



Etude et mise en oeuvre d'un procédé de recyclage par induction, d'alliages métalliques

Olivier Quemener

► To cite this version:

Olivier Quemener. Etude et mise en oeuvre d'un procédé de recyclage par induction, d'alliages métalliques. Electromagnétisme. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1993. Français. <NNT : >. <tel-01339819>

HAL Id: tel-01339819

<https://hal.science/tel-01339819v1>

Submitted on 30 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

THESE

présentée par

Olivier QUEMENER

pour obtenir le grade de DOCTEUR

**de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
de GRENOBLE**

(arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité : Mécanique

**Etude et mise en oeuvre d'un procédé de recyclage
par induction, d'alliages métalliques**

Date de soutenance : 14 septembre 1993

Composition du jury :

M. P. OZIL	Président
M. G. DEVELEY M. D DELAUNEY	Rapporteurs
M. SCHLECHT M. ERNST	Examineurs

Thèse préparée au sein du laboratoire MADYLAM

Je remercie tout d'abord Marcel GARNIER, pour m'avoir accueilli au sein de ce projet. Merci également à Francois SCHLECHT, qui a suivi l'avancement de mes travaux, et qui m'a fait mieux connaître le monde industriel.

J'exprime toute ma gratitude à Roland ERNST, pour avoir dirigé cette étude. Je tiens à le remercier pour son enthousiasme et sa disponibilité, ainsi que pour l'ambiance amicale et chaleureuse dans laquelle se sont déroulées ces trois années.

Ma reconnaissance s'adresse également aux différents membres du laboratoire, en particulier à l'équipe technique, Christian GARNIER, Robert BOLCATO et Denis BON, pour leur bonne humeur, leur disponibilité et leurs judicieux conseils lors de la phase expérimentale, ainsi qu'à l'équipe de modélisation, Yves DUTERAIL et Annie GAGNOUD, pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée.

Je remercie vivement, Patrick OZIL, Didier DELAUNEY et Gérard DEVELEY, pour avoir accepté d'être respectivement président et rapporteurs du jury.

Je remercie enfin tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'achèvement de cette thèse.

NOMENCLATURE

Electromagnétisme

C	Capacité (F)
f	fréquence (Hz)
I	Courant (A)
k	Rapport de transformateur
L	Inductance (H)
P	Puissance (W)
R	Résistance (Ω)
U	Tension (V)
Z	Impédance (Ω)
σ	conductivité électrique du matériau (S/m)
δ	Epaisseur de peau électromagnétique (m)
η	Rendement
μ	Perméabilité magnétique (H/m) $= 4\pi \cdot 10^{-7}$
ω	Pulsation (rad/s)
\vec{J}	densité volumique de courant électrique (A/m ²)
\vec{B}	induction magnétique (T)
\vec{A}	potentiel vecteur magnétique (Tm)
V	potentiel scalaire électrique (V)
\vec{F}	densité de forces de Laplace (N/m ³)

Indices

A	actif
P	primaire
R	réactif
S	secondaire

Thermohydraulique

Cp	Chaleur massique (J/kg °K)
Cpce	capacité calorifique équivalente de changement d'état (J/kg °K)
D	Diamètre (m)
g	Gravité (m/s ²)
h	coefficient d'échange (W/m ² °K)
H	enthalpie globale (J/m ³)
H _G	Hauteur hydraulique des pertes de charge (m)
k	Conductivité thermique (W/m °K)
k _e	Conductivité thermique équivalente (W/m °K)
L	Longueur (m)
L _f	chaleur latente de changement d'état (J/kg)
m	Débit (kg/s)
P	Puissance (W)
R	Rayon (m)
r	Coordonnée radiale (m)
S	Surface (m ²)
T	Température (°K)
U	Vitesse (m/s)
Z	Hauteur (m)
z	Coordonnée longitudinale (m)
ΔT	Différence de température (°K)
Δr	Taille de maille selon le rayon (m)
Δz	Taille de maille selon la hauteur (m)
ϵ	émissivité
ϕ	Flux thermique (W/m ²)
λ	Coefficient de résistance de frottements
ν	Viscosité cinématique (m ² /s)
ρ	Masse volumique (kg/m ³)
ξ	Rugosité de la paroi

Indices

CE	changement d'état
c	charge
f	fluide
e	entrée
L	liquide
S	solide
s	sortie

SOMMAIRE

INTRODUCTION

PARTIE I: CONCEPTION ET CARACTERISATION DE LA POCHE DE FUSION 50 HERTZ

I. Intérêt d'un creuset froid fonctionnant à 50 Hz

- I.1. Utilisation de l'induction en métallurgie.**
Rappel des équations MHD
- I.2. Le creuset froid inductif**
- I.3. Avantages présentés par le fonctionnement à 50 Hertz**

II. Dimensionnement de l'installation

- II.1. Définition du creuset et de l'inducteur**
 - II.1.1. La modélisation**
 - II.1.2. Détermination numérique de la géométrie**
 - II.1.3. Conception définitive**
 - II.1.3.1. Le creuset**
 - II.1.3.2. L'inducteur**
- II.2. Définition du circuit électrique complet**
- II.3. Conception des éléments mécaniques**
- II.4. Premiers essais**
 - II.4.1. Influence des caractéristiques de la charge de départ**
 - II.4.2. Importance et difficultés du réglage**
 - II.4.3. Détermination numérique et expérimentale des caractéristiques électriques. Validation du logiciel Ophélie**
 - II.4.4. Résultats des premiers essais**

III. Etude des forces électromagnétiques de lévitation de la charge

- III.1. Analyse théorique des phénomènes**
- III.2. Développement numérique**
 - III.2.1. Répartition de la force volumique ponctuelle**
 - III.2.2. Comparaison de la force irrotationnelle volumique ponctuelle**
calculée avec les hypothèses de grande et de petite épaisseur de peau
 - III.2.3. Calcul de la force de lévitation globale**
 - III.2.3.1. Calcul de la force de lévitation avec hypothèse de fine épaisseur de peau et en négligeant la courbure dans le volume d'intégration.**

III.2.3.2. Calcul de la force de lévitation avec la loi de décroissance analytique en tenant compte de la courbure dans le volume d'intégration

III.2.3.3. Calcul de la force de lévitation en grande peau

III.2.3.4. Application au dispositif expérimental. Validation des différentes méthodes

III.3. Influence des paramètres significatifs sur les forces irrotationnelles

IV. Mise en oeuvre d'un circuit magnétique de concentration du champ au dessus de la charge

IV.1. Rappel sur le magnétisme

IV.2. Résolution numérique du problème

IV.3. Etude de l'influence du circuit magnétique

IV.3.1 Influence sur la distribution du champ magnétique

IV.3.2. Influence sur les caractéristiques globales du procédé

IV.3.3. Influence sur la fusion de la charge

IV.4. Nouveaux essais avec le circuit magnétique

V. Etude des phénomènes de brassage en vue de la digestion des copeaux

V.1. Etude de forces rotationnelles

V.2. La modélisation thermo-hydraulique

V.3. Etude de la possibilité de maîtrise du sens des vortex par le circuit magnétique.

V.4. observations expérimentales

VI. Caractérisation expérimentale du procédé

VI.1. Le système d'acquisition de données

VI.2. Caractérisation électrique du système en cours d'essai

VI.2.1. Détermination de la résistance R et de l'inductance L de l'ensemble inducteur-creuset-charge

VI.2.2. Optimisation du réglage du circuit

VI.3. Bilan énergétique

VI.4. Détermination expérimentale du coefficient d'échanges thermiques entre la charge liquide et le creuset froid

PARTIE II: LA BUSETTE ELECTROMAGNETIQUE

I. Présentation des différents systèmes existants et du dispositif innovant adopté

- I.1.** Intérêt d'un système de vanne électromagnétique
- I.2.** Etat de la technique
- I.3.** Présentation du système étudié

II. Etude du défigeage

- II.1.** Position du problème
- II.2.** Définition de la géométrie initiale de la vanne électromagnétique
- II.3.** Choix de la fréquence
 - II.3.1.** Influence de la fréquence sur le couplage inductif
 - II.3.2.** Influence de l'épaisseur de peau électromagnétique sur le profil de température
- II.4.** Couplage électromagnétique entre la poche de fusion 50 Hz et le dispositif de vanne électromagnétique moyenne fréquence
 - II.4.1.** Ecriture des équations
 - II.4.2.** Résolution du problème simplifié
 - II.4.2.1.** Système découplé
 - II.4.2.2.** Système couplé
 - II.4.3.** Détermination des paramètres électriques des circuits
 - II.4.3.1.** Paramètres du circuit inductif de la vanne électromagnétique
 - II.4.3.2.** Détermination de la mutuelle inductance entre les deux systèmes
 - II.4.4.** Application à la configuration étudiée
- II. 5.** Détermination de la puissance à injecter dans la charge
 - II.5.1.** Détermination des pertes latérales par les parois
 - II. 5.2.** Détermination de la puissance
 - II.5.2.1.** Puissance nécessaire à la montée en température
 - II.5.2.2.** Puissance nécessaire au changement d'état
 - II.5.2.3.** Puissance nécessaire au maintien en phase liquide
 - II.5.2.4.** Dimensionnement final
- II.6.** Campagnes d'essais
 - II.6.1.** Essais préalables sans inducteur moyenne fréquence
 - II.6.2.** Conception de l'inducteur
 - II.6.3.** Détermination expérimentale de la mutuelle entre les circuits inductifs 50 Hz et moyenne fréquence

- II.6.4. Les essais effectifs avec inducteur moyenne fréquence
 - II.6.4.1. Essais avec la géométrie d'origine
 - II.6.4.2. Modification de la géométrie
- II.6.5. Analyse du système à induction
 - II.6.5.1. Les mesures du champ magnétique
 - II.6.5.2. Les mesures de bilan calorimétrique
- III.6.6. Mise en place d'un nouvel inducteur
- III.6.7. Essais de coulée pendant le fonctionnement de la poche de fusion

III. Etude du figeage

- III.1. Hypothèse d'équilibre thermodynamique
- III.2. Modélisation analytique du problème
 - III.2.1. Prise en compte de la solidification
 - III.2.2. Ecriture du problème pour un corps pur
- III.3. Mise au point d'un code de calcul, basé sur la méthode des éléments finis
 - III.3.1. Ecriture des équations
 - III.3.2. Choix de la méthode numérique: les éléments finis
 - III.3.3. Application à l'équation thermique
 - III.3.4. Etude de la stabilité
 - III.3.4.1. Stabilité dans l'espace
 - III.3.4.2. Stabilité temporelle
 - III.3.5. Détermination du front de solidification
 - III.3.6. Implantation des calculs hydrauliques dans le code numérique thermique
 - III.3.6.1 Calcul du terme moteur de l'écoulement
 - III.3.6.2 - Expression analytique de la vitesse
 - III.3.7. Algorithme général
 - III.3.8. Application du modèle de calcul sur un cas test
 - III.3.9. Application à la géométrie de la busette
 - III.3.9.1. Choix des paramètres
 - III.3.9.1.1. Grandeurs physiques
 - III.3.9.1.2. Grandeurs numériques
 - III.3.9.2. Résultats des calculs
 - III.3.10. Limitations du code et perspectives

CONCLUSION

- ANNEXE 1: Principe de calcul du code numérique OPHELIE
- ANNEXE 2: Méthode du décréement logarithmique
- ANNEXE 3: Modélisation du transformateur par son schéma équivalent et représentation électrique complète de l'installation
- ANNEXE 4: Résolution du système d'équations modélisant le couplage électromagnétique entre la poche de fusion 50 Hz et le dispositif de vanne électromagnétique moyenne fréquence

INTRODUCTION

L'induction électromagnétique, qui est la création de courants électriques induits dans un milieu conducteur de l'électricité soumis à un champ magnétique variable dans le temps (alternatif), est un mode de chauffage des matériaux à la fois facile et souple d'utilisation. Ce procédé, permet, en l'absence de tout contact électrique, d'amener une puissance importante dans un volume souhaité, qu'il soit réduit ou étendu, et ceci en un laps de temps très court.

Les applications de l'induction sont très nombreuses, et on en découvre chaque jour de nouvelles :

L'induction s'adresse tout d'abord au domaine classique de la métallurgie, qu'il s'agisse de fusion, de traitements thermiques [1], de brasures, d'élaboration d'alliages [2], ou encore de masselottage par induction [3].

L'induction s'adresse aussi, et ceci plus récemment, à de nouveaux domaines : un important progrès a été réalisé pour la fusion et le maintien à l'état liquide des verres [4] et des oxydes [5]. Une nouvelle voie se développe actuellement sur les plasmas inductifs [6]. L'induction entre même dans le grand public, par ses applications dans l'agro-alimentaire : ce sont les systèmes de cuisson par induction [7].

Mais même dans le domaine classique de la métallurgie, les choses évoluent, et de nouvelles applications de l'induction sont découvertes : ainsi les soucis d'économie d'énergie de cette dernière décennie, font prendre une part de plus en plus importante à l'industrie de récupération et de recyclage des métaux.

La société de fonderie Bonmartin Laminoirs du Dauphiné est spécialisée dans la production de produits cuivreux (barres rondes et hexagonales). Elle élabore notamment des rondins de laiton en coulée continue dans des fours à canal. Ces rondins sont en partie obtenus par recyclage de copeaux (ou tournures) de laiton, issus de l'industrie de décolletage. Ces tournures, généralement chargées d'huiles, ne peuvent pas être alimentés directement dans le four à canal, mais doivent subir un traitement préalable, consistant à les compacter sous forme de briquettes introduites dans un four à post-combustion chargé d'éliminer toute trace de graisse par oxydation. Malgré ce traitement, l'ingestion de ces tournures dans le four à canal reste difficile: l'oxyde formé ralentit la fusion des briquettes. De plus, celles-ci de densité plus légère que celle du laiton liquide restent en surface du bain de métal et sont ainsi difficilement fondues.

Une collaboration entre l'établissement Bonmartin et le laboratoire Madylam a été mise en place, afin de mettre au point une unité de fusion par induction des copeaux, destinée à être implantée au dessus du four à canal.

L'intérêt de l'utilisation d'un tel système, véritable poche de fusion, est de profiter des avantages de la fusion par creuset froid inductif, - c'est à dire brassage électromagnétique et fusion propre -, pour permettre l'amélioration de l'ingestion des tournures, tout en ayant à la fois une production d'ordre industrielle et un coût réduit. La poche de fusion fonctionnerait à la fréquence du réseau de 50 Hz. L'unité, munie d'un système de coulée contrôlée du matériau fondu par le fond du creuset, permettrait l'alimentation directe en liquide du four à canal.

L'association de ces deux organes - creuset froid inductif basse fréquence et four à canal -, devrait entraîner une augmentation importante du débit de tournures à fondre, une simplification des procédures de recyclage des tournures, et par conséquent une réduction des coûts de revient des produits élaborés.

C'est sur cet objectif industriel qu'est basée la présente thèse:

Un premier travail consiste à concevoir un véritable prototype d'une installation creuset froid inductif 50 Hz. Après une phase de dimensionnement par modélisation numérique et d'expérimentation, les premiers essais ont orienté le travail sur l'étude des éléments susceptibles d'améliorer la fusion, notamment l'influence des forces de lévitation, ainsi que l'intérêt de la présence d'un circuit magnétique, qui permet de concentrer localement le champ magnétique. Le brassage électromagnétique, à l'origine de l'assimilation rapide des copeaux dans la masse liquide, a également été étudié dans notre configuration. Enfin, une exploitation des résultats expérimentaux a été effectuée, permettant de suivre les variations des différentes grandeurs électriques et thermiques en cours d'essai, entraînant la caractérisation complète de l'installation au niveau énergétique, et notamment la détermination du rendement énergétique réel du prototype.

Le second objectif est la mise au point du système à induction entièrement statique, permettant le contrôle de la coulée du métal liquide par le fond du creuset, en "tout ou rien" (coulée semi - continue). Ce système est basé sur un phénomène de solidification forcée du métal, qui obstrue alors l'orifice de coulée par formation d'un bouchon. Pour déclencher la coulée, ce bouchon est refondu par un système à induction. Les deux phases principales de la conception de ce dispositif de coulée innovant sont les suivantes:

- d'une part, l'étude de l'amorçage de la coulée (le "défigeage"), qui fait intervenir un système à induction moyenne fréquence, et pour lequel un important travail expérimental a été effectué

- d'autre part l'étude de l'arrêt de la coulée (le "figeage"), mettant en oeuvre des phénomènes de thermique (avec changement de phase) et de mécanique des fluides couplés, qui ont donné lieu à la mise en place d'un code de modélisation numérique.

En raison de l'orientation "Génie des Procédés" de ce travail, la démarche générale a consisté à effectuer des observations sur un dispositif de première étape non optimisé. Ces observations ont par la suite guidé les développements théoriques, permettant d'aboutir au fonctionnement complet et à l'optimisation de ce dispositif.

L'ensemble du prototype est destiné à être implanté dans l'entreprise Bonmartin en vue de l'industrialisation du procédé.

PARTIE I:
CONCEPTION ET CARACTERISATION
DE LA POCHE DE FUSION 50 HERTZ

I. INTERET D'UN CREUSET FROID FONCTIONNANT A 50 HZ

I.1. Utilisation de l'induction en métallurgie. Rappel des équations MHD

Appliqué dans le domaine de la métallurgie pour la fusion des métaux, le procédé de fusion par induction ne peut plus être traité dans le seul cadre de l'électrothermie: en effet, les forces de Laplace, qui résultent de l'interaction des courants induits dans le métal liquide et du champ magnétique, vont influencer de façon importante sur le champ de vitesse au sein du liquide et sur la forme de la masse en fusion, qui n'est donc plus celle d'un fluide au repos. Par ailleurs le changement de forme ainsi que le déplacement des particules fluides vont modifier l'influence du champ magnétique sur la charge fondue et donc la répartition des courants induits.

Un tel problème doit être abordé dans le cadre de la magnétohydrodynamique (MHD), qui est l'étude des interactions entre les écoulements de fluides électro-conducteurs et les champs magnétiques, couplé avec la thermique [8] [9]. Ce domaine très vaste de la physique qu'est la MHD est ainsi régi par deux familles d'équations:

- Les équations électromagnétiques:

Les équations de Maxwell:

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \mu \vec{j}\end{aligned}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{div} \vec{j} = 0$$

où \vec{E} est le champ magnétique, \vec{B} l'induction, \vec{j} la densité de courant et μ la perméabilité magnétique.

La définition des potentiels:

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \quad \text{avec } \vec{A} \text{ le potentiel vecteur}$$

$$\vec{E} = - \vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

où V est le potentiel électrique

La loi d'ohm généralisée:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B})$$

avec σ la conductivité électrique, \vec{U} la vitesse

- Les équations de la mécanique des fluides:

L'équation de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = \frac{1}{\rho} \vec{j} \wedge \vec{B} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \bar{e} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g}$$

où $\bar{\epsilon}$ est le tenseur des contraintes, p est la pression et \vec{g} l'accélération de la pesanteur.

L'équation de continuité:

$$\text{div } \vec{U} = 0$$

A partir des relations fondamentales précédentes, on fait apparaître une équation régissant un nombre minimal de variables. En considérant la perméabilité magnétique constante (ce qui est vrai pour les métaux), on obtient alors l'équation de l'induction:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\text{rot}} \vec{U} \times \vec{B} + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \vec{B}$$

L'évolution temporelle du champ \vec{B} est ainsi fonction de deux phénomènes:

- un phénomène de convection:

$$\vec{\text{rot}} \vec{U} \times \vec{B}$$

- un phénomène de diffusion:

$$\frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \vec{B}$$

Compte tenu de la complexité des phénomènes mis en jeu et de leur couplage, seule une étude adimensionnelle permet de comparer l'importance des différents mécanismes. L'adimensionnalisation de l'équation de l'induction amène ainsi:

$$R_\omega \frac{\partial \vec{b}'}{\partial t'} = \Delta' \vec{b}' + R_m \vec{\text{rot}}' (\vec{u}' \times \vec{b}')$$

avec: t' le temps adimensionnel: $t' = \frac{t}{T_0}$

où T_0 est le temps caractéristique du phénomène

\vec{u}' la vitesse adimensionnelle: $\vec{u}' = \vec{U} \cdot \frac{T_0}{L_0}$

où L_0 est la longueur caractéristique du domaine électro-conducteur

\vec{b}' l'induction adimensionnelle: $\vec{b}' = \vec{B} \frac{1}{B_0}$

où B_0 est la valeur caractéristique de l'induction

Δ' et $\vec{\text{rot}}'$ des opérateurs différentiels adimensionnalisés: $\Delta' = \Delta \cdot L_0^2$

$$\vec{\text{rot}}' = \vec{\text{rot}} \cdot L_0$$

$R_\omega = \frac{\mu \sigma L_0^2}{T_0}$, le paramètre d'écran, égal au rapport $\frac{\text{effet de non stationnarité}}{\text{effet de diffusion}}$

$R_m = \mu \sigma U_0 L_0$, le Reynolds magnétique, égal au rapport $\frac{\text{effet de convection}}{\text{effet de diffusion}}$

A l'échelle du laboratoire, $R_m \ll 1$, ce qui simplifie l'équation adimensionnée de l'induction:

$$R_\omega \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \Delta' \vec{b}$$

Le champ magnétique est ainsi celui qui existerait pour un milieu conducteur immobile. Ainsi, seul le champ de vitesse est modifié.

Dans le cas des champs magnétiques alternatifs, le temps caractéristique est imposée par la pulsation du champ ω : $T_0 = \omega^{-1}$
soit $R_\omega = \mu \sigma \omega L_0^2$

A l'équation de l'induction ainsi obtenue est associée une profondeur de pénétration du champ magnétique, appelée plus simplement l'épaisseur de peau électromagnétique, et qui s'écrit:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}},$$

$$\text{d'où le paramètre d'écran: } R_\omega = 2 \left(\frac{L_0}{\delta} \right)^2$$

Ainsi les variations du champ magnétique et donc les courants induits sont localisés dans l'épaisseur de peau δ , à la périphérie du domaine électro-conducteur.

Cette épaisseur de peau est définie pour un champ magnétique créé par un courant sinusoïdal, de pulsation ω . On voit ainsi que plus la fréquence est faible, plus δ devient important.

Les études de ces problèmes ont par ailleurs mis en évidence l'importance des effets mécaniques dans un bain électro-conducteur soumis à un champ magnétique alternatif. Ces forces se partagent en deux classes:

- des forces rotationnelles qui conduisent à des mouvements turbulents au sein du liquide et qui sont prédominantes dans les mécanismes de transports de chaleur et de masse.
- des forces irrotationnelles, qui permettent une lévitation plus ou moins parfaite ainsi que le formage de la charge liquide.

Les applications industrielles métallurgiques se sont ainsi beaucoup développées avec la naissance des creuset inductifs, qui ne sont pas moins que des poches de métal soumises à des champs magnétiques et qui bénéficient des deux effets précédemment cités:

- le chauffage par effet Joule
- un brassage important

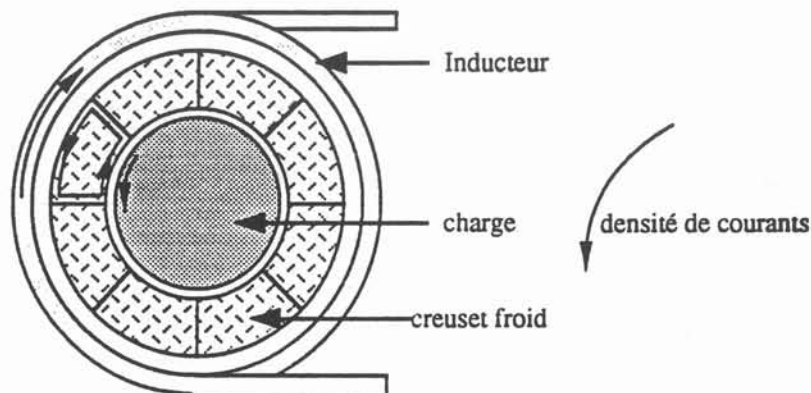
Cependant, cette technique du creuset inductif reste néanmoins limitée par un certain nombre de problèmes: l'usure mécanique importante du creuset du fait du brassage important, et la pollution du matériau fondu si celui-ci est chimiquement réactif à haute température par rapport au matériau du creuset. La résolution de ce type de problème pour les matériaux à haut degré de pureté s'effectuait alors par fusion à arc ou bombardement électronique: ces procédés, qui présentent des difficultés de mise en oeuvre (respectivement chauffage trop localisé et mode opératoire compliqué), permettaient la non pollution du matériau en utilisant un creuset métallique en cuivre refroidi par une circulation d'eau.

I.2. Le creuset froid inductif

Le couplage des techniques de l'induction, caractérisée par une grande souplesse d'utilisation, et du creuset froid, qui évite la pollution par le creuset, s'est longtemps heurté à une difficulté fondamentale: la paroi de cuivre n'est pas transparente au champ magnétique et crée un écrantage entre l'inducteur et la charge à fondre.

La solution permettant d'allier ces deux techniques - induction et creuset froid - a finalement été trouvée: un creuset froid composé de secteurs isolés électriquement les uns des autres, permet d'éviter l'écrantage de la charge au champ magnétique, puisque les courants induits qui se créent sur la paroi périphérique extérieure d'un secteur ne peuvent se refermer qu'en circulant dans la section du secteur et traversent donc la paroi interne du secteur en vis à vis de la charge à fondre. Compte tenu de l'existence de ces courants induits dans le creuset, un nouveau champ magnétique pénètre dans la charge à fondre et y donne naissance à de nouveaux courants induits qui vont permettre le chauffage de la pièce (figure 1).

Figure 1: Principe de fonctionnement du creuset froid moyenne fréquence

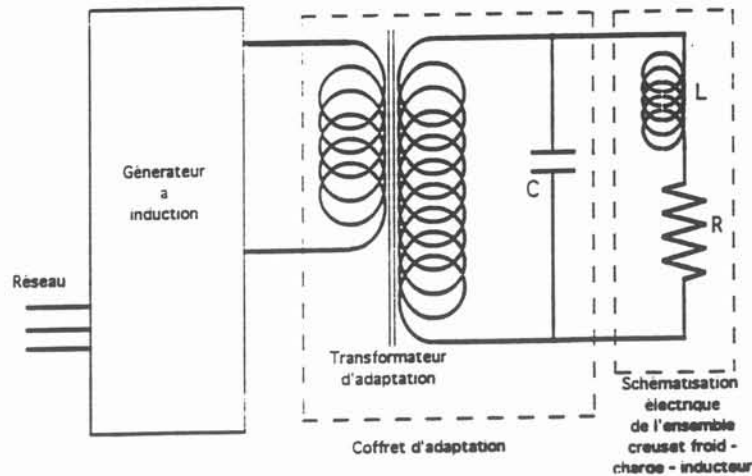


Les forces électromagnétiques vont être telles que le métal fondu va être repoussé vers le centre du creuset. Elles créent ainsi une résistance thermique qui limite les déperditions thermiques de la charge vers le creuset et permet alors d'obtenir la fusion de la charge, malgré les parois froides du creuset. Dans le cas où les forces sont insuffisantes pour éviter tout contact entre le creuset froid et la charge, le matériau au contact avec les parois froides du creuset se solidifie, de telle sorte que le liquide est contenu par une paroi faite de son solide.

L'alimentation électrique d'un tel procédé se fait de la façon suivante: l'ensemble inducteur - creuset froid est équivalent électriquement à une résistance R et une inductance L . Pour compléter le circuit oscillant et compenser l'énergie réactive, des batteries de condensateurs sont montées en parallèle par rapport à l'ensemble R et L . La source électrique est un générateur à induction, qui permet de générer une tension dans une certaine gamme de fréquence (figure 2). Un tel montage est par ailleurs équipé d'un retour d'un faible pourcentage de la tension aux bornes de l'inducteur vers le générateur. Ceci permet à ce dernier de régler sa fréquence de fonctionnement à la fréquence du circuit oscillant constitué des batteries de condensateurs et de l'ensemble inducteur - creuset froid - charge. La fréquence de

fonctionnement, non fixée, évoluera donc en fonction des variations de la résistance R et de l'inductance L , liées aux changements de température, d'état, ou de forme de la charge.

Figure 2: Circuit électrique de l'installation de fusion par creuset froid moyenne fréquence



L'ensemble du procédé est donc assez imposant, pour une taille de creuset froid qui jusqu'à aujourd'hui ne dépasse pas quelques dizaines de centimètres en diamètre et hauteur. Par ailleurs, compte tenu du mode de chauffage "indirect", on enregistre des pertes électriques par effet Joule importantes au niveau de l'inducteur et du creuset froid. En tenant compte des pertes qui existent au niveau du générateur (le rendement est de 80%), on obtient ainsi un rendement du procédé complet de 10 à 40% selon la géométrie.

L'ensemble de ces caractéristiques rend ainsi ce procédé d'une part très intéressant au niveau de la qualité du produit fabriqué, mais d'autre part coûteux et le limite donc pour l'instant aux matériaux à haute valeur ajoutée.

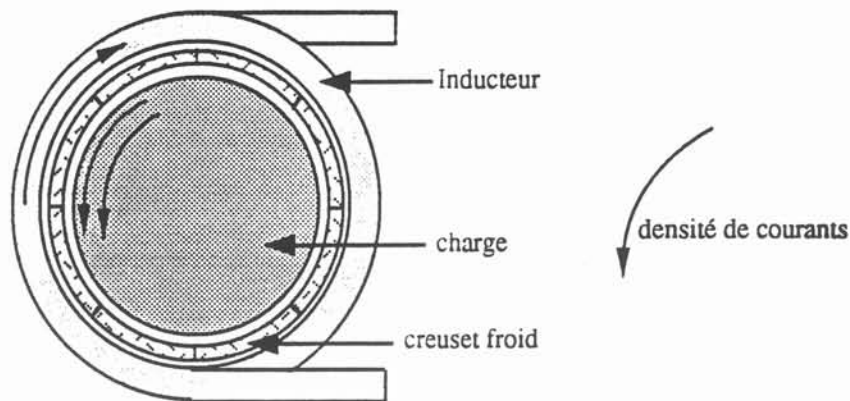
I.3. Idée et intérêts du 50 Hertz

Compte tenu de l'intérêt que présente la technique de fusion dans un creuset froid inductif, un développement de ce procédé à différents types de matériaux, et donc à ceux de faible valeur ajoutée paraît une idée séduisante, à la condition de réduire les coûts de production.

Du point de vue énergétique, le creuset froid peut être considéré comme un intermédiaire entre l'inducteur et la charge à fondre: il absorbe la puissance provenant de l'inducteur, et il est source de la puissance que reçoit la charge à fondre. Le prix à payer est la puissance perdue par effet Joule dans chaque secteur.

Pour éviter l'utilisation du creuset comme intermédiaire, l'idée est de le rendre transparent au champ magnétique. En effet si l'on considère un creuset dont l'épaisseur des secteurs est inférieure à l'épaisseur de pénétration du champ magnétique δ , les courants induits qui se rebouclent dans cette épaisseur de peau seront alors très faibles: le creuset sera pratiquement transparent et le champ magnétique pénétrera alors directement dans la charge métallique à fondre, à partir du moment où celle-ci est de taille suffisamment importante pour que les courants induits qui s'y développent puissent se reboucler (figure 3).

Figure 3: Principe de fonctionnement du creuset froid basse fréquence



Pour obtenir un tel fonctionnement, il faut donc satisfaire aux conditions suivantes:

- épaisseur creuset $< \delta$ creuset
ce qui correspond à un paramètre d'écran du creuset R_{ω} très faible
- δ charge $<$ taille de la charge
c'est à dire le paramètre d'écran de la charge important

Il s'agit donc de concevoir un creuset très peu épais capable de contenir un grand volume de métal. Pour ajuster l'épaisseur de pénétration du champ magnétique, on jouera sur la

fréquence puisque $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}}$

En pratique, si l'on considère des parois de l'ordre de quelques millimètres d'épaisseur, la fréquence souhaitée sera de l'ordre de quelques dizaines de Hertz.

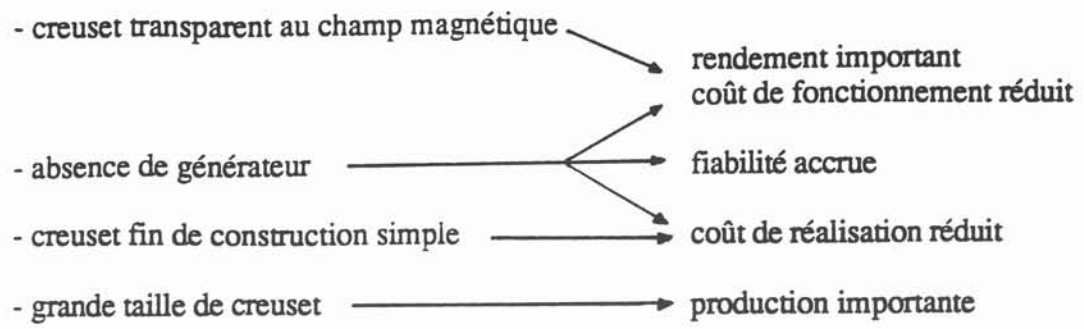
On peut noter que ces conditions qui permettent de satisfaire l'idée d'un creuset transparent au champ magnétique, entraînent des réductions de coûts:

Obtenir un paramètre d'écran de la charge important avec l'utilisation de la basse fréquence favorisera une production importante.

Par ailleurs, le creuset froid sera construit à partir d'une technique plus simple que celle employée pour les creusets froids traditionnels: à la place de secteurs usinés les uns après les autres, avec circulation d'eau interne, ce creuset sera conçu à partir de simples tôles formées et sur lesquelles seront brasés les circuits de refroidissement. Il sera donc d'un coût de fabrication réduit.

A partir du moment où l'utilisation d'une basse fréquence est recherchée, l'idée la plus simple est de choisir la fréquence du réseau - 50 Hertz - qui permet d'éviter l'utilisation du générateur à induction. Ceci permet non seulement de simplifier le procédé et de diminuer son coût d'installation, mais également d'annuler les pertes énergétiques importantes qui existent à ce niveau, et donc d'augmenter le rendement. Enfin, les éléments de la chaîne qui vont constituer le procédé seront alors plus classiques que ceux permettant un fonctionnement en moyenne fréquence. La fiabilité et donc la durée de vie d'un tel système va donc être supérieure aux systèmes de fusion par creuset froid inductif moyenne fréquence.

En résumé, la mise au point d'un creuset froid inductif fonctionnant à 50 Hertz laisse espérer les améliorations suivantes:



II. DIMENSIONNEMENT DE L'INSTALLATION

II.1. Définition du creuset, de l'inducteur et du circuit électrique

Le démarrage d'un tel procédé de recyclage de copeaux nécessite de fondre une charge massive de laiton qui, contrairement aux copeaux, couple sur le champ magnétique. La charge une fois liquide sert alors de pied de bain dans laquelle seront fondus les copeaux. Pour la mise au point du procédé, une première étape a donc été l'obtention de la fusion de la charge massive.

L'objectif final est de pouvoir fondre une dizaine de litres de laiton, soit approximativement 70 kg de laiton, ce qui correspond à concevoir un creuset froid de l'ordre de 250 mm de diamètre pour une hauteur de 200 mm.

A partir de cet impératif, l'utilisation d'un logiciel de modélisation électromagnétique a permis de choisir la configuration présentant le meilleur rendement énergétique.

II.1.1. La modélisation

Le logiciel utilisé, OPHELIE [10], permet de connaître la répartition du champ magnétique qui s'établit dans le système considéré, et donc d'en déduire les autres grandeurs physiques qui en découlent (courants induits, forces de Laplace, etc ...).

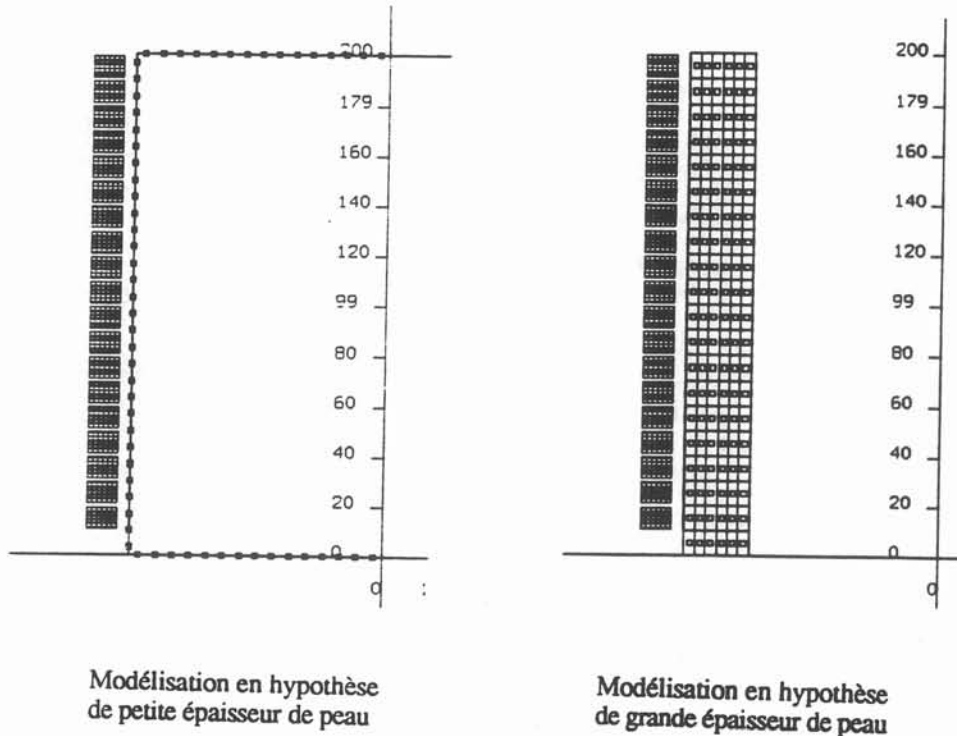
Ce logiciel est basé sur une discrétisation des différents éléments en mailles électriques élémentaires [11]. Il est donc particulièrement bien adapté à la modélisation de systèmes inductifs axisymétriques fonctionnant en moyenne fréquence, dans lesquels l'épaisseur de peau est fine par rapport aux dimensions de la charge, et où donc les courants induits restent quasi-superficiels.

Dans le cas où l'épaisseur de peau est du même ordre de grandeur que les dimensions de la charge, un maillage complet du volume, toujours en mailles électriques élémentaires, est possible. Mais cette configuration entraîne une matrice de résolution de grande taille, qui limite alors la finesse du maillage.

Le détail de la méthode de calcul employée dans ce code numérique est portée en annexe 1.

Dans le problème qui est le nôtre, la répartition de courant n'est certes pas superficielle, puisque l'épaisseur de peau du laiton à la fréquence de 50 Hz varie de 20 à 30 mm selon la température. Cependant, cette épaisseur de peau reste plus petite que la dimension de la charge, d'un diamètre moyen de 200 mm. La modélisation par hypothèse de fine épaisseur de peau, qui permet de discrétiser uniquement la frontière de la géométrie, amène alors une matrice à résoudre de taille peu importante, et donc des temps de calculs assez courts. Compte tenu de l'intérêt de cette méthode, une comparaison des résultats obtenus par cette dernière avec les résultats obtenus par la méthode de discrétisation complète selon n et s de la géométrie et donc beaucoup plus lourde, a été effectuée dans une configuration analogue à la nôtre: la géométrie choisie est une charge cylindrique de 200 mm de diamètre et de hauteur, autour de laquelle est disposé un inducteur fonctionnant à 50 Hz. Une telle modélisation n'est pas effectuée sur l'ensemble du volume de la charge, mais est limitée à la couronne périphérique dans laquelle se développent les courants induits (figure 4). Dans les deux cas, les spires de l'inducteur sont discrétisées sur tous le volume, en utilisant la méthode de discrétisation complète selon n et s .

Figure 4: Modélisation d'une même géométrie basse fréquence en petite et en grande épaisseur de peau



Les résultats obtenus montrent que la résistance calculée varie de 2,1 pour la modélisation en fine épaisseur de peau, à 3,1 mΩ pour le modèle en grande épaisseur de peau, ce qui entraîne une différence de rendement de l'ordre de 10% entre les deux modélisations. Le calcul de l'inductance amène la même valeur pour les deux cas considérés.

Dans un premier temps, compte tenu du but d'estimation que l'on se fixe, la modélisation en mailles superficielles paraît suffisante. Il conviendra cependant, une fois les essais expérimentaux effectués, de valider cette modélisation.

II.1.2. Détermination numérique de la géométrie

L'utilisation du logiciel Ophélie a permis de choisir la configuration présentant les meilleurs rendements électriques, et de vérifier les hypothèses effectuées précédemment. Pour cela, diverses configurations ont été modélisées, faisant varier les paramètres suivants:

- l'épaisseur de creuset froid
- le nombre de spires de l'inducteur
- la position des spires de l'inducteur
- la forme et la section de ces spires
- le diamètre et la hauteur de l'ensemble inducteur-creuset

De ces différents essais, une première chose a été de vérifier l'influence de l'épaisseur du creuset sur le rendement électrique du système. On a ainsi pu montrer la nécessité d'une paroi du creuset la plus fine possible, afin que très peu de courants induits ne puissent se reboucler dans la section du creuset. Ainsi, pour une géométrie identique, entre un creuset d'épaisseur de 20 mm (figure 5) et un creuset d'épaisseur de 10 mm (figure 6), le pourcentage de puissance perdue au niveau du creuset a diminué de 46 à 11%. Cette différence de puissance se retrouve ainsi dans la charge et le rendement passe alors de 17 à 32%.

Par ailleurs, l'inducteur le mieux adapté au problème doit être en spires massives, d'épaisseur au moins égale à l'épaisseur de peau du cuivre à 50 Hz (10 mm). Comme nous le montrent les figures 6 et 7, la comparaison de deux cas de géométrie identique excepté les spires qui sont soit massives, soit creuses, amène des pourcentages de puissances perdues dans l'inducteur qui passent de 48% à 56%. Il en résulte une augmentation du rendement électrique qui passe de 32 à 38%.

Enfin le choix d'un inducteur solénoïdal, qui suit au mieux le contour extérieur du creuset, a été mis en évidence. Un nombre important de spires permet ainsi de suivre au mieux ces contours, d'augmenter le nombre d'Ampères-tours et donc le couplage avec la charge. Le choix du nombre de spires est fixé par leur encombrement et l'impédance obtenue, qui doit être adaptée vis à vis du réseau.

Une configuration optimale (Cf figure 8) a ainsi permis d'atteindre un rendement de l'ordre de 46%, qui représente un rendement important pour un système à induction possédant une telle géométrie. La part de puissance perdue dans le creuset n'est alors que de 6%. Une modélisation de cette géométrie sans tenir compte de l'existence du creuset, que l'on considère alors comme complètement transparent au champ magnétique (figure 9), amène un rendement de 49 %. L'ordre de grandeur entre ces deux modèles - avec ou sans creuset froid - est le même: dans le travail de modélisation qui suivra, le creuset froid ne sera donc jamais modélisé.

Figures 5 à 9: Essais numériques de dimensionnement

Figure 5

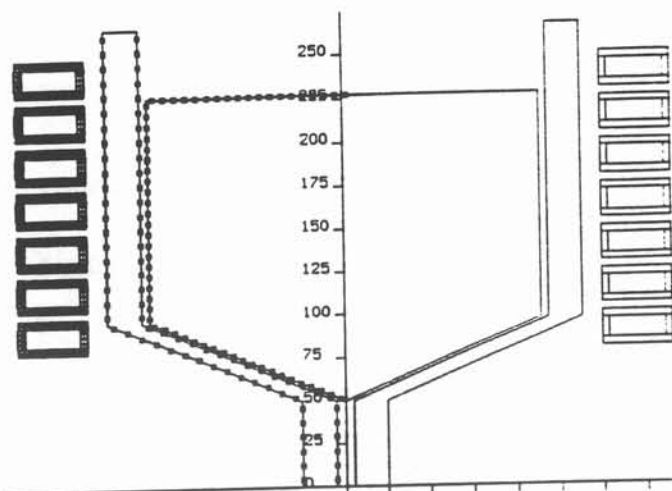


Figure 6

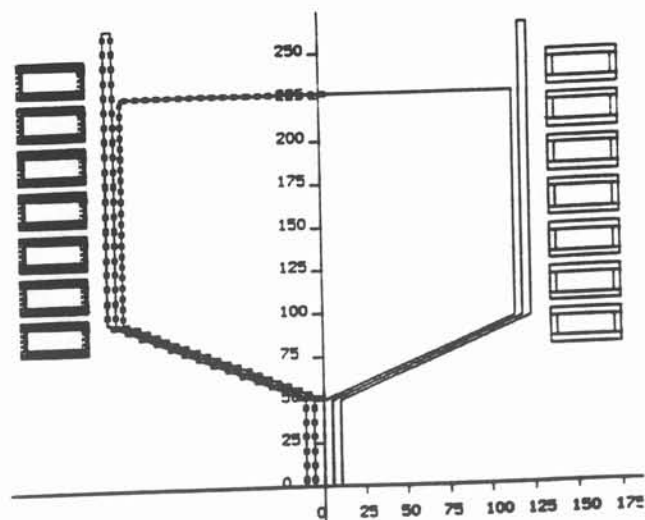


Figure 7

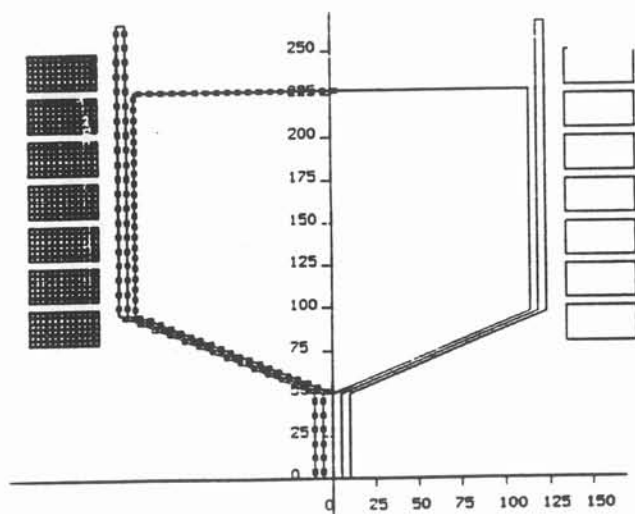


Figure 8

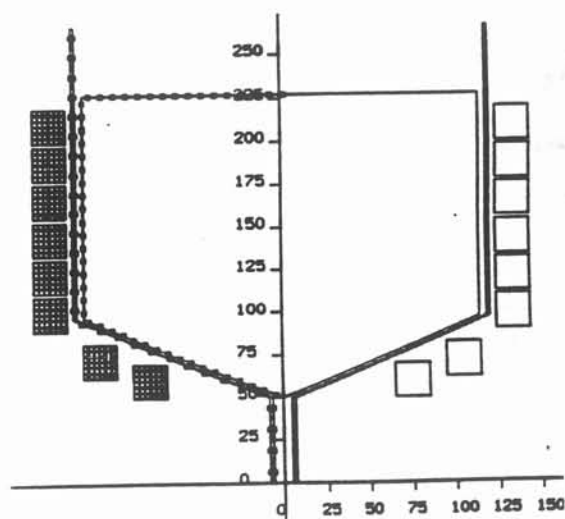
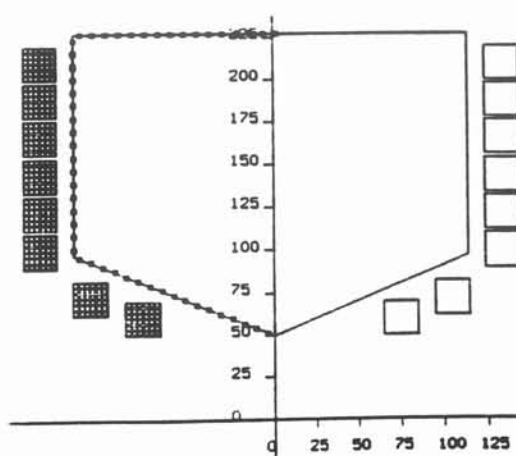


Figure 9



II.1.3. Conception définitive

II.1.3.1. Le creuset

A partir des ces considérations, le creuset froid à été complètement dimensionné et conçu, avec toujours comme objectif une poche de 240 mm de diamètre, constituée d'une paroi fine. Compte tenu du fait que le creuset est prévu pour être pratiquement transparent au champ magnétique, aucune optimisation n'est effectuée en ce qui concerne le nombre de secteurs. Pour éviter cependant des phénomènes possibles d'arcs électriques entre les secteurs en cas de différence de tension trop importante, le nombre de secteur ne doit pas être trop petit. Finalement pour des raisons technologiques, le choix est pris de concevoir un creuset constitué de 10 secteurs en cuivre, de 3 mm d'épaisseur. La partie supérieure de ce creuset est droite, la partie inférieure est semi-sphérique et prolongée par une partie droite cylindrique constituant le trou de coulée. Des tubes de refroidissement sont brasés sur chaque secteur, l'ensemble des secteurs étant alimenté par une double boîte à eau. Le prolongement inférieur des secteurs au niveau du trou de coulée est refroidi dans la masse de chaque secteur par une circulation d'eau ascendante et descendante. Pour améliorer la tenue mécanique de l'ensemble, un ciment réfractaire a été déposé sur la paroi extérieure du creuset froid. Le creuset ainsi conçu est représenté figure 10.

II.1.3.2. L'inducteur

L'inducteur a été extrapolé à partir des résultats de modélisation précédents, qui ont permis d'obtenir une configuration optimale représentée figure 9, utilisant un inducteur de 8 spires, et dont les caractéristiques électriques de l'ensemble inducteur - charge sont les suivantes:

résistance $R = 0,7 \text{ m}\Omega$

inductance $L = 5,5 \text{ }\mu\text{H}$ soit $L\omega = 1,73 \text{ m}\Omega$

impédance $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = 1,86 \text{ m}\Omega$

Compte tenu de la valeur de l'impédance, il est nécessaire d'utiliser une tension plus faible que les 400 V du réseau, ce qui implique la mise en place d'un transformateur abaisseur de tension. En se calquant sur un premier transformateur disponible au laboratoire, de valeurs nominales 60 V pour 2000 A, la principale contrainte technologique liée à l'existence du transformateur dans le circuit, est d'obtenir une impédance déterminée de:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{60}{2000} = 30 \text{ m}\Omega.$$

Cette contrainte a donc déterminé le nombre de spires n de l'inducteur: en effet, en toute première approximation, on peut considérer que:

- la résistance de la charge est proportionnelle à n^2
- la résistance de l'inducteur est proportionnelle à n^2 , puisque toute variation du nombre de spires entraîne une variation de la section de passage de la spire, afin que la hauteur de l'inducteur reste égale à celle du creuset.
- la résistance de l'inductance est proportionnelle à n^2 .

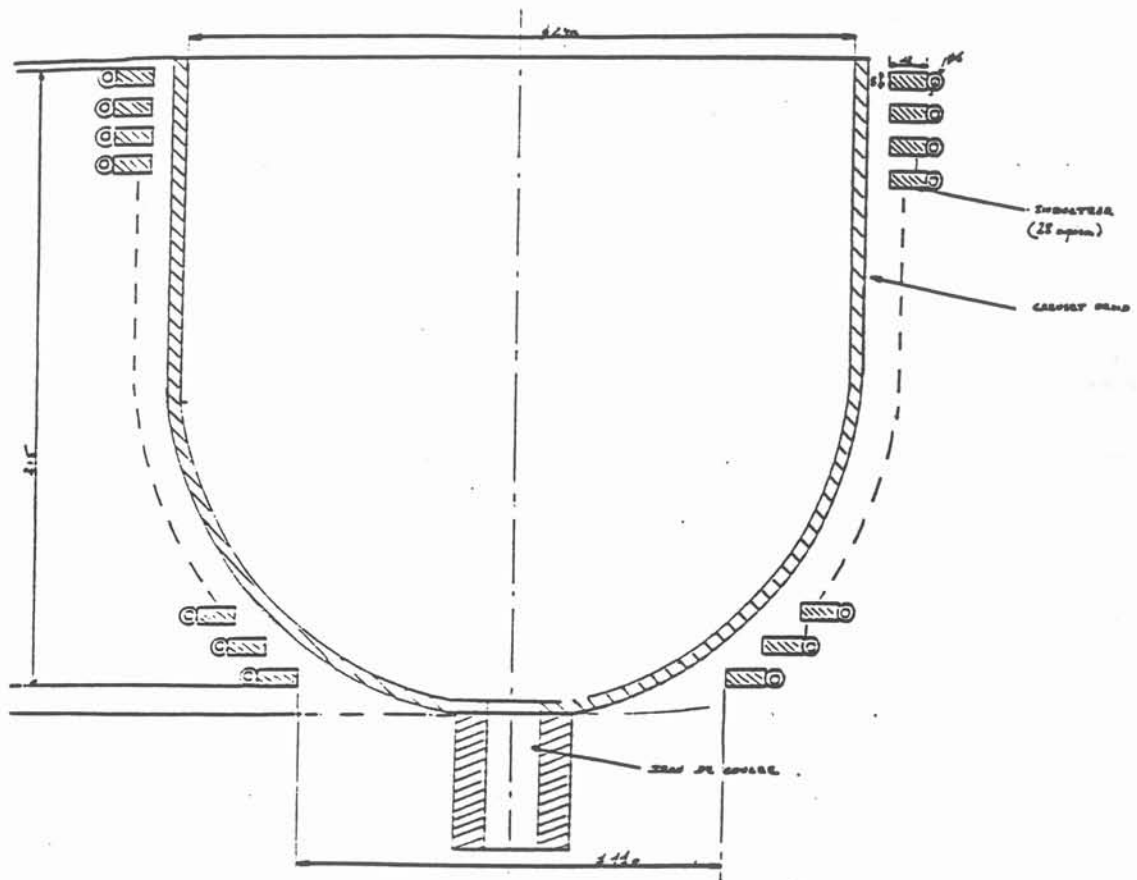
Ainsi, en considérant l'impédance $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ proportionnelle à n^2 , l'extrapolation des valeurs obtenues lors de la modélisation pour un inducteur de 8 spires, conduit à un nombre de spires 4 fois plus important, soit donc un inducteur de 32 spires.

A la différence des inducteurs utilisés habituellement pour la moyenne fréquence, qui sont de simples tubes de cuivre à l'intérieur desquels circule l'eau de refroidissement, il a été nécessaire de séparer la zone de refroidissement de la zone où circule le courant: l'inducteur

est constitué de spires massives. Un tube de refroidissement est brasé sur la face extérieure des spires.

Compte tenu des profils rectangulaires normalisés, la section correspondant à l'ordre de grandeur du nombre de spires est 8 mm de hauteur, par 12 mm de largeur (supérieur à l'épaisseur de peau électromagnétique du cuivre à 50 Hz), ce qui donne une section de passage d'environ 100 mm². L'utilisation d'un tel profil amène alors un nombre de 28 spires. L'inducteur ainsi conçu est représenté figure 10.

Figure 10: Géométrie du creuset et de l'inducteur expérimental



II.2. Définition du circuit électrique

Compte tenu des dimensions de la charge à fondre, un simple calcul énergétique a permis de définir le dimensionnement de l'installation:

Un calcul thermodynamique simple de la puissance enthalpique en régime adiabatique nécessaire pour élever le volume de laiton à sa température de fusion en une demi-heure donne environ 20 KW, ceci correspondant ainsi à la phase de démarrage.

Une fois la charge à sa température de fusion, la puissance à amener doit compenser les pertes thermiques, provenant principalement du contact entre le laiton en fusion et le creuset froid, et que l'on estime à 25 W/cm^2 , soit donc une puissance perdue de l'ordre de 40 KW.

Compte tenu du rendement électrique du système, la puissance totale se situe donc entre 70 à 100 KW.

De plus la résistance globale du système à induction de 32 spires doit être 16 fois plus importante que la résistance obtenue par la modélisation de l'inducteur 8 spires, puisque l'on considère R proportionnel à n^2 . La valeur attendue de la résistance est donc de $11,2 \text{ m}\Omega$.

Pour obtenir une puissance aux bornes de l'inducteur de 100 kW, il est nécessaire

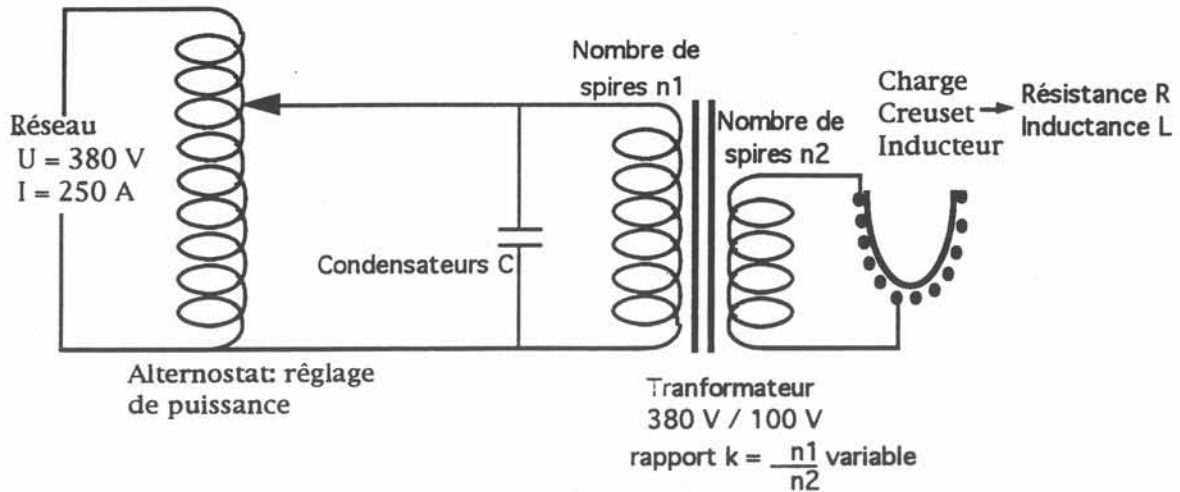
d'avoir un courant égal à $I = \sqrt{\frac{P}{R}} = 3000$ Ampères aux bornes de l'inducteur. Avec cet ordre de grandeur on peut alors chercher à dimensionner le circuit électrique: le transformateur abaisseur monophasé, est surdimensionné pour pouvoir obtenir aux bornes de l'inducteur un courant nominal de 4000 Ampères. Le tension de sortie, pour satisfaire à la condition d'impédance de l'ordre de $30 \text{ m}\Omega$, est alors de 100 Volts. Ce transformateur possède un rapport de spires $k = \frac{n_1}{n_2}$ variable, où n_1 et n_2 sont respectivement le nombre de spires de l'enroulement primaire et secondaire du transformateur: La tension de sortie au secondaire peut être de 20, 40, 60, 80, et 100 Volts à $\pm 10\%$.

Toujours à partir des résultats numériques de l'inducteur 8 spires, l'inductance globale du système, qui doit être 16 fois plus importante que celle du modèle numérique, est donc égale à $88 \mu\text{H}$. La puissance réactive maximale vaut alors $P = L \cdot \omega \cdot I^2 = 440 \text{ kVAR}$ pour un courant maximum de 4000 A. Pour compenser cette puissance réactive, une batterie de condensateurs est également montée sur le circuit. Compte tenu de l'importance de la puissance réactive, cette batterie de condensateurs est placée en amont du transformateur pour diminuer la taille des capacités. On prendra soin de choisir un nombre important de condensateurs de faibles capacités, afin de pouvoir s'adapter le plus finement possible au réglage du transformateur. On obtient ainsi un montage en parallèle de 8 condensateurs de $1000 \mu\text{F}$ chacun.

Par souci d'obtenir une souplesse de fonctionnement, un alternostat est monté en amont du circuit, afin de pouvoir régler finement la puissance du circuit. Par ailleurs cet alternostat permettra un démarrage en douceur du circuit, ce qui évitera toute brusque variation susceptible de perturber le réseau.

Le schéma électrique obtenu est ainsi le suivant:

Figure 11: circuit électrique du prototype



II.3. Conception du bâti mécanique

La conception du bâti et des autres éléments mécaniques a été une étape importante dans la réalisation du prototype. Toujours dans un esprit de souplesse d'utilisation, il a fallu concevoir un ensemble qui puisse satisfaire aux contraintes suivantes:

- Maintien de la charge solide de démarrage, quand elle lévite, par un système capable de supporter des forces importantes.
- Evacuation des fumées d'oxyde de zinc qui se dégagent lors du procédé de fusion.

Le système ainsi conçu est présenté figure 12. Il se compose des éléments suivants:

* Un système de maintien par utilisation d'un verin, à l'extrémité duquel peut être fixée la charge solide lors de son chargement ou de son déchargement. Ce verin est à double effet, c'est à dire qu'il peut résister à des forces de poussée ou de traction. Cette solution permet en outre d'utiliser le verin comme stabilisateur de la charge en lévitation. Celui-ci est en effet capable de supporter des forces importantes. De plus, il est possible de monter sur le circuit d'huile du verin un manomètre afin de connaître la force qui s'exerce sur la charge en lévitation.

Ce verin prend appui sur le bâti, par l'intermédiaire d'un cylindre en acier roulé et soudé qui permet l'évacuation des fumées. La course du verin a été choisie suffisamment longue pour laisser un espace assez grand au-dessus du creuset, afin de permettre le chargement en laiton avant démarrage.

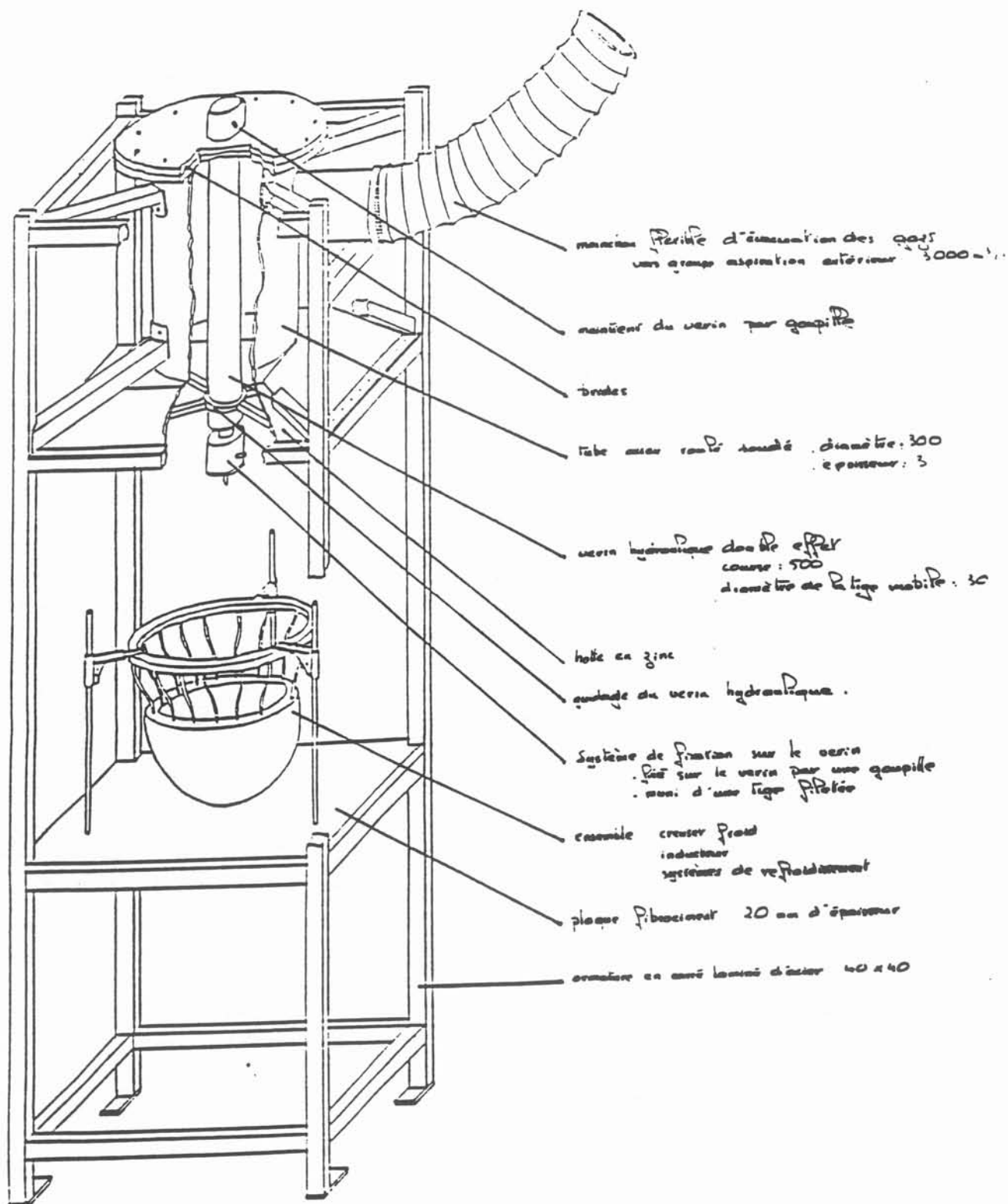
* Une hotte aspirante est nécessaire, afin de permettre l'évacuation des fumées d'oxyde de zinc. La hotte prend appui sur le bâti, et se prolonge par le tube en acier roulé et soudé cité précédemment, solidaire du bâti et supportant les contraintes auxquelles est soumis le verin. Les fumées sont ensuite guidées vers l'extérieur par des gaines flexibles.

* Le bâti doit supporter les contraintes qui lui sont transmises par l'intermédiaire du verin et du tube en acier roulé-soudé. Il doit permettre de fixer:

- l'ensemble creuset-inducteur
- le verin hydraulique
- le tube en acier roulé-soudé

Il est constitué d'éléments de tube carré en acier. Une table en fibro-ciment permet le maintien de l'ensemble creuset inducteur.

Figure 12: Représentation du bâti du four de fusion 50 Hz



II.4. Premiers essais

II.4.1. Influence des caractéristiques de la charge de départ

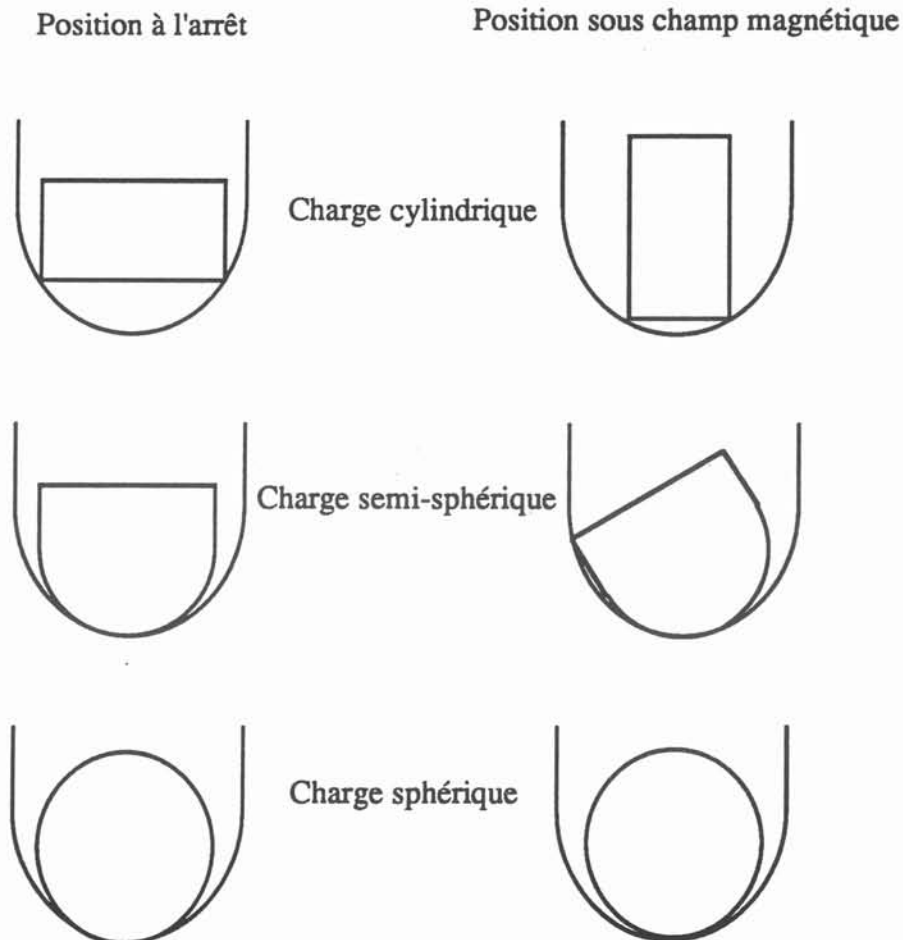
La charge en laiton est le centre du procédé et joue un rôle prédominant dans le fonctionnement du banc d'essais. Les caractéristiques prépondérantes sont:

- sa forme qui influe sur la répartition du champ magnétique et donc sur celle des courants induits et des forces, lors de la montée en température.
- sa masse qu'il faut essayer de compenser par les forces de lévitation et diminuer ainsi les pertes thermiques entre le creuset et la charge.

Les tous premiers essais, effectués en utilisant des charges cylindriques ou semi-sphériques, ont montré que compte tenu de l'importance des forces électromagnétiques, les charges prenaient une position particulière, comme le montre la figure 13. D'une part, la charge en position de moindre flux limitait l'importance des courants induits en son sein. D'autre part, le choc occasionné par le changement de position était susceptible de détériorer le creuset froid.

La forme définitive choisie est une sphère, ce qui évite ainsi toute position particulière de la charge. Pour que les courants induits y soient maximum, les dimensions sont justes inférieures à celle du creuset, soit un diamètre de 20 cm. Sa masse est donc fixée à 35 kg.

Figure 13: Position de la charge selon sa géométrie sous l'influence du champ électromagnétique



II.4.2. Importance et difficultés du réglage

Un bon fonctionnement du circuit oscillant que constitue le banc d'essais nécessite de procéder à des réglages, qui dépendent de deux conditions :

- la condition d'adaptation du circuit oscillant vis à vis du réseau doit permettre de faire passer le maximum de courant permis (réseau limité à 250 A), compte tenu de la tension imposée 400V. Cette condition s'écrit tout simplement:

$$Z = \frac{U}{I} = 1,6.$$

On connaît donc la valeur de l'impédance à avoir, vu du réseau, pour satisfaire cette condition.

- La seconde condition est la condition de résonance du circuit oscillant, qui permet de choisir les valeurs des capacités à monter, pour que celles-ci compensent parfaitement l'inductance du circuit.

On obtient donc le système suivant :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{k^2 L C} \sqrt{1 - \frac{C k^2 R^2}{4 L}}$$

$$\frac{U}{I} = Z = \frac{L}{R C} \quad \text{Impédance d'un circuit bouchon à la résonance}$$

La pulsation ω_0 , le courant U et la tension I sont fixés par le réseau. La résistance R et l'inductance L de l'ensemble du circuit dépendent du système inducteur + charge et peuvent être connues.

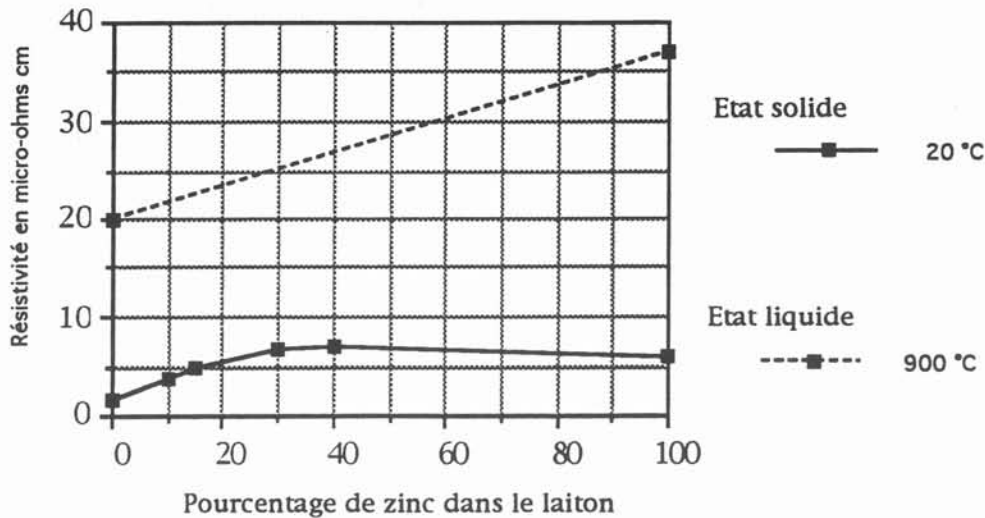
On en déduit alors la capacité C et le rapport k du transformateur permettant alors un fonctionnement optimum.

Limites et difficultés du réglage.

Une première limite du réglage est que le rapport k du transformateur est variable de façon discrète. Pour une résistance R et une inductance L globales au circuit, il n'est donc possible de satisfaire que la condition de résonance du circuit oscillant, la condition d'adaptation n'étant qu'approchée.

Par ailleurs, et c'est le problème le plus important, les valeurs de la résistance R et de l'inductance L varient dans le temps, puisque ces valeurs sont liées d'une part à la résistivité du laiton qui varie en fonction de la température, et d'autre part à la forme de la masse liquide qui est définie en fonction des forces électromagnétiques et qui est différente de la forme initiale de la charge avant fusion. Le graphe 19 montre ainsi l'évolution de la résistivité selon le pourcentage de zinc dans le laiton:

Figure 14: Variation de la résistivité du laiton



A température ambiante, la résistivité du laiton est connue. On remarque sa non linéarité en fonction du pourcentage de zinc.

A l'état liquide, seules les valeurs du cuivre et du zinc sont connues et varient très peu selon la température. On approxime alors la valeur de la résistivité du laiton à une droite entre les deux points extrêmes.

On voit ainsi qu'il n'est pas possible d'obtenir un réglage parfait tout au long de l'essai. La montée en température et la fusion de la charge n'étant que des états de transition, le réglage doit donc être fait pour la phase de maintien en fusion de la masse liquide, dans laquelle sont alors injectées les tournures de laiton.

Par ailleurs, compte tenu de l'estimation effectuée au niveau de la résistivité électrique du laiton en fonction de la température, et surtout de la forme du liquide difficilement représentable numériquement, la détermination des valeurs de la résistance et de l'inductance ne peut se faire que de manière expérimentale. C'est donc en fonction de l'état de fusion obtenu qu'il est possible de connaître les valeurs caractéristiques du couplage électromagnétique R et L et donc de procéder à un réglage fin.

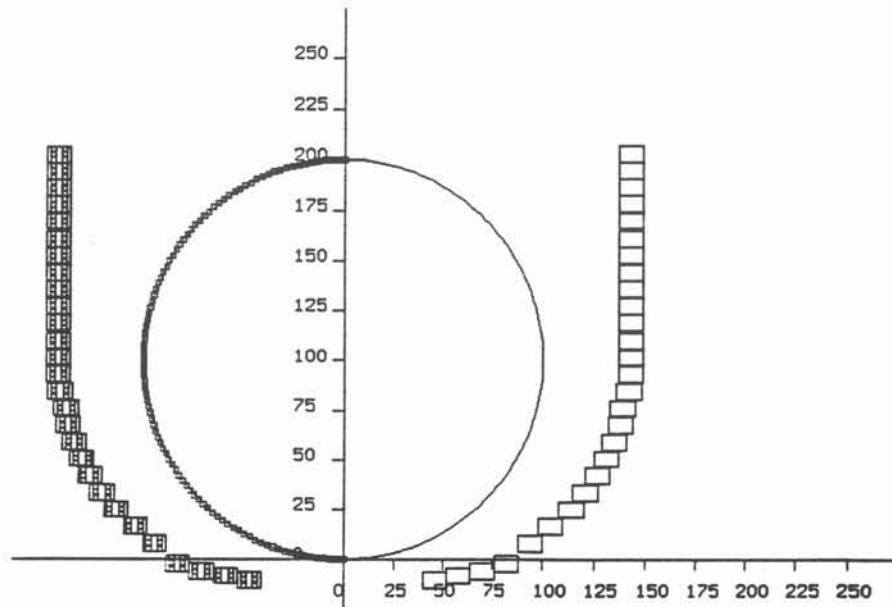
Un moyen de caractérisation expérimentale est le système d'analyse du circuit oscillant [12], appelée méthode du décrétement logarithmique, qui permet de connaître les valeurs globales du circuit R et L, lorsque le système est à l'arrêt. Le descriptif de cette méthode est rappelé annexe 2.

Compte tenu de ces limites, cette méthode est insuffisante pour caractériser correctement les effets inductifs en cours d'essai, et il a donc été nécessaire à partir des mesures électriques, de développer une autre manière de calcul de ces coefficients caractéristiques du couplage inductif entre l'inducteur, le creuset et la charge que sont la résistance et l'inductance (Voir en chapitre IV: caractérisation du procédé). Cependant, cette méthode du décrétement logarithmique a permis dans un premier temps d'estimer les grandeurs R et L nécessaires à un premier réglage électrique, ainsi que de valider les résultats obtenus numériquement par le logiciel Ophélie.

II.4.3. Détermination numérique et expérimentale des caractéristiques électriques. Validation du logiciel Ophélie

A partir de ces caractéristiques géométriques parfaitement définies, une nouvelle modélisation électromagnétique plus proche de la géométrie de départ a été effectuée, toujours à l'aide du logiciel Ophélie (figure 15).

Figure 15: Modélisation de la géométrie exacte du creuset froid 50 Hz



On observe ainsi que le rendement attendu n'est plus de 49% mais seulement de 34%. Cette nette diminution par le fait que dans la configuration de départ d'essai, la sphère solide est de dimension plus petite que celle décrite dans la première modélisation de dimensionnement (§ 2.1.2.), et est donc plus éloignée de l'inducteur, ce qui entraîne un couplage moins bon.

De toute manière il faut encore une fois rappeler que l'étude numérique ainsi effectuée ne correspond qu'au cas d'une circulation de courants induits dans une charge solide, de forme et de résistivité figées.

Par ailleurs, parallèlement à cette modélisation, une caractérisation d'ordre expérimentale a été effectuée. L'utilisation de la méthode du décroissement logarithmique donne comme valeurs du circuits électrique équivalent:

$$R = 8 \text{ m}\Omega$$

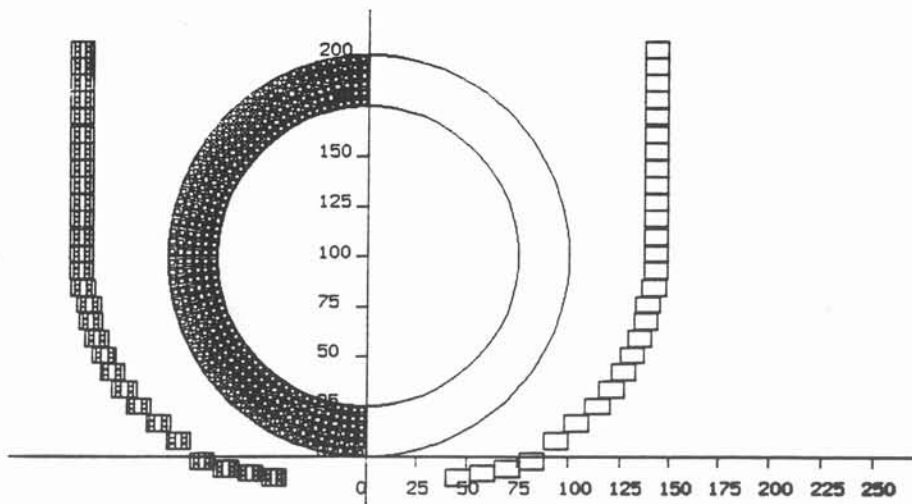
$$L = 90 \text{ }\mu\text{H}$$

Ces résultats sont comparés à ceux obtenus par la modélisation: $R = 6 \text{ m}\Omega$
 $L = 89 \text{ }\mu\text{H}$

On obtient ainsi des valeurs d'inductance identiques, alors que la résistance calculée est inférieure de 25% à celle mesurée. La mesure expérimentale de la résistance de l'inducteur amène la même valeur que celle apportée par la modélisation (4 mΩ). L'origine de l'erreur provient du calcul de la résistance de la charge effectué selon le modèle en fine épaisseur de peau. Avec une telle configuration, on arrive aux limites d'un tel modèle. Une modélisation en grande épaisseur de peau est donc effectuée, en ne modélisant que la partie périphérique de la

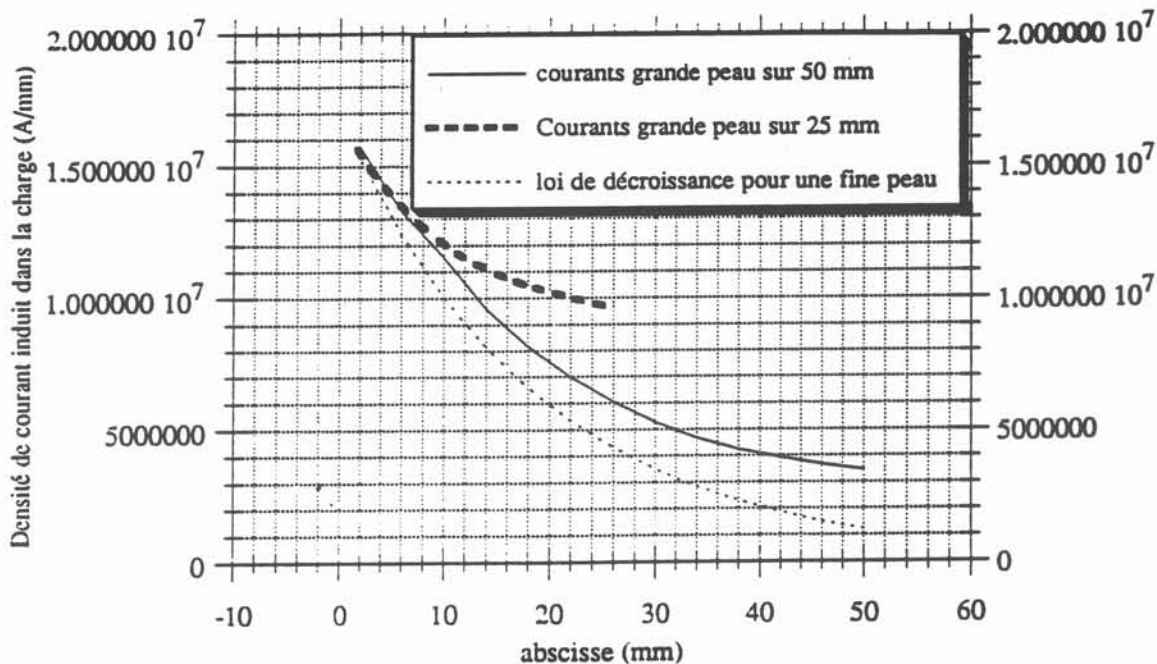
charge dans laquelle se développent les courants induits (figure 16).

Figure 16: Modélisation en grande épaisseur de peau



Le tracé de la décroissance des densités de courants induites selon la normale intérieure à la paroi de la charge pour différentes épaisseurs de la couronne ainsi modélisée montre que pour une telle configuration, les courants induits se développent sur une épaisseur supérieure à l'épaisseur de peau (figure 17).

Figure 17: Comparaison des différentes modélisations sur le profil de courant induit selon la normale intérieure à la charge



On observe ainsi que lorsque l'on ne modélise que la couronne juste supérieure à l'épaisseur de peau de la charge, les densités de courants induits ne s'annulent pas à la frontière

intérieure de la couronne modélisant la charge, et que la modélisation incomplète de la géométrie donne alors des résultats faux. Par contre lorsque l'on choisit une couronne deux fois plus épaisse que l'épaisseur de peau de la charge, les densités de courants deviennent négligeables à la frontière intérieure par rapport aux valeurs obtenues à la périphérie de la charge. Dans une telle configuration, le profil se rapproche du profil de décroissance exponentielle correspondant à l'hypothèse de fine épaisseur de peau

Les résultats obtenus se rapprochent alors des valeurs expérimentales:

$$R = 7 \text{ m}\Omega$$

$$L = 90 \text{ }\mu\text{H}$$

A partir de ces valeurs, la détermination des capacités à monter en parallèle, et du rapport du transformateur peut alors s'effectuer, en utilisant les conditions de réglage définies précédemment § 1.4.2: On obtient ainsi:

$$\text{valeur des capacités: } C = 7000 \text{ }\mu\text{F}$$

$$\text{rapport du transformateur } k = 4$$

II.4.4. Résultats des premiers essais

A partir de ces premiers réglages, des premiers essais ont été effectués sur l'installation ainsi conçue et ont permis de constater les faits suivants:

Au démarrage, malgré le mauvais réglage de départ, la puissance amenée est suffisante pour faire léviter la charge à partir d'une certaine puissance (2200 Ampères dans l'inducteur). Ainsi isolée thermiquement du creuset froid, la sphère monte en température et rougit rapidement. La position du centre de gravité de la charge en lévitation reste stable et il est facile de la positionner à une hauteur donnée en jouant sur l'intensité du réseau.

La charge qui continue à léviter monte en température. Sa résistance et son inductance augmente, diminuant ainsi le courant dans l'inducteur. Au fur et à mesure de sa montée en température, il est donc nécessaire pour continuer à léviter, d'augmenter le courant délivré par le réseau.

Après de 20 minutes de chauffe à peu près, la charge atteint la température suffisante pour fondre à l'intérieur. Ce changement d'état se remarque alors par les ondes qui apparaissent à la surface de la sphère.

Au cours de la fusion progressive de la charge, et donc à puissance sensiblement constante, la résistance, liée à la résistivité, augmente. Le courant induit dans la charge diminue donc, et les forces électromagnétiques de lévitation, proportionnelles au carré du courant, diminuent également et finissent par être inférieures au poids de la charge, qui retombe dans le creuset. Les pertes thermiques entre le creuset et la charge augmentent alors.

Par la suite, la partie extérieure encore solide (la croûte), se perce en deux zones quasiment diamétralement opposées, d'où s'écoule le métal en fusion de la zone interne et se répand sur le fond du creuset. La charge s'évide, alors que la croûte périphérique supérieure reste à l'état solide et ne parvient pas à être fondue dans le bain. Cette situation provient du fait que la croûte n'est plus parcourue par de fortes densités de courant. D'une part l'épaisseur de la croûte devient inférieure à l'épaisseur de peau du laiton, et d'autre part, la masse liquide qui occupe tout le fond du creuset couple mieux que la croûte, plus éloignée de l'inducteur.

En conclusion de ces premiers essais, deux choses sont à retenir:

D'une part, la lévitation de la charge solide froide permet une rapide montée en température. Par contre les forces électromagnétiques permettant la lévitation diminuent au fur à mesure que la charge chauffe, pour finalement devenir insuffisante pour maintenir la charge en lévitation. Il serait donc intéressant d'étudier les paramètres qui influent sur les forces électromagnétiques, afin d'estimer les possibilités de maintenir la charge liquide en semi-

l'évitation, et donc de limiter les pertes thermiques importantes qui existent entre le laiton liquide et le creuset froid.

Par ailleurs, le problème de la fusion incomplète de la charge de départ doit être résolu, si l'on veut espérer faire fonctionner le procédé.

III. ETUDE DE EFFETS MECANQUES. LA LEVITATION

III.1. Analyse théorique des phénomènes

Les courants électriques induits \vec{j} dans la charge métallique interagissent avec l'induction \vec{B} pour donner des forces électromagnétiques volumiques :

$$\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (4)$$

Ces forces peuvent être exprimées uniquement en fonction de l'induction \vec{B} , à l'aide de l'une des équations de Maxwell :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{B} \quad (5),$$

$$\text{pour donner: } \vec{F} = \frac{1}{\mu} (\vec{B} \text{ grad}) \vec{B} - \text{grad} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) \quad (6)$$

On voit donc apparaître deux termes bien distincts [13]:

- une partie rotationnelle $\frac{1}{\mu} (\vec{B} \text{ grad}) \vec{B}$, qui va provoquer le brassage au sein de la charge une fois liquide, permettant ainsi l'amélioration de la fusion des copeaux.

- une partie irrotationnelle $\text{grad} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right)$, qui va entraîner l'existence d'une pression magnétique. Cette pression magnétique détermine l'importance des contacts entre le creuset et la charge, et influe fortement sur la puissance mise en jeu pour compenser les pertes thermiques.

Compte tenu de l'importance que possèdent ces deux termes de force électromagnétique, il est donc intéressant de chercher à connaître leur répartition le long de la charge, afin de voir comment ces forces influent sur le procédé. Nous nous intéressons ici uniquement aux forces irrotationnelles qui sont à l'origine de la lévitation.

Notre configuration est bidimensionnelle axisymétrique. Une première approche [13] consiste à considérer le problème dans l'approximation de fine épaisseur de peau δ , c'est à dire que la profondeur de pénétration du champ magnétique reste faible devant les dimensions de la charge, soit $\frac{\delta}{R} \ll 1$. Cette hypothèse revient à négliger la courbure de la frontière de la

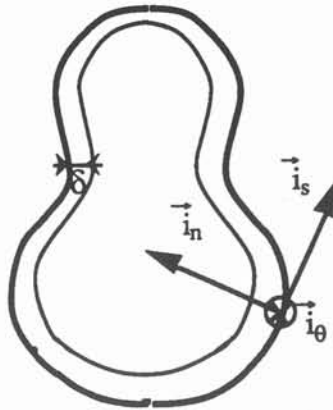
charge pour calculer les lignes de champ. On peut donc considérer l'induction \vec{B} comme tangente à cette frontière de la charge, et la densité de courant décroissant exponentiellement à travers l'épaisseur de peau. Dans le repère lié à la frontière de la charge (figure 18), dans lequel:

\vec{i}_n est le vecteur unitaire normal à la paroi, dirigé vers l'intérieur du domaine

\vec{i}_s est le vecteur unitaire tangent à la paroi, dirigé du bas vers le haut

\vec{i}_θ est le vecteur unitaire orthoradial tel que $\vec{i}_n \vec{i}_s \vec{i}_\theta$ forment une base

Figure 18: Géométrie étudiée



on écrit alors:

$$\vec{j}(n,s) = J(n,s) \vec{i}_\theta$$

où $J(n,s)$ est le module de la densité de courant en un point quelconque

L'hypothèse d'épaisseur de peau électromagnétique négligeable devant les dimensions de la charge permet d'exprimer l'évolution de la densité de courant selon la loi de décroissance exponentielle:

$$\vec{j}(n,s) = J(0,s) e^{-n/\delta} \cos(\omega t - \frac{n}{\delta}) \vec{i}_\theta \quad (7)$$

où $J(0,s)$ est le module de la densité de courant à la frontière de la charge, en une abscisse s

par ailleurs, on a aussi:

$$\vec{B} = B(n,s) \vec{i}_s$$

où $B(n,s)$ est le module du champ en un point quelconque

La force volumique s'écrit:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J(n,s) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ B(n,s) \\ 0 \end{bmatrix} = J(n,s) \cdot B(n,s) \cdot \vec{i}_n$$

et la relation (5) permet d'écrire:

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ B(n,s) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial B(n,s)}{\partial n} \cdot \vec{i}_\theta \quad (8)$$

d'où :

$$B(n,s) = \int \mu |\vec{j}| \, dn$$

$$B(n,s) = \int \mu J(0,s) e^{-n/\delta} \cos(\omega t - \frac{n}{\delta}) \, dn$$

L'intégration amène B_s de la forme:

$$B(n,s) = \mu J(0,s) e^{-n/\delta} [A_1 \cos(\omega t - \frac{n}{\delta}) + A_2 \sin(\omega t - \frac{n}{\delta})]$$

d'où :

$$\frac{\partial B}{\partial n} = \mu J(0,s) e^{-n/\delta} \left[\frac{A_1 - A_2}{\delta} \sin(\omega t - \frac{n}{\delta}) + \frac{A_1 + A_2}{\delta} \cos(\omega t - \frac{n}{\delta}) \right]$$

En comparant cette expression de $\frac{dB}{dn}$ à celle obtenue par (7) et (8), on obtient:

$$\frac{A_1 - A_2}{\delta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{A_1 + A_2}{\delta} = 1$$

soit: $A_1 = A_2 = \frac{\delta}{2}$

Le champ magnétique s'écrit donc en tout point de la charge :

$$\vec{B} = \mu \delta \frac{J(0,s)}{2} e^{-n/\delta} [\cos(\omega t - \frac{n}{\delta}) + \sin(\omega t - \frac{n}{\delta})] \vec{i}_s \quad (9)$$

C'est à partir de cette expression qu'il est possible de calculer le terme irrotationnel $\text{grad}(\frac{B^2}{2\mu})$, moyenné sur une période:

$$\vec{F}_{\text{irrot}} = \frac{\mu}{4} \delta e^{-2n/\delta} J(0,s)^2 \vec{i}_n$$

$$+ \frac{\mu}{4} \delta^2 e^{-2n/\delta} J(0,s) \frac{dJ(0,s)}{ds} \vec{i}_s \quad (10)$$

On peut montrer numériquement que le terme tangent à la surface reste très inférieur à celui normal à la paroi. Cette force est donc proportionnelle au carré de la densité de courant au point étudié.

Le changement de repère $(\vec{i}_n \ \vec{i}_s \ \vec{i}_\theta)$ en $(\vec{i}_r \ \vec{i}_z \ \vec{i}_\theta)$ dans lequel:

\vec{i}_r est le vecteur unitaire horizontal dirigé vers l'intérieur du domaine

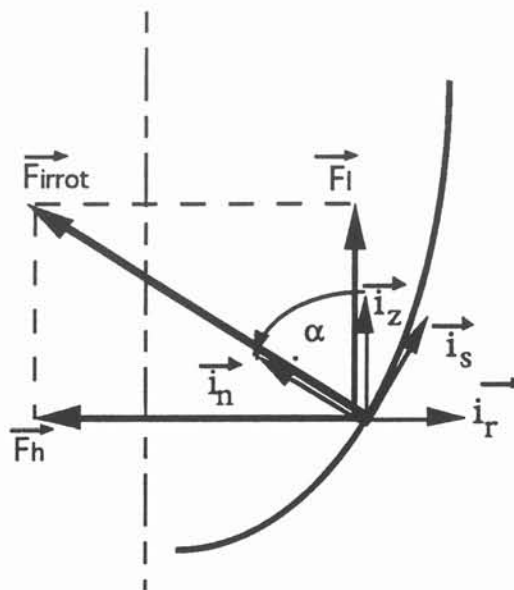
\vec{i}_z est le vecteur unitaire vertical dirigé vers le haut,

permet de décomposer ce terme irrotationnel pratiquement normal à la frontière de la charge (figure 19), en:

- un terme de lévitation verticale: $\vec{F}_l = \frac{\mu}{4} \delta e^{-2n/\delta} J(0,s)^2 \cos(\alpha) \vec{i}_z$ (11)

- un terme de force horizontale : $\vec{F}_h = -\frac{\mu}{4} \delta e^{-2n/\delta} J(0,s)^2 \sin(\alpha) \vec{i}_r$ (12)

Figure 19 : Représentation des forces irrotationnelles

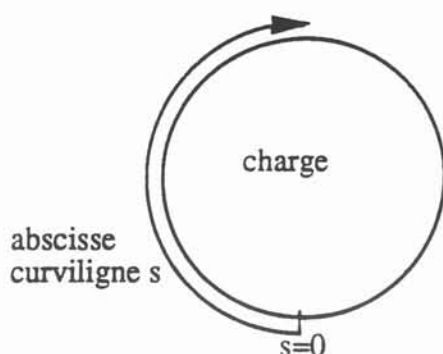


III.2. Développement numérique

III.2.1. Répartition de la force volumique ponctuelle le long de la frontière de la charge

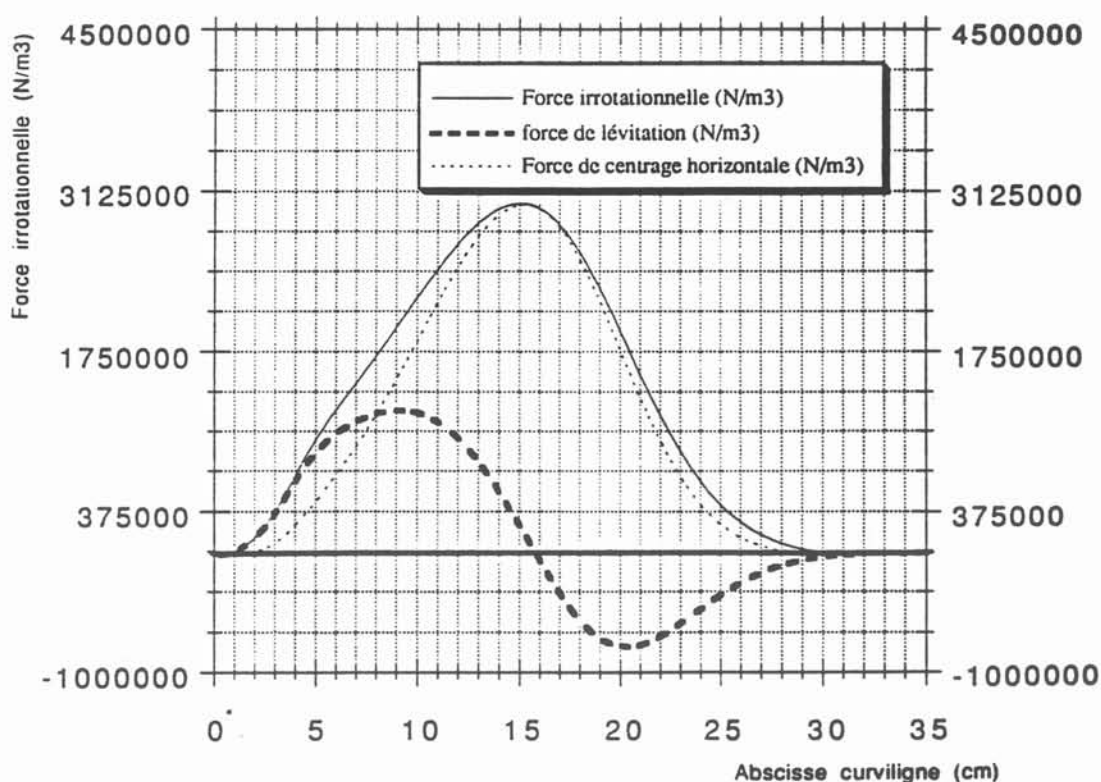
Pour la configuration qui est la nôtre, le logiciel OPHELIE a permis de visualiser la répartition de la force irrotationnelle selon l'abscisse curviligne de la charge. L'origine de l'abscisse est prise au point le plus bas de la charge, et circule le long de la frontière jusqu'au sommet de la charge (figure 20).

Figure 20: Orientation de l'abscisse curviligne de la frontière de la charge



Pour une tension aux bornes de l'inducteur de 100 volt, en considérant la charge solide de forme sphérique non chauffée (diamètre de 20 cm, résistivité de $0,71 \cdot 10^{-7} \Omega m$) comme le montre la figure 16, la répartition des différents termes de force irrotationnelle est représentée figure 21.

Figure 21: Evolution de la force irrotationnelle et de ses projections selon la verticale et l'horizontale en fonction de l'abscisse curviligne de la frontière de la charge



Cette figure permet de dégager les principaux effets des différents termes de la force irrotationnelle:

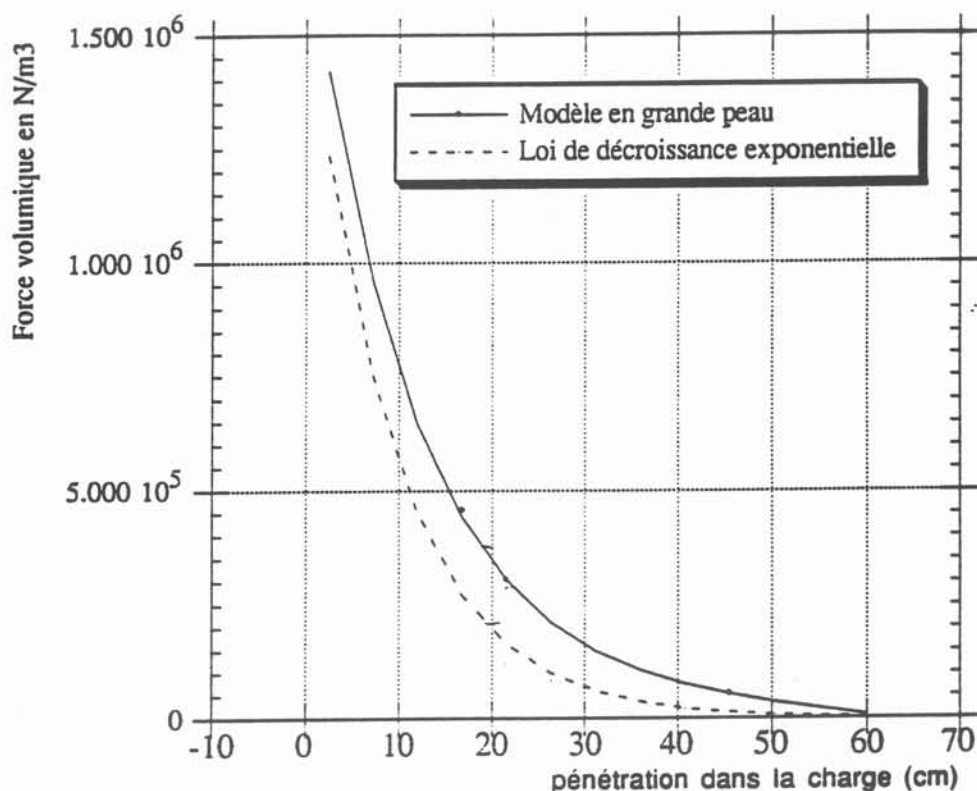
- Le terme horizontal centripète est important principalement à la périphérie latérale de la charge

- le terme de force verticale possède deux points extrêmes en sens contraire, qui tendent à comprimer la charge verticalement, et dont la résultante provoquera ou non la lévitation de la charge, selon le poids de cette dernière.

III.2.2. Comparaison de la force irrotationnelle volumique ponctuelle calculée avec les hypothèses de grande et de petite épaisseur de peau

Le calcul de la force irrotationnelle volumique, effectué avec l'hypothèse de fine épaisseur de peau électromagnétique, est comparé avec les résultats numériques obtenus pour une modélisation en grande peau électromagnétique. La figure 22 exprime ainsi l'évolution de la force selon la normale intérieure à la frontière de la charge, obtenue dans les deux cas. On obtient des profils similaires, qui permettent de valider le profil de décroissance exponentielle de la force selon la normale à la frontière de la charge, calculé à partir de la densité de courants induits dans la charge avec l'hypothèse de fine épaisseur de peau.

Figure 22: Evolution de la force selon la normale de la frontière de la charge



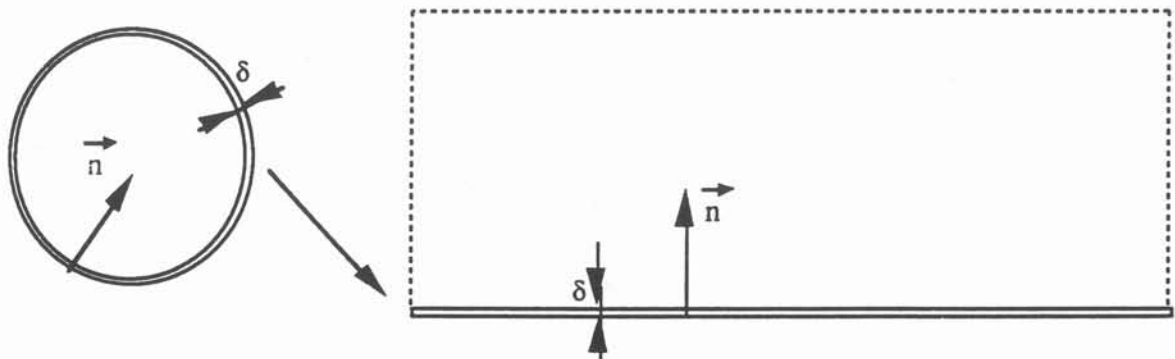
III.2.3. Calcul de la force de lévitation globale

Pour une charge solide, il est intéressant de connaître la force totale verticale, qui provoquera ou non une lévitation de charge, selon son poids. Il faut alors intégrer les valeurs des forces sur le volume de la charge.

III.2.3.1. Calcul de la force de lévitation avec hypothèse de fine épaisseur de peau et en négligeant la courbure dans le volume d'intégration.

Dans le cas d'épaisseur de peau δ considérée comme très faible devant les dimensions de la charge, on néglige la courbure de la frontière de la charge également pour le calcul d'intégration des forces. Ce calcul revient à traiter le problème d'une plaque plane, comme le montre la figure 23, et qui correspond au cas où la loi en décroissance exponentielle de la densité de courant selon la normale intérieure à la frontière de la charge n est exacte.

Figure 23: Hypothèse de la plaque plane



En discrétisant la frontière de la charge en plusieurs anneaux dont l'épaisseur est orientée selon la normale \vec{n} à la surface latérale, la force de lévitation intégrée dans chaque volume élémentaire i s'écrit simplement :

$$F_{\text{lévit } i} = \iiint_{\text{volume } i} |\vec{F}_l| \, dv \quad (13)$$

$$F_{\text{lévit } i} = \iiint_{\text{volume } i} |\vec{F}_l| \, dn \, ds$$

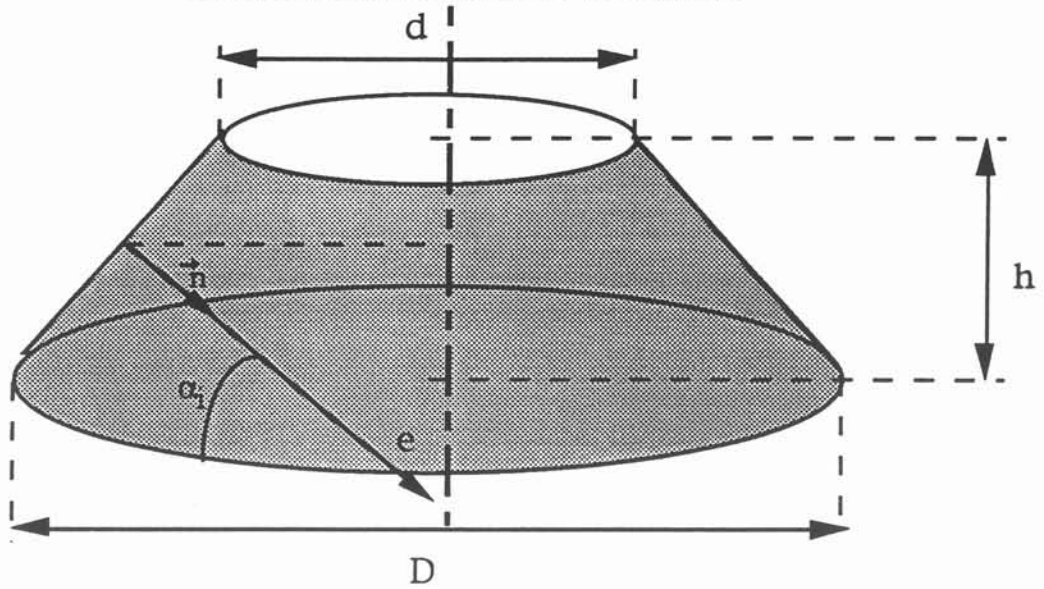
En prenant pour hypothèse la profondeur de pénétration du champ magnétique faible devant les dimensions de la charge, l'intégration peut s'effectuer tout en négligeant la courbure de la charge:

$$F_{\text{lévit } i} = \int |\vec{F}_l| \, s_i \, dn$$

où s_i est l'élément de surface sur lequel la densité de courant J est connue et constante, correspondant à la surface latérale d'un tronc de cône (figure 24):

$$s_i = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{(D-d)^2}{4} + h^2} \cdot (D + d)$$

Figure 24: Elément de surface d'une maille

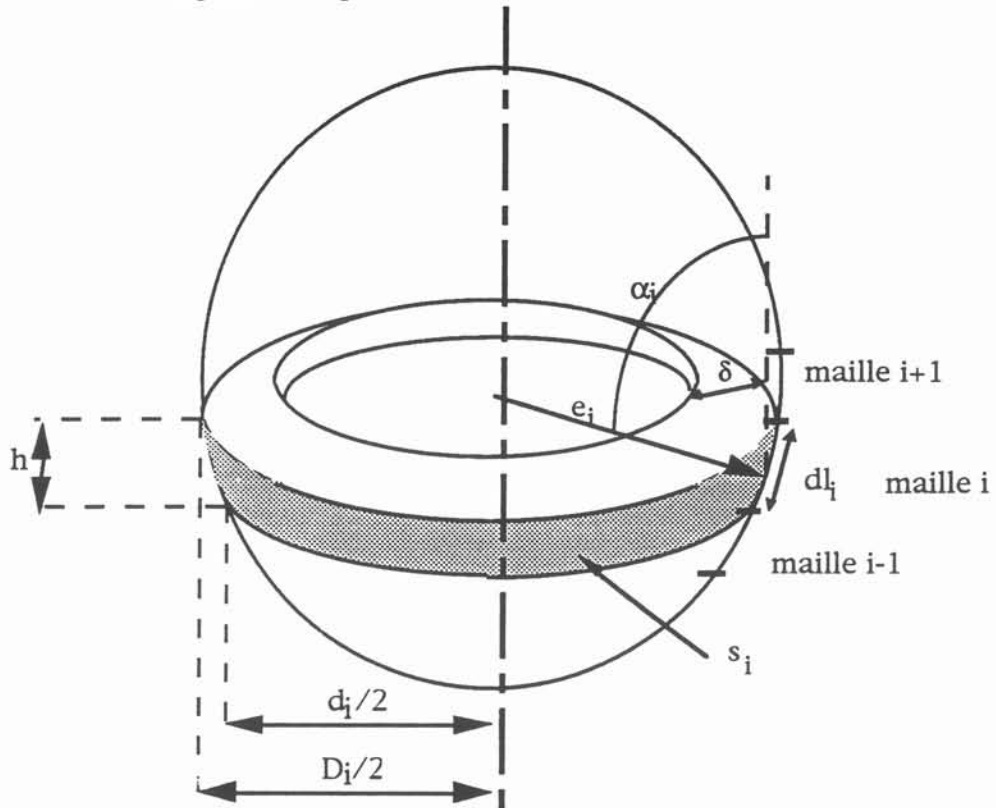


De par la décroissance exponentielle de la force selon la normale, celle-ci devient très vite négligeable pour n supérieur à δ . On peut alors intégrer la force de $n = 0$ à ∞ . D'après l'équation (10), on obtient finalement:

$$F_{\text{lévit } i} = \int_0^{\infty} \frac{\mu}{4} \delta e^{-2n/\delta} J_i^2 \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{(D_i - d_i)^2}{4} + h_i^2} \cdot (D_i + d_i) \cos \alpha_i \, dn$$

$$\text{Soit } F_{\text{lévit } i} = \frac{\mu}{8} \delta^2 J_i^2 \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{(D_i - d_i)^2}{4} + h_i^2} \cdot (D_i + d_i) \cos \alpha_i$$

Figure 25: Représentation de la discrétisation



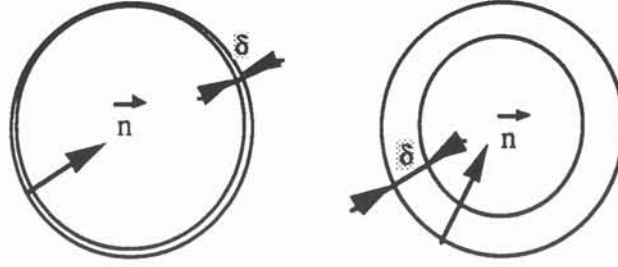
La sommation de tous les éléments de surface i donne :

$$F_{levit} = \frac{\mu}{6} \delta^2 \pi \sum_{i=1}^M J_i^2 \cos \alpha_i \sqrt{\frac{(D_i - d_i)^2}{4} + h_i^2} (D_i + d_i) \quad (14)$$

III.2.3.2. Calcul de la force de lévitation avec la loi de décroissance analytique mais en tenant compte de la courbure dans le volume d'intégration

Dans notre configuration, l'application de l'expression analytique de l'évolution de la densité de courant selon la normale intérieure à la frontière (voir figure 22), a donné des résultats acceptables pour le calcul de la force irrotationnelle volumique ponctuelle. Cependant, compte tenu de la basse fréquence utilisée, l'épaisseur de peau électromagnétique n'est pas négligeable devant le rayon de la charge, et il n'est pas possible de considérer comme exacte l'hypothèse de la plaque plane. En particulier, l'intégration sur le volume de la charge est plus précise si l'on tient compte de la courbure de la charge pour le calcul, comme le montre la figure 26:

Figure 26: Comparaison entre le cas compatible avec l'hypothèse de plaque plane et le cas étudié



Pour améliorer le calcul de la force totale de lévitation, il faut alors discrétiser l'équation 13 le long du rayon moyen de courbure de chaque petit élément, comme le montre la figure 27. Pour un élément i , la force intégrée sur le volume délimité par l'épaisseur de peau et la maille i :

$$F_{\text{lévit } i} = \int \frac{\mu}{4} \delta e^{-2n/\delta} J_i^2 \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{(D_i - d_i)^2}{4} + h_i^2} \cdot (D_i + d_i) \cos \alpha_i \, dn$$

devient:

$$F_{\text{lévit } i} = \frac{\mu}{4} \delta J_i^2 \frac{\pi}{2} \cos \alpha_i \sum_{j=1}^N \sqrt{\frac{(D_{i,j} - d_{i,j})^2}{4} + h_{i,j}^2} \cdot (D_{i,j} + d_{i,j}) \int_{n_j}^{n_{j+1}} e^{-2n/\delta} \, dn$$

où n_j et n_{j+1} sont définis sur la figure 34

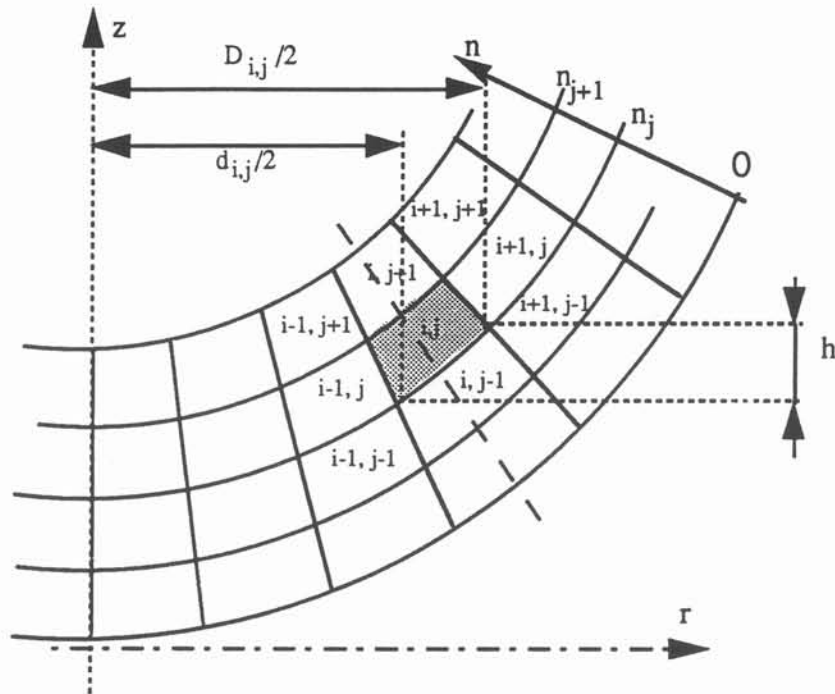
En calculant l'intégrale de cette dernière équation et en sommant sur l'ensemble des éléments i de l'abscisse curviligne, on obtient:

$$F_{\text{lévit}} = \frac{\mu}{16} \delta^2 \pi \sum_{i=1}^M J_i^2 \cos \alpha_i \sum_{j=1}^N \left(e^{-\frac{2n_{i,j+1}}{\delta}} - e^{-\frac{2n_{i,j}}{\delta}} \right) \sqrt{\frac{(D_{i,j} - d_{i,j})^2}{4} + h_{i,j}^2} (D_{i,j} + d_{i,j}) \quad (14)$$

où: M est le nombre de mailles le long de la frontière.

N est le nombre de mailles le long de la normale

Figure 27: Modélisation de la discrétisation pour le calcul de la lévitation de la charge en tenant compte de la courbe de la charge



III.2.3.3. Calcul de la force de lévitation en grande peau

La modélisation en grande peau, qui utilise une discrétisation complète selon \vec{s} et \vec{n} (voir l'annexe 1), permet de calculer directement les composantes de la force électromagnétique volumique $\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B}$ selon la verticale z et l'horizontale r pour chaque maille du domaine. Une comparaison numérique montre que la force rotationnelle volumique est très faible devant la force irrotationnelle. Il est donc légitime d'utiliser la composante verticale de la force totale $\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B}$, obtenue numériquement en grande peau, pour calculer le terme de lévitation électromagnétique de la charge, qui s'écrit alors:

$$F_{\text{lévit}} = \pi \sum_{i=1}^N F_{zi} S_i D_i$$

avec

- N le nombre total de mailles du domaine
- F_{zi} la composante verticale de la force volumique, considérée comme constante dans la maille
- S_i la section de la maille
- D_i le diamètre moyen de la maille

III.2.3.4. Application à notre configuration des différentes méthodes, Validation expérimentale.

Pour une configuration qui correspond à celle du prototype, il a été possible de valider expérimentalement ce programme de calculs : cette validation se fait en suspendant la

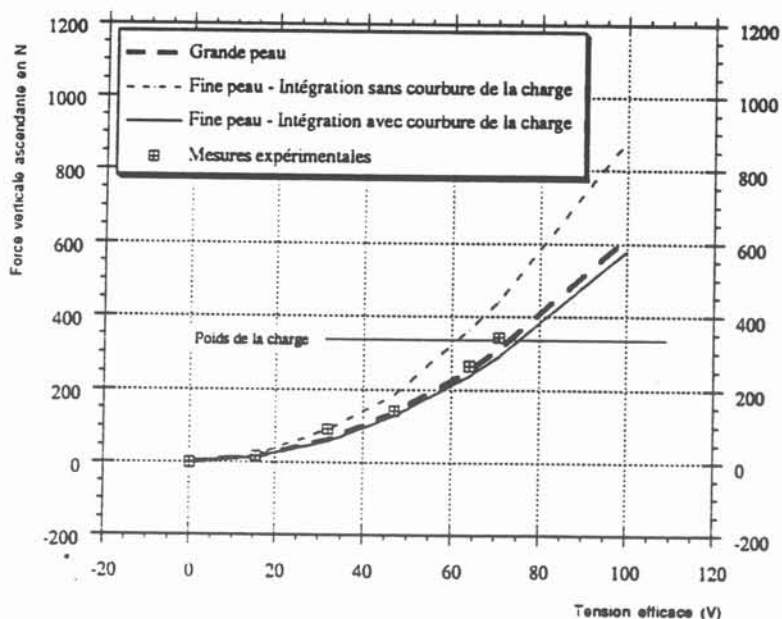
charge à un anneau dynamométrique qui par sa déformation, donne la force verticale qu'il subit, et correspondant à l'action simultanée du poids de la charge et des forces de lévitation qui s'exerce sur cette dernière.

Ainsi pour une tension mesurée il est aisé de connaître la force de lévitation correspondante et que l'on compare aux résultats numériques effectués. Ces essais ont été effectués pour différentes tensions pour une charge froide (où la résistivité est alors connue, et où l'on peut utiliser les modèles numériques de façon précise). Les différents types de modèles sont ainsi comparés:

- modèle de profil des forces volumiques en fine peau électromagnétique, avec intégration sur le volume sans tenir compte de la courbure de la charge
- modèle de profil des forces volumiques en fine peau électromagnétique, avec intégration sur le volume en tenant compte de la courbure de la charge
- modèle de profil des forces volumiques en grande peau électromagnétique

Le graphe 35 reproduit ainsi les essais effectués. On observe ainsi des résultats identiques pour le modèle en fine peau dans lequel on tient compte de la courbure de la charge pour l'intégration sur le volume, et pour le modèle en grande peau. Ces deux modèles donnent des résultats identiques aux résultats expérimentaux. Par contre, le modèle de calcul en fine peau électromagnétique et dans lequel on néglige la courbure de la charge pour l'intégration sur le volume, donnent des valeurs de forces totales verticales 30% supérieures à la réalité. Ainsi pour la suite de l'étude il est possible d'utiliser un modèle numérique dit en fine peau dans lequel on tient compte de la courbure de la charge pour l'intégration sur le volume.

Figure 28: Validation des calculs de lévitation



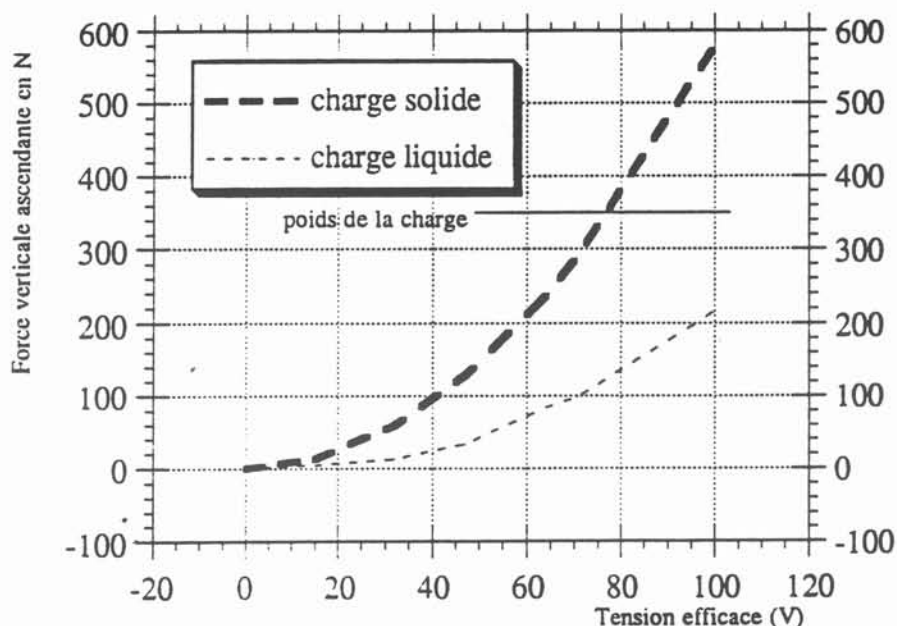
III.3. Influence des paramètres significatifs sur les forces irrotationnelles

Le terme de lévitation qui correspond à la résultante de la projection sur la verticale du terme irrotationnel des forces de Laplace joue un rôle important lors de la fusion d'une charge métallique en creuset poche. Quand la charge est solide, c'est ce terme qui entraîne ou non la lévitation de la charge permettant ainsi l'isolation thermique de la charge chauffée vis à vis du creuset refroidi. Pour une charge liquide, même si la lévitation complète n'est pas possible, ce terme va compenser partiellement le poids du liquide, et éviter ainsi une trop forte pression entre charge et creuset, qui augmenterait alors les échanges thermiques. Les différents essais numériques ont permis de montrer comment variait ce terme, et quels paramètres étaient prépondérants.

. Influence de la résistivité

L'étude de l'influence de la résistivité du laiton sur le comportement mécanique de la charge permet d'interpréter les phénomènes observés expérimentalement: Comme le montre la figure 29, la résistivité, qui varie en fonction de la température et de l'état solide ou liquide de la charge joue un rôle important. Sur cette figure sont ainsi représentées les évolutions de la force verticale globale que subit la charge, pour une charge solide et une charge liquide (ou plus exactement une charge de forme figée, mais de résistivité électrique égale à celle du laiton liquide). On observe ainsi que la force électromagnétique verticale, fonction de la résistivité, n'est plus du tout suffisante pour permettre la lévitation de la charge quand celle-ci s'échauffe et devient liquide. Ainsi, seul un changement de configuration permettrait d'obtenir un effet plus important des forces de lévitation.

Figure 29: Evolution de la force de lévitation en fonction de la température de la charge

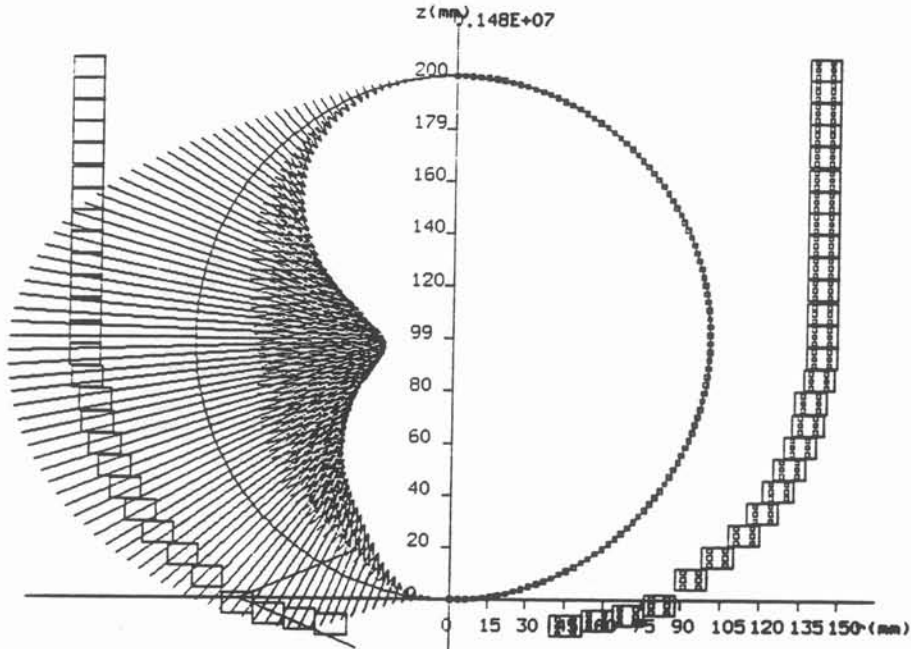


. Influence de la position des spires :

Une optimisation du phénomène de lévitation pourra s'effectuer par une modification de la position des spires. La répartition des forces verticales dans notre

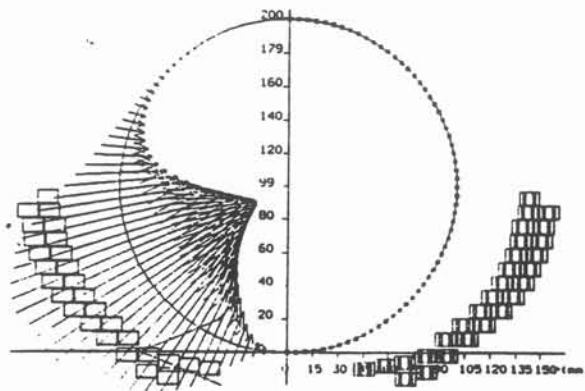
configuration (qui sont la projection selon la verticale des forces locales à la paroi représentées figure 30) montre que la position des spires de l'inducteur a une influence importante. En effet, les spires supérieures donnent naissance à des forces orientées vers le bas, qui vont donc limiter de façon importante l'effet de la lévitation engendrée par les spires inférieures.

Figure 30: Représentation des forces exercées sur la frontière de la charge (modèle fine peau)



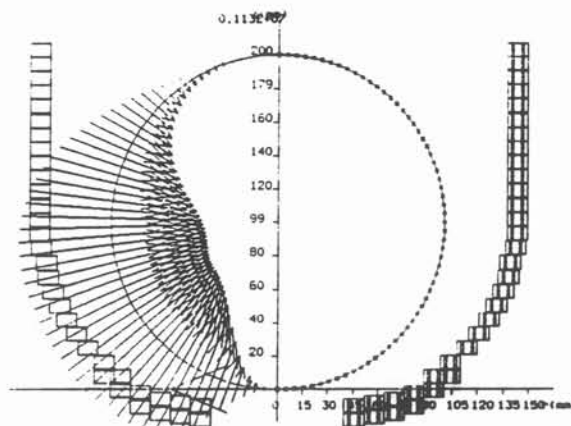
Différents essais faisant varier la position de la charge montrent l'amélioration du terme de lévitation lorsque la hauteur des spires supérieures par rapport à la charge devient faible. L'optimisation de la lévitation revient ainsi à limiter la hauteur de l'inducteur à la demi-hauteur inférieure de la charge (figure 31). En réalité, dans une telle situation, seule la partie inférieure de la charge serait chauffée par les courants induits, ce qui limiterait l'efficacité du procédé.

Figure 31: Représentation des forces pour un inducteur bicouche



Pour obtenir un chauffage de l'ensemble de la charge tout en améliorant la lévitation de la sphère, il suffirait de renforcer le courant induit dans le bas de la charge en y adoptant une structure multicouche (voir figure 32).

Figure 32: Optimisation de la géométrie de l'inducteur pour limiter les contacts du laiton liquide avec le creuset



Cette rapide étude a ainsi permis de voir qu'un fonctionnement en semi-lévitation de la charge, même à l'état liquide pourrait être possible. Ce type de fonctionnement permettrait alors une bien meilleure isolation thermique entre le creuset froid et la charge métallique à maintenir liquide, à condition, bien sûr de résoudre les problèmes de stabilité de la charge liquide. Mais une telle configuration demanderait une géométrie différente et plus complexe que la nôtre, pour laquelle les essais expérimentaux effectués ont été positifs. Ce choix de garder la géométrie existante entraîne alors une modification du protocole de l'essai expérimental: en effet, puisque la configuration actuelle ne permet pas de maintenir la charge en lévitation à partir d'une certaine température, celle-ci retombe alors dans le creuset de façon brutale et est susceptible de détériorer le creuset, celui-ci n'étant constitué que de tôles de 2 mm d'épaisseur. Pour éviter ce problème, le choix est pris de débiter l'essai à puissance réduite, de façon à éviter la lévitation. Une fois la charge bien chaude, il est alors possible de fonctionner à pleine puissance, la charge ne pouvant plus léviter. Par ailleurs, la charge métallique est posée en début d'essai sur un lit de copeaux, dans le creuset froid, ceux-ci servant d'isolants thermiques entre la charge et le creuset.

IV. MISE EN OEUVRE D'UN CIRCUIT MAGNETIQUE AU DESSUS DE LA CHARGE

Ces essais expérimentaux effectués ont montré l'intérêt d'utiliser un système permettant d'augmenter localement l'intensité du champ magnétique. Ce système consiste à positionner un noyau magnétique feuilleté (analogue au circuit magnétique d'un transformateur) au dessus de la charge. L'étude de l'influence d'un tel dispositif a donc été effectué.

IV.1. Rappel sur le magnétisme

Quand un milieu matériel magnétique conducteur de l'électricité est soumis à l'influence d'une induction magnétique \vec{B} , ce milieu peut devenir le siège de deux phénomènes antagonistes:

- Dans le cas d'une induction \vec{B} sinusoïdale dans le temps, le milieu matériel suit la loi de Lenz : la variation de \vec{B} produit des courants induits, qui produisent à leur tour une induction qui s'oppose à l'induction initiale. C'est le phénomène du **diamagnétisme** qui explique qu'une charge métallique n'ait pas une épaisseur de peau infinie.

- Le second phénomène est qu'il peut apparaître une aimantation par unité de volume \vec{M} , qui possède le même sens que l'induction initiale \vec{B} . On explique cette propriété en admettant que cette aimantation est créée par les mouvements des électrons autour de leur noyau et sur eux-mêmes. C'est le phénomène de **paramagnétisme**. Si les mouvements de rotation des électrons sont totalement désordonnés, leurs moments magnétiques se compensent et l'aimantation s'annule donc d'elle même. Il ne reste alors que la propriété de diamagnétisme. C'est ce que l'on retrouve dans des milieux tels que le cuivre et le laiton. A l'inverse, quand les moments magnétiques prennent des directions privilégiées et s'orientent alors de la même manière sous l'influence de l'induction initiale, le terme paramagnétique devient important. Cet effet est contraire à l'agitation thermique, il va donc dépendre de la température: au delà d'une certaine température, le matériau atteint son point de curie et perd alors ses propriétés paramagnétiques.

- Les substances **ferromagnétiques** sont des substances paramagnétiques qui à partir d'une induction initialement faible, ont la propriété d'acquérir des moments magnétiques considérables. Cette propriété d'augmentation de l'induction magnétique est ainsi très intéressante. Pour éviter l'apparition du phénomène diamagnétique qui va à l'encontre du but recherché, les matériaux ferromagnétiques sont utilisés sous forme de fines feuilles assemblées isolées électriquement les unes des autres, ou sous forme de fine poudre assemblée par frittage: les ferrites. On obtient alors un circuit magnétique où aucun courant induit ne peut se développer, et où seul le phénomène ferromagnétique apparait.

IV.2. Résolution numérique du problème

L'aimantation de la charge magnétique produit une induction \vec{B}' , qui vient s'ajouter à l'induction initiale \vec{B}_0 produite par l'inducteur:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

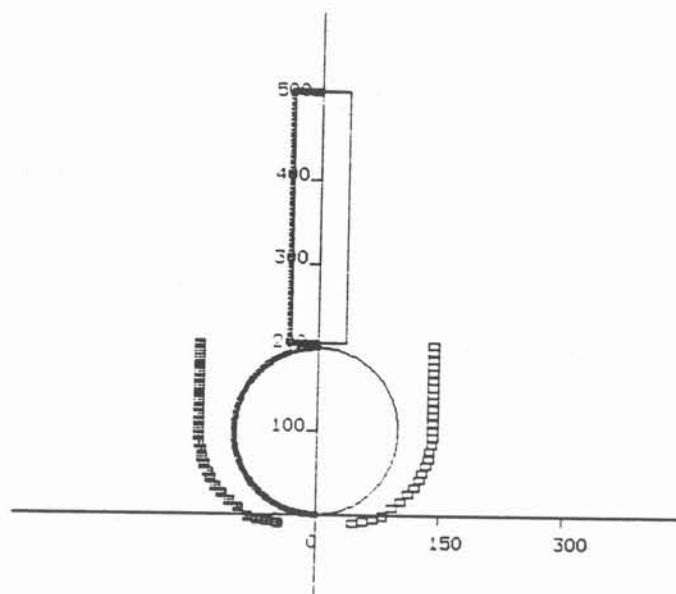
On peut montrer [14] que cette induction \vec{B}' est la même que celle qui proviendrait de densités de courants fictives K' , circulant à la surface de la circuit magnétique, qui deviennent alors les inconnues du problème, et qui sont solutions d'un système d'équations intégrales.

En reliant cette équation aux équations caractéristiques de l'inducteur, des charges (y compris les matériaux magnétiques si celui-ci n'a pas de résistivité infinie), et en procédant à une discrétisation du problème, il est possible de le résoudre numériquement [15]. C'est ce que permet de faire le logiciel OPHELIE, qui donne alors l'ensemble des densités de courants réelles et fictives à partir desquelles on calcule l'induction totale $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ en tout point. C'est à partir de cet outil qu'il a été possible d'étudier numériquement l'influence du circuit magnétique.

IV.3. Etude de l'influence du circuit magnétique

Les dimensions du circuit magnétique sont choisies de manière à avoir un effet essentiellement concentré sur le sommet de la charge. On choisit ainsi un circuit magnétique cylindrique de 30 cm de haut pour 7 cm de rayon, disposée au dessus de la charge (figure 33).

Figure 33: géométrie de la modélisation de l'ensemble charge - inducteur - circuit magnétique



IV.3.1 Influence sur la distribution du champ magnétique

La figure 34 permet de comparer l'évolution de \vec{B} sur un plan horizontal situé au dessus de la charge sphérique modélisée.

La courbe représentant cette évolution en l'absence du circuit magnétique, présente une induction maximum au niveau des spires de l'inducteur, alors qu'au niveau de l'axe de symétrie, la valeur de l'induction reste très faible.

En présence d'un circuit magnétique proche du sommet de la charge, on observe en plus du pic observé au niveau des spires, l'existence d'un fort champ \vec{B} situé juste au dessous du circuit magnétique avec un maximum situé au coin du circuit magnétique.

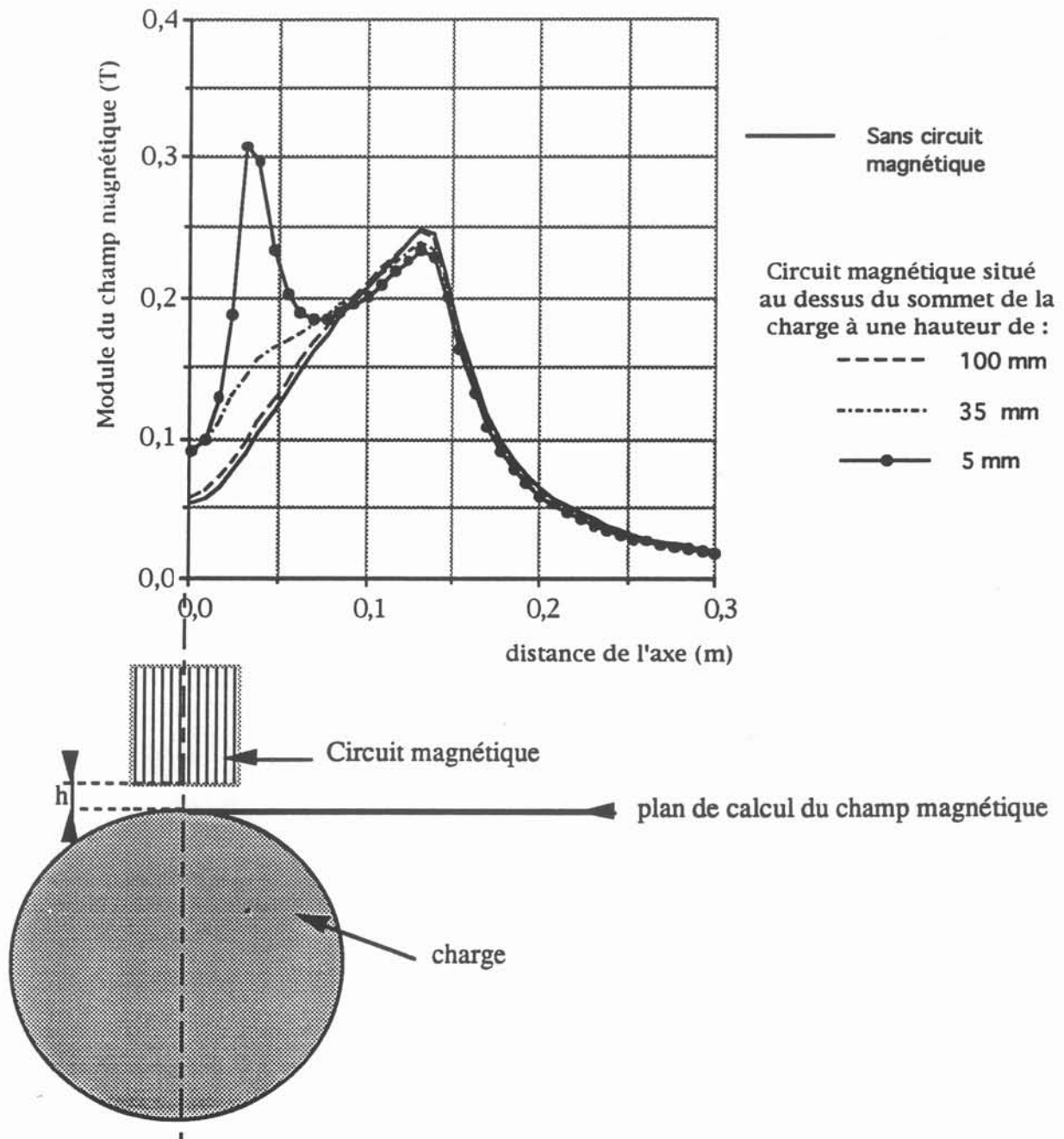
Par contre en dehors de cette zone, l'induction \vec{B} évolue sensiblement de la même

manière qu'en l'absence de circuit magnétique.

On a ainsi montré que dans notre cas, le circuit magnétique crée une induction \vec{B} supplémentaire uniquement dans la zone proche du circuit magnétique. L'action de cette dernière est donc très localisée, compte tenu de sa faible dimension devant celle de la charge et de l'inducteur.

Par ailleurs, on remarque que l'influence du circuit magnétique n'est importante qu'à condition que celle-ci soit à proximité de la charge. Déjà, pour une hauteur entre le circuit magnétique et la charge de 35 mm, l'augmentation du module du champ magnétique au dessus de la charge devient négligeable.

Figure 34: Influence d'un circuit magnétique sur la répartition
Coupe horizontale au sommet de la charge



IV.3.2. Influence sur les caractéristiques globales du procédé

Les résultats obtenus à l'aide de l'étude précédente nous montre que le rendement évolue très peu en présence du circuit magnétique magnétique (voir figure 35). Cette absence d'influence reste liée au faibles dimensions du circuit magnétique qui n'a qu'une action localisée sur l'ensemble du procédé.

Figure 35: Comparaison des résultats de modélisation avec et sans circuit magnétique

Sans culasse

```
*****
* RESULTATS DU LOGICIEL OPHELIE *
*****
```

SIGNAL CIRCULANT DANS L INDUCTEUR :

```
-----
Courant circulant dans l inducteur : 0.493E+04 A
Frequence du courant inducteur : 0.500E+02 Hz
```

ADAPATION AU GENERATEUR

```
-----
Resistance totale ramenee au primaire : 0.602E+01 mOhm
Inductance totale ramenee au primaire : 0.892E-04 H
Capacite : 0.109E+00 F
Resistance vue du generateur : 0.136E+00 Ohm
```

RENDEMENT DE L INSTALLATION

ELEMENTS	PUISSANCE kW	RESISTANCE mOhm	RENDEMENT %
laiton	25.293	2.078	34.50
INDUCTEUR	48.031	3.947	65.50
AMENEES	0.000	0.000	0.00
TOTALE	73.324	6.025	100.00

Culasse à 5 mm au dessus de la charge

```
*****
* RESULTATS DU LOGICIEL OPHELIE *
*****
```

SIGNAL CIRCULANT DANS L INDUCTEUR :

```
-----
Courant circulant dans l inducteur : 0.481E+04 A
Frequence du courant inducteur : 0.500E+02 Hz
```

ADAPATION AU GENERATEUR

```
-----
Resistance totale ramenee au primaire : 0.620E+01 mOhm
Inductance totale ramenee au primaire : 0.914E-04 H
Capacite : 0.106E+00 F
Resistance vue du generateur : 0.139E+00 Ohm
```

RENDEMENT DE L INSTALLATION

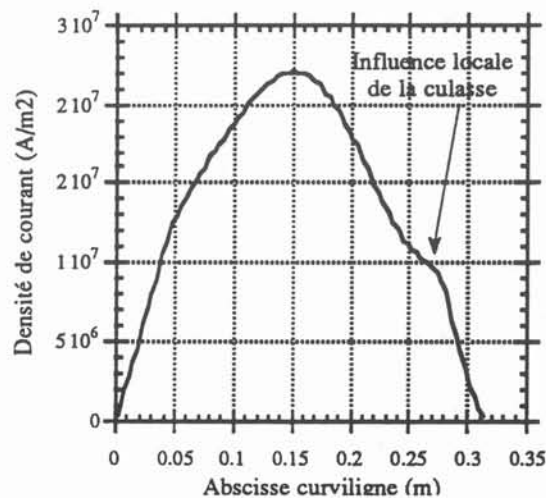
ELEMENTS	PUISSANCE kW	RESISTANCE mOhm	RENDEMENT %
laiton	26.049	2.250	36.28
INDUCTEUR	45.748	3.952	63.72
AMENEES	0.000	0.000	0.00
TOTALE	71.796	6.202	100.00

IV.3.3. Influence sur la fusion de la charge

Les essais effectués avaient montré que même à pleine puissance, alors que le centre de la charge est en fusion et s'écoule hors de la sphère, il restait une croûte solide qui ne fondait pas.

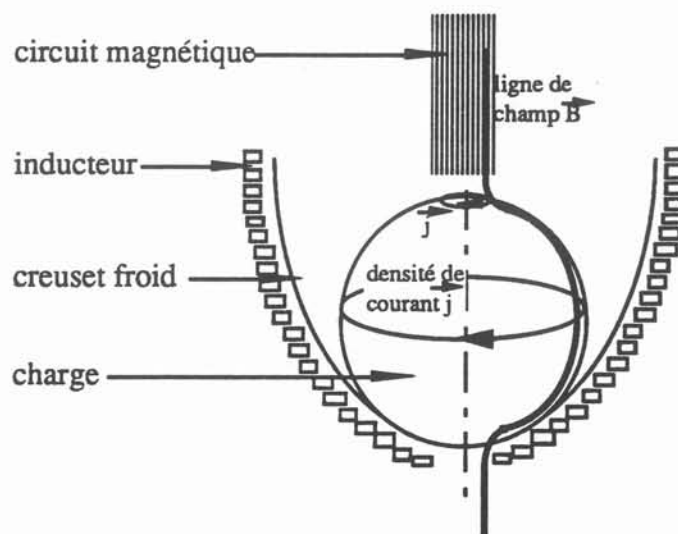
En présence d'un circuit magnétique l'augmentation de l'induction doit provoquer l'apparition de courants induits au sommet de la croûte solide, comme le montre les résultats obtenus par la modélisation (figure 36).

Figure 36: Evolution des densités de courants induits le long de l'abscisse curviligne de la frontière de la charge



Par ailleurs, la géométrie est telle que l'orientation du champ est perpendiculaire à la croûte solide de laiton et entraîne une transmission de puissance par flux transversal, comme le montre la figure 37.

Figure 37: Existence d'un flux transversal dans la configuration étudiée

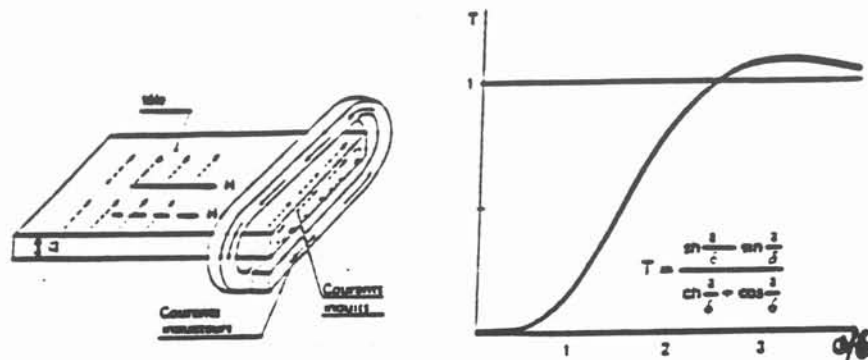


Or les études effectuées pour les inducteurs à flux transversal [16] ont montré que pour de faibles valeurs du rapport $\frac{a}{\delta}$, où a est l'épaisseur de la croûte solide, c'est à dire pour des produits minces à basse fréquence, la puissance dissipée est alors plus importante que lors d'une transmission de puissance par flux longitudinal. La figure 38 compare ainsi l'efficacité de la transmission de puissance entre deux systèmes inductifs longitudinal et transversal, où le coefficient de transmission de puissance est défini par:

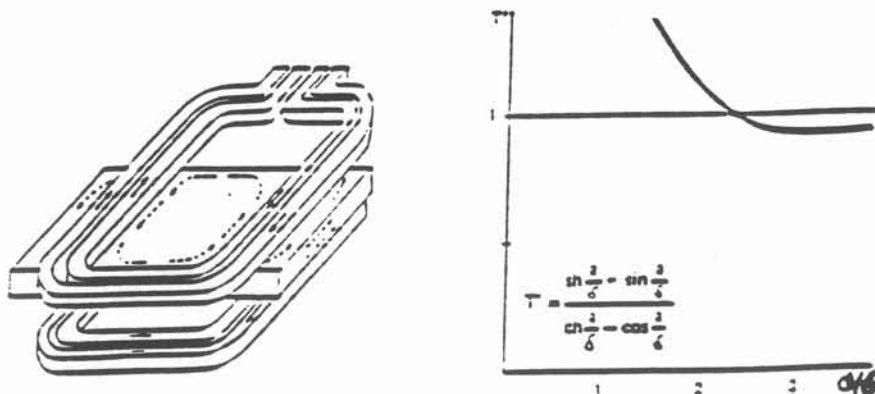
$$T = \frac{\text{Puissance transmise}}{H^2 \frac{\rho}{\delta}}$$

où H est le champ magnétique, et ρ la résistivité électrique

Figure 38: Comparaison de l'efficacité de la transmission de puissance par flux longitudinal et transversal



Inducteur à flux longitudinal: Coefficient de transmission de puissance



Inducteur à flux transversal: Coefficient de transmission de puissance

IV.4. Nouveaux essais avec le circuit magnétique

L'effet ainsi modélisé a alors été vérifié expérimentalement. Un circuit magnétique a donc été monté au dessus de la charge à l'aide du vérin hydraulique. Les dimensions de ce circuit magnétique restent du même ordre de grandeur que celui modélisé. Il possède une section carrée de 70 par 70 mm².

Avec circuit magnétique, les essais se déroulent de la même façon que précédemment. Mais deux modifications du comportement de la charge sont observées:

On observe tout d'abord une montée en température de la charge initialement froide plus rapide que celles observées en l'absence de circuit magnétique.

Enfin, on parvient à fondre l'ensemble de la charge: peu à peu, la croûte solide subsistant au sommet de la charge est fondue dans le bain, et le petit volume restant est finalement immergé dans le liquide de par le fort brassage qui anime le métal liquide.

V. LA DIGESTION DES COPEAUX: ETUDE DU BRASSAGE

L'obtention de la fusion de la charge n'a été qu'une étape dans le travail, puisque le but du procédé est de permettre une assimilation rapide des copeaux de laiton dans le pied de bain, grâce au brassage important du métal liquide.

V.1. Etude de forces rotationnelles

La force électromagnétique intervient dans l'équation de Navier-Stokes, qui régit l'écoulement de fluide dans la charge liquide. Dans la plupart des applications de four à induction, le régime est turbulent.

En décomposant le champ de vitesses en vitesses moyennes \vec{U} et fluctuantes u' , l'équation de Navier-Stokes amène:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \frac{1}{\rho} \vec{j} \wedge \vec{B} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{e} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$$

où \vec{e} est le tenseur des contraintes, p est la pression et \vec{g} le terme de pesanteur

Pour des métaux liquides, les forces de convection naturelle (provenant de la variation de ρ en fonction de la température) restent négligeables [13] devant le terme des forces électromagnétiques, qui est ainsi l'élément moteur du mouvement dans le bain liquide, cette force étant équilibrée principalement par le terme d'inertie et de pression. L'évolution de la partie rotationnelle des forces électromagnétiques est ainsi une bonne indication de l'évolution et du sens de la vitesse le long de la surface de la charge liquide.

En reprenant l'étude effectuée sur les forces électromagnétiques chapitre II, le terme rotationnel de la force s'écrit:

$$\vec{F}_{\text{rot}} = \frac{1}{\mu} (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{B}$$

Avec l'hypothèse d'épaisseur de peau négligeable devant les dimensions de la charge, l'étude avait montrée que le champ magnétique s'écrit en tout point de la charge:

$$\vec{B} = \mu \delta \frac{J(s)}{2} e^{-n/\delta} \left[\cos \left(\omega t - \frac{n}{\delta} \right) + \sin \left(\omega t - \frac{n}{\delta} \right) \right] \vec{i}_s$$

avec les notations utilisées précédemment

Le terme rotationnel de la force électromagnétique volumique peut alors s'écrire:

$$\vec{F}_{\text{rot}} = \mu \frac{\delta^2}{4} J \frac{dJ}{ds} e^{-2n/\delta} \left\{ 1 + \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{n}{\delta} \right) \right] \right\} \vec{i}_s$$

Cremer et Alemany [17] ont montré que pour des installations fonctionnant à moyenne fréquence, l'influence de l'effet de pulsation du champ magnétique sur les vitesses était négligeable, puisque la pulsation des forces était intégrée dans le temps du fait de la forte inertie du métal liquide. En reprenant leur analyse dans notre cas, on définit l'influence de la pulsation par le nombre sans dimension:

$$N_{\omega} = \frac{|\vec{U}_{\text{puls}}|}{|\vec{U}_{\text{moy}}|}$$

où $|\vec{U}_{\text{puls}}|$ est le module du terme pulsatoire de la vitesse

$|\vec{U}_{\text{moy}}|$ est le module du terme moyen de la vitesse

On peut montrer que $N\omega = \frac{C_A}{\omega \delta} R\omega^{-1/4}$

avec C_A la vitesse d'Alfven définie par $C_A = \frac{B_0}{(\mu \rho)^{1/2}}$

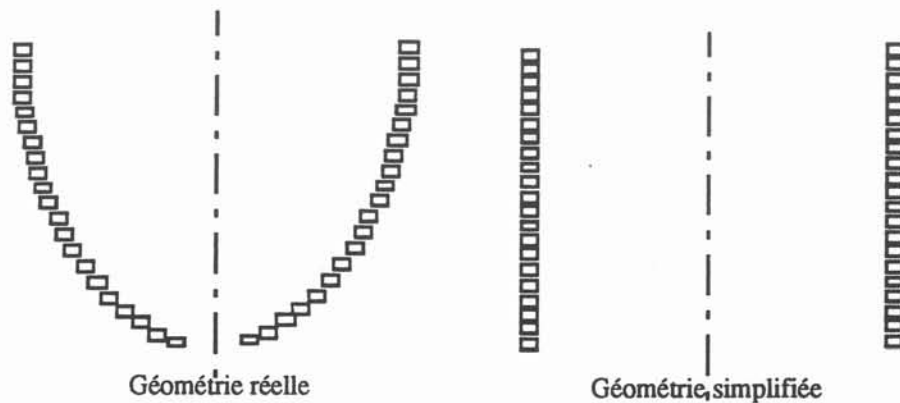
et où: μ est la perméabilité magnétique ($= 4 \pi 10^{-7}$)

ρ est la masse volumique du métal $= 8400 \text{ kg/m}^3$ pour le laiton

B_0 l'ordre de grandeur du champ magnétique, défini pour une géométrie simplifiée (figure 39), en considérant un inducteur cylindrique droit infiniment long, dans lequel le champ

magnétique est défini par $B_0 = \frac{\sqrt{2} \mu N I}{h}$, N étant le nombre de spires, I le courant et h la hauteur de l'inducteur, soit dans notre cas: $B_0 = 0.5 \text{ T}$

Figure 39: Simplification de la géométrie pour l'estimation du champ magnétique moyen



On obtient ainsi une vitesse d'Alfven de 4,8 m/s, soit donc un rapport $N\omega = 0,24$

A 50 Hz, la pulsation n'est plus complètement négligeable. Néanmoins, on se limitera à l'étude la vitesse moyenne.

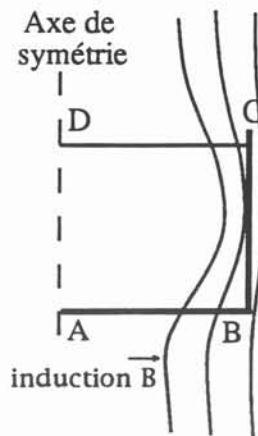
La force rotationnelle volumique moyennée sur une période s'écrit alors:

$$\vec{F}_{\text{rot}} = \mu \frac{\delta^2}{4} J \frac{dJ}{ds} e^{-2n/\delta} \vec{i}_s$$

Le terme qui permet le brassage est ainsi proportionnel au terme $J \frac{dJ}{ds}$.

La force et le sens du brassage restent liés à la variation des courants induits le long de la surface, et donc à la forme de la charge: toujours avec l'hypothèse d'épaisseur de peau négligeable devant les dimensions de la charge, le champ magnétique contourne la charge comme le montre la figure 40, puisqu'il n'y pénètre que dans dans une couronne d'épaisseur δ .

Figure 40: Lignes de champ magnétique pour une fine épaisseur de peau électromagnétique

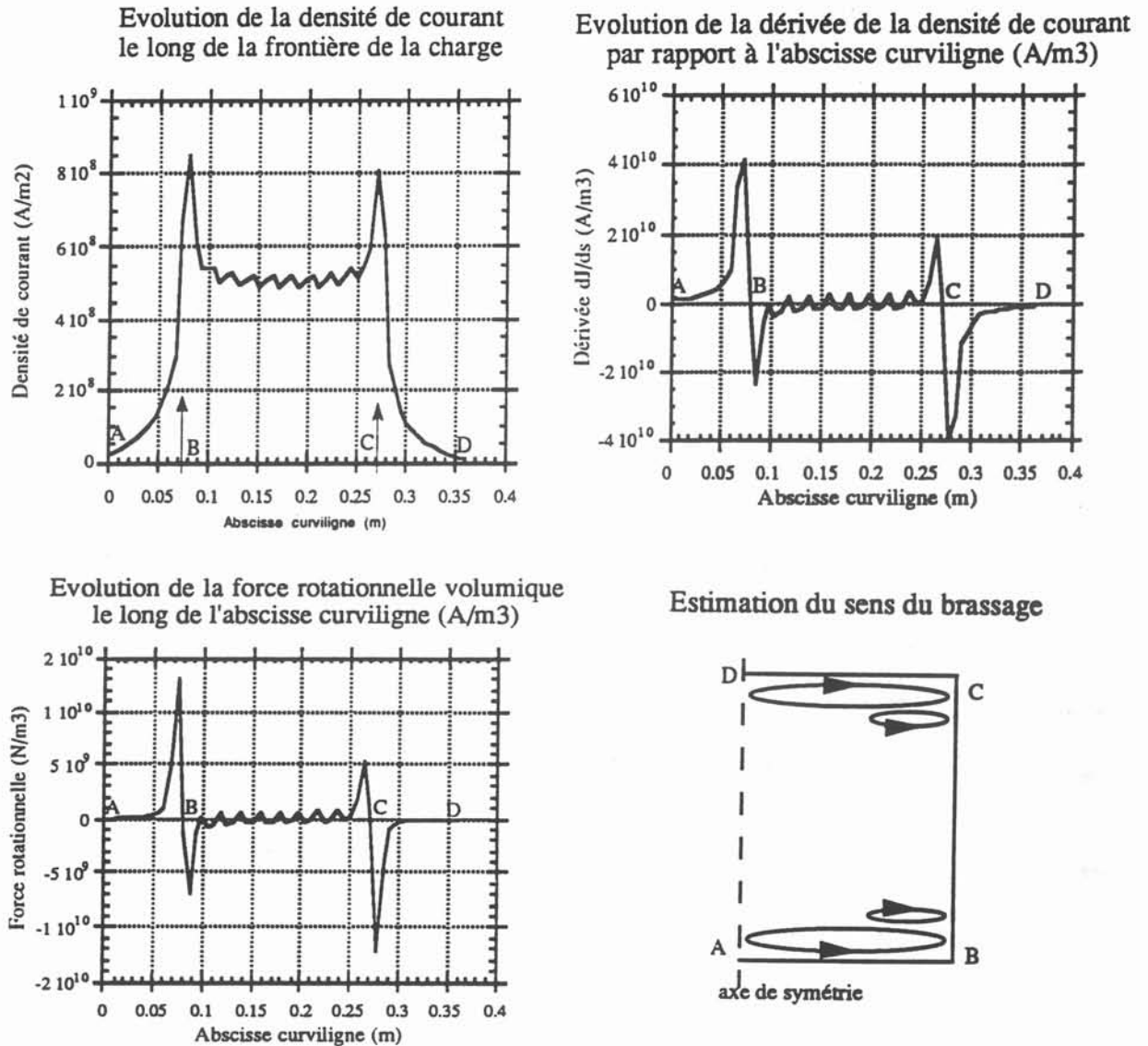


On peut ainsi montrer analytiquement et expérimentalement pour une géométrie cylindrique [18] [19]], comme celle représentée sur la figure 40 précédente, que l'on observe au voisinage des coins un accroissement important de l'induction: ce sont les effets d'extrémités, source de brassage dans la charge.

L'utilisation du logiciel OPHELIE a permis de visualiser cette évolution de la densité de courant pour cette géométrie, dont on déduit l'évolution de la force de brassage à la surface de la masse liquide, proportionnelle à $J \frac{dJ}{ds}$.

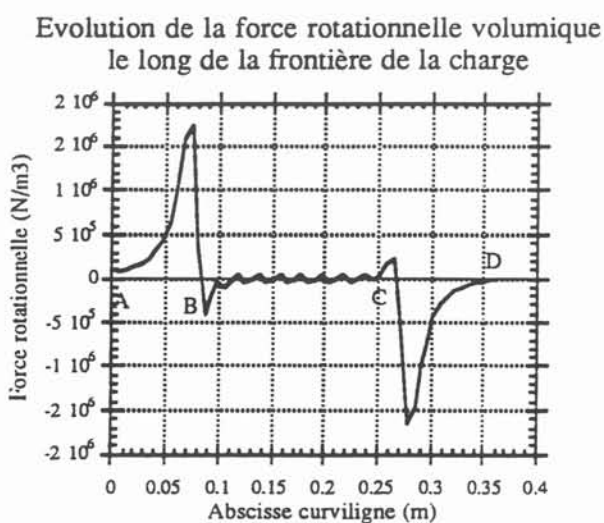
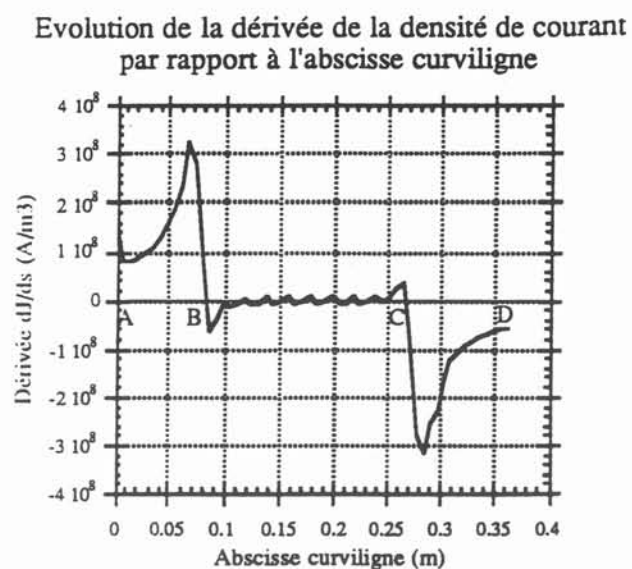
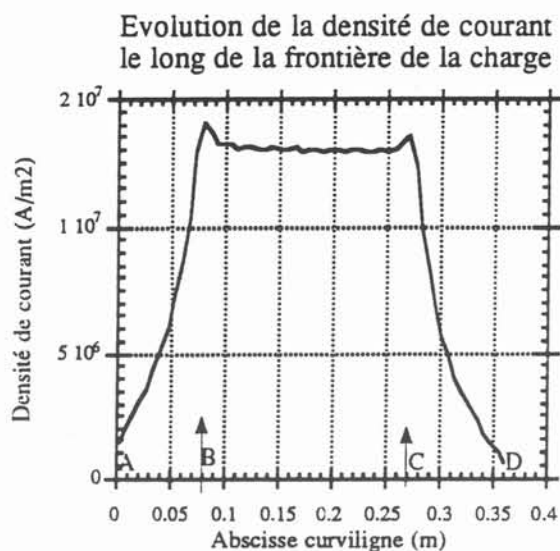
On observe ainsi l'existence de forces rotationnelles le long de l'abscisse curviligne qui entraînent l'apparition de vortex de sens opposés. La figure 41 montre comment se développe le brassage à partir de l'évolution des courants induits le long de la frontière de la charge, pour une fréquence de fonctionnement de quelques dizaines de kHz.

**Figure 41: Origine du brassage électromagnétique
pour une géométrie cylindrique avec paramètre d'écran faible**

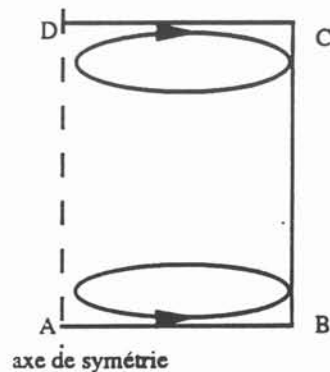


En fait, selon les caractéristiques du système, le champ de vitesse n'a plus forcément le même aspect: la viscosité du métal liquide fait qu'il y a une lutte d'influence des différents vortex, au dépend du vortex le moins important qui disparaît alors. Par ailleurs, quand le paramètre d'écran $R\omega$ augmente, ces effets d'extrémités deviennent moins importants, puisque le champ magnétique peut pénétrer plus profondément dans la charge, et que les variations de courants induits le long de la frontière de la charge sont moins influencées par la géométrie. La figure 42 reprend la même configuration que précédemment (figure 48), pour une fréquence de fonctionnement de 50 Hz.

Figure 42: modélisation des forces de brassage
pour un paramètre d'écran important

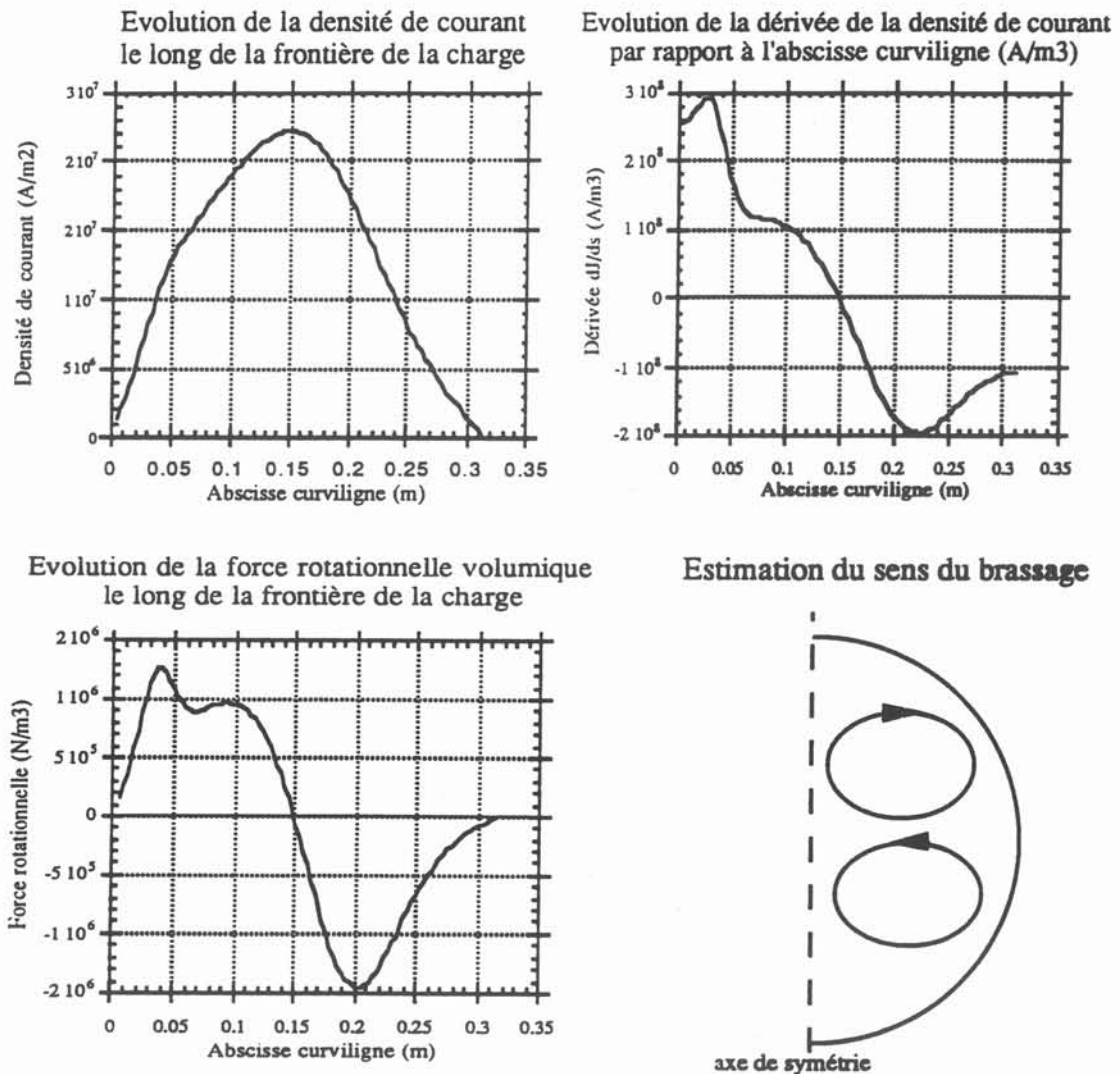


Estimation du sens du brassage



Dans la configuration qui est la nôtre, dans laquelle la charge liquide peut être représentée par une sphère, et où l'on observe la variation régulière et continue de la géométrie de la charge, il n'y a pas de véritable effet de coins: la densité de courant évolue régulièrement le long de l'abscisse curviligne de la frontière de la charge (figure 43).

Figure 43: Modélisation des forces de brassage pour une charge sphérique



Cette variation est ici due à différents facteurs:

- D'une part, la symétrie de révolution impose un courant nul sur l'axe.
- Par ailleurs l'effet de la courbure des surfaces de la charge et de l'inducteur va entraîner des variations importantes des courants induits dans la charge.
- Enfin l'éloignement progressif de la frontière de la charge par rapport aux spires de l'inducteur entraîne une diminution du couplage inductif. Ce dernier facteur, uniquement limité à la partie supérieure de la charge est ainsi à l'origine de la dissymétrie de profil de densités de courants induits le long de la frontière de la charge entre la zone inférieure et la zone supérieure.

Cette évolution régulière de la densité de courant le long de la frontière de la charge entraîne la naissance de vortex de sens opposés. La dissymétrie dans l'évolution de la force rotationnelle volumique le long de la frontière de la charge entraîne un vortex inférieur plus important que le vortex supérieur.

Limite de cette étude :

La limite de cette étude provient du fait que l'on cherche à connaître le mouvement du fluide dans la charge sans résoudre l'équation de Navier-Stokes, mais en ne considérant qu'un des termes de cette équation. Bien que le terme irrotationnel des forces de Laplace soit un élément moteur du brassage dans un creuset à induction, il convient de rester prudent quant aux prévisions de vitesses qui en découlent. En effet, les différents termes qui équilibrent les forces électromagnétiques ont des influences bien distinctes. Le terme d'inertie et le terme de frottements visqueux ont tendance à intégrer l'ensemble des différentes vitesses de brassage le long de la surface. Ainsi, si deux vortex de sens contraires ont des amplitudes de vitesses ou des rayons d'action très différents, le vortex le moins important va être assimilé au mouvement d'ensemble et disparaître sous l'influence du vortex le plus important.

Les conditions limites vont également jouer un rôle important. Selon que l'on se situe en surface libre ou au contact d'une paroi solide, le terme moteur va être plus ou moins freiné. Ainsi, il n'est possible de dégager de cette étude que des tendances quant au sens et à l'amplitude du brassage dans une configuration donnée. Mise à part les rapides estimations expérimentales, seule une modélisation complète du régime hydraulique peut permettre d'évaluer l'influence de chacun des vortex, et d'obtenir une cartographie des vitesses dans l'ensemble du domaine liquide.

V.2. La modélisation thermo-hydraulique

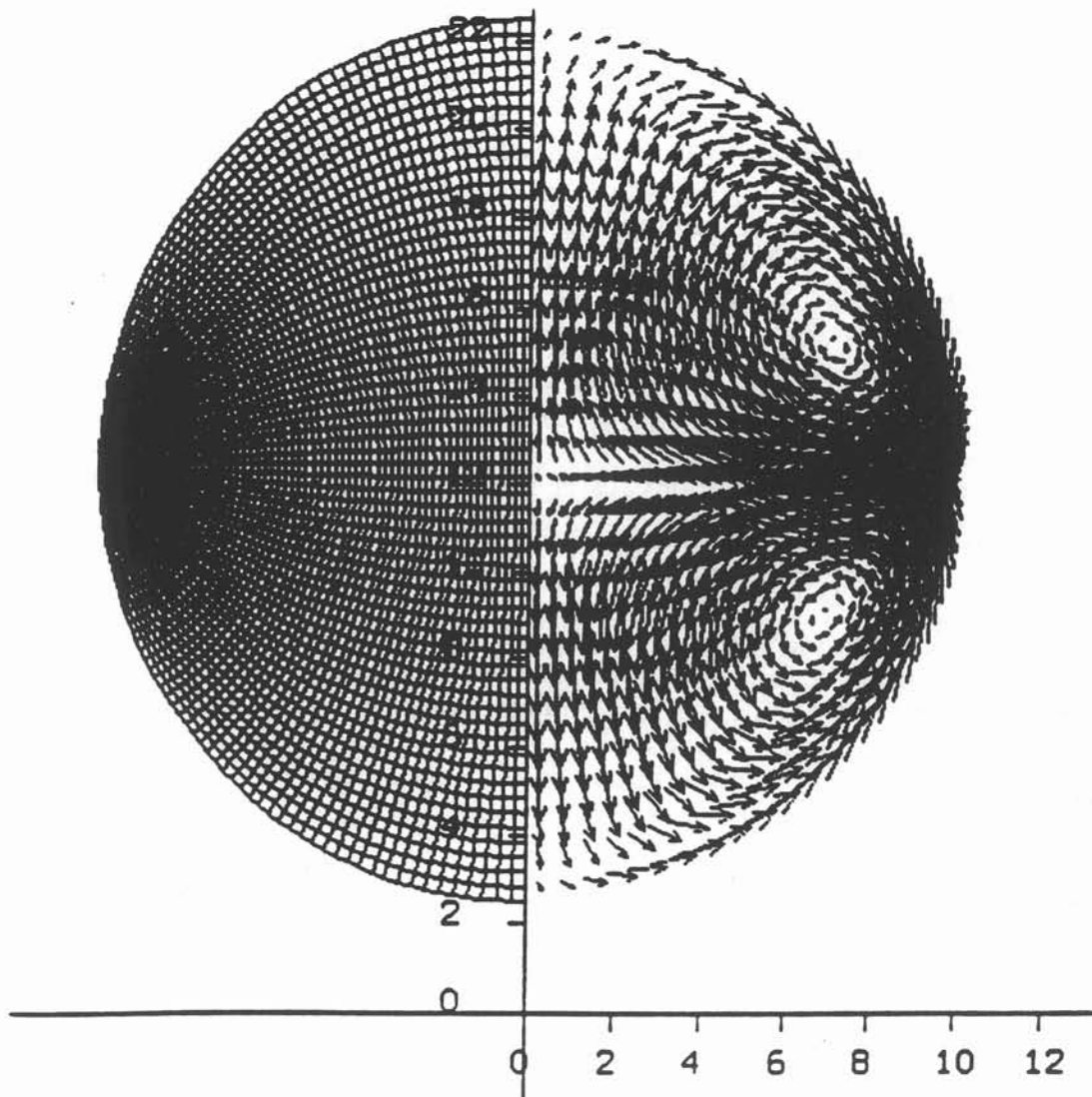
Cette modélisation numérique s'effectue par le logiciel KERMIT développé au laboratoire [20], qui compte tenu des forces qui s'exercent sur une charge liquide, permet de connaître les champs de vitesse à l'intérieur de la charge. Ce logiciel a été adapté pour utiliser directement les fichiers de densités de courant et de forces, calculés par OPHELIE. Il permet des calculs en régime turbulent et pour des configurations tridimensionnelles axisymétriques. La méthode utilisée est celle des éléments finis, c'est à dire que l'on intègre les équations locales hydrauliques sur un ensemble discret de volumes jointifs qui recouvrent totalement le domaine.

Une des principales limitations de ce logiciel est que l'enveloppe de la charge à l'intérieur de laquelle est calculée le champ de vitesse reste figée. Il est donc nécessaire de connaître au préalable la forme de la charge liquide avant utilisation de ce logiciel. Là encore, l'approximation de charge liquide de forme sphérique est choisie.

Une seconde contrainte est le type de maillage utilisé: Celui-ci est un maillage orthogonal curviligne, et n'est pas toujours compatible avec les formes des charges liquides que l'on veut traiter. Un programme de maillage permettant de respecter l'orthogonalité des mailles dans la configuration sphérique choisie permet d'obtenir le maillage représenté figure 44.

Par ailleurs, compte tenu du régime turbulent du métal liquide, une modélisation de la turbulence en $k-\epsilon$ est nécessaire. Or dans le cas qui est le nôtre, où il existe une surface libre, la modélisation des phénomènes turbulent en $k-\epsilon$ ne fonctionne pas. Une première estimation sera donc de modéliser les frottements en régime turbulent par une viscosité constante, qui amène les résultats figure 44.

Figure 44: Champ de vitesse obtenu par le modélisation



On obtient ainsi bien numériquement les vortex qui étaient prévisibles par l'étude du terme moteur que constituent les forces électromagnétiques, avec une vitesse maximale calculée égale à 1,4 m/s. Cette modélisation amène alors deux vortex d'influences égales, contrairement au profil des forces rotationnelles volumiques le long de la frontière de la charge. Cette différence s'explique par l'influence des conditions limites du domaine, qui diffèrent selon l'abscisse curviligne:

La zone inférieure du domaine, dans laquelle les forces de brassage sont importantes, possède des conditions limites de paroi, ce qui a tendance à freiner le mouvement de recirculation de métal liquide.

La zone supérieure du domaine, dans laquelle les forces rotationnelles sont moins importantes, possède une condition limite de surface libre. Le terme de freinage est donc moins important.

V.3. Etude de la possibilité de maîtrise du sens des vortex par le circuit magnétique.

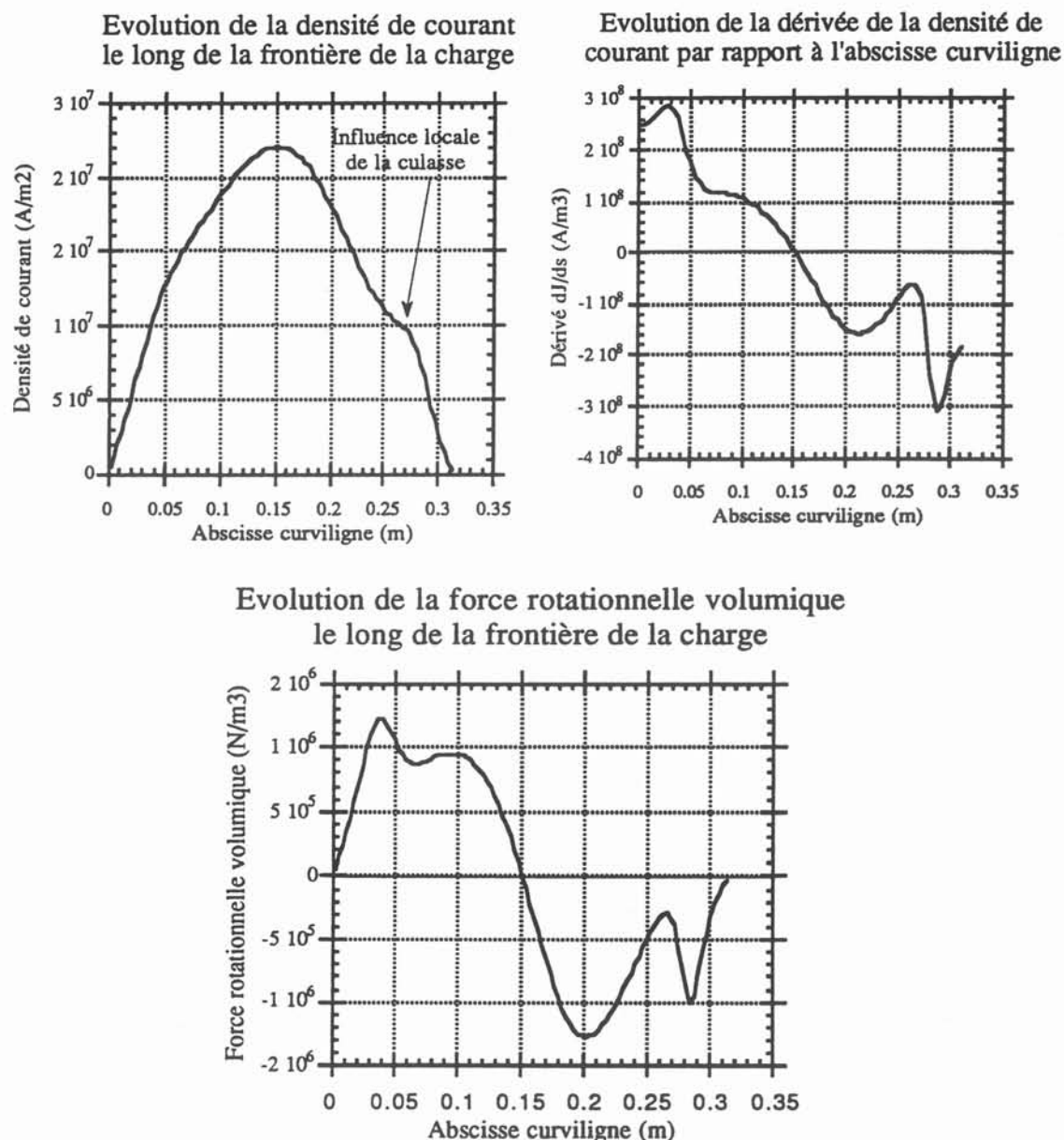
Le travail précédent a montré que le brassage ne s'effectue pas selon un sens de rotation susceptible d'améliorer la digestion des copeaux, puisque ceux-ci sont projetés vers la périphérie de la charge, en contact avec les parois froides du creuset, où ils peuvent s'y solidifier et s'y agglutiner. L'étude du brassage a donc été poursuivie afin de voir s'il était possible d'inverser le sens de rotation du brassage.

L'idée de base a été d'utiliser l'influence du circuit magnétique sur le brassage électromagnétique : en effet il a été montré que l'augmentation de la densité de courant localisée au sommet de la charge, due à l'existence du circuit magnétique, entraîne une modification de la répartition des forces rotationnelles le long de la frontière de la charge.

Comme le montre la figure 45, l'augmentation de la densité de courant J , et surtout de la variation de la dérivée de cette densité de courant selon l'abscisse curviligne de la charge $\frac{dJ}{dS}$ favorise la naissance d'un vortex susceptible de créer un mouvement de rotation inverse de celui existant sans circuit magnétique, mais l'effet ferromagnétique du circuit magnétique n'est pas suffisamment important pour créer ce vortex de sens opposé.

Cette analyse montre par contre que s'il était possible d'avoir un circuit magnétique capable d'augmenter de façon plus importante la densité de courant au sommet de la charge, la distribution de ces densités de courant permettrait d'inverser localement le sens du brassage. Dans une telle hypothèse, et à condition que ce nouveau vortex ne soit pas intégré dans le mouvement d'ensemble au brassage, le circuit magnétique jouerait un rôle important dans la maîtrise du brassage électromagnétique.

Figure 45: Effet du circuit magnétique sur le brassage



V.4. Etude expérimentale

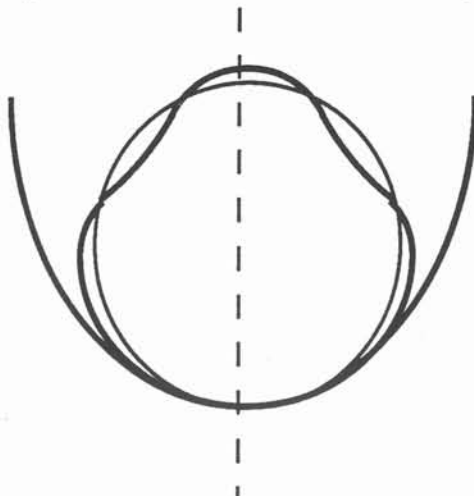
A partir de la charge en fusion, les essais expérimentaux ont permis d'observer les faits suivants:

Une fois la fusion de la charge obtenue, le métal liquide n'épouse pas les parois latérales du creuset. L'effet de la force irrotationnelle, bien qu'insuffisant pour engendrer un semi-décollement du métal du fond du creuset, permet cependant de maintenir le liquide écarté des parois latérales du creuset.

Par ailleurs, ces forces entraînent la formation d'un dôme important, dont l'ordre de grandeur est la dizaine de cm. Cette hauteur du dôme est bien évidemment variable en fonction de la puissance délivrée par le réseau, que l'on règle par l'intermédiaire de l'alternostat.

La forme de la charge liquide, représentée figure 46, peut ainsi être estimée grossièrement par une sphère, comme nous l'avons effectué jusqu'alors.

Figure 46: Représentation de la forme de la charge liquide



On observe à la surface de la charge un brassage violent, dont le sens de déplacement du liquide correspond aux études effectuées. A noter que compte tenu de la configuration du creuset, il n'a pas été possible d'observer le vortex inférieur. L'ordre de grandeur de cette vitesse violente à la surface du dôme liquide est établie à partir d'enregistrements vidéos d'essais, pour lesquels des copeaux de laiton sont amenés au dessus du dôme et jouent le rôle de marqueurs. On obtient ainsi une vitesse de l'ordre de 1m/s, et qui rejoint donc les valeurs obtenues numériquement.

L'effet de la pulsation n'est pas perceptible à l'oeil, ce qui vérifie les hypothèses prises pour la détermination de l'évolution des forces rotationnelles le long de la frontière de la charge.

De plus l'absence d'influence sur le circuit magnétique a été vérifiée expérimentalement: même lorsque celle-ci est située juste au dessus de la charge liquide, il ne se produit ni inversion du sens de brassage, ni même un ralentissement notable de la vitesse. On note cependant un effet d'écrasement du dôme sous l'influence du circuit magnétique.

Enfin, il faut souligner le fait qu'à pleine puissance, le dôme liquide devient instable: on observe alors à la fois des projections assez violentes de métal liquide hors du creuset, ainsi qu'une oscillation latérale du dôme. Lorsque ce déplacement devient trop violent, la masse liquide est projetée vers le creuset, ce qui entraîne une solidification partielle du métal en contact avec la paroi froide. Une des hypothèses avancée est qu'à forte puissance, la vitesse devient si importante, qu'un effet centrifuge vient déstabiliser la charge liquide, compte tenu de la forte inertie du métal.

Des essais de digestions des copeaux ont montré que ceux-ci étaient immédiatement fondus dans le bain de métal, et que l'on observait aucun dépôt de copeaux à la périphérie du creuset froid. A noter par contre l'apparition de crasses (constituées de cuivre et d'oxydes de zinc), à la périphérie de creuset, qui forment une couronne au niveau de la surface du liquide.

VI. CARACTERISATION DU PROCEDE

VI.1. Acquisition de données

Compte tenu de la complexité des phénomènes mis en jeu, qui ne permettent d'obtenir une résolution numérique qu'au prix de simplifications importantes, la caractérisation la plus précise n'a pu s'effectuer qu'expérimentalement, en installant des capteurs de mesures sur l'installation expérimentale. Ces capteurs sont de trois types:

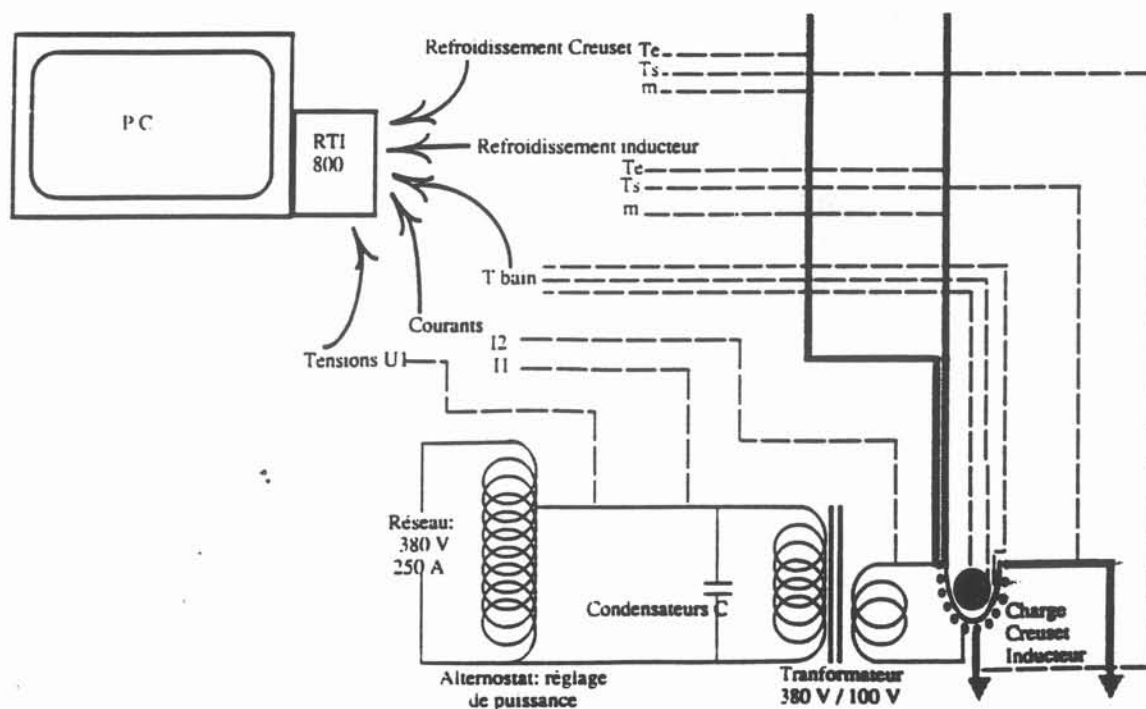
- Des mesures électriques sont nécessaires afin de connaître à tout instant l'évolution des courants autant au primaire qu'au secondaire du transformateur de l'installation. Pour cela, tensions et courants sont mesurés aux différents points du circuit. Ces valeurs permettent notamment d'en déduire les valeurs de la résistance R et de l'inductance L du circuit équivalent, et de connaître leur évolution pendant toute la durée de l'essai.

- Des mesures calorimétriques permettent d'évaluer la puissance perdue dans les circuits de refroidissement. Ceci a été effectué par mesures des températures d'entrée et de sortie, ainsi que des débits d'eau. Ces mesures permettent de connaître l'ensemble des transferts énergétiques qui s'opèrent durant un essai.

- Enfin, des mesures de température au sein de la charge ont été prévues, par introduction de thermocouples dans le bain liquide, afin de caractériser la fusion de la charge, ainsi que sa dynamique de montée en température.

L'ensemble de ces mesures est relié à un système d'acquisition monté sur PC, et permettent d'afficher et de sauvegarder toutes les mesures acquises au cours de l'essai. Un synoptique de l'installation est présentée figure 47

Figure 47: Synoptique de l'installation expérimentale et des capteurs de mesures

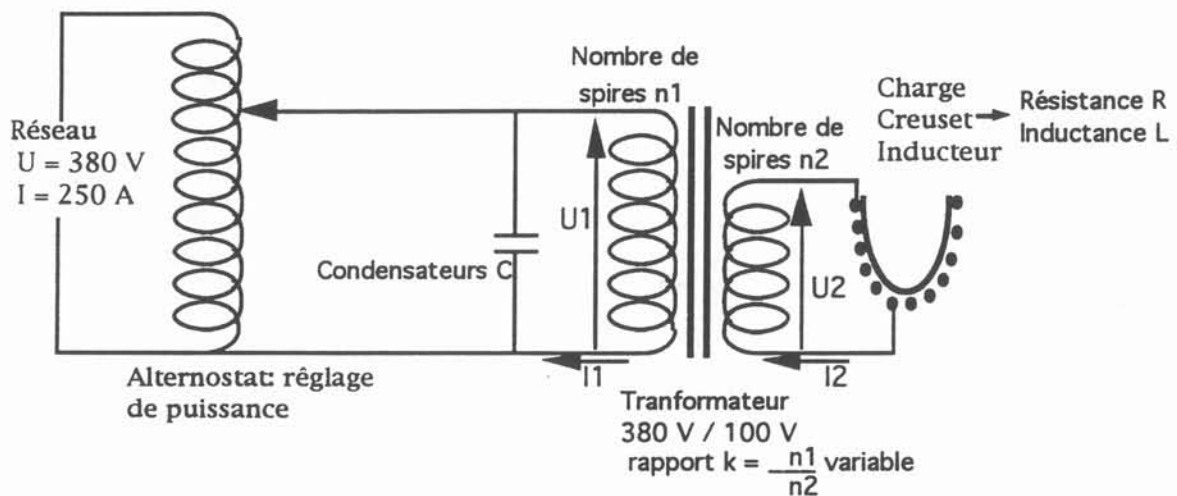


VI.2. Caractérisation électrique du système en cours d'essai

VI.2.1. Détermination de la résistance R et de l'inductance L de l'ensemble inducteur-creuset-charge

A partir des mesures de courants et de la tension, il est possible de calculer l'ensemble des paramètres du circuit électrique équivalent, dont la constitution est rappelée figure 48:

Figure 48: Circuit électrique de l'installation



Pour la caractérisation du procédé, seuls les éléments placés en aval de l'alternostat nous importent. Compte tenu des courants et de la tension mesurés, des capacités et du rapport de transformateur choisis, l'objectif est donc de déterminer expérimentalement les valeurs de la résistance R et de l'inductance L. Pour parvenir à ces valeurs, une modélisation du transformateur par son schéma équivalent a été nécessaire, et est décrite en annexe 3.

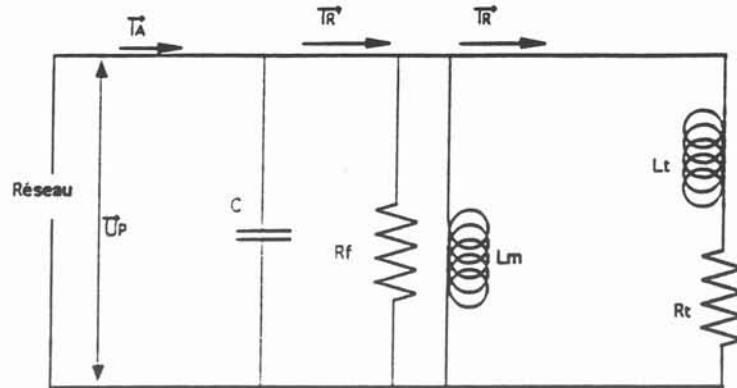
Le circuit de l'installation complète est alors représentée figure 49:

on note:
$$L_t = L_{f1} + k^2 L_{f2} + k^2 L$$
$$R_t = R_{b1} + k^2 R_{b2} + k^2 R$$

avec: R_{b1} et R_{b2} : résistance des bobines primaire et secondaire, qui s'échauffent au passage du courant.

L_{f1} et L_{f2} : inductance de fuite des deux bobines, correspondant au flux qui n'est pas transmis d'une bobine à l'autre par l'intermédiaire de la circuit magnétique ferro-magnétique.

Figure 49: Circuit final équivalent



Une manière de déterminer expérimentalement les valeurs de R et L qui sont les résistance et inductance du système charge + creuset + inducteur, est de mesurer :

- la tension aux bornes du réseau U
- le courant actif I_A
- le courant réactif I_R

Il est alors possible d'écrire les expressions suivantes:

$$\frac{I_R}{U_p} = \frac{1}{R_f} + \frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_t + jL_t\omega}$$

$\frac{U}{I_A} = Z$ impédance équivalente du circuit total, telle que:

$$\frac{1}{Z} = jC\omega + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_t + jL_t\omega}$$

A noter que les deux impédances parallèles R_f et $jL_m\omega$ représentant les pertes magnétiques, sont très grandes par rapport à $R_t + jL_t\omega$. Les deux courants I_R et I_R' sont très proches ce qui simplifie le système d'équations de la façon suivante:

$$\frac{U}{I_R'} = R_t + jL_t\omega$$

$\frac{U}{I_A} = Z$ impédance équivalente du circuit total, telle que:

$$\frac{1}{Z} = jC\omega + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_t + jL_t\omega}$$

Soit à résoudre le système

$$\frac{U}{I_R'} = R_t + jL_t\omega$$

$$\frac{I_A}{U} = \frac{R_f(1 - CL_m\omega^2)(R_t + jL_t\omega) + jL_m\omega(R_f + R_t + jL_t\omega)}{jR_fL_m\omega(R_t + jL_t\omega)}$$

On obtient un système non linéaire de deux équations à deux inconnues, R_t et L_t , que l'on résout par une méthode itérative, la méthode des pas de tirs, qui consiste à partir d'une solution initiale de faire évoluer les valeurs jusqu'à obtenir les égalités des deux équations. On obtient donc R_t et L_t , d'où l'on déduit:

$$R = \frac{R_t - R_{b1}}{k^2} - R_{b2}$$

$$L = \frac{L_t - L_{f1}}{k^2} - L_{f2}$$

La mesure des courants I_A et I_R' et de la tension U permet de connaître les variations de ces deux grandeurs R et L au fur à mesure que la sphère s'échauffe, puis devient liquide (voir figures 50 et 51). On observe l'augmentation régulière de la résistance et de l'inductance en fonction de l'augmentation de la température. Puis, lorsque la fusion s'effectue, des variations irrégulières des grandeurs R et L se produisent, selon la forme du dôme, elle-même fonction de la puissance fournie. C'est à partir de ces valeurs qu'il a été possible de vérifier le bon réglage du circuit.

Figure 50: Evolution de la résistance en cours d'essai

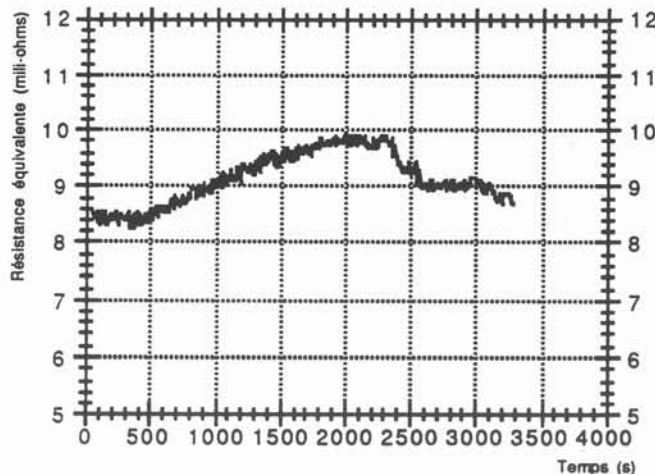
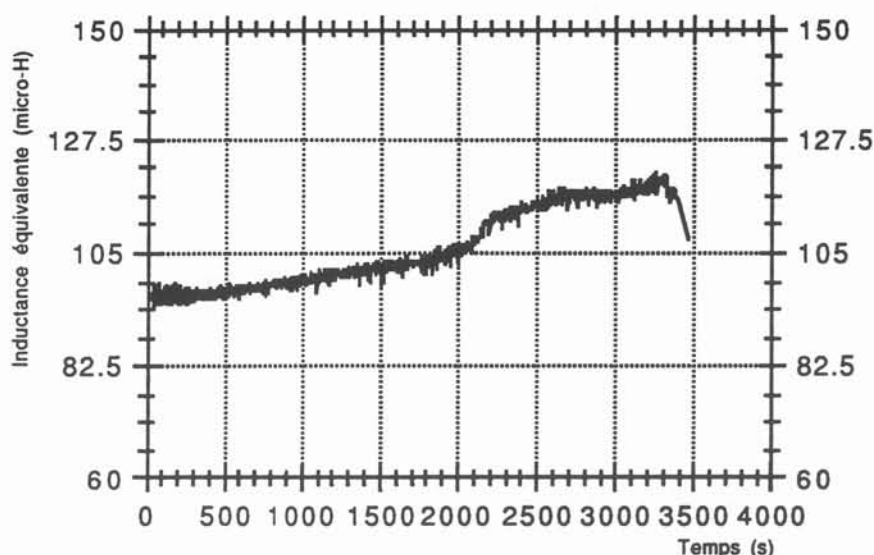


Figure 51: Evolution de l'inductance en cours d'essai



V.2.2. Détermination du réglage du circuit

La condition d'adaptation d'impédance du circuit vis à vis du réseau va dépendre du réglage de la résonance. Pour un circuit oscillant classique RLC (qui correspond à notre circuit si on néglige l'influence des pertes du transformateur pour le réglage du circuit), l'impédance Z vue du réseau, se compose en:

$$\begin{aligned}
 & \text{- un terme réel } Z_r = \frac{k^2 R (1 - k^2 L C \omega^2) + k^4 R L C \omega^2}{(1 - k^2 L C \omega^2)^2 + k^4 R^2 C^2 \omega^2} \\
 & \text{- un terme imaginaire } Z_i = \frac{k^2 L \omega (1 - k^2 L C \omega^2) - k^4 R^2 C \omega^2}{(1 - k^2 L C \omega^2)^2 + k^4 R^2 C^2 \omega^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Le module obtenu vaut alors : } Z = \sqrt{Z_r^2 + Z_i^2}$$

Ainsi, pour des valeurs de rapport de transformateur k et de capacités C déterminées, et pour des valeurs extrêmes de R et L , correspondant:

- à une sphère froide solide: $R = 8,5 \text{ m}\Omega$
 $L = 97 \text{ }\mu\text{H}$
- à une charge liquide: $R = 95 \text{ m}\Omega$
 $L = 116 \text{ }\mu\text{H}$,

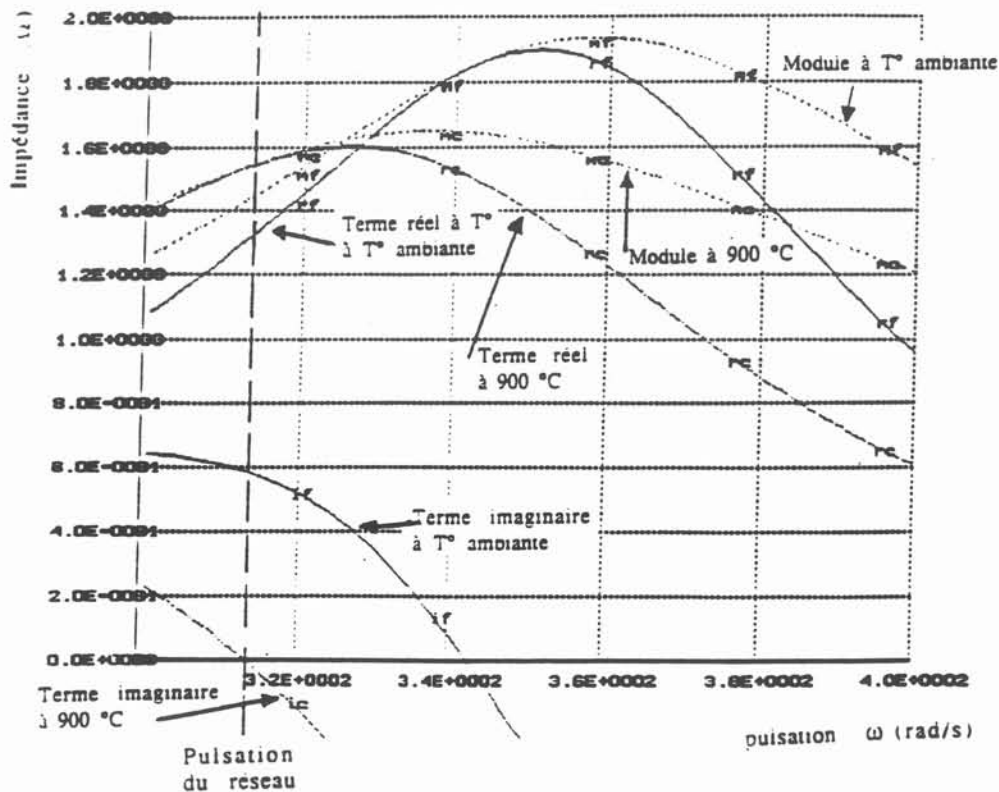
il est possible de tracer les différents termes de l'impédance vue du réseau en fonction de la pulsation. La figure 52 montre ainsi comment évoluent les termes composant l'impédance, et notamment le terme imaginaire Z_i , qui s'annule à la résonance. A noter que cette figure a été tracée pour un réglage optimum, déduit à partir des mesures de R et L en cours d'essai à chaud, et en utilisant les équations de résonance et d'adaptation d'impédance:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{k^2 L C} \sqrt{1 - \frac{C k^2 R^2}{4 L}}$$

$$\frac{U}{I} = Z = \frac{L}{R C}$$

Ces équations permettent d'agir sur les réglages portant sur k et C pour que, partant à froid d'un terme imaginaire de l'impédance Zi non nul à la fréquence réseau de 50 Hz, on obtienne pour la charge fondue le terme Zi qui soit nul, c'est à dire l'état de résonance du circuit oscillant.

Figure 52: Evolution de l'impédance en fonction de la pulsation pour une charge solide et un charge liquide



Dans le cas où le circuit se trouve à la résonance, l'impédance, purement réelle, peut alors s'exprimer par $Z = \frac{L}{R C}$.

Une parfaite adaptation d'impédance, pour une situation à la résonance, est alors définie par la relation suivante:

$$Z = \left| \frac{U}{I} \right|_{\text{nominal réseau}} = 1,6$$

Ceci entraîne alors une condition supplémentaire pour le choix des capacités.

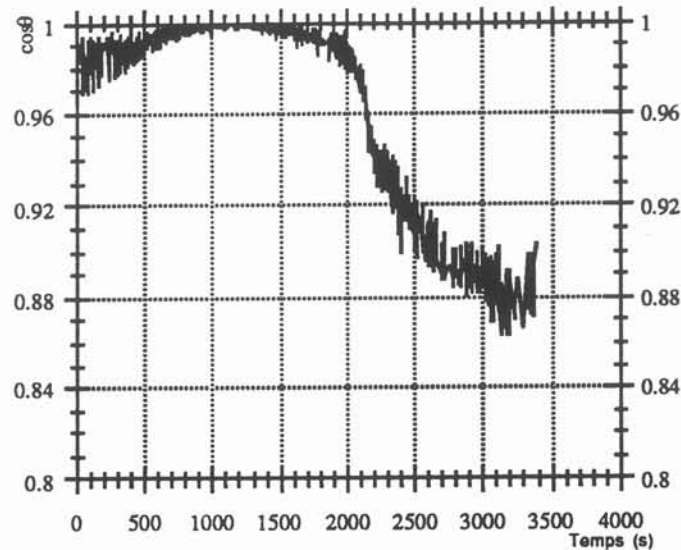
Pour un réglage optimum théorique ainsi obtenu, les essais expérimentaux permettent de vérifier le réglage réel obtenu:

On peut ainsi calculer le cos φ du réseau qui dans le cas d'un circuit bouchon s'écrit:

$$\cos \varphi = \frac{P_{\text{totale}}}{U_p \cdot I_A}$$

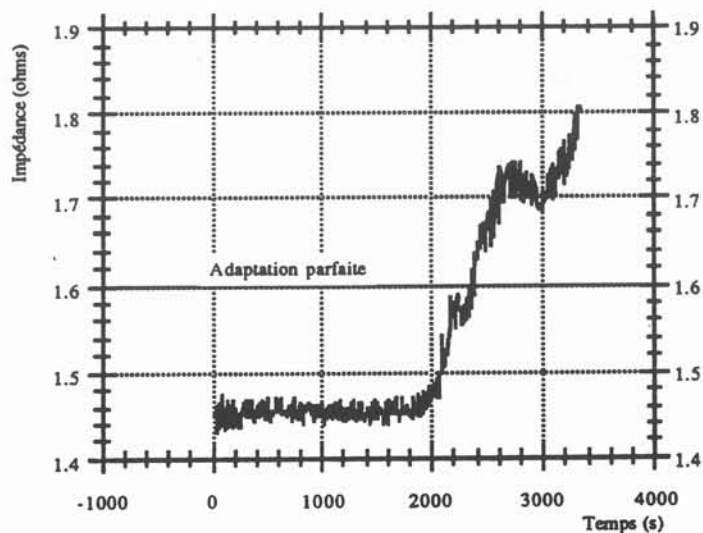
Le graphe figure 53 qui reproduit son évolution au cours d'un essai montre qu'au cours de la montée en température, le $\cos \varphi$ se rapproche de l'unité. Par contre lorsque la charge devient liquide, le \cos s'éloigne de sa valeur optimale jusqu'à la valeur de 0,9.

Figure 53: Evolution du $\cos \varphi$ en cours d'essai



Les variations de l'impédance dans notre configuration donnent alors le graphe suivant :

Figure 54: Evolution de l'impédance en cours d'essai



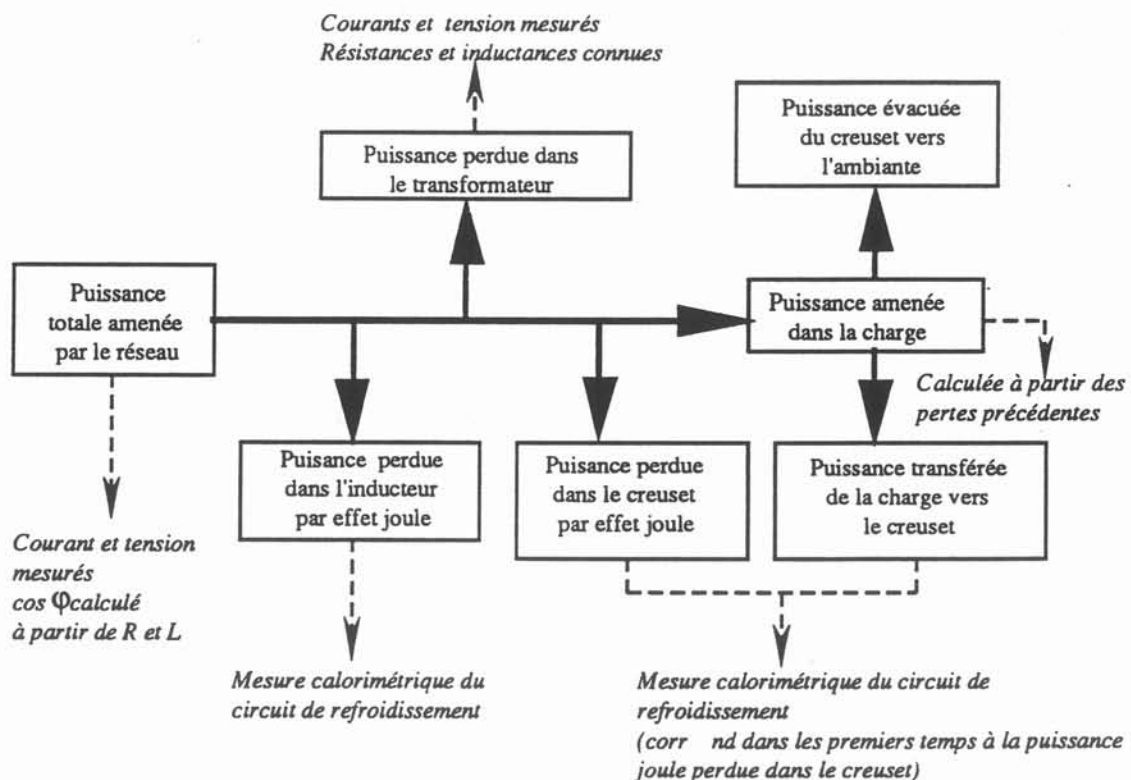
On voit que pour une charge froide, on a $Z < \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$: le courant maximum (250 A) est atteint avant d'obtenir la tension maximum (400 V), c'est à dire avant que l'alternostat ne délivre la puissance maximum.

Quand la charge devient liquide, on a au contraire $Z > \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$: à puissance maximum, la tension U_{\max} est atteinte avant que le courant ne parvienne à sa valeur maximale. On remarque que même à l'état liquide, l'adaptation d'impédance n'est pas parfaite.

VI.3. Bilan énergétique

A partir des mesures effectuées, il a été possible de réaliser un bilan énergétique complet du procédé. Les différents transferts thermiques qui se produisent lors du processus de fusion sont les suivants comme le schématise la figure 55:

Figure 55: Représentation de la répartition de puissance dans le creuset



La puissance totale demandée au réseau se dissipe par effet Joule en différents points du montage électrique, comme le montre le schéma :

- dans l'inducteur
- dans le transformateur
- dans le creuset froid, puisque bien que le creuset soit en théorie transparent au champ magnétique, un faible courant le parcourt malgré tout.
- dans la charge
- Les pertes aux amenées qui sont réalisées en barres massives sont négligées

puisque un rapide calcul montre que leur résistance reste inférieure à 0,1 mΩ, ce qui amène pour une résistance globale charge-creuset-inducteur de l'ordre de 10mΩ, une erreur de l'ordre de 1 %.

Par ailleurs des phénomènes de transferts thermiques de la charge à haute température s'effectuent:

- vers le creuset froid, par rayonnement, convection et conduction
- vers l'ambiante par convection et rayonnement.

Afin de connaître le rendement de procédé, il est donc nécessaire d'évaluer les différentes pertes citées précédemment:

- la puissance inducteur est mesurée par bilan calorimétrique par mesure du débit d'eau de refroidissement, et des températures d'entrée T_e et de sortie de l'eau T_s :

$$P_{ind} = \dot{m} C_p \Delta T \quad \text{avec } \dot{m} \text{ le débit massique de l'écoulement d'eau}$$

$$\Delta T = T_s - T_e$$

- Le creuset n'est pas parfaitement transparent au champ magnétique. On observe en effet en début d'essais, alors que la température de la charge n'a pas augmenté, une puissance récupérée par l'eau de refroidissement du creuset de l'ordre de 6 kW, pour un courant de 2200 ampères. La puissance perdue par effet Joule dans le creuset froid est déterminée expérimentalement par la puissance calorimétrique perdue par le circuit de refroidissement du creuset, quand la charge n'est pas encore montée en température, dans les premiers instants des essais.

La résistance équivalente du creuset est: $R_{creuset} = \frac{P_{creuset}}{I^2} = 1,2 \text{ m}\Omega$, où $P_{creuset}$ et I sont mesurés en tout début d'essai.

La puissance perdue au niveau du creuset pendant toute la durée de l'essai se calcule alors par:

$$P_{creuset} = R_{creuset} I^2, \text{ où seul } I \text{ est mesuré.}$$

- La puissance perdue par le transformateur, compte tenu de la schématisation électrique des pertes (figure 4 annexe 3), peut s'écrire :

$$P_{transfo} = \frac{U_p^2}{R_f} + (R_{b1} + k^2 R_{b2}) I_R^2$$

$$\text{où } I_R \text{ est connu à partir du rapport du transformateur : } I_R = \frac{I_s}{k}$$

- La puissance totale mise en jeu peut s'exprimer de différente manières:

Si, sur le schéma électrique (figure 48), on se place en amont des capacités, la puissance totale réelle prise au réseau s'écrit:

$$P_{totale} = U \cdot I_A \cos \varphi$$

où φ est le déphasage entre la tension U et le courant actif I_A , déjà exprimé.

Si l'on se place en aval des capacités, la puissance totale s'écrit également:

$$P_{totale} = U \cdot I_R' \cos \theta$$

où θ , le déphasage entre U et I_R' , est exprimé de la façon suivante :

$$\theta = \arctg \left[\frac{R_f (R_t^2 + L_t^2 \omega^2) (1 - L_m C \omega^2) + L_m L_t \omega^2}{(L_{t2} \omega^2 + R_t^2 + R_f R_t) L_m \omega} \right]$$

Enfin, cette puissance totale doit être égale à la puissance délivrée au secondaire de l'installation, à laquelle on ajoute les pertes du transformateur:

$$P_{\text{totale}} = R I_S^2 + P_{\text{transfo}}$$

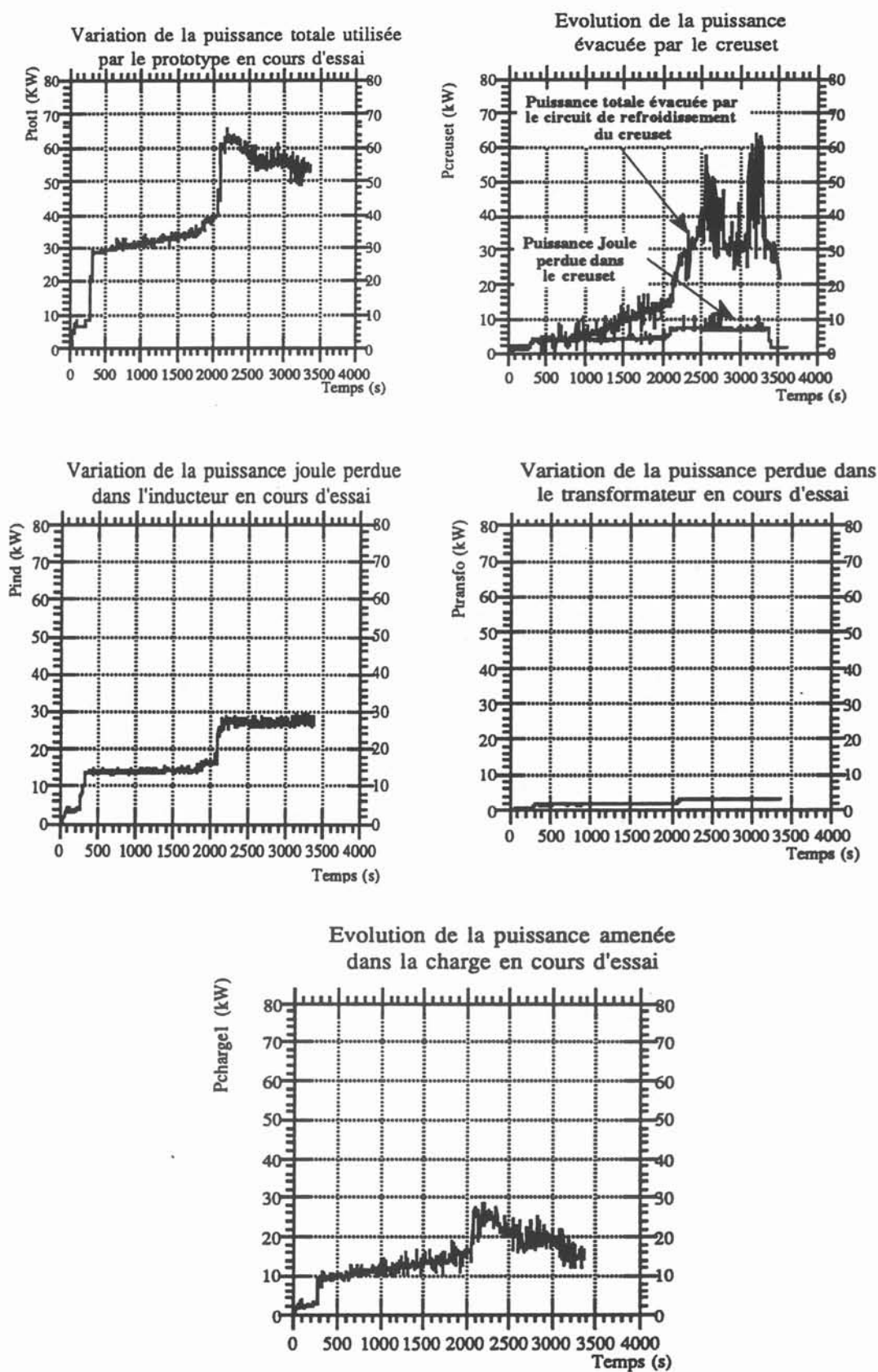
avec R la résistance globale du système inducteur - creuset - charge.

- La puissance amenée dans la charge est alors déduite des ces différentes puissances:

$$P_{\text{charge}} = P_{\text{totale}} - P_{\text{ind}} - P_{\text{creuset}} - P_{\text{transfo}}$$

A la fois à partir des différentes mesures électriques et calorimétriques, on peut alors suivre les variations de l'ensemble de ces différentes puissances en cours d'essais (figure 56).

Figure 56: Déterminations des différentes puissances en cours d'essai



Le schéma représentant les variations de la puissance totale permet de suivre le protocole d'essai, c'est à dire:

- Montée en température à puissance réduite pendant 30 minutes environ, afin que la résistivité de la charge ait assez évolué pour que la charge ne lévite pas à pleine puissance.
- Fonctionnement à pleine puissance pour obtenir la fusion de la charge et maintenir un état liquide.

La figure 57 qui reproduit l'évolution de la puissance évacuée par l'eau de refroidissement du creuset montre que dès le début de l'essai, avant la montée en température de la charge, le creuset subit un échauffement lié à la dissipation de puissance Joule, qui peut alors être déterminée. Au cours de la montée en température de la charge solide, on note une augmentation de la puissance perdue dans le circuit de refroidissement du creuset, alors que la puissance Joule n'évolue pas. Cette augmentation des pertes dans le creuset est liée au rayonnement de la charge, compte tenue de la forte température de la charge (celle-ci prend une teinte rouge clair). Enfin, lors de la fusion de la charge, le métal liquide en contact avec le creuset provoque une augmentation brutale de la puissance évacuée par la circulation d'eau du creuset. Les brusques variations obtenues sont liées aux mouvements violents et instables de la masse liquide.

Les pertes par effet Joule, qu'elles soient au niveau du creuset, de l'inducteur ou du transformateur, sont directement liées à l'augmentation de puissance. Les deux paliers observés sur ces courbes correspondent ainsi:

- d'une part au régime de montée en température (puissance modérée)
- d'autre part au fonctionnement à pleine puissance pour le maintien en fusion

Le tracé de la puissance amenée dans la charge est lié de la même façon au niveau de puissance général. On note cependant deux types de comportements:

- Lors de la montée en température de la charge, il se produit une augmentation régulière au cours du temps de la puissance amenée dans la charge, qui correspond à une évolution de la résistivité du laiton qui s'échauffe. On s'oriente alors vers une optimisation du réglage.

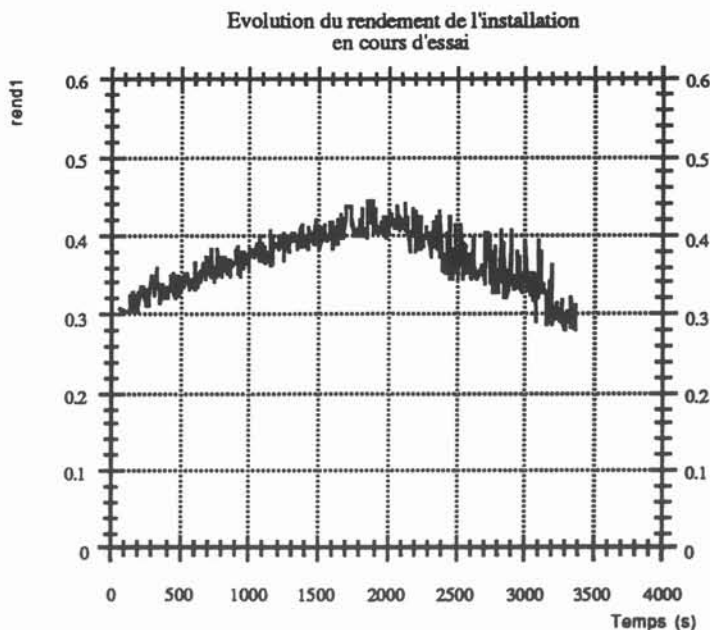
- Par contre, lors du maintien en fusion, on note une diminution progressive de la puissance amenée dans la charge. Cette diminution est liée aux variations de résistance et d'inductance observées précédemment.

Le rendement effectif de l'installation peut par ailleurs être déterminé en cours d'essai:

$$\eta = \frac{P_{\text{charge}}}{P_{\text{totale}}} = 1 - \frac{P_{\text{ind}} + P_{\text{creuset}} + P_{\text{transfo}}}{P_{\text{totale}}}$$

L'évolution du rendement est représenté figure 68:

Figure 57: Evolution du rendement de l'installation en cours d'essai



Lors de la montée en température, le rendement augmente de 30 à 40%. Pendant le maintien en fusion, il diminue d'autant. Cette dérive du comportement du procédé peut être expliquée par le fait que l'on ne parvient pas à obtenir un dôme liquide stabilisé à pleine puissance. D'une part les mouvements désordonnés du liquide entraînent une déformation de la charge, et sont la cause d'une chute du couplage électrique (observés sur l'évolution de la résistance R et de l'inductance L). Par ailleurs, ces mouvements conduisent le laiton liquide à être en contact avec le creuset, d'où une solidification partielle du métal, qui reste plaqué à la périphérie du creuset. Enfin, lors de ces essais, le métal reste une longue durée à l'état liquide, en contact avec l'atmosphère. Il en résulte alors une oxydation de zinc et une chute possible des caractéristiques du liquide. Cette chute peut être bien évidemment la cause de la baisse du couplage.

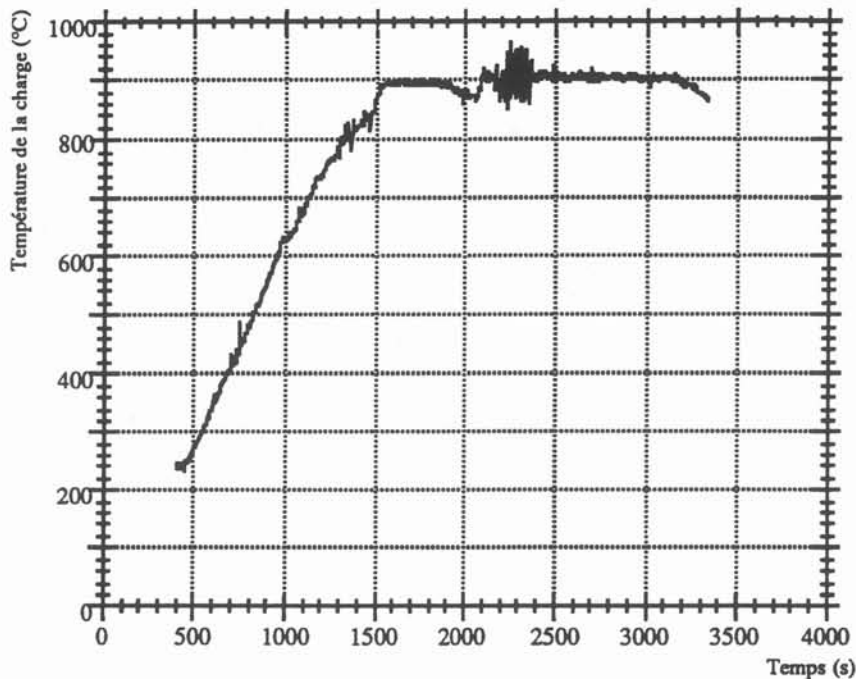
Des essais ont été réalisés par la suite en alimentant de manière régulière le bain en copeaux de laiton. Ceux-ci étaient alors amenés juste au dessus du dôme liquide. Dans une telle configuration, on a observé un dôme liquide complètement stabilisé, évitant ainsi tout contact du dôme avec les parois refroidies du creuset. Par ailleurs l'alimentation régulière en copeaux a permis de compenser l'oxydation qui s'effectue au cours du temps. Il a ainsi été possible de maintenir la charge en fusion au cours du temps sans observer de dérive dans le comportement de cette dernière. Ces essais ayant été réalisés après transfert dans la société Bonmartin, le prototype n'était pas muni du système d'acquisition de mesures et il n'a malheureusement pas été possible de procéder à une caractérisation complète.

VI.4. Coefficient d'échanges thermiques

A partir de la connaissance de la puissance utile injectée dans la charge, il est possible d'évaluer le processus d'échange thermique qui s'instaure entre la charge et son environnement.

Lors de la montée en température, le graphique figure 58 représentant les variations de température dans la charge (thermocouple placé à la périphérie), montre qu'en début d'essai, la charge subit une montée linéaire en température jusqu'à atteindre 900°C .

Figure 58: évolution de la température de la charge en cours d'essai



Cette linéarité de la pente n'indique pas pour autant que les pertes sont négligeables puisque pendant cette durée de montée en température, la puissance utile augmente.

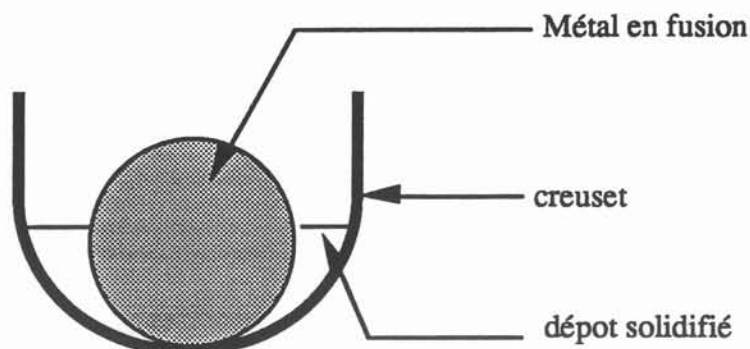
La puissance sensible que reçoit la charge s'écrit :

$$P = m C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} &\text{la masse } m = 35 \text{ kg} \\ &\text{la chaleur massique } C_p = 385 \text{ J/kg} \\ &\text{la montée en température } \frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\Delta T}{\Delta t} = 0,72 \text{ } ^\circ\text{C/s} \end{aligned}$$

On obtient une puissance de 9,3 kW qui correspond à la valeur de la puissance utile injectée dans la charge en tout début d'essai. La comparaison avec la puissance utile dans la charge obtenu à partir du bilan énergétique (l'enregistrement figure 56 donne une puissance d'environ 10 kW), permet de vérifier la compatibilité des résultats.

Pendant le maintien en fusion, on cherche à connaître quelles sont les différentes pertes thermiques. La géométrie de la charge a évolué : la charge liquide est isolée du creuset par un autocreuset qui limite les pertes thermiques par conduction de la charge vers le creuset. La charge liquide de forme variable selon l'intensité amenée est dans un premier temps considérée comme une sphère, comme le montre la figure 59:

Figure 59: schématisation de la géométrie lors du maintien en fusion



Les pertes thermiques principales de la charge sont les suivantes:

- l'ensemble des pertes de la charge vers le creuset (par conduction, convection et rayonnement), sont connues à partir de l'échauffement de l'eau de refroidissement du creuset, diminué des pertes par effet Joule dans le creuset (Cf figure 56), soit:

$$P_{\text{charge-creuset}} \approx 22 \text{ kW}$$

Cette valeur permet de déterminer l'ordre de grandeur du coefficient global d'échange thermique entre la charge et les parois du creuset:

$$h_{\text{charge-creuset}} = \frac{P_{\text{charge-creuset}}}{S_1 \Delta T}$$

avec S_1 surface d'échange estimée à la surface de la demi-sphère inférieure, $S_1 = 0,0628 \text{ m}^2$.
 ΔT différence de température entre la charge (900°C) et

les

parois refroidies (10°C), soit $\Delta T = 890^\circ\text{C}$

On obtient ainsi un coefficient caractérisant les pertes entre la charge et les parois de l'ordre de $h_{\text{charge-creuset}} = 400 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$

- La puissance perdue par rayonnement de la surface libre sur l'extérieur s'écrit :

$$P_{\text{ray}} = \epsilon \sigma S_2 T^4$$

où S_2 est la surface rayonnante soit donc la surface de la demi-sphère supérieure qui se trouve à l'air libre, $S = 0,0628 \text{ m}^2$.
 ϵ est l'émissivité du laiton $\epsilon = 0,59$
 σ est la constante de rayonnement: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$

On obtient une puissance de l'ordre de $P_{\text{ray}} = 4 \text{ kW}$

La sommation des pertes thermiques de la charge, $P_{\text{charge-creuset}} + P_{\text{ray}}$, amène des pertes d'environ 26 kW , résultat cohérent avec l'ordre de grandeur de la puissance injectée dans la charge (figures 55 et 56), qui varie de 18 à 25 kW . La différence obtenue, qui n'est pas complètement négligeable est due aux imprécisions de mesures des températures d'eau,

puisque des dérives importantes des températures avaient été observées lors des essais. Celles-ci, compte tenu du faible écart de température qui existe pour une importante puissance évacuée, entraînent des erreurs importantes sur les puissances (1°C pour 2 kW de puissance).

Cette instrumentation mise en place pour la conception du procédé a donné des résultats intéressants et cohérents. Toutes les mesures effectuées et visualisées en temps réel, permettent le contrôle des différentes grandeurs physiques pendant le fonctionnement de la poche de fusion. Elle ont en outre rendu possible un réglage d'impédance, afin d'optimiser le fonctionnement, ainsi qu'une caractérisation énergétique du système. Elles constituerait une première étape d'une future mise en oeuvre d'un système de pilotage automatique du procédé.

PARTIE II: LA BUSETTE ELECTROMAGNETIQUE

I. PRESENTATION DES DIFFERENTS SYSTEMES EXISTANTS ET DU DISPOSITIF INNOVANT ADOPTE

I.1. Intérêt d'un système de vanne électromagnétique

Une fois un métal devenu liquide dans un four, le problème consiste à transvaser ce métal liquide dans un moule. En effet, compte tenu des propriétés physiques particulières d'un métal liquide (corrosion, solidification rapide), toute utilisation d'une vanne de type classique, c'est à dire qui met en oeuvre une paroi mobile au contact du métal liquide, pose de gros problèmes. Une technique fréquemment utilisée reste l'emploi d'une quenouille, longue tige en carbone, qui plongée dans le bain de métal vient boucher l'orifice de coulée du four. Outre les manipulations humaines délicates, ce procédé pose de gros problèmes d'encrassement de l'orifice de coulée et d'attaque de la quenouille par le métal liquide qu'il faut changer régulièrement. Une autre technique utilisée est également de fours à bascule, qui permet de verser le métal dans le moule sans mettre en oeuvre de vannes. Mais cette solution rend complexe le four lui même qui comprend alors de nombreux organes mécaniques mobiles.

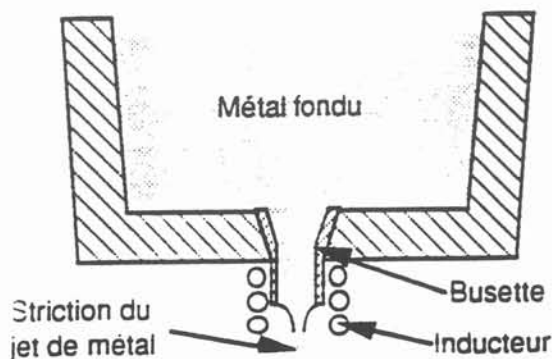
C'est dans ce contexte que l'idée d'utiliser une vanne électromagnétique pour faire couler ou stopper le métal liquide, sans utilisation d'organes mécaniques mobiles paraît séduisante.

I.2. Etat de la technique

Une busette électromagnétique est une vanne sans aucun organe mobile, qui utilise les phénomènes mis en jeu dans l'induction pour provoquer ou arrêter la coulée d'un métal liquide. Placée en dessous d'un four, un tel dispositif permet ainsi d'éviter les problèmes que l'on rencontre dans les procédés utilisés actuellement dans l'industrie.

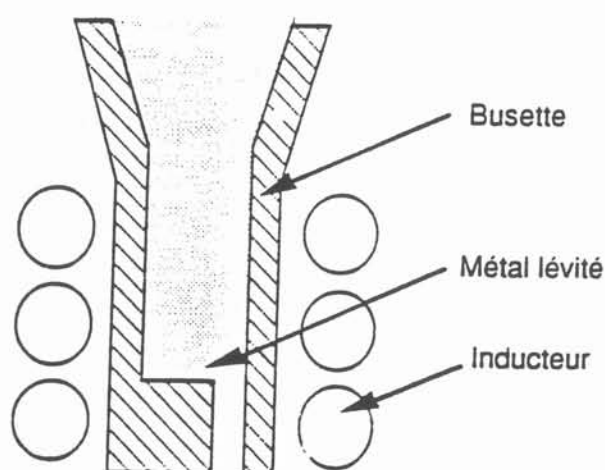
Des études ont déjà été effectuées dans ce domaine. En particulier un certain type de busette réfractaire a fait l'objet d'un dépôt de brevet. Il s'agit d'un système qui met en oeuvre les forces électromagnétiques créées par l'induction, afin de restreindre la coulée du métal qui s'opère par gravité. (figure 60).

Figure 60: Busette électromagnétique de type classique



En fait, il a été montré qu'un tel procédé restait efficace pour le formage de jet de métal liquide selon un type de section choisie, ou pour un contrôle de débit de la coulée [22], [23], [24]. Mais quant à l'utilisation des forces électromagnétiques pour l'arrêt complet de la coulée, seul Lilligrap [25] a pu obtenir un résultat en utilisant une busette au profil plus complexe (figure 61), qui présente un décentrage de l'orifice de coulée. Les forces électromagnétiques entraînent un rétrécissement de section: le jet de métal liquide au centre de la busette, là où il n'y a pas l'orifice de coulée. Le métal ne s'écoule donc plus.

Figure 61: Principe de la busette électromagnétique décentrée



Mais il est à noter que cette busette, qui met en oeuvre les forces électromagnétiques pour permettre la contraction du jet, voire l'arrêt de la coulée, est constituée d'un matériau réfractaire et est susceptible de polluer le métal liquide par érosion du réfractaire. Des études actuelles, menées au Laboratoire Madylam, visent à utiliser des busettes constituées de cuivre refroidi et fonctionnant suivant le même schéma. Mais là encore les résultats actuels ne permettent d'obtenir qu'une contraction du jet de métal liquide.

I.3. Présentation du système étudié

Un autre type de fonctionnement de la busette électromagnétique a été envisagé. Il s'agit non pas d'utiliser les forces électromagnétiques du système inductif, mais la puissance Joule qui est amenée dans le métal liquide.

Cette idée implique alors pour avoir arrêt de la coulée d'utiliser le changement de phase solide-liquide du métal: la busette doit être suffisamment refroidie pour, en l'absence de fonctionnement du système inductif, obtenir un refroidissement du métal liquide tel que celui-ci se solidifie dans la busette, et forme un bouchon. Ainsi l'idée même d'une busette constituée de cuivre refroidi par une circulation d'eau, suivant le même principe que les creusets froids, permet à la fois la non pollution du métal liquide et un bon refroidissement forcé du métal, engendrant la solidification.

Pour obtenir la coulée, il suffit alors de faire fonctionner un inducteur permettant d'induire des courants dans le bouchon tel que celui-ci puisse fondre, et ce malgré les parois refroidies de la busette.

L'étude d'un tel système se décompose en deux étapes :

- la fusion du bouchon solide, correspondant à l'amorçage de la coulée:
le défigeage
- la solidification du métal en cours de coulée: le figeage

II. ETUDE DU DEFIGEAGE

II.1. Position du problème

La mise en place de l'inducteur permettant le fonctionnement de la vanne électromagnétique, ainsi que les éléments constituant le circuit électrique, suit le même schéma logique que l'étude du système de fusion à 50 Hz, c'est à dire :

- détermination de la puissance nécessaire
- conception et essais expérimentaux
- exploitation et caractérisation.

Toutefois, une importante différence de conception provient de ce que le système d'alimentation électrique ne peut fonctionner qu'à une fréquence assez élevée : en effet, compte tenu des faibles dimensions de l'orifice de coulée - diamètre de 20 mm - un fonctionnement à la fréquence du réseau n'est pas viable, puisque l'épaisseur de peau doit rester bien inférieure au rayon. Ainsi quel que soit le choix de la fréquence, on retrouve un système classique de creuset froid inductif, qui se caractérise par :

- l'utilisation d'un générateur de fréquence
- un creuset froid non transparent au champ magnétique, au sein duquel se développent des courants induits, et qui fait office d'intermédiaire entre l'inducteur et la masse métallique à chauffer.

Par ailleurs, un problème important va survenir, qui tient à la proximité des deux circuits inductifs (50 Hz et moyenne fréquence). Cette proximité risque de créer un couplage, et donc des perturbations de l'un de ces circuits sur l'autre. A l'inverse, si chacun des deux circuits restent suffisamment éloignés, nous pouvons être confrontés à une diminution locale de puissance, au niveau de la frontière entre la masse maintenue liquide par l'inducteur 50 Hz, et le métal à fondre dans la busette électromagnétique.

Après avoir abordé certains points préalables - choix de la fréquence, couplage entre les inducteurs - un important travail expérimental a été réalisé, afin de valider par les faits l'intérêt et la faisabilité d'un tel système. A noter également qu'il n'était pas possible pour l'étude expérimentale de découpler totalement le figeage du défigeage. En parallèle avec l'étude du défigeage, une approche expérimentale de la géométrie permettant le figeage lors de l'arrêt de la puissance dans l'inducteur a été effectuée. Cependant l'ensemble des phénomènes physiques du figeage ainsi que la modélisation de l'étape d'arrêt de la coulée ne seront abordés qu'ultérieurement.

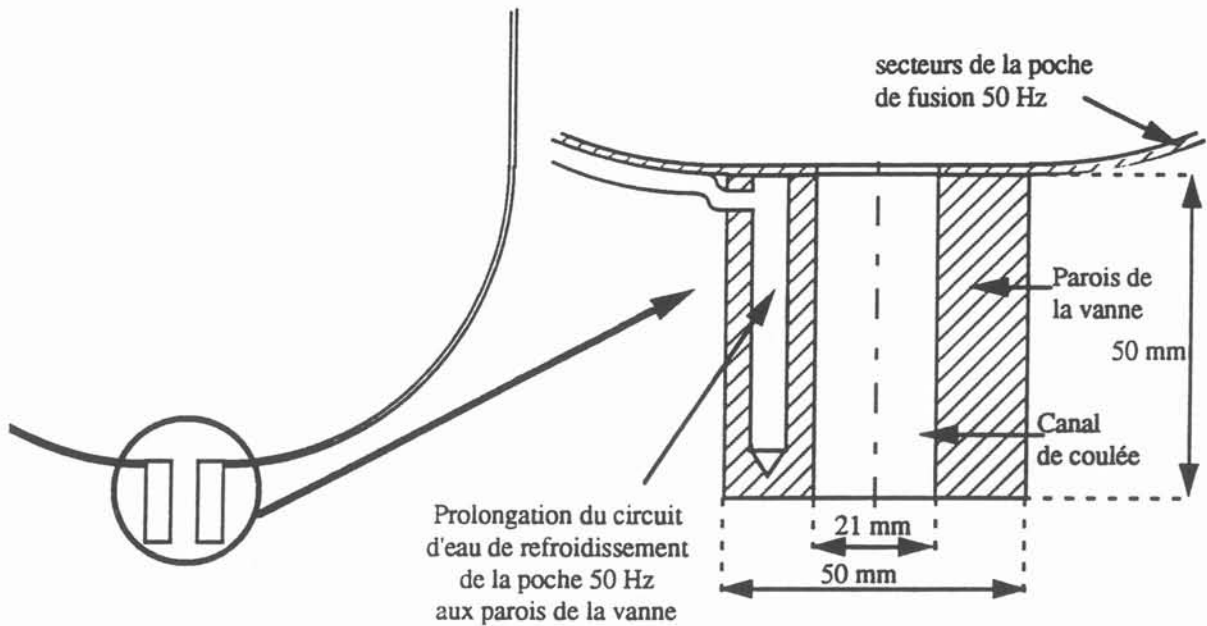
II.2. Définition de la géométrie initiale de la vanne électromagnétique

La détermination des caractéristiques géométriques de la vanne électromagnétique doit être normalement effectuée de manière à satisfaire les conditions de figeage de métal liquide. Dans notre cas, la poche de fusion 50 Hz et la vanne sont réalisées en une seule pièce, puisque la vanne n'est qu'une prolongation de chaque secteur du creuset. Une géométrie initiale a donc été adoptée de façon intuitive.

La géométrie est ainsi la suivante :

Diamètre intérieur :	21 mm
Diamètre extérieur :	50 mm
Hauteur :	50 mm

Figure 62: Géométrie initiale de la vanne électromagnétique



II.3. Choix de la fréquence

Comme nous l'avons vu précédemment, il n'est pas possible d'utiliser un système électrique fonctionnant à la fréquence de 50 Hz, puisque l'importance de la profondeur de pénétration du champ magnétique dans le laiton à cette fréquence (20 à 30 mm), empêcherait le rebouclage des courants induits au sein du métal, et le rendrait transparent au champ magnétique.

Néanmoins, la gamme de fréquence reste très large. L'influence de la fréquence est double : elle a d'une part une action sur le couplage inductif entre la charge et l'inducteur, et d'autre part intervient également sur la répartition et le niveau de puissance électrique induit provoquant l'échauffement de la charge.

II.3.1. Influence de la fréquence sur le couplage inductif

L'étude du couplage électromagnétique entre l'inducteur, le creuset et la charge a montré que pour un matériau de géométrie déterminée, le rendement peut s'exprimer en fonction des résistances équivalentes [11] de l'inducteur R_1 , du creuset R_2 et de la charge R_3 , de la manière suivante:

$$\eta = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (1)$$

Lorsque la fréquence est nulle, il n'y a pas de résistance de couplage, et le rendement est nul: $\eta = 0$.

Quand la fréquence devient importante, le rendement tend vers une limite asymptotique indépendante de la fréquence:

La résistance électrique d'un élément s'écrit dans ce cas:

$$R = \frac{\rho L}{h \delta}$$

avec

ρ la résistivité électrique

L le longueur de parcours du courant dans l'élément

h la hauteur de la section

δ = l'épaisseur de peau électromagnétique qui s'écrit

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\mu \pi f}}, \text{ avec } \mu \text{ perméabilité magnétique.}$$

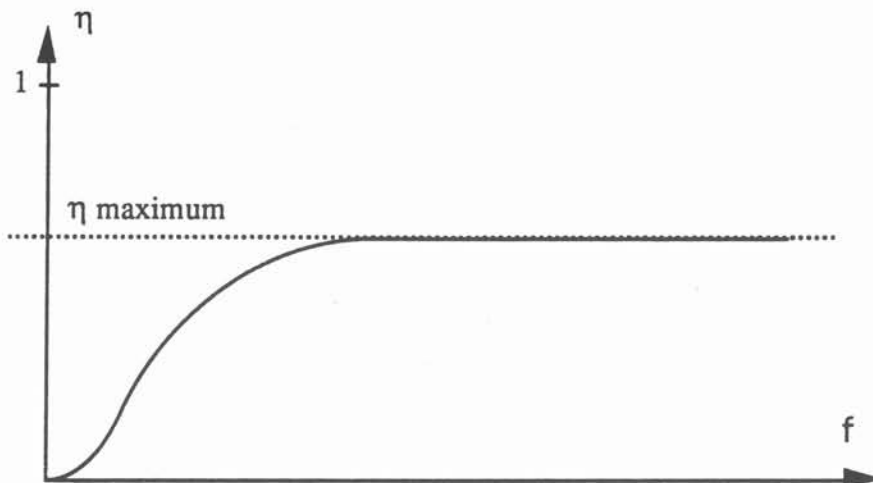
Pour une géométrie donnée, on peut alors exprimer la résistance comme $R = k \sqrt{f}$

Le rendement peut alors s'écrire d'après (1):

$$\eta = \frac{k_3 \sqrt{f}}{k_1 \sqrt{f} + k_2 \sqrt{f} + k_3 \sqrt{f}} \quad \text{soit } \eta = \frac{k_3}{k_1 + k_2 + k_3}$$

Ainsi, on obtient une valeur seuil de la fréquence à partir de laquelle, le couplage inductif devient maximum et n'évolue plus, comme le présente la figure 63:

Figure 63: influence de la fréquence sur le rendement d'une installation



Pour une géométrie donnée correspondant à un cas d'exploitation industriel, et pour la résistivité d'un métal, on obtient une valeur seuil de $\frac{r}{\delta}$ de l'ordre de 3 à 4.

L'application à notre configuration amène les valeurs suivantes:

- pour du laiton à basse température, de résistivité $\rho = 0,71 \cdot 10^{-7}$, la fréquence seuil en dessous de laquelle le rendement diminue est de l'ordre de 1.5 à 3 kHz

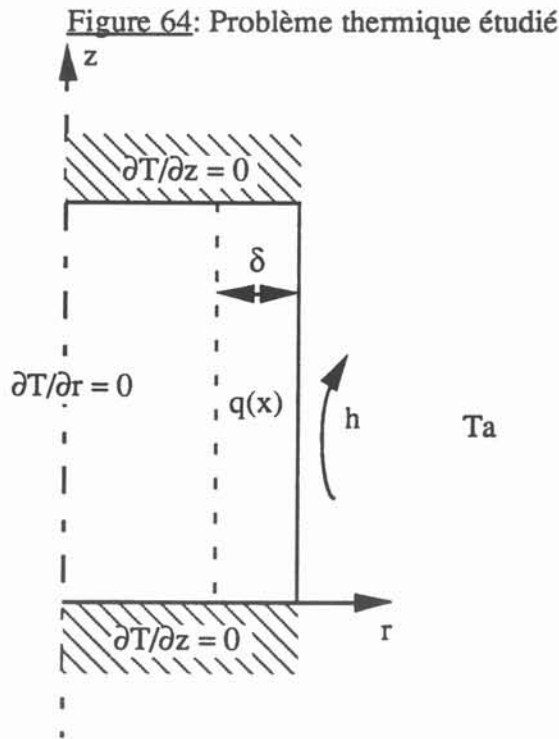
- pour du laiton liquide, pour lequel la résistivité est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-7}$, la fréquence seuil reste comprise entre 4,5 à 9 kHz.

II.3.2. Influence de l'épaisseur de peau électromagnétique sur le profil de température en régime permanent

Selon l'importance de l'épaisseur de peau, la puissance amenée dans le matériau va être étalée dans une zone périphérique plus ou moins importante, qui peut avoir une influence sur le profil de température radial. Si l'on ne considère que les effets de conduction de la chaleur, sans s'occuper des problèmes de changement de phase, et avec l'hypothèse dans laquelle on ne tient pas compte des effets d'extrémités selon l'axe z (voir figure 64), on obtient un problème thermique monodimensionnel axisymétrique qui s'écrit en régime permanent:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q(r)}{k}$$

où T est la température, k la conductivité thermique du matériau, et $q(r)$ la densité de puissance dégagée dans l'unité de volume du matériau et fonction du rayon.



D'après les lois de l'électromagnétisme, la densité de puissance induite est fonction de la densité de puissance par:

$$q = \rho j j^* \quad (2)$$

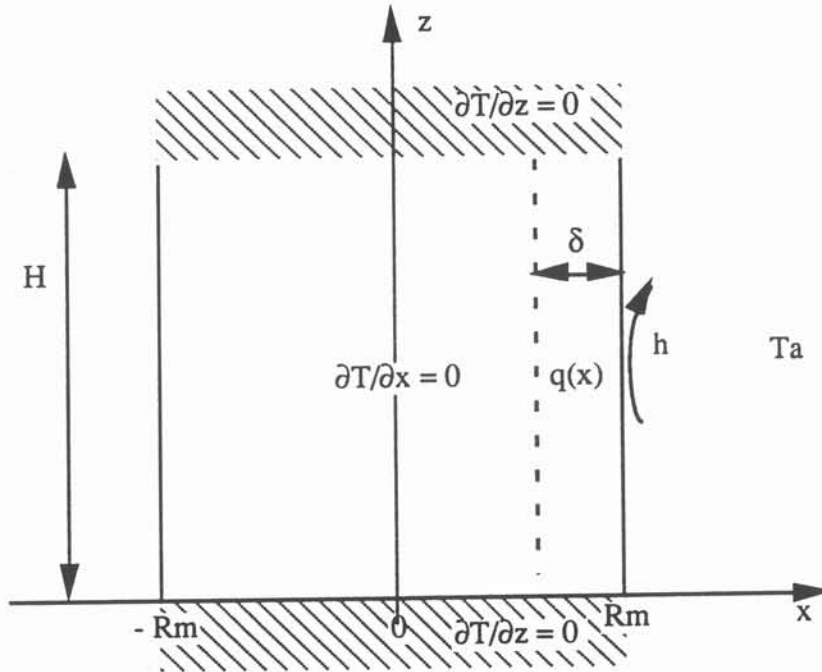
où ρ est la résistivité électrique, j la densité de courant exprimée sous forme complexe, et j^* le conjugué de la densité de courant complexe.

Pour des raisons de simplification, on transforme la géométrie de calcul en une géométrie cartésienne monodimensionnelle (figure 65), pour laquelle on connaît une expression simple de la loi d'évolution de la densité de courant en fonction de l'abscisse x et qui s'écrit [26]:

$$j = C \rho \cosh kx$$

avec C constante à déterminer,
 ρ résistivité électrique,
et $k = \frac{1+i}{\delta}$

Figure 65: Simplification à une géométrie cartésienne



L'expression de la puissance volumique amenée dans le matériau par effet Joule est alors, d'après (2):

$$q(x) = \rho C^2 \cosh\left[\frac{1+i}{\delta} x\right] \cosh\left[\frac{1-i}{\delta} x\right]$$

soit:
$$q(x) = \rho \frac{C^2}{2} \left[\cosh \frac{2x}{\delta} + \cos \frac{2x}{\delta} \right]$$

Le problème thermique revient alors à résoudre:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{q(x)}{k} \quad \text{soit:} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{k} \frac{C^2}{2} \left[\cosh \frac{2x}{\delta} + \cos \frac{2x}{\delta} \right] \quad (3)$$

La résolution de (3) amène:

$$T = -\frac{\rho}{k} \frac{C^2}{2} \frac{\delta^2}{4} \left[\cosh \frac{2x}{\delta} - \cos \frac{2x}{\delta} \right] + Ax + B$$

où A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions aux limites du problème, soit:

pour $x = 0$, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ soit $A = 0$

pour $x = R_m$, $-k \frac{\partial T}{\partial x} = h (T - T_f)$, ce qui après calcul amène:

$$B = \frac{\rho}{k} \frac{C^2}{2} \frac{\delta^2}{4} \left[\cosh \frac{2 R_m}{\delta} - \cos \frac{2 R_m}{\delta} \right] + \frac{\rho}{h} \frac{C^2}{2} \frac{\delta}{2} \left[\sinh \frac{2 R_m}{\delta} - \sin \frac{2 R_m}{\delta} \right] + T_f$$

d'où finalement l'expression du profil de température:

$$T = \frac{\rho \delta C^2}{4} \left[\frac{\delta}{2k} \left(\cosh \frac{2 R_m}{\delta} - \cosh \frac{2x}{\delta} - \left(\cos \frac{2 R_m}{\delta} - \cos \frac{2x}{\delta} \right) \right) + \frac{1}{h} \left(\sinh \frac{2 R_m}{\delta} + \sin \frac{2 R_m}{\delta} \right) \right] + T_f \quad (4)$$

La constante C est exprimée à partir de la puissance totale amenée dans tout le volume de la charge, soit:

$$P = H \pi R_m \int q(x) dx, \text{ qui après intégration amène:}$$

$$P = \frac{H \pi R_m C^2 \delta \rho}{2} \left(\sinh \frac{2 R_m}{\delta} + \sin \frac{2 R_m}{\delta} \right)$$

$$\text{d'où } C = \sqrt{\frac{2 P}{H \pi R_m \delta \left(\sinh \frac{2 R_m}{\delta} + \sin \frac{2 R_m}{\delta} \right)}}$$

En introduisant cette expression dans l'expression de la température (4), on obtient finalement:

$$T = \frac{P}{2 \pi H R_m \delta \left(\sinh \frac{2 R_m}{\delta} + \sin \frac{2 R_m}{\delta} \right)} \left[\frac{\delta}{2k} \left(\cosh \frac{2 R_m}{\delta} - \cosh \frac{2x}{\delta} - \cos \frac{2 R_m}{\delta} + \cos \frac{2x}{\delta} \right) + \frac{1}{h} \left(\sinh \frac{2 R_m}{\delta} + \sin \frac{2 R_m}{\delta} \right) \right] + T_f$$

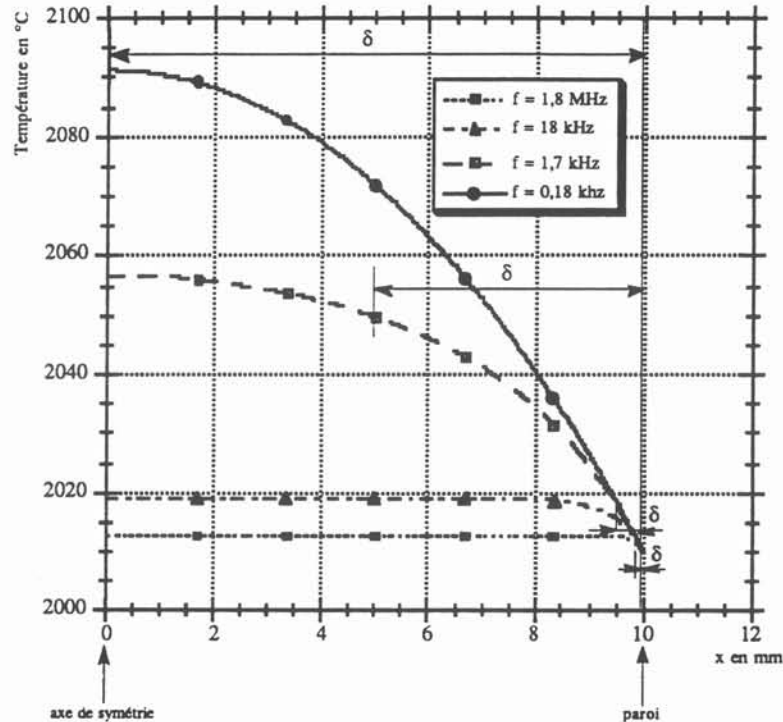
A partir de cette expression de la température, il est alors possible de procéder à une étude du profil de température en fonction de la fréquence, soit encore en fonction de l'épaisseur de peau électromagnétique, ceci pour une géométrie correspondant à celle de la busette, soit:

$$R_m = 10 \text{ mm}$$

$$H = 50 \text{ mm}$$

Les résultats sont alors les suivants :

Figure 66: Influence de la fréquence sur les profils de température



Pour une même puissance totale P amenée dans la charge, ces résultats montrent ainsi que plus l'épaisseur de peau électromagnétique est importante, c'est à dire plus la fréquence est faible, plus le profil de température est élevé. Ainsi, le chauffage à coeur permet d'obtenir un meilleur résultat en température.

L'ensemble de l'étude de l'influence de la fréquence, à la fois sur le rendement électrique et sur le profil de température, montre ainsi que l'on a tout intérêt à fonctionner pour une fréquence minimale, telle que le rendement électrique reste égal à la valeur asymptotique, soit de 4,5 à 9 kHz pour du laiton liquide. En pratique, cet optimum ne pourra qu'être approché, compte tenu des limitations expérimentales de mise à disposition du matériel et d'adaptation d'impédance.

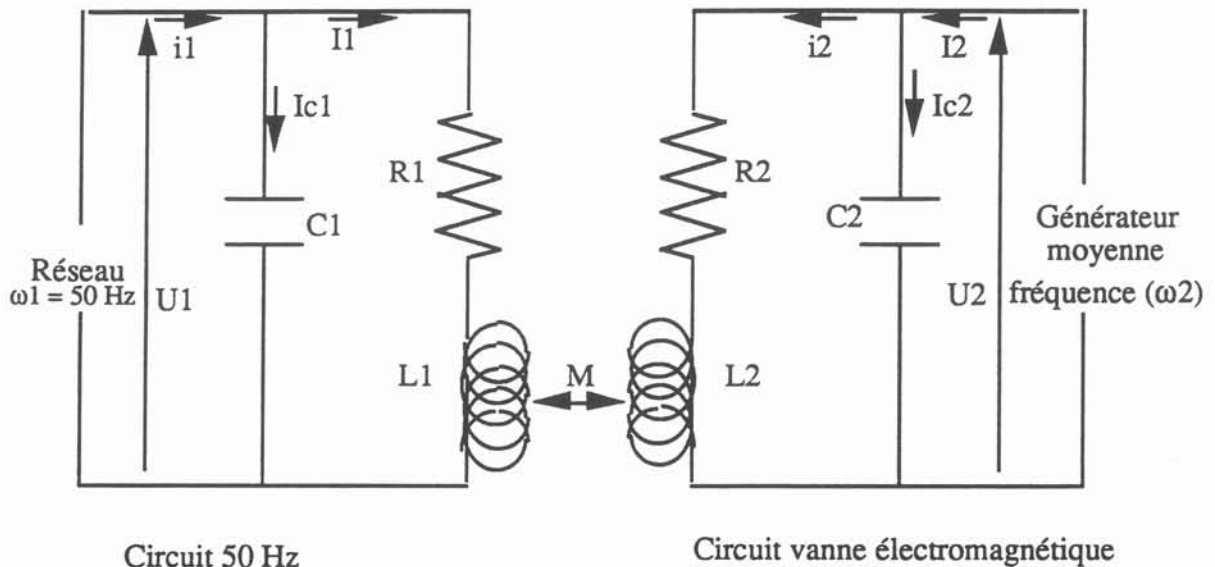
II.4. Couplage électromagnétique entre la poche de fusion 50 Hz et le dispositif de vanne électromagnétique moyenne fréquence

L'adaptation de la busette électromagnétique sur le banc d'essai de fusion ne va pas se faire sans poser certains problèmes : la mise en présence de deux systèmes à induction de fréquences différentes (partie fusion 50 Hz et partie système de coulée en moyenne fréquence), peut entraîner des interactions électromagnétiques entre les deux systèmes. En effet, chacune des deux sources électriques peut injecter de la puissance dans chaque circuit et en dérégler le fonctionnement. L'objectif de cette étude est donc d'étudier l'influence du couplage électrique entre les deux circuits et d'appliquer cette étude à notre cas.

II.4.1. Ecriture des équations

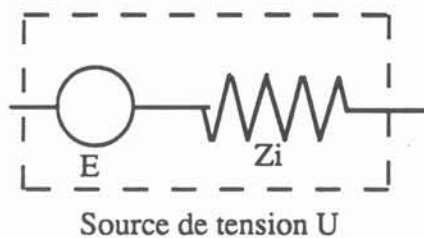
La représentation du problème est la suivante : deux circuits oscillants proches l'un de l'autre vont être couplés par l'intermédiaire de l'inductance mutuelle M entre les deux bobines. Connaissant les paramètres électriques R_1 , L_1 , C_1 , R_2 , L_2 , C_2 et M , nous allons donc chercher à connaître l'expression des différents courants dans les deux circuits, en fonction des tensions imposées (figure 67).

Figure 67: couplage entre le circuit 50 Hz et le circuit de la vanne électromagnétique



Un premier problème est de savoir comment modéliser la source de puissance. En effet, un générateur de puissance n'est pas parfait, en ce sens qu'il possède une impédance interne, comme le montre la figure 68.

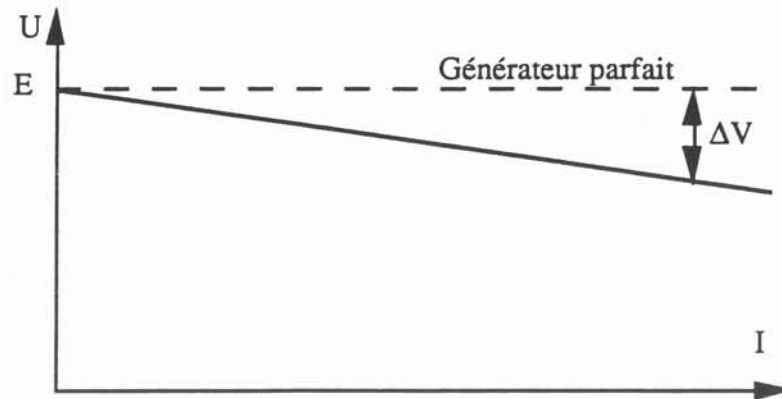
Figure 68: Modélisation de la source de tension



Il en résulte alors une chute de tension ΔV , fonction de l'importance du courant circulant dans le circuit de charge, et la tension réelle aux bornes du générateur s'écrit :

$$U = E - Z_i I$$

Figure 69: Influence du générateur sur le circuit



L'écriture des lois de Kirschoff dans les deux circuits en tenant compte de l'inductance mutuelle M donne:

$$U_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{\partial I_1}{\partial t} + M \frac{\partial I_2}{\partial t}$$

$$U_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{\partial I_2}{\partial t} + M \frac{\partial I_1}{\partial t}$$

$$I_{c1} = C_1 \frac{\partial U_1}{\partial t}$$

$$I_{c2} = C_2 \frac{\partial U_2}{\partial t}$$

$$U_1 = V_1 \cos \omega_1 t - Z_{i1} i_1$$

$$U_2 = V_2 \cos (\omega_2 t + \phi) - Z_{i2} i_2$$

$$i_1 = I_1 + I_{c1}$$

$$i_2 = I_2 + I_{c2}$$

où :

- les courants, tensions et grandeurs R, L, M et C correspondent à la figure 67.
- Z_{i1} et Z_{i2} sont les impédances internes des deux sources de puissance.
- V_1 et V_2 sont les tensions crêtes du circuit.
- ϕ est le déphasage entre les deux tensions U_1 et U_2 .

II.4.2. Résolution du problème simplifié

Dans le cas où l'on considère les générateurs de tension comme parfaits, c'est à dire sans chute de tension, la résolution du système d'équations est plus simple et est détaillée en annexe 4.

Le système d'équations est le suivant:

$$U_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{\partial I_1}{\partial t} + M \frac{\partial I_2}{\partial t}$$

$$U_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{\partial I_2}{\partial t} + M \frac{\partial I_1}{\partial t}$$

$$I_{c1} = C_1 \frac{\partial U_1}{\partial t}$$

$$I_{c2} = C_2 \frac{\partial U_2}{\partial t}$$

$$U_1 = V_1 \cos \omega_1 t \quad (\text{sans impédance interne du générateur})$$

$$U_2 = V_2 \cos (\omega_2 t + \phi)$$

$$i_1 = I_1 + I_{c1}$$

$$i_2 = I_2 + I_{c2}$$

Pour résoudre un tel système, on pose que les expressions de I_1 et I_2 sont du même type que les deux termes U_1 et U_2 qui les forcent à osciller, soit :

$$I_1 = A_1 \cos (\omega_1 t + \phi_{11}) + B_1 (\cos \omega_2 t + \phi_{12})$$

$$I_2 = A_2 \cos (\omega_1 t + \phi_{21}) + B_2 (\cos \omega_2 t + \phi_{22})$$

avec:

- A1 module du terme principal du circuit 1
- B1 module du terme de couplage du circuit 1
- A2 module du terme de couplage du circuit 2
- B2 module du terme principal du circuit 2
- ω_1 pulsation de la tension du circuit 1
- ω_2 pulsation de la tension du circuit 2
- ϕ déphasage entre les deux tensions
- ϕ_{11} déphasage entre le terme principal de I_1 (provenant de la tension U_1), et la tension U_1
- ϕ_{12} déphasage entre le terme de couplage de I_1 (provenant de la tension U_2) et la tension U_2
- ϕ_{21} déphasage entre le terme de couplage de I_2 (provenant de la tension U_1) et la tension U_1
- ϕ_{22} déphasage entre le terme principal de I_2 (provenant de la tension U_2) et la tension U_2 .

Les deux équations précédentes amènent alors 8 inconnues:

A_1 , B_1 , A_2 et B_2

ϕ_{11} , ϕ_{12} , ϕ_{21} et ϕ_{22} ,

que l'on cherche à déterminer, en choisissant 4 valeurs du temps où l'on connaît les valeurs des tensions U_1 et U_2 . La tension de déphasage entre les deux tensions ϕ est quelconque et peut prendre n'importe quelle valeur.

La résolution se fait numériquement en utilisant la méthode de Gauss-Jordan, qui permet par recherche du pivot maximum de la matrice, de résoudre des systèmes mal conditionnés.

On obtient alors toutes les valeurs permettant de déterminer les courants I_1 et I_2 , c'est à dire:

- les amplitudes des deux composantes de chaque courant
- les différents déphasages.

II.4.3. Détermination des paramètres électriques des circuits

Dans une configuration donnée, le problème est de connaître les paramètres du couplage. Pour une géométrie donnée, on connaît expérimentalement ou numériquement les valeurs de la résistance R , de l'inductance L et bien évidemment de la capacité C du circuit inductif 50 Hz de la poche principale de fusion. Il reste donc à connaître les caractéristiques du circuit inductif de la vanne électromagnétique, ainsi que la mutuelle inductance.

II.4.3.1. Paramètres du circuit inductif de la vanne électromagnétique

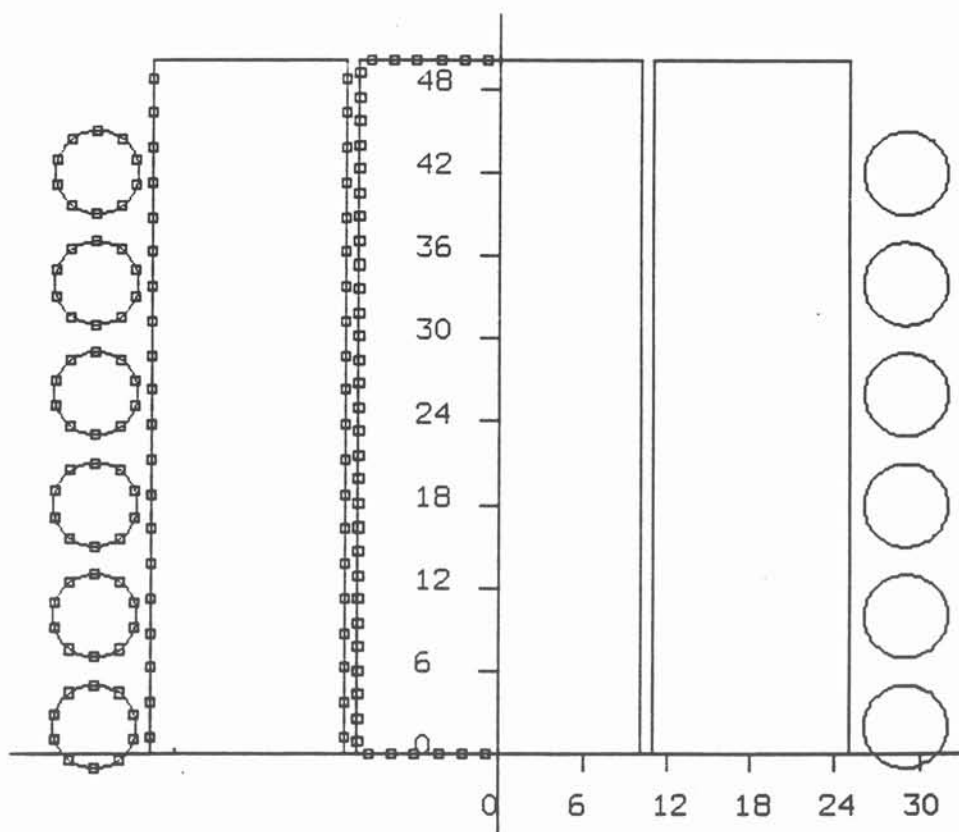
A partir de la géométrie fixée de la busette existante, une étude de modélisation par le logiciel Ophélie (figure 70), nous permet de connaître l'ordre de grandeur des paramètres R , L et C du circuit, soit:

$$R = 15,8 \text{ m}\Omega$$

$$L = 0,4 \text{ }\mu\text{H}$$

$$C = 95,8 \text{ }\mu\text{F}$$

Figure 70: Modélisation par le logiciel Ophélie de la configuration de la vanne électromagnétique



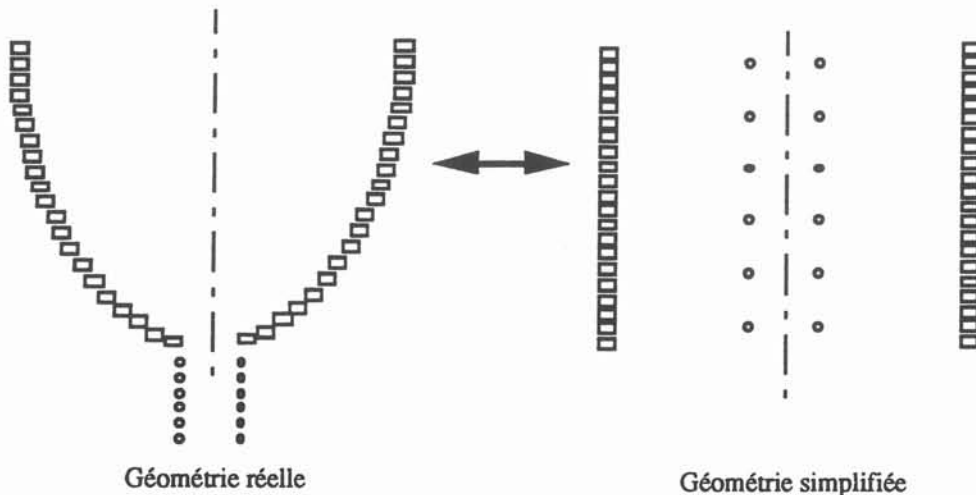
II.4.3.2. Détermination de la mutuelle inductance entre les deux systèmes

Une première estimation de la valeur s'effectue par une approche analytique.

A partir de la théorie du transformateur, on obtient l'expression de la mutuelle dans des cas simples.

Le calcul analytique de la mutuelle M entre les deux bobines de configuration aussi complexe que celle de notre procédé est quasi-impossible. Afin d'avoir un ordre de grandeur, la configuration réelle est donc transformée en une configuration simplifiée donnée figure 71.

Figure 71: configuration simplifiée permettant un calcul analytique



Dans ce cas simple de deux bobines concentriques, de hauteurs voisines et d'élanement suffisamment important, il est possible de déterminer analytiquement l'expression de la mutuelle inductance:

Soit la bobine extérieure de caractéristique :

n_1	nombre de spires
S_1	section de la bobine
L_1	inductance de la bobine

et la bobine intérieure :

n_2	nombre de spires
S_2	section de la bobine
L_2	inductance de la bobine

Le flux total créé par la bobine 1 s'écrit, B étant le champ magnétique:

$$\phi_{11} = n_1 B S_1 = L_1 I_1 \quad \text{d'où} \quad B = \frac{L_1 I_1}{n_1 S_1}$$

$$\begin{aligned} \text{Le flux commun aux deux bobines vaut } \phi_c &= n_2 B S_2 \\ &= M I_1 \end{aligned}$$

$$\text{il devient alors } \phi_c = M I_1 = n_2 \frac{L_1 I_1}{n_1 S_1} S_2$$

$$\text{soit finalement } M = \frac{n_2}{n_1} \frac{S_2}{S_1} L_1$$

En appliquant alors les caractéristiques correspondant au système étudié:

- Bobine extérieure = bobine de la poche 50 Hz: $L_1 = 100 \mu H$
 $n_1 = 28$ spires
 $D_1 = 250$ mm.
- Bobine intérieure = bobine de la busette électromagnétique : $L_2 = 3,17 \mu H$
 $n_2 = 4$
 $D_2 = 50$ mm

On obtient une valeur de la mutuelle: $M = 0,57 \mu H$, qui est donc une valeur majorante par rapport à la réalité (les deux bobines étant concentriques et placées à une même cote). On constate que la mutuelle calculée est assez faible devant les valeurs des inductances des deux circuits inductifs L_1 et L_2 . Mais comme les effets perturbants du couplage ne relèvent pas uniquement des mutuelles, mais sont dus aux termes complets en $M \omega I$ (Cf étude précédente), il est nécessaire d'effectuer l'application numérique du système complet avec la valeur de M majorante obtenue ici.

II.4.4. Application à la configuration étudiée

A partir des caractéristiques ainsi obtenues, l'application à notre configuration de l'étude du couplage de deux circuits inductifs à proximité l'un de l'autre, a permis d'obtenir l'évolution du courant de chacun des deux circuits qui sont composés de termes:

circuit 50 Hz: $I_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) + B_1 (\cos \omega_2 t + \phi_{12})$

circuit moyenne fréquence: $I_2 = A_2 \cos(\omega_1 t + \phi_{21}) + B_2 (\cos \omega_2 t + \phi_{22})$

Pour le circuit 50 Hz:

- le terme $A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{11})$, noté T_{11} est la partie relative au circuit 50 Hz seul (alimenté par U_1).
- le terme $B_1 (\cos \omega_2 t + \phi_{12})$, noté T_{12} , est la composante du courant relative au terme de couplage provenant du circuit moyenne fréquence (alimenté par U_2).

De la même manière le courant du circuit moyenne fréquence I_2 se décompose en un terme propre T_{21} , et un terme de couplage T_{22} , provenant du circuit 50 Hz.

Une application numérique est faite pour:

- les valeurs usuelles de tension: $U_1 = 100$ V
 $U_2 = 400$ V
- le déphasage entre les tensions ϕ choisi égal à zéro
- les valeurs précédentes des résistances, inductances et de la mutuelle.

On obtient les résultats des figures 72 et 73, qui donnent l'importance relative des termes T_{11} , T_{12} , T_{21} et T_{22} . On constate que l'influence du terme de couplage sur le courant circulant dans l'inducteur est très faible pour le circuit 50 Hz, et quasiment négligeable pour le circuit moyenne fréquence de la vanne.

Figure 72: Influence du couplage sur le circuit inductif de la poche de fusion 50 Hz

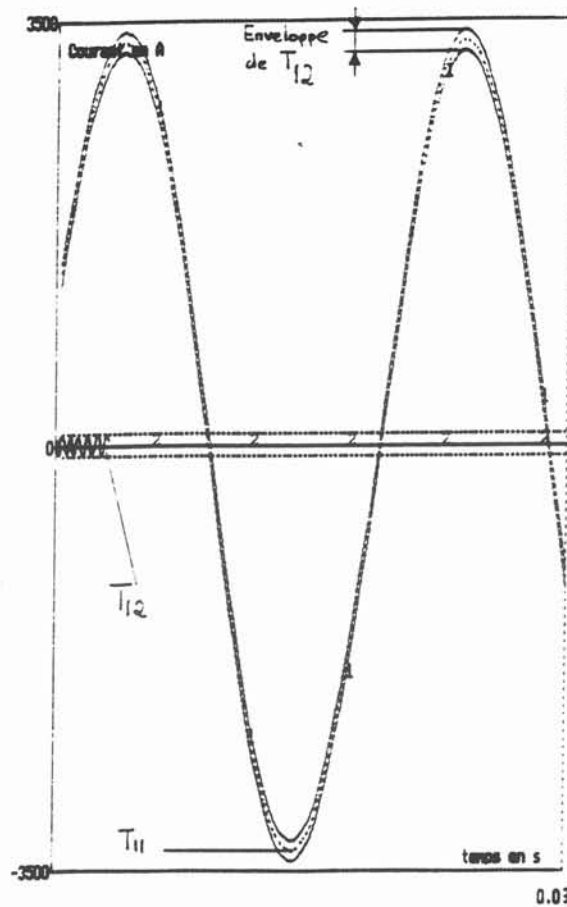
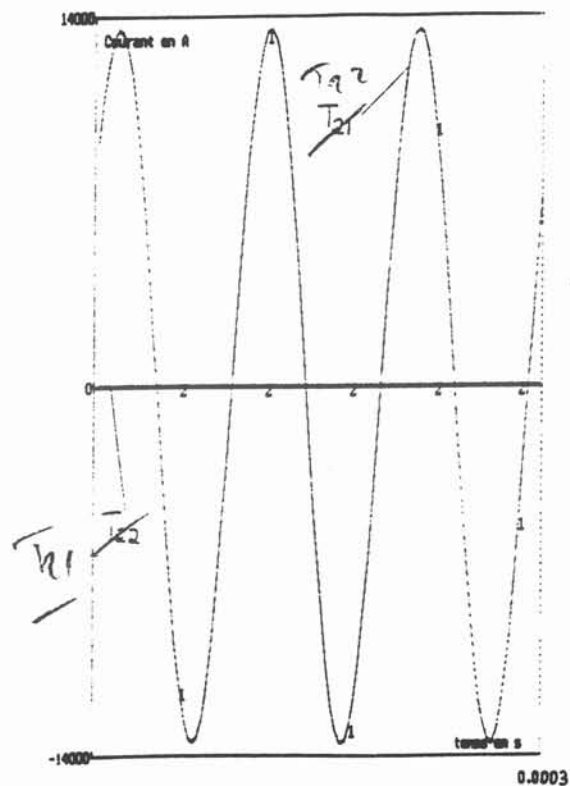


Figure 73: Influence du couplage sur le circuit inductif de la vanne électromagnétique moyenne fréquence



II. 5. Détermination de la puissance à injecter dans la charge

La puissance induite dans la charge doit permettre :

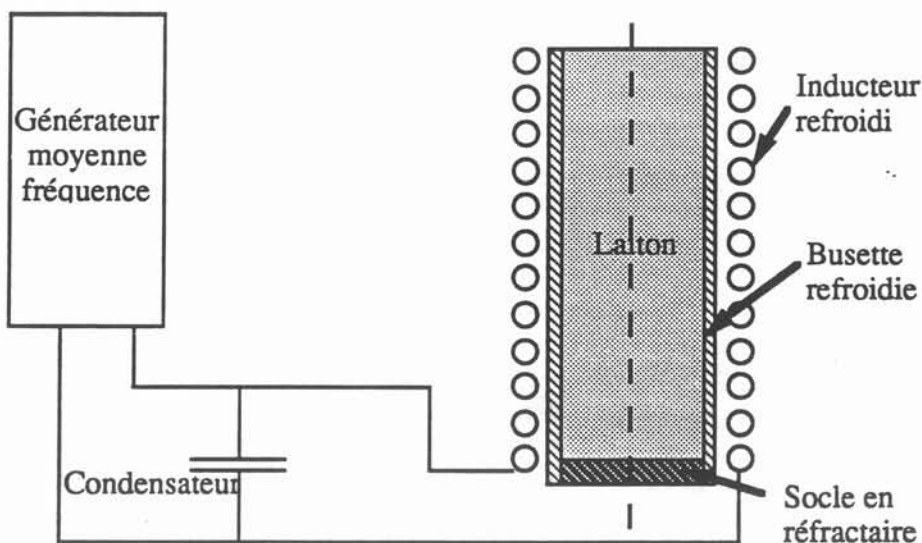
- lors du démarrage de la coulée, d'obtenir une montée en température et le passage de l'état solide à l'état liquide de la charge métallique solidifiée contenue dans la vanne électromagnétique.
- lors du processus de coulée, de maintenir le métal liquide à une température supérieure à la température de fusion, en compensant l'évacuation des calories vers les parois froides de la busette.

II.5.1. Détermination des pertes latérales par les parois

La détermination de la puissance nécessite de connaître la valeur du coefficient d'échanges thermiques entre la paroi froide et la vanne électromagnétique et le métal. Cette estimation s'effectue de façon expérimentale: A partir d'un petit creuset froid entouré d'un inducteur, le premier objectif a été de se mettre en situation de bouchon dans ce creuset de dimensions:

diamètre: $D = 30 \text{ mm}$
hauteur: $L = 100 \text{ mm}$.

Figure 74: Montage expérimental pour l'étude statique du défigage



On choisit alors une charge en laiton de dimension largement inférieure, que l'on place dans le creuset et que l'on cherche à fondre. Pour cela l'inducteur est alimenté par un générateur moyenne fréquence.

A partir de la charge fondue et épousant les parois du creuset, des essais ont donc été réalisés pour obtenir une refusion de ce bouchon.

Déroulement des essais :

Au cours de ces essais, la température en différents points de la charge, est enregistrée, ainsi que les mesures calorimétriques du circuit de refroidissement du creuset.

On observe au cours des essais un parasitage important des mesures pendant le fonctionnement du générateur moyenne fréquence. Ainsi les mesures ne peuvent être interprétables qu'à partir du moment où l'on coupe le générateur, pour refroidir et solidifier la charge. Le tracé des températures permet ainsi de suivre les différents essais :

- * un premier essai jusqu'à une puissance du générateur de 20 kW entraîne un chauffage de la charge en laiton sans amener de fusion,

- * un second chauffage jusqu'à une puissance de 47 kW permet d'obtenir la fusion de la charge. On observe la formation d'un dôme important. Par contre, aucun brassage ne s'effectue. A l'arrêt du générateur, le métal épouse alors la forme du creuset froid.

- * les essais suivants effectués à partir de la charge précédemment fondue permettent alors d'être en situation de bouchon solide à fondre.

- Avec une même puissance que précédemment (47 kW), on observe une fusion localisée au centre de la charge, ainsi que la formation d'un dôme de taille réduite.

- En augmentant la puissance délivrée par le générateur à 57 kW, on obtient la fusion générale de la charge, exceptée une croûte périphérique en contact avec le creuset froid qui reste solide. En augmentant encore davantage la puissance, les observations restent similaires. On ne parvient pas à fondre, voire à diminuer de façon perceptible la croûte périphérique.

- En laissant la charge ainsi fondue se solidifier, et en recommençant la fusion plusieurs fois, toujours à une puissance de 57 kW, on obtient des résultats analogues.

Conclusion des essais

Même après fusion de la charge, et donc même quand la charge est en contact parfait avec le creuset froid, il est possible d'obtenir la fusion. On note simplement que le bon contact charge-creuset froid entraîne :

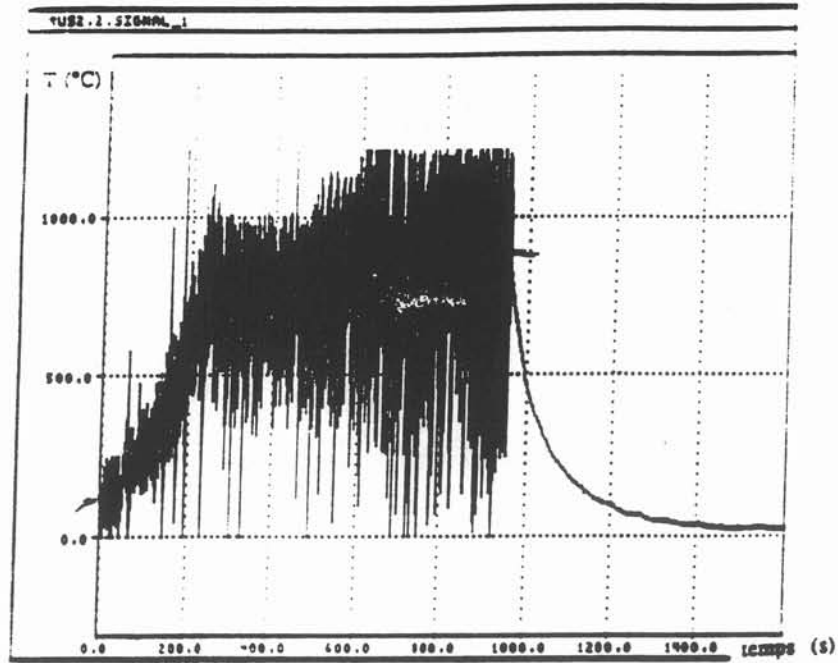
- une croûte solide résiduelle à la périphérie de la charge, quelle que soit la puissance mise en jeu. Cette zone solide ne semble pas évoluer au cours des essais.

- la nécessité d'augmenter la puissance du générateur pour compenser les fortes pertes thermiques.

Exploitation des essais

A partir des mesures effectuées (Figure 75), il est possible de déterminer expérimentalement le coefficient d'échanges thermiques entre la charge et le creuset froid, quand le générateur est coupé. C'est en effet le seul moment où les mesures ne sont pas parasitées par la moyenne fréquence.

Figure 75: évolution de la température dans la charge
au cours du temps



Le calcul de ce coefficient correspond à un bon contact thermique, qui existe quand les forces électromagnétiques ne repoussent pas le métal liquide vers le centre. Ce coefficient ainsi calculé est celui que l'on retrouvera lors du figeage du métal liquide.

La détermination du coefficient d'échange thermique h s'effectue de la façon suivante :

Un bilan thermique sur un volume élémentaire compris entre les cotes z et $z+dz$ du système (Cf figure 76), amène l'égalité entre :

- l'énergie que reçoit l'eau de refroidissement :

$$d\Phi_1 = \dot{m} C_p dT_f$$

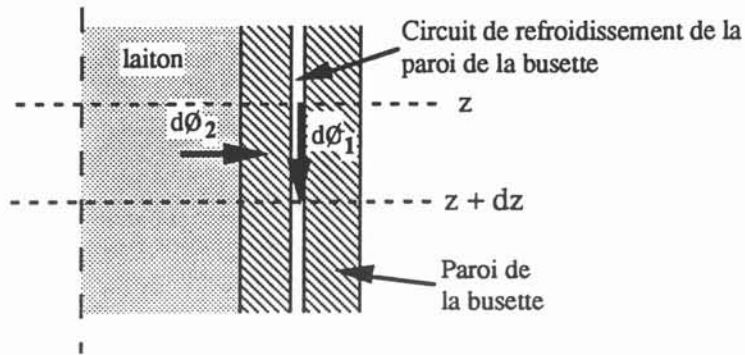
- où
- \dot{m} est le débit de l'eau de refroidissement circulant dans les parois du creuset
 - C_p est la capacité calorifique de l'eau
 - dT_f est l'augmentation infinitésimale de température de l'eau de refroidissement entre la cote z et la cote $z+dz$

- l'énergie convectée entre la charge et la circulation de l'eau de refroidissement. En négligeant la résistance thermique due à l'épaisseur de cuivre, ce flux élémentaire s'écrit :

$$d\Phi_2 = h \cdot dS(z) (T_c - T_f(z))$$

- où
- h est le coefficient d'échange thermique
 - $dS(z)$ la surface élémentaire d'échange
 - T_c la température de la charge
 - $T_f(z)$ la température de l'eau de refroidissement.

Figure 76: Bilan thermique des échanges entre la charge et le creuset



La mise en égalité de ces deux termes:

$$d\Phi_1 = d\Phi_2$$

amène une équation différentielle:

$$\frac{dT_f}{T_c - T_f(z)} = \frac{h}{\dot{m} C_p} dS(z)$$

L'intégration de cette équation donne: $\text{Log}(T_f(z) - T_c) = -\frac{h S(z)}{\dot{m} C_p} + C$

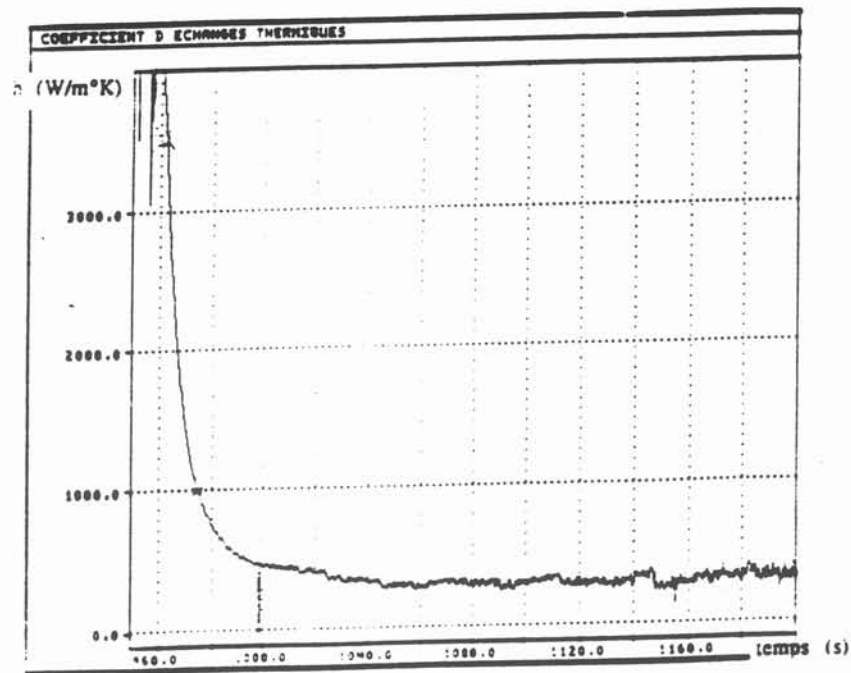
où C est une constante, déterminée sachant que la température d'eau à l'entrée est connue $T(z=0) = T_{fe}$ et correspond à une surface d'échange nulle $S(z=0) = 0$.

On obtient ainsi l'expression du coefficient d'échanges thermiques entre la charge et le creuset en appliquant la relation obtenue pour la surface d'échange totale S , qui correspond à la température de sortie de l'eau de refroidissement $T(z=L) = T_{fs}$, soit:

$$h = -\frac{\dot{m} C_p}{S} \text{Log} \left[\frac{T_{fs} - T_c}{T_{fe} - T_c} \right]$$

Ainsi, à partir des mesures effectuées, on évalue le coefficient h . Ces résultats sont représentés sur la figure 77.

Figure 77: Détermination du coefficient d'échanges thermiques au cours du temps



On remarque que la valeur de h diminue de $4000 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ dans les premiers instants de coupure de la puissance, pour prendre une valeur constante $h = 330 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ par la suite, pendant toute la durée du refroidissement de la charge. Cette forte variation de h dans les premiers instants s'explique par la rétreinte que subit le laiton en se refroidissant et en se solidifiant.

Il est important de noter que cette évaluation du coefficient d'échange h ne correspond en fait qu'à la phase de figeage et de refroidissement, en l'absence de fonctionnement de l'inducteur.

En effet, lorsque le métal est maintenu liquide par l'action de l'inducteur moyenne fréquence, les forces électromagnétiques repoussent le métal liquide vers le centre du canal, et le contact métal liquide - parois refroidies n'est pas aussi bon que lorsque le métal s'écoule en l'absence de champ magnétique.

Une estimation grossière du coefficient d'échanges thermiques lorsque l'inducteur fonctionne, peut être obtenue à partir du calcul de l'ordre de grandeur de la puissance absorbée par la charge. Elle s'écrit :

$$P_{\text{charge}} = P_{\text{totale générateur}} * \eta_{\text{générateur}} * \eta_{\text{système inductif}}$$

- avec - le rendement du générateur $\eta_{\text{générateur}} = 80\%$
- le rendement du système inductif estimé par décrément logarithmique:
 Pour une valeur de capacité $C = 36,1 \text{ } \mu\text{F}$, le décrément pour l'ensemble inducteur + creuset + charge donne:
 - fréquence $f = 18 \text{ kHz}$
 - inductance $L = 2,17 \text{ } \mu\text{H}$
 - résistance $R = 20,9 \text{ m}\Omega$

Le décrément sans la charge amène: $f = 17,1 \text{ kHz}$

$$L = 2,4 \mu\text{H}$$

$$R = 17,9 \text{ m}\Omega$$

Soit donc la résistance de la charge estimée à $R_{\text{charge}} = 3 \text{ m}\Omega$. Le rendement

$$\text{du système vaut: } h_{\text{système inductif}} = \frac{R_{\text{charge}}}{R_{\text{totale}}} = \frac{3}{20,9} = 14,3 \%$$

Pour une puissance totale de 57 kW, la puissance injectée dans la charge qui compense les pertes thermiques vaut alors:

$$P_{\text{charge}} = 6,4 \text{ kW}$$

Compte tenu de la forme étroite du creuset, on peut en première approximation négliger les pertes par rayonnement et par convection avec l'ambiante. On évalue alors le coefficient thermique charge-creuset par:

$$h = \frac{P_{\text{charge}}}{S \cdot \Delta T} \quad \text{où } S \text{ est la surface d'échange } S = \pi D L = \pi \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 7 \cdot 10^{-2}$$

ΔT est l'écart moyen de température entre la charge et l'eau de refroidissement du creuset:

$$\Delta T = \left(T_c - \frac{T_{fe} - T_{fs}}{2} \right) = \left(900 - \frac{40 + 8}{2} \right)$$

On obtient alors un coefficient h de $1120 \text{ W/m}^2\text{°C}$, qui caractérise le transfert thermique entre la charge liquide et les parois refroidies du canal, lors de la phase de défigage et de maintien de la coulée.

On retiendra donc de cette exploitation les estimations suivantes:

Phase de figage:

Coefficient d'échange pour le métal en cours de solidification $h = 4000 \text{ W/m}^2\text{°C}$

Coefficient d'échange pour le métal solidifié: $h = 330 \text{ W/m}^2\text{°C}$

Phase de défigage:

Coefficient d'échange pour le métal liquide: $h = 1120 \text{ W/m}^2\text{°C}$

II. 5.2. Détermination de la puissance

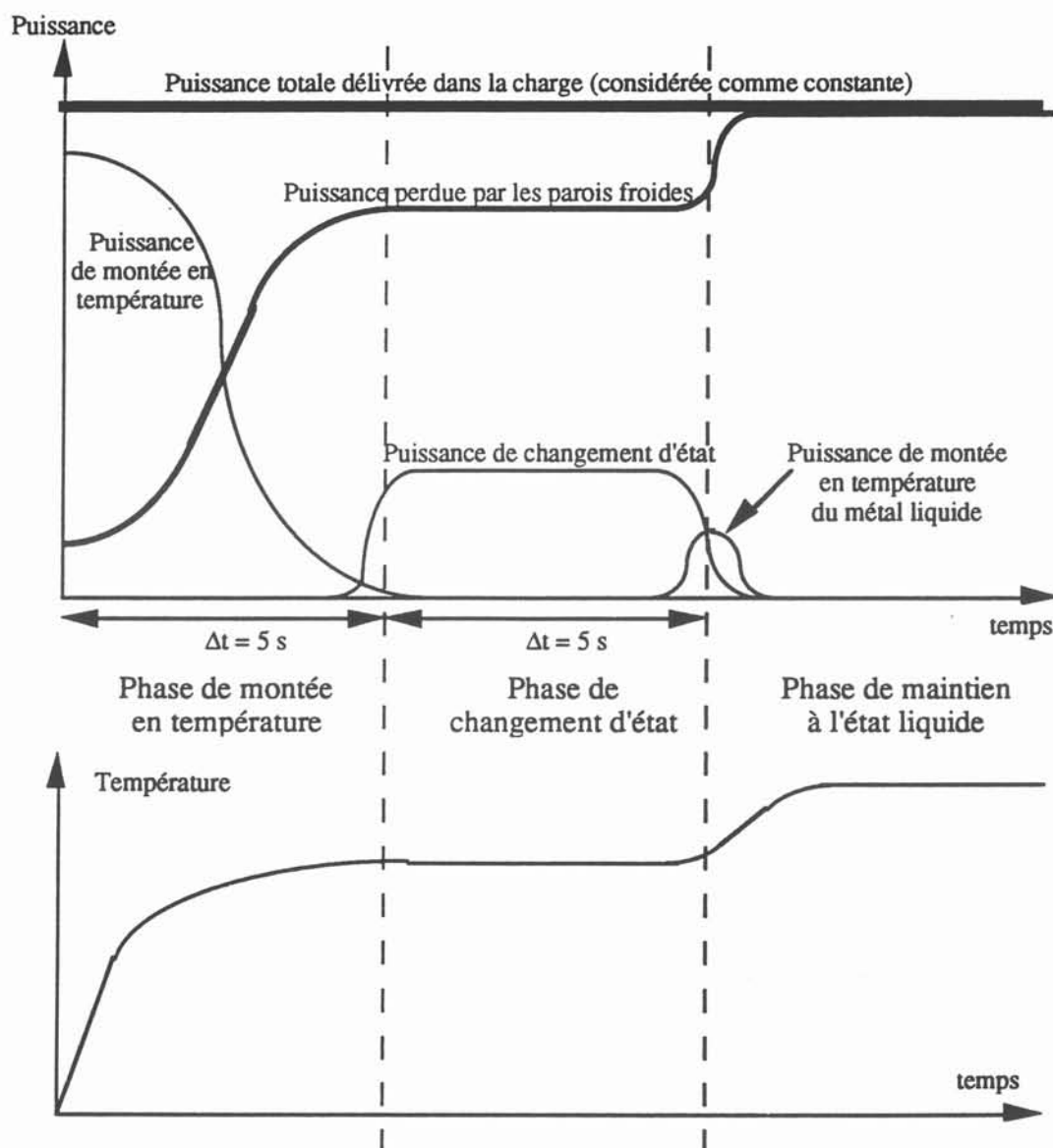
A partir de cette valeur du coefficient d'échange h calculée pour une configuration statique (Cf paragraphe précédent), il s'agit maintenant de déterminer l'ordre de grandeur de la puissance qu'il faut amener pour permettre la coulée. Cette estimation s'effectue donc pour la véritable géométrie de la vanne électromagnétique.

Dans un raisonnement simplifié, on estime que la puissance doit permettre les trois opérations suivantes:

- dans un premier temps montée de la température du bouchon jusqu'à 900 °C
- puis fusion du bouchon
- enfin, maintien en fusion du métal, qui s'écoule.

Les différents termes de puissance sont représentés en allure sur la courbe 78.

figure 78: Evolution indicative des différents termes de puissance



Pour un fonctionnement industriel viable, on estime que la coulée du métal doit être obtenue en 10 secondes, à partir d'une situation de bouchon dans la vanne, que l'on peut répartir en deux durées équivalentes pour les opérations de montée en température et de changement d'état solide - liquide du bouchon chaud.

II.5.2.1. Puissance nécessaire pendant la phase de montée en température

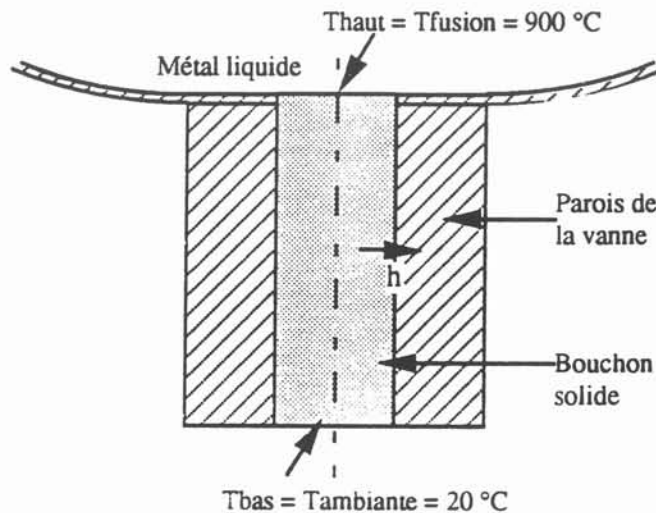
La puissance nécessaire à la montée en température s'écrit en tenant compte des pertes par convection entre les parois froides du creuset et le bouchon solide, dont la température évolue au cours du temps. Une valeur par excès est facilement obtenue en choisissant la température du bouchon constante et égale à la température de fusion ($T_{\text{fusion}} = 900^\circ\text{C}$), ce qui permet le calcul simplifié suivant:

$$P_1 = \frac{1}{\Delta t} \iiint \rho C_p (T_{\text{fusion}} - T_{\text{initiale}}) dV + h S_{\text{échange}} (T_{\text{fusion}} - T_p)$$

- avec
- Δt intervalle de temps nécessaire pour la montée en température $\Delta t = 5 \text{ s}$
 - ρ masse volumique du laiton $\rho = 8400 \text{ kg/m}^3$
 - dV volume élémentaire
 - T_{fusion} température de fusion $T_{\text{fusion}} = 900^\circ\text{C}$
 - T_{initiale} température initiale du bouchon, qui n'est pas constante sur tout le volume et qui doit être déterminée.
 - h est le coefficient d'échanges thermiques entre le bouchon solide et l'eau de refroidissement du creuset $h = 330 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$
 - $S_{\text{échange}}$ la surface d'échange entre le bouchon et le creuset froid
 - T_p la température de la paroi froide du creuset

La température T_{initiale} n'est en effet pas constante, puisque comme le montre la figure 79, le bouchon sert d'interface entre le métal liquide existant dans la poche de fusion 50 Hz, et l'ambiante.

Figure 79: Configuration du bouchon solidifié avant chauffage par la moyenne fréquence



Pour ce calcul simplifié de la puissance nécessaire à une montée rapide en température du bouchon, on considère que le bouchon est à une température initiale moyenne entre la température en haut du bouchon ($T_{\text{haut}} = T_{\text{fusion}} = 900^\circ\text{C}$) et le température en bas du bouchon ($T_{\text{bas}} = T_{\text{ambiante}} = 20^\circ\text{C}$), soit une température initiale $T_{\text{initiale}} = 460^\circ\text{C}$.

En choisissant un coefficient d'échange h_1 à l'extrémité égal à celui existant radialement, on obtient alors:

$$P_1 = 6,5 \text{ kW}$$

II.5.2.2. Puissance nécessaire au changement d'état

La puissance nécessaire au changement d'état s'écrit directement:

$$P_2 = \frac{\rho V L}{\Delta t} + h S_{\text{échange}} (T_{\text{fusion}} - T_p)$$

avec ρ la masse volumique de l'élément à chauffer

V le volume de l'élément
L la chaleur de changement d'état du matériau

Ce calcul amène une valeur de $P2 = 5,8 \text{ kW}$

II.5.2.3. Puissance nécessaire au maintien en phase liquide

Pendant la phase de maintien liquide, la seule condition est de compenser l'ensemble des pertes latérales, dont le coefficient d'échange est alors évalué à $h = 1100 \text{ W/m}^2\text{°K}$,

soit $P3 = 3,4 \text{ kW}$

II.5.2.2. Dimensionnement final

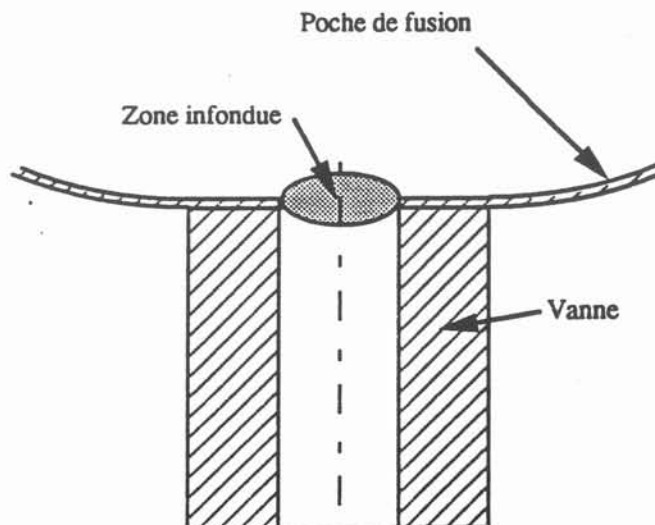
Le dimensionnement de la puissance à fournir est alors de l'ordre du maximum entre les trois puissances précédemment déterminées. Compte tenue des estimations, La puissance à fournir est de l'ordre de 6 à 7 kW pour obtenir la fusion du bouchon en 10 s, et d'environ 3 à 4 kW pour le maintien à l'état liquide.

II.6. Campagnes d'essais

II.6.1. Essais préalables sans inducteur moyenne fréquence

Ces essais préalables s'effectuent sur le prototype expérimental, avec fonctionnement de la poche de fusion 50 Hz, mais en l'absence d'inducteur moyenne fréquence autour du dispositif de coulée. La mise en place d'un simple bouchon dans le fond du creuset, que l'on retire par le bas à l'aide d'un bras de levier une fois le laiton devenu liquide dans la poche de fusion, doit permettre d'étudier le comportement de la coulée du laiton (y-a-t-il solidification ou non ?) dans la géométrie existante. Ces essais préliminaires ont montré que bien que la charge soit apparemment liquide dans la poche de fusion, la coulée ne s'amorçait pas. Cette observation met en évidence le fait qu'il existe probablement une partie infondue à l'entrée de l'orifice de coulée (voir figure 80). Cette zone solide devra donc être fondue par l'apport d'énergie du système à induction moyenne fréquence de la vanne électromagnétique. Il sera alors nécessaire de rapprocher le plus possible l'inducteur moyenne fréquence du fond du creuset.

Figure 80: Localisation de la zone infondue empêchant l'écoulement du laiton



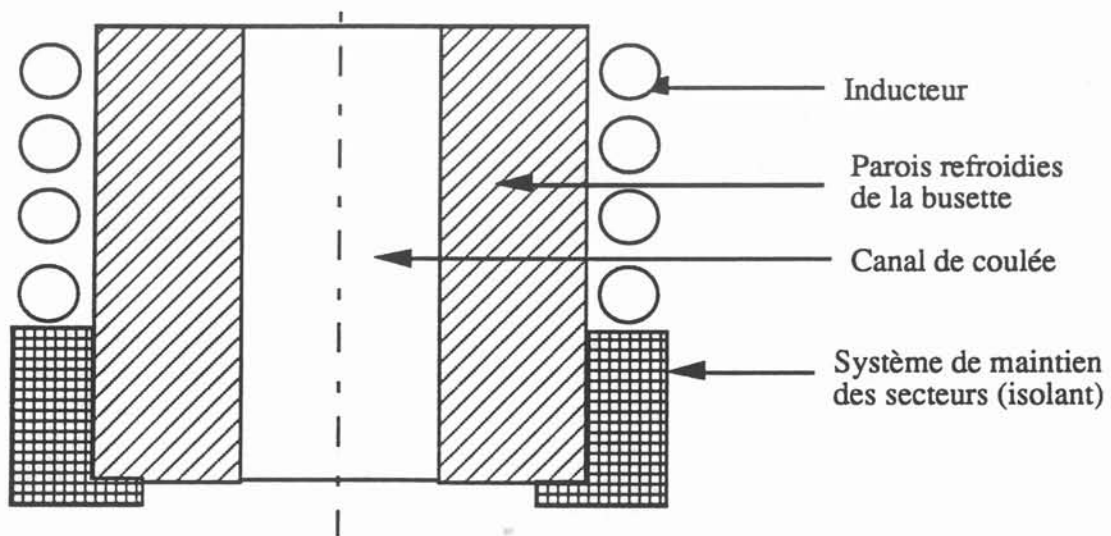
II.6.2. Conception de l'inducteur

Compte tenu du choix de la moyenne fréquence, la conception de l'inducteur ne relève d'aucune contrainte particulière, si ce n'est:

- celles imposées par l'encombrement réduit du système
- l'obligation d'y ajouter une circulation d'eau évacuant la puissance Joule
- l'adaptation d'impédance entre l'inducteur et le générateur

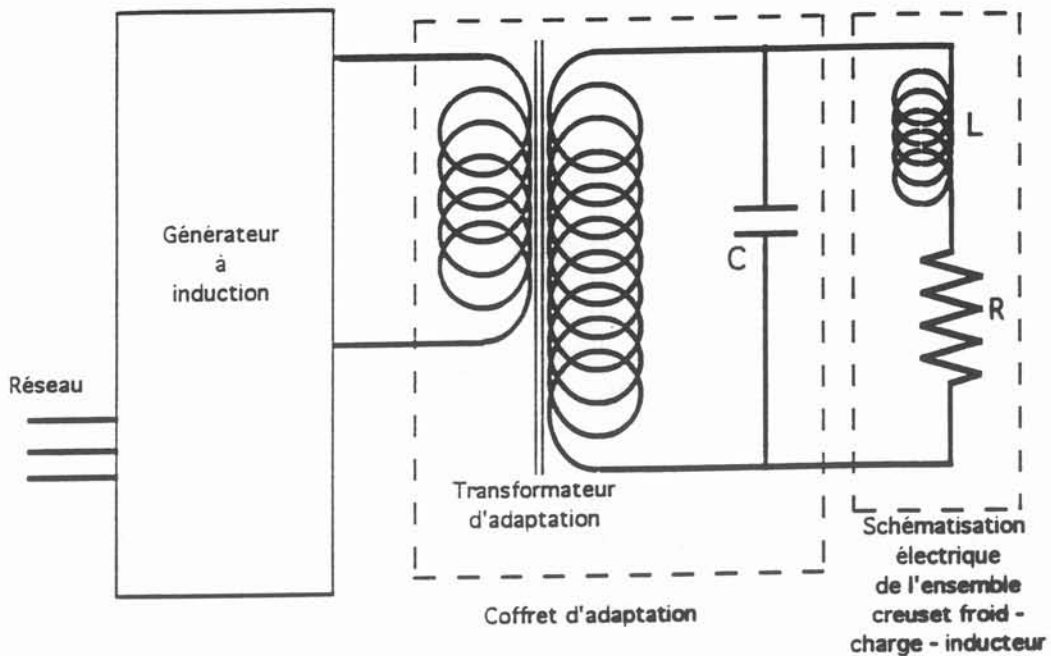
Un premier inducteur est choisi en tube cuivre, de diamètre intérieur et extérieur respectif de 4 et 6 mm, à l'intérieur duquel circulera l'eau de refroidissement. Compte tenu de la faible hauteur de la busette, il ne possède que 4 spires. L'ensemble inducteur - creuset est représenté figure 81.

Figure 81: géométrie de l'inducteur



Cet inducteur est alimenté par un générateur à triodes, de puissance nominale 100 kW, dans une gamme de fréquence allant de 5 à 30 kHz (figure 82). Compte tenu des contraintes sur les batteries de condensateurs disponibles, le fonctionnement du générateur est réglé pour une fréquence nominale de 15 kHz pour le bouchon froid (Cette fréquence de résonance évoluera au fur à mesure que le bouchon s'échauffera et deviendra liquide). Le réglage en fréquence est ainsi légèrement supérieur à l'optimum déterminé paragraphe II.3.1 .

Figure 82: représentation du circuit électrique complet de l'installation moyenne fréquence



II.6.3. Détermination expérimentale de la mutuelle entre le circuits inductifs 50 Hz et moyenne fréquence

Pour vérifier l'absence effective de couplage mise en évidence dans le paragraphe II.4.4, il est possible de déterminer la valeur de la mutuelle inductance, en court-circuitant l'un des deux circuits. En reprenant la théorie du transformateur appliquée au système inductif [11], On définit alors l'inducteur 50 Hz comme le secondaire de l'installation et l'inducteur moyenne fréquence comme le primaire.

On écrit l'expression de la tension pour chaque circuit, en considérant le secondaire de l'installation court-circuité. La seule fréquence f qui intervient est la fréquence du terme source, c'est à dire la moyenne fréquence de l'inducteur de la vanne électromagnétique. On a donc la pulsation de chaque circuit: $\omega_1 = \omega_2 = 2 \pi f = 2 \pi 15000$.

pour le circuit 50 Hz: $U_1 = R_1 I_1 + j L_1 \omega_1 I_1 + j M \omega_1 I_2$

pour la vanne: $0 = R_2 I_2 + j L_2 \omega_1 I_2 + j M \omega_1 I_1$

on obtient, alors:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-j M \omega_1}{R_2 + j L_2 \omega_1}$$

$$\text{d'où } U_1 = I_1 \left(R_1 + j L_1 \omega_1 + \frac{-M^2 \omega_1^2}{R_2 + j L_2 \omega_1} \right)$$

$$\text{soit } U_1 = I_1 \left(R_1 + \frac{R_2 M^2 \omega_1^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega_1^2} + j \left(L_1 \omega_1 - \frac{L_2 \omega_1^3 M^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega_1^2} \right) \right)$$

Ainsi, une méthode de décrément logarithmique sur le circuit électrique de la

vanne va donner R_{cc} résistance de court-circuit:

$$R_{cc} = R_1 + \frac{R_2 M^2 \omega_1^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega_1^2}$$

$$\text{soit } M = \sqrt{\frac{(R_{cc} - R_1) (R_2^2 + L_2^2 \omega_1^2)}{R_2^2 \omega_1^2}}$$

ou de la même manière l'inductance de court - circuit s'écrit:

$$L_{cc} = (L_1 + L_2 \frac{M^2 \omega_1^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega_1^2})$$

$$\text{soit } M = \sqrt{\frac{(L_{cc} - L_1) \omega_1 (R_2^2 + L_2^2 \omega_1^2)}{L_2^2 \omega_1^2}}$$

où L_1 et R_1 sont mesurés par décrétement logarithmique effectué en mettant le circuit 2 à vide, ainsi que R_2 et L_2 en mettant le circuit 1 à vide.

Les mesures expérimentales effectuées ont donné des valeurs de L_{cc} et L_1 , ainsi que des valeurs de R_{cc} et R_1 identiques aux erreurs expérimentales près. On peut ainsi considérer les deux circuits comme découplés, et donc la mutuelle M comme quasiment nulle.

II.6.4. Essais effectifs avec l'inducteur moyenne fréquence

II.6.4.1. Essais avec la géométrie d'origine

Des essais similaires aux essais préalables sont effectués avec cette fois-ci apport d'énergie provenant de l'inducteur moyenne fréquence: l'orifice de coulée étant bouché par un bouchon initial mobile, manoeuvrable par un bras de levier, on réalise la fusion de la charge de laiton par l'inducteur 50 Hz. Lorsque le laiton est liquide dans la poche de fusion, on abaisse alors le bouchon et l'on commence à injecter la puissance dans l'inducteur de la vanne électromagnétique, tout en maintenant la puissance dans l'inducteur 50 Hz de la poche de fusion.

On observe cette fois-ci un amorçage de la coulée, mais ceci à partir d'un seuil de puissance de 90 kW

Lorsque l'on coupe la puissance dans l'inducteur de la vanne électromagnétique, la coulée de métal ne s'arrête pas et il est nécessaire de stopper le procédé de maintien en fusion à 50 Hz pour obtenir l'arrêt de la coulée.

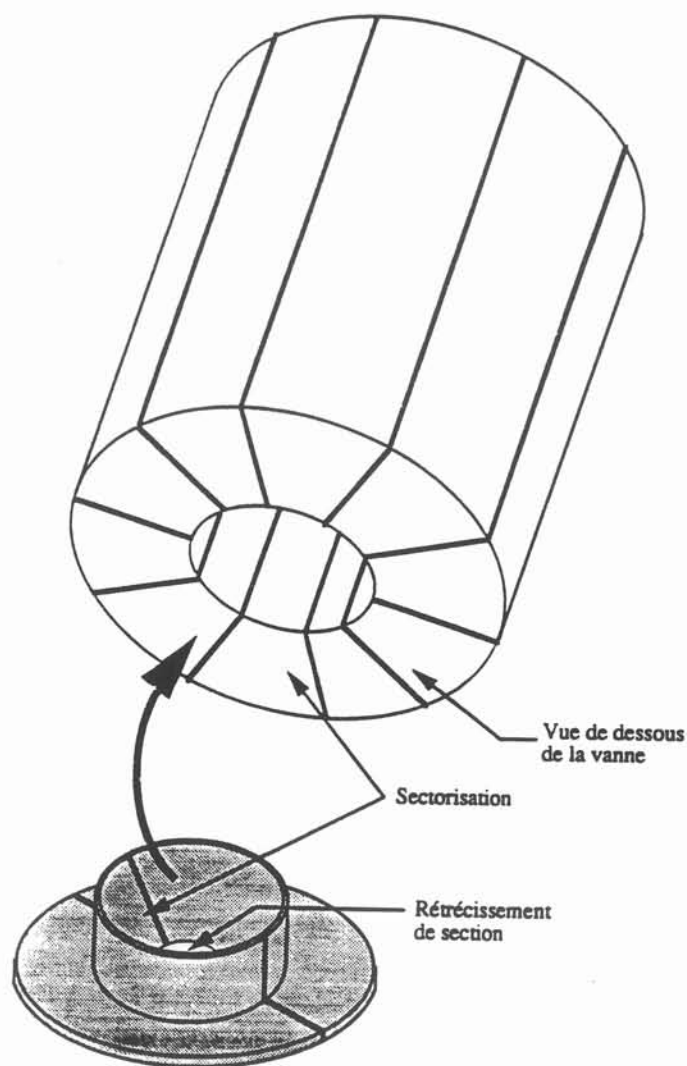
Les conclusions que l'on retire de tels essais sont les suivantes:

- L'inducteur moyenne fréquence participe à la fusion de la zone solide qui existe à l'entrée de l'orifice de coulée, et permet effectivement d'amorcer la coulée.
- La charge hydrostatique que constitue le métal liquide au dessus de la busette entraîne une forte vitesse du métal liquide, qui empêche la solidification une fois la puissance dans l'inducteur moyenne fréquence supprimée.
- Comme la coulée ne peut pas être stoppée, on ne peut donc pas se mettre en situation de coulée semi-continue, avec formation réelle d'un bouchon de laiton à l'intérieur de la vanne.

II.6.4.2. Modification de la géométrie

Aux vues des résultats précédents, il est nécessaire de modifier la géométrie de la vanne pour espérer obtenir une solidification du métal liquide. L'idée est de chercher à diminuer la vitesse d'écoulement, en créant des pertes de charges supplémentaires, par une diminution locale du diamètre de la vanne électromagnétique. Pour ce faire, on introduit dans le fond de la busette une pièce conique en cuivre dotée d'un circuit de refroidissement, et toujours sectorisée, comme le montre le figure 83.

Figure 83: Modification de la géométrie de la busette



La détermination du diamètre permettant à la fois la coulée du métal et le figeage se fait de manière purement expérimentale, en choisissant un diamètre minimum (5 mm), que l'on agrandit au cours des essais jusqu'à atteindre le diamètre limite permettant le figeage du

métal liquide.

Les résultats de ces différents essais sont les suivants:

- Pour des diamètres de 5 à 8 mm, on observe aucune coulée, mis à part quelques gouttes.

- Pour des diamètres de 10 et 11 mm, il a été possible d'obtenir le fonctionnement attendu de la vanne électromagnétique: l'alimentation à pleine puissance de l'inducteur moyenne fréquence (90 kW au réseau) permet une coulée continue. La coupure de cette alimentation entraîne l'arrêt presque immédiat de cette coulée, avec un temps de réponse de quelques secondes. Le fonctionnement de coulée semi-continue se traduisant par plusieurs figeages et défigeages a pu être obtenu, mais avec une reproductibilité de l'ordre de 50 %.

- Pour un diamètre de 13 mm, on retrouve exactement les mêmes phénomènes, mis à part que la solidification du métal du métal liquide n'était plus aussi immédiate que pour des diamètres plus réduits.

On en conclue^t que ces différents essais ont permis de montrer la faisabilité de la vanne électromagnétique. Par contre la fiabilité de ce dispositif reste à améliorer. C'est la raison pour laquelle une analyse expérimentale plus détaillée du système à induction moyenne fréquence est nécessaire.

II.6.5. Analyse du système à induction

Des essais de fusion d'un cylindre de laiton faisant office de bouchon, en position statique dans la vanne ont été effectués. Ces essais ont été réalisés sans charge de laiton dans la poche de fusion 50 Hz, et sans fonctionnement de l'inducteur 50 Hz. Cette situation correspond à un cas extrême, car il n'y a alors plus de poussée hydrostatique importante facilitant le processus d'écoulement du métal.

Les premiers essais effectués dans les mêmes conditions de puissance que précédemment, ont montré que le bouchon en bon contact avec la paroi refroidie fond difficilement et ne s'écoule pas. La puissance injectée est donc insuffisante, ce qui traduit incontestablement un très mauvais rendement, compte tenue de la forte puissance globale injectée, de 90 kW au réseau. Il s'agit donc d'élucider la ou les causes de ce mauvais rendement.

II.6.5.1. Les mesures du champ magnétique

Aux bornes d'un solénoïde placé dans une région où il existe un champ magnétique B alternatif de pulsation ω , il naît une différence de potentiel U (loi de Lentz), qui est fonction du flux Φ correspondant au champ B . Ce système joue le rôle d'un capteur de champ, Φ , U , ω et B étant reliés par l'expression suivante:

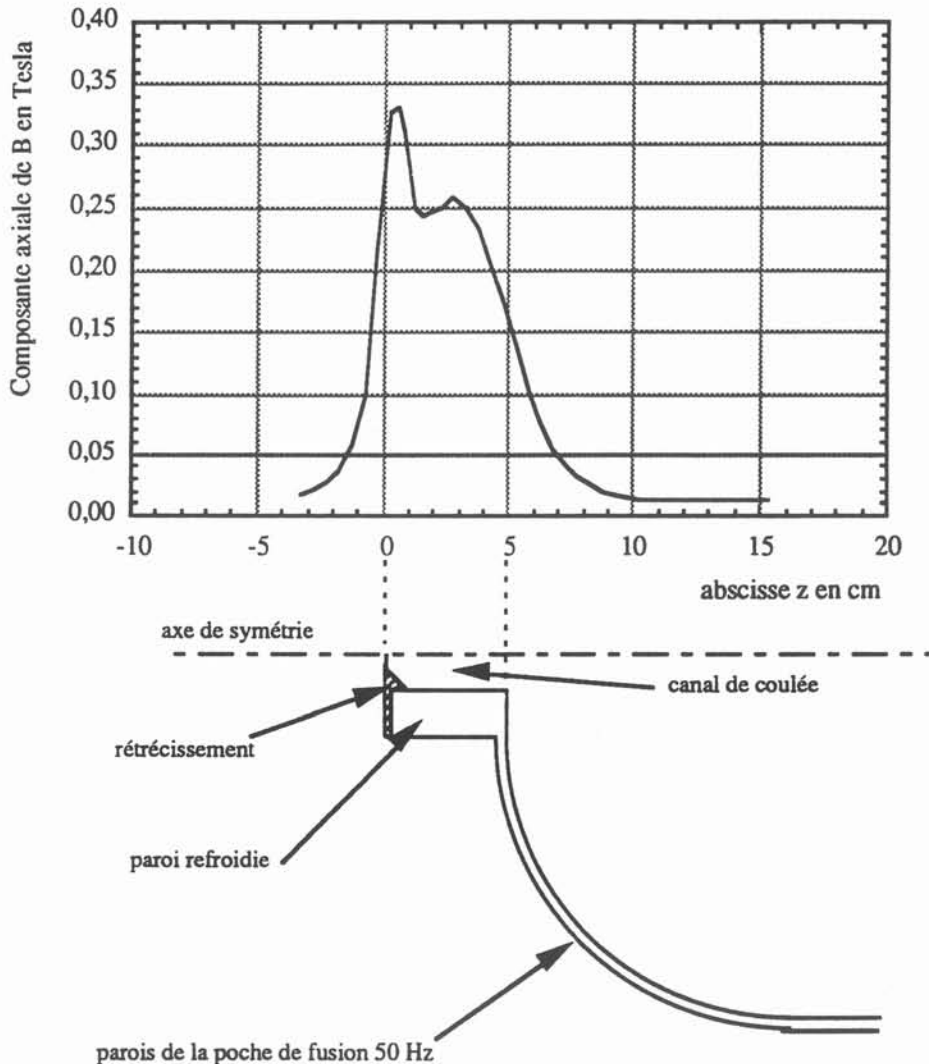
$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = n B S \omega$$

où: S est la section du solénoïde
 n est le nombre de spires du solénoïde

Afin d'avoir une bonne précision sur la valeur de B , la sonde doit être dimensionnée de façon suffisamment petite vis à vis du gradient spatial du champ.

En déplaçant cette sonde le long de l'axe, on obtient un profil axial B_z du champ magnétique. Les résultats, présentés figure 84, restent tout à fait logiques, c'est à dire que l'on observe la décroissance de B_z aux extrémités de la busette et une augmentation importante de B_z au niveau du rétrécissement.

Figure 84: Mesure du champ créé par la vanne électromagnétique



Cependant, on ne retrouve pas la conservation du flux magnétique entre la section nominale et la section du rétrécissement:

section nominale: $\pi R^2 B = 90 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$

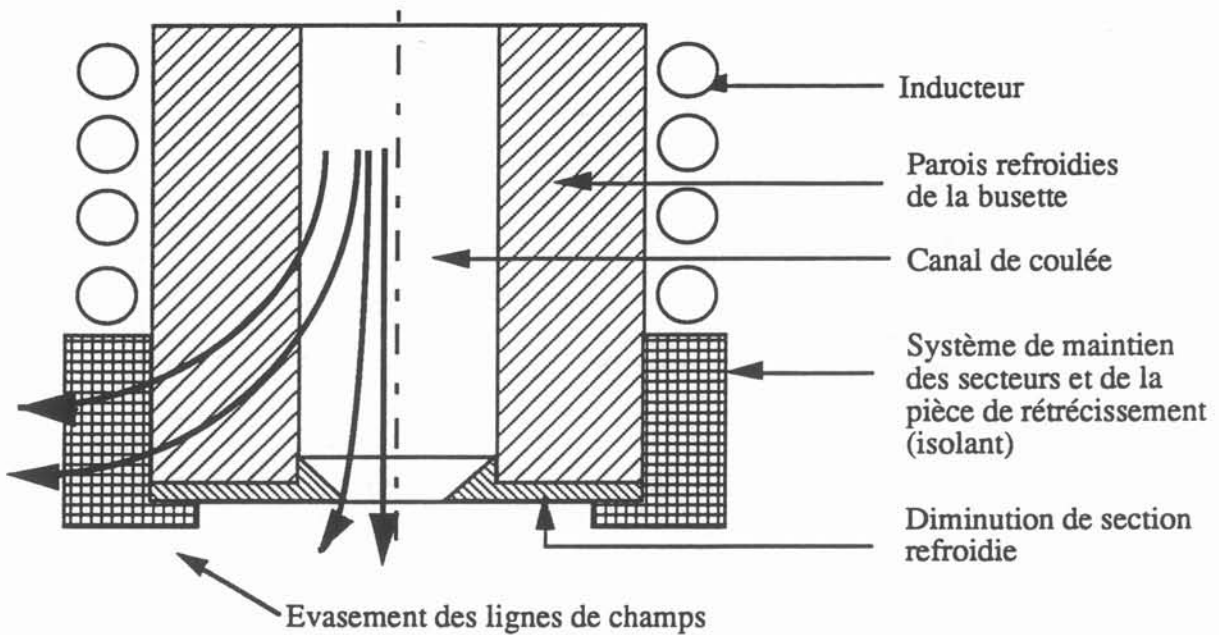
rétrécissement: $\pi R^2 B = 45 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$

soit 50 % de fuites au niveau du rétrécissement.

Même si ce calcul est très simplifié (le champ ne restant pas constant en module et en direction), et ne donne que des ordres de grandeurs, ces simplifications ne peuvent vraisemblablement pas expliquer la différence importante entre les deux valeurs. Cette différence est très probablement due à la position de l'inducteur (voir figure 85) dont l'extrémité inférieure est trop élevée par rapport à la position du rétrécissement, ce qui

entraîne une sortie des lignes de champs en dehors de la vanne avant l'extrémité inférieure de cette dernière.

Figure 85: origine de la fuite du champ magnétique au niveau du rétrécissement de section



II.6.5.2. Les mesures de bilan calorimétrique

En transférant l'instrumentation utilisée pour la caractérisation de la poche de fusion 50 Hz, il a été possible de connaître les différentes puissances évacuées par le système, par mesures calorimétriques. Pour cela un bouchon en laiton est placé dans le canal de la vanne, qui est munie d'un système empêchant la coulée. La poche de fusion 50 Hz ne fonctionne pas. On obtient alors les valeurs suivantes:

Puissance totale réseau:	$P_{\text{réseau}} = 50 \text{ kW}$
Puissance creuset + bouchon:	$P_c = 22 \text{ kW}$
Puissance inducteur:	$P_{\text{ind}} = 17 \text{ kW}$
Puissance rétrécissement:	$P_{\text{rétré}} = 2,7 \text{ kW}$

soit une puissance totale amenée dans le système en aval du générateur:

$$P_{\text{tot}} = P_c + P_{\text{ind}} + P_{\text{rétré}} = 41,7 \text{ kW}$$

Le rendement du générateur vaut alors: $\eta_{\text{gén}} = \frac{P_{\text{tot}}}{P_{\text{réseau}}} = 80\%$

Ensuite, la mesure de la puissance amenée dans le bouchon seul a été effectuée par deux autres essais, pour une puissance totale de 10 kW:

- la mesure de la montée en température du bouchon massif calorifugé (régime transitoire):

$$P_{\text{bouchon}} = m C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

- la mesure de l'échauffement de l'eau de refroidissement d'un bouchon creux calorifugé, équivalent électromagnétiquement au bouchon massif en régime permanent.

Comme le montrent les figures 86 et 87, qui correspondent respectivement à la première et à la seconde méthode, la puissance amenée dans la charge est de l'ordre de 3 kW, soit donc un rendement total par rapport au réseau de 3%, ce qui est très faible. Ainsi la plus grande partie de la puissance amenée est perdue dans l'inducteur (34%) et dans le creuset (40%).

Figure 86: Enregistrement de la montée en température du bouchon massif calorifugé

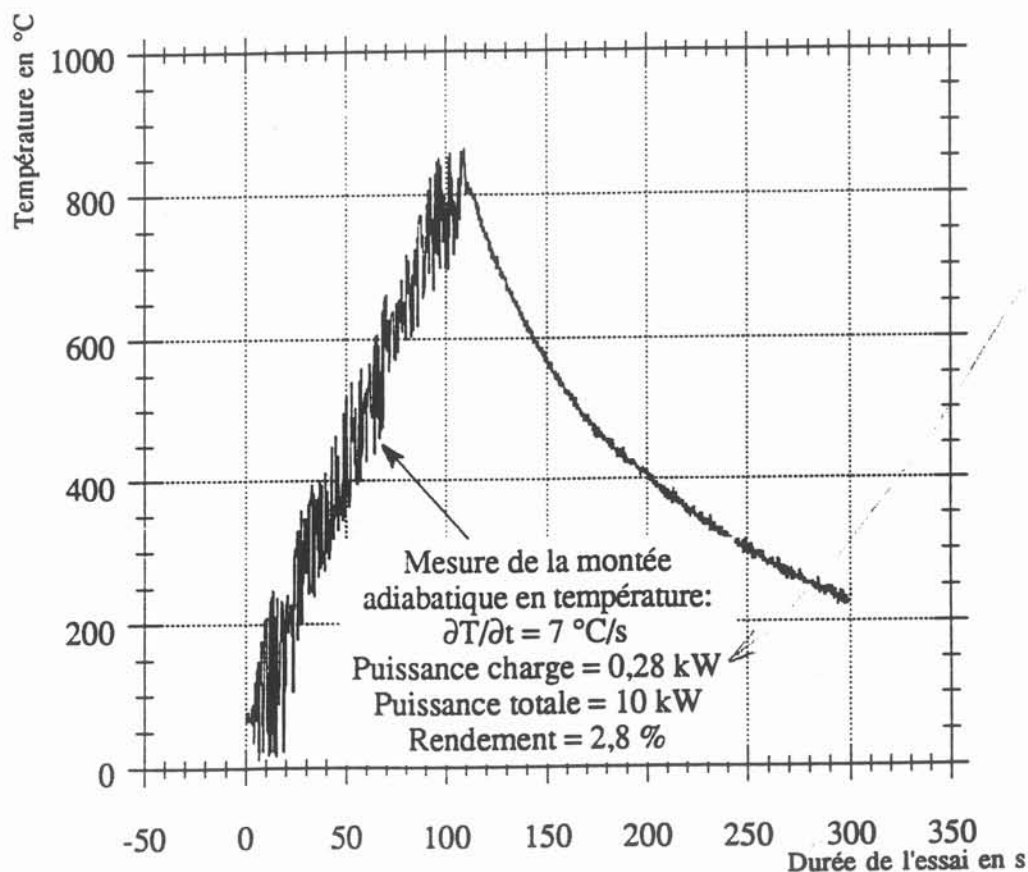
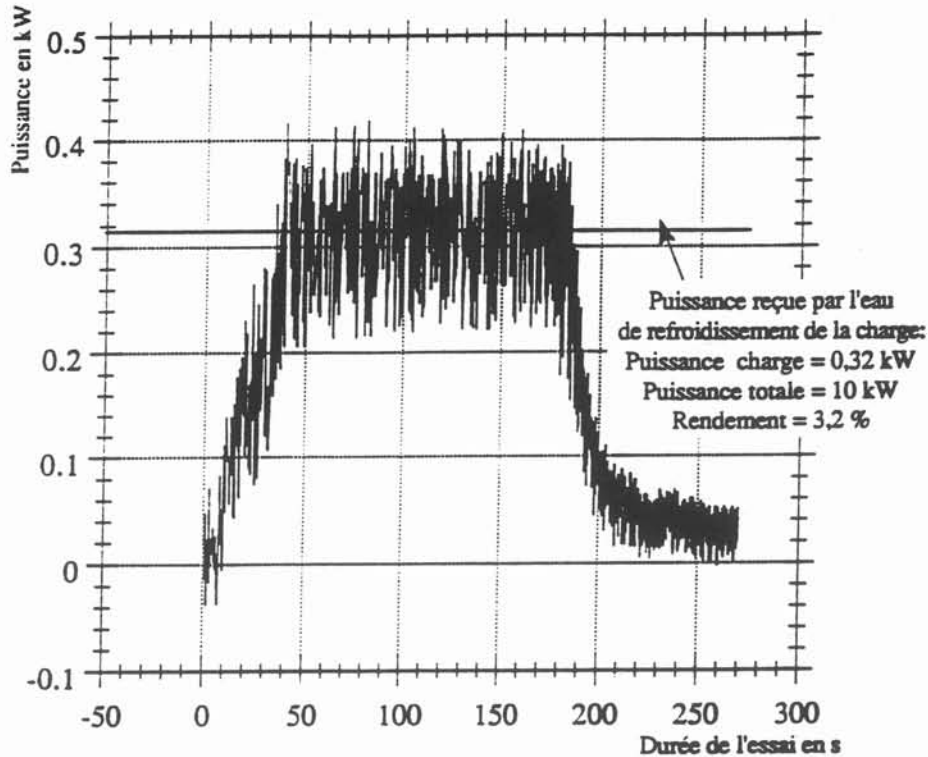


Figure 87: Enregistrement de l'échauffement de l'eau de refroidissement du bouchon creux calorifugé



Or les études statiques effectuées ont montré qu'il était nécessaire d'amener environ 5 kW de puissance pour obtenir la fusion et 3 kW de puissance pour maintenir le laiton liquide. C'est donc bien le trop faible rendement de l'installation qui explique la fiabilité limitée.

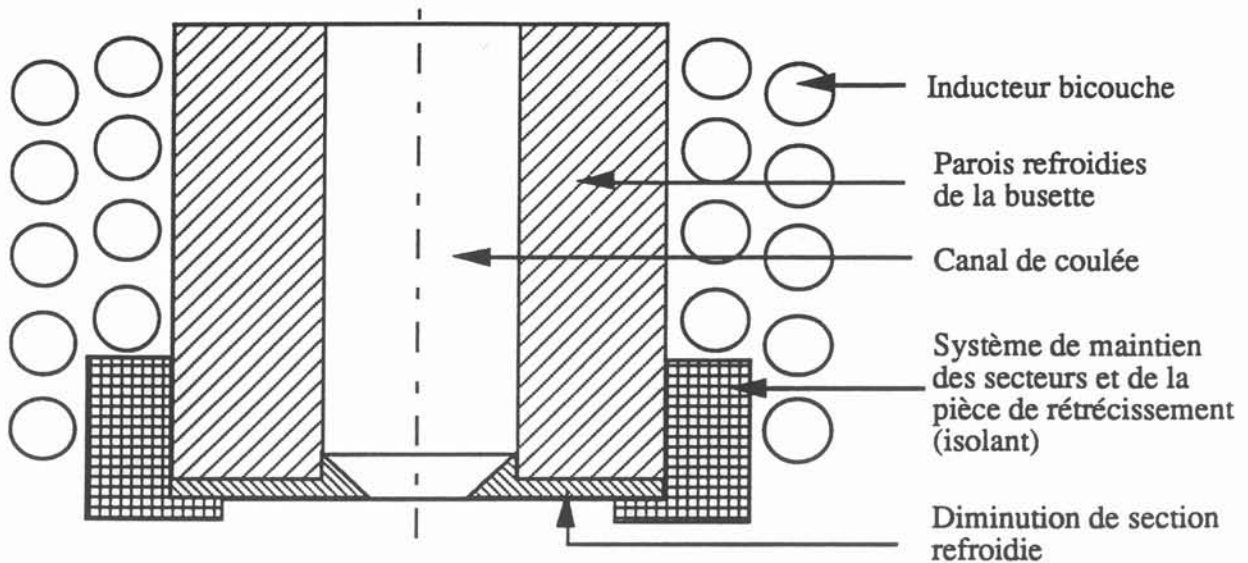
Ce mauvais rendement provient de la très grande épaisseur du creuset froid, qui engendre d'importantes pertes par effet Joule dans ce dernier. Sa géométrie étant figée, aucune amélioration n'a pu être apportée à ce niveau.

Par ailleurs, le rendement très faible s'explique également par la mauvaise répartition de l'inducteur, qui n'est en regard qu'avec environ les 2/3 de la hauteur totale de la busette. Un nouvel inducteur a donc été conçu.

II.6.6. Mise en place d'un nouvel inducteur

Un nouvel inducteur a été conçu, à la fois pour augmenter le rendement de l'installation et pour limiter les fuites de champ magnétique au niveau du rétrécissement. Il comporte 9 spires disposées en bicouche, comme le montre la figure 88.

Figure 88: configuration du nouvel inducteur



Pour un générateur fonctionnant à une puissance donnée, à fréquence constante et pour une géométrie d'inducteur quasiment conservative, on peut écrire la puissance totale en fonction de la résistance totale R_t et du courant I_{ind} circulant dans l'inducteur:

- pour l'inducteur monocouche: $P = R_{t1} I_{ind1}^2$ (1)

- pour l'inducteur bicouche: $P = R_{t2} I_{ind2}^2$ (2)

soit $I_{ind2}^2 = \frac{R_{t1}}{R_{t2}} I_{ind1}^2$ (3)

Compte tenu de la théorie du transformateur, la résistance totale d'un système inductif peut être exprimée sous la forme de la somme des résistances des différents éléments du système, ramenés au primaire du transformateur équivalent au circuit inductif, soit:

- R_{ind} résistance de l'inducteur
- R_{cr} résistance du creuset
- R_{ch} résistance de la charge, ici du bouchon

Ces résistances s'expriment de façons différentes en fonction du nombre de spires n de l'inducteur:

$$R_{ind} = k_{ind} n$$

$$R_{cr} = k_{cr} n^2$$

$$R_{ch} = k_{ch} n^2$$

où k_{ind} , k_{cr} et k_{ch} sont des constantes des éléments du circuit, compte tenu des hypothèses précédemment établies (puissance et fréquence constante, inducteurs de géométrie identique)

L'expression de la résistance totale s'écrit:

$$R_t = k_{ind} n + (k_{cr} + k_{ch}) n^2 \quad (4)$$

La relation (3) devient alors:
$$I_{ind2}^2 = \frac{k_{ind} n_1 + (k_{cr} + k_{ch}) n_1^2}{k_{ind} n_2 + (k_{cr} + k_{ch}) n_2^2} I_{ind1}^2 \quad (5)$$

De plus la puissance amenée dans la charge peut s'écrire pour les deux inducteurs utilisés:

$$P_{charge1} = k_{ch} n_1^2 I_{ind1}^2$$

$$P_{charge2} = k_{ch} n_2^2 I_{ind2}^2$$

soit
$$\frac{P_{charge2}}{P_{charge1}} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{I_{ind2}^2}{I_{ind1}^2}$$

En utilisant l'expression (5), on obtient finalement:

$$\frac{P_{charge2}}{P_{charge1}} = \frac{n_2}{n_1} \frac{k_{ind} + (k_{cr} + k_{ch}) n_1}{k_{ind} + (k_{cr} + k_{ch}) n_2}$$

puisque $n_2 > n_1$, on a directement:

$$k_{ind} n_2 + (k_{cr} + k_{ch}) n_1 n_2 > k_{ind} n_1 + (k_{cr} + k_{ch}) n_1 n_2$$

d'où:
$$\frac{n_2}{n_1} \frac{k_{ind} + (k_{cr} + k_{ch}) n_1}{k_{ind} + (k_{cr} + k_{ch}) n_2} > 1$$

et finalement $P_{charge2} > P_{charge1}$

De la même manière le rapport des modules du champ magnétique moyen entre les deux inducteurs peut être évalué:

En négligeant les effets d'extrémités, on peut écrire:

$$\frac{B_2^2}{B_1^2} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{I_{ind2}^2}{I_{ind1}^2} \quad \text{soit d'après ce qui a été écrit précédemment:}$$

$$\frac{B_2^2}{B_1^2} = \frac{n_2}{n_1} \frac{k_{ind} + (k_{cr} + k_{ch}) n_1}{k_{ind} + (k_{cr} + k_{ch}) n_2}$$

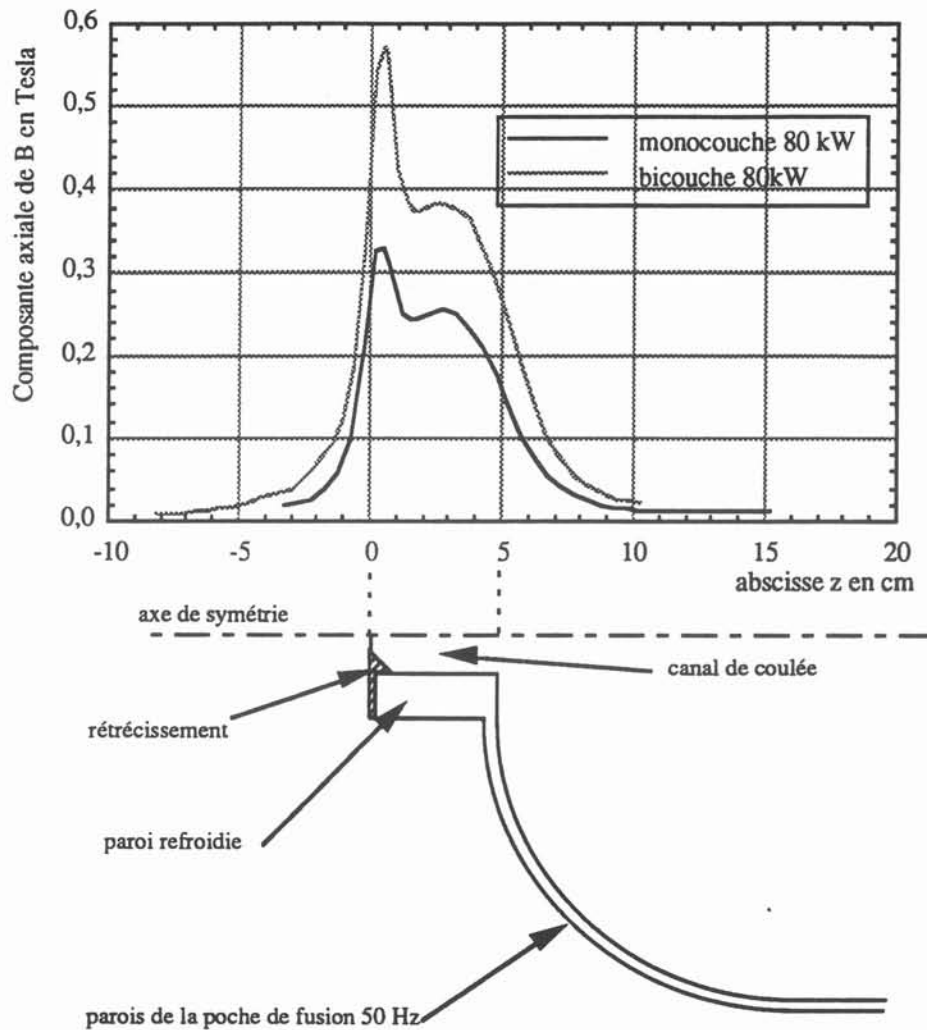
et finalement: $B_2 > B_1$

Avec cette nouvelle busette, on peut donc s'attendre à obtenir un rendement supérieur à celui de l'inducteur monocouche. En réalité, la seconde couche est plus éloignée de creuset que la première, et est écrantée par cette première couche, ce dont on n'a pas tenu compte pour ce calcul.

Les mesures effectuées avec cet inducteur ont montré que l'on obtenait un profil du champ magnétique le long de l'axe (voir figure 89) plus important que le profil obtenu avec l'inducteur monocouche. Les mesures expérimentales montrent que ce rapport est de l'ordre de:

$$\frac{B_2}{B_1} = 1,46$$

Figure 89: comparaison des mesures de champ pour les inducteurs monocouche et bicouche



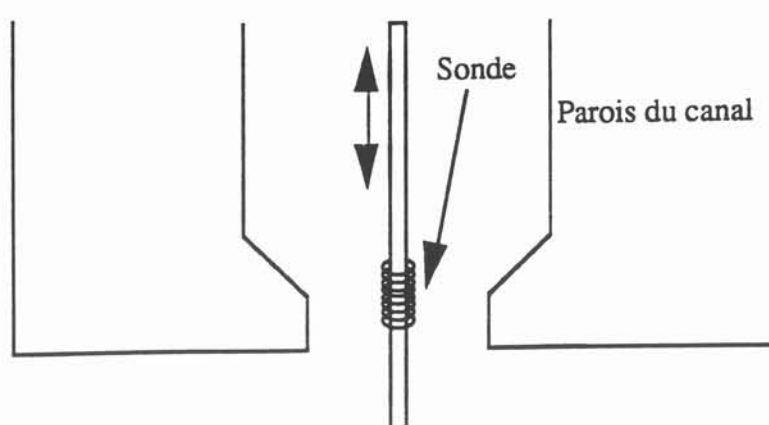
Par ailleurs, ces mesures de champ montrent également que la conservation du flux magnétique entre la section nominale de la busette et le rétrécissement n'est toujours pas vérifiée, puisque:

- pour la section nominale: $B * S = 130 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$
- pour le rétrécissement: $B * S = 77 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$,

soit une différence de 40%, ce qui est plus faible que celle enregistrée pour l'inducteur monocouche. Une telle différence de flux s'explique toujours par l'évasement des lignes de flux, puisque le flux continue à passer entre les fentes du rétrécissement.

Par ailleurs ces mesures sont entachées d'erreurs non négligeables, qui ont pour origine la grande taille de la sonde par rapport aux dimensions de la busette, et particulièrement au niveau du rétrécissement, dont la section n'est pas constante, comme le montre la figure 90.

Figure 90: Dimension de la sonde d'enregistrement par rapport à celle de la busette



Les mesures calorimétriques, effectuées de la même manière que pour l'inducteur monocouche ont amené un rendement de l'ordre de 7%, qui correspond à une puissance dans le bouchon de plus de deux fois supérieure à celle pour l'inducteur bicouche.

Figure 91: Enregistrement de la montée en température du bouchon massif calorifugé

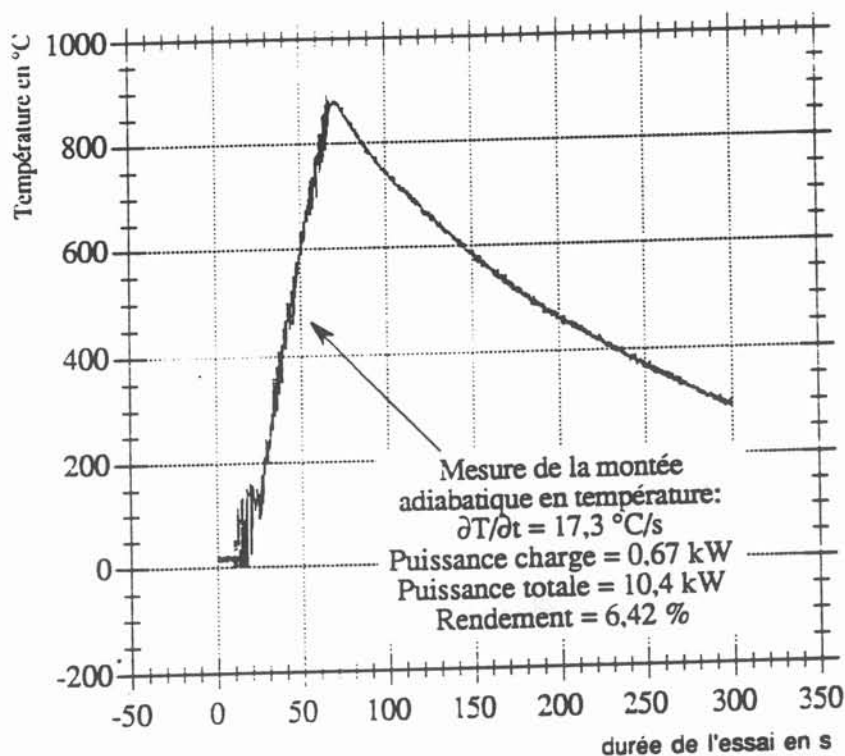
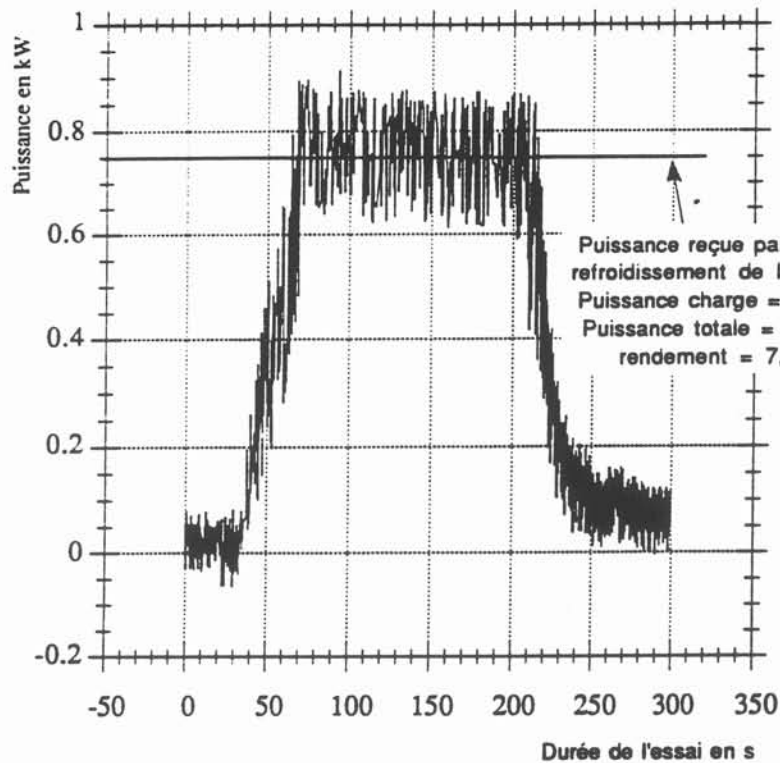


Figure 92: Enregistrement de l'échauffement de l'eau de refroidissement du bouchon creux calorifugé



Cette augmentation de puissance a permis, lors des essais de fusion du bouchon seul (c'est à dire sans charge de laiton liquide dans la poche de fusion), d'obtenir cette fois la fusion et la coulée du bouchon, pour une puissance de l'ordre de 50 kW, soit pour une puissance dans la charge de 3,5 kW.

II.6.7. Essais de coulée pendant le fonctionnement de la poche 50 Hz de fusion

Les essais effectués avec ce nouvel inducteur bicouche, pendant le fonctionnement complet du procédé de fusion, ont permis d'obtenir le fonctionnement attendu de la vanne électromagnétique, c'est à dire la coulée contrôlée du métal en fusion par l'orifice central, ainsi que l'arrêt de cette coulée.

III. ETUDE DU FIGEAGE

L'étude du problème du figeage a pour but de savoir à quelle condition le métal liquide qui descend dans la busette se solidifie quand on coupe la puissance qui alimente l'inducteur moyenne fréquence.

Les phénomènes qui apparaissent sont alors les suivants:

- descente du métal liquide à une vitesse variable dans le temps et dans l'espace.
- formation d'un gradient thermique radial, qui engendre la solidification du liquide

III.1. Hypothèse d'équilibre thermodynamique

Du point de vue strictement théorique, décrire la solidification comme une progression de la surface isotherme de fusion n'est pas correct. En effet, pour transférer des atomes de la phase liquide à la phase solide, il doit exister dans le volume considéré des régions stables pour la phase solide, auxquelles les atomes vont s'adjoindre. Ce sont les fluctuations thermiques qui génèrent à tout instant et à toute température de tels amas solides. Au delà d'une taille critique, fonction du sous refroidissement, ces amas vont se développer. Cette transformation de phase nécessite un réarrangement des atomes. A cause de ces mouvements atomiques et du déséquilibre qui leur est nécessaire, la solidification ne peut jamais être un processus d'équilibre.

Ainsi l'hypothèse d'équilibre thermodynamique ne permet pas de prédire la position du front à petite échelle spatiale. En effet, l'interface est irrégulière, par exemple dendritique. Toutefois, ces erreurs induites par ces phénomènes peuvent devenir négligeables à des échelles de temps et d'espace importantes, selon le matériau considéré et le type de refroidissement engendrant la solidification.

J. Ducrocq [27] propose un schéma d'analyse de la solidification d'une coulée, qui permet en particulier d'estimer l'importance du déséquilibre thermodynamique dans le processus de solidification. Le critère utilisé est le taux de refroidissement qui est défini comme le rapport de température du volume considéré sur le temps caractéristique du processus.

Jones [28] a classé divers modes de solidification suivant la valeur du taux de refroidissement:

Figure 93: Tableau récapitulatif des divers types de solidification en fonction de taux de refroidissement

Taux de refroid. (K/s)	Désignation	Processus
10^{-6} à 10^{-3}	très lent	Coulées dans des moules en sable
10^{-3} à 10^0	lent	Coulées et lingotières classiques
10^0 à 10^3	moyen-élevé	Fine couche, injection atomisation
10^3 à 10^6	élevé	Atomisation de poudres, extrusion de bain fondu
10^6 à 10^9 ou plus	très élevé	Dépôt de spray, "melt spinning", vitrification

Pour un écoulement de fluide sans changement d'état, le taux de refroidissement peut s'exprimer de la manière suivante:

$$\frac{\Delta T}{t} = \frac{T_0 - T_s}{t}$$

où on nomme:

T_0 la température d'entrée du fluide dans le canal

T_s la température de sortie du fluide du canal

t le temps nécessaire pour obtenir un tel refroidissement

Par contre, lorsqu'il se produit une solidification, la loi précédente ne tient pas compte de la quantité d'énergie prélevée par les parois qui permet de compenser le dégagement de chaleur latente. La quantité qui caractérise le refroidissement global du matériau considéré, qu'il soit sensible ou latent, est la puissance volumique perdue pendant le temps t :

$$P_{\text{perdue}} = \frac{\rho C_p (T_0 - T_s) + \rho L}{t}$$

avec

ρ masse volumique

L chaleur latente de solidification

C_p capacité calorifique

Le taux de refroidissement équivalent s'écrit:
$$\frac{\Delta T}{t} = \frac{T_0 - T_s + \frac{L}{C_p}}{t}$$

D'après Ducrocq, l'hypothèse d'équilibre thermodynamique n'est valable que lorsque le taux de refroidissement reste inférieur à 1000 °K/s. Avant d'aller plus loin, il a donc été nécessaire de procéder à une caractérisation du type de refroidissement, qui n'a pu être effectuée qu'à partir des essais expérimentaux réalisés lors de la mise au point de l'inducteur moyenne fréquence.

L'ajout de pertes de charge supplémentaires au moyen d'un anneau conique engendrant une diminution de diamètre avait montré que pour un diamètre inférieur à 13 mm (voir figure 83), on obtenait une solidification complète du métal liquide, ceci pour un débit mesuré expérimentalement de 0,8 kg/s, et pour une durée de 1 à 3 secondes après l'arrêt de l'alimentation de l'inducteur moyenne fréquence.

Avec la valeur des paramètres correspondant à notre configuration, soit:

- $T_0 = 910$ °C (on admet un échauffement de 10°C)

- $T_s = 900$ °C

- $L = 168000$ J/kg

- $C_p = 385$ J/kg °C

- $t = 1$ à 3 secondes

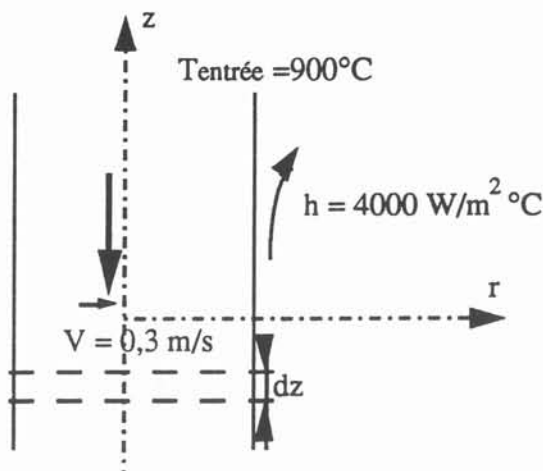
le taux de refroidissement varie alors de 450 à 150 °K/s et est donc inférieur à la limite de 1000 °K/s, en deçà de laquelle le déséquilibre thermodynamique est négligeable.

Par ailleurs, un autre type de calcul, purement analytique, permet de prévoir l'ordre de grandeur du taux de refroidissement, moyennant quelques hypothèses simplificatrices:

Considérons un canal axisymétrique (figure 94) dans lequel s'écoule à la vitesse de 0,3 m/s (issue du débit de 0,8 kg/s) un fluide dont la température d'entrée est de l'ordre de

900 °C et soumis à un refroidissement latéral, caractérisé par un coefficient de transfert thermique de 4000 W/m².s, qui a été estimé expérimentalement (paragraphe II.5.1.).

Figure 94: Estimation analytique du taux de refroidissement



La résistance thermique qui existe entre l'axe du canal et l'eau de refroidissement des parois latérales s'écrit:

$$R_{th} = \frac{1}{h} + \frac{r}{k} \text{ en m}^2 \cdot ^\circ\text{K} / \text{W} \text{ (en négligeant la courbure)}$$

Compte tenu de la valeur de ces paramètres:

$$h = 4000 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}$$

$$k = 113 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{K}$$

$$r = 10 \text{ mm}$$

$$l = 50 \text{ mm (longueur du canal),}$$

le nombre de Biot, qui correspond au rapport:

$$\frac{\text{résistance de conduction}}{\text{résistance de convection eau-métal}}$$

$$\text{vaut: Biot} = \frac{h r}{k} = 0,35$$

En première approximation, on considère alors le gradient thermique selon r comme nul dans le métal, ce qui revient à résoudre le problème comme monodimensionnel.

Nous allons alors rechercher le refroidissement sensible que subirait un métal liquide s'écoulant dans un tel canal, en considérant qu'il n'y a aucun phénomène de changement d'état:

Le bilan thermique dans une tranche d'épaisseur dz (Cf figure 94) du domaine considéré s'écrit:

$$-\pi R^2 \rho C_p V dT + k \pi R^2 \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{z+dz} - \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_z \right] - h \pi R dz (T - T_{\text{amb}}) = 0$$

$$\text{soit encore: } \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{V}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2h}{kR} (T - T_{\text{amb}}) = 0$$

$$\text{où } \alpha \text{ est la diffusivité thermique du matériau } \alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

La solution d'un tel problème s'écrit en posant $\theta = T - T_{\text{amb}}$:

$$\theta = A e^{r_1 z} + B e^{r_2 z}, \text{ avec:}$$

$$r_1 = \frac{V}{2\alpha} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4h}{V\alpha}} \right)$$

$$r_2 = \frac{V}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4a}{\left(\frac{V}{\alpha}\right)^2}} \right)$$

et où $a = \frac{2h}{kr}$

La détermination des constantes s'effectue à partir de conditions aux limites du problème, soit: à l'entrée du canal, pour $z = 0$ $T = T_i$ température initiale = 900 °C
à la sortie du canal, pour $z = l$ $T = T_{amb} = 20$ °C
ce qui amène:

$$T(z) = (T_i - T_{amb}) e^{r_2 z} + T_{amb}$$

Le taux de refroidissement est alors égal à :

$$\frac{\Delta T}{t} = \frac{T_i - T(z=l)}{t} = \frac{v}{l} (T_i - T_{amb}) (1 - e^{r_2 l})$$

$$\text{où } r_2 = \frac{V}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4a}{\left(\frac{V}{\alpha}\right)^2}} \right)$$

On obtient alors numériquement: $\frac{\Delta T}{t} = 213$ K/s

On retrouve l'ordre de grandeur de l'estimation effectuée à partir des observations expérimentales

Ainsi, l'ensemble des évaluations du taux de refroidissement global nous amènent à considérer comme approprié le modèle dit de solidification en croûte, dans lequel la solidification débute au niveau des parois froides et progresse radialement vers la zone centrale, jusqu'à obturer complètement le canal, créant ainsi la fermeture de la busette.

Il faut cependant noter que, si à l'échelle de l'ensemble de la busette, la solidification peut être estimée comme un phénomène qui s'effectue à l'équilibre thermodynamique, par contre au niveau des parois, il peut exister une solidification hors équilibre, qui entraînerait donc une température réelle de solidification inférieure à la température de changement d'état d'équilibre thermodynamique.

III.2. Ecriture analytique du problème

III.2.1. Prise en compte de la solidification

Soit un volume en cours de solidification. La loi de conservation de la chaleur tient compte de la variation temporelle de l'enthalpie du volume considéré [29]. Pour un volume contenant les deux phases, l'équation locale de l'enthalpie en tout point du domaine s'écrit:

$$H = f.H_s + (1-f).H_l \quad \text{où l'on note:} \quad \begin{array}{l} \text{solide: indice s, fraction f} \\ \text{liquide: indice l, fraction 1-f} \end{array}$$

L'enthalpie est fonction:
- de la température $T(t)$
- de la concentration pour les fractions solide et liquide, respectivement $X_s(t)$ et $X_l(t)$

La variation de l'enthalpie en fonction du temps s'écrit alors:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \left[f \cdot \frac{\partial H_s}{\partial T} + (1-f) \cdot \frac{\partial H_l}{\partial T} \right] \frac{\partial T}{\partial t} + (H_s - H_l) \frac{\partial f}{\partial t} + \left[f \cdot \frac{\partial H_s}{\partial X_s} \cdot \frac{\partial X_s}{\partial t} + (1-f) \cdot \frac{\partial H_l}{\partial X_l} \cdot \frac{\partial X_l}{\partial t} \right]$$

(1)
(2)
(3)

Le premier terme représente la variation de la chaleur sensible, dont on simplifie l'expression en la remplaçant par la chaleur spécifique moyenne du corps considéré, C_p , qui peut être fonction de la température.

Le second terme exprime le dégagement de la chaleur latente due à la transformation de phase liquide solide.

Le dernier terme, relatif au changement de concentration, est habituellement négligeable d'un point de vue thermique.

On pose donc: $\frac{\partial H}{\partial t} = C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \Delta H \frac{\partial f}{\partial t}$
 où $\Delta H = H_s - H_l$ enthalpie volumique de changement d'état

soit encore: $\frac{\partial H}{\partial t} = \left[C_p + \Delta H \frac{\partial f}{\partial T} \right] \frac{\partial T}{\partial t}$

Le dégagement de chaleur latente est ainsi pris en compte sous forme d'une modification locale de la chaleur spécifique. Puisque celle-ci varie avec la température, l'équation de conservation de la chaleur va devenir non linéaire par rapport à la température, ce qui complique le problème.

III.2.2. Ecriture du problème pour un corps pur

Le cas d'un corps pur se traite de façon relativement simple, puisque l'interface est isotherme à $T = T_{\text{fusion}}$, température de changement de phase. On découple le problème en deux systèmes, l'un représentant la loi de conservation de la chaleur pour le liquide, l'autre pour le solide. Les deux systèmes sont reliés par les conditions d'interface, c'est à dire:

- égalité des températures: $T_{\text{solide}} = T_{\text{liquide}} = T_{\text{fusion}}$
- prise en compte du dégagement de la chaleur latente par un bilan de puissance:

$$P_{\text{solide}} = P_{\text{liquide}} + P_{\text{changement d'état}}$$

Cette schématisation permet de contourner la non linéarité de l'équation de la chaleur, puisque cette non linéarité qui intervient alors dans la position du front est reportée à la frontière commune des deux domaines, comme condition aux limites. Ce modèle analytique a pu être résolu dans des cas simples [30].

Dans notre cas, ce modèle analytique, qui est une simplification du problème puisque l'on a affaire à un alliage dont l'intervalle de solidification ne se résume pas à un front, reste malgré tout complexe à résoudre, puisque les problèmes hydrauliques et thermiques sont fortement couplés: le terme de vitesse influe fortement sur la carte des températures, et celles-ci par l'intermédiaire du front de fusion qui délimite la section de passage du fluide, vont déterminer le profil des vitesses.

L'équation de conservation de la chaleur possède ainsi les caractéristiques suivantes:

- problème bidimensionnel axi-symétrique
- terme transitoire de la température
- changement d'état

- écoulement du liquide, variable fonction de l'espace, du temps et de la température
- condition aux limites de 3^{ème} espèce

La mise en équation du problème est ainsi la suivante:

Partie solide:

$$\frac{\partial T_S}{\partial t} = \alpha_S \left(\frac{\partial^2 T_S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_S}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_S}{\partial z^2} \right)$$

(où α_S est la diffusivité thermique du solide)

$$r = R_0 \text{ (rayon de la busette), } -k_S \frac{\partial T_S}{\partial r} = h (T_S - T_f)$$

(avec h coefficient d'échange entre le lait liquide et les parois froides de la vanne)

$$t = 0, \quad T_S = T_o \text{ (température initiale)}$$

Partie liquide:

$$\frac{\partial T_L}{\partial t} + U_r \frac{\partial T_L}{\partial r} + U_z \frac{\partial T_L}{\partial z} = \alpha_L \left(\frac{\partial^2 T_L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_L}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_L}{\partial z^2} \right)$$

(où α_L est la diffusivité thermique du liquide)

$$r = 0, \quad \frac{\partial T_L}{\partial r} = 0$$

Raccordement des deux systèmes au front de fusion: $r = R(z)$

Egalité des températures liquide - solide:

$$T_L = T_S = T_{CE} = 900^\circ\text{C}$$

Egalité du terme de changement d'état avec la différence des termes de diffusion entre solide et liquide: Un bilan thermique sur un volume de hauteur unitaire au niveau du front de solidification amène l'égalité suivante (voir figure 95):

$$P_S = P_L + P_{CE}, \quad \text{avec:}$$

P_L Puissance perdue par le volume considéré par conduction avec la zone liquide:

$$P_L = -k_L \frac{\partial T_L}{\partial r} 2 \pi (R - dR)$$

P_S Puissance gagnée par le volume par conduction avec la zone solide:

$$P_S = -k_S \frac{\partial T_S}{\partial r} 2 \pi R$$

P_{CE} Puissance dégagée dans le volume par chaleur latente:

$$P_{CE} = \Delta H 2 \pi R \frac{\partial R}{\partial t}$$

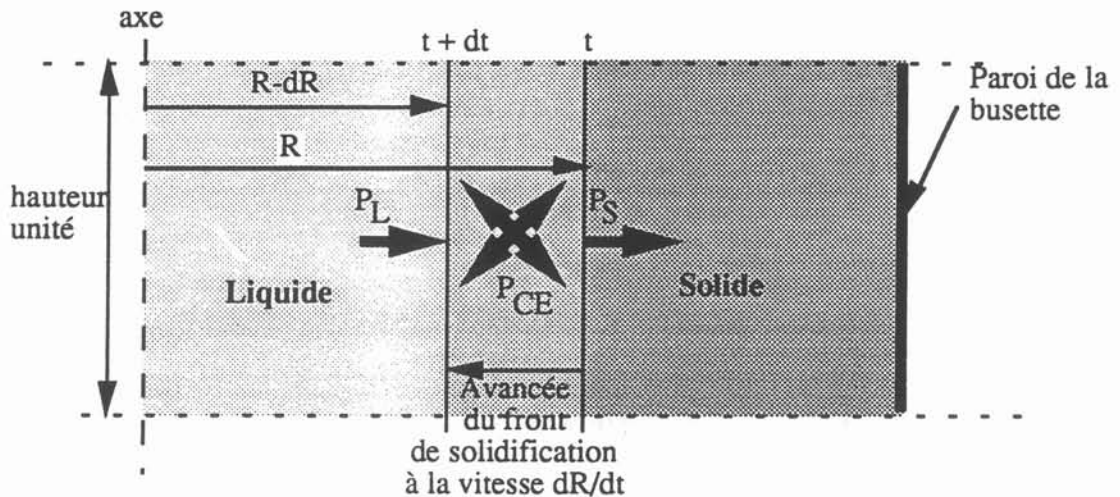
En remplaçant l'enthalpie de changement d'état par la chaleur de changement d'état L, tel que $\Delta H = \rho L$, on obtient:

$$P_{CE} = \rho L 2 \pi R \frac{\partial R}{\partial t}$$

On obtient ainsi:

$$- \rho L R \frac{\partial R}{\partial t} = (-k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} R + k_L \frac{\partial T_L}{\partial r} (R - dR))$$

Figure 95: Schématisation du bilan thermique au niveau de l'interface



La résolution de tels problèmes a pu être effectuée pour des cas de coulées continues, en considérant un état stable du front dans le temps: En effet le choix d'une vitesse constante de tirage de l'ensemble liquide - solide permet de compenser l'avancement du front de fusion qui est donc stable dans le temps, dans le repère fixe. Mais que l'on utilise la solution de Stephan [31], la méthode des transformations conformes [30], ou une méthode mi-analytique, mi-numérique utilisant les intégrales de frontières [32], ces travaux ne cadrent pas avec notre problème puisque nous nous situons dans un cas transitoire, où le terme de vitesse n'est appliqué qu'au liquide et diminue dans le temps pour finalement s'annuler.

III.3. Mise au point d'un code de calcul, basé sur la méthode des éléments finis

Compte tenu du fait que ni les équations analytiques, ni les corrélations expérimentales ne nous permettent d'atteindre l'objectif fixé, à savoir de connaître les conditions qui entraînent la formation du bouchon, l'écriture et la mise en place d'un code de calcul numérique sont nécessaires.

La difficulté du problème posé tient au couplage thermique - mécanique des fluides. Avant d'étudier ce couplage, il est nécessaire de déterminer les moyens permettant de résoudre les deux types de problèmes.

Le calcul de l'écoulement d'un fluide à travers une conduite droite avec une réduction progressive de la section de passage peut être approché analytiquement. On cherchera donc à connaître une expression des profils de chacune des composantes de la vitesse.

Comme nous l'avons vu précédemment, la résolution de l'équation de la thermique

est bien plus complexe. C'est elle qui nécessite une résolution numérique par discrétisation, qui devra donc tenir compte du terme de vitesse calculée analytiquement.

III.3.1. Ecriture des équations thermiques

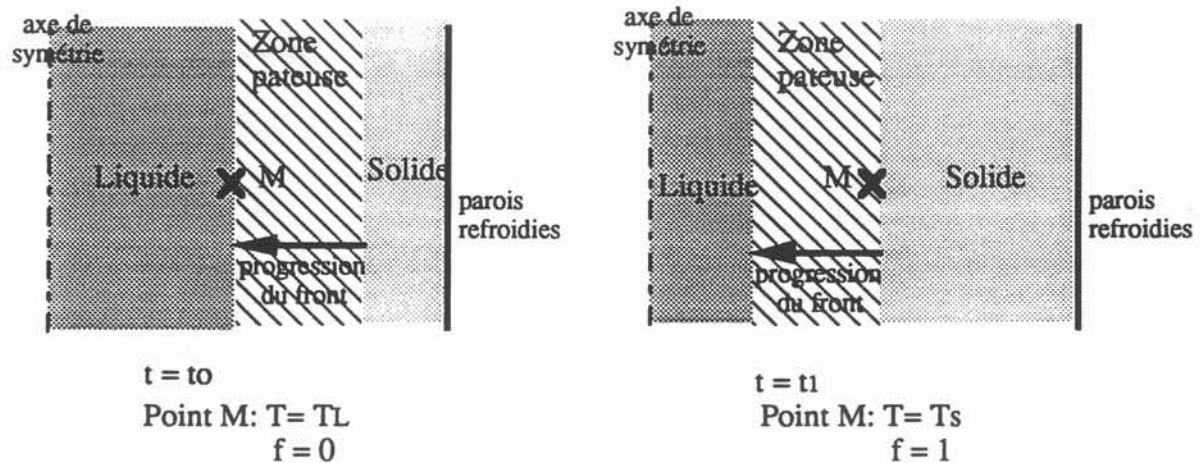
A la différence du modèle analytique présenté précédemment paragraphe II.2.2 correspondant au modèle du corps pur, l'écriture de l'équation de la chaleur avec changement de phase, dans le cas d'un alliage, ne peut pas se découpler en deux systèmes d'équations, l'un pour le solide, l'autre pour le liquide, puisque l'interface de solidification est étalée sur un intervalle de température. On reprend alors l'expression générale de la variation d'enthalpie en fonction du temps, qui se met sous la forme:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \Delta H \frac{\partial f}{\partial t} \quad , \text{ que l'on peut noter:}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{\text{sensible}} + \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{\text{CE}}$$

L'enthalpie volumique de changement d'état ΔH en un point M est définie sur la figure 96:

Figure 96: Passage de la phase liquide à la phase solide d'un point M



Elle s'exprime de la façon suivante:

$$\Delta H = \int_{t_0}^{t_1} \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{\text{CE}} dt \quad \text{soit:} \quad \Delta H = \int_{t_0}^{t_1} \Delta H \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

La modification locale de la chaleur spécifique est mise sous la forme d'une capacité calorifique locale équivalente au changement d'état C_{pce} [33] telle que:

$$\begin{aligned} \Delta H \frac{\partial f}{\partial t} &= \Delta H \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \rho C_{pce}(T) \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

L'enthalpie volumique de changement d'état devient alors:

$$\text{soit: } \Delta H = \int_{T_0}^{T_1} \rho \cdot C_{pce}(T) \cdot dT$$

L'évolution de la capacité calorifique équivalente au changement d'état en fonction de la température est complexe puisque la solidification d'un alliage liquide est caractérisée par les faits suivants [35]:

- Dans la plupart des cas, la composition de la solution solide est différente de celle du liquide qui lui donne naissance.
- Par la suite, il y a redistribution de la composition, lors de la formation du solide par un phénomène de diffusion solide.

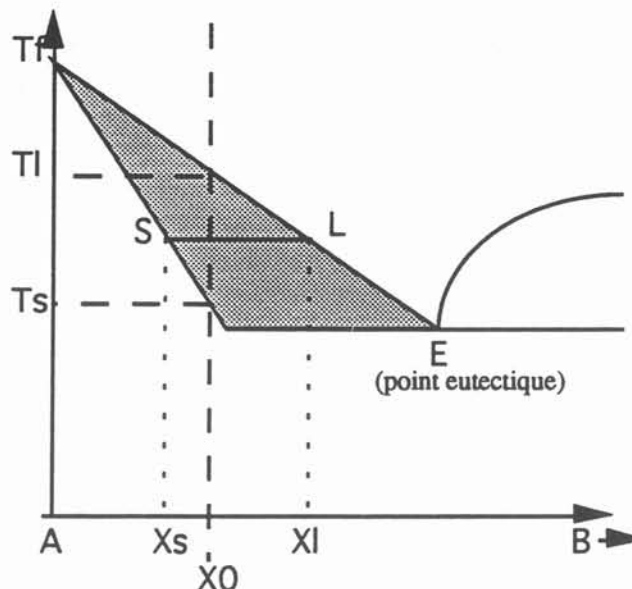
Un premier raisonnement considère que la composition du solide est identique à celle du liquide. Cela revient à dire que la diffusion homogénéise totalement le ou les solides formés. La loi de conservation des atomes amène la loi des leviers, qui s'écrit:

$$f = \frac{1}{1-k_0} \frac{T_1 - T}{T_s - T}$$

avec k_0 coefficient de distribution à l'équilibre $k_0 = \frac{X_s(T)}{X_l(T)}$, approximé par une constante (voir figure 97)

T_1 et T_s températures de la zone de changement d'état

Figure 97: Règle du levier, obtenue à partir du diagramme d'équilibre des phases

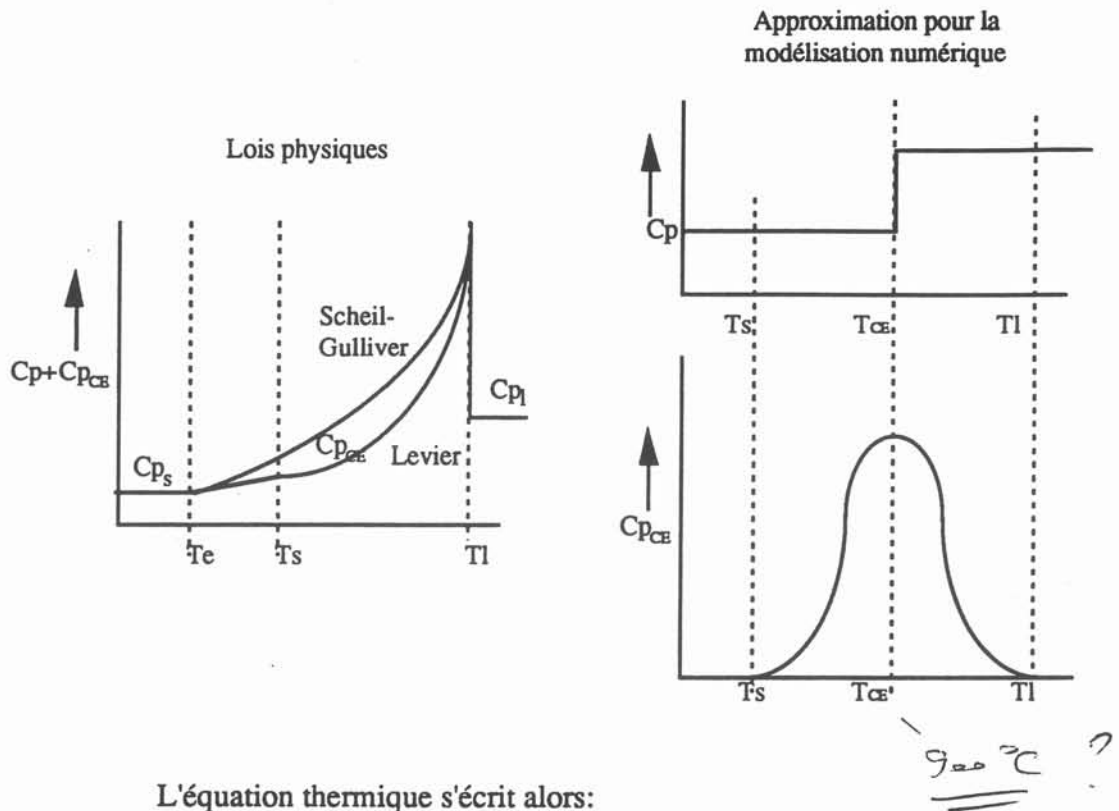


Un second modèle est celui d'une cristallisation par couche sans diffusion solide, qui amène la loi de Scheil-Gulliver:

$$1 - f = \left(\frac{T_f - T_l}{T_f - T} \right)^{-1/(1-k_0)}$$

Cette équation de Scheil-Gulliver prévoit qu'il se forme une fraction d'eutectique dans tous les cas.

Figure 99: Evolution de la capacité calorifique en fonction de la température:
Lois physiques et modélisation numérique



L'équation thermique s'écrit alors:

$$\rho [C_p + C_{pce}] \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} (-k \vec{\text{grad}} T) = Q_{th}$$

où:

$\text{div} (-k \vec{\text{grad}} T)$ est le terme de conduction à travers le matériau, de conductivité équivalente k , fonction de la température et de l'état solide ou liquide du matériau.

Q_{th} représente les sources thermiques volumiques dégagées au sein du matériau (nulles dans notre cas)

$\rho [C_p + C_{pce}] \frac{\partial T}{\partial t}$ est le terme transitoire de la chaleur en fonction du temps qui tient donc compte du dégagement local de chaleur latente en cas de changement de phase.

Dans le cas où le matériau est en mouvement à la vitesse \vec{U} , le terme transitoire fait intervenir une dérivée particulière $\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T$, qui tient compte du transport de la chaleur par la vitesse. L'équation s'écrit finalement:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_{pce} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T + \rho C_{pce} \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T + \text{div} (-k \vec{\text{grad}} T) = Q_{th}$$

A cette équation très générale sont reliées des conditions initiales et aux limites qui correspondent au problème étudié:

Initialement, à l'arrêt de la puissance électrique aux bornes de l'inducteur de la vanne électromagnétique, on considère que le fluide s'écoule dans toute la section du canal, à une température constante T_0 , supérieure à la température de changement d'état. En réalité, le liquide n'est pas complètement isotherme, mais possède un gradient thermique radial limité à

l'épaisseur de peau électromagnétique située à la périphérie, zone dans laquelle est induite la puissance Joule.

Le long de l'axe, compte tenu de l'axisymétrie, le flux thermique est nul, soit:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

A la périphérie, le refroidissement s'effectue en imposant un coefficient d'échanges thermiques h entre le métal liquide à la température T et l'eau de refroidissement des parois à la température T_p :

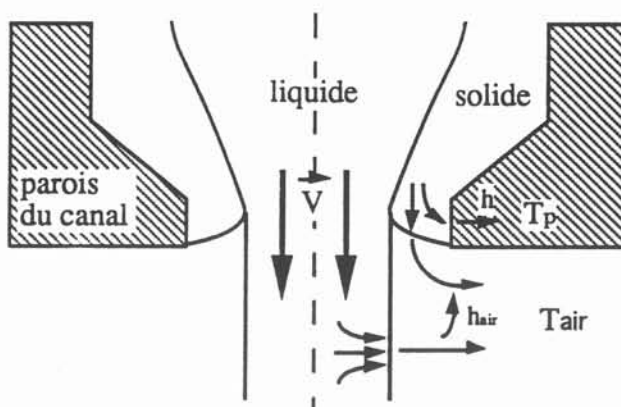
$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h (T - T_p)$$

En entrée, on considère que le métal reste liquide à la température T_0 , puisque en contact avec la charge supérieure toujours maintenue liquide par l'inducteur 50 Hz.

En sortie, aucune condition n'est fixée, le liquide s'écoulant à une température inconnue hors du domaine. Lors de la solidification, il faudrait théoriquement tenir compte du refroidissement de la zone solide par l'ambiante plus froide. On peut considérer dans un premier temps que cette source de refroidissement supplémentaire reste négligeable par rapport à la source périphérique.

La condition à la sortie du canal est plus complexe, comme il est possible de le voir sur la figure 100:

Figure 100: Schématisation des phénomènes d'échanges thermiques en sortie de canal



- La zone liquide qui s'écoule hors du canal est refroidie latéralement par convection naturelle avec l'ambiante. L'influence de ce refroidissement sur la carte thermique du métal dans le canal est en fait négligeable, compte tenu de la forte vitesse de l'écoulement liquide.

- La zone solide subit le même refroidissement par l'ambiante. Puisque le coefficient de convection naturelle h_{air} reste inférieur au coefficient d'échange thermique avec les parois refroidies du canal h , on néglige ce refroidissement.

En définitive, les seules pertes considérées à la sortie du canal sont celles provoquées par l'écoulement du liquide hors du canal et le gradient thermique selon z est alors considéré comme nul:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

Soit finalement le système complet:

$$\begin{aligned} & \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_{pce} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T + \rho C_{pce} \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T + \text{div} (-k \vec{\text{grad}} T) = 0 \\ & \text{à } t = 0, \quad \forall r \text{ et } \forall z, \quad T = T_0 \\ & \text{à } r = 0, \quad \forall z \text{ et } \forall t, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ & \text{à } r = R, \quad \forall z \text{ et } \forall t, \quad -k \frac{\partial T}{\partial r} = h (T - T_p) \\ & \text{à } z = 0, \quad \forall r \text{ et } \forall t, \quad T = T_0 \\ & \text{à } z = l, \quad \forall r \text{ et } \forall t, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

III.3.2. Choix de la méthode numérique: les éléments finis

Le logiciel FLUX EXPERT [34], est doté d'un générateur d'équations qui permet de décrire et résoudre en géométrie bidimensionnelle et tridimensionnelle des équations aux dérivées partielles, par la méthode des éléments finis. C'est un outil permettant la simulation numérique des phénomènes couplés.

Compte tenu de l'aspect généraliste de ce logiciel, qui permet d'écrire et de résoudre une équation aux dérivées partielles sans alourdir le travail par l'écriture de programmes, c'est l'outil idéal pour notre travail. Par ailleurs, la méthode des éléments finis est une méthode tout à fait indiquée puisque notre problème thermique est défini sur un domaine de frontières finies de formes qui peuvent être complexes.

L'application de la méthode des éléments finis, et plus particulièrement la méthode de Galerkin utilise la méthode des résidus pondérés, qui permet de passer de l'équation aux dérivées partielles $F(T, \frac{\partial T}{\partial r}, \frac{\partial T}{\partial z}, \dots) = 0$ à une formulation intégrale: La projection du terme $F(T, \frac{\partial T}{\partial r}, \frac{\partial T}{\partial z}, \dots)$ sur une famille de fonctions β_i , indépendantes et qui engendrent un espace vectoriel au moyen d'un produit scalaire, entraîne que tous les produits vectoriels sur le domaine Ω sont nuls:

$$\iiint_{\Omega} \beta_i F(T, \frac{\partial T}{\partial r}, \frac{\partial T}{\partial z}, \dots) d\Omega = 0$$

Le domaine d'étude est discrétisé par un ensemble d'éléments finis de formes quelconques. Les inconnues, ici les températures, sont interpolées par des polynômes définis sur chaque élément de discrétisation:

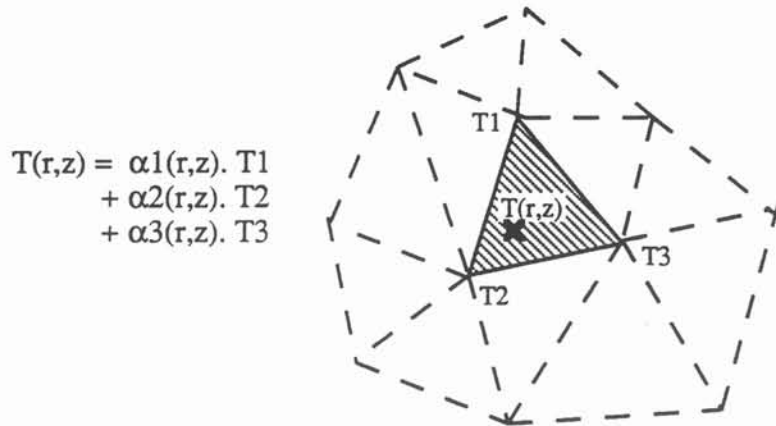
$$T = \sum_{j=1} \alpha_j T_j \quad \text{où: } \alpha_j \text{ est le polynôme que l'on détermine en}$$

fonction des coordonnées des noeuds de l'éléments considéré

T_j la température au noeud de l'élément

La figure 101 suivante reproduit un exemple de discrétisation par éléments finis:

Figure 101: Discrétisation d'une surface par éléments finis



Dans la méthode de Galerkin, les fonctions de bases β_i de l'espace de projection sont prises identiques aux fonctions d'interpolation α_j de l'inconnue T . Le système à résoudre s'écrit alors:

$$\iiint_{\Omega} \alpha_i F(\sum \alpha_j T_j, \sum \frac{\partial \alpha_j}{\partial r} T_j, \sum \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} T_j, \dots) d\Omega = 0$$

III.3.3. Application à l'équation thermique

L'application de cette méthode à l'équation de la conservation de la chaleur précédemment établie amène alors, pour tous les i et dans tout le volume considéré Ω :

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_{pce} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T d\Omega + \\ \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_{pce} \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \text{div} (-k \vec{\text{grad}} T) d\Omega = \iiint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} d\Omega \end{aligned}$$

Cette écriture représente ce qu'on appelle la formulation forte de l'équation. Puisque notre problème possède des frontières finies où existent des conditions aux limites, il est nécessaire de faire apparaître des termes d'intégrales de frontière pour les exprimer. Pour ce faire, on introduit une formulation faible de l'équation en transformant les intégrales par intégration par partie, ce qui permet en outre de diminuer l'ordre maximum des dérivées de l'inconnue. L'utilisation du théorème d'Ostrogradsky permet alors de transformer l'intégrale sur le domaine Ω en une intégrale sur la frontière Γ .

Compte tenu des conditions imposées aux frontières dans notre cas, on ne cherche à transformer en formulation faible que le terme de conduction qui s'écrit:

$$\iiint_{\Omega} \alpha_i \text{div} (-k \vec{\text{grad}} T) d\Omega = \iiint_{\Omega} \text{div} (-\alpha_i k \vec{\text{grad}} T) d\Omega + \iiint_{\Omega} \vec{\text{grad}} \alpha_i \cdot k \vec{\text{grad}} T d\Omega$$

dont le premier terme vaut:

$$\iiint_{\Omega} \text{div} (-\alpha_i k \vec{\text{grad}} T) d\Omega = - \iint_{\Gamma} \alpha_i k \vec{\text{grad}} T \cdot \vec{n} d\Gamma$$

Les différents échanges thermiques entre la frontière Γ du domaine Ω et l'extérieur s'effectuent par convection et par rayonnement, soit:

$$-\iint_{\Gamma} \alpha_i k \vec{\text{grad}} T \vec{n} d\Gamma = + \iint_{\Gamma} \alpha_i h (T - T_a) d\Gamma + \iint_{\Gamma} \alpha_i \sigma \epsilon (T^4 - T_p^4) d\Gamma \quad (1) \quad (2)$$

Le premier terme correspond au flux thermique échangé avec l'extérieur par convection, T_a étant la température extérieure au domaine et h le coefficient d'échanges convectifs.

Le second terme représente le flux thermique échangé éventuellement par rayonnement avec l'extérieur. Celui-ci est négligé dans notre cas, puisque le coefficient de convection h obtenu expérimentalement caractérise l'ensemble des pertes latérales avec les parois du creuset froid.

Les termes représentant le transport de chaleur, qu'elle soit sensible ou latente, restent exprimés en formulation forte, puisque aucune condition de frontière concernant le transport n'est exprimée.

Le problème transitoire est résolu par la méthode des différences finies implicite. Les termes intégraux s'expriment de la façon suivante:

$$\iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p T_n d\Omega - \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p T_{n-1} d\Omega \right.$$

où le second terme est un terme connu, puisque calculé au pas de temps précédent.

Tous les termes ne faisant pas intervenir le temps, sont écrits à l'instant n , correspondant à T_n inconnue. Par souci de simplicité d'écriture, on note la température à l'instant n : T et non pas T_n .

En conséquence, après multiplication par Δt , l'équation thermique s'exprime sous la forme suivante:

$$(L + \Delta t M)(T) = L_{n-1} + \Delta t Ks$$

avec:

- L l'ensemble des termes transitoires discrétisés avec T inconnue:

$$L = \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p T d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_{pce} T d\Omega$$

- M l'ensemble des termes indépendants du temps et fonction de T :

$$M = \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p \vec{U} \vec{\text{grad}} T d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_{pce} \vec{U} \vec{\text{grad}} T d\Omega + \iiint_{\Omega} \vec{\text{grad}} \alpha_i k \vec{\text{grad}} T d\Omega - \iint_{\Gamma} \alpha_i h T d\Gamma$$

- L_{n-1} terme transitoire où T est calculée au pas de temps précédent et est connue.

$$L_{n-1} = \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p T_{n-1} d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_{pce} T_{n-1} d\Omega$$

- Ks l'ensemble des termes non transitoires connus:

$$Ks = \iint_{\Gamma} \alpha_i h T_a d\Gamma$$

Chacune des i équations ainsi obtenues, issues de la projection sur les polynômes α_i , est discrétisée sur l'ensemble des différents éléments finis définissant le domaine. Dans un élément, l'inconnue T est exprimée en tout point en fonction:

- des polynômes d'interpolation α_j , fonction des coordonnées des noeuds de l'élément
- des températures aux noeuds de l'élément, T_j , qui sont inconnues et constantes

Par conséquent, les intégrales ne portent que sur les polynômes d'interpolation α_j , et non pas sur les températures aux noeuds. Sur chacun de ces éléments, les intégrales sont calculées numériquement par une méthode de Gauss, qui nécessite de calculer la valeur des termes de l'intégrale en des points bien particuliers, appelés points d'interpolation. On obtient ainsi un système d'équation complet, qui permet de déterminer les températures aux noeuds de l'ensemble du domaine.

Lorsque les différentes propriétés physiques du matériaux sont fonction de la température, on obtient un problème non linéaire, qu'il est nécessaire de résoudre de manière itérative. Dans notre configuration, la capacité calorifique équivalente au changement d'état est fonction de la température. La méthode employée est celle de Newton Raphson, qui est la suivante:

La discrétisation des formulations intégrales des équations thermiques à partir de l'approximation par la famille de fonction α_i telle que $T = \sum_{j=1} \alpha_j T_j$ amène un système non linéaire qui s'écrit:

$$\begin{aligned} f_1(T_1, T_2, \dots, T_n) &= 0 \\ f_2(T_1, T_2, \dots, T_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(T_1, T_2, \dots, T_n) &= 0 \end{aligned}$$

qui est équivalent à l'écriture $F(T) = 0$

A partir d'une première localisation grossière des températures par résolution de l'équation linéarisée, on obtient une solution initiale T_0 , telle que l'on peut écrire un développement en série limitée en T autour de T_0 :

$$F(T) = F(T_0 + DT) = 0$$

$$F(T) \approx F(T_0) + J(T_0) DT \approx 0$$

avec J la matrice Jacobienne qui se définit comme suit:

$$J(T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial T_1} & \frac{\partial f_1}{\partial T_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial T_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial T_1} & \frac{\partial f_2}{\partial T_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial T_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial T_1} & \frac{\partial f_n}{\partial T_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial T_n} \end{bmatrix}$$

Appliquée à T_0 , on obtient un système matriciel que l'on résout:

$$\Delta T \approx - [J (T_0)^{-1} F(T_0)]$$

d'où on déduit une solution plus précise: $T \approx T_0 + \Delta T$

A partir de cette nouvelle solution, on recommence alors les calculs jusqu'à obtenir la convergence souhaitée.

Pour mettre en oeuvre ces calculs, il est donc nécessaire de connaître la matrice Jacobienne correspondant à notre équation thermique, c'est à dire qu'il faut calculer le terme:

$$\frac{\partial}{\partial T_j} \left\{ \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_{pce} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T d\Omega + \right. \\ \left. \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_{pce} \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \text{div} (-k \vec{\text{grad}} T) d\Omega - \iiint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} d\Omega \right\}$$

avec $T = \sum_{j=1} \alpha_j T_j$

En développant cette expression, on obtient ainsi toute une série d'intégrants supplémentaires à définir, nécessaires au calcul itératif. On peut montrer par le calcul que pour un système qui se définit par $(L_n + \Delta t M)(T) = L_{n-1} + \Delta t K_s$, la matrice Jacobienne est constituée des termes L_n et M , avec des termes complémentaires issus du calcul, soit:

$$J = L + \Delta L + M + \Delta M$$

où les différents termes sont exprimés dans le tableau 114

Ce type de résolution permettant de tenir compte des non linéarités, est effectué à chaque pas de temps. Il aboutit ainsi à la solution des températures à chaque noeud, en fonction du temps.

Figure 102: Tableau récapitulatif des différentes intégrales

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_{pce} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T + \rho C_{pce} \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T + \text{div} (-k \vec{\text{grad}} T) = 0$$

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

	L	ΔL	M	ΔM	K_s	I_{n-1}
1	$\iiint_a \alpha_i \alpha_j \rho C_p d\Omega$	$\iiint_a \alpha_i \alpha_j T \frac{\partial \rho}{\partial T} C_p d\Omega$ $\iiint_a \alpha_i \alpha_j T \rho \frac{\partial C_p}{\partial T} d\Omega$				$\iiint_a \alpha_i \alpha_j \rho C_p d\Omega$
2	$\iiint_a \alpha_i \alpha_j \rho C_{pce} d\Omega$	$\iiint_a \alpha_i \alpha_j T \frac{\partial \rho}{\partial T} C_{pce} d\Omega$ $\iiint_a \alpha_i \alpha_j T \rho \frac{\partial C_{pce}}{\partial T} d\Omega$				$\iiint_a \alpha_i \alpha_j \rho C_{pce} d\Omega$
3			$\iiint_a \alpha_i \text{grad } \alpha_j V \rho C_p d\Omega$	$\iiint_a \alpha_i \alpha_j V \text{grad } T \frac{\partial \rho}{\partial T} C_p d\Omega$ $\iiint_a \alpha_i \alpha_j V \text{grad } T \rho \frac{\partial C_p}{\partial T} d\Omega$		
4			$\iiint_a \alpha_i \text{grad } \alpha_j V \rho C_{pce} d\Omega$	$\iiint_a \alpha_i \alpha_j V \text{grad } T \frac{\partial \rho}{\partial T} C_{pce} d\Omega$ $\iiint_a \alpha_i \alpha_j V \text{grad } T \rho \frac{\partial C_{pce}}{\partial T} d\Omega$		
5			$\iiint_a \text{grad } \alpha_i \text{grad } \alpha_j k d\Omega$ $\iint_r \alpha_i \alpha_j h d\Gamma$	$\iiint_a \text{grad } \alpha_i \text{grad } T \alpha_j \frac{\partial k}{\partial T} d\Omega$ $\iint_r \alpha_i \alpha_j T \frac{\partial h}{\partial T} d\Gamma$ $\iint_r \alpha_i \alpha_j T_{amb} \frac{\partial h}{\partial T} d\Gamma$	$\iint_r \alpha_i h T_{amb} d\Gamma$	

III.3.4. Etude de la stabilité

III.3.4.1. Stabilité dans l'espace

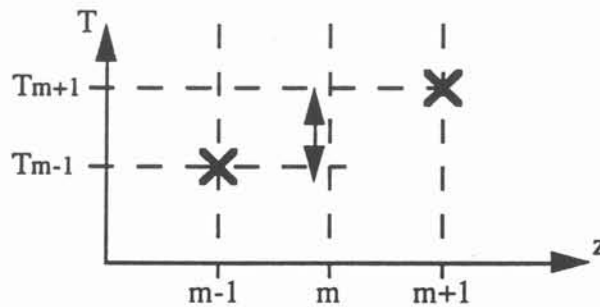
Quand la vitesse devient importante, les termes de convection peuvent prédominer sur les termes de diffusion. On peut alors être confronté à un problème de stabilité [35], c'est à dire que le terme de convection va "transporter" l'erreur existant en un point, pour l'ajouter à l'erreur des points voisins.

On considère qu'il y a stabilité dans l'espace, si la valeur de la température en un point reste comprise entre les températures des points voisins, lorsqu'il n'existe aucun terme source, comme le montre la figure 103.

La condition de stabilité pour un modèle monodimensionnel est donc:

$$T_{m-1} \leq T_m \leq T_{m+1} \quad (\text{ou l'inverse, selon les cas})$$

Figure 103: Représentation de la condition de stabilité spatiale



L'équation de la conservation de la chaleur s'écrit en 1D, et en l'absence de termes sources:

$$\rho C_p U \frac{\partial T}{\partial z} - k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

La discrétisation en différences finies centrées amène:

$$\rho C_p U \frac{T_{m+1} - T_{m-1}}{2\Delta z} - k \frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta z^2} = 0$$

soit:

$$\frac{\rho C_p U \Delta z}{2k} = \frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{T_{m+1} - T_{m-1}}$$

A partir de la condition de stabilité précédente on montre que:

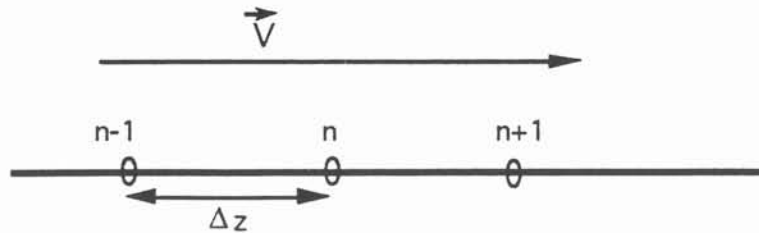
$$T_{m-1} + T_{m+1} - 2T_m \leq T_{m+1} - T_{m-1}$$

Lorsqu'on résout l'équation thermique avec un terme de transport, un des critères à respecter pour avoir la stabilité des calculs est donc que le nombre de Peclet défini comme suit, soit inférieur à 2:

$$Pe = \frac{\rho C_p}{k} U \Delta z \leq 2$$

Compte tenu des fortes vitesses possibles, nous avons cherché un schéma numérique qui soit inconditionnellement stable.

Figure 104: Discrétisation mono-dimensionnelle



Pour tenir compte de l'effet de la vitesse, une nouvelle discrétisation de la dérivée est définie, qui accroît l'importance de la valeur de l'inconnue au point en amont du point considéré :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta z}$$

Avec décentrage l'équation discrétisée s'écrit :

$$\rho C_p U \frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta z} = k \frac{T_{n+1} - 2T_n + T_{n-1}}{\Delta z^2}$$

Elle peut également s'exprimer sous la forme :

$$\rho C_p U \frac{T_{n+1} - T_{n-1}}{2\Delta z} = \left(k + \frac{\rho C_p U}{2} \Delta z\right) \frac{T_{n+1} - 2T_n + T_{n-1}}{\Delta z^2}$$

Le terme de décentrage revient donc à introduire dans l'équation centrée un terme supplémentaire $k_e = \frac{\rho C_p U \Delta z}{2}$ qui correspond à une conductivité thermique anisotrope atténuant les effets instables de la vitesse.

Avec un tel schéma, le nombre de Peclet vaut :

$$Pe = \frac{\rho C_p}{k + k_e} U \Delta z \quad \text{soit} \quad Pe = \frac{1}{\frac{1}{\frac{\rho C_p U \Delta z}{k}} + \frac{1}{2}}$$

Ainsi quelque soit la valeur de U et donc quel que soit le nombre de Peclet en discrétisation centrée $Pe = \frac{\rho C_p U \Delta z}{k}$, le nombre de Peclet en discrétisation décentrée amont sera toujours inférieur ou égal à 2. La stabilité du schéma est donc inconditionnelle.

Pour une géométrie bidimensionnelle, où la vitesse n'est tangentielle à aucun des deux axes, cherchons à connaître l'expression de la conductivité thermique équivalente:

Dans le repère XY lié à la vitesse et où l'axe X est parallèle à la vitesse U (voir

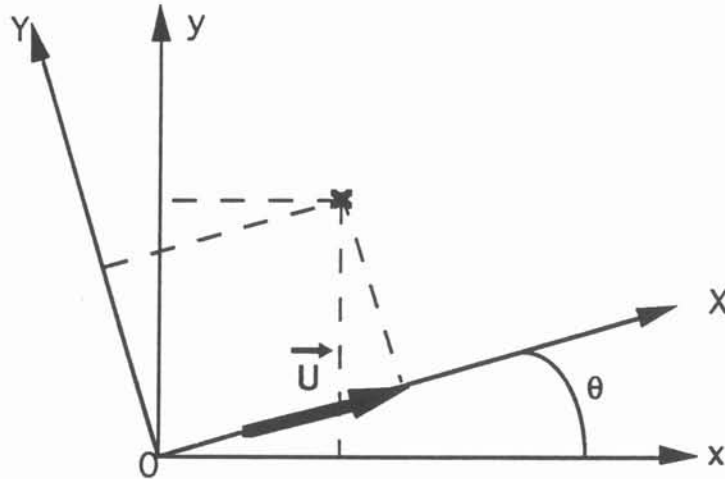
figure 105), l'équation de la thermique s'écrit:

$$\rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T + \text{div} (-(k + k_e) \vec{\text{grad}} T) = 0$$

$$\text{avec toujours } P_e = \frac{\rho C_p}{k + k_e} U \Delta X$$

$$\text{où } k_e = \frac{\rho C_p U \Delta X}{2}$$

Figure 105: Représentation d'une géométrie bidimensionnelle



soit avec les hypothèses simplificatrices habituelles:

$$\rho C_p \vec{U} \frac{\partial T}{\partial X} = (k + k_e) \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}$$

Les axes XY sont reliés au système xy par les relations suivantes:

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta$$

où l'angle θ s'exprime en fonction de la norme U de la vitesse et

de ses projections sur le système d'axes xy lié au domaine: $\cos \theta = \frac{U_x}{U}$

$$\sin \theta = \frac{U_y}{U}$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned} \rho C_p U \cos \theta \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p U \sin \theta \frac{\partial T}{\partial y} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_e \cos^2 \theta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_e \sin^2 \theta \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ &\quad + 2 k_e \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

soit donc

$$\rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T = \text{div}(k \vec{\text{grad}} T) + \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} k_e \text{div} \vec{\text{grad}} T$$

Le terme de décentrage est donc un tenseur qui s'écrit:

$$\bar{k}_e = \begin{vmatrix} U_x U_x & U_x U_y \\ U_x U_y & U_y U_y \end{vmatrix} \frac{1}{U^2} k_e$$

Pour rendre le tenseur indépendant de la direction de la vitesse, on approxime la taille de la maille selon X, ΔX , par une taille moyenne $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Dans notre repère axisymétrique (r,z), l'on a alors:

$$k_e = \frac{\rho C_p U \Delta X}{2} \quad \text{avec } \Delta X = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

et le tenseur de décentrage s'écrit :

$$\bar{k}_e = \frac{1}{2} \rho C_p \begin{vmatrix} U_x U_x & U_x U_y \\ U_x U_y & U_y U_y \end{vmatrix} \frac{\sqrt{\Delta r^2 + \Delta z^2}}{U}$$

Application à la méthode des éléments finis

L'équation complète de la thermique, avec l'implantation du terme de décentrage s'écrit sous forme intégrale forte:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_{pce} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T d\Omega + \\ & \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_{pce} \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \text{div} (-k \vec{\text{grad}} T) d\Omega + \iiint_{\Omega} \alpha_i \text{div} (-\bar{k}_e \vec{\text{grad}} T) d\Omega \\ & = \iiint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} \end{aligned}$$

La mise en formulation intégrale faible du terme supplémentaire de décentrage amène:

$$\iiint_{\Omega} \alpha_i \text{div} (-\bar{k}_e \vec{\text{grad}} T) d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{\text{grad}} \alpha_i \cdot \bar{k}_e \vec{\text{grad}} T d\Omega + \iint_{\Gamma} \alpha_i \bar{k}_e \vec{\text{grad}} T \cdot \vec{n} d\Gamma$$

Comme précédemment, il est nécessaire de calculer la matrice Jacobienne provenant de l'équation complète, contenant le terme supplémentaire de décentrage. Celui s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial T_j} \left(\iiint_{\Omega} \vec{\text{grad}} \alpha_i \cdot \bar{k}_e \vec{\text{grad}} (\sum \alpha_j T_j) d\Omega \right)$$

De la même manière que dans le cas sans décentrage, on montre par le calcul que pour un système qui se définit par $(L_n + \Delta t M)(T) = L_{n-1} + \Delta t K_s$, la matrice Jacobienne est constituée des termes L_n et M , avec des termes complémentaires issus du calcul, soit:

$$J = L + \Delta L + M + \Delta M$$

où les différents termes sont exprimés dans la figure 106

Figure 106: Tableau récapitulatifs des différentes intégrales avec terme de décentrage

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_{pce} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T + \rho C_{pce} \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} T + \text{div} (-k \vec{\text{grad}} T) + \text{div} (-k_e \vec{\text{grad}} T) = 0 \quad (1)$$

$$(2)$$

$$(3)$$

$$(4)$$

$$(5)$$

$$(6)$$

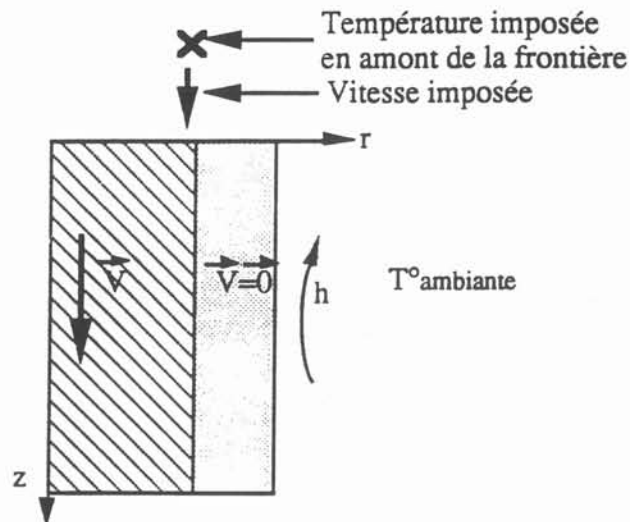
	L	ΔL	M	ΔM	Ks	I_{n-1}
1	$\iiint_a \alpha_i \alpha_j \rho C_p d\Omega$	$\iiint_a \alpha_i \alpha_j T \frac{\partial \rho}{\partial T} C_p d\Omega$ $\iiint_a \alpha_i \alpha_j T \rho \frac{\partial C_p}{\partial T} d\Omega$				$\iiint_a \alpha_i \alpha_j \rho C_p d\Omega$
2	$\iiint_a \alpha_i \alpha_j \rho C_{pce} d\Omega$	$\iiint_a \alpha_i \alpha_j T \frac{\partial \rho}{\partial T} C_{pce} d\Omega$ $\iiint_a \alpha_i \alpha_j T \rho \frac{\partial C_{pce}}{\partial T} d\Omega$				$\iiint_a \alpha_i \alpha_j \rho C_{pce} d\Omega$
3			$\iiint_a \alpha_i \text{grad } \alpha_j V \rho C_p d\Omega$	$\iiint_a \alpha_i \alpha_j V \text{grad } T \frac{\partial \rho}{\partial T} C_p d\Omega$ $\iiint_a \alpha_i \alpha_j V \text{grad } T \rho \frac{\partial C_p}{\partial T} d\Omega$		
4			$\iiint_a \alpha_i \text{grad } \alpha_j V \rho C_{pce} d\Omega$	$\iiint_a \alpha_i \alpha_j V \text{grad } T \frac{\partial \rho}{\partial T} C_{pce} d\Omega$ $\iiint_a \alpha_i \alpha_j V \text{grad } T \rho \frac{\partial C_{pce}}{\partial T} d\Omega$		
5			$\iiint_a \text{grad } \alpha_i \text{grad } \alpha_j k d\Omega$ $\iint_r \alpha_i \alpha_j h d\Gamma$	$\iiint_a \text{grad } \alpha_i \text{grad } T \alpha_j \frac{\partial k}{\partial T} d\Omega$ $\iint_r \alpha_i \alpha_j T \frac{\partial h}{\partial T} d\Gamma$ $\iint_r \alpha_i \alpha_j T_{amb} \frac{\partial h}{\partial T} d\Gamma$	$\iint_r \alpha_i h T_{amb} d\Gamma$	
6			$\iiint_a \text{grad } \alpha_i \text{grad } \alpha_j C_{xx} d\Omega$ $\iiint_a \text{grad } \alpha_i \text{grad } \alpha_j C_{xx} d\Omega$ $\iiint_a \text{grad } \alpha_i \text{grad } \alpha_j C_{xx} d\Omega$ $\iiint_a \text{grad } \alpha_i \text{grad } \alpha_j C_{yy} d\Omega$	$\iiint_a \text{grad } \alpha_i \alpha_j V X \frac{\partial C_{xx}}{\partial T} d\Omega$ $\iiint_a \text{grad } \alpha_i \alpha_j V Y \frac{\partial C_{xy}}{\partial T} d\Omega$ $\iiint_a \text{grad } \alpha_i \alpha_j V X \frac{\partial C_{xx}}{\partial T} d\Omega$ $\iiint_a \text{grad } \alpha_i \alpha_j V Y \frac{\partial C_{yy}}{\partial T} d\Omega$		

Le test suivant, effectué pour un simple calcul thermique avec un terme de transport, avec et sans terme de décentrage, montre l'influence du terme de décentrage sur la carte thermique:

Soit une géométrie cylindrique, constituée de deux domaines:

- une vitesse constante imposée au centre
- une vitesse nulle dans la zone périphérique

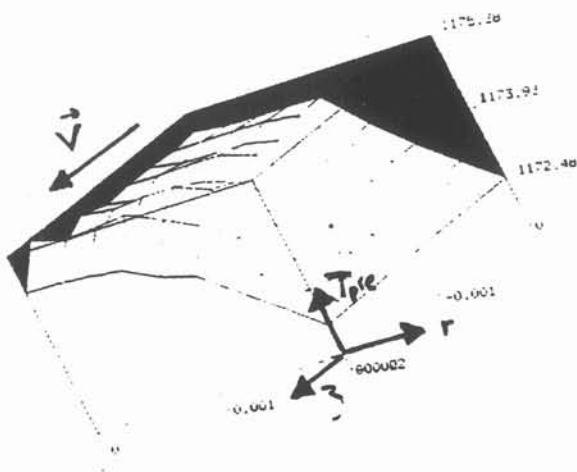
Figure 107: Géométrie du cas test de l'influence du décentrage



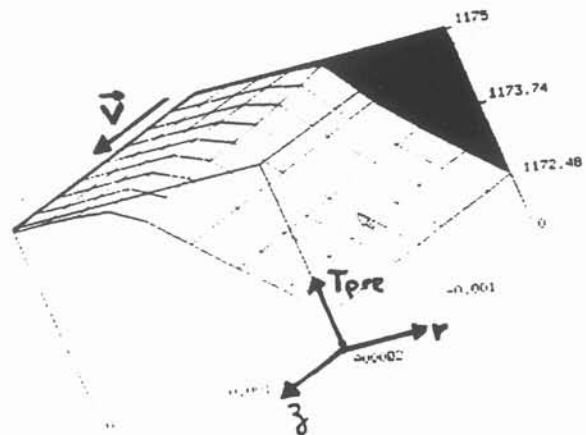
Les résultats sont représentés sous formes d'élévations en température (figure 108). Ils montrent qu'à forte vitesse, et sans décentrage, on observe des oscillations de température qui augmentent dans le sens de la vitesse: L'erreur est ainsi propagée et amplifiée par la vitesse. Lorsque l'équation thermique avec le terme de décentrage est résolue, on n'observe plus aucune oscillation.

Figure 108: comparaison des résultats avec et sans terme de décentrage

Elevation en température
sans terme de décentrage



Elevation en température
avec terme de décentrage



III.3.4.2. Stabilité temporelle

Toute erreur de calcul commise au pas de temps précédent va être transmise au pas suivant. Un système sera stable quand il n'y aura pas d'augmentation de l'erreur en fonction du temps, soit:

$$\left| \frac{\text{erreur}(n)}{\text{erreur}(n-1)} \right| \leq 1$$

Dans le concept de stabilité au sens de Von Neuman [36], on considère que la fonction erreur peut être exprimée sous forme d'une décomposition en série de Fourier complexe, et qu'elle est donc décomposée sur une base de fonctions de la forme:

$$\beta_{m,\omega}^{n,\omega} = b_{n,\omega} e^{i\omega x_m}$$

avec $b_{n,\omega}$ le terme d'erreur en temps

$e^{i\omega x_m}$ le terme d'erreur en espace

où n pas de temps

m pas d'espace (x_m est l'abscisse)

ω est une pulsation quelconque

La stabilité au sens de Von Neuman est alors que chaque terme $\left| \frac{b_{n,\omega}}{b_{n-1,\omega}} \right| \leq 1$.

Il est alors possible d'étudier le comportement de ces fonctions de base quand on les soumet à l'opérateur différentiel de l'équation que l'on veut résoudre numériquement [47]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = L(T)$$

où L est un opérateur différentiel spatial selon z .

La discrétisation de l'équation selon un schéma implicite amène:

$$\frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta t} = A T_n$$

où A est l'opérateur différentiel discrétisé au temps n

L'étude de la stabilité appliquée à cette équation amène:

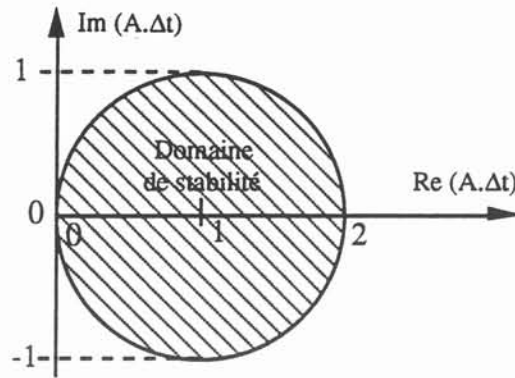
$$\frac{b_{n,\omega} - b_{n-1,\omega}}{\Delta t} = A b_{n,\omega}$$

$$\text{soit } \Delta t \cdot A = 1 - \frac{1}{z} \quad \text{où } z = \frac{b_{n,\omega}}{b_{n-1,\omega}}$$

Le domaine de stabilité est donc défini par cette équation avec $|z| \leq 1$.

Dans une représentation en $\Delta t \cdot A$, ce domaine correspond à un cercle de rayon unité (Figure 109).

Figure 109: Domaine de stabilité pour un schéma implicite



Pour un opérateur différentiel L déterminé, il est donc possible de voir comment il faut choisir les paramètres afin d'obtenir un schéma qui reste stable. L'application de cette étude à une équation thermique sans terme de transport et discrétisée de façon implicite, montre que le schéma est inconditionnellement stable. Par contre lorsque l'on introduit un terme de transport, le problème se complique:

L'équation de la conservation de la chaleur monodimensionnelle s'écrit:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p U \frac{\partial T}{\partial z} - k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

En schéma implicite décentré amont, avec U dans le sens contraire au vecteur de base, on discrétise les différents éléments. On obtient:

$$\rho C_p \frac{T_m^n - T_m^{n-1}}{\Delta t} + \rho C_p U \frac{T_{m+1}^n - T_m^n}{\Delta z} - k \frac{T_{m-1}^n - 2T_m^n + T_{m+1}^n}{\Delta z^2} = 0$$

En appliquant le concept de stabilité au sens de Von Neumann, on obtient une expression où apparaissent les fonctions de base de la fonction erreur: $\beta_{m,\omega}^{n,\omega}$

$$\rho C_p \frac{\beta_{m,\omega}^{n,\omega} - \beta_{m,\omega}^{n-1,\omega}}{\Delta t} + \rho C_p U \frac{\beta_{m+1,\omega}^{n,\omega} - \beta_{m,\omega}^{n,\omega}}{\Delta z} - k \frac{\beta_{m-1,\omega}^{n,\omega} - 2\beta_{m,\omega}^{n,\omega} + \beta_{m+1,\omega}^{n,\omega}}{\Delta z^2} = 0$$

soit:

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{k}{\rho C_p} (b_{n,\omega} e^{i\omega(x+\Delta x)} - 2b_{n,\omega} e^{i\omega x} + b_{n,\omega} e^{i\omega(x-\Delta x)}) + b_{n,\omega} e^{i\omega x} - \frac{\Delta t}{\Delta x} U (b_{n,\omega} e^{i\omega x} - b_{n,\omega} e^{i\omega(x+\Delta x)}) = b_{n-1,\omega} e^{i\omega x}$$

$$\text{soit: } \frac{b_{n,\omega}}{b_{n-1,\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} U (1 - e^{i\omega \Delta x}) - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{k}{\rho C_p} (e^{i\omega \Delta x} - 2 + e^{-i\omega \Delta x})}$$

En exprimant ce rapport sous forme d'un terme réel et d'un terme imaginaire, on obtient:

$$\frac{b_{n, \omega}}{b_{n-1, \omega}} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} U (1 - \cos \omega \Delta x - j \sin \omega \Delta x) + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{k}{\rho C_p} (1 - \cos \omega \Delta x)}$$

soit:

$$\frac{b_{n, \omega}}{b_{n-1, \omega}} = \frac{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} U (1 - \cos \omega \Delta x) + \frac{2 \Delta t}{\Delta x^2} \frac{k}{\rho C_p} (1 - \cos \omega \Delta x)}{\left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} U (1 - \cos \omega \Delta x) + \frac{2 \Delta t}{\Delta x^2} \frac{k}{\rho C_p} (1 - \cos \omega \Delta x) \right]^2 + \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} U (\sin \omega \Delta x) \right]^2} + j \frac{\frac{\Delta t}{\Delta x} U \sin \omega \Delta x}{\left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} U (1 - \cos \omega \Delta x) + \frac{2 \Delta t}{\Delta x^2} \frac{k}{\rho C_p} (1 - \cos \omega \Delta x) \right]^2 + \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} U (\sin \omega \Delta x) \right]^2}$$

Il est alors possible à partir de ces relations de tracer les courbes pour des paramètres choisis Δx , Δt et U , que l'on compare au domaine de stabilité (figure 110).

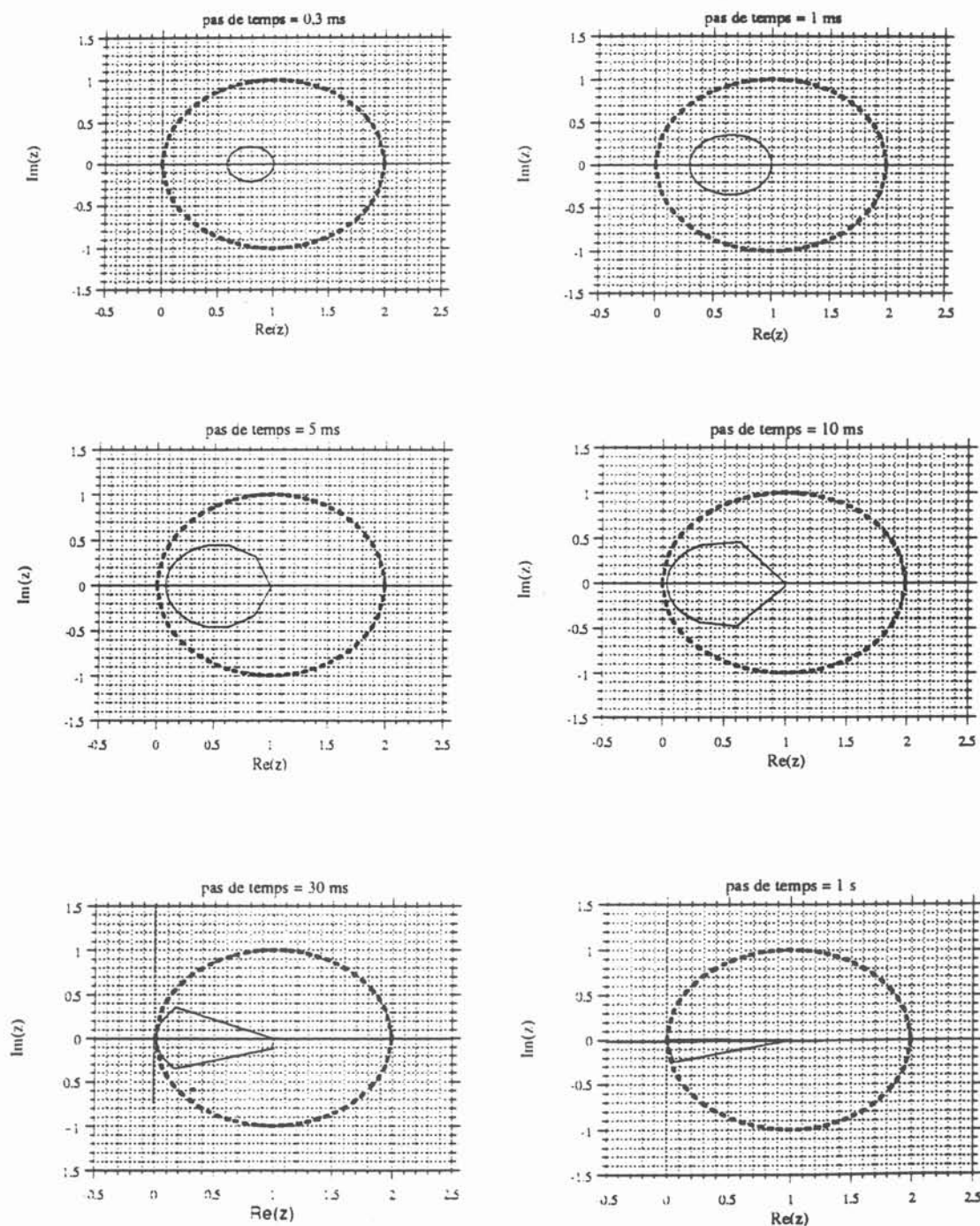
On constate que pour un décentrage amont, quels que soient les choix des paramètres, on reste toujours à l'intérieur du domaine de stabilité.

Ainsi, pour une équation thermique avec décentrage amont et munie du terme d'inertie et du terme de transport, quel que soit le pas d'espace et le pas de temps choisi, la stabilité est assurée. Il faut cependant noter que la non linéarité provenant des variations importantes de la valeur de la capacité calorifique équivalente au changement d'état en fonction de la température n'est pas prise en compte dans cette étude.

Figure 110 courbes de stabilité pour un décentrage amont (vitesse négative)

Traits pointillés gras: domaine de stabilité

Traits pleins fins: courbes $\frac{b_n, \omega}{b_{n-1}, \omega}$ fonction du pas de temps



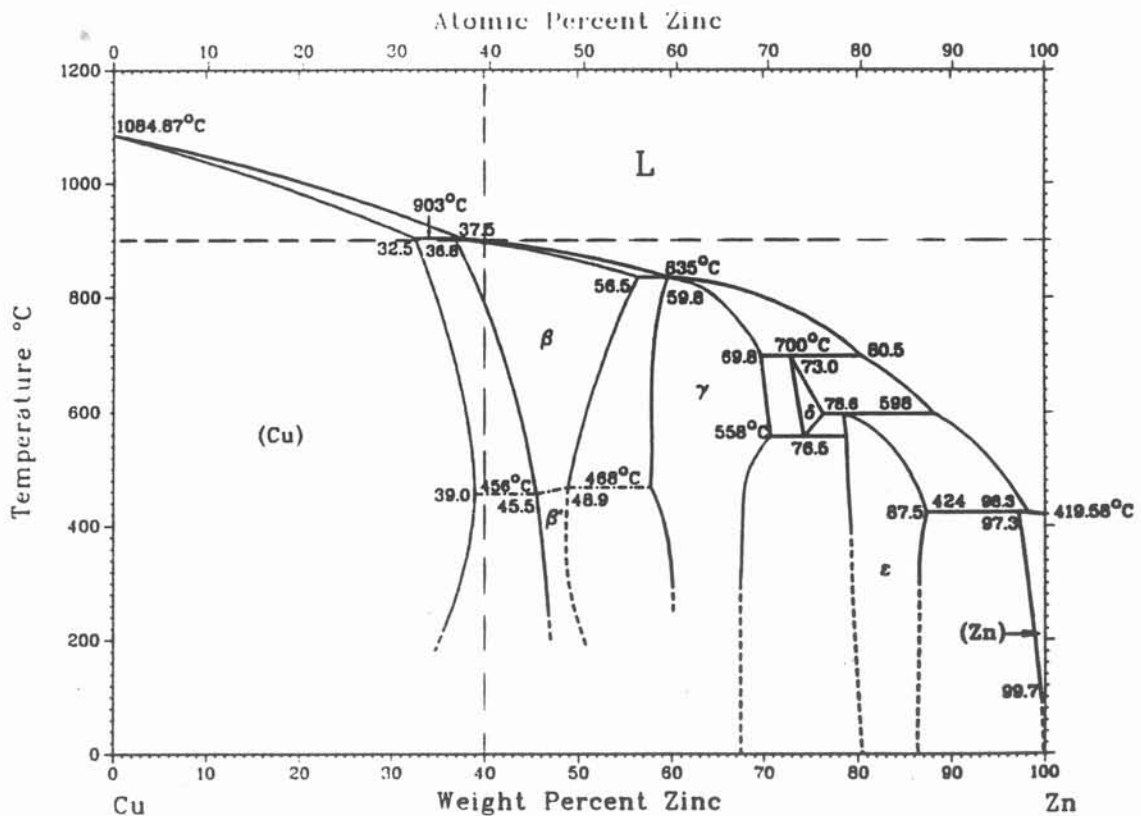
III.3.5. Détermination du front de solidification

A partir de la résolution de l'équation thermique précédente, qui nous donne à chaque pas de temps une carte des températures, il est alors possible de déterminer le front de solidification, qui sépare la partie liquide de la zone solide.

Pour un alliage, un changement de phase s'effectue sur un intervalle de température, dans lequel le matériau n'est ni complètement solide, ni complètement liquide, mais se présente sous la forme d'une zone pâteuse.

Le diagramme de changement de phase à l'équilibre thermodynamique du laiton (figure 111), montre que dans notre cas, la zone pâteuse est très réduite, de l'ordre de 5°C. Pour la résolution du problème de mécanique des fluides, il est donc possible de considérer la zone pâteuse comme concentrée en un seul point, le front de solidification (que l'on estime à 900°C), comme on le fait pour les métaux purs.

Figure 111: Diagramme d'équilibre du laiton



Par contre, pour le problème thermique, on prend en compte l'existence de la zone pâteuse: la chaleur latente est étalée sur l'intervalle très court de solidification, selon la courbe en cloche exposée précédemment (paragraphe III.3.1), centrée sur 900°C et de 5°C de base

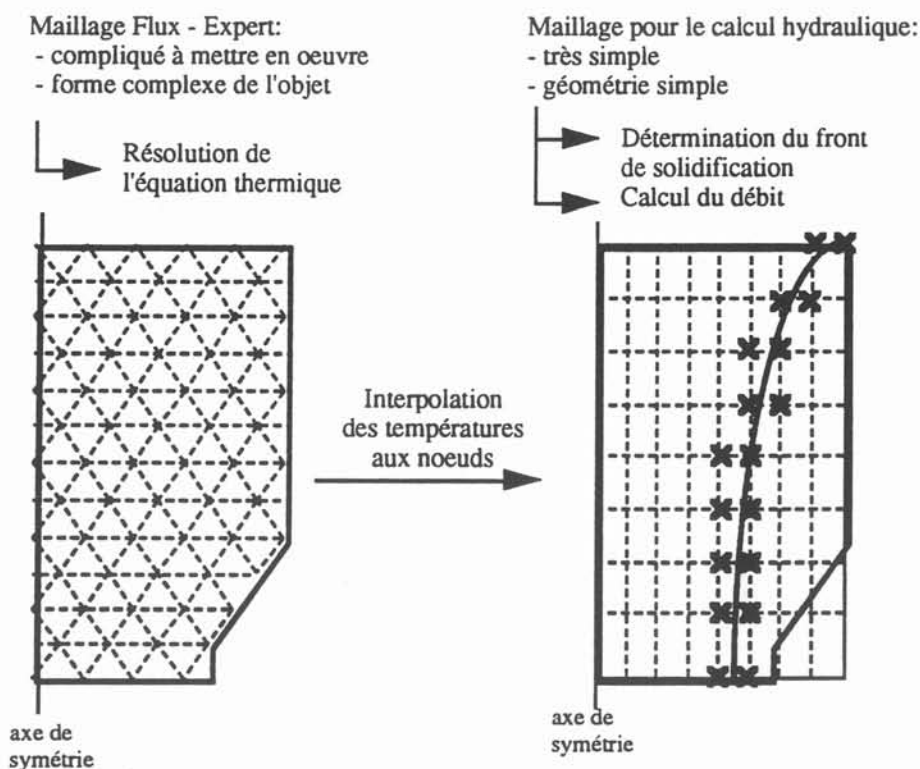
La modélisation du front de solidification s'effectue alors très simplement en recherchant l'isotherme 900°C dans le domaine considéré. On effectue ainsi à chaque noeud longitudinal selon z:

- une détermination de l'élément radial selon r dans lequel la température est comprise entre $900^{\circ}\text{C} + \epsilon$ et $900^{\circ}\text{C} - \epsilon$.

- une interpolation de la position de point à 900°C, à partir des valeurs aux noeuds de l'élément radial.

La détermination du front de solidification, puis les calculs de mécanique des fluides, sont effectués dans des sous-routines indépendantes du code de calcul FLUX-EXPERT. Pour cela, on définit un maillage indépendant, plus simple que celui utilisé dans FLUX-EXPERT; ce maillage est une grille à mailles rectangulaires régulières, comme le montre la figure 112. Le passage d'un maillage à l'autre nécessite des calculs d'interpolations des températures aux noeuds du maillage rectangulaire, à partir des températures aux noeuds du maillage de FLUX-EXPERT.

Figure 112: Représentation des deux types de maillages utilisés



III.4.6. Implantation des calculs hydrauliques dans le code numérique thermique

La vitesse, paramètre de l'équation thermique, est variable:

- dans l'espace, où elle est nulle dans la partie solidifiée, et non nulle dans la partie liquide, et dans laquelle elle possède un profil fonction de la section.

- dans le temps puisque la zone solide se développe au cours du temps aux dépends de la zone liquide.

Ce paramètre vitesse, intervenant dans des termes intégrants, doit être calculé aux points d'intégrations de chaque élément, dont on connaît les positions. Le programme doit appeler avant toute résolution thermique un programme de calcul de la vitesse fonction:

- de la position du point où est calculée la vitesse
- de la position du front de solidification
- du débit, terme moteur hydraulique (A noter que le débit est lui aussi fonction de l'avancement du front de fusion dans le canal).

Le calcul de ces paramètres hydrauliques se font de la façon suivante:

III.3.6.1 Calcul du terme moteur de l'écoulement

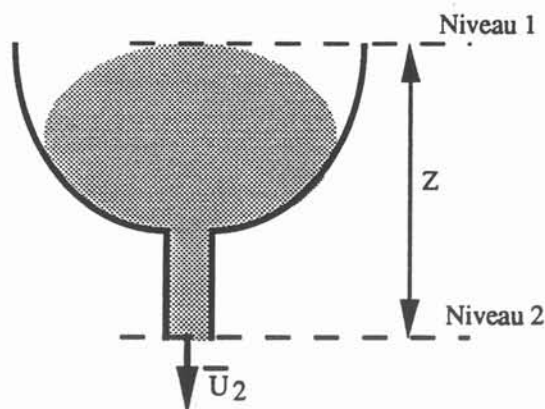
Dans la géométrie qui est la nôtre, le métal liquide s'écoule sous l'action de la pesanteur et est freiné par les frottements le long des parois de la busette, qui varient selon l'épaisseur de métal solidifié.

Le débit de liquide varie donc en fonction de la hauteur totale de fluide Z que l'on considère fixé dans un premier temps, et des pertes de charges. La relation de Bernoulli appliquée entre les points hauts (1) et bas (2) de la géométrie amène:

$$Z - \frac{1}{2} \rho \bar{U}_2^2 = H_G \quad \text{où: } \bar{U}_2 \text{ est la vitesse débitante en sortie de busette}$$

H_G est le terme des pertes de charge

Figure 113: Ecoulement de Bernoulli dans la géométrie considérée



En exprimant la vitesse débitante en fonction du débit massique \dot{m} et du diamètre D_2 de la section de passage du lait liquide en sortie de canal, on obtient:

$$Z - \frac{8 \dot{m}^2}{\rho g \pi^2 D_2^4} = H_G$$

Les pertes de charges sont établies selon le type d'écoulement. Dans notre cas, nous avons vu que le nombre de Reynolds qui caractérise l'écoulement est très grand. Le régime est donc turbulent ce qui amène l'expression des pertes de charges suivantes [38]:

$$H_G = \lambda \frac{L}{D} \frac{2 \dot{m}^2}{\rho g \pi D^2}$$

où:

L est la longueur d'un canal rectiligne
 D est le diamètre du canal

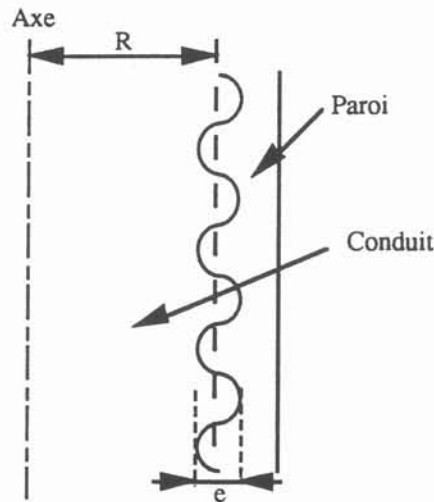
et λ est le coefficient de résistance tel que:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,74 - 2 \ln\left(\xi + \frac{18,7}{Re \sqrt{\lambda}}\right) \text{ avec } Re = \frac{\rho \bar{U}_2}{\nu} \text{ nombre de Reynolds}$$

où ν est la viscosité cinématique

$$\xi = \frac{e}{R} \text{ rugosité de la paroi (figure 114)}$$

Figure 114: rugosité de la paroi



Compte tenu des variations de section le long de la busette, ces pertes de charges sont exprimées comme la somme des pertes de charge élémentaires correspondant aux différentes mailles discrétisant le front de fusion:

$$Z - \frac{8 \dot{m}^2}{\rho g \Pi^2 D_2^4} - \frac{2 \dot{m}^2}{\rho g \Pi} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i l_i}{D_i^3} = 0$$

où: l_i est la longueur du canal élémentaire i

D_i est le diamètre de la section de passage du liquide pour le canal élémentaire i

le λ_i de chaque maille satisfait: $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = 1,74 - 2 \ln\left(\xi + \frac{18,7}{Re_i \sqrt{\lambda_i}}\right)$

La résolution de ce système de $n+1$ équations se fait de façon doublement itérative: à partir d'un débit initial calculé par la relation de Bernouilli sans tenir compte des pertes de charges:

$$\dot{m}_0 = \sqrt{\frac{\rho^2 Z g \Pi^2 D^4}{8}}$$

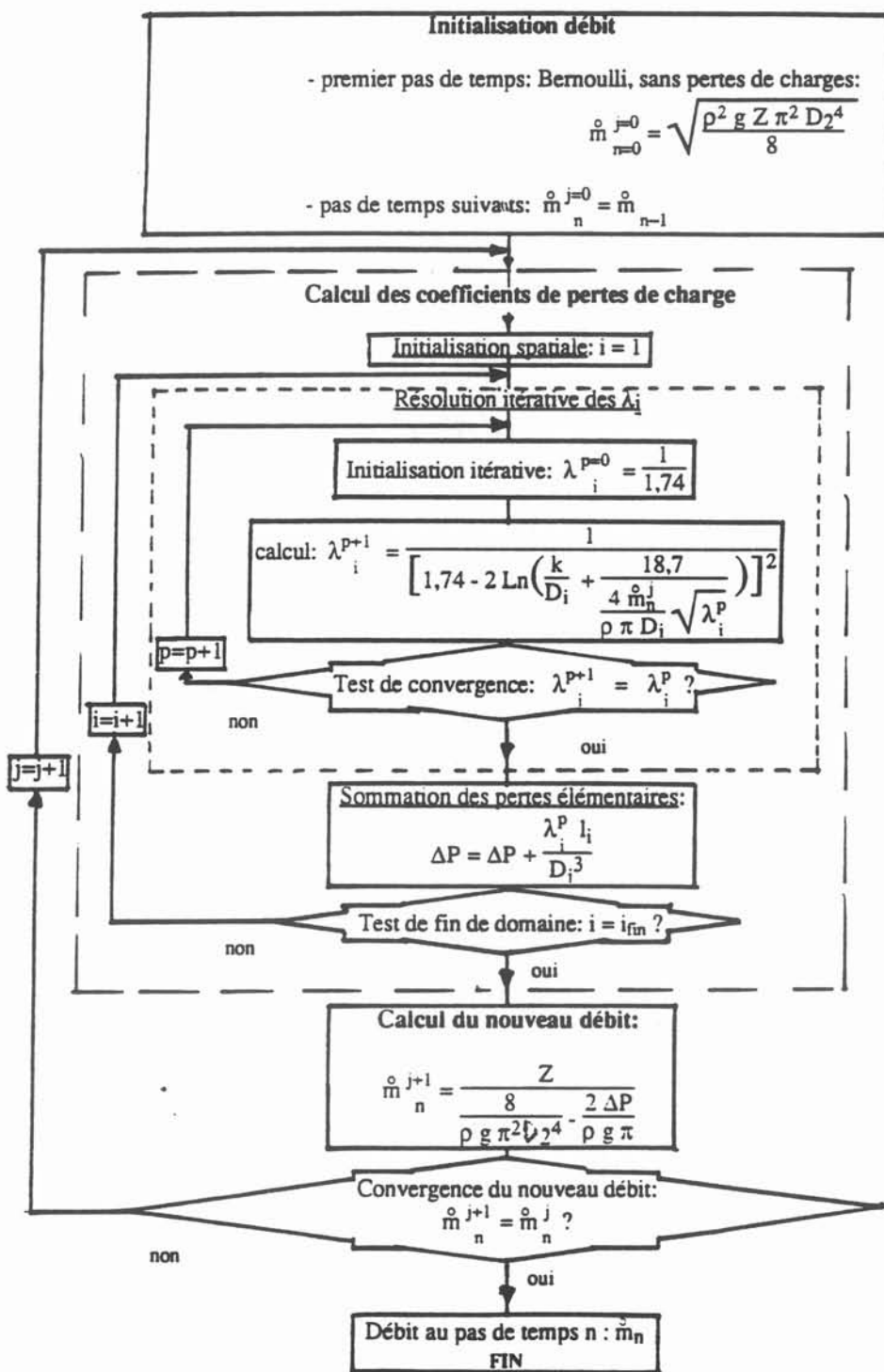
on résout itérativement par la méthode de Newton les n équations donnant chaque valeur des λ_i , que l'on peut alors injecter dans l'équation complète de Bernouilli. La comparaison du débit obtenu \dot{m} avec le débit initial \dot{m}_0 permet de relancer les calculs jusqu'à atteindre la convergence. La figure 115 représente l'algorithme ainsi obtenu pour le calcul du débit.

On note:

- indice p: indice d'itération portant sur le calcul des pertes de charges élémentaires
- indice j: indice d'itération portant sur le calcul du débit
- indice i: indice de discrétisation spatiale selon z
- indice n: indice de discrétisation temporelle

On obtient ainsi, pour un pas de temps donné, la valeur du débit, considéré comme constant le long de la busette.

Figure 115: Algorithme du calcul du débit



II.3.6.2 - Expression analytique de la vitesse

A partir du débit connu, il est possible de calculer l'expression de la vitesse de l'écoulement. On considère que le profil de la vitesse longitudinal est le même que celui dans un tube de section constante. En régime turbulent on utilise un profil de Blasius [39]:

$$U_z(r,z) = \frac{\dot{m}}{0,817 \rho \Pi R(z)^2} \left(\frac{R(z) - r}{r(z)} \right)^{1/7}$$

où $R(z)$ est le rayon de la section délimitée par le front de fusion, qui varie spatialement et temporellement.

L'expression de la vitesse radiale s'obtient à partir de théorème de continuité:

$$\text{div } \vec{U} = 0 \quad \text{soit:} \quad \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r U_r) \right) + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{On obtient alors l'expression de la vitesse radiale:} \quad U_r = -\frac{1}{r} \int r \frac{\partial U_z}{\partial z} dr$$

qui devient en y injectant l'expression de U_z :

$$U_r = \frac{\dot{m}}{0,817 \rho \Pi R(z)} \int r \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{R(z) - r}{R(z)} \right)^{1/7} \frac{1}{R(z)^2} \right) dr$$

En tenant compte des conditions aux limites qui sont: $r = 0, U_r = 0$
 $r = R, U_r = 0$

$$\text{on obtient finalement: } U_r = \frac{\dot{m}}{0,817 \rho \Pi} \frac{\partial R(z)}{\partial z} R(z)^{-22/7} (R(z) - r)^{1/7} r$$

Le calcul du rapport de $\frac{U_r}{U_z} = \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial z}$ permet de vérifier que l'on a bien les bonnes

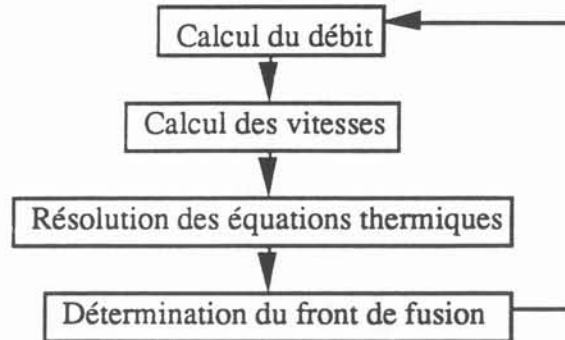
directions du module de la vitesse: à la paroi $\frac{U_r}{U_z} = \frac{\partial R}{\partial z}$, orientation de la paroi

au centre $\frac{U_r}{U_z} = 0$

III.3.7. Algorithme général

Le couplage thermique - mécanique des fluides qui permet de résoudre le problème est assez simple: En considérant que l'on connaît à un pas de temps les températures, les vitesses et la position du front de solidification sont calculées au pas de temps suivant, comme le montre la figure 116:

figure 116: Résolution du couplage thermique - mécanique des fluides

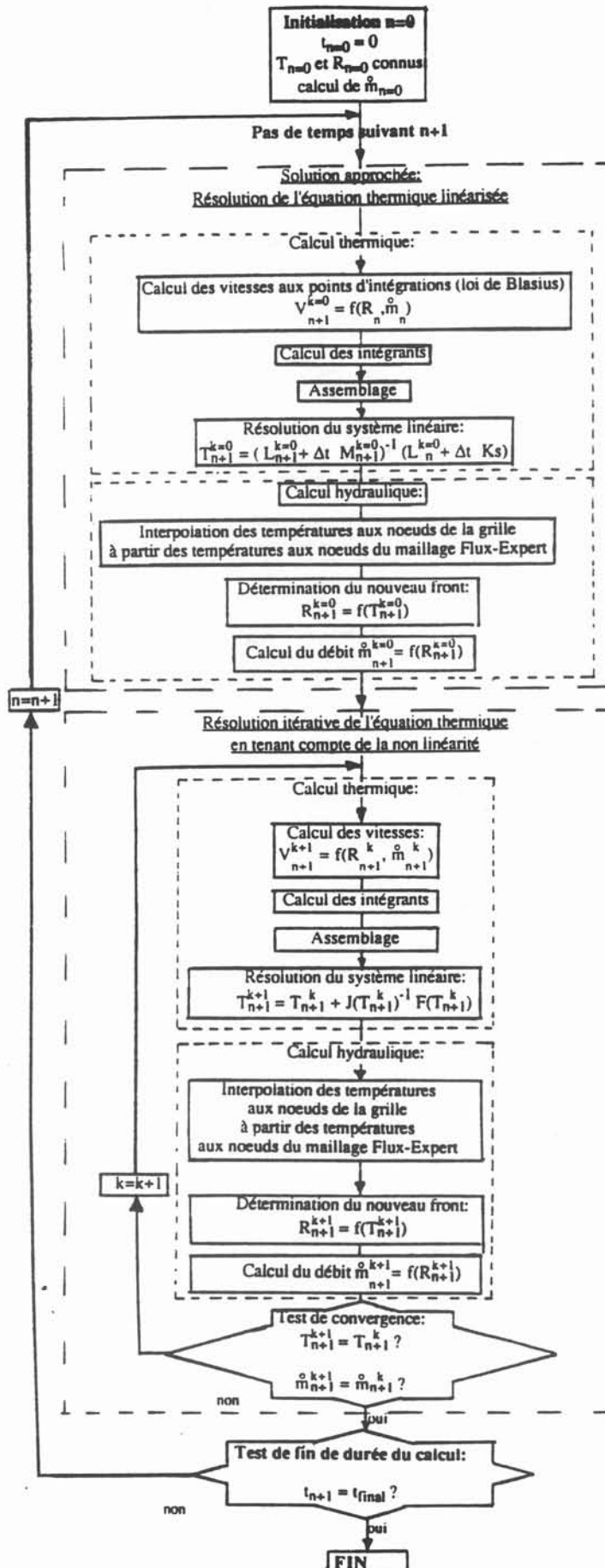


En réalité, puisque les équations thermiques sont non linéaires, et compte tenu de la méthode de résolution numérique des éléments finis, l'algorithme général est plus complexe (voir figure 117).

Les notations d'indices sont les suivantes:

- indice k: indice portant sur les itérations pour le calcul des températures (dû à la non linéarité)
- indice n: indice portant sur le temps

Figure 117: Algorithme de résolution



III.3.8. Application du modèle de calcul sur un cas test

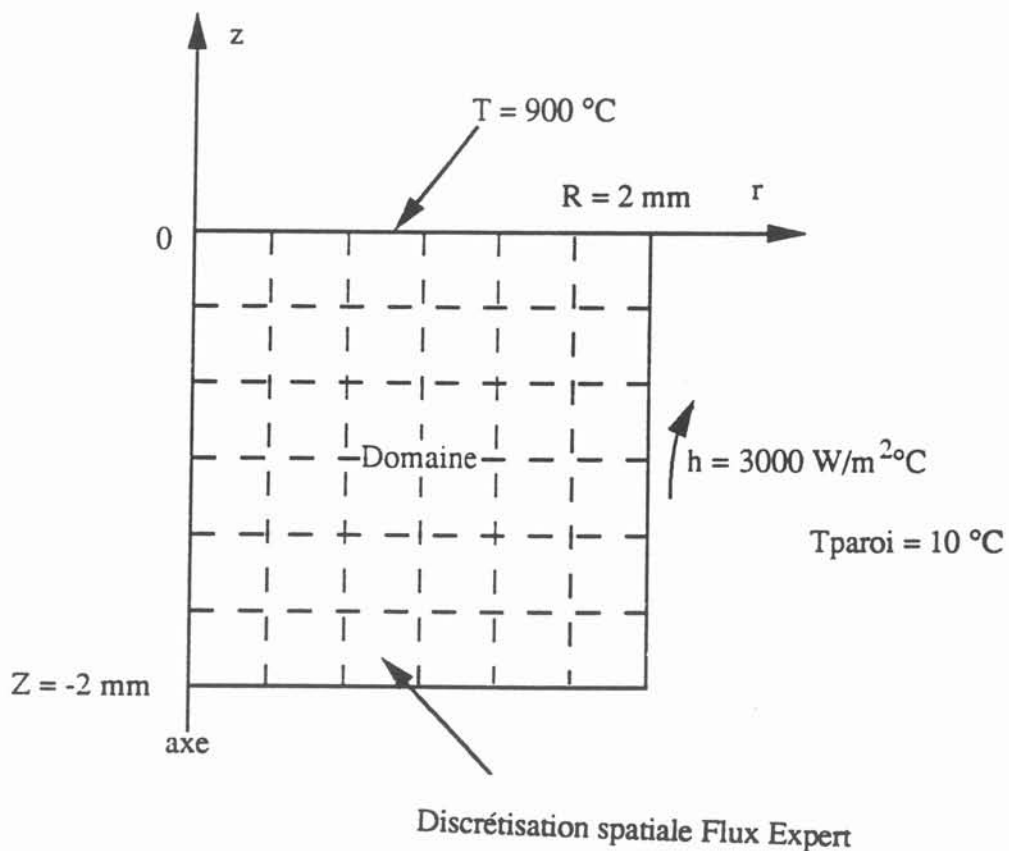
Le choix d'une configuration simple et dotée d'un maillage grossier, permet en peu de temps de calculs, de visualiser les résultats de la modélisation numérique. Dans ce cas, on choisi le même maillage pour les problèmes hydraulique et thermique.

Le choix de la configuration est le suivant:

- élément cylindrique: de rayon de 2 mm
de hauteur de 2 mm
- un maillage 5 * 5

Le choix des paramètres apparait sur la figure 118 suivante:

Figure 118: Représentation de la configuration du cas test



Hauteur de fluide = 10 cm

Caractéristiques du laiton

Chaleur de changement d'état non pris en compte

pas de temps = 0,001 seconde

Initialement (figures 119 et 120), la température est fixée à 902°C. Il n'y a donc aucun front de solidification, et la vitesse est purement longitudinale selon un profil de Blasius selon z :

Figure 119: Elévation des températures initiales

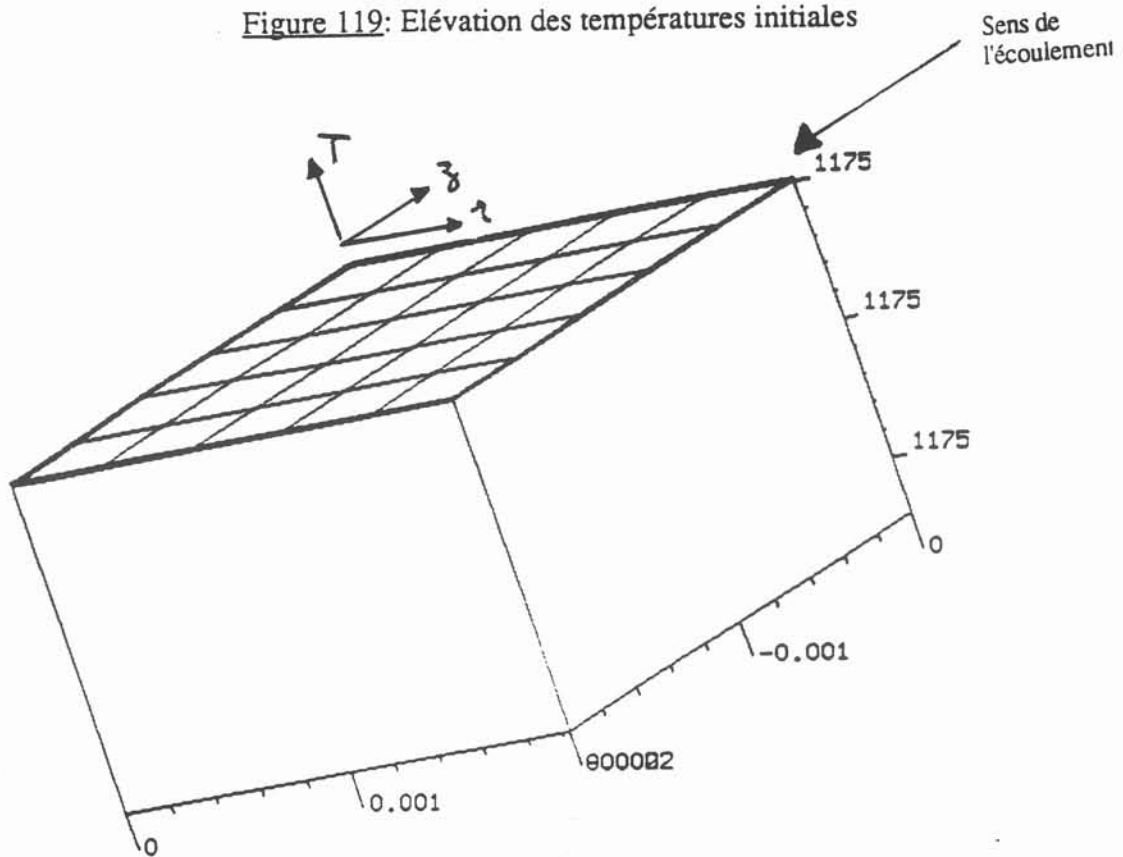
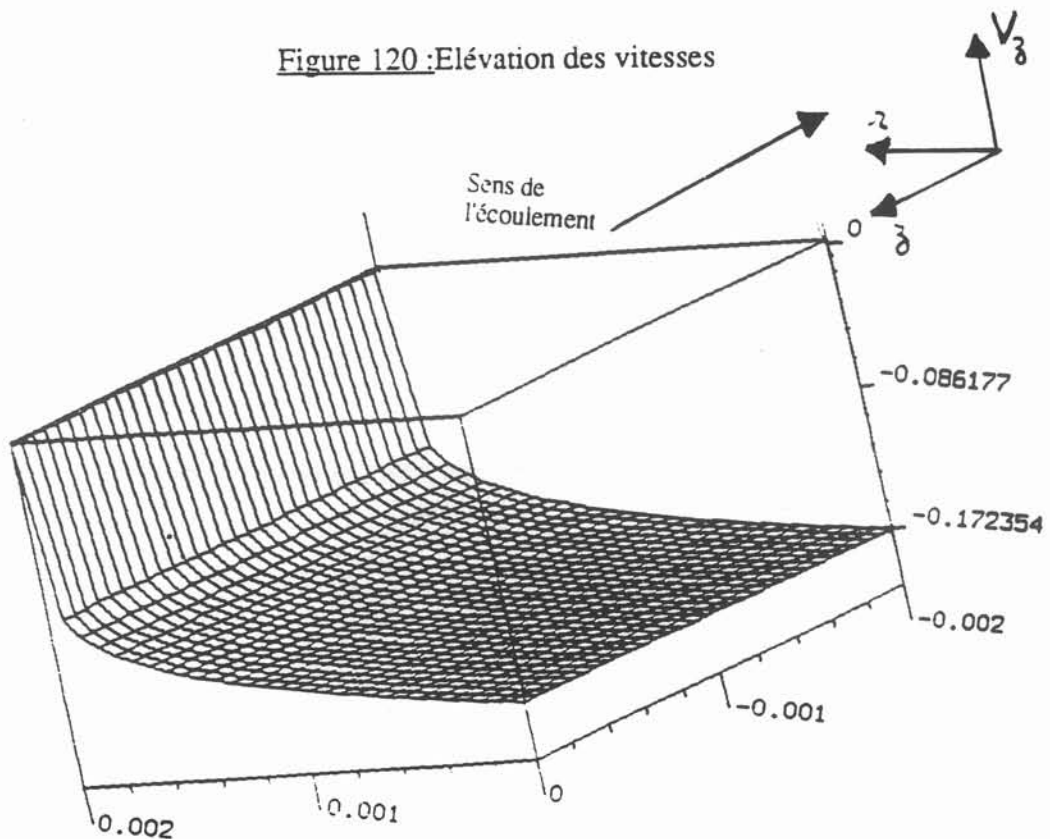


Figure 120: Elévation des vitesses



Quelques pas de temps plus tard (figures 121 à 123), à $t = 0,018$ secondes, la température a suffisamment diminué pour qu'apparaisse un front de fusion, qui entraîne une modification de l'écoulement:

Figure 121: Elévation en température à $t = 0,018$ s

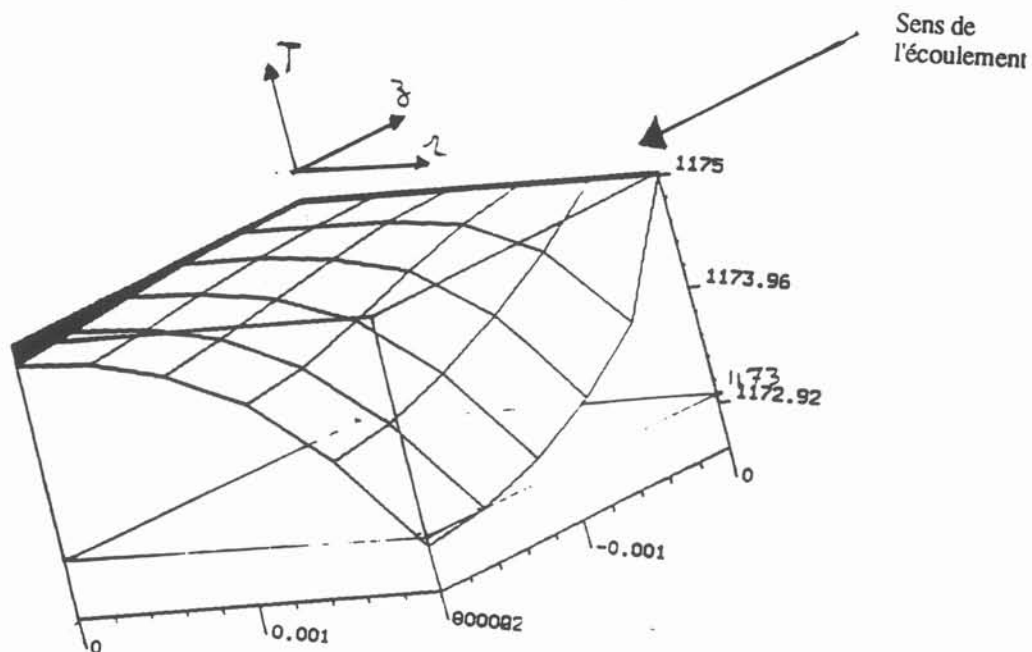


Figure 122: Position du front de solidification

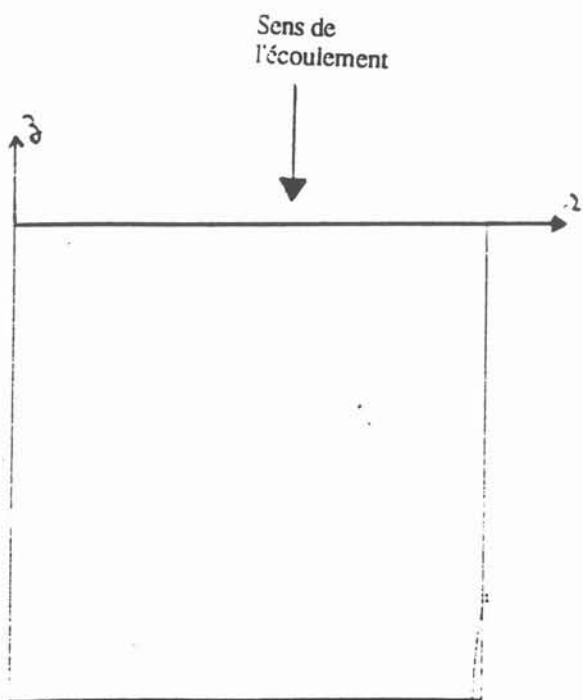
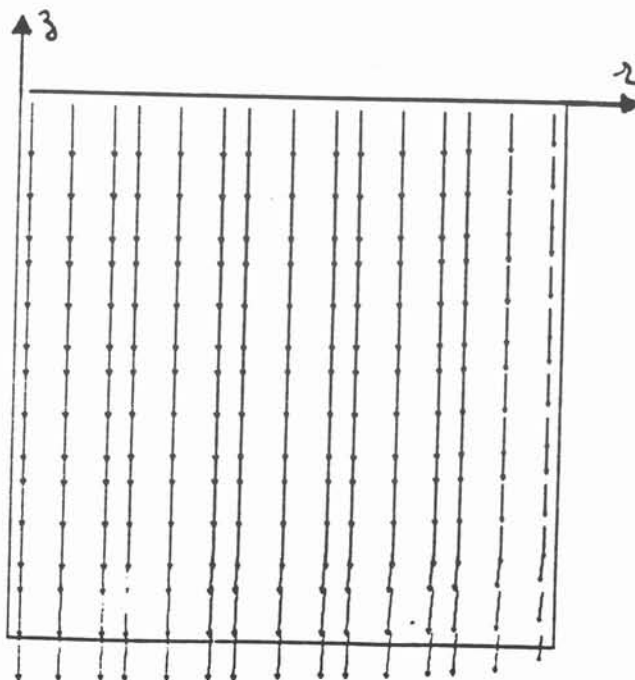


Figure 123: Tracé des vitesses



Quelques pas de temps suivants, à $t = 0,057$ secondes (figures 124 à 126), la température diminue encore et le front de solidification se développe:

Figure 124: Elévation en température à $t = 0,018s$

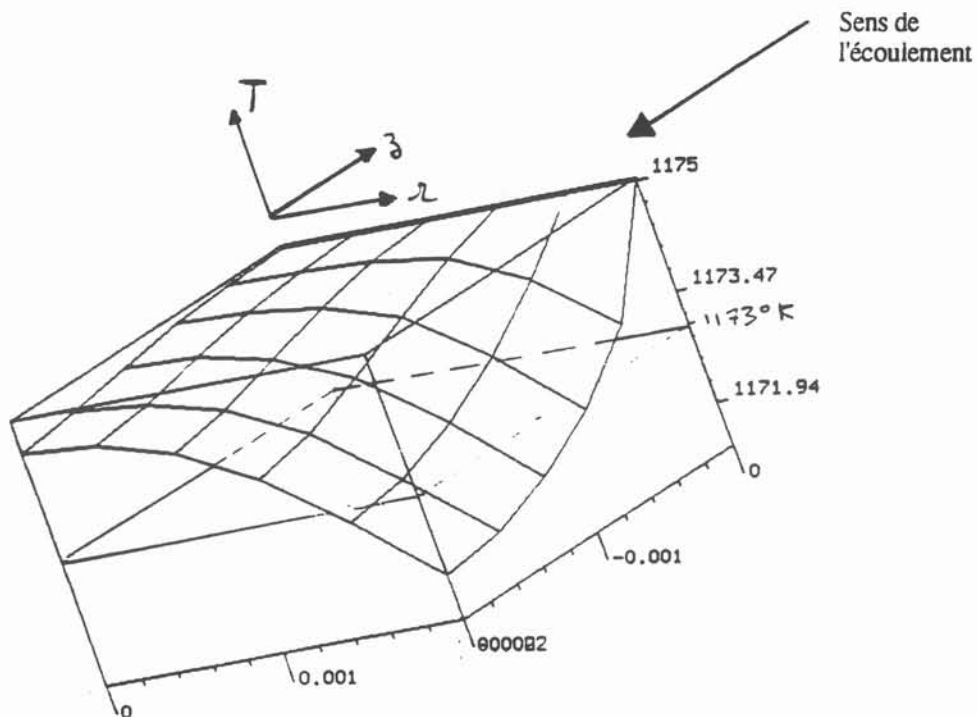


Figure 125: Position du front de solidification

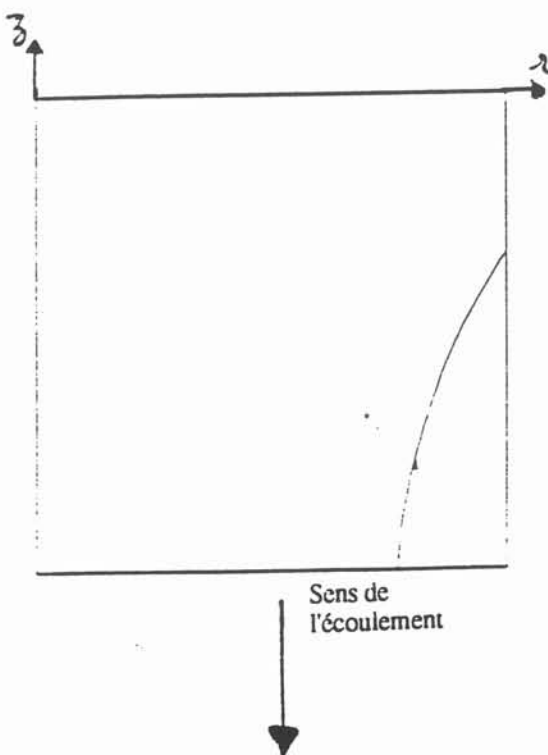
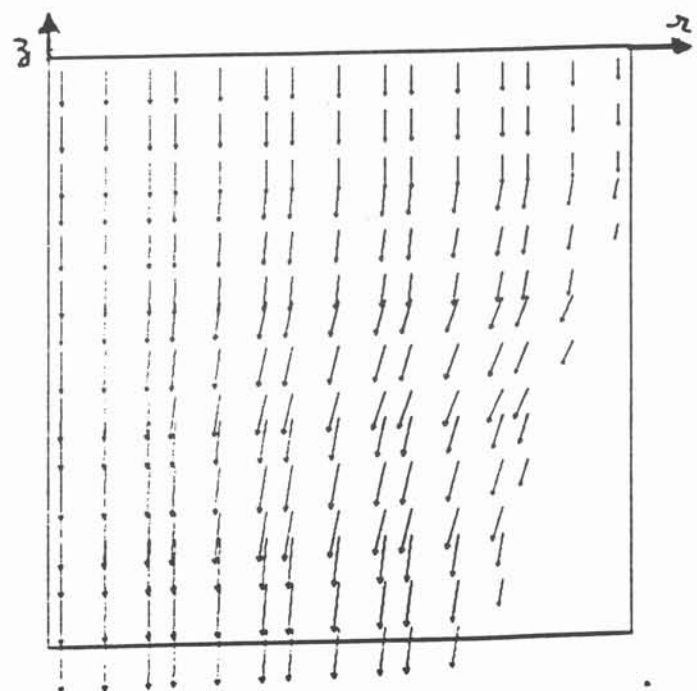


Figure 126: Tracé des vitesses



La vitesse n'est alors plus longitudinale, mais possède une composante radiale non nulle engendrée par le front de fusion, qui s'annule à la frontière du domaine au niveau de l'axe du canal:

Figure 127: Elévation du terme longitudinal de la vitesse

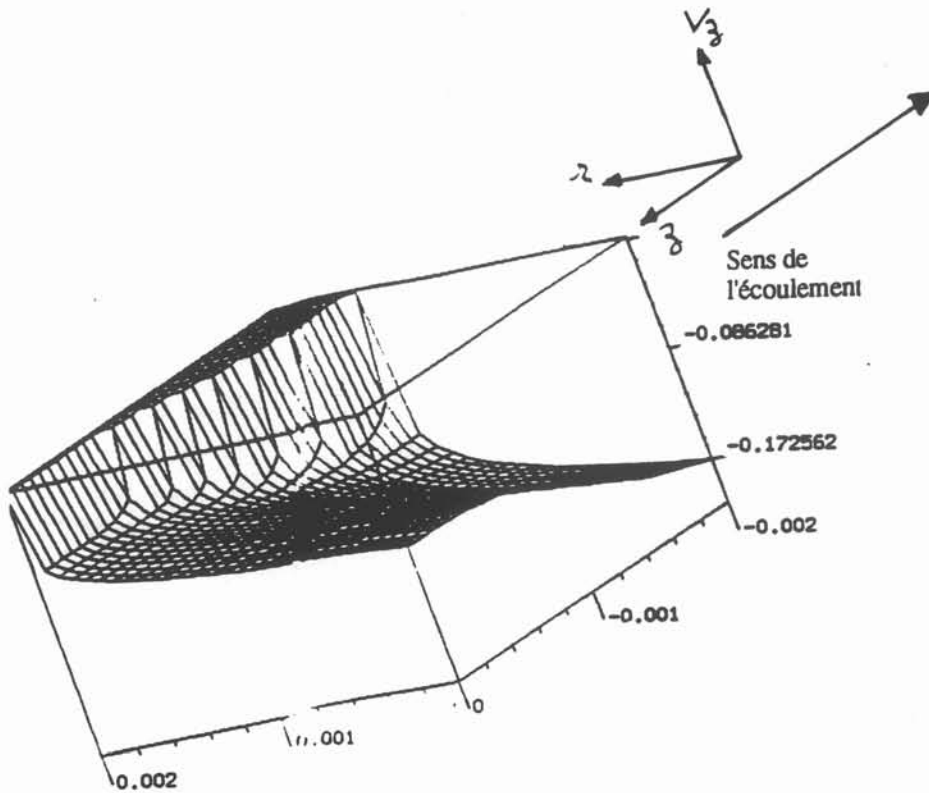
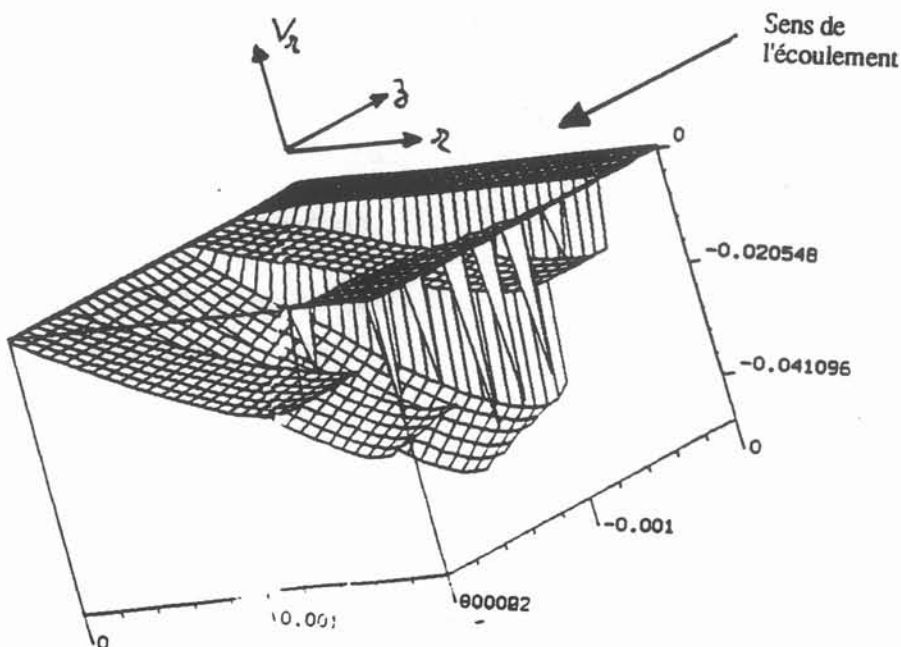


Figure 128: Elévation du terme radial de la vitesse



III.3.9. Application à la géométrie de la busette

La résolution du véritable cas expérimental a été modélisée, en tenant compte de la réduction de section placée à la sortie de la vanne et permettant de réduire le débit initial. Une première difficulté a été d'estimer les différents paramètres de l'étude.

III.3.9.1. Choix des paramètres

Les paramètres sont classés en deux catégories: D'une part les grandeurs physiques, qui doivent correspondre le plus possible à la réalité, et d'autre part les paramètres numériques de discrétisation et de calcul, dont le choix doit permettre une précision suffisante, tout en entraînant des temps de calcul acceptables.

III.3.9.1.1. Grandeurs physiques

Les grandeurs physiques se séparent en deux classes:

- les paramètres hydrauliques
- les paramètres thermiques

Paramètres hydrauliques:

Le coefficient de rugosité:

Le coefficient de rugosité ϵ correspond au rapport de la rugosité moyenne de la paroi formée par le solide, par rapport au rayon de la section de passage du liquide (voir paragraphe III.3.6.1.). Ce coefficient, qui a une influence importante sur les pertes de charge et donc sur le débit a été estimé à partir de l'observation des croûtes solides de laiton obtenues expérimentalement. Celles-ci avaient permis de voir que la surface d'un élément solide prélevé à l'issue d'essais de solidification dans la busette possédait une rugosité importante, de l'ordre du millimètre. Le coefficient de rugosité a donc été estimé à $\epsilon = 0,1$.

La hauteur hydrostatique du liquide:

La hauteur totale de liquide, comprise entre le sommet de la charge liquide dans la poche de fusion 50 Hz et la sortie du canal de la vanne électromagnétique a été approximée à partir des observations expérimentales à 20 cm. Avec un tel choix de paramètre, le débit initial calculé, (avant rétrécissement de la section de passage du fluide par solidification), est de 1,6 kg/s, soit le double de celui mesuré expérimentalement. Une telle différence peut d'une part s'expliquer par l'imprécision des paramètres fixés. Par ailleurs, les forces électromagnétiques existant dans la poche de fusion 50 Hz qui continue à fonctionner lors de la phase de figeage du laiton dans la busette, entraîne une diminution de la poussée hydrostatique par rapport à celle calculée avec la hauteur du fluide. Cette hauteur du liquide a donc été ajustée de façon à obtenir un débit du même ordre de grandeur que celui obtenu expérimentalement. On choisit ainsi une hauteur "équivalente" totale de 10 cm, ce qui amène un débit initial calculé de 0,9 kg/s.

Paramètres thermiques:

Températures initiale et à l'entrée du canal:

Les températures initiale et à l'entrée du canal sont fixées à partir des mesures expérimentales effectuées au sein de la masse liquide dans la poche de fusion. Celles-ci n'avaient indiqué aucune surchauffe importante du liquide par rapport à la température de changement d'état (voir en partie fusion 50 Hz, paragraphe VI.4.). Les températures initiale et d'entrée dans le canal, sont alors choisies juste supérieures à l'intervalle de température dans lequel s'effectue le changement d'état, doit donc:

$$T_{\text{initiale}} = T_{\text{entrée du canal}} = 905 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Le coefficient d'échange global h entre le laiton et la paroi refroidie de la vanne:

Le coefficient d'échange global a été déterminé expérimentalement (paragraphe II.5.1.). Les mesures effectuées avaient alors permis d'estimer que le coefficient d'échange variait de 4000 à 330 $\text{W/m}^2 \text{ }^{\circ}\text{C}$ pendant que le laiton dans la vanne se solidifiait et se refroidissait. Dans l'absolu, il faudrait donc choisir un coefficient h variable fonction du temps, en cohérence avec les résultats expérimentaux obtenus. Pour des raisons de simplification, nous avons choisi un coefficient h constant et égal à 3000 $\text{W/m}^2 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Les propriétés thermo-physiques du laiton:

Ces propriétés sont estimées dans un premier temps indépendantes de la température. On utilise alors les valeurs usuelles:

- masse volumique $\rho = 8400 \text{ kg/m}^3$
- conductibilité thermique $k = 113 \text{ W/m }^{\circ}\text{C}$
- capacité calorifique de chaleur sensible $C_p = 385 \text{ J/kg }^{\circ}\text{C}$
- chaleur latente de changement d'état $L = 168000 \text{ J/kg}$

Cas particulier de l'intervalle de solidification:

L'intervalle de solidification est donné précisément pour le laiton égal à 5 $^{\circ}\text{C}$. Nous verrons par la suite, l'importance de cette faible valeur sur l'ensemble des calculs et le choix du maillage spatial.

III.3.9.1.2. Grandeurs numériques

Les grandeurs numériques qui caractérisent la discrétisation spatiale et temporelle effectuée, ainsi que le nombre de calculs effectués, doivent être choisis de façon à obtenir un comportement satisfaisant des résultats, tout en évitant de trop longs temps de calculs.

Maillage spatial Flux-Expert

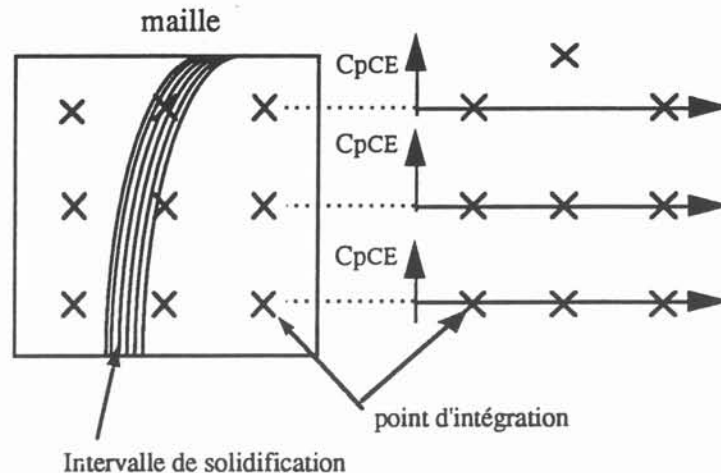
Le choix du maillage spatial pour la résolution du problème thermique, qui va déterminer la taille de la matrice à résoudre, est conditionné par la façon dont est modélisé le dégagement de chaleur dû à la solidification, et notamment à l'intervalle de solidification.

Il a été vu (voir paragraphe III.3.5.), que le phénomène de solidification et donc la chaleur latente de changement d'état s'étalait sur l'intervalle de température $\Delta T = 5^{\circ}\text{C}$, et que la modélisation de ce phénomène entraînait l'utilisation d'un coefficient de capacité calorifique équivalent au changement d'état C_{pCE} , suivant une loi en cloche dans l'intervalle ΔT et nulle part ailleurs.

Dans chaque élément fini, la valeur du C_{pCE} est donc calculée en fonction de la température pour chaque point d'intégration. C'est à partir de ces valeurs qu'une approximation de Gauss permet de calculer les intégrales permettant la résolution numérique du système.

Si l'on choisit des tailles de mailles pas trop réduites pour limiter le temps de calcul, compte tenu du faible étalement de la zone pâteuse, l'intervalle entre deux points d'intégration est plus important que l'intervalle de solidification. Les chances pour que les points d'intégrations rencontrent l'intervalle de solidification sont alors assez réduites, et le dégagement de chaleur latente ne sera alors pas partout pris en compte, comme le montre la figure 129:

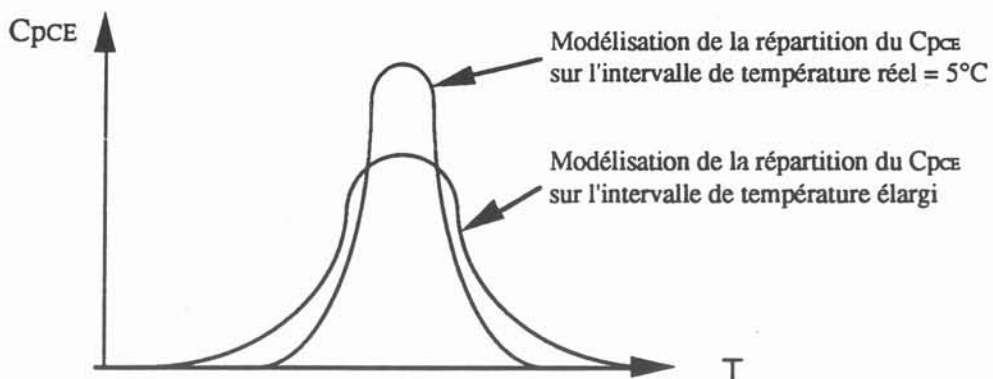
Figure 129: Prise en compte numérique du dégagement de chaleur lors de la solidification



Pour éviter un tel dysfonctionnement du code numérique, une première possibilité est de diminuer suffisamment la taille des mailles pour que l'espacement entre deux points d'intégration reste inférieur à l'espacement de la zone de solidification. Mais cela demande un maillage si fin que le temps de calcul devient considérable.

Une autre possibilité est alors d'élargir la zone de changement d'état. La chaleur latente de changement d'état reste identique mais est répartie différemment, comme le montre la figure 130 suivante:

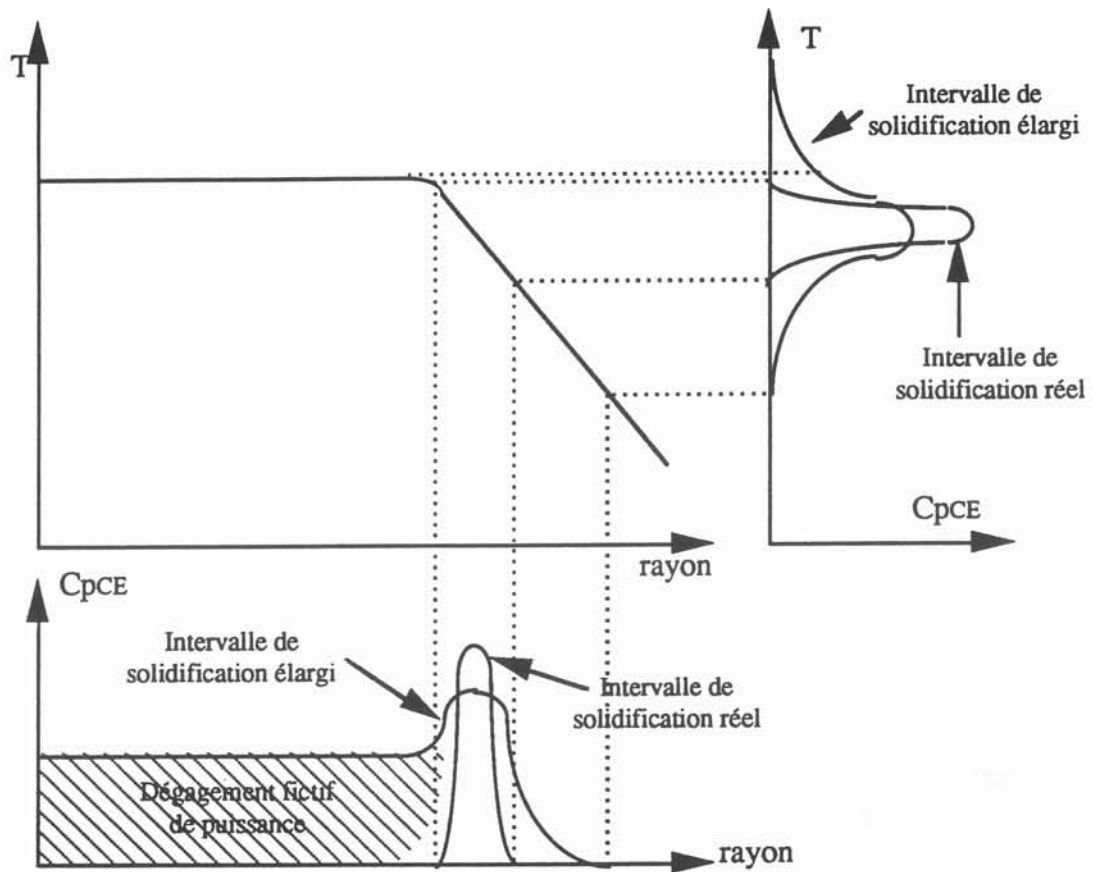
Figure 130: Modification de l'intervalle de la zone de changement d'état



Les essais effectués avec un tel modèle n'ont pas abouti, comme le montre la figure 131: la connaissance de la courbe $Cp_{CE}(T)$ et de l'évolution de la température en fonction du rayon $T(r)$, permet d'obtenir par résolution graphique l'évolution du Cp_{CE} en fonction du rayon $Cp_{CE}(r)$.

On observe ainsi que compte tenu du profil de température radial, qui est très plat dans la zone centrale, une telle modification avait pour effet de créer une dissipation de puissance due à un changement d'état fictif dans toute la zone centrale.

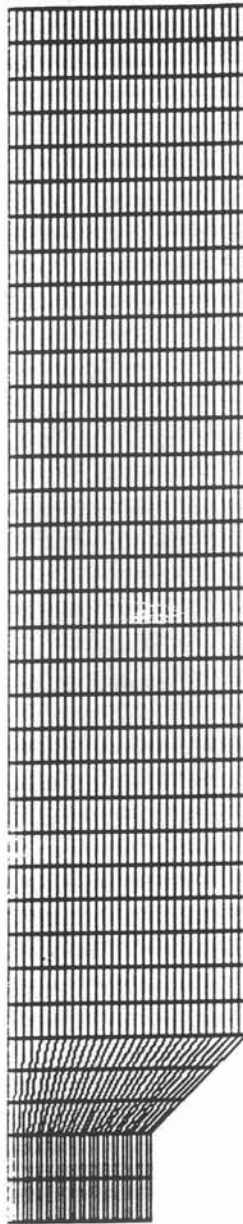
Figure 131: Effet de l'élargissement fictif de l'intervalle de solidification



Au vue de ces résultats, il est alors nécessaire de d'utiliser pour la modélisation l'intervalle de solidification réel de 5°C.

Un maillage spatial acceptable est alors celui représenté figure 132 . Il comporte 30 *35 éléments, ce qui revient à résoudre une matrice d'une taille approximative de 1000 inconnues.

Figure 132: Maillage utilisé



Maillage spatial pour la résolution du problème hydraulique:

Le choix du maillage permettant de déterminer la position du front de solidification, et de déterminer le débit, ne pose aucun problème particulier, puisque les calculs restent simples et donc rapides. Pour garder le même ordre de précision que pour le calcul thermique, on choisit un maillage similaire au maillage de Flux-Expert, soit une discrétisation en 30×50 éléments rectangulaires identiques.

La discrétisation temporelle:

Le pas de temps reste lui aussi déterminant: Il doit être assez petit pour bien modéliser la progression du front, tout en évitant de trop longs temps de calculs.

Le nombre d'itérations k:

Le nombre d'itérations de convergence du problème thermique est directement lié au pas de temps: Plus le pas de temps est important, plus la position du front de solidification

aura évolué entre deux pas de temps et plus un nombre important d'itérations sera nécessaire pour obtenir une convergence satisfaisante.

Après différents essais, le choix de ces paramètres est le suivant:

- pas de temps = 0,03 secondes
- nombre d'itérations = 20

La durée totale pendant laquelle les phénomènes thermo-hydrauliques sont modélisés est prise supérieure au temps nécessaire au figeage obtenu expérimentalement.

On choisit: $t_{\text{final}} = 4$ secondes.

Ainsi l'ensemble des calculs va consister à résoudre une matrice d'une taille de 1000 éléments environ, et ceci 2800 fois. Les calculs sont donc très longs, et nécessitent de 3 à 15 jours de calculs selon la puissance de la station de travail.

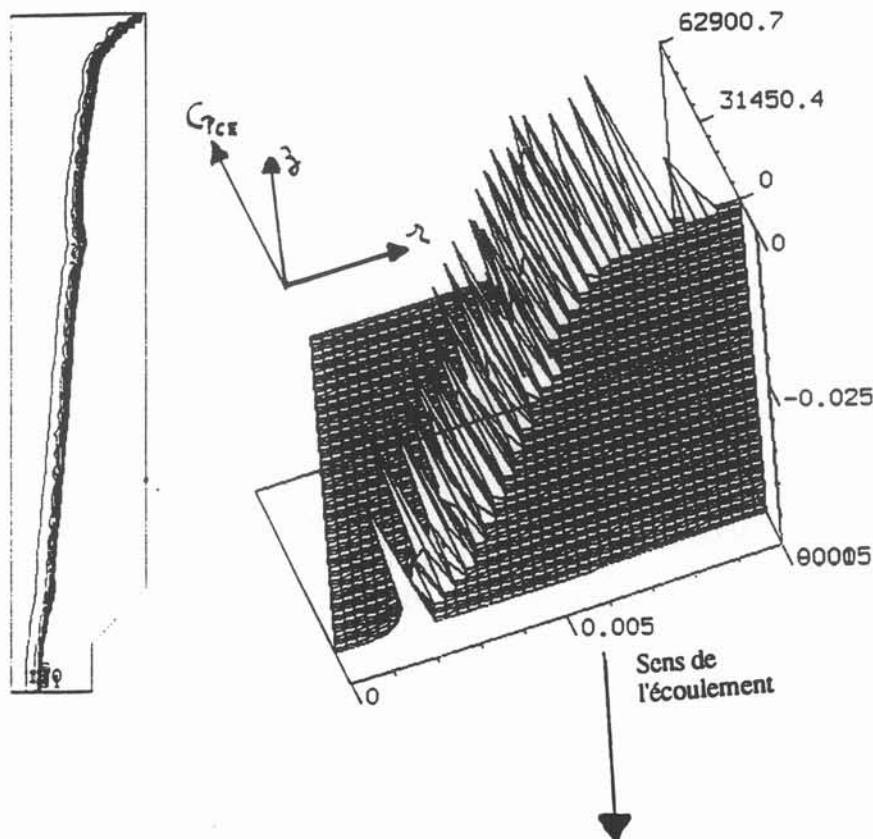
III.3.9.2. Résultats des calculs

L'étude du cas test avait montré un bon comportement du code pour les calculs hydrauliques (voir paragraphe III.3.1.). Compte tenu du maillage important utilisé et nécessitant une exploitation des résultats lourde, seuls les résultats thermiques sont présentés.

Une première chose a été de vérifier que la capacité calorifique équivalente au changement d'état, C_{pCE} , a été prise en compte de manière correcte dans les calculs. Les figures 133 et 134 permettent d'observer que l'on obtient bien une valeur nulle du C_{pCE} dans la zone centrale encore liquide, mais que par contre, dans la zone de changement d'état, elle n'est pas parfaitement prise en compte.

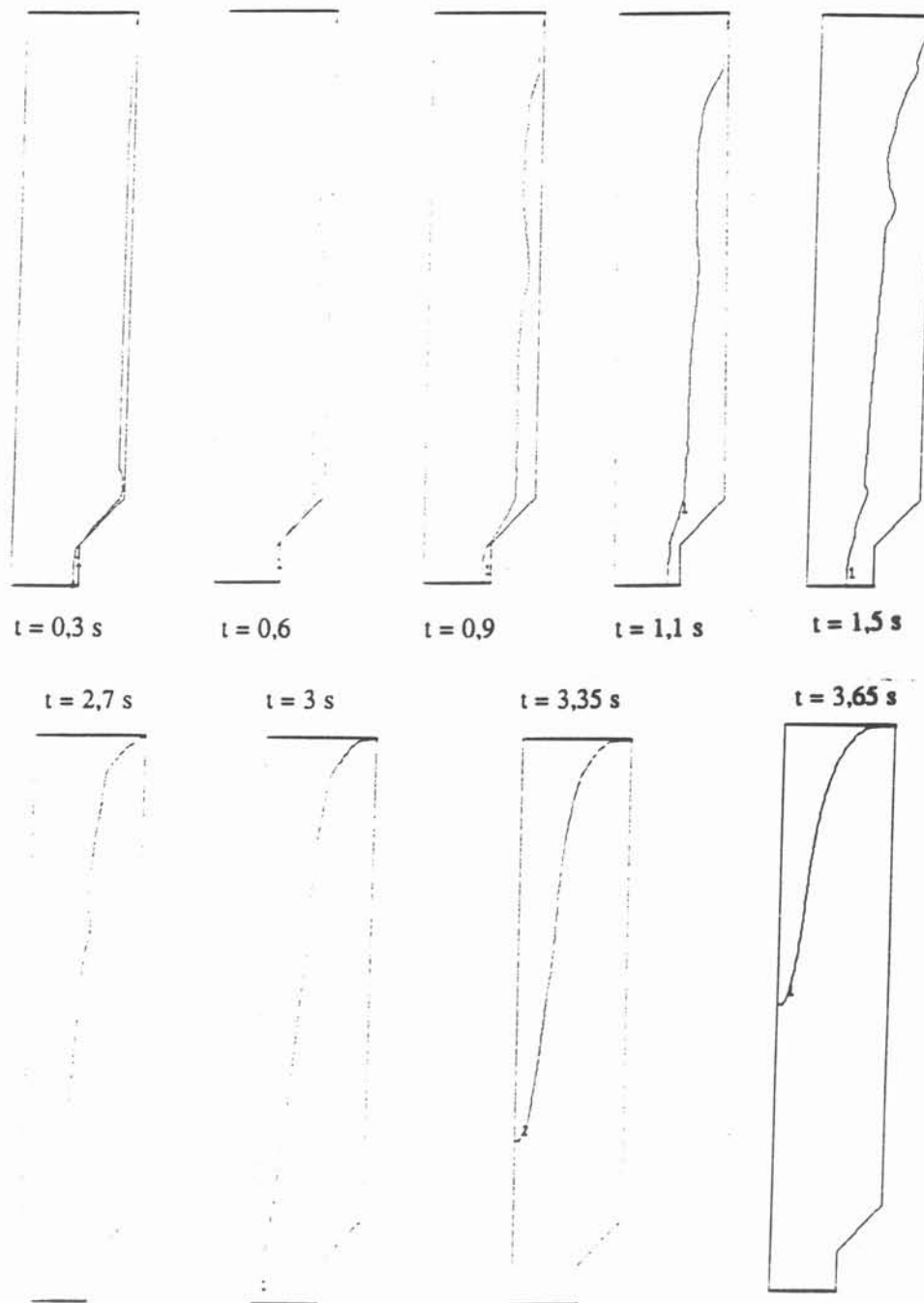
Figure 133: Isovaleur du C_{pCE}

Figure 134: Elévation du C_{pCE}



Les tracés représentant la progression du front de solidification au cours du temps sont représentés sur la figure 135 suivante :

Figure 135: Progression du front de solidification au cours du temps

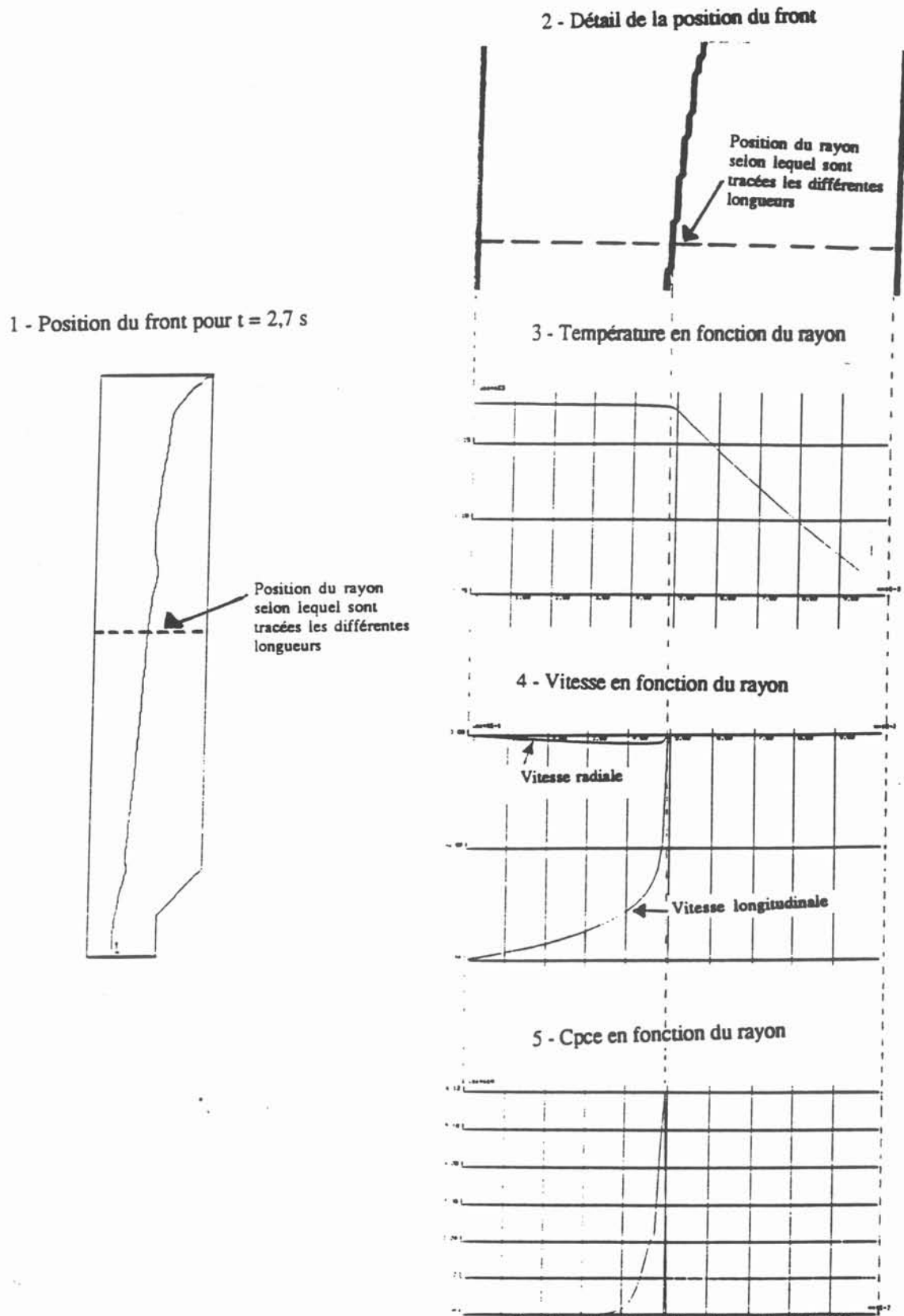


On note localement des irrégularités de l'isotherme ainsi tracé, qui ne sont pas explicables physiquement. Celles-ci sont dues à une convergence insuffisante, même après les 20 itérations de calcul demandées. Quoiqu'il en soit ces résultats permettent de visualiser le phénomène de la solidification d'un liquide en mouvement dans un canal, et donnent un ordre de grandeur du temps nécessaire au figeage complet, ici de 3 secondes.

Au niveau du rétrécissement de section en sortie du canal, on observe le développement de la zone solide, qu'à partir du moment où la périphérie de la zone principale est déjà solidifiée.

suivante: L'évolution des différentes grandeurs, le long du rayon est présentée sur la figure

Figure 136: Evolution des différentes grandeurs en fonction du rayon



III.3.10. Limitations du code et perspectives

Une validation partielle a été effectuée sur le cas réel et semble donner des bons ordres de grandeurs, traduisant un temps de solidification théorique réaliste par rapport aux observations expérimentales. Cette validation, pour des raisons de temps, n'a pas pu être poursuivie d'avantage. Il serait ainsi intéressant de poursuivre ce travail par des mesures expérimentales de temps de solidification en fonction des paramètres suivants:

- influence de la hauteur de la charge (géométrie différente du cas réel, en l'absence de forces de lévitation).
- nature de l'alliage
- géométrie de la busette

Ce modèle, quoiqu'assez élaboré, comporte cependant beaucoup de simplifications:

- On ne tient compte des forces de lévitations, que par l'intermédiaire d'une hauteur de liquide H équivalente, obtenue d'après mesure du débit. Il serait intéressant d'essayer de faire intervenir directement les forces de lévitation modélisées par le code numérique résolvant les problèmes électromagnétiques, Ophélie.

- Le maillage utilisé est un maillage fixe. Il faudrait mettre en place un maillage évolutif, de manière à n'avoir un maillage fin qu'au niveau de la zone pâteuse qui évolue au cours du temps. Ceci permettrait de tenir compte de façon précise de la chaleur de changement d'état, tout en ayant des temps de calcul acceptables.

- Dans ce modèle, les problèmes de mécanique des fluides ne sont résolus qu'à partir d'un modèle analytique limité au cas qui nous concerne (géométrie de la vanne peu complexe, zone pâteuse très fine). Une généralisation du problème de solidification avec écoulement pourrait être réalisée par Flux Expert, en résolvant par la méthode des éléments finis l'équation complète de Navier Stokes.

- Enfin, la connaissance des paramètres introduits dans le calcul restent approximatifs: le coefficient de convection h reste approché, la température de surchauffe, ainsi que la cartographie de la température initiale dans la busette ne sont pas connues.

Cependant, même dans l'état actuel, ce logiciel constitue déjà un outil de modélisation pour le dimensionnement d'un système de vanne électromagnétique.

CONCLUSION

Le travail de thèse exposé dans ce mémoire, portant sur l'étude d'un procédé de recyclage de copeaux de laiton par induction, a été enrichissant à plus d'un titre:

L'innovation qui existe dans ce procédé est importante, et porte aussi bien sur le creuset froid fonctionnant à 50 Hz, de technologie simplifiée, transparent au champ magnétique et sans générateur à induction, que sur le système de contrôle électromagnétique de la coulée du métal liquide permettant un fonctionnement en semi continu sans aucun organe mécanique mobile.

Sur le plan du développement scientifique, l'étude des phénomènes intervenant dans ce procédé a nécessité l'utilisation de plusieurs disciplines (électromagnétisme, thermique, mécanique des fluides). Une phase particulièrement intéressante a été la prise en compte du couplage de ces différentes disciplines, pour aboutir à la mise en place d'un outil de conception du procédé. Les points essentiels de cet outil sont ainsi les suivants:

- L'adaptation de l'outil numérique qu'est le code de calcul Ophélie, au système inductif à 50 Hz, permettant aussi bien de connaître les caractéristiques du couplage inductif que de prévoir l'influence du circuit magnétique placé au dessus de la charge.

- Des considérations électromagnétiques permettant d'évaluer l'importance des différentes forces mises en jeu, d'une part les forces de lévitation qui influent fortement sur la puissance nécessaire au maintien en fusion, et d'autre part les forces rotationnelles, qui, alliées à une analyse de mécanique des fluides, permettent de prévoir et d'expliquer la façon dont s'établit le brassage au sein du métal en fusion dans la poche de fusion 50 Hz.

- L'étude du couplage électromagnétique entre deux systèmes inductifs à proximités l'un de l'autre, comme le sont la poche de fusion 50 Hz et le système de coulée moyenne fréquence.

- Le travail de modélisation numérique du phénomène de figeage du métal liquide initialement en mouvement dans le canal de la vanne électromagnétique, qui fait intervenir des phénomènes couplés de thermique et de mécanique des fluides, et qui permet de prévoir le comportement du métal selon la géométrie utilisée.

Sur le plan expérimental, la conception d'une installation pilote, d'échelle industrielle, a permis la validation du procédé. La mise en place en micro informatique d'un système de mesures numériques, permet d'une part un suivi en temps réel des différentes grandeurs de consignes (températures, courants, puissances), et d'autre part la détermination par traitement numérique de l'évolution au cours de l'essai de grandeurs physiques qui permettent une caractérisation précise du procédé (résistance et inductance globale du système de fusion, $\cos \phi$, rendement énergétique). Ces mesures expérimentales permettent en outre la validation des résultats numériques. Le fait que ce prototype soit actuellement en phase de transfert industriel dans la société Bonmartin, en vue d'un fonctionnement industriel en semi-continu, est une source de satisfaction personnelle, compte tenu du temps passé à la mise au point expérimentale de ce procédé.

Ce travail doit être considéré comme une première phase de l'étude d'un tel système de recyclage.

Tout d'abord les outils de conception peuvent être bien évidemment améliorés:

La forme que prend le métal liquide dans la poche de fusion sous l'action des forces électromagnétiques n'a été qu'estimée. Compte tenu de l'importance de ce paramètre sur l'ensemble du procédé (le couplage inductif, les transferts thermiques, le brassage, ...), une analyse plus fine serait à effectuer.

L'influence de l'alimentation régulière et continue en copeaux au dessus de la charge liquide, dont on a observé expérimentalement le rôle stabilisateur sur la charge liquide, doit être analysée.

L'étude du phénomène de digestion d'un copeau métallique sous l'action du brassage n'a pas été abordée. Etudier le temps de fusion d'un copeau dans le bain, sa trajectoire, l'influence de la qualité des copeaux amenés, ... , complèterait le travail effectué.

Enfin, la modélisation numérique des phénomènes de figeage dans la vanne électromagnétique devrait être validée de façon complète, à partir d'essais expérimentaux, et par un balayage des différents paramètres qui influencent le phénomène de solidification. Ce code pourrait en outre être amélioré: Il s'agirait d'une part de tenir compte de l'influence des forces électromagnétiques issues de la poche de fusion sur l'écoulement du métal liquide dans la vanne, et d'autre part de mettre en place un maillage évolutif de façon à ne définir un maillage fin que dans la zone localisée du front de solidification, qui se déplace au cours du temps. Enfin, une modélisation complète des phénomènes consisterait à définir la formulation en éléments finis des équations de mécanique des fluides qui régissent l'écoulement du métal liquide dans la vanne.

Par ailleurs, le passage des essais expérimentaux de laboratoire à un fonctionnement de type industriel a commencé dans les derniers mois de la thèse et se poursuit actuellement dans la société Bonmartin. Ces premiers travaux ont montré la nécessité d'améliorer encore la fiabilité de la vanne électromagnétique par une campagne de recherche technologique. L'objectif est évidemment d'obtenir un fonctionnement en continu de la poche de fusion, avec coulée par le fond en semi-continu, dans le four à canal existant.

Enfin, l'automatisation complète de ce système, pourrait être le dernier stade de l'étude. Intervenant alors dans la phase d'industrialisation, elle nécessiterait de compléter le système de contrôle et de mesures par la mise en place d'organes de régulation, agissant sur l'alimentation à la fois de la poche de fusion pour un fonctionnement optimum, et sur la vanne électromagnétique, afin d'assurer un fonctionnement automatique en semi continu de l'ensemble fusion - coulée.

Mais déjà au stade actuel, ce procédé peut apporter beaucoup, car il vient améliorer vraisemblablement le mode de recyclage classique actuel, qui nécessite un traitement lourd des copeaux avant fusion. Un tel système peut d'ailleurs être utilisé dans de nombreux domaines de la métallurgie. L'utilisation des outils de conception mis en place permettrait l'extrapolation de ce procédé à d'autres métaux, à d'autres applications. Ce travail contribue ainsi à l'effort qui doit être effectué pour faire en sorte que le recyclage des matériaux soit une opération viable du point de vue industriel, et puisse se développer à bien d'autres matériaux métalliques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. FERRY: La place et le potentiel du chauffage par induction dans l'élaboration et la transformation de produits plats sidérurgiques. septembre 1982. Groupe d'étude des applications de l'induction.
- [2] I. GLEIZES: Elaboration de matériaux réfractaires en creuset froid inductifs par dissolution ou réaction chimique. Thèse INPG 1991.
- [3] COMMEIGNE, PACAUD: Chauffeuse de masselottes. Congrès européen: l'induction et ses applications industrielles, Strasbourg. Mars 1991.
- [4] R. ERNST: Le chauffage par induction des verres. Journal Français de l'Electrothermie n°7. Mai 1985.
- [5] B. CAILLAUD: Fusion d'oxyde par induction haute fréquence. Thèse INPG 1987.
- [6] J. REBOUX: Les plasmas inductifs: Un outil exceptionnel pour une métallurgie de qualité. Journal Français de l'Electrothermie.
- [7] J.P FERRIEUX, J BARBAROUX, R ERNST: Générateur à induction pour la cuisson professionnelle. Congrès européen: L'induction et ses applications industrielles. Strasbourg. Mars 1991.
- [8] R. MOREAU: Ecoulement d'un métal liquide en présence d'un champ magnétique. Techniques de l'ingénieur.
- [9] R. BERTON: Magnétohydrodynamique. Ed Masson, Physique fondamentale et appliquée.
- [10] A. GAGNOUX: Modélisation des installations de fusion en creuset froid pour l'élaboration en continue ou la lévitation. Thèse INPG 1986.
- [11] D. DELAGE, R. ERNST: Prédiction de la répartition du courant dans un inducteur à symétrie de révolution destiné au chauffage MF et HF. RGE, avril 1984, n°4, p 225 - 230.
- [12] R. ERNST, C. GARNIER: Mesures numériques des caractéristiques d'un circuit oscillant pour le chauffage par induction. Revue Générale de l'Electricité n°8, Septembre 1989.
- [13] Y. FAUTRELLE: Analyse du brassage. Magnétodynamique des métaux liquides. Laboratoire Madylam 1987.
- [14] F. DURAND: Magnetostatique. Ed Masson et Cie

- [15] R. ERNST, A. GAGNOUX, I. LECLERCQ: Etude du comportement d'un circuit magnétique dans un système de chauffage par induction. Revue Générale de l'Electricité n°9. Octobre 1987.
- [16] J. NUNS, R. POIROUX: Le chauffage de bandes d'aluminium par inducteurs à flux transverse. EDF, bulletin de la direction des études et recherches série B, réseaux électriques, matériels électriques n°3, p 57-74, 1981.
- [17] P. CREMER, A. ALEMANY: Aspects expérimentaux du brassage électromagnétique en creuset. Journal de Mécanique Appliquée, 1981 n°5, p 37-50.
- [18] E. TABERLET: Le brassage turbulent dans les fours à induction. Thèse INPG, 1984
- [19] S. KOANDA: Etude expérimentale du brassage électromagnétique dans un four à induction à creuset: Thèse INPG 1982.
- [20] M. BURTY: Simulation numériques d'écoulement tridimensionnels. DEA de Mécanique INPG 1986.
- [21] J.P. KERADEC, B. COGITORE, E. LAVEUVE: Des circuits à constantes localisées pour représenter les transformateurs hautes fréquences. Revue Générale de l'électricité n°5 Mai 1992.
- [22] F. GARNIER: Formage électromagnétique et coulée directe des métaux. Thèse INPG 1984.
- [23] M. GARNIER: Une analyse des possibilités de contrôle électromagnétique des liquides avec champs magnétiques alternatifs. Thèse INPG 1982.
- [24] J. ETAY: Le problème de frontière libre en magnétohydrodynamique des liquides avec champs magnétiques alternatifs. Thèse INPG 1988.
- [25] D. C. LILLIGRAP: Liquid metal flow control using A. C. field. Liquid Metal Magneto hydrodynamics, p 363 - 370 1989.
- [26] J. LAMMERANER, M. STAFL: Eddy current. ILIFF Books LTD. SNTL Publishers of technical literature, Prague. p 19
- [27] J. DUCROCQ: Resolidification hors équilibre de matériaux fondus. Thèse INPG 1996 p. 20 - 30.
- [28] JONES: Some principles of solidification at high cooling rate. Rapid solidification processing: Principles and technology. Proceedings international conference of rapid solidification. Reston, Virginia nov 1977. Claitor's publishing division. Baton Rouge, 1978.

- [29] F. DURAND, R. HAMAR: Transfert de chaleur et de masse dans les procédé de solidification. Solidification des alliages: Du procédé à la micro-structure. Ecole d'été Carry Le Rouet. Ed F. Durand, Edition de Physique.
- [30] J. H. BLACKWEL, J. R. OKENDON: Exact solution of a stephan problem relevant to continuous casting. Int J. Heat Mass Transfer, Vol 20 p 1087 - 1089, 1977.
- [31] A. A. SFEIR, J. A. CLUMPNER: Continuous casting of cylindrical ingot. Journal of Heat Transfer, p 29 34, Fevrier 1977.
- [32] R. SIEGEL: Analysis of solidification interface shape during continuous casting of a slab. Int J. Heat Mass Transfer, Vol 21, p 1421 - 1430, 1977.
- [33] M. RAPPAZ: Micro-/macroscopic modelling of solidification. International Material Revue, 1989.
- [34] P. MASSE: Modeling of continus media methodology and CAD of Finite Element Programme. Intermag conference, Hambourg, Germany.
- [35] S.V. PATANKAR: Numerical heay transfert and fluid flow. McGraw Hill, 1980.
- [36] C.A.J. FLETCHER : Computational techniques for fluid dynamics, Volume I, Fundamental and general Techniques, Edition Springer-Verlag.
- [37] R. VICHNEVETSKY: Stability charts in the numerical approximation of partial differential equations: A review. Mathematics and computers in simulation XXI, 1979, p 170-177.
- [38] I. E. IDEL'CIK: Memento des pertes de charge, Ed Paris, 1969.
- [39] H. MOUTON: Cours de convection de la chaleur. Université de Nantes, 1989.

ANNEXES

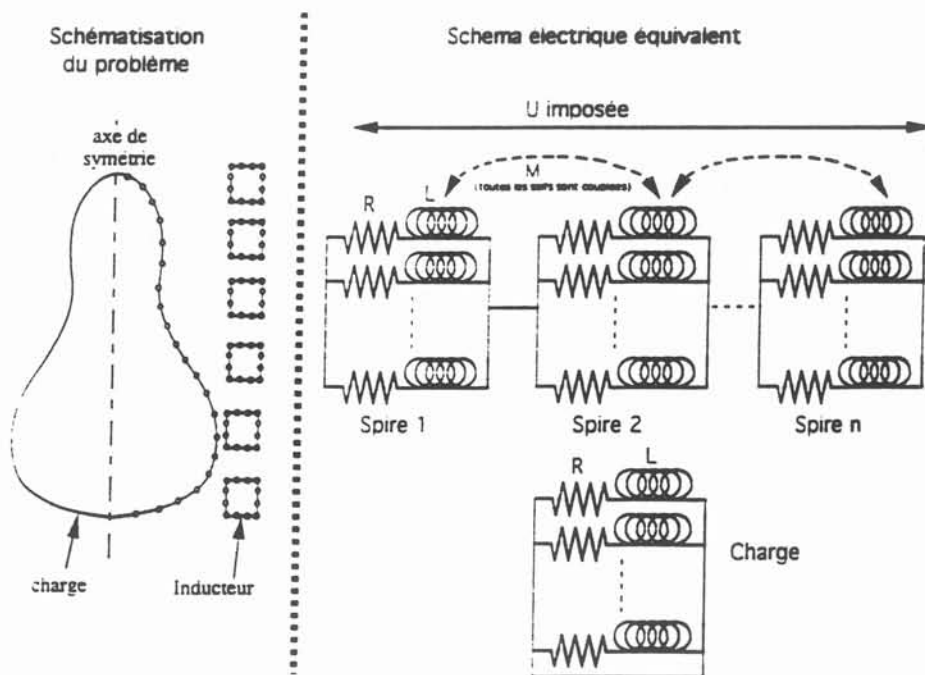
ANNEXE 1

Principe de calcul du code numérique OPHELIE

Le logiciel OPHELIE, permet de connaître la répartition du champ magnétique qui s'établit dans le système considéré, et donc d'en déduire les autres grandeurs physiques qui en découlent (courants induits, forces de Laplace, etc ...).

Ce logiciel est basé sur une discrétisation des différents éléments en mailles électriques élémentaires: l'ensemble des éléments déterminants le système à induction (charge - creuset - inducteur) est discrétisé en mailles électriques élémentaires, où la densité de courant est supposée constante dans chaque maille. Cette discrétisation revient à obtenir un schéma électrique équivalent, où l'ensemble des inductances correspondant aux différentes mailles sont couplées entre elles (figure 1) :

Figure 1: Représentation électrique d'un système inductif



L'écriture de la loi d'ohm généralisée (provenant des équations de Maxwell) est appliquée au milieu de chaque micro-spire i de rayon r_i et dans laquelle circule la densité de courant J_i .

Dans le cadre de ce problème, la seule composante non nulle du potentiel vecteur \vec{A} et de la densité de courant \vec{j} est la composante azimutale. La tension aux bornes de cette micro-spire s'écrit alors:

$$U_i = 2 \pi r_i \left[\rho_i J_i + j \omega \sum_{k=1}^N A_k(J_k) \right]$$

A_k est le potentiel vecteur de chaque maille k , portant la densité de courant J_k , sur la maille considérée i . Ce potentiel vecteur permet donc d'exprimer le couplage de l'ensemble des mailles sur la maille i . Il est calculé et fonction de chacune des autres densités de courant inconnues J_k . La fermeture du système d'équations se fait par l'écriture des lois de Kirschhoff:

- conservation des courants dans chaque spire
- loi des mailles $\sum U_i = U$ imposée au niveau de l'inducteur

Par l'élimination des tensions U_i en fonction des densités de courant J_i , on obtient un système matriciel dont seuls les J_i sont les inconnues:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ J_i \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U \end{bmatrix} \quad (1)$$

La résolution numérique amène la répartition des densités de courants J_i , d'où il est possible de déduire les autres grandeurs physiques locales, tel que le champ magnétique, ainsi que les valeurs globales, comme la résistance R et l'inductance L du circuit électrique équivalent.

Le point important de ce code numérique est donc le calcul du potentiel vecteur, qui permet de tenir compte des dimensions physiques des éléments.

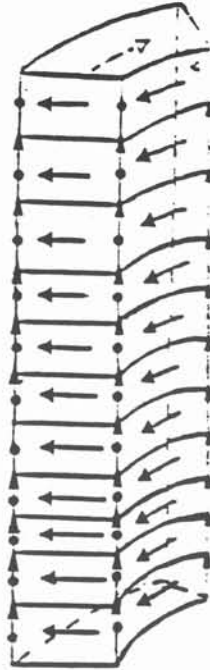
Le potentiel vecteur créé en un point par un volume V , émetteur, dans lequel circulent des densités de courant \vec{j} est décrit par la loi de Biot et Savart:

$$\vec{A} \text{ créé en un point récepteur} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{L} dV ,$$

où dV est un élément de volume du conducteur et L est la distance entre l'élément dV et le point où l'on veut calculer le potentiel vecteur.

Des expressions analytiques permettent de calculer le potentiel vecteur en un point quelconque (le récepteur), créé par un élément filiforme (l'émetteur), dans lequel circule un courant I . Compte tenu de la discrétisation effectuée pour les secteurs du creuset, dans lesquels il est nécessaire de modéliser le rebouclage des courants (figure 2), l'expression du potentiel vecteur est déterminée pour deux types de géométries:

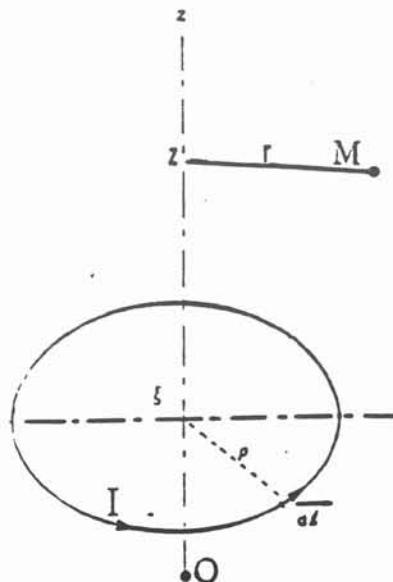
Figure 2: Discrétisation d'un secteur d'un creuset froid



- pour un circuit circulaire: $A = \frac{\mu_0}{\pi} I \sqrt{\frac{\rho}{m r}} \left[\left(1 - \frac{m}{2}\right) K(m) - E(m) \right]$
 et $m = \frac{4 \rho r}{[(\rho + r)^2 + (z - \xi)^2]}$

avec ρ et ξ le rayon et la cote de la spire émettrice
 r et z le rayon et la cote du point M récepteur (voir figure 3)
 K et E des intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèces, dont on connaît des approximations polynomiales

Figure 3: Calcul du potentiel vecteur pour un élément filiforme circulaire



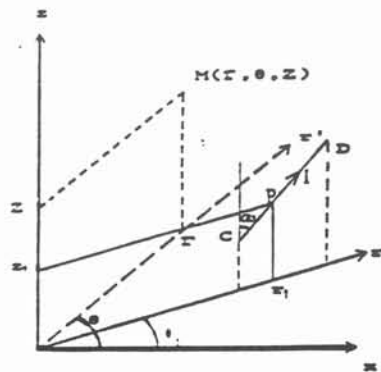
- pour un simple segment rectiligne CD (voir figure 4)

$$A = \frac{\mu_0}{\pi} I \log \frac{x_D + \sqrt{1 + x_D^2}}{x_C + \sqrt{1 + x_C^2}}$$

Figure 4: Calcul du potentiel vecteur pour un élément filiforme rectiligne

$$x_C = \frac{\sin \alpha_1 (r_C - r \cos (\theta - \theta_1)) + \cos \alpha_1 (z_C - z)}{[(\cos \alpha_1 (r_C - r \cos (\theta - \theta_1)) + \sin \alpha_1 (z_C - z))^2 + r^2 \sin^2 (\theta - \theta_1)]^{1/2}}$$

$$x_D = \frac{[(z_D - z_C)^2 + (r_D - r_C)^2]^{1/2} + \sin \alpha_1 (r_C - r \cos (\theta - \theta_1)) + \cos \alpha_1 (z_C - z)}{[(\cos \alpha_1 (r_C - r \cos (\theta - \theta_1)) + \sin \alpha_1 (z_C - z))^2 + r^2 \sin^2 (\theta - \theta_1)]^{1/2}}$$

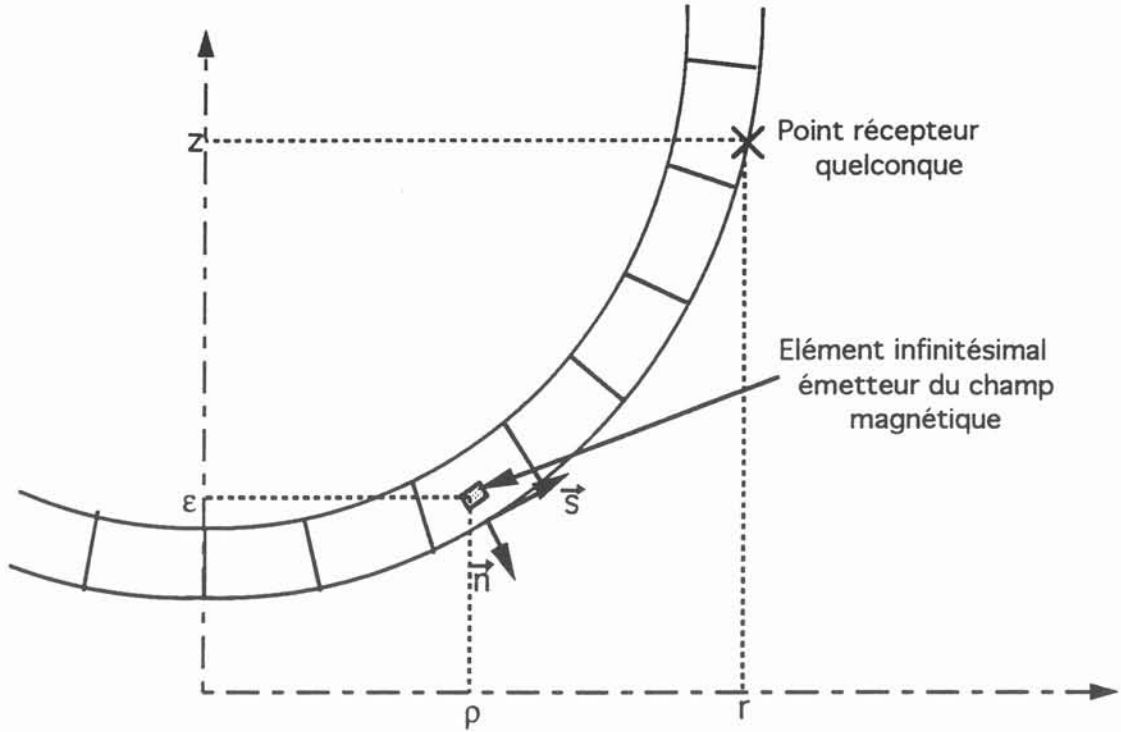


soit dans tous les cas: $A = \frac{\mu_0}{\pi} I f(\rho, \xi, r, z)$ f fonction de la géométrie de l'élément récepteur et l'élément émetteur.

Cette expression, valable pour une géométrie filiforme, est appliquée à un élément infinitésimal dn ds de l'émetteur, dans lequel circule la densité de courant J (figure 5). L'intégration de cette expression sur la surface de l'élément émetteur s'écrit ainsi:

$$A = \frac{\mu_0}{\pi} \int_n \int_s J g(n, s) ds dn \quad \text{où l'on note } g(n, s) = f(\rho, \xi, r, z)$$

Figure 5: Application des lois en potentiel vecteur à une configuration non filiforme



Cas de fine épaisseur de peau:

Dans le cas où $\delta \ll R$, dimension caractéristique de la charge, l'expression de la densité de courant J selon n est analytiquement connue et suit la loi de décroissance exponentielle suivante:

$$J = J(s) e^{-\frac{(i+1)n}{\delta}} \quad \text{où } J(s) \text{ est la densité de courant en surface}$$

$$\text{d'où } A = \frac{\mu_0}{\pi} \int_n \int_s J(s) e^{-\frac{(i+1)n}{\delta}} g(n,s) ds dn$$

Les spires élémentaires ou arcs de spires sont suffisamment faibles pour que la densité de surface soit considérée comme constante:

$$A = \frac{\mu_0}{\pi} J \int_n \int_s e^{-\frac{(i+1)n}{\delta}} g(n,s) ds dn$$

Puisque $\delta \ll R$, l'exponentielle s'annule rapidement selon n et l'on peut montrer qu'elle varie beaucoup plus vite que la fonction $g(n,s)$:

$$\int_n e^{-\frac{(i+1)n}{\delta}} g(n,s) dn = g(0,s) \int_n e^{-\frac{(i+1)n}{\delta}} dn$$

Il est alors possible de transformer l'intégrale double en deux intégrales simples, dont la première est intégrée analytiquement:

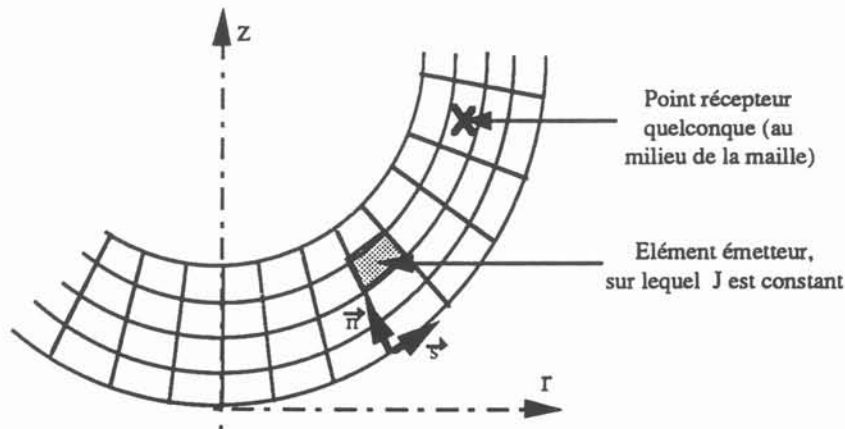
$$A = \frac{\mu_0}{\pi} J \int_n e^{-\frac{(i+1)n}{\delta}} dn \int_s g(0,s) ds$$

$$\text{soit: } A = \frac{\mu_0 J}{\pi} \frac{\delta}{i+1} \int_s g(0,s) ds dn$$

Cas de grande épaisseur de peau:

Lorsque δ est quelconque devant le rayon de la charge R, il est nécessaire d'effectuer une discrétisation non seulement en surface de la charge, comme pour les petites peaux, mais également en profondeur comme indiqué sur la figure 6.

Figure 6: Modélisation dans le cas où δ est quelconque devant R



Dans ce cas, on considère que dans chacune des mailles ainsi définies, la densité de courant est constante pour le calcul du potentiel vecteur, qui se traduit alors par un calcul numérique d'une intégrale double. Ce cas est appelé hypothèse de grande épaisseur de peau électromagnétique.

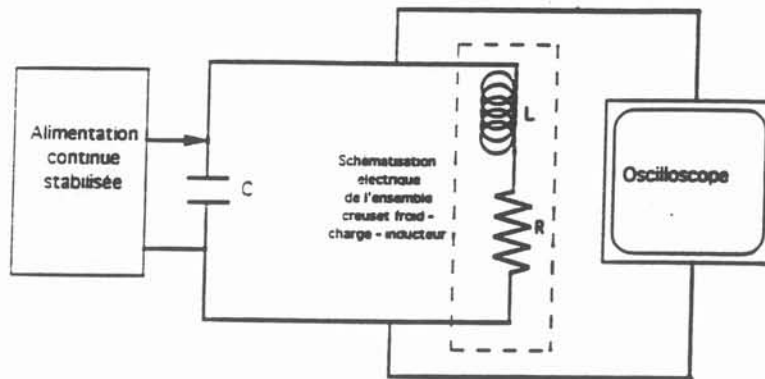
Quelque soient les hypothèses et le type de modélisation choisie, on connaît alors le potentiel vecteur au point central de chaque maille, et l'on obtient ainsi le système linéaire (1) décrit précédemment et qui est résolu numériquement.

ANNEXE 2

Méthode du décroément logarithmique

Un banc de condensateurs est chargé sous une tension continue de faible niveau. Le signal de la tension de décharge dans le circuit oscillant constitué du coffret de condensateurs, du transformateur, et de l'ensemble charge - creuset - inducteur est observé à l'oscilloscope (figures 1 et 2).

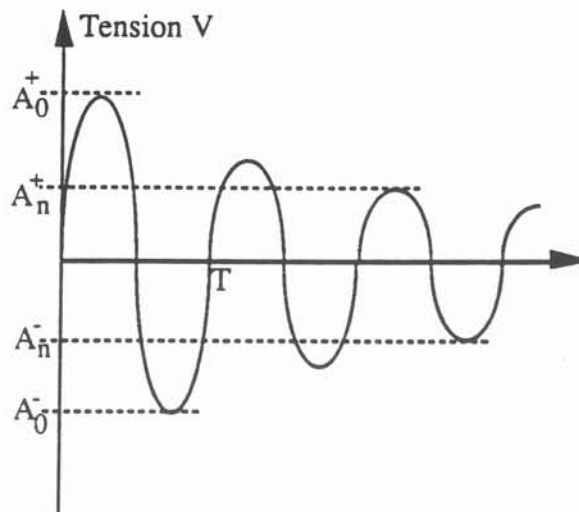
Figure 1: Méthode du décroément logarithmique



Ce signal a l'expression suivante:

$$V = V_0 e^{-(R/2L)t} \cos(\omega t + \Psi)$$

Figure 2: signal de décharge des condensateurs



où R et L sont respectivement la résistance et l'inductance totale du circuit, Ψ le déphasage, et ω la pulsation de la résonance, qui s'écrit:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}, \quad (1)$$

expression qui peut être approximée par $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

La mesure sur le signal observé de la période T et de la décroissance des amplitudes entre deux points séparés par plusieurs périodes permettent de déterminer l'impédance de l'installation:

$$R = \frac{L \omega_0}{n \pi} \operatorname{Ln} \left(\frac{A_0^+ - A_0^-}{A_n^+ - A_n^-} \right) \quad (2)$$

A_0^- , A_0^+ , A_n^- et A_n^+ étant définis sur la figure 2

Les équations (1) et (2) forment ainsi un système où R et L sont les inconnues et que l'on peut donc connaître.

Cette méthode est très simple d'emploi mais présente cependant des limitations:

* Elle n'est pas utilisable en cours de chauffage, puisqu'il est impossible de brancher l'alimentation continue sur le coffret de condensateurs lorsque qu'il y a alimentation par le réseau du circuit. Pour faire des comparaisons sur des essais en cours de chauffage, il faut donc couper l'alimentation, ce qui entraîne à cause du refroidissement qui suit, une modification des propriétés physiques des matériaux chauds, et donc une imprécision dans la mesure.

* Elle ne donne que les valeurs globales R et L du circuit et non pas les valeurs de chacun des éléments qui la constituent.

ANNEXE 3

Modélisation du transformateur par son schéma équivalent et représentation électrique complète de l'installation

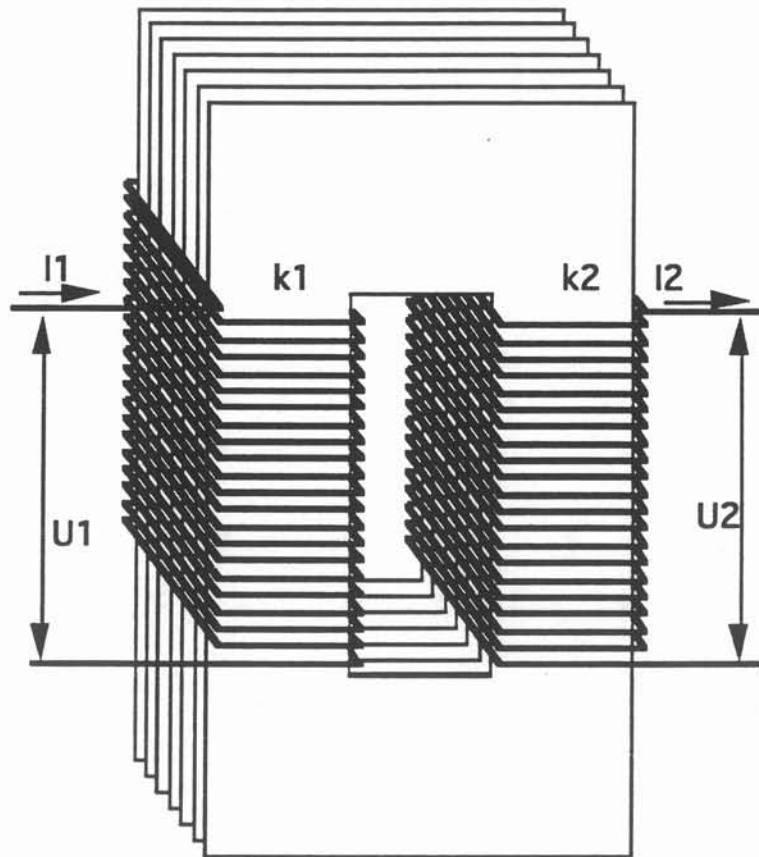
Une première possibilité est de considérer le transformateur comme quasiment parfait, avec comme seul paramètre le rapport du nombre de spires entre l'enroulement primaire et l'enroulement secondaire, qui est alors égal à :

$$k = \frac{n_1}{n_2} = \left| \frac{U_1}{U_2} \right| = \left| \frac{I_2}{I_1} \right|$$

Le choix a été d'essayer de tenir compte des pertes électriques qui se produisent au sein du transformateur, qui doit donc être modélisé.

Un transformateur électrique est constitué de deux bobinages reliés l'un à l'autre par l'intermédiaire d'un circuit en matériau ferromagnétique, qui permet de canaliser le flux magnétique et donc de transmettre la puissance d'un bobinage à l'autre (figure 1).

Figure 1: Constitution d'un transformateur



De par sa constitution, le transformateur subit des pertes électriques qui peuvent être modélisées de la façon suivante [21]:

Rb1 et **Rb2** : résistance des bobines primaire et secondaire, qui s'échauffent au passage du courant.

L_{f1} et L_{f2} : inductance de fuite des deux bobines, correspondant au flux qui n'est pas transmis d'une bobine à l'autre par l'intermédiaire du circuit magnétique.

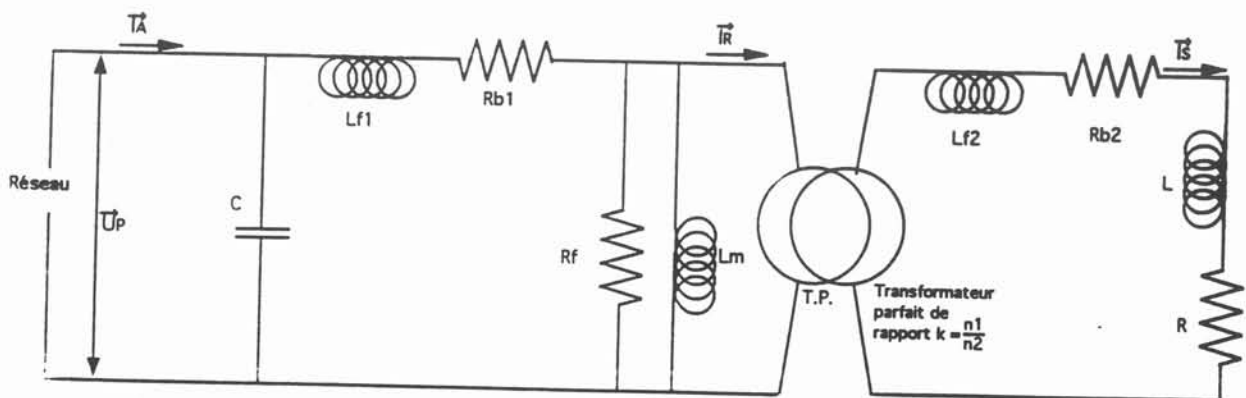
R_f : résistance équivalente du circuit magnétique, traduisant les pertes par hystérésis et les pertes fer, liées au courant induit circulant dans le circuit magnétique et créant un échauffement.

L_m : inductance magnétisante du circuit magnétique (déterminé au circuit primaire du transformateur, le circuit secondaire étant à vide).

Ces différentes pertes interviennent dans le circuit électrique de la façon suivante avec l'ensemble des pertes dues à l'existence du circuit magnétique ramenée au circuit primaire du transformateur:

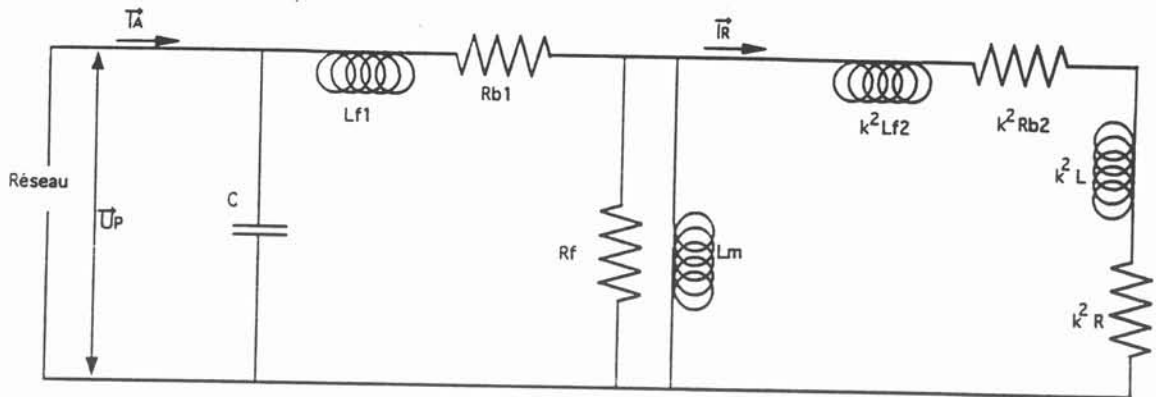
Ces pertes, qui interviennent dans le circuit électrique, sont représentées figure 2. L'ensemble des pertes dues au circuit magnétique est ramené au circuit primaire de l'installation.

Figure 2: Modélisation des pertes d'un transformateur



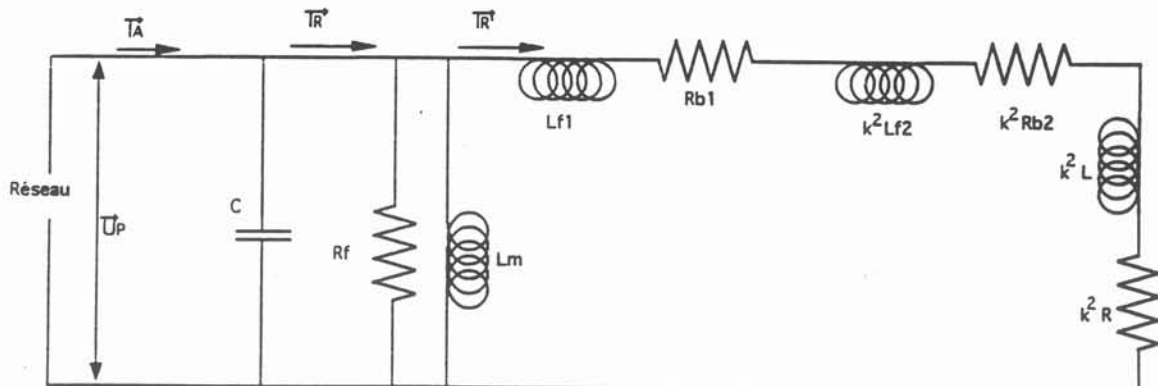
Si d'une manière analogue, on choisi de ramener les pertes de la bobine du circuit secondaire, au niveau du circuit primaire, le schéma obtenu est le suivant :

Figure 3: Pertes ramenées au primaire du transformateur



Lors de la caractérisation expérimentale des pertes du transformateur, on ne peut connaître de la somme globale des inductances de fuite des bobinages primaire et secondaire, qu'il n'est en théorie pas possible de regrouper, puisque les pertes du circuit ferro-magnétique s'intercalent en parallèle entre L_{f1} et L_{f2} . Cependant, compte tenu des faibles valeurs de R_b et L_f ainsi que des fortes valeurs de R_f et L_m , devant les valeurs globales de résistance et d'inductance du circuit, des approximations restent possibles. La résistance R_{b1} et l'inductance L_{f1} des pertes au niveau de la bobine primaire sont ainsi ramenées directement en aval des pertes du noyau magnétique.

Figure 4: Simplification de la modélisation des pertes du transformateur



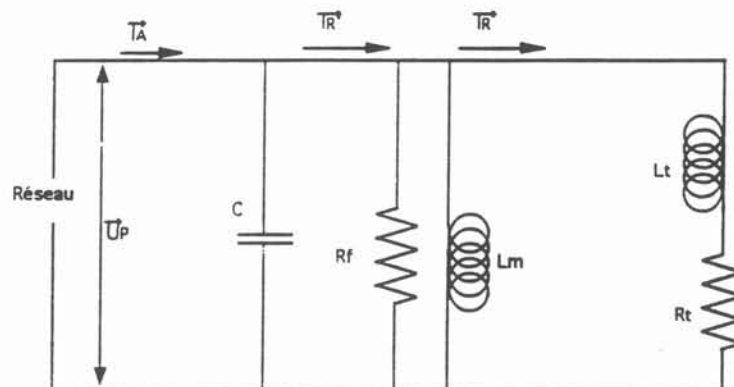
Il est alors possible d'obtenir les éléments suivants, par les données du constructeur, ainsi qu'expérimentalement par mesures des courants et tensions aux bornes du transformateur, lorsque le secondaire de celui-ci est mis à vide puis en court-circuit:

$$\begin{aligned} L_{f1} + k^2 L_{f2} &= 37 \mu\text{H} \\ R_{b1} + k^2 R_{b2} &= 5,56 \text{ m}\Omega \\ L_m &= 294200 \mu\text{H} \\ R_f &= 219 \Omega \end{aligned}$$

Le circuit de l'installation complète est alors le suivant:

on note:
$$L_t = L_{f1} + k^2 L_{f2} + k^2 L$$
$$R_t = R_{b1} + k^2 R_{b2} + k^2 R$$

Figure 5: Circuit final équivalent



ANNEXE 4

Résolution du système d'équations modélisant le couplage électromagnétique entre la poche de fusion 50 Hz et le dispositif de vanne électromagnétique moyenne fréquence

Dans le cas où l'on considère les générateurs de tension comme parfaits, c'est à dire sans chute de tension, le système d'équation est plus simple à résoudre.

1. Système découplé

Dans une telle configuration, la solution d'un problème, sans couplage inductif, est la suivante :

le système s'écrit :

$$U = RI + L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (\text{sans terme de mutuelle})$$

$$I_c = C \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$U = V \cos \omega t \quad (\text{sans chute de tension})$$

$$i = I + I_c$$

En régime permanent forcé, l'expression de I est du même type que la tension imposée, soit:

$$I = A \cos (\omega t + \theta), \text{ avec } \theta \text{ déphasage entre courant et tension}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial I}{\partial t} = -A \omega \sin (\omega t + \theta)$$

$$\text{et donc} \quad V \cos \omega t = R A \cos (\omega t + \theta) - L \omega A \sin (\omega t + \theta)$$

Cette équation reste valable quel que soit le temps choisi. Les deux inconnues A et θ sont déterminées en écrivant l'équation précédente pour deux valeurs du temps où l'on connaît la tension U :

$$\text{pour } t = 0 \quad U = R A \cos \theta - \omega L A \sin \theta$$

$$\text{pour } \omega t = \frac{\pi}{2} \quad 0 = R A \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - L A \omega \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$\text{On en déduit alors :} \quad \theta = \text{Arctg} \left(-\frac{R}{L \omega}\right)$$

$$A = \frac{U}{R \cos \theta - L \omega \sin \theta}$$

On connaît alors $I = A \cos (\omega t + \theta)$, et I_c est calculé directement par

$$I_c = C \frac{\partial U}{\partial t}$$

On en déduit alors $i = I + I_c$

2. Système couplé

En appliquant ce type de résolution au système couplé, toujours dans le cas d'un générateur parfait, on écrit :

$$U_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{\partial I_1}{\partial t} + M \frac{\partial I_2}{\partial t}$$

$$U_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{\partial I_2}{\partial t} + M \frac{\partial I_1}{\partial t}$$

$$I_{c1} = C_1 \frac{\partial U_1}{\partial t}$$

$$I_{c2} = C_2 \frac{\partial U_2}{\partial t}$$

$$U_1 = V_1 \cos \omega_1 t \quad (\text{sans impédance interne du générateur})$$

$$U_2 = V_2 \cos (\omega_2 t + \phi)$$

$$i_1 = I_1 + I_{c1}$$

$$i_2 = I_2 + I_{c2}$$

Comme précédemment, les expressions de I_1 et I_2 sont du même type que les deux termes U_1 et U_2 qui les forcent à osciller, soit :

$$I_1 = A_1 \cos (\omega_1 t + \phi_{11}) + B_1 (\cos \omega_2 t + \phi_{12})$$

$$I_2 = A_2 \cos (\omega_1 t + \phi_{21}) + B_2 (\cos \omega_2 t + \phi_{22})$$

avec:

- A1 module du terme principal du circuit 1
- B1 module du terme de couplage du circuit 1
- A2 module du terme de couplage du circuit 2
- B2 module du terme principal du circuit 2
- ω_1 pulsation de la tension du circuit 1
- ω_2 pulsation de la tension du circuit 2
- ϕ déphasage entre les deux tensions
- ϕ_{11} déphasage entre le terme principal de I_1 (provenant de la tension U_1), et la tension U_1
- ϕ_{12} déphasage entre le terme de couplage de I_1 (provenant de la tension U_2) et la tension U_2
- ϕ_{21} déphasage entre le terme de couplage de I_2 (provenant de la tension U_1) et la tension U_1
- ϕ_{22} déphasage entre le terme principal de I_2 (provenant de la tension U_2) et la tension U_2 .

Les deux équations précédentes amènent alors 8 inconnues:

A1, B1, A2 et B2

ϕ_{11} , ϕ_{12} , ϕ_{21} et ϕ_{22} ,

que l'on cherche à déterminer, en choisissant 4 valeurs du temps où l'on connaît les valeurs des tensions U_1 et U_2 . La tension de déphasage entre les deux tensions ϕ est quelconque et peut prendre n'importe quelle valeur.

En injectant dans les expressions des tensions, les dérivées des courants en fonction du temps:

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_{11}) - B_1 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi + \phi_{12})$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} = -A_2 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_{21}) - B_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi + \phi_{22})$$

On obtient alors, pour les 4 valeurs du temps choisies un système de 8 équations à 8 inconnues :

$$\text{on pose } r = \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ réel connu et fixé}$$

* Pour $\omega_1 t = 0$

$$V_1 = R_1 A_1 \cos \phi_{11} + R_1 B_1 \cos(\phi + \phi_{12}) - L_1 A_1 \omega_1 \sin \phi_{11} - L_1 B_1 \omega_2 \sin(\phi + \phi_{12}) - M A_2 \omega_1 \sin(\phi_{21}) - M B_2 \omega_2 \sin(\phi + \phi_{22})$$

$$V_2 \cos \phi = R_2 A_2 \cos \phi_{21} + R_2 B_2 \cos(\phi + \phi_{22}) - L_2 A_2 \omega_1 \sin \phi_{21} - L_2 B_2 \omega_2 \sin(\phi + \phi_{22}) - M A_1 \omega_1 \sin(\phi_{11} + \phi_{21}) - M B_1 \omega_2 \sin(\phi + \phi_{12})$$

* Pour $\omega_1 t = \frac{\pi}{2}$

$$0 = R_1 A_1 \sin \phi_{11} + R_1 B_1 \cos(r \frac{\pi}{2} + \phi + \phi_{12}) - L_1 A_1 \omega_1 \cos \phi_{11} - L_1 B_1 \omega_2 \sin(r \frac{\pi}{2} + \phi + \phi_{12}) - M A_2 \omega_1 \cos \phi_{21} - M B_2 \omega_2 \sin(r \frac{\pi}{2} + \phi + \phi_{22})$$

$$V_2 \cos(r \frac{\pi}{2} + \phi + \phi_{12}) = -R_2 A_2 \sin \phi_{21} + R_2 B_2 \cos(r \frac{\pi}{2} + \phi + \phi_{22}) - L_2 A_2 \omega_1 \cos \phi_{21} - L_2 B_2 \omega_2 \sin(r \frac{\pi}{2} + \phi + \phi_{22}) - M A_1 \omega_1 \cos \phi_{11} - M B_1 \omega_2 \sin(r \frac{\pi}{2} + \phi + \phi_{12})$$

* Pour $\omega_2 t = \frac{\pi}{2}$

$$V_1 \cos(\frac{1}{r} \frac{\pi}{2}) = R_1 A_1 \cos(\frac{1}{r} \frac{\pi}{2} + \phi_{11}) - R_1 B_1 \sin(\phi + \phi_{12}) - L_1 A_1 \omega_1 \sin(\frac{1}{r} \frac{\pi}{2} + \phi_{11}) - L_1 B_1 \omega_2 \cos(\phi + \phi_{12}) - M A_2 \omega_1 \sin(\frac{1}{r} \frac{\pi}{2} + \phi_{21}) - M B_2 \omega_2 \cos(\phi + \phi_{22})$$

$$V_2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) = R_2 A_1 \cos \left(\frac{1}{r} \frac{\pi}{2} + \phi_{21} \right) - R_2 B_2 \sin (\phi + \phi_{22}) - L_2 A_2 \omega_1 \sin \left(\frac{1}{r} \frac{\pi}{2} + \phi_{21} \right) \\ - L_2 B_2 \omega_2 \cos (\phi + \phi_{22}) - M A_1 \omega_1 \sin \left(\frac{1}{r} \frac{\pi}{2} + \phi_{11} \right) - M B_1 \omega_2 \cos (\phi + \phi_{12})$$

* Enfin pour $\omega_1 t = \frac{\pi}{6}$, on écrit :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} V_1 = R_1 A_1 \cos \left(\frac{\pi}{6} + \phi_{11} \right) - R_1 B_1 \cos \left(r \frac{\pi}{6} + \phi + \phi_{12} \right) - L_1 A_1 \omega_1 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \phi_{12} \right) \\ - L_1 B_1 \omega_2 \sin \left(r \frac{\pi}{6} + \phi + \phi_{12} \right) - M A_2 \omega_1 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \phi_{21} \right) - M B_2 \omega_2 \cos \left(r \frac{\pi}{6} + \phi + \phi_{22} \right)$$

$$V_2 \cos \left(r \frac{\pi}{6} + \phi \right) = R_2 A_2 \cos \left(\frac{\pi}{6} + \phi_{21} \right) - R_2 B_2 \cos \left(r + \frac{\pi}{6} + \phi + \phi_{22} \right) \\ - L_2 A_2 \omega_1 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \phi_{21} \right) - L_2 B_2 \omega_2 \sin \left(r \frac{\pi}{6} + \phi + \phi_{22} \right) \\ - M A_1 \omega_1 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \phi_{11} \right) - M B_2 \omega_2 \cos \left(r \frac{\pi}{6} + \phi + \phi_{12} \right)$$

Pour résoudre ce système, il est nécessaire de transformer les équations pour séparer les inconnues des coefficients dans les expressions des sin et cos.

Ceci s'effectue à partir des relations

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

On obtient alors un système matriciel linéaire, représenté figure 1:

La résolution se fait numériquement en utilisant la méthode de Gauss-Jordan, qui permet par recherche du pivot maximum de la matrice, de résoudre des systèmes mal conditionnés.

On peut alors calculer :

- les amplitudes des deux composantes de chaque courant

$$A_1 = \sqrt{(A_1 \cos \phi_{11})^2 + (A_1 \sin \phi_{11})^2} \\ \text{etc...}$$

- les différents déphasages

$$\phi_{11} = \text{Arctg} \left[\frac{A_1 \sin \phi_{11}}{A_1 \cos \phi_{11}} \right] \\ \text{etc...}$$

On obtient alors toutes les valeurs permettant de déterminer les courants I_1 et I_2 .

Figure 1: Ecriture du système matriciel permettant de résoudre le problème de couplage entre les deux systèmes inductifs

$$\begin{bmatrix}
 L_1 \omega_1 & R_1 & -L_1 \omega_2 & R_1 & -M \omega_1 & 0 & -M \omega_2 & 0 \\
 -M \omega_1 & 0 & -M \omega_2 & 0 & -L_2 \omega_1 & R_2 & -L_2 \omega_2 & R_2 \\
 R_1 & -L_1 \omega_1 & R_1 \sin(r \frac{\pi}{2}) & R_1 \cos(r \frac{\pi}{2}) & 0 & M \omega_1 & -M \omega_2 \cos(r \frac{\pi}{2}) & -M \omega_2 \sin(r \frac{\pi}{2}) \\
 0 & -M \omega_1 & M \omega_2 \cos(r \frac{\pi}{2}) & M \omega_2 \sin(r \frac{\pi}{2}) & R_2 & -L_2 \omega_1 & -R_2 \sin(r \frac{\pi}{2}) & R_2 \cos(r \frac{\pi}{2}) \\
 R_1 \sin(r \frac{\pi}{2}) & -R_1 \cos(r \frac{\pi}{2}) & -R_1 & -L_1 \omega_2 & -M \omega_1 \cos(r \frac{\pi}{2}) & -M \omega_1 \sin(r \frac{\pi}{2}) & 0 & -M \omega_2 \\
 -L_1 \omega_1 \cos(r \frac{\pi}{2}) & -L_1 \omega_1 \sin(r \frac{\pi}{2}) & -L_1 \omega_1 \cos(r \frac{\pi}{2}) & -L_1 \omega_1 \sin(r \frac{\pi}{2}) & -R_2 \sin(r \frac{\pi}{2}) & -L_2 \omega_2 \cos(r \frac{\pi}{2}) & -L_2 \omega_2 \sin(r \frac{\pi}{2}) & \\
 M \omega_1 \cos(r \frac{\pi}{2}) & -M \omega_1 \sin(r \frac{\pi}{2}) & 0 & -M \omega_2 & -R_2 \sin(r \frac{\pi}{2}) & -L_2 \omega_2 & -L_2 \omega_2 & \\
 \frac{1}{2} R_1 & \frac{\sqrt{3}}{2} R_1 & -R_1 \sin(r \frac{\pi}{6}) & R_1 \cos(r \frac{\pi}{6}) & \frac{\sqrt{3}}{2} M \omega_1 & -\frac{1}{2} M \omega_1 & -M \omega_2 \cos(r \frac{\pi}{2}) & -M \omega_2 \sin(r \frac{\pi}{2}) \\
 \frac{\sqrt{3}}{2} L_1 \omega_1 & \frac{1}{2} L_1 \omega_1 & -L_1 \omega_2 \cos(r \frac{\pi}{6}) & -L_1 \omega_2 \sin(r \frac{\pi}{6}) & -\frac{1}{2} R_2 & \frac{\sqrt{3}}{2} R_2 & -R_2 \sin(r \frac{\pi}{6}) & R_2 \cos(r \frac{\pi}{6}) \\
 \frac{\sqrt{3}}{2} M \omega_1 & -\frac{1}{2} M \omega_1 & -M \omega_2 \cos(r \frac{\pi}{6}) & M \omega_2 \sin(r \frac{\pi}{6}) & -\frac{R(3)}{2} L_2 \omega_1 & -\frac{1}{2} L_2 \omega_1 & -L_2 \omega_2 \cos(r \frac{\pi}{6}) & -L_2 \omega_2 \sin(r \frac{\pi}{6})
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 A_1 \sin \phi_{11} \\
 A_1 \cos \phi_{11} \\
 B_1 \sin(\phi + \phi_{12}) \\
 B_1 \cos(\phi + \phi_{12}) \\
 A_2 \sin \phi_{21} \\
 A_2 \cos \phi_{21} \\
 B_2 \sin(\phi + \phi_{22}) \\
 B_2 \cos(\phi + \phi_{22})
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 V_1 \\
 V_2 \cos \phi \\
 0 \\
 V_2 \cos(r \frac{\pi}{2} + \phi) \\
 V_1 \cos(r \frac{\pi}{2}) \\
 V_2 \cos(r \frac{\pi}{2} + \phi) \\
 \frac{\sqrt{3}}{2} V_1 \\
 V_2 \cos(r \frac{\pi}{6} + \phi)
 \end{bmatrix}$$



PROFESSEURS DES UNIVERSITES

BARIBAUD	Michel	ENSERG
BARRAUD	Alain	ENSIEG
BARTHELEMY	Alain	ENSHMG
BAUDELET	Bernard	ENSPG
BAUDIN	Gérard	UFR PGP
BEAUFILS	Jean-Pierre	ENSIEG/ILL
BOIS	Philippe	ENSHMG
BOUVIER	Gérard	ENSERG
BRINI	Jean	ENSERG
BRUNET	Yves	CUEFA
CAVAIGNAC	Jean-François	ENSPG
CHARTIER	Germain	ENSPG
CHENEVIER	Pierre	ENSERG
CHERUY	Arlette	ENSIEG
CHOVET	Alain	ENSERG
COGNET	Gérard	ENSGI
COLINET	Catherine	ENSEEG
COMMAULT	Christian	ENSIEG
CORNUT	Bruno	ENSIEG
COULOMB	Jean-Louis	ENSIEG
COUTRIS	Nicole	ENSPG
CROWLEY	James	ENSIMAG
DALARD	Francis	ENSEEG
DARVE	Félix	ENSHMG
DELLA DORA	Jean	ENSIMAG
DEPEY	Maurice	ENSERG
DEPORTES	Jacques	ENSPG
DEROO	Daniel	ENSEEG
DESRE	Pierre	ENSEEG
DIARD	Jean-Paul	ENSEEG
DOLMAZON	Jean-Marc	ENSERG
DURAND	Francis	ENSEEG
DURAND	Jean-Louis	ENSPG
FAUTRELLE	Yves	ENSHMG
FOGGIA	Albert	ENSIEG
FORAY	Pierre	ENSHMG
FOULARD	Claude	ENSIEG
GALERIE	Alain	ENSEEG
GANDINI	Alessandro	UFR/PGP
GAUBERT	Claude	ENSPG
GENTIL	Pierre	ENSERG
GENTIL	Sylviane	ENSIEG
GUERIN	Bernard	ENSERG
GUYOT	Pierre	ENSEEG
IVANES	Marcel	ENSIEG
JACQUET	Paul	ENSIMAG
JALLUT	Christian	ENSEEG
JANOT	Marie-Thérèse	ENSERG

JAULENT	Patrick	ENSGI
JAUSSAUD	Pierre	ENSIEG
JOST	Rémy	ENSPG
JOUBERT	Jean-Claude	ENSPG
JOURDAIN	Geneviève	ENSIEG
KUENY	Jean-Louis	ENSHMG
LACHENAL	Dominique	UFR PGP
LACOUME	Jean-Louis	ENSIEG
LADET	Pierre	ENSIEG
LE NEST	Jean-François	UFR/PGP
LESIEUR	Marcel	ENSHMG
LESPINARD	Georges	ENSHMG
LIENARD	Joël	ENSIEG
LONGUEQUEUE	Jean-Pierre	ENSPG
LORET	Benjamin	ENSHMG
LOUCHET	François	ENSEEG
LUCAZEAU	Guy	ENSEEG
LUX	Augustin	ENSIMAG
MASSE	Philippe	ENSPG
MASSELOT	Christian	ENSIEG
MAZARE	Guy	ENSIMAG
MICHEL	Gérard	ENSIMAG
MOHR	Roger	ENSIMAG
MOREAU	René	ENSHMG
MORET	Roger	ENSIEG
MOSSIÈRE	Jacques	ENSIMAG
OBLED	Charles	ENSHMG
OZIL	Patrick	ENSEEG
PANANAKAKIS	Georges	ENSERG
PAULEAU	Yves	ENSEEG
PERRET	Robert	ENSIEG
PERRIER	Pascal	ENSERG
PIAU	Jean-Michel	ENSHMG
PIC	Etienne	ENSERG
PLATEAU	Brigitte	ENSIMAG
POUPOT	Christian	ENSERG
RAMEAU	Jean-Jacques	ENSEEG
REINISCH	Raymond	ENSPG
RENAUD	Maurice	UFR/PGP
RIMET	Roger	ENSERG
ROBERT	François	ENSIMAG
ROGNON	Jean-Pierre	ENSIEG
ROSSIGNOL	Michel	ENSPG
ROYE	Daniel	ENSIEG
SABONNADIÈRE	Jean-Claude	ENSIEG
SAGUET	Pierre	ENSERG
SAUCIER	Gabrièle	ENSIMAG
SCHLENKER	Claire	ENSPG
SCHLENKER	Michel	ENSPG
SILVY	Jacques	UFR/PGP
SOHM	Jean-Claude	ENSEEG
SOLER	Jean-Louis	ENSIMAG
SOUQUET	Jean-Louis	ENSEEG
TICHKIEWITCH	Serge	ENSHMG
TROMPETTE	Philippe	ENSHMG
TRYSTRAM	Denis	ENSGI
VEILLON	Gérard	ENSIMAG
VERJUS	Jean-Pierre	ENSIMAG
VINCENT	Henri	ENSPG

SITUATION PARTICULIERE
PROFESSEURS D'UNIVERSITE

DETACHEMENT

BLOCH Daniel
BONNET Guy
BRECHET Yves
CAILLERIE Denis
GREVEN Hélène
LATOMBE Jean-Claude
PIERRARD Jean-Marie

ENSPG
ENSPG
ENSEEG
ENSHMG
CUEFA
ENSIMAG
ENSHMG

PERSONNES AYANT OBTENU LE DIPLOME
D'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

BALESTRA	Francis
BALME	Louis
BECKER	Monique
BIGEON	Jean
BINDER	Zdeneck
BOE	Louis-Jean
BRECHET	Yves
CADOZ	Claude
CANUDAS DE WIT	Carlos
CHAMPENOIS	Gérard
CHOLLET	Jean-Pierre
COEY	Jean-Pierre
CORNUEJOLS	Gerard
COURNIL	Michel
CRASTES DE PAULET	Michel
DALLERY	Yves
DESCOTES-GENON	Bernard
DUGARD	Luc
DURAND	Madeleine
FERRIEUX	Jean-Paul
FEUILLET	René
FORAY	Pierre
FREIN	Yannick
GAUTHIER	Jean-Paul
GHIBAUDO	Gérard
GUILLEMOT	Nadine
GUYOT	Alain
HAMAR	Sylviane
HAMAR	Roger
HORAUD	Patrice
JACQUET	Paul
LATOMBE	Claudine
LE HUY	Hoang
LE GORREC	Bernard
LOZANO-LEAL	Rogelio
MACOVSKI	Mihaïl
MAHEY	Philippe
METAIS	Olivier
MONMUSSON-PICQ	Georgette
MORY	Mathieu
MULLER	Jean
MULLER	Jean-Michel
NGUYEN TRONG	Bernadette
NIEZ	Jean-Jacques
PERRIER	Pascal
PLA	Fernand
RECHENMANN	François
ROGNON	Jean-Pierre
ROUGER	Jean
ROUX	Jean-Claude
SKOTNICKI	Tomasz
TCHUENT	Maurice
THOMAS	Olivier
VAHLAS	Constantin

DIRECTEURS DE RECHERCHE CNRS

ABELLO	Louis
ALDEBERT	Pierre
ALEMANY	Antoine
ALLIBERT	Colette
ALLIBERT	Michel
ANSARA	Ibrahim
ARMAND	Michel
AUDIER	Marc
AUGOYARD	Jean-François
AVIGNON	Michel
BERNARD	Claude
BINDER	Gilbert
BLAISING	Jean-Jacques
BONNET	Roland
BORNARD	Guy
BOUCHERLE	Jean-Xavier
CAILLET	Marcel
CARRE	René
CHASSERY	Jean-Marc
CHATILLON	Christian
CIBERT	Joël
CLERMONT	Jean-Robert
COURTOIS	Bernard
CRQUI	Patrick
CRISTOLOVEANU	Sorin
DAVID	René
DION	Jean-Michel
DOUSIERE	Jacques
DRIOLE	Jean
DUCHET	Pierre
DUGARD	Luc
DURAND	Robert
ESCUJIER	Pierre
EUSTATHOPOULOS	Nicolas
FINON	Dominique
FRUCHARD	Robert
GARNIER	Marcel
GIROD	Jacques
GLANGEAUD	François
GUELIN	Pierre
HOPFINGER	Emil
JORRAND	Philippe
JOUD	Jean-Charles
KAMARINOS	Georges
KLEITZ	Michel
KOFMAN	Walter
LACROIX	Claudine
LANDAU	Ioan
LAULHERE	Jean-Pierre
LEGRAND	Michel
LEJEUNE	Gérard
LEPROVOST	Christian
MADAR	Roland
MARTIN	Jean-Marie
MERMET	Jean

MEUNIER
MICHEL
NAYROLLES
PASTUREL
PEUZIN
PHAM
PIAU
PIQUE
POINSIGNON
PREJEAN
RENOUARD
SENATEUR
SIFAKIS
SIMON
SUERY
TEODOSIU
VACHAUD
VAUCLIN
WACK
YAVARI
YONNET

Gérard
Jean-Marie
Bernard
Alain
Jean-Claude
Antoine
Monique
Jean-Paul
Christiane
Jean-Jacques
Dominique
Jean-Pierre
Joseph
Jean-Paul
Michel
Christian
Georges
Michel
Bernard
Ali-Reza
Jean-Paul



Président de l'Université :

M. NEMOZ Alain

ANNEE UNIVERSITAIRE 1990 - 1991

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

PROFESSEURS DE 1ERE CLASSE

ADIBA Michel
ANTOINE Pierre
ARVIEU Robert
AURIAULT Jean Louis
BARNA Jean René
BECKER Pierre
BEGUIN Claude
BELORISKY Elie
BENZAKEN Claude
BERARD Pierre
BERNARD Alain
BERTRANDIAS Françoise
BERTRANDIAS Jean Paul
BILLET Jean
BLANCHI Jean Pierre
BOEHLER Jean Paul
BOITET Christian
BORNAREL Jean
BRUANDET Jean François
CARLIER Georges
CASTAING Bernard
CHARDON Michel
CHIBON Pierre
COHEN ADDAD Jean Pierre
COLIN DE VERDIERE Yves
CYROT Michel
DEBELMAS Jacques
DEMAILLY Jean Pierre
GENEUVILLE Alain
DEPORTES Charles
DOLIQUE Jean Michel
DOUCE Roland
DUCROS Pierre
FINKE Gerde
GAUTRON René
GENIES Eugène
GERMAIN Jean Pierre
GIDON Maurice
GIGNOUX Claude
GILLARD Roland
GUITTON Jacques

Informatique
Géologie I.R.I.G.M.
Physique Nucléaire I.S.N.
Mécanique
Statistiques - Mathématiques Appliquées
Physique
Chimie Organique
Physique
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Géographie
A.P.S.
Mécanique
Informatique et Mathématiques Appliquées

Physique
Biologie Végétale
Physique
Géographie
Biologie Animale
Physique
Mathématiques Pures
Physique du Solide
Géologie Générale
Mathématiques Pures
Physique
Chimie Minérale
Physique des Plasmas
Physiologie Végétale
Cristallographie
Informatique
Chimie
Chimie
Mécanique
Géologie
Sciences nucléaires
Mathématiques
Chimie

.. / ...

HERAULT Jeanny
 HICTER Pierre
 JANIN Bernard
 JOLY Jean René
 JOSELEAU Jean Paul
 KAHANE André
 KAHANE Josette
 KRAKOWIAK Sacha
 LAJZEROWICZ Jeanine
 LAJZEROWICZ Joseph
 LAURENT Pierre Jean
 LEBRETON Alain
 DE LEIRIS Joël
 LHOMME Jean
 LOISEAUX Jean Marie
 LONGEQUEUE Nicole
 LUNA Domingo
 MACHE Régis
 MASCLE Georges
 MAYNARD Roger
 NEMOZ Alain
 OMONT Alain
 PELMONT Jean
 PERRIER Guy
 PIERRE Jean Louis
 RENARD Michel
 RICHARD Jean Marc
 RIEDTMANN Christine
 RINAUDO Marguerite
 ROBERT Jean Bernard
 ROSSI André
 SAXOD Raymond
 SENDEL Philippe
 SERGERAERT Francis
 SOUCHIER Bernard
 STUTZ Pierre
 TRILLING Laurent
 VALLADE Marcel
 VAN CUTSEM Bernard
 VIALON Pierre
 VIDAL Micheal

Physique
 Chimie
 Géographie
 Mathématiques Pures
 Biochimie
 Physique
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Physique
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Mathématiques Appliquées
 Biologie
 Chimie
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Physique
 Mathématiques Pures
 Physiologie Végétale
 Géologie
 Physique du Solide
 Physique
 Astrophysique
 Biochimie
 Géophysique
 Chimie Organique
 Thermodynamique

Mathématiques
 Chimie C.E.R.M.A.V.

Biologie
 Biologie Animale
 Biologie Animale
 Mathématiques Pures
 Biologie
 Mécanique
 Mathématiques Appliquées
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Géologie

APPARU Marcel
 ARMAND Gilbert
 ARNAUD Hubert
 ARTRU Marie Christine
 ATTANE Pierre
 BARATE Robert
 BARET Paul
 BARGE Jean
 BARLET Roger
 BERTIN José
 BLOCK Marc
 BLUM Jacques
 BOITET Christian
 BORRIONE Dominique
 BOULON Marc
 BOUTRON Claude
 BOUVET Jean
 BROSSARD Jean
 BRUGAL Gérard
 CAMPILLO Michel
 CAVAILLE Jean Yves
 CERFF Rudiger
 CHIARAMELLA Yves
 CHOLLET Jean Pierre
 COLOMBEAU Jean François
 COTTET Georges-Henri
 COURT Jean
 CUNIN Pierre Yves
 DAVID Jean
 DEROUARD Jacques
 DHOUILLY Danielle
 DUFRESNOY Alain
 DUPUY Claude
 DURAND Mireille
 FONTECAVE Marc
 FOURNIER Jean Marc
 GASPARD François
 GIDON Maurice
 GIORNI Alain
 GONZALEZ SPRINBERG Gérardo
 GOURC Jean Pierre
 GUIGO Maryse
 GUMUCHIAN Hervé
 HACQUES Gérard
 HAMMOU Abdelkader
 HERBIN Jacky
 HERINO Roland
 HERZOG Michel
 JARDON Pierre
 JUTTEN Christian
 KERCKHOVE Claude
 KOSAREW Siegmund
 KLINGER Jurgen
 LAURENT Christine
 MANDARON Paul
 MARTINEZ Francis
 MERCHEZ Fernand
 MILAS Michel
 MOREL Alain
 MORIN Pierre
 NGUYEN HUY Xuong-
 OUDET Bruno

Chimie
 Géographie
 Géologie
 Physique
 Mécanique
 Sciences Nucléaires
 Chimie
 Mathématiques
 Chimie
 Mathématiques
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Mathématiques Appliquées
 Automatique informatique
 Mécanique
 Glaciologie
 Biologie
 Mathématiques
 Biologie
 Géophysique
 Chimie
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Mécanique
 Mathématiques (ENSL)
 Modélisation, calcul scientifique, statis.
 Chimie
 Informatique
 Géographie
 Physique
 Biologie
 Mathématiques Pures
 Chimie
 Sciences Nucléaires
 Chimie
 Physique
 Physique
 Géologie
 Sciences Nucléaires
 Mathématiques Pures
 Mécanique
 Géographie
 Géographie
 Mathématiques Appliquées
 Chimie
 Géographie
 Physique
 Biologie
 Chimie
 Physique
 Géologie
 Math. fondamentales et appliquées
 Glaciologie
 Mathématiques
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Physique
 Chimie
 Géographie
 Physique
 Informatique
 Mathématiques Appliquées

PAUTOU Guy
 PECHER Arnaud
 PELLETIER Guy
 PERRIN Claude
 PFISTER Claude
 PIBOULE Michel
 PORTESEIL Jean Louis
 PUECH Laurent
 RAYNAUD Hervé
 REGNARD Jean René
 ROBERT Claudine
 ROBERT Danielle
 ROBERT Gilles
 SAJOT Gérard
 SARROT REYNAULD Jean
 SAYETAT Françoise
 SERVE Denis
 STOECKEL Frédéric
 SCHOLL Pierre Claude
 SUBRA Robert
 TEMPERVILLE André
 TISSUT Michel
 TOURNIER Evelyne
 VALLADE Marcel
 VALLON Michel
 VICAT Jean
 VINCENS Maurice
 VINCENT Gilbert
 VIVIAN Robert
 VOTTERO Philippe
 WITOMSKI Patrick

Biologie
 Géologie
 Astrophysique
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Biologie
 Géologie
 Physique
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Physique
 Didactique des disciplines scientifiques
 Chimie
 Mathématiques Pures
 Physique
 Géologie
 Physique
 Chimie
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Chimie
 Mécanique
 Biologie
 Informatique et Mathématiques appliquées
 Physique
 Glaciologie
 Physique
 Chimie
 Physique
 Géographie
 Chimie



Grenoble, le 9/09/1993

ECOLE DOCTORALE

Affaire suivie par Mme VACHER

Tel : 76.57. 45.25.

Objet :

AUTORISATION de SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du **30 MARS 1992** relatif aux Etudes Doctorales

Vu les rapports de présentation de :

- Monsieur DELAUNAY Didier
- Monsieur DEVELEY Gérard

Monsieur QUEMENER Olivier

est autorisé(e) à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention du diplôme
de **DOCTEUR de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE de GRENOBLE** spécialité :
" **MECANIQUE** "

Bernard QUERIN
Vice-Président de la
Formation Doctorale
de l'Institut National Polytechnique
de Grenoble