



HAL
open science

Etude hydrodynamique du remplissage de moules en fonderie de précision

Philippe Gilotte

► **To cite this version:**

Philippe Gilotte. Etude hydrodynamique du remplissage de moules en fonderie de précision. Electromagnétisme. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1992. Français. NNT : . tel-01339860

HAL Id: tel-01339860

<https://hal.science/tel-01339860>

Submitted on 30 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

GILOTTE Philippe

Pour obtenir le titre de DOCTEUR

**de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE
GRENOBLE**

(Arrêté ministériel du 23 novembre 1988)

Spécialité : Energétique Physique

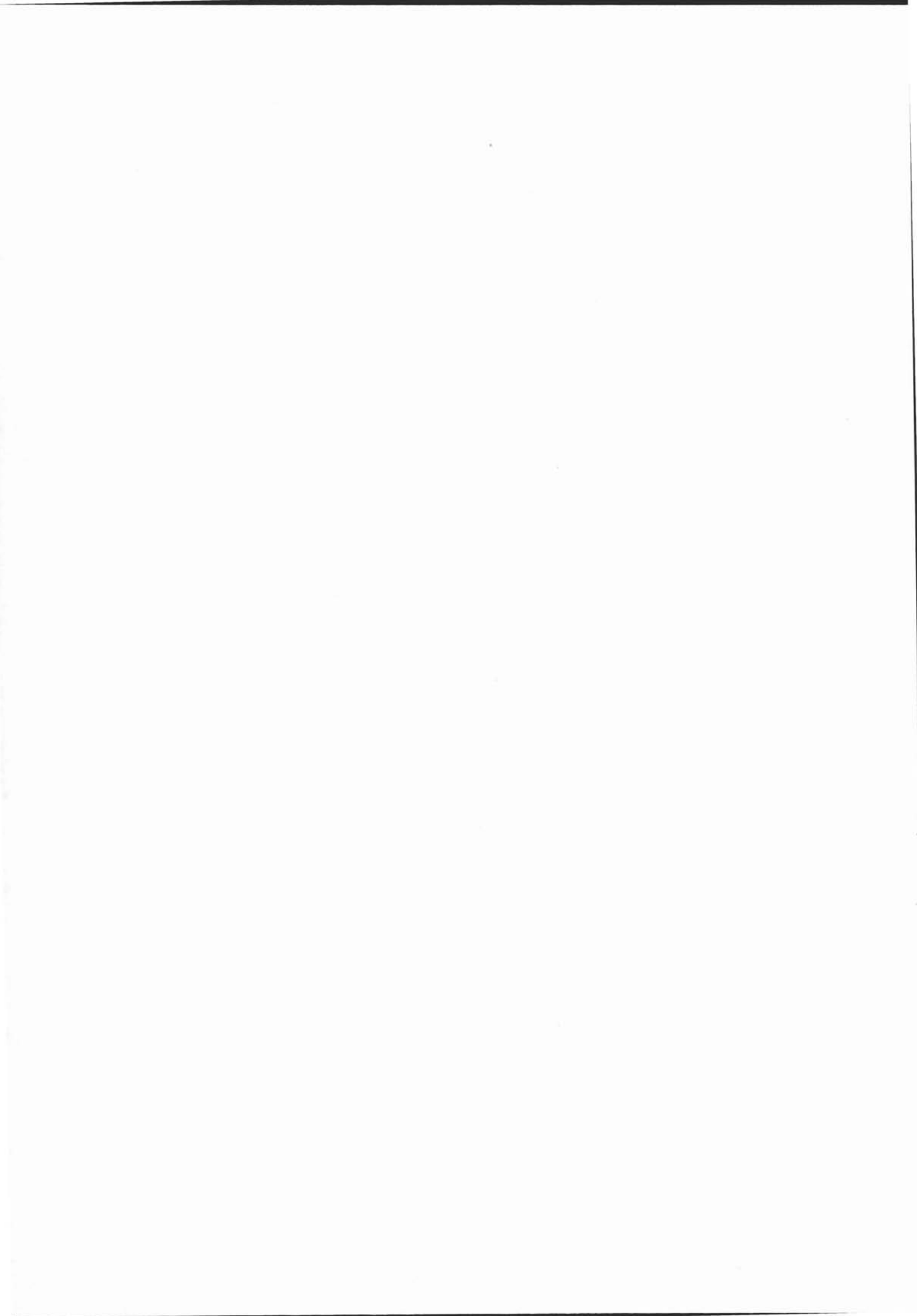
Etude Hydrodynamique du remplissage de moules en fonderie de précision

Date de soutenance : 20 octobre 1992

Composition du jury :

M.R. MOREAU	Président
M.D. GRAND M.G. SCIAMA	Rapporteurs
M.Y. FAUTRELLE M.R. HAMAR	Examineurs

Thèse préparée au sein du Laboratoire MADYLAM



Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord monsieur Hamar pour les encouragements qu'il m'a prodigués, et la confiance qu' il m'a témoignée tout au long de ce travail d'encadrement de thèse.

J'exprime toute ma gratitude à monsieur Fautrelle pour les conseils et l'expérience en mécanique des fluides numérique dont j'ai pu bénéficier au cours de mes recherches.

Je suis très reconnaissant à monsieur Grand et à monsieur Sciama pour avoir accepté la tâche de rapporteur malgré l'importance de leur travail, et à monsieur Moreau qui m'a fait l'honneur de présider mon jury.

La partie expérimentale de ce travail a été réalisée dans le cadre d'un contrat avec le service d'études des procédés de mise en forme du département matériaux et procédés de la SNECMA . Je remercie monsieur Moser, responsable de ce service, et monsieur Tintillier pour m'avoir écouté et conseillé dans la réalisation des expériences.

La modélisation numérique a été réalisée dans le cadre d'un contrat MRT, en collaboration avec l'équipe de recherche et développement des alliages de moulage d'ALUMINIUM PECHINEY. Je remercie monsieur Laty, responsable du développement du logiciel SIMULOR, et monsieur Kreziak pour la réalisation des simulations numériques

Sans pouvoir les citer toutes, je remercie les personnes qui m'ont aidé au cours de cette thèse, et qui ont contribué par leur soutien amical à la réalisation de ce travail.

Sommaire

Nomenclature.....	1
Introduction.....	3
Chapitre 1 : Contexte expérimental	5
I. Présentation d'une coulée industrielle	5
I.1. Ecoulement dans le système de distribution	7
I.2. Remplissage des empreintes.....	7
II. Etude de similitude	8
II.1. Nombre de Reynolds.....	8
II.2. Nombre de Froude.....	9
II.3. Nombre de Weber	10
III. Similitude des écoulements en sections minces	11
III.1. Etude hydraulique.....	11
III.2. Etude thermique.....	13
IV. Remplissage du système de distribution	16
IV.1. Période initiale du remplissage	16
IV.2. Fin de remplissage avec recirculation.....	16
V. Description du dispositif expérimental.....	18
VI. Influence de la hauteur d'eau initiale.....	20
Chapitre 2 : Etude du jet à l'entrée du moule	24
I. Nombre instationnaire.....	24
II. Modèle d'écoulement potentiel.....	26
II.1. Bilan de quantité de mouvement	26
II.2. Equation de continuité.....	27
II.3. Méthode de résolution.....	28
III. Calcul des surfaces libres du jet entrant dans le moule.....	32
IV. Comparaisons des résultats, applications.....	33

Chapitre 3 : Remplissage du moule	36
I. Constatations expérimentales	37
I.1. Influence de la pression du gaz.....	37
I.2. Influence du temps de remplissage sur l'apparition de la turbulence.....	38
II. Présentation du logiciel	38
III. Allure des surfaces libres	39
III.1. Remplissage de la maquette 2D	39
III.2. Remplissage de l'éprouvette verticale	40
IV. Mesure des vitesses à l'intérieur du liquide	48
IV.1. Mesure de vitesses par photographies.....	48
IV.2. Mesure par utilisation d'un effet MHD.....	52
IV.2.1. Principe de la mesure	53
IV.2.2. Développement des courants induits	54
IV.2.3. Signaux électrochimiques	56

Chapitre 4 : Modèle de remplissage	65
I. Modèle triphasique	66
I.1. Equations locales instantanées.....	67
I.2. Fonction de phase.....	68
I.3. Valeurs moyennes	68
I.4. Obtention des équations moyennes	68
I.5. Equations moyennes instantanées.....	69
I.6. Transferts interfaciaux.....	70
I.6.1. Transferts interfaciaux par changements de phases	70
I.6.2. Transferts interfaciaux de quantité de mouvement.....	70
I.6.3. Transferts de chaleur.....	70
I.7. Equation de concentration.....	71
I.8. Conditions de saut	72
II. Modèle diphasique	73
II.1. Interface liquide-gaz	73
II.1.1. Transfert de masse	73
II.1.2. Transfert de quantité de mouvement	74
II.1.3. Transfert de chaleur	74
II.2. Interface liquide-paroi solide du moule.....	74

Chapitre 5 : Modèle numérique	76
I. Choix de la méthode.....	76
I.1. Méthode intégrale aux frontières.....	76
I.2. Méthode des éléments finis.....	77
I.3. Méthode des volumes finis	77
I.4. Méthode des différences finies	78
II. Principe de la méthode	78
III. Equation pour la composante horizontale des vitesses.....	80
IV. Equation de correction de pression.....	83
V. Discrétisation des termes instationnaires	84
VI. Equation de transport des fractions volumiques liquides.....	84
VII. Résolution de l'équation de transport.....	85
VII.1. Discrétisation spatiale.....	85
VII.2. Influence des fractions volumiques sur le calcul des vitesses	87
VIII. Vérification de l'équation purement convective	88
IX. Déformation de la surface libre.....	90
IX.1. Procédure de calcul	90
IX.2. Remplissage de l'amenée horizontale par un jet vertical.....	92
Conclusion générale.....	96
Références	98
Annexes.....	102

Nomenclature :

\vec{A} :	potentiel vecteur du champ magnétique
\vec{B} :	vecteur du champ magnétique
A_d :	section droite d'une particule
C :	taux de concentration
C_D :	coefficient de traînée
c_p :	chaleur massique
D :	dimension caractéristique
D_C :	coefficient de diffusion chimique
\vec{E} :	vecteur du champ électrique
E :	effusivité thermique
g :	gravité
h :	enthalpie
H :	chaleur latente de solidification
J :	transferts interfaciaux de concentration
\vec{j} :	flux de concentration
\vec{J} :	courant électrique
k :	conductivité thermique
k_p :	coefficient de partage
k' :	facteur d'échelle géométrique
k'' :	facteur d'échelle cinématique
\vec{K} :	tenseur symétrique de perméabilité
L :	longueur de remplissage
l :	longueur de diffusion
\vec{M} :	transferts interfaciaux de quantité de mouvement
\vec{n} :	normale extérieure à la surface d'échange
p :	pression
Q :	transferts de chaleur interfaciaux
\vec{q}_k :	flux de chaleur
R :	rayon de courbure
S :	surface d'échange
t :	temps
T :	température
u, v, w :	composantes des vitesses
\vec{v} :	vitesse

Vol : volume de contrôle
X : fonction de phase
x,y,z : coordonnées spatiales

Symbole grec :

α : fraction volumique
 δ : fonction de Dirac
 Φ : fonction potentiel des vitesses
 ϕ : potentiel des vitesses
 Γ : transferts de masse aux interfaces
 μ : viscosité dynamique
 ν : viscosité cinématique
 Ψ : fonction de courant
 ρ : masse volumique
 σ : tension superficielle
 σ' : conductivité électrique
 $\vec{\sigma}$: potentiel vecteur du champ de vitesse
 \Rightarrow
 τ : tenseur des contraintes visqueuses

Exposant :

q : flux de chaleur
j : flux de concentration
 Γ : transfert de masse
 τ : contrainte de cisaillement
d : force de traînée

Indice :

i : interface
k : phase liquide, gaz ou solide
l : phase liquide
s : phase solide
g : phase gazeuse
1 : dispositif industriel
2 : maquette
r : remplissage (temps de)
d : diffusion (temps de)
j : joule (temps)

Introduction

Les écoulements diphasiques en régime instationnaire font actuellement l'objet de nombreuses recherches. Ceux-ci sont étudiés par exemple dans le domaine des échangeurs thermiques, afin d'augmenter les valeurs de coefficients d'échanges, ou pour prévenir les phénomènes de vaporisation.

En métallurgie une approche du type diphasique est maintenant utilisée pour représenter les phénomènes de solidification, lorsque les cristaux sont transportés dans le métal liquide. Cette démarche convient également à la simulation du remplissage dans les procédés de moulage d'alliages métalliques ou de polymères. La connaissance des vitesses et des températures pendant ces deux étapes est un élément important pour situer les zones où peuvent apparaître des défauts dans les pièces (phénomènes de micro-porosité, de non-venue ou présence de retassures).

Si la résolution numérique des équations diphasiques permet de suivre les variations de vitesses et de température lors d'une coulée, il est encore nécessaire de s'assurer des résultats de calcul en les comparant à des résultats expérimentaux. Pour surmonter les difficultés de visualisation liées à la turbulence en régime diphasique, les coulées ont lieu sous vide. Cette condition est réalisée industriellement pour éviter les risques d'oxydation de l'alliage liquide.

Dans le premier chapitre, après la description d'une coulée industrielle, on définit les conditions de similitude à respecter pour filmer des écoulements sur maquette identiques à ceux obtenus industriellement. Ce paragraphe est suivi d'une description du dispositif expérimental.

La visualisation des écoulements permet de saisir la forme du jet à l'entrée de la maquette. En général, durant cette phase du remplissage, les vitesses sont calculées analytiquement d'après les équations d'Euler et de Bernoulli. Pour appliquer cette méthode, l'écoulement doit être irrotationnel. Cette condition est vérifiée dans le deuxième chapitre. Nous comparons les résultats de visualisation à des résultats de calcul de surfaces libres. Ceux-ci sont obtenus numériquement en supposant que les vitesses dérivent d'un potentiel.

D'après ces résultats, même si le nombre de Reynolds est élevé, il existe une période transitoire pour laquelle l'effet de la turbulence peut être négligé. Cette hypothèse est utilisée pour comparer les résultats expérimentaux aux résultats des simulations

numériques, obtenus à partir de la résolution des équations diphasiques. Le logiciel utilisé pour le calcul des champs de vitesses dans la phase liquide, et dans la phase gazeuse, suppose le régime d'écoulement laminaire.

Malgré la bonne concordance des résultats, il est à prévoir, pour des temps de remplissage plus longs, l'apparition d'un régime d'écoulement turbulent. Cependant, pour appréhender expérimentalement ce phénomène, il est nécessaire de mettre au point une technique de mesure permettant de suivre les fluctuations de vitesses au cours du temps. Des expériences de remplissage sont donc réalisées en mettant en oeuvre une méthode de mesure par suivi de concentration de chlorure. Cependant des essais sont encore nécessaires pour permettre l'exploitation des résultats.

Les variations de température pendant le remplissage et la solidification sont calculées avec des modèles physiques présentant des similarités importantes. Ceux-ci peuvent être regroupés dans une seule formulation en harmonisant l'écriture. Ce travail est présenté dans le quatrième chapitre. De cette manière les phénomènes de solidification peuvent être inclus dans la phase de remplissage. Ce cas particulier correspond au moulage des pièces de faibles dimensions.

Les transferts thermiques pendant la phase d'alimentation sont principalement dus aux échanges par convection. La méthode numérique employée pour le calcul des champs de vitesses en présence de surfaces libres est détaillée dans le chapitre cinq. Les interfaces (liquide/gaz et liquide/solide) sont discrétisées d'après les valeurs des fractions volumiques de la phase liquide. La précision des schémas d'interpolation influe sur la qualité des résultats. Deux exemples sont présentés en fin de chapitre.

Chapitre 1

Contexte expérimental

L'optimisation d'un procédé industriel de fonderie nécessite la connaissance des échanges de chaleur par convection pendant la phase de remplissage. En effet les conditions de solidification et donc les propriétés métallurgiques des pièces moulées dépendent des variations de vitesses et de températures de l'alliage coulé dans le moule. Les hypothèses relatives aux calculs des vitesses sont obtenues à partir de l'observation des écoulements réalisés sur maquettes au laboratoire. Après avoir défini le contexte et les impératifs du système de coulée industriel étudié (coulée sous vide gravitaire), le remplissage est décrit pour le type de moule utilisé. Deux sortes d'écoulements sont à distinguer : l'un dans le système de distribution, l'autre dans les empreintes de sections minces. Les conditions de similitudes à respecter sont présentées pour ces deux configurations, puis le système expérimental utilisé pour procéder aux observations est décrit dans le cas du remplissage du système d'alimentation.

I. Présentation d'une coulée industrielle

En aéronautique, certaines pièces de turboréacteurs sont construites en superalliage à base nickel, afin de résister aux fortes contraintes mécaniques et thermiques. Cependant, en raison de leur dureté, la fabrication de ces pièces nécessite l'utilisation des procédés de fonderie, plutôt que des méthodes de forgeage. Pour éviter tout risque d'oxydation de l'alliage, qui altérerait les caractéristiques mécaniques, le système de coulée est placé sous vide.

Avant le remplissage, le superalliage est fondu dans un creuset, puis versé dans un moule par un système de basculement latéral. Le jet ainsi formé est incliné par rapport à la verticale. Au cours de sa chute, le métal liquide voit sa vitesse augmenter jusqu'à une valeur de l'ordre de 2m/s à l'entrée du moule. Dans sa chute libre, pendant la coulée, le jet conserve un profil d'équilibre. La valeur de la pression le long des surfaces libres est égale à la pression résiduelle de l'enceinte.

Le moule, de forme cylindrique, est composé au centre du système d'alimentation et sur la périphérie des empreintes de pièces disposées en couronne (figure 1.1). Chacune d'elles est reliée au système d'alimentation par deux amenées placées aux extrémités

supérieure et inférieure de la pièce. Les attaques sont disposées en croix autour du descendant central à deux hauteurs différentes. Les amenées de chaque empreinte sont raccordées au système d'attaque par l'intermédiaire de deux couronnes, l'une placée en contre-bas, l'autre en hauteur.

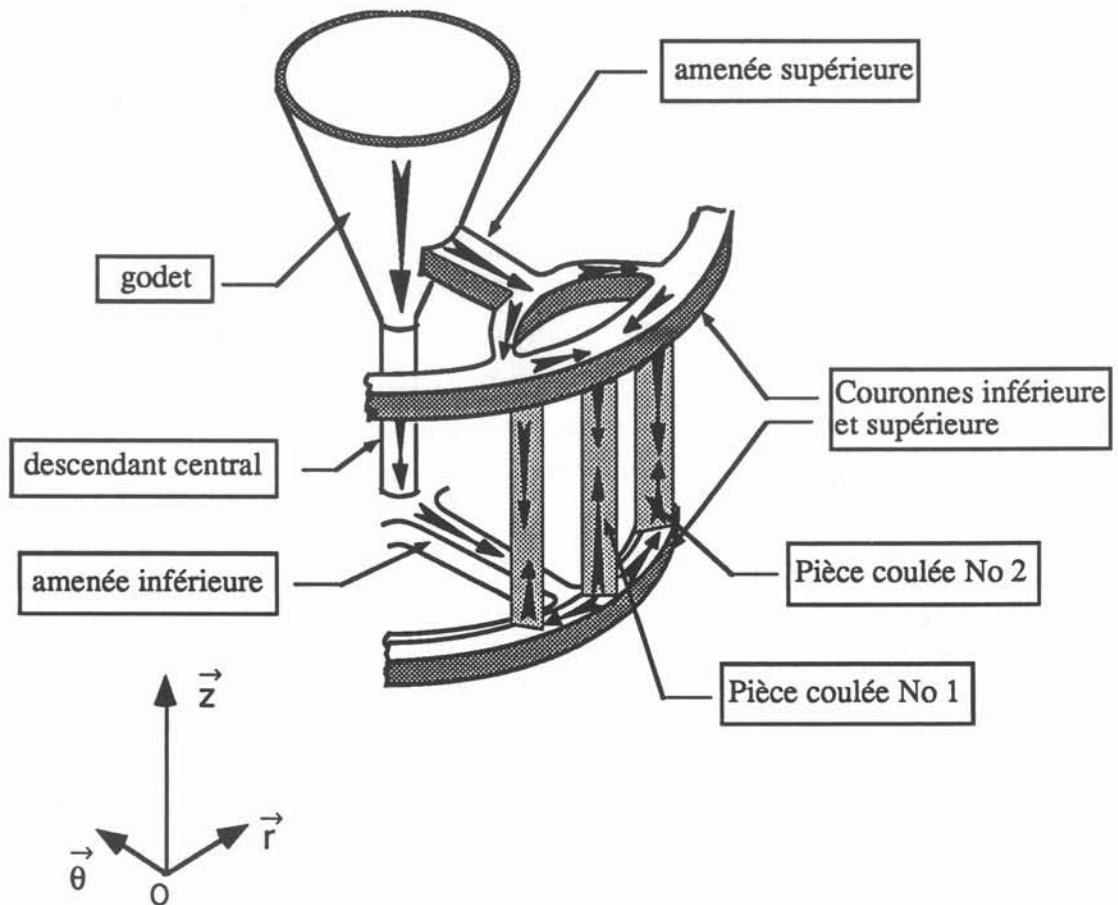


Figure 1.1:
Représentation schématique d'un quart du moule utilisée pour la fabrication des pièces.

L'étude du remplissage pour ce système de coulée peut se décomposer en deux parties distinctes.

I.1. Ecoulement dans le système de distribution

Dans la direction radiale du moule (figure 1.1), le remplissage comporte deux phases successives. Avant l'engorgement du descendant central, la pièce est alimentée en source par l'amenée inférieure puis, lorsque la surface libre atteint le système d'attaque supérieur, le remplissage a lieu en chute. L'emploi d'un système d'alimentation, comportant deux types d'amenée, permet de diminuer fortement les temps de remplissage. Ceux-ci sont toujours inférieurs à trois secondes. On réduit de cette manière les risques de solidification pendant la période d'alimentation. Cependant pour connaître plus précisément les variations de températures au cours de cette phase du remplissage, il est nécessaire de calculer numériquement les variations de vitesse et de température de l'alliage fondu. Des expériences de visualisation sont réalisées auparavant sur maquettes bidimensionnelles afin de déterminer les différents régimes d'écoulement présents au cours du remplissage. Les résultats obtenus sont utilisés pour poser les hypothèses du calcul hydrodynamique. Les conditions de similitude et le dispositif expérimental utilisé pour cette étude sont présentés dans ce même chapitre.

I.2. Remplissage des empreintes

Dans la direction azimutale, correspondant à la coupe développée d'un quart de moule, les temps de remplissage très courts et la symétrie de révolution laissent supposer un remplissage homogène de toutes les pièces. On constate cependant une alimentation en source prépondérante, pour les empreintes situées en face des amenées (Pièce 1). Dans ce cas, la vitesse de remplissage est égale à la vitesse de chute. Par contre les empreintes situées à l'écart des amenées ne peuvent bénéficier de ces conditions (Pièce 2). Les vitesses du métal liquide sont alors dirigées suivant l'axe azimutal (remplissage de la couronne inférieure). La vitesse d'alimentation des attaques disposées perpendiculairement à la couronne est donc nulle. La zone de rencontre entre les flux dans chaque empreinte, provenant d'une alimentation en source et d'un remplissage en chute, est donc fonction de cette condition hydrodynamique.

Pour relier la hauteur de rencontre dans chaque empreinte au temps de remplissage, des visualisations d'écoulement ont été réalisées pour la configuration du moule industriel. Les temps de remplissage obtenus pour ces expériences réalisées avec de l'eau sont comparés à ceux obtenus d'après des expériences analogues réalisées dans l'industrie avec un superalliage. Ces résultats sont consignés dans un rapport technique. La comparaison de ces deux types d'expériences montre que si les arrivées de l'alliage liquide et de l'eau se situent aux mêmes instants au niveau des attaques, l'allure des

écoulements dans les empreintes de sections minces présente de grandes différences, dues à l'effet de la tension superficielle.

II. Etude de similitude

Les écoulements sur maquette et les coulées industrielles sont en similitude si les conditions portant sur les nombres adimensionnels présentés dans cette partie sont respectées. Ces conditions sont présentées d'une part pour réaliser des essais de remplissage relatifs au système de distribution, et d'autre part pour le cas de l'alimentation des empreintes de section mince.

II.1. Nombre de Reynolds

Le développement des couches limites est lié à l'importance relative des forces d'inertie comparées aux forces de viscosité, représentées par le nombre de Reynolds. Dans le cas du remplissage, pour que les épaisseurs des couches limites soient identiques sur la maquette et sur le moule industriel, leurs nombres de Reynolds doivent demeurer égaux pendant le remplissage. La relation entre l'épaisseur de couche limite δ et le nombre de Reynolds s'obtient à partir de l'équation de quantité de mouvement [1.1]. Pour un écoulement bidimensionnel proche d'une paroi horizontale celle-ci s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.1)$$

Sous forme adimensionnelle, on obtient :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} v^* \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (1.2)$$

Ou encore, puisque L est très grand devant δ :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{L^2}{\delta^2} v^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.3)$$

avec les variables réduites :

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L} & y^* &= \frac{y}{\delta} & u^* &= \frac{u}{V} & v^* &= \frac{v}{V} \frac{L}{\delta} \\ t^* &= \frac{t}{LV} & P^* &= \frac{P}{\rho_0 V^2} & \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0} & v^* &= \frac{v}{v_0} \end{aligned}$$

et le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de viscosité}} \qquad Re = \frac{VL}{\nu}$$

Les grandeurs caractéristiques sont :

- δ : l'épaisseur de couche limite
- L : la longueur de remplissage
- V : la vitesse de remplissage
- $t_r = L/V$: le temps caractéristique de remplissage

Pour que les forces de viscosité soient du même ordre de grandeur que les forces d'inertie, il faut que le groupement qui apparaît dans l'équation 1.3 soit voisin de un.

$$\frac{1}{Re} \frac{L^2}{\delta^2} = 1$$

On en déduit l'épaisseur des couches limites :

$$\delta = \frac{L}{Re^{1/2}}$$

Le respect de la condition de similitude, portant sur le nombre de Reynolds, permet de simuler sur maquette les écoulements en régime instationnaire, correspondant au cas des remplissages de moules.

II.2. Nombre de Froude

Les écoulements à surfaces libres non horizontales entraînent des variations de pression statique, liées à la hauteur de fluide. Pour respecter ces variations de pression, on introduit le nombre de Froude défini comme le rapport des forces d'inertie sur les forces de pesanteur [1.1].

$$Fr = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de pesanteur}} \qquad Fr = \frac{v^2}{g_0 h}$$

avec : $\left\{ \begin{array}{l} h : \text{hauteur de chute} \\ v : \text{Vitesse du fluide} \end{array} \right.$

Ce groupement apparaît dans l'équation réduite de Navier-Stokes projetée dans la direction verticale :

$$\frac{dv^*}{dt^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Fr} \rho^* g^* + \frac{1}{Re} \Delta v \quad (1.4)$$

Pour comparer les formes de surfaces libres lors de la progression du liquide dans le moule industriel et dans la maquette, il est nécessaire de tenir compte à la fois de la hauteur h et de la longueur de remplissage L . Ces données relatives à la géométrie du moule interviennent dans le rapport de formes défini de la manière suivante :

$$e = \frac{h}{L}$$

Les comparaisons de formes de surfaces libres ont donc lieu pour des rapports de formes équivalents dans les deux configurations.

II.3. Nombre de Weber

Dans les écoulements à surfaces libres présentant de faibles rayons de courbure, les forces, dues à la tension superficielle, apparaissent dans l'équation de quantité de mouvement. Celles-ci sont représentées par le nombre de Weber défini comme le rapport des forces d'inertie sur les forces de tension superficielle [1.2].

$$We = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de tension superficielle}} \quad We = \frac{\rho v^2 L}{\sigma}$$

où σ est la tension superficielle.

D'après les résultats des expériences préliminaires réalisées sur la configuration du moule industriel (paragraphe 1.2), les forces de tension superficielle interviennent principalement dans le cas du remplissage des empreintes de sections minces. Afin de se rendre compte de la possibilité de réaliser des expériences de remplissage sur maquettes en similitude avec les coulées industrielles pour ce type de configuration, une étude de similitude portant sur les nombres de Reynolds, Froude et Weber est présentée dans le paragraphe suivant.

III. Similitude des écoulements en sections minces

L'avancée du front de fluide dans les géométries fines est freinée par le saut de pression interfaciale induit par les forces de tension superficielle. Ce saut de pression s'écrit :

$$P_l - P_g = \frac{2\sigma}{R} \quad \text{avec : } \begin{cases} \sigma : \text{ tension superficielle liquide/gaz} \\ R : \text{ rayon de courbure de l'interface} \end{cases}$$

Cette source de quantité de mouvement est fonction du rayon de courbure de la surface libre (figure 1.2).

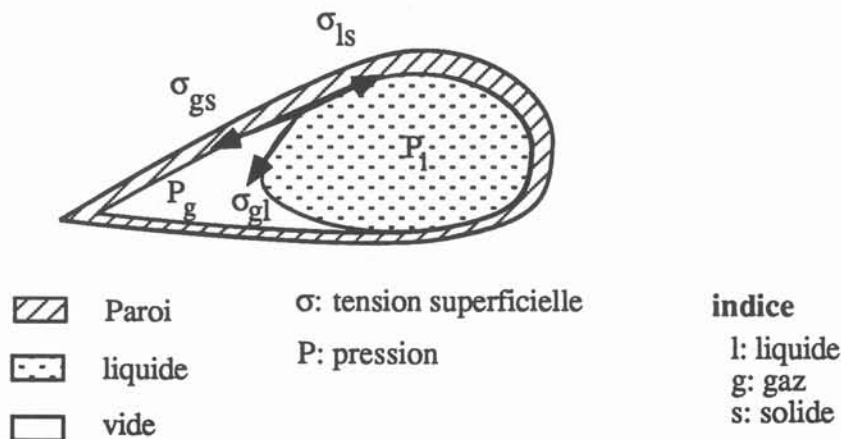


figure 1.2 :

Représentation de l'angle de raccordement pour un remplissage en section mince. Le saut de pression interfaciale empêche l'avancée de la surface libre. Cette géométrie correspond à la section de remplissage de l'empreinte.

Pour obtenir une similitude complète du remplissage, il est donc nécessaire que les conditions de Reynolds, Froude et Weber soient vérifiées simultanément [1.3]. En particulier la similitude du nombre de Weber doit être respectée pour que les formes des surfaces libres soient équivalentes pendant le remplissage de la maquette et des empreintes du moule industriel.

III.1. Etude hydraulique

Dans le procédé industriel, le moule est rempli par un superalliage en fusion. En raison de l'absence de valeurs concernant les propriétés hydrauliques de ce matériau, les valeurs de viscosité et de tension superficielle sont prises égales à celles du nickel (tableau 1.1). D'après ces données, seuls quelques liquides permettent de réaliser des

expériences de remplissage en similitude avec les coulées industrielles. Cependant en choisissant des facteurs d'échelle géométrique et cinématique différents de l'unité, le métal de Wood permet de satisfaire aux conditions de similitude de Re, Fr et We. Cet alliage est sélectionné en comparant le nombre de Morton du nickel à celui d'autres métaux ou alliages fondus. Ce nombre adimensionnel, présenté dans l'annexe 1, ne dépend que des propriétés des milieux considérés [1.2] :

$$Mo = \frac{g\mu^4}{\rho\sigma^3}$$

Pour le Nickel (1) et le métal de Wood(2), on obtient :

$$\frac{Re_1}{Re_2} = 1.005 \quad \frac{Fr_1}{Fr_2} = 0.997 \quad \frac{We_1}{We_2} = 1.070$$

avec les facteurs d'échelle définis ci dessous :

$$\text{facteur d'échelle géométrique : } k' = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{2/3} = 2,5$$

$$\text{facteur d'échelle cinématique : } k'' = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{1/3} = 1,5$$

Il est à noter que la valeur élevée de k' entraîne de fortes diminutions des sections de remplissage.

	$10^{-3}\rho$ kgm ⁻³	$10^3\mu$ kg m ⁻¹ s ⁻¹	$10^6\nu$ m ² s ⁻¹	$10^3\sigma$ Kg s ⁻²	Re ₁ /Re ₂	Fr ₁ /Fr ₂	We ₁ /We ₂	Mo ₁ /Mo ₂
Gallium	6.1	1.9	0.26	708	2.31	1	1.61	0.15
Mercure	13.7	1.5	0.11	485	5.45	1	5.30	0.17
Métal de Wood	10.4	1.7	0.16	370	3.75	1	5.27	0.74
Eau	1	1	1	73	0.6	1	2.57	130
Aluminium	2.4	1.3	0.54	914	1.1	1	0.49	0.078
Nickel	8	5	0.6	1500	1	1	1	1
René 77	7.9	-	-	-	1	1	1	1
IN100	7.75	-	-	-	1	1	1	1

Tableau 1.1 :

Propriétés hydrauliques de l'eau et de quelques métaux liquides (ρ : la masse volumique, μ : la viscosité cinématique, ν : la viscosité dynamique, σ : la tension superficielle) et nombres adimensionnels obtenus dans la maquette pour chacun d'entre eux.

Références : Eckert [1.3], Liquid metal handbook [1.4]

Les conditions hydrodynamiques semblent donc être respectées pour simuler le remplissage des sections minces. Cependant les expériences avec du métal de Wood ne peuvent être réalisées, si les temps de solidification et de remplissage sont du même ordre de grandeur. Car l'écoulement de l'alliage fondu dans les géométries fines serait alors bloqué par le développement de la phase solide (phénomène de non-venue). Or pour notre configuration, ce phénomène semble exister. Une étude thermique succincte est donc réalisée pour vérifier cette hypothèse.

III.2. Etude thermique

L'écoulement est supposé monodimensionnel dans la direction horizontale. La largeur du conduit représentant la géométrie des empreintes du moule industriel est de l'ordre du millimètre. La vitesse de solidification dans la direction verticale est donnée par la condition aux limites sur le front de solidification :

$$k \frac{\partial T}{\partial y} = \rho H v_i \quad (1.6)$$

v_i est la vitesse d'avancée de l'interface

H est la chaleur latente de solidification

k est le coefficient de conduction thermique

Cette relation présentée par E.R.G Eckert [1.3] suppose que les temps de conduction thermique soient du même ordre de grandeur que le temps de remplissage. Celui-ci est défini à partir de l'équation de l'énergie écrite sous la forme adimensionnelle, en utilisant les mêmes grandeurs caractéristiques que précédemment :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \right) \quad (1.7)$$

avec :

δ : épaisseur de couche limite hydraulique

L : longueur de remplissage

la variable réduite :

$$\theta^* = \frac{T_1 - T_{p0}}{T_{l0} - T_{p0}} \quad \text{avec : } \begin{cases} T_1 : \text{température du liquide} \\ T_{l0} : \text{température du liquide à l'origine} \\ T_{p0} : \text{température de la paroi à l'origine} \end{cases}$$

et le nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{\text{diffusion moléculaire}}{\text{diffusion thermique}} \qquad Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

Comme L est grand devant δ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \quad (1.8)$$

On en déduit le rapport du temps de conduction thermique au temps de remplissage :

$$\frac{t_c}{t_f} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \frac{L^2}{\delta^2}$$

où encore :

$$\frac{t_c}{t_f} = \frac{\delta^2}{a} \frac{V}{L}$$

Les valeurs numériques correspondent au remplissage des empreintes par un superalliage à base Nickel. La valeur de la vitesse provient des expériences préliminaires.

$$a = 4,85 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (a : \text{diffusivité thermique})$$

$$\delta = 10^{-3} \text{ m}$$

$$L = 0,1 \text{ m}$$

$$V = 0,25 \text{ m/s}$$

On obtient :

$$\frac{t_c}{t_f} = 0,5 \qquad \text{où encore :} \quad t_c = 0,2 \text{ s} \quad \text{et} \quad t_f = 0,4 \text{ s}$$

Pour ces valeurs numériques, le temps de conduction et le temps de remplissage sont du même ordre de grandeur. L'établissement d'un gradient thermique dans l'épaisseur du conduit dû aux transferts thermiques par conduction provoque la solidification du superalliage. En effet la température de la paroi du moule inférieure à la température de fusion de l'alliage, entraîne la formation d'un front de solidification parallèle à l'écoulement. sa vitesse peut être approchée par la relation 1.6 :

$$v_i = \frac{k}{\rho H} \frac{(T_s - T_p)}{\delta/2}$$

on en déduit l'expression du temps de solidification :

$$t_s = \frac{\delta}{2v_i} \Rightarrow t_s = \frac{\rho H}{4k} \frac{\delta^2}{(T_{lo} - T_{po})}$$

Les valeurs de chaleur latente de solidification et de conductivité thermique des superalliage (René 77, IN 100) sont reportés dans le tableau 1.2. L'épaisseur du canal est d'un millimètre. La différence initiale de température entre la paroi du moule et l'alliage liquide est égale à :

$$\Delta T = 350 \text{ °C} \quad \text{avec : } \begin{cases} T_{10} = 1450 \text{ °C} \\ T_{p0} = 1100 \text{ °C} \end{cases}$$

D'après ces valeurs numériques le temps de solidification est égal à :

$$t_s = 0.05 \text{ s}$$

	$10^{-3}\rho$ kg/m ³	$10^3\mu$ Kg/ms	$10^3\sigma$ Kg/s ²	$10^{-5}H$ J/kg	C_p J/kgK	K W/mK	10^6a m ² /s	Pr	$T_f^{\circ}\text{C}$
Nickel	8	5	1500	2.34	620	75	15.12	0.048	1455
Rene 77	7.9	-	-	3.47	954	36.6	4.85	0.013	1270
IN100	7.75	-	-	3.47	954	36.6	4.85	0.013	1300
Métal de Wood	10.4	1.7	370	0.35	146	9.62	6.33	0.026	68
Mercure	13.7	1.5	485	1.18	140	8.21	4.28	0.025	-40
Eau	1	1	73	3.34	4182	0.507	0.123	7.05	0

Tableau 1.2 :

Propriétés hydrauliques et thermiques (H : chaleur latente de solidification, C_p : chaleur spécifique, K : conductivité, a : diffusivité, T_f° : température de fusion) et nombre de Prandtl de certains métaux liquides et de l'eau

Références :

Metal de Wood : Eckert [1.3], Liquid metal handbook [1.4], (Eutectique BiPb)

Mercure, Nickel : Metal handbook [1.5], Smithell [1.6]

Rene 77, IN100 : Lamanthe [1.9]

D'après les valeurs des temps de conduction et de solidification, comparés au temps de remplissage, il est à prévoir un début de solidification dans les empreintes avant la fin de remplissage. Bien que l'importance de ce phénomène soit réduit par la présence d'un revêtement isolant en céramique sur les parois intérieures du moule, celui-ci est présent au cours d'une coulée industrielle. En raison de cette contrainte, l'étude est limitée uniquement au cas du remplissage du système de distribution.

IV. Remplissage du système de distribution

IV.1. Période initiale du remplissage

Cette période correspond au remplissage en convection forcée avant le début de la solidification. Dans cet intervalle de temps, la masse volumique est constante. Les conditions hydrodynamiques à respecter sont uniquement celles des nombres de Reynolds et de Froude.

La maquette est réalisée à l'échelle 1:1. Les vitesses mesurées sur la maquette sont équivalentes à celles existant dans une coulée industrielle. Les trajectoires et les lignes de courant sont alors identiques. Ces conditions permettent de reproduire les déformations de surfaces libres, rencontrées lors du remplissage d'un moule industriel. Dans le cas particulier des coulées sous vide, les surfaces libres du jet d'alimentation sont représentées par des lignes de courant stationnaires.

Pour que la similitude du nombre de Reynolds soit respectée, il est nécessaire que les valeurs des viscosités cinématiques (ν) soient équivalentes pour les deux fluides. D'après les valeurs définies dans le tableau 1.1, les viscosités cinématiques s'approchant le plus de celle d'un superalliage sont celles de l'aluminium et de l'eau. Pour des temps caractéristiques de remplissage très courts (inférieur à 3 secondes), l'effet des forces de viscosité n'est sensible que dans un domaine très proche des parois (de l'ordre de 2mm d'épaisseur). L'erreur faite en simulant le remplissage avec de l'eau n'entraîne donc que de faibles différences de vitesses au coeur de l'écoulement.

Les possibilités d'investigations des vitesses par méthodes optiques, et la possibilité de réaliser les expériences de remplissage à température ambiante suggèrent l'emploi de l'eau, plutôt que l'aluminium malgré la bonne concordance de la valeur de sa viscosité avec celle des superalliages.

IV.2. Fin de remplissage avec recirculation

En fin de remplissage, lorsque la maquette est placée sous vide primaire, les recirculations peuvent être à l'origine de la formation de poches de gaz. Le volume du gaz emprisonné par le liquide est fonction de la pression résiduelle de la maquette. Pour le remplissage de l'éprouvette représentée figure 1.3, la taille des bulles présentes dans le liquide en fin de coulée est proche de deux centimètres pour une pression résiduelle absolue de l'ordre 0,05b. En raison des grands diamètres de ces bulles l'effet de la tension superficielle peut être négligé. La simulation de ce type de remplissage peut donc

être réalisée avec de l'eau. Le profil 2D présenté sur les figures 1.3 (a, b, c, d) correspond à la demi coupe transversale d'un moule en croix (figure 1.4). Cette maquette est utilisée pour étudier le remplissage d'éprouvettes verticales.

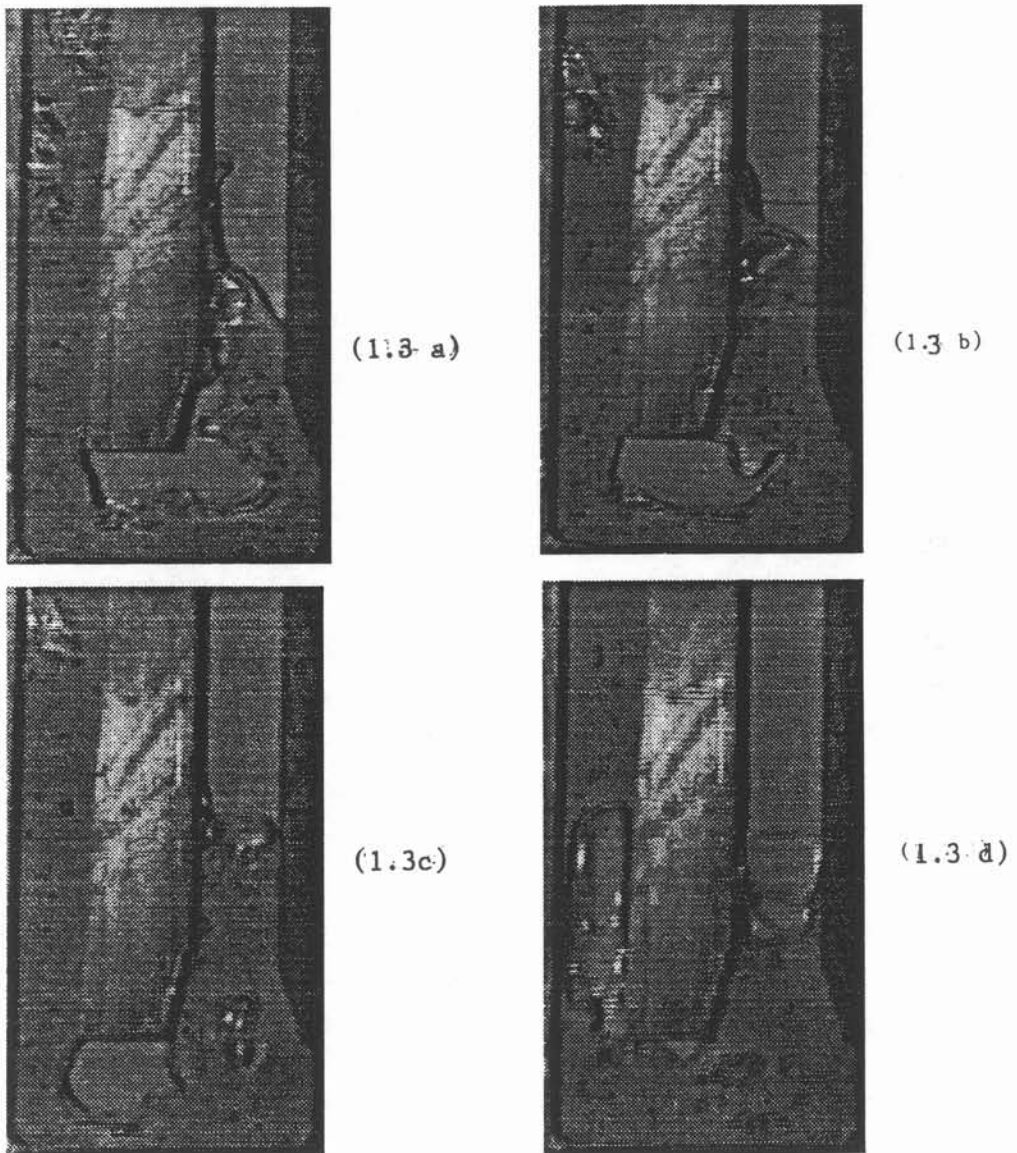


Figure 1.3

Les figures a,b,c et d, placées dans l'ordre chronologique et prises à des intervalles de temps réguliers ($\Delta t = 0,04s$), montrent la formation d'une bulle de gaz, pendant le remplissage en source d'une éprouvette verticale. La pression résiduelle absolue de la maquette est de 0,05b. La vitesse d'alimentation est de 2 m/s

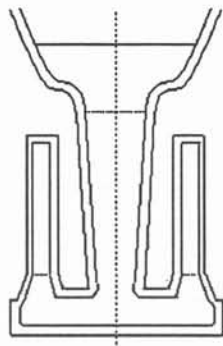


figure 1.4 a

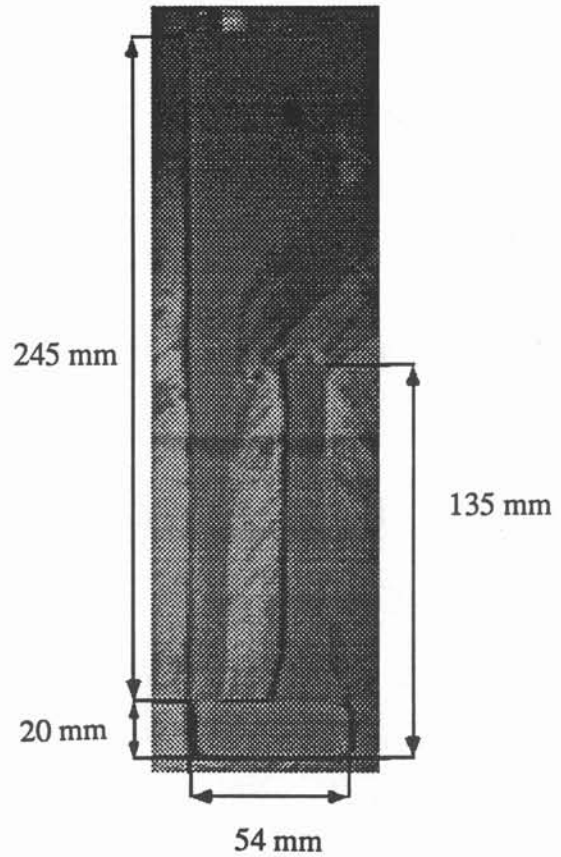


figure 1.4 b

Figure 1.4

Représentation d'un moule en croix (figure 1.4 a) et de la maquette bidimensionnelle qui lui est associée (figure 1.4 b)

V. Description du dispositif expérimental

Le système expérimental est réalisé pour observer l'écoulement dans le système de distribution pendant la période initiale du remplissage. Seules les conditions de Reynolds et de Froude doivent être respectées. Les coulées peuvent donc être réalisées avec de l'eau.

La similitude des écoulements dans un profil bidimensionnel de laboratoire et dans un moule industriel suppose que les conditions aux limites et les conditions initiales soient équivalentes, Le dispositif expérimental doit alors répondre aux contraintes suivantes :

- l'ensemble du système de coulée doit être placé sous vide. La force motrice est due uniquement aux forces de gravité. En raison du principe de versement, le jet l'alliage liquide se contracte au cours de la descente.

- l'étude des surfaces libres dans un plan (O, x, y) suppose la composante de la vitesse nulle dans la direction Oz (figure 1.5). Cette condition est réalisée en confinant l'écoulement entre deux plaques séparées l'une de l'autre par une distance de 5 mm. Le profil des vitesses doit être constant dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. Comme les vitesses aux parois sont nulles, les observations sont limitées à des temps caractéristiques de remplissage très courts (inférieurs à une seconde) correspondant à des épaisseurs de couches limites très faibles. Les mesures de vitesse dans cet intervalle de temps au coeur de l'écoulement vérifient alors les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

En fonction de ces impératifs, le dispositif expérimental est réalisé d'après le principe décrit ci-dessous (figure 1.5). Le système est composé dans sa partie supérieure d'un réservoir, où l'on peut stocker le liquide avant le remplissage, et dans sa partie inférieure du profil "quasi-bidimensionnel". Le réservoir et la maquette sont reliés par un tuyau déformable assurant l'étanchéité. L'ensemble est alors placé sous vide primaire. La pression du gaz résiduel est de l'ordre de 0,01bar. La pression de vapeur saturante étant de 0,02bar à une température de 17,5 °C, il est inutile de descendre la pression de la maquette en dessous de cette valeur. En effet, des transferts de matière par vaporisation sont déjà présents en fin de remplissage pour la pression de gaz choisie. Une tige cylindrique, à usage de quenouille, vient obstruer le conduit de liaison. Pour procéder au remplissage, un vérin pneumatique vient soulever la quenouille. A l'intérieur de la maquette, l'écoulement est confiné entre deux plaques séparées l'une de l'autre par une épaisseur de 5 mm.

Les premières observations proviennent d'enregistrements vidéo réalisés en stroboscopant l'écoulement tout les $1/25$ ièmes de seconde par un éclair de 100 ns. La plaque avant en plexiglass laisse traverser la lumière blanche émise par le flash stroboscopique. Pour obtenir des images contrastées, l'eau mélangée à un colorant fluorescent réfléchit cette lumière. La plaque arrière peinte en noir absorbe tout le rayonnement restant. Les surfaces libres se découpent ainsi parfaitement. Les images sont ensuite transférées sur ordinateur afin d'obtenir par analyse d'images le tracé des contours.

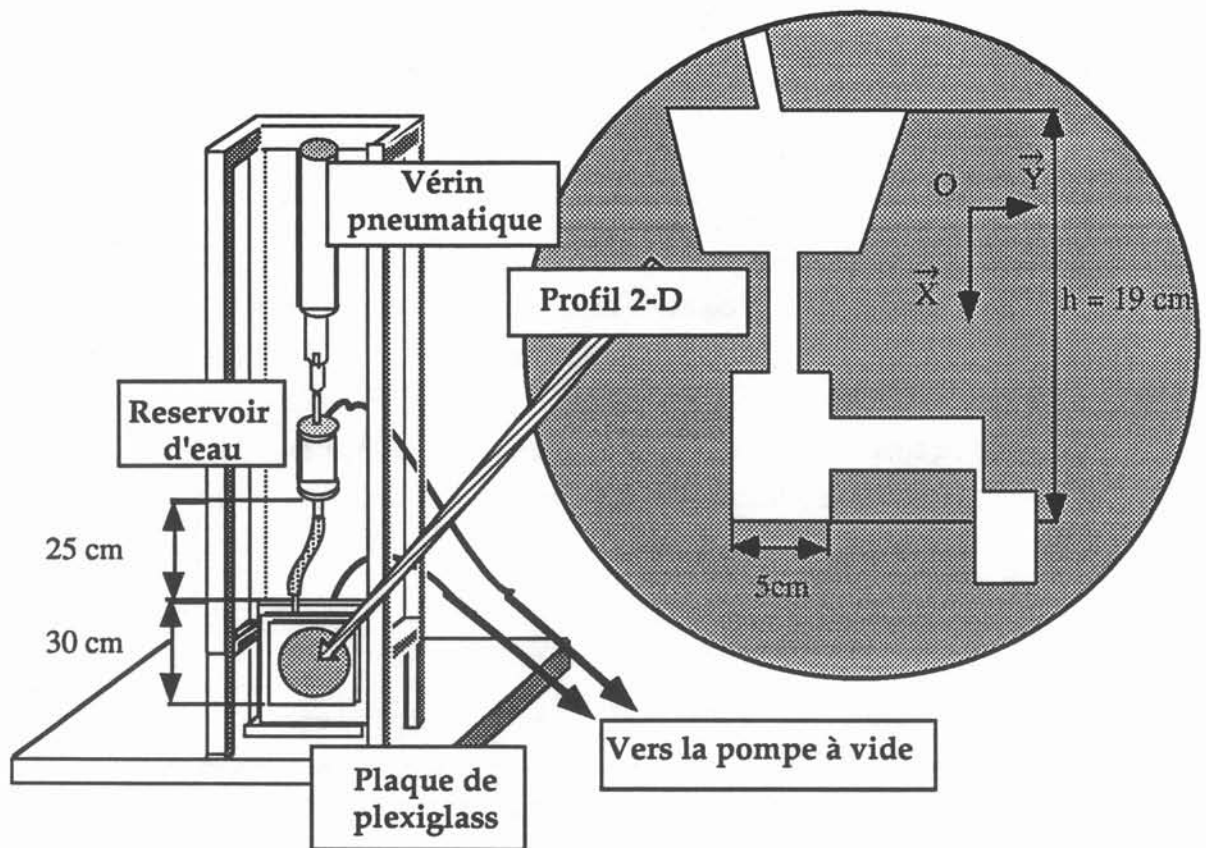


Figure 1.5 :
Représentation du dispositif expérimental.

VI. Influence de la hauteur d'eau initiale

Dans une coulée industrielle, le jet de métal liquide provient du basculement du creuset situé au dessus du moule. Dans le dispositif expérimental, le début du remplissage a lieu en libérant l'ouverture située au fond du réservoir supérieur. Dans le deuxième cas, les vitesses d'alimentation sont liées à la hauteur de chute mais aussi aux variations de la pression statique dues à la baisse du niveau d'eau dans le réservoir pendant la durée du remplissage.

Pour obtenir des vitesses équivalentes dans le moule et dans la maquette, il est nécessaire de tenir compte de la hauteur d'eau initiale dans le réservoir supérieur. Celle-ci est toujours inférieure à 4 cm. Pour cette valeur l'influence de la pression statique sur les variations de vitesses à l'entrée de la maquette peut être négligée. Les variations de vitesses à l'entrée de la maquette sont inférieures à 10 % entre le début et la fin du

remplissage. Cette variation de vitesse peut être approchée en utilisant l'équation de Bernoulli. On obtient entre le début et la fin du remplissage :

$$v_i = \sqrt{2g \Delta h_i} \quad \text{avec } \Delta h_1 = 0.29 \text{ m} \Rightarrow v_i = 2,4 \text{ m/s}$$

$$v_f = \sqrt{2g \Delta h_f} \quad \text{avec } \Delta h_2 = 0.25 \text{ m} \Rightarrow v_f = 2,2 \text{ m/s}$$

Les indices i et f sont utilisés pour différencier l'instant initial de l'instant final.

Ces valeurs de vitesses approchées en utilisant l'équation de Bernoulli ont aussi été calculées par simulation numérique. Seule les forces de viscosité laminaire sont introduites dans le modèle. Cette fois-ci les valeurs obtenues en début de remplissage sont proches de 1,8 m/s (figure 1.6). La hauteur d'eau initiale dans le réservoir supérieure est égale à 33 mm.

Pour une hauteur d'eau initiale dans le réservoir supérieure à 10 cm, correspondant à une pression à l'entrée de la maquette de 0,035 bar, le jet entrant dans le moule prend une forme évasée (figure 1.7). Son épaisseur est proportionnelle à la distance parcourue depuis l'entrée. Le respect des similitudes impose donc de se placer en dessous de cette valeur. La forme du jet est alors similaire aux profils observés lorsque le jet de métal liquide provient du basculement d'un creuset (figure 1.8).

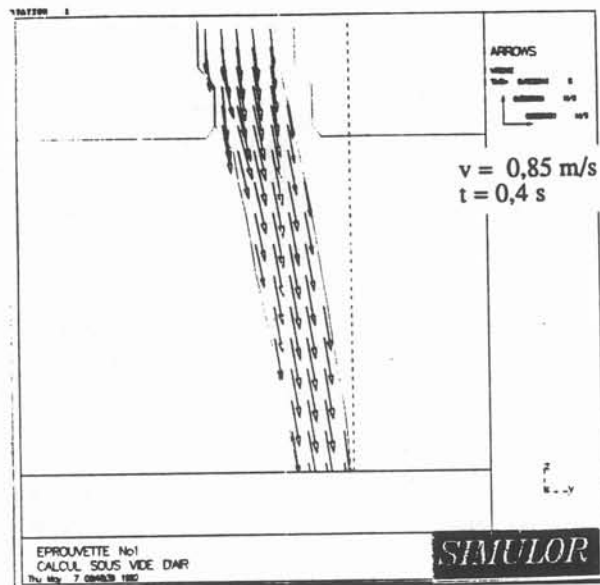


Figure 1.6 :

Simulation de l'écoulement en début de remplissage. La vue détaillée de la zone d'entrée montre des vitesses de l'ordre de 1,8 m/s.

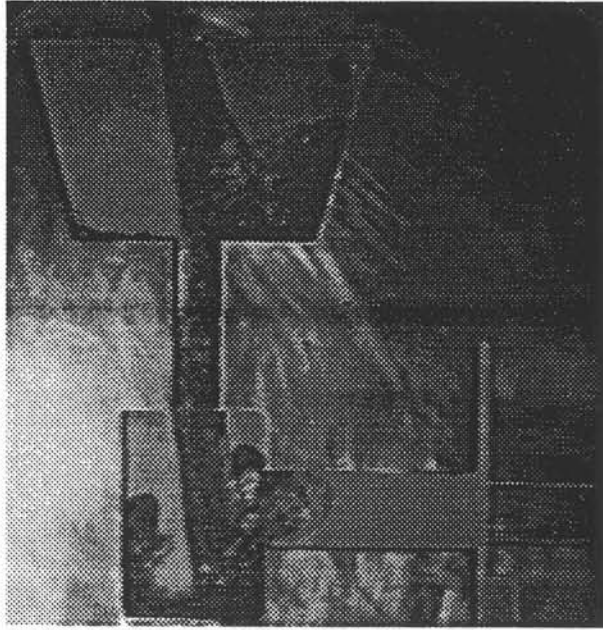


Figure 1.7 :

Forme du jet pour une hauteur de d'eau supérieure à 10 cm dans le réservoir.

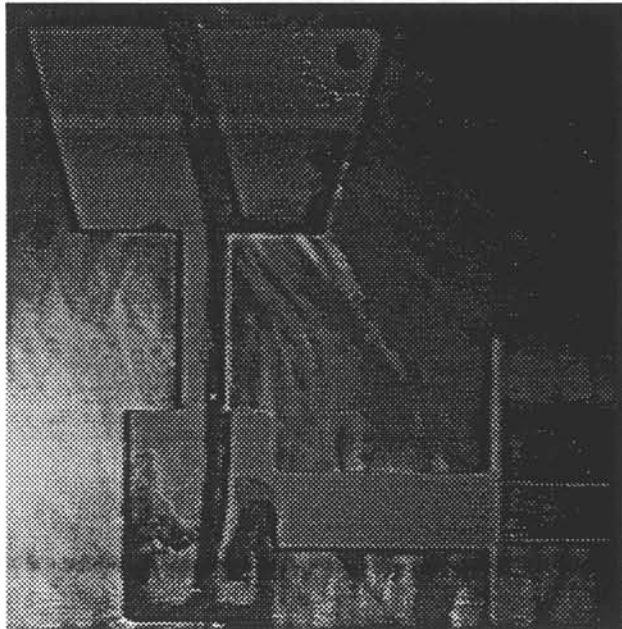


Figure 1.8 :

Forme du jet pour une hauteur de d'eau de l'ordre de 4 cm dans le réservoir.

Conclusion

D'après l'étude de similitude faite dans ce premier chapitre, les coulées industrielles et les remplissages des maquettes transparentes sont en similitude complète si leur nombres adimensionnels respectifs (Re , Fr et We) sont équivalents. Cependant cette condition n'est réalisée que si les écoulements sont réalisées avec du métal de Wood.

La similitude du nombre de Weber doit être vérifiée principalement dans le cas des remplissages en sections minces. Or d'après le facteur d'échelle géométrique, pour cette application la maquette doit être construite à l'échelle $E = \frac{1}{2,5}$. Cette nécessité conduit à deux restrictions.

Les essais ne peuvent être réalisés que sur maquette 3D. En effet sur le modèle expérimental décrit dans ce chapitre, l'écoulement est confiné dans une épaisseur de 5mm suivant la direction Oz. Cette valeur est choisie pour annuler la composante de la vitesse dans la direction Oz. La largeur entre parois dans le plan de l'écoulement est de l'ordre du millimètre. Les variations de vitesses aurait donc lieu dans les trois directions.

La maquette 3D ainsi réalisée doit être préchauffée au dessus de la température de fusion du métal de Wood afin d'éviter la solidification immédiate de l'alliage pendant le remplissage. Cependant cette condition interdit la simulation du remplissage dans les parties du moule où la température du superalliage est proche de la température de début de solidification.

En raison de ces deux remarques, le dispositif expérimental est utilisé uniquement pour visualiser le remplissage dans le système d'alimentation. Dans cette configuration, seules les conditions de similitude portant sur les nombres de Reynolds et de Froude doivent être respectées. Les essais présentés dans les chapitre suivants sont donc tous réalisés avec de l'eau.



Chapitre 2

Etude du jet à l'entrée du moule

Les hauteurs de métal liquide dans les empreintes de pièces situées en face des amenées sont reliées à la vitesse du jet entrant dans le descendant. Or pour des temps de remplissage très courts, l'écoulement est principalement dû aux forces d'inertie. L'étude des régimes d'écoulement dans le système de distribution en fonction du temps de remplissage permet de choisir le modèle utilisé pour calculer les vitesses d'alimentation aux attaques des pièces. On définit le nombre instationnaire comme le rapport du temps de remplissage sur le temps de diffusion. On suppose que les forces de viscosité sont négligeables devant les forces d'inertie si ce nombre tend vers zéro.

Si tel est le cas, une étude fondée sur la comparaison des formes des surfaces libres obtenues expérimentalement et par calcul numérique est réalisée sur la maquette bidimensionnelle décrite dans le chapitre précédent. Le modèle physique adopté pour les calculs repose sur la méthode des écoulements à potentiel. D'après la bonne concordance des résultats, les vitesses d'alimentation peuvent être calculées en supposant les forces de viscosité négligeables devant les forces d'inertie.

I. Nombre instationnaire

En régime non établi, le développement des couches limites est fonction du temps de remplissage. D'après le chapitre précédent, les forces d'inertie et de viscosité sont du même ordre de grandeur si le groupement suivant :

$$\frac{1}{Re} \frac{L^2}{\delta^2}$$

est voisin de l'unité.

En se reportant à la définition du temps de remplissage cette équation peut encore s'écrire:

$$\delta^2 = \nu t_r$$

Pour des temps caractéristiques proches de la seconde, d'après les valeurs de viscosité cinématique des métaux liquides (tableau 1.1), les épaisseurs de couches limites sont de l'ordre du millimètre. En dehors de cette région, l'écoulement est irrotationnel (figure 2.1). Si la largeur est grande devant l'épaisseur δ , l'écoulement peut être modélisé

en supposant les forces de viscosité négligeables. Pour rendre compte de ce comportement hydrodynamique, on définit le nombre instationnaire introduit par F. Mario et S. Latelier [2.1], qui compare le temps de remplissage au temps de diffusion.

$$\Omega = \frac{\text{temps de remplissage}}{\text{temps de diffusion}} \Rightarrow \Omega = \frac{t_r}{t_d}$$

D'après les grandeurs définies figure 2.2, Ω est égal à:

$$\Omega = \frac{t_r}{t_d} \Rightarrow \Omega = 3 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} t_r = \frac{L}{V} \\ t_d = \frac{l^2}{\nu} \end{cases}$$

Si Ω est égal à un, l'écoulement est établi. Si Ω tend vers zéro, les forces de viscosité sont négligeables devant les forces d'inertie. De cette analyse d'ordre de grandeur, il ressort que dans le cas étudié les forces visqueuses sont négligeables.

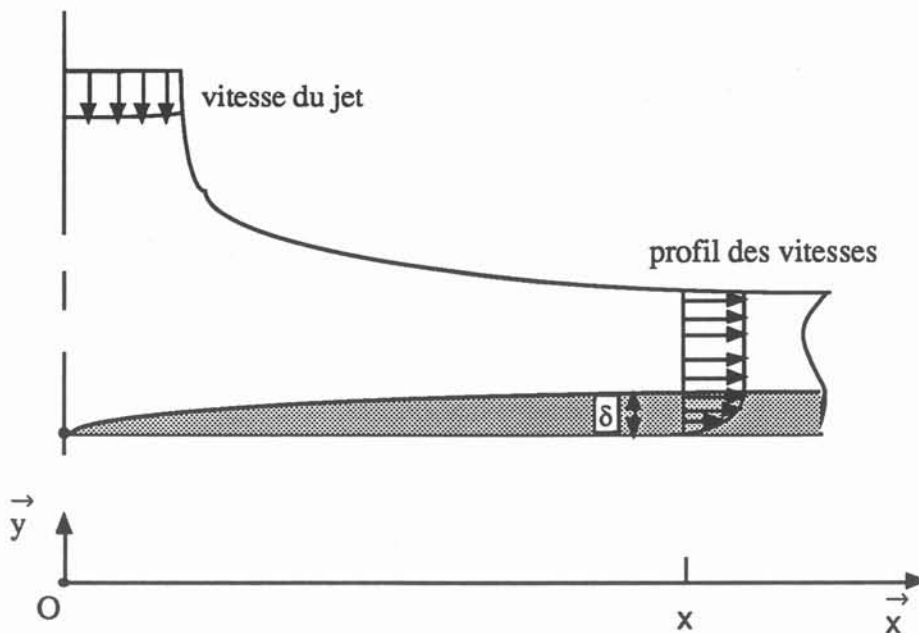


Figure 2.1

Développement d'une couche limite horizontale, à partir d'un jet vertical défini dans un demi-plan.

II. Modèle d'écoulement potentiel

Pour confirmer l'hypothèse selon laquelle les forces de viscosité sont négligeables devant les forces d'inertie au cours de la période initiale du remplissage, on se propose de retrouver par le calcul les formes de surface libre en considérant le métal liquide comme un fluide parfait. On suppose donc l'écoulement irrotationnel. Le modèle physique qui en résulte est présenté ci-après.

II.1. Bilan de quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = - \vec{\nabla} \frac{P}{\rho} + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{U} \quad (2.1)$$

ou encore :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{U} = - \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + g z + \frac{U^2}{2} \right) + \nu \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) \quad (2.2)$$

En régime non établi, pour des couches limites de faible épaisseur, le liquide se comporte comme un fluide parfait. Si l'écoulement est initialement irrotationnel, cette propriété est alors conservée :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{U} = 0 \quad (2.3)$$

Dans ce cas, le terme de viscosité peut être négligé devant les termes d'inertie, de pression et les forces de volume. L'équation de quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + g z + \frac{U^2}{2} \right) = 0 \quad (2.4)$$

Puisque l'écoulement est irrotationnel, les vitesses dérivent d'un potentiel Φ :

$$\vec{U} = \vec{\nabla} \Phi$$

Le terme instationnaire s'écrit alors :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \frac{\partial (\vec{\nabla} \Phi)}{\partial t} = \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.5)$$

on obtient ainsi en régime instationnaire l'équation :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + g z + \frac{U^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.6)$$

Intégrée sur une ligne de courant, l'équation de quantité de mouvement satisfait à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{p}{\rho} + g z + \frac{U^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = F(t) \quad (2.7)$$

II.2. Equation de continuité

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, on définit le potentiel vecteur $\vec{\sigma}$ qui vérifie la relation :

$$\vec{U} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma} \quad \text{avec } \vec{\sigma} (0, 0, \psi)$$

Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$$

La fonction de courant ψ vérifie donc l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 \psi = 0$$

La résolution de cette équation nécessite de fixer des conditions aux limites d'après les caractéristiques suivantes.

Les surfaces libres et les surfaces solides correspondent à des lignes de courant soit:

$$\psi = \text{cte}$$

Entre deux lignes de courant, la frontière du domaine est tracée de manière à correspondre à une ligne équipotentielle. On définit les variations de la fonction ψ à partir du débit traversant la section droite de l'écoulement.

$$\Delta \psi = q$$

Sur les équipotentielles, on retient la condition de Neumann :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

Le système à résoudre est présenté ci dessous :

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad \text{dans le domaine } \Omega$$

$$\psi = \text{cte} \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

Ω représente le domaine liquide, et $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \partial \Omega$

Γ_1 représente les frontières libres mobiles

Γ_2 représente les frontières fixes

II.3. Méthode de résolution

Le système est résolu par la méthode des intégrales aux frontières, à partir d'un code de calcul développé par L.V Huynh et J. Etay [2.2]. Cette méthode permet la détermination des lignes de courant ($\Psi = \text{cte}$), dans le domaine liquide en tenant compte uniquement des valeurs sur la frontière [2.3].

A l'initialisation, les surfaces libres Γ_1 sont positionnées arbitrairement, puis au cours des itérations successives, celles-ci sont déplacées en fonction de la vitesse normale de l'interface. A chaque itération la vitesse tangentielle est donnée sur Γ_1 par :

$$v_t(s) = \frac{\partial \Psi}{\partial n}(s)$$

La norme de la vitesse est calculée sur les surfaces libres par l'équation de Bernoulli (eq 2.7) en ne conservant que les forces de gravité (l'écoulement est supposé stationnaire).

$$\frac{1}{2} \rho v^2(s) + \rho g h(s) = \frac{1}{2} \rho V_0^2 + \rho g h_0,$$

où V_0 est la vitesse à l'entrée du domaine Ω .

La vitesse normale est déduite de l'expression :

$$v_n = \sqrt{V_0^2(s) - v_t^2 + 2g\Delta h} \quad \text{avec : } \Delta h = h_0 - h(s)$$

La convergence est atteinte, lorsque la vitesse normale de l'interface est nulle. Cette méthode ne peut donc s'appliquer que sur des surfaces libres stationnaires. A l'itération n , les surfaces libres sont déplacées en utilisant la relation suivante:

$$x_n = (1-\omega) x_{n-1} + \omega \Delta t v_n(x)$$

ω est le facteur de sous relaxation

Les conditions aux limites utilisées pour la résolution du système sont :

sur AB: $\partial \Psi / \partial n = 0$

sur BC: $\Psi = q_3$

sur CD: $\partial \Psi / \partial n = 0$

sur DE: $\Psi = 0$

sur EF: $\partial \Psi / \partial n = 0$

sur FI: $\Psi = -q_2$

sur JA: $\Psi = -q_1 - q_2$

Les positions des surfaces libres sont calculées d'après les valeurs initiales des débits. Sur la surface solide délimitée par les points D et E, la fonction de courant s'annule. Il existe donc une ligne de partage des débits reliant la surface solide à un point O, appelé point de référence, placé sur le segment AB, où la fonction de courant est égale à zéro. Au cours des itérations successives, le point de référence est déplacé de manière à recalculer les débits q_1 et q_2 , et vérifier ainsi la conservation des flux. Ces variations entraînent le déplacement des points C, F, et J et des courbes BC, GF et AJ.

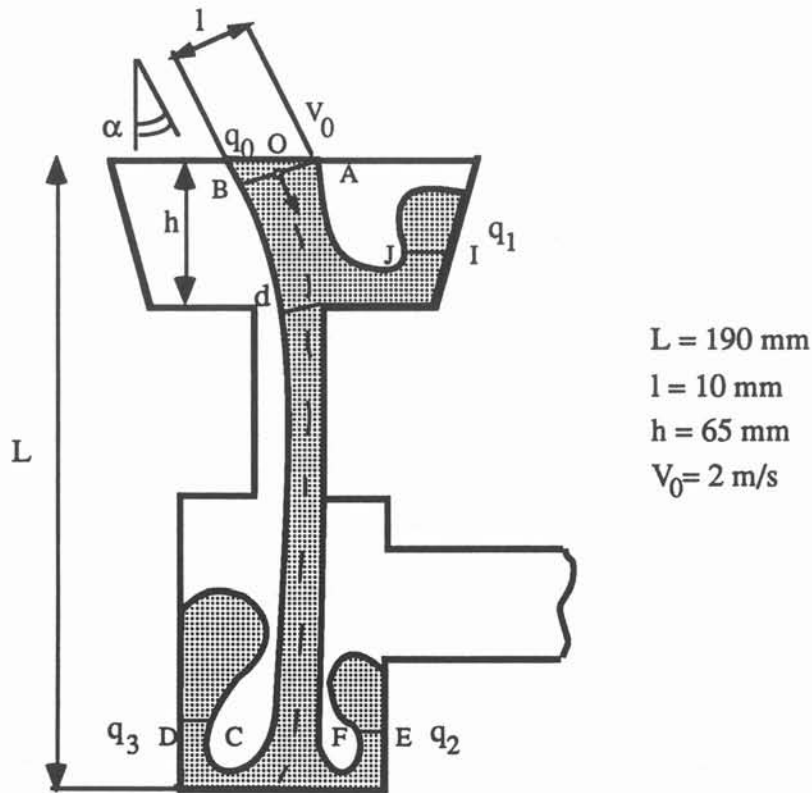


Figure 2.2:

Schéma de la maquette représentant le système d'alimentation, où sont définis les points délimitants les frontières du type Γ_1 et Γ_2 et les longueurs caractéristiques h , L et l , utilisées principalement pour le calcul du nombre instationnaire.

La procédure de résolution peut être représentée par l'algorithme de la figure 2.3. L'étude expérimentale réalisée préalablement permet de fixer les conditions aux limites (figure 2.4). A l'initialisation, les surfaces libres sont approchées par des arcs de parabole. Ceux-ci sont définis de manière à conserver la direction de la vitesse tangentielle à la ligne de courant. En raison de la courbure des interfaces, le nombre

d'itérations nécessaires pour obtenir la solution est de l'ordre de 1200. L'écart entre la forme initiale et la forme finale est représenté sur la figure 2.5.

La forme des surfaces libres calculée à partir de cette méthode, pour un jet de métal liquide entrant dans le système d'alimentation, est présentée en figure 2.5.

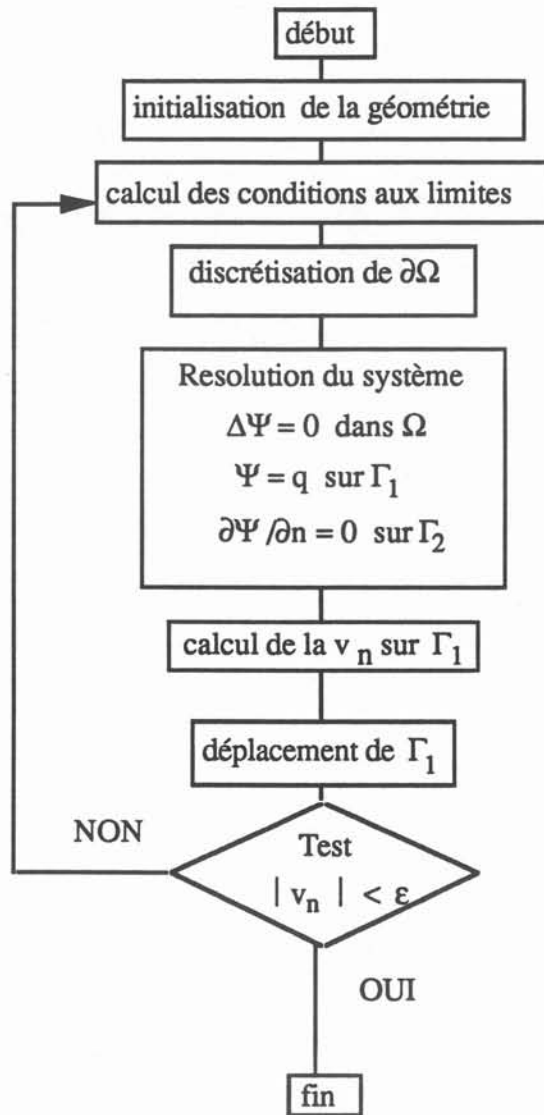


Figure 2.3:

Algorithme de calcul des surfaces libres pour un écoulement potentiel.

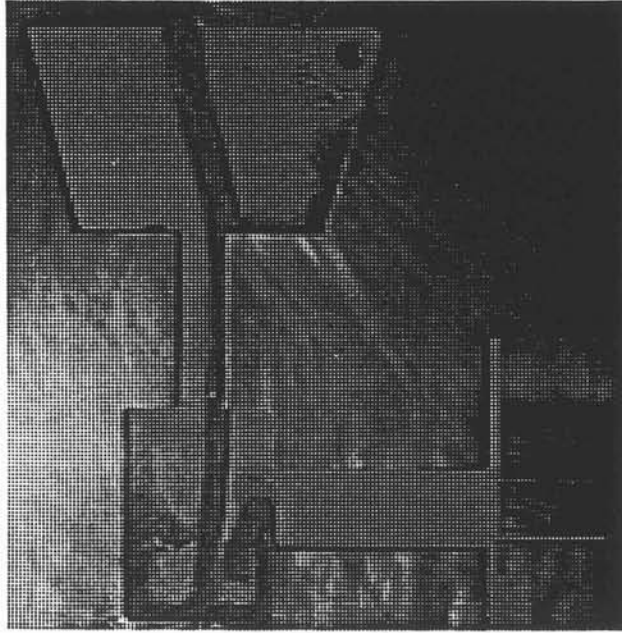


Figure 2.4:

Image vidéo du remplissage en eau de la maquette 2D.
Les formes des surfaces libres sont saisies à $t = 0,3s$.

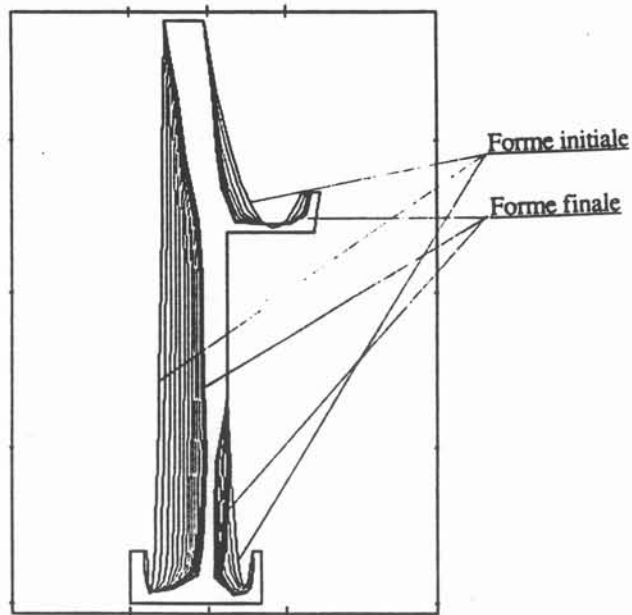


Figure 2.5:

Représentation des surfaces libres calculées avec la méthode intégrale aux frontières. Les conditions aux limites sont définies à l'instant $t = 0,3s$.
Les différentes courbes représentent le déplacement de l'interface entre la forme initiale et la forme finale.

III. Calcul des surfaces libres du jet entrant dans le moule

D'après l'analyse de similitude présentée dans le premier chapitre, le comportement hydrodynamique d'un alliage fondu en régime non établi peut être étudié avec de l'eau. En effet, les écarts observés pour les nombres de Reynolds et de Froude sont modérés, entre l'eau et les alliages à base Nickel. Il est donc possible d'utiliser le dispositif expérimental présenté dans le premier chapitre. La forme des surfaces libres du jet est saisie à $t = 0.3$ s par la caméra vidéo en utilisant le stroboscope réglé sur 25 Hz (figure 2.4).

On rappelle pour cette configuration la valeur du nombre instationnaire défini à partir des grandeurs définies figure 2.2:

$$\Omega = \frac{t_r}{t_d} \Rightarrow \Omega = 3 \cdot 10^{-3}$$

Les définitions de t_r et t_d , données dans le premier paragraphe, conduisent aux valeurs suivantes:

$$\begin{cases} t_r = \frac{L}{V} = 0,3 \text{ s} \\ t_d = \frac{l^2}{\nu} = 100 \text{ s} \end{cases} \quad \text{avec : } \begin{cases} V = 2 \text{ m/s} \\ \nu_{\text{eau}} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \end{cases}$$

La maquette transparente qui représente le système de distribution est placée sous vide. Par conséquent, le couplage gaz/liquide n'intervient pas. Avant de rencontrer les parois l'écoulement est donc supposé irrotationnel.

La vitesse d'entrée est obtenue en début de remplissage, en mesurant le déplacement du front liquide entre deux images vidéo, pour un intervalle de temps de 0,04s. Les vitesses de l'ordre de 2 m/s correspondent à un débit d'entrée de 0,12 litre par seconde. Une deuxième série d'expériences, enregistrée sur des films 16mm, a permis de vérifier cette grandeur.

La caméra prenant 2000 images par seconde, les vitesses sont mesurées à l'intérieur du liquide en suivant les microbulles, dues à la vaporisation de l'eau placée en dessous de la pression de vapeur saturante. Les temps de désaturation légèrement supérieurs à une demi-heure conduisent à des diamètres de bulles à l'entrée de la maquette de l'ordre du dixième de millimètre. Les vitesses mesurées sont voisines de 1,7 m/s et restent constantes au moins sur la moitié du temps de remplissage.

En raison de la taille des particules il est difficile de négliger la vitesse de glissement aux interfaces liquide/bulle, on admet cependant que les variations de vitesses du gaz sont

proportionnelles à celle du liquide. Le débit d'entrée du liquide est donc supposé constant dans la période initiale du remplissage.

La méthode utilisée pour calculer les débits entrant et sortant du domaine à l'initialisation est présentée dans l'annexe 2.

IV. Comparaisons des résultats, applications

La prédiction des formes de surfaces libres, calculées avec la méthode des intégrales aux frontières, est en bon accord avec les profils obtenus expérimentalement. Dans la période initiale du remplissage, il est donc possible de représenter le jet entrant dans le système d'alimentation avec un modèle d'écoulement potentiel. En régime non établi, la faible épaisseur des couches limites autorise à négliger l'effet des forces de viscosité. Cependant cette méthode peut être utilisée uniquement pour des temps de remplissage très courts, en présence de surfaces libres stationnaires. Son application est donc fortement limitée.

D'après la comparaison des images obtenues expérimentalement et numériquement, il est possible de calculer les vitesses du jet de métal liquide dans le système d'alimentation en appliquant l'équation de Bernoulli sur une ligne de courant sans introduire de perte de charge.

Les amenées des pièces, placées en face des attaques, correspondent à de faibles longueurs de remplissage. Comme l'écoulement est non établi, les forces d'inertie sont prépondérantes. Les vitesses d'alimentation peuvent donc être calculées en utilisant cette hypothèse.

Ce résultat est confirmé expérimentalement pour le remplissage de l'éprouvette représentée figure 2.6. Une étude réalisée par V. Nivet [2.4] a montré que pour cette pièce, l'introduction de coefficients de pertes de charge n'était pas nécessaire pour représenter les variations de vitesses dues au changement de direction et aux frottements sur les parois du moule.

Sur cette même figure, on remarque que les variations de l'interface dans la direction perpendiculaire à l'écoulement sont faibles. Au cours du remplissage, les surfaces libres du jet peuvent donc être supposées stationnaires dans le cas des coulées sous vide.

Ces résultats sont d'ailleurs utilisés en fonderie, pour calculer la géométrie des systèmes d'alimentation, et plus particulièrement la conicité des descendants, afin d'obtenir des écoulement en charge [2.5].

Pour prévenir les effets d'aspiration, dus à la baisse de la pression dans la partie supérieure du descendant, le rapport des sections est calculé en fonction de la hauteur de chute:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \quad (2.8)$$

Les points 1 et 2 sont situés respectivement au sommet et à la base du descendant.

Cette relation est établie à partir de l'équation de continuité et de l'équation de Bernoulli, sans prendre en compte les pertes de charge dues aux frottements sur les parois.

Sous la pression atmosphérique, en raison de la présence de bulles dans le descendant pour des géométries cylindriques, apparaît l'intérêt d'utiliser des profils coniques. Des essais de remplissage ont été réalisés par P. HAIRY et Y. HEMON [2.6] pour vérifier le critère géométrique correspondant à l'équation 2.8. D'après les résultats obtenus avec une caméra cinéma tournant à 500 images par seconde, les auteurs mettent en évidence l'importance du dimensionnement des attaques et du descendant. Un mauvais engorgement induit une forte aspiration d'air dans le système de distribution.

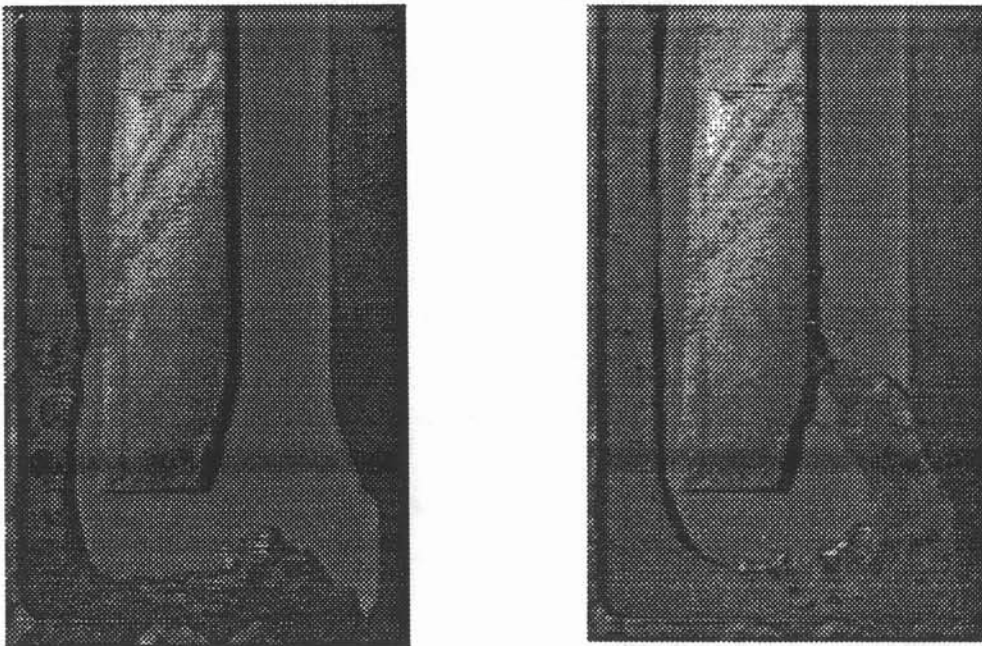


Figure 2.6:

Schéma d'une éprouvette en U. Les photos représentent le remplissage d'un quart d'un moule en croix. Les surfaces libres sont stationnaires dans le conduit d'alimentation placé à gauche sur chaque photo.

Conclusion

Le résultat des calculs obtenus avec le modèle à écoulement potentiel a montré l'influence du rapport des temps de remplissage sur les temps de diffusion. Pour un nombre instationnaire proche de zéro, les vitesses du jet entrant dans le système d'alimentation peuvent être calculées en négligeant les forces de viscosité. Les vérifications expérimentales montrent en effet que la relation de Bernoulli peut être appliquée pour les faibles longueurs de remplissage sans introduire de pertes de charge. La validité de ce modèle dépend de la valeur du nombre instationnaire. Il serait intéressant de connaître la valeur critique au dessus de laquelle il est nécessaire d'introduire les forces de viscosité. Cependant, pour des temps caractéristiques plus élevés, la présence de recirculations qui viennent déformer les surfaces libres empêche l'utilisation de ce code de calcul. Il est donc nécessaire d'utiliser un autre logiciel capable de simuler l'écoulement jusqu'à la fin du remplissage. Dans le chapitre suivant, on présente les résultats de calculs numériques que nous avons obtenus avec un logiciel commercialisé pour des applications de fonderie. Ces résultats sont comparés aux résultats que nous obtenons expérimentalement.

Chapitre 3

Remplissage du moule

Dans le moule industriel (décrit figure 1.1), le front de métal liquide atteint le bas des attaques des pièces, situées en face des amenées un dixième de seconde après le début du remplissage. Les vitesses peuvent donc être approchées en négligeant les forces de viscosité. Cependant, pour suivre l'évolution des vitesses dans l'ensemble du moule au delà de cette première phase du remplissage, il est peut être nécessaire de tenir compte des forces de viscosité, dues au développement de la turbulence. Cependant le logiciel que l'on se propose d'utiliser ne tient pas compte de ce terme de diffusion. Seule la viscosité dynamique est introduite dans les équations. Pour appliquer ce modèle, l'effet de la turbulence doit être négligeable. Tout comme le modèle d'écoulement potentiel, il est donc nécessaire de vérifier le domaine de validité, en effectuant des comparaisons entre expériences et modélisations numériques.

Pour observer la formation de tourbillons entraînant l'apparition de la turbulence, la pièce étudiée comporte un certains nombre de défauts. L'échelle caractéristique des tourbillons ainsi créés est de l'ordre de 4 cm. En utilisant un maillage fin, le calcul des vitesses par ce modèle est donc possible dans la période initiale du remplissage. Par contre, pour des temps caractéristiques plus long, la turbulence s'étend à des échelles plus petites. Les fluctuations de vitesse sont alors également à prendre en compte dans le modèle physique. L'influence de ce phénomène est appréhendé en fonction de la concordance des résultats de calculs et des données expérimentales, pour des temps de remplissage maximum d'une seconde.

Cette étude porte uniquement sur le remplissage du système de distribution. Pour des temps de remplissage très courts les phénomènes de solidification n'interviennent pas. Cependant en raison de la présence éventuelle de gaz dans la maquette, il est nécessaire de considérer la présence de deux phases (liquide/gaz) au cours du remplissage. Les résultats numériques sont donc obtenus avec un logiciel capable de simuler les écoulement diphasiques. Les vitesses et la pression sont calculées dans le liquide et dans le gaz. La présentation du modèle physique associé est reporté au chapitre quatre.

Les résultats expérimentaux proviennent principalement de l'enregistrement vidéo des surfaces libres. En utilisant ces images stroboscopées à 25 Hz, on obtient la position

du front liquide à intervalle de temps fixe. Toutefois pour connaître plus précisément l'ordre de grandeurs des vitesses à l'intérieur du fluide, d'autres approches sont tentées.

La première approche est employée pour calculer à un instant donné les vitesses dans le domaine liquide. Celles-ci sont obtenues à partir des trajectoires de particules réparti de manière homogène dans la phase liquide et éclairées dans le plan de l'écoulement par un rayonnement laser.

La deuxième approche est employée pour calculer en un point donné les fluctuations de vitesses en fonction du temps. La technique de mesure repose sur l'effet magnétohydrodynamique (MHD). Pour limiter le développement des courants induits, les expériences sont réalisées avec de l'eau saturée en chlorure de sodium. D'après le champ magnétique utilisé, les tensions doivent être de l'ordre de $100 \mu\text{V}$. Or malgré l'emploi d'électrodes à potentiel constant, un deuxième signal électrique d'ordre électrochimique vient se superposer sur celui que l'on se propose de mesurer. Le champ magnétique est donc supprimé pour effectuer des mesures électrochimiques de concentration de chlorure à la surface des électrodes. D'après les résultats obtenus ce signal électrique peut être relié aux vitesses du liquide dans les premiers instants du remplissage, lorsque les termes de diffusion chimique sont négligeables devant les termes de convection. Les résultats sont présentés à la fin de ce chapitre.

Trois configurations sont testées, cependant la géométrie bidimensionnelle décrite dans les deux premiers chapitres présente les plus grandes difficultés de modélisation. Une attention particulière est donc portée à cette pièce.

I. Constatations expérimentales

I.1. Influence de la pression du gaz

Les observations expérimentales présentées dans le premier chapitre montrent l'importance du couplage liquide/air, pour les coulées à pression atmosphérique (figure 1.3). L'entraînement du gaz par le liquide et la formation de bulles nécessitent l'utilisation d'un logiciel capable de prendre en compte les forces de traînée sur les interfaces dans une formulation diphasique des équations de Navier-Stokes. Cependant il peut être intéressant de s'affranchir de cette condition de saut en plaçant le système expérimental sous vide primaire (la pression est égale à 10^{-2}b). La phase liquide est alors entourée par des interfaces régulières. Cette approche permet de comparer l'avancée des surfaces libres avec le déplacement des interfaces calculées numériquement. La validité du modèle dépend de la concordance des résultats.

I.2. Influence du temps de remplissage sur l'apparition de la turbulence

Lors des coulées sous vide, les nombres de Reynolds sont de l'ordre de 300 000. Pour un écoulement stationnaire, aux alentours de cette valeur, les termes de diffusion dus aux fluctuations de vitesse doivent être pris en compte dans les équations de Navier-Stokes. En, utilisant un modèle à viscosité turbulente [3.1], un calcul d'ordre de grandeur conduit à des rapports entre la viscosité turbulente et la viscosité dynamique égaux au minimum à 300 .

Toutefois, lorsque les temps d'établissement de la turbulence sont supérieurs ou égaux au temps de remplissage, les valeurs de viscosité turbulente sont plus faibles. En effet, la dissipation d'énergie turbulente est confinée aux grandes échelles. Dans cette configuration, les calculs de vitesses peuvent être réalisés en négligeant les termes de viscosité.

Les essais réalisés sur maquettes portent sur des écoulements durant au maximum une seconde. Des confrontations expériences/modélisation numérique sont donc réalisées pour vérifier la validité des calculs.

II. Présentation du logiciel

Le logiciel SIMULOR utilisé pour les calculs d'écoulement à été réalisé conjointement par les entreprises PECHINEY et CISI. Le solveur écrit pour résoudre les équations de thermohydraulique, utilise la méthode des volumes finis. Les champs de vitesses sont calculés par une méthode itérative semi-implicite de prédiction-corrrection de la pression (algorithme SIMPLE). Les équations de continuité de quantité de mouvement et d'énergie sont écrites dans une formulation diphasique. Leur résolution permet la détermination des écoulements tridimensionnels dans le métal liquide et dans le gaz et de prédire le refroidissement et la solidification de l'alliage. Pour des raisons de temps de calcul, les termes de dissipation dus à la turbulence ne sont pas modélisés. L'utilisation de fractions volumiques permet de mailler précisément les géométries complexes.

III. Allure des surfaces libres

III.1. Remplissage de la maquette 2D

On se propose maintenant de comparer les images de remplissage, expérimentales et numériques, en utilisant la géométrie décrite dans le chapitre deux. A l'instant $t=0,2s$, la recirculation du fluide dans la cavité inférieure, entraîne la formation d'un tourbillon d'un diamètre voisin de 4 cm. Le temps de retournement de ce vortex est de l'ordre du dixième de seconde. Pour mieux visualiser le phénomène, l'écoulement est présenté figure 3.2 en créant, dans ce cas particulier, une différence de pression entre le réservoir et la maquette de $0,2 b$. La pression absolue de la maquette est nulle et celle dans le réservoir est de $0,2 b$. On met en évidence sur la série de photos, obtenues à partir d'images vidéo, la trajectoire circulaire décrit par la poche de gaz.

La comparaison entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux, est effectuée pour un écoulement gravitaire sous vide. Les conditions initiales sont définies en fixant:

- le vide dans la maquette et le réservoir
- une hauteur de chute totale depuis la surface libre du réservoir jusqu'au bas de la maquette de 475 mm (figure 3.1a).
- une hauteur d'eau initiale dans le réservoir supérieure de 33 mm, une fois la quenouille soulevée (figure 3.1a).

Les calculs sont réalisés en maillant l'ensemble du système. Cette mesure permet de ne considérer que la condition aux limites aux parois: $v = 0$.

La comparaison des écoulements est présentée figure 3.3. Le temps de remplissage et l'échelle des vitesses calculées numériquement sont portés sur chaque graphique à l'angle supérieur droit. L'allure générale de l'écoulement est conservée et les temps de remplissage sont équivalents. On remarque la bonne prédiction du tourbillon central. Celui-ci est dû à la dissymétrie occasionnée par la présence de l'amenée horizontale. La recirculation visible sur la partie gauche de la cavité entraîne un changement de direction des lignes de courant et une augmentation de la vitesse dans la partie horizontale.

Bien que les temps d'apparition de la turbulence et les temps de remplissage soient cette fois du même ordre de grandeur, on constate une bonne concordance des résultats.

III.2. Remplissage de l'éprouvette verticale

Une deuxième comparaison est effectuée en utilisant cette fois-ci la géométrie représentant un quart du moule en croix (figure 1.4). Pour respecter les conditions de symétrie, la maquette est inclinée d'un degré par rapport à la verticale. Le jet est ainsi plaqué contre la paroi de droite. Cette condition est reproduite numériquement en projetant les forces de gravité dans la direction horizontale et verticale. Les conditions initiales sont présentées sur la figure 3.1b. L'écoulement gravitaire est réalisé sous vide. La hauteur d'eau initiale dans le réservoir est de 24 mm et la hauteur de chute totale est de 540 mm.

L'avancée du front liquide calculée numériquement est présentée sur des graphiques séparés les uns des autres par un intervalle de temps de 0,05 s (figure 3.4). Ces résultats sont comparés aux images obtenues expérimentalement. Chaque image est séparée de la suivante par 0,05s. On constate que l'allure générale de l'écoulement est conservé. En particulier, la contraction du jet est visible dans les deux cas en fin de chute. De même la recirculation du liquide à l'extrémité de l'attaque horizontale visible expérimentalement est reproduite numériquement. Cependant, sur cette série de photos, on constate que l'avancée du fluide est plus rapide dans le cas de l'expérience. Ceci peut s'expliquer soit par la précision du maillage soit par les conditions de frottement aux parois. Il est possible qu'expérimentalement, le contact entre le liquide et la paroi soit imparfait. Dans ce cas les forces de frottement induiraient un retard du liquide dans la prédiction de l'écoulement par résolution numérique. Cependant, il est à signaler que le nombre de mailles utilisées pour le calcul est réduit. On compte uniquement cinq mailles dans l'épaisseur du canal, il est donc possible que le retard soit dû à un effet de maillage. Dans ces conditions, les écarts de temps sont de l'ordre de 30%. Cependant les valeurs de vitesse d'interface obtenues à partir de résultats expérimentaux sont très proches des valeurs numériques dans la partie verticale. Les comparaisons sont présentées sur la figure 3.5. Les écarts sont de l'ordre de 10%. Les vitesses sont calculées en utilisant un profil de couche limite laminaire à proximité des parois.

Pour ces deux géométries, bien que la dissipation turbulente soit négligée, les différences d'écoulement observées entre les images expérimentales et numériques restent faibles. Cette simplification formulée parallèlement par B. Minaie, K.A. Stelson et V.R. Voller [3.2] est donc admise pour des temps de remplissage de l'ordre de la seconde.

Cependant pour des temps caractéristiques plus élevés, il serait intéressant d'évaluer l'ordre de grandeur du terme de dissipation visqueuse, en effectuant des

simulations numériques de remplissage avec par exemple un modèle à viscosité turbulente. Cette démarche a d'ailleurs été entreprise par Z. Abdhullah et M. Salcudean pour des temps de remplissage voisins de dix secondes [3.3]. Les figures reportées dans leur article représentent des rapports de la viscosité effective sur la viscosité dynamique inférieurs à 100. Cependant, dans certaines régions, il existerait des valeurs plus importantes de deux à trois ordres de grandeur. Pour des temps de remplissage proches de dix secondes, la dissipation turbulente serait donc importante dans les zones à forts gradients de vitesses.

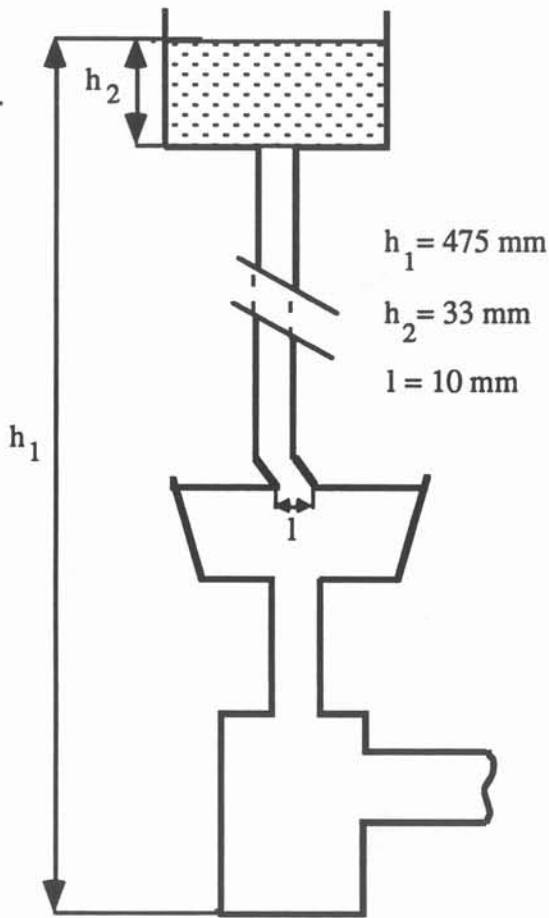


figure 3.1 a

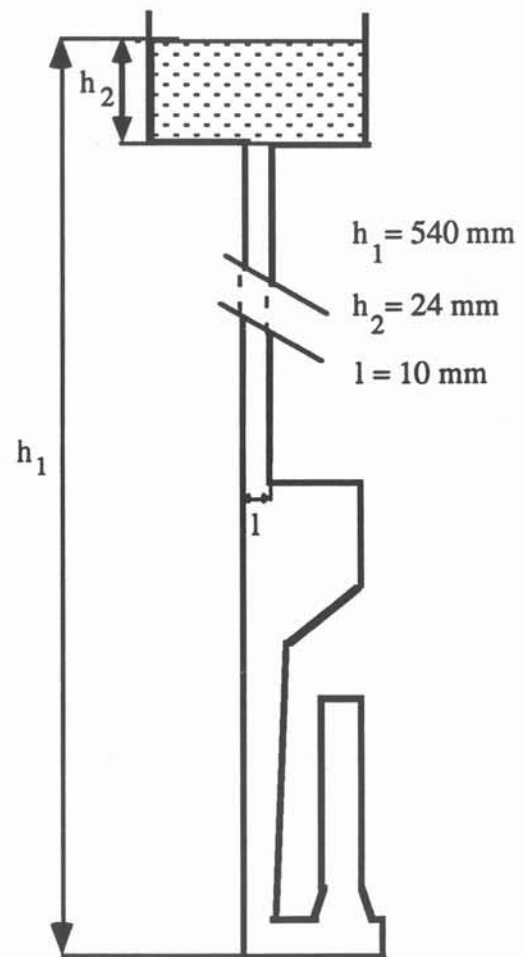
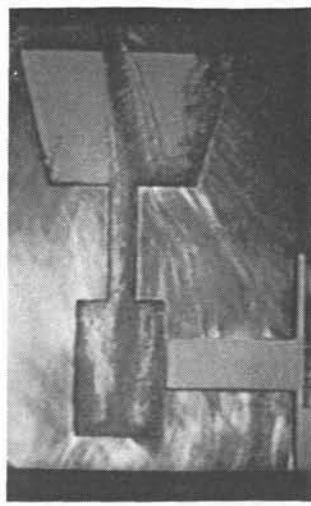


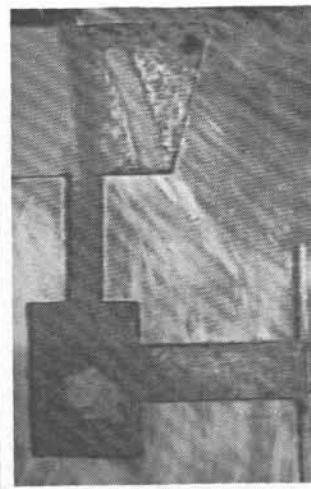
figure 3.1 b

Figure 3.1

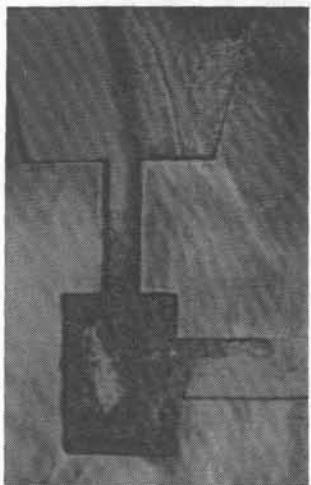
Condition initiale pour le calcul du remplissage du modèle 2D (figure 3.1 a)
et pour le calcul du remplissage de l'éprouvette verticale (figure 3.1 b)



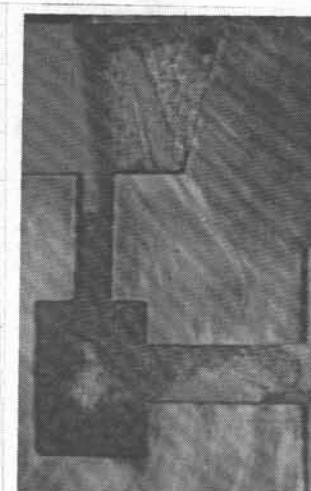
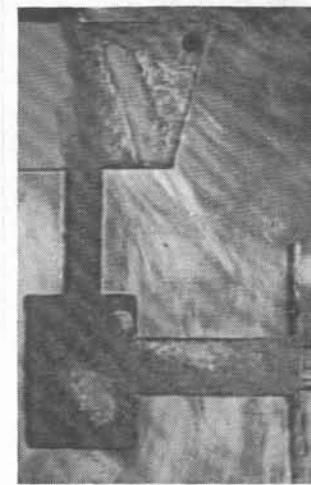
$t = 0,12 \text{ s}$



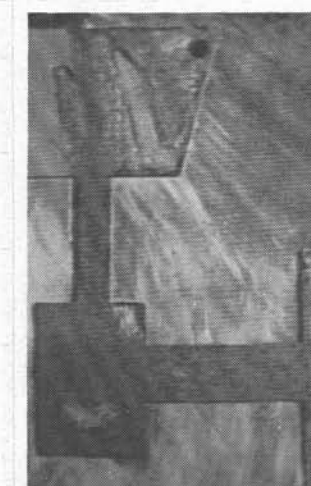
$t = 0,28 \text{ s}$



$t = 0,22 \text{ s}$



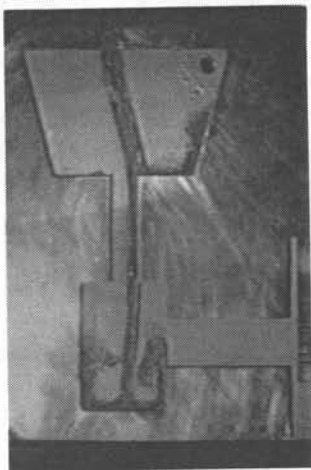
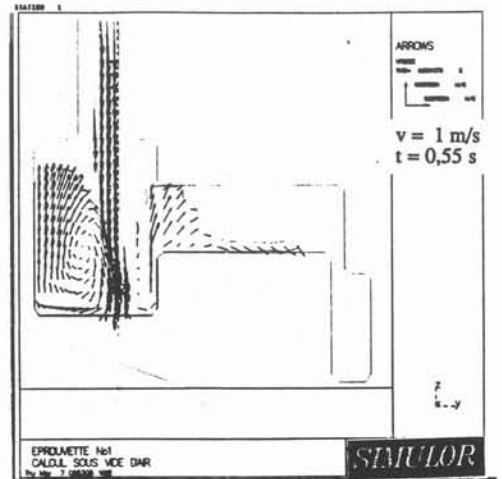
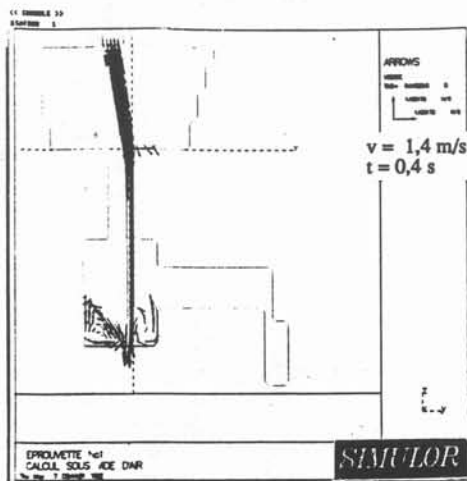
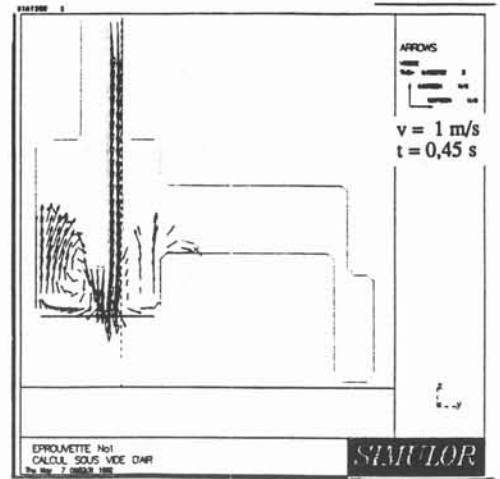
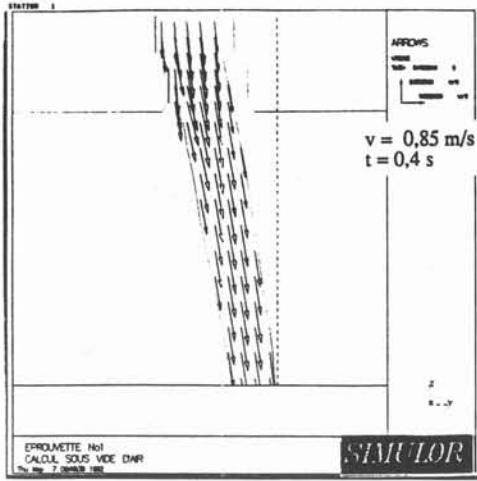
$t = 0,26 \text{ s}$



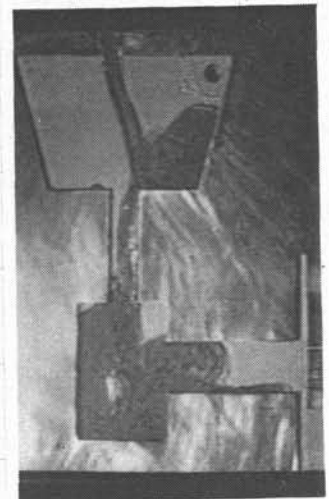
$t = 0,30 \text{ s}$

Figure 3.2

Visualisation du tourbillon pendant le remplissage du profil bidimensionnel.
Ecoulement gravitaire sous pression ($\Delta P = 0,2b$)



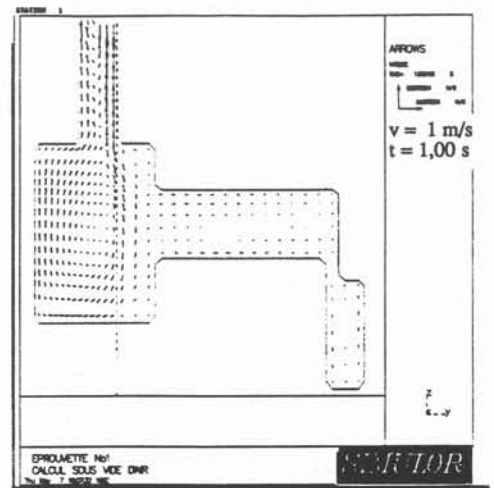
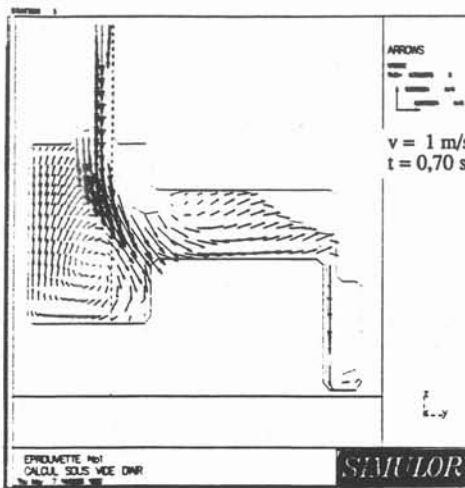
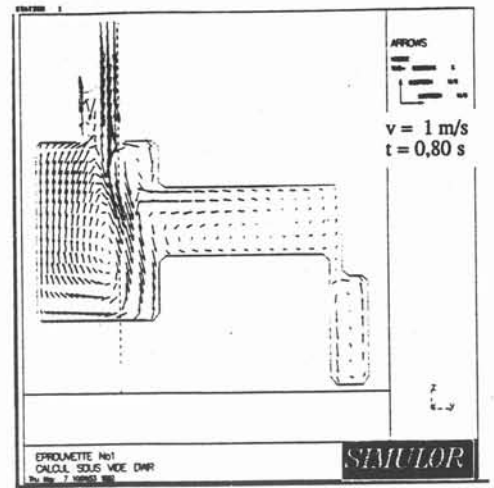
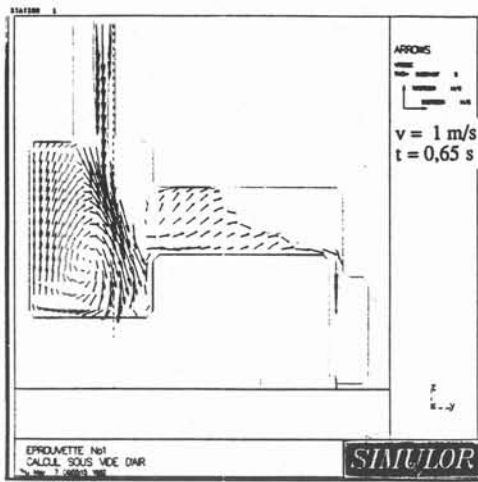
$t = 0,30 \text{ s}$



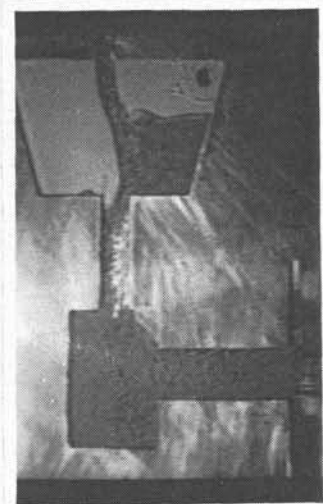
$t = 0,60 \text{ s}$

Figure 3.3:

Comparaison des simulations numériques et expérimentales pour un écoulement gravitaire sous vide (hauteur de chute : 44 cm)



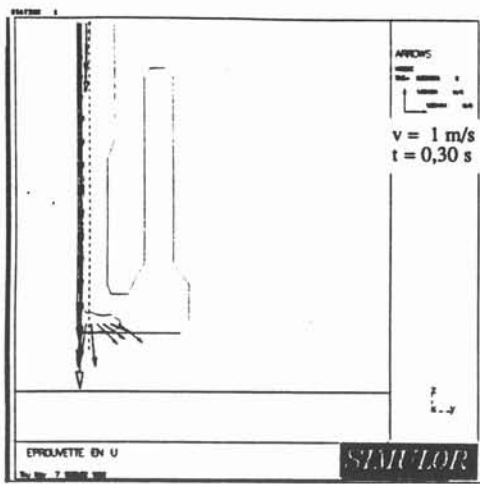
t = 0,80 s



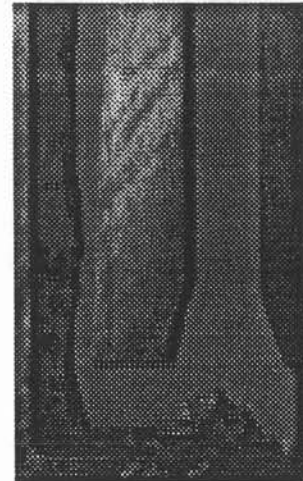
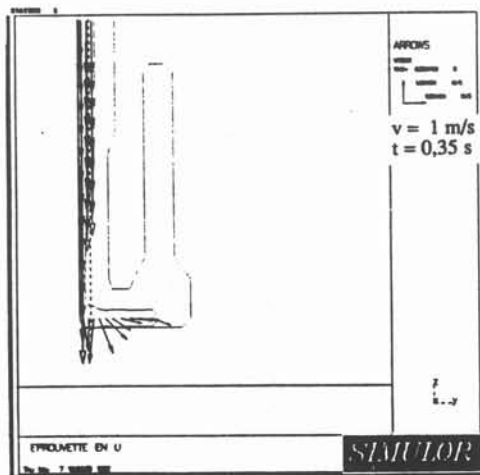
t = 1,00 s

Figure 3.3 bis :

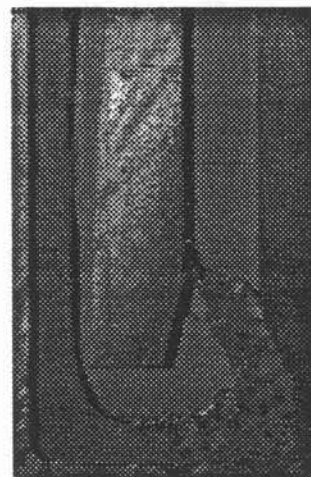
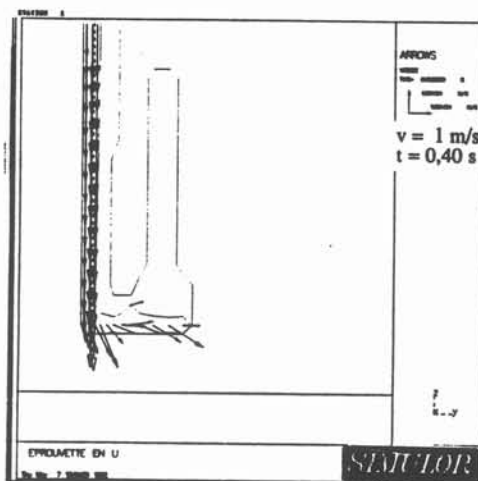
Suite de la comparaison des simulations numériques et expérimentales pour un écoulement gravitaire sous vide (hauteur de chute : 44 cm)



$t = 0,30 \text{ s}$

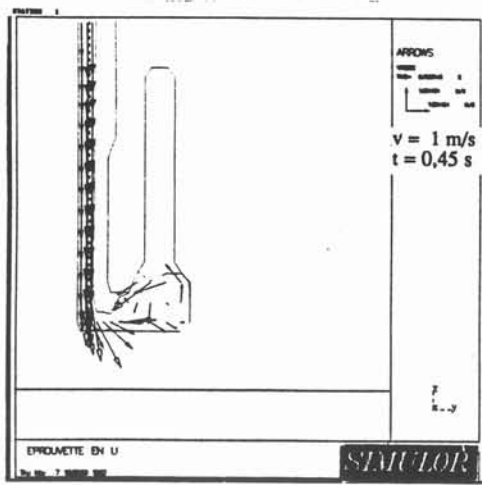


$t = 0,34 \text{ s}$

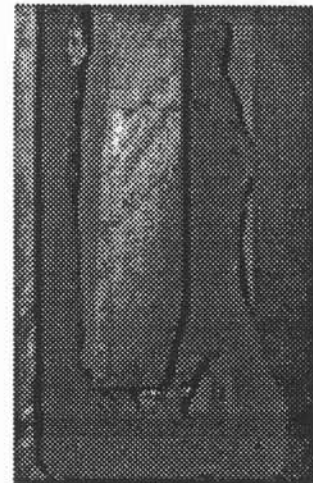
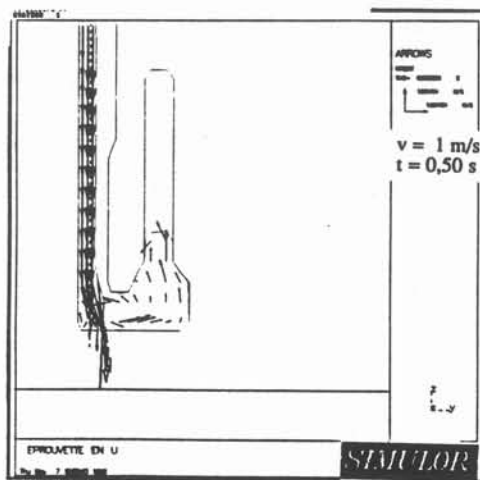


$t = 0,38 \text{ s}$

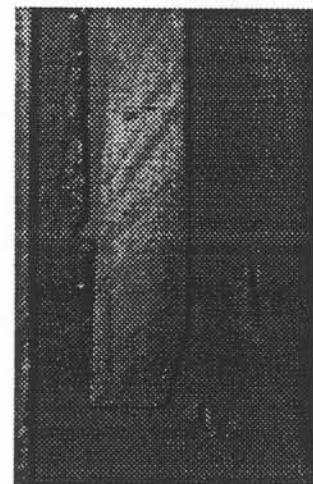
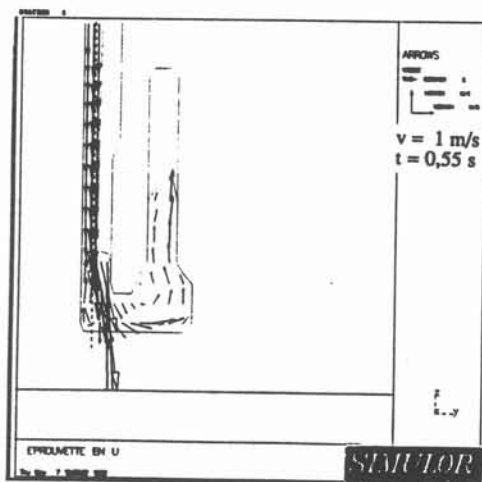
Figure 3.4 :
 Comparaison des simulations numériques et expérimentales pour un écoulement gravitaire sous vide (hauteur de chute : 51 cm)



$t = 0,42 \text{ s}$



$t = 0,46 \text{ s}$



$t = 0,50 \text{ s}$

Figure 3.4 bis :

Suite de la comparaison des simulations numériques et expérimentales pour un écoulement gravitaire sous vide (hauteur de chute : 51 cm)

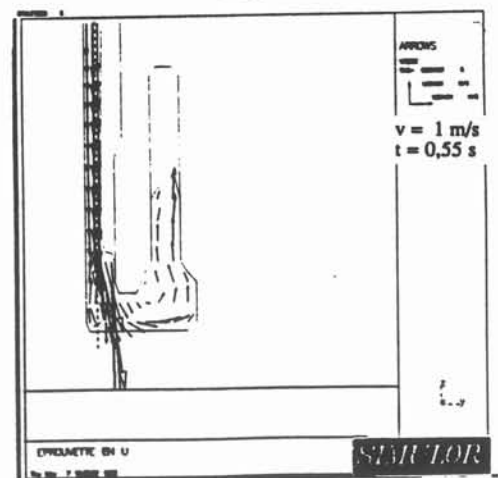
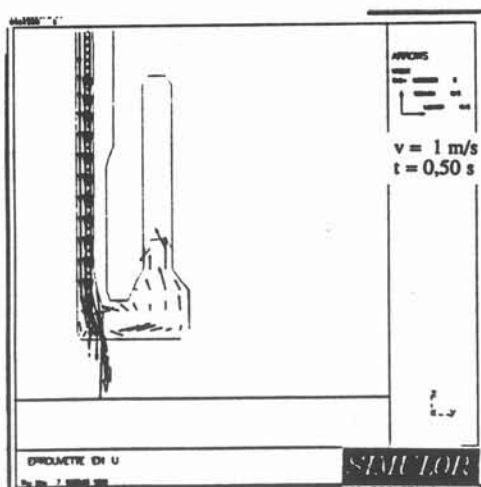
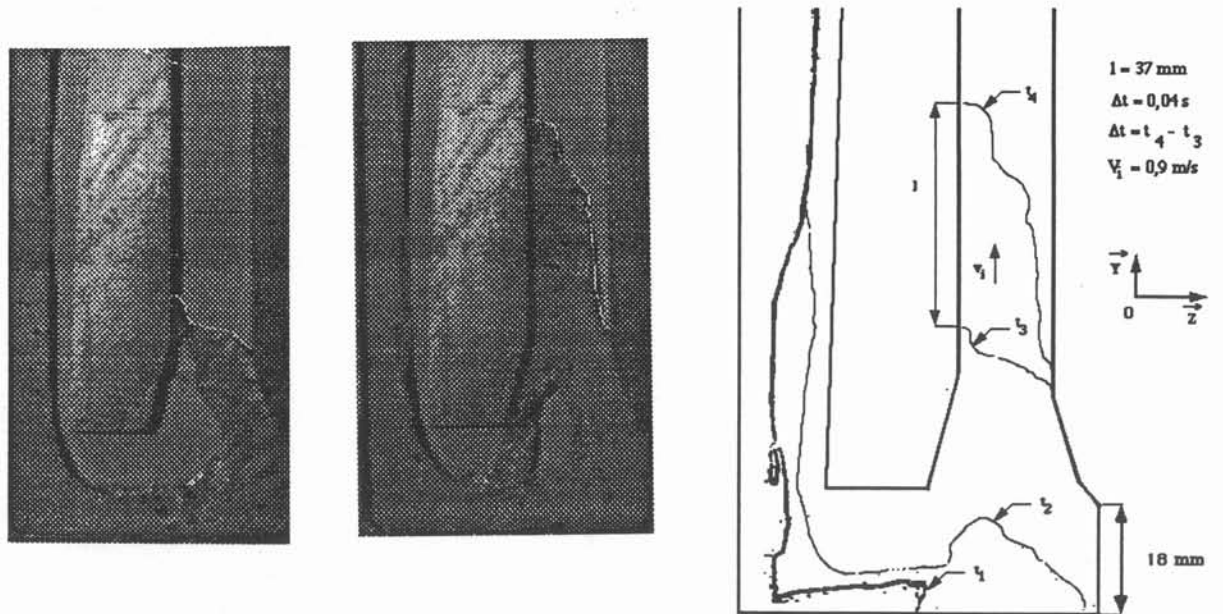


Figure 3.5:
 Comparaison des vitesses d'interface pendant le remplissage de l'éprouvette verticale.
 Les vitesses du front liquide sont de l'ordre de 0,9 m/s.

IV. Mesure des vitesses à l'intérieur du liquide

IV.1. Mesure de vitesses par photographies

Pour compléter les mesures de vitesses réalisées à partir du déplacement des surfaces libres, nous présentons maintenant une autre technique de visualisation. Cette nouvelle méthode permet de mesurer les vitesses dans le liquide en différents points à un instant donné.

Les vitesses sont calculées dans de l'eau à partir des trajectoires de particules prises sur des intervalles de temps très courts. Chaque trajectoire est définie à partir de quatre points. La source lumineuse provient d'un rayon laser, arrivant latéralement au plan de l'écoulement sur la maquette bidimensionnelle transparente. Le rayon est stroboscopé quatre fois pendant le temps d'ouverture de l'obturateur de l'appareil photo. La vitesse d'obturation est fonction des vitesses du liquide et l'ouverture du diaphragme dépend de la puissance du rayon laser. Un soin particulier est apporté au polissage des champs de la maquette pour éviter la diffraction du rayon dans le sens de l'épaisseur. On visualise ainsi les composantes de la vitesse dans un plan lumineux d'un millimètre d'épaisseur. Le groupement de quatre points laisse supposer que le mouvement de la particule considérée est bidimensionnel. Les particules doivent être de même densité que le liquide, et suffisamment petites pour éviter toute différence de vitesses entre les deux phases. On utilise donc des billes de polystyrène calibrées à 100 μm . Leur densité est légèrement supérieure à celle de l'eau douce. La masse volumique du liquide est donc légèrement modifiée en ajoutant du chlorure de sodium, jusqu'à obtention de l'équilibre.

Les essais sont réalisés sur une géométrie comportant deux marches en escalier, correspondant au modèle de Pellini. Les renseignements obtenus sur la direction et la norme des vitesses à l'intérieur du liquide viennent compléter les premiers résultats de visualisation. Tandis que le temps de remplissage et les vitesses d'interfaces sont calculées à partir de la première méthode, l'allure générale des lignes de courant est approchée par cette nouvelle technique.

Ces données sont comparées aux résultats de modélisation de façon qualitative, en raison des différences de conditions initiales. En effet cette fois-ci les essais ont lieu à pression ambiante. La présence d'air en forte quantité induit dans le liquide des variations de vitesses importantes. D'autre part les défauts de géométrie du système d'alimentation dus à l'emploi d'une plaque intermédiaire en plexiglass à la place de la plaque en laiton entraînent des différences de vitesses sensibles en début de coulée, par

rapport au système initial. Les vitesses mesurées à partir des surfaces libres digitalisées sont présentées sur la figure 3.6. Celles-ci sont de l'ordre de 0,8 m/s tandis que celles obtenues numériquement sont égales à 0,4 m/s (figure 3.7). La différence la plus importante réside dans l'allure de la surface libre présentée sur la figure 3.8. Le front liquide vient heurter la paroi supérieure de la cavité, alors que numériquement le niveau de l'eau ne dépasse guère la hauteur de la première marche. Cependant ces différences s'estompent au cours du remplissage. Après 0,4 s, la forme de la surface libre obtenue expérimentalement (figure 3.10), et les vitesses mesurées à partir des trajectoires des particules (figure 3.12) sont équivalentes à celles obtenues numériquement (figure 3.9) à l'instant $t = 0,65$ s.

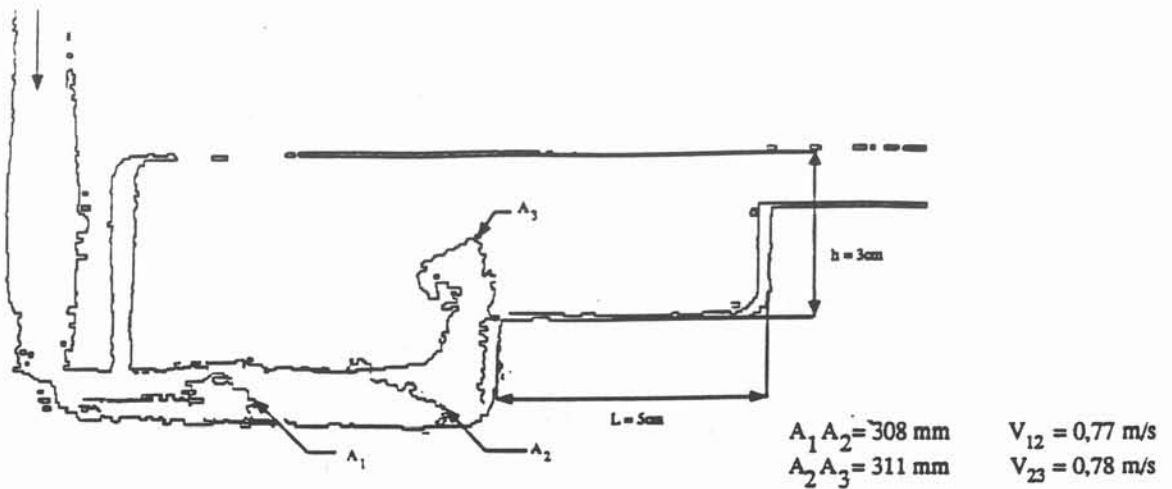


Figure 3.6:

Image digitalisée obtenue à partir d'une séquence vidéo. Le pas de temps séparant chaque interfaces est de 0,04 s. La vitesse des surfaces libres est calculée sur les segments $A_1 A_2$ et $A_2 A_3$

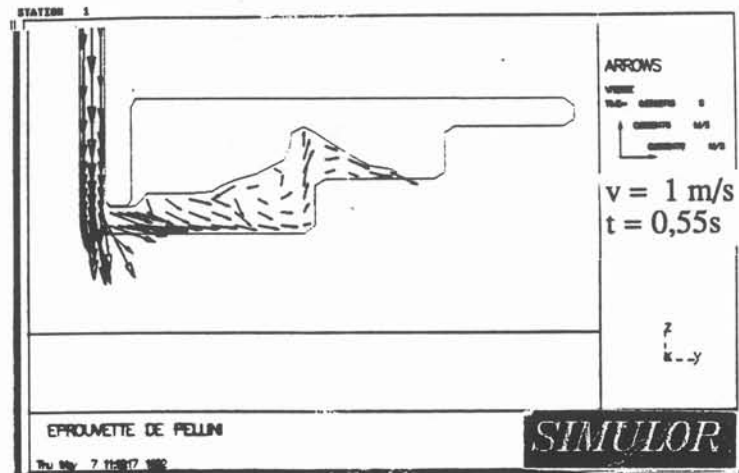


Figure 3.7:

Forme de la surface libre à $t = 0,55$ s. Les vitesses calculées numériquement sont de l'ordre de 0,4 m/s à proximité de la paroi inférieure horizontale.

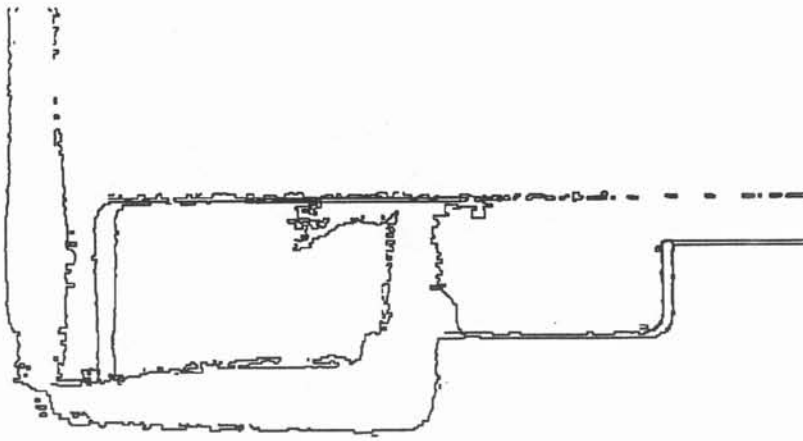


Figure 3.8:
Image digitalisée de la surface libre à $t = 0,2s$. Le front liquide vient heurter la paroi supérieure horizontale.

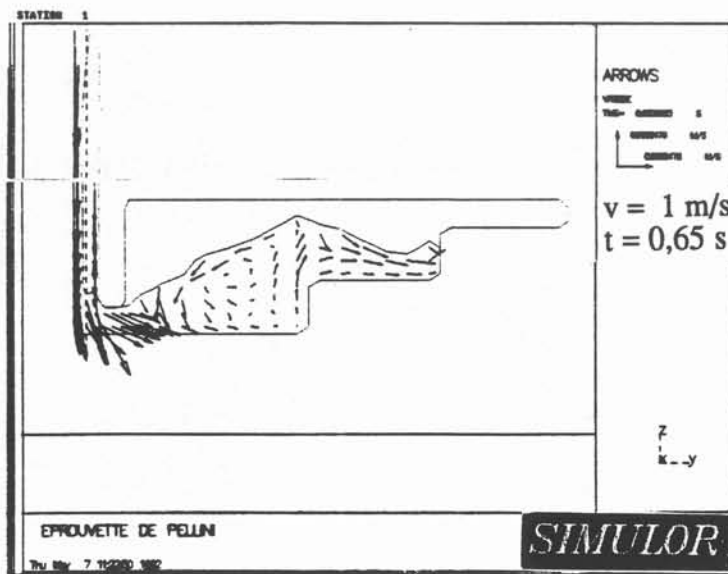


Figure 3.9:
Allure de la surface libre et du champ de vitesse calculés numériquement à $t = 0,65s$.

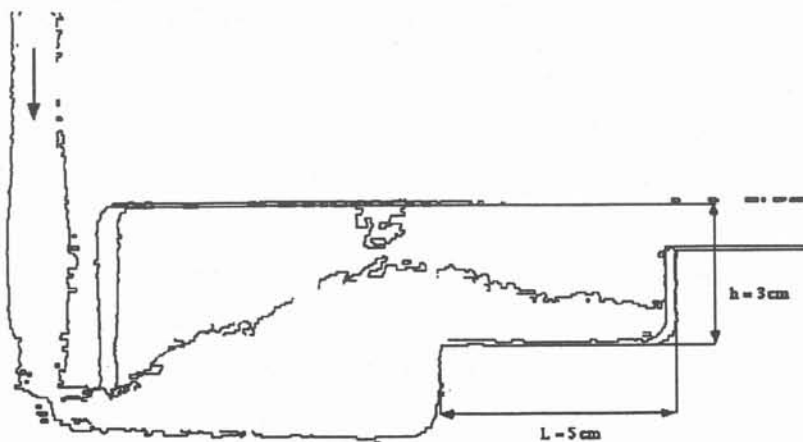


Figure 3.10:
Image digitalisée obtenue à partir d'une séquence vidéo. Visualisation de la surface libre à l'instant $t = 0,4 s$



Figure 3.11 b

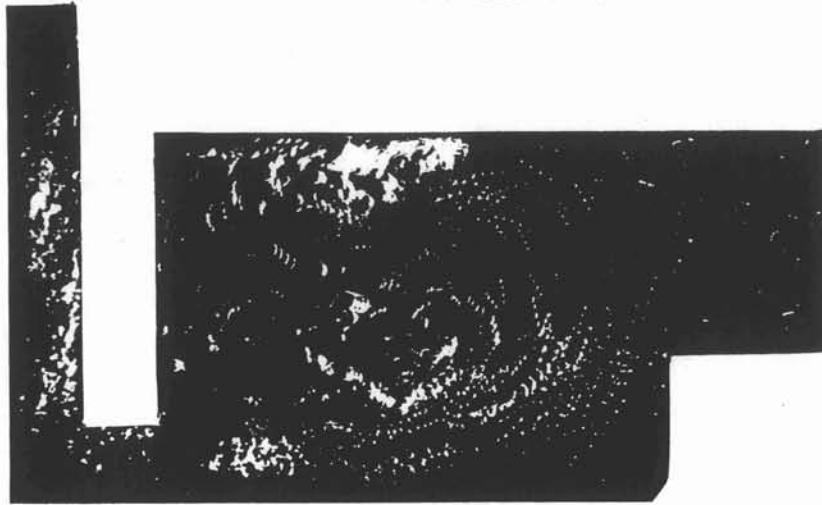


Figure 3.11 a

Figure 3.11:
Trajectoires de particules obtenues par photographies au cours du remplissage de l'éprouvette de Pellini

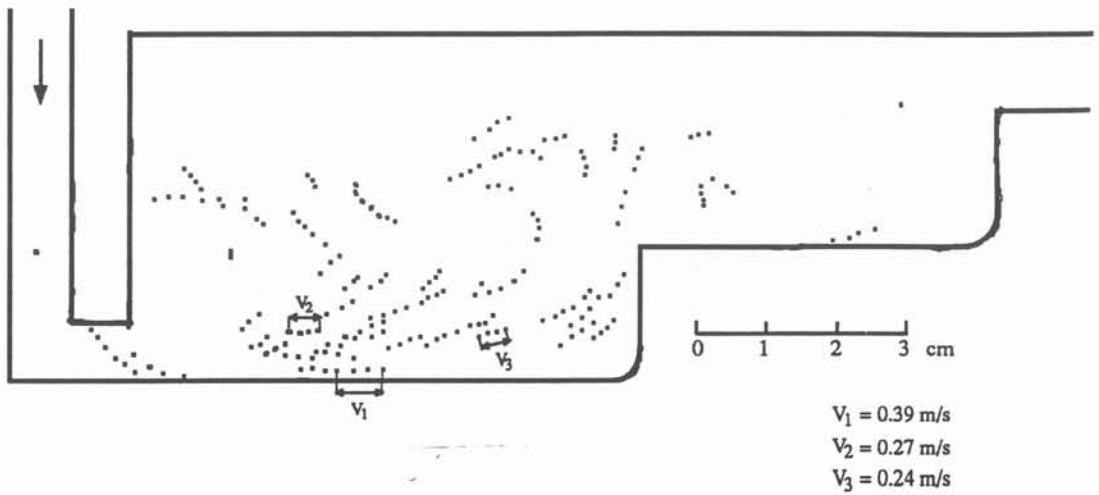


Figure 3.12:
Trajectoires de particules obtenues après digitalisation de la photographie 3.11 a

IV.2. Mesure par utilisation d'un effet MHD

La visualisation des surfaces libres permet de comparer les temps de remplissage aux valeurs calculées numériquement. La visualisation des trajectoires des particules permet de calculer la vitesse dans le liquide en plusieurs points au même instant. Cependant, il est intéressant de mesurer les variations de vitesses en fonction du temps afin de vérifier si les valeurs de vitesses moyennes sont équivalentes à celles calculées numériquement. Si des écarts sont constatés ce type de mesure permettrait de connaître les amplitudes et les fréquences des fluctuations des vitesses, et de connaître l'ordre de grandeur des termes de diffusion turbulente en des points bien précis. On évaluerait ainsi l'erreur résultant de l'utilisation d'un modèle tenant compte uniquement des forces de viscosité en régime laminaire.

Trois méthodes de mesure peuvent être utilisées :

- les mesures de concentration
- les mesures par ultrason
- les mesures par effet MHD

Ces trois méthodes sont présentées dans Encyclopedia of Fluid Mechanisms édité par N.P. Cheremisinoff [3.4]. Les deux dernières présentent l'avantage de pouvoir être utilisées dans les alliages métalliques fondus. Il est à noter que les techniques de mesure par visualisation sont aussi présentées dans cet ouvrage.

La méthode de mesure par ultrason est généralement utilisée dans les écoulements diphasiques pour déterminer les vitesses et la tailles des bulles transportées dans la phase liquide [3.5]. Cette technique utilise l'effet Doppler. Une cellule céramique émettrice/réceptrice mesure le déphasage du signal réfléchi au niveau de l'interface en fonction de sa vitesse propre. Dans le cas des métaux liquides cette méthode est utilisée pour évaluer les vitesses d'interfaces liquide/solide [3.6]. Cette approche peut être étendue aux mesures de vitesses de la phase liquide en utilisant les impuretés de petit diamètre transportées dans les alliages fondus.

Une autre technique, fondée sur l'effet MHD, peut être employée pour mesurer les vitesses. Des essais de ce type ont été réalisés par Vivès et Ricoud en utilisant des sondes de trois millimètres de diamètre placées dans un métal liquide [3.7]. Celles-ci sont constituées de deux électrodes entourées d'un aimant permanent. La différence de potentiel mesurée est directement proportionnelle à la vitesse, pour un champ magnétique constant. D'autres capteurs ont été réalisés en faisant varier les caractéristiques du champ

magnétique. Ceux-ci sont présentés par Bevir [3.8]. Ce type de mesure a été expérimenté par I. Onnaka, M. Kaiso [3.9] pour vérifier des simulations de remplissage sur éprouvettes.

Dans le cas des écoulements bidimensionnels, cette technique peut être étendue aux mesures de vitesses, en plaçant des électrodes perpendiculairement à l'écoulement. Seule leur extrémité est en contact avec le liquide. Les perturbations sont donc limitées. Les sens de l'écoulement, du champ magnétique et du champ électrique sont représentés sur la figure 3.15.

IV.2.1. Principe de la mesure

Si les courants induits sont nuls, pour un champ magnétique constant et uniforme, la vitesse est proportionnelle à la tension. Cette condition est donc à vérifier, d'après les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{U} & (u, v, 0) \\ \vec{B} & (0, 0, B_0+b) \\ \vec{J} & (j_x, j_y, 0) \\ \vec{E} & (e_x, e_y, 0) \end{aligned}$$

En l'absence de courants induits, les fluctuations du champ magnétique tendent vers zéro. Les calculs présentés dans l'annexe 3 permettent de supposer cette condition vérifiée. La composante du champ \vec{B} est donc égale à B_0

D'après la loi d'Ohm :

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{U} \wedge \vec{B}) \quad (3.1)$$

Si les courants induits sont nuls, on obtient :

$$\vec{E} + \vec{U} \wedge \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

En supposant que le champ électrique dérive d'un potentiel (annexe 3)

$$\vec{E} = - \text{grad } \phi , \quad (3.3)$$

la tension mesurée sur le segment AB peut être reliée linéairement à la composante de la vitesse dans la direction perpendiculaire :

$$\Delta\phi_{AB} = u B_0 \Delta L_{AB} \quad (3.4)$$

Remarque:

Dans un écoulement bidimensionnel, d'après l'équation de continuité, les lignes de courants sont confondues avec les équipotentielles du champ électrique.

$$\int_{AB} \vec{\text{grad}} \phi \cdot \vec{dl} = \int_{AB} B_0 \vec{\text{grad}} \Psi \cdot \vec{dl} \quad (3.5)$$

avec la fonction de courant :

$$\vec{U} \begin{cases} u = - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases}$$

IV.2.2. Développement des courants induits

Pour que la mesure garde sa validité, les courants induits doivent être négligeables (eq 3.2). Il est donc nécessaire d'utiliser des parois isolantes pour qu'à l'interface on puisse appliquer la condition aux limites :

$$\vec{j} \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.6)$$

On empêche ainsi les courants de se reboucler.

Cependant, malgré cette précaution, les courants induits se rebouclent près des parois dans une épaisseur appelée couche de Hartmann correspondant aux variations du courant électrique suivant la direction perpendiculaire à l'interface [3.10]. La mesure est donc possible uniquement si le temps d'établissement des couches de Hartmann est supérieur au temps du remplissage. L'équation de quantité de mouvement est alors réduite de manière à définir ce nouveau temps caractéristique :

$$\frac{d\vec{U}^*}{dt^*} = - \vec{\nabla} \frac{P^*}{\rho^*} + \frac{1}{Fr} \vec{g}^* + \frac{1}{Re} v^* \nabla^2 U^* + \frac{Ha^2}{Re} \frac{1}{\rho^*} (\vec{J}^* \wedge \vec{B}^*) \quad (3.7)$$

avec les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\begin{array}{llll} x^* = \frac{x}{L} & \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0} & g^* = \frac{g}{g_0} & t^* = \frac{t}{L/V} \\ y^* = \frac{y}{L} & v^* = \frac{v}{v_0} & B^* = \frac{B}{B_0} & P^* = \frac{P}{\rho_0 V^2} \\ z^* = \frac{z}{l} & \sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma_0} & U^* = \frac{U}{V} & J^* = \frac{J}{\sigma_0 V B_0} \end{array}$$

et les nombres sans dimensions :

$$Re = \frac{VL}{v_0} \quad \text{nombre de Reynolds}$$

$$Fr = \frac{V^2}{g_0 L} \quad \text{nombre de Froude}$$

$$Ha = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho_0 v_0}} B_0 L \quad \text{nombre de Hartmann}$$

avec: $\left\{ \begin{array}{l} V : \text{Vitesse d'entrée} \\ L : \text{Longueur de remplissage} \\ l : \text{Largeur dans la direction Oz entre les deux parois} \end{array} \right.$

Le temps Joule correspondant au temps d'établissement des couches de Hartmann. Celui-ci se déduit du groupement adimensionnel présent dans le dernier terme de l'équation 3.7:

$$\frac{t_j}{\tau_r} = \frac{Ha^2}{Re} \quad \Rightarrow \quad \text{temps Joule : } t_j = \frac{\rho_0}{\sigma_0 B_0^2}$$

Le temps Joule est calculé à partir des propriétés physiques du métal de Wood :

$$t_j = 4 \text{ s} \quad \text{avec: } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\text{métal}} = 10^6 \Omega^{-1} \text{m}^{-1} \\ \rho_{\text{métal}} = 10,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ B_0 = 0,05 \text{ T} \end{array} \right.$$

En raison du faible écart entre le temps de remplissage et le temps Joule, les mesures risquent d'être imprécises et l'écoulement perturbé par l'apparition des forces de volume, dues à la présence du champ magnétique. Il est donc préférable d'utiliser une solution aqueuse, de conductivité plus faible. L'emploi du métal de Wood nécessite d'autre part de chauffer les parois de la maquette au dessus de la température de fusion, afin de retarder le début de solidification du métal à l'interface liquide/moule. Si cette condition n'est pas respectée, les lignes de courant électriques se reboucleront dans l'épaisseur de la couche solidifiée. En effet au lieu d'être isolantes, les parois sont alors constituées par une couche solide métallique et la condition 3.6, portant sur la condition aux limites du courant électrique, n'est plus vérifiée. En prenant de l'eau saturée en chlorure de sodium à un taux de concentration de cinq moles par litre, on obtient :

$$t_j = 1,6 \cdot 10^4 \text{ s} \quad \text{avec: } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\text{eau}} = 25 \Omega^{-1} \text{m}^{-1} \quad (1) \\ \rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ B_0 = 0,05 \text{ T} \end{array} \right.$$

(1) σ_{eau} : conductivité électrique de l'eau salée [3.10]

Ce résultat permet de négliger les courants induits par les forces de Lorentz dans l'écoulement. On peut donc appliquer la loi d'Ohm :

$$\Delta\phi_{AB} = u B_0 \Delta L_{AB} \quad (3.8)$$

IV.2.3. Signaux électrochimiques

Les premiers essais sont réalisés en plaçant seulement deux électrodes perpendiculairement à l'écoulement. Le temps caractéristique de remplissage est de l'ordre de 0,4 s et les vitesses sont proches de 1 m/s (figure 3.16). Les électrodes sont distantes l'une de l'autre d'un centimètre de façon à mesurer une tension élevée. La différence de potentiel est alors reliée à la vitesse moyennée sur le segment délimité par les capteurs C₁ et C₂.

La tension attendue d'après l'équation 3.8 est de l'ordre de :

$$\Delta\phi_{AB} = u B_0 \Delta L_{AB} \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi_{AB} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

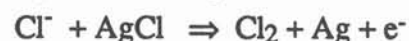
Les électrodes à membranes sélectives sont formées d'un fil d'argent recouvert d'un dépôt de chlorure d'argent pour contrôler les réactions d'oxydo-réduction. En effet, si l'on utilise des électrodes en métal inattaquable, les électrons métalliques se combinent au chlorure de sodium et entraînent le dégagement de l'oxygène [3.11] :



La rencontre des électrons libres avec des électrodes métalliques produit un signal électrique aléatoire de l'ordre de 50 mV. Par contre celui-ci est annulé à la surface de l'électrode Ag/AgCl par la réaction :



Le potentiel constant du couple Ag/AgCl est mesuré expérimentalement. Sa valeur est égale à 0,5 mV (figure 3.13). Elle diffère quelque peu de la valeur théorique donnée habituellement pour 0,2 mV [3.12]. Ce potentiel correspond à l'adsorption des ions chlorures à la surface des électrodes :



Les ions chlorures sont répartis de façon homogène dans l'électrolyte. Les potentiels électriques sont donc équivalents à chaque électrode et délivrent une tension

nulle au niveau de la centrale de mesure, que le solution saline soit en mouvement ou au repos.

En présence du champ magnétique, lorsque le fluide est en mouvement, les ions positifs et négatifs se déplacent en sens opposé sous l'effet des forces de Lorentz. Les taux d'adsorption des ions chlorures sur les deux électrodes sont donc différents. La différence de potentiel ainsi mesurée est alors reliée à la vitesse.

D'un point de vue pratique, les électrodes sont mouillées au départ pour répondre instantanément au passage de l'interface. Des mesures faites au repos donnent des temps de réponse de l'ordre de 30 ms. En raison des faibles valeurs des signaux, la tension est amplifiée d'un facteur 500, puis filtrée pour diminuer l'amplitude des fréquences parasites, dues à la transformation du courant alternatif en courant continu, nécessaire à l'alimentation de l'électro-aimant. Les premières mesures sont couvertes par un bruit important. Les appareils sont donc reliés à la terre et connectés entre eux par du fil blindé. Le schéma de montage est représenté figure 3.14.

Les essais nécessitent l'utilisation d'un amplificateur différentiel, or ceux-ci sont réalisés en reliant directement l'électrode C₁ à la terre. Cette dissymétrie induit une différence de potentiel liée au profil de concentration des ions chlorures proche de l'électrode C₂, et à la vitesse de consommation d'ions à l'interface électrode/électrolyte. Le signal électrique mesuré correspond donc à la superposition d'un effet électrochimique sur l'effet MHD. Des essais sont alors réalisés avec, puis sans champ magnétique afin de connaître son influence propre sur l'écoulement. Les courbes obtenues présentent des amplitudes comparables (figures 3.17, 3.18), quelle que soit la configuration du dispositif expérimental. La dissymétrie du montage électrique empêche donc les mesures par effet MHD. Cependant d'après les valeurs de tension électrique obtenues sans champ magnétique, comparées aux vitesses calculées numériquement, il est possible de réaliser des mesures de vitesse en début de coulée par suivi de concentration de Chlorure :

Au voisinage de l'électrode C₂ les variations de concentration en chlore sont régies par une équation de transport de convection/diffusion [3.13] :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \alpha = D_{\alpha} \nabla^2 \alpha$$

avec:

α : taux de concentration

D_{α} : coefficient de diffusion

En début de remplissage, le terme convectif est prédominant. La densité de courant est donc fortement liée à la vitesse de remplissage. Par contre lorsque les vitesses décroissent on assiste au développement d'une "couche de diffusion" autour de l'électrode dont il est nécessaire de tenir compte en fin de remplissage. Il est donc possible de relier la tension à la vitesse lorsque les termes de diffusion sont négligeables devant les termes de convection.

Les fluctuations de tensions obtenues sans champ magnétique (figure 3.19) sont comparées aux variations de vitesses calculées avec le logiciel SIMULOR (figure 3.20). En reportant la norme de la vitesse pour ne privilégier aucune direction, on observe des temps de remplissage comparables. Les limites supérieures de l'intervalle de mesure sont prises aux points A_1 et A_2 , avant que le transport des taux de concentration proche de l'électrode ne soit dû au terme de diffusion. Sur les deux courbes, expérimentale et numérique, les temps de remplissage sont de 0,4 s. On constate d'autre part la présence de deux pics l'un à deux 0,55 s, l'autre à 0,75 s. La présence de ces deux pics s'explique de la manière suivante. Au cours de la première étape (figure 3.21 a et 3.21 b) le front liquide atteint l'électrode C_2 avec une vitesse de 0,45 m/s correspondant à la valeur du premier pic, puis les trajectoires du fluide sont modifiées en raison de la présence du tourbillon. Au cours de cette deuxième étape (figure 3.21 c) la vitesse augmente au niveau de l'électrode C_2 pour atteindre la valeur de 0,75 m/s, correspondant à la valeur du deuxième pic. Au delà de cette période, la vitesse décroît jusqu'à ce que le fluide soit au repos (figure 3.21 d).

Les variations de vitesse calculées numériquement peuvent être reliées directement aux variations de tension électrique mesurée expérimentalement. Malgré la rapidité du phénomène, cette technique expérimentale apparaît bien adaptée à la caractérisation de l'écoulement en régime transitoire. D'autre part, la bonne concordance des résultats expérimentaux et numériques vient appuyer l'hypothèse selon laquelle la phase de remplissage peut être simulée numériquement en négligeant les termes de diffusion en régime turbulent.

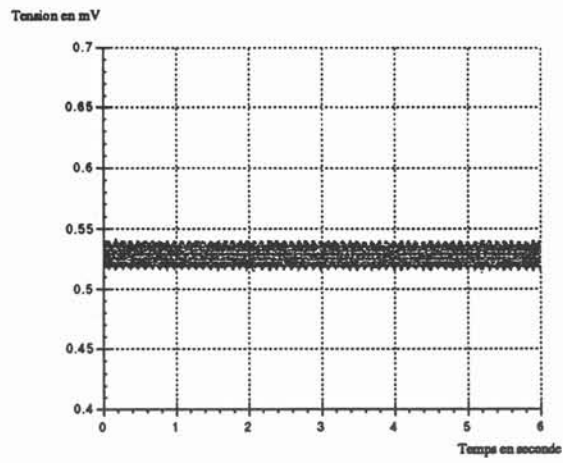


Figure 3.13 a

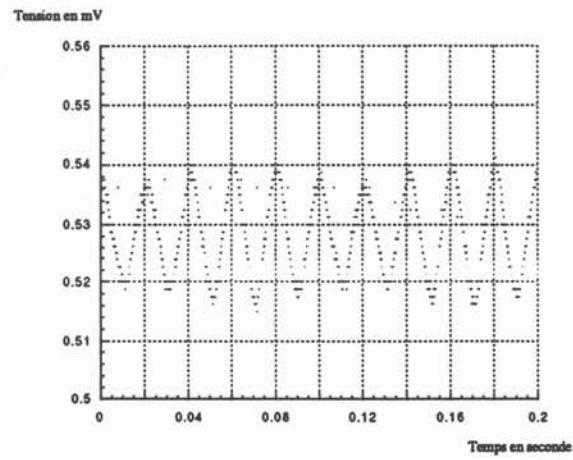


Figure 3.13 b

Figure 3.13:
Mesure de la tension au repos entre les électrodes C₁ et C₂.

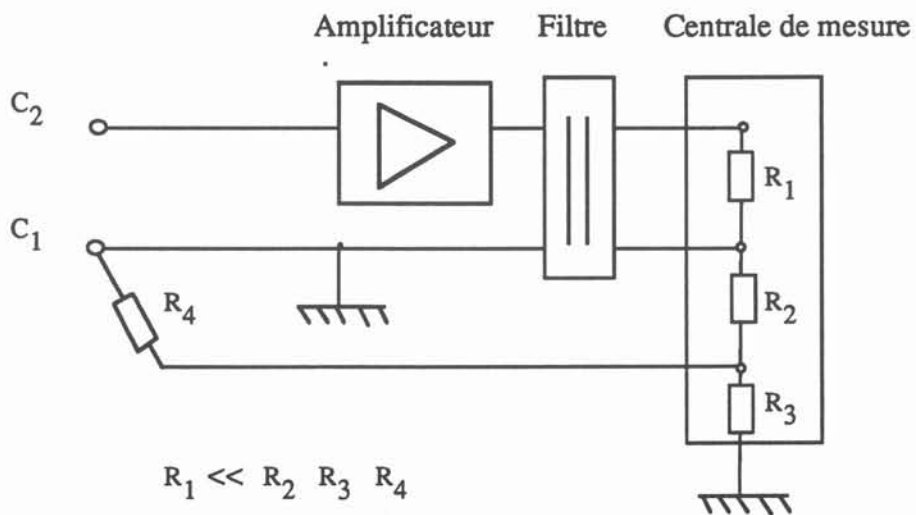


Figure 3.14:
Schéma du montage électrique.

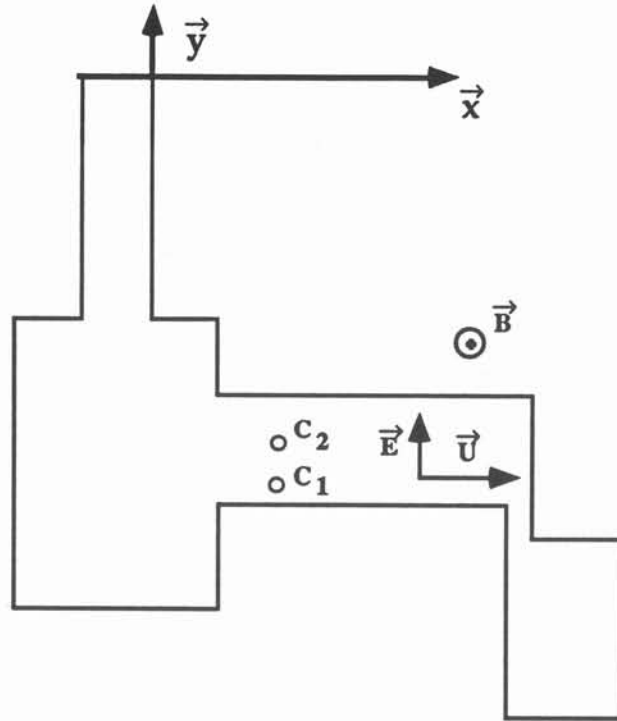


Figure 3.15:
Position des capteurs C_1 et C_2 . Représentation de \vec{U} , \vec{B} et \vec{E}

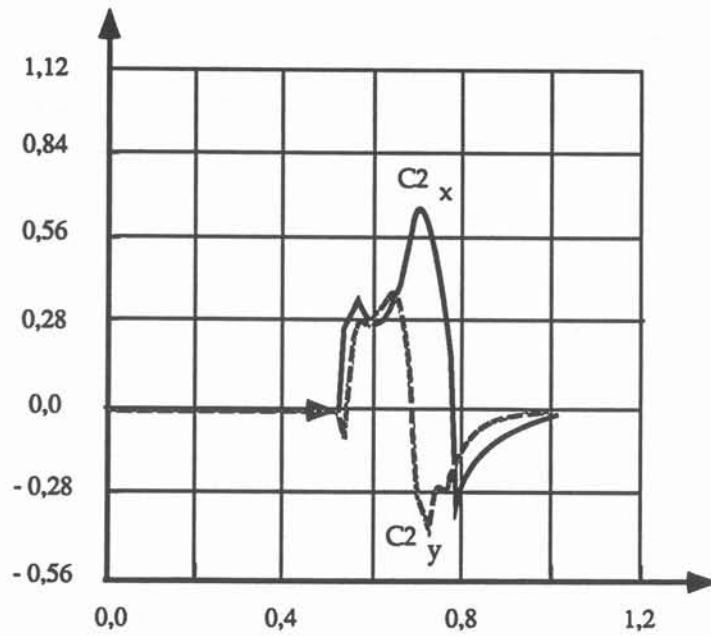


Figure 3.16:
Evolution temporelle de la vitesse suivant les composantes V_x et V_y , calculées numériquement au capteur C_2 .

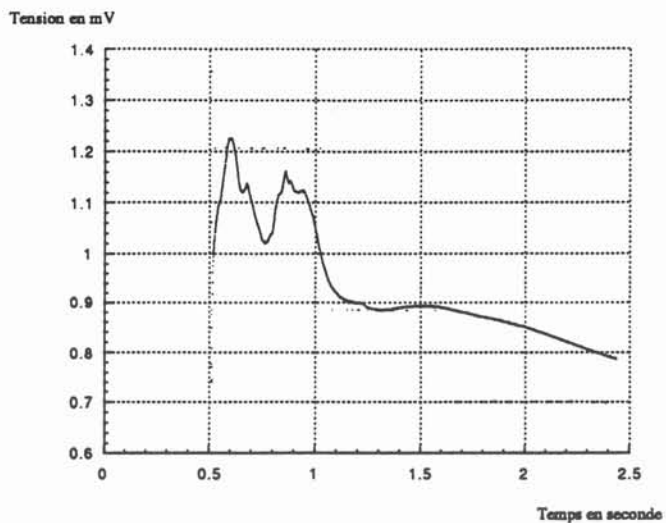


Figure 3.17 a

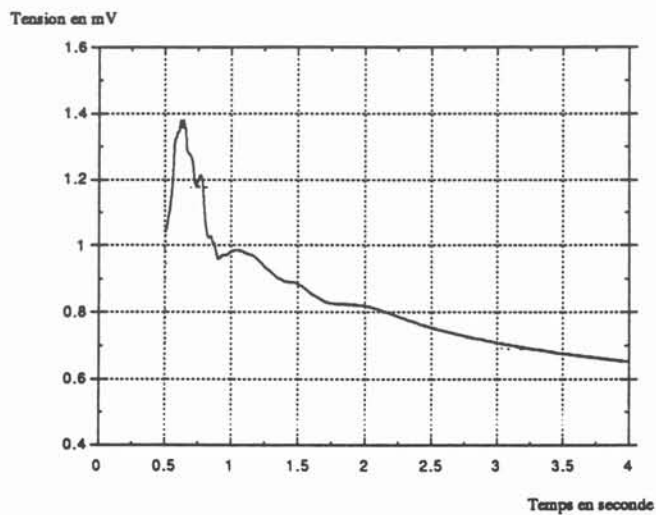


Figure 3.17 b

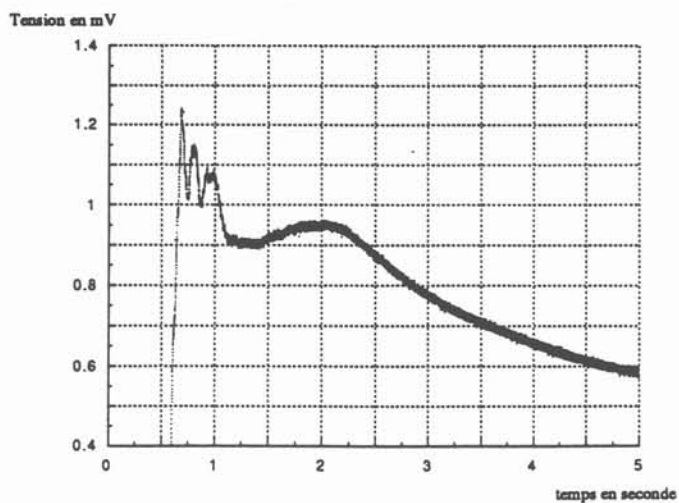


Figure 3.17 c

Figure 3.17:
 Les courbes a, b et c représentent les mesures de tension entre les électrodes C₁ et C₂ en présence d'un champ magnétique transversal de 0,05 T.

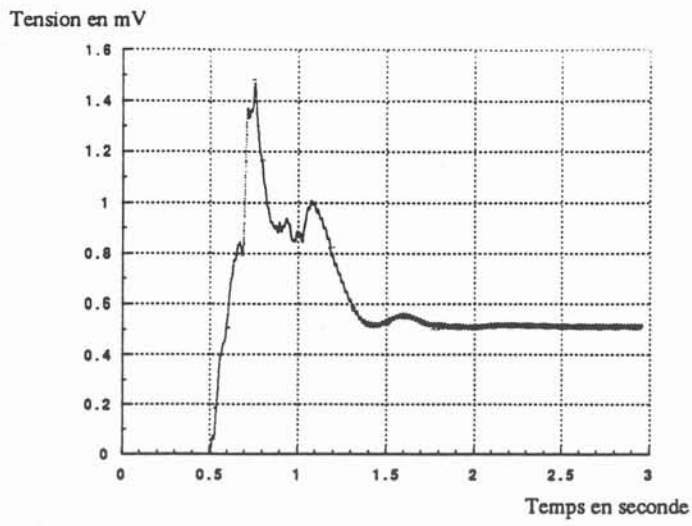


Figure 3.18 a

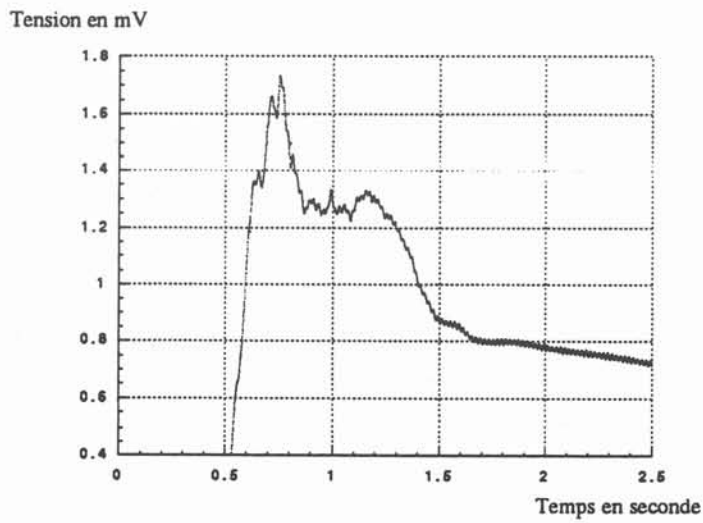


Figure 3.18 b

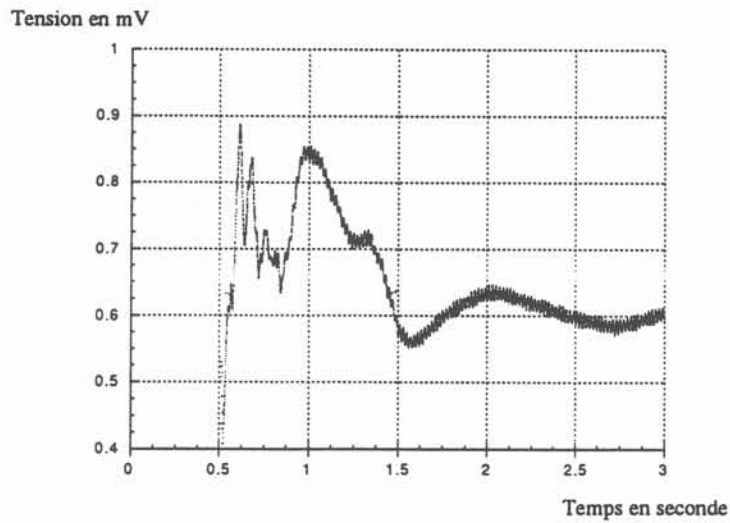


Figure 3.18 c

Figure 3.18:
 Les courbes a, b et c représentent les mesures de tension entre les électrodes C_1 et C_2 en l'absence de champ magnétique.

Norme de V en m/s

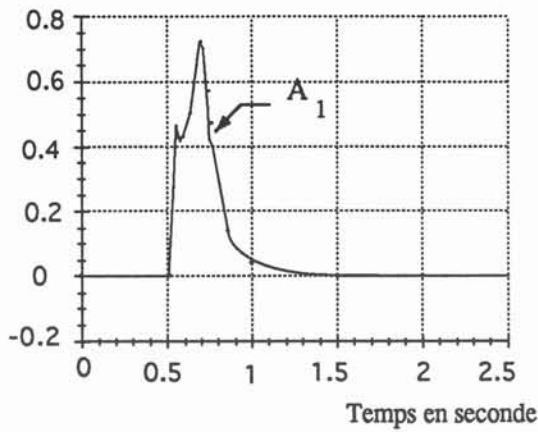


Figure 3.19:

Norme de la vitesse calculée numériquement au capteur C₂.

Tension en mV

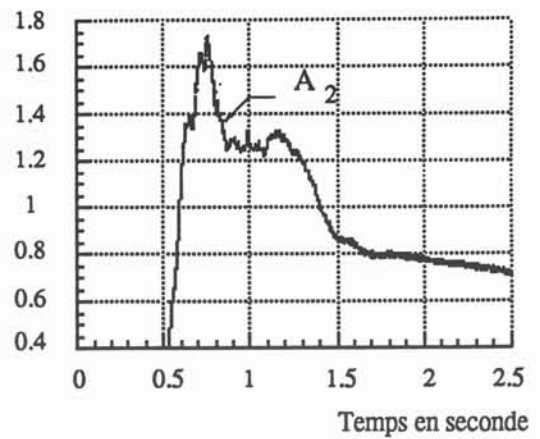


Figure 3.20:

Tension électrique entre les électrodes C₁ et C₂, due à la variation de concentration de ions chlorures à la surface de l'électrode C₂.

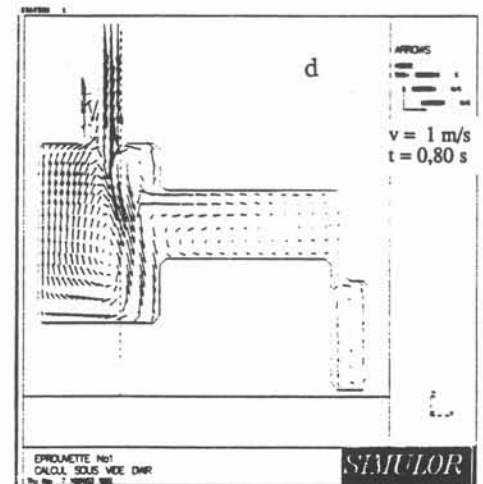
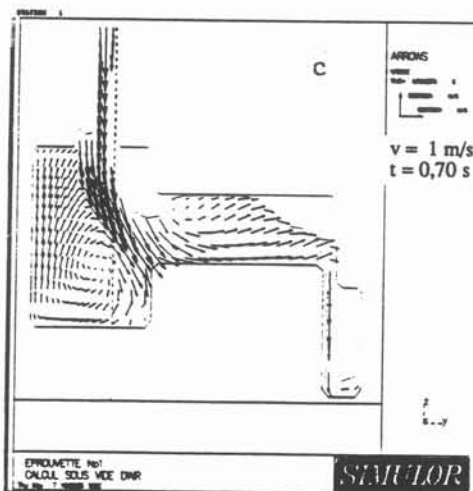
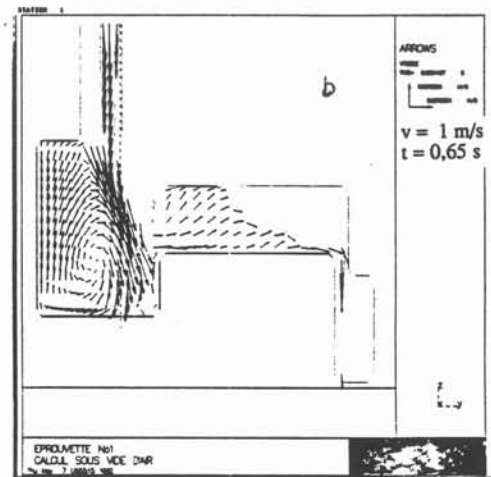
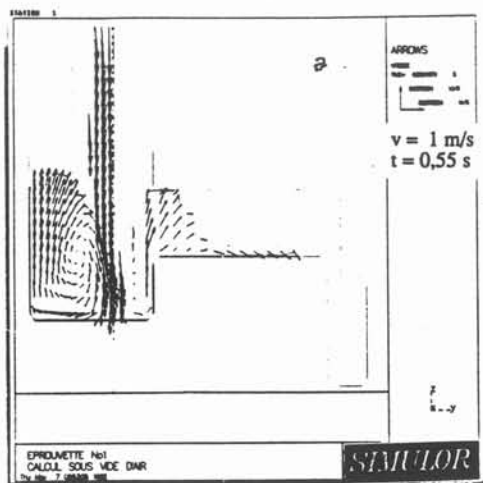


Figure 3.21:

Champs de vitesse à différentes étapes du remplissage.

Conclusion

Actuellement ni les modélisations numériques ni les mesures expérimentales ne permettent d'approcher les fluctuations de vitesse présentes à des fréquences élevées. Cependant les comparaisons effectuées entre les résultats expérimentaux et de visualisation montrent une bonne concordance des résultats de visualisation et de calcul pour les écoulements réalisés sous vide. Il est donc possible de simuler numériquement le remplissage de moule pour des temps caractéristiques de l'ordre de la seconde en négligeant la dissipation turbulente. Cependant la technique de mesure par électrodes apparaît comme le moyen le plus prometteur pour donner des résultats quantitatifs sur les fluctuations temporelles de vitesses.

La visualisation du remplissage montre l'importance du couplage liquide/gaz sur les surfaces libres, et les effets que cela entraîne à l'intérieur du liquide. La modélisation des écoulements sous pression atmosphérique nécessite donc de prendre en compte des phénomènes de couplage aux interfaces liquide/gaz et d'introduire un modèle de turbulence dans les régions à forts gradients de vitesse. Les méthodes de mesure par électrodes et par visualisation de particules doivent apporter dans ce cas des renseignements sur les variations de vitesses au cours de la phase transitoire.

La résolution numérique des champs de vitesse dans la phase liquide est effectuée en utilisant un modèle d'écoulement diphasique. Celui-ci permet de prendre en compte les échanges de masse et de quantité de mouvement sur les interfaces mobiles liquide/gaz. Cette approche peut être aussi utilisée pour simuler la phase de solidification. Le modèle est donc présenté dans le chapitre suivant pour le cas du remplissage en présence de solidification.

Conclusion

Actuellement ni les modélisations numériques ni les mesures expérimentales ne permettent d'approcher les fluctuations de vitesse présentes à des fréquences élevées. Cependant les comparaisons effectuées entre les résultats expérimentaux et de visualisation montrent une bonne concordance des résultats de visualisation et de calcul pour les écoulements réalisés sous vide. Il est donc possible de simuler numériquement le remplissage de moule pour des temps caractéristiques de l'ordre de la seconde en négligeant la dissipation turbulente. Cependant la technique de mesure par électrodes apparaît comme le moyen le plus prometteur pour donner des résultats quantitatifs sur les fluctuations temporelles de vitesses.

La visualisation du remplissage montre l'importance du couplage liquide/gaz sur les surfaces libres, et les effets que cela entraîne à l'intérieur du liquide. La modélisation des écoulements sous pression atmosphérique nécessite donc de prendre en compte des phénomènes de couplage aux interfaces liquide/gaz et d'introduire un modèle de turbulence dans les régions à forts gradients de vitesse. Les méthodes de mesure par électrodes et par visualisation de particules doivent apporter dans ce cas des renseignements sur les variations de vitesses au cours de la phase transitoire.

La résolution numérique des champs de vitesse dans la phase liquide est effectuée en utilisant un modèle d'écoulement diphasique. Celui-ci permet de prendre en compte les échanges de masse et de quantité de mouvement sur les interfaces mobiles liquide/gaz. Cette approche peut être aussi utilisée pour simuler la phase de solidification. Le modèle est donc présenté dans le chapitre suivant pour le cas du remplissage en présence de solidification.

Le modèle physique, utilisé pour simuler le remplissage en présence de solidification, doit tenir compte à la fois du déplacement des surfaces libres, des interfaces liquide/solide et du transport des phases dispersées solide ou gazeuse dans le métal liquide. Le système d'équations est donc écrit dans une formulation triphasique pour modéliser le comportement de l'alliage pendant la phase de solidification.

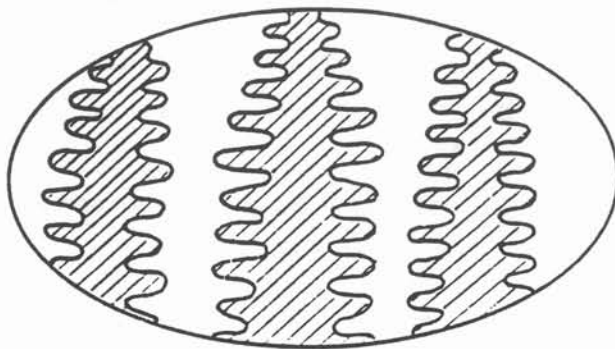


Figure 4.1:

Front de solidification dendritique colonnaire (1)

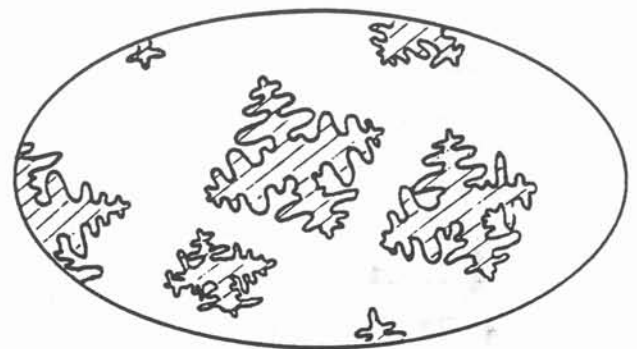


Figure 4.2:

Solidification dendritique équiaxe (1)

(1): J. Ni et C. Beckermann [4.4]

I. Modèle triphasique

Après avoir rappelé brièvement la méthode pour obtenir les équations moyennes instantanées, les termes de transferts interfaciaux sont décomposés de manière à prendre en compte aussi bien le couplage liquide/gaz que le couplage liquide/solide.

I.1. Equations locales instantanées

Quelle que soit la phase k considérée, le système comprend les équations suivantes:

$$\text{continuité} \quad \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_k \vec{v}_k) = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{quantité de mouvement} \quad \frac{\partial (\rho_k \vec{v}_k)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_k \vec{v}_k \vec{v}_k) = - \vec{\nabla} p_k + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_k + \rho_k \vec{g}_k \quad (4.2)$$

$$\text{l'énergie} \quad \frac{\partial (\rho_k h_k)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_k h_k \vec{v}_k) = \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_k \quad (4.3)$$

Dans l'équation de quantité de mouvement (eq 4.2), le membre de gauche comprend le terme instationnaire et les forces d'inertie. Le membre de droite regroupe les termes de pression, de diffusion et les forces de volume.

Dans l'équation de l'énergie formulée en enthalpie, le terme du membre de droite représente les flux de diffusion de chaleur.

Diffusion moléculaire

Les contraintes de viscosité peuvent être modélisées par l'équation:

$$\tau_{kij} = \mu_k (u_{k,i,j} + u_{k,j,i}) \quad (4.4)$$

Diffusion de chaleur

Les flux de chaleur sont modélisés par la loi de Fourier

$$\vec{q}_k = -k_k \vec{\nabla} T_k \quad (4.5)$$

Les équations locales sont moyennées dans l'espace, en utilisant la définition de la fonction de phase et en introduisant l'opérateur de moyenne statistique.

I.2. Fonction de phase

La fonction de phase $X_k(x,t)$ est définie telle que:

$$X_k(x,t) = \begin{cases} = 1 & \text{si } x \text{ appartient à la phase } k \\ = 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

Cette fonction de distribution vérifie les relations suivantes

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} X_k(x,t) &= \vec{n}_k \delta(x,t) & \text{ou encore} & & \vec{\nabla} X_k(x,t) &= \vec{n}_k \frac{\partial X_k}{\partial n_k} \\ \frac{dX_k}{dt} &= \frac{\partial X_k}{\partial t} + \vec{v}_{ki} \cdot \vec{\nabla} X_k & \text{avec} & & \vec{v}_{ki} &= \frac{\partial \vec{n}_k}{\partial t} \end{aligned}$$

I.3. Valeurs moyennes

Celles-ci sont définies telles que:

$$\begin{aligned} \langle f_k(x,t) \rangle &= \frac{1}{V_0} \int_{V_0} X_k f_k(x,t) dV & (4.6) \\ \langle f_k(x,t) \rangle^k &= \frac{1}{V_k} \int_{V_0} X_k f_k(x,t) dV \end{aligned}$$

On introduit la fraction volumique de la phase k

$$\alpha_k = \frac{V_k}{V_0}$$

A partir de la définition des valeurs moyennes, cette variable vérifie la relation:

$$\alpha_k = \langle X_k \rangle$$

on obtient alors :

$$\langle f_k \rangle^k = \frac{\langle X_k f_k \rangle}{\alpha_k}$$

En convection forcée, on suppose ρ_k constant dans chaque phase : $\rho_k = \langle \rho_k \rangle$.

I.4. Obtention des équations moyennes

Les équations locales sont moyennées dans l'espace, en multipliant chaque terme par la fonction de phase, puis en leur appliquant l'opérateur de moyenne statistique (eq 4.6). Une série de

transformations, faisant appel aux définitions de la fonction de phase et des valeurs moyennes, conduisent aux équations moyennes instantanées. Le détail de la procédure expliquée par J.M. Delhaye en 1967 [4.1] est décrite dans plusieurs publications. On peut aussi se référer aux articles de D. A. Drew et R. T. Lahey [4.2], [4.3], ou de J. Ni et C. Beckermann [4.4].

Ces transformations font appel aux règles de Leibniz et de Gauss. Pour un volume de contrôle défini dans un repère eulérien entourant la phase k, celles-ci s'expriment de la manière suivante:

Règle de Leibniz

$$\left\langle \frac{\partial f_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle f_k \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V_0} \int_{s_k} f_k(x,t) (\vec{v}_{ki} \cdot \vec{n}_k) dS \quad (4.7)$$

Règle de Gauss

$$\langle \vec{\nabla} \cdot f_k \rangle = \vec{\nabla} \cdot \langle f_k \rangle - \frac{1}{V_0} \int_{s_k} f_k(x,t) \vec{n}_k dS \quad (4.8)$$

I.5. Equations moyennes instantanées

D'après la méthode énoncée ci-dessus, les équations sont moyennées pour obtenir, dans chaque phase, le système d'équation suivant:

$$\text{Continuité} \quad \frac{\partial(\alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_k \langle \vec{v}_k \rangle^k) = \Gamma_k \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Quantité de} & \quad \frac{\partial(\alpha_k \rho_k \langle \vec{v}_k \rangle^k)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_k \langle \vec{v}_k \rangle^k \langle \vec{v}_k \rangle^k) = -\vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \langle p_k \rangle^k) + \\ \text{mouvement} & \quad \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \langle \vec{\tau}_k \rangle^k) + \alpha_k \rho_k \vec{g}_k + M_k \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\text{Energie} \quad \frac{\partial(\alpha_k \rho_k \langle h_k \rangle^k)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_k \langle h_k \rangle^k \langle \vec{v}_k \rangle^k) = \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \langle \vec{q}_k \rangle^k) + Q_k \quad (4.11)$$

La perte d'information, due aux opérations de moyenne spatiale, est compensée par l'introduction de termes de transfert interfaciaux, définis ci-après.

I.6. Transferts interfaciaux

$$\text{Continuité} \quad \Gamma_k = \langle \rho_k (\vec{v}_k - \vec{v}_{ki}) \cdot \vec{\nabla}_{x_k} \rangle \quad (4.12)$$

$$\text{Quantité de mouvement} \quad \vec{M}_k = \langle \rho_k \vec{v}_k (\vec{v}_k - \vec{v}_{ki}) \cdot \vec{\nabla}_{x_k} \rangle + \langle (\vec{\tau}_k - p_k \vec{I}) \cdot \vec{\nabla}_{x_k} \rangle = \vec{M}_k^r + \vec{M}_k^t \quad (4.13)$$

$$\text{Energie} \quad Q_k = \langle \rho_k h_k (\vec{v}_k - \vec{v}_{ki}) \cdot \vec{\nabla}_{x_k} \rangle + \langle \vec{q}_k \cdot \vec{\nabla}_{x_k} \rangle = Q_k^r + Q_k^q \quad (4.14)$$

I.6.1. Transferts interfaciaux par changements de phases

Γ_k (eq 4.9 et 4.12) représente les transferts de masse aux interfaces par changements de phase. Ce terme est donc différent de zéro en présence de vaporisation, ou dans le cas de la solidification.

Les termes \vec{M}_k^r , Q_k^r peuvent s'écrire en fonction de Γ_k (eq 4.13 et 4.14):

$$\begin{aligned} \vec{M}_k^r &= \langle \vec{v}_k \rangle_i \Gamma_k \\ Q_k^r &= \langle h_k \rangle_i \Gamma_k \end{aligned}$$

I.6.2. Transferts interfaciaux de quantité de mouvement

Le terme \vec{M}_k^t représente les contraintes interfaciales, il peut encore s'écrire sous la forme:

$$\vec{M}_k^t = \langle (\vec{\tau}_k - p_k \vec{I}) \cdot \vec{\nabla}_{x_k} \rangle = \langle p_k \rangle_i \vec{\nabla} \alpha_k + \vec{M}_k^d \quad (4.15)$$

\vec{M}_k^d correspond aux forces de traînées mais ce terme inclut aussi les différences d'accélération à l'interface entre les deux phases ainsi que les forces de poussée. Cet échange de quantité de mouvement interfaciale est définie à partir de lois de fermeture. Ces dernières tiennent compte des contraintes de cisaillement et des variations de pression, à l'échelle microscopique. Les termes de transferts interfaciaux interviennent dans les écoulements à phases dispersées et dans les écoulements en milieu poreux. Ceux-ci sont présentés dans l'annexe 4.

I.6.3. Transferts de chaleur

Les échanges de chaleur aux interfaces sont fonction des variations de températures microscopiques. Dans le liquide, ils vérifient la relation:

$$Q_1^q = S h_l (\langle T_l \rangle_i - \langle T_l \rangle^l)$$

Le coefficient d'échange par convection (h_1) est déterminé à partir des corrélations expérimentales de transferts de chaleur. Cette formulation est utilisée pour traduire les échanges sur les surfaces libres, en solidification équiaxe, et au sommet des dendrites [4.4].

En présence de microségrégation sur un front de solidification, plan ou sphérique ou sur une structure dendritique colonnaire, la discontinuité des valeurs de concentration sur l'interface entraîne des variations de température dans le liquide, sur une distance fonction de la microstructure de l'alliage et de la fraction liquide. Cette longueur de diffusion est calculée en supposant l'écoulement dominé par les transferts par conduction. W. Kurz et D. J. Fisher [4.7] décrivent ces calculs pour des fronts de solidification plan et sphérique.

En écoulement plan par exemple, on obtient le résultat suivant:

$$l_1^q = \frac{2a}{U}$$

avec:

U: vitesse du front de solidification

a: diffusivité thermique $a = \frac{k}{\rho c_p}$

Dans ce cas les transferts de chaleur interfaciaux sont définis par la relation:

$$Q_1^q = S \frac{k_l}{l_1^q} (\langle T_l \rangle_i - \langle T_l \rangle^l)$$

Cette formulation est retenue pour modéliser les transferts interfaciaux dans la phase solide.

Dans ce cas les échanges ont lieu par conduction uniquement.

$$Q_s^q = S \frac{k_s}{l_s^q} (\langle T_s \rangle_i - \langle T_s \rangle^s)$$

1.7. Equation de concentration

Le calcul des transferts de chaleur et des propriétés du fluide (densité, conductivité) fait intervenir explicitement la température. Une nouvelle équation de conservation, donnant le taux de concentration de chaque constituant de l'alliage est donc nécessaire pour connaître sa composition. En effet, à proximité d'un front de solidification, la composition de l'alliage liquide varie en raison des phénomènes de microségrégation. La connaissance du taux de concentration de chaque constituant permet de relier la température de l'alliage à son enthalpie par une fonction d'état.

On définit ainsi:

$$\langle T_k \rangle = g_1(\langle h_k \rangle^k, \langle c_k \rangle^k)$$

De la même façon, en fin de remplissage et en présence de convection libre, les variations de masse volumique doivent être prises en compte. On introduit donc une deuxième relation:

$$\langle \rho_k \rangle = g_2(\langle T_k \rangle^k, \langle c_k \rangle^k)$$

Les valeurs moyennes de concentrations sont obtenues à partir des équations macroscopiques suivantes [4.4]:

Equation moyenne instantanée
$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k \langle c_k \rangle^k)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_k \langle c_k \rangle^k \langle \vec{v}_k \rangle^k) = \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \langle \vec{j}_k \rangle^k) + J_k \quad (4.16)$$

Transferts interfaciaux
$$J_k = \langle \rho_k c_k (\vec{v}_k - \vec{v}_{ki}) \cdot \vec{\nabla}_{x_k} \rangle + \langle \vec{j}_k \cdot \vec{\nabla}_{x_k} \rangle = J_k^r + J_k^j \quad (4.17)$$

avec
$$J_k^r = \langle c_k \rangle_i \Gamma_k$$

$$J_k^j = S \rho_k \frac{k_k}{l_k^j} (\langle c_k \rangle_i - \langle c_k \rangle^k)$$

I.8. Conditions de saut

A l'interface entre deux phases, les termes de transferts (eq 4.12, 4.13, 4.14) vérifient les conditions de saut suivantes [4.2]:

fraction volumique: $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (4.18 \text{ a})$

transfert de masse: $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0 \quad (4.18 \text{ b})$

force de couplage: $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{M}_i \quad (4.18 \text{ c})$

échange de chaleur: $Q_1 + Q_2 = Q_i \quad (4.18 \text{ d})$

saut de concentration: $J_1 + J_2 = 0 \quad (4.18 \text{ e})$

Le terme \vec{M}_i est dû à la tension superficielle:

$$\vec{M}_i = \frac{2\sigma}{R} \vec{\nabla} \alpha_k \quad \text{avec } \sigma : \text{tension superficielle}$$

$R : \text{rayon de courbure}$

Le terme Q_i correspond aux sources d'énergie interfaciale, dues en fonderie aux transferts par radiation. La modélisation de ce terme dépend des valeurs des facteurs de forme.

Les termes : $\langle \vec{v}_k \rangle_i$, $\langle p_k \rangle_i$, $\langle T_k \rangle_i$, $\langle c_k \rangle_i$ sont définis à partir des relations suivantes:

- En l'absence de changement de phase: $\langle \vec{v}_1 \rangle_i = \langle \vec{v}_2 \rangle_i$
- En raison de la tension superficielle: $\langle p_1 \rangle_i - \langle p_2 \rangle_i = \frac{2\sigma}{R}$
- Pour un état proche de l'équilibre: $\langle T_1 \rangle_i = \langle T_2 \rangle_i$
- A partir du diagramme de phase : $\langle c_l \rangle_i = g(\langle T_l \rangle_i)$
- La discontinuité sur le front de solidification se traduit par : $\frac{\langle c_l \rangle_i}{\langle c_s \rangle_i} = k_p(\langle T_l \rangle_i)$

k_p est appelé coefficient de partage

Les transports de bulles ou de particules solides dans un métal liquide correspondent au même modèle physique. Les différences proviennent des corrélations utilisées pour calculer les coefficients de traînée. Le calcul des fractions liquides dans un volume de contrôle permet de représenter aussi bien les écoulements à phases dispersées que les écoulements à phases séparées. En utilisant cette formulation, il est donc possible de simuler le remplissage de moules en présence de solidification. Un soin particulier doit être porté à la modélisation des transferts de chaleur aux interfaces liquide/solide en présence de microségrégation. Dans ce cas le calcul des longueurs de diffusion apparaît comme le point le plus délicat.

II. Modèle diphasique

Le modèle physique est maintenant appliqué au cas du remplissage, pour des temps caractéristiques inférieurs au temps de solidification. On considère donc uniquement la phase liquide et la phase gazeuse. Les termes de transferts interfaciaux et les conditions de saut sont simplifiés afin d'être applicable au cas d'une coulée sous vide. Les conditions aux limites à la paroi du moule sont ensuite présentées pour que le système puisse être résolu.

II.1. Interface liquide-gaz

II.1.1. Transfert de masse

Dans une coulée de superalliage, la température du liquide est de l'ordre de 1400°C et l'enceinte est placée sous vide secondaire. La pression résiduelle, de l'ordre de 10^{-4} bar, est inférieure à la pression de vapeur saturante du métal liquide. Il y a donc formation de bulles de gaz dans le liquide et

évaporation à la surface libre. Cependant, les temps de remplissage étant très courts (inférieurs à trois secondes) et les vitesses élevées, la production de gaz due à ce phénomène peut être négligée dans la modélisation. On écrira donc:

$$\Gamma_l = \Gamma_g = 0 \quad (4.19)$$

II.1.2. Transfert de quantité de mouvement

Le remplissage est un phénomène caractérisé par l'existence de régimes transitoires rapides. Les temps d'établissement des couches de diffusion sont en général cent fois supérieurs aux temps caractéristiques de remplissage (chapitre 1). On suppose dans la période initiale, que les différences de vitesses microscopiques de la phase liquide proche de la surface libre induisent des contraintes de cisaillement interfaciales négligeables, devant les forces internes au fluide. On néglige donc les termes de traînée (dans l'équation 4.15):

$$\vec{M}_g^d = \vec{M}_l^d = 0 \quad \text{d'où: } \vec{M}_k = \langle p_k \rangle_i \vec{\nabla} \alpha_k \quad (4.20)$$

Les coulées en fonderie de précision s'appliquent à des pièces dont l'épaisseur peut être égale au millimètre. En fonction des rayons de courbures observés, la source de quantité de mouvement due à la tension superficielle entraîne des variations de pression sur la surface libre, qu'il est dans ce cas nécessaire de prendre en compte pour la modélisation du remplissage en section mince.

$$M_i = (\langle P_l \rangle_i - \langle P_g \rangle_i) \vec{\nabla} \alpha_l = \frac{2\sigma}{R} \vec{\nabla} \alpha_l \quad (4.21)$$

II.1.3. Transfert de chaleur

En comparant les coefficients d'échange des liquides et des gaz, il est raisonnable de négliger les transferts par convection dus au gaz sur les surfaces libres. Dans ce cas, à l'interface, les échanges de chaleur dans la phase liquide seront égaux aux transferts par radiation.

$$\text{Si } Q_g^q = 0 \text{ on obtient: } Q_l^q = Q_i$$

II.2. Interface liquide-paroi solide du moule

La modélisation du remplissage suppose la résolution du système composé des équations moyennes de la phase liquide et de la phase gazeuse. Outre les conditions de saut à l'interface

liquide/gaz, il est nécessaire de connaître les conditions aux limites à l'interface liquide/moule. Celles-ci sont définies de la façon suivante:

Les vitesses sont nulles : $(\langle \vec{v} \rangle_l - \langle \vec{v} \rangle_p) \cdot \vec{n} = 0$

Les transferts de chaleur ont lieu par convection : $Q_i^f = S h_l (\langle T_l \rangle_p - \langle T_l \rangle^l)$

$\langle T_l \rangle_p$ est définie en fonction des effusivités :

$$\langle T_l \rangle_p = \frac{E_l \langle T_l \rangle^l + E_s \langle T_s \rangle^s}{E_l + E_s} \quad \text{avec } E_k = \sqrt{k_k \rho_k C_{p_k}}$$

Les transferts à cette interface liquide-solide supposent que l'on connaisse à la paroi la valeur de la température du liquide. D'après la relation décrite ci-dessus, celle-ci dépend de la température du moule, déterminée expérimentalement et de la valeur de l'effusivité.

Conclusion

Le modèle physique présenté dans ce chapitre permet de simuler le remplissage dans le système d'alimentation et dans les pièces de faibles dimensions en tenant compte de la phase de solidification. C'est d'ailleurs une formulation de ce type qui a été retenue pour réaliser le logiciel de simulation de remplissage utilisé dans le troisième chapitre. Cette approche permet le calcul des champs de température dans le moule, au cours du refroidissement de l'alliage.

Pendant la période initiale de remplissage, les transferts thermiques sont dus principalement aux échanges par convection. Les vitesses influent donc fortement sur les variations de la température. En utilisant les hypothèses relatives au cas des coulées sous vide, nous présentons dans le chapitre suivant une méthode numérique qui peut être employée pour déterminer les champs de vitesse, en l'absence de solidification.

Chapitre 5

Modèle numérique

Pour résoudre numériquement le système d'équations de thermohydraulique appliqué à la fonderie, plusieurs méthodes peuvent être employées. Le choix de l'une ou l'autre de ces méthodes dépend du type d'écoulement à modéliser.

I. Choix de la méthode

I.1. Méthode intégrale aux frontières

Dans le cas des écoulements à surfaces libres ou en présence d'un front de solidification, la méthode intégrale aux frontières (MIF) peut être employée avec succès. Cependant malgré les développements récents forts importants, la résolution des équations de convection-diffusion, est encore limitée, par l'absence de fonctions mathématiques (fonction de Green) permettant leur intégration dans le domaine d'étude et sur la frontière. Il est donc nécessaire de procéder à des simplifications.

Pour le calcul des vitesses, si les forces d'inertie peuvent être négligées devant les forces de viscosité, les équations de Navier-Stokes correspondent à des équations de diffusion en régime instationnaire. Cette simplification qui peut s'appliquer aux procédés de moulage de pièce en polymère permet d'utiliser cette méthode numérique. Des calculs correspondant à cette configuration ont été réalisés par C.A. Hieber et S.F. Shen [5.1], ainsi que par H. Jin, A. Samelsson et O. Tullberg [5.2]. Leurs modèles tiennent compte des variations de température, lorsque les transferts par convection influencent peu l'écoulement.

D'autre part, lorsque le liquide se comporte comme un fluide parfait, il est en général possible de supposer l'écoulement irrotationnel. Dans ce cas, les vitesses sont définies à partir de la fonction de courant. Cette hypothèse faite sur l'écoulement s'applique, en début de remplissage, à la coulée d'alliages fondus. Une comparaison des formes des surfaces libres calculées par cette méthode et déterminées expérimentalement est d'ailleurs présentée dans le deuxième chapitre. Un autre exemple donné par T. Nakayama [5.3] explique le détail de la procédure.

Les variations de températures au cours de la solidification d'un alliage métallique peuvent également être calculées par cette méthode dans le domaine solide. Une étude faite par C.P. Hong, T. Umeda et Y. Kimura [5.4] présentent des résultats de calcul pour la solidification de métal dans des

moules sable ou coquille. Les calculs tiennent compte du transfert de chaleur par conduction, du dégagement de la chaleur latente et du déplacement du front de solidification.

I.2. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis peut être employée aux faibles nombres de Reynolds, pour calculer les variations de vitesse dues au terme d'inertie dans les écoulements rencontrés dans les procédés de fonderie. Cette méthode permet de suivre l'avancée des surfaces libres avec précision, en utilisant une technique de maillage adaptatif. A chaque itération les mailles sont déformées pour que le domaine d'étude corresponde au volume liquide. Les équations peuvent être formulées soit dans un repère Eulérien (repère fixe) soit dans un repère Lagrangien (le maillage se déplace à la vitesse du liquide). Dans les deux cas les équations de continuité de quantité de mouvement et de l'énergie sont intégrées en utilisant la méthode de Galerkin.

Dans un repère Lagrangien, les termes d'advection sont absents des équations. Chaque maille étant attachée à un volume fluide, les variations de vitesse sont calculées à partir de l'équation :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{V}_p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{g}$$

Puis les mailles sont transportées d'une distance $dl(x,y)$ donnée par les relations cinématiques :

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} \quad v = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Cette méthode permet de limiter l'effet de diffusion numérique. La solution calculée est donc très proche de l'écoulement réel. Ce type d'approche est présenté par F. Muttin, T. Coupez, M. Bellet, J.L. Chenot [5.5]. Leurs travaux sont appliqués au remplissage sous pression.

Dans un repère Eulérien, la position de l'interface est donnée par les valeurs des fractions liquides, calculées à partir d'une équation de transport.

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} \alpha_1 \quad \text{avec: } \alpha_1 = \frac{V_1}{V_0}$$

Le maillage est ensuite déformé en fonction de cette variable. Les schémas d'interpolation doivent être choisis avec soin pour conserver la discontinuité de l'interface. G. Dhatt, D.M. Gao et J. Belanger [5.6] et de R.W. Lewis, A. S. Usmani et H.C.Huang [5.7] ont appliqué cette méthode au remplissage par gravité.

I.3. Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est souvent utilisée pour modéliser les écoulement à grands nombres de Reynolds. La gamme d'écoulement pouvant être prise en compte par cette méthode est maintenant très large. Grâce à des algorithmes tels que SIMPLE, développé par S. Patankar à partir

de 1970 [5.8], il est actuellement possible de traiter les phénomènes de recirculations et de suivre l'évolution des tourbillons en incluant des modèles de turbulence.

Cette méthode de calcul est aussi utilisée pour modéliser les écoulements diphasiques. Les travaux sur les écoulements à plusieurs phases sont dus principalement aux études faites dans le domaine du nucléaire. W. Wulff [5.9] présente les différentes méthodes utilisées dans ce contexte. Récemment ces résultats ont été étendus à la fonderie, pour simuler le couplage entre métal liquide/gaz et les phénomènes de solidification. Dans ce contexte, les logiciels COMMIX [5.10], et plus récemment SIMULOR [5.11], permettent de modéliser les écoulements à plusieurs phases (liquide, gaz, solide), dans les remplissages de moules. C'est donc à partir de cette méthode numérique que l'on se propose de résoudre le système d'équations différentielles présenté dans le chapitre précédent. En effet cette technique numérique apparaît comme la plus appropriée pour simuler les écoulements non établis à plusieurs phases.

I.4. Méthode des différences finies

La résolution des écoulements à surfaces libres dans un maillage fixe nécessite l'introduction d'une fonction de transport présentant une discontinuité au niveau de l'interface (fonction en escalier). Cette équation peut être résolue par la méthode des différences finies simultanément aux équations de continuité et de quantité de mouvement par des schémas explicites (méthode SOLA VOF) [5.12]. Cette technique est reprise par R.A. Stoehr pour simuler le remplissage de moule en fonderie [5.13].

Cependant des algorithmes récents permettent la résolution de cette équation de convection par des schémas implicites en limitant les effets de lissage. C'est donc cette technique qui est choisie de manière à obtenir un système totalement implicite et à conserver des schémas temporels stables. Néanmoins pour limiter les effets de diffusion et donc la précision des résultats, les pas de temps sont fixés de manière à ne pas trop s'éloigner du critère de Courant-Friedrich-Levy (CFL). Les fractions volumiques sont calculées en effectuant des bilans de flux sur les faces de chaque maille. Cette méthode permet de résoudre l'ensemble des équations par la technique des volumes finis.

II. Principe de la méthode

L'une des difficultés rencontrées, en modélisation numérique du remplissage, réside dans le calcul des surfaces libres mobiles. Ce chapitre présente la méthode employée pour obtenir les valeurs moyennes de vitesses et de pressions, en tenant compte des déformations de surfaces.

Dans la phase initiale du remplissage, la masse volumique du liquide peut être supposée constante. L'équation de l'énergie est découplée du système pour résoudre uniquement la partie hydraulique.

Le système d'équations retenu permet de modéliser le comportement d'un métal liquide, lors d'une coulée sous vide, à l'intérieur d'un système d'alimentation.

$$\text{continuité : } \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_1 \rho_1 \langle \vec{v}_1 \rangle^l) = 0 \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \text{quantité de} & \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 \langle \vec{v}_1 \rangle^l)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_1 \rho_1 \langle \vec{v}_1 \rangle^l \langle \vec{v}_1 \rangle^l) = -\vec{\nabla}(\alpha_1 \langle p_1 \rangle^l) + \\ \text{mouvement :} & \vec{\nabla} \cdot (\alpha_1 \langle \vec{\tau}_1 \rangle^l) + \alpha_1 \rho_1 \vec{g}_1 + \langle p_1 \rangle_i \vec{\nabla} \alpha_1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Les équations sont résolues avec la méthode des volumes finis, suivant le principe de l'algorithme SIMPLE.

Le maillage est défini sur trois grilles entrelacées (figure 5.1):

- Une grille où les noeuds correspondent à la pression.
- Une grille centrée sur la composante horizontale de la vitesse représentée par le symbole \triangleright .
- Une grille pour la composante verticale de la vitesse représentée par le symbole \wedge .

La fraction volumique intervient au centre de chaque maille. Cette variable est donc définie sur toutes les grilles, et interpolée sur la surface par des schémas d'interpolation du second ou du troisième ordre choisis de manière à conserver la discontinuité.

Les équations de Navier-Stokes sont projetées sur un système d'axe (O, \vec{x}, \vec{y}) , défini dans un repère cartésien, puis intégrées dans les volumes de contrôle définis pour chaque composante de la vitesse (figure 5.1). A la convergence, les valeurs obtenues correspondent à des valeurs moyennes.

Le terme de pression peut s'exprimer de deux façons différentes. La représentation adoptée jusqu'à présent fait apparaître explicitement la pression à l'interface. Cette formulation est délaissée au profit du terme de gauche de l'équation suivante :

$$\alpha_1 \vec{\nabla}(\langle p_1 \rangle^l) = \vec{\nabla}(\alpha_1 \langle p_1 \rangle^l) + \langle p_1 \rangle_i \vec{\nabla} \alpha_1 \quad (5.3)$$

Les équations ne concernent que la phase liquide. Pour simplifier l'écriture, on adopte donc la notation :

$$f = \langle f_1 \rangle^l$$

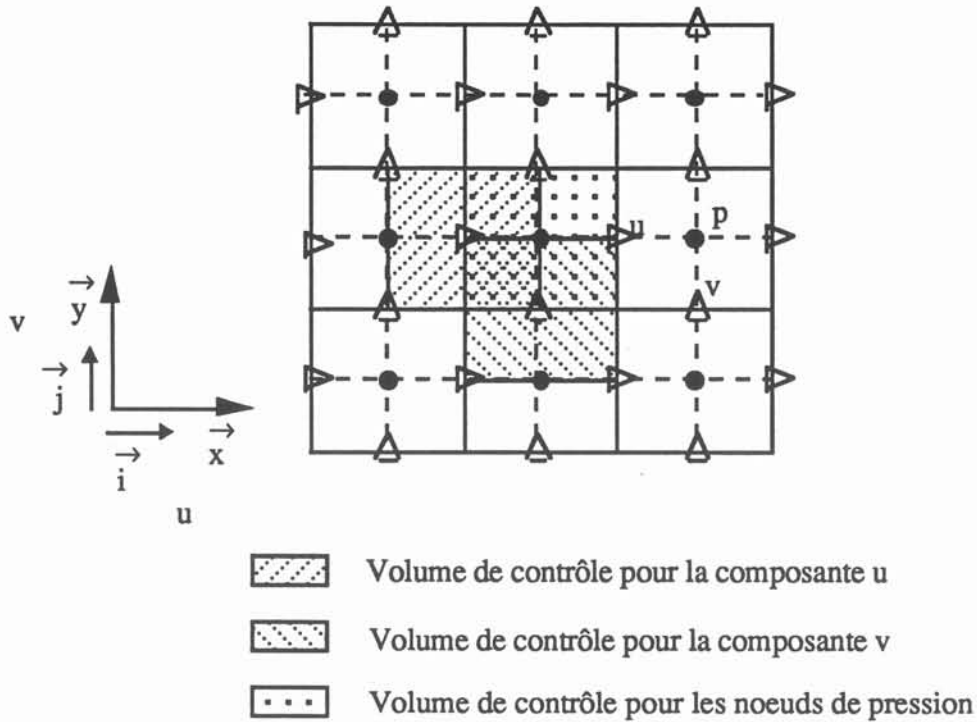


Figure 5.1 :
Représentation du maillage entrelacé

III. Equation pour la composante horizontale des vitesses

L'équation de Navier-Stokes est projetée horizontalement, et intégrée dans le volume de contrôle représenté par la zone hachurée : (figure 5.1)

En appliquant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\int_{V_u} \frac{\partial(\alpha \rho u)}{\partial t} dv + \int_{S_u} \alpha \rho u (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = - \int_{V_u} \alpha \frac{\partial p}{\partial x} dv + \int_{S_u} \alpha \vec{i}_x \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) ds + \int_{V_u} \alpha \rho g_x dv \quad (5.4)$$

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)

La résolution est totalement implicite. Le terme d'advection (2), de diffusion (4), ainsi qu'une partie du terme instationnaire (1) sont définis à l'instant t. Les pas de temps sont fixés de manière à ne pas trop s'éloigner du critère de Courant-Friedrich-Levy (CFL).

On utilise une méthode itérative du type Gauss-Seidel, pour la résolution du système linéarisé. La matrice associée au vecteur est à diagonale dominante.

Le schéma de discrétisation utilisé pour le calcul de u dépend de la valeur du nombre de Peclet de maille. Celui-ci est défini comme le rapport des flux de convection sur les flux de diffusion.

Pour une surface verticale :

$$Pe = \frac{\rho u \Delta x}{\mu}$$

Si le transport par convection est dominant ($Pe > 2$), on utilise le schéma décentré amont du premier ordre, inconditionnellement stable. A l'inverse, pour des transports par diffusion ($Pe < 2$), on lui préfère le schéma centré du deuxième ordre, plus précis. Le décentrage amont correspond à une réalité physique.

D'après cette condition, le terme de convection, discrétisé pour la face EST d'une maille, est défini de la façon suivante :

$$C_e = \int_{S_e} \alpha \rho u (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \begin{cases} \frac{1}{2} (u_e + u_p) q_e & \text{Si } Pe < 2 \\ u_p q_e & \text{Si } Pe > 2 \text{ et } q_e > 0 \\ u_e q_e & \text{Si } Pe > 2 \text{ et } q_e < 0 \end{cases}$$

avec :

q_e : débit traversant la face EST, déterminé par interpolation linéaire (figure 5.2)

$$q_e = \int_{S_e} \alpha_1 \rho_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}) ds$$

ou encore :

$$C_e = \frac{u_p}{2} (q_e + |q_e|) + \frac{u_e}{2} (q_e - |q_e|) \quad \text{Si } Pe > 2$$

La somme des flux s'écrit :

$$C_u = \sum C_i = \frac{1}{2} \sum [u_i (q_i - |q_i|) + u_p (q_i + |q_i|)]$$

On retiendra la formulation suivante :

$$C_u = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum [(u_i + u_p) q_i] & \text{Si } Pe < 2 \\ \frac{1}{2} \sum [(u_i - u_p) (q_i - |q_i|)] + u_p \sum q_i & \text{Si } Pe > 2 \end{cases}$$

Le terme de diffusion est discrétisé uniquement suivant le schéma centré du deuxième ordre, si bien qu'il n'entre dans la résolution que pour les nombres de Peclet inférieurs à deux. On note :

$$d_i = \int_{S_i} \alpha \mu ds$$

L' équation de quantité de mouvement est alors discrétisée suivant la forme :

$$\sum A_i u_i - A_p u_p + S_u = 0 \quad (5.5)$$

avec :

$$A_i = \frac{1}{2} (q_i + d_i) \quad \text{Si } Pe < 2$$

$$A_i = \frac{1}{2} (q_i - |q_i|) \quad \text{Si } Pe > 2$$

$$A_p = \sum A_i + S_p$$

$$S_p = S_{mp} - \sum q_i \quad \text{Si } \sum q_i > 0$$

$$S_u = S_{ou} + \sum q_i u_p \quad \text{Si } \sum q_i < 0$$

Dans le terme S_{mp} , se trouve la partie du terme instationnaire, qui dépend de l'instant t .

Dans le terme S_{ou} , se trouve tous les autres termes, définis sur le volume V_u .

Lorsque la somme des débits est positive, le résultat est placé dans le terme spécial. On augmente ainsi la valeur du pivot. D'après le critère de la diagonale dominante, cette technique facilite la convergence [5.14]. Pour une somme négative, le résultat est placé dans le terme source.

Remarque :

En régime instationnaire, en présence de surfaces libres mobiles, les valeurs de fractions volumiques varient dans l'intervalle $[0, 1]$. Si la maille est traversée par une interface, à la convergence la somme des débits est alors différente de zéro.

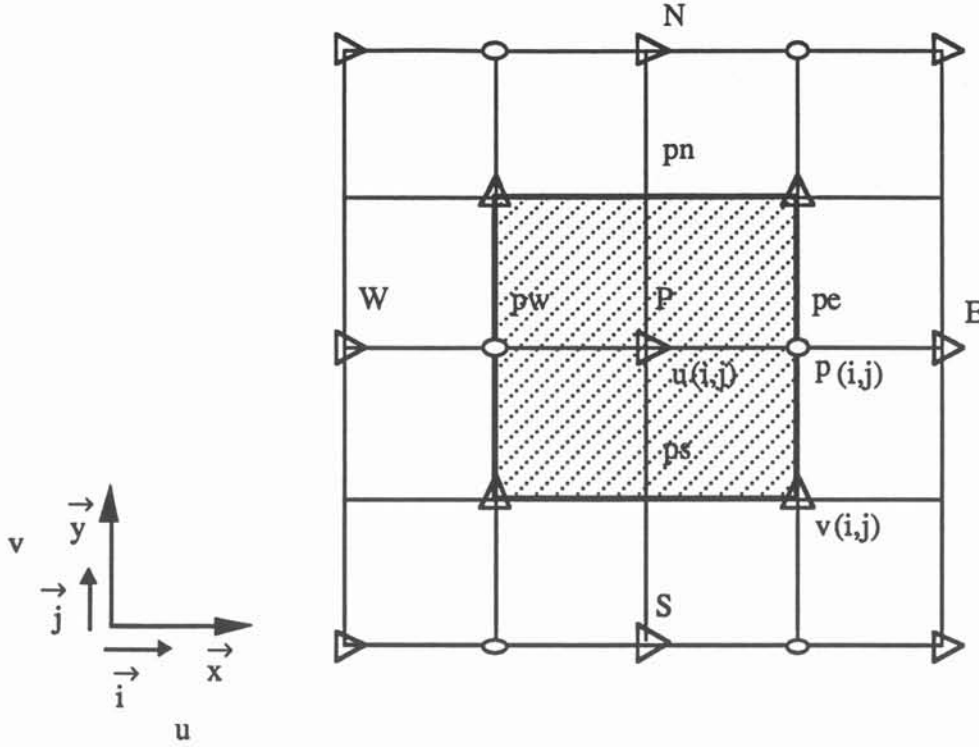


Figure 5.2 :

Notation utilisée sur le volume de contrôle, relative à la composante u.

IV. Equation de correction de pression

Les vitesses et les pressions sont décomposées en valeurs moyennes et en valeurs fluctuantes :

$$u_{1p} = u_{1p}^* + du_{1p} \quad (5.6 \text{ a})$$

$$P_{1p} = P_{1p}^* + dp_{1p} \quad (5.6 \text{ b})$$

A la convergence les valeurs moyennes de vitesses et de pressions vérifient l'équation de quantité de mouvement. On obtient ainsi une relation pour les valeurs fluctuantes.

$$du_{1p} = \frac{\partial u_{1p}}{\partial (P_{1pe} - P_{1pw})} (dp_{1pe} - dp_{1pw}) \quad (\text{les indices sont présentés figure 5.2})$$

sous forme discrétisée, on obtient :

$$du_{1p} = dpu (dp_{1pe} - dp_{1pw}) \quad \text{avec : } \begin{cases} dpu = \frac{\text{vol } \alpha}{\Delta x A_p} \\ A_p = \sum A_i + S_p \\ S_p = S_{mp} - \sum q_i \end{cases} \quad (5.7)$$

Cette relation est introduite dans l'équation de continuité, ce qui donne sous la forme discrétisée :

$$\sum A_i dp_i - A_p dp_p + Su = 0 \quad (5.8)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} A_i \text{ fonction de } dp_i \\ A_p = \sum A_i \end{cases}$$

Les variations de pression sont calculées pour qu'à la convergence l'équation de continuité soit vérifiée. Le terme instationnaire est donc inclus dans le terme source, pour que les corrections de pression tendent vers zéro. On obtient :

$$Su = \sum q_i + \frac{\Delta \alpha \rho}{\Delta t} \text{ vol}$$

V. Discrétisation des termes instationnaires

Pour obtenir des variations de vitesse et de pression nulle à la convergence, la position de la surface libre doit être calculée à l'instant t . Les vitesses et les pressions, comme les fractions volumiques sont donc calculées, en utilisant des schémas temporels totalement implicites. Ceux-ci sont présentés dans l'annexe 5.

VI. Equation de transport des fractions volumiques liquides

Celle-ci est dérivée de l'équation de la fonction de phase.

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla} X = 0 \quad \text{avec } \vec{v}_i = \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \quad (5.11)$$

D'après l'ancienne notation (chapitre 4), la fonction de phase :

$$X_l(x,t) = \begin{cases} = 1 & \text{si } x \text{ appartient à la phase liquide} \\ = 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

En lui appliquant l'opérateur de moyenne statistique et en multipliant par la masse volumique liquide, on obtient :

$$\langle \rho \frac{\partial X}{\partial t} \rangle + \langle \rho \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla} X \rangle = 0 \quad (5.12)$$

On introduit la fraction volumique de la phase liquide :

$$\alpha = \frac{V_1}{V_0} \quad \text{avec : } \begin{cases} V_1 : \text{Volume liquide dans une maille} \\ V_0 : \text{Volume total de la maille} \end{cases}$$

Cette variable vérifie la relation :

$$\alpha = \langle X \rangle$$

Lorsque l'équation est intégrée sur un volume de contrôle en appliquant les règles de Gauss et de Leibniz, on obtient :

$$\int_V \rho \frac{\partial \alpha}{\partial t} dv + \int_{S_k} \rho (\vec{v}_i \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (5.13)$$

En l'absence de transfert de masse la vitesse de l'interface est égale à la vitesse de la phase liquide, cette équation devient :

$$\int_V \rho \frac{\partial \alpha}{\partial t} dv + \int_{S_k} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (5.14)$$

Cette équation est intégrée sur le volume de contrôle et non sur le volume fluide. Si les valeurs des fractions liquides sont définies sur chaque facette on écrit :

$$\int_V \rho \frac{\partial \alpha}{\partial t} dv + \int_S \alpha \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (5.15)$$

VII. Résolution de l'équation de transport

VII.1. Discrétisation spatiale

La résolution de cette équation de transport (eq 5.15), qui inclut le terme instationnaire, fait intervenir des schémas d'interpolation permettant de conserver la discontinuité des fractions volumiques à l'interface. Parmi les schémas de discrétisation possible, on peut citer les schémas centré et décentré amont. Ceux-ci sont d'ailleurs utilisés pour le calcul des vitesses et des pressions. Cependant l'erreur de troncature du schéma décentré, utilisé pour les nombres de Peclet de maille supérieurs à deux, entraîne une trop grande diffusion numérique pour que ce schéma soit utilisé dans cette équation. On lui préfère donc des schémas d'ordre plus élevés, en particulier les schémas décentrés amont du deuxième ordre ainsi que le schéma QUICK développé par Léonard [5.15].

Cependant l'utilisation de schémas du deuxième ou du troisième ordre entraîne des dépassements de valeurs limites. Les schémas d'interpolation sont donc choisis pour que les valeurs de fractions volumiques soient toujours comprises dans l'intervalle $[0, 1]$. Pour répondre à ces critères de précision et de stabilité, sans dépasser les seuils inférieur et supérieur de l'intervalle, on

utilise l'algorithme SMART, développé par Gaskell et Lau [5.16]. Dans cet algorithme, les schémas d'interpolation sont choisis en fonction de la variable :

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1}}$$

Pour un écoulement monodimensionnel représenté sur la figure 5.3, si $\hat{\alpha}_{i-1}$ est compris entre zéro et un, l'interface se situe dans la maille correspondante. En supposant α_{i-2} égale à un et α_i égale à zéro, on obtient le schéma de la figure 5.4. Si $\hat{\alpha}_{i-1}$ tend vers zéro, $\hat{\alpha}_{i-3/2}$ dépasse la valeur seuil. Dans ce cas, le schéma d'interpolation doit être du deuxième ordre centré. Le même raisonnement est utilisé pour déterminer le schéma correspondant au calcul $\hat{\alpha}_{i-1/2}$.

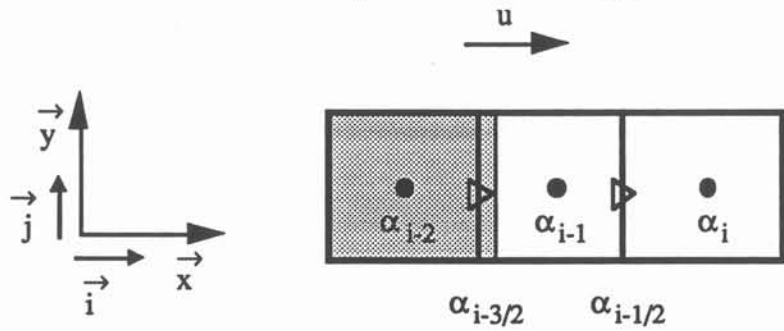


Figure 5.3 :

Ecoulement monodimensionnel, comportant une interface dans la maille i-1.

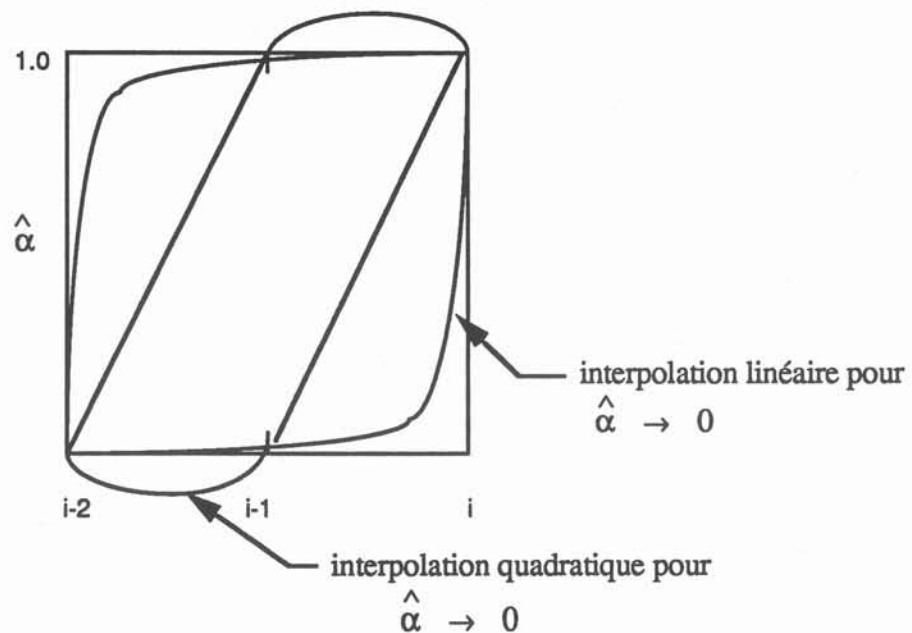


Figure 5.4 :

Valeur de $\hat{\alpha}_i$, pour l'écoulement présenté figure 5.3.

Pour un profil quadratique si $\hat{\alpha}_{i-1}$ tend vers zéro, $\hat{\alpha}_{i-3/2}$ dépasse la valeur seuil. On utilise donc un schéma du deuxième ordre centré.

Le calcul des fractions volumiques sur les faces du volume de contrôle est donc fonction de la valeur de $\hat{\alpha}_{i-1}$. Si l'interface est située juste en amont de la facette considérée, le schéma sera du deuxième ordre centré. Dans le cas où l'interface se situe au centre de la maille, la fraction volumique sera interpolée avec le schéma QUICK. Lorsque l'interface est située juste en aval de la facette de la maille le schéma d'interpolation sera du deuxième ordre décentré vers l'amont. L'algorithme SMART permet donc de discrétiser l'interface avec précision en utilisant toujours des schémas stables. La résolution du système linéaire est équivalente aux autres équations. Celui-ci se met sous la forme:

$$\sum A_i \alpha_i + A_p \alpha_p - S_u = 0 \quad (5.17)$$

Toutefois, à la différence des autres équations (eq.5.5 et 5.8), le terme α_p est fonction de ses deux plus proches voisins dans chaque direction et non plus d'un seul. Le système est donc résolu à partir d'une méthode itérative du type Gauss-Siedel, pour une matrice pentadiagonale. Cet algorithme est décrit dans l'annexe 6. On trouvera de même la description des coefficients A_i et A_p .

Le schéma temporel est implicite. Le terme source dépendant uniquement de l'instant précédent.

VII.2. Influence des fractions volumiques sur le calcul des vitesses

Les variations de fraction volumique à l'instant n sont introduites dans les autres équations de conservation. Les champs de vitesse et de pression sont donc calculés en tenant compte de la déformation de l'interface à l'instant n .

D'après la remarque faite en fin de paragraphe 3 de ce chapitre et reprise dans l'annexe 5, le déplacement d'une interface dans une maille de pression ne correspond pas forcément à une variation de la fraction volumique dans les mailles de vitesses. Les calculs sont donc répétés sur les trois grilles décalées.

Les interpolations de débits dans les équations de vitesse et de pression sont réalisées en tenant compte de la géométrie de l'interface. Les schémas utilisés pour calculer la fraction volumique au centre de chaque maille sont donc repris pour déterminer explicitement les valeurs sur chaque facette des volumes de contrôle.

Pour l'équation portant sur la première composante des vitesses (eq. 5.4), on obtient sur la face Est :

$$q_e = \frac{1}{2} \rho (u_P + u_E) S_e \alpha_e$$

avec :

$$\alpha_e = \left(\frac{3}{4} + 2\beta^-\right) \alpha_P + \left(\frac{3}{8} - \beta^-\right) \alpha_E - \left(\frac{1}{8} + \beta^-\right) \alpha_W$$

La précision ainsi obtenue permet d'obtenir des taux de convergence de l'ensemble du système de l'ordre de 10^{-3} . Une convergence plus précise peut difficilement être atteinte. Les erreurs de troncature faites aux alentours de l'interface, entraînent inévitablement un lissage des valeurs de fractions volumiques. La position de l'interface est donc localisée sur trois mailles dans la direction normale à l'interface. Les schémas utilisés permettent cependant de limiter fortement cette diffusion numérique et de conserver des schémas temporels stables. Dans le cas contraire, il serait nécessaire de tronquer les valeurs calculées au voisinage de zéro et de un [5.18] ou de lisser les valeurs par exemple avec une fonction spline [5.19].

Cette méthode nécessite la déclaration de neuf variables uniquement pour le calcul des fractions volumiques dans chaque phases. Celle-ci peut donc paraître coûteuse en temps de calcul ainsi qu'en place mémoire, cependant l'utilisation de schémas temporels implicites et une discrétisation précise de l'interface autorise l'emploi de pas de temps plus long.

VIII. Vérification de l'équation purement convective

Pour tester cet algorithme, on simule le déplacement d'une variable scalaire passive α , convectée dans un champ de vitesse stationnaire calculé au préalable avec l'algorithme SIMPLE (figure 5.5). L'écoulement est monophasique. Les propriétés du liquide sont égales à celles de l'eau. Le mouvement est engendré par la paroi défilante de droite. Sa vitesse est de 0,5m/s. Le maillage comporte 30 cellules d'un centimètre de coté dans chacune des directions. le résidu maximum des équations de vitesse et pression est de 10^{-8} en régime monophasique stationnaire. La variable scalaire α est initialisée à 1 dans la partie inférieure de la cavité, et à 0 dans la partie supérieure. Les deux zones sont séparées par une interface horizontale. Le but est de vérifier que la diffusion engendrée au niveau de l'interface ne se répercute pas de proche en proche à chaque pas de temps pour donner des schémas temporels instables. Les résultats sont présentés sur la figure 5.6 aux instants $t_1 = 10$ s, $t_2 = 30$ s et $t_3 = 55$ s. Le pas de temps utilisé pour les calculs est de 0.25 s, le résidu de l'équation des fractions volumiques est inférieur à 10^{-3} , sur l'ensemble des pas de temps . La variable α est représentée de la manière suivante:

- Dans les mailles en noir $\alpha \geq 1,00$.
- Dans les mailles en blanc $\alpha \leq 0,01$.
- Les mailles teintées de gris correspondent à l'intervalle: $\alpha \in] 0,01 ; 1,00 [$

Sur la figure 5.7, les teintes de gris sont modifiées pour que n'apparaissent que les valeurs de fraction volumique au voisinage de l'interface. On constate de cette manière, qu'en régime instationnaire, l'interface reste définie sur trois mailles suivant l'axe de sa normale. Il est donc possible d'introduire cet algorithme de suivi d'interface dans un code de calcul d'écoulement à phases

séparées. En effet en utilisant les schémas d'interpolation adéquates, l'erreur de troncature reste confinée au voisinage de l'interface. Le paragraphe suivant présente donc la procédure employée pour résoudre les champs de vitesse dans le liquide et le gaz.

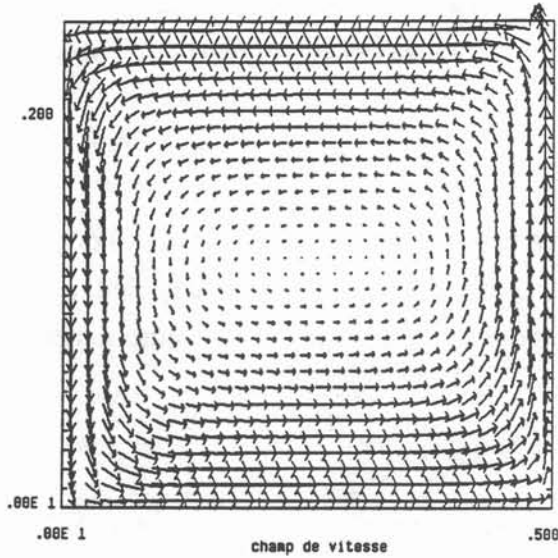


Figure 5.5 :

Représentation du champ de vitesse en régime monophasique stationnaire. La vitesse de la paroi défilante de droite est : $V_p = 0,5$ m/s. La vitesse maximum du liquide est : $V_{max} = 2,35$ cm/s

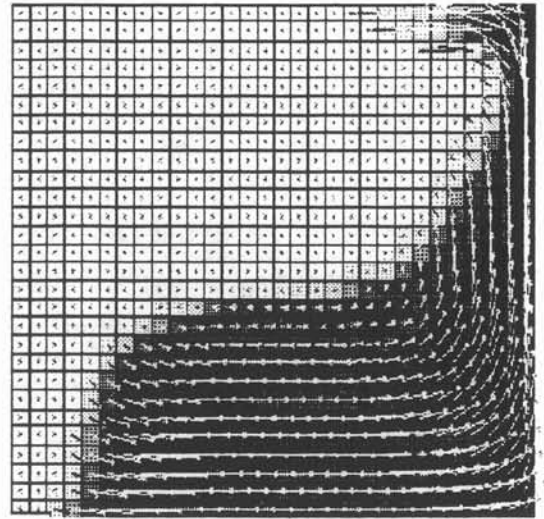


Figure 5.6 a

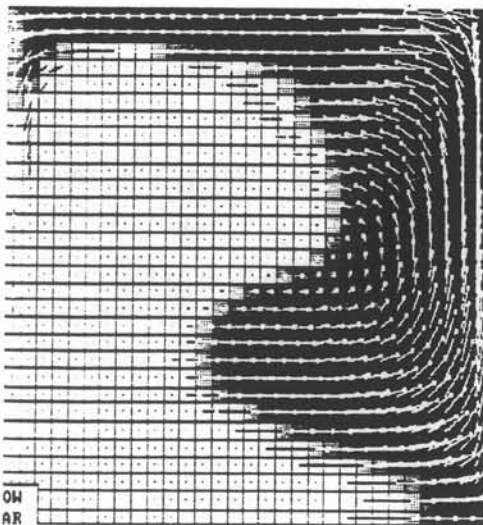


Figure 5.6 b

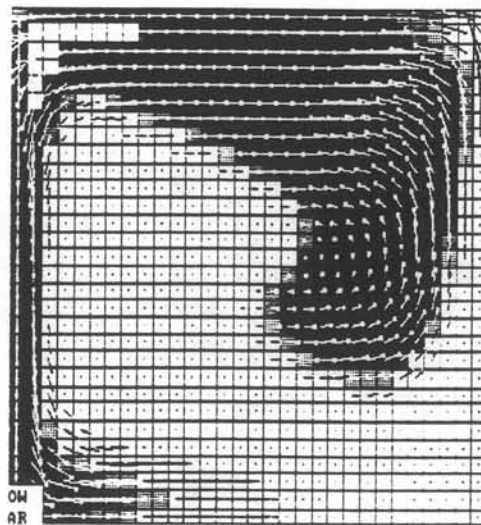


Figure 5.6 c

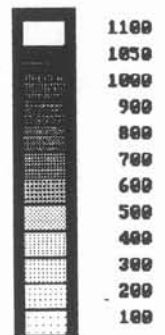


Figure 5.6 :

Représentation du champ scalaire α , convecté dans le domaine liquide aux instants $t = 10$ s (a), $t = 30$ s (b) et $t = 55$ s (c). Les valeurs indiquées sur l'échelle sont des millièmes.

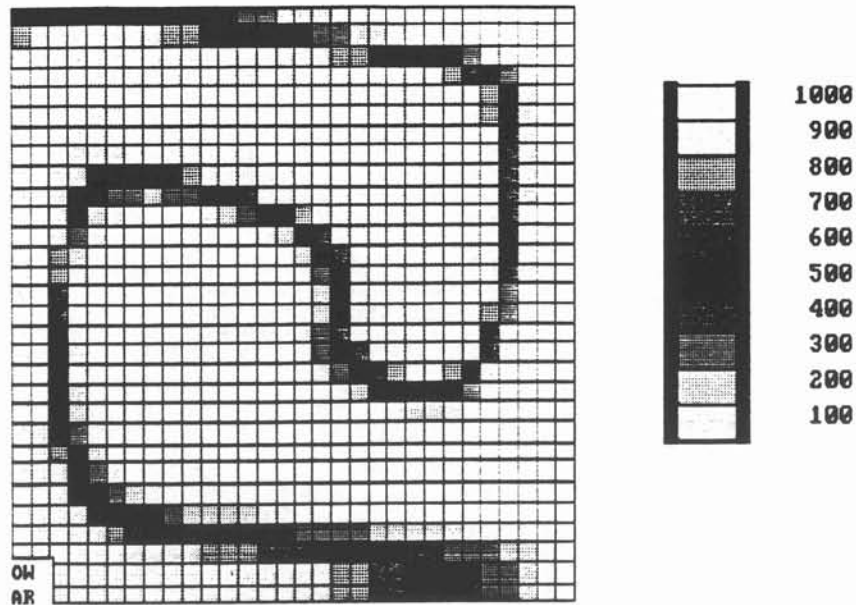


Figure 5.7 :

Représentation des fractions volumiques au voisinage de l'interface à $t = 70$ s. Les teintes de gris sont choisies de manière à ne représenter que les valeurs différentes de zéro et de un. Les valeurs indiquées sur l'échelle sont des millièmes.

IX. Ecoulements à surface libre mobile

La méthode numérique présentée dans ce paragraphe est utilisée pour résoudre les écoulements à surfaces libres. La procédure est résumée par l'organigramme de la figure 5.8. Celle-ci comprend les étapes présentées ci-dessous.

IX.1. Procédure de calcul

- Etape 1: Initialisation des conditions aux limites en vitesses et des fractions volumiques.
- Etape 2 à 5: Calcul des vitesses dans la direction horizontale et verticale dans la phase liquide et dans la phase gazeuse (eq. 5.5).
- Etape 6: Calcul des variations de pression dans l'ensemble du domaine à partir de l'équation 5.7. Correction des pressions et des vitesses en fonction des valeurs calculées (eq 5.6 a et 5.6 b)
- Etape 7: Calcul des fractions volumiques sur les trois grilles décalées (eq. 5.17)

Les étapes 2 à 7 sont répétées jusqu'à ce que les variations de pression tendent vers zéro. A la convergence les résidus des équations de vitesses et de pression sont de l'ordre 10^{-3} . Lorsque cette condition est satisfaite, Les étapes 2 à 7 sont reprises au pas de temps suivant.

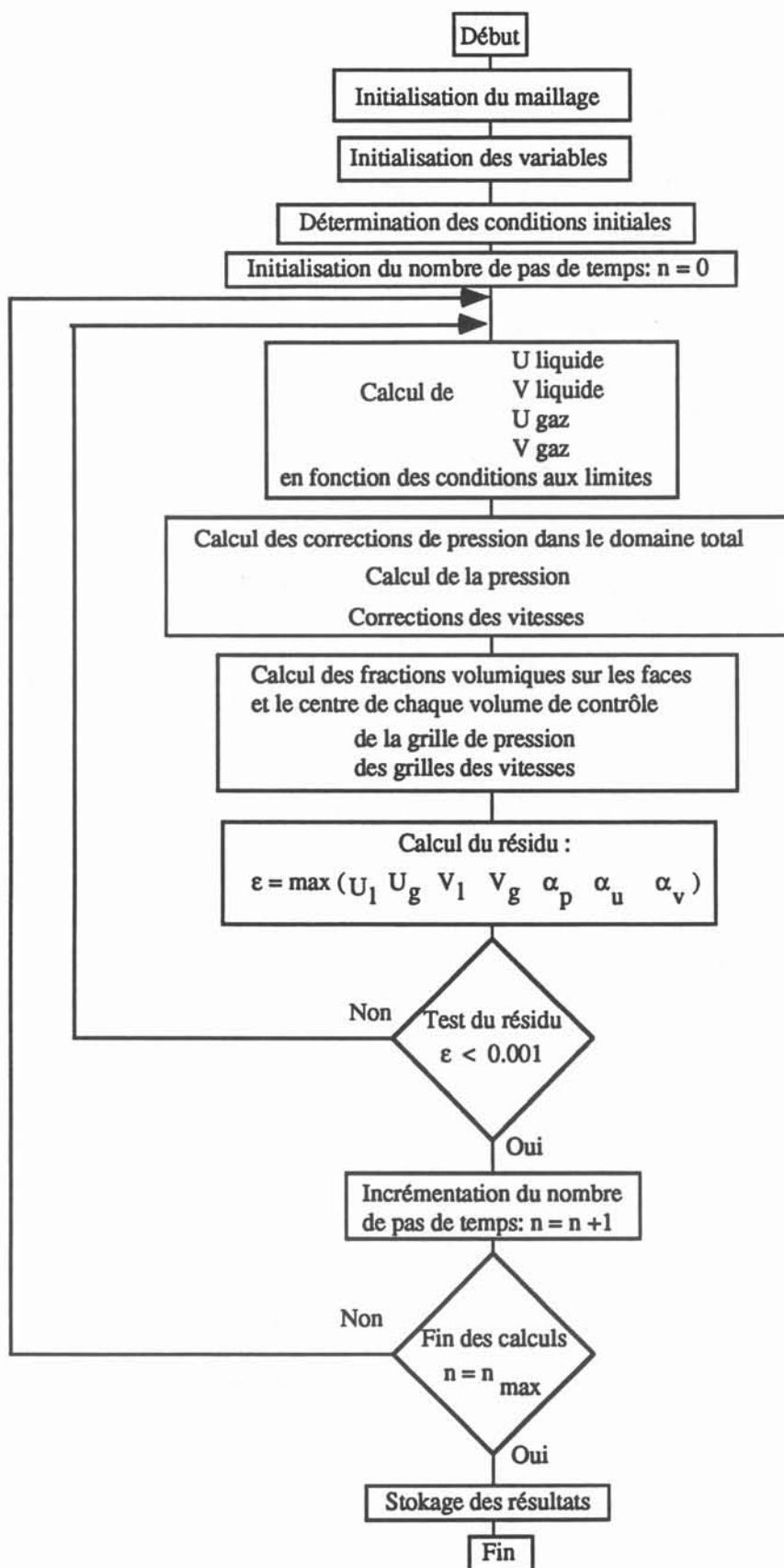


Figure 5.8 :
Organigramme présentant la procédure de résolution utilisée pour calculer les écoulements à surfaces libres

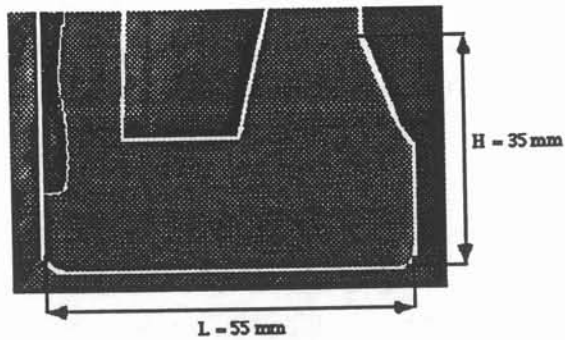
IX.2. Remplissage de l'amenée horizontale par un jet vertical

Le code de calcul est maintenant testé sur un cas de remplissage. La géométrie la plus simple possible (de forme rectangulaire) correspond à l'amenée horizontale de l'éprouvette verticale utilisée dans le chapitre 4. L'écoulement a lieu sous vide d'air ($P < 0,01$ bar). Les forces de couplage peuvent donc être négligées. Les temps de remplissage sont mesurés expérimentalement en utilisant trois images prises à des instants successifs. Celles-ci sont présentées sur la figure 5.9. A l'instant $t = 0$, les conditions aux limites sont fixées sur la paroi horizontale supérieure de la cavité, de manière à reproduire l'entrée d'un jet de métal liquide. La vitesse est égale à 2 m/s. Cette valeur est obtenue à partir d'essais préalables. Les valeurs de fractions volumiques sont initialisées sur les trois grilles décalées. On choisit les coefficients de sous relaxation suivants :

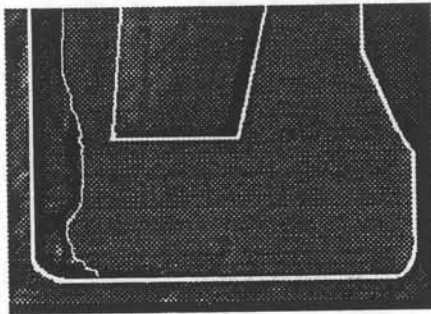
- pour les vitesses : $\omega = 0,2$
- pour la pression : $\omega = 0,3$
- pour les fractions volumiques $\omega = 0,2$

Les résultats de calcul sont présentés sur la figure 5.10, à trois instants différents : après 10 (figure 5.10 a), puis 25 (figure 5.10 b), puis 40 itérations temporelles (figure 5.10 c). Le pas de temps est de 0,001 s. La hauteur de la cavité est égale à 35 mm et la longueur à 55 mm. Bien que l'écoulement ait lieu sous vide d'air, le champ de vitesse est calculé dans la phase gazeuse d'après les propriétés de l'air à pression atmosphérique. Celles-ci sont constantes pendant la durée totale du remplissage. Bien que la valeur de la masse volumique soit différente de celle du gaz résiduelle, son influence est limitée par l'absence de forces de couplage entre les deux phases. Les champs de vitesse dans le liquide et dans le gaz sont représentés sur la figure 5.11 à l'instant $t = 0,04$ s.

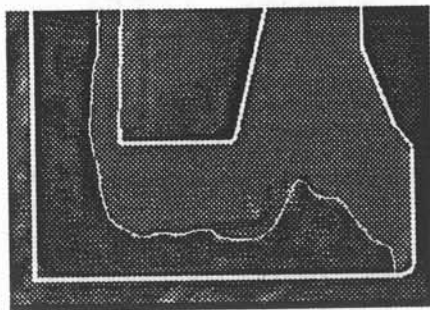
La comparaison des résultats entre l'expérience et le calcul montre des différences de temps de remplissage, de l'ordre de 50 %. Trois hypothèses sont retenues pour expliquer ces différences. La vitesse d'entrée dans la cavité est donnée avec une marge d'erreur importante. Celle-ci provient de la mesure du déplacement du front liquide entre deux images à des instants successifs. Des variations de vitesse peuvent exister en début de coulée, dont on ne tient pas compte numériquement. La vitesse moyenne du liquide à l'entrée de la cavité peut être inférieure à 2 m/s pendant la durée totale du remplissage. La section occupée par l'eau dans le descendant varie pendant le temps d'étude (figure 5.9). Numériquement cette dimension est fixée à 2 cm. Le débit arrivant en début de coulée est donc plus faible dans le cas de l'expérience. Les calculs sont effectués en supposant l'écoulement bidimensionnel. Cependant, lors des essais, il existe toujours des frottements sur les parois latérales. L'écoulement simulé expérimentalement est donc plus lent que celui modélisé numériquement. Les résultats sont donc uniquement d'ordre qualitatif. Cependant, ils permettent de montrer qu'il est possible par cette méthode numérique, de suivre le déplacement de l'interface pendant la phase de remplissage en respectant les bilan de masse et de quantité de mouvement.



$t = 0,01 \text{ s}$ (a)

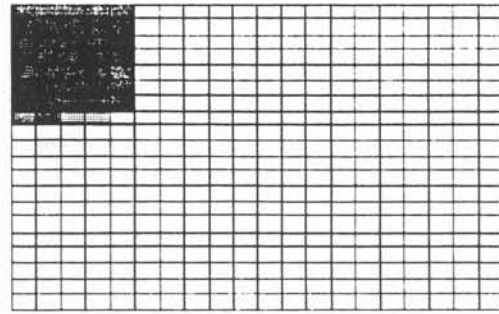


$t = 0,05 \text{ s}$ (b)

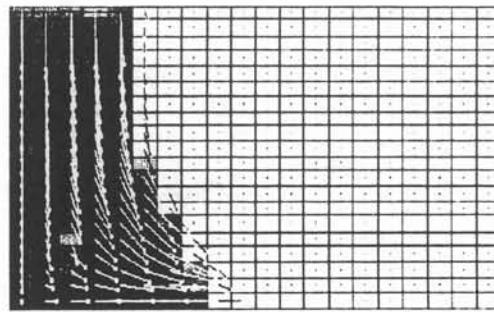


$t = 0,09 \text{ s}$ (c)

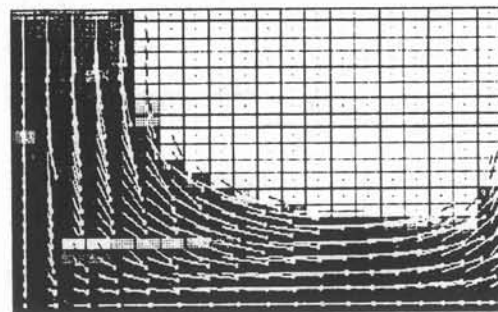
Figure 5.9 :
Représentation des surfaces libres obtenues expérimentalement à trois instants successifs : $t = 0,01 \text{ s}$ (a), $t = 0,05 \text{ s}$ (b), $t = 0,09 \text{ s}$ (c).



$t = 0,01 \text{ s}$ (a)



$t = 0,025 \text{ s}$ (b)



$t = 0,04 \text{ s}$ (c)

Figure 5.10 :
Représentation du champ scalaire des fractions volumiques liquides à trois instants successifs : $t = 0,01 \text{ s}$ (a), $t = 0,025 \text{ s}$ (b), $t = 0,04 \text{ s}$ (c). La phase liquide est en noire ($\alpha = 1,00$). Les valeurs indiquées sur l'échelle sont des millièmes.

Vitesse d'entrée: 2 m/s

$\Delta y = 0,035$ m

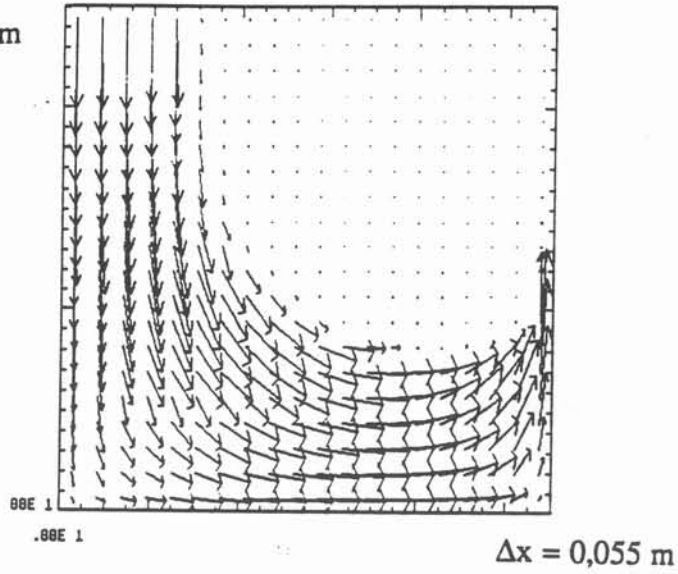


Figure 5.11 a :

$\Delta y = 0,035$ m

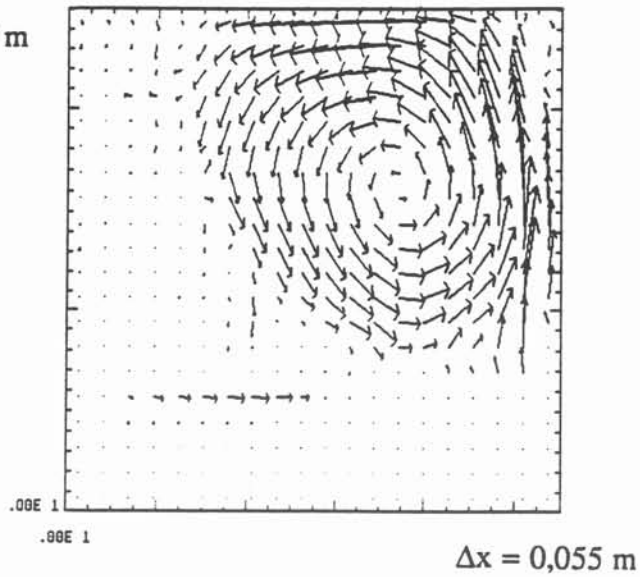


Figure 5.11 b :

Figure 5.11 :

Représentation des champs de vitesse de la phase liquide (a) et de la phase gazeuse (b) à $t = 0,04$ s, au cours du remplissage de l'attaque horizontale.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu que la méthode des volumes finis peut être utilisée pour simuler numériquement la phase de remplissage. Celle-ci est utilisée pour résoudre les équations de continuité et de quantité de mouvement écrites dans une formulation diphasique. Elle permet de calculer les champs de vitesses dans la phase liquide et dans la phase gazeuse ainsi que le champ de pression dans l'ensemble du domaine. C'est d'ailleurs la technique qui a été retenue pour réaliser le logiciel utilisé dans le troisième chapitre.

Cependant bien que la discontinuité du champ scalaire des fractions volumiques liquides puisse être calculée grâce à des schémas d'interpolation du deuxième et du troisième ordre, le résultat présenté dans ce chapitre montre qu'il est encore difficile de réaliser une simulation complète du remplissage avec le code de calcul présenté dans ce chapitre. On peut noter par exemple les difficultés techniques pour déterminer expérimentalement les valeurs de vitesse dans la phase liquide. Les conditions aux limites en vitesse ne peuvent donc être fixées avec précision.

Les équations utilisées pour le calcul des vitesses sont discrétisées en utilisant des schémas d'interpolation, décentré amont du premier ordre ou centré du deuxième ordre. Celles-ci sont résolues en utilisant une méthode itérative du type Gauss-Siedel. Les matrices associées sont à diagonale dominantes. Dans le cas du remplissage, les forces d'inertie sont prépondérantes devant les forces de viscosité. C'est donc en majorité le schéma décentré amont qui est utilisé pour la résolution du système linéaire. Il apparaît donc important de modifier l'algorithme de résolution utilisé pour le calcul des vitesses en introduisant un schéma d'interpolation décentré amont du deuxième ordre. En effet, dans les tests effectués avec le code de calcul présenté dans ce chapitre, il est fréquent de rencontrer des problèmes pour calculer les vitesses au voisinage de l'interface. Ces difficultés pourraient être supprimées par cette modification. Le code de calcul permettrait alors de modéliser les recirculations du fluide.

Conclusion générale

Le remplissage en fonderie de précision fait intervenir de nombreux phénomènes hydrodynamiques et thermiques. Des essais expérimentaux réalisés sur maquettes ont montré l'influence du temps de remplissage et de la pression résiduelle du gaz sur les régimes d'écoulement fortement instationnaires de la phase liquide. En raison des faibles épaisseurs des pièces, la solidification de l'alliage métallique peut débuter pendant la phase de remplissage. Le domaine liquide est donc délimité aussi bien par des interfaces liquides/gaz que par des interfaces liquide/solide.

Pour répondre à ces caractéristiques, une approche diphasique a été retenue pour calculer les champs de vitesses pendant la phase de remplissage. La méthode des volumes finis est employée pour la résolution numérique. Les principaux efforts ont porté sur le choix d'algorithmes permettant de suivre le déplacement des interfaces.

Au cours de la phase initiale de remplissage, l'effet de la convection naturelle peut être négligé. En supposant la masse volumique constante, les phénomènes thermiques peuvent être découplés des phénomènes hydrodynamiques. Des expériences de remplissage effectuées sur des maquettes en eau ont pu ainsi être réalisées pour déterminer les régimes d'écoulement, tout en vérifiant les conditions de similitudes hydrodynamiques. Les comparaisons effectuées entre les résultats provenant du logiciel SIMULOR et les visualisations expérimentales ont permis de vérifier la validité du modèle à écoulement laminaire pour des temps de remplissage de l'ordre de la seconde.

Cependant, en raison des nombres de Reynolds élevés et pour des temps caractéristiques plus importants, le développement de couches limites turbulentes semble prévisible. Une démarche expérimentale a donc été entreprise pour suivre l'évolution des vitesses au cours du temps. En raison des difficultés techniques rencontrées pour réaliser ces expériences, les premiers résultats obtenus n'ont pu être exploités. Cependant cette mesure par effet MHD semble pouvoir donner des résultats sur les fluctuations de vitesses pour des temps de remplissage plus élevés. Ce point apparaît comme l'un de ceux à développer avant de coupler les phénomènes de refroidissement et de solidification aux calculs d'écoulements. En effet il contribue à fixer le modèle physique utilisé pour calculer les champs de vitesses et de températures. Des travaux sont aussi nécessaires pour inclure les effets de la tension superficielle dans les écoulements à sections minces.

Les résultats expérimentaux ont été obtenus en plaçant les maquettes sous vide. Cette condition permet d'omettre les effets dus au couplage liquide/gaz sur les surfaces libres, et d'obtenir des images expérimentales montrant avec précision la position des surfaces libres. Cependant, dans les coulées à pression ambiante, cette simplification des conditions aux limites n'est plus admissible. Dans ce cas, l'effet de la turbulence diphasique doit être prise en compte dans les transferts aux interfaces.

Bien que nombreux points restent encore à inclure dans un travail de modélisation pour représenter le remplissage avec solidification, il existe maintenant certaines configurations de coulées pour lesquelles les simulations numériques donnent des résultats proches des écoulements réels.

La poursuite de travaux dans ce domaine permettra sans doute d'obtenir des logiciels capables de modéliser les phénomènes qui prédominent dans les procédés de fonderie. Ces nouvelles connaissances devraient permettre d'optimiser la conception des moules et d'améliorer la qualité des pièces moulées.

Références

- 1.1 R. COMOLET, "Mécanique Expérimentale des Fluides", 3th ed., Masson, Paris, 1982, pp. 130-190.
- 1.2 J. SZEKELY, "Fluid Flow Phenomena in Metals Processing", Academic Press, New York, 1979.
- 1.3 E.R.G. ECKERT, "Similarity Analysis Applied to the Die Casting Process," ASME Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 111, 1989, pp. 393-398
- 1.4 Liquid-Metals Handbook, LYON, R. N. ed., Atomic Energy Commission, 1952.
- 1.5 ASM Handbook Committee, Métal Handbook, 9th ed., American Society for Metal, Vol 2 et 3
- 1.6 SMITHELLS Metal Reference Book, BRANDES, E. A., 6th ed., Butterworths, London, 1983.
- 1.7 J.V. NAIDICH, "The wettability of solids by liquid metals", Progress in surface and membrane science, D. A. CAHENHEAD, J. F. DANIELLI ed., Academic Press, New York, Vol. 14, 1981.
- 1.8 J.F. SACCADURA, "Initiation aux transferts thermiques", Technique et Documentation 1978.
- 1.9 G. LAMANTHE, Transferts Thermiques en Fonderie de Précision appliqués à l'Evaluation de la Microporosité", Thèse INPG, 1983.

- 2.1 F. MARIO, S. LATELIER, "Approach to analyzing unsteady laminar flow in long pipe", Flow Phenomena and measurement ,Vol 1, Encyclopedia of fluid mechanics, N.P. CHEREMISINOFF ed., 1986, pp 560-588.
- 2.2 L.V. HUYNH et J. ETAY, "Melt-spinning", Numerical calculation of an electromagnetically shaped 2D-puddle, Proceeding of the sixth international iron and steel congress - october 21-26 1990 - Nagoya (Japon)
- 2.3 C.A. BREBBIA, J.C.F. TELLES et L.C. WROBEL, "Boundary Elements Techniques, Theory and applications in engineering", Springer Verlag, 1984.
- 2.4 V. NIVET, "Etude de l'Influence du Débit de Coulée sur le Remplissage d'un Moule en fonderie", Rapport DEA 1988.
- 2.5 R.A. FLINN, "Gating System", Fundamentals of Metal Casting, Addison-Wesley Publishing Compagny, 1963.
- 2.6 P. HAIRY et Y. HEMON, "Remplissage des Coquilles, Etude sur Maquettes Hydrauliques et Coquilles Réelles", Fonderie - Fondateur d'aujourd'hui, Vol 92, Février 1990.

3.1 W.C. REYNOLDS, "Computation of Turbulent Flows", Annual Review of Fluid Mechanics, 1976, pp 183-207.

3.2 B.MINAIE, K.A. STELSON, et V.R. VOLLER, "Analysis of Flow Patterns and Solidification Phenomena in the Die Casting Process, " ASME Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 113, 1991, pp. 296-302.

3.3 Z. ABDHULLAH, M. SALCUDEAN, "Free Surface Flow During the Filling of a Cylinder", Int. J. for numer. methods in fluids, Vol. 11, 1990, pp 151-168.

3.4 S. TAVOULARIS, N.P. CHEREMISINOFF, "SECTION III: Flow and Turbulence Measurement", Flow Phenomena and measurement ,Vol 1, Encyclopedia of fluid mechanics, N.P. CHEREMISINOFF ed., 1986, pp 1206.

3.5 J.M. DELHAYE, "Recent Advances in Two-Phase Flow Instrumentation", Heat Transfer, C.L. TIEN, V.P. CAREY, J.K. FERREL ed., Hemisphere Publ. Corp., Vol 1 1986.

3.6 F.A. MAUER, S.J. NORTON, Y. GRINBERG, D. PITCHURE H.N.G. WADLEY, "An Ultrasonic Method for Reconstructing the Two-Bidimensional Liquid-Solid Interface in Solidifying Bodies", Metallurgical Transactions B Vol 22B, 1991, pp 467-473

3.7 R. RICOUD, CH. VIVES, "Local Velocity and Mass Transfer Measurements in Molten Metals Using an Incorporated Magnet Probe", Int. J. Heat Mass Tranfer, Vol 25, No 10, 1982, pp 1579-1588.

3.8 M.K. BEVIR, "Electromagnetic Flow Measurements", Ecole d'été CEA/EDF Eyrolles, 1973, pp 407-425

3.9 I. ONNAKA, M. KAISO, "Analysis of Heat and Fluid Flow During the Filling of Mold Cavity", Proceeding of Modeling of Casting and Welding Processes, The Mineral, Metal and Materials Society, 1988, pp 141-150.

3.10 R. Moreau, "Magnétohydrodynamics", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

3.11 G. MICHARD, "Equilibres Chimiques dans les eaux naturelles", Publisud, 1989.

3.12 A.K. COVINGTON, Ion-Selective Electrode Methodology, A.K. COVINGTON ed., Vol 1, CRS PRESS, 1979.

3.13 A.J. BARD, L.R. FAULKNER, "Electrochimie, Principes, Methodes et Applications", Masson, 1983.

4.1 J.M. DELHAYE, "Equations aux Moyennes Spatiales et aux Moyennes Statistiques des Ecoulements Diphasiques", La Houille Blanche, vol 5, 1967, pp 559-566.

4.2 D.A. DREW, R.T. LAHEY, "The Current State of the Art in the Modelling of Vapor/Liquid Two-Phase Flows", Winter Annual Meeting of the ASME, Dallas, 1990, pp 1-8

4.3 D.A. DREW, "Mathematical Modeling of Two-Phase Flow", Ann. Rev. Fluid Mech., 1983, vol 15, pp 262-291

4.4 J. Ni, C. Beckermann, "A Volume-Averaged Two-Phase Model for Transport Phenomena during Solidification", *Metall. Trans*, 1991, vol 22B, pp 349-361

4.5 M. ISHII, N. ZUBER, "Drag Coefficient and Relative Velocity in Bubbly, Droplet or Particulate Flows", *AICHE J.*, 1979, vol 25, pp 843-855

4.6 D.R. POIRIER, "Permeability for Flow of Interdendritic Liquid in Columnar-Dendritic Alloys", *Metallurgical Transactions B Vol 18B*, 1987, pp 245-255

4.7 W. KURZ, D.J. FISHER, "Fundamentals of Solidification", *Trans Tech Publications*, 3th ed, Aedermannsdorf, Switzerland, 1989

5.1 C.A. HIEBER, S.F. SHEN, "Flow Analysis of the Non-Isothermal Two-Dimensional Filling Process in Injection Molding", *Israel Journal of Technology*, Vol 16, 1978, pp 248-254.

5.2 H. JIN, A. SAMELSSON, O. TULLBERG, "Boundary element method for the injection-moulding filling process of thin cavities", *Engineering analysis*, Vol. 2, 1985, pp 9-15

5.3 T. NAKAYAMA, "A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free surface", *Int. J. for numer. methods in fluids*, Vol. 10, 1990, pp 683-695

5.4 C.P. HONG, T. UMEDA, Y. KIMURA, "Numerical Models for Casting Solidification: Part II. Application of the Boundary Element Method to Solidification Problems", *Metallurgical Transactions B Vol 15B*, 1984, pp 101-107

5.5 F. MUTTIN, T. COUPEZ, M. BELLET, J.L. CHENOT, "Newtonian Fluid Computations in Lagrangian Variables with a Remeshing Technique. Application to the Filling Stage of the Die Casting Process", *Proceeding of* , Southampton, pp 207-221

5.6 D.M. GAO, G. DHATT, J. BELANGER, A. BEN CHEIKH, "A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds", *Proceeding of Numerical Methods in Thermal Problem*, Swansea, 1989, pp 421-430.

5.7 R.W. LEWIS, A. S. USMANI, H.C. HUANG, *Proceeding of Modeling of Casting and Welding Processes*, The Mineral Metal and Materials Society, 1990, pp 3-14.

5.8 S.V. PATANKAR, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", *Hemisphere Publishing Corporation Mc Graw-Hill Book Company*, 1980.

5.9 W. WULFF, "Computational Methods For Multiphase Flow", *Second International Workshop on Two-Phase Flow Fundamentals*, New York, March 1987.

5.10 W.T. SHA, B.T. CHAO, S.L. SOO, "Porous- Media Formulation For Multiphase Flow With Heat Transfer", *Nuclear Engineering and Design*, 1984, pp 93-106.

5.11 C. RIGAUULT, B. JANIN, P. LATY A. BOURG, A. LATROBE, "Simulor, un Logiciel de Modélisation 3D du Remplissage et de la Solidification en Moulage", *Hommes et Fonderie*, March 1989, pp 13-24.

5.12 C.W. HIRT, B.D. NICHOLS, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries", *Journal of Computational Physics Vol 39*, 1981, pp 201-225.

5.13 R.A. STOEHR W.S. HWANHG, "Modeling the Flow of Molten Metal Having a Free Surface During Entry Into Molds ", Proceeding of Modeling of Casting and Welding Processes, The Metallurgical Society of AIME, 1983, pp 47-58.

5.14 M. BURTY, "Contribution à l'étude du brassage pneumatique de métaux liquides en poche de traitement et des transferts métal-laitier", Thèse INPG, 1990.

5.15 B.P. LEONARD, "A Stable and Accurate Convection Modelling Procedure Based on a Quadratic Upstream Interpolation", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 19, 1979, pp 59-98.

5.16 P.H. GASKELL, A.K.C. LAU, " Curvature-Compensated Convective Transport: SMART, a New Boundedness-Preserving Transport Algorithm", Int. J. for numer. methods in fluids, Vol. 8, 1988, pp 617-641.

5.17 P. ROACHE, "Computational Fluids Dynamics", Hermosa Publishers Albuquerque, 1972.

5.18 J. JIUN, D.B. SPALDING, "Numerical Simulation of Flows with Moving Interfaces", Physico Chemical Hydrodynamics, Vol 10, 1988, pp 625-637.

5.19 P.J. SHOPOV, P.D. MINEY, I.B. BAZHLEKOV, "Numerical Method for Unsteady Viscous Hydrodyamical Problem With Free Boundary", Int. J. for numer. methods in fluids, Vol. 14, 1992, pp 681-705.

Annexes



Annexe 1

Similitudes hydrauliques

Dans les écoulements en sections minces ou lorsque les rayons de courbure des interfaces nécessitent l'introduction des forces de tension superficielle, le dispositif expérimental ne peut être employé pour reproduire les écoulement réels que si les trois conditions de similitude suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \text{Re}_1 = \text{Re}_2 &\Rightarrow \left[\frac{\rho U D}{\mu} \right]_1 = \left[\frac{\rho U D}{\mu} \right]_2 \\ \text{Fr}_1 = \text{Fr}_2 &\Rightarrow \left[\frac{U^2}{g D} \right]_1 = \left[\frac{U^2}{g D} \right]_2 \\ \text{We}_1 = \text{We}_2 &\Rightarrow \left[\frac{\rho D U^2}{\sigma} \right]_1 = \left[\frac{\rho D U^2}{\sigma} \right]_2 \end{aligned}$$

Pour trouver les facteurs d'échelle à même de réaliser les conditions de similitudes géométrique, cinématique et dynamiques, on choisit en priorité les deux premières conditions:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{v_1}{v_2} \frac{U_1}{U_2}$$

$$\left[\frac{U_1}{U_2} \right]^2 = \frac{D_1}{D_2}$$

On en déduit:

$$\left[\frac{U_1}{U_2} \right]^2 = \frac{v_1}{v_2} \frac{U_1}{U_2}$$

D'où les facteurs d'échelle :

$$k' = \frac{U_1}{U_2} = \left[\frac{v_1}{v_2} \right]^{1/3}$$

$$k'' = \frac{D_1}{D_2} = \left[\frac{v_1}{v_2} \right]^{2/3}$$

Puis l'on vérifie la troisième condition :

$$\frac{(U^2 D)_1}{(U^2 D)_2} = \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)_2 \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)_1$$

Ou en remplaçant $\frac{U_1}{U_2}$ et $\frac{D_1}{D_2}$ respectivement par $\left[\frac{v_1}{v_2} \right]^{1/3}$ et $\left[\frac{v_1}{v_2} \right]^{2/3}$:

$$\left[\frac{v_1}{v_2} \right]^{2/3} \left[\frac{v_1}{v_2} \right]^{2/3} = \left[\frac{\rho}{\sigma} \right]_2 \left[\frac{\sigma}{\rho} \right]_1$$

D' où:

$$\left[\frac{v_1}{v_2} \right]^4 = \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} \right]^3 \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right]^3$$

ou encore:

$$\left[v^4 \left[\frac{\rho}{\sigma} \right]^3 \right]_1 = \left[v^4 \left[\frac{\rho}{\sigma} \right]^3 \right]_2$$

Cette relation peut être adimensionnalisée en multipliant par la gravité, et si l'on change la viscosité cinématique par la viscosité dynamique, on obtient :

$$\left[\frac{g\mu^4}{\rho\sigma^3} \right]_1 = \left[\frac{g\mu^4}{\rho\sigma^3} \right]_2$$

on définit le nombre de Morton :

$$Mo = \frac{g\mu^4}{\rho\sigma^3}$$

Si la condition de similitude du nombre de Morton est vérifiée, les propriétés du métal liquide utilisé pour les simulations, permettent de réaliser des expériences de remplissage avec des écoulements proches de ceux obtenus pour des coulées réelles. Les facteurs d'échelle sont fonction du rapport des viscosités. Les conditions de Re, Fr et We sont vérifiées simultanément.

Si l'on compare le nombre de Morton du métal de Wood à celui du nickel, on obtient :

$$\frac{Mo_1}{Mo_2} = 0,74$$

conduisant aux rapports suivant :

$$\frac{Re_1}{Re_2} = 1.005$$

$$\frac{Fr_1}{Fr_2} = 0.997$$

$$\frac{We_1}{We_2} = 1.070$$

et aux facteurs d'échelle :

$$k' = \frac{U_1}{U_2} = \left[\frac{v_1}{v_2} \right]^{1/3} \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = 1.55$$

$$k'' = \frac{D_1}{D_2} = \left[\frac{v_1}{v_2} \right]^{2/3} \Rightarrow \frac{D_1}{D_2} = 2.41$$

Annexe 2

Conditions aux limites de la fonction courant

La détermination des lignes de courant dans le domaine liquide, nécessite l'initialisation des débits q_1, q_2, q_3 . Ceux-ci dépendent des conditions expérimentales. Les positions des surfaces libres sont déterminées lorsque les variations de débit entre deux itérations tendent vers zéro.

Malgré l'emploi d'une caméra cinématographique rapide, l'accélération du fluide due aux forces de gravité sur la hauteur h (figure 2.3) ne peut être mesurée. Les variations de vitesse sur le trajet verticale de l'ordre de 6cm sont donc négligées.

En supposant les vitesses sur les segments AB et IJ équivalentes (figure 2.2), le débit q_1 est approché par la relation:

$$q_1 = \frac{q_0(a-b)}{a}$$

Le partage des débits est fonction uniquement de la section de l'écoulement. Les grandeurs mesurées q_0, a, d, h et l'angle α permettent le calcul de b et de q_1 . Le terme b est donné par la relation:

$$b = d \cos \alpha - h \sin \alpha.$$

Les sections de sortie des branches inférieures du jet sont sensiblement sur la même ligne horizontale. Les vitesses sont donc supposées identiques. Dans ce cas le partage des débits q_2 et q_3 est donné par la relation:

$$q_2 = q_3 \frac{FE}{DC}$$

La somme des débits q_1, q_2 et q_3 doit être égale à q_0 . Le débit q_3 est donc initialisé d'après le bilan de conservation suivant:

$$q_3 = (q_0 - q_1) \left(1 + \frac{FE}{DC}\right)^{-1}$$

Annexe 3

Influence d'un champ magnétique transversal sur un écoulement bidimensionnel

Pour réaliser des mesures de tension, le champ électrique doit dériver d'un champ potentiel:

$$\vec{E} = - \text{grad } \phi$$

Cependant en présence d'un champ magnétique, le champ électrique s'exprime en fonction du vecteur potentiel \vec{A} :

$$\vec{E} = - \text{grad } \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Pour vérifier la condition d'irrotationnalité ($\text{rot } \vec{E} = 0$), l'influence du champ magnétique doit être négligeable.

En utilisant la relation : $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, on vérifie par une étude d'ordre de grandeur que:

$$\text{rot } \vec{E} \gg \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Pour cette étude on définit les vecteurs de la manière suivante:

$$\vec{B} (0, 0, B_0 + b)$$

$$\vec{E} (e_x, e_y, 0)$$

$$\vec{U} (u, v, 0)$$

Ecrivons les équations de Maxwell:

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } (\vec{B}_0 + \vec{b}) = \mu \vec{J}$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B})$$

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

où encore :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{b_x}{L} &= 0 \left(\frac{b_z}{l} \right) \end{aligned}$$

$$\mu \vec{J} = \operatorname{rot} (\vec{B}_0 + \vec{b})$$

$$\mu \vec{J} : \begin{cases} \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \\ \frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \\ \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \end{cases}$$

En projetant sur l'axe \vec{o}_y :

$$\begin{aligned} \mu J_y &= 0 \left(\frac{b_x}{l} - \left(\frac{1}{L} b_x \right) \frac{1}{L} \right) \\ &= 0 \left(\frac{b_x}{l} \left(1 - \left(\frac{1}{L} \right)^2 \right) \right) \\ &= 0 \left(\frac{b_x}{l} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B})$$

En projetant sur l'axe \vec{o}_y :

$$\begin{aligned} J_y &= \sigma (e_y + u B_0) \\ J_y &= 0 (\sigma u B_0) \end{aligned}$$

Sur l'axe \vec{o}_y :

$$\left. \begin{aligned} \mu J_y &= 0 \left(\frac{b_x}{l} \right) \\ J_y &= 0 (\sigma u B_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b_x = 0 (\mu \sigma l u B_0)$$

D'où :

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = 0 \left(\frac{b_x}{L/u} \right) \Rightarrow \frac{\partial b_x}{\partial t} = 0 \left(\frac{\mu \sigma l u B_0}{L/u} \right)$$

$$\vec{E} = 0 (\vec{U} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{\text{rot}} (\vec{U} \wedge \vec{B}) : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} (uB_0) \\ \frac{\partial}{\partial z} (vB_0) \\ - B_0 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{cases}$$

En projetant sur l'axe \vec{Ox} :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = 0 \left(\frac{uB_0}{l} \right)$$

On obtient les ordres de grandeur des deux termes :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = 0 \left(\frac{uB_0}{l} \right)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = 0 \left(\frac{\mu\sigma l u B_0}{L/u} \right)$$

Si l'on fait le rapport :

$$R = \frac{0 (\vec{\text{rot}} \vec{E})}{0 \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)}$$

On obtient:

$$R = \frac{\frac{uB_0}{l}}{\frac{\mu\sigma l u B_0}{L/u}} = R = \frac{L}{\mu\sigma l^2 u}$$

Pour l'eau :

$$R = \frac{0.1}{4\pi 10^{-7} 25(5 \cdot 10^{-3})^2 1} = 1.3 \cdot 10^8$$

Pour un métal :

$$R = \frac{0.1}{4\pi 10^{-7} 10^6 (5 \cdot 10^{-3})^2 1} = 3200$$

Dans les deux cas le rapport R est supérieur à l'unité:

$$R = \frac{L}{\mu\sigma l^2 u} \gg 1$$

Donc quelle que soit la valeur de la conductivité électrique, on peut écrire l'inégalité :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} \gg \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On en déduit :

$$\vec{E} = - \vec{\text{grad}} \phi$$

Le champ électrique dérive d'un potentiel :

$$\vec{E} : \begin{cases} e_x = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ e_y = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases}$$

La mesure de la tension dans le plan (0,x,y) peut être reliée au champ électrique. Le champ magnétique reste constant dans le temps et dans le plan de l'écoulement.



Annexe 4

Forces de traînée de la phase liquide et de la phase transportée

Nous présentons dans cette annexe les termes de transferts interfaciaux qui interviennent dans l'équation de quantité de mouvement. Ceux-ci sont écrits uniquement pour la phase liquide. Les forces de traînée pour la phase solide et la phase gazeuse sont déduites des conditions de saut. Le terme \vec{M}_1^d est écrit différemment suivant que l'écoulement est à phases dispersées ou à phases séparées.

Force de traînée dans la phase liquide

Écoulement à phases dispersées

La représentation de ce terme dans la phase liquide, pour les écoulements à phases dispersées, est décrite par D. A. Drew [4.3]. De l'équation donnée par cet auteur, on ne retiendra que le premier terme:

$$\vec{M}_1^d = A_1 (\langle \vec{v}_s \rangle^s - \langle \vec{v}_l \rangle^l) \quad (\text{A 4.1})$$

La valeur de A_1 est donnée par la relation suivante:

$$A_1 = \frac{3}{8} \rho_l A_d \frac{C_D}{r} |\langle \vec{v}_s \rangle^s - \langle \vec{v}_l \rangle^l|$$

avec:

r : Rayon de la particule

C_D : Coefficient de traînée

A_d : Section droite de la phase transportée (solide ou gaz)

Les corrélations donnant la valeur de C_D sont présentées dans l'article de M. Ishii et N.Zuber [4.5]. Elles sont fonction des valeurs de la fraction liquide et du nombre de Reynolds relatif aux particules (solide ou gaz).

Écoulement en milieu poreux

Dans les zones de solidification où l'écoulement est fortement ralenti par la structure solide, les forces de viscosité sont prépondérantes. Ce type d'écoulement est représenté par la loi de Darcy [4.6].

$$\langle \vec{v}_l \rangle^l = - \frac{\vec{K}}{\alpha_l \mu_l} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_l \vec{g}) \quad (\text{A 4.2})$$

\vec{K} représente le tenseur symétrique de perméabilité. En général celui-ci est calculé à partir de l'équation de Karmann-Kozeny [4.6]. Dans les écoulements présentant une structure de solidification équiaxe, ce tenseur est réduit à un scalaire:

$$K = C \frac{D^2 \alpha_l^3}{(1-\alpha_l)^2}$$

C est une constante déterminée expérimentalement

D est une dimension caractéristique de la phase solide

Dans les milieux non isotropes, correspondant à des conditions de solidification dendritique colonnaire, ce tenseur comporte deux composantes. L'une correspond aux écoulements parallèles aux dendrites primaires, l'autre dans la direction perpendiculaire. Dans les deux cas le dénominateur est fonction d'un rapport de longueur :

$$1-\alpha_l = f(D/d) ,$$

où d correspond à l'espace interdendritique.

En négligeant les forces de volume, les pertes de charge pour les écoulements traversant une zone pâteuse sont donc représentées par l'équation:

$$\vec{\nabla} p = - \alpha_l \mu_l \vec{K}^{-1} \langle \vec{v}_l \rangle^l \quad (\text{A 4.3})$$

Les forces de couplage, qui interviennent entre la phase liquide et la phase solide, sont obtenues en multipliant le gradient de pression par fraction volumique, et en remplaçant la vitesse du métal liquide par la vitesse relative [4.4]:

$$\vec{M}_l^d = - \alpha_l^2 \mu_l \vec{K}^{-1} \cdot (\langle \vec{v}_l \rangle^l - \langle \vec{v}_s \rangle^s)$$

Force de traînée de la phase transportée

Les forces de traînée de la phase gazeuse et de la phase solide sont déduites de la condition de saut à l'interface. Si l'on raisonne en fonction du couplage liquide/gaz:

$$\vec{M}_g^d + \vec{M}_g^\Gamma + \vec{M}_1^d + \vec{M}_1^\Gamma = \vec{M}_i \quad (\text{A 4.4})$$

Pour des interfaces à grands rayons de courbure, les forces de tension superficielle peuvent être négligées. Dans ce cas:

$$\vec{M}_i = 0$$

En l'absence de transfert de masse (vaporisation) ou lorsque que ceux-ci peuvent être négligés (solidification), on obtient:

$$\Gamma = 0$$

La condition de saut à l'interface est alors réduite à:

$$\vec{M}_g^d = -\vec{M}_1^d$$

Les transferts interfaciaux de quantité de mouvement pour la phase gazeuse sont donc opposés à ceux de la phase liquide. Le même raisonnement est appliqué pour obtenir les transferts interfaciaux dans la phase solide.



Annexe 5

Discrétisation du terme instationnaire dans l'équation de la vitesse

Les champs de vitesse et de pression sont calculés en utilisant un schéma temporel totalement implicite. Une fois linéarisée, l'équation de la composante horizontale de la vitesse s'écrit :

$$\sum A_i u_i - A_p u_p + S_u = 0 \quad (\text{A 5.1})$$

Le terme pivot est de la forme :

$$A_p = \sum A_i + S_p \quad (\text{A 5.2})$$

Avant la convergence, la somme des débits est différente de zéro. Dans le cas où le résultat est positif, celui-ci est placé dans le terme spécial de l'équation de vitesse :

$$S_p = S_{mp} - \sum q_i \quad \text{Si } \sum q_i > 0 \quad (\text{A 5.3})$$

D'autre part, l'équation de correction de pression est fonction du terme d_p :

$$d_p = \frac{\text{vol } \alpha}{\Delta x A_p} \quad (\text{A 5.4})$$

Celui-ci est fonction de la valeur du pivot A_p de l'équation de vitesse (eq. A 5.1). Les valeurs fluctuantes de la pression sont donc calculées pour annuler ce défaut de masse.

D'après la remarque, faite au paragraphe 3 du chapitre 5, en régime instationnaire, à l'état de convergence à l'instant t , si une maille relative à la composante horizontale de la vitesse est traversée par une interface, la somme des débits est différente de zéro :

$$\sum q_i + \frac{\Delta \alpha p}{\Delta t} \text{vol} \quad (\text{A 5.5})$$

Le défaut de masse correspond à une augmentation du volume liquide dans la maille. Cependant, on obtient un saut de pression interfacial lié à la déformation de la surface libre. Cette différence de pression se traduit par une vitesse nulle sur l'interface. L'avancée du fluide est alors freinée.

Le saut de pression interfacial est représenté sur la figure A 5.1a, pour les champs de vitesse dans le liquide et le gaz représentés figure A 5.2. Dans cet exemple, le liquide est séparé

du gaz par un interface horizontale. La formation du tourbillon dans la phase liquide est due à la présence d'une paroi défilante sur le coté droit. Les conditions aux limites imposent la vitesse tangentielle nulle sur les parois sauf sur celle de droite où la vitesse est : $V_p = 0,5 \text{ m/s}$. Le pas de temps est : $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Le maillage est composé de 30 cellules d'un centimètre de côté dans les deux directions. Les résultats des calculs sont présentés un dixième de seconde après l'instant initial. La vitesse maximum proche de la paroi est $V_{\max} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$. Les calculs sont réalisés avec les propriétés physiques et hydrauliques de l'eau. Le profil de la pression présenté sur la figure A 5.1a correspond au plan de coupe vertical situé à $i = 28$.

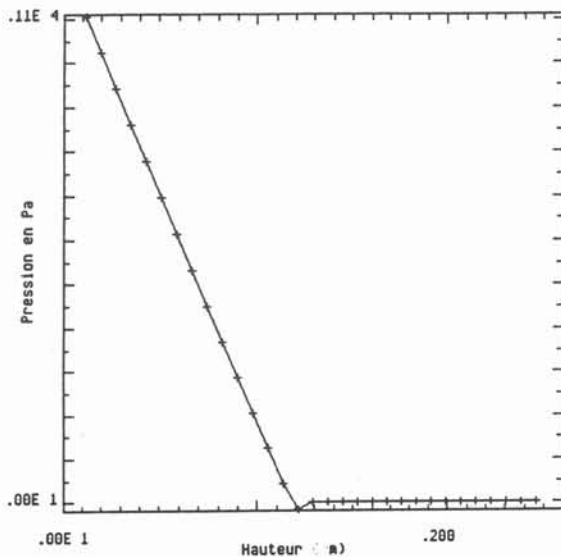


Figure A 5.1 a :

Discontinuité du champ de pression, due à l'augmentation du volume liquide dans la maille où se situe l'interface.

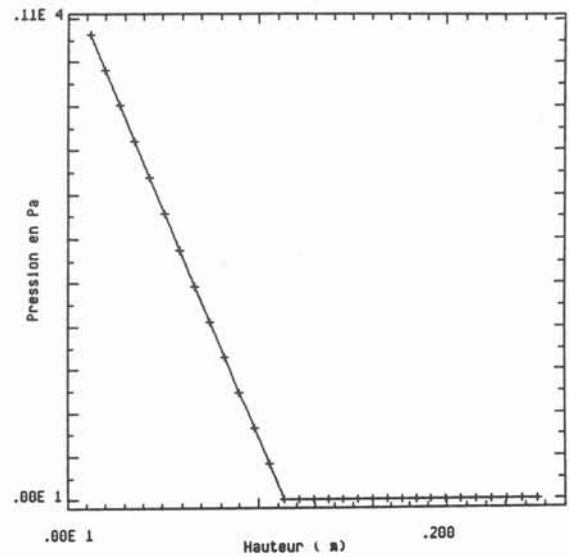


Figure A 5.1 b :

Courbe de la pression suivant un plan de coupe vertical après traitement de la discontinuité.

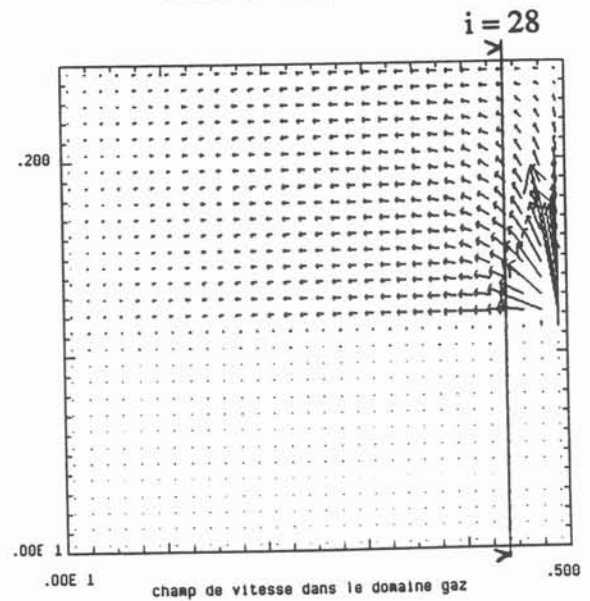
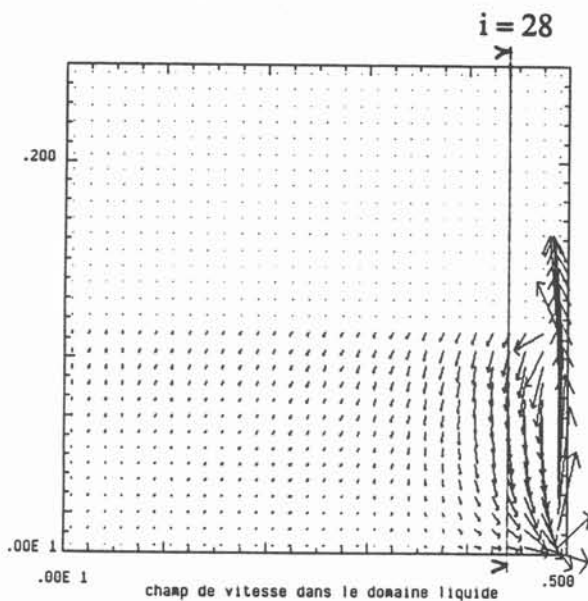


Figure A 5.2 :

Profil des champs de vitesse dans le liquide et dans le gaz, séparés par une interface horizontale. Le mouvement est dû à la paroi défilante verticale de droite.

Pour éviter la discontinuité des valeurs de la pression, l'équation de la composante horizontale de la vitesse est discrétisée en adoptant une écriture différente du terme spécial S_p :

$$S_p = S_{mp} - \left(\sum q_i + \frac{\Delta \alpha \rho}{\Delta t} \text{vol} \right) \quad (\text{A.5 6})$$

Ainsi, que la maille considérée comporte une interface ou non, on vérifie à l'état de convergence :

$$S_p = S_{mp} \quad (\text{A.5 7})$$

Dans ce cas, le défaut de masse lié à l'avancée de l'interface, n'est plus à l'origine de variations de pression. On obtient un profil continu de la pression dans chaque phase, et un changement de pente uniquement dans la maille traversée par l'interface (figure A 5.1b). Les vitesses sur la surface libre, au lieu de tendre vers zéro, vont être égales à la vitesse de la phase liquide. A la convergence, les conditions de saut interfacial sont alors vérifiées. En reprenant provisoirement la notation du chapitre 4, on obtient:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= 0, \\ \langle p_l \rangle^l &= \langle p_l \rangle^i, \\ \langle \vec{v}_l \rangle^l &= \langle \vec{v}_l \rangle^i. \end{aligned}$$

Pour obtenir cette forme discrétisée du terme spécial, il est nécessaire de séparer le terme instationnaire en deux parties. L'équation de vitesse s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_{V_u} \alpha \rho \frac{\partial u}{\partial t} dv + \int_{V_u} u \frac{\partial(\alpha \rho)}{\partial t} dv + \int_{S_u} \alpha \rho u (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds &= - \int_{V_u} \alpha \frac{\partial p}{\partial x} dv + \int_{S_u} \alpha \vec{i}_x \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) ds \\ (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) & \\ &+ \int_{V_u} \alpha \rho g_x dv \quad (\text{A 5.8}) \\ &(6) \end{aligned}$$

De cette manière les variations temporelles de fractions volumiques interviennent explicitement. Le terme (2) de l'équation A 5. 8 est ensuite placé dans le terme spécial S_p de l'équation A 5.6, et associé à la somme des flux entrant et sortant de chaque maille. De cette façon, les corrections de pression ne s'appliquent pas aux variations de fractions volumiques.

Le principe de l'algorithme SIMPLE, utilisé pour la modélisation des écoulements monophasiques peut alors être étendu aux écoulements à surfaces libres.

Remarque :

Les vitesses et les pressions sont définies sur trois grilles entrelacées. Si l'interface traverse verticalement la maille correspondant au noeud de pression $p(i,j)$, dans ce cas le calcul de la vitesse $u(i,j)$ ne doit pas tenir compte du déplacement de la surface libre (figure 5.3). Les variations de fractions volumiques sont donc calculées indépendamment pour chacune des trois grilles. Les conditions de saut interfacial seront d'autant mieux respectées que les schémas de discrétisation utilisés pour les calculs seront précis pour tenir compte de la discontinuité des fractions volumiques.

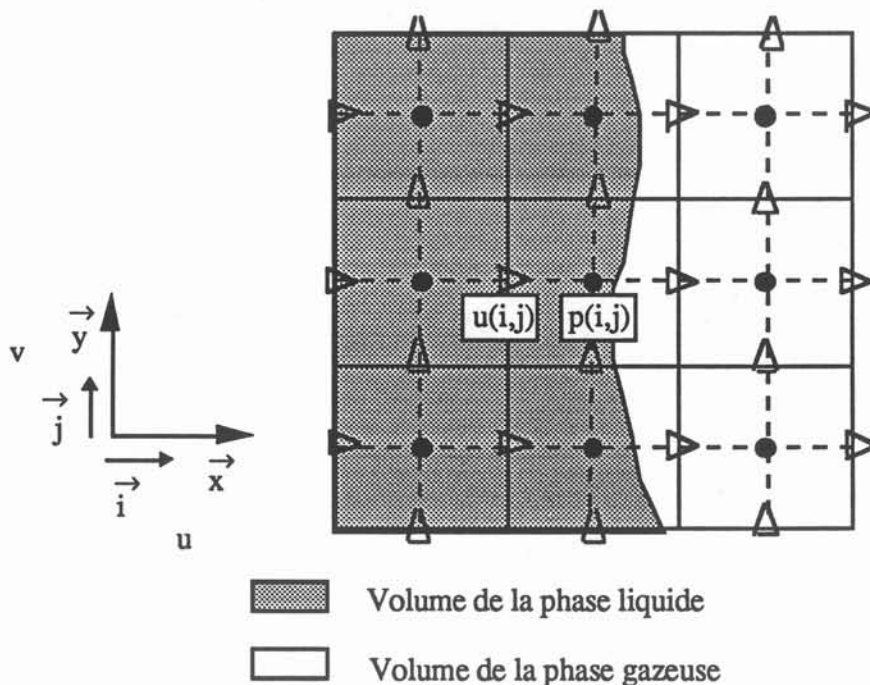


Figure A 5.3 :

La surface libre traverse verticalement la maille relative à $p(i,j)$. Les variations de fractions volumiques n'interviennent pas dans le calcul $u(i,j)$.

Annexe 6

Calcul des fractions volumiques et surfaciques liquides

Pour représenter la position de la surface libre le plus précisément possible, le calcul des fractions volumiques liquides, sur les faces et au centre de chaque maille, fait appel à des schémas d'interpolation du premier, deuxième et troisième ordre. Ceux-ci sont regroupés dans une seule formulation grâce à l'emploi de la variable β^- . On donne la manière explicite pour calculer les fractions sur chaque facette et la méthode de résolution pour déterminer implicitement les valeurs au centre. La méthode du type Gauss Siedel est présentée dans le dernier paragraphe.

Calcul de α sur la face EST

Les valeurs sont déterminées sur chaque face des volumes de contrôle de manière explicite. Dans le cas de la facette EST par exemple on retient la fonction d'interpolation suivante:

$$\begin{aligned}\alpha_e &= \left(\frac{3}{4} + 2\beta^-\right) \alpha_P + \left(\frac{3}{8} - \beta^-\right) \alpha_E - \left(\frac{1}{8} + \beta^-\right) \alpha_W && \text{pour } u_e > 0 \\ \alpha_e &= \left(\frac{3}{4} + 2\beta^-\right) \alpha_E + \left(\frac{3}{8} - \beta^-\right) \alpha_P - \left(\frac{1}{8} + \beta^-\right) \alpha_{EE} && \text{pour } u_e < 0\end{aligned}$$

Calcul de α au centre d'une maille

A l'instant n , les valeurs sont calculées au centre des mailles par un schéma implicite. L'équation est discrétisée de la façon suivante:

$$\sum A_i \alpha_i + A_p \alpha_p - Su = 0$$

Les coefficients A_i de ce système linéarisé dépendent des fonctions d'interpolation et du signe de la vitesse. Dans la direction horizontale, ceux-ci s'expriment en fonction du débit (q) et des valeurs des coefficients $\beta_e, \beta_w, \beta_n, \beta_s, \dots$. Dans le cas présent on définit par exemple β_e comme:

$$\beta_e = \frac{\hat{\alpha}_e - \frac{3}{8}(2\hat{\alpha}_E + 1)}{2\hat{\alpha}_E - 1}$$

Pour un écoulement monodimensionnel, on obtient les relations:

$$A_{ww} = \frac{1}{2}(q_w + |q_w|) \left(\frac{1}{8} + \beta_w\right)$$

$$\begin{aligned}
A_W &= -\frac{1}{2}(q_w + |q_w|) \left(\frac{3}{4} + 2b_w\right) - \frac{1}{2}(q_e + |q_e|) \left(\frac{1}{8} + b_e\right) + \frac{1}{2}(q_w - |q_w|) \left(\frac{3}{8} - b_w\right) \\
A_E &= -\frac{1}{2}(q_e - |q_e|) \left(\frac{3}{4} + 2b_e\right) + \frac{1}{2}(q_w - |q_w|) \left(\frac{1}{8} + b_w\right) + \frac{1}{2}(q_e + |q_e|) \left(\frac{3}{8} - b_e\right) \\
A_{EE} &= -\frac{1}{2}(q_e - |q_e|) \left(\frac{1}{8} + b_e\right)
\end{aligned}$$

On définit les coefficients A_N, A_{NN}, A_S, A_{SS} , en procédant par analogie.

Dans la direction horizontale, on définit le terme pivot comme:

$$\begin{aligned}
A_P &= -\frac{1}{2}(q_w - |q_w|) \left(\frac{3}{4} + 2\beta_w\right) - \frac{1}{2}(q_w + |q_w|) \left(\frac{3}{8} - \beta_w\right) + \\
&\quad \frac{1}{2}(q_e + |q_e|) \left(\frac{3}{4} + 2\beta_e\right) + \frac{1}{2}(q_e - |q_e|) \left(\frac{3}{8} - \beta_e\right) + \frac{\rho Vol}{\Delta t}
\end{aligned}$$

et le terme source comme:

$$Su = \frac{\rho Vol}{\Delta t} \alpha_{p, n-1}$$

Méthode de résolution

Dans une formulation matricielle les coefficients sont regroupés sur cinq diagonales. Si l'on choisit une méthode de résolution itérative du type Gauss-Seidel, on utilise les formules de récursivité données par P.H. Gaskell et A.C.K. Lau [5.15]:

$$(\alpha_p)_i = [v_i - \delta_i (\alpha_p)_{i+1} - \lambda_i (\alpha_p)_{i+2}] / \gamma_i$$

avec:

$$\begin{aligned}
\sigma_i &= A_{ww} / \gamma_{i-2} \\
\beta_i &= [A_w - \sigma_i \delta_{i-2}] / \gamma_{i-1} \\
\gamma_i &= A_p - \sigma_i \lambda_{i-2} - \beta_i \delta_{i-1} \\
\delta_i &= A_E + \beta_i \lambda_{i-1} \\
\lambda_i &= A_{EE} \\
v_i &= F_i - \beta_i v_{i-1} - \sigma_i v_{i-2}
\end{aligned}$$

et:

$$F_i = -A_{NN} \alpha_{NN} - A_N \alpha_N - A_S \alpha_S - A_{SS} \alpha_{SS} + Su_i$$

Au cours de la résolution, cet algorithme porte alternativement sur chacune des directions de l'espace (O, x, y).

