



**HAL**  
open science

# Modélisation numérique magnéto-thermique avec prise en compte du transfert radiatif dans les procédés d'élaboration des verres par induction en creuset froid

Denis Saumabere

► **To cite this version:**

Denis Saumabere. Modélisation numérique magnéto-thermique avec prise en compte du transfert radiatif dans les procédés d'élaboration des verres par induction en creuset froid. Electromagnétisme. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1994. Français. NNT : . tel-01340653

**HAL Id: tel-01340653**

**<https://hal.science/tel-01340653>**

Submitted on 1 Jul 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **THESE**

présentée par

**Denis SAUMABERE**

pour obtenir le grade de DOCTEUR

**de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE  
de GRENOBLE**

(arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité : Energétique Physique

---

**Modélisation numérique magnéto-thermique avec prise  
en compte du transfert radiatif dans les procédés  
d'élaboration des verres par induction  
en creuset froid**

---

Date de soutenance : 24 novembre 1994

Composition du jury :

M. R. MADAR	Président
M. M. FELIACHI M. M. LALLEMAND	Rapporteurs
M. R. BOEN M <sup>me</sup> A. GAGNOUD	Examineurs

Thèse préparée au sein du laboratoire MADYLAM



Je tiens à remercier sincèrement toutes les personnes qui ont contribué à la  
réalisation de ce travail.



# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I</b>	<b>9</b>
<b>La fusion du verre</b>	<b>9</b>
<b>I - INTRODUCTION</b>	<b>11</b>
<b>II - LE MATERIAU VERRE</b>	<b>11</b>
II.1 - L'état vitreux	11
II.2 - La composition du verre	13
II.2.1 - Les oxydes formateurs	13
II.2.2 - Les oxydes modificateurs	13
II.2.3 - Les oxydes secondaires	14
II.2.4 - Le choix de la composition	14
II.3 - Les propriétés des verres	15
II.3.1 - La conductivité électrique	15
II.3.2 - La conductibilité thermique	17
II.3.3 - La viscosité dynamique	19
II.4 - Conséquences des fortes variations des propriétés des verres	19
<b>III - LES PROCÉDES TRADITIONNELS DE LA FUSION DU VERRE</b>	<b>21</b>
III.1 - Les fours à fusion discontinue	21
III.1.1 - Les fours à pots	21
III.1.2 - Les fours à creuset de platine	23
III.2 - Les fours continus : fours à bassin	23
III.2.1 - Les fours pour verre plat ou verre à vitres	23
III.2.2 - Les fours pour verre creux	25
III.2.3 - Améliorations et études	25
III.2.4 - Inconvénients des techniques classiques	27
<b>IV - LA FUSION PAR INDUCTION EN CREUSET FROID</b>	<b>27</b>
IV.1 - Le principe de la fusion des verres par induction en creuset froid	29
IV.2 - Les enjeux et les inconvénients de la fusion des verres par induction en creuset froid	29
IV.3 - Description qualitative des phénomènes physiques intervenant lors de la fusion des verres par induction en creuset froid	32
IV.3.1 - Le phénomène électromagnétique	33
IV.3.2 - Les phénomènes thermiques	35
IV.3.2.1 - Les phénomènes thermiques au sein du bain de verre en fusion	35
IV.3.2.2 - Les transferts thermiques en frontière	35

IV.3.3 - Les phénomènes hydrodynamiques	37
IV.3.4 - Couplages entre les différents phénomènes	39
IV.4 - Le problème à résoudre et le travail effectué en modélisation numérique	39
<b>V - CONCLUSION</b>	<b>42</b>
<b>CHAPITRE II</b>	<b>43</b>
<b>Le transfert radiatif dans les milieux semi-transparentes</b>	<b>43</b>
<b>I - INTRODUCTION</b>	<b>45</b>
<b>II - LES PHENOMENES THERMIQUES DANS LES VERRES</b>	<b>46</b>
<b>III - LA LUMINANCE ET LE VECTEUR FLUX RADIATIF</b>	<b>47</b>
III.1 - La luminance ou intensité radiative	49
III.2 - Le vecteur flux radiatif	49
<b>IV - GRANDEURS ET MECANISMES PHYSIQUES CARACTERISANT LE RAYONNEMENT DANS UN MILIEU SEMI-TRANSPARENT</b>	<b>49</b>
IV.1 - Les mécanismes physiques responsables d'une atténuation du rayonnement	50
IV.1.1 - L'absorption	50
IV.1.1.1 - Le coefficient monochromatique d'absorption	50
IV.1.1.2 - L'atténuation du rayonnement par absorption	50
IV.1.2 - L'atténuation du rayonnement par diffusion	54
IV.1.3 - L'atténuation globale de rayonnement	54
IV.1.4 - L'épaisseur optique	55
IV.2 - Le renforcement du rayonnement	56
IV.2.1 - L'accroissement du rayonnement par émission	56
IV.2.2 - Le renforcement du rayonnement par diffusion	57
<b>V - L'EQUATION DU TRANSFERT RADIATIF</b>	<b>61</b>
V.1 - L'établissement de l'équation du transfert	61
V.2 - Particularités de l'équation du transfert radiatif	64
<b>VI - EXPRESSION DE LA DIVERGENCE DU FLUX RADIATIF</b>	<b>65</b>
<b>VII - CONCLUSION</b>	<b>66</b>
<b>CHAPITRE III</b>	<b>67</b>
<b>La modélisation numérique du transfert radiatif</b>	<b>67</b>
<b>I - INTRODUCTION</b>	<b>69</b>
<b>II - LES METHODES DE RESOLUTION APPROCHEE DE L'EQUATION DU TRANSFERT RADIATIF</b>	<b>70</b>
II.1 - Intégration formelle de l'équation de transfert radiatif et solutions approchées en négligeant des termes dans l'équation	71

II.1.1 - Approximation du milieu fortement transparent	72
II.1.2 - Approximation du milieu purement émissif	73
II.1.3 - Cas d'un milieu froid et peu diffusant	73
II.1.4 - L'approximation milieu optiquement mince	73
II.1.5 - Conclusion	73
II.2 - Méthodes d'approximation de l'équation du transfert radiatif en simplifiant son caractère intégral-différentiel	74
II.2.1 - L'approximation de Rosseland	74
II.2.2 - Principe de la méthode des harmoniques sphériques	75
II.3 - Méthodes d'approximation de l'équation du transfert radiatif en simplifiant le caractère directionnel du rayonnement	78
II.3.1 - La méthode à deux flux avec l'approximation de Milne-Eddington	78
II.3.2 - La méthode à deux flux avec l'approximation de Schuster-Shwarzschild	79
II.3.3 - La méthode des ordonnées discrètes	80
II.4 - La méthode des zones	80
II. 5 - Brève revue bibliographique sur l'existence d'autres méthodes	81
II. 6 - Comparaison de quelques méthodes	83
II.6.1 - Transfert radiatif pur sans génération interne de chaleur en 2D	83
II.6.2 - Transfert radiatif pur avec génération interne de chaleur en 2D	86
II.6.3 - Transfert radiatif pur sans génération interne de chaleur en 3D	87
II.6.4 - Couplage convection naturelle-rayonnement et conduction-rayonnement	87
II.6.5 - Conclusion sur ces comparaisons	88
<b>III - LA MODELISATION NUMERIQUE DU TRANSFERT RADIATIF DANS UN BAIN DE VERRE EN FUSION</b>	<b>89</b>
III.1 - Le choix d'une méthode	89
III.2 - Le principe général de la méthode	90
III.2.1 - Description du problème à résoudre	90
III.2.2 - Le choix pour la fonction de phase	92
III.2.3 - Les discrétisations	92
III.2.3.1 - La discrétisation angulaire	93
III.2.3.2 - La discrétisation spatiale	94
III.2.3.3 - La discrétisation spectrale	97
III.2.4 - Synthèse sur l'ensemble des formules discrétisées	99
III.2.5 - L'algorithme de résolution de l'équation du transfert radiatif	101
III.3 - Les modèles	102
III.3.1 - Le modèle 2D cartésien	102
III.3.1.1 - Le choix des directions discrètes	102
III.3.1.2 - Le classement de graphe par niveau	105
III.3.1.3 - Le calcul du terme source	107

III.3.1.4 - Le calcul de la luminance	107
III.3.2 - Le modèle 2D axisymétrique	108
III.3.2.1 - L'hypothèse 2D axisymétrique	108
III.3.2.2 - Le choix des directions discrètes	108
III.3.2.3 - Le classement de graphe par niveau	109
III.3.2.4 - Le traitement de l'axe de symétrie	109
III.3.2.5 - Le traitement des noeuds ayant pour point émettant dans une direction donnée un point d'abscisse négative	111
III.3.2.6 - Une remarque concernant les directions volumiques	113
<b>IV - CONCLUSION</b>	<b>113</b>
<b>CHAPITRE IV</b>	<b>115</b>
<b>La modélisation numérique de l'équation de la chaleur avec prise en compte du transfert radiatif</b>	<b>115</b>
<b>I - INTRODUCTION</b>	<b>117</b>
<b>II - L'EQUATION DE LA CHALEUR</b>	<b>117</b>
<b>III - LES MODELES NUMERIQUES</b>	<b>118</b>
III.1 - Le modèle 2D cartésien	118
III.1.1 - Les conditions aux limites	118
III.1.2 - La discrétisation en éléments finis	119
III.2 - Le modèle 2D axisymétrique	121
III.2.1 - Les conditions aux limites	121
III.2.2 - La discrétisation en éléments finis	121
<b>IV - L'ALGORITHME DE RESOLUTION</b>	<b>121</b>
<b>V - TESTS DU CODE THERMIQUE AVEC TRANSFERT RADIATIF</b>	<b>123</b>
V.1 - Les tests en 2D cartésien	123
V.1.1 - Cas d'un milieu semi-transparent confiné dans une enceinte rectangulaire à températures de parois imposées	123
V.1.1.1 - Influence du paramètre de couplage N	125
V.1.1.2 - Influence de l'émissivité des faces	127
V.1.1.3 - Influence de l'albedo	134
V.1.1.4 - Influence du rapport de forme r	136
V.1.2 - Cas d'un domaine de géométrie quelconque	139
V.1.3 - Validation de la possibilité d'imposer des conditions aux limites de type neumann homogène	142
V.1.4 - Cas monodimensionnels	147
V.1.4.1 - Test du modèle à bandes	147
V.1.4.2- Modèle 1D avec des températures plus élevées	150

V.2 - Les tests en 2D axisymétrique	152
V.2.1 - Les tests avec conditions aux limites de type dirichlet	152
V.2.1.1 - Influence du paramètre de couplage	152
V.2.1.2 - Comparaison entre les directions volumiques et les directions surfaciques	155
V.2.1.3 - Cas d'un grand rapport de forme	157
V.2.1.4 - Cas d'une géométrie quelconque	159
V.2.2 - Les tests avec source interne de chaleur et conditions de flux aux frontières	162
<b>VI - CONCLUSION</b>	<b>167</b>
<b>CHAPITRE V</b>	<b>169</b>
<b>La modélisation numérique de l'ensemble des phénomènes électromagnétique et thermique</b>	<b>169</b>
<b>I - INTRODUCTION</b>	<b>171</b>
<b>II - LE MODELE ELECTROMAGNETIQUE</b>	<b>173</b>
II.1 - Le contexte du problème	173
II.2 - La modélisation numérique	174
<b>III - LE MODELE THERMIQUE</b>	<b>178</b>
III.1 - L'équation de la chaleur	178
III.2 - Le modèle numérique	178
III.2.1 - Les conditions aux limites	179
III.2.2 - La discrétisation en éléments finis	181
<b>IV - LE MODELE ELECTROMAGNETIQUE-THERMIQUE</b>	<b>181</b>
IV.1 - Le couplage fort	181
IV.2 - Les algorithmes de résolution	182
IV.2.1 - L'algorithme de résolution électromagnétique-thermique sans transfert radiatif	182
IV.2.2 - L'algorithme de résolution électromagnétique-thermique avec transfert radiatif	185
IV.3 - Les données nécessaires au lancement du code de calcul	188
IV.3.1 - Les données relatives au calcul électromagnétique	188
IV.3.2 - Les données thermiques	188
IV.3.3 - Les données relatives au calcul du transfert radiatif	188
IV.3.4 - Les données purement numériques	189
<b>V - TESTS SUR LE COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE-THERMIQUE AVEC TRANSFERT RADIATIF</b>	<b>189</b>
V.1 - Tests avec conductivité électrique constante	193
V.1.1 - Modèles à une bande spectrale	193

V.1.1.1 - Influence du transfert radiatif	193
V.1.1.2 - Influence de l'émissivité des faces	200
V.1.2 - Le modèle à quatre bandes	203
V.2 - Test avec conductivité électrique variable	206
<b>VI - CONCLUSION</b>	<b>208</b>

## **CHAPITRE VI**

**(ce chapitre est confidentiel)**

<b>CONCLUSION</b>	<b>209</b>
-------------------	------------

<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>	<b>215</b>
------------------------------------	------------

<b>NOMENCLATURE</b>	<b>223</b>
---------------------	------------

## **INTRODUCTION**



Le verre a des applications si nombreuses et si variées qu'il est impossible de lever les yeux où que l'on soit, chez soi, dans la rue, dans un moyen de locomotion ou n'importe où ailleurs, sans en apercevoir de multiples exemples.

Certaines de ces applications jouent de plus un rôle essentiel, et parfois irremplaçable dans notre vie courante : vitrages de fenêtres ou de véhicules de transport, miroirs, isolateurs, appareils d'optique (photo, cinéma, télévision, microscopes, télescopes...), récipients de toutes natures pour la conservation ou la consommation de nombreux liquides, verres de lunettes, d'éclairage, de laboratoire, verrerie technique. Ces multiples applications sont justifiées pour l'ensemble des qualités exceptionnelles qui caractérisent le verre.

Il est en effet à la fois :

- transparent (on fabrique cependant des verres simplement translucides ou même opaques),
- dur (sa dureté superficielle lui permet de résister à d'innombrables usages sans se rayer et sans perdre sa transparence),
- isolant sonore, thermique et électrique (il faut cependant noter que le verre fondu devient assez bon conducteur de l'électricité),
- résistant aux agents atmosphériques et aux produits chimiques, il n'est attaqué que par l'acide fluorhydrique que l'on utilise d'ailleurs pour graver les objets en verre,
- imputrescible (il ne contient aucune matière organique susceptible de se décomposer),
- ininflammable et incombustible, il peut être utilisé en tous lieux et en toute sécurité, notamment pour l'isolation et la décoration.

Il va sans dire que la réalisation des conditions actuelles de fabrication du verre et l'extraordinaire expansion des objets en verre qui en résulte n'ont pu être obtenues qu'en profitant des progrès considérables des autres branches d'industrie (production d'énergie, appareillages mécaniques, électriques et électroniques de production et de contrôle, réfractaires, etc...), et que c'est seulement au 19<sup>ème</sup> siècle que la masse des consommateurs a pu commencer à utiliser couramment des produits aussi essentiels que le verre à vitres ou les récipients en verre de toute nature.

Pendant les quatre derniers millénaires avant Jésus Christ, le verre, produit par des moyens rudimentaires, était limité à quelques applications décoratives ayant sans doute pour origine les glaçines utilisées pour le revêtement de la céramique. Les premières applications utilitaires portèrent sur de petits miroirs ou quelques récipients (vases ou flacons) réalisés à l'unité autour de noyaux d'argile qui servaient de moules et que l'on cassait ensuite pour libérer les objets produits.

C'est l'invention de la technique du soufflage du verre à l'extrémité d'une canne creuse (peu avant l'ère chrétienne) qui permit une extension appréciable des applications verrières notamment en verre creux.

Pour le verre plat, une étape importante fut franchie par l'invention au 17<sup>ème</sup> siècle de la coulée sur table qui permit de réaliser des glaces plus grandes et mieux calibrées.

C'est sensiblement à la même époque qu'un autre progrès fut réalisé en Angleterre par la création du cristal au plomb appelé à un si brillant avenir.

Cependant la fabrication comportait encore trop d'imperfections et d'irrégularités de tous ordres, auxquelles l'adresse et l'expérience des verriers ne pouvaient que partiellement suppléer, pour que des progrès décisifs puissent intervenir et c'est pourquoi il fallut attendre la fin du 19<sup>ème</sup> siècle pour que l'art acrobatique de ces verriers devienne progressivement une science de plus en plus précise et développée et pour que les objets en verre les plus usuels soient enfin mis, avec une qualité convenable et à des prix raisonnables, à la disposition de tous les usagers.

C'est surtout après la deuxième guerre mondiale que l'industrie du verre a connu un essor exceptionnel, grâce à une véritable interaction entre la recherche scientifique et la technologie verrière. La période 1950-1960 peut être à juste titre considérée comme celle qui a vu l'épanouissement de la véritable science du verre. A côté des applications classiques qui rendent les verres indispensables à l'économie moderne (bâtiment, transport, éclairage, industrie chimique, etc...) on assiste à l'apparition des techniques nouvelles utilisant les verres (laser, téléphone sur fibres optiques, conversion de l'énergie) où le verre apporte des solutions originales. Parmi elles la possibilité pour le verre de servir de matrice de confinement des déchets nucléaires.

Toute industrie produit des déchets. L'industrie nucléaire ne fait pas exception et, après quelques décennies de fonctionnement, se retrouve confrontée au problème de l'élimination et du stockage des produits contaminés. Si les déchets nucléaires ont des caractères spécifiques exigeant le recours aux techniques avancées, leur volume est très faible comparé à celui des déchets plus classiques. Un réacteur nucléaire produit annuellement une tonne environ de substances radioactives proprement dites. Economiquement, la gestion des déchets nucléaires ne représente qu'un faible pourcentage du coût du kilowatt-heure, pris comme référence et permet, précisément, l'appel à toutes les techniques nécessaires dans de très bonnes conditions de compétitivité globales. La fraction la plus volumineuse des déchets nucléaires est d'ailleurs constituée de déchets de faible activité stockés en surface. La fraction la plus réduite en volume contient, au contraire, la majeure partie de la radioactivité totale engendrée par les réacteurs nucléaires, concentrée et de haute activité initiale mais de périodes analogues aux précédentes, et de produits moins actifs mais de longue période. Pour ceux-là, la solution de stockage définitif la plus généralement envisagée est l'enfouissement profond, dans des terrains et sous un conditionnement appropriés. Ces derniers produits, après différents traitements notamment mécanique et chimique donnent naissance aux solutions de produits de fission qui constituent les déchets de haute activité. Ces produits de fission sont solidifiés de manière à confiner l'activité dans un matériau aussi inerte que possible. Il est

recherché aussi à cette occasion une réduction de volume pour simplifier la manutention et le stockage.

Un matériau de confinement est un matériau compact, susceptible de ne relâcher l'activité qu'il contient qu'en relativement faible quantité lorsqu'il est en présence de vecteurs susceptibles de la ramener à l'homme. Le relâchement d'activité d'un matériau de confinement sous l'action corrosive de l'eau, vecteur principal de retour à l'homme, dépend de mécanismes complexes et évolutifs. D'une façon générale, deux facteurs sont déterminants : l'un représentant un pouvoir de confinement spécifique au matériau dans les conditions propres d'altérabilité et généralement exprimé par unité de surface, l'autre représentant la surface d'échange avec l'eau. Le choix d'un matériau satisfaisant de confinement résulte donc d'un compromis : un matériau à caractéristique élevée de confinement mais présentant ou pouvant présenter dans le temps (corrosion intergranulaire) une surface d'échange grande sera souvent de moins bonne qualité globale qu'un matériau à caractéristique de confinement inférieure mais présentant une surface d'échange moins évolutive. S'il existe différents types de matériaux de confinement tels que des matériaux cristallins ou des matériaux composites, les matériaux à phase vitreuse sont de loin les plus utilisés. En effet, de tous les procédés de solidification, la vitrification est celui qui a fait l'objet des travaux les plus approfondis, et c'est le seul qui ait débouché jusqu'à maintenant sur le plan industriel. Les verres présentent en général des qualités intéressantes pour le confinement dues à leur aptitude à incorporer facilement la plupart des oxydes des produits de fission, à leur homogénéité, à leur faible porosité et à leur souplesse d'adaptation aux différentes solutions de produits de fission. Différentes techniques de vitrification sont étudiées dans le monde. Quelque soit le procédé, le passage de la solution des produits de fission au verre se fait en trois phases (évaporation ou séchage de la solution, calcination et enfin la vitrification proprement dite) qui se font, suivant les procédés, dans des appareillages distincts ou dans le même. Par ailleurs, on peut procéder par charges ou bien de manière continue ce qui permet de classer les techniques de vitrification en quatre grandes catégories :

- des procédés discontinus assurant toutes les opérations dans le même appareil. Nous citons ici le procédé français PIVER qui consiste à réaliser successivement dans le même appareil l'évaporation de la solution avec les adjuvants, la calcination du résidu sec, la fusion et la coulée du verre. La vitrification se fait dans un pot métallique chauffé par induction,
- des procédés discontinus opérant en deux étapes où la calcination n'est pas effectuée dans le même appareil que la vitrification,
- des procédés continus assurant toutes les opérations dans le même appareil, pour lesquels un four à électrodes est alimenté directement par la solution de produits de fission,
- des procédés continus opérant en deux étapes. Le procédé français consiste à effectuer le séchage et la calcination dans un four rotatif puis la fusion du verre dans un creuset métallique chauffé par induction. Le verre est ensuite coulé à intervalles réguliers dans des conteneurs métalliques de stockage. Ce procédé est exploité dans l'atelier de vitrification de Marcoule, AVM, en service depuis 1978 [1].

Ces différents procédés de vitrification par induction en creuset métallique chaud ont des limites pour ce qui concerne :

- la température de fusion limitée à 1150°C,
- la capacité de fusion,
- la durée de vie des creusets métalliques.

En conséquence le CEA a développé un nouveau procédé de vitrification dans lequel la fusion du verre est effectuée par induction directe en creuset froid.

C'est depuis les années 1980 qu'au service de confinement des déchets de haute activité (SCD) au CEA de Marcoule, sont réalisées des études sur un procédé nouveau permettant l'élaboration de verres dans lesquels sont ajoutés les déchets nucléaires à vitrifier : la fusion par induction en creuset froid. Cette technique qui présente un certain nombre d'avantages, comme par exemple la non interactivité entre le matériau fondu et la structure froide, semble très bien adapté aux verres "nucléaires". Le très grand avantage de la technique consiste en la non pollution et la non érosion du creuset par le matériau : ceci est indispensable dans ce genre d'application puisqu'aucun déchet nouveau ne doit être créé lors du retraitement des déchets d'origine. Pour l'élaboration d'autres types de verres tel que le cristal, l'intérêt de la fusion par induction en creuset froid réside dans la non pollution du verre par le creuset.

Une collaboration existe depuis quatorze ans entre le CEA Marcoule et le laboratoire MADYLAM. Dans une première phase, des études concernant la mise en forme des métaux à l'aide du procédé creuset froid inductif ont été réalisées (DELAGE, GAGNOUD, MAESTRALI). Ces études ont permis d'analyser les phénomènes physiques et leur modélisation numérique pour les applications concernant les métaux. La modélisation numérique pour une application en creuset froid pour les verres a débuté au laboratoire MADYLAM dans le cadre de la thèse de MAURITA ROSCINI, dont les essais expérimentaux ont été réalisés au CEA de Marcoule.

L'objet du présent travail est la continuation de la modélisation numérique avec une partie expérimentale ayant pour but la validation du modèle.

Plusieurs phénomènes entrent en jeu lors d'une fusion par induction : l'électromagnétisme, les transferts thermiques et l'hydrodynamique. Les propriétés des verres dépendent fortement de la température. De ce fait, les phénomènes sont non linéaires et fortement couplés. La modélisation de la fusion des verres ne serait pas correcte si nous ne prenions pas en compte un phénomène particulier aux verres : le rayonnement interne. En effet, le verre laisse passer le rayonnement qui le traverse (il en absorbe ou en diffuse une partie), mais de plus il est capable d'émettre lui-même un rayonnement propre.

Dans une première partie, après avoir décrit brièvement le verre en tant que matériau ainsi que quelques unes de ses propriétés les plus caractéristiques, nous exposons les techniques actuelles de fusion des verres. Nous en arrivons ensuite à la fusion par induction dont nous donnons le

principe ainsi que les enjeux. Enfin, nous décrivons les phénomènes physiques mis en jeu et leurs couplages. Cela nous amène à expliciter le problème dans son ensemble et les orientations choisies ainsi que leurs justifications, concernant la modélisation numérique effectuée durant cette thèse.

Dans une deuxième partie est abordé le problème du transfert radiatif dans les milieux semi-transparents dont font partie les verres. Nous expliquons les phénomènes thermiques intervenant lors de leur fusion par induction. Puis nous décrivons l'ensemble des mécanismes physiques ainsi que les grandeurs caractérisant le rayonnement interne. Nous en arrivons enfin à l'établissement de l'équation du transfert radiatif qui permet de décrire complètement le phénomène ainsi qu'aux particularités de cette équation.

La troisième partie est consacrée exclusivement à la modélisation numérique du transfert radiatif. Après avoir décrit les méthodes de résolution approchée de l'équation du transfert radiatif les plus couramment utilisées, nous les comparons. Cela nous permet d'expliquer le choix de la méthode pour la modélisation numérique du transfert radiatif dans notre cas particulier d'élaboration de verres par induction en creuset froid. Ensuite nous décrivons en détail le modèle mis en oeuvre en géométrie 2D cartésienne dans un premier temps, puis en géométrie 2D axisymétrique.

La quatrième partie rend compte de la modélisation numérique des phénomènes thermiques incluant le transfert radiatif pour des configurations 2D cartésiennes et 2D axisymétriques. Nous présentons ensuite une série de tests de validation du modèle.

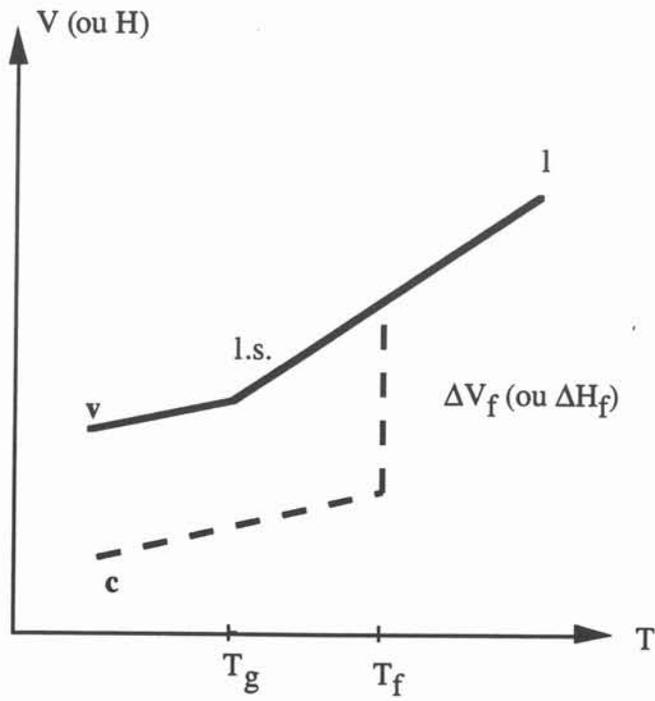
L'objet de la cinquième partie est la description de la modélisation numérique de l'ensemble des phénomènes électromagnétique et thermique avec transfert radiatif en géométrie 2D axisymétrique uniquement, nécessaire à la modélisation numérique de la fusion du verre par induction. Nous décrivons le modèle électromagnétique, le modèle thermique, puis le modèle couplé électromagnétique-thermique qui prend en compte la forte variation de la conductivité électrique des verres en fonction de la température. Nous donnons les algorithmes de la résolution magnéto-thermique sans transfert radiatif d'une part, avec transfert radiatif d'autre part.

Dans la sixième partie, nous décrivons la partie expérimentale réalisée au CEA Marcoule : dispositif utilisé, mesures effectuées ainsi que résultats expérimentaux. Ensuite nous décrivons la modélisation correspondant à cette partie expérimentale : les données rentrées dans le modèle, les résultats obtenus par le modèle. Tout cela nous permet d'aboutir à la comparaison modèle-expérience et à une discussion des résultats obtenus. Cette partie est confidentielle.



# **CHAPITRE I**

## ***La fusion du verre***



**Figure 1.1** : définition de la température de transition vitreuse  $T_g$ . Variation du volume spécifique  $V$  (ou de l'enthalpie  $H$ ) en fonction de la température ( $l$  : liquide,  $l.s.$  : liquide surfondu,  $c$  : cristal,  $v$  : verre).

## I - INTRODUCTION

Il est généralement admis qu'il y a trois états de la matière : l'état solide, l'état liquide et l'état gazeux, un grand nombre de corps passant successivement par ces trois états quand on les chauffe. Le passage de l'un à l'autre de ces états se fait à une température déterminée. Le comportement particulier du verre sous l'effet des variations de température a conduit à considérer un état supplémentaire : l'état vitreux.

Ce chapitre commence par une brève présentation de ce matériau fascinant qu'est le verre : l'état vitreux, la composition des verres ainsi que quelques propriétés physiques. Notre but étant l'élaboration des verres par leur fusion, nous décrivons les procédés traditionnels de fusion des verres dans l'industrie. Cela nous mène tout naturellement à la description de ce procédé nouveau : la fusion des verres par induction en creuset froid. A l'analyse qualitative des phénomènes physiques mis en jeu lors d'une telle fusion, fait suite le problème numérique global qu'il faudrait résoudre pour décrire complètement la fusion d'un verre par ce procédé. Des travaux ont déjà été réalisés dans ce domaine dans le cadre de la collaboration entre la société CFEI de Seyssinet, le CEA de Marcoule et le laboratoire MADYLAM. Aussi faisons-nous le point sur ce qui a été fait pour terminer avec l'orientation choisie pour ce travail de thèse en modélisation numérique.

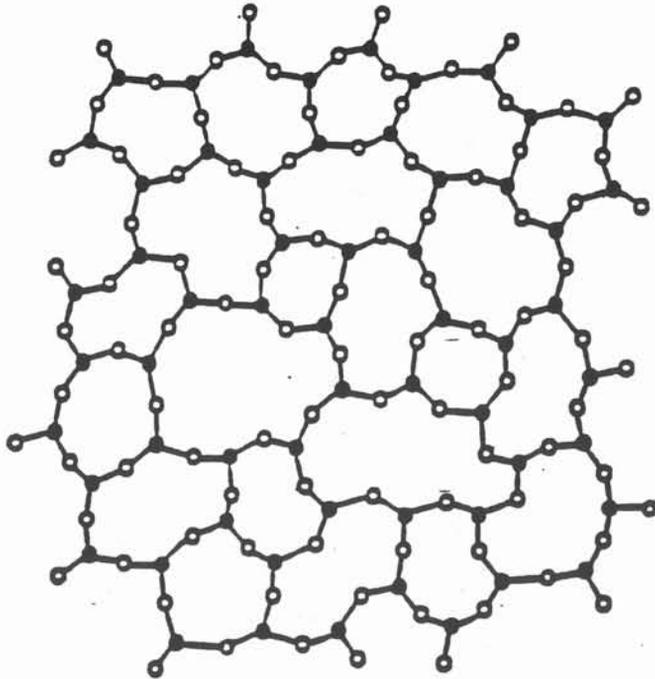
## II - LE MATERIAU VERRE

Nous présentons dans ce paragraphe les caractéristiques principales du verre : l'état vitreux, la composition et les propriétés physiques qui nous semblent les plus remarquables de par leurs variations en fonction de la température.

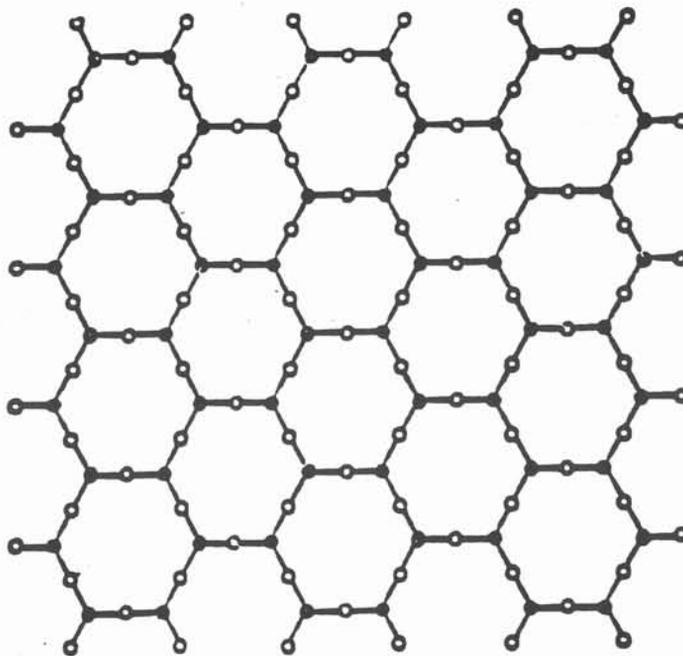
### II.1 - L'état vitreux

Lorsqu'on refroidit un liquide, on constate en général une diminution de son volume. Dans le cas habituel, il se produit, à la température  $T_f$ , une cristallisation avec une brusque variation de volume (courbe en pointillé figure 1.1). Lorsque la température continue de baisser, le solide cristallin se contracte de nouveau, la pente de la courbe étant toutefois inférieure à celle du liquide initial (environ 1/3).

Si à  $T_f$  il ne se produit aucune cristallisation, le volume continue de décroître, le liquide passant à l'état surfondu (courbe en trait plein figure 1.1). Dans ce cas, le point représentatif décrit une portion de courbe prolongeant celle du liquide, l'extrapolation se faisant sans discontinuité au passage par la température  $T_f$ . Tout se passe alors comme si le système ignorait le point de fusion. L'abaissement de la température provoque d'abord une contraction du liquide surfondu avec un coefficient identique à celui du liquide primitif puis à partir d'une température  $T_g$ , appelée température de transition, ou de transformation vitreuse, la pente de la courbe diminue pour devenir



*Figure 1.2* : représentation plane d'un réseau désordonné de  $\text{SiO}_2$  ; les points noirs représentent Si, les cercles représentent O. Issue de [4].



*Figure 1.3* : représentation plane d'un réseau ordonné de  $\text{SiO}_2$  ; les points noirs représentent Si, les cercles représentent O. Issue de [4].

voisine de celle du solide cristallin. C'est à cette température, pour laquelle la viscosité est voisine de  $10^{13}$  poises que le verre prend naissance c'est à dire que le liquide devient alors solide [2], [3]. Il faut remarquer que ce phénomène est indépendant de la composition et qu'il se produit pour une même valeur de la viscosité.

Le verre, nous l'avons dit, a prouvé son existence depuis plusieurs millénaires et n'a donc pas attendu le progrès pour apparaître. Quelle est donc la composition de ce matériau magique qui fait partie de notre vie ?

## **II.2 - La composition du verre**

Le verre au départ était obtenu en fondant ensemble du sable avec des flux alcalins que fournissaient des cendres de végétaux marins ou bien certains minerais tels que le natron [3].

Les verres d'oxydes sont les plus fabriqués de nos jours. Pour créer du verre, il est nécessaire d'avoir trois types d'oxydes :

- les oxydes formateurs,
- les oxydes modificateurs,
- les oxydes secondaires.

Dans l'ouvrage de ZARZYCKI : "les verres et l'état vitreux", des détails sur les différents constituants nécessaires à la naissance d'un verre sont donnés. Nous proposons tout de même une brève présentation des différents oxydes.

### **II.2.1 - Les oxydes formateurs**

Ces oxydes déterminent l'aptitude à la vitrification c'est à dire la tendance qu'a une solution liquide à ne pas cristalliser au cours du refroidissement. Le plus connu est le quartz ou la silice  $\text{SiO}_2$  trouvé abondamment dans la nature sous forme de sable. Il donne le verre de silice, tétraèdres de  $\text{SiO}_4$  réticulés de façon désordonnée (figure 1.2). La figure 1.3 montre pour comparaison un schéma de la structure d'un réseau de  $\text{SiO}_2$  ordonné (figure 1.3).

L'anhydride borique  $\text{B}_2\text{O}_3$  ainsi que l'anhydride phosphorique sont deux autres types d'oxydes formateurs.

### **II.2.2 - Les oxydes modificateurs**

Les oxydes modificateurs sont des oxydes alcalins. Ils sont les fondants nécessaires pour abaisser de quelques centaines de degrés la température de vitrification. Nous trouvons notamment parmi ces oxydes la soude  $\text{Na}_2\text{O}$  et la potasse  $\text{K}_2\text{O}$ .

### II.2.3 - Les oxydes secondaires

Les oxydes secondaires sont ajoutés pour modifier la teinte ou les conditions d'élaboration, leur pourcentage est très faible. Citons pour exemple  $\text{As}_2\text{O}_3$  et  $\text{Sb}_2\text{O}_3$  qui sont utilisés pour faciliter l'affinage.

### II.2.4 - Le choix de la composition

Le choix des constituants et de leurs proportions pour l'élaboration d'un verre est quasi illimité. Nous donnons à titre d'exemple un tableau issu de l'ouvrage "les verres et l'état vitreux" de J. ZARZYCKI, présentant la composition en pourcentage pondéraux de quelques verres industriels (tableau 1.A).

	$\text{SiO}_2$	$\text{B}_2\text{O}_3$	$\text{Al}_2\text{O}_3$	$\text{Na}_2\text{O}$	$\text{K}_2\text{O}$	$\text{CaO}$	$\text{BaO}$	$\text{MgO}$	$\text{PbO}$	$\text{Fe}_2\text{O}_3$
Verre plat à vitres	72.5		1.5	13	0.3	9.3		3		0.1
Verre à bouteilles	73		1	15		10				0.05
Verre pour ampoules électriques	73		1	16	0.6	5.2		3.6		
Borosilicate (Pyrex)	80.6	12.6	2.2	4.2		0.1		0.05		0.05
Aluminosilicates (fibres)	54.6	8	14.8	0.6	0.6	17.4		4.5		
Verre "cristal"	55.5				11				33	
Verre d'optique	28			1	1				70	
Verre pour lampes à sodium		36	27				27	10		
Verre pour protection contre les radiations	29						9		62	

**Tableau 1.A :** composition (en % pondéraux) de quelques verres industriels.

Les proportions des constituants dans la "composition" (nom donné par les verriers pour désigner le mélange vitrifiable qui va constituer le verre) fixent dès le départ les propriétés du verre à élaborer. Si les propriétés physiques des verres dépendent donc de leur composition, elles ne dépendent pas moins de la température ; c'est ce que nous allons montrer dans le paragraphe suivant.

## II.3 - Les propriétés des verres

L'ensemble des propriétés des verres, leurs variations en fonction de la composition et de la température, ainsi que les méthodes de mesures de ces propriétés sont très bien décrits dans l'ouvrage "le verre, nature, structure et propriétés" de Horst SCHOLZE [4] ainsi que dans la thèse "fusion de verres par induction - étude électromagnétique et thermo-hydraulique" de Maurita ROSCINI [5]. Nous jugeons donc inutile de retranscrire dans le présent rapport ces travaux très complets sur les propriétés des verres. Néanmoins comme nous l'indiquions dans l'introduction générale, notre but est de modéliser la fusion par induction des verres en creuset froid. Ce procédé fait intervenir des phénomènes électromagnétique, thermique et hydrodynamique, ces phénomènes étant couplés entre eux, notamment par certaines propriétés des verres. Dans le but de bien amener le lecteur à la compréhension de ces phénomènes que nous décrirons ultérieurement dans le détail, nous proposons de présenter trois propriétés physiques des verres : la conductivité électrique, la conductibilité thermique et la viscosité dynamique.

### II.3.1 - La conductivité électrique

Si la conductivité électrique des verres dépend d'une manière complexe de la composition, c'est plutôt à l'influence de la température que nous nous intéressons ici.

Dans un domaine de température étendu, la résistivité électrique  $\rho_e$  suit la loi empirique dite de RASCH et HINRISCHEN :

$$\log \rho_e = A + \frac{B}{T}$$

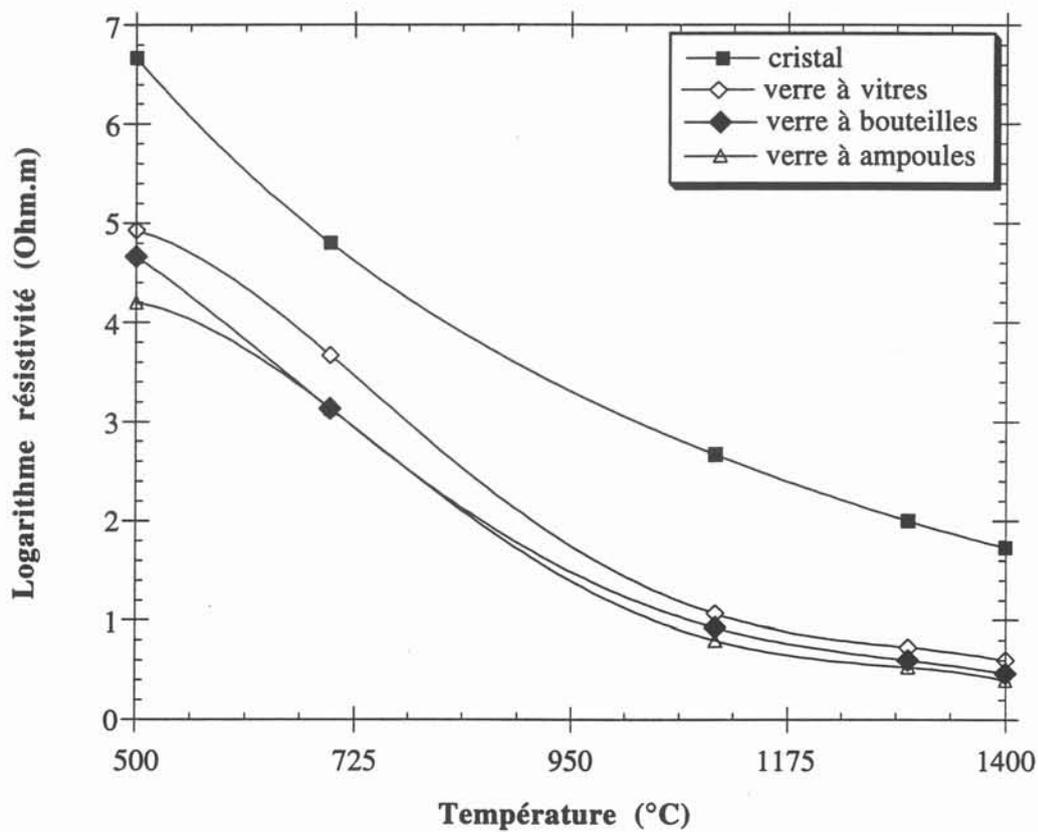
où A et B sont des constantes qui dépendent de la composition et T la température exprimée en degrés Kelvin. Il existe aussi d'autres types de relations suggérées par YEVSTROP'YEV et TOROPOV :

$$\log \rho_e = A1 - \frac{B1}{T^2}$$

$$\log \rho_e = A2 - \frac{B2}{T-T_0},$$

$$\log \rho_e = A3 - \frac{B3}{T} \exp\left(-\frac{\gamma^1}{T}\right),$$

$$\log \rho_e = A4 - \frac{B4}{T} - \frac{\gamma^2}{T^2}$$



**Figure 1.4 :** variation de la résistivité électrique de quelques verres en fonction de la température.

où  $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, \gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des constantes, et  $T_0$  une température de référence [5].

La figure 1.4 montre à titre d'exemple des courbes  $\log \rho_e = f(T)$  pour quelques verres courants. Il est à noter que les variations de la conductivité électrique en fonction de la température sont très importantes (d'après la figure 1.4 la conductivité électrique augmente en moyenne d'un facteur multiplicatif 16000 entre 500°C et 1400°C) ce qui implique un comportement électrique différent suivant la température du matériau. C'est ce qui va créer une forte dépendance du phénomène électromagnétique vis à vis du phénomène thermique.

### II.3.2 - La conductibilité thermique

Le choix de présenter cette propriété physique n'est pas le fait du hasard. En effet, dès la première approche de l'analyse du transfert thermique dans un bain de verre en fusion, nous prenons conscience de la complexité de ce phénomène. Le verre est un milieu semi-transparent qui à ce titre est capable d'émettre lui-même un rayonnement propre.

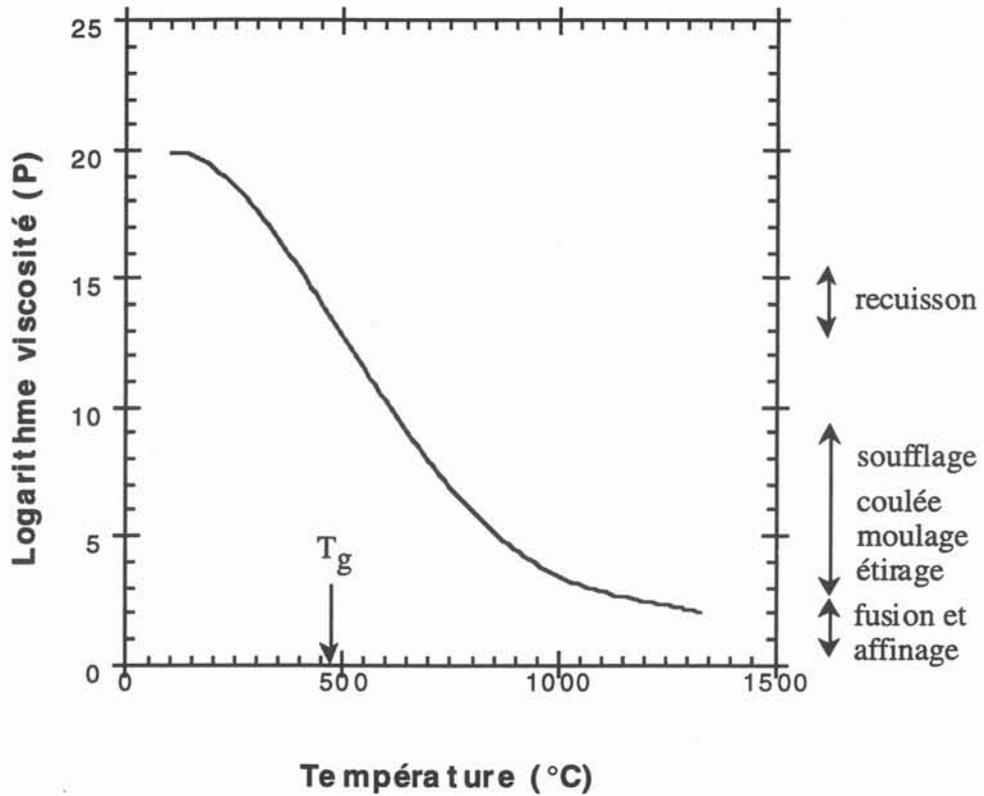
Les transferts de chaleur dans le verre se produisent donc par conduction et par rayonnement, le transfert radiatif pouvant devenir prépondérant devant la conduction [5].

La conductibilité thermique moléculaire ou vraie caractérise uniquement les transferts de chaleur par conduction. Les valeurs prises par  $k_v$  conductibilité thermique vraie s'échelonnent entre 1 et 4 W/mK en fonction de la composition et de la température du verre. Dans le cas des verres et des oxydes, un moyen de prendre en compte le transfert radiatif est d'adjoindre à cette conductibilité thermique moléculaire, une conductibilité thermique radiative issue de l'analyse de ROSSELAND. Ainsi nous obtenons une conductibilité thermique totale (grandeur intéressante car c'est à elle que l'on a accès par les mesures expérimentales) qui est la somme des deux termes soit :

$$K_T = k_v + K_R$$

Les valeurs de  $K_R$  conductibilité thermique radiative accusent de grands écarts selon la composition et la température du verre. A titre d'exemple citons la conductibilité thermique radiative du cristal qui à 600°C possède une valeur de 5,5 W/mK pour atteindre 145 W/mK à 1200°C. Quant à celle du verre solaire protecteur, elle passe à 600°C d'une valeur nulle à une valeur de seulement 4 W/mK à 1200°C [5]. Des mesures expérimentales de conductibilités thermiques radiatives ont été effectuées pour un certain nombre de verres à différentes températures [5].

Gardons à l'esprit que si cette grandeur est intéressante pour prendre en compte le transfert radiatif dans le verre, il ne s'agit là que d'une première approche. La validité de cette approximation sera discutée dans le chapitre concernant la comparaison des différentes méthodes de prise en compte du transfert radiatif (chapitre III).



**Figure 1.5 :** variations de la viscosité d'un verre silico-sodo-calcique industriel en fonction de la température. Nous avons indiqué les différents domaines des opérations techniques.

<i>Désignation</i>	<i>viscosité dynamique (poise)</i>
température de fusion	10E+02
température de travail	10E+04
température d'enfoncement	10E+04.22
température d'écoulement	10E+05
température de ramollissement	10E+07.6
température de ramolissement dilatométrique	10E+11.3
température de recuisson	10E+13
température de transition	10E+13 à 10E+13.6
température de tension	10E+14.5

**Tableau 1.B :** définition des différents points fixes correspondants aux différents domaines des opérations techniques sur le verre.

### II.3.3 - La viscosité dynamique

Le comportement rhéologique des verres est complexe : aux températures inférieures à  $T_g$ , les verres se comportent comme des solides élastiques, tandis qu'aux températures suffisamment élevées, ils ont des propriétés de liquides newtoniens. Ce comportement en liquide newtonien est caractérisé par le fait que, lors d'une sollicitation de cisaillement, la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  qui s'établit est proportionnelle à la contrainte de cisaillement  $\sigma = \mu \dot{\gamma}$ , où le facteur de proportionnalité  $\mu$  est la viscosité dynamique. Il faut vraiment des conditions extraordinaires pour constater des écarts à ce comportement [2]. Le passage du comportement viscoélastique au comportement de fluide Newtonien lors d'une fonte de verre est continu car il n'y a pas de fusion franche, mais un phénomène de ramolissement progressif.

Pour une composition donnée, la viscosité varie avec la température dans des limites étendues. Pour un verre silico-sodo-calcique ordinaire le rapport des viscosités entre la température ordinaire et les températures élevées est voisin de  $10^{18}$  (figure 1.5). Cette dernière figure ainsi que le tableau 1.B permettent de constater que la viscosité détermine les conditions de fusion, de travail et de recuit.

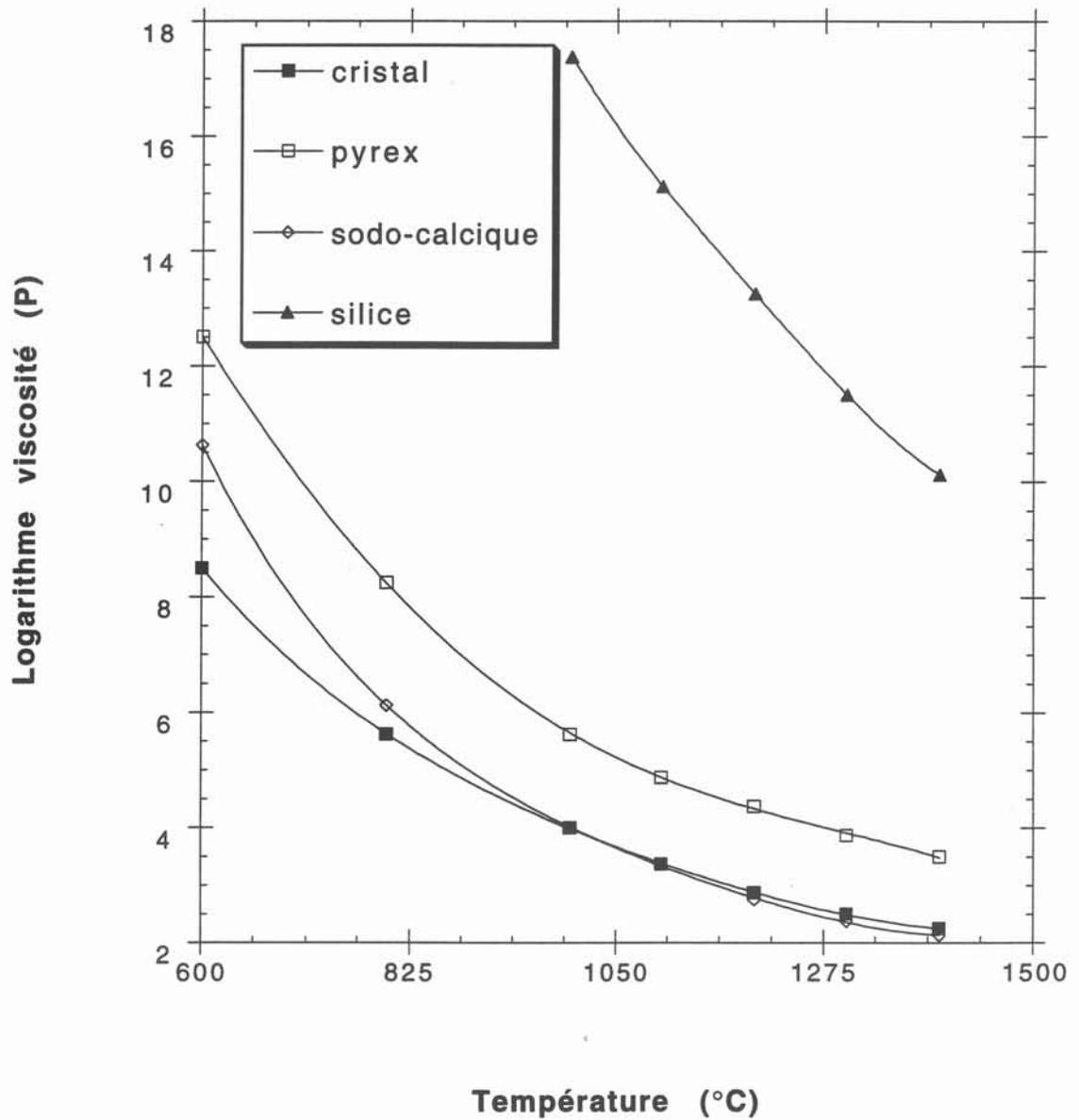
La dépendance de la viscosité en fonction de la composition ne peut être étudiée qu'empiriquement. A titre d'exemple, la figure 1.6 montre la courbe de viscosité de verres de compositions diverses en fonction de la température.

### II.4 - Conséquences des fortes variations des propriétés des verres

Nous venons de présenter la forte variation de quelques propriétés des verres en fonction de la température. Cela a pour conséquence immédiate l'interdépendance des phénomènes physiques qui interviennent lors de leur fusion par induction en creuset froid.

Les propriétés des verres varient de même fortement avec la composition (la figure 1.6 illustre bien ce phénomène pour la viscosité dynamique). Aussi faudra-t'il porter, dans le cadre de la modélisation numérique, une attention particulière à la mesure des propriétés physiques des verres à élaborer, s'ils ne sont pas courants.

Le verre est un matériau difficile à caractériser, il est de plus parfois très coûteux de mesurer certaines propriétés telles que le spectre d'absorption à chaud par exemple. Des compositions de verres différentes entraînent comme pour tout solide des structures différentes, qui elles mêmes entraînent des propriétés différentes [4].



*Figure 1.6* : variation de la viscosité dynamique de quelques verres en fonction de la température.

### III - LES PROCÉDES TRADITIONNELS DE LA FUSION DU VERRE

Notre but est d'élaborer du verre, que ce soit du verre "nucléaire" servant à confiner les déchets, ou n'importe quel autre type de verre, verre à vitres, cristal ... Nous allons présenter dans ce paragraphe quels sont actuellement les différents procédés traditionnels de fusion de verre dans l'industrie.

Quelque soit la technologie verrière utilisée, on distingue trois grandes étapes dans l'élaboration :

- la fusion proprement dite : suivant la nature de la composition, la température est élevée à 1300°C - 1400°C (pour les verres courants). La composition enfournée subit alors diverses transformations : déshydratation, dissociation avec dégagement gazeux, réaction en phase solide, frittage de la masse et enfin fusion de certains composés,
- affinage et homogénéisation : le verre fondu n'est pas homogène, de plus il contient de nombreuses bulles de gaz issus de la dissociation des composants et de la réaction avec le contenant. Pour éliminer ces inclusions, on procède à l'affinage : élévation de la température jusqu'à 1550°C (pour abaisser la viscosité), agitation mécanique, bouillonnage par vapeur d'eau ou affinage chimique très complexe,
- braise : le verre en fin d'affinage a une viscosité trop faible pour pouvoir être mis en forme. On augmente sa viscosité en le refroidissant (1000°C à 1200°C). Cette opération s'appelle la braise, cette dénomination date de l'époque où les fours étaient chauffés au bois, on maintenait alors des braises sur le foyer.

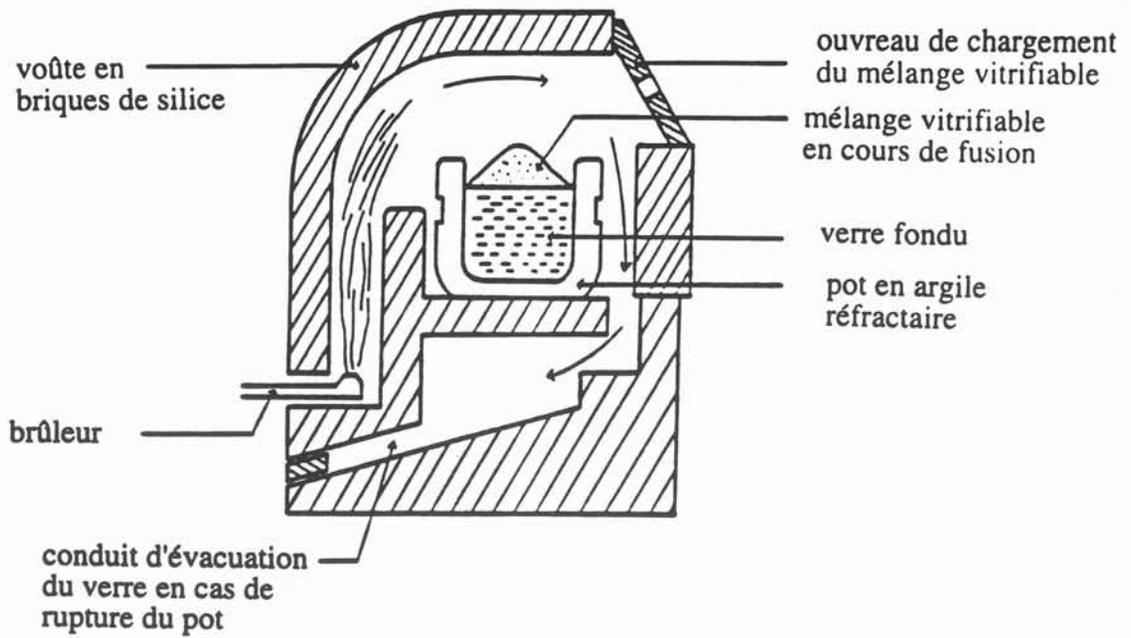
Selon les quantités de verre à élaborer, des procédés de fusion différents sont utilisés : des fours à fusion discontinue ou des fours à fusion continue.

#### III.1 - Les fours à fusion discontinue

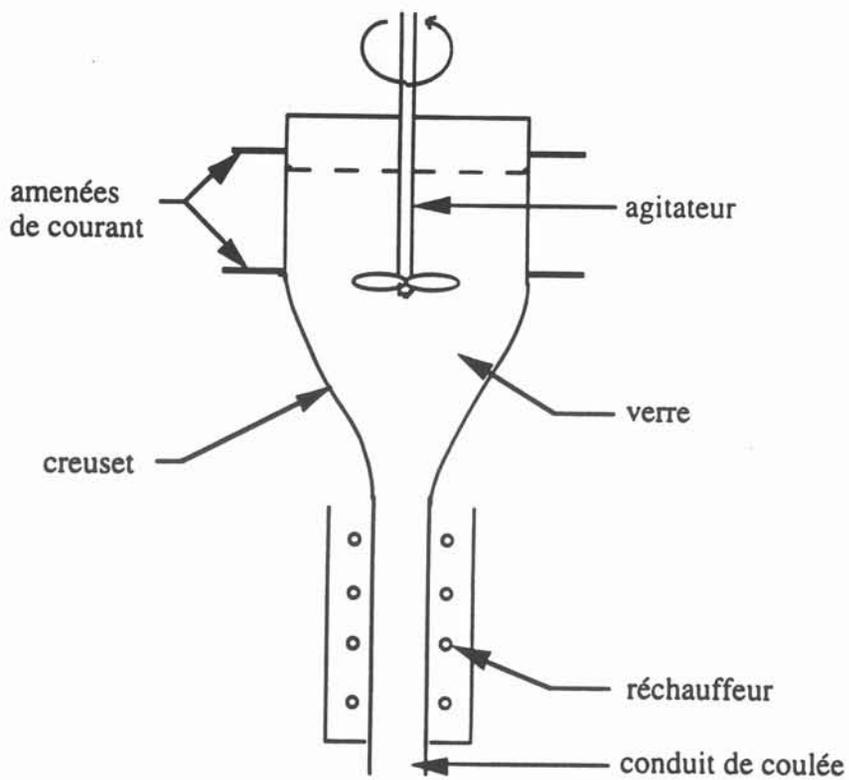
##### III.1.1 - Les fours à pots

L'élaboration des verres produits en faibles quantités a lieu dans des creusets individuels ou "pots" en argile placés dans des fours chauffés au gaz ou au mazout. Pour diminuer le prix de revient, on utilise des fours contenant une dizaine de pots (de 1000 litres environ), tous soumis au même cycle d'élaboration. La figure 1.7 montre une cellule de fusion à un seul pot.

Pour un pot de 1000 litres, la durée d'élaboration est, à titre d'exemple : fusion 7 heures, affinage 5 heures, braise 5 heures. La durée de vie d'un pot peut être d'une vingtaine de coulées, soit 10 à 12 semaines. Sous peine de fissuration, la température d'un pot ne doit jamais descendre au dessous de 850°C [3].



*Figure 1.7* : cellule de fusion à un seul pot. Issue de [3].



*Figure 1.8* : schéma d'un four en platine pour la fusion du verre d'optique.

### III.1.2 - Les fours à creuset de platine

Pour les verres spéciaux d'optique à forte tendance à cristalliser ou pour des fontes agressives, on utilise un creuset en platine chauffé par effet Joule soit par conduction (électrodes en graphite), soit par induction. Le creuset comporte un orifice de coulée normalement bouché par le verre figé à l'intérieur. Au moment de la coulée, on réchauffe ce conduit et le verre s'écoule dans un moule. (figure 1.8).

Ces techniques de fusion bien adaptées à de faibles productions de verre (par exemple verres d'optique spéciaux) ne présentent aucun intérêt pour une fabrication intensive de verre, car elles n'offrent que la possibilité d'une production discontinue. De plus s'ajoute un problème de pollution du verre par le creuset (lorsque celui-ci est réfractaire) ou de coût lorsqu'il s'agit de creusets en métaux précieux comme le platine.

### III.2 - Les fours continus : fours à bassin

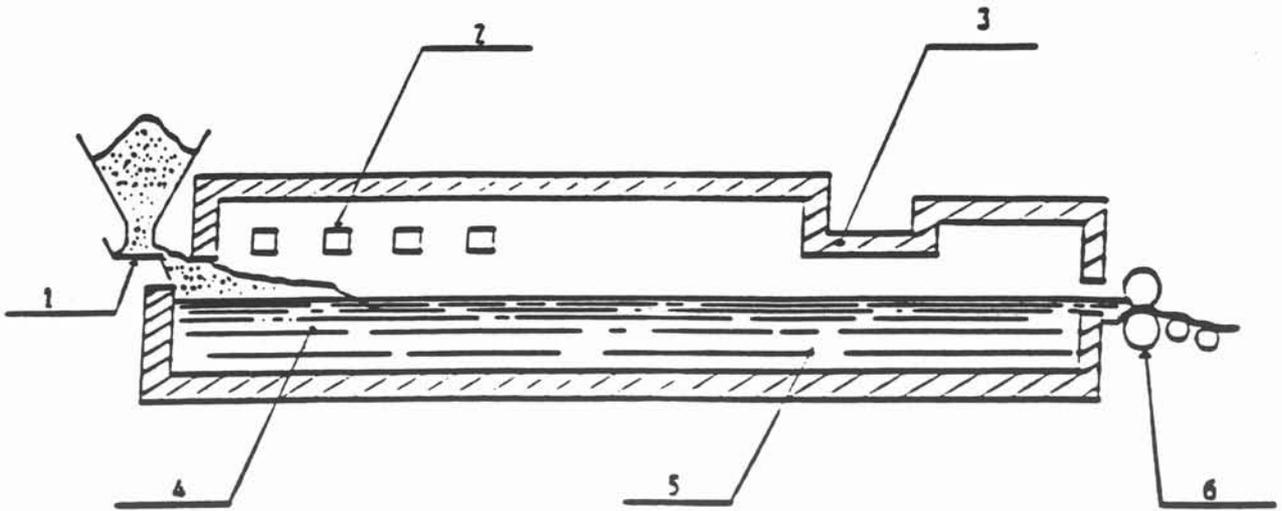
Sans prétention de vouloir supprimer les inconvénients cités lors de la description des fours à fusion discontinue, grâce aux fours à bassin, on passe du stade de la fabrication cyclique à celui de la fabrication continue.

La production massive du verre industriel a lieu exclusivement dans les fours continus, dits fours à bassin. Ces fours, de taille très variable, reposent sur un principe datant de 1930 mais restent de loin les plus utilisés aujourd'hui. Il existe deux types de fours à bassin selon la qualité du verre désirée.

#### III.2.1 - Les fours pour verre plat ou verre à vitres

La figure 1.9 montre le schéma d'un tel four. L'organe essentiel est la cuve édifiée en blocs réfractaires. Le chauffage s'effectue au gaz de gazogène, au gaz naturel et surtout au mazout lourd. Les flammes viennent lécher directement la surface du bassin. Les brûleurs sont réglables individuellement, ce qui permet de contrôler d'amont en aval le régime thermique du four. Les matières premières (la "composition") sont enfournées mécaniquement en continu en amont, le verre élaboré est fourni aux machines de mise en forme en aval par un déversoir de coulée ou des puits d'étirage.

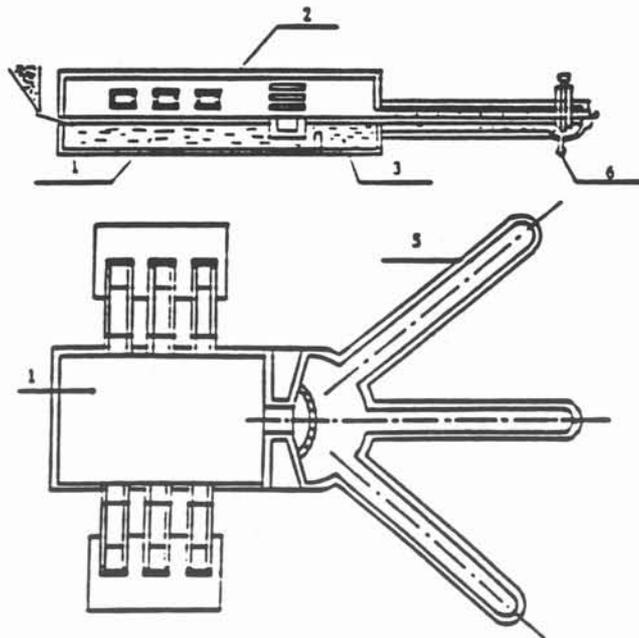
Le cycle d'élaboration a lieu en continu successivement dans les différentes portions de la cuve. L'atmosphère du four dans la zone de fusion et dans la zone d'affinage (où règne la température maximale en surface) est partiellement isolée de celle de la zone de braise par une voûte surbaissée de façon à permettre le refroidissement. L'écoulement longitudinal, lent et continu



1 : enfourneuse mécanique  
 3 : voûte en briques de silice  
 5 : appareil de laminage

2 : brûleur à flamme  
 4 : zone en fusion  
 6 : zone de refroidissement

**Figure 1.9** : coupe longitudinale d'un four à bassin pour verres à vitres. Issue de [3].



1 : compartiment de fusion et d'affinage  
 3 : compartiment de braise  
 5 : avant corps

2 : brûleur  
 4 : canal de distribution  
 6 : paraison en formation

**Figure 1.10** : four à verre creux. Issue de [3].

du verre provoqué par la tirée des machines est accompagné d'un système complexe de courants de convection thermique, qui assurent le brassage nécessaire à la fusion et à l'affinage et exercent un effet d'homogénéisation chimique et thermique du verre [3].

A titre d'exemple, l'usine de fabrication de vitrages automobiles de Saint Gobain possède un four à bassin de 70 m de long sur 10 m de large. Huit brûleurs consomment 100 TEP par jour en gaz naturel. La cuve contient 2000 tonnes de verre en fusion, à la température maximale de 1550° C. La production de cet énorme four à bassin est de 600 tonnes de verre par jour .

### **III.2.2 - Les fours pour verre creux**

Les fours du type précédent produisent du verre de très belle qualité mais au prix d'un certain gaspillage d'énergie, une partie importante du verre plus froid étant recyclée plusieurs fois par les courants de convection vers les zones les plus chaudes du four.

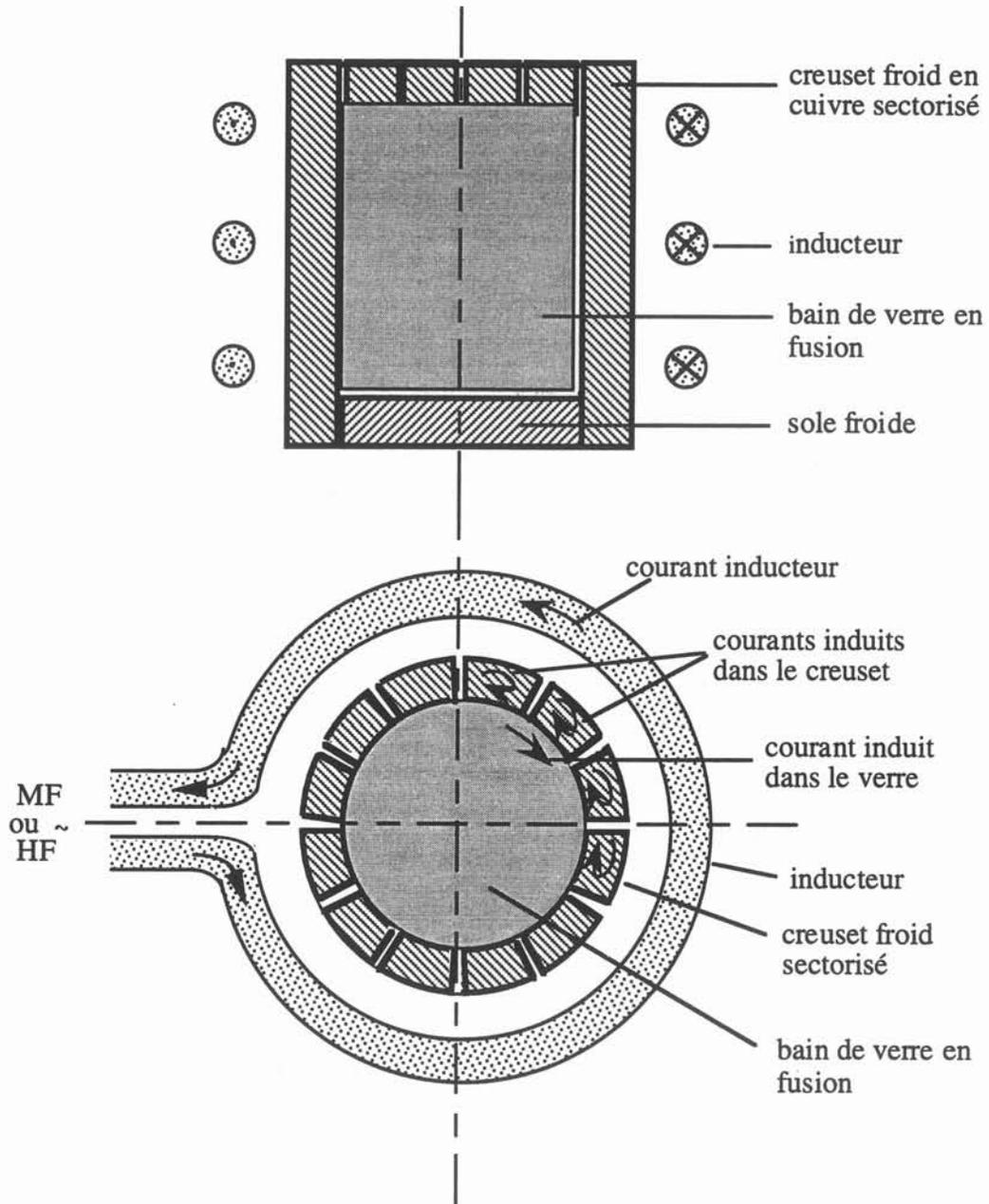
Pour les fabrications pouvant se contenter d'une qualité moindre, ce qui est le cas des produits dits en "verre creux" (bouteillerie), on sépare le compartiment de braise du reste de la cuve par une "gorge" faisant siphon, le verre refroidi dans ce compartiment de travail étant amené vers les machines de formage par une série en éventail de canaux de distribution, ce qui permet de conditionner la viscosité du verre et de multiplier les postes de travail (figure 1.10). Certains fours à bassin peuvent comporter un chauffage électrique d'appoint par effet Joule ; les électrodes d'amenée de courant sont en molybdène ou en graphite [3].

Fondé sur le même principe depuis 60 ans, les fours à bassin ont évolué. Aussi des améliorations ont-elles vu le jour.

### **III.2.3 - Améliorations et études**

Les principales études et améliorations portent sur :

- les récupérateurs d'énergie. Deux empilements de briques réfractaires sont associés au four. Les gaz de combustion des brûleurs chauffent l'un pendant que l'air frais est chauffé par l'autre et les rôles sont inversés toutes les demi-heures. L'air ainsi chauffé sert par exemple au chauffage de l'usine,
- la forme de la gorge précédant le compartiment de braise. Bien étudiée, une telle gorge ne fait rentrer que du verre sans inclusion de gaz,
- les méthodes de chargement mécanique du mélange, en tête de four. On évite que le sable s'accumule dans des endroits du four sans jamais fondre,



**Figure 1.11** : répartition des courants induits dans les éléments constitutifs d'une installation de fusion en creuset froid, ainsi que dans le bain de verre.

- la corrosion des électrodes et donc la forme à leur donner,
- la position des brûleurs.

Cette technique, actuellement la plus employée dans l'industrie verrière comporte des inconvénients comme la complexité des réglages : la mise en route prend un mois, et l'inertie thermique : de tels fours fonctionnent pendant huit ans de feu continu.

### **III.2.4 - Inconvénients des techniques classiques**

Que ce soit en procédé continu ou discontinu, la plupart des techniques d'élaboration des verres utilisent un contenant réfractaire à base d'électro-fondus de haute qualité. Cependant, la corrosion due aux réactions physico-chimiques entre le bain liquide et les parois des cuves ou creusets, ainsi qu'aux mouvements dans le verre fondu ne peut être évitée : elle réduit de façon considérable la durée de vie d'une installation et limite la qualité du verre élaboré. Ainsi, la production de pièces de verrerie de haute qualité (cristal) est assujétie à un certain taux de rejets [5].

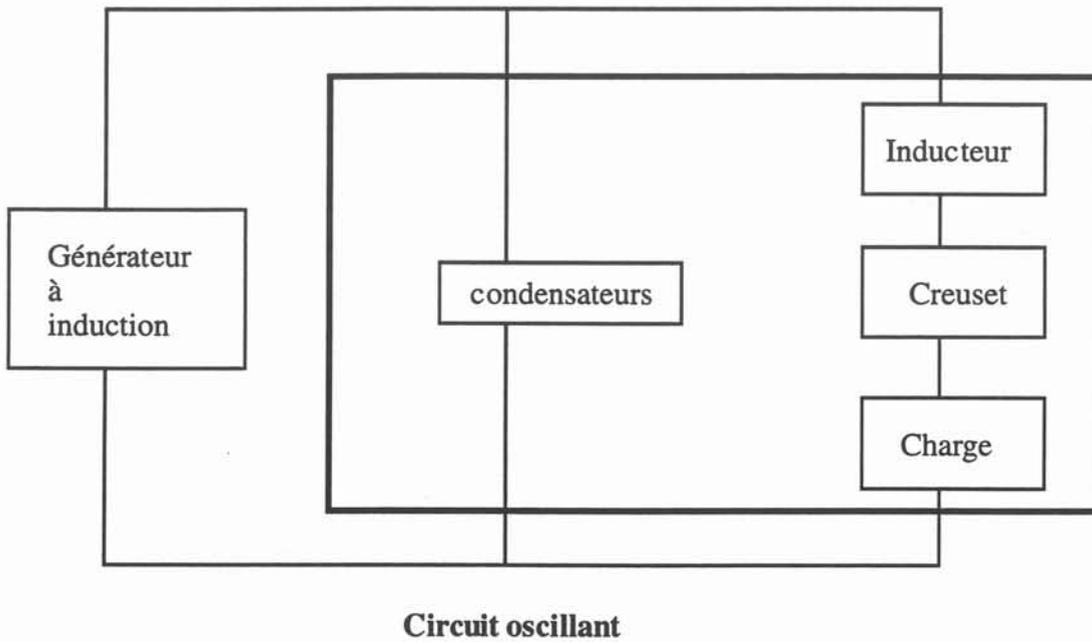
En 1980, des études ont été réalisées à la demande du CEA (Centre de Marcoule) dans le but de progresser dans la connaissance d'une technique qui permette la fusion de verres dans des conditions exceptionnelles de propreté : la fusion par induction en creuset froid.

## **IV - LA FUSION PAR INDUCTION EN CREUSET FROID**

Des techniques reposant sur l'utilisation de creusets métalliques refroidis par une circulation d'eau permettent de résoudre les problèmes liés à la pollution du matériau lors de la fusion. Alliée à un mode de chauffage non polluant comme l'arc électrique, le faisceau d'électrons, l'induction, les plasmas d'arc ou les plasmas inductifs, cette possibilité permet la production de matériaux de haute pureté. Le matériau se fige en effet au contact du creuset métallique froid, ce qui a pour conséquence d'éliminer toute pollution due à l'érosion mécanique du creuset, aussi bien qu'aux réactions physico-chimiques quasiment inexistantes entre solides.

Le mode de production d'énergie à la fois le plus souple et le moins polluant, pour les matériaux conducteurs de l'électricité, est l'induction puisqu'elle permet d'injecter sans contact dans toute la masse du matériau de l'énergie calorifique comme de l'énergie mécanique. L'utilisation du creuset métallique refroidi est rendu compatible avec l'induction grâce à sa sectorisation, qui force les courants induits à se refermer sur la paroi interne du creuset (figure 1.11) et permet, par la création d'un champ magnétique dans le matériau, la fusion par induction directe.

Nous allons dans ce paragraphe, donner le principe de la fusion par induction en creuset froid, ainsi que ses enjeux. Nous décrirons ensuite qualitativement l'ensemble des phénomènes physiques



**Figure 1.12** : représentation schématique d'une installation de fusion par induction en creuset froid. L'ensemble inducteur, creuset, charge et condensateurs forme un circuit RLC.

qui interviennent lors d'une telle fusion de verre, leurs couplages, l'ensemble du problème, et enfin les travaux déjà effectués.

#### **IV.1 - Le principe de la fusion des verres par induction en creuset froid**

Une installation de fusion par induction en structure froide est essentiellement constituée des éléments suivants :

- un générateur de courant alternatif,
- un coffret de condensateurs,
- un inducteur en cuivre refroidi par une circulation interne d'eau,
- un creuset constitué d'une juxtaposition de secteurs en cuivre, refroidis par une circulation d'eau interne,
- une charge "conductrice" de l'électricité.

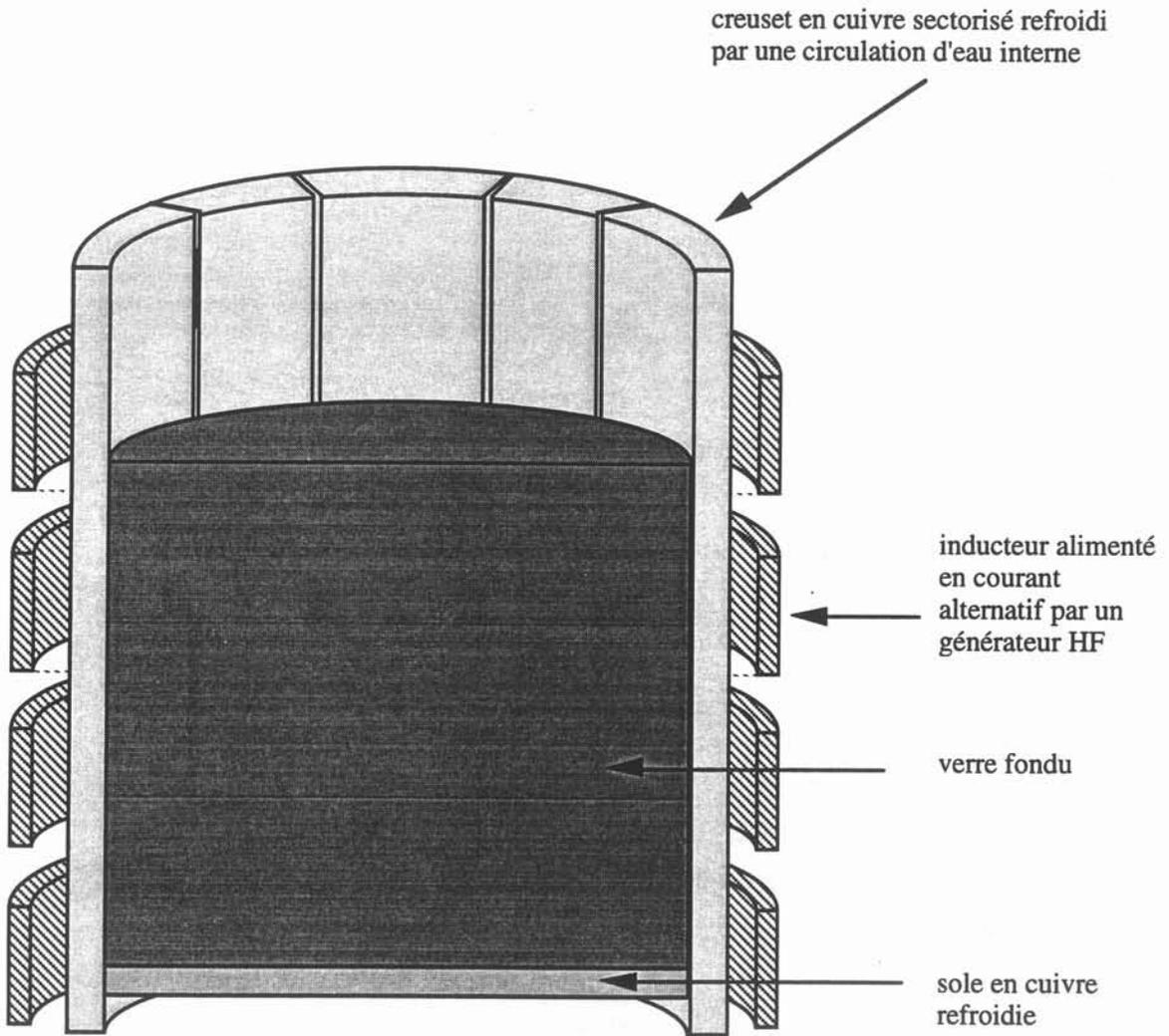
L'ensemble inducteur, creuset et charge forme un circuit oscillant avec le coffret de condensateur (figure 1.12).

La charge, en l'occurrence le verre, étant très résistive à température ambiante, on ne peut y induire des courants permettant son échauffement. C'est pourquoi on le porte par un moyen de chauffage adéquat à une température telle que la résistivité soit suffisamment faible pour que l'induction électromagnétique ait lieu. Un four annexe, en matériau réfractaire, dont les résistances en carbure de silicium constituent les éléments chauffants peut être utilisé pour le préchauffage du verre.

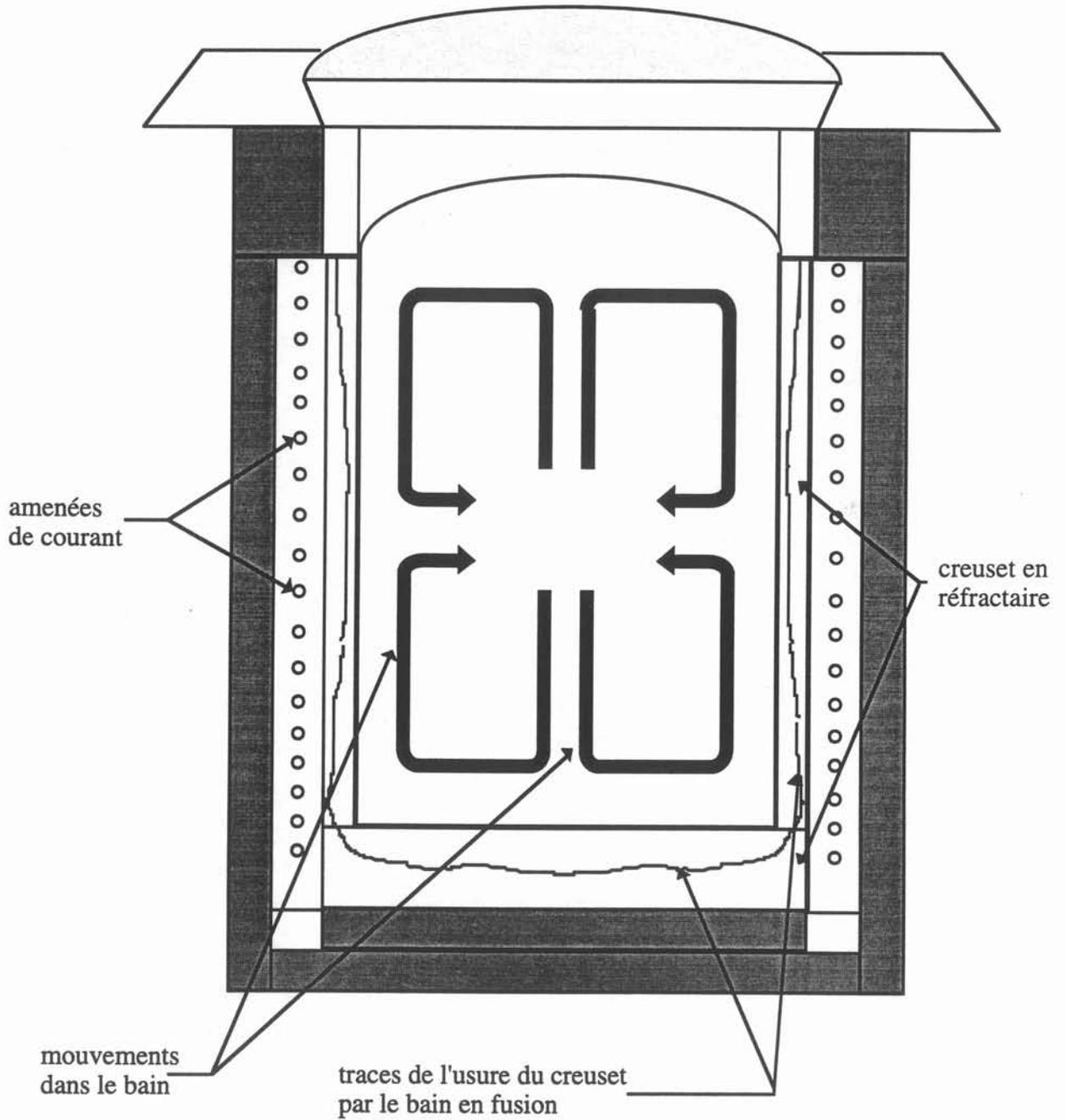
Le principe du procédé consiste à faire passer dans l'inducteur un courant alternatif sinusoïdal. Le creuset étant sectorisé, il ne fait pas écran au champ magnétique (figure 1.13). Ainsi des courants induits se développent dans le verre, tendant à le faire fondre. Avant d'explicitier les phénomènes physiques, examinons les enjeux et aussi les inconvénients inhérents à cette technique.

#### **IV.2 - Les enjeux et les inconvénients de la fusion des verres par induction en creuset froid**

La figure 1.14 montre la forme de l'usure d'un creuset réfractaire [6] pouvant être causée par un bain de verre en fusion. Bien que ce creuset soit en matériau réfractaire de haute qualité, la corrosion due aux réactions physico-chimiques (adhésion) entre le bain liquide et les parois du creuset, ainsi qu'aux mouvements du verre n'a pu être évitée. En conséquence, le creuset est donc rendu rapidement inutilisable et le verre ainsi élaboré est pollué.



*Figure 1.13* : schéma de l'installation de fusion de verres en creuset froid.



**Figure 1.14** : forme classique de l'usure du réfractaire d'un four à creuset.

Lors d'une fusion de verre par induction en creuset froid, le verre au contact des secteurs froids se solidifie : il perd donc toute son agressivité chimique vis à vis du contenant. L'autocreuset formé par cette croûte solide est donc à l'origine de la non interactivité entre le verre liquide et le creuset. Le verre élaboré est donc pur et le creuset choisi, souvent en cuivre pour ses valeurs élevées de conductivités électrique et thermique, reste intact et est réutilisable pour d'autres fusions de verres. Une installation de fusion de verre par induction en creuset froid ne nécessite donc aucun entretien particulier et évite les changements coûteux des réfractaires. Par ailleurs, dans le cas des verres spéciaux, le prix d'un creuset en cuivre se révèle bien moindre que celui d'un creuset en platine. Tels sont les deux principaux avantages de ce procédé dont nous pouvons encore citer d'autres enjeux :

- cette technique permet d'atteindre des températures élevées, la limitation due à l'utilisation des matériaux réfractaires constituant le contenant n'ayant plus lieu d'être,
- la faible inertie thermique du procédé : ainsi, toutes les variations de puissance injectée aux bornes du circuit oscillant sont répercutées de façon quasi-instantanée sur la distribution des températures au sein du bain liquide,
- la réduction des cycles de fusion et d'affinage grâce aux mouvements d'origine thermique.

Néanmoins, cette nouvelle technique n'est pas exempte de tout inconvénient. Elle doit à tout prix s'en affranchir si elle veut devenir compétitive. Nous citerons ici trois difficultés spécifiques à cette technique :

- le verre est un matériau isolant à température ambiante, d'où la nécessité d'utiliser un système annexe de démarrage (fours à résistances, suscepteurs) permettant d'amorcer la fusion,
- si la faible inertie thermique du procédé constitue un de ses atouts, elle peut se révéler son pire ennemi en cas de coupure d'alimentation. D'où la nécessité d'avoir un groupe de secours,
- la consommation en électricité se révèle trois à quatre fois plus élevée que celle des fours traditionnels, ceci devant être relativisé par des cycles d'élaboration de durées plus courtes.

Si le principe de la fusion des verres par induction en secteur froid se révèle être relativement simple, et les enjeux pour ce procédé évidents, les phénomènes physiques mis en jeu sont au contraire complexes. Nous allons examiner dans le paragraphe suivant les raisons de cette complexité.

### **IV.3 - Description qualitative des phénomènes physiques intervenant lors de la fusion des verres par induction en creuset froid**

Les phénomènes physiques mis en jeu lors de l'élaboration d'un verre par induction en creuset froid sont au nombre de trois :

- des phénomènes électromagnétiques,
- des phénomènes thermiques comprenant du transfert radiatif ou rayonnement interne,
- des phénomènes hydrodynamiques.

#### IV.3.1 - Le phénomène électromagnétique

Le creuset froid est de géométrie tridimensionnelle, périodique en  $\theta$  (direction azimuthale). Le domaine constitué par le verre ainsi que la sole sont axisymétriques. L'inducteur est faiblement hélicoïdal. Le domaine d'étude pour l'électromagnétisme est tridimensionnel.

L'inducteur est parcouru par un courant alternatif sinusoïdal. Dans les divers éléments de l'installation se développent des courants induits. Le phénomène électromagnétique se caractérise par l'équation de diffusion de l'induction magnétique  $\vec{B}$  :

$$\Delta \vec{B} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

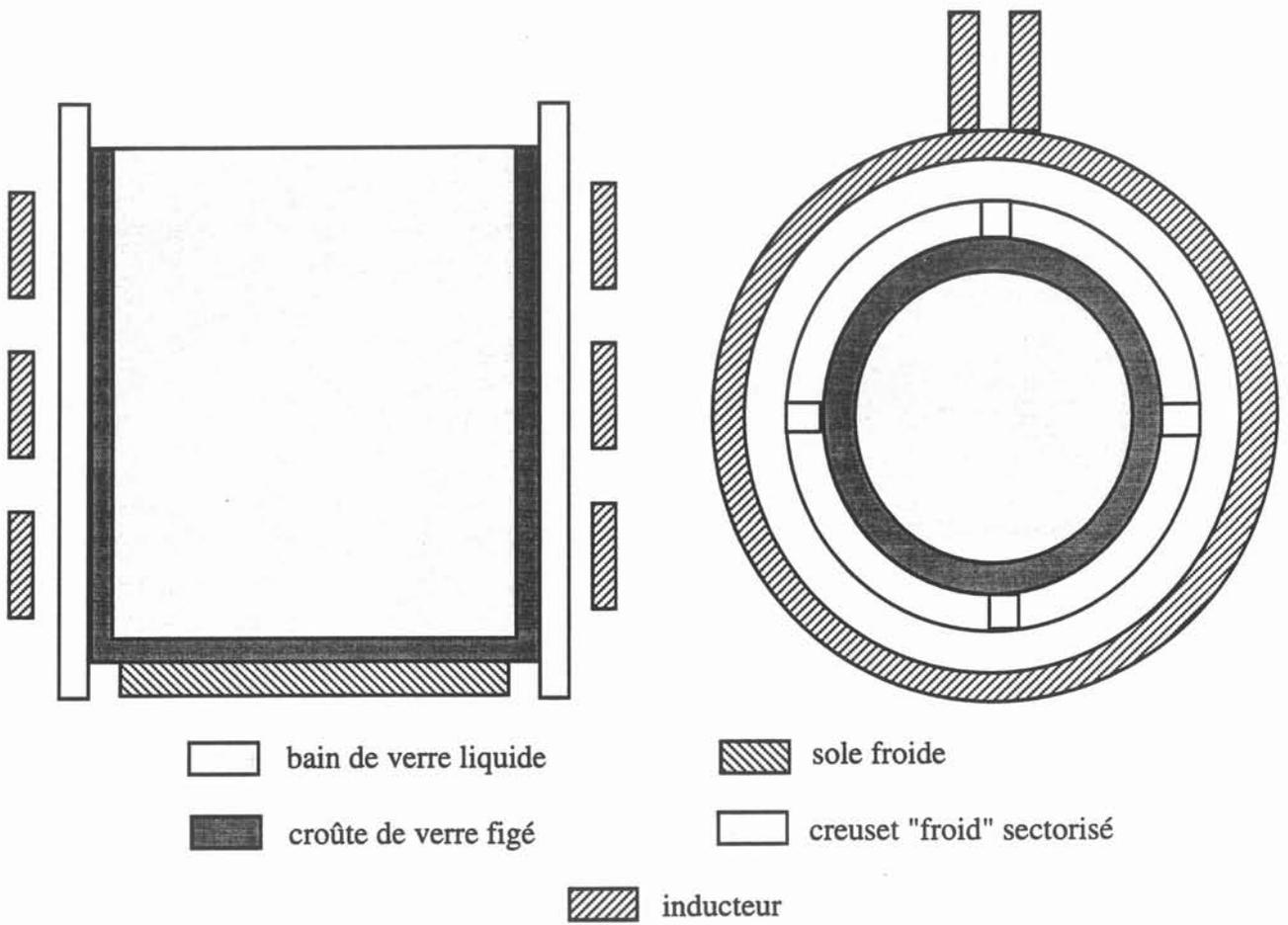
où  $\mu$  est la perméabilité magnétique du matériau,  $\sigma$  est la conductivité électrique et  $t$  est le temps.

L'induction magnétique variant sinusoïdalement avec le temps, cette équation met en évidence la longueur caractéristique de diffusion du champ magnétique dans le matériau, appelée épaisseur de peau électromagnétique  $\delta$ ,

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}}$$

où  $\omega$  la pulsation des courants inducteurs.

Cette quantité représente la profondeur de pénétration de l'induction magnétique dans le matériau. Les fréquences utilisées dans le cas de la fusion des verres par induction en creuset froid sont de l'ordre de 100 kHz. Le verre ayant une faible valeur de conductivité électrique, l'épaisseur de peau  $y$  est de l'ordre du rayon ( par exemple à 1400°C, pour une fréquence du courant inducteur de 300 kHz, l'épaisseur de peau dans le cas d'un verre à vitre est de 18 cm ). En conséquence des courants induits se développent dans toute sa masse qui se trouve chauffée par effet JOULE. Les secteurs du creuset, la sole et l'inducteur sont constitués de matériaux ayant de fortes valeurs de conductivité électrique (cuivre ou inox), l'épaisseur de peau est donc faible et des courants induits se développent quasiment en surface de ces éléments.



**Figure 1.15 :** configuration de fusion de verre en creuset froid.

### IV.3.2 - Les phénomènes thermiques

Nous distinguons dans cette description purement qualitative les phénomènes thermiques présents respectivement à l'intérieur du bain de verre en fusion, et au niveau des différentes frontières du domaine.

#### IV.3.2.1 - Les phénomènes thermiques au sein du bain de verre en fusion

Comme nous l'avons dit dans la description du phénomène électromagnétique, le bain de verre est chauffé par effet JOULE dans toute sa masse. Cela constitue la source principale de chaleur destinée à maintenir le verre en fusion.

Un phénomène thermique particulier aux verres sur lequel tout notre intérêt s'est porté pendant cette thèse : le transfert radiatif ou rayonnement interne. Le verre est un milieu semi transparent. Il est à ce titre capable d'émettre son propre rayonnement. La conséquence immédiate de ce processus est une perte importante d'énergie par les parois du creuset. Ce rayonnement interne dans le bain de verre en fusion constitue une source de chaleur volumique non négligeable qu'il faut prendre en compte pour décrire complètement les phénomènes thermiques.

Nous devons citer aussi la conduction de chaleur due à la conductibilité thermique moléculaire du verre, ainsi que la convection due au fort gradient thermique existant près des parois du creuset. Le verre fondu au contact des secteurs froids du creuset se solidifie ; une croûte de verre figé apparaît donc contre le creuset ainsi qu'au fond contre la sole qui elle aussi est refroidie (figure 1.15).

#### IV.3.2.2 - Les transferts thermiques en frontière

Nous différencions dans cette approche la surface du bain des autres éléments de frontière.

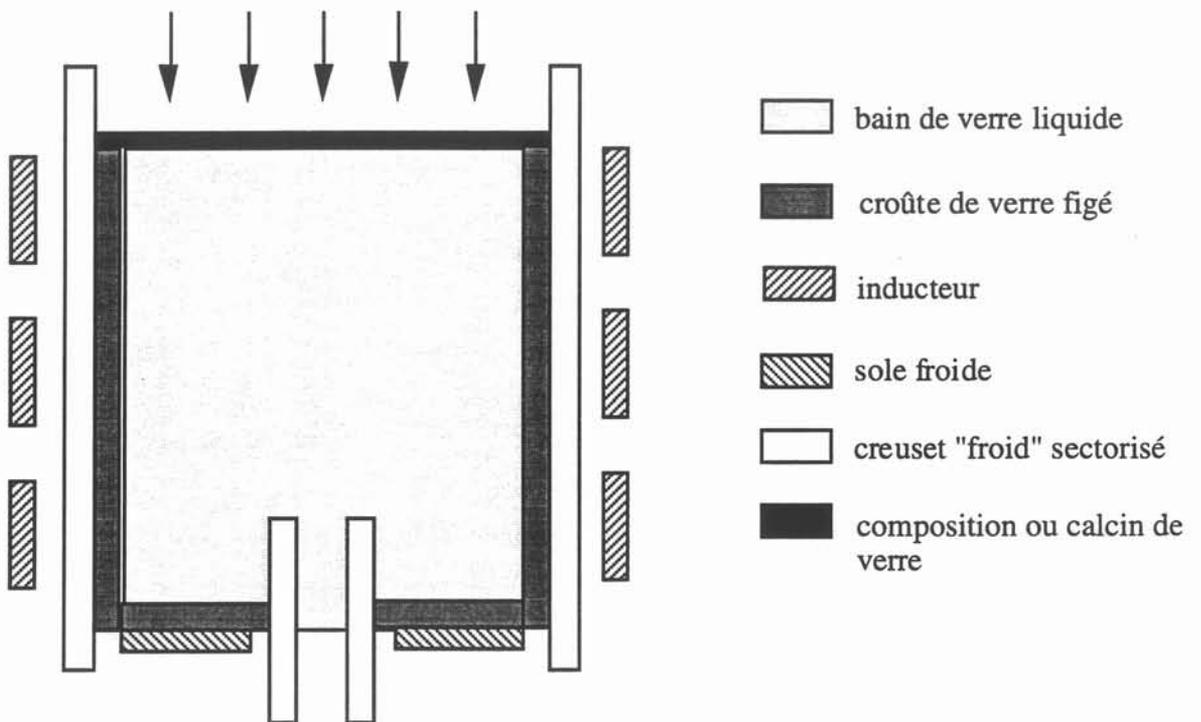
*Les échanges de chaleur en surface du bain :*

En surface ont lieu des échanges convectifs avec l'air et des échanges par rayonnement. Pour parler du rayonnement nous devons distinguer deux types de fusion de verre par induction : la fusion statique et la fusion dynamique.

La fusion en statique :

Dans ce cas, qui nous sert principalement à l'étude des phénomènes physiques et notamment thermiques, du verre est déposé dans le creuset sous forme de composition ou de calcin de verre. La fusion par induction a lieu, après préchauffage du verre, mais la surface du bain étant découverte, on observe un rayonnement de surface très important.

ALIMENTATION EN CALCIN DE VERRE OU EN  
COMPOSITION



*Figure 1.16* : procédé continu de fusion de verre.

### La fusion en dynamique :

Il s'agit là de la coulée continue du verre, qui est l'objectif de l'industrialisation du procédé. Lorsque le verre semble suffisamment affiné, on réalimente directement le bain liquide à l'aide de calcin de verre ou de composition (figure 1.16) : ces éléments sont rapidement "digérés" par le verre fondu. Cette alimentation directement sur la surface du bain a pour effet de diminuer le rayonnement de surface. L'apport de matière nécessite parallèlement la coulée du verre à l'aide d'une buse, constituée d'un matériau adéquat (molybdène, platine), et chauffée par induction, de façon à éviter que le verre se fige et vienne boucher l'orifice de vidange [5].

#### *Les échanges de chaleur avec les différentes parois du four de fusion :*

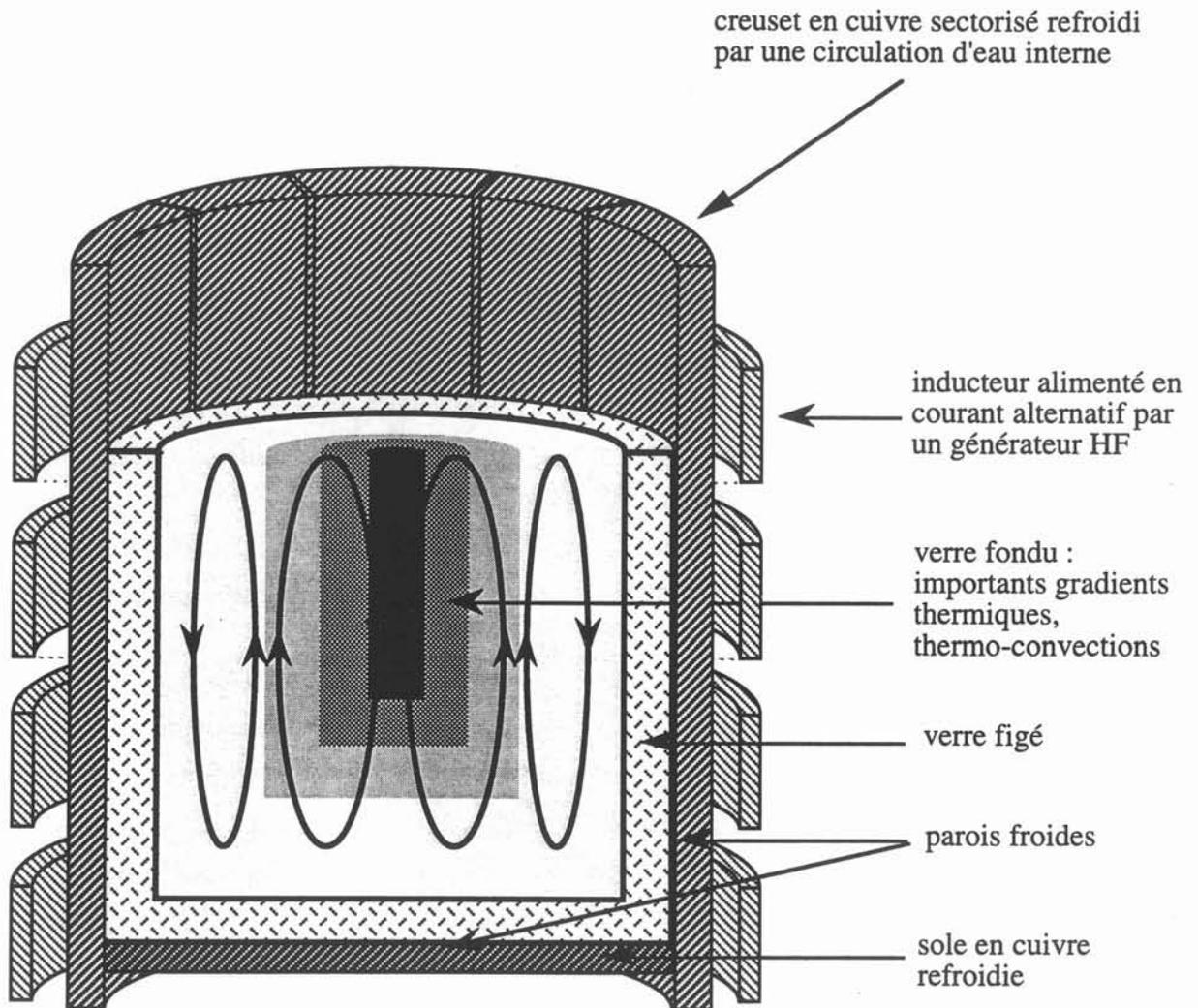
Les éléments constitués par les parois du creuset, ainsi que le fond froid ou la sole disposés dans le fond du four sont refroidis par une circulation interne d'eau. La conséquence est la formation au contact de ces différents éléments d'une couche de verre figée, d'une épaisseur variable selon la nature du verre. Le contact entre cette croûte figée et les parois est imparfait. Il n'est donc pas aisé d'évaluer les échanges thermiques à ces différents endroits. Néanmoins on peut expérimentalement déterminer un coefficient d'échange global qui prend en compte la conduction et la convection au niveau de chacune des frontières. Il est aussi nécessaire, par des mesures optiques en transmission de la croûte figée d'évaluer la part d'énergie rayonnée par le bain et qui atteint les différentes parois.

### **IV.3.3 - Les phénomènes hydrodynamiques**

La description des phénomènes thermiques met en évidence un bain de verre en fusion donc très chaud ( $\sim 1500^\circ\text{C}$ ), et des endroits "froids" puisque du verre au contact des parois du creuset ainsi que sur la sole se trouve figé (figure 1.15). Ces forts gradients thermiques qui existent entre les parois et le bain liquide sont à l'origine de mouvements de thermo-convection (figure 1.17).

Le champ magnétique créé par le courant alternatif sinusoïdal parcourant l'inducteur est à l'origine de forces de LAPLACE. Il serait légitime de penser que ces forces contribuent au brassage du bain de verre. Maurita ROSCINI a effectué dans le cadre de sa thèse une analyse des ordres de grandeur des forces en présence dans le bain de verre en fusion. L'ordre de grandeur des forces de LAPLACE se situe aux alentours de  $5\text{N/m}^3$ , alors que celui des forces thermo-convectives est de  $1400\text{N/m}^3$  environ (de  $1270\text{N/m}^3$  à  $1500\text{N/m}^3$  selon la nature du verre). Il y a donc une prédominance évidente des forces d'ARCHIMÈDE sur les forces électromagnétiques, et ce, quelque soit le type de verre.

Nous terminerons cette étude des phénomènes hydrodynamiques en disant que compte tenu de la forte valeur de la viscosité des verres en général, (voir § II.3.3), on peut considérer que le mouvement du bain est laminaire.



**Figure 1.17 :** représentation des mouvements de thermo-convection dans le bain liquide.

#### IV.3.4 - Couplages entre les différents phénomènes

L'analyse que nous venons d'effectuer met déjà en évidence l'interdépendance de ces phénomènes. Exprimons maintenant plus clairement leurs couplages.

L'électromagnétisme et les transferts thermiques sont couplés :

- par la densité de puissance JOULE qui a pour expression (en notation complexe) :  $\frac{JJ^*}{\sigma}$  où J est la densité de courants induits dans le verre, J\* la grandeur complexe conjuguée de J, et  $\sigma$  la conductivité électrique du verre,
- par la conductivité électrique du verre qui varie fortement avec la température (voir § II.3.1). Ainsi suivant la température du verre, la répartition des densités de puissance JOULE varie.

Les transferts thermiques comportent une source qui représente le transfert radiatif. Le champ de température intervient dans l'évaluation du terme de transfert radiatif d'où un fort couplage entre ce phénomène et la conduction. D'autre part le transfert radiatif possède son propre couplage : il s'agit d'un couplage entre l'expression des conditions aux limites radiatives et la résolution du problème à l'intérieur du domaine. Nous détaillerons ceci au chapitre III.

Les transferts thermiques et l'hydrodynamique sont couplés par le champ des vitesses, par la viscosité qui dépend fortement de la température (voir § II.3.3), et par le gradient thermique cause du champ de vitesse.

En résumé on peut dire que les couplages entre phénomènes sont issus :

- des sources,
- de la forte variation des propriétés en fonction de la température.

Compte tenu de la description précédente des phénomènes et de leurs couplages, nous pouvons exposer le problème à résoudre ainsi que les travaux déjà effectués en modélisation numérique.

#### IV.4 - Le problème à résoudre et le travail effectué en modélisation numérique

Un logiciel qui permettrait de dimensionner des fours de fusion de verre par induction en creuset froid devrait résoudre un problème couplé électromagnétique-thermique-hydrodynamique, avec forte dépendance des propriétés physiques en fonction de la température, et prise en compte du transfert radiatif.

SUN dans sa thèse [7] a développé un modèle numérique 3D qui permet de simuler le comportement thermohydraulique d'un bain de verre en fusion dans un four électrique. La problématique est voisine de la nôtre en ce sens qu'il s'agit de la résolution de phénomènes physiques couplés de mécanique des fluides, de transferts thermiques incluant le transfert radiatif, avec des sources. En revanche, dans ce procédé les sources d'origine électrique sont obtenues par résolution de la conduction électrique qui passe par la détermination du potentiel électrique, alors que dans notre problème les sources sont d'origine électromagnétique et nécessitent la détermination du potentiel vecteur magnétique en plus du potentiel électrique. Les travaux réalisés sur ce type de fours nous ont paru intéressants car ils mettent en oeuvre un couplage numérique entre l'hydrodynamique, la thermique avec transfert radiatif et la détermination du potentiel électrique dans des configurations de type four industriel. Dans cette étude une méthode numérique a été utilisée pour résoudre l'ensemble du problème : la méthode des volumes finis.

Au laboratoire MADYLAM, on travaille depuis une quinzaine d'années sur les procédés d'élaboration de matériaux par l'induction magnétique.

La modélisation des phénomènes électromagnétiques dont nous exposerons plus en détail les fondements dans le chapitre V est rendu possible grâce au logiciel OCTAVE conçu et développé par Annie GAGNOUD dans le cadre d'une collaboration avec le CEA de Marcoule. Ce code de calcul basé sur la méthode intégrale prenant en compte une modélisation 3D du creuset, présente l'originalité de ne nécessiter que la discrétisation des parties électriquement actives d'une installation de fusion en creuset froid. Ce modèle numérique permet de déterminer l'influence de tous les paramètres sur le rendement global d'une installation de fusion [8], [9]. De plus il permet le calcul des valeurs locales, notamment des termes sources constitués des densités de puissance JOULE, et des densités de forces électromagnétiques.

En ce qui concerne la modélisation thermo-hydraulique, Maurita ROSCINI utilise au cours de sa thèse soutenue en 1990 un code de calcul en volumes finis, CEPHISE (développé par Marc BURTY et Christian RAFFOURT) [10], [11], [12], dans le cadre d'une collaboration entre la CFEI de Seyssinet et EDF. Elle couple le logiciel électromagnétique OCTAVE et le logiciel thermo-hydraulique [13] à l'aide d'interpolations qui lui permettent de prendre en compte la variation des propriétés physiques en fonction de la température. Ces interpolations n'étant pas automatisées, il n'est possible d'en faire, pour un problème donné, qu'un nombre limité à cause de la complexité de la procédure et des temps de calculs très longs. Toutefois ce travail a permis de mettre en évidence la faisabilité d'un couplage entre deux méthodes numériques pour la résolution d'un tel problème par l'obtention de champs de température et des champs de vitesse représentatifs des essais expérimentaux.

Ce code de calcul thermo-hydraulique en volumes finis ne possède pas de préprocesseur et ne permet pas aisément de prendre en compte des modèles de propriétés. Nous lui préférons donc, pour la modélisation thermo-hydraulique le logiciel FLUX EXPERT conçu et développé par Philippe MASSE [14], [15]. Il s'agit d'un code qui permet de résoudre les équations aux dérivées partielles sur des géométries 2D (cartésiennes et axisymétriques) et 3D par la méthode des éléments finis. Les mouvements dans un bain de verre en fusion étant laminaires l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la simulation du phénomène hydrodynamique ne semble pas contre indiquée. Ce code de calcul possédant un générateur d'équations, la description de la thermo-hydraulique à l'aide de formulations de GALERKIN peut d'ores et déjà (après avoir soulevé la difficulté non négligeable d'inclure la forte variation de la viscosité dynamique en fonction de la température), permettre une visualisation de ces phénomènes sans prise en compte du transfert radiatif.

Le couplage des deux logiciels OCTAVE pour la modélisation électromagnétique, et FLUX EXPERT pour la modélisation des autres phénomènes, nous apparaît comme étant d'une nécessité absolue. Un couplage entre ces deux codes, prenant en compte la forte variation de la conductivité électrique en fonction de la température a été effectué par Sophie SERVANT [16]. Le code résultant permet de modéliser les phénomènes couplés dans les procédés d'élaboration d'oxydes en creuset froid inductif.

Maurita ROSCINI durant sa thèse soutenue en 1990, ouvre la voie en ce qui concerne la prise en compte du transfert radiatif lors de la fusion des verres. Elle propose une première approche du phénomène en utilisant l'approximation de ROSSELAND. Cette dernière consiste en une surévaluation de la conductibilité thermique moléculaire du verre en lui ajoutant une conductibilité thermique dite radiative. Par des mesures expérimentales de flux de chaleur monodirectionnels traversant un bain de verre chauffé en surface par rayonnement, Maurita ROSCINI détermine des conductibilités thermiques totales (somme de la conductibilité thermique moléculaire et de la conductibilité thermique radiative) pour différents types de verres. Elle déduit les conductibilités thermiques radiatives de ces verres par différence entre la conductibilité thermique totale mesurée, et la conductibilité thermique moléculaire de ces verres supposée constante. Cette première approche du phénomène s'avère satisfaisante vers l'intérieur du bain et pour des verres particulièrement absorbants. Pour certains types de verres les résultats obtenus ne donnent pas satisfaction, le transfert radiatif étant souvent surévalué. Mais l'inconvénient majeur de cette approche réside dans une mauvaise simulation au voisinage des parois de l'installation de fusion, or c'est à ce niveau là qu'ont lieu les pertes. Il s'avère donc indispensable de résoudre l'équation du transfert radiatif pour pallier ces inconvénients.

## V - CONCLUSION

La production du verre, vieille de plusieurs millénaires, n'a pas subi d'évolution notable depuis 1930, les fours à bassin étant les plus utilisés actuellement. Mais la fusion par induction en creuset froid semble constituer l'enjeu du moment pour la production des verres. Ce nouveau processus est doté d'un avenir prometteur grâce à une connaissance sans cesse améliorée des phénomènes physiques qui interviennent lors de la fusion du verre. Le chapitre qui suit présente d'ailleurs un phénomène important et propre au verre qui intervient lors de leur fusion : le transfert radiatif.

## **CHAPITRE II**

*Le transfert radiatif dans les milieux semi-transparentes*



## I - INTRODUCTION

Les transferts thermiques dans les milieux semi-transparents ont depuis le début du siècle suscité de nombreuses études. Ce sont des astrophysiciens qui les premiers s'intéressèrent au transfert radiatif pour résoudre des problèmes de transferts thermiques dans les atmosphères planétaires (ARTHUR SCHUSTER en 1905, puis en 1906, KARL SCHWARZSCHILD qui introduisit le concept d'équilibre radiatif dans les atmosphères planétaires)[17]. Ils n'ont depuis ce temps jamais cessé de s'intéresser à ces problèmes et nous devons à ROSSELAND, vers 1940, le concept de conductibilité thermique équivalente qui permet la prise en compte du transfert radiatif de manière simplifiée dans l'équation de la chaleur.

Vers 1950, le sujet a attiré aussi l'attention des physiciens qui ont vu survenir les mêmes problèmes dans la théorie de la diffusion des neutrons.

Depuis les années 1960, l'intérêt pour les transferts radiatifs n'a cessé de croître à cause des nombreux domaines technologiques dans lesquels ils rentrent en jeu de manière non négligeable.

Dans l'industrie verrière, la maîtrise de la distribution de température au sein de bains de verre fondu joue un rôle essentiel sur la qualité du matériau produit.

Plus récemment, les études du transfert radiatif touchèrent des domaines nouveaux :

- le génie nucléaire dans le cadre des réacteurs et la vitrification des déchets radioactifs,
- l'espace, où les matériaux semi-transparents entrent dans la composition des revêtements protecteurs des véhicules spatiaux,
- l'énergie solaire, où les matériaux semi-transparents permettent de réaliser des récepteurs solaires haute température à haut rendement [18].

Nous venons de citer des exemples pour lesquels le transfert radiatif est souvent couplé à de la conduction ou à de la convection naturelle.

Fréquemment, le transfert radiatif est couplé à la convection forcée, notamment dans la plupart des applications faisant intervenir une combustion. Dans certains systèmes, la tenue des matériaux à haute température constitue l'une des principales limitations technologiques. Ainsi, dans des applications telles que les chambres de combustion de moteurs d'avion ou de fusée, ou les réacteurs à eau pressurisée où le problème de sûreté est primordial, il est important de pouvoir prédire le flux atteignant les parois, et éventuellement concevoir le système de façon à minimiser ce flux. En effet, les flux radiatifs aux parois conditionnent le niveau de température atteint par celles-ci dans les moteurs d'avion ou d'engins divers par exemple, même quand ces parois sont refroidies

par des films d'air frais. L'objectif, dans ces conditions, est de minimiser les transferts pariétaux [19]. Dans d'autres systèmes tels que certains échangeurs, le but recherché est inverse, il s'agit d'obtenir un flux maximal d'échange entre les parois et le fluide, de façon à augmenter le rendement du système.

Pour notre part notre intérêt se porte sur le transfert radiatif dans le cadre de l'élaboration des verres par induction en creuset froid. Sa prise en compte couplé dans ce cas à de la conduction et à de la convection naturelle devrait nous permettre de mieux appréhender les champs de température dans le bain de verre lors d'une fusion, et d'évaluer de façon plus précise les pertes thermiques notamment au niveau des parois du creuset.

Nous décrivons dans un premier paragraphe les phénomènes thermiques dans les verres afin de mettre en évidence le transfert radiatif. Par la suite nous faisons l'étude des différents processus relatifs au rayonnement interne dans les milieux semi-transparents. Cela nous conduit à l'équation du transfert radiatif et à ses particularités, puis à l'expression de la divergence du flux radiatif.

## II - LES PHENOMENES THERMIQUES DANS LES VERRES

Nous allons déterminer la température dans le bain de verre. Ainsi nous écrivons l'équation de la chaleur dans le cas d'un milieu semi-transparent :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \text{div} (-\vec{q}_c - \vec{q}_r) + Q_{th} \quad (2.1)$$

$\rho$  est la masse volumique,

$C_p$  est la capacité calorifique,

$\frac{D}{Dt}$  représente la dérivé totale par rapport au temps,

$T$  est la température,

$\vec{q}_c$  est le flux conductif :  $\vec{q}_c = -k_v \text{grad}T$ ,

avec  $k_v$  : conductibilité thermique moléculaire,

$\vec{q}_r$  est le flux radiatif,

$Q_{th}$  est la source de chaleur. Dans notre problème c'est la densité de puissance JOULE issue de l'induction.

Dans le cas de l'installation de fusion de verre que nous étudions, nous travaillons en régime permanent, l'équation (2.1) devient :

$$\rho C_p \vec{U} \cdot \text{grad}T = \text{div} (-\vec{q}_c - \vec{q}_r) + Q_{th} \quad (2.2)$$

$\vec{U}$  est la vitesse dans le bain de verre.

Les conditions aux limites dans la technologie creuset froid sont des échanges de trois origines différentes :

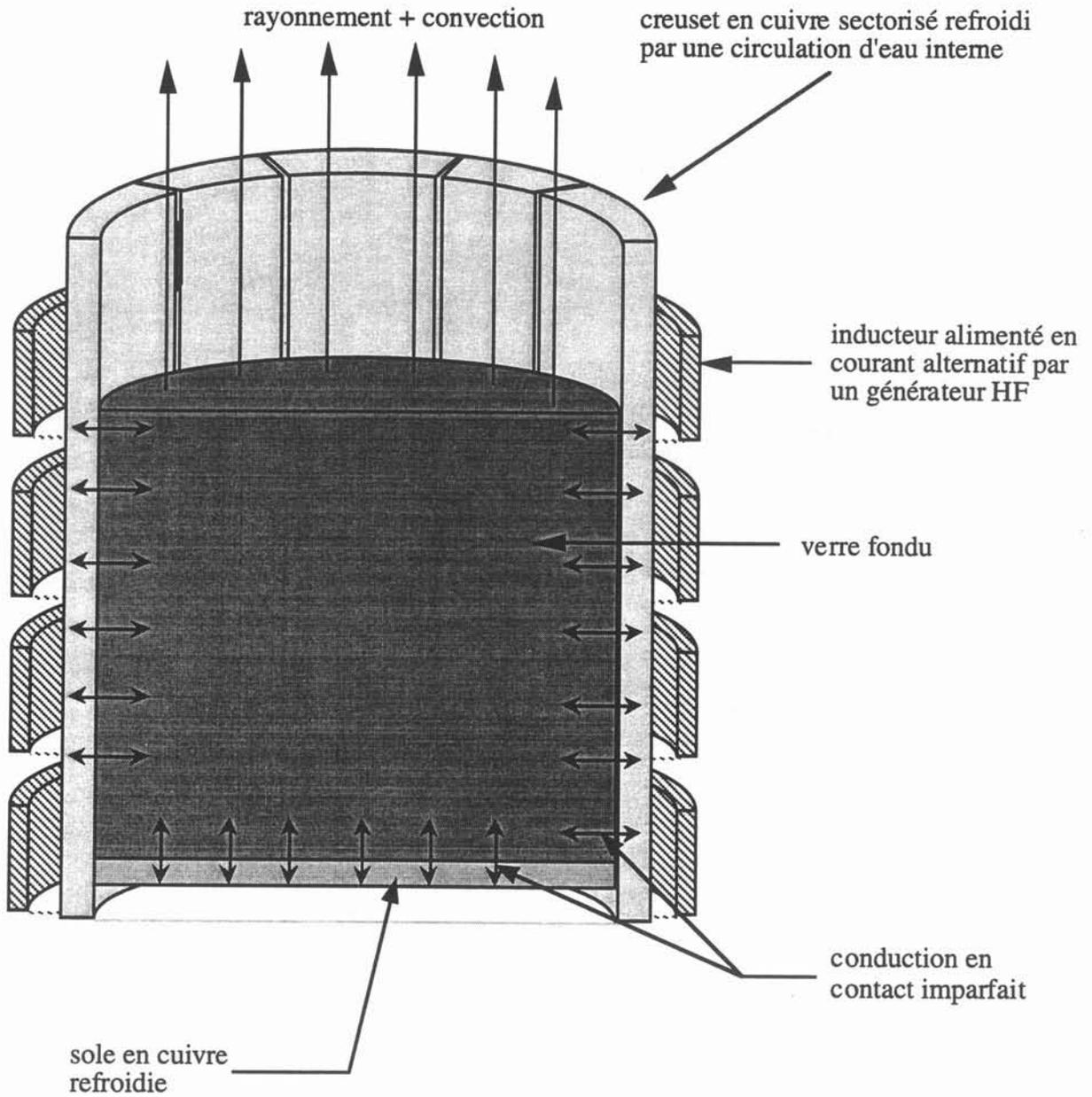
- contact imparfait entre le verre et le creuset, ainsi qu'entre le verre et le fond froid, que l'on assimile à un flux convectif,
- échange par convection,
- échange par rayonnement en surface (figure 2.1).

La résolution de cette équation nécessite la prise en compte d'un phénomène particulier aux verres : le rayonnement interne ou transfert radiatif. Les verres ainsi que d'autres milieux appelés milieux semi-transparents ont le pouvoir d'émettre eux-mêmes un rayonnement propre, en plus de leur capacité à laisser passer un rayonnement qui les traverse. Ces milieux peuvent être solides (le verre, la fibre de verre), liquides (le verre en fusion) ou gazeux (les gaz de combustion). Comme tout rayonnement thermique, le transfert radiatif est caractérisé par des grandeurs qui concernent une longueur d'onde déterminée, appelées grandeurs monochromatiques (l'intégration de ces grandeurs sur tout le spectre donne des grandeurs totales), et par des grandeurs qui dépendent aussi de la direction appelées grandeurs directionnelles. A l'encontre du rayonnement thermique qui pour les corps opaques se produit en surface, le transfert radiatif, propre aux milieux semi-transparents, se caractérise par des échanges énergétiques en tous points du milieu et non seulement en surface. En conséquence, l'absorption et l'émission de rayonnement sont des phénomènes volumiques.

Les équations (2.1) et (2.2) nous indiquent qu'il nous faut connaître le terme de divergence du flux radiatif. Ce dernier est l'opposé de la puissance radiative volumique dégagée dans le milieu semi-transparent. Sa détermination est complexe et fait l'objet des paragraphes suivants. En effet, avant de l'exprimer, nous devons connaître un certain nombre de grandeurs caractérisant le rayonnement dans un milieu semi-transparent, et établir l'équation du transfert radiatif.

### III - LA LUMINANCE ET LE VECTEUR FLUX RADIATIF

Au même titre que l'on définit la luminance d'une paroi comme étant le flux d'énergie partant dans une direction donnée par unité d'angle solide et par unité de surface apparente, on définit la luminance dans un milieu semi-transparent. La surface de référence n'est plus un élément de paroi, mais une surface élémentaire fictive autour de laquelle le rayonnement se répartit dans toutes les directions de l'espace (c'est à dire  $4\pi$  sr au lieu de  $2\pi$  sr dans le cas d'une paroi). L'objectif de ce paragraphe est de donner une définition précise de cette grandeur essentielle dans la caractérisation du transfert radiatif dans un milieu semi-transparent, ainsi que de la grandeur qui en découle : le vecteur flux radiatif.



**Figure 2.1** : conditions aux limites thermiques dans le cas d'un bain de verre en fusion en creuset froid.

### III.1 - La luminance ou intensité radiative

Considérons un élément de surface fictif  $dA$ , contenu dans le volume défini par le milieu semi-transparent, de vecteur unitaire normal  $\vec{n}$ , situé en un point  $M$  du milieu semi-transparent dont les coordonnées sont définies par le vecteur  $\vec{r}$  (figure 2.2). A travers  $dA$  passe l'énergie radiative. La portion de cette énergie de rayonnement enfermée dans le cône d'angle solide  $d\Omega$  dont le sommet est au point  $M$ , définit la luminance ou intensité radiative  $L(\vec{r}, \vec{m})$  qui s'exprime en  $Wm^{-2} sr^{-1}$ .

Pour une longueur d'onde donnée  $\lambda$ , on définit la luminance monochromatique  $L_\lambda(\vec{r}, \vec{m})$  qui dépend donc du point considéré, de la direction et de la longueur d'onde considérés. Cette luminance monochromatique s'exprime en  $Wm^{-3} sr^{-1}$  ( $\lambda$  en  $m$ ) ou en  $Wm^{-2} sr^{-1}\mu m^{-1}$  ( $\lambda$  en  $\mu m$ ).

### III.2 - Le vecteur flux radiatif

Connaître le champ radiatif total revient à connaître la luminance monochromatique sur toute la sphère contenant le point  $M$  et sur toute la gamme de longueur d'onde, d'où l'expression du vecteur flux radiatif :

$$\vec{q}_r = \int_0^\infty \int_{\Omega=4\pi} L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) \vec{m} d\Omega d\lambda \quad (2.3)$$

$q_r$  s'exprime en  $Wm^{-2}$ .

La connaissance de la divergence du vecteur flux radiatif passe d'abord par la connaissance d'un certain nombre de grandeurs et de mécanismes physiques caractérisant le rayonnement dans un milieu semi-transparent.

## IV - GRANDEURS ET MECANISMES PHYSIQUES CARACTERISANT LE RAYONNEMENT DANS UN MILIEU SEMI-TRANSPARENT

Il suffit pour caractériser la surface d'un matériau opaque de connaître son émissivité. Pour caractériser un matériau semi-transparent tel un verre, il devient subitement nécessaire de connaître ou de mesurer un nombre élevé de grandeurs thermophysiques : conductibilité thermique, coefficient d'absorption, de diffusion, de réflexion. La plupart du temps ces paramètres difficiles et coûteux à mesurer, sont aussi variables en fonction de la longueur d'onde (facteurs spectraux), de la géométrie (facteurs directionnels), et de la température [20].

Nous allons définir les grandeurs et les mécanismes physiques qui vont nous permettre d'établir l'équation du transfert radiatif [17]. Parmi ces mécanismes certains ont pour conséquence une atténuation du rayonnement.

## **IV.1 - Les mécanismes physiques responsables d'une atténuation du rayonnement**

### **IV.1.1 - L'absorption**

#### **IV.1.1.1 - Le coefficient monochromatique d'absorption $a_\lambda$**

Le coefficient monochromatique d'absorption  $a_\lambda$  représente le taux de diminution relatif par unité de longueur de la luminance monochromatique.

$a_\lambda$  s'exprime en  $m^{-1}$ , il est communément exprimé en  $cm^{-1}$  dans les spectres d'absorption.

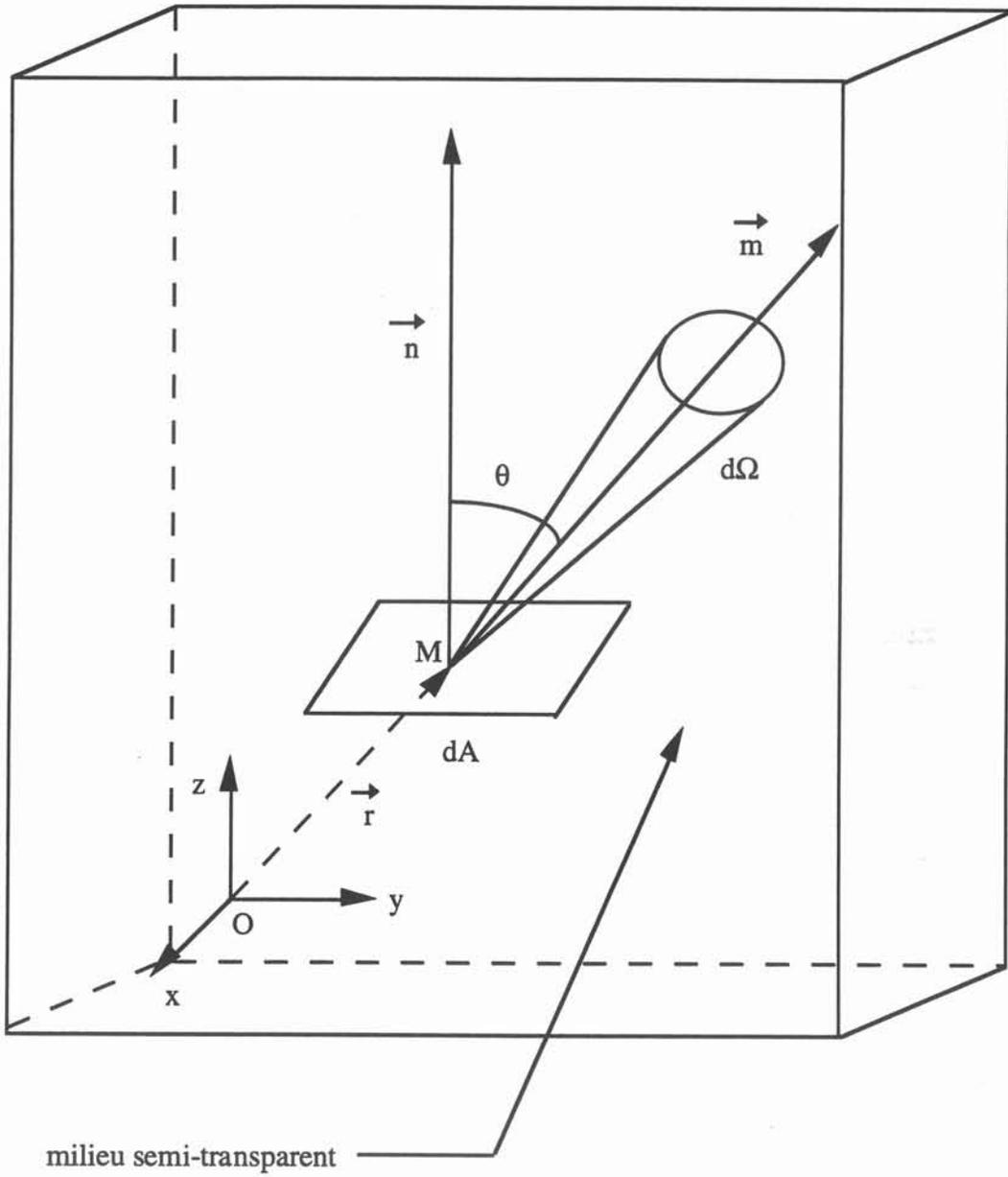
Dans le cas des verres, ce coefficient varie de façon importante en fonction de la longueur d'onde, même dans le domaine restreint qui nous intéresse, c'est à dire de  $1 \mu m$  à  $5 \mu m$  gamme de longueur d'onde à laquelle se produit le transfert radiatif. A titre d'exemple nous donnons les spectres d'absorption du verre de silice (figure 2.3)[21], ainsi que les spectres d'absorption d'un verre semi-transparent et d'un verre noir que nous avons fait mesurer à froid à l'ENSMA de Poitiers par l'équipe du professeur LALLEMAND (figures 2.4 et 2.5). Dans les trois cas de figure, il s'agit de spectres continus. Dans les deux cas de verres pour lesquels nous avons fait effectuer les mesures du coefficient d'absorption en fonction de la longueur d'onde (figures 2.4 et 2.5), celui-ci évolue par bandes dans lesquelles les variations sont relativement faibles. Nous constatons que le coefficient d'absorption du verre noir est en moyenne double de celui du verre semi-transparent ( $10 \text{ cm}^{-1}$  pour le verre noir contre  $5 \text{ cm}^{-1}$  pour l'autre type de verre). Quant au verre de silice (figure 2.3), s'il possède aussi un spectre continu (ce qui est le cas en général pour les milieux condensés), présente un pic d'absorption important à  $2.75 \mu m$ , dont on attribue la présence au radical hydroxyle (-OH) contenu dans ce verre.

#### **IV.1.1.2 - L'atténuation du rayonnement par absorption**

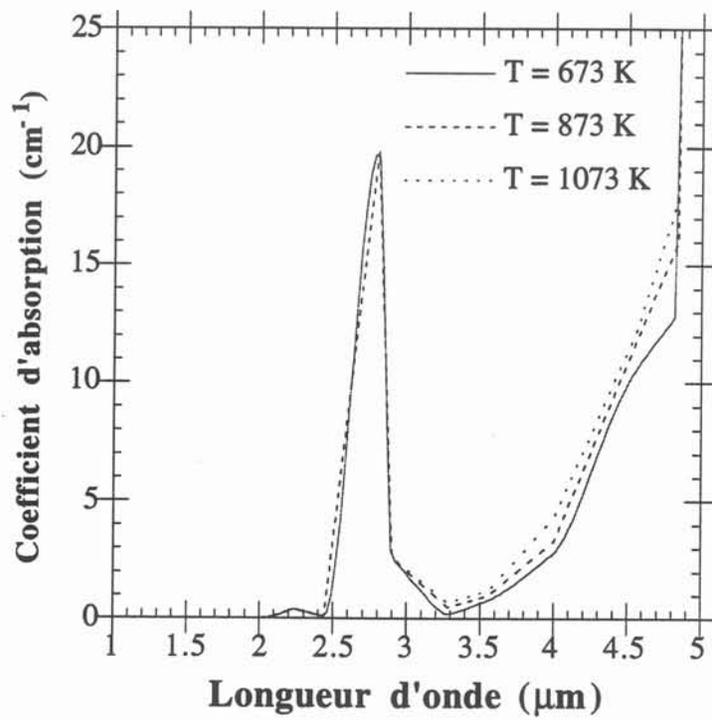
Si le milieu considéré est absorbant, la variation de la luminance monochromatique due à l'absorption sur une distance élémentaire  $ds$  le long d'un trajet d'abscisse curviligne  $s$  peut s'écrire :

$$dL_\lambda^a = -a_\lambda L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) ds \quad (2.4)$$

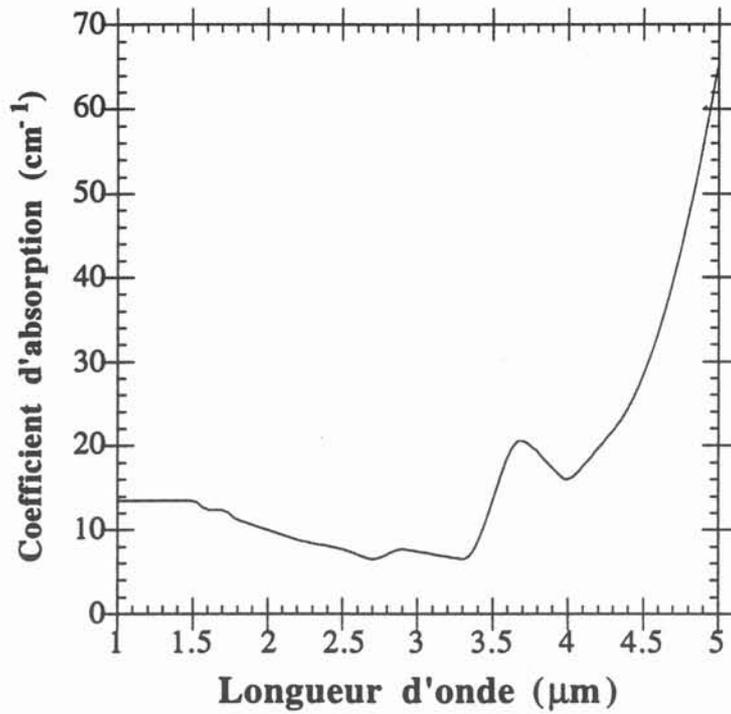
Le rayonnement est donc atténué par absorption. Un autre mécanisme physique ayant la même conséquence est le phénomène de diffusion.



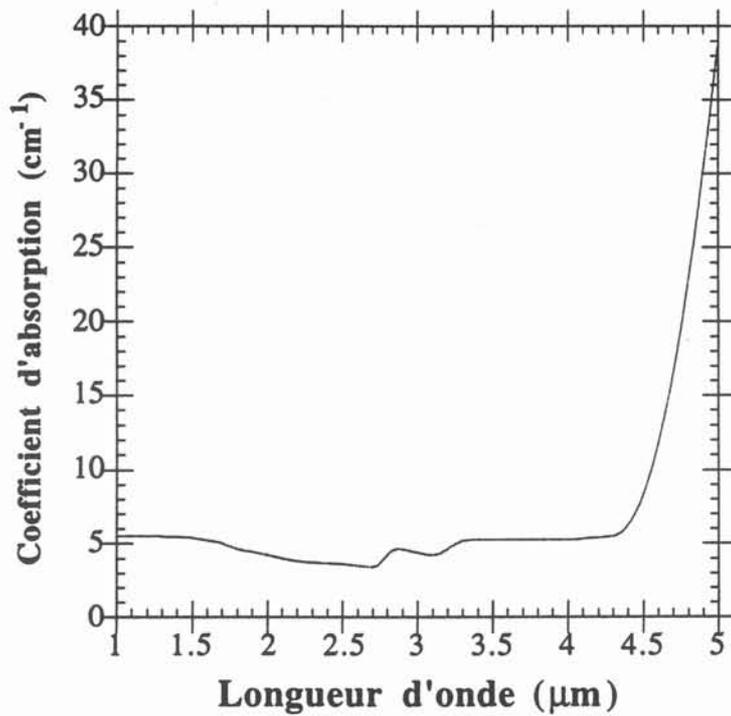
**Figure 2.2** : schéma permettant de donner la définition de la luminance.



*Figure 2.3* : spectre d'absorption du verre de silice de qualité suprasil.



*Figure 2.4* : spectre d'absorption d'un verre noir.



*Figure 2.5* : spectre d'absorption d'un verre semi-transparent.

### IV.1.2 - L'atténuation du rayonnement par diffusion

La diffusion diminue la luminance sur un trajet d'abscisse curviligne  $s$  en redistribuant l'énergie dans les autres directions de l'espace. On définit donc un coefficient de diffusion monochromatique  $\sigma_\lambda$  de la même manière que le coefficient d'absorption :

$$dL_\lambda^\sigma = -\sigma_\lambda L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) ds \quad (2.5)$$

$\sigma_\lambda$  s'exprime en  $m^{-1}$ .

Les deux mécanismes responsables d'une atténuation de rayonnement sont donc l'absorption et la diffusion. On peut regrouper ces deux coefficients pour exprimer une atténuation globale de rayonnement.

### IV.1.3 - L'atténuation globale de rayonnement

L'atténuation globale par absorption et diffusion est définie par le coefficient d'extinction  $K_\lambda$  :

$$K_\lambda = a_\lambda + \sigma_\lambda \quad (2.6)$$

La variation de luminance monochromatique due à l'absorption et à la diffusion, sur une distance  $ds$  le long d'un trajet d'abscisse curviligne  $s$  peut donc s'écrire :

$$dL_\lambda^K = -K_\lambda L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) ds \quad (2.7)$$

#### Remarque :

Les coefficients  $a_\lambda$  et  $\sigma_\lambda$  donc  $K_\lambda$  dépendent de la longueur d'onde  $\lambda$ , de la température, de la nature du corps constituant le milieu, de sa concentration dans le cas d'un mélange (liquide ou gaz) et de la pression dans le cas d'un gaz.

Une grandeur adimensionnelle issue de l'expression de la luminance monochromatique en un point d'abscisse  $s$ , en fonction de la luminance en un point origine, permet de caractériser l'atténuation de rayonnement dans un milieu semi-transparent : l'épaisseur optique.

#### IV.1.4 - L'épaisseur optique

On définit tout d'abord une grandeur appelée chemin optique, calculée en intégrant le coefficient monochromatique d'extinction le long d'un chemin de longueur  $s$  :

$$\kappa_{\lambda}(s) = \int_0^s K_{\lambda}(s') ds' \quad (2.8)$$

Dans le cas où  $s$  représente une dimension caractéristique  $D$  du système étudié, on définit une nouvelle échelle caractéristique du rayonnement relative au domaine, appelée épaisseur optique :

$$\kappa_{\lambda}(D) = \int_0^D K_{\lambda}(s) ds \quad (2.9)$$

Si le coefficient monochromatique d'extinction ne dépend pas du point considéré, on peut écrire:

$$\kappa_{\lambda}(D) = K_{\lambda} D \quad (2.10)$$

Cette écriture nous permet de distinguer deux cas :

- *les milieux optiquement minces où  $\kappa_{\lambda} \ll 1$ .*

Dans ce cas, la distance moyenne de pénétration du rayonnement ( $1/K_{\lambda}$ ) est grande devant la dimension caractéristique du système. Ainsi, le milieu physique émet aussi bien qu'il absorbe l'énergie radiative quittant la frontière du système, mais il n'est pas suffisamment dense pour absorber ce qui provient d'autres éléments dans le volume. Le champ radiatif est dans ce cas dominé par l'émission de rayonnement.

- *les milieux optiquement épais où  $\kappa_{\lambda} \gg 1$ .*

Dans ce cas, la distance moyenne de pénétration du rayonnement est petite devant la dimension caractéristique du système. Ainsi, les contributions au flux de rayonnement ne proviennent que des distances qui sont petites comparées aux dimensions caractéristiques du système. Le transfert radiatif est alors dominé par l'absorption.

Nous venons de décrire les processus d'atténuation du rayonnement. Bien entendu certains mécanismes permettent le renforcement du rayonnement.

## IV.2 - Le renforcement du rayonnement

Deux processus sont à l'origine du renforcement par rayonnement : l'émission et la diffusion.

Un milieu semi-transparent quelconque, et donc en particulier un verre, est capable d'émettre un rayonnement propre.

### IV.2.1 - L'accroissement du rayonnement par émission

Il s'agit de l'émission spontanée due à l'agitation thermique des atomes et des molécules. Cette émission dépend directement de la température. On définit le coefficient d'émission monochromatique  $e_\lambda$  au point M comme la variation par unité de longueur sur le trajet considéré de la luminance due à l'émission, rapportée à la luminance d'équilibre (ou luminance du corps noir)  $L_\lambda^0$  dans le milieu semi-transparent, à la température T en M :

$$dL_\lambda^e = e_\lambda L_\lambda^0(T) ds \quad (2.11)$$

avec

$$L_\lambda^0(T) = \frac{2\pi h c_0^2 n^2}{\lambda^5 [\exp(\frac{hc_0}{k\lambda T}) - 1]} \quad (2.12)$$

où

$h$  : constante de Planck =  $6,626 \cdot 10^{-34}$  Js,

$k$  : constante de Boltzmann =  $1,3805 \cdot 10^{-23}$  JK<sup>-1</sup>,

$c_0$  : vitesse de la lumière dans le vide =  $3 \cdot 10^8$  ms<sup>-1</sup>,

$n$  : indice de réfraction du milieu.

Nous supposons l'équilibre thermodynamique local réalisé, c'est à dire que la puissance radiative absorbée est immédiatement redistribuée en puissance émise de telle façon que les états d'énergie interne de la matière restent répartis en une distribution équilibrée à la température de chaque point [20]. Nous pouvons appliquer la loi de KIRCHHOFF, d'où :

$$e_\lambda = a_\lambda \quad (2.13)$$

#### IV.2.2 - Le renforcement du rayonnement par diffusion

La diffusion, comme nous l'avons vu dans le paragraphe IV.1.2, peut être à l'origine d'une atténuation de rayonnement. Elle peut aussi être la cause d'un accroissement de rayonnement.

L'accroissement de luminance due à la diffusion se calcule à l'aide de la fonction de phase  $F(\vec{m}', \vec{m})$ . Cette dernière représente la probabilité pour qu'un rayon provenant d'une direction  $\vec{m}'$  soit diffusé dans la direction  $\vec{m}$ . La figure 2.6 illustre ce phénomène en considérant la diffusion à travers un élément de volume élémentaire  $dV$  du milieu semi-transparent. Cette fonction de phase de la diffusion (appelée aussi indicatrice de la diffusion) est normalisée et l'on a :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} F(\vec{m}', \vec{m}) d\Omega' = 1 \quad (2.14)$$

Ainsi, l'augmentation de luminance monochromatique le long du trajet d'abscisse curviligne  $ds$  dans la direction  $\vec{m}$  est :

$$dL_{\lambda}^{\sigma+} = \left[ \frac{\sigma_{\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}') F(\vec{m}', \vec{m}) d\Omega' \right] ds \quad (2.15)$$

Avant de passer à l'établissement de l'équation du transfert radiatif, nous proposons une brève revue des différentes manières de représenter la fonction de phase de la diffusion.

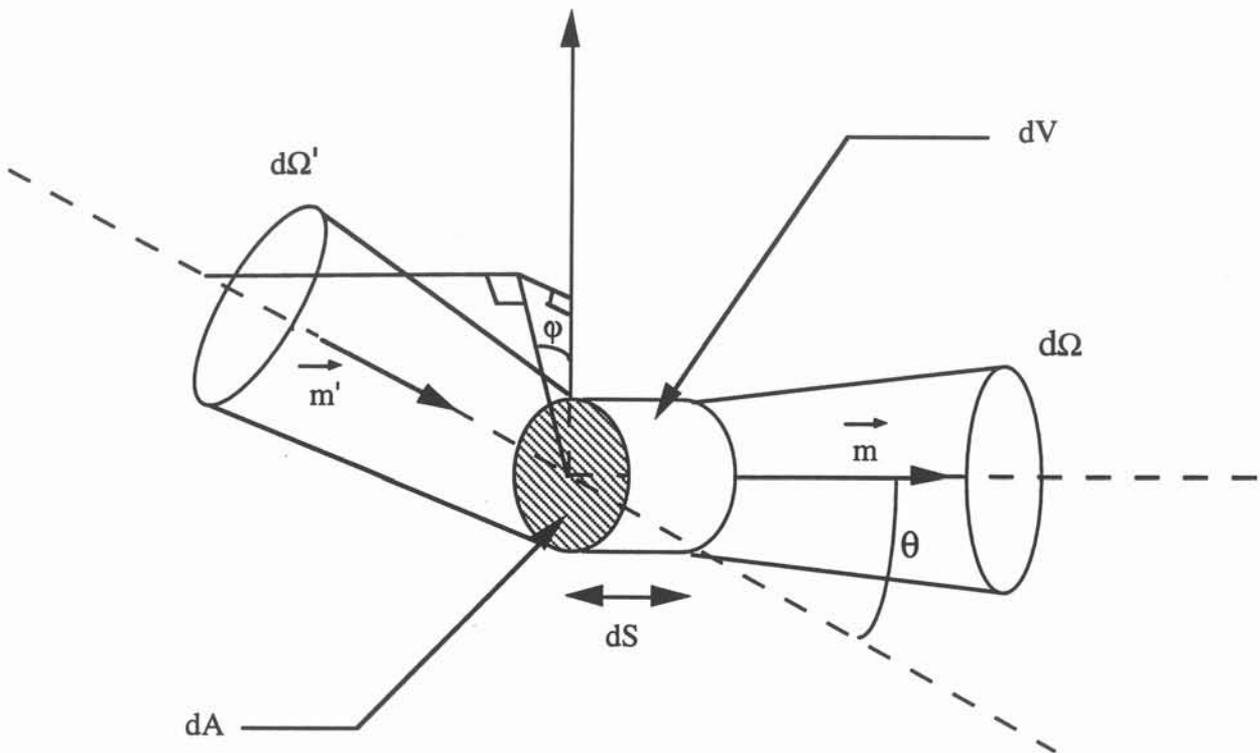
*Quelques représentations de la fonction de phase :*

Même si dans notre modèle numérique, nous supposons que la fonction de phase est isotrope ( $F(\vec{m}', \vec{m}) = 1$ ) pour des raisons que nous donnons dans le chapitre III, il nous semble intéressant pour compléter l'étude faite sur les différents paramètres relatifs au transfert radiatif de présenter ici différentes manières de la représenter (la figure 2.7 montre le système de coordonnées sphériques):

- HOTTEL et SAROFIM [22] ainsi que CHANGEL et ÖZISIK [23] expriment la fonction de phase en série de polynômes de Legendre :

$$F(\Theta) = \sum_{n=0}^N (2n+1) a_n P_n(\cos \Theta) \quad (2.16)$$

où  $\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$  est le cosinus de l'angle entre le rayon



**Figure 2.6** : diffusion du rayonnement dans la direction  $\vec{m}$ .

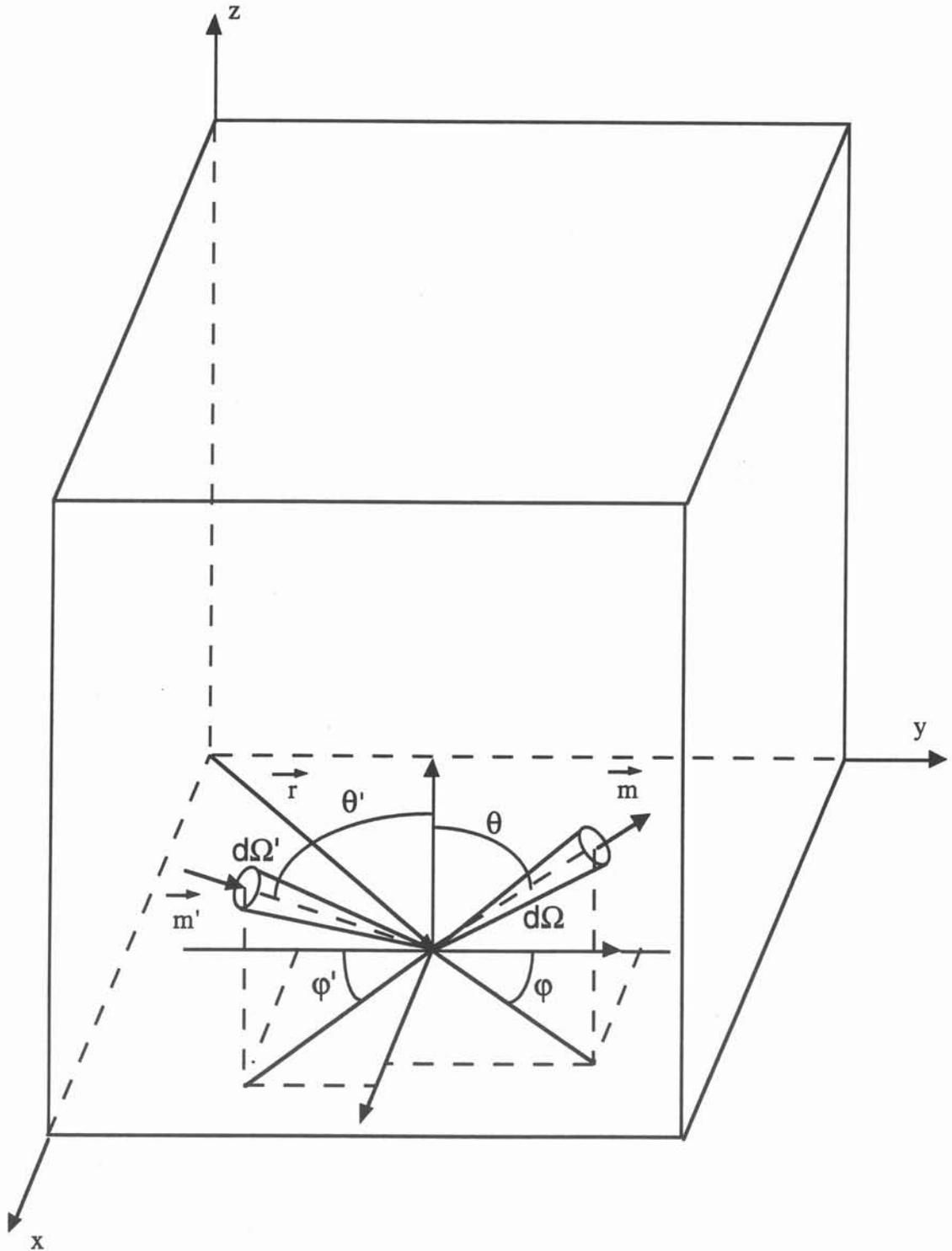


Figure 2.7 : système de coordonnées.

incident et le rayon diffusé,

$(r, \theta, \varphi)$  représente les composantes de la direction  $\vec{m}$  et  $(r, \theta', \varphi')$  représente les

composantes de la direction  $\vec{m}'$ , en coordonnées sphériques (figure 2.7),

$\theta$  et  $\theta'$  sont les angles zénithaux,

$\varphi$  et  $\varphi'$  sont les angles azimutaux,

$N$  est le degré de la série de Legendre,

$P_n$  représente les polynômes de Legendre. Ils sont de la forme :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2-1)^n]}{dx^n} \quad (2.17)$$

$a_n$  sont les coefficients de la série de Legendre.

La fonction de phase définie comme cela est très complexe et très difficile à mettre en oeuvre, particulièrement pour des géométries 3D.

- Afin de prendre en compte une diffusion forte vers l'avant à cause de particules microscopiques telles que charbon ou cendres, MENGÜC et VISKANTA [24] utilisent l'approximation  $\delta$ -EDDINGTON [25] puis FIVELAND [26] utilise l'approximation  $\delta$ -M [27] dérivée de la précédente.

Cette approximation s'écrit :

$$F(\cos\Theta) = 2 f \delta (1-\cos\Theta) + (1-f) \sum_{n=0}^N (2n+1) b_n P_n(\cos\Theta) \quad (2.18)$$

où  $f$  est le coefficient d'asymétrie,

$\delta$  est la fonction de Dirac,

$N$  est le degré de la série de Legendre.

Les relations entre les coefficients des équations (2.17) et (2.18) s'obtiennent en utilisant l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour donner :

$$f = a_{M-1}$$

$$b_n = \frac{a_n - f}{1-f} \quad \text{pour } n = 0, 1 \dots M$$

- Geneviève UNY dans sa thèse [28] utilise pour décrire une fonction de phase très pointue vers l'avant, la formule d'HENYEEY GREENSTEIN avec  $g$  positif, qui présente l'intérêt de ne comporter qu'un seul paramètre  $g$ . Ainsi on exprime la fonction de phase par :

$$F(\cos\Theta) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos\Theta)^{3/2}} \quad -1 < g < 1 \quad (2.19)$$

où

$g$  est le paramètre d'asymétrie de la fonction de phase de HENYEEY GREENSTEIN. Lorsque  $g$  est positif, la fonction de phase est dirigée vers l'avant, dans le cas contraire, elle est dirigée vers l'arrière. La valeur nulle de  $g$  correspond au cas de diffusion isotrope. La figure 2.8 donne la représentation de la fonction de phase de HENYEEY GREENSTEIN pour trois valeurs du paramètre  $g$ .

- Une simplification intéressante pour prendre en compte une diffusion soit vers l'arrière, soit isotrope, soit vers l'avant, consiste à ne garder que les deux premiers termes du développement en séries de Legendre [29]. Nous obtenons ainsi le modèle de fonction de phase pour diffusion anisotrope linéaire (figure 2.9) :

$$F(\cos\Theta) = 1 + a_0 \cos \Theta \quad (2.20)$$

avec :

$a_0 = -1$  : diffusion vers l'arrière,

$a_0 = 0$  : diffusion isotrope,

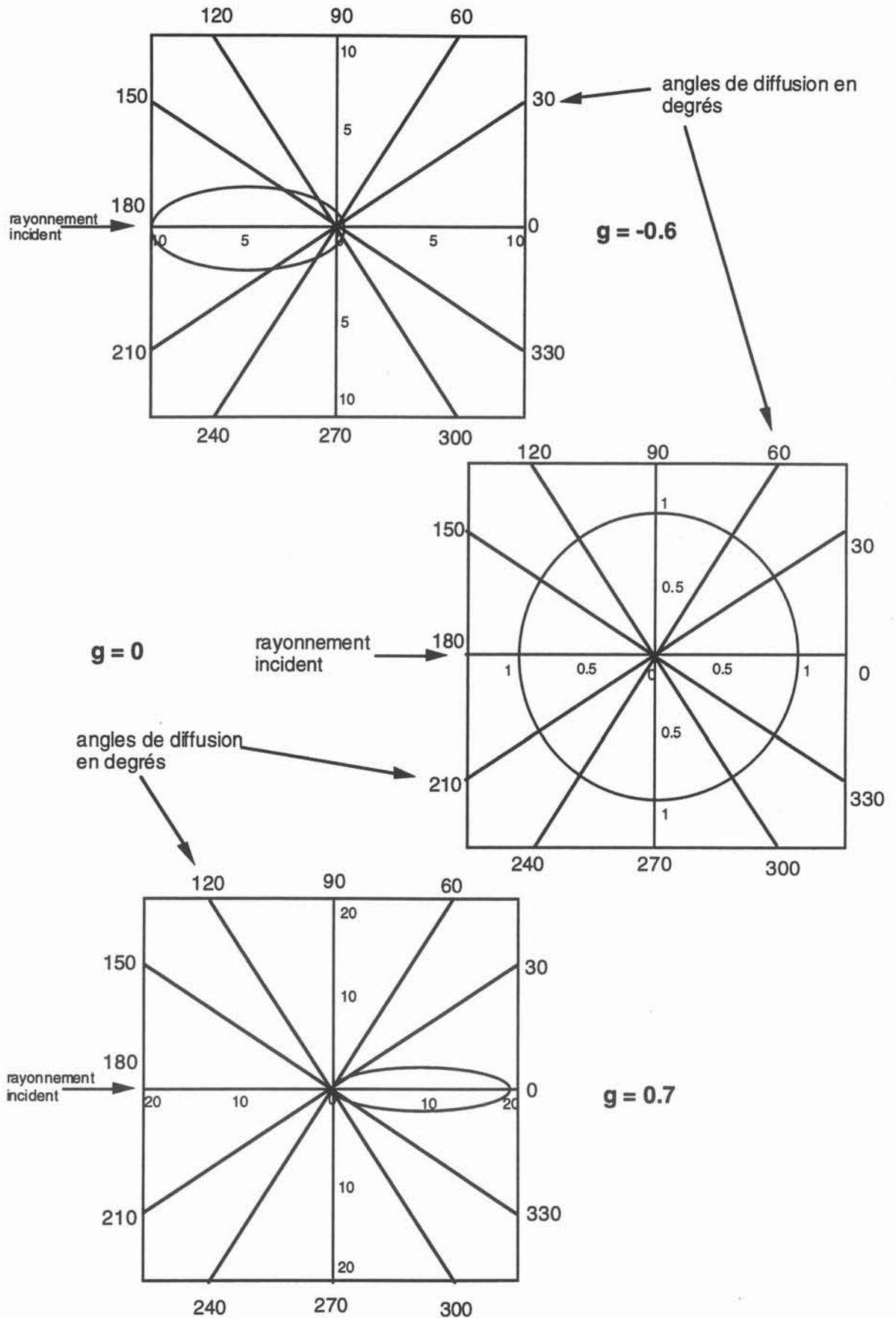
$a_0 = 1$  : diffusion vers l'avant.

## V - L'EQUATION DU TRANSFERT RADIATIF

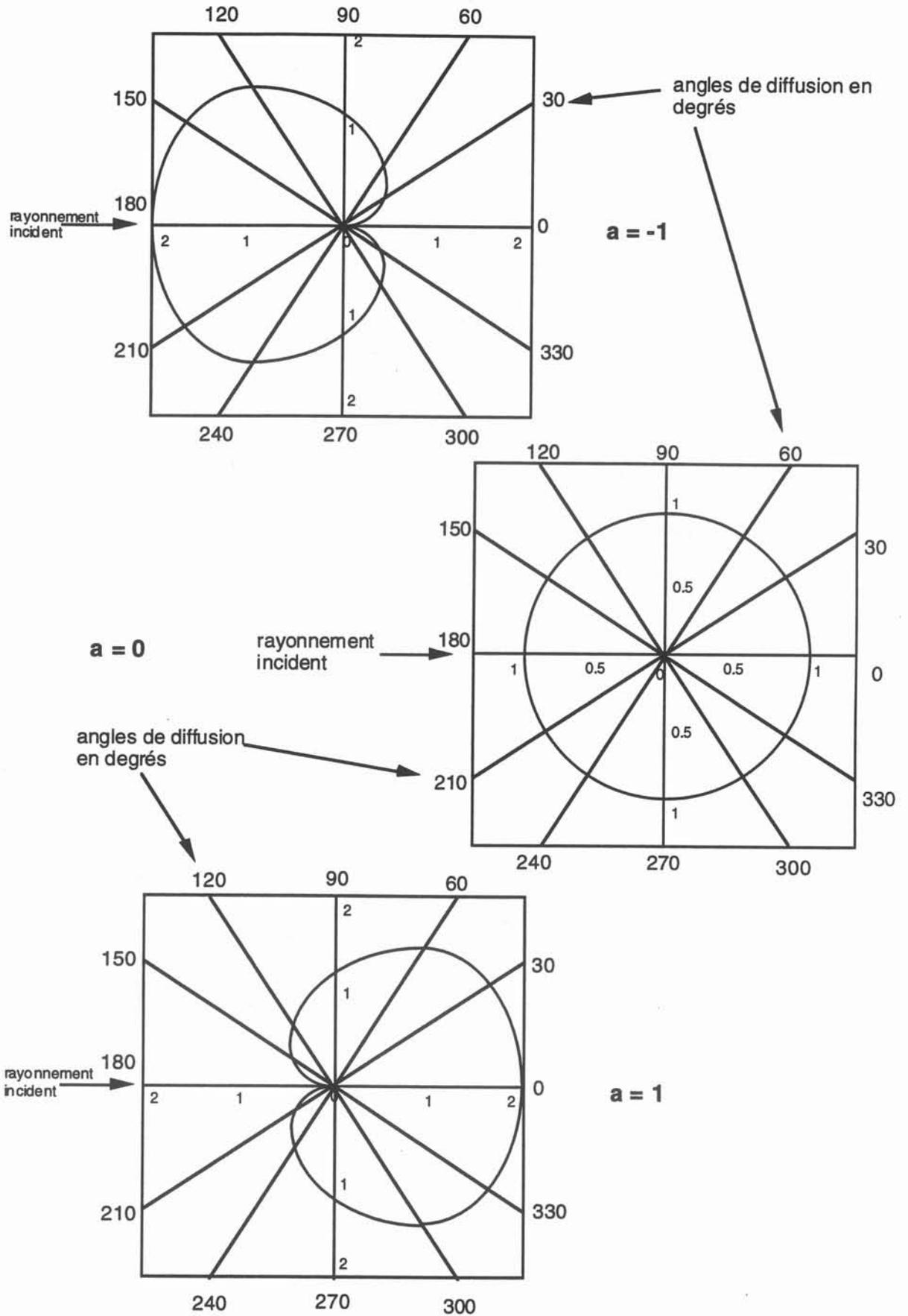
Nous venons de passer en revue l'ensemble des mécanismes physiques qui constituent le transfert radiatif dans les milieux semi-transparentes. Nous possédons maintenant tous les éléments nécessaires à l'établissement de l'équation du transfert radiatif.

### V.1 - L'établissement de l'équation du transfert

On établit l'équation du transfert radiatif en faisant le bilan énergétique élémentaire dans une direction donnée : la variation de luminance dans cette direction est la somme des variations de luminance dues à l'absorption, à l'atténuation par diffusion, à l'émission et au renforcement par diffusion [17] soit :



**Figure 2.8 :** représentation de la fonction de phase d'HENYHEY-GREENSTEIN.



**Figure 2.9 :** représentation de la fonction de phase linéaire anisotrope.

$$d L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) = - a_{\lambda} L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) ds - \sigma_{\lambda} L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) ds + a_{\lambda} L_{\lambda}^0(T) ds + \left[ \frac{\sigma_{\lambda}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}') F(\vec{m}', \vec{m}) d\Omega' \right] ds \quad (2.21)$$

Après transformation de cette égalité il vient l'équation du transfert radiatif :

$$\frac{d L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m})}{ds} + K_{\lambda} L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) = S_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) \quad (2.22)$$

avec :

$$S_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) = a_{\lambda} L_{\lambda}^0(T) + \frac{\sigma_{\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}') F(\vec{m}', \vec{m}) d\Omega' \quad (2.23)$$

$S_{\lambda}$  représente le terme source.

A la vue de cette équation, on remarque qu'elle est très différente des équations de bilan habituelles (masse, quantité de mouvement, énergie).

## V.2 - Particularités de l'équation du transfert radiatif

L'équation du transfert radiatif est particulièrement complexe pour les raisons suivantes :

- c'est une équation directionnelle. Le terme  $dL_{\lambda}/ds$  désigne la dérivée de  $L_{\lambda}$  dans la direction définie par le vecteur unitaire  $\vec{m}$  et l'équation doit être vérifiée pour toutes les directions,
- c'est une équation intégral-différentielle, car la fonction inconnue  $L_{\lambda}$  figure également sous forme intégrale dans le terme source,
- les conditions aux limites correspondent à la connaissance de la luminance sur les parois qui limitent le milieu semi-transparent. Or, la luminance des parois comporte une partie réfléchie provenant de la luminance dans le milieu. Il y a donc couplage entre l'expression des conditions aux limites et la résolution du problème à l'intérieur du domaine,
- la luminance d'équilibre  $L_{\lambda}^0$  qui figure dans l'équation est fonction de la température  $T$  locale. Or en général,  $T$  n'est pas connue a priori, mais résulte du bilan d'énergie global,
- cette équation est monochromatique et doit donc être vérifiée pour toutes les longueurs d'onde.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe II, la source de chaleur provenant du transfert radiatif dans le bain de verre en fusion s'exprime dans l'équation thermique par le terme de divergence du flux radiatif. C'est ce terme qui constitue une source volumique que nous devons évaluer.

## VI - EXPRESSION DE LA DIVERGENCE DU FLUX RADIATIF

Rappelons l'expression du flux surfacique monochromatique :

$$\vec{q}_\lambda^r = \int_{\Omega=4\pi} L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) \vec{m} d\Omega \quad (2.24)$$

Exprimons sa divergence, il vient :

$$\text{div } \vec{q}_\lambda^r = \text{div} \int_{\Omega=4\pi} L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) \vec{m} d\Omega = \int_{4\pi} \text{div} (L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) \vec{m}) d\Omega \quad (2.25)$$

Rappelons l'expression de l'équation du transfert radiatif :

$$\frac{d L_\lambda(\vec{r}, \vec{m})}{ds} + K_\lambda L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) = S_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) \quad (2.22)$$

avec

$$S_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) = a_\lambda L_\lambda^o(T) + \frac{\sigma_\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}') F(\vec{m}', \vec{m}) d\Omega' \quad (2.23)$$

Le terme  $\frac{d L_\lambda(\vec{r}, \vec{m})}{ds}$  peut s'écrire sous forme vectorielle :

$$\frac{d L_\lambda(\vec{r}, \vec{m})}{ds} = \vec{m} \text{ grad} (L_\lambda(\vec{r}, \vec{m})) = \text{div} (L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) \vec{m}) \quad (2.26)$$

En utilisant l'égalité (2.26) et l'expression de  $\text{div } \vec{q}_\lambda^r$  donnée par (2.25), il est clair que l'intégration de l'équation du transfert sur  $4\pi$  fait apparaître la divergence de  $\vec{q}_\lambda^r$ . D'autre part, la relation de normalisation de la fonction de probabilité de diffusion, permet suite à cette intégration la simplification des termes de diffusion dans l'équation résultante. On obtient finalement l'expression de la divergence du flux radiatif monochromatique :

$$\text{div } \vec{q}_\lambda^r = 4\pi a_\lambda L_\lambda^o(T) - a_\lambda \int_{4\pi} L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) d\Omega \quad (2.27)$$

L'intégration de ce dernier terme sur tout le spectre de longueur d'onde donne la divergence du flux radiatif :

$$\operatorname{div} \vec{q}_r = \int_0^{\infty} \left[ 4\pi a_\lambda L_\lambda^o(T) - a_\lambda \int_{4\pi} L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) d\Omega \right] d\lambda \quad (2.28)$$

La divergence de  $\vec{q}_r$  exprime donc le gain d'énergie rayonnante par unité de volume. La diffusion n'intervient pas dans ce gain, qui exprime simplement l'atténuation ou l'accroissement local du rayonnement dû au différentiel rayonnement émis - rayonnement absorbé. La diffusion ne modifie en effet localement que les directions des trajets radiatifs, ce qui n'intervient pas dans l'établissement du bilan radiatif volumique local.

## VII - CONCLUSION

Nous avons passé en revue les différents mécanismes physiques qui interviennent dans le transfert radiatif. Nous avons établi l'équation du transfert radiatif. Notre but étant l'évaluation dans tout le domaine constitué par le bain de verre en fusion, de la source de rayonnement interne, nous avons exprimé la divergence du flux radiatif. La connaissance de ce terme passe par celle de la luminance monochromatique qui ne peut être obtenue que par la résolution de l'équation du transfert. Aussi le chapitre III traite-t-il de la modélisation numérique de l'équation du transfert radiatif.

## **CHAPITRE III**

### *La modélisation numérique du transfert radiatif*



## I - INTRODUCTION

Les transferts radiatifs généralement couplés à d'autres modes de transfert de chaleur comme la conduction et, ou la convection sont présents dans de nombreuses applications industrielles (verres, milieux poreux, combustions, ...).

La modélisation numérique constitue un outil appréciable pour la simulation des processus industriels. La prise en compte des transferts radiatifs dans les milieux semi-transparents est la partie la plus délicate de la modélisation des transferts de chaleur couplés et fait l'objet de nombreuses études [7], [28], [29], [30], [31], [32].

Des méthodes analytiques de résolution de l'équation du transfert radiatif comme celle de quadrature développée par CHANDRASEKHAR [33], ou celle du développement en mode normal due à CASE (qui voulait résoudre le problème de la diffusion des neutrons en géométrie plane), ont l'avantage de donner des solutions rigoureuses. Elles présentent en revanche l'inconvénient majeur d'être limitées à des géométries monodimensionnelles et de demander des volumes de calculs importants [31].

Le modèle idéal permettrait de résoudre la forme générale de l'équation du transfert radiatif pour en donner une solution exacte dans des géométries 2D et 3D. Cela est très difficile à cause de l'effet à longue distance du rayonnement [24]. Des formulations exactes des fonctions source, luminance et flux radiatif sont développées par CROSBIE et SCHRENKER [34] dans le cas d'un milieu absorbant, émissif et à diffusion isotrope en géométrie 3D en coordonnées cartésiennes, en 1982. En 1984, CROSBIE et FARRELL [35] exécutent le même type de travail mais cette fois en géométrie 3D en coordonnées cylindriques. JENN-DEN LIN [36] en 1986 obtient des expressions générales qui permettent de décrire le transfert radiatif dans des cas aussi variés que des rectangles et des cylindres de dimensions finies, des prismes et des géométries sphériques. Cependant, même si ces expressions analytiques permettent de simplifier l'équation du transfert donc les termes qui en découlent comme le flux radiatif pour chaque géométrie spécifique [36], l'obtention de résultats numériques sur des cas concrets nécessite des volumes et des temps de calculs importants.

Nous avons donc recours, pour évaluer le transfert radiatif dans des milieux émissifs, absorbants et diffusants, à des méthodes de résolution permettant d'obtenir des solutions approchées de l'équation du transfert. Des techniques variées d'approximation peuvent être employées :

- on peut négliger un terme de l'équation.

Par exemple si le milieu absorbant est froid, on peut négliger le terme d'émission. Dans le cas d'un milieu optiquement mince, on néglige en général le terme d'absorption,

- des méthodes consistent à simplifier le caractère intégro-différentiel de l'équation.

Par exemple, l'approximation de ROSSELAND, qui n'est valable que dans le cas des milieux optiquement épais, consiste en une modélisation du type diffusion thermique.

Il existe aussi des méthodes d'approximation différentielle d'ordre plus ou moins élevé ( $P_1, P_3 \dots$ ),

- d'autres méthodes consistent à simplifier le caractère directionnel du rayonnement en prenant en compte seulement un nombre limité de directions. Deux directions seulement dans les méthodes de SCHUSTER - SCHWARZSCHILD ou MILNE - EDDINGTON, un plus grand nombre dans les méthodes d'ordonnées discrètes ou à  $n$  flux.

Il existe aussi pour résoudre l'équation du transfert radiatif des méthodes purement numériques. Parmi elles la méthode de MONTE CARLO [17]. Cette méthode utilisée entre autres par AL ABED et SACADURA [37] pour l'étude des transferts couplés rayonnement conduction dans des matériaux isolants fibreux, est une méthode de simulation directe des phénomènes déterministes au moyen d'échantillonnages statistiques. L'application de cette méthode aux problèmes de transfert radiatif revient à considérer que l'énergie émise dans le système étudié peut être quantifiée en un grand nombre de particules énergétiques. Chaque particule, transportant la même quantité d'énergie, est suivie et ses interactions (absorption, diffusion, etc...) avec les composants du système sont enregistrées [28].

La deuxième méthode que l'on peut qualifier de purement numérique est la méthode des zones de HOTTEL [38]. Le principe est de subdiviser le volume du milieu en un nombre fini de volumes élémentaires appelés "zones", et d'écrire le bilan énergétique sur chaque zone. Les deux méthodes que nous venons de citer ont l'avantage de donner des résultats précis si bien qu'elles sont considérées comme des méthodes de référence. Néanmoins elles présentent l'inconvénient majeur de consommer des temps de calculs excessivement longs et la dernière n'est pas aisément applicable pour l'analyse de milieux diffusants [29], [39].

Nous présentons dans une première partie de ce chapitre une nouvelle forme de l'équation du transfert radiatif qui conduit à en donner des solutions approchées dans des cas précis. Le principe de différentes méthodes d'approximation de l'équation du transfert est ensuite exposé. Cette première partie se termine par une comparaison de certaines de ces méthodes. Dans une deuxième partie, après avoir donné les raisons du choix de la méthode qui nous a semblé la mieux adaptée à notre cas, nous décrivons en détail la modélisation numérique du transfert radiatif lors de la fusion du verre par induction en creuset froid.

## **II - LES METHODES DE RESOLUTION APPROCHEE DE L'EQUATION DU TRANSFERT RADIATIF**

Examinons tout d'abord la forme intégrale de l'équation du transfert radiatif ainsi que les

solutions approchées qui peuvent en découler.

## II.1 - Intégration formelle de l'équation de transfert radiatif et solutions approchées en négligeant des termes dans l'équation

Nous rappelons que l'équation du transfert radiatif s'écrit sous la forme :

$$\frac{d L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m})}{ds} + K_{\lambda} L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) = S_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) \quad (3.1)$$

avec

$$S_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) = a_{\lambda} L_{\lambda}^o(\vec{r}) + \frac{\sigma_{\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}') F(\vec{m}', \vec{m}) d\Omega' \quad (3.2)$$

En posant :  $d \kappa_{\lambda} = K_{\lambda} ds$  où  $\kappa_{\lambda} = \int_0^s K_{\lambda} ds$  représente le chemin optique entre 0 et s.

$L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m})$  représentant la luminance monochromatique en un point repéré par le vecteur  $\vec{r}$  dont l'abscisse curviligne associée est s, nous pouvons effectuer un changement de variable ( $\vec{r} \rightarrow \kappa_{\lambda}$ ). Ainsi l'équation du transfert radiatif peut s'écrire :

$$\frac{d L_{\lambda}(\kappa_{\lambda}, \vec{m})}{d\kappa_{\lambda}} + L_{\lambda}(\kappa_{\lambda}, \vec{m}) = \frac{S_{\lambda}(\kappa_{\lambda}, \vec{m})}{K_{\lambda}} \quad (3.3)$$

Une forme intégrée de (3.3) peut être obtenue en utilisant un facteur intégrant. Multiplions les deux membres de (3.3) par  $e^{\kappa_{\lambda}}$ , il vient :

$$e^{\kappa_{\lambda}} \frac{d L_{\lambda}(\kappa_{\lambda}, \vec{m})}{d\kappa_{\lambda}} + e^{\kappa_{\lambda}} L_{\lambda}(\kappa_{\lambda}, \vec{m}) = e^{\kappa_{\lambda}} \frac{S_{\lambda}(\kappa_{\lambda}, \vec{m})}{K_{\lambda}} \quad (3.4)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{d\kappa_{\lambda}} (L_{\lambda}(\kappa_{\lambda}, \vec{m}) e^{\kappa_{\lambda}}) = e^{\kappa_{\lambda}} \frac{S_{\lambda}(\kappa_{\lambda}, \vec{m})}{K_{\lambda}} \quad (3.5)$$

L'intégration sur un chemin optique de 0 à  $\kappa_{\lambda}$  donne :

$$L_{\lambda}(\kappa_{\lambda}, \vec{m}) e^{\kappa_{\lambda}} - L_{\lambda}(0, \vec{m}) = \int_0^{\kappa_{\lambda}} \frac{S_{\lambda}(\kappa'_{\lambda}, \vec{m})}{K_{\lambda}} e^{\kappa'_{\lambda}} d\kappa'_{\lambda} \quad (3.6)$$

⇒

$$L_{\lambda}(\kappa_{\lambda}, \vec{m}) = L_{\lambda}(0, \vec{m}) e^{-\kappa_{\lambda}} + \int_0^{\kappa_{\lambda}} \frac{S_{\lambda}(\kappa'_{\lambda}, \vec{m})}{K_{\lambda}} e^{-(\kappa_{\lambda} - \kappa'_{\lambda})} d\kappa'_{\lambda} \quad (3.7)$$

Effectuons maintenant le changement de variable dans l'autre sens : en posant de nouveau  $d\kappa_{\lambda} = K_{\lambda} ds$ , il vient :

$$L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) = L_{\lambda}(\vec{r}_0, \vec{m}) \exp \left[ -\int_0^s K_{\lambda} ds' \right] + \int_0^s S_{\lambda}(\vec{r}', \vec{m}) \exp \left[ -\int_s^{s'} K_{\lambda} ds'' \right] ds' \quad (3.8)$$

Nous précisons que  $L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m})$  correspond à la valeur de la luminance monochromatique en un point de vecteur position  $\vec{r}$  dont l'abscisse curviligne est  $s$ , dans la direction  $\vec{m}$ .  $L_{\lambda}(\vec{r}_0, \vec{m})$  est la valeur de la luminance initiale dans la direction  $\vec{m}$ , il s'agit donc de la luminance en frontière du domaine.

L'équation (3.8) (tout comme l'équation (3.7)) est une intégration formelle de l'équation du transfert radiatif. Elle permet d'en faire l'interprétation physique : la luminance monochromatique en un point situé à l'abscisse curviligne  $s$ , et dans la direction  $\vec{m}$  est composé de deux termes : le premier terme correspond à l'atténuation de la luminance à l'origine (en frontière) par absorption et diffusion dans le milieu entre 0 et  $s$ , le second terme correspond à une source de rayonnement (due à l'émission et à la diffusion) en un point d'abscisse  $s'$  atténué par le milieu semi-transparent sur le trajet de  $s'$  à  $s$  [17].

L'équation du transfert radiatif écrite sous sa forme intégrée (3.7 ou 3.8) permet dans des cas particuliers pour lesquels nous pouvons négliger un des termes, d'exprimer de manière simple la luminance monochromatique en un point de vecteur position  $\vec{r}$  d'abscisse curviligne  $s$ , dans la direction  $\vec{m}$ . Nous nous proposons d'examiner quelques uns de ces cas.

### II.1.1 - Approximation du milieu fortement transparent

Un milieu fortement transparent d'une part possède un coefficient d'extinction très faible ( $K_{\lambda} \ll 1$ ), d'autre part n'émet ni ne diffuse aucun rayonnement. Ainsi l'équation du transfert prend la forme :

$$L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) = L_{\lambda}(\vec{r}_0, \vec{m}) \quad (3.9)$$

### II.1.2 - Approximation du milieu purement émissif

Si aucune énergie ne provient des frontières ( $L_{\lambda}(\vec{r}_0, \vec{m}) \ll 1$ ), et si le milieu est relativement transparent ( $\kappa_{\lambda} \ll 1$ ) de telle sorte que l'on puisse aussi négliger l'atténuation du rayonnement par le milieu ( $\kappa_{\lambda} \ll 1$ ), il n'y a que de l'émission par le milieu et l'équation devient :

$$L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) = \int_0^s a_{\lambda} L_{\lambda}^0(\vec{r}') ds' \quad (3.10)$$

### II.1.3 - Cas d'un milieu froid et peu diffusant

Si le milieu est à une température très inférieure à celle des parois, le rayonnement émis par le milieu est négligeable devant le rayonnement des parois. Si de plus le milieu est peu diffusant, le renforcement du rayonnement par diffusion est négligeable. Ces deux hypothèses reviennent à considérer que la fonction source  $S_{\lambda}$  est négligeable devant le rayonnement incident [17]. La forme intégrale de l'équation du transfert radiatif se réduit alors à :

$$L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) = L_{\lambda}(\vec{r}_0, \vec{m}) \exp\left(-\int_0^s K_{\lambda} ds'\right) = L_{\lambda}(\vec{r}_0, \vec{m}) e^{-\kappa_{\lambda}} \quad (3.11)$$

### II.1.4 - L'approximation milieu optiquement mince

Rappelons qu'un tel milieu se caractérise par le fait que son épaisseur optique est faible devant l'unité ( $\kappa_{\lambda} \ll 1$ ). Un rayon peut donc parcourir une assez grande distance avant de se faire absorber. Dans ces conditions, nous pouvons négliger les termes d'absorption qui figurent dans la forme intégrale de l'équation, le transfert radiatif est alors dominé par l'émission de rayonnement. L'équation prend la forme :

$$L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) = L_{\lambda}(\vec{r}_0, \vec{m}) + \int_0^s S_{\lambda}(\vec{r}', \vec{m}) ds' \quad (3.12)$$

### II.1.5 - Conclusion

Nous venons d'examiner des cas limites pour lesquels on peut négliger un terme de l'équation du transfert radiatif prise sous sa forme intégrale, pour prendre en compte ce phénomène.

Pour la plupart des cas, cela ne suffit pas et il faut faire appel à des méthodes d'approximation de l'équation du transfert. Nous allons donner maintenant le principe de méthodes d'approximation de l'équation du transfert radiatif en simplifiant son caractère intégro-différentiel.

## II.2 - Méthodes d'approximation de l'équation du transfert radiatif en simplifiant son caractère intégral-différentiel

Nous présentons tout d'abord l'approximation de ROSSELAND qui consiste en une modélisation du type diffusion thermique, puis le principe des méthodes d'approximation différentielles d'ordre plus ou moins élevé ( $P_1, P_3$ , etc ...) dont le domaine de validité est plus grand au prix d'une complexité accrue.

### II.2.1 - L'approximation de Rosseland

L'approximation de ROSSELAND, du nom de son auteur, est l'approximation des milieux optiquement épais. Dans de tels milieux caractérisés par une épaisseur optique  $\kappa_\lambda \gg 1$ , le transfert radiatif est dominé par l'absorption. Un rayon ne parcourt qu'une faible distance par rapport à une dimension caractéristique du système, avant d'être absorbé. Autrement dit, le champ radiatif en un point  $M(\vec{r})$  dépend uniquement des conditions locales, c'est à dire de ce qui se passe dans un voisinage de ce point. Tout ce qui est au delà de ce voisinage n'a aucune influence sur le champ radiatif au point considéré. Ainsi, l'idée est d'effectuer un développement en série de TAYLOR du terme d'émission monochromatique, représenté par la fonction de PLANCK, autour d'un point  $M$  loin des frontières du domaine (pour ne pas en subir l'influence). On obtient ainsi l'expression suivante du flux radiatif monochromatique.

$$\vec{q}_\lambda = -\frac{4\pi}{3} \left\{ \left(\frac{1}{a_\lambda}\right) \vec{\nabla} L_\lambda^o + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{a_\lambda}\right) \vec{\nabla} \left[ \frac{1}{a_\lambda} \nabla \left(\frac{1}{a_\lambda}\right) \vec{\nabla} \right] L_\lambda^o + \dots + \left(\frac{1}{2r+3}\right) \left(\frac{1}{a_\lambda}\right) \vec{\nabla} \left[ \frac{1}{a_\lambda} \nabla \left(\frac{1}{a_\lambda}\right) \vec{\nabla} \right] L_\lambda^o \right\} \quad (3.13)$$

Si on ne retient que le premier terme de l'expression précédente, le flux radiatif s'écrit dans l'approximation de ROSSELAND :

$$\vec{q}_\lambda = -\frac{4\pi}{3a_\lambda} \vec{\nabla} L_\lambda^o \quad (3.14)$$

$$\text{Par substitution de } \vec{\nabla} L_\lambda^o = \frac{dL_\lambda^o}{dT} \vec{\nabla} T$$

dans l'expression (3.14) et après intégration sur tout le spectre, il vient :

$$\vec{q}_r = -\frac{16\pi n^2 \sigma T^3}{3 K_{\text{Ross}}} \vec{\nabla} T \quad (3.15)$$

Cette dernière expression du vecteur flux radiatif est l'analogie de l'équation de FOURIER pour la conduction, avec une pseudo conductibilité thermique appelée conductibilité thermique radiative :

$$K_R = - \frac{16\pi n^2 \sigma T^3}{3 K_{\text{Ross}}} \quad (3.16)$$

avec

$$\frac{1}{K_{\text{Ross}}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{K_\lambda} \frac{dL_\lambda^0}{dT} d\lambda}{\int_0^\infty \frac{dL_\lambda^0}{dT} d\lambda} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{K_\lambda} \frac{dL_\lambda^0}{dT} d\lambda}{4 n^2 \sigma T^3} \quad (3.17)$$

$K_{\text{Ross}}$  est appelé coefficient moyen d'extinction de ROSSELAND.

Nous insistons sur le fait que les expressions (3.14) et (3.15) ne sont valables qu'à des distances optiques suffisamment loin des frontières du domaine de telle sorte que le rayonnement quittant les frontières puisse être ignoré par le développement en série de TAYLOR [40].

## II.2.2 - Principe de la méthode des harmoniques sphériques

JEANS (1917) est le premier à proposer l'approximation des harmoniques sphériques pour résoudre le problème du transfert radiatif dans un milieu participant, l'atmosphère [2]. Le principe de ces méthodes consiste à développer la luminance sur une base orthonormée de fonctions du vecteur unitaire de direction  $\vec{m}$ , les coefficients du développement ne dépendant que du vecteur position  $\vec{r}$  du point .

$$L(\vec{r}, \vec{m}) = \sum_{n=0}^N \sum_{l=-n}^n [A_n^l(\vec{r}) Y_n^l(\vec{m})] \quad (3.18)$$

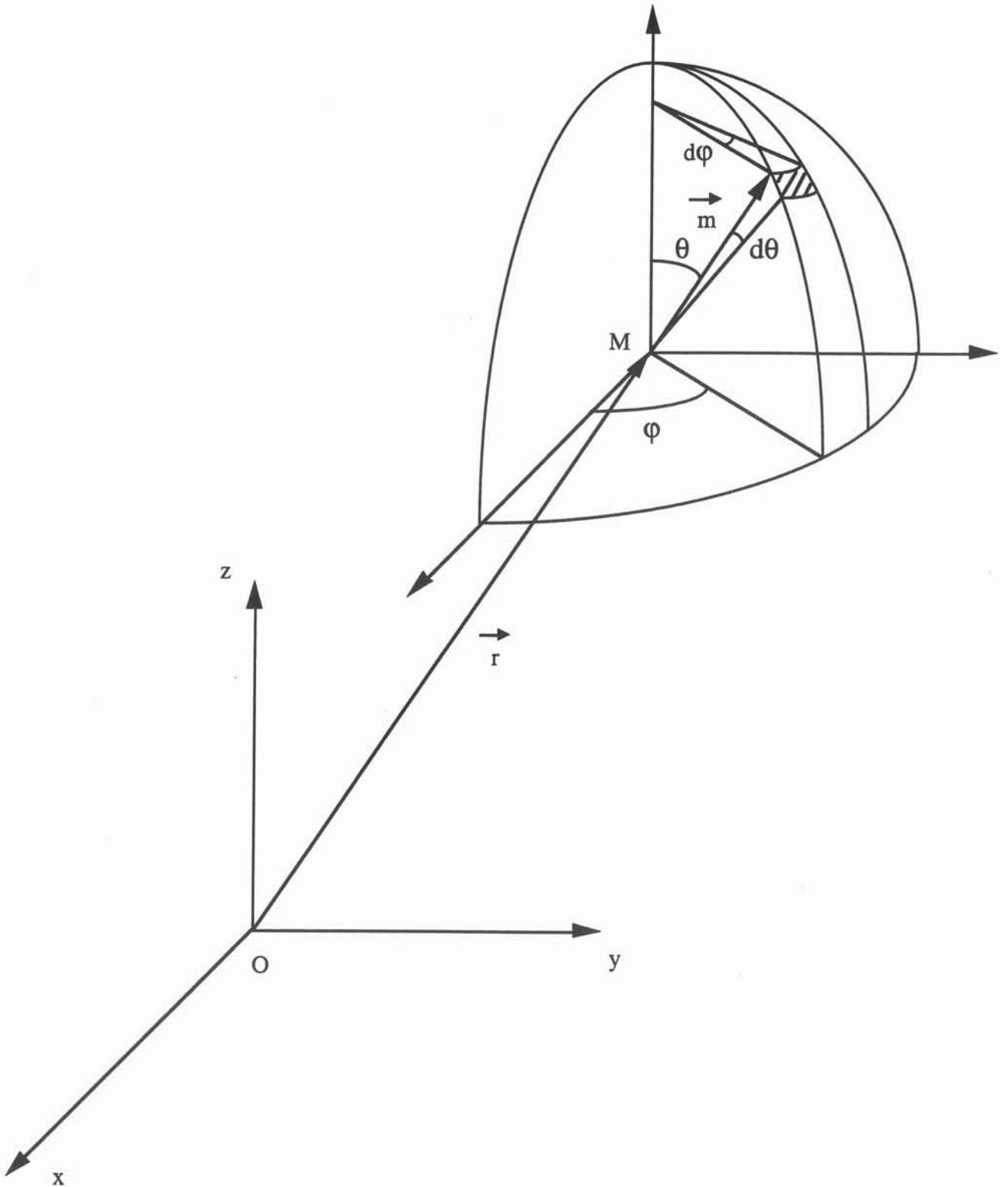
La base de fonctions choisie est constituée par la suite des harmoniques sphériques. Celles-ci sont représentées en coordonnées polaires (figure 3.1) par les expressions suivantes :

$$Y_n^l(\vec{m}) = Y_n^l(\theta, \varphi) = (-1)^{(l+|l|)/2} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|l|)!}{(n+|l|)!}} P_n^{|l|}(\cos\theta) e^{il\varphi} \quad (3.19)$$

où

$Y_n^l$  sont les harmoniques sphériques normalisées,

$P_n^{|l|}$  sont les fonctions de LEGENDRE d'ordre  $|l|$  associées aux polynômes de LEGENDRE  $P_n$ ,



**Figure 3.1** : repère choisi pour l'expression de la luminance en un point.

Elles ont pour expression :

$$P_n^l(\cos \theta) = \frac{2l+1}{\pi^{1/2}} (\sin \theta)^l \frac{\Gamma(n+l+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(l+\frac{1}{2})_k (n+l+1)_k}{h! (n+\frac{3}{2})_k} \sin [(n+l+2k+1)\theta] \quad (3.20)$$

où  $\Gamma(\beta)$  désigne la fonction gamma et l'indice  $k$  désigne le produit :

$$(x)_k = x(x+1)(x+2) \dots (x+k-1) \quad (3.21)$$

$$(x)_0 = 1$$

$\theta$  est l'angle zénital,

$\varphi$  est l'angle azimutal (figure 3.1).

$$A_n^l(\vec{r}) = \int_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{m}) \bar{Y}_n^l(\vec{m}) d\Omega \quad (3.22)$$

( $\bar{Y}_n^l$  désigne la valeur complexe conjuguée de  $Y_n^l$ )

A partir de l'écriture précédente des luminances (3.18), on montre que l'équation du transfert radiatif (3.1 et 3.2) peut être remplacée par un système d'équations différentielles entre les coefficients du développement, ce qui permet de s'affranchir de l'aspect directionnel de l'équation du transfert radiatif. La valeur de  $N$  (dans l'expression (3.18)) détermine l'ordre de l'approximation. Si cette valeur est infinie, la solution obtenue de l'équation du transfert radiatif est la solution exacte. Dans la pratique, on utilise que des valeurs finies d'ordre impair pour des raisons de stabilité de la solution [41], le plus souvent  $N = 1$  et  $N = 3$ .

(En neutronique, on trouve parfois l'utilisation des méthodes  $P_N$  d'ordre plus élevés comme  $P_5$  ou  $P_9$  [31]).

Nous venons de donner succinctement le principe des méthodes des harmoniques sphériques. Ces méthodes sont détaillées dans l'ouvrage de SIEGEL et HOWELL : "thermal radiation heat transfer" [17] et dans l'ouvrage "traité de neutronique" de BEUSS et RUSSAC [42]. Les méthodes  $P_1$  et  $P_3$  sont aussi décrites dans le détail en géométrie bidimensionnelle dans la thèse de DRAOUI [31].

Après avoir étudié deux méthodes d'approximation ayant pour principe la simplification du caractère intégral-différentiel de l'équation du transfert radiatif, nous allons maintenant examiner des méthodes qui utilisent la simplification du caractère directionnel du rayonnement.

### II.3 - Méthodes d'approximation de l'équation du transfert radiatif en simplifiant le caractère directionnel du rayonnement

Ces méthodes ont pour but de simplifier le caractère directionnel continu de l'équation du transfert radiatif en se limitant à la considérer seulement pour un nombre limité de directions  $N$ . Le terme intégral de diffusion est également évalué en sommant sur  $N$  directions. On parvient ainsi à remplacer l'équation du transfert radiatif par un système de  $N$  équations différentielles couplées. Ces méthodes sont connues sous le nom de méthodes des ordonnées discrètes ou méthodes à  $N$  flux.

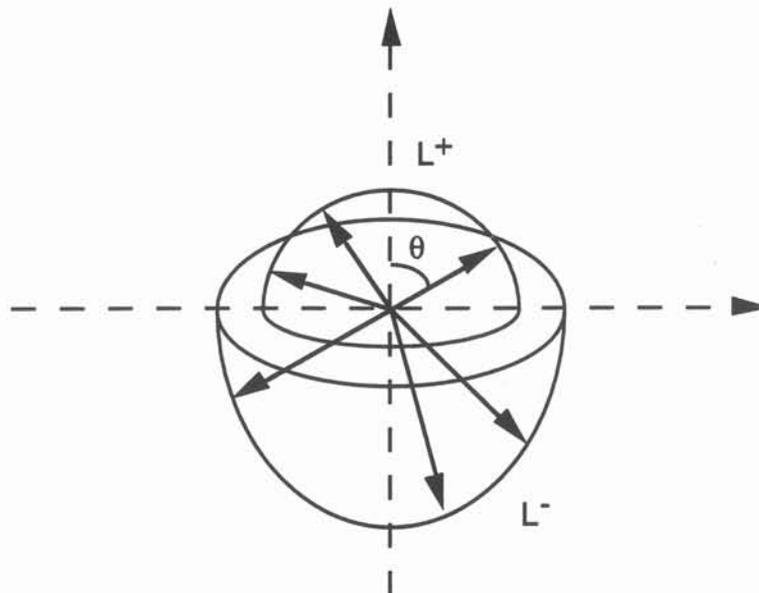
Dans le cas  $N = 2$  en une dimension, des méthodes ont été développées par des astrophysiciens. Nous allons en donner le principe.

#### II.3.1 - La méthode à deux flux avec l'approximation de Milne-Eddington

Nous ne considérons que deux directions puisque  $N = 2$

- les directions de  $\text{Cos } \theta = \mu > 0$
- les directions de  $\text{Cos } \theta = \mu < 0$

Nous considérons la luminance correspondante aux angles  $\theta$  compris entre  $-\pi/2$  et  $+\pi/2$  ( $\mu$  compris entre 0 et 1), que nous désignons par  $L^+(x, \mu)$ , et la luminance correspondante aux angles  $\theta$  compris entre  $\pi/2$  et  $3\pi/2$  ( $\mu$  compris entre -1 et 0) que nous désignons par  $L_-(x, \mu)$  [17] (figure 3.2).



**Figure 3.2 :** approximation des luminances isotropes dans les directions de cosinus directeurs positifs, et dans les directions de cosinus directeurs négatifs.

L'approximation de MILNE-EDDINGTON consiste à supposer que la luminance  $L_{\lambda}^+$  est isotrope pour les directions correspondant à  $\mu > 0$ , et que la luminance  $L_{\lambda}^-$  est isotrope pour les directions correspondant à  $\mu < 0$ . Ainsi la luminance en chaque point ne peut prendre que deux valeurs selon qu'il se situe dans le demi-espace des  $\cos \theta > 0$  ou dans le demi-espace des  $\cos \theta < 0$ . Ce modèle à deux flux est illustré sur la figure 3.2.

### II.3.2 - La méthode à deux flux avec l'approximation de Schuster-Schwarzschild

Cette méthode peut être considérée comme une généralisation de l'approximation de MILNE-EDDINGTON. En effet, dans cette approximation on pose :

$$j_{\lambda}^+(x) = \int_0^1 L_{\lambda}^+(x, \mu) d\mu \quad \mu = \cos \theta \quad (3.23)$$

$j_{\lambda}^+$  représente l'intégrale de la luminance sur les directions de  $\cos \theta > 0$ ,

$$j_{\lambda}^-(x) = \int_0^1 L_{\lambda}^-(x, -\mu) d\mu \quad (3.24)$$

$j_{\lambda}^-$  représente l'intégrale de la luminance sur les directions de  $\cos \theta < 0$ .

Ainsi, pour les directions correspondant à  $\mu > 0$ , on considère  $j_{\lambda}^+$  isotrope mais cette fois la luminance  $L_{\lambda}^+$  n'est pas forcément isotrope dans le demi-espace considéré. De même pour le demi-espace correspondant à  $\mu < 0$ ,  $j_{\lambda}^-$  est isotrope mais la luminance  $L_{\lambda}^-$  ne l'est pas forcément (figure 3.2). Moyennant cette approximation, on résoud finalement un système d'équations différentielles couplées dont les inconnues sont  $j_{\lambda}^+$  et  $j_{\lambda}^-$ . Ensuite, on obtient le flux radiatif à partir de sa définition :

$$q_{\lambda}^r(x) = 2\pi \int_{-1}^1 L_{\lambda}(x, \mu) \mu d\mu \quad (3.25)$$

On constate que si l'on suppose  $L_{\lambda}^-$  isotrope pour  $\mu < 0$  et  $L_{\lambda}^+$  isotrope pour  $\mu > 0$ , on obtient  $L_{\lambda}^- = j_{\lambda}^-$  et  $L_{\lambda}^+ = j_{\lambda}^+$ .

L'approximation de SCHUSTER-SCHWARZSCHILD se ramène alors à l'approximation de MILNE-EDDINGTON.

Cette méthode de SCHUSTER-SCHWARZSCHILD (1905) fut le point de départ de la méthode des ordonnées discrètes développée en 1960 par CHANDRASEKHAR [33]. Nous allons en exposer le principe.

### II.3.3 - La méthode des ordonnées discrètes

La méthode des ordonnées discrètes a été appliquée pour la première fois par CARLSON et LATHROP (1968) pour résoudre l'équation de transport des neutrons. Plus tard, elle fut utilisée par un grand nombre de chercheurs pour résoudre des problèmes multidimensionnels de transfert radiatif dans le domaine des transferts de chaleur en ingénierie (HYDE et TRUELOVE, 1977 ; TRUELOVE, 1977 ; TRUELOVE, 1978 ; FIVELAND, 1984 ; JAMALUDDIN et SMITH, 1986) [43]. YÜCEL et WILLIAMS en 1987 [32], modélisent le transfert de chaleur couplé conduction-rayonnement au sein de milieux gris absorbants, émissifs et diffusants confinés dans des enceintes de géométries cylindriques axisymétriques avec génération interne de chaleur. Pour cela ils utilisent le code DOT-IV développé à l'origine pour des calculs de neutronique, basé sur la méthode des ordonnées discrètes. Ils analysent ainsi l'influence de paramètres tels que la diffusion, l'épaisseur optique ou encore l'émissivité des parois sur le champ de température dans le milieu considéré. En 1988, JAMALUDDIN et SMITH [44] développent un code de calcul à l'aide des méthodes d'ordonnées discrètes  $S_2$  et  $S_4$  de manière à prévoir les transferts thermiques lors de problèmes de combustion dans des fours cylindriques axisymétriques. Ils présentent le bon accord entre ces méthodes et la méthode de MONTE CARLO lors du calcul des flux aux parois pour un milieu absorbant, émissif et à diffusion isotrope confiné dans un four de géométrie axisymétrique, excepté dans le cas d'un milieu purement diffusant.

La méthode est basée sur une représentation discrète de la variation angulaire de la luminance. L'équation du transfert radiatif est ainsi résolue suivant un nombre fini de directions discrètes. Cette équation dont l'inconnue  $L_\lambda(\vec{r}, \vec{m})$  est la luminance qui dépend du vecteur position  $\vec{r}$  et de la direction  $\vec{m}$ , est remplacée par une série d'équations dont les inconnues sont  $L_\lambda(\vec{r})$  dans un nombre fini de directions  $\vec{m}$ . Il n'y a pas de choix optimal de directions qui convienne à tous les cas, géométriquement parlant, mais d'une façon générale on choisit les directions de manière à satisfaire des propriétés telles que l'invariance de la résolution pour toute rotation de  $90^\circ$  autour de n'importe quel axe de coordonnées, et de l'invariance des propriétés physiques du système.

Pour en terminer avec ces méthodes signalons qu'elles sont aussi appelées méthodes  $S_n$ ,  $n$  étant un nombre pair  $n = 2, 4, 6 \dots$ . Le nombre de directions discrètes est  $n(n+2)$ . Par exemple si  $n = 4$  nous avons 24 directions discrètes et la méthode est appelée "méthode d'approximation  $S_4$ ".

### II.4 - La méthode des zones

La méthode des zones a été proposée par HOTTEL et COHEN en 1955 pour prédire les effets du rayonnement sur les profils de température dans une chambre de combustion. Elle a été reprise et développée sous le nom d'analyse nodale par HOTTEL et SAROFIM [38] qui y ont introduit les

facteurs de formes étendus pour un milieu absorbant et émissif, prenant en compte le rôle radiatif des surfaces limitant la cavité contenant le milieu semi-transparent [31]. Elle a été utilisée par TAN [45] pour étudier le transfert couplé rayonnement-conduction instationnaire au sein d'un milieu semi-transparent dont les frontières peuvent être opaques et qui peut être soumis à des conditions de température ou de flux. Cette méthode, bien que grande consommatrice de place mémoire et de temps de calcul, donne des résultats très précis ce qui a permis de la considérer comme méthode de référence [41].

Le principe de cette méthode consiste à subdiviser le volume intérieur du milieu en un nombre fini  $N_e$  de volumes élémentaires appelés "zones". Ces éléments sont considérés isothermes et leurs caractéristiques thermophysiques sont supposées constantes au sein de chacun d'entre eux. On subdivise aussi les surfaces frontières en  $N_s$  surfaces élémentaires et on fait le bilan énergétique de chaque zone. Pour chaque zone à l'équilibre thermique, on a alors : la somme du "flux radiatif absorbé" provenant des autres zones ou des surfaces, du flux apporté par conduction et/ou convection et de la création volumique interne de chaleur (chimique, réactive...), doit être égale au flux total émis (ou en régime variable à la somme de l'accroissement d'enthalpie et du flux émis).

Pour un problème bien déterminé, toutes ces quantités énergétiques s'expriment à partir des valeurs des températures de chaque zone, qui sont des inconnues dans le problème. Il est donc nécessaire de créer un système de  $N_e$  équations à  $N_e$  inconnues (les températures des zones) pour atteindre ces valeurs [31]. Pour résoudre complètement le problème, il est nécessaire d'évaluer l'échange radiatif entre deux zones à l'aide d'un facteur d'échange direct qui tient compte de la géométrie, de la position, de l'émission de l'énergie radiative, ainsi que de son atténuation par le milieu au cours de transfert. Trois types de facteurs d'échange sont considérés :

- entre deux éléments de surface,
- entre deux éléments de volume,
- entre un élément de surface et un élément de volume.

Le calcul de ces facteurs d'échange nécessite l'évaluation d'intégrales multiples. SIDDALL a proposé une nouvelle technique qui permet de les calculer, dans le cas de la géométrie rectangulaire, avec la précision souhaitée [41].

Cette méthode des zones est une méthode dite purement numérique qui donne des résultats précis à condition d'utiliser un nombre suffisant de zones.

## **II. 5 - Brève revue bibliographique sur l'existence d'autres méthodes**

Avant de passer à la comparaison des méthodes que nous venons de décrire, nous voulons juste signaler au lecteur qu'il existe d'autres méthodes permettant de résoudre le problème de

transfert radiatif seul ou bien couplé à d'autres modes de transfert de chaleur.

EL WAKIL [41] cite des méthodes hybrides qui permettent par combinaison de deux méthodes dans un problème spécifique d'en associer les avantages. Il cite par exemple la méthode appelée transfert discret proposée par LOCKWOOD et SHAH qui associe les avantages de la méthode des zones à ceux de la méthode de MONTE CARLO.

Afin de compenser les défauts de l'hypothèse de l'équilibre radiatif dans la méthode d'approximation différentielle, à cause de la discontinuité de paramètres radiatifs dans le milieu ou en frontière, OLFE (1967) propose une approximation différentielle modifiée. Il s'agit de séparer l'émission provenant des parois de celle provenant du milieu. MODEST en 1989 étend cette méthode au cas général 3D d'un milieu absorbant, émissif et à diffusion anisotrope séparé par des parois non noires. MODEST montre que l'approximation différentielle modifiée est très précise pour la résolution de problèmes de transfert radiatif seul dans une enceinte. YANG et EBADIAN [46] appliquent en 1991 ce modèle dans le cas de transfert de chaleur couplé convection-rayonnement dans un canal.

SALTIEL et NARAGHI utilisent en 1990 pour résoudre des problèmes de transfert de chaleur combinés dans des milieux participants une méthode numérique basée sur l'utilisation des facteurs d'échange discrets et les éléments finis [47]. L'utilisation des éléments finis est particulièrement avantageuse pour traiter des problèmes sur des géométries irrégulières (l'exemple est donné d'un domaine 2D triangulaire), alors que les calculs des facteurs d'échange discrets fournissent une technique précise et souple pour des calculs de transfert radiatif [47]. Cependant l'extension à des milieux à diffusion anisotrope en géométrie 3D reste à faire [47].

En 1982 ÖZISIK et YENER utilisent la méthode de GALERKIN pour résoudre le problème du transfert radiatif dans le cas d'un milieu plan absorbant, émissif, à diffusion isotrope limité par des frontières à réflexion diffuse [48]. En 1984, CHENGEL et ÖZISIK généralisent l'utilisation de la méthode de GALERKIN à des milieux à diffusion anisotrope. Cette méthode s'avère efficace à condition que le degré d'anisotropie de la diffusion ne soit pas trop élevé pour des raisons de temps de calculs qui deviennent prohibitifs dans le cas contraire [23].

En 1987, HO et ÖZISIK utilisent la même méthode pour résoudre le problème combiné conduction-rayonnement dans un milieu plan bi-couche absorbant, émissif et à diffusion isotrope soumis à des conditions de flux à ses frontières. Un tel problème voit son application à l'étude des transferts de chaleur dans des isolants thermiques [49].

En 1991 FABRIS utilise, pour décrire les phénomènes radiatifs lors de la modélisation numérique des transferts couplés convection-conduction-rayonnement dans les milieux semi-

transparents, pour des géométries 3D en coordonnées cartésiennes, une méthode multiflux [50]. Les méthodes multiflux, qui sont une extension de la méthode à deux flux de MILNE-EDDINGTON et de SCHUSTER-SCHWARZCHILD, consistent à diviser le champ des luminances en un nombre fini de régions dans lesquelles la luminance est considérée comme constante. En 1993, SUN utilise une méthode de ce type pour résoudre l'équation du transfert radiatif dans un problème de fusion de verre en four électrique [7].

En 1993, LE DEZ dans sa thèse développe pour calculer les caractéristiques radiatives apparentes des corps semi-transparents axisymétriques, une technique de lancer de rayons. Il utilise cette même méthode pour calculer les sources radiatives lorsque ces corps sont émetteurs, absorbants et diffusants [51].

Une revue des différentes méthodes accompagnée de nombreuses références bibliographiques est donnée par VISKANTA en 1982 lors de la 7ème conférence internationale sur les transferts de chaleur [52]. Une autre est donnée en 1987 par SACADURA lors de la rencontre 1987 de la Société Française des Thermiciens (SFT) [53].

## **II. 6 - Comparaison de quelques méthodes**

Pour résoudre le problème du transfert radiatif dans le bain de verre en fusion nous devons choisir une méthode. L'objet de ce paragraphe est la comparaison des méthodes les plus utilisées telles que  $P_1$ ,  $P_3$ , méthodes des ordonnées discrètes et méthode des zones.

### **II.6.1 - Transfert radiatif pur sans génération interne de chaleur en 2D**

Pour une première étude comparative, nous considérons un milieu semi-transparent à l'équilibre radiatif contenu dans une cavité carrée. Une seule paroi est chaude alors que les trois autres sont supposées à une température nulle. Les quatre surfaces sont supposées noires et le milieu ne présente pas de génération interne volumique de chaleur.

TRUELOVE en 1987 [43] résoud l'équation du transfert radiatif dans un tel problème à l'aide entre autre d'une méthode des ordonnées discrètes  $S_4$ . Cette méthode s'avère très efficace et donne des résultats de flux radiatifs tout à fait en accord avec la solution exacte quelque soit l'épaisseur optique du milieu.

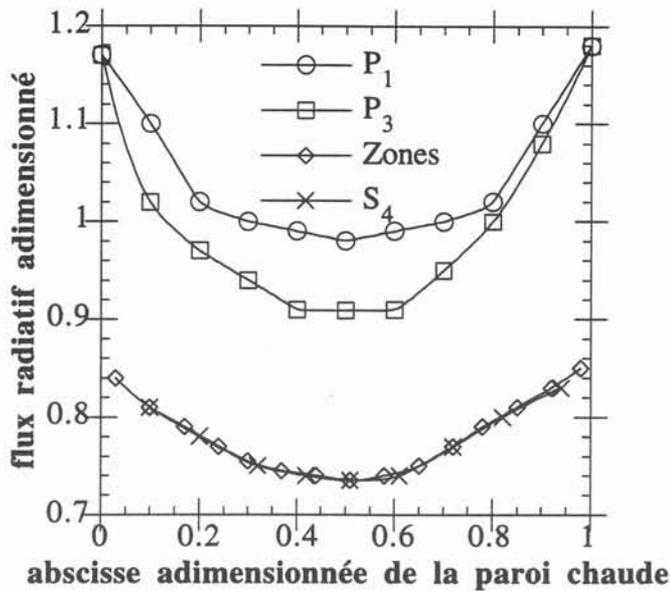
DRAOUI dans sa thèse [31] soutenue en 1989 utilise et compare, pour résoudre le même problème de transfert radiatif pur, les méthodes  $P_1$ ,  $P_3$  et méthode des zones. Nous résumons dans le tableau 3.A les avantages et les inconvénients de ces trois méthodes. L'analyse de ce tableau fait apparaître que la méthode des zones, si elle est facile d'utilisation, ne peut l'être que pour des

configurations simples. Elle est en effet très coûteuse en temps de calcul et en place mémoire. Elle ne peut pas non plus être appliquée à l'étude de milieux diffusants. La méthode  $P_3$  en revanche, est difficile à mettre en oeuvre. Elle s'avère précise pour des milieux d'épaisseur optique modérée ( $0.5 \leq \kappa_\lambda \leq 5$ ). La méthode  $P_1$  est peu coûteuse en place mémoire et en temps de calcul, sa mise en place est aisée. Son inconvénient majeur réside dans son application limitée à des milieux optiquement épais ( $\kappa_\lambda > 5$ ) si l'on veut obtenir de bons résultats.

TRUELOVE et DRAOUI ayant étudié exactement le même problème de l'équilibre radiatif d'un milieu gris absorbant émissif dans une enceinte carrée à parois noires et dont une des faces seulement est à une température non nulle, il nous est possible dans le cas d'un milieu d'épaisseur optique unité de regrouper sur un même graphe les courbes obtenues après résolution par les méthodes  $P_1$ ,  $P_3$ , zones (DRAOUI) et  $S_4$  (TRUELOVE), (figure 3.3). Il s'agit de la représentation du flux radiatif à la paroi chaude.

	METHODE DES ZONES	METHODE P1	METHODE P3
<b>Avantages</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-théoriquement applicable à tout problème de transfert radiatif dans une enceinte,</li> <li>-simple à utiliser car le champ de température est obtenu directement par la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-dans le cas de l'équilibre radiatif, fournit des distributions analytiques de la température et des composantes du flux radiatif,</li> <li>-précise pour les milieux optiquement épais, en particulier pour des milieux dont l'épaisseur optique est supérieure à cinq,</li> <li>-méthode peu coûteuse en place mémoire et en temps de calcul,</li> <li>-simple à mettre en oeuvre.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-plus précise que P1 car utilise plus de termes de développement en série d'harmoniques sphériques,</li> <li>-précise pour des milieux d'épaisseur optique modérée (<math>0,5 \leq \kappa_\lambda \leq 5</math>).</li> </ul>
<b>Inconvénients</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-méthode très coûteuse en temps de calcul et en place mémoire,</li> <li>-ne peut pas être utilisée pour le traitement des milieux diffusants car il faut une discrétisation fine et la matrice du système est complètement pleine,</li> <li>-méthode seulement utilisable comme méthode de référence pour tester d'autres méthodes,</li> <li>-ne peut être utilisée que pour des configurations simples.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-donne des résultats surévalués pour des milieux optiquement minces.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-mise en oeuvre difficile (réside dans la résolution du système, constitué de quatre EDP fortement couplées entre elles),</li> <li>-la non continuité des conditions aux limites aux coins du domaine pose beaucoup de difficultés pour atteindre la convergence numérique.</li> </ul>

**Tableau 3.A** : comparaison de trois méthodes de résolution de l'équation du transfert radiatif dans le cas d'un milieu à l'équilibre radiatif, issue d'une étude de DRAOUI [31].



**Figure 3.3** : flux radiatif à la paroi chaude : comparaison des méthodes P<sub>1</sub>, P<sub>3</sub>, zones (DRAOUI) et S<sub>4</sub> (TRUELOVE) pour un milieu d'épaisseur optique unité.

Nous constatons que la méthode d'approximation P<sub>1</sub> surévalue (environ 29%) le flux radiatif par rapport à la méthode des zones qui servant de méthode de référence donne la solution exacte. L'approximation P<sub>3</sub> surévalue aussi le flux radiatif (+27% par rapport à la solution exacte). La méthode S<sub>4</sub> par contre donne une courbe confondue avec celle obtenue par la méthode des zones.

### II.6.2 - Transfert radiatif pur avec génération interne de chaleur en 2D

En 1982, KHALIL et al [54] comparent trois méthodes numériques dont la méthode des ordonnées discrètes et l'approximation différentielle (méthode P<sub>1</sub>) pour évaluer le transfert radiatif dans un milieu diffusant soumis à une source interne de chaleur. Il ressort notamment de cette étude que l'approximation différentielle s'avère très efficace à condition de traiter des milieux optiquement épais ou des milieux optiquement moins épais mais alors loin des frontières. Cela est dû à la diminution de l'anisotropie de la luminance lorsque l'on considère des milieux dont l'épaisseur optique est suffisamment importante [54]. Des calculs précis de champ radiatif sont obtenus par l'utilisation de la performante méthode des ordonnées discrètes, et ces résultats sont utilisés pour tester la précision d'autres techniques d'approximation [54].

### II.6.3 - Transfert radiatif pur sans génération interne de chaleur en 3D

FIVELAND en 1988 [26] prédit le transfert radiatif dans un milieu participant 3D à l'aide de méthodes d'ordonnées discrètes d'ordre 2, 4, 6 et 8 correspondant aux méthodes  $S_2$ ,  $S_4$ ,  $S_6$  et  $S_8$ . Il compare les résultats obtenus à ceux obtenus à l'aide de la méthode des zones d'une part et de la méthode d'approximation différentielle  $P_3$  d'autre part. Ne revenons pas sur les problèmes inhérents à l'utilisation de la méthode  $P_3$ . La méthode des zones est la méthode de référence, elle donne la solution exacte. La méthode  $S_2$  est trop imprécise pour être utilisée (en effet dans cette méthode seulement huit directions discrètes sont prises en compte). Les méthodes  $S_6$  et  $S_8$  demandent des efforts numériques considérables et leur utilisation semble difficilement justifiable. L'approximation  $S_4$  présente des résultats raisonnables pour un travail numérique non prohibitif [26].

### II.6.4 - Couplage convection naturelle-rayonnement et conduction-rayonnement

YÜCEL et al. traitent le problème couplé convection naturelle-rayonnement dans un domaine carré [55]. Ils utilisent, pour la résolution de l'équation du transfert radiatif, différentes méthodes telles que  $P_1$ ,  $P_3$ ,  $S_4$  afin de les comparer. Le transfert radiatif étant le mécanisme prédominant de transfert de chaleur altère de manière significative la distribution des températures, augmentant ces dernières à l'intérieur du domaine. Les modèles d'écoulement correspondant sont aussi fortement affectés par la présence du rayonnement interne. Les vitesses d'écoulement sont intensifiées. En général l'écoulement résultant est caractérisé par un vortex convectif unique. Une partie centrale formée de plusieurs vortex peut se développer pour un milieu optiquement mince ou un milieu diffusant [55].

L'approximation  $P_1$  surestime en général les vitesses, notamment celles de la région centrale. Concernant les temps CPU, les solutions obtenues par l'approximation  $P_1$  demandent légèrement moins de temps que par la méthode  $S_4$ . Si on utilise une approximation d'un ordre plus élevé tel que  $P_3$ , les temps CPU pour obtenir la convergence augmentent de manière significative. Cette dernière qui est comparable au niveau de la précision des résultats obtenus à la méthode des ordonnées discrètes  $S_4$  est globalement moins économique. Un autre avantage pour la méthode des ordonnées discrètes réside dans le fait que si l'on juge nécessaire de chercher des solutions à l'aide de méthodes d'ordre plus élevé comme  $S_6$ ,  $S_8$ ,  $S_{10}$ , il suffit dans le code de calcul de rajouter des directions discrètes. La méthode des ordonnées discrètes est de plus compatible avec l'algorithme SIMPLER [56] (aussi bien qu'avec d'autres algorithmes qui utilisent la méthode des différences finies) utilisé pour les calculs de champs de vitesses [55]. Le même auteur fait la même remarque lorsqu'il étudie le transfert radiatif couplé à la convection naturelle pour un fluide gris, absorbant et à diffusion isotrope dans un domaine carré comportant deux obstacles verticaux en regard et dirigés vers l'intérieur [57]. Dans sa thèse [31] ainsi que dans un article [58] DRAOUI traite aussi le

problème couplé rayonnement-convection naturelle d'un fluide semi-transparent gris dans une cavité carrée, mais avec la méthode  $P_1$  pour l'évaluation des sources de chaleur d'origine radiative. Il constate les mêmes effets qualitativement parlant du transfert radiatif sur le comportement thermo-convectif du fluide semi-transparent. A l'avantage de la méthode  $P_1$ , DRAOUI exprime que cette méthode est intéressante pour aborder les couplages convection naturelle-rayonnement au sein d'un fluide participant. En effet, dit-il, elle est un bon compromis entre la précision du résultat obtenu et le coût du calcul nécessaire à l'obtention de la solution. La méthode  $P_3$  conduit à une meilleure simulation des transferts radiatifs, mais également à des temps de calcul plus importants et à une mise en oeuvre plus délicate, semblant destinée à la définition de solution numérique de référence ou exclusivement à la résolution de transferts couplés conduction-rayonnement. BAEK et KIM [39] utilisent la méthode des ordonnées discrètes  $S_4$  pour la résolution d'un tel transfert couplé dans le cas d'un milieu participant non diffusant puis diffusant dans un domaine carré. Par comparaison avec des méthodes de référence, ils prouvent l'efficacité de la méthode  $S_4$  qui est précise et demande des temps de calcul acceptables [39]. JONES et BAYAZITOGU [59] utilisent la méthode  $S_4$  pour la modélisation du transfert couplé conduction-rayonnement au sein d'un milieu participant sphérique. Ils estiment que la méthode donnent des résultats en bon accord avec des solutions analytiques, qu'elle est relativement simple à utiliser. Elle pourrait être étendue à la résolution de phénomènes incluant la convection, transitoires, à des milieux dont les propriétés ne sont pas constantes [59].

### II.6.5 - Conclusion sur ces comparaisons

Que ce soit dans la résolution d'un problème de transfert radiatif pur, ou d'un problème couplé conduction-rayonnement ou convection-rayonnement il semble que les méthodes d'approximation  $P_n$  sont inexactes près des frontières et pour des milieux optiquement minces [24], [46], [55], [60], [61], [62]. La méthode  $P_1$  ne donne pas des résultats satisfaisants pour les milieux anisotropes ou présentant un fort gradient de température interne. La méthode  $P_3$  donne de meilleurs résultats dans ces conditions mais au prix d'un effort de calcul plus important [41]. La méthode des zones est utilisée comme méthode de référence pour tester d'autres méthodes mais uniquement pour des configurations simples. En effet, cette méthode est très coûteuse en temps de calcul et en place mémoire. La méthode des ordonnées discrètes  $S_4$  semble aussi bien appropriée pour résoudre des problèmes de transferts radiatifs couplés que des problèmes de transferts radiatifs purs.

La plupart des résultats que nous venons de décrire sont limités à des configurations géométriques simples et des milieux gris, ce qui peut nous placer un peu loin de la réalité physique et des préoccupations du milieu industriel. En effet, d'après TAINE, l'hypothèse du milieu gris induit des erreurs qui dans certains cas peuvent être très importantes [31].

Compte tenu de ses défauts explicités ci-dessus, la méthode des zones ne peut donc

certainement pas être utilisée dans le cas des milieux non gris. Il faut en effet dans le cas de tels milieux décrire leurs caractéristiques radiatives en utilisant une description par bandes spectrales. Il semble difficile aussi d'étendre les méthodes  $P_n$  pour atteindre cet objectif [31]. Par contre les méthodes utilisant des approches discrètes des champs de luminances telles que la méthode  $S_4$  semblent bien appropriées pour arriver à décrire le transfert radiatif dans les milieux non gris.

### III - LA MODELISATION NUMERIQUE DU TRANSFERT RADIATIF DANS UN BAIN DE VERRE EN FUSION

Nous rappelons que le transfert radiatif se caractérise par une équation directionnelle, intégrodifférentielle, monochromatique. Ces trois qualificatifs suffisent à montrer que la résolution de l'équation du transfert radiatif est complexe. Si l'on ajoute à cela que la luminance d'équilibre  $L_\lambda^0$  qui figure dans l'équation est fonction de la température  $T$  locale du milieu, et qu'il y a couplage entre l'expression des conditions aux limites et la résolution du problème à l'intérieur du domaine considéré, il devient évident que seule une méthode de résolution approchée de l'équation du transfert radiatif peut nous permettre d'appréhender ce phénomène lors d'une fusion de verre par induction en creuset froid.

Toute l'analyse effectuée dans la première partie de ce chapitre avait pour objectif de nous guider dans le choix d'une méthode numérique efficace et adaptée à notre problème pour prendre en compte le transfert radiatif dans le verre en fusion. L'objet de cette deuxième partie consiste en l'explication du choix fait et en la description du modèle mis en oeuvre.

#### III.1 - Le choix d'une méthode

D'après l'étude bibliographique de la première partie, il ressort que la méthode des ordonnées discrètes  $S_4$  nous semble la mieux adaptée à notre problème.

Outre des volumes de calculs nécessaires raisonnables (comparativement notamment à la méthode des zones), cette méthode présente les avantages suivants:

- elle donne des résultats fiables quelque soit le type de milieu : optiquement mince ou optiquement épais. Comme nous l'avons vu les méthodes  $P_n$  surévaluent le transfert radiatif dans le cas des milieux optiquement minces,
- en conséquence directe du premier avantage, elle s'avère aussi efficace dans l'approximation du transfert radiatif près des parois que loin des parois. En effet près des parois un milieu semi-transparent se comporte comme un milieu optiquement mince, c'est à dire que le processus de transfert radiatif est dominé par l'émission de rayonnement. Une méthode  $P_n$  ne

- s'avèrerait pas plus efficace pour traiter notre problème,
- cette méthode est aussi bien adaptée pour résoudre des problèmes dans le cas de bains de verre plats (faible hauteur de verre) que dans celui de bains de verre hauts. En effet, dans le cas des bains plats la luminance est très anisotrope et cette anisotropie n'est pas, ou mal prise en compte dans le cas de méthode  $P_n$ ,
- si l'on désire une précision accrue, on peut aisément l'obtenir en utilisant une méthode  $S_8$ ,  $S_{10}$  ou  $S_{12}$ . Le code de calcul n'a pas à être modifié, il suffit de rajouter les directions discrètes manquantes. Bien entendu, la résolution du problème demandera plus de place mémoire et plus de temps CPU,
- la méthode  $S_4$  semble la mieux appropriée pour décrire le transfert radiatif dans le cas de milieux non gris tels que les verres.

### III.2 - Le principe général de la méthode

Nous avons développé deux modèles numériques de résolution de l'équation de la chaleur avec prise en compte du transfert radiatif, l'un étant destiné à résoudre des problèmes en géométrie 2D cartésienne, l'autre destiné à la résolution de problèmes en géométrie 2D axisymétrique.

En ce qui concerne la résolution de l'équation du transfert radiatif, le principe général est le même pour les deux modèles. Nous proposons dans ce paragraphe de présenter les points communs aux deux modèles, c'est à dire le problème à résoudre, les différentes discrétisations nécessaires à la mise en oeuvre des modèles numériques, puis l'algorithme général de résolution de l'équation du transfert radiatif.

#### III.2.1 - Description du problème à résoudre

Nous rappelons l'équation de la chaleur pour notre installation de fusion de verre par induction, en régime permanent :

$$\rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}}T = \text{div}(-\vec{q}_c - \vec{q}_r) + Q_{th} \quad (3.26)$$

$\rho$  est la masse volumique,

$C_p$  est la capacité calorifique,

$\vec{q}_c$  est le flux conductif :  $\vec{q}_c = -k_v \vec{\text{grad}}T$ ,

où  $T$  est la température et  $k_v$  la conductibilité thermique moléculaire,

$\vec{q}_r$  est le flux radiatif,

$Q_{th}$  est dans notre problème la densité de puissance JOULE issue de l'induction,

$\vec{U}$  est la vitesse dans le bain de verre.

La résolution de cette équation passe par la connaissance du terme de divergence du flux radiatif. Ce terme a pour expression :

$$\operatorname{div} \vec{q}^r = \int_0^{\infty} [4\pi a_\lambda L_\lambda^o(T) - a_\lambda \int_{4\pi} L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) d\Omega] d\lambda \quad (3.27)$$

Nous constatons, à la vue de l'équation (3.27) qu'il nous faut d'abord connaître la luminance monochromatique  $L_\lambda(\vec{r}, \vec{m})$  grandeur qui dépend non seulement de la longueur d'onde, mais aussi du vecteur position  $\vec{r}$  et de la direction du rayonnement  $\vec{m}$  dans le milieu. Sa détermination passe par la résolution de l'équation du transfert radiatif dont nous rappelons la forme :

$$\frac{dL_\lambda(\vec{r}, \vec{m})}{ds} + K_\lambda L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) = S_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) \quad (3.28)$$

où la fonction source  $S_\lambda(\vec{r}, \vec{m})$  a pour expression :

$$S_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) = a_\lambda L_\lambda^o(\vec{r}) + \frac{\sigma_\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}') F(\vec{m}', \vec{m}) d\Omega' \quad (3.29)$$

Cette source est composée de deux termes :

- le premier représente une émission de rayonnement interne du milieu,
- le deuxième constitue la prise en compte du renforcement de rayonnement par diffusion.

Les conditions aux limites du transfert radiatif en un point frontière de vecteur position  $\vec{r}_0$  dans une direction  $\vec{m}$  s'expriment comme la somme de l'émission de rayonnement par la frontière considérée et du rayonnement réfléchi. Moyennant les hypothèses suivantes :

- parois du domaine grises,
- parois diffuses en émission comme en réflexion, elles s'écrivent :

$$L_\lambda(\vec{r}_0, \vec{m}) = \frac{\varepsilon}{\alpha} \sigma_{st} T^4(\vec{r}_0) + \frac{\rho}{\alpha} \int_{n\Omega' < 0} |\vec{n} \cdot \vec{m}'| L_\lambda(\vec{r}_0, \vec{m}') d\Omega' \quad (3.30)$$

où

$\varepsilon$  et  $\rho$  sont respectivement l'émissivité et la réflectivité de la frontière considérée. Nous négligeons la transmittivité des frontières d'où  $\rho = 1 - \varepsilon$ ,

$\alpha$  est l'angle d'émission et de réflexion au point frontière considéré,

$\sigma_{st}$  est la constante de STEFAN-BOLTZMANN,

$L_\lambda(\vec{r}_0, \vec{m}')$  est la luminance monochromatique au point frontière de vecteur position  $\vec{r}_0$  dans la direction  $\vec{m}'$  arrivant en ce point.

Le problème à résoudre étant maintenant posé, nous allons, avant d'exposer le principe de la méthode utilisée, donner l'approximation faite pour modéliser la fonction de phase.

### III.2.2 - Le choix pour la fonction de phase

Rappelons que la fonction de phase  $F(\vec{m}', \vec{m})$  intervient dans l'expression du terme source (voir équation 3.29). Ce terme donne la distribution spatiale de l'énergie diffusée de la direction  $\vec{m}'$  vers la direction  $\vec{m}$ . Nous avons, dans le chapitre II, explicité plusieurs manières de le représenter. Notre objectif ultime étant de modéliser numériquement la fusion du verre par induction en secteur froid, notre réflexion doit s'orienter vers le processus de la fusion du verre afin de pouvoir justifier d'un choix pour le calcul de  $F(\vec{m}', \vec{m})$ .

Le bain de verre, une fois affiné, n'est pas diffusant. Néanmoins, en cours d'élaboration apparaissent des bulles de gaz dans le bain. Il nous semble à ce titre intéressant de prendre en compte une certaine diffusion. Nous ne connaissons pas dans le cas du verre en fusion de représentation de la fonction de phase. Il n'est donc certainement pas justifié, compte tenu de la complexité du problème, de prendre pour représenter  $F(\vec{m}', \vec{m})$  un développement en séries de LEGENDRE. Les bulles de gaz sont visibles à l'oeil nu, il serait donc faux de prendre une diffusion de RAYLEIGH (qui n'est applicable que lorsque le diamètre des particules diffusantes est négligeable devant la longueur d'onde du rayonnement incident). Il n'y a pas non plus de raison de considérer une diffusion qui irait plus vers l'avant ou plus vers l'arrière. Notre choix se porte donc sur une diffusion isotrope, c'est à dire  $F(\vec{m}', \vec{m}) = 1$ . Le terme source ne dépend plus alors que de la longueur d'onde, et du point considéré, son expression devient :

$$S_\lambda(\vec{r}) = a_\lambda L_\lambda^0(\vec{r}) + \frac{\sigma_\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) d\Omega \quad (3.31)$$

### III.2.3 - Les discrétisations

La méthode choisie pour prendre en compte le transfert radiatif est la méthode des ordonnées discrètes  $S_4$ . Cette dernière consiste à calculer la luminance  $L_\lambda(\vec{r}, \vec{m})$  qui est une grandeur directionnelle en suivant un certain nombre de directions discrètes préalablement définies, d'où une discrétisation angulaire. La luminance dépend aussi du point considéré. Cela nécessite d'effectuer

une discrétisation spatiale afin de prendre en compte sa variation à l'intérieur de chaque maille du domaine. Enfin le verre est un milieu non gris, la luminance dépend donc aussi de la longueur d'onde. Une discrétisation spectrale permet de modéliser les variations des propriétés optiques du milieu en fonction de la longueur d'onde.

Nous nous proposons de décrire ces différents types de discrétisations nécessaires à la résolution de l'équation du transfert radiatif dans le cas de milieux non gris tels que les verres, à l'aide d'une méthode des ordonnées discrètes.

### III.2.3.1 - La discrétisation angulaire

La discrétisation angulaire consiste à choisir un certain nombre de directions, chacune d'elles étant affectée d'une pondération. L'équation intégral-différentielle du transfert radiatif est remplacée par un système d'équations aux dérivées partielles, autant que de directions discrètes.

Le choix des directions en géométrie monodimensionnelle s'effectue à l'aide d'une quadrature de GAUSS ou de RADAU [41].

Dans le cas multidimensionnel, le choix des directions émane plus des considérations géométriques que de l'analyse mathématique. Il n'y a pas de choix optimal de directions qui convienne à tous les cas, toutefois des restrictions sur ces dernières et sur les poids qui leur sont associés doivent être respectées pour préserver les symétries et les propriétés invariables du système physique. Ces contraintes imposent un choix parfaitement symétrique des directions, c'est à dire:

- symétrie par rapport à l'origine,
- symétrie par rapport à chacun des axes de coordonnées,
- symétrie par rapport à tout plan contenant deux axes de coordonnées.

Les directions sont repérées par des points sur la sphère de rayon unité. Des directions qui ont même cosinus directeur par rapport à un axe donné, ont leurs points représentatifs sur la même latitude autour de cet axe. Il résulte du choix parfaitement symétrique des directions que les cosinus directeurs  $\mu_m, \xi_m, \eta_m$  doivent être choisis parmi les éléments d'un même ensemble. De ce fait on a les mêmes latitudes autour de chacun des axes de coordonnées, et les directions sont représentées par l'intersection de trois latitudes, et comme les directions sont parfaitement symétriques, alors il suffit de déterminer les directions dans un huitième de sphère et les autres sont déduites par un changement de signe de certains cosinus directeurs selon la position de chaque huitième de sphère. L'indice  $n$ , dans le nom symbolique de la méthode des ordonnées discrètes ( $S_n$ ), représente le nombre des latitudes autour de chacun des trois axes. Les cosinus directeurs sont déterminés par l'intersection de ces latitudes (figure 3.4). Dans un huitième de sphère, le nombre des latitudes selon

chaque axe est égal à  $n/2$ . Quant au nombre total de directions discrètes sur une sphère, il est égal à  $n(n+2)$ .

Dans la méthode des ordonnées discrètes, on utilise un nombre limité de directions, et on suppose que la luminance est constante dans un domaine de l'espace qui entoure chacune d'elles.

Par suite on affecte une pondération  $\omega_m$  pour chaque direction, et cette pondération représente l'aire de la surface sphérique qui entoure cette direction sur la sphère de rayon unité. L'ensemble de ces surfaces doit recouvrir tout l'espace et il ne doit pas y avoir de chevauchement entre elles. Aussi la relation  $\sum \omega_m = 4\pi$  doit-elle être vérifiée. Le choix parfaitement symétrique impose entre les directions et les pondérations correspondantes les relations suivantes :

$$\sum \omega_m = 4\pi \quad (3.32a)$$

$$\sum \omega_m \mu_m = 0 \quad (3.32b)$$

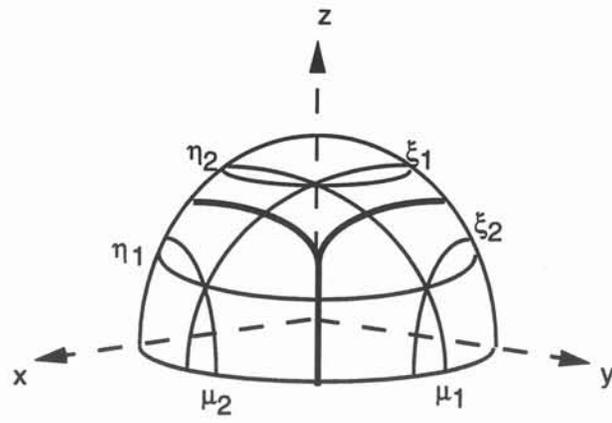
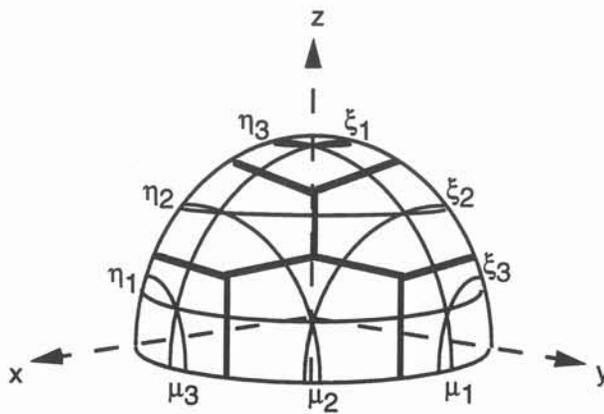
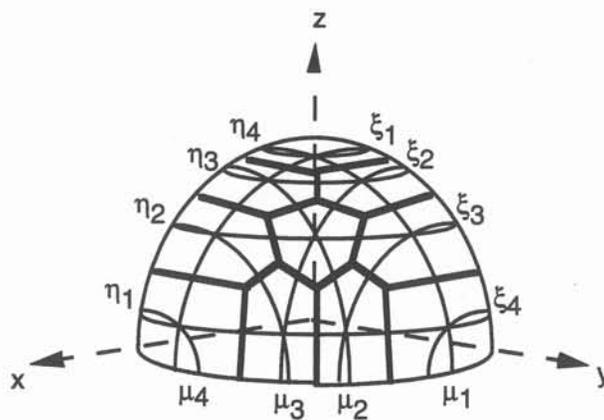
$$\sum_{\mu_m > 0} \omega_m \mu_m = \pi \quad (3.32c)$$

$$\sum \omega_m \mu_m^2 = \frac{4\pi}{3} \quad (3.32d)$$

### III.2.3.2 - La discrétisation spatiale

En général la méthode des ordonnées discrètes est résolue à l'aide d'une méthode des volumes de contrôle. Cela permet d'utiliser le même maillage pour la résolution thermo-hydraulique à l'aide de l'algorithme SIMPLER de PATANKAR [56]. Le lecteur trouvera dans tous les articles concernant la résolution de l'équation du transfert radiatif par la méthode des ordonnées discrètes, le détail de la formulation en volumes de contrôle [41], [55], [57].

Une telle méthode peut néanmoins s'appuyer sur d'autres types de maillages, par exemple les éléments finis, que nous utilisons pour mailler le domaine constitué par le bain de verre en fusion, et pour résoudre l'équation du transfert radiatif. Le choix des éléments finis dans notre cas est motivé par plusieurs raisons :

 $S_4$  $S_6$  $S_8$ 

**Figure 3.4:** détermination des directions discrètes dans un huitième de sphère pour différents ordres de discrétisation.

- l'utilisation des éléments finis autorise des maillages de domaines de géométrie quelconque,
- la méthode des éléments finis est bien adaptée à la prise en compte des conditions aux limites de type NEUMANN en frontière (convection et rayonnement),
- nous disposons au laboratoire du logiciel FLUX EXPERT qui permet de décrire et résoudre les équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis, notamment l'équation de la chaleur. Grâce à la structure de ce code, nous pouvons en insérant un nouvel algorithme coupler le calcul du rayonnement interne à la résolution thermique. Ainsi le même maillage sert à la résolution du transfert radiatif et de l'équation de la chaleur.

Pour pouvoir déterminer la valeur de la luminance résultante en un noeud de vecteur position  $\vec{r}$ , on suit le rayonnement dans sa propagation suivant la direction  $\vec{m}$  après un parcours d'une distance  $s$ . L'écriture de l'équation du transfert radiatif :

$$\frac{d L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m})}{ds} + K_{\lambda} L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) = S_{\lambda}(\vec{r}) \quad (3.33)$$

nous montre que sur une distance  $s$  suffisamment faible pour que le terme source puisse être considéré comme constant, nous pouvons l'intégrer pour obtenir :

$$L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m}) = L_{\lambda}(\vec{r}^*, \vec{m}) e^{-K_{\lambda} s} + \frac{S_{\lambda}(\vec{r})}{K_{\lambda}} (1 - e^{-K_{\lambda} s}) \quad (3.34)$$

$L_{\lambda}(\vec{r}^*, \vec{m})$  est la luminance de départ,

$s$  la distance parcourue,

$L_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m})$  la valeur de la luminance résultante.

Ainsi sur un élément, on obtient la relation entre la luminance au noeud de vecteur position  $\vec{r}$  et la luminance au point de vecteur position  $\vec{r}^*$  de l'élément. Cette relation permet, connaissant la luminance initiale en chaque point de la frontière, ainsi que la valeur du terme source en chaque point intérieur au domaine, de suivre la propagation du rayonnement dans chaque élément.

Précisons que les noeuds des mailles sont numérotés de manière totalement arbitraire, ce qui va nous obliger pour chacune des directions discrètes à les reclasser de manière à pouvoir suivre le sens de propagation de la luminance dans le milieu. Il s'agit là d'effectuer pour chacune des directions discrètes considérée un classement de graphe par niveau.

### III.2.3.3 - La discrétisation spectrale

Les coefficients monochromatiques d'absorption, dans le cas des verres, varient de façon importante en fonction de la longueur d'onde, même dans le domaine restreint qui nous intéresse, c'est à dire de 1  $\mu\text{m}$  à 5  $\mu\text{m}$  (voir chapitre II figures 2.3, 2.4, et 2.5). Il nous semble donc important de prendre en compte ces variations dans le modèle.

Des études réalisées d'ailleurs dans le cadre de matériaux tels que le verre, comme celle de SCHWANDER [18] et celles de SOUFIANI et TAINE [63], ou bien tels que des gaz par FUSEGI et FAROUK [60] mettent en évidence la nécessité d'une modélisation fine des variations spectrales des paramètres optiques, en particulier de l'absorption.

FUSEGI et FAROUK [60] utilisent pour prendre en compte la dépendance spectrale des coefficients d'absorption dans les gaz, un modèle de somme pondérés de gaz gris dont le principe consiste à remplacer le coefficient d'absorption d'un gaz non gris par une somme de coefficients d'absorption de gaz gris pondérés par un facteur dépendant de la température.

Dans le cas de matériaux condensés, en particulier les verres, les auteurs ont essentiellement recours à un modèle à bandes rectangulaires [64], [65]. Il s'agit de découper le domaine spectral en différentes zones à l'intérieur desquelles les propriétés optiques sont constantes.

Pour notre part nous choisissons de prendre en compte la variation spectrale des propriétés des verres à l'aide d'un modèle à bandes étroites rectangulaires [18].

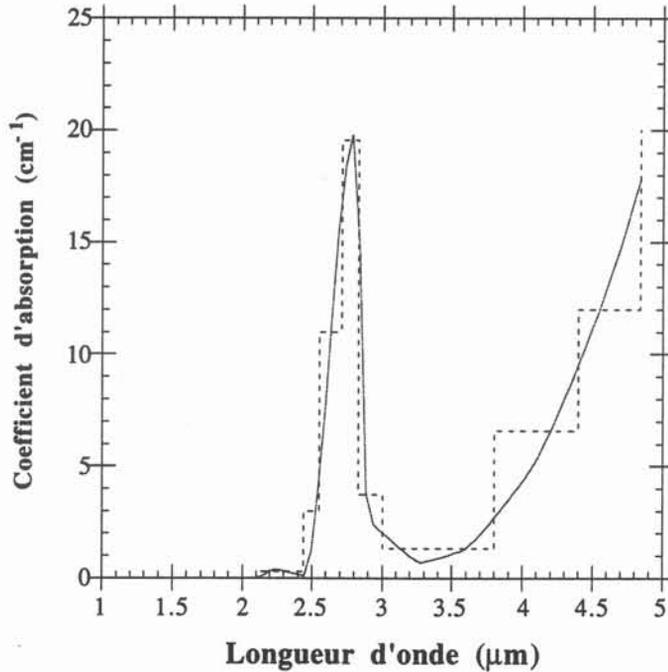
On divise le spectre en un nombre fini de zones ou bandes notées  $i$  de largeur  $\Delta\lambda_i$  et de longueur d'onde moyenne  $\lambda_i$ . Dans chaque zone les propriétés optiques du milieu semi-transparent (coefficient d'absorption, coefficient de diffusion, indice de réfraction) sont considérées constantes. Le nombre de zones est fonction des variations des propriétés dans le spectre (absorption, diffusion, indice de réfraction) ainsi que de la précision désirée (figure 3.5).

Sous ces conditions il est possible d'intégrer simplement les équations monochromatiques dans chaque bande spectrale. La forme des expressions obtenues reste la même que celle des expressions monochromatiques en remplaçant :

$$L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) \text{ par } L_i(\vec{r}, \vec{m}) = \int_{\Delta\lambda_i} L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}) d\lambda \quad (3.35)$$

$$L_\lambda^0(T) \text{ par } L_i^0(T) = \int_{\Delta\lambda_i} L_\lambda^0(T) d\lambda \quad (3.36)$$

$n_\lambda$  par  $n_i$  = indice de réfraction dans la bande  $i$ ,  
 $a_\lambda$  par  $a_i$  = coefficient d'absorption dans la bande  $i$ ,  
 $\sigma_\lambda$  par  $\sigma_i$  = coefficient de diffusion dans la bande  $i$ ,  
 $K_\lambda$  par  $K_i$  = coefficient d'extinction dans la bande  $i$ .



**Figure 3.5 :** spectre de la silice vitreuse à 1073 K, modèle à dix bandes.

Ainsi l'équation du transfert radiatif intégrée sur une bande  $i$  de largeur  $\Delta\lambda_i$  s'écrit :

$$\frac{d L_i(\vec{r}, \vec{m})}{ds} + K_i L_i(\vec{r}, \vec{m}) = a_i L_i^0(T) + \frac{\sigma_i}{4\pi} \int_{4\pi} L_i(\vec{r}, \vec{m}') d\Omega' \quad (3.37)$$

Nous choisissons un modèle à bandes étroites rectangulaires : en plus des hypothèses déjà citées (paramètres optiques indépendants de la longueur d'onde dans chaque bande spectrale) on considère les intervalles spectraux suffisamment étroits de telle sorte que les variations de la fonction de PLANCK dans chaque bande spectrale soient négligeables.

$$L_i^0(T) = \int_{\Delta\lambda_i} L_\lambda^0(T) d\lambda \quad (3.38)$$

avec :

$i$  : numéro de la bande spectrale considérée,  
 $\lambda_i$  : valeur moyenne de  $\lambda$  dans la bande spectrale considérée,  
 $\Delta\lambda_i$  : largeur de la bande spectrale considérée.

$$L_i^0(T) = \frac{2 c_0^2 n_i^2}{\lambda_i^5 \left[ \exp\left(\frac{h c_0}{k \lambda_i T}\right) - 1 \right]} \Delta \lambda_i \quad (3.39)$$

$h$  : constante de PLANCK =  $6,626 \cdot 10^{-34}$  Js,  
 $k$  : constante de BOLTZMANN =  $1,3805 \cdot 10^{-23}$  JK<sup>-1</sup>,  
 $c_0$  : vitesse de la lumière dans le vide =  $3 \cdot 10^8$  ms<sup>-1</sup>,  
 $n_i$  : indice de réfraction dans la bande  $i$ .

### III.2.4 - Synthèse sur l'ensemble des formules discrétisées

Nous venons de décrire les différents types de discrétisations nécessaires à l'application de la méthode des ordonnées discrètes avec prise en compte des variations spectrales des propriétés optiques des verres. Examinons leur ordre d'intervention lors du calcul des luminances.

Pour chaque longueur d'onde (discrétisation spectrale), nous effectuons pour chaque direction discrète (discrétisation angulaire), en chaque point du maillage éléments finis en suivant la direction considérée (discrétisation spatiale), le calcul de la luminance monochromatique  $L_\lambda(\vec{r}, \vec{m})$ . C'est ensuite à partir de ces luminances qui dépendent donc du point, de la direction et de la longueur d'onde considérés, qu'est calculé en chaque point d'intégration du maillage éléments finis la valeur de la divergence du flux radiatif, qui elle ne dépend que du point considéré.

*Récapitulatif des formules discrétisées utilisées pour le modèle dans le cas général 3D :*

La divergence du flux radiatif (équation 3.27) comporte une intégrale sur l'angle solide total, qui devient sous forme discrétisée une sommation sur l'ensemble des directions discrètes choisies noté NBDIR. Elle fait aussi intervenir une intégration sur les longueurs d'ondes qui se transforme en une sommation sur le nombre de bandes spectrales noté NBS. Nous exprimons ainsi la divergence du flux radiatif sous forme discrétisée par :

$$\text{div} \vec{q}_r = \sum_{i=1}^{\text{NBS}} [4 \pi a_i L_i^0(\vec{r}) - a_i \sum_{m=1}^{\text{NBDIR}} \omega_m L_i(\vec{r}, \vec{m})] \quad (3.40)$$

La luminance  $L_i$ , nécessaire au calcul de la divergence du flux radiatif, est calculée en chaque point de vecteur position  $\vec{r}$  du maillage, pour chacune des directions discrètes  $\vec{m}$ , et dans chaque bande spectrale  $i$  en intégrant sur chaque bande spectrale l'équation (3.34) donnant la variation de la luminance dans un élément. Ainsi la luminance  $L_i$  est définie à partir de la luminance connue en un point de vecteur position  $\vec{r}^*$  (qui est en fait le point émetteur sur le noeud du maillage dans la direction considérée), en suivant le classement de graphe par niveau dans la direction  $\vec{m}$ , à l'aide de la formule :

$$L_i(\vec{r}, \vec{m}) = L_i(\vec{r}^*, \vec{m}) e^{-K_i s} + \frac{S_i(\vec{r})}{K_i} (1 - e^{-K_i s}) \quad (3.41)$$

$$s = |\vec{r} - \vec{r}^*| \quad (3.42)$$

où  $S_i(\vec{r})$  est la source de rayonnement interne calculée en chaque noeud par :

$$S_i(\vec{r}) = a_i L_i^o(\vec{r}) + \frac{\sigma_i}{4\pi} \sum_{m=1}^{\text{NB DIR}} \omega_m L_i(\vec{r}, \vec{m}) \quad (3.43)$$

avec :

$$L_i^o(\vec{r}) = \frac{2 h c_o^2 n_i^2}{\lambda_i^5 [\exp(\frac{hc_o}{k \lambda_i T}) - 1]} \Delta \lambda_i \quad (3.44)$$

Les luminances en frontières qui déterminent les conditions aux limites radiatives du problème sont obtenues en intégrant l'équation (3.30) sur la bande  $i$  et sont données sous forme discrétisée par :

$$L_i(\vec{r}_0, \vec{m}) = \frac{\epsilon}{\alpha} \frac{\sigma_{st} T^4(\vec{r}_0)}{\text{NBS}} + \frac{\rho}{\alpha} \sum_{m'=1}^{\text{NBDA}} \vec{n}_{\text{ext}} \cdot \vec{m}' \cdot \omega_{m'} L_i(\vec{r}_0, \vec{m}') \quad (3.45)$$

$\vec{n}_{\text{ext}}$  désigne la normale extérieure au point considéré,

$\vec{m}'$  est la direction arrivant au point de vecteur position  $\vec{r}_0$  qui est ensuite réfléchi suivant toutes les directions dans l'angle  $\alpha$ ,

NBDA est le nombre de directions arrivant au point de vecteur position  $\vec{r}_0$ .

Le terme d'émission ne dépend pas de la longueur d'onde, il est identique pour chaque bande.

### III.2.5 - L'algorithme de résolution de l'équation du transfert radiatif

L'algorithme de résolution de l'équation du transfert radiatif est commun aux deux modèles numériques développés. Nous proposons de le décrire dans ce paragraphe.

Nous sommes en présence d'un maillage en éléments finis. En chaque noeud aussi bien en frontière du domaine qu'à l'intérieur du domaine nous connaissons la température. Du fait que le terme source et les conditions aux limites dépendent des luminances calculées à l'intérieur du domaine, alors le calcul se fait d'une manière itérative. Le déroulement du calcul du transfert radiatif qui nous mène à la connaissance en chaque point d'intégration du maillage de la divergence du flux radiatif est le suivant :

1- rentrée des données :

nombre de bandes spectrales selon lequel sont découpés les spectres d'absorption et de diffusion,

largeur des bandes spectrales,

valeur moyenne de la longueur d'onde dans chaque bande spectrale,

émissivité sur chaque frontière du domaine,

valeur des coefficients d'absorption et de diffusion du milieu sur chaque bande spectrale,

valeur de l'indice de réfraction sur chaque bande spectrale,

- 2- lancement des calculs géométriques qui donnent notamment pour chacune des directions discrètes le classement de graphe par niveau,
- 3- construction des tables relatives aux conditions aux limites en réflexion : une table donne pour chaque point de la frontière l'angle de réflexion, une autre donne pour chaque point de la frontière et pour chacune des directions arrivant en ce point, le produit de la direction par la normale extérieure en ce point et par le poids associé à cette direction,
- 4- calcul des sources de départ en chaque point intérieur au domaine : il s'agit de l'émission de rayonnement  $a_j L_j^0(\vec{r})$  avec  $L_j^0(\vec{r})$  donnée par l'expression (3.44),
- 5- calcul des conditions aux limites de départ en chaque point de la frontière du domaine : il s'agit de l'émission de rayonnement par les parois vers l'intérieur du domaine donnée par l'expression :  $\frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{\sigma_{st} T^4(\vec{r}_0)}{NBS}$ ,
- 6- calcul des luminances pour chaque bande spectrale, pour chaque direction, en chaque noeud (3.41),
- 7- calcul de l'intégrale suivant les directions de la luminance pour chaque bande spectrale, en chaque noeud intérieur au domaine,
- 8- réactualisation des sources internes en prenant en compte le renforcement du rayonnement par diffusion (3.43),

- 9- réactualisation des conditions aux limites en prenant en compte la réflexion aux parois du domaine (3.45),
- 10-calcul des luminances pour chaque bande spectrale, pour chaque direction, en chaque noeud (3.41),
- 11-calcul de l'intégrale de la luminance en chaque point intérieur au domaine et pour chaque bande spectrale,
- 12-calcul de la divergence du flux radiatif en chaque point d'intégration du domaine (3.40).

Les tests de convergence, pour des raisons d'occupation de place mémoire, sont effectués, non pas sur la luminance mais sur le terme de divergence du flux radiatif. Après chaque itération, on teste la convergence et, si elle n'est pas satisfaisante, on recalcule le terme source et les conditions aux limites, et on refait une autre itération jusqu'à ce que la différence entre les valeurs de divergence entre deux itérations successives soit inférieure à une tolérance prédéfinie.

L'algorithme de résolution de l'équation du transfert radiatif par la méthode des ordonnées discrètes en éléments finis est résumé sur la figure 3.6.

Nous venons d'exposer les points communs aux deux modèles. Il est temps maintenant de développer certains aspects propres à chacun d'eux, comme entre autre le classement de graphe par niveau indispensable au calcul des luminances dans une direction donnée.

### **III.3 - Les modèles**

L'objectif de ce paragraphe est d'explicitier les particularités inhérentes d'une part au modèle 2D cartésien, d'autre part au modèle 2D axisymétrique.

#### **III.3.1 - Le modèle 2D cartésien**

Nous précisons dans ce paragraphe le choix des directions discrètes, la manière d'effectuer le classement de graphe par niveau ainsi que le calcul des luminances. Enfin nous terminons par l'expression du terme source en chaque point du domaine qui présente une différence.

##### **III.3.1.1 - Le choix des directions discrètes**

Nous avons au cours du paragraphe III.2 explicité les différents critères utiles au choix des directions discrètes dans l'espace 3D. Pour la méthode  $S_4$  le tableau 3.B donne pour un huitième de sphère les trois cosinus directeurs ainsi que les poids associés aux directions discrètes correspondantes. En géométrie 2D cartésienne la projection des directions précédentes dans le plan  $(O,x,y)$  donne pour un quart de cercle trois directions définies chacune par deux cosinus directeurs  $\mu$  et  $\xi$ , une pondération étant associée à chacune des directions discrètes (tableau 3.C).

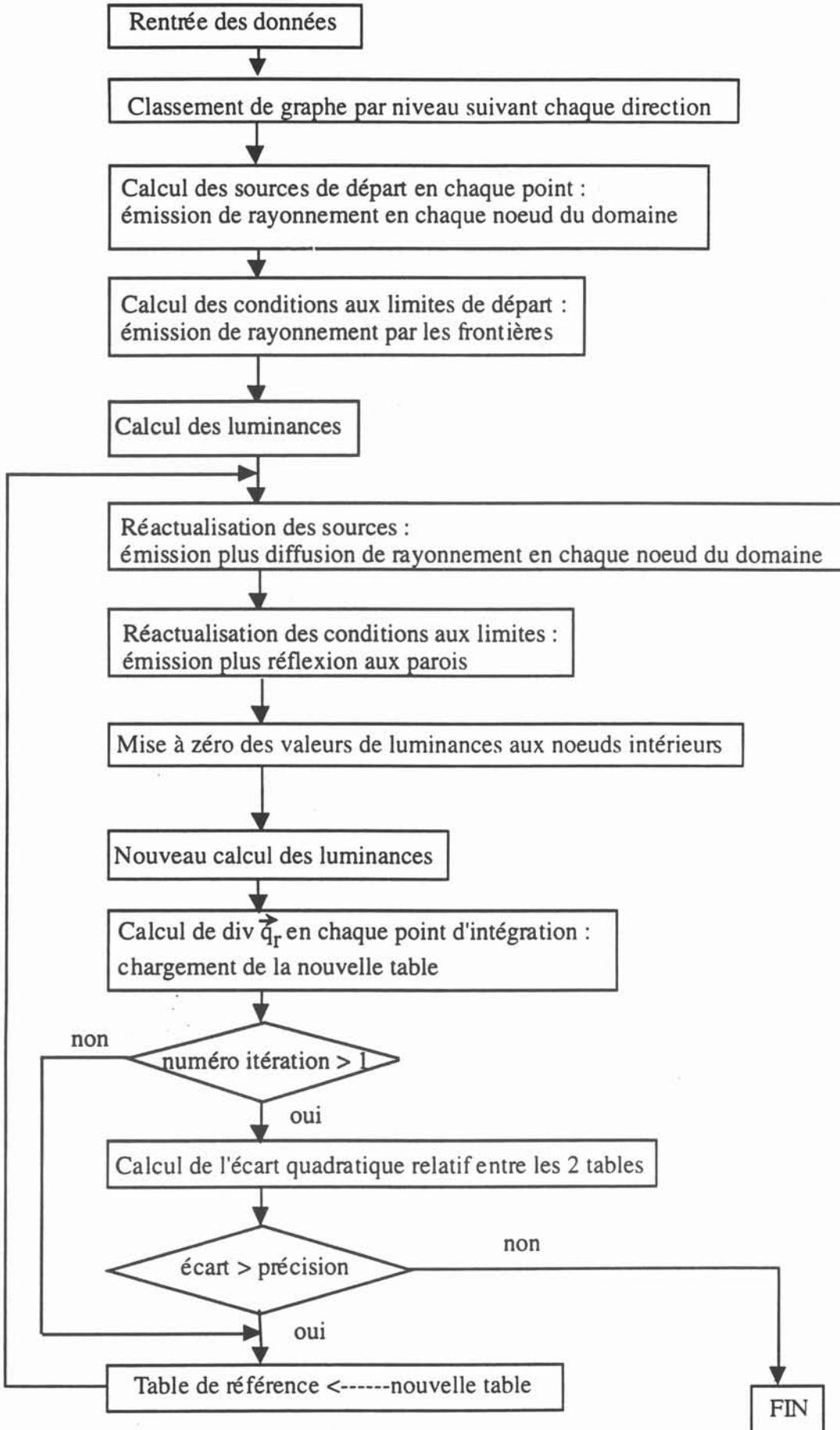


Figure 3.6 : algorithme de résolution de l'équation du transfert radiatif.

Pour la méthode  $S_4$  les 24 directions en géométrie 3D donnent naissance en 2D à 12 directions discrètes disposées dans le plan  $(O,x,y)$ .

Directions positives	$\mu$	$\xi$	$\eta$	poids $\omega_i$
1	0.2958759	0.2958759	0.9082483	0.5235987
2	0.9082483	0.2958759	0.2958759	0.5235987
3	0.2958759	0.9082483	0.2958759	0.5235987

**Tableau 3.B** : cosinus directeurs ainsi que poids associés aux trois directions discrètes positives (directions situées dans le premier huitième de sphère) en géométrie 3D pour  $S_4$ .

Directions positives	$\mu$	$\xi$	poids $\omega_i$
1	0.7071071	0.7071071	0.5235987
2	0.9508199	0.3097442	0.5235987
3	0.3097442	0.9508199	0.5235987

**Tableau 3.C** : cosinus directeurs ainsi que poids associés aux trois directions discrètes positives (directions situées dans le premier quart de disque) en géométrie 2D cartésienne pour  $S_4$ .

### III.3.1.2 - Le classement de graphe par niveau

Comme nous l'avons signalé dans le paragraphe III.2.3.2 qui traite de la discrétisation spatiale, nous utilisons un maillage en éléments finis. Pour le calcul du transfert radiatif nous sommes limités à des maillages dont les éléments sont soit triangulaires soit des quadrilatères d'ordre deux. Les noeuds sont numérotés de manière arbitraire. Dans la méthode choisie le calcul de la luminance se fait en suivant chacune des directions en utilisant la loi de maille suivante (rappel) :

$$L_i(\vec{r}, \vec{m}) = L_i(\vec{r}^*, \vec{m}) e^{-K_i s} + \frac{S_i(\vec{r})}{K_i} (1 - e^{-K_i s}) \quad (3.46)$$

la luminance en un point de vecteur position  $\vec{r}$  et dans une direction  $\vec{m}$  dépend donc de la luminance en un point de vecteur position  $\vec{r}^*$  dans la direction  $\vec{m}$ , de la distance  $s$  entre les deux points et de la source calculée au point où l'on cherche la valeur de la luminance.

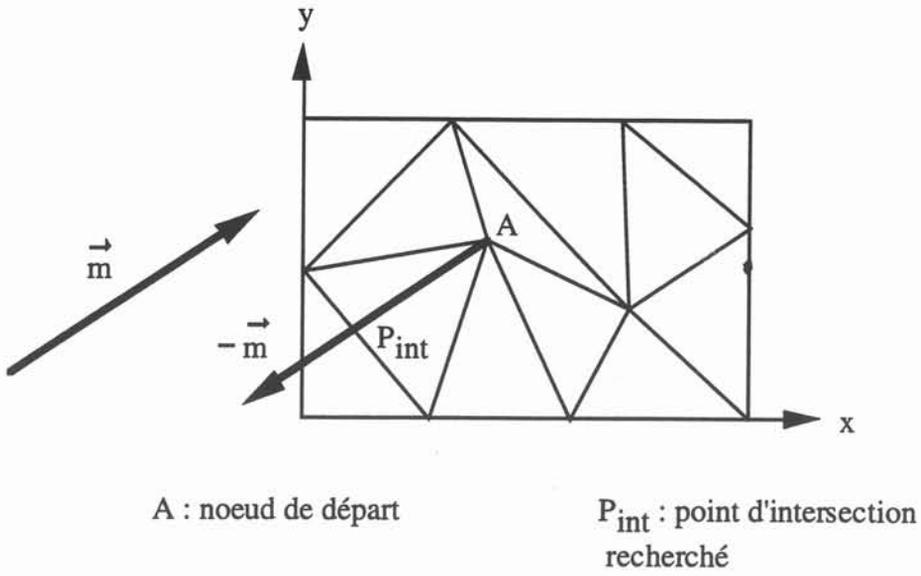
Ce que nous venons de préciser permet d'expliquer que pour chacune des directions, nous devons classer les noeuds de manière à pouvoir les suivre pour le calcul des luminances en chaque point, dans chaque direction. Il s'agit d'effectuer pour chacune des directions discrètes un classement de graphe par niveau.

Un premier travail consiste à dresser pour chaque noeud, la liste des éléments qui l'entoure. Puis pour une direction donnée de vecteur directeur  $\vec{m}$ , nous cherchons pour chaque noeud du maillage, s'il y a intersection entre la demi-droite ayant pour origine le noeud considéré et de vecteur directeur  $\vec{m}$ , et une arête d'un élément entourant le noeud (figure 3.7). En d'autres termes, on recherche le point le plus proche émettant dans la direction  $\vec{m}$  sur le noeud considéré. Plusieurs cas peuvent se produire :

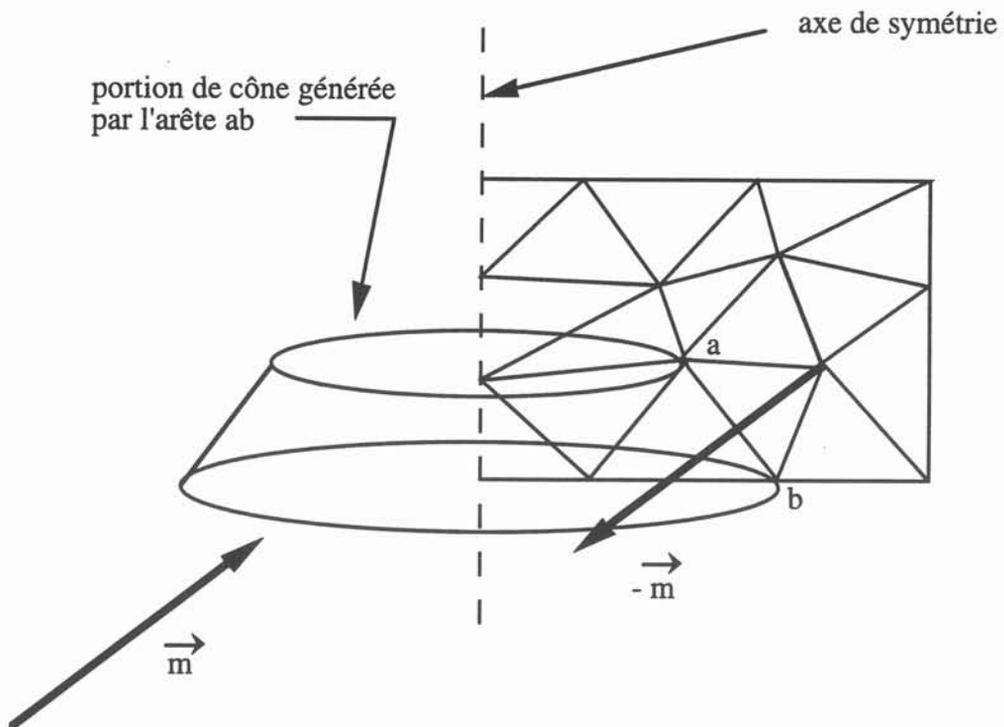
- il n'y a pas d'intersection : dans ce cas on dit que le noeud n'est lié à aucun noeud pour la direction  $\vec{m}$ ,
- il y a intersection franche avec une arête d'un élément entourant le noeud : on dit que le noeud est lié aux trois noeuds de l'arête,
- la demi-droite est confondue avec une arête d'un élément : dans ce cas le noeud est lié au premier noeud de l'arête rencontré.

*Le classement de graphe par niveau se fait ensuite de la façon suivante :*

Pour une direction  $\vec{m}$  donnée on dit qu'un noeud qui n'est lié à aucun noeud est de niveau un. Quant aux autres niveaux, on dit qu'un noeud est de niveau  $n$  lorsqu'il est lié à au moins un noeud de niveau  $n-1$ .



**Figure 3.7 :** recherche du point d'intersection en géométrie 2D cartésienne.



**Figure 3.8 :** recherche du point d'intersection en géométrie 2D axisymétrique.

Pour chaque noeud du domaine, on stocke la direction suivant laquelle on travaille, le numéro de l'élément auquel appartient le point d'intersection lorsqu'il existe, les coordonnées du point d'intersection dans l'élément de référence et la distance du noeud au point d'intersection.

Il est à noter que le classement de graphe est effectué une fois pour toute en début de programme pour chaque direction discrète, il est bien entendu totalement indépendant de la longueur d'onde.

### III.3.1.3 - Le calcul du terme source

Comme nous l'avons vu au paragraphe III.2.3.2 nous devons dans un premier temps calculer le terme source, celui-ci intervenant dans l'expression de la luminance (3.46). Or lors de la présentation du modèle le terme  $S_\lambda(\vec{r})$  (3.31) représente le renforcement de rayonnement moyennant l'hypothèse de la fonction de phase isotrope dans un modèle 3D. Nous rappelons l'écriture de ce terme :

$$S_\lambda(\vec{r}) = a_\lambda L_\lambda^0(\vec{r}) + \frac{\sigma_\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}') d\Omega' \quad (3.47)$$

Le premier terme de l'expression ci-dessus représente l'émission du rayonnement, et le deuxième terme représente le renforcement du rayonnement par diffusion dans la direction  $\vec{m}$ . En géométrie 2D cartésienne, ce dernier terme se trouve modifié. En effet l'intégration de la luminance ne se fait plus sur une sphère mais sur un disque pour donner :

$$S_\lambda(\vec{r}) = a_\lambda L_\lambda^0(\vec{r}) + \frac{\sigma_\lambda}{2\pi} \int_{2\pi} L_\lambda(\vec{r}, \vec{m}') d\Omega' \quad (3.48)$$

Sous forme discrétisée, l'expression ci-dessus devient :

$$S_i(\vec{r}) = a_i L_i^0(\vec{r}) + \frac{\sigma_i}{2\pi} \sum_{\text{NBDIR}} L_i(\vec{r}, \vec{m}') \quad (3.49)$$

La sommation se fait sur toutes les directions, il s'agit en chaque point d'ajouter à l'émission de rayonnement l'intégrale de la luminance pondérée par le coefficient de diffusion monochromatique divisé par  $2\pi$ .

### III.3.1.4 - Le calcul de la luminance

Pour chaque direction le calcul de la luminance s'effectue en utilisant le classement de graphe par niveau à l'aide de la loi (3.46). Pour une direction donnée on part des noeuds de niveau un qui

correspondent donc aux conditions aux limites, puis on calcule les luminances aux noeuds de niveau deux et ainsi de suite jusqu'au calcul de la luminance aux noeuds de niveau maximum pour cette direction. Dans la loi (3.46) apparaît le terme  $L_i(\vec{r}^*, \vec{m})$  qui correspond en fait à la valeur de la luminance au point d'intersection. Cette dernière est calculée par interpolation polynômiale des luminances aux noeuds de l'élément dans lequel se trouve le point d'intersection soit :

$$L_i(\vec{r}^*, \vec{m}) = L_i(P_{\text{int}}, \vec{m}) = \sum_{j=1}^{\text{NBNEL}} \alpha_j L_i(j, \vec{m}) \quad (3.50)$$

avec

$P_{\text{int}}$  = point d'intersection,

NBNEL = nombre de noeuds de l'élément,

$\alpha_j$  = valeur du polynôme d'interpolation au point d'intersection,

$L_i(j, \vec{m})$  : valeur de la luminance au noeud  $j$  dans la direction  $\vec{m}$ , dans la bande spectrale  $i$ .

### III.3.2 - Le modèle 2D axisymétrique

Le modèle 2D axisymétrique sert typiquement à modéliser le phénomène du transfert radiatif dans le bain de verre en fusion en creuset froid cylindrique. Nous exposons dans ce paragraphe en quoi consiste l'hypothèse 2D axisymétrique puis les modifications apportées au code de résolution de l'équation du transfert radiatif par rapport au modèle 2D cartésien.

#### III.3.2.1 - L'hypothèse 2D axisymétrique

Les fours à verre que nous utilisons sont cylindriques. Le domaine constitué par le bain de verre est donc cylindrique, ce qui nous amène à travailler en repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ . L'hypothèse selon laquelle nous travaillons en 2D axisymétrique consiste à dire que  $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$ , c'est à dire qu'il n'y a pas de variation des grandeurs physiques selon l'angle  $\theta$ . Autrement dit, nous pouvons travailler indifféremment dans un plan  $(O, r, z)$  quelconque contenant l'axe de symétrie.

Cette hypothèse a pour conséquence simplificatrice que nous pouvons utiliser le même type de maillage 2D que dans le modèle 2D cartésien.

#### III.3.2.2 - Le choix des directions discrètes

Les directions à prendre pour la méthode S4 sont les 24 directions 3D indiquées dans le tableau 3.B avec leur poids associés.

### III.3.2.3 - Le classement de graphe par niveau

Le maillage éléments finis utilisé est composé comme pour le modèle 2D cartésien de triangles ou de quadrilatères d'ordre 2. La différence réside dans le fait d'une part que nous nous situons cette fois dans le plan  $(O,r,z)$  et que l'un des axes est axe de symétrie, d'autre part que les directions sont les directions 3D. Nous ne pouvons donc pas rechercher comme dans le modèle 2D cartésien l'intersection entre la demi-droite de vecteur directeur l'opposé de la direction et d'origine un noeud du domaine et l'arête d'un élément. Cette fois pour chaque direction  $\vec{m}$ , pour chaque noeud du maillage, on se déplace à partir du noeud dans la direction  $-\vec{m}$ , et on cherche le point d'intersection entre cette demi-droite et la surface du tronçon de cône généré en faisant tourner de  $2\pi$  l'arête d'un élément autour de l'axe de symétrie. Le point d'intersection est le premier rencontré (distance minimale) (voir figure 3.8).

La mise en oeuvre est plus longue que pour le 2D cartésien à cause du nombre de cas particuliers qui peuvent se rencontrer. Comme dans le modèle 2D cartésien, on stocke pour chaque noeud, la direction suivant laquelle on travaille, le numéro de l'élément auquel appartient le point d'intersection lorsqu'il existe, la distance réelle entre le noeud et le point d'intersection sur le cône généré par l'arête, et les coordonnées du point d'intersection dans l'élément de référence. Le classement de graphe par niveau s'effectue pour chaque direction de la même manière que dans le modèle 2D cartésien en repérant d'abord à quels noeuds est lié chaque noeud, en exprimant qu'un noeud lié à aucun autre noeud est de niveau un et qu'un noeud est de niveau  $n$  lorsqu'il est lié à au moins un noeud de niveau  $n-1$ .

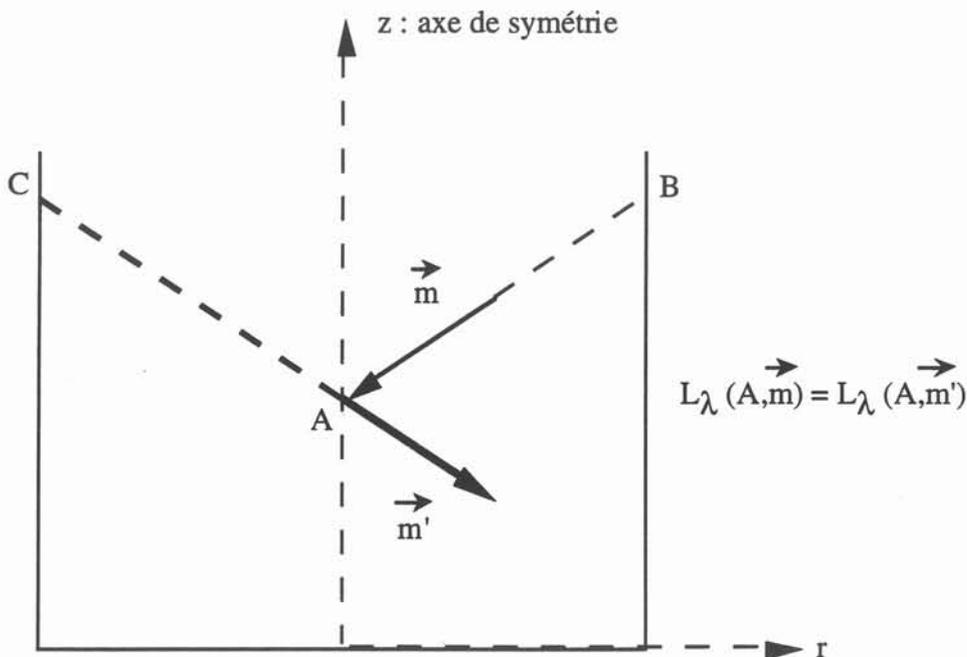
Nous venons de décrire brièvement le principe du classement de graphe par niveau dans le cas 2D axisymétrique. Il nous faut maintenant aborder deux problèmes spécifiques inhérents au cas 2D axisymétrique :

- le traitement de l'axe de symétrie,
- le traitement des noeuds ayant pour point émettant dans une direction donnée un point d'abscisse négative.

### III.3.2.4 - Le traitement de l'axe de symétrie

Avec le classement de graphe effectué comme nous venons de le décrire dans le paragraphe précédent, il est clair que pour les directions partant de l'axe c'est à dire les directions 3D ayant un premier cosinus directeur  $\mu$  positif, les noeuds de l'axe sont de niveau un. En général les noeuds de niveau un correspondent à des conditions aux limites dont la luminance est calculée comme la somme d'une émission de paroi et d'une luminance due à la réflexion à la paroi. Il faut donc traiter l'axe d'une manière différente. Nous allons expliquer notre façon d'aborder ce problème.

Le calcul des luminances s'effectue pour chaque bande spectrale, pour chaque direction et pour chaque noeud en suivant le graphe. L'astuce pour pallier le problème de l'axe consiste pour le calcul des luminances à classer les directions. On calcule d'abord les luminances dans les directions qui vont vers l'axe. Puis pour chaque direction partant de l'axe, pour les noeuds de l'axe on recherche la direction associée (deuxième et troisième cosinus directeur identique, premier cosinus directeur opposé) et on affecte comme valeur de luminance celle de la direction associée. Pour illustrer cela regardons la figure 3.9. Soit un point A de l'axe de symétrie et une direction  $\vec{m}$  qui arrive en ce point. De part la symétrie du problème, on dit que la luminance au point A dans la direction  $\vec{m}$  provenant du point B est égale à la luminance au point A dans la direction  $\vec{m}'$  partant du point C qui est le symétrique de B par rapport à l'axe de symétrie. On applique sur l'axe le principe de la réflexion spéculaire.



**Figure 3.9 :** explication schématique de la résolution du problème de l'axe de symétrie pour le calcul des luminances.

Pour la méthode  $S_4$  on calcule d'abord les luminances pour les 12 directions qui vont vers l'axe c'est à dire les directions de  $\mu < 0$ , les luminances dans les 12 directions partant de l'axe ( $\mu > 0$ ) sont calculées ensuite.

Les noeuds de niveau un pour une direction donnée sont en principe des noeuds de la frontière, or l'axe de symétrie qui a ses noeuds de niveau un pour certaines directions n'est pas une frontière ce qui nécessite de vérifier régulièrement dans le code si un noeud appartient ou non à l'axe (noeud de rayon nul).

### III.3.2.5 - Le traitement des noeuds ayant pour point émettant dans une direction donnée un point d'abscisse négative

Les directions sont volumiques et non contenues dans le plan du maillage. Ainsi pour des directions dont le premier cosinus directeur  $\mu$  est positif, le point d'intersection trouvé sur le tronçon de cône peut avoir sa composante suivant  $r$  négative. Ceci pose un problème quant au calcul de la luminance en un point dont le point émettant est un point d'abscisse négative. Observons le schéma de la figure 3.10. Les points  $X_1, X_2, \dots, X_8$  représentent les noeuds d'une maille de type quadrilatère d'ordre deux grossie volontairement pour les explications. Soit le noeud  $X_8$  que nous appellerons noeud A, on cherche le point d'intersection entre la droite portée par la direction  $\vec{m} \begin{pmatrix} \mu \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  volumique et le cylindre généré par la rotation de  $2\pi$  autour de l'axe de symétrie du segment  $X_3X_4$ . Supposons que le point d'intersection cherché que nous appelons  $P_{int}$  ait sa composante négative suivant le rayon. La loi de maille choisie pour le calcul de la luminance au noeud A nous donne :

$$L_i(A, \vec{m}) = L_i(P_{int}, \vec{m}) e^{-K_i s} + \frac{S_i(A)}{K_i} (1 - e^{-K_i s}) \quad (3.51)$$

où  $s$  est la distance réelle qui sépare le point A du point  $P_{int}$ .

Comment calculer la luminance au point  $P_{int}$  alors que seul le plan  $r > 0$  est maillé ?

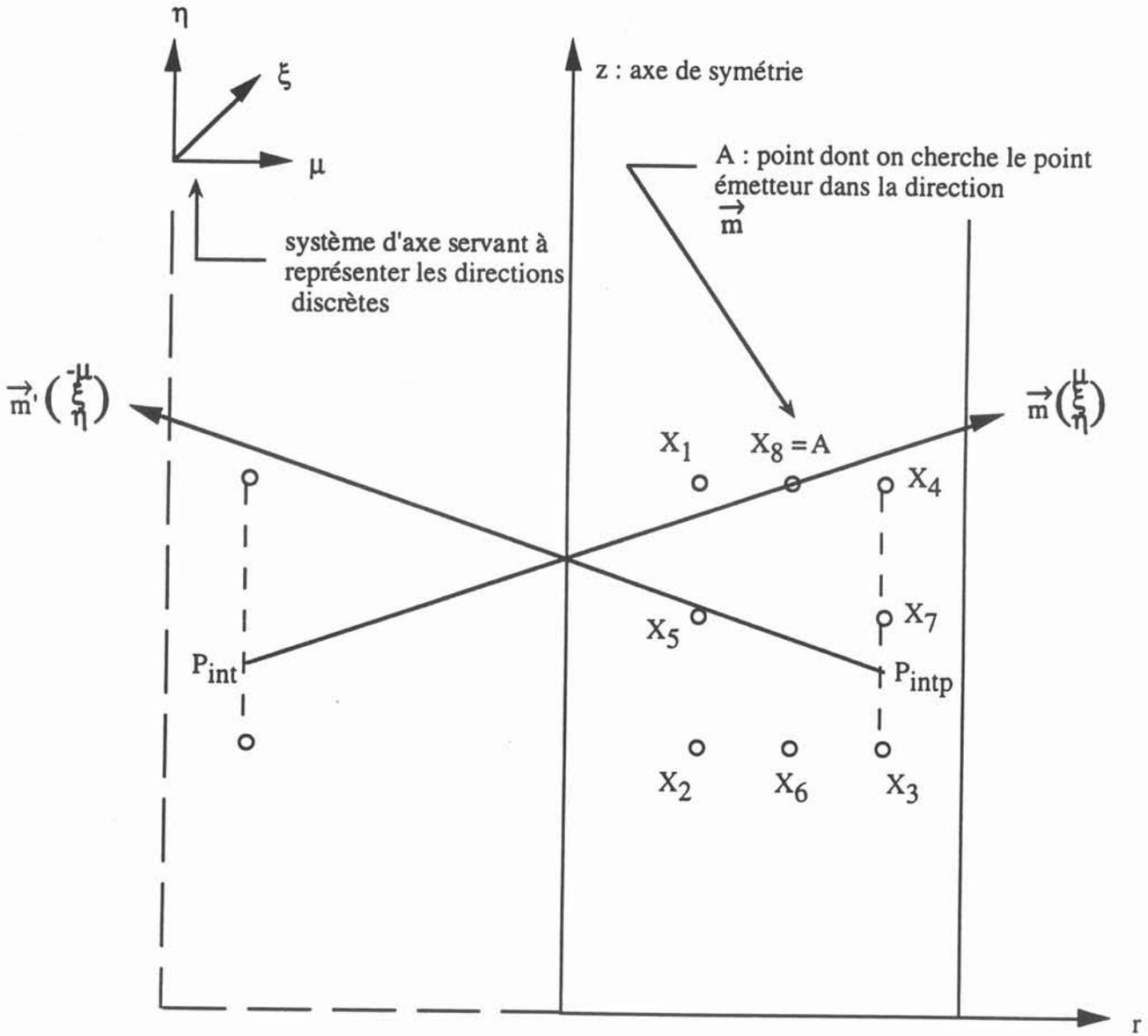
Soit  $P_{intp}$  le point projeté dans le plan  $(O, r, z)$  et  $\vec{m}' \begin{pmatrix} -\mu \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  la direction symétrique à la direction  $\vec{m}$  par rapport au plan perpendiculaire au plan  $(O, r, z)$  et passant par l'axe.

Pour des raisons de symétrie on peut écrire

$$L_i(P_{int}, \vec{m}) = L_i(P_{intp}, \vec{m}') \quad (3.52)$$

La valeur des luminances aux noeuds  $X_j$  dans la direction  $\vec{m}'$  est connue car les luminances sont d'abord calculées pour les directions se dirigeant vers l'axe, c'est à dire les directions ayant un premier cosinus directeur  $\mu$  négatif. Ainsi la luminance au point  $P_{intp}$  suivant la direction  $\vec{m}'$  peut se calculer à l'aide de l'interpolation polynomiale :

$$L_i(P_{intp}, \vec{m}') = \sum_{j=1}^{NBNEL} \alpha_j L_i(X_j, \vec{m}') \quad (3.53)$$



**Figure 3.10 :** schéma permettant l'explication du calcul des luminances dans le cas de noeuds du domaine ayant pour point émettant un point d'abscisse négative.

On obtient finalement la luminance au point A dans la direction  $\vec{m}$  par :

$$L_i(A, \vec{m}) = L_i(P_{\text{int}P}, \vec{m}') e^{-K_i s} + \frac{S_i(A)}{K_i} (1 - e^{-K_i s}) \quad (3.54)$$

où s est toujours la distance réelle entre le point d'intersection  $P_{\text{int}}$  et le point A.

### III.3.2.6 - Une remarque concernant les directions volumiques

Au cours des différents tests effectués pour valider le problème axisymétrique du transfert radiatif, nous constatons que dans le cas de maillages en triangles, le classement de graphe par niveau ne se passe pas toujours bien. En effet, il arrive parfois qu'un noeud A soit lié à un noeud B et que le noeud B soit lié au noeud A. Dans ce cas, les noeuds A et B ne sont pas classés par niveau et le problème ne peut être résolu. Cet inconvénient qui ne se produit pas pour des éléments quadrilatères, est dû à la complexité de recherche d'un classement de graphe entre des noeuds situés dans un même plan à partir d'une recherche de points d'intersection dans l'espace 3D.

Une possibilité réside dans l'utilisation de directions obtenues après projections des directions 3D volumiques dans le plan (O,r,z). Cela donne naissance à huit directions planaires données avec leur poids associé dans le tableau 3.D. Le classement de graphe s'effectue alors de la même manière qu'en 2D cartésien.

Directions positives	$\mu$	$\eta$	poids $\omega_i$
1	0.955226388	0.2958759	2.094394
2	0.418431626	0.9082483	1.047197

**Tableau 3.D :** cosinus directeurs et poids associés aux deux directions discrètes positives correspondantes à la projection des directions 3D volumiques dans le plan (O,r,z) en géométrie 2D axisymétrique pour S4.

## IV - CONCLUSION

Après avoir effectué une étude bibliographique sur les différentes méthodes utilisées pour résoudre le problème du transfert radiatif dans les milieux semi-transparents, nous avons choisi la méthode qui nous a semblé la plus appropriée à notre problème. Cette méthode, la méthode des ordonnées discrètes S4, basée sur une discrétisation angulaire de la luminance, est en général développée à partir de maillages en volumes finis. Nous avons proposé dans la deuxième partie de ce chapitre son développement sur un maillage de type éléments finis, en géométrie cartésienne d'une part, en géométrie axisymétrique d'autre part. Les modèles mis en oeuvre sont des modèles à

bandes permettant la prise en compte des variations des propriétés optiques du milieu semi-transparent, comme les verres, en fonction de la longueur d'onde. Il nous faut maintenant introduire la source calculée, qui représente la puissance radiative volumique (opposé de la divergence du flux radiatif) dans l'équation de la chaleur en 2D cartésien et en 2D axisymétrique. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

## CHAPITRE IV

*La modélisation numérique de l'équation de la chaleur avec prise en compte du transfert radiatif*



## I - INTRODUCTION

Après avoir décrit les deux modèles 2D cartésien et 2D axisymétrique de résolution de l'équation du transfert radiatif, conduisant à la connaissance de la divergence du flux radiatif qui intervient comme terme source dans l'équation de la chaleur, il est naturel maintenant de présenter la manière dont cette source est intégrée. Il s'agit là d'effectuer le couplage de la conduction et du rayonnement qui intervient dans de nombreuses applications technologiques, parmi lesquelles on peut citer notamment celles relevant des domaines aérospatial, du bâtiment, de l'énergétique solaire ou encore de l'industrie verrière. Son importance a motivé de nombreuses études dans le passé, mais du fait de la complexité du problème lié à la nature intergro-différentielle de l'équation du transfert radiatif, la plupart des études se sont limitées au cas unidirectionnel, et ce n'est qu'à partir de la dernière décennie qu'on a commencé à étudier les cas multidimensionnels, et ceci après qu'eut été élaboré un certain nombre de méthodes pour traiter le rayonnement. Une résolution analytique de l'interaction des deux modes de transfert est impossible dans le cas général.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'exposer les deux modèles 2D cartésien et 2D axisymétrique de résolution de l'équation de conservation de l'énergie, avec prise en compte du transfert radiatif en régime permanent sans tenir compte de la source d'origine électromagnétique, par la méthode des éléments finis. Ensuite nous présentons une campagne d'essais numériques destinée d'une part à valider les modèles, d'autre part à observer l'influence de la variation de certains paramètres sur les champs de température.

## II - L'EQUATION DE LA CHALEUR

L'équation de la chaleur avec prise en compte du transfert radiatif, sans source d'origine électromagnétique, en régime permanent et sans prise en compte du transport de la température par la vitesse s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{q}_c = -\operatorname{div} \vec{q}_r + Q_{th} \quad (4.1)$$

où :

$\vec{q}_c$  est le flux conductif :  $\vec{q}_c = -k_v \operatorname{grad} T$   
avec  $k_v$  = conductibilité thermique moléculaire,

$\vec{q}_r$  est le flux radiatif,  
 $Q_{th}$  est une source thermique.

### III - LES MODELES NUMERIQUES

Deux modèles numériques sont conçus : un modèle pour des problèmes en géométrie 2D cartésienne, et un modèle pour la résolution des problèmes en géométrie axisymétrique.

Les deux modèles sont résolus par la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel FLUX EXPERT qui possède un générateur d'équations. La méthode des projections de GALERKIN permet de transformer l'équation aux dérivées partielles en un système d'équations non linéaires dont les coefficients sont des intégrales grâce au choix de fonctions de pondération. Le terme  $\text{div } \vec{q}_r$  dans l'équation de la chaleur est calculé par résolution de l'équation du transfert radiatif en chaque point d'intégration du maillage éléments finis constitué d'éléments triangles ou quadrilatères d'ordre deux (chapitre III). Le terme  $\text{div } \vec{q}_r$  représentant la source d'origine radiative, nous posons pour la suite:

$$\text{div } \vec{q}_r = S_{tr} \quad (4.2)$$

où

$S_{tr}$  : source due au transfert radiatif.

Nous proposons maintenant de présenter les deux modèles.

#### III.1 - Le modèle 2D cartésien

Nous résolvons par la méthode des éléments finis l'équation :

$$- \text{div} (k_v \vec{\text{grad}} T) = Q_{th} - S_{tr} \quad (4.3)$$

##### III.1.1 - Les conditions aux limites

Le modèle peut prendre en compte des conditions aux limites de type échange convectif de frontière, à l'aide d'un coefficient d'échange thermique  $h$ . Les pertes par convection s'expriment :

$$P_{conv} = h (T_{fr} - T_{\infty}) \quad (4.4)$$

avec  $T_{fr}$  : température de frontière,

$T_{\infty}$  : température du fluide loin de la paroi,

$h$  : coefficient de convection,

$h$  peut aussi désigner un coefficient d'échange global permettant de prendre en compte un certain contact plus ou moins parfait du fluide avec une paroi.

Nous avons aussi inséré la possibilité de prendre en compte des pertes par rayonnement en surface qui s'expriment selon l'expression suivante :

$$P_{\text{ray}} = \varepsilon \sigma_{\text{st}} (T_{\text{fr}}^4 - T_{\infty}^4) \quad (4.5)$$

où

$\varepsilon$  : émissivité du bain,

$\sigma_{\text{st}}$  : la constante de STEFAN-BOLTZMANN

$\sigma_{\text{st}} = 5,67.10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ ,

$T_{\infty}$  : température à l'infini.

### III.1.2 - La discrétisation en éléments finis

Comme nous l'avons dit précédemment, nous utilisons la méthode des projections de GALERKIN. Le domaine d'étude étant désigné par  $\Omega$  et la surface le limitant  $\Gamma$ , la projection de l'équation (4.3) sur une base de fonctions  $\alpha_j$  donne :

$$\iint_{\Omega} \alpha_j \operatorname{div} (-k_v \vec{\text{grad}} T) \, ds = \iint_{\Omega} -\alpha_j S_{\text{tr}} \, ds + \iint_{\Omega} \alpha_j Q_{\text{th}} \, ds \quad (4.6)$$

L'expression ci-dessus est la forme forte de l'équation. A l'aide d'une intégration par parties du terme de conduction puis de l'application du théorème d'OSTROGRADSKI, nous faisons apparaître une intégrale sur la frontière du domaine :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \alpha_j \operatorname{div} (-k_v \vec{\text{grad}} T) \, ds &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} (-\alpha_j k_v \vec{\text{grad}} T) \, ds + \iint_{\Omega} k_v \vec{\text{grad}} \alpha_j \cdot \vec{\text{grad}} T \, ds \\ &= - \int_{\Gamma} \alpha_j k_v \vec{\text{grad}} T \cdot \vec{n} \, dl + \iint_{\Omega} k_v \vec{\text{grad}} \alpha_j \cdot \vec{\text{grad}} T \, ds \end{aligned} \quad (4.7)$$

$\vec{n}$  désigne la normale extérieure au domaine.

Les conditions d'échange de flux aux frontières s'écrivent :

$$k_v \vec{\text{grad}} T \cdot \vec{n} = -h(T - T_{\infty}) - \varepsilon \sigma_{\text{st}} (T^4 - T_{\infty}^4) \quad (4.8)$$

En reportant dans l'intégrale de frontière, on obtient :

$$\int_{\Gamma} \alpha_j k_v \vec{\text{grad}} T \cdot \vec{n} \, dl = - \int_{\Gamma} \alpha_j h(T - T_{\infty}) \, dl - \int_{\Gamma} \alpha_j \varepsilon \sigma_{\text{st}} (T^4 - T_{\infty}^4) \, dl \quad (4.9)$$

L'équation de la chaleur projetée sur les polynômes  $\alpha_i$  de l'espace de projection, donnée sous la forme faible, s'écrit :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} k_v \vec{\text{grad}} \alpha_i \cdot \vec{\text{grad}} T \, ds &= - \int_{\Gamma} \alpha_i h (T - T_{\infty}) \, dl - \int_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{st} (T^4 - T_{\infty}^4) \, dl \\ &\quad - \iint_{\Omega} \alpha_i S_{tr} \, ds + \iint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} \, ds \end{aligned} \quad (4.10)$$

L'équation obtenue sous sa forme faible fait maintenant apparaître les termes d'échanges aux frontières.

Compte tenu de l'expression du terme de rayonnement en frontière (terme en  $T^4$ ) et de la source du transfert radiatif  $S_{tr}$ , le système d'équations obtenu par la méthode projective de GALERKIN est non linéaire. Nous utilisons une méthode de résolution itérative. A chaque pas  $n$  on linéarise le terme de rayonnement de surface en introduisant la température du pas précédent  $T_{n-1}$ :

$$\int_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{st} (T^4 - T_{\infty}^4) \, dl = \int_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{st} (T_{n-1})^3 T \, dl - \int_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{st} T_{\infty}^4 \, dl \quad (4.11)$$

A chaque pas  $n$  la divergence du flux radiatif est calculée à l'aide du champ de température du pas précédent,  $(S_{tr})_{n-1}$ . Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} k_v \vec{\text{grad}} \alpha_i \cdot \vec{\text{grad}} T \, ds + \int_{\Gamma} \alpha_i h T \, dl + \int_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{st} (T_{n-1})^3 T \, dl &= \\ = - \iint_{\Omega} \alpha_i (S_{tr})_{n-1} \, ds + \iint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} \, ds + \int_{\Gamma} \alpha_i h T_{\infty} \, dl + \int_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{st} T_{\infty}^4 \, dl \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nous pouvons discrétiser l'équation (4.12) en définissant la fonction inconnue température par une interpolation polynômiale telle que :

$$T = \sum_{j=1}^N \alpha_j T_j \quad (4.13)$$

où  $j$  est l'indice du noeud de l'élément qui varie entre 1 et le nombre de noeuds de cet élément.

L'équation ainsi discrétisée devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \alpha_i h \sum \alpha_j T_j \, dl + \int_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{st} T_{n-1}^3 \sum \alpha_j T_j \, dl + \iint_{\Omega} k_v \vec{\text{grad}} \alpha_i \sum T_j \vec{\text{grad}} \alpha_j \, ds &= \\ = \int_{\Gamma} \alpha_i h T_{\infty} \, dl + \int_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{st} T_{\infty}^4 \, dl - \iint_{\Omega} \alpha_i (S_{tr})_{n-1} \, ds + \iint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} \, ds \end{aligned} \quad (4.14)$$

### III.2 - Le modèle 2D axisymétrique

Nous résolvons par la méthode des éléments finis l'équation :

$$- \operatorname{div} (k_v \vec{\operatorname{grad}} T) = Q_{th} - \operatorname{Str} \quad (4.15)$$

#### III.2.1 - Les conditions aux limites

En plus des conditions citées pour le modèle 2D cartésien (§ III.1.1), il faut rajouter la condition de flux nul sur l'axe de symétrie.

#### III.2.2 - La discrétisation en éléments finis

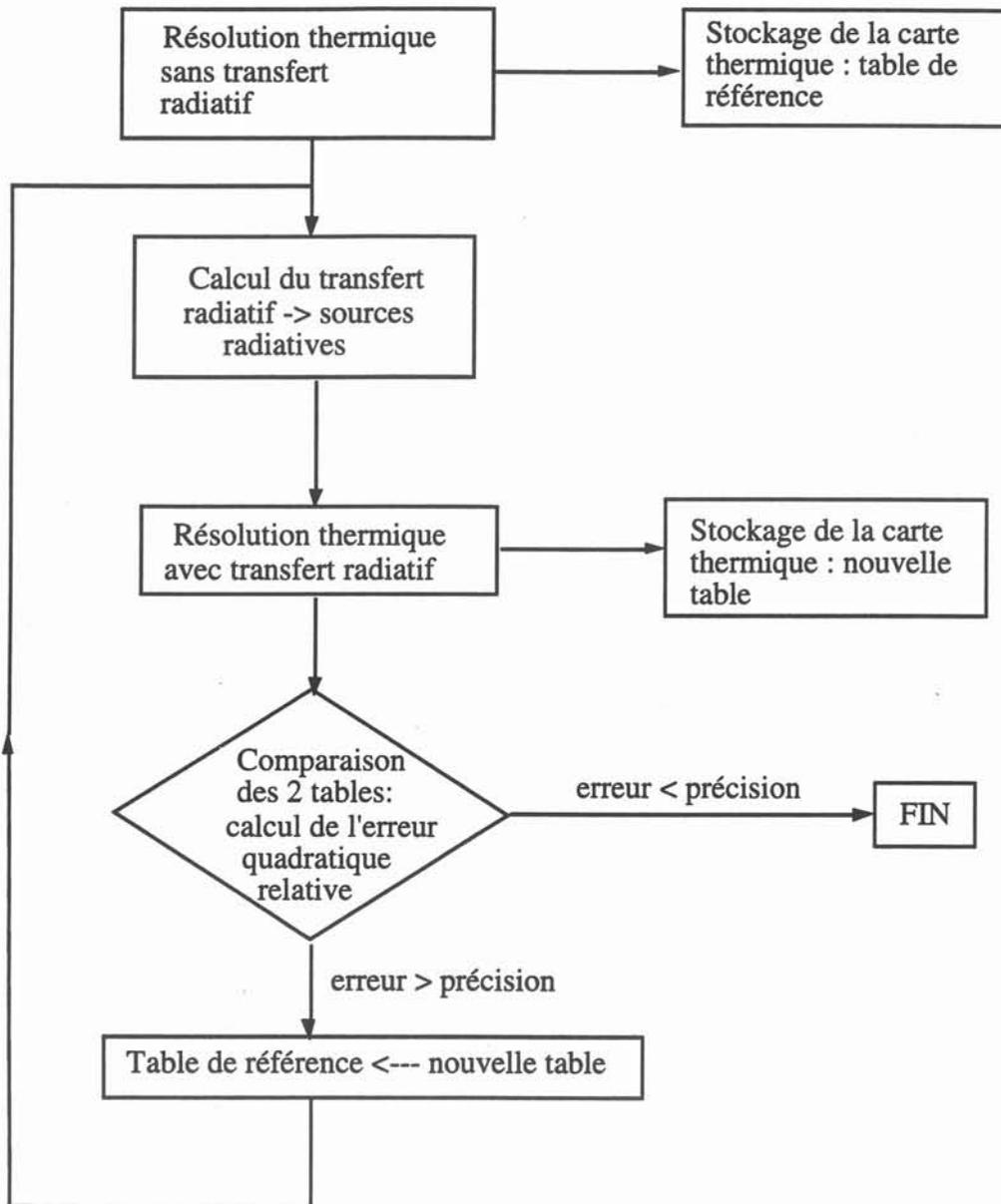
Nous projetons l'équation (4.15) sur une base de fonctions  $\alpha_i$  puis nous discrétisons. Le principe est le même que pour le modèle 2D cartésien (§ III.1.2), nous jugeons donc inutile de retranscrire les différentes étapes conduisant à la formulation faible discrétisée de l'équation qui est finalement :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \alpha_i h \sum \alpha_j T_j r dr + \int_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{st} T_{n-1}^3 \sum \alpha_j T_j r dr + \iint_{\Omega} k_v \vec{\operatorname{grad}} \alpha_i \sum T_j \vec{\operatorname{grad}} \alpha_j r dr dz \\ & = \int_{\Gamma} \alpha_i h T_{\infty} r dr + \int_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{st} T_{\infty}^4 r dr - \iint_{\Omega} \alpha_i (\operatorname{Str})_{n-1} r dr dz + \\ & + \iint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} r dr dz \end{aligned} \quad (4.16)$$

## IV - L'ALGORITHME DE RESOLUTION

L'algorithme de résolution thermique avec prise en compte du transfert radiatif est indifférent de la géométrie 2D cartésienne ou 2D axisymétrique.

Une première résolution de l'équation de la chaleur en conduction pure nous fournit la carte thermique de référence qui permet un premier calcul des sources thermiques d'origine radiative. Ensuite l'équation thermique comprenant ces sources est résolue donnant naissance à une nouvelle carte de température. La comparaison de cette dernière avec la table de référence nous indique si nous devons réitérer sur un nouveau calcul de transfert radiatif ou non. Dans l'affirmative, c'est la nouvelle carte de température qui devient table de référence et qui sert au nouveau calcul du transfert radiatif. L'algorithme est représenté sur la figure (4.1).



*Figure 4.1* : algorithme de résolution transfert thermique avec transfert radiatif.

Ayant explicité les modèles de résolution de l'équation du transfert radiatif dans le chapitre III puis les modèles thermiques développés, en géométries 2D cartésienne et 2D axisymétrique, nous sommes maintenant en mesure de présenter un certain nombre de cas tests. Ces essais numériques que nous allons présenter ont pour but soit une validation des modèles en présentant des tests trouvés aisément dans la littérature, soit une démonstration des possibilités offertes par le code de calcul thermique avec transfert radiatif.

## **V - TESTS DU CODE THERMIQUE AVEC TRANSFERT RADIATIF**

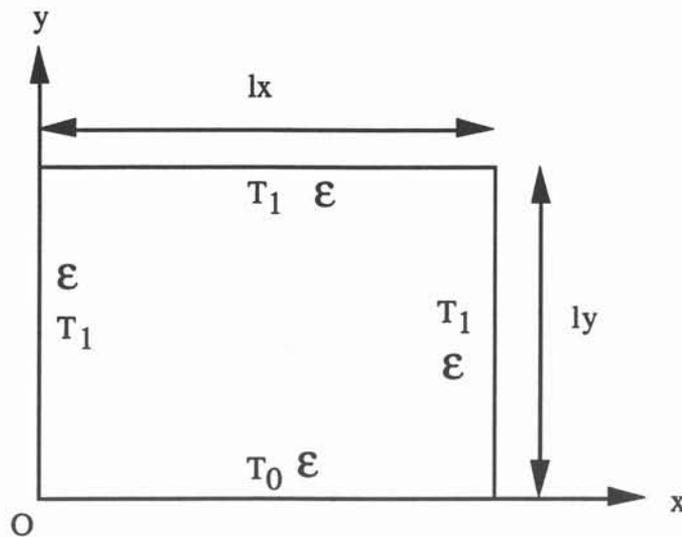
Le paragraphe se compose de deux parties : l'une consacrée à des tests en géométrie 2D cartésienne, l'autre consacrée à des tests en géométrie 2D axisymétrique.

### **V.1 - Les tests en 2D cartésien**

Nous étudions en premier lieu un des cas le plus fréquemment trouvé dans la littérature, qui nous permet d'une part de comparer différentes méthodes, d'autre part d'étudier l'influence de la variation de différentes grandeurs relatives au rayonnement interne sur le champ de température. Ensuite nous montrons l'intérêt de l'utilisation des éléments finis par un cas de géométrie quelconque. Viennent enfin les validations du modèle dans le cas d'une géométrie monodimensionnelle et du modèle à bandes.

#### **V.1.1 - Cas d'un milieu semi-transparent confiné dans une enceinte rectangulaire à températures de parois imposées**

Le domaine de calcul est une enceinte de forme rectangulaire, ayant une largeur  $l_x$  et une hauteur  $l_y$ . Son rapport de forme est défini comme étant le rapport  $r = l_x/l_y$ . Les faces sont grises et isothermes de même émissivité  $\varepsilon$ , et elles sont diffuses en réflexion comme en émission. L'une d'entre elles est chaude à la température  $T_0$ , alors que les autres sont maintenues plus froides, à la température  $T_1 = T_0/2$  (figure 4.2). Les températures sont adimensionnées par rapport à la plus élevée  $T_0$ .



**Figure 4.2 :** caractéristiques géométriques et conditions aux limites du domaine d'étude.

Dans toute cette série d'essais nous considérons une seule bande spectrale de largeur  $\Delta\lambda = 4\mu\text{m}$  dont la valeur moyenne de longueur d'onde est de  $3\mu\text{m}$ .

L'étude du transfert radiatif ainsi que de l'équation de la chaleur intégrant ce phénomène nous a montré que beaucoup de paramètres interviennent dans la résolution d'un problème. Parmi ces paramètres, certains sont relatifs au milieu semi-transparent étudié, comme son coefficient monochromatique d'absorption, de diffusion ou son indice de réfraction monochromatique, ou encore sa conductibilité thermique moléculaire, d'autres caractérisent le domaine contenant le milieu semi-transparent : l'émissivité des parois, le rapport de forme de l'enceinte, les températures des faces. Afin d'examiner l'influence de ces paramètres sur le champ de température dans le milieu, nous proposons de faire varier un seul paramètre à la fois, tout en maintenant les autres constants.

Pour l'ensemble des essais relatifs à cette géométrie, et excepté pour l'étude de l'influence du rapport de forme de la cavité sur le champ de température, le maillage utilisé est un maillage de  $30 * 30$  quadrilatères d'ordre deux.

Dans la littérature, les caractéristiques thermophysiques et géométriques d'un problème à traiter sont rarement précisées. Les grandeurs sont alors données sous forme adimensionnelle : on parle ainsi de l'épaisseur optique, du paramètre de couplage, de l'albedo, ou de températures adimensionnées par rapport à une température de référence. Pour notre part, nous donnons pour l'ensemble des tests effectués les grandeurs adimensionnelles comme cela est fait dans la littérature mais en précisant les vraies valeurs des coefficients qui les composent.

### V.1.1.1 - Influence du paramètre de couplage N

Un nombre adimensionnel appelé paramètre de couplage conduction-rayonnement, ou nombre de STARK, donne la contribution relative de chacun des modes de transfert puisqu'il représente physiquement le rapport entre un flux conductif de référence et un flux radiatif de référence.

Soit  $K$  le coefficient d'extinction du milieu considéré, nous pouvons poser  $K = \frac{1}{l_m}$  où  $l_m$  a la dimension d'une longueur qui peut être considérée comme la longueur moyenne de pénétration du rayonnement. Nous définissons  $N$ , paramètre de couplage par :

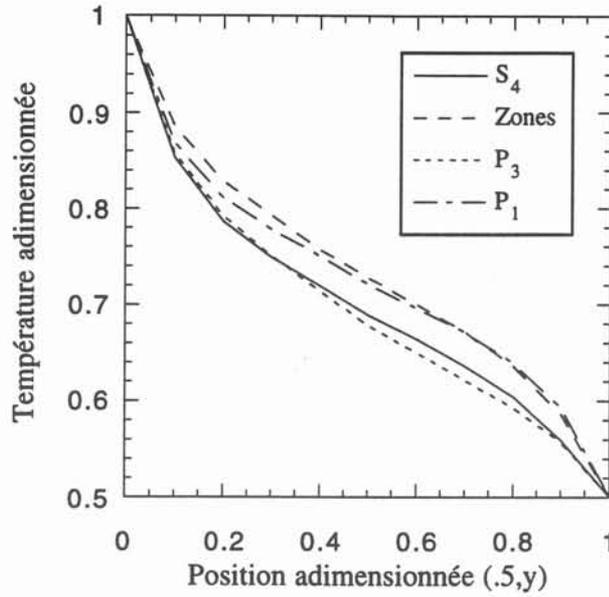
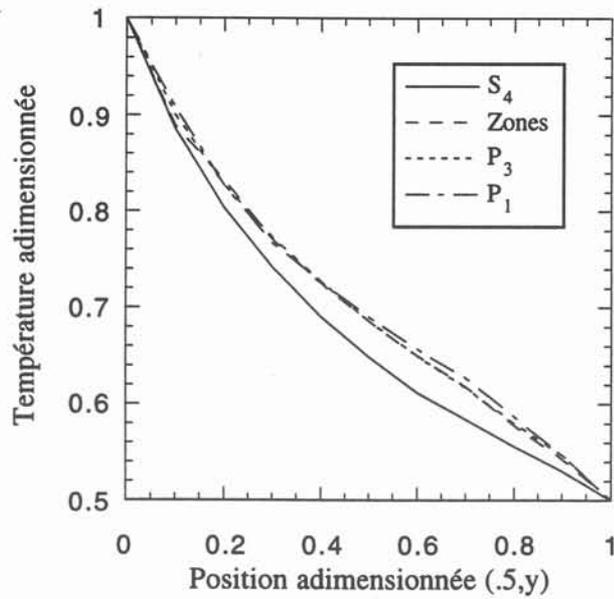
$$N = \frac{\frac{k_v T_0}{l_m}}{4n^2 \sigma_{st} T_0^4} \quad (4.17)$$

où  $k_v$  est la conductibilité thermique moléculaire de milieu,  
 $T_0$  une température de référence,  
 $n$  l'indice de réfraction,  
 $\sigma_{st}$  la constante de STEFAN-BOLTZMANN.

Sous cette forme, on voit que  $N$  peut être considéré comme le rapport du flux de conduction correspondant à un écart de température  $T_0$  sur la longueur  $l_m$ , au flux de rayonnement correspondant à une surface noire à la température  $T_0$ . En fait la forme utilisée de  $N$  est celle qui laisse apparaître le coefficient d'extinction soit :

$$N = \frac{k_v K}{4n^2 \sigma_{st} T_0^3} \quad (4.18)$$

Pour les tests sur l'influence de ce paramètre, l'enceinte est supposée carrée ( $r = 1$ ). Le milieu est non diffusant et son épaisseur optique est égale à 1. L'enceinte étant choisie de dimension 10 mm sur 10 mm, cela conduit à un coefficient d'absorption égal à  $1 \text{ cm}^{-1}$ . La température  $T_0$  prise comme température de référence est fixée à 1000 K tandis que la température  $T_1$  est égale à 500 K. L'émissivité des parois est égale à l'unité. Nous choisissons un indice de réfraction égal à 1,5 qui est typiquement la valeur utilisée pour le verre. Nous faisons varier  $N$  en agissant sur la conductibilité thermique moléculaire du milieu.

a)  $N=0.01$ b)  $N = 0.05$ 

**Figure 4.3** : comparaison de la méthode S4 développée avec la méthode des zones, et les approximations P1 et P3, sur la distribution de température sur le plan médian vertical, pour différentes valeurs du paramètre de couplage.

Nous présentons une comparaison entre la méthode S4 que nous avons développée en éléments finis et trois autres méthodes : la méthode P1, la méthode P3 et la méthode des zones pour différentes valeurs de N sur les figures 4.3 et 4.4. Ces figures représentent les profils de la température le long du plan vertical médian de la cavité.

Pour un paramètre de couplage  $N = 0,01$  les méthodes S4 et P3 fournissent des résultats très comparables. Par rapport aux méthodes P1 et des zones la méthode S4 sous-estime légèrement les température (maximum 6 %). D'un point de vue de la tendance on constate que pour un tel paramètre de couplage qui traduit un effet de rayonnement prépondérant devant la conduction, les gradients thermiques s'accroissent au niveau des parois, alors que dans la région centrale la température a tendance à s'homogénéiser.

Pour  $N = 0,05$  donc pour un rayonnement moins prépondérant que précédemment, l'effet décrit ci-dessus sur les températures est nettement moins marqué. La méthode S4 sous-estime légèrement (maximum 6 %) les températures par rapport aux autres méthodes.

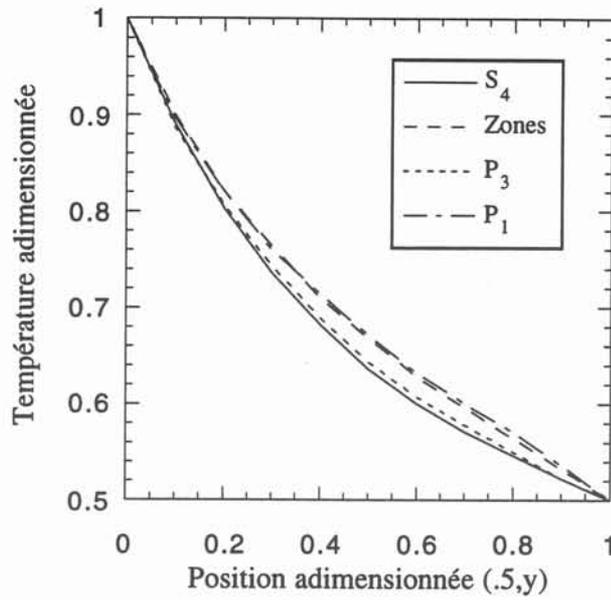
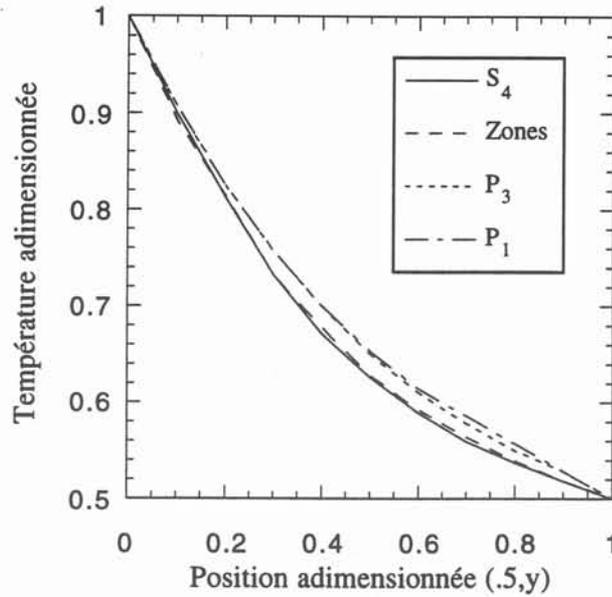
Lorsque nous augmentons encore le paramètre N nous tendons vers des profils de température de conduction pure et l'écart entre les différentes méthodes diminue.

La figure 4.5 représente le tracé des isothermes pour plusieurs valeurs du paramètre de couplage N. Il apparaît clairement que lorsque N décroît, la température de la région centrale augmente et que le gradient de température devient plus important dans les régions qui sont proches des faces. Le resserrement des isothermes à proximité des différentes faces s'accompagne d'un élargissement à l'intérieur de la cavité. Cela témoigne d'un refroidissement du côté de la face chaude et d'un échauffement du côté de la face froide.

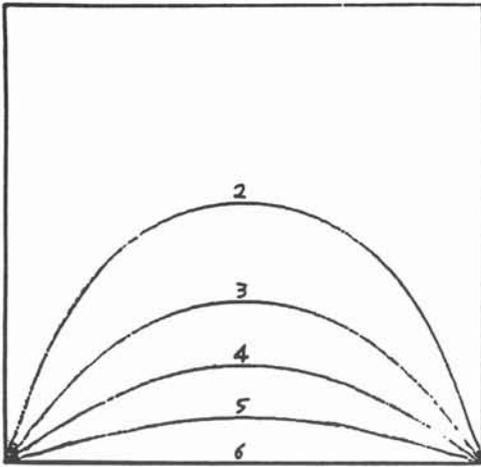
#### **V.1.1.2 - Influence de l'émissivité des faces**

L'enceinte est carrée de dimension 10 mm de côté. Le milieu est non diffusant et son épaisseur optique est égale à l'unité d'où son coefficient d'absorption égal à  $1 \text{ cm}^{-1}$ . Pour qu'il y ait une influence importante du rayonnement, le paramètre de couplage est fixé à  $N = 0,01$ , ce qui conduit dans notre cas à une conductibilité thermique moléculaire du milieu égale à  $0,051 \text{ W/mK}$ .

On change l'émissivité des parois, prise la même sur toutes, afin d'étudier son influence sur le champ de température.

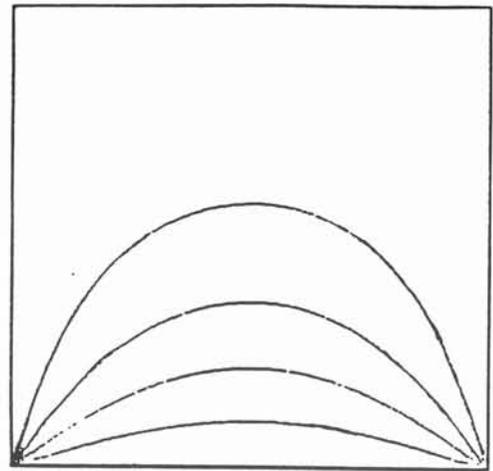
a)  $N = 0.1$ b)  $N = 1$ 

**Figure 4.4 :** comparaison de la méthode S4 développée avec la méthode des zones, et les approximations P1 et P3, sur la distribution de température sur le plan médian vertical, pour différentes valeurs du paramètre de couplage.

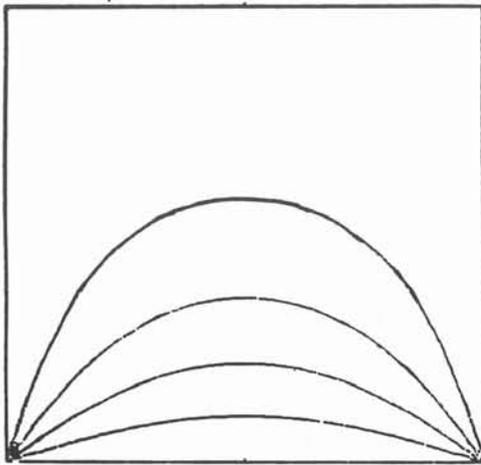


a) isothermes CD pure

K  
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000

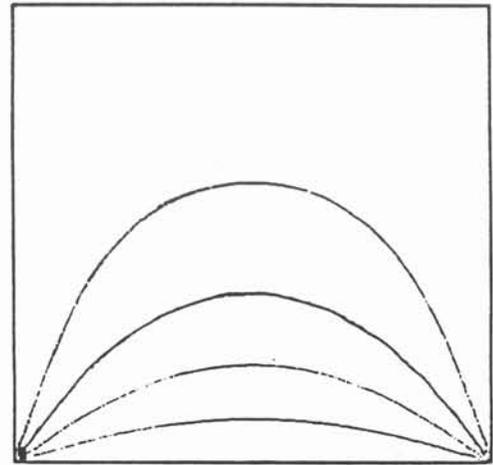


b) isothermes N= 1

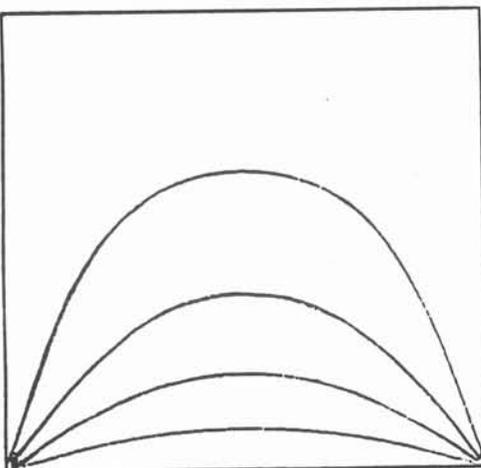


c) isothermes N = 0.5

K  
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000

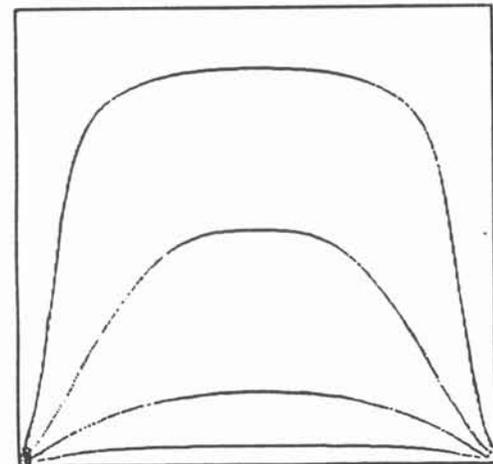


d) isothermes N= 0.1



e) isothermes N = 0.05

K  
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000



f) isothermes N = 0.005

**Figure 4.5** : influence du paramètre de couplage N sur le champ de température.

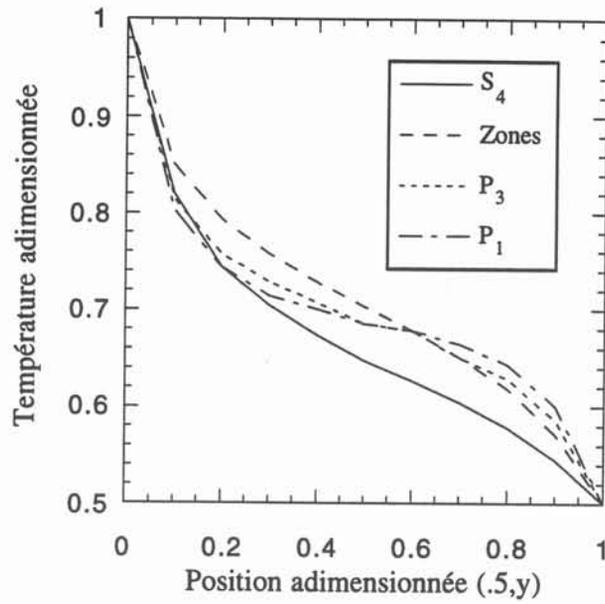
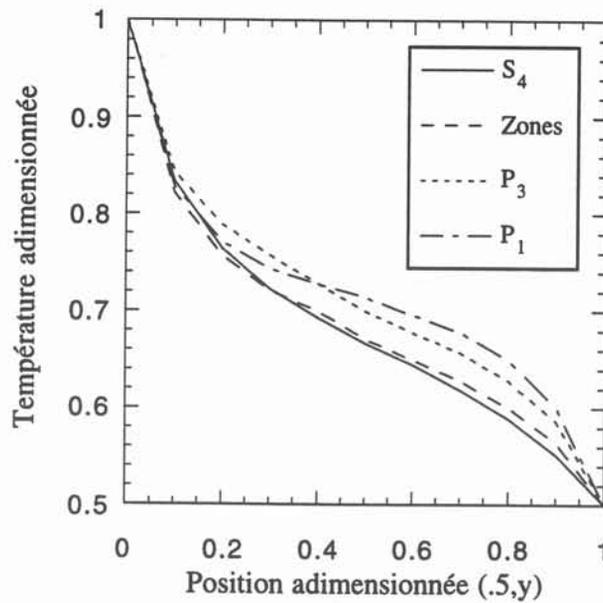
De même que pour l'influence du paramètre de couplage, nous présentons sur les figures 4.6, 4.7 une comparaison entre la méthode S4 que nous avons développée en éléments finis et trois autres méthodes : la méthode P1, la méthode P3 et la méthode des zones pour différentes valeurs de  $\epsilon$ . Ces figures représentent les profils de la température le long du plan médian vertical de la cavité.

Pour les faibles valeurs d'émissivité ( $\epsilon = 0.25$ ), les approximations P1 et P3 donnent des résultats très proches. La méthode S4 donne des résultats très proches de ces dernières dans les régions voisines de la paroi chaude uniquement. Ensuite elle sous-évalue les températures par rapport à ces deux méthodes et aussi par rapport à la méthode des zones qui elle surévalue les températures des régions chaudes.

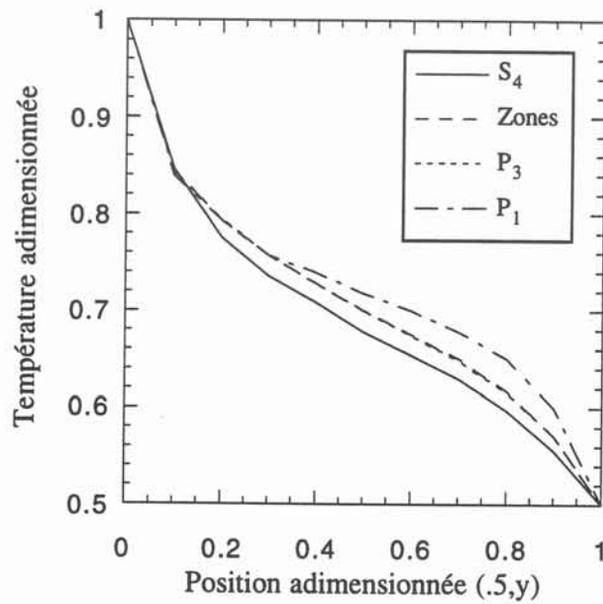
Pour des émissivités de l'ordre de 0,5, nous remarquons que la méthode S4 et la méthode des zones sont en très bon accord. Les approximations P1 et P3 par contre qui donnent des résultats très voisins, surévaluent les températures au voisinage des parois froides (maximum 5% pour l'approximation P3 par rapport aux méthodes S4 ou des zones, et d'avantage, maximum 9% pour l'approximation P1).

Pour des émissivités de 0,75, nous observons tout d'abord un très bon accord entre la méthode des zones et l'approximation P3. La méthode S4 quant à elle est en bon accord avec ces deux dernières puisqu'elle ne sous-évalue que très légèrement les températures (maximum 2.5%). En revanche l'approximation P1 surévalue les températures dans les régions froides.

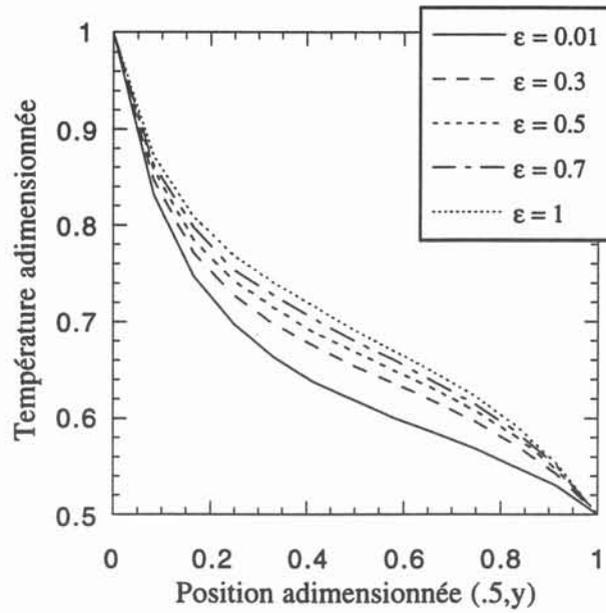
La figure 4.8 représente le profil des températures sur le plan médian vertical en fonction de l'émissivité des parois. On remarque que l'émissivité a beaucoup d'influence sur le champ de température. Lorsque l'émissivité des parois diminue, les températures des régions proches de la paroi chaude diminuent. En augmentant l'émissivité, les parois émettent du rayonnement, elles fournissent ainsi de l'énergie au milieu, ce qui l'échauffe (figure 4.9).

a)  $\varepsilon = 0.25$ b)  $\varepsilon = 0.5$ 

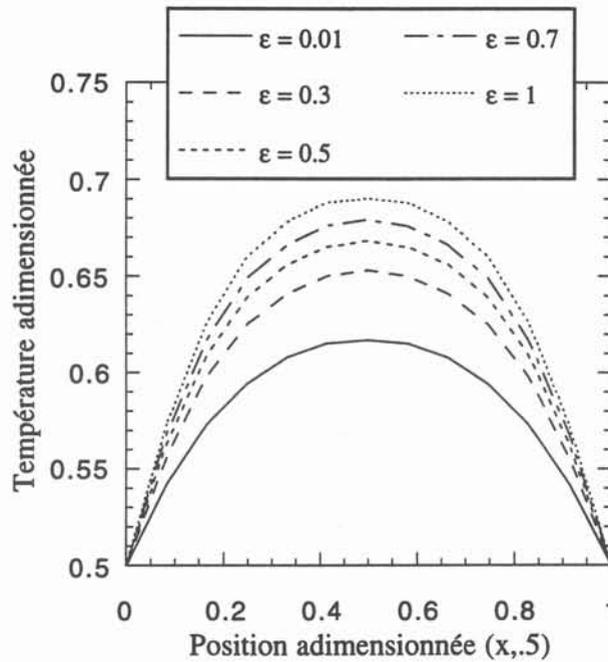
**Figure 4.6** : comparaison de la méthode S4 développée avec la méthode des zones, et les approximations P1 et P3, sur la distribution de la température sur le plan médian vertical, pour différentes valeurs de l'émissivité des faces.



**Figure 4.7** : comparaison de la méthode  $S_4$  développée avec la méthode des zones, et les approximations  $P_1$  et  $P_3$ , sur la distribution de la température sur le plan médian vertical, pour une émissivité des faces égale à 0.75.



**Figure 4.8 :** profils de température sur le plan médian vertical en fonction de l'émissivité des parois.



**Figure 4.9 :** profils de température sur le plan médian horizontal en fonction de l'émissivité des parois.

### V.1.1.3 - Influence de l'albedo

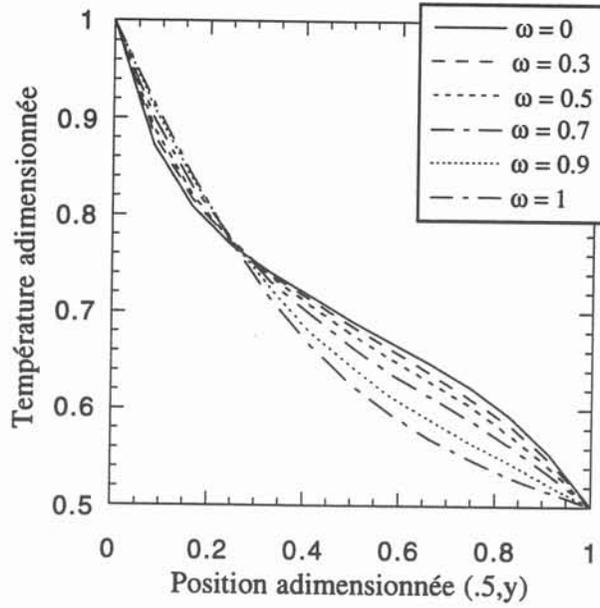
L'enceinte est carrée de côté 10 mm, à parois noires. Le milieu est émissif et absorbant. Il est de plus diffusant isotrope. Son épaisseur optique est égale à l'unité. Sa conductivité thermique est prise égale à 0,051 W/mK. On définit un coefficient adimensionnel appelé albedo du milieu noté  $\omega$ , comme le rapport de l'énergie diffusée à la diminution d'énergie par absorption et diffusion :

$$\omega = \frac{\sigma}{a+\sigma} = \frac{\sigma}{K} \quad (4.19)$$

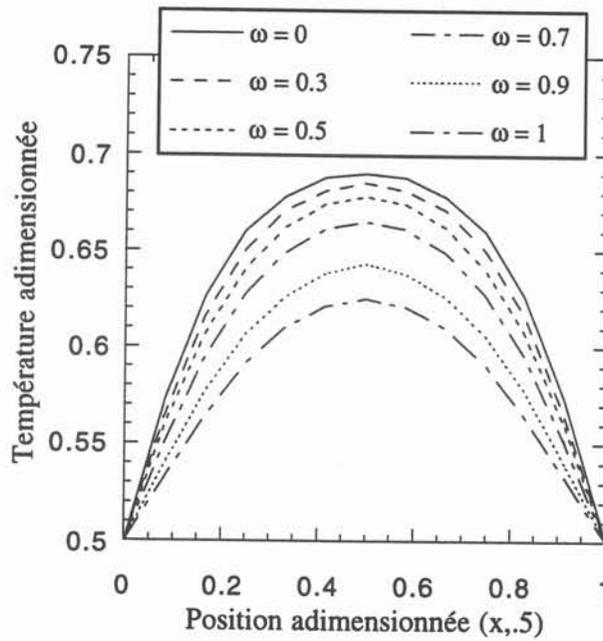
Ainsi lorsque  $\omega = 0$  nous sommes en présence d'un milieu purement absorbant, lorsque  $\omega = 1$  le milieu est purement diffusant.

Lorsque le milieu est purement diffusant, la divergence du flux radiatif est nulle et on retrouve le champ de température de la conduction pure (figure 4.10). En diminuant la valeur de l'albedo le milieu devient de plus en plus absorbant, il transforme ainsi l'énergie radiative absorbée en énergie thermique qui a pour effet d'échauffer le milieu, ce qui se traduit par une augmentation du champ de température (figure 4.11). On constate que l'évolution globale du champ de température dans le milieu se fait de manière plus significative pour les valeurs de  $\omega$  voisines de un, alors que pour les faibles valeurs de l'albedo cette évolution est plus lente.

Par ailleurs, on observe qu'une diminution de l'albedo se traduit par un échauffement de la région froide et un refroidissement du côté de la face chaude (figure 4.10), résultant du fait que le rayonnement tend à uniformiser le champ de température dans la région centrale, lorsque le milieu devient plus absorbant.



*Figure 4.10* : profils de température sur le plan médian vertical en fonction de l'albédo.



*Figure 4.11* : profils de température sur le plan médian horizontal en fonction de l'albédo.

#### V.1.1.4 - Influence du rapport de forme $r$

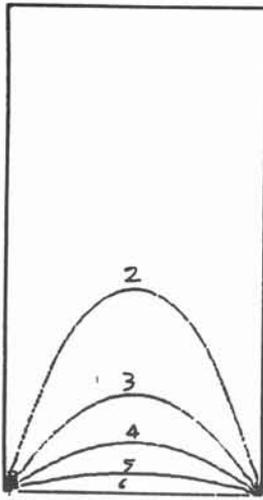
L'enceinte est de forme rectangulaire, à parois noires. Le milieu est non diffusant, d'épaisseur optique égale à l'unité. Le paramètre de couplage est fixé à  $N = 0,01$  d'où une conductivité thermique égale à  $0,051 \text{ W/mK}$ . On maintient la hauteur de l'enceinte constante égale à  $10 \text{ mm}$  et on fait varier la longueur pour voir l'influence des parois verticales sur le champ de température.

Sur la figure 4.12 représentant les isothermes, on constate que plus  $r$  augmente plus la température croît vers la paroi froide et que les gradients thermiques augmentent aux parois.

On remarque que lorsque l'enceinte est étroite ( $r < 1$ ), les parois verticales étant plus proches l'une de l'autre (figure 4.12), absorbent beaucoup d'énergie, ce qui a pour effet de diminuer le champ de température (figure 4.13). Par contre, lorsque le rapport de forme augmente, les faces verticales sont de plus en plus éloignées. Par suite leur influence sur le plan médian vertical s'affaiblit, et la température continue à augmenter pour approcher le profil du cas monodimensionnel, qui est atteint à partir du rapport de forme  $r = 5$ .

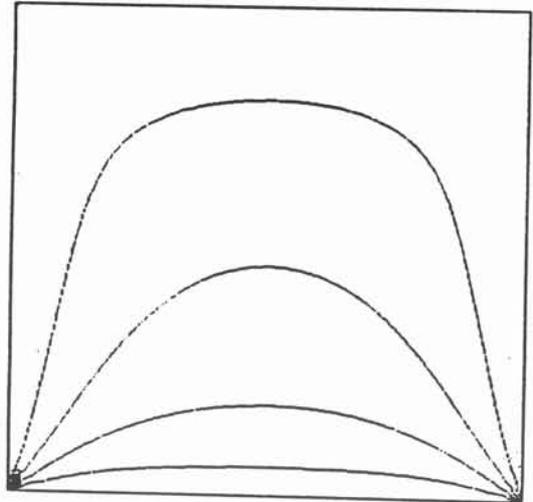
On constate que les changements les plus importants ont lieu pour les valeurs du rapport  $r = 0,5, 1$  et  $2$ . Au delà les variations sont beaucoup plus lentes.

Nos constatations concernant l'influence du rapport de forme sont analogues à celles d'EL WAKIL dans sa thèse [41].

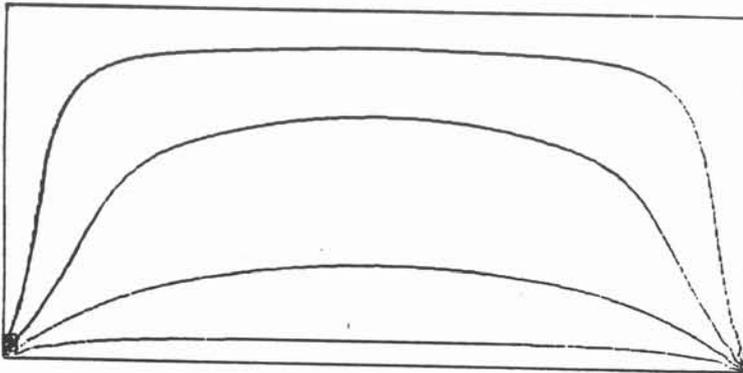


K  
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000

a) isothermes pour  $r = 0.5$



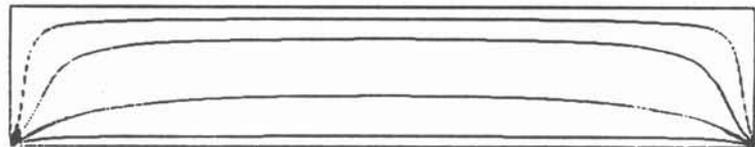
b) isothermes pour  $r = 1$



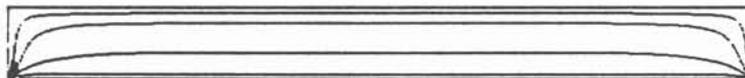
c) isothermes pour  $r = 2$

K  
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000

d) isothermes pour  $r = 5$

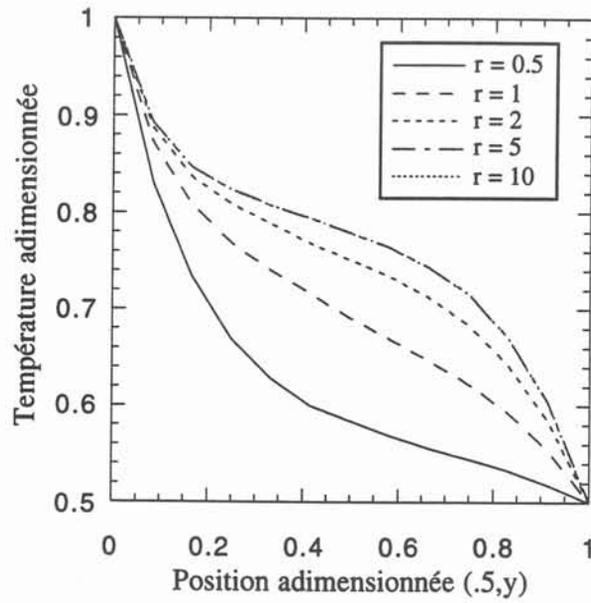


K  
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000



e) isothermes pour  $r = 10$

**Figure 4.12** : influence du rapport de forme  $r$  sur le champ de température.

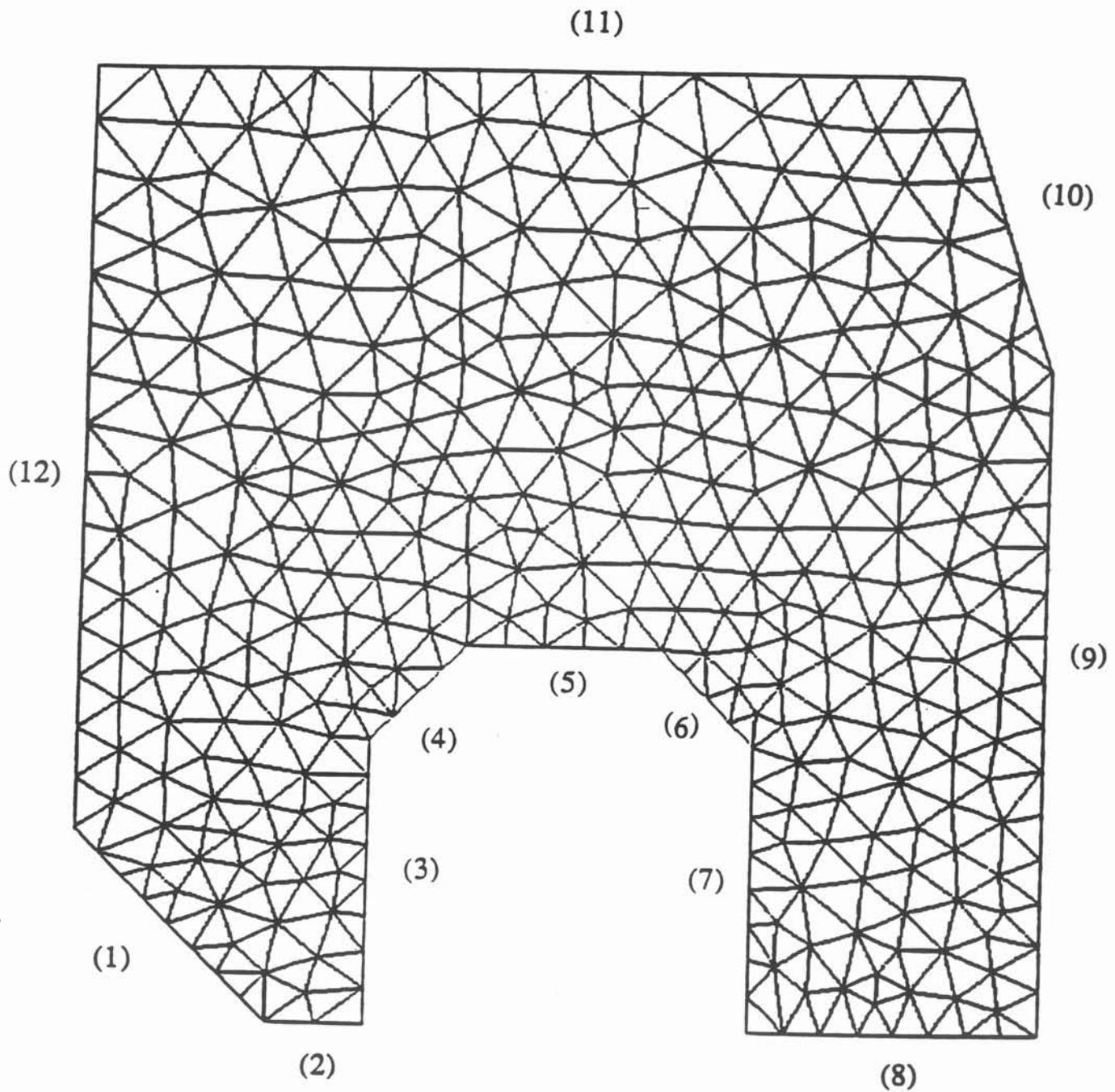


**Figure 4.13** : profils de température sur le plan médian vertical en fonction du rapport de forme de la cavité.

### V.1.2 - Cas d'un domaine de géométrie quelconque

Afin de montrer l'avantage de l'utilisation des éléments finis pour la modélisation du transfert radiatif et de l'équation de la chaleur avec transfert radiatif, nous proposons un cas de géométrie quelconque. Le domaine dont le maillage en triangles ainsi que les conditions aux limites sont représentés sur la figure 4.14 possède des dimensions maximales de 50 mm sur 50 mm. Le modèle de rayonnement est à une bande spectrale de largeur  $4 \mu\text{m}$  et de longueur d'onde moyenne  $3 \mu\text{m}$ . Le coefficient d'absorption est choisi égal à  $1 \text{ cm}^{-1}$ , le milieu est supposé non diffusant et d'indice de réfraction égal à 1,5. La conductibilité thermique moléculaire est fixée à  $0,051 \text{ W/mK}$ .

Nous présentons les isothermes obtenues en conduction pure, puis avec rayonnement d'une part avec l'ensemble des parois noires, d'autre part avec une émissivité pour chaque paroi égale à 0.1 (figure 4.15). On remarque à la vue des isothermes présentées, l'influence du rayonnement par rapport au cas réalisé en conduction pure, ainsi que pour les deux séries d'isothermes présentées dans les essais avec rayonnement, l'influence de l'émissivité des faces. Si en conduction pure, les isothermes sont réparties d'une manière uniforme dans le milieu, avec rayonnement elles sont plus rapprochées au niveau des parois leur infligeant un gradient thermique plus important dans leur voisinage et tendant à uniformiser la température dans la région centrale.

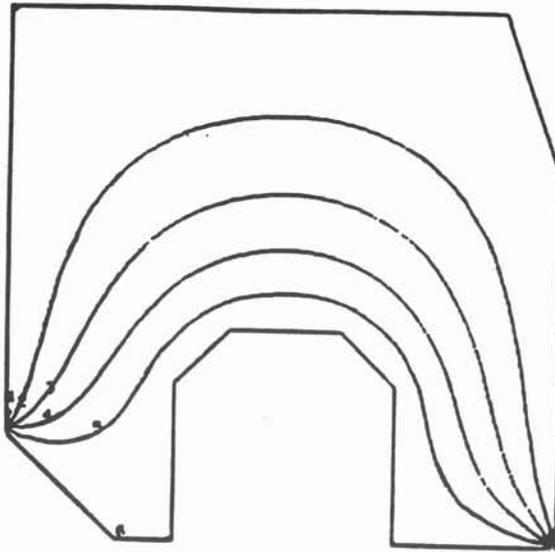


*Températures imposées aux parois :*

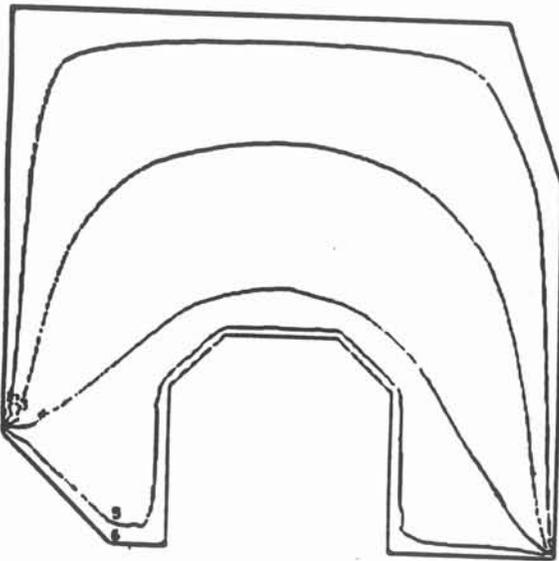
sur les faces 1 à 8 :  $T = 1000 \text{ K}$   
 sur les faces 9 à 12 :  $T = 500 \text{ K}$

**Figure 4.14 :** configuration, conditions aux limites et maillage du domaine de géométrie quelconque.

K  
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000

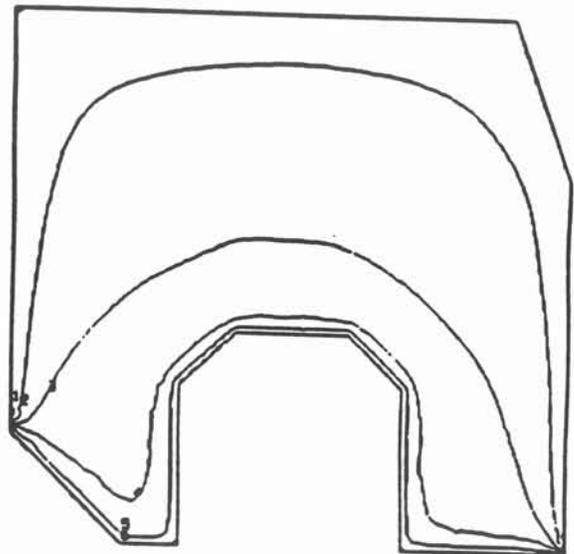


a) conduction pure



b)  $\epsilon = 1$

K  
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000



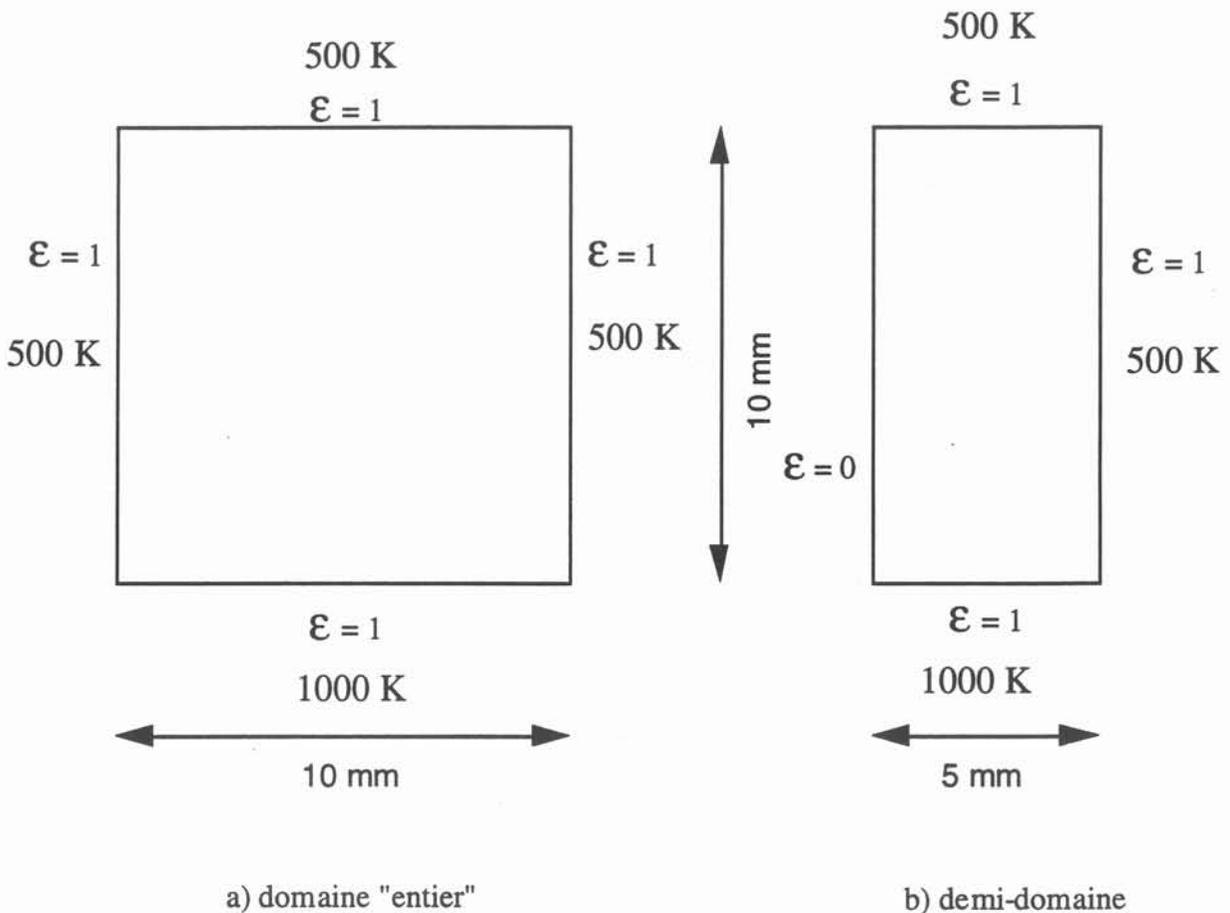
c)  $\epsilon = 0.1$

**Figure 4.15** : représentation des isothermes obtenues dans le cas de la géométrie quelconque :

- a) en conduction pure,
- b) avec transfert radiatif pour une valeur d'émissivité des parois égale à 1,
- c) avec transfert radiatif pour une valeur d'émissivité des parois égale à 0.1.

### V.1.3 - Validation de la possibilité d'imposer des conditions aux limites de type NEUMANN homogène

La possibilité d'imposer le long d'une frontière une condition de type NEUMANN homogène c'est à dire un flux nul ( $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ ) présente l'avantage de pouvoir modéliser une configuration présentant un plan de symétrie en ne décrivant qu'un demi-domaine. Le principe du point de vue du transfert radiatif est d'imposer sur la face une condition aux limites du type réflexion spéculaire. Nous proposons la comparaison de deux cas dont les configurations géométriques ainsi que les conditions aux limites sont représentés sur la figure 4.16.



**Figure 4.16** : configurations géométriques et conditions aux limites en thermique pour les cas permettant la validation des conditions de type NEUMANN homogène sur une frontière du domaine.

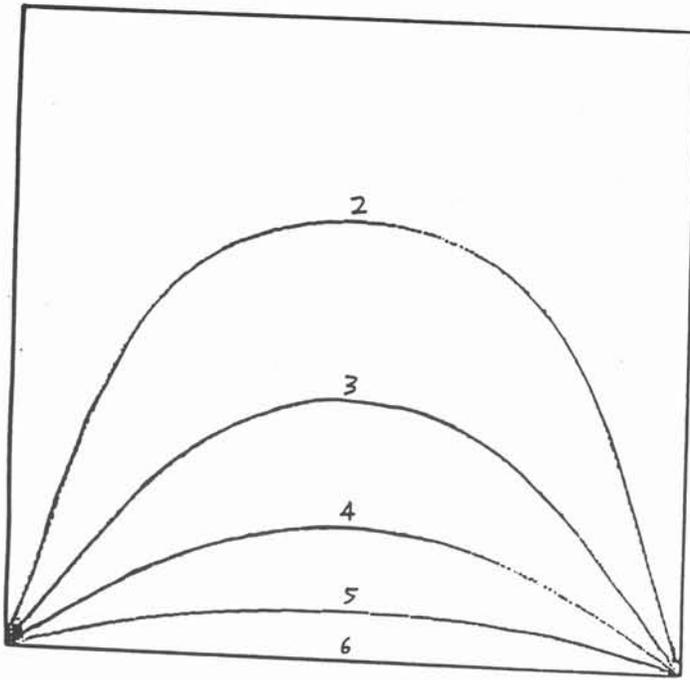
- Le premier cas consiste au calcul thermique plus rayonnement pour un milieu participant confiné dans une enceinte carrée de 10 mm de côté avec parois à températures imposées : 1000 K en bas et 500 K sur les autres faces, les faces sont toutes d'émissivité égale à 1.
- Le deuxième cas consiste au calcul thermique avec transfert radiatif pour un milieu participant ayant les mêmes propriétés que le premier mais confiné dans une enceinte rectangulaire de largeur 5 mm, de hauteur 10 mm, dont trois de ses faces sont d'une part à températures imposées : 1000 K en bas, 500 K sur la paroi de droite et sur celle du haut, d'autre part d'émissivité égale à l'unité, et la face de gauche possède la condition aux limites  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$  et une émissivité nulle : il s'agit d'une face purement réfléchissante. En ce qui concerne le milieu semi-transparent, sa conductibilité thermique moléculaire est choisie égale à 0,227 W/mK, le modèle de transfert radiatif est à une bande spectrale de largeur 4  $\mu\text{m}$  de longueur d'onde moyenne 3  $\mu\text{m}$ , le coefficient d'absorption est choisi égal à 3  $\text{cm}^{-1}$ , le milieu est non diffusant et son indice de réfraction est fixé à 1,5.

Nous présentons pour les deux cas les isothermes sur la figure 4.17 : nous constatons que les isothermes obtenues dans le cas avec  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$  correspondent exactement à la demi-configuration des isothermes représentées dans le cas où toutes les faces sont à températures imposées. La figure 4.18 est destinée à montrer sur un même graphe le profil de température obtenu le long du plan médian vertical dans le domaine entier, et celui obtenu le long du plan vertical d'abscisse nul pour le demi cas. Les deux courbes sont superposables, c'est pourquoi on ne distingue qu'une seule courbe sur le graphe.

Nous présentons aussi dans les deux cas sous forme d'une représentation en élévation les valeurs dans le milieu de l'opposé de la divergence du flux radiatif qui correspond précisément à la puissance radiative volumique calculée par la résolution de l'équation du transfert radiatif (figures 4.19a et 4.19b).

Il est logique d'observer que l'une des représentations correspond exactement à la moitié de l'autre. Il est intéressant de noter que les valeurs de puissance varient dans un intervalle très important puisqu'elles s'échelonnent entre  $-0,297 \cdot 10^8 \text{W/m}^3$  et  $0,97 \cdot 10^7 \text{W/m}^3$ . Le gradient de puissance au niveau de la paroi chaude est fort puisque c'est à ce niveau là et sur quelques millimètres seulement que toute la variation a lieu. Près de la paroi chaude, le milieu semi-transparent est chaud, il émet donc beaucoup de rayonnement. Ce rayonnement est très vite absorbé par le milieu environnant, s'agissant là d'un milieu optiquement épais puisque le coefficient d'extinction est égal à 3  $\text{cm}^{-1}$ , et que la longueur caractéristique du système étudié est de 1 cm, d'où une épaisseur optique de 3.

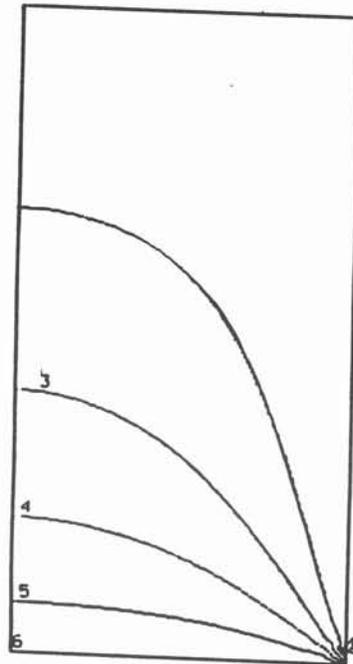
	K
1	= 500
2	= 600
3	= 700
4	= 800
5	= 900
6	= 1000



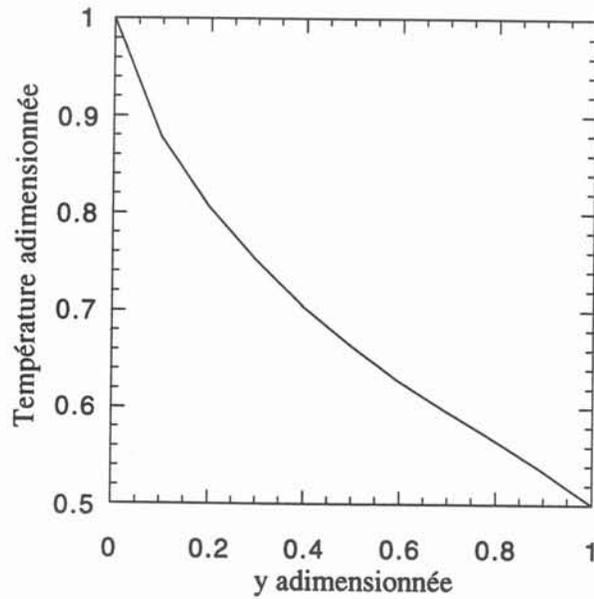
a) isothermes pour le domaine entier

b) isothermes pour le demi-domaine

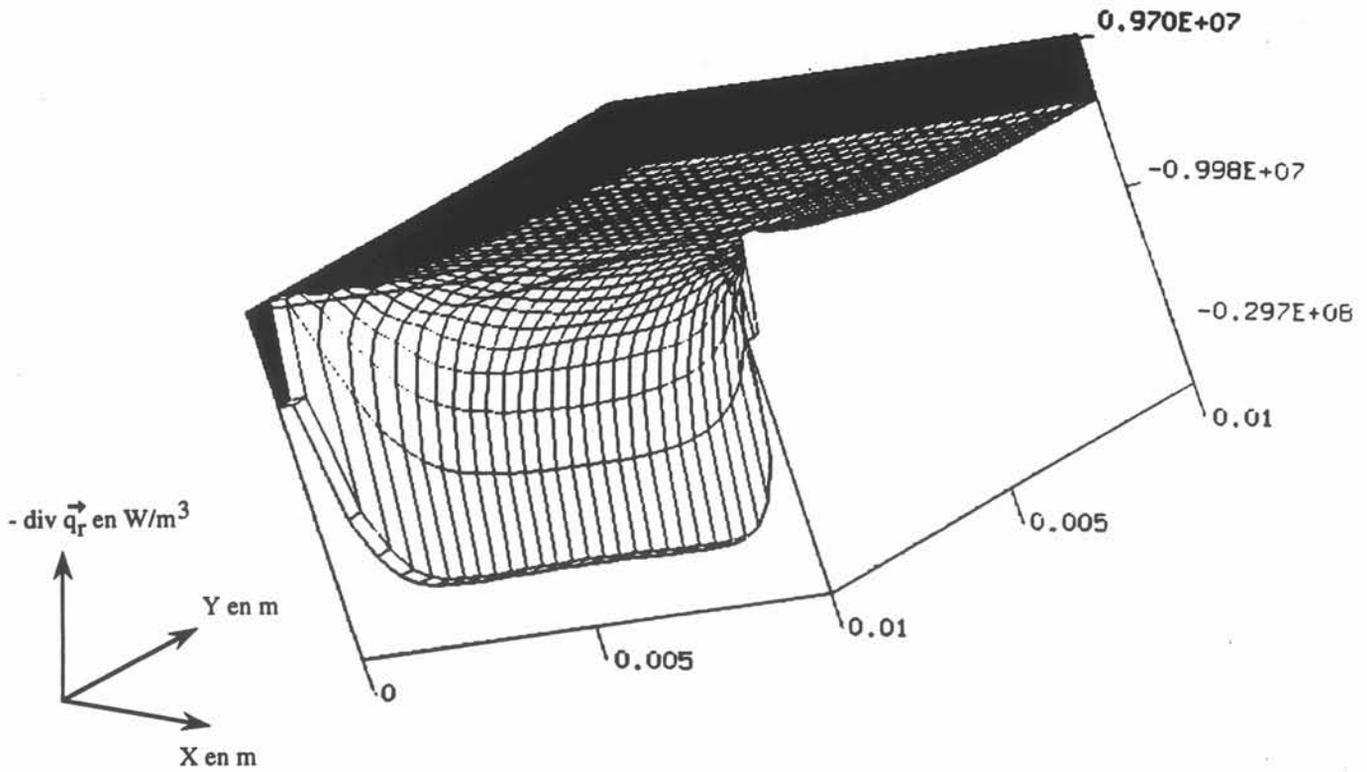
	K
1	= 500
2	= 600
3	= 700
4	= 800
5	= 900
6	= 1000



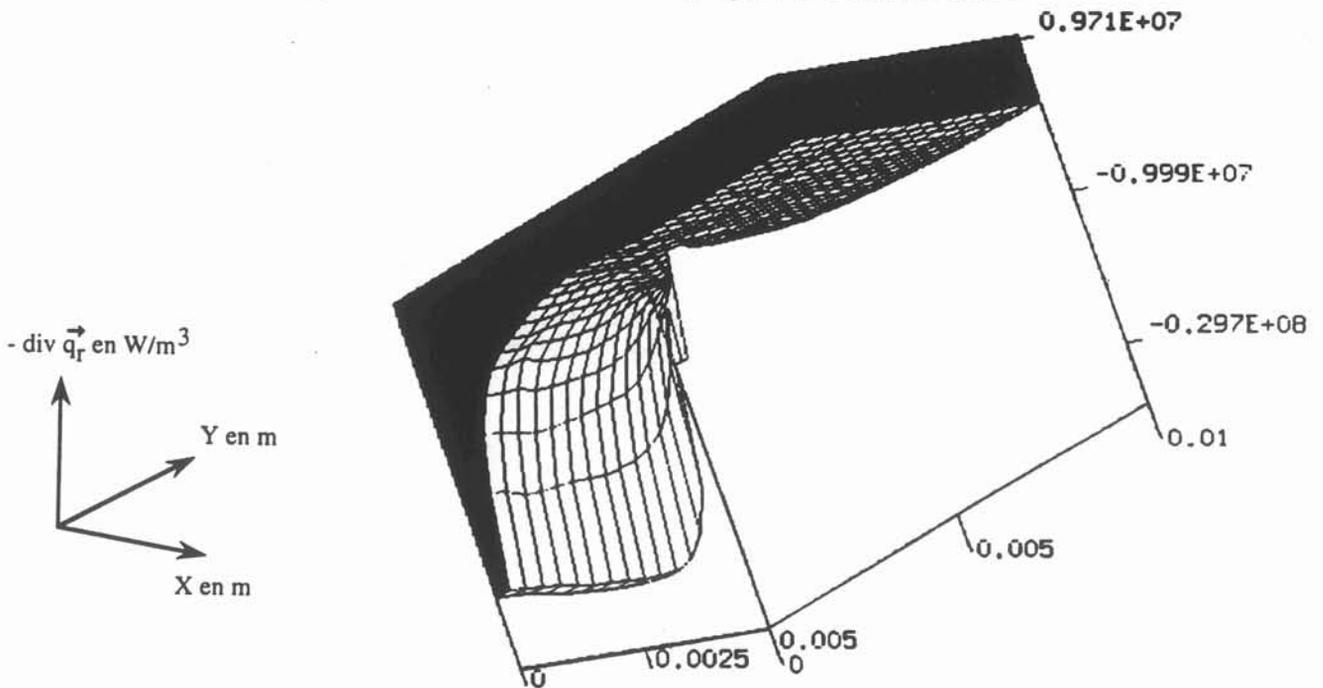
**Figure 4.17** : champ de température pour les deux configurations permettant la validation des conditions de type NEUMANN homogène.



**Figure 4.18** : profils de température obtenus après la résolution thermique avec transfert radiatif d'une part le long du plan médian vertical dans le domaine "entier", d'autre part le long du plan vertical d'abscisse nulle pour la demi-configuration. On ne voit sur le graphe qu'une seule courbe, en fait il s'agit des deux courbes mais elles sont parfaitement superposables.



a) Puissance radiative volumique pour le domaine entier.



b) Puissance radiative volumique pour le demi-domaine.

**Figure 4.19** : puissance radiative volumique pour les deux configurations permettant la validation de l'utilisation de conditions aux limites de type NEUMANN homogène.

### V.1.4 - Cas monodimensionnels

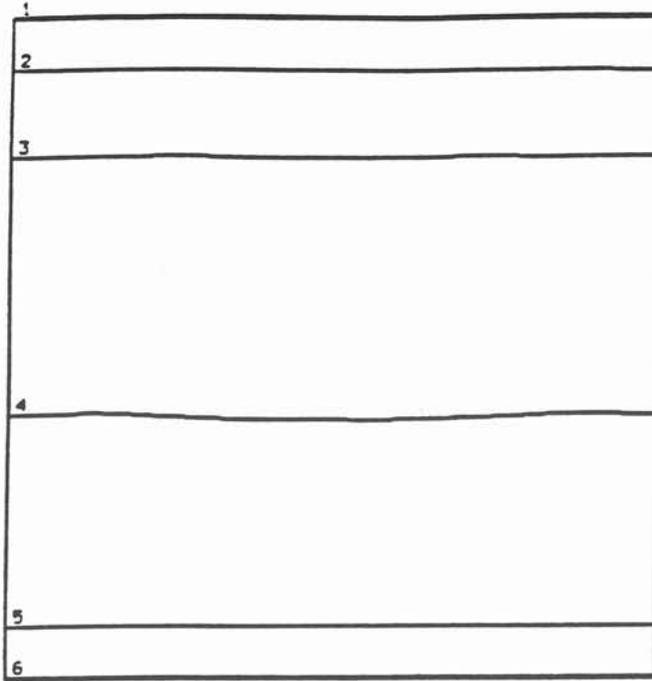
Nous venons de présenter la possibilité d'imposer une condition de type  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$  sur une des faces du domaine. Un cas monodimensionnel est obtenu en imposant cette condition sur deux faces en regard alors que les deux autres sont à températures imposées.

Nous proposons de montrer la validité du modèle à bandes ainsi qu'un cas avec des températures imposées sur deux faces plus élevées que ce que nous avons présenté jusqu'alors, cela en géométrie monodimensionnelle.

#### V.1.4.1 - Test du modèle à bandes

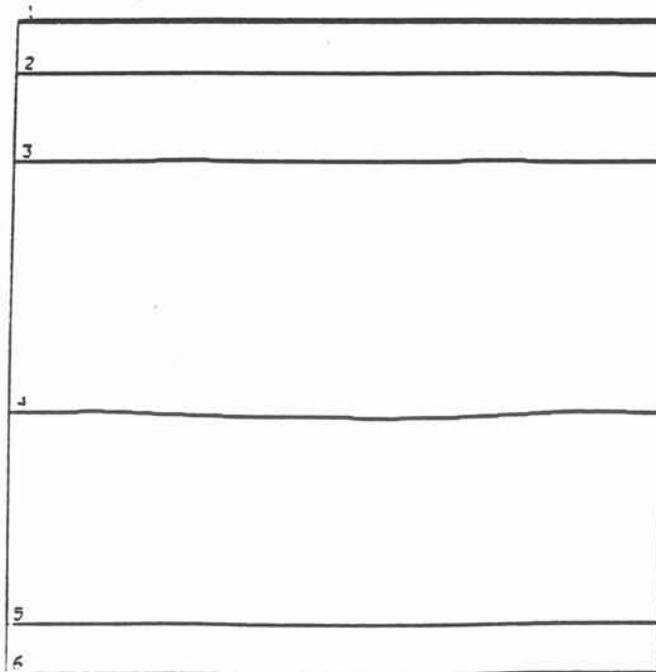
Afin de valider le modèle à bandes nous comparons les champs de température obtenus d'une part pour un milieu semi-transparent dont les propriétés radiatives sont décrites sur une bande spectrale de largeur  $4 \mu\text{m}$  ayant pour valeur de longueur d'onde moyenne  $3 \mu\text{m}$ , d'autre part pour le même milieu mais cette fois avec ses propriétés radiatives décrites sur deux bandes spectrales chacune de largeur  $2 \mu\text{m}$  et dont la valeur moyenne de longueur d'onde est pour chacune d'elles de  $3 \mu\text{m}$ . Dans les deux cas le coefficient monochromatique d'absorption est égal à  $1 \text{ cm}^{-1}$ , le milieu est supposé non diffusant et l'indice de réfraction monochromatique est fixée à 1,5. La conductibilité thermique moléculaire du milieu est prise égale à  $0,051 \text{ W/mK}$ . Le domaine de calcul est un carré de  $10 \text{ mm}$  de côté, la température sur la face inférieure est de  $1000 \text{ K}$ , celle sur la face supérieure est de  $500 \text{ K}$ , et les émissivités de ces deux faces sont prises égales à 1. Sur les deux autres faces nous donnons la condition aux limite  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$  ainsi qu'une émissivité égale à 0.

Les isothermes représentées sur les figures 4.20a et 4.20b sont parfaitement superposables ce qui montre la validité du modèle à bandes. L'observation des isothermes montre un resserrement de celles-ci vers les parois accompagné d'un élargissement à l'intérieur de la cavité. Cette allure des isovalues témoigne d'un refroidissement du côté de la face chaude, et d'un échauffement du côté de la face froide, ce qui donne lieu à un point d'inflexion dans le profil de température sur le plan médian vertical (figure 4.21). Dans la première moitié la concavité de la courbe est dirigée vers le haut, alors qu'elle est dirigée vers le bas dans l'autre moitié.



K  
 1 = 505  
 2 = 603  
 3 = 701  
 4 = 799  
 5 = 897  
 6 = 995

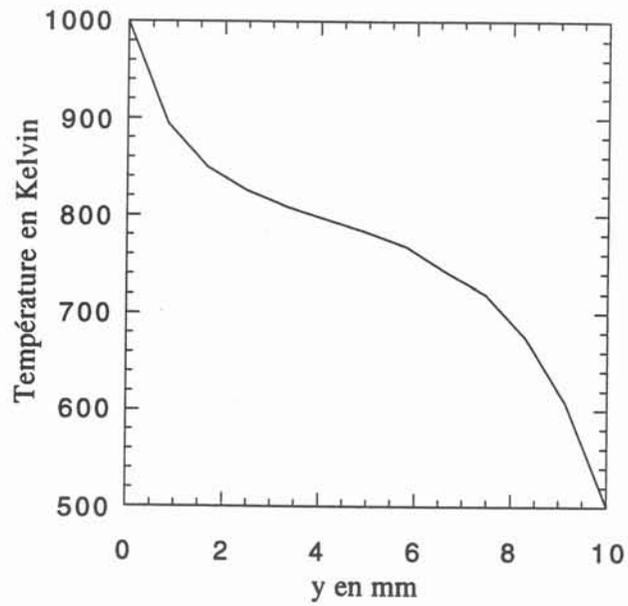
a) Isothermes dans le cas du modèle à une bande.



K  
 1 = 505  
 2 = 603  
 3 = 701  
 4 = 799  
 5 = 897  
 6 = 995

b) Isothermes dans le cas du modèle à deux bandes.

**Figure 4.20** : champs de température obtenus pour les cas monodimensionnels utilisés pour la validation du modèle à bandes.

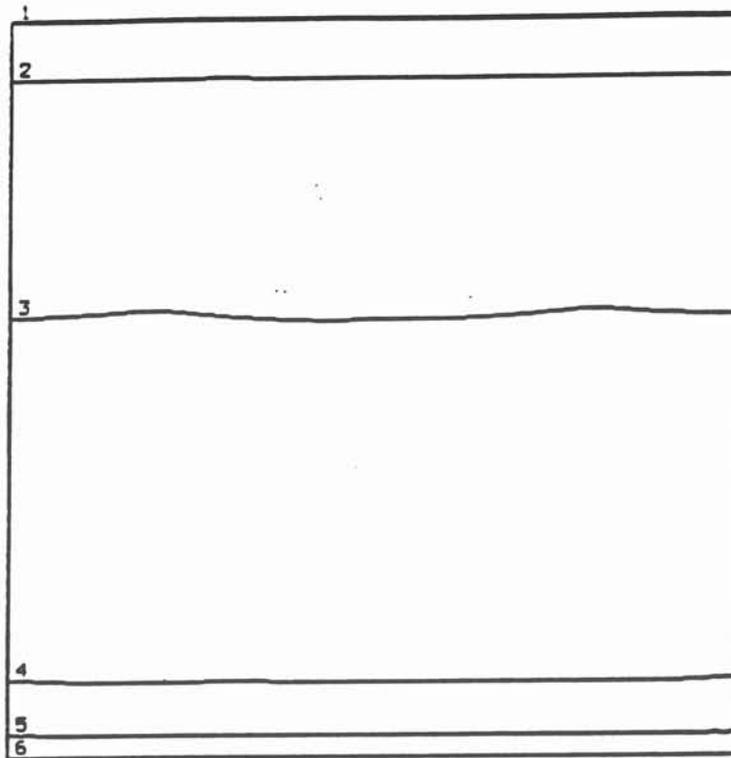


**Figure 4.21** : profils de température sur le plan médian vertical dans les cas monodimensionnels de validation du modèle à bandes : les courbes obtenues pour le modèle à une bande et pour le modèle à deux bandes sont rigoureusement identiques.

#### **V.1.4.2- Modèle 1D avec des températures plus élevées**

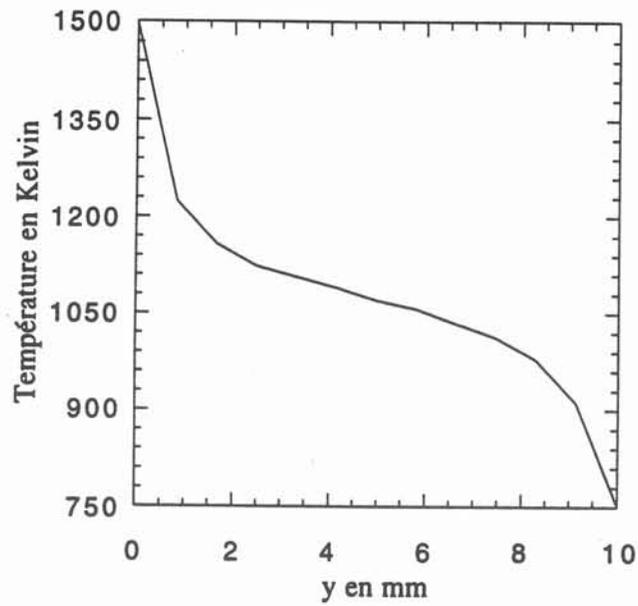
Nous considérons le même milieu semi-transparent que dans le paragraphe ci-dessus décrit avec une bande spectrale. Le domaine de calcul est aussi identique mais les températures imposées sont maintenant de 1500 K sur la face inférieure et de 750 K sur la face supérieure.

Nous présentons les isothermes obtenues ainsi que la courbe de température le long de l'axe médian vertical respectivement sur les figures 4.22a et 4.22b : nous constatons que si les allures générales des isothermes et de la courbe sont identiques à celles obtenues avec des températures plus basses, le gradient thermique au niveau de la paroi chaude est plus important.



K  
1 = 0757  
2 = 0904  
3 = 1051  
4 = 1198  
5 = 1345  
6 = 1492

a) Isothermes.



b) Profil de température sur le plan médian vertical.

**Figure 4.22** : champ de température obtenu dans un cas monodimensionnel dont les températures extrêmes sont 750 K et 1500 K.

## V.2 - Les tests en 2D axisymétrique

Ce paragraphe se compose de deux groupes d'essais : ceux avec conditions aux limites de DIRICHLET, ceux avec des conditions aux limites de flux avec source interne de chaleur imposée.

### V.2.1 - Les tests avec conditions aux limites de type DIRICHLET

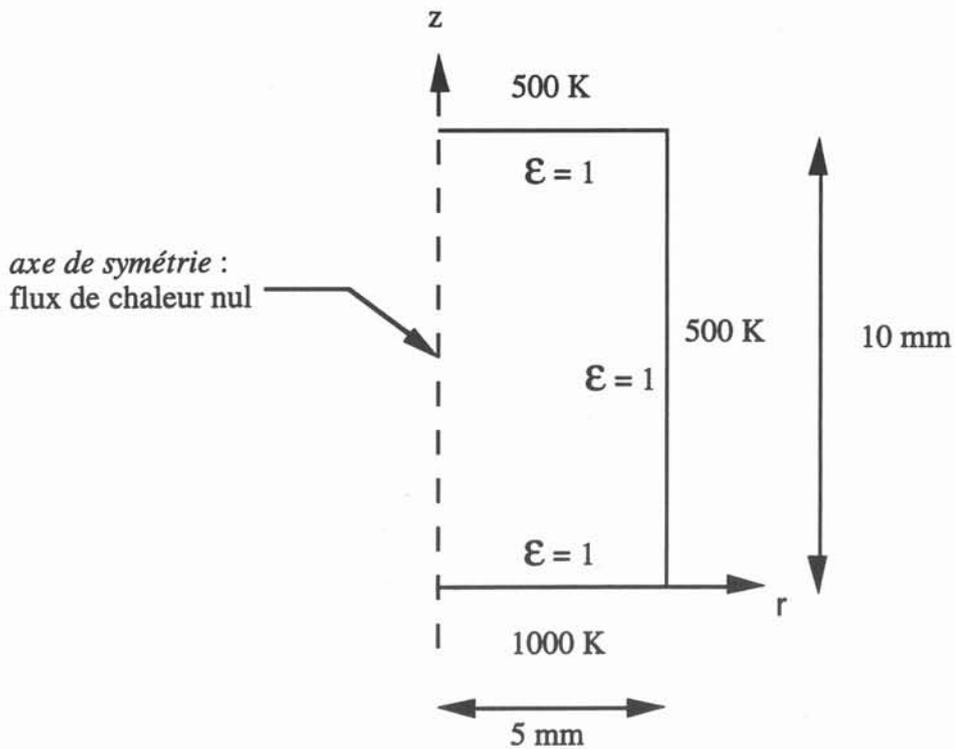
Nous présentons l'influence du paramètre de couplage sur les isothermes. Dans le chapitre III § III.3.2.6 nous mentionnions la possibilité dans le cas où le classement de graphe par niveau ne s'effectuait pas avec des directions volumiques (cas assez rare et uniquement avec des maillages en triangles), pour l'utilisateur d'avoir recours à des directions surfaciques. Aussi présentons-nous dans un cas simple la différence obtenue sur les isothermes à l'aide des deux types de directions. Nous présentons ensuite un essai avec grand rapport de forme, puis l'intérêt de l'utilisation des éléments finis par un test sur une géométrie quelconque. Pour ces derniers tests ainsi que pour celui sur l'influence du paramètre de couplage, les directions discrètes sont volumiques.

#### V.2.1.1 - Influence du paramètre de couplage

Nous rappelons l'expression du paramètre de couplage conduction-rayonnement  $N$  qui traduit la part de rayonnement par rapport à la conduction :

$$N = \frac{k_v K}{4n^2 \sigma_{st} T_o^3} \quad (4.20)$$

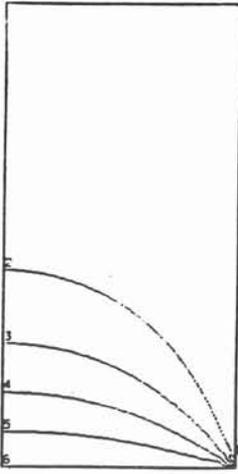
Le domaine considéré est un cylindre de 5 mm de rayon et de 10 mm de hauteur. Il est représenté par un rectangle dont le côté gauche représente l'axe de symétrie, de 5 mm sur 10 mm maillé en 15 x 30 quadrilatères. Nous imposons sur la face du bas une température égale à 1000 K et sur celle de droite ainsi que sur la face supérieure une température de 500 K. Nous considérons les émissivités égales à 1 (figure 4.23).



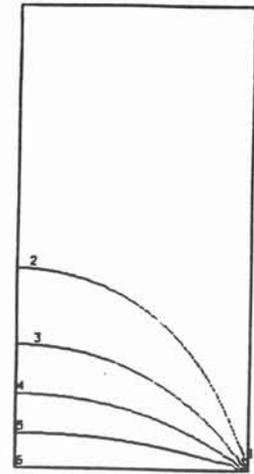
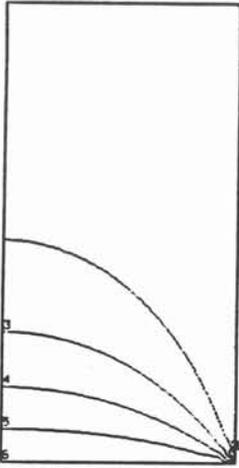
**Figure 4.23** : configuration et conditions aux limites pour l'étude de l'influence du paramètre de couplage, et pour la comparaison directions volumiques-directions surfaciques.

Le milieu semi-transparent est décrit par un modèle à une bande spectrale de largeur  $4 \mu\text{m}$  de longueur d'onde moyenne  $3 \mu\text{m}$ . Le coefficient d'absorption est fixé à  $1 \text{ cm}^{-1}$ , l'indice de réfraction à 1,5 et le milieu est supposé non diffusant. Rappelons que les directions discrètes sont des directions volumiques.

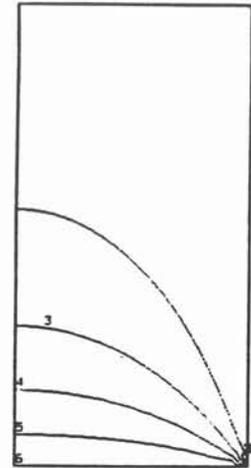
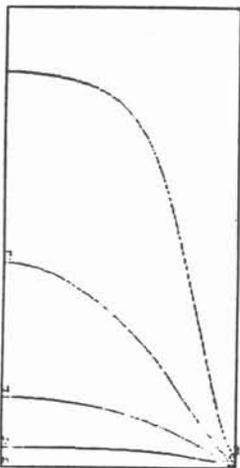
Nous présentons les isothermes obtenues pour six valeurs de  $N$  (figure 4.24). Qualitativement les remarques au sujet de l'influence du paramètre de couplage sur les isothermes sont les mêmes que pour le 2D cartésien à savoir que lorsque  $N$  décroît, la température de la région centrale augmente et que le gradient de température devient plus important dans les régions qui sont proches des faces.



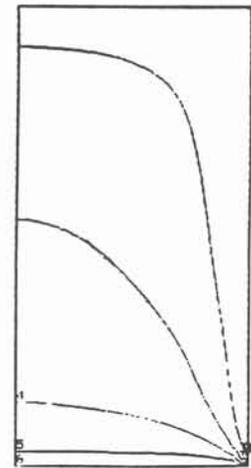
K  
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000

a) isothermes  $N = 1$ b) isothermes  $N = 0.5$ 

K  
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000

c) isothermes  $N = 0.1$ d) isothermes  $N = 0.05$ 

K  
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000

e) isothermes  $N = 0.01$ f) isothermes  $N = 0.005$ 

**Figure 4.24** : influence du paramètre de couplage  $N$  sur le champ de température.

### V.2.1.2 - Comparaison entre les directions volumiques et les directions surfaciques

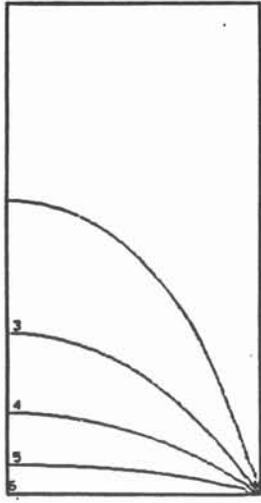
Dans certains cas, l'utilisateur du code peut s'il le désire utiliser des directions surfaciques pour des raisons que nous ne précisons pas ici.

Le cas choisi pour la comparaison des résultats obtenus d'une part avec l'utilisation de directions volumiques, d'autre part avec l'utilisation de directions surfaciques est représenté sur la figure 4.23, avec ses conditions aux limites.

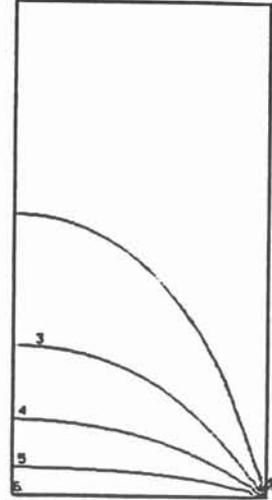
Les propriétés physiques du milieu considéré sont les suivantes :

- modèle à une bande spectrale de largeur  $4 \mu\text{m}$  et de longueur d'onde moyenne  $3 \mu\text{m}$ ,
- coefficient d'absorption égal à  $3 \text{ cm}^{-1}$ ,
- coefficient de diffusion nul,
- indice de réfraction égal à 1,5,
- conductibilité thermique moléculaire égale à  $0,227 \text{ W/mK}$ .

La présentation des isothermes (figure 4.25a), ainsi que des courbes de température le long de l'axe de symétrie (figure 4.25b) montre une très légère sous-estimation de la température surtout dans la région centrale (environ 1%). Ceci est normal dans la mesure où les distances qui interviennent dans le cas de l'utilisation des directions volumiques 3D sont des distances réelles alors qu'avec les directions surfaciques, il s'agit de distances déterminées par des intersections dans le plan  $(0,r,z)$ ; ces distances sont donc sous-estimées par rapport aux distances réelles. Aussi n'est-il pas surprenant d'obtenir une sous-estimation du transfert radiatif. Précisons que l'utilisation des directions surfaciques constitue uniquement une possibilité pour le cas où un maillage triangulaire poserait des problèmes avec des directions volumiques mais dans ce cas une possibilité est de le modifier en mettant plus ou moins de mailles. Il est à noter aussi que globalement il est rare qu'un problème se pose avec les directions volumiques.



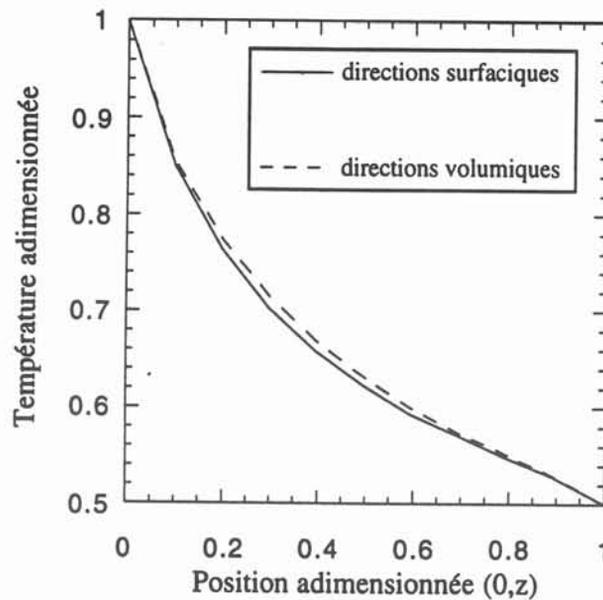
$k$   
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000



Directions volumiques.

Directions surfaciques.

a) Représentation des isothermes.



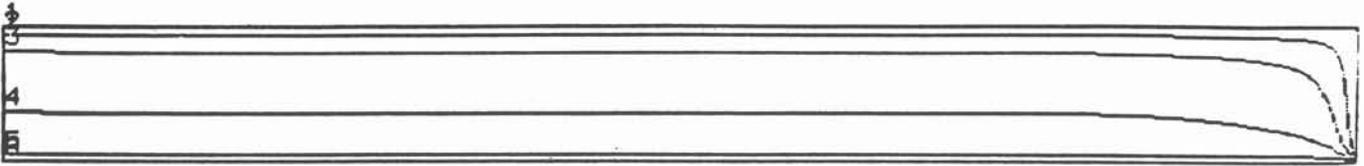
b) Profils de température le long de l'axe de symétrie.

**Figure 4.25** : comparaison des champs de température obtenus par une résolution de l'équation du transfert radiatif : d'une part à l'aide de directions discrètes volumiques, d'autre part avec des directions discrètes surfaciques.

### V.2.1.3 - Cas d'un grand rapport de forme

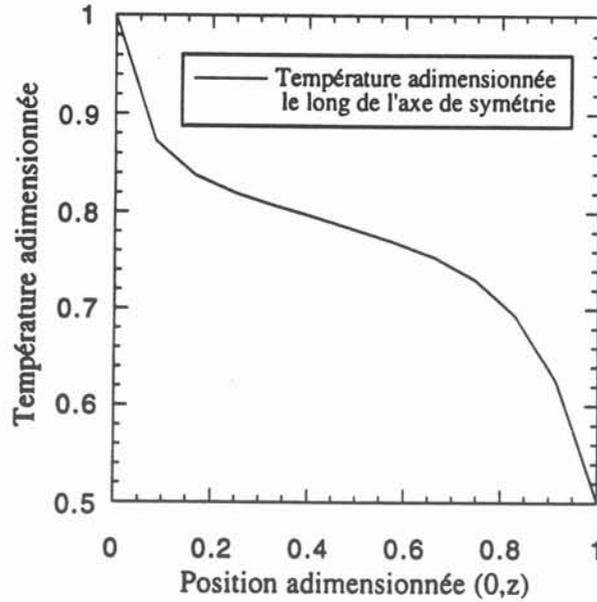
Le domaine choisi est de 100 mm de long sur 10 mm de hauteur, cela correspond à un cylindre de 200 mm de diamètre sur 10 mm de hauteur. Nous imposons la température : 1000 K sur la face inférieure, 500 K sur les faces de droite et supérieure. Les émissivités sont prises égales à 1 sur les trois faces, le modèle est à une bande spectrale de largeur 4  $\mu\text{m}$  et de longueur d'onde moyenne 3  $\mu\text{m}$ , le coefficient d'absorption est pris égal à  $1 \text{ cm}^{-1}$ , l'indice de réfraction à 1,5, et la diffusion nulle. La conductivité thermique moléculaire est fixée à 0,051 W/mK. Le maillage est en quadrilatères : 100 x 10. Les directions sont volumiques.

Nous présentons les isothermes (figure 4.26a) qui laissent nettement apparaître leur resserrement près des parois et la courbe de température le long de l'axe de symétrie (figure 4.26b) qui montre bien les gradients importants au niveau des parois et la tendance à une homogénéisation de la température dans la partie centrale.



	K
1	= 500
2	= 600
3	= 700
4	= 800
5	= 900
6	= 1000

a) Représentation des isothermes.



b) Profil de température le long de l'axe de symétrie.

**Figure 4.26** : champ de température obtenu dans le cas d'un milieu semi-transparent de forme cylindrique, ayant un rayon égal à dix fois la hauteur.

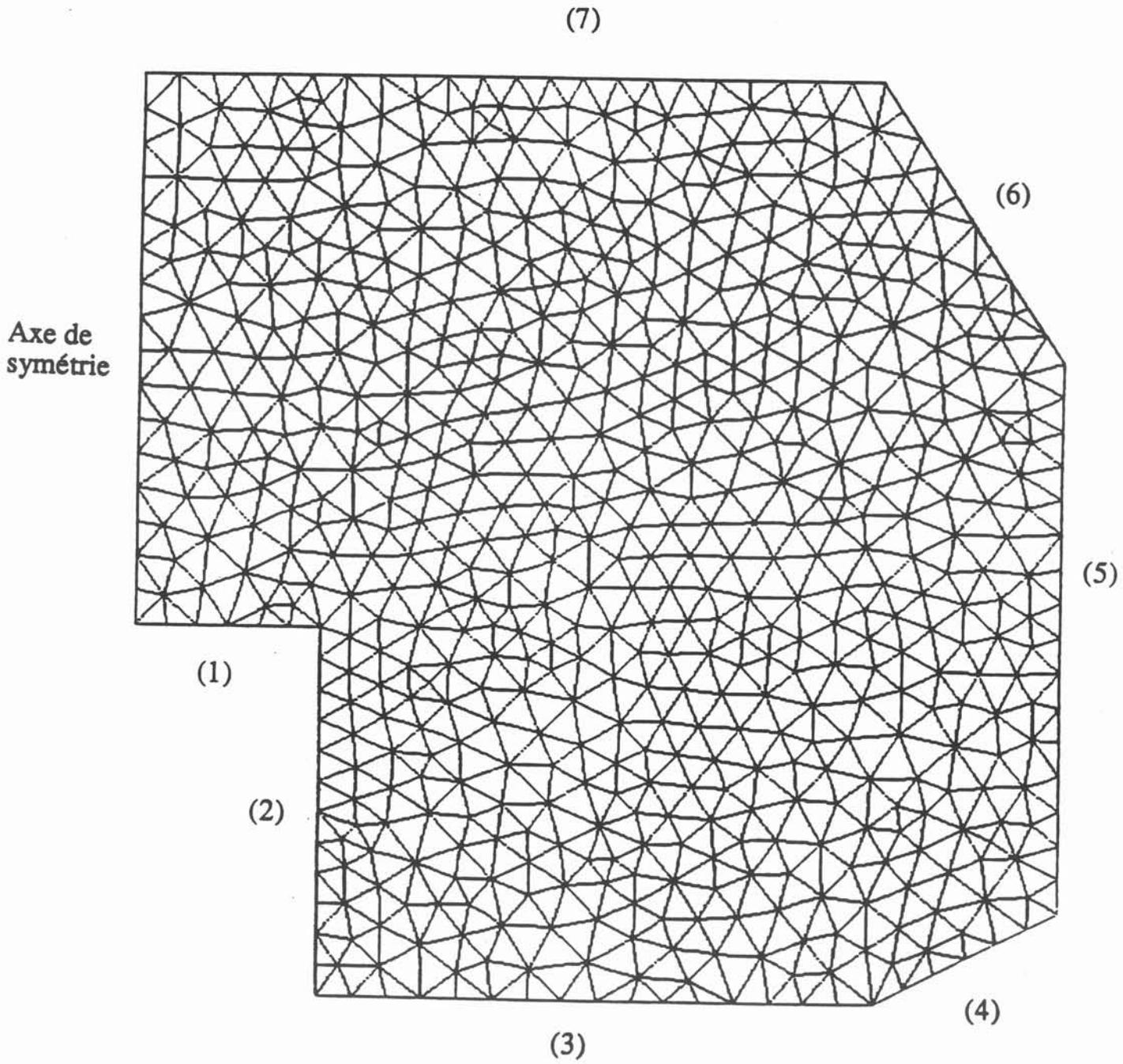
#### V.2.1.4 - Cas d'une géométrie quelconque

La géométrie du domaine, le maillage utilisé ainsi que les conditions aux limites sont présentés sur la figure 4.27. Les dimensions maximales sont de 50 mm pour la hauteur comme pour la largeur du domaine. Les directions sont volumiques. Le modèle de rayonnement interne est à 1 bande spectrale de largeur  $4\mu\text{m}$  et de valeur moyenne de longueur d'onde  $3\mu\text{m}$ , le coefficient d'absorption est pris égal à  $1\text{ cm}^{-1}$ , l'indice de réfraction à 1,5, la diffusion nulle et la conductibilité thermique moléculaire est égale à  $0,051\text{ W/mK}$ .

Nous présentons les isothermes (figure 4.28) pour trois cas :

- un cas en conduction pure,
- un cas où nous fixons l'émissivité des faces égale à 1,
- un cas où nous fixons l'émissivité des faces égale à 0,1.

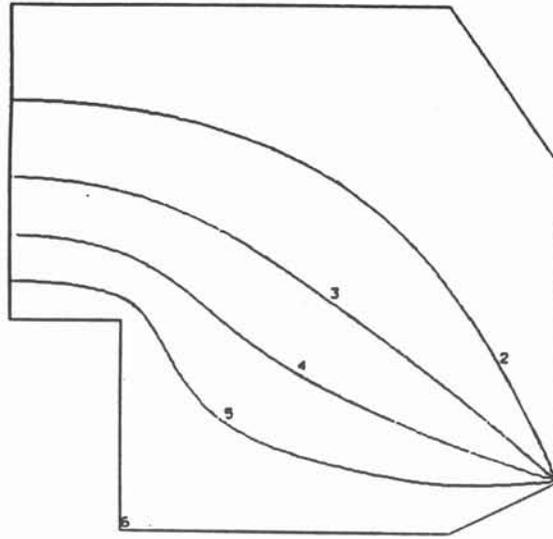
On constate une nette différence entre l'essai en conduction pure où les isothermes sont réparties de manière à peu près uniforme et les essais avec rayonnement où les isothermes se resserent près des parois pour s'élargir au centre du domaine. En ce qui concerne l'influence de l'émissivité des faces, on remarque avec la diminution de l'émissivité une diminution des températures proches des parois chaudes et une augmentation des températures dans les parties proches des parois froides. En effet la réflexion sur ces parois provoque une plus grande absorption dans leur région, ce qui conduit à une augmentation des températures dans les parties qui leur sont proches.



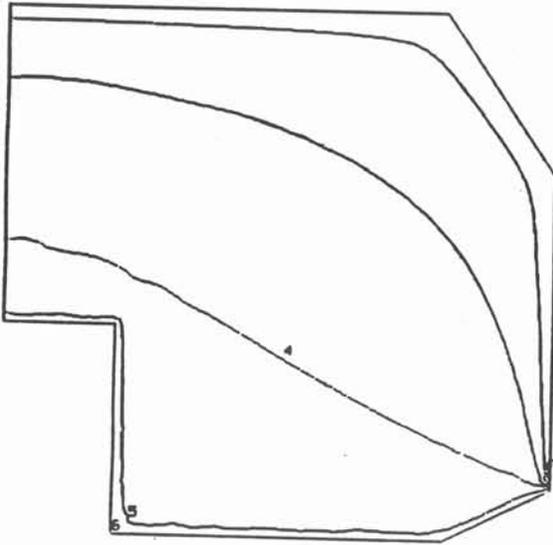
Températures imposées aux parois :  
 sur les faces 1, 2, 3, 4 :  $T = 1000 \text{ K}$   
 sur les faces 5, 6, 7 :  $T = 500 \text{ K}$

**Figure 4.27** : configuration, conditions aux limites et maillage du domaine de géométrie quelconque.

$K$   
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000

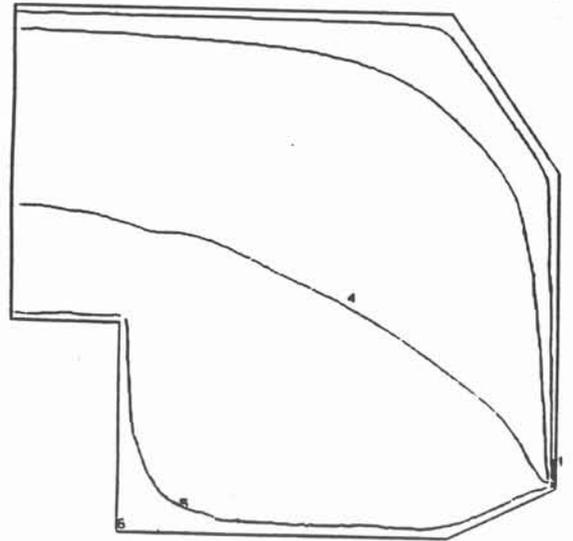


a) conduction pure



b)  $\epsilon = 1$

$K$   
 1 = 500  
 2 = 600  
 3 = 700  
 4 = 800  
 5 = 900  
 6 = 1000



c)  $\epsilon = 0.1$

**Figure 4.28** : représentation des isothermes obtenues dans le cas d'une géométrie quelconque :

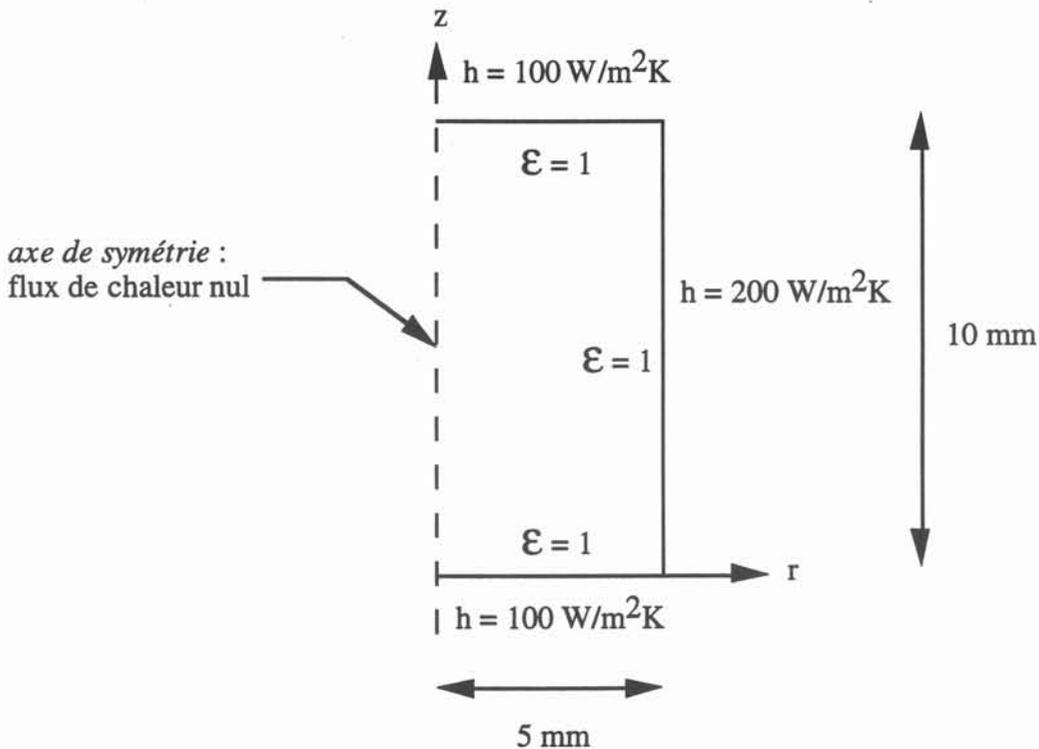
- a) en conduction pure,
- b) avec transfert radiatif pour une valeur d'émissivité des parois égale à 1,
- c) avec transfert radiatif pour une valeur d'émissivité des parois égale à 0.1.

### V.2.2 - Les tests avec source interne de chaleur et conditions de flux aux frontières

Nous venons de présenter dans les paragraphes précédents des cas avec des températures imposées aux frontières du domaine. Dans la réalité physique, notamment lors d'une fusion de verre par induction en creuset froid, nous ne connaissons pas la température des parois. Il nous semble alors plus justifié d'imposer sur chaque frontière un coefficient d'échange global qui permet la prise en compte des pertes thermiques sous forme de flux de chaleur. Nous proposons d'étudier une comparaison sur un même cas avec source imposée et coefficients d'échange en frontière traité d'une part en conduction pure, d'autre part en conduction avec rayonnement.

Il s'agit d'un domaine rectangulaire de 5 mm de large sur 10 mm de haut correspondant à un cylindre de 5 mm de rayon (figure 4.29). Nous imposons les conditions aux limites thermiques suivantes :

- sur l'axe :  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ ,
- en bas : un coefficient d'échange égal à  $100 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,
- sur le côté droit : un coefficient d'échange égal à  $200 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,
- en haut : un coefficient d'échange égal à  $100 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

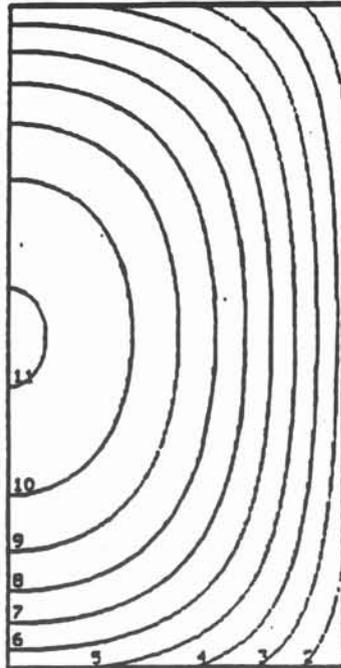


**Figure 4.29** : domaine et conditions aux limites pour les tests avec source interne de chaleur et conditions de flux aux frontières.

Le domaine est maillé en 20 x 40 quadrilatères, les directions sont volumiques. La conductibilité thermique du milieu est fixée à 0,227 W/mK, la source constante imposée dans le milieu est de  $-2.10^7$  W/m<sup>3</sup>. Pour le cas avec rayonnement, le modèle de transfert radiatif choisi est à une bande (largeur : 4 μm, longueur d'onde moyenne : 3 μm), le coefficient d'absorption est égal à 3 cm<sup>-1</sup>, l'indice de réfraction est de 1,5, le milieu est non diffusant et l'émissivité est égale à l'unité sur les trois côtés.

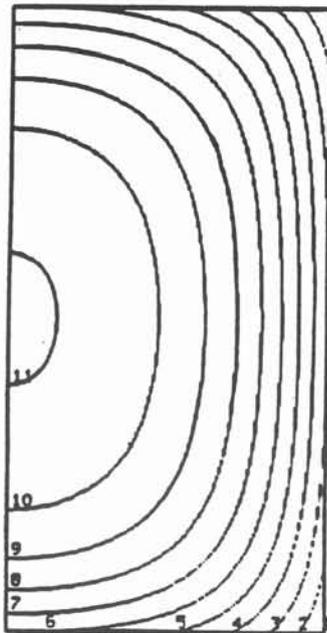
L'observation des lignes isothermes pour le cas résolu en conduction pure, et pour le cas résolu en conduction avec rayonnement (figure 4.30), ainsi que des courbes de températures le long de l'axe médian horizontal (figure 4.31) ou le long de l'axe de symétrie (figure 4.32) laisse apparaître nettement l'effet d'homogénéisation des températures dans le milieu semi-transparent ainsi qu'une baisse sensible de la température maximale (964 K en conduction pure, 812 K en conduction avec rayonnement) provoqué par le transfert radiatif.

Nous présentons sur la figure 4.33 une élévation des valeurs de l'opposé de la divergence du flux radiatif qui constitue la puissance volumique radiative. Les valeurs s'échelonnent de  $-0,124.10^8$  Watts/m<sup>3</sup> dans le centre du domaine pour arriver à  $0,614.10^7$  W/m<sup>3</sup> au niveau des parois. Le milieu semi-transparent absorbe le rayonnement en provenance des parois, d'où les fortes valeurs de la puissance volumique radiative dans les régions qui leur sont proches. Cette puissance volumique radiative chute fortement vers le centre du domaine. Cela est dû à l'atténuation du rayonnement le long du chemin allant des parois vers le centre.



	K
01	= 427
02	= 481
03	= 535
04	= 588
05	= 642
06	= 696
07	= 749
08	= 803
09	= 857
10	= 911
11	= 964

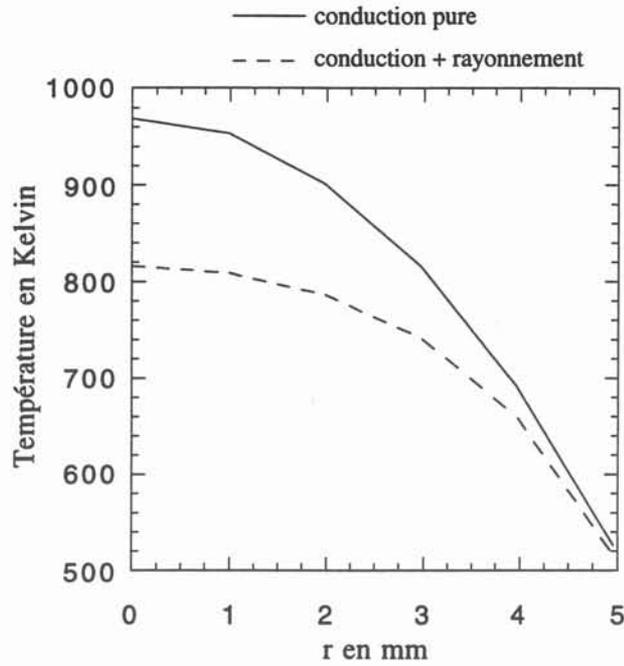
a) Conduction pure.



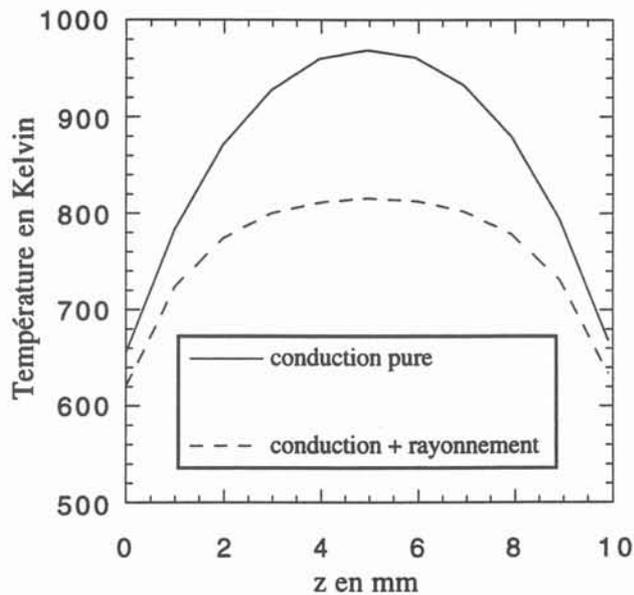
	K
01	= 429
02	= 467
03	= 505
04	= 544
05	= 582
06	= 620
07	= 659
08	= 697
09	= 735
10	= 774
11	= 812

b) Conduction plus rayonnement.

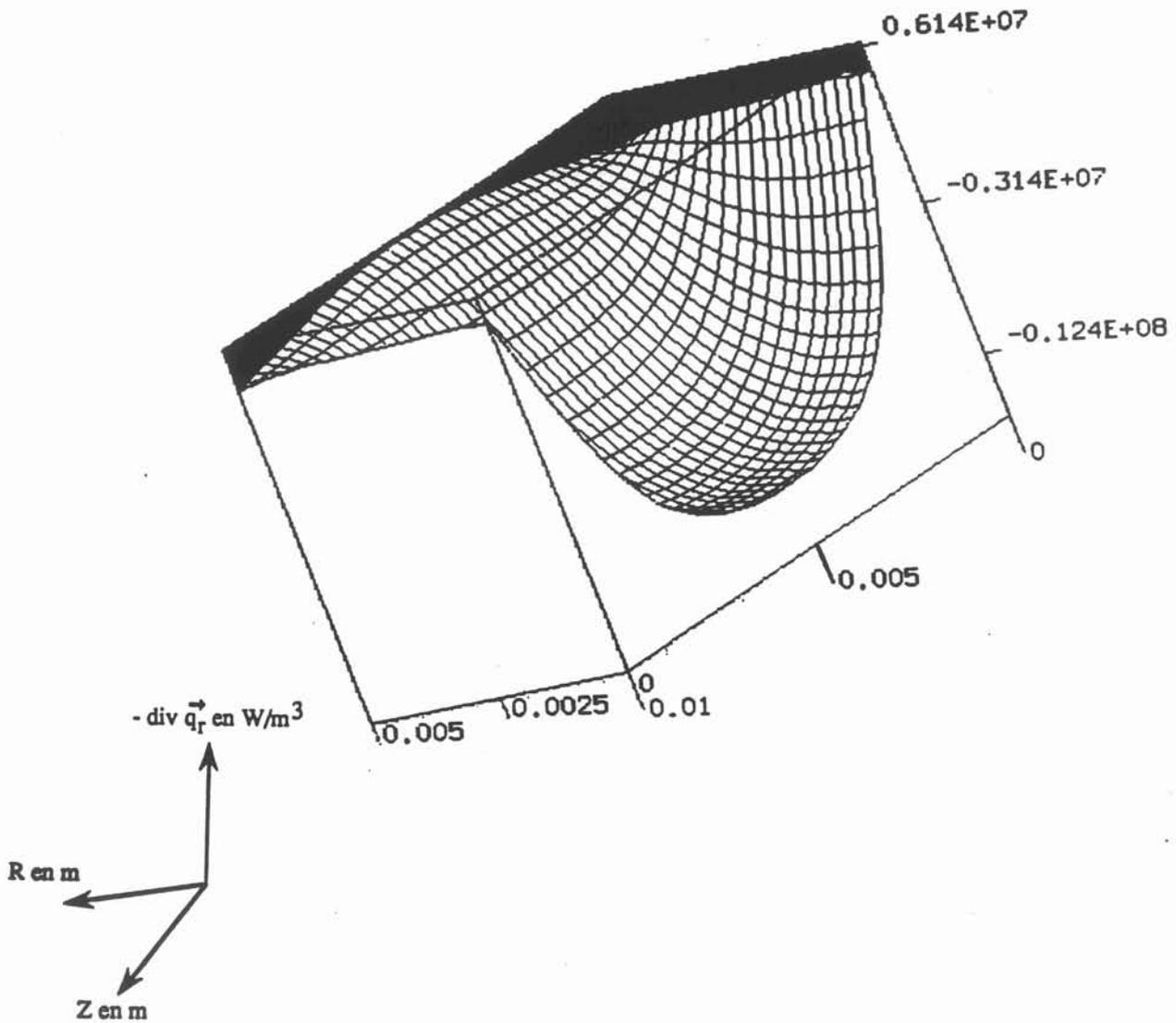
**Figure 4.30** : champs de température obtenus lorsque l'on impose au milieu une source interne constante, et des conditions aux limites de type coefficient d'échange convectif de frontière.



**Figure 4.31** : profils de température le long de l'axe médian horizontal pour un cas en conduction pure, et un cas en conduction plus rayonnement.



**Figure 4.32** : profils de température le long de l'axe de symétrie pour un cas en conduction pure, et un cas en conduction plus rayonnement.



**Figure 4.33 :** puissance radiative volumique obtenue lorsqu'on impose au milieu une source interne de chaleur constante, des conditions aux limites sous forme de coefficients d'échanges convectifs de frontière, et un coefficient d'absorption défini sur une bande spectrale égal à  $3 \text{ cm}^{-1}$ .

## VI - CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre les modèles thermiques avec prise en compte du transfert radiatif développés à l'aide de la méthode des éléments finis en géométrie 2D cartésienne et en géométrie 2D axisymétrique. Le modèle 2D cartésien nous a permis de présenter une validation du modèle de transfert radiatif grâce à la comparaison avec d'autres méthodes sur un cas d'école. Nous avons aussi validé la possibilité de représenter le spectre d'absorption du milieu semi-transparent considéré par un modèle à bandes. Grâce à l'utilisation des éléments finis nous avons montré la possibilité d'effectuer des calculs de transfert de chaleur avec rayonnement interne sur des domaines de géométries variées en 2D cartésien et en 2D axisymétrique. Nous avons enfin montré que l'on pouvait imposer plusieurs types de conditions aux limites : conditions aux limites de DIRICHLET, de NEUMANN homogène, ou encore de flux aux parois avec source interne de chaleur.

Les creusets utilisés pour la fusion des verres par induction en secteur froid au CEA de Marcoule possèdent une géométrie axisymétrique. Les conditions aux limites sur les parois du four sont des conditions de flux. Quant à la source thermique, excepté celle d'origine radiative, elle est issue du calcul électromagnétique : il s'agit de la densité de puissance JOULE. L'objet du chapitre suivant est la présentation du modèle couplé électromagnétique-thermique sans, puis avec prise en compte du transfert radiatif avec variation de la conductivité électrique du verre en fonction de la température, nécessaire à la modélisation numérique de la fusion des verres par induction en creuset froid.



## CHAPITRE V

*La modélisation numérique de l'ensemble des  
phénomènes électromagnétique et thermique*



## I - INTRODUCTION

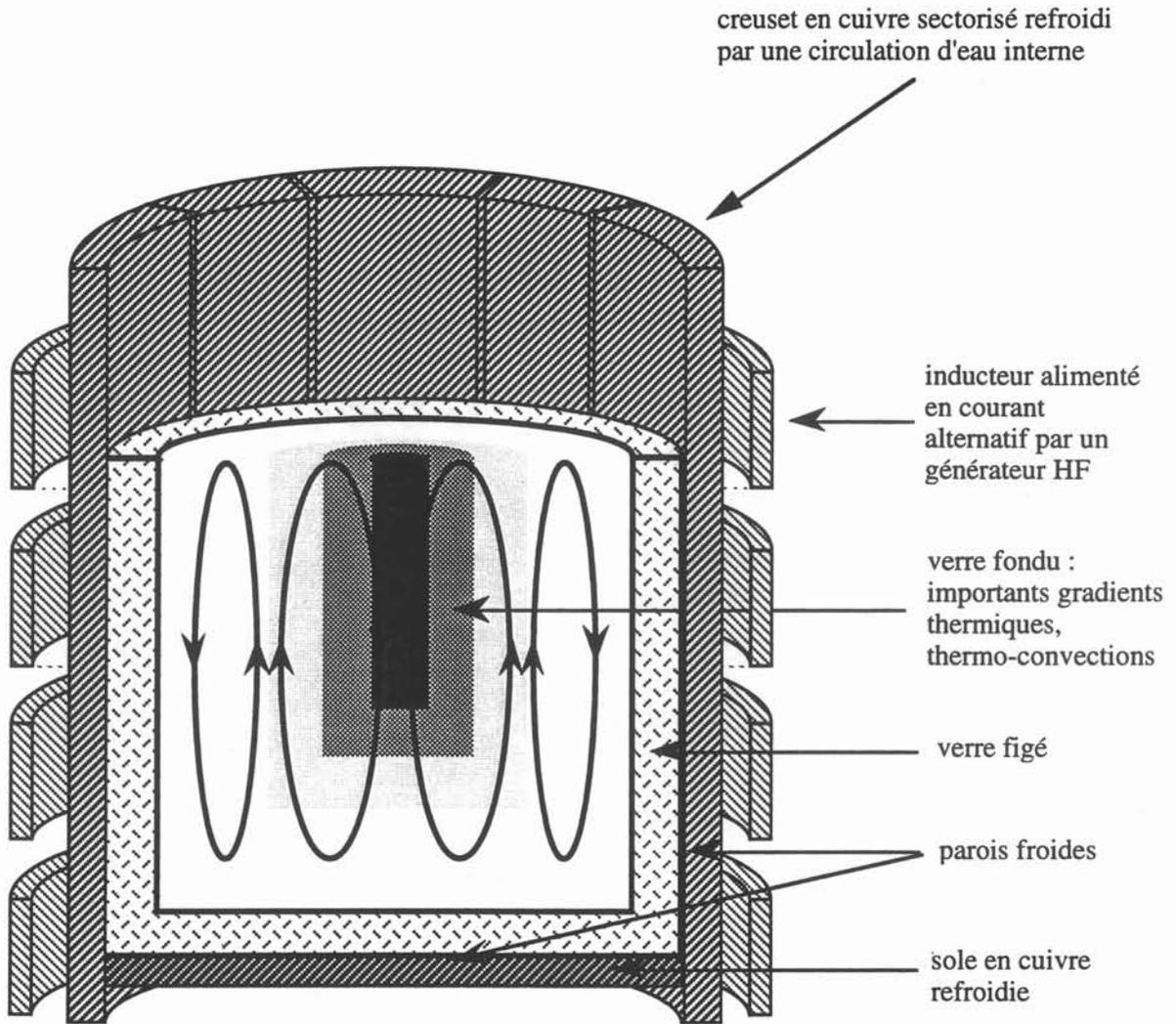
Nous avons exposé, au cours des précédents chapitres, le problème relatif au transfert radiatif : l'équation qui régit ce phénomène, les méthodes permettant d'en obtenir des solutions approchées ainsi que les modèles numériques (un pour des géométries 2D cartésiennes, un pour des géométries 2D axisymétriques) développés. Nous avons aussi présenté pour les deux types de géométries précitées, les formulations en éléments finis de l'équation de la chaleur prenant en compte le rayonnement interne, ainsi qu'un certain nombre de tests de validation. Cette longue étude ne doit pas nous faire oublier que notre but est la conception d'un code de calcul utile à la simulation de la fusion du verre par induction en creuset froid. Nous en rappelons le principe : le verre préchauffé par un moyen annexe (four à résistances par exemple) jusqu'à une température à laquelle il devient suffisamment conducteur de l'électricité, chauffe ensuite par effet JOULE grâce aux courants induits qui se développent en son sein. Ces derniers sont issus de l'induction magnétique créée par un inducteur parcouru par un courant alternatif sinusoïdal. Cet inducteur est disposé autour d'un creuset sectorisé qui ne fait donc pas écran à l'induction magnétique. Le creuset est refroidi par une circulation interne d'eau. Cela a pour conséquence la formation d'une couche de verre figé appelée autocreuset responsable d'une isolation chimique entre le bain de verre en fusion très corrosif et le creuset lui-même. Un fort gradient de température existant entre la paroi froide du creuset et le bain en fusion est à l'origine des forces de thermo-convection qui mettent le bain en mouvement. La figure 5.1 qui a déjà été présentée dans le chapitre I illustre le principe d'une installation de fusion de verre par induction en secteur froid.

Le but de ce chapitre est de présenter l'algorithme général de simulation de ce procédé, hors mis le phénomène hydrodynamique que nous ne prenons pas en compte dans cette étude. Précisons d'ores et déjà que dans ce chapitre la modélisation des phénomènes couplés électromagnétique et thermique incluant le transfert radiatif dans le bain de verre sont présentés exclusivement pour des géométries axisymétriques. Nous exposons en premier lieu le logiciel OCTAVE qui permet la résolution du problème électromagnétique. Ensuite vient la description du modèle thermique qui prend en compte la source d'origine électromagnétique  $Q_{th}$ , ainsi que la source d'origine radiative  $\text{div } \vec{q}_r$  que nous notons  $S_{tr}$ .

Les propriétés physiques des verres varient fortement avec la température, notamment la conductivité électrique. Nous présentons alors le couplage entre l'électromagnétisme et la thermique, couplage d'une part par la conductivité électrique qui évolue avec le champ de température dans le bain de verre, d'autre part par la densité de puissance JOULE issue de l'induction. Ce couplage réalisé par Sophie SERVANT donne naissance au code MALICE qui permet de modéliser les phénomènes couplés dans les procédés d'élaboration d'oxydes en creuset froid inductif [66]. MALICE est particulièrement bien adapté à la modélisation de ce phénomène :

- la méthode intégrale utilisée pour la résolution électromagnétique permet la prise en compte de la géométrie 3D des secteurs du creuset et de par sa conception évite l'utilisation de maillages lourds,
- l'utilisation de FLUX EXPERT pour la résolution thermique offre la possibilité d'introduire aisément comme un modèle de propriété la source d'origine radiative dont le développement du calcul a fait l'objet d'une grande partie de ce travail. D'autre part, FLUX EXPERT grâce à ses bases d'équations, de propriétés physiques et d'algorithmes permet la modélisation d'autres phénomènes physiques couplés à la résolution magnéto-thermique existante.

En résumé, le code MALICE résultant d'un couplage électromagnétique-thermique entre deux logiciels existant au laboratoire est compatible avec l'évolution de chacun d'eux, ce qui a motivé notre choix pour l'insertion du modèle de résolution de l'équation du transfert radiatif. Cependant les essais de ce code dans le cas de l'élaboration des verres ont permis de mettre en évidence la nécessité d'effectuer une régulation en puissance. En effet si la puissance JOULE injectée dans le verre n'est pas bloquée, on voit le verre figer ou bien surchauffer à l'issue du calcul. Cet effet est le reflet du fort couplage électromagnétique-thermique. Pour terminer ce chapitre nous présentons l'algorithme général de résolution électromagnétique-thermique avec prise en compte du transfert radiatif en géométrie 2D axisymétrique adapté pour modéliser la fusion de verre par induction en secteur froid. Avant d'exposer quelques tests de validation nous précisons l'ensemble des données indispensables à l'utilisation du code de calcul.



**Figure 5.1** : principe d'une installation de fusion de verre par induction en creuset froid.

## II - LE MODELE ELECTROMAGNETIQUE

### II.1 - Le contexte du problème

Dans les installations de fusion par induction le phénomène électromagnétique se caractérise par l'équation de diffusion du champ magnétique  $\vec{B}$  :

$$\Delta \vec{B} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.1)$$

qui tient compte de l'équation de conservation du flux de l'induction magnétique :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (5.2)$$

où  $\mu$  est la perméabilité magnétique,  $\sigma$  est la conductivité électrique et  $t$  le temps.

Les conditions aux limites de ce problème sont :

- l'induction magnétique  $\vec{B}$  nulle à l'infini,
- les relations de changement de milieu.

L'induction magnétique variant sinusoïdalement avec le temps, cette équation met en évidence la longueur caractéristique de diffusion du champ magnétique dans le matériau, appelée épaisseur de peau électromagnétique  $\delta$ ,

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \quad (5.3)$$

où  $\omega$  est la pulsation du courant inducteur.

Lorsque l'épaisseur de peau électromagnétique est faible devant les dimensions du matériau, les grandeurs électromagnétiques varient selon une loi de décroissance exponentielle en fonction de la distance à la surface. Pour les fréquences habituelles de fonctionnement de ce type d'installation (1 kHz-500 kHz), l'épaisseur de peau est faible dans le creuset, l'inducteur et la sole. Elle est grande dans les oxydes ou les verres.

Le creuset froid, de part sa sectorisation est de géométrie tridimensionnelle. Ainsi le problème électromagnétique à résoudre présente trois difficultés conjuguées :

- tridimensionnalité de la géométrie,
- éléments à faible épaisseur de peau électromagnétique,
- conditions aux limites à l'infini.

Dans un tel contexte la résolution du problème électromagnétique par la méthode des éléments finis nécessiterait des maillages complexes et lourds. Le nombre d'inconnues par noeud serait alors de quatre (les trois composantes du potentiel vecteur et le potentiel électrique). Aussi avons nous choisi une méthode numérique mieux adaptée à ce type de problème : la méthode intégrale.

## II.2 - La modélisation numérique

Les équations résolues par la méthode intégrale sont :

$$\text{div } \vec{J} = 0 \quad (5.4)$$

$$\oint \text{grad } V \cdot d\vec{l} = 0 \quad (5.5)$$

$$\vec{J} = -\sigma \left( \text{grad } V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (5.6)$$

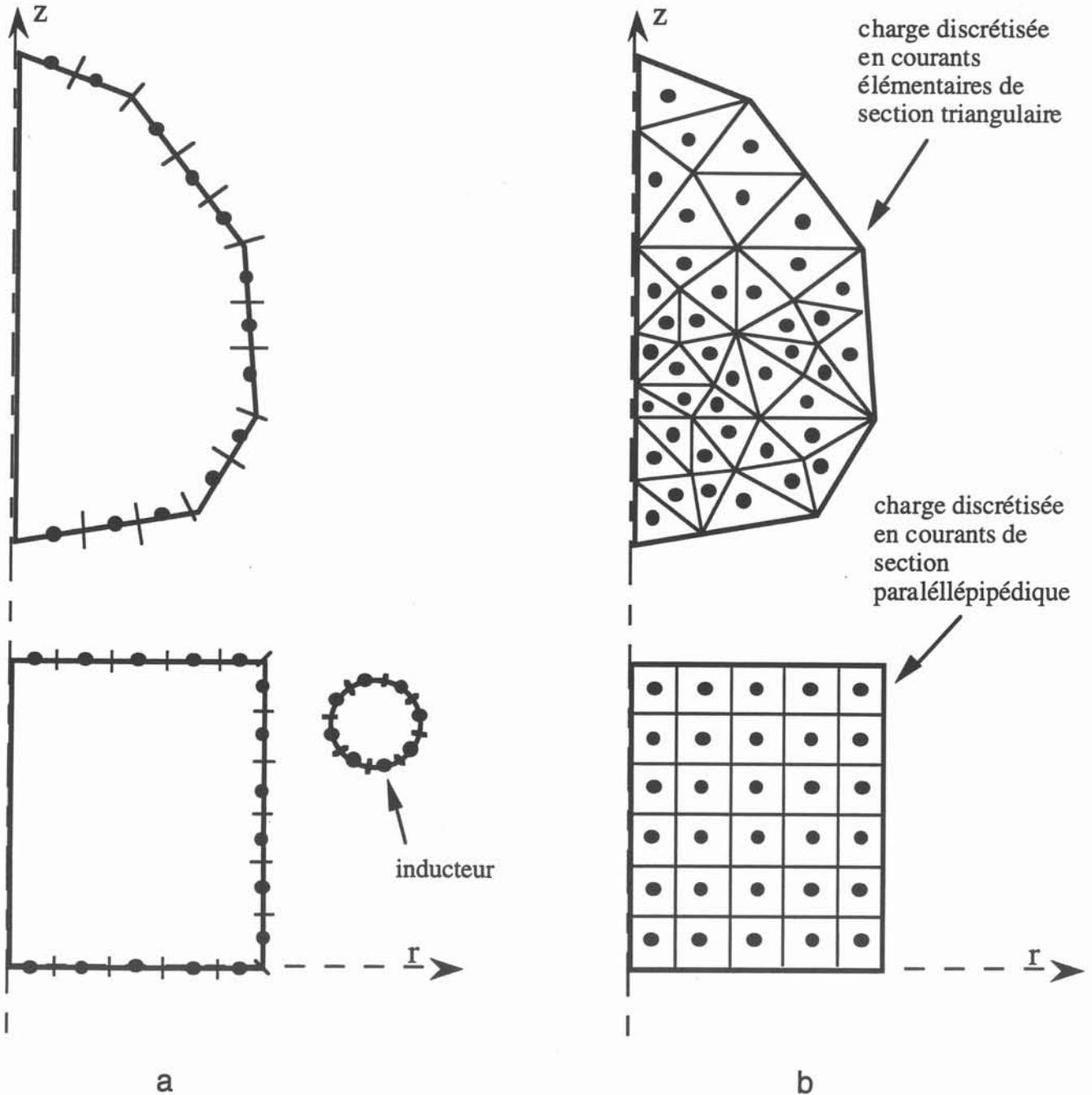
où  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur,  $V$  est le potentiel scalaire,  $\vec{J}$  est la densité de courant.

Le potentiel vecteur s'exprime par la loi de BIOT et SAVART qui prend naturellement en compte les conditions aux limites à l'infini. Ainsi les inconnues du modèle électromagnétique basé sur la méthode intégrale sont la densité de courant et le potentiel électrique.

Dans le logiciel OCTAVE la configuration modélisée est globalement axisymétrique. On néglige l'hélicité des spires de l'inducteur (la distance inter-spires étant faible devant le rayon de l'inducteur), ce qui revient à le supposer axisymétrique. Le bain de verre et les éléments annexes sont axisymétriques.

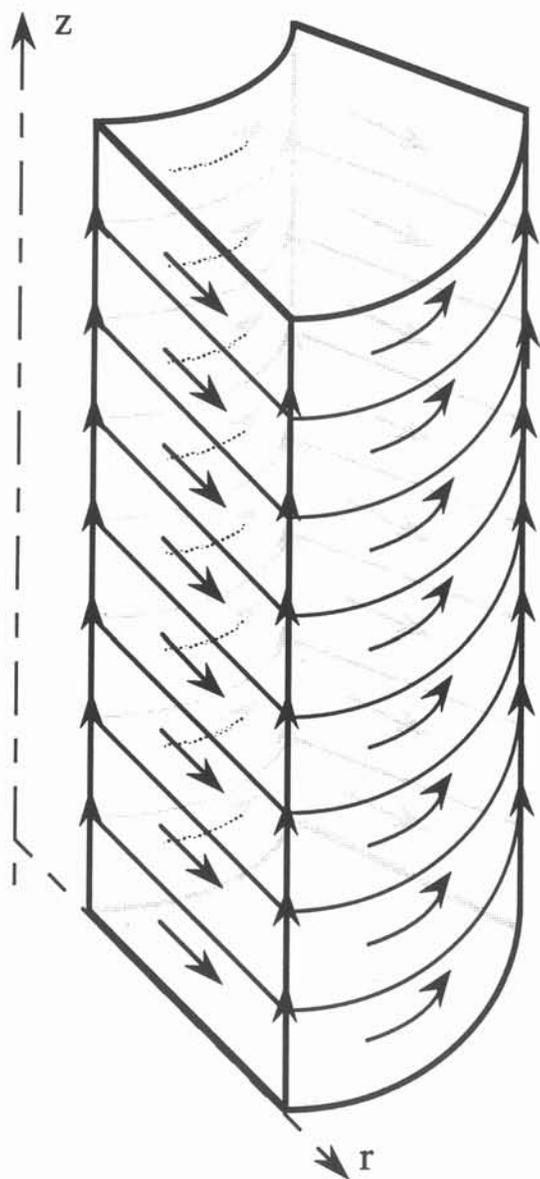
Le maillage est réduit aux parties électriquement actives. Chaque élément est discrétisé en courants élémentaires de direction imposée. L'inducteur, comme tout autre élément de fine épaisseur de peau électromagnétique est discrétisé uniquement en surface (figure 5.2a). En effet, dans ce cas, la décroissance exponentielle des densités de courant dans l'élément à partir de la surface est prise en compte. Le creuset est de géométrie tridimensionnelle, périodique dans la direction azimutale. Ceci permet de ne discrétiser qu'un seul secteur. Un secteur est discrétisé en éléments de courant de direction imposée, composés d'arcs de spires sur les surfaces internes et externes, de segments sur les surfaces latérales et les arêtes (figure 5.3). La décroissance exponentielle des densités de courant n'est plus valable dans le cas des grandes épaisseurs de peau électromagnétiques, comme dans le cas d'un bain de verre par exemple. Ces éléments nécessitent donc une discrétisation volumique (figure 5.2b). Après discrétisation on obtient un système d'équations linéaire, la matrice est pleine et dissymétrique.

A partir des densités de courants induits calculées dans la charge, les densités de puissance JOULE et les densités de force de LAPLACE sont calculées.



**Figure 5.2 :** maillage électromagnétique :

- a) charge axisymétrique, hypothèse de fine épaisseur de peau électromagnétique. Maillage surfacique,
- b) charge axisymétrique, hypothèse de grande épaisseur de peau électromagnétique. Maillage volumique.



**Figure 5.3** : trace des courants élémentaires à la surface d'un secteur de creuset.

### III - LE MODELE THERMIQUE

Comme nous l'avons vu au cours du chapitre I dans la description des phénomènes physiques intervenant lors d'une fusion de verre par induction en creuset froid, les phénomènes thermiques méritent largement l'intérêt qu'on leur apporte. En effet, une fusion de verre par ce procédé ne peut aboutir que si le verre ne fige pas. Pour cela les sources imposées (densités de puissance JOULE) doivent être suffisantes et les pertes d'une part par rayonnement en surface (surtout existantes dans le cas d'une fusion en statique), d'autre part latérales dues au rayonnement interne, ne doivent pas être trop importantes. L'ensemble des pertes qui sont aussi des pertes par conduction et par convection, doit être exactement équilibré par l'énergie calorifique apportée au bain de verre à l'aide de l'induction.

La modélisation numérique des transferts de chaleur est rendu complexe à cause de la prise en compte du transfert radiatif qui a fait l'objet des chapitres précédents. Après avoir rappelé l'équation de la chaleur nous exposons le modèle numérique. La formulation en éléments finis a été présentée au cours du chapitre IV pour le modèle thermique en 2D axisymétrique. La seule différence dans ce chapitre réside dans le fait que la source thermique  $Q_{th}$  est ici issue de l'induction, c'est pourquoi nous donnons seulement le résultat de la discrétisation en éléments finis.

#### III.1 - L'équation de la chaleur

Nous rappelons l'expression de l'équation de la chaleur dans le cas d'un bain de verre en fusion, en régime permanent sans prise en compte du terme de transport de la température par la vitesse :

$$\text{div } \vec{q}_c = \text{div}(-\vec{q}_r) + Q_{th} \quad (5.7)$$

$\vec{q}_c$  est le flux conductif :  $\vec{q}_c = -k_v \text{grad } T$  avec  $k_v$  : conductibilité thermique moléculaire,

$\vec{q}_r$  est le flux radiatif,

$Q_{th}$  est la densité de puissance JOULE issue de l'induction calculée par l'électromagnétisme.

#### III.2 - Le modèle numérique

Tout comme nous l'avons dit dans le chapitre IV, l'équation de la chaleur (5.7) est résolue par la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel FLUX EXPERT qui possède un générateur d'équations. La méthode des projections de GALERKIN permet de transformer l'équation aux dérivées partielles en un système d'équations non linéaires dont les coefficients sont des intégrales grâce au choix de fonctions de pondération. Le terme  $\text{div } \vec{q}_r$  dans l'équation de la chaleur est

calculé par résolution de l'équation du transfert radiatif en chaque point d'intégration du maillage éléments finis triangles ou quadrilatères d'ordre deux (chapitre III).

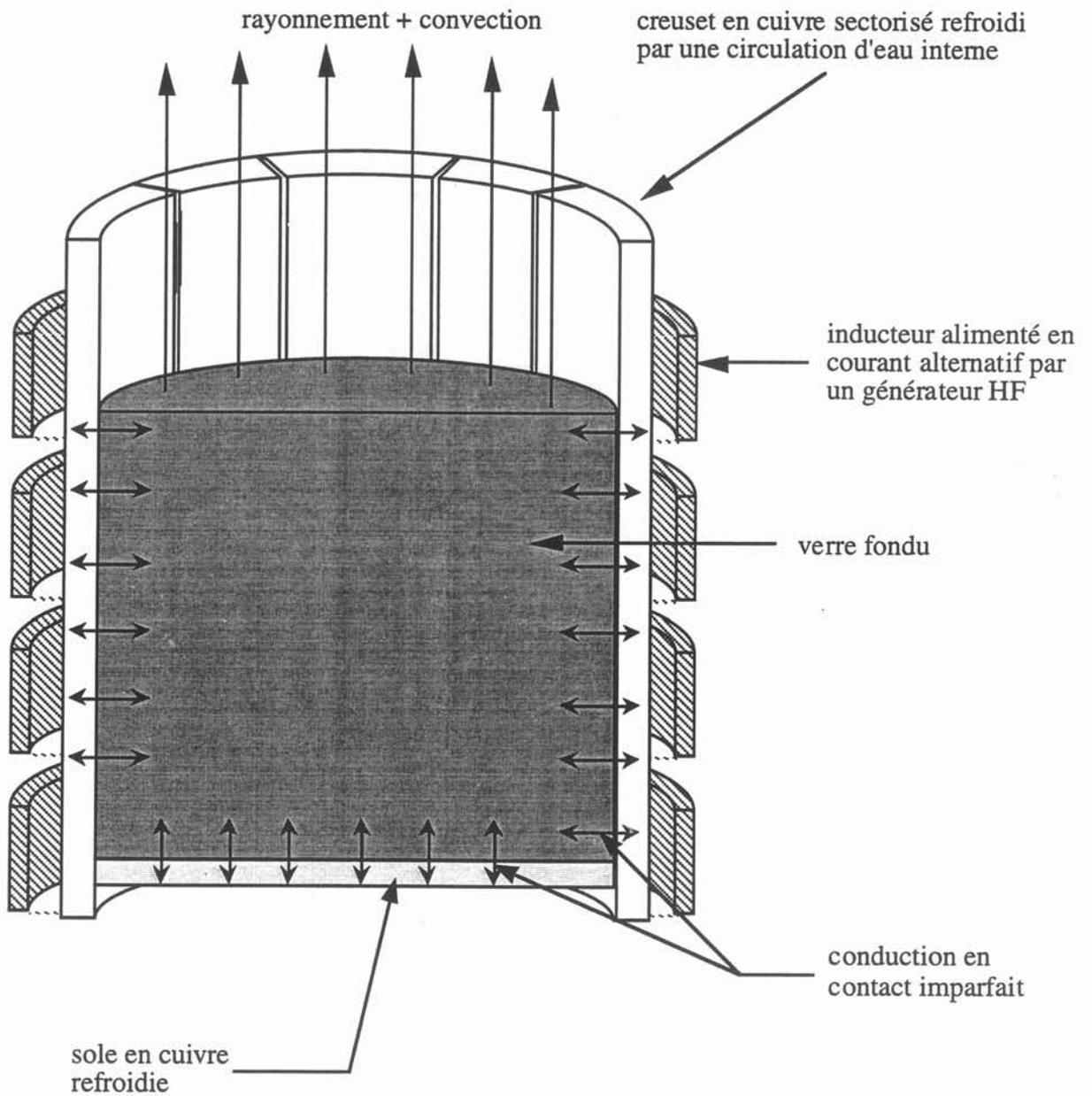
Nous résolvons par la méthode des éléments finis l'équation :

$$\text{div} (-k_v \vec{\text{grad}} T) = -S_{tr} + Q_{th} \quad (5.8)$$

avec  $S_{tr} = \text{div} \vec{q}_r$  dans le bain de verre.

### III.2.1 - Les conditions aux limites

Les conditions aux limites prises en compte sont soit des pertes convectives, soit des pertes par rayonnement (figure 5.4).



**Figure 5.4 :** conditions aux limites thermiques dans un bain de verre en fusion par induction en creuset froid.

### III.2.2 - La discrétisation en éléments finis

Nous utilisons la méthode des projections de GALERKIN. Le domaine d'étude (bain de verre) est désigné par  $\Omega$  et la surface le limitant par  $\Gamma$ . Nous obtenons un système non linéaire. L'équation i du système au pas de résolution n s'exprime :

$$\int_{\Gamma} \alpha_i h \sum \alpha_j T_j r dr + \int_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{st} T_{n-1}^3 \sum \alpha_j T_j r dr + \iint_{\Omega} k_v \vec{\text{grad}} \alpha_i \sum T_j \vec{\text{grad}} \alpha_j r dr dz$$

$$= \int_{\Gamma} \alpha_i h T_{\infty} r dr + \int_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{st} T_{\infty}^4 r dr - \iint_{\Omega} \alpha_i (S_{tr})_{n-1} r dr dz + \iint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} r dr dz \quad (5.9)$$

où

$$T = \sum_{j=1}^N \alpha_j T_j \quad (5.10)$$

représente l'interpolation polynômiale de la température sur un élément,

$T_{n-1}$  est la température calculée au pas précédent,  $(S_{tr})_{n-1}$  est la source d'origine radiative calculée à partir du champ de température au pas précédent.

Après avoir décrit chacun des modèles électromagnétique et thermique, nous sommes maintenant en mesure de présenter leur couplage qui va permettre de simuler la fusion du verre par induction en creuset froid.

## IV - LE MODELE ELECTROMAGNETIQUE-THERMIQUE

Les propriétés physiques des verres varient fortement avec la température et l'interaction entre les phénomènes est importante. Afin de ne pas obtenir des résultats pouvant conduire à un dimensionnement aberrant des installations de fusion, il est indispensable de prendre en compte ces variations, notamment la variation de la conductivité électrique en fonction de la température (voir chapitre I figure 1.4).

Nous présentons dans ce paragraphe les fondements du couplage fort électromagnétisme-thermique sans transfert radiatif. Tous les détails concernant ce couplage se trouvent dans la thèse de Sophie PLAN-SERVANT soutenue en mai 1993 [16]. Nous donnons ensuite les algorithmes de résolution d'une part électromagnétique-thermique sans transfert radiatif, d'autre part électromagnétique-thermique avec transfert radiatif.

### IV.1 - Le couplage fort

Le couplage concerne le domaine de la charge (verre) où toutes les inconnues du problème sont à déterminer. Les termes couplant les équations sont  $\sigma(T)$  et  $JJ^*/\sigma$ , conductivité électrique et

densité de puissance JOULE.

Le maillage de la charge utilisé dans la méthode intégrale est différent du maillage éléments finis de la charge. Des interpolations sont nécessaires pour calculer les termes du couplage. Les difficultés de ces interpolations sont de deux natures :

- le choix de la grandeur à interpoler : certains termes de couplage sont des fonctions non linéaires de la variable d'état, par exemple  $JJ^*/\sigma = f(A)$ . Ce sont les variables d'état température et potentiel vecteur qui sont interpolées d'un maillage à l'autre, les fonctions étant calculées ensuite localement,
- la démarche de la localisation : la solution la plus rapide consiste à localiser les noeuds d'un maillage par rapport à l'autre, ceux-ci étant moins nombreux que les points d'intégration. Les grandeurs sont ensuite interpolées dans la maille aux points d'intégration. La solution la plus précise consiste à localiser directement les points d'intégration.

Les solutions retenues pour l'interpolation des termes de couplage sont :

*interpolation MI --> MEF*

- 1- localisation des points d'intégration du maillage MEF dans le maillage MI,
- 2- interpolation du potentiel vecteur aux points d'intégration du maillage MEF et calcul des sources thermiques ;

*interpolation MEF -> MI*

- 1- localisation des noeuds du maillage MI dans le maillage MEF,
- 2- calcul de la température puis de  $\sigma(T)$  par interpolation aux noeuds du maillage MI.

Dans le cadre de l'application aux verres (grande épaisseur de peau), l'interpolation est effectuée entre deux maillages volumiques. Dans ce cas on considère le maillage de la méthode intégrale comme un maillage éléments finis secondaire [66].

## **IV.2 - Les algorithmes de résolution**

### **IV.2.1 - L'algorithme de résolution électromagnétique-thermique sans transfert radiatif**

Un algorithme commandant les deux modules de résolution basés respectivement sur la méthode intégrale et sur la méthode des éléments finis a été créé (figure 5.5). Il comporte deux niveaux de résolution itérative imbriqués :

- la résolution du système non linéaire obtenu par la formulation éléments finis pour le phénomène thermique,
- la boucle de résolution du système couplé méthode intégrale (électromagnétique) et méthode des éléments finis.

Deux préprocesseurs distincts permettent de décrire les domaines d'étude par la méthode intégrale et la méthode des éléments finis. Un module unique de résolution permet de calculer les grandeurs électromagnétique et thermique. Deux post-processeurs distincts ont été conservés afin d'optimiser l'exploitation des grandeurs calculées (figure 5.6) [66].

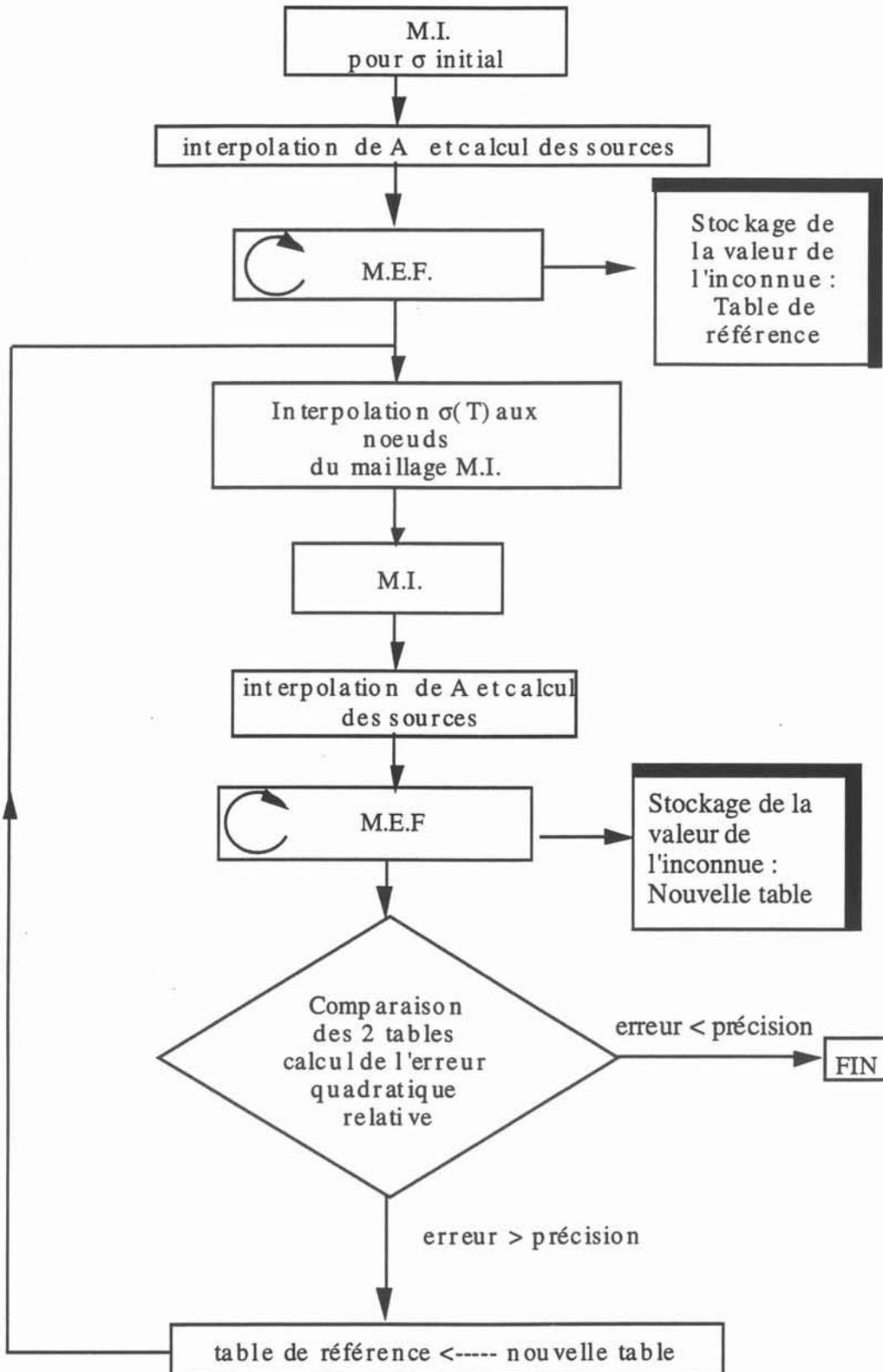
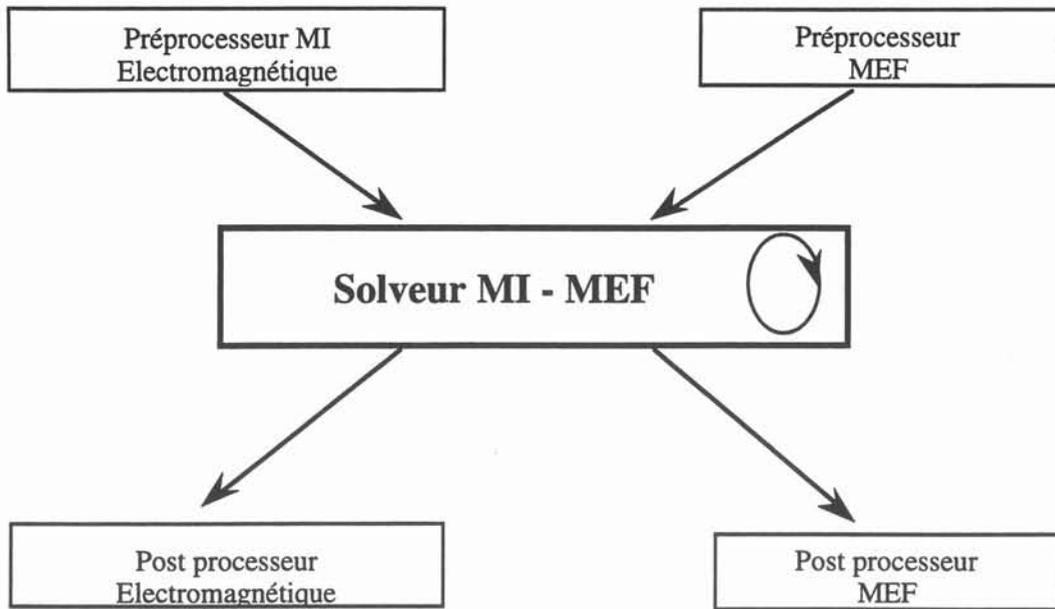


Figure 5.5 : algorithme de résolution MI-MEF.



**Figure 5.6** : principe d'utilisation du logiciel couplé électromagnétique-thermique sans transfert radiatif.

*Remarque :*

La validation du couplage décrit précédemment à l'aide de mesures de champs de température réalisées au C.E.A. de Marcoule dans des bains de verre en fusion de types différents, nous permet de soulever un problème. Etant donné la forte variation de la conductivité électrique de nos verres avec la température, il est très difficile d'obtenir une solution numérique correspondant à un état fondu stabilisé. Le bain va soit figer, soit surchauffer. Une régulation soit en température, soit en puissance au cours du calcul doit permettre de converger vers une solution acceptable, c'est à dire proche des valeurs obtenues expérimentalement. Nous optons pour une régulation en puissance directement effectuée par Annie GAGNOUD au sein du logiciel OCTAVE de résolution de l'électromagnétisme. Ainsi est résolu ce problème par ailleurs très intéressant car il reflète tout à fait la difficulté expérimentale à piloter l'installation : il faut régulièrement agir sur la tension aux bornes de l'inducteur de manière à ne pas surchauffer le bain, où à ne pas le laisser figer.

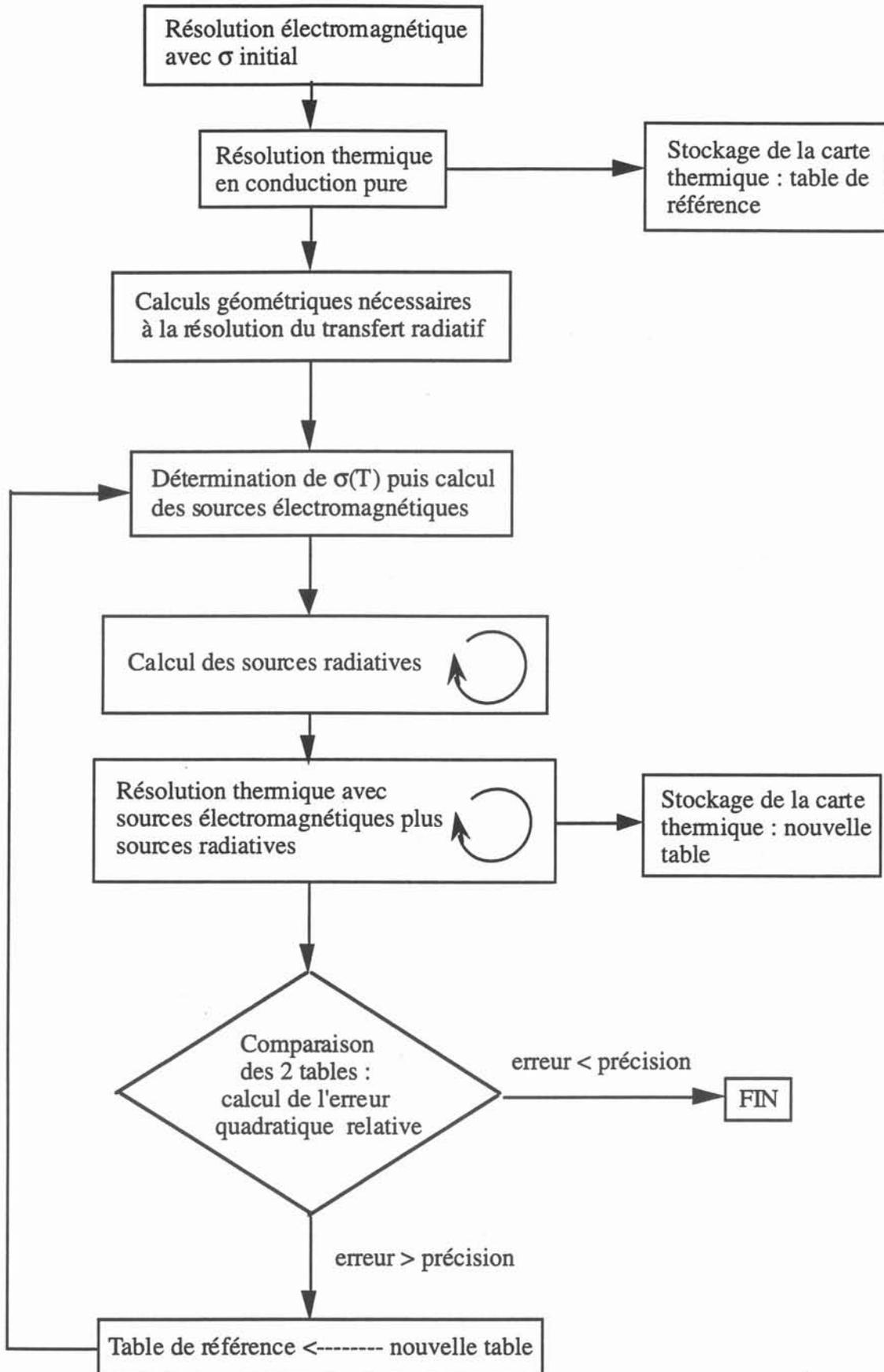
#### **IV.2.2 - L'algorithme de résolution électromagnétique-thermique avec transfert radiatif**

La prise en compte du transfert radiatif s'intègre dans l'algorithme de résolution itératif MI-MEF après chaque calcul du champ de température avec sources électromagnétiques. Le calcul des sources d'origine radiative étant effectué par la résolution de l'équation du transfert radiatif, les températures sont alors calculées avec prise en compte des sources d'origine électromagnétique et

des sources d'origine radiative.

L'algorithme de résolution correspondant est détaillé sur la figure 5.7. Une partie du programme de calcul du transfert radiatif consiste en des calculs géométriques (voir chapitre III). Ces calculs sont effectués une fois pour toutes en début de résolution.

Il nous semble intéressant, avant de présenter des tests de validation, de préciser l'ensemble des données aussi bien radiatives que thermiques ou électromagnétiques des matériaux constituant l'installation à modéliser, ainsi que les principales données concernant les différents couplages (couplage interne à la résolution de l'équation du transfert radiatif, et couplage entre l'électromagnétisme et la thermique) nécessaires au lancement du code de calcul.



**Figure 5.7:** algorithme de résolution du code de calcul couplé électromagnétisme-thermique avec transfert radiatif.

### **IV.3 - Les données nécessaires au lancement du code de calcul**

#### **IV.3.1 - Les données relatives au calcul électromagnétique**

Le préprocesseur du problème électromagnétique permet d'entrer principalement :

- la géométrie des éléments électriquement actifs tels que le creuset, la charge, l'inducteur et éventuellement d'autres éléments comme une sole foide, ainsi que leur maillage,
- la résistivité électrique des différents matériaux. Les charges à grande peau électromagnétique telles que le verre peuvent avoir une résistivité électrique variable,
- le module du courant ou de la tension aux bornes de l'inducteur,
- la fréquence des sources,
- le choix d'imposer la valeur de la puissance, indispensable pour la modélisation numérique de la fusion du verre.

#### **IV.3.2 - Les données thermiques**

Pour la résolution thermique, seule la charge à fondre est prise en compte. On commence donc par décrire sa géométrie axisymétrique, que l'on maille à l'aide d'éléments finis triangles ou quadrilatères d'ordre deux. Par la suite nous donnons les propriétés physiques de cette charge à savoir :

- sa conductivité électrique qui peut être variable en fonction de la température,
- sa conductibilité thermique qui peut aussi varier en fonction de la température.

Nous précisons enfin les conditions aux limites :

- soit de type DIRICHLET par des températures imposées aux frontières,
- soit de type coefficient d'échange en frontières,
- soit de type NEUMANN homogène qui est de toute manière la condition obligatoire sur l'axe de symétrie,
- éventuellement l'émissivité en surface de la charge.

#### **IV.3.3 - Les données relatives au calcul du transfert radiatif**

Les données concernant le calcul du rayonnement interne au sein de la charge sont à préciser lors du lancement du calcul ; des questions sont alors posées à l'utilisateur :

- nombre de bandes spectrales selon lequel sont découpés les spectres d'absorption et de diffusion,
- largeur de chaque bande spectrale en micro-mètre,
- valeur moyenne de la longueur d'onde dans chaque bande spectrale en micro-mètre,
- émissivité sur chaque frontière du domaine excepté sur l'axe de symétrie,

- valeur du coefficient d'absorption du milieu sur chaque bande spectrale,
- valeur du coefficient de diffusion du milieu sur chaque bande spectrale,
- valeur de l'indice de réfraction du milieu sur chaque bande spectrale.

#### **IV.3.4 - Les données purement numériques**

Lors du lancement d'un calcul des questions sont posées à l'utilisateur concernant le couplage électromagnétique-thermique dont les principales sont :

- nombre maximum d'itérations du couplage,
- paramètre de sous-relaxation du couplage ,
- précision relative du couplage,

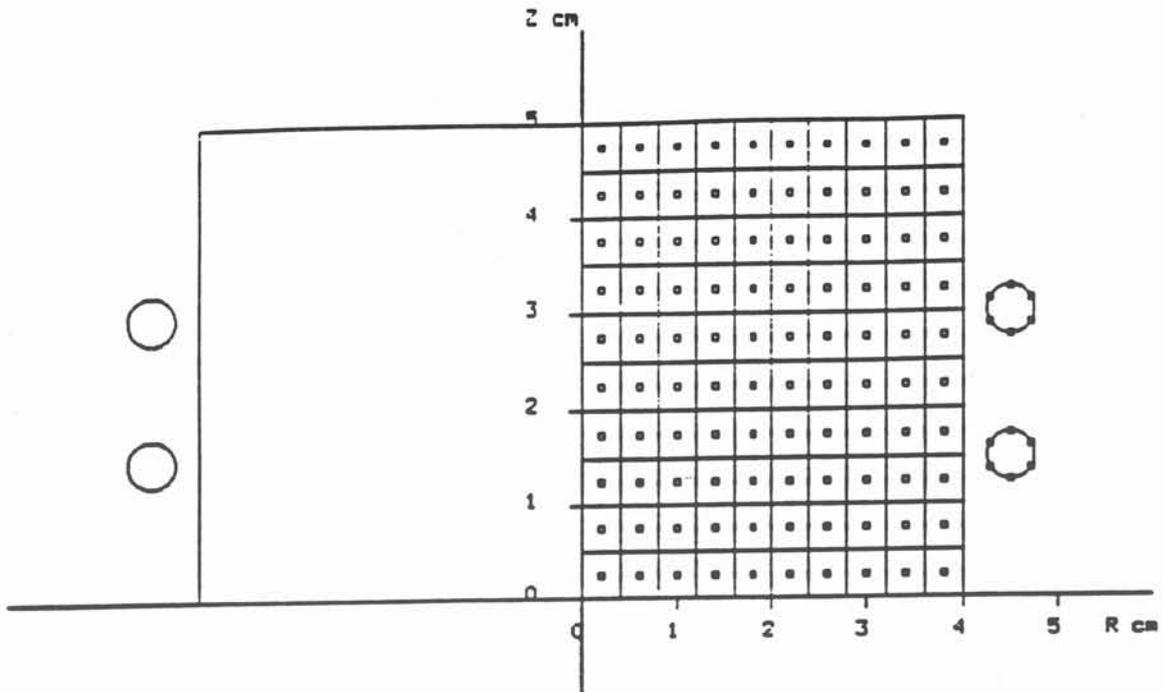
et concernant le couplage interne au calcul du transfert radiatif à savoir principalement :

- nombre maximum d'iterations lors du calcul de la divergence du flux radiatif,
- précision relative sur la divergence du flux radiatif.

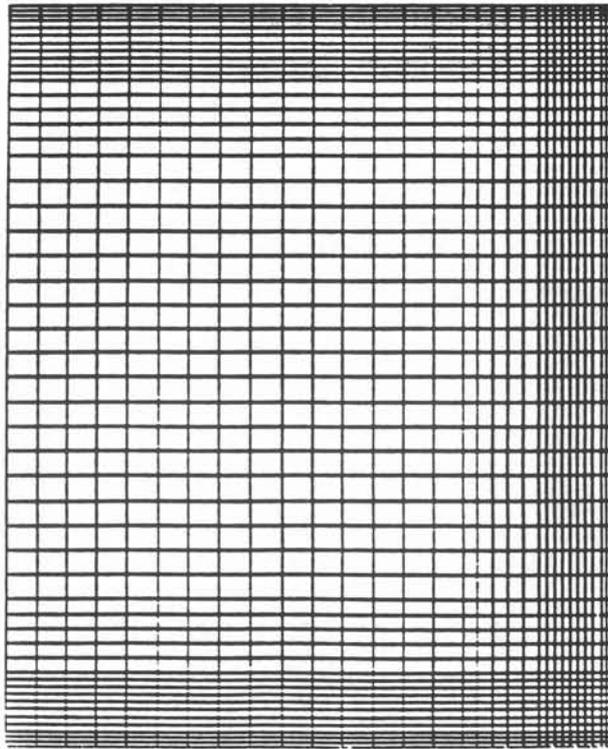
Il est aussi demandé à l'utilisateur s'il veut utiliser les directions volumiques pour le calcul du transfert radiatif, pour le cas ou il voudrait avoir recours aux directions surfaciques pour les raisons données dans le chapitre III (classement de graphe par niveau impossible à construire).

### **V - TESTS SUR LE COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE-THERMIQUE AVEC TRANSFERT RADIATIF**

Nous proposons d'étudier le couplage électromagnétique-thermique avec transfert radiatif sur l'exemple dont la configuration et le maillage pour la résolution électromagnétique sont représentés sur la figure 5.8. Il s'agit d'une charge axisymétrique de 40 mm de rayon, et de hauteur 50 mm. Un inducteur constitué de deux spires de section circulaire entoure cette charge. Le maillage utilisé pour la résolution de l'équation du transfert radiatif, et de l'équation de la chaleur est représenté sur la figure 5.9.



**Figure 5.8** : représentation en coupe verticale de la charge et de l'inducteur modélisés, configuration et maillage du modèle électromagnétique.



**Figure 5.9** : maillage du domaine thermique de la région occupée par la charge, l'axe de symétrie se trouve du côté gauche de la figure.

Pour l'ensemble des tests que nous proposons, la tension aux bornes de l'inducteur est fixée à 1000 Volts, la fréquence à 100 kHz, et la puissance à 2kW. La conductibilité thermique moléculaire de la charge est fixée égale à 3.5W/mK.

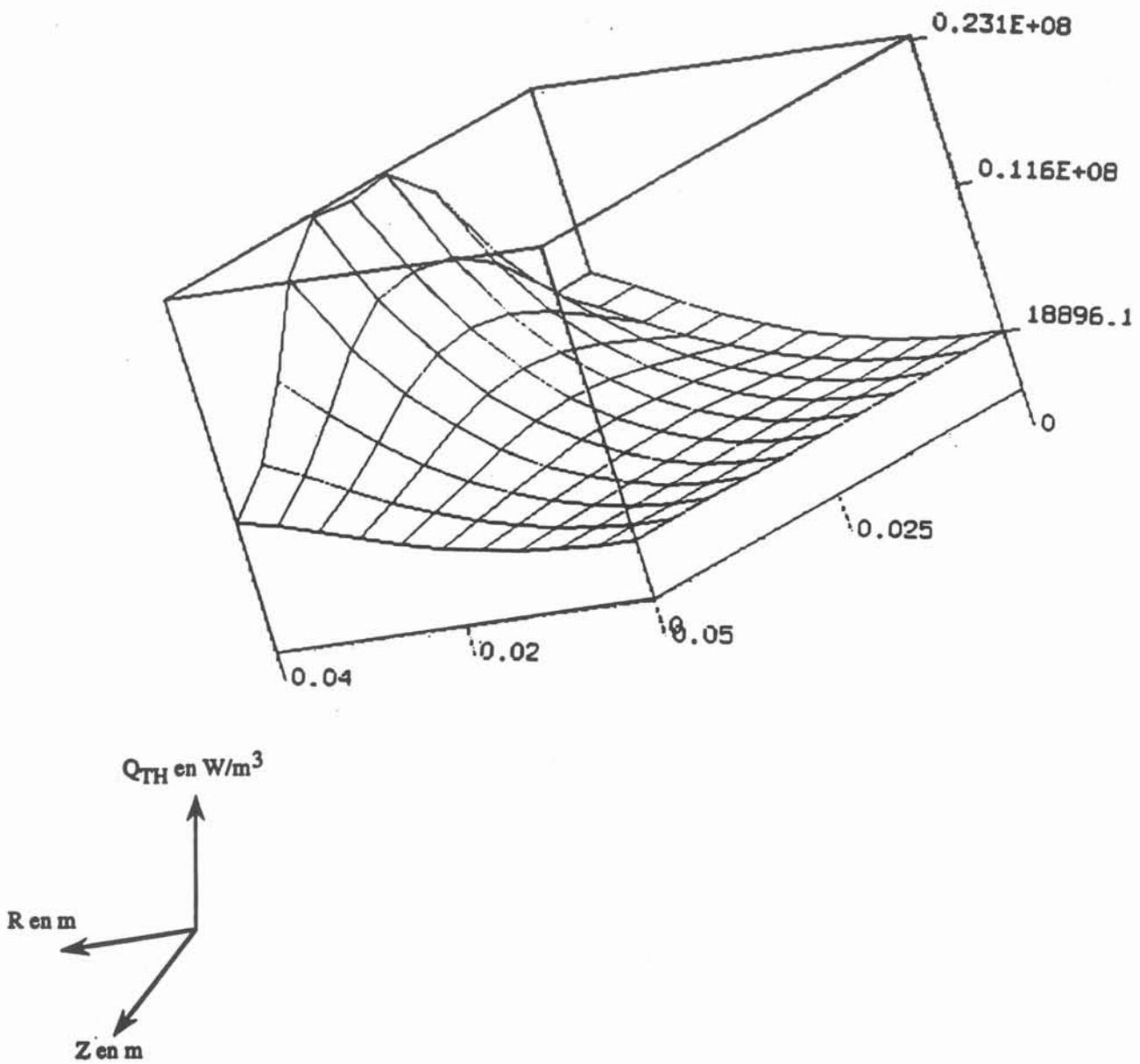
Les conditions aux limites thermiques sont les suivantes :

- sur la face du bas un coefficient d'échange de  $24 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,
- sur le côté droit un coefficient d'échange égal à  $160 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,
- en surface un coefficient d'échange égal à  $30 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

Nous présentons deux types d'essais :

- un premier type où la conductivité électrique du matériau est constante et égale à  $27,93 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ . Au sein de cette série de tests nous effectuons deux sortes d'essais :
  - une au cours de laquelle les propriétés radiatives sont représentées par un modèle à une bande spectrale,
  - une pour laquelle le coefficient d'absorption est représenté par un modèle à quatre bandes,
- un deuxième type où la conductivité électrique varie avec la température. Le coefficient d'absorption est représenté par un modèle à une bande.

Avant d'exposer les différents tests nous commentons la figure 5.10 qui représente la densité de puissance JOULE issue de l'induction :  $Q_{th}$ , qui est la même pour tous les essais qui suivent. Compte tenue des valeurs prises pour la conductivité électrique du bain et pour la fréquence des sources, l'épaisseur de peau électromagnétique est de 30 cm, si bien que nous sommes en grande peau électromagnétique. Les valeurs de  $Q_{th}$  s'échelonnent de manière régulière de  $18896 \text{ W/m}^3$  à  $0.231\text{E}+8 \text{ W/m}^3$  soit une amplitude de  $2.3\text{E}+7 \text{ W/m}^3$ . La gamme de valeurs maximales se situe naturellement dans la zone en regard avec les spires de l'inducteur, pour décroître de manière régulière jusqu'à l'axe de symétrie.



**Figure 5.10 :** densité de puissance JOULE dans la charge, obtenue pour une puissance bloquée de 2 kW.

## V.1 - Tests avec conductivité électrique constante

### V.1.1 - Modèles à une bande spectrale

Nous traitons dans ce paragraphe deux types de comparaisons : un premier entre la conduction pure et l'effet du rayonnement pour des cas où les parois sont supposées noires, un deuxième pour une valeur donnée de coefficient d'absorption mais en changeant l'émissivité des faces.

#### V.1.1.1 - Influence du transfert radiatif

De manière à observer l'influence d'une part du rayonnement interne et d'autre part du coefficient d'absorption lors de la prise en compte du transfert radiatif sur les champs de température dans un milieu semi-transparent, nous proposons trois types de calculs :

- un premier calcul en conduction pure,
- un calcul avec transfert radiatif, avec un coefficient d'absorption égal à  $3 \text{ cm}^{-1}$ ,
- un calcul avec transfert radiatif, avec un coefficient d'absorption égal à  $1 \text{ cm}^{-1}$ .

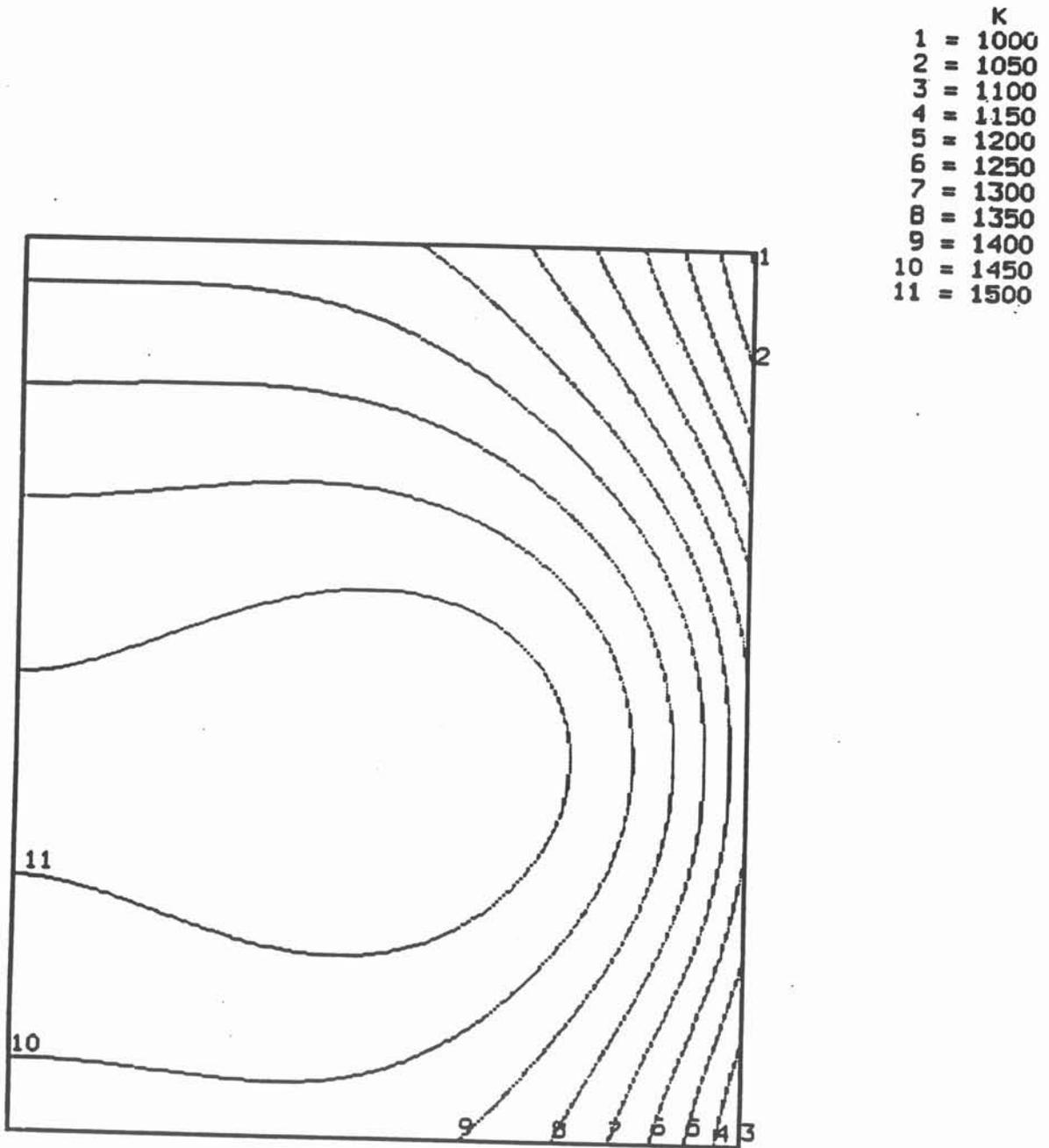
Pour les deux cas avec rayonnement, le modèle est à une bande spectrale de largeur  $3 \mu\text{m}$ , et de longueur d'onde moyenne  $2.5 \mu\text{m}$ , les faces sont supposées noires.

Les températures minimales  $T_{\min}$  et les températures maximales  $T_{\max}$  relevées dans les différents cas sont répertoriées dans le tableau suivant :

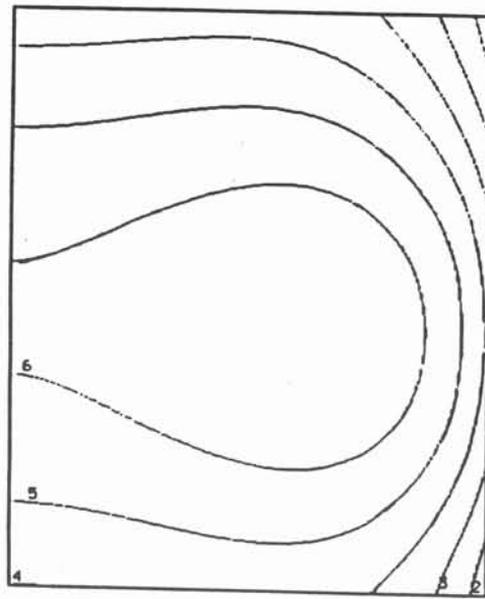
	$T_{\min}$ en K	$T_{\max}$ en K	$\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$ en K
conduction pure	991	1539	548
conduction + transfert radiatif $a = 3 \text{ cm}^{-1}$	820	1146	326
conduction + transfert radiatif $a = 1 \text{ cm}^{-1}$	807	1088	281

On constate à la vue de ces résultats que les températures dans le bain calculées dans les deux cas avec rayonnement sont nettement plus faibles que celles calculées dans le cas en conduction pure (171 K en moins pour la température la plus basse soit environ 17%, et 393 K de moins pour la température la plus haute soit environ 25%, pour le cas où  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$ ). Parallèlement à ces observations, et ce n'est pas l'effet du hasard, nous remarquons une plus grande homogénéité des températures pour les cas avec rayonnement puisque les écarts de températures enregistrés entre les

valeurs extrêmes dans chacun des cas sont de 548 K pour la conduction pure, 326 K pour le cas avec  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$ , 281 K pour le cas traité avec  $a = 1 \text{ cm}^{-1}$ . Ce dernier phénomène apparaît nettement sur les courbes isothermes représentées sur les figures 5.11, 5.12a, 5.12b, ainsi que sur les profils de températures le long de l'axe médian horizontal (figure 5.13), et le long de l'axe de symétrie (figure 5.14). Le rayonnement a donc un effet d'homogénéisation des températures ce qui a pour conséquence une augmentation des pertes en parois d'où des températures plus faibles dans le bain.

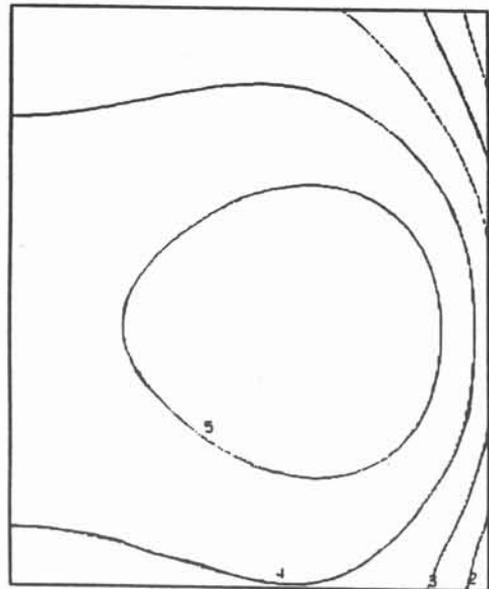


*Figure 5.11* : isothermes obtenues par une résolution électromagnéto-thermique sans transfert radiatif.



	K
1	= 850
2	= 900
3	= 950
4	= 1000
5	= 1050
6	= 1100

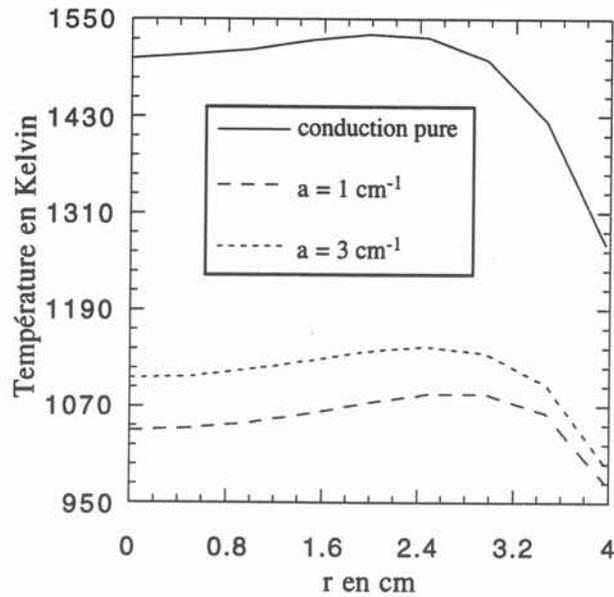
a)  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$



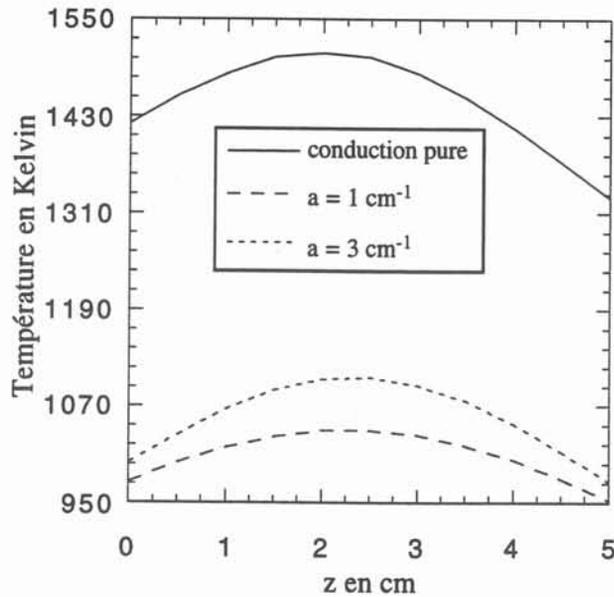
	K
1	= 850
2	= 900
3	= 950
4	= 1000
5	= 1050

b)  $a = 1 \text{ cm}^{-1}$

**Figure 5.12** : isothermes dans la charge obtenues par une résolution électromagnétique-thermique avec transfert radiatif pour deux valeurs du coefficient d'absorption.

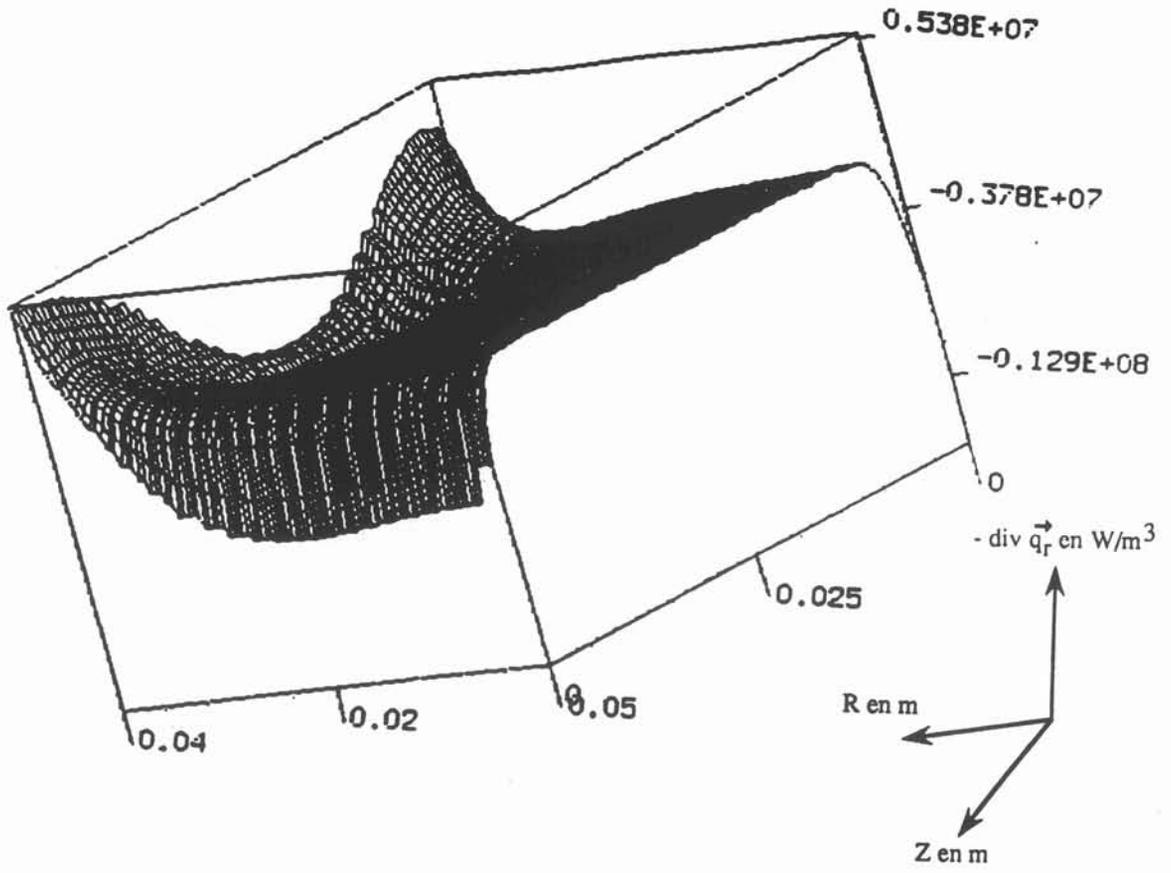
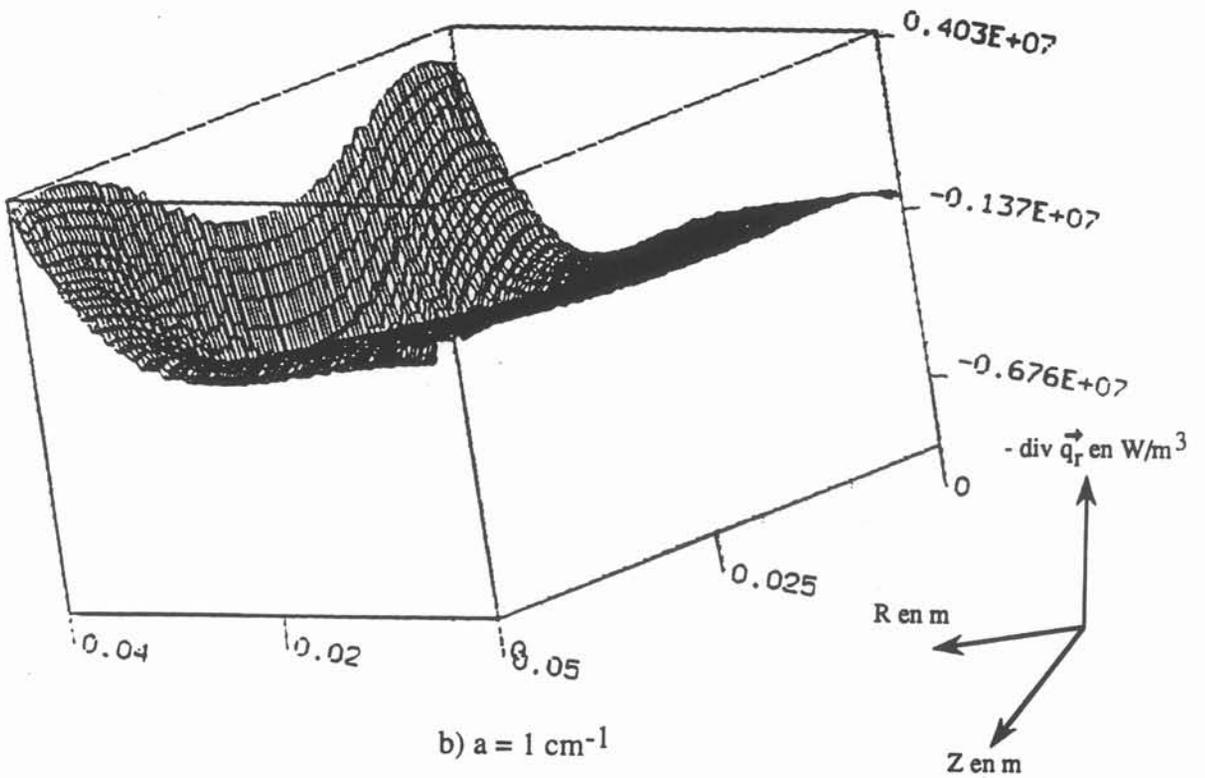


**Figure 5.13** : profil de température le long de l'axe médian horizontal pour un cas en conduction pure, un cas avec  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$ , un cas avec  $a = 1 \text{ cm}^{-1}$ .



**Figure 5.14** : profil de température le long de l'axe de symétrie pour un cas en conduction pure, un cas avec  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$ , un cas avec  $a = 1 \text{ cm}^{-1}$ .

La comparaison entre les deux cas traités avec transfert radiatif montre des températures plus importantes pour le cas où  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$  que pour celui où  $a$  est pris égal à  $1 \text{ cm}^{-1}$ . Ceci s'explique par le fait que le bain est plus absorbant dans le premier cas. Par contre pour  $a = 1 \text{ cm}^{-1}$ , le bain est plus homogène en température. Ceci est du au fait que le milieu devient alors optiquement plus mince que lorsque  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$ , donc le rayonnement partant d'un point quelconque de la frontière du domaine ou du bain lui-même parcourt une distance plus grande avant d'être absorbé, le transfert radiatif est alors d'avantage dominé par l'émission de rayonnement. L'observation des puissances radiatives volumiques (opposé de la divergence du flux radiatif) pour les cas  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$  (figure 5.15a), et  $a = 1 \text{ cm}^{-1}$  (figure 5.15b) laisse apparaître dans les deux cas des valeurs très perturbées avec des amplitudes très importantes ( $1.828\text{E}+7 \text{ W/m}^3$  pour  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$ ,  $1.079\text{E}+7 \text{ W/m}^3$  pour  $a = 1 \text{ cm}^{-1}$ ) moins élevées néanmoins pour le cas où  $a = 1 \text{ cm}^{-1}$  (amplitude moins élevée de 41% par rapport à celle obtenue avec  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$ ), ce qui explique l'effet plus important de l'homogénéisation des températures.

a)  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$ b)  $a = 1 \text{ cm}^{-1}$ 

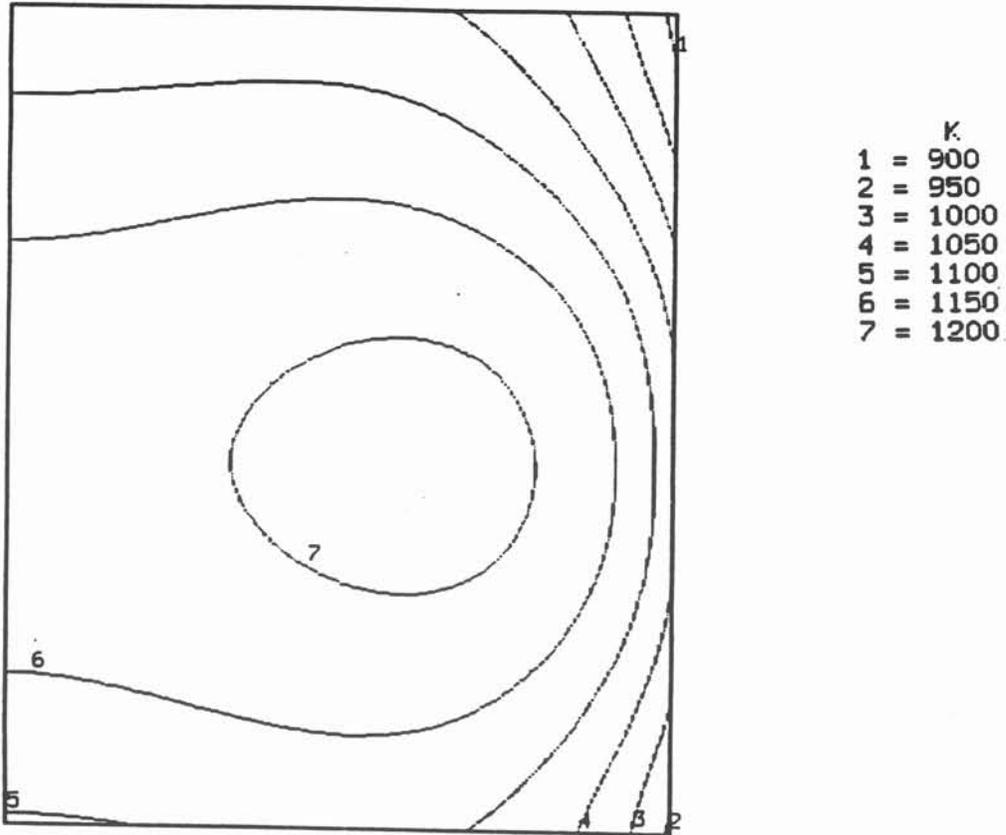
**Figure 5.15 :** puissance radiative volumique dans la charge obtenue pour deux valeurs du coefficient d'absorption.

### V.1.1.2 - Influence de l'émissivité des faces

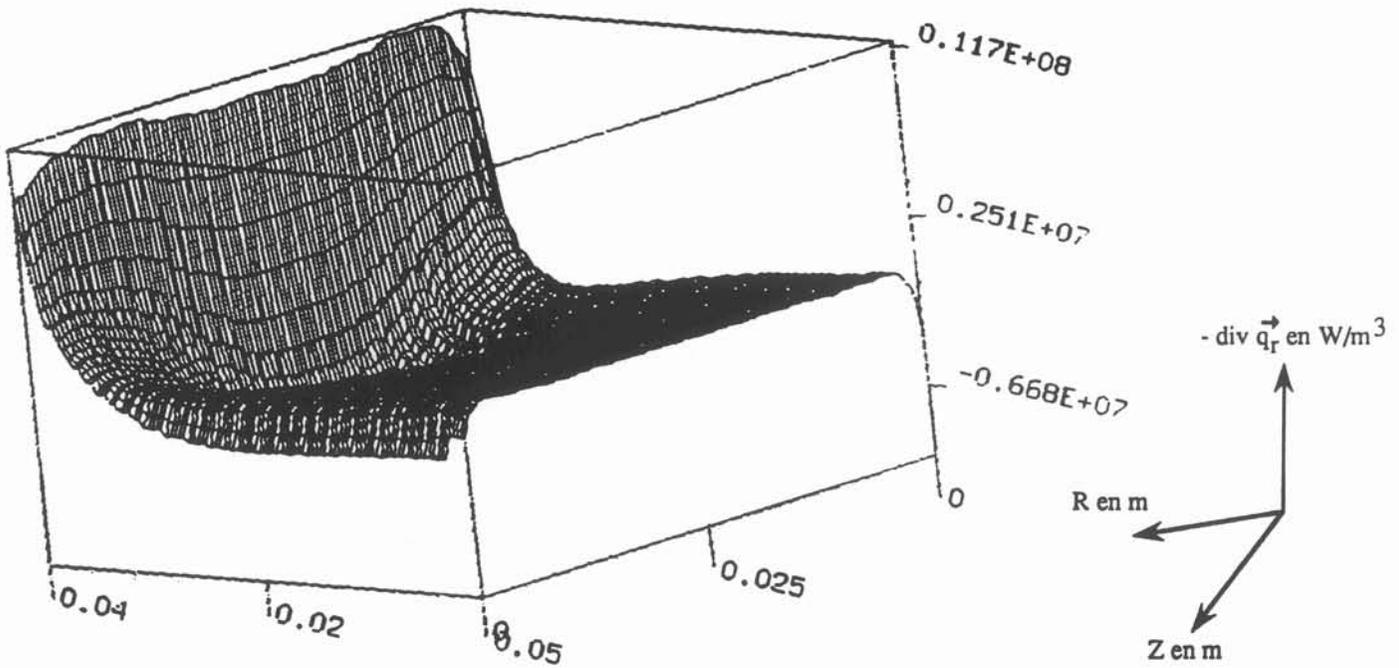
Nous proposons la comparaison pour une même valeur du coefficient d'absorption  $a = 3\text{cm}^{-1}$  entre le cas déjà traité où les faces sont supposées noires et un cas où l'on fixe leur émissivité à 0,4.

La comparaison aussi bien des isothermes (figures 5.12 et 5.16) que des profils de températures le long de l'axe médian horizontal (figure 5.18), ou le long de l'axe de symétrie (figure 5.19), montre des températures plus élevées dans le cas des parois d'émissivité 0,4. La température minimale calculée a augmentée de 63K soit environ 8%, et la température maximale a augmentée de 72K soit environ 6%. La comparaison des figures 5.12a ( $\epsilon = 1$ ) et 5.16 ( $\epsilon = 0,4$ ) nous montre que l'homogénéité des températures est plus grande dans le cas où l'émissivité est égale à un. L'observation des puissances radiatives volumiques dans les deux cas (figures 5.15a et 5.17) présente une différence insignifiante concernant les amplitudes entre la valeur la plus basse et la valeur la plus haute dans chacun des cas : pour celui où les émissivités sont égales à un l'amplitude est de  $1.828\text{E}+7\text{W}/\text{m}^3$ , et pour celui où l'émissivité est fixée à la valeur 0,4, l'amplitude sur la puissance radiative volumique est de  $1.838\text{E}+7\text{W}/\text{m}^3$ . En revanche deux remarques peuvent être formulées au sujet des puissances volumiques radiatives :

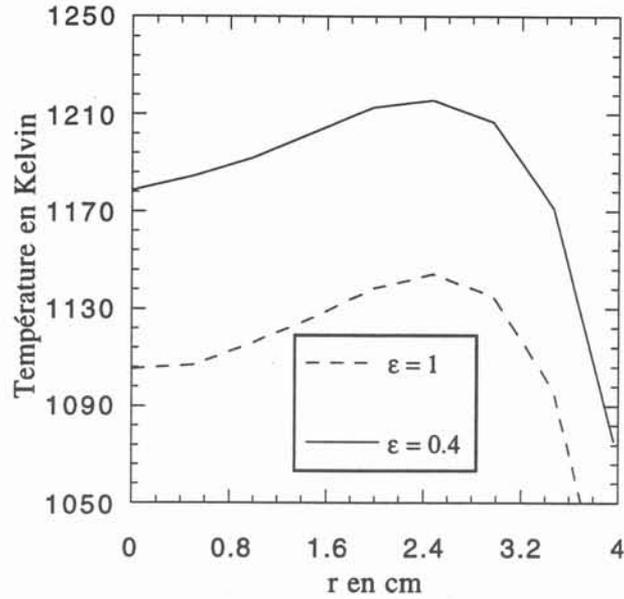
- les valeurs sont plus élevées dans le cas de l'émissivité égale à 0,4 sur les faces, ce qui explique que les températures sont plus hautes dans ce cas,
- l'allure de ces sources radiatives n'est pas la même pour les deux cas : nous observons une différence très marquée au niveau de la paroi qui se situe exactement en face de l'axe de symétrie, partie située en regard avec les spires de l'inducteur. Lorsque l'émissivité est égale à un nous pouvons voir un "creux" à cet endroit où la densité de puissance JOULE est maximale (figure 5.10 et figure 5.15a). Ce "creux" disparaît complètement lorsque l'émissivité est égale à 0,4 (figure 5.17) : dans ce cas la paroi étant plus réfléchissante (de réflectivité égale à 0,6) renvoie le rayonnement provenant du milieu, provoquant une plus grande absorption dans les régions qui lui sont proches d'où une augmentation des températures.



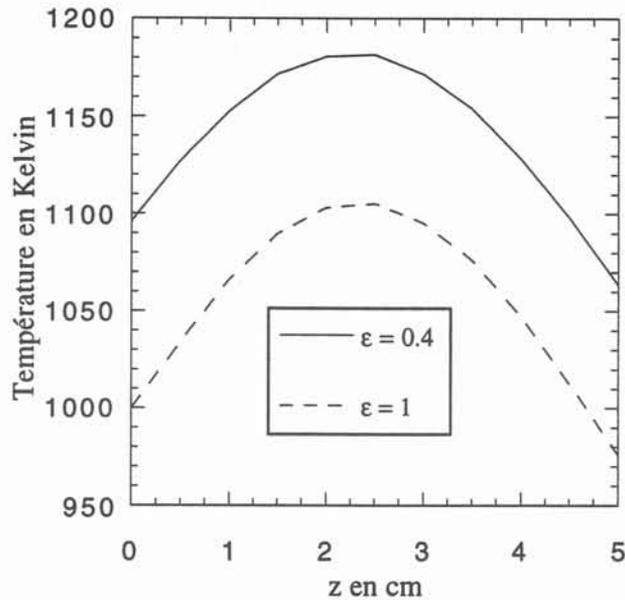
**Figure 5.16 :** isothermes dans la charge dans le cas où le coefficient d'absorption est égal à  $3 \text{ cm}^{-1}$ , et l'émissivité des parois est égale à 0.4.



**Figure 5.17 :** puissance volumique radiative dans la charge dans le cas où le coefficient d'absorption est égal à  $3 \text{ cm}^{-1}$ , et l'émissivité des parois est égale à 0.4.



**Figure 5.18** : comparaison des profils de température sur le plan médian horizontal obtenus pour un même coefficient d'absorption  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$ , et pour deux valeurs d'émissivité des faces.

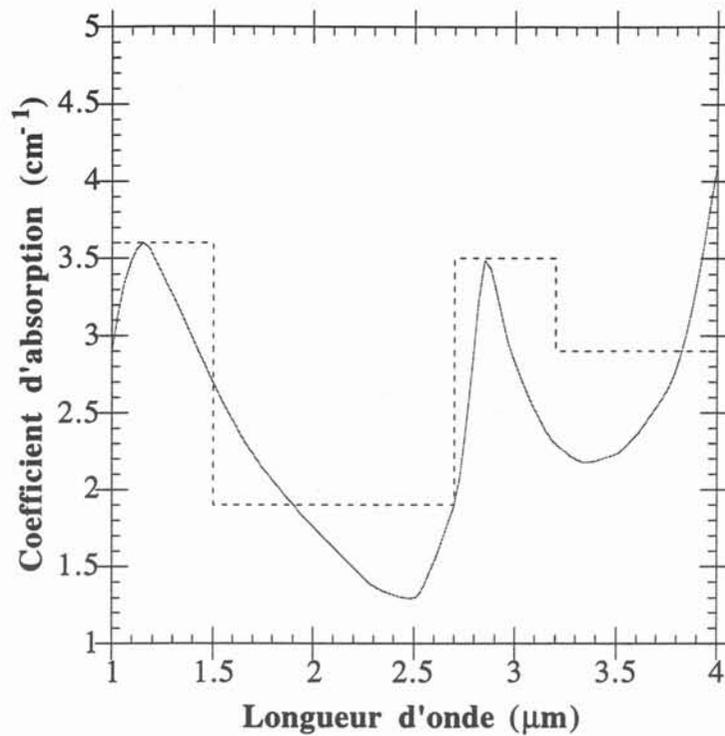


**Figure 5.19** : comparaison des profils de température sur l'axe de symétrie obtenus pour un même coefficient d'absorption  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$ , et pour deux valeurs d'émissivité des faces.

### V.1.2 - Le modèle à quatre bandes

L'objectif de ce paragraphe est uniquement de présenter le couplage électromagnétique-thermique avec transfert radiatif, dans le cas de la fusion d'un matériau non gris dont le coefficient d'absorption présente des variations suivant la longueur d'onde. Le matériau choisi est un verre dont le spectre d'absorption est représenté sur la figure 5.20 issue de [67]. Nous découpons ce spectre en quatre bandes dont voici la description :

- bande un :
  - largeur de la bande :  $0,5 \mu\text{m}$ ,
  - longueur d'onde moyenne dans la bande :  $1,25 \mu\text{m}$ ,
  - coefficient d'absorption dans la bande :  $3,6 \text{ cm}^{-1}$
- bande deux :
  - largeur de la bande :  $1,2 \mu\text{m}$ ,
  - longueur d'onde moyenne dans la bande :  $2,1 \mu\text{m}$ ,
  - coefficient d'absorption dans la bande :  $1,9 \text{ cm}^{-1}$
- bande trois :
  - largeur de la bande :  $0,5 \mu\text{m}$ ,
  - longueur d'onde moyenne dans la bande :  $2,95 \mu\text{m}$ ,
  - coefficient d'absorption dans la bande :  $3,5 \text{ cm}^{-1}$
- bande quatre :
  - largeur de la bande :  $0,8 \mu\text{m}$ ,
  - longueur d'onde moyenne dans la bande :  $3,6 \mu\text{m}$ ,
  - coefficient d'absorption dans la bande :  $2,9 \text{ cm}^{-1}$

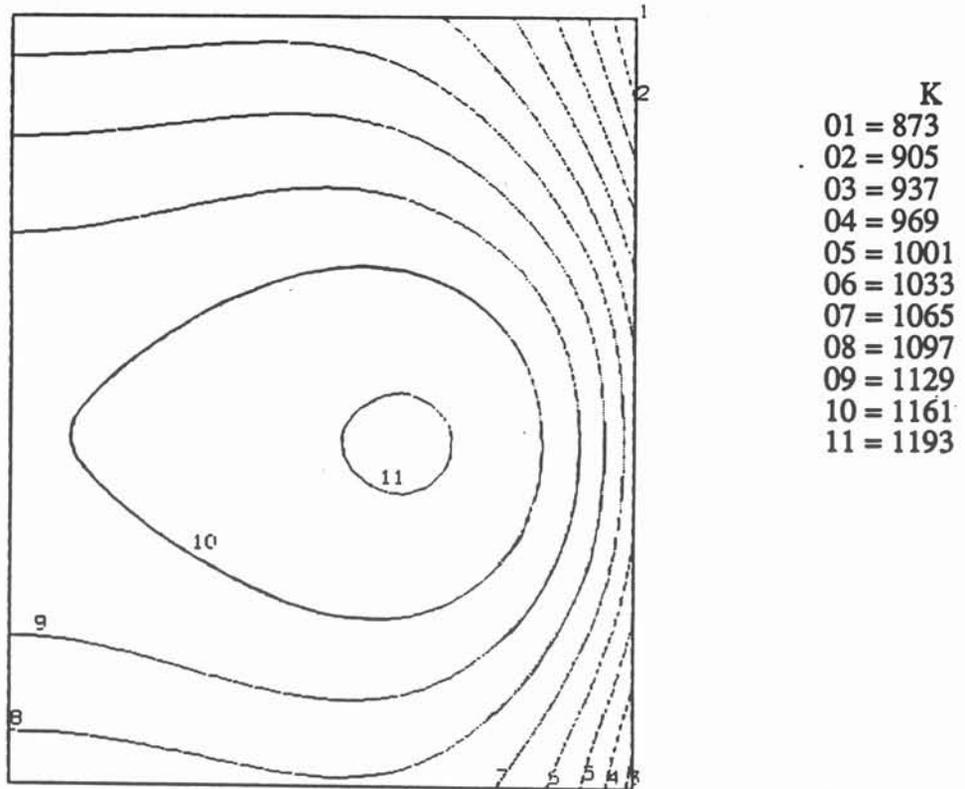


**Figure 5.20** : représentation du spectre d'absorption d'un verre de silice de composition :

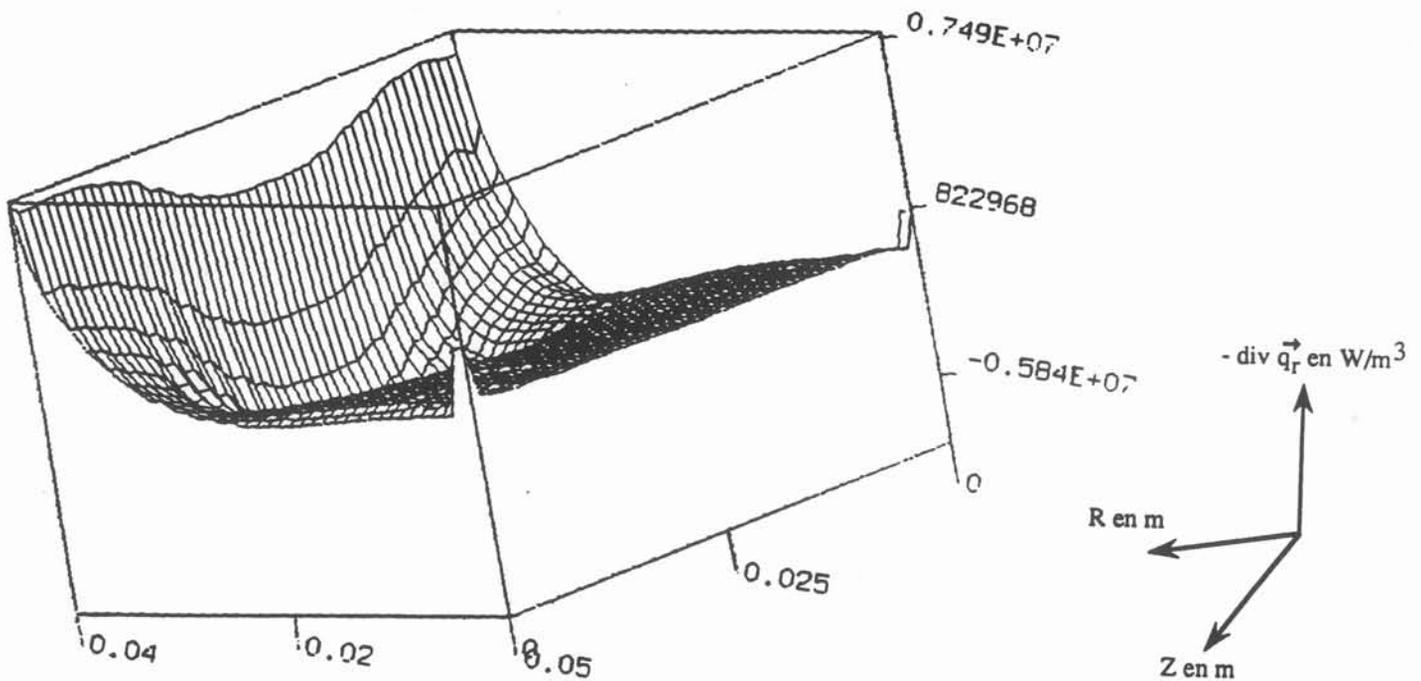
SiO <sub>2</sub>	61.5 %
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	15 %
CaO	23 %
C	0.07 %
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2 %
FeO	0.75 %

Toutes les autres propriétés aussi bien radiatives que thermique ou électrique servant à traiter le problème sont identiques à celles des essais précédents.

Nous présentons les courbes isothermes obtenues sur la figure 5.21, ainsi que l'élévation sur grille de la puissance radiative volumique sur la figure 5.22. Les résultats obtenus sont proches de ceux obtenus avec  $a = 3 \text{ cm}^{-1}$ , ce qui n'est pas surprenant dans la mesure où la valeur moyenne du coefficient d'absorption représenté par le spectre est de  $2.7 \text{ cm}^{-1}$ .



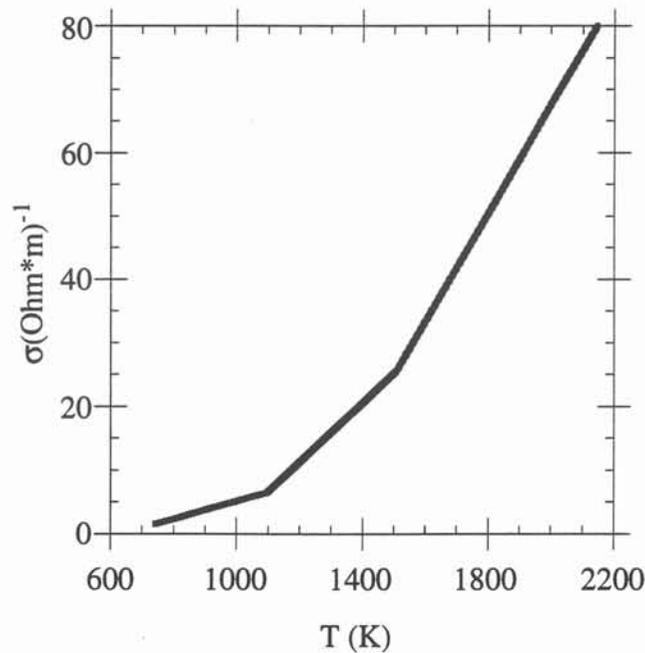
**Figure 5.21** : isothermes dans un bain de verre dont le spectre d'absorption est représenté par un modèle à quatre bandes.



**Figure 5.22** : puissance radiative volumique dans un bain de verre dont le spectre d'absorption est représenté par un modèle à quatre bandes.

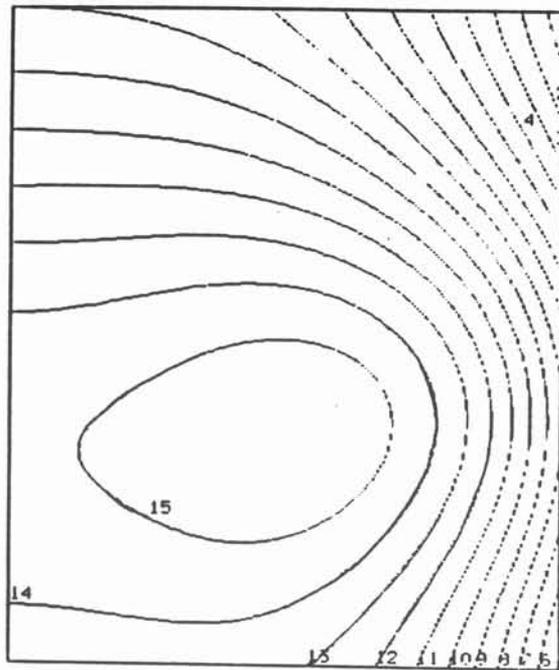
## V.2 - Test avec conductivité électrique variable

Nous présentons deux tests, un en conduction pure et un avec transfert radiatif où le coefficient d'absorption est pris égal à  $1 \text{ cm}^{-1}$  et l'émissivité des faces est égale à un. Pour les deux essais la conductivité électrique varie avec la température selon la courbe présentée sur la figure 5.23.



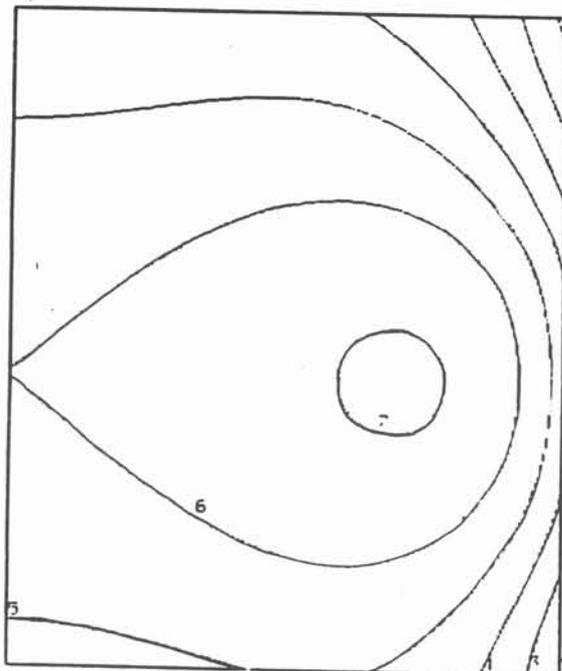
**Figure 5.23** : variation de la conductivité électrique avec la température.

Les résultats obtenus sont parfaitement en accord avec ceux décrits au cours des paragraphes précédents. En effet les températures calculées en conduction pure varient de 916 K à 1688 K soit un écart de température de 772 K, alors qu'en conduction plus rayonnement elles varient de 787 K à 1106 K soit un écart inférieur de 59% par rapport au calcul en conduction seule. Cela implique une répartition du champ de température plus homogène dans le cas avec rayonnement constaté par l'observation des figures 5.24a et 5.24b.



	K
1	= 950
2	= 1000
3	= 1050
4	= 1100
5	= 1150
6	= 1200
7	= 1250
8	= 1300
9	= 1350
10	= 1400
11	= 1450
12	= 1500
13	= 1550
14	= 1600
15	= 1650

a) conduction pure



	K
1	= 800
2	= 850
3	= 900
4	= 950
5	= 1000
6	= 1050
7	= 1100

b) avec transfert radiatif

**Figure 5.24** : isothermes dans le bain de verre avec une conductivité électrique variable en fonction de la température.

## VI - CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre les motivations des choix des méthodes numériques prises pour modéliser chacun des phénomènes mis en jeu : électromagnétique et thermique. Le logiciel utilisé permettra de par sa généralité d'introduire ultérieurement la modélisation du phénomène hydrodynamique.

Après avoir brièvement exposé le principe de chacune des méthodes numériques nous avons décrit les algorithmes de couplage :

- électromagnétique et thermique,
- électromagnétique, thermique et rayonnement interne.

Des premiers tests de validation ont été effectués. Ils ont permis de mettre en évidence l'influence de quelques paramètres (rayonnement, émissivité des faces, conductivité électrique) dans le cadre d'une modélisation complète de ce procédé. Ceci nous permet déjà de constater que le logiciel donne les bonnes tendances.

Une validation complémentaire a été effectuée. Elle concerne des essais expérimentaux qui ont été réalisés au CEA de Marcoule, sur un four de taille industrielle. Nous nous proposons dans le prochain chapitre d'exposer les principaux résultats issus de cette campagne d'essais ainsi que ceux résultant de la modélisation numérique de quelques uns de ces essais.

## **CONCLUSION**



Le verre est un matériau fascinant qui depuis plusieurs millénaires suscite une attention toute particulière à l'homme. En effet, d'abord utilisé comme objet de parure très apprécié, il est ensuite employé comme récipient puis après une longue histoire quant à son développement à travers les âges et à travers le monde, il revêt aujourd'hui un nombre d'applications innombrables. En effet, le verre est une substance qui théoriquement présente un nombre illimité de possibilités de compositions. C'est pourquoi ses propriétés sont également très diverses ce qui lui a ouvert de nombreux domaines d'utilisation.

Au CEA de Marcoule, nous nous intéressons à une application toute particulière du verre : le confinement des déchets nucléaires de haute activité dans une matrice d'un verre ayant la propriété d'éviter la lixiviation, c'est à dire le retour à l'homme de l'activité du matériau par l'eau. La technique utilisée pour l'élaboration de ce verre est la fusion par induction en creuset froid. Grâce à ce procédé avec lequel il n'y a pas de contact entre le verre en fusion et le creuset, ce dernier n'est pas corrodé par le verre et donc aucun déchet nouveau n'est créé lors du retraitement des déchets d'origine. Afin de valoriser le procédé, des verres semi-transparents ou transparents sont aussi conçus : l'intérêt de la fusion par induction en creuset froid réside dans la non pollution du verre par le creuset, permettant ainsi d'obtenir des verres de haute qualité.

Quelque soit le type de verre que l'on veut élaborer, trois phénomènes physiques non linéaires et fortement couplés par la dépendance des propriétés des verres en fonction de la température entrent en jeu lors d'une fusion par induction en creuset froid : l'électromagnétisme, les transferts thermiques et l'hydrodynamique. Lors de la fusion d'un verre semi-transparent comme un verre à vitre par exemple, s'ajoute un phénomène particulier : le transfert radiatif. C'est à l'étude et à la modélisation numérique de ces procédés d'élaboration des verres qu'a été consacré cette thèse. Or au laboratoire, lors d'études récentes a été développé un logiciel : MALICE résultant du couplage entre les logiciels OPHELIE de modélisation du phénomène électromagnétique dans les procédés d'élaboration en creuset froid par la méthode intégrale et FLUX EXPERT pour la résolution d'autres phénomènes par la méthode des éléments finis. Les potentialités du code FLUX EXPERT : description de nouvelles équations aux dérivées partielles, d'algorithmes et de propriétés physiques se retrouve dans ce code MALICE. Ainsi disposons-nous de la possibilité de décrire une modélisation adaptée à notre problème. Nous avons donc exploité la généralité de ce logiciel pour développer la modélisation électromagnétique-thermique avec prise en compte du transfert radiatif.

En grande partie cette thèse a été consacrée à la modélisation numérique du transfert radiatif dans le contexte de la méthode des éléments finis. Après avoir décrit en détail ce mécanisme physique, une revue bibliographique nous a permis de définir un choix pour la méthode numérique à utiliser pour la modélisation du transfert radiatif. Ce choix a été effectué de manière à répondre aux besoins du CEA de Marcoule : développement du code en géométrie axisymétrique, utilisation fiable pour des verres optiquement minces ou épais, et pour des bains plats (c'est à dire

dont la hauteur est faible devant le rayon) ou hauts et devant pouvoir prendre en compte la variation des propriétés optiques des verres comme le coefficient d'absorption en fonction de la longueur d'onde. L'équation de la chaleur ou transfert radiatif est résolue par la méthode des éléments finis. Le transfert radiatif est inclus dans l'équation thermique par le terme de divergence du flux radiatif qui dépend de la température. Nous avons choisi une méthode des ordonnées discrètes  $S_4$  pour le calculer. Après une discrétisation directionnelle pour laquelle nous avons choisi un certain nombre de directions discrètes dans l'espace, les noeuds du maillage éléments finis étant placés arbitrairement, ces noeuds sont classés par niveau au début du calcul pour chaque direction discrète. Ensuite la luminance ou intensité radiative est calculée en chaque noeud, en suivant chaque direction, en appliquant une loi vérifiant l'équation du transfert radiatif à l'intérieur de chaque élément. Ensuite, la divergence de flux radiatif est calculée à chaque point d'intégration du maillage. Le modèle développé est de plus un modèle à bandes permettant la prise en compte des variations des propriétés optiques en fonction de la longueur d'onde, il peut être aussi utilisé pour des milieux à diffusion isotrope. Précisons qu'en fait deux modèles ont été conçus, un pour traiter des problèmes en géométrie 2D cartésienne, l'autre destiné à résoudre des problèmes en géométrie 2D axisymétrique.

Inclus à l'équation de la chaleur, nous avons validé et étudié l'influence sur les champs de température de certains paramètres pour les deux modèles 2D cartésien et 2D axisymétrique. De par l'utilisation des éléments finis et par le principe du classement de graphe par niveau, les deux modèles obtenus autant en 2D axisymétrique qu'en 2D cartésien présentent l'avantage de pouvoir modéliser des domaines de géométrie quelconque. Quant à ces classements de graphes par niveau, ils peuvent être transportés sur d'autres codes de calcul pour par exemple résoudre des problèmes de propagation d'ondes que l'on pourrait suivre dans une direction donnée.

Par la suite le logiciel MALICE résultant du couplage entre les logiciels OCTAVE (version du logiciel OPHELIE réservée à la modélisation de l'électromagnétisme dans le cas des verres) basé sur la méthode intégrale et FLUX EXPERT pour la résolution thermique par la méthode des éléments finis, avec possibilité d'introduire ce qui est le cas pour les verres, une conductivité électrique variable avec la température, s'est vu complété par la possibilité de prendre ou non en compte le rayonnement interne. Avant de pouvoir utiliser le code pour des applications réelles que constituent les expériences effectuées sur le site de Marcoule de fusion de verre par induction en creuset froid, une régulation en puissance dans le logiciel OCTAVE a été mise au point de manière à converger vers une solution acceptable sans quoi la solution obtenue serait soit froide (verre figé) soit chaude (verre surchauffé) ceci à cause de la forte variation de la conductivité électrique en fonction de la température.

Une campagne d'essais a été par ailleurs réalisée au CEA de Marcoule sur deux types de verres : un verre noir et un verre semi-transparent dans un four à induction en creuset froid de grande taille, en statique et en coulée continue. Ces manipulations ont permis de mettre en évidence

le transfert radiatif dont la conséquence est une homogénéisation de la température dans le bain causant une diminution de la couche de verre figé contre les parois du four (creuset, fond froid, sole) d'où des pertes plus importantes. N'ayant pas pris en compte la modélisation des phénomènes hydrodynamiques dans le code, les essais réalisés en statique avaient pour but de valider le code de calcul. Ces derniers nous ont tout d'abord permis d'observer la difficulté à piloter l'installation de fusion lorsqu'on tentait d'élaborer un verre semi-transparent. En effet, nous n'avons jamais réussi à obtenir un régime électriquement stable lors de ces essais qui nous ont obligé à agir sans cesse sur la tension pour maintenir des conditions de fusion acceptables. Cela justifie précisément la nécessité d'avoir recours à un blocage de la puissance dans le code de calcul.

En ce qui concerne la validation du code à l'aide des résultats, nous nous devons de rester prudents quant aux résultats relativement satisfaisants obtenus avec le code, les confrontations expériences et résultats numériques n'ayant pas été doublées. De plus certaines imprécisions ont été constatées lors des mesures : des problèmes de fiabilité de certains thermocouples et des difficultés de différenciation entre les puissances JOULE et les pertes thermiques. Il faudrait affiner la caractérisation des différents paramètres qui interviennent au cours d'un essai comme la puissance dans le bain ainsi que les coefficients d'échange aux frontières. Pour de prochains essais il faudrait mieux caractériser le matériau en faisant mesurer le spectre d'absorption à chaud. La connaissance du spectre d'absorption à froid pourrait s'avérer suffisante à condition d'avoir accès à la composition du verre étudié. Cela permettrait éventuellement de savoir quel facteur correctif appliquer aux valeurs du coefficient d'absorption pour avoir une idée des valeurs à haute température. Il est important de noter que dans ce type de procédé toute validation de logiciel, voir tout dimensionnement va se heurter à d'importantes difficultés de caractérisation du matériau à élaborer.

Pour l'heure nous disposons déjà d'un modèle suffisamment fiable pour analyser et interpréter les phénomènes couplés intervenant dans ce type de procédés.

Du point de vue expérimental il reste un problème de caractérisation du matériau à élaborer d'une part, des mesures à effectuer pendant les essais qui permettraient d'accéder notamment à la puissance dans le bain et aux coefficients d'échange aux parois.

En ce qui concerne la modélisation numérique un travail sur les algorithmes itératifs est à réaliser afin de mieux les adapter à ce problème fortement couplé et ce en vue de réduire les temps de calcul. Pour compléter la modélisation, il faut aussi aborder l'aspect hydrodynamique avec prise en compte de la viscosité dynamique variable en fonction de la température. Ensuite le développement d'un algorithme transitoire permettrait de simuler les essais en coulée continue et de les confronter avec l'expérience.



## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

=====



- [1] J. LEFEVRE : "Les déchets nucléaires." *Collection du Commissariat à l'Energie Atomique, série synthèses*, juin 1986.
- [2] C. GODET : "Fibrage du verre : étude expérimentale et numérique." *Thèse INP Grenoble*, 1984.
- [3] J. ZARZYCKI : "Le verre et l'état vitreux." *Ed. Masson*, 1982.
- [4] H. SCHOLZE : "Le verre, nature, structure et propriétés." *Institut du verre, 2<sup>ème</sup> édition*, 1980.
- [5] M. ROSCINI : "Fusion de verres par induction : étude électromagnétique et thermo-hydraulique." *Thèse INP Grenoble*, 1990.
- [6] R.A. STARK : "Comment réduire les ennuis dus aux réfractaires des fours à induction." *Homme et fonderie*, janvier 1992.
- [7] G.C. SUN : "Modélisation des processus d'interaction entre thermohydraulique et électrocinétique dans les milieux semi-transparents à haute température." *Thèse Université de Poitiers*, 1993.
- [8] A. GAGNOUD : "Modélisation des installations de fusion en creuset froid pour l'élaboration en continu ou la lévitation." *Thèse INP Grenoble*, 1986.
- [9] A. GAGNOUD, I. LECLERQ : "Electromagnetic modelling of induction melting device in cold crucibles." *IEEE Transactions on Magnetics*, vol.24, n° 1, pp. 573-575, 1988.
- [10] Ch. RAFFOURT : "Modélisation numérique de la thermo-hydraulique d'une coulée semi-continue de plaque d'aluminium." *Thèse INP Grenoble*, 1991.
- [11] M. BURTY, Y. FAUTRELLE and D. HUIN : "A computational model for the prediction of turbulent recirculating two phase flows in a gas stirred steel ladle." *Proceeding 6<sup>th</sup> I.I.S.C.*, Nagoya (Japan), october 6<sup>th</sup>, 1990.
- [12] Ch. RAFFOURT, Y. FAUTRELLE, J.L. MEYER and B. HANNART : "Thermal and fluid flow calculations in an aluminium slab." *Proceeding of Modelling of Casting Welding and Advanced Solidification Processes Conference*, Davos, September 16<sup>th</sup>, 1990.
- [13] M. ROSCINI, A. GAGNOUD, Y.FAUTRELLE : "Numerical modelling of induction furnaces for oxide melting." *Internatinal Conference of Energy Transfer in Magneto-Hydro-Dynamics Flows*, pp.207-212, Cadarache, France, september 30<sup>th</sup>, october 4<sup>th</sup>, 1991.
- [14] Ph. MASSE : "Analyse méthodologique de la modélisation numérique des équations de la physique des milieux continus à l'aide de la méthode des éléments finis, Flux Expert : un système d'aide à la construction de logiciels." *Thèse de Doctorat d'Etat es Sciences, INP de Grenoble*, 1983.
- [15] Ph. MASSE : "Modelling of continuous media methodology and CAD of finite element programs." *Intermag Conference*, Hambourg, F.R.G., 1984.
- [16] S. PLAN-SERVANT : "Elaboration semi-continue de silicium multicristallin en creuset froid inductif." *Thèse INP Grenoble*, 1993.

- [17] R. SIEGEL, J.R. HOWELL : "Thermal radiation heat transfer." *Hemisphere Publishing Corporation, 3<sup>ème</sup> édition*, 1981.
- [18] D. SCHWANDER : "Influence des propriétés radiatives des interfaces sur les transferts thermiques dans les milieux semi-transparents condensés." *Thèse Université de Perpignan*, 1988.
- [19] L. ZHANG : "Transferts radiatifs corrélés dans des gaz chauds ; couplage avec la convection mixte laminaire. Validation d'une technique expérimentale." *Thèse Ecole Centrale Paris*, 1989.
- [20] P. GUILLEMANT : "Modélisation numérique et analytique des transferts couplés rayonnement-conduction dans les milieux semi-transparents. Identification expérimentale par la méthode de l'hémisphère." *Thèse Université de Provence (IUSTI), Marseille*, 1992.
- [21] V.A. PETROV, S.V. STEPANOV : "Radiation characteristics of quartz glasses, spectral radiating power." *Teplofiz. Vys. Temp.*, vol. 13, pp. 335-345, 1975.
- [22] H.C. HOTTEL, A.F. SAROFIM : "Radiative transfer in anisotropically scattering media : allowance for fresnel reflection at the boundaries." *Transactions of the ASME*, 1968.
- [23] Y.A. CENGEL, M.N. ÖZISIK : "The use of the Galerkin method for radiation transfer in an anisotropically scattering slab with reflecting boundaries." *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 32, pp. 225-233, 1984.
- [24] M.P. MENGÜC, R. VISKANTA : "Radiative transfer in three-dimensional rectangular enclosures containing inhomogeneous, anisotropically scattering media." *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 33, n° 6, pp. 533-549, 1985.
- [25] J.H. JOSEPH, W.J. WISCOMBE : "The Delta Eddington approximation for radiative flux transfer." *Journal of the atmospheric sciences*, vol. 33, pp. 2452-2459, 1976.
- [26] W.A. FIVELAND : "Three dimensional radiative heat transfer solutions by the discrete ordinates methods." *J. Thermophysics*, vol. 2, n° 4, pp. 309-316, 1988.
- [27] W.J. WISCOMBE : "The delta-M method : rapid yet accurate radiative flux calculations for strongly asymmetric phase functions." *Journal of the atmospheric sciences*, vol. 34, pp. 1408-1422, 1977.
- [28] G. UNY : "Modélisation du transfert couplé rayonnement-convection au sein de matériaux poreux et identification de leurs propriétés radiatives. Application aux laines de verre." *Thèse INSA Lyon*, 1986.
- [29] T.Y. KIM, S.W. BAEK : "Analysis of combined conductive and radiative heat transfer in a two-dimensional rectangular enclosure using the discrete ordinates method." *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 34, n° 9, pp. 2265-2273, 1991.
- [30] R. FABRIS : "Modélisation des transferts thermiques couplés convection-rayonnement dans les milieux semi-transparents fluides. Détermination à haute température des propriétés radiatives des verres." *Thèse Université de Poitiers*, 1990.
- [31] A. DRAOUI : "Etudes numériques des transferts de chaleur couplés rayonnement-conduction et rayonnement-convection dans un milieu semi-transparent bidimensionnel." *Thèse INSA Lyon*, 1989.

- [32] A. YÜCEL and M.L. WILLIAMS : "Heat transfer by combined conduction and radiation in axisymmetric enclosures." *J. Thermophysics*, vol. 1, n° 4, pp. 301-306, october 1987.
- [33] S. CHANDRASEKHAR : "Radiative transfer." *New York, Dover publications*, 1960.
- [34] A.L. CROSBIE, R.G. SCHRENKER : "Exact expressions for radiative transfer in a three dimensional rectangular geometry." *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol. 28, n° 6, pp. 507-526, 1982.
- [35] A.L. CROSBIE, J.B. FARRELL : "Exact formulation of multiple scattering in a three dimensional cylindrical geometry." *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 31, n° 5, pp. 397-416, 1984.
- [36] J.D. LIN : "Exact expressions for radiative transfer in an arbitrary geometry exposed to radiation." *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 37, n° 6, pp. 591-601, 1987.
- [37] Al ABED, J.F. SACADURA : "A Monte Carlo finite difference method for coupled radiation-conduction heat transfer in semi-transparent media." *J. of Heat Transfer*, vol. 105, pp. 931-933, 1983.
- [38] H.C. HOTTEL, A.F. SAROFIM : "Radiative transfer." *New-York, Mc Graw*, 1967.
- [39] S.W. BAEK, T.Y. KIM : "The conductive and radiative heat transfer in rectangular enclosure using the discrete ordinates method." *J. of Heat Transfer*, 1990.
- [40] R. VISKANTA, E.E. ANDERSON : "Heat transfer in semi-transparent solids." *Advances in heat transfer, Academic press*, vol. 11, 1975.
- [41] N. EL WAKIL : "Etude de transfert de chaleur par conduction, convection et rayonnement couplés dans des milieux semi-transparents fluides ou poreux. Elaboration de modèles de simulation en géométrie bidimensionnelle." *Thèse INSA Lyon*, 1991.
- [42] J. BUSSAC, P. REUSS : "Traité de neutronique." *Edition Hermann, 2ème édition*, 1985.
- [43] J.S. TRUELOVE : "Discrete-ordinate solutions of the radiation transport equation." *Transactions of the ASME*, vol.109, pp.1048-1051, november 1987.
- [44] A.S. JAMALUDDIN and P.J. SMITH : "Predicting radiative transfer in axisymmetric cylindrical enclosures using the discrete ordinates method." *Combust. Sci. and Tech.*, vol. 62, pp. 173-186, 1988.
- [45] H.P. TAN : "Transfert couplé rayonnement-conduction instationnaire dans les milieux semi-transparents à frontières opaques ou naturelles soumis à des conditions de température et de flux." *Thèse Université de Poitiers*, 1988.
- [46] G. YANG, M.A. EBADIAN : "Combined convective radiative heat transfer in a duct applying the modified differential approximation radiation model." *HTD*, vol. 160, pp. 45-53, *Fundamentals of Radiation Heat Transfer, ASME*, 1991.
- [47] C. SALTIEL, M.H.N. NARAGHI : "Combined mode heat transfer in radiatively participating media using the discrete exchange factor method with finite elements." *The Ninth International Heat Transfer Conference, Int. Heat Transfer Conference, Jerusalem, Israël*, vol. 6, 1990.

- [48] M.N. ÖZISIK, Y. YENER : "The Galerkin method for solving radiation transfer in plane-parallel participating media." *Journal of Heat Transfer*, vol. 104, pp. 351-354, 1982.
- [49] C.H. HO, M.N. ÖZISIK : "Combined conduction and radiation in a two-layer planar medium with flux boundary condition." *Numerical Heat Transfer*, vol. 11, pp. 321-340, 1987.
- [50] R. FABRIS, G.C. SUN, J.C. HUCLIN : "Transferts couplés tridimensionnels convection-conduction-rayonnement dans un milieu semi-transparent." *Société Française des Thermiciens, Groupement Universitaire de Thermique et Section Rayonnement*, journée d'étude du 23 janvier 1991.
- [51] V. LE DEZ : "Couplage rayonnement-conduction. Forme géométrique libre dans un matériau semi-transparent à haute température. Application à l'étude des instabilités hydrodynamiques dans le formage des silicates." *Thèse Université de Poitiers*, 1993.
- [52] R. VISKANTA : "Radiation heat transfer : interaction with conduction and convection and approximation methods in radiation." *7<sup>th</sup> International Heat Transfer Conference*, Munich, 1982.
- [53] J.F. SACADURA : "Transfert radiatif et couplage conduction-rayonnement dans les milieux semi-transparentes. Problème direct et inverse." *Rencontre 1987 de la Société Française des Thermiciens*, Chatenay-Malabry, 5 mai 1987.
- [54] H. KHALIL, J. K. SCHULTIS : "Comparison of three numerical methods for evaluation of radiant energy transfer in scattering and heat generating media." *Numerical Heat Transfer*, vol. 5, pp. 235-252, 1982.
- [55] A. YÜCEL, S. ACHARYA : "Combined natural convection and radiation in a square enclosure." *International Heat Transfer Conference*, Houston, Texas, vol. 1, Juillet 1988.
- [56] S.V. PATANKAR : "Numerical heat transfer and fluid flow." Mc Graw-Hill, *Hemisphere Publishing corporation*, 1980.
- [57] A. YÜCEL, S. ACHARYA : "Combined natural convection and radiation in partitioned enclosures." *The Ninth International heat Transfer Conference*, Jerusalem, Israël, vol. 6, 1990.
- [58] A. DRAOUI, F. ALLARD : "Etude des transferts de chaleur couplés dans une cavité bidimensionnelle différentiellement chauffée et contenant un fluide semi-transparent gris." *Communication du centre de thermique de l'INSA de Lyon*, 1990.
- [59] P. JONES, Y. BAYAZITOGU : "Combined radiation and conduction from a sphere in a participating medium." *Journal of Heat Transfer*, 1990.
- [60] T. FUSEGI, B. FAROUK : "Laminar and turbulent natural convection-radiation interactions in a square enclosure filled with a nongray gas." *Numerical Heat Transfer*, part A, vol. 15, pp. 303-322, 1989.
- [61] M.M. RAZZAQUE, J.R. HOWELL : "Coupled radiative and conductive heat transfer in a two-dimensional rectangular enclosure with gray participating media using finite elements." *Journal of Heat Transfer*, vol. 106, pp. 613-619, 1984.

- [62] M.F. MODEST : "The improved differential approximation for radiative transfer in multidimensional media." *Journal of Heat Transfer*, vol. 112, pp. 819-821, 1990.
- [63] A. SOUFIANI, J. TAINÉ : "Application of statistical narrow band model to coupled radiation and convection at high temperature." *Int. Heat Mass Transfer*, vol. 30, n° 3, pp. 437-447, 1987.
- [64] T. KUNC : "Etude du transfert couplé conduction-rayonnement : application à la détermination de la conductivité phonique des verres à haute température par identification paramétrique." *Thèse Université de Poitiers*, 1984.
- [65] T.H. PING, M. FERRE et M. LALLEMAND : "Transfert radiatif dans NO<sub>3</sub>K fondu et la fonte vitreuse de B<sub>2</sub>O<sub>3</sub>." *Revue Phys. Appl.*, vol. n°2, pp. 125-138, 1987.
- [66] S. SERVANT, D. SAUMABERE, A. GAGNOUD ET Y. DU TERRAIL COUVAT : "Malice : un logiciel couplant la méthode intégrale et la méthode des éléments finis. Application à la fusion des oxydes en creuset froid." *J. Phys. III France 2*, n° 11, pp. 1991-2004, 1992.
- [67] R. FABRIS, M. LALLEMAND and J.C. HUCLIN : "Infrared absorption spectra of lime-alumina silicate glasses at high temperature. Conductive-radiative heat transfer in semi-transparent non gray media." *Eurotherm Seminar, Lyon*, 1991.



## **NOMENCLATURE**



**Grandeurs électromagnétiques**

$\vec{A}$	potentiel vecteur	T m
$\vec{B}$	induction magnétique	T
$\vec{D}$	déplacement du champ électrique	C m <sup>-2</sup>
$\vec{E}$	champ électrique	V m <sup>-1</sup>
f	fréquence du courant inducteur	Hz
$\vec{H}$	champ magnétique	A m <sup>-1</sup>
$\vec{J}$	densité de courant	A m <sup>-2</sup>
t	temps	s
V	potentiel électrique	V

*Lettres grecques*

$\delta$	épaisseur de peau électromagnétique $\delta = (2/\mu_0 \sigma \omega)^{1/2}$	m
$\mu_0$	perméabilité magnétique de l'air $\mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$	Hm <sup>-1</sup>
$\rho_e$	résistivité électrique	$\Omega \text{ m}$
$\sigma$	conductivité électrique	$\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$
$\omega$	pulsation du courant inducteur $\omega = 2 \pi f$	Rad s <sup>-1</sup>

Grandeurs thermiques

$C_p$	capacité calorifique	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$
$h$	coefficient d'échange convectif	$W\ m^{-2}\ K^{-1}$
$k_v$	conductibilité thermique moléculaire	$W\ m^{-1}\ K^{-1}$
$P_{conv}$	perte thermique surfacique due à la convection	$W\ m^{-2}$
$P_{ray}$	perte thermique surfacique due au rayonnement	$W\ m^{-2}$
$Q_{th}$	densité de puissance	$W\ m^{-3}$
$\vec{q}_c$	flux conductif $\vec{q}_c = -k_v \vec{grad}T$	$W\ m^{-2}$
$S_{tr}$	densité de puissance thermique d'origine radiative	$W\ m^{-3}$
$T$	température	$K$

*Lettres grecques*

$\varepsilon$	émissivité	
$\rho$	masse volumique	$kg\ m^{-3}$
$\sigma_{St}$	constante de STEFAN-BOLTZMANN $\sigma_{St} = 5,67 \cdot 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$	$W\ m^{-2}\ K^{-4}$

**Grandeurs relatives au transfert radiatif**

$a_\lambda$	coefficient monochromatique d'absorption	$m^{-1}$
$c_0$	vitesse de la lumière dans le vide $c_0 = 3.10^8 \text{ m s}^{-1}$	$m \text{ s}^{-1}$
$e_\lambda$	coefficient monochromatique d'émission	$m^{-1}$
F	fonction de phase de la diffusion	
$F(\vec{m}', \vec{m})$	valeur de la fonction de phase de la direction $\vec{m}'$ vers la direction $\vec{m}$	
h	constante de PLANCK $h = 6,626.10^{-34} \text{ J s}$	J s
k	constante de BOLTZMANN $k = 1,3805.10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	$\text{J K}^{-1}$
$K_\lambda$	coefficient monochromatique d'extinction $K_\lambda = a_\lambda + \sigma_\lambda$	$m^{-1}$
$K_R$	conductibilité thermique radiative	$\text{W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$K_{\text{Ross}}$	coefficient moyen d'extinction de ROSSELAND	$m^{-1}$
$K_T$	conductibilité thermique totale $K_T = k_v + K_R$	$\text{W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$L(\vec{r}, \vec{m})$	luminance (ou intensité radiative) au point de vecteur position $\vec{r}$ , dans la direction $\vec{m}$	$\text{W m}^{-2} \text{ sr}^{-1}$
$L_\lambda(\vec{r}, \vec{m})$	luminance monochromatique au point de vecteur position $\vec{r}$ , dans la direction $\vec{m}$ , pour la longueur d'onde $\lambda$	$\text{W m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}$ (ou $\text{W m}^{-3} \text{ sr}^{-1}$ )

$L_{\lambda}^0$	fonction de PLANCK	$W m^{-2} sr^{-1} \mu m^{-1}$ (ou $W m^{-3} sr^{-1}$ )
$\vec{m}$	direction	
$n_{\lambda}$	indice de réfraction monochromatique	
$\vec{q}_r$	vecteur flux radiatif surfacique	$W m^{-2}$
$\vec{q}_{\lambda}$	vecteur flux radiatif surfacique monochromatique	$W m^{-2} \mu m^{-1}$ (ou $W m^{-3}$ )
$\vec{r}_0$	vecteur position d'un point d'une frontière	
$\vec{r}$	vecteur position d'un point du domaine	
$S_{\lambda}(\vec{r}, \vec{m})$	terme source	$W m^{-3} sr^{-1} \mu m^{-1}$ (ou $W m^{-4} sr^{-1}$ )
$s$	abscisse curviligne	m
<i>Lettres grecques</i>		
$\alpha$	angle de réflexion	rad
$\lambda$	longueur d'onde	$\mu m$
$\kappa_{\lambda}$	épaisseur optique	
$\Omega$	angle solide	sr
$\rho$	réflectivité	
$\lambda_i$	valeur moyenne de la longueur d'onde dans la bande spectrale numéro i	$\mu m$ (ou m)

$\Delta \lambda_i$	largeur de la bande spectrale numéro $i$	$\mu\text{m}$ (ou $\text{m}$ )
$\mu_m$	cosinus directeur de la direction $\vec{m}$ selon l'axe des $x$	
$\xi_m$	cosinus directeur de la direction $\vec{m}$ selon l'axe des $y$	
$\eta_m$	cosinus directeur de la direction $\vec{m}$ selon l'axe des $z$	
$\omega_m$	poids associé à la direction $\vec{m}$	
$\sigma_\lambda$	coefficient monochromatique de diffusion	$\text{m}^{-1}$
$\omega_\lambda$	albédo monochromatique $\omega_\lambda = \sigma_\lambda / (a_\lambda + \sigma_\lambda)$	

### *Indices*

$\lambda$	grandeurs monochromatiques
$m$	selon la direction discrète $\vec{m}$
$i$	numéro de la bande spectrale considérée

### *Paramètre adimensionnel*

$N$	paramètre de couplage conduction-rayonnement $N = \frac{k_v K}{4n^2 \sigma_{st} T_0^3}$
-----	--

où  $T_0$  désigne une température de référence





## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 30 Mars 1992 relatifs aux Etudes Doctorales

Vu les Rapports de présentations de :

**Monsieur FELIACHI**

**Monsieur LALLEMAND**

**Monsieur SAUMABERE**

est autorisé(e) à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention  
du diplôme de Docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble,  
spécialité "Energétique Physique".

Fait à Grenoble, le 4 Novembre 1994

Pour le Président de l'INPG  
et par délégation  
le Directeur de l'Ecole Doctorale  
J.L. LACOUME



## **Thèse de Doctorat**

*Titre de l'ouvrage :*

**MODELISATION NUMERIQUE MAGNETO-THERMIQUE AVEC PRISE EN COMPTE DU TRANSFERT RADIATIF DANS LES PROCÉDES D'ELABORATION DES VERRES PAR INDUCTION EN CREUSET FROID.**

*Nom de l'auteur :*

**Denis SAUMABERE**

*Etablissement :*

**Institut National Polytechnique de Grenoble**

### **RESUME**

Le procédé d'élaboration par induction en creuset froid appliqué aux verres présente d'incomparables avantages liés à l'absence de contact entre le verre fondu, matériau très réactif, et la paroi du creuset. La mise au point de tels procédés se révèle complexe et délicate. La modélisation numérique est alors un outil d'analyse et d'extrapolation indispensable. L'analyse des phénomènes physiques intervenant dans le procédé étudié fait apparaître une forte variation des propriétés physiques du verre en fonction de la température et de la composition, une forte interaction entre les phénomènes électromagnétique et thermique ainsi que l'apparition d'une source thermique supplémentaire dans le cas des verres dits semi-transparents due au transfert radiatif.

Le mémoire présente, après une étude bibliographique sur les différentes méthodes permettant de modéliser le transfert radiatif, la modélisation de ce phénomène par une méthode des ordonnées discrètes en éléments finis. Le couplage des phénomènes électromagnétique et thermique avec prise en compte du transfert radiatif est réalisé. La forte interdépendance de ces trois phénomènes est modélisée. De plus pour chacun des phénomènes modélisés la méthode numérique la mieux adaptée est choisie. Une validation du modèle thermique avec transfert radiatif est effectuée par la comparaison avec des exemples trouvés dans la littérature. Une campagne de mesures sur prototype industriel a été réalisée permettant une première validation du modèle magnéto-thermique avec transfert radiatif.

### **MOTS-CLES**

Procédé d'élaboration ; Induction ; Verre ; Creuset froid ; Phénomènes couplés ; Modélisation numérique ; Transfert radiatif ; Méthode des ordonnées discrètes.