



HAL
open science

Étude expérimentale de structures stables en turbulence bidimensionnelle, comparaison avec une théorie de mécanique statistique

Marie-Alice Denoix

► **To cite this version:**

Marie-Alice Denoix. Étude expérimentale de structures stables en turbulence bidimensionnelle, comparaison avec une théorie de mécanique statistique. Electromagnétisme. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1992. Français. NNT: . tel-01340648

HAL Id: tel-01340648

<https://hal.science/tel-01340648>

Submitted on 1 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Marie-Alice DENOIX

Pour obtenir le titre de DOCTEUR

**de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE
GRENOBLE**

(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité : Mécanique

Etude expérimentale de structures stables en turbulence bidimensionnelle, comparaison avec une théorie de mécanique statistique

Date de soutenance : 24 septembre 1992

Composition du jury :

M. R.	MOREAU	Président
M. G.	van HEIJST	Rapporteurs
M. P.	TABELING	
M. R.	ROBERT	Examineurs
M. J.	SOMMERIA	

Thèse préparée au sein du Laboratoire MADYLAM

à Denys.

Remerciements

Cette thèse a été réalisée sous la direction de Monsieur Joël SOMMERIA. Il m'a apporté sa compétence scientifique et son savoir faire. Je tiens à le remercier de l'encadrement et du soutien qu'il m'a apporté tout au long de ce travail.

Je remercie Monsieur MOREAU, Professeur à l'INPG, qui après avoir participé à ma formation dans plusieurs domaines de la mécanique des fluides, m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury.

Je tiens aussi à remercier le personnel de MADYLAM, pour l'aide quotidienne qu'il m'a donnée lors de mon travail. Je remercie également les membres du service technique de l'INPG, en particulier le laboratoire photo.

Je voudrais remercier aussi les amis pour l'aide qu'ils m'ont apportée lors de la rédaction de ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi pour les nombreuses personnes avec qui j'ai eu des discussions scientifiques très enrichissantes tout au long de mon travail de doctorat.

TABLE DES MATIERES

Introduction	7
---------------------------	----------

Chapitre 1

PRESENTATION DE LA THEORIE.....	10
--	-----------

I- THEORIES DE MAXIMUM D'ENTROPIE	11
--	-----------

<i>1- Point de vue d'Onsager</i>	<i>11</i>
--	-----------

<i>2 - Point de vue de Kraichnan.....</i>	<i>13</i>
---	-----------

<i>3 - Nouveau point de vue: R. Robert & J. Somméria</i>	<i>13</i>
--	-----------

II- APPLICATION DANS UN DOMAINE CIRCULAIRE.....	16
--	-----------

<i>1- Equations et constantes du mouvement.</i>	<i>16</i>
--	-----------

<i>2 - Etat d'entropie maximum.....</i>	<i>17</i>
---	-----------

Chapitre 2

L'EXPERIENCE ET SON PRINCIPE.....	20
--	-----------

I - LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL	21
---	-----------

<i>1 - Description rapide</i>	<i>21</i>
-------------------------------------	-----------

<i>2 - Description de la cuve.....</i>	<i>21</i>
--	-----------

<i>3 - Alimentation des électrodes excitatrices.....</i>	<i>23</i>
--	-----------

4 - La chaîne de mesure	24
5 - Préparation des expériences.....	24
6 - Synchronisation de l'expérience.....	25
7 - Exploitation des résultats	26
II- MAGNETOHYDRODYNAMIQUE ET BIDIMENSIONNALITE. .	28
1 - Les équations	28
2 - Bidimensionnalite et temps caractéristique de frottement	30
3 - Sondes de mesure de vitesses	31
III- POSSIBILITE, VERIFICATION ET LIMITES DE	
L'EXPERIENCE.....	33
1 - Contrôle des conditions initiales et temps de décroissance.....	33
2 - Instabilités initiales et évolution	40
3 - Etude linéaire et non-linéaire de l'instabilité.....	41

Chapitre 3

OBSERVATIONS ET MESURES DES STRUCTURES ORGANISEES45

I- REPARTITION DES DIFFERENTES STRUCTURES STABLES. 46

1 - Cas forcé : les 2 surfaces sont égales.....	46
2 - Autres cas forcés	49
3 - Cas en décroissance libre : les 2S sont égales.	52
3 - Autres cas en décroissance libre.....	56

II-ETUDE QUANTITATIVE, COMPARAISON AVEC LA THEORIE. 59

1 - Etudes de cas axisymétriques.....	59
---------------------------------------	----

2 - Etude quantitative de structures elliptiques.....	63
---	----

Chapitre 4

RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION THEORIQUE69

I- LA RESOLUTION NUMERIQUE69

1- Structure du programme70

II- RESULTAT DE RESOLUTION DE LA THEORIE73

1 - Résultats généraux73

2 - Essais de comparaisons quantitatives76

CONCLUSION83

ANNEXES86

Fonction spline d'ajustement de type plaque mince87

Méthode pour caller une fonction sur des points expérimentaux.90

Vérification de l'homogénéité de champs magnétique.92

La cascade inverse d'énergie pour une turbulence entretenue.....95

BIBLIOGRAPHIE.....97

NOTATIONS102

Introduction

Introduction

La turbulence hydrodynamique est un sujet très vaste et très complexe. Sans définition précise, la notion de turbulence est caractérisée par l'imprédictibilité à long terme, sa faculté de diffusion très importante et son mouvement très complexe où une large gamme d'échelles sont excitées.

La plupart des écoulements sont turbulents. L'écoulement de l'air autour d'un marcheur ou celui de l'eau autour d'un bateau est turbulent, ainsi que la plupart des écoulements industriels, du système de refroidissement des réacteurs nucléaires, à la plus petite des pompes hydrauliques. Cette turbulence est tridimensionnelle.

Il existe aussi les systèmes turbulents quasi-bidimensionnels, comme l'atmosphère des planètes vue à grande échelle horizontale. L'imprédictibilité à long terme est bien illustrée par les limitations des prévisions météorologiques. Cependant certaines structures d'écoulement robustes sont bien identifiées, ce qui laisse espérer une certaine prédictibilité, non pas en détail, mais plus globalement sur les états possibles moyens de l'atmosphère. Un exemple remarquable est la tache rouge de Jupiter. Observée depuis au moins trois siècles, il s'agit d'un tourbillon de diamètre de $1/8$ du rayon de Jupiter qui subsiste dans une atmosphère très turbulente (voir figure n°1).

La turbulence bidimensionnelle ou quasi-bidimensionnelle (l'écoulement ne se fait que suivant deux directions de l'espace) semble une première approche pour essayer de comprendre les phénomènes turbulents. La bidimensionnalité peut-être obtenue par de nombreuses méthodes : une rotation du système (une cuve expérimentale qui tourne rapidement, voir figures n°1 et 2), l'épaisseur suivant la troisième dimension très faible devant les deux autres (atmosphère planétaire, voir figure n°1, film de savon), un fluide conducteur soumis à un champ magnétique (notre expérience), une stratification du fluide suivant une direction (atmosphère et nombreuses expériences, voir figures n°1 et 2).

L'organisation inertielle en structure stable des écoulements bidimensionnels, observée dans un grand nombre d'expériences et de simulations numériques, a suggéré de nombreuses études théoriques. On peut citer la théorie "des vortex d'entrophie minimum" (Leith.C -1984), la théorie des points vortex (Onsager -1949), jusqu'aux dernières théories de maximisation de l'entropie (Robert.R -1991).

Cette thèse a pour principe d'isoler les structures stables, en prenant des conditions les plus simples possibles et de comparer leurs structures avec une théorie de maximum d'entropie.

Dans une première partie nous allons voir diverses expériences de turbulence bidimensionnelle mettant en évidence l'organisation inertielle en structures stables. Puis nous allons étudier la théorie de maximisation de l'entropie et son application à nos conditions expérimentales.

Nous présenterons ensuite notre expérience qui est constituée d'une cuve circulaire remplie d'une couche fine de mercure, soumis à un champ magnétique vertical. Nous détaillerons son principe magnétohydrodynamique qui nous permet d'obtenir une turbulence bidimensionnelle avec des conditions de forçage bien contrôlées. Ce principe magnétohydrodynamique nous permet d'avoir un système de sondes de potentiel, nous permettant de connaître la vitesse du fluide de façon très précise.

Dans une troisième partie nous exposerons les résultats expérimentaux que nous avons obtenus. Nous décrirons les différentes structures observées ainsi que leurs répartitions en fonction des conditions de forçage. Pour certains cas remarquables une comparaison qualitative puis quantitative sera faite avec la théorie de maximum de l'entropie.

L'équation fournie par la théorie sera en partie résolue numériquement dans cette dernière partie, les résultats nous fournissant toutes les structures stables qui ont été observées expérimentalement. Un essai de comparaison quantitative sera fait pour prédire dans un cas précis la structure la plus probable.

Chapitre 1

PRESENTATION DE LA THEORIE

*"Une théorie peut être vérifiée par l'expérience,
mais aucun chemin ne mène de l'expérience à la
création d'une théorie."*

A.EINSTEIN, (1950).

I- THEORIES DE MAXIMUM D'ENTROPIE

L'apparition de structures cohérentes semble le trait le plus surprenant de la turbulence bidimensionnelle. Un système fluide turbulent ordinaire a une tendance générale à augmenter son désordre, mais en même temps il y a des circonstances particulières où une sorte d'ordre "macroscopique" semble émerger d'un désordre "microscopique". Nous nous intéresserons à des situations où la dynamique du système est dominée par les termes inertiels (grands nombres de Reynolds). Nous faisons l'hypothèse que le fluide est incompressible et parfait, et donc sa dynamique est régie par le système classique d'Euler incompressible.

Les observations de l'émergence de structures stables dans des situations très variées aussi bien expérimentalement que dans des simulations numériques, montreraient que l'état final macroscopique ne dépendrait pas de la nature variable des états microscopiques intermédiaires qui proviennent de la déformation des vortex par interactions mutuelles.

Cette idée suggère qu'une explication du phénomène pourrait être de nature statistique: évidemment cette conclusion n'est pas nouvelle, et il y a eu plusieurs tentatives pour construire des théories statistiques, la première est le travail de Onsager (1949).

1 - Point de vue d'Onsager

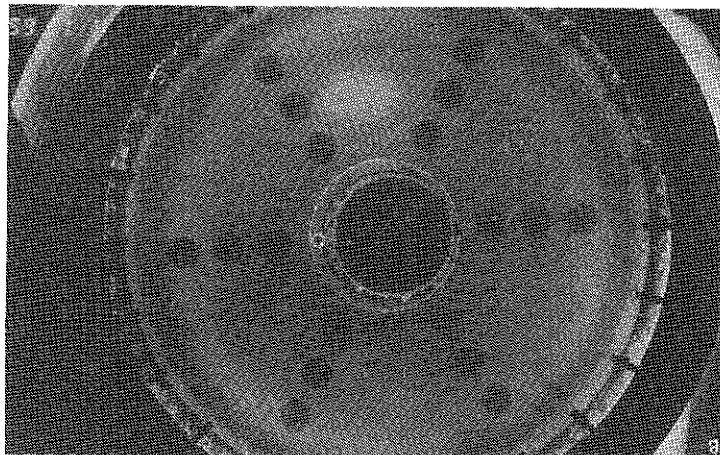
La théorie d'Onsager et de ses successeurs (Montgomery 1974) est d'approcher les équations d'Euler décrivant une vortacité continue par un nombre grand mais fini de points vortex. Ils se ramènent alors à un Hamiltonien de dimension finie qui donne lieu à un traitement de mécanique statistique classique. Une approximation de champ moyen conduit à une relation entre vortacité localement moyennée et fonction de courant $\omega=f(\psi)$. Du fait que $\omega=-\Delta\psi$, cette relation est une équation aux dérivées partielles qui détermine le champ de vitesse moyen. Cette équation doit en général être résolue numériquement. Ceci a été fait dans le cas d'un domaine circulaire par Smith et al. (Smith -1990. et Smith O'Neil -1990).

Mais cette approche se heurte à deux difficultés principales. En effet, il y a beaucoup de moyens différents d'approcher un champ de vortacité continue par une collection de points vortex. Et ces différentes approximations peuvent amener à des états d'équilibre thermodynamique associé à un champ continu de vortacité qui dépend de



La tache rouge de Jupiter.

Tourbillon atmosphérique stable depuis au moins trois siècles.



Expérience dans un fluide en rotation rapide.

Un tourbillon stable se constitue dans un fluide turbulent.

(FIGURE N° 1)

LA TACHE ROUGE DE JUPITER. COMPARAISON AVEC UNE
EXPERIENCE. J.SOMMERIA.

choix arbitraires (cette difficulté avait déjà été soulignée par Onsager). La deuxième difficulté est que rien n'empêche que la vorticité maximale de l'état d'équilibre soit plus grande que la vorticité maximale initiale, ce qui est en contradiction avec la conservation locale de la vorticité au cours du mouvement.

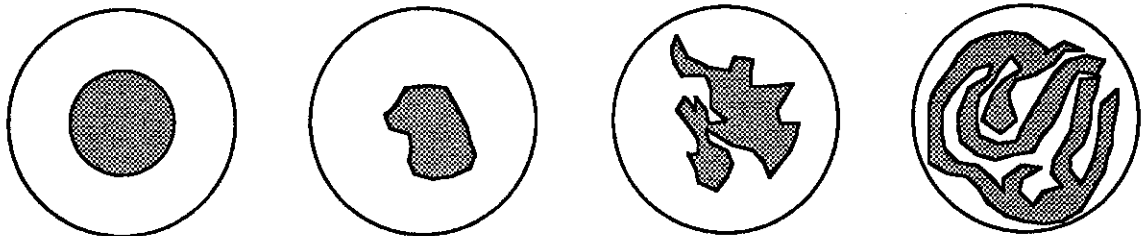
2 - Point de vue de Kraichnan

Une autre approche pour approximer le système bidimensionnel d'Euler vient de Kraichnan (Kraichnan 1975; Kraichnan et Montgomery 1980). Il décompose la vorticité d'un système spatialement périodique en série de Fourier et il tronque la description à un nombre fini de coefficients de Fourier. Il peut alors appliquer le théorème de Liouville à ce système tronqué (dans l'espace des coefficients de Fourier le volume élémentaire est conservé). Cela suggère encore que les méthodes de la mécanique statistique peuvent être employées.

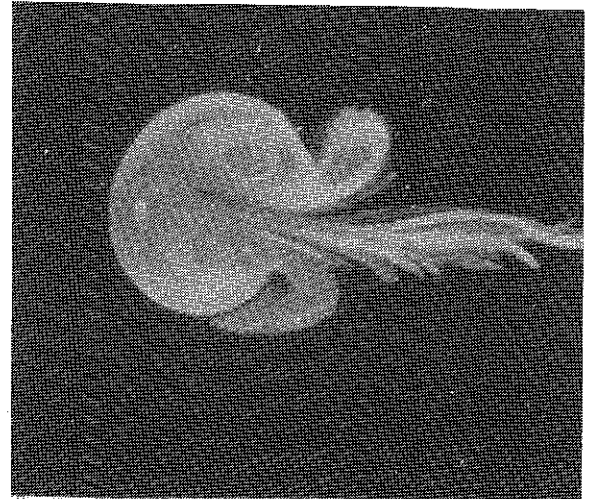
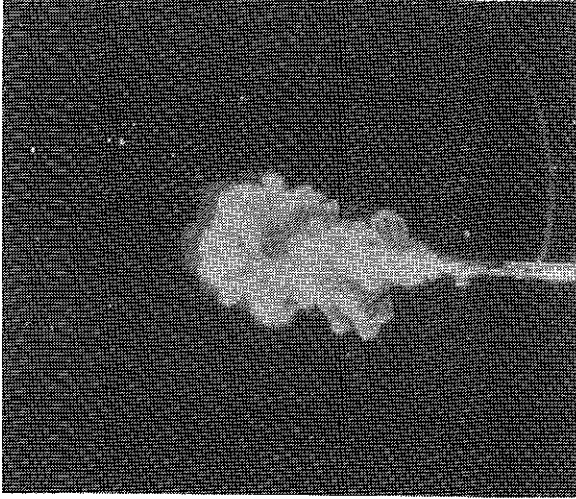
Les seules constantes du mouvement sont dans ce cas l'énergie et l'enstrophie (c'est l'intégrale du carré de la vorticité). Mais là encore surgit une difficulté car lorsque nous considérons le système tronqué, nous perdons une partie de l'information contenue dans le système complet d'Euler. En particulier les fonctions intégrales de la vorticité (en dehors de l'enstrophie) qui sont des constantes du mouvement dues à la conservation de la vorticité le long des trajectoires des particules fluides. Et par conséquent, la signification des états d'équilibre du système tronqué, par rapport au système complet, est loin d'être évidente.

3 - Nouveau point de vue: R. Robert & J. Sommería

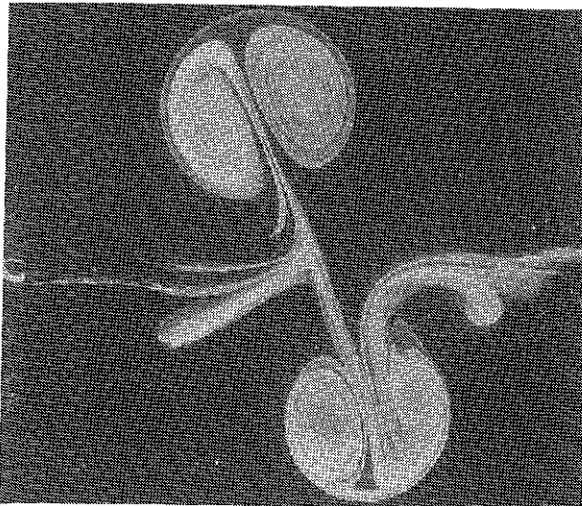
Le système d'Euler complet est utilisé pour éviter les problèmes cités plus haut. L'espace des phases est l'ensemble des champs de vorticité, fonctions mesurables et bornées, sur un domaine bidimensionnelle Ω , $L^\infty(\Omega)$. Toutes les déformations des taches de vorticité sont prises en compte.



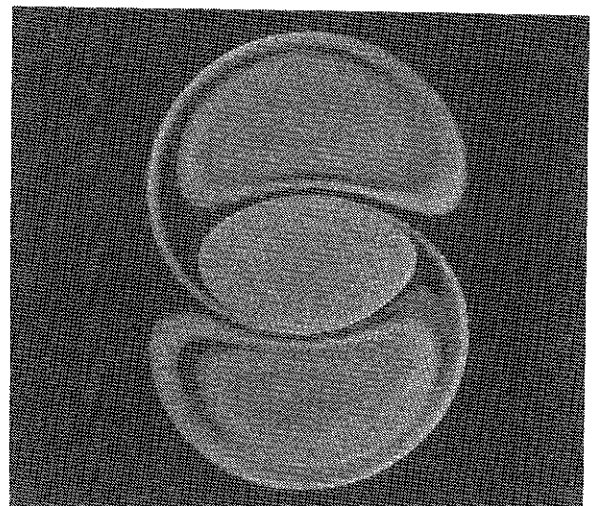
Déformations possibles des taches de vorticité.



Expérience en milieu stratifié.
Vortex dipolaire créé par un jet turbulent.



Expérience en milieu stratifié.
collision frontale de dipôles.



Expérience dans un fluide en rotation.
Vortex tripolaire issu d'un vortex monopolaire.

(FIGURE N° 2)

LA DANSE DES TOURBILLONS. G.J.VAN HEIJST ET J.B.FLOR.

Les micro-états sont donnés par le flot eulérien instantané dans $L^\infty(\Omega)$, c'est à dire qu'à un instant fixé, la valeur de la vorticité est donnée en chaque point. Les macro-états sont les mesures d'Young associées, c'est à dire les distributions de probabilité de vorticité en chaque points. L'entropie est une généralisation de la formule classique $S=k_B \ln(w)$ avec k_B le facteur de Boltzman et w le volume de l'espace des phases accessible au système. Il est vérifié que c'est une bonne fonction à maximiser et que tous les micro-états sont 'concentrés', en un certain sens, autour du macro-état réalisant son maximum. Il est démontré que la valeur moyenne de ce macro-état est une solution stationnaire des équations d'Euler. Cette valeur représente alors un état d'équilibre statistique. Les constantes du mouvement sont l'énergie, le moment cinétique et toutes les intégrales des fonctions de la vorticité. La recherche des état d'équilibre revient à maximiser l'entropie par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

En dehors du fait qu'ils travaillent avec le système d'Euler complet et en tenant compte de toutes les constantes connues du mouvement, leur approche a les avantages suivants. En premier, Robert.R donne des preuves mathématiques des principales propriétés de concentration et d'invariance. De plus, ils obtiennent une formule simple qui permet des comparaisons quantitatives avec les expériences et les simulations numériques (Somméria, Staquets et Robert 1991).

Notons cependant que dans le cas limite d'une tache de vorticité très diluée (probabilité de présence faible) sur un fond irrotationnel, cette théorie rejoint celle d'Onsager.

II- APPLICATION DANS UN DOMAINE CIRCULAIRE.

1 - Equations et constantes du mouvement.

Nous nous plaçons dans un domaine circulaire noté $\Omega = [0, R[x[0, 2\Pi[$; la vitesse est $\vec{u}(t, x)$ et la vorticité en chaque point $\omega = \text{rot}(\vec{u}(t, x))$ (c'est le rotationnel de la vitesse). Nous négligeons la viscosité et utilisons donc les équations d'Euler :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega + \text{div}(\omega \vec{u}) = 0, \\ \text{rot}(\vec{u}) = \omega, \\ \text{div} \vec{u} = 0, \end{array} \right.$$

Nous avons les constantes du mouvement suivantes:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 d\vec{x} & ; & \quad I_f = \int_{\Omega} f(\omega(\vec{x})) d\vec{x} & ; \\ M_c &= \int_{\Omega} r^2 \omega(\vec{x}) d\vec{x} & ; \end{aligned}$$

E_c est l'énergie cinétique; I_f sont les intégrales de toutes les fonctions continues f de la vorticité ω (Par exemple $\Gamma_n = \int_{\Omega} \omega^n dx$; Γ_1 sera la circulation totale; Γ_2 est appelé l'enstrophie); M_c est le moment cinétique. (r est la distance au centre du domaine).

Pour appliquer la théorie nous avons besoin d'une description du mouvement en terme de vorticité. Nous tenons compte de la condition d'incompressibilité en introduisant la fonction de courant ψ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_{\theta} = - \frac{1}{r} \frac{\partial r \psi}{\partial r} \end{array} \right. \quad \text{avec } \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Cela nous permet d'écrire l'énergie cinétique sous la forme :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi \omega dx .$$

2 - Etat d'entropie maximum

On considère une condition initiale constituée de deux zones de surfaces S_1 et S_2 de vorticité uniforme respective ω_1 et ω_2 . En l'absence de viscosité, le système contiendra toujours les deux niveaux de vorticité, mais en général les bords des zones deviendront de plus en plus compliquées. Donc une description complète du système demandera de plus en plus d'informations et ainsi une description microscopique sera de plus en plus difficile à obtenir et sans utilité. Nous définissons la probabilité $e_1(\vec{x})$ de trouver le niveau de vorticité ω_1 au voisinage du point \vec{x} . La probabilité de trouver le niveau ω_2 sera le complémentaire $e_2(\vec{x}) = 1 - e_1(\vec{x})$. Le champ de probabilité $e(\vec{x})$ représente notre état macroscopique. En pratique on observe la vorticité moyenne :

$$\bar{\omega}(x) = \omega_1 e_1(x) + \omega_2 e_2(x).$$

Comme le montrent Robert et Somméria (1991) le système a une très grande probabilité d'évoluer au voisinage d'un état macroscopique qui maximise l'entropie :

$$S = \int_{\Omega} [e_1 \ln e_1 + e_2 \ln e_2] d\vec{x}.$$

En tenant compte des contraintes dues aux constantes du mouvements; on écrit ces contraintes en terme de moyenne locale de la vorticité, en intégrant localement les fluctuations de vorticité, puis globalement sur tout le domaine :

$$\bar{\omega}(\vec{x}) = \omega_1 e_1(\vec{x}) + \omega_2 e_2(\vec{x})$$

et de la fonction courant associée ψ , telle que $-\Delta\psi = \bar{\omega}(\vec{x})$.

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi \bar{\omega}(\vec{x}) d\vec{x} .$$

$$M_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} r^2 \bar{\omega}(\vec{x}) d\vec{x} .$$

Dans le cas particulier d'une condition initiale formée de deux taches de vorticité uniforme, la conservation des intégrales $I_f(\omega)$ se réduit à la conservation de la surface totale de chaque zone de vorticité qui correspondent à :

$$S_1 = \int_{\Omega} e_1(\vec{x}) d\vec{x} \quad ; \quad S_2 = \int_{\Omega} e_2(\vec{x}) d\vec{x} \quad ;$$

On a bien sûr la condition $S_t = S_1 + S_2$. S_t étant la surface totale du domaine Ω .

Le problème variationnel se résoud en introduisant les paramètres de Lagrange $(\alpha_1 - \alpha_2)$, β et γ correspondant aux trois constantes indépendantes du mouvement ; car α_1 et α_2 ne sont pas indépendantes).

$$\delta S - \alpha_1 \delta S_1 - \alpha_2 \delta S_2 - \beta \delta E - \gamma \delta M = 0.$$

On a : $e_1 = 1 - e_2$; soit $\delta e_1 = -\delta e_2$;

On peut alors expliciter les variations :

$$\int \left[\text{Ln} \left(\frac{e_1}{1-e_1} \right) - \psi \beta (\omega_1 - \omega_2) - r^2 \gamma (\omega_1 - \omega_2) - (\alpha_1 - \alpha_2) \right] \delta e_1 dx = 0$$

Maintenant $e_1(\vec{x})$ et $\psi(\vec{x})$ sont les notations du champ optimal. Cette relation doit être vérifiée pour toute petite perturbation δe_1 . C'est pourquoi l'intégrant doit disparaître et nous obtenons :

$$e_1(x) = \frac{\exp [-\alpha_1 - \beta \omega_1 (\psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2)]}{\exp [-\alpha_1 - \beta \omega_1 (\psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2)] + \exp [-\alpha_2 - \beta \omega_2 (\psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2)]}$$

En utilisant la relation $\bar{\omega} = -\Delta\psi = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$. On obtient une équation différentielle qui définit le champ ψ :

$$\bar{\omega} = -\Delta\psi = \frac{\omega_1 \exp [-\alpha_1 - \beta \omega_1 (\psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2)] + \omega_2 \exp [-\alpha_2 - \beta \omega_2 (\psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2)]}{\exp [-\alpha_1 - \beta \omega_1 (\psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2)] + \exp [-\alpha_2 - \beta \omega_2 (\psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2)]}$$

Cette fonction peut s'écrire sous la forme d'une fonction tangente hyperbolique qui facilite l'écriture, soit :

$$\bar{\omega} = -\Delta\psi = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \text{Th} \left[-\frac{1}{2} \beta (\omega_1 - \omega_2) (\psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2) + (\alpha_1 - \alpha_2) \right]$$

Nous nous servons de cette façon d'écrire l'équation dans tous les chapitres suivants. Nous remarquons dans cette notation que seule la valeur de $(\alpha_1 - \alpha_2)$ a de l'influence.

Il est intéressant de faire un changement de la fonction de courant $\Phi = \psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2$ cela correspond à un changement de repère de référence. Le nouveau repère tourne à vitesse uniforme $2\frac{\gamma}{\beta}$ par rapport au repère du laboratoire. La vorticité ne dépend plus que de la

fonction de courant et ce champ de vorticité est une solution stable des équations d'Euler.

On obtient :

$$\bar{\omega}' = -\Delta\Phi = + 4\frac{\gamma}{\beta} + \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) + \frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2) \text{Th}\left[-\frac{1}{2}\beta(\omega_1-\omega_2)\Phi + (\alpha_1-\alpha_2)\right]$$

Cette fonction nous donne l'état stable pour une configuration initiale à deux niveaux de vorticité ω_1 et ω_2 , dans un domaine circulaire. Les fluctuations sont lissées par une faible viscosité, on observe le champ de vorticité $\bar{\omega}$ que l'on notera ω .

Chapitre 2

L'EXPERIENCE ET SON PRINCIPE

*"Ce qui importe, c'est de prouver
rigoureusement , c'est d'instituer des
expériences dégagées de toutes confusions, née
des expériences mêmes."*

L. PASTEUR , (1862).

I- LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL

1 - Description rapide

Le dispositif expérimental (figure n°3) qui sert à étudier des mouvements bidimensionnels à grand nombre de Reynolds est constitué essentiellement d'une cuve circulaire placée dans un champ magnétique vertical (figure n°4). On place du mercure dans la cuve ; la normale de la surface est alors parallèle à l'axe du champ magnétique. On procède ensuite à l'injection de courant électrique continu soit par le biais d'électrodes intégrées dans le fond de la boîte soit par une électrode centrale posée sur celui-ci ou bien par le cadre. On obtient alors des forces de Laplace qui mettent en mouvement le métal liquide.

Pour étudier ce mouvement nous disposons d'un réseau d'électrodes de mesures (intégrées dans le fond de la cuve) qui permettent d'évaluer les différences de potentiel électrostatique entre différents points de la cuve. Ces signaux sont amplifiés puis transmis à un système d'acquisition de données lui même relié à un réseau d'ordinateurs qui permettra le traitement ultérieur des données. Simultanément nous pouvons faire des photos ou des enregistrements vidéo qui nous serviront surtout pour observer les structures complexes du mouvement.

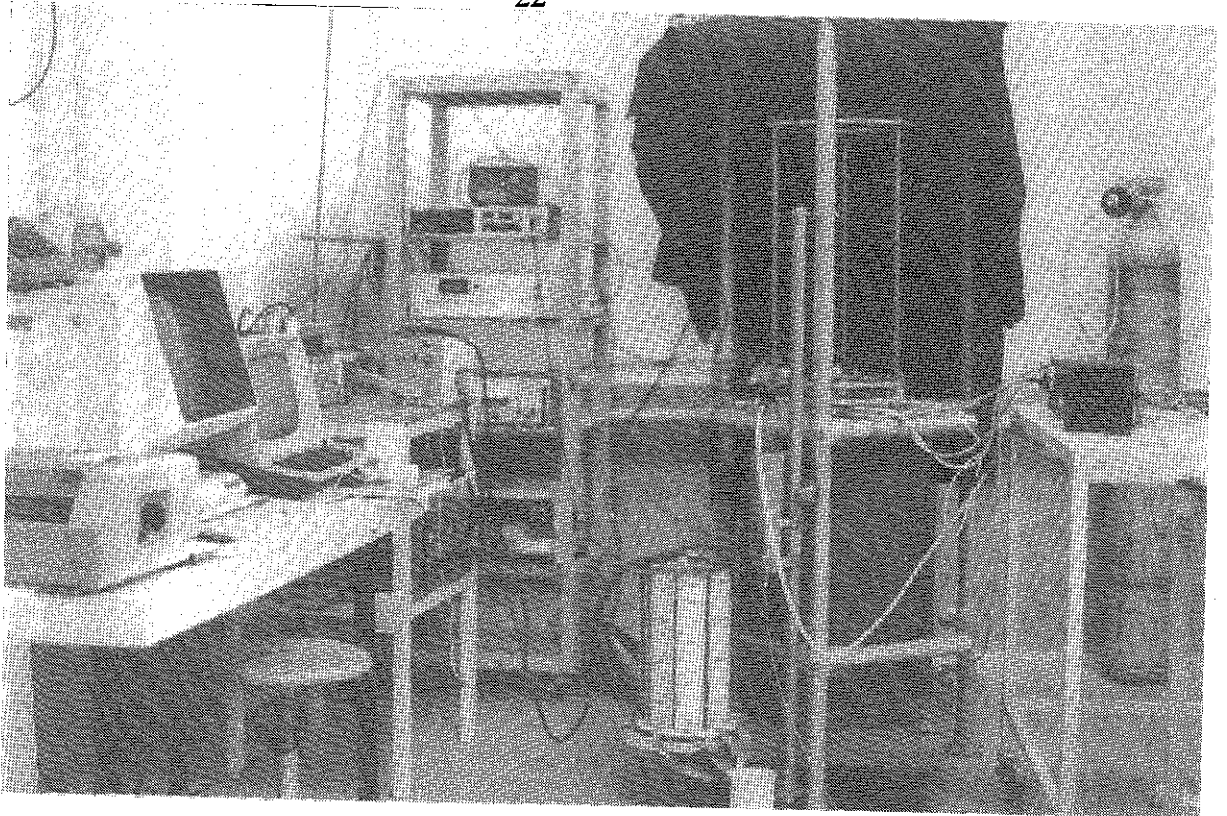
Tout le dispositif expérimental est dirigé par un micro ordinateur construit par Mr Barbier-Neyret à l'institut de mécanique de Grenoble. Cela a permis une synchronisation des acquisitions, du forçage et des photographies.

Nous allons revenir en détail sur ces différentes composantes du dispositif expérimental ainsi que sur leur mise en oeuvre .

2 - Description de la cuve

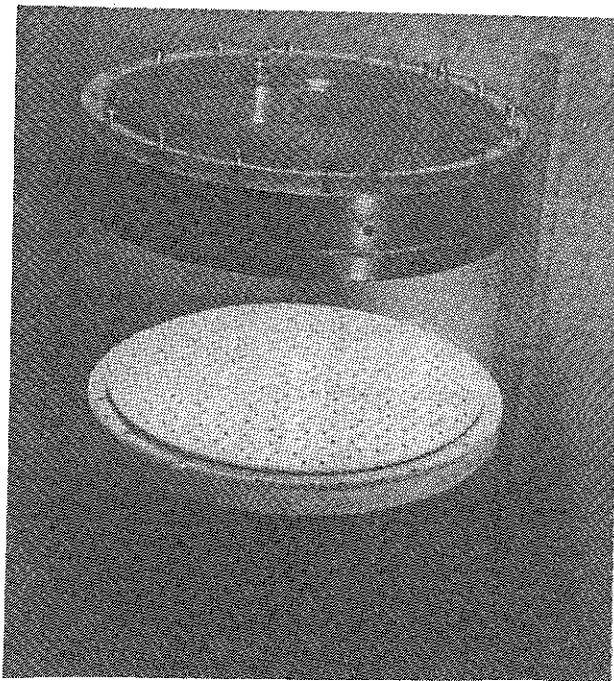
Le diamètre intérieur de la cuve est de 0.26m. La paroi latérale est constituée d'une couronne circulaire. On peut ajuster une électrode centrale d'un diamètre de 6.4 cm afin de créer un écoulement de cisaillement entre celle-ci et la couronne extérieure.

L'épaisseur de la couche de mercure peut atteindre 2cm. La cuve est fermée dans sa partie supérieure par un couvercle en plexiglas possédant une ouverture en son centre afin d'autoriser l'utilisation de l'électrode centrale. On peut ainsi alimenter cette dernière en courant électrique. Le fond de la cuve est constitué d'une plaque circulaire d'isolant de



(FIGURE N° 3)

VUE GENERALE DE L'EXPERIENCE.



(FIGURE N° 4)

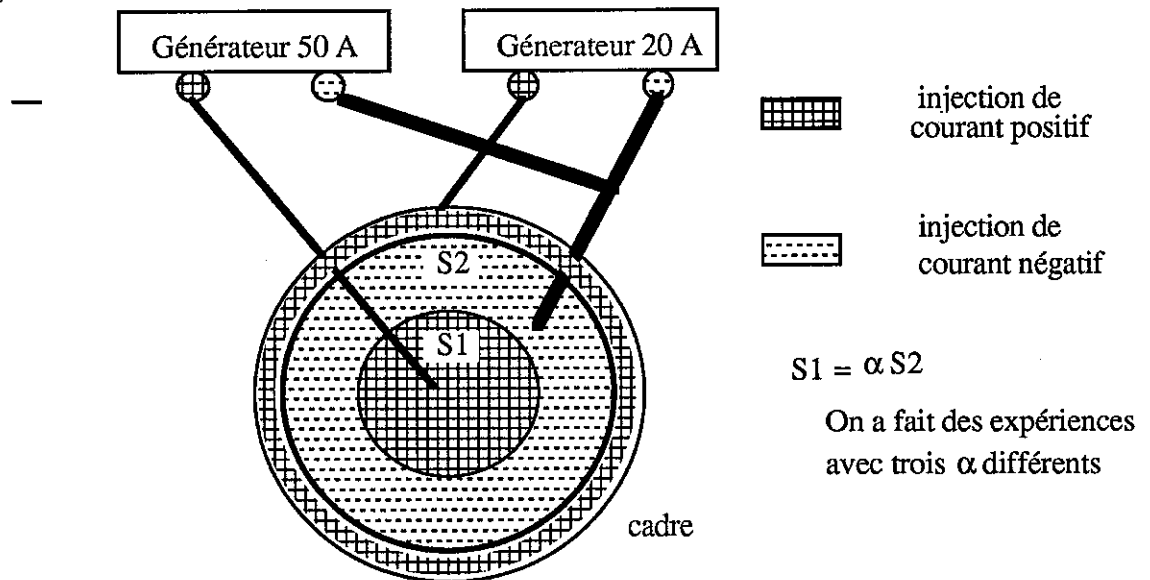
VUE DU FOND DE LA CUVE ET DE LA PAROI LATERALE.

30mm d'épaisseur (l'Ertalon). Dans cette plaque sont intégrés les réseaux d'électrodes de courant et d'électrodes de mesure (figures n°4 et 6).

Le réseau d'électrodes d'injection est un réseau hexagonal périodique. Les électrodes de mesures sont situées d'une part au centre de chacun des hexagones du réseau d'injection de courant, d'autre part en rangées doubles le long d'un diamètre de la cuve.

3 - Alimentation des électrodes excitatrices

L'alimentation se fait à l'aide de deux générateurs, l'un pouvant produire un courant de 20 ampères et l'autre un courant de 50 ampères. Le courant est séparé en trois parties pour les trois zones de la cuve (zone centrale (S_1), zone de la couronne (S_2), le cadre).



Injection du courant dans la cuve de mercure

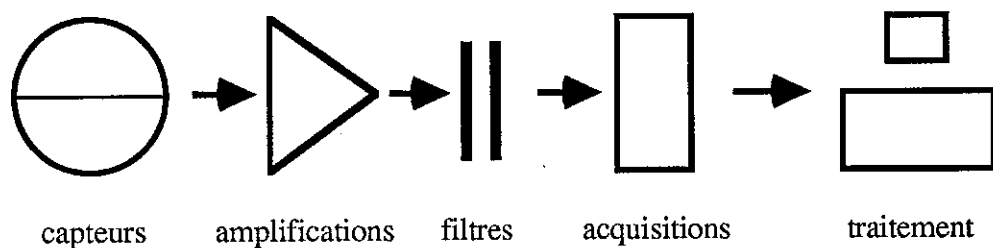
La zone centrale et la zone de la couronne comprennent chacune 141 électrodes affleurantes lorsque les surfaces sont égales (plus tard on a modifié la taille de zone en diminuant la zone centrale $S_2 = 2,4 S_1$ puis $S_2 = 5,7 S_1$) donc modifié le nombre d'électrodes par zone. Le courant est distribué de façon uniforme dans chaque électrode à travers deux réseaux de résistances de 1 W. Chaque résistance est montée en série avec une électrode d'injection de courant. Comme ces résistances sont grandes devant les résistances de contact, le courant passant dans chaque électrode est également réparti. De plus on évite que les courants induits dans le mercure ne bouclent à travers le réseau d'injection, ce qui freinerait le mouvement. Nous pouvons vérifier que l'alimentation est

correcte en mesurant les différences de potentiel aux bornes de chaque résistance, ou plus globalement entre le pôles plus et moins de la masse.

4 - La chaîne de mesure

Les électrodes de mesure d'un diamètre de 0.8 mm sont réparties en 2 rangées disposées de part et d'autre d'un diamètre de la cuve . Elle forment un réseau carré avec une longueur de maille de 4 mm.Elles détectent des signaux de l'ordre d'une centaine de microvolts. On couple donc chacune de ces électrodes à un amplificateur d'instrumentation d'un gain fixé à 8727 . Ce gain élevé est précis et stable. La plupart du bruit est supprimée par un filtre passe bas. On peut alors procéder au multiplexage et à l'acquisition des signaux à l'aide d'une carte DATA-TRANSLATION DT5714 + 3752 installée à proximité de l'expérience qui nous permet encore d'appliquer un gain programmable de 1-2-4 ou 8 pour pouvoir utiliser au mieux les 14 bits de dynamique.

Les données expérimentales ainsi numérisées sont transférées au réseau de stations de travail APOLLO où elles sont stockées sur disque dur. Il est à noter qu'avant chaque acquisition de données on réalise à l'aide de la carte DATA TRANSLATION un relevé des valeurs d'offset de chacun des amplificateurs. Ces valeurs pourront être soustraites à celles mesurées durant la phase expérimentale. La soustraction aura lieu au moment du traitement des données. Par cette méthode on minimise les problèmes de dérive d'offset notamment dus aux variations de la température ambiante.



Shéma de la chaine de mesure

5 - Préparation des expériences

Le mercure possède en commun avec le gallium la propriété intéressante d'être un métal liquide aux conditions normales de température et de pression. Cependant son utilisation dans le cadre de cette expérience de magnétohydrodynamique demande de prendre certaines précautions afin de préserver la santé du manipulateur et d'assurer la

bonne tenue du matériel. Le mercure est en effet très toxique et les contacts avec la peau ainsi que toute inhalation doivent être évités. D'autre part le mercure étant un métal corrosif nous devons protéger les parois latérales du dispositif et les électrodes de la cuve qui sont en cuivre et en contact avec le mercure. On procède comme suit :

- dépôt électrochimique de nickel d'une épaisseur approximative de 50 μm
- dépôt électrochimique d'une fine couche d'or de 2 μm

La dissolution de l'or par le mercure donnera un excellent contact mercure-nickel. Une fois ces précautions prises la boîte hermétiquement close est placée dans le solénoïde. Il faut maintenant se prémunir de l'oxydation du mercure au contact de l'air. Pour ce faire on balaie la cuve par un gaz neutre ; de l'argon qualité U (Air liquide) qui ne possède que quelques traces négligeables de molécules organiques et d'oxygène.

Le mercure introduit dans une ampoule à décanter rejoint la cuve par le biais d'un tube en Téflon. Ces multiples précautions permettent de garder la surface libre du mercure propre pendant quelques jours au maximum. Au bout de ce laps de temps, ou bien avant, la surface se rigidifie sous l'effet d'une pellicule d'oxyde.

On assiste donc à un changement de conditions aux limites et il devient impossible de visualiser les mouvements de surface.

Il apparaît clairement l'intérêt d'une mise en place rigoureuse du dispositif expérimental. En effet la moindre fuite d'air peut compromettre la qualité de la surface libre indispensable à l'observation des phénomènes bidimensionnels et obliger le manipulateur à démonter le système entièrement, à préparer de nouveau les surfaces qui seront en contact avec le mercure, toutes opérations qui peuvent nécessiter plus d'une journée de travail. D'autre part la présence de mercure à proximité d'appareils électroniques délicats constitue un danger permanent pour la longévité de ce matériel.

Mais en contre partie de ces difficultés, nous avons une expérience simple d'utilisation lorsque tout est mis en place, qui offre beaucoup de possibilités d'injection du courant (donc d'injection d'énergie, du moment cinétique ...). De plus elle permet de faire des mesures très précises du champ de vitesse sur la durée de temps que l'on choisit.

6 - Synchronisation de l'expérience

Le micro-ordinateur dénommé "commande photo" a été construit par Monsieur Barbier-Neyret, le programme principal est écrit en basic et nous l'avons adapté à notre expérience. Cet appareil qui a une horloge interne pouvant produire des signaux extérieurs (en tension ou en courant) déclenche et arrête les alimentations de courant. Il

commande aussi le démarrage des acquisitions sur l'Apollo. La commande photo contrôle aussi un afficheur qui est dans le champ de vision de l'appareil photo où l'on peut inscrire le nom du fichier ainsi que la date et le temps qui s'écoule en 25ème de seconde. Cet appareil déclenche bien sûr les prises de vue photographiques aux instants qu'on lui a indiqués, il contrôle aussi le temps de pose.

7 - Exploitation des résultats

Elle se fait par deux méthodes que nous avons utilisées de façons complémentaires durant cette étude.

Traitement des données recueillies sur ordinateur

Photographies de la surface libre du mercure.

L'acquisition et le traitement des acquisitions se font sur le réseau d'ordinateur Apollo. Les programmes sont en Fortran : ils ont été mis au point par Jean-Michel NGUYEN DUC durant sa thèse à MADYLAM. Nous pouvons donc enregistrer la différence de potentiel sur chaque sonde tous les 20èmes de seconde. Tous les fichiers d'acquisition sont écrits directement en binaire pour gain de place mémoire. Ces fichiers nous donnent de façon linéaire la vitesse en m/s en 62 points sur le diamètre de la cuve. On peut facilement visualiser l'évolution de la vitesse en un point donné, ou le profil de vitesse à un temps donné. Le programme a divers menus et il est possible de faire des moyennes et des transformées de Fourier. Il nous permet aussi de créer des fichiers ascii des données expérimentales pour qu'elles soient traitées de façon spécifique par d'autres programmes : pour calculer la vorticité et faire la comparaison avec la théorie qui nous intéresse en particulier.

La précision des sondes et le caractère bidimensionnel de l'écoulement ont été vérifiés en comparant les vitesses à celles que l'on peut obtenir avec les photographies.

L'appareil photographique est situé dans l'axe du champ magnétique à environ 2,50 m au dessus de la cuve contenant le mercure. La surface du mercure ayant l'aspect d'un miroir on dépose sur celle-ci des particules d'aluminium. Un éclairage rasant transmis par fibres optiques et dirigé par un jeu de quatre miroirs, permet d'obtenir, en jouant sur le temps de pose, une carte instantanée des vitesses de la cuve.

Nous verrons dans la 2ème partie de ce rapport qu'il est indispensable de pouvoir se servir des deux méthodes afin de choisir la mieux adaptée au problème posé. Sans aller plus avant nous pouvons déjà donner un exemple. La photographie est indispensable pour l'observation de structures cohérentes très difficilement repérables par le système de

traitement des données. A l'inverse on ne peut se passer de ce dernier pour l'obtention d'un profil de vitesse moyen turbulent dans le cas où tout le réseau d'électrodes excitatrices est branché.

On a aussi fait quelques vidéos, mais celles-ci ne servent à l'heure actuelle que pour montrer les mouvements et les structures générales. Nous souhaiterions pouvoir nous servir d'un système qui nous permettrait de suivre les particules et donc de pouvoir étudier les trajectoires et de pouvoir étudier le mouvement par une approche Lagrangienne.

II - MAGNETOHDRODYNAMIQUE ET BIDIMENSIONNALITE

1 - Les équations

Le champ magnétique qui est créé par le solénoïde est constant dans tout le domaine, on suppose qu'il n'est pas modifié par les courants induits dans l'écoulement. Ceci correspond à l'approximation des faibles nombres de Reynolds magnétiques

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible, de masse volumique ρ , de conductivité électrique σ , et de viscosité cinématique ν , soumis à un champ magnétique uniforme, constant et vertical \vec{B} . Le champ de vitesse \vec{u} obéit aux équations de Navier-Stokes avec la force de volume de Laplace \vec{F} :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F} \quad (1)$$

$$\vec{F}(x, t) = \frac{1}{\rho} (\vec{J} \times \vec{B}) \quad (2)$$

$$\text{et l'incompressibilité : } \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3)$$

$$\text{La loi d'Ohm : } \vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (4)$$

Si le champ \vec{E} et le champ magnétique induit \vec{b} ($|\vec{b}| \ll |\vec{B}|$) varient lentement, les équations de Maxwell donnent :

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{b} = \mu \vec{J} \quad (6)$$

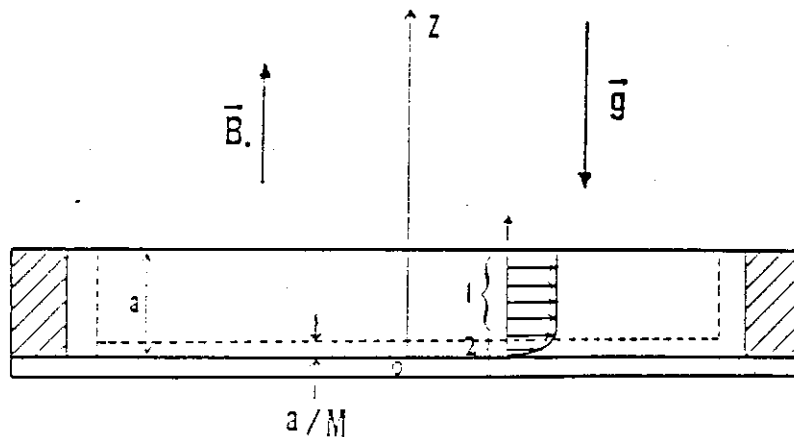
$$\nabla \cdot \vec{b} = 0 \quad (7)$$

L'équation (5) est satisfaite en introduisant le potentiel ϕ . Comme conséquence des équations (6) et (7), \vec{J} est à divergence nulle. Les équations de Maxwell nous amènent donc à :

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (9)$$

Cet ensemble d'équations (1) (2) (3) (4) (8) et (9) constitue ce que l'on a coutume d'appeler le modèle quasi-statique. (ref shercliff - 1985).

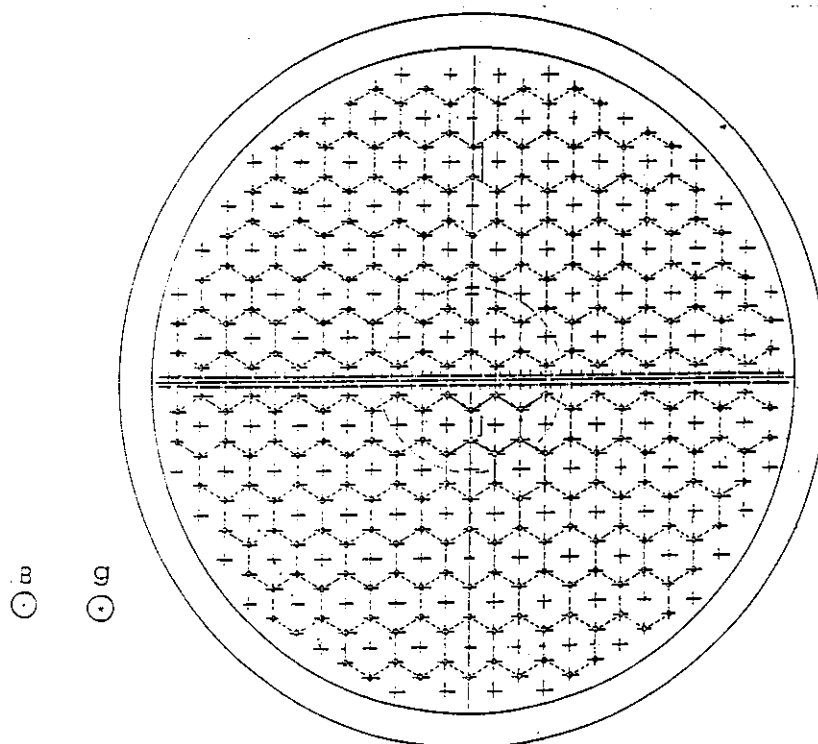


Réalisation d'un écoulement bidimensionnel dans une couche horizontale de mercure soumise à un champ magnétique uniforme et vertical.

- 1)- Coeur de l'écoulement bidimensionnel.
- 2)- Couche de Hartmann.

(FIGURE N° 5)

L' ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL.



- * * Electrodes servant à l' injection de courant.
- ≡≡≡ Electrodes de mesure du potentiel électrique.

(FIGURE N° 6)

SCHEMA DU FOND DE LA CUVE.

2 - Bidimensionnalité et temps caractéristique de frottement

L'anisotropie de la force de Laplace a tendance à inhiber les mouvements du mercure dans la direction parallèle au champ magnétique \vec{B} (Somméria & Moreau -1983). D'autre part Hartmann et Lazarus en 1937 ont mis en évidence le rôle important joué par les parois isolantes transverses au champ magnétique. On sait ainsi que se développe au contact de ces parois une couche limite dite couche de Hartmann (voir figure n°5). L'épaisseur typique de cette couche est :

$$\delta H = \frac{a}{M} \quad \text{où} \quad M = \left(\frac{\sigma}{\rho\nu}\right)^{1/2} aB$$

avec pour notre expérience :

M: nombre de Hartmann	M = 91
a : épaisseur de la couche fluide	a = 0,016 m
σ : conductivité du fluide	$\sigma = 1.10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$
ρ : masse volumique du fluide	$\rho = 1.355 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
ν : viscosité cinématique	$\nu = 1.17 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Lorsque le nombre de Hartmann est élevé, l'épaisseur de la couche limite est faible. En dehors de ces couches limites l'écoulement est bidimensionnel. On écrit donc les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles auxquelles on ajoute le terme de frottement linéaire car il faut prendre en compte la décroissance due aux forces de frottement électromagnétique dans la couche de Hartmann :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u} - \frac{\vec{u}}{T_h} + \vec{F}$$

Avec T_h : temps caractéristique du frottement (Nguyen Duc -1988)

$$T_h = \frac{1}{s} \left[\left(\frac{\rho}{\sigma\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{a}{B} \right]$$

$s = 1$ si une des parois transverses au champ magnétique est rigide (surface libre).
 $s = 2$ si les deux parois sont rigides.

Le calcul du temps caractéristique de frottement magnétique pour notre expérience est

immédiat :

$$\tau_h = 27 \text{ s} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\tau_h} = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

En comparant à la viscosité $\nu = 1,17 \cdot 10^{-7}$ même si l'on prend $\nabla^2 = \theta(100)$.

On voit que l'on a 3 ordres de grandeur de différence entre le terme de frottement visqueux $\nu \cdot \nabla^2 \vec{u}$ et celui du frottement magnétique $-\vec{u}/\tau_h$. C'est pourquoi l'on peut négliger la viscosité et considérer que l'on travaille avec un fluide parfait.

On peut réécrire l'équation du mouvement de nature bidimensionnelle de manière équivalente en équation de vorticité

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \omega = -\frac{\omega}{\tau_h} + \nu \Delta \omega + \frac{B}{\rho a} j_z(x, y)$$

Pour l'obtention des conditions initiales après un forçage de forte intensité et d'un temps très court (quelques secondes) on peut simplifier :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{B}{\rho a} j_z(x, y).$$

3 - Sondes de mesure de vitesses

Les sondes sont incluses dans le fond isolant de la cuve. On mesure la différence de potentiel entre 2 sondes, soit les valeurs de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ou $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Il suffit de reprendre les équations (4) (8) et (9) du à 1.

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (4)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (9)$$

On peut en déduire directement :

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{B})$$

En général, la relation entre champ de vitesse et potentiel n'est pas locale.

Cependant si l'écoulement est 2D, dans un plan perpendiculaire à \vec{B} alors on montre que les gradients de potentiel équilibrent le terme $\vec{u} \times \vec{B}$

$$\vec{u} \times \vec{B} = \nabla \varphi$$

et le courant est donc nul.

$$\text{Soit } u_x = - \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\text{et } u_y = - \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial x} .$$

en mesurant donc la différence de potentiel dans la couche de Hartmann, on obtient de façon linéaire la vitesse dans le coeur de l'écoulement.

III - POSSIBILITE, VERIFICATION ET LIMITES DE L'EXPERIENCE

1 - Contrôle des conditions initiales et temps de décroissance

La théorie de Raoul Robert nous prédit une évolution vers des structures stables qui maximisent l'entropie du système dynamique. Les structures sont données en fonction des conditions initiales de vorticité, c'est pourquoi nous avons besoin qu'elles soient bien définies et suffisamment précises.

La force électromagnétique qui met en mouvement le mercure est due à l'interaction des courants électriques horizontaux avec le champ magnétique \vec{B} vertical. Pour un forçage impulsionnel (quelques secondes), on peut déduire directement la vorticité en fonction du courant injecté : \vec{F} étant la force de volume de Laplace (voir chap.2.II.2.).

$$\text{on a : } \text{rot } \vec{F} = \frac{d\omega}{dt} = -j_z \left(\frac{B}{\rho a} \right).$$

On obtient donc la vorticité avec le temps de forçage ΔT . Le courant j_z étant le courant total I_1 injecté sur la surface S_1 correspondante : $j_z = \left(\frac{I_1}{S_1} \right)$.

$$\text{La vorticité est : } \boxed{\omega = - j_z \left(\frac{B}{\rho a} \right) \Delta T} .$$

$$\text{On déduira la vitesse à partir de la vorticité : } \boxed{\text{rot } \vec{u} = \omega} .$$

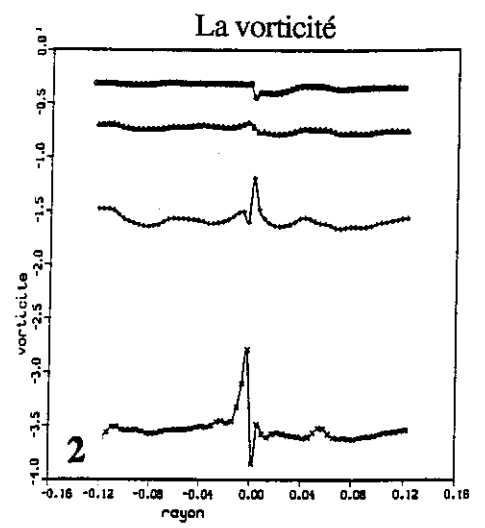
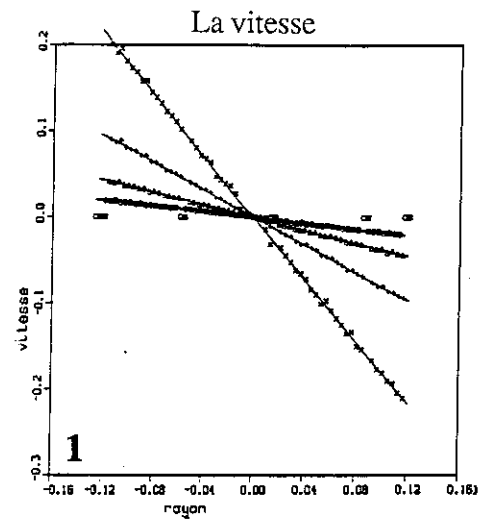
Courant constant sur tout le domaine :

La vorticité est constante dans toute la cuve dont la surface $S_t = \pi R^2$. Le courant est réparti équitablement dans toutes les électrodes, il est évacué par le cadre. ΔT est le temps de forçage (quelques secondes). On suppose que la vorticité créée localement au dessus des électrodes se réparti localement et que le système est équivalent à une injection uniforme de vorticité.

$$j_z = \text{Cste} = \frac{I}{S_t} \quad ; \quad \omega = \frac{I}{S_t} \left(\frac{B}{\rho a} \right) \Delta T.$$

$$\omega = \text{cste}$$

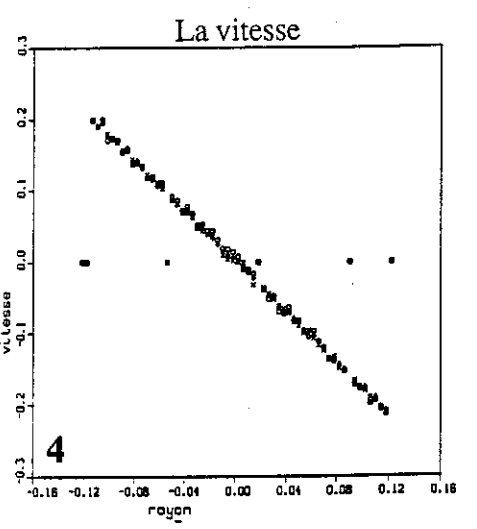
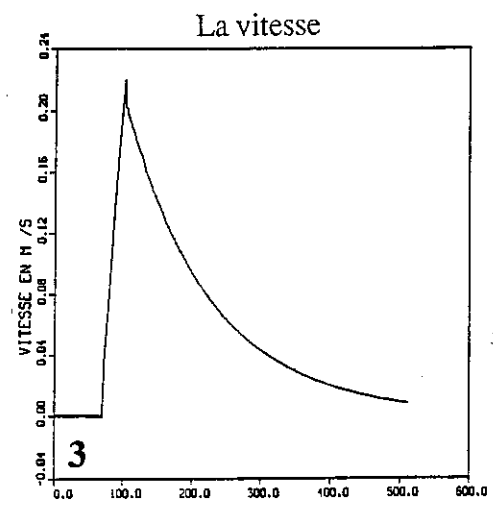
La vitesse et la vorticité aux instants:
 $T_1 = 0 \text{ s} : \circ$
 $T_2 = 18 \text{ s} : \Delta$
 $T_3 = 36 \text{ s} : +$
 $T_4 = 54 \text{ s} : \times$



3)-La vitesse en 1 point, décroissance en fonction du temps.

4)-La vitesse après normalisation
 $v_n = v \cdot \exp(-\frac{T_i}{T_h})$

$T_1 = 0 \text{ s} : \circ$
 $T_2 = 18 \text{ s} : \Delta$
 $T_3 = 36 \text{ s} : +$
 $T_4 = 54 \text{ s} : \times$



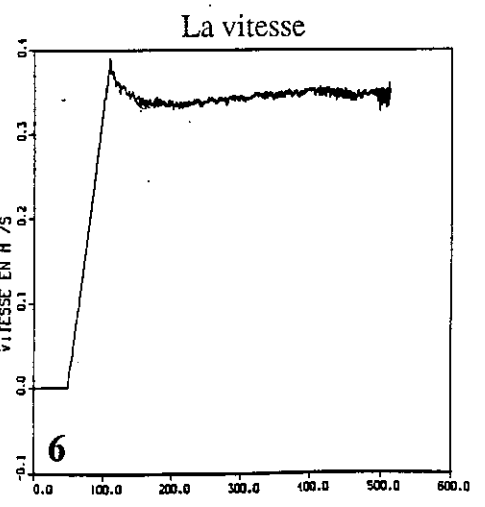
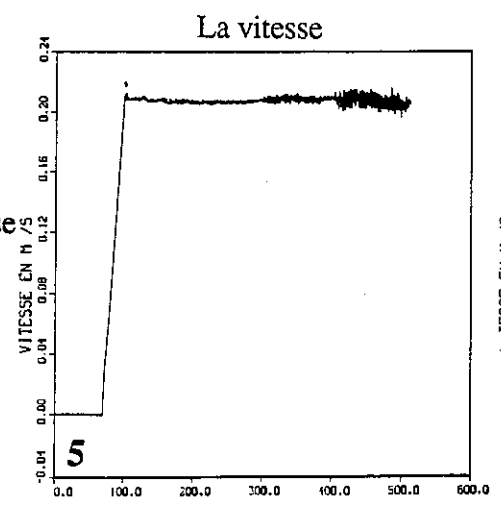
100 = 20 secondes

La vitesse en 1 point après normalisation

$$v_n = v \cdot \exp(-\frac{T_i}{T_h})$$

5)-Condition de vitesse modérée.

6)-Décroissance anormale au début du fichier, dû à une vitesse initiale trop forte.



100 = 20 secondes

Echelle 100 = 20 secondes

(FIGURE N° 7)

CONTROLE DE LA DECROISSANCE, NORMALISATION.

La vitesse est axisymétrique donc $u_r = 0$, on peut déduire u_θ facilement, on obtient une rotation en bloc :

$$\omega = \text{rot } u = \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta r)}{\partial r} \quad ; \quad u_\theta(r=0) = 0 \quad .$$

$$u_\theta(r) = \frac{\omega}{2} r = \frac{1}{2} \frac{I}{S_t} \left(\frac{B}{\rho a} \right) \Delta T r.$$

Ce cas très simple de rotation en bloc sans aucune instabilité (voir figure n°7), nous a servi pour les premières vérifications de la précision de nos conditions initiales et du temps de décroissance. Après la période de forçage initial (quelques secondes), nous laissons le mouvement évoluer librement. Celui-ci décroît de façon exponentielle (figure n°7, courbe 1, 2 et 3). Cette décroissance au cours du temps est due aux forces de frottement dans la couche limite dite de Hartmann. Elle est caractérisée par le temps de Hartmann $T_h = (\rho/\sigma\nu)^{-1/2} a/B_0$. On vérifie ponctuellement sur les cas de rotation en bloc, la concordance entre le temps calculé théoriquement et celui trouvé expérimentalement.

On trouve théoriquement $T_h = 25,5$ secondes. Mais expérimentalement on a $T_h = 22,73$ secondes (pour $a=0.016$ m). La décroissance expérimentale est supérieure de 10% à celle théorique. Ceci est dû probablement au fait que dans le fond de la boîte sont incluses les électrodes d'injection de courant qui sont conductrices et donc freinent le mercure de façon plus importante que si tout le fond était isolant. On peut faire des vérifications dans le cas général sur la décroissance des grandeurs intégrales : énergie et moment cinétique. L'ensrophie peut décroître légèrement, cela est dû au lissage de la vorticité par une faible viscosité.

La connaissance du temps exact de décroissance va nous permettre, par la suite de travailler sur les vitesses et autres grandeurs physiques normalisées par le temps de décroissance : $v_n(t) = v(t) e^{t/T_h}$. (figure n°7, courbes 4, 5 et 6).

Exemple de vérification de la conservation des grandeurs intégrales normalisées:

La vorticité est constante sur tout le domaine $\omega = 3,5$.

	E_c energie	Γ_2 ensrophie	M_c moment cinet
$T = 0$ s	6,1 E-4	0,357	6,5 E-4
$T = 20$ s	6,0 E-4	0,330	6,4 E-4
$T = 60$ s	6,2 E-4	0,345	6,5 E-4

Nous avons noté pour certain cas une décroissance trop importante, nous avons remarqué qu'ils s'agissaient de conditions à très grande vitesse (figure n°7, courbe n°6) et nous nous sommes aperçus que la vitesse dépassait la valeur critique de stabilité de la couche de Hartmann. (Moreau -1991). La valeur critique observée en conduites est donnée par Lykoudis (Lykoudis -1960). On a $\frac{Re}{M} \max = 250$. Ceci correspond pour notre expérience à une vitesse $u_{\max} = 0,2$ m/s. Au-dessus de cette limite, les coefficients de frottement sont plus grands que dans le cas laminaire, et donc la décroissance est plus rapide. On considérera que en-dessous de $U=0,30$ m/s la variation des coefficients est négligeable. Donc dans toute la suite, la vitesse max respectera cette limitation.

Exemple de décroissance trop importante:

La vorticité est constante sur tout le domaine $\omega = 6$:

	E_c energie	Γ_2 enstrophie	M_c moment cinet
T = 0 s	1,8 E-3	0,97	1,1 E-3
T = 20 s	1,5 E-3	0,73	1,0 E-3
T = 40 s	1,5 E-3	0,76	1,0 E-3

Décroissance de 15 % de l'energie et de 25 % de l'enstrophie. Cette décroissance est due aux vitesses qui dépassent la valeur critique de 30 m/s en particulier dans la zone extérieure de la cuve.

Deux zones de courant uniforme mais différents I_1 sur le disque central de surface $S_1 = \pi R_1^2$ et I_2 sur la couronne extérieure de surface $S_2 = \pi(R^2 - R_1^2)$. On a 2 zones de vorticité uniforme. Les champs des vitesses restent à peu près axisymétriques durant le temps de l'impulsion. En tenant compte de la continuité de la vitesse à la limite des 2 zones $u_{\theta 1}(R_1) = u_{\theta 2}(R_1)$. on trouve :

$$\text{Pour } 0 < r < R_1 ; \omega_1 = \frac{I_1}{S_1} \left(\frac{B}{\rho a}\right) \Delta T \quad ; \quad u_{\theta 1} = \frac{\omega_1}{2} r ;$$

$$\text{Pour } R_1 < r < R ; \omega_2 = \frac{I_2}{S_2} \left(\frac{B}{\rho a}\right) \Delta T \quad ; \quad u_{\theta 2} = \frac{\omega_2 r}{2} + \left(\frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_2}{2}\right) \frac{R_1^2}{r} ;$$

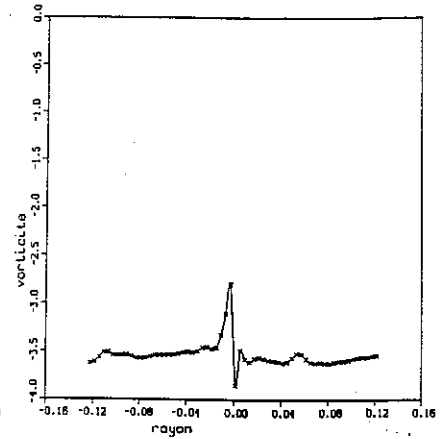
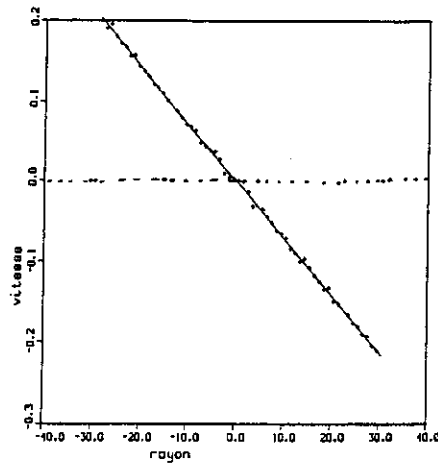
cas 1.

$$S = S_{\text{totale}}$$

$$I = 30 \text{ Ampères}$$

$$T = 5 \text{ secondes}$$

$$\omega = -3,5$$

**cas 2.**

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} S_{\text{totale}}$$

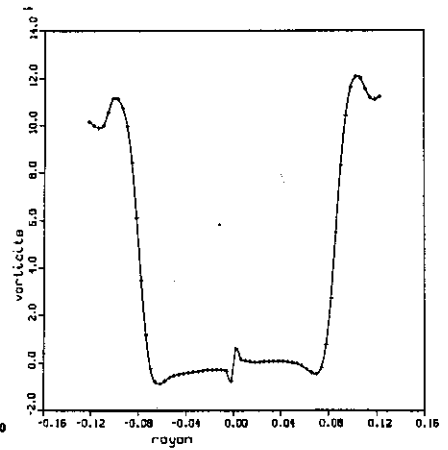
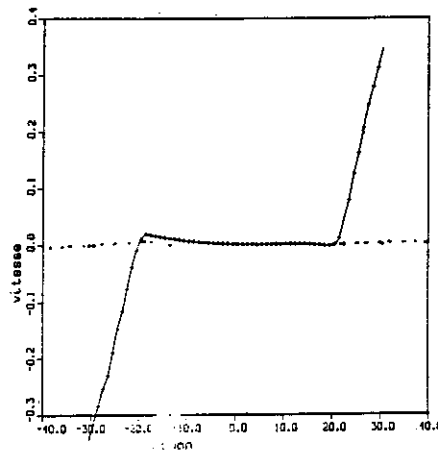
$$I_1 = 0 \text{ Ampères}$$

$$I_2 = -40 \text{ Ampères}$$

$$T = 7,5 \text{ secondes}$$

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = 11$$

**cas 3.**

$$S_1 = \frac{1}{5} S_{\text{totale}}$$

$$S_2 = \frac{4}{5} S_{\text{totale}}$$

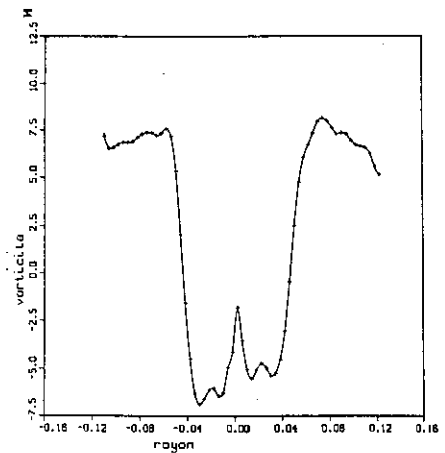
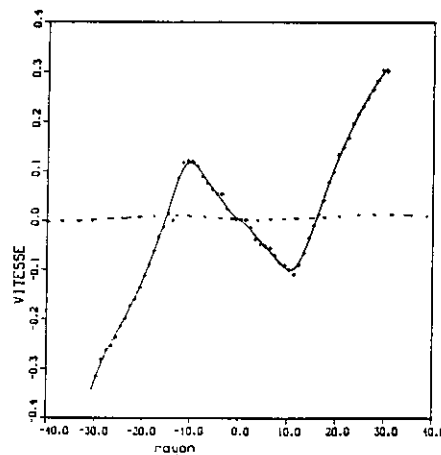
$$I_1 = +5 \text{ Ampères}$$

$$I_2 = -40 \text{ Ampères}$$

$$T = 7.5 \text{ secondes}$$

$$\omega_1 = -6.$$

$$\omega_2 = 8.$$



(FIGURE N° 8)

CONDITIONS INITIALES : VITESSES , VORTICITES.

Exemples

Voir figure n°8 : Courbes d'exemples de diverses conditions initiales. Ces fichiers de vitesses et de vorticités expérimentales sont tracés à l'instant de fin de forçage.

Avec les paramètres expérimentaux suivants :

$B = 0.2137$ Tesla .

$\rho = 1.355 \cdot 10^4$ Kg /M³.

$a = 0.016$ Mètre .

$R = 0.13$ Mètre.

$I_1 ; I_2 ; R_1$ et ΔT sont les paramètres variables pour l'expérience.

On remarque sur les courbes 2 et 6 (figure n°8) un défaut de la vorticité au centre, qui est dû à la disposition des électrodes d'injection de courant. Il n'y a pas d'électrode au centre de la cuve, donc pas de courant sur une surface d'environ 1 cm² (On peut négliger ce défaut).

Pour les cas où nous avons une évolution du profil de vitesse mais où le mouvement moyen reste circulaire, on peut vérifier que les grandeurs physiques (énergie cinétique, moment cinétique, enstrophie) sont bien conservées après normalisation par le temps de décroissance.

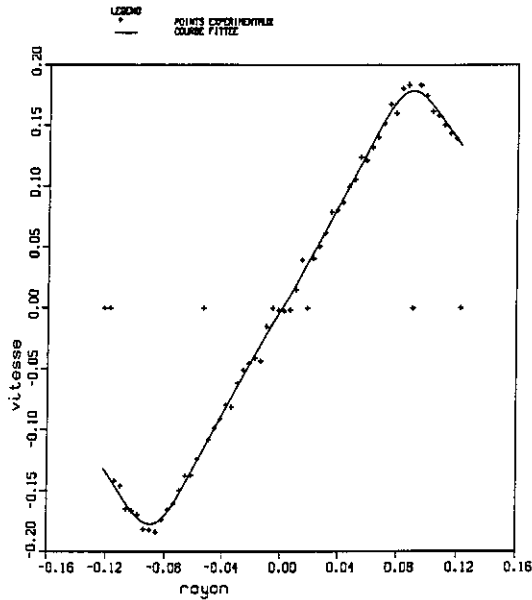
Vérification sur deux exemples :

$S_1=S_2 ; \omega_1=15 ; \omega_2=-15$

	E_c energie	Γ_2 enstrophie	M_c moment cinet
T = 0 s	2,2 E-3	2,5	1,0 E-3
T = 40 s	1,9 E-3	2,2	1,1 E-3
T = 60 s	2,1 E-3	1,8	1,3 E-3

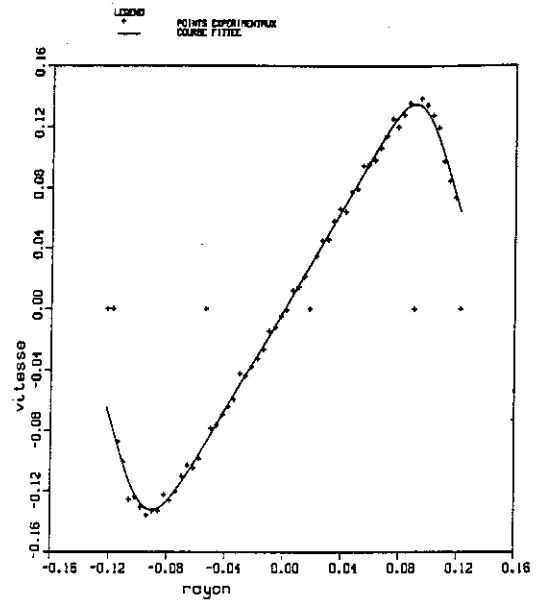
$S_1=1/3 S_2 ; \omega_1=23 ; \omega_2=-10 ;$

	E_c energie	Γ_2 enstrophie	M_c moment cinet
T = 0 s	1,8 E-3	1,7	8,9 E-4
T = 40 s	1,7 E-3	1,2	9,7 E-4
T = 60 s	1,7 E-3	1,2	9,9 E-4

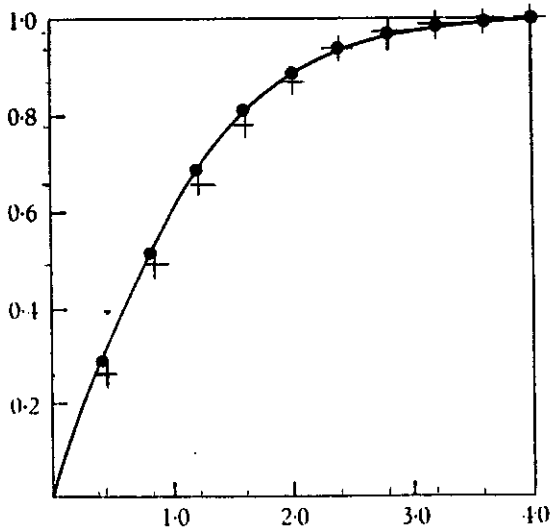


Profils de vitesse à l'instant de fin de forçage.

(Le rayon est donné en mètre)



Profils de vitesse à T = 40s.



--- Profils proposé par Hunt.J.
 ++ Approximation par $3x-3x^2+x^3$
 Profils de vitesse dans la couche limite d'épaisseur : $\delta = 1,5$ mm.

Initialement

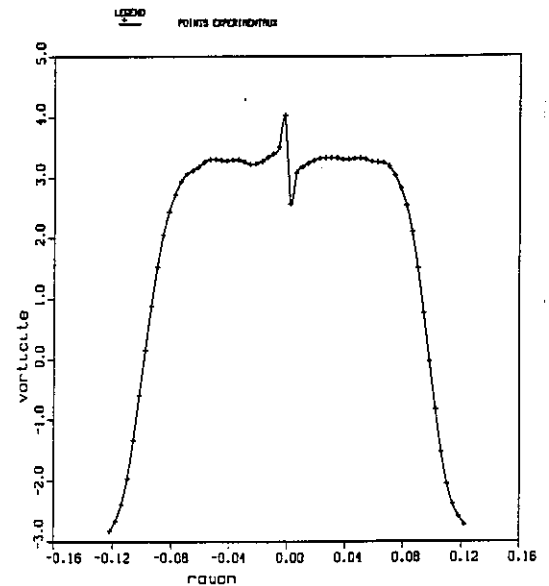
Entropie dans l'écoulement centrales. Expérimentale: 0,256

Entropie dans la couche limite C. limite : 5,23
 ⇒ entropie totale : 5,486

à T = 40 s

Entropie dans l'écoulement centrales. Expérimentale: 1,727

Entropie dans la couche limite . C. limite : 3,8
 ⇒ entropie totale : 5,527



Vorticité à T = 40s.

La vorticité dans la zone extérieur atteint la valeur -3 , alors que initialement la vorticité est nulle dans cette zone et positive dans la zone centrale.

(FIGURE N° 9)

PROBLEME DU A LA COUCHE LIMITE VERTICALE.

C'est cette vérification qui nous a indiquée dans certains cas que nous avons des défauts, en effet l'enstrophie (intégrale du carré de la vorticité) était beaucoup plus grande que prévue. Nous avons remarqué ce défaut lorsque tout le mouvement est au départ dans la zone centrale et la zone de la couronne extérieure est au repos

Exemple : $S_1=S_2$; $\omega_1=4$; $\omega_2=0$

	E_c energie	Γ_2 enstrophie	M_c moment cinet
T = 0 s	0,53 E-3	0,25	6,5 E-4
T = 40 s	0,7 E-3	1,72	6,5 E-4
T = 60 s	0,72 E-3	1,81	6,4 E-4

On remarque une augmentation anormale de l'enstrophie.

Cela est probablement dû à des décollements de la couche limite verticale lors de très forts brassages turbulents. En étudiant les films vidéo correspondant à ces fichiers, nous avons pu voir des décollements de couches limites sur le bord extérieur de la cuve qui sont entraînés vers le centre de la cuve. Nous avons estimé ces apports d'enstrophie.

La couche limite en question a été décrite par Hunt (Hunt and Stewartson. -1965) Nous trouvons l'épaisseur et le profil de la couche limite sur la paroi verticale . Nous pouvons simplifier ce profil par la formule empirique $(3x - 3x^2 + x^3)$ et calculer facilement l'enstrophie contenue dans cette zone. Nous négligeons le fait que ce profil dépend en réalité de la hauteur z . Dans le cas de très grande vitesse près du bord de la cuve, cette couche limite très fine ($<$ quelques mm) contient une vorticité importante. Nous avons vérifié pour un cas où nous avons une très grosse augmentation de la valeur de l'enstrophie (voir figure n°9). Et en effet l'enstrophie de la couche limite était bien plus importante que celle contenue dans tout le reste de la cuve. Il convient donc de vérifier que les grandeurs intégrales restent bien constantes lors de l'expérience.

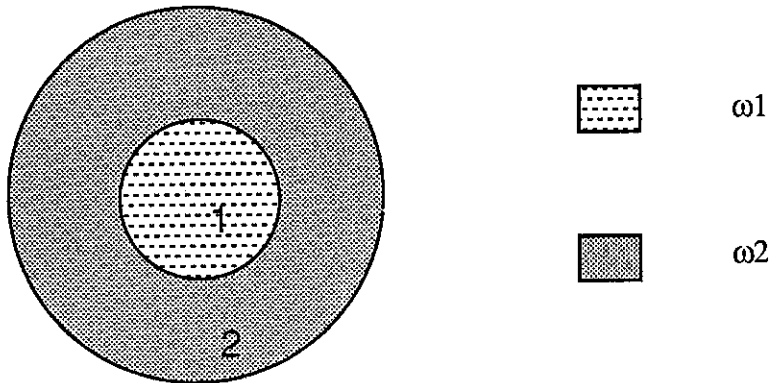
2 - Instabilités initiales et évolution

Nous avons initialement un système axisymétrique, avec vitesse continue sur tout le domaine. La vorticité uniforme sur chaque couronne présente une très forte discontinuité à la limite des 2 zones. Nous avons étudié l'instabilité initiale qui s'y développe à partir de visualisations photographiques, et des fichiers d'acquisitions expérimentales. Nous avons ensuite fait une étude linéaire de stabilité de l'interface puis une recherche sur la non-linéarité de l'instabilité.

Dès la fin du forçage on observe des instabilités qui croissent et se développent pour former de petits tourbillons qui s'apparieront par la suite. On peut voir sur les photos (figure n°10) que ces instabilités sont localisées sur le cercle de discontinuité de la vorticité. Sur cet exemple, $\omega_1=5$ et $\omega_2=-40$ on remarque une série d'instabilités qui se développent à la limite des zones ($S_2=S_1$). On ne pourra réussir à véritablement distinguer des tourbillons bien formés seulement quand il n'y en aura plus que deux. Ce système évoluera finalement vers un écoulement formé d'un tourbillon excentré par rapport à la cuve.

Nous avons mesuré les profils de vitesse en fonction du temps sur chaque sonde et nous avons pu vérifier que l'instabilité se propageait à partir de la discontinuité de vorticité vers l'intérieur et l'extérieur de la cuve de façon symétrique. On a donc la certitude qu'aucune instabilité ne provenait de la couche limite du bord de la cuve mais que c'est bien au niveau de la discontinuité de vorticité que se développent des instabilités qui détruisent la symétrie du mouvement. Ces instabilités sont non linéaires : pour s'en convaincre, il suffit de faire une étude linéaire dans le cas le plus général.

3 - Etude linéaire et non-linéaire de l'instabilité



Etat initial avec perturbation.

Instabilité de tourbillons uniformes

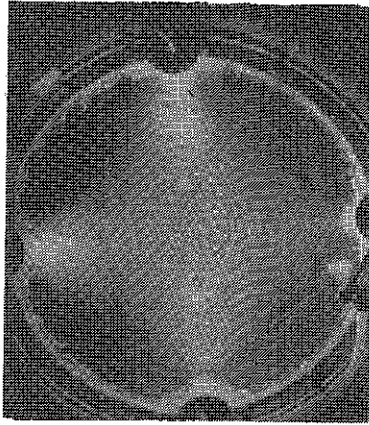
la vitesse : région 1 : $u_1 = \alpha r$

région 2 : $u_2 = Ar + (\alpha - A) \frac{R_1^2}{r}$

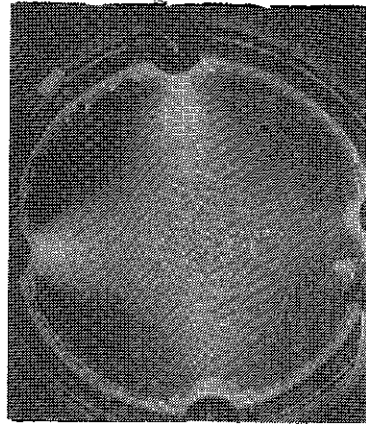
la vorticité $\omega_1 = 2\alpha$ et $\omega_2 = 2A$

la fonction de courant est notée ψ , on a $\Delta\psi = -\omega$

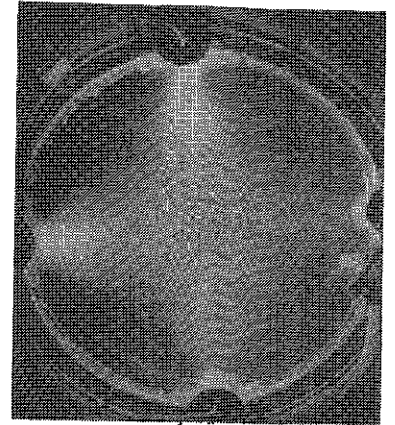
La perturbation est de la forme : $\Phi(r, \theta, t) = \varphi(r) e^{im(\theta - ct)}$.



T = 0 s



T = 2 s



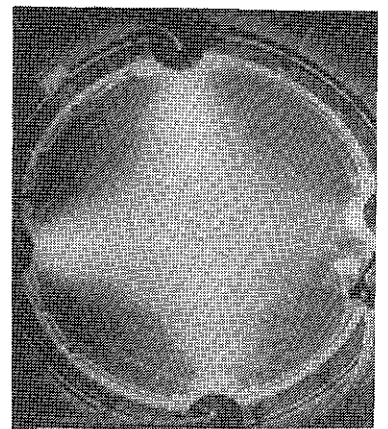
T = 4 s

Instabilités initiales

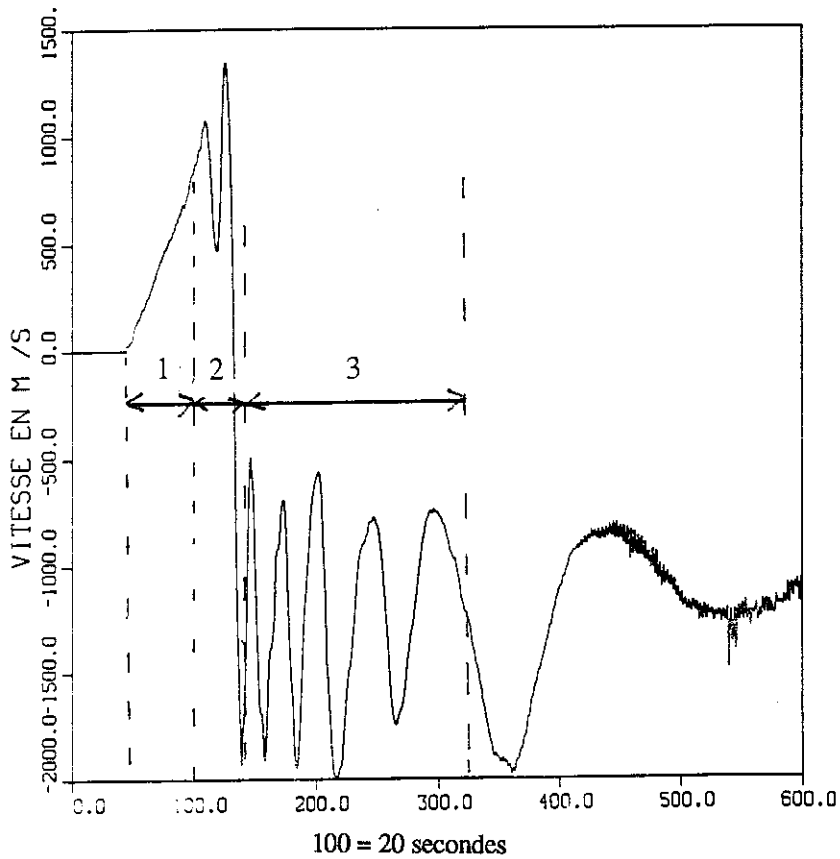
Puis

Structure stabilisée.

$$(\omega_1 = 5 \quad \omega_2 = -40)$$



T = 60 s



**Vitesse normalisée en
fonction du temps,
sur une sonde.**

Zone 1 : forçage 10 s.

Zone 2 : instabilités.

Zone 3 : structure stable.

(FIGURE N° 10)

INSTABILITES INITIALES.

$$\text{on note } \varphi' = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

* R : On écrit l'équation de Rayleigh en coordonnées cylindriques.

$$\left[\frac{U}{r} - c \right] [r^2 \varphi'' + r \varphi' - m^2 \varphi] + r \varphi \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} \right] = 0$$

* P : L'équation de la pression

$$\frac{p}{\rho} = [U - cr] \varphi' + \varphi \Delta \psi$$

* I : Le raccord de la vitesse perpendiculaire à l'interface en R_1 .

$$\frac{\varphi_i}{U_i - rc} = \text{cste}, \text{ or } U \text{ est continu, donc } \varphi \text{ sera continue.}$$

* R : \Rightarrow 1) $\varphi_1 = a_1 r^m$

$$2) \varphi_2 = a_2 (r^m - r^{-m})$$

* P : raccord de la pression à l'interface

$$\begin{aligned} & [u_1 - cR_1] [ma_1 R_1^{m-1}] + a_1 R_1^m (-2\alpha) \\ & = [U_2 - cR_1] [a_2 m (R_1^{m-1} + R_1^{-m-1})] + a_2 m (R_1^m + R_1^{-m}) (-2A) \end{aligned}$$

* I + R : \Rightarrow

$$a_1 R_1^m = a_2 (R_1^m - R_1^{-m})$$

$$a_1 = a_2 (1 - R_1^{-2m})$$

* P + I + R : \Rightarrow

$$\begin{aligned} & [U_1 - cR_1] [a_2 m (1 - R_1^{2m})] + a_2 (1 - R_1^{-2m}) (-2\alpha) \\ & = [U_2 - cR_1] [a_2 m (R_1^{m-1} + R_1^{-m-1})] \end{aligned}$$

Or $u_1 = u_2$ en $r = R_1$. On a donc :

$$\begin{aligned} & c[-R_1(ma_2(1 - R_1^{2m})) + R_1 a_2 m(R_1^{m-1} + R_1^{-m-1})] \\ & = -U_1 [ma_2 (1 - R_1^{2m})] - a_2 (1 - R_1^{-2m})(-2\alpha) \\ & + U_1 [a_2 m (R_1^{m-1} + R_1^{-m-1})] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c [a_2 m (R_1^{2m+1} + R_1^m - R_1 + R_1^{-m})]$$

$$= U_1 a_2 m [R_1^{2m} + R_1^{m-1} - R_1 + R_1^{-m-1}] + 2\alpha a_2 (1 - R_1^{-2m})$$

Donc nous n'avons pas de terme d'ordre 2 en c , d'où c est toujours réel. Donc l'écoulement est toujours linéairement stable.. Donc l'instabilité est de nature non-linéaire.

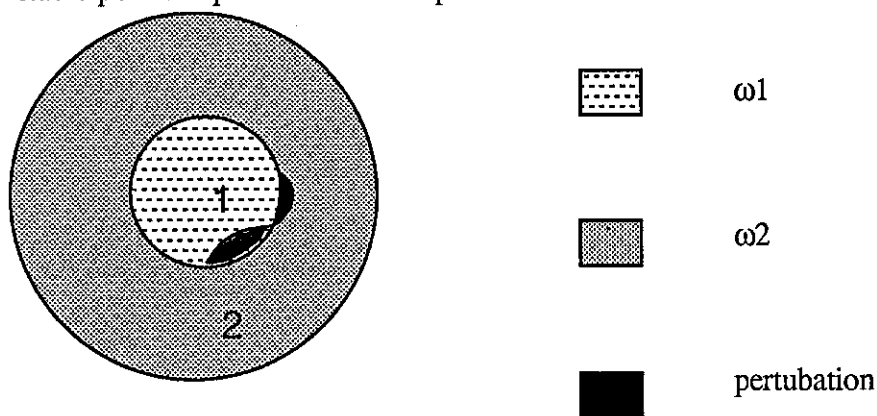
Une étude non-linéaire a été faite par WAN.Y (ref :Wan.Y -1984). Il démontre que l'écoulement est stable au sens suivant :

Si l'état circulaire est noté $\omega^*(x)$, et l'état perturbé est noté $\omega(t,x)$. Alors il démontre que :

$$\forall \delta > 0 ; \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que si } \int |\omega_0(0,x) - \omega^*(x)| dx \leq \varepsilon$$

$$\text{alors } \int |\omega_0(t,x) - \omega^*(x)| dx \leq \delta$$

ε est donc le seuil pour la perturbation initiale mais on ne connaît pas de relation entre δ et ε . L'écoulement est donc stable, dans ce sens pour des perturbations petites, mais rien n'est connu pour des perturbations fortes : la stabilité au sens d'Arnold n'a pas été démontrée. Nos résultats expérimentaux semblent au contraire indiquer que le tourbillon est instable pour des perturbations d'amplitude suffisamment forte.



Etat initial avec perturbation.

Chapitre 3

OBSERVATIONS ET MESURES DES STRUCTURES ORGANISEES

*"Réfléchir pour mesurer et non mesurer pour
réfléchir."*

G. BACHELARD.

I - REPARTITION DES DIFFERENTES STRUCTURES STABLES.

Parmi toutes les expériences que nous avons réalisées seulement trois types de structures sont apparues de façon stable après évolution complexe du système. C'est le tourbillon axisymétrique, la structure elliptique et le vortex décentré.

Nous allons voir, pour les cas forcés ainsi que pour les expériences en décroissance libre, les conditions en fonction desquelles nous obtenons ces structures.

1 - Cas forcé : les 2 surfaces sont égales.

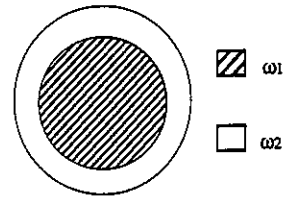
Nous laissons le courant de façon permanente. Il est réparti sur 2 zones dont les surfaces sont égales ($S_c = S_e$). Nous avons donc un apport de vorticité de signe opposé dans le centre et dans la couronne extérieure. Nous faisons varier le rapport $I_{\text{centre}} / I_{\text{couronne}}$. Le courant restant assez fort pour rester dans le régime inertiel. (Voir figure n° 11 : répartition des structures).

Il faut que l'apport de vorticité soit nettement supérieur au centre pour que le mouvement reste axisymétrique. Dès que l'apport de vorticité dans la couronne extérieure est de l'ordre (en valeur absolue) de celle de la zone intérieure, nous observons des instabilités qui sont localisées dans la couronne extérieure. En augmentant encore la vorticité dans la zone extérieure, pour des valeurs de courant $I_{\text{central}} = 12,5 \text{ A}$ et $I_{\text{couronne}} = - 15 \text{ A}$. Nous observons une ellipse stable qui tourne sur elle-même (voir figure n°11, photo n°6).

On diminue la vorticité apportée dans le cercle central, on observe alors la déstabilisation de l'ellipse. Puis en diminuant encore la vorticité au centre, on obtient toute une zone de mouvements très turbulents où l'on peut voir successivement plusieurs tourbillons qui s'apparient puis des instabilités qui détruisent ces tourbillons et une série de mouvements chaotiques.

C'est seulement lorsque tout le forçage se fait dans la couronne extérieure que nous avons pu observé un cas particulièrement remarquable. Il est remarquable car très turbulent par moment puis redevenant stable ensuite, avec une période de l'ordre de 20 à 30 s (voir figure n°12). On voit démarrer le mouvement sur la partie externe et des instabilités se développent entre la zone centrale et la zone de la couronne pour former trois tourbillons qui se rapprochent du centre pour finalement s'apparier (la transition se produit souvent de manière beaucoup plus chaotique). On obtient une structure circulaire plus ou moins

$S_1 = S_2$



$\omega_1 = + 12,5$
 $\omega_2 = - 15$
 Ellipse.

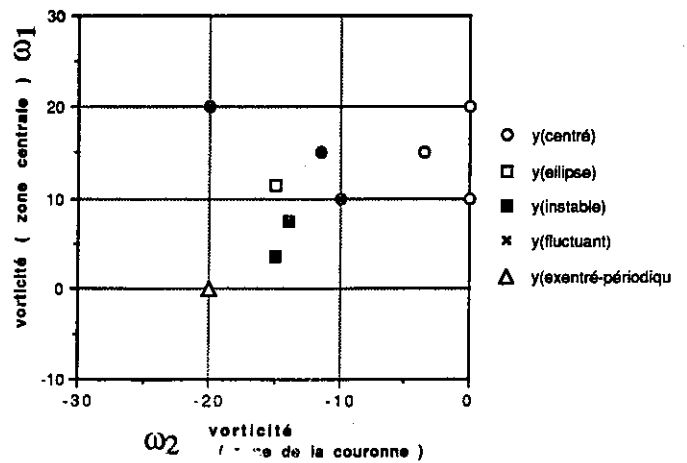


$\omega_1 = + 15$
 $\omega_2 = - 3,5$
 axisymétrique.



$\omega_1 = + 5$
 $\omega_2 = - 15$
 Zone très turbulente.

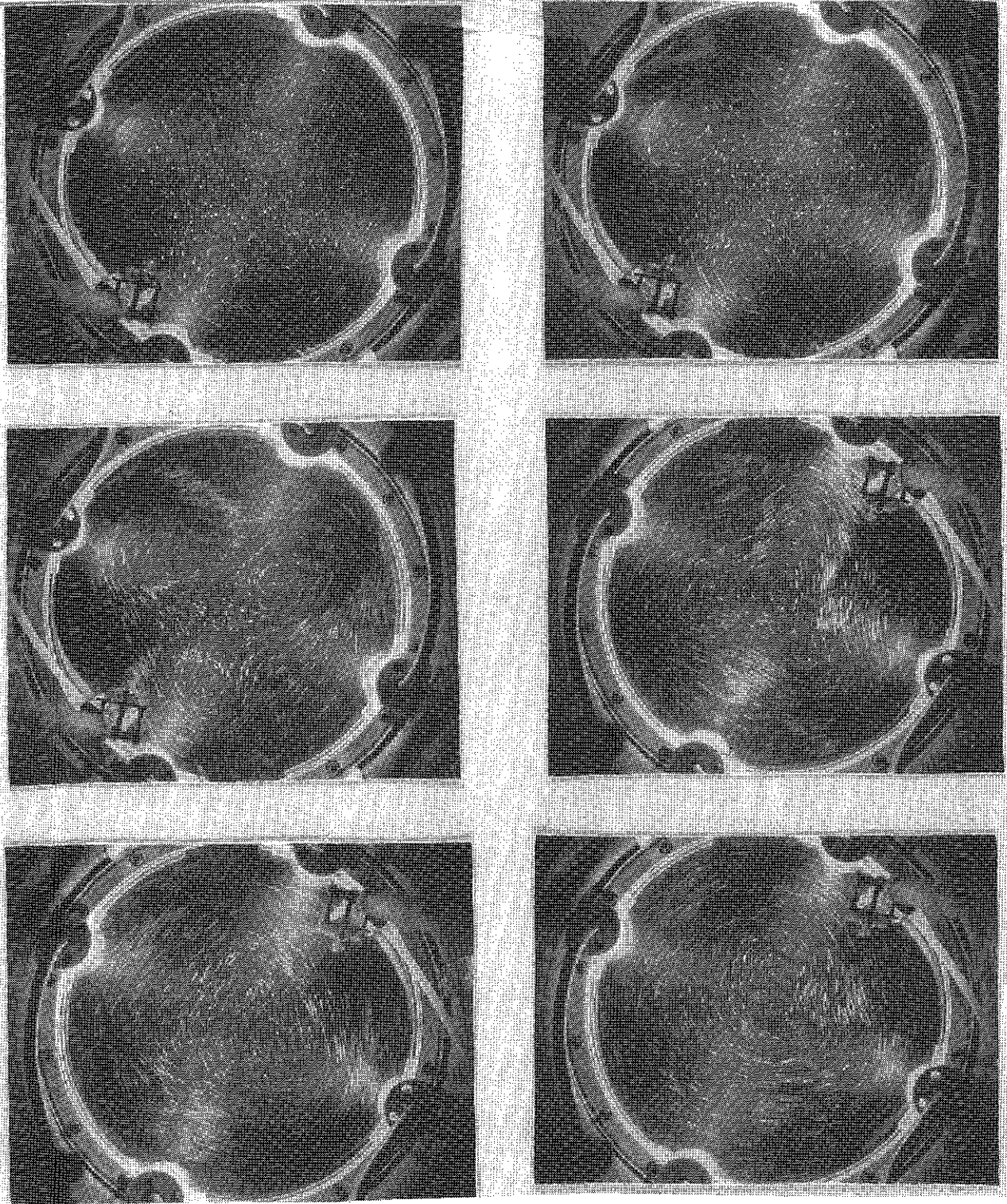
Données de "y-cas forcé graphe"



Répartition des structures en fonction du courant injecté dans chaque zone.

(FIGURE N° 11)

REPARTITION EN REGIME FORCE $S_1=S_2$.



$$\omega_1 = + 0$$

$$\omega_2 = - 20$$

Photos espacées de 4 secondes.

Mouvement périodique (20 à 30 secondes).

Tout le forçage se fait dans la zone extérieure.

(FIGURE N° 12)

CAS REMARQUABLE EN REGIME FORCE.

axisymétrique et un peu décentrée. Puis la vitesse décroît assez rapidement dans la zone centrale et on retrouve le mouvement de départ avec la vitesse principalement dans la zone extérieure, la zone centrale étant presque au repos. Puis le cycle recommence .

Donc dans le cas où les 2 zones sont de même surface, et où nous forçons le mouvement de façon continue, en dehors du vortex axisymétrique, seule l'ellipse est une structure apparaissant de façon stable. Nous n'avons pas observé d'autres structures de tourbillons qui soient stables.

2 - Autres cas forcés

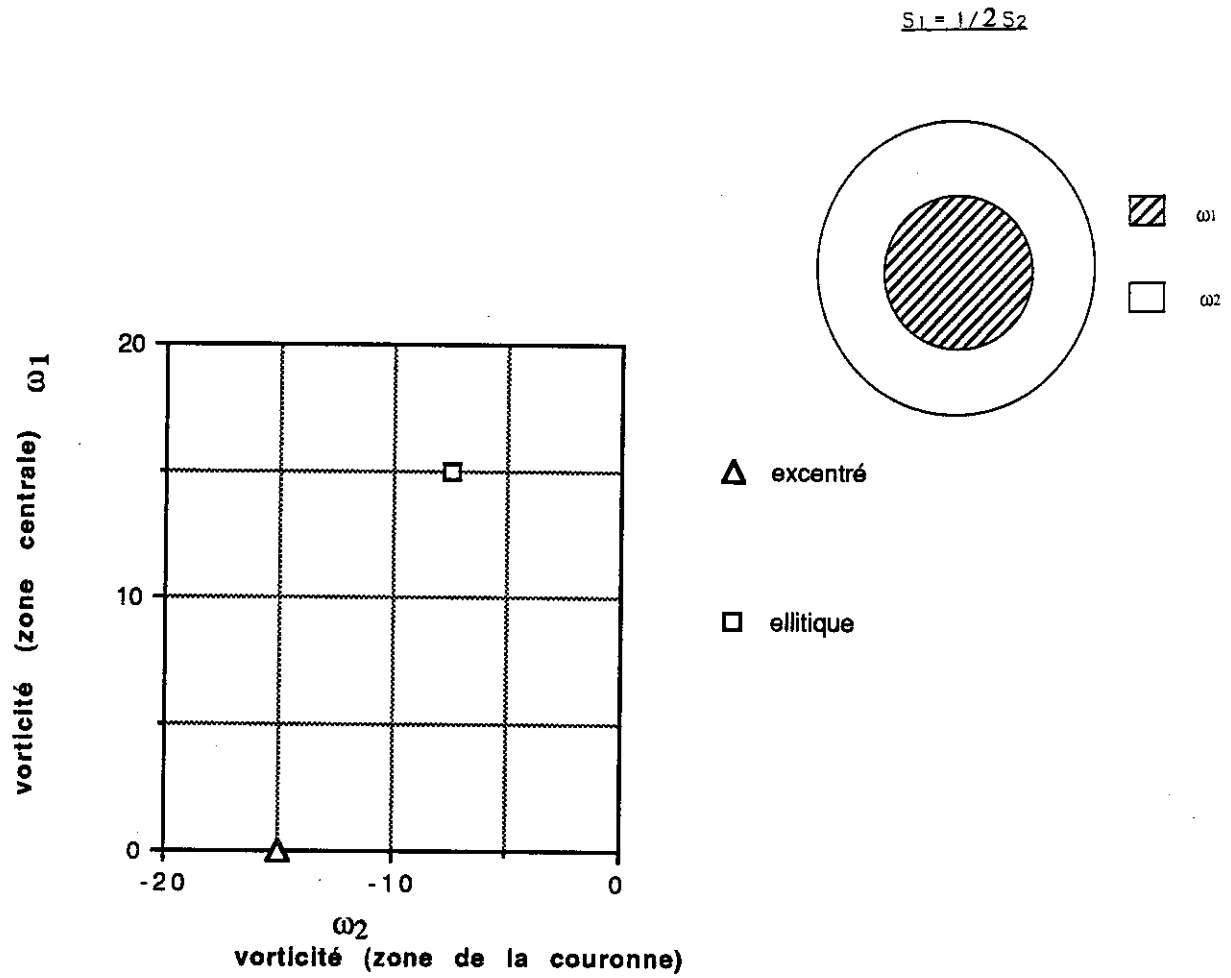
Nous avons modifié la taille des zones, il y a toujours 2 zones circulaires : centrale S_c et extérieure S_e mais nous avons diminué la taille de la zone centrale. Nous avons fait 2 séries d'expériences : 1ère série $2 S_c \cong S_e$ puis une deuxième série pour $5 S_c \cong S_e$. Nous n'avons pas balayé tout le domaine de possibilités de forçage, nous nous sommes intéressés uniquement à quelques unes des conditions qui donnaient des structures stabilisées.

Lorsque $2S_c \cong S_e$, nous avons observé comme pour le cas précédent, l'ellipse stabilisée mais pour des valeurs de la vorticité au centre presque 2 fois supérieur à celle de la couronne extérieure (voir figure n°13).

Puis nous avons obtenu un tourbillon décentré très stable dont le centre tourne plus ou moins vite (ou pas du tout) à l'intérieur de la cuve. Nous avons observé ce vortex excentré lorsque $2 S_c \cong S_e$ et tout le forçage se fait dans la zone extérieure.

Puis, nous l'avons obtenu aussi lors de la 2ème série d'expériences, avec $5 S_c \cong S_e$ (voir figure n°14). Pour des valeurs du forçage de la vorticité très importante dans la zone centrale $F_c \cong 4 F_e$. Puis, lorsque nous diminuons la valeur du forçage au centre, le tourbillon se recentre de plus en plus, et lorsque tout le forçage est dans la couronne extérieure, alors le tourbillon semble rester centré au milieu de la cuve.

Nous n'avons pas réussi à observer d'ellipse stable pour cette configuration de zone ($5 S_c \cong S_e$).



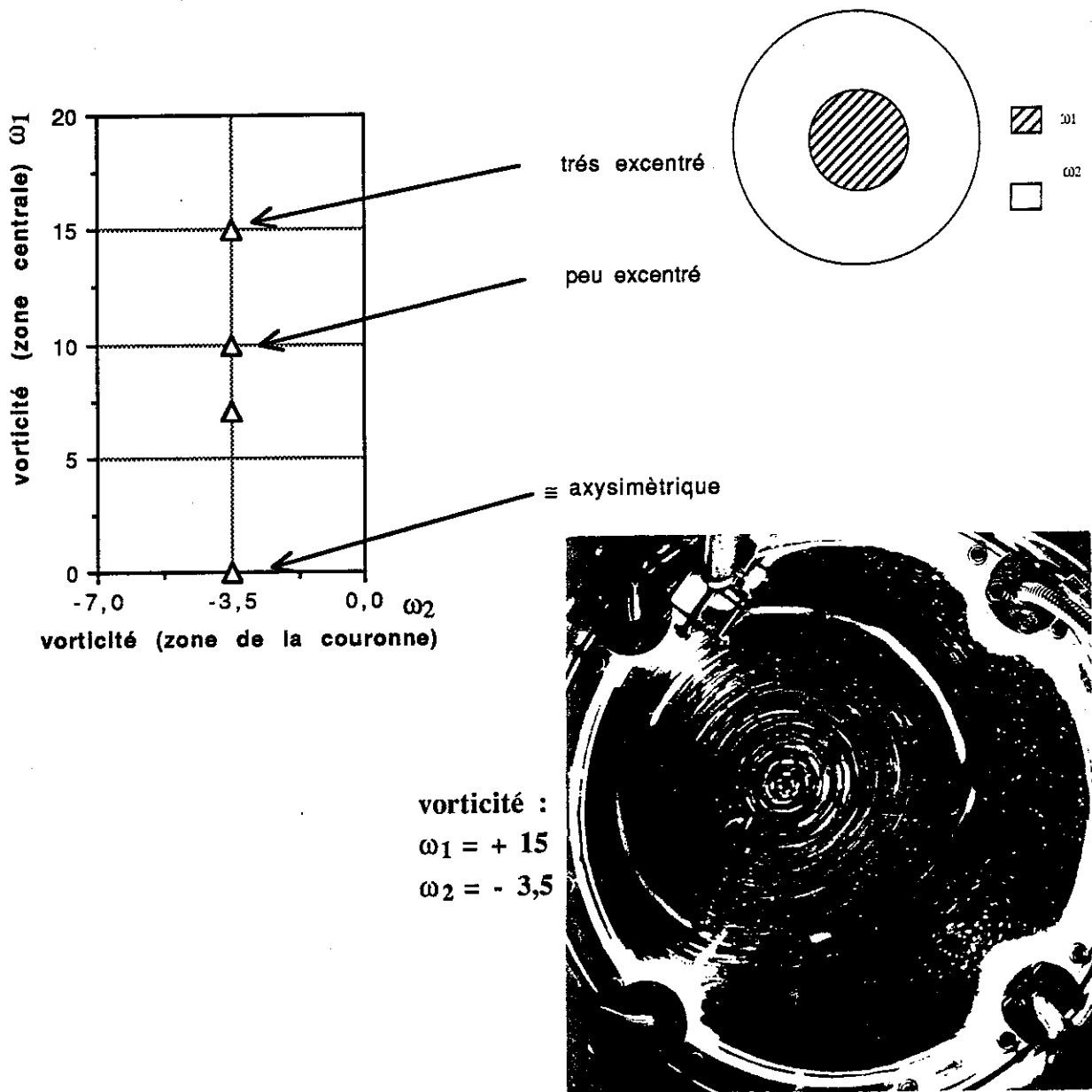
vorticité :
 $\omega_1 = + 15$
 $\omega_2 = - 7,5$



(FIGURE N° 13)

REPARTITION EN REGIME FORCE $2S_1=S_2$.

$S_1 = 1/5 S_2$



(FIGURE N° 14)

REPARTITION EN REGIME FORCE $5S_1=S_2$.

3 - Cas en décroissance libre : les 2S sont égales.

Nous forçons le mouvement du mercure pendant un temps très bref (3 essais à chaque fois avec un temps de forçage $\Delta T = 5$ s puis $\Delta T = 7,5$ s puis $\Delta T = 10$ s).

La vorticité initiale (à la fin du forçage) est donc constante dans chacune des zones. Elle est égale à :

$$\omega_I = \frac{I_I}{S_I} \left(\frac{B}{\rho a} \right) \Delta T. \quad (\text{cf. Chapitre 2, III, 1}).$$

Le mouvement initial est donc circulaire, puis en général très rapidement des instabilités apparaissent qui détruisent l'axisymétrie du mouvement. Après environ 20 s, une structure se constitue et reste stable jusqu'à la décroissance totale du mouvement. C'est cette structure à laquelle nous nous intéressons (voir figure 15 : évolution en fonction du temps). Pour chaque répartition de la vorticité nous avons utilisé 3 conditions initiales d'énergie différente. Cela a peu d'influence sur la nature de l'évolution du mouvement. Et pour chaque niveau d'énergie nous obtenons la même structure finale.

Tant que la vorticité est plus grande dans la zone centrale que dans la couronne extérieure le mouvement reste axisymétrique. Il n'y a pas d'instabilité, il y a juste un mélange ou un lissage de la courbe de vorticité (voir figure n°16, photo n°1). Puis nous avons une décroissance auto-similaire.

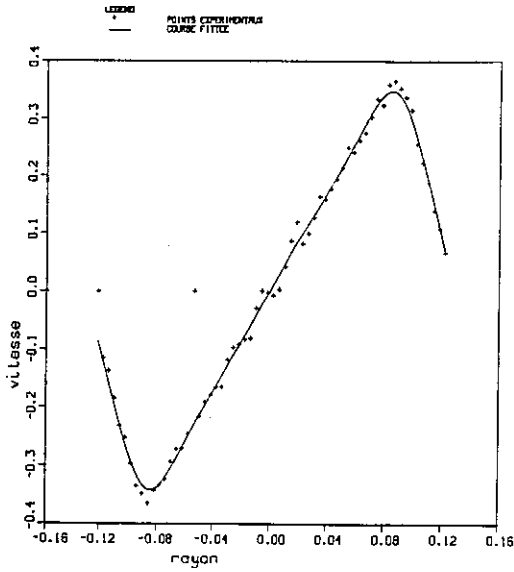
Lorsque l'on diminue la valeur de la vorticité dans la zone centrale, on voit des instabilités qui se développent à l'interface des 2 zones et après quelques dizaines de secondes, une ellipse se forme. Elle tourne sur elle-même avec une période de 20 à 40 secondes. Elle décroît de façon auto-similaire (voir figure n°16, photo n°2).

Lorsque la valeur de la vorticité au centre est de l'ordre de la moitié de celle de la zone extérieure, nous n'avons pas de structure stable. Il y a une compétition entre l'ellipse et le tourbillon décentré. Et suivant les expériences, où même pour une expérience nous voyons successivement une ellipse puis formation de plusieurs tourbillons qui coalescent en un tourbillon décentré et de nouveau une ellipse (voir figure n°16, photos n°3 et 4).

Puis lorsque nous diminuons encore la vorticité au centre ($4 \omega_1 \leq \omega_2$) alors un gros tourbillon excentré apparaît comme très stable, il tourne dans la cuve avec une période minimum de 30 s. Pour $4 \omega_1 = \omega_2$, en dehors de ce tourbillon qui s'étend sur $2/3$ de la surface de la cuve, nous observons une zone turbulente où de petit vortex se forment, coalescent puis se disloquent (voir figure n°16, photo n°5). Mais au fur et à mesure que l'on

diminue la vorticité dans la zone centrale, le centre du tourbillon se rapproche du centre de la cuve. Et la zone d'instabilité à côté du tourbillon diminue (voir figure n 16, photos n 6 et 7).

Il est intéressant de remarquer que pour ces derniers cas, on a initialement les valeurs maximum de la vorticité dans la couronne extérieure et que la période d'instabilité permet une redistribution du mouvement où les valeurs de la vorticité maximale se retrouvent vers le centre de la cuve.

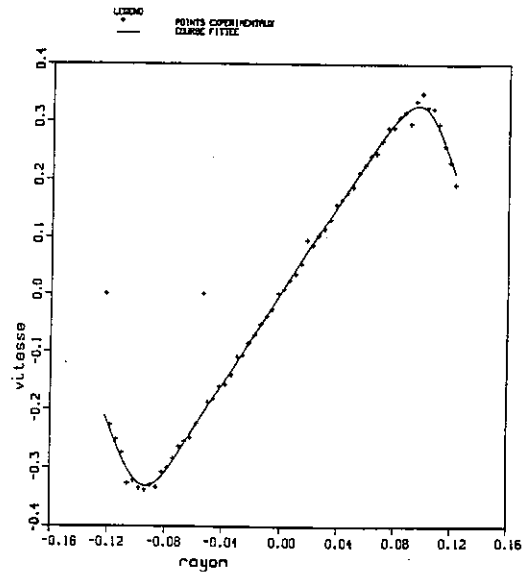


Vitesse initiale.

$$S_1 = S_2$$

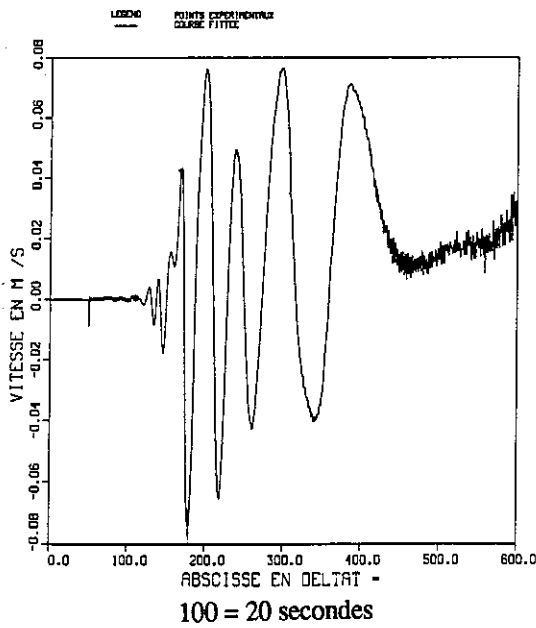
$$\omega_1 = -9$$

$$\omega_2 = +5$$



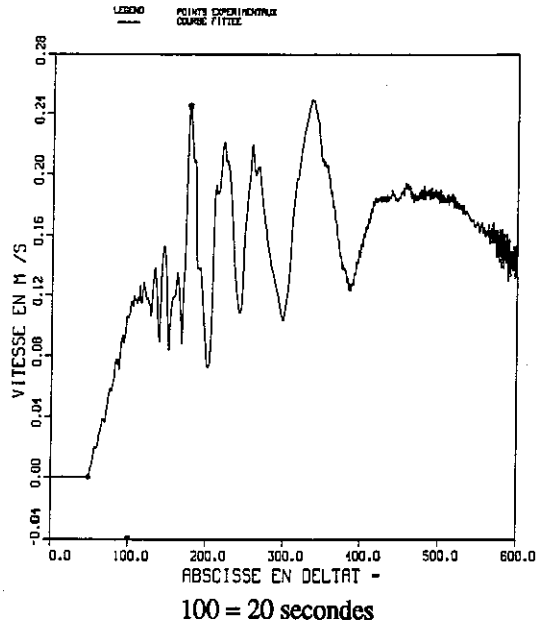
Vitesse après mélange.

Une structure circulaire.



Sur une sonde au centre de la cuve.

$$r = 0,016m$$



Sur une sonde près du bord de la cuve.

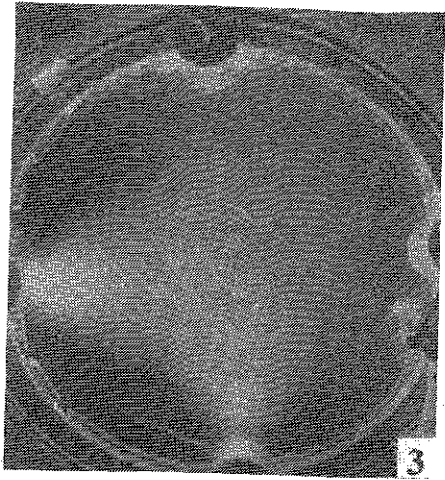
$$r = 0,09m$$

Evolution de la vitesse normalisée d'un tourbillon décentré.

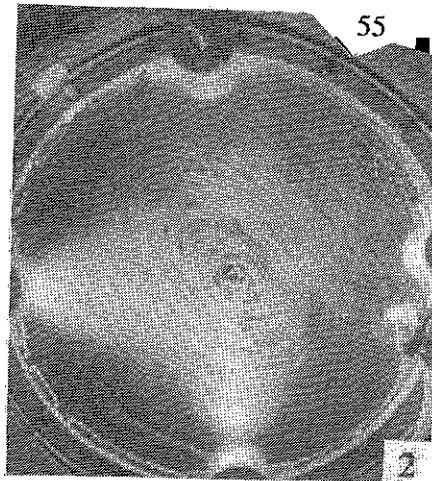
$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -10, \quad S_1 = 1/2 S_2$$

(FIGURE N° 15)

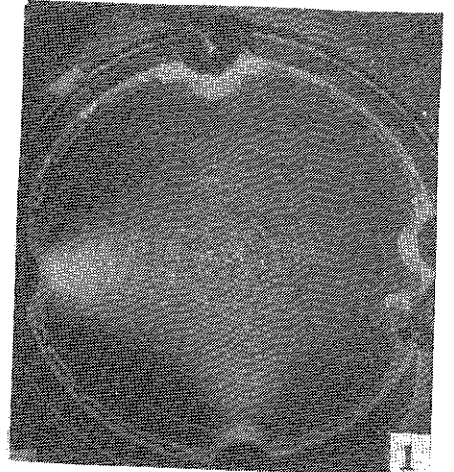
DE LA CONDITION INITIALE A LA STRUCTURE STABLE.



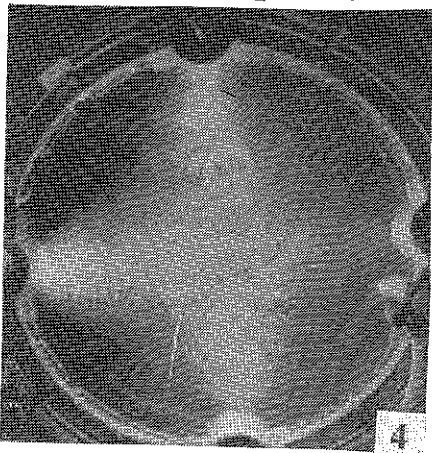
$T = 35 \text{ s}$ $\omega_1 = + 9$
 $\omega_2 = - 15$



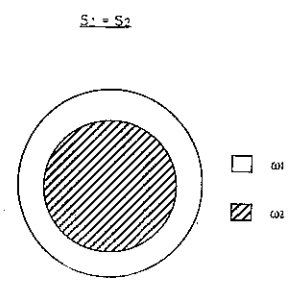
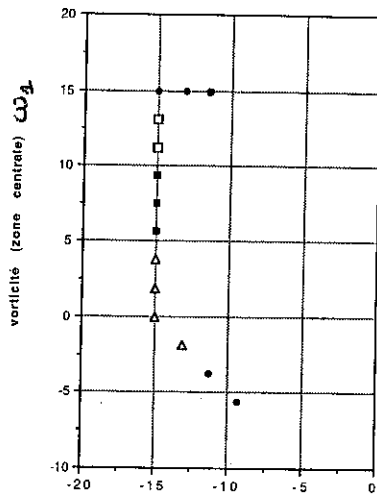
$T = 45 \text{ s}$ $\omega_1 = + 12$
 $\omega_2 = - 15$



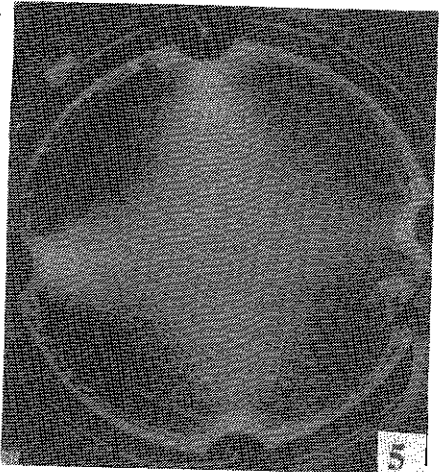
$T = 50 \text{ s}$ $\omega_1 = + 15$
 $\omega_2 = - 15$



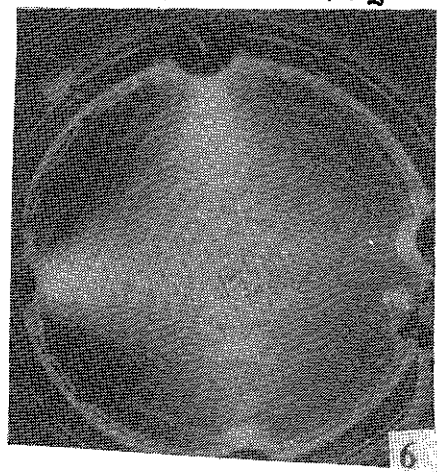
$T = 40 \text{ s}$ $\omega_1 = + 6$
 $\omega_2 = - 15$



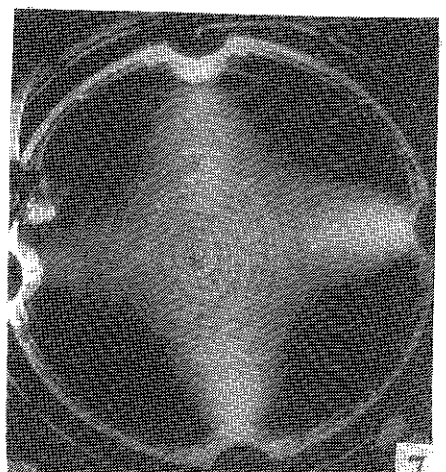
Nous avons tracé le graphe pour $\Delta T = 10 \text{ s}$,
nous avons le même graphe pour :
 $\Delta T = 7,5 \text{ s}$, soit $\omega_1' = 3/4 \omega_1$ et $\omega_2' = 3/4 \omega_2$
ou $\Delta T = 5 \text{ s}$, soit $\omega_1' = 1/2 \omega_1$ et $\omega_2' = 1/2 \omega_2$



$T = 50 \text{ s}$ $\omega_1 = + 4$
 $\omega_2 = - 15$



$T = 50 \text{ s}$ $\omega_1 = + 3$
 $\omega_2 = - 15$



$T = 50 \text{ s}$ $\omega_1 = + 0$
 $\omega_2 = - 15$

(FIGURE N° 16)

REPARTITION EN DECROISSANCE LIBRE $S_1=S_2$.

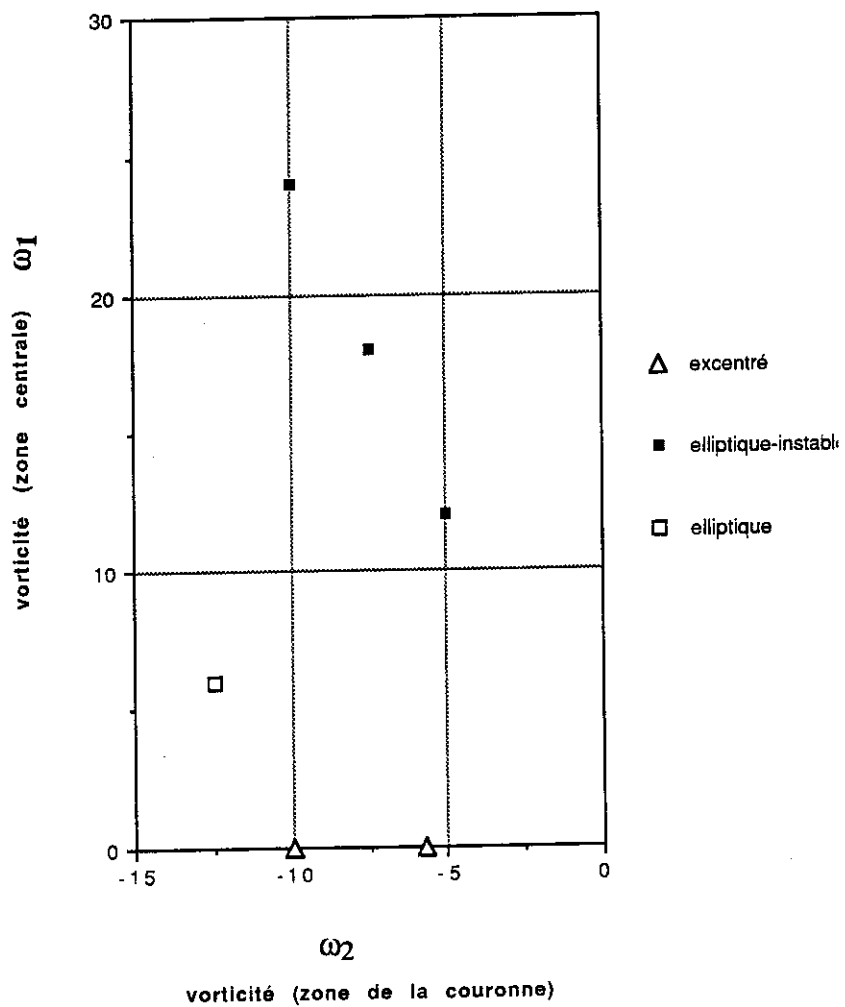
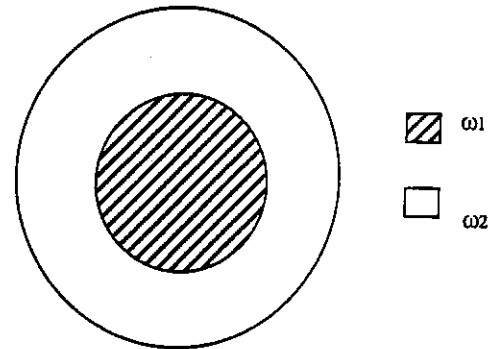
3 - Autres cas en décroissance libre

L'étude pour les cas où nous avons diminué la taille de la zone centrale est moins complète que pour le cas précédent. Nous avons eu divers problèmes qui nous ont empêché de refaire ces expériences (endommagement de la bobine, puis problème de santé contre-indiquant la manipulation du mercure, puis destruction par un autre utilisateur du système d'acquisition).

Pour la première configuration $S_c \cong 1/2 S_e$, nous avons obtenu d'une part, des structures elliptiques, dont une que nous avons étudiée de façon quantitative avec de bons résultats. Nous avons obtenu aussi des structures excentrées (voir figure n° 17).

Pour la seconde configuration où $S_c \cong 1/5 S_e$, nous avons obtenu des structures instables, mais où une structure en 'huit' semblait dominer de façon périodique. Nous avons observé une structure elliptique, étudiée dans le paragraphe suivant. Puis des structures excentrées, relativement instables.

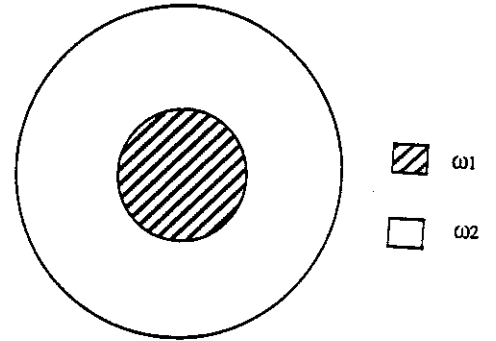
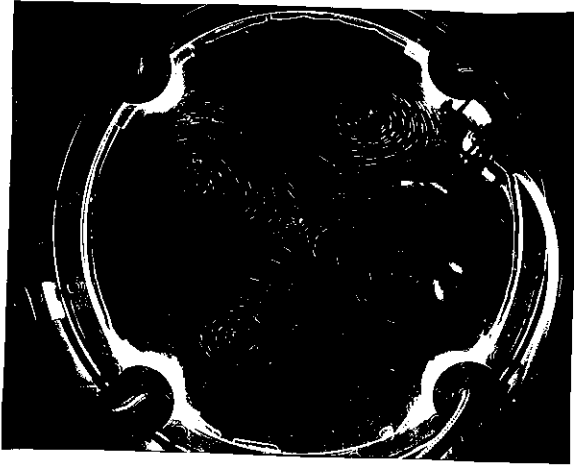
$$S_1 = 1/2 S_2$$



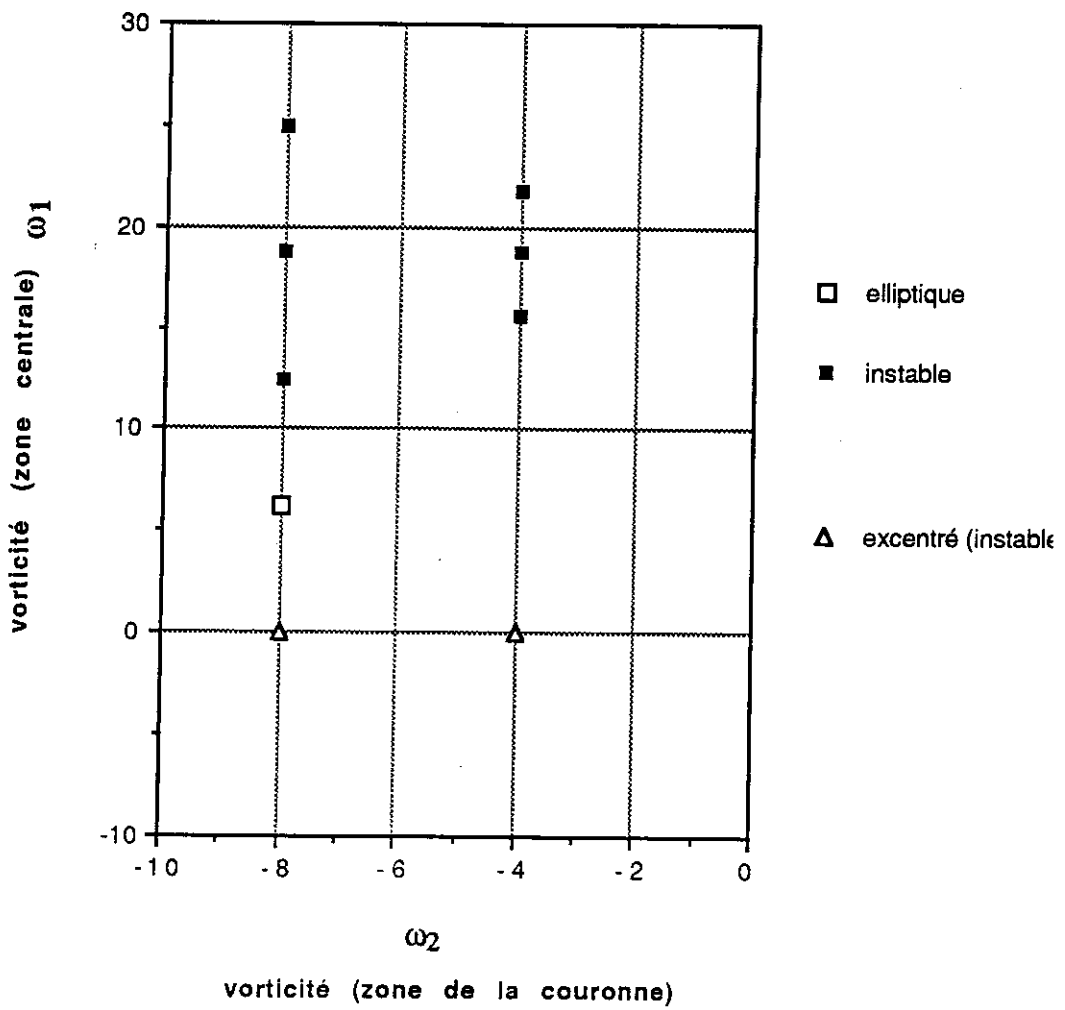
(FIGURE N° 17)

REPARTITION EN DECROISSANCE LIBRE $S_1 = 1/2 S_2$.

$$S_1 = 1/5 S_2$$



Pour les cas instables une structure en 'huit' semble dominante.



(FIGURE N° 18)

REPARTITION EN DECROISSANCE LIBRE $S_1 = 1/5 S_2$.

II-ETUDE QUANTITATIVE, COMPARAISON AVEC LA THEORIE.

choix des cas étudiés quantitativement

Pour réussir à obtenir des résultats corrects et significatifs, il faut que la structure soit stabilisée. Nous regardons les profils de vitesse en fonction du temps sur 10 sondes réparties sur le diamètre de la cuve. Si les vitesses sont constantes, c'est donc un cas axisymétrique. Si les vitesses oscillent de façon régulière (voir figure n°15) ce sera une structure elliptique ou bien un tourbillon excentré. Mais dans la plupart des cas les profils de vitesse ne sont pas réguliers. Même lorsque sur les enregistrements vidéo on voit, par exemple, une ellipse qui a l'air très stable, on s'aperçoit que les profils de vitesse relevés par les sondes sont trop chaotiques pour pouvoir obtenir des courbes correctes. Et si l'on essaie de comparer à la théorie, soit on n'arrive pas du tout à approximer par une courbe théorique, soit la variation des paramètres en fonction du temps est beaucoup trop importante (supérieure à 50%) et ces paramètres ne veulent plus rien dire.

1 - Etudes de cas axisymétriques.

Seuls les cas axisymétriques ont pu être étudiés quantitativement de façon rigoureuse, par les sondes de mesure, car celles-ci se trouvent sur un diamètre de la cuve et ne nous donnent accès qu'à la composante orthoradiale de la vitesse.

Nous allons étudier le profil de la courbe de la vorticité en fonction de la fonction de courant. Nous allons caler sur cette courbe la fonction donnée par la théorie (qui dépend de 5 paramètres) et nous allons comparer les paramètres qui correspondent à des grandeurs physiques connues : c'est la vorticité initiale qu'il y a dans chaque zone (pour le calage voir Annexe I - pour la théorie voir chapitre I).

La théorie de maximum d'entropie nous indique la formule (cf : chap.1, III, p 18)

$$\omega(\psi) = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \operatorname{Th} \left\{ -\frac{1}{2} \beta (\omega_1 - \omega_2) \left[\psi - \frac{\gamma}{\beta} r^2 \right] - \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) \right\}$$

ω_1 et ω_2 sont les valeurs de la vorticité initiale dans la zone 1 et 2.

ψ est la fonction de courant pour la structure finale.

ω est la vorticité pour la structure finale.

$2 \frac{\gamma}{\beta}$ est la rotation générale de la structure dans la cuve.

$\alpha_1 - \alpha_2$ sont des paramètres de Lagrange ainsi que β .

Nous calons itérativement et automatiquement sur les points expérimentaux une fonction à 5 paramètres de la forme : $F(\psi_1) = A + B \operatorname{Th}\{ C[\psi_1 + D.r_1^2] + E \}$;

(voir figure n° 19)

Et nous pouvons comparer :

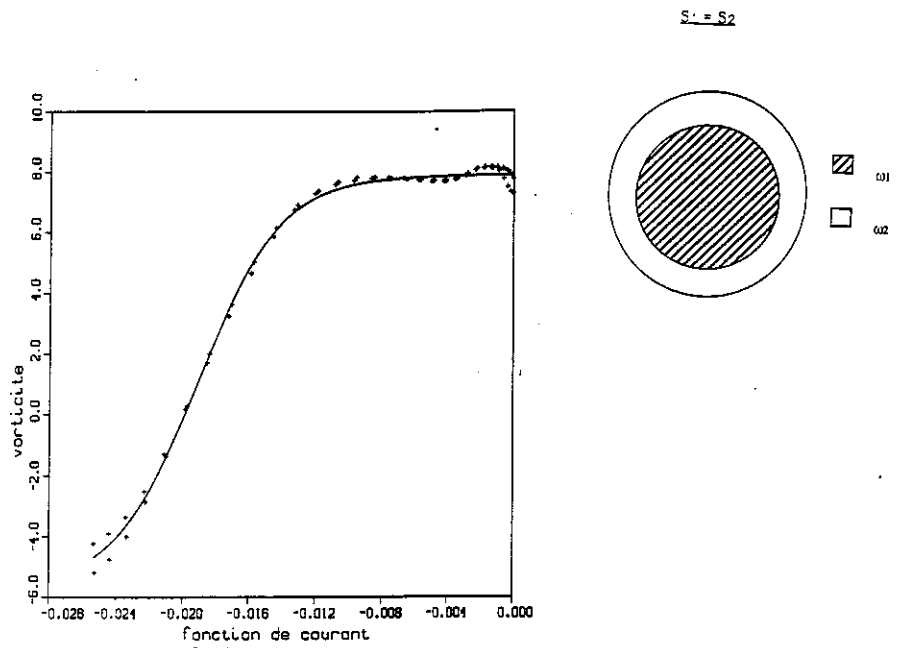
(A + B) avec ω_1 : la vorticité initiale dans la zone 1.

(A - B) avec ω_2 : la vorticité initiale dans la zone 2.

Pour le cas de deux surfaces égales de forçage initial, le fichier du cas n°1 correspond à un courant de $I_1 = -40$ A et $I_2 = +30$ A, pendant 5 secondes. Nous obtenons pour ce fichier une courbe $\omega = F(\psi)$ qui est constante (à quelques % près) en fonction du temps. Nous en déduisons les valeurs de (A+B) et de (A-B) qui doivent correspondre à ω_1 et ω_2 . Ces valeurs ne s'écartent pas à plus de 10 % des valeurs initiales de la vorticité. Ce qui est assez remarquable (voir figure n°19, cas n°1).

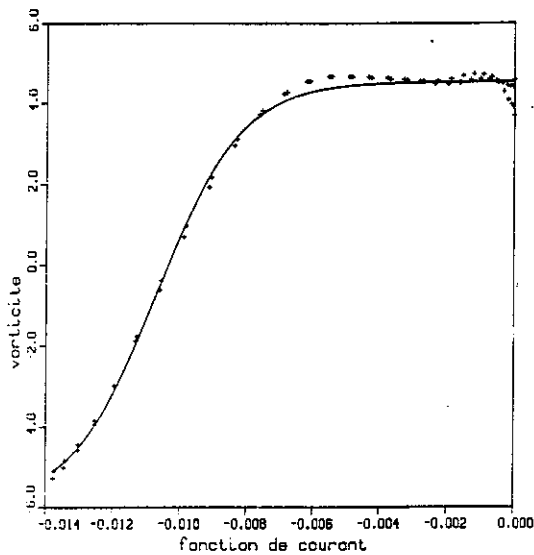
Tableau des valeurs trouvées:

	A	B	C	D	E	$\omega_2 = A+B$	$\omega_1 = A-B$
T=30s	0,96	6,93	194	0,12	3,86	7,89	-5,97
T=40s	1,00	6,88	221	0,17	3,84	7,88	-5,8
T=50s	0,72	6,93	194	0,14	3,82	7,65	-6,2
Expérim.	-	-	-	-	-	7,5	-5,6
T=0s	-	-	-	-	-	7,7	-5,5
Erreur max	-	-	-	-	-	5 %	10 %

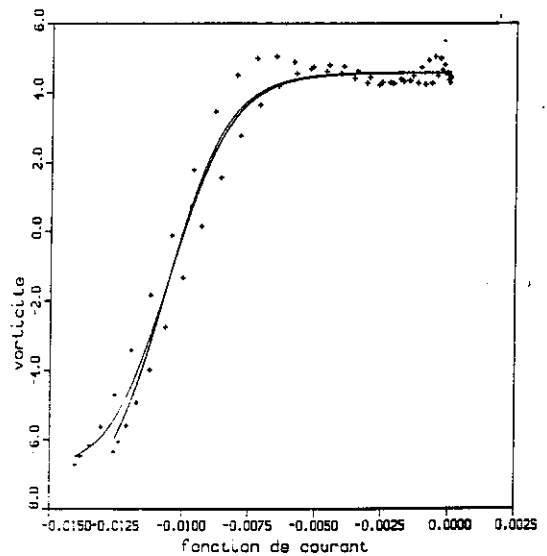


+++ points expérimentaux. $\omega_1 = 7,5$
 ----- la fonction théorique. $\omega_2 = -5,5$

cas n°1 : Bonne approximation par la fonction théorique.



+++ points expérimentaux. $\omega_1 = 7,5$
 ----- la fonction théorique. $\omega_2 = -6,5$



$S_1=S_2$.

cas n°2 : la stabilité de cette structure n'est pas suffisante pour obtenir une bonne approximation par la fonction théorique.

(FIGURE N° 19)

COMPARAISON AVEC LA THEORIE. CAS AXISYMETRIQUE.

Pour le cas n°2 . Les deux surface des zone initiales sont égales. Le courant $I_1=-40A$ et $I_2=+35A$, la courbe $\omega=F(\psi)$ varie de façon importante en fonction du temps et nous obtenons des coefficients (A+B) et (A-B) qui varient jusqu'à 30 % des valeurs de la vorticité initiale (voir figure n°19, cas n°2). Peut-être est-ce dû au fait que l'on est relativement proche de la bifurcation vers l'ellipse et que ce cas ne serait pas d'une très grande stabilité.

Tableau des valeurs trouvées:

	A	B	C	D	E	$\omega_1=A+B$	$\omega_2=A-B$
T=25s	0,83	5,36	427	0,09	4,22	6,19	-4,53
T=45s	1,46	5,96	452	0,14	4,35	7,42	-4,49
T=55s	1,04	5,61	380	0,61	4,5	6,65	-4,57
Expérim.	-	-	-	-	-	7,5	-6,56
T=0s	-	-	-	-	-	7	-6,2
Erreur max	-	-	-	-	-	20 %	30 %

Ces deux cas correspondent sur le graphe : fig.n°16, aux deux points en haut à droite du graphe. Avec $\omega_1 = 15$ et $\omega_2 \cong -12$ (cas n°1) et $\omega_1 = 15$ et $\omega_2 \cong 14$ (cas n°2). Le graphe a été tracé pour un forçage de 10 secondes et les cas étudiés quantitativement ont été forcé 5 secondes.

2 - Etude quantitative de structures elliptiques.

Cette étude où l'on va négliger des termes est moins rigoureuse que dans les cas axisymétriques, mais donne des résultats beaucoup plus significatifs car nous pourrons comparer trois paramètres avec la théorie (ω_1 , ω_2 et $\frac{\gamma}{\beta}$ qui est la rotation globale de la structure)

Nous allons étudier à partir du profil de vitesse obtenu sur le petit diamètre de l'ellipse. La vitesse radiale v_r est nulle et nous avons le profil de vitesse orthoradial v_ϕ . Pour obtenir la fonction de courant, on a les équations:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = v_\phi \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = v_r$$

Donc en intégrant : $\psi(r) = \int_0^r v_\phi \partial r$. On trouve de façon rigoureuse la fonction de courant.

Pour la vorticité on a les équations:

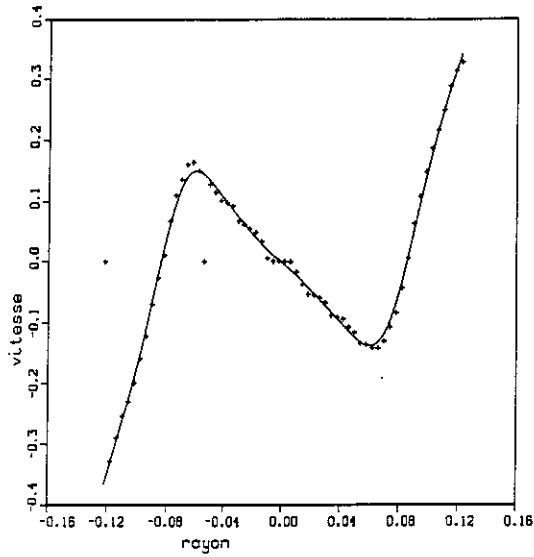
$$\omega = \text{rot}(\mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi}$$

On néglige le second terme en estimant que le rayon de courbure des vitesses est assez proche du rayon de la cuve. Et dans ce cas ce terme devient négligeable. Nous déduisons donc du profil de vitesse, la courbe $\omega = F(\psi)$ et nous calons de façon automatique sur cette courbe la fonction donnée par la théorie.

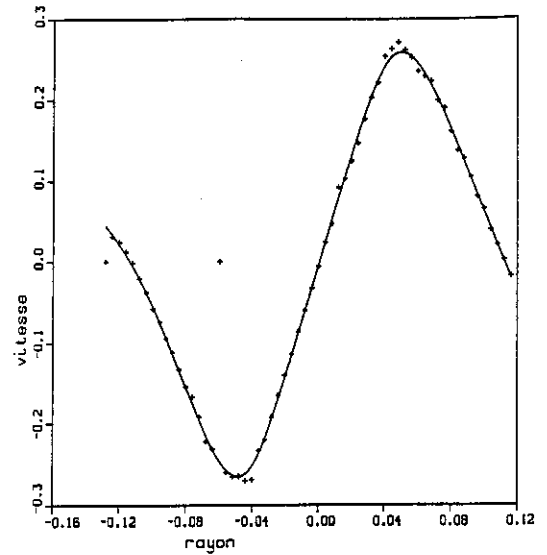
1^{er} cas :

Nous allons voir le cas d'une ellipse qui a une rotation globale de l'ordre de 10 secondes (voir figure n° 20). La surface de la zone extérieure est deux fois plus grande que la zone centrale.

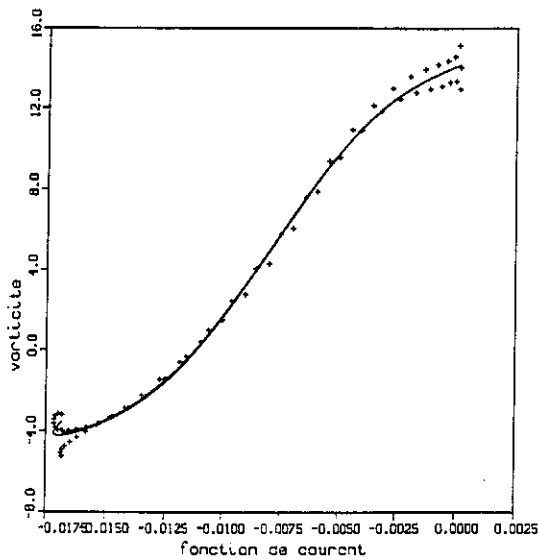
Nous avons étudié pour trois instants différents pour $T=17s$, pour $T=23s$ et $T=33s$. Qui correspondent chacun au profil sur le petit diamètre de l'ellipse.



vitesse à T = 0s



vitesse sur le petit diamètre
de l'ellipse à T = 33s



à T = 33s

+++ points expérimentaux

---- courbe théorique

vorticité / fonction de courant.

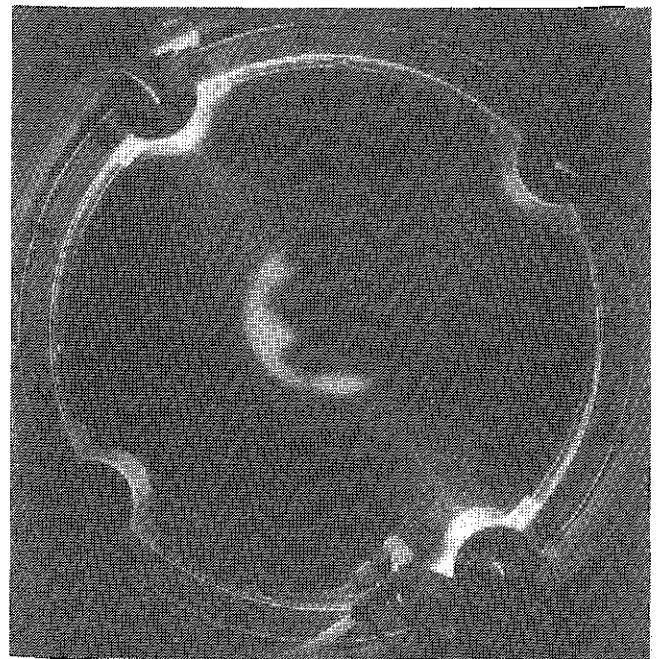


photo de la structure elliptique
à T = 25s

Structure elliptique

$$\omega_1 = -6$$

$$S_1 = 1/2 S_2$$

$$\omega_2 = +13$$

(FIGURE N° 20)

COMPARAISON ENTRE EXPERIENCE ET THEORIE.

Tableau des valeurs trouvées:

	A	B	C	D	E	$\omega_2=A+B$	$\omega_1=A-B$	$2 \frac{\gamma}{\beta}$
T=17s	4,11	10,2	212	0,345	1,60	14,32	-6,09	0,69
T=23s	4,92	10,7	172	0,189	1,29	15,62	-5,78	0,58
T=33s	4,07	10,7	175	0,249	1,4	14,77	-6,63	0,49
Expérim.	3,55	9,76	-	-	-	13,32	-6,21	0,353
T=0s	3,5	9,3	-	-	-	12,8	-5,8	-
Erreur max	30 %	15 %	15 %	30 %	20 %	20 %	15 %	30 %

En quatrième ligne se trouvent les valeurs calculées théoriquement à partir des paramètres expérimentaux (Cf : chapitre 2, III,2) :

Soient les courants : $I_1 = -10 \text{ A}$, $I_2 = 50 \text{ A}$.

Le temps d'impulsion : $\Delta T = 10 \text{ secondes}$.

Les surfaces : $S_1 = 0,0158 \text{ m}^2$, $S_2 = 0,037 \text{ m}^2$.

On trouve : $\omega_1 = \frac{I_1}{S_1} \frac{B}{\rho a} \Delta T$, $\omega_2 = \frac{I_2}{S_2} \frac{B}{\rho a} \Delta T$.

La rotation de l'ellipse $2 \frac{\gamma}{\beta}$ est celle mesurée sur les profils de vitesse en fonction du temps. On compare cette valeur à $2 \frac{\gamma}{\beta} = 2 D$.

En cinquième ligne nous avons relevé les grandeurs expérimentales ω_1 et ω_2 sur le fichier de vitesse à l'instant de fin de forçage.

En dernière ligne nous donnons l'erreur maximale trouvée pour ces valeurs. Elle est de l'ordre de 20 %. Ce qui est remarquable compte tenu du nombre de causes d'erreurs expérimentales .

Il est surtout très intéressant de voir que l'on retrouve une bonne approximation de la rotation globale de la structure par rapport à la cuve. (paramètre que l'on ne connaissait pas pour une structure axisymétrique).

Cette structure elliptique peut être repérée sur le diagramme (voir figure n° 17) avec $\omega_1=6$ et $\omega_2= -13$.

2^{ème} cas :

C'est aussi une ellipse qui a une rotation globale de l'ordre de 6 secondes (voir figure n° 21). La surface de la zone extérieure est cinq fois plus grande que la zone centrale.

Nous avons étudié pour trois instants différents pour $T=23s$, pour $T=28s$ et $T=34s$. Qui correspondent chacun au profil sur le petit diamètre de l'ellipse.

Tableau des valeurs trouvées:

	A	B	C	D	E	$\omega_2=A+B$	$\omega_1=A-B$	$2 \frac{Y}{\beta}$
T=23s	4,44	6,85	537	0,86	1,423	11,29	-2,41	1,72
T=28s	0,96	7,85	493	0,81	1,717	8,81	-6,89	1,62
T=34s	3,59	4,96	395	0,7	1,076	8,55	-1,37	1,4
Expérim.	0,69	7,48	-	-	-	8,72	-6,24	0,49
T=0s	1,38	6,62	-	-	-	8	-5,24	-
Erreur max	80 %	45 %	25 %	20 %	20 %	50 %	70 %	70 %

En quatrième ligne se trouvent les valeurs calculées théoriquement à partir des paramètres expérimentaux (Cf : chapitre 2, III,2) :

Soient les courants : $I_1 = - 5 A$, $I_2 = 40 A$.

Le temps d'impulsion : $T = 10$ secondes .

Les surfaces : $S_1 = 0,0079 m^2$, $S_2 = 0,0452 m^2$.

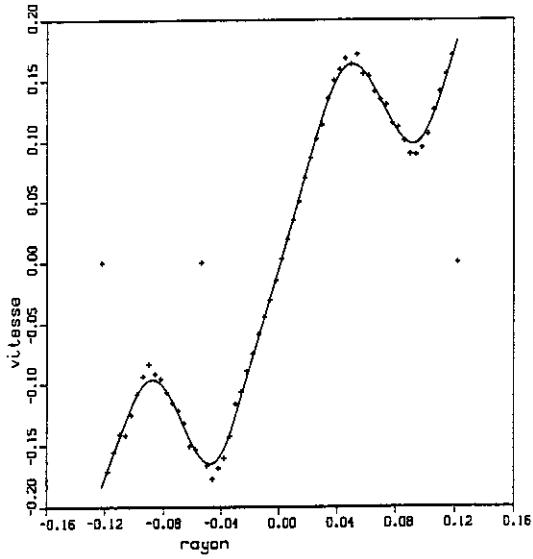
On trouve : $\omega_1 = \frac{I_1}{S_1} \frac{B}{\rho a} T$, $\omega_2 = \frac{I_2}{S_2} \frac{B}{\rho a} T$.

La rotation de l'ellipse $2 \frac{Y}{\beta}$ est celle mesurée sur les profils de vitesse en fonction du temps. On compare cette valeur à $2 \frac{Y}{\beta} = 2 D$.

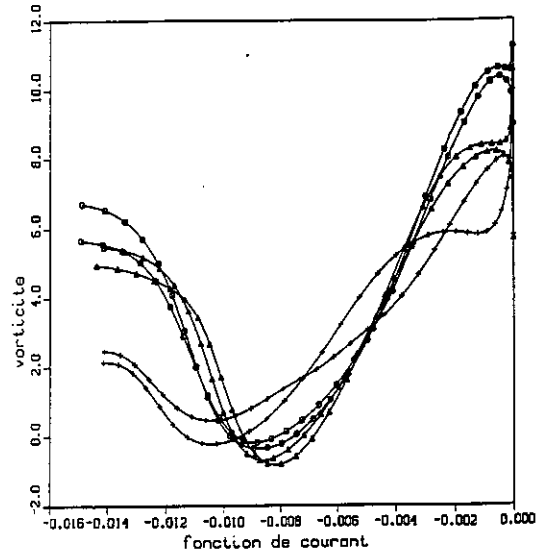
En cinquième ligne nous avons relevé les grandeurs expérimentales ω_1 et ω_2 sur le fichier de vitesse à l'instant de fin de forçage.

Cette structure elliptique peut être repérée sur le diagramme (voir figure n° 18) avec $\omega_1=6$ et $\omega_2= -8$.

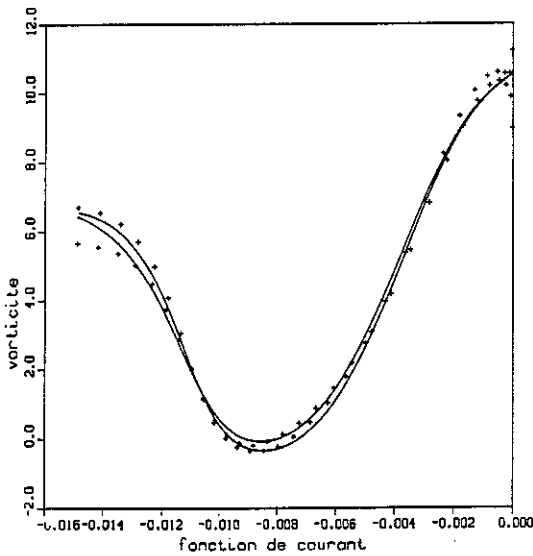
La variation des paramètres est donc relativement importante pour ce cas(supérieure à 50 %). Cette structure n'est donc pas suffisamment stabilisée.



vitesse sur le petit diamètre
de l'ellipse à T = 28s



points expérimentaux
à T = 23s et T = 28s et T = 34s
vorticité / fonction de courant.



à T = 28s
+++ points expérimentaux
---- courbe théorique
vorticité / fonction de courant.

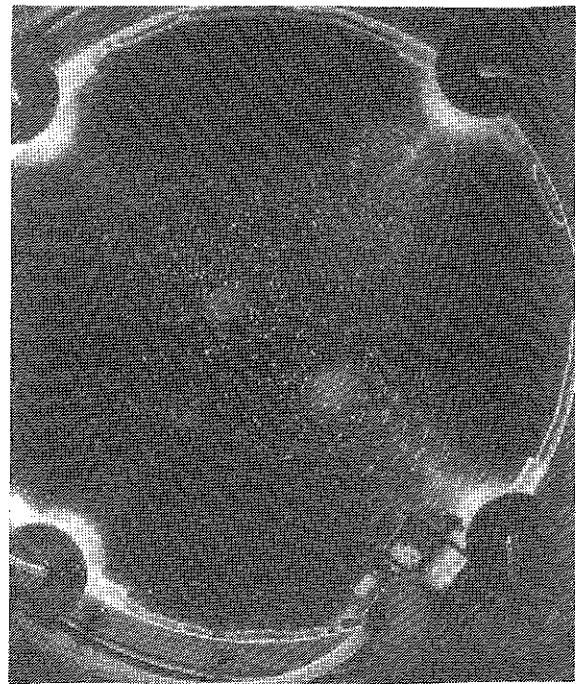


photo de la structure elliptique
à T = 25s

Structure elliptique $\omega_1 = -6$ $S_1 = 1/5 S_2$
 $\omega_2 = +8$

(FIGURE N° 21)

COMPARAISON ENTRE EXPERIENCE ET THEORIE.

3 - Conclusion et discussion

Un bon accord avec la théorie est obtenue sous deux conditions : Il faut bien sûr obtenir une structure stationnaire avant décroissance complète de l'énergie. Il ne faut pas qu'il y ait de problème de décollement des couches limites. Ceci se manifeste par une augmentation de l'enstrophie ou de la vorticité locale.

Notons que nous n'avons pu étudier quantitativement (par les mesures électriques) que les structures proches d'un état axisymétrique.

Pour vérifier si les différents états bifurqués observés correspondent à la théorie, nous avons entrepris d'intégrer numériquement l'équation $-\Delta\psi = f(\psi)$, plutôt que de vérifier cette relation à partir des mesures. C'est ce qui constitue le chapitre suivant.

L'organisation en un tourbillon décentré avait déjà été prédite par Smith et O'Neil (1990) en utilisant la théorie d'Onsager. Cependant la structure elliptique ne semble pas être obtenue par cette théorie. Celle-ci diffère de celle de Robert.R, au niveau des résultats, par l'absence de dénominateur dans la relation (1) :

$$\omega = -\Delta\psi = \frac{\omega_1 \exp[-\alpha_1 - \beta \omega_1 (\psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2)] + \omega_2 \exp[-\alpha_2 - \beta \omega_2 (\psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2)]}{\exp[-\alpha_1 - \beta \omega_1 (\psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2)] + \exp[-\alpha_2 - \beta \omega_2 (\psi + \frac{\gamma}{\beta} r^2)]}$$

Ainsi la fonction $\omega = f(\psi)$ dans cette théorie se comporte en exponentielle au coeur des tourbillons, tandis que le dénominateur dans (1) conduit à une saturation de la vorticité à une valeur $\omega = a$. La présence de ce dénominateur est clairement nécessaire pour obtenir un bon accord avec l'expérience. Notons que dans d'autres conditions expérimentales, où la vorticité introduite est environnée de fluide irrotationnel occupant une grande surface, le poids statistique du niveau $\omega = 0$ domine et le dénominateur dans (1) se rapproche d'une constante. C'est le cas de plusieurs expériences sur les tourbillons isolés (Nguyen-Duc, van Heijst ...). Dans ce cas dilué, les prédictions de la théorie d'Onsager rejoignent la relation (1).

La théorie de minimum d'enstrophie (Leith -1984) prédit une relation linéaire en ω et ψ . Et n'est donc pas non plus compatible avec l'expérience. Enfin la théorie d'équilibre statistique de Kraichnan permet de prédire une distribution d'énergie moyenne entre tous les modes propres du Laplacien dans le domaine considéré (circulaire). Cette théorie ne prédit donc pas une structure stationnaire. Au mieux elle prédit, pour une valeur particulière de l'énergie et l'enstrophie initiales, que toute l'énergie se concentre dans le mode fondamental. Ceci correspond à nouveau à une relation linéaire entre la vorticité et la fonction de courant.

Chapitre 4

RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION THEORIQUE

*"La logique parfois engendre des monstres.
Depuis un demi-siècle, on a vu surgir une foule
de fonction bizarres qui semblent s'efforcer de
ressembler aussi peu que possible aux honnêtes
fonctions qui servent à quelque chose."*

H. POINCARRE.

I - LA RESOLUTION NUMERIQUE

1 - Structure du programme

Le programme de résolution de l'équation : $-\Delta\psi = A + B.Th [C\psi + D]$, a été réalisé par Thierry DUMONT, ingénieur numéricien de l'Université Lyon I qui travaille en collaboration avec Michelle Schatzman et Raoul Robert.

On fixe 3 paramètres sur les quatre. On notera :

$$f(\psi, \lambda) = A + B.Th [C\psi + D],$$

avec par exemple A,B,D fixés et $\lambda=C$ variable.

Il s'agit de suivre une solution (ψ, λ) de $G(\psi, \lambda) = -\Delta\psi - f(\psi, \lambda) = 0$, où G est une application différentiable de $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^n . A partir d'une solution particulière (ψ_0, λ_0) , nous voulons obtenir toutes les autres solutions (ψ, λ) accessibles par variation continue de λ en résolvant :

$$\begin{aligned} G(\psi, \lambda) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial G}{\partial \lambda} d\lambda &= 0 \Leftrightarrow \frac{d\psi}{d\lambda} = - \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial \psi} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Cette formule est valable si les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont vérifiées. Or les points pour lesquels $G'_\lambda = 0$ sont singuliers. Afin de les traiter comme des points "réguliers", il faut paramétrer la courbe $(\psi(s), \lambda(s))$ par une équation de continuité $N(\psi(s), \lambda(s), s) = 0$ où s est l'abscisse curviligne et $\psi(s)$ et $\lambda(s)$ sont des fonctions de s . Le système d'équations est alors :

$$G'_\psi \psi' + G'_\lambda \lambda' = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G'(\psi(s), \lambda(s)) = 0 \\ N(\psi(s), \lambda(s), s) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N(\psi(s), \lambda(s), s) = 0 \\ N'_\psi \psi' + N'_\lambda \lambda' = -N'_s \end{array} \right\}$$

$$G'_\lambda = \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda} \right) ; G'_\psi = \left(\frac{\partial G}{\partial \psi} \right) ; \psi' = \frac{d\psi}{ds} ; \lambda' = \frac{d\lambda}{ds}$$

$$\begin{bmatrix} G'_\psi & G'_\lambda \\ N'_\psi & N'_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi' \\ \lambda' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N'_s \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \psi' \\ \lambda' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G'_\psi & G'_\lambda \\ N'_\psi & N'_\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -N'_s \end{bmatrix}$$

Nous notons :

$$F(\psi, \lambda, s) = \begin{bmatrix} \psi' \\ \lambda' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G'_\psi & G'_\lambda \\ N'_\psi & N'_\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -N'_s \end{bmatrix}$$

Ce système est discrétisé pour obtenir une série de solutions $(\psi_n(0), \lambda_n)$ approchant la solution continue $(\psi(0), \lambda)$. Pour bien suivre la courbe cherchée, le pas de l'algorithme est divisé en deux phases.

La première phase consiste à faire une prédiction à chaque pas de "temps" (c'est à dire à chaque δs) avec la méthode de Runge-Kutta précise à l'ordre 4 (RK4). A partir de la solution $(\psi_n(0), \lambda_n, s_n)$, nous obtenons la solution $(\psi_{n+1}^*(0), \lambda_{n+1}^*, s_n + \delta s)$ prédite par RK4. Avec :

$$\begin{bmatrix} \psi_{n+1}^* \\ \lambda_{n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_n^* \\ \lambda_n^* \end{bmatrix} + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(\delta s^5)$$

avec

$$\begin{aligned} k_1 &= \delta s F \left(\begin{bmatrix} \psi_n \\ \lambda_n \end{bmatrix}, s_n \right) \\ k_2 &= \delta s F \left(\begin{bmatrix} \psi_n \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \frac{k_1}{2}, s_n + \frac{\delta s}{2} \right) \\ k_3 &= \delta s F \left(\begin{bmatrix} \psi_n \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \frac{k_2}{2}, s_n + \frac{\delta s}{2} \right) \\ k_4 &= \delta s F \left(\begin{bmatrix} \psi_n \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \frac{k_3}{2}, s_n + \frac{\delta s}{2} \right) \end{aligned}$$

La deuxième phase consiste à corriger $(\psi_{n+1}^*(0), \lambda_{n+1}^*)$ par la méthode de Newton qui permet de "revenir" sur la courbe cherchée avec :

$$\begin{bmatrix} G'_\psi & G'_\lambda \\ N'_\psi & N'_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n+1} & -U_{n+1}^* \\ \lambda_{n+1} & \lambda_{n+1}^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G(U_{n+1}^*, \lambda_{n+1}^*, s_n + \delta s) \\ N(U_{n+1}^*, \lambda_{n+1}^*, s_n + \delta s) \end{bmatrix}$$

$|\psi_{n+1} - \psi_{n+1}^*|^2 + |\lambda_{n+1} - \lambda_{n+1}^*|^2$ nous fournit une évaluation de l'erreur commise à chaque pas δs . Si l'erreur est telle que la méthode de Newton converge, alors le programme prend la solution $(\psi_{n+1}(0), \lambda_{n+1})$ en $s_n + \delta s$. Sinon l'algorithme reprend le calcul en $(\psi_n(0), \lambda_n)$ avec un pas en δs plus petit.

Nous avons vu que, pour qu'il y ait bifurcation de G , il faut que G'_λ ne soit pas inversible (c'est à dire que le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas). La

réciproque est vraie pour un problème de la forme : $-\Delta\psi - f(\psi, \lambda) = 0$. Donc pour repérer les bifurcations (ou les retournements), il suffit de voir quand $G'\lambda$ s'annule. Cependant, il est très peu probable qu'une itération tombe assez près du point de bifurcation pour que $G'\lambda$ soit numériquement singulier (c'est préférable!). Nous comptons alors le nombre de valeurs propres négatives de la matrice $G'\lambda$. S'il en apparaît une nouvelle, cela signifie qu'en passant de positive à négative, elle a traversé la valeur 0. A ce moment, le déterminant de $G'\lambda$ s'est annulé.

Le problème consiste à trouver une équation de continuité N facilitant les calculs.
Ici : $N(\psi, \lambda, s) = \psi^2 + \lambda^2 - s^2 = 0$

Les différents systèmes sont résolus par la méthode des éléments finis P1 sur un domaine circulaire comportant un nombre variable de points.

II- RESULTAT DE RESOLUTION DE LA THEORIE

1 - Résultats généraux

Après presque une semaine d'essais infructueux, on a mis du temps à comprendre où et comment (pour quelles valeurs des paramètres) réussir à faire bifurquer le programme. Les 1ères bifurcations ont été obtenues sur un essai avec un maillage très lâche (30 points) et assez irrégulier. Cela c'est produit sans mettre de perturbation, celle due au maillage et au pas très grand de variation du paramètre ont suffi pour faire bifurquer la structure. (Voir figure n° 22 : schéma du maillage et diagramme de variation de la fonction de courant).

On a ainsi obtenu dès les premières bifurcations, les deux structures : une ellipse et un tourbillon décentré. On peut remarquer qu'avant d'avoir observé par la théorie un tourbillon décentré, nous pensions que les cas expérimentaux qui étaient décentrés étaient des structures axisymétriques qui n'avaient pas le temps de se recentrer.

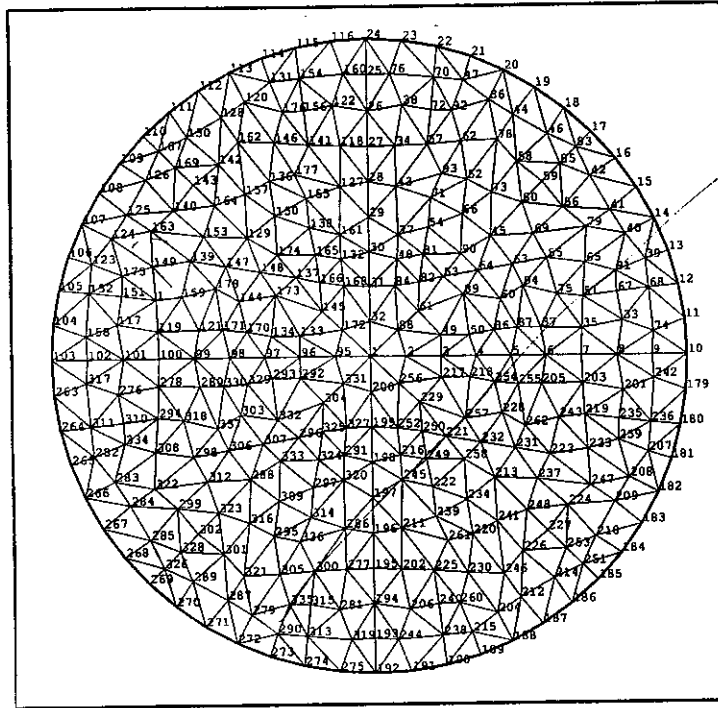
Nous avons ensuite pris un maillage plus fin (300 points) mais qui n'était pas régulier. Comme nous savions dans quelle zone espérer trouver des structures bifurquées, nous avons obtenu quelques cas. Mais le programme bifurquait automatiquement sans perturbation et nous n'arrivions pas à suivre les branches non bifurquées. Nous nous sommes posés la question du rôle du maillage. Nous avons donc fait un maillage régulier avec 961 points et 800 éléments (Voir figures n° 23 et 24 : schéma du nouveau maillage et courbe de bifurcations).

Nous avons pu enfin suivre les branches non bifurquées, et celles bifurquées en rajoutant une perturbation. On a ainsi pu explorer tout un domaine de variation des paramètres.

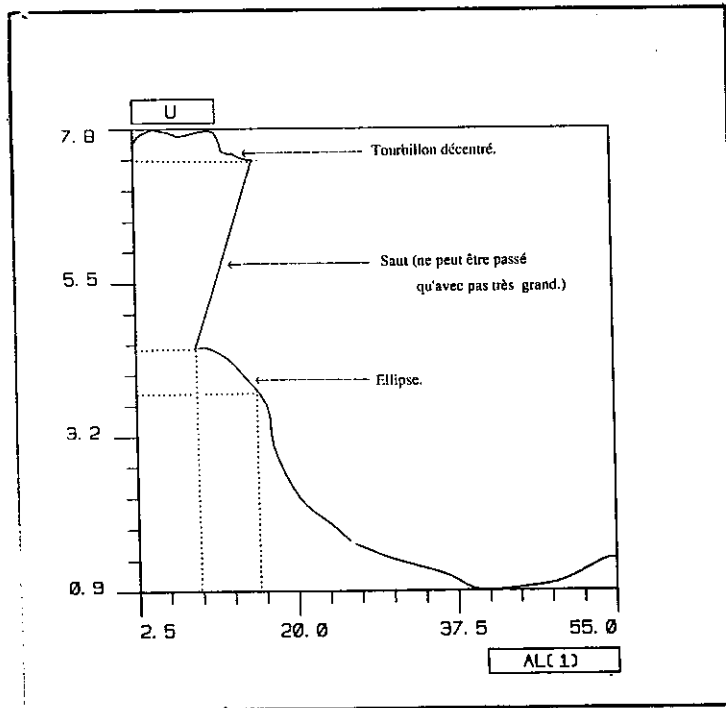
Nous avons des difficultés dues au fait que l'on ne pouvait pas redémarrer d'un ancien fichier. Nous ne pouvions pas contrôler la variation des paramètres de façon correcte. On démarrait toujours avec $C = cste$ et on augmentait A . Puis un premier retournement de la courbe se produisait toujours lorsque $A > B$ alors le déterminant était égal à un et A diminuait puis réaugmentait. Le programme a donc été modifié pour pouvoir redémarrer à partir d'anciens fichiers, on pouvait ainsi faire varier les différents paramètres successivement.

Mais nous n'arrivions pas à obtenir par continuité un A assez petit pour se rapprocher des conditions que l'on avait expérimentalement, en particulier pour les cas bifurqués vers l'ellipse ou le tourbillon décentré. Et il était impossible de réussir à faire démarrer le programme avec les valeurs qui nous intéressait.

Puis nous avons essayé en mettant $A=B=0$ et nous avons enfin réussi à explorer un



Le maillage : 337 points, 616 éléments.



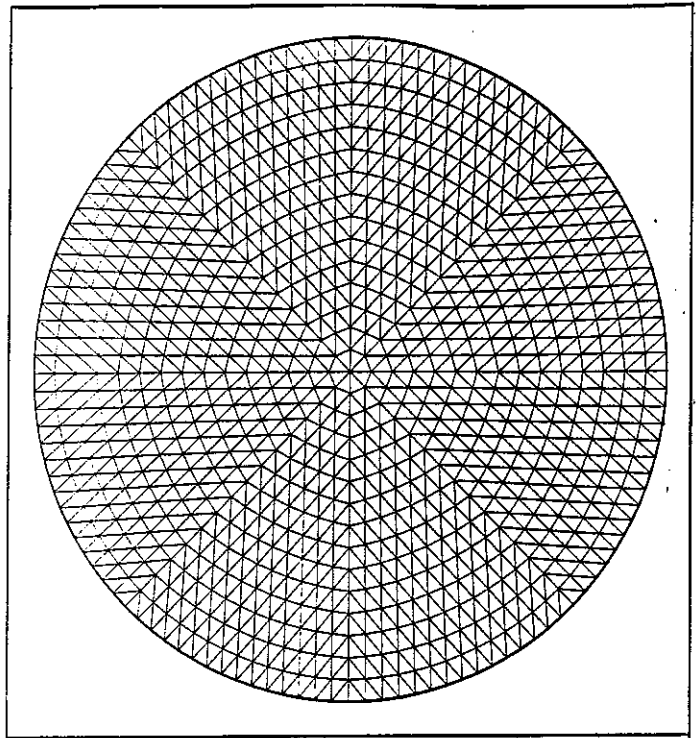
Courbe

Fonction de courant au point central, en fonction de la variation du paramètre A1.

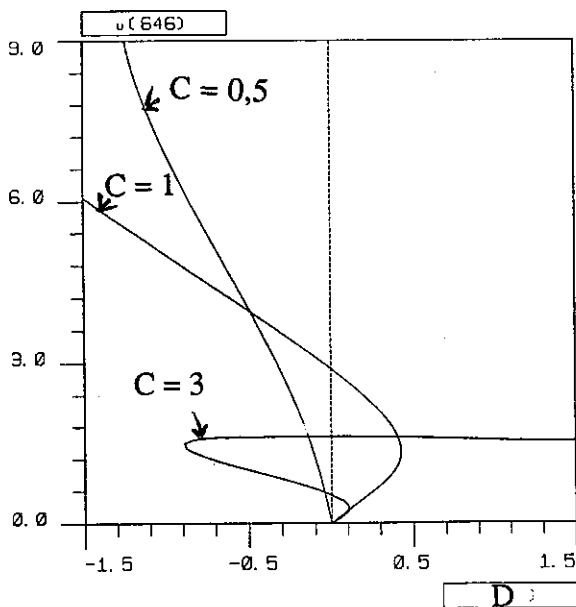
(FIGURE N° 22)

LES PREMIERES BIFFURCATIONS.

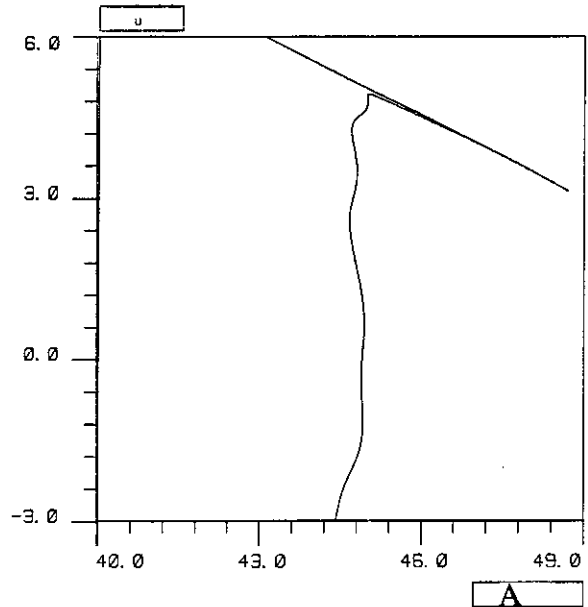
Le maillage régulier :
961 points, 1800 éléments.



(FIGURE N° 23) MAILLAGE DEFINITIF.



Courbes de la fonction de courant
en fonction des paramètres :
A=0 ; B=50 ; C et D sont variables.



Courbes de la fonction de courant :
Bifurcation vers l'ellipse avec l'aide d'une
petite perturbation.

(FIGURE N° 24)

VARIATION DE LA FONCTION DE COURANT AU CENTRE.

domaine de valeurs des paramètres qui se rapprochaient de notre expérience.

Les structures obtenues étaient le plus souvent axisymétriques ou elliptiques ou un tourbillon décentré, mais des structures un peu plus compliquées ont été obtenues. (Voir figures n° 25 et 26 une comparaison avec les photos d'expérience). Mais cette comparaison est simplement qualitative car nous ne sommes pas toujours pour des conditions qui correspondent à l'expérience où les deux zones initiales de vortacité sont concentriques. Les résolutions numériques peuvent se ramener à une structure initiale avec deux valeurs de la vortacité ω_1 et ω_2 . On aurait ω_1 sur une couronne centrée et ω_2 serait sur un cercle au centre et sur une couronne extérieure. Cela est "relativement" proche de l'expérience. (Voir figure n° 27)

2 - Essais de comparaisons quantitatives

Un programme annexe reprend les fichiers de résultats numériques et permet de calculer les grandeurs intégrales de la structure obtenue.

La surface initiale de la tache de vortacité ω_1 : $S_{b1} = \iint e_1(r) d^2r$

L'entropie : $K = \iint e_1 \log(e_1) + e_2 \log(e_2) d^2r$

Le moment cinétique : $M_b = - \iint \Delta \psi r^2 d^2r$

L'énergie : $E_b = - \iint \omega \psi d^2r$

L'intégrale de la fonction de courant : $I_b = \iint \psi d^2r$

L'intégrale de la vortacité : $J_b = \iint \psi d^2r$

Ce programme calcule aussi ces mêmes grandeurs pour une condition initiale où les tache de vortacité serait concentriques. On déduit le rayon R_1 de la surface initiale trouvée plus haut. $r_1 = \sqrt{\frac{S}{\Pi}}$ ou $r_1' = 1 - \sqrt{\frac{S}{\Pi}}$ (r_1 si ω_1 est au centre, r_1' si c'est ω_2 qui est au centre).

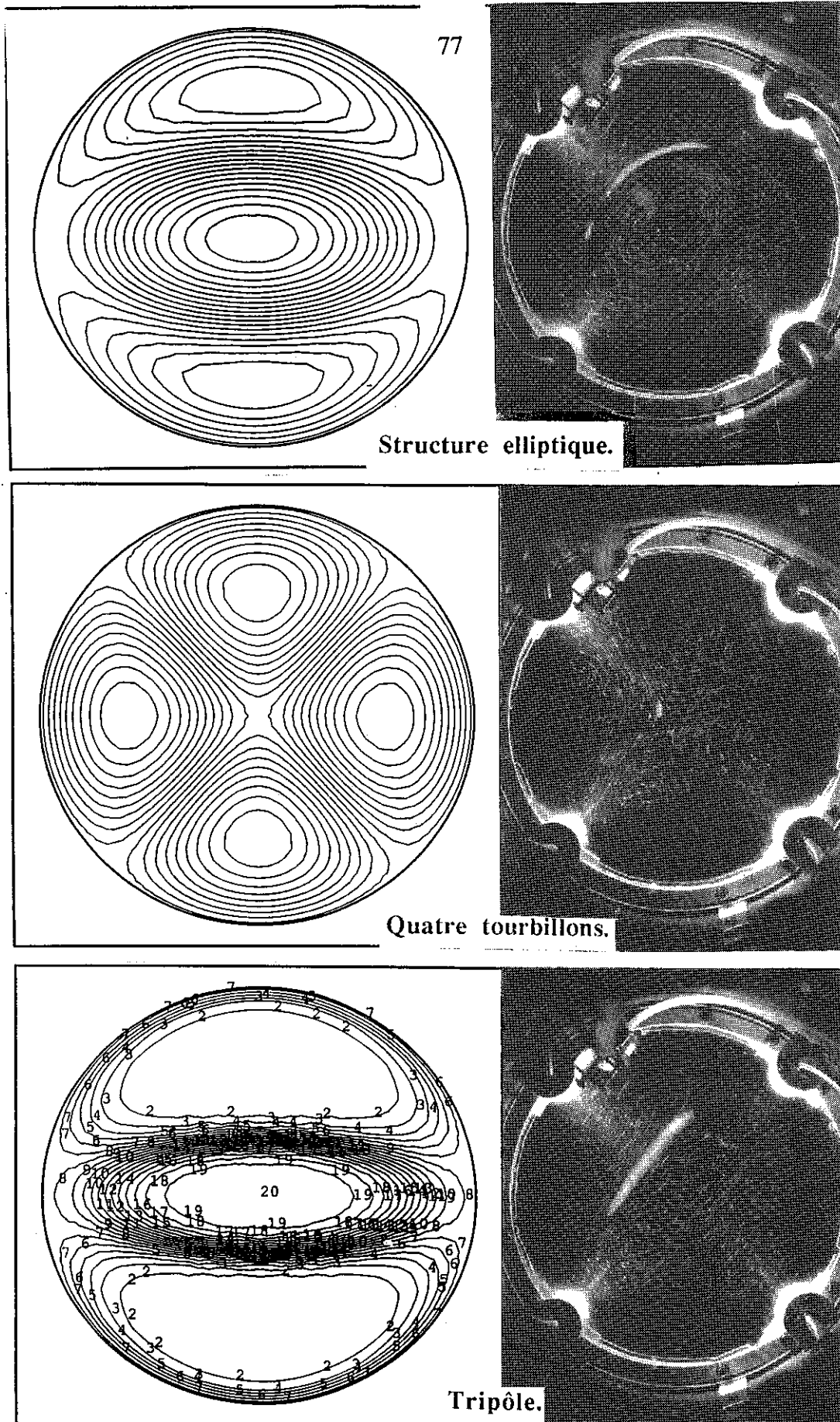
Le moment cinétique : $M_c = 2\Pi \int_0^{r_1} \omega_1 r^3 dr + 2\Pi \int_{r_1}^0 \omega_2 r^3 dr = fM(r_1, \omega_1, \omega_2)$

ou : $M_c' = 2\Pi \int_0^{r_1'} \omega_2 r^3 dr + 2\Pi \int_{r_1'}^0 \omega_1 r^3 dr = fM(r_1', \omega_2, \omega_1)$

L'énergie : $E_c = \frac{1}{2} \iint v^2 r dr d\theta = fE(r_1, \omega_1, \omega_2)$

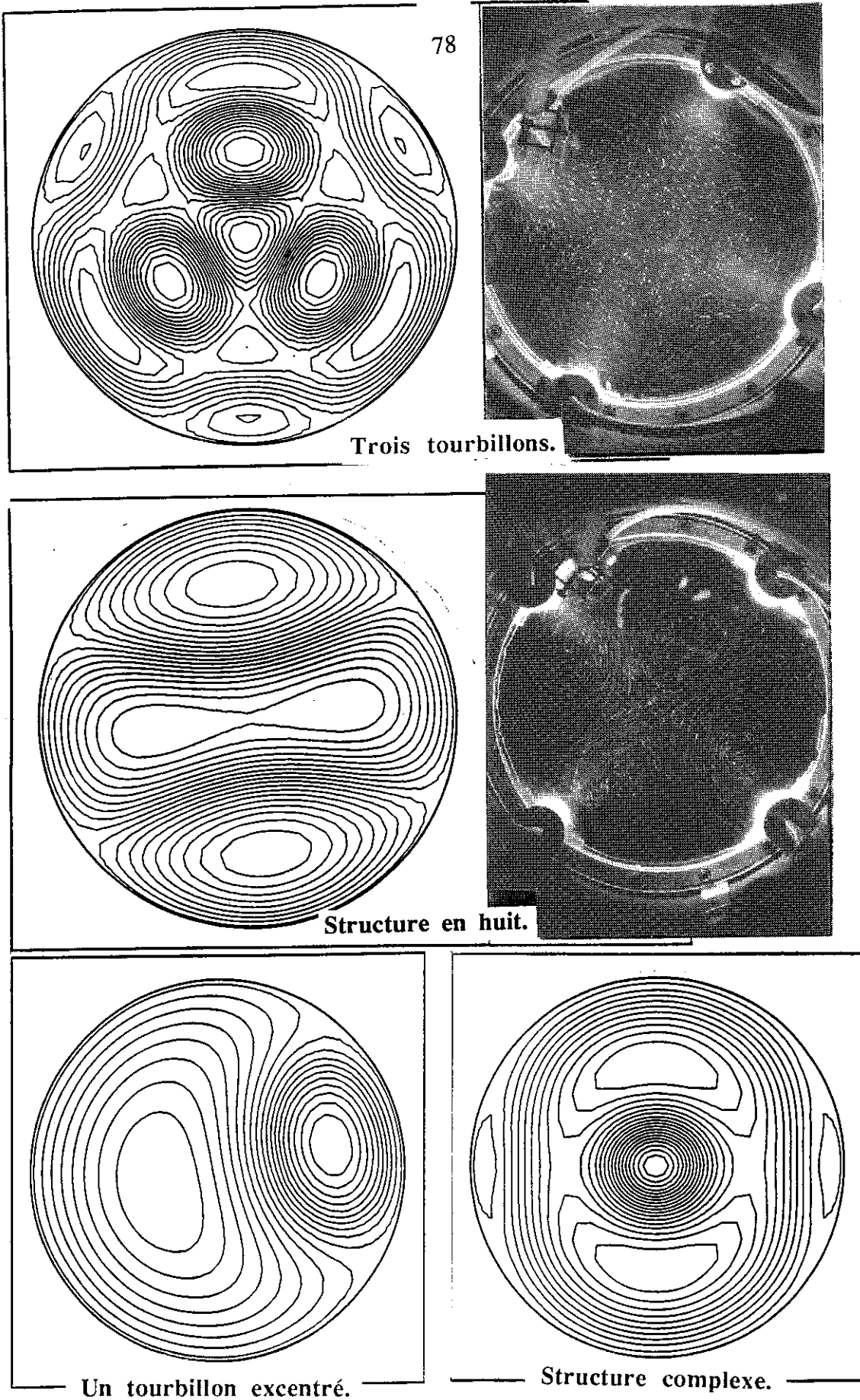
ou : $E_c' = \frac{1}{2} \iint v'^2 r dr d\theta = fE(r_1', \omega_2, \omega_1)$

Et l'on s'aperçoit que même si l'on a le moment cinétique, (soit M_c ou M_c') qui correspond bien au moment cinétique de la structure bifurquée M_b . On n'a pas forcément un accord correct de l'énergie. En effet si l'on change de repère par rotation ($-2\frac{\gamma}{\beta}$), on



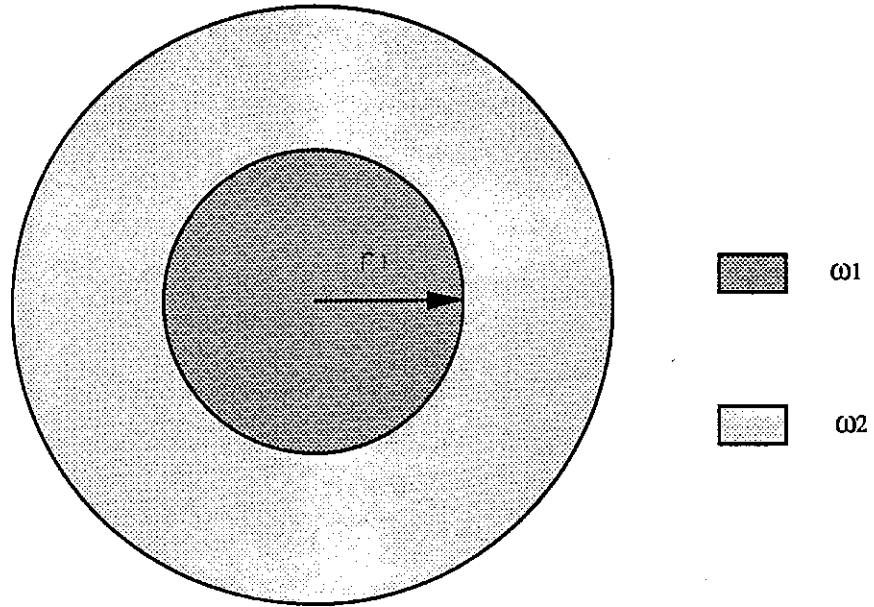
(FIGURE N° 25)

COMPARAISON : RESULTATS NUMERIQUES ET EXPERIMENTAUX.

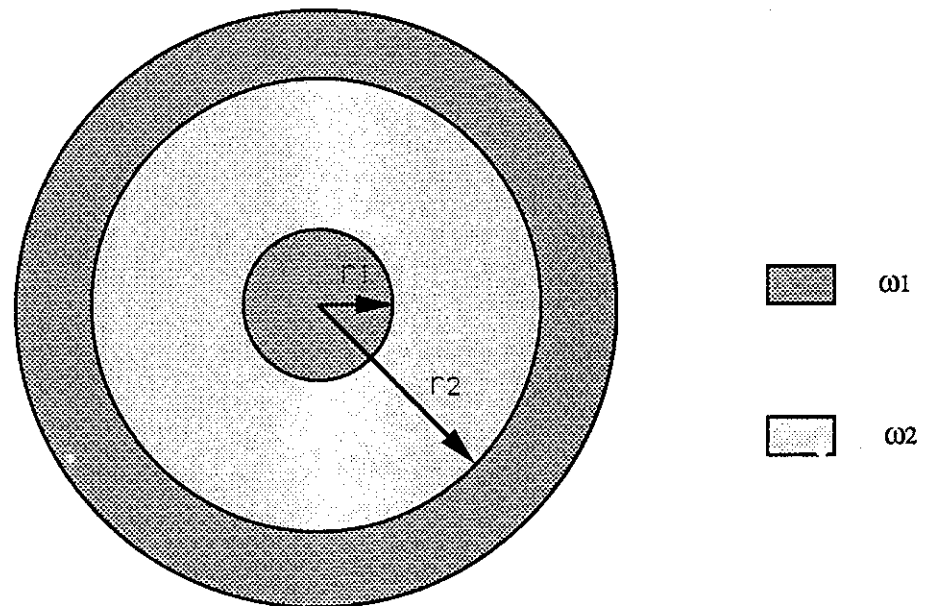


(FIGURE N° 26)

COMPARAISON : RESULTATS NUMERIQUES ET EXPERIMENTAUX.



Condition initiale identique aux expériences de laboratoire.



Toutes les résolutions numériques correspondent à des conditions initiales de cette forme, avec r_1 , r_2 , ω_1 et ω_2 variables. Si r_2 est proche de 1 alors on est proche des conditions expérimentales du laboratoire.

(FIGURE N° 27)

CONDITIONS INITIALES DES RESOLUTIONS NUMERIQUES.

s'aperçoit que l'énergie ne variera pas de la même façon suivant que la structure est bifurquée ou non.

Autrement dit, le moment cinétique de la structure bifurquée varie également : Si $M_{b1} = M_{c1}$ alors après changement de repère on a $M_{b2} = M_{c2} = M_{b1} - 2\pi\frac{\gamma}{\beta}$.

Mais pour l'énergie, on a pour la structure bifurquée :

$$E_{b2} = E_{b1} - 2\frac{\gamma}{\beta} I_b + \pi \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\beta} M_{b1} - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\beta} J_b$$

Alors que pour les conditions initiales $E_{c2} = fE(r_1', \omega_1 - 4\frac{\gamma}{\beta}, \omega_2 - 4\frac{\gamma}{\beta})$

Donc nous allons pouvoir déduire la rotation de la structure en égalisant les énergies. Cela ne pourra se faire que si l'on a un bon accord pour la valeur du moment cinétique.

Et ainsi on connaît tous les paramètres qui correspondent aux conditions de l'expérience du laboratoire.

De plus, en regardant la valeur du déterminant pour les résultats numériques axisymétriques, on peut savoir si d'autres états sont possibles lorsque $\det > 1$.

Pour ce cas. Nous avons réussi à obtenir, un résultat axisymétrique et deux états bifurqués, correspondant aux mêmes conditions initiales.

Pour le résultat numérique axisymétrique, nous avons un $\det=8$.

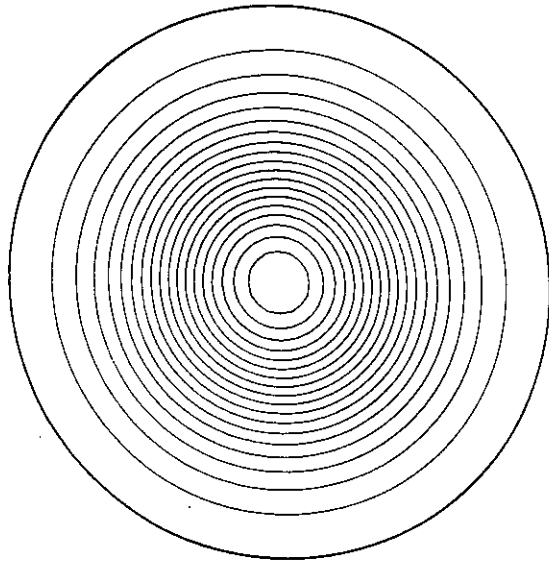
On a $\omega_1 = A+B - 4\frac{\gamma}{\beta} = 30.9$ et $\omega_2 = A-B - 4\frac{\gamma}{\beta} = -69.0$. Et la surface centrale est environ $1/3$ de la surface totale.

Nous avons obtenu aussi pour les mêmes paramètres les résultats de bifurcation : l'état décentré et l'état elliptique. Pour ces trois cas nous avons à peu près la même surface centrale. Le moment cinétique est aussi à peu près le même. On a $M_c = M_b - 2\pi\frac{\gamma}{\beta} \cong 85$ pour chacun des trois cas (voir figure n° 28).

résolutions numériques

$\omega_1 = 30$, $\omega_2 = -69$

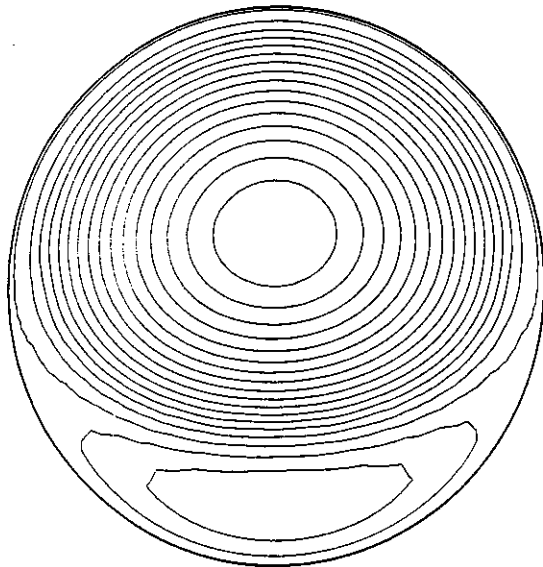
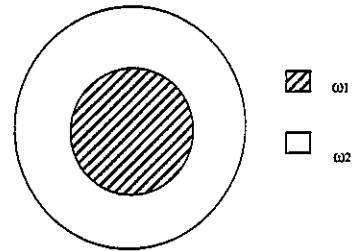
Moment cinétique = 85.



circulaire

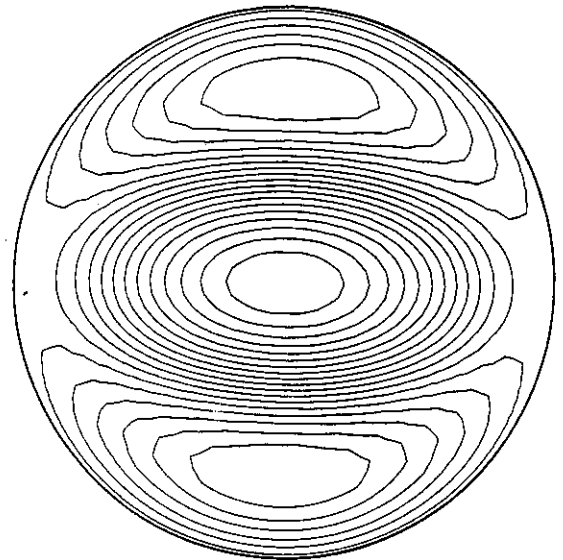
Entropie = 0.05

$S_1 = 1/2 S_2$



décentrée

Entropie = 0.25



Ellitique

Entropie = 0.57

(FIGURE N° 28)

ETAT LE PLUS PROBABLE, COMPARAISON.

En comparant l'entropie:

structures	entropie
circulaire	0.05
décentrée	0.25
ellipse	0.57

On peut prévoir que parmi ces trois structures correspondant au même état initial, la structure la plus stable sera l'ellipse car elle a la valeur de l'entropie la plus grande. Son entropie est deux fois plus importante que dans le cas du tourbillon décentré, et dix fois plus grande que pour le cas axisymétrique. En comparant avec les expériences, cela est en très bon accord. (voir figure n° 17 : $2 \omega_1 \cong -\omega_2$)

(Remarque: l'entropie la plus grande qui soit pour notre calcul, donc pour un état certain serait égale à π).

CONCLUSION

"Les théories scientifiques, si elles ne sont pas réfutées, restent toujours des hypothèses ou des conjectures."

K. POPPER.

conclusion

L'écoulement d'un fluide électro-conducteur, soumis à un champ magnétique uniforme et confiné entre des parois isolantes transverses au champ, possède une dynamique bidimensionnelle à l'extérieur des couches limites de Hartmann. Comme dans d'autres situations physiques, l'écoulement est alors le siège de forces volumiques inhibant la croissance des perturbation tridimensionnelles. Dans le coeur de l'écoulement, les équations du mouvement sont les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles auxquelles s'ajoute un terme de frottement linéaire.

La théorie de maximisation de l'entropie, permet d'expliquer l'organisation inertielle en structures stables de la turbulence bidimensionnelle. Nous nous plaçons dans une géométrie simple avec des conditions expérimentales à deux niveaux de vorticité, ce qui nous permet de comparer les expériences avec les prédiction théoriques.

Nous avons obtenu expérimentalement des structures axisymétriques, elliptiques ou bien excentrées. Nous avons pu comparer, pour certains cas expérimentaux, la courbe de la répartition de la vorticité par rapport à celle fournit par la théorie. Nous avons obtenu un très bon accord pour les cas étudiés. Cependant cette comparaison n'est pas possible dans les cas suivants - des décollements de couches limites modifient la distribution de vorticité. - un écoulement stationnaire n'est pas atteint. De plus les structures éloignées d'une forme axisymétrique n'ont pu être mesurées avec notre technique expérimentale.

Pour tester la théorie dans les cas non-axisymétriques, nous avons résolu numériquement l'équation fournie par la théorie, à l'aide d'un programme d'éléments finis. Cette équation, non linéaire, a des solutions multiples qui correspondent aux différents  tats bifurqués possibles. La solution qui a la valeur de l'entropie la plus grande est l'état le plus probable. Nous avons obtenu toutes les structures que nous avons observées expérimentalement et nous avons pu pour certains cas prédire l'écoulement le plus probable qui correspondait correctement aux résultats expérimentaux.

Une résolution complète du diagramme de bifurcation serait intéressante à faire. Il faudrait pour cela modifier la structure du programme existant ou bien en refaire un autre. Les perspectives d'applications de cette théorie sont, au niveau MHD, la prédiction de turbulence et l'augmentation des transferts thermiques dans les circuits de lithium. Une application pour la prédiction des écoulements atmosphériques et océaniques pourrait être intéressante.

ANNEXES

Fonction spline d'ajustement de type plaque mince

Nous interpolons les points de la vitesse expérimentale [z_i , la vitesse, aux points $t_i(x_i, y_i)$] par une fonction spline, qui nous permettra par dérivation d'obtenir la vorticité, et par intégration la fonction de courant.

1^{er} cas la fonction spline passe par tous les points expérimentaux.

Parmi les fonctions v qui prennent les valeurs imposées z_i $i=1, \dots, n$ aux points $t_i=(x_i, y_i)$ du plan on cherche celle qui minimise la fonctionnelle :

$$L(v) = \int_{\Omega} |\nabla^2 v|^2 \quad (1)$$

Pour le cas où $\Omega = \mathbb{R}^2$ Duchon (Duchon -1975) obtient la caractérisation suivante:

Théorème 1

Parmi les fonctions continues sur \mathbb{R}^2 prenant des valeurs z_1, \dots, z_n en des points t_1, \dots, t_n donnés (non tous alignés) il existe une et une seule fonction σ , qui réalise le minimum de la fonctionnelle (1), et la fonction σ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \kappa(t_i, t) + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \beta$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i = 0$$

$$\text{où } t = (x, y) \quad \text{et} \quad t_i = (x_i, y_i)$$

$$\text{et } \kappa(t_i, t) = |t - t_i|^2 \text{Log } |t - t_i|^2$$

On peut donc obtenir les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \alpha_1, \alpha_2, \beta$ en résolvant le système

$$\begin{bmatrix} K & E \\ E^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } K = [k_{ij}]_{n \times n} \quad k_{ij} = \kappa(t_i, t_j) \quad k_{ii} = 0$$

$$E^T = \begin{bmatrix} 1, \dots, 1 \\ x_1, \dots, x_n \\ y_1, \dots, y_n \end{bmatrix} \quad Z^T = [z_1, \dots, z_n]$$

$$\Lambda^T = [\lambda_1, \dots, \lambda_n] \quad \alpha^T = [\beta, \alpha_1, \alpha_2]$$

Avec un paramètre de lissage $\rho > 0$

La fonction spline ne passe plus obligatoirement par les points expérimentaux.
on cherche la fonction σ_ρ qui minimise la fonctionnelle :

$$L(v) = \int_{\Omega} |\nabla^2 v|^2 + \rho \sum_{i=1}^n |v(t_i) - z_i|^2 \quad (2)$$

Théorème 2

Parmi les fonctions continues sur \mathbb{R}^2 , il existe une et une seule fonction σ_ρ , qui réalise le minimum de la fonctionnelle (2), et la fonction σ_ρ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

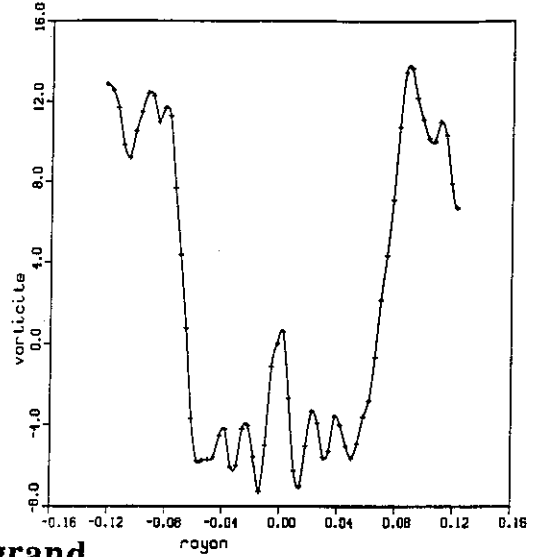
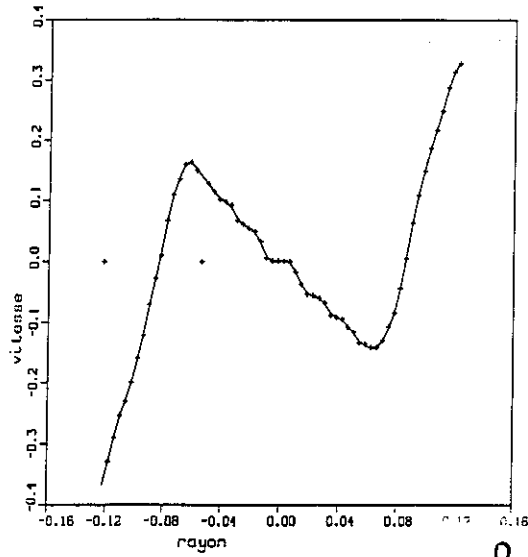
$$\sigma_\rho(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \kappa(t_i, t) + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \beta$$

On peut donc obtenir les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \alpha_1, \alpha_2, \beta$ en résolvant le système

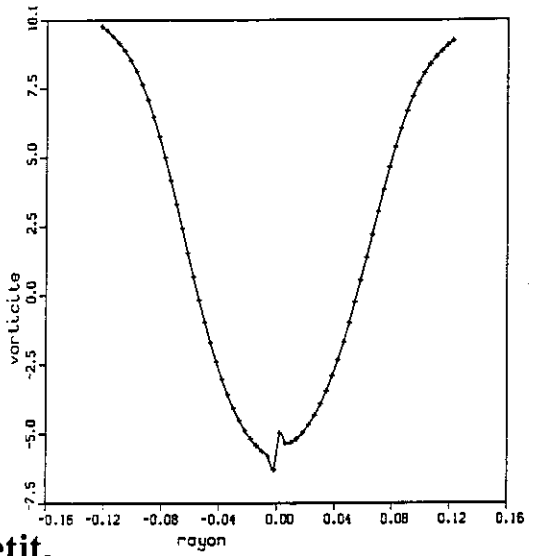
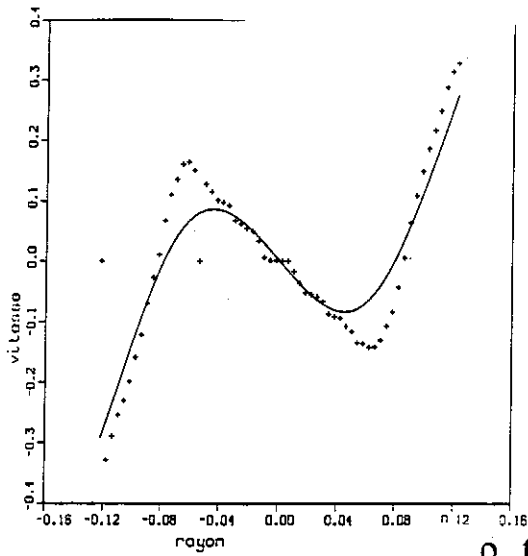
$$\begin{bmatrix} \tilde{K} & E \\ E^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \tilde{K} = K + \tilde{\rho} I_n \quad \tilde{\rho} = 4 \frac{\pi}{\rho}$$

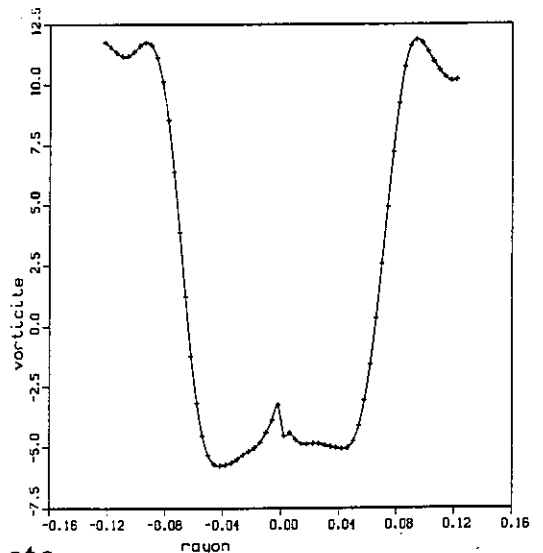
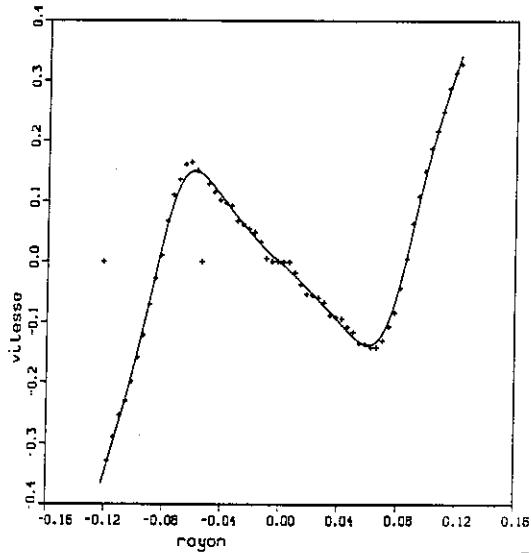
Les méthodes ci-dessus s'appliquent de façon immédiate en dimension 1 $[z_i, t_i(x_i)]$. Les algorithmes de résolution du système ont été écrits par Paihua Montes (Paihua Montes -1978) et modifiés par moi-même.



ρ trop grand.



ρ trop petit.



+++ Points expérimentaux.

----- Fonction spline.

Vitesse.

ρ correcte.

Vorticité déduite par dérivation de la fonction spline.

(FIGURE N° 29)

FUNCTION SPLINE , PARAMETRE DE LISSAGE.

Méthode pour caler une fonction sur des points expérimentaux.

Nous avons les points expérimentaux, en abscisse la fonction de courant ψ_i , en ordonnée la vorticité ω_i . Ces points sont calculés en fonction de la vitesse expérimentale mesurée par les sondes de potentiel. Nous voulons ajuster au mieux une fonction de la forme :

$$F(\psi_i, r_i) = A + B \cdot \text{Th}[C(\psi_i + D \cdot r_i^2) + E];$$

r étant la position du point considéré sur le rayon de la cuve. Les inconnues sont les paramètres A, B, C, D et E de la fonction.

Nous notons : $\vec{X} = [A, B, C, D, E]$.

Nous utilisons la méthode des moindres carrés qui nous fournit un système non linéaire. Nous résolvons ce système par la méthode de Newton-Raphson, méthode itérative dont nous allons voir le principe de l'algorithme.

Nous faisons une première approximation des paramètres A, B, C, D et E , donc de \vec{X} , sur trois points expérimentaux :

$$[\omega_{\max}, \omega_{\min}, \text{et } (\frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2})].$$

Nous notons les points expérimentaux : (ψ_i, ω_i) et $(\psi_i, F(\psi_i, r_i))$ points de la fonction recherché. Le principe de la méthode des moindres carrés consiste à chercher \vec{X} qui minimise la fonction $S(\vec{X})$ telle que :

$$S(\vec{X}) = \sum_i [\omega_i - F(\vec{X}, \psi_i)]^2.$$

\vec{X} solution du problème est obtenue en résolvant :

$$\vec{R}(\vec{x}) = [\frac{\partial S}{\partial A}, \frac{\partial S}{\partial B}, \frac{\partial S}{\partial C}, \frac{\partial S}{\partial D}, \frac{\partial S}{\partial E}] = \vec{0}.$$

Une décomposition au premier ordre en série de Taylor de $\vec{R}(\vec{x})$ au voisinage de la solution est :

$$\vec{R}(\vec{X}_{k+1}) = \vec{R}(\vec{X}_k + \Delta \vec{X}_k) = \vec{R}(\vec{X}_k) + [J(\vec{X}_k)] \cdot \Delta \vec{X}_k$$

où $[J(\vec{X}_k)]$ est la matrice Jacobienne de terme générique $[J(\vec{X}_k)]_{lm}$.

avec
$$[J(\vec{X}_k)]_{lm} = \frac{\partial R_l(\vec{X}_k)}{\partial X_{km}} = \frac{\partial^2 S(\vec{X}_k)}{\partial X_{km} \partial X_{kl}}$$

où k et $k+1$ désignent 2 itérations successives.

Nous résolvons le système suivant par une méthode classique de Gauss Jordan.

$$[J(\vec{X}_k)].(\Delta\vec{X}_k) = -\vec{R}(\vec{X}_k)$$

Cela nous donne $\Delta\vec{X}_k$.

Puis nous avons
$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k + \alpha \Delta\vec{X}_k$$

Une sous-relaxation s'est avérée nécessaire pour assurer une bonne convergence.

($0 < \alpha < 1$)

Le processus débutera à \vec{X}_0 et s'achevera lorsque deux itérations successives du système non linéaire seront suffisamment proches.

[ref : méthode de calcul numérique. NOUGIER 1987]

p 54-56 et p 114-116

Vérification de l'homogénéité du champ magnétique.

Les mesures ont été faites avec une sonde à effet hall (qui est étalonnée avec un aimant).

On a d'abord mesuré le champ au centre de la bobine en faisant varier la hauteur de la sonde. Puis on a mesuré sur un diamètre à la hauteur de la cuve et enfin sur une circonférence .

Toutes les mesures ont été faites avec un courant qui circulait dans la bobine

:

$I = 120$ Ampères.

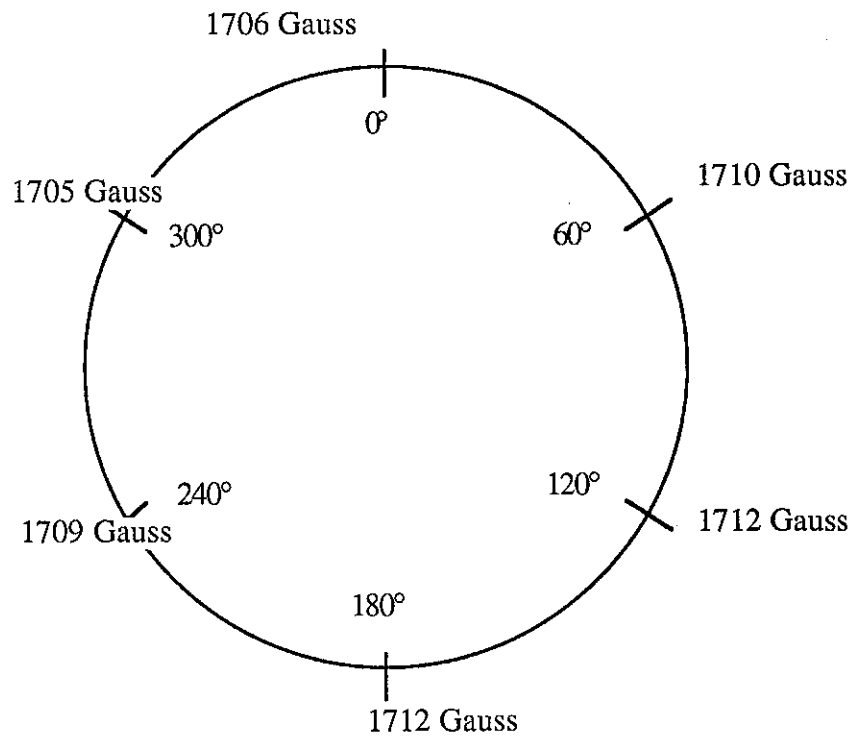
Hauteur en cm	B en Gauss	B en Gausse
5.3	1239	1240
13.3	1536	1537
21.3	1660	1661
29.3	1697	1698
37.3	1706	1706
44.3	1705	1705

Hauteur en cm	B en Gauss
33.3	1704(3)
35.3	1705
37.3	1707(6)
39.3	1707
41.3	1707
43.3	1706(7)
44.3	1706

Mesure sur un diamètre

En cm vers le nord	B en gauss	En cm vers le sud	B en Gauss
0	1708	0	1708
2	1707	2	1708
4	1706	4	170
6	1706	6	1710
8	1706	8	1711
10	1706	10	1711
11.2	1706	11.2	1712

Champs sur la périphérie : $h = 40.5$ cm



Conclusion : l'écart maximal du champ est :

$$\frac{1713 - 1705}{1707} = \frac{8}{1707} > 0,5 \% \quad \text{Donc on peut dire que le champ est}$$

vraiment homogène dans la cuve où se trouve le mercure .

B en fonction de I au milieu de la bobine

I en ampère	B en Gauss
18.5	266
37.5	533.5
75	1067
120	1707.5
150	2137.3

Nous fonctionnons toujours avec le champ maximal pour obtenir la vitesse la plus grande et pour avoir un mouvement le plus bidimensionnelle possible car c'est le champ magnétique qui bidimensionnalise le mouvement.

La cascade inverse d'énergie pour une turbulence entretenue.

Turbulence bidimensionnelle entretenue

Pour une turbulence bidimensionnelle, homogène et isotrope, on a la transformée Fourier spatiale.

$$\hat{u}_i(\vec{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int \int u_i(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

où k est un vecteur bidimensionnel

L'énergie cinétique au mode k :

$$E(k, t) = \Pi k \langle \Pi \hat{u}(k) \Pi^2 \rangle$$

L'énergie cinétique total

$$\frac{1}{2} \langle \vec{u}(\vec{k}, t) \rangle = \int_0^\infty E(k, t) dk$$

L'enstrophie qui mesure la vorticité carrée moyenne

$$\frac{1}{2} \langle (\vec{\nabla} \times \vec{u})^2 \rangle = \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk$$

L'énergie cinétique et l'enstrophie sont deux grandeurs conservées par le mouvement. Supposons maintenant que des forces extérieures, ayant un spectre à bande étroite au voisinage d'un nombre d'onde K_i , injectent de l'énergie à un taux ε et de l'enstrophie à un taux $\mu = k^2 \varepsilon$. Supposons que l'on attende suffisamment longtemps pour avoir un spectre stationnaire dans la région $k > k_i$, le spectre ne

dépend que de μ et k , on trouve par des arguments dimensionnels $E(k) \propto \mu^{2/3} k^{-3}$ pour $k > k_i$ ce transfert d'énergie vers les petites échelles implique une croissance importante de l'enstrophie. De façon plus précise un transfert, même faible, d'énergie vers les grands nombres d'ondes doit s'accompagner d'un transfert inverse d'énergie beaucoup plus importante vers les petits nombres d'ondes, afin

que l'enstrophie $\int_0^{\infty} K^2 E(k) dk$ ne croisse pas. Ce résultat avait été énoncé

dès 1953 par FJORTOFF.

Donc l'énergie injectée va cascader en majeure partie vers les grandes échelles, vers les nombres d'ondes inférieurs à k_j en suivant une cascade inverse d'énergie $E(k) \approx \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$.

BIBLIOGRAPHIE

BATCHELOR.G.K. 1967.

An introduction to fluid dynamics.

Cambridge University Press.

CHANDRASEKHAR.S. 1981.

Hydrodynamic and hydromagnetic stability.

Oxford University Press.

DRAZIN . REID - 1982

Hydrodynamic stability.

Cambridge University Press.

DIU.B, GUTHMANN.C, LEDERER.D, ROULET.B. -1989.

Physique statistique.

Hermann Editeurs.

DUCHON.J -1975.

Fonctions-spline du type plaque mince en dimension 2.

Séminaire d'analyse numérique n° 231 USMG Grenoble.

van HEIJST.G.J.F. , KLOOSTERZIEL.R.C. - 1989.

Tripolar vortices in a rotating fluid.

Nature. Vol 338. pp569-571.

van HEIJST.G.J.F and FLOR.J.B -1990.

La danse des tourbillons.

La recherche.vol 21. n° 218. pp224-227.

van HEIJST.G.J.F. , KLOOSTERZIEL.R.C. and WILLIAMS.C.W.M. 1991

Laboratory experiments on the tripolar vortex in a rotating fluid.

J.Fluid Mech. vol 225. pp301-331.

HOSSAIN.M. , MATTHAEUS.W.H. MONTGOMERY.D. -1983.

Long-time states of inverse cascades in presence of maximum length scale.

J.Plasma Physics. vol 30. part 3. pp479-493.

HUA.H.M. and LYKOUDIS.S.P. -1973.

Turbulence measurements in a magneto-fluid-machanic channel.
Nuclear science and engineering. Vol 54. pp445-449.

HUNT.J.C.R. , STEWARTSON.K. 1965.

Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. II.
J. Fluid Mech. vol 23. part 3. pp 563-581.

KRAICHNAN.R.H -1975.

Statistical dynamics of two-dimensional flow.
J.Fluid Mech. vol 67.pp 155-175.

HUNT.J.C.R. , MALCOLM.D.G. -1968.

Some electrically driven flows in magnetohydrodynamics.
Part 2. Theory and experiment.
J.Fluid Mech. vol 33. part 4. pp775-801.

KRAICHNAN.R.H and MONTGOMERY.D -1980.

Two-dimensional turbulence.
Rep. Prog. Phys vol 43. pp 547.

LEITH . C.E - 1984.

Minimum Enstrophy Vortices.
Phys. Fluids 27 (6).

LYKOUDIS.S. -1960.

Transition from laminar to turbulent flow in magneto-fluid mecanic channels.
Review of modern physics. vol 32. n°4. pp796-798.

MONTGOMERY.D and JOYCE.G -1974.

Statistical mechanics of negative temperature states.
Phys. Fluids. vol.17. pp1139-1145.

MOREAU.R. -1990.

Magnetohydrodynamics.
Kluwer Academic Publishers.

NGUYEN-DUC.J.M - 1988

Instabilité et Turbulence dans des Ecoulements Bidimensionnels.

Thèse de Doctorat I.N.P.G.

NOUGIER.J.P. -1987.

Méthode de calcul numérique.

Masson éditeur. p 54-56 et p 114-116.

ONSAGER.L -1949.

Statistical hydrodynamics.

Nuevo Cimento Suppl. vol 6. pp279.

PAIHUA MONTES.L. -1978.

Quelques méthodes numériques pour le calcul de fonctions splines a une et plusieurs variables.

Thèse de Doctorat de I.N.P.Grenoble.

PRATTE.M.J and HART.J.E. -1991.

Experiments on periodically forced flow over topography in a rotating fluid.

J.Fluid Mech.Vol 229. pp 87, 114.

ROBERT.R -1990.

Etat d'équilibre statistique pour l'écoulement bidimensionnel d'un fluide parfait.

C.R Acad. Sci. Paris. vol 311.-(I). pp575-578.

ROBERT.R. and SOMMERIA.J. -1991.

Statistical equilibrium stats for two-dimensional flows.

J. Fluid Mech, vol 229. pp291-310.

SHERCLIFF.A - 1965.

A Textbook of Magnetohydrodynamics.

Pergamon editeur.

SMITH.R.A -1990.

Maximisation of vortex entropy as an organizing principle in intermittent, decaying, two-dimensional turbulence.

Physical review A. vol.43.N°2,pp1126-1129.

SMITH.R.A and O'NEIL.T.M - 1990.

Nonaxisymmetric thermal equilibria of a cylindrically bounded guiding-center plasma or discrete vortex system.

Phys. Fluids B. vol.2. N°12. pp 2961-2975.

SOMMERIA.J - MOREAU.R - 1983.

Why, How and When MHD Turbulence Becomes Two-Dimensional.

J . Fluid Mech vol.118. pp. 507-518.

SOMMERIA.J - 1985.

Sur la turbulence bidimensionnelle; une approche par la magnétohydrodynamique.

Thèse d'état. Grenoble.

SOMMERIA.J - 1986.

Experiment Study of Two-Dimensional Inverse Energie cascade in a Square Box.

J . Fluid . Mech. vol.170. pp. 139-168.

SOMMERIA.J , MEYER.S and SWINNEY.H.L -1988.

Laboratory simulation of Jupiter's great red spot.

Natur. vol 331. pp689-693.

SOMMERIA.J , STAQUET.C and ROBERT.R -1991.

Final equilibrium state of a two-dimensional shear layer.

J.Fluid Mech. vol 233. pp661-689.

WAN.Y -1984.

On the non-linear stability of circular vortex patches.

Fluids and plasmas. Geometry and dynamics.

Contemporary Mathematics (AMS)

Marsden editeur. Vol 28. pp 215-219.

NOTATIONS

B	Champ magnétique	$B = 0,2137$ Tesla
M	Nombre de Hartmann	$M = 91$
a	Epaisseur de la couche fluide	$a = 0,017$ à $0,02$ m
σ	Conductivité du fluide	$\sigma = 1.10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$
ρ	Masse volumique du fluide	$\rho = 1.355 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
ν	Viscosité cinématique	$\nu = 1.17 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
S_t	Surface totale du domaine.	
$S_1 = S_c$	Surface de la zone centrale.	
$S_2 = S_e$	Surface de la zone de la couronne ou extérieure.	
$I_1 = I_c$	Courant en ampère injecté dans la zone centrale.	
$I_2 = I_e$	Courant en ampère injecté dans la zone de la couronne.	
ΔT	Temps d'impulsion pendant lequel est injecté le courant.	
r	Abscisse du point considéré sur le diamètre de la cuve. ($r = 0$ est le point central).	
$R = 0,13$ m	Rayon de la cuve.	
R_1	Rayon de la zone centrale.	
ω_1	Vorticité initiale (à la fin de la période de forçage) dans la zone 1.	
ω_2	Vorticité initiale (à la fin de la période de forçage) dans la zone 2.	
ω ou $\omega(x)$	Vorticité de la structure finale.	
ψ ou $\psi(x)$	Fonction de courant de la structure finale.	
S	Entropie de la structure finale.	
$2 \frac{\gamma}{\beta}$	Rotation globale de la structure dans le repère du laboratoire.	
β, γ, α_1 et α_2	Paramètres de Lagrange.	
A, B, C, D, E	Paramètres de la fonction en tangente hyperbolique de la théorie.	
$A = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$	$B = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$	
$C = -\frac{1}{2} \beta (\omega_1 - \omega_2)$	$D = \frac{\gamma}{\beta}$	
$E = (\alpha_2 - \alpha_1)$		

**Thèse de Doctorat de l'Institut National
Polytechnique de Grenoble**

Titre de l'ouvrage :

**ETUDE EXPERIMENTALE DE
STRUCTURES STABLES EN
TURBULENCE BIDIMENSIONNELLE,
COMPARAISON AVEC UNE THEORIE
DE MAXIMISATION DE L'ENTROPIE**

Nom de l'auteur :

DENOIX Marie-Alice

Etablissement :

Institut National Polytechnique de Grenoble

RESUME

Nous créons des écoulements bidimensionnels à l'intérieur d'une couche mince de mercure, horizontale et soumise à un champ magnétique uniforme vertical. Le fluide est mis en mouvement en injectant des courants électriques. Nous nous intéressons à l'organisation inertielle en structures stables de la turbulence bidimensionnelle. Avec des conditions expérimentales à deux zones de vorticité initiales, nous obtenons des structures axisymétriques, elliptiques ou bien excentrées. Nous étudions ces structures à l'aide de visualisations et aussi de mesures par sondes de potentiel. Nous comparons ces résultats à une théorie récente de maximisation de l'entropie. Nous résolvons numériquement l'équation fournie par cette théorie, et nous présentons les résultats obtenus en comparaison avec les expériences.

MOTS CLES

Turbulence ; Ecoulement bidimensionnel ;
Tourbillon ; Magnéto-hydrodynamique ;
Maximum d'entropie ; Organisation inertielle.

**Thèse de Doctorat de l'Institut National
Polytechnique de Grenoble**

Titre de l'ouvrage :

**ETUDE EXPERIMENTALE DE
STRUCTURES STABLES EN
TURBULENCE BIDIMENSIONNELLE,
COMPARAISON AVEC UNE THEORIE
DE MECANIQUE STATISTIQUE**

Nom de l'auteur :

DENOIX Marie-Alice

Etablissement :

Institut National Polytechnique de Grenoble

RESUME

Nous créons des écoulements bidimensionnels à l'intérieur d'une couche mince de mercure, horizontale et soumise à un champ magnétique uniforme vertical. Le fluide est mis en mouvement en injectant des courants électriques. Nous nous intéressons à l'organisation inertielle en structures stables de la turbulence bidimensionnelle. Avec des conditions expérimentales à deux zones de vorticité initiales, nous obtenons des structures axisymétriques, elliptiques ou bien excentrées. Nous étudions ces structures à l'aide de visualisations et aussi de mesures par sondes de potentiel. Nous comparons ces résultats à une théorie récente de maximisation de l'entropie. Nous résolvons numériquement l'équation fournie par cette théorie, et nous présentons les résultats obtenus en comparaison avec les expériences.

MOTS CLES

Turbulence ; Ecoulement bidimensionnel ;
Tourbillon ; Magnéto-hydrodynamique ;
Maximum d'entropie ; Organisation inertielle.