



HAL
open science

Ségrégation par solidification en présence de convection naturelle ou forcée

Mabel Medina

► **To cite this version:**

Mabel Medina. Ségrégation par solidification en présence de convection naturelle ou forcée. Electromagnétisme. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 2000. Français. NNT : . tel-01339114

HAL Id: tel-01339114

<https://hal.science/tel-01339114>

Submitted on 29 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité: "Génie de Procédés"

préparée au laboratoire **EPM-MADYLAM**

dans le cadre de l'Ecole Doctorale "Matériaux et Génie des Procédés"

présentée et soutenue publiquement

par

Mabel MEDINA

le 29 Juin 2000

Titre:

**Ségrégation par solidification en présence de convection naturelle ou
forcée**

Directeur de thèse: Yves Fautrelle

JURY

Mme C. ALLIBERT, Présidente

M. H. COMBEAU, Rapporteur

M. D. GOBIN, Rapporteur

M. Y. FAUTRELLE, Directeur de thèse

M. Y. DU TERRAIL, Co-encadrant

M. E. ROFMAN, Examineur

A ma mère, mon mari et mes enfants.

Je voudrais remercier tout d'abord Yves Fautrelle et Yves Du Terrail pour m'avoir accueilli au laboratoire EPM Madylam, pour la richesse de nos discussions et leurs constants encouragements. Un très grand merci également à Francis Durand pour ses apports dans les discussions et sa patience avec moi.

J'adresse mes remerciements à Sergio Felicelli qui m'a transféré le code de solidification.

Mme Allibert m'a fait l'honneur de présider le jury de la thèse, je l'en remercie. Je remercie sincèrement Hervé Combeau d'avoir accepté d'être rapporteur et de m'avoir permis de travailler avec le code Solid. Je tiens aussi à remercier Dominique Gobin pour m'avoir donné les renseignements qui m'ont conduit au laboratoire EPM Madylam et pour avoir accepté de juger ce travail.

Un très grand merci à l'Universidad Nacional de Rosario, qui a permis mon stage en France, en particulier au Consejo de Investigaciones, au Departamento de Termodinámica et au Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Mes remerciements vont aussi au CONICET, Argentina.

Je remercie très vivement Edmundo Rofman qui a permis ma présence à l'Inria.

Merci à Marcelle Addes pour avoir été mon professeur de Français mais surtout mon amie.

Table des matières

1 Introduction.	7
1.1 Généralités et présentation du problème.	7
1.1.1 Les ségrégations de solidification.	7
1.1.2 Problématique.	12
1.1.3 Approches existantes.	12
1.2 Objectifs de la thèse.	15
1.3 Organisation de la thèse.	15
2 Modèle FHP de solidification.	17
2.1 Introduction.	17
2.2 Modèle d'équation.	17
2.2.1 Relations d'équilibre thermodynamique.	20
2.2.2 Expression de la force Laplace-Lorentz	21
2.2.3 Ré-écriture de l'équation thermique due à la chaleur latente	24
2.3 Expressions adimensionnelles	25
2.4 Méthode numérique	28
2.4.1 Discrétisation	28
2.4.2 Algorithme	29
2.5 Conclusions.	30
3 Le modèle FHP appliqué au cas type.	31
3.1 Introduction.	31
3.2 Le cas type, le petit échantillon d'alliage plomb-étain.	31

3.2.1	Géométrie, conditions limites, conditions initiales.	32
3.2.2	Les nombres sans dimension du cas type.	35
3.2.3	Fichier de données du programme FHP appliqué au cas type.	38
3.3	Résultats du cas type.	42
3.3.1	Présentation des résultats.	42
3.3.2	Convergence en fonction du maillage et du pas du temps.	51
3.4	Autres résultats du cas type.	52
3.4.1	Evaluation du terme de diffusion dans l'équation de conservation de soluté.	52
3.4.2	Analyse de l'évolution des grandeurs.	59
3.5	Conclusions.	62
4	Influence des paramètres sur les résultats du modèle FHP.	69
4.1	Introduction.	69
4.2	Les cas étudiés.	69
4.3	Influence des conditions thermiques.	72
4.3.1	Comparaison entre le cas 1 et le cas 2.	72
4.3.2	Comparaison entre le cas 3 et le cas 4.	75
4.4	Influence des lois de perméabilité.	79
4.4.1	Les lois de perméabilité utilisées.	79
4.4.2	Comparaison entre le cas 1, le cas 3, le cas 13 et le cas 14.	81
4.4.3	Comparaison entre le cas 2 et le cas 4.	84
4.5	Influence de la perturbation initiale.	87
4.5.1	Comparaison entre le cas 3 et le cas 10.	90
4.5.2	Comparaison entre le cas 4 et le cas 11.	92
4.6	Influence de la taille du domaine : Grand domaine	93
4.6.1	Comparaison entre le cas 7 et le cas 8.	106
4.6.2	Comparaison entre le cas 8 et le cas 12.	108
4.7	Conclusions	108
5	Influence d'un écoulement forcé électromagnétique sur les résultats du modèle FHP.	111

5.1	Introduction.	111
5.2	Les cas étudiés.	111
5.2.1	Comparaison entre le cas 1, le cas 5A, le cas 5B et le cas 6.	112
5.2.2	Cas 5 A, double circulation électromagnétique.	115
5.2.3	Cas 5 B, simple circulation électromagnétique.	116
5.2.4	Cas 6, gravité nulle, double circulation électromagnétique.	116
5.2.5	Cas 9: Grand domaine, double circulation électromagnétique.	121
5.3	Conclusions.	126
6	Application du code Solid.	127
6.1	Introduction.	127
6.2	Le code Solid comparé au code FHP.	127
6.2.1	Les variables du code Solid.	127
6.2.2	Les équations du code Solid.	128
6.2.3	Le traitement numérique.	128
6.2.4	Maillage utilisé.	129
6.2.5	Critères de comparaison des résultats.	129
6.3	Comparaison des résultats sur le cas 10.	130
6.3.1	Les résultats du logiciel Solid.	130
6.3.2	Comparaison avec les résultats FHP.	131
6.4	Comparaison des résultats sur le cas 11.	134
6.5	Comparaison des résultats sur le cas 12.	135
6.5.1	Les résultats du logiciel Solid.	135
6.5.2	Comparaison avec les résultats FHP.	137
6.6	Conclusions.	138
7	Conclusions	141
7.1	Contribution de ce travail	141
7.2	Perspectives	143
A	Sensibilité du schéma numérique au nombre de Péclet	145

B	Caractéristiques des cas de la comparaison Solid - FHP.	149
B.1	Caractéristiques du Cas 10.	149
B.2	Caractéristiques du Cas 11.	150
B.3	Caractéristiques du Cas 12.	150
C	Liste des Notations	153

Chapitre 1

Introduction.

1.1 Généralités et présentation du problème.

1.1.1 Les ségrégations de solidification.

Les alliages métalliques sont élaborés à l'état liquide (en particulier pour la mise à la composition), sauf quelques exceptions très rares. Donc ils subissent la solidification pour prendre la forme solide sous laquelle ils sont utilisés comme matériaux. Au cours de la solidification, à l'échelle locale, chaque couche de solide formée a une composition C_S^* différente de celle C_L^* du liquide qui lui donne naissance (Flemings [30], Lesoult [47]). Dans l'approximation dite "solidification réversible", C_S^* et C_L^* sont les compositions à l'équilibre à la température considérée.

Dans le cas simple d'un alliage à deux constituants ("solvant A" par exemple plomb, "soluté B" par exemple étain), l'équilibre thermodynamique prévoit que la composition du solide et celle du liquide sont fonctions de la seule température (à pression constante).

$$\begin{aligned}C_S^{eq} &= C_S(T) \\C_L^{eq} &= C_L(T)\end{aligned}\tag{1.1}$$

L'usage est de représenter cet équilibre en un diagramme dans l'espace (C, T) , le diagramme d'équilibre de phase (à pression constante). Dans ce diagramme C_L^{eq} et C_S^{eq} décrivent deux

courbes, la courbe liquidus et la courbe solidus. Pour l'alliage de composition nominale C_0 , le diagramme définit la "Température de liquidus T_L " :

$$C_L^{eq}(T_L) = C_0 \quad (1.2)$$

Le "coefficient de distribution k_{eq} " est défini par:

$$k_{eq} = \frac{C_S^{eq}(T)}{C_L^{eq}(T)} \quad (1.3)$$

Toujours dans l'approximation réversible, l'hypothèse est que la diffusion homogénéise pas à pas le solide. La conservation locale du soluté s'écrit alors

$$C_0 = \phi C_L + (1 - \phi) C_S \quad (1.4)$$

Cette relation dite "Règle du levier" permet de calculer une approximation simple de la "fraction liquide ϕ ". En particulier à la fin de la solidification ($\phi \rightarrow 0$), le solide a la composition nominale C_0 . Alors la température de l'équilibre est dite "Température de solidus T_S de l'alliage":

$$C_S^{eq}(T_S) = C_0 \quad (1.5)$$

Dans les conditions techniques, la diffusion est très imparfaite. La composition du solide n'est pas uniforme, elle est modulée par les positions successives de l'interface solide-liquide. Habituellement cette interface prend la forme d'arborescences nommées dendrites. La modulation fait deviner des branches de dendrites, qui ont une périodicité λ_S de $10\mu m$ à $100\mu m$ environ. C'est la ségrégation dendritique. Une formulation simplifiée (Brody et Flemings dans Flemings [30]) consiste à admettre que les branches de dendrites cloisonnent le système solide+liquide, qui est considéré comme un système fermé. Admettons que chaque couche solide formée se trouve figée, sans diffusion, tandis que le liquide est parfaitement homogénéisé. Le modèle Gulliver-Scheil (Fleming [30]) s'applique à la transformation $\phi \rightarrow \phi - d\phi$ (ϕ fraction

liquide)

$$(C_L - C_S) d\phi = \phi dC_L \quad (1.6)$$

▷ Si k_{eq} est supérieur à l'unité, le liquide et le solide s'appauvrissent à chaque couche, jusqu'au solvant pur. Il n'y a pas de conséquence grave dans ce cas.

▷ Si k_{eq} est inférieur à l'unité (cas le plus fréquent pour les éléments qui durcissent l'alliage) le liquide et le solide s'enrichissent à chaque couche, ceci jusqu'à atteindre l'équilibre avec une phase solide supplémentaire dite "phase mineure", l'équilibre liquide+solution solide+phase mineure étant souvent un équilibre eutectique. L'alliage garde des traces graves des ségrégations.

Dans les conditions réversibles, la solidification commence à la température T_L et se termine à T_S . Dans les conditions techniques, il y a du liquide jusqu'à la température eutectique T_E . Dans le produit en cours de solidification (par exemple un lingot), la solidification commence au voisinage de l'isotherme T_L et se termine au voisinage de l'isotherme T_E . Ceci définit une zone d'espace dans laquelle solide et liquide co-existent. C'est "la zone pâteuse" dans laquelle les dendrites sont baignées par le liquide interdendritique en percolation.

Les ségrégations dendritiques ci-dessus sont discernables à l'échelle des dendrites soit $10\mu m$ à $100\mu m$ environ. Elles peuvent être rendues insensibles par un traitement d'homogénéisation (recuit qui active la diffusion). Mais dans les alliages chargés à hautes caractéristiques (par exemple les superalliages à base nickel pour moteurs turbines aéronautiques ou les aciers à roulements, plus généralement les aciers à haut chrome et haut carbone), le solide peut présenter des écarts de composition à l'échelle du produit tout entier: "les macroségrégations".

Le modèle Gulliver-Scheil laisse prévoir une ségrégation dans le sens " ϕ décroissante" (pour $k_{eq} < 1$) dite "macroségrégation normale". Il existe plusieurs manifestations expérimentales des macroségrégations (cf. Lesoult [47]). En particulier dans certains produits (lingots de refusion à l'arc sous vide, ou aubes de turbine unidirectionnelle, Giamei [36], figure 1-1), les macroségrégations peuvent apparaître sous forme de "canaux". Alors certaines sections du produit présentent des taches isolées dites "freckles" (taches de rousseur). Le résultat est que la composition locale de l'alliage peut être sensiblement écartée de la composition nominale.

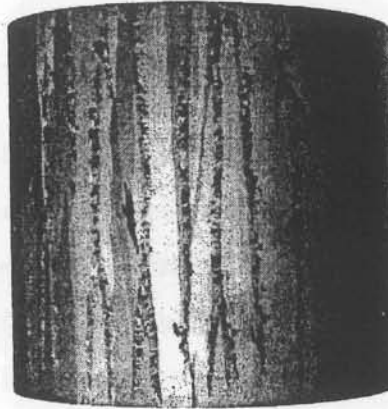


Figure 1-1: Ségrégations en canaux dans un lingot de Mar-M200 (diam. 4 in) d'après Giamei et al. [36].

L'alliage est impropre aux applications à hautes caractéristiques.

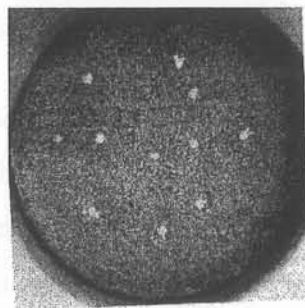
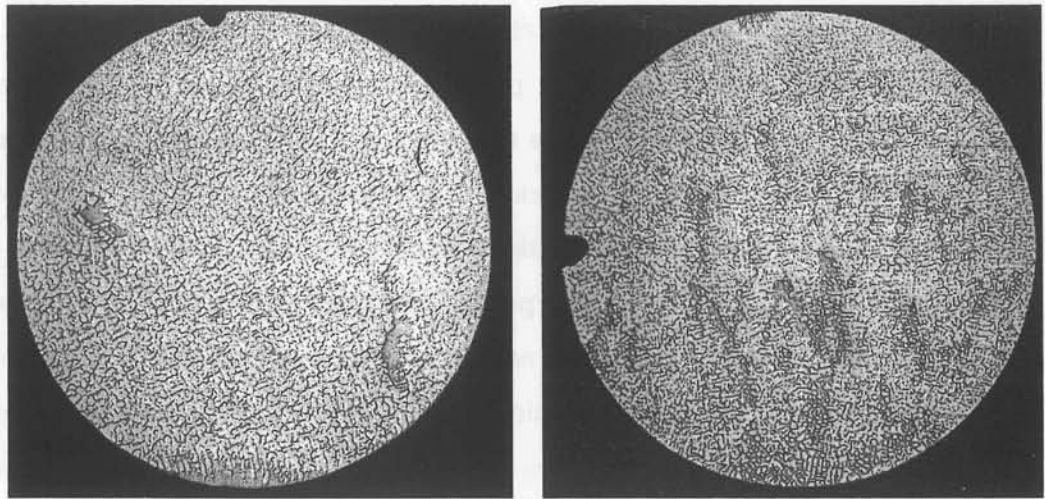


Figure 1-2: Distribution de canaux dans la section transversale d'un lingotin 1 D Pb-Sn, diamètre 38 mm, d'après Sarazin et Hellawell [71]

Les ségrégations en canaux, sont observées aussi dans les lingots d'aciers relativement riches en carbone et autres solutés (S, P, Si, Mn, Mb, V, etc., cf Lesoult [47]). En laboratoire, les canaux ségrégés ont été observés dans des échantillons à géométrie simplifiée (une dimension ou pseudo deux dimensions) sur des matériaux transparents (chlorure d'ammonium en solution, Copley et al. [10] , McDonald et Hunt [50], Sarazin et Hellawell [71]) et sur des alliages modèles (Al-Cu Flemings [30], Pb-Sn Mehrabian [67], Sarazin et Hellawell [71], cf. figure 1-2).



a)

b)

Figure 1-3. Alliage Al-Cu 10% solidifié unidirectionnellement ($V = 20\mu m/s$, $G = 127K/cm$), section transversale diamètre 6 mm. Vecteur gravité dirigé vers le bas. Dendrites primaires Al cruciformes blanches, liseré eutectique gris a) $B = 0$ liseré eutectique en bas, 2 taches eutectiques. b) $B = 0.4 T$, force Laplace-Lorentz vers le haut, des taches eutectiques multiples. D'après Lehmann et al. [46].

Des ségrégation du type canaux peuvent être observées sur des alliages modèles en solidification 1 D du type Bridgman. Les travaux expérimentaux de Lehmann et al. [46] sont faits dans des tubes (quartz ou alumine) diamètre 6 mm, en solidification dirigée type Bridgman, gradients thermiques 120 K/cm. Le tube est strictement horizontal. La gravité est dirigée vers le bas. Nous incluons les photos (cf. figure 1-3) qui montrent clairement le phénomène. La convection solutale à cause du gradient de concentration dans la zone pâteuse fait le grand canal de ségrégation vers le bas dans l'alliage AlCu10% (cf. figure 1-3 a)). Lorsque on applique un champ magnétique continu, le canal de ségrégation peut être éliminé ou déplacé vers le haut (cf figure 1-3 b)). Or sous l'influence du champ magnétique \vec{B} , le métal liquide en mouvement subit les forces Laplace-Lorentz qui dans ce cas freinent la convection naturelle. Les expériences ci dessus montrent l'importance de l'écoulement liquide, et la possibilité d'agir à distance.

1.1.2 Problématique.

Le problème concerne les alliages chargés en éléments d'alliages, qui doivent leurs propriétés mécaniques aux transformations en phase solide (durcissement structural, précipitation, ou autre). Les écarts de composition se traduisent par des écarts de propriétés mécaniques (par ex. fragilité locale, écaillage des aciers à roulement) et des écarts de propriétés chimiques (corrosion localisée). Or ces ségrégations sont d'autant plus gênantes qu'elles apparaissent au cours de la transformation ou sur le produit fini en cours d'usage. Du point de vue technique, un traitement d'homogénéisation est nécessaire avant tout traitement thermique. Il est d'autant plus long que les écarts de composition sont plus sévères. Le brassage électromagnétique qui est utilisé dans la coulée continue des aciers pourrait améliorer la situation, s'il est bien fait.

Du point de vue théorique, la formation des canaux de ségrégation ou freckles, implique le couplage des phénomènes de transport de chaleur, de fluide et de soluté. De ce point de vue il est utile de considérer comment l'accélération de la gravité agit au cours de la solidification, dans un cas de refroidissement par le bas. La convection thermique sera stabilisante, pendant que la convection solutale sera déstabilisante si le solvant est plus lourd que le soluté (par exemple dans l'alliage plomb-étain).

Les simulations sur ordinateur peuvent être utiles en prévoyant ces phénomènes complexes qui se produisent pendant la solidification, pouvant donner une connaissance semi-quantitative des mécanismes afin d'appliquer des moyens électromagnétiques de la façon plus convenable .

1.1.3 Approches existantes.

Les macroségrégations sont connues depuis longtemps par les fondeurs. La participation de mouvement du liquide est reconnue depuis les années 1930. Beaucoup travaux sur la simulation numérique de la convection et la formation des défauts de macroségrégation pendant la solidification d'alliage sont apparus depuis 1987. La plupart ont traité les alliages binaires et ont démontré que les défauts de ségrégation sont formés par la convection thermosolutale pendant la solidification (Felicelli et al. [23], Felicelli et al. [24], Bennon et al. [4], Schneider et al. [73], Beckermann et al.[3], Combeau et al. [8], Voller et al. [76], Prescott et al. [64]).

Entre les différentes approches existantes, nous avons choisi celle de Felicelli, Heinrich et Poirier (FHP) qui est détaillée par la suite. Une application du code "Solid" de Combeau et al. sera détaillé dans le chapitre 6.

Evolution historique et vérification du modèle FHP.

Dans ce paragraphe, nous faisons un résumé des travaux qui ont été faits avant d'arriver au programme qui nous utiliserons par la suite.

La méthode des éléments finis de Galerkin n'est pas bien adaptée au traitement numérique des problèmes de convection caractérisés par de nombres de Reynolds ou de Péclet élevés. Il est possible de formuler une technique de décentrage amont optimale conduisant à la solution exacte aux noeuds du maillage. Ces problèmes sont considérés dans les travaux de Zienkiewicz, Heinrich [79] et Kelly et al. [44]. Une formulation par pénalisation pour la pression est traité dans Heinrich, Marshall [41] au lieu d'une formulation pression-vitesses pour un écoulement visqueux incompressible. Dans ce cas, pour le calcul des pressions, on formule une équation de Poisson (cf. Sohn, Heinrich [74]).

En 1984, Heinrich a présenté un travail [38] où sont résolues les équations de conservation de masse, de conservation de quantité de mouvement, de conservation de l'énergie et de conservation de soluté à travers d'un algorithme d'éléments finis basé sur la fonction pénalité pour la pression et sur le concept d'élément de Petrov-Galerkin pour le décentrage. Il a inclus des calculs et la comparaison des résultats numériques avec des résultats expérimentaux de Chen et al. [5]. L'exactitude du modèle est montrée dans Heinrich, Yu [42] pour des maillages irréguliers dans un cas de simulation de la convection naturelle dans des cylindres circulaires horizontaux chauffés par dessous et refroidis par le haut.

Dans Heinrich [37], le modèle est utilisé pour l'étude de la convection thermosolutale en alliages binaires pendant la solidification directionnelle verticale avec une interface indéformable plane avec vitesse constante de croissance. La région liquide est traitée comme un fluide incompressible visqueux qui satisfait l'approximation de Boussinesq. L'écoulement bidimensionnel de ce liquide est couplé à deux équations de convection-diffusion pour la thermique (avec changement de phase) et la concentration de soluté. Les résultats obtenus pour le cas d'une couche

de fluide infiniment large, l'écoulement étant supposé périodique dans cette direction, sont en accord avec d'autres précédemment calculé.

L'article de Nandapurkar et al. [56], décrit la simulation de la convection thermosolutale en alliages directionnellement solidifiés. Une analyse linéaire de stabilité au début de la convection est employée pour prévoir les courbes marginales de stabilité (gradient thermique vs. longueur d'onde) pour un système qui comporte une zone pâteuses en dessous d'une zone entièrement liquide. Les équations résolues sont les équations de conservation de masse, de conservation de quantité de mouvement (selon l'approche de Beckermann [3]) de conservation de l'énergie (avec changement de phase) et de conservation de soluté, avec une zone pâteuse traitée comme un milieu poreux où la fraction solide est imposée. L'article de Heinrich et Yu [39] montre le modèle mathématique de solidification, avec une zone pâteuse où la fraction liquide est préfixée et constante dans le temps. Une perturbation initiale dans la concentration initiale est introduite.

Dans Heinrich et al. [40], trois modèles différents ont été utilisés : le modèle de front plan, un extension du modèle de front plan qui inclut une région dendritique avec une fraction liquide dépendante du temps, et un modèle où la région dendritique est libre pour se développer selon des états locaux d'équilibre. Des modèles d'éléments finis de la convection thermosolutale ont été développés pour chacun des trois cas et employés pour étudier la convection non linéaire quand les systèmes sont instables.

La formation de canaux de ségrégation est prédite dans Felicelli et al. [24] par la résolution des équations de l'écoulement de fluide, transfert de chaleur avec changement de phase et conservation du soluté. L'ensemble des équations est valable dans tout le domaine (zones liquide, pâteuse et solide) qui est traité comme un milieu poreux. Les lois de perméabilité utilisées sont anisotropes. Le calcul par éléments finis isoparametriques et bilinéaires avec une fonction pénalité est présenté en détail dans Felicelli et al.[23].

Dans ces trois derniers travaux, des comparaisons qualitatives sont faits avec des travaux expérimentaux de solidification, en particulier avec la solution aqueuse de chlorure d'ammonium qui a l'avantage d'être transparente (cf Copley et al. [10], Sample et Hellawell [68], [69], Chen

et Chen [6]), et avec plomb-étain (cf Sarazin, Hellawell [71] and Nguyen Thi et al. [58]), dans un cas de solidification verticale. Le logiciel de calcul qui nous a été transféré correspond à ce moment du développement du modèle.

Ces travaux ont continué avec une extension à des alliages multiconstitués (cf. Felicelli et al. [22], [29], [26], [27], Poirier et al. [62]) et la généralisation du modèle à trois dimensions (cf. Felicelli et al. [25], [28], [21]).

1.2 Objectifs de la thèse.

Cette thèse s'inscrit dans le contexte d'un programme de recherche en cours de développement au laboratoire EPM Madylam, dans lequel l'application du modèle numérique FHP est utilisée comme un outil pour tester l'effet de la convection forcée sur la distribution de concentration.

La present memoire detaille l'étude de differents paramètres du code dans des expériences numériques de solidification des alliages. Nous nous intéressons principalement aux effets de la convection naturelle ou forcée pendant la solidification. Nous montrons que l'action de champs magnétiques change la carte de distribution de soluté et modifie l'emplacement des canaux de ségrégation. Nous avons fait le point sur l'influence des lois de perméabilité et des conditions thermiques.

1.3 Organisation de la thèse.

Cette thèse est organisée autour de sept chapitres.

Le chapitre 2 présente le modèle FHP, en particulier les équations qui décrivent les différents phénomènes physiques, ainsi que les modifications introduites. Le schéma numérique et l'algorithme sont brièvement décrits.

Le chapitre 3 définit l'application du code à l'alliage plomb-étain, dans un cas "type". L'influence du maillage sur la solution est étudié. L'influence de la diffusion est montrée.

Le chapitre 4 montre l'influence des conditions thermiques, des lois de perméabilité, des perturbations initiales et de la taille du domaine dans les résultats du modèle FHP.

Dans le chapitre 5, les résultats de l'application de la convection forcée sont analysés.

Le chapitre 6 réalise une comparaison avec le logiciel Solid. Nous faisons une analyse comparative des équations résolues, des méthodes utilisées et des résultats obtenus.

Les conclusions générales sont rassemblées dans le chapitre 7.

Chapitre 2

Modèle FHP de solidification.

2.1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous décrivons le modèle de solidification développé par le groupe Felicelli-Heinrich-Poirier [24], [23], puis nous faisons l'analyse du modèle, du programme et des résultats. Dans leurs publications, les auteurs ont fait un modèle mathématique de solidification dendritique. Le modèle simule la solidification avec ségrégation d'un alliage binaire. Il permet de calculer l'évolution de la fraction liquide, concentration liquide, concentration solide, température et vitesses à travers la résolution des équations couplées de transport de quantité de mouvement, de l'énergie et de soluté.

2.2 Modèle d'équation.

Le modèle est bidimensionnel (cf. figure 2-1) dans le plan (x,z) et instationnaire (variable t). Le domaine est traité comme un continuum dont chaque maille passe de l'état liquide à l'état solide graduellement, sans diffusion solide dans un cas comme l'alliage plomb-étain, ou avec diffusion instantanée dans les cas de l'alliage fer-carbone. Les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et du soluté sont appliquées à chaque maille en faisant intervenir des valeurs moyennées dans l'espace de la vitesse, de la température et de la concentration.

La loi de Darcy est appliquée dans la zone pâteuse, avec une perméabilité fonction de la

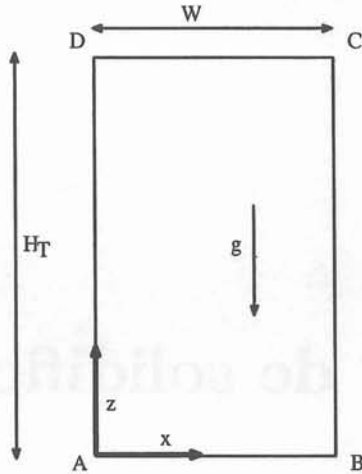


Figure 2-1: Géométrie du domaine.

fraction solide et de l'orientation. La porosité est fonction de la fraction liquide de volume ϕ , laquelle varie de zero (région entièrement liquide) jusqu'à un (région entièrement solide). Les mêmes équations s'appliquent à tout le domaine total. Les équations dans la zone pâteuse se réduisent automatiquement aux équations de tout-liquide quand la fraction liquide est unité ou tout-solide quand la fraction liquide est zero. Ce type de modèle, modèle continu, a été utilisé par d'autres auteurs (cf. Bennon et al. [4], Ahmad et al. [1]).

Nous considérons un alliage qui se solidifie sous les hypothèses suivantes:

- 1.- L'écoulement est bidimensionnel et laminaire.
- 2.- La phase solide et la phase liquide ont les mêmes propriétés physiques. Il n'y a pas de changement de volume à la solidification.
- 3.- Nous considérons deux cas, une diffusion infinie dans le solide (règle du levier), l'autre diffusion de soluté nulle dans la phase solide.
- 4.- Les propriétés thermiques sont constantes. L'approximation de Boussinesq est utilisée pour l'évaluation de la force d'Archimède, la densité est constante, sauf dans le terme de gravité.
5. La région dendritique (zone pâteuse) est assimilée à un milieu poreux.

Les grandeurs à calculer sont la fraction liquide, la concentration de soluté, la température et

la vitesse du fluide, moyennées dans un volume élémentaire représentatif (VER). Les grandeurs sont elles-mêmes régies par des équations aux valeurs moyennes. Nous utilisons le système d'équations établi par Ganesan et al. [35] et Nandapurkar et al. [56] pour les équations de conservation de masse et quantité de mouvement.

Conservation de la masse.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

où u et w sont les composantes de la vitesse superficielle, $u = \phi u_l$ et $w = \phi w_l$, u_l et w_l étant les composantes de la vitesse de débit interdendritique.

Conservation de la quantité de mouvement.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{\phi} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\phi}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\nu_0 \phi}{K_x} u + \frac{\phi}{\rho_0} F m_x \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w}{\phi} \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\phi}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\nu_0 \phi}{K_z} w - \phi \frac{\rho}{\rho_0} g + \frac{\phi}{\rho_0} F m_z \quad (2.3)$$

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_s(C - C_0)] \quad (2.4)$$

où ρ désignant la masse volumique de l'alliage, ρ_0 masse volumique de référence, T_0 température de référence, C_0 concentration initiale.

β_T , β_s désignent les coefficients d'expansion thermique et de soluté respectivement, p la pression, ν_0 la viscosité cinématique du liquide, g accélération de la gravité, $\vec{F}m$ force Laplace-Lorentz qui agit sur le liquide, K_x, K_z les composantes du tenseur de perméabilité du milieu poreux. La perméabilité K est infinie quand $\phi = 1$ et les équations se réduisent alors à des équations de la zone liquide. L'expression de la force électromagnétique sera détaillée dans le paragraphe 2.2.2 qui suit.

Conservation de l'énergie.

Selon Nandapurkar et al. [57] et Heinrich et al. [39], nous pouvons écrire

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{L}{c_s} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.5)$$

où T désigne la température, L la chaleur latente, c_s la chaleur spécifique, α la diffusivité thermique.

Conservation de soluté.

Selon Poirier et al. [63], l'équation de conservation de soluté est

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + u \frac{\partial C_l}{\partial x} + w \frac{\partial C_l}{\partial z} = D \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi \frac{\partial C_l}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \phi \frac{\partial C_l}{\partial z} \right) \quad (2.6)$$

où

D Diffusivité de soluté dans le liquide,

\bar{C} concentration du soluté moyenne du mélange solide + liquide, ou concentration totale,

C_l concentration dans le liquide du soluté.

La concentration totale de soluté \bar{C} est reliée à la concentration de liquide C_l par la relation

$$\bar{C} = \phi C_l + (1 - \phi) \bar{C}_s \quad (2.7)$$

où \bar{C}_s est la concentration moyenne du soluté dans le solide.

2.2.1 Relations d'équilibre thermodynamique.

Dans la solidification dendritique, l'interphase solide-liquide est très proche de l'équilibre (cf. Flemings [30]). On peut supposer que la concentration du liquide interdendritique est égale à celle obtenue à partir du diagramme de phases de l'alliage :

$$\begin{aligned} C_l &= C_L(T) & \text{si } \phi < 1, \\ C_l &= \bar{C} & \text{si } \phi = 1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$C_L(T)$ étant l'équation de la droite de liquidus dans le diagramme de phases. La relation directe entre C_l et T est utilisée seulement dans la zone pâteuse; dans la zone liquide C_l est identique à \bar{C} et est calculée d'après (2.6).

En accord avec l'hypothèse de l'équilibre local, pour la phase primaire, la concentration moyenne dans le solide peut être évaluée de deux façon possibles :

a) Soit :

$$\bar{C}_s = kC_l \quad (2.9)$$

correspondant à la règle du levier.

k étant le coefficient de partition supposé constant, défini par la relation entre la concentration de soluté dans le liquide et concentration de solide dans la zone pâteuse.

b) Soit :

$$\bar{C}_s = \frac{1}{1-\phi} \int_{\phi}^1 kC_l d\phi \quad (2.10)$$

correspondant à un modèle de solidification sans diffusion solide.

Ces deux hypothèses correspondent respectivement aux cas asymptotiques de diffusion solide infinie et de diffusion solide nulle. La première hypothèse a été appliquée au cas de l'alliage fer-carbone, tandis que la deuxième a été utilisée pour l'alliage plomb-étain dans le chapitre 3.

2.2.2 Expression de la force Laplace-Lorentz

La force Laplace-Lorentz $\vec{F}m$ qui apparaît dans (2.2) et (2.3), résulte de l'interaction entre la densité de courant \vec{J} et le champ magnétique \vec{B} (cf. Moreau [55]) :

$$\vec{F}m = \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.11)$$

En utilisant la loi d'Ampère, à savoir $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, μ_0 désignant la perméabilité magnétique, on obtient une autre expression de la force électromagnétique :

$$\vec{F}m = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \quad (2.12)$$

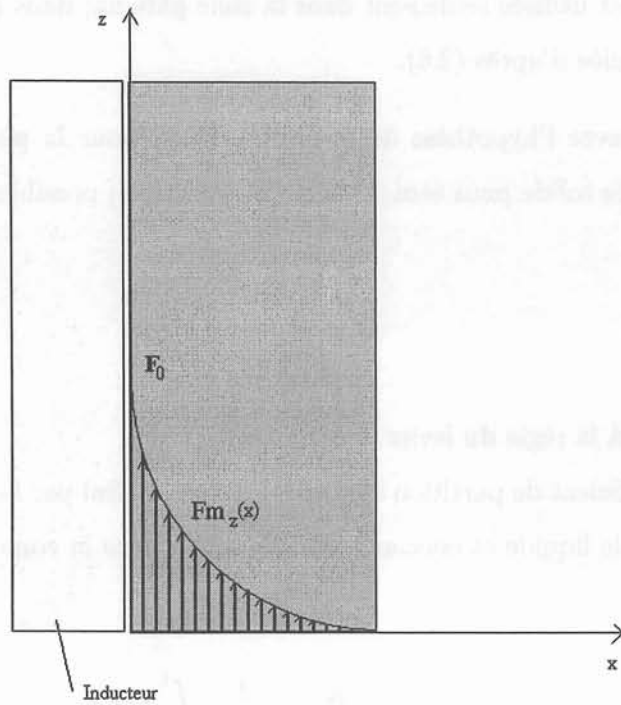


Figure 2-2: Forces Laplace-Lorentz appliquées au domaine bidimensionnel

Considérons un lingot de métal de conductivité électrique uniforme et imposons un champ magnétique glissant (cf. figure 2-2). Le champ magnétique $\vec{B}(x, y, t)$ a deux composantes B_x et B_z de la forme, par exemple pour B_z :

$$B_z = B_0 e^{-r_r x} \cos(\omega t - k_m z - r_i x) \quad (2.13)$$

où $k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m}$

$\frac{\lambda_m}{2}$ pas polaire

δ épaisseur de peau électromagnétique

$$r_r = \text{Re}\{(i\mu_0\sigma\omega + k^2)^{\frac{1}{2}}\} \approx \frac{1}{\delta}$$

$$r_i = \text{Im}\{(i\mu_0\sigma\omega + k^2)^{\frac{1}{2}}\}$$

ω pulsation du champ magnétique

σ conductivité électrique

μ_0 perméabilité magnétique

Ce champ magnétique engendre une force électromagnétique ayant une composante le long de Oz et dirigé vers le haut. En introduisant l'expression 2.13 du champ magnétique dans les équations de Maxwell, on peut obtenir une solution analytique dans le cas où l'on néglige les effets d'extrémité (cf Dubke et al., [16]). On peut en suite calculer la composante de la force moyenne de Lorentz correspondante

$$Fm_z(x) = F_0 e^{-\frac{2x}{\delta}} \quad (2.14)$$

F_0 désignant le module de la force, que l'on peut relier au champ magnétique par la relation:

$$F_0 = \frac{\sigma\omega}{2k_m} B_0^2 \quad (2.15)$$

Pour obtenir un autre type d'effet, on peut combiner cette configuration avec un autre inducteur placé en regard sur l'autre face. La force électromagnétique issue de la superposition des deux champs magnétiques peut être approchée par la superposition des forces engendrées par un seul inducteur. Dans le cas d'un brasseur électromagnétique à double effet (voir figure 2-3), la force résultante est de la forme:

$$Fm_z = Fm_z(z) + Fm_z(W - z) \quad (2.16)$$

où W est la largeur totale de la section.

Dans notre calcul, nous avons ajusté le pas polaire et la fréquence du champ pour avoir une épaisseur de peau effective égale à la largeur du domaine W , soit $\delta = 5mm$. En ce qui concerne la force électromagnétique, nous choisissons comme paramètre son module F_0 plutôt que la valeur de B_0 . Dans nos calculs, la valeur de F_0 est de l'ordre de $1000N/m^3$. Nous n'avons pas considéré de très fortes valeurs F_0 pour rester dans le régime laminaire.

Dans la zone pâteuse, cette force agit sur tout le matériau, à savoir liquide et solide. Cependant, les équations de quantité de mouvement du liquide de la zone pâteuse sont obtenues après

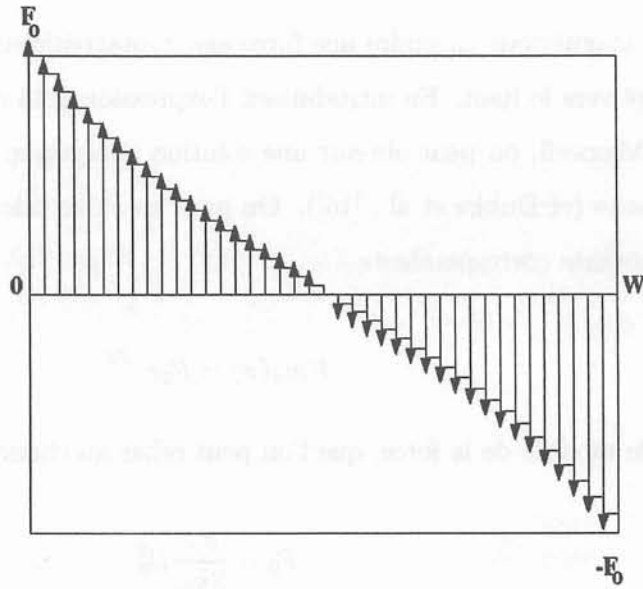


Figure 2-3: Distribution de forces magnétiques issues de la superposition de deux champs.

une opération de moyenne spatiale sur la phase liquide uniquement. C'est pourquoi, la force de volume électromagnétique doit être pondérée par la fraction liquide (cf. équations 2.2 et 2.3).

2.2.3 Ré-écriture de l'équation thermique due à la chaleur latente

On doit ré-écrire l'équation de la chaleur afin de rendre stable l'algorithme pour calculer la température (cf. Felicelli [20]). Pour éliminer la fraction liquide de l'équation (2.5), on calcule la dérivée (2.7) par rapport aux temps:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} - [\phi + k(1 - \phi)] \frac{\partial C_l}{\partial t} \right] \frac{1}{(1 - k) C_l} \quad (2.17)$$

et on remplace (2.17) dans l'équation (2.5)

a) dans le cas d'un alliage avec l'hypothèse de diffusion solide totale:

$$\left(1 - \frac{\tilde{L}\phi}{C_l} - \frac{k}{(1-k)} \frac{\tilde{L}}{C_l} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \left(1 - \frac{\tilde{L}}{(1-k) C_l} \right) \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$= \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{\tilde{L}D}{(1-k)C_l} \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \phi \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.18)$$

b) dans le cas d'un alliage avec l'hypothèses de refusion:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\tilde{L}\phi}{C_l} \right) + \left(1 - \frac{\tilde{L}}{C_l} \right) \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &= \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{\tilde{L}D}{C_l} \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \phi \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial I}{\partial t} \frac{m\tilde{L}}{C_l} \end{aligned} \quad (2.19)$$

où

$$\tilde{L} = \frac{L}{mc_s} \quad (2.20)$$

m pente de la droite de liquidus dans le diagramme de phase, et I est définie par:

$$I = \int_{\phi}^1 kC_l d\phi \quad (2.21)$$

Les équations (2.18) et (2.19) sont valables dans la zone pâteuse. Seul les termes contenant \tilde{L} seront calculés. Une de ces équations remplacera l'équation (2.5) dans l'algorithme.

2.3 Expressions adimensionnelles

On écrit les équations sous forme adimensionnelle avant de les résoudre numériquement. En suivant Felicelli-Heinrich-Poirier, on choisit pour longueur de référence H (cf. Sarazin et al.[71]) voisine de l'espacement interdendritique primaire et un gradient thermique, G . La vitesse de référence U est donnée par :

$$U = (g\beta_T GH^2)^{1/2} \quad (2.22)$$

Les vitesses (u, w) et les coordonnées (x, y) adimensionnelles sont

$$u = u'/U \quad \text{et} \quad w = w'/U$$

$$x = x'/H \quad \text{et} \quad z = z'/H$$

(où "le prime" est la grandeur avec dimension).

On peut définir les nombres adimensionnels suivants:

$$Ra_T = (\beta_T g G H^4) / \nu \alpha, \quad \text{Nombre de Rayleigh thermique}$$

$$Ra_S = (\beta_s g C_0 H^3) / \nu D \quad \text{Nombre de Rayleigh solutal}$$

$$Pr = \nu / \alpha \quad \text{Nombre de Prandtl}$$

$$Sc = \nu / D \quad \text{Nombre de Schmidt}$$

$$Da_x = K_x / H^2, \quad \text{Nombre de Darcy dans l'axe x}$$

$$Da_z = K_z / H^2 \quad \text{Nombre de Darcy dans l'axe z}$$

et

$$\text{le temps de référence} \quad \tau = H^2 / \nu$$

$$\text{la pression de référence} \quad P = \rho_0 H^2 / \tau^2$$

$$\text{la température adimensionnelle} \quad T = (T' - T_0) / GH$$

$$\text{la concentration adimensionnelle} \quad C_l = C_l' / C_0 \text{ et } \bar{C} = \bar{C}' / C_0$$

où T_0 est la température de liquidus de l'alliage et C_0 la concentration initiale.

$$\text{la chaleur latente adimensionnelle} \quad \hat{L} = L / mc_s C_0$$

$$\bar{L} = L / c_s GH \quad \text{Nombre de Stefan}$$

Les équations deviennent alors:

Conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.23)$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\left(\frac{Pr}{Ra_T} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\phi}{Da_x} u \right\} = -\phi \left(\frac{Pr}{Ra_T} \right) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\phi} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \phi F m a_x \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Pr}{Ra_T} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\phi}{Da_z} w \right\} = \\ & -\phi \left(\frac{Pr}{Ra_T} \right) \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\phi} u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \phi \left[T + \frac{Ra_S Pr}{Ra_T Sc} (C_l - 1) \right] + \phi F m a_z \end{aligned} \quad (2.25)$$

Pour exprimer la force Laplace-Lorentz sans dimension, on utilise le module de la force F_0 et l'expression correspondant à (2.14) est:

$$Fma_z = \frac{F_0}{\rho_0 g \beta_T \Delta T} e^{-\frac{2x}{b}}; \quad Fma_x = 0 \quad (2.26)$$

Cette expression fait apparaître un nombre sans dimension M_1

$$M_1 = \frac{F_0}{\rho_0 g \beta_T \Delta T} \quad (2.27)$$

que l'on peut interpréter comme le rapport entre les forces Laplace-Lorentz et celles d'Archimède ($F_{ArchT} = \rho_0 g \beta_T \Delta T$).

Il existe aussi un autre nombre sans dimensions M_2 tel que:

$$M_2 = \frac{F_0}{\rho_0 g \beta_s \Delta C} \quad (2.28)$$

Le nombre adimensionnel M_2 est le rapport entre les forces Laplace-Lorentz et celles de la convection solutale. Ce nombre M_2 est important car la convection solutale est la cause des courants ascendants dans les cas de refroidissement par le bas, où la convection thermique est stabilisante et la convection solutale déstabilisante.

Il est possible définir dans la zone pâteuse autre nombre un troisième nombre sans dimension M_3 pour établir le rapport entre la force Laplace-Lorentz et la force de Darcy. Il est utile pour mesurer l'importance des forces électromagnétiques dans la zone pâteuse.

$$M_3 = \frac{F_0}{\rho_0 \nu_0 U_{mp} / K_m} \quad (2.29)$$

où

U_{mp} vitesse moyenne dans la zone pâteuse

K_m perméabilité moyenne dans la zone pâteuse

Conservation de l'énergie

a) dans le cas d'un alliage avec l'hypothèse de diffusion totale:

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\hat{L}\phi}{C_l} - \frac{k}{(1-k)} \frac{\hat{L}}{C_l}\right) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\hat{L}}{(1-k)C_l S_c} \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \phi \frac{\partial T}{\partial z}\right) \\
= & \left(\frac{R_{at}}{Pr}\right)^{1/2} \left(\frac{\hat{L}}{(1-k)C_l} - 1\right) \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{2.30}
\end{aligned}$$

b) dans le cas d'un alliage avec l'hypothèse de refusion:

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \hat{L} \frac{\phi}{C_l}\right) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \frac{\hat{L}}{S_c} \frac{1}{C_l} \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \phi \frac{\partial T}{\partial z}\right) \\
= & - \left(\frac{R_{at}}{Pr}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\hat{L}}{C_l}\right) \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{\bar{L}}{C_l} \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Conservation du soluté

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = \frac{1}{S_c} \left[\frac{\partial}{\partial x} \phi \frac{\partial C_l}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \phi \frac{\partial C_l}{\partial z}\right] - \left(\frac{R_{at}}{Pr}\right)^{1/2} \left[u \frac{\partial C_l}{\partial x} + w \frac{\partial C_l}{\partial z}\right] \tag{2.32}$$

2.4 Méthode numérique

2.4.1 Discrétisation

On utilise la méthode des éléments finis avec une formulation standard de pénalisation pour la pression. La pression p est éliminée des équations à l'aide de la relation:

$$p = p_s - \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{2.33}$$

où p_s est la pression hydrostatique et λ un paramètre très grand de pénalisation (cf. Heinrich et al. [41], [42]). La valeur de λ utilisée est 10^{10} .

Les éléments finis utilisés sont bilinéaires, lagrangiens et isoparamétriques. Le terme convectif est traité avec une formulation Petrov-Galerkin à l'aide d'un paramètre de décentrage α_k

lié au nombre de Péclet de maille (cf Felicelli [23]).

$$\alpha_k = \coth \gamma_k - \frac{1}{\gamma_k}; \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.34)$$

où

$$\gamma_1 = \frac{vh}{2\phi \text{Pr}} \quad (2.35)$$

γ_1 est le nombre de Reynolds de maille;

$$\gamma_2 = \frac{vh[1 - (\hat{L}/\text{Pr} C_l)]}{2[1 + (\hat{L}\phi/S_c C_l)]} \quad (2.36)$$

γ_2 est le nombre de Péclet de maille;

$$\gamma_3 = \frac{S_c vh}{2\phi \text{Pr}} \quad (2.37)$$

γ_3 est le nombre de Péclet relatif à la concentration en soluté;

$$v = \sqrt{u^2 + w^2} \quad (2.38)$$

v est la vitesse locale du fluide et h est la longueur de l'élément dans la direction de l'écoulement.

2.4.2 Algorithme

Après l'étape de discrétisation des équations, les inconnues sont calculées à l'aide de l'algorithme décrit ci-après. Les inconnues, à chaque pas du temps n , sont : $u, v, T, C_l, \bar{C}, \phi$.

1-	$n = 0$; $u_0, w_0, T_0, C_{l0}, \phi_0$ sont les valeurs initiales connues
2-	On donne la force de Lorentz \vec{F}_m
3-	Pas de temps $n + 1$; $t_{n+1} = t_n + \Delta t$
4-	On calcule u_{n+1}, w_{n+1} de l'équation 2.24 et 2.25
5-	On commence l'iteration $i = i + 1$
6-	On calcule T_{n+1}^{i+1} de l'équation 2.30 ou 2.31
7-	On pose $C_l^{i+1} = C_L(T_{n+1}^{i+1})$ si $\phi_{n+1}^{i+1} < 1$; \bar{C}_{n+1}^i si $\phi_{n+1}^{i+1} = 1$
8-	On calcule \bar{C}_{n+1}^{i+1} de l'équation 2.32
9-	On calcule ϕ_{n+1}^{i+1} de l'équation 2.7
10-	Si $\ \phi_{n+1}^{i+1} - \phi_{n+1}^i\ < \varepsilon_\phi$ on continue au pas 3, sinon on retourne au pas 5

Dans l'implémentation des équations de la quantité de mouvement, les termes de convection et de Darcy sont traités explicitement sur les intégrations temporelles. Les autres termes sont traités implicitement. De même, dans l'équation de conservation de l'énergie, les termes de convection sont traités explicitement. Tous les termes de l'équation de soluté sont traités explicitement. Plus de détails sur cet algorithme se peuvent trouver dans Heinrich, [37] et [38].

Dans l'annexe A, un test classique de validation de code est présenté. Nous montrons la sensibilité du schéma numérique au nombre de Péclet pour vérifier la réponse du schéma numérique utilisé au problème de la diffusion numérique. Ce test montre que le schéma diffuse sur trois mailles environ, ce qui est acceptable.

Les paramètres de calcul, ε_ϕ (qui mesure les différences entre l'itération i et $i + 1$) et λ (paramètre de pénalisation selon l'expression 2.33) ont été testé a fin de trouver ses valeurs optimales.

2.5 Conclusions.

Nous avons présenté le modèle de solidification FHP qui sera utilisé par la suite. Les équations qui modélisent les différents phénomènes physiques ont été établies. En particulier, nous avons donné, l'expression de la force de électromagnétique que nous l'utiliserons pour provoquer la convection forcée. Le schéma numérique et l'algorithme ont été brièvement décrits.

Chapitre 3

Le modèle FHP appliqué au cas type.

3.1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats du modèle Felicelli-Heinrich-Poirier (FHP) [24], [23]. Les calculs ont été réalisés pour un alliage plomb-étain. La démarche a consisté à réaliser un ensemble d'expériences numériques en faisant varier les principaux paramètres du maillage. Nous avons ensuite tenté de dégager parmi les résultats numériques les phénomènes que l'on retrouvait dans les expériences ou applications métallurgiques.

Nous avons testé plusieurs maillages afin d'analyser la sensibilité du modèle par rapport à la taille de la maille, ce qui nous a permis de définir un cas que nous appelons cas "type".

3.2 Le cas type, le petit échantillon d'alliage plomb-étain.

Nous présentons tout d'abord l'application du modèle Felicelli-Heinrich-Poirier sur un cas déjà publié par les auteurs [24][23] [20]. Quand nous avons essayé de reproduire les cas publiés, nous avons eu de problèmes de convergence, surtout avec le critère de Courant (cf. paragraphe 3.3.2), qui n'était pas satisfait. Ce problème nous a poussé à faire différents maillages dans l'espace et dans le temps. Ainsi nous sommes arrivés au cas que nous appelons cas 'type' où les résultats sont, de notre point de vue, plus représentatifs du phénomène physique.

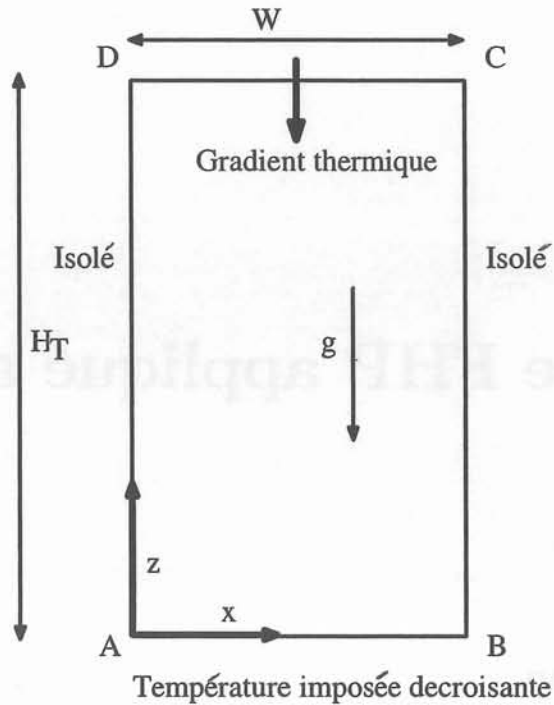


Figure 3-1: Géométrie et conditions limites thermiques du domaine.

3.2.1 Géométrie, conditions limites, conditions initiales.

La géométrie du problème et les conditions limites thermiques sont illustrées dans la figure 3-1. Le domaine modélisé est un rectangle vertical, de petite dimension ($W = 5\text{mm}$, $H_T = 10\text{mm}$ de haut). Il est supposé inséré dans un lingot massif qui lui impose un refroidissement lent, représenté ici par une température décroissante à la paroi inférieure ($T = T_0 - pt$, avec $p = 1\text{K/min}$), et par un gradient thermique entrant ($GTU = 1000\text{K/m}$) à la paroi supérieure. Les données [23] sont détaillées plus loin, paragraphe 3.2.3.

Conditions limites:

Vitesses nulles imposées tout au long des frontières:

$$u_{AB} = u_{BC} = u_{CD} = u_{DA} = 0 \quad (3.1)$$

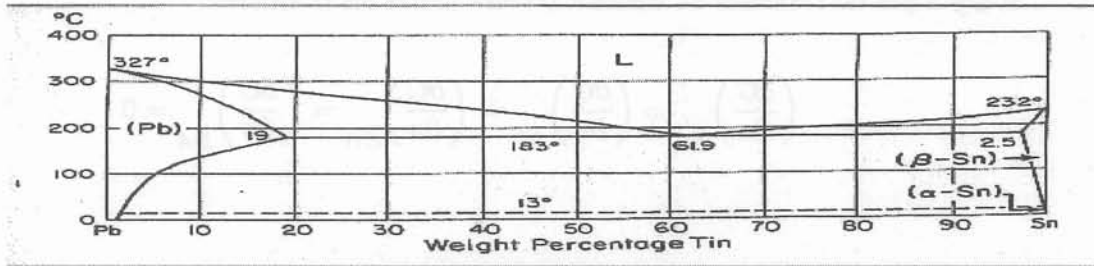


Figure 3-2: Diagramme de phase Pb-Sn

$$w_{AB} = w_{BC} = w_{CD} = w_{DA} = 0 \quad (3.2)$$

Les conditions limites thermiques sont:

Les parois latérales sont isolées:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{DA} = \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{CB} = 0 \quad (3.3)$$

La paroi supérieure est soumise à un gradient de température imposé:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{DC} = GTU \quad (3.4)$$

La paroi intérieure a une température imposée décroissante:

$$T_{AB} = T_0 - pt; \quad p = 1K/\text{min} \quad (3.5)$$

où $T_0 = T_l(C_0)$ température d'équilibre du diagramme de phase.

Il n'y a pas de transfert de soluté à travers toutes les frontières:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial n}\right)_{AB} = \left(\frac{\partial C}{\partial n}\right)_{BC} = \left(\frac{\partial C}{\partial n}\right)_{CD} = \left(\frac{\partial C}{\partial n}\right)_{DA} = 0 \quad (3.6)$$

Plus loin, nous avons traité le cas d'un domaine complètement isolé thermiquement aux frontières à l'exception de la paroi inférieure qui est refroidie . Ce cas permet de montrer l'importance des conditions thermiques dans la distribution de soluté en solidification car les résultats obtenus ne ressemblent pas aux résultats avec flux supérieur non nul.

Conditions initiales:

Vitesses nulles dans tout le domaine:

$$u(x, z, 0) = w(x, z, 0) = 0 \quad (3.7)$$

Distribution linéaire de température:

$$T(x, y, 0) = T_0 + GTU \times z \quad (3.8)$$

Concentration initiale avec une perturbation aléatoire:

$$C(x, z, 0) = C_0 \pm 0.0005C_0 \quad (3.9)$$

Pour l'alliage choisi (Pb-Sn, $C_0 = 10\%$ Sn), et dans les conditions réversibles, la solidification débute à la température de liquidus, soit $T_L = 576,74K$, le premier solide formé ayant une teneur $kC_0 = 3.10\%$. Elle se termine à $T_S = 525K$, le dernier liquide ayant une teneur de 32.26% selon le diagramme de phase (figure 3-2, [54]) . A cause des ségrégations, certaines plages termineront la solidification à la température eutectique $T_E = 456K$.

Estimation de la durée de la solidification:

L'ordre de grandeur de la durée de la solidification peut être calculé en considérant que la

frontière supérieure CD atteint l'eutectique. Dans ce cas, le temps de solidification approximatif est $130min$.

3.2.2 Les nombres sans dimension du cas type.

Les principaux paramètres sans dimensions du problème sont relatifs aux deux phénomènes essentiels, à savoir la diffusion et la convection.

Concernant les phénomènes de diffusion, les nombres sans dimension pertinents sont :

Nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3.10)$$

Nombre de Lewis

$$Le = \frac{\alpha}{D} \quad (3.11)$$

Nombre de Schmidt

$$Sc = \frac{\nu}{D} \quad (3.12)$$

Nombre de Rayleigh thermique:

$$Ra_T = \frac{g\beta_T GH^4}{\nu\alpha} \quad (3.13)$$

Nombre de Rayleigh solutal:

$$Ra_S = \frac{g\beta_S \Delta CH^3}{\nu D} \quad (3.14)$$

Nombre de Grashof solutal:

$$Gr_S = \frac{Ra_S}{Sc} \quad (3.15)$$

Pour l'alliage plomb-étain (cf propriétés physiques fournies dans le tableau 3.3), les valeurs de ces nombres sont :

$$Pr = 0.015 \quad Le = 5670; \quad Sc = 82$$

Ces valeurs indiquent que la diffusivité thermique est toujours prépondérante. Concernant la convection naturelle, elle est exclusivement solutale. Dans cette application, en refroidissant par le bas, la stratification thermique est stabilisante.

On note qu'il y a physiquement deux échelles de longueur importantes: la macro-échelle: la taille du domaine H_T , une micro-échelle (ou plusieurs): la distance interdendritique H ($300\mu m$). Les nombres de Rayleigh thermique et solutal calculés pour la hauteur du domaine H_T (cf. géométrie dans le tableau 3.4) sont:

$$Ra_T = 2.8 \times 10^3 \quad Ra_S = 6.8 \times 10^8$$

Le rapport entre eux est:

$$\frac{Ra_S}{Ra_T} = 2.4286 \times 10^5$$

Le nombre de Grashof solutal correspondant est

$$Gr_S = 8.3 \times 10^6$$

Cette valeur indique que le régime de convection dans la zone liquide est laminaire. Cette affirmation est trouvée dans le travail expérimental d'Hellawell [43].

Les effets thermiques sur l'écoulement dans la zone liquide sont stabilisants. Quand la stratification thermique est stable, il peut apparaître des ondes de gravité dont la fréquence typique est donnée par la fréquence Brunt-Väisälä (cf. Craik [11]) à savoir :

$$f_{BV} = \left(\frac{\varpi}{2\pi}\right)_{BV} = \frac{1}{2\pi} \left(g \frac{d\rho}{dz} \frac{1}{\rho}\right)^{1/2} \quad (3.16)$$

$\frac{d\rho}{dz}$ étant calculé à partir de la stratification thermique seulement. Cette fréquence dans notre cas est égale à $0.15Hz$ environ. Nous pourrions constater ce fait dans les graphiques des histoires de vitesses dans le paragraphe 3.4.2, d'où nous obtenons des valeurs de fréquences compris entre 0.08 et $0.15Hz$

Nous avons aussi défini les nombres sans dimension M_1 et M_2 , qui donnent le rapport entre les forces de Lorentz et les forces d'Archimède thermique et solutale.

$$M_1 = \frac{F_0}{\rho_0 g \beta_T \Delta T} \quad (3.17)$$

$$M_2 = \frac{F_0}{\rho_0 g \beta_s \Delta C} \quad (3.18)$$

Pour $F_0 = 1000 N/m^3$, on obtient les valeurs suivantes: $M_1 = 8.33$ $M_2 = 0.2$.

De la valeur de ces nombres, nous concluons que les forces électromagnétiques sont un peu moins importantes que les forces d'Archimède solutales et plus importantes que les forces d'Archimède thermiques dans la gamme de valeur de F_0 utilisée.

Les nombres sans dimension dans la zone pâteuse:

Les nombres de Rayleigh thermique et solutal calculés avec l'espacement interdendritique, pris comme échelle de longueur, sont :

$$R_{aT} = 2.3 \times 10^{-3} \quad R_{aS} = 1.8 \times 10^4$$

avec un espacement interdendritique égal à $300 \mu m$. Ceci montre que la convection solutale est importante aussi dans les poches liquides situées dans la zone pâteuse.

Pour connaître l'importance de la convection solutale dans la zone pâteuse prise globalement, il faut considérer le nombre de Rayleigh R_{aP} défini par Worster [78], tel que:

$$R_{aP} = \frac{\rho_0 \beta_s g \Delta C K_m}{\mu V} \quad (3.19)$$

K_m, μ, V désignant la perméabilité moyenne (par exemple pour $\phi = 0.5$), la viscosité dynamique et la vitesse de solidification. Selon Worster, l'instabilité se produit lorsque $R_{aP} \geq 10$. Dans notre cas, le nombre de Rayleigh pâteuse R_{aP} a pour ordre de grandeur

$$R_{aP} = 0.2$$

avec $V = 10^{-2} mm/sec$ et $K_m = 10^{-12} m^2$

L'écoulement dans la zone pâteuse obéit à deux mécanismes possibles:

1) convection solutale, $R_{aP} \geq 10$ si $\phi > 0.7$ car le nombre R_{aP} dépend de la valeur de la perméabilité (cf. figure 4-3).

2) convection forcée par l'écoulement de la zone liquide, soit à cause de la force électromagnétique ou soit par le drainage d'un canal.

Maintenant nous analysons l'importance de la force électromagnétique dans la zone pâteuse. Le nombre sans dimension M_3 donne le rapport entre les forces Laplace-Lorentz et la force de Darcy.

$$M_3 = \frac{F_0}{\rho_0 \nu_0 U_{mp} / K_m} \quad (3.20)$$

Pour $F_0 = 1000 \text{ N/m}^3$; $U_{mp} = 7 \times 10^{-5} \text{ m/sec}$ et $K_m = 10^{-12} \text{ m}^2$

$$M_3 = 0.006$$

Cette valeur M_3 nous dit que l'écoulement dans la zone pâteuse est commandé par le gradient de pression et la force de Darcy, quand il est calculé avec la valeur moyenne de perméabilité ($\phi = 0.5$). Si nous prenons des valeurs de perméabilité correspondantes à $\phi > 0.7$; $K_{\phi > 0.7} = 10^{-9}$; le nombre M_3 prend la valeur: $M_3 = 6$. Les forces électromagnétiques sont trop faibles pour agir directement sur le liquide dans la zone pâteuse, à l'exception des zones de forte fraction liquide. Ceci signifie que la force électromagnétique ne peut agir directement sur le liquide de la zone pâteuse que si la fraction liquide est suffisamment forte.

3.2.3 Fichier de données du programme FHP appliqué au cas type.

Le fichier complet de données pour le programme FHP est montré dans les tableaux qui suivent. Ce fichier permet de fournir surtout la discretisation temporelle, les conditions de refroidissement et les propriétés physiques de l'alliage. La discretisation spatiale et le maillage sont définis à l'intérieur du programme lui-même. Le logiciel est écrit en Fortran 77.

***** INTEGER PARAMETERS	Nom	Valeur
Number of time steps	NTS	1500
Print every NTSP time steps	NTSP	0
Save every NTSB time steps	NTSB	300
Code for reading from previous run	KSTART	0
Code for writing for future restart	KWRITE	1
Unit to read data from previous run	IURD	4
Unit to write data for future run	IUWR	71
Maximum number of inner iterations	IIMAX	7
Flag to print additional input data	IPRINT	0
Flag to print kinetic energy to unit 9	IKINE	0
Flag to introduce perturbation in cliq	IPER	1
Number of time steps to plot	NPLOT	1

Tableau 3.1: Paramètres permettant de régler la partie 'informatique' du logiciel, selon qu'on doit commencer la solidification, ou au contraire, lire d'un fichier antérieur (KSTART, IURD). NTS indique le nombre de pas de temps.

***** REAL PARAMETERS	Nom	Valeur
Time step size [sec]	TIN	0.2
Tolerance for inner iterations convergence	TOL	1.e-04
Penalty parameter	PAR	1.e10

Tableau 3.2: Pas de temps (TIN), paramètre de convergence entre itérations (TOL) et paramètre de pénalisation (PAR). Ces paramètres ont une incidence sur la convergence du programme. Ils sont équivalents à $\Delta t, \varepsilon, \lambda$ qui ont été définis au chapitre 2.

***** PHYSICAL PROPERTIES	Unités	Nom	Valeur
Average thermal diffusivity	m^{**2}/s	ALFA	1.7e-05
Latent heat of fusion	KJ/Kg	HEATF	40.0
Average specific heat of solid	KJ/(Kg*K)	CPSA	0.145
Thermal expansion coeff.	1/K	BETAT	1.2e-04
Solutal expansion coeff.	1/(wt pct)	BETAS	5.15e-03
Solutal diffusivity	m^{**2}/s	D	3.0e-09
Kinematic viscosity	m^{**2}/s	RNU	2.47e-07
Equilibrium partition ratio		DCK	0.31
Density of alloy	Kg/m ³	DENS	10000.0

Tableau 3.3: Paramètres, caractéristiques physiques de l'alliage a solidifier, dans ce cas plomb-étain.

***** OPERATIONAL VALUES	Unités	Nom	Valeur
Initial alloy concentration	wt pct	C0	10.
Initial temperature gradient	K/m	GL	1000.
Temp. grad. prescribed on top boundary	K/m	GTU	1000.
Temp. grad. prescribed on left boundary	K/m	GTL	0.
Temp. grad. presc. on right boundary	K/m	GTR	0.
Initial temp. presc. at bottom bound	K	TBOT	576.74
Melting temperature of pure substance	K	TMELT	600.
Eutetic temperature	K	TEUT	456
Eutetic concentration	wt pct	CEUT	61.9
Cooling rate	K/min	COOLR	1.0
Container width	m	WIDTH	0.5e-02
Container height	m	HEIGHT	1.e-02
Acceleration of gravity	m/s**2	G	9.8
Angle of gravity vector with x-axis	deg.	THETA	-90.
Maximum magnetic field	tesla	BMAX	0.0
Magnetic field attenuation length	m	BDELTA	1.0e-03

Tableau 3.4: Paramètres opérationnels relatifs aux conditions de refroidissement, aux dimensions du domaine et aux données du diagramme de phase (ici plomb-étain).

***** REFERENCE VALUES	Unités	Nom	Valeur
Reference length	m	HREF	3.e-04
Reference temperature	K	TREF	456.0
Reference temperature gradient	(K/m) .	GTREF	1000

Tableau 3.5: Valeurs de référence utilisées pour résoudre les équations sans dimensions, telles qu'elles apparaissent dans le chapitre 2.

3.3 Résultats du cas type.

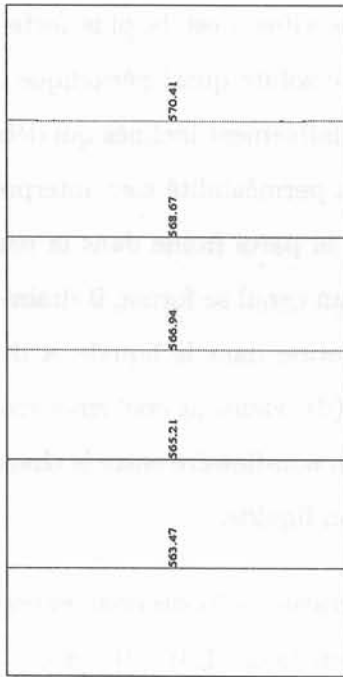
Nous présentons l'application du modèle, en détaillant l'effet du maillage, et corrélativement celui du pas de temps sur les résultats et sur la convergence du modèle. Quand la solidification commence, il y a un rejet de soluté du solide dans le liquide. Le liquide, enrichi par le soluté moins dense, est animé par un mouvement de convection gravitaire, solutale, plus intense au fur et à mesure que les ségrégations se développent dans le liquide. Pour déclencher la convection solutale, une perturbation aléatoire dans la concentration initiale est introduite, de la forme $C_0 \pm 0.0005C_0$. Il n'y a pas de convection thermique car la stratification thermique est stabilisante.

3.3.1 Présentation des résultats.

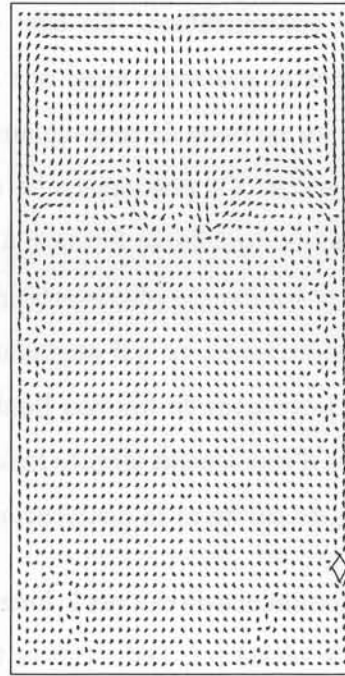
Après 15 min de refroidissement, les résultats pour le maillage 40x60 sont montrés dans la figure 3-3. Les isothermes sont pratiquement des droites progressant du bas vers le haut, figure 3-3(a). C'est un résultat cohérent avec la faible valeur du nombre de Prandtl ($Pr = \frac{\nu}{\alpha} = 0.015$) qui représente le rapport entre la diffusivité thermique et les forces visqueuses. La faible valeur de ce nombre indique que la diffusivité est grande par rapport à la viscosité, donc les isothermes sont plates.

La formation de canaux répond au mécanisme suivant : la concentration de soluté est plus grande dans la partie inférieure du domaine. Le flux ascendant transporte le liquide enrichi en soluté vers les pointes de dendrites, baissant son point de solidification. Ainsi, le front de solidification progresse plus lentement dans les régions où le flux est ascendant, donc un canal commence à se former. La diffusion de soluté est trop lente pour disséminer la colonne de liquide enrichi. Comme la diffusion thermique est grande ($Le = \frac{\alpha}{D} = 5670$, Le nombre de Lewis), pour conserver l'équilibre qui correspond à la température local, il y a donc phénomène de refusion (cf. Felicelli, [24]).

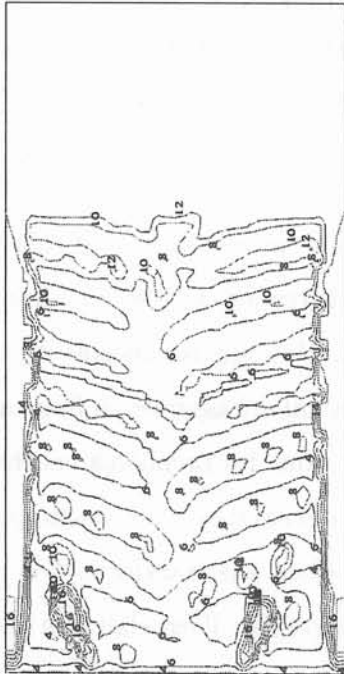
Sur les cartes de vitesse, figure 3-3(b), deux courants montent le long des frontières verticales à gauche et à droite. Le module maximum de la vitesse dans la zone liquide est de l'ordre du $mm\ s^{-1}$. Ces courants entraînent le liquide libre sous forme de deux vortex principaux. Le champ de vitesse n'est pas stationnaire, il peut fluctuer au cours du temps. Ces fluctuations concernent surtout les petites échelles. Des vortex plus petits peuvent avoir une existence éphémère. Les



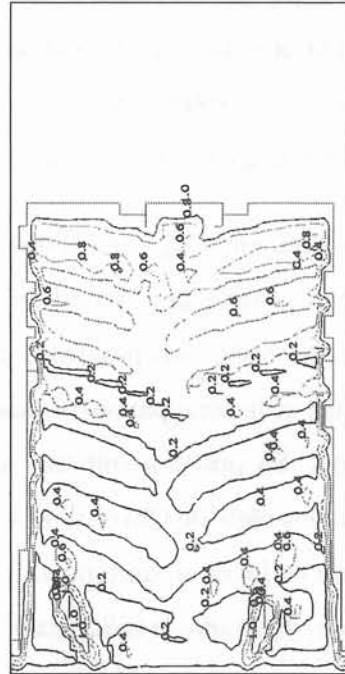
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 3-3: Cas type, $t = 15$ min. (a) Isothermes, (b) Champ de vitesses, $v_{\max} = 1\text{mm/sec}$, (c) Carte de concentration totale, $C_{b\max} = 16.3$, $C_{b\min} = 3.6$, isovaleurs qui vont du 4 jusqu'à 16 chaque 2; (d) Carte de fraction liquide, $\phi_{\max} = 1$, $\phi_{\min} = 0$, isovaleurs chaque 0.2.

cartes de concentration, figure 3-3(c), montrent deux canaux le long des frontières verticales, avec une forte concentration. En effet c'est là que la vitesse est la plus forte dans la zone pâteuse. Ces cartes montrent aussi une distribution de soluté quasi périodique dans l'espace, ce qui suggère un système de sous-canaux périodiques faiblement inclinés qui débouchent dans les canaux latéraux. Ce phénomène lié au choix de la perméabilité sera interprété plus tard. Enfin deux poches liquides se forment à proximité de la paroi froide dans la partie inférieure du lingot. Du point de vue physico-chimique, lorsque un canal se forme, il draine l'écoulement de la zone environnante, ce qui augmente la concentration dans le liquide et donc retarde la solidification. Les cartes de fraction liquide, figure 3-3(d), viennent confirmer ces affirmations. Cette structure d'écoulement montre la forte interaction non-linéaire entre le champ de vitesses, la distribution du soluté et la distribution de la fraction liquide.

Cette prédominance de canaux le long des parois verticales a été observée expérimentalement dans alliages de nickel (cf. Dabo [12] et Giamei [36], voir figure 1.01). Il y a une accumulation de soluté près des parois à cause de la limitation de transport latéral. Il est difficile d'enlever le liquide enrichi de soluté car la composante horizontale de la vitesse est petite (ou nulle). La formation de canaux latéraux peut être évitée pour les grandes vitesses de solidification, si il n'y a pas suffisamment de temps pour l'accumulation de liquide enrichi (cf Felicelli, [24]).

Des profils donnant C_{bm} , concentration moyenne par couche horizontale, en fonction de z , distance à la paroi froide, permettent de visualiser la progression de la solidification (figure 3-4). Ils montrent l'enrichissement progressif du liquide libre. Un seuil de concentration sépare le liquide libre enrichi et la zone pâteuse solide+liquide. Ce seuil est assimilé au front macroscopique de solidification. Sa position suit une loi en \sqrt{t} , sauf pour les premières couches, loi que les fondeurs nomment règle de Chvorinov. En arrière, le profil comporte un pseudo-plateau, dont le niveau s'abaisse en fonction du temps, ce que nous associons à la transformation progressive du liquide en solide. Bien que la solidification ne soit pas terminée, il est clair que la concentration moyenne finale sera inférieure à C_0 dans la partie basse du domaine, et nettement supérieure dans la partie haute: c'est la macroségrégation dite normale, familière aux fondeurs.

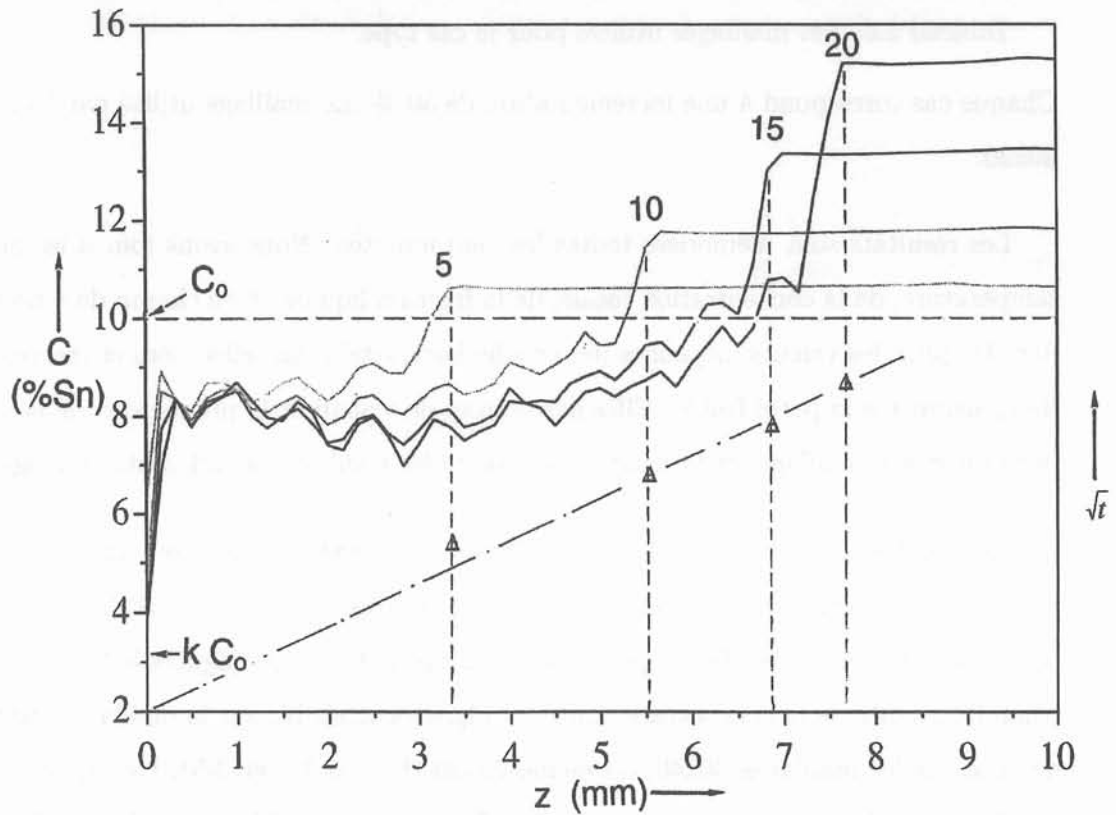


Figure 3-4: Concentration moyenne par couche horizontale en fonction de la distance à la paroi froide, pour 4 instants successifs. Maillage 40x60, pas de temps 15 ms. Les chiffres indiquent le temps en min. Les triangles correspondent à la loi d'évolution en \sqrt{t} .

Influence du maillage.

Nous avons fait un travail d'étude systématique de sensibilité des résultats au maillage spatial en réalisant des essais numériques avec le nombre d'éléments suivants:

1	2	3	4	5
10x14	16x22	20x30	30x46	40x60

Tableau 3.6: Les maillages utilisés pour le cas type.

Chaque cas correspond à une incrémentation de 50 %. Le maillage utilisé par Felicelli [23], est 20x30.

Les résultats sont mémorisés toutes les cinq minutes. Nous avons fourni les graphes de la température, de la concentration totale, de la fraction liquide et du champ de vitesses à chaque fois. De plus, les valeurs moyennes par couche horizontale sont effectuées et tracées en fonction de z , distance à la paroi froide. Elles permettent de visualiser la progression de la solidification dans un même maillage, et la comparaison entre les résultats de différents maillages.

Un maillage grossier (même 10x14) est suffisant pour donner les courants ascendants le long des frontières, les 2 grands vortex, le champ des isothermes, et la position du front solide+liquide, en particulier sa progression suivant la loi en \sqrt{t} (figures 3-4 et 3-5). La distribution fluctuante de la concentration, qui est clairement visible sur le maillage 40x60, peut être devinée sur les maillages 30x40, ou même 20x30 (figures 3-6 et 3-5), bien qu'elle soit écrasée par l'effet de filtrage numérique avec des mailles moins fines. Bien entendu la taille du maillage influe directement sur le filtrage numérique des structures fines, ici les positions des petites boucles de courant dans le liquide libre, et surtout les micro vortex qui se développent sur 4 mailles. Ceux-ci résultent vraisemblablement des forts gradients de concentration dans la zone pâteuse.

La comparaison des résultats 20x30 (figures 3-5 et 3-6 (a) (b)) avec les résultats 40x60 (figures 3-4 et 3-6 (c) (d)) montre l'avantage d'un maillage fin:

a) meilleure précision dans la composition des premières couches contre la paroi froide (valeur théorique 3.10%);

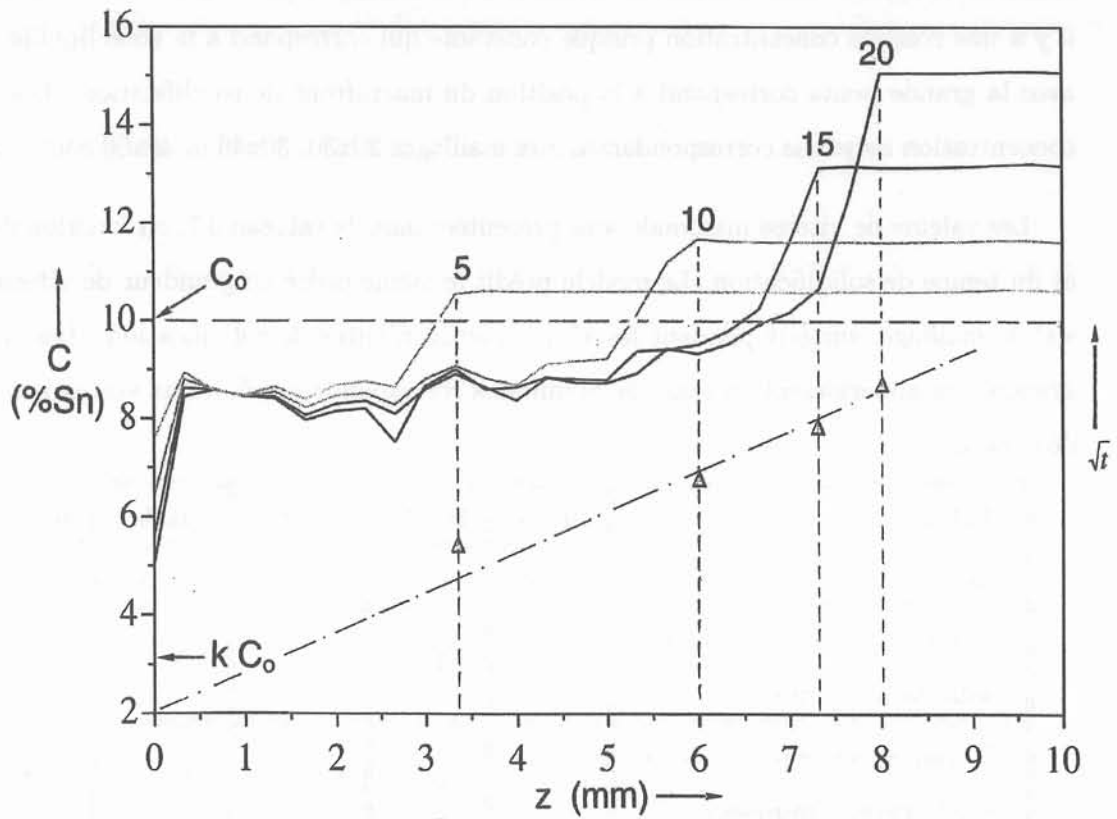


Figure 3-5: Concentration moyenne par couche horizontale en fonction de la distance à la paroi froide, pour 4 instants successifs. Maillage 20x30, pas de temps 30 ms. Les chiffres indiquent le temps en min. Les triangles correspondent à la loi d'évolution en \sqrt{t} .

b) meilleure précision pour chiffrer l'enrichissement en soluté du liquide libre (voir par exemple figure 3-7);

c) révélation de la périodicité spatiale de la concentration, périodicité pilotée par la structure de l'écoulement dans le liquide libre.

La figure 3-7 montre la comparaison de concentration moyenne par couche horizontale, 20 minutes après de la solidification, selon différents maillages. Dans la partie droite du graphique, il y a une zone de concentration presque constante qui correspond à la zone liquide. La partie avec la grande pente correspond à la position du macrofront de solidification. Les valeurs de concentration moyenne correspondantes aux maillages 20x30, 30x46 et 40x60 sont très proches.

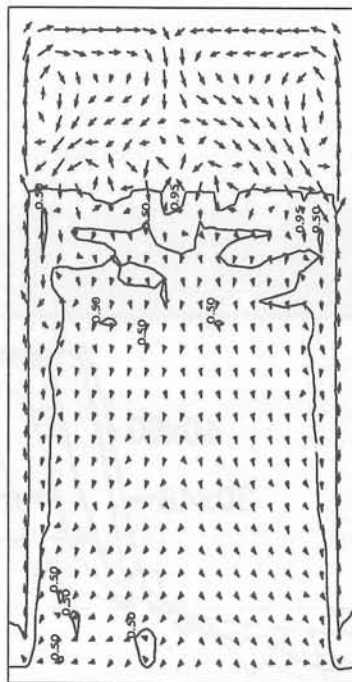
Les valeurs de vitesse maximale sont présentées dans le tableau 3.7, en fonction du maillage et du temps de solidification. Le modèle prédit le même ordre de grandeur de vitesse quel que soit le maillage, surtout pendant les 15 premières minutes de solidification. Les valeurs plus grandes qui apparaissent au bout de 20 minutes correspondent aux petits vortex sur les canaux des côtés.

Maillage	10x14	16x22	20x30	30x46	40x60
Pas de temps	0.2 sec	0.2 sec	0.03 sec	0.02 sec	0.015 sec
5 min après le début de la solidification [mm/sec]	1.2	1.1	0.7	1.0	0.9
10 min après le début de la solidification [mm/sec]	1.0	1.0	1.1	0.9	0.7
15 min après le début de la solidification [mm/sec]	0.5	0.8	0.9	3.9	1.0
20 min après le début de la solidification [mm/sec]	0.2	0.7	9.5	6.5	3.0

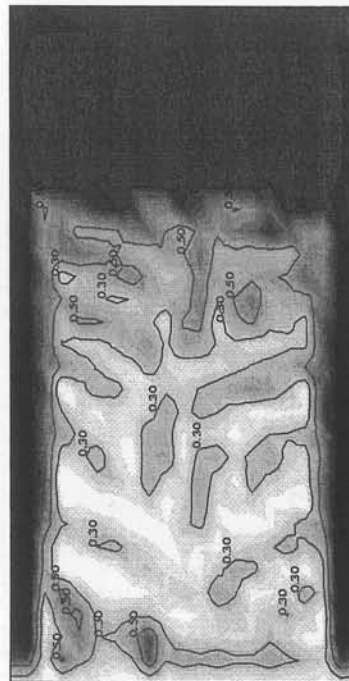
Tableau 3.7: Vitesse maximale selon différents maillages.

Le nombre de Reynolds Re de l'écoulement dans la zone liquide, défini comme suit:

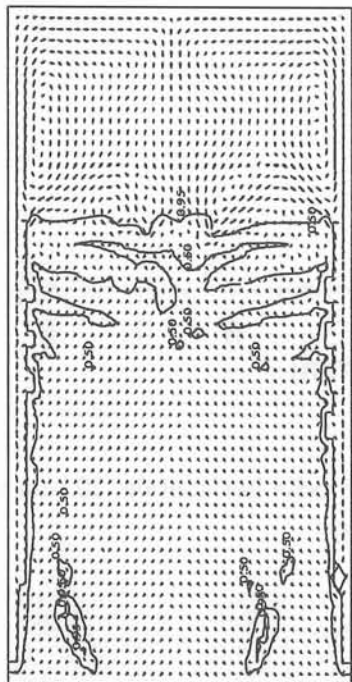
$$Re = \frac{v_{\max} H}{\nu}$$



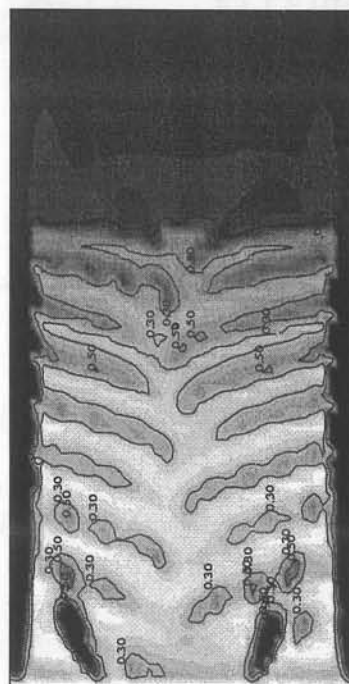
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 3-6: Cas type, $t=15$ min. (a) Champ de vitesses ($v_{\max}=0.9\text{mm/sec}$), isovaleurs $\phi = 0.5; 0.95$. (b) carte de concentration totale ($C_{b\max} = 16.0\%$, $C_{b\min} = 4.29\%$), isovaleurs $\phi = 0.3; 0.5; 0.95$, maillage 20×30 . (c) et (d) même présentation maillage 40×60 , ($v_{\max}=0.9\text{mm/sec}$, $C_{b\max} = 16.3\%$, $C_{b\min} = 3.6\%$).

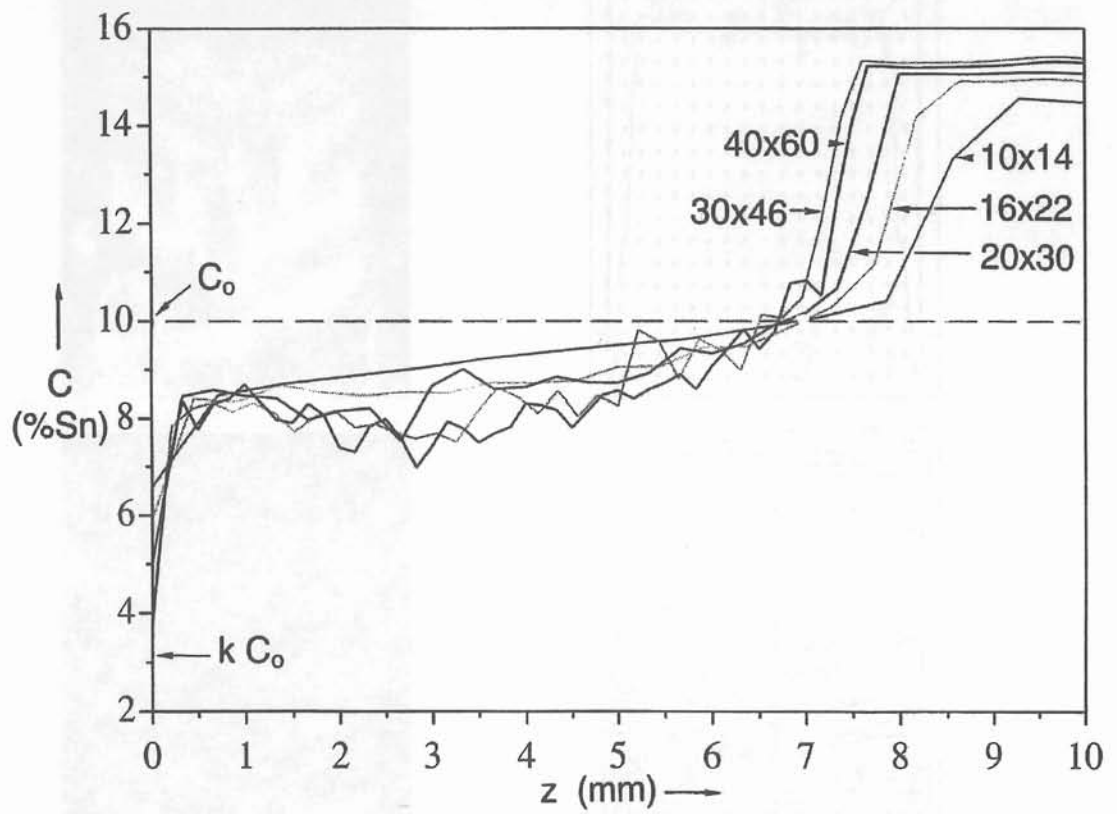


Figure 3-7: Cas type, concentration moyenne par couche horizontale, 20 min après le début de la solidification. Comparaison des différents maillages

varie entre 100 et 300. L'écoulement reste donc dans le régime laminaire, mais l'inertie du fluide est dominante.

3.3.2 Convergence en fonction du maillage et du pas du temps.

Nous constatons, à partir de nos essais, que la convergence du programme n'est pas une fonction monotone de la finesse du pas de temps. Le tableau 3.8 montre que, avec des pas de temps plus fin, la convergence n'est pas atteinte bien que le critère de Courant soit toujours vérifié.

Nombre de Courant:

Selon Press et al [66], le nombre de Courant est :

$$C = v \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

où

v : module de la vitesses maximal

Δt pas de temps

Δx intervalle spatial

Le critère de convergence du programme est basé sur le nombre maximum de itérations internes permis dans l'algorithme. Les essais sont faits en augmentant ce paramètre (Maximum number of inner iterations, IIMAX=7) sans succès lorsque il n'y a pas de convergence.

Maillage	Δt [sec]	Nombre de pas de temps faits	Temps simulé	v_{max} [mm/sec]	C	Convergence
10x14	0.2	6000	20min	0.22	0.09	OUI
	0.05	31871	2.66min	0.21	0.02	NON
16x22	0.2	6000	20min	0.68	0.43	OUI
	0.02	15099	5.03min	13	0.83	NON
20x30	0.03	39806	19.9min	9.4	0.70	NON
	0.02	45714	15.24min	0.7	0.03	NON
30x46	0.088	13637	20min	0.65	0.34	OUI
	0.02	43106	14.37min	5.6	0.67	NON
40x60	0.015	80000	40min	0.3	0.03	OUI

Tableau 3.8: Convergence en fonction du maillage spatial et temporel.

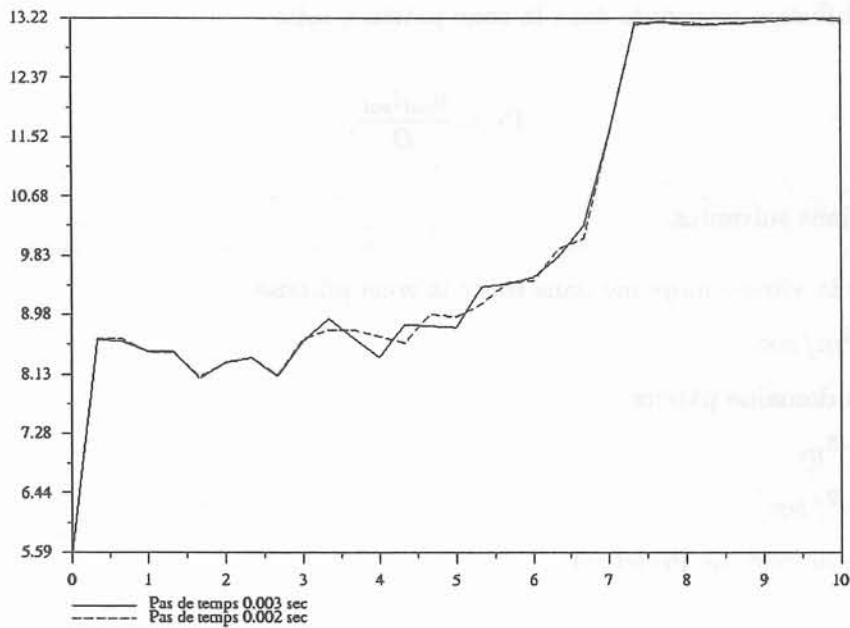
La comparaison entre les résultats avec différents pas de temps, en maillage 20x30, est montré dans la figure 3-8. Il y a une grande similitude entre les valeurs calculées avec le pas de temps 0.03 sec. et 0.02 sec.

3.4 Autres résultats du cas type.

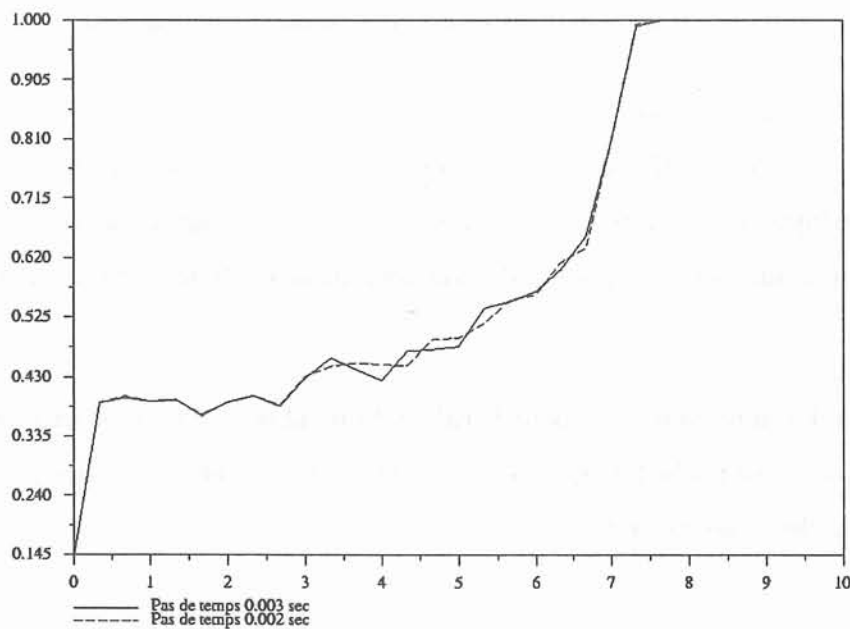
3.4.1 Evaluation du terme de diffusion dans l'équation de conservation de soluté.

Les cartes de concentration montrent des zones de fort gradient de concentration en bordure de poches et canaux. L'équation de conservation de soluté dans le modèle FHP est constituée par les termes de variation temporelle de la concentration totale et de convection et de diffusion de la concentration liquide. L'objectif de ce paragraphe est de évaluer le rapport entre les termes de diffusion et de convection pour savoir si le premier peut être négligé dans cette équation:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + u \frac{\partial C_l}{\partial x} + w \frac{\partial C_l}{\partial z} = D \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi \frac{\partial C_l}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \phi \frac{\partial C_l}{\partial z} \right) \quad (3.21)$$



(a)



(b)

Figure 3-8: Résultats avec différents pas de temps, maillage 20X30, 15 minutes après de début de la solidification (a) Concentration moyenne, (b) Fraction liquide

Analyse sur toute la zone pâteuse:

Grâce au du nombre de Péclet nous pouvons évaluer le rapport entre les phénomènes de convection et diffusion moyennés dans la zone pâteuse, soit:

$$Pe = \frac{v_{pat} l_{pat}}{D},$$

avec les définitions suivantes:

v_{pat} module de la vitesse moyenné dans toute la zone pâteuse

$$v_{pat} = 5 \times 10^{-5} m/sec$$

l_{pat} hauteur du domaine pâteux

$$l_{pat} = 6.5 \times 10^{-3} m$$

$$D = 3 \times 10^{-9} m^2/sec$$

La valeur de ce nombre de Péclet est

$$Pe = 108$$

Le terme de diffusion n'est pas totalement négligeable dans la zone pâteuse.

Analyse dans une poche:

Les résultats numériques (figure 3-6 par exemple) montrent que, le long de la frontière d'une poche, il se développe une couche limite solutale. Ceci est schématisé par la figure 3-9. Nous allons montrer par une analyse d'ordre de grandeur qu'il s'agit bien d'une couche limite de diffusion.

Nous faisons des approximations pour le calcul du nombre de Péclet effectif dans la couche limite de diffusion d'une poche (cf figure 3-9). Dans le terme de diffusion, nous pouvons estimer son ordre de grandeur comme suit:

$$D \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi \frac{\partial C_l}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \phi \frac{\partial C_l}{\partial z} \right) \approx \phi D \left(\frac{\partial^2 C_l}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 C_l}{\partial p_i^2} \right) \approx \phi_{moy} D \left(\frac{\delta C_l}{l_T^2} + \frac{\delta C_l}{l_P^2} \right) \quad (3.22)$$

où

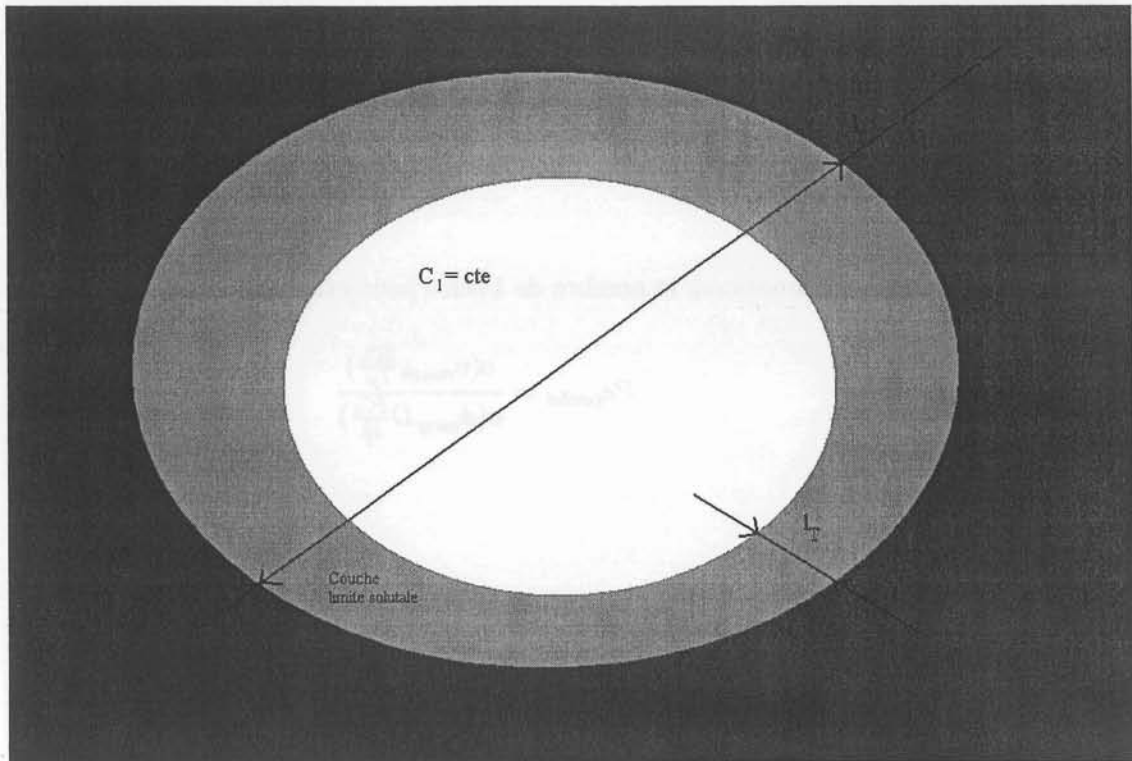


Figure 3-9: Diagramme d'une poche idéal, pour montrer la zone liquide central, la couche limite solutale et les dimensions l_T , l_P largeur et longueur de la couche de diffusion.

n direction normale aux isovaleurs de concentration dans une poche

p_t direction tangentielle aux isovaleurs de concentration dans une poche

l_T largeur de la couche de diffusion dans une poche

l_P longueur de la couche de diffusion dans une poche

ϕ_{moy} fraction liquide moyenne dans la couche de diffusion d'une poche.

La longueur de la couche de diffusion est plus faible que la dimension de la poche, soit: $l_T < l_P$
d'où

$$D \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi \frac{\partial C_l}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \phi \frac{\partial C_l}{\partial z} \right) \approx \phi D \frac{\delta C_l}{l_T^2}$$

Le terme de convection peut être évalué comme suit:

$$u \frac{\partial C_l}{\partial x} + w \frac{\partial C_l}{\partial z} \approx v_{mush} \frac{\delta C_l}{l_P}$$

A l'aide de ces approximations, le nombre de Péclet peut être écrit comme suit:

$$Pe_{poche} = \frac{o(v_{mush} \frac{\delta C_l}{l_P})}{o(\phi_{moy} D \frac{\delta C_l}{l_T^2})}$$

$$l_P = 1.5mm$$

$$l_T = 0.2mm$$

$$\phi_{moy} = 0.35$$

La valeur de ce nombre est:

$$Pe_{poche} = 1.27.$$

Ce nombre, qui représente le rapport réel entre la convection et la diffusion du soluté, nous indique que le phénomène de diffusion n'est pas négligeable en bordure des poches et des canaux. Les figures 3-10 et 3-11 montrent la couche limite solutale, la zone de fort gradient de concentration, le long de la frontière de la poche.

La figure 3-12 montre les cartes de concentration après 15 minutes à partir du début de la solidification, avec le terme de diffusion (figure 3-12 a)) et sans le terme de diffusion (figure 3-12 b)). La structure de la zone pâteuse est différente. Sans le terme de diffusion, on constate que

- 1) Le macrofront de solidification est situé dans la même position,
- 2) Les canaux latéraux sont toujours présents, mais ils sont sensiblement moins larges,
- 3) Les poches sont plus nombreuses, mais moins larges,
- 4) La valeur de concentration maximum est plus élevée, tandis que les valeurs de concentration minimum, de fraction liquide et vitesse maximum sont coïncidentes (cf. tableau 3.9),

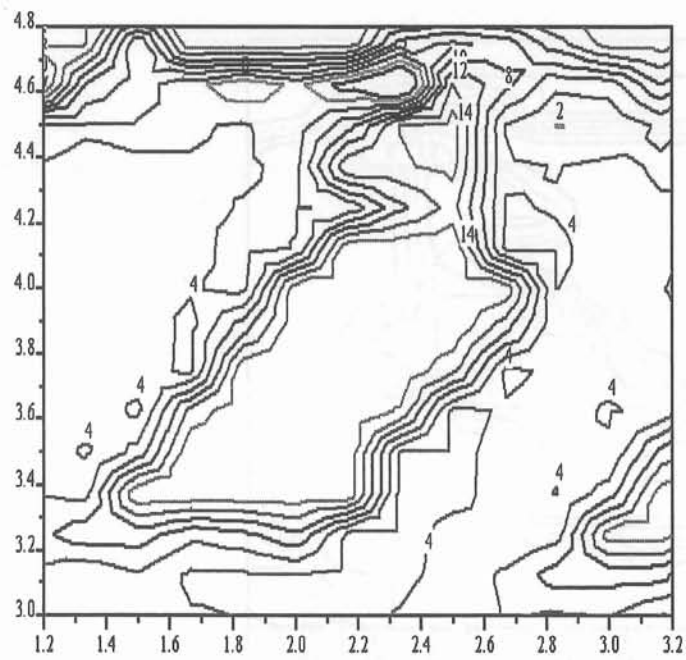


Figure 3-10: Agrandissement des isovaleurs de concentration d'une poche, qui vont du 3 % Sn jusqu'à 14 % Sn.

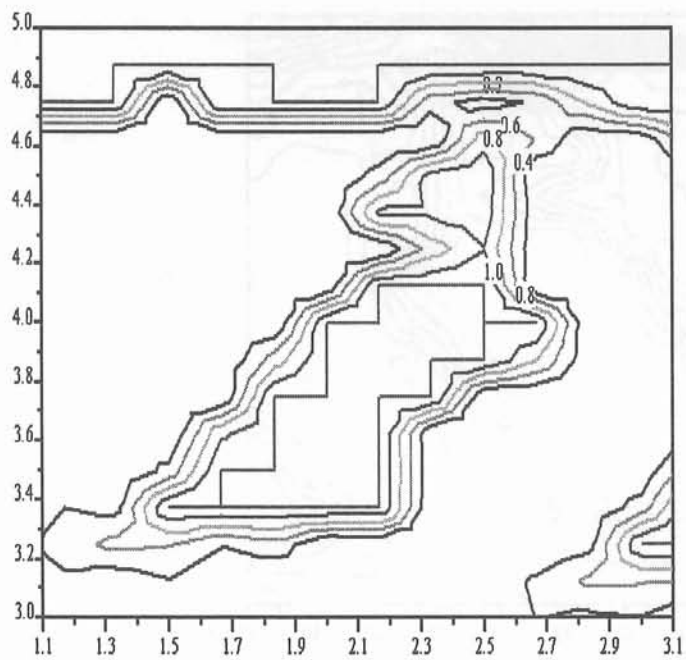


Figure 3-11: Agrandissement des isovaleurs de fraction liquide d'une poche, qui vont du 0.2 jusqu'à 1.

En conclusion, il est donc clair que la structure du champ de soluté à l'échelle des canaux et des poches est sensible aux effets de la diffusion, qu'elle soit d'origine physique ou numérique.

Cas	Avec le terme de diffusion	Sans le terme de diffusion
$C_{b\max}[\%]$	16.30	25.29
$C_{b\min}[\%]$	3.60	3.66
ϕ_{\max}	1	1
ϕ_{\min}	0	0
$v_{\max}[mm/sec]$	0.98	0.65

Tableau 3.9: Quelques résultats de la simulation avec et sans le terme de diffusion dans l'équation de conservation de soluté.

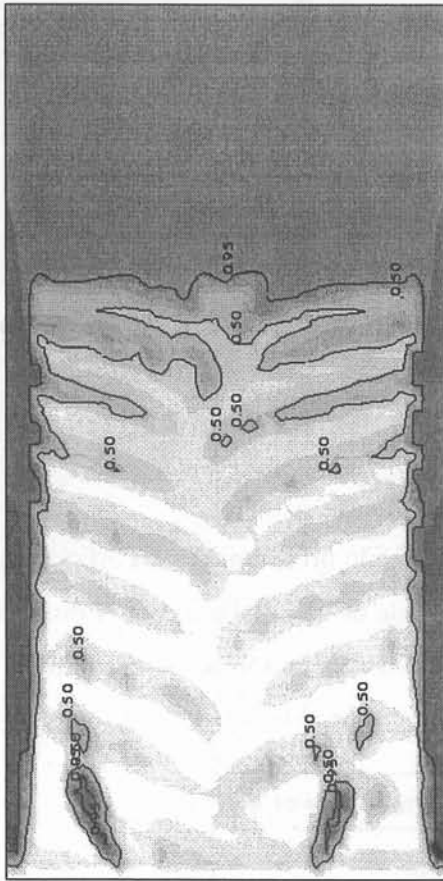
3.4.2 Analyse de l'évolution des grandeurs.

Il nous a été possible, par quelques modifications dans le programme FHP, d'obtenir les valeurs de température, concentration totale, fraction liquide et vitesse en fonction du temps de solidification dans certains points du domaine. Ces points sont notés sur la figure 3-13.

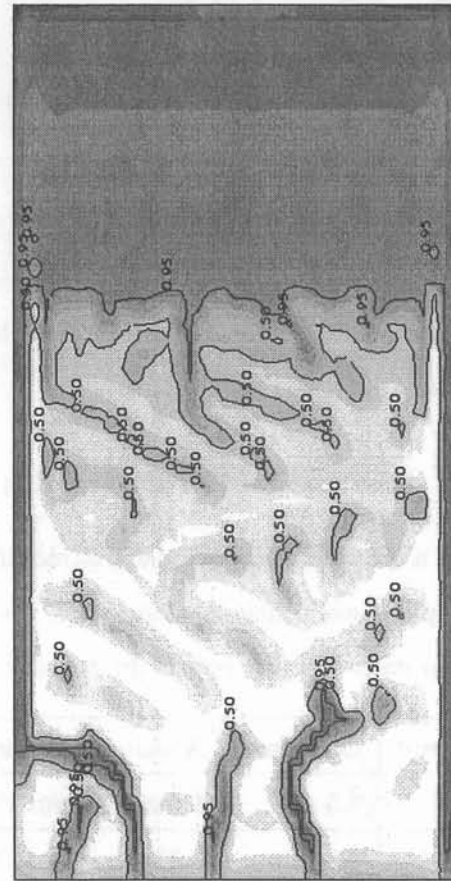
Point	Ordonnée	Abscisse	Commentaire
1	2.5 mm	1 mm	sur l'axe de symétrie vertical
2	2.5 mm	3.33 mm	sur l'axe de symétrie vertical
3	0.5 mm	1 mm	près de la paroi latérale
4	0.5 mm	3.33 mm	près de la paroi latérale

Tableau 3.10: Coordonnées des points

Les graphes de la température en fonction du temps montrent que la température décroît linéairement pour tous les points (cf figure 3-14 a), pour le point 1). Le phénomène de refusion ($\frac{\partial\phi}{\partial t} < 0$) est mis en évidence dans les graphiques de fraction liquide, point 1 (cf figure 3-14 b)). Le graphique de concentration totale du point 1 est très régulier (cf figure 3-15 a)).



(a)



(b)

Figure 3-12: Cartes de concentration 15 minutes après de début de la solidification. a) avec le terme de diffusion ($Cb_{\max} = 16.3, Cb_{\min} = 3.6, v_{\max} = 0.98 \text{ mm/sec}$), b) sans le terme de diffusion dans l'équation de conservation de soluté ($Cb_{\max} = 25.3, Cb_{\min} = 3.7, v_{\max} = 0.65 \text{ mm/sec}$). Isovaleurs de la fraction liquide $\phi = 0.5; 0.95$.

Point	Vitesse maximum	Temps de τ_{max}	Échelle d'oscillation	Fréquence
1	1 mm/sec	1 sec	0.1 - 2mm	0.05 Hz
2	2 mm/sec	1 sec	0.1 - 2mm	0.05 Hz
3	0.5 mm/sec	0.5 sec	0.1 - 2mm	0.1 Hz
4	2 mm/sec	1 sec	0.1 - 2mm	0.05 Hz

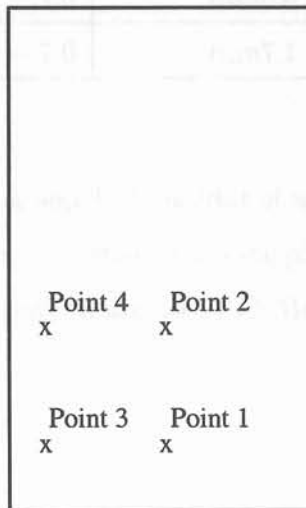


Figure 3-13: Emplacement des points où sont détaillées les histoires de vitesse, concentration, température et fraction solide.

Par contre, en ce qui concerne les vitesses, nous pouvons constater des fluctuations (cf. figures 3-15 b) , 3-16, 3-17). Ces fluctuations existent lorsque le point est encore situé dans la zone liquide et elles disparaissent lorsque la zone pâteuse a atteint le point considéré. Elles sont analysées en terme de fréquence caractéristique et les résultats sont fournis dans le tableau 3.11.

Point	Vitesse maximum	Temps de v_{\max}	Période d'oscillation	Frequence
1	$1mm/sec$	$1.5min$	$0.7 - 2min$	$0.08Hz$
2	$2mm/sec$	$1.6min$	$0.7 - 4min$	$0.13Hz$
3	$0.6mm/sec$	$6.3min$	$0.7 - 7min$	$0.1Hz$
4	$2mm/sec$	$1.7min$	$0.7 - 10min$	$0.15Hz$

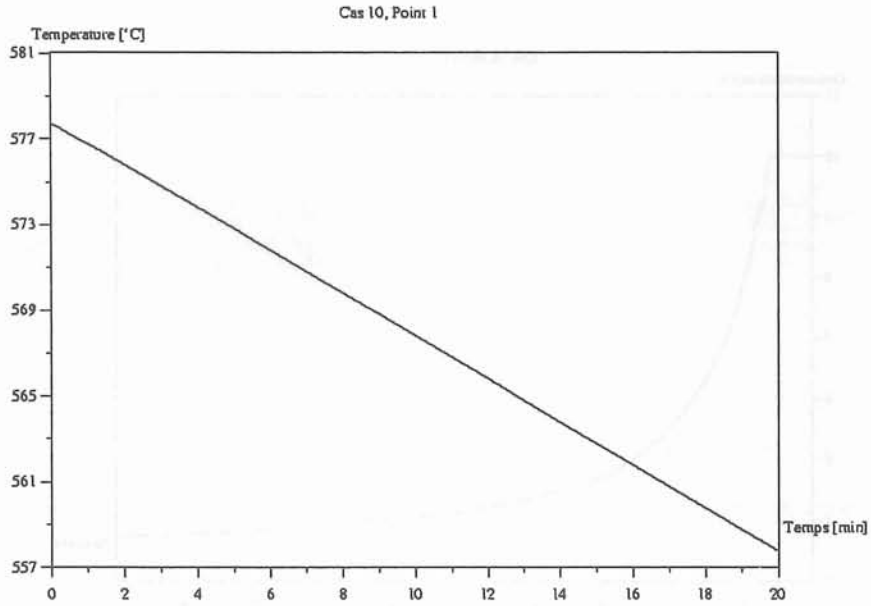
Tableau 3.11

Nous pouvons constater dans le tableau 3.11 que la fréquence calculée de ces oscillations coïncide avec la valeur de la fréquence des ondes de gravité (que nous avons défini dans le paragraphe 3.2.2) qui est de $0.15H$. Ces oscillations dans les métaux liquides ont été constatées expérimentalement par Cole, [7].

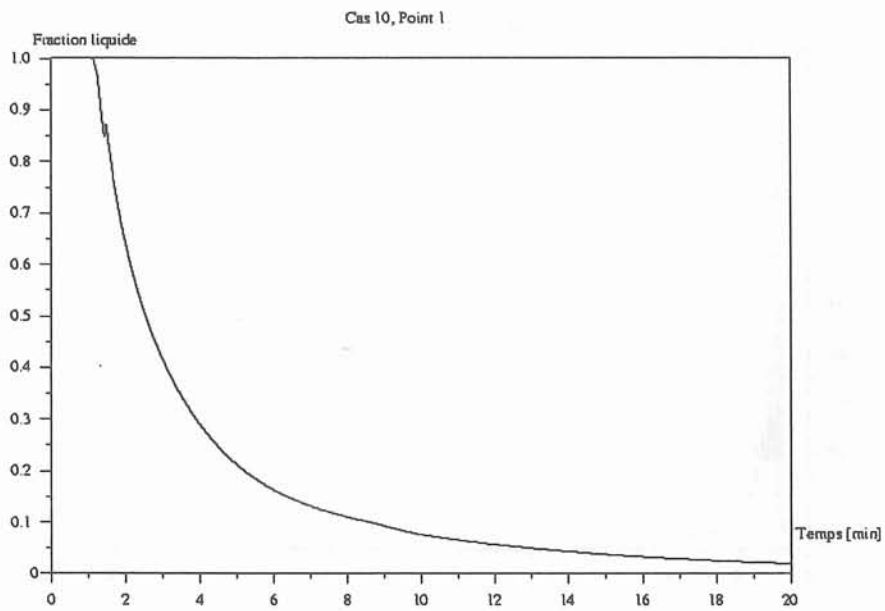
3.5 Conclusions.

Nous avons fait l'analyse des résultats du modèle de solidification FHP appliqué à un cas type de solidification. Nous avons évalué les nombres sans dimensions du problème (cf. paragraphe 3.2.2) pour mesurer l'importance relative des phénomènes de convection (thermique, solutale et forcée) et de diffusion, en particulier dans la zone pâteuse. Compte-tenu de la valeur de ces nombres, dans le cas type traité, nous pouvons conclure que:

- 1) l'écoulement à grande échelle dans la zone pâteuse est engendré par les variations de pression générées par l'écoulement de la zone liquide,
- 2) il n'y a pas de forçage direct de l'écoulement à grande échelle dans la zone pâteuse par les forces de volume, qu'elles soient électromagnétiques ou gravitaires,
- 3) dans les régions de la zone pâteuse à fraction liquide importante, par exemple les canaux et les poches, les forces de convection solutales sont importantes.

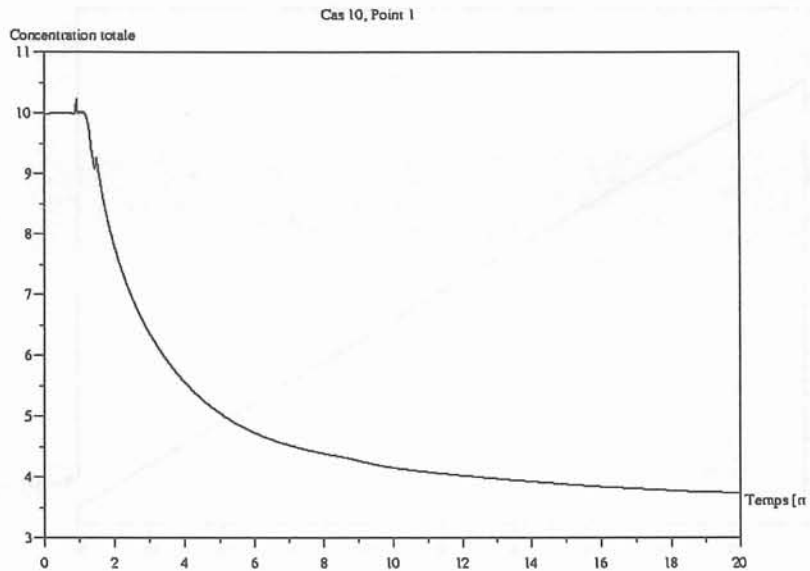


(a)

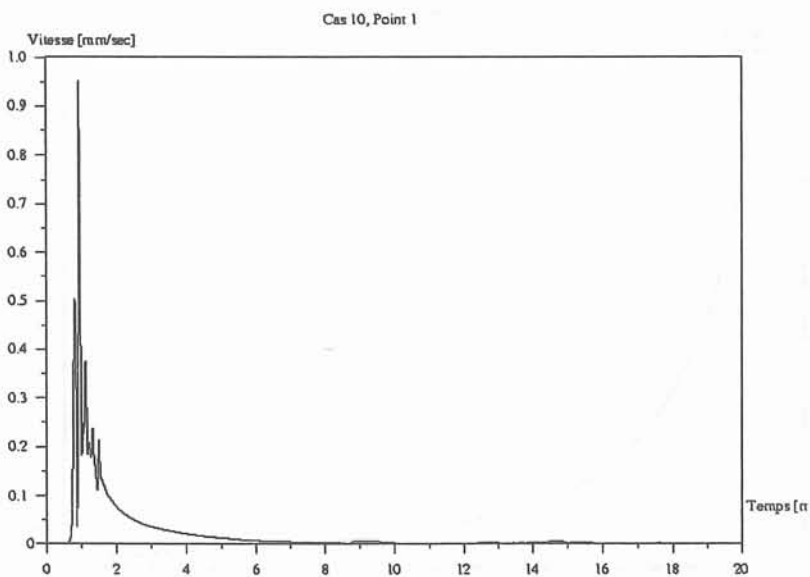


(b)

Figure 3-14: Point 1. Histoire de a) température et b) fraction liquide, 20 minutes après le début de la solidification.

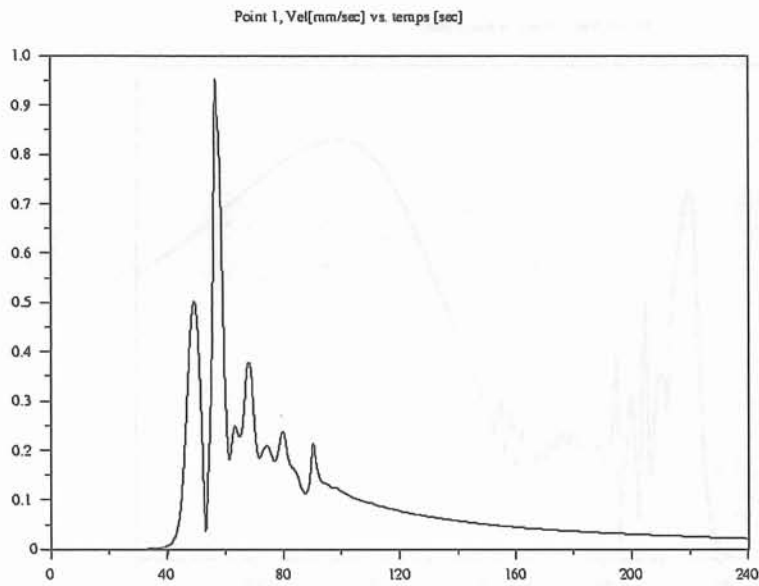


(a)

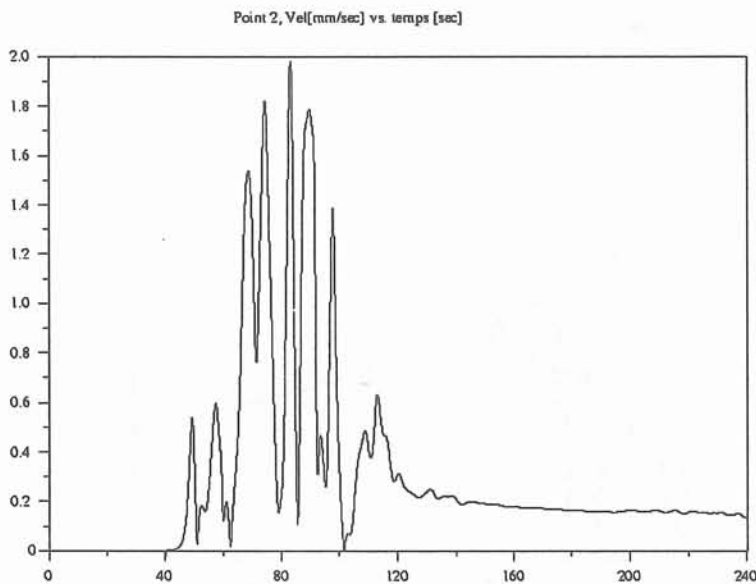


(b)

Figure 3-15: Point 1. Histoire de a) concentration totale et b) vitesses, 20 minutes après le début de la solidification.

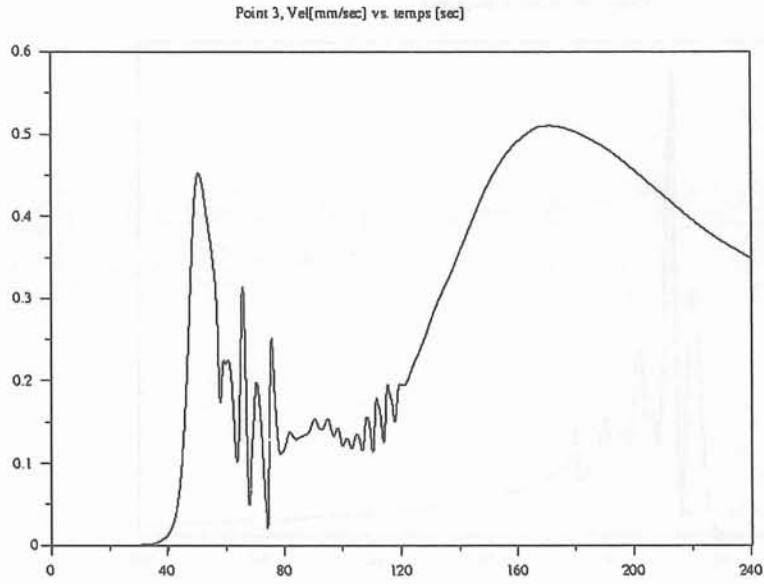


(a)

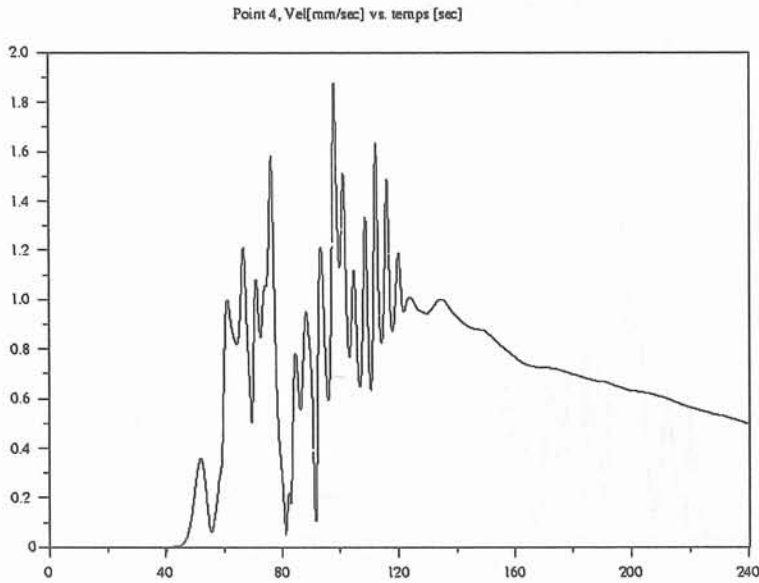


(b)

Figure 3-16: Histoire des vitesses pendant les 240 secondes après le début de la solidification.a) point 1, b)point 2.



(a)



(b)

Figure 3-17: Histoire des vitesses pendant les 240 secondes après le début de la solidification. a) point 3, b) point 4.

Nous avons montré que les effets de diffusion de soluté pouvaient être significatifs, notamment dans les poches et les canaux. Il se forme en effet dans les poches et les canaux couches limites solutales. Cependant, il est clair que l'effet de la diffusion numérique est aussi importante sur les petites échelles du champ de concentration.

Outre la formation de canaux, nous avons mis en évidence la formation de poches de refusion. Ces phénomènes de refusion sont importants lorsque la solidification est lente. La zone liquide est le siège d'un écoulement de convection solutale fortement influencé par les jets de liquide débouchant des canaux. On a mis en évidence, en outre, des fluctuations de vitesse dans la zone liquide, que l'on peut identifier à des ondes de gravité.

Une série de différents maillages spatiaux et temporels ont été mis en oeuvre. De l'observation des résultats, nous constatons que le macrofront de solidification est conservé, même avec un maillage grossier. Une périodicité spatiale de la concentration dans la zone pâteuse n'est développée que dans le maillage plus fin. Un filtrage numérique des petites échelles est observée quand le maillage est grossier.

La convergence du modèle a été étudiée. L'affinage du pas spatial et temporel n'est pas la condition suffisante de convergence. En fait, le modèle converge dans une gamme de paramètres très étroite.

... in der ...
...
...
...
...

...
...
...
...
...

...
...
...
...
...

Chapitre 4

Influence des paramètres sur les résultats du modèle FHP.

4.1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats du modèle Felicelli-Heinrich-Poirier (FHP) [24], [23], pour un alliage plomb-étain, dans différentes conditions de refroidissement, différentes tailles de domaines et différentes conditions de perméabilité (anisotrope ou isotrope). Différentes perturbations initiales ont été essayées pour déclencher la convection thermosolutale, à savoir une distribution de concentration initiale aléatoire et une déviation de l'angle du vecteur gravité. Des comparaisons et interprétations des résultats ont été réalisées.

4.2 Les cas étudiés.

Nous avons choisi d'exploiter le programme dans des cas divers pour évaluer l'influence

- a) des conditions thermiques,
- b) des lois de perméabilité,
- c) de la taille du domaine et des perturbations initiales.

Le tableau 4.1 énumère les cas étudiés. Chaque cas est décrit en fonction

* des forces massiques qui interviennent, soit la gravité (convection thermosolutale), soit les forces électromagnétiques (convection forcée). Les cas de convection forcée sont analysés dans

le chapitre 5.

* des conditions thermiques, le flux entrant dans la paroi supérieure du domaine étant nul ou non-nul.

* des dimensions du domaine, le petit domaine (5 mm x 10 mm) et le grand domaine (30 mm x 90 mm)

* des fonctions de perméabilité, anisotropes ou isotropes

* de la présence ou non de la gravité

* de la perturbation initiale mise pour déclencher la convection thermosolutale

* du temps de solidification simulé par le programme.

Nous tirons un certain nombre de conclusions à partir de la comparaison des résultats entre les différents cas.

Cas	Convection		Flux supérieure		Taille du domaine		Perméabilité		Gravité		Perturbations initiales		Temps Simulé [min]
	Nat	Forcée	F=0	F≠ 0	Grande	Petite	Anisotrope	Iso-trope	Non-nulle	Nulle	Aléatoire.	Grav.	
1	X			X		X	X		X		X		40
2	X		X			X	X		X		X		120
3	X			X		X		X	X		X		15
4	X		X			X		X			X		20
5A	X	X		X		X	X		X		X		20
5B	X	X		X		X	X		X		X		20
6		X		X		X	X			X	X		15
7	X		X		X		X		X		X		20
8	X		X		X			X	X		X		20
9	X	X	X		X		X		X		X		5
10	X			X		X		X	X			X	20
11	X		X			X		X	X			X	20
12	X		X		X			X	X			X	20
13	X		X			X		X _{kx}	X		X		20
14	X		X			X		X _{ky}	X		X		20

Tableau 4.1 : Récapitulation et nomenclature des cas d'exploitation du programme.

Nous pouvons faire quelques remarques:

* Cas 2 : Dans ce cas, la température le long de la paroi inférieure AB est arrivée jusqu'à la température eutectique $T_E = 456K$. Nous n'arrivons pas à la solidification complète et il a fallu faire une modification pour que le programme passe la température eutectique.

* Cas 5 : Ce cas comporte deux sous-cas :

a) cas où les forces électro-magnétiques produisent deux recirculations,

b) cas où les forces électromagnétiques ne produisent qu'une seule circulation.

* Cas 3 et 10: le programme donne de résultats de concentration négative en quelques points du maillage isolés à partir de 15 min de refroidissement (cf paragraphe 4.4.2), et pourtant ils convergent vers des valeurs de concentration en général satisfaisantes.

* Cas 6, 9 et 12: Ils sont de convergence difficile. Ils vérifient le critère de Courant mais il existe des pas de temps pour lesquels il n'y a pas convergence. Par contre, il existe des pas de temps, pour lesquels ce critère n'est pas satisfait, mais qui donnent lieu à convergence.

Temps d'exécution des simulations:

Le temps d'exécution d'une simulation de 5 minutes de solidification est d'environ 14 heures dans une machine PC (horloge 445 Mhz et 386 Megas de RAM) avec système d'exploitation Linux. Les temps de solidification ont évolué avec les différentes machines. Les premières machines utilisées (workstation), demandaient plus d'une semaine pour 5 minutes de solidification.

4.3 Influence des conditions thermiques.

Les comparaisons suivantes montrent l'importance des conditions thermiques dans la formation de canaux. Dans le cas de flux supérieur nul, il n'y a pas suffisamment de temps pour avoir une accumulation de liquide enrichi près des parois verticales lors la formation de canaux latéraux à cause de la vitesse du front de solidification. On se propose de comparer la vitesse du front de solidification pour des conditions thermiques différentes.

4.3.1 Comparaison entre le cas 1 et le cas 2.

Nous présentons les résultats du cas 1 et du cas 2 correspondant à une perméabilité anisotrope. Les données du programme FHP sont les mêmes pour les deux cas, excepté le flux de chaleur supérieure entrant pour le cas 1. Du point de vue thermique, sans flux entrant (cas 2), la température décroît plus rapidement que dans le cas 1.

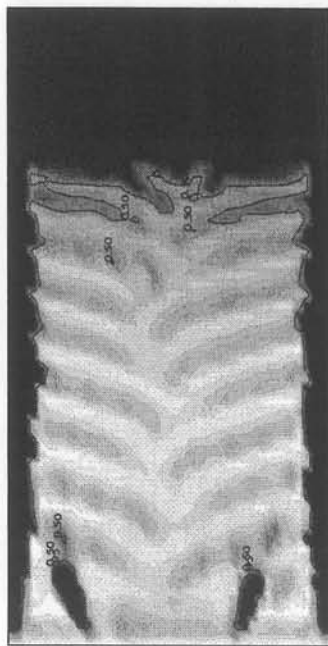
Bien que les concentrations maximales soient identiques, les allures des cartes de concentration sont complètement différentes, comme le montrent les figure 4-1 (a) et (b).

Cas	1	2
Temps de simulation de la solidification [min]	20	20
Nombre de canaux	2	1
Distance a la paroi [mm]	0,5	2,5
Longueur [mm]	7	8
Largeur moyenne [mm]	0.3	0.5
Nombre de poches grandes	2	0
Nombre de poches petites	0	0
Distance de la paroi froide à l'isovaleur $f_l=0$ [mm]	7.6	10
Concentration maximum de Sn [%]	18.42	18.07
Concentration minimum de Sn [%]	2.3	8.76
Fraction liquide maximum	1.	0.96
Fraction liquide minimum	0.	0.325
Module maximum de la vitesse [mm/sec]	3.	0.5
Module maximum de la vitesse dans la zone pâteuse [mm/sec]	1.5	0.5

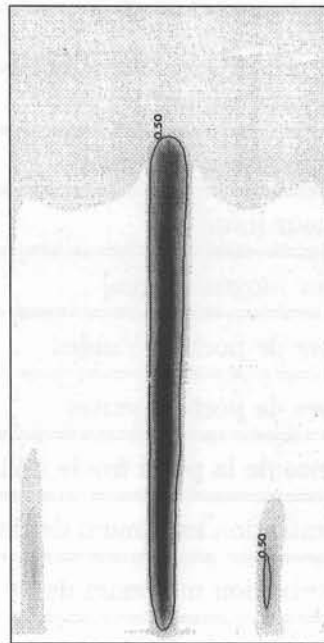
Tableau 4.2 : Comparaison de valeurs, cas 1(avec flux supérieur entrant) et cas2 (flux supérieur nul).

Les figures 4-1 (a) et (b) présentent les cartes de concentration 20 minutes après le début de la solidification. Les dégradés de gris montrent la concentration, du plus clair (concentration minimale de soluté) au plus foncé (concentration maximale de soluté). Les lignes isovaleurs montrent la fraction liquide. Elles démarquent la zone pâteuse de la zone liquide quand la fraction liquide est égale à 0.95. Les allures des cartes de concentration sont complètement différentes. Dans le cas 1, deux canaux latéraux se sont formés. La zone pâteuse présente une structure symétrique bien développée. Dans le cas 2, il n'y a qu'un canal central et tout le domaine est pâteux ce qui traduit un gradient thermique moyen plus faible.

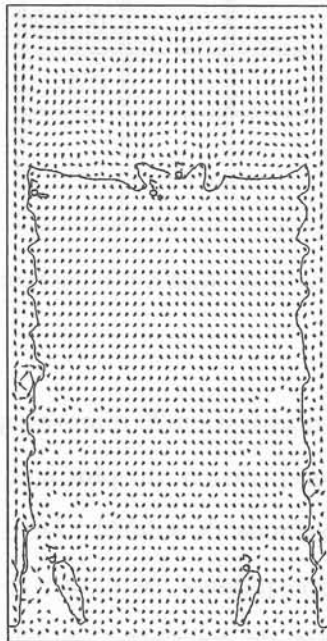
Les figures 4-1 (c) et (d) représentent les champs de vitesses. Dans la figure 4-1 (c), cor-



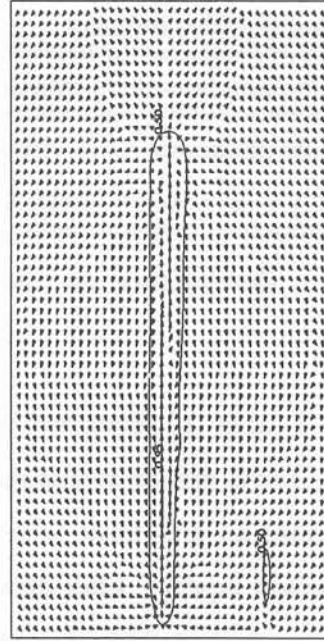
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 4-1: Résultats comparés du cas 1 (à gauche, flux supérieur entrant) et du cas 2 (à droite, flux nul). $t = 20$ min. (a) et (b) Cartes de concentration totale, a) $Cb_{\max} = 18.42, Cb_{\min} = 2.30$; b) $Cb_{\max} = 18.07, Cb_{\min} = 8.76$; (c) et (d) Champs de vitesses, c) $v_{\max} = 3\text{mm/sec}$, d) $v_{\max} = 0.5\text{mm/sec}$. Isovaleurs $\phi = 0.5, 0.95$, cartes a,b,d. $\phi = 0.7$ carte c.

respondant au cas 1, on observe des courants latéraux ascendants dans les canaux latéraux encore liquides. A gauche, on observe des vortex localisés dans les poches, où se développent les vitesses maximales. Dans la figure 4-1 (d), il y a un courant ascendant central, en coïncidence avec le canal central. Par contre, il y a des courants descendants par les côtés. Les deux cas, montrent que quand la direction de la vitesse est la même que le déplacement des isothermes, il y a un retard de la solidification. Ces cas indiquent très clairement comment le champ de vitesses gouverne la distribution de soluté.

4.3.2 Comparaison entre le cas 3 et le cas 4.

Le cas 3 et le cas 4 dérivent des cas 1 et 2 respectivement. La différence concerne la loi de perméabilité. Les calculs sont faits avec une loi de perméabilité isotrope Ahmad et al. [1], voir figure 4-3. Le cas 3 a un flux supérieur entrant, tandis que dans le cas 4 le flux supérieur est nul.

Cas	3	4
Temps simulation de la solidification [min]	15	15
Nombre de canaux	2	0
Distance a la paroi [mm]	0,5	-
Longueur [mm]	5	-
Largeur moyenne [mm]	0.3	-
Nombre de poches grandes	3	-
Nombre de poches petites	10	-
Distance de la paroi froide au isovaleur $f_l=0$ [mm]	5.7	10
Concentration maximum de Sn [%]	18.42	10.40
Concentration minimum de Sn [%]	-5.1	8.99
Fraction liquide maximum	1	0.52
Fraction liquide minimum	0	0.41
Module maximum de la vitesse [mm/sec]	3	$1 \cdot 10^{-2}$
Module maximum de la vitesse dans la zone pâteuse [mm/sec]	1.3	$1 \cdot 10^{-2}$

Tableau 4.3 : Comparaison de valeurs, cas 3 (avec flux supérieur entrant) et cas 4 (flux supérieur nul), loi de perméabilité isotrope.

Cette exemple montre comment les conditions thermiques du flux supérieur ont une grande influence dans la formation des canaux de ségrégation. Le cas 3 montre 2 canaux latéraux bien définis (voir figure 4-2, a)), mais le cas 4, ne donne pas de ségrégation dans le domaine (voir figure 4-2 b)). Lorsque le flux supérieur entrant est nul, la solidification est plus rapide. L'écoulement dans la zone pâteuse n'a pas le temps de transporter le soluté pour former des fortes ségrégations ou occasionner des refusions. Les valeurs négatives du cas 3 sont analysées dans le paragraphe 4.4.2.

Formation de canaux.

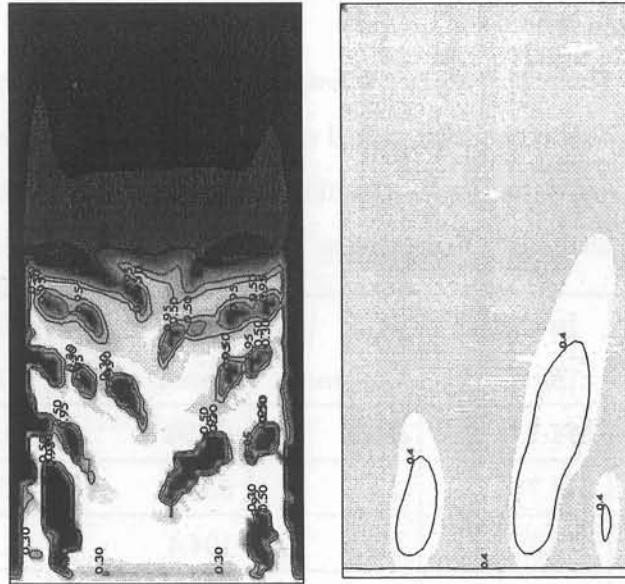


Figure 4-2: Cartes de concentration totale, $t=15$ min, cas 3 ($Cb_{\max} = 18.42, Cb_{\min} = -5.1$, isovaleurs $\phi = 0.3, 0.5, 0.95$) et cas 4 ($Cb_{\max} = 10.40, Cb_{\min} = 8.99$, isovaleurs $\phi = 0.4$). Comparer avec figure 4-1 a et b.

Selon Copley et al. [10] et Kurz et Fisher [45], on peut définir un temps local de solidification critique, pour la formation des canaux, soit :

$$t_s = \frac{\Delta T_o}{G_s V_T} > t_{critique} \quad (4.1)$$

où

t_s temps local de solidification

ΔT_o intervalle de température de solidification, obtenu à partir du diagramme de phase

G_s gradient de solidification

V_T vitesse de déplacement des isothermes

Pour des temps locaux de solidification plus petits que ce temps critique, il n'y aura pas de formation de canaux.

Les valeurs correspondantes au cas 3 sont:

$G_{s3} = 1K^\circ/mm$, gradient constant dans le domaine

$V_{T3} = 1\text{mm}/\text{min}$, vitesse des isothermes dans le domaine

$$G_{s3}V_{T3} = 1K^\circ/\text{min}$$

Dans le cas 4, le gradient n'est pas constant. Il varie en fonction du temps, il est plus grand quand la solidification commence, puis il atteint des valeurs plus faibles. Les calculs des valeurs de gradient G_{s4} sont faits des les premieres secondes de la solidification. La vitesse V_{T4} est calculée pendant cette période de temps.

Intervalle de temps	Isotherme [K]	G_{s4} [K/mm]	V_{T4} [mm/min]	$G_{s4}V_{T4}$ [K/min]	ϕ_{\max}	ϕ_{\min}
0-5 sec	577.7	0.65	97.96	63.38	1./	1./
	576.74	1.4	6.12	8.57	1.	0.993
5-10 sec	576.79	0.905	104.4	94.48	1./	0.993/
	576.66	0.924	15	13.86	1.	0.986
10-15 sec	576.74	0.01	84	0.91	1./	0.986/
	576.57	0.068	14.4	0.98	1.	0.981
15-20 sec	576.73	0.003	26.4	0.09	1./	0.981/
	576.49	0.067	14.4	0.97	0.998	0.974
30-60 sec	576.40	0.085	16.6	1.41	0.996/	0.963/
	576.24	0.105	10	1.05	0.99	0.96
60-90 sec	575.99	0.06	15.8	0.95	0.99/	0.96/
	575.74	0.12	8.2	0.98	0.955	0.892
1 min	*	0.0655	15.15	0.99	0.99	0.96
5 min	*	0.062	16.05	1.	0.78	0.69
15 min	*	0.031	32.68	1.	0.52	0.41
20 min	*	0.024	41.66	1.	0.44	0.33

* valeurs moyennes, calculées sur tout le domaine

Tableau 4.4 : Valeurs locales des grandeurs thermiques, cas 4.

Rappelons les conditions thermiques initiales : Le long de la frontière inférieure, une température décroissante de $1K/\text{min}$ est imposée. Le flux est nul dans la partie supérieure. Il y a une distribution linéaire de température dans le premier instant de temps ($t = 0$). La frontière

inférieure du domaine a une température de $576.74K$ et la frontière supérieure a une température de $586.74K$, donc un gradient initial de $1K/mm$. Très vite, il diminue (cf. G_{s4} , tableau 4.4). La vitesse des isothermes est faible près de la paroi inférieure du domaine, et beaucoup plus grande près de la paroi supérieure du domaine. Les conditions pendant les premières 10 sec. montrent que le cas 3 est plus favorable à la formation de canaux, car $G_{s3}V_{T3} < G_{s4}V_{T4}$. Mais après 10 secondes les conditions changent, et les deux temps t_s deviennent comparables.

Cependant, nous pouvons prendre la vitesse de l'isotherme de liquidus ($T_L = 576.74K$, du diagramme de phases) comme vitesse de croissance du front de solidification $V_L = 6.12mm/min$ soit $102 mm/s$ dans le cas 4 et la comparer avec V_{T3} dans l'esprit du critère de Flemings (cf. [32]). De cette comparaison, nous voyons que le cas 4 solidifie 6 fois plus vite que le cas 3, donc il n'y a pas suffisamment de temps pour l'accumulation de liquide enrichi près des parois pour la formation de canaux latéraux.

Le cas 2, (flux supérieur nul, voir figure 4-1), a le même état thermique que le cas 4. Dans ce cas, il y a un canal. Mais la perméabilité joue. Quand la fraction liquide est entre 0.2 et 0.6, la perméabilité isotrope est presque cent fois plus grande que celle du cas anisotrope (figure 4-3), donc il y a un transport de soluté important en raison d'un plus fort drainage de la zone pâteuse, se traduisant par un effet d'homogénéisation.

4.4 Influence des lois de perméabilité.

L'écoulement des fluides est fortement dépendant des choix de la perméabilité dans la structure dendritique. Les résultats obtenus avec le code FHP avec deux lois différentes de perméabilité sont analysés. La comparaison est réalisée à partir du cas de solidification de l'alliage plomb-étain, avec les mêmes conditions initiales et de frontière, la même discrétisation spatiale et temporelle et dans un domaine rectangulaire de $5mm \times 10mm$. Des allures différentes de cartes de concentration sont obtenues en fonction de ces lois.

4.4.1 Les lois de perméabilité utilisées.

Les lois de perméabilité utilisés jusqu'à présent sont celles proposés par Felicelli, Heinrich, Poirier [24]. Cette perméabilité est anisotrope pour pouvoir prendre en compte la disposition

des dendrites primaires dans la direction de croissance du front de solidification. Soient K_x la lois de perméabilité relative à l'écoulement perpendiculaire aux dendrites et K_z celle relative à l'écoulement parallèle aux dendrites, leurs expressions sont :

$$K_x = 7.08 \times 10^{-16} d_l^{2.08} \phi^{3.32}, \quad 0.19 \leq \phi \leq 0.66 \quad (4.2)$$

selon Poirier, [61], où K_x est exprimé en mètres carrés et d_l , distance des bras primaires de dendrites, $d_l = 300 \mu m$ selon Sarazin et al. [71]. ϕ est la fraction liquide.

$$K_x = d_l^2 \times 10^{-2} \left\{ -5.955449 + 5.652925 \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right)^{\frac{1}{4}} \right\}, \quad \phi > 0.66 \quad (4.3)$$

selon Sangani et al. [70]

$$K_z = 3.75 \times 10^{-4} \phi^2 d_l^2, \quad 0.17 \leq \phi \leq 0.61 \quad (4.4)$$

selon Drummond et al. [14]

$$K_z = d_l^2 \times 0.07425 \left\{ \ln(1-\phi)^{-1} - 1.487 + 2(1-\phi) - \frac{(1-\phi)^2}{2} \right\}, \quad \phi > 0.61 \quad (4.5)$$

selon Ganesan [34]. Les graphiques de ces lois sont montrées dans la figure 4-3.

Une autre loi de perméabilité est mise en oeuvre, utilisant la relation de Carman-Kozeny, Scheidegger [72], construite en supposant que la surface spécifique du solide est égale à des sphères de diamètre λ_2

$$K = \frac{\lambda_2^2 \phi^3}{\pi^2 K_c t^2 (1-\phi)^2} \quad (4.6)$$

où λ_2 est la distance entre les bras secondaires des dendrites. Le front colonnaire est constitué de troncs ramifiés appelés dendrites. Les branches qui se rattachent au tronc principal sont les bras secondaires. Dans Nielsen et al [59], les perméabilités sont mesurées pour des fractions solides grandes (entre 0.68 et 0.91). Les résultats sont en bonne concordance avec la relation Carman-Kozeny.

La loi de perméabilité isotrope utilisée est (cf figure 4-3) :

$$K = \frac{\lambda_2^2 \phi^3}{180(1 - \phi)^2}; K_c = 5; t = 2; \quad (4.7)$$

4.4.2 Comparaison entre le cas 1, le cas 3, le cas 13 et le cas 14.

Dans ce paragraphe, il s'agit de comparer le déroulement de la solidification avec les divers lois de perméabilité pour des conditions thermiques de flux rentrant par le haut.

Cas	1	3	13	14
Lois de permeabilité	K_x, K_y	K	K_x	K_y
Temps de simulation de solidification [min]	15	15	15	15
Nombre de canaux	2	2	2	2
Distance a la paroi [mm]	0;5	0;5	0;5	0;5
Longueur [mm]	6.4	5	7.	6.4
Largeur moyenne [mm]	0.3	0.3	0.3	0.3
Nombre de poches grandes	2	3	2	2
Nombre de poches petites	2	10	0	0
Distance de la paroi froide à l'isovaleur $f_l=0$ [mm]	6.8	5.7	7.2	6.6
Concentration maximum de Sn [%]	16.3	18.42	16.3	16.22
Concentration minimum de Sn [%]	3.6	-5.1	3.7	3.7
Fraction liquide maximum	1	1	1	1
Fraction liquide minimum	0	0	0	0
Module maximum de la vitesse [mm/sec]	1	3	0.7	0.9
Module maximum de la vitesse dans la zone pâteuse [mm/sec]	0.4	1.3	0.4	0.7

Tableau 4.5: Résultats de lois de perméabilité différentes. Cas 1, cas 3, cas 13 et cas 14.

Les valeurs de concentration totale.

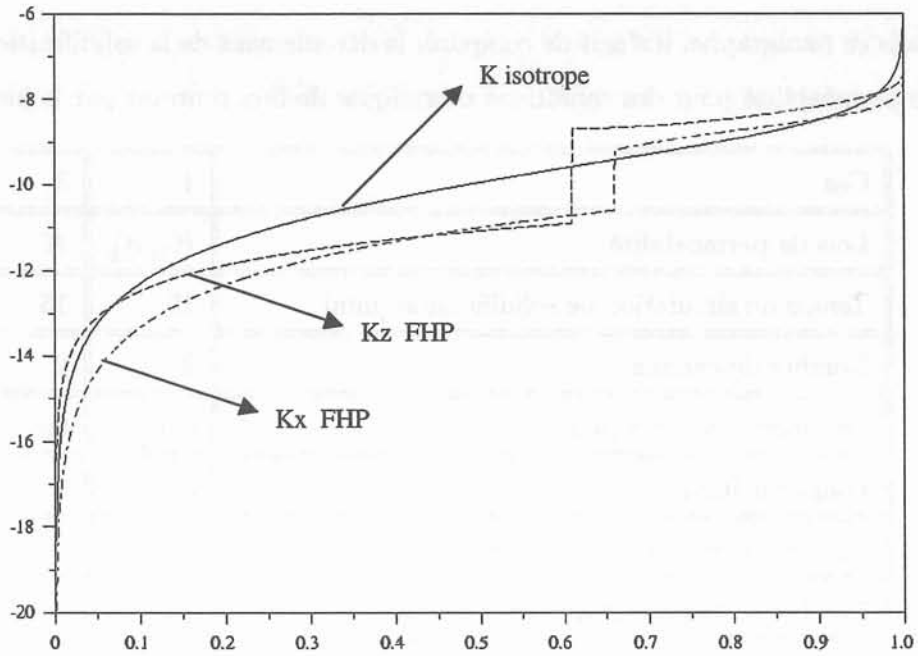


Figure 4-3: Lois de perméabilité en fonction de la fraction liquide, échelle logarithmique. K_x FHP et K_z FHP sont les coefficients anisotropes utilisés par le modèle FHP (équations 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5). K isotrope est calculé par l'équation 4.7.

Il faut mentionner que dans le cas 3, il y a quelques points isolés où la concentration devient négative. Ce résultat irréaliste est dû à la résolution de l'équation de la conservation de soluté (cf. équation 2.32). Quand la fraction liquide dans un noeud est petite ($\phi < 10^{-2}$) et le gradient de concentration grand, il peut arriver que $\frac{\partial \bar{C}}{\partial t}$ soit suffisamment négatif pour changer le signe de \bar{C} . Cependant, compte tenu de leur valeur et leur environnement, nous considérons que les résultats en général sont encore valables. Le fait d'avoir des concentrations négatives arrive quand la loi de perméabilité est l'équation 4.7. En effet, l'équation 4.7 donne des gradients de concentration plus grands que les lois discontinues K_x et K_z (cf figure 4-3). Cela se produit en raison des plus grandes valeurs de la loi K quand la fraction liquide varie entre 0.2 et 0.6, permettant un plus grand drainage vers les poches et canaux.

Les résultats.

Les résultats du cas 1 sont obtenus avec une loi de perméabilité anisotrope. Ils ne présentent pas de grande différence par rapport aux cas 13 et 14, qui sont obtenus avec des lois isotropes de perméabilité. Le cas 13 est mis en oeuvre avec la loi isotrope correspondant à la loi du cas 1 pour la direction perpendiculaire au dendrites (K_x). De même, le cas 14 est implémenté avec la loi isotrope correspondante à la direction parallèle au dendrites (K_y).

Les figures 4-4 a), b) et c) font apparaître une structuration du champ de soluté. Ce comportement s'explique par le saut dans les lois de perméabilité pour la fraction liquide égale à 0.6. En effet, les surfaces correspondant à $\phi = 0.6$, deviennent imperméables au débit en raison de la baisse importante de perméabilité, d'où la déviation de la vitesse. Il est difficile de dire si ce saut est réaliste. La figure 4-4 d) montre que dans le cas 3, en comparaison des cas 1, cas 13 et cas 14, on peut observer plus de poches, petites et grandes, et aucune structure. La valeur de la perméabilité K isotrope est beaucoup plus grande que la valeur anisotrope pour la fraction liquide entre 0.2 et 0.6. Cela signifie que le liquide enrichi peut se déplacer plus facilement vers les poches et les canaux, laissant une grande partie homogène. Cette partie a une faible concentration à cause de l'enrichissement des poches et des canaux par le liquide. En conséquence, la température de liquidus est plus haute, ce qui explique que la fraction liquide est plus petite. Cela implique aussi que le front de solidification est moins avancé que dans les autres cas. Ainsi une certaine structure se développe quand les lois de perméabilité

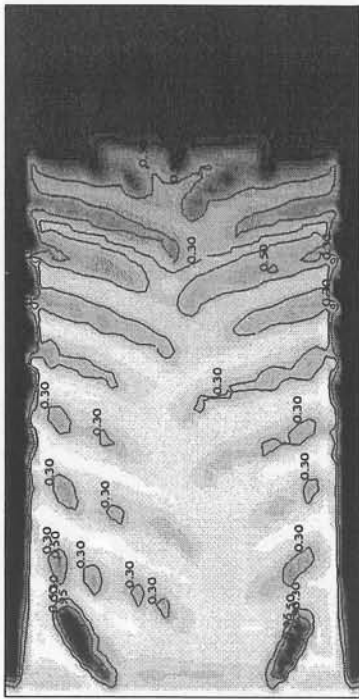
sont discontinues. Ce fait est indépendant de la nature isotrope ou anisotrope de la loi de la perméabilité.

La figure 4-5 montre la concentration moyenne en fonction de la coordonnée z . Les résultats dans tous les cas, près de $z = 0$, sont assez proches de la valeur $k_0 C_0 = 3.10\%$. Les profils de concentrations moyennes des cas 1, cas 13 et cas 14 sont relativement voisins. Par contre, le cas 3 présente de fortes fluctuations spatiales de concentration. Nous pouvons constater que plus grande est la perméabilité utilisée, plus le macrofront de solidification est proche de l'origine $z = 0$.

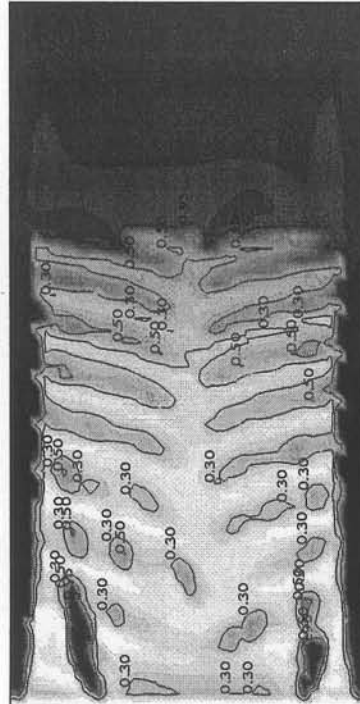
4.4.3 Comparaison entre le cas 2 et le cas 4.

Dans ce paragraphe, il s'agit de comparer le déroulement de la solidification pour les conditions thermiques telles que le flux rentrant par le haut est nul. Les résultats du calcul sont résumés dans le tableau 4.6.

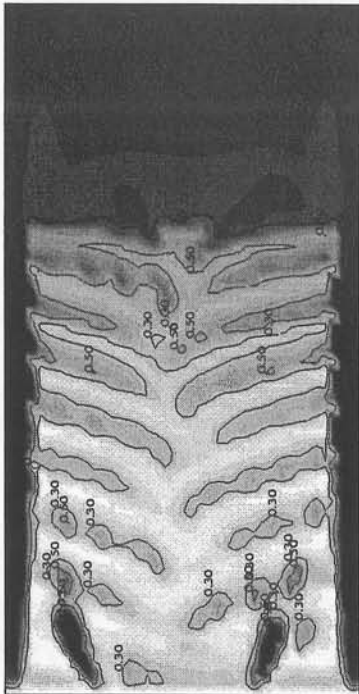
Les résultats de cartes de concentration (cf. figure 4-6 a) et b)) montrent un canal central dans le cas 2, mais dans le cas 4 il n'y a pas de canaux. Comme nous avons déjà vu lors de l'étude de l'influence des conditions thermiques, il n'y a pas suffisamment de temps pour l'accumulation de liquide enrichi près des parois pour la formation de canaux latéraux. Dans cette comparaison, il apparaît un canal central dans le cas 2 et aucun dans le cas 4. Quand la fraction liquide est entre 0.2 et 0.6, la perméabilité isotrope est presque cent fois plus grande par rapport à celle anisotrope, figure 4-3, donc il y a une meilleure répartition de soluté à cause de la plus faible résistance hydraulique au débit de fluide qui exerce l'effet d'homogénéisation. Le canal central du cas 2 s'est formé à cause du liquide enrichi en soluté qui débouche au milieu (cf. figure 4-6 c)), car la perméabilité est devenue très grande après que la fraction liquide soit passée au dessus de la valeur de 60% provoquant un mouvement de fluides vers le haut.



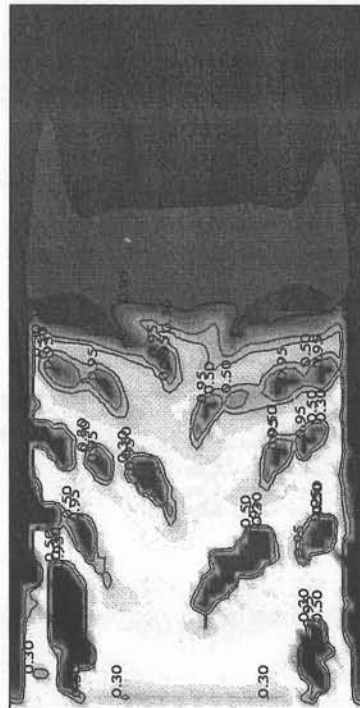
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 4-4: Cartes de concentration, $t=15$ min. (a) cas 13 $Cb_{\max} = 16.3$, $Cb_{\min} = 3.7$, (b) cas 14 $Cb_{\max} = 16.2$, $Cb_{\min} = 3.7$, (c) cas 1 $Cb_{\max} = 16.3$, $Cb_{\min} = 3.6$, (d) cas 3 $Cb_{\max} = 18.4$, $Cb_{\min} = -5.1$. Isovaleurs $\phi = 0.3; 0.5; 0.95$.

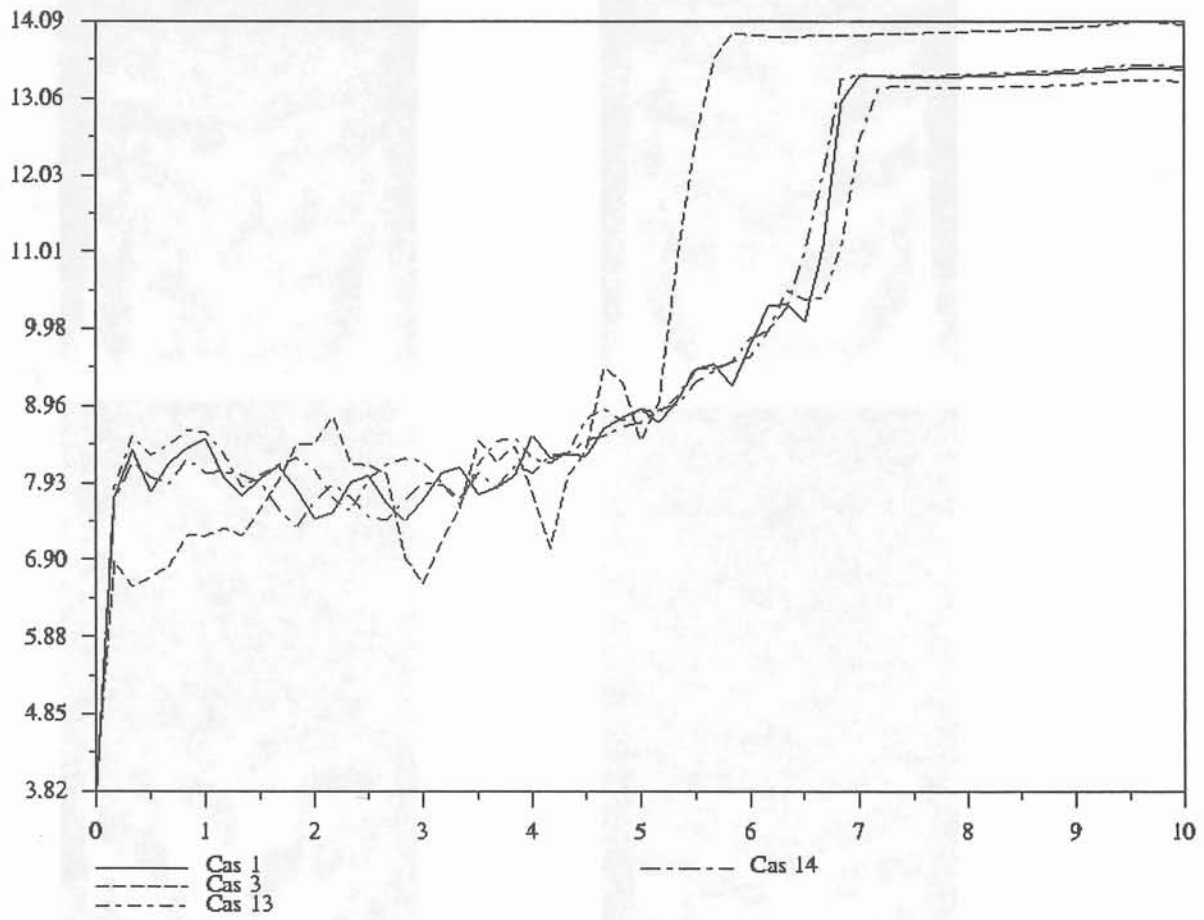


Figure 4-5: Concentration moyenne selon l'axe z dans le cas 1, 3, 13 et 14. Ordonnée en [%], abscisses en [mm].

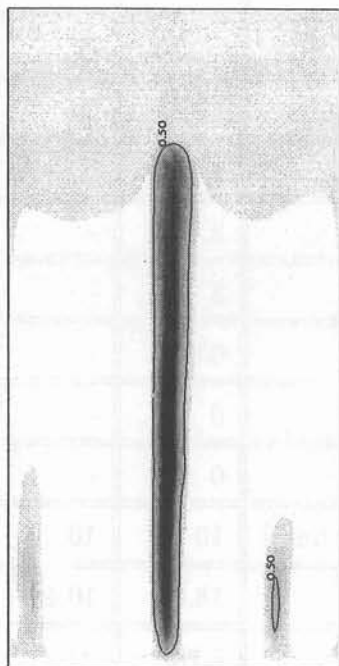
Cas	2	4
Lois de permeabilité	K_x, K_z	K
Temps simulation de solidification [min]	20	20
Nombre de canaux	1	0
Distance a la paroi [mm]	2,5	-
Longueur [mm]	8	-
Largeur moyenne [mm]	0.5	-
Nombre de poches grandes	0	-
Nombre de poches petites	0	-
Distance de la paroi froide à l'isovaleur $f_l=0$ [mm]	10	10
Concentration maximum de Sn [%]	18.07	10.46
Concentration minimum de Sn [%]	8.76	8.89
Fraction liquide maximum	0.96	0.44
Fraction liquide minimum	0.325	0.33
Module maximum de la vitesse [mm/sec]	0.5	$1 \cdot 10^{-2}$
Module maximum de la vitesse dans la zone pâteuse [mm/sec]	0.5	$1 \cdot 10^{-2}$

Tableau 4.6 : Résultats de lois de perméabilité différentes, cas 2 et cas 4.

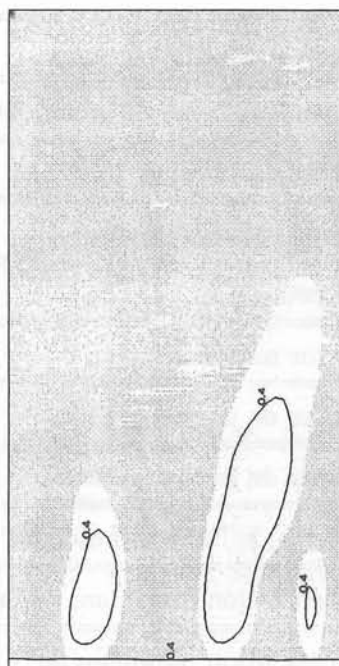
Le graphe de concentration moyenne (cf. figure 4-7) confirme la distribution presque constante du cas 4 et la petite ségrégation normale qui a lieu dans le cas 2. Il est à noter que les valeurs de concentration moyenne près de $z = 0$ sont loin de la valeur théorique $k_0 C_0$.

4.5 Influence de la perturbation initiale.

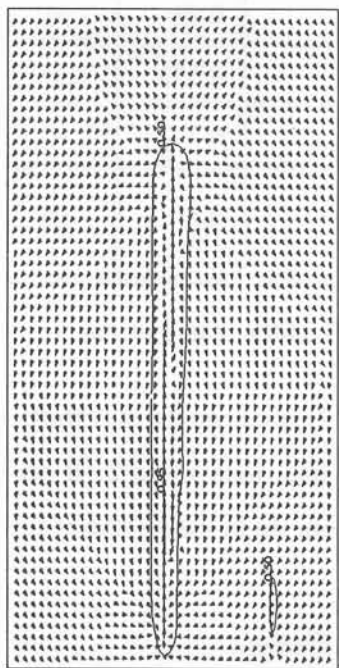
Dans ce paragraphe, nous évaluons l'influence de la condition initiale pour déclencher la convection solutale. Le calcul commence en imposant une perturbation initiale, puis le système évolue seul. La convection se produit même si on n'impose pas de perturbation à cause des



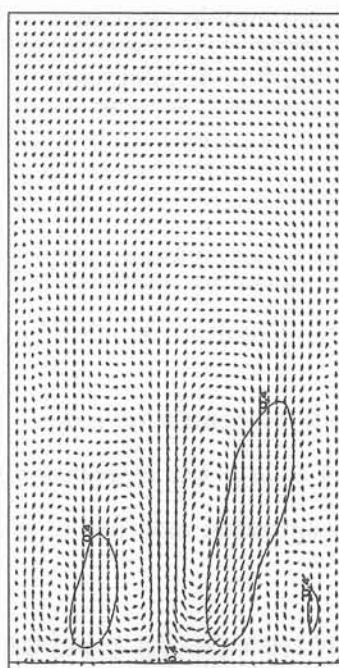
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 4-6: $t=20$ min. (a) et (b) Cartes de concentration totale, cas 2 ($Cb_{\max} = 18.07$, $Cb_{\min} = 8.76$) et cas 4 ($Cb_{\max} = 10.46$, $Cb_{\min} = 8.89$). (c) et (d) champs de vitesses, cas 2 $v_{\max}=0.5mm/sec$ et cas 4 $v_{\max} = 0.01mm/sec$. Isovaleurs ϕ , (a) et (c) $\phi = 0.5; 0.95$. (b) et (d) $\phi = 0.4$.

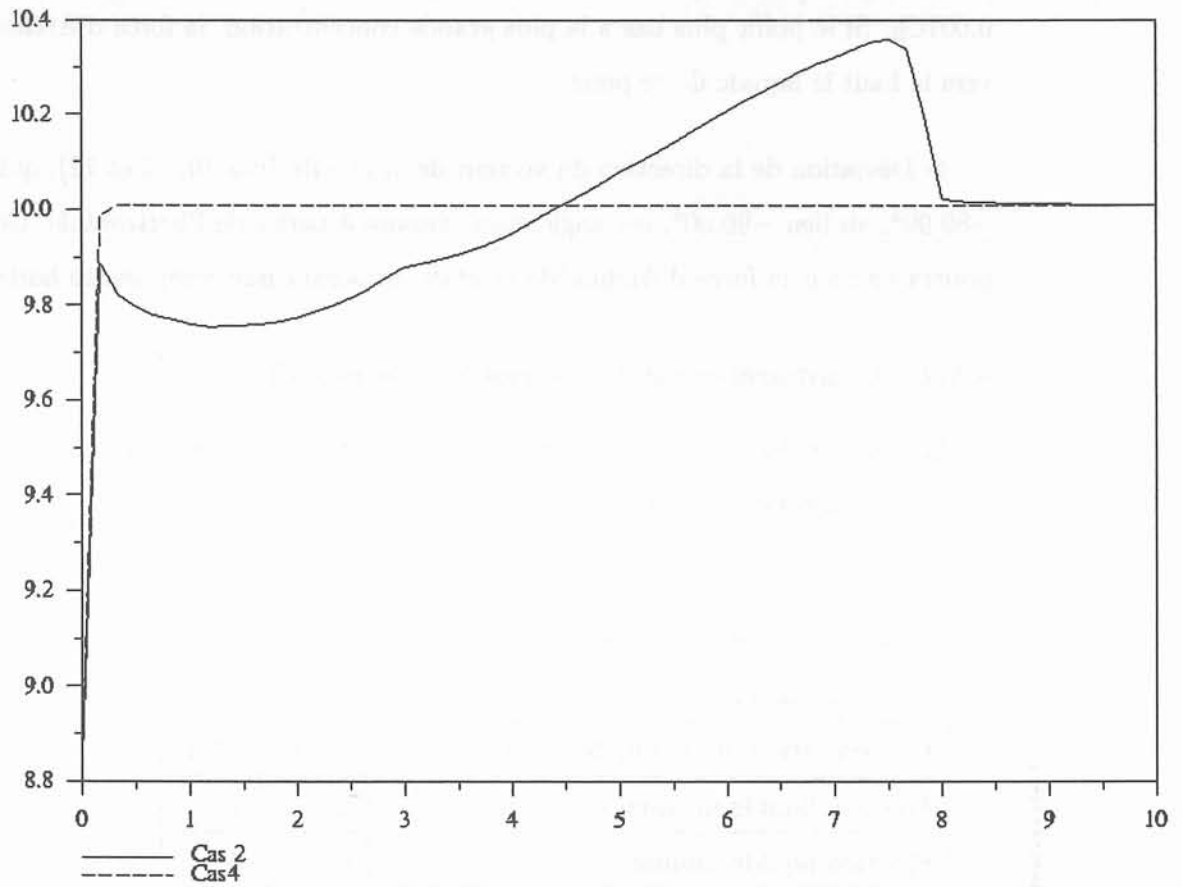


Figure 4-7: Concentration moyenne selon l'axe z dans le cas 2 et le cas 4. Ordonnée en [%], abscisses en [mm].

erreurs d'arrondi. Mais, on doit perturber explicitement le problème pour pouvoir avoir des résultats intéressants (cf. Anderson et al. [2]).

Deux conditions initiales sont mises en oeuvre :

▷ Concentration initiale avec une perturbation aléatoire $C(x, z, 0) = C_0 \pm 0.0005C_0$. Cette perturbation qui correspond au cas type du chapitre 3 agit sur la concentration des points du maillage. Entre deux points successifs il peut exister une différence de concentration $\Delta C = 0.001C_0$. Si le point plus bas a la plus grande concentration, la force d'Archimède fera bouger vers le haut le liquide de ce point.

▷ Déviation de la direction du vecteur de la gravité (cas 10, 11 et 12), qui fait un angle de -89.99° , au lieu -90.00° , cet angle étant mesuré à partir de l'horizontale. Cette perturbation pourra agir sur la force d'Archimède solutale, imposant une composante horizontale.

4.5.1 Comparaison entre le cas 3 et le cas 10.

Les cas 3 et 10, comportent les mêmes conditions de frontière que celle du paragraphe 3.2.1, la loi de perméabilité étant isotrope.

Cas	3	10
Temps de simulation de solidification [min]	15	15
Concentration maximum de Sn [%]	18.42	16.31
Concentration minimum de Sn [%]	-5.10	-2.1
Fraction liquide maximum	1.	1.
Fraction liquide minimum	0.	0.
Module maximum de la vitesse [mm/sec]	3	3.8
Module maximum de la vitesse dans la zone pâteuse [mm/sec]	1.3	1.6

Tableau 4.7 : Résultats du cas 3 et du cas 10.

De l'observation des cartes de concentration (cf figure 4-8) et des résultats du tableau 4.7, nous pouvons conclure que la perturbation initiale n'influence pas les résultats au niveau

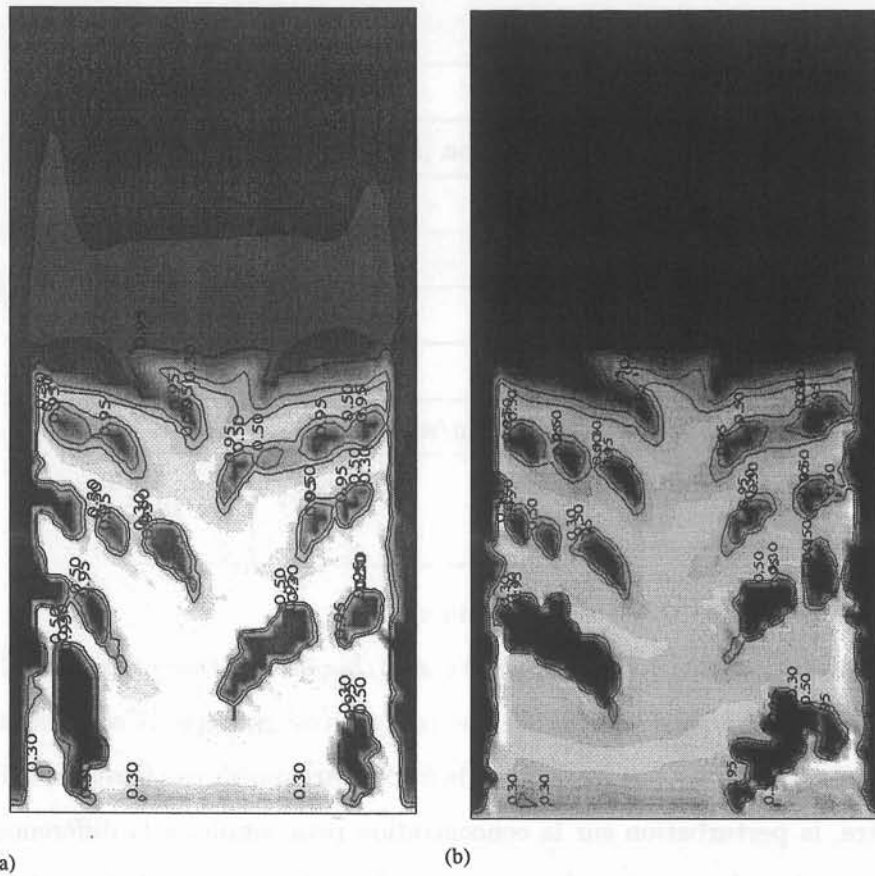


Figure 4-8: Cartes de concentration correspondant au (a) cas 3 $Cb_{\max} = 18.42$, $Cb_{\min} = -5.10$ et (b) cas 10 $Cb_{\max} = 16.31$, $Cb_{\min} = -2.1$, $t=15$ min. Isovaleurs $\phi = 0.3; 0.5; 0.95$.

du comportement macroscopique. Par contre, dans le détail, les configurations ne sont pas identiques.

4.5.2 Comparaison entre le cas 4 et le cas 11.

La différence entre cette comparaison et celle faite précédemment concerne la condition thermique à la partie supérieure du domaine, qui est maintenant de flux nul. La loi de perméabilité est isotrope.

Cas	4	11
Temps de simulation de solidification [min]	15	15
Concentration maximum de Sn [%]	10.40	10.01
Concentration minimum de Sn [%]	8.99	9.00
Fraction liquide maximum	0.52	0.49
Fraction liquide minimum	0.41	0.41
Module maximum de la vitesse [mm/sec]	10^{-2}	5×10^{-5}
Module maximum de la vitesse dans la zone pâteuse [mm/sec]	10^{-2}	5×10^{-5}

Tableau 4.8 : Résultats du cas 4 et du cas 11.

Il est intéressant de noter que dans le cas 11, la perturbation mise sur la déviation de l'angle de gravité n'a pas donné d'instabilités. Le front plan est conservé. Ceci provient du fait que cette perturbation agit sur les composantes de la force d'Archimède qui n'est pas suffisamment grande. Par contre, la perturbation sur la concentration peut amplifier la différence de concentration entre deux points du domaine, donnant une valeur plus grande à la force d'Archimède solutale.

Les cartes de concentration (cf. figure 4-9) montrent des allures différentes. Le cas 4 présente une certaine ségrégation tandis que le cas 11 correspond à un front plan. Cependant les valeurs de concentration et de fraction liquide sont semblables (cf. tableau 4.8). Dans le cas 11, les vitesses sont très petites (cf. tableau 4.8), presque nulles.

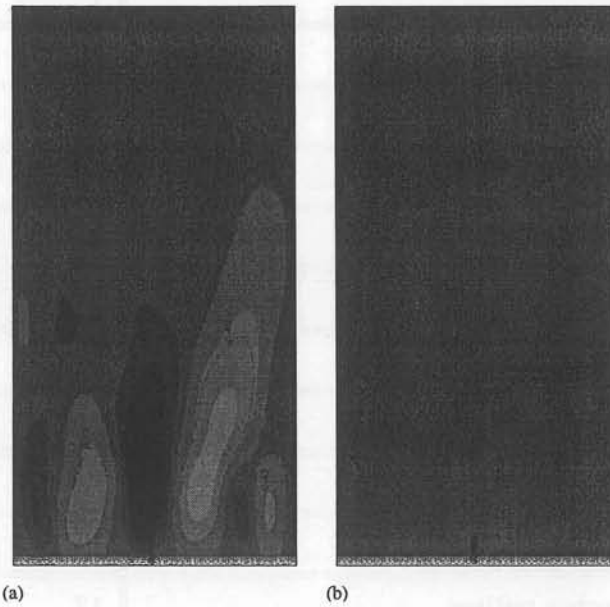


Figure 4-9: Cartes de concentration correspondantes au (a) cas 4 $Cb_{\max} = 10.4$, $Cb_{\min} = 8.99$ et (b) cas 11 $Cb_{\max} = 10.01$, $Cb_{\min} = 9$. $t=15$ minutes. Isovaleurs $\phi = 0.5; 0.48$.

4.6 Influence de la taille du domaine : Grand domaine

Dans ce paragraphe, nous appliquons le code FHP à un domaine de dimensions $30mm \times 90mm$. Les conditions thermiques sont : parois verticales et paroi supérieure isolées, paroi inférieure avec température imposée décroissante. Les autres conditions de frontière et les conditions initiales sont décrites dans le paragraphe 3.2.1. Le maillage utilisé est 40×60 éléments. Trois cas sont analysés, afin de pouvoir comparer l'influence des lois de perméabilité et celles des conditions initiales. Un autre cas est traité dans le chapitre 5, avec convection forcée. Le tableau 4.9 résume les caractéristiques des cas et fournit quelques résultats.

Cas	7	8	12
Lois de perméabilité	K_x, K_z	K	K
Perturbation initiale dans	C_0	C_0	\vec{g}
Temps de simulation de solidification [min]	20	20	20
Convection	Nat.	Nat.	Nat.
Nombre de canaux	2	3	3
Distance à la paroi [mm]	0;30	0;18;30	0;8;30
Longueur [mm]	52	50	50
Largeur moyenne [mm]	1.5	1.5	1.5
Nombre de poches grandes	1	4	2
Nombre de poches petites	13	6	7
Distance de la paroi froide au isovaleur $f_l=0$ [mm]	57	50	50
Concentration maximum de Sn [%]	16.97	18.01	17.99
Concentration minimum de Sn [%]	5.3	1.60	1.29
Fraction liquide maximum	1	1	1
Fraction liquide minimum	0.12	0	0
Module maximum de la vitesse [mm/sec]	8.6	7.1	29
Module maximum de la vitesse dans la zone pâteuse [mm/sec]	1.3	3.2	5.6

Tableau 4.9 : Modèle FHP appliqué au "grand domaine". Résultats du cas 7, du cas 8, du cas 12 et du cas 9.

Une caractéristique commune aux cas 7, 8 et 12 est l'existence de canaux latéraux (voir par exemple figure 4-12). Il s'agit, comme dans le petit domaine, du liquide interdendritique enrichi qui s'accumule près des parois à cause de la condition de vitesse horizontale nulle. La largeur de ces canaux latéraux correspond toujours à deux mailles du maillage 40x60. Les isothermes ne sont plus planes comme dans le cas du petit domaine. Elles sont déformées par la vitesse du liquide enrichi et plus chaud. Cet effet est surtout visible dans les cas 8 et

12 (cf. figures 4-10 et 4-11). La carte d'isothermes du cas 9 (convection forcée) illustre bien l'effet du mouvement de fluides qui fait monter la température dans la zone centrale. Nous pouvons constater le couplage entre la structure de solidification et le mouvement de fluides de manière plus évidente que dans le cas du petit domaine. L'accroissement de la taille entraîne une augmentation à la fois du transport (nombres de Péclet plus grands) et de la convection naturelle (nombre de Rayleigh plus grands).

Le cas 7: Grand domaine, et perturbation initiale de variation de concentration, mais lois anisotrope de perméabilité.

Cinq minutes après le début de la solidification, on observe, en moyenne, cinq canaux dans un intervalle de 10 millimètres (cf. figure 4-12 a)). Le liquide enrichi s'échappe des canaux comme la fumée d'une cheminée. Les cellules de convection ne sont pas régulières quand la solidification avance. Les vitesses près de la paroi sont orientées vers le bas dans la partie supérieure du domaine, c'est la convection thermique stabilisante qui s'oppose à la convection solutale développée dans la partie inférieure du domaine (cf. figure 4-14 a)).

A dix minutes (cf. figure 4-12 b)), quelques canaux intérieurs se sont rejoints, d'autres se sont fermés, d'autres ont grandi verticalement au même temps que sa concentration a augmenté et les canaux latéraux sont bien marqués. Le flux ascendant transporte le liquide enrichi qui abaisse le point de solidification, et le temps local de solidification est plus grand. Les vitesses près de la paroi sont orientées de bas en haut (cf. figure 4-14 b)) et un grand vortex au centre-gauche du domaine se développe. Trois nouveaux échappements de liquide enrichi sont observés. Ils se transforment en zones de grande ségrégation (cf figure 4-13 a)) à quinze minutes. Plusieurs petites poches se sont formées. Le front de solidification est irrégulier dû au débit de liquide enrichi (cf. figures 4-13 b) et 4-15) provenant de la zone pâteuse. Cela montre encore l'étroite relation entre la vitesse liquide et la structure de la solidification.

Le cas 8: Grand domaine, perturbation initiale de variation de concentration, mais lois isotrope de perméabilité.

Cinq minutes après le début de la solidification, on observe, en moyenne, trois canaux chaque 10 millimètres (cf. figure 4-16 a)). De même que dans le cas 7, les cellules de convection

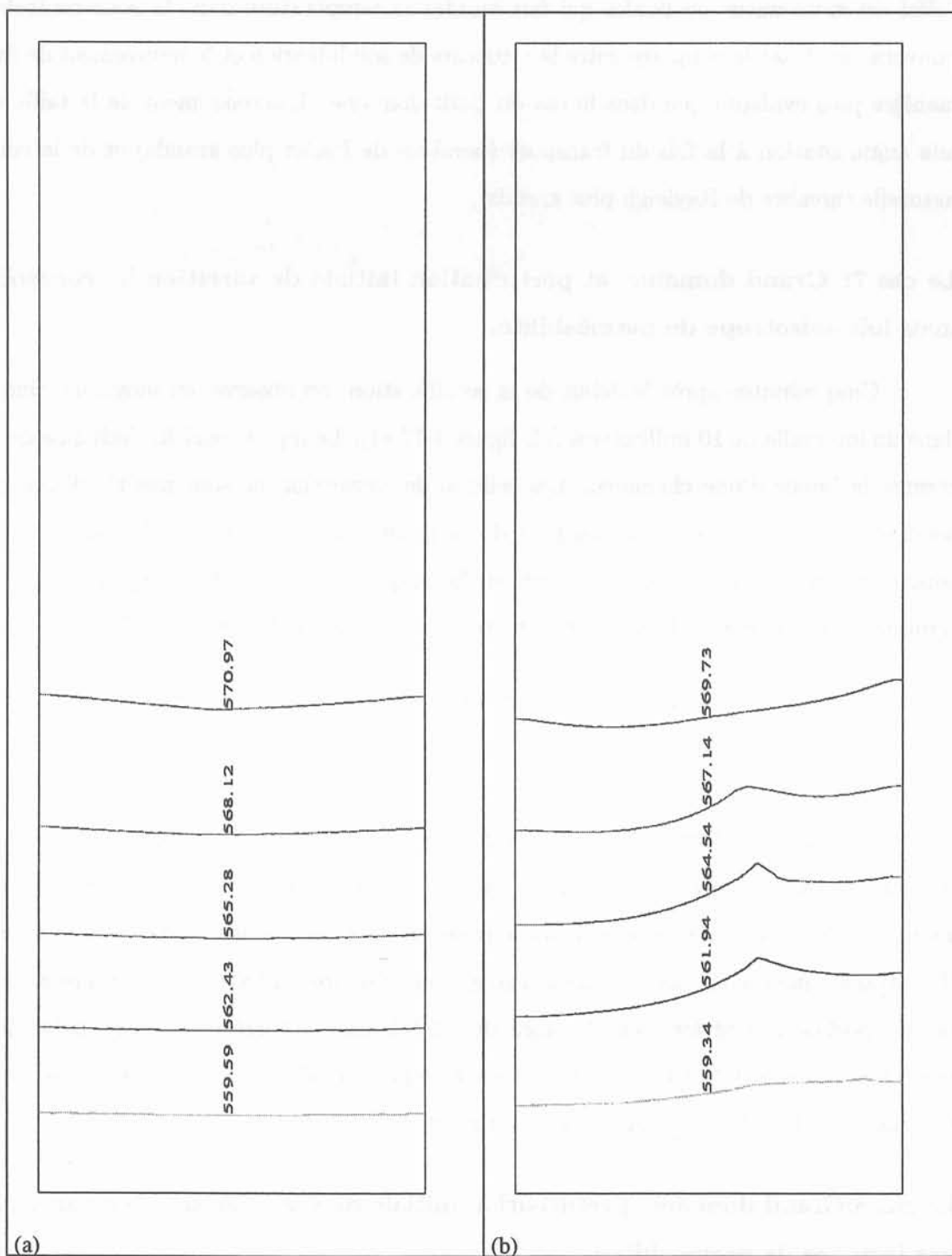


Figure 4-10: Isothermes 20 minutes après le début de la solidification. a) cas 7, b) cas 8

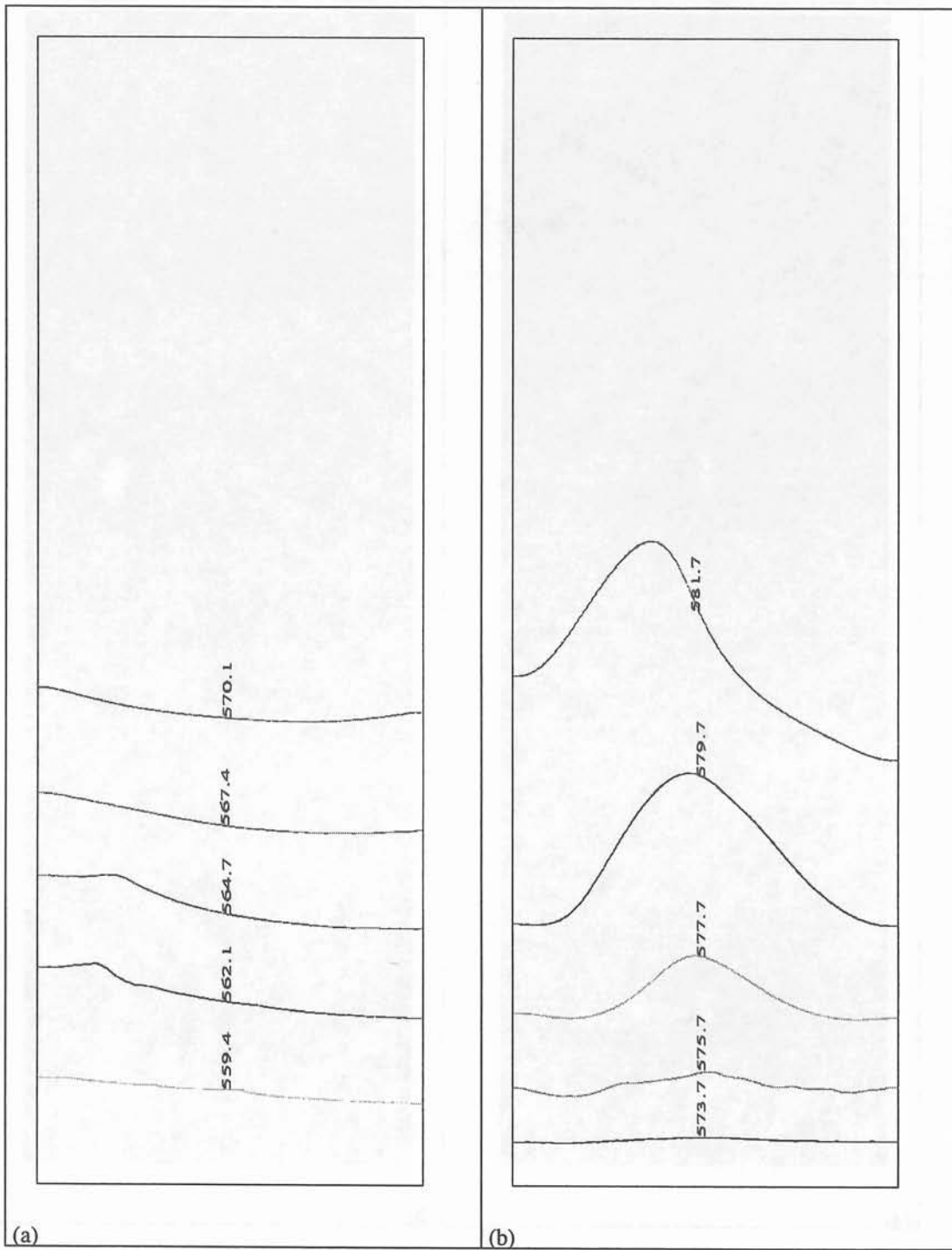


Figure 4-11: Isothermes a) cas 12, 20 minutes après le début de la solidification, b) cas 9, 5 minutes après le début de la solidification.

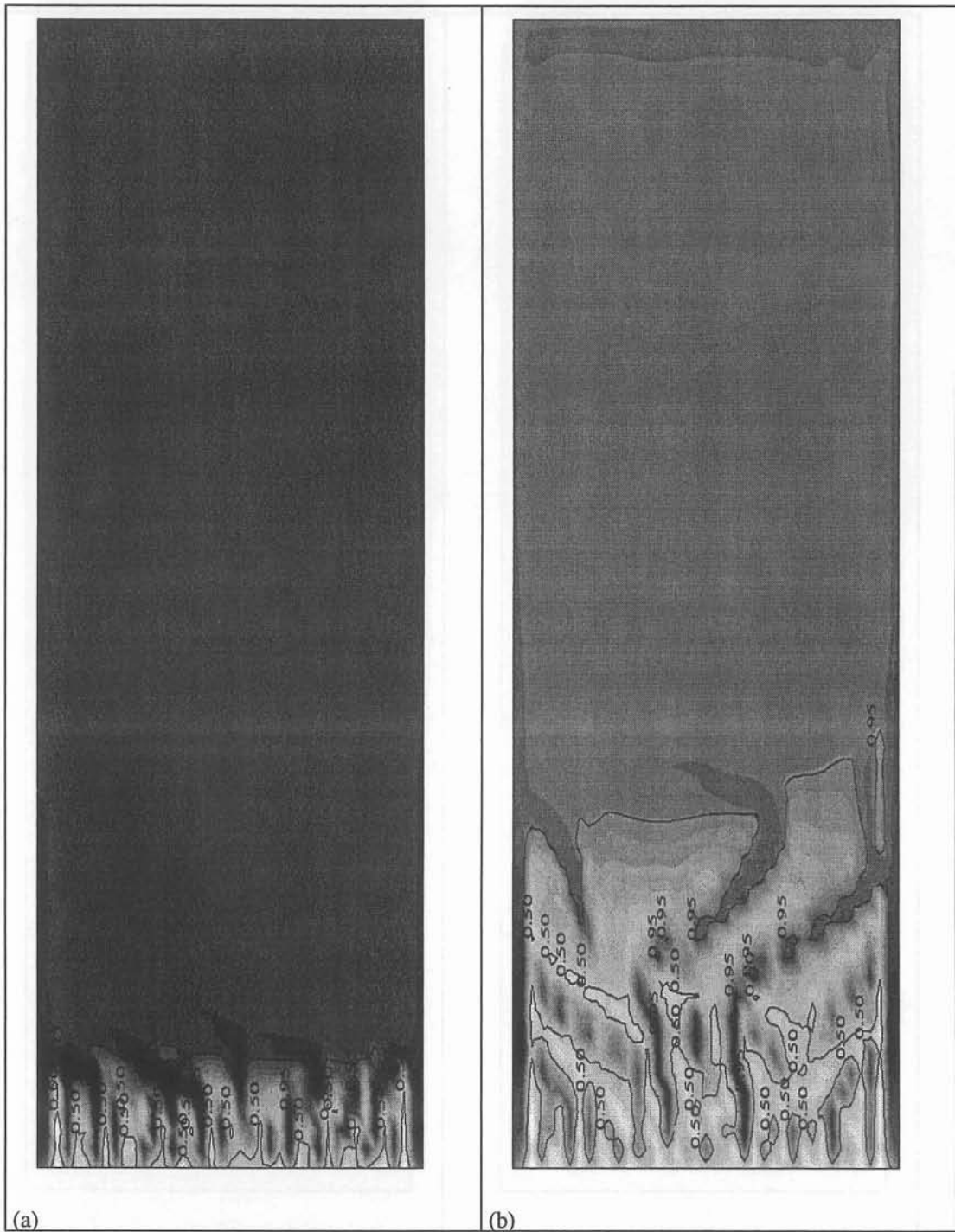


Figure 4-12: Cartes de concentration, grand domaine, cas7. a) $t = 5$ min. ($Cb_{\max} = 11.1$, $Cb_{\min} = 5.93$). b) $t = 10$ min. ($Cb_{\max} = 13.1$, $Cb_{\min} = 5.7$). Isovaleurs $\phi = 0.5; 0.95$.

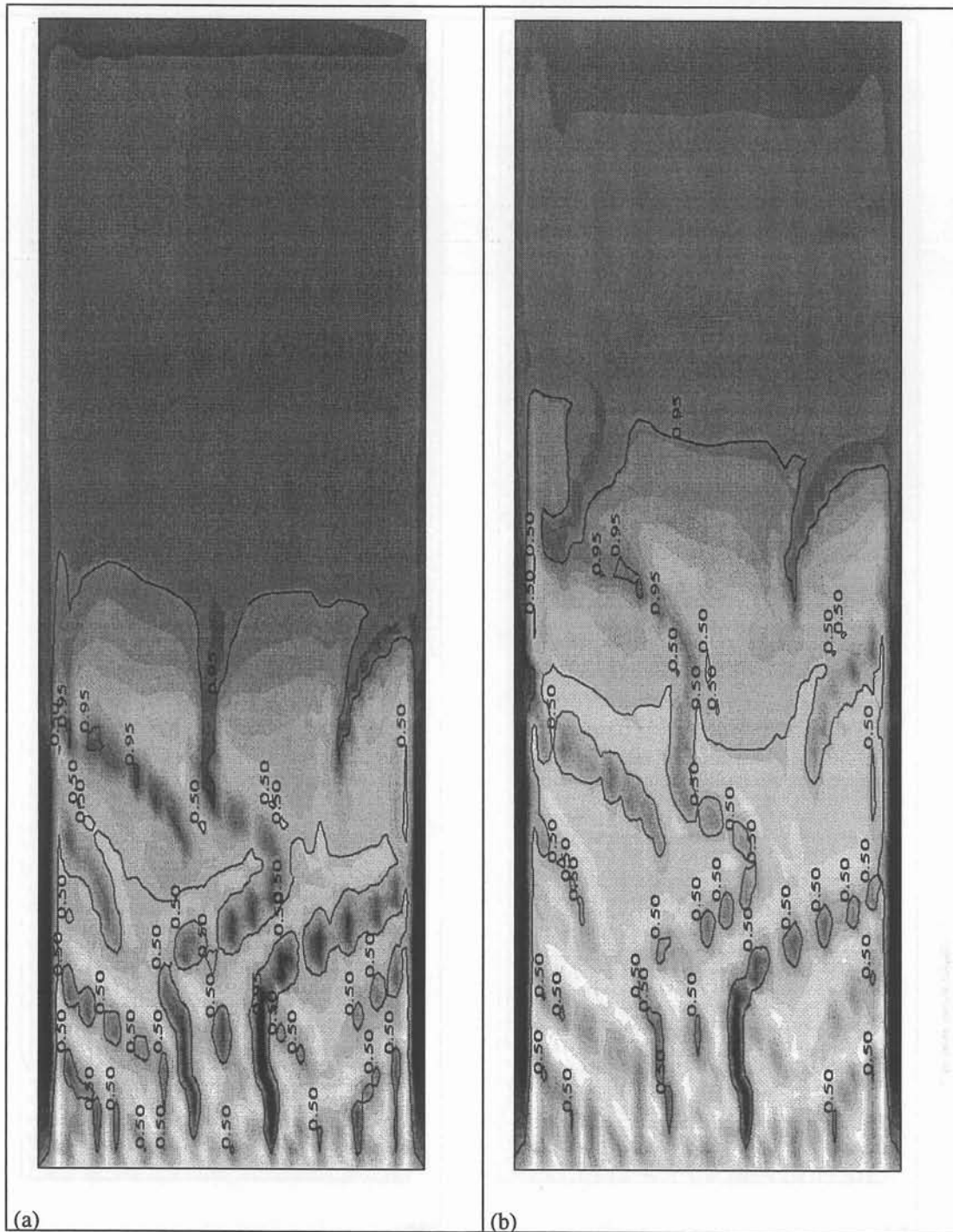


Figure 4-13: Cartes de concentration, grand domaine, cas 7. a) $t=15$ min. ($Cb_{\max} = 14.84$, $Cb_{\min} = 15.48$). b) $t=20$ min. ($Cb_{\max} = 16.97$, $Cb_{\min} = 5.3$). Isovaleurs $\phi = 0.5; 0.95$.

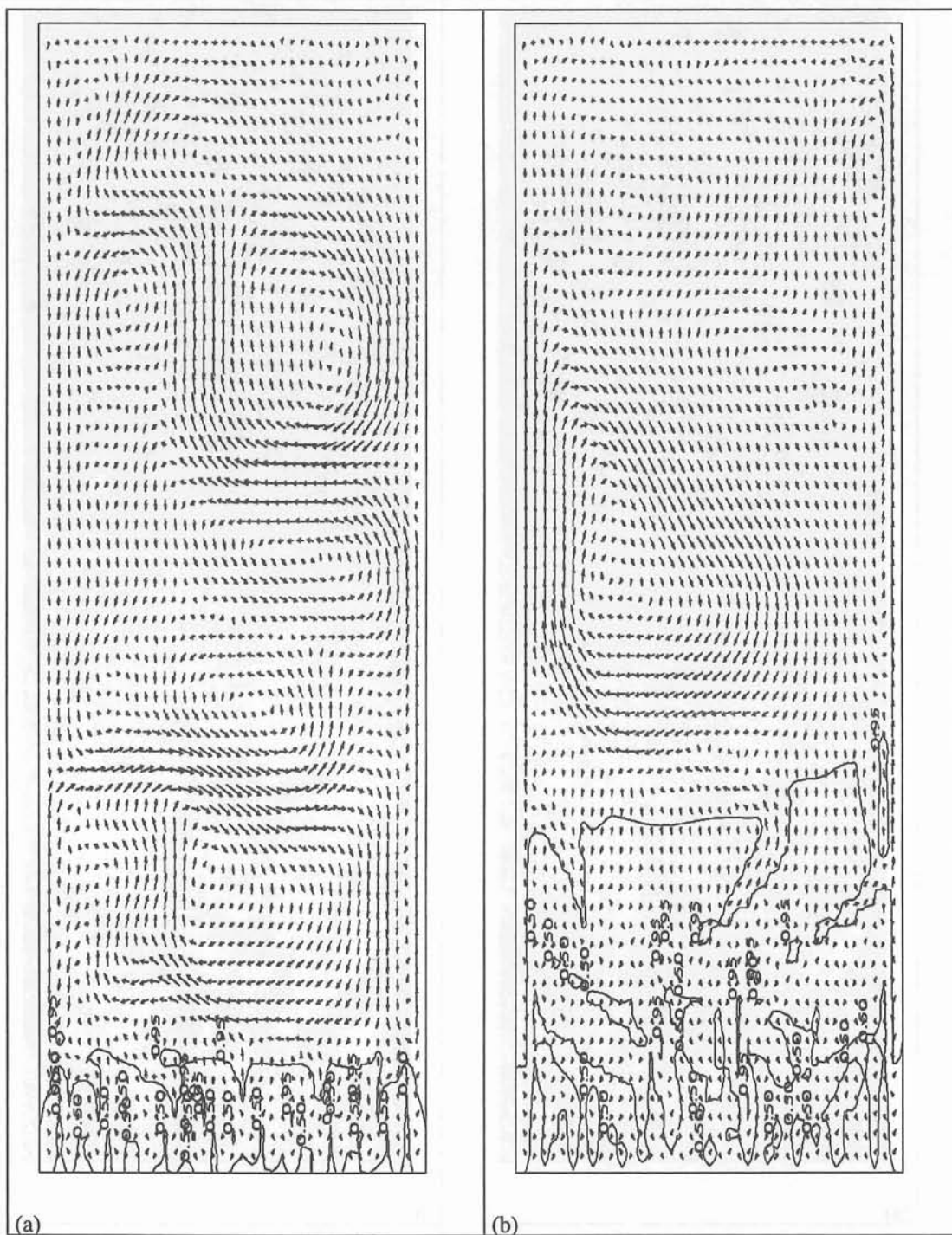


Figure 4-14: Champ de vitesse, grand domaines, cas 7. a) $t=5$ min. ($v_{\max} = 5.3\text{mm/sec}$). b) $t=10$ min. ($v_{\max} = 9.8\text{mm/sec}$). Isovaleurs $\phi = 0.5; 0.95$.

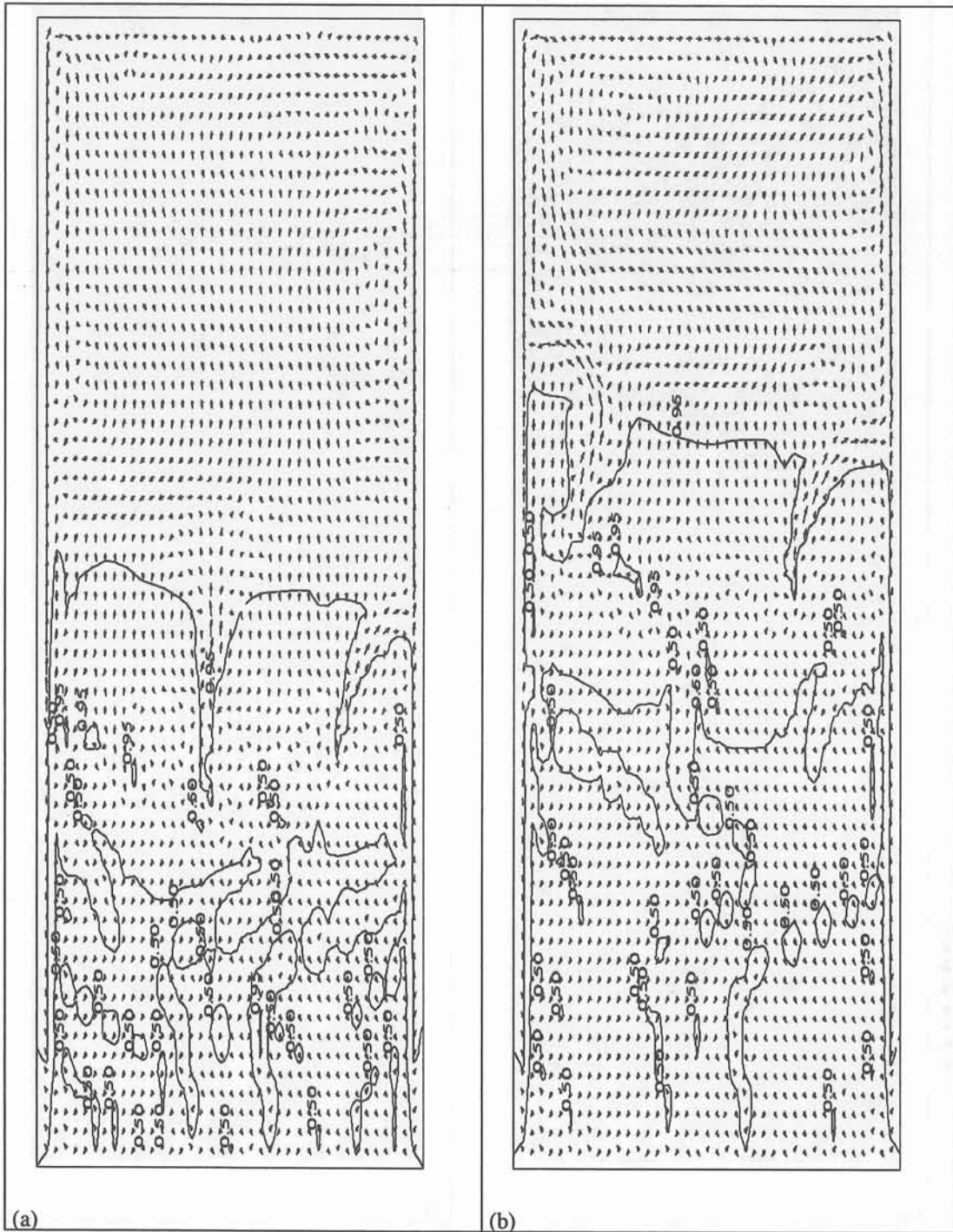


Figure 4-15: Champ de vitesse, grand domaine, cas 7. a) $t=15$ min ($v_{\max} = 7.1$ mm/sec). b) $t=20$ min ($v_{\max} = 8.6$ mm/sec). Isovaleurs $\phi = 0.5; 0.95$.

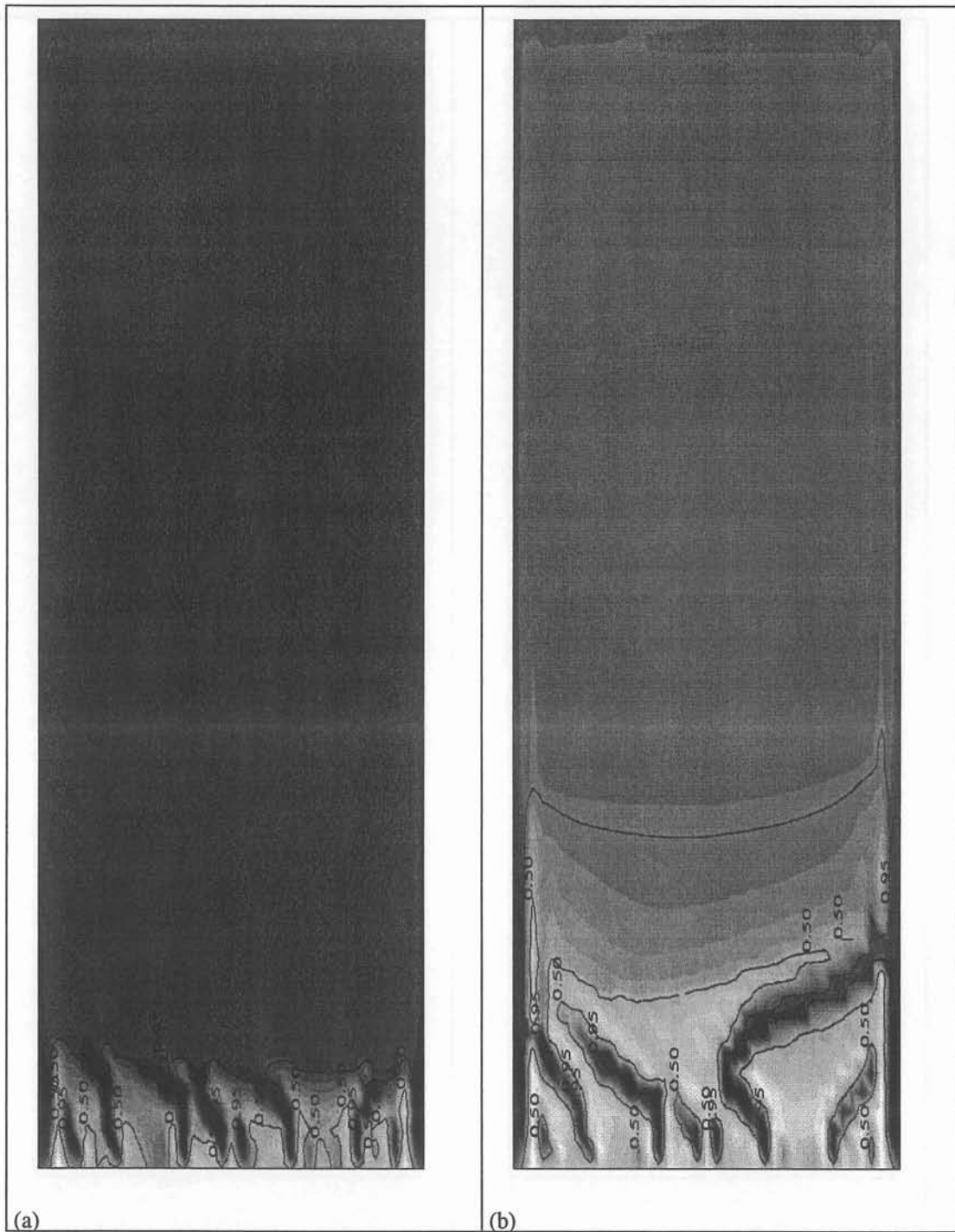


Figure 4-16: Cartes de concentration, grand domaine, cas 8. a) $t=5$ min ($Cb_{\max} = 11.81, Cb_{\min} = 3.87$). b) $t=10$ min ($Cb_{\max} = 13.87, Cb_{\min} = 3.38$). Isovaleurs $\phi = 0.5, 0.95$.

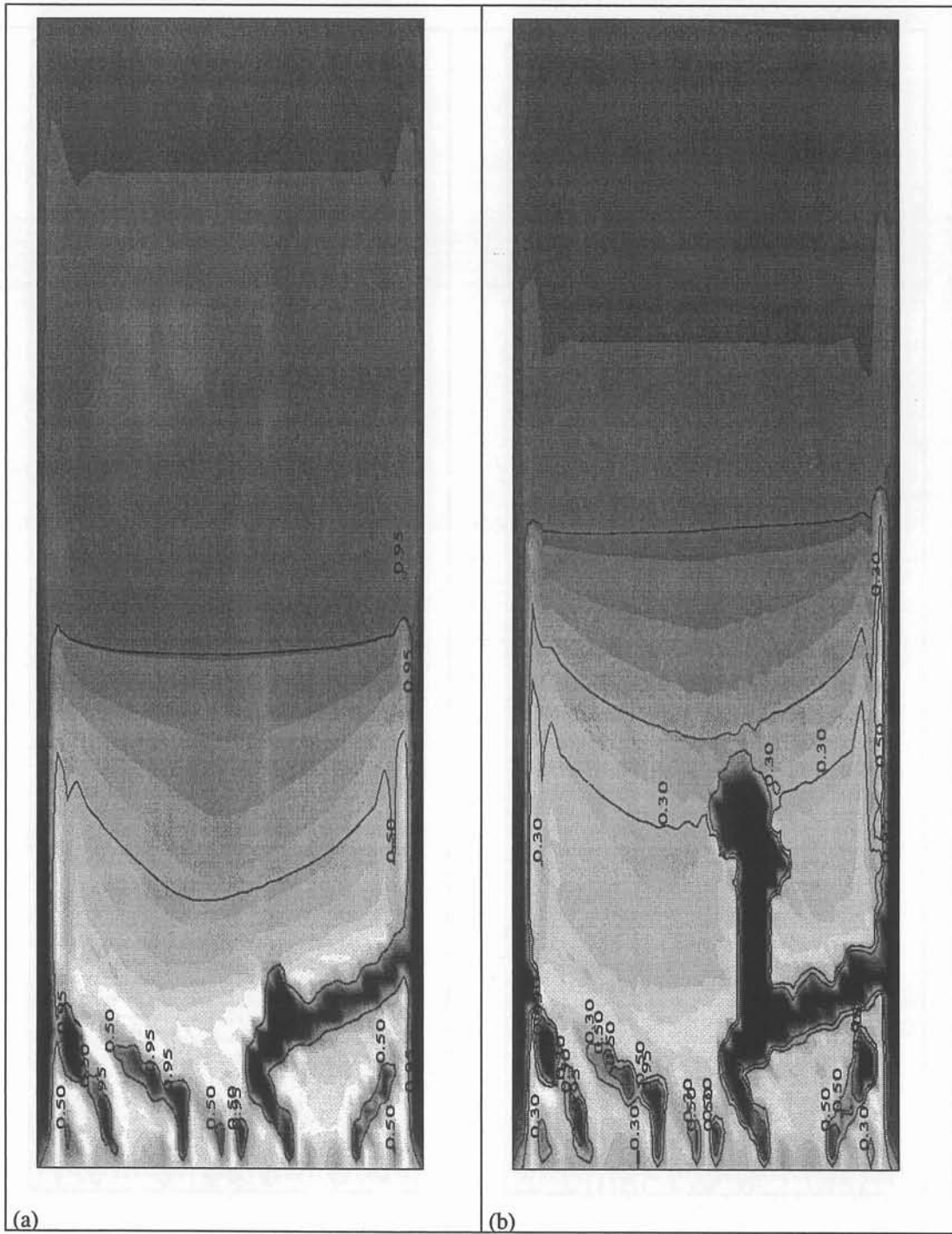


Figure 4-17: Cartes de concentration, grand domaine, cas 8. a) $t=15$ min ($Cb_{\max} = 15.78, Cb_{\min} = 3.28, \text{Isovaleurs } \phi = 0.5; 0.95$). b) $t=20$ min ($Cb_{\max} = 18.01, Cb_{\min} = 1.6, \text{Isovaleurs } \phi = 0.3; 0.5; 0.95$).

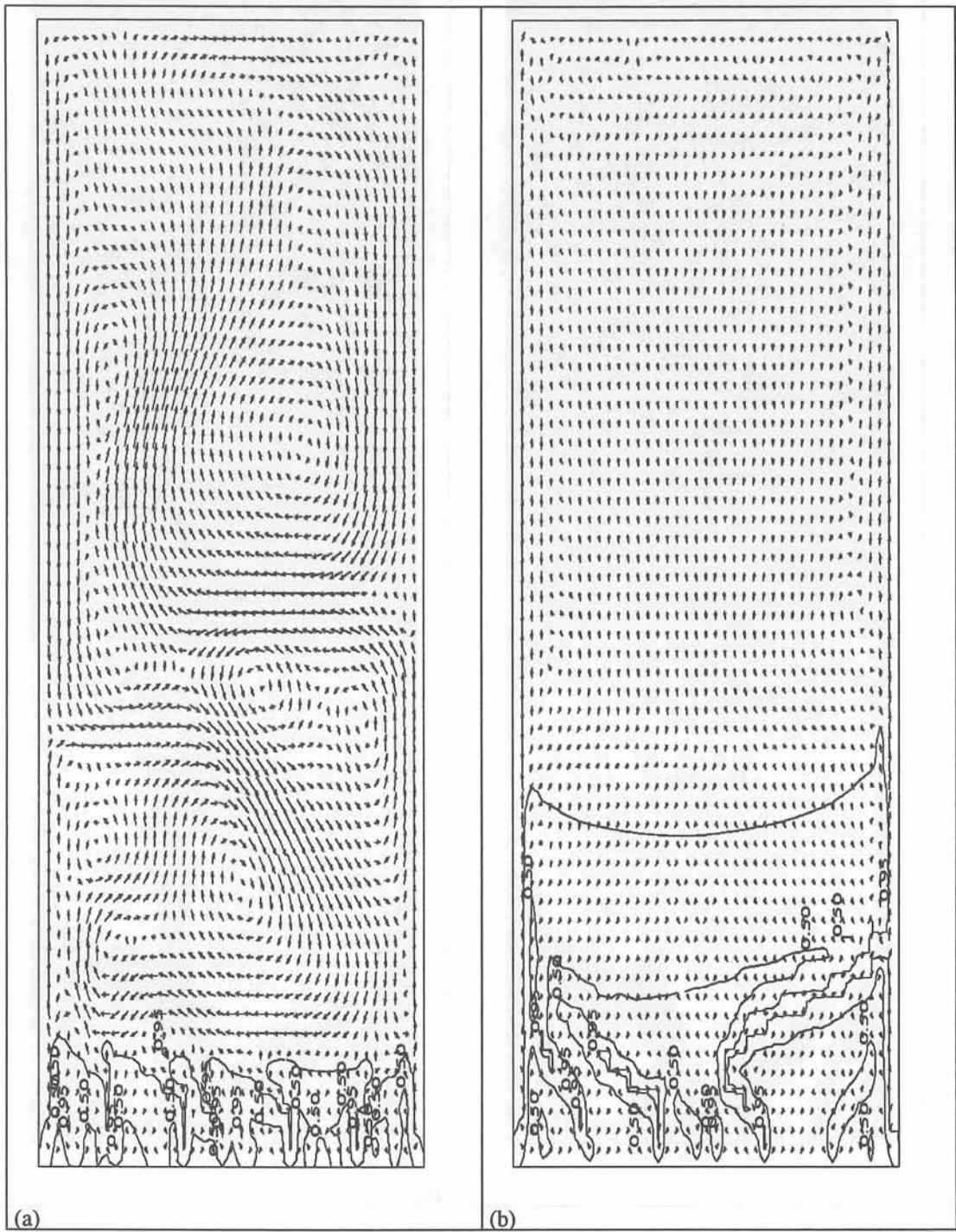


Figure 4-18: Champ de vitesse, grand domaine, cas 8. a) $t=5$ min ($v_{\max} = 7$ mm/sec). b) $t=10$ min. ($v_{\max} = 9.8$ mm/sec). Isovaleurs $\phi = 0.5; 0.95$.

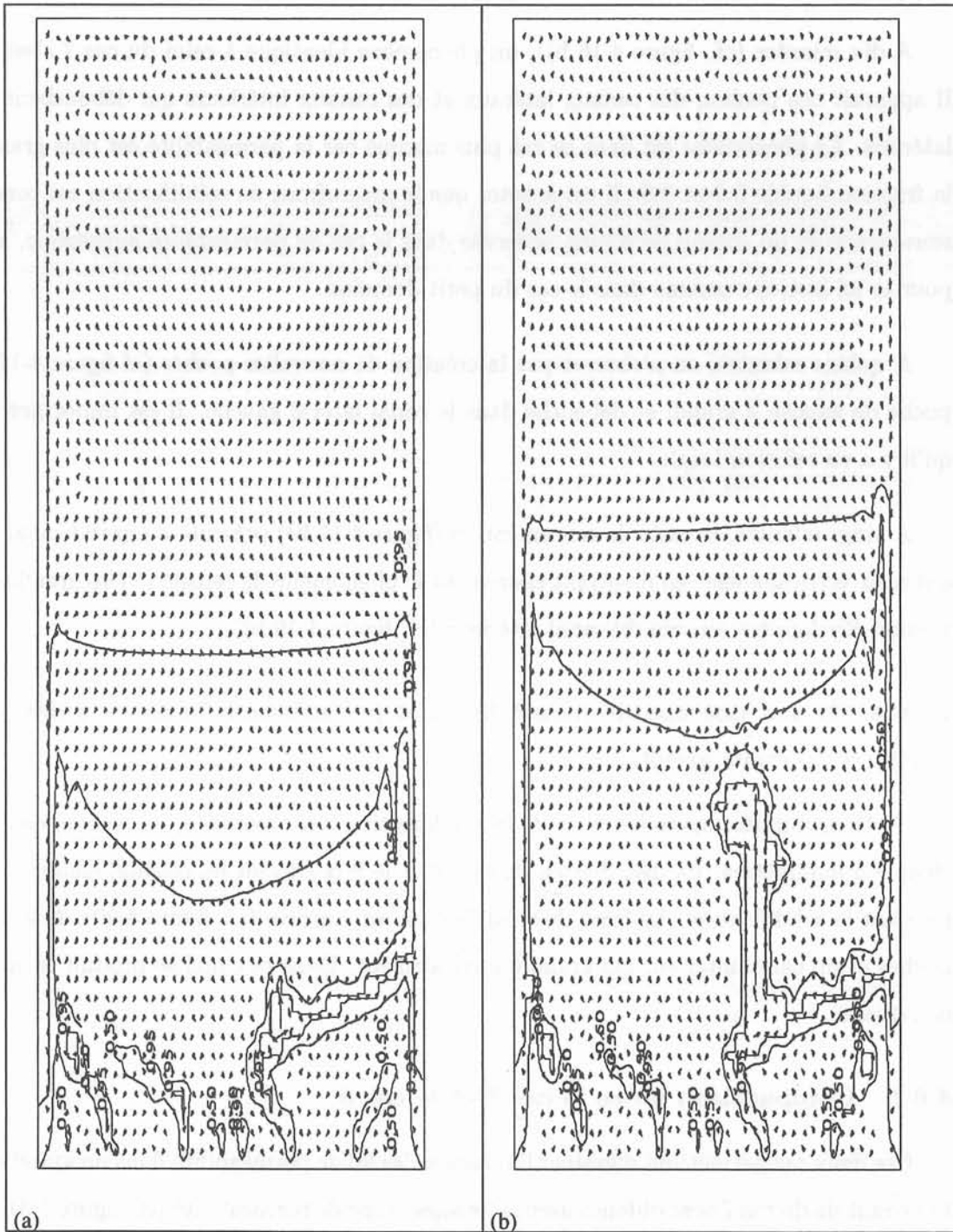


Figure 4-19: Champ de vitesses, grand domaine, cas 8. a) $t=15$ min ($v_{\max} = 19$ mm/sec). b) $t=20$ min ($v_{\max} = 7.1$ mm/sec). Isovaleurs $\phi = 0.5; 0.95$.

ne sont pas régulières (cf. figure 4-18 a)).

A dix minutes (cf. figure 4-16 b)), un phénomène identique à celui du cas 7 s'est produit. Il apparaît des poches, des canaux latéraux et des canaux intérieurs qui débouchent dans les latéraux. Le phénomène est dans ce cas plus marqué car la perméabilité est plus grande entre la fraction liquide 0.2 et 0.6. Il est à noter que le macrofront de solidification est concave. La sous-structure du champ de soluté, observée dans le cas de perméabilité anisotrope, a disparu pour la loi isotrope comme dans le cas du petit domaine.

A quinze minutes, on n'observe pas la création de nouvelles poches (cf figure 4-17 a)). La poche de gauche a grandi et débouche dans le canal latéral gauche. Il est important de noter qu'il y a eu refusion locale.

A vingt minutes, la carte de concentration (figure 4-17 b)) présente un grand canal intérieur qui croit verticalement, en montrant clairement le phénomène de refusion. Des grandes vitesses se sont développées au sein du canal intérieur (cf. figure 4-19 b)).

Le cas 12: Loi isotrope de perméabilité et perturbation initiale de déviation de l'angle du vecteur gravité.

Cinq minutes après le début de la solidification, on observe, en moyenne, deux canaux chaque 5 millimètres. La distribution de soluté et le flux suivent un schéma analogue au cas 8 pendant la solidification. Le front de solidification est concave (cf. figure 4-20). Il se forme des poches et un canal intérieur qui grandit verticalement. Dans ce canal se produit le phénomène de refusion.

4.6.1 Comparaison entre le cas 7 et le cas 8.

Ces deux cas permettent d'évaluer l'influence des loi de perméabilité dans un grand domaine. Les résultats du cas 7 sont obtenus avec la loi anisotrope de perméabilité (cf. figure 4-3), pendant que ceux du cas 8 sont obtenus avec la loi isotrope de perméabilité.

Dans le paragraphe 4.4, nous avons fait la comparaison dans le cas du petit domaine. Quand la loi de perméabilité est anisotrope, nous avons vu qu'il existait une certaine structure qu'on

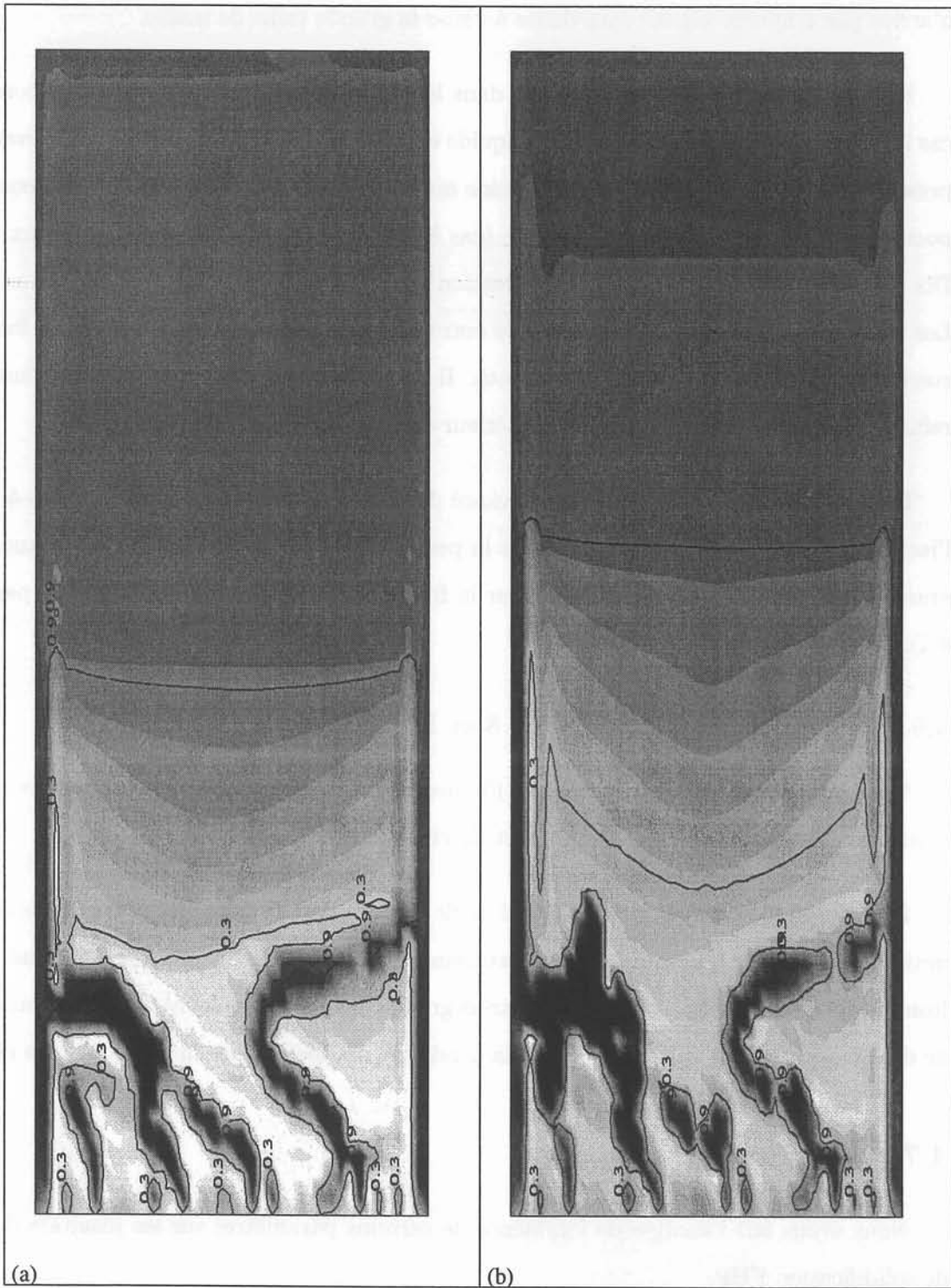


Figure 4-20: Cartes de concentration, grand domaine, cas 12. a) $t=15$ min. ($Cb_{\max} = 15.9, Cb_{\min} = 3.5$). b) $t=20$ min ($Cb_{\max} = 18, Cb_{\min} = 1.3$). Isovaleurs $\phi = 0.3; 0.9$.

n'arrive pas à apercevoir ici, sans doute à cause la grande taille de maille.

Plus de canaux initiaux sont formés dans le cas de la perméabilité anisotrope comparé au cas isotrope (cas 7, figure 4-12 a)). Le liquide enrichi, qui sort de la zone pâteuse (avant d'être presque immobilisé quand la fraction liquide est inférieure à 0.6), donne lieu à plusieurs petites poches. Par contre, dans le cas isotrope (cas 8, figure 4-16), il y a moins de canaux initiaux. Dix minutes après le début de la solidification il n'y a pas de formation de nouveaux canaux. Les valeurs plus grandes de perméabilité entre la fraction liquide entre 0.2 et 0.6 font que le zone pâteuse est assez homogène en soluté. Il convient de noter l'existence du phénomène de refusion, surtout dans le grand canal intérieur et les grandes vitesses à l'intérieur.

Le front de solidification est moins avancé dans le cas isotrope, mais ce n'est pas à cause de l'isotropie. Cela vient plutôt du fait que la perméabilité K du cas isotrope est beaucoup plus grande que celle de la loi anisotrope pour la fraction liquide entre 0.2 et 0.6 (voir paragraphe 4.4).

4.6.2 Comparaison entre le cas 8 et le cas 12.

Ces deux cas permettent d'évaluer l'influence de la perturbation initiale dans un grand domaine. Les perturbations initiales sont décrites dans le paragraphe 4.5.

Dans le cas 12, avec perturbation sur l'angle de déviation de la gravité, il y a moins de canaux initiaux, cependant les cartes de concentration et de champ de vitesses ont la même allure, le front de solidification est concave, il y a trois grand canaux. Les valeurs de concentration totale ne diffèrent pas. Tout cela suggère que la condition initiale n'a pas influence sur les résultats.

4.7 Conclusions

Nous avons fait l'analyse de l'influence de certains paramètres sur les résultats du modèle de solidification FHP.

Les résultats de différentes conditions thermiques montrent que pour la formation de canaux un gradient faible de température est nécessaire, ce que confirment les résultats expérimentaux

de Copley et al. [10]. Dans nos calculs, les cas de faible gradient sont produits par le flux supérieur entrant. Dans l'autre cas il n'y a pas suffisamment de temps pour avoir une accumulation de liquide enrichi près des parois verticales lors la formation de canaux latéraux à cause de la vitesse du front de solidification. Tous les cas montrent que quand la direction de la vitesse est la même que le déplacement des isothermes, il y a un retard de la solidification (voir paragraphe 3.3.1).

L'utilisation d'une perméabilité discontinue provoque une structuration dans la zone pâteuse car les surfaces correspondant au saut de discontinuité deviennent imperméables au débit. Une grande perméabilité isotrope provoque un drainage et la formation de poches de refusion car le liquide enrichi peut se déplacer plus facilement dans la zone pâteuse, comme on peut le voir dans les résultats du paragraphe 4.4.2. Cela implique que le front de solidification est moins avancé quand la loi de perméabilité est plus grande.

Le choix de la perturbation initiale dans le début de la simulation joue un rôle négligeable, sauf dans le cas 11 (petit domaine, flux supérieur nul) pour lequel la condition initiale de déviation de l'angle de gravité n'arrive pas à déclencher l'instabilité.

Les résultats du grand domaine nous montrent l'existence de canaux latéraux dans les cartes de concentration . Nous constatons une densité importante de canaux initiaux. De même que dans le petit domaine, quand la perméabilité est discontinue, il y a une structure différente dans la zone pâteuse. Quand la perméabilité est une loi continue, la structure est formée de quelques poches et canaux très nets. Le phénomène de refusion est très marqué et le macrofront de solidification est régulier et concave. Les isothermes ne sont plus planes comme dans le cas du petit domaine. Elles sont déformées par le champ de vitesse du liquide enrichi et plus chaud.

The first part of the paper discusses the importance of the study of the history of the world, and the second part discusses the importance of the study of the history of the United States.

The first part of the paper discusses the importance of the study of the history of the world, and the second part discusses the importance of the study of the history of the United States.

The first part of the paper discusses the importance of the study of the history of the world, and the second part discusses the importance of the study of the history of the United States.

Chapitre 5

Influence d'un écoulement forcé électromagnétique sur les résultats du modèle FHP.

5.1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats du modèle Felicelli-Heinrich-Poirier (FHP) [24], [23], appliqué au cas d'un écoulement forcé électromagnétique. Différentes configurations de champs magnétiques ont été testées pour mettre en évidence l'effet de la convection forcée dans la formation de canaux.

5.2 Les cas étudiés.

Les cas que nous traitons dans ce paragraphe montrent l'importance de l'interaction complexe entre la solidification et le mouvement du fluide. Nous analysons les résultats dus à la convection forcée produite par les forces Laplace-Lorentz, en comparant les situations suivantes:

- cas 1 : convection thermosolutale
- cas 5 A : convection thermosolutale plus convection forcée de double circulation produite par un champ electro-magnétique appliqué au domaine $5mm \times 10mm$ (au domaine $30mm \times 90mm$ dans le cas 12).

- cas 5 B : convection thermosolutale plus convection forcée de simple circulation produite par un champ electro-magnétique appliqué au domaine $5mm \times 10mm$.

- cas 6 : convection forcée de double circulation produite par un champ electro-magnétique appliqué au domaine $5mm \times 10mm$.

Dans les quatre cas, les conditions initiales et de frontière sont les mêmes, à savoir celles du paragraphe 3.2.1. La loi de perméabilité est anisotrope et discontinue.

L'application des forces électromagnétiques produit un mouvement de fluide, comme le montre la figure 5-1. Le champ magnétique appliqué ainsi que l'expression de la force sont décrits dans le chapitre 2, paragraphe 2.2.3. Différentes combinaisons de configuration d'inducteurs peuvent produire soit une convection de double circulation (cf. figures 2-3 et 5-1 a)), soit une convection de simple circulation (cf. figures 2-2 et 5-1 b)). La convection forcée que nous avons introduite est limitée à des vitesses comparables à celles produites par la convection thermosolutale. Cela signifie donc une très basse intensité de brassage.

5.2.1 Comparaison entre le cas 1, le cas 5A, le cas 5B et le cas 6.

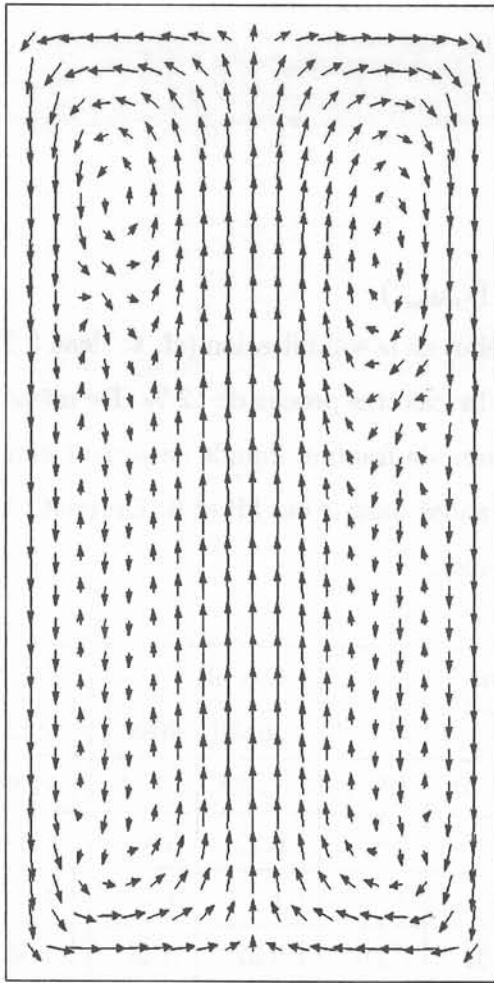
Dans ce paragraphe, une comparaison entre les différents cas de convection forcée est présentée. Nous faisons un analyse des résultats obtenus.

Les paramètres utilisés pour les calculs sont montrés dans le tableau 5.1. Ils ont été définis dans le chapitre 2, paragraphe 2.2.2 et 2.3.

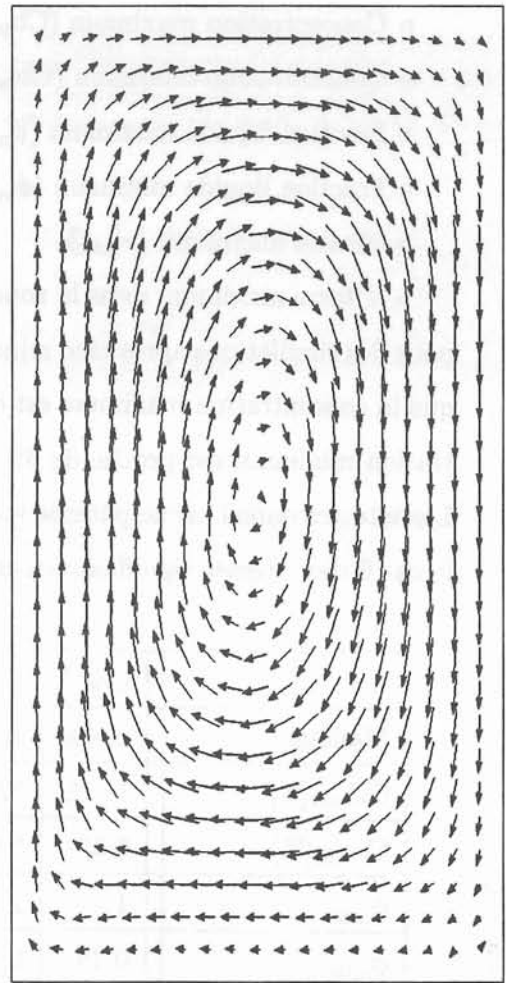
	Cas 5A	Cas 5B	Cas 6
$F_0 [N]$	900	1500	1640
$\delta [m]$	5×10^{-3}	5×10^{-3}	5×10^{-3}
$M_1(\Delta T = 10K)$	7.50	12.50	(*)
$M_2(\Delta C = 10\%)$	0.17	0.29	(*)
$M_3(K_m = 10^{-12}m^2)$	0.007	0.013	0.013

(*) il n'y a pas gravité.

Tableau 5.1 Paramètres concernant le calcul de la convection forcée.



(a)



(b)

Figure 5-1: Champ de vitesses initiales. a) cas 5 A, double circulation, b) cas 5 B circulation simple

Nous avons rassemblé dans les tableaux 5.2 et 5.3 quelques résultats de calcul quantifiant l'effet des conditions de convection, ainsi que l'effet du maillage. Les valeurs données par le maillage plus grossier, 20x30 sont proches de celles du maillage 40x60.

Les grandeurs extraites des résultats, à savoir

- ▷ Concentration maximum ($C_{b_{max}}$)
- ▷ Concentration minimum ($C_{b_{min}}$)
- ▷ Fraction liquide maximum (ϕ_{max})
- ▷ Fraction liquide minimum (ϕ_{min})
- ▷ Vitesse maximum (v_{max})
- ▷ Vitesse maximum dans la zone pâteuse ($v_{pât_{max}}$)

pour des simulations après cinq minutes du début de la solidification (cf. tableau 5.2), montrent que la concentration maximum est dans tous les cas très proche de 12 %. De même, la concentration minimum est proche de 6%. Les valeurs de fraction liquide se situent entre 1 et 0.30. Les vitesses dans la zone pâteuse sont plus grandes dans le cas 5B et 6. On peut observer pour le cas 6 des vitesses significativement plus grandes.

	Cas 1		Cas 5A		Cas 5B		Cas 6	
Maillage	20x30	40x60	20x30	40x60	20x30	40x60	20x30	40x60
$C_{b_{max}}[\%]$	11.78	12.00	11.87	12.01	11.72	12.00	11.65	11.27
$C_{b_{min}}[\%]$	6.37	5.9	5.9	5.65	6.22	5.85	6.20	5.47
ϕ_{max}	1	1	1	1	1	1	1	1
ϕ_{min}	0.35	0.29	0.31	0.26	0.37	0.28	0.33	0.24
$v_{max}[mm/sec]$	0.7	0.9	6.8	6.4	6.5	7.6	13.28	15.4
$v_{pât_{max}}[mm/sec]$	0.3	0.5	0.5	0.1	0.8	1.8	0.9	1.2

Tableau 5.2 : Résultats calculés 5 minutes après le début de la solidification.

Le tableau 5.3 présente les résultats numériques, calculés 15 minutes après le début de la solidification. Les valeurs maximum de concentration sont proches de 16 %, sauf pour le cas 6, qui a une concentration maximum proche de 13 %. La concentration minimum est dans tous les cas proche de 4 %. La variation de la fraction liquide est comprise entre 0 et 1 (solide

et liquide, respectivement). La vitesse est plus grande dans le cas où il y a convection forcée, comme c'était prévisible.

	Cas 1		Cas 5A		Cas 5B		Cas 6	
Maillage	20x30	40x60	20x30	40x60	20x30	40x60	20x30	40x60
Cb_{\max} [%]	16.00	16.30	16.16	16.31	16.00	16.30	13.38	13.18
Cb_{\min} [%]	4.29	3.60	4.44	3.65	3.73	3.69	4.62	3.62
ϕ_{\max}	1	1	1	1	1	1.	1	1
ϕ_{\min}	0.06	0	0.07	0.	0.01	0.	0.08	0.
v_{\max} [mm/sec]	0.9	1.	3.6	5.0	1.7	2.0	3.0	1.7
$v_{\text{pât}_{\max}}$ [mm/sec]	0.4	0.4	0.6	0.1	0.3	0.8	0.4	1.1

Tableau 5.3 : Résultats calculés 15 minutes après le début de la solidification.

5.2.2 Cas 5 A, double circulation électromagnétique.

Dans le cas 5 A, le mouvement du liquide est affecté par une convection thermosolutale et une convection forcée de double circulation produite par un champ magnétique (cf. figure 5-1).

Les graphiques de concentration (cf. figure 5-2) mettent en évidence un canal central produit par la circulation du fluide (cf. figure 5-3). La circulation forcée impose deux grands vortex initiaux, qui engendrent un courant central du bas vers le haut. Ce courant amène le liquide interdendritique enrichi en soluté de la zone pâteuse, comme on peut l'observer dans les figures 5-2 a) et b). Le liquide enrichi qui a une température de liquidus plus basse, engendre un canal qui ne se développe pas de manière rectiligne, mais est tordu par les déplacements des vortex. Par exemple, dans la figure 5-3 a), c'est le vortex droit qui prédomine, donc le canal penche vers la gauche (cf. figure 5-3 c)). Ces calculs sont faits avec un maillage 20x30. Quand on utilise un maillage 40x60, le vortex prédominant est le gauche (cf. figure 5-3 b) et le canal est à droite, voir figure 5-3 d). Il s'agit d'un effet semblable à l'effet Coanda. Cet effet se produit lorsqu'un jet débouche dans une cavité. Le jet ne reste pas rectiligne mais a tendance à coller à l'un des cotés de la cavité.

Une structure quasi périodique de la distribution de soluté est mise en évidence dans les figures 5-2 b) et c), ce qui suggère un système de sous-canaux périodiques faiblement inclinés

qui débouchent dans le canal central dans la zone pâteuse. Les canaux latéraux qui sont caractéristiques dans les cas avec convection thermosolutale, ne peuvent se former (ou ils se sont formés de façon très étroite, voir figure 5-2) à cause de la circulation forcée du haut vers le bas. Dans ce cas de double circulation, nous voyons que la ségrégation n'est pas évitée, mais qu'elle se déplace vers le canal central du domaine.

La comparaison des champs de soluté pour les deux maillages 20x30 et 40x60 (figure 5-2) montre bien l'effet de filtrage numérique. En effet, la structuration observée pour le maillage le plus dense, 40x60, est beaucoup moins perceptible dans le cas du maillage 20x30.

5.2.3 Cas 5 B, simple circulation électromagnétique.

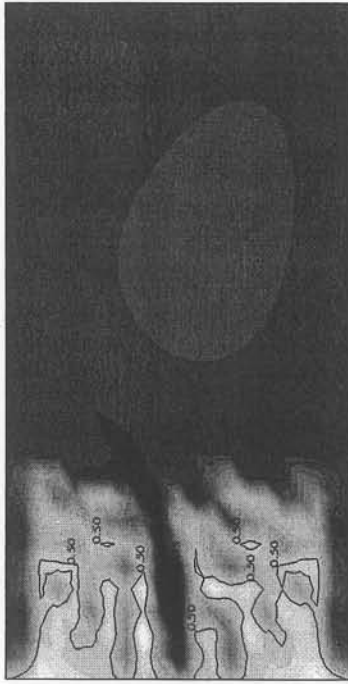
Le cas 5 B correspond à un cas où le mouvement du liquide est affecté par une convection thermosolutale et une convection forcée de simple circulation produite par un champ magnétique.

La distribution de la concentration (cf. figure 5-4) est modifiée par le mouvement de fluides (cf. figure 5-5). Dans ce cas, il y a un vortex unique qui tourne dans le sens horaire, et amène le liquide interdendritique enrichi en soluté à la partie gauche du domaine. Ce courant s'additionne au courant engendré par la convection solutale, donnant un important canal de ségrégation. Par contre dans la partie droite du domaine, les courants d'origine solutale et ceux dus à la convection forcée s'opposent, bouchant (presque) le canal gauche.

La structure de solidification, quasi périodique, s'oriente dans ce cas de droite à gauche. Les sous-canaux débouchent principalement dans le grand canal gauche. Quelques canaux seuls débouchent dans la partie droite de telle façon que le liquide parcourt le chemin le plus court. La zone de concentration minimum se trouve à côté du grand canal (zone plus claire dans la figure 5-4 d)), à cause du drainage.

5.2.4 Cas 6, gravité nulle, double circulation électromagnétique.

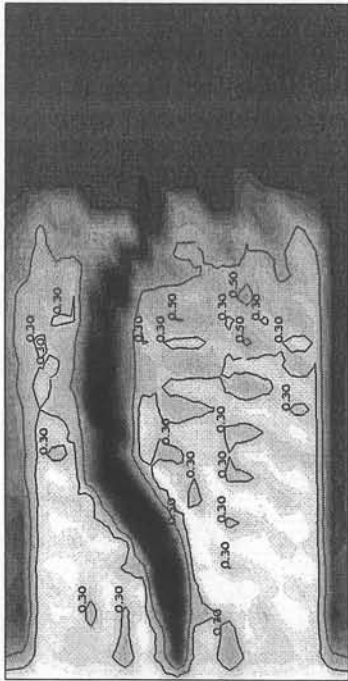
Le cas 6 correspond à un cas où le mouvement du liquide est affecté seulement par une convection forcée de double circulation produite par un champ magnétique, l'effet de la gravité étant nul.



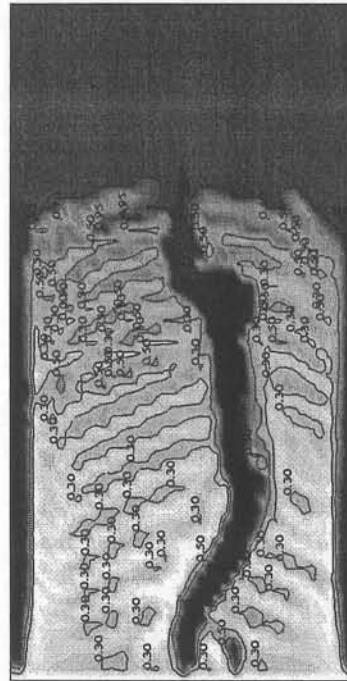
(a)



(b)

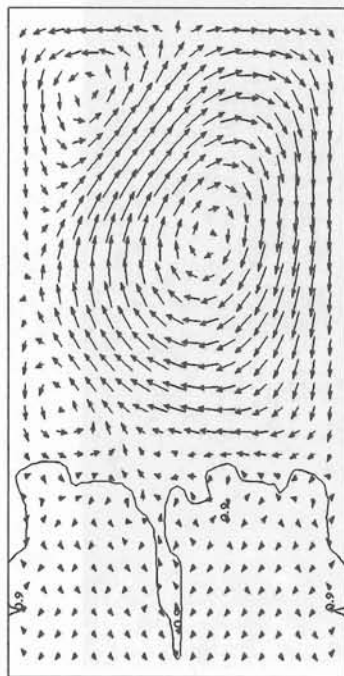


(c)

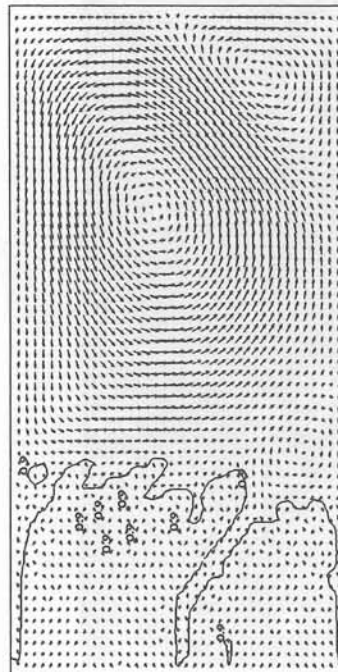


(d)

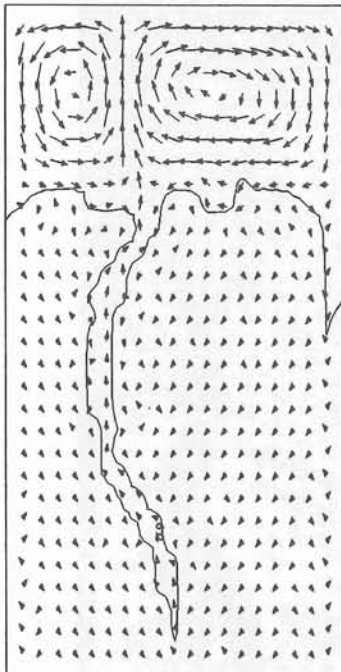
Figure 5-2: Cas 5 A. Cartes de concentration et isovaleurs de fraction liquide $\phi = 0.3; 0.5; 0.95$. a) et b) $t=5$ min maillage 20×30 ($Cb_{\max} = 11.87, Cb_{\min} = 5.9$) et 40×60 ($Cb_{\max} = 12.01, Cb_{\min} = 5.65$) respectivement; c) et d) $t=15$ min, maillage 20×30 ($Cb_{\max} = 16.16, Cb_{\min} = 4.44$) et 40×60 ($Cb_{\max} = 16.31, Cb_{\min} = 3.65$).



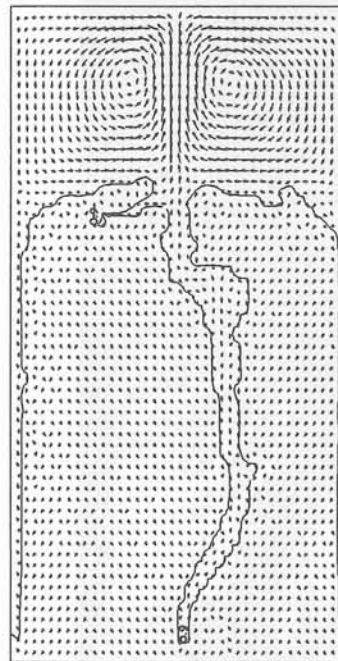
(a)



(b)

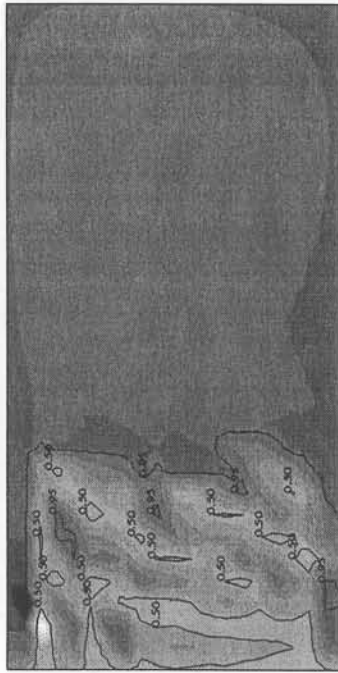


(c)

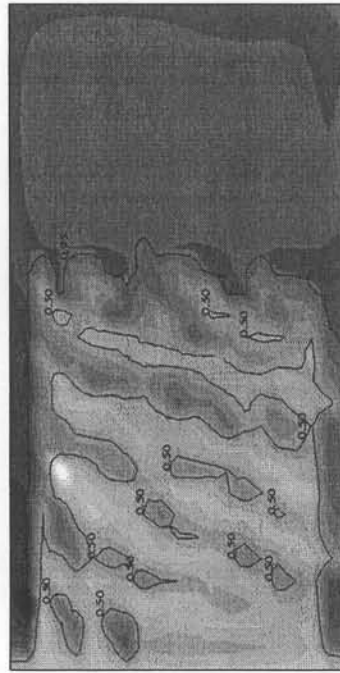


(d)

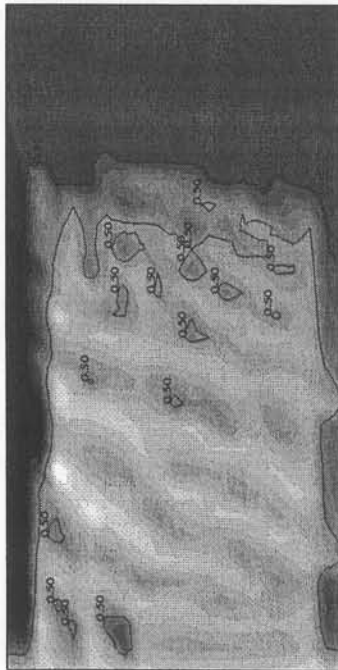
Figure 5-3: Cas 5 A. Cartes de vitesses et isovaleur de la fraction liquide $\phi = 0.9$. a) et b) $t=5$ min maillage 20×30 ($v_{\max} = 6.8 \text{ mm/sec}$) et 40×60 ($v_{\max} = 6.4 \text{ mm/sec}$) respectivement, c) et d) $t=15$ min, maillage 20×30 ($v_{\max} = 3.6 \text{ mm/sec}$) et 40×60 ($v_{\max} = 5 \text{ mm/sec}$) respectivement



(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 5-4: Cas 5B. Cartes de concentration et isovaleurs de la fraction liquide $\phi = 0.5; 0.95$. a) 5 min ($Cb_{\max} = 11.73, Cb_{\min} = 6.3$), b) 10 min ($Cb_{\max} = 13.86, Cb_{\min} = 4.99$), c) 15 min ($Cb_{\max} = 16.00, Cb_{\min} = 3.65$) et d) 20 min ($Cb_{\max} = 18.15, Cb_{\min} = -1.22$) après le début de la solidification.

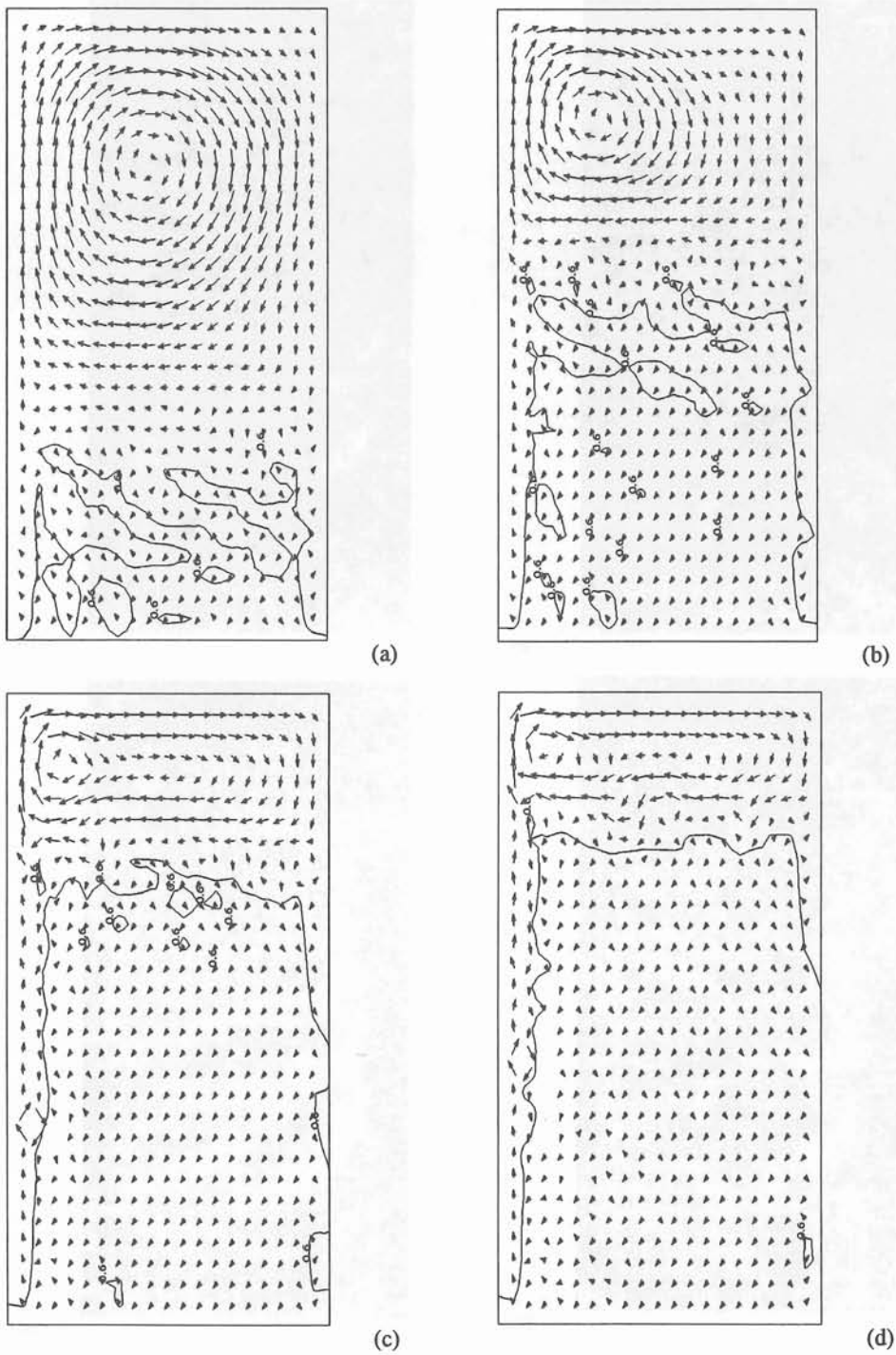


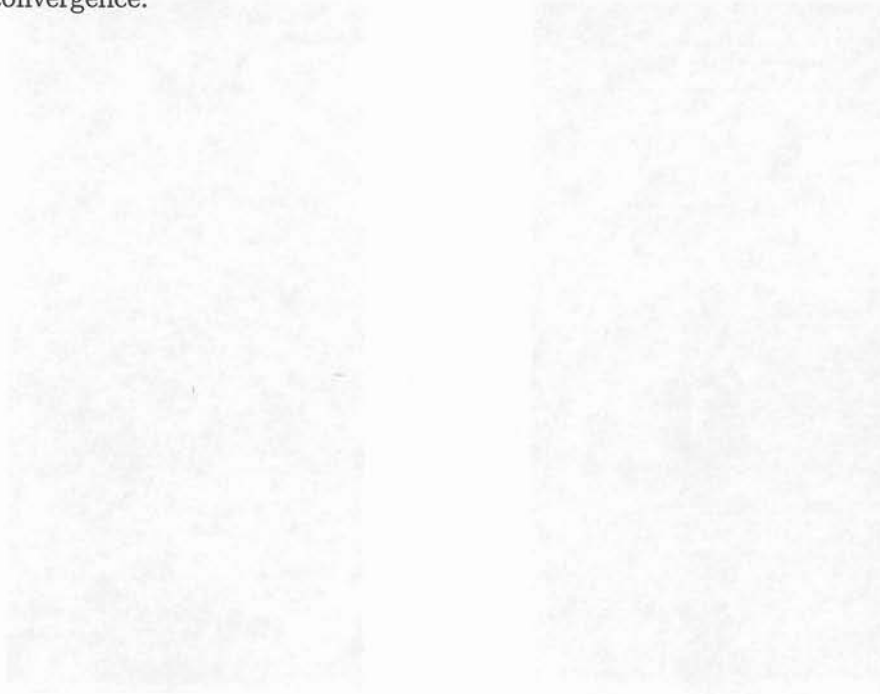
Figure 5-5: Cas 5B. Cartes de champ de vitesses et isovaleur de la fraction liquide $\phi = 0.6$. a) 5 min ($v_{\max} = 7.6\text{mm/sec}$); b) 10 min ($v_{\max} = 4.3\text{mm/sec}$); c) 15 min ($v_{\max} = 2.5\text{mm/sec}$); d) 20 min ($v_{\max} = 1.7\text{mm/sec}$) après le début de la solidification.

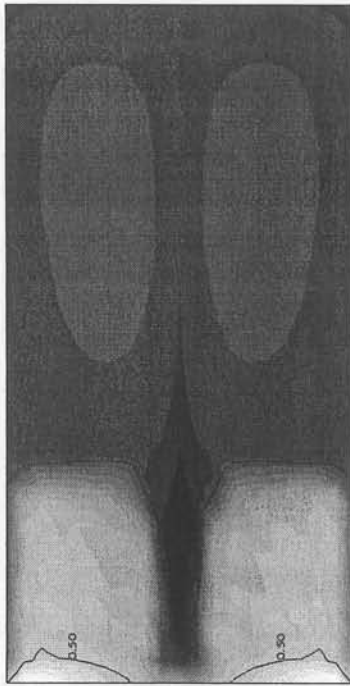
Dans les cartes de concentration 5-6, la symétrie est remarquable. Le maillage 40x60 montre bien la structure en sous canaux qui débouchent dans le canal central, vers l'intérieur et de bas en haut. En plus des canaux le long des deux parois latérales, la convection forcée fait apparaître un large canal central, résultat de l'accumulation de soluté, produit par le drainage de liquide interdendritique enrichi. Il y a des canaux latéraux (relativement peu développés) car les vitesses horizontales y sont nulles, et le liquide qui y arrive est difficile à mouvoir.

La concentration maximum, dans ce cas, est inférieure à celle obtenue dans le cas de convection solutale, ce qui montre l'importance de cette dernière.

5.2.5 Cas 9: Grand domaine, double circulation électromagnétique.

Ce cas montre le phénomène de la solidification pendant 5 minutes sous l'influence d'un champ électromagnétique qui produit des forces de Lorentz comme cela est décrit dans le paragraphe 2.2.2. Nous n'avons pas réussi à continuer avec la simulation plus longtemps car il n'y a pas convergence.

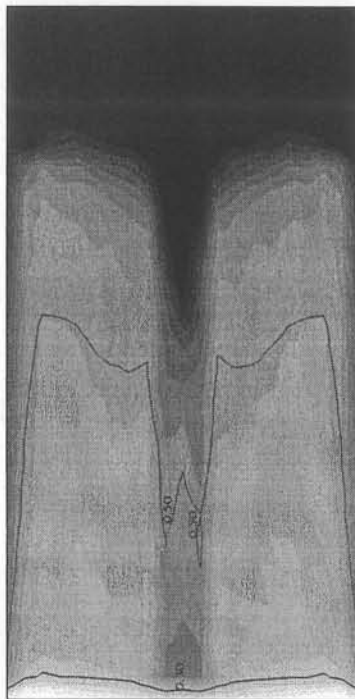




(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 5-6: Cas 6. Cartes de concentration et isovaleurs de la fraction liquide $\phi = 0.3; 0.5; 0.95$. a) et b) $t=5$ min maillage 20×30 ($Cb_{\max} = 11.65, Cb_{\min} = 6.20$) et 40×60 ($Cb_{\max} = 11.27, Cb_{\min} = 5.47$) respectivement; c) et d) $t=15$ min, maillage 20×30 ($Cb_{\max} = 13.38, Cb_{\min} = 4.62$) et 40×60 ($Cb_{\max} = 13.18, Cb_{\min} = 3.62$).

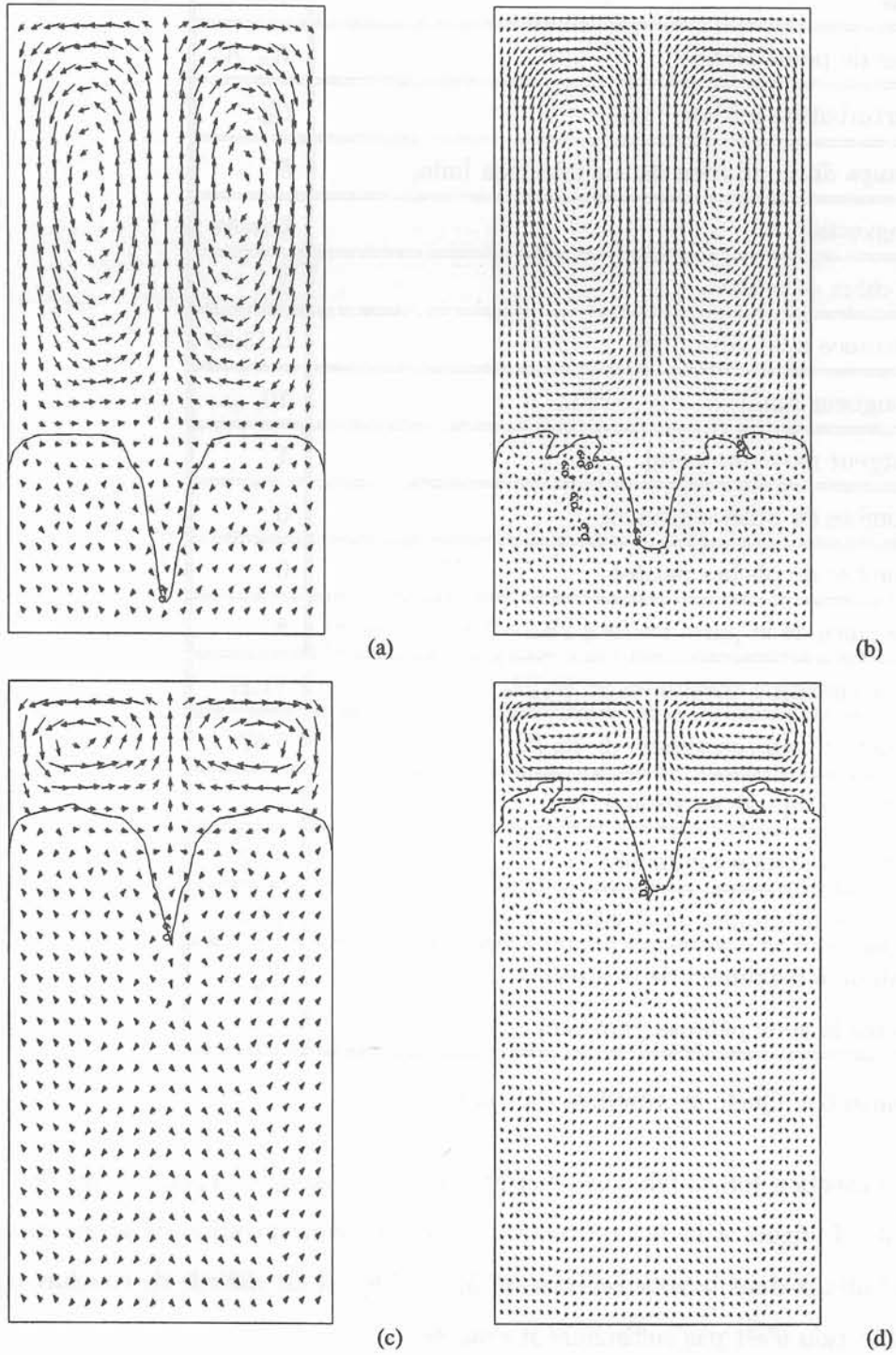


Figure 5-7: Cas 6. Cartes de vitesse et isovaleur de la fraction liquide $\phi = 0.9$. .a) et b) $t=5$ min maillage 20×30 ($v_{\max} = 13.28 \text{ mm/sec}$) et 40×60 ($v_{\max} = 15.4 \text{ mm/sec}$) respectivement, c) et d) $t=15$ min, maillage 20×30 ($v_{\max} = 3.0 \text{ m/sec}$) et 40×60 ($v_{\max} = 1.7 \text{ mm/sec}$).

Cas	9
Lois de perméabilité	K_x, K_z
Perturbation initiale dans	C_0
Temps de simulation de solidification [min]	5
Convection	Forcée
Nombre de canaux	3
Distance a la paroi [mm]	0;15;30
Longueur [mm]	10
Largeur moyenne [mm]	1
Nombre de poches grandes	0
Nombre de poches petites	0
Distance de la paroi froide a l'isovaleur $f_l=0$ [mm]	8
Concentration maximum de Sn [%]	11.17
Concentration minimum de Sn [%]	5.67
Fraction liquide maximum	1
Fraction liquide minimum	0.27
Module maximum de la vitesse [mm/sec]	16.2
Module maximum de la vitesse dans la zone pâteuse [mm/sec]	0.7

Tableau 5.4: Quelques résultats du cas 12.

La convection forcée fait que deux grands vortex se développent et que les isothermes se courbent (cf. figure 4-11 b)) tandis que la carte de concentration de soluté montre plusieurs canaux initiaux dans la zone centrale (cf figure 5-8). Il est difficile de conclure sur ce cas, car la solidification n'est pas suffisamment avancée.

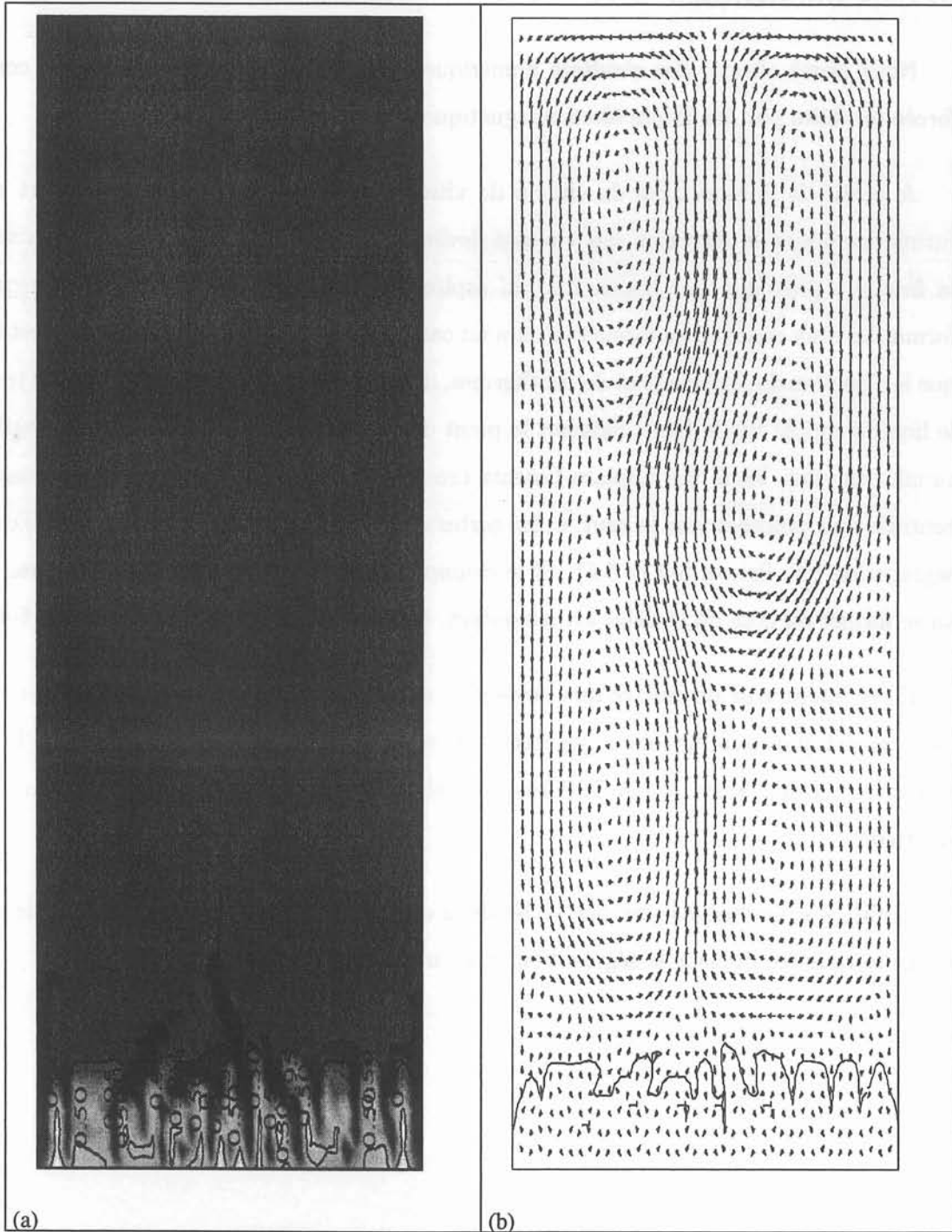


Figure 5-8: Grand domaine avec double vortex électromagnétique, grand domaine, cas 9. a) Carte de concentration ($Cb_{\max} = 11.17, Cb_{\min} = 5.67$), Isovaleurs $\phi = 0.3; 0.5; 0.95$. b) Champ de vitesses ($v_{\max} = 16.2\text{mm/sec}$), Isovaleur $\phi = 1$, grand domaine, convection forcée à cause de forces de Laplace-Lorentz.

5.3 Conclusions.

Nous avons obtenu des résultats numériques concernant la solidification avec convection forcée produite par des forces électromagnétiques.

A partir de l'observation du champ de vitesse initial (cf figure 5-1), le rapport entre les futurs canaux et la direction des vitesses devient clair. Le point de séparation du vortex de la frontière provoque une dépression qui aspire le liquide de la zone pâteuse et provoque la formation d'un canal. Il se forme toujours un canal quand la direction de la vitesse est la même que la direction de déplacement des isothermes, de bas en haut, car le débit ascendant transporte le liquide enrichi vers le haut, baissant le point de solidification, ce qui initie la formation d'un canal. En effet, les forces Laplace-Lorentz créent un double vortex, les vitesses dans la zone centrale sont pointées vers le haut, et les cartes de concentrations montrent un canal central de ségrégation (cf. figures 5-2 et 5-6). Si le champ de vitesse initial est à simple vortex, le canal va se former du côté où le débit est ascendant, à gauche dans le cas 5 B (cf. figure 5-4).

Il est intéressant de voir ce que devient la solidification du cas 6, dans un environnement sans gravité, par exemple lors d'expériences de solidification dans l'espace [12], [15]. Il apparaît toujours un canal, mais de forme différente. Celui-ci est plus large et se referme dans sa partie intérieure.

Enfin, nos conclusions sont que l'effet de la convection forcée (tout-au-moins celle que nous avons introduite) déplace la ségrégation, mais n'arrive pas à l'éliminer.

Chapitre 6

Application du code Solid.

6.1 Introduction.

Nous avons comparé le logiciel FHP avec le logiciel Solid développé par le Laboratoire de Science et Génie de Matériaux Métalliques (LSG2M) de l'Ecole de Mines de Nancy. L'objectif de cette comparaison est d'évaluer l'"effet logiciel" dans ce type de problème.

6.2 Le code Solid comparé au code FHP.

6.2.1 Les variables du code Solid.

Les grandeurs à calculer par le code Solid sont

- $\langle H \rangle$ enthalpie volumétrique moyenne
- T température
- $\langle v \rangle$ vitesse superficielle moyenne de la phase liquide
- p pression
- $\langle w \rangle$ fraction moyenne de soluté massique
- w^l fraction de masse liquide de soluté
- g_s fraction volumétrique solide

Ces variables sont les mêmes que celles qui sont calculées par le logiciel FHP. La différence avec le code FHP est que les variables $\langle H \rangle$ et p sont calculées comme inconnues principales.

6.2.2 Les équations du code Solid.

Les équations sont presque les mêmes, dans la même approximation (grandeur moyennée sur la maille), (cf. Ahmad et al [1]) à savoir :

▷ Conservation de masse,

▷ Conservation de l'impulsion. Chez FHP la variable p est éliminée avec une formulation de pénalisation selon la relation du paragraphe 2.4.1,

▷ Conservation de l'énergie qui est exprimée en fonction de l'enthalpie dans Solid. Par contre dans FHP, T est la variable principale, mais l'équation est réécrite pour tenir compte du dégagement de chaleur latente,

▷ Conservation du soluté, mais la diffusion n'est pas prise en compte,

▷ Relation (T, w^l) par équation du liquidus,

▷ Relation $(\langle w \rangle, g_l, w^l)$, sans diffusion dans le solide, avec refusion,

▷ Relation $(\langle H \rangle, T, g_l)$ à l'aide de l'équilibre thermodynamique.

6.2.3 Le traitement numérique.

Discretisation de l'espace.

Les deux logiciels mettent en oeuvre des méthodes de discrétisation spatiale différentes:

▷ Par éléments finis bilinéaires, lagrangiens, isoparamétriques et décentrage amont par des éléments de Petrov-Galerkin chez FHP,

▷ Par volumes finis dans Solid, les valeurs étant calculées au centre de la maille; décentrage amont par la méthode "power law". D'après Ahmad et al [1], le paramètre de décentrage ne joue pas un rôle critique au moins pour le coeur liquide.

Discretisation du temps.

La discretisation temporelle est traitée de manière implicite dans le code Solid, tandis que dans le code FHP quelques termes sont traités explicitement (comme les termes de convection) et d'autres implicitement (cf. paragraphe 2.4.2).

Contrôle de l'algorithme.

Dans Solid, il y a itération dans un même pas de temps sur toutes les équations jusqu'à la convergence. Dans FHP, à chaque pas de temps, le champ de vitesse est calculé en une fois,

puis les autres variables font l'objet d'itérations sur les autres équations.

6.2.4 Maillage utilisé.

Pour les comparaisons nous avons pris le même maillage spatial, 40X60 éléments, mais différents pas de temps à cause de la difficulté dans la convergence. En effet, le code Solid a besoin de pas de temps beaucoup plus petits que le code FHP pour converger.

6.2.5 Critères de comparaison des résultats.

Les critères de comparaison que nous utiliserons par la suite sont :

- ▷ Position du macrofront de solidification (distance de la paroi froide à l'isovaleur fraction liquide zero),
- ▷ Concentration totale maximum, concentration totale minimum,
- ▷ Fraction liquide maximum, fraction liquide minimum,
- ▷ Nombre de canaux et de poches,
- ▷ Morphologie des canaux (largeur, longueur, distance à la paroi),
- ▷ Module maximum de vitesse,
- ▷ Histoires des vitesses en certains points du domaine.

Nous introduisons les définitions suivantes qui sont nécessaires pour l'application de ces critères:

Canal : Zone assez bien délimitée par un fort gradient de concentration, où la concentration est supérieure à la concentration initiale moyenne, avec une de ses dimensions plus grande que l'autre et souvent parallèle au vecteur de la gravité. Un canal collecte le soluté de l'espace environnant. Le temps de début de solidification et le temps local de solidification sont plus grands que dans le voisinage hors du canal.

Poche : Zone assez bien délimitée par un fort gradient de concentration où la concentration est supérieure à la concentration initiale moyenne, avec une morphologie un peu ronde et fermée, à la différence du canal où une de ses dimensions est plus grande que l'autre. Elle peut être considérée comme une zone d'accumulation de soluté. Le temps de début de solidification et le temps local de solidification sont plus grands que dans le voisinage hors de la poche.

6.3 Comparaison des résultats sur le cas 10.

Nous faisons la comparaison des résultats sur un cas de solidification de dimension $5\text{mm} \times 10\text{mm}$, flux supérieur non nul, perméabilité anisotrope et perturbation initiale par l'angle de la gravité. La description détaillée des caractéristiques du cas 10 est faite dans l'annexe B.

Code	FHP	Solid	FHP	Solid	FHP	Solid	Solid	Solid	Solid
Temps simulé [min]	5	5	10	10	15	15	20	25	125
Nombre de canaux	2	1	2	1	2	1	1	1	1
Distance à la paroi [mm]	0; 5	0	0; 5	0	0; 5	0	0	0	0
Longueur [mm]	3	3.5	4.5	5.8	5.5	7	8	9	10
Largeur moyenne [mm]	0.3	0.3	0.2	0.2	0.20	0.15	0.15	0.14	0.1
Nombre de poches grandes	1	1	1	1	3	0	0	0	1
Nombre de poches petites	0	0	0	0	11	2	2	2	2
Distance au macrofront [mm]	3	4	4.5	6.3	6	7.5	8.85	9.3	10
Concentration maximum [%]	12.10	12.20	14.25	14.27	16.31	16.03	18.24	18.78	18.80
Concentration minimum [%]	3.43	5.92	0.83	5.48	-2.10	5.33	5.23	5.23	5.22
Fraction liquide maximum	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	0.18
Fraction liquide minimum	0.	0.31	0.	0.20	0.	0.16	0.11	0.1	0
Vitesse maximum [mm/sec]	1.2	0.9	1.1	0.9	3.8	0.76	0.56	0.15	10^6

Tableau 6.1. Récapitulatif des résultats du cas 10.

6.3.1 Les résultats du logiciel Solid.

Les cartes de concentration, fraction liquide et champ de vitesse montrent qu'un vortex se développe près de la paroi gauche, dans les premières 5 minutes. On observe une circulation dans le domaine dans le sens horaire, avec de grandes vitesses près de la paroi gauche, dans la même direction que le déplacement des isothermes. Cela ralentit la solidification et entraîne la formation d'un canal. Après 10 minutes de solidification, le schéma se répète, même vortex dans le sens horaire. Le front de solidification a avancé, le canal est plus long et élargi à sa base. Après 15 minutes, la situation est identique, mais il n'y pas encore de points avec fraction liquide égale à zero (complètement solidifiés). Après 20 minutes, les vitesses sont faibles, 90 % du domaine est pâteux. La carte de concentration après 23 minutes de solidification ne se modifie plus. La fin de la solidification se produit au bout de 125 minutes, en accord avec l'estimation faite dans le paragraphe 3.2.1. La forme de la carte de concentration définitive est fixée par les instabilités de mouvement de fluides pendant les premières minutes.

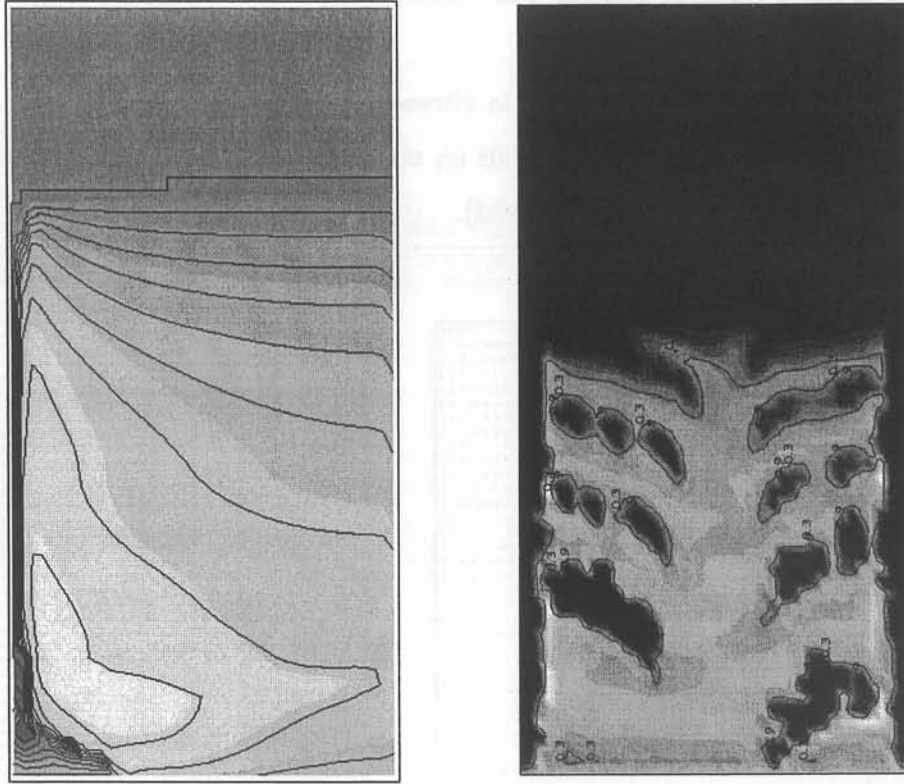


Figure 6.1: Cas 10. Concentration totale et isovaleurs de fraction liquide 15 min après le début de la solidification. a) code Solid, isovaleurs ϕ qui vont du 0 jusqu'à 1, chaque 0.1. b)codeFHP, isovaleurs $\phi = 0.3; 0.9$.

6.3.2 Comparaison avec les résultats FHP.

De l'analyse des résultats nous pouvons tirer les conclusions suivantes:

- ▷ Les isothermes sont pratiquement des droites (pour $z = cte$) pour FHP et Solid.
- ▷ Nous avons vérifié que la position de l'isovaleur fraction liquide nulle ($\phi = 0$) progresse en fonction de racine du temps (règle de Chvorinov).
- ▷ La valeur de concentration maximum est très voisine à chaque instant. Mais la valeur de concentration minimum est plus petite avec la prédiction de FHP.
- ▷ Le champ de vitesse Solid est très différent du champ de vitesse FHP. Solide ne donne

pas de canal le long de la paroi verticale droite. L'écoulement est dominé par le seul canal le long de la paroi verticale gauche. Par conséquent la distribution du soluté est très différente (cf. figure 6-1 et 6-2).

▷ Les historiques du module de la vitesse ont la même allure générale, même maximum, même instant pour le maximum. Mais on observe des fluctuations nettement plus marquées pour FHP que pour Solid (cf. figure 6.3).

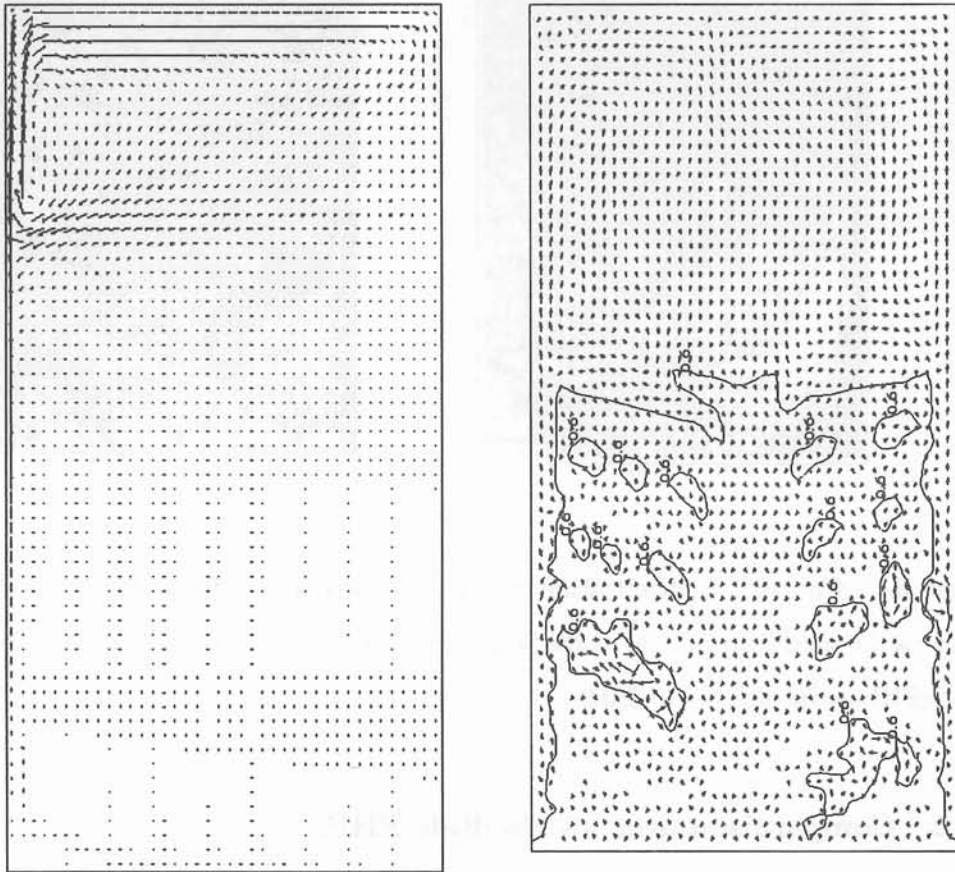
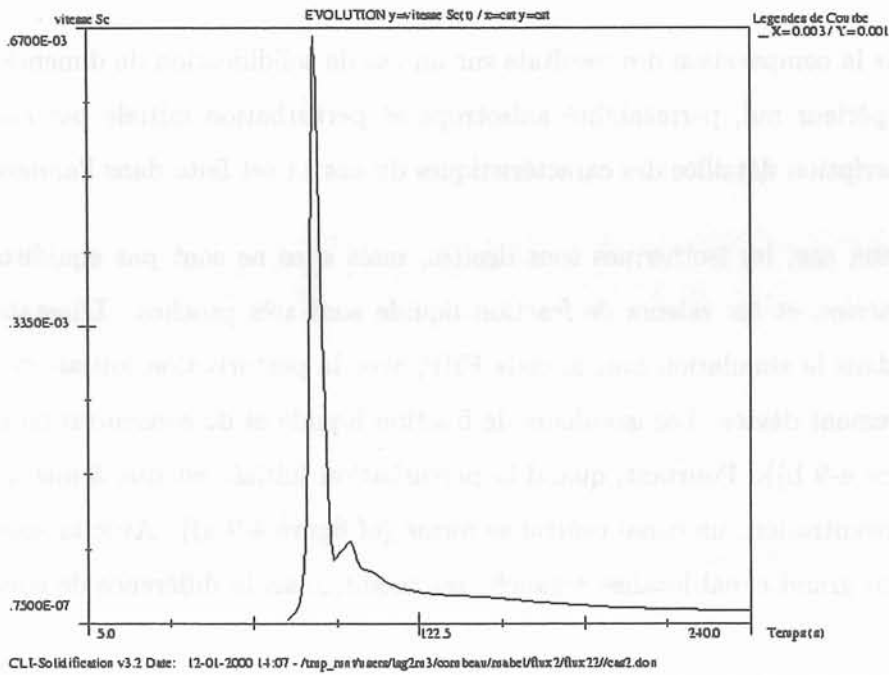
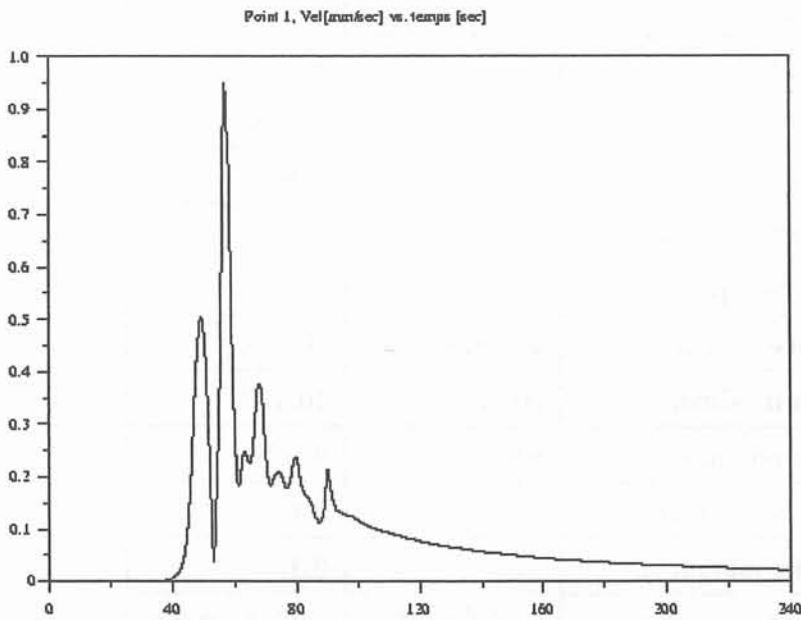


Figure 6-2: Cas 10. Champ de vitesses 15 min après le début de la solidification. a) code Solid, b) code FHP, isovaleurs $\phi = 0.6$.



(a)



(b)

Fig. 6-3: Evolution du module de vitesses pendant 240 secondes. a) Code Solid b) code FHP

6.4 Comparaison des résultats sur le cas 11.

Nous faisons la comparaison des résultats sur un cas de solidification de dimension $5\text{mm} \times 10\text{mm}$, flux supérieur nul, perméabilité anisotrope et perturbation initiale par l'angle de la gravité. La description détaillée des caractéristiques du cas 11 est faite dans l'annexe B.

Dans les deux cas, les isothermes sont droites, mais elles ne sont pas équidistantes. Le domaine est pâteux, et les valeurs de fraction liquide sont très proches. L'instabilité ne se déclenche pas dans la simulation avec le code FHP, avec la perturbation initiale de l'angle de la gravité légèrement déviée. Les isovaleurs de fraction liquide et de concentration totale sont droites (cf figure 4-9 b)). Pourtant, quand la perturbation initiale est due à une distribution aléatoire de concentration, un canal central se forme (cf figure 4-9 a)). Avec la simulation du logiciel Solid, un grand canal localisé à gauche est prédit, mais la différence de concentration est très faible.

Code	FHP	Solid
Nombre de canaux	0	1
Distance a la paroi	0	0
Longueur	0mm	8.5 mm
Largeur moyenne	0mm	1.0mm
Nombre de poches grands	0	0
Nombre de poches petites	0	0
Distance au macrofront	10 mm	10 mm
Concentration maximum	10.01%	10.47%
Concentration minimum	8.98%	9.46%
Fraction liquide maximum	0.41	0.43
Fraction liquide minimum	0.33	0.37
Module de la vitesse maximum	$5 \cdot 10^{-5}\text{mm/sec}$	$3 \cdot 10^{-6}\text{mm/sec}$

Tableau 6.2 : résultats du cas 11 aux 20 minutes de solidification.

6.5 Comparaison des résultats sur le cas 12.

Nous faisons la comparaison des résultats sur un cas de solidification de dimension $30\text{mm} \times 90\text{mm}$, flux supérieur nul, perméabilité anisotrope et perturbation initiale par l'angle de la gravité. La description détaillée des caractéristiques du cas 12 est faite dans l'annexe B.

Code	FHP	Solid	FHP	Solid	FHP	Solid	FHP	Solid	Solid	Solid	Solid
Temps simulé [min]	5	5	10	10	15	15	20	20	30	40	130
Nombre de canaux	7	2	4	3	2	1	1	1	1	1	1
Distance à la paroi [mm]	0; 5;11; 17; 22; 26; 30	0;30	0;7; 22;30	0;15; 30	0; 30	15	0; 30	15	15	15	15
Longueur [mm]	8	8	30;15 20;30	20;17 20	40	35	50; 50	53	74	77	83
Largeur moyenne [mm]	1.3	1.5	1; 2; 3; 1	1.5	3.5	1.5	2	1.25	1.3	1.3	1.3
Nombre de poches grandes	0	0	1	0	1	0	2	0	0	0	0
Nombre de poches petites	2	0	2	0	6	0	6	0	0	0	0
Distance au macrofront [mm]	8.3	10	33	21	40	40	52	51	77	82	90
Concentration maximum [%]	11.82	11.75	13.94	13.12	15.88	15.79	18.00	17.40	19.23	19.33	19.39
Concentration minimum [%]	4.24	7.21	3.52	6.51	3.51	5.6	1.3	5.9	5.82	5.82	5.82
Fraction liquide maximum	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	0.18
Fraction liquide minimum	0.1	0.49	0.	0.34	0.	0.21	0.	0.17	0.12	0.09	0
Vitesse maximum [mm/sec]	7.4	7.8	10.1	9.9	7.9	7.8	29	10	9.2	7.2	0

Tableau 6.3. Récapitulatif des résultats du cas 12.

6.5.1 Les résultats du logiciel Solid.

Cinq minutes après le début de la solidification, il apparaît deux canaux latéraux symétriques. Le champ de vitesse est ascendant sur les côtés. Il y a deux grand vortex, qui font un courant central dans le même sens que le déplacement des isothermes, ce qui permet de prévoir le développement d'un canal central (cf. figure 6-6). Après 10 minutes, le canal central est déjà formé. Les canaux latéraux sont éteints. Il apparaît plusieurs vortex, le champ de vitesse est instable, les courants latéraux sont effacés par le mouvement central. A 15 minutes le canal central continue à se développer (cf. figure 6-4 a)). Dans la zone pâteuse les vitesses sont petites en comparaison de celle de la partie encore liquide (cf. figure 6-5 a)) où on observe trois vortex. De même, après les 20 minutes de solidification, le macrofront avance, deux vortex subsistent dans la zone liquide. La symétrie entre la partie gauche et la partie droite disparaît car à ce moment un vortex se développe à droite du domaine. En conséquence la fraction liquide de

ce côté cesse de décroître. Les isothermes sont modifiées par le champ de vitesse. Après 30 minutes de solidification, le champ de vitesse est encore asymétrique, avec des vortex à droite qui font retarder l'avance de l'isovaleur fraction liquide égal à zero. Après 40 minutes, 80 % du domaine est pâteux. Il subsiste le grand canal au centre, qui débouche dans la zone encore liquide et produit des grandes vitesses de liquide. La carte de concentration est symétrique. A 130 minutes, la solidification est en train de finir. La carte de concentration finale est symétrique.

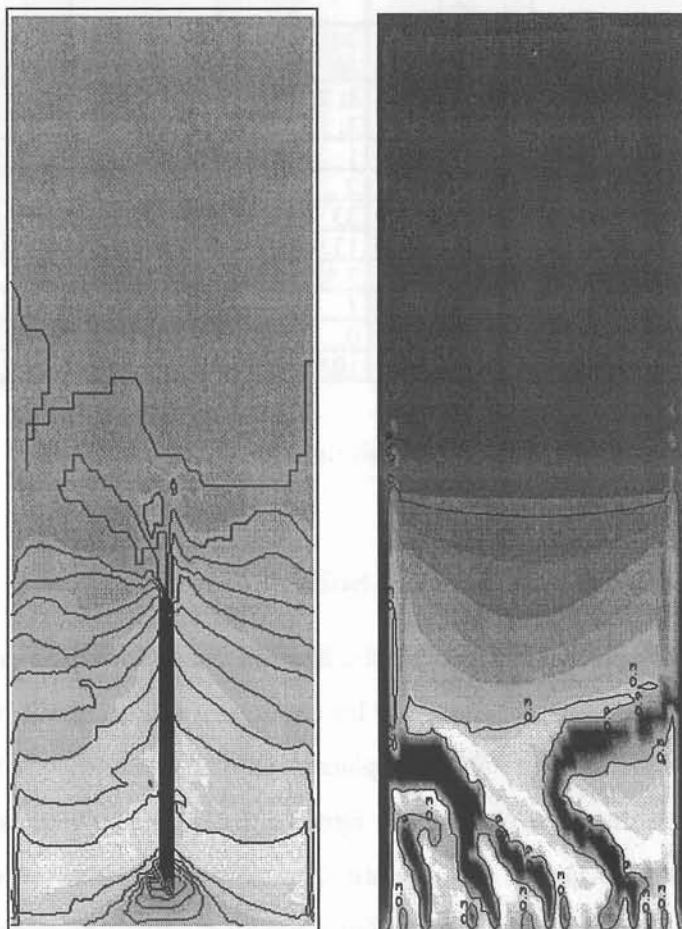


Figure 6-4. Cas 12. Concentration totale et isovaleurs de fraction liquide 15 min après le début de la solidification. a) code Solid, isovaleurs ϕ qui vont du 0 jusqu'à 1, chaque 0.1. b) code FHP, isovaleurs $\phi = 0.3; 0.9$.

6.5.2 Comparaison avec les résultats FHP.

De l'analyse des résultats nous pouvons tirer les conclusions suivantes:

- ▷ Les isothermes sont légèrement modifiées par le champ de vitesse pour FHP et Solid.
- ▷ Nous avons vérifié que la position de l'isovaleur de la fraction liquide zero ($\phi = 0$) progresse suivant une loi linéaire en racine du temps (règle de Chvorinov) pour les deux codes, avec pratiquement la même progression.
- ▷ La concentration maximum est très proche dans les deux cas. Par contre la concentration minimum est plus petite dans le code FHP.

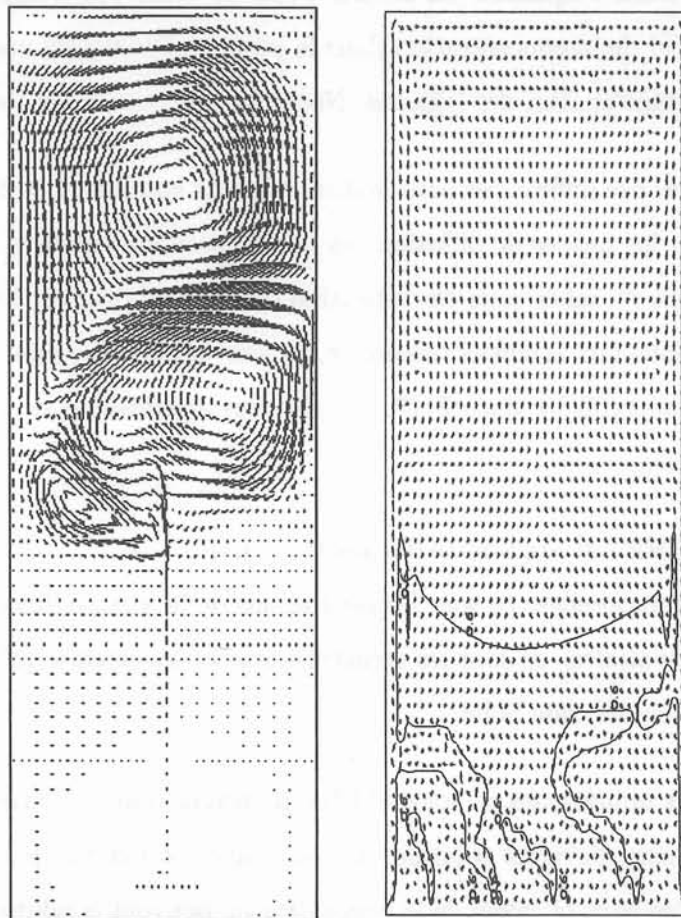


Figure 6-5: Cas 12. Champ de vitesses 15 min après le début de la solidification. a) code Solid, b) code FHP, isovaleur $\phi = 0.6$.

▷ Le champ de vitesse calculé par Solid est très différent de celui de FHP. Par conséquent, la distribution du soluté est très différente (cf. figure 6-4 et 6-5). On observe l'absence des canaux latéraux, mais l'apparition d'un canal central.

6.6 Conclusions.

Les différences entre les résultats peuvent être attribués à plusieurs causes. Il existe tout d'abord des différences dans la formulation des équations générales. Ainsi, dans l'équation de l'énergie Solid utilise une formulation enthalpique alors que le modèle FHP utilise la variable température. Dans l'équation du soluté, Solid ne tient pas compte de la diffusion dans le liquide. Le calcul de la concentration dans la phase solide utilise une loi intégrale qui pourrait être différente dans chacun des logiciels. Nous n'avons pas pu vérifier ce dernier point.

Il existe aussi des différences dans la discrétisation spatiale: Les deux schémas sont de deuxième ordre pour les termes de diffusion, les maillages étant réguliers. Par contre, le décentrage, qui réduit l'ordre du schéma de discrétisation du terme de convection, peut apporter certaines différences. Quant aux schémas temporels, ils sont aussi différents: totalement implicite dans Solid et implicite-explicite dans FHP. De plus, les algorithmes de résolution du système sont aussi très différents.

Le logiciel FHP fait apparaître des fluctuations

- ▷ à la fois temporelles: ce sont les oscillations de la vitesse dans le liquide.
- ▷ à la fois spatiales: ce sont les structurations et les poches qu'on ne retrouve pas ou peu dans la prédiction du code Solid.

Les résultats numériques du logiciel FHP montrent que le mouvement est très sensible aux forces d'Archimède d'origine solutale. La répartition du soluté pilote donc l'écoulement. De faibles différences dans le calcul de la concentration peuvent conduire à des différences notables de prédiction.

La différence des résultats est due peut-être aussi au traitement des conditions de frontière dans les vitesses dans le voisinage des parois. Dans le code FHP, qui utilise les éléments finis,

les vitesses sont imposées directement sur les bords d'élément, en particulier les vitesses nulles sur les parois latérales. Dans le code Solid, qui utilise la méthode des volumes finis, la condition de vitesse nulle est exprimée indirectement, les premières vitesses affichées sont déplacés vers l'intérieur d'une demi-maille (cf. Ahmad et al. [1]). La figure 6-6 montre que les premières vitesses au bord des parois présentent des composantes horizontales importantes. Or, il est clair que le champ de concentration local est directement soumis aux particularités du champ de vitesse. Le traitement des vitesses au voisinage des parois joue donc un rôle clé dans la prévision de canaux, comme nous avons vu dans le paragraphe 3.

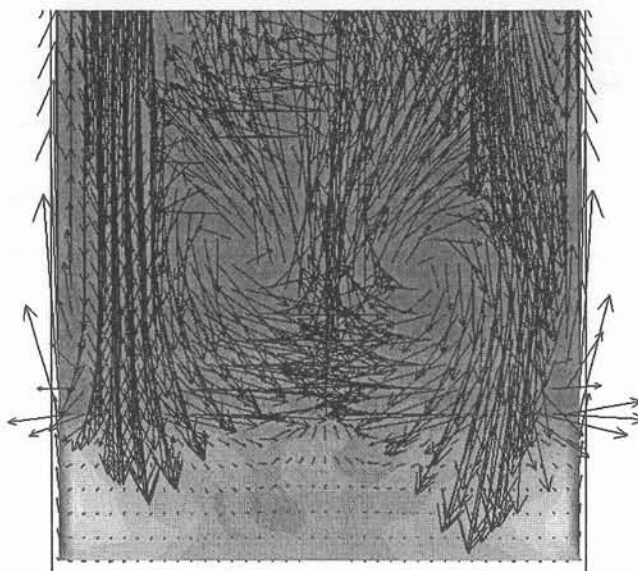


Figure 6-6. Champ de vitesses correspondant au cas 12, 5 minutes après le début de la solidification, code Solid.

The first part of the paper discusses the importance of the
 second part of the paper discusses the importance of the
 third part of the paper discusses the importance of the
 fourth part of the paper discusses the importance of the
 fifth part of the paper discusses the importance of the
 sixth part of the paper discusses the importance of the
 seventh part of the paper discusses the importance of the
 eighth part of the paper discusses the importance of the
 ninth part of the paper discusses the importance of the
 tenth part of the paper discusses the importance of the

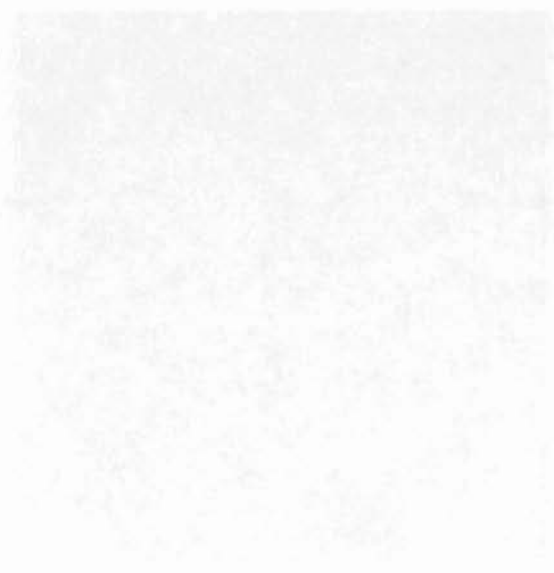


Figure 1: A diagram illustrating the relationship between the variables in the model. The diagram shows a central node connected to several other nodes, representing the flow of information or influence in the system.

Chapitre 7

Conclusions

7.1 Contribution de ce travail

Le modèle FHP nous a permis d'étudier en détail les mécanismes qui produisent la convection et ses effets sur la ségrégation dans un procédé de solidification directionnelle. Le modèle bidimensionnel permet de calculer les champs de vitesse de la phase liquide, la température, le champ de concentration du soluté de l'alliage et la fraction liquide. Les variables, dans la zone pâteuse, sont des grandeurs moyennées dans un volume élémentaire représentatif. Nous avons implanté dans le modèle existant des forces volumiques supplémentaires d'origine électromagnétique. L'essentiel du travail a consisté à faire des "expérimentations numériques" à partir du modèle en évaluant l'influence de divers paramètres, tels que les forces de volume, la perméabilité, la diffusion du soluté et la taille de la maille.

Lorsque la solidification est suffisamment lente, le modèle fait apparaître au sein de la zone pâteuse des zones liquides localisées telles que des canaux et des poches. Ces phénomènes sont une conséquence directe de la structure de l'écoulement dans la zone pâteuse et de la refusion partielle qui en résulte. Selon le modèle, l'écoulement dans ces poches et canaux peut être assez important. Il se traduit par un transport de soluté important et la formation de couches limites de diffusion solutale en bordure de ces poches et canaux, prolongeant ainsi le phénomène de refusion par la constitution d'une barrière de transport de soluté.

Nous avons mis en évidence l'étroite et complexe relation entre l'écoulement et la distri-

bution de soluté pendant la solidification. Dans la zone pâteuse, l'influence de la convection thermosolutale et de la convection forcée n'est significative que pour des valeurs de la fraction liquide supérieures à 0.7 environ. Par contre, il existe un couplage significatif entre la zone "tout-liquide" et la zone pâteuse par le biais des gradients de pression qui se développent le long du macrofront. Ainsi par exemple, les jets de liquide qui débouchent des canaux dans la zone "tout-liquide" créent une recirculation dans cette dernière région qui, elle-même, pilote un mouvement de drainage dans la zone pâteuse. Un phénomène semblable est observé lorsque les recirculations sont engendrées par les forces électromagnétiques. En changeant la forme des recirculations dans la zone liquide, on modifie l'écoulement dans la zone pâteuse, ce qui a pour effet de déplacer les canaux. Nous notons d'ailleurs que le brassage ne les élimine pas dans les configurations que nous avons étudiées.

Les essais numériques sur différents maillages spatiaux et temporels ont montré l'influence des artefacts numériques, distorsion, filtrage, etc. Les grandes échelles spatiales ne sont pas très sensibles à la taille de la maille. Ainsi par exemple, l'évolution temporelle de macrofront est identique même lorsque le maillage est grossier. Par contre, nous observons un filtrage numérique des petites échelles. Par exemple, les structurations du champ de soluté observées dans les cas de perméabilité discontinue s'estompent lorsque le maillage est moins dense.

Les résultats obtenus avec différentes lois de perméabilité montrent la grande sensibilité du modèle à ce paramètre. Ce résultat est prévisible puisque la structure du champ de soluté dépend beaucoup de l'écoulement dans la zone pâteuse, lui-même fortement dépendant de la perméabilité. Par exemple, une discontinuité de perméabilité peut entraîner une structuration du champ de soluté.

Les résultats obtenus dans le cas d'un "grand" domaine, montrent la persistance de canaux latéraux et un densité significative de canaux initiaux.

Enfin, nous avons comparé les résultats du logiciel FHP à ceux du logiciel Solid pour évaluer l'"effet logiciel" dans la simulation de la solidification. Nous avons obtenu des concordances qualitatives, notamment en ce qui concerne la position du macrofront, les valeurs de concentration maximum, les valeurs maximales du module de vitesse. Par contre, les configurations des

champs de vitesse et de soluté sont notablement différentes. Par exemple, le code FHP prédit, pour le cas considéré, deux canaux latéraux de ségrégation, alors que le code Solid n'en prédit qu'un seul. Il existe donc bien un effet logiciel.

7.2 Perspectives

A court terme, il serait souhaitable d'apporter de améliorations au modèle actuel, notamment:

- 1) rendre le modèle numérique plus robuste pour avoir une meilleur convergence.
- 2) modifier la formulation des équations pour mieux modéliser la solidification dans le régime eutectique.
- 3) faire des essais numériques sur des domaines plus grands.

A long terme, il serait nécessaire de prendre en compte les effets de la turbulence, notamment pour les grands domaines et des forces de volume importantes. Il serait aussi important du traiter les cas d'alliages multiconstitués. Enfin, l'aspect tridimensionnel du phénomène doit être pris en compte.

... ..

7.2 Ergebnisse

...

...

Annexe A

Sensibilité du schéma numérique au nombre de Péclet

Pour vérifier la réponse du schéma numérique utilisé au problème de la diffusion numérique, nous avons fait un test classique de validation de code.

Sur un domaine carré (fig. A-1), avec températures imposées sur les côtés

$$T_{AB} = T_{BC} = 100^{\circ}C$$

$$T_{AD} = T_{DC} = 200^{\circ}C$$

et une vitesse constante de composantes

$$\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et de module égal à } 1.$$

La solution exacte en températures sur la droite Ox est connue (fig. A-2), quand la diffusion tend vers zéro, c'est à dire $\alpha \rightarrow 0$; nous sommes dans un problème de convection pure. On fait un test de diffusion numérique, pour cela on résout que :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Sous forme adimensionnelle l'équation de la chaleur fait apparaître le nombre de Péclet, Pe

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Dans ce cas particulier, nous avons fait tourner le code, avec deux maillages différents. Le

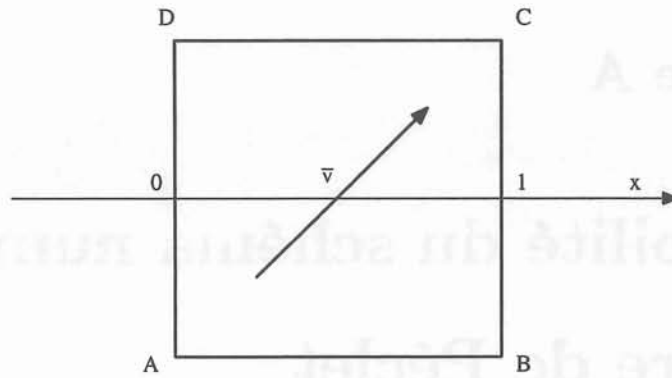


Figure A-1: Domaine carré où est fait le test.

premier maillage est de 20×20 éléments, et le deuxième est de 50×50 .

Les profils de température, le long de droite Ox , sont illustrés dans les figures A-3 et A-4. En faisant la comparaison avec la solution exacte A-2, nous pouvons déduire que ces résultats sont assez satisfaisants. Le schéma est diffusif sur cinq mailles dans le première cas et sur dix le deuxième. De ce test nous pouvons tirer la conclusion que le schéma numérique est acceptable pour peu que le maillage soit suffisamment dense.

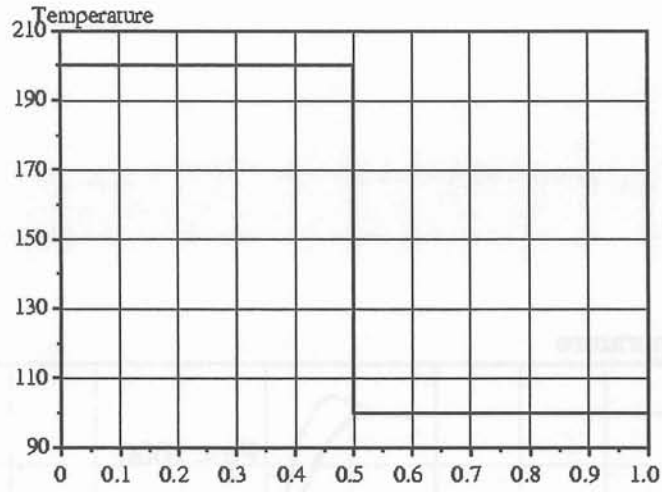


Figure A-2: Solution exacte, Température dans l'axe x.

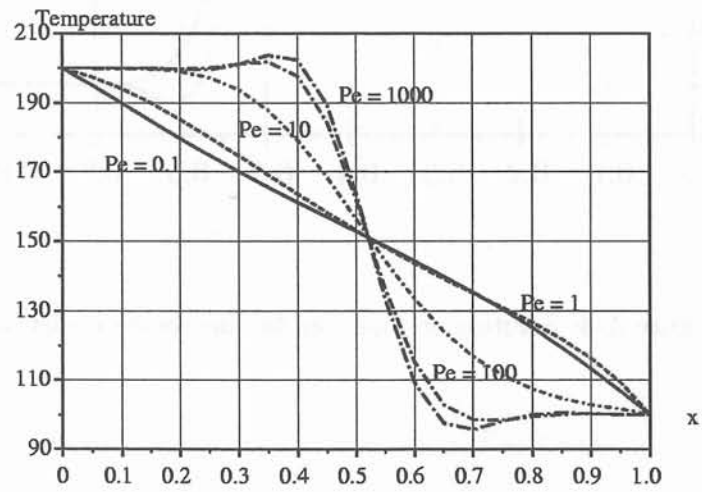


Figure A-3: Solution en fonction du nombre de Péclet, maillage 20X20.

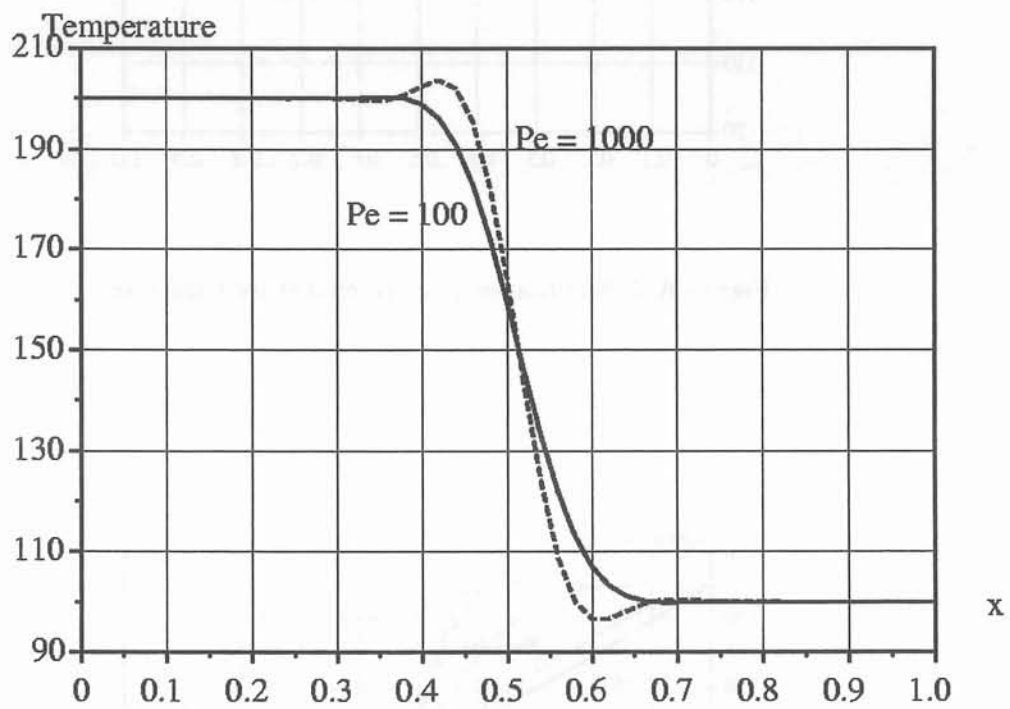


Figure A-4: Solution en fonction du nombre de Péclet, maillage 50x50.

Annexe B

Caractéristiques des cas de la comparaison Solid - FHP.

B.1 Caractéristiques du Cas 10.

Convection naturelle, flux supérieur non nul.

Simulation pendant 15 minutes avec le code FHP, jusqu'à 125 minutes avec le logiciel Solid.

Taille petite 5X10 mm.

Perméabilité isotrope; même loi pour Solid et pour FHP.

Conditions initiales :

Température sur la paroi inférieure, $T_0 = 576.74K$.

Gradient de température sur le domaine $G_0 = 1000K/m$.

Concentration $C_0 = 10\%$.

Perturbation initiale : angle de la gravité légèrement déviée , -89.99.

Conditions limites :

Température imposée sur la paroi inférieure, selon la loi

$T(t) = T_0 - pt; p = 1K/min$.

Gradient de température sur la paroi supérieure $G_l = 1000K/m$.

Flux nul sur les parois latérales.

Discretization:

Maillage spatial: 40X60 éléments.

Pas de temps :

Code FHP: 15 millisecondes.

Code Solid: 0.1 millisecondes les premiers 90 secondes, 0.5 millisecondes après.

B.2 Caractéristiques du Cas 11.

Convection naturelle, flux supérieur nul.

Refroidissement pendant 20 minutes.

Taille petite 5X10 mm.

Perméabilité isotrope même loi pour Solid et pour FHP.

Conditions initiales :

Température sur la paroi inférieure, $T_0 = 576.74K$.

Gradient de température sur le domaine $G_0 = 1000K/m$.

Concentration $C_0 = 10\%$.

Perturbation initiale : angle de la gravité légèrement déviée -89.99 .

Conditions limites

Température imposée sur la paroi inférieure, selon la loi

$T(t) = T_0 - pt; p = 1K/min$.

Flux nul sur les parois latérales et la paroi supérieure.

Discretization:

Maillage spatial: 40X60 éléments

Pas de temps :

Code FHP: 100 millisecondes. (Il n'y a pas de différence quand nous avons fait le calcul avec 200 millisecondes).

Code Solid: 0.5 millisecondes. jusqu'à 3 minutes 1 millisecondes après.

B.3 Caractéristiques du Cas 12.

Convection naturelle, flux supérieur nul.

Refroidissement pendant 20 minutes, avec le code FHP, jusqu'à 130 minutes avec le logiciel Solid.

Taille grande 30X90 mm.

Perméabilité isotrope, même loi pour Solid et pour FHP.

Conditions initiales :

Température sur la paroi inférieure, $T_0 = 576.74K$.

Gradient de température sur le domaine $G_0 = 1000K/m$.

Concentration $C_0 = 10\%$.

Perturbation initiale : angle de la gravité légèrement déviée, -89.99 .

Conditions limites:

Température imposée sur la paroi inférieure, selon la loi

$$T(t) = T_0 - pt; p = 1K/min.$$

Flux nul sur les parois latéraux et sur la paroi supérieure

Discretization:

Maillage spatial 40X60 éléments

Pas de temps :

Code FHP: Pas de temps entre 0 et 5 min 20 millisecondes

Pas de temps entre 5 et 20 min 40 millisecc

Code Solid:

$t \leq 60sec.$ $\Delta t = 10$ millisecc

$60 \leq t \leq 600sec.$ $\Delta t = 15$ millisecc

$600 \leq t \leq 720sec.$ $\Delta t = 0.1$ millisecc

$720 \leq t \leq 1200sec.$ $\Delta t = 0.5$ millisecc

1. $\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi \, dV = \int_V \rho \frac{d\phi}{dt} \, dV + \int_{\partial V} \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$
 2. $\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi \, dV = \int_V \rho \frac{d\phi}{dt} \, dV + \int_{\partial V} \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$
 3. $\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi \, dV = \int_V \rho \frac{d\phi}{dt} \, dV + \int_{\partial V} \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$
 4. $\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi \, dV = \int_V \rho \frac{d\phi}{dt} \, dV + \int_{\partial V} \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$
 5. $\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi \, dV = \int_V \rho \frac{d\phi}{dt} \, dV + \int_{\partial V} \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$
 6. $\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi \, dV = \int_V \rho \frac{d\phi}{dt} \, dV + \int_{\partial V} \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$
 7. $\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi \, dV = \int_V \rho \frac{d\phi}{dt} \, dV + \int_{\partial V} \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$
 8. $\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi \, dV = \int_V \rho \frac{d\phi}{dt} \, dV + \int_{\partial V} \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$
 9. $\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi \, dV = \int_V \rho \frac{d\phi}{dt} \, dV + \int_{\partial V} \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$
 10. $\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi \, dV = \int_V \rho \frac{d\phi}{dt} \, dV + \int_{\partial V} \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$

Annexe C

Liste des Notations

- $\vec{B} = (B_x, B_z)$ champ magnétique
- \bar{C}, C_b concentration totale de soluté
- c_s chaleur spécifique
- C_l concentration de soluté dans le liquide
- C_L concentration de soluté dans le liquide en relation avec le liquidus du diagramme de phase
- \bar{C}_s concentration moyenne locale de soluté dans le solide
- C_0 concentration dans le liquide avant la solidification
- D Diffusivité chimique de soluté
- Da_x, Da_y nombre de Darcy dans la direction x et z respectivement
- $\vec{F}^m = (Fm_x, Fm_z)$ force Laplace-Lorentz qui agit dans le liquide
- g accélération de la gravité
- G gradient thermique de référence
- G_s gradient de solidification
- H longueur de référence
- H_T hauteur du domaine bidimensionnel
- \vec{J} densité de courant
- k coefficient de partition
- K fonction de perméabilité isotrope
- K_m valeur moyenne de la perméabilité pour $\phi = 0.5$

K_x, K_z perméabilité suivant les axes x et z
 L chaleur latente
 \bar{L}, \hat{L} chaleur latente, et notation sans dimension
 l_P longueur de la couche de diffusion dans une poche
 l_{pat} hauteur du domaine pâteuse
 l_T largeur de la couche de diffusion dans une poche
 m pente de la droite de liquidus dans le diagramme de phase
 M_1 Rapport entre les forces électromagnétiques et les forces d'Archimède thermiques
 M_2 Rapport entre les forces électromagnétiques et les forces d'Archimède solutales
 M_3 Rapport entre les forces électromagnétiques et la force de Darcy dans la zone pâteuse
 n direction normal aux isovaleurs de concentration dans une poche
 p pression
 p_t direction tangentielle aux isovaleurs de concentration dans une poche
 Pe nombre de Péclet
 Pr nombre de Prandtl
 R_{aS}, R_{aT} nombre de Rayleigh, solutal et thermique
 R_{aP} nombre de Rayleigh relatif à la zone pâteuse
 S_c nombre de Schmidt
 t temps
 T température
 T_E température eutectique
 T_i température initiale
 T_0 température de référence
 t_s temps local de solidification
 u x composante de la vitesse superficielle
 u_l x composante de la vitesse de débit interdendritique
 U vitesse de référence
 U_{mp} vitesse moyenne dans la zone pâteuse
 V vitesse de solidification
 v module de la vitesse

v_{pat} module de la vitesse moyenné dans toute la zone pateuse
 V_T vitesse de déplacement des isothermes
 W largeur totale du domaine
 w z composante de la vitesse superficielle
 w_l z composante de la vitesse de débit interdendritique
 x, z coordonnées d'espace
 α diffusivité thermique
 α_k coefficients Petrov-Galerkin
 β_T, β_S coefficients d'expansion thermique et solutale respectivement
 γ_1 nombre de Reynolds de cellule
 γ_2, γ_3 nombre de Péclet dans les équations d'énergie et concentration de soluté
 δ épaisseur de peau électromagnétique
 Δt pas de temps
 ΔT_o intervalle de température de solidification, calculé à partir du diagramme de phases
 Δx intervalle spatial
 ε tolérance de convergence
 λ paramètre de pénalisation
 λ_m deux fois le pas polaire
 μ_0 perméabilité magnétique
 μ viscosité dynamique
 ν_0 viscosité cinématique
 ρ densité
 ρ_0 densité de référence
 σ conductivité électrique
 τ temps de référence
 ϕ fraction liquide de volume
 ϕ_{moy} fraction liquide moyenne dans la couche de diffusion d'une poche.
 ω pulsation du champ magnétique

The first part of the report discusses the importance of the study and the objectives of the research. It also provides a brief overview of the methodology used in the study.

The second part of the report presents the results of the study. It includes a detailed description of the data collected and the statistical analysis performed. The results are presented in a clear and concise manner, using tables and figures where appropriate.

The third part of the report discusses the implications of the study and provides recommendations for future research. It also includes a conclusion and a list of references.

The fourth part of the report is a bibliography of the sources used in the study. It includes a list of books, articles, and other publications that are relevant to the study.

Bibliographie

- [1] N. Ahmad, H. Combeau, J.L. Desbiolles, T. Talanti, G. Lesoult, J. Rappaz, M. Rappaz, C. Stomp, "Numerical simulation of macrosegregation: a comparison between finite volume method and finite element method and a confrontation with experiments", Metall. Trans A29, 617-630, 1998.
- [2] C.R. Anderson, C. Greengard, L. Greengard, and V. Rokhlin, "On the accurate Calculation of Vortex Shedding". Phys. Fluids. A, vol 2, 883-885, 1990.
- [3] C. Beckermann and V. Viskanta "Natural convection solid/liquid phase change in porous media" Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 31, 35-46, 1988.
- [4] W.D. Bennon and F. P. Incropera "A Continuum Model for Momentum, Heat and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change Systems. I. Model Formulation", Int. Journal Heat and Mass Transfer, 30, 2161-71, 1987.
- [5] C. Chen, D Briggs, and R. Wirtz, 'Stability of thermal convection in salinity gradient due to lateral heating ". Int.J. Heat Mass Transfer, 14, 57-65, 1971.
- [6] C.F. Chen, F. Chen, "Experimental study of directional solidification of aqueous ammonium chloride solutions". J. Fluid Mech. vol.227, 567-86, 1991.
- [7] G.S Cole, "Transport Processes and Fluid Flow in Solidification". Solidification, Seminar of the American Society for Metals, 201-267, 1969.
- [8] H. Combeau, J.-M. Drezet, A. Mo and M. Rappaz, "Modeling of Microsegregation in Macrosegregation Computations". Metall. Trans A27, 2314-2326, 1996.

- [9] H. Combeau, G Lesoult." Macrosegregations and mesoseggregations". Post-graduate course in solidification. Calcom, 1993.
- [10] S.M. Copley, A.F.Giamei, S. M. Johnson and M.F. Hornbecker. "The Origin of Freckles in Unidirectionally Solidified Casting". Metall. Trans. vol 1, 2193-2204, 1970.
- [11] A. Craik, "Wave interactions and Fluids Flows", Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1985.
- [12] Y. Dabo, H. Nguyen Thi, B. Billia, D. Camel, B. Drevet, M. D. Dupoy, J. J. Favier, "Microstructural transitions during initial transients in directional solidification of aluminium-nickel alloys" Revue de Metallurgie, 126, novembre 1999.
- [13] Donea, J "Applications de la Méthode des Eléments Finis aux Problèmes de Convection-Diffusion". Ecole d'été, Modelisation Numérique en Thermique, Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse. 1992.
- [14] J.E. Drummond, M.I. Tahir, "Laminar viscous flow through regular arrays of parallel solid cylinders" Int. J. Multiphase Flow, vol 10, pp. 515-540, 1984.
- [15] M.D. Dupouy, D. Camel, J.J. Favier, "Natural convection in directional dendritic solidification of metallic alloys. I. Macroscopy effects". Acta metall. vol. 37, No. 4, 1143-1157, 1989.
- [16] M. Dubke, K-H. Tacke, K-H Spitzer, and K. Schwerdtfeger, "Flow Fields in Electromagnetic Stirring of Rectangular Strands with Linear Inductors: Part I. Theory and Experiments with Cold Models". Met. Trans. B, 19B, 581-593, 1998.
- [17] F. Durand, M. Medina, , F. Duterrail, Y. Fautrelle "Solidification under Convection - Present Trends at EPM-Madylam Grenoble". Proceeding of Japan - France Cooperative Science Program Seminar on New Aspects of Electromagnetic Processing of Materials, 33-36, 1999.
- [18] Y. Fautrelle, G. Quillet, M. Medina, F. Durand, Y. Du Terrail : "Modelling of the mesoseggregations under the influence of natural or forced convection : a statical phase-averaged

- approach". EUROMECH Colloquium 408. Interactive dynamics of convection and solidification, Chamonix, (France), 19-22 March, 2000.
- [19] S. Felicelli, "Dendritic solidification under electromagnetic stirring" *Mecanica Computacional*, vol 13, 285-294, 1993.
- [20] S. D. Felicelli, "Simulation of Freckles during Vertical Solidification of Binary Alloys", Ph.D. dissertation, University of Arizona, Tucson, 1991.
- [21] S. D. Felicelli, "Three-dimensional Simulations of Freckles in Multicomponent Alloys". *Computational Mechanics, New Trends and Applications*. S. Idelsohn, E. Oñate and E. Dvorkin (Ed), CIMNE, Barcelona, Spain, 1-12, 1998.
- [22] S. D. Felicelli, J. C. Heinrich and D. R. Poirier, "Finite Element Analysis of Directional Solidification of Multicomponent Alloys", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 27, 207-227 1998.
- [23] S. D. Felicelli, J. C. Heinrich and D. R. Poirier, "Numerical Model for Dendritic Solidification of Binary Alloys", *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol 23, 461-481,1993.
- [24] S. D. Felicelli, J. C. Heinrich and D. R. Poirier, "Simulation of Freckles during Vertical Solidification of Binary Alloys", *Metallurgical Trans. B*, vol 22B, 847-859, 1991.
- [25] S. D. Felicelli, J. C. Heinrich and D. R. Poirier, "Three-dimensional Simulations of Freckles in Binary Alloys". *Journal of Crystal Growth*, 191, 879-888, 1998.
- [26] S. D. Felicelli, D. R. Poirier, A. F. Giamei and J. C. Heinrich "Simulating Convection and Macrosegregation in Superalloys", *Journal of Metals*, 21-25,1997
- [27] S. D. Felicelli, D. R. Poirier and J. C. Heinrich "Macrosegregation patterns in multicomponent Ni-base alloys", *Journal of Crystal Growth*, 177, 145-161, 1997.
- [28] S. D. Felicelli, D. R. Poirier and J. C. Heinrich, "Modeling Freckle Formation in Three Dimensions during Solidification of Multicomponent Alloys", *Metall. Trans B*, volume 29B, 847-855, 1998.

- [29] S. D. Felicelli, P.K. Sung, J. C. Heinrich and D. R. Poirier, "Transport Properties and Transport Phenomena in Casting Nickel Superalloys", *International Journal Thermophysics*, 19, 1657-1669, 1998.
- [30] M. C. Flemings, "Solidification Processing", McGraw-Hill Book Co., New York, NY, 1974.
- [31] M.C. Flemings, R. Mehrabian, G.E. Nereo, "Macrosegregation, part 2" , *Trans. Met. Soc. AIME* 242 , 41-49, 1968.
- [32] M.C. Flemings, G.E. Nereo, "Macrosegregation: Part1" , *Trans. Met. Soc. AIME* 239, 1449-1461, 1967.
- [33] M.C. Flemings, G.E. Nereo, "Macrosegregation, Part 3" , *Trans. Met. Soc. AIME* 242, 50-55, 1968.
- [34] S. Ganesan.Ph.D. Dissertation, University of Arizona, Tucson, AZ, 1990.
- [35] S. Ganesan, D. R. Poirier. "Conservation of Mass and Momentum for the Flow of Interdendritic Liquid during Solidification". *Metall. Trans. B*, vol 21B, 173-181, 1990.
- [36] A. F. Giamei, B. H. Kear: "On the nature of freckles in nickel base superalloys" *Metall. Trans.*, vol 1, 2185-92, 1970.
- [37] J. C. Heinrich, "Numerical simulation of Thermosolutal Instability during Directional Solidification of a Binary Alloy". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol 69, 65-88, 1988.
- [38] J. C. Heinrich, "A Finite Element Model for Double Diffusive Convection", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol 20, 447-64, 1984.
- [39] J. C. Heinrich, S. Felicelli, P. Nandapurkar and D. R. Poirier, "Thermosolutal convection during dendritic solidification of alloys. II. Nonlinear convection" *Metall. Trans. B*, vol 20B, 883-91, 1989.
- [40] J. C. Heinrich, S. Felicelli, D. R. Poirier, 'Vertical solidification of dendritic binary alloys'. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 89, 435-461, 1991.
- [41] J. C. Heinrich, R. S. Marshall, 'Viscous Incompressible Flow by a Penalty Function Finite Element Method', *Computer and Fluids*, vol 9, 73-83, 1981.

- [42] J. C. Heinrich, C. C. Yu, 'Finite Element Simulation of Buoyancy-Driven Flows with Emphasis on Natural Convection in a Horizontal Circular Cylinder' *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* vol 69, pp 1-27, 1988.
- [43] A. Hellawell, J.R. Sarazin, R.S. Steube. "Channel convection in partly solidified systems". *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 345, 507-544, 1993.
- [44] D.W. Kelly, S. Nakazawa, O. Zienkiewicz, J.C. Heinrich. "A Note on upwinding and anisotropic approximations to convective diffusion problems" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, 1705-1711, 1980.
- [45] W. Kurz, D.J. Fisher, "Fundamentals of solidification", Trans Tech Publications, Aedermannsdorf, Switzerland, 1989.
- [46] P. Lehmann, R. Moreau, D. Camel, R. Bolcato. "Modelisation of interdendritic convection in directional solidification by a uniform magnetic field". *Acta mater.* vol 46, No. 11, 4067-4079, 1998.
- [47] G. Lesoult "Solidification, cristallisation et microstructures". *Techniques de l'Ingenieur. M* 58 p. 1-26.
- [48] G. Lesoult, "Solidification, macrostructure et qualité des produits", *Techniques de l'Ingenieur*, traité *Métallurgie*, M59 (24 pp).
- [49] G. Lesoult, H. Combeau and M. Moukassi. "Interactions between solidification and fluid flow. Effects on cast structures and segregations". *Journal de Physique IV. Colloque C7*, supplement au *Journal de Physique III*, volume 3, 813-822, 1993.
- [50] R.J. McDonald, J.D. Hunt. "Fluid motion through the partially solid regions of a casting and its importance in understanding A type segregation". *Trans. Met. Soc. AIME* 245 1993-1997, 1969.
- [51] M. Medina, F. Durand, Y. Duterrail, Y. Fautrelle. 'Modélisation de la macro-ségrégation en solidification sous convection naturelle'. *Congres Français de Thermique SFT 99 'Thermique et Materiaux'*, 1999

- [52] M. Medina, Y. Duterrail, F. Durand, Y. Fautrelle. "Numerical simulation of the meso-segregation of binary alloys : influence of permeability laws and body forces". *Revue de Metallurgie*, 127, november 1999.
- [53] M. Medina, Y. Duterrail, F. Durand, Y. Fautrelle. "Effect of an AC travelling field on medium scale segregation, some results of a numerical model". *Proceedings of 3rd International Symposium on Electromagnetic Processing of Materials. EPM. 4-6 April 2000*, ed. by I.S.I.J, 451-456, 2000.
- [54] *Metals Handbook*, 8th ed., ASM, Metals Park, OH, vol 8, p. 330, 1973.
- [55] R. Moreau, "Magnetohydrodynamics". Kluwer, 1990.
- [56] P. Nandapurkar, D. R. Poirier and J. C. Heinrich, "The Momentum Equation for Dendritic Solidification", *Numer. Heat Transfer, Part A*, vol 19, 297-311, 1991.
- [57] P. Nandapurkar, D. R. Poirier, J. C. Heinrich and S. Felicelli, "Thermosolutal convection during dendritic solidification of alloys. I. Linear Stability Analysis" *Metall. Trans. B.*, vol 20B, 711-721, 1989.
- [58] H. Nguyen Thi, B. Billia and H. Jamgotchian, "Influence of thermosolutal convection on the solidification front during upwards solidification". *J. Fluids Mech.* 204, 581-597, 1989.
- [59] Ø. Nielsen, S.L. Arnberg, A. Mo, and H. Thevik "Experimental Determination of Mushy Zone Permeability in Aluminum-Copper Alloys with Equiaxed Microstructures". *Metall. Trans A.* vol 30 A, 9, 2455 - 2462, 1999.
- [60] S. V. Patankar , 'Numerical Heat Transfer and Fluid Flow', Hemisphere, Washington DC, 1980.
- [61] D. R. Poirier: "Permeability for flow of interdendritic liquid in columnar-dendritic alloys". *Metall. Trans. B*, vol 18B, 889-900, 1987.
- [62] D. R. Poirier, J. C. Heinrich and S. D. Felicelli, "Simulation of Transport Phenomena in Directionally Solidified Casting". *Proceeding of the Julian Szekely Memorial Symposium on Materials Processing*. H.Y. Sohn, J.W. Evans and D. Apelian (eds). TMS, Warrendale, PA, 393-410, 1997.

- [63] D. R. Poirier, P. Nandapurkar and S. Ganesan, "The energy and solute conservation equations for dendritic solidification", *Metall. Trans. B*, vol 22B, 889-900, 1991.
- [64] P.J. Prescott, F.P. Incropera, W.D. Bennon, "Modeling of dendritic solidification systems: reassessment of the continuum momentum equation". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol.34, no.9, 2351-2359, 1991.
- [65] P.J. Prescott, F.P. Incropera, 'The Effect of Turbulence on Solidification of a Binary Metal Alloy With Electromagnetic Stirring', *Journal of Heat Transfer, Trans. ASME*, vol 117, 716-724, 1995.
- [66] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P Flannery, "Numerical Recipes" 2nd Edition, p. 829 et suite.
- [67] S.D. Ridder, R. Mehrabian, S. Kou, "A review of our present understanding of macrosegregation in axi-symmetric ingots" (exp on Ni-Mo and Pb-Sn alloys in ESR geometry), in "Modeling of casting and Welding Processes", D. Apelian Ed., 261-283, 1979.
- [68] A. K. Sample, A. Hellawell. "The effect of mold precision in channel and macrosegregation in ammonium chloride-water analog castings", *Metall. Trans. B* 13B 495-501, 1982.
- [69] A. K. Sample, A. Hellawell. "The mechanism of formation and prevention of channel segregation during alloy solidification", *Metall. Trans. A* 15A 2163-2173, 1984.
- [70] A. S. Sangani, A. Acrivos, "Slow flow past periodic arrays of cylinders with application to heat transfer" *Int. J. Multiphase Flow*, vol 8, pp 193-206, 1982.
- [71] J. R. Sarazin, A. Hellawell. "Channel Formation in Pb-Sn, Pb-Sb, and Pb-Sn-Sb Alloy Ingots and Comparison with the System $\text{NH}_4\text{Cl-H}_2\text{O}$ ". *Metall. Trans A* 19, 1861-1871, 1988.
- [72] A. E. Scheidegger. "The Physics of Flow through Porous Media", 3rd ed., University of Toronto Press, Toronto, 141, 1974.
- [73] M. C. Schneider, C. Beckermann, 'A numerical study of the combined effects of microsegregation, mushy zone permeability and flow, caused by volume contraction and thermosolutal

- convection, on macrosegregation and eutectic formation in binary alloy solidification'. Int. J. Heat Mass Transfer. vol 38. N.18, 3455-3473, 1995.
- [74] J.L. Sohn, J.C. Heinrich, "A Poisson Equation Formulation for pressure calculations in Penalty Finite Elements Models for Viscous Incompressible Flows" International Journal for Numerical Methods in Engineering. vol 30, 349-361, 1990.
- [75] I. Vannier, H. Combeau, G. Lesoult. "Numerical model for prediction of the final segregation pattern of bearing steel ingots". Mater. Sci. and Eng., A173, 317-21, 1993.
- [76] V. Voller, A. Brent, Prakash, 'The modelling of heat, mass and solute transport in solidification systems', Int. Journal Heat Mass Transfer, vol 32, No. 9, 1719-1731, 1989.
- [77] V. Voller, C. Swaminathan, 'General source-based method for solidification phase change'. Numerical Heat Transfer, Part B, vol 19, 175-189, 1991.
- [78] M.G. Worster, "Convection in Mushy Layers", Annu. Rev. Fluid Mech, 29: 91-122, 1997.
- [79] O.C. Zienkiewicz, J.C. Heinrich, "The Finite Method and Convection Problems in Fluid Mechanics ". Finite Elements in Fluids vol 3, chapter 1 Gallagher, Zienkiewicz, Oden, Morandi-Cecchi and Taylor, Eds., Wiley, New York, 1978

