



**HAL**  
open science

# Phénomènes de transfert lors de la solidification dans le procédé de coulée centrifuge horizontale

Georges Martinez

► **To cite this version:**

Georges Martinez. Phénomènes de transfert lors de la solidification dans le procédé de coulée centrifuge horizontale. Electromagnétisme. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1987. Français. NNT: . tel-01340680

**HAL Id: tel-01340680**

**<https://hal.science/tel-01340680>**

Submitted on 1 Jul 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée par

**Georges MARTINEZ**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR**

de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

(Arrêté ministériel du 5 Juillet 1984)

Spécialité : MÉTALLURGIE

---

## **PHÉNOMÈNES DE TRANSFERT LORS DE LA SOLIDIFICATION DANS LE PROCÉDÉ DE COULÉE CENTRIFUGE HORIZONTALE**

---

Date de soutenance : 23 Juin 1987

Composition du Jury :

M. G. LESPINARD	Président
M. J. SZEKELY	Rapporteurs
M. G. LESOULT	
M. M. PARIS	Examineurs
M. F. DURAND	
M. M. GARNIER	

Thèse préparée au sein du Laboratoire MADYLAM

3

"Un livre est un objet devant soi, quelque chose  
sur quoi on peut réfléchir, à quoi on peut revenir,  
qu'on peut corriger, contredire, discuter,  
quelque chose qu'on juge."

Jean GUEHENNO, Carnets du vieil écrivain (1971)

*à mes parents  
à mon cousin Pierre  
pour leur soutien moral de tous les instants*



Cette étude a été réalisée à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, au laboratoire MADYLAM (Magnétodynamique des Liquides, Application à la Métallurgie) dirigé par Monsieur M. GARNIER. Que le Centre de Recherches de Pont-à-Mousson soit remercié pour son support financier.

Monsieur le Professeur G. LESPINARD, Président de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ma thèse et je tiens à l'en remercier.

Je tiens tout particulièrement à remercier monsieur le Professeur J. SZEKELY, du Massachusetts Institute of Technology, pour avoir accepté le rôle de rapporteur de cette thèse et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de participer au jury.

Monsieur le Professeur G. LESOULT, de l'Ecole des Mines de Nancy, a toujours manifesté de l'intérêt pour mon travail ; en acceptant d'être rapporteur de ma thèse et de participer au jury, il me fait un honneur et un plaisir pour lesquels je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur M. PARIS, Directeur Technique du Centre de Recherches de Pont-à-Mousson, pour l'intérêt qu'il a montré pour cette étude et pour sa participation au jury de thèse.

Cette étude a été menée à bien au sein du groupe de recherche que dirige Monsieur le Professeur F. DURAND. Je lui sais gré de la confiance qu'il m'a toujours témoignée et je le remercie sincèrement pour la compétence et la rigueur avec lesquelles il m'a guidé dans l'étude des problèmes de solidification.

Monsieur M. GARNIER, Directeur du laboratoire MADYLAM, m'a apporté une aide irremplaçable tout au long de mon travail ; sa compétence, sa disponibilité et son enthousiasme communicatif sont pour beaucoup dans la partie hydrodynamique de ce travail, et ont constitué une aide scientifique et morale extrêmement efficace. Il m'est agréable de pouvoir lui témoigner aujourd'hui toute mon amicale reconnaissance.

J'associe à mes remerciements Monsieur le Professeur R. MOREAU, dont la clarté et le caractère synthétique de l'enseignement ont joué un grand rôle dans l'apprentissage de cette discipline nouvelle pour moi qu'était l'hydrodynamique.

Monsieur le Professeur P. MASSE m'a fourni une aide précieuse dans le domaine de la modélisation en éléments finis. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de mes sincères remerciements.

Je remercie également vivement Mademoiselle S. VASSEUR, Ingénieur au Centre de Recherches de Pont-à-Mousson, pour ses nombreux conseils, pour sa collaboration fructueuse à cette étude et pour sa grande compétence scientifique.

Je tiens spécialement à remercier le service de photographie et de reprographie de l'Institut de Mécanique qui a assuré la reproduction de ce mémoire et que dirige Monsieur G. BRAULT. Sa compétence technique, son enthousiasme, son efficacité et sa disponibilité ont constitué un atout précieux pour mener à bien l'étude expérimentale.

Je n'oublie pas dans mes remerciements l'équipe technique du laboratoire qui m'a toujours aidé de façon extrêmement efficace et dans une ambiance agréable. Ma reconnaissance va tout spécialement à R. DO dont la compétence, la minutie et l'enthousiasme ont permis de mettre au point une installation expérimentale très complexe.

Je remercie tout particulièrement A. GAGNOUD dont la disponibilité, la gentillesse et la grande compétence qu'elle témoigne en modélisation numérique m'ont été une aide précieuse.

Je ne puis oublier Mesdames M. BAUDOIN et A. TUPIN dont l'efficacité et la compétence sont remarquables. Je suis particulièrement redevable à Madame TUPIN qui a assuré la frappe de ce mémoire avec une patience, une bonne volonté et un courage à toute épreuve.

Je ne saurais enfin oublier mes camarades de travail qui ont su entretenir une ambiance chaleureuse et une amitié sans faille à mon égard.



## INTRODUCTION

Les procédés métallurgiques soulèvent diverses questions tant en ce qui concerne les techniques de fabrication proprement dites que les phénomènes physico-chimiques, thermiques, magnétiques ou hydrodynamiques jouant sur la qualité du produit (voir par exemple L. NORTHCOTT, 1941, J.P. BIRAT, 1976) ; pour ce qui est de la technique, on cherche le plus souvent à donner à la pièce brute de coulée une forme la plus proche possible de celle du produit fini correspondant, de façon à limiter par la suite les frais d'usinage et les pertes de matière : c'est la coulée en moule.

Cependant, certaines formes se prêtent mal à cette technique, parce que la complexité de la pièce soit ne permet pas d'assurer un remplissage correct et complet du moule, soit conduit à la formation de retassures dues à l'impossibilité d'alimenter en liquide certaines zones libérées par la contraction thermique du solide.

L'utilisation de la centrifugation permet de résoudre ces problèmes pour certains types de produits. Le principe est ancien puisqu'il remonte au début du dix-neuvième siècle mais il a fallu attendre l'invention du moteur électrique, qui permet de faire tourner à vitesse stabilisée des masses importantes, et l'amélioration des systèmes d'entraînement pour que cette technique voit effectivement le jour au niveau industriel (H. DETTELA, 1954). Encore ne fut-elle utilisée au début que pour la fonte et les alliages de bronze, les problèmes à résoudre dans le cas de l'acier étant beaucoup plus complexes (A. ROYER, 1981).

Elle est intéressante aussi bien pour des pièces de forme compliquée, car la force centrifuge favorise énormément le remplissage du moule si celui-ci est correctement disposé, que pour des pièces ayant une symétrie de révolution ou s'en approchant, car dans ce cas on assure à la pièce une texture axisymétrique et une isotropie des propriétés mécaniques (A. ROYER, 1981, S. VASSEUR et al., 1983). Dans tous les cas, elle permet une meilleure décantation des inclusions non-métalliques par augmentation de la poussée d'Archimède (J.P. BIRAT, 1976), ce qui conduit à une bonne pureté interne du métal. Quand le métal est au repos ou en écoulement laminaire, la formule de Stokes montre que les grosses particules décantent plus vite que les petites ; c'est le contraire qui se produit dans un écoulement turbulent (G.S. MIRZOYAN et al., 1982.).

D'une façon générale, les propriétés physiques et mécaniques sont meilleures pour des pièces fabriquées par centrifugation que pour des pièces identiques fabriquées en coulée statique (M.B. ZAGHLOUL, 1977). Les outils utilisés en centrifugation dépendent fortement des pièces à fabriquer (M.C. JONES, 1970 ; D.S. GIBSON, 1984).

Pour les pièces de petite taille comme les bijoux et les prothèses dentaires, le métal est fondu par induction dans un creuset solidaire du moule et la mise en rotation de l'ensemble provoque le transvasement du liquide (T.K. VAIDYANATHAN, 1981).

L'injection centrifuge est utilisée lorsque le moule ne supporte pas une mise en rotation ; elle consiste à alimenter un moule fixe, le plus souvent en sable, par une table tournante (M.C. JONES, 1970).

La coulée centrifuge verticale sert à couler des pièces de grand diamètre ou de faible longueur comme les brides, les anneaux, les bandages, les disques et jantes de roues pour les chemins de fer (H. DETTELA, 1954), certains tubes de canons et des rouleaux de laminoirs (M. FUKUDA et al., 1984). La masse de l'ensemble formé du moule et de la pièce coulée peut dépasser 200 tonnes.

Plusieurs types de procédés existent pour la coulée centrifuge horizontale (D.S. GIBSON, 1984, A.A. MIKHELLSON, 1956) qui sert principalement à fabriquer des pièces tubulaires comme les canalisations pour le génie civil (eau, gaz), les éléments de plateformes pétrolières, les canalisations sous-marines (A. ROYER et al., 1983) et les chemises de cylindres de moteurs à combustion interne. L'armature du centre Georges Pompidou à Paris a été réalisée par cette technique.

Enfin, il faut noter que la coulée successive de deux métaux en centrifugation horizontale qui a déjà été étudiée (I. KHANDROS et al., 1984), permet de résoudre certains problèmes particuliers, rencontrés notamment dans le transport de matériaux abrasifs (dragues suceuses par exemple) où la couche intérieure est très résistante à l'abrasion et où la couche extérieure permet, par une bonne ductilité, la soudure des brides (A. ROYER, 1981). Il en est de même pour certains rouleaux bimétalliques dont l'extérieur est coulé par centrifugation horizontale, et l'intérieur seulement après que le moule ait été dressé verticalement (J. HONDA et al., 1977).



Dans la suite de cet exposé, on ne s'intéressera qu'à la coulée centrifuge horizontale pour la production de tubes en acier.

Le principe est le suivant (Fig. 1) : une coquille en acier est entraînée en rotation autour de son axe disposé horizontalement ; l'accélération atteinte au niveau de la face interne de la coquille vaut environ cent fois celle de la pesanteur. Puis la coquille est recouverte intérieurement d'une couche d'isolant thermique à base de silice après un préchauffage vers 200°C. L'acier liquide est ensuite introduit par l'intermédiaire d'un pot de coulée et d'une buse de coulée. Il est plaqué contre les parois par la force centrifuge. La coquille est refroidie par des rampes d'arrosage dès le début de la coulée. Le démoulage du tube d'acier, facilité par la contraction thermique, est effectué lorsque sa température est inférieure à 900°C. La taille des tubes est très variable, le diamètre extérieur pouvant aller jusqu'à 1,30 m, l'épaisseur jusqu'à 12 cm et la longueur jusqu'à 8 m. G.S. MIRZOYAN, M.M. LEVIN et al. (1971) parlent d'une épaisseur de 30 cm, mais pour des tubes de 1 m de diamètre et de 0,74 m de long. Les plus grosses pièces avoisinent les 7 tonnes.

Par rapport à la coulée en lingotière, la coulée centrifuge des tubes a de nombreux avantages. Le procédé est plus simple et plus rentable : les frais de main-d'oeuvre sont moindres, le rendement est nettement meilleur parce qu'il y a moins de pertes de métal et que le temps de fabrication est réduit. Enfin, les produits ont des caractéristiques métallurgiques au moins égales et très souvent supérieures à celles des produits obtenus par coulée classique (H. DETTELA, 1954).

Parmi les défauts qui ont cependant pu être observés dans les pièces, il convient de distinguer plusieurs cas :

- Ceux pour lesquels les défauts sont dus à une mauvaise adaptation de la procédure suivie : le "lapping", zone de double peau, phénomène mécanique d'emprisonnement d'une couche déjà solide, apparaît quand la surchauffe est faible ou quand le débit de métal est trop faible ( H.O. HOWSON, 1969) ; des criques peuvent naître si les contraintes thermiques sont trop fortes, par exemple si la couche d'isolant thermique est lavée (S. VASSEUR, 1982). Il peut même apparaître des criques à chaud profondes si la contraction du métal est empêchée ou si la couche solidifiée est trop fragile (H. DETTELA, 1954) ; des

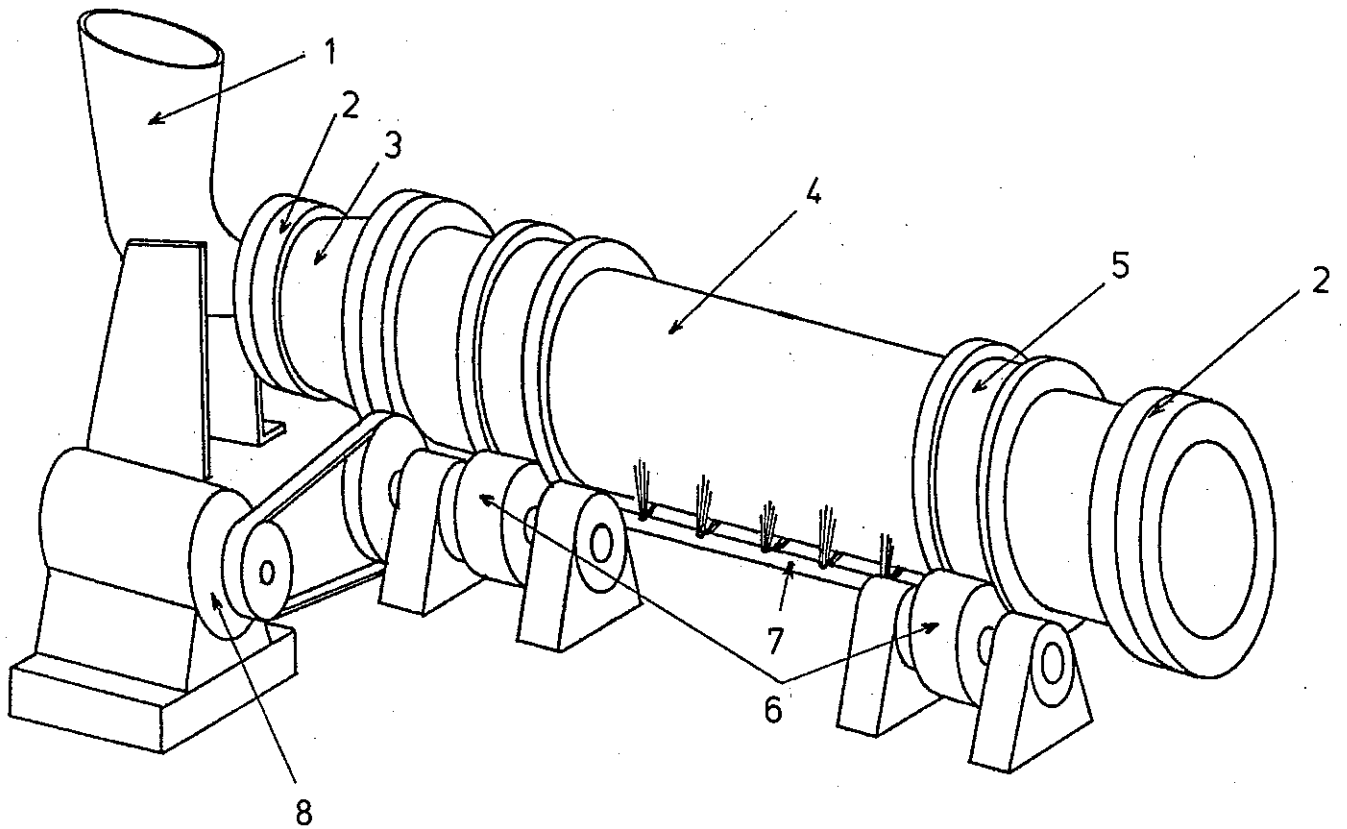


FIG. 1 : CENTRIFUGATION DE L'ACIER

- |                        |  |
|------------------------|--|
| 1. Pot de coulée fixe  | 6. Galets d'entraînement et de guidage |
| 2. Cuvette d'extrémité | 7. Rampe d'arrosage                    |
| 3. Cône de coulée      | 8. Moteur d'entraînement               |
| 4. Coquille            |  |
| 5. Chemin de roulement |  |

microporosités interdendritiques peuvent être observées à proximité de la zone de peau (N.N. REUTOV, 1959) ; enfin l'épaisseur du moule a une importance considérable sur la qualité des tubes fabriqués par son rôle sur la cinétique de refroidissement (A.F. ALEKSEEV, 1983, G.S. MIRZOYAN, 1970).

- Ceux pour lesquels les défauts sont liés à la fin de solidification, qui a lieu au niveau de la face interne des tubes ; microporosités, inclusions d'oxydes sont toujours présentes mais ne sont pas graves car de toutes façons, les tubes devant être ensuite rectifiés au bon diamètre, ces défauts disparaissent à l'usinage (W. STEINKUSCH, 1980).

- Enfin, ceux pour lesquels les défauts observés affectent l'intérieur des tubes ; outre la présence d'inclusions ou de microségrégations liées à la solidification ou au mode de remplissage (G.S. GORELOV, V.A. EFIMOV et al., juin 1974), on trouve parfois des bandes annulaires d'inclusions qui sont spécifiques de la coulée centrifuge horizontale. Elles sont toujours plus marquées côté coulée, et d'autant plus étendues vers le côté opposé à la coulée que le refroidissement est lent (S. VASSEUR, 1982 ; V.A. EFIMOV et al. 1976). Parfois des bandes concentriques de porosités leur sont associées (H.O. HOWSON, 1969).

Plusieurs théories existent pour tenter d'expliquer ce phénomène ; J. CUMBERLAND (1963) suggère que les bandes résultent de la superposition de couches de métal différentes dues à la persistance de vagues axiales dans le tube bien après le remplissage ; mais ceci n'est pas confirmé par l'examen métallographique des pièces. K.A. JACKSON (Cité par HOWSON, 1969), suppose que les vibrations de vitesse du liquide en fonction du rayon sont grandes et explique l'existence des bandes par une variation soudaine et importante de la viscosité sans doute par l'intermédiaire de l'échauffement dû aux frottements, pour des températures voisines de celle du liquidus. Mais ce phénomène devrait exister en coulée centrifuge verticale et ce n'est pas le cas, il est bien spécifique de la coulée horizontale. L. NORTHCOTT et al. (1944) supposent que les vibrations de l'ensemble tournant limitent la surfusion en avant du front de solidification ; le soluté rejeté en avant du front s'y accumule, abaissant le point de fusion de cette zone, ce qui entraîne la solidification d'une zone plus éloignée avant celle-ci et donc une ségrégation. Cela suppose que le liquide est au repos près du front. D'autres études ont montré l'influence de vibrations sur la solidification dans d'autres géométries (A. COUTURE, 1967). Mais aucun lien direct n'a été établi à l'heure actuelle à notre connaissance entre les vibrations

et la présence des inclusions d'oxydes. H.O. HOWSON (1946) pense que les ségrégations sont dues à des différences de densité ; mais si cela peut expliquer des teneurs plus élevées en éléments légers au centre qu'à la périphérie (qui se traduit par une ségrégation en carbone, soufre et phosphore) (G.S. MIRZOYAN, V.G. TINYAKOV et al., 1971 ; F.A. CALVO et al., 1982), cela n'explique pas l'existence de bandes d'inclusions légères entre deux couches métalliques denses.

Il faut aussi remarquer l'existence de variations de structure dans un tube tant dans le sens radial que longitudinal.

Dans le sens radial, on observe généralement, vers le milieu du tube, une zone de peau suivie d'une zone dendritique fine bien orientée, puis soit une zone équiaxe si la surchauffe initiale est faible, soit une zone dendritique moins bien orientée si la surchauffe initiale est importante (Y. EBISU, 1977 ; S. VASSEUR, 1982). La zone dendritique est favorisée par une forte épaisseur d'isolant thermique. Dans certains cas, la zone équiaxe est insérée entre les zones dendritiques bien et moins bien orientées ; aucune explication certaine n'est donnée, mais il semble bien que les mouvements du liquide pendant et après le remplissage soient à l'origine de ce phénomène (S. VASSEUR, 1982).

Aux extrémités les structures observées sont différentes de celles du milieu du tube ; à l'extrémité côté coulée, la zone équiaxe est toujours plus étendue qu'au milieu. A l'extrémité côté opposé à la coulée la zone équiaxe, quand elle existe, suit immédiatement la zone de peau avant de céder la place à une zone dendritique (S. VASSEUR, 1982). Ce dernier phénomène est peut-être dû à un apport de cristaux dendritiques arrachés en amont par le courant de métal, là où l'épaisseur solidifiée est plus importante en début de fabrication.

D'autre part, les dendrites sont souvent inclinées, d'autant plus fortement que l'acier est allié, ce qui s'explique par des mouvements au sein du liquide, même bien après la fin du remplissage (H.O. HOWSON, 1969 ; T. TAKAHASHI et al., 1976 ; R. ICHIKAWA et al., 1980). De façon générale la structure dendritique est plus fine qu'en coulée statique équivalente (H.O. HOWSON, 1969 ; G.S. GORELOV et al., Oct. 1974).

Il faut enfin remarquer que pour les aciers peu alliés, on recherche une structure équiaxe fine pour avoir une meilleure tenue mécanique (G. METAUER et al., 1981) alors que pour les aciers austénitiques on recherche une structure colonnaire car la structure équiaxe a tendance à être fissurée (G.I. VOLKOVITSKII et al., 1965).

Il semble donc que plusieurs particularités observées dans les structures solidifiées soient dues à des mouvements du liquide par rapport à la coquille, donc par rapport au front de solidification. Ces mouvements peuvent en outre avoir d'autres effets, moins visibles, sur la thermique ou la solidification.

C'est la raison pour laquelle il est nécessaire, dans un premier temps, de préciser la nature des écoulements en présence de sollicitations extérieures. Ceci est mené à bien de façon analytique grâce à une méthode de perturbations applicable dans notre cas. Un prolongement numérique est proposé pour les cas qui ne peuvent être résolus analytiquement.

Parallèlement une étude a été menée sur une installation utilisant de l'eau, pour mettre en évidence les formes de surface libre, les mouvements du liquide et les temps de transfert de solutés. Les résultats sont comparés à ceux des calculs sur les points où cela est possible ; de plus un lien est mis en évidence entre les mouvements du liquide et les vibrations d'une part, entre les mouvements du liquide et le comportement des inclusions d'autre part.

Enfin, deux modèles thermiques numériques ont été testés. Un modèle semi-analytique d'après J. LIPTON (1983) a été adapté à la convection forcée ; une modélisation numérique en différences finies a été développée, qui prend en compte de façon simple la convection forcée du liquide, qui fait intervenir quatre frontières mobiles (isothermes solidus et liquidus, position des pointes de dendrites, extrémités de la couche limite) et où la croissance colonnaire est modélisée avec précision. Les résultats du modèle sont comparés avec les mesures effectuées sur une installation de simulation de la solidification utilisant un mélange succinonitrile-bornéol.

L'ensemble de cette étude a été réalisée dans le cadre d'un contrat de collaboration scientifique entre le Centre de Recherches de Pont-à-Mousson et l'Institut National Polytechnique de Grenoble.



CHAPITRE 1

CALCULS ANALYTIQUES HYDRODYNAMIQUES

---





NOTATIONS UTILISEES DANS LE CHAPITRE 1

Repère  $(r, \theta, z)$  .  $\theta = 0$  au point bas de la coquille

Repère adimensionnel  $(x, \theta, \xi)$

$e$  : épaisseur totale de liquide

$E$  : épaisseur de liquide en l'absence de toute perturbation

$f$  : écart adimensionnel de l'épaisseur de liquide par rapport à l'épaisseur dans l'état de référence

$\vec{F}$  : forces de volume.

$g$  : accélération de la pesanteur

$\ell$  : distance entre une extrémité et le premier chemin de roulement

$L$  : longueur totale de la coquille

$p$  : pression totale

$p_0$  : pression à la surface libre

$q$  : écart adimensionnel de la pression totale par rapport à la pression dans l'état de référence

$R$  : rayon interne de la coquille

$R_0$  : rayon interne de la coquille non perturbé

$S$  : surface libre

$s$  : équation de la surface libre

$t$  : temps

$\vec{u}$  : vecteur vitesse

$u_r$  (resp.  $u_\theta, u_z$ ) : vitesse radiale (resp. orthoradiale, axiale) totale.

$u$  (resp.  $v, w$ ) : écart adimensionnel de la vitesse radiale (resp. orthoradiale, axiale) par rapport à la même grandeur dans l'état de référence.

$\epsilon$  : rapport de la force de gravité aux forces centrifuges

$\lambda$  : distance entre deux chemins de roulement

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide

$\nu$  : viscosité cinématique du fluide

$\rho$  : masse volumique du fluide

$\bar{\sigma}$  : tenseur des contraintes

$\tau$  : temps adimensionnel

$\psi$  : fonction de courant

$\Omega$  : vitesse angulaire de la coquille

$\Omega_0$  : vitesse angulaire non perturbée de la coquille.

$\omega$  : pulsation des perturbations périodiques dans le temps.

### 1.1. INTRODUCTION

Le champ de vitesse dans un liquide s'obtient de façon générale en écrivant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 ; \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}$$

$\rho$  masse volumique,  $\vec{u}$  vitesse,  $\vec{F}$  forces extérieures,  $\vec{\sigma}$  tenseur des contraintes. Quand le fluide est newtonien et incompressible, les équations se ramènent à :

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 ; \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p - \mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{u})$$

$$\frac{d}{dt} \text{ est une dérivée particulière } \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \right)$$

Ce système d'équations ne peut être résolu analytiquement dans le cas général. Il s'agit donc dans tous les cas de faire des hypothèses suggérées par la nature du problème posé. Il faut remarquer que ces hypothèses ne proviennent pas des équations mais sont au contraire le fait d'un choix explicite ; elles sont ensuite appliquées systématiquement dans les calculs et conduisent à des simplifications.

Plusieurs études ont déjà porté sur les écoulements dans une nappe liquide à l'intérieur d'un cylindre creux. Dès 1954, B.F. VILYUM a résolu les équations pour des épaisseurs de liquide faibles devant le rayon du cylindre, celui-ci étant supposé de longueur infinie (configuration bidimensionnelle). Les équations sont en coordonnées cartésiennes, la courbure est négligée, et la viscosité est prise en compte.

La méthode consiste à calculer la fonction de courant  $\psi$  en une série de puissances de  $y$ , distance à la paroi du moule. La solution est exprimée de façon très complexe et montre surtout que le liquide a une épaisseur maximale au sommet du moule, quand la viscosité est faible ; quand la viscosité est importante, le point d'épaisseur maximale est décalé vers l'aval dans le sens de rotation de la coquille, d'un facteur dépendant de l'épaisseur relative de liquide et du nombre de Reynolds. O.M. PHILLIPS (1959) a mené à bien des calculs à trois dimensions, en présence de la gravité, mais pour un fluide non visqueux. Il utilise la théorie des perturbations, tenant compte du fait que la prépondérance des forces d'inertie par rapport aux autres forces fait apparaître un petit paramètre dans les équations.

Il en déduit un critère de stabilité de la nappe centrifugée aux basses vitesses de rotation. Chia-Shun YIH (1959) a étudié la stabilité des écoulements sur un cylindre en négligeant la gravité et en faisant l'hypothèse que toutes les perturbations sont axisymétriques. T.J. PEDLEY (1967) a fait une étude plus complète de la stabilité générale pour les fluides tournants ayant une surface libre cylindrique. Il montre que dans la géométrie du problème qui nous intéresse, pour un écoulement de base du type rotation en bloc, les perturbations sont stables si la vitesse de rotation est suffisante. K.J. RUSHAK et al. (1976) ont repris l'étude de VILYUM avec la théorie des perturbations en tenant compte de la courbure. Les résultats sont plus immédiatement accessibles et conduisent à des résultats analogues, si ce n'est que le point d'épaisseur maximale est situé en amont dans le sens de rotation de la coquille par rapport au sommet de celle-ci.

Tous ces résultats sont intéressants mais ne font pas apparaître clairement la nature des écoulements par rapport à la coquille ; de plus, la gravité est la seule perturbation extérieure qui soit prise en compte. La présente étude consiste à utiliser la théorie des perturbations en ajoutant progressivement des perturbations extérieures liées à la présence de vibrations dans le système en rotation, dont l'existence a été mise en évidence par NORTHCOTT (1944).

## 1.2. DEFINITION DE LA METHODE ET DE L'ETAT DE REFERENCE

La géométrie de la nappe liquide est définie sur la figure 2. Industriellement, la vitesse de rotation de la coquille est prise de façon à avoir une accélération au niveau de la face interne de la coquille égale à environ cent fois celle de la pesanteur ; ceci revient à dire que le rapport  $g/\omega^2 R$  des accélérations liées aux forces de gravité et d'inertie est de l'ordre de  $10^{-2}$ . Ceci veut dire que l'on peut considérer la gravité comme une perturbation du système dynamique. En ce qui concerne les autres forces de volume, liées aux vibrations de la coquille, nous supposons également qu'elles sont faibles devant les forces centrifuges. Une telle hypothèse se justifie par le simple fait que sinon aucune installation ne pourrait fonctionner sans être détruite très rapidement. Ainsi les forces d'inertie, qui apparaissent par les termes non linéaires dans les équations de Navier-Stokes, sont prédominantes. Ceci permet d'utiliser une méthode de perturbations. Elle consiste, connaissant les champs de vitesse et de pression d'un état de référence donné, à introduire dans les équations de conservation une perturbation extérieure (force de volume de faible amplitude) faible par rapport aux forces existant dans l'état de référence. Il en résulte une perturbation des champs de vitesse et de pression qui peut être exprimée sous forme de développement en série en fonction d'un petit paramètre  $\varepsilon$  qui n'est autre que le rapport de la perturbation introduite à la sollicitation

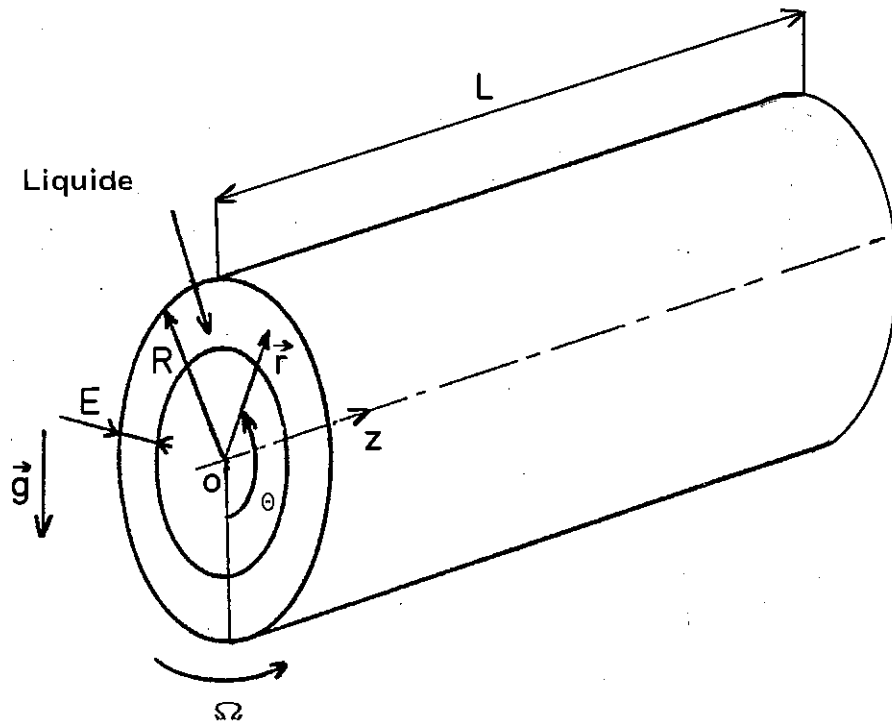


FIG. 2 : GEOMETRIE DE LA NAPPE LIQUIDE

Installation expérimentale :

$R = 0,1125 \text{ m}$

$L = 1,17 \text{ m}$

de même type de l'état de référence (rapport de forces, d'accéléérations...) :

$$f(\varepsilon) = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots + \varepsilon^n f^{(n)} + \dots$$

En se limitant au premier ordre on peut linéariser les équations, ce qui simplifie la résolution.

Cette méthode donne de bons résultats tant que la perturbation n'excède pas quelques pourcents de la grandeur de référence.

Dans notre cas, l'état de référence correspond au champ de vitesse et de pression en l'absence de forces extérieures. Il est facile à partir des équations de Navier-Stokes en 3 dimensions, de montrer qu'il s'agit de la rotation en bloc avec la coquille (voir annexe 1) en supposant que les propriétés physiques du liquide sont des constantes vraies, indépendantes en particulier de la température ; on obtient :

$$\vec{u} \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega r \\ 0 \end{vmatrix} \quad p - p_0 = \rho \frac{\Omega^2}{2} (r^2 - (R-E)^2)$$

$p_0$  étant la pression à la surface libre du liquide,  $R$  le rayon interne de la coquille,  $E$  l'épaisseur de la veine liquide.

### 1.3. PERTURBATION PAR LA GRAVITE

L'existence de la gravité détruit l'axisymétrie du système dont la géométrie reste cependant bidimensionnelle. Un état permanent existe dans le repère fixe. On ne tient plus compte de la viscosité qui n'a d'influence importante que pour des variations orthoradiales de la vitesse ; cela introduit une erreur mais simplifie considérablement les équations. Les autres hypothèses du paragraphe 1.2 restent valables.

#### 1.3.1. Le calcul

Les variables sont rendues adimensionnelles en les rapportant à leurs valeurs caractéristiques,  $R$  pour les longueurs,  $\Omega R$  pour les vitesses ; la pression et les composantes de la vitesse sont écrites comme la somme de deux termes, l'un correspondant à l'état de référence, l'autre à la perturbation :

$$x = r/R \quad \varepsilon = g/\Omega^2 R$$

$$\frac{e}{E} = 1 + f$$

$$\begin{cases} u_r = 0 + \Omega R u \\ u_\theta = \Omega r + \Omega R v \\ p - p_0 = \rho \frac{\Omega^2 R^2}{2} \left[ x^2 - \left(1 - \frac{e}{R}\right)^2 + q \right] \end{cases}$$

$u, v, q, f$ , sont donc de l'ordre de  $\varepsilon$ .

Les conditions aux limites sont :

- à la paroi,  $r = R$ ,  $u_r = 0$  soit  $u = 0$  pour  $x = 1$

- à la surface libre :

. une condition dynamique,  $p = p_0$  pour  $r = R - e$ , soit

$$q = 0 \text{ pour } x = 1 - \frac{e}{R}$$

. une condition cinématique, la vitesse  $\vec{u}$  devant être tangente à la surface libre  $S$  d'équation  $s$ , ce qui s'écrit  $\vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} s = 0$  pour  $x = 1 - \frac{e}{R}$ .

Les équations s'écrivent alors, en ne gardant que les termes du premier ordre en  $\varepsilon$  :

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \theta} - 2v = -\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x} + \varepsilon \cos \theta \\ 2u + \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{2x} \frac{\partial q}{\partial \theta} - \varepsilon \sin \theta - \frac{1}{x} \frac{E}{R} \left(1 - \frac{E}{R}\right) \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ u + x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Leur forme conduit à rechercher une solution à variables séparées comme suit :

$$u(x, \theta) = \alpha(x) \sin \theta$$

$$v(x, \theta) = \beta(x) \cos \theta$$

$$q(x, \theta) = \gamma(x) \cos \theta$$

$$f(\theta) = A \cdot \cos \theta \quad A = \text{Cte}$$

Les équations deviennent alors :

$$(II) \begin{cases} \alpha - 2\beta = \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ 2\alpha - \beta = -\varepsilon + \frac{1}{2x} \gamma + \frac{1}{x} \frac{E}{R} (1 - \frac{E}{R})A \\ \alpha - \beta + x \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \text{ pour } x = 1 \\ \gamma = 0 \text{ pour } x = x_L = 1 - \frac{e}{R} = x_0 - \frac{E}{R} f, \text{ en posant } x_0 = 1 - \frac{E}{R} \end{cases}$$

et la condition  $\vec{u} \cdot \vec{grad} s = 0$  s'écrit, sachant que

$$s(r, \theta) = R(x - 1 + \frac{E}{R}(1+f)) :$$

$$\alpha = \frac{E}{R} A \text{ pour } x = x_L$$

Pour éliminer les termes de pression, on est conduit à dériver chaque terme de la deuxième équation par rapport à  $x$ . En combinant l'équation obtenue avec la première équation du système, il vient :

$$3(\alpha - \beta) = -2x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + x \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

En faisant des combinaisons linéaires de cette équation et de la troisième équation du système II, on obtient :

$$\alpha + \beta = B \quad \text{et} \quad \alpha - \beta = \frac{C}{x^2} \quad \text{puis}$$

$$\alpha = \frac{C}{2x^2} + \frac{B}{2} ; \quad \beta = -\frac{C}{2x^2} + \frac{B}{2}$$

$$\gamma = \frac{3C}{x} + Bx + 2\varepsilon x - 2 \frac{E}{R} (1 - \frac{E}{R})A$$

Les constantes A, B, C sont déterminées d'après les conditions aux limites :

$$A = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{R}{E} \cdot [(1 - \frac{E}{R})^2 - 1] = \frac{\varepsilon}{2} (\frac{E}{R} - 2)$$

$$B = -C = \varepsilon (1 - \frac{E}{R})^2$$

D'où la solution générale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \left( \begin{array}{l} u_r = \Omega R \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{E}{R}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sin \theta \\ u_\theta = \Omega R x + \Omega R \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{E}{R}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \cos \theta \end{array} \right. \\ p - p_0 = \rho \frac{\Omega^2 R^2}{2} \left\{ x^2 - \left(1 - \frac{E}{R}\right)^2 + \cos \theta \cdot \varepsilon \left[ \left(1 - \frac{E}{R}\right)^2 \left(x - \frac{3}{x}\right) + 2x - \frac{E}{R} \left(1 - \frac{E}{R}\right) \left(\frac{E}{R} - 2\right) \right] \right\} \\ e = E \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{E}{R} - 2\right) \cos \theta\right) \end{array} \right.$$

### 1.3.2. Les résultats

#### - Glissement à la paroi

On obtient un glissement à la paroi parce que l'on a négligé la viscosité, ce qui conduit à négliger la couche limite. Cette vitesse de glissement à la paroi vaut  $u_\theta - \Omega R$  ; le glissement maximal vaut  $\varepsilon \Omega R \left(1 - \frac{E}{R}\right)^2$ .

Les conditions industrielles fixent le rapport  $\varepsilon$  à la valeur  $\frac{g}{\Omega^2 R} = \frac{1}{100}$  ;  $R$  prend ses valeurs dans l'intervalle 0,1 à 1 m. On en déduit donc que  $\Omega$  varie de 32 à 100 rd/s (240 à 960 rpm) et  $\Omega R$  de 10 à 32 m/s, les plus fortes valeurs de la vitesse angulaire et les plus faibles valeurs de la vitesse linéaire étant obtenues pour les plus petits rayons. De plus, le rapport  $E/R$  varie de 0,01 à 0,4 ; le glissement a donc des valeurs comprises entre 4 cm/s et 31 cm/s, les valeurs les plus faibles étant obtenues pour les rayons les plus faibles et les épaisseurs les plus fortes, et vice-versa. D'un point de vue métallurgique cela signifie que la gravité à elle seule peut avoir une influence sur la solidification, puisque l'on considère généralement qu'une vitesse de 4 cm/s a une influence sur l'orientation des branches de dendrites par exemple.



- La surface libre

Elle est régie par l'équation :

$$e = E \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{E}{R} - 2 \right) \cos \theta \right)$$

Au point bas de la coquille ( $\theta = 0$ ) l'épaisseur est minimale ; elle est maximale en haut de la coquille (Fig. 3). Cela se comprend bien car le liquide est ralenti en montant et accéléré en descendant dans la coquille ; comme le débit dans une section est constant quel que soit  $\theta$ , il faut que l'épaisseur augmente quand la vitesse du fluide diminue ; elle est maximale quand la vitesse est minimale, c'est-à-dire au sommet de la coquille.

La déformation maximale due à la gravité vaut :

- 0,3 mm            pour  $E = 4$  cm,  $R = 11,25$  cm  
(notre installation)

- 0,9 mm            pour  $E = 10$  cm,  $R = 0,60$  m  
(un cas industriel)

- Allure des lignes de courant

Une ligne de courant est une ligne tangente au vecteur vitesse en chacun de ses points à un instant donné. Dans le cas général, les lignes de courant ne sont pas confondues avec les trajectoires. Une trajectoire est l'ensemble des points où est passé ou bien où passera une particule fluide donnée. Trajectoire et ligne de courant ne sont confondues qu'en régime permanent.

On définit la fonction scalaire  $\psi$ , fonction de courant, par le fait qu'elle est constante sur une ligne de courant donnée. La variation maximale est perpendiculaire à la ligne de courant et par voie de conséquence à la vitesse :  $\vec{u} \cdot \text{grad } \psi = 0$ , soit encore  $u_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$  ce qui conduit aux relations

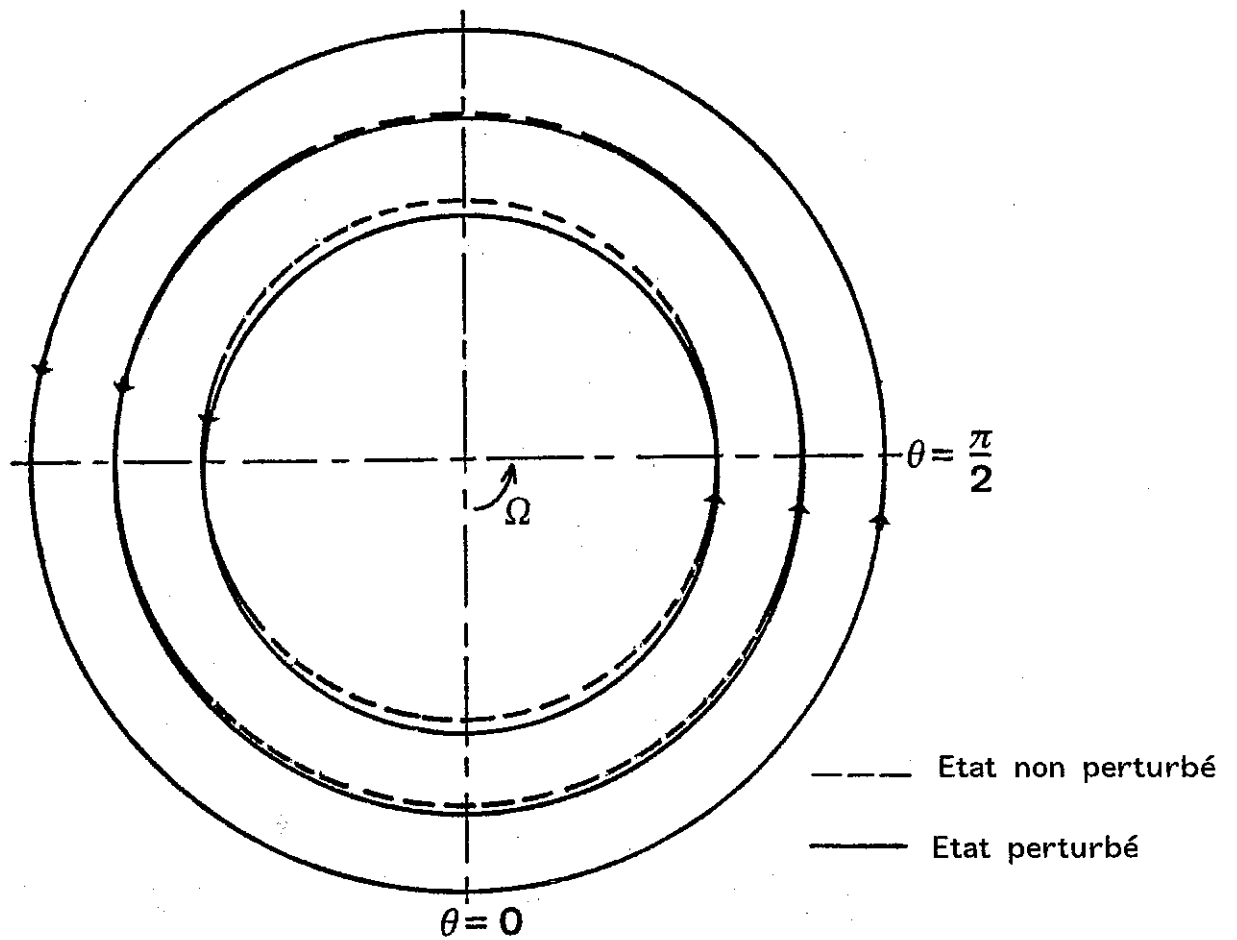


FIG. 3 : TRAJECTOIRES DANS LE REPERE FIXE. FORME DE LA SURFACE LIBRE

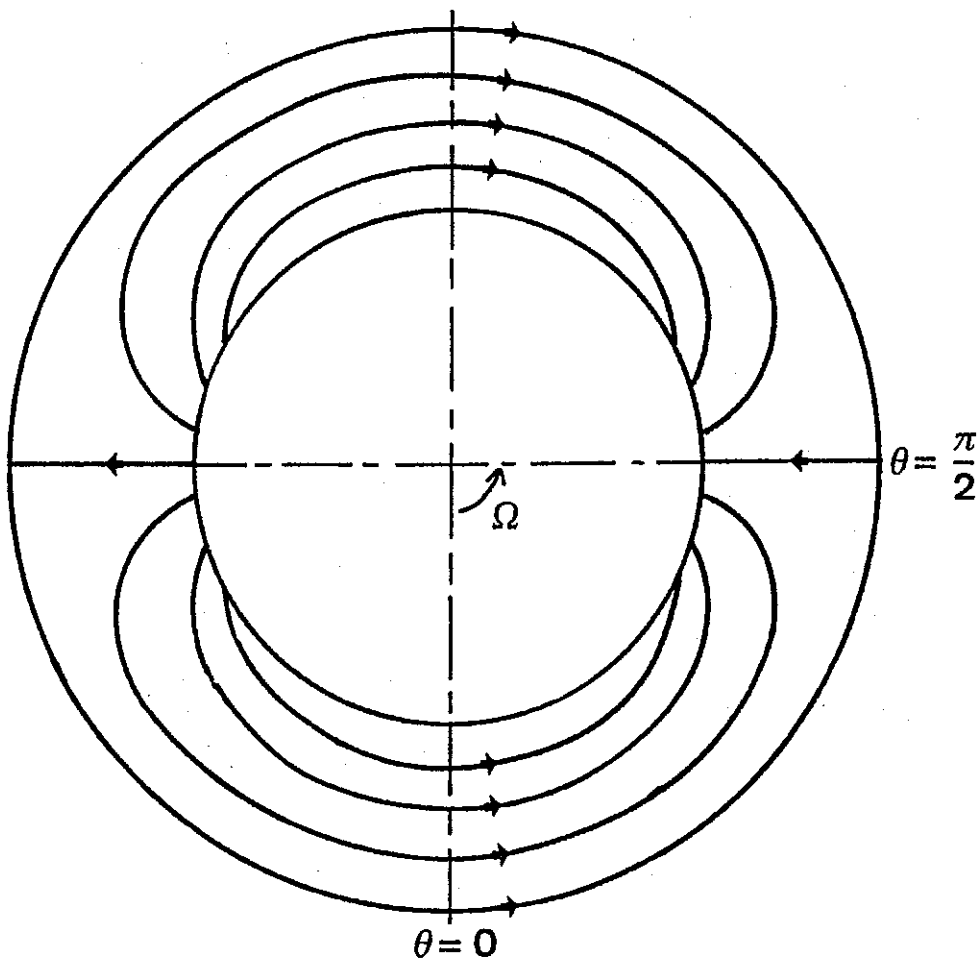


FIG. 4 : LIGNES DE COURANT DE LA PERTURBATION SEULE DANS LE REPERE FIXE

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{R x} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

d'où dans notre cas  $\psi = - \frac{\Omega R^2}{2} (x^2 + \varepsilon(1 - \frac{E}{R})^2 \cos \theta \cdot (x - \frac{1}{x}))$  à une constante près.

Les valeurs de  $\psi$  adimensionnelles ( $\psi_{ad} = \frac{2}{\Omega R^2} \psi$ ) sont portées sur la figure 3 avec les lignes de courant ; à la paroi  $\psi = 1$ , à la surface libre  $\psi = (1 - \frac{E}{R})^2$ . Les lignes de courant sont aussi des trajectoires dans le repère absolu puisque le régime est permanent.

Il est intéressant de ne considérer que la vitesse différentielle (écart à l'état de référence) qui met en évidence l'effet de la perturbation seule. Cela revient à se placer dans un repère tournant avec la coquille ; dans ce repère la surface libre n'est pas invariante dans le temps et le régime n'est pas permanent. Cependant une fonction de courant peut être définie pour la perturbation seule puisqu'elle vérifie l'équation de continuité. Les lignes de courant sont distinctes des trajectoires. Il faut remarquer que la vitesse perturbée seule n'est pas tangente à la surface libre, donc les lignes de courant traversent celle-ci.

De façon similaire au calcul précédent, on obtient :

$$\psi_{ad} = - \varepsilon(1 - \frac{E}{R})^2 (x - \frac{1}{x}) \cos \theta$$

A la paroi  $\psi = 0$ , à la surface libre  $\psi(\theta) = \varepsilon(1 - \frac{E}{R}) \frac{E}{R} (\frac{E}{R} - 2) \cos \theta$ .  
L'allure des lignes de courant est donnée sur la figure 4.

#### - Mouvement apparent par rapport à la coquille

Les trajectoires peuvent être tracées pas à pas en tenant compte du déplacement des lignes de courant et de la surface libre au cours du temps. Les figures 5 et 6 font apparaître les recirculations décrites par les particules de liquide, qui sont de nature à favoriser l'homogénéisation de celui-ci.

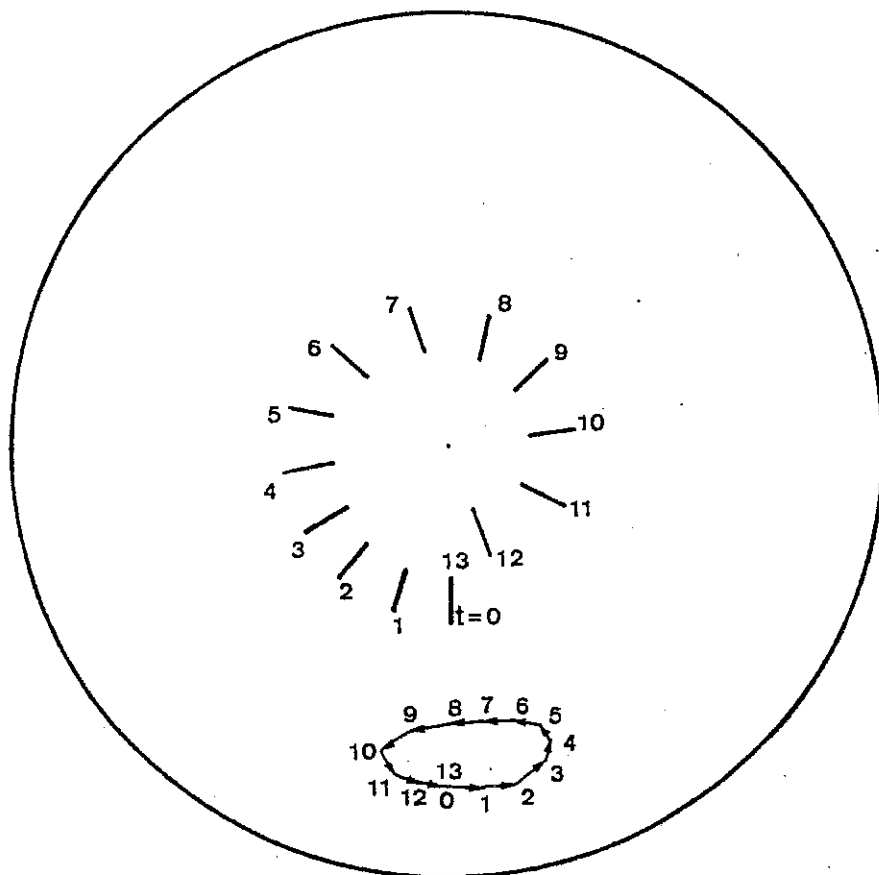


FIG. 5 : TRAJECTOIRE D'UNE PARTICULE FLUIDE PAR RAPPORT A LA COUILLE  
 ( $\Omega$  faible). Les indices 1 à 13 correspondent aux positions d'un point fixe  
 par rapport au sol, à des pas de temps successifs

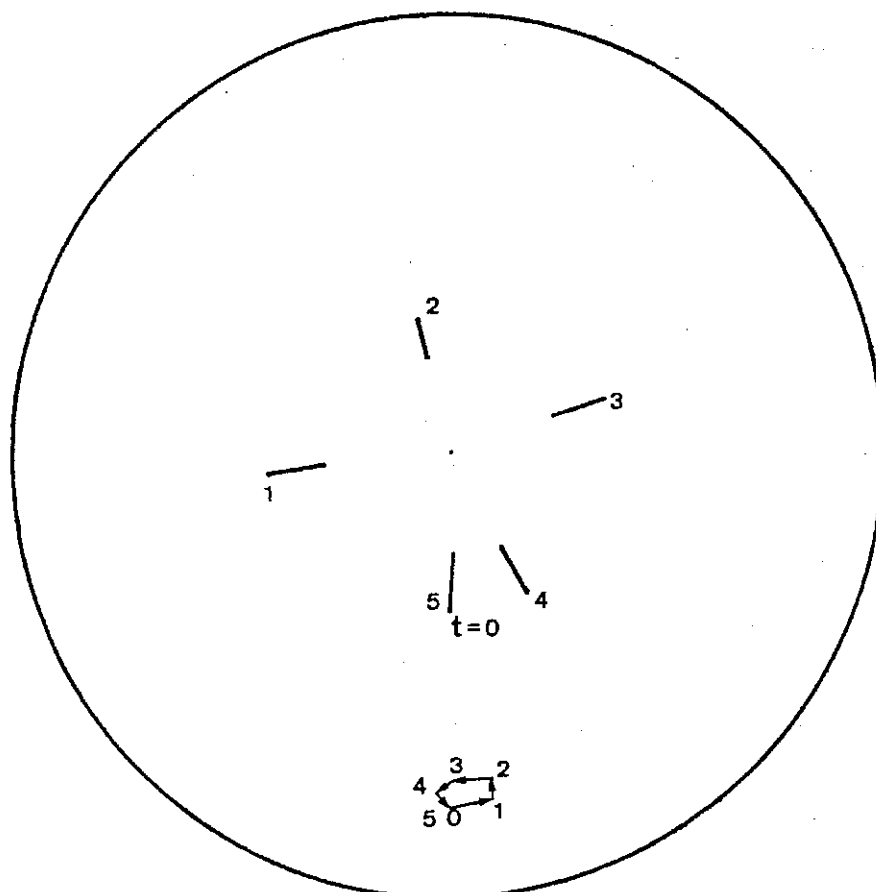


FIG. 6 : TRAJECTOIRE D'UNE PARTICULE FLUIDE PAR RAPPORT A LA COUILLE  
 ( $\Omega$  grand). Les indices 1 à 5 correspondent aux positions d'un point fixe  
 par rapport au sol, à des pas de temps successifs

La méthode est simple ; on connaît les lignes de courant de la perturbation seule dans le repère fixe (figure 4) et on veut les trajectoires par rapport à la coquille.

- On part d'un point donné à un instant donné ( $t = 0$  sur la figure).  
La vitesse  $\vec{u}$  est donnée par la ligne de courant passant par ce point.
- A l'instant suivant, la particule s'est déplacée d'une distance  $u \cdot \Delta t$ , mais les lignes de courant se sont déplacées en sens inverse de la rotation de la coquille d'un angle  $\Omega \cdot \Delta t$  ;
- On prend alors comme vitesse à ce nouvel instant la vitesse donnée par la nouvelle ligne de courant passant par ce nouveau point.
- On itère le processus.

Les trajectoires ne suivent donc pas les lignes de courant.

Il est également normal d'observer une courbe fermée du fait même de la forme du champ de vitesse, fonction sinusoïdale de  $\theta$ . Plus intéressante est la taille des trajectoires : plus la rotation de la coquille est rapide, plus les boucles sont de petites taille. Il faut enfin remarquer qu'il n'y a pas de mouvement d'ensemble en ce sens que chaque particule possède sa propre trajectoire, différente de toutes les autres -comme c'est toujours le cas en régime non permanent- mais il y a quand même un ensemble cohérent de mouvements individuels (va-et-vient du liquide par rapport à la coquille) ; le brassage obtenu est de ce fait moins intense que par exemple dans le cas d'un écoulement turbulent.

1.4. PERTURBATION DUE A UN BALOURD DE LA COQUILLE ET A LA GRAVITE1.4 .1. Méthode

Considérons une sollicitation se traduisant par une accélération verticale du type  $\vec{g} = \vec{g}_0 (1 + \phi \cos \omega t)$ ,  $\vec{g}_0$  étant l'accélération de la pesanteur. L'intérêt de cette notation est que l'on se place dans un repère lié à l'axe de la coquille et que l'accélération fictive  $g_0 \phi \cos \omega t$  notée  $\gamma$  que subit le liquide peut être reliée directement au déplacement de la paroi de la coquille, ce qui permet de simuler un balourd en présence de la gravité :

$$x = \int_0^{t_0} \left( \int_0^t \gamma dt \right) dt, \text{ l'accélération étant prise maximale pour une}$$

vitesse instantanée nulle et une abscisse nulle. Pour une demi-période  $t_0 = \frac{\pi}{\omega}$ , on a  $x = g_0 \phi \frac{1}{\omega^2}$ . L'amplitude du déplacement de la coquille vaut donc  $2g_0 \phi \frac{1}{\omega^2}$  quand l'amplitude de l'accélération fictive périodique vaut  $2g_0 \phi$ .

Cette méthode conduit à un calcul qui se rapproche de celui du cas précédent : si l'on avait fait l'étude en repère fixe, la résolution aurait été beaucoup plus ardue, du fait de la présence de frontières mobiles (conditions aux limites dépendant du temps).

1.4.2. Résolution

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$u_r = 0 \quad \text{pour } x = 1$$

$$p = p_0 \quad \text{pour } x = x_L$$

Pour la condition cinématique, on écrit que la composante de la vitesse perpendiculaire à l'interface ( $\vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} s$ ) est égale à la vitesse de déplacement de l'interface  $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)$  :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} s = 0 \quad \text{pour } x = x_L$$

avec  $s = x - 1 + \frac{e}{R}$ .

Les équations de base s'écrivent :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_0 (1 + \phi \cos \omega t) \cos \theta \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - g_0 (1 + \xi \cos \omega t) \sin \theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \end{array} \right.$$

Une simple séparation des variables ne suffit plus ici. On procède auparavant à une séparation des termes permanents et non permanents. On note  $u, v, q, f$  les termes permanents (c'est la perturbation par la gravité, déjà calculée) et  $u_*, v_*, q_*, f_*$  les termes non permanents de moyenne nulle sur une période temporelle.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = \Omega R u + \Omega R u_* \\ u_\theta = \Omega r + \Omega R v + \Omega R v_* \\ p = \rho \frac{\Omega^2 R^2}{2} \left\{ x^2 - \left(1 - \frac{e}{R}\right)^2 + q + q_* \right\} \quad (\text{on prend } p_0 = 0) \\ e = E(1 + f + f_*) \end{array} \right.$$

En remplaçant dans les équations de base, en posant  $\tau = \Omega t$  (temps adimensionnel), en n'écrivant plus les \* par souci de simplification (les termes permanents ayant tous disparu), on obtient :

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \theta} - 2v = -\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x} + \varepsilon \phi \cos \theta \cos\left(\frac{\omega}{\Omega} \tau\right) \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + 2u + \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{2x} \frac{\partial q}{\partial \theta} - \varepsilon \phi \sin \theta \cos\left(\frac{\omega}{\Omega} \tau\right) - \frac{E}{R} \left(1 - \frac{E}{R}\right) \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ u + x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$u = 0 \text{ pour } x = 1 ; q = 0 \text{ pour } x = x_L$$

$$\frac{E}{R} \left( \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + u = 0 \text{ pour } x = x_L$$

La forme des équations permet alors de séparer les variables comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, \theta, \tau) = \alpha(x) \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i \frac{\omega}{\Omega} \tau} \\ v(x, \theta, \tau) = \beta(x) \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i \frac{\omega}{\Omega} \tau} \\ q(x, \theta, \tau) = \gamma(x) \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i \frac{\omega}{\Omega} \tau} \\ f(\theta, \tau) = \delta \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i \frac{\omega}{\Omega} \tau} \end{array} \right. \quad \delta = C^{te}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont a priori des fonctions complexes. Les équations deviennent :

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} i\alpha(1 + \frac{\omega}{\Omega}) - 2\beta + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \varepsilon \phi \\ -2i\alpha + \beta(1 + \frac{\omega}{\Omega}) + \frac{1}{2x} \gamma = \varepsilon \phi - \frac{E}{R} (1 - \frac{E}{R}) \frac{1}{x} \delta \\ \alpha + x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta i = 0 \end{array} \right.$$

et conduisent après élimination de  $\gamma$  et  $\delta$  dans les deux premières équations, et résolution du système en  $\alpha$  et  $\beta$ , à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\ell}{x^2} - \frac{ai}{2(1 + \frac{\omega}{\Omega})} \\ \beta = -\frac{\ell i}{x^2} + \frac{a}{2(1 + \frac{\omega}{\Omega})} \\ \gamma = 2 \varepsilon \phi x - ax + \frac{2ax}{1 + \frac{\omega}{\Omega}} + 2 \frac{i\ell}{x} (3 + \frac{\omega}{\Omega}) + b \\ \delta = -\frac{R}{E} \frac{1}{(1 - \frac{E}{R})} \frac{b}{2} \end{array} \right.$$

avec les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $\ell$  déduites des conditions aux limites, après un peu d'algèbre simple :

$$a = \frac{1}{H} \cdot 2\varepsilon \phi (1 + \frac{\omega}{\Omega})^2 (1 - \frac{E}{R})^2$$

$$b = \frac{1}{H} \cdot 2\varepsilon \phi (1 - \frac{E}{R}) (1 - (1 - \frac{E}{R})^2)$$

$$\ell = i \frac{1}{H} \cdot \varepsilon \phi (1 + \frac{\omega}{\Omega}) (1 - \frac{E}{R})^2$$

$$H = 2 + 4 \frac{\omega}{\Omega} + (\frac{\omega}{\Omega})^2 (1 + (1 - \frac{E}{R})^2)$$



a et b sont réels,  $\ell$  est imaginaire pur ;  $\beta, \gamma$  et  $\delta$  sont donc réels tandis que  $\alpha$  est imaginaire pur. Autrement dit u est fonction de  $\sin(\frac{\omega}{\Omega} \tau + \theta)$  et v, q, f de  $\cos(\frac{\omega}{\Omega} \tau + \theta)$  ; ceci est similaire à ce que l'on obtenait dans le cas précédent. On remarque en outre que le dénominateur H ne s'annule pour aucune valeur positive de  $\frac{\omega}{\Omega}$  ; il n'y a donc pas de phénomène de résonance.

#### 1.4.3. Les résultats

##### Calcul de la fonction de courant

Pour la perturbation non stationnaire seule, qui vérifie l'équation de continuité, par un calcul similaire à celui concernant la gravité seule, on obtient :

$$\psi_{ad} = - \frac{2 \varepsilon \phi (1 + \frac{\omega}{\Omega}) (1 - \frac{E}{R})^2 (x - \frac{1}{x})}{2 + 4 \frac{\omega}{\Omega} + (\frac{\omega}{\Omega})^2 (1 + (1 - \frac{E}{R})^2)} \cos (\frac{\omega}{\Omega} \tau + \theta)$$

à une fonction du temps près.

L'ordre de grandeur de la fonction de courant perturbée est  $\varepsilon \xi$ . La perturbation due au balourd est plus importante que celle due à la gravité si l'on prend  $\xi > 1$ . A l'instant initial ( $\tau = 0$ ) la figure est la même que celle de la gravité seule ; quand  $\tau$  devient positif, elle pivote sur elle-même dans le sens inverse de celui de la rotation, avec une période égale à celle du balourd.

##### Les trajectoires

Le principe de leur détermination est le même que celui utilisé précédemment ; mais la vitesse obtenue à chaque pas de temps est la combinaison des vitesses tirées des deux systèmes de lignes de courant calculés précédemment, et il faut les faire pivoter indépendamment l'un de l'autre. Avec de la patience on obtient les courbes de la fig. 7. Il est clair que le brassage est plus important que pour la gravité seule, surtout si les vibrations induites par le balourd sont plus importantes que celles dues à la gravité.

##### La surface libre

La surface libre est représentée dans le repère fixe sur la figure 8. Elle est mobile comme le prévoient les équations ; une sorte de vague très large apparaît qui tourne dans la coquille ; une perturbation purement verticale engendre donc un mouvement circulaire de la surface libre, ce qui n'est pas trivial.

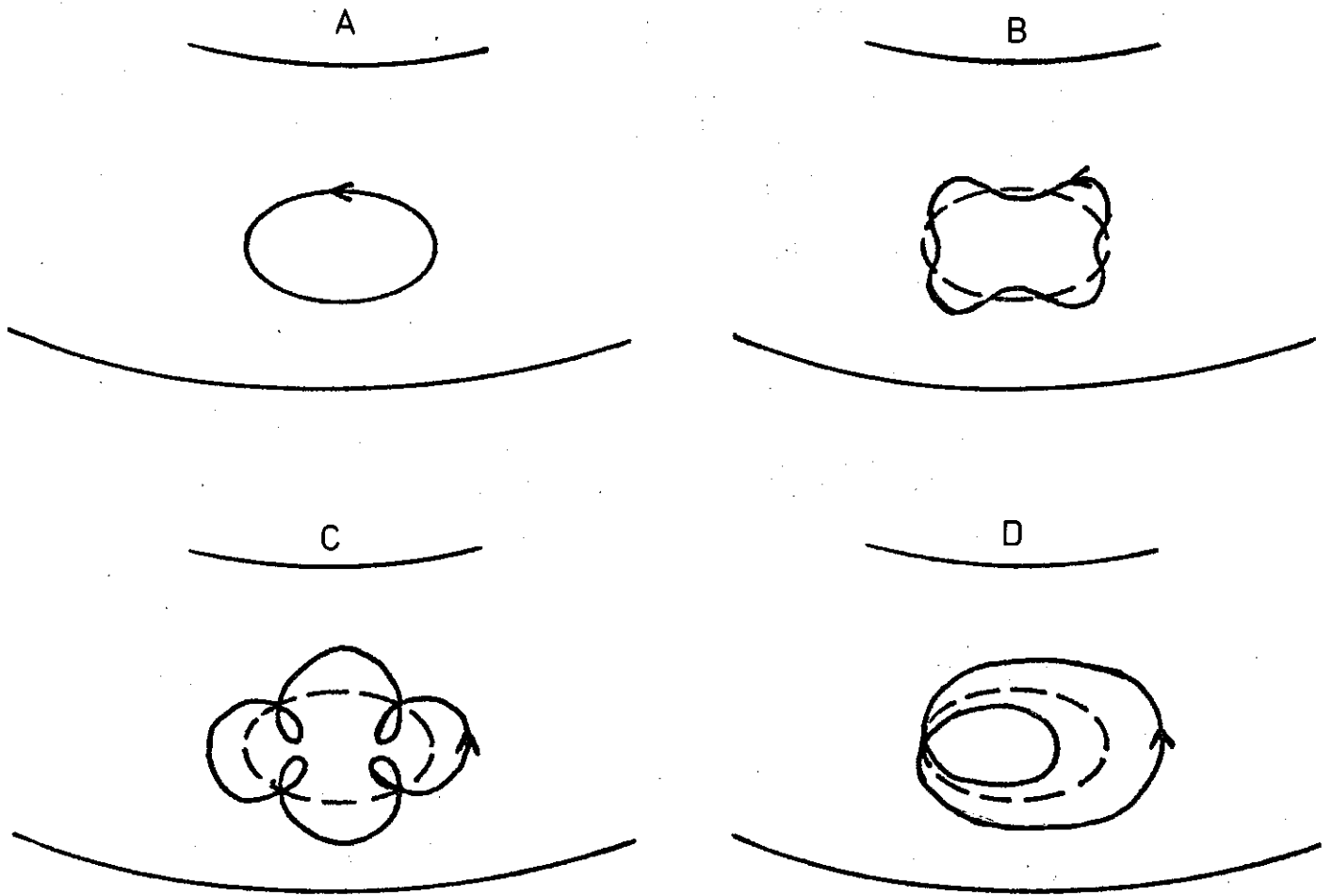


FIG. 7 : TRAJECTOIRES EN PRESENCE DE LA GRAVITE ET D'UN BALOURD

TRACE PAS A PAS QUALITATIF

- A : Gravité seule
- B : Gravité et balourd moins important,  
de fréquence quadruple de celle de  
la rotation
- C : Gravité et balourd plus important,  
de fréquence quadruple de celle de  
la rotation
- D : Gravité et balourd de fréquence  
moitié de celle de la rotation

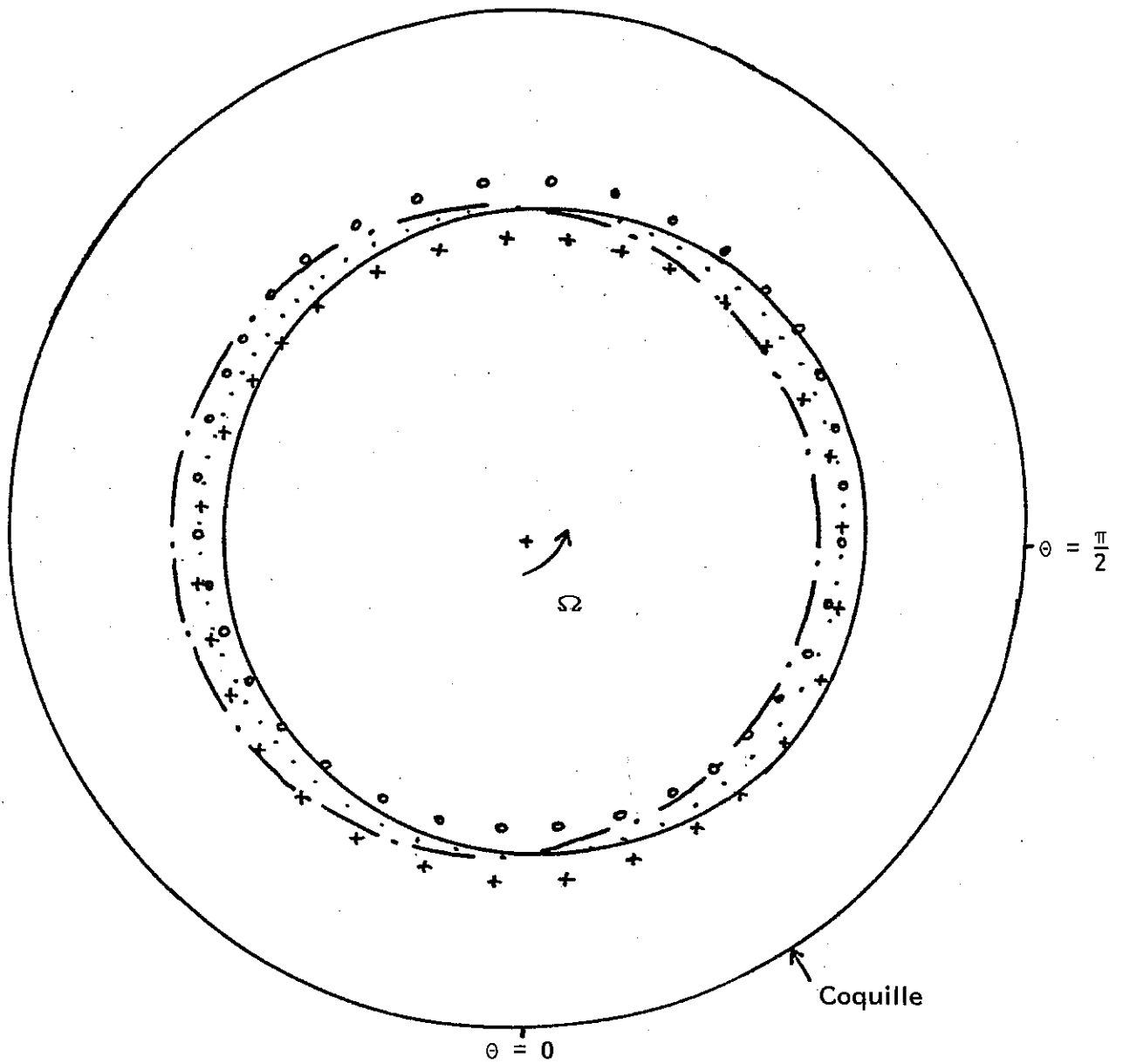


FIG. 8 : MOUVEMENT DE LA SURFACE LIBRE EN PRESENCE D'UN BALOURD.

- ..... Gravité
- . — . Balourd, maximum à  $\pi/2$  ( $t = \pi/2\omega$ )
- +++++ Balourd, maximum à  $\pi$  ( $t=0$ )
- Balourd, maximum à  $3\pi/2$  ( $t=3\pi/2\omega$ )
- ooooooo Balourd, maximum à  $0$  ( $t= \pi/\omega$ )

On a pris  $\xi = 2 \varepsilon$

## 1.5. PERTURBATION DUE A UNE FLECHE DE LA COQUILLE ET A LA GRAVITE

### 1.5.1. Origine physique d'une flèche

Dans une coquille de centrifugation de grandes dimensions, on ne peut assurer une parfaite cylindricité des parois ni une parfaite linéarité de l'axe qui tend à s'incurver en créant une flèche. De plus, à chaque utilisation la coquille subit un cycle thermique contraignant qui la déforme peu à peu. En cours d'utilisation, le refroidissement par les rampes d'arrosage est moins efficace au niveau des chemins de roulement qui apparaissent comme une surépaisseur de la coquille qui peut gonfler entre les chemins de roulement et accentuer une flèche déjà existante. Il y a donc intérêt à étudier l'effet de ce phénomène.

### 1.5.2. Les équations à résoudre

Prenons la géométrie définie sur la Fig. 9. Supposons, pour pouvoir appliquer la méthode des perturbations, que la déformation est petite vis à vis des dimensions caractéristiques de la coquille ; au niveau des chemins de roulement, elle est nulle ; ailleurs elle peut être assimilée à une portion de sinussoïde (fig. 10) dans le sens axial  $z$ . Ramenons-nous alors comme précédemment à un repère lié à la coquille ; dans ce repère on suppose que l'axe est rectiligne mais que le liquide est soumis à une force volumique traduisant le mouvement réel de chaque point de l'espace intérieur à la coquille en rotation imparfaite.

L'accélération correspondante s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_r = - \phi \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} (z-l)\right) \cos(\theta + \Omega t) \\ \gamma_\theta = + \phi \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} (z-l)\right) \sin(\theta + \Omega t) \\ \gamma_z = 0 \end{array} \right.$$

Le terme fonction de  $z$  traduit l'atténuation progressive du phénomène quand on s'approche des chemins de roulement ; le terme fonction de  $\theta$  et  $t$  traduit la rotation excentrée de la coquille.

$\phi$  est l'amplitude maximale du phénomène. On suppose comme précédemment  $\phi \ll \Omega^2 R$ . Les équations s'écrivent donc, en coordonnées cylindriques :

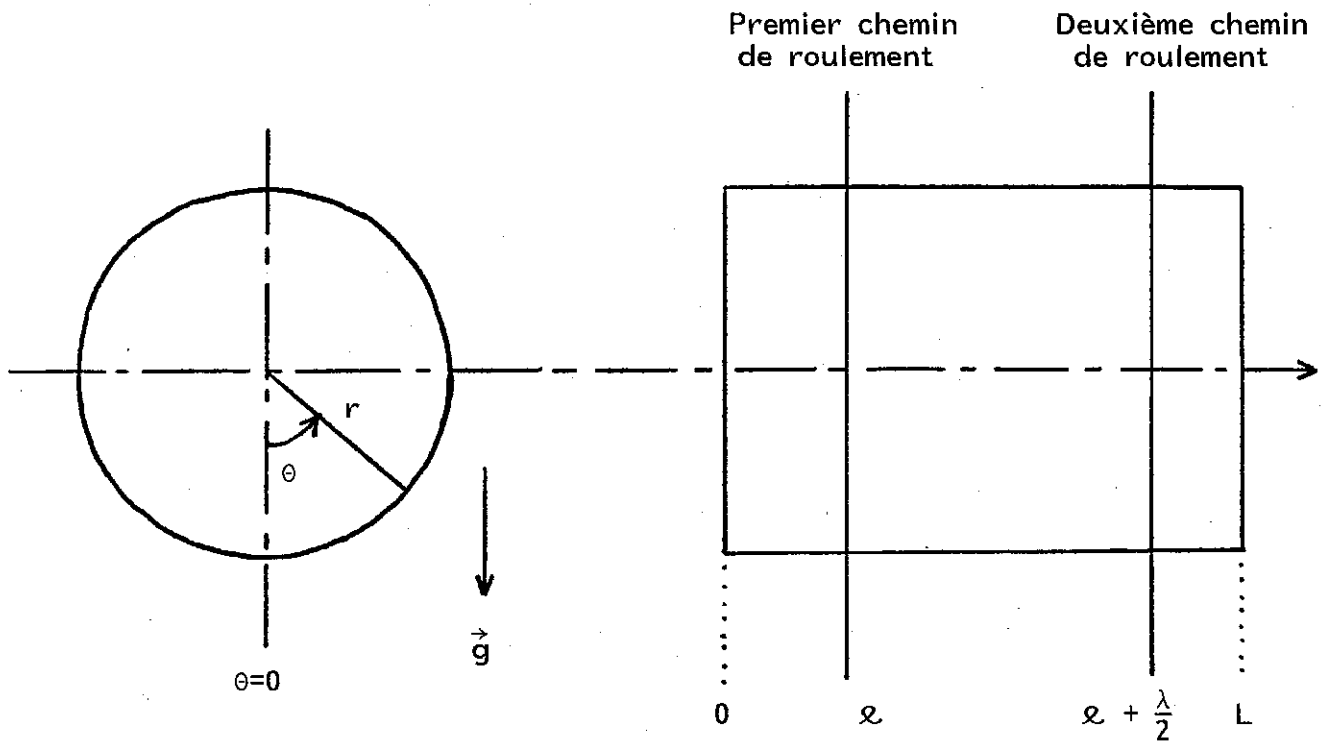


FIG. 9 : GEOMETRIE DU PROBLEME DE LA FLECHE

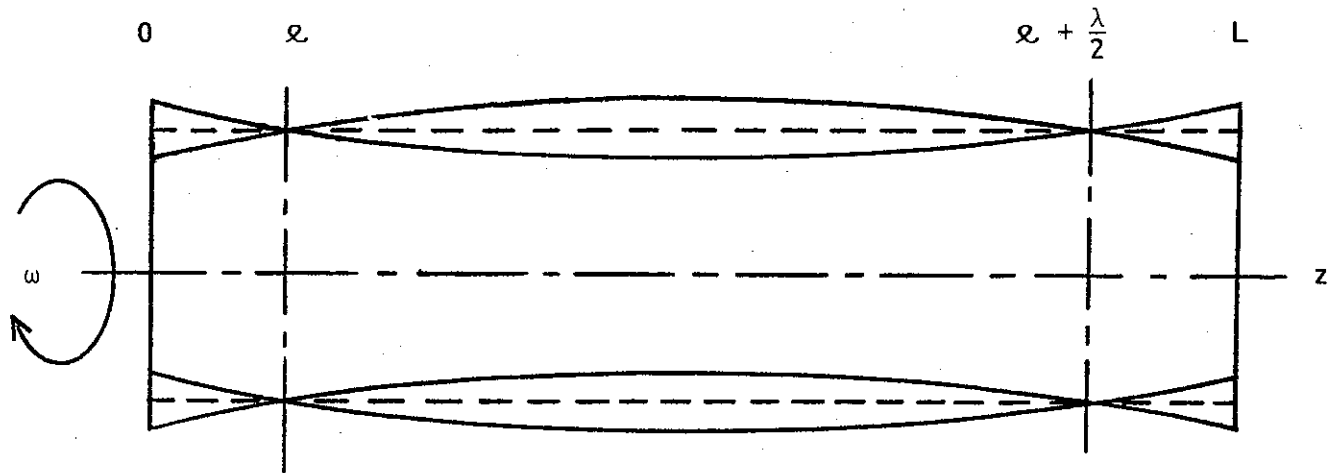


FIG. 10 : LA FLECHE DE LA COQUILLE ASSIMILEE  
A UNE PORTION DE SINUSOÏDE

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g \cos \theta + \gamma_r \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} g - \sin \theta + \gamma_\theta \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

### 1.5.3. Résolution

$$\text{Posons } x = \frac{r}{R} ; \quad \varepsilon = \frac{g}{\Omega^2 R} ; \quad \tau = \Omega t \quad . \quad \xi = \frac{z}{R}$$

On décompose chaque inconnue en trois parties : un terme de rotation en bloc, un terme lié à la gravité, un terme lié à la flèche.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = 0 + \Omega R u + \Omega R u_\lambda \\ u_\theta = \Omega R x + \Omega R v + \Omega r v_\lambda \\ u_z = \rho \frac{\Omega^2 R^2}{2} \{ x^2 - (1 - \frac{\varepsilon}{R})^2 \} + \rho \frac{\Omega^2 R^2}{2} q + \rho \frac{\Omega^2 R^2}{2} q_\lambda \\ e = E + E f + E f_\lambda \end{array} \right.$$

$u, v, q, f$ , sont les termes calculés précédemment pour la gravité seule.

En remplaçant dans les équations et en éliminant les deux premiers groupes de termes (rotation en bloc, gravité) qui vérifient déjà l'équation, il vient :

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \tau} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} - 2v_\lambda = -\frac{1}{2} \frac{\partial q_\lambda}{\partial x} - \frac{\phi}{\Omega^2 R} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} (z-l) \right) \cos(\theta + \tau) \\ \frac{\partial v_\lambda}{\partial \tau} + 2u_\lambda + \frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} = -\frac{1}{2x} \frac{\partial q_\lambda}{\partial \theta} - \frac{1}{x} \frac{E}{R} \left( 1 - \frac{E}{R} \right) \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta} + \frac{\phi}{\Omega^2 R} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} (z-l) \right) \sin(\theta + \tau) \\ \frac{\partial w_\lambda}{\partial \tau} + \frac{\partial w_\lambda}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \frac{\partial q_\lambda}{\partial \xi} - \left( 1 - \frac{E}{R} \right) \frac{E}{R} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \xi} \end{array} \right.$$

Pour l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} + \frac{u_\lambda}{x} + \frac{1}{x} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\lambda}{\partial \xi} = 0$$

On élimine maintenant les indices  $\lambda$  pour alléger la notation puisqu'il n'y a plus d'ambiguïté dans la suite du calcul. On voit apparaître le petit paramètre  $\phi/\Omega^2 R \ll 1$ . En raison de la forme des équations, on décompose les inconnues en séparant les variables :

$$u = \alpha(x) \exp \left[ i \frac{2\pi R}{\lambda} \left( \xi - \frac{\ell}{R} \right) \right] \exp [i(\theta + \tau)]$$

$$v = \beta(x) \exp \left[ i \frac{2\pi R}{\lambda} \left( \xi - \frac{\ell}{R} \right) \right] \exp [i(\theta + \tau)]$$

$$w = \gamma(x) \exp \left[ i \frac{2\pi R}{\lambda} \left( \xi - \frac{\ell}{R} \right) \right] \exp [i(\theta + \tau)]$$

$$q = \delta(x) \exp \left[ i \frac{2\pi R}{\lambda} \left( \xi - \frac{\ell}{R} \right) \right] \exp [i(\theta + \tau)]$$

$$f = \eta \exp \left[ i \frac{2\pi R}{\lambda} \left( \xi - \frac{\ell}{R} \right) \right] \exp [i(\theta + \tau)] \quad \eta = C^{te}$$

Pour simplifier les expressions les notations complexes sont utilisées.

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} 2i\alpha(x) - 2\beta(x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \delta(x)}{\partial x} + \frac{\phi}{\Omega^2 R} i \quad (1) \\ 2\alpha(x) + 2i\beta(x) = -\frac{1}{2x} \delta(x) i - \frac{1}{x} \frac{E}{R} \left(1 - \frac{E}{R}\right) \eta i - \frac{\phi}{\Omega^2 R} \quad (2) \\ 2i\gamma(x) = -\frac{1}{2} \delta(x) i \frac{2\pi R}{\lambda} - \left(1 - \frac{E}{R}\right) \frac{E}{R} \eta i \frac{2\pi R}{\lambda} \quad (3) \\ \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} + \frac{\alpha(x)}{x} + \frac{i}{x} \beta(x) + \gamma(x) i \frac{2\pi R}{\lambda} = 0 \quad (4) \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites s'écrivent comme suit :

pour  $x = 1$  (à la paroi) on a :  $u_r = 0$  donc  $\underline{\alpha(1) = 0}$

pour  $x = x_L = 1 - \frac{e}{R}$  (à la surface libre) on a :



$$p = p_0 \quad \text{soit} \quad \underline{\delta(x_L) = 0}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } s = 0 \quad \text{avec} \quad s(x, \theta, \tau, \xi) = x - 1 + \frac{e(\theta, \tau, \xi)}{R}$$

$$\text{soit encore, après calculs,} \quad \underline{\alpha(x) + 2 \frac{E}{R} \eta i = 0}$$

On a aussi la condition  $u_z = 0$ , soit  $\underline{\gamma = 0}$ , pour  $z = 0$  et  $z = L$

En dérivant les termes de l'équation (2) par rapport à  $x$  et en combinant l'équation obtenue avec l'équation (1), on obtient :

$$4i\alpha(x) - 4\beta(x) - 2x \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} + 2ix \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

De même, par une combinaison des équations (2) et (3), on obtient :

$$\frac{2\pi R}{\lambda} (\alpha(x) + i\beta(x)) - \frac{i\gamma(x)}{x} = -\frac{\phi}{\Omega^2 R} \frac{\pi R}{\lambda} \quad (6)$$

En combinant cette nouvelle équation avec l'équation (4) on obtient :

$$(\alpha(x) + i\beta(x)) \left(1 + \left(\frac{2\pi R x}{\lambda}\right)^2\right) + x \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} = -\frac{\phi}{\Omega^2 R} \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi R x}{\lambda}\right)^2 \quad (7)$$

L'équation (5) peut aussi s'écrire :

$$4(\alpha(x) + i\beta(x)) + 2x \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(x) + i\beta(x)) = 0 \quad (8)$$

Le système devient :

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} 2(\alpha(x) + i\beta(x)) + x \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(x) + i\beta(x)) = 0 \quad (9) \end{array} \right.$$

$$(\alpha(x) + i\beta(x)) \left(1 + \left(\frac{2\pi R x}{\lambda}\right)^2\right) + x \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} = -\frac{\phi}{2\Omega^2 R} \left(\frac{2\pi R x}{\lambda}\right)^2 \quad (10)$$

$$\frac{2\pi R}{\lambda} (\alpha(x) + i\beta(x)) - \frac{i\gamma(x)}{x} = -\frac{\phi}{\Omega^2 R} \frac{\pi R}{\lambda} \quad (11)$$

$$2i\alpha(x) - 2\beta(x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \delta(x)}{\partial x} + \frac{\phi}{\Omega^2 R} i \quad (12)$$

$$2i\gamma(x) = -\frac{1}{2} \delta(x) i \frac{2\pi R}{\lambda} - \left(1 - \frac{E}{R}\right) \frac{E}{R} \eta i \frac{2\pi R}{\lambda} \quad (13)$$

Le fait que l'on ait une équation de plus qu'au début est lié aux faits que, premièrement, les combinaisons d'équations effectuées ne sont pas linéaires, des informations étant perdues dans les dérivations, et deuxièmement, la variable  $\delta(x)$  et la constante  $\eta$  sont liées (l'expression utilisée pour la pression dépend de l'épaisseur réelle  $e(x, \theta, \xi, \tau)$ ).

L'équation (9) conduit à :

$$\alpha(x) + i\beta(x) = \frac{A}{x^2} \quad A = C^{te}$$

Il est alors facile de tirer  $\alpha$  puis  $\beta$  fonctions de  $x$  de l'équation (10) en faisant intervenir une deuxième constante  $B$  ; l'équation (11) donne alors  $\gamma(x)$  ; de l'équation (12) on tire  $\delta(x)$  en faisant intervenir une troisième constante  $C$ .  $\eta$  est tiré de (13) et l'on vérifie bien que le résultat obtenu est une constante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x) = \frac{x^2}{4} \left( \frac{\phi}{\Omega^2 R} \right) \left( \frac{2\pi R}{\lambda} \right)^2 - (\ln x) A \left( \frac{2\pi R}{\lambda} \right)^2 + \frac{A}{2x^2} + B \\ \beta(x) = \frac{ix^2}{4} \left( \frac{\phi}{\Omega^2 R} \right) \left( \frac{2\pi R}{\lambda} \right)^2 - (\ln x) iA \left( \frac{2\pi R}{\lambda} \right)^2 - \frac{Ai}{2x^2} + Bi \\ \gamma(x) = \frac{x}{i} \frac{\pi R}{\lambda} \frac{\phi}{\Omega^2 R} + \frac{A}{i} \frac{2\pi R}{\lambda} \frac{1}{x} \\ \delta(x) = \frac{4iA}{x} + \frac{\phi}{\Omega^2 R} 2ix + C \\ \eta = -\frac{R}{E} \frac{1}{\left(1 - \frac{E}{R}\right)} \frac{C}{2} \end{array} \right.$$

La détermination des constantes se fait sans difficulté :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\phi}{\Omega^2 R} \frac{H_1}{H_2} \\ B = \frac{-\phi}{2\Omega^2 R} \frac{H_1}{H_2} - \frac{\phi}{4\Omega^2 R} \left( \frac{2\pi R}{\lambda} \right)^2 \\ C = -\frac{\phi}{\Omega^2 R} \cdot \frac{4i}{\left(1 - \frac{E}{R}\right)} \cdot \frac{H_1}{H_2} - \frac{\phi}{\Omega^2 R} \left(1 - \frac{E}{R}\right) 2i \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \begin{cases} H_1 = -2 + \left(\frac{\pi R}{\lambda}\right)^2 \frac{E}{R} \left(\frac{E}{R} - 2\right) \\ H_2 = \frac{7}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{E}{R}\right)^2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2 \ln\left(1 - \frac{E}{R}\right) \end{cases}$$

#### 1.5.4. Les résultats

##### Vitesses de glissement à la paroi

Les constantes A et B sont réelles, C (et donc  $\eta$ ) est imaginaire pure. De ce fait  $\alpha$  est la seule fonction réelle,  $\beta, \gamma$  et  $\delta$  sont imaginaires pures.

Ce qui donne pour les fonctions u, v, w, p :

$$u = -\alpha(x) \sin \left[ \frac{2\pi R}{\lambda} \left( \xi - \frac{\ell}{R} \right) \right] \sin(\theta + \tau)$$

$$v = (+i\beta(x)) \sin \left[ \frac{2\pi R}{\lambda} \left( \xi - \frac{\ell}{R} \right) \right] \cos(\theta + \tau)$$

$$w = (+i\gamma(x)) \cos \left[ \frac{2\pi R}{\lambda} \left( \xi - \frac{\ell}{R} \right) \right] \sin(\theta + \tau)$$

$$q = (+i\delta(x)) \sin \left[ \frac{2\pi R}{\lambda} \left( \xi - \frac{\ell}{R} \right) \right] \cos(\theta + \tau)$$

$$f = (+i\eta) \sin \left[ \frac{2\pi R}{\lambda} \left( \xi - \frac{\ell}{R} \right) \right] \cos(\theta + \tau)$$

Les trajectoires sont difficilement représentables en 3 dimensions ; on se contentera de calculer les vitesses maximales de glissement dans les sens  $\theta$  et  $z$  qui sont égales, respectivement, à  $i\beta(1)$  à mi-distance des chemins de roulement, et  $i\gamma(1)$  au niveau des chemins de roulement.

$$\text{Soit } \begin{cases} \text{en } \theta : \frac{\phi}{\Omega^2 R} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2 + \frac{H_1}{H_2} \right] \Omega R \\ \text{en } z : \frac{\pi R}{\lambda} \frac{\phi}{\Omega^2 R} \left( 1 + \frac{H_1}{H_2} \right) \Omega R \end{cases}$$

Dans notre installation, pour  $R = 0,1125$  m,  $\Omega = 24 \pi$  rd/s,  $E = 0,04$  m,  $\lambda = 0,80$  m, et en supposant  $\frac{\phi}{\Omega^2 R} \sim 0,01$ ,

les glissements  $\begin{cases} \text{en } \theta & \text{valent } \left\{ \begin{array}{l} 1,2 \text{ cm/s} \\ 2,8 \text{ cm/s} \end{array} \right.$

pour des installations industrielles où  $\begin{cases} R = 0,5 \text{ m} & \text{on obtient resp. } \underline{7 \text{ et } 1,7 \text{ m/s}} \\ E/R = 0,2 \\ \lambda = 0,4 \end{cases}$

### Résonance

Les vitesses calculées tendent vers l'infini quelque soit la valeur de  $\phi$ , quand  $\lambda$  tend vers zéro ou quand  $H_2$  tend vers zéro. On obtient  $H_2 = 0$  pour une valeur critique de  $\lambda$  égale à :

$$\lambda_c = \frac{2\pi R \sqrt{2} \left( \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{E}{R}}\right) \right)^{1/2}}{\left( \left[ \frac{7}{\left(1 - \frac{E}{R}\right)^2} \right] + 1 \right)^{1/2}}$$

Dans notre installation on trouve  $\lambda_c = 0,16 \text{ m}$  ; dans des installations industrielles où  $R = 0,5 \text{ m}$ ,  $E/R \sim 0,2$ , on obtient  $\lambda_c = 0,60 \text{ m}$ .

Ceci explique les grandes différences dans les vitesses de glissement calculées dans les deux cas ci-dessus.

Dans le cas industriel proposé, la valeur de  $\lambda$  est beaucoup plus proche de  $\lambda_c$  que dans le cas de notre installation. On est de ce fait beaucoup plus proche de la résonance, ce qui explique les valeurs élevées obtenues pour les vitesses. Le fait qu'il puisse y avoir résonance est particulièrement important ; cela montre que des perturbations infimes du système peuvent causer des modifications majeures des champs de vitesse et de pression. Bien sûr, dans le voisinage de ces cas particuliers, la méthode des perturbations ne s'applique plus pour déterminer le champ de vitesse ; les résultats numériques précédents montrent donc seulement qu'il faut s'attendre à des problèmes techniques liés aux vibrations du système en rotation. Il ne faut pas oublier toutefois que la viscosité du fluide a été négligée dans les calculs ; elle a un effet d'amortissement de ces phénomènes par dissipation de l'énergie cinétique du fluide en chaleur. Il est cependant difficile de prévoir si une telle dissipation peut amortir le phénomène, car elle dépend à la fois de la valeur de la viscosité et des gradients de vitesse .

### La surface libre

On a  $e = E + E.f + E.f_\lambda$  en reprenant les notations du début du chapitre ; les deux premiers termes correspondent à la surface libre définie par la gravité ; le dernier terme est à une constante multiplicative près  $\sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (z-\ell) \right] \cos (\theta + \Omega t)$ . On a donc une vague horizontale (axiale) dont l'amplitude est maximale dans les ventres et nulle dans les noeuds de vibrations, qui tourne dans le sens inverse de celui de la rotation de la coquille.

### Les extrémités de la coquille

Il faut remarquer que les conditions aux limites sur  $u_z$  n'ont pas servi pour la résolution. Ceci veut dire que le cylindre peut être infini (comme cela était supposé dans les calculs bidimensionnels) ou fini, de longueur non indifférente. En effet  $u_z = 0$  pour  $z = 0$  et  $z = L$  quels que soient  $t, x$  et  $\theta$

$$\cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} (z-\ell) \right) = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ et } z = L$$

Ce qui conduit à une relation entre  $\ell$ ,  $L$  et  $\lambda$  :

$$\begin{cases} \frac{2\pi\ell}{\lambda} = \frac{\pi}{2} (2k + 1) \\ \frac{2\pi(L-\ell)}{\lambda} = \frac{\pi}{2} (2k + 1) \end{cases} \quad k \text{ est un entier naturel}$$

Comme  $L > \ell + \frac{\lambda}{2}$  on voit que  $k = 0$  n'est pas possible dans la deuxième équation. Ce qui donne :

$$\begin{cases} \ell = \frac{\lambda}{4} (2k + 1) & k \text{ est un entier naturel} \\ L - \ell = \frac{\lambda}{4} (2k + 1) & k \text{ est un entier naturel non nul} \end{cases}$$

en prenant les valeurs les plus petites possibles on obtient :

$$\begin{cases} \ell = \frac{\lambda}{4} \\ L = \lambda \end{cases}$$

dans notre installation cela donne  $\left\{ \begin{array}{l} \ell = 0,40 \text{ m} \\ L = 1,60 \text{ m} \end{array} \right.$  pour les valeurs critiques

or on a  $\left\{ \begin{array}{l} \ell = 0,20 \text{ m} \\ L = 1,17 \text{ m} \end{array} \right.$

La différence n'est pas négligeable. Cela signifie que l'écoulement tel qu'il a été calculé ne peut exister dans notre installation. Les extrémités jouent un rôle sur la structure de l'écoulement, au moins à leur voisinage : il y a un effet de bout.

#### 1.6. LES LIMITES DE LA METHODE

Les cas précédents ont pu être résolu par la voie analytique ; nous allons montrer deux exemples importants qui ne peuvent être traités que numériquement.

##### 1.6.1. - Cas d'un liquide visqueux - Variation de la vitesse angulaire de la coquille

Quand la coquille vibre, quelle qu'en soit la cause (balourd, flèche, défaut complexe), il peut se faire que sa vitesse angulaire soit altérée et oscille autour d'une valeur moyenne  $\Omega_0$ . Posons  $\Omega = \Omega_0(1 + \eta \cos \omega t)$   $\eta$  est petit devant 1.  $\omega$  est la fréquence de variation de la vitesse angulaire. Dans ce cas, il n'est pas possible, comme précédemment, de négliger les termes visqueux. En effet, la perturbation est ici purement orthoradiale et ne peut diffuser dans le fluide que par viscosité ; si on ne tient pas compte de la viscosité, cela revient à supposer que la perturbation ne peut se transmettre au fluide par frottements. Faisons maintenant l'hypothèse que, du fait de la faible épaisseur de fluide, les gradients de vitesses sont beaucoup plus importants dans le sens radial que orthoradial (le problème est bidimensionnel en supposant que le cylindre est infini).

Cette hypothèse est intuitive et n'est pas dictée par la forme des équations ; elle est systématiquement utilisée et conduit à une simplification des équations. Les résultats qui en découlent donnent des renseignements sur ce type d'écoulements, mais des écoulements à petite échelle identique en  $x$ ,  $\theta$ , et  $z$  ne sont pas pour autant exclus : ils ne sont tout simplement pas

analysés ici. Cette hypothèse permet de simplifier les termes visqueux des équations de Navier-Stokes. Ceci se fait par un calcul d'ordres de grandeurs :

$$\begin{aligned} \text{On pose : } \quad u_r &= \mathcal{O}(\bar{u}) \\ u_\theta &= \mathcal{O}(\bar{v}) \\ \delta r &= \mathcal{O}(e) \\ r &= \mathcal{O}(R) \end{aligned}$$

Pour la première équation de Navier-Stokes, les termes de viscosité et leurs ordres de grandeur sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \frac{\bar{u}}{eR} ; \frac{\bar{u}}{e^2} ; \frac{\bar{u}}{R^2} ; \frac{\bar{u}}{R^2} ; \frac{\bar{v}}{R^2} \end{array} \right.$$

pour la 2ème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \\ \frac{\bar{v}}{eR} ; \frac{\bar{v}}{e^2} ; \frac{\bar{v}}{R^2} ; \frac{\bar{u}}{R^2} ; \frac{\bar{v}}{R^2} \end{array} \right.$$

pour l'équation de continuité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\bar{u}}{e} ; \frac{\bar{u}}{R} ; \frac{\bar{v}}{R} \end{array} \right.$$

Comme  $R$  est très grand devant  $e$ , cette dernière équation montre que le deuxième terme est négligeable devant le premier et que  $\frac{\bar{v}}{R}$  et  $\frac{\bar{u}}{e}$  sont du même ordre de grandeur, autrement dit :

$$u_\theta = \mathcal{O}\left(\frac{R}{e} \bar{u}\right) \quad \text{ou} \quad u_r = \mathcal{O}\left(\frac{e}{R} \bar{v}\right)$$

Ceci montre que dans les deux premières équations de Navier-Stokes les seuls termes prépondérants sont :

$$v \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \quad \text{et} \quad v \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}$$

On adimensionnalise alors en posant

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} &= x & \tau &= \Omega_0 t \\ u_r &= \Omega_0 R u & u_\theta &= \Omega_0 r + \Omega_0 R v \\ e &= E(1 + f) \\ p &= \rho \frac{\Omega_0^2 R^2}{2} \left\{ x^2 - \left(1 - \frac{e}{R}\right)^2 + q \right\} \end{aligned}$$

$u, v$ , et  $q$  sont de l'ordre de  $\eta$ , l'amplitude de la perturbation.

Puis on sépare les variables comme précédemment ; cette fois rien n'impose la périodicité en  $\theta$  ce qui explique la présence du paramètre  $k$  :

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \alpha(x) e^{i \frac{\omega}{\Omega_0} \tau} \cdot e^{ik\theta} \\ v &= \beta(x) e^{i \frac{\omega}{\Omega_0} \tau} \cdot e^{ik\theta} \\ q &= \gamma(x) e^{i \frac{\omega}{\Omega_0} \tau} \cdot e^{ik\theta} \\ f &= F \cdot e^{i \frac{\omega}{\Omega_0} \tau} \cdot e^{ik\theta} \end{aligned} \right.$$

On obtient le système suivant :

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha i \left( \frac{\omega}{\Omega_0} + k \right) - 2\beta &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{1}{Ta} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \\ 2\alpha + \beta i \left( \frac{\omega}{\Omega_0} + k \right) &= -\frac{1}{2x} \gamma ik - \left(1 - \frac{E}{R}\right) \frac{E}{R} \frac{1}{x} \cdot F \cdot ik + \frac{1}{Ta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{x} \beta ik &= 0 \end{aligned} \right.$$

où  $Ta$  représente le nombre de Taylor  $\frac{\Omega_0 R^2}{\nu}$

En éliminant  $\gamma$  et  $\beta$  on obtient une équation d'ordre IV en  $\alpha$  seulement :

$$0 = \alpha \left[ -2 - k \left( \frac{\omega}{\Omega_0} + k \right) \right] + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot 2 \frac{x}{k} \left( \frac{\omega}{\Omega_0} + k \right) + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \left[ \frac{x^2}{k} \left( \frac{\omega}{\Omega_0} + k \right) + \frac{ik}{Ta} + \frac{2}{ikTa} \right] + \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3} \cdot \frac{4x}{ikTa} + \frac{\partial^4 \alpha}{\partial x^4} \frac{x^2}{ikTa}$$



la solution évidente :  $\alpha$  identiquement nul est physiquement impossible. Cette équation d'ordre 4 à coefficients non constants ne pourra être résolue que numériquement.

### 1.6.2. Variation de l'épaisseur de liquide

Le métal liquide centrifugé dans la coquille se solidifie progressivement par l'extérieur : l'épaisseur de la veine liquide diminue alors que son rayon interne moyen reste constant. La variation de l'épaisseur au cours du temps est définie par une modélisation thermique (voir chapitre 4) et sera considérée comme une donnée dans le calcul. Ce n'est pas une fonction périodique du temps qui perturbe les équations, contrairement aux cas précédents. Négligeons l'influence de la viscosité. Prenons le cas simple où le rayon varie linéairement avec le temps :  $R = R(t) = R_0 - Wt$  (Voir Figure 11) ; comme précédemment, on suppose le cylindre infini pour être à deux dimensions d'espace.

Regardons l'influence de ce phénomène sur le cas permanent correspondant à la perturbation par la gravité.

$$\text{On a : } \left\{ \begin{array}{l} e = E(1+f) - Wt \\ u_r = \Omega R_0 u + \Omega R_0 u_1 \\ u_\theta = \Omega r + \Omega R_0 v + \Omega R_0 v_1 \\ p = \rho \frac{\Omega^2 R^2}{2} \left\{ x^2 - \left(1 - \frac{e}{R}\right)^2 + q + q_1 \right\} \end{array} \right.$$

$f, u, v, q$  représentent les perturbations par la gravité ;

$u_1, v_1, q_1$ , celles par la solidification.

La méthode des perturbations ne peut s'appliquer que tant que la déformation est faible c'est-à-dire pour des durées courtes ; en particulier l'étude par cette méthode est impossible quand l'épaisseur de liquide tend vers zéro, en fin de solidification. En adimensionnalisant par  $x = r/R_0$ ,  $\tau = \Omega t$ , et en reportant dans les équations de Navier-Stokes les expressions des fonctions  $u_r, u_\theta, p$  on obtient le système suivant :

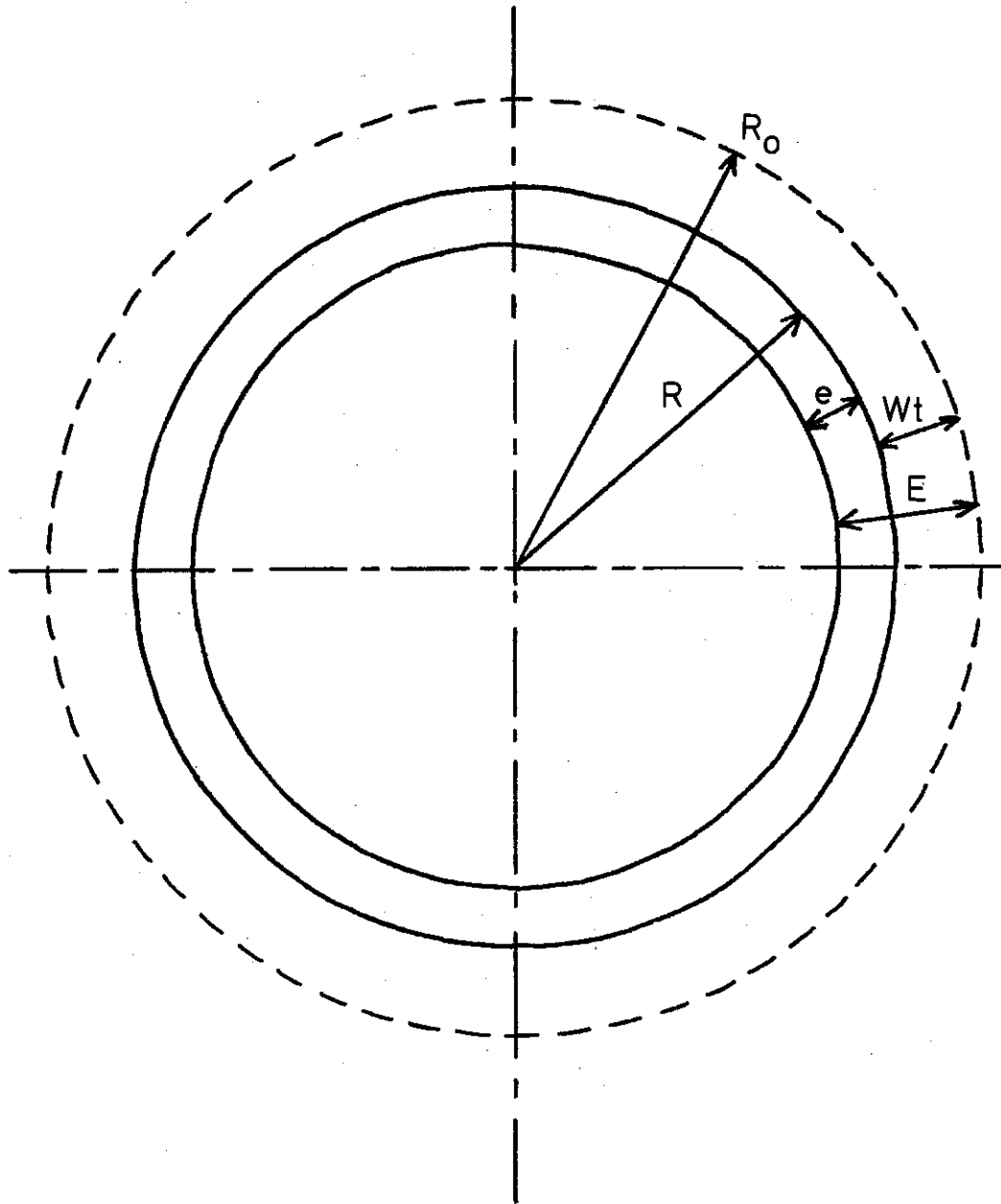


FIG. 11 : GEOMETRIE DU PROBLEME

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - 2v_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial q_1}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + 2u_1 + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} = \frac{1}{2x} \frac{\partial q_1}{\partial \theta} \\ u_1 + x \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I})$$

Utilisons la méthode précédente et séparons les variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \alpha(x) \cdot e^{ik\theta} A_1(\tau) \\ v_1 = \beta(x) \cdot e^{ik\theta} B_1(\tau) \\ q_1 = \gamma(x) \cdot e^{ik\theta} C_1(\tau) \end{array} \right.$$

Le système devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x) \frac{\partial A_1(\tau)}{\partial \tau} + \alpha(x) A_1(\tau) ik - 2\beta(x) B_1(\tau) = -\frac{1}{2} C_1(\tau) \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x} \\ \beta(x) \frac{\partial B_1(\tau)}{\partial \tau} + 2\alpha(x) A_1(\tau) + \beta(x) B_1(\tau) ik = -\frac{ik}{2} \gamma(x) C_1(\tau) \\ \alpha(x) A_1(\tau) + x A_1(\tau) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} + \beta(x) ik B_1(\tau) = 0 \end{array} \right.$$

On ne peut espérer résoudre ce système qu'en connaissant  $A_1$ ,  $B_1$ , et  $C_1$ .

On doit avoir  $A_1 = B_1 = C_1$  à  $\tau = 0$  ; les équations imposent donc

$$\frac{\partial A_1(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial B_1(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0$$

de plus, les fonctions  $A_1, B_1, C_1$  sont monotones, on les choisira positives.

Ainsi  $u_1, v_1, q_1$  augmentent en valeur absolue au fur et à mesure que le temps s'écoule. Le plus simple est donc  $A_1(\tau) = B_1(\tau) = \tau^2$ ,

ce qui impose pour  $C_1$  la forme  $C_1(\tau) = m_1 \tau^2 + m_2 \tau$ .

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} \text{à la surface libre, } x = \frac{R-e}{R_0} \quad p = p_0 \\ \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} s + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{à la limite extérieure, } x = \frac{R}{R_0}, \quad u_r = -W$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = 0 \quad \text{pour } x = \frac{R-e}{R_0} = 1 - \frac{E}{R_0}(1+f) \\ u_1 = 0 \\ u_1 = -\frac{W}{\Omega R_0} \quad \text{pour } x = R/R_0, \quad \forall \tau \end{array} \right.$$

La fonction  $C_1(\tau)$  est pour l'instant non définie.

La résolution du système conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x) = B(x-ik)^{-K} \quad \text{avec } B = C^{te}, \quad K = 1 - \frac{k^2}{2} + \frac{ik^3}{2} \\ \beta(x) = -\frac{B}{ik} (x-ik)^{-K} - \frac{x B}{ik} (x-ik)^{-K-1} \\ -\frac{ik}{2} \gamma(x) C_1(\tau) = (2\tau + ik\tau^2) \beta(x) + 2B(x-ik)^{-K} \tau^2 \end{array} \right.$$

Cette dernière équation montre que les variables n'étaient pas séparables comme on en avait fait l'hypothèse au départ. La méthode est donc ici inapplicable.

## 1.7 - CONCLUSION

Les divers calculs qui ont été menés au cours de ce chapitre ont apporté des résultats intéressants. Il est maintenant démontré que malgré des forces centrifuges importantes qui ont tendance à entraîner le liquide en rotation en bloc avec la coquille, le liquide peut avoir un mouvement par rapport à celle-ci, parfois même très important, ce mouvement étant induit par des perturbations extérieures dont certaines (les vibrations) sont justement liées à la centrifugation. Des perturbations aussi simples (et faibles) que celles engendrées par la gravité suffisent pour donner au liquide un mouvement par rapport à la coquille de plusieurs cm/s ; les mouvements au sein du liquide sont de nature à l'homogénéiser, en température comme une concentration en solutés ; il apparaît une vague axiale en surface libre qui se déplace à une vitesse différente de celle de la coquille, mais différente aussi de celle du liquide ; des perturbations tridimensionnelles peuvent conduire à un phénomène de résonance, qui échappe à l'analyse par la méthode des perturbations. Ce n'est d'ailleurs pas le seul cas où la méthode atteint ses limites : dès que la prise en compte de la viscosité est indispensable, ou que les perturbations étudiées ne permettent pas une séparation des variables, il devient impossible de traiter analytiquement le problème posé, même si l'on se limite à des phénomènes bidimensionnels. Il est alors nécessaire d'envisager un traitement numérique des équations, ce que nous verrons au Chapitre 3.



CHAPITRE 2

ETUDE EXPERIMENTALE DE LA COULEE  
CENTRIFUGE SUR UNE INSTALLATION  
DE SIMULATION UTILISANT DE L'EAU

---





## 2.1. INTRODUCTION

Dans la coulée centrifuge de l'acier, la technique utilisée et les températures de travail font qu'il est extrêmement difficile de voir ce qui se passe dans le liquide pendant et après la coulée. Les calculs du Chapitre 1 ont mis en évidence l'existence de recirculations et de perturbations de la surface libre du liquide dans des cas particuliers de sollicitations mécaniques de la coquille. Dans la réalité cette coquille est soumise à une combinaison de diverses sollicitations dont certaines peuvent être complexes. Une étude expérimentale est donc indispensable.

Comme il s'agit de visualiser les phénomènes, il est intéressant d'utiliser une installation et un liquide transparents. Un calcul de similitude hydrodynamique (voir Annexe 2) montre que si les deux installations sont à la même échelle, le liquide transparent doit avoir la même viscosité cinématique que l'acier liquide ; si l'installation expérimentale est plus petite que l'installation industrielle, la viscosité cinématique du liquide transparent doit être inférieure à celle de l'acier liquide.

Or, l'eau et l'acier liquide ont la même viscosité cinématique ( $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ). C'est pourquoi la coquille en plexiglas qui a été conçue et construite par le Centre de Recherches de Pont-à-Mousson est à la même échelle que celle fonctionnant avec de l'acier. En utilisant de l'eau la transposition des phénomènes observés est quantitative, si l'on fait abstraction des phénomènes thermiques. Pour les installations industrielles de plus grande taille (le facteur d'échelle peut aller jusqu'à 6) il faudrait utiliser un liquide jusqu'à quinze fois moins visqueux que l'acier, donc que l'eau, ce qui n'est pas envisageable ; pour ces cas, l'utilisation de l'eau conduit à des résultats qui ne sont que partiellement ou qualitativement transposables.

Des études ont déjà eu lieu sur des installations similaires.

O.M. PHILLIPS (1959) observe des structures de surface libre qui dépendent de la vitesse de rotation de la coquille et de la quantité de liquide ; il s'est aussi intéressé à la stabilité de la nappe centrifugée aux basses vitesses de rotation. M.J. KARWEIT et al. (1975) utilisent une installation très similaire à la nôtre mais ne se sont intéressés qu'aux phénomènes se produisant à basse vitesse de rotation, quand le liquide n'est pas encore centrifugé dans la coquille.

Ainsi à notre connaissance aucune étude expérimentale n'a encore été faite pour mettre en évidence les mouvements dans le liquide ; la stabilité des écoulements et la forme de la surface libre sont les seuls éléments qui aient été étudiés à ce jour.

## 2.2. L'INSTALLATION EXPERIMENTALE

La pièce principale de l'installation expérimentale est un cylindre transparent de plexiglas de 1,20 m de long et de 0,225 m de diamètre intérieur. Il est muni de deux chemins de roulement métalliques posés sur des galets qui sont entraînés en rotation par un moteur à vitesse variable par l'intermédiaire d'une courroie. La plage de fonctionnement du moteur est de 0 à 3000 tr/mn (0 à 50 tr/s) ce qui correspond pour la coquille en plexiglas à 0 à 975 tr/mn, (0 à 16 tr/s), ce qui correspond à une accélération environ égale à cent fois celle de la pesanteur au niveau de la paroi interne du tube.

Le remplissage s'effectue par un pot de coulée, prolongé par une busette, et alimenté à partir d'un réservoir gradué qui peut contenir 10 litres d'eau (Voir Fig. 12).

L'installation expérimentale reproduit fidèlement une installation de même type se trouvant à Pont-à-Mousson et travaillant avec l'acier. Elle est parfaitement équilibrée à vide.

L'utilisation d'un stroboscope muni d'une lampe flash de 250 W permet de s'affranchir du mouvement de rotation de la coquille en ajustant la fréquence des éclairs et celle de la rotation. Tout se passe alors comme si l'on était dans le repère lié à la coquille en rotation, à cette différence près que les phénomènes cycliques dont la période est un sous-multiple de celle de la rotation restent inobservables. Cette technique rend visibles les perturbations du régime de rotation en bloc.

Pour les prises de vues, une caméra dont la vitesse de défilement est pilotable de l'extérieur a été spécialement aménagée pour cette installation. Sa vitesse peut varier de 3 à 80 images/s, la gamme utilisée dans les expériences étant de 9 à 15 images/s. Les cadences du stroboscope et de la caméra sont synchronisées électroniquement et la fréquence de prise de vues est enregistrée sur le film, ce qui permet une exploitation quantitative ultérieure des films (Voir Fig. 13).

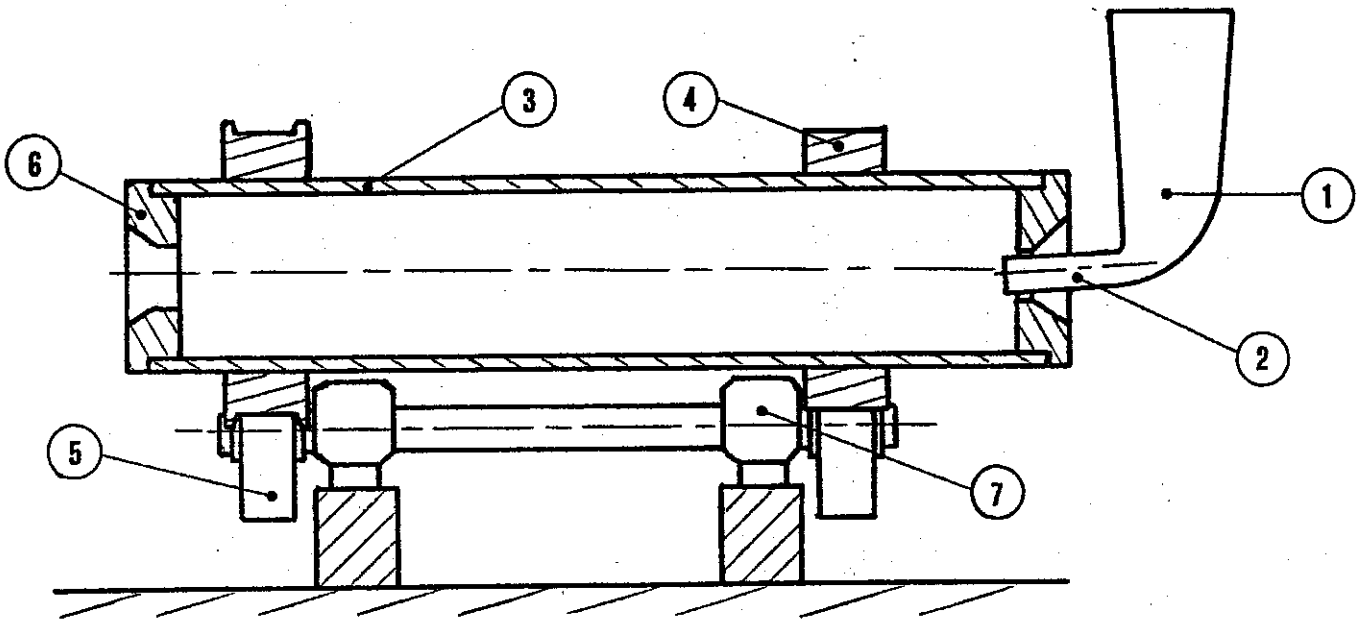


FIG. 12 : VUE EN COUPE DE L'INSTALLATION EXPERIMENTALE

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| 1. Pot de coulée       | 5. Galet de roulement  |
| 2. Buse de coulée      | 6. Cuvette d'extrémité |
| 3. Coquille            | 7. Palier              |
| 4. Chemin de roulement |                        |

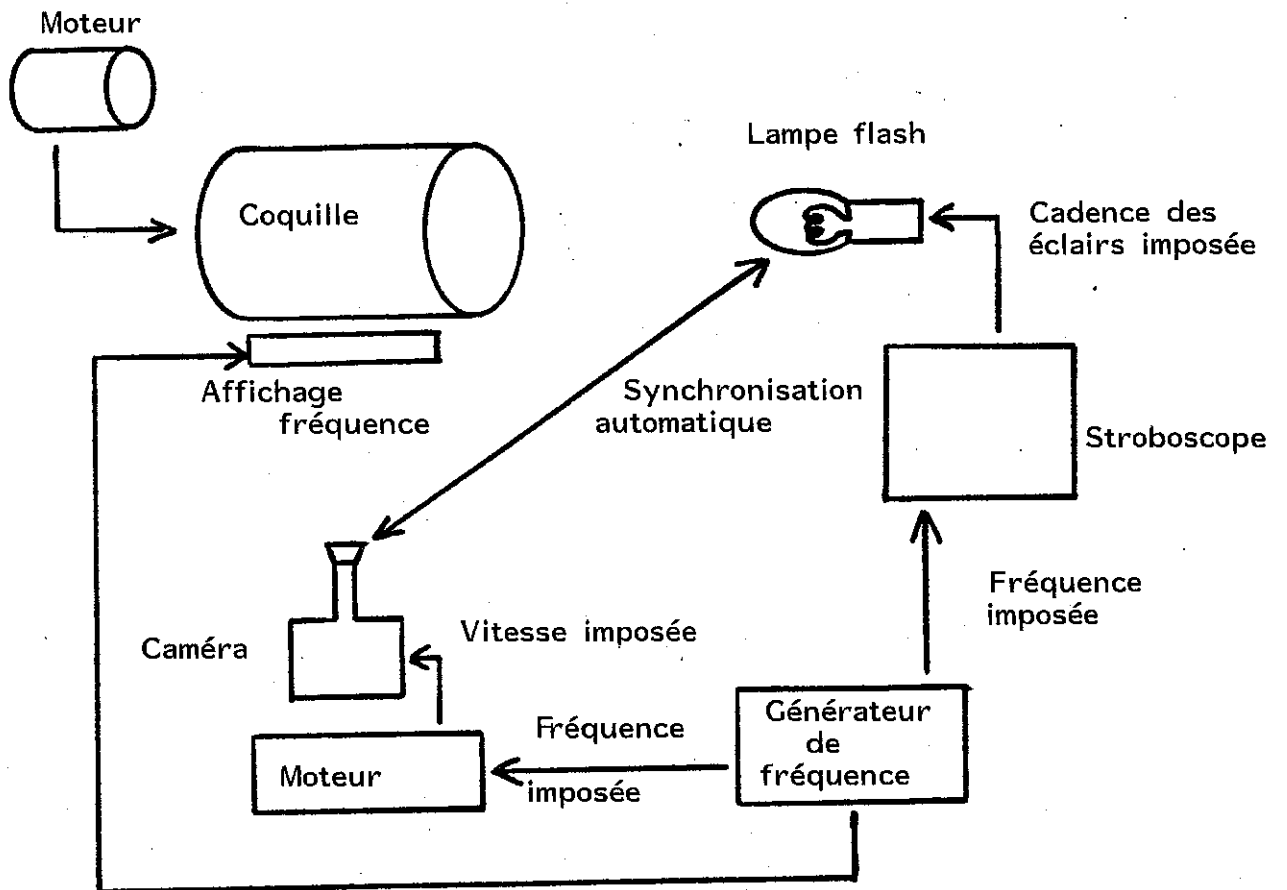


FIG. 13 : PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT DE LA VISUALISATION  
AVEC SYNCHRONISATION ENTRE CAMERA ET STROBOSCOPE

Pour mettre en évidence les mouvements du liquide, il est fait usage de traceurs : soit des particules solides flottant en surface (sciure de bois) soit des colorants (fluorescéine, permanganate de potassium).

Pour pouvoir faire des mesures quantitatives, un dispositif capable d'effectuer des saisies de données locales en cours de rotation a été mis au point (R. DO, 1986). Le dispositif tourne avec la coquille, à l'intérieur de celle-ci ; une sonde peut se déplacer dans les trois directions radiale, axiale et orthoradiale au cours de la rotation de la coquille ; ce peut être n'importe quel type de sonde : mesure de conductimétrie, mesure de hauteur de liquide par un montage résistif, mesure de vitesse par anémométrie à fil chaud, par exemple.

Les mesures par anémométrie à fil chaud ont été préférées à d'autres techniques (J. SZEKELY, 1979, Ch. 10) comme les mesures par marqueurs thermiques (S.E. KIRILLOV et al, 1977), par traceurs, ou par vélocimétrie laser (C. PHILIPPE, 1983), en raison de la difficulté de trouver des particules de densité égale à celle de l'eau, qui sont dans tous les cas indispensables pour ces techniques.

Les commandes des moteurs sont transmises par un collecteur tournant ainsi que les informations fournies par la sonde. Le dispositif comporte également un système d'injection (colorant, saumure, acide,...) (Fig. 14,15,16). La nécessité d'utiliser de grandes épaisseurs de liquide, ainsi que la présence de ce dispositif de mesure rend indispensable une vidange en cours de rotation. Ceci est réalisé au moyen d'ampoules de verre vissées sur la coquille que l'on brise à l'aide d'un obstacle amovible (Fig. 17). L'eau est récupérée dans une goulotte.

### 2.3. ETUDE DU REMPLISSAGE

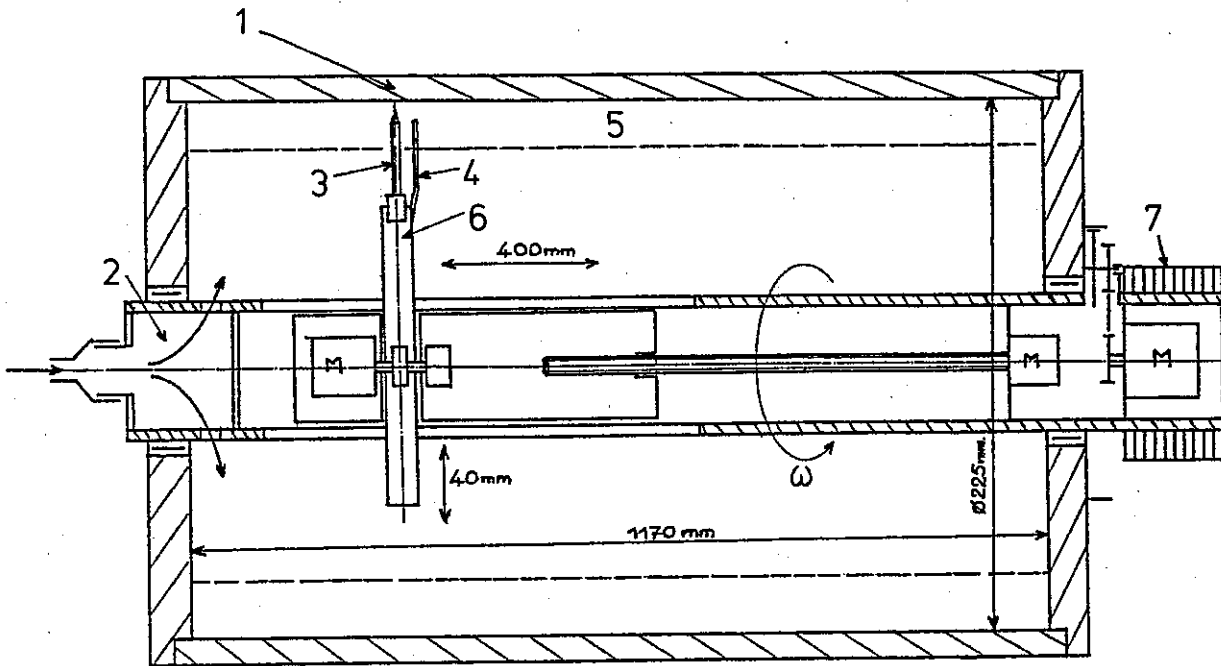


FIG. 14 : VUE D'ENSEMBLE DU SYSTEME DE MESURE

- |                          |                            |
|--------------------------|----------------------------|
| 1. Coquille en plexiglas | 5. Nappe d'eau centrifugée |
| 2. Remplissage           | 6. Crémaillère             |
| 3. Sonde de mesure       | 7. Contact tournant        |
| 4. Injecteur de traceur  |                            |

$\omega$  : Rotation de 0 à 20 tr/mn par rapport à la coquille

M: Moteur

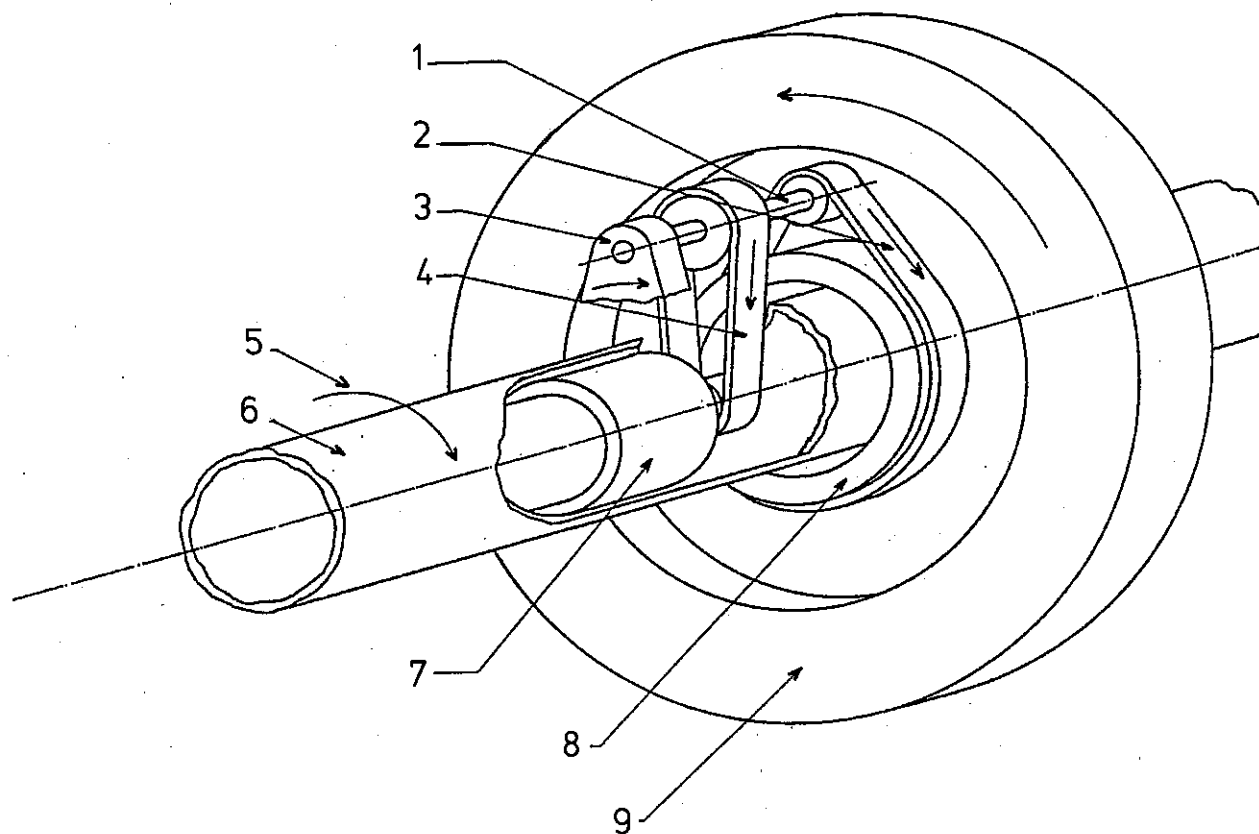


FIG. 15 : MECANISME ASSURANT LA ROTATION DIFFERENTIELLE  
DU SYSTEME DE MESURE ET DE LA COQUILLE

- |   |   |
|---|---|
| 1. Train de poulies intermédiaires                            | 6. Tube de guidage avant                |
| 2. Courroie de transmission secondaire                        | 7. Motoréducteur                        |
| 3. Support fixé sur tube de guidage                           | 8. Couronne dentée fixée sur le Flasque |
| 4. Courroie de transmission primaire                          | 9. Flasque support de palier avant      |
| 5. Rotation du dispositif de mesure par rapport à la coquille |   |

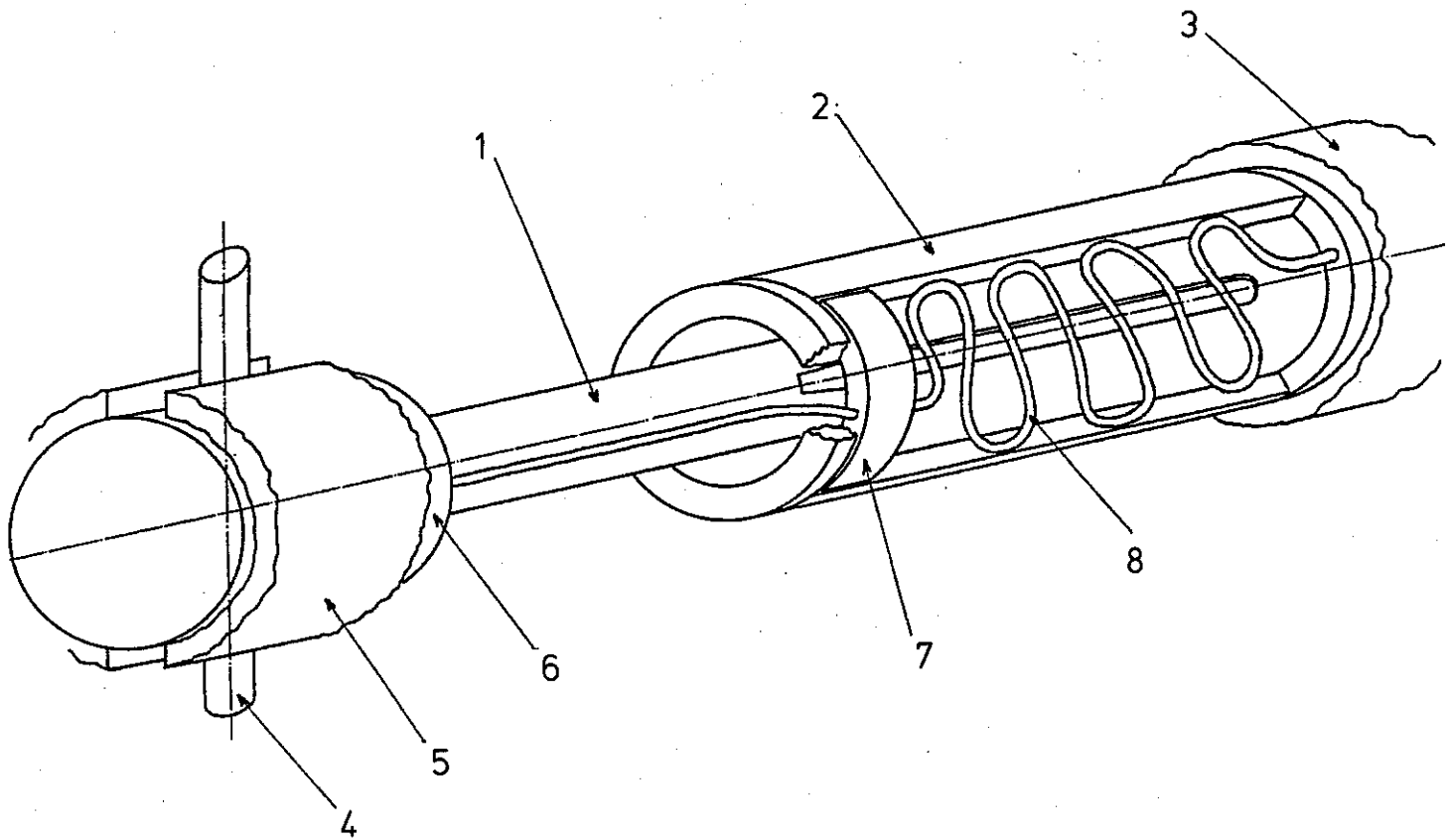


FIG. 16 : MECANISME ASSURANT LE MOUVEMENT AXIAL DE LA SONDE

- |                          |                                   |
|--------------------------|-----------------------------------|
| 1. Tube support d'écrou  | 5. Tube de guidage arrière        |
| 2. Goulotte de guidage   | 6. Coulisseau du mouvement radial |
| 3. Tube de guidage avant | 7. Demi-coquille de guidage       |
| 4. Support de sonde      | 8. Fils et tuyaux                 |



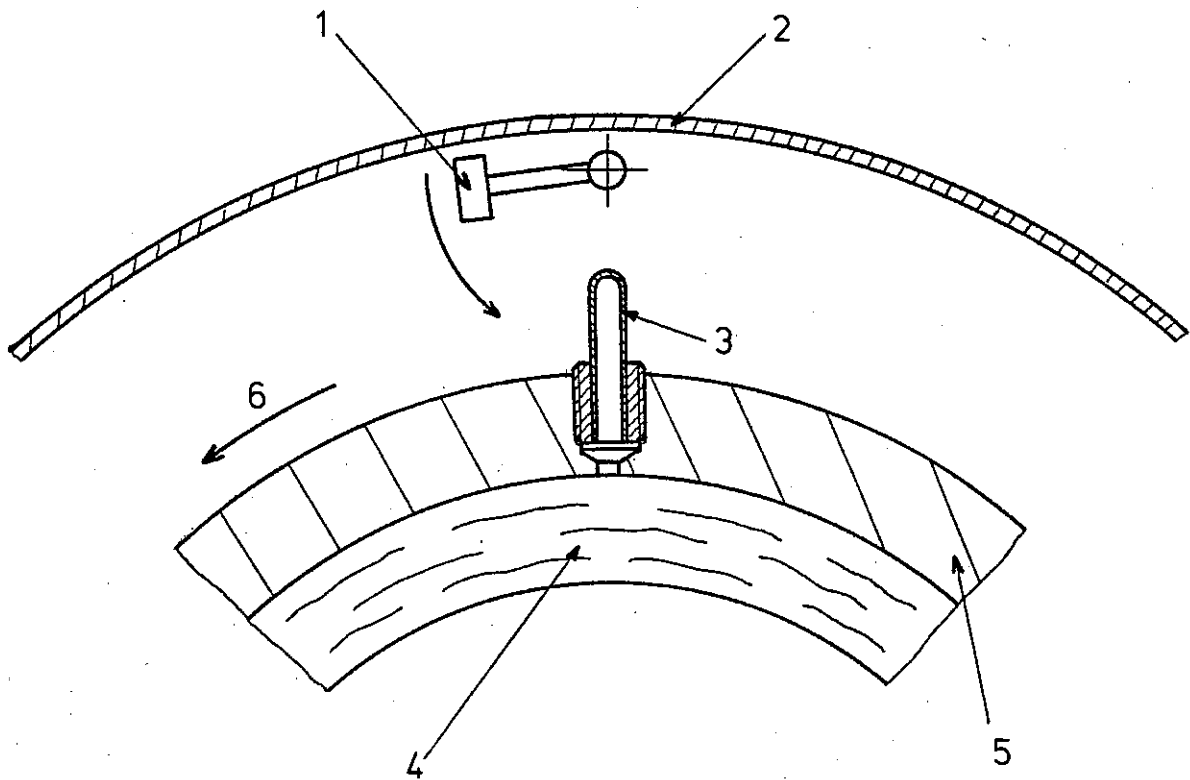


FIG. 17 : PRINCIPE DE LA VIDANGE EN COURS DE ROTATION.

1. Brise-ampoule
2. Goulotte de récupération
3. Ampoule de vidange en verre
4. Nappe d'eau centrifugée
5. Coquille
6. Sens de rotation de la coquille

#### 2.4. ETAT STABLE : FORME DE LA SURFACE LIBRE

Avec de l'eau pure et sans traceurs, on ne peut observer que la forme de la surface libre, même en stroboscopie. L'existence de l'état stable se traduit toujours par l'établissement de vibrations mécaniques et d'une déformation de la surface libre, aussi minime soit-elle.

Les expériences sont parfaitement reproductibles : si l'on prend le soin de conserver la même quantité d'eau, on observe toujours le même phénomène pour une vitesse de rotation donnée, quelle que soit l'histoire antérieure du liquide, et ce phénomène est stable dans le temps.

La forme de la surface libre à l'état stable ne dépend pas du mode de remplissage : que celui-ci soit de type industriel (mise en rotation axialement disymétrique du liquide) ou que l'on remplisse la coquille à l'arrêt (mise en rotation axialement symétrique), le même état stable est atteint, pour des conditions de fonctionnement données, après la période transitoire.

Lorsque les vibrations du système coquille + eau sont très faibles ou inexistantes, la surface libre apparaît comme étant parfaitement cylindrique ; dans tous les autres cas, on constate une déformation d'autant plus importante que les vibrations sont fortes. Cette déformation se traduit par des ondes qui se déplacent à la surface du liquide, moins vite que la coquille d'un facteur 0,8 à 0,9 ; elle est inchangée tant que les conditions expérimentales ne sont pas

modifiées. Autrement dit, dans le repère tournant à la vitesse des ondes, la surface libre est indéformable.

La déformation peut prendre un nombre limité d'aspects qui dépendent de la vitesse de rotation et de la quantité de liquide : des vagues axiales, parallèles et équidistantes ; des vagues en forme d'anneaux ; des vagues hélicoïdales qui souvent s'enchevêtrent ; un quadrillage formé par la superposition des vagues axiales et annulaires ; enfin une déformation à petite échelle et sans ordre apparent rappelant un peu la peau d'une orange (Fig. 20).

Certaines de ces structures ne sont pas axisymétriques : c'est en particulier toujours le cas pour les vagues horizontales et la "peau d'orange", et c'est fréquent pour le quadrillage. La structure commence brutalement par une vague horizontale, du type ressaut hydraulique, puis s'atténue lentement quand on se déplace autour du cylindre (Fig. 21). Ce phénomène est peut-être particulier aux nombres de Reynolds assez élevés car dans une géométrie assez semblable, Chia-Shun YIH (1959) n'obtient que des perturbations axisymétriques pour des nombres de Reynolds faibles, de l'ordre de l'unité.

Dans tous les cas il s'agit bien d'ondes qui se déplacent et non de mouvements matériels ; en effet, des particules solides placées en surface libre ne se déplacent ni à la même vitesse que les ondes, ni de la même manière. Ces particules ne sont pas sujettes à un phénomène parasite d'entraînement par l'air (comme un voilier sur la mer) ; des essais ont montré que la couche d'air proche de la surface libre tourne à la même vitesse que celle-ci (introduction de fumée) ; seule la partie centrale du tube d'air est animée d'un mouvement axial important (quelques cm/s). De plus ce courant d'air est le même quelles que soient les formes de la surface libre. Le mouvement par rapport à la coquille de la surface engendrée par les ondes crée des mouvements de recirculation au sein du liquide au voisinage de la surface. Ceux-ci peuvent affecter tout le liquide si son épaisseur est faible.

L'étude a été réalisée à deux reprises. Une première étude systématique de la répartition des différentes formes de surface libre en fonction de la vitesse et de la quantité de liquide a conduit aux résultats rassemblés dans le tableau 1. Les déformations les plus importantes et les plus complexes se produisent pour les valeurs les plus élevées de la vitesse et de la quantité de liquide, dans le domaine étudié. Une deuxième étude a été réalisée en présence du dispositif de mesure et du système de vidange en cours de rotation, ce qui a permis d'observer les phénomènes liés aux grandes épaisseurs de liquide, mais

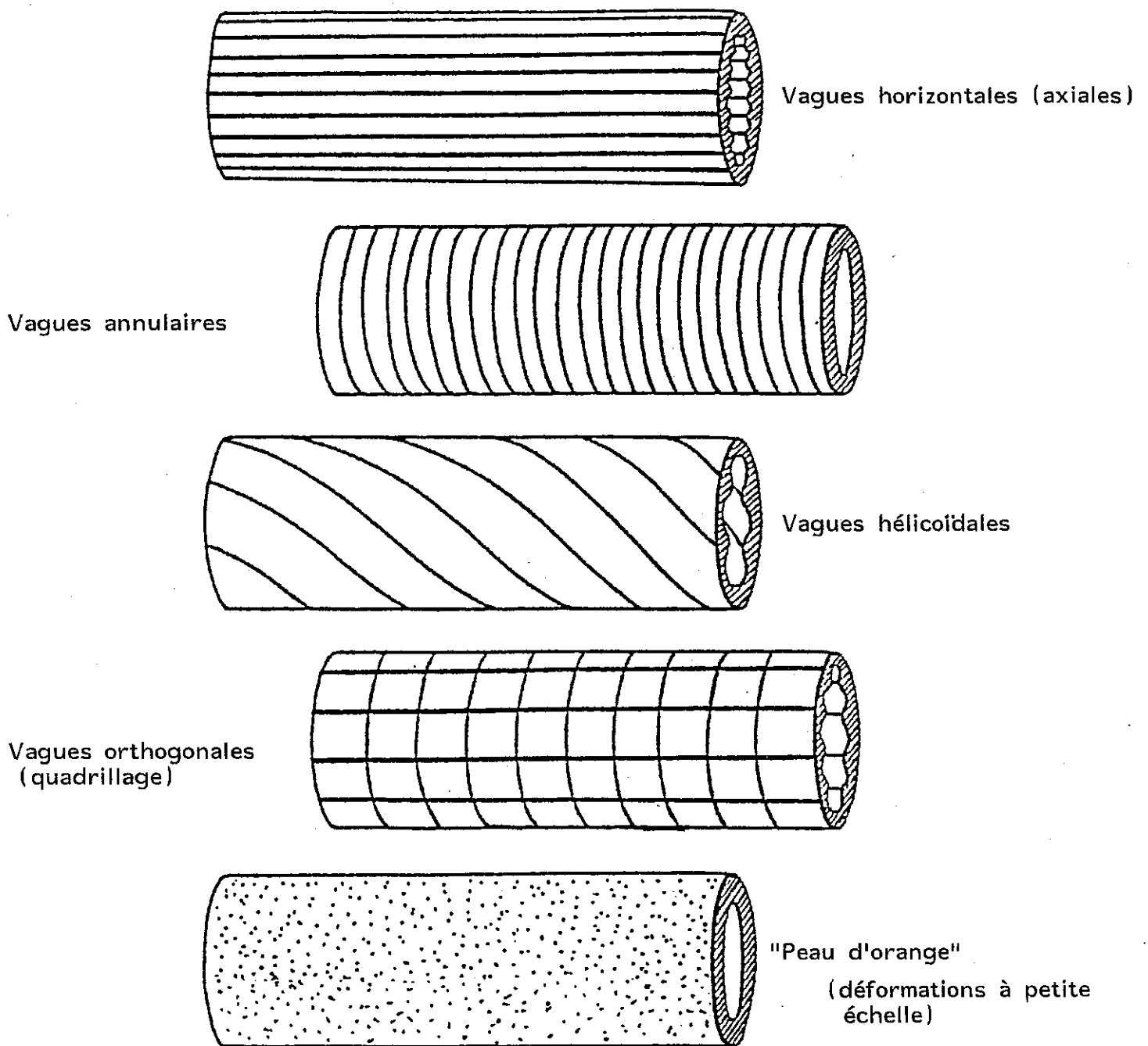


FIG. 20 : LES DIFFERENTES FORMES DE SURFACE LIBRE  
OBSERVEES A L'ETAT STABLE

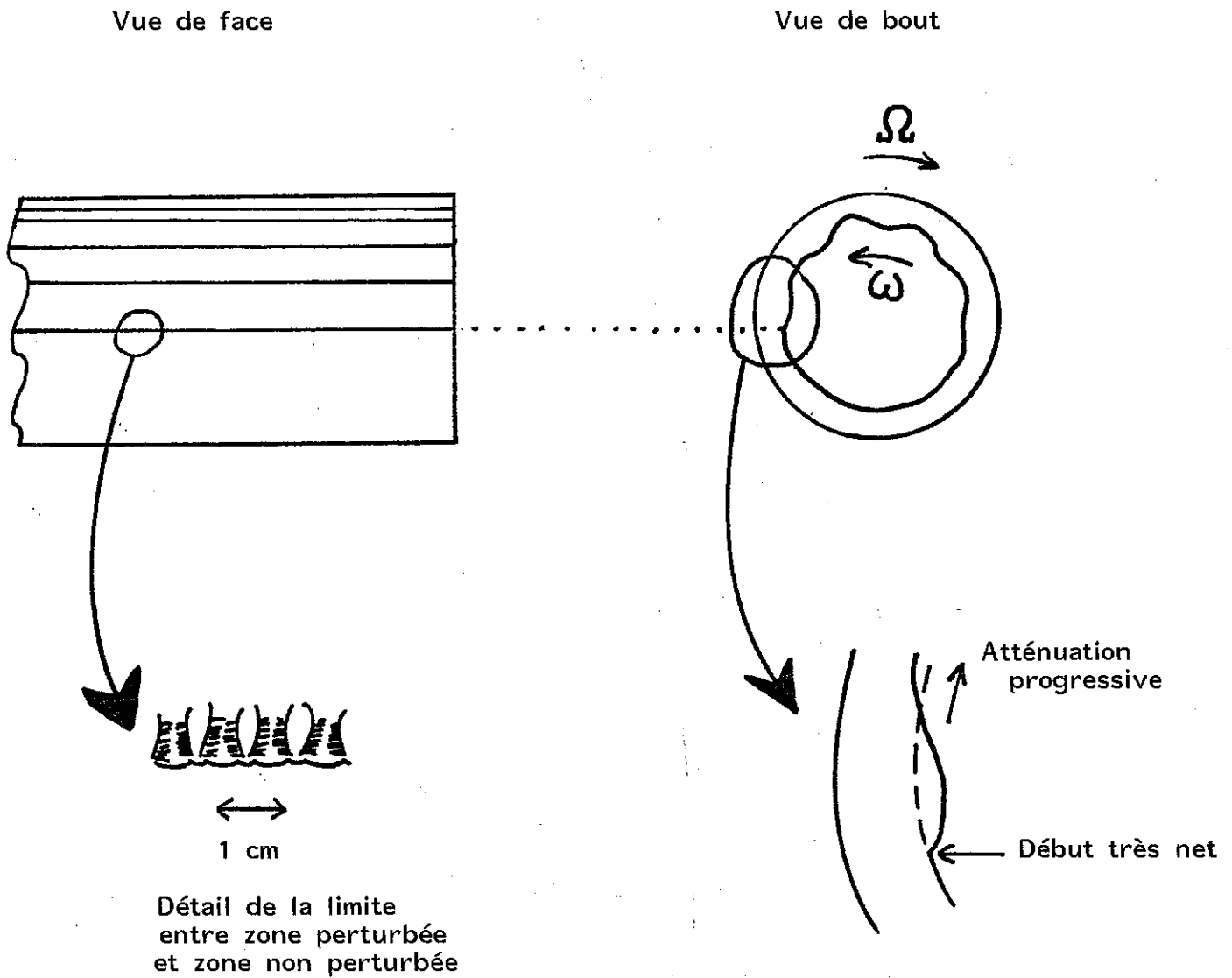


FIG. 21 : CONFIGURATIONS NON AXISYMETRIQUES

(exemple de vagues axiales)

$\Omega$  Rotation de la coquille

$\omega$  Rotation des ondes par rapport à la coquille

$\Omega$ tr/s eau l	10.8	11.4	11.9	12.4	13.0	13.5	14.0
2	C	C	C	A	P	P	A
4	C	C	H	H	A	P	P
6	C	C	H	H	C	O	P
8	C	C	C	H	H	H	O
10	C	C	C	H	H	H	H

**Tableau 1 : formes de la surface libre à l'état stable.  
Influence de la quantité d'eau et de la  
vitesse de rotation de la coquille  $\Omega$  .**

C : surface cylindrique

H : vagues hélicoidales

A : vagues axiales

P : surface en "peau d'orange"

O : vagues orthogonales (quadrillage)

ce qui a légèrement changé l'équilibrage de l'ensemble (Voir Tableau 2). Cela explique les différences entre les tableaux 1 et 2 ; on remarque surtout le fait que les perturbations les plus importantes apparaissent pour des quantités de liquide voisines de 12 et de 24 litres. Cela fait penser à un phénomène de résonance. C'est pour 12 et 24 l que l'on rencontre le plus souvent la structure hélicoïdale qui correspond à l'état le plus perturbé ; c'est également pour ces quantités de liquide que les vibrations sont les plus intenses.

Bien qu'aucune preuve directe n'en ait été apportée, il apparaît que l'état vibratoire et l'état de la surface libre sont étroitement liés.

En résumé, les perturbations ne sont pas écrasées par l'augmentation de la vitesse de rotation de la coquille, c'est-à-dire par des forces centrifuges croissantes ; au contraire, c'est pour les vitesses les plus basses de la plage explorée que l'on observe le moins de perturbations. L'explication suivante est la plus plausible :

le liquide tourne dans une coquille que l'on suppose parfaitement équilibrée à vide statiquement et dynamiquement, c'est-à-dire dont le centre de gravité est sur l'axe de rotation et dont les moments d'inertie sont axisymétriquement disposés. La gravité est essentiellement non axisymétrique ; son effet (voir Chapitre 1) est de modifier la répartition du liquide en rotation dans la coquille. Cela crée au sein de celle-ci un déséquilibre dynamique qui la fait vibrer. Les vibrations à leur tour créent des perturbations nouvelles qui accentuent les déformations du liquide, lesquelles entretiennent le déséquilibre de la coquille, et donc les vibrations. On atteint un état stable, éventuellement cyclique, car la géométrie de la coquille conduit obligatoirement à une stabilisation du liquide.

D'autre part, l'équilibrage de la coquille à vide n'étant jamais parfait, les vibrations que ce défaut engendre sont d'autant plus fortes que la vitesse de rotation est grande. L'effet du liquide sur les vibrations est, quant à lui, d'autant plus grand que la quantité de liquide est grande. En effet, plus il y a de liquide, plus la surface libre est proche de l'axe de rotation, et moins se font sentir les effets de la force centrifuge : la surface libre est donc plus déformée et cela peut accentuer les phénomènes vibratoires.

La comparaison des formes expérimentales de la surface libre avec celles calculées par la théorie dans des cas particuliers (chapitre 1) est intéressante ; le calcul conduisait à une vague horizontale tournant à une

$\Omega$ tr/s eau l	11	11.5	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15
2	C	C	C	C	(C)	A	A	A	
4	C	C	C	(C)	H	H	A,P	P	
6	C	(C)	An	An	An	H	H	P	P
8	(C)	A	A	A	O	H	H	H,P	H,P
10	(C)	(C)	A	A	A	O	H	H,P	H,P
12	H	H	H	H	H	H	H,P	H,P	
14	(C)	O	O,H	O,H	O,H	O,H	H	H	H
16	(C)	(C)	(C),A	O	O	O	O,H	H	
18	O	O	O,A	O,A	O,A	O,A	O,A	H	H
20	H	O,A	O	O	O	O	O	O	O
22	H	H	O,A	O	O	O	O	O	O
24	H	H,O	H	H	H	H,O	O	O	O
26	H	H	H	H,O	O	O	O	O	O
28	O	O	O	O	O	O	O	O	O

**Tableau 2 : Formes de la surface libre à l'état stable.  
Influence de la quantité d'eau et de la vitesse  
de rotation de la coquille  $\Omega$ . Tableau étendu  
aux fortes épaisseurs de liquide.**

C : surface cylindrique ; (C) : surface presque cylindrique ;  
A : vagues axiales ; P : surface en "peau d'orange" ;  
H : vagues hélicoïdales ; O : vagues orthogonales ;  
An : vagues annulaires .



vitesse différente de celle de la coquille. On observe des phénomènes similaires dans certains cas expérimentaux. Les vagues tournent bien à une vitesse différente de celle de la coquille, quoique différente également de ce que donne le calcul ; on observe plusieurs vagues successives et non une seule ; cependant dans les cas où l'épaisseur de liquide est très forte il est possible qu'il n'y ait qu'une seule vague très large, mais l'observation est très malaisée.

## 2.5. LES MOUVEMENTS DU FLUIDE EN SURFACE LIBRE DANS LES ETATS STABLES

De façon à visualiser les écoulements matériels, un traceur solide, de la sciure de bois, est injecté en surface. Cette sciure, très fine et bien sèche, a une densité apparente plus faible que la densité de l'eau et flotte en surface. Les forces de tension superficielle tendent également à maintenir la sciure en surface.

Si le liquide est au repos, ainsi que l'air au voisinage de la surface libre, la sciure est uniformément répartie à sa surface : s'il existe par contre des mouvements au sein du liquide, la sciure se masse préférentiellement aux points de subduction de la surface (Fig. 22) qui sont des points d'équilibre stable. Ce fait permet de définir la forme et la taille des écoulements à partir d'une structure de la sciure observée expérimentalement. Par exemple, la taille d'une zone de recirculation est la moitié de celle d'une "maille" du réseau de sciure (Fig. 22). D'autre part, la sciure ainsi structurée ne reste pas forcément immobile par rapport à la coquille ; on peut le cas échéant définir d'une part un mouvement de glissement d'ensemble par rapport à la coquille et d'autre part des mouvements périodiques. Le premier est d'autant plus important que la viscosité est faible, l'amortissement des perturbations provenant de la coquille ou de la surface libre étant d'autant moindre que le liquide est peu visqueux ; le deuxième est prévisible du fait de l'existence des vagues de surface (voir 2.4). L'existence de vagues non-axisymétriques ou non-bidimensionnelles (hélices) laisse à penser que des mouvements plus complexes encore, éventuellement non périodiques peuvent apparaître dans le sens axial.

Tous ces faits et observations sont développés et commentés ci-dessous, en fonction de la forme de la surface libre, de l'épaisseur de liquide, de la vitesse et de l'importance des vibrations mécaniques du système coquille + eau. Tous ces facteurs sont en fait interdépendants et l'on observe trois cas principaux :

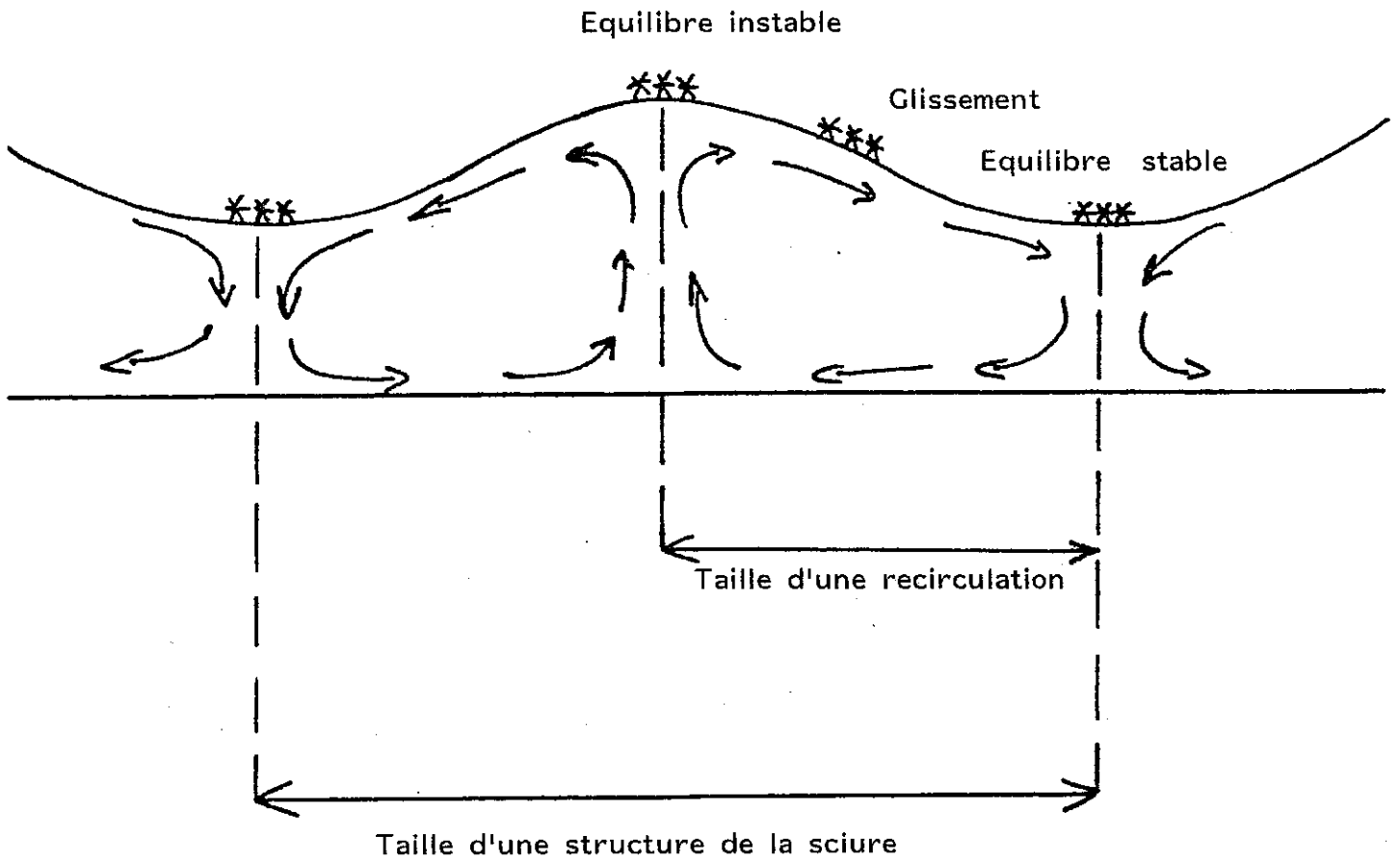


FIG. 22 : LIEN ENTRE LES ECOULEMENTS DANS LE LIQUIDE  
ET LA STRUCTURE DE LA SCIURE

a) Premier cas

A faible vitesse de rotation, le glissement d'ensemble du liquide par rapport à la coquille est faible (0,2 à 1,5 cm/s) ; il peut atteindre 5 cm/s si la surface est peu déformée et si l'épaisseur d'eau est forte. Les vibrations mécaniques du système sont faibles. La surface libre est cylindrique avec parfois de faibles déformations. Il n'y a pas de mouvements non périodiques dans le sens axial.

La taille de la structure est grossière à moyenne (un à plusieurs cm). On observe des arborescences, des agglomérats ou des filaments (Fig. 23 et 24).

Les mouvements périodiques sont des tressautements et des cahots (sens axial et orthoradial) ou des mouvements de plus grande amplitude, de l'ordre du centimètre, circulaires ou linéaires dans les mêmes directions.

Les vitesses instantanées atteignent 5cm/s.

b) Deuxième cas

Ce cas est d'autant plus fréquent que la quantité de liquide est plus importante. La surface libre est déformée par des vagues hélicoïdales ; le glissement d'ensemble du liquide par rapport à la coquille est important (1 à 15 cm/s). Il existe des mouvements axiaux non périodiques qui conduisent la sciure, bien regroupée, en général au niveau ou à proximité immédiate de l'un des galets (Fig. 25). Les vibrations sont toujours fortes. La structure de la sciure est fine (petits agglomérats ou fleurs) (Fig. 23, 24). Les mouvements périodiques sont toujours difficiles à voir car ils sont masqués par le mouvement axial non périodique.

c) Troisième cas

Ce cas n'existe que pour de fortes vitesses de rotation. La surface libre est du type "peau d'orange" non axisymétrique, avec parfois superposition d'une deuxième structure (vagues horizontales ou quadrillage). Les vibrations sont très fortes.

La sciure est complètement dispersée et forme un brouillard en surface (fig. 23,24). De ce fait le glissement de la surface par rapport à la coquille, qui est très important, n'est pas mesurable.

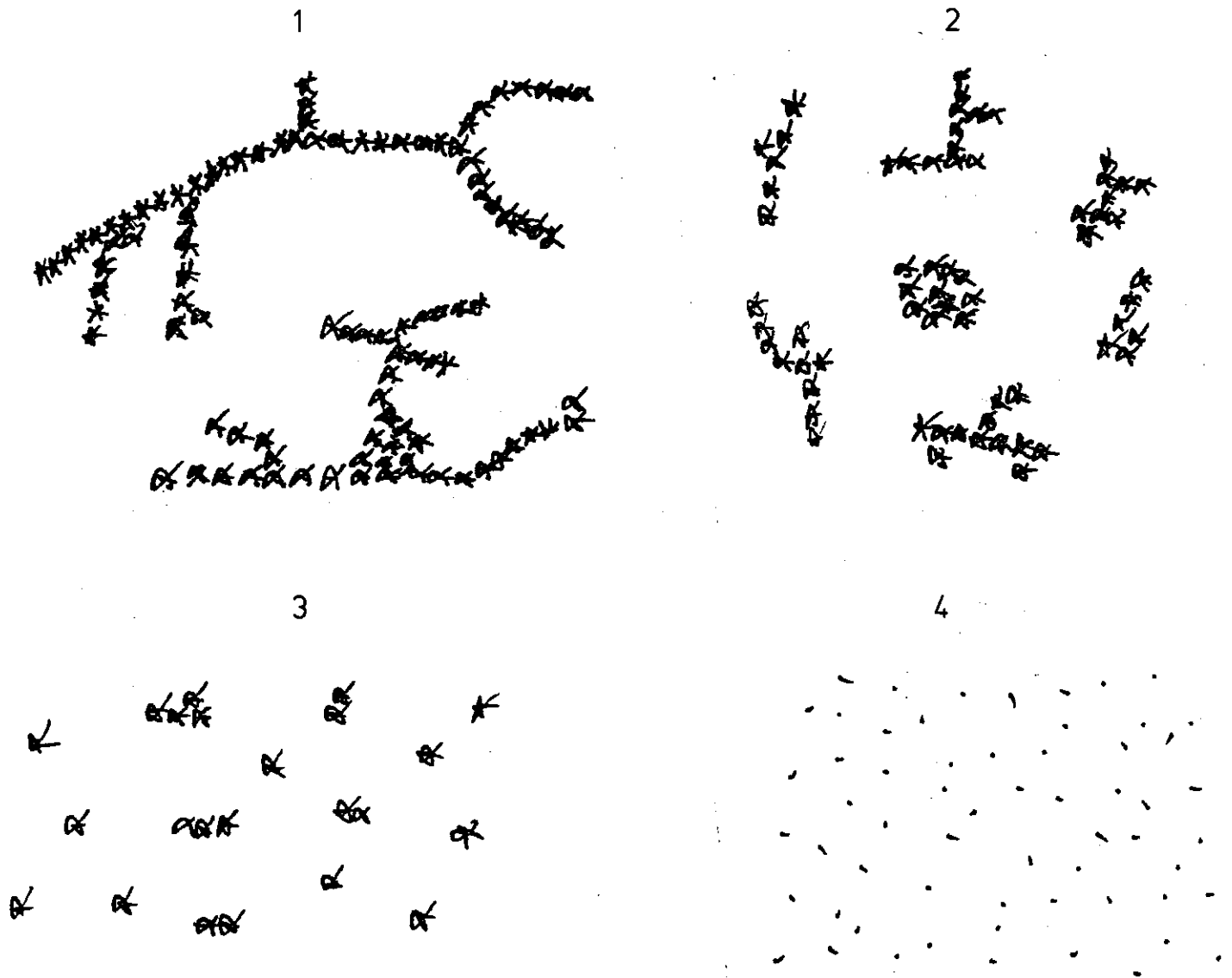
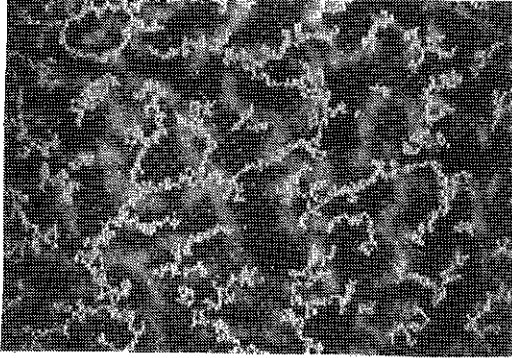


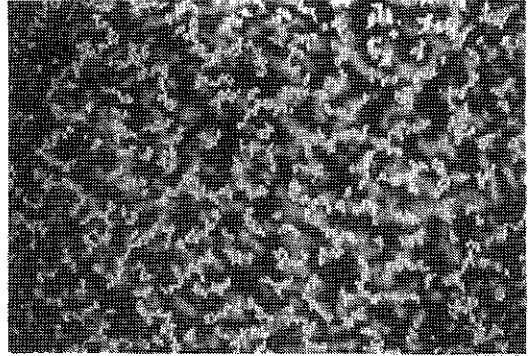
FIG. 23 : STRUCTURES DE LA SCIURE

1. Arborescences, filaments
2. Agglomérats
3. Petites "fleurs"
4. Dispersion

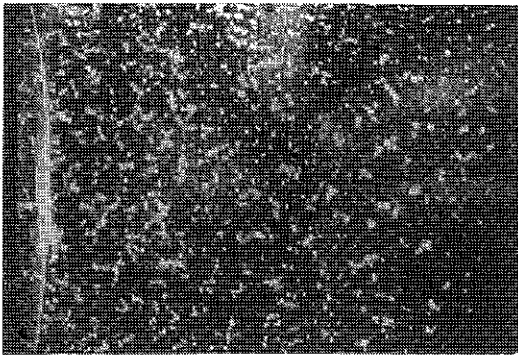
1.



2.



3.



4.

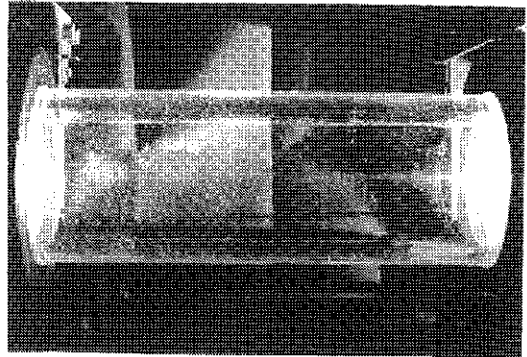


FIG. 24 : STRUCTURES DE LA SCIURE

1. Arborescences (Gr. 6 par rapport à la photo 4)
2. Agglomérats (Gr. 6 par rapport à la photo 4)
3. "Fleurs" (Gr. 3 par rapport à la photo 4)
4. Dispersion de la sciure

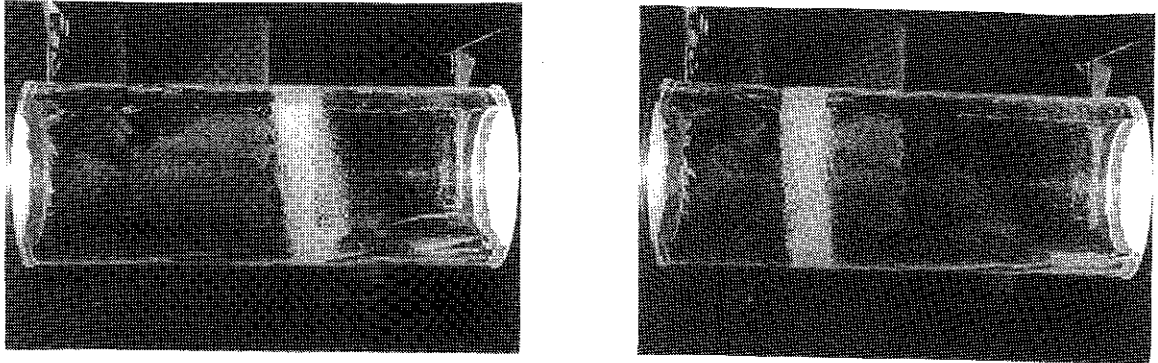


FIG. 25 : VAGUES HELICOIDALES ET DEPLACEMENT DE LA SCIURE

6 litres d'eau, 12,4 tr/s.

9,8 secondes séparent ces deux photos

Pour les mêmes raisons on n'observe pas de mouvement périodique et il n'y a pas forcément de mouvement axial ; le brassage du liquide semble cependant assez intense.

Il est nécessaire, maintenant que les trois cas les plus fréquents ont été détaillés, de visualiser leur répartition en fonction de la vitesse  $\Omega$  et de l'épaisseur d'eau  $E$ . C'est l'objet des tableaux 3 à 7 qui présentent respectivement la répartition des structures, le glissement d'ensemble, les mouvements périodiques, les mouvements axiaux non périodiques et enfin la répartition des trois cas principaux en fonction de la vitesse et de la quantité de liquide. La comparaison de ces tableaux avec ceux des surfaces libres (2.4) conduit aux constatations suivantes :

- les vitesses de glissement par rapport à la paroi augmentent quand la vitesse de rotation augmente ou quand la quantité de liquide augmente, pour une forme donnée de surface libre. Quand on franchit une zone de transition entre deux formes de surface libre, cela n'est plus vérifié. Les vitesses sont très faibles lorsque la surface libre est cylindrique, plus importantes et du même ordre de grandeur pour les vagues axiales et orthogonales, très importantes pour les vagues hélicoïdales et en général trop importantes pour être mesurées dans le cas de la "peau d'orange". Si l'évolution de la vitesse différentielle pour une forme donnée de surface, en fonction de  $\Omega$  et de  $E$  est due à la viscosité du fluide, par contre les variations rapides de cette vitesse sont liées aux transitions entre les formes de surface libre.

- les structures de la sciure dépendent elles aussi directement de la forme de la surface libre. Plus la surface est déformée et plus les vitesses de glissement sont importantes, plus la structure est dispersée et de petite taille. Les arborescences ne sont observées que lorsque la surface est cylindrique ; quand la surface libre est en forme de "peau d'orange", la seule structure possible est une dispersion très fine. Entre ces deux cas extrêmes on observe tous les cas intermédiaires possibles.

- Les mouvements périodiques sont plus difficiles à corréler aux autres phénomènes. Quand la surface est cylindrique, ces mouvements peuvent être trop faibles pour être définissables ; quand ils existent cela veut dire que la surface libre, bien que cylindrique, et la coquille ne sont pas concentriques ; les calculs du chapitre 1 concernant la gravité menaient à un résultat similaire, mais non identique : la vitesse par rapport à la coquille est différente.

eau   $\Omega$ tr/s	10.8	11.4	11.9	12.4	13.0	13.5	14.0
2	A	A+AG	A+AG	AG	D	D	D
4	A	A+AG	AG+F	AG+F	F	D	D
6	A	A	F	F	AG	D	D
8	A+AG	A+AG	A+AG	AG+F	F+D	D	D
10	F	F	F	F+D	D	D	D

**Tableau 3 : Structures de la sciure en fonction de la vitesse de rotation de la coquille  $\Omega$  et de la quantité de liquide.**

A : arborescences  
AG : agglomérats  
F : "fleurs"  
D : dispersion



eau   $\Omega$ tr/s	10.8	11.4	11.9	12.4	13.0	13.5	14.0
2	0.3	0.7	0.5	2.4	E	?	?
4	0.3	0.8	3.	3.5	5.5	?	1.5
6	0.7	0.85	E	1.75	1.6	?	?
8	1.1	1.4	1.2	14.	E	E	E
10	2.8	3.5	5.6	E	TE	TE	TE

**Tableau 4 : Valeurs du glissement d'ensemble de la sciure en surface libre en cm/s par rapport à la coquille.**

E : vitesse élevée ( > 14 cm/s )

TE : vitesse très élevée ( >> 14 cm/s)

? : vitesse non mesurable par les techniques utilisées (stroboscopie et dépouillement quantitatif de films)

eau   $\Omega$ tr/s	10.8	11.4	11.9	12.4	13.0	13.5	14.0
2	f.a.	f. $\longleftrightarrow$	f. $\updownarrow$	$\updownarrow$ 3.3cm/s 1 cm	$\updownarrow$ 1.5cm/s 0.3 cm	$\updownarrow$	$\updownarrow$ 0.8cm/s 0.2 cm
4	f.a.	$\circlearrowleft$ 3cm/s 0.5cm	$\circlearrowleft$	$\longleftrightarrow$ 0.3 cm 2 cm/s	$\updownarrow$ 4 cm/s 1 cm	?	$\updownarrow$
6	f.a.	$\circlearrowleft$ 0.5cm	$\circlearrowleft$	$\longleftrightarrow$	$\circlearrowleft$ 2.5cm/s 0.5 cm	?	?
8	f.a.	f. $\updownarrow$	f.a.	?	?	?	?
10	f.a.	f.a.	f.a.	?	?	?	?

**Tableau 5 : Mouvements périodiques de la sciure à la surface libre.**

f.a. : mouvements de faible amplitude de nature indéterminée

f. : mouvements d'amplitude faible mais de nature connue

$\longleftrightarrow$  : mouvement rectiligne sinusoïdal dans le sens axial

$\updownarrow$  : mouvement rectiligne sinusoïdal dans le sens orthoradial

$\circlearrowleft$  : mouvement circulaire périodique

? : impossibilité de déterminer l'existence éventuelle de mouvements périodiques

eau   $\Omega$ tr/s	10.8	11.4	11.9	12.4	13.0	13.5	14.0
2	0	G lent	0	0	?	?	?
4	0	0	G 0.3	G lent	D 0.2	0	A 20 cm
6	0	0	G	G	0	0	0
8	0	0	0	G + D	G 8	D 1.5	G 8
10	0	0	0	0 + G	G	G 8	G 8

**Tableau 6 : Mouvements axiaux de la sciure en surface libre.**

0 : aucun mouvement axial

G(D) : mouvement vers la gauche (droite)  
(le nombre qui suit est la vitesse instantanée maximale en cm/s )

A : mouvement alternatif dans le sens axial  
(suivi de la longueur de va-et-vient)

? : impossibilité de montrer l'existence d'un mouvement axial

+ : succession dans le temps de deux états distincts de la surface libre

eau $\Omega$ tr/s	10.8	11.4	11.9	12.4	13.0	13.5	14.0
2	PREMIER			1 BIS	TROISIEME		
4				DEUXIEME			
6	CAS	CAS				CAS 1	
8	CAS			CAS		2 BIS	
10						CAS	

**Tableau 7 : Répartition des trois cas types en fonction de la vitesse de rotation de la coquille  $\Omega$  et de la quantité d'eau.**

Premier cas (cas 1) : surface libre cylindrique ; agitation faible ; vibrations faibles

Deuxième cas : vagues hélicoïdales ; vibrations fortes ; mouvements axiaux ; agitation importante

Troisième cas : "peau d'orange" ; agitation très importante ; vibrations très fortes

1 bis : identique au cas 1 sauf que la surface libre n'est pas cylindrique

2 bis : identique au cas 2 sauf que les vagues ne sont pas hélicoïdales ou que "peau d'orange" et vagues hélicoïdales sont superposées

Dans les autres cas, quand des mouvements périodiques sont observables, ils sont reliés aux vagues de surface, car la fréquence est très comparable. Les calculs du Chapitre 1 conduisent à des valeurs des vitesses de glissement périodiques à la paroi qui sont comprises entre 1 cm/s et plusieurs dizaines de cm/s ; le glissement en surface libre doit être du même ordre de grandeur. Les valeurs expérimentales et les calculs correspondent assez bien, bien que la nature des mouvements périodiques soit différente dans les calculs et les expériences ; ceci est sans doute lié au fait que quelle que soit la force perturbatrice du système, son ordre de grandeur par rapport aux forces centrifuges est toujours environ le même. Quand il n'y a pas de résonance, l'ordre de grandeur des vitesses par rapport à la coquille est donc toujours environ le même en comparaison de la vitesse d'entraînement.

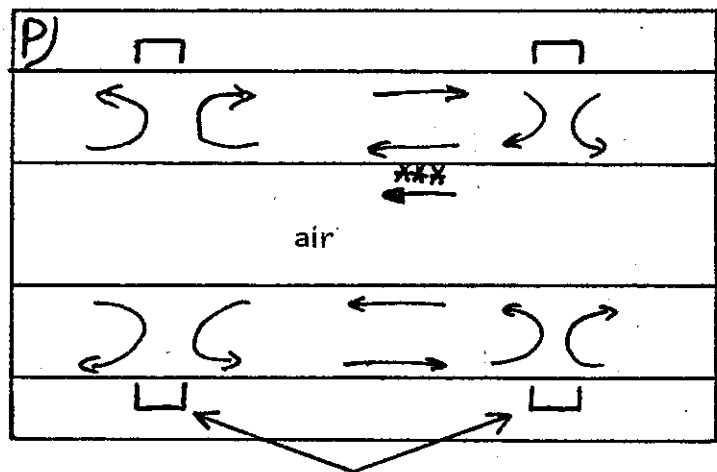
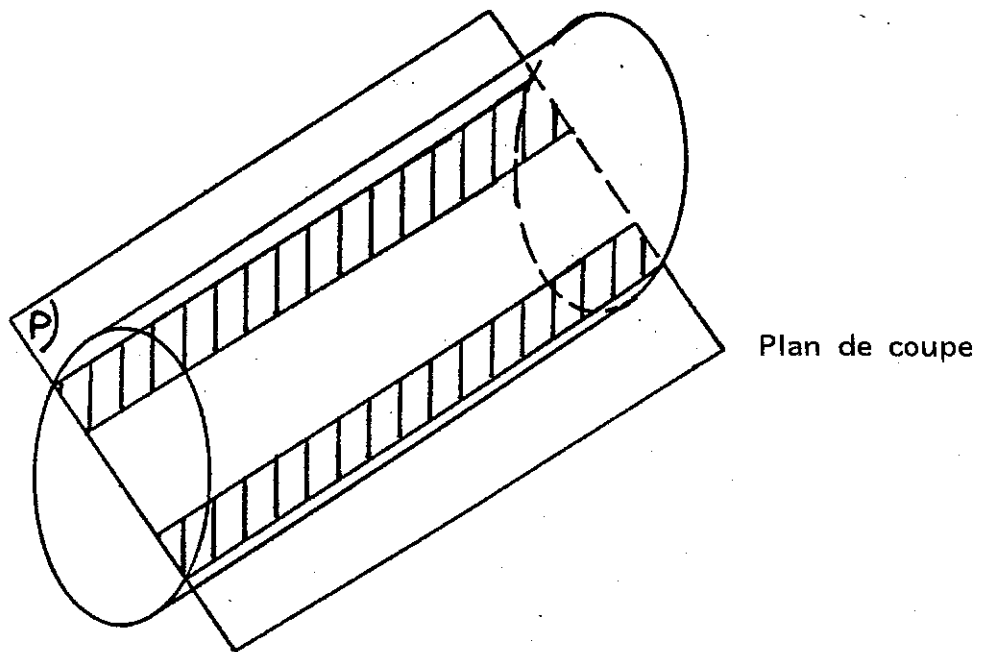
- les mouvements axiaux existent toujours quand les vagues sont hélicoïdales et peuvent être importants aussi bien en valeur instantanée des vitesses qu'en déplacement total : la vitesse peut atteindre 8 cm/s et la sciure peut se déplacer, en restant très groupée, sur 50 cm dans le sens de l'axe.

La sciure est toujours injectée à une dizaine de centimètres du chemin de roulement droit, du côté du milieu de la coquille : le plus souvent elle se déplace vers le chemin de roulement gauche, mais quelquefois c'est l'inverse. Le mouvement cesse quand la sciure est au voisinage du chemin de roulement.

De tels mouvements ont été observés dans un cas de vagues orthogonales (13 Hz, 4 l).

Dans tous les cas, ils semblent liés à des recirculations dans le sens axial (voir Fig. 26).

- D'après le tableau 7, on voit qu'il existe de larges domaines correspondants aux 3 cas-types (agitation faible et surface cylindrique ; agitation importante et vagues hélicoïdales ; agitation très importante et "peau d'orange"). Ces domaines sont séparés par des zones de transition peu étendues. Les zones sont des zones critiques pour l'écoulement. En effet, une très faible variation de l'un des paramètres  $\Omega$  ou  $E$  suffit pour modifier totalement le phénomène. De plus dans certains cas on observe une transition régulière (toutes les 30 à 120 s) entre deux types d'écoulement. (ex. : 10 l, 12,4 Hz). De même pour 4 l, 14 Hz (voir tableau 6) bien que la structure de la surface ne change apparemment pas, la sciure est affectée d'un mouvement de va-et-vient lent sur une distance de 20 cm. Ces phénomènes montrent que plusieurs



Chemins de roulement

FIG. 26 : DEPLACEMENT AXIAL DE LA SCIURE

types d'écoulements sont possibles dans des conditions opératoires identiques ; on est en présence d'une bifurcation entre deux possibilités, le choix se faisant à cause de la variation -faible- d'un paramètre comme les vibrations de l'ensemble tournant.

Les phénomènes décrits jusqu'ici sont tous réversibles ; par exemple, si l'on augmente la vitesse de rotation jusqu'à changer la structure de la surface libre et de la sciure et si ensuite on revient dans les conditions initiales, la surface libre, puis après quelque temps la sciure retrouvent leur configuration d'origine.

Cependant, il existe un type de phénomène qui est totalement irréversible. Lorsque la surface libre est extrêmement perturbée, lorsque les vibrations sont fortes, c'est-à-dire soit quand on a affaire à des vagues hélicoïdales et à un glissement de surface très important, soit lorsque la surface est en forme de peau d'orange, la sciure a un comportement particulier : elle coule et se retrouve contre la paroi, où elle n'est affectée de mouvements que si apparaît ultérieurement une transition entre deux régimes d'écoulements.

Dans le cas des vagues hélicoïdales, la sciure coule toujours au niveau des chemins de roulements, là où son mouvement axial devient nul. Les particules de sciure peuvent donc rester en surface plus d'une minute avant que ce phénomène apparaisse. Dans le cas de la peau d'orange la submersion de la sciure se fait au point d'injection, en un temps très bref, toujours moins de 30 s, et quelquefois seulement 5 s.

A priori les forces de tension de surface et la poussée d'Archimède devraient maintenir la sciure en surface. De fait, de la sciure déposée sur de l'eau au repos dans un béccher reste plusieurs jours en surface sans couler. Certes, la cellulose a une densité légèrement supérieure à 1 et on peut penser qu'elle s'imbibe d'eau ; cependant ce phénomène ne peut expliquer à lui seul la submersion de la sciure car, si c'était le cas, l'effet serait systématique. Deux phénomènes supplémentaires doivent intervenir pour le provoquer :

- les déformations à petite échelle de la surface libre font recouvrir les particules de sciure par le liquide ; la sciure étant entièrement submergée, les forces centrifuges chassent l'air des particules de bois et les vides s'emplissent d'eau. La sciure, dont la densité apparente augmente alors fortement, coule (Fig. 27).

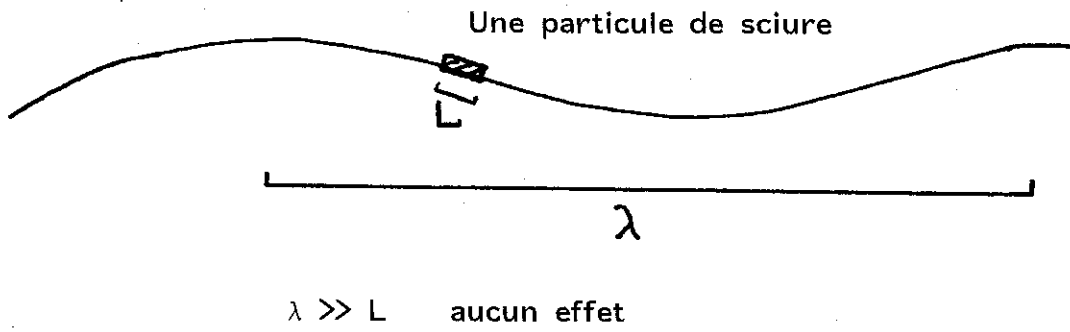


FIG. 27 : RECOUVREMENT DE LA SCIURE PAR LES VAGUES DE SURFACE



- les mouvements sous la surface sont très importants ; à certains endroits la vitesse est radiale, dirigée vers la paroi ; si elle est suffisante, la force d'aspiration qui en résulte peut être supérieure aux forces qui maintiennent la sciure en surface. La sciure une fois engloutie est entraînée vers le fond d'autant plus vite qu'elle perd plus rapidement son air en cours de route (Fig. 28).

Ces deux phénomènes peuvent agir conjointement, bien que le premier semble mieux adapté pour expliquer les phénomènes liés à la surface libre en "peau d'orange", et le deuxième pour ceux liés aux vagues hélicoïdales.

## 2.6. EVOLUTION DU REGIME D'ÉCOULEMENT EN FONCTION DE LA VARIATION DE LA VITESSE DE ROTATION OU DE LA QUANTITÉ DE LIQUIDE

Lors de la solidification d'un tube en acier, la quantité de liquide ne cesse de diminuer ; d'autre part, certains essais ont été effectués en faisant varier la vitesse de rotation de la coquille de façon cyclique. Il est donc intéressant d'observer ce qui se passe dans les mêmes conditions sur la coquille transparente.

Si l'on fait varier soit la vitesse de rotation, soit la quantité de liquide (par vidange contrôlée en cours de rotation), de façon continue, lente et limitée, deux cas peuvent se présenter :

- soit l'état initial stable et l'état final stable sont identiques ou extrêmement proches.

- soit ils sont très différents, en particulier dans la forme de la surface libre.

Dans le premier cas, il ne se passe rien d'autre qu'une évolution lente du régime d'écoulement.

Dans le deuxième cas, qui correspond aux zones de transition appelées zones critiques au paragraphe précédent, le comportement est tout autre. Par exemple, dans le cas d'une variation lente de vitesse de 11,4 à 12,4 tr/s pour 6 l d'eau, on doit passer d'une surface libre sans vagues à une surface libre avec des vagues hélicoïdales. La montée en vitesse s'effectue complètement sans que l'on ne voie la moindre transition ; le liquide en surface, rendu visible par de

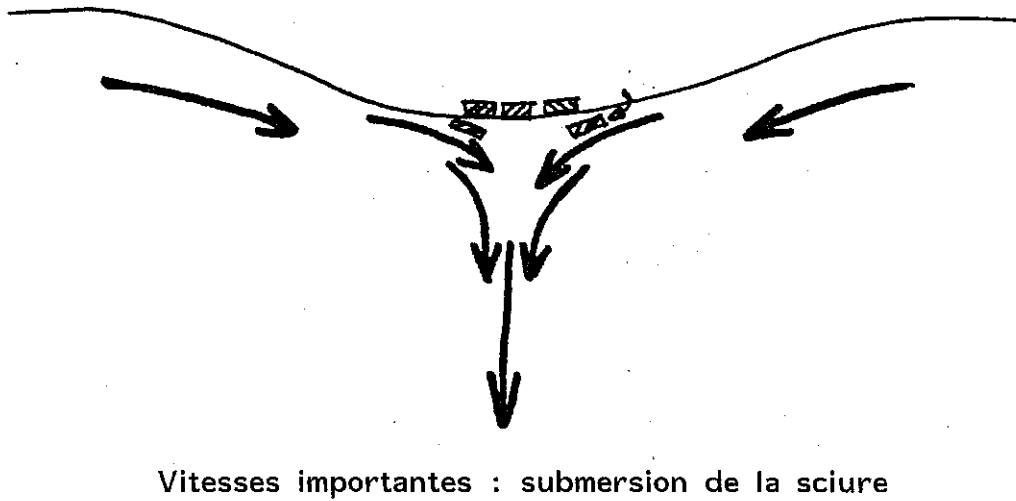
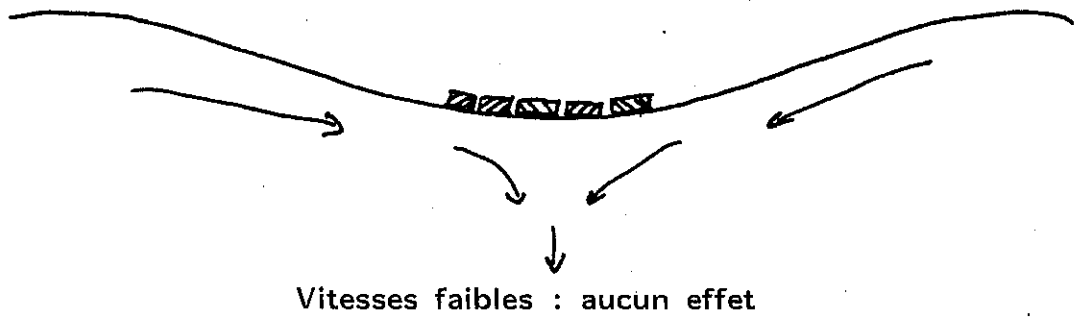


FIG. 28 : ASPIRATION DE LA SCIURE PAR LES COURANTS DE RECIRCULATION

la sciure, rattrape lentement la vitesse de la coquille (Fig. 29); une dizaine de secondes après la stabilisation en vitesse de la coquille, apparaissent brutalement des vagues hélicoïdales, l'écoulement est très vite modifié et 50 s après le début de la transition la structure de la sciure est totalement modifiée.

Cette transition est assez lente ; l'apparition de vagues horizontales lorsque l'on passe de 12,4 à 13 tr/s pour 4 l d'eau ou lorsque la quantité d'eau diminue lentement au voisinage de 4 l, pour 13 tr/s, provoque un changement total de la structure de la sciure en à peine 6 s (Fig. 30).

De plus, cette transition entraîne souvent la submersion de la sciure, même si les états stables initiaux et finaux ne provoquent pas par eux-mêmes ce phénomène.

Ceci n'est guère surprenant car l'état transitoire entre les deux états stables est certainement lié à des vitesses importantes du liquide et à des déformations de la surface libre qui peuvent expliquer la submersion (voir 2.5).

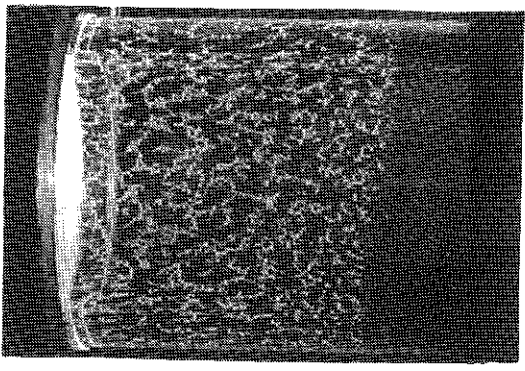
Ce phénomène est très intéressant du point de vue métallurgique. En effet, il y a toujours une fine couche d'oxydes à la surface libre de l'acier en fusion dans les coquilles de centrifugation. D'autre part la solidification elle-même provoque un rejet de soluté qui conduit à des inclusions endogènes en fin de solidification (phases mineures : sulfures et oxysulfures de Manganèse).

Certes, la différence de densité entre les oxydes et l'acier est plus forte qu'entre la sciure de bois et l'eau ; mais dans le cas des coquilles de grande taille les vitesses par rapport à la paroi sont aussi plus importantes (Chapitre 1).

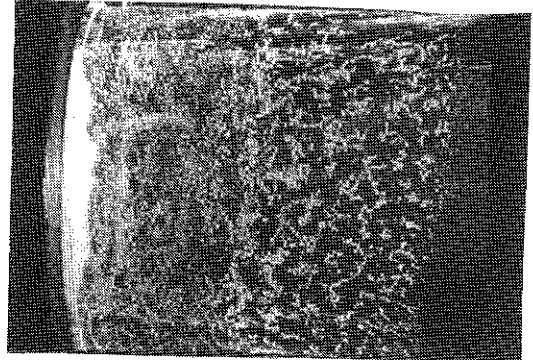
La variation continue de la quantité de liquide provoque une succession d'états transitoires lorsque la solidification est en cours. Ces transitions sont brutales et sont de nature à provoquer la submersion des oxydes exogènes ou le reflux vers le front solide-liquide des inclusions endogènes. Dans les deux cas il peut se former une bande annulaire d'inclusions. Il peut y avoir autant de bandes que d'états de transition.

Les essais sur la sciure ont montré que dans un assez grand nombre de cas (en particulier avec les vagues hélicoïdales) la sciure décanse vers la paroi au niveau des chemins de roulements ; or c'est justement au niveau de ceux-ci que les bandes d'inclusions sont les plus marquées dans les tubes métalliques où elles existent.

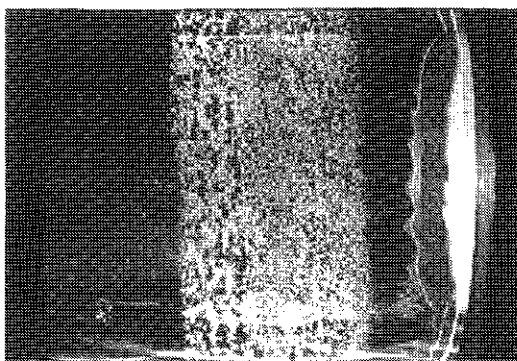
t = 0



t = 19,5 s



t = 30 s



t = 49 s

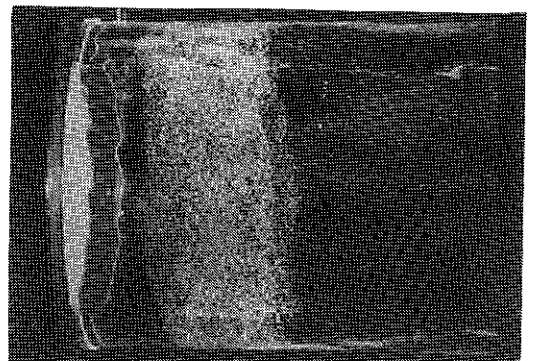


FIG. 29 : APPARITION DES HELICES A LA SURFACE LIBRE

6 litres d'eau - 12,4 tr/s

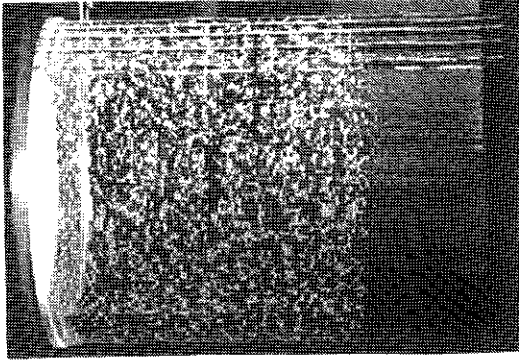
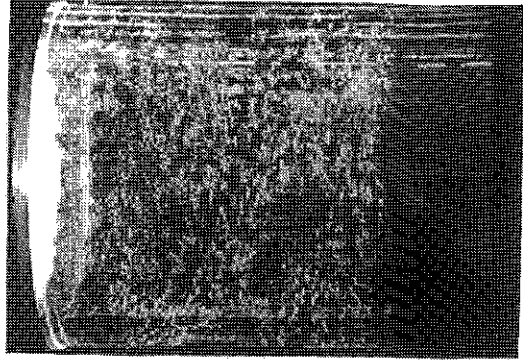
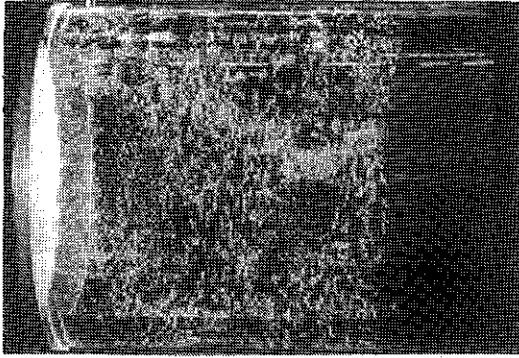
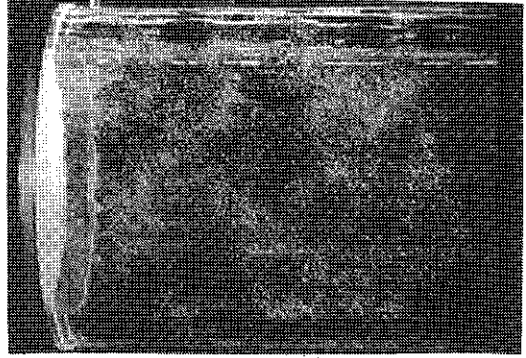
$t = 0$  $t = 1,5 \text{ s}$  $t = 1,55 \text{ s}$  $t = 6,3 \text{ s}$ 

FIG. 30 : APPARITION DES VAGUES HORIZONTALES EN SURFACE LIBRE

4 litres d'eau - 13 tr/s

Un lien a ainsi été mis en évidence expérimentalement entre les écoulements dans le liquide, les transitions entre ceux-ci et la présence de bandes annulaires d'inclusions dans les tubes d'acier. Un lien étant déjà établi entre les vibrations du système tournant et les écoulements du liquide, on confirme et on précise ainsi les conclusions de plusieurs auteurs ayant supposé ou montré un rapport entre les vibrations et les inclusions d'oxydes (L. NORTHCOTT, 1944, H.O. HOWSON, 1969).

## 2.7. MESURES DE CONDUCTIMETRIE

### 2.7.1. Principe

Il s'agit de mesurer le temps que mettent des ions pour aller d'un point donné (lieu d'injection) à un autre (site de mesure). L'intérêt de ce type de mesure est le suivant : il donne des informations quantitatives et précises sur les temps de transfert de solutés dans le liquide et permet ainsi de tirer des conclusions sur la nature des écoulements ; ces dernières sont transposables aux phénomènes se produisant dans l'acier liquide.

D'un point de vue pratique, les essais ont été effectués en injectant une solution concentrée de chlorure de Sodium additionné de fluorescéine dans de l'eau pure contenant une faible quantité de sel. La fluorescéine sert uniquement à visualiser les phénomènes, sachant que le comportement du sel est différent. On n'utilise pas de l'eau très pure car dans ce cas le bruit sur le signal mesuré (résistance électrique) est excessif. On ne peut utiliser l'eau de la ville qui, trop chargée en ions, masque les phénomènes à observer.

Le tube d'injection et la sonde de mesure sont fixes l'un par rapport à l'autre mais peuvent être déplacés entre deux essais. Ils sont également fixes par rapport à la coquille dans les essais effectués.

Le contact tournant ne pose pas de problème dans ce type de mesure ; le bruit engendré n'excède pas 0,5 % du signal.

La cellule de conductimétrie utilisée est formée de deux plaques de platine rectangulaires de 2 mm sur 4 mm, distantes de 2 mm. Ces plaques sont fixées sur une tige isolante ; la mesure affecte un volume global de l'ordre de 0,5 à 1 cm<sup>3</sup>.

### 2.7.2. Les expériences

Vu la taille de la sonde, il faut une quantité minimale de 7 l d'eau pour pouvoir faire des mesures.

Les essais ont été réalisés pour 7 et 10 l d'eau, à des vitesses différentes, pour voir l'influence des ondes de surface sur le temps de transferts (vagues hélicoïdales, "peau d'orange", surface cylindrique) ; pour ces quantités de liquide une seule mesure est possible dans l'épaisseur, c'est une valeur moyenne ; elle ne dépend pas de la position de l'injecteur ; la distance entre injecteur et sonde peut aller jusqu'à 60 cm (voir tableau 8).

D'autres essais ont été réalisés pour 24 l d'eau ; les mesures, effectuées dans les conditions précédentes, ont été répétées pour diverses profondeurs de sonde (voir tableau 8).

La sonde, dans tous les essais cités, est placée au niveau du chemin de roulement gauche.

Les temps caractéristiques sont mesurés au premier point d'inflexion de la courbe ou à défaut pour la valeur moyenne entre la résistance initiale et la résistance finale.

### 2.7.3. Les résultats - Cas général

La plupart des courbes donnant la résistance électrique du liquide en fonction du temps, c'est-à-dire à une constante près l'inverse de la concentration en ions en fonction du temps, sont des courbes en S semblables à celles que l'on obtient lorsque seule la diffusion moléculaire intervient (Fig. 31). Si l'on utilise un modèle de diffusion, à une dimension axiale  $z$ , pour modéliser le champ de concentration, en supposant le cylindre de longueur infinie, on obtient :

$$C(z,t) = \frac{M}{2(\pi \cdot D \cdot t)^{1/2}} \exp(-z^2/(4Dt))$$

$M$  étant la quantité de matière injectée, et  $D$  la diffusivité du soluté dans le solvant. Quand cette diffusivité est prise égale à la diffusivité moléculaire ( $10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ ), les temps caractéristiques obtenus (mesurés au niveau du premier point d'inflexion de la courbe) sont beaucoup plus grands que les temps expérimentaux. En utilisant une diffusivité apparente supérieure, on peut obtenir des temps caractéristiques identiques avec suivant les cas, une valeur de  $D$  comprise entre  $10^{-5}$  et  $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ . (Comparer Fig. 31 et 32).

quantité d'eau en l	vitesse de rotation en tr/s	forme de la surface libre	d en mm	t en s	v en mm/s	positions de la sonde et de l'injecteur	*
7	11	Cylindrique	20	20	1.00		
			190	170	1.10		
			210	205	1.00		
			300	140	2.15		
			600	810	0.75		
	13.5	vagues hélicoïdales	20	15	1.35		
			300	80	3.75		
			600	60	10.00		
	14	vagues hélicoïdales	190	55	3.45		
	14.5	"peau d'orange"	190	18	10.55		
10	14	vagues hélicoïdales	190	25	7.60		
			600	270	2.20		
	15	"peau d'orange"	190	18	10.55		
24	11	presque cylindrique	300	290	1.00	SL / PAR	
			600	1050	0.60	PAR/PAR	
	14	ondulations marquées	190	90	2.10	PAR/PAR	
			190	285	0.70	SL / PAR	*
			200	240	0.80	SL / SL	*
			220	170	1.30	PAR / SL	
			220	160	1.40	SL / SL	
			300	186	1.60	PAR/PAR	
			300	174	1.70	SL / PAR	
			300	180	1.70	SL / SL	*
			600	234	2.55	PAR/PAR	
			600	660	0.90	SL / PAR	
600	1480	0.40	SL / SL	*			

Tableau 8 : Mesures de conductimétrie

d : distance entre la sonde de mesure et l'injecteur

t : temps qui sépare l'injection de la réaction de la sonde (point d'inflexion de la courbe en S dans le cas général)

v : vitesse moyenne de transport du soluté

\* : cas particulier (voir partie 2.7.4)

SL : sonde ou injecteur à la surface libre

PAR : sonde ou injecteur à la paroi



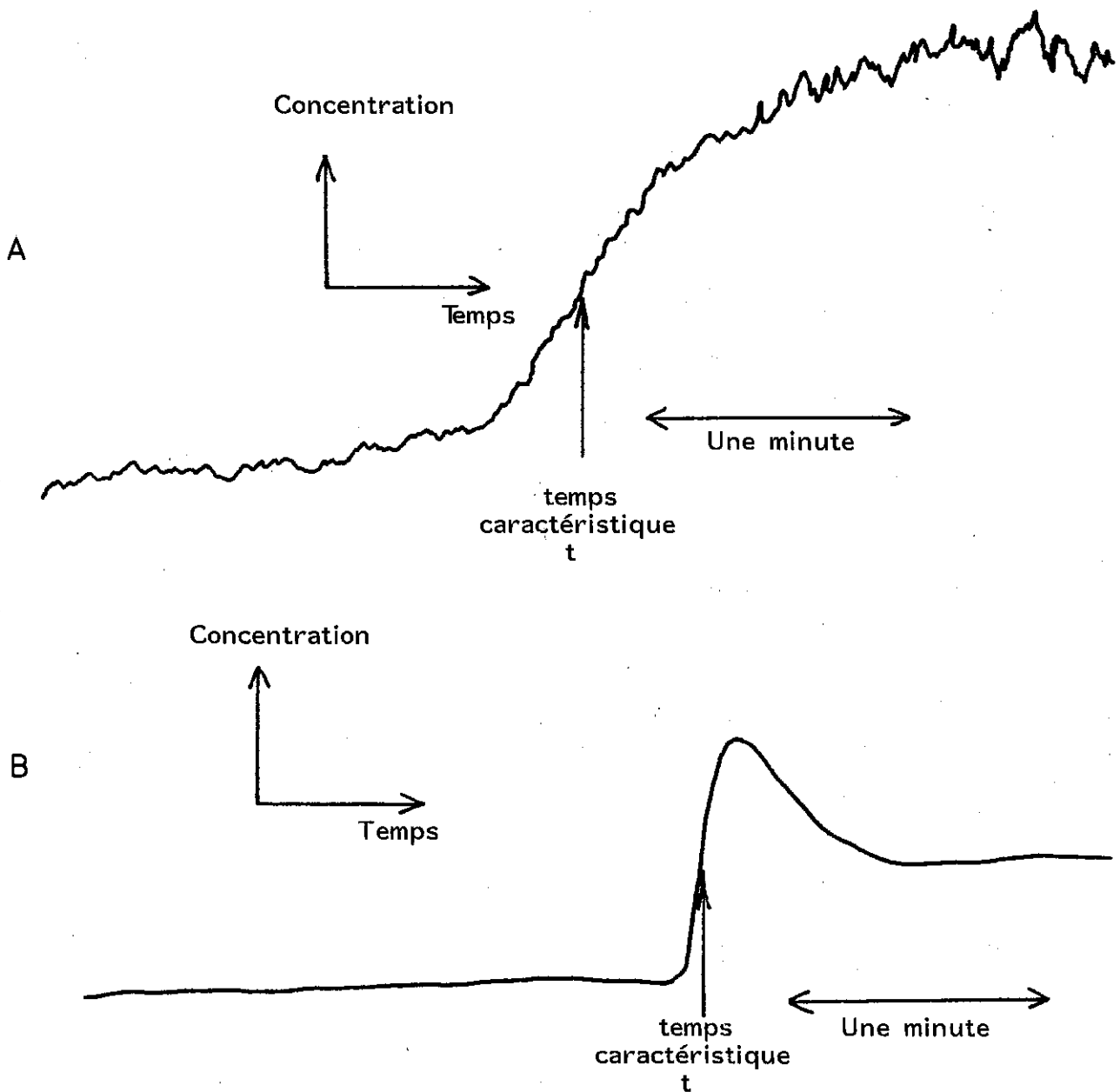


FIG. 31 : COURBES DE CONDUCTIMETRIE - CAS GENERAL

- . Cas A : 7 litres -  $\Omega = 11$  Hz  
Distance entre sonde et injecteur 19 cm  
 $t = 170$  s
- . Cas B : 7 litres -  $\Omega = 14,5$  Hz  
Distance entre sonde et injecteur 19 cm  
 $t = 55$  s

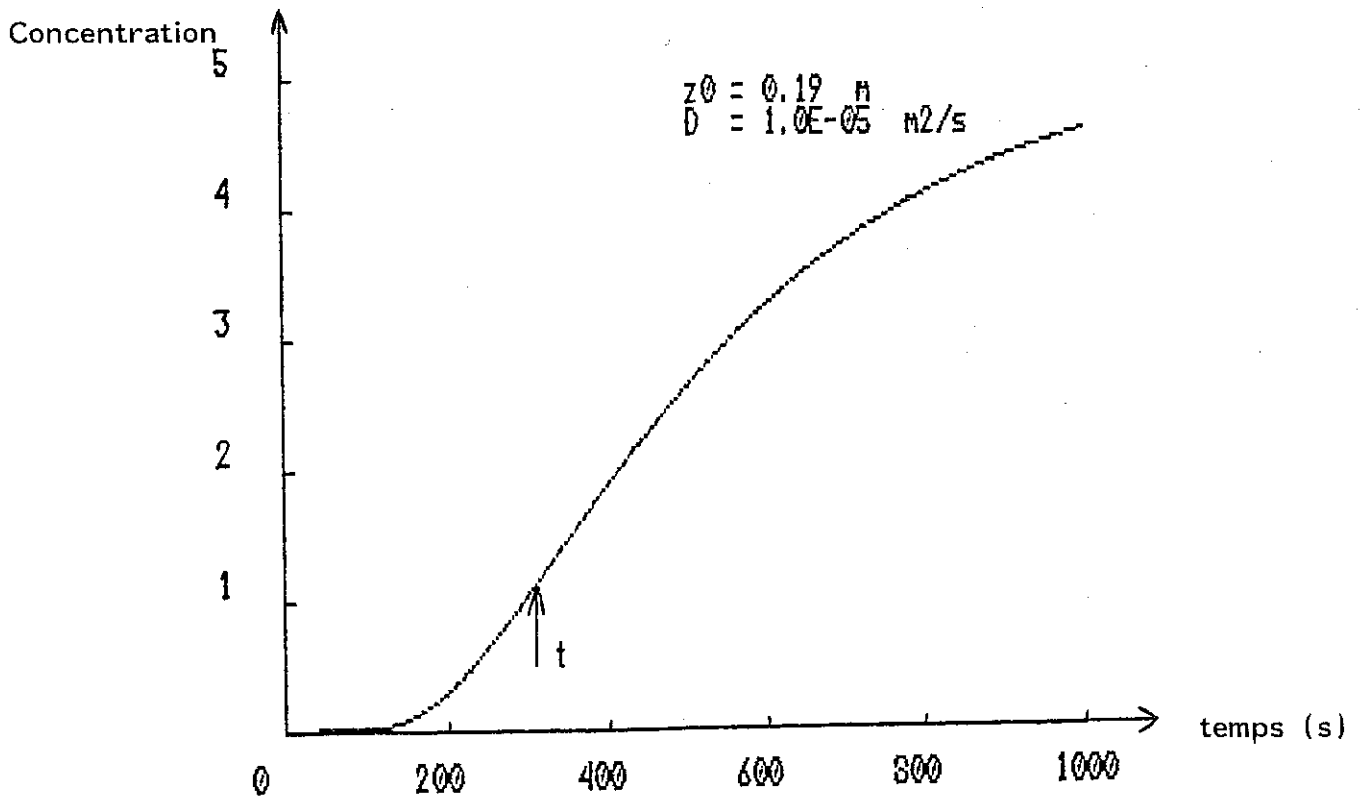
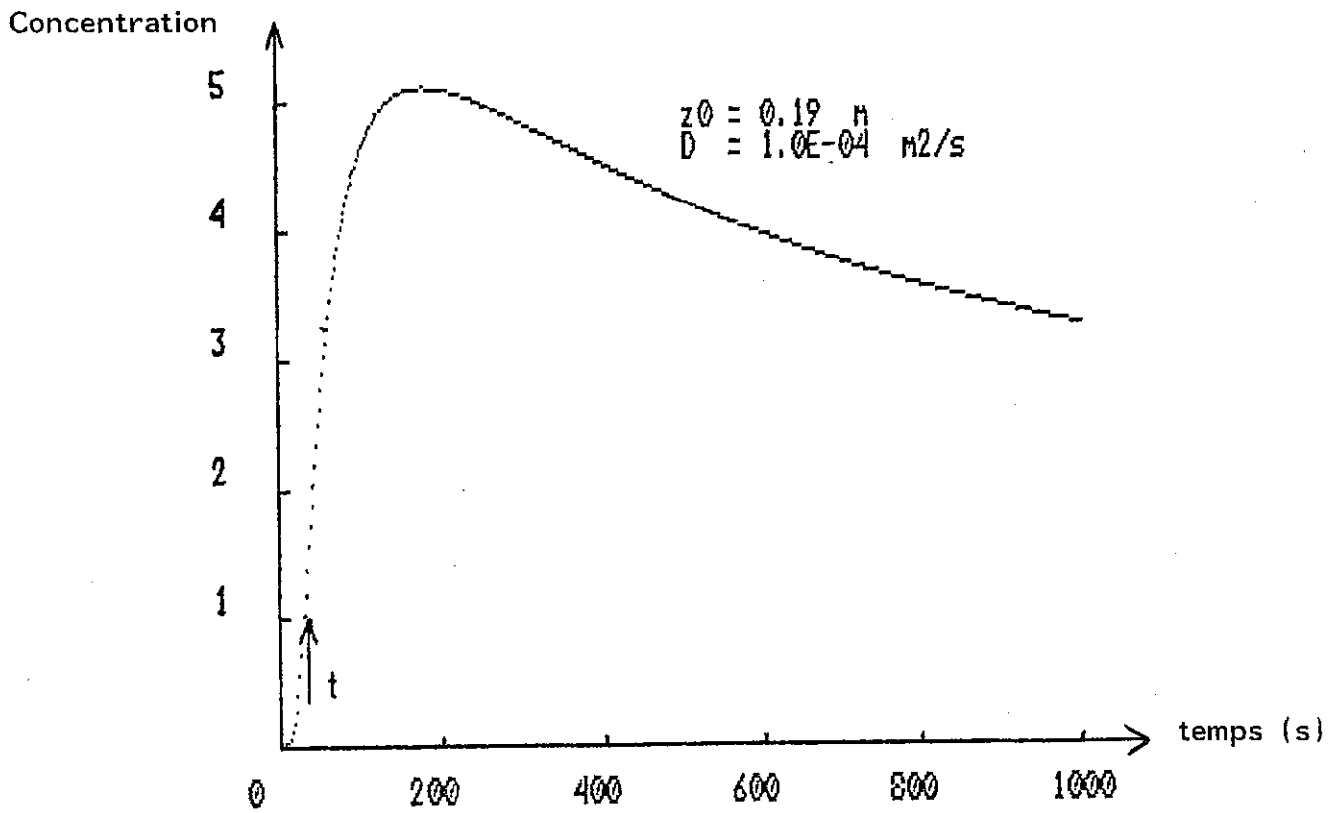


FIG. 32 : COURBES DE CONDUCTIMETRIE - MODELE EN CONDUCTION PURE

$z^0$  : Distance entre sonde et injecteur

$D$  : Diffusivité chimique apparente

$t$  : Temps caractéristique

Ceci montre que la convection dans le liquide joue le rôle principal dans le transport des solutés. Le fait qu'un modèle aussi simple puisse rendre compte des phénomènes convectifs n'est pas surprenant ; d'une part la sonde dans de nombreux cas occupe toute l'épaisseur de fluide, ce qui revient à prendre une valeur moyenne de la concentration en sel dans l'épaisseur ; l'hypothèse monodimensionnelle du modèle n'est donc pas absurde. D'autre part ce modèle ne peut rendre compte que globalement des phénomènes et il ne faut donc pas lui demander plus qu'il ne peut fournir : une valeur de la diffusivité apparente du soluté. En se limitant à cette grandeur on peut comparer les expériences et le calcul ; mais dès que l'on veut entrer dans le détail des écoulements le modèle est inadapté.

Il est intéressant de comparer les valeurs des vitesses axiales de transport de soluté aux vitesses de déplacement axial de la sciure (Ch. 2.6). Les vitesses mesurées par conductimétrie (de 0,5 à 11 mm/s) sont dans l'ensemble plus faibles que celles observées avec la sciure (jusqu'à 8 cm/s). Cela est peut-être lié au fait que les vitesses de glissement par rapport à la paroi sont d'autant plus grandes que l'on est loin de cette paroi. Comme les cas où la sonde est loin de la paroi ne correspondent à aucun cas étudié sur la sciure de bois, on ne peut résoudre définitivement ce problème. De plus la vitesse moyenne de transport du soluté d'un point à un autre n'est pas forcément identique aux vitesses dans le fluide, surtout s'il y a des recirculations nombreuses sous la surface.

#### 2.7.4. Les résultats - Cas particuliers

Il sont indiqués dans le tableau 8. Il en existe deux sortes.

Tout d'abord (Fig. 33), pour de grandes épaisseurs de liquide, lorsque la sonde et l'injecteur sont en surface, on observe une courbe ayant une pseudo-périodicité, celle-ci dépendant de la distance d'entre sonde et injecteur :

110 s pour  $d = 20$  cm

70 s pour  $d = 30$  cm

8 mn pour  $d = 60$  cm

D'autre part, il existe un phénomène cyclique d'un autre genre, avec des variations brutales de concentration entre lesquelles celle-ci reste constante (fig. 34). La période d'un cycle est de 100 s, la variation brutale étant alternativement peu forte puis très forte;

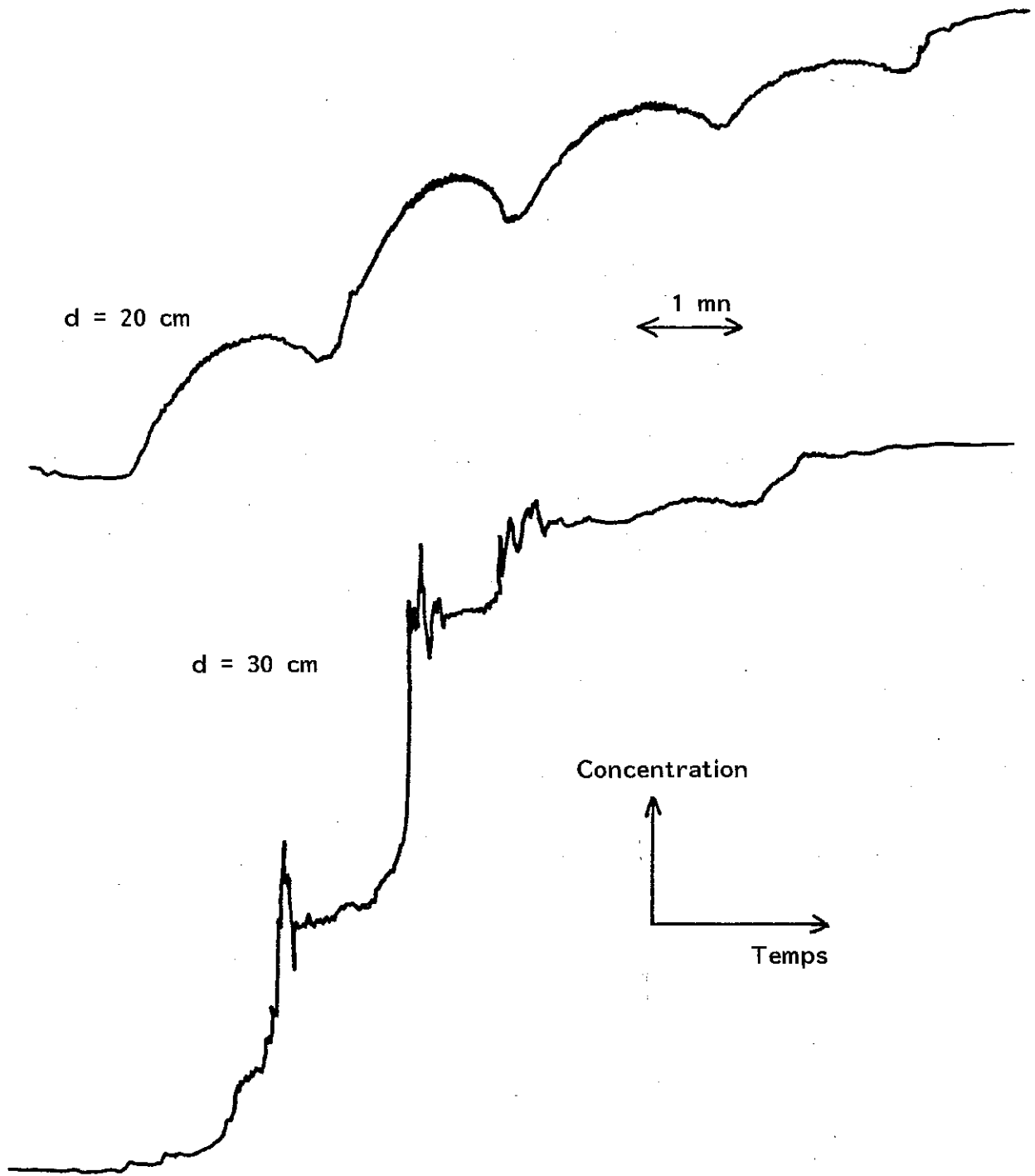


FIG. 33 : COURBES DE CONDUCTIMETRIE - CAS PARTICULIERS

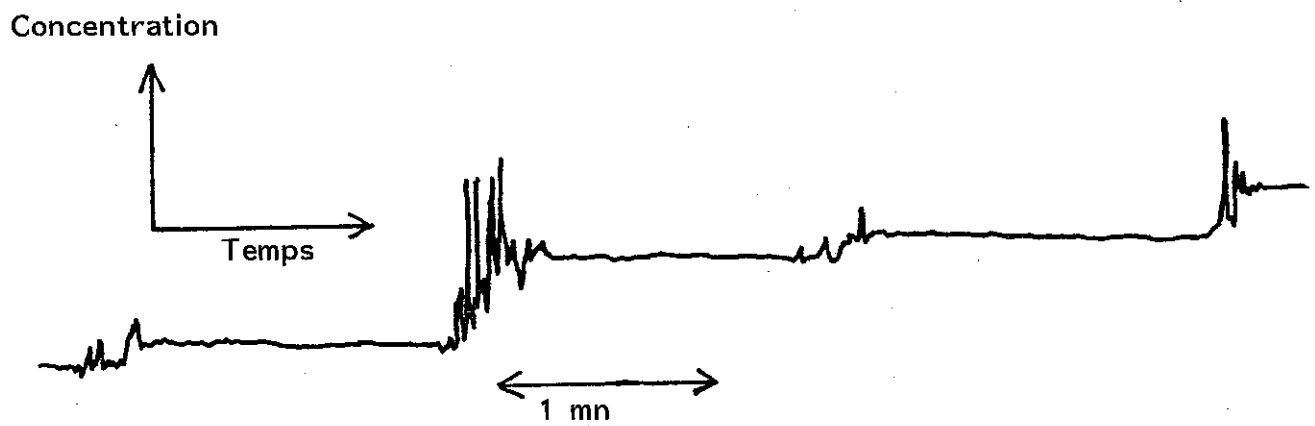


FIG. 34 : COURBES DE CONDUCTIMETRIE - CAS PARTICULIER

Ces deux phénomènes sont reproductibles.

Plusieurs hypothèses viennent à l'esprit pour tenter d'expliquer ces phénomènes :

- Une rue de tourbillons alternés de Von Karman (H. SCHLICHTING, 1968, Ch.2) dans le sillage de l'injecteur ou de la sonde (fig. 35) peut expliquer un des deux phénomènes cycliques à condition que le nombre de Reynolds soit au moins de l'ordre de 50 pour ce phénomène ; or le nombre de Reynolds, dans ce cas précis, s'écrit :  $Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$   $v$  étant la vitesse du fluide,  $d$  le diamètre de l'obstacle,  $\nu$  la viscosité du fluide. Pour l'injecteur  $d \sim 1$  mm, pour la sonde  $d \sim 5$  mm. Pour une vitesse de glissement de 5 mm/s on obtient  $Re \sim 5$  pour l'injecteur et 25 pour la sonde. Il est donc peu probable que ce phénomène ait lieu ici. A des vitesses plus importantes, par exemple en présence de vagues hélicoïdales, on observe un sillage important et dans ce cas on peut avoir une rue de tourbillons. Mais on n'observe plus alors de phénomène cyclique en conductimétrie, peut-être parce que les vitesses axiales sont elles-aussi importantes.

Puisqu'il ne semble pas que le système de mesure crée des perturbations importantes du signal, il faut chercher la réponse du côté du fluide lui-même.

- La saumure injectée étant sensiblement plus dense que le liquide (quelques pourcents d'écart), on peut penser que le liquide salé a fortement tendance à aller vers la paroi et à y rester du fait des forces centrifuges importantes.

Ceci explique bien les différences entre les mesures en surface et au fond (Tableau 8) quand la saumure est injectée au fond, à 19 ou 60 cm de la sonde. Mais pour 22 et 30 cm les temps sont semblables, où que soient la sonde et l'injecteur. Il semble donc que les recirculations aient un rôle important à jouer dans le transport du soluté vers la surface. Mais leur effet n'est pas simple car elles n'ont pas forcément la même taille en  $z$  et en  $\theta$  et elles se déplacent par rapport à la coquille.

Il ne faut pas pour autant négliger deux autres phénomènes qui peuvent jouer un rôle : d'une part une instabilité barocline dans le sens  $z$  liée à la différence de pression, à une profondeur donnée, en fonction de la distance à l'injecteur, liée à la variation de densité du fluide (Fig. 36) ; d'autre part un phénomène en relation avec la stratification du fluide qui se traduit par une tendance des particules fluides à osciller autour d'une position moyenne avec

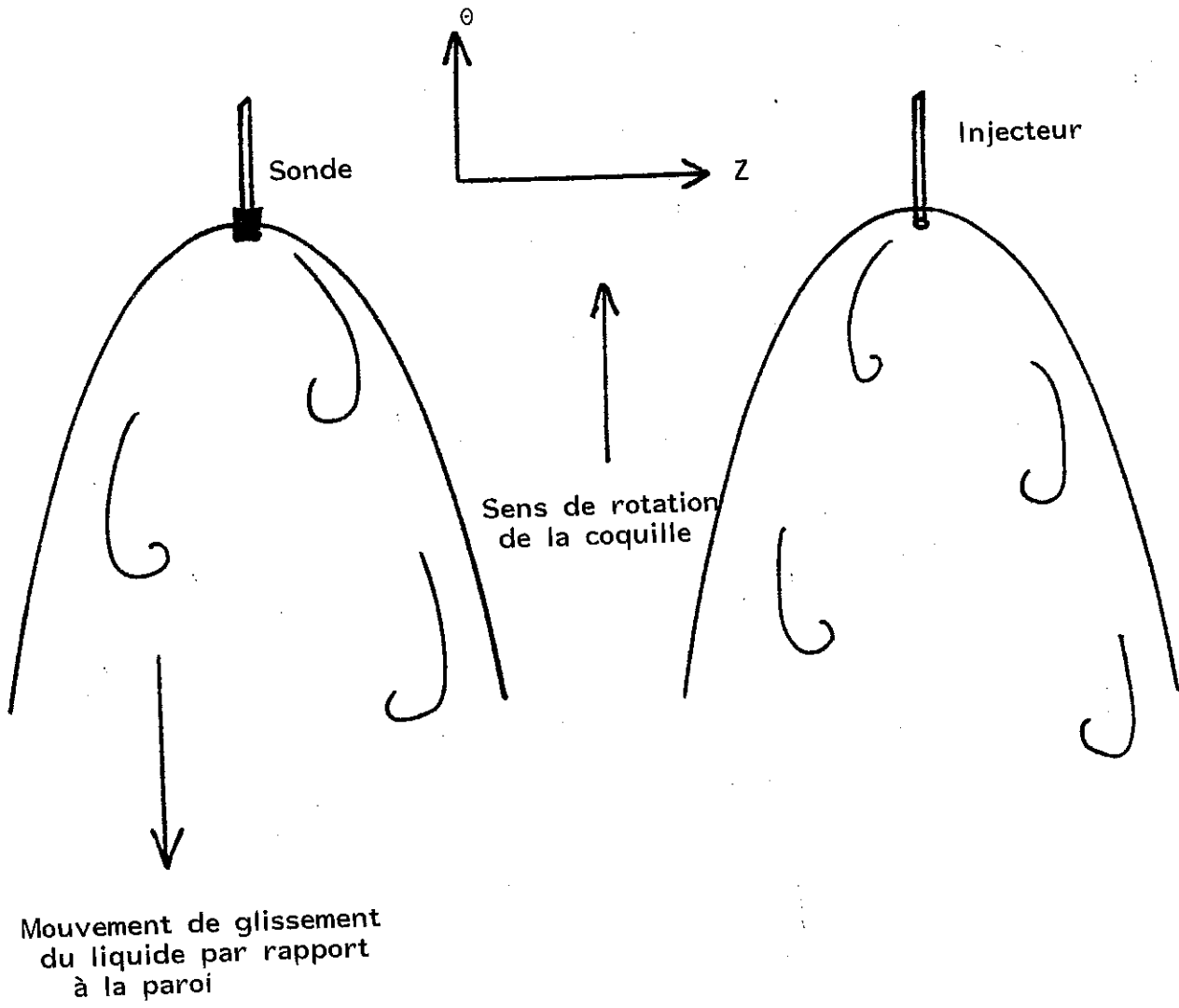


FIG. 35 : RUE DE TOURBILLONS ALTERNES DE VON KARMAN

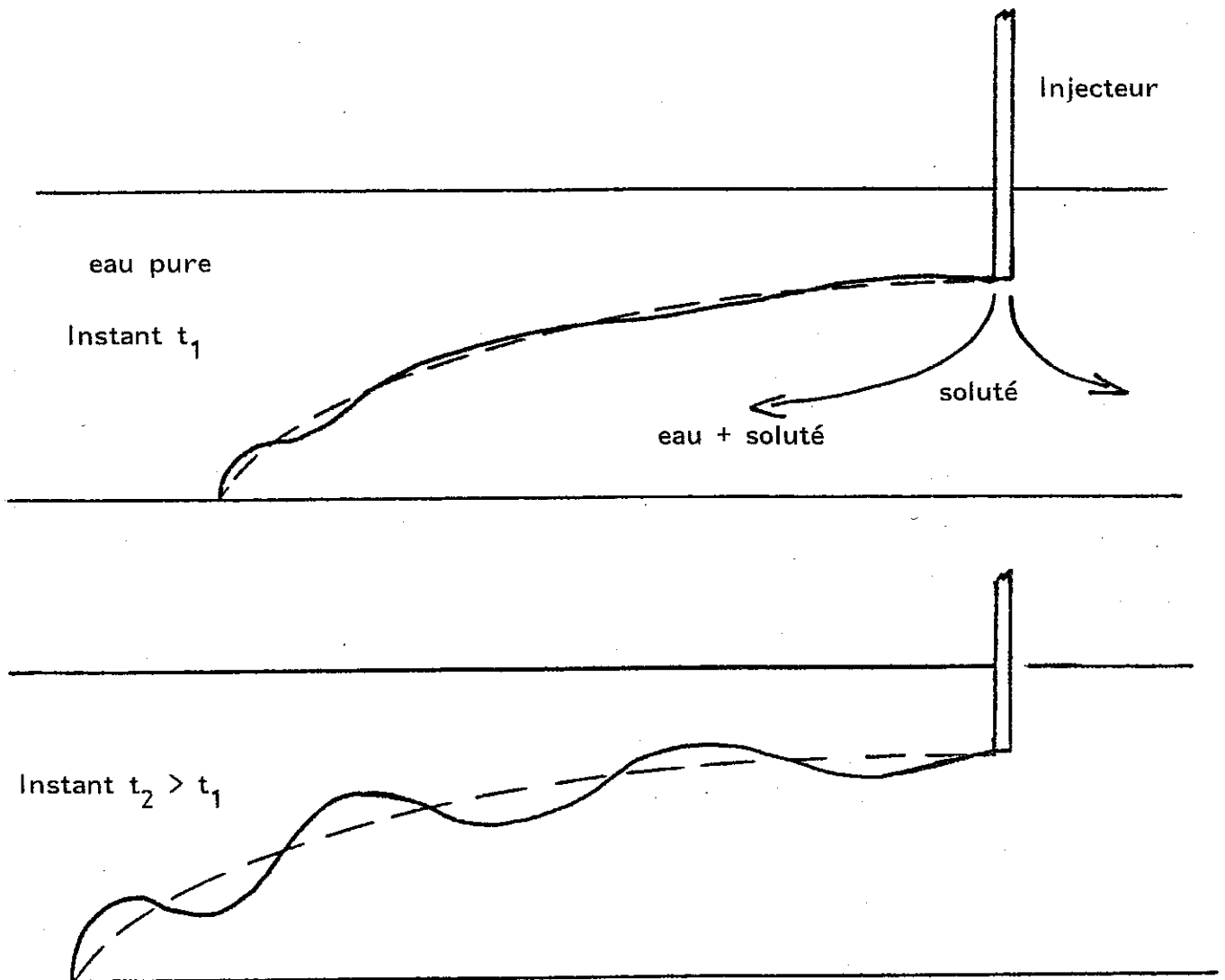


FIG. 36 : INSTABILITE BAROCLINE



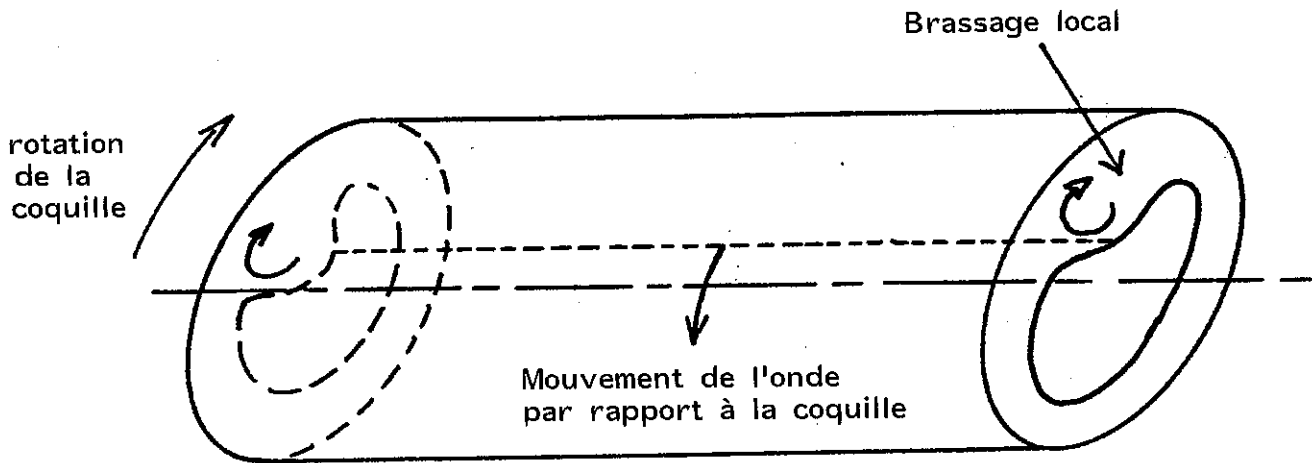
la fréquence de Brunt-Väisälä (J. PEDLOSKY, 1979), quand les vitesses du fluide orthogonales à la stratification sont faibles :

$$f = \left( - \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^{1/2}$$
 g étant la gravité apparente,  $\rho$  la masse volumique, r la distance à l'axe de rotation. Ici, f est de l'ordre de une minute.

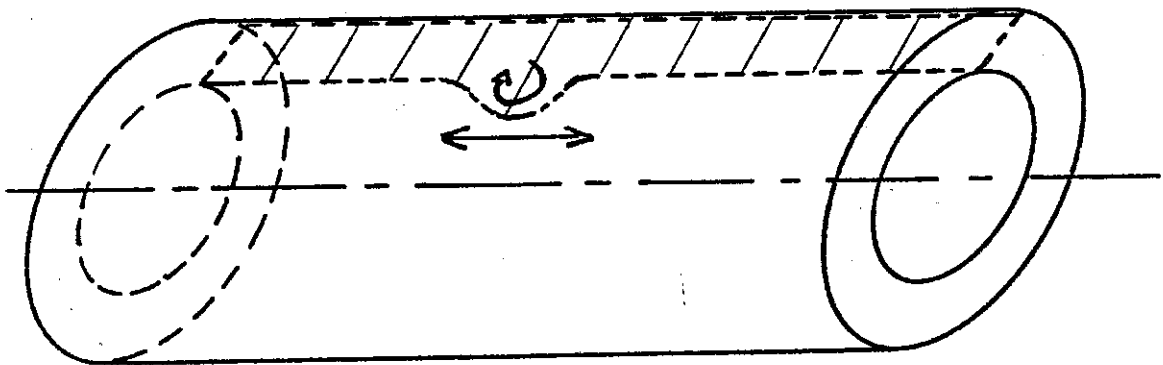
- Cependant aucun de ces effets ne peut expliquer une variation discontinue de concentration toutes les 100 secondes avec, entre ces instants, un palier parfait (Fig. 34).

Ce phénomène est plutôt l'indice de l'existence d'ondes qui se déplacent dans le sens axial dans la coquille et qui affectent régulièrement le liquide autour de la sonde, mais celle-ci n'étant qu'au quart de la longueur de la coquille, on devrait observer deux périodes distinctes. Plus probablement s'agit-il d'une onde axiale tournant par rapport à la coquille (Fig. 37) à la vitesse d'un tour toutes les 100 secondes (soit 0,7 mm/s) ; ce phénomène existe pour de faibles épaisseurs avec la "peau d'orange" (chapitre 2.5) mais dans ce cas on ne peut dire quelle est la forme de la surface libre.

#### 2.7.5. Effet du remplissage



a) Onde axiale tournant dans la coquille



b) Onde annulaire se déplacement axialement avec un mouvement de va-et-vient

FIG. 37 : MOUVEMENTS DES ONDES DE SURFACE POUVANT AFFECTER LA STRATIFICATION DU SOLUTE

## 2.8. CONCLUSION

Les expériences menées sur une installation transparente utilisant de l'eau ont apporté de nombreux résultats.

Tout d'abord, l'étude du remplissage a mis en évidence le fait qu'il se produit en cascade plutôt qu'en source, le rôle que joue la forme de la busette dans son déroulement et sa durée, et enfin la non-influence de la nature du remplissage sur l'état stable qui lui succède.

Ensuite, l'étude de l'état stable a montré l'existence d'un grand nombre de phénomènes hydrodynamiques ; le liquide n'est pas au repos par rapport à la coquille ; il est parcouru par des ondes de formes diverses (hélices, vagues axiales, annulaires...) et est soumis à des mouvements de recirculation ; ces ondes et ces mouvements sont directement liés aux vibrations de l'ensemble tournant, vibrations que l'on ne peut éviter.

Les transitions d'un régime d'écoulement à un autre, par exemple lorsque la quantité de liquide varie lentement, sont brutales ; les phénomènes transitoires qui apparaissent à ce moment sont de nature à provoquer la submersion de traceurs de surface.

La comparaison des résultats des expériences avec les macrographies faites sur certains tubes d'acier centrifugé conduit à dire que les bandes annulaires d'inclusions exogènes que l'on observe parfois sont dues à des transitions similaires entre divers régimes d'écoulement de l'acier, qui provoquent la submersion au moins partielle des oxydes flottant en surface.

Ces phénomènes étant liés aux vibrations du système, et celles-ci variant en fonction de la quantité de liquide, il n'est donc pas possible de les supprimer de façon systématique ; il est cependant envisageable de modifier le procédé de façon à réduire l'importance de ces perturbations d'origine mécanique en ajoutant un brassage plus intense qui réduirait l'effet de celles-ci sur la solidification. Ce brassage peut être d'origine électromagnétique, par exemple, ou encore par ultra-sons.



CHAPITRE 3

CALCULS NUMERIQUES HYDRODYNAMIQUES

---



### 3.1. INTRODUCTION

Le Chapitre 1 a mis en évidence l'intérêt mais aussi les limites de la résolution des équations de Navier-Stokes par la voie analytique ; il est donc indispensable de mettre au point une technique de résolution numérique. Plusieurs possibilités existent, et il est nécessaire avant toute mise en équation, d'effectuer un certain nombre de choix :

- Choix de la méthode de résolution, en éléments finis ou en différences finies.
- Choix du maillage, en particulier sa taille et sa forme.
- Choix des inconnues ; soit les inconnues naturelles (la pression et les composantes de la vitesse) soit les inconnues non naturelles (vecteur tourbillon et fonction de courant).

La nature du problème qui nous intéresse entraîne l'existence de deux choix plus spécifiques :

- Choix du référentiel : lié au sol, lié à la coquille en rotation, ou tournant à une vitesse différente de celle de la coquille.
- Choix des coordonnées, cartésiennes, cylindropolaires, curvilignes.

Examinons successivement chacune de ces possibilités. Commençons par le choix de la méthode numérique.

La méthode des différences finies utilise la décomposition des termes dérivés en série de Taylor suivant des axes orthonormés ; cette méthode conduit à utiliser un maillage orthogonal, ce qui n'est réalisable que pour des géométries suffisamment simples. Cette méthode entraîne l'existence de plusieurs schémas numériques ; en général, il y en a un pour les points intérieurs et un pour chacune des limites du domaine. Les conditions qui sont naturelles pour les limites en différences finies sont les conditions de Dirichlet ( $X = C^{te}$ ) ; les conditions de Neumann ( $\frac{\partial X}{\partial n} = C^{te}$ ) ne le sont pas et obligent à un traitement particulier. Enfin, pour résoudre certains problèmes numériques on est amené à utiliser des grilles multiples, c'est-à-dire un maillage différent pour la pression et pour les composantes de la vitesse.

La méthode des éléments finis (voir par exemple T.J. CHUNG, 1978), basée sur l'intégration, donc sur une valeur moyenne des inconnues dans chaque élément, est adaptée aux géométries compliquées et à des équations plutôt simples. En effet, on s'affranchit de la notion de direction (il n'y a plus de séries de Taylor) ce qui permet d'utiliser un maillage quelconque ; des géométries compliquées sont donc envisageables. Par contre, les termes non classiques dans les équations obligent à un traitement particulier, quelquefois délicat. En éléments finis, ce sont les conditions aux limites de Neuman qui sont naturelles ; celles de Dirichlet restent cependant des conditions essentielles au calcul.

Les deux méthodes sont donc assez complémentaires et ne sont pas exclusives l'une de l'autre ; en particulier dans le cas d'équations très compliquées dans une géométrie compliquée, il est difficile de dire a priori quelle est la meilleure des deux méthodes ; il peut d'ailleurs se faire qu'aucune des deux ne soit satisfaisante.

\*En ce qui concerne le maillage, le point crucial concerne la stabilité du calcul. En effet, les termes du premier ordre (en  $\vec{u} \cdot \text{grad } \vec{u}$ ) sont non linéaires et créent des problèmes numériques. Si la maille est trop grossière, le calcul est très imprécis et diverge très vite.

D'autre part, plus le nombre de Reynolds est grand, et plus il est nécessaire d'avoir une maille de petite taille. Mais deux problèmes se posent alors si la maille est très fine : d'une part le temps de calcul, donc le coût, augmente considérablement et peut rendre le calcul impossible, sans oublier que la place mémoire peut faire défaut ; d'autre part, un trop grand nombre de pas d'espace augmente les erreurs d'arrondi et peut entraîner une divergence du calcul.

Il existe un optimum de la taille du maillage pour obtenir la convergence du calcul, ceci quelles que soient la méthode et la machine utilisées. Quelquefois les deux causes de divergence (maillage trop grossier et maillage trop fin) se recoupent et la convergence n'existe alors pour aucune taille du maillage. On est alors obligé de sacrifier la précision au profit de la stabilité du calcul ; en différences finies, on utilise la méthode des dérivées amont, qui sont moins justes que les dérivées centrées mais qui augmentent la stabilité numérique. En éléments finis, les techniques existent aussi, mais elles sont plus délicates à mettre en oeuvre.



\*Deux choix sont possibles pour les inconnues : soit la vitesse  $\vec{u}$  et la pression  $p$ , soit le vecteur tourbillon  $\vec{\omega}$  et le potentiel vecteur  $\vec{A}$ . En trois dimensions, le premier choix conduit à quatre inconnues, le deuxième à six : pour cette raison on travaille toujours sur les inconnues naturelles en trois dimensions. En deux dimensions, le vecteur tourbillon n'a qu'une composante et le potentiel vecteur  $\vec{A}$  se réduit à un potentiel scalaire  $\psi$ . Dans ce cas, le choix des variables  $(\omega, \psi)$  semble donc préférable à celui des variables  $(u, v, p)$ . Cependant, d'autres facteurs entrent en jeu dans ce choix :

Tout d'abord,  $u$  et  $v$  sont solutions d'équations différentielles du deuxième ordre, alors que  $p$  est solution d'une équation différentielle du premier ordre. Cette différence de nature introduit une différence de comportement et l'existence d'un bruit numérique ; on peut diminuer ce problème, mais non le supprimer, en prenant sur la pression une précision plus faible que sur les autres variables, ce qui est plus facile à faire en différences finies qu'en éléments finis. Par contre, l'utilisation des variables  $(\omega, \psi)$  est meilleure car celles-ci sont toutes deux du deuxième ordre et le problème précédent n'apparaît pas.

D'autre part, il n'y a que deux inconnues couplées  $\omega$  et  $\psi$  au lieu de trois,  $u, v$  et  $p$ , la pression pouvant être calculée après les deux autres inconnues en résolvant une équation de Poisson. Cela simplifie la résolution mais les problèmes sont alors reportés sur les conditions aux limites qui deviennent compliquées et quelquefois demandent une mise en forme préliminaire.

Il faut donc choisir entre des conditions aux limites simples avec des problèmes numériques lors de la résolution, ou des conditions aux limites compliquées avec une résolution plus aisée.

\*Le choix du référentiel pose un problème particulier en raison même des phénomènes étudiés. En effet la non-linéarité des termes d'inertie conduit à choisir un référentiel où ces termes sont minimisés, de façon à réduire les problèmes numériques. Ce référentiel est celui qui tourne avec la coquille plutôt que celui qui est fixe ; on a vu aux Chapitres 1 et 2 que les vitesses par rapport à la coquille sont faibles devant la vitesse d'entraînement.

Cependant, diverses expériences montrent que dans bien des cas, la surface libre a une forme bien définie qui tourne dans la coquille avec une vitesse propre. Cela veut dire que dans le référentiel lié à la surface, celle-ci

semble figée. Dans ce référentiel, il est donc possible d'utiliser un maillage fixe, ce qui est exclu dans tout autre. Cette possibilité permet une simplification considérable de la modélisation. Il faut donc là encore faire un choix, cette fois-ci entre la simplicité du maillage et la stabilité numérique. Il faut remarquer toutefois que la vitesse de glissement de la surface libre par rapport à la coquille vaut environ 10 % de la vitesse d'entraînement dans les cas expérimentaux : dans le référentiel lié à la surface, les termes non linéaires restent donc encore assez faibles et la stabilité peut être conservée.

Il faut enfin remarquer que dans la géométrie qui nous intéresse, les mouvements dans le sens axial sont uniquement dus aux perturbations ; par contre dans le sens orthoradial l'entraînement en rotation par la coquille est le phénomène prépondérant ; les expériences montrent que dans la plupart des cas correspondants à des états stables, les mouvements du fluide sont plus importants dans le sens orthoradial que dans le sens axial, même par rapport à la coquille. Il est donc concevable de commencer l'étude en se limitant à deux dimensions d'espace  $(r, \theta)$ .

Les conditions d'ordre général évoquées ci-dessus restreignent les choix initiaux et ne laissent que deux possibilités :

- ou bien on choisit la méthode des différences finies ; dans ce cas il faut créer un maillage spécifique pour chaque forme de surface libre rencontrée ; les coordonnées curvilignes orthogonales sont les mieux adaptées et correspondent à un maillage orthogonal régulier pour une surface libre déformée.

- ou bien on choisit la méthode des éléments finis ; dans ce cas le maillage ne pose pas de problème particulier ; le choix des coordonnées est indépendant du reste et l'on prend celles qui donnent les termes les plus simples dans les équations, c'est-à-dire les coordonnées cartésiennes.

Dans les deux cas, il vaut mieux se placer dans le référentiel lié à la surface libre ; en éléments finis, on choisit les variables  $\omega$  et  $\psi$ , malgré la complexité des conditions aux limites. Par contre, en différences finies, on choisit les inconnues  $(u, v, p)$ , d'une part parce que des techniques particulières permettent de limiter le problème lié à la différence de nature entre les inconnues, d'autre part parce qu'en conservant l'inconnue  $p$ , on garde de ce fait une condition sur la pression en surface libre, celle-ci devant être isobare, ce qui permet d'ajuster le champ de vitesse par correction du champ de pression par itérations successives. La comparaison de ces deux méthodes assez différentes offre de l'intérêt.

Enfin, un dernier point est à signaler. Lorsqu'on travail avec les inconnues  $\omega$  et  $\psi$ , toutes les forces qui dérivent d'un potentiel disparaissent, les forces de pression bien sûr mais aussi d'autres, en particulier celle de la pesanteur et celles dues à un balourd (voir Chapitre 1). Cela signifie que certaines perturbations peuvent ne pas intervenir directement dans le calcul, et n'apparaître que par les conditions aux limites. Ce n'est pas un facteur stabilisant ; de plus, cela conduit à imposer non pas la force de volume qui est à l'origine de la perturbation, mais plutôt la forme de la surface libre qui en est la conséquence. En effet, si la forme de surface libre initiale est celle du cas non perturbé et si aucune force de volume n'existe, il est clair que le calcul converge vers la solution correspondant à la rotation en bloc. C'est assez contraignant car il est alors indispensable d'avoir une idée a priori de la forme de la surface, que seule l'expérimentation peut nous donner.

Toutefois, dans les cas vraiment complexes, il est plus aisé de fixer la forme de la surface libre d'après une expérience que la formulation d'une force de volume, et ceci est vrai même avec les variables  $u, v, p$ . Cela n'autorise pas cependant à conserver la force comme une inconnue du système ; elle doit être comme (en  $u, v, p$ ) ou son rotationnel doit l'être (en  $\omega, \psi$ ) au moins par une formulation analytique approchée, comme au Chapitre 1. Néanmoins, une correction du champ de forces est envisageable en différences finies lorsque les forces dérivent d'un potentiel  $V$ , par une technique similaire à celle utilisée pour la pression seule, en faisant intervenir une pression corrigée  $p^* = p + V$ .

Dans une première étape, on se limite aux états permanents où le référentiel choisi tourne à la vitesse de la surface libre ayant une forme bien définie ; ceci donne un argument supplémentaire pour imposer la forme de la surface libre, d'autant plus que le système étant non linéaire, il est préférable de partir de conditions initiales proches de la solution si l'on veut que le calcul converge vers celle-ci.

### 3.2. LES EQUATIONS ET LES CONDITIONS AUX LIMITES

#### 3.2.1. - Les notations utilisées au paragraphe 3.2.

Repère fixe (x,y) orthonormé

Repère (X,Y) tournant avec la surface libre.

(N,T) repère local (normal, tangentiel)

$\vec{F}_v (F_x, F_y)$  force de volume et ses composantes dans le repère (x,y)

p pression

R rayon interne de la coquille

t temps

$\vec{u}$  vecteur vitesse :

-  $u_x, u_y$  ses composantes dans le repère (x,y)

-  $u_r, u_\theta$  ses composantes dans le repère fixe en coordonnées polaires

- u,v fraction de  $u_r, u_\theta$  adimensionnelle due à la perturbation

-U,V composantes adimensionnelles dans le repère lié en rotation à la surface libre.

$\mu$  viscosité dynamique du fluide

$\nu$  viscosité cinématique du fluide

$\rho$  masse volumique du fluide

$\vec{\sigma}$  vecteur contrainte en surface libre

$\psi$  fonction de courant

$\omega$  tourbillon

$\Omega$  vitesse angulaire de la surface libre

$\Omega_0$  vitesse angulaire de la coquille

indices : p à la paroi

SL à la surface libre

1 à  $\delta N$  de la paroi ( $\delta N$  : pas d'espace)

3.2.2. - Les équations

Les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien incompressible soumis à une force de volume  $\vec{F}_v$  s'écrivent comme suit en fonction des inconnues naturelles  $\vec{u}$  et  $p$  :

$$(1) \quad \begin{cases} \rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} \right] = \mu \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p + \vec{F}_v \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

En fonction des inconnues  $\vec{\omega}$  et  $\psi$ , sachant que l'on a  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$  et  $\vec{u} = \text{rot } \psi$ , on obtient :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = \nu \Delta \vec{\omega} + \text{rot} \left( \frac{\vec{F}_v}{\rho} \right) \\ \vec{\omega} = \text{rot}(\text{rot} \psi) \end{cases}$$

La pression est donnée par l'équation de Poisson :

$$(3) \quad \Delta p + \rho \vec{\nabla} \cdot ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_v$$

En coordonnées cartésiennes en deux dimensions d'espace, le système (1) s'écrit, dans le référentiel fixe :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{F_x}{\rho} \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{F_y}{\rho} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$F_x$  et  $F_y$  sont les composantes des forces de volume qui agissent sur le système. On écrit ces équations dans le référentiel tournant à la vitesse  $\Omega$  de la surface libre. Pour cela, on écrit les composantes de la vitesse dans le repère fixe en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} u_r = \Omega R u \\ u_\theta = \Omega R + \Omega R v \end{cases}$$

ce qui devient en coordonnées cartésiennes : 
$$\begin{cases} u_x = -\Omega Y + \Omega R U \\ u_y = \Omega X + \Omega R V \end{cases}$$

$U, V$  étant les vitesses adimensionnelles du fluide dans le repère lié à la surface libre. Dans ce repère le régime est permanent si l'on suppose que la surface libre ne se déforme pas au cours du temps. Puis on remplace les inconnues précédentes par les inconnues adimensionnelles  $\omega$  et  $\psi$  définies plus haut, ce qui conduit à :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial X} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} - Y \right) + \frac{\partial \omega}{\partial Y} \left( X - \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) = \frac{\nu}{\Omega R^2} \Delta \omega + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \right) \\ \omega = -\Delta \psi \end{cases}$$

Si les forces extérieures dérivent d'un potentiel (gravité, balourd), ce terme disparaît. Le lien entre les inconnues  $(U, V)$  et  $(\omega, \psi)$  s'écrit :

$$(6) \quad \begin{cases} \omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \\ U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \\ V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \end{cases}$$

$X$  et  $Y$  sont les coordonnées dans le repère cartésien tournant à la vitesse de la surface libre.

### 3.2.3. Les conditions aux limites

Les conditions aux limites doivent être écrites à la paroi et à la surface libre. A la paroi, le vecteur vitesse doit être continu (le fluide contre la paroi se déplace avec celle-ci) :

$$\vec{u} \begin{cases} u_N = 0 \\ u_T = (\Omega_0 - \Omega)R \end{cases}$$

En coordonnées  $(\omega, \psi)$ , il faut écrire que la paroi est une ligne de courant :

$$(7) \quad \psi = \psi_p = C^{te}$$

Il faut aussi une condition sur le vecteur tourbillon  $\omega$  qui n'est pas connue. On écrit un développement en série de Taylor de  $\psi$  au voisinage de la paroi (J.L. MEYER, 1983) (voir fig.38) :

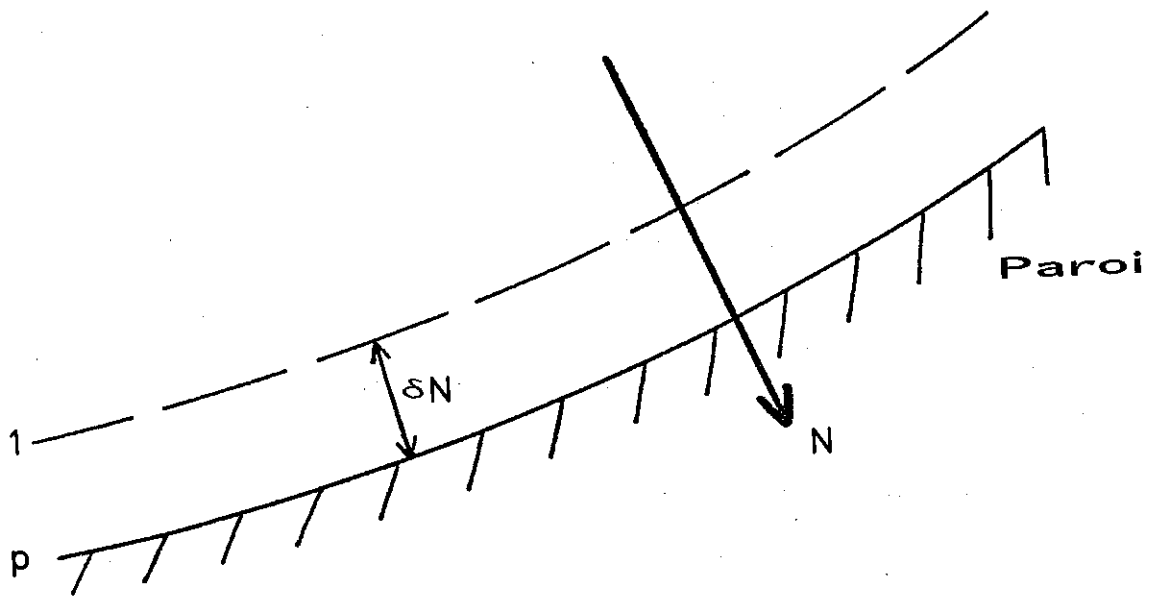


FIG. 38 : NOTATIONS UTILISEES POUR DETERMINER LA CONDITION LIMITE SUR LE VECTEUR TOURBILLON A LA PAROI

$$\psi_1 = \psi_p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)_p \cdot \delta N + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial N^2}\right)_p \frac{\delta N^2}{2} + \left(\frac{\partial^3\psi}{\partial N^3}\right)_p \frac{\delta N^3}{6} + O(\delta N^3)$$

Or  $\left(\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)_p$  est l'opposé de la vitesse tangentielle dans le repère tournant,

$$\text{soit } U \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} - V \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \text{ ou}$$

$\frac{\Omega_0}{\Omega} - 1$  dans le repère local (sur l'axe tangent) ; U, V sont pris à la paroi.

D'autre part  $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial N^2}\right)_p = -\omega$ , puisque  $\omega = -\Delta\psi$  et que  $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}\right) = 0$ ,  $\psi$  étant constant à la paroi ; on en déduit :

$$\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial N^3}\right)_p = -\left(\frac{\partial\omega}{\partial N}\right)_p$$

D'où la condition sur  $\omega$  à la paroi :

$$(8) \quad \left(\frac{\partial\omega}{\partial N}\right)_p = 6 \frac{\psi_p - \psi_1}{\delta N^3} + \frac{6(1 - \frac{\Omega_0}{\Omega})}{\delta N^2} - (\omega)_p \cdot \frac{3}{\delta N}$$

À l'autre frontière le problème est un peu différent ; la surface libre est immobile dans le repère tournant à la vitesse  $\Omega$  ; les deux conditions à respecter sont donc :

$$\begin{cases} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})S = 0 \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{t} = 0 \end{cases}$$

S étant l'équation de la surface, et  $\vec{\sigma}$  la contrainte en surface. Dans le repère local, sur la surface, ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} u_N = 0 \\ \frac{\partial u_T}{\partial N} = 0 \end{cases}$$

pour les inconnues  $\omega$  et  $\psi$ , on écrit que la surface libre est une ligne de courant, donc que  $\psi$  est constant :

$$(9) \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial T}\right)_{SL} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{encore} \quad \psi = \psi_{SL} = C^{te} \quad (\psi_{SL} \neq \psi_p)$$



D'autre part, si l'on suppose que l'essentiel du tourbillon est créé à la paroi, l'approximation suivante à l'ordre zéro est justifiée :

$$(10) \quad (\omega)_{SL} = 0$$

### 3.3. MODELISATION NUMERIQUE DES EQUATIONS EN ELEMENTS FINIS

Les équations obtenues au paragraphe 3.2. sont écrites sous forme intégrale en utilisant la méthode de Galerkin (GRESHO et al., 1980) :

$$(1) \quad \iint_S \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} - Y \right) \frac{\partial \omega}{\partial X} \cdot \alpha_i + \iint_S \left( X - \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) \frac{\partial \omega}{\partial Y} \alpha_i = \frac{\nu}{\Omega R^2} \iint_S \Delta \omega \cdot \alpha_i + \iint_S \alpha_i \operatorname{rot} \frac{\vec{F}}{\rho}$$

$$(2) \quad \iint_S \omega \alpha_i = - \iint_S \Delta \psi \cdot \alpha_i$$

En intégrant par parties, l'équation (1) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial Y} \omega \alpha_i \right] - \iint_S \frac{\partial \psi}{\partial Y} \cdot \omega \cdot \frac{\partial \alpha_i}{\partial X} + \iint_S \frac{\partial}{\partial Y} \left[ - \frac{\partial \psi}{\partial X} \omega \alpha_i \right] \\ & + \iint_S \frac{\partial \psi}{\partial X} \omega \frac{\partial \alpha_i}{\partial Y} + \iint_S \frac{\partial}{\partial X} \left[ - Y \omega \alpha_i \right] + \iint_S Y \omega \frac{\partial \alpha_i}{\partial X} \\ & + \iint_S \frac{\partial}{\partial Y} \left[ X \omega \alpha_i \right] - \iint_S X \omega \frac{\partial \alpha_i}{\partial Y} = \frac{\nu}{\Omega R^2} \iint_S \nabla (\nabla \omega \cdot \alpha_i) \\ & - \frac{\nu}{\Omega R^2} \iint_S \nabla \omega \cdot \nabla \alpha_i + \iint_S \alpha_i \operatorname{rot} \frac{\vec{F}}{\rho} \end{aligned}$$

Soit encore, en faisant apparaître des conditions aux limites, et en notant  $\vec{B}$  le vecteur de composantes  $(-Y, X)$  :

$$\begin{aligned} (3) \quad & \int_{\Gamma} \omega \alpha_i \operatorname{rot} \psi \cdot \vec{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \omega \alpha_i \vec{B} \cdot \vec{n} \, d\Gamma - \iint_S \omega \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \alpha_i}{\partial X} \\ & + \iint_S \omega \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \alpha_i}{\partial Y} + \iint_S Y \omega \frac{\partial \alpha_i}{\partial X} - \iint_S X \omega \frac{\partial \alpha_i}{\partial Y} = \\ & \frac{\nu}{\Omega R^2} \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \omega}{\partial N} \, d\Gamma - \frac{\nu}{\Omega R^2} \iint_S \vec{\nabla} \omega \cdot \vec{\nabla} \alpha_i + \iint_S \alpha_i \operatorname{rot} \frac{\vec{F}}{\rho} \end{aligned}$$

$\vec{n}$  étant la normale locale à la surface  $\Gamma$ .

L'équation (2) devient :

$$(4) \quad \iint_S \omega \alpha_i = \iint_S \nabla \psi \cdot \nabla \alpha_i - \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial N} d\Gamma$$

On pose alors les développements suivants :

$$\psi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j$$

$$\omega = \sum_{j=1}^n \alpha_j \omega_j$$

Les  $\psi_j$  et  $\omega_j$  étant des constantes.

Chaque terme des équations (3) et (4) est alors modifié comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} \iint_S \omega \alpha_i &= - \iint_S \vec{\nabla}(\nabla \psi \cdot \alpha_i) + \iint_S \nabla \psi \cdot \nabla \alpha_i \\ &= - \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial N} d\Gamma + \sum_{j=1}^n \left[ \iint_S \nabla \alpha_j \cdot \nabla \alpha_i \right] \psi_j \end{aligned}$$

Le système peut alors s'écrire sous la forme :

$$M.I - KS = 0$$

$$\text{avec } I = \begin{bmatrix} \omega \\ \psi \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} M_{\omega\omega} & M_{\omega\psi} \\ M_{\psi\omega} & M_{\psi\psi} \end{bmatrix}$$

C'est-à-dire :

$$(5) \quad KS = \begin{cases} \iint_S \alpha_i \operatorname{rot} \frac{\vec{F}}{\rho} + \frac{v}{\Omega R^2} \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{6}{\delta N^2} \left(1 - \frac{\Omega_0}{\Omega}\right) d\Gamma \\ 0 \end{cases}$$

$$(6) \quad M_{\omega\omega}^{ij} = - \iint_S \alpha_j \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \alpha_i}{\partial X} + \iint_S \alpha_j \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \alpha_i}{\partial Y} + \iint_S Y \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial X}$$

$$+ \int_{\Gamma} \alpha_j \alpha_i \vec{B} \cdot \vec{n} d\Gamma - \frac{v}{\Omega R^2} \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \omega}{\partial N} d\Gamma - \iint_S X \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial Y} + \frac{v}{\Omega R^2} \iint_S \vec{\nabla} \alpha_j \cdot \vec{\nabla} \alpha_i$$

$$+ \int_{\Gamma} \alpha_j \alpha_i \operatorname{rot} \psi \cdot \vec{n} d\Gamma$$

$$(7) \quad M_{\omega\psi}^{i,j} = 0$$

$$(8) \quad M_{\psi\omega}^{i,j} = \iint_S \alpha_j \alpha_i$$

$$(9) \quad M_{\psi\psi}^{i,j} = \iint_S \vec{\nabla} \alpha_j \cdot \vec{\nabla} \alpha_i - \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial N} d\Gamma$$

En se référant aux expressions des conditions aux limites on transforme les termes de frontière  $\int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial N} d\Gamma$  et  $\int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \omega}{\partial N} d\Gamma$  qui apparaissent dans  $M_{\omega\omega}$  et  $M_{\psi\psi}$ .

- En surface libre, par un développement limité du même type que celui utilisé pour  $\omega$  à la paroi :

$$(10) \quad \int_{\Gamma} \alpha_i \left( \frac{\partial \psi}{\partial N} \right)_{SL} d\Gamma = \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\psi - \psi_{SL}}{\delta N} d\Gamma + \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\delta N^2}{6} \left( \frac{\partial \omega}{\partial N} \right)_{SL} d\Gamma$$

- à la paroi :

$$(11) \quad \int_{\Gamma} \alpha_i \left( \frac{\partial \omega}{\partial N} \right)_P d\Gamma = \int_{\Gamma} \alpha_i \cdot 6 \cdot \frac{\psi_P - \psi}{\delta N^3} d\Gamma + \int_{\Gamma} \alpha_i \cdot 6 \cdot \frac{(1 - \frac{\Omega_0}{\Omega})}{\delta N^2} d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha_i (\omega)_P \cdot \frac{3}{\delta N} d\Gamma$$

Pour la surface libre seulement, le premier terme de l'équation (10) est à ajouter aux termes existants de  $M_{\psi\psi}$ , sous la forme  $\int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\alpha_j - \psi_{SL}}{\delta N} d\Gamma$ , le deuxième est à ajouter aux termes existants de  $M_{\psi\omega}$ , sous la forme :

$$\int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\delta N^2}{6} \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial N} d\Gamma$$

$\psi_{SL}$  est la valeur de la fonction de courant en surface libre, à l'itération précédente. Les trois termes de l'équation (11) sont à ajouter, seulement pour la paroi, aux termes existants de KS sous la forme :

$$\frac{6\nu}{\Omega R^2} \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\psi_1}{\delta N^3} d\Gamma - \frac{6\nu}{\Omega R^2} \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{(1 - \frac{\Omega_0}{\Omega})}{\delta N^2} d\Gamma + \frac{3\nu}{\Omega R^2} \int_{\Gamma} \frac{\alpha_i}{\delta N} (\omega)_P d\Gamma$$

$(\omega)_P$  et  $\psi_1$  sont respectivement la valeur du vecteur tourbillon à la paroi et celle de la fonction de courant à  $\delta N$  de la paroi, à l'itération précédente.

Le système obtenu n'est pas linéaire ; pour trouver la solution physiquement valable, il existe principalement deux méthodes itératives :

- la méthode de Gauss-Seidel consiste à résoudre le système  $MI-KS = 0$ , à trouver l'erreur sur le résultat et à corriger la matrice  $M$ , puis à itérer le processus. Cette méthode du premier ordre converge très lentement ; la sous-relaxation, c'est-à-dire la prise en compte d'une partie de l'erreur seulement, permet de contrôler la convergence qui, bien que restant très lente, a l'avantage d'être assez sûre.
- la méthode de Newton-Raphson consiste à écrire le système sous la forme  $f(\omega, \psi) = 0$  et à décomposer  $f$  en série de Taylor au voisinage de zéro :  

$$f(\omega_n, \psi_n) + \delta(\omega, \psi) \cdot J = 0.$$

Ayant un couple  $(\omega_n, \psi_n)$ , on peut connaître  $f(\omega_n, \psi_n)$  ainsi que  $J$ , appelée matrice jacobienne, formée des valeurs des termes dérivés de  $f$  par rapport aux inconnues  $\omega$  et  $\psi$  pour le couple  $(\omega_n, \psi_n)$  ; on en déduit  $\delta(\omega, \psi)$ , et donc un nouveau couple  $(\omega, \psi)$ . On itère le processus. On s'arrête quand  $f(\omega_n, \psi_n) = 0$ . Cette méthode est du second ordre ; de ce fait elle converge beaucoup plus vite que la précédente ; mais si le couple initial  $(\omega, \psi)$  est éloigné de la solution, on peut diverger (très vite également).

La procédure qui nous a semblé la meilleure consiste à utiliser la méthode de Gauss-Seidel pour se rapprocher de la solution, puis celle de Newton-Raphson pour achever le calcul rapidement, quand on est suffisamment près de la solution. Calculons alors les éléments de la matrice jacobienne  $J$ . Ses éléments s'écrivent :

$$J_{ab}^{i,j} = \frac{\partial([M]_i I - KS_i)}{\partial b_j}$$

$a, b$  sont les inconnues ( $\omega$  ou  $\psi$ )

$b_j$  représente  $\omega_j$  ou  $\psi_j$

On obtient :

$$(12) \quad J_{\omega\omega}^{i,j} = - \iint_S \alpha_j \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \alpha_i}{\partial X} + \iint_S \alpha_j \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \alpha_i}{\partial Y} + \iint_S Y \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial X} \\ - \iint_S X \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial Y} + \frac{\nu}{\Omega R^2} \iint_S \nabla \alpha_j \cdot \nabla \alpha_i + \int_{\Gamma} \alpha_j \alpha_i \vec{B} \cdot \vec{n} \, d\Gamma$$

A la paroi il faut ajouter le terme :

$$- \frac{3\nu}{\Omega R^2} \int_{\Gamma} \frac{\alpha_i \alpha_j}{\delta N} \, d\Gamma$$

tiré de  $-\frac{\nu}{\Omega R^2} \int_{\Gamma} \alpha_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial N}\right)_p \, d\Gamma$  en tenant compte de l'expression de  $\frac{\partial \omega}{\partial N}$  à la paroi

(3.2., (8)). A la surface libre on connaît  $\omega$  ( $\omega = 0$ ), l'équation est inutile.

$$(13) \quad J_{\omega\psi}^{i,j} = - \iint_S \omega \frac{\partial \alpha_i}{\partial X} \frac{\partial \alpha_j}{\partial Y} + \iint_S \omega \frac{\partial \alpha_j}{\partial X} \frac{\partial \alpha_i}{\partial Y}$$

A la paroi, il faut ajouter le terme  $-\frac{6\nu}{\Omega R^2} \int_{\Gamma} \frac{\alpha_i \alpha_j}{\delta N^3} \, d\Gamma$

qui provient également de l'expression de  $\frac{\partial \omega}{\partial N}$  à la paroi (3.2.(8)). A la surface libre on supprime l'équation puisque l'on connaît  $\omega$ .

$$(14) \quad J_{\psi\omega}^{i,j} = - \iint_S \alpha_i \alpha_j \quad \text{auquel il faut ajouter en surface libre le terme :}$$

$$\frac{\delta N^2}{6} \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial N} \, d\Gamma \quad \text{qui provient de l'expression de } \frac{\partial \psi}{\partial N} \text{ en surface libre}$$

(voir 3.3., (10)).

A la paroi, on connaît  $\psi$  ( $\psi = 0$ ) l'équation est inutile.

$$(15) \quad J_{\psi\psi}^{i,j} = \iint_S \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j \quad \text{auquel il faut ajouter, à la surface libre,}$$

le terme  $-\int_{\Gamma} \frac{1}{\delta N} \alpha_i \alpha_j \, d\Gamma$  qui provient également de l'expression de  $\frac{\partial \psi}{\partial N}$  en

surface libre. A la paroi  $\psi = 0$ , ce qui supprime l'équation.

Le problème est donc maintenant complètement posé.

### 3.4. LE PROGRAMME

Le programme utilisé est le programme Flux-Expert (P. MASSE, 1983) qui permet d'écrire et de résoudre un grand nombre d'équations aux dérivées partielles de la mécanique des milieux continus. (hydrodynamique, électromagnétisme, thermique,...). Pour pouvoir utiliser ce programme, il a fallu implanter des aménagements liés aux conditions aux limites non classiques :

- création d'éléments de surface particuliers (nouveaux types d'intégrales de surface)
- utilisation de la technique du potentiel flottant (isovaleur inconnue en surface libre).

Les aménagements font partie intégrante de la nouvelle version de Flux-Expert.

### 3.5. CONCLUSION

Une méthode de résolution numérique a été construite, tenant compte de la particularité du problème à résoudre. Les inconnues ( $\omega, \psi$ ) ont été préférées aux inconnues naturelles ( $u, v, p$ ) parce qu'elles conduisent à une plus grande stabilité du calcul ; en contrepartie il a été nécessaire de tenir compte de conditions aux limites plus complexes et non intuitives.

Le problème étant non linéaire, les conditions initiales du calcul doivent être aussi proches que possible de la solution physique pour faciliter la convergence. Pour cela les expérimentations apportent des informations précieuses sur la forme de la surface libre. D'une façon générale il faut choisir une forme de surface et un champ de forces (dans le référentiel tournant) compatibles, ce dernier pouvant être estimé par la voie analytique. Dans le cas particulier où les forces de volume dérivent toutes d'un potentiel (gravité, balourd par exemple), la déformation de la surface est le seul facteur numérique pouvant conduire à une solution autre que la solution banale correspondant à la rotation en bloc avec la coquille.

La méthode des éléments finis a été préférée à celle des différences finies dans un premier temps parce qu'un programme de résolution en éléments finis existe déjà et est adaptable au problème qui nous intéresse. Cependant, la méthode des différences finies est a priori également utilisable et une comparaison des deux méthodes serait intéressante.

CHAPITRE 4

INFLUENCE DE LA CONVECTION  
SUR LA SOLIDIFICATION

---





#### 4.1. INTRODUCTION

Les observations effectuées sur une installation de simulation (Chapitre 2) ainsi que les calculs hydrodynamiques (Chapitre 1) montrent que le liquide n'est pas immobile par rapport à la coquille en rotation. Or, la structure solide résulte des transferts de chaleur et de masse pendant le processus de solidification ; elle est donc très sensible à la convection qui anime le liquide. Ce fait étant acquis, il s'agit alors de savoir de quelle façon la convection dans le liquide peut modifier la solidification.

#### 4.2. BIBLIOGRAPHIE

Il faut distinguer deux grands types de solidification : la solidification en croissance contrainte et celle correspondant aux conditions techniques classiques des produits coulés.

En croissance contrainte le front solide-liquide avance à une vitesse constante  $V$  dans un gradient thermique constant  $G$ . C'est le cas par exemple dans les procédés Bridgman et Czochralsky. Dans ces conditions, la convection dans le liquide a des effets variés : elle modifie la stabilité de croissance d'une interface plane, même s'il ne s'agit que de convection naturelle, en jouant sur la répartition du soluté ; dans le cas de fluctuations périodiques de la convection, on observe des bandes de soluté, et des fluctuations thermiques (G. MÜLLER et al., 1979 ; G. MÜLLER, 1981). La convection modifie aussi la macroségrégation en croissance contrainte et peut augmenter l'espacement eutectique. Enfin, la convection a un effet important sur l'orientation des grains colonnaires, aussi bien en croissance contrainte que dans les conditions techniques classiques ; les grains croissent plus vite vers l'amont du courant liquide en avant du front que vers l'aval (M.C. FLEMINGS, 1956 ; T. TAKAHASHI et al., 1976, R. ICHIKAWA et al., 1980). Dans les conditions techniques classiques, le gradient thermique en avant du front et la vitesse de croissance ne sont plus constants ; ils dépendent de l'évolution du processus dans son ensemble. Il est utile de distinguer plusieurs cas.

Le remplissage des moules entraîne des phénomènes convectifs dans le liquide ; ceux-ci ont un effet important sur la structure de solidification, au moins en ce qui concerne les premières couches solidifiées.

L'étape importante suivante est l'extraction de la surchauffe ; on montre que le brassage du liquide accélère le phénomène et diminue les gradients thermiques au sein du liquide (J.L. MEYER, 1983). De ce fait, le brassage a également une influence sur la formation de la structure en favorisant la transition colonnaire-équiaxe (C. MASCRE, 1962). A l'inverse, en état d'apesanteur, et en l'absence de convection forcée, la structure est totalement colonnaire (M.H. JOHNSTON et al., 1977).

L'augmentation de la zone équiaxe quand le brassage s'intensifie a plusieurs origines. Tout d'abord, plus la convection est forte, plus la surchauffe est rapidement évacuée ; la zone colonnaire est donc d'autant plus faiblement étendue quand la transition se fait, la zone équiaxe apparaissant au moment où la surchauffe a été évacuée. D'autre part, le brassage uniformise les champs de température et de concentration dans le liquide (K.H. TACKE et al., 1981 ; V.A. BRAILOVSKAYA et al., 1977). Il permet enfin d'éliminer la chaleur latente équiaxe de solidification, ce qui prolonge la nucléation.

Dans la dernière étape, en fin de solidification, le solide forme un squelette rigide ; le liquide interdendritique s'écoule alors selon un régime de percolation ; cela conduit à des macroségrégations réparties ou à des macroségrégations en canaux et à des porosités. Le brassage a un effet direct sur les écoulements interdendritiques avant la fin de la cristallisation (J.P. GABATHULER et al., 1983 ; I. OHNAKA et al., 1981) et retarde l'établissement du régime de percolation en maintenant le mélange solide-liquide en état de suspension.

Il est tentant de chercher à observer la solidification sur des modèles transparents, comme cela est possible pour les phénomènes hydrodynamiques. Mais la similitude thermique n'existe pas entre les métaux et les produits transparents utilisés ; de très grandes différences existent en effet entre des grandeurs thermiques comme la conductibilité, la capacité calorifique ou la chaleur latente de fusion pour les métaux et les produits usuels (solutions salines ou composés organiques). Cependant, certains corps ont un comportement semblable à celui des métaux ; on peut observer une cristallisation colonnaire non facettée, une zone pâteuse et une transition colonnaire-équiaxe.

Une solution de chlorure d'ammonium ( $\text{NH}_4\text{Cl}$ ) permet d'observer les mouvements de convection naturelle du liquide et la progression du front colonnaire et d'effectuer des mesures de vitesse (J. SZEKELY et al., 1978), ou encore d'observer la croissance des cristaux équiaxes et la convection d'origine solutale (S. WITZKE et al., 1979) ; S.K. CHAN (1975) a étudié la stabilité des pointes de dendrites et leur croissance.

La solidification eutectique a été étudiée sur divers alliages binaires organiques (J.D. HUNT et al., 1966) ; K.A. JACKSON et al. (1966) pensent, d'après des observations, que la refusion partielle des branches de dendrites secondaires est à l'origine de la zone équiaxe ; ils dressent par ailleurs (1965) une liste intéressante de produits organiques se solidifiant comme les métaux.

L'influence de la convection sur la structure est bien mise en évidence dans l'expérience décrite ci-dessous :

Du diphenyléther, un corps pur, est soumis à un refroidissement, depuis une température supérieure à celle de fusion, dans plusieurs conditions de brassage. En l'absence de convection, la croissance est colonnaire, le liquide n'est pas isotherme ; en présence de brassage la croissance, qui peut être colonnaire au début, devient rapidement équiaxe ; si le brassage est suffisamment important pour réduire la couche limite à un film le long des parois, la croissance est entièrement équiaxe, et le liquide est homogène en température (Fig. 39). Les thermogrammes montrent clairement la différence de comportement du liquide en cours de solidification (Fig. 40). La surfusion peut atteindre 20 K avant solidification ; dans ce cas l'hélice assurant le brassage peut être bloquée, dès la première seconde qui suit le début de la solidification, par la fraction équiaxe solidifiée. (D. BLOCH et al., 1985).

#### 4.3. LES MODELISATIONS ANTERIEURES

Le problème qui nous intéresse est celui de l'influence du brassage sur l'extraction de la surchauffe et sur la transition colonnaire-équiaxe. Il est rendu complexe par le couplage de phénomènes ayant deux échelles différentes :

- l'échelle du procédé pour les transferts thermiques,
- l'échelle de la dendrite pour les phénomènes de croissance et la formation de la structure.

Les transferts thermiques gouvernent la cinétique globale ; en retour la cinétique dendritique gouverne le dégagement de chaleur latente qui fait l'essentiel du dégagement de chaleur pendant la solidification.

Le couplage est donc indiscutable et rend nécessaire la mise au point d'une modélisation numérique ou analytique ; de nombreux travaux ont eu lieu sur ce sujet.

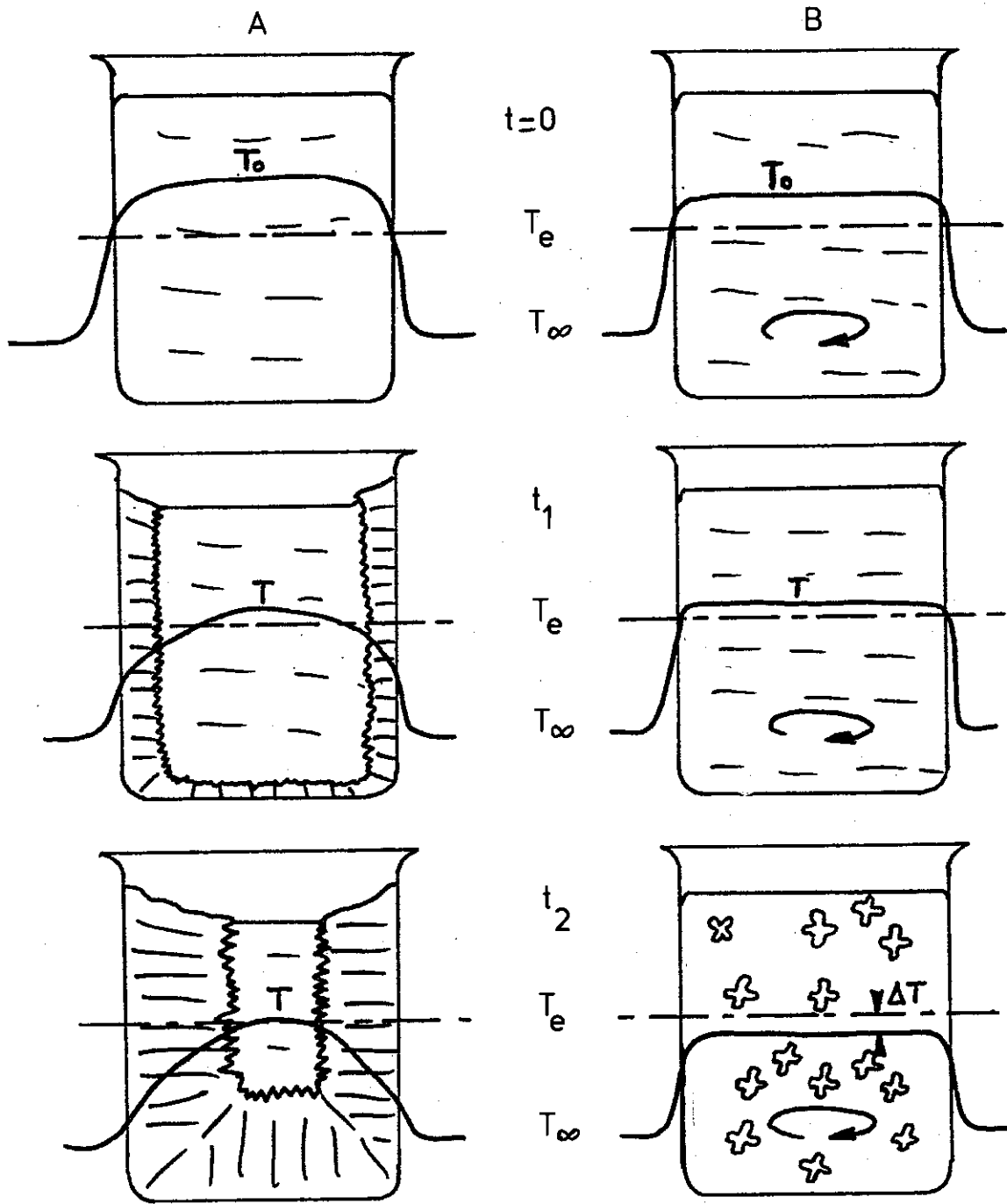


FIG. 39 : INFLUENCE DU BRASSAGE SUR LA SOLIDIFICATION DU DIPHENYLETHER

A : Conduction pure

B : Brassage intense

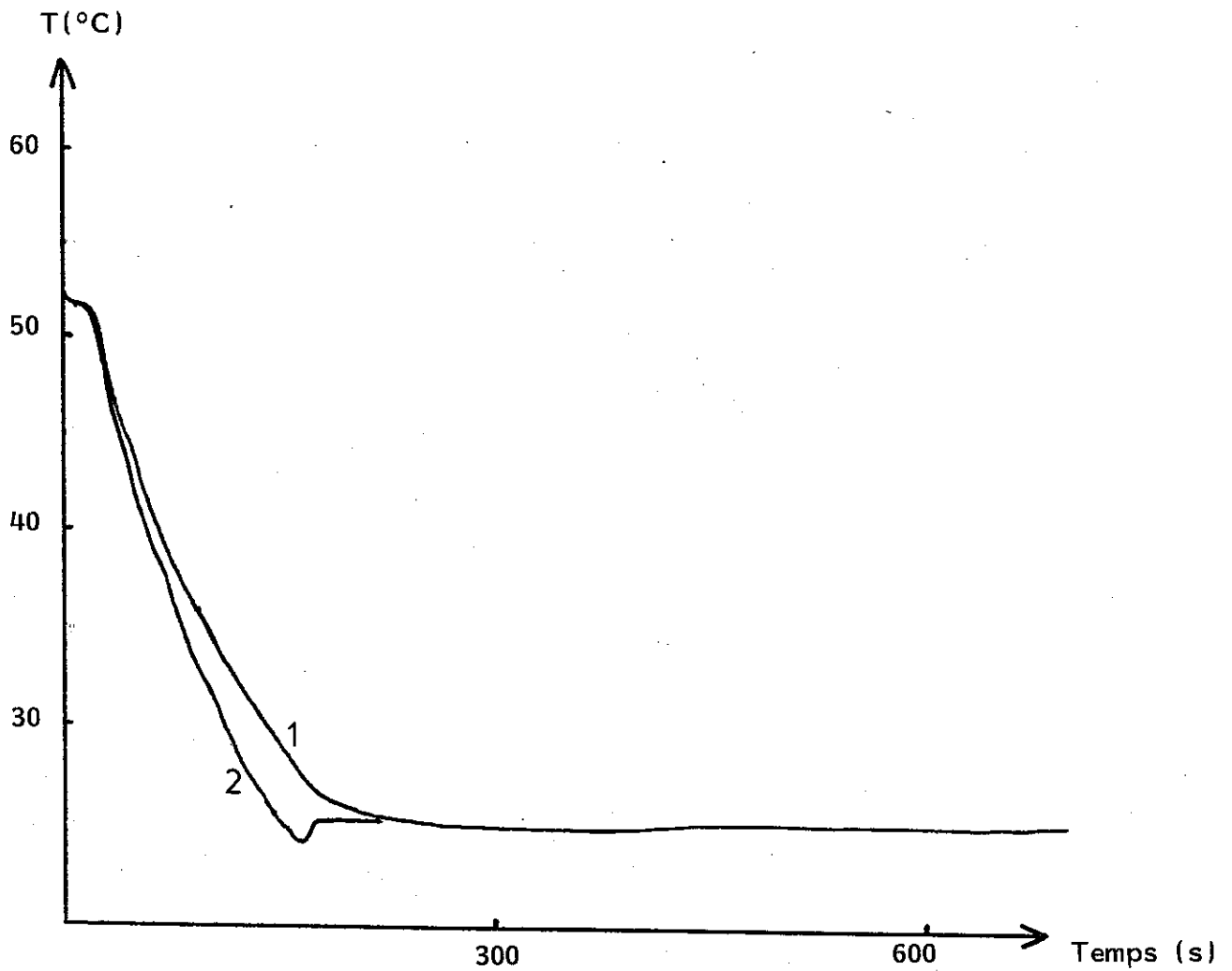


FIG. 40 : THERMOGRAMMES ENREGISTRES PENDANT LA SOLIDIFICATION  
DU DIPHENYLETHER EN CONDUCTION PURE (1)  
ET EN PRESENCE D'UN BRASSAGE INTENSE (2)

J.L. DUDA et al. (1969) utilisent un modèle analytique basé sur une méthode de perturbations pour des problèmes à frontière mobile contrôlée par la diffusion. L.M. JIJI (1970) utilise une méthode similaire pour les problèmes à géométrie circulaire à frontière libre avec transformation de phase, la solidification commençant par l'intérieur ; D.S. RILEY et al. (1974) étudient la solidification d'un cylindre ou d'une sphère pleine, initialement à la température de fusion, et dont la température de paroi est constante ; une méthode de perturbations applicable pour un liquide initialement isotherme, à une température supérieure à celle de fusion est développée par L.M. JIJI et al. (1978) et S. WEINBAUM et al. (1977) ; tous deux supposent que la paroi est isotherme et que le flux de chaleur est nul en surface libre. Ces modèles analytiques ont plusieurs handicaps : ils sont lourds à manipuler, ne font pas intervenir la convection et utilisent des conditions aux limites non acceptables pour le problème qui nous intéresse.

Y. EBISU (1977) a mis au point un modèle numérique pour la coulée centrifuge des métaux. Il met en évidence le fait que la cristallisation équiaxe est favorisée par les vibrations du moule, par un abaissement de la température de coulée, et en ayant une couche d'isolant thermique moins efficace.

S. SPENCER et al. (1981) utilisent un modèle numérique monodimensionnel en conduction pure où les coefficients d'échange métal/coquille et coquille/air peuvent évoluer au cours du temps.

A.A. RYADNO et al. (1982) font intervenir des termes de convection dans le bilan de chaleur, mais ceux-ci sont simplifiés à l'extrême : la vitesse radiale est négligée et la vitesse tangentielle est supposée ne dépendre que de la profondeur et non de la position angulaire.

T.K. SINHA et al. (1982) utilisent un simple modèle de conduction pour décrire la solidification d'un cylindre creux à partir de la face interne.

J. LIPTON (1983) propose un modèle de solidification monodimensionnel que l'on peut qualifier de semi-analytique. Le transfert de chaleur entre le solide et l'extérieur est représenté par un coefficient d'échange. La diffusion thermique à travers la zone colonnaire est traitée suivant la méthode établie par J. LIPTON et al. (1982). Ces auteurs montrent que dans la zone solide, et dans la zone semi-solide colonnaire, le profil thermique peut être représenté par une loi en erf qui satisfait à l'équation locale de conservation de la chaleur (voir notations en annexe 3) :

Pour la zone solide,

$$T_1 = T_o + \frac{T_S - T_o}{\operatorname{erf}(\phi_1)} \operatorname{erf} \left( \frac{x + 2\phi_2(a_2 t_o)^{1/2}}{2(a_1(t+t_o))^{1/2}} \right) \quad (1)$$

Pour la zone semi-solide,

$$T_2 = T_L - \frac{T_L - T_S}{\operatorname{erf}(\phi_2) - \operatorname{erf}(\bar{n}\phi_1)} \left( \operatorname{erf}(\phi_2) - \operatorname{erf} \left( \frac{x + 2\phi_2(a_2 t_o)^{1/2}}{2(a_2(t+t_o))^{1/2}} \right) \right) \quad (2)$$

A la paroi, entre le solide et la coquille, on remplace le coefficient d'échange tube/coquille par une épaisseur fictive de métal jouant le même rôle thermique (J. LIPTON et al., 1982) (Fig. 41).

Les positions des isothermes solidus et liquidus sont données par une loi de type CHVORINOV modifiée :

$$\begin{cases} F_S = 2\phi_1 (a_1(t+t_o))^{1/2} - \ell_o & (3) \\ F_L = 2\phi_2 (a_2(t+t_o))^{1/2} - \ell_o & (4) \end{cases}$$

Les vitesses de croissance des fronts s'en déduisent :

$$\begin{cases} V_1 = \phi_1 (a_1/(t+t_o))^{1/2} & (5) \\ V_2 = \phi_2 (a_2/(t+t_o))^{1/2} & (6) \end{cases}$$

Les constantes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont déterminées à partir des bilans thermiques aux frontières solide/semi-solide et semi-solide/liquide :

$$\frac{T_L - T_S}{T_S - T_o} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \bar{n} = \frac{(\operatorname{erf}(\phi_2) - \operatorname{erf}(\bar{n}\phi_1)) \exp(\phi_1^2(\bar{n}^2 - 1))}{\operatorname{erf}(\phi_1)} \quad (7)$$

et

$$\frac{T_L - T_S}{T_C - T_L} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{\bar{m}} = \frac{(\operatorname{erf}(\phi_2) - \operatorname{erf}(\bar{n}\phi_1)) \exp(\phi_2^2(1 - \bar{m}^2))}{1 - \operatorname{erf}(\bar{m}\phi_2)} \quad (8)$$

La capacité calorifique de la zone semi-solide (nécessaire au calcul de la diffusivité  $a_2$ ) intègre le terme de dégagement de chaleur latente sous la forme :

$$C_{P2} = C_{P1} + \frac{\Delta H}{T_L - T_S} \quad (9)$$

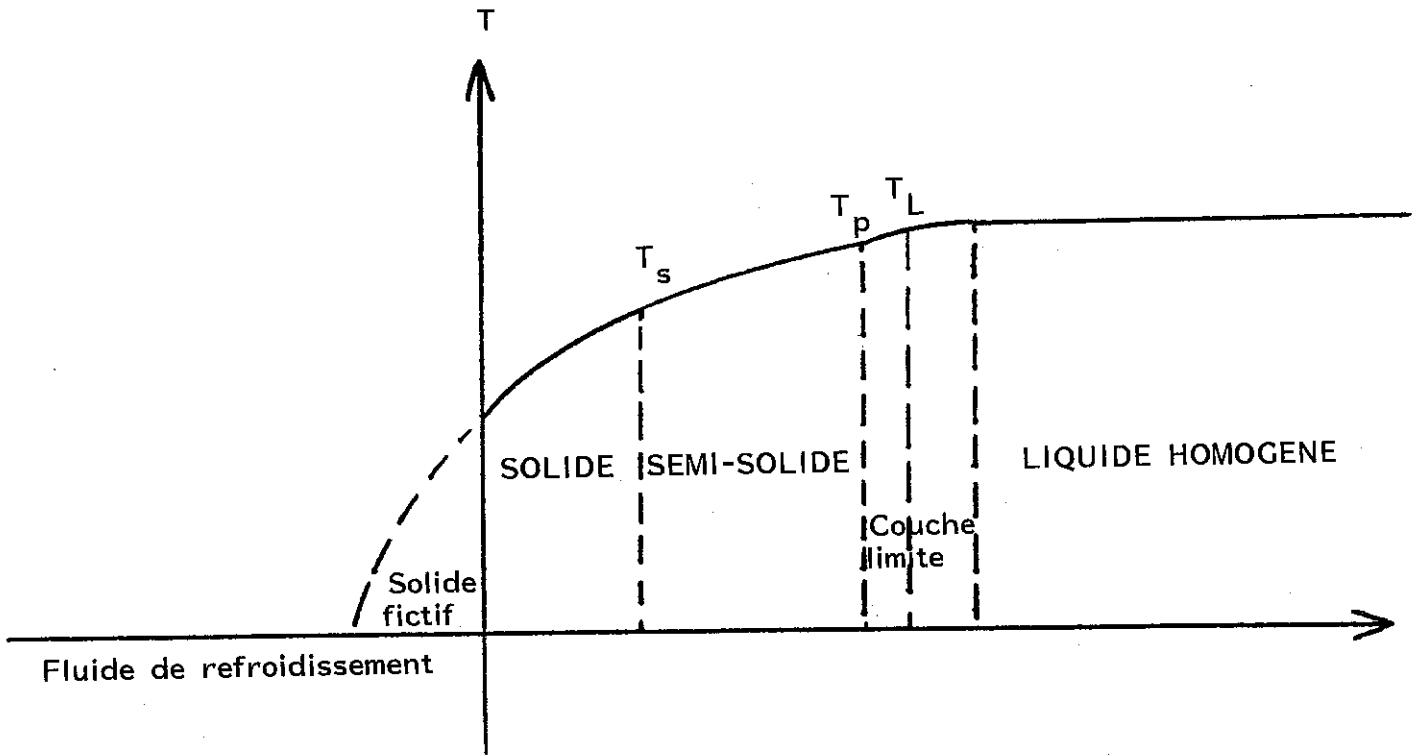


FIG. 41 : PROFIL THERMIQUE A UN INSTANT DONNE DE LA SOLIDIFICATION



La surfusion à la pointe des dendrites colonnaires est calculée par une relation simplifiée proposée par W. KURZ et D.J. FISCHER (1981) :

$$T_L - T_P = m Co \left[ 1 - \frac{1}{1 - \pi \left( \frac{-\Gamma(1-k)V}{D m Co} \right)^{1/2}} \right] \quad (10)$$

J. LIPTON traite les transferts thermiques entre le liquide et le front colonnaire dans l'approximation d'une couche limite en convection thermique naturelle. Dans le liquide, il existe une densité  $N$  de germes par unité de volume, qui se mettent à croître dans les couches de liquide en surfusion. La transition colonnaire-équiaxe est assimilée à l'instant où la fraction de solide équiaxe atteint 10 pour cent.

Les résultats du modèle servent à discuter les thermogrammes enregistrés lors de la solidification d'un mélange succinonitrile-bornéol en lingotière parallélépipédique.

Enfin, S. VASSEUR (1982) utilise une méthode de résolution explicite de l'équation de la chaleur monodimensionnelle dans la géométrie de la coquille de centrifugation ; les phénomènes convectifs ne sont pris en compte que dans la période correspondant au remplissage, et seulement par leurs effets thermiques (valeur élevée du coefficient d'échange à l'interface tube/coquille). Les profils thermiques dans l'épaisseur, l'avance des fronts solidus et liquidus, et les thermogrammes sont comparés aux résultats expérimentaux correspondants.

Parallèlement à ces modèles macroscopiques, une étude microscopique de la croissance dendritique en limite de stabilité des pointes a été réalisée par W. KURZ et al. (1981). Une relation est proposée entre rayon de pointe, surfusion et espacement primaire des dendrites dans un alliage. J. LIPTON, M.E. GLICKSMAN et al. (1984) utilisent un critère de stabilité et un couplage des champs de diffusion autour des pointes de dendrites supposées paraboliques. Les résultats montrent que le rayon de pointe passe par un minimum et la vitesse de croissance par un maximum, en fonction de la concentration en soluté. J.D. HUNT (1984) utilise une loi de croissance parabolique en fonction de la surfusion. Son modèle numérique, adapté aussi bien à la croissance dendritique qu'à la croissance eutectique, donne le moment de la transition colonnaire/équiaxe : pour des gradients suffisamment faibles la structure est totalement équiaxe.

Enfin, récemment, W. KURZ et al. (1985) et M. RAPPAZ et al. (1986) ont établi un modèle pour la croissance d'une dendrite colonnaire et pour celle d'une dendrite équiaxe.

Ce domaine d'étude est en constante évolution aujourd'hui et le couplage entre phénomènes microscopiques (à l'interface) et macroscopiques (thermiques et hydrodynamiques) fait l'objet de nombreux travaux. L'application de ces relations microscopiques dans la géométrie qui nous intéresse, pour un alliage binaire, à un modèle numérique de simulation de la solidification en présence de convection forcée dans le liquide est l'objet de ce chapitre, en vue de déterminer la limite entre structures colonnaire et équiaxe.

#### 4.4. CARACTERES GENERAUX DE LA MODELISATION

Les modèles qui sont décrits dans ce chapitre ont des caractéristiques communes : ce sont des modèles exploratoires sur l'influence de la convection sur l'extraction de la surchauffe et la transition colonnaire-équiaxe.

Les mouvements de convection dans le sens axial sont négligés car ils sont généralement très faibles (Voir Chapitre 2) comparés aux mouvements dans le sens orthoradial ; de plus, nous faisons l'hypothèse que le champ thermique est axisymétrique, même si le champ de vitesse dans le liquide ne l'est pas ; la seule dimension d'espace prise en compte est donc la dimension radiale.

Le tube est divisé en plusieurs zones : la zone solide, où la température est inférieure à celle du solidus ; la zone semi-solide où croissent les dendrites colonnaires, dont la température est comprise entre celle de solidus et celle des pointes de dendrites ; la zone liquide en surfusion, dont la température est inférieure à celle du liquidus, et le reste du liquide.

De plus, nous voulons tenir compte de la convection forcée dans le liquide ; étant donné qu'il s'avère très difficile de connaître le champ de vitesse précis dans le liquide (Chapitres 1 et 3), nous sommes amenés à supposer que le liquide est soumis à un brassage partout identique caractérisé par une vitesse moyenne  $U$ . Cette vitesse est un paramètre ajustable dont la valeur est donnée par les résultats expérimentaux obtenus sur les traceurs (chapitre 2).

Ceci amène à créer une nouvelle subdivision dans le liquide : la zone soumise au brassage, dont on suppose alors qu'elle est homogène en température ; une couche limite hydrodynamique dont l'épaisseur  $\delta$  est calculée indépendamment du champ thermique.

La couche limite et la zone semi-solide sont supposées exemptes de tout mouvement de liquide ; ceci ne correspond pas à la réalité physique, mais ne crée pas de gros écarts entre les résultats et les faits expérimentaux, parce que les phénomènes hydrodynamiques prépondérants sont ceux qui affectent le liquide hors de la couche limite.

La taille de la couche limite est déterminée à partir de la vitesse moyenne de brassage  $U$ .  $U$  diminue au fur et à mesure que la solidification avance, et s'annule quand le liquide disparaît, en suivant une loi linéaire choisie arbitrairement :

$$U = U_0 \cdot \frac{E_p}{E_0} \quad (11)$$

On rend ainsi compte de façon très simple de l'influence des phénomènes de brassage dans la coquille sur les phénomènes thermiques. La vitesse  $U$  et la taille caractéristique de l'écoulement  $B$  (prise arbitrairement à égale à  $E_p/2$ ) donnent le nombre de Reynolds :

$$Re = \rho_3 \frac{B \cdot U}{\mu} \quad (12)$$

On calcule le nombre de Nusselt par une corrélation classique applicable aux écoulements le long d'une plaque plane, ce qui est une approximation valable si le rayon de courbure est grand devant la taille caractéristique des écoulements.

En régime laminaire, on a :

$$Nu = 0,67 \cdot Pr^{0,33} \cdot Re^{0,5} \quad (13)$$

Le nombre de Prandtl vaut :  $Pr = \frac{\mu C_{p3}}{\lambda_3}$

En régime turbulent, on a :

$$Nu = 0,036 \cdot Pr^{0,33} \cdot Re^{0,8} \quad (14)$$

Dans tous les cas étudiés ici, on obtient un nombre de Nusselt turbulent très petit devant le nombre de Nusselt laminaire ; le régime d'écoulement est donc supposé laminaire.

La taille de la couche limite est par définition :

$$\delta = \frac{B}{Nu} \quad (15)$$

Avec les approximations choisies,  $\delta$  est une constante.

D'autre part, on ne tient aucun compte de la convection naturelle ; en effet, les gradients thermiques dans le liquide sont stabilisants en comparaison

de la gravité apparente due à la centrifugation : les couches les plus froides, donc les plus denses, sont à l'extérieur ; il ne peut y avoir de convection naturelle d'origine thermique. La convection d'origine soluble peut exister, mais est négligée ici, les aciers étant peu alliés.

4.5. LE MODELE SEMI-ANALYTIQUE

4.5.1. Caractères généraux

Nous proposons ici une première approche. Elle consiste à appliquer le modèle de LIPTON présenté au paragraphe 4.3 au cas d'un liquide en convection forcée. Le liquide est supposé parfaitement brassé à température uniforme  $T_b$ , excepté la couche limite d'épaisseur  $\delta$  comptée à partir de la pointe des dendrites colonnaires.  $\delta$  est fonction de l'échelle B et de la vitesse U (Paragraphe 4.4).

Dans cette approximation, le transfert de chaleur entre le liquide et le front colonnaire s'écrit simplement

$$\rho_3 C_{p3} E_p(t) \cdot \frac{\Delta T_b}{\Delta t} = \lambda_3 \frac{T_b - T_p}{\delta} \tag{16}$$

A l'intérieur de la couche limite, le profil de température est supposé parabolique. La pente de la tangente est nulle du côté du coeur liquide. Elle est imposée par la condition de continuité de la température du côté colonnaire. Ce profil sert à déterminer la position de l'isotherme liquidus par rapport à la pointe des dendrites colonnaires.

Ce système d'équations vérifie les conditions de continuité de la température, de conservation du flux aux interfaces, ainsi que la condition de flux nul à la surface libre du liquide. Dans le solide colonnaire, la conservation de la chaleur est satisfaite par la relation (1). Dans la zone semi-solide colonnaire, la relation (2) satisfait également la conservation de la chaleur, en tenant compte de la chaleur latente sous forme d'une capacité calorifique modifiée. On sait que cela revient à admettre une distribution particulière (uniforme) de la source de chaleur latente dans l'intervalle  $T_L, T_S$ . Par contre, comme J. LIPTON, nous n'introduisons pas de dégagement de chaleur latente dans le liquide. A cause de cette approximation le présent modèle semi-analytique ne peut pas s'appliquer à des fractions solides équiaxes importantes.

#### 4.5.2. Mise en oeuvre du modèle semi-analytique

A l'instant initial, le matériau d'épaisseur  $E_0$  est supposé entièrement liquide à la température  $T_c$ . Ensuite, à partir des équations (1) à (5), (10) et (15), la température en chaque point et la position des différentes frontières de zones sont calculées à chaque pas de temps. Le calcul est arrêté lorsque le coeur liquide entre en surfusion.

Le calcul de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  est fait auparavant et de façon séparée. Il est nécessaire de refaire le calcul chaque fois que l'on change l'un des paramètres intervenant dans les équations (7) et (8). Ce système peut être résolu comme le propose J. LIPTON (1982) par itérations successives : on part d'une valeur plausible de  $\phi_1$ , l'équation (7) donne alors  $\phi_2$  en inversant la fonction d'erreur ;  $\phi_2$  sert à calculer  $\phi_1$  dans l'équation (8) et on itère le processus.

Cependant, dans certains cas, cette méthode diverge ; comme il est indispensable d'utiliser une méthode qui converge dans tous les cas, il a semblé préférable de procéder numériquement de façon analogue à un traitement graphique : le programme calcule, pour toute une gamme de valeurs arbitraires de  $\phi_1$ , les valeurs de  $\phi_2$  correspondantes par l'équation (7) ; de même des valeurs de  $\phi_1$  sont calculées pour toute une gamme de valeurs de  $\phi_2$  par l'équation (8). Les deux courbes correspondantes sont alors tracées ; le programme détermine également le point d'intersection des deux courbes par itérations successives (Fig. 42). Cette méthode très longue comparativement au calcul thermique lui-même (les deux tiers du temps consacré au calcul thermique), converge de façon sûre.

#### 4.5.3. Résultats du modèle semi-analytique

Nous avons appliqué le modèle semi-analytique à la solidification en coquille centrifuge d'un alliage Fe-C 0.1 pourcent. L'annexe 4 rassemble les données thermiques et physico-chimiques utilisées pour ce calcul. Dans ce modèle,  $h$ , le coefficient d'échange thermique entre solide et coquille est constant.

Plusieurs cas ont été testés ; trois vitesses de brassage correspondant à des cas pouvant exister dans la coquille ont été choisies, 1 mm/s, 1 cm/s et 10 cm/s (Cf. Chapitre 2). Deux épaisseurs de métal ont été testées, 40 mm et 120 mm, cette dernière étant une forte épaisseur pour les tubes de diamètre 1 m à 1 m 50.

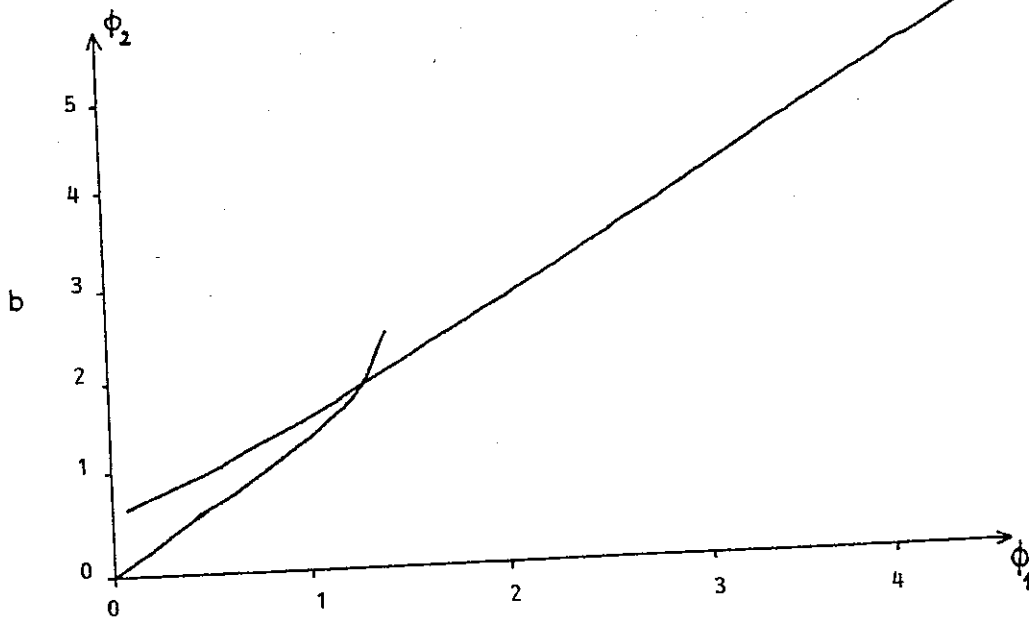
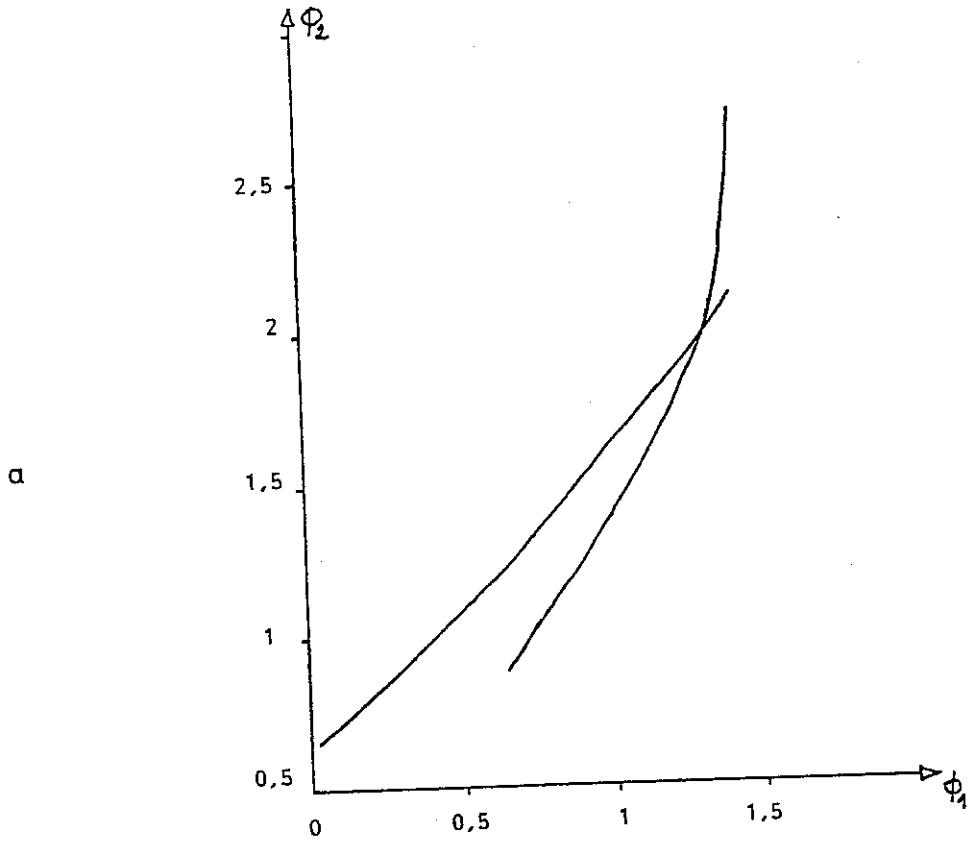


FIG. 42 : COMPARAISON ENTRE LES DETERMINATIONS NUMERIQUE (b) ET GRAPHIQUE (a) DES CONSTANTES  $\phi_1$  et  $\phi_2$

L'évolution des limites de zones au cours du temps, les profils thermiques à un instant donné et les thermogrammes à des distances choisies de la paroi sont présentés Fig. 43, 44, 45.

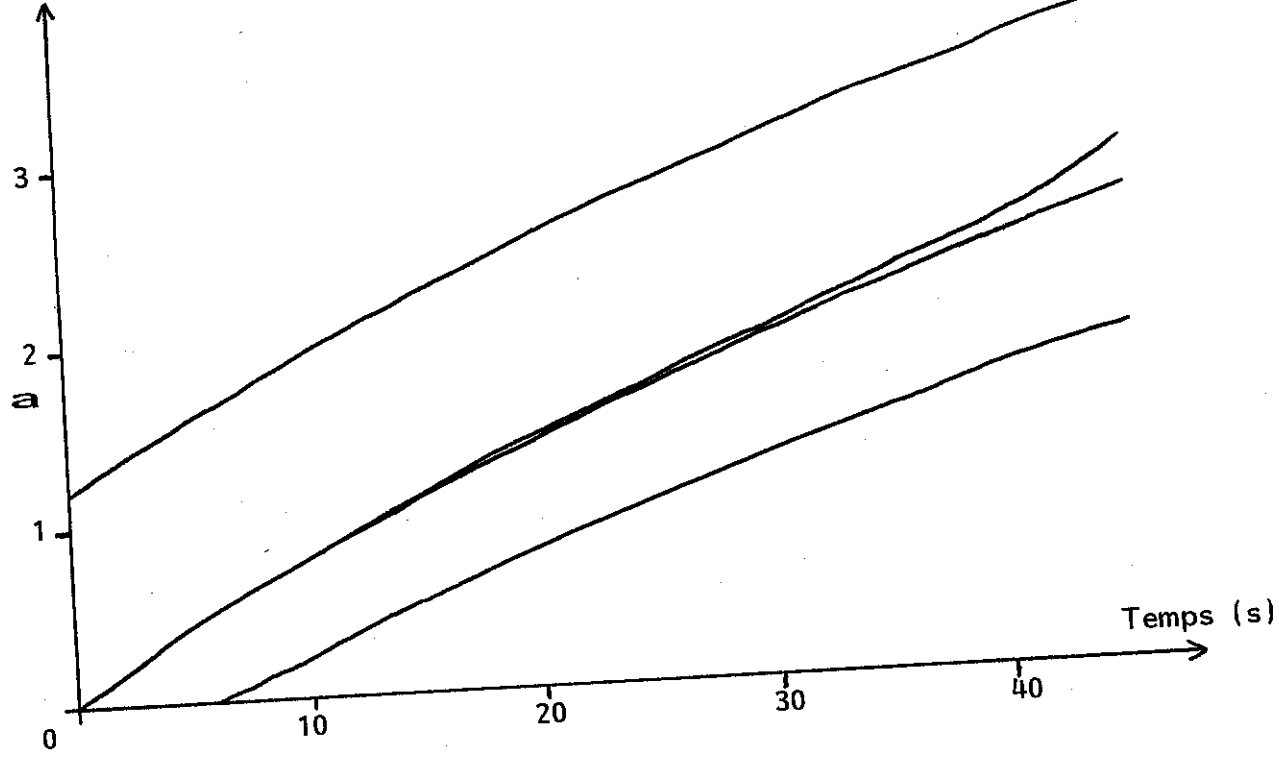
Prenons comme cas de référence  $U_0 = 10$  mm/s,  $E_0 = 40$  mm. La figure 43.b montre l'évolution des limites de zone. A un instant donné, par exemple 21 s, en partant de la paroi de la coquille, on rencontre successivement l'isotherme solidus (courbe 1), la pointe des dendrites colonnaires (courbe 2), l'isotherme liquidus (courbe 3), enfin la frontière entre la couche limite et le coeur liquide (courbe 4). Le domaine liquide en surfusion est limité par les courbes 2 et 3. Il est donc très étroit, comparé à l'épaisseur du matériau, mais il s'étend rapidement jusqu'à la surface libre lorsque le bain liquide entre en surfusion. L'instant correspondant noté  $t_{SG}$  est reporté dans le tableau 9. La figure 44.b montre le profil de température dans l'épaisseur du matériau, à deux instants différents. Avec l'échelle choisie, on ne peut pas distinguer le changement de pente correspondant au changement de régime thermique entre la zone solide et la zone semi-solide colonnaire. Par contre, on devine le changement de pente à l'entrée dans la couche limite convective. Une première manifestation du brassage est l'épaisseur de la couche limite. Dans l'approximation choisie, elle est constante au cours de la solidification. Les valeurs sont regroupées dans le tableau 10.

La durée  $t_{SG}$  nécessaire pour que le bain liquide entre en surfusion est un paramètre important en ce qui concerne la solidification. Dans le cas de référence ( $E_0 = 40$  mm,  $U_0 = 10$  mm/s)  $t_{SG}$  vaut 42 s. Une estimation grossière admettant que la variation d'enthalpie est extraite avec un flux constant correspondant à une température moyenne conduit à 34 s (Annexe 7). En fait, une telle approximation ne tient pas compte du fait que le flux à la coquille décroît très rapidement, en même temps que le métal refroidit (Fig.46). Le tableau 9 montre que  $t_{SG}$  décroît lorsque le brassage devient intense. Cet effet est particulièrement sensible lorsque l'épaisseur est forte.

Un autre paramètre important pour la structure de solidification est la profondeur de la zone semi-solide colonnaire. Le tableau 11 regroupe les valeurs lues sur la figure 43 à l'instant  $t_{SG}$ .

L'effet du brassage sur la profondeur semi-solide est faible lorsque l'épaisseur de métal est faible ; par contre il devient important lorsque l'épaisseur totale est forte.

EPAISSEUR (cm)



EPAISSEUR (cm)

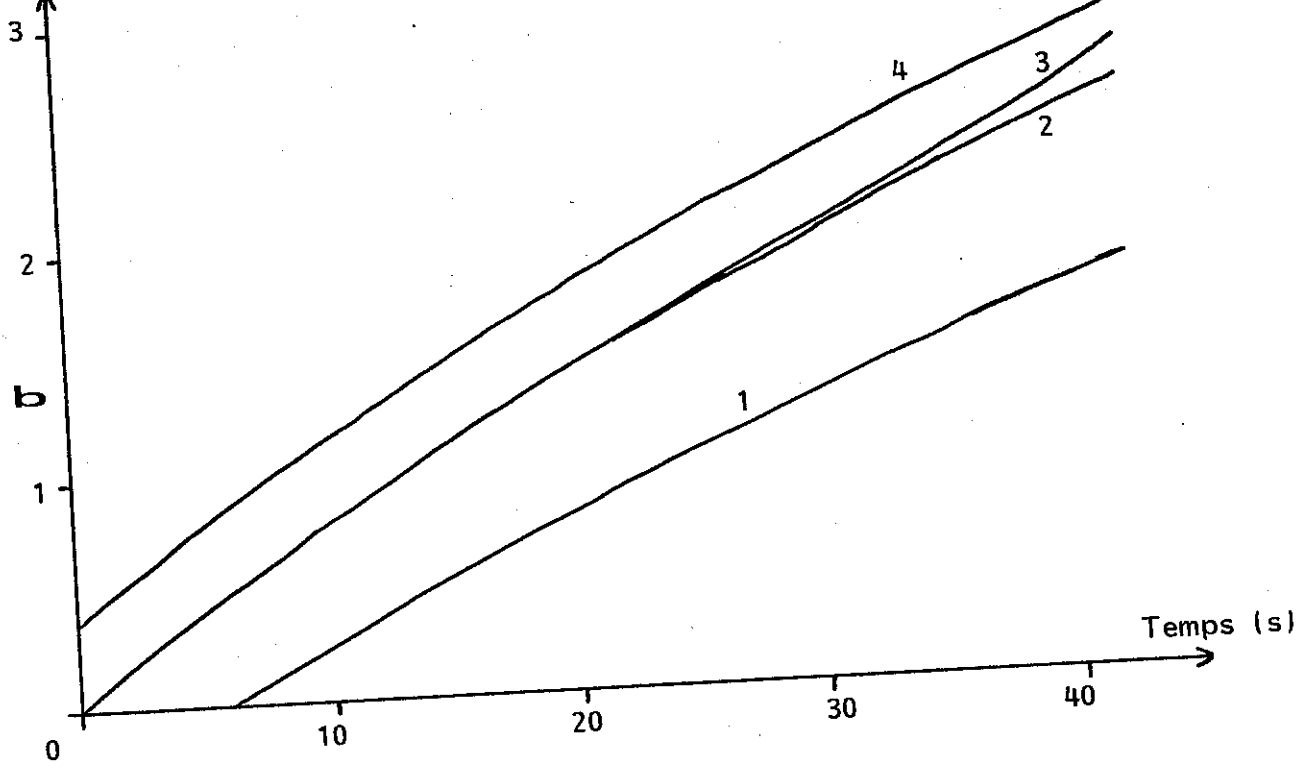


FIG. 43 : EVOLUTION DES LIMITES DE ZONES EN FONCTION DU TEMPS POUR  $U = 1 \text{ mm/s}$  et  $E_p = 4 \text{ cm}$  (a) ET POUR  $U=1 \text{ cm/s}$  et  $E_p = 4 \text{ cm}$  (b)



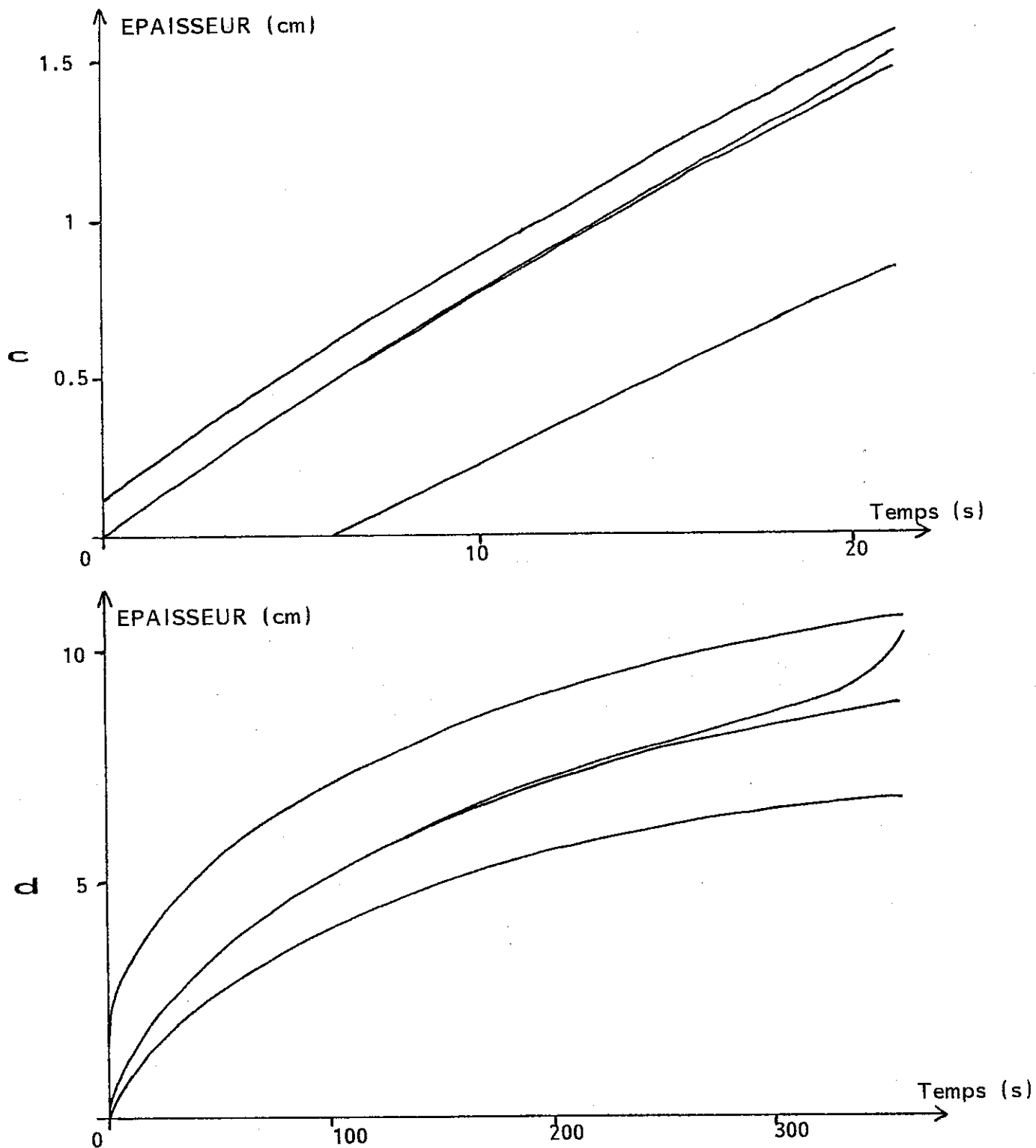


FIG. 43 : EVOLUTION DES LIMITES DE ZONES EN FONCTION DU TEMPS  
 POUR  $U = 10 \text{ cm/s}$  et  $E_p = 4 \text{ cm}$  (c) ET POUR  $U = 1 \text{ mm/s}$  et  $E_p = 12 \text{ cm}$  (d)

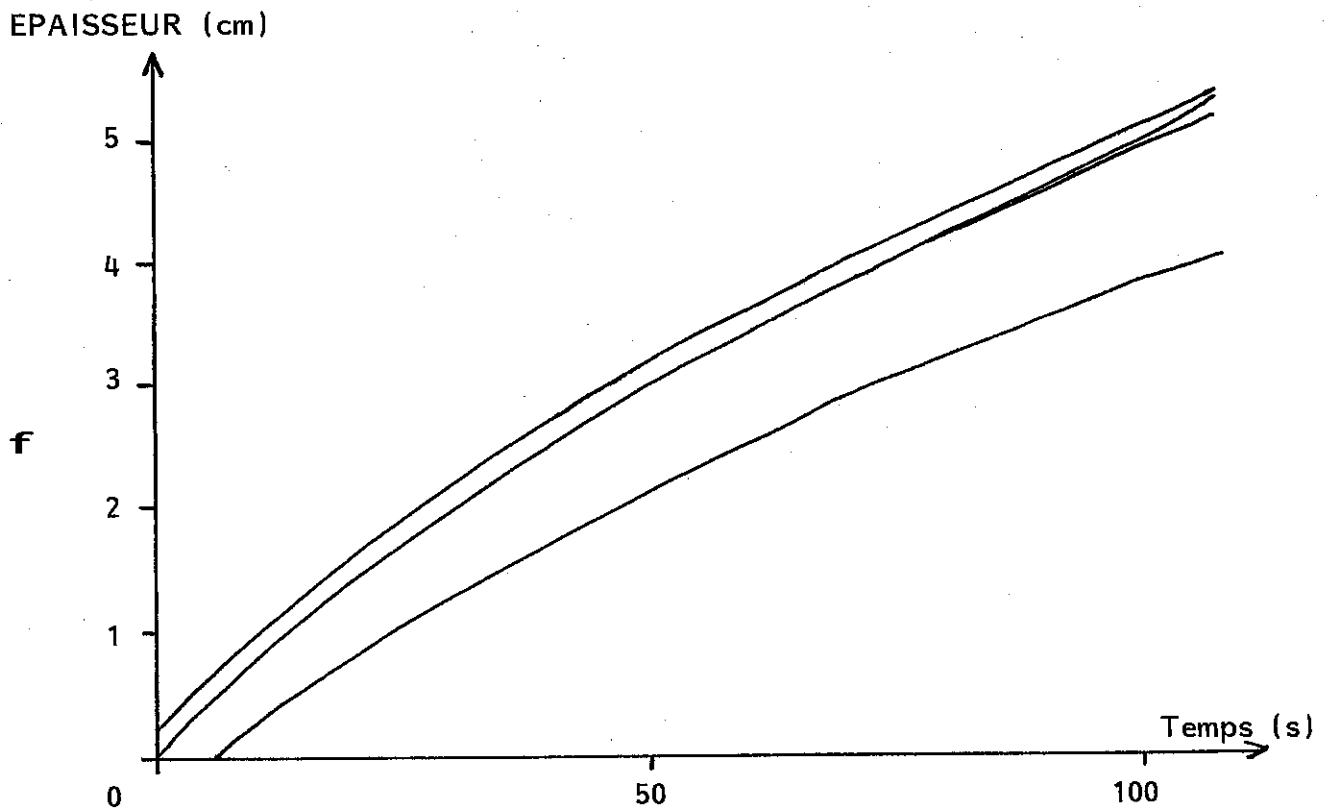
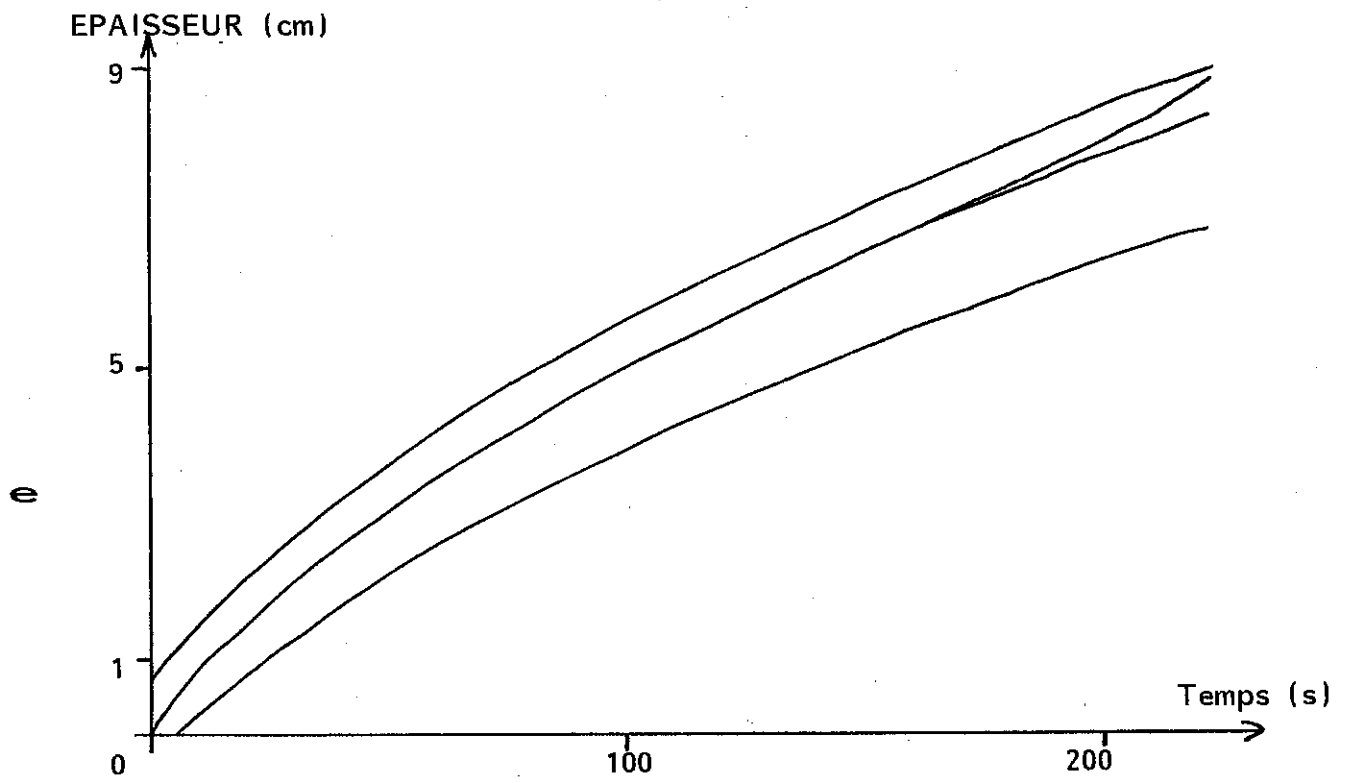


FIG. 43 : EVOLUTION DES LIMITES DE ZONES EN FONCTION DU TEMPS  
POUR  $U = 1 \text{ cm/s}$  et  $E_p = 12 \text{ cm}$  (e) ET POUR  $U = 10 \text{ cm/s}$  et  $E_p = 12 \text{ cm}$  (f)

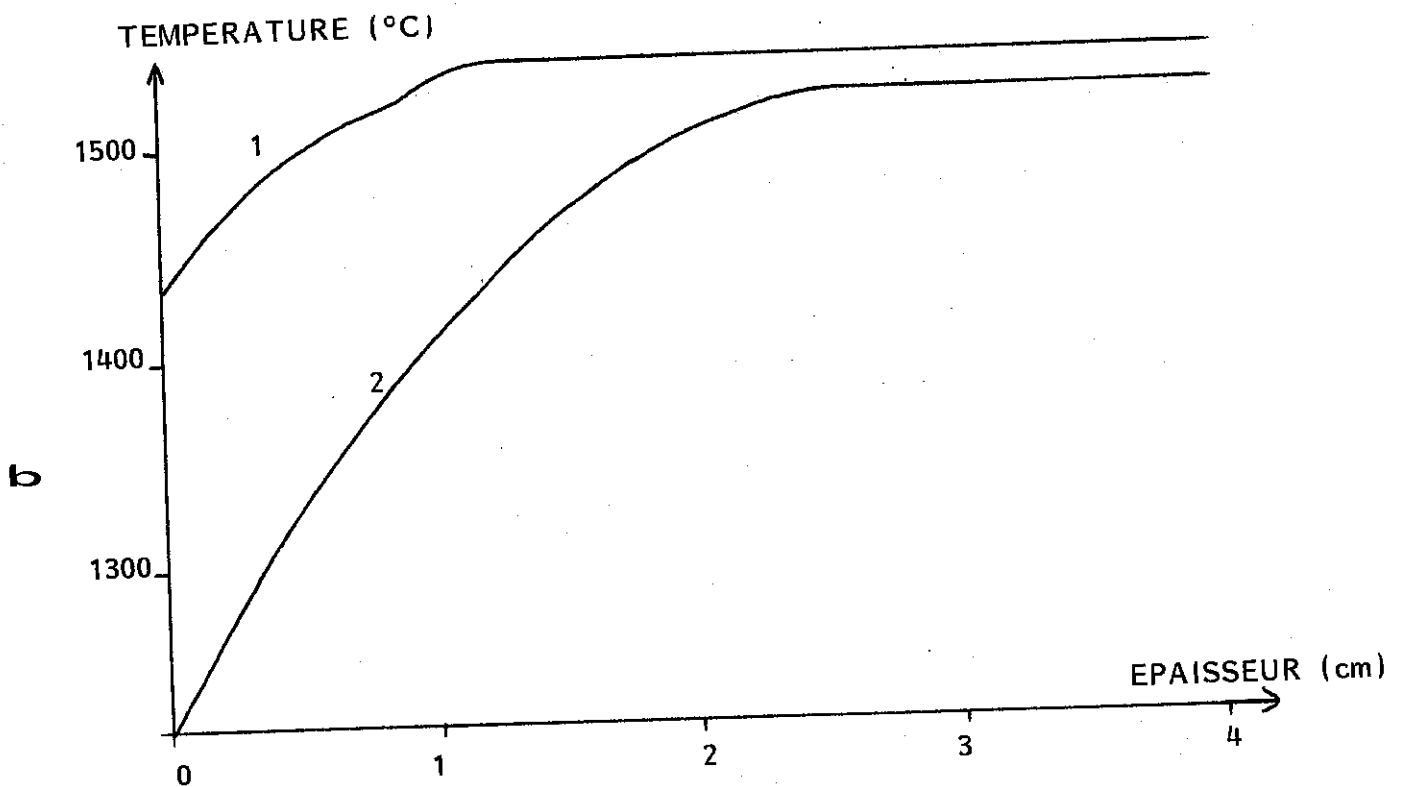
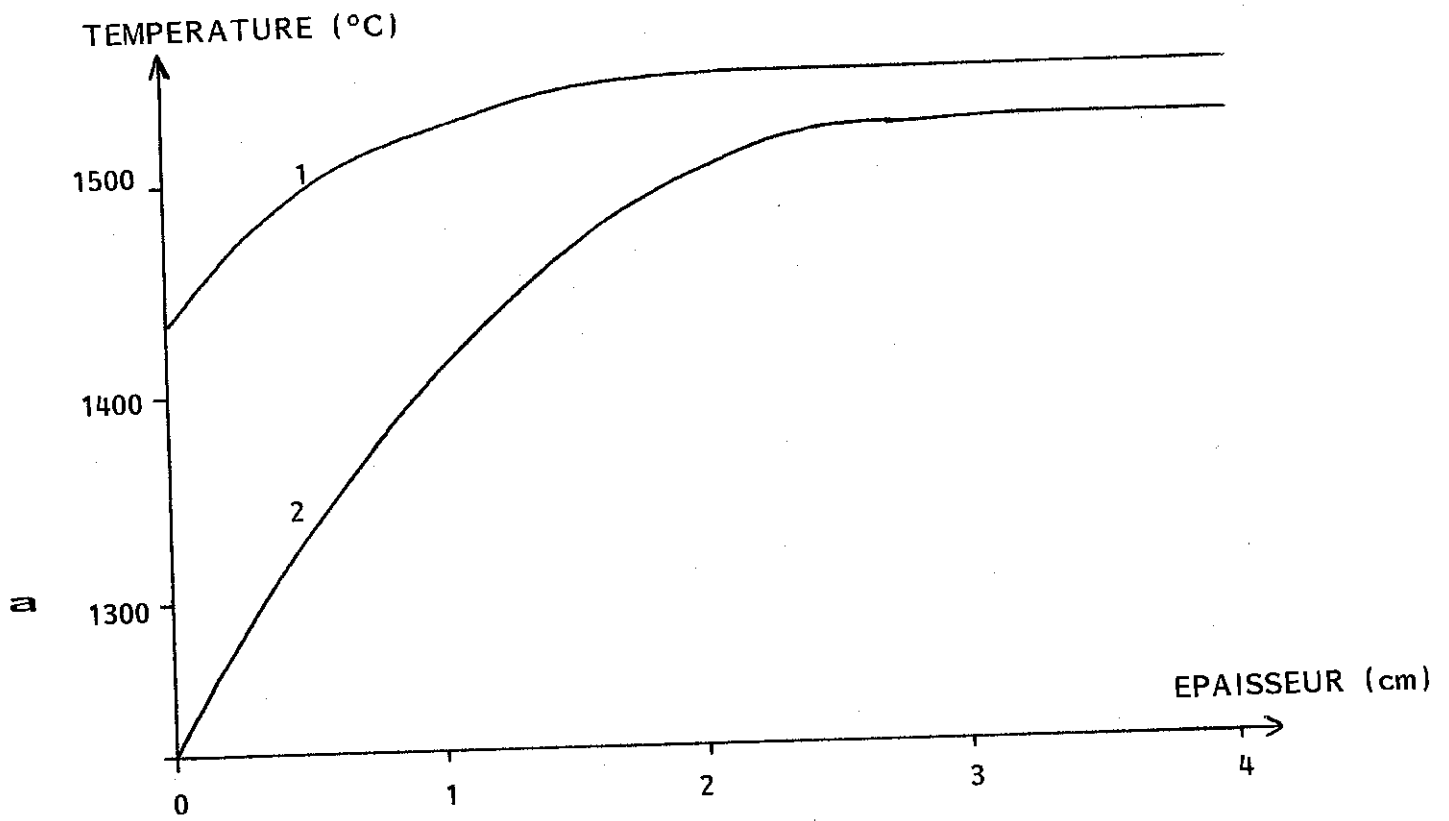


FIG. 44 : PROFILS THERMIQUES DANS LE TUBE POUR  
 $U = 1 \text{ mm/s}$  et  $E_p = 4 \text{ cm}$  (a) ET POUR  $U = 1 \text{ cm/s}$  et  $E_p = 4 \text{ cm}$  (b)

COURBE 1,  $t = 2.5 \text{ s}$  ; COURBE 2,  $t = 7 \text{ s}$  APRES LA COULEE

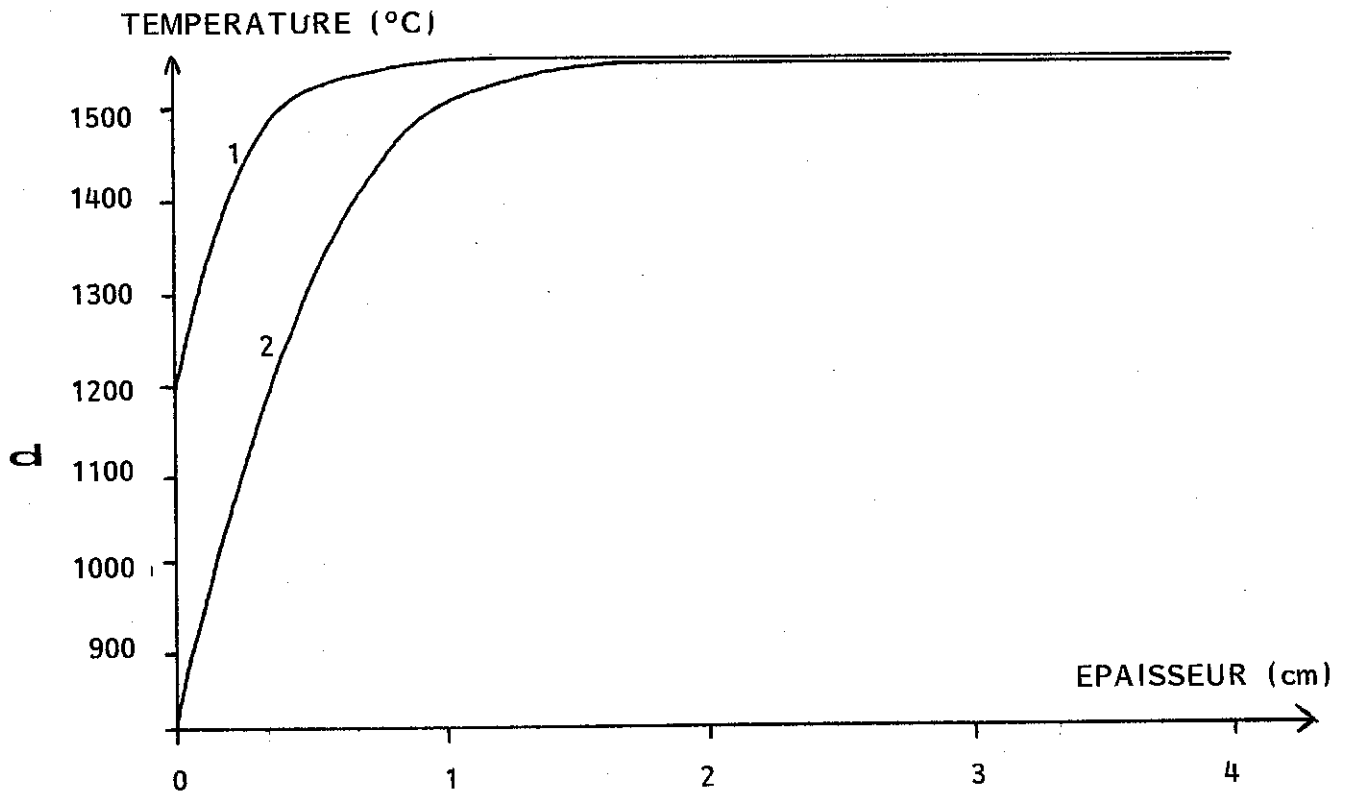
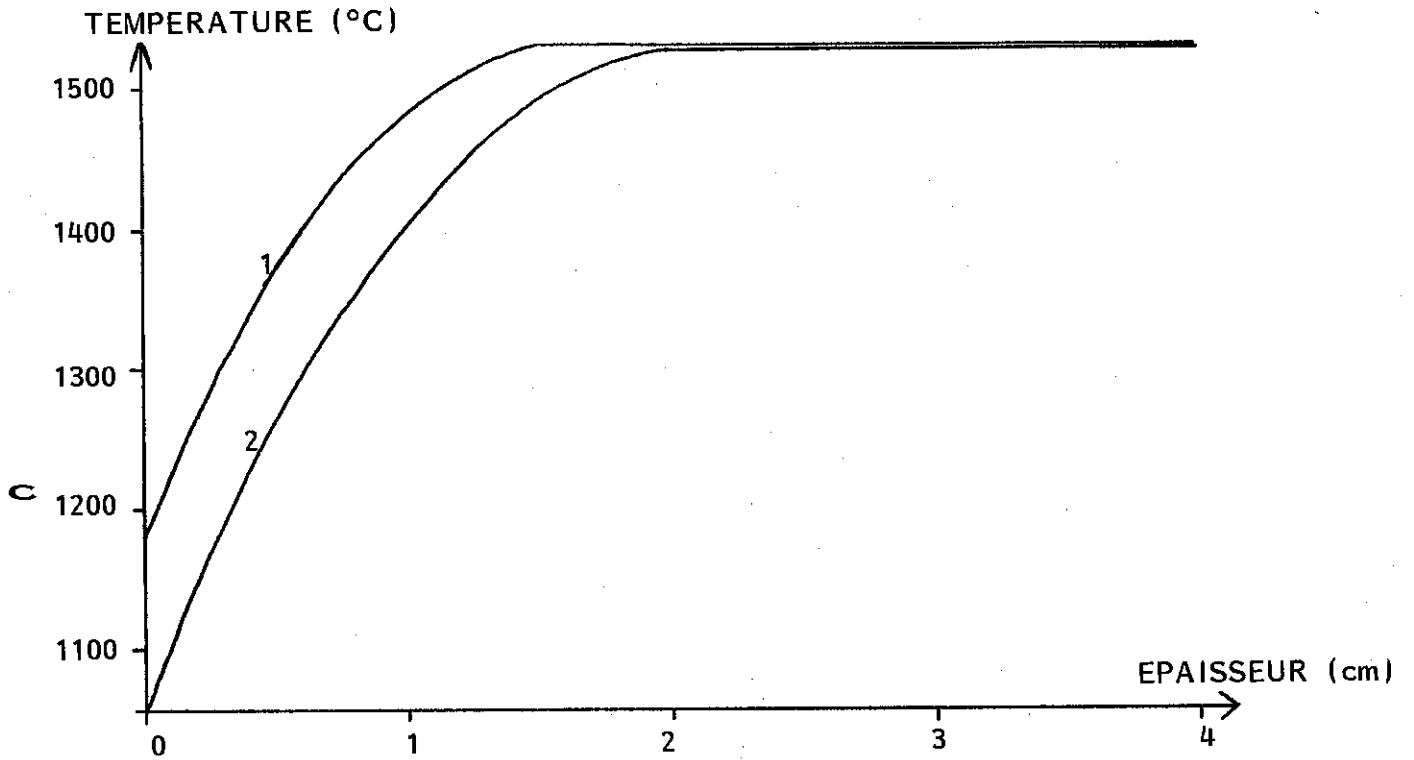


FIG. 44 : PROFILS THERMIQUES DANS LE TUBE POUR  
 $U = 10 \text{ cm/s}$  et  $E_p = 4 \text{ cm}$  (c) ET POUR  $U = 1 \text{ mm/s}$  et  $E_p = 12 \text{ cm}$  (d)  
 COURBE 1,  $t = 2.5 \text{ s}$  ; COURBE 2,  $t = 7 \text{ s}$  APRES LA COULEE

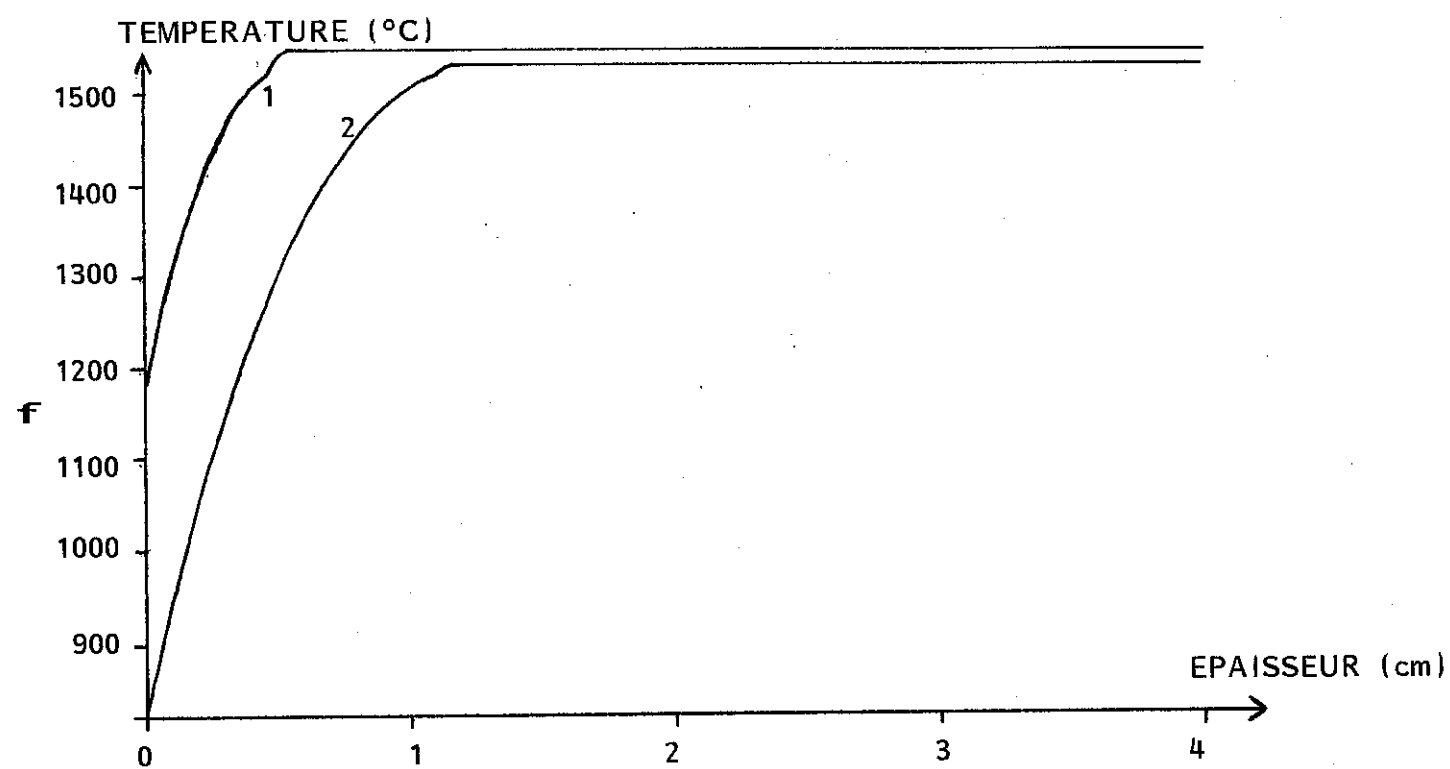
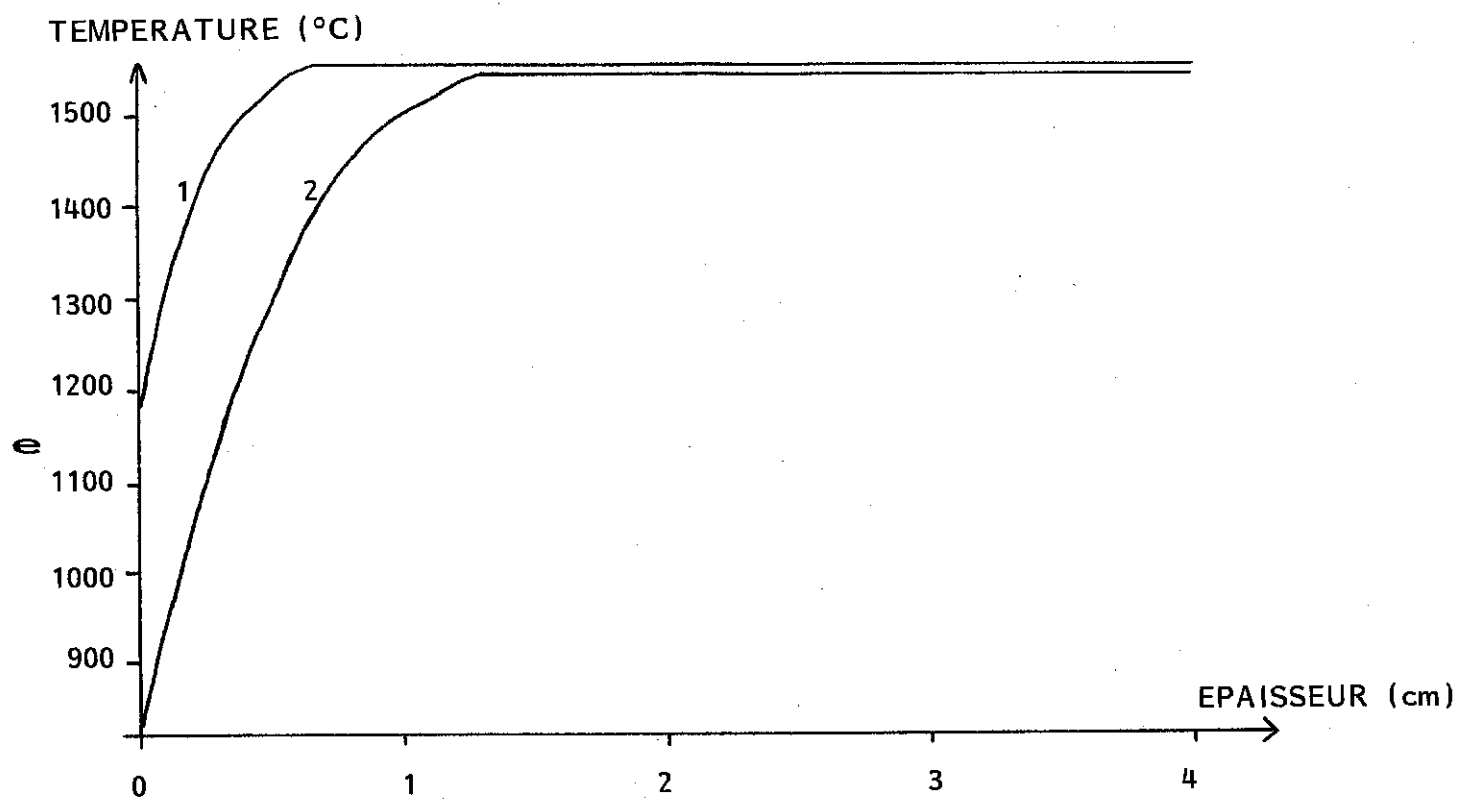


FIG. 44 : PROFILS THERMIQUES DANS LE TUBE POUR  
 $U = 1 \text{ cm/s}$  et  $Ep = 12 \text{ cm}$  (e) ET POUR  $U = 10 \text{ cm/s}$  et  $Ep = 12 \text{ cm}$  (f)  
COURBE 1,  $t = 2.5 \text{ s}$  ; COURBE 2,  $t = 7 \text{ s}$  APRES LA COULEE

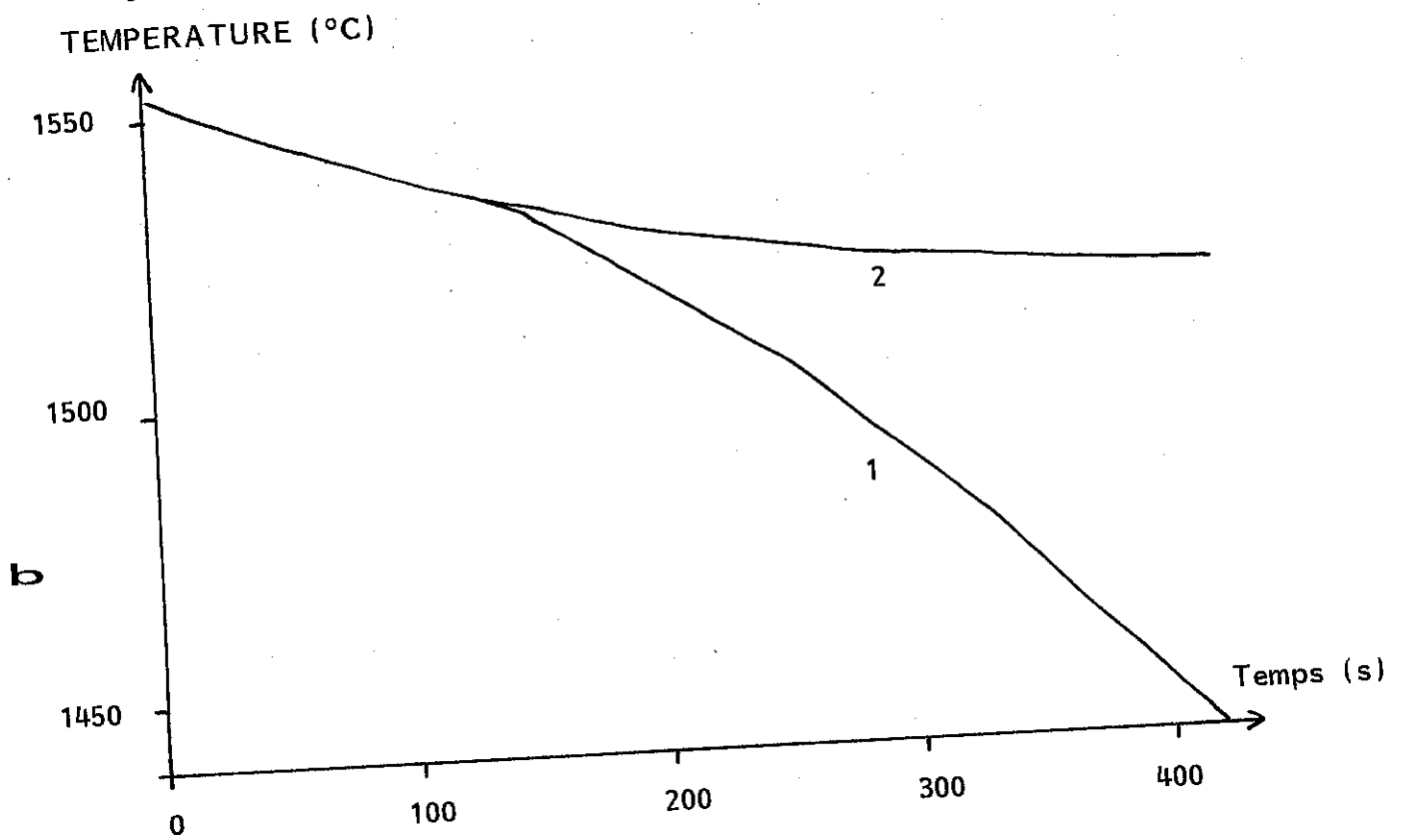
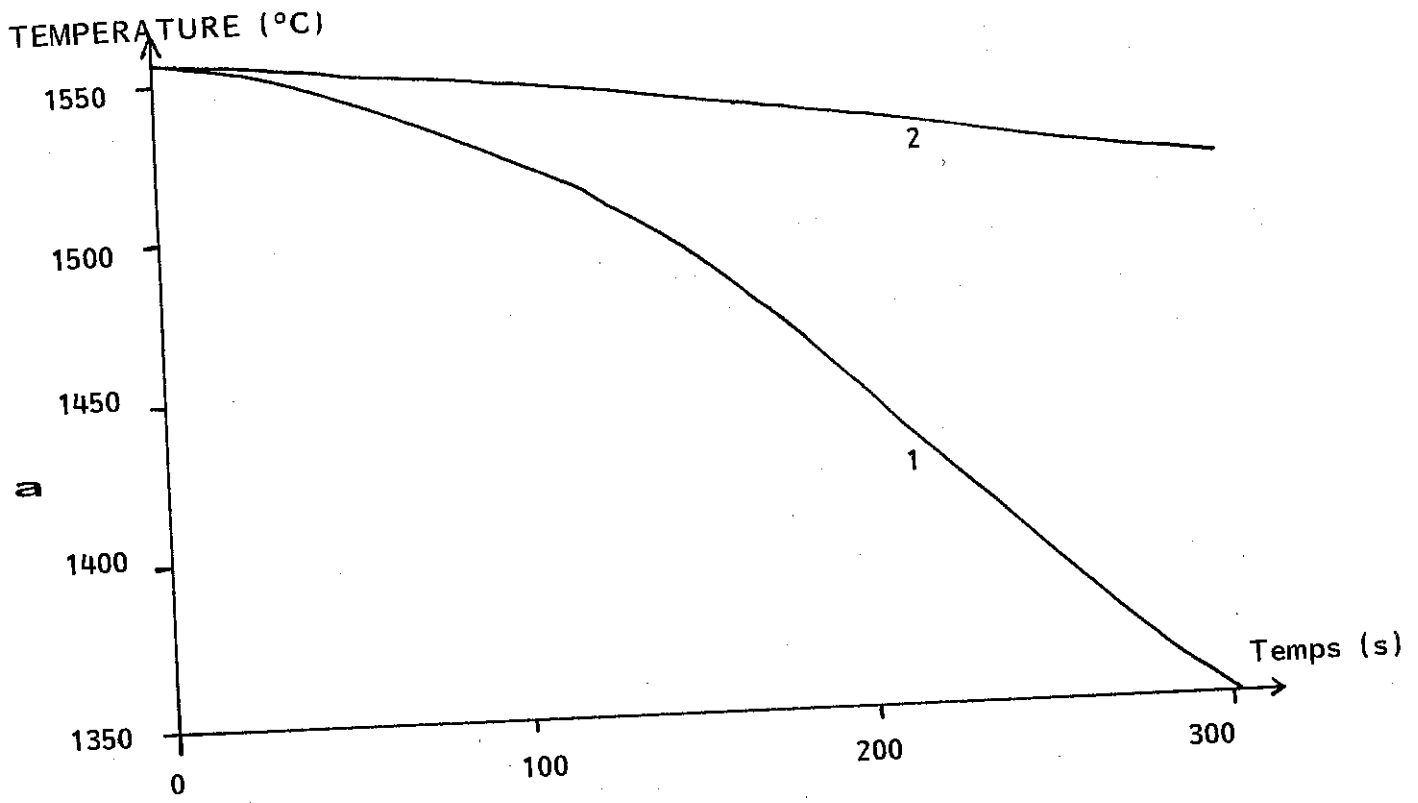


FIG. 45 : THERMOGRAMMES A 13 MM (1) ET A 30 MM (2) DE LA PAROI

a :  $U = 1 \text{ mm/s}$ ,  $E_p = 4 \text{ cm}$   
 b :  $U = 1 \text{ cm/s}$ ,  $E_p = 4 \text{ cm}$

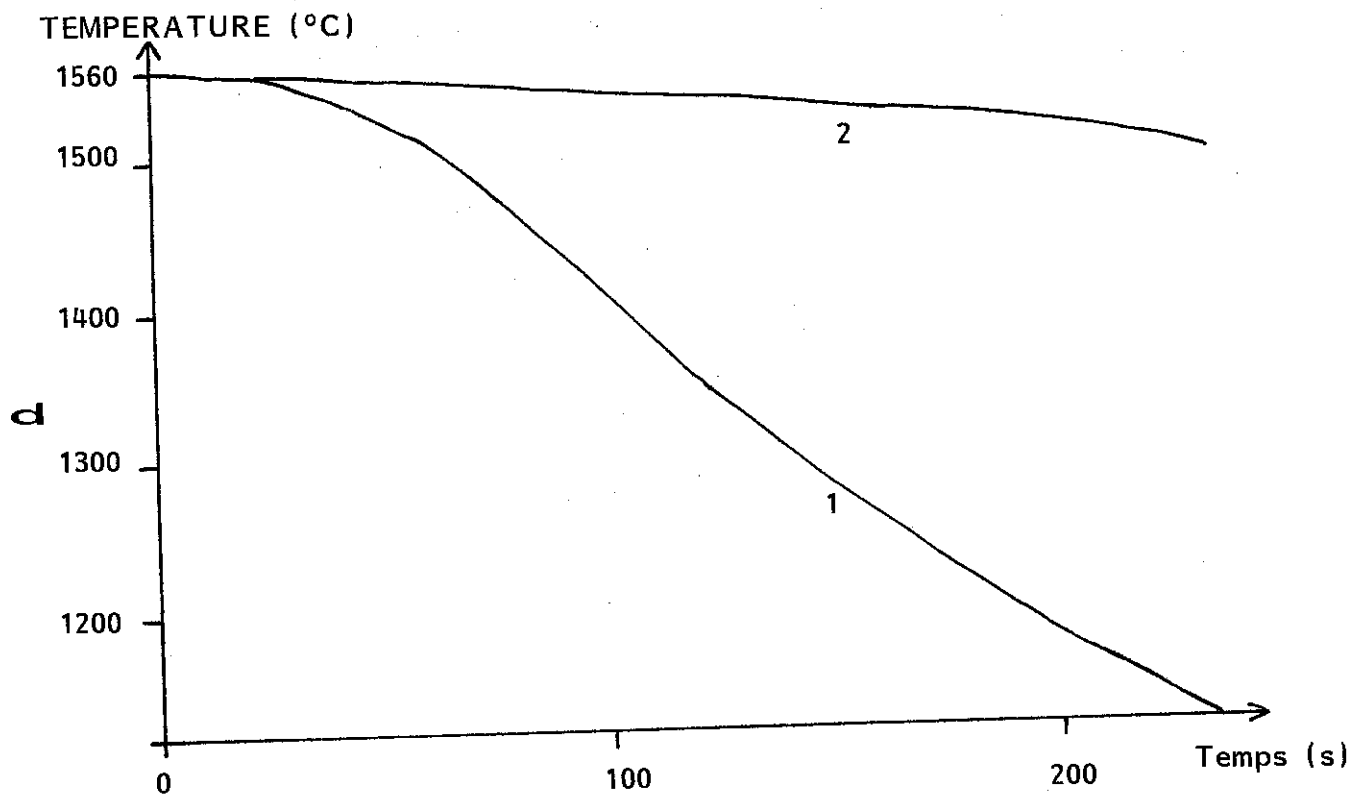
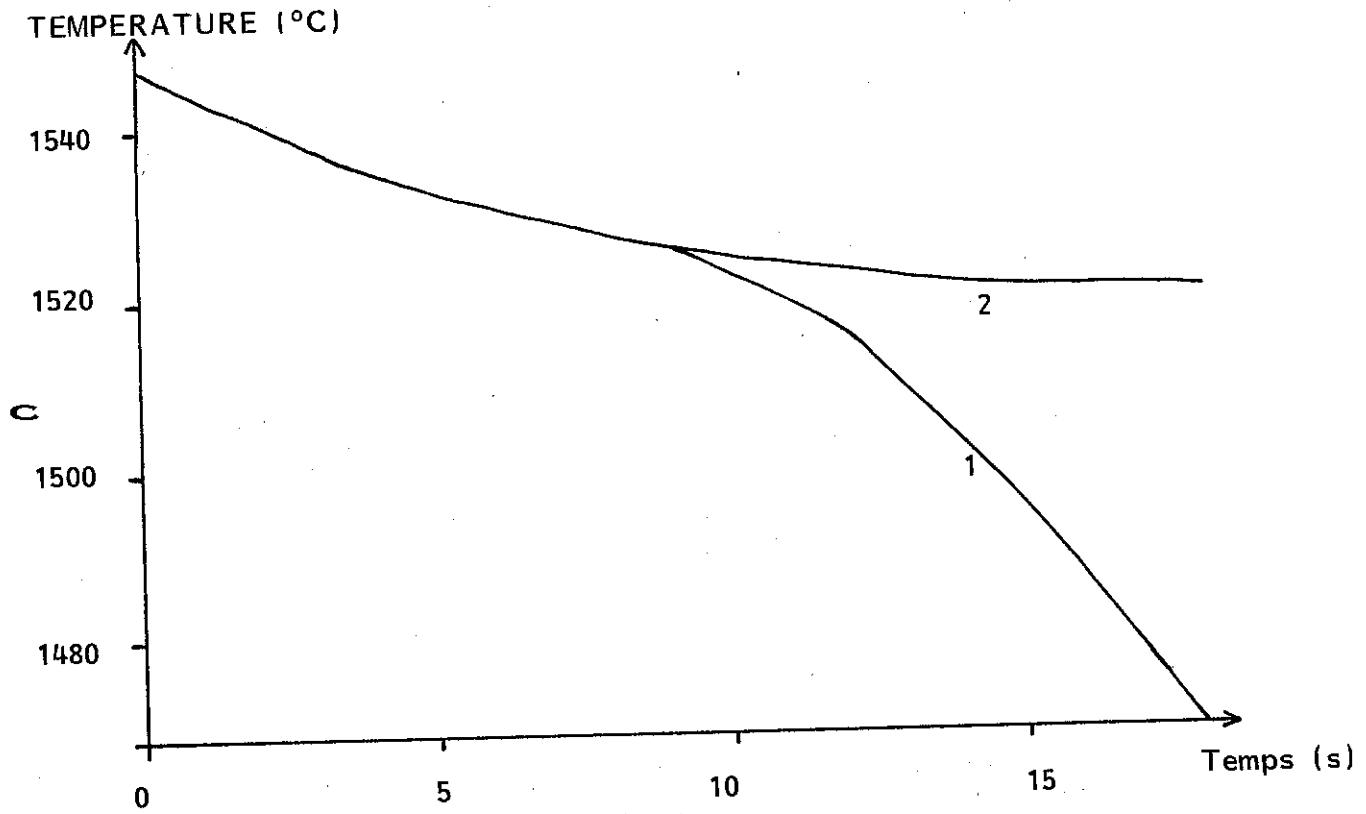


FIG. 45 : THERMOGRAMMES A 13 MM (1) ET A 30 MM (2) DE LA PAROI

c :  $U = 10 \text{ cm/s}$ ,  $E_p = 4 \text{ cm}$   
 d :  $U = 1 \text{ mm/s}$ ,  $E_p = 12 \text{ cm}$

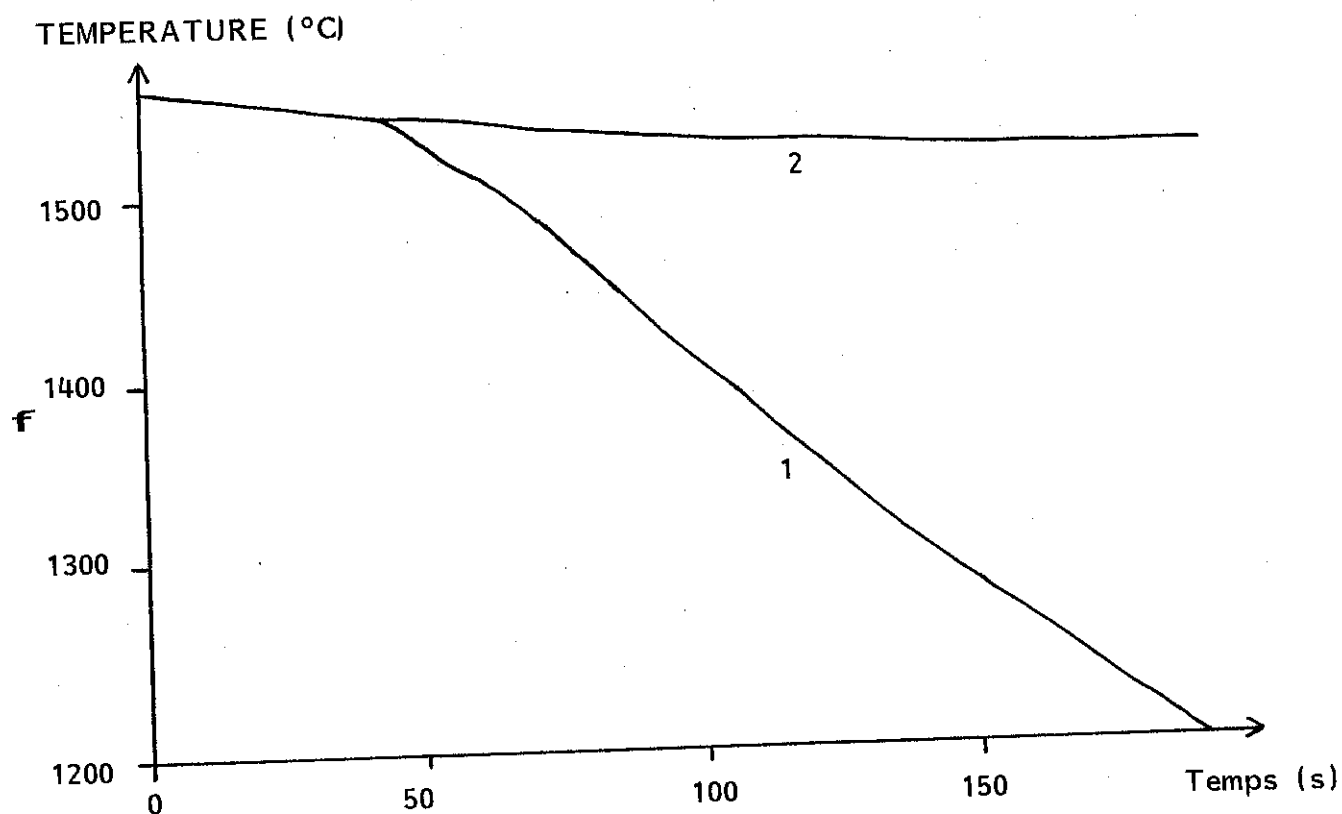
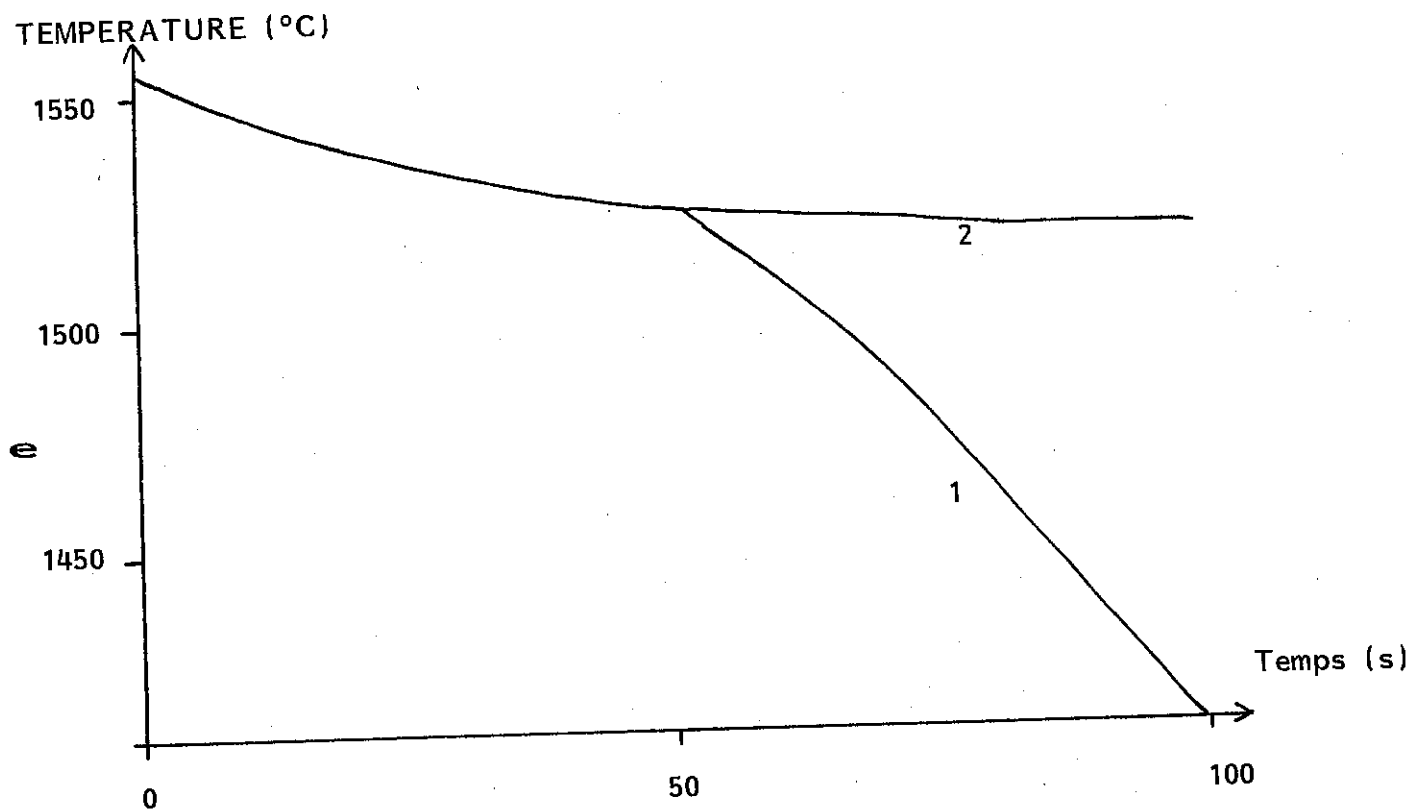


FIG. 45 : THERMOGRAMMES A 13 MM (1) ET A 30 MM (2) DE LA PAROI

e :  $U = 10 \text{ cm/s}$ ,  $E_p = 12 \text{ cm}$   
 f :  $U = 1 \text{ cm/s}$ ,  $E_p = 12 \text{ cm}$



$E_p \backslash U$	1mm/s	10mm/s	100mm/s
40 mm	45 s	42 s	21 s
120 mm	358 s	223 s	108 s

**Tableau 9 :**  $t_{SG}$ , temps d'évacuation de la surchauffe en fonction de l'épaisseur du tube  $E_p$  et de la vitesse de brassage  $U$ .

$E_0 \backslash U$	1 mm/s	10 mm/s	100 mm/s
40 mm	12	3	1,2
120 mm	21	6	1,8

**Tableau 10 :** Epaisseur de la couche limite en mm, en fonction de la vitesse de brassage  $U$  et de l'épaisseur de liquide initiale  $E_0$ .

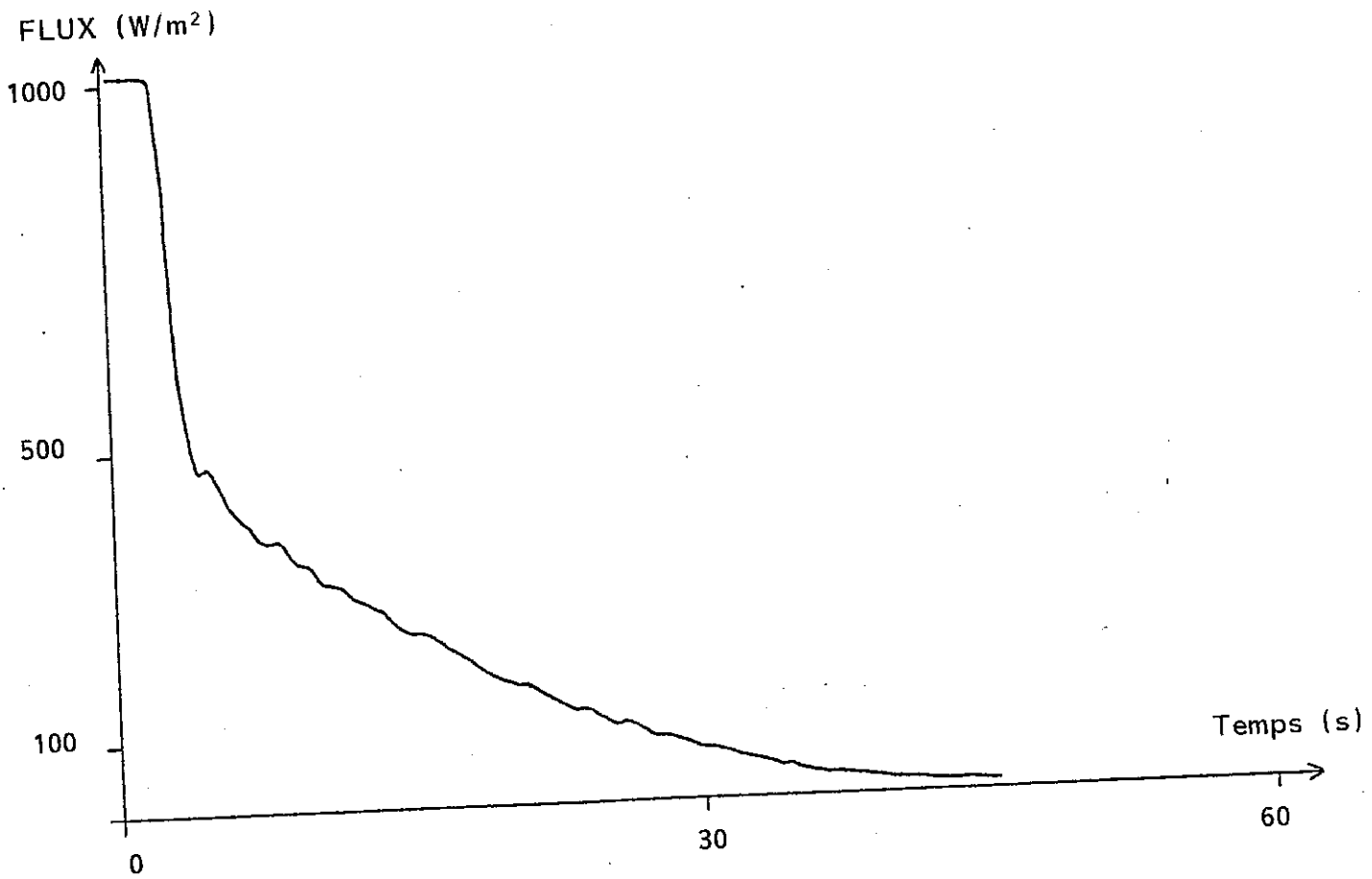


FIG. 46 : EVOLUTION DU FLUX DE CHALEUR A LA PAROI

$E_0 \backslash U$	1 mm/s	10 mm/s	100 mm/s
40 mm	7,8 mm	7,7 mm	6,4 mm
120 mm	29,0 mm	15,3 mm	11,0 mm

Tableau 11 : Profondeur semisolide colonnaire à l'instant  $t_{sg}$  en fonction de la vitesse de brassage  $U$  et de l'épaisseur initiale de liquide  $E_0$ .

Le tableau 12 montre l'épaisseur colonnaire (jusqu'à la pointe des dendrites) atteinte au moment où le liquide passe en totalité en surfusion. On constate que celle-ci diminue fortement quand le brassage augmente, surtout entre 1 et 10 cm/s. Pour 4 cm, on passe de 67 % colonnaire pour 1 mm/s, à 35 % colonnaire pour 10 cm/s. Pour 12 cm d'épaisseur, l'effet est encore plus net, la fraction colonnaire passe de 79 % à 42 %.

Donc, le modèle en couche limite tel qu'il est introduit ici de façon simplifiée, met en évidence un net effet du brassage, en particulier sur le temps d'extraction de la surchauffe, sur l'épaisseur colonnaire à l'instant où la surchauffe est éliminée et sur la profondeur de la zone semi-solide colonnaire.

#### 4.5.4. Les limites du modèle

Le modèle qui vient d'être décrit ne peut malheureusement rendre compte de façon précise des phénomènes qui ont lieu au cours de la solidification, et ceci pour plusieurs raisons :

1/ Le coefficient d'échange à la paroi, qui sert à calculer les valeurs de  $\varrho_0$  et  $t_0$  dans les lois de Chvorinov modifiées, doit impérativement être indépendant du temps pour que l'on puisse intégrer les équations différentielles de façon analytique. Si on le fait diminuer au cours du temps, les résultats obtenus ne sont plus physiques : très fort réchauffement à la paroi, temps d'évacuation de la surchauffe plus long pour 12 cm d'épaisseur, mais plus court pour 4 cm par rapport au même cas pour  $h$  constant. Or, dans tous les cas industriels, on constate une diminution importante du coefficient d'échange à l'interface tube/coquille, jusqu'à 4 fois moins que la valeur initiale.

2/ Dans la zone semi-solide, le dégagement de chaleur latente a été intégré à la capacité calorifique. Ceci permet d'intégrer analytiquement l'équation différentielle sous une forme similaire à celle de la zone solide ; mais cela répartit uniformément la chaleur latente sur toute l'épaisseur de la zone semi-solide alors qu'en réalité le dégagement de chaleur latente est plus important près des pointes de dendrites qu'en fin de solidification.

3/ Il n'y a pas de croissance équiaxe ; pour l'intégrer au calcul, il faudrait faire de nombreuses et complexes modifications. Il n'est même pas sûr que des formules analytiques soient encore utilisables.

Ep \ U	1 mm/s	10mm/s	100mm/s
40 mm	0,67	0,62	0,35
120 mm	0,79	0,68	0,42

**Tableau 12 :** Fraction d'épaisseur colonnaire à  $t_{SG}$  en fonction de l'épaisseur du tube  $E_p$  et de la vitesse de brassage  $U$ .

4/ Dans le modèle semi-analytique, nous avons exprimé la surfusion de croissance colonnaire à l'aide de l'équation (10). Or, elle donne à la courbe  $\Delta T(V)$  une branche infinie pour  $V$  tendant vers  $V_{LIM}$ . Pour l'acier,  $V_{LIM}$  vaut environ 10 cm/s ; cela entraîne une erreur systématique mais pas de problèmes trop graves. Par contre, pour un corps transparent comme le succinonitrile (voir 4.7),  $V_{LIM}$  ne vaut plus que 2 mm/s et la formule est alors inapplicable. Cela n'est pas étonnant, puisque nous avons utilisé une expression algébrique que J. LIPTON propose uniquement pour les faibles vitesses.

5/ De plus le modèle n'est pas souple d'utilisation ; le calcul des constantes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  est long, complexe et doit être refait à chaque fois que l'on change un paramètre comme la composition de l'alliage ou la température de coulée.

#### 4.6. MODELE EN DIFFERENCES FINIES

##### 4.6.1. Caractères généraux

Les considérations du paragraphe 4.4. restent valables ici. La taille de la couche limite hydrodynamique varie en fonction de l'épaisseur de liquide et de la vitesse moyenne de l'écoulement comme dans le cas du modèle semi-analytique. Le coefficient d'échange à la paroi pose un problème délicat ; étant donné que seul le tube d'acier est modélisé, le coefficient d'échange est en fait global et doit représenter à la fois la couche d'isolant thermique, la coquille en acier, et les échanges entre la coquille et le liquide de refroidissement. Dans son modèle (1982), S. VASSEUR utilise un coefficient qui décroît de 700 à 175 J/m<sup>2</sup>Ks environ, déterminé d'après des essais sur acier ; mais il ne représente que les échanges entre le tube et la coquille. On peut donc considérer que cette valeur est une borne supérieure dans notre modèle, le coefficient global étant nécessairement plus faible.

La variation elle-même au cours du temps est mal connue ; plusieurs auteurs l'ont étudiée (A.E. KRIVOSHEEV et al., 1971). Une décroissance exponentielle ou hyperbolique semble représentative ; mais cette diminution ne commence qu'après l'apparition du coin d'air, lié à la contraction thermique du tube solidifié ; auparavant, le contact entre le tube et la coquille ne change pas et le coefficient d'échange entre le tube et la coquille peut être considéré comme constant. Le coefficient d'échange global utilisé est pris constant lui-aussi jusqu'à l'apparition du coin d'air ; le véritable problème est de déterminer le moment où il apparaît, ce qui est l'objet de l'annexe 6.

#### 4.6.2. Formulation du modèle

Les notations sont celles de l'annexe 3. Exprimons d'abord la conservation de la chaleur dans chaque zone. Elle s'écrit :

- pour la zone solide, où seule la conduction intervient,

$$\rho_1 C_{p_1} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (17)$$

- pour la zone semi-solide, où apparaît un terme source de chaleur lié à la solidification,

$$- \rho_2 \Delta H \frac{\partial f_s}{\partial t} + \rho_2 C_{p_2} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (18)$$

- Pour la zone en surfusion de la couche limite, l'équation est semblable puisque les mouvements de convection sont négligés.

$$- \rho_3 \Delta H \frac{\partial f_s}{\partial t} + \rho_3 C_{p_3} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (19)$$

Cependant la fraction solide n'est pas calculée de la même façon ; dans la zone semi-solide on utilise la règle du levier. Pour la croissance équiaxe il existe une formulation de la fraction solide plus proche de la réalité, mais dans une première étape, la règle du levier est utilisée également.

- Pour la zone de la couche limite qui est au dessus de la température de liquidus,

$$\rho_4 C_{p_4} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_4 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (20)$$

- Enfin, pour le liquide homogène soumis à un brassage,

T uniforme dans l'espace, mais fonction du temps. (21)

Les équations sont classiques mais la résolution du système est complexe. En effet :

- il y a presque en permanence cinq zones (solide, semi-solide, couche limite en surfusion, couche limite restante, liquide homogène), donc quatre limites de zones mobiles ;



- les limites ne restent pas toujours dans le même ordre ; ainsi, au moment où le bain liquide entre en surfusion, l'isotherme liquidus se retrouve plus loin de la paroi que l'extrémité de la couche limite ; la couche limite passe entièrement en surfusion et les conditions en limite de zone liquide à température homogène changent (voir 4.6.3.).

- si les positions de l'interface solide/semi-solide (isotherme solidus) et de l'interface liquide en surfusion/liquide en surchauffe (isotherme liquidus) sont simples à déterminer, celle de l'interface dendrites/liquide en surfusion est délicate car sa température varie avec la vitesse de croissance des pointes de dendrites ; la position de l'extrémité de la couche limite dépend de la position des pointes de dendrites et ne peut donc être calculée qu'après.

Le problème est traité par la méthode des différences finies. On choisit un pas de temps constant  $\Delta t$  (typiquement 0.5 s dans la phase de mise au point du modèle), un pas d'espace uniforme  $\Delta x$  (typiquement 200 pas d'espace dans l'épaisseur du métal). Le pas de temps est noté par l'indice  $i$ , le pas d'espace par l'indice  $j$ . Les dérivées partielles sont exprimées sous forme discrétisée :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta t} \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta x} \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta x^2} \quad (24)$$

La méthode numérique choisie est donc une méthode implicite qui a l'avantage de converger quels que soient les pas de temps et d'espace.

Il y a autant d'équations que de noeuds d'espace : ainsi pour le noeud  $j$  l'équation s'écrit :

$$\alpha_{1,j} T_{i,1} + \alpha_{2,j} T_{i,2} + \dots + \alpha_{j,j} T_{i,j} + \dots + \alpha_{n,j} T_{i,n} = K_j \quad (25)$$

ce qui donne le système :

$$M \cdot I = K \quad (26)$$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{1,j} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i,j} & \dots & \alpha_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,j} & \dots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix} ; I = \begin{bmatrix} T_{i,1} \\ \vdots \\ T_{i,j} \\ \vdots \\ T_{i,n} \end{bmatrix} ; K = \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_j \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix} \quad (27)$$

La matrice est ensuite triangulée de façon à pouvoir calculer simplement les valeurs des inconnues  $T_{i,j}$ .

Les équations citées en début de paragraphe font intervenir, lorsqu'elles sont appliquées à un noeud  $j$ , les températures des noeuds  $j-1$  et  $j+1$ . Ces noeuds doivent appartenir au même domaine que le noeud  $j$ , car sinon  $\lambda$  n'est plus constant et l'équation ne peut plus s'écrire de cette façon. Pour les noeuds en frontière de chaque zone, il faut donc écrire des relations spéciales.

#### 4.6.3. Les conditions aux limites

A la limite entre deux zones adjacentes, on doit avoir continuité de la température et continuité du flux. Ceci s'écrit, si  $j$  est l'indice du dernier noeud de la première zone :

$$T_j = \frac{T_{j-1} + T_{j+1}}{2} \quad (28)$$

$$\lambda_a \frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta x} = \lambda_b \frac{T_{j+2} - T_{j+1}}{\Delta x} \quad (29)$$

$a$  et  $b$  faisant référence aux milieux correspondant aux deux zones adjacentes.

Dans le cas où les zones contiennent trois noeuds ou plus, une plus grande exactitude est obtenue en prenant la tangente à la parabole passant par les températures des trois noeuds les plus proches de la frontière dans le graphe  $(x, T)$ .

Par contre, si une des zones ne contient qu'un seul noeud, on ne peut écrire de gradient ; la conservation des flux est alors écrite entre la zone qui précède celle-ci, et la suivante ; cela est assez réaliste car une zone n'ayant qu'un seul noeud est suffisamment petite pour ne pas modifier de façon sensible le flux qui la traverse. La température en ce noeud est alors prise comme la moyenne des deux températures voisines ; on ne peut être plus précis sans faire très compliqué, et l'écart à la réalité est très faible si l'on prend suffisamment de noeuds.

A la surface libre, il faut écrire que le tube se comporte quasiment comme un corps noir, c'est-à-dire que le flux est nul

$$\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \right), \quad \text{ce qui s'écrit :}$$

$$T_{n-1} = T_n \quad (30)$$

A la paroi de la coquille, il faut écrire que le flux sortant du tube est égal au flux de chaleur transmis au liquide de refroidissement :

$$\lambda \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} = h (T_1 - T_0) \quad (31)$$

Si la première zone ne contient qu'un noeud, cette relation est écrite entre la deuxième zone et la paroi.  $T_1$  et  $T_2$  représentent alors le premier et le deuxième noeud de la zone servant dans l'équation à la paroi. La température du noeud de la zone à un seul noeud est alors approximée par extrapolation à partir de celles des noeuds voisins.

Ceci fait beaucoup de cas distincts à prévoir, suivant le nombre de noeuds de chaque zone, et les zones en présence de part et d'autre d'une frontière (une zone pouvant être si petite qu'elle ne contient même pas un seul noeud).

A la frontière au delà de laquelle le liquide est homogène, le flux de chaleur qui sort de la zone est proportionnel à la diminution de la température du liquide homogène.

$$\lambda_a \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j-2}}{\Delta x} = \rho_4 C_{P4} E_P \frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\Delta t} \quad (32)$$

Dans le cas où le liquide homogène est en surfusion, il faut ajouter un terme source, dû à la croissance équiaxe :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\rho_4 C_{p_4} E_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_4 \Delta H E_p \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (33)$$

Au total il existe 77 équations différentes qui peuvent être utilisées à n'importe quel pas de temps ; à chaque pas, au maximum 15 d'entre elles sont utilisées (certaines plusieurs fois) pour créer la matrice M. Ceci explique la complexité dont il a été fait mention plus haut ; cependant c'est une complexité de création seulement : cela ne pose aucun problème à l'utilisation.

#### 4.6.4. Problèmes liés aux termes sources

Les termes sources sont ceux de la matrice colonne K. Ils sont de trois types :

- ceux liés à  $T_{i-1,j}$ , provenant des termes en  $\frac{\partial T}{\partial t}$  ;  
ils ne posent pas de problèmes.
- ceux proportionnels à  $T_0$  provenant de  $h(T-T_0)$  ;  
ils ne posent pas de problèmes non plus.
- enfin, les termes proportionnels à  $\frac{\partial f_s}{\partial t}$ .

La fraction solide étant inconnue au pas de temps  $i$  et ne pouvant être calculée implicitement, les équations où elle intervient n'étant pas linéaires (voir 4.6.6.), le terme  $\frac{\partial f_s}{\partial t}$  doit être écrit  $(f_{s_{i-2}} - f_{s_{i-1}})/\Delta t$ . Or, le fait de faire intervenir l'antépénultième pas de temps entraîne des problèmes de convergence numérique ; le calcul oscille régulièrement au cours du temps, ce qui n'a pas de sens physique. De plus, les termes source sont non négligeables vis à vis des termes de la matrice M et cela peut entraîner une instabilité numérique supplémentaire. Aussi le terme  $\frac{\partial f_s}{\partial t}$  est-il écrit :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial T}\right)_{i-1} \cdot \frac{T_i}{\Delta t} - \left(\frac{\partial f_s}{\partial T}\right)_{i-1} \cdot \frac{T_{i-1}}{\Delta t} \quad (34)$$

$(\partial f_s / \partial T)_{i-1}$  est calculé à l'instant précédent, uniquement à partir des données de cet instant ; de plus, ce terme source est scindé en deux, le premier terme de l'équation (34) étant intégré à la matrice M au noeud correspondant. Le remède est radical : le calcul est parfaitement stable (Fig. 47).

#### 4.6.5. Conditions initiales

Le métal est supposé homogène en température à l'instant initial. Ce n'est qu'à l'instant suivant que sont calculées la taille de la couche limite et éventuellement les positions des zones ; un test est effectué sur la température à la paroi : si elle est supérieure à une température arbitraire de nucléation ( $T_{\text{NUC}}$ ) à la paroi, la solidification ne commence pas, et le liquide reste en surfusion ; elle ne commence que lorsque la température de paroi devient inférieure ou égale à  $T_{\text{NUC}}$ . La surfusion de nucléation à la paroi est considérée comme un paramètre ; elle n'a pas de raison d'être égale à la surfusion moyenne en avant du front colonnaire, le mécanisme de nucléation n'étant pas le même dans les deux cas.

#### 4.6.6. Modélisation de la croissance colonnaire

##### 4.6.6. - 1/ Position du problème

Nous avons vu à propos du modèle semi-analytique que l'utilisation de lois cinétiques simplifiées pose des problèmes de domaine de validité, ce qui limite la gamme de vitesse de solidification, laquelle est fonction du matériau.

Cette tentative nous a montré qu'il est finalement plus souple d'écrire toutes les équations qui interviennent dans la modélisation du phénomène de croissance. L'écart de température entre la pointe de dendrite et le liquidus peut s'écrire comme la somme de deux termes ; l'un est lié à la composition chimique, le deuxième est lié au rayon de courbure.

$$\Delta T = T_L - T = \Delta T_c + \Delta T_R \quad (35)$$

Si l'on suppose que la pointe de dendrite a la forme d'un parabolofide de révolution, la forme générale du champ de diffusion autour de la pointe est donnée par la fonction d'IVANTSOV (1947) :

$$\Omega = P \exp(P) E_1(P) = I_v(P) \quad (36)$$

$\Omega$  est la sursaturation adimensionnelle,  $E_1(P)$  est la fonction exponentielle intégrale et P le nombre de Péclet.

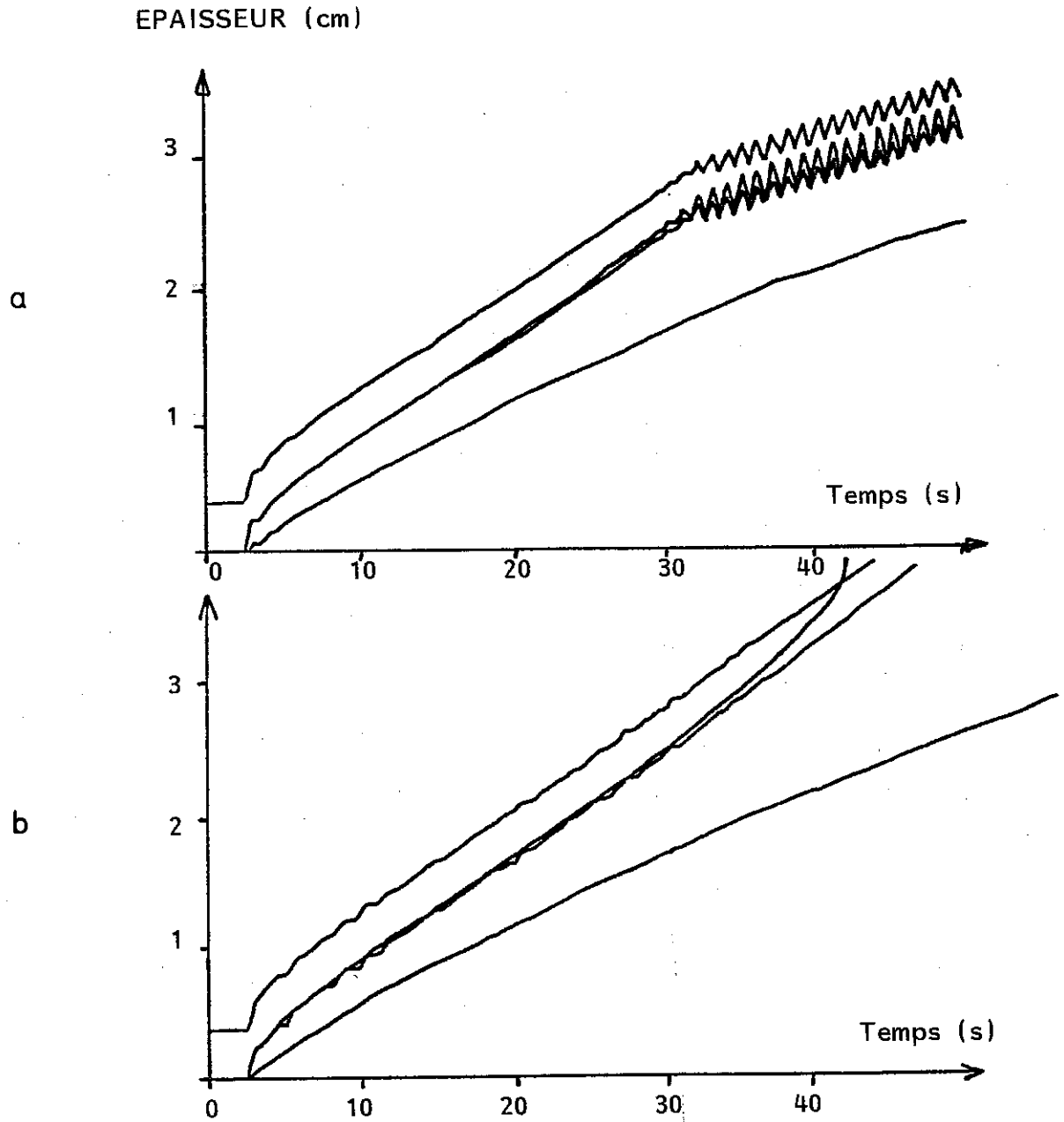


FIG. 47 : INFLUENCE DE LA MODELISATION DES TERMES SOURCE  
SUR LA STABILITE DU CALCUL

a) Fraction solide exprimée directement en fonction du temps

b) Fraction solide exprimée en fonction de la température

Pour le champ thermique, on a :

$$P_{th} = \frac{RV}{2a} \quad (37)$$

V est la vitesse de croissance, R le rayon de la pointe, a la diffusivité thermique.

Pour le champ de concentration, on a :

$$P_c = \frac{RV}{2D} \quad (38)$$

D étant le coefficient de diffusion chimique.

La sursaturation d'origine thermique n'existe qu'en croissance équiaxe. La sursaturation d'origine chimique s'écrit :

$$\Omega_c = \frac{C^* - C_o}{C^*(1-k)} \quad (39)$$

où  $C_o$  est la composition initiale de l'alliage et  $C^*$  la concentration dans le liquide à la pointe de la dendrite. De plus, la surfusion chimique est reliée à la concentration  $C^*$  du liquide à l'interface, d'après le diagramme de phases :

$$\Delta T_c = m (C_o - C^*) \quad (40)$$

On déduit de ces équations :

$$\Delta T_c = mC_o \left( 1 - \frac{1}{1 - (1-k)I_V(P_c)} \right) \quad (41)$$

De plus, on a :

$$\Delta T_R = \frac{2\Gamma}{R} \quad (42)$$

$\Gamma$  est le paramètre de Gibbs-Thomson (rapport de l'énergie d'interface solide/liquide et de l'entropie de mélange).

Une deuxième équation est nécessaire ; elle est donnée par le critère de stabilité marginale (Cf. J. LIPTON et al., 1986) :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{4\pi^2\Gamma} (mG_c \cdot \xi_c - \bar{G} \cdot \xi_{th}) \quad (43)$$

avec  $\begin{cases} G_c \\ \bar{G} \end{cases}$  gradient de concentration  
gradient thermique

On a :

$$G_c = - \frac{2P_c C^*(1-k)}{R} = - \frac{V}{D} C^*(1-k) \quad (44)$$

$\bar{G}$  est donné par le champ thermique en croissance colonnaire. Avec les relations précédentes, on aboutit à :

$$G_c = \frac{-2(1-k)}{R} \cdot P_c \cdot \frac{C_0}{1-(1-k)I_v(P_c)} \quad (45)$$

Les valeurs des constantes de stabilité solutale et thermique sont données par W. KURZ et al. (1985)

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_c = 1 + \frac{2k}{1-2k-(1+\frac{4\pi^2}{P_c^2})^{1/2}} \\ \xi_{th} = 1 - \frac{1}{(1+\frac{4\pi^2}{P_{th}^2})^{1/2}} \end{array} \right. \quad (46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_c = 1 + \frac{2k}{1-2k-(1+\frac{4\pi^2}{P_c^2})^{1/2}} \\ \xi_{th} = 1 - \frac{1}{(1+\frac{4\pi^2}{P_{th}^2})^{1/2}} \end{array} \right. \quad (47)$$

Le calcul est effectué de la façon suivante : la température des pointes de dendrites au pas de temps précédent et le gradient servent à calculer la vitesse d'avance du front correspondante ; on en déduit l'avance effective du front ; la température en ce point est alors la nouvelle température des pointes ; on itère ensuite le processus.

#### 4.6.6. - 2/ Discussion

Le calcul de la vitesse d'avance du front peut se faire de différentes façons. En effet, on peut soit conserver la forme complète de la fonction d'Ivantsov, soit utiliser une formulation approchée :

$$I_v(P) = \frac{P}{1+P} \quad (48)$$

Cette formulation permet d'inverser algébriquement la fonction d'Ivantsov et de procéder par itération ; on connaît le  $\Delta T$  total ; on part d'une valeur de  $R$  et du nombre de Péclet thermique plausibles ; on calcule  $\Delta T_R$  par la formule (42) ; l'équation (35) conduit alors à  $\Delta T_c$ . On en déduit  $I_v(P_c)$  et, par la relation (48),  $P_c$  ; la relation (43) donne alors  $R$  ; on calcule ensuite aisément la nouvelle valeur du nombre de Péclet thermique et on itère le processus.



La convergence est en général très rapide (10 itérations maximum pour 5 chiffres après la virgule). Malheureusement il existe des cas où l'on converge vers une solution non physique après de nombreuses oscillations (voir Tableau 13). La méthode n'est donc pas sûre. Il vaut alors mieux utiliser une méthode systématique pour trouver la solution.

Dans ce dernier cas le système se résoud de la façon suivante, en supposant le gradient thermique  $\bar{G}$  négligeable. Les équations (35) et (43) fournissent toutes deux, après simplifications, le terme  $\frac{\Gamma}{R}$ ; on égalise alors ces deux expressions qui ne dépendent que du produit  $RV$ . Le système est écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_1}{R} = \alpha_2 RV \\ \frac{\alpha_1}{R} = \frac{\alpha_3 (RV)^2 + \alpha_4 RV + \alpha_5}{\alpha_6 (RV)^2 + \alpha_7 RV + \alpha_8} \end{array} \right. \quad (49)$$

(50)

avec :

$$\alpha_1 = 2\Gamma$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{k\Delta T_o}{D}$$

$$\alpha_3 = \frac{T_L - T - k\Delta T_o}{4Da}$$

$$\alpha_4 = \frac{(T_L - T)}{2} \left( \frac{1}{D} + \frac{1}{a} \right) - \frac{k\Delta T_o}{2D}$$

$$\alpha_5 = T_L - T$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{4Da}$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{D} + \frac{1}{a} \right)$$

$$\alpha_8 = 1$$

$$\Delta T_o = \frac{-mC_o(1-k)}{k}$$

$\Delta T$	nombre d'itérations	V final (m/s)	R final (m)	$P_c$
0,001	10	$1,204 \cdot 10^{-10}$	$1,439 \cdot 10^{-3}$	$0,433 \cdot 10^{-3}$
0,01	9	$1,211 \cdot 10^{-8}$	$1,434 \cdot 10^{-4}$	$0,434 \cdot 10^{-2}$
0,05	9	$3,111 \cdot 10^{-7}$	$2,830 \cdot 10^{-5}$	$2,201 \cdot 10^{-2}$
0,1	8	$1,288 \cdot 10^{-6}$	$1,391 \cdot 10^{-5}$	$0,448 \cdot 10^{-1}$
0,5	8	$4,300 \cdot 10^{-5}$	$2,407 \cdot 10^{-6}$	0,259
0,7	9	$9,849 \cdot 10^{-5}$	$1,591 \cdot 10^{-6}$	0,392
1,2	12	$4,408 \cdot 10^{-4}$	$7,519 \cdot 10^{-7}$	0,829
1,7	27	$1,392 \cdot 10^{-3}$	$4,232 \cdot 10^{-7}$	1,473
1,8	37	$1,710 \cdot 10^{-3}$	$3,817 \cdot 10^{-7}$	1,632
1,9	58	$2,088 \cdot 10^{-3}$	$3,454 \cdot 10^{-7}$	1,803
2,0	133	$2,534 \cdot 10^{-3}$	$3,136 \cdot 10^{-7}$	1,987
2,05	386	$2,785 \cdot 10^{-3}$	$2,991 \cdot 10^{-7}$	2,082
2,1	480	$1,233 \cdot 10^{-2}$	$-1,422 \cdot 10^{-7}$	non physique

**Tableau 13:** Résultats du calcul de la vitesse d'avance du front colonnaire par une résolution itérative du système d'équations.

$\Delta T$  : surfusion à la pointe des dendrites colonnaires, en K.

$V$  : vitesse d'avance du front colonnaire.

$R$  : rayon des pointes de dendrites.

Les équations (49) et (50) sont alors écrites sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_1}{R} = \alpha_2 RV \\ F(RV) = 0 \end{array} \right. \quad (49)$$

(51)

F étant fonction de la seule variable RV.

F se présente sous la forme d'un quotient d'un polynôme du 3ème degré sur un polynôme du second degré. Ce dernier n'a aucune racine positive et reste strictement positif pour toute valeur positive de RV. La fonction du troisième degré se présente sous la forme :

$$F_1(RV) = \alpha_2 \alpha_6 (RV)^3 + (\alpha_3 - \alpha_2 \alpha_7) (RV)^2 + (\alpha_4 - \alpha_2 \alpha_8) (RV) + \alpha_5 = 0 \quad (52)$$

pour  $RV = 0$ ,  $F_1(0) = T_L - T \geq 0$ . Si  $T = T_L$ , on a  $V = 0$ , et la question est résolue. Sinon, on remarque que pour RV tendant vers  $+\infty$ ,  $F_1(RV)$  tend vers  $-\infty$ . Il y a donc toujours au moins une racine positive.

Une étude analytique simple montre que cette fonction est strictement décroissante pour RV positif et que son point d'inflexion est à une abscisse négative.

La fonction F tend asymptotiquement vers  $-\infty$  quand RV tend vers  $+\infty$ . Les différentes formes possibles de courbes sont données Fig. 48. Il y a toujours une solution positive, proche de zéro, mais il y a parfois aussi une solution négative, elle aussi proche de zéro.

Sur la figure, on voit immédiatement pourquoi une méthode itérative ou une méthode de Newton ne conviennent pas : dans certains cas, la pente de la courbe varie très fortement pour une faible variation de RV.

La meilleure méthode consiste à incrémenter RV à partir de zéro jusqu'à encadrement de la racine puis à utiliser une méthode de convergence de Lagrange (méthode de la corde) pour affiner le résultat.

L'équation (51) étant résolue, il est ensuite facile de calculer R puis V. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 14. La comparaison des tableaux 13 et 14 montre que les deux méthodes donnent des résultats identiques lorsque la méthode itérative converge.

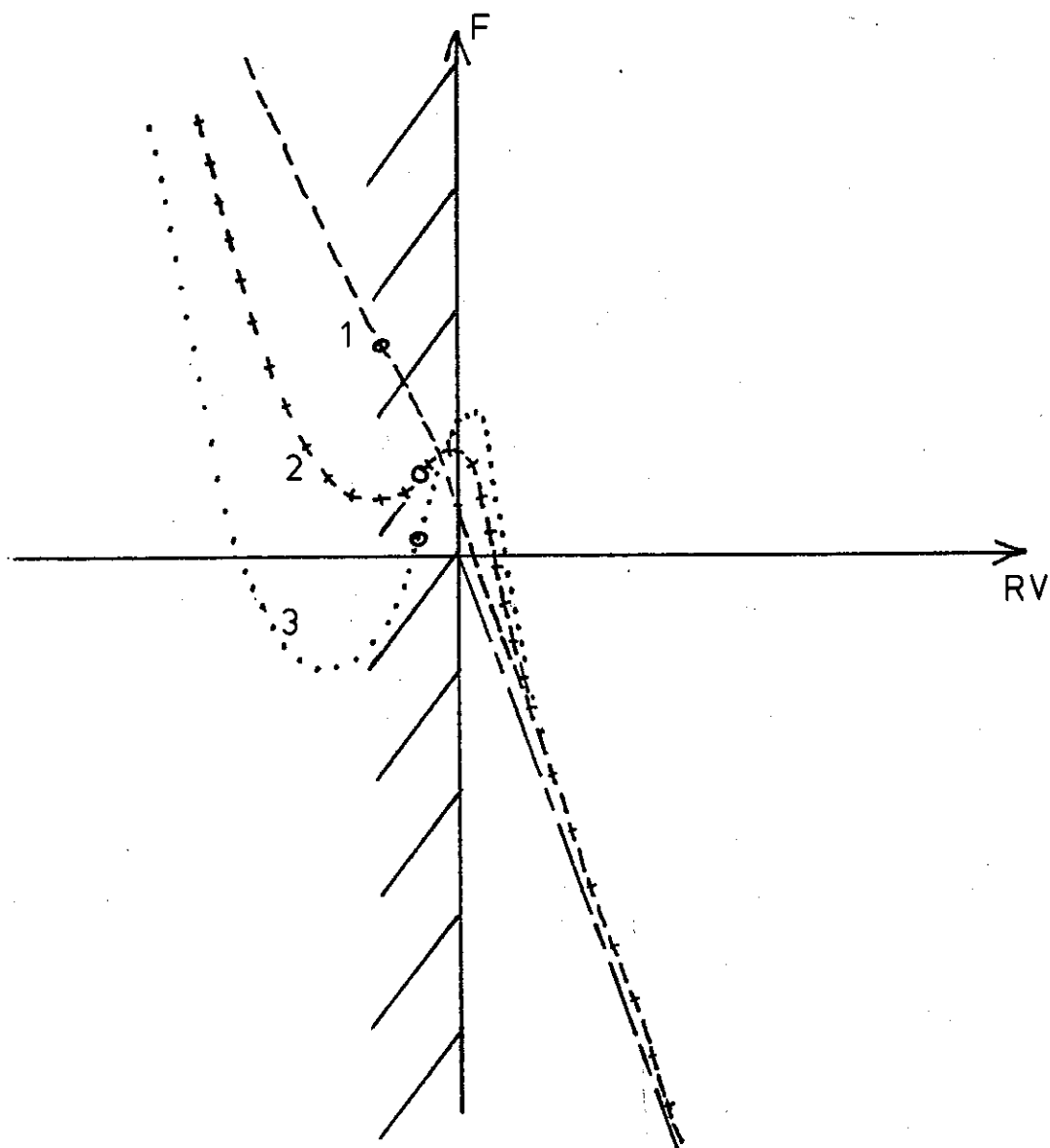


FIG. 48 : FORMES DE LA COURBE  $F(RV)$

o : Point d'inflexion

Les courbes 1 à 3 correspondent à des surfusions croissantes

$\Delta T$	V final (m/s)	R final (m)
0,001	$1,204 \cdot 10^{-10}$	$1,439 \cdot 10^{-3}$
0,01	$1,211 \cdot 10^{-8}$	$1,434 \cdot 10^{-4}$
0,05	$3,111 \cdot 10^{-7}$	$2,830 \cdot 10^{-5}$
0,1	$1,288 \cdot 10^{-6}$	$1,391 \cdot 10^{-5}$
0,5	$4,300 \cdot 10^{-5}$	$2,407 \cdot 10^{-6}$
0,7	$9,849 \cdot 10^{-5}$	$1,591 \cdot 10^{-6}$
1,2	$4,408 \cdot 10^{-4}$	$7,519 \cdot 10^{-7}$
1,7	$1,392 \cdot 10^{-3}$	$4,232 \cdot 10^{-7}$
2,2	$3,664 \cdot 10^{-3}$	$2,608 \cdot 10^{-7}$
2,7	$8,303 \cdot 10^{-3}$	$1,732 \cdot 10^{-7}$

**Tableau 14:** Résultat du calcul de la vitesse d'avance du front colonnaire par une résolution des équations (49) et (51).

- $\Delta T$  : surfusion à la pointes des dendrites colonnaires, en K.
- $V$  : vitesse d'avance du front colonnaire.
- $R$  : rayon des pointes de dendrites.

Il faut remarquer que la méthode systématique ne nécessite pas, contrairement à la précédente, l'inversion de la fonction d'Ivantsov. Il est donc possible de faire ce calcul en utilisant une formulation précise de  $I_v(P)$ . On constate, dans ce cas, un écart sensible par rapport à la formulation approchée, comme le montrent les fig. 49 et 50 ; le comportement est le même mais l'approximation donne des valeurs trop faibles de  $\Delta T$ , d'un facteur presque 2. C'est donc la formulation précise qui a été intégrée au calcul thermique général.

Si maintenant, au lieu d'utiliser la formulation rigoureuse de la fonction d'Ivantsov, on se contente d'une approximation très exacte mais seulement pour les petits péclets, c'est-à-dire :

$$I_v(P) = P \exp(P) \cdot (-\ln(P) + a_0 + a_1 P) \quad (53)$$

$a_0$  et  $a_1$  étant deux constantes, on obtient une courbe très différente ; cela est dû au fait que la formulation (53) n'est pas bornée pour  $P$  plus grand que 1 ; le nombre de Péclet thermique est bien inférieur à 1, alors que pour les mêmes valeurs de  $R$  et de  $V$  le nombre de Péclet chimique peut dépasser 1 ; le résultat du calcul n'a plus aucun sens. La forme de la courbe est donnée Fig. 51. On retrouve une courbe analogue à celle correspondant à la formule (10), qui n'est valable justement que pour les faibles vitesses de croissance.

#### 4.6.7. Les résultats

Dans une première étape la fraction solide équiaxe a été calculée d'après la règle du levier. Cette approximation est discutée dans la suite du paragraphe.

Les données correspondant au cas de référence sont en annexe 4 ; lorsqu'il est fait mention de la variation d'un ou de plusieurs paramètres, les autres prennent les valeurs données dans cette annexe.

#### 4.6.7. - 1/ Les limites de zones

L'évolution des limites de zones dans le cas de référence est donnée Fig. 52. La présentation est analogue à celle du modèle semi-analytique. Le cas de référence correspond à un tube de 4 cm d'épaisseur, à une vitesse de brassage moyen de 1 cm/s, à une température de coulée de 1560°C, à un coefficient d'échange à la

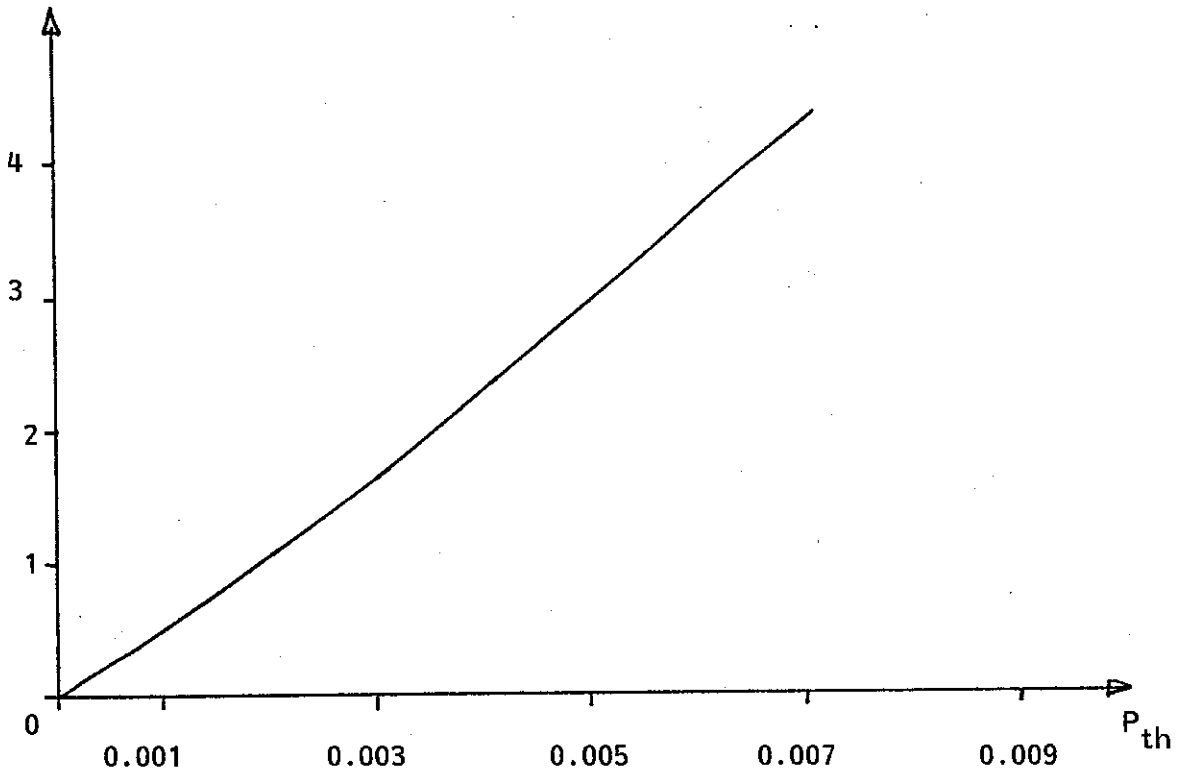
$T_L - T_p$  (°C)

FIG. 49 : COURBE  $T_L - T_p$  EN FONCTION DE  $P_{th}$  MODELISATION PRECISE  
DE LA FONCTION D'IVANTSOV

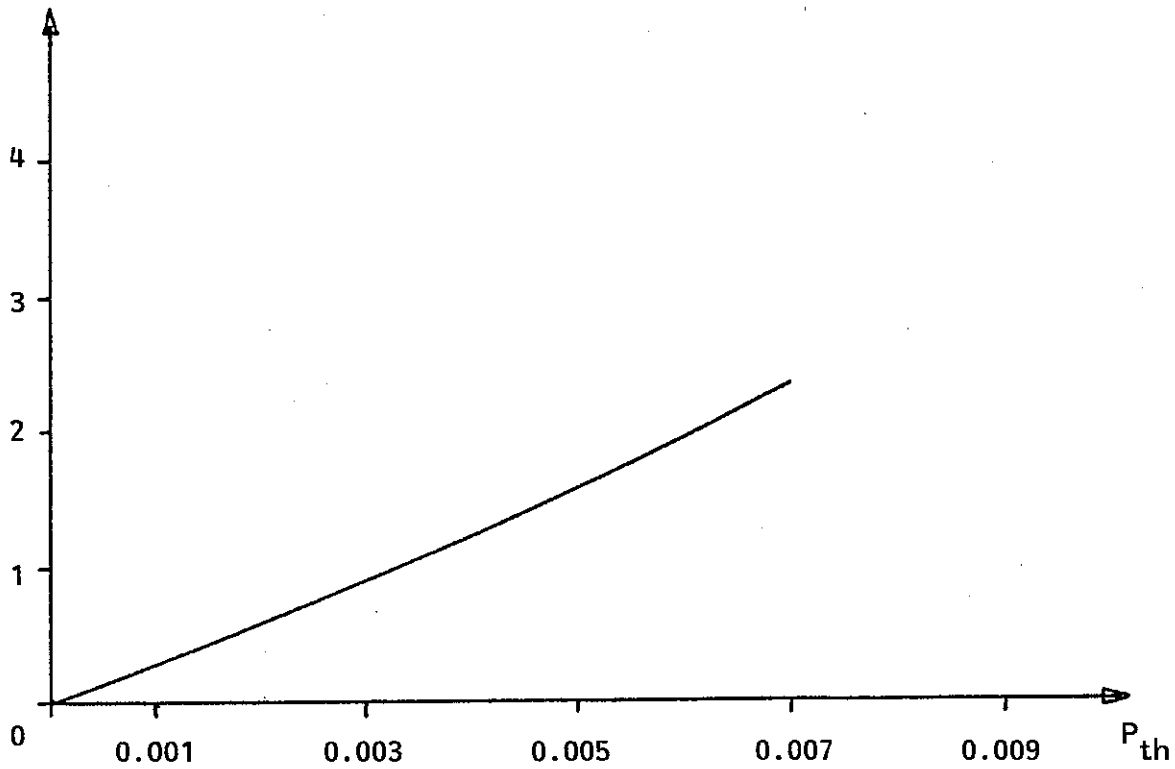
 $T_L - T_p$  (°C)

FIG. 50 : COURBE  $T_L - T_p$  EN FONCTION DE  $P_{th}$   
MODELISATION DE LA FONCTION D'IVANTSOV PAR LE POLYNOME  $P_{th}/(1 + P_{th})$

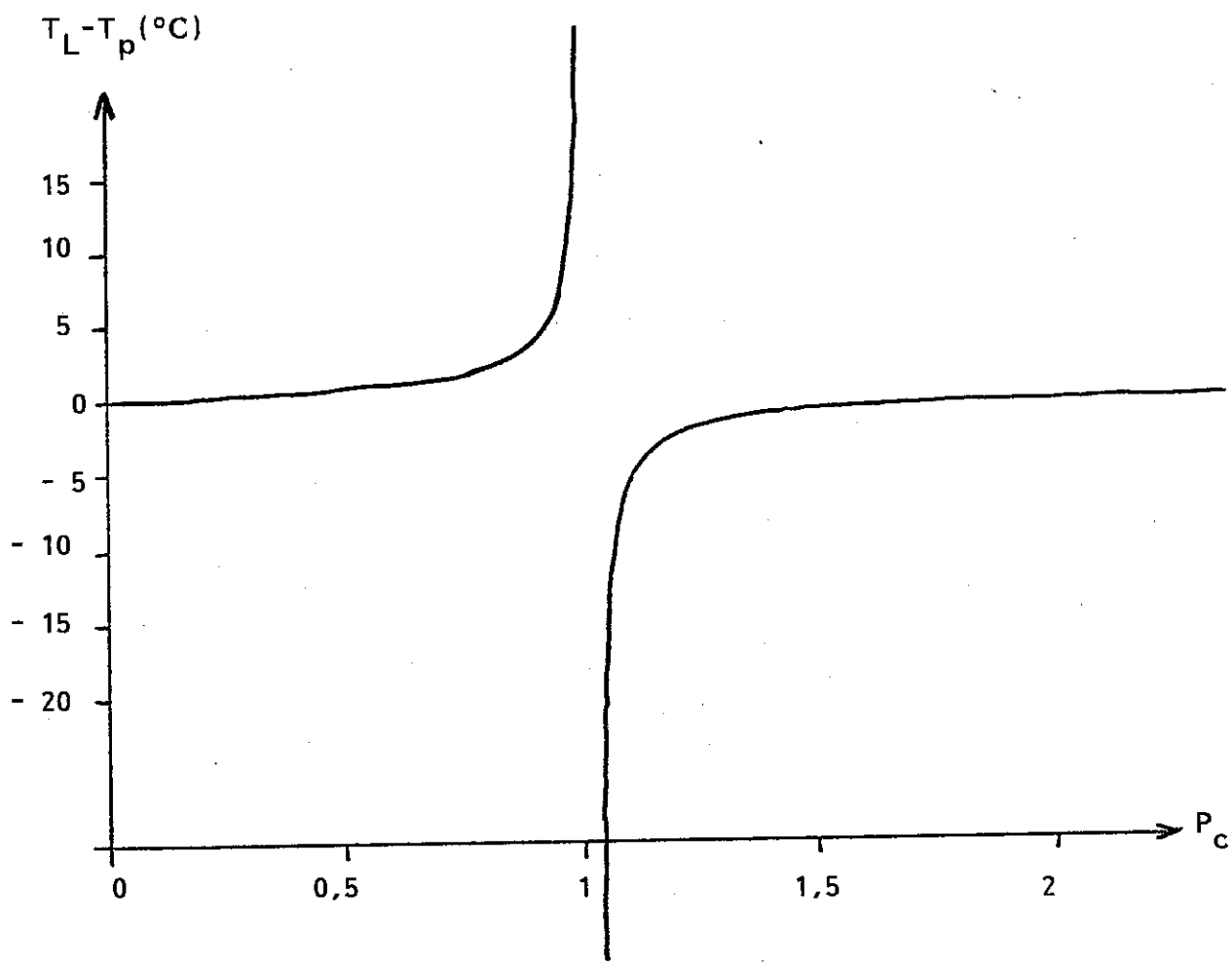


FIG. 51 : COURBE  $T_L - T_p$  EN FONCTION DE  $P_c$

MODELISATION DE LA FONCTION D'IVANTSOV VALABLE POUR  $P \ll 1$  SEULEMENT



EPAISSEUR (cm)

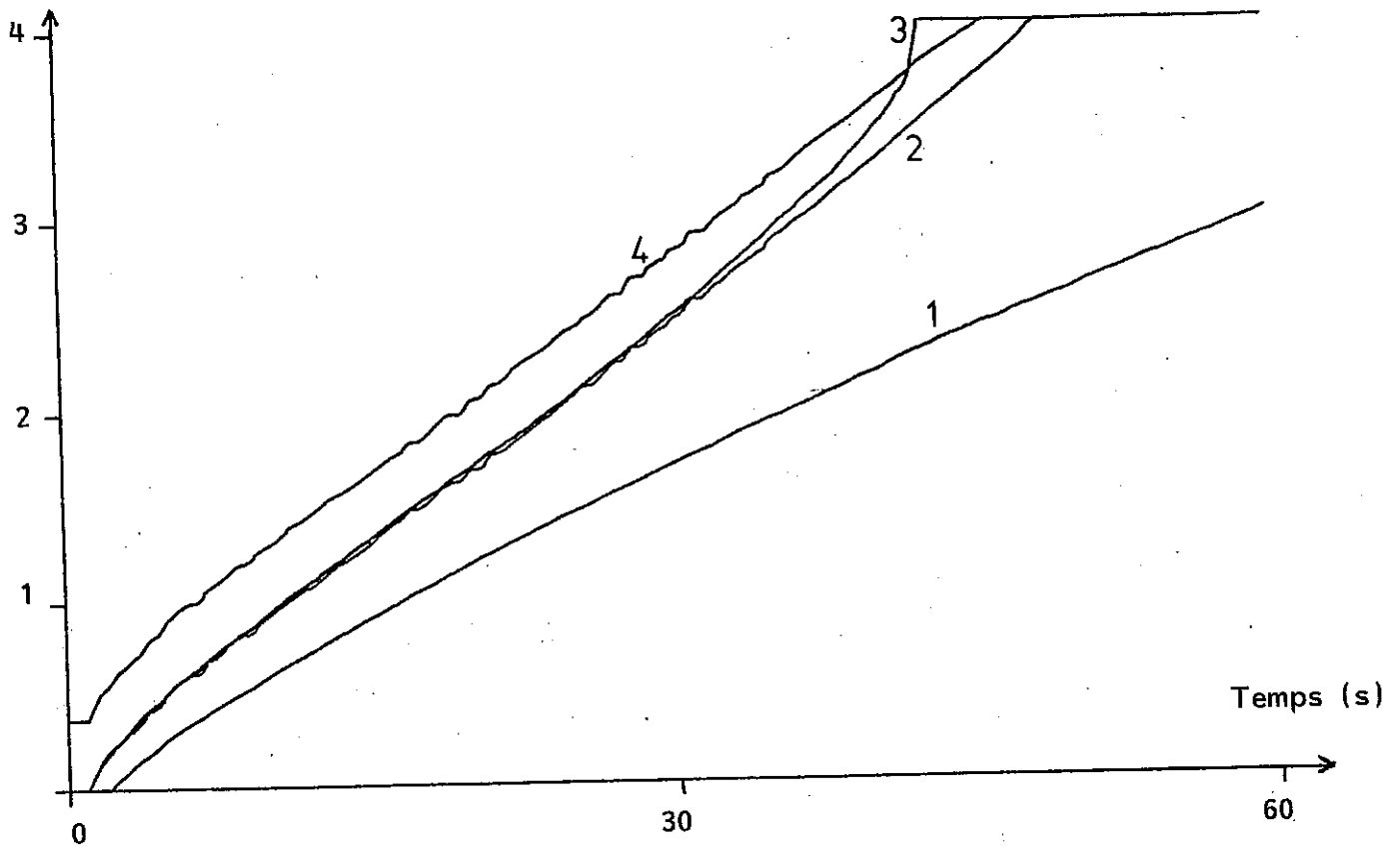


FIG. 52 : LIMITES DE ZONES DANS LE CAS DE REFERENCE

1. Isotherme solidus
2. Pointes de dendrites colonnaires
3. Isotherme liquidus
4. Couche limite

paroi constant et identique à celui déterminé par S. VASSEUR (1982) en début de solidification. On remarque plusieurs points :

- La croissance colonnaire n'est stoppée à aucun moment par la croissance équiaxe.
- La zone en surfusion du liquide, très réduite au début de la solidification, s'étend de plus en plus jusqu'à occuper la totalité du liquide, à  $t_{SG}$ .
- La position des pointes de dendrites conduit à une courbe sujette à certaines irrégularités (et par voie de conséquence la courbe donnant l'extrémité de la couche limite également).

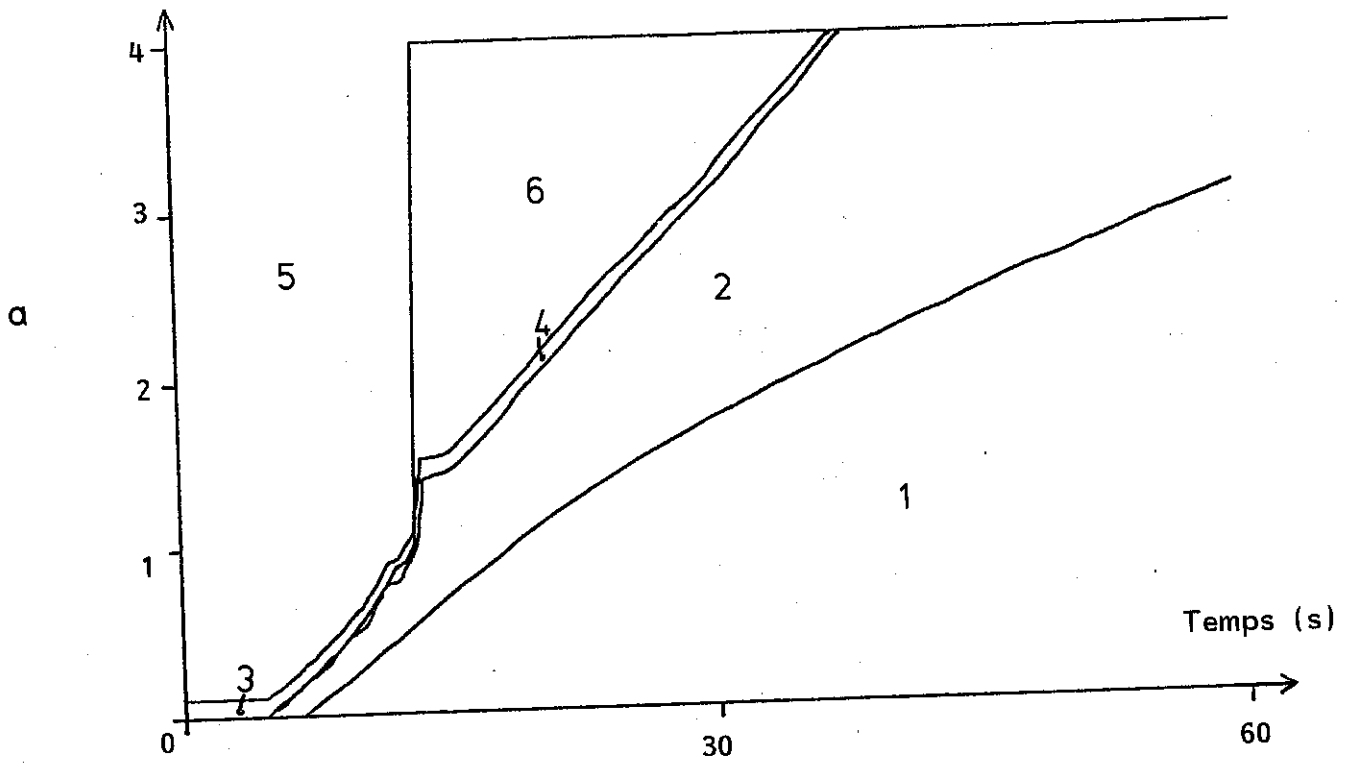
La comparaison de ce graphique à ceux donnés par le modèle semi-analytique montre que la forme générale des courbes est la même : la différence la plus importante réside dans le temps de solidification, environ 5 fois plus faible ici.

La Fig. 53 montre les positions des limites de zones dans le cas fortement brassé (10 cm/s) et en l'absence de brassage. La taille de la couche limite varie en fonction des cas ; il est intéressant de remarquer que l'évacuation de la surchauffe est environ 4 fois plus rapide dans le cas fortement brassé que dans le cas faiblement brassé (Fig. 52). On remarque également que la croissance colonnaire a un comportement suspect dans le cas fortement brassé : au moment où le liquide passe entièrement en surfusion, le front avance considérablement puis s'arrête ; peu après la croissance colonnaire reprend normalement son cours.

La Fig. 54 montre l'influence de la température de nucléation et celle de la température de coulée ; avec une température de nucléation très basse ( $T_L - T_{NUC} = 50^\circ\text{C}$ ) la solidification commence plus tard mais dès les premiers millimètres solidifiés l'influence de  $T_{NUC}$  disparaît. Avec une température de coulée plus basse (une surchauffe plus faible), l'isotherme liquidus atteint plus vite la surface libre (15 % de temps en moins pour  $T_C - T_L = 20^\circ\text{C}$  au lieu de  $40^\circ\text{C}$ ). Avec un coefficient d'échange toujours constant mais plus faible (500 J/m<sup>2</sup>.K.s au lieu de 700) la solidification est au contraire plus lente (Fig. 55a) ; avec une épaisseur de tube deux fois plus importante (8 cm, Fig. 55b), la vitesse de croissance du front est à peu près identique, mais la surchauffe est beaucoup plus longue à évacuer.

La Fig. 56 présente un graphe récapitulatif des positions de l'isotherme liquidus pour les cas cités ci-dessus.

EPAISSEUR (cm)



EPAISSEUR (cm)

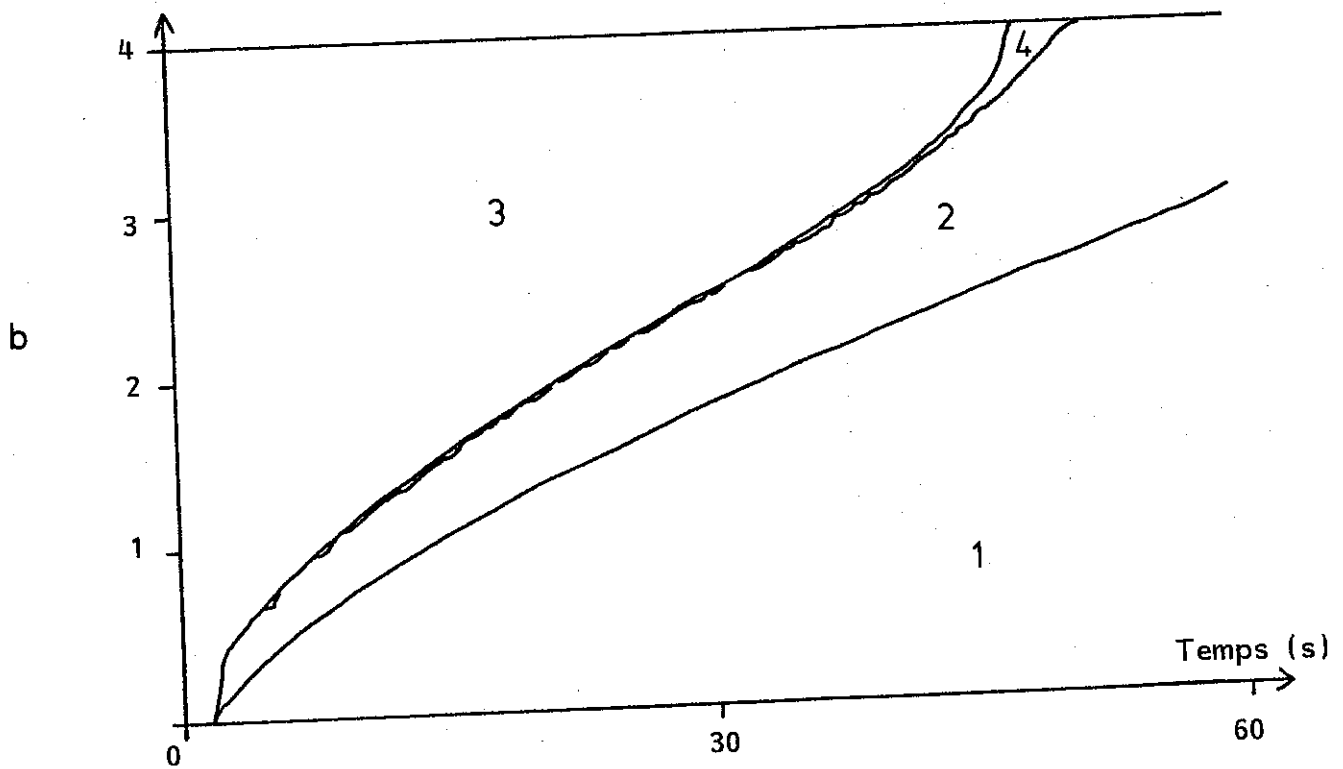


FIGURE 53 : LIMITES DE ZONES DANS LE CAS FORTEMENT BRASSE (a)  
ET DANS LE CAS SANS BRASSAGE (b)

1. Solide

2. Semi-solide colonnaire

3. Couche limite ( $T > T_L$ )

4. Couche limite en surfusion

5. Liquide homogène ( $T > T_L$ )

6. Liquide homogène en surfusion

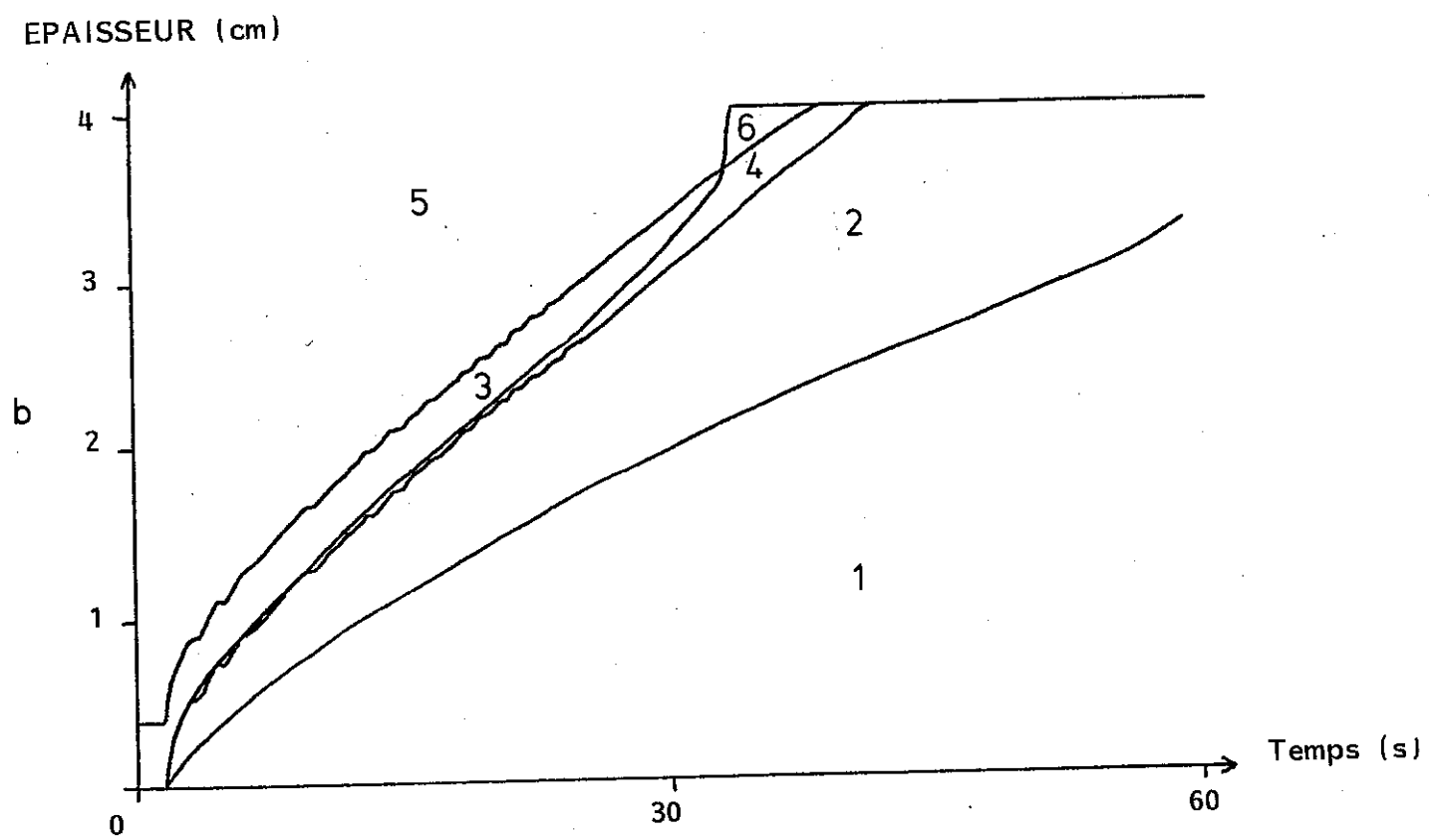
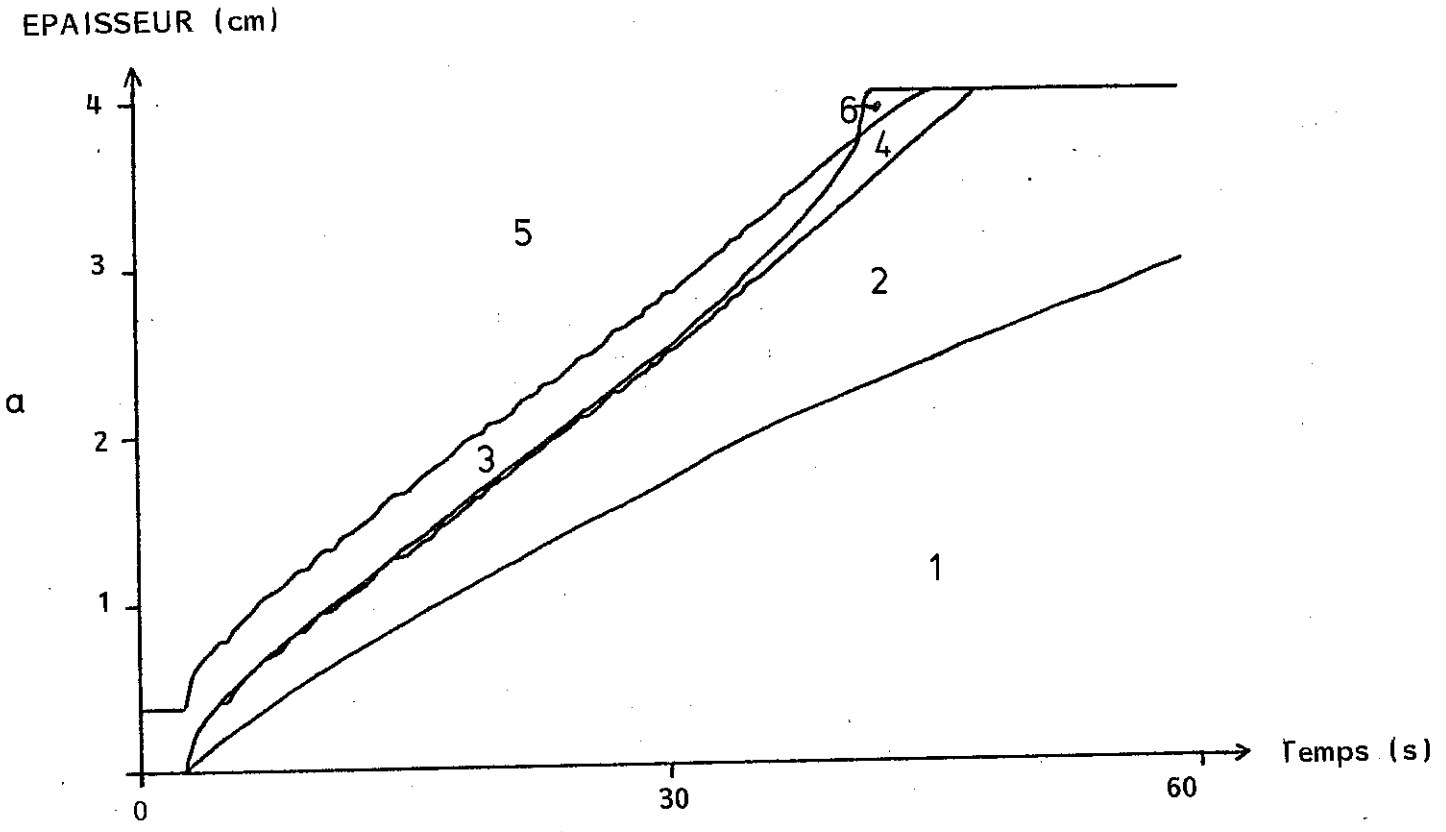


FIG. 54 : LIMITES DE ZONES POUR UNE FORTE SURFUSION DE NUCLEATION A LA PAROI (a) ET POUR UNE TEMPERATURE DE COULEE BASSE (b)

n° 1 à 6 : voir figure 53

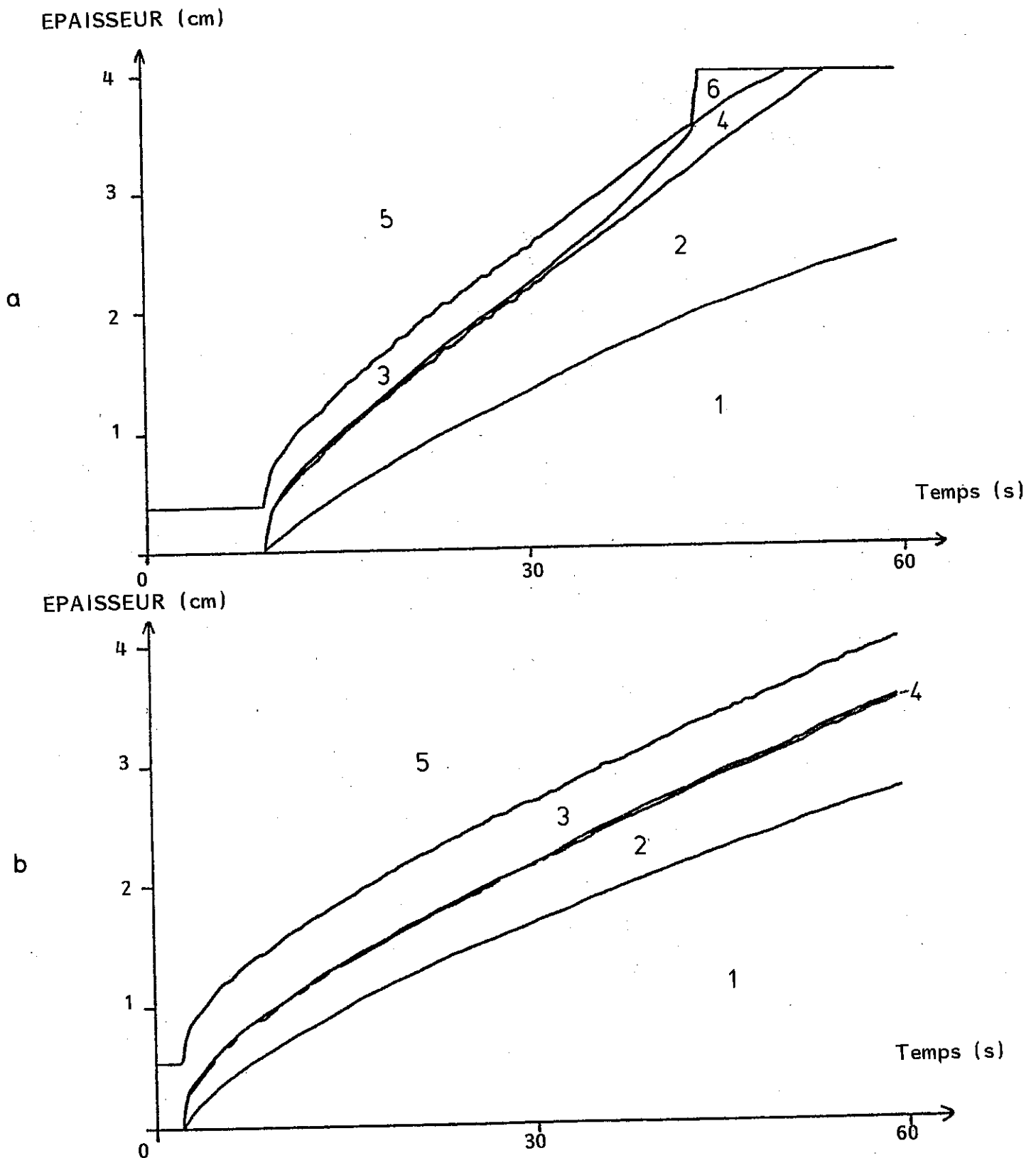


FIG. 55 : LIMITES DE ZONES DANS LE CAS D'UN COEFFICIENT D'ECHANGE MOINDRE A LA PAROI ( $500 \text{ W/m}^2\text{K}$ ) (a) ET DANS CELUI D'UNE PLUS FORTE EPAISSEUR (8 cm)(b).

n° 1 à 6 : voir Fig. 53

EPAISSEUR (cm)

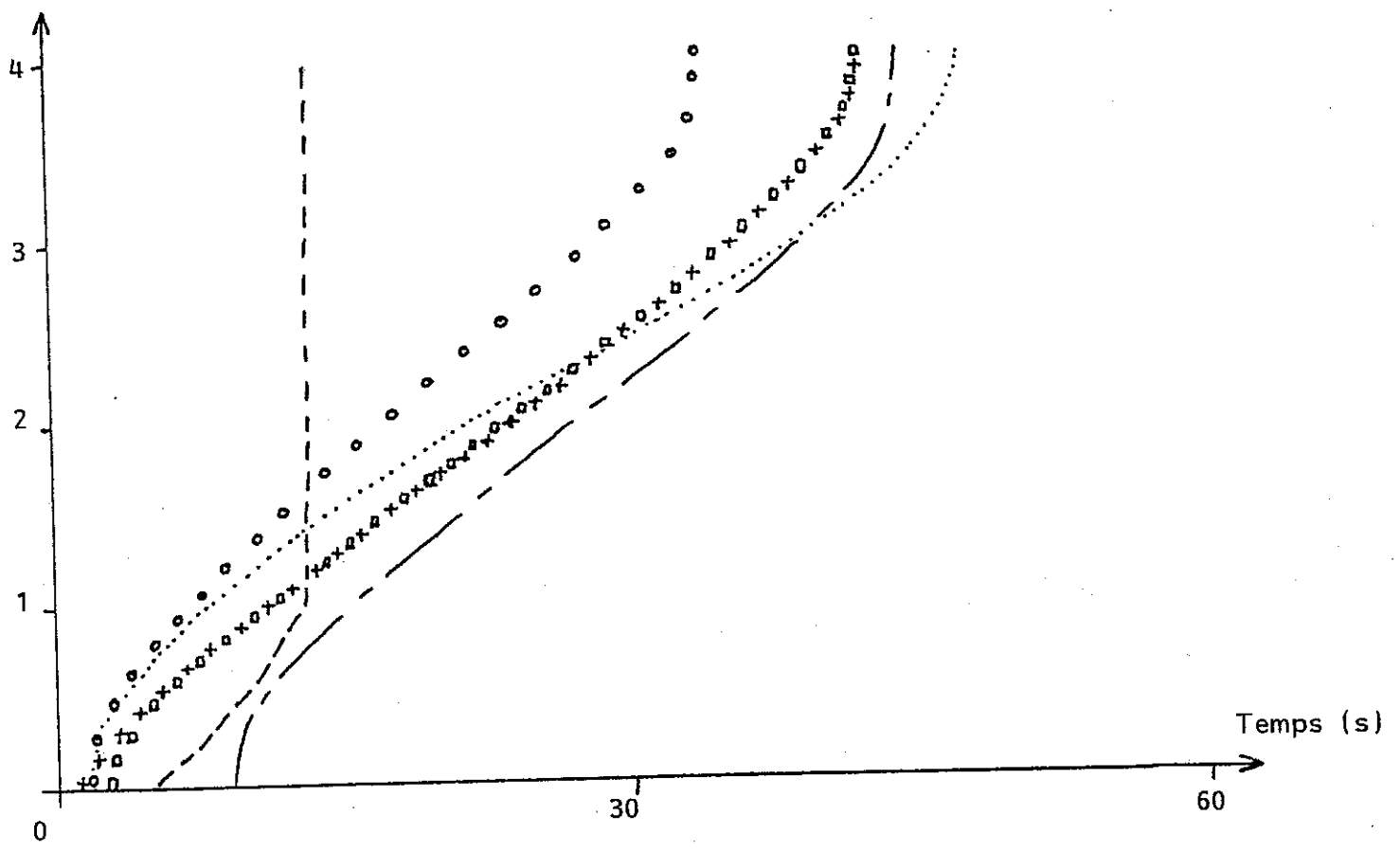


FIG. 56 : DEPLACEMENT DE L'ISOTHERME LIQUIDUS DANS LE METAL POUR DIVERS CAS

- .....  $U = 0 ; T_c = 1560^{\circ}\text{C} ; T_{\text{NUC}} = 1470^{\circ}\text{C} ; h = 700 \text{ W/Km}^2$
- $U_o = 1\text{cm/s} ; T_c = 1560^{\circ}\text{C} ; T_{\text{NUC}} = 1470^{\circ}\text{C} ; h = 500 \text{ W/Km}^2$
- □ □ □  $U_o = 1\text{cm/s} ; T_c = 1560^{\circ}\text{C} ; T_{\text{NUC}} = 1470^{\circ}\text{C} ; h = 700 \text{ W/Km}^2$
- + + + +  $U_o = 1\text{cm/s} ; T_c = 1560^{\circ}\text{C} ; T_{\text{NUC}} = 1510^{\circ}\text{C} ; h = 700 \text{ W/Km}^2$
- ○ ○ ○ ○  $U_o = 1\text{cm/s} ; T_c = 1540^{\circ}\text{C} ; T_{\text{NUC}} = 1470^{\circ}\text{C} ; h = 700 \text{ W/Km}^2$
- - - - -  $U_o = 10\text{cm/s} ; T_c = 1560^{\circ}\text{C} ; T_{\text{NUC}} = 1510^{\circ}\text{C} ; h = 700 \text{ W/Km}^2$

On retrouve les conclusions énoncées plus haut : le brassage est le facteur principal jouant sur l'évacuation de la surchauffe ; elle est la plus rapide pour 10 cm/s, la plus lente pour une vitesse nulle, tous cas confondus. La température de coulée joue de façon non négligeable également ; l'influence du coefficient d'échange à la paroi se fait sentir tout au long de la solidification tandis que l'influence de la température de nucléation à la paroi ne joue qu'un rôle mineur.

#### 4.6.7. - 2/ Le champ de température

La figure 57 présente trois graphiques correspondant aux trois vitesses de brassage précédentes, la courbe supérieure correspondant au champ thermique dans le tube 35s après la coulée, la courbe inférieure à celui 55s après la coulée. Les changements de pente sont faibles lorsqu'on change de zone car les conductibilités thermiques sont voisines ; les limites de zones sont encadrées chacune par deux ronds. La figure 58 montre, pour 35s après la coulée, les courbes correspondant aux trois cas de brassage ; plus le brassage est intense et plus les gradients sont faibles ; la température du solide à la paroi varie de 1195°C à 1230°C tandis que celle en surface libre varie de 1540°C à 1520°C quand on passe d'un brassage nul à un brassage intense.

La figure 59 montre le thermogramme en surface libre pour le cas de référence. On remarque une anomalie en début de courbe, liée au début de la solidification (cette anomalie apparaît sur tous les thermogrammes et est d'autant plus visible que l'on est près de la paroi). On remarque surtout un palier à 1520°C ; ce palier est lié à la modélisation de la fraction solide par la règle du levier qui suppose que l'on a équilibre thermodynamique à chaque instant.

#### 4.6.7. - 3/ La fraction solide

Les courbes de la figure 60 montrent l'évolution de la fraction solide dans l'épaisseur du tube à 3 instants différents. On remarque que la fraction solide équiaxe est toujours plus faible que la fraction solide colonnaire ; dans tous les essais effectués, sauf un, elle ne dépasse pas 10 % à  $t_{SG}$  (voir Tableau 15). Le remplacement dans le liquide en surfusion de la règle du levier par la règle de Scheil-Gulliver ne change rien au résultat (Fig. 61) car l'écart entre les deux formulations est surtout sensible pour les fortes fractions équiaxes.

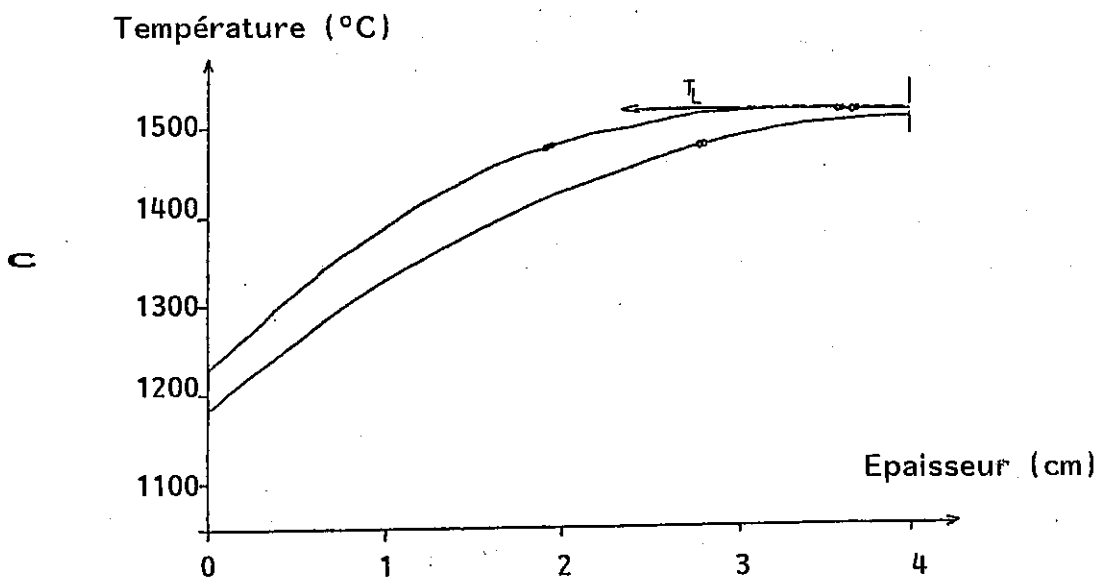
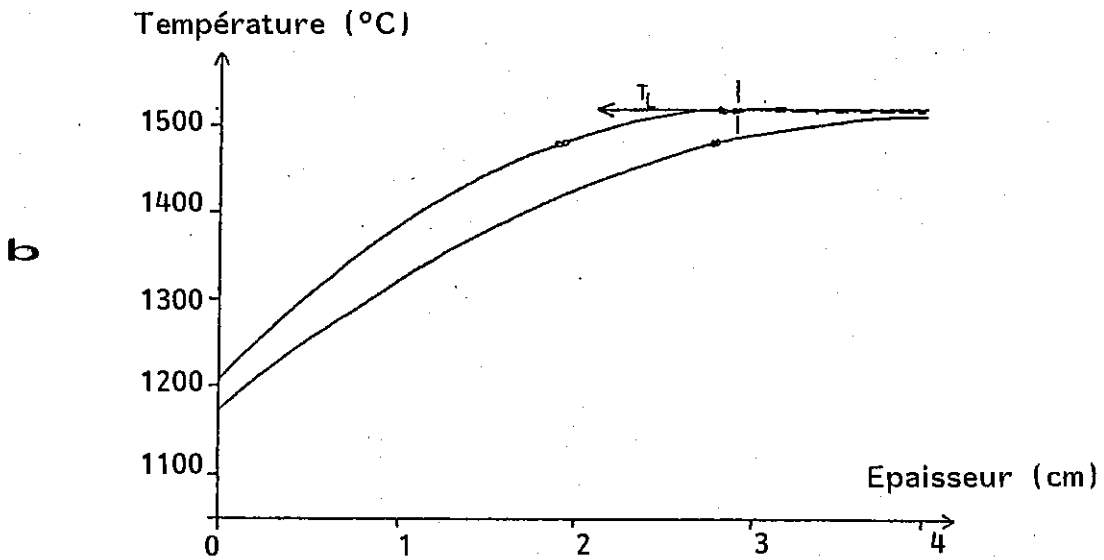
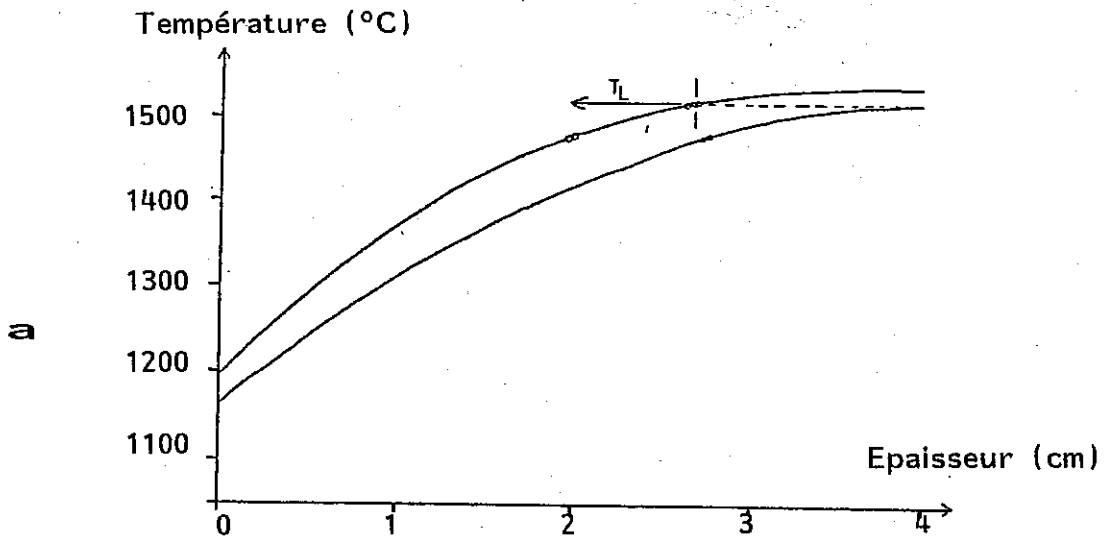


FIG. 57 : CHAMPS THERMIQUES POUR LES VITESSES DE BRASSAGE  
0 cm/s (a), 1 cm/s (b), et 10 cm/s (c)



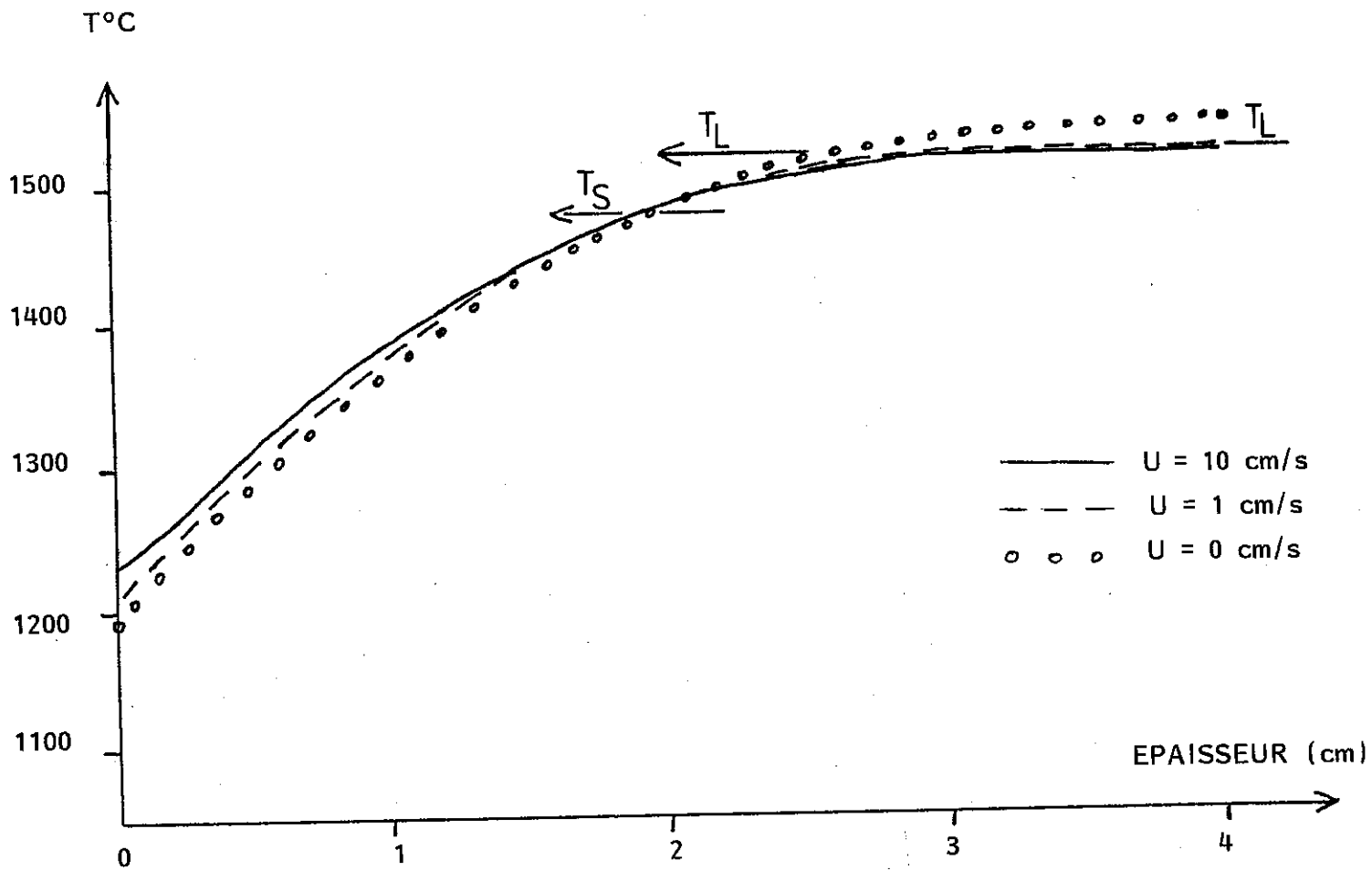


FIG. 58 : EVOLUTION DU CHAMP THERMIQUE EN FONCTION DU BRASSAGE  
A L'INSTANT  $t = 34,5$  s APRES LA COULEE

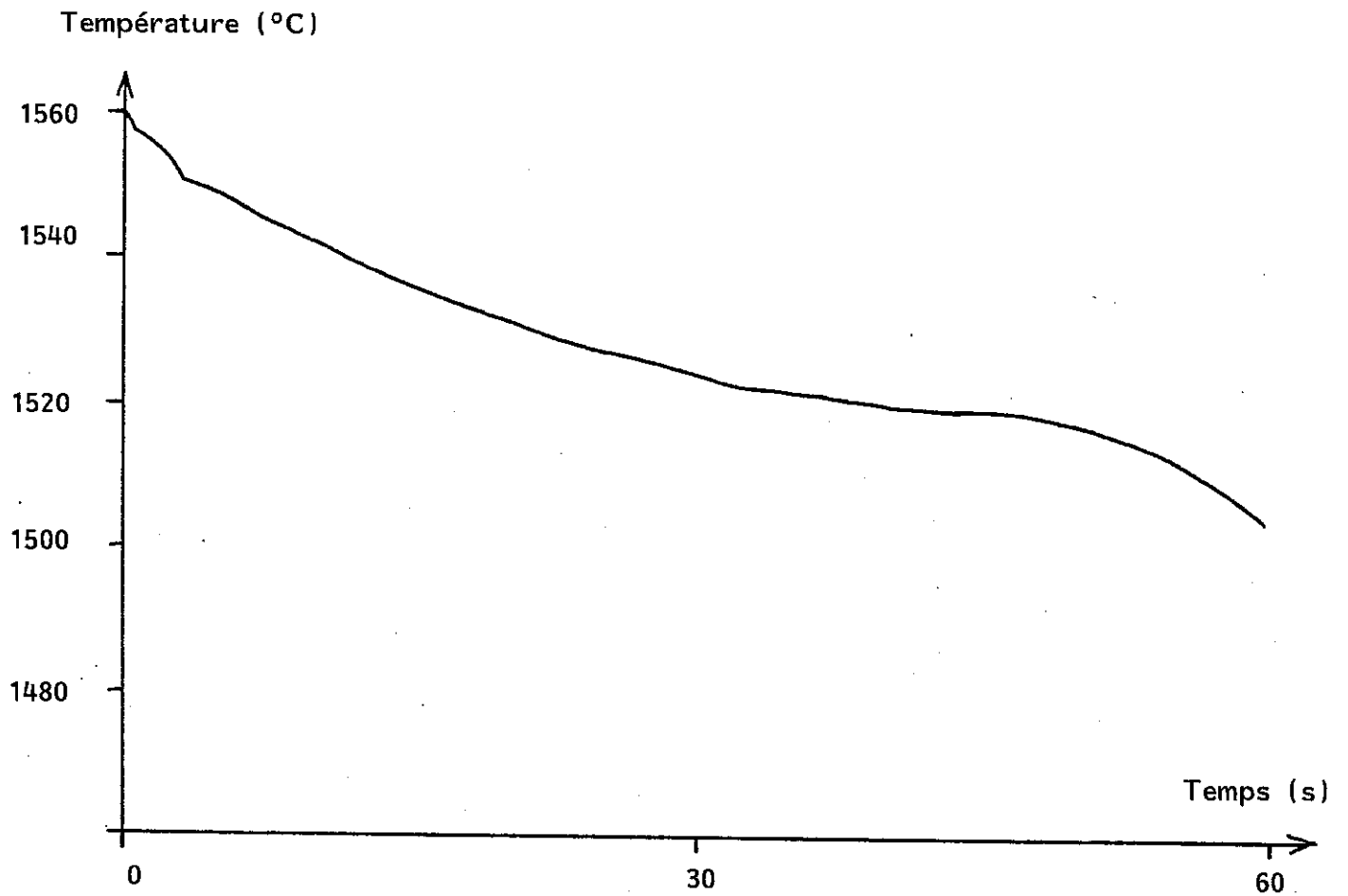


FIG. 59 : THERMOGRAMME EN SURFACE LIBRE DANS LE CAS DE REFERENCE

Fraction solide

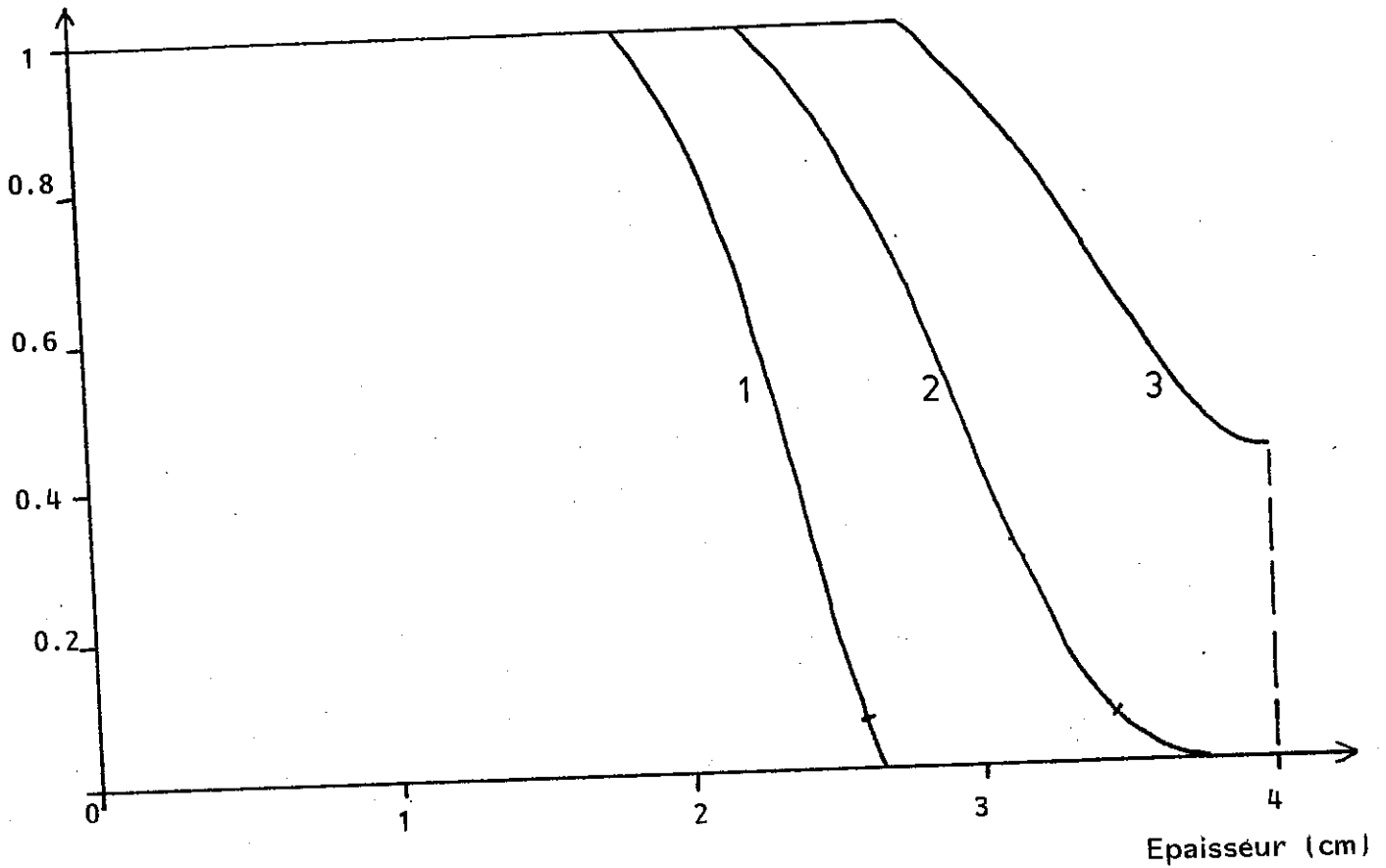


FIG. 60 : FRACTION SOLIDE DANS LE TUBE AUX INSTANTS

 $t = 32 \text{ s}$  (1) ;  $t = 40 \text{ s}$  (2) et  $t = 50 \text{ s}$  (3)

Cas étudiés	fraction solide
Cas de référence	0,067
brassage 10 cm/s	0,084
pas de brassage	0,066
$h_o = 500 \text{ W/m}^2\text{K}$	0,061
$h_o = 350 \text{ W/m}^2\text{K}$ et h diminue au cours du temps	0,067
h diminue au cours du temps	0,057
$T_c = 1540 \text{ }^\circ\text{C}$	0,065
$T_{nuc} = 1470 \text{ }^\circ\text{C}$	0,062
$T_{nuc} = 1470 \text{ }^\circ\text{C}$ et brassage 10 cm/s	0,83
$f_s$ calculée par la règle de SCHEIL - GULLIVER	0,084

Tableau 15 : Fraction solide en avant des pointes de dendrites  
à  $t_{sg}$ .

Les données du cas de référence sont en annexe 4.  
Dans les autres cas, seules les valeurs indiquées  
sont modifiées par rapport au cas de référence.

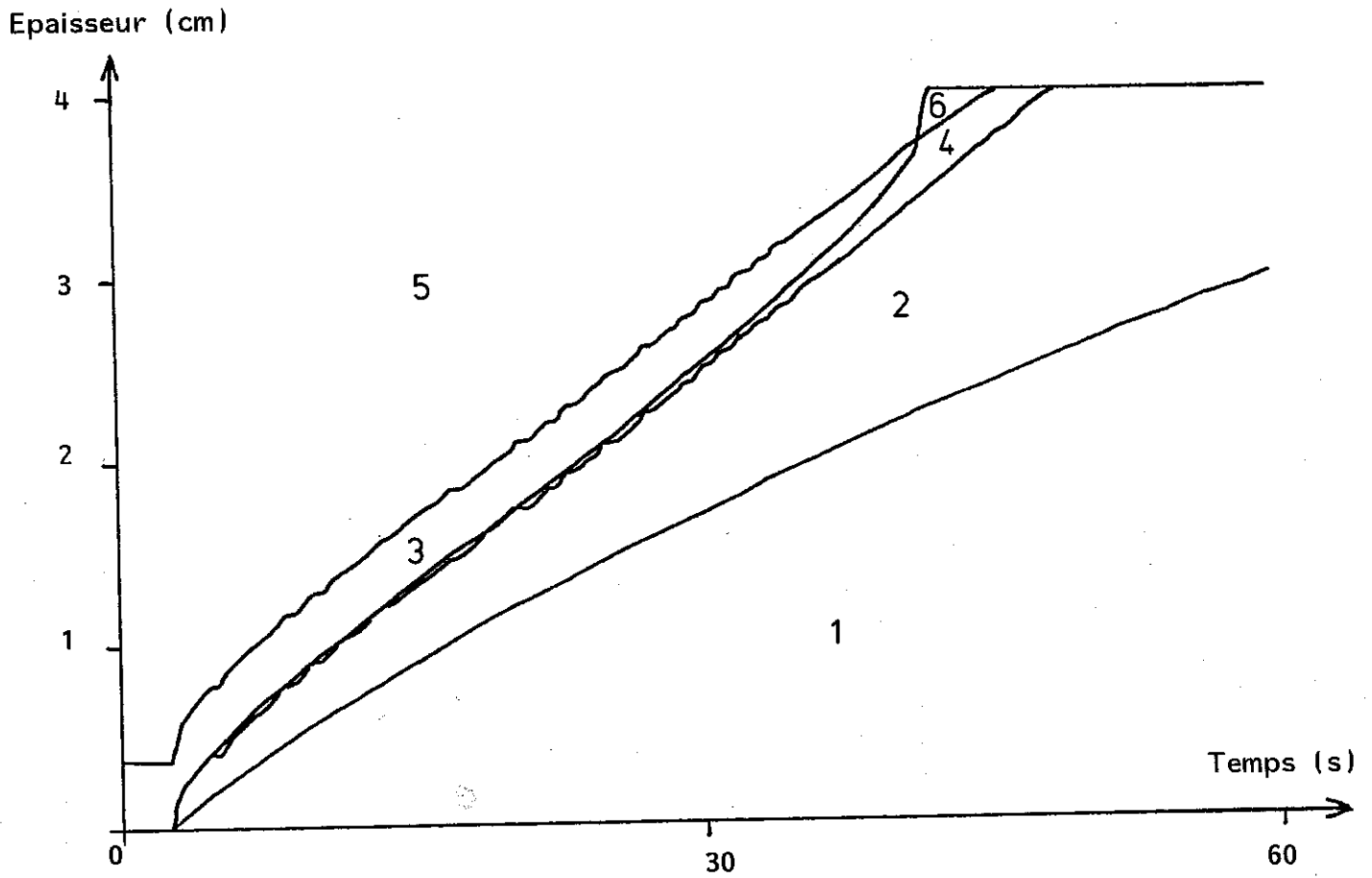


FIG. 61 : LIMITES DE ZONES DANS LE CAS OU LA FRACTION SOLIDE EST CALCULEE PAR LA REGLE DE SCHEIL-GULLIVER

n° 1 à 6 : voir Fig. 53

Quoi qu'il en soit les autres formulations possibles ne peuvent donner une valeur plus élevée de la fraction équiaxe car elles conduisent à un retard de la nucléation équiaxe par rapport à la règle du levier (voir J.D. HUNT, 1984) ; dans la version actuelle le modèle ne permet pas de traiter les fortes fractions équiaxes.

#### 4.6.7. - 4/ Autres résultats

Le pas de temps, dans les calculs précédents, est de 0.5s ; l'épaisseur du tube est divisée en 200 intervalles. En portant le pas de temps à 1s et en n'utilisant plus que 100 intervalles dans l'épaisseur du tube, on obtient la courbe de la figure 62. Elle est semblable à celle de la figure 52 ; les différences résident dans la stabilité du calcul de la position des pointes de dendrites, qui semble meilleure aux fortes vitesses de croissance, et similaire aux faibles vitesses et dans le temps d'évacuation de la surchauffe  $t'_{SG}$ , inférieur de 5 % environ à celui du cas de référence.

A l'inverse, une augmentation du nombre de pas d'espace et de temps (limitée pour des raisons techniques à 250 noeuds d'espace et à un pas de temps de 0,1s) ne fait apparaître aucun écart notable. Les 5 % ci-dessus doivent donc être imputés à un artefact numérique qui reste toutefois acceptable.

Un cas particulier intéressant se produit lorsque le brassage et la surfusion de nucléation sont tous deux importants. Alors, le liquide passe entièrement en surfusion avant que ne débute la solidification ; celle-ci est brutale et la fraction solide équiaxe bloque le front colonnaire ; la température du liquide remonte alors jusqu'à celle du liquidus (Fig. 63a). Sur cette figure, se trouvent deux thermogrammes, l'un pris dans la couche limite à la paroi, l'autre au sein du liquide homogène en température. L'écart entre les courbes traduit le gradient thermique à travers la couche limite. Quand la solidification a lieu, le liquide dans la couche limite est instantanément solidifié ; le dégagement de chaleur latente fait remonter la température, mais celle-ci décroît ensuite très vite de façon exponentielle, le solide refroidissant par conduction ; par contre, le liquide remonte jusqu'à la température de liquidus et l'on observe un palier, le flux de chaleur extrait du liquide étant compensé par le dégagement de la chaleur latente des cristaux équiaxes.

Ce cas n'est pas très réaliste pour l'acier, mais on en trouve des exemples pour des produits organiques qui nucléent très mal sur le pyrex comme le Diphényléther ; les thermogrammes ont un aspect semblable dans le cas d'un fort brassage (Fig. 63b) (voir aussi paragraphe 4.2.).

Epaisseur (cm)

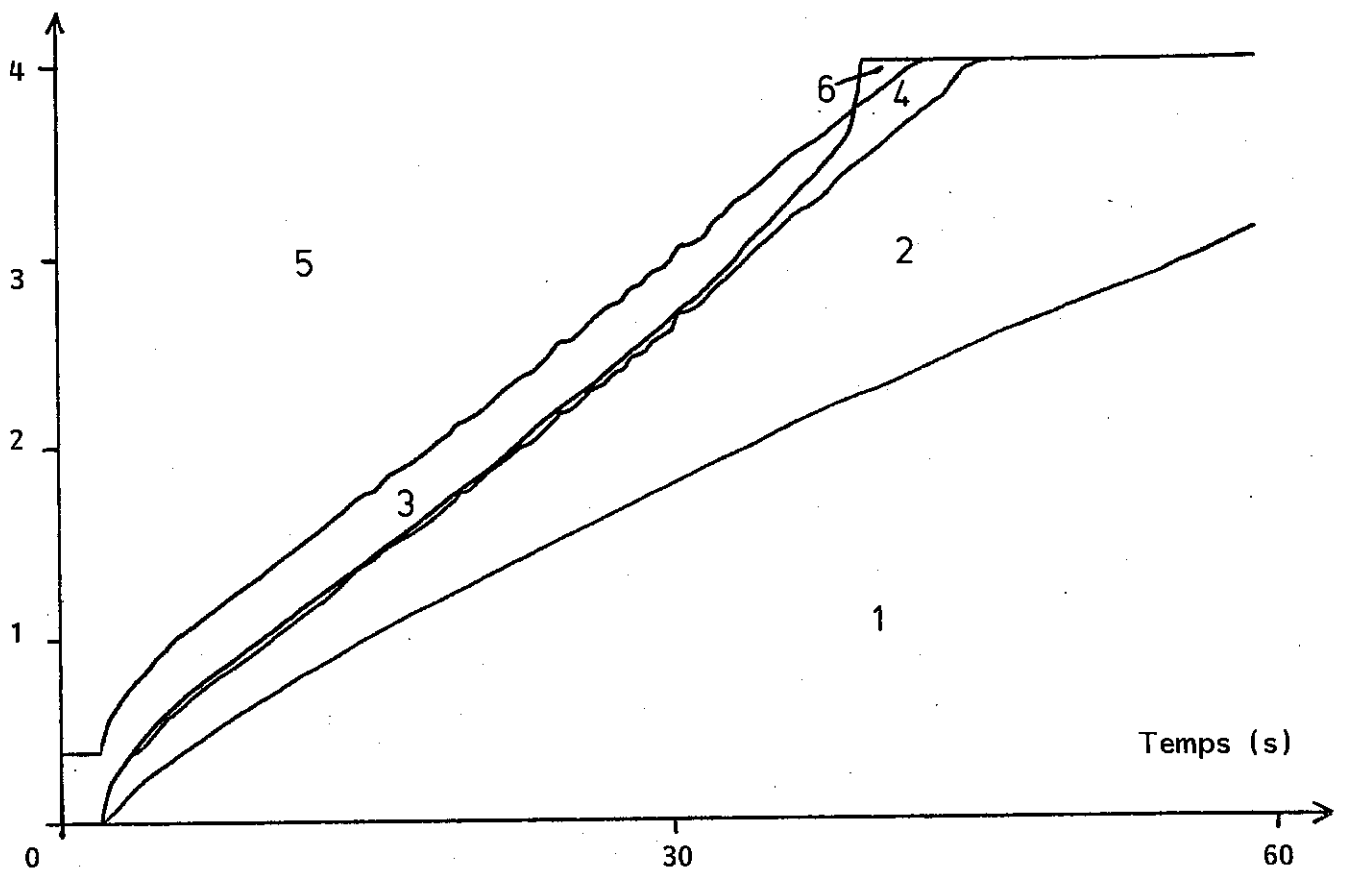


FIG. 62 : LIMITES DE ZONES AVEC DES PAS DE CALCUL PLUS GROSSIERS

N° 1 à 6 : voir Fig. 53

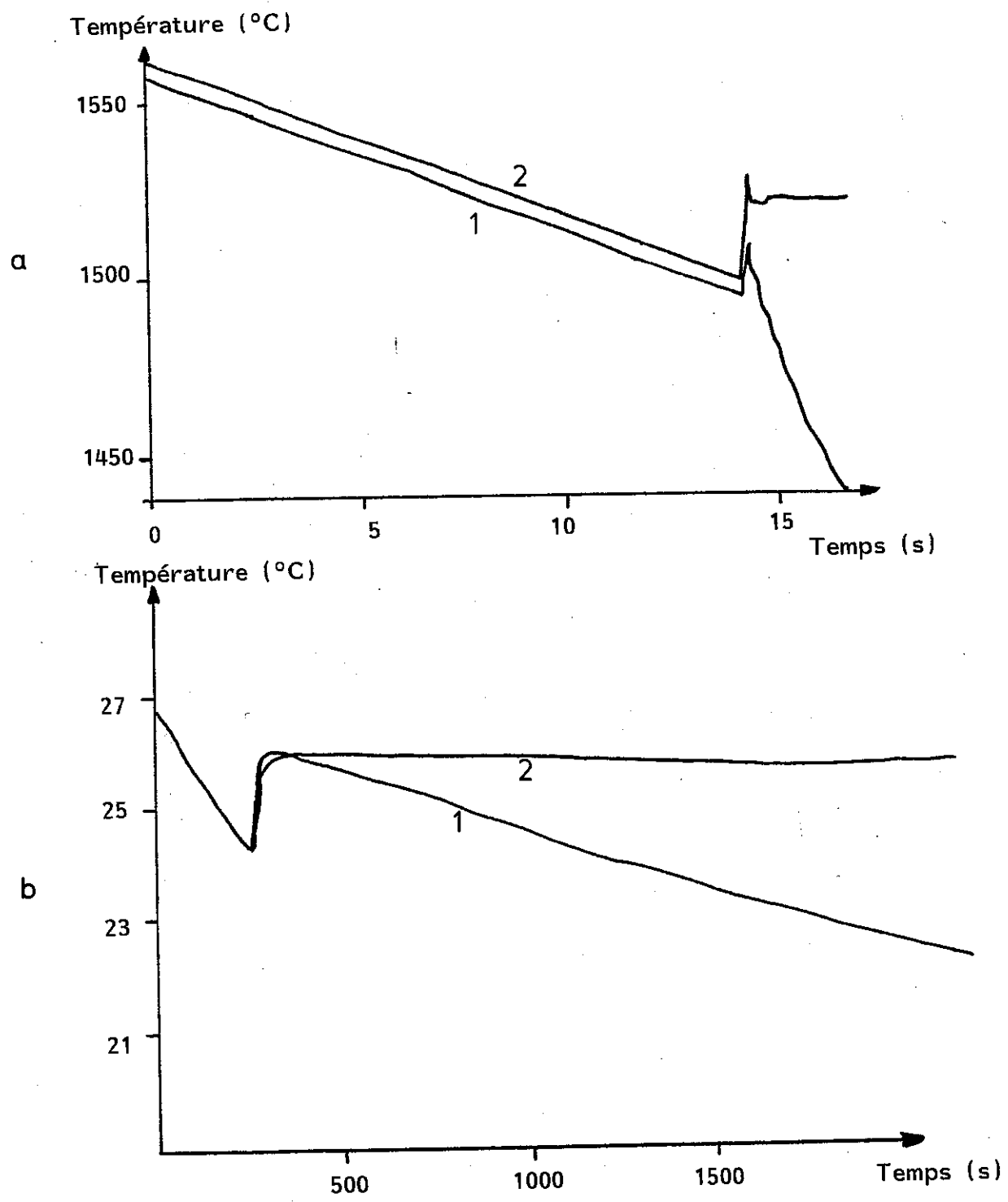


FIG. 63 : THERMOGRAMMES CALCULES (a) POUR L'ACIER ET MESURES (b) POUR LE DIPHENYLETHER.

Cas d'un fort brassage et d'une surfusion de nucléation à la paroi importante

- Courbe 1 : Près de la paroi
- Courbe 2 : Hors de la couche limite



Ce cas est le seul cas numérique ayant conduit à de fortes valeurs de la fraction solide équiaxe (voir tableau 15).

#### 4.7. COMPARAISON DES RESULTATS DU MODELE ET DES EXPERIENCES SUR UN MATERIAU TRANSPARENT.

Une installation transparente fonctionnant selon le même principe que celle décrite au Chapitre 2 a été installée à Pont-à-Mousson. Elle permet l'étude de la solidification d'un matériau transparent ; un liquide de refroidissement circule dans la paroi métallique de la coquille. La coquille a une faible longueur pour limiter l'étude aux phénomènes bidimensionnels ; les vitres latérales sont chauffées pour éviter qu'elles influencent la solidification. Le produit utilisé est un mélange succinonitrile-bornéol 1 % ; il est parfaitement transparent à l'état liquide comme à l'état solide, il se comporte comme un métal du point de vue de la solidification, et sa température de liquidus est de 53,7°C. Par contre il est hygroscopique et dégage des vapeurs désagréables, ce qui impose des précautions d'utilisation. L'installation permet d'effectuer des mesures de température ; un système de thermocouples tournant avec la coquille peut être installé in situ.

Nous avons appliqué le modèle en différences finies à ce cas. Les données sont fournies en annexe 5 pour le cas de référence. Il faut remarquer que le liquide extérieur est supposé être à - 15°C (saumure sortant d'un congélateur).

La courbe montrant l'évolution des limites de zones, en l'absence de brassage, est donnée Fig. 64. La forme des courbes est semblable à celle observée pour l'acier en l'absence de convection ; on remarque que la solidification totale prend 10 minutes avec un coefficient d'échange pourtant plus élevé que pour l'acier (1000 J/m<sup>2</sup>.K.s). En effet, ce produit est mauvais conducteur de la chaleur. Le temps total de la solidification est à peu près le même que celui observé expérimentalement, ce qui permet d'affirmer que le coefficient d'échange à la paroi est bien calé.

La courbe représentant les pointes de dendrites est plus régulière que dans le cas des aciers ; il faut remarquer qu'elle progresse en escalier, mais sans que cela gêne la lecture.

L'isotherme solidus avance de plus en plus vite à l'extrême fin de la solidification ; ceci est sans doute dû au procédé qui impose l'extraction d'un flux de chaleur donné : en fin de solidification, la part de flux de chaleur

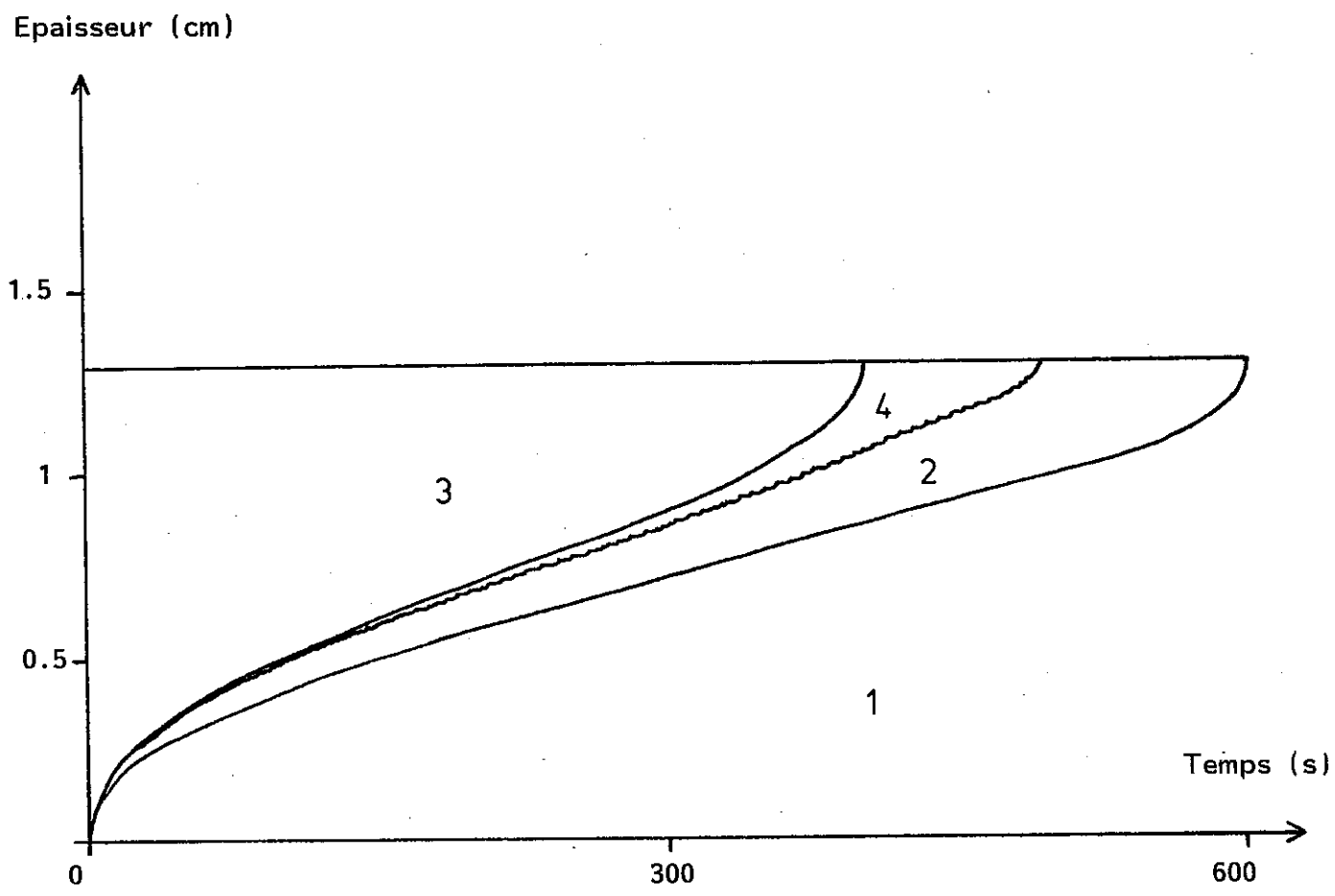


FIG. 64 : LIMITES DE ZONES POUR LE SUCCINONITRILE-BORNEOL 1 %  
EN L'ABSENCE DE BRASSAGE

N° 1 à 4 : Voir Fig. 53

provenant de la transformation liquide-solide provient d'une épaisseur de plus en plus réduite de matériau, ce qui accélère l'avancée de l'isotherme solidus.

Cela est confirmé par les courbes du champ thermique dans l'épaisseur (Fig. 65). Tant qu'il reste du liquide au dessus de la température de liquidus, les gradients sont importants ; ils diminuent très vite dès que le liquide est sur le point de disparaître.

Les thermogrammes théoriques sont donnés sur la figure 66. On n'observe de pseudo-palier à la température de liquidus qu'en surface libre.

Enfin, un cas de brassage (1 cm/s) est proposé figure 67 ; le temps d'évacuation de la surchauffe est presque la moitié de celui en conduction pure et l'épaisseur colonnaire à cet instant tombe de 66 % à seulement 49 % de l'épaisseur totale ; l'effet est beaucoup plus important que pour l'acier : ce produit est très sensible aux phénomènes convectifs, ce qui est confirmé par les expériences.

#### 4.8. CONCLUSION

Plusieurs modélisations des phénomènes thermiques se produisant au cours de la solidification d'un alliage ont été exposées. Elles tiennent compte de l'existence d'une zone solide-liquide colonnaire et du brassage éventuel du liquide se traduisant par l'existence d'une couche limite et par une homogénéité en température du reste du liquide. La modélisation semi-analytique a de nombreux défauts et certains des problèmes rencontrés ne semblent pas pouvoir être résolus de façon rapide ; le coefficient d'échange à la paroi doit être constant pour que le modèle s'applique, et ce n'est pas du tout le cas dans la pratique ; le dégagement de chaleur latente dans la zone semi-solide colonnaire est uniformément réparti, ce qui n'est pas exact et altère un peu les profils thermiques. La relation donnant la surfusion en pointes de dendrites en fonction de la vitesse de croissance pose quelques problèmes car elle n'est valable qu'aux faibles vitesses de croissance ; enfin, la croissance équiaxe, et le dégagement de chaleur latente correspondant ne sont pas pris en compte.

Cependant ce modèle a permis de montrer qu'une représentation extrêmement simple du champ de vitesse permet de rendre compte de façon réaliste de l'influence du brassage sur la solidification : plus le liquide est brassé et plus la surchauffe est évacuée rapidement ; l'extension de la zone colonnaire est d'autant plus réduite que le brassage est important, à l'instant où le liquide entre en surfusion.

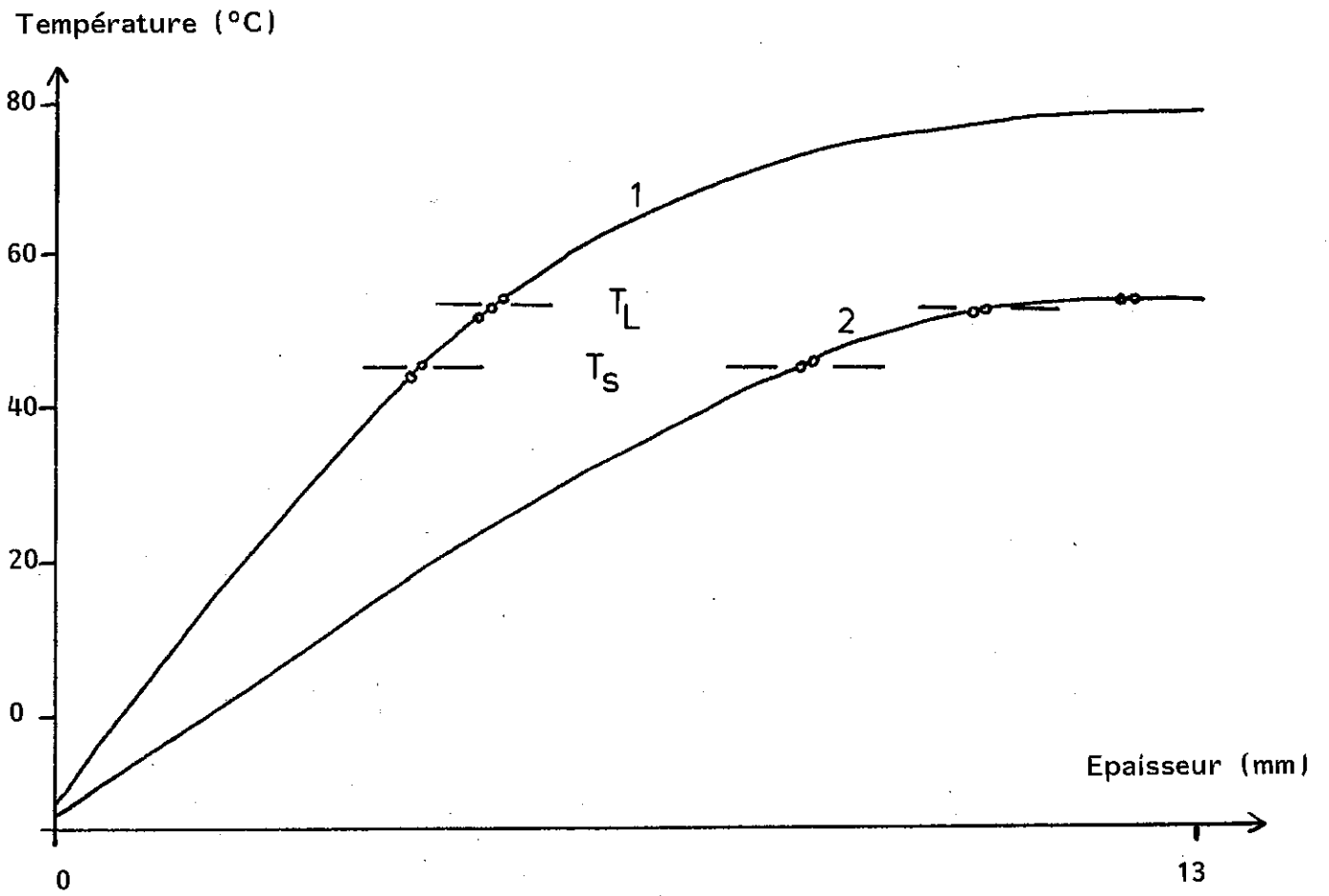


FIG. 65 : CHAMP THERMIQUE DANS LE TUBE DE SUCCINONITRILE-BORNEOL  
A  $t = 100$  s (1) et  $t = 400$  s (2) EN L'ABSENCE DE BRASSAGE

Température (°C)

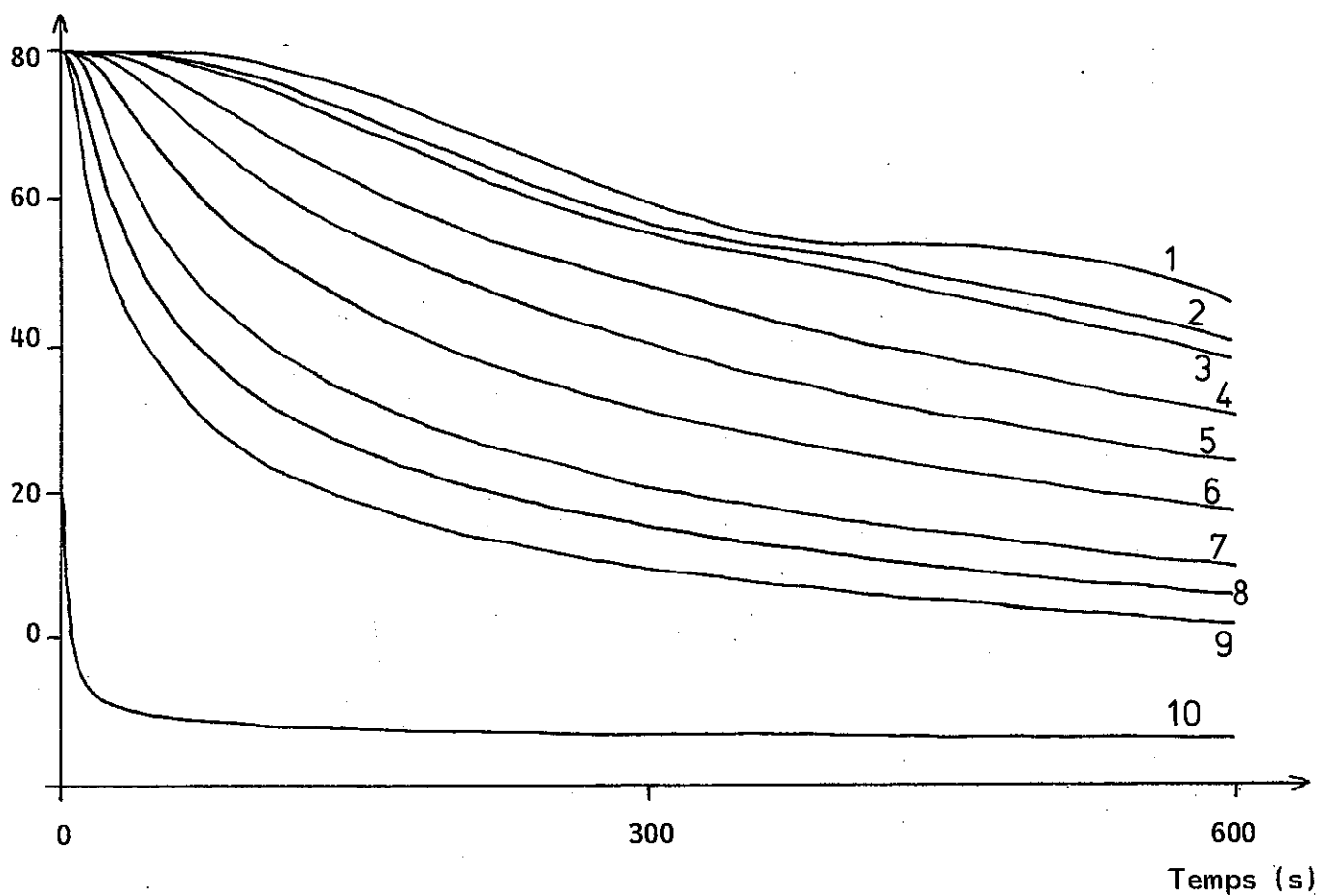


FIG. 66 : THERMOGRAMMES A DIFFERENTES DISTANCES  $d$  DE LA PAROI  
SUCCINONITRILE-BORNEOL, PAS DE BRASSAGE

- |                     |                    |
|---------------------|--------------------|
| . 1 : $d = 13$ mm   | . 6 : $d = 5$ mm   |
| . 2 : $d = 10,4$ mm | . 7 : $d = 3,9$ mm |
| . 3 : $d = 10$ mm   | . 8 : $d = 3$ mm   |
| . 4 : $d = 7,8$ mm  | . 9 : $d = 2,6$ mm |
| . 5 : $d = 6,5$ mm  | . 10 : $d = 0$ mm  |

Epaisseur (cm)

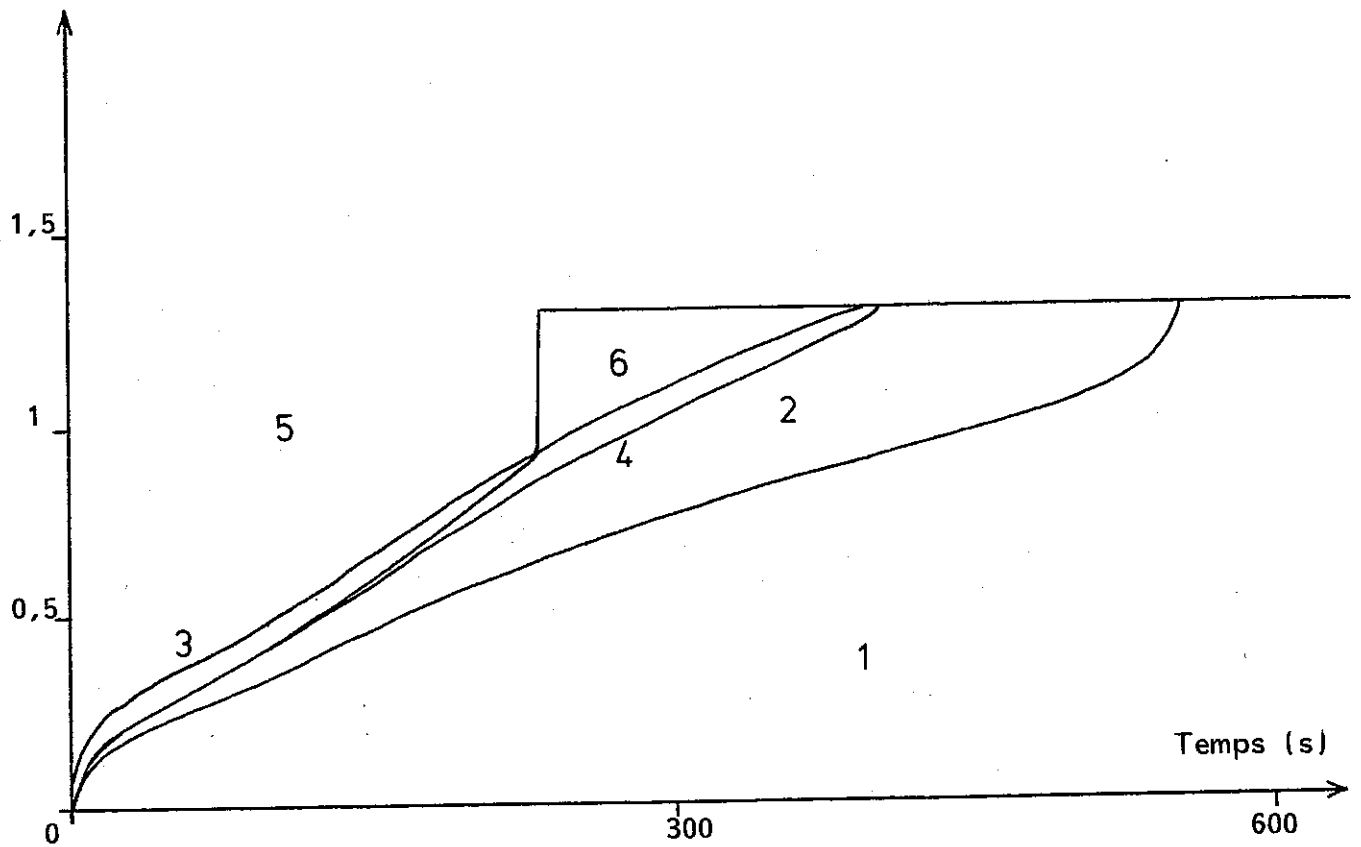


FIG. 67 : LIMITES DE ZONES DANS LE CAS D'UN BRASSAGE (1cm/s)  
DU SUCCINONITRILE-BORNEOL

N° 1 à 6 : Voir Fig. 53

La modélisation en différences finies, comportant également un traitement en couche limite, a permis de représenter la croissance colonnaire de façon précise ; les résultats montrent l'importance de plusieurs paramètres sur la solidification. La vitesse de convection du liquide est le facteur prépondérant, le temps d'évacuation de la surchauffe étant divisé par un facteur 4 entre le cas en conduction pure et un cas de brassage intense (10 cm/s). La température de coulée a un effet également important ; plus l'écart est faible avec la température de liquidus, et plus la zone colonnaire est réduite quand le liquide entre en surfusion. La surfusion de nucléation à la paroi n'a d'influence qu'en début de solidification, sauf dans le cas où elle est si importante que la surchauffe est évacuée avant que la cristallisation ne démarre. Dans ce cas, la croissance est très rapide et le front colonnaire est bloqué par les cristaux équiaxes. Enfin, le coefficient d'échange à la paroi joue un rôle important tout au long de la solidification ; sa variation au cours du temps tient compte de la formation d'un coin d'air entre le tube et la coquille.

Les résultats ont été comparés, dans la mesure du possible, aux essais réalisés sur l'acier ou sur le succinonitrile-bornéol.

Cependant, cette étape de validation, nécessaire à toute modélisation, n'en est qu'à ses débuts ; bien que les premiers résultats semblent montrer le bon comportement du modèle, il est trop tôt pour dire si le modèle rend bien compte des phénomènes liés à la croissance colonnaire en présence de convection forcée. Il en constitue bien sûr une première approche ; il prend en compte le caractère couplé entre le champ thermique à l'échelle du produit, et la cinétique de croissance. Dans la version actuelle, il n'est pas fait pour traiter des fractions équiaxes importantes. Il faudrait, dans ce but, tenir compte de la cinétique de croissance équiaxe, de la fraction solide interne des grains, et de leur recouvrement partiel en fin de solidification. Ces améliorations sont envisageables et peuvent conduire, à plus long terme, non seulement à la taille de la zone équiaxe, mais aussi, peut-être, à la taille des grains.





## CONCLUSION

Le présent mémoire est une contribution à l'étude des phénomènes tant hydrodynamiques que thermiques se produisant lors de la solidification de tubes fabriqués par coulée centrifuge horizontale. Il comporte plusieurs approches, les unes à caractère hydrodynamique, les autres à caractère thermique ou métallurgique. Un modèle de solidification en présence de convection forcée dans le liquide fait le lien entre ces diverses approches.

L'étude hydrodynamique se scinde en deux parties ; l'une est une étude théorique des écoulements, l'autre utilise un dispositif expérimental de visualisation.

L'étude théorique est basée sur la résolution des équations de Navier-Stokes par une méthode de perturbations. Elle met en évidence le fait que le liquide a toujours un mouvement par rapport à la coquille. Ce mouvement est susceptible de jouer un rôle dans la solidification. Un phénomène de résonance peut apparaître dans certains cas, à condition que la perturbation soit tridimensionnelle. Il apparaît en outre des ondes de surface qui tournent dans la coquille à une vitesse différente de celle-ci. Nous montrons enfin que certains types de perturbations, par exemple une variation de la vitesse angulaire, ne peuvent être traités par cette méthode.

L'étude expérimentale utilise une coquille centrifuge transparente fonctionnant avec de l'eau ; en effet, pour notre étude, la similitude hydrodynamique existe entre l'eau et l'acier liquide. Un dispositif a été mis au point permettant l'introduction d'une sonde de mesure tournant avec la coquille.

L'étude du remplissage a montré que celui-ci n'a pas d'influence sur les phénomènes hydrodynamiques stables qui lui succèdent. Ceux-ci comprennent divers types d'ondes de surface, (certaines configurations n'étant pas axisymétriques), et des mouvements du liquide de plus ou moins grande amplitude. Nous avons établi un diagramme montrant les domaines des différents régimes en fonction de la vitesse angulaire et de l'épaisseur d'eau.

Enfin l'étude de l'évolution du régime d'écoulement quand la quantité de liquide diminue (ce qui simule la solidification) ou quand la vitesse de rotation évolue permet de proposer une explication aux phénomènes des bandes annulaires d'inclusions parfois observées dans les tubes d'acier : celles-ci peuvent être dues à la submersion partielle des oxydes de surface au moment des transitions, toujours brutales et rapides, entre deux régimes d'écoulement.

Des mesures de conductimétrie complètent les observations. Elles mettent en évidence des vitesses de transfert axiales qui sont du même ordre que les vitesses observées sur les traceurs hydrodynamiques. Il se superpose une évolution qui traduit plusieurs régimes. Le régime le plus général a un caractère diffusif mais la diffusivité apparente est beaucoup plus élevée que la diffusivité moléculaire ; dans certains cas, les mesures traduisent l'influence des ondes de surface ; enfin, lorsque l'agitation n'est pas trop importante, il apparaît des phénomènes qui peuvent être interprétés par l'influence des mouvements de recirculation sur la stratification.

L'influence de ces phénomènes hydrodynamiques sur la solidification a été prise en compte dans deux modèles qui ont des caractères communs. Les phénomènes hydrodynamiques sont pris en compte dans les transferts de chaleur au front colonnaire par un traitement en couche limite en convection forcée.

Un premier modèle semi-analytique traduit effectivement l'influence du brassage sur certains paramètres importants pour la solidification. Plus le liquide est brassé et plus la surchauffe est évacuée rapidement ; l'extension de la zone colonnaire est d'autant plus réduite que le brassage est important. Il en est de même pour la profondeur de la zone solide-liquide colonnaire à l'instant où le liquide entre en surfusion. Par ailleurs, la convection modifie sensiblement le profil de température dans le liquide. Cependant, nous montrons que cette formulation semi-analytique manque de souplesse pour prendre en compte de façon réaliste les transferts de chaleur entre le métal et la coquille.

Un deuxième modèle beaucoup plus souple, en différences finies, a permis de pallier certaines lacunes du précédent ; en particulier, la variation du coefficient d'échange est estimée en tenant compte de la formation d'un coin d'air entre le tube et la coquille, la croissance colonnaire est décrite de façon précise en tenant compte de l'origine de la surfusion à la pointe des dendrites et d'un critère de stabilité de ces pointes.

Les résultats montrent l'importance de plusieurs paramètres sur la solidification. Le brassage a un effet majeur : la surchauffe est évacuée quatre fois plus vite en convection forcée importante (10 cm/s) qu'en conduction pure. Plus la température de coulée est basse, et plus la zone colonnaire a une extension faible au moment où la surchauffe a disparu. La surfusion de nucléation à la paroi n'a que peu d'influence sur la croissance colonnaire, sauf dans le cas particulier où elle est suffisamment importante pour que tout le liquide passe en surfusion avant que la solidification ne démarre. Dans ce cas, la croissance est très rapide et le front colonnaire est bloqué par les cristaux équiaxes. Ce résultat du modèle

est tout à fait comparable à ce qui a été observé sur un matériau transparent.

Le temps a manqué pour effectuer une comparaison détaillée des résultats du modèle avec les mesures effectuées soit sur l'acier centrifugé, soit sur un matériau transparent en coquille centrifuge. Toutefois les résultats ci-dessus laissent à penser que qualitativement le comportement du modèle est représentatif.

#### PERSPECTIVES DE DEVELOPPEMENT

Il ressort des expérimentations l'idée générale suivante : les mouvements du liquide par rapport à la coquille sont étroitement liés aux vibrations de l'ensemble tournant, ni les uns ni les autres ne pouvant être totalement évités : dans certains cas, les mouvements du liquide ont des effets négatifs car ils conduisent à une concentration excessive en inclusions dans certaines parties des tubes, alors que dans d'autres cas leur action est positive car les inclusions sont disposées dans l'ensemble du tube. Le meilleur moyen d'éviter la formation d'écoulements non désirés est donc d'imposer un mouvement de convection connu et favorable, d'intensité très supérieure à celle des mouvements liés aux vibrations. Cela peut être envisagé, par exemple, par une technique de brassage par induction magnétique.

L'application de ces idées au processus de solidification lui-même reste difficile. Elle passe nécessairement par la mise en oeuvre d'un modèle. Une première étape serait l'application du modèle existant aux mesures effectuées sur l'acier centrifugé ainsi que sur le matériau transparent solidifié en coquille centrifuge. Ce dernier cas a l'avantage de permettre d'introduire des vibrations contrôlées en cours de solidification.

Par ailleurs, à plus long terme, le modèle peut être amélioré en introduisant de façon réaliste la croissance équiaxe, par ses aspects thermiques et cinétiques, en tenant compte de la fraction solide interne des grains, et de leur recouvrement partiel en fin de solidification. De plus, la conception de ce modèle permet d'envisager une extension à deux dimensions. Ceci permettrait de tenir compte d'un champ de vitesse réel, par exemple celui mesuré par anémométrie à fil chaud grâce au système de mesure implanté dans l'installation existante. Enfin, une modélisation de la nucléation, et non plus seulement de la croissance équiaxe, peut apporter des informations sur le nombre et la taille des grains de la structure de solidification.



**BIBLIOGRAPHIE**

---



- A.F. ALEKSEEV, V.G. POLISHCHUK, A.N. SMOLYAKOV, A.N. SOBOLEV, "The effect of metal mold cooling on the quality of centrifugally cast iron tubes", Lit. Proizv., 1983, n° 8, pp. 20-21.
- J.P. BIRAT, "Cours théorique de base pour l'élaboration de la fonte et de l'acier. Mouvements de convection et solidification", Rapport IRSID, Mars 1976.
- D. BLOCH, G. MARTINEZ, Communication privée, 1985.
- V.A. BRAILOVSKAYA, G.B. PETRAZHITSKII, "Laminar heat convection of a liquid in an annular region with a given heat flux", Z. Prikladnoi. Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki, n° 3, pp. 109-114, Mai-Juin 1977.
- F.A. CALVO, J.M. GUILLEMANY, A. PRIEQUE, E. SANJURJO, "La distribución del azufre en las piezas centrifugadas", Colada, 1982, 15, n° 1 à 3 pp.2-5.
- H.S. CARLSLAW, J.C. JAEGER, "conduction of heat in solids", University Press Oxford, 2nd Ed., 1959, Clarendon Press.
- S.K. CHAN, H.H. REIMER, M. KAHLWEIT, "On the stationary growth shapes of  $NH_4Cl$  dendrites", J. of Crystal Growth, n° 32, 1976, pp. 303-315.
- T.J. CHUNG, "Finite element analysis in fluid dynamics", Mc Graw-Hill, 1978.
- A. COUTURE, "Effect of centrifugal force on solidification of aluminum alloys", Modern Casting, Avril 1967, p. 62-66.
- J. CUMBERLAND, Brit. Foundry, 1963, LVI, Janv., p. 26.
- H. DETTELA, "Nouveautés dans le domaine de la coulée centrifuge", Berg u. Hüttenmann. Monatshefte, Juil. 1954, 99, n° 7, pp. 121-132.
- R. DO, "Mesure et visualisation à l'intérieur d'une coquille de centrifugation", 19 Décembre 1986, thèse CNAM.
- J.L. DUDA, J.S. VRENTAS, "Perturbation solutions of diffusion-controlled moving boundary problems", Chemical Engineering Science, 1969, Vol. 24, pp. 461-470.
- Y. EBISU, "Computer simulations on the macrostructures in centrifugal castings", AFS Transactions, 1977, pp. 643-654.
- E.R.G. ECKERT, R.M. DRAKE, "Heat and Mass Transfer", 2nd Ed., Mc Graw-Hill, 1963.
- V.A. EFIMOV, G.S. GORELOV, I.P. MOZHARENKO, E.D. MALIEVSKAYA, "Zoning and banding in centrifugally cast steel pipes", Lit. Proizv., 1976, (6), p. 23-24, ou R. Cast. Prod., Juin 1976, pp. 244-245.
- M.C. FLEMINGS, C.M. ADAMS, E.E. HUCKE, H.F. TAYLOR, "Metal solidification in a flowing stream", AFS Transactions, Vol. 64, Mai 1956.
- M. FUKUDA, J. HONDA, S. NAKAMURA, H. FUJITA, A. OKABAYASHI, "Recent progress of cast rolls for hot rolling of long products", METEC 84, (Steel Rolling, 2nd Int. Conf.) 25-27 Juin 1984, Düsseldorf, RFA [Proc. Conf.]
- J.P. GABATHULER, F. WEINBERG, "Fluid flow into a dendritic array under forced convection", Met. Trans. B, Vol. 14B, Décembre 1983, p. 733-741.

- D.S. GIBSON, "Basic designs of Centrifugal Casting Machines", Foundry Trade Journal, 2 Février 1984, pp. 61-62.
- G.S. GORELOV, V.A. EFIMOV, I.P. MOZHARENKO, "Influence of metal movement during centrifugal casting on metal structure and cleanliness", Liteinoe Proiz., 1974 (6), pp. 28-29 ou R. Cast. Prod., pp. 260-261, Juin 1974.
- G.S. GORELOV, V.A. EFIMOV, I.P. MOZHARENKO, A.G. GABISIANI, I.B. SHENGELAYA, "Influence of centrifugal fields on structure and inclusion contents of carbon steels", Liteinoe Proiz., 1974 (10), pp. 26-27 ou Russian casting production, pp. 441-442, (Octobre 1974).
- P.M. GRESHO, R.L. LEE, R.L. SANI, "On the time-dependent solution of the incompressible Navier-Stokes equations in two and three dimensions", in "Recent advances in numerical methods in fluids", Vol. 1, Chap. 2, éd. C.TAYLOR and K. MORGAN, Pineridge Press Ltd, 1980.
- J. HONDA, T. ENDO, M. FUKUDA, Y. NAKAGAWA, "Centrifugally cast rolls outperform double-poured rolls", Iron and Steel Engineer, Octobre 1977, pp. 50-58.
- H.O. HOWSON, Trans. Inst. Brit. Found., 1946.
- H.O. HOWSON, "Macrostructural comparison of centrifugal and static castings", Foundry Trade Journal, 1969, pp. 261-272 et 441-446.
- J.D. HUNT, "Steady state columnar and equiaxed Growth of dendrites and eutectic", Materials Science and Engineering, 65 (1984) pp. 75-83.
- J.D. HUNT, K.A. JACKSON, "Binary eutectic solidification", Trans. of the metall. society of AIME, vol. 236, juin 1966, pp. 843-852.
- R. ICHIKAWA, H. TANIGUCHI, O. ASAI, "Columnar structure of alloys solidified into flowing melt in centrifugal casting", Z. Metallkunde, 1980, pp. 260-263.
- G.P. IVANTSOV, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 58, 1947, 567.
- K.A. JACKSON, J.D. HUNT, "Transparent compounds that freeze like metals", Acta Met., Vol. 13, 1965, pp. 1212-1215.
- K.A. JACKSON, J.D. HUNT, D.R. UHLMANN, T.P. SEWARD III, "On the origin of the equiaxed zone in castings", Trans. of the metall. Society of AIME, vol. 236, Février 1966, pp. 149-158.
- L.M. JIJI, "On the application of perturbation to free-boundary problems in radial systems", J. of the Franklin Institute, Vol. 289, n° 4, Avril 1970, pp. 281-291.
- L.M. JIJI, S. WEINBAUM, "Perturbation solutions for melting of freezing in annular regions initially not at the fusion temperature", Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 21, 1978, pp. 581-592.
- M.H. JOHNSTON, C.S. GRINER, "The direct observation of solidification as a function of gravity level", Met. Trans. A, Vol. 8, pp. 77-82, 1977.
- M.C. JONES, "Investigation of centrifugal casting techniques", Foundry Trade Journal, 18 Juin 1970, pp. 1003-1017.
- M.J. KARWEIT, S. CORRISIN, "Observation of cellular patterns in a partly filled, horizontal, rotating cylinder". Physics of fluids, Vol. 18, n° 1, pp. 111-112, Janvier 1975.



- I. KHANDROS, M. OHRING, "Mass transport effects in centrifuged bilayer liquid metals", *Scripta Metallurgica*, Vol. 18, 1984, pp. 1355-1358.
- S.E. KIRILLOV, P.A. OBNOVLENSKII, G.A. SOKOLOV, "Application of thermal markers to measurement of the velocity fields of a liquid flow", *Teplofizika Vysokikh Temperatur*, Vol. 15, n° 5, pp. 1119-1120, Sept.-Oct. 1977.
- A.E. KRIVOSHEEV, V.G. POLISHCHUK, "Influence of rotary mould speed on castings solidification", *R. Cast. Prod.*, pp. 347-348, Août 1971.
- W. KURZ, D.J. FISHER, "Dendrite growth at the limit of stability : tip radius and spacing", *Acta Metallurgica*, Vol. 29, 1981, pp. 11-20.
- W. KURZ, M. RAPPAZ, "Microstructure dendritique", Ch. 3.5, *Rapport de l'Ecole d'Eté de Solidification du Centre Technique de la Fonderie*, 1985.
- V.G. LEVICH, "Physicochemical hydrodynamics", Prentice-Hall, Int. Series in the Physical and Chemical Engineering Sciences, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- J. LIPTON, "Uebergang von der gerichteten zur Ungerichteten dendritischen erstarrung", thèse n° 501, 1983, *Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*.
- J. LIPTON, A. GARCIA, W. HEINEMANN, "An analytical solution of directional solidification with mushy zone", *Arch. Eisenhüttenwes.*, 53, 1982, n° 12, Déc., pp. 469-473.
- J. LIPTON, M.E. GLICKSMAN, W. KURZ, "Dendritic growth into undercooled alloy melts", *Materials Science and Engineering*, 65, 1984, pp. 57-63.
- J. LIPTON, W. HEINEMANN, W. KURZ, "Columnar to equiaxed transition (CET) in castings. Part I : Determination of the CET from cooling curves", *Arch. Eisenhüttenwes.* 55, n° 5, Mai 1984, pp. 195-200.
- J. LIPTON, W. KURZ, R. TRIVEDI, "Rapid dendrite growth in undercooled alloys", *Acta Met.*, Vol. 35, n° 4, pp. 937-964, 1987.
- G. MARTINEZ, M. GARNIER, F. DURAND, "Stirring phenomena in centrifugal casting of pipes", *Applied Scientific Research*, 1987, à paraître.
- C. MASCRE, "Effet des vibrations sur les alliages en fusion ou en cours de solidification", *Fonderie*, n° 200, 1962, pp. 361-375.
- P. MASSE, "Analyse méthodologique de la modélisation numérique des équations de la physique des milieux continus à l'aide de la méthode des éléments finis", Thèse de Docteur d'Etat es-Sciences, Grenoble, Juin 1983.
- D.A. MELFORD, "The solidification of steel under conditions of forced flow", *ironmaking and steelmaking*, 1980, n° 2, pp. 89-91.
- G. METAUER, T. TOLL-DUCHANOY, A. ROYER, "MnMoNb Weldable centrifugally cast steel used in the manufacture of heavy-wall pipes for the offshore industry", *Bulletin du Cercle d'Etudes des métaux*, Sept. 1981, 14, (15), pp. 17-1 à 17-12.
- J.L. MEYER, "Influence de la convection naturelle ou du brassage électromagnétique sur la solidification de lingots d'aluminium", Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, 28 Nov. 1983.
- A.A. MIKHELLSON, "Effect of process variables upon the design of centrifugal pipe-casting machines", *STAL*, Vol. 16, 1956, n° 4, pp. 348-351.
- G.S. MIRZOYAN, "Segregation in steel billets manufactured by a centrifugal process", *Izvestiya VUZ Chernaya Metallurgija*, 1970, Vol. 13, n° 9, pp. 148-150.
- G.S. MIRZOYAN, M.M. LEVIN, E.T. DOLBENKO, I.E. BLOKHIN, "Centrifugal casting of thick-walled large steel blanks", *Lit. Proizv.*, 1971, Vol. 16, n° 7, pp. 10-11.

- G.S. MIRZOYAN, G.M. SLEPNEV, I.V. TULEPOVA, "Removal of oxide inclusions from steel during centrifugal casting", *Izvestiya VUZ Chernaya Met.*, 1982, n° 9, pp. 45-48.
- G.S. MIRZOYAN, V.G. TINYAKOV, I.V. TULEPOVA, "non-metallic inclusions in centrifugal castings", *Lit. Proizv.*, 1971, n° 5, p. 37.
- G. MÜLLER, "Convection in melts and crystal growth on a centrifuge", *European Mechanics Colloquium*, 13 Août 1981, Karlsruhe, pp. 165-166.
- G. MÜLLER, E. SCHMIDT, P. KYR, "Investigation of convection in melts and crystal growth under large inertial accelerations", *J. of Crystal Growth*, 49, 1980, pp. 387-395.
- L. NORTHCOTT, "The influence of turbulence on the structure and properties of steel ingots", *J. of Iron and Steel Institute*, 1941, vol. 143, pp. 49-89.
- L. NORTHCOTT, V. DICKIN, "The influence of centrifugal casting (horizontal axis) upon the structure and properties of metals", *J. of the institute of metals*, vol. 70, 1944, pp. 301-323.
- I. OHNAKA, T. FUKASAKO, "Solidification analysis of steel ingots with consideration on fluid flows", *Trans. Iron and Steel Inst. of Japan*, 1981, Vol. 21, pp. 485-494.
- T.J. PEDLEY, "The stability of rotating flows with a cylindrical free surface", *J. Fluid Mechanics*, 1967, Vol. 30, Part 1, pp. 127-147.
- J. PEDLOSKY, "Geophysical fluid dynamics", Springer-Verlag, New-York, 1979.
- C. PHILIPPE, "Mesures de vitesses dans un écoulement laminaire axysymétrique par une technique optique de visualisation en lumière cohérente", *J. of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 34, Mars 1983, pp. 137-153.
- O.M. PHILLIPS, "Centrifugal waves", *J. Fluid Mechanics*, 1959, pp. 340-352.
- M. RAPPAZ, J.L. DESBIOLLES, P. THEVOZ, ZOU JIE, W. KURZ, "Micro-/macroscopic modelling of solidification", *Rapport annuel 1986 du projet COST 504*.
- M. RAPPAZ, P. THEVOZ, ZOU JIE, J.P. GABATHULER, H. LINDSCHEID, "Micro/Macroscopic modeling of equiaxed solidification", extrait de "State of the art of computer simulation of casting and solidification processes - 1986", H. FREDRIKSSON, 1986, éd. de Physique.
- N.N. REUTOV, "Hydrodynamic condition of metal in centrifugal casting and effect on macrostructure", *Liteinoe Proizv.*, Vol. 10, 1959, § 6, pp. 22-27.
- D.S. RILEY, F.T. SMITH, G. POOTS, "The inward solidification of spheres and circular cylinders", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 17, 1974, pp. 1507-1516.
- W.M. ROHSENOW, J.P. HARTNETT, "Handbook of heat transfer", Mc Graw-Hill, 1973.
- A. ROYER, "Horizontal Centrifugal Casting : a technique for the manufacture of large-diameter, heavy-wall pipes", *Bull. du Cercle d'Etudes des Métaux*, Sept. 1981, 14, (15), pp. 18.1 - 18.12.
- A. ROYER, B. DUMAS, M. GANTOIS, "Spun steel pipes for the offshore industry", *J. of energy resources technology*, Mars 1983, Vol. 105, pp. 97-102 (Trans. of the ASME).
- K.J. RUSHAK, L.E. SCRIVEN, "Rimming flow of liquid in a rotating horizontal cylinder", *J. Fluid Mech.*, 1976, Vol. 76, Part 1, pp. 113-125.

- A.A. RYADNO, Y.P. MINOSYAN, "Heat transfer during solidification of a liquid in a rotating cylinder", DOKL. AKAD. NAUK UKR. SSR Série A : FIZYKO-MATEMAT. TECHN. NAUKY, n° 11, 1982, pp. 68-71.
- H. SCHLICHTING, "Boundary layer theory", Mc Graw-Hill, 1968, Ch. 2.
- T.K. SINHA, J.M. GUPTA, "Solidification in an annulus", Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 25, 1982, pp. 1771-1773.
- SMITHELLS METALS REFERENCE BOOK, 6th Edition, Ed. Eric. A. Brandes, Butterworths, 1983.
- S. SPENCER, P. CARLESS, E. MAGEE, "Mathematical model for simulation of solidification and cooling of cast rolls", Ironmaking and Steelmaking, 1981, n° 3, pp. 129-136.
- W. STEINKUSCH, "Heat-resistant steels and alloys in the petrochemical industry", in "Behaviour of High Temperature alloys in aggressive Environments", Proc. Int. Conf. PETTEN 1979, European Communities, The Metals Soc., 1980, pp. 83-103.
- J. SZEKELY, "Fluid flow phenomena in metals processing", Academic Press, 1979.
- J. SZEKELY, A.S. JASSAL, "An experimental and analytical study of the solidification of a binary dendritic system", Met. Trans. B, Vol. 9B, Sept. 1978, pp. 389-398.
- K.H. TACKE, A. GRILL, K. MIYAZAWA, K. SCHWERDTFEGGER, "Macroseggregation in strand cast Steel : Computation of concentration profiles with a diffusion model ", Arch. Eisenhüttenwes. 52, 1981, n° 1 Janv., pp. 15-20.
- T. TAKAHASHI, K. ICHIKAWA, M. KUDOU, K. SHIMAHARA, "Effect of fluid flow on the macroseggregation in steel ingot", Trans. of the Iron and Steel Inst. of Japan, Vol. 16, 1976, pp. 283-291.
- S. TIMOSCHENKO, "Résistance des Matériaux", 2ème Edition, S. Timoschenko et J.N. Goodier, 1951.
- T.K. VAIDYANATHAN, A. SCHULMAN, J.P. NIELSEN, S. SHALITA, "Correlation between macroscopic porosity location and liquid metal pressure in centrifugal casting technique", J. dentist. Res., 1981, 60, n° 1 pp. 59-66.
- L.H. VAN VLACK, "Elements of material Science", ADDISON-WESLEY Publ. Comp., 2nd Ed., 1971.
- S. VASSEUR, "Etude thermique et métallurgique de la solidification centrifuge d'aciers faiblement alliés", Thèse de Docteur-Ingénieur, Nancy, 8 Déc. 1982.
- S. VASSEUR, J. TOLL.-DUCHANNOY, G. METAUER, C. FRANTZ, M. GANTOIS, "Thermal, metallurgical and mechanical aspects of dispersoid centrifugally cast steels", 3-6 Octobre 1983, Int. Conf. on Technology and Applications of high strength low alloy (HSLA) steels, Philadelphia, Pennsylvania.
- B.F. VILYUM, "Hydrodynamic theory of horizontal centrifugal casting", Izvestiya Akademii Nauk SSSR, OTN, Oct. 1954, n° 10, pp. 39-46.
- G.I. VOLKOVITSKII, O.A. PLYATSKOVSKII, et al., "Centrifugal casting of massive tube blanks in austenitic steel OKh10N20T2", Russian casting production, n° 5, 1965, pp. 177-178.

S. WEINBAUM, L.M. JIJI, "Singular perturbation theory for melting or freezing in finite domains initially not at the fusion temperature", J. of applied Mechanics, Mars 1977, pp. 25-30.

S. WITZKE, J.P. RIQUET, F. DURAND, "Visualisation de la convection lors de la cristallisation basaltique et équiaxe d'une solution transparente", Mémoires Scientifiques de la Revue de Métallurgie, Nov. 1979, pp. 701-714.

CHIA-SHUN YIH, "Instability of a rotating liquid film with a free surface", Proceedings of the Royal Society, A, Vol. 258, 1960, pp. 63-89.

M.B. ZAGHLOUL, T. SHINODA, R. TANAKA, "Relation between structure and creep rupture strength of centrifugally cast HK 40 Steel", Transactions Iron and steel Inst. of Japan, Vol. 17, 1977, pp. 29-36.

P.F. ZAVGORODNII, F.V. NEDOPEKIN, V.S. BORODIN, A.L. KORNEV, "An empirical formula for the temperature and concentration dependance of the viscosity of molten Fe-C", Fiz. Khim. Obrab. Materialov, 1982, n° 3, pp. 52-54.

## TABLE DES MATIERES

---



## S O M M A I R E

INTRODUCTION	p. 7
<b><u>CHAPITRE 1 : CALCULS ANALYTIQUES HYDRODYNAMIQUES</u></b>	p. 15
Notations	p. 17
1.1. INTRODUCTION	p. 18
1.2. DEFINITION DE LA METHODE ET DE L'ETAT DE REFERENCE	p. 19
1.3. PERTURBATION PAR LA GRAVITE	p. 21
1.3.1. - Le calcul	p. 21
1.3.2. - Les résultats	p. 24
1.4. PERTURBATION DUE A UN BALOURD DE LA COQUILLE ET A LA GRAVITE	p. 30
1.4.1. - Méthode	p. 30
1.4.2. - Résolution	p. 30
1.4.3. - Les résultats	p. 33
1.5. PERTURBATION DUE A UNE FLECHE DE LA COQUILLE ET A LA GRAVITE	p. 36
1.5.1. - Origine physique d'une flèche	p. 36
1.5.2. - Les équations à résoudre	p. 36
1.5.3. - Résolution	p. 39
1.5.4. - Les résultats	p. 43
1.6. LES LIMITES DE LA METHODE	p. 46
1.6.1. - Cas d'un liquide visqueux - Variation de la vitesse angulaire de la coquille	p. 46
1.6.2. - Variation de l'épaisseur de liquide	p. 49
1.7. - CONCLUSION	p. 53
<b><u>CHAPITRE 2 : ETUDE EXPERIMENTALE DE LA COULEE CENTRIFUGE SUR                   UNE INSTALLATION DE SIMULATION UTILISANT DE L'EAU</u></b>	p. 55
2.1. INTRODUCTION	p. 57
2.2. L'INSTALLATION EXPERIMENTALE	p. 58
2.3. ETUDE DU REMPLISSAGE ( partie confidentielle )	
2.4. ETAT STABLE : FORME DE LA SURFACE LIBRE	p. 66
2.5. LES MOUVEMENTS DU FLUIDE EN SURFACE LIBRE DANS LES ETATS STABLES	p. 73
2.6. EVOLUTION DU REGIME D'ECOULEMENT EN FONCTION DE LA VARIATION DE LA VITESSE DE ROTATION OU DE LA QUANTITE DE LIQUIDE	p. 89
2.7. MESURES DE CONDUCTIMETRIE	p. 94
2.7.1. - Principe	p. 94
2.7.2. - Les expériences	p. 95
2.7.3. - Les résultats - Cas général	p. 95
2.7.4. - Les résultats - Cas particuliers	p. 99
2.7.5. - Effet du remplissage ( partie confidentielle )	
2.8. CONCLUSION	p. 107
<b><u>CHAPITRE 3 : CALCULS NUMERIQUES HYDRODYNAMIQUES</u></b>	p. 109
3.1. INTRODUCTION	p. 111
3.2. LES EQUATIONS ET LES CONDITIONS AUX LIMITES	p. 116

3.2.1. - Les notations utilisées au paragraphe 3.2.	p. 116
3.2.2. - Les équations	p. 117
3.2.3. - Les conditions aux limites	p. 118
3.3. MODELISATION NUMERIQUE DES EQUATIONS EN ELEMENTS FINIS	p. 121
3.4. LE PROGRAMME	p. 126
3.5. CONCLUSION	p. 126
<b>CHAPITRE 4 : INFLUENCE DE LA CONVECTION SUR LA SOLIDIFICATION</b>	p. 127
4.1. INTRODUCTION	p. 129
4.2. BIBLIOGRAPHIE	p. 129
4.3. LES MODELISATIONS ANTERIEURES	p. 131
4.4. CARACTERES GENERAUX DE LA MODELISATION	p. 138
4.5. LE MODELE SEMI-ANALYTIQUE	p. 140
4.5.1. - Caractères généraux	p. 140
4.5.2. - Mise en oeuvre du modèle semi-analytique	p. 141
4.5.3. - Résultats du modèle semi-analytique	p. 141
4.5.4. - Les limites du modèle	p. 157
4.6. MODELE EN DIFFERENCES FINIES	p. 159
4.6.1. - Caractères généraux	p. 159
4.6.2. - Formulation du modèle	p. 160
4.6.3. - Les conditions aux limites	p. 162
4.6.4. - Problèmes liés aux termes sources	p. 164
4.6.5. - Conditions initiales	p. 165
4.6.6. - Modélisation de la croissance colonnaire	p. 165
4.6.6. - 1/ Position du problème	p. 165
4.6.6. - 2/ Discussion	p. 168
4.6.7. - Les résultats	p. 174
4.6.7. - 1/ Les limites de zones	p. 174
4.6.7. - 2/ Le champ de température	p. 183
4.6.7. - 3/ La fraction solide	p. 183
4.6.7. - 4/ Autres résultats	p. 190
4.7. COMPARAISON DES RESULTATS DU MODELE ET DES EXPERIENCES SUR UN MATERIAU TRANSPARENT	p. 193
4.8. CONCLUSION	p. 195
CONCLUSION	p. 201
BIBLIOGRAPHIE	p. 205
TABLE DES MATIERES	p. 213
SOMMAIRE	p. 215
FIGURES	p. 217
TABLEAUX	p. 220
ANNEXES	p. 221
. ANNEXE 1 : Etat de référence : la rotation en bloc	p. 223
. ANNEXE 2 : Calculs de similitude hydrodynamique	p. 225
. ANNEXE 3 : Notations relatives au chapitre 4	p. 227
. ANNEXE 4 : Données numériques pour l'acier	p. 229
. ANNEXE 5 : Données numériques pour le succinonitrile-bornéol 1%	p. 230
. ANNEXE 6 : Calcul du moment où se forme le coin d'air	p. 231
. ANNEXE 7 : Solidification en coquille d'un liquide brassé estimation de la durée pour solidifier 24 mm	p. 235



FIGURES

Fig. 1 : Centrifugation de l'acier	p. 10
Fig. 2 : Géométrie de la nappe liquide	p. 20
Fig. 3 : Trajectoires dans le repère fixe. Forme de la surface libre	p. 26
Fig. 4 : Lignes de courant de la perturbation seule dans le repère fixe	p. 26
Fig. 5 : Trajectoire d'une particule fluide par rapport à la coquille ( $\Omega$ petit)	p. 28
Fig. 6 : Trajectoire d'une particule fluide par rapport à la coquille ( $\Omega$ grand)	p. 28
Fig. 7 : Trajectoires en présence de la gravité et d'un balourd. Tracé pas à pas qualitatif	p. 34
Fig. 8 : Mouvement de la surface libre en présence d'un balourd	p. 35
Fig. 9 : Géométrie du problème de la flèche	p. 37
Fig. 10: La flèche de la coquille assimilée à une portion de sinussoïde	p. 38
Fig. 11: Géométrie du problème	p. 50
Fig. 12: Vue en coupe de l'installation expérimentale	p. 59
Fig. 13: Principe de fonctionnement de la visualisation avec synchronisation entre caméra et stroboscope	p. 60
Fig. 14: Vue d'ensemble du système de mesure	p. 62
Fig. 15: Mécanisme assurant la rotation différentielle du système de mesure et de la coquille	p. 63
Fig. 16: Mécanisme assurant le mouvement axial de la sonde	p. 64
Fig. 17: Principe de la vidange en cours de rotation	p. 65
Fig. 18: Le remplissage	partie
Fig. 19: Formes de busettes adaptables sur la maquette à eau	confidentielle
Fig. 20: Les différentes formes de surface libre observées à l'état stable	p. 68
Fig. 21: Configurations non axisymétriques	p. 69
Fig. 22: Lien entre les écoulements dans le liquide et la structure de la sciure	p. 74
Fig. 23: Structures de la sciure	p. 76
Fig. 24: Structures de la sciure	p. 77
Fig. 25: Vagues hélicoïdales et déplacement de la sciure	p. 78
Fig. 26: Déplacement axial de la sciure	p. 86
Fig. 27: Recouvrement de la sciure par les vagues de surface	p. 88
Fig. 28: Aspiration de la sciure par les courants de recirculation	p. 90
Fig. 29: Apparition des hélices à la surface libre	p. 92
Fig. 30: Apparition des vagues horizontales en surface libre	p. 93
Fig. 31: Courbes de conductimétrie - cas général	p. 97

Fig. 32 : Courbes de conductimétrie - modèle en conduction pure		p. 98
Fig. 33 : Courbes de conductimétrie - cas particuliers		p. 100
Fig. 34 : Courbes de conductimétrie - cas particuliers		p. 101
Fig. 35 : Rue de tourbillons alternés de von Karman		p. 103
Fig. 36 : Instabilité barocline		p. 104
Fig. 37 : Mouvements des ondes de surface pouvant affecter la stratification du soluté		p. 106
Fig. 38 : Notations utilisées pour déterminer la condition limite sur le vecteur tourbillon à la paroi		p. 119
Fig. 39 : Influence du brassage sur la solidification du diphényl'éther		p. 132
Fig. 40 : Thermogrammes enregistrés pendant la solidification du diphényl'éther en conduction pure et en présence d'un brassage intense		p. 133
Fig. 41 : Profil thermique à un instant donné de la solidification		p. 136
Fig. 42 : Comparaison entre les déterminations numérique et graphique des constantes $\phi_1$ et $\phi_2$		p. 142
Fig. 43 : Evolution des limites de zones en fonction du temps		
	a et b	p. 144
	c et d	p. 145
	e et f	p. 146
Fig. 44 : Profils thermiques dans le tube		
	a et b	p. 147
	c et d	p. 148
	e et f	p. 149
Fig. 45 : Thermogrammes à 13 et 30 mm de la paroi		
	a et b	p. 150
	c et d	p. 151
	e et f	p. 152
Fig. 46 : Evolution du flux de chaleur à la paroi		p. 155
Fig. 47 : Influence de la modélisation des termes source sur la stabilité du calcul		p. 166
Fig. 48 : Formes de la courbe F(RV)		p. 172
Fig. 49 : Courbe $T_L - T_p$ en fonction de $P_{th}$ . Modélisation précise de la fonction d'Ivantsov		p. 175
Fig. 50 : Courbe $T_L - T_p$ en fonction de $P_{th}$ . Modélisation de la fonction d'Ivantsov par le polynôme $P_{th}/(1 + P_{th})$		p. 175
Fig. 51 : Courbe $T_L - T_p$ en fonction de $P_c$ . Modélisation de la fonction d'Ivantsov valable pour $P \ll 1$ seulement		p. 176
Fig. 52 : Limites de zones dans le cas de référence		p. 177
Fig. 53 : Limites de zones dans le cas fortement brassé et dans le cas sans brassage		p. 179
Fig. 54 : Limites de zones pour une forte surfusion de nucléation à la paroi et pour une température de coulée basse		p. 180
Fig. 55 : Limites de zones dans le cas d'un coefficient d'échange moindre à la paroi et pour une plus forte épaisseur		p. 181
Fig. 56 : Déplacement de l'isotherme liquidus dans le métal pour divers cas		p. 182

Fig. 57 : Champs thermiques pour les vitesses de brassage 0,1 et 10 cm/s	p. 184
Fig. 58 : Evolution du champ thermique en fonction du brassage à l'instant $t = 34,5$ s après la coulée	p. 185
Fig. 59 : Thermogramme en surface libre dans le cas de référence	p. 186
Fig. 60 : Fraction solide dans le tube aux instants $t = 32$ s, $t = 40$ s, $t = 50$ s	p. 187
Fig. 61 : Limites de zones dans le cas où la fraction solide est calculée par la règle de Scheil-Gulliver	p. 189
Fig. 62 : Limites de zones avec des pas de temps et d'espace plus grossiers	p. 191
Fig. 63 : Thermogrammes calculés pour l'acier et mesurés pour le diphényléther	p. 192
Fig. 64 : Limites de zones pour le succinonitrile-bornéol 1% en l'absence de brassage	p. 194
Fig. 65 : Champ thermique dans le tube de succinonitrile-bornéol à $t = 100$ s et $t = 400$ s en l'absence de brassage	p. 196
Fig. 66 : Thermogrammes à différentes distances de la paroi - succinonitrile-bornéol, pas de brassage	p. 197
Fig. 67 : Limites de zones dans le cas d'un brassage du succinonitrile-bornéol	p. 198
Fig. 68 : Géométrie du problème pour la formation du coin d'air	p. 232
Fig. 69 : Profil thermique lorsque 24 mm ont été solidifiés	p. 236

TABLEAUX

Tableau 1 : Formes de la surface libre à l'état stable. Influence de la quantité d'eau et de la vitesse de rotation de la coquille	p. 70
Tableau 2 : Formes de la surface libre à l'état stable. Influence de la quantité d'eau et de la vitesse de rotation de la coquille. Tableau étendu aux fortes épaisseurs de liquide	p. 72
Tableau 3 : Structures de la sciure en fonction de la vitesse de rotation de la coquille et de la quantité de liquide	p. 80
Tableau 4 : Valeurs du glissement d'ensemble de la sciure en surface libre en cm/s par rapport à la coquille	p. 81
Tableau 5 : Mouvements périodiques de la sciure à la surface libre	p. 82
Tableau 6 : Mouvements axiaux de la sciure en surface libre	p. 83
Tableau 7 : Répartition des trois cas types en fonction de la vitesse de rotation de la coquille et de la quantité d'eau	p. 84
Tableau 8 : Mesures de conductimétrie	p. 96
Tableau 9 : $t_{SG}$ , temps d'évacuation de la surchauffe en fonction de l'épaisseur du tube $E_p$ et de la vitesse de brassage $U$	p. 153
Tableau 10: Epaisseur de la couche limite en mm, en fonction de la vitesse de brassage $U$ et de l'épaisseur de liquide initiale $E_o$ .	p. 154
Tableau 11: Profondeur semi-solide colonnaire à l'instant $t_{SG}$ en fonction de la vitesse de brassage $U$ et de l'épaisseur initiale de liquide $E_o$	p. 156
Tableau 12: Fraction d'épaisseur colonnaire à $t_{SG}$ en fonction de l'épaisseur du tube $E_p$ et de la vitesse de brassage $U$	p. 158
Tableau 13: Résultats du calcul de la vitesse d'avance du front colonnaire par une résolution itérative du système d'équations	p. 170
Tableau 14: Résultat du calcul de la vitesse d'avance du front colonnaire par une résolution des équations 49 et 51	p. 173
Tableau 15: Fraction solide en avant des pointes de dendrites à $t_{SG}$	p. 188

**A N N E X E S**

---



# ANNEXE 1 - ETAT DE REFERENCE : LA ROTATION EN BLOC

Les équations de Navier-Stokes et de continuité, en 3 dimensions, pour un fluide visqueux incompressible, en l'absence de forces extérieures, s'écrivent en coordonnées cylindriques :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right.$$

avec  $\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

Le cas non perturbé correspond à un état permanent et axisymétrique ; il n'y a en effet rien qui puisse entraîner une dépendance en  $\theta$  ou en  $t$  des variables  $\vec{u}$  et  $p$ . De plus l'entraînement par la coquille étant purement orthoradial on cherche une solution où la composante de vitesse  $u_z$  est nulle et où les diverses fonctions ne dépendent pas de  $z$ . La masse volumique et la viscosité cinématique sont considérées comme constantes dans le domaine de température et de concentration étudié (Zavgorodnii et al., 1982). Le système se ramène à :

$$\left\{ \begin{aligned} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} \right] \\ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} &= \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} \right] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) &= 0 \end{aligned} \right.$$

La troisième équation conduit à  $u_r = \frac{A}{r}$ ,  $A = C^{te}$ . Or, à la paroi on a  $u_r = 0$  pour  $r = R$ , ce qui donne  $A = 0$ . Donc  $u_r$  est identiquement nul.

Le système devient :

$$(III) \quad \begin{cases} \frac{u_{\theta}^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{u_{\theta}}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \right) \right) \end{cases}$$

Cette dernière équation conduit à  $u_{\theta} = B.r$        $B = C^{te}$

ou  $u_{\theta} = \frac{C}{r}$        $C = C^{te}$

à la paroi ( $r = R$ ) on a  $u_{\theta} = \Omega R$  ; de plus le mouvement est induit par la paroi et diffuse par viscosité vers l'intérieur ; la vitesse ne peut donc que décroître en allant vers le centre. La seule solution physiquement possible est  $u_{\theta} = \Omega r$ . C'est la rotation en bloc.

Le champ de pression s'en déduit immédiatement :

$$p - p_0 = \rho \frac{\Omega^2}{2} (r^2 - (R - E)^2)$$

$p_0$  étant la pression en surface libre.



## ANNEXE 2 - CALCULS DE SIMILITUDE HYDRODYNAMIQUE

La maquette à eau est destinée à simuler les écoulements existants dans des cas industriels assez différents les uns des autres : pour de fortes et de faibles épaisseurs de métal, pour les installations de grande taille de Fumel ou celle pour l'acier, plus petite, du Centre de Recherches de Pont-à-Mousson. Le calcul de similitude permet de répondre à la question suivante : quels sont les résultats transposables, et le sont-ils de façon quantitative ou seulement qualitative ?

Plusieurs critères doivent être satisfaits. Il y doit y avoir :

- similitude géométrique
- similitude cinématique
- similitude dynamique

La similitude thermique n'est évidemment pas possible avec cette installation.

Soient  $L$ ,  $\Omega$ ,  $F$  une longueur, une vitesse angulaire et une force pour l'une des installations, et  $\ell$ ,  $\omega$  et  $f$  les grandeurs correspondantes pour la maquette à eau. On doit avoir :

$$\frac{L}{\ell} = C_1 ; \quad \frac{\Omega}{\omega} = C_2 ; \quad \frac{F}{f} = C_3 \quad C_1, C_2, C_3 = C^{\text{tes}}$$

pour que les critères précédents soient vérifiés.

De plus, soit une autre force  $G$  avec la grandeur  $g$  correspondante ; on doit avoir  $\frac{G}{g} = \frac{F}{f}$  soit encore  $\frac{F}{G} = \frac{f}{g}$ .

Autrement dit le rapport de deux forces distinctes d'une même installation doit se conserver en passant à une autre installation.

Dans notre cas il existe trois forces principales, donc deux rapport à conserver :

- les forces centrifuges
- la force de gravité
- les forces de viscosité

On néglige les forces de tension de surface car les courbures du liquide sont toujours faibles. Deux rapports sont donc définis ; en appelant  $R$  le rayon interne de la coquille,  $E$  l'épaisseur de liquide,  $\nu$  la viscosité cinématique et  $\rho$  la masse volumique du liquide :

- celui des forces centrifuges ( $\rho \Omega^2 R$ ) aux forces de viscosité ( $\rho \nu \Omega R/E^2$ ), c'est le nombre sans dimension de Taylor (Ta) ;
- celui des forces centrifuges à la force de gravité ( $\rho g$ ), c'est le nombre sans dimension de Froude (Fr).

$$\text{Ici, ces nombres s'écrivent : } Ta = \frac{\Omega E^2}{\nu} \quad \text{et} \quad Fr = \frac{\Omega^2 R}{g} .$$

La force de gravité est conservée pour les deux installations à comparer, ainsi que la valeur de la viscosité (la viscosité cinématique  $\nu$  de l'eau et celle de l'acier liquide étant très voisines) ; si  $\Omega_1, E_1, R_1$  se rapportent à l'installation expérimentale et  $\Omega_2, E_2, R_2$  à l'installation industrielle, on doit avoir à la fois :

$$\begin{cases} \Omega_1 E_1^2 = \Omega_2 E_2^2 \\ \Omega_1^2 R_1 = \Omega_2^2 R_2 \end{cases}$$

sachant que

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2} .$$

Ceci n'est possible que si  $R_1 = R_2$  et  $\Omega_1 = \Omega_2$  ; il faut avoir la même échelle, ce qui est le cas pour l'installation du Centre de Recherches de Pont-à-Mousson. Sinon, on ne peut conserver que l'un des rapports ; on choisit le nombre de Taylor.

La transposition des résultats expérimentaux aux installations industrielles de Fumel se fait donc seulement de façon qualitative, les phénomènes visqueux n'étant pas transposables d'un cas sur l'autre : seules les variations observées sont significatives.

### ANNEXE 3 - NOTATIONS RELATIVES AU CHAPITRE 4

---

a	Diffusivité thermique
B	Taille caractéristique de l'écoulement
C <sub>p</sub>	Capacité calorifique
C <sub>o</sub>	Concentration initiale de l'alliage en soluté
C*	Composition du liquide à la pointe des dendrites
D	Diffusivité chimique du soluté
E <sub>c</sub>	Épaisseur critique à laquelle se forme le coin d'air
E <sub>p</sub>	Épaisseur de liquide
E <sub>o</sub>	Épaisseur initiale de liquide ou épaisseur du tube
f <sub>s</sub>	Fraction solide
F <sub>L</sub>	Emplacement de l'isotherme liquidus
F <sub>P</sub>	Emplacement du front solide-liquide (pointes de dendrites)
F <sub>S</sub>	Emplacement de l'isotherme solidus
$\bar{G}$	Gradient thermique
G <sub>c</sub>	Gradient de concentration
h	Coefficient d'échange à la surface extérieure du tube
h <sub>o</sub>	Coefficient d'échange avant la formation du coin d'air
k	Coefficient de partage
ℓ <sub>o</sub>	Épaisseur fictive de métal remplaçant h, à la paroi
m	Pente du liquidus
$\bar{m}$	Coefficient $(a_2/a_3)^{1/2}$
n	Nombre de noeuds d'espace et indice du dernier noeud en surface libre.
$\bar{n}$	Coefficient $(a_1/a_2)^{1/2}$
Nu	Nombre de NUSSELT
Pc	Nombre de Péclet Chimique
Pr	Nombre de PRANDTL
P <sub>th</sub>	Nombre de Péclet thermique
R	Rayon des pointes de dendrites
Re	Nombre de REYNOLDS
t	Temps
t <sub>o</sub>	Temps nécessaire à la solidification de l'épaisseur ℓ <sub>o</sub>
T	Température
T <sub>b</sub>	Température du liquide brassé (hors couche limite)
T <sub>c</sub>	Température de coulée
T <sub>L</sub>	Température de liquidus

$T_p$	Température des pointes de dendrites
$T_S$	Température de solidus
$T_o$	Température du liquide de refroidissement
$U$	Vitesse de brassage du liquide
$V$	Vitesse de croissance
$x$	Dimension d'espace (radiale)

-----

$\Gamma$	Paramètre de Gibbs-Thomson
$\delta$	Épaisseur de la couche limite hydrodynamique
$\Delta H$	Chaleur latente de fusion
$\Delta t$	Pas de temps
$\Delta x$	Pas d'espace
$\lambda$	Conductibilité thermique
$\mu$	Viscosité dynamique du liquide
$\xi_c$	Constante de stabilité solutale
$\xi_{th}$	Constante de stabilité thermique
$\rho$	Masse volumique
$\phi$	Constante de la loi de CHVORINOV

-----

## INDICES

i	Temps
j	Espace
1	Solide
2	Semi-solide
3	Liquide (pour le modèle semi-analytique)
3	Liquide en surfusion (pour le modèle en différences finies)
4	Liquide (pour le modèle en différences finies)

FONCTION D'ERREUR  $\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-y^2} dy$

## ANNEXE 4 - DONNEES NUMERIQUES POUR L'ACIER

755.,	CPS CAPACITE CALORIFIQUE DU SOLIDE EN J/kg/K
800.,	CPL CAPACITE CALORIFIQUE DU LIQUIDE EN J/kg/K
7400.,	ROS MASSE VOLUMIQUE DU SOLIDE EN kg/m <sup>3</sup>
7200.,	ROL MASSE VOLUMIQUE DU LIQUIDE EN kg/m <sup>3</sup>
35.,	ZLAMBS CONDUCTIBILITE THERMIQUE DU SOLIDE EN J/m/K/s
41.,	ZLAMBL CONDUCTIBILITE THERMIQUE DU LIQUIDE EN J/m/K/s
6.26 10 <sup>-6</sup>	DIFFS DIFFUSIVITE THERMIQUE DU SOLIDE EN m <sup>2</sup> /s
7.11 10 <sup>-6</sup>	DIFFL DIFFUSIVITE THERMIQUE DU LIQUIDE EN m <sup>2</sup> /s
26700.,	DELTAH CHALEUR LATENTE DE FUSION EN J/kg
1520.,	TL TEMPERATURE DE LIQUIDUS EN DEGRES C
1480.,	TS TEMPERATURE DE SOLIDUS EN DEGRES C
12.,	T <sub>0</sub> TEMPERATURE DU LIQUIDE DE REFROIDISSEMENT EN DEGRES C
1560.,	TC TEMPERATURE DE COULEE EN DEGRES C
700.,	h <sub>0</sub> COEFFICIENT D'ECHANGE A LA PAROI A L'INSTANT INITIAL EN W/K/m <sup>2</sup>
0.,	PENTH PENTE DE LA VARIATION DE H EN FONCTION DE L'EPAISSEUR LIQUIDE
1.,	COEF COEFFICIENT DE VARIATION DE H A L'APPARITION DU COIN D'AIR

$$h = h_0 \cdot \text{COEF} \left( 1 - \text{PENTH} \cdot \frac{F - E}{E_0} \right)$$

120.,	NBR NOMBRE DE PAS DE CALCUL DE TEMPS
201.,	NBRL NOMBRE DE PAS DE CALCUL D'ESPACE
-81.,	PENTLIQ PENTE DU LIQUIDUS EN KELVINS PAR POURCENT
0.1.,	C <sub>0</sub> CONCENTRATION EN SOLUTE EN ATOMES POURCENT
1.9 10 <sup>-7</sup>	GAMMA EN K.m, PARAMETRE DE GIBBS-THOMSON
0.17,	BK COEFFICIENT DE PARTAGE k
2.10 <sup>-8</sup>	D DIFFUSIVITE CHIMIQUE DU SOLUTE EN m <sup>2</sup> /s
5.10 <sup>-3</sup>	ZMUL VISCOSITE DYNAMIQUE DU LIQUIDE EN Pa.s
0.04,	E <sub>0</sub> EPAISSEUR INITIALE DE LIQUIDE EN m
0.01,	UO VITESSE MOYENNE A L'INSTANT INITIAL TRES LOIN DU FRONT EN m/s
1510.,	TNUC TEMPERATURE DE NUCLEATION A LA PAROI
1534.,	TF TEMPERATURE DE FUSION DU FER PUR
1.,	DELTAT PAS DE TEMPS
9.81,	GR ACCELERATION DE LA PESANTEUR EN m/s <sup>2</sup>
0.37,	POISSON COEFFICIENT DE POISSON
1.10 <sup>11</sup>	MELY MODULE D'ELASTICITE DE YOUNG EN Pa
3.6 10 <sup>-8</sup>	DILATAB COEFFICIENT DE DILATATION LINEAIRE EN K <sup>-1</sup>
11.25 10 <sup>-2</sup>	RMAX RAYON INTERNE DE LA COQUILLE EN m

## ANNEXE 5 - DONNEES NUMERIQUES POUR LE SUCCINONITRILE-BORNEOL 1 %

1937.5,	CPS CAPACITE CALORIFIQUE DU SOLIDE EN J/kg/K
1999.5,	CPL CAPACITE CALORIFIQUE DU LIQUIDE EN J/kg/K
1016.,	ROS MASSE VOLUMIQUE DU SOLIDE EN kg/m <sup>3</sup>
970.,	ROL MASSE VOLUMIQUE DU LIQUIDE EN kg/m <sup>3</sup>
0.223,	ZLAMBS CONDUCTIBILITE THERMIQUE DU SOLIDE EN J/m/K/s
0.224,	ZLAMBL CONDUCTIBILITE THERMIQUE DU LIQUIDE EN J/m/K/s
1.14 10 <sup>-7</sup>	DIFFS DIFFUSIVITE THERMIQUE DU SOLIDE EN m <sup>2</sup> /s
1.15 10 <sup>-7</sup>	DIFFL DIFFUSIVITE THERMIQUE DU LIQUIDE EN m <sup>2</sup> /s
46210.,	DELTAH CHALEUR LATENTE DE FUSION EN J/kg
53.7,	TL TEMPERATURE DE LIQUIDUS EN DEGRES C
45.3,	TS TEMPERATURE DE SOLIDUS EN DEGRES C
-15.,	T <sub>O</sub> TEMPERATURE DU LIQUIDE DE REFROIDISSEMENT EN DEGRES C
80.,	T <sub>C</sub> TEMPERATURE DE COULEE EN DEGRES C
1000.,	h <sub>O</sub> COEFFICIENT D'ECHANGE A LA PAROI A L'INSTANT INITIAL EN W/K/m <sup>2</sup>
0.,	PENTH PENTE DE LA VARIATION DE H EN FONCTION DE L'EPAISSEUR LIQUIDE
1.,	COEF COEFFICIENT DE VARIATION DE H A L'APPARITION DU COIN D'AIR

$$h = h_o \cdot \text{COEF} \left( 1 - \text{PENTH} \cdot \frac{F - E}{E_o} \right)$$

601,	NBR NOMBRE DE PAS DE CALCUL DE TEMPS
201,	NBRL NOMBRE DE PAS DE CALCUL D'ESPACE
-3.64,	PENTLIQ PENTE DU LIQUIDUS EN KELVINS PAR POURCENT
1.,	C <sub>O</sub> CONCENTRATION EN SOLUTE EN ATOMES POURCENT
6.62 10 <sup>-8</sup>	GAMMA EN K.m, PARAMETRE DE GIBBS-THOMSON
0.35,	BK COEFFICIENT DE PARTAGE k
2.3 10 <sup>-10</sup>	D DIFFUSIVITE CHIMIQUE DU SOLUTE EN m <sup>2</sup> /s
4.6 10 <sup>-3</sup>	ZMUL VISCOSITE DYNAMIQUE DU LIQUIDE EN Pa.s
0.013,	E <sub>O</sub> EPAISSEUR INITIALE DE LIQUIDE EN m
0.000,	UO VITESSE MOYENNE A L'INSTANT INITIAL TRES LOIN DU FRONT EN m/s
46.,	TNUC TEMPERATURE DE NUCLEATION A LA PAROI
58.24,	TF TEMPERATURE DE FUSION DU SUCCINONITRILE PUR
1.,	DELTAT PAS DE TEMPS
9.81	GR ACCELERATION DE LA PESANTEUR EN m/s <sup>2</sup>
11.25 10 <sup>-2</sup>	RMAX RAYON INTERNE DE LA COUILLE EN m

## ANNEXE 6 - CALCUL DU MOMENT OU SE FORME LE COIN D'AIR

Le coin d'air se forme au moment où la contraction due au refroidissement thermique l'emporte sur la dilatation due à la pression interne du liquide ; la première a tendance à augmenter au cours du temps, la deuxième à diminuer : la formation du coin d'air est inéluctable. Il permet d'ailleurs un démoulage plus facile du tube. Ces problèmes de contraction-dilatation relèvent de la Résistance des Matériaux.

Soit la géométrie de la Figure 68.

Plusieurs hypothèses sont faites :

- On néglige l'existence de la zone semi-solide que l'on confond avec la zone solide dans ce calcul.
- On suppose que l'épaisseur est faible devant le diamètre ; dans la plupart des cas cette hypothèse est acceptable (l'épaisseur solidifiée avant l'apparition du coin d'air est inférieure à 10 % du diamètre).
- On suppose que le matériau est élastique jusqu'au point de fusion ; en fait il devient plastique avant, mais cela ne change pas l'ordre de grandeur du résultat obtenu.
- On néglige l'effet direct des forces centrifuges sur les couches solidifiées ; on ne tient compte que de leur effet sur le liquide ; la pression qui en résulte est supposée axisymétrique.
- On suppose que les extrémités du tube sont libres, ce qui ne doit pas entraîner une grosse erreur.
- Enfin, on néglige les gradients thermiques dans le solide. Cette hypothèse est très discutable, car elle n'est valable que pour les très faibles épaisseurs ; il s'agit de vérifier si le résultat obtenu est malgré tout proche de la réalité lorsqu'on prend une valeur moyenne de la température dans le solide.

La pression  $P_1$  à la face interne du solide s'écrit :

$$P_1 = - 100 \text{ g} \cdot \rho_4 \cdot E_p$$

si 100 g est l'accélération sur la face interne de la coquille, donc sur celle du solide si son épaisseur est faible.

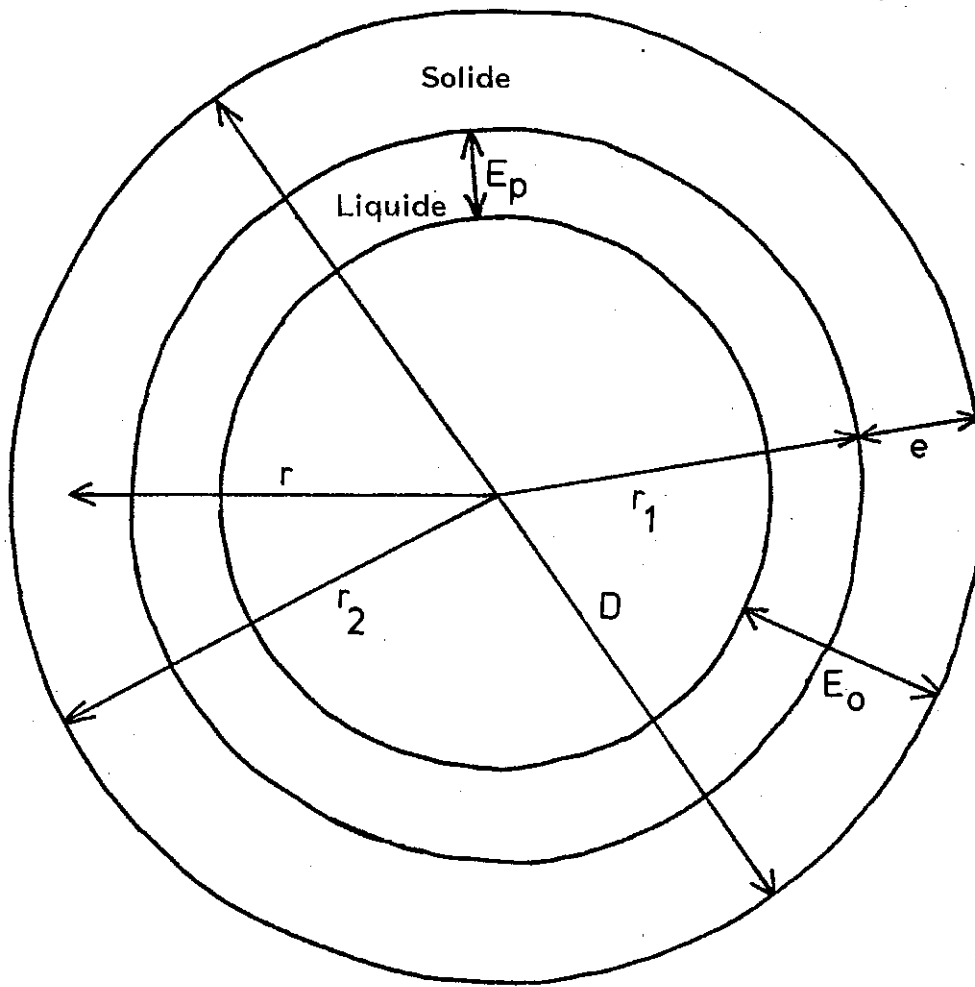


FIG. 68 : GEOMETRIE DU PROBLEME POUR LA FORMATION DU COIN D'AIR.



Le tenseur des contraintes dues à la pression interne s'écrit alors  
(S. TIMOSCHENKO, 1951) :

$$\begin{cases} \sigma_r = -P_1(1-x) \\ \sigma_\theta = \frac{P_1 r_1}{e} \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

en coordonnées cylindriques, où  $r_1$  est le rayon interne du tube solidifié et  $x$  un pourcentage de l'épaisseur solidifiée  $e$  :

$$r = r_1 + xe$$

(voir figure 68).

$$\text{D'autre part : } \begin{cases} r_1(t) = r_2 - E_o + E_p(t) \\ e(t) = E_o - E_p(t) \end{cases}$$

Le champ des déplacements s'en déduit par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \eta(\sigma_\theta + \sigma_z)) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \eta(\sigma_r + \sigma_z)) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \eta(\sigma_r + \sigma_\theta)) \end{cases}$$

Il faut ajouter à ces expressions le terme  $\alpha\Delta T$  qui traduit la déformation liée à la variation de température  $\Delta T$ .  $\alpha$  est le coefficient de dilatation linéaire ;  $E$  est le module d'élasticité de YOUNG ;  $\eta$  est le coefficient de POISSON.  $\Delta T$  est approximé par l'écart entre la température de liquidus et la température moyenne dans le solide de façon à négliger les gradients.

Seul le déplacement radial nous intéresse ; il est égal à la variation relative de la distance au centre de rotation :

$$\varepsilon_r = \frac{\delta r}{r}$$

On en déduit :  $\frac{\delta r}{r} = - \frac{P_1(1-x)}{E} - \frac{\eta}{E} \frac{P_1 r_1}{e} + \alpha \Delta T$

à la face externe du tube, on a  $x = 1$  ; en remplaçant  $P_1$  par sa valeur, on obtient :

$$\frac{\delta D}{D} = \frac{\eta}{E} \frac{\rho_4 \cdot 100g \cdot E_p(t) \cdot r_1(t)}{e(t)} + \Delta T(t)$$

d'où

$$\frac{\delta D}{D} = \frac{\eta}{E} \rho_4 \cdot 100g \cdot \frac{E_p(t)(r_2 - E_o + E_p(t))}{E_o - E_p(t)} + \alpha \Delta(t)$$

Les constantes sont données dans la littérature, pour l'acier (L.H. VAN VLACK, 1971, SMITHELLS, 1983) :

$$\eta = 0,37$$

$$E = 10^{11} \text{ Pa à } 1000 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\alpha = 3,6 \cdot 10^{-8} \text{ K}^{-1}$$

pour les autres valeurs numériques, voir l'annexe 4 ; la valeur de  $E$  décroît avec la température mais il n'en est pas tenu compte ici.

On voit que peu après le début de la solidification,  $\Delta T(t)$  est voisin de zéro (et négatif) alors que  $E_p(t)$  est voisin de  $E_{p0}$  ;  $\frac{\delta D}{D}$  est donc positif et très grand. Donc, en début de solidification le tube de métal qui a une épaisseur très faible est soumis à une pression interne qui tend à le faire gonfler : il reste contre les parois de la coquille. Puis, quand l'épaisseur solide augmente et que la température diminue, le terme  $\frac{\delta D}{D}$  diminue. Le moment où il s'annule correspond au moment où se forme le coin d'air.

Le calcul numérique montre que dans tous les cas étudiés au paragraphe 4.6.7. l'épaisseur solide est comprise entre 1 et 1,5 cm quand apparaît le coin d'air, pour une épaisseur totale de 4 cm. Le temps correspondant est d'environ 15s (pour un temps total de 70 s correspondant à l'arrivée de l'isotherme solidus sur la face interne du tube), soit environ 20 % du temps total de la solidification. Industriellement, la solidification dure de quelques minutes à 15 mn pour les tubes les plus épais ; le coin d'air apparaît au bout d'une à deux minutes dans ce cas, si l'on se fie aux bruits engendrés par un balourd qui apparaît à ce moment.

Ainsi, le pourcentage du temps de solidification pendant lequel il n'y a pas de coin d'air est sensiblement le même que celui observé expérimentalement, malgré les nombreuses approximations effectuées. Le fait que la valeur ne soit pas identique est lié au fait que le coefficient d'échange à la paroi est surestimé, ce qui entraîne une solidification plus rapide que dans la réalité (voir Chap. 4.6.1.).

235.  
ANNEXE 7

**SOLIDIFICATION EN COQUILLE D'UN LIQUIDE BRASSE**  
**ESTIMATION DE LA DUREE POUR SOLIDIFIER 24 mm**

---

Le problème est celui traité au chapitre 4, avec les données de l'Annexe 4. La présente annexe consiste à estimer la durée nécessaire pour parvenir à l'état final représenté par la Fig. 69, c'est-à-dire :

- Epaisseur colonnaire  $E = 24$  mm
- Température du métal contre la coquille  $T_D = 1230^\circ\text{C}$

On admet ici que cet état final résulte de trois étapes supposées indépendantes :

1/ Evacuation de la surchauffe :

La variation d'enthalpie correspondante est :

$$\Delta H_1 = E_o \rho_3 C_{p_3} (T_c - T_L) = 9.2 \cdot 10^6 \text{ Jm}^{-2}$$

2/ Extraction de la chaleur latente :

$$\Delta H_2 = E \rho_3 \Delta H = 4.6 \cdot 10^6 \text{ Jm}^{-2}$$

3/ Refroidissement du solide :

Dans le solide s'établit un profil de température variant de  $T_L$  à  $T_D$ . La variation d'enthalpie correspondante est estimée à :

$$\Delta H_3 = 1/2 E \rho_1 C_{p_1} (T_L - T_D) = 18.9 \cdot 10^6 \text{ Jm}^{-2}$$

Cette contribution est donc plus importante que celle relative à la surchauffe ou à la chaleur latente. Pour calculer la durée de solidification correspondante, on admet que le flux à la coquille est constant et qu'il correspond à la température de surface moyenne  $(T_C + T_D)/2$  :

$$t_{SG} = \frac{\Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3}{h[(T_C + T_D)/2 - T_o]} = 34s$$

Dans l'approximation ci-dessus l'erreur majeure est probablement que le flux à la coquille s'abaisse beaucoup plus rapidement que la température de surface moyenne ne le laisse prévoir.

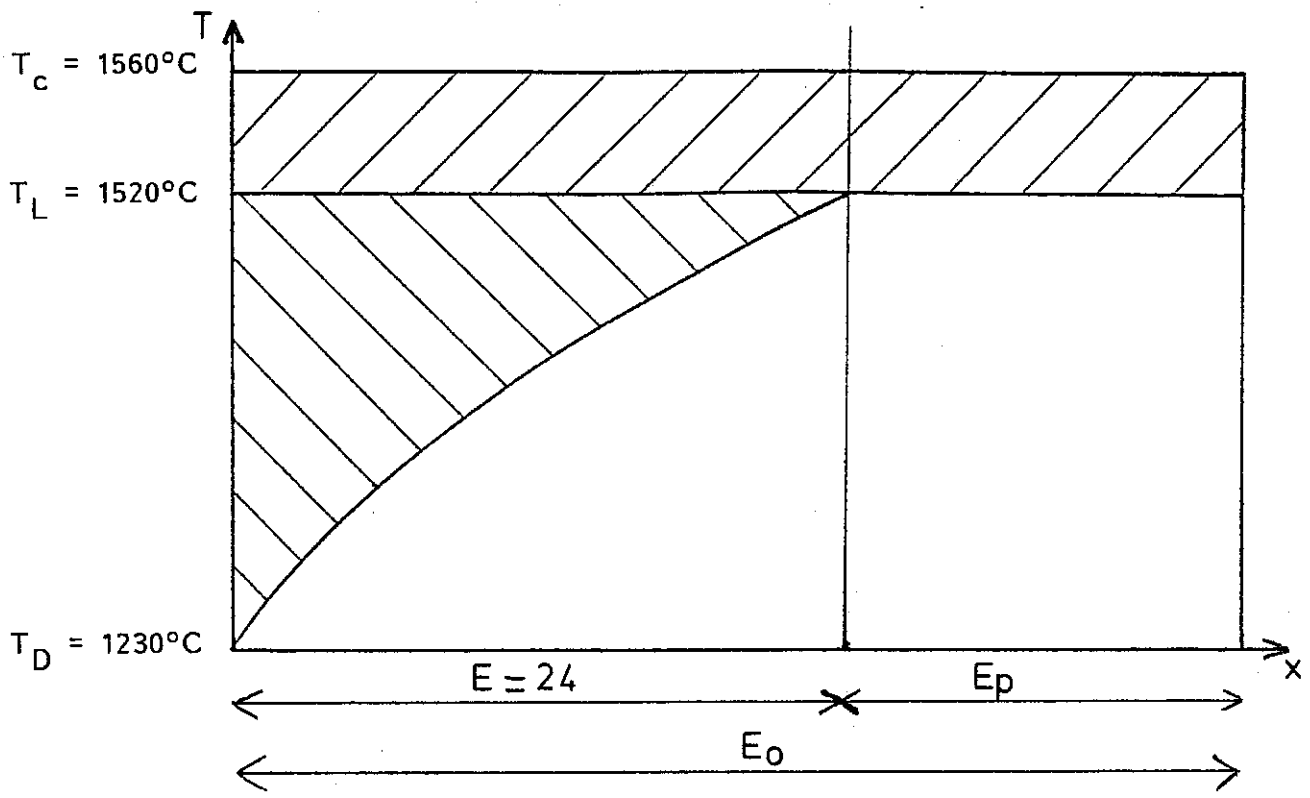


FIG. 69 : PROFIL THERMIQUE LORSQUE 24 mm ONT ETE SOLIDIFIES

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Président : Daniel BLOCH

Vice-Présidents : René CARRE  
Jean-Marie PIERRARD

Année 1987

Professeurs des Universités

BARIBAUD	Michel	ENSERG	JAUSSAUD	Pierre	ENSIEG
BARRAUD	Alain	ENSIEG	JOUBERT	Jean-Claude	ENSPG
BAUDELET	Bernard	ENSPG	JOURDAIN	Geneviève	ENSIEG
BEAUFILS	Jean-Pierre	ENSEEG	LACOUME	Jean-Louis	ENSIEG
BESSON	Jean	ENSEEG	LESIEUR	Marcel	ENSHMG
BLIMAN	Samuel	ENSERG	LESPINARD	Georges	ENSHMG
BLOCH	Daniel	ENSPG	LONGEQUEUE	Jean-Pierre	ENSPG
BOIS	Philippe	ENSHMG	LOUCHET	François	ENSEEG
BONNETAIN	Lucien	ENSEEG	MASSE	Philippe	ENSHMG
BOUVARD	Maurice	ENSHMG	MASSELOT	Christian	ENSIEG
BRISSONNEAU	Pierre	ENSIEG	MAZARE	Guy	ENSIMAG
BRUNET	Yves	IUFA	MOREAU	René	ENSHMG
BUYLE-BODIN	Maurice	ENSERG	MORET	Roger	ENSHMG
CAILLERIE	Denis	ENSHMG	MOSSIÈRE	Jacques	ENSIMAG
CAVAIGNAC	Jean-François	ENSPG	OBLÉD	Charles	ENSHMG
CHARTIER	Germain	ENSPG	OZIL	Patrick	ENSEEG
CHENEVIER	Pierre	ENSERG	PARIAUD	Jean-Charles	ENSEEG
CHERADAME	Hervé	UFR PGP	PAUTHENET	René	ENSIEG
CHERUY	Arlette	ENSIEG	PERRET	René	ENSIEG
CHIAVERINA	Jean	UFR PGP	PERRET	Robert	ENSIEG
CHOVET	Alain	ENSERG	PIAU	Jean-Michel	ENSHMG
COHEN	Joseph	ENSERG	POUPOT	Christian	ENSERG
COUMES	André	ENSERG	RAMEAU	Jean-Jacques	ENSEEG
DARVE	Félix	ENSHMG	RENAUD	Maurice	UFR PGP
DELLA-DORA	Jean-François	ENSIMAG	ROBERT	André	UFR PGP
DEPORTES	Jacques	ENSPG	ROBERT	François	ENSIMAG
DOLMAZON	Jean-Marc	ENSERG	SABONNADIÈRE	Jean-Claude	ENSIEG
DURAND	Francis	ENSEEG	SAUCIER	Gabrielle	ENSIMAG
DURAND	Jean-Louis	ENSIEG	SCHLENKER	Claire	ENSPG
FONLUPT	Jean	ENSIMAG	SCHLENKER	Michel	ENSPG
FOULARD	Claude	ENSIEG	SERMET	Pierre	ENSERG
GANDINI	Alessandro	UFR PGP	SILVY	Jacques	UFR PGP
GAUBERT	Claude	ENSPG	SIRIEYS	Pierre	ENSHMG
GENTIL	Pierre	ENSERG	SOHM	Jean-Claude	ENSEEG
GREVEN	Hélène	IUFA	SOLER	Jean-Louis	ENSIMAG
GUERIN	Bernard	ENSERG	SOUQUET	Jean-Louis	ENSEEG
GUYOT	Pierre	ENSEEG	TROMPETTE	Philippe	ENSHMG
IVANES	Marcel	ENSIEG	VEILLON	Gérard	ENSIMAG
			ZADWORNÝ	François	ENSERG

Professeur Université des Sciences Sociales (Grenoble II)

BOLLIET Louis

Personnes ayant obtenu le diplôme

d'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

BECKER	Monique	DANES	Florin	GHIBAUDO	Gérard
BINDER	Zdenek	DEROO	Daniel	HAMAR	Sylvaine
CHASSERY	Jean-Marc	DIARD	Jean-Paul	LADET	Pierre
COEY	John	DION	Jean-Michel	LATOMBE	Claudine
COLINET	Catherine	DUGARD	Luc	LE GORREC	Bernard
COMMAULT	Christian	DURAND	Robert	MADAR	Roland
CORNUEJOLS	Gérard	GALERIE	Alain	MULLER	Jean
DALARD	Francis	GAUTHIER	Jean-Paul	NGUYEN TRONG	Bernadette
		GENTIL	Sylviane	TCHUENTE	Maurice
		PLA	Fernand	VINCENT	Henri

Chercheurs du C.N.R.S

## Directeurs de recherche 1ère Classe

CAILLET  
CARRE  
FRUCHARTMarcel  
René  
RobertJORRAND  
LANDAU  
MARTINPhilippe  
Ioan

## Directeurs de recherche 2ème Classe

ALEMANY  
ALLIBERT  
ALLIBERT  
ANSARA  
ARMAND  
BINDER  
BONNET  
BORNARD  
CALMET  
DAVID  
DRIOLE  
ESCUDIERAntoine  
Colette  
Michel  
Ibrahim  
Michel  
Gilbert  
Roland  
Guy  
Jacques  
René  
Jean  
PierreEUSTATHOPOULOS.  
JOURD  
KAMARINOS  
KLEITZ  
KOFMAN  
LEJEUNE  
MERMET  
MUNIER  
SENATEUR  
SUERY  
TEDOSIU  
WACKNicolas  
Jean-Charles  
Georges  
Michel  
Walter  
Gérard  
Jean  
Jacques  
Jean-Pierre  
Michel  
  
BernardPersonnalités agréées à titre permanent à diriger  
des travaux de recherche (décision du conseil scientifique)

## E.N.S.E.E.G

BERNARD  
CHATILLON  
CHATILLON  
COULON  
DIARD  
FOSTER  
HAMMOUClaude  
Catherine  
Christian  
Michel  
Jean-Paul  
Panayotis  
AbdelkaderMALMEJAC  
MARTIN GARIN  
SAINFORT  
SARRAZIN  
SIMON  
TOUZAIN  
URBAINYves  
Régina  
Paul  
Pierre  
Jean-Paul  
Philippe  
Georges

## E.N.S.E.R.G

BOREL  
CHOVETJoseph  
AlainDOLMAZON  
HERAULTJean-Marc  
Jeanny

## E.N.S.I.E.G

DESCHIZEAUX  
GLANGEAUDPierre  
FrançoisPERARD  
REINISCHJacques  
Raymond

## E.N.S.H.G

BOIS  
DARVE  
MICHELDaniel  
Félix  
Jean-MarieROWE  
VAUCLINAlain  
Michel

## E.N.S.I.M.A.G

BERT  
COURTIN  
COURTOISDidier  
Jacques  
BernardDELLA DORA  
FONLUPT  
SIFAKISJean  
Jean  
Joseph

## E.F.P.-G

CHARUEL

Robert

C.E.N.G

CADET  
COEURE  
DELHAYE  
DUPUY  
JOUVE  
NICOLAU

Jean  
Philippe  
Jean-Marc  
Michel  
Hubert  
Yvan

NIFENECKER  
PERROUD  
PEUZIN  
TAIEB  
VINCENDON

Hervé  
Paul  
Jean-Claude  
Maurice  
Marc

Laboratoires extérieurs

C.N.E.T

DEMOULIN  
DEVINE  
GERBER

Eric  
Roland

MERCKEL  
PAULEAU

Gérard  
Yves

\*\*\*\*\*





THÈSE de DOCTORAT de l'INPG

*Titre de l'ouvrage*

**PHÉNOMÈNES DE TRANSFERT  
LORS DE LA SOLIDIFICATION  
DANS LE PROCÉDÉ  
DE COULÉE CENTRIFUGE HORIZONTALE**

*Nom de l'auteur* : Georges MARTINEZ

*Établissement* : MADYLAM

**RÉSUMÉ**

Cette mémoire porte sur l'étude des écoulements convectifs lors de la solidification de tubes d'acier dans une coquille centrifuge à axe horizontal. Des mouvements de traceurs et des ondes de surface sont observés dans une coquille contenant de l'eau. Différents régimes d'écoulement sont caractérisés. Des calculs analytiques basés sur une méthode de perturbation permettent d'expliquer l'influence de la gravité et de certaines vibrations. Des mesures de conductivité montrent l'effet des phénomènes hydrodynamiques sur les transferts de chaleur. Deux modifications de la solidification sont développées. Une semi-analytique, l'autre en différences finies. La convection forcée du liquide est représentée par une couche limite. La croissance colonnaire est étudiée en détail dans le second modèle. Les résultats permettent de mieux comprendre les structures de solidification observées.

**MOTS CLÉS**

Coulée centrifuge horizontale - Tube centrifuge - Solidification - Écoulement convectif - Modélisation numérique - Visualisation d'écoulements - Conductivité - Calcul analytique des perturbations