *The numerical simulation of nonlinear waves in a hydrodynamic model test basin*. Thèse de doctorat, University of Twente, 2001.
- [138] J. WESTPHALEN, D. GREAVES, A. RABY, Z. HU, D. CAUSON, C. MINGHAM, P. OMIÐVAR, P. STANSBY et B. D. ROGERS : Investigation of wave-structure interaction using state of the art CFD techniques. *Open Journal of Fluid Dynamics*, 4:18–43, 2014.
- [139] J. M. WILLIAMS : Limiting gravity waves in water of finite depth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 302(1466):139–188, 1981.
- [140] G. X. WU et R. EATOCK-TAYLOR : Hydrodynamic forces on submerged oscillating cylinders at forward speed. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 414(1846):149–170, 1987. ISSN 00804630.
- [141] G. X. WU et R. EATOCK-TAYLOR : Finite element analysis of two-dimensional non-linear transient water waves. *Applied Ocean Research*, 16:363–372, 1994.
- [142] G. WU et R. EATOCK-TAYLOR : Time stepping solutions of the two-dimensional nonlinear wave radiation problem. *Ocean Engineering*, 22 (8):785 – 798, 1995. ISSN 0029-8018.
- [143] G. WU, Q. MA et R. EATOCK-TAYLOR : Numerical simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a finite element method. *Applied Ocean Research*, 20(6):337 – 355, 1998.



- 
- [144] G. WU et R. EATOCK-TAYLOR : The coupled finite element and boundary element analysis of nonlinear interactions between waves and bodies. *Ocean Engineering*, 30(3):387 – 400, 2003. ISSN 0029-8018.
- [145] L. XU et P. GUYENNE : Numerical simulation of three-dimensional nonlinear water waves. *Journal of Computational Physics*, 228(22):8446 – 8466, 2009. ISSN 0021-9991.
- [146] S. YAN et Q. W. MA : QALE-FEM for modelling 3D overturning waves. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 63(6):743–768, 2010. ISSN 1097-0363.
- [147] M. L. YATES et M. BENOIT : Accuracy and efficiency of two numerical methods of solving the potential flow problem for highly nonlinear and dispersive water waves. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 77(10):616–640, 2015. ISSN 1097-0363.
- [148] X. YU : Finite difference methods for the reduced water wave equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154(3–4):265 – 280, 1998. ISSN 0045-7825.
- [149] V. ZAKHAROV : Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 9:190–194, 1968.
- [150] B. ZHOU, G. WU et B. TENG : Fully nonlinear wave interaction with freely floating non-wall-sided structures. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 50:117 – 132, 2015. ISSN 0955-7997.