Dynamique des métaux liquides sous l'action de champs magnétiques alternatifs : Perspectives d'applications métallurgiques

Marcel Garnier

▶ **To cite this version:**

Marcel Garnier. Dynamique des métaux liquides sous l'action de champs magnétiques alternatifs : Perspectives d'applications métallurgiques. Electromagnétisme. UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE; INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1977. Français. ⟨NNT : ⟩. ⟨tel-01338773⟩

HAL Id: tel-01338773

https://hal.science/tel-01338773v1

Submitted on 29 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HAL Authorization

N° d'ordre

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE

ET

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE

DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Marcel GARNIER

Ingénieur E.N.S.H.G.

SUJET

Dynamique des métaux liquides sous l'action de champs magnétiques alternatifs Perspectives d'applications métallurgiques

---

Soutenue le 13 Juillet 1977 devant la Commission d'Examen

M. GERMAIN	Président
M. IVANES M. LESPINARD M. MOREAU M. MORICEAU	Examinateurs

GRENOBLE

AVANT PROPOS

Qu'il me soit permis, avant tout, de rendre hommage à la mémoire du Professeur CRAYA qui, après avois assuré ma formation de base en Mécanique des Fluides, a accepté de m'intégrer au sein de son groupe après m'avoir fait obtenir une allocation de recherche du C.N.R.S..

Je remercie vivement Monsieur GERMAIN qui me fait l'honneur de présider le Jury ainsi que Messieurs IVANES, LESPINARD et MORICEAU qui ont bien voulu l'assister dans cette tâche.

C'est à Monsieur MOREAU que j'exprime mes plus vifs remerciements et ma plus grande reconnaissance pour m'avoir fait découvrir, connaître et aimer la recherche. Non seulement son expérience, mais aussi son dynamisme et son enthousiasme m'ont encouragé à m'engager avec confiance dans ce domaine vaste et nouveau de la M.H.D. en champs magnétiques alternatifs et m'ont permis de surmonter nombre de difficultés.

Monsieur IVANES m'a toujours fait bénéficier de sa très haute compétence en électrotechnique et je l'en remercie.

C'est avec plaisir que je remercie tous les membres de l'équipe M.H.D. , ainsi que Monsieur ROCHE qui, avec beaucoup de soin et de minutie, a assuré la construction de l'installation expérimentale.

J'adresse également mes remerciements au Bureau d'Etudes, à l'Atelier et au Service Electronique pour leur aide efficace, ainsi qu'au Service Reprographie et à Madame LEBRE grâce à qui la réalisation matérielle de ce mémoire a été rendue possible.

S O M M A I R E

INTRODUCTION

CHAPITRE I

I) Notions générales 1
I.1. Equations fondamentales de la M.H.D. 1
I.2. Paramètres adimensionnels 3
I.3. Equation de l'induction 4
I.4. Effet spécifique aux champs magnétiques alternatifs : "Effet de peau" 6
I.5. Effets dynamiques produits par un champ magnétique 8

II) Définition de la "Busette Electromagnétique" 9
II.1. Mode d'action 9
II.2. Performances 11
II.3. Applications industrielles 16

III) Installation expérimentale 19
III.1. Description 19
III.2. Résultats expérimentaux 28

IV) Etude d'un dispositif électromagnétique de centrage, de guidage et de correction de forme de veines métalliques liquides 36
IV.1. Principe 36
IV.2. Réalisation des "Trous de Potentiel" pour le centrage et le guidage de jets métalliques. 38
IV.3. Résumé et classification des différents "Trous de Potentiel" suivant l'effet recherché 43

V) Tentative d'approche analytique des effets électromagnétiques produits dans un métal liquide par un "Trou de Potentiel"..... 47
V.1. Effet produit par un "Trou de potentiel" tournant formé de 2p conducteurs 48
V.2. Effet produit par un "Trou de potentiel" à rotation réversible 57

CHAPITRE II

I) La "Filière Electromagnétique" 69
I.1. Notion de champ glissant 69
I.2. Analyse qualitative des effets dynamiques produits par un champ magnétique glissant 70

II) Dimensionnement des inducteurs 74
II.1. Mode de calcul de l'effort obtenu 74
II.2. Performances de la "Filière Electromagnétique" 80
II.3. Calcul et dimensionnement des inducteurs de la "Filière Electromagnétique" 86

III) Conclusions 93

CHAPITRE III

I. Action de champs magnétiques glissants sur des écoulements de métaux liquides 97
I.1. Principales études réalisées dans le domaine 97
I.2. Formulation du problème 99

II. Grand nombre de Reynolds magnétique 103

III. Petit nombre de Reynolds magnétique 113
III.1. Demi espace fluide soumis à l'action d'un mono-inducteur .. 113
III.1.1. Faible paramètre d'intéraction 118
III.1.2. Paramètre d'intéraction élevé 119
III.2. Cas d'une bande métallique de largeur finie soumise à l'action du champ magnétique glissant créé par un inducteur bilatéral 128

IV. Conclusion 148

CHAPITRE IV

I. Introduction 151
II. Formulation du problème 154
III. Interprétation physique des conditions asymptotiques 166
III.1. Perturbations de grandes longueurs d'onde 166
III.2. Perturbations de petites longueurs d'onde 173

IV. Equation de dispersion et résultats 183

V. Conclusion 191

CONCLUSION

INTRODUCTION

Depuis de nombreuses années, les études de Magnétohydrodynamique (M.H.D.) concernant les champs magnétiques continus se sont beaucoup développées. Par contre les études relatives aux champs magnétiques non permanents (alternatifs, tournants ou glissants) n'ont suscité qu'un intérêt limité auprès des groupes de recherche si bien que les publications scientifiques ou techniques dans ce domaine demeurent actuellement en nombre très limité. Récemment, cependant, une prise de conscience du vaste champ d'application ouvert en métallurgie a retenu une attention grandissante en France et surtout à l'étranger. La coulée continue des métaux, les progrès des techniques de fonderie, la difficulté de séparer ou de mélanger de façon homogène des métaux liquides, la contamination des métaux fondus par les creusets qui les contiennent posent des problèmes très délicats, difficiles à résoudre avec les techniques habituelles, mais auxquels on peut espérer apporter des solutions à la fois élégantes et rentables par la mise en oeuvre de procédés électromagnétiques.

Il est très facile, grâce à des champs magnétiques non permanents d'engendrer des forces au sein même d'un métal liquide : en effet tout métal liquide situé à proximité d'un inducteur, ou d'un simple conducteur, parcouru par un courant électrique alternatif est le siège de variations de flux importantes et par conséquent se trouve parcouru par des courants électriques induits ou courants de Foucault. Ces courants électriques interagissent avec le champ magnétique créé par l'inducteur et donnent naissance à des forces : de l'énergie peut ainsi être transférée de l'inducteur dans le métal liquide sans qu'il soit nécessaire d'établir un contact entre eux. Cette énergie d'origine magnétique peut être transformée en énergie calorifique, par exemple dans les forces à induction, en énergie cinétique, comme dans les pompes électromagnétiques à induction, en énergie potentielle, comme en lévitation, en énergie mécanique ou sous d'autres formes encore. Il semble tout à fait possible, sans grande difficulté, de trouver pour chaque cas particulier, pour chaque application, la forme des inducteurs qui donneront la géométrie désirée aux courants électriques induits et aux champs

magnétiques pour engendrer les forces électromagnétiques produisant en tout point du métal liquide l'effet mécanique recherché .

Pourtant, bien que séduisantes, ces possibilités inspirent beaucoup de méfiance et soulèvent quelque réticence de la part des utilisateurs potentiels. L'origine de cet excès de prudence est claire : dans la plupart des cercles scientifiques et techniques, le sigle "M.H.D." est maintenant très discrédité en raison de l'échec des tentatives de conversion directe d'énergie par M.H.D.. Il est cependant tout à fait faux et injustifié d'extrapoler aux métaux les conclusions des études sur les gaz ionisés. Ceux-ci, aux températures où ils étaient utilisés, étaient de vulgaires isolants par rapport aux métaux liquides (le rapport des conductivités est de 10^4!). Il fallait donc, pour obtenir des rendements normaux et acceptables, les utiliser à des températures très hautes ($\sim$3000°C) ce qui multipliait les difficultés technologiques qui devenaient alors insolubles. Dans les métaux, tellement plus conducteurs, des effets mécaniques beaucoup plus importants peuvent être obtenus avec des champs magnétiques beaucoup plus faibles. Par ailleurs la grande souplesse des phénomènes d'induction, qui apparaissent en l'absence de support ou de véhicule matériel d'énergie entre l'inducteur et le milieu conducteur, permet d'éviter de mettre le métal liquide en contact avec les parois et rend les difficultés technologiques plus faibles que celles inhérentes aux méthodes classiques. Il était donc important de dégager des applications de la M.H.D. réellement intéressantes et pour cela de développer des recherches orientées vers des conditions très favorables (pas de contact avec les parois) où les chances de succès fussent très grandes compte-tenu de l'importance des forces mises en jeu (grande conductivité électrique). La métallurgie offre le champ d'application le mieux adapté à de telles recherches qui devraient permettre par leur succès, de rétablir une vision plus juste des perspectives réelles et des possibilités véritables de la M.H.D..

La possibilité de contenir un métal liquide à l'aide de forces électromagnétiques et de solidifier en même temps cette masse métallique a été brillamment démontrée par les réalisations soviétiques. Celles-ci ont donné lieu à des brevets ainsi qu'à la réalisation de machines maintenant industrialisées et commercialisées. Le groupe industriel français P.U.K. procède actuellement aux essais de l'un de ces procédés destiné à la coulée continue de l'aluminium et de ses alliages sous forme de lingots ou de billettes de diamètres importants.

Une première analyse des possibilités d'application en métallurgie de procédés électromagnétiques (pour le pompage, le transport, le brassage, la séparation, le confinement, la pulvérisation ....) a été faite à l'occasion de diverses Tables Rondes organisées sous les auspices de la Société Française de Métallurgie et de la D.G.R.S.T.* dans le courant de l'année 1973. Devant les progrès réalisés à l'étranger

---

* Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique

dans ce domaine, les industriels français reconnurent le caractère prometteur de ces applications qui, sans contact entre le métal liquide et un solide, sans grande consommation d'énergie, permettaient de résoudre un grand nombre de problèmes technologiques de la façon la plus absolue : en les supprimant, comme dans le procédé soviétique de coulée continue où la lingotière traditionnelle est éliminée et remplacée par des lignes de champ magnétique. Le sujet du travail exposé dans ce mémoire a été dégagé du souhait formulé par les industriels français de voir des équipes de recherche ne plus se limiter à l'étude de questions purement fondamentales, mais de s'orienter également vers ce vaste champ d'application.

L'objectif principal retenu pour cette recherche, subventionnée en grande partie par la D.G.R.S.T. (contrat d'aide à la recherche n° 74.7.1151. Action Concertée Métallurgie - d'une durée de 18 mois : 6 décembre 1974 - 6 Juin 1976) a été centré sur l'étude et la mise au point d'un procédé électromagnétique de coulée continue de billettes de petits diamètres.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à l'exposé du principe, au dimensionnement et au chiffrage des performances de deux dispositifs électromagnétiques dénommés "Busette Electromagnétique" et "Filière Electromagnétique" réalisant tous deux le confinement souhaité d'une veine métallique liquide de faible diamètre.

Au-travers de ces études appliquées se dégage la nécessité d'approfondir certains aspects plus fondamentaux concernant les mécanismes d'action des champs magnétiques alternatifs sur les métaux liquides. Ces aspects sont développés dans les deux dernières parties de ce mémoire. Le troisième chapitre est ainsi consacré à l'étude des effets produits par des champs magnétiques glissants, tels ceux utilisés dans les pompes électromagnétiques à induction, sur des écoulements de métaux liquides. Le quatrième et dernier chapitre analyse la question importante, capitale pour la mise en oeuvre de certains procédés, de la stabilité de l'interface métal liquide-atmosphère soumise à l'action d'un champ magnétique alternatif.

CHAPITRE I

I. NOTIONS GENERALES

I.1. Equations fondamentales de la M.H.D.

Considérons un fluide conducteur de l'électricité en mouvement dans une région où est entretenu un champ magnétique. La possibilité offerte à d'éventuels courants électriques de circuler dans le métal liquide et la présence d'un champ magnétique font apparaître trois types d'effets :

- tout d'abord un effet spécifique aux champs magnétiques non permanents qui est un effet d'induction. Le métal liquide soumis à un champ magnétique non permanent est le siège de variations de flux importantes qui donnent naissance à des forces électromotrices et par conséquent à des courants électriques induits dont l'intensité est d'autant plus forte que la fréquence du champ magnétique est plus élevée : tout se passe comme si le métal liquide était le secondaire d'un transformateur dont le primaire serait constitué par l'inducteur qui entretient le champ magnétique. Cet effet, rigoureusement nul en régime permanent, mais essentiel en régime non permanent sera le centre de nos préoccupations dans les chapitres à venir. Le phénomène d'induction existe dès qu'un champ magnétique, variable dans le temps, se trouve appliqué au voisinage d'un milieu conducteur, que ce milieu soit solide ou liquide, immobile ou en mouvement ; il vient se superposer à deux autres effets présents, pour leur part, en régime permanent :

- le mouvement des particules fluides à travers les lignes de champ fait apparaître d'autres forces électromotrices et d'autres courants électriques qui, comme les courants induits, modifient le champ magnétique initialement appliqué.

- puisque les particules fluides véhiculent des courants électriques, il apparaît, lors de la traversée des lignes de champ, des forces électromagnétiques qui modifient le mouvement du fluide.

Sans trop anticiper sur l'analyse de ces différents effets, qui sera menée de façon plus complète dans les paragraphes à venir, nous pouvons dès à présent signaler une différence fondamentale existant entre l'effet d'induction et les deux autres. Le phénomène d'induction présente la grande particularité de pouvoir être maîtrisé de l'extérieur : c'est à dire qu'à une intensité donnée des courants dans un inducteur et à une fréquence fixée de ces courants, correspondent des courants induits et un champ magnétique d'amplitude et de géométrie parfaitement déterminées dans le milieu conducteur, quel que soit le champ de vitesse qui anime ce dernier. Les deux autres effets, par contre, sont totalement interdépendants par le couplage qu'ils assurent entre le champ magnétique et le mouvement du fluide qui s'adaptent l'un et l'autre de façon à parvenir à un équilibre. Ces deux effets échappent donc à un contrôle extérieur direct.

Les phénomènes d'induction ainsi que cette double interaction entre le mouvement du fluide et le champ magnétique appliqué sont exprimés dans le système formé par les équations de Maxwell et les équations de Navier Stokes prenant en compte les forces électromagnétiques ou forces de Laplace. Le système d'équations de base est ainsi le suivant :

Equations de MAXWELL

$$\begin{cases} \overrightarrow{Rot}\,\vec{B} = \mu \vec{J} \\ \overrightarrow{Rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\,\vec{B} = 0 \end{cases}$$

(condition initiale de l'équation précédente)

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}\right)$$ Loi d'Ohm généralisée aux milieux mobiles

Equations de NAVIER-STOKES

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{grad\,P} + \vec{J} \wedge \vec{B} + \mu \overrightarrow{\Delta V} \\ \vec{J} \wedge \vec{B} = \text{Force de LAPLACE par unité de volume} \end{cases}$$

$$div\,\vec{V} = 0$$ Equation de continuité

I.2. Paramètres adimensionnels

Supposons choisis une vitesse V, une longueur L et un champ magnétique B caractéristiques d'un système particulier dans une géométrie donnée. Les équations précédemment écrites peuvent être rendues adimensionnelles, faisant apparaître les nombres sans dimension suivants :

$R_e = \frac{VL}{\nu}$ — Nombre de Reynolds qui représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité.

$M = BL\left(\frac{\sigma}{\rho\nu}\right)^{1/2}$ — Nombre de Hartmann, dont le carré représente le rapport entre les forces électromagnétiques et les forces de viscosité ou encore le rapport entre les dissipations par effet Joule et par viscosité.

$N = \frac{\sigma B^2 L}{\rho V}$ — Paramètre d'intéraction qui traduit le rapport entre les forces électromagnétiques et les forces d'inertie.

$R_m = \mu\sigma V L$ — Nombre de Reynolds magnétique qui traduit l'importance relative de la modification du champ magnétique inducteur introduite par les courants électriques dus au mouvement des particules fluides.

Au laboratoire ou dans les installations industrielles classiques avec les métaux liquides habituels, ce nombre est toujours faible devant l'unité : ceci signifie que le champ magnétique dans le milieu conducteur liquide est identique à celui qui existerait dans un milieu isolant de même géométrie.

$R_\omega = \mu\sigma\omega L^2$ — Nombre adimensionnel construit comme un nombre de Reynolds magnétique. Ce nombre est spécifique aux phénomènes liés à la présence de champs magnétiques alternatifs puisqu'il est formé avec la pulsation ω de tels champs. R_ω traduit l'importance des phénomènes d'induction introduits par la non stationnarité du champ magnétique.

Contrairement à R_m, R_ω peut être rendu très grand pour des pulsations ω élevées : le champ magnétique en présence d'un milieu conducteur devient alors totalement différent de celui qui existerait dans ce milieu s'il était isolant, à cause de la présence de forts courants induits qui modifient le champ appliqué.

Afin de mieux saisir la signification des nombres adimensionnels R_m et R_ω, il convient d'isoler une équation caractéristique du champ magnétique dans laquelle ils apparaissent tous les deux et où chacun se trouve associé à un mécanisme particulier : l'équation de l'induction.

I.3. Equation de l'induction

L'élimination de la densité de courant $\vec{J}$ et du champ électrique $\vec{E}$ entre les équations de Maxwell et la loi d'Ohm généralisée conduit à une relation n'intéressant que le champ magnétique et la vitesse locale du fluide : c'est l'équation de l'induction qui s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{Rot}\left(\vec{V} \wedge \vec{B}\right)$$

Cette équation traduit le fait que la variation temporelle locale du champ magnétique résulte d'une part d'un effet de diffusion ($\frac{1}{\mu\sigma} \overrightarrow{\Delta B}$) et d'un effet de convection par l'écoulement ($\overrightarrow{Rot}\, \vec{V} \wedge \vec{B}$). L'équation de l'induction est tout à fait semblable à son homologue en hydrodynamique classique : l'équation du tourbillon

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \nu \overrightarrow{\Delta \Omega} + \overrightarrow{Rot}\left(\vec{V} \wedge \vec{\Omega}\right)$$

qui traduit la même coexistence des phénomènes de diffusion et de convection qui règlent l'évolution temporelle de $\vec{\Omega}$.

Ces deux équations s'écrivent en variables adimensionnelles, notées en minuscules :

$$R_e \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial T} = \Delta \vec{\omega} + R_e \overrightarrow{Rot}\left(\vec{v} \wedge \vec{\omega}\right)$$ pour l'équation du tourbillon

T désigne le temps adimensionnel $T = t \times \frac{V}{L}$

$$R_\omega \frac{\partial \vec{b}}{\partial \tau} = \overrightarrow{\Delta b} + R_m \overrightarrow{Rot}\left(\vec{v} \wedge \vec{b}\right)$$ pour l'équation de l'induction

τ désigne le temps adimensionnel $\tau = \omega t$, où ω est la pulsation du champ magnétique inducteur

R_m, comme R_e dans l'équation du tourbillon, traduit l'importance relative du mécanisme de convection vis à vis du mécanisme de diffusion.

$$R_e = \frac{\| \overrightarrow{Rot}(\vec{V} \wedge \vec{\Omega}) \|}{\| \nu \overrightarrow{\Delta \Omega} \|} = \frac{\| (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} \|}{\| \nu \overrightarrow{\Delta V} \|}$$

$$R_m = \frac{\| \overrightarrow{Rot}(\vec{V} \wedge \vec{B}) \|}{\| \frac{1}{\mu\sigma} \overrightarrow{\Delta B} \|} = \frac{\| \sigma(\vec{V} \wedge \vec{B}) \|}{\| \frac{1}{\mu} \overrightarrow{Rot B} \|} = \frac{\| \vec{j} \|}{\| \vec{J} \|}$$

$R_m \ll 1$ signifie que les courants électriques $\vec{j} = \sigma(\vec{V} \wedge \vec{B})$ liés au mouvement du fluide sont très faibles devant les courants électriques $\vec{J} = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{Rot B}$ présents dans le métal liquide. Le champ de vitesse est donc parfaitement incapable de modifier le champ magnétique. Cette condition, toujours réalisée en laboratoire ou dans les installations industrielles, nous permettra très souvent d'ignorer que le fluide est en mouvement lors de la détermination du champ magnétique.

R_ω se présente comme le paramètre caractéristique de l'effet d'induction introduit par la variation temporelle du champ magnétique

$$R_\omega = \frac{\| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \|}{\| \frac{1}{\mu\sigma} \overrightarrow{\Delta B} \|} = \frac{\| \sigma \vec{E} \|}{\| \frac{1}{\mu} \overrightarrow{Rot B} \|} = \frac{\| \vec{j}' \|}{\| \vec{J} \|}$$

$R_\omega \ll 1$ traduit le fait que la variation temporelle du champ magnétique est beaucoup trop lente pour donner naissance à des courants induits $\vec{j}' = \sigma \vec{E}$ significatifs devant les courants électriques $\vec{J}$ existant dans le milieu conducteur. Tout se passe alors comme si le champ magnétique était permanent.

$R_\omega \gg 1$ traduit au contraire l'importance des courants électriques induits par la non stationnarité de $\vec{B}$. Compte-tenu d'une part, de la remarque précédente précisant que R_m restait toujours faible devant l'unité, d'autre part de la loi d'Ohm généralisée qui s'écrit par conséquent :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \vec{j}'$$

la condition $R_\omega \gg 1$ implique nécessairement que la longueur typique L choisie pour construire $R_\omega = \mu\sigma\omega L^2$, n'est pas caractéristique du mécanisme régissant le champ magnétique. La grandeur typique δ doit en effet être telle que :

$$\mu\sigma\omega\delta^2 = \frac{\|\vec{j'}\|}{\|\vec{j}\|} = 1$$

Par conséquent $\delta \ll L$ et le champ magnétique est caractérisé par des variations rapides dans des couches fines d'épaisseur δ . Ce nouvel effet lié au caractère alternatif du champ magnétique est appelé "Effet de Peau".

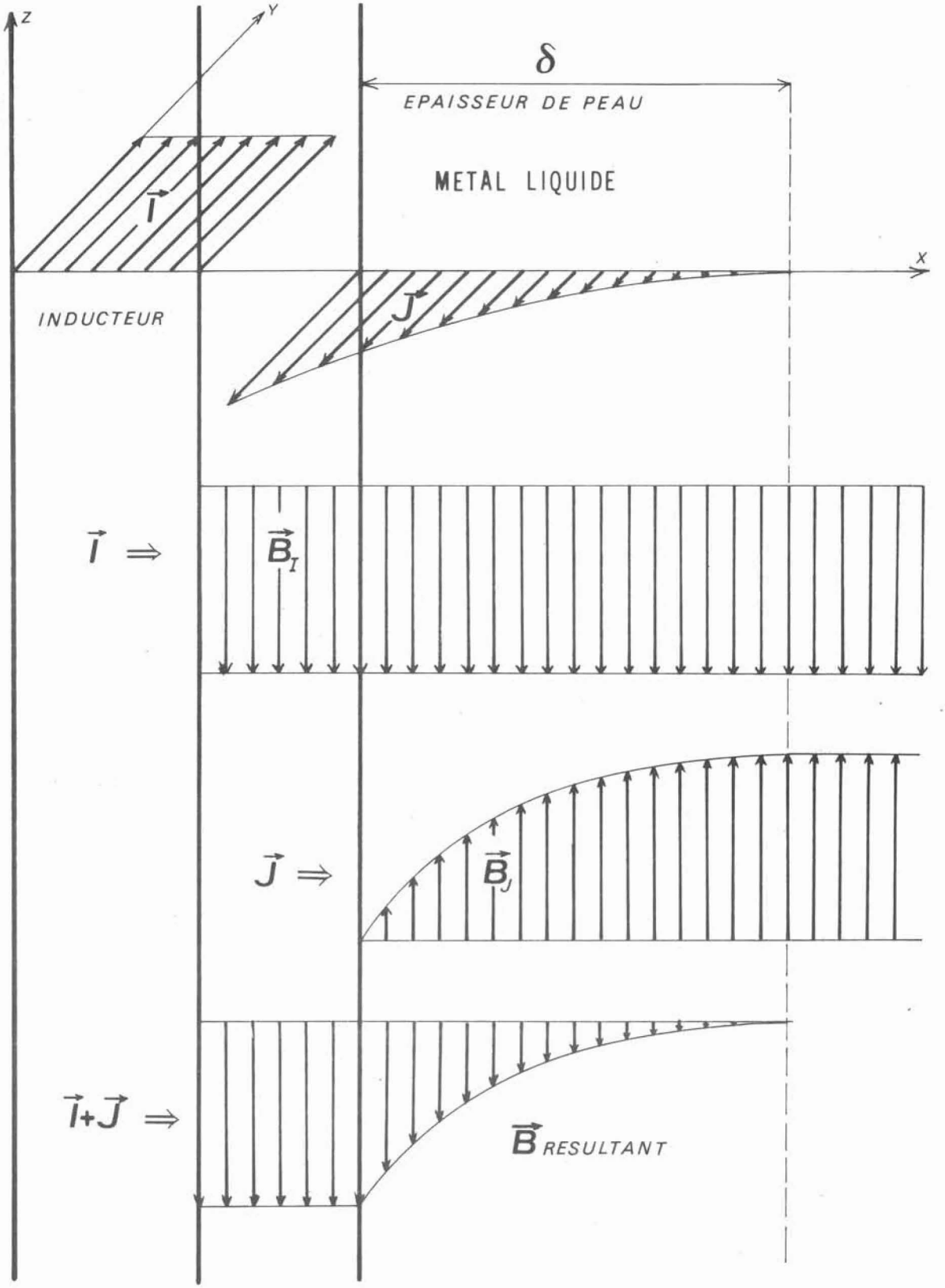
I.4. Effet spécifique aux champs magnétiques alternatifs : "Effet de Peau".

Cet effet apparait lorsque $R_\omega \gg 1$ c'est à dire lorsque le champ magnétique est régi par un mécanisme de diffusion pure. L'équation de l'induction se réduit alors à une équation parabolique du type équation de la chaleur :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \overrightarrow{\Delta B} = \eta \overrightarrow{\Delta B}$$

où η est la diffusivité magnétique $\in L^2 T^{-1}$

Le mécanisme de diffusion qui détermine la distribution du champ magnétique impose que toute perturbation du champ magnétique ne puisse pendant un temps t se propager au-delà d'une distance $\ell = (\eta t)^{1/2}$. De même si la variation temporelle du champ magnétique est imposée, comme dans le cas d'un champ magnétique de pulsation ω , la profondeur de pénétration du champ magnétique et des courants induits qui lui sont associés est limitée à l'intérieur d'un milieu conducteur à une zone superficielle d'épaisseur $\delta = (\eta/\omega)^{1/2} = (\mu\sigma\omega)^{-1/2}$. Ce phénomène est appelé "Effet de Peau". Cet effet très caractéristique des champs magnétiques non permanents peut se comprendre de façon beaucoup plus intuitive. Soit en effet un champ magnétique alternatif entretenu au voisinage de la surface d'un milieu conducteur : les variations temporelles du champ magnétique induisent à l'intérieur de ce milieu des forces électromotrices et par suite des courants induits qui s'opposent, conformément à la loi de Lenz, à ces variations en créant un champ magnétique en opposition de phase avec le champ inducteur. Ainsi, à mesure que l'on pénètre dans le milieu conducteur le champ magnétique résultant décroît, alors que la densité de courant totale augmente jusqu'à produire un champ égal et opposé au champ inducteur. Au-delà d'une certaine épaisseur superficielle, le champ magnétique ainsi que les courants induits sont donc rigoureusement nuls dans le milieu conducteur.


Z
Y
X
δ
EPAISSEUR DE PEAU
METAL LIQUIDE
I
J
INDUCTEUR
I ⇒
B_I
J ⇒
B_J
I+J ⇒
B RESULTANT

I.5. Effets dynamiques produits par un champ magnétique

Les forces qui prennent naissance par unité de volume dans un métal liquide soumis à un champ magnétique sont les forces de Laplace $\vec{J} \wedge \vec{B}$. Dans le cas particulier des champs magnétiques alternatifs de fréquence élevée, qui nous intéresse principalement, les courants induits par le mouvement du fluide seront toujours très faibles ($Rm \ll 1$) devant les courants induits par la pulsation du champ magnétique inducteur ($R_\omega \gg 1$) qui seront seuls responsables de la production des forces électromagnétiques alors indépendantes du champ de vitesse.

Les équations de Maxwell permettent d'exprimer les forces de Laplace en fonction uniquement du champ magnétique :

$$\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu}\left(\overrightarrow{Rot}\,\vec{B}\right) \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu}\left[B_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i} B_j B_j\right] \vec{u}_i$$

Puisque le champ magnétique est solénoïdal ($\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0$) cette force peut se mettre sous la force de la divergence d'un tenseur de contraintes T_{ij} = le tenseur de Maxwell

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu}\left[B_i B_j - \frac{B^2}{2}\,\delta_{ij}\right]$$

La partie isotrope de ce tenseur fait apparaître dans un métal liquide une pression $\frac{B^2}{2\mu}$ = la pression magnétique, que nous mettrons à profit dans certains dispositifs pour modifier le champ de pression existant dans une veine métallique et par conséquent la vitesse et la géométrie de cette veine.

La partie déviatoire du tenseur est à l'origine de tension de module $\frac{B^2}{\mu}$ le long des lignes de champ. Ce sont dans ces tensions que résident les effets principaux des forces électromagnétiques dont elles constituent la partie irrotationnelle. A titre d'exemple nous citerons l'effet produit par ces tensions sur la stabilité de l'interface entre deux fluides superposés : problème qui retiendra notre intérêt dans les chapitres ultérieurs. Lorsque les deux fluides sont de conductivité infinie les lignes de courant et les lignes de champ magnétique sont confondues : ainsi toute perturbation introduisant une déformation de l'interface et par suite une courbure des lignes de champ doit lutter contre ces tensions qui ramènent le système à son état initial et sont à l'origine de l'effet stabilisant du champ magnétique.

II. DEFINITION DE LA "BUSETTE ELECTROMAGNETIQUE"

En métallurgie on désigne sous le nom de busette un orifice profilé destiné à la coulée d'un métal en fusion. Les busettes habituellement employées sont de diamètres assez élevés ($\geqslant$ 5 cm) pour éviter tout risque de bouchage et donnent par conséquent des jets de coulée de gros diamètres. La busette électromagnétique est destinée à être placée à la sortie d'une busette matérielle et a pour effet de contracter la veine métallique formée et d'amener son diamètre à une valeur prédéterminée sans aucun contact avec une quelconque paroi. Un orifice de coulée immatériel dont le diamètre est réglable à volonté et avec une très grande souplesse est réalisé par un tel dispositif : les actions électromagnétiques sur le métal liquide se substituent aux efforts exercés habituellement par les parois qu'il est possible de supprimer.

II.1. Mode d'action

La busette électromagnétique met à profit d'une part la possibilité d'obtenir une pression d'origine magnétique, l'effet de peau d'autre part. Elle se compose de deux éléments essentiels :

- un solénoïde parcouru par des courants alternatifs de fréquence élevée, coaxial à la busette matérielle à la sortie de laquelle il se place.

- un "écran" constitué par un tube de cuivre placé entre le solénoïde et la veine métallique (Fig. 1).

Le solénoïde crée un champ magnétique axial alternatif de même fréquence que les courants inducteurs. A l'amont de l'écran de cuivre ce champ magnétique diffuse à partir de la surface du métal liquide sur une épaisseur de peau δ d'autant plus faible que la fréquence du champ magnétique est élevée. Les courants induits dans cette peau sont à chaque instant dans une direction azimutale comme les courants inducteurs et en opposition de phase avec ceux-ci. Leur interaction avec le champ magnétique donne des forces centripètes équilibrées par une surpression interne $\frac{B^2}{2\mu}$ avec un fort gradient dans la peau où sont localisées les forces électromagnétiques. Le métal liquide se trouve ainsi enserré dans une sorte d'enveloppe constituée par la peau électromagnétique (Fig. 2).

Si le tube de cuivre possède une épaisseur supérieure à la profondeur de pénétration de ce métal, à la fréquence utilisée, le champ magnétique diffuse depuis la paroi extérieure et s'annule avant d'atteindre la paroi interne du tube qui joue alors le rôle d'un écran vis à vis du champ magnétique puisqu'il isole une région, où le champ magnétique est rigoureusement nul en tout point, d'une région où il peut avoir

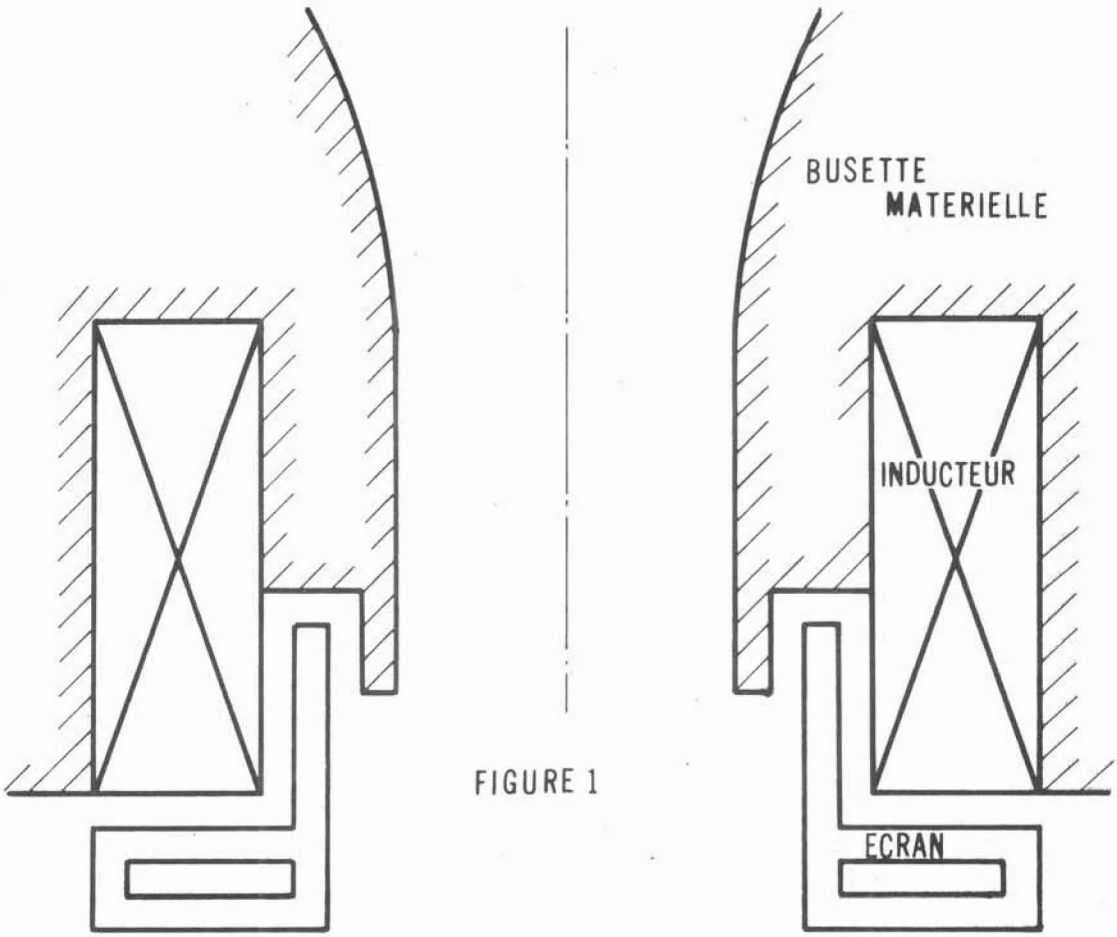


FIGURE 1

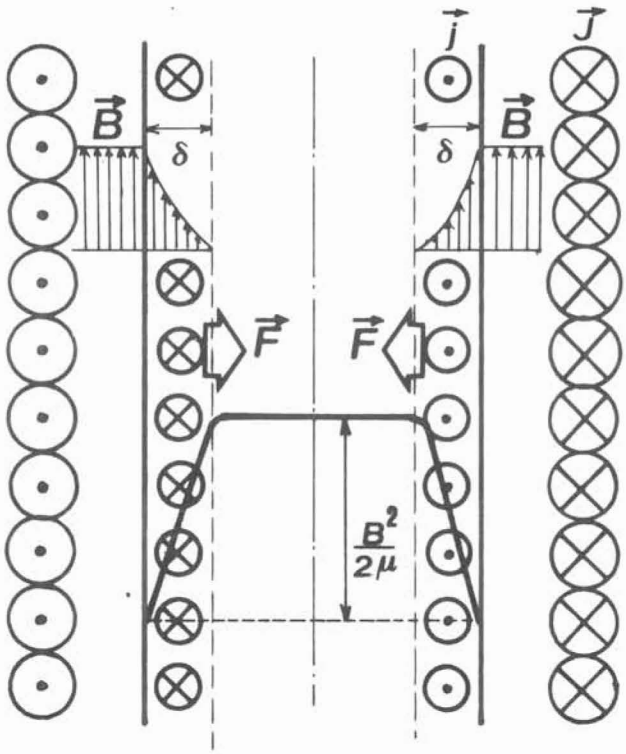
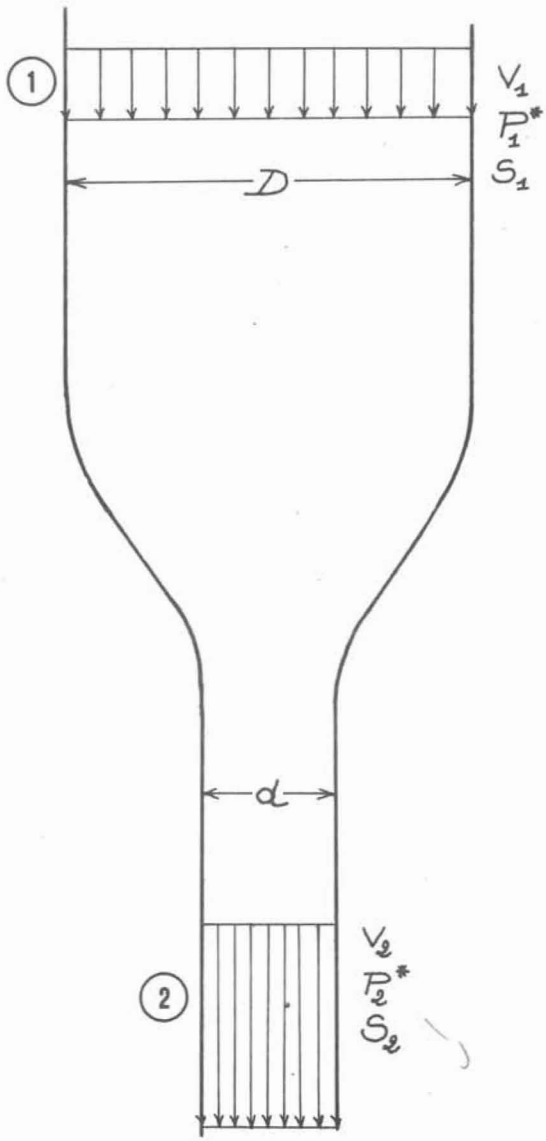


FIGURE 2

une intensité très forte. Les lignes de champ initialement localisées dans la peau du métal liquide doivent nécessairement éviter la région interne à l'écran qui leur est interdite et pénétrer dans l'écran de cuivre. De plus si la fréquence est élevée, le mécanisme de diffusion prédominant impose des variations localisées dans des couches très minces et par conséquent la transition se fait très rapidement au voisinage de l'arête supérieure de l'écran de cuivre. La pression au sein du métal liquide, égale à $\frac{B^2}{2\mu}$ dans le solénoïde, s'annule brusquement, comme le champ magnétique, dès que le liquide pénètre dans la zone protégée par l'écran. Cette variation brutale de pression entraîne nécessairement une variation aussi brutale de vitesse et par suite une modification rapide de la section de la veine métallique liquide (Figure 3).

II.2. Performances

Considérons deux sections droites de la veine métallique liquide, la première ① située à l'intérieur du solénoïde à l'amont de l'écran de cuivre ; la seconde ② située dans la région protégée par l'écran. Dans chacune de ces sections ① et ② nous notons respectivement V_1 et V_2 les vitesses uniformes du métal liquide, D et d les diamètres de la veine métallique, S_1 et S_2 les sections correspondantes, P_1^* et P_2^* les pressions généralisées. Le métal liquide n'est soumis qu'à des forces irrotationnelles qui sont la pesanteur et les forces électromagnétiques équilibrées par un gradient de pression. Par suite d'une section droite à une autre la charge H se conserve.



$$H = \frac{P_1^*}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2^*}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

g désigne l'accélération dela pesanteur
ρ la masse volumique du métal liquide

De plus, l'invariance du débit Q entre les deux sections impose :

$$Q = S_1 V_1 = S_2 V_2$$

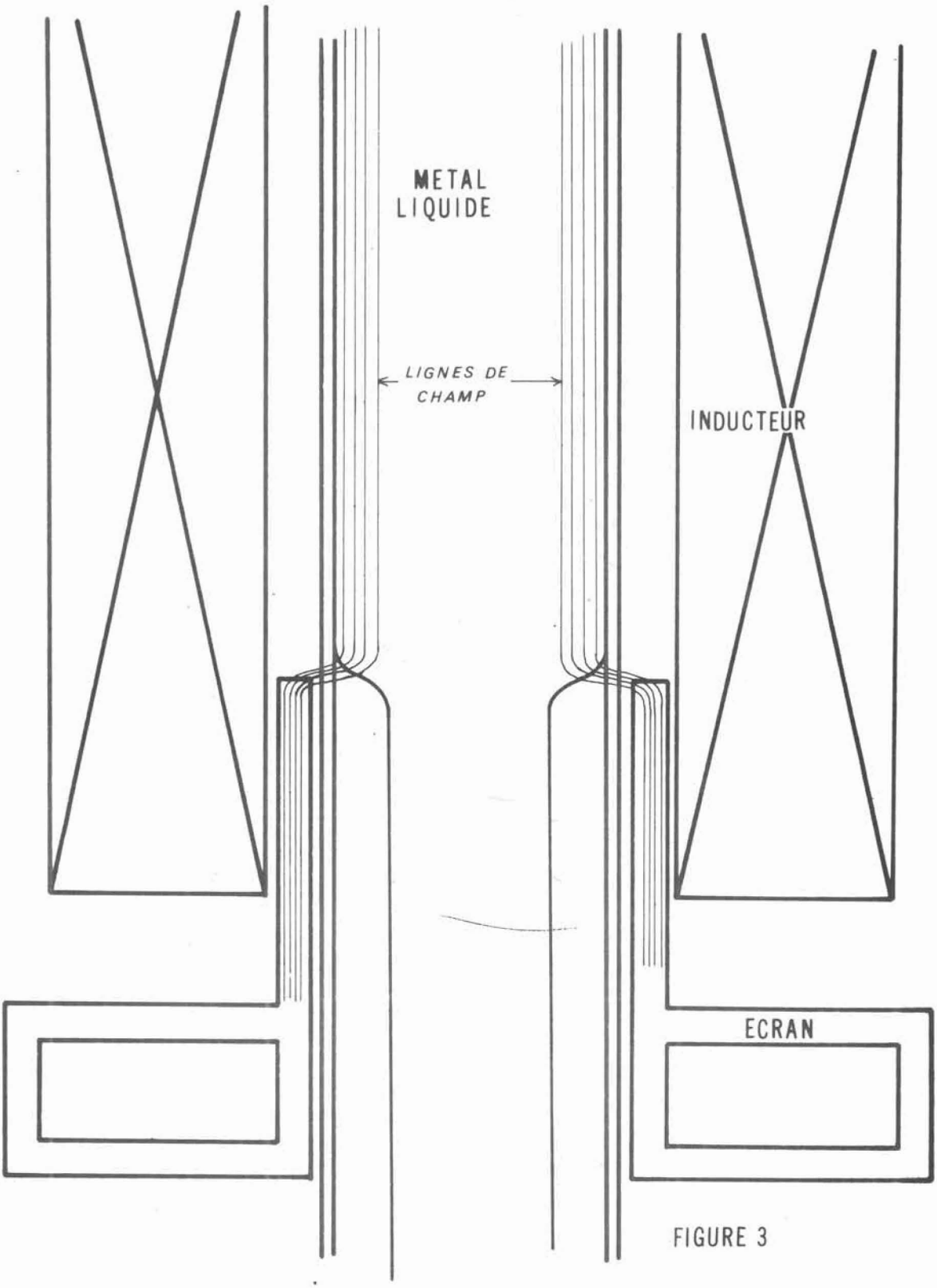


FIGURE 3

Puisque le différence $P_1^* - P_2^*$ est imposée par le dispositif électromagnétique et a pour valeur $\frac{B^2}{2\mu}$, l'invariance de Q et H permet de déduire le rapport des vitesses :

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(1 + \frac{B^2}{\mu \rho V_1^2}\right)^{-1/2}$$

et par suite le coefficient de contraction :

$$\alpha = \frac{d}{D} = \left(1 + \frac{B^2}{\mu \rho V_1^2}\right)^{-1/4}$$

Le tableau suivant donne, à titre d'exemple, les valeurs de α pour un jet d'acier liquide, un solénoïde de 13 cm de longueur et différentes valeurs du champ magnétique. La fréquence des courants inducteurs est choisie de telle façon que les deux conditions soient simultanément réalisées :

$$(a)\quad \mu \sigma \omega R^2 \gg 1 \qquad (b)\quad \mu \sigma_c \omega e^2 \ll 1$$

assurant un effet de peau marqué dans la veine métallique de conductivité électrique σ et de rayon initial R (condition (a)) et une réelle efficacité de l'écran d'épaisseur e et de conductivité électrique σ_c . Les conditions (a) et (b) fixent les bornes inférieures et supérieures de ω dont seule l'étude expérimentale peut permettre de fixer la valeur optimale.

La figure 4 donne les valeurs de profondeurs de pénétration dans les métaux usuels en fonction de la fréquence qui, bien que ne figurant pas de façon explicite dans l'expression de α , est un paramètre capital pour le bon fonctionnement de la busette électromagnétique et l'obtention de contractions importantes.

Pour qu'un dispositif tel que la busette électromagnétique, essentiellement destiné à être utilisé en métallurgie, possède quelques chances d'être adapté à des installations industrielles existantes, il est indispensable que les coûts de mise en oeuvre d'une part et de fonctionnement du dispositif d'autre part soient aussi réduits que possible. C'est effectivement le cas pour la busette électromagnétique qui, par sa simplicité technologique, ne nécessite aucune transformation, ou sinon des transformations mineures, des busettes traditionnelles auxquelles elle s'adapte. En outre la consommation énergétique du dispositif est très faible : en effet la busette électromagnétique possède une impédance essentiellement inductive qu'il est possible, par l'association d'un système de capacités, de rendre résistive. La puissance active à fournir dans ce cas est toujours faible : quelques kilowatts pour l'exemple donné dans le tableau ci-dessous:

V_1 cm/s / nI Ampère Tours / B Gauss	12,5	25	50	100
10000	1000	0,34	0,48	0,65	0,82
20000	2000	0,24	0,34	0,48	0,65
30000	3000	0,20	0,28	0,40	0,55
40000	4000	0,17	0,24	0,34	0,48

$$\alpha = f(V_1, B)$$

Une remarque importante s'impose sur le mode de fonctionnement de la busette électromagnétique. Il peut paraître assez paradoxal que la contraction de la veine métallique se produise dans une région où les forces électromagnétiques sont nulles alors que dans la région où les forces électromagnétiques centripètes ont tendance à comprimer la veine métallique, la section de celle-ci est la plus forte. Le calcul des performances montre bien qu'il ne peut en être autrement, à cause du couplage existant entre la pression et la vitesse (Théorème de Bernouilli). Une extrapolation, évidemment érronée compte-tenu de ce couplage, des résultats obtenus pour un cylindre liquide au repos (lévitation) qui peut être confiné par un système de forces centripètes, a conduit à l'échec de nombreuses tentatives visant à contracter une veine métallique en mouvement. Très récemment, dès la publication du texte de brevet protégeant le "Dispositif Electromagnétique de Confinement des Métaux Liquides" [1], que nous dénommons Busette Electromagnétique, un autre brevet, reposant totalement sur cette confusion nous fut opposé et fut à son tour déposé [2]. Il est hors de doute que le dispositif présenté dans ce dernier brevet ne puisse parvenir aux performances qu'il prétend atteindre : en fait de contraction c'est une expansion de la veine métallique qui sera obtenue. La busette électromagnétique en est la preuve puisqu'elle est tout à fait réversible : l'inversion du sens de la vitesse ne modifie en rien le calcul du rapport α puisque seul le carré de la vitesse intervient dans l'expression de la charge H. Par conséquent, si l'écran est placé à l'amont du solénoïde la

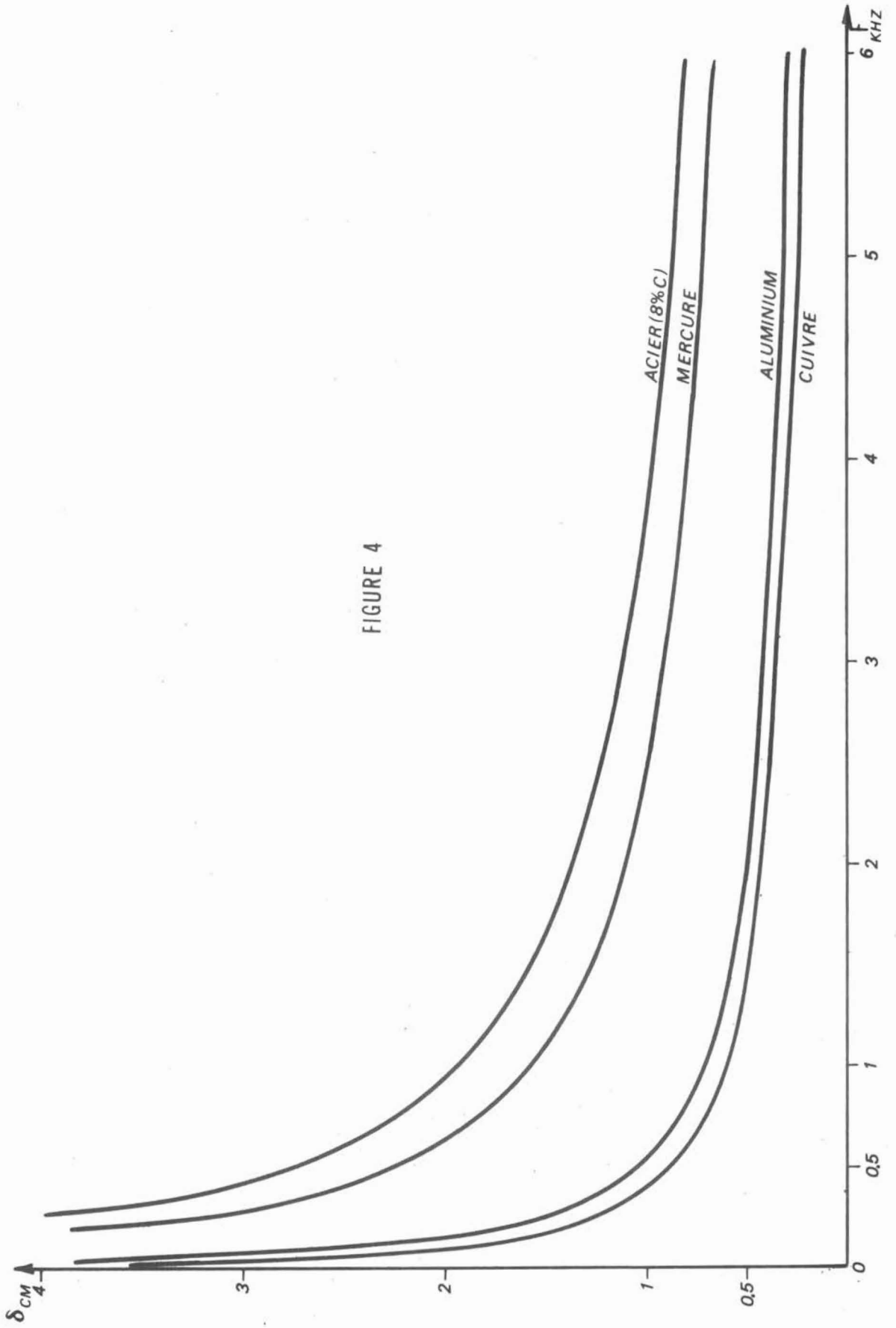

δ_{CM}
4
3
2
1
0,5
0
0,5
1
2
3
4
5
6 KHZ
ACIER (8% C)
MERCURE
ALUMINIUM
CUIVRE

FIGURE 4

veine de métal liquide de diamètre d dans la région de champ magnétique nul passera brusquement à la valeur D en pénétrant dans le champ magnétique (avec $D = \alpha d$). Nous mettrons cette réversibilité à profit dans certaines applications du dispositif.

II.3. Applications industrielles

La busette électromagnétique permet d'utiliser un orifice de diamètre relativement grand pour former des jets métalliques de diamètre réduit en supprimant totalement le problème, très délicat en métallurgie, du bouchage. Par l'association d'un système de refroidissement il est possible de former des billettes de petits diamètres ou des fils à partir de poches de coulée tout à fait classiques. De plus la facilité de modifier le diamètre de la veine de métal liquide, par simple variation de l'intensité des courants électriques dans le solénoïde inducteur rend aisée la réalisation d'un asservissement contraignant ce diamètre à obéir à une consigne donnée. Une solution élégante peut ainsi être apportée au problème posé par la fabrication de petites séries de lingots cylindriques de diamètres calibrés. La solution traditionnelle, très onéreuse, consistait à réaliser une busette matérielle différente pour chaque diamètre, alors que le simple affichage de l'intensité inductrice correspondant au diamètre choisi permet d'obtenir le même résultat avec la busette électromagnétique.

La possibilité de faire décoller des parois une veine de métal liquide en un point déterminé par l'arête supérieure de l'écran, associée à la parfaite réversibilité du phénomène amène tout naturellement à la conception d'un "Joint Electromagnétique" faisant passer le métal liquide d'un conduit à un autre dans le cas où ces deux conduits ne sont pas parfaitement jointifs. Il suffit pour cela d'utiliser deux inducteurs identiques, placés l'un à l'aval, l'autre à l'amont de la jonction et séparés par un écran de cuivre positionné au niveau même de la jonction. Le métal liquide décolle de la paroi dès qu'il pénètre dans la zone protégée par l'écran et recolle à la paroi dès qu'il subit l'action de l'inducteur aval (Fig. 5). Tout risque de fuite ou d'accrochage aux parois se trouve ainsi complètement éliminé.

Une application très intéressante de la busette électromagnétique est la régulation de débit. La vitesse à l'aval de la section contractée est déterminée par la charge H existant au-dessus de cette section. Ainsi la vitesse à la sortie de l'orifice, immatériel formé par la busette électromagnétique est tout à fait indépendante du diamètre de cet orifice et par conséquent de la contraction réalisée. Par contre le débit varie comme la section de l'orifice. Une régulation de débit peut donc être très facilement réalisée par le simple contrôle de la contraction. Soit So la section de l'orifice matériel de la poche de coulée et Vo la vitesse de sortie du métal liquide correspondant à une charge de fonctionnement H : pour une contraction de rapport α

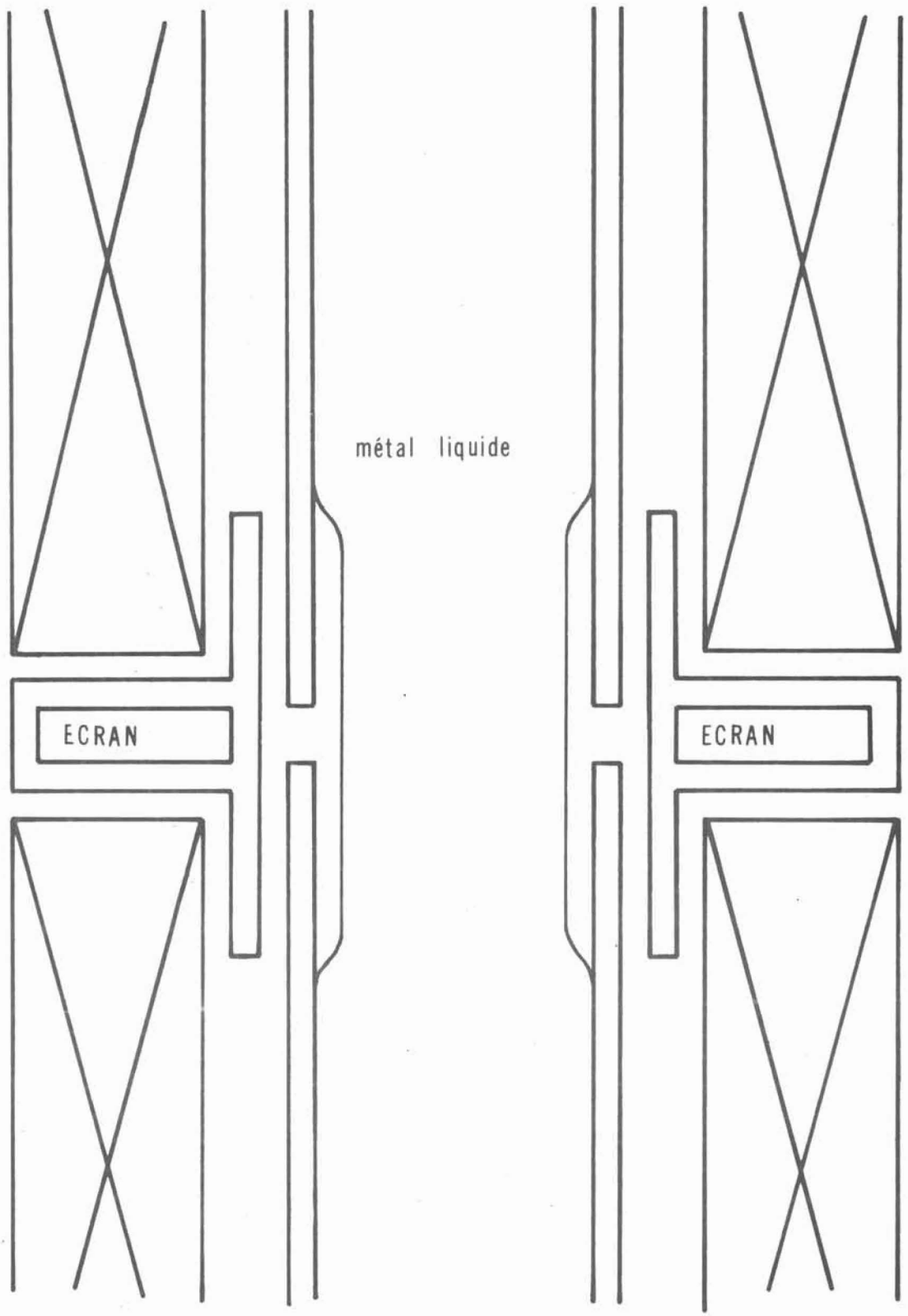


FIGURE 5

le débit passe de $Q_o = S_o V_o$ à $Q = \alpha^2 S_o V_o = \beta Q_o$. Le tableau ci-dessous indique les valeurs de β, rapport du débit existant lorsque la busette électromagnétique crée un champ magnétique $\mathcal{B}$ au débit Q_o en l'absence de champ magnétique. Les valeurs sont relatives à l'acier liquide et à un inducteur de 130 mm de longueur pour diverses valeurs de la charge H déterminant la vitesse V_o.

mI Ampère Tours	$\mathcal{B}$ Gauss	$\beta = \frac{Q}{Q_o}$				
		H = 5 cm	H = 11 cm	H = 32 cm	H = 46 cm	H = 130 cm
		V_o = 1m/s	V_o=1,5 m/s	V_o =2,5m/s	V_o= 3 m/s	V_o = 5 m/s
10000	1000	0,68	0,82	0,92	0,94	0,98
20000	2000	0,42	0,58	0,76	0,82	0,92
30000	3000	0,30	0,42	0,62	0,68	0,84
40000	4000	0,23	0,33	0,51	0,58	0,76

Les techniques classiques de régulation peuvent être employées en vue d'asservir les courants inducteurs de la Busette Electromagnétique à toute donnée en relation avec le débit, c'est à dire la charge, la pression dans une section de l'écoulement, la vitesse en un point ou encore le débit lui-même. Il est possible notamment de garantir la constance du débit s'écoulant d'un réservoir alimenté en permanence dans lequel la surface libre oscille autour d'une valeur moyenne ou se déplace fortement de façon quasi aléatoire.

La Busette Electromagnétique apporte également la solution de nombreux problèmes de protection de matériaux entourant un écoulement de métal liquide ou de

problèmes de pollution ou de contamination d'un métal liquide à partir des parois qui le contiennent en diminuant ou en supprimant le contact entre ce métal et les parois.

Les quelques exemples d'utilisation de la busette électromagnétique qui viennent d'être cités sont sans doute très loin d'explorer le vaste champ d'application ouvert en métallurgie à un tel dispositif très simple de conception et très souple d'utilisation.

III. INSTALLATION EXPERIMENTALE

III.1. Description

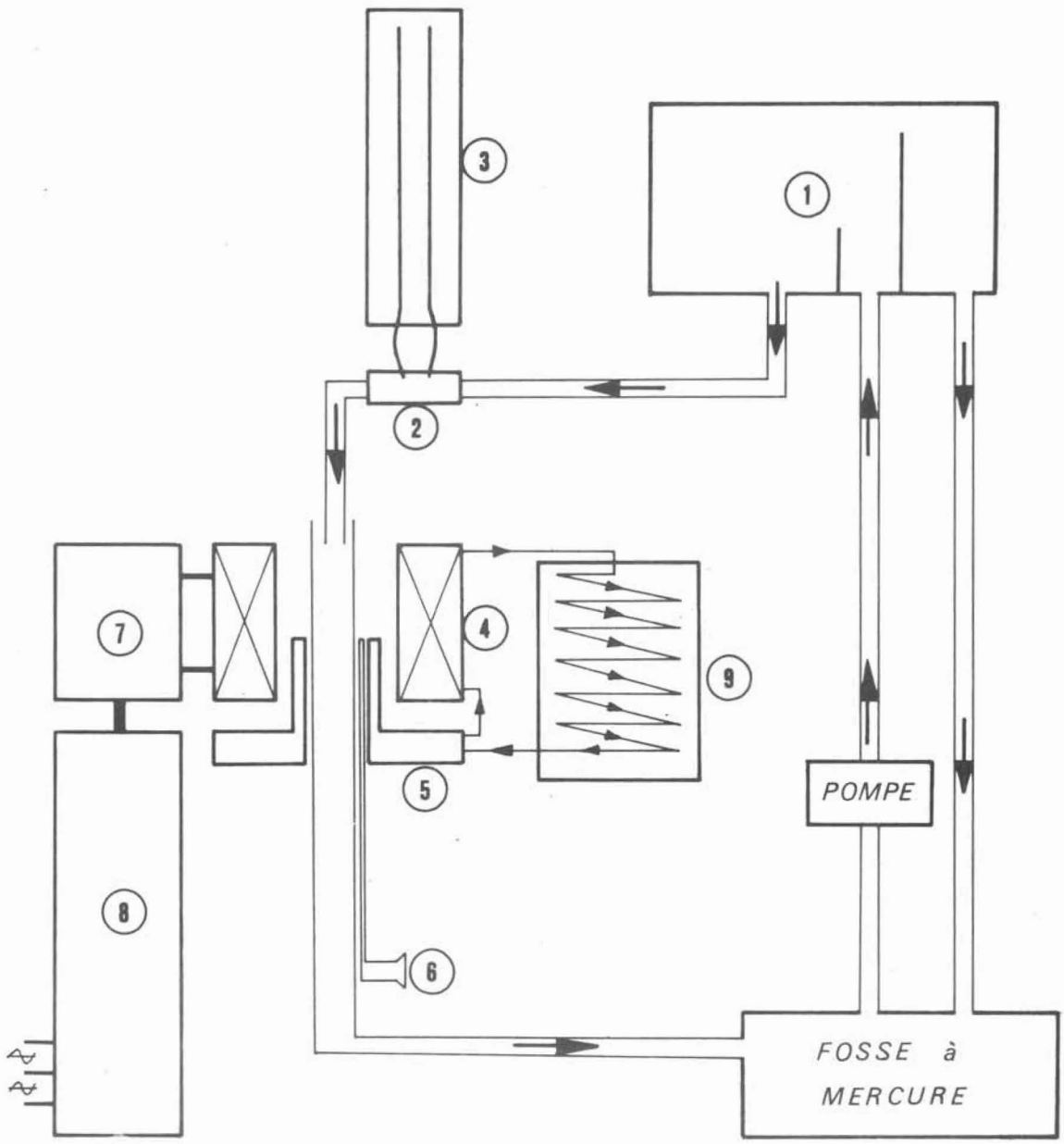
La structure d'ensemble de l'installation réalisée pour expérimenter un prototype de la Busette Electromagnétique est schématisée sur la figure 6.

Le métal liquide utilisé est le mercure. Le circuit hydraulique, tout à fait classique, comprend une pompe, une cuve à niveau constant munie d'un déversoir de hauteur variable, une cuve de réception. Tous ces éléments sont réalisés en acier inoxydable mécano soudé. Un tube de verre, placé en sortie de la cuve amont, permet de former un jet de mercure, libre ou confiné selon le cas, dont nous nous proposons de faire varier le diamètre de valeur initiale 20 mm. La bobine inductrice de la Busette Electromagnétique expérimentale ainsi que l'écran de cuivre muni d'un dispositif permettant une translation verticale sont coaxiaux au tube de verre ou au jet métallique formé.

Sur le plan électrique et magnétique, les divers éléments indispensables au bon fonctionnement de la Busette Electromagnétique sont les suivants :

- *Le Générateur*

La bobine inductrice de la Busette Electromagnétique est essentiellement une self qu'il convient d'associer à une batterie de condensateurs pour réaliser un circuit oscillant accordé à la fréquence d'utilisation. Cependant l'inductance de cette bobine est appelée à varier fréquemment pour diverses raisons : notamment la modification de la position de l'écran par rapport à l'inducteur, ou encore la variation de section du jet. Il est donc très difficile de se maintenir en permanence à l'accord, d'autant plus que le facteur de surtension du circuit est toujours très élevé dans notre cas, ce qui signifie que la résonnance est très aigüe. Tout désaccord, même faible, du circuit se traduit nécessairement par une demande de puissance plus importante au générateur qui ne doit plus alimenter alors une charge purement résistive.

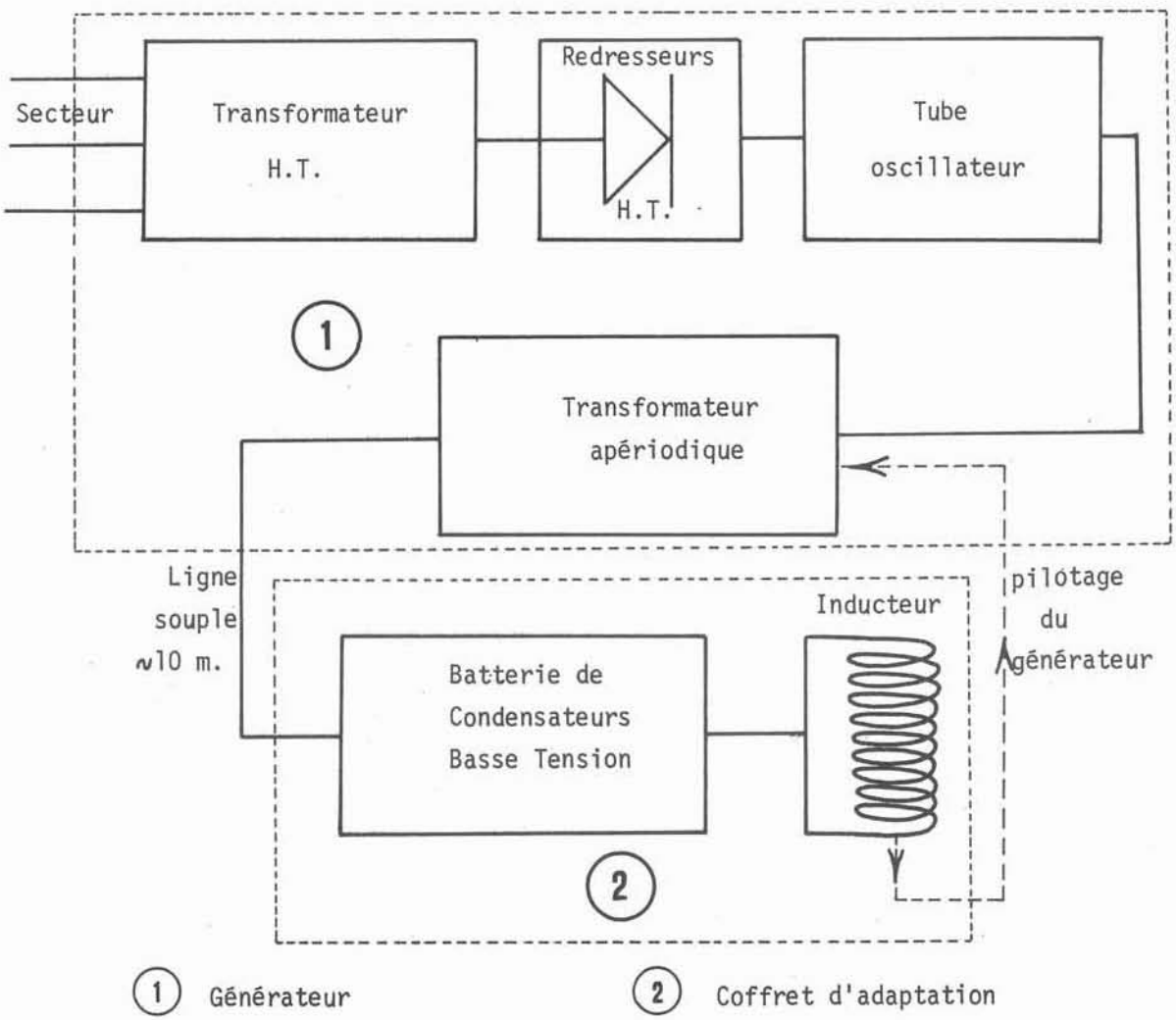


1 Cuve à niveau constant
2 Diaphragme
3 Manomètre
4 Inducteur
9 Circuit de refroidissement
5 Ecran
6 Endoscope
7 Coffret d'adaptation
8 Générateur

SCHEMA FONCTIONNEL de l'INSTALLATION EXPERIMENTALE

FIGURE 6

Ainsi pour éviter de devoir par trop surdimensionner un générateur de conception classique, nous avons été conduits à adopter un générateur d'un type tout à fait particulier dit générateur apériodique [3]. L'originalité principale d'un tel générateur réside dans le fait qu'il fonctionne toujours avec un facteur de puissance égal à l'unité, quelle que soit l'évolution de la charge. Lorsque celle-ci varie, c'est la fréquence du générateur qui se modifie de façon à se réadapter automatiquement et à rétablir une charge purement résistive. Il est donc possible d'utiliser des lignes de liaison de longueur importante ($>$10m) entre le générateur et l'inducteur sans qu'il en résulte des pertes appréciables. Le schéma fonctionnel du générateur apériodique ci-dessous, montre le circuit oscillant, formé de la bobine inductrice et des condensateurs basse tension, réuni par un transformateur apériodique au générateur qui ne possède, pour sa part, aucune fréquence propre de fonctionnement.



- *L'inducteur et l'écran*

L'inducteur de la Busette Electromagnétique est un solénoïde tout à fait classique réalisé en tube de cuivre refroidi par une circulation d'eau intérieure. Les caractéristiques de l'inducteur le plus performant utilisé sont les suivantes :

- hauteur = 140 mm
- diamètre intérieur = 63 mm
- diamètre extérieur = 80 mm
- 16 spires en tube de cuivre roulé de diamètre intérieur : 4 mm
  et diamètre extérieur : 8 mm

Le coffret d'adaptation associé à l'inducteur, comprenant en plus des condensateurs basse tension, un transformateur d'adaptation aval permet de fonctionner dans une plage de fréquence d'amplitude 1000 Hz centrée à 3500 Hz. Un champ magnétique de 3500 Gauss peut être fourni grâce au générateur apériodique de 40 Kw alimentant l'ensemble.

La Société CELES spécialiste dans la construction des générateurs apériodiques et des inducteurs associés, habituée aux courants alternatifs de 10 Khz à 500 Khz s'est heurtée à des difficultés nouvelles dans le calcul des pertes de l'inducteur de la Busette Electromagnétique utilisant une gamme de fréquence peu courante. Aux fréquences souhaitées, les méthodes classiques de calcul, aussi bien en basse fréquence où les courants électriques sont uniformes dans la section des conducteurs qu'en haute fréquence où l'effet de peau est parfaitement marqué, ne peuvent plus être appliquées. Un calcul erroné, reposant sur une telle confusion, fut à l'origine de retards importants dans l'étude expérimentale puisqu'un premier générateur de 20 Kw incapable de fournir le champ magnétique désiré nous fut livré puis remplacé, à la suite d'une nouvelle étude, par le générateur de 40 Kw actuellement en notre possession.

L'écran est formé d'un tube de cuivre de 40 mm de diamètre intérieur et 50 mm de diamètre extérieur pour une hauteur de 90 mm. Un refroidissement est également assuré par une circulation d'eau forcée dans une cavité circulaire logée à la partie inférieure de l'écran. Les dimensions de l'écran, indiquées ici, sont les dimensions initialement adoptées pour l'étude expérimentale. La hauteur de l'écran (90 mm) est importante vis à vis de la longueur de l'inducteur (140 mm) pour permettre à l'écran de pénétrer jusqu'au centre de la bobine et d'annuler le champ magnétique dans une région où il présente une relative uniformité : dans un inducteur tel que celui que nous utilisons, les lignes de champ magnétique s'écartent très vite en éventail dès que l'on s'éloigne du centre de la bobine.

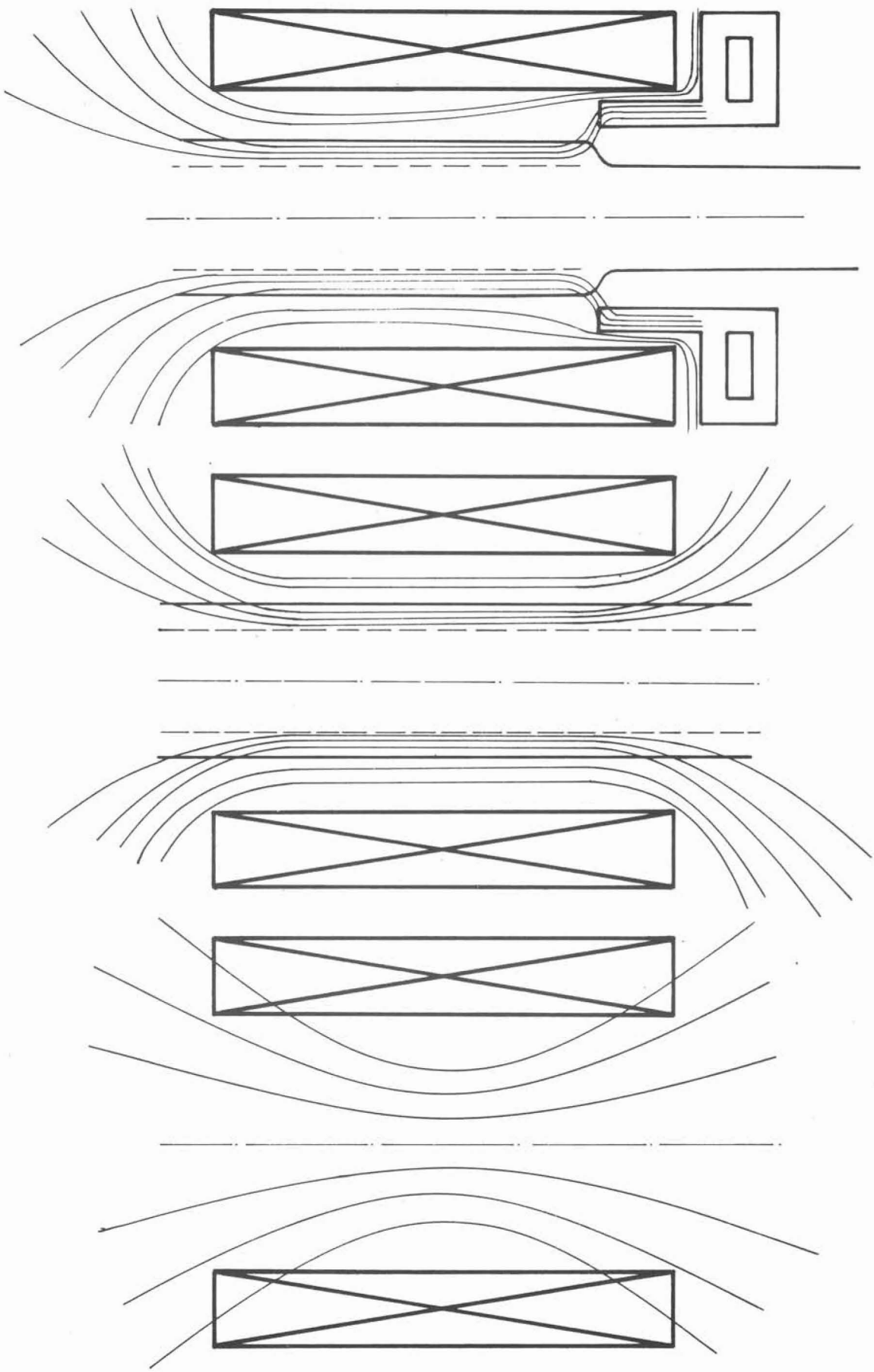
En réalité, grâce à la présence de l'écran d'une part et du métal liquide d'autre part, l'uniformité du champ magnétique produit est bien meilleure que celle que l'on pourrait attendre de la configuration du champ dans l'air. Les Effets de Peau très marqués aussi bien dans le cuivre que dans le métal liquide exigent que dans ces deux milieux les lignes de champ restent parallèles aux frontières et imposent la même contrainte au champ magnétique à leur proche voisinage. L'uniformité du champ magnétique est donc fortement améliorée par les milieux conducteurs présents dans l'inducteur, puisque le champ magnétique dans l'air, par son caractère harmonique, est fortement influencé par les conditions aux limites et ne peut présenter de variations rapides très localisées. Il n'est, par conséquent, pas utile de prévoir un écran aussi long puisque les diverses sections droites sont équivalentes : il est possible ainsi de limiter la zone d'action de l'écran, sans réduire son efficacité, au seul voisinage de l'extrêmité de l'inducteur (deux premières spires par exemple). Ceci a notamment pour effet secondaire de diminuer les pertes par effet Joule dans l'écran.

- *Les dispositifs d'observation et de mesure*

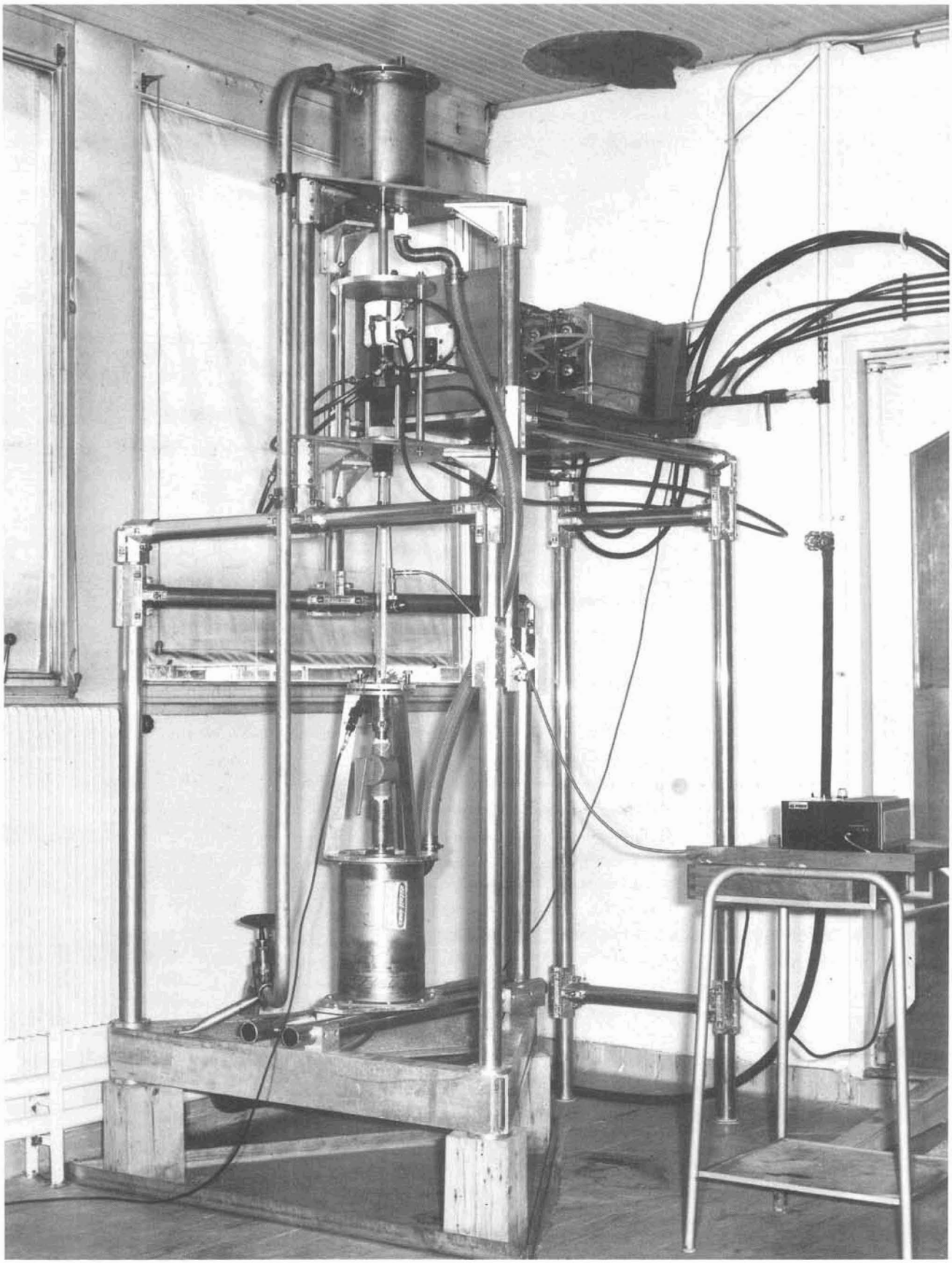
L'observation de la partie du jet de mercure où se produit une contraction est délicate puisqu'elle doit se faire à l'intérieur même de la Busette Electromagnétique et nous avons dû recourir à un système endoscopique à fibres optiques pour examiner le phénomène et les instabilités qui lui seraient éventuellement associées. L'endoscope, de 5,5 mm de diamètre pour 44 cm de longueur, utilisé permet l'observation dans une direction ascendante formant un angle de 60° avec l'horizontale ce qui est tout à fait indispensable pour explorer la zone de contraction tout en maintenant l'endoscope métallique dans la région protégée par l'écran.

La mesure du champ magnétique se fait simplement par la mesure de la tension induite par le champ magnétique alternatif dans un ensemble de cinq spires de 20 mm de diamètre, coaxiales à l'inducteur. Cette mesure permet également de déterminer la fréquence du champ magnétique produit.

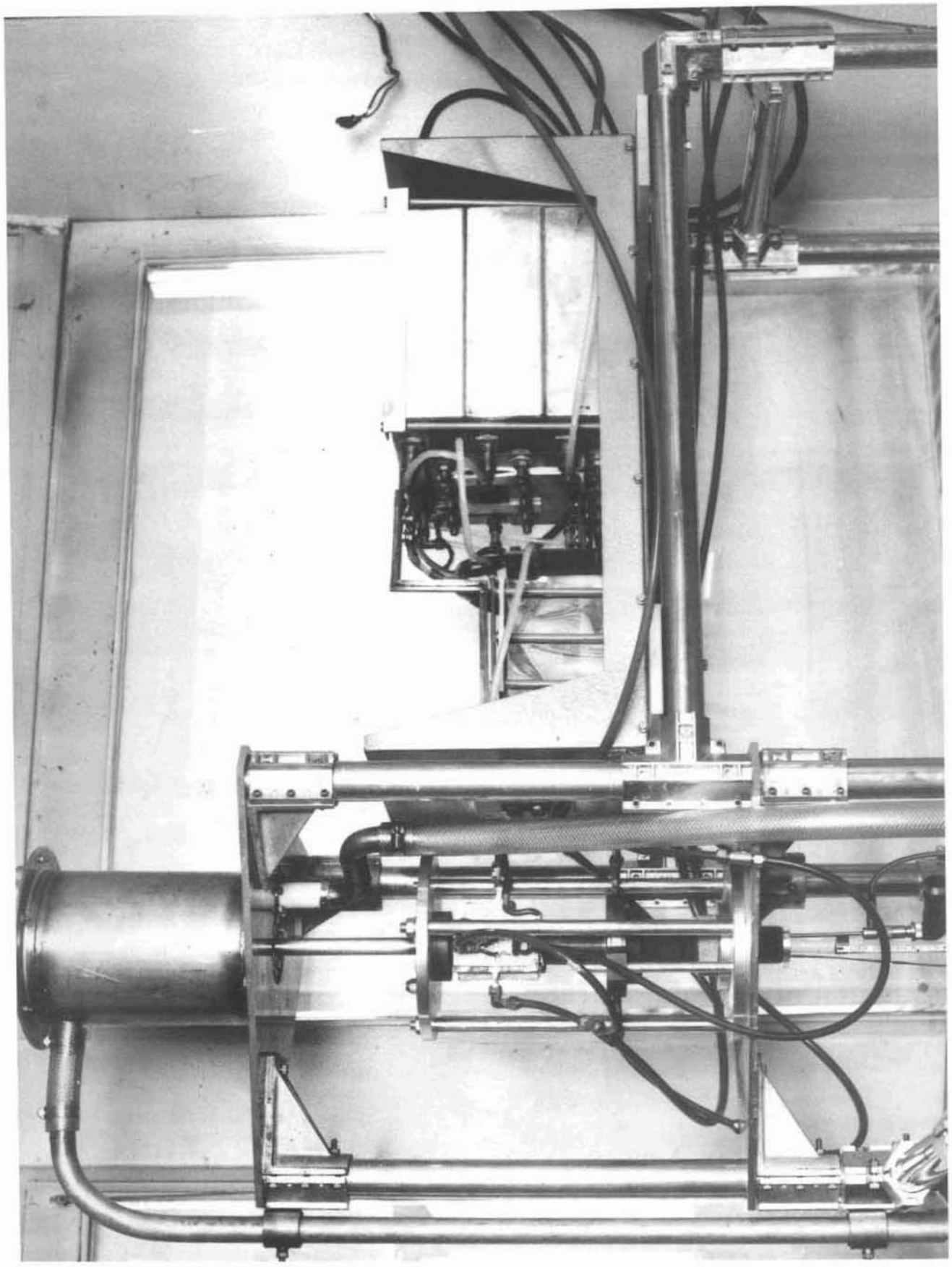
La mesure du débit de la veine métallique liquide est réalisée à l'aide d'un diaphragme de contraction 0,86 placé à l'amont de l'inducteur.



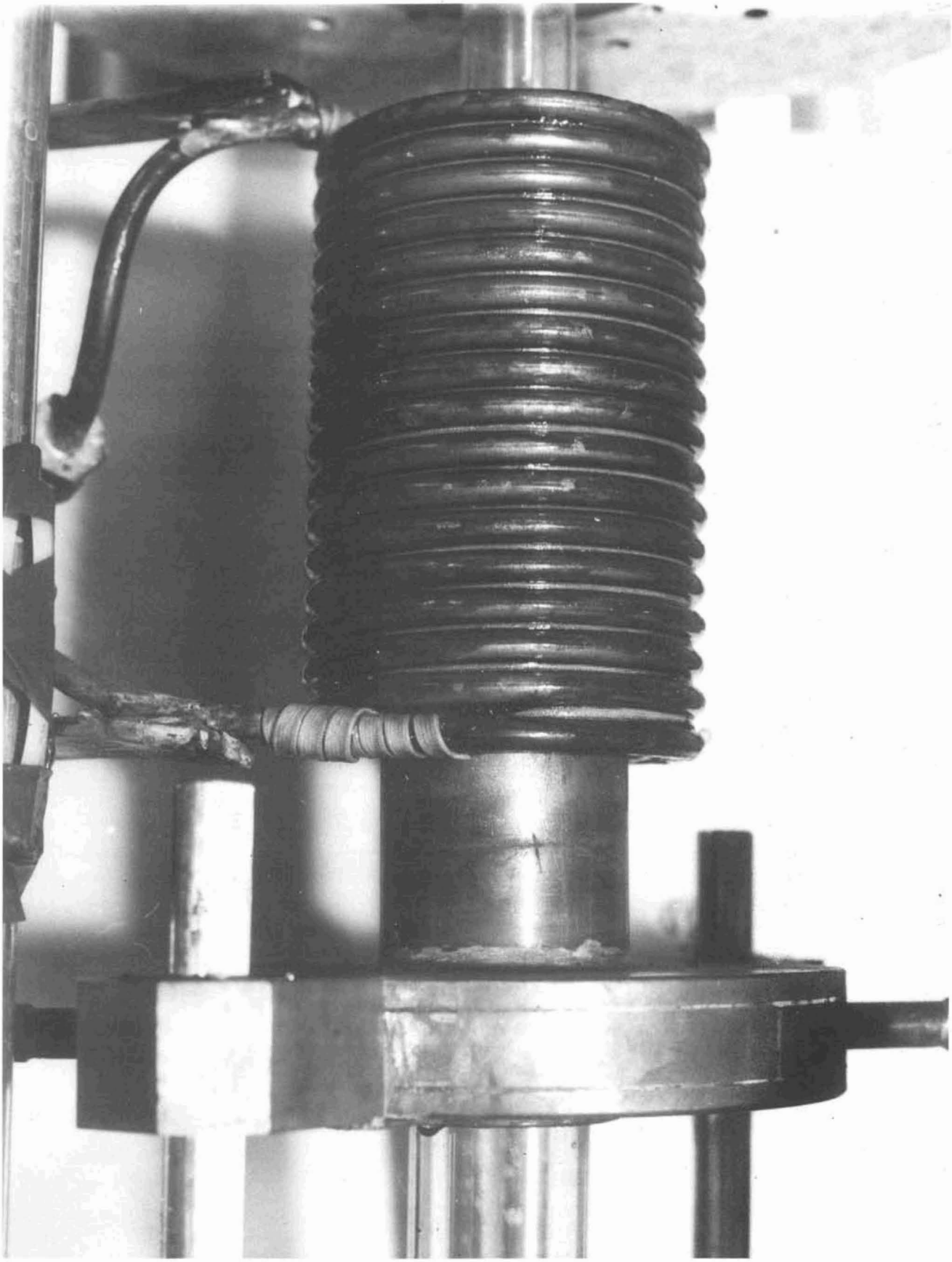
MODIFICATION DE LA GEOMETRIE DES LIGNES DE CHAMP PAR LA PRESENCE DE MATERIAUX CONDUCTEURS



Installation expérimentale : Vue d'ensemble



Inducteur et coffret d'adaptation



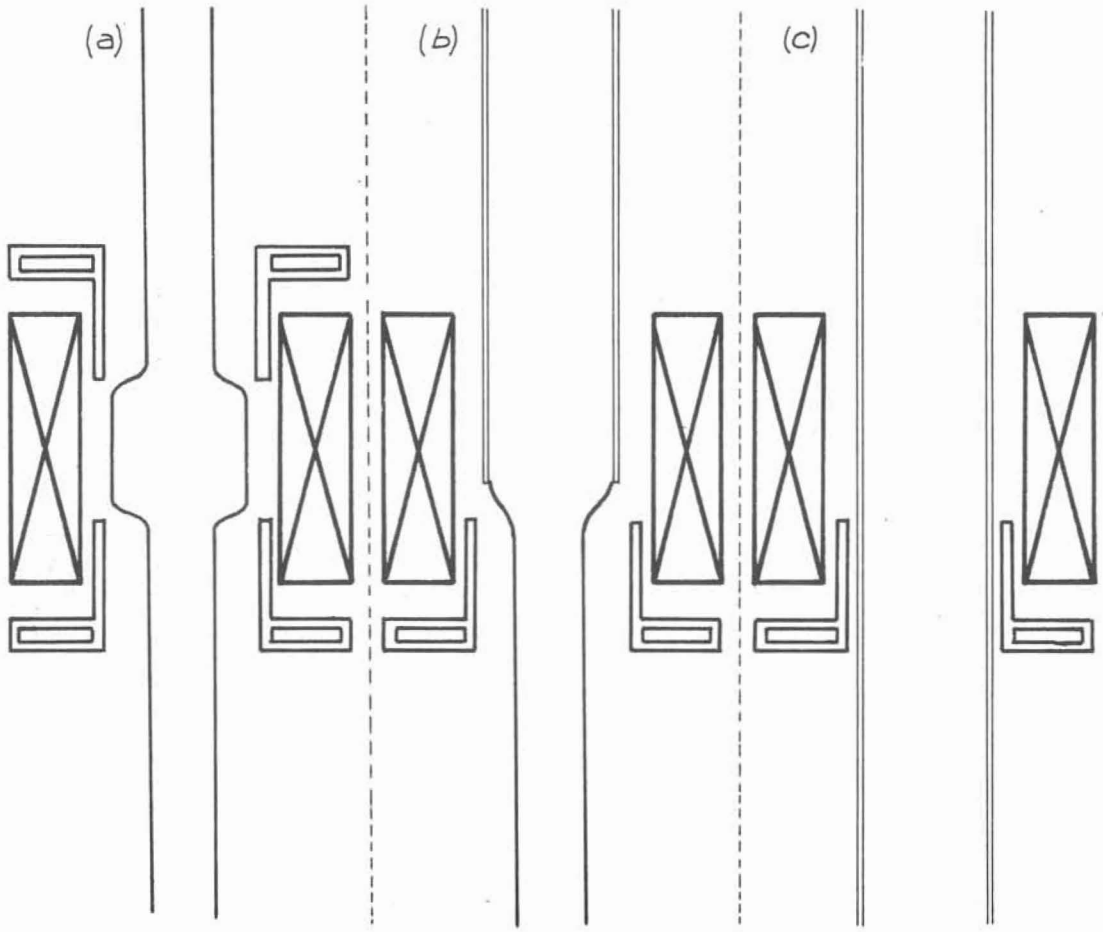
Inducteur et écran en position de fonctionnement

III.2. Résultats expérimentaux

- Expériences réalisées

L'étude complète des procédés électromagnétiques de confinement de métaux liquides, entreprise sur le double aspect expérimental et théorique, devait être menée à bien dans la durée contractuelle s'étendant du 6 Décembre 1974 au 5 Juin 1976. Si la réalisation de l'installation expérimentale entreprise dès Février 1975 fut terminée en Octobre de la même année, les difficultés, déjà mentionnées, rencontrées par le constructeur du générateur adapté à la Busette Electromagnétique, ont réduit considérablement la durée initialement prévue pour la campagne d'essais. En effet, alors que le générateur sous dimensionné de 20 Kw nous fut livré le 22 Janvier 1976, il fallut attendre début Avril 76 pour que le générateur de 40 Kw, capable d'atteindre les performances souhaitées, soit en notre possession. Ce handicap très important éliminait toute possibilité de modification ultérieure de l'installation expérimentale dont il importait de tirer le meilleur profit dans les délais contractuels.

Trois types d'essais correspondant à trois géométries distinctes, définies par les figures ci-dessous, furent entrepris.



- (a) Etude de la contraction d'un jet libre de métal liquide

Deux impératifs totalement antagonistes sont dans ce cas à l'origine d'une réduction de l'effet produit par la Busette Electromagnétique expérimentale

- tout d'abord, il est important de limiter au maximum la vitesse de la veine métallique liquide pour avoir un effet de contraction très marqué.

- d'autre part cette vitesse doit être suffisamment élevée (plusieurs mètres par seconde) pour que la veine métallique conserve, malgré l'effet contractant de la pesanteur, un diamètre supérieur à deux fois la profondeur de pénétration. En effet, si l'effet produit par la busette électromagnétique sur un jet de métal liquide est indépendant du rayon de ce dernier pour autant qu'il reste supérieur à la profondeur de pénétration, il est évident, par la nature même de l'effet de peau, que l'efficacité du dispositif décroît très vite si le rayon du jet devient plus faible que la profondeur de pénétration du champ magnétique.

En ce qui nous concerne, aux fréquences voisines de 2500 Hz, l'épaisseur de peau dans le mercure est de l'ordre du centimètre ce qui correspond exactement au diamètre maximal des veines métalliques confinées ou des jets libres susceptibles d'être formés par l'installation expérimentale. Cette coïncidence entre le diamètre des écoulements produits et sa valeur critique est à elle seule à l'origine d'une diminution de l'efficacité du dispositif : un calcul très simple prenant en compte la distribution exacte des forces électromagnétiques dans la veine métallique montre qu'un champ magnétique B engendre dans une section une pression moyenne égale à 0,65 fois la valeur correspondante $\frac{B^2}{2\mu}$. Ainsi les performances théoriques de la Busette Electromagnétique relatives à un jet de mercure et à un champ magnétique de 3500 Gauss qui étaient les suivantes :

V m/s	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
α	0,60	0,70	0,77	0,83	0,86	0,89	0,91

se trouvent réduites par les contraintes géométriques à :

V m/s	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
α	0,65	0,76	0,82	0,87	0,9	0,92	0,96

Les valeurs de α correspondent aux contractions qui seraient obtenues avec un champ magnétique de 2800 Gauss et des jets métalliques de diamètres plus importants ou des fréquences plus élevées assurant une très faible épaisseur de peau.

Cette diminution d'efficacité peut encore être accentuée par une réduction du diamètre du jet qu'il est donc important de limiter en adoptant des vitesses d'écoulement importantes pour lesquelles ce diamètre demeure voisin de 20 mm dans la zone d'action de la Busette Electromagnétique. Ces vitesses, de l'ordre de 3 m/s, donnent cependant des contractions de rapport 0,9 très délicates à déceler.

- (b) Etude de la contraction d'un jet de métal liquide issu d'un orifice

Nous avons pu observer, dans ce cas, deux phénomènes parfaitement distincts :

- si l'orifice se trouve exactement à la hauteur de l'arête supérieure de l'écran ou plus haut que celle-ci, nous avons pu vérifier la présence d'une surpression induite par le champ magnétique, grâce aux indications de pression fournies par le diaphragme destiné aux mesures de débit.

- si l'orifice se trouve à l'intérieur de l'écran lui-même, ou plus bas, ces mêmes indications de pression sont parfaitement insensibles à la présence ou à l'absence du champ magnétique. Par contre, une mesure de pression à la paroi, dans la région soumise au champ magnétique, rend manifeste la présence d'une dépression, de valeur identique à celle de la surpression observée dans le cas précédent. La différence de pression, entre la paroi et le centre de la veine liquide est également mise en évidence par le grossissement de bulles de gaz transitant entre la paroi et le mercure.

- (c) Etude du décollement d'une veine de métal liquide des parois d'une conduite en charge

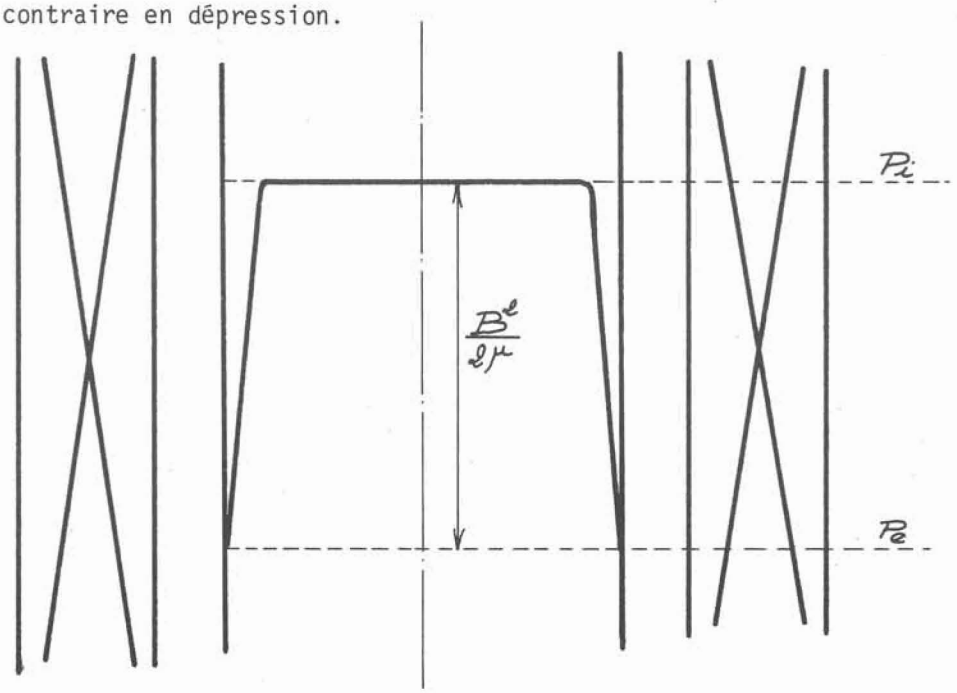
La Busette Electromagnétique s'est montrée impuissante à faire décoller des parois un écoulement de mercure dans une telle géométrie. De plus des mesures

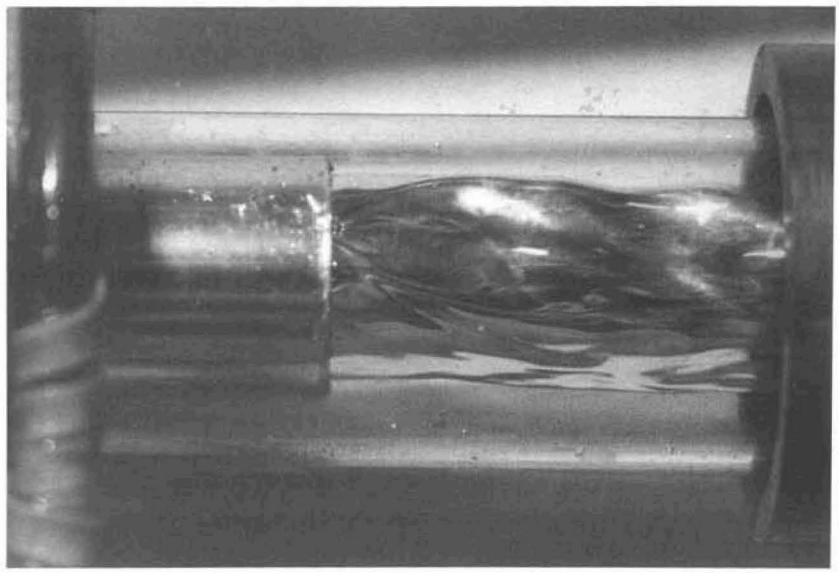
de pression à la paroi, dans la zone d'action de l'inducteur de la Busette Electromagnétique, ont parfaitement rendu compte à nouveau de la présence d'une dépression pariétale capable de provoquer un net grossissement des bulles éventuellement présentes. Les photos de la planche (1) montrent ces bulles de gaz suffisamment grosses pour être convectées par l'écoulement au voisinage de la paroi de verre. Il apparaît également sur ces photos une instabilité très vive de la surface libre du jet de mercure. Cette instabilité résulte de deux effets : tout d'abord les bulles de gaz emportées par l'écoulement perturbent fortement la surface libre lorsque, arrivées à l'extrêmité du tube de verre, elles quittent le métal liquide; ensuite la présence d'une dépression d'origine électromagnétique au proche voisinage amont de l'extrêmité du tube de verre a tendance à faire remonter la surface libre qui se trouve alors dans une position instable.

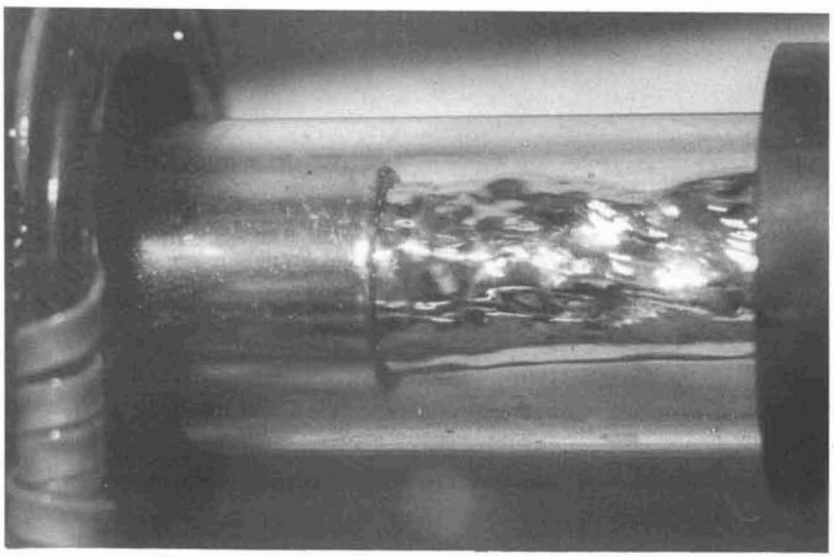
Les différents effets produits par le champ magnétique sur la pression des écoulements dans les différents cas, peut s'expliquer de la manière suivante. Quelle que soit la géométrie adoptée, la distribution de pression à l'intérieur de la veine de métal liquide soumise au champ magnétique, est constituée d'un palier central associé à une croissance rapide à l'intérieur de la peau électromagnétique. Or, si la position relative du palier Pi et de la presssion à la paroi Pe est parfaitement déterminée, puisqu'imposée par le champ magnétique $\left(\frac{B^2}{2\mu}\right)$, leur position absolue est inconnue et ne dépend que de la géométrie considérée :

- si la pression de référence est la pression P_e, il apparaît bien une surpression interne à la veine métallique

- si la référence est Pi la couche pariétale, limitée à l'épaisseur de peau, se trouve au contraire en dépression.







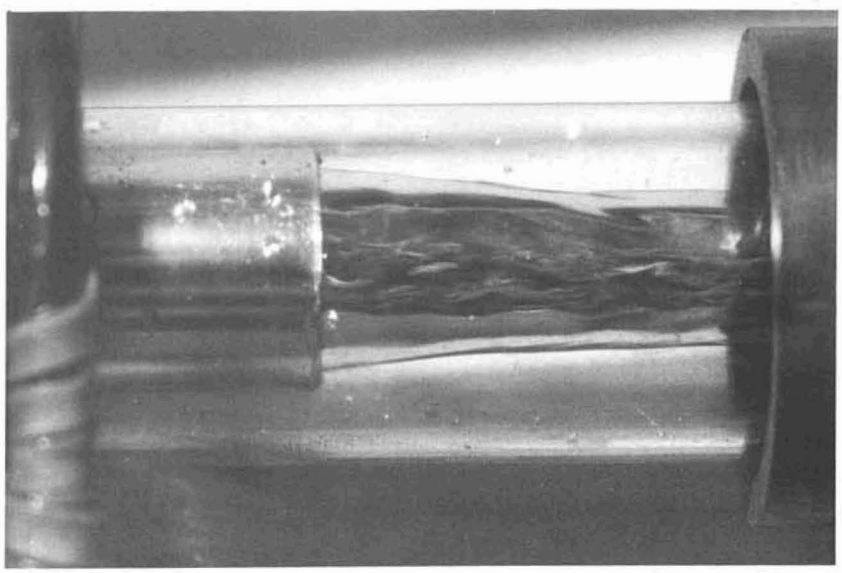


PLANCHE 1

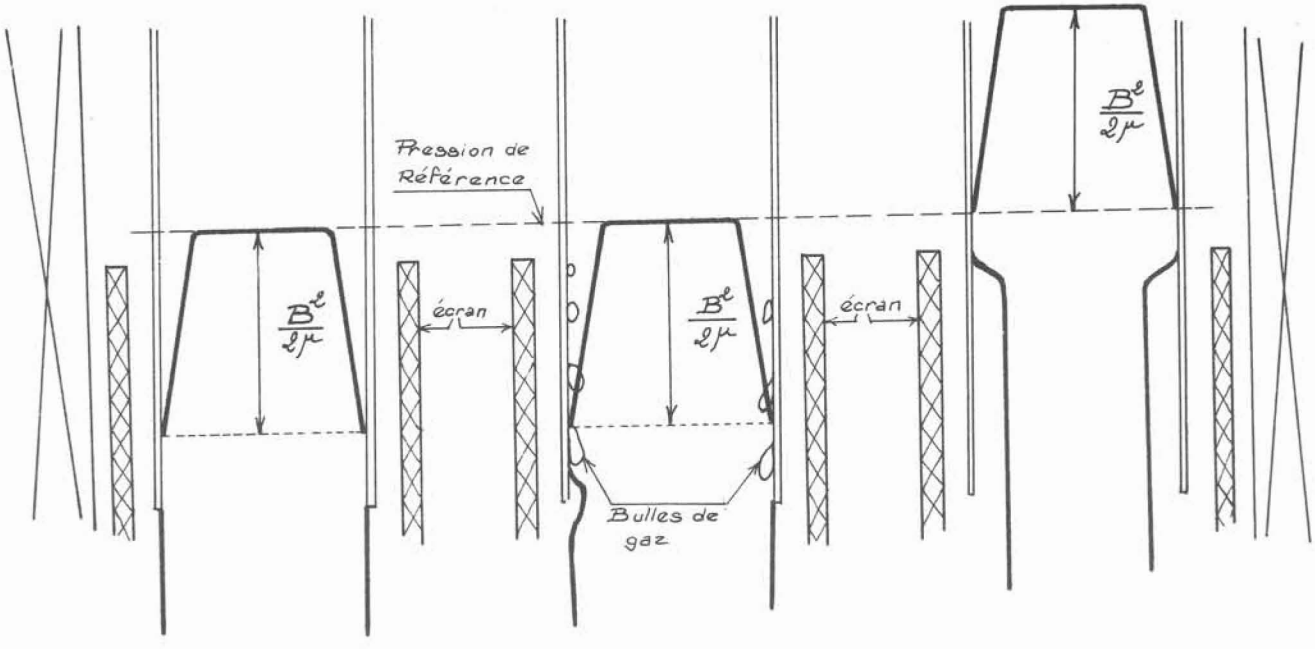
Dans le cas d'une veine libre (a) ou d'un jet, issu d'un orifice situé à l'amont del'écran (b) c'est la pression extérieure Pe qui est imposée égale à la pression atmosphérique et la surpression interne, nécessaire à l'obtention d'une contraction, apparaît. Par contre, dans le cas d'un écoulement en charge (c), ou d'un jet issu d'un orifice placé à l'intérieur de l'écran, la seule référence de pression possible est la pression atmosphérique existant à l'extrêmité avale de la conduite. Si l'on remonte, en suivant l'axe, depuis l'extrêmité avale jusqu'à la hauteur du solénoïde, la continuité du débit, donc de la vitesse et de la pression fixe la pression interne P_i. Dans ce cas la Busette Electromagnétique crée une dépression pariétale que l'écran supprime. Cette dépression qui est à l'origine du grossissement des bulles gazeuses, toujours présentes dans le mercure ou le long des parois, est cependant insuffisante et jamais assez bien centrée pour provoquer une striction complète de la veine fluide.

Ce résultat est important et amène quelques remarques et conclusions :

- De même qu'il est impossible de faire décoller des parois d'une conduite en charge un écoulement de métal liquide, il est impossible d'imposer la position du point de décollement d'un écoulement confiné par des parois puisque les deux problèmes sont équivalents. Il est uniquement possible d'amener le point de décollement à la position choisie par une translation de l'écran : l'arête supérieure de l'écran peut en effet faire remonter la surface libre, correspondant à une contraction donnée, depuis l'extrêmité avale de la conduite jusqu'à la position choisie.

- Ceci ne remet pourtant pas en cause la réalisation d'un joint électromagnétique pour lequel un décollement est nécessaire à l'amont de la jonction où la référence de pression existe et pour lequel il serait impensable d'avoir recours à une translation de l'écran pour aller chercher la surface libre là où elle se trouve. En effet lorsqu'une référence de pression existe non loin du point de décollement souhaité, le champ magnétique créé tout d'abord une dépression qui a pour effet de faire grossir les microbulles de gaz présentes dans le métal liquide. Ces bulles, dans leur déplacement, servent alors de "véhicule" à la surface libre qu'elles déchirent et amènent au point de décollement cherché, en modifiant la référence de pression et en faisant apparaître la surpression interne

La figure suivante schématise le mécanisme d'apparition du décollement



Ce phénomène a été parfaitement observé lors des essais comme en témoignent les photos de la planche (2) où l'on voit clairement la surface libre remonter dans le tube de verre, entraînée par les bulles de gaz. Cependant ce phénomène n'était decelable que dans des conditions où l'écoulement confiné par les parois était peu stable. Un écoulement en charge, de faible vitesse, tel que celui réalisé dans le but d'obtenir une contraction importante, est instable et tend, à la faveur d'une perturbation, à se transformer en écoulement à surface libre. Dans le cas d'un jet issu d'un orifice débouchant juste à l'aval de l'écran, nous avons pu mettre en évidence le déchirement de la surface libre initiale par les bulles de gaz ainsi que la remontée de celle-ci, mais la perturbation ainsi créée était trop forte pour que la surface libre se fixe de façon stable au point de décollement prévu ; la remontée de la surface libre se poursuivait au-delà de ce point et l'écoulement cessait d'être en charge.

La remontée de la surface libre, comme le décollement, ne se fait jamais de façon symétrique par rapport à l'axe de la conduite. En fait, seule l'inertie du fluide, peut inciter la veine de métal liquide, à rester centrée, une fois décollée des parois, puisque le dispositif électromagnétique lui-même n'a aucune faculté de centrage. C'est d'ailleurs ce défaut de centrage qui a été à l'origine de la difficulté, voire de l'impossibilité, de mesurer les contractions faibles obtenues avec des vitesses importantes. Il est donc indispensable de rechercher des variantes de la Busette Electromagnétique permettant le centrage de la veine métallique décollée qui sinon, livrée à elle-même, a toujours tendance à recoller partiellement à la paroi. Les inducteurs appropriés à cet effet font l'objet d'une étude dans le paragraphe suivant.

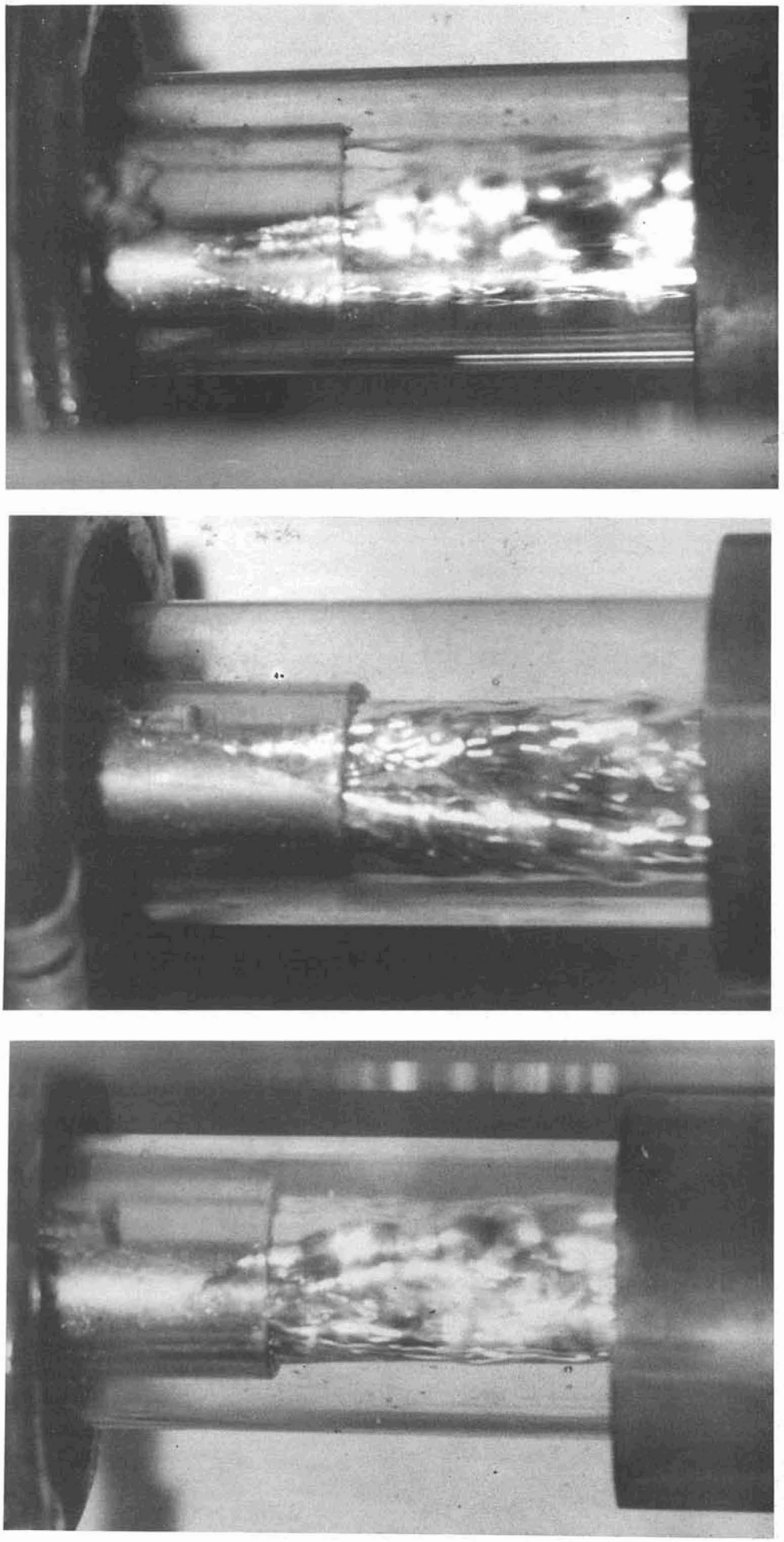


PLANCHE 2

IV. ETUDE D'UN DISPOSITIF ELECTROMAGNETIQUE DE CENTRAGE, DE GUIDAGE ET DE CORRECTION DE FORME DE VEINES METALLIQUES LIQUIDES

Le dispositif envisagé peut, sans aucune restriction, être utilisé avec tous les métaux liquides notamment l'aluminimum liquide, l'acier liquide, le cuivre liquide, l'uranium liquide et les divers alliages de ces métaux. Il est destiné à être substitué aux appareils à effet mécanique habituellement utilisés en métallurgie pour obtenir le centrage d'une veine métallique, pour la guider ou pour lui donner une forme particulière. L'avantage principal de ce dispositif par rapport aux techniques traditionnelles est la réalisation de toutes ces opérations sans aucun contact entre le métal liquide et une quelconque paroi. Il permet donc d'éliminer nombre de problèmes délicats tels que la contamination du métal liquide par les parois réfractaires ou encore le bouchage. Il constitue également un progrès par rapport au "Dispositif Electromagnétique de Confinement des Métaux Liquides" qui permettait de faire décoller d'une paroi une veine de métal liquide, puisqu'il est capable de réaliser le même effet avec les améliorations suivantes :

- le décollement de la veine peut être obtenu et maintenu dans un écoulement horizontal

- un centrage de la veine décollée empêche tout nouveau contact parasite à l'aval du point de décollement et permet ainsi de limiter la contraction de la veine métallique et par conséquent la puissance à fournir, dans le cas où l'effet recherché est l'absence de contact métal-paroi.

IV.1. Principe

Tout liquide électroconducteur soumis à un champ magnétique alternatif est le siège de courants électriques induits de géométrie semblable à celle des courants inducteurs générateurs du champ magnétique et en opposition de phase avec ceux-ci. Si la fréquence du champ magnétique est élevée ces courants induits se trouvent localisés à la périphérie du domaine liquide. Dans cette peau superficielle, d'autant plus mince que la fréquence est plus élevée, l'interaction des courants induits et du champ magnétique croisés donne naissance à des forces de Laplace toujours dirigées vers l'intérieur du domaine fluide : centripètes dans le cas d'un cylindre. Le module de ces forces est proportionnel au carré de l'intensité du champ magnétique existant à la surface libre du métal liquide. C'est de ce résultat important que découle la possibilité de centrer ou de guider un écoulement métallique en l'absence totale de parois. Pour contraindre un écoulement métallique à ne pas s'écarter d'une position déterminée, il suffit de créer un système de forces de rappel qui tendent à le ramener dans la position choisie lorsqu'il s'en éloigne : c'est à dire un ensemble de forces dont le module est d'autant plus élevé que l'on s'éloigne davantage de cette

position. Cela revient par conséquent à réaliser un champ magnétique dont l'amplitude, comme le carré de l'amplitude, augmente fortement à partir d'une ligne singulière où elle est minimale : tout déplacement qui aurait tendance à éloigner l'axe d'une veine métallique de cette ligne singulière serait alors fortement contrarié par l'action des forces électromagnétiques. Si cette ligne singulière est rectiligne, un centrage est réalisé. Pour obtenir un guidage, il suffit de donner à cette ligne singulière la forme que l'on veut voir épouser par l'axe de la veine métallique. La région dans laquelle le champ magnétique croît fortement à partir d'une ligne singulière est appelée : "Trou de Potentiel".

IV.2. Réalisation des "trous de potentiel" pour le centrage et le guidage de jets métalliques.

Considérons le système formé de quatre conducteurs rectilignes disposés suivant les génératrices principales d'un cylindre de base carrée et parcourus par des courants alternatifs de fréquence élevée en opposition de phase dans deux conducteurs successifs. Le champ magnétique résultant de la présence des quatre conducteurs est nul le long de l'axe du cylindre et croît fortement à mesure que l'on s'approche des conducteurs donc que l'on s'éloigne de cette ligne singulière (Fig. 7). Soit une veine métallique de section circulaire s'écoulant à l'intérieur du "trou de potentiel" ainsi réalisé : si l'axe du domaine liquide ne correspond pas à celui du trou de potentiel, la résultante des forces électromagnétiques qui s'exercent dans la peau électromagnétique n'est pas nulle et tend à ramener les deux axes en coïncidence réalisant le centrage de la veine métallique. Tout se passe comme si la veine de métal liquide était prisonnière d'une enveloppe élastique (la peau électromagnétique) s'opposant à tout déplacement et à toute déformation qui détruirait la symétrie par rapport à l'axe du "trou de potentiel". (Fig. 8).

En fait, en plus de l'axe du cylindre, quatre autres lignes singulières de champ magnétique nul, correspondant à l'intersection de la surface libre du métal liquide avec les plans médiateurs des faces du cylindre, existent à la périphérie de la veine de métal. Le long de ces lignes aucune force électromagnétique ne peut s'opposer à d'éventuels déplacements du fluide. Il n'est pas possible avec une telle configuration du champ magnétique de faire disparaître totalement ces lignes singulières. Cependant l'association de quatre nouveaux conducteurs, semblables aux premiers dont ils se déduisent, géométriquement par une rotation de 45° autour de l'axe du cylindre, et électriquement par un déphasage d'un quart de période permet de substituer deux fois par période les régions où les forces de rappel sont maximales à celles où elles sont inexistantes (Fig. 9). Compte-tenu de la fréquence élevée des courants qui doit nécessairement être de plusieurs dizaines de kilohertz et de l'inertie du fluide

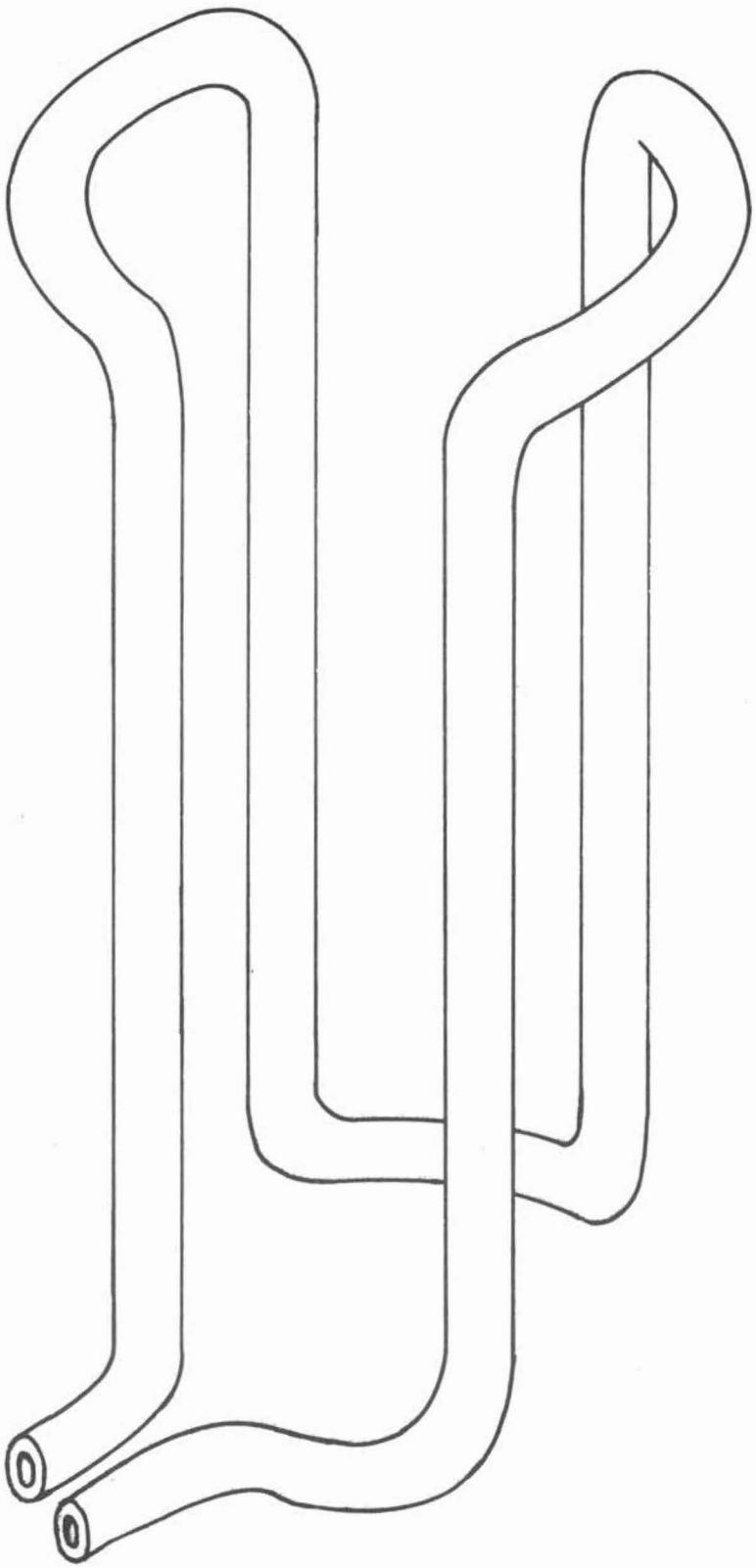


Schéma d'un inducteur réalisant un
TROU de POTENTIEL ELEMENTAIRE

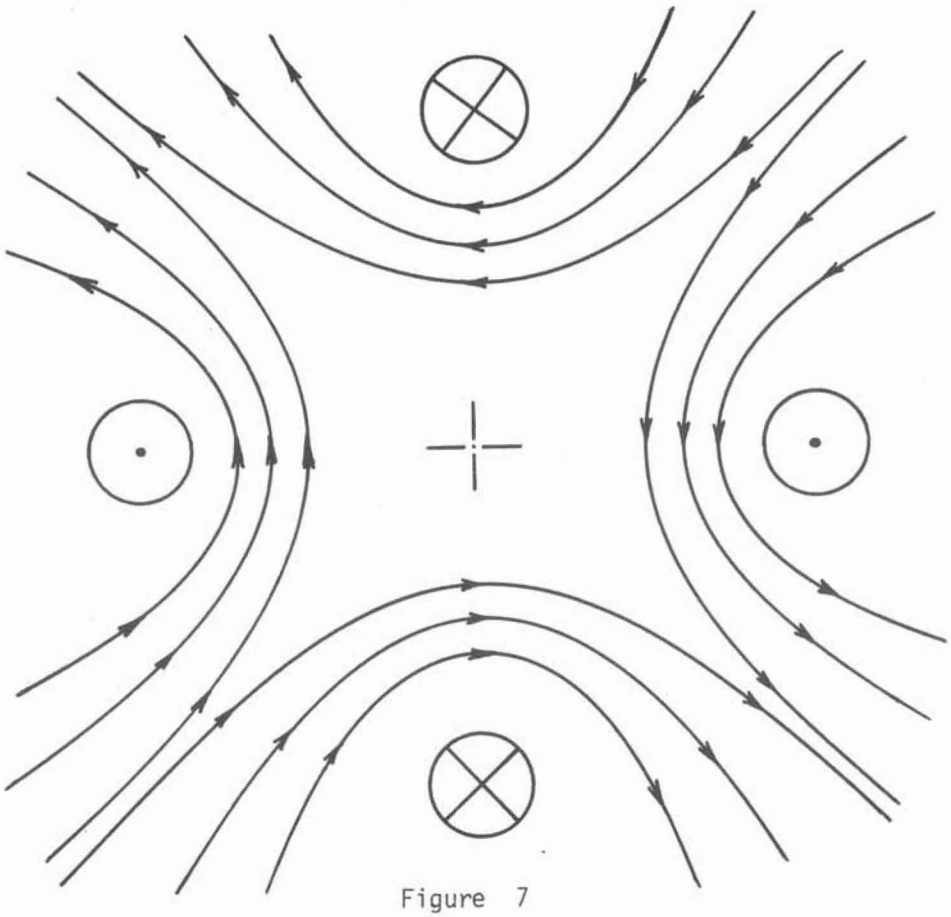


Figure 7

l'excursion très rapide à la surface du métal liquide des lignes singulières revient à créer en tout point de cette surface une force de rappel constante en moyenne, susceptible de préserver la forme cylindrique de la section métallique. Ce dispositif permet non seulement de réaliser un centrage ou un guidage mais a également la possibilité de corriger les éventuels défauts de surface, qui se présentent comme des écarts par rapport à la position circulaire centrée sur l'axe du trou de potentiel, par le jeu des forces différentielles de ce système de rappel (Fig. 10).

En ce qui concerne les jets métalliques de vitesse faible, le système décrit précédemment, destiné à faire tourner sur la surface du jet les lignes singulières du champ magnétique peut engendre un phénomène de mise en rotation du jet métallique qui devient rotor liquide dans le stator formé par les huit conducteurs. Il est possible de pallier cet inconvénient en alimentant chacun des deux systèmes formés par les quatre conducteurs réalisant le trou de potentiel à des fréquences peu différentes f_1 et f_2 (avec par exemple $f_2 > f_1$), les courants inducteurs ayant même amplitude. La rotation du trou de potentiel et de ses lignes singulières devient alors réversible. Dans un repère lié au champ magnétique de fréquence f_1 (Fig. 11) nous voyons que la

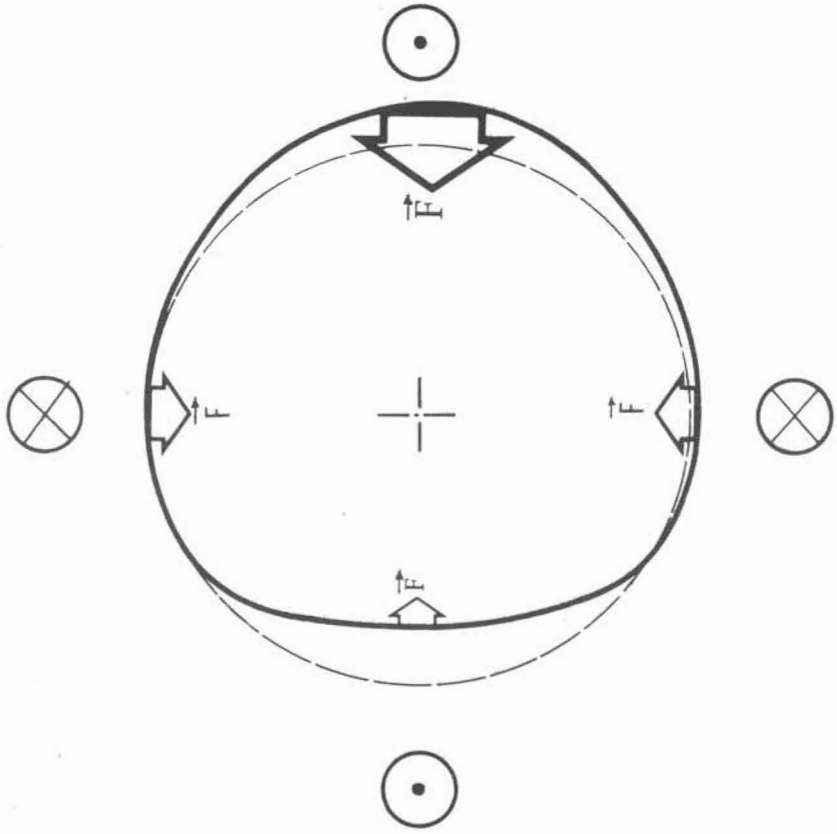
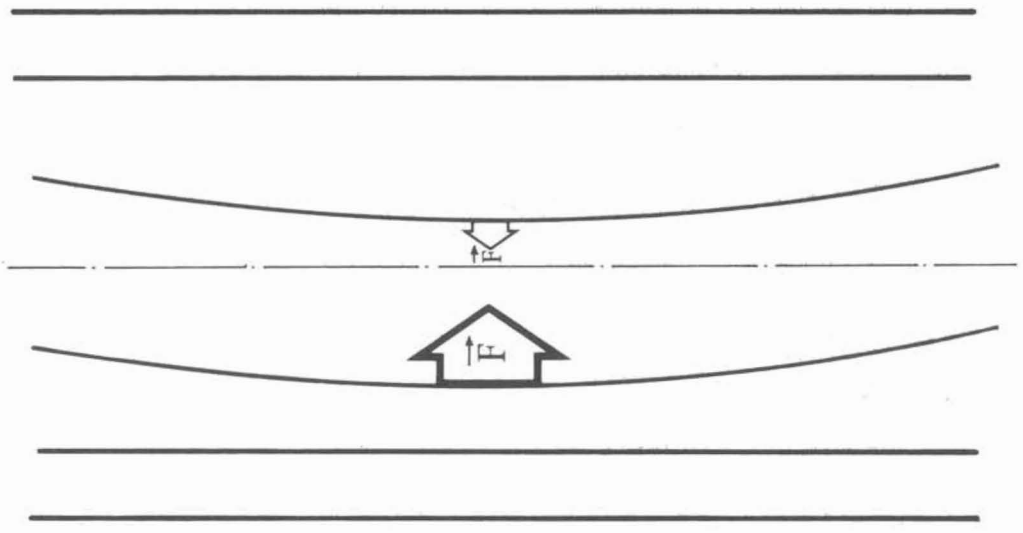


FIGURE 8



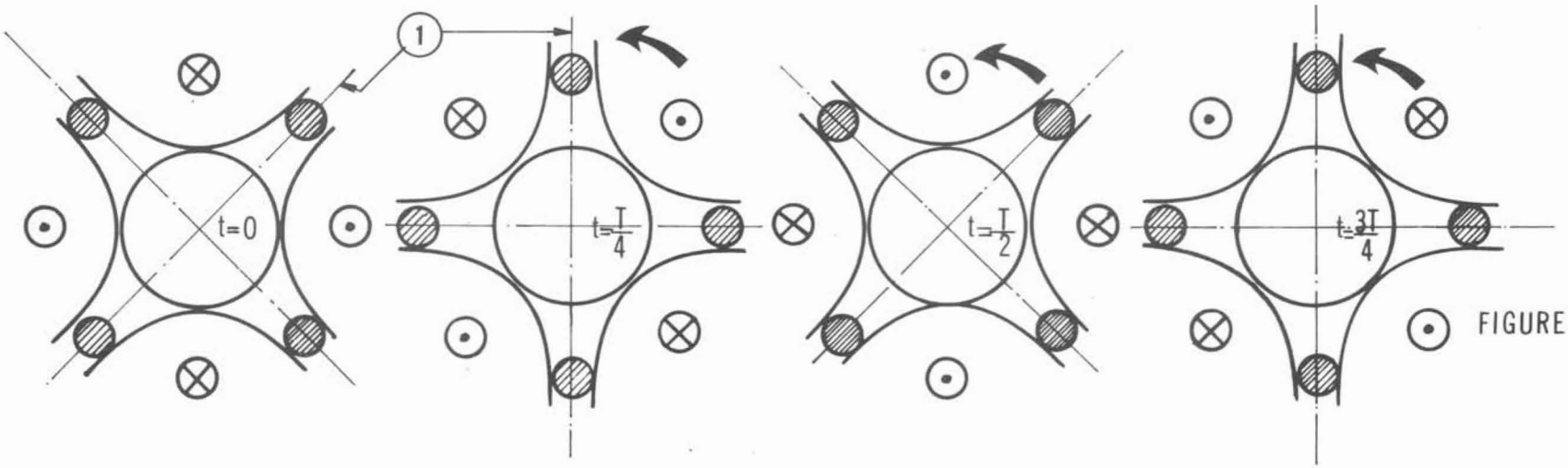
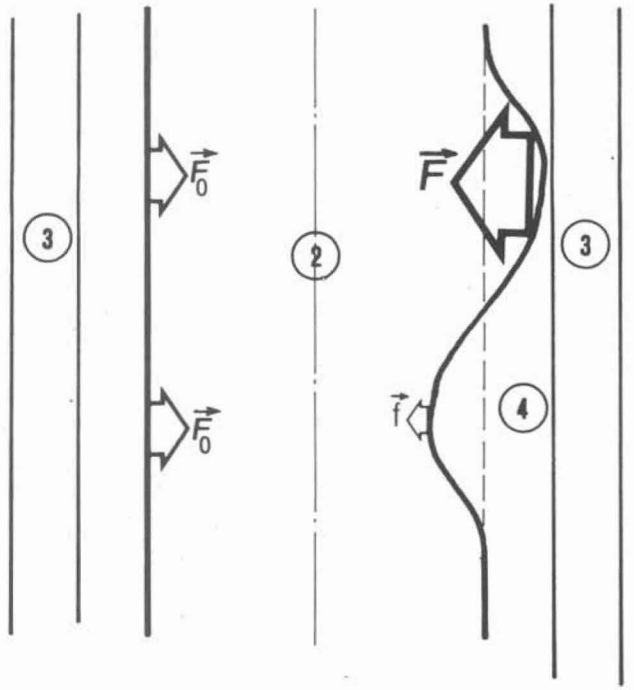


FIGURE 9

FIGURE 10



- COURANT ASCENDANT
- COURANT DESCENDANT
- ABSENCE DE COURANT
- (1) LIGNE SINGULIERE DU CHAMP MAGNETIQUE
- (2) AXE DU TROU DE POTENTIEL
- (3) CONDUCTEUR
- (4) POSITION D'EQUILIBRE DE LA SURFACE LIBRE
- T PERIODE DES COURANTS INDUCTEURS

fréquence d'inversion du sens de rotation du trou de potentiel est $f_r = 2(f_2 - f_1) = \frac{1}{T_r}$. Dans un tel repère 1/8 de tour est effectué pendant $\frac{T_r}{2}$, ce qui donne le nombre n de tours effectués dans un repère fixe :

$$n = \frac{f_1 + f_2}{8(f_2 - f_1)}$$

Un choix convenable des fréquences f_1 et f_2 permet d'une part d'avoir une peau électromagnétique d'épaisseur δ faible devant le rayon du jet métallique et d'autre part de fixer le nombre n de tours accomplis avant l'inversion du sens de rotation du trou de potentiel.

Par exemple :

$f_1 = 15000$ Hz $\qquad$ $f_2 = 25000$ Hz

$f_r = 20000$ Hz $\qquad$ $n = \frac{1}{2}$

$\delta_{max} = \left(2/\pi\mu\sigma f_1\right)^{1/2} = 5\,10^{-3}$ m, pour un acier de résistivité $\sigma = 16010^{-8}$ mho/m

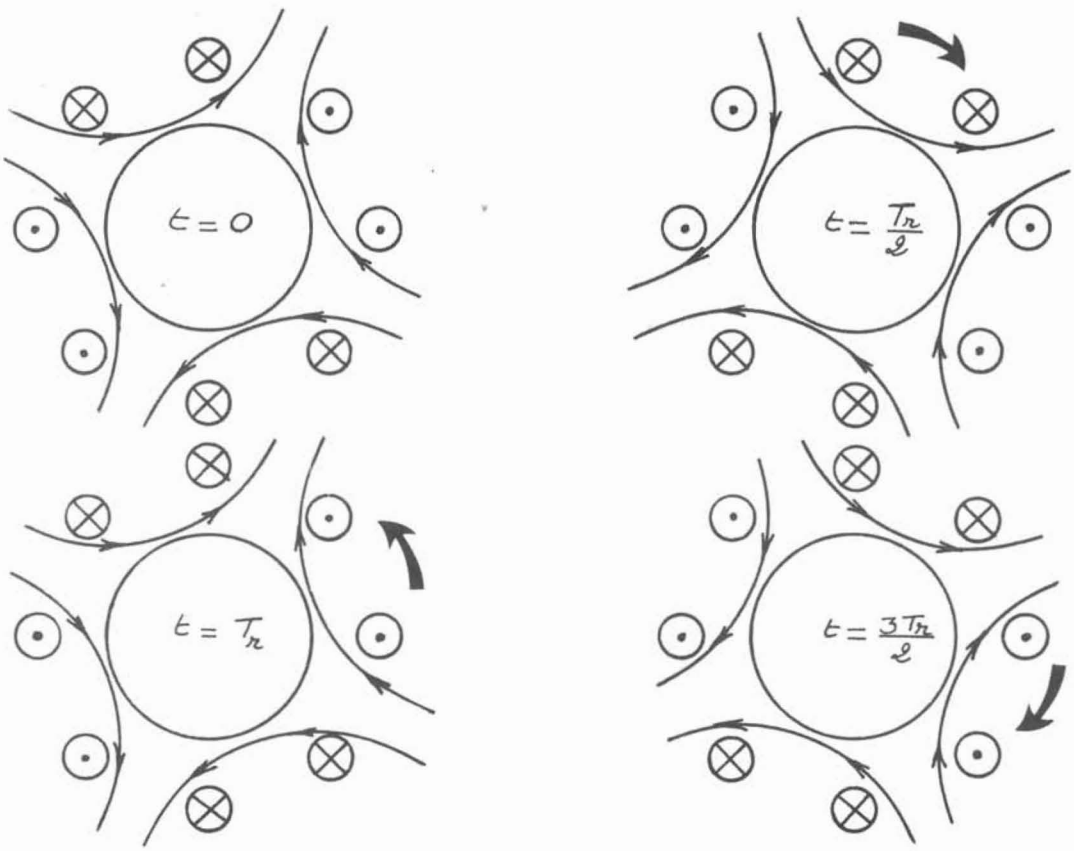


FIGURE 11

Un tel dispositif permet donc d'éliminer tout risque de torsion de la veine métallique dans le cas où le temps de transit des particules fluides à l'intérieur du trou de potentiel n'est pas petit.

Dans chacun des exemples de dispositifs donnés précédemment le trou de potentiel initial est réalisé avec quatre conducteurs parallèles rectilignes. Il est concevable que, pour des jets de diamètres importants, un tel système ne puisse remplir parfaitement les rôles de centrages, guidage ou correction de forme, du fait de l'éloignement obligé des conducteurs. L'effet produit sur un jet initialement circulaire de diamètre important serait l'adoption d'une configuration voisine de celle des lignes de champ et donc l'évolution vers une section proche d'un carré dans le cas d'un système formé de quatre conducteurs et d'un octogone pour les deux systèmes associés. Il est souhaitable alors de multiplier le nombre de conducteurs nécessaires à la réalisation du trou de potentiel : la seule condition à respecter est l'opposition de phase des courants électriques dans deux conducteurs successifs. En outre pour un système initial de 2N conducteurs une rotation du trou de potentiel, réversible ou non peut être obtenue par l'association d'un système identique au premier déduit de celui-ci par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2N}$ autour de l'axe du trou de potentiel. L'alimentation déphasée ou de fréquence différente de ce système permet d'obtenir la rotation (Fig. 12).

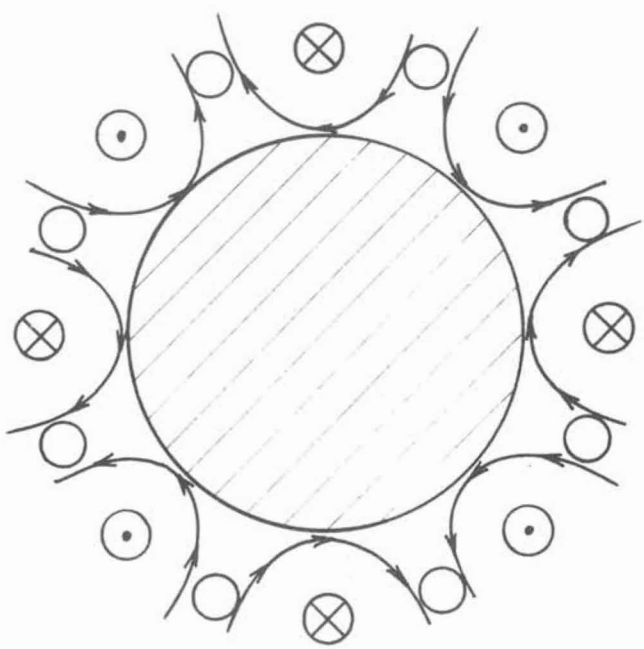


FIGURE 12

IV.3. Résumé et classification des différents trous de potentiel suivant l'effet recherché

Les trous de potentiel réalisés par des conducteurs parallèles alimentés en courant alternatif de fréquence suffisamment élevée pour assurer une peau électromagnétique de faible épaisseur devant le rayon de la veine métallique sur laquelle ils doivent agir, remplissent les fonctions suivantes :

- Centrage d'une veine métallique en écoulement vertical

Si le diamètre de la veine métallique est réduit, cet effet est obtenu grâce à un système de quatre conducteurs alimentés de telle façon que les courants électriques soient opposés dans deux conducteurs successifs. Le nombre de conducteurs, nécessairement

pair, peut être augmenté pour obtenir le centrage de jets métalliques de diamètre important.

- Guidage et correction de la forme d'une veine métallique

Les forces électromagnétiques doivent s'opposer à tout mouvement qui aurait tendance à écarter l'axe de la veine métallique de l'axe du trou de potentiel qui impose le chemin que doit emprunter le métal liquide. Pour assurer l'existence de telles forces sur toute la surface de la veine métallique, il est nécessaire d'associer un deuxième système à celui utilisé pour le centrage. Cette association permet de détruire par rotation la localité des singularités. Un déphasage d'un quart de période entre les deux systèmes alimentés à la même fréquence est suffisant pour guider des jets métalliques de vitesse élevée qui ne peuvent être affectés par la rotation. Par contre, une alimentation des deux systèmes à des fréquences différentes crée une rotation réversible indispensable pour éviter tout effet de torsion d'une veine métallique de faible vitesse. En plus du guidage, ces systèmes permettent de réduire les déformations de la surface libre qui tendraient à faire disparaître la symétrie de révolution autour de l'axe du trou de potentiel.

- Centrage d'une veine métallique en écoulement horizontal

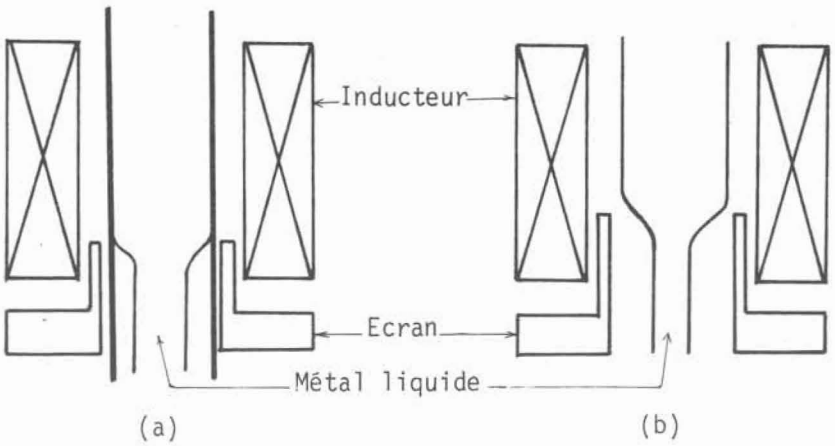
Il s'agit en fait d'un guidage particulier, caractérisé par un trou de potentiel d'axe horizontal. Les forces électromagnétiques engendrées dans la partie inférieure de la veine métallique s'opposent alors à la pesanteur afin que le métal liquide ne soit plus soumis qu'aux seules forces d'inertie horizontales.

En outre, la présence de courants induits dans la peau électromagnétique permet, en fournissant aux inducteurs une énergie supplémentaire, de réchauffer le métal et de la maintenir à l'état liquide pendant la traversée du tour de potentiel.

IV.4. Amélioration du "Dispositif Electromagnétique de Confinement de Métaux Liquides".

La Busette Electromagnétique décrite dans le "Dispositif Electromagnétique de Confinement de Métaux Liquides" permet de faire décoller une veine métallique liquide des parois qui la contenait (cas (a)) ou de réduire brusquement le diamètre d'une veine libre (cas (b)) grâce à l'action combinée d'un inducteur alimenté en courant alternatif de fréquence élevée et d'un écran de cuivre.

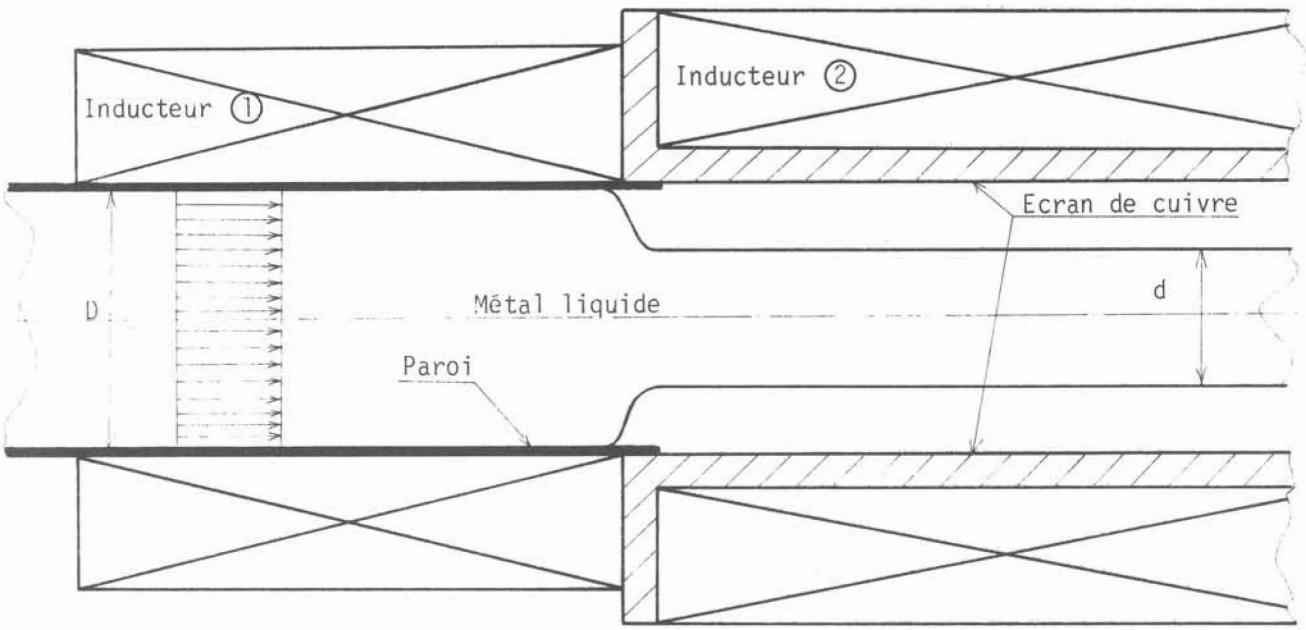
Dans les deux cas la veine métallique contractée n'est plus soumise à aucune force d'origine électromagnétique que l'écran a pour but de faire disparaître. Ainsi,



ni guidage, ni centrage de la veine contractée n'est réalisé. Le champ magnétique créé à l'amont de l'écran par l'inducteur (solénoïde) est uniforme et par conséquent incapable de faire apparaître des forces de rappel indispensables au centrage ou au guidage d'une veine libre. Les forces électromagnétiques qui apparaissent dans la peau d'une veine métallique traversant un trou de potentiel sont radiales et centripètes et sont à l'origine d'une surpression interne au métal liquide égale à celle existant lors de la traversée de l'inducteur de la Busette Electromagnétique. La substitution du solénoïde inducteur de la Busette Electromagnétique par un trou de potentiel de guidage ① permet donc avec l'aide d'un écran de cuivre de réaliser la contraction d'une veine métallique libre tout en assurant le centrage ou le guidage de celle-ci à l'amont de la contraction. Il est possible de la même façon de centrer ou de guider la veine métallique contractée ou décollée de la paroi. Il suffit pour cela de placer autour de l'écran de cuivre un nouvel inducteur de guidage ② alimenté par des courants électriques de fréquence telle que le champ magnétique créé traverse l'épaisseur de cuivre et pénètre dans la veine décollée sur une faible épaisseur de peau. Ainsi à l'intérieur de l'écran la veine métallique est soumise à un système de force de rappel permettant le centrage ou le guidage, en position quelconque, même horizontale. Les forces électromagnétiques s'exerçant sur le métal liquide dans cette région sont obligatoirement à l'origine d'une surpression interne. Cette surpression ne réduit pas, comme on pourrait le penser, l'efficacité de la nouvelle Busette Electromagnétique puisque l'ensemble des deux inducteurs ① et ② permet pour une alimentation donnée de l'inducteur ① d'obtenir le même coefficient de contraction que l'inducteur ② soit présent ou non.

En effet, si B_1 est l'amplitude du champ magnétique à la surface du métal liquide dans l'inducteur ① la surpression résultant est $\frac{B_1^2}{2\mu}$ qui en l'absence de l'inducteur ② donne une contraction :

$$\alpha = \left(1 + \frac{B_1^2}{\mu \rho V^2}\right)^{-1/4}$$



La fréquence d'alimentation de l'inducteur ② est telle que l'écran de cuivre soit perméable au champ magnétique B_2 créé par cet inducteur, alors qu'il est imperméable à B_1. Ainsi lorsque l'inducteur ② est en service le champ magnétique B_2 intéresse non seulement la région interne à l'écran mais également un domaine limité situé à l'amont de l'écran. L'inducteur ② contribue donc à accroître la surpression interne au métal liquide à l'amont de l'écran d'une quantité égale à la surpression qu'il crée à l'aval du point de décollement. Puisque le coefficient de contraction dépend uniquement de la différence des pressions au sein du métal liquide entre l'amont et l'aval de l'écran de cuivre, la contribution globale de l'inducteur ② est nulle et le coefficient de contraction n'est pas modifié par sa présence.

La Busette Electromagnétique ainsi réalisée possède les mêmes performances que celle décrite dans le "Dispositif Electromagnétique de Métaux Liquides". De plus elle permet le centrage ou le guidage de la veine métallique liquide non seulement à l'amont du point de décollement si la veine est libre, mais au-delà de ce point, dans la zone protégée par l'écran de cuivre. Un tel dispositif possède le grand avantage de pouvoir fonctionner en position oblique ou horizontale. De plus si l'effet

recherché est une absence de contact métal-paroi, un coefficient de contraction très faible est suffisant grâce au guidage de la veine contractée qui élimine tout risque de contact parasite à l'aval du point de décollement limitant par conséquent la puissance à fournir aux inducteurs.

V. TENTATIVE D'APPROCHE ANALYTIQUE DES EFFETS ELECTROMAGNETIQUES PRODUITS SUR UN METAL LIQUIDE PAR UN TROU DE POTENTIEL.

La configuration du champ magnétique créé par un trou de potentiel est celle d'un champ magnétique multipolaire utilisé de façon courante pour réaliser un champ magnétique tournant dans le stator des moteurs synchrones. Le trou de potentiel élémentaire constitué de quatre conducteurs rectilignes parallèles correspond à un champ quadripolaire fixe. L'association de deux trous de potentiel semblables, déduits l'un de l'autre par rotation de 45° autour de leur axe commun et par déphasage d'un quart de période, constitue un champ magnétique quadripolaire tournant.

L'effet produit par un champ magnétique tournant à p paires de pôles, dans le cas où la fréquence des courants inducteurs est faible ($\mathcal{R}_\omega \ll 1$) a été étudié par ALEMANY et MOREAU [5]. Cette étude ne peut fournir aucun renseignement précis et fiable sur l'effet produit par un trou de potentiel tournant puisque celui-ci, par nature, est caractérisé par des fréquences élevées ($\mathcal{R}_\omega \gg 1$) et par une pénétration très limitée de l'induction magnétique à l'intérieur du métal liquide.

Puisque nous sommes dans le cas $\mathcal{R}_\omega \gg 1$, les courants induits dus au mouvement du fluide sont faibles devant les courants électriques qui apparaissent dans le métal liquide à cause du caractère alternatif du champ magnétique inducteur. Ainsi nous pouvons faire abstraction de tout écoulement axial, incapable de modifier de façon appréciable les effets produits par le champ magnétique sur une veine métallique au repos.

Le problème dans toute sa généralité est complexe. En effet, nous avons déjà souligné, et exploité, le fait que pour les fréquences élevées, le champ magnétique et le champ de vitesse étaient totalement découplés et pouvaient être déterminés séparément. Ceci n'est vrai cependant que lorsque les frontières de l'écoulement sont fixes et immuables. La grande simplification qui en résulte dans ce cas n'existe plus dans le problème particulier qui nous intéresse puisque la frontière du métal liquide, qui est une surface libre, devient l'inconnue recherchée. Le champ magnétique dans le métal liquide est fixé par les conditions de continuité à travers la surface libre qui, par sa dépendance étroite avec le champ de vitesse et la pression, introduit un nouveau couplage entre variables dynamiques et variables électromagnétiques.

Notre approche va consister à oublier cette frontière inconnue en considérant que la veine de métal liquide est limitée par des parois et nous tenterons de déduire de cette première étude les effets apparaissant dans le cas d'une veine libre.

V.1. Effet produit par un trou de potentiel tournant formé de 2p conducteurs

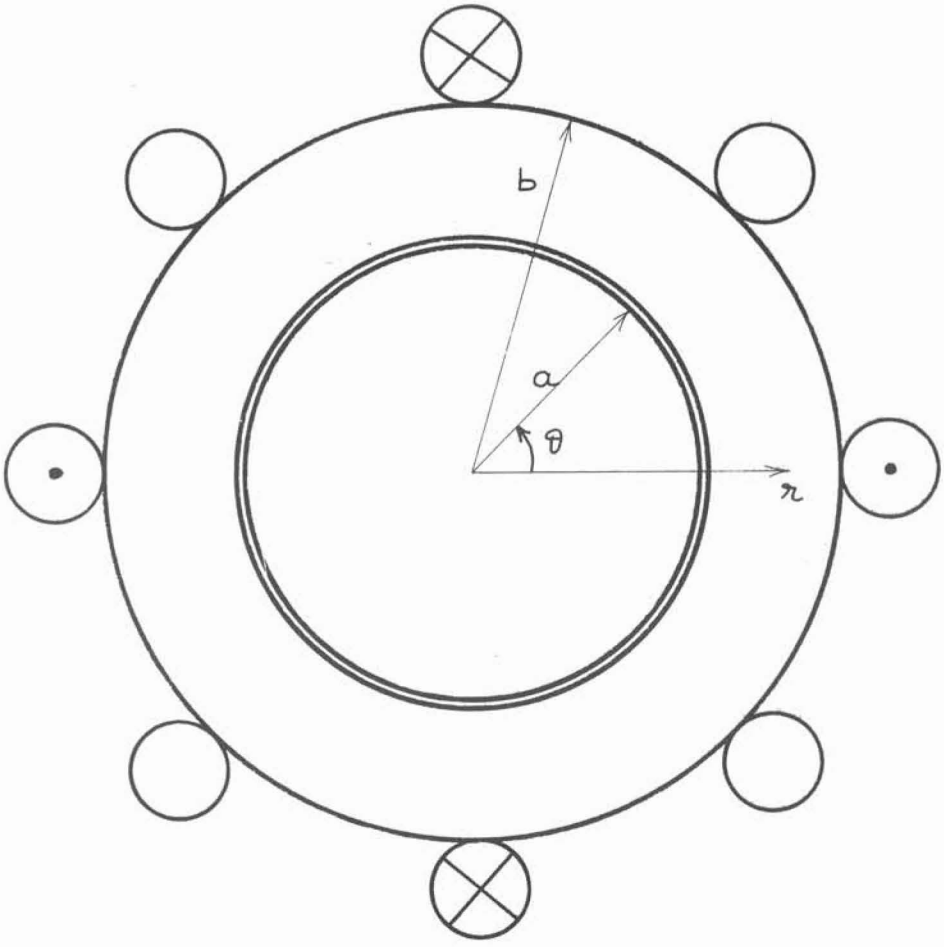
La géométrie retenue est la suivante :

- le métal liquide est contenu dans une paroi isolante de rayon intérieur a, coaxiale au trou de potentiel.

- une atmosphère isolante sépare cette paroi des 2p conducteurs parallèles à l'axe de la veine de métal liquide.

- les 2p conducteurs sont tangents extérieurement à un cylindre de rayon $b > a$, coaxial à l'ensemble.

- un conducteur d'angle polaire ϑ, $\left(\vartheta = k\frac{\pi}{p} \; ; \; k \in \mathbb{N}\right)$ est parcouru par un courant $I = I_0 \cos\left(\omega t + p\vartheta\right)$



Nous allons remplacer cette répartition discrète de conducteurs autour du cylindre de rayon b par une répartition continue de conducteurs infiniment minces telle que l'intensité I du courant dans une génératrice du cylindre d'angle polaire ϑ soit :

$$I = I_o \cos(\omega t + p\vartheta)$$

La répartition du courant sur le cylindre de rayon b, et par conséquent le champ magnétique qui prend naissance à son voisinage immédiat sont bien sûr différents de ceux relatifs au trou de potentiel. Cependant dès que l'on s'éloigne de la périphérie du cylindre le champ magnétique créé par la distribution surfacique continue devient très vite identique à celui engendré par les 2p conducteurs si bien que pour la veine de métal liquide de rayon $a < b$ les deux répartitions sont tout à fait équivalentes. L'intérêt de cette répartition continue provient de la grande commodité qu'elle introduit au niveau du traitement analytique du problème puisque la condition limite qu'elle impose au champ magnétique s'exprime simplement dans la forme :

$$r = b \qquad B_\vartheta = B_o \cos(\omega t + p\vartheta)$$

Dans la région isolante $a \leqslant r \leqslant b$, le champ magnétique solénoïdal et irrotationnel vérifie :

$$\overrightarrow{\nabla^2 B} = \vec{o} \qquad a \leqslant r \leqslant b$$

Puisque le fréquence des courants inducteurs est élevée c'est un mécanisme de diffusion pure qui régit le champ magnétique dans le métal liquide :

$$\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \overrightarrow{Rot}\left(\overrightarrow{Rot}\,\overrightarrow{B}\right) \qquad r \leqslant a$$

Compte tenu : - de la valeur imposée de B_ϑ pour $r = b$

- de la continuité de $\vec{B}$ à la traversée de l'interface $r = a$
- de la valeur finie de $\vec{B}$ au centre de la veine métallique liquide

le champ magnétique $\vec{B}$ et son potentiel vecteur $\vec{A} = (0,0,A)$ sont donnés dans chacun des deux milieux par les expressions suivantes :

- Milieu conducteur $r \leq a$

$$\begin{cases} B_r = -2i\,\dfrac{B_0}{d}\,\dfrac{J_p(\alpha r)}{\alpha r}\,e^{i(\omega t+p\theta)} \\ B_\theta = 2\,\dfrac{B_0}{d}\,\dfrac{J'_p(\alpha r)}{p}\,e^{i(\omega t+p\theta)} \\ A = -2\,\dfrac{B_0}{d}\,\dfrac{J_p(\alpha r)}{p\alpha}\,e^{i(\omega t+p\theta)} \end{cases}$$

- Milieu isolant $a \leq r \leq b$

$$\begin{cases} B_r = -i\,\dfrac{B_0}{d}\left[\dfrac{J_p(\alpha a)}{\alpha a}\left(\dfrac{r^{p-1}}{a^{p-1}}+\dfrac{a^{p+1}}{r^{p+1}}\right)+\dfrac{J'_p(\alpha a)}{p}\left(\dfrac{r^{p-1}}{a^{p-1}}-\dfrac{a^{p+1}}{r^{p+1}}\right)\right]e^{i(\omega t+p\theta)} \\ B_\theta = \dfrac{B_0}{d}\left[\dfrac{J_p(\alpha a)}{\alpha a}\left(\dfrac{r^{p-1}}{a^{p-1}}-\dfrac{a^{p+1}}{r^{p+1}}\right)+\dfrac{J'_p(\alpha a)}{p}\left(\dfrac{r^{p-1}}{a^{p-1}}+\dfrac{a^{p+1}}{r^{p+1}}\right)\right]e^{i(\omega t+p\theta)} \\ A = -\dfrac{B_0}{pd}\left[\dfrac{J_p(\alpha a)}{\alpha a}\left(\dfrac{r^{p}}{a^{p-1}}+\dfrac{a^{p+1}}{r^{p}}\right)+\dfrac{J'_p(\alpha a)}{p}\left(\dfrac{r^{p}}{a^{p-1}}-\dfrac{a^{p+1}}{r^{p}}\right)\right]e^{i(\omega t+p\theta)} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} B_r \;\; \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A}{\partial \theta} \qquad\qquad B_\theta = -\dfrac{\partial A}{\partial r} \\ \alpha a = \sqrt{\dfrac{R_\omega}{2}}\,(i-1) \qquad R_\omega = \mu\sigma\omega a^2 \gg 1 \\ J_p = \text{fonction de BESSEL d'ordre P} \\ d = \dfrac{J_p(\alpha a)}{\alpha a}\left(\dfrac{b^{p-1}}{a^{p-1}}-\dfrac{a^{p+1}}{b^{p+1}}\right)+\dfrac{J'_p(\alpha a)}{p}\left(\dfrac{a^{p+1}}{b^{p+1}}+\dfrac{b^{p-1}}{a^{p-1}}\right) \end{cases}$$

Puisque nous sommes dans le cas précis où les fréquences élevées choisies donnent des valeurs élevées de R_ω et par conséquent des épaisseurs de peau δ tout à fait réduites ($\frac{\delta}{a} = R_\omega^{-1/2}$), nous pouvons simplifier ces expressions en ne retenant que le comportement asymptotique des fonctions de Bessel.

Celles-ci s'écrivent :

$$\begin{cases} J_p(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\,\cos\left(z-\dfrac{p\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ J'_p(z) = -\sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\,\sin\left(z-\dfrac{p\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases} \qquad \begin{matrix} z \in \mathbb{C} \\ \|z\| \ll 1 \end{matrix}$$

Quelle que soit la parité de p, ces expressions conduisent à la valeur suivante du potentiel vecteur A du champ magnétique

$$A = -\frac{\ell B_0 a\, e^{\sqrt{\frac{R\omega}{2}}\left(\frac{r}{a}-1\right)} \cos\left[\sqrt{\frac{R\omega}{2}}\left(\frac{r}{a}-1\right) - \frac{\pi}{4} + \omega t + p\vartheta\right]}{\left(\frac{a^{p+1}}{b^{p+1}} + \frac{b^{p-1}}{a^{p-1}}\right)\sqrt{R\omega}}$$

Il est à noter que pour établir cette formule nous avons tenu compte de la faiblesse de la profondeur de peau δ devant le rayon a et avons substitué aux expressions de la forme :

$$\frac{a}{r}\, e^{\sqrt{\frac{R\omega}{2}}\left(\frac{r}{a}-1\right)} \qquad \text{l'expression} \qquad e^{\sqrt{\frac{R\omega}{2}}\left(\frac{r}{a}-1\right)}$$

Ceci est tout à fait légitime puisque la décroissance imposée par l'exponentielle est très forte et se manifeste bien avant que la croissance de la fonction $\frac{a}{r}$ puisse apparaître.

A cause des fréquences élevées, le champ de vitesse reste sans influence sur les variables électrique et magnétique ; en particulier la densité de courant dans le métal liquide s'écrit sous la forme :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \; ; \quad \text{c'est à dire puisque} \quad \overrightarrow{Rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \overrightarrow{Rot}\,\vec{A}$$

$$\vec{j} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \vec{j} = (0, 0, j)$$

ce qui conduit à :

$$j = -\frac{\ell B_0 R\omega}{\mu a\left(\frac{a^{p+1}}{b^{p+1}} + \frac{b^{p-1}}{a^{p-1}}\right)} e^{\sqrt{\frac{R\omega}{2}}\left(\frac{r}{a}-1\right)} \sin\left[\sqrt{\frac{R\omega}{2}}\left(\frac{r}{a}-1\right) + \omega t + p\vartheta - \frac{\pi}{4}\right]$$

Les forces électromagnétiques $\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B}$ peuvent alors être déterminées :

$$\vec{F} = (F_r, F_\theta, 0) \qquad \text{avec} \begin{cases} F_r = j \dfrac{\partial A}{\partial r} \\ F_\theta = \dfrac{1}{r} j \dfrac{\partial A}{\partial \theta} \end{cases}$$

Comme précédemment, à cause du caractère exponentiel décroissant très marqué de j et de $\dfrac{\partial A}{\partial \theta}$ nous écrirons :

$$F_r = j \frac{\partial A}{\partial r} \qquad F_\theta = \frac{1}{a} j \frac{\partial A}{\partial \theta}$$

$$F_r = -\frac{B^2 a}{2\mu} \times \frac{1}{\sqrt{2R_\omega}} e^{\sqrt{2R_\omega}\left(\frac{r}{a}-1\right)} + \frac{B^2 a P}{2\mu} \times \frac{1}{\sqrt{2R_\omega}} e^{\sqrt{2R_\omega}\left(\frac{r}{a}-1\right)} (\cos 2\beta + \sin 2\beta)$$

$$F_\theta = -\frac{B^2 a P}{2\mu R_\omega} e^{\sqrt{2R_\omega}\left(\frac{r}{a}-1\right)} + \frac{B^2 a P}{2\mu R_\omega} e^{\sqrt{2R_\omega}\left(\frac{r}{a}-1\right)} \cos 2\beta$$

$$\vec{F} = F(r) + f(r, \theta, t)$$

$$B = \frac{2 B_0 \sqrt{R_\omega}}{a\left(\dfrac{a^{P+1}}{b^{P+1}} + \dfrac{b^{P-1}}{a^{P-1}}\right)}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{R_\omega}{2}}\left(\frac{r}{a} - 1\right) + \omega t + P\theta - \frac{\pi}{4}$$

Dans l'expression de $\vec{F}$, les parties moyennes $\overline{F}$ et instationnaires $\vec{f}$ ont été séparées. Il est intéressant de remarquer que seule la partie moyenne de $\vec{F}$ est rotationnelle et va engendrer le mouvement du fluide qui sera par conséquent permanent. La partie instationnaire $\vec{f}$ sera équilibrée par un gradient de pression qui aura par la suite le même caractère instationnaire.

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{F} = \left(0, 0, -\frac{4 P B^2 \sqrt{R_\omega}}{2\mu a^2} e^{\sqrt{2R_\omega}\left(\frac{r}{a}-1\right)}\right) = \overrightarrow{Rot}\,\overline{F}$$

$$f = -\,\mathrm{grad}\,\phi$$

$$\text{avec } \phi = \frac{B_0^2}{4\mu\left(\dfrac{a^{P+1}}{b^{P+1}} + \dfrac{b^{P-1}}{a^{P-1}}\right)^2} e^{\sqrt{2R_\omega}\left(\frac{r}{a}-1\right)} \cos\left(\sqrt{2R_\omega}\left(\frac{r}{a}-1\right) + 2\omega t + 2P\theta\right)$$

Il est logique de penser que le mouvement du fluide résultera uniquement d'un équilibre entre les forces de viscosité et les forces électromagnétiques toutes deux

localisées dans une mince couche pariétale. La viscosité seule pourra faire diffuser le mouvement de cette couche pariétale, où se trouve le moteur de l'écoulement, jusqu'au coeur de la veine de métal liquide.

L'équation du tourbillon, éliminant les parties irrotationnelles instationnaires, exprimée en terme de fonction de courant Ψ s'écrit :

$$\nu \nabla^4 \Psi = - \frac{4 P B_0^2 \sqrt{R_\omega}}{\mu \rho \sqrt{2}\, a^2 \left(\frac{a^{P+1}}{b^{P+1}} + \frac{b^{P-1}}{a^{P-1}} \right)^2} e^{\sqrt{2 R_\omega}\left(\frac{r}{a} - 1\right)}$$

Le deuxième membre de cette équation, uniquement fonction de la coordonnée radiale, impose que la fonction de courant Ψ ne présente qu'une variation dans cette seule direction.

De plus, puisque :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \qquad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

l'écoulement résultant sera purement azimutal et par conséquent les forces d'inertie seront rigoureusement nulles dans le métal liquide, à l'exception toutefois de la force associée à l'accélération centripète $- \frac{v^2}{r}$ dont nous montrerons, plus loin, le rôle tout à fait négligeable ; ceci permettra de justifier, a posteriori, l'équilibre initialement supposé entre forces de viscosité et forces électromagnétiques.

La condition de non glissement à la paroi $r = a$ permet la détermination de v qui s'écrit :

$$v = \frac{B_0^2 a P}{\mu \rho \nu R_\omega \left(\frac{a^{P+1}}{b^{P+1}} + \frac{b^{P-1}}{a^{P-1}} \right)^2} \left(e^{\sqrt{2 R_\omega}\left(\frac{r}{a} - 1\right)} - \frac{r}{a} \right)$$

ou, en introduisant le nombre de Hartmann $M = B_0 a \left(\frac{\sigma}{\rho \nu} \right)^{1/2}$ et le nombre de Reynolds magnétique $R_\Omega = \mu \sigma \Omega a^2$ formé avec la vitesse de rotation $\Omega = \frac{\omega}{P}$ du champ magnétique

$$v = \frac{M^2}{R_\Omega^2 a^2} \Omega a \left[e^{\sqrt{2 R_\omega}\left(\frac{r}{a} - 1\right)} - \frac{r}{a} \right]$$

avec : $$\alpha = \left(\frac{a^{P+1}}{b^{P+1}} + \frac{b^{P-1}}{a^{P-1}} \right)$$

La vitesse dans le coeur est donnée par :

$$v = - \frac{M^2}{R_\Omega^2 \alpha^2} \Omega r$$

c'est une rotation en masse de vitesse angulaire $\Omega_v = \frac{M^2}{R_\Omega^2 \alpha^2} \Omega$

La condition $\mu \sigma v a \ll 1$ que nous devons vérifier pour que le champ de vitesse n'apporte pas de modification, comme nous l'avons supposé, au champ magnétique précédemment calculé, impose :

$$\Omega_v \ll \Omega$$

soit $$\frac{M^2}{R_\Omega^2} \left(\frac{a^{P+1}}{b^{P+1}} + \frac{b^{P-1}}{a^{P-1}} \right)^{-2} \ll 1$$

ou, étant données les valeurs assez proches de a et b

$$\frac{M^2}{R_\Omega^2} \ll 1$$

Cette condition indispensable à la validité de l'analyse développée limite supérieurement l'intensité du champ magnétique (M) et inférieurement la fréquence des courants inducteurs (R_Ω)

Les équations permettant le calcul de la pression se réduisent à :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(P + \phi \right) = \frac{v^2}{r} + \frac{\overline{F_r}}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(P + \phi \right) = \frac{\overline{F_\theta}}{\rho} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0$$

et conduisent à :

$$\frac{1}{\rho}\left(P + \phi \right) = \frac{M^4 P^2}{\alpha^4 R_\omega^{9/2}} \frac{\omega^2 a^2}{2} \left[\frac{e^{-2\sqrt{2R_\omega}\left(\frac{r}{a} - 1\right)}}{2} - 2 e^{\sqrt{2R_\omega}\left(\frac{r}{a} - 1\right)} \right] + \frac{M^4}{2\alpha^4 R_\omega^4} \omega^2 r^2 - \frac{N}{\alpha^2 R_\omega} \alpha \omega^2 e^{\sqrt{2R_\omega}\left(\frac{r}{a} - 1\right)} + C$$

où C est une constante vraie et $N = \frac{M^2}{R_\omega} = \frac{\sigma B_o^2}{\rho \omega}$ = paramètre d'intéraction

Pour $r = a$

$$P = \left[\left(-\frac{3M^4 P^2}{2 d^4 R_\omega^{9/2}} + \frac{M^4 P^2}{2 d^4 R_\omega^4} \right) - \frac{N}{d^2 R_\omega} \right] \rho \omega^2 a^2 + \frac{N}{d^2 R_\omega} \rho \omega^2 a^2 \cos\left(2\omega t + 2p\theta\right) + C$$

Les valeurs élevées de R_ω, ainsi que la condition $\frac{M^2}{R_\omega^2} \ll 1$ permettent de négliger les deux premiers termes d'origine inertielle $\left(\frac{v^2}{r}\right)$ devant le troisième d'origine magnétique, ce qui justifie l'équilibre initialement supposé et conduisent à l'expression suivante pour la pression en $r = a$

$$P(a) = \frac{B_o^2}{\mu d^2} \left(-1 + \cos 2(\omega t + p\theta) \right) + C$$

Par conséquent c'est le champ magnétique, et lui seul, qui impose la pression à la périphérie du domaine fluide. De plus pour $r = a$ la pression résulte de deux termes : l'un permanent, l'autre, de moyenne nulle, pulsant à la fréquence 2ω. Cette fréquence étant très élevée ($\sim 10^4 Hz$) le fluide ne peut percevoir, et par conséquent suivre, la pulsation de la pression qui se réduit à sa partie efficace :

$$P(a) = -\frac{B_o^2}{\mu d^2} + C$$

La surface extérieure du liquide ($r = a$) est donc une surface isobare.

Notre analyse, dans le but de s'affranchir des difficultés posées par la détermination d'une surface libre inconnue, a supposé le fluide contenu par une paroi. Puisque la surface extérieure du fluide est une isobare, cette paroi est sans aucune utilité quant à la tenue de la veine de métal liquide.

En fait l'existence de la paroi modifie le champ de vitesse réel puisqu'elle impose la nullité de la vitesse à son contact et l'existence d'une couche limite. Cependant nous avons remarqué que le champ de vitesse demeurait sans effet sur la pression au sein du fluide, il est donc légitime de penser qu'en l'absence de paroi la pression dans le fluide sera celle calculée précédemment.

Le calcul de la vitesse, en l'absence de paroi, c'est à dire en imposant un frottement nul sur toute la périphérie du métal liquide conduit à :

$$v = \frac{M^2 P}{R_w^{3/2}} \frac{\sqrt{2}}{d^2} \omega a \left[\sqrt{\frac{2}{R_w}} e^{\sqrt{2R_w}\left(\frac{r}{a}-1\right)} - \frac{2r}{a} \right]$$

valeur, qui compte-tenu des valeurs élevées de R_w, se réduit à :

$$v = -\frac{2\sqrt{2}}{\left(\frac{a^{P+1}}{b^{P+1}} + \frac{b^{P-1}}{a^{P-1}}\right)^2} \frac{PM^2}{R_w^{3/2}} \omega r$$

La veine fluide est donc toute entière animée d'une rotation en masse de vitesse angulaire Ω_v:

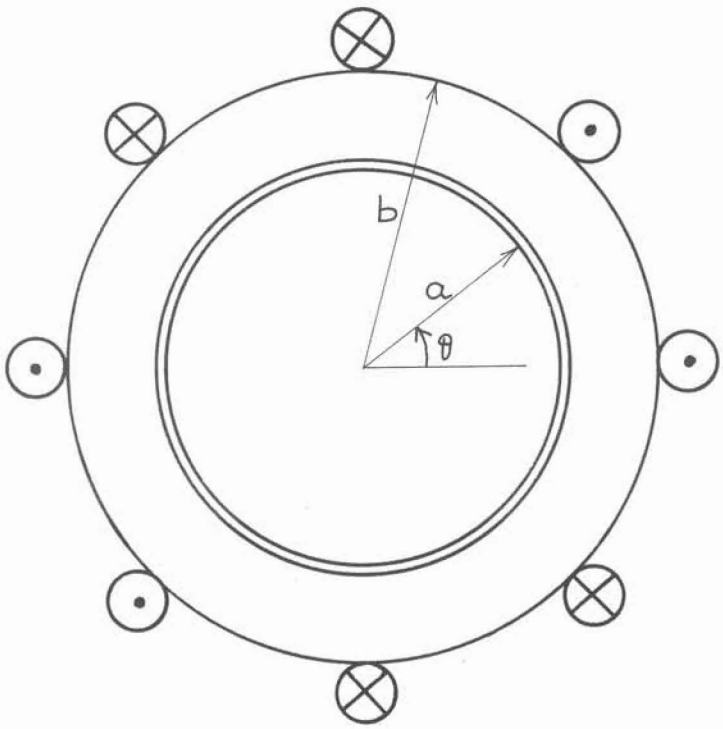
$$\Omega_v = \frac{2\sqrt{2P}}{\left(\frac{a^{P+1}}{b^{P+1}} + \frac{b^{P-1}}{a^{P-1}}\right)^2} \frac{M^2}{R_\Omega^{3/2}} \Omega$$

Par conséquent le trou de potentiel tournant, formé par l'association de 2p conducteurs rectilignes parallèles, permet, par rotation des lignes de champ singulières existant à la surface du métal liquide d'éviter la formation d'une section droite polygonale. Il permet de conserver, si celle-ci existe déjà, ou sinon de rétablir, une section circulaire, de même axe que lui, à la veine de métal liquide : c'est en effet cette position et cette géométrie d'équilibre qui ressortent du précédent calcul. Le centrage et le guidage peuvent donc être obtenus grâce à un tel trou de potentiel, avec cependant l'inconvénient d'une mise en rotation de la veine métallique. En outre l'absence de paroi permet de fixer la constante C qui apparaissait dans le calcul du champ de pression. Il résulte alors du calcul qu'une surpression interme P apparaît au sein du liquide soumis au champ magnétique créé par le trou de potentiel. Un trou de potentiel peut donc être subsituté à l'inducteur de la "Busette Electromagnétique" et permettre son centrage, son guidage ou le rétablissement de la section circulaire avant la contraction. La surpression qui apparaît dans le métal liquide est égal à :

$$P = \frac{\mathcal{B}^2}{2\mu \left(\frac{a^{P+1}}{b^{P+1}} + \frac{b^{P-1}}{a^{P-1}}\right)^2}$$

où $\mathcal{B}$ est la valeur efficace du champ magnétique inducteur.

V.2. Effet produit par un trou de potentiel à rotation réversible



Le trou de potentiel ainsi défini doit permettre d'éviter la mise en rotation de la veine de métal liquide introduite par le trou de potentiel tournant précédemment étudié. Il est difficilement possible de limiter la vitesse de rotation en jouant sur les paramètres magnétiques : en effet il est important de conserver une fréquence élevée et, dans ce cas, diminuer la vitesse de rotation nécessite de diminuer l'intensité $\mathcal{B}_o$ du champ magnétique ($\mathcal{M}$) ce qui conduit à une baisse d'efficacité du trou de potentiel vis à vis de ses fonctions de centrage ou de correction de forme. En outre une rotation semblable à celle engendrée par le trou de potentiel tournant présente peu d'avantage pour les métallurgistes qui recherchent surtout des écoulements donnant lieu à des cisaillements susceptibles de casser les dendrites se formant au voisinage du front de solidification. De tels cisaillements sont bien évidemment absents, dans une veine métallique soumise à une rotation en masse.

L'analyse suivante va montrer la capacité du trou de potentiel à rotation réversible à annuler la rotation en masse du métal liquide et à faire apparaître au sein du liquide des écoulements cisaillés.

La géométrie retenue pour cette étude est identique à celle définie pour l'étude précédente. Nous pouvons à priori éliminer la paroi isolante de rayon intérieur a, qui, comme dans le cas précédent, se révèlera parfaitement inutile.

Nous envisageons à nouveau une distribution continue de conducteurs à la périphérie du cylindre de rayon b . Le champ magnétique créé par un trou de potentiel, à rotation réversible, muni de 8 conducteurs parallèles est alors identique à celui engendré par la répartition électrique continue suivante :

$$I = I_0 \left[\sin(2\theta + \omega_1 t) + \sin(2\theta - \omega_1 t) + \cos(2\theta + \omega_2 t) + \cos(2\theta - \omega_2 t) \right]$$

où ω_1 et ω_2 désignent les pulsations des courants inducteurs relatifs à chacun des deux trous de potentiel élémentaires formés de quatre conducteurs.

Cette répartition est la superposition de quatre systèmes électriques. A chacun d'eux, pris individuellement, est associé un champ magnétique d'amplitude B_0 à la périphérie du cylindre de rayon b et donc un potentiel vecteur défini de la façon suivante :

* $I_1 = I_0 \cos(2\theta + \omega_2 t)$

$$A_1 = - \frac{2 B_0 a e^{\sqrt{\frac{R\omega_2}{2}}\left(\frac{r}{a} - 1\right)} \cos\left(\sqrt{\frac{R\omega_2}{2}}\left(\frac{r}{a} - 1\right) + \omega_2 t + 2\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{d\, R\omega_2}$$

* $I_2 = I_0 \cos(2\theta - \omega_2 t)$

$$A_2 = - \frac{2 B_0 a e^{\sqrt{\frac{R\omega_1}{2}}\left(\frac{r}{a} - 1\right)} \sin\left(-\sqrt{\frac{R\omega_1}{2}}\left(\frac{r}{a} - 1\right) - \omega_1 t + 2\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{d\, R\omega_2}$$

* $I_3 = I_0 \sin(2\theta + \omega_1 t)$

$$A_3 = - \frac{2 B_0 a e^{\sqrt{\frac{R\omega_1}{2}}\left(\frac{r}{a} - 1\right)} \sin\left(\sqrt{\frac{R\omega_1}{2}}\left(\frac{r}{a} - 1\right) + \omega_1 t + 2\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{d\, R\omega_1}$$

* $I_4 = I_0 \sin(2\theta - \omega_1 t)$

$$A_4 = - \frac{2 B_0 a e^{\sqrt{\frac{R\omega_1}{2}}\left(\frac{r}{a} - 1\right)} \sin\left(-\sqrt{\frac{R\omega_1}{2}}\left(\frac{r}{a} - 1\right) - \omega_1 t - 2\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{d\, R\omega_1}$$

avec $R\omega_j = \mu \sigma \omega_j a^2 \gg 1$ $\qquad$ $d = \frac{a^3}{b^3} + \frac{b}{a}$

Puisque les pulsations ω_1 et ω_2 sont élevées ($R\omega_j \gg 1$), ce sont les mêmes équations et les mêmes approximations que celles faites dans l'étude précédente qui conduisent aux résultats ci-dessus.

Les équations magnétiques étant parfaitement linéaires le potentiel vecteur résultant de la superposition des quatre systèmes électriques sera donné par la somme algébrique des quatre potentiels vecteurs élémentaires :

$$A = \sum_{j=1}^{4} A_j$$

soit :

$$A = -2C\left(\gamma_1 \cos\beta_1 \cos 2\theta + \gamma_2 \cos\beta_2 \cos 2\theta\right)$$

et :

$$j = -\frac{2C}{\mu a^2}\left(R_{\omega_1}\gamma_1 \sin\beta_1 \sin 2\theta + R_{\omega_2}\gamma_2 \sin\beta_2 \cos 2\theta\right)$$

avec $\quad C = \dfrac{2B_0 a}{\left(\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b}{a}\right)} \qquad \gamma_j = \dfrac{e^{\sqrt{\frac{R\omega_j}{2}}\left(\frac{r}{a}-1\right)}}{\sqrt{R\omega_j}}$

$$\beta_j = \sqrt{\frac{R\omega_j}{2}}\left(\frac{r}{a} - 1\right) + \omega_j t - \frac{\pi}{4}$$

Les forces électromagnétiques qui apparaissent dans le métal liquide par unité de volume sont alors les suivantes :

$$F_r = j\frac{\partial A}{\partial r} \qquad F_\theta = \frac{1}{a} j \frac{\partial A}{\partial \theta}$$

soit en séparant les parties moyennes $\overline{F_r}$ et $\overline{F_\theta}$ des parties instationnaires f_r et f_θ :

$$\overline{F_r} = \frac{8B_0^2}{\mu a\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b}{a}\right)^2\sqrt{2}}\left(\sqrt{R\omega_1}\sin^2 2\theta\, e^{\sqrt{2R\omega_1}\left(\frac{r}{a}-1\right)} + \sqrt{R\omega_2}\cos^2 2\theta\, e^{\sqrt{2R\omega_2}\left(\frac{r}{a}-1\right)}\right)$$

$$\overline{F_\theta} = 0$$

$$f_r = \frac{2\sqrt{2}\,B_0^2}{\mu a\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b}{a}\right)^2}\left[R_{w_1}^{3/2}\gamma_1^2\sin^2 2\vartheta\left(\sin 2\beta_1+\cos 2\beta_1\right)+R_{w_2}^{3/2}\gamma_2^2\cos^2 2\vartheta\left(\sin 2\beta_2+\cos 2\beta_2\right)\right.$$
$$\left.+\left(R_{w_1}R_{w_2}\right)^{1/2}\gamma_1\gamma_2\cos 4\vartheta\left[R_{w_1}^{1/2}\sin\beta_1\left(\cos\beta_2-\sin\beta_2\right)+R_{w_2}^{1/2}\sin\beta_2\left(\cos\beta_1-\sin\beta_1\right)\right]\right]$$

$$f_\vartheta = \frac{8B_0^2}{\mu a\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b}{a}\right)^2}\left[\left(R_{w_1}\gamma_1^2\sin 2\beta_1 - R_{w_2}\gamma_2^2\sin 2\beta_2\right)\sin 4\vartheta\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_1\gamma_2}{4}\left(R_{w_2}\sin\beta_2\cos\beta_1\cos^2 2\vartheta - R_{w_1}\sin\beta_1\cos\beta_2\sin^2 2\vartheta\right)\right]$$

Un premier résultat important de ce calcul est la nullité de la partie moyenne de la force tangentielle F_ϑ qui est la principale responsable de la mise en rotation du métal liquide. La partie moyenne dela force radiale présente quant à elle une variation suivant ϑ ce qui lui confère un caractère rotationnel et introduit une source de vorticité dans le fluide. Cependant la périodicité en ϑ exclut totalement l'apparition d'une rotation en masse, au profit de cellules individualisées de même périodicité que $\overline{F_r}$.

Si les pulsations ω_1 et ω_2 sont élevées, le fluide ne percevra que la partie moyenne de forces électromagnétiques à laquelle il répondra. Comme dans le cas du trou de potentiel tournant les vitesses induites dans le métal liquide vont être très faibles et il est à nouveau possible de négliger les forces d'inertie devant les forces électromagnétiques et les forces de viscosité.

La fonction de courant Ψ est déterminée par l'équation suivante (équation du tourbillon) :

$$\mu\nabla^4\Psi = \frac{8\sqrt{2}\,B_0^2}{\rho\mu a^2\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b}{a}\right)^2}\left(\sqrt{R_{w_1}}\,e^{\sqrt{2R_{w_1}}\left(\frac{r}{a}-1\right)} - \sqrt{R_{w_2}}\,e^{\sqrt{2R_{w_2}}\left(\frac{r}{a}-1\right)}\right)\sin 4\vartheta$$

et les conditions aux limites qui fixent :

- la nullité de la vitesse en $r=a$, dans le cas d'une veine métallique contenue par une paroi

- la nullité du frottement et de la composante radiale de la vitesse, en $r=a$, dans le cas d'une veine libre.

Soit :

$$\psi = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b}{a}\right)^2}\,\frac{M^2}{R_\omega^2}\,\omega a^2\left[\frac{e^{2R_{\omega_1}\left(\frac{r}{a}-1\right)}}{R_{\omega_1}^{3/2}}-\frac{e^{2R_{\omega_2}\left(\frac{r}{a}-1\right)}}{R_{\omega_2}^{3/2}}+\left(\frac{1}{R_{\omega_1}}-\frac{1}{R_{\omega_2}}\right)\left(\frac{r^4}{\sqrt{2}a^4}-\frac{r^6}{\sqrt{2}a^6}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{R_{\omega_1}^{3/2}}-\frac{1}{R_{\omega_2}^{3/2}}\right)\left(\frac{2r^6}{a^6}-\frac{2r^4}{a^4}\right)\right]\sin 4\theta$$

en présence d'une paroi;

avec $R_\omega = \mu\sigma\omega a^2$, $\omega = (\omega_1+\omega_2)/2$

$$\psi = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b}{a}\right)}\,\frac{M^2}{R_\omega^2}\,\omega a^2\left[\frac{e^{2R_{\omega_1}\left(\frac{r}{a}-1\right)}}{R_{\omega_1}^{3/2}}-\frac{e^{2R_{\omega_2}\left(\frac{r}{a}-1\right)}}{R_{\omega_2}^{3/2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{R_{\omega_2}^{3/2}}-\frac{1}{R_{\omega_1}^{3/2}}\right)\left(\frac{5r^4}{a^4}-\frac{2r^6}{a^6}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{R_{\omega_2}^{1/2}}-\frac{1}{R_{\omega_1}^{1/2}}\right)\left(\frac{r^6}{a^6}-\frac{r^4}{a^4}\right)\right]\sin 4\theta$$

dans le cas d'une veine libre.

Dans chacun des deux cas l'écoulement est formé de cellules indépendantes occupant chacune un quart de la section droite de la veine métallique liquide. La vitesse tangentielle à la surface d'une veine libre de métal liquide est donnée par :

$$v(a) = -\frac{\sqrt{2}}{9\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b}{a}\right)^2}\,\frac{M^2}{R_\omega^2}\left(\frac{1}{R_{\omega_2}^{1/2}}-\frac{1}{R_{\omega_1}^{1/2}}\right)\omega a \sin 4\theta$$

qui s'écrit en introduisant la différence $\mathcal{E} = (R_{\omega_1} - R_{\omega_2})/2$

$$v(a) = -\frac{4\sqrt{2}}{9\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b}{a}\right)^2}\,\frac{\mathcal{E}\,M^2}{R_\omega^{7/2}}\sin 4\theta$$

compte-tenu de la valeur élevée de R_ω cette vitesse est très faible.

Les forces d'inertie qui apparaissent dans le métal liquide sont très faibles également en raison des vitesses peu élevées induites par le champ magnétique dans le métal liquide. Ces forces ne peuvent donc modifier sensiblement l'équilibre existant entre les forces électromagnétiques et les forces de viscosité. De même le champ de pression sera peu affecté par la vitesse et sera uniquement imposé par la partie irrotationnelle des forces électromagnétiques.

Il convient maintenant de vérifier que le champ de pression engendré par la forme très particulière du champ magnétique est tout à fait compatible avec l'apparition d'une surface isobare sur toute la périphérie du cylindre de métal liquide de rayon a. C'est à cette seule condition que le trou de potentiel à rotation réversible peut remplir efficacement les fonctions de centrage, de guidage ou de correction de forme que nous désirons réaliser.

La pression P est déterminée par les équations suivantes :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{\rho}\overline{F_r} + \nu\left(\nabla^2 u - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2}\right)$$

$$\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = \nu\left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2}\right)$$

Compte-tenu des pulsations élevées ω_1 et ω_2 qui conduisent à des pénétrations limitées du champ magnétique dans le métal liquide et des vitesses très faibles induites dans ce dernier, deux régions très distinctes vont apparaître :

- une région située à la périphérie du domaine liquide, correspondant à la peau électromagnétique, marquée par un fort gradient de pression radial.

- une région centrale dans laquelle les gradients de pression sont très faibles

La résolution des équations déterminant P conduisent à :

$$P = -\frac{4B_0^2}{\mu\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b}{a}\right)^2}\left[e^{\sqrt{R_{w_1}}\left(\frac{r}{a}-1\right)}\sin^2 2\theta + e^{\sqrt{R_{w_2}}\left(\frac{r}{a}-1\right)}\cos^2 2\theta\right] + \frac{4\sqrt{2}}{\mu\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b}{a}\right)^2}\cos 4\theta\left[\left(\frac{5r^3}{a^3}-\frac{r}{3a}\right)\left(\frac{1}{R_{w_2}^{1/2}}-\frac{1}{R_{w_1}^{1/2}}\right)\right] + C$$

Puisque $R_{w_1} \gg 1$ et $R_{w_2} \gg 1$ et $\frac{r}{a} \leqslant 1$ cette expression peut se réduire à :

$$P = -\frac{4B_0^2}{\mu\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b}{a}\right)^2}\left[e^{\sqrt{R_{w_1}}\left(\frac{r}{a}-1\right)}\sin^2 2\theta + e^{\sqrt{R_{w_2}}\left(\frac{r}{a}-1\right)}\cos^2 2\theta\right] + C$$

qui prouve que la surface $r = a$ est une isobare où :

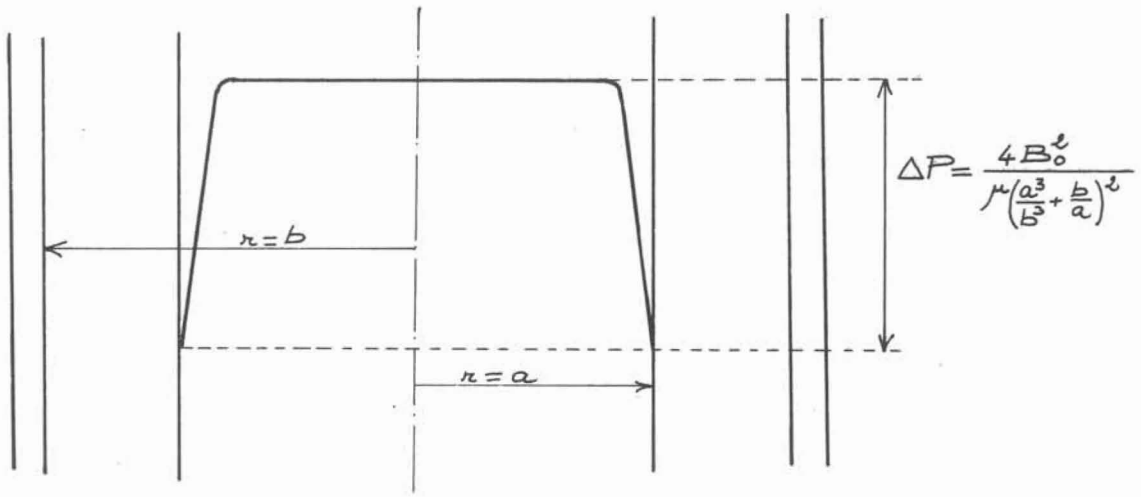
$$P = -\frac{4B_0^2}{\mu\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b}{a}\right)^2} + C$$

Par suite le trou de potentiel à rotation réversible permet de maintenir sous la forme d'un cylindre circulaire de rayon constant, une veine de métal liquide en mouvement, en l'absence totale de paroi.

Dans ce cas la pression atmosphérique s'exerce sur la suface libre et le champ de pression est déterminé par :

$$P = \frac{4 B_o^2}{\mu \left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b}{a}\right)^2} \left(1 - e^{\sqrt{R\omega_1}\left(\frac{r}{a} - 1\right)} \sin^2 2\vartheta - e^{\sqrt{R\omega_2}\left(\frac{r}{a} - 1\right)} \cos^2 2\vartheta \right)$$

Le profil de pression se présente bien sous la forme d'un palier central de valeur $\frac{4 B_o^2}{\mu \left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b}{a}\right)^2}$ bordé d'une zone superficielle, correspondant à la peau électromagnétique, dans laquelle la pression chute rapidement à zéro. Le trou de potentiel ainsi défini peut donc être également substitué à l'inducteur de la busette électromagnétique pour assurer le centrage ou le guidage de la veine de métal liquide que l'on désire contracter



L'examen des effets produits par les trous de potentiel sur une veine de métal liquide a montré que les configurations électromagnétiques créées sont susceptibles de maintenir, en l'absence de paroi, une section circulaire constante à une veine de métal liquide libre.

Le trou de potentiel tournant entraîne dans sa rotation le métal liquide dont la vitesse angulaire Ω_v ne peut cependant excéder la valeur :

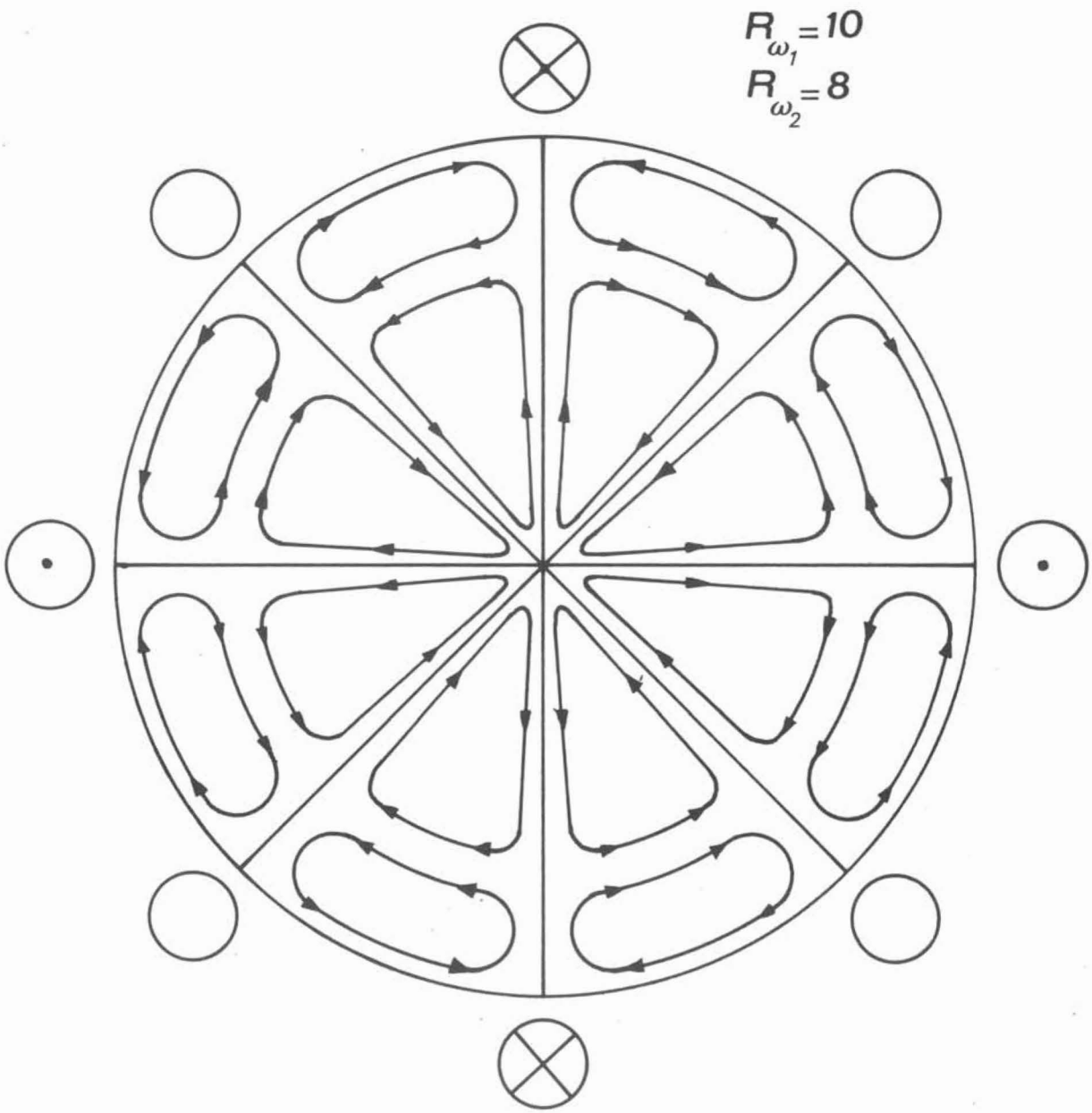
$$\Omega_v = - \frac{2\sqrt{2} P}{\left(\frac{a^{P+1}}{b^{P+1}} + \frac{b^{P-1}}{a^{P-1}}\right)^2} \frac{M^2}{R_\Omega^{3/2}} \Omega$$

Le trou de potentiel à rotation réversible induit un écoulement cellulaire formé de vortex identiques dans une section droite de la veine métallique liquide. La vitesse à la surface de la veine de métal liquide est égale à :

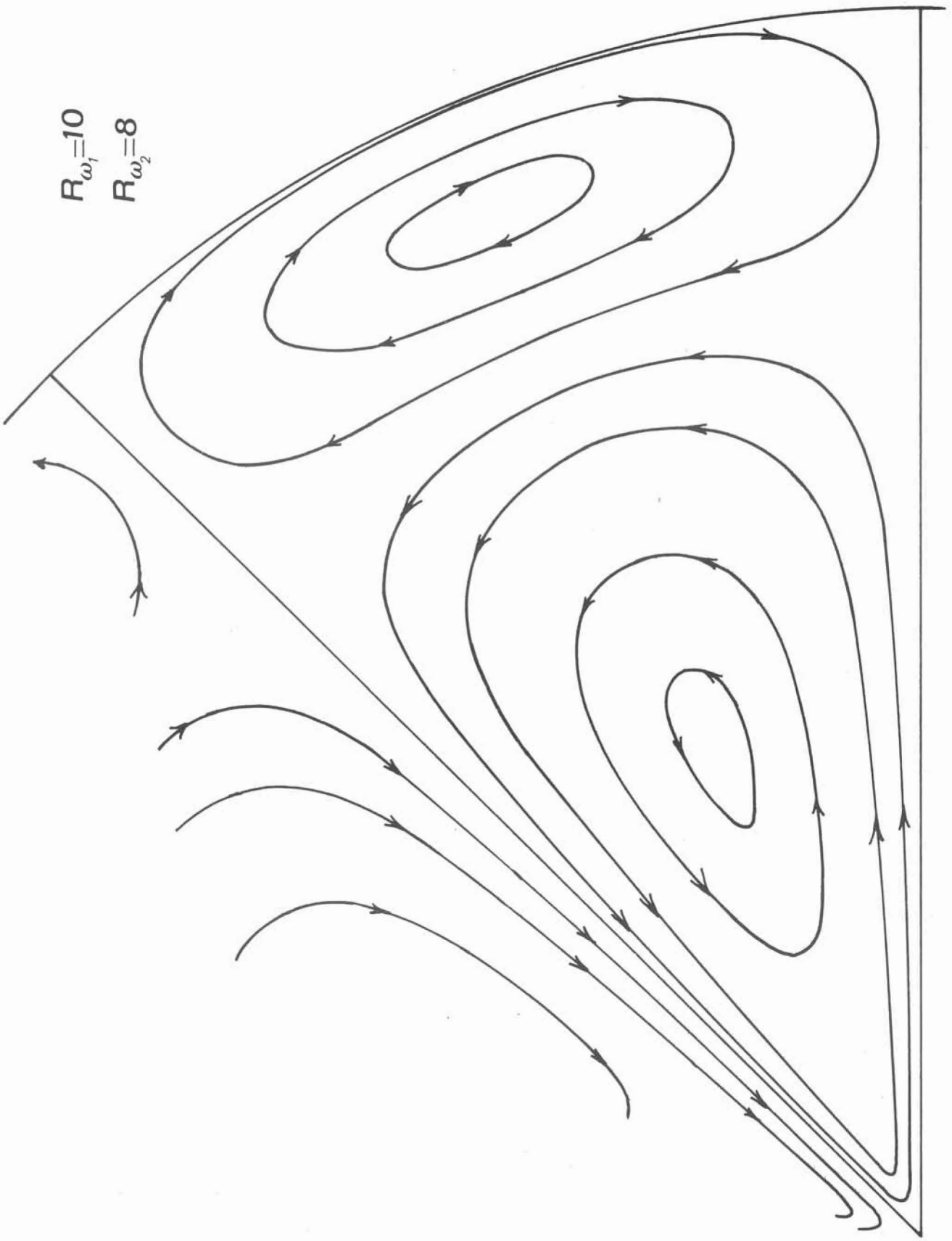
$$v = -\frac{4\sqrt{2}}{9\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b}{a}\right)^2}\,\frac{\mathcal{E}\,M^2}{R_w^{7/2}}\,\sin 4\vartheta$$

La figure suivante donne l'allure de l'écoulement dans le cas où $R_{w_1} < R_{w_2}$

$\mathcal{E} < 0$



Ecoulement produit dans une veine libre par un TROU de POTENTIEL à ROTATION REVERSIBLE


R_{ω_1}=10
R_{ω_2}=8

BIBLIOGRAPHIE

1 M. GARNIER - R. MOREAU : "Dispositif électromagnétique de confinement de métaux liquides", Brevet Français n° 75-021-75 du 4 Juillet 1975. Extension dans les pays suivants : U.S.A., Allemagne Fédérale, Canada, Grande-Bretagne, Japon, Suède.

2 E.A. OLSSON : "Procédé pour assurer l'étanchéité des joints d'assemblage", Brevet Français n° 75-33-051 du 29 Octobre 1975.

3 A. JAKOUBOVITCH : "Générateur apériodique pour chauffage par induction". Revue Ingénieurs et Techniciens, n° 263, Avril 1972.

4 A.F. NAIDENOV : "Problèmes liés à l'augmentation des quantités de liquides conducteurs lourds confinés dans des creusets électromagnétiques" Congrés de RIGA (1972), Compte-Rendu des Conférences (en russe).

5 A. ALEMANY - R. MOREAU
"Ecoulement d'un fluide conducteur de l'électricité en présence d'un champ magnétique tournant". Journal de Mécanique, vol. 16, n° 4, 1977 (à paraître).

6 H.K. MOFATT : "On fluid flow induced by a rotating magnetic field", Journal of Fluid Mechanics, 1956, vol. 1, page 644.

7 M. GARNIER - R. MOREAU : "Dispositif Electromagnétique de régulation du débit d'un métal liquide". Certificat d'addition au Brevet n° 75-21-075.

8 M. GARNIER - R. MOREAU : "Dispositif électromagnétique de centrage, de guidage et de correction de forme de veines métalliques liquides", Brevet Français en cours de dépôt.

CHAPITRE II

Un jet métallique soumis aux seules forces de pesanteur s'accélère et par suite sa section diminue, à cause de la conservation de débit. La contraction est cependant très lente. Nous nous proposons de faire apparaître à l'intérieur d'un tel jet des forces de traction supplémentaires susceptibles d'intensifier ce processus de contraction et de former des jets de diamètres très réduits pouvant constituer des fils ou des ébauches de fils. Il est clair que pour obtenir des contractions à la fois importantes et rapides, il est nécessaire de communiquer au métal liquide une accélération de l'ordre de dix fois celle de la pesanteur. Le dispositif électromagnétique retenu pour obtenir un tel effet est appelé "Filière Electromagnétique".

I. LA FILIERE ELECTROMAGNETIQUE

I.1. Notion de champ glissant

Les forces électromagnétiques de traction peuvent être induites au sein du jet de métal liquide par un champ magnétique non permanent dénommé champ glissant qu'il convient de définir avec précision.

Le champ magnétique tournant créé par un courant polyphasé est d'un usage très répandu et constitue le mécanisme d'action de base des moteurs électriques synchrones et asynchrones. Le stator de tels moteurs engendre un champ magnétique tournant qui induit dans le rotor (qui peut être ferromagnétique ou simplement constitué d'un matériau conducteur liquide ou solide) des courants dont l'interaction avec le champ magnétique crée des forces tangentielles ayant pour effet d'entraîner le rotor dans un mouvement de rotation et de l'amener à une vitesse égale à la vitesse de rotation du champ (vitesse de synchronisme), vitesse à laquelle le rotor voit un champ magnétique permanent.

Si les mécanismes responsables du mouvement du rotor sont absolument identiques qu'il s'agisse d'un rotor tout à fait classique ou d'un métal liquide, il importe de souligner la grande différence d'efficacité de ces deux types de "moteurs". Une perte importante apparaît lorsque le stator est constitué d'un métal liquide non ferromagnétique : le produit $\mu\sigma$ correspondant est en effet 10^{-4} fois moins élevé que pour un rotor classique. De plus, les impératifs thermiques excluent totalement la possibilité de réaliser des entrefers très faibles, semblables à ceux des moteurs habituels, puisqu'ils imposent la présence d'épaisses parois réfractaires entre le stator et le rotor. On peut considérer qu'un coefficient dix est à nouveau perdu de cette façon. Il serait donc tout à fait utopique dans ces conditions d'espérer induire dans un métal liquide des efforts identiques à ceux produits dans un rotor solide par le même stator.

Imaginons que l'on coupe le stator suivant une génératrice et qu'on le développe sur un plan : le stator, circulaire auparavant, créait un champ magnétique animé d'un mouvement de rotation ; maintenant devenu linéaire, il crée un champ magnétique animé d'un mouvement de translation appelé champ magnétique glissant. De même que le champ tournant est capable d'entraîner dans sa rotation des corps électroconducteurs, le champ magnétique glissant peut communiquer un mouvement de progression linéaire à de tels corps. Nous allons mettre à profit cette possibilité d'induire des forces électromagnétiques axiales pour obtenir une accélération et par conséquent une réduction de section d'un jet de métal liquide. Le mécanisme de formation du champ magnétique glissant est schématisé sur la figure 1.

I.2. *Analyse qualitative des effets dynamiques produits par un champ magnétique glissant.*

Considérons (figure 2) un jet de métal liquide s'écoulant entre deux demi-inducteurs à champ glissant. Les courants induits qui prennent naissance au sein du métal liquide doivent nécessairement se reboucler dans le métal lui-même. Ceci est tout à fait possible puisque la direction de ces courants alterne le long de la couche de métal à la distance d'un pas polaire τ, demi longueur d'onde du champ magnétique glissant. La force électromagnétique qui est à l'origine d'une traction n'apparaît que dans les régions où les courants induits sont à la fois perpendiculaires au vecteur champ magnétique et à la direction de son déplacement, c'est à dire sur les tronçons transversaux des circuits empruntés par les courants induits. Les tronçons longitudinaux sont, pour leur part, le siège de forces pulsant transversalement. Ces derniers tronçons sont néfastes à plus d'un titre : tout d'abord ils sont passifs vis à vis de l'effet qui nous intéresse, ensuite ils augmentent la résistance du circuit et par conséquent diminuent la densité de courant induit et par

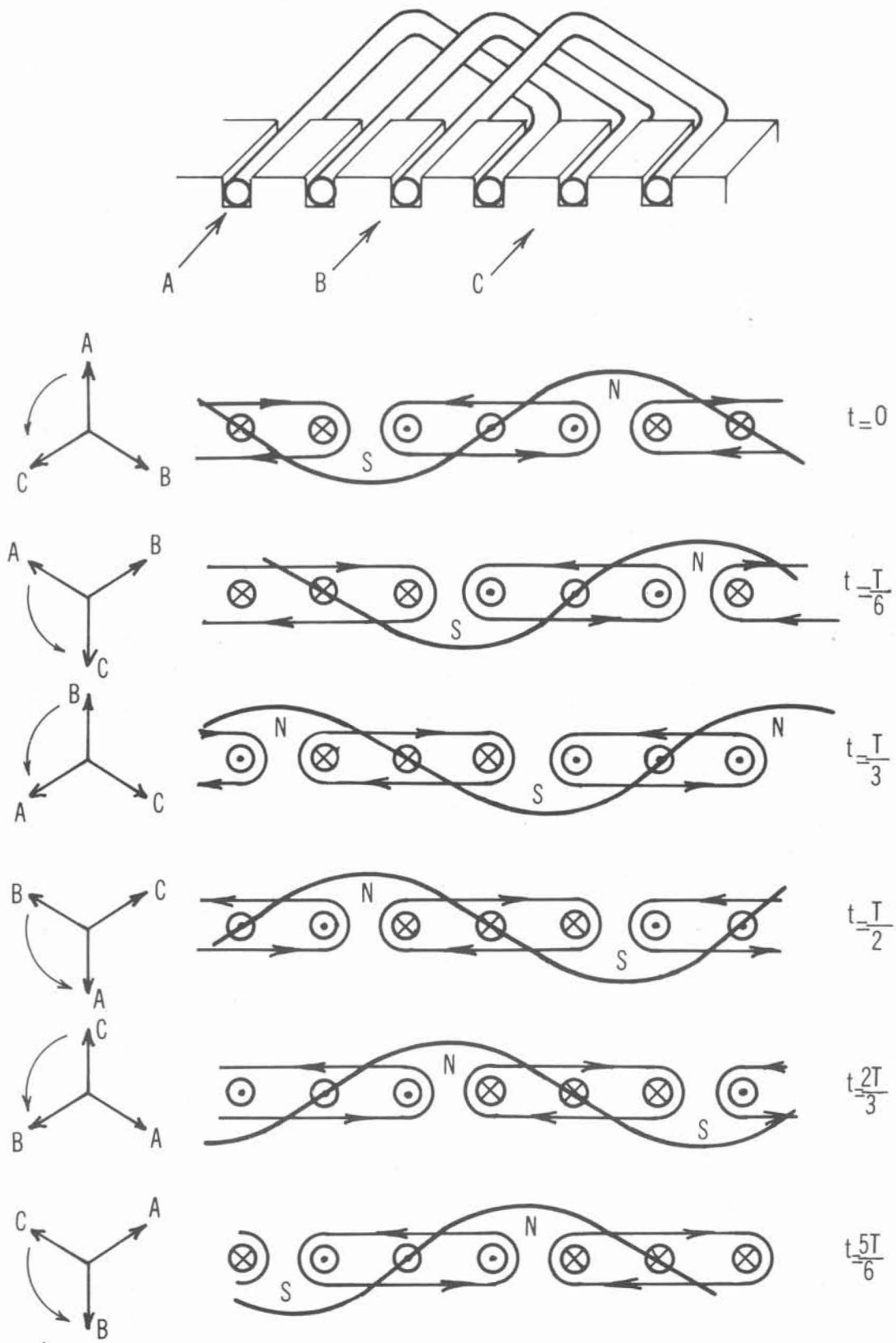
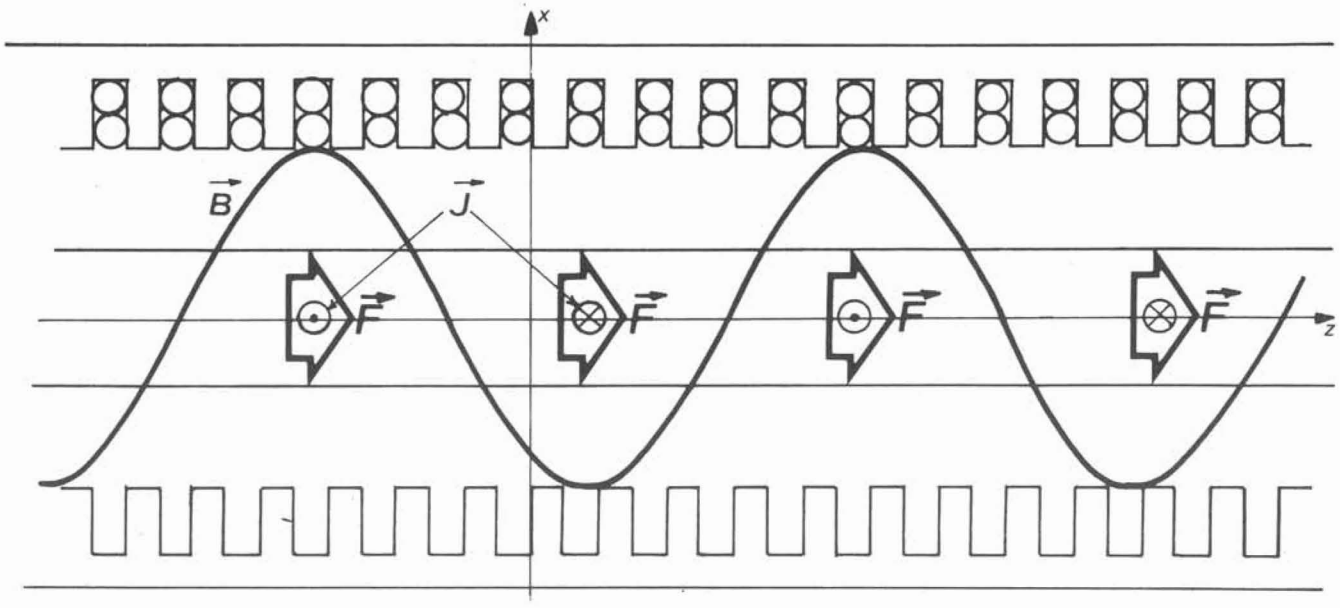
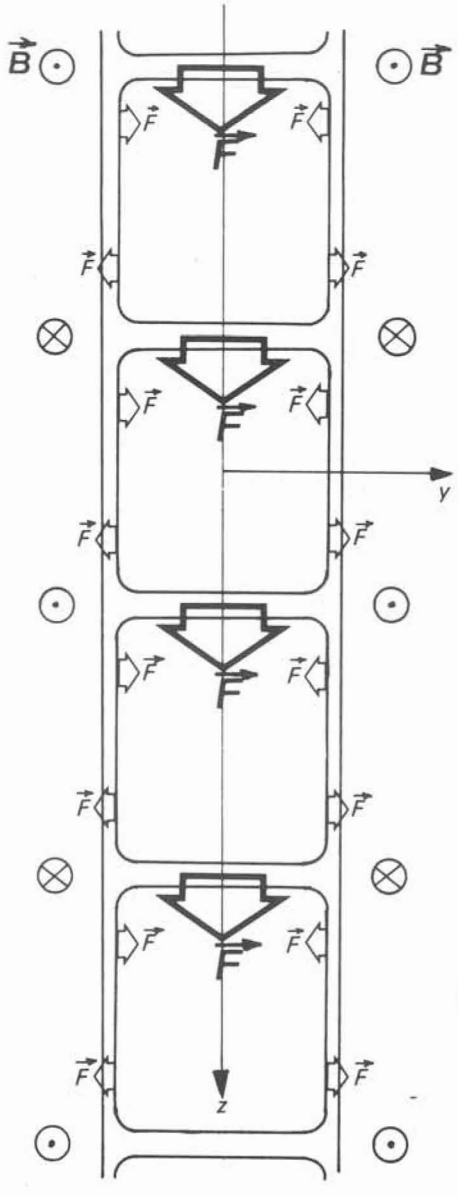


FIGURE 1





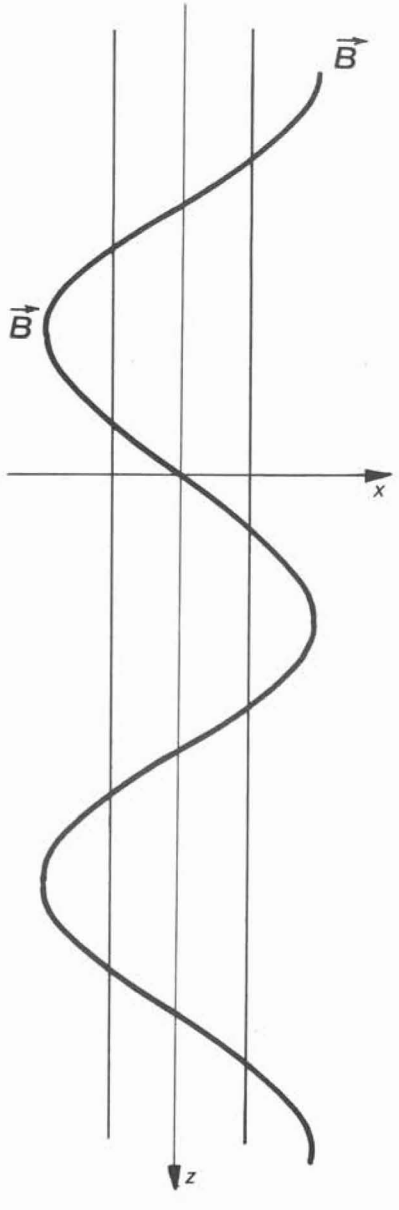


FIGURE 2

suite l'intensité des forces de traction, en même temps qu'ils créent des forces génératrices d'instabilités. Si le diamètre du jet de métal liquide est faible relativement à la dimension du pas polaire, les circuits des courants induits ont une forme étirée tout à fait défavorable pour l'effet de traction souhaité puisque la part passive de ces circuits est très importante (de l'ordre du pas polaire) devant leur part active (de l'ordre du diamètre du jet) et la force globale développée sur le jet est faible. De plus les régions soumises aux forces de traction les plus importantes sont dans ce cas fort éloignées les unes des autres et séparées par des zones étendues où s'exercent les forces radiales pulsantes : le risque est très grand dans ce cas de voir le jet se transformer en gouttelettes, aidé en cela par les forces de tension superficielle. Il est donc tout à fait souhaitable d'adopter un pas polaire du même ordre de grandeur que le diamètre du jet afin de réduire au maximum l'effet de ces phénomènes parasites.

Si les fortes valeurs du pas polaire sont à proscrire pour la réalisation d'une filière électromagnétique, les pas polaires de dimension réduite soulèvent, eux aussi, nombre de problèmes. Il est nécessaire, en effet, de choisir des largeurs de pas polaires supérieures à celles de l'entrefer (distance qui sépare les deux demi inducteurs à champ glissant). Dans le cas contraire, les lignes de champ magnétique qui sortent d'un pôle instantané sur l'une des moitiés de l'inducteur, au lieu de couper l'entrefer en ligne directe et d'entrer dans le pôle opposé sur l'autre moitié de l'inducteur, se courbent, parcourent le long de l'entrefer une distance égale au pas polaire et rentrent dans l'inducteur d'où elles sont sorties. Ces lignes de champ sont, bien évidemment, sans aucun effet sur le métal liquide qu'elles ne traversent pas : les inducteurs se trouvent "court-circuités".

Les forces qui tendent à entraîner un jet métallique dans le mouvement de translation imposé par le champ magnétique sont, on le conçoit aisément, d'autant plus grandes que la vitesse relative du champ par rapport au métal liquide est plus élevée. Ces forces s'annulent lorsque l'écoulement atteint une vitesse égale à la vitesse V_c du champ magnétique, puisque dans ce cas les courants induits sont nuls, et les particules fluides voient un champ magnétique permanent. L'effort de traction est proportionnel au glissement $s = \frac{V_c - V}{V_c}$, vitesse relative de l'écoulement par rapport au champ magnétique rapportée à la vitesse de synchronisme. Pour obtenir un effort maximal il convient donc de rendre ce glissement aussi voisin de l'unité que possible, ce qui suppose des vitesses de translation du champ importantes. La nécessité d'avoir des pas polaires de dimension réduite, associée au besoin d'engendrer des vitesses V_c importantes conduit à utiliser des fréquences élevées pour les courants inducteurs puisque V_c est égale au double produit du pas polaire par cette fréquence. Ceci impose des contraintes particulières pour la construction des inducteurs qui doivent être réalisés en tôles très minces (quelques centièmes de millimètres) pour limiter au maximum les pertes.

Des difficultés d'ordre purement technologique surgissent alors dans la construction d'encoches de faibles largeur (quelques millimètres), ayant une bonne tenue mécanique, dans des tôles aussi fines. Outre les problèmes de construction qu'elle pose, l'utilisation de fréquences élevées (plusieurs kilohertz) entraîne une baisse de rendement très importante de la machine linéaire. En effet les circuits des courants électriques induits ont, comme tout circuit électrique, une inductance propre qui introduit un déphasage entre les courants induits et le champ magnétique inducteur. Cette inductance, et par suite ce déphasage, croît très rapidement avec la fréquence. Aux fréquences élevées le courant induit dans un conducteur élémentaire, isolé par la pensée dans le métal liquide, atteint sa valeur d'amplitude au moment où le maximum de l'onde mobile du champ magnétique est déjà passé : le courant induit réagit donc avec un champ magnétique affaibli et la force électromagnétique résultante est alors fortement diminuée.

Certains impératifs sont donc, à respecter pour obtenir la meilleure efficacité du dispositif électromagnétique :

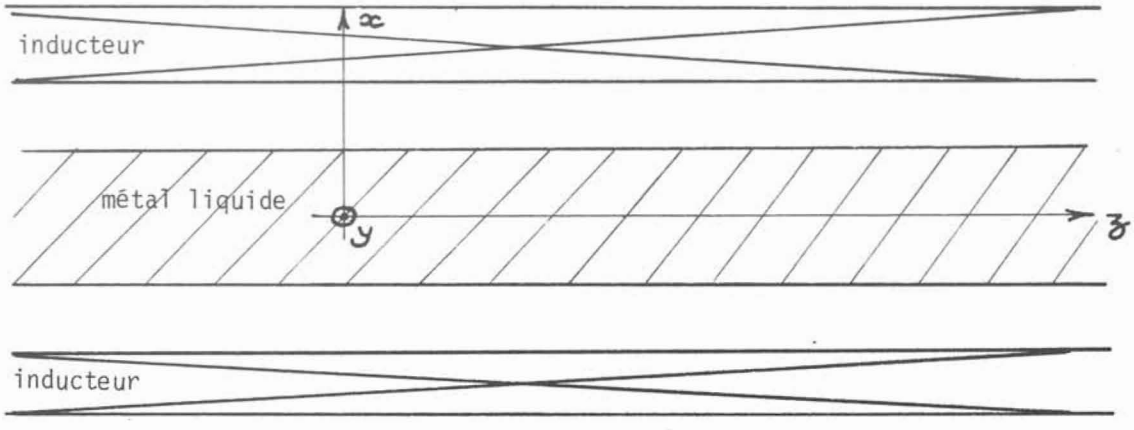
- les inducteurs de la filière électromagnétique doivent nécessairement avoir un pas polaire du même ordre de grandeur que le diamètre du jet de métal liquide sur lequel on veut agir mais dont la largeur doit rester supérieure ou égale à celle de l'entrefer.

- il est indispensable d'utiliser des fréquences élevées, en étant cependant conscient que le faible rendement du moteur linéaire dans ce cas conduira à fournir une puissance plus importante aux inducteurs.

II. DIMENSIONNEMENT DES INDUCTEURS

II.1. Mode de calcul de l'effort obtenu

Considérons tout d'abord le cas idéal d'une bande métallique liquide infinie dans la direction Oy perpendiculaire à la fois à la direction Oz de déplacement du champ magnétique et à la direction Ox dans laquelle il est engendré par deux demi-inducteurs à champ glissant.



Supposons que le champ magnétique créé par les inducteurs soit uniforme dans tout l'entrefer, y compris à l'intérieur du métal liquide supposé, pour sa part, être animé d'une vitesse uniforme V suivant Oz. Plaçons nous dans un repère lié au champ magnétique. Dans un tel repère le champ magnétique qui ne présente qu'une périodicité spatiale de longueur d'onde $\ell\tau$ est donné par :

$$\vec{B} = \left(B_x = B_0 \cos \frac{\pi z}{\tau} \, , \, 0, \, 0 \right)$$

et la vitesse du fluide par $\vec{V} = (0, 0, V - V_c)$, si bien que les courants induits qui prennent naissance dans le métal liquide s'écrivent :

$$\vec{J} = \left(0, \, \sigma B_x (V - V_c) \, , \, 0 \right)$$

Il apparaît donc la force électromagnétique par unité de volume :

$\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} = \left(0, 0, \sigma (V_c - V) B_0^2 \cos^2 \frac{\pi z}{\tau} \right)$ qui tend à accélérer la bande de métal liquide pour lui communiquer la vitesse V_c

La force axiale exercée par le champ glissant sur l'unité de volume de métal liquide est :

$F = \sigma (V_c - V) B_0^2 \cos^2 \frac{\pi z}{\tau} = \sigma b V_c B_0^2 \cos^2 \frac{\pi z}{\tau}$ en introduisant le glissement

$b = \frac{V_c - V}{V_c}$. Si l'on admet que le fluide ne répond qu'à la valeur moyenne de cette force, il convient de ne retenir que la partie motrice:

$$F = \sigma b V_c \frac{B_0^2}{2} = \sigma b V_c B^2$$ où B représente la partie efficace du champ magnétique alternatif.

Le rapport de cette force à la force de pesanteur $\frac{\sigma b V_c B^2}{\rho g}$ semble pouvoir être rendu aussi élevé qu'on le désire par la présence au numérateur de V_c qui croît avec la largeur du pas polaire et la fréquence des courants inducteurs. Il ne faut cependant pas oublier que nous sommes dans un cas très idéal reposant sur un certain nombre d'hypothèses que nous allons successivement remettre en question. Les principales hypothèses faites sont : largeur infinie de la bande de métal liquide permettant aux courants induits de se reboucler à l'infini, champ magnétique uniforme dans tout l'entrefer y compris dans la bande de métal liquide, aucun déphasage entre les courants induits et le champ magnétique. La discussion de la validité de ces hypothèses et les corrections qui vont devoir être apportées permettront de retrouver les résultats de l'analyse qualitative faite précedemment.

- Influence de la largeur finie de la bande de métal liquide

Comme nous l'avons remarqué le bouclage nécessaire des courants induits dans le métal liquide entraîne une diminution de la force de traction F qui devient :

$$F_1 = F \times K_\Delta \qquad K_\Delta < 1$$

De nombreuses formules empiriques permettent d'évaluer K_Δ ; le plus rationnel cependant est d'utiliser la formule de nature analytique proposée par A.I. VOL'DEK [1]

$$K_\Delta = 1 - \frac{th\left(\frac{\pi c}{\tau}\right)}{\frac{\pi c}{\tau}}$$

où 2c représente la largeur de l'inducteur.

L'effet de bord transversal exprimé par la présence de K_Δ peut réduire de façon importante la valeur de F. Dans le cas particulier d'un jet libre de métal liquide aucun moyen classique qui permet de réduire ou d'éliminer cet effet ne peut être utilisé puisqu'il nécessite de disposer de part et d'autre de la bande métallique des barres d'un matériau très conducteur permettant aux courants induits de se reboucler hors du métal liquide.

- Influence de l'inductance des courants dans le métal liquide

Le déphasage existant entre les courants induits et le champ magnétique glissant fait qu'il n'est pas possible d'augmenter de façon illimitée l'effort développé par la machine linéaire en augmentant la fréquence. Ce déphasage, qui croît avec la fréquence, perturbe fortement la proportionnalité directe entre la force de traction et la fréquence des courants inducteurs mise en évidence dans le cas idéal.

A.I. VOL'DEK propose un critère permettant d'évaluer la réduction de l'effort dû à ce phénomène. La force de traction s'écrit :

$$F_2 = F \times K_a$$

où K_a tient compte à la fois de l'inductance des courants induits et de la largeur finie de la bande de métal liquide.

Le mode de détermination de K_a est complexe et nous nous bornerons à ne donner que des graphiques [fig. (3) et fig. (4)] établis par A.I. VOL'DEK permettant la détermination de ce coefficient en fonction du rapport $\frac{c}{\tau}$ et du paramètre ε défini par :

$$\varepsilon = \frac{2\mu\sigma f b \tau^2 \Delta}{\pi \delta}$$

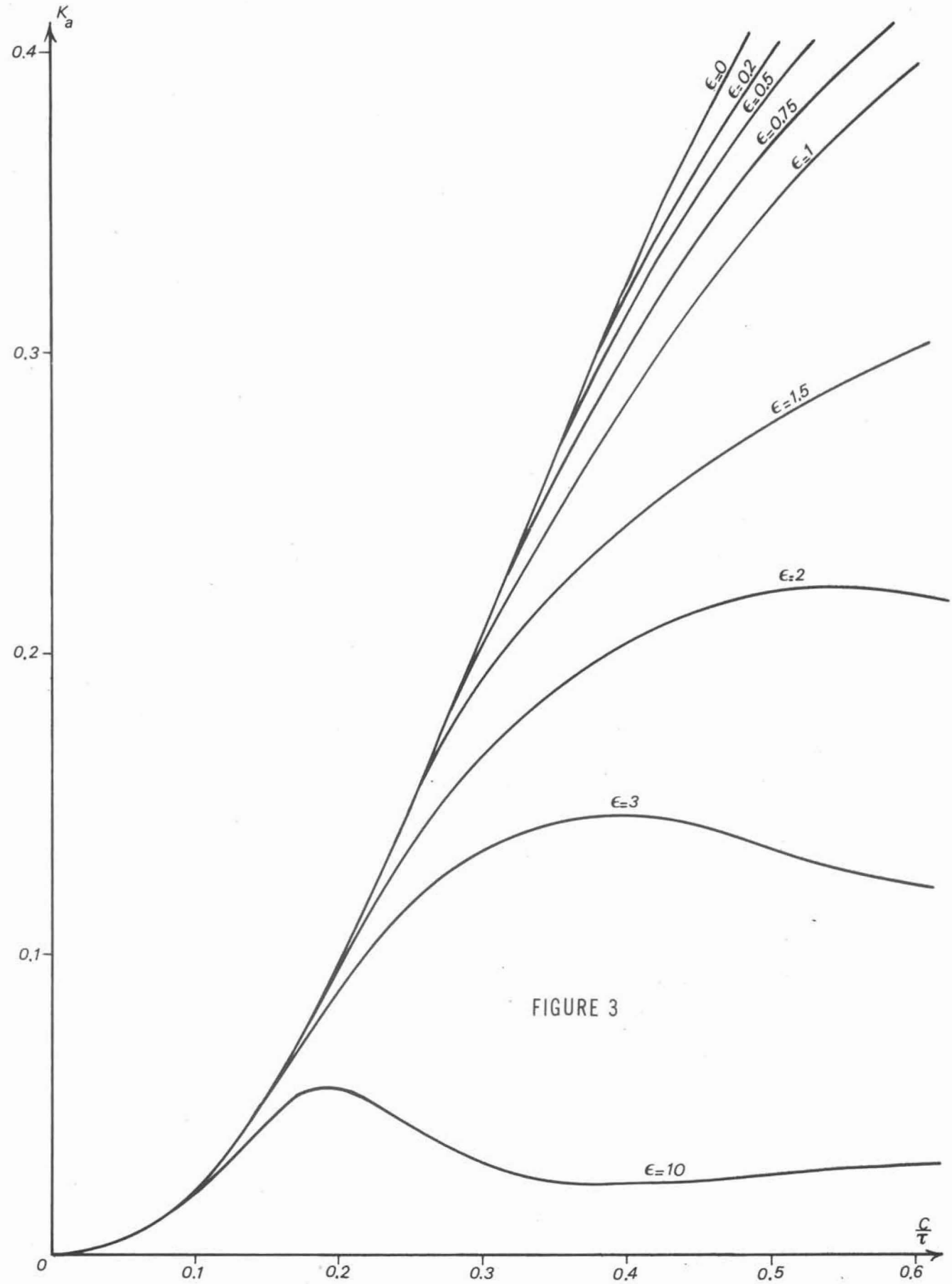

K_a
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
$\frac{c}{\tau}$
ϵ=0
ϵ=0.2
ϵ=0.5
ϵ=0.75
ϵ=1
ϵ=1.5
ϵ=2
ϵ=3
ϵ=10

FIGURE 3

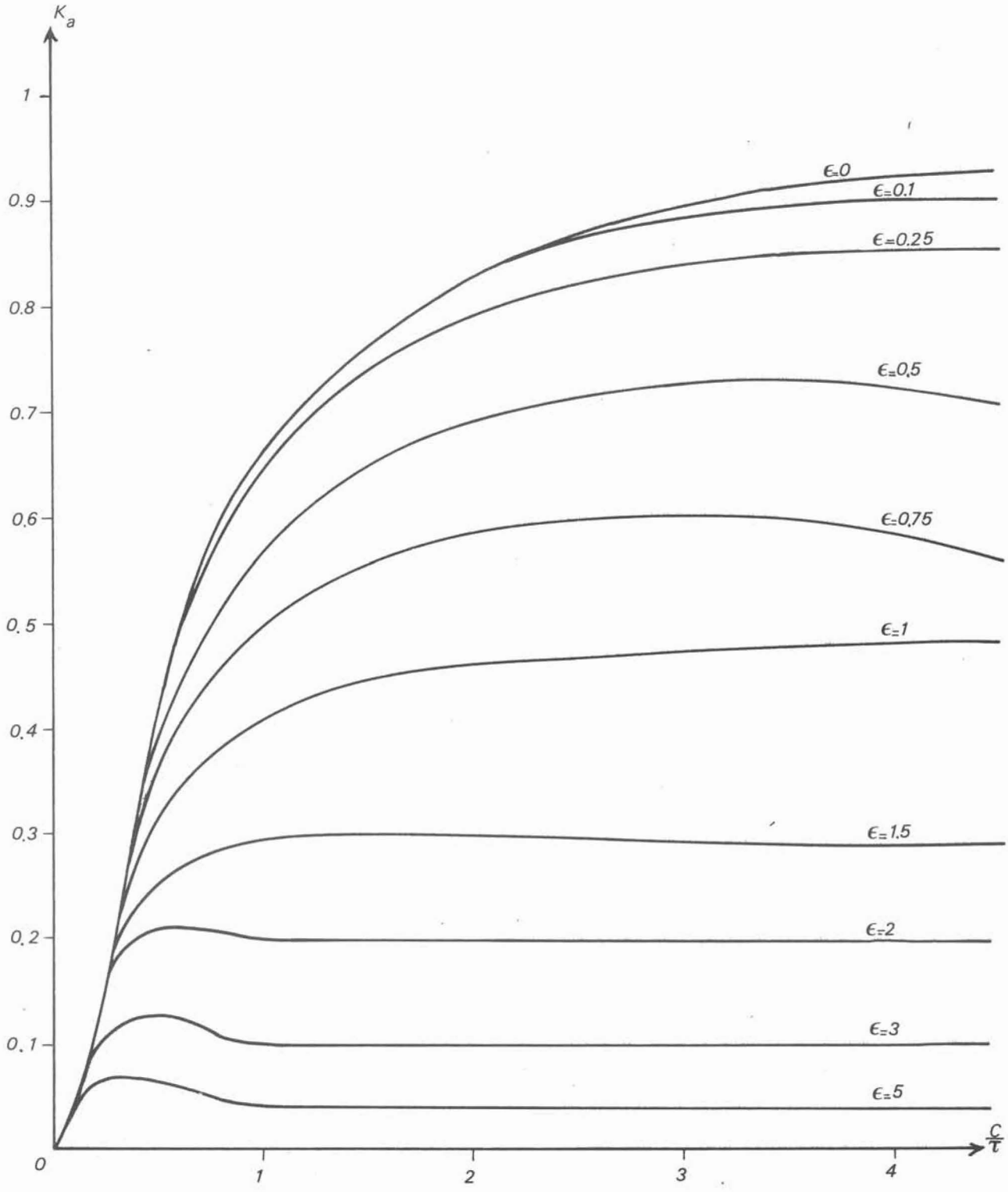

K_a
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1
2
3
4
$\frac{C}{\tau}$
ϵ=0
ϵ=0.1
ϵ=0.25
ϵ=0.5
ϵ=0.75
ϵ=1
ϵ=1.5
ϵ=2
ϵ=3
ϵ=5

FIGURE 4

où Δ est l'épaisseur de la couche de métal liquide

δ est l'entrefer

- Influence de la non uniformité du champ magnétique dans l'entrefer

Le phénomène de "court circuit" des inducteurs qui apparaît lorsque l'entrefer est d'une largeur supérieure à la dimension du pas polaire existe à un degré moindre lorsque l'entrefer est plus réduit : une partie du flux magnétique se referme toujours entre les pôles instantanés d'une moitié d'inducteur sans atteindre le milieu de l'entrefer. D'intensité B_0 à la surface de chaque inducteur la composante active du champ magnétique au centre de la bande de métal liquide prend la valeur inférieure $\mathcal{B}$ déterminée par :

$$\mathcal{B}_0 = K_f \mathcal{B}$$

avec :

$$K_f = \operatorname{ch} \frac{\pi \delta}{2\tau}$$

La formule déterminant le coefficient K_f est basée sur l'hypothèse que le nombre de Reynolds magnétique construit avec le pas polaire τ et la vitesse de synchronisme V_c :

$$R_m = \mu \sigma V_c \tau$$

est petit devant l'unité. Ceci suppose que les fréquences utilisées ne soient pas trop élevées et que les métaux liquides sur lesquels on veut agir ne soient pas d'une conductivité très grande. Le champ magnétique dans ce cas n'est ni affecté par la présence du métal liquide ni par le mouvement de celui-ci.

- Influence de la longueur finie de l'inducteur : effet de bord longitudinal d'un conducteur magnétique ouvert.

L'effet de bord longitudinal complexe à analyser sur le plan électrique peut être réduit par utilisation de bobines correctrices placées aux extrémités des

inducteurs. Cet effet, néfaste lui aussi, ne peut être totalement éliminé et entraîne également une perte d'efficacité dont il est possible de tenir compte par l'introduction, dans la valeur de la force de traction développée, d'un coefficient empirique K long. Ce coefficient varie très peu autour de la valeur moyenne 0,9 que nous adopterons dans la suite des calculs.

Ainsi la force de traction exercée par les inducteurs à champ glissant sur l'unité de volume du métal liquide est donnée par :

$$F = K \sigma_b V_c B_0^2 \ell$$

avec :

$$K = K_a \times K_{long} \times K_f^2 \ell$$

$$K_a = f\left(\mathcal{E}, \frac{c}{\tau}\right)$$

II.2. *Performances de la Filière Electromagnétique*

Le calcul précédent permettant d'évaluer la force de traction exercée sur un jet de métal liquide et par conséquent l'accélération communiquée à ce jet conduit assez simplement à chiffrer la contraction obtenue avec un inducteur de longueur donnée ℓ . En fait, l'efficacité du dispositif dépend beaucoup du diamètre du jet de métal liquide, comme nous l'avons remarqué, et nous devons considérer un exemple particulier fixant le diamètre initial du jet.

- Soit $2r_0$ = 1 cm le diamètre du jet avant toute action d'origine magnétique
- Dans les moteurs linéaires de construction classique il n'est guère possible d'obtenir un champ magnétique supérieur à 1000 Gauss au centre de l'entrefer ; c'est la valeur que nous adopterons dans le calcul de la contraction, compte-tenu du fait que les inducteurs de la Filière Electromagnétique sont d'un type très particulier dont les performances ne peuvent être supérieures à celles des inducteurs courants.

La dispersion du flux magnétique impose donc de créer à la surface des inducteurs un champ magnétique $B_o = K_f B$

avec $$K_f = ch\left(\frac{\pi\delta}{2\tau}\right)$$

Puisque la valeur minimum à adopter pour le pas polaire τ est la largeur de l'entrefer δ, la valeur maximum pour B_o est :

$$B_o = ch\left(\frac{\pi}{2}\right) B = 2500 \text{ Gauss}$$

L'accélération γ communiquée au fluide est donnée par le rapport de la force électromagnétique par unité de volume à la masse volumique du fluide

$$\gamma = \frac{\sigma B^2 b V_c}{\rho} K_a K_{long} \qquad K_{long} \simeq 0,9$$

- Détermination de K_a

K_a est déterminée à l'aide des courbes des figures (3) et (4), dès que l'on connaît les valeurs de $\frac{c}{\tau}$ et $\mathcal{E}$

valeur du rapport $\frac{c}{\tau}$

- Les difficultés technologiques de réalisation des inducteurs fixent une borne inférieure pour la dimension du pas polaire τ que nous prendrons égal à 3 cm
- C représente la demi largeur de la bande de métal liquide donc le rayon du jet métallique. Par suite $c \leqslant r_o = 0,5$ cm

et $$\frac{c}{\tau} \leqslant \frac{1}{6}$$

L'examen de la figure (3) montre que pour de telles valeurs de $\frac{c}{\tau}$ les courbes $K_a(\mathcal{E})$ sont exactement superposées pour $0 \leqslant \mathcal{E} \leqslant 3$, la valeur de K_a dans ce cas étant :

$$K_a = 1 - \frac{th\left(\frac{\pi c}{\tau}\right)}{\frac{\pi c}{\tau}}$$

valeur de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \frac{8 f b \Delta \tau^2 \sigma}{\delta} 10^{-9}$$

si σ est exprimée en mho/cm
δ, Δ, τ en cm

- Δ représente la largeur des inducteurs que nous prendrons égale à 2ro

- δ est pris égal à τ
- f est la fréquence des courants inducteurs dont nous fixerons la valeur à $k10^3$ Hz avec $k \geqslant 1$

Ainsi pour le mercure (comme pour les métaux fondus classiques)

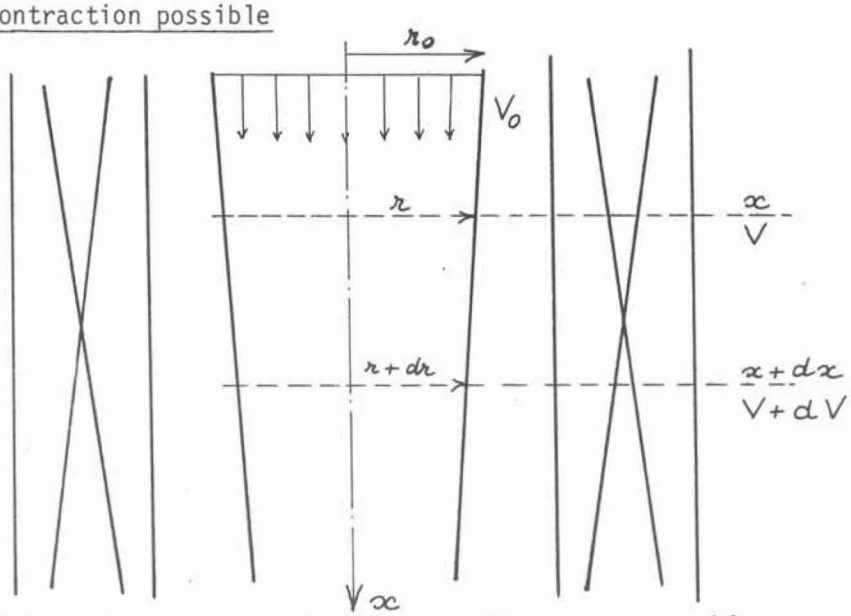
$$\mathcal{E} = 0{,}16\ kc\,\tau \leqslant \frac{\kappa}{4}$$

Même pour des valeurs élevées de k, donc de la fréquence des courants inducteurs, $\mathcal{E}$ reste toujours inférieur à 3 et il est possible d'adopter pour K_a la valeur :

$$K_a = 1 - \frac{th\left(\frac{\pi c}{\tau}\right)}{\frac{\pi c}{\tau}}$$

De plus, puisque $\frac{c}{\tau} \leqslant \frac{1}{6}$, il est légitime de ne retenir pour K_a que le premier terme du développement limité en $\frac{c}{\tau}$ de la fonction $1 - th\left(\frac{\pi c}{\tau}\right)/\frac{\pi c}{\tau}$. La figure 5 permet ainsi de déterminer K_a et montre la faiblesse de l'erreur commise en adoptant la valeur $K_a = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi c}{\tau}\right)^2$ dans ce domaine.

- Calcul de la contraction possible



Nous négligeons l'effet de la pesanteur. Ecrivons que l'accélération γ communiquée au fluide entre les sections x et $x+dx$ a fait passer la vitesse du jet de V à $V+dV$ et par suite son rayon de r à $r+dr$

$$V\frac{dV}{dx} = \gamma$$

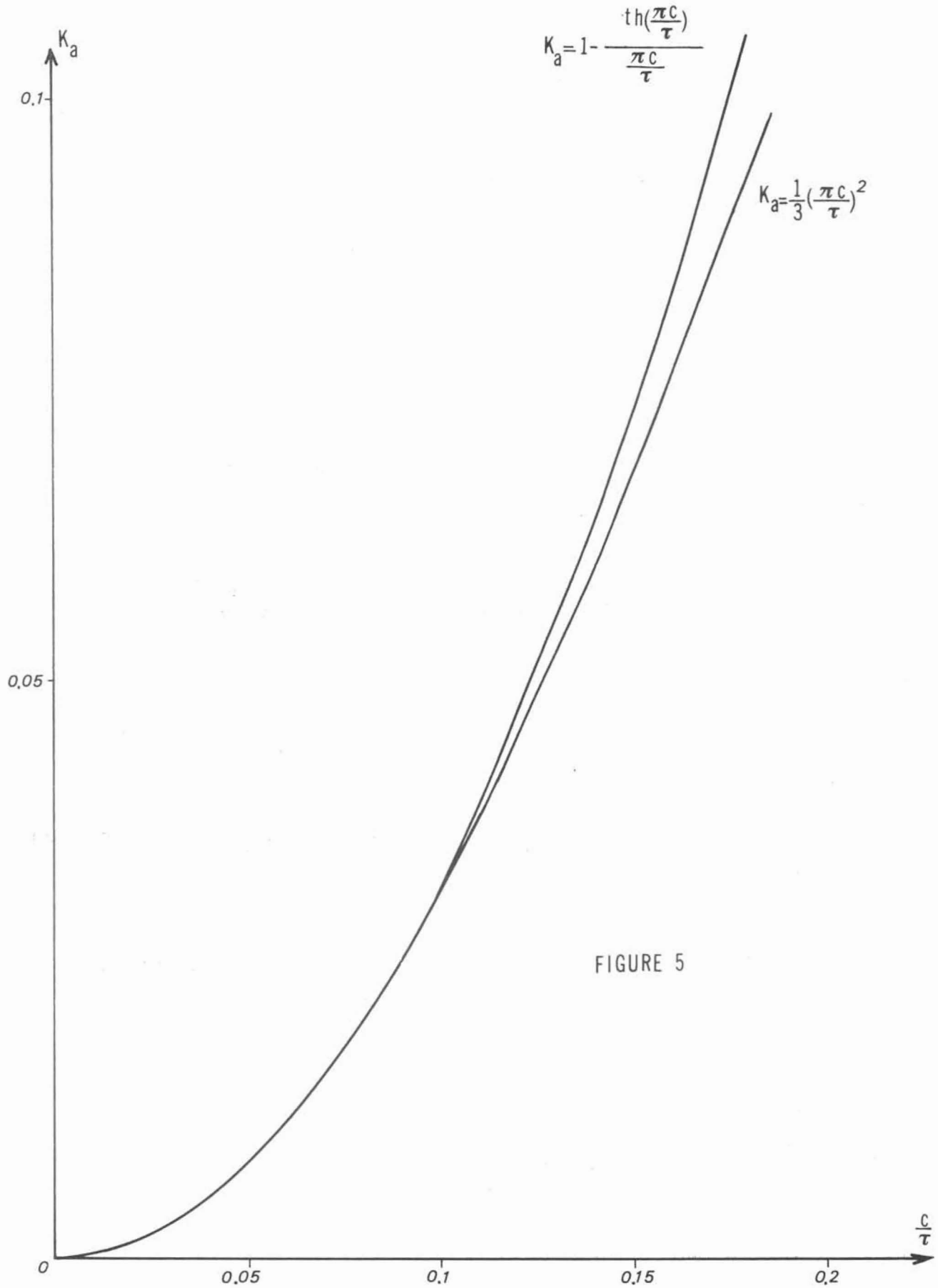

$K_a = 1 - \frac{th(\frac{\pi c}{\tau})}{\frac{\pi c}{\tau}}$
$K_a = \frac{1}{3}(\frac{\pi c}{\tau})^2$
K_a
0.1
0.05
0
0.05
0.1
0.15
0.2
$\frac{c}{\tau}$

FIGURE 5

avec :

$$\gamma = \frac{0,9\,\sigma B^2 \Delta V_c}{\rho} K_a$$

$$K_a = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi r}{c}\right)^2$$

$$V(x) = \frac{Q}{\pi r^2} = V_0 \frac{r_0^2}{r^2}$$

Considérons que le glissement Δ reste toujours très voisin de l'unité. Dans ce cas la variation $r(x)$ est donnée par :

$$\frac{dr}{r^7} = -0,3 \frac{\sigma B^2 \pi c^2 f}{c V_0^2 r_0^4 \rho} dx$$

qui conduit au rapport des vitesses du jet entre la section d'entrée dans l'inducteur et une section située à l'abscisse x , ou la section correspondant à l'extrêmité d'un inducteur de longueur

$$\frac{V}{V_0} = \left(1 + \frac{1,8\,\sigma B^2 \pi c^2 f r_0^2}{\rho c V_0^2} x\right)^{1/3}$$

et au rapport de contraction :

$$\alpha = \frac{r}{r_0} = \left(1 + \frac{1,8\,\sigma B^2 \pi c^2 f r_0^2}{\rho c V_0^2} x\right)^{-1/6}$$

La figure 6 donne les valeurs de α en fonction des vitesses d'entrée du jet de métal liquide dans les trois exemples suivants :

Mercure	$\rho = 1,36\ 10^4$ kg/m^3	avec un inducteur tel que
	$\sigma = 10^6\ \Omega^{-1}m^{-1}$	B = 1000 Gauss
Aluminium	$\rho = 2,7\ 10^3$ kg/m^3	c = 3 cm
	$\sigma = 5\ 10^6\ \Omega^{-1}m^{-1}$	f = 2000 Hz
Acier	$\rho = 7\ 10^3$ kg/m^3	Δ = 3 cm
	$\sigma = 0,7\ 10^6\ \Omega^{-1}m^{-1}$	δ = 3 cm
		ℓ = 1 m

V_c = 60 m/s

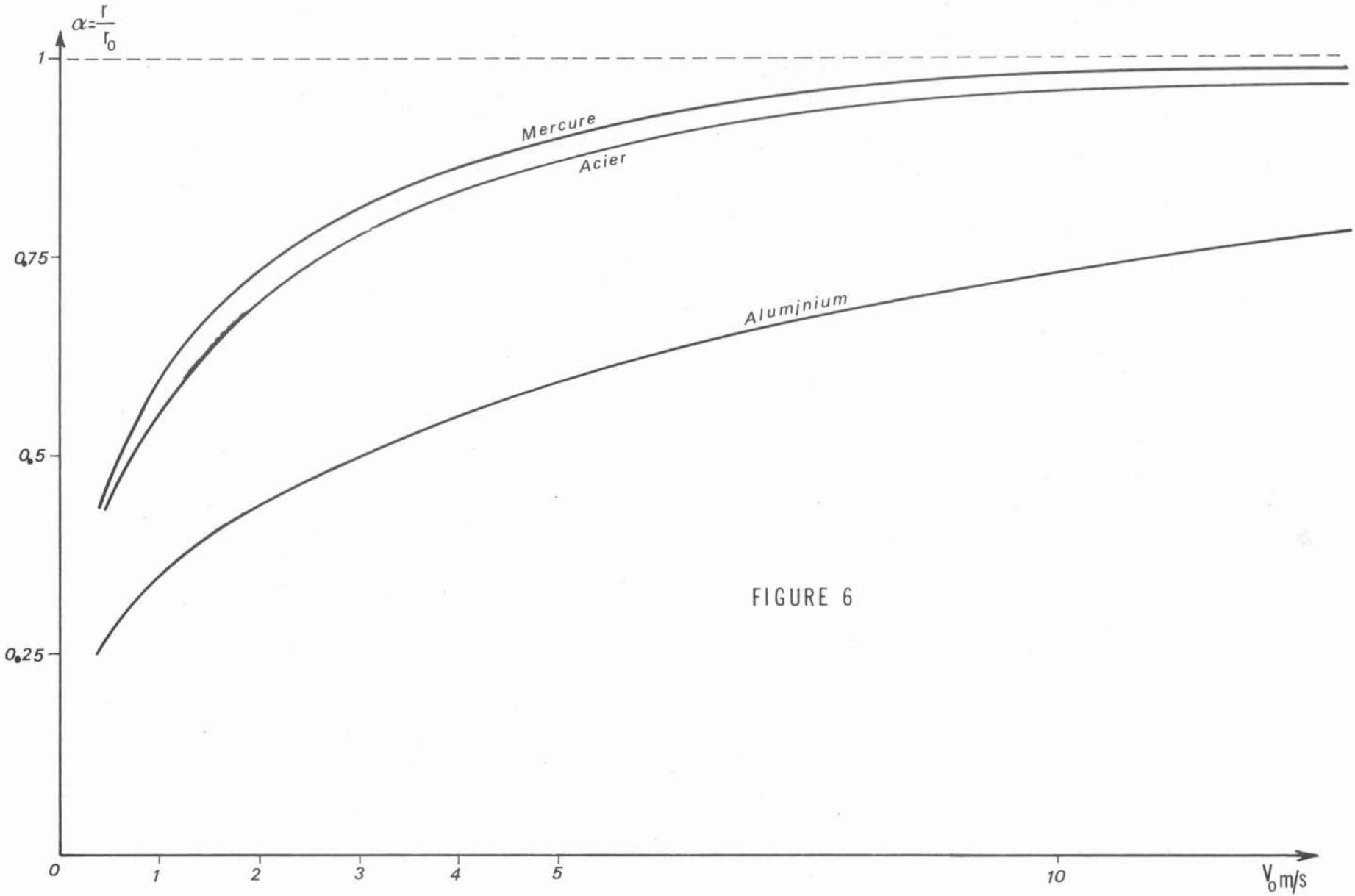

$\alpha = \frac{r}{r_0}$
1
0,75
0,5
0,25
0
1
2
3
4
5
10
V_0 m/s
Mercure
Acier
Aluminium

FIGURE 6

Pour les grandes valeurs de V_0 le glissement ne peut plus être considéré voisin de l'unité (V_0 = 20 m/s ⇒ s = 0,67), par suite les forces électromagnétiques sont inférieures à la valeur calculée et les courbes $\alpha = f(V_0)$ atteignent plus rapidement l'asymptote $\alpha = 1$

Sur la figure (7) est représentée l'évolution de la contraction en fonction de la longueur de l'inducteur utilisé pour l'exemple de l'aluminium liquide et du mercure et différentes valeurs de la vitesse d'entrée. Ces courbes montrent que l'augmentation de la longueur de l'inducteur a très vite un effet négligeable sur la contraction obtenue, compte-tenu de la puissance supplémentaire à fournir. A partir d'une certaine réduction de section le rapport $\frac{r}{a}$ devient très faible de même que les forces électromagnétiques s'exerçant sur le métal liquide. De plus, puisque $\frac{r}{a}$ est très petit, les forces pulsantes de direction radiale deviennent très importantes par rapport aux forces de traction axiales et le jet se divise en gouttelettes. Pour éviter le tronçonnement du jet et pour des raisons purement économiques il convient donc de limiter la longueur de l'inducteur à champ glissant.

II.3. *Calcul et dimensionnement des inducteurs de la Filière Electromagnétique*

Les caractéristiques que nous avons retenues pour les inducteurs de la filière électromagnétique sont les suivantes :

- Champ magnétique à la surface des inducteurs — B_0 = 2500 Gauss
- Champ magnétique au centre de l'entrefer — B = 1000 Gauss
- Largeur des inducteurs — 2c = 4 cm
- Pas polaire — a = 3 cm
- Fréquence des courants inducteurs — f = 2000 Hz

D'après la figure 7 il est parfaitement inutile d'augmenter la longueur des inducteurs au-delà d'une certaine valeur. Les effets les plus importants se produisent sur le premier mètre qui suit l'entrée du métal liquide dans l'entrefer ; c'est donc l'ordre de grandeur que nous adopterons pour la longueur. Ce choix peut bien sûr être remis en question et être modifié en fonction de chaque cas particulier.

Le pas polaire de 3 cm, dans lequel il faut loger au minimum 3 encoches et 3 dents, conduit à adopter les valeurs suivantes :

- largeur d'une encoche — b_{enc} = 0,6 cm
- largeur d'une dent — b_{dent} = 0,4 cm
- Nombre de paires de pôles — p = 16
- Longueur de l'inducteur — ℓ = 96 cm

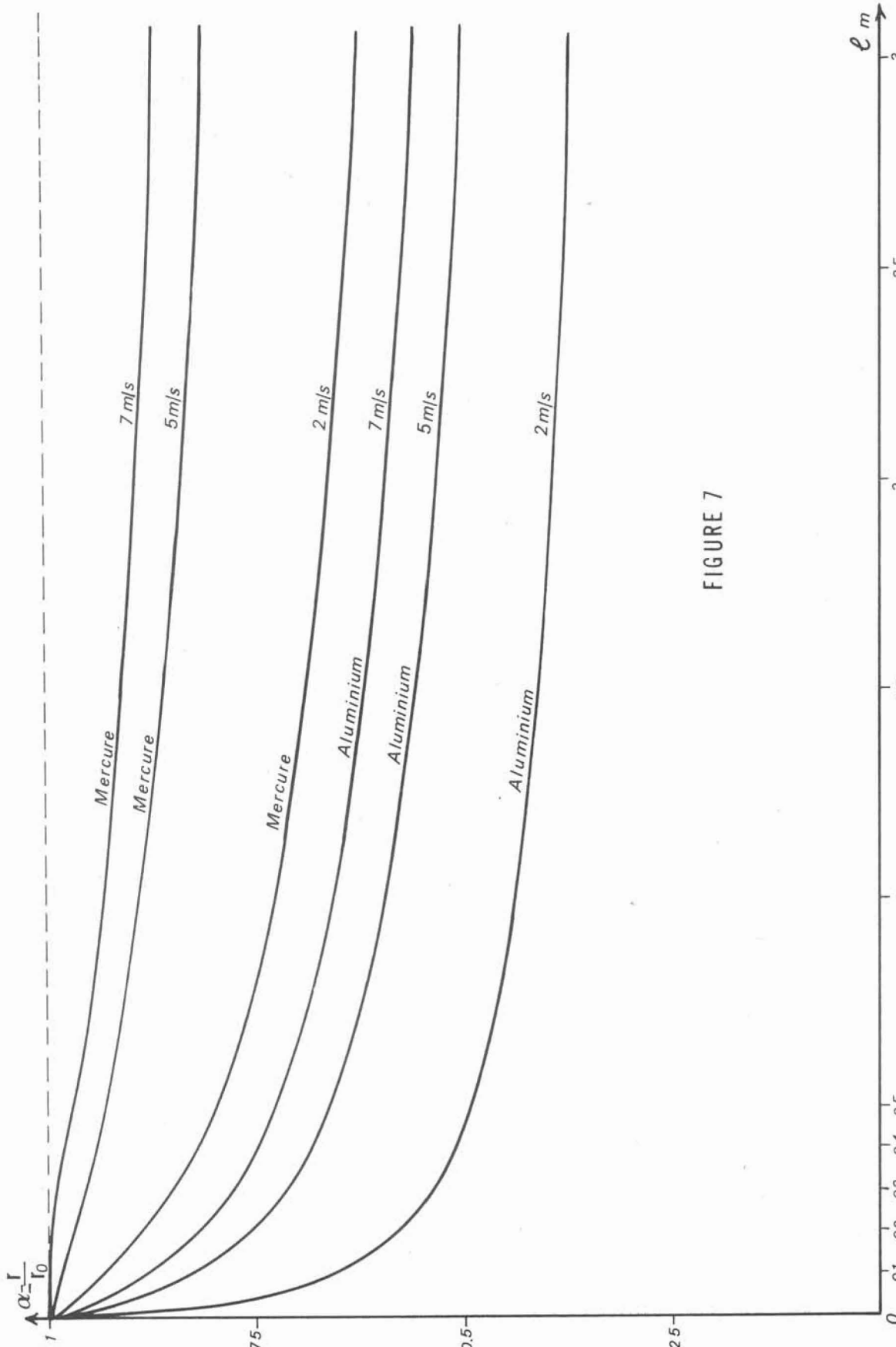

$\alpha = \frac{r}{r_0}$
1
0.75
0.5
0.25
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
1
1.5
2
2.5
3
ℓ_m
Mercure
7 m/s
Mercure
5m/s
Mercure
2 m/s
Aluminium
7 m/s
Aluminium
5 m/s
Aluminium
2 m/s

FIGURE 7

La dimension des encoches permet de maintenir la valeur de l'induction dans les dents en deçà de la valeur limite de 18000 g. Cette valeur B_{dent} est déterminée par :

$$B_{dent} = B_o \times \frac{\text{Pas des dents}}{\text{Largeur d'une dent}}$$

Les inducteurs étant maintenant parfaitement définis, il est possible de déterminer la puissance à fournir pour obtenir le champ magnétique de 2500 Gauss souhaité.

Les calculs qui permettent cette détermination, tout à fait classiques d'un point de vue électrotechnique, sont relativement longs; aussi nous bornerons nous à rappeler la méthode et les divers éléments qui entrent en ligne de compte dans ces calculs et à donner les résultats obtenus pour les inducteurs de la filière électromagnétique.

- Méthode de calcul

Nous devons déterminer le nombre de conducteurs par encoche, c'est à dire le nombre de spires successives par phase, de telle façon que le flux magnétique utile induise dans la phase de l'enroulement une f.e.m. donnée. La valeur de cette f.e.m. est définie à partir de la tension de la source d'alimentation en adoptant une certaine valeur du rapport de ces grandeurs = ke. Au cours du calcul on vérifie l'exactitude de la valeur de ke et dans le cas d'un écart important on recommence le calcul après avoir modifié convenablement la valeur adoptée au départ. Par approximations successives il est possible d'obtenir une bonne concordance entre la valeur K_e supposée et la valeur déduite des calculs.

Soit B_o l'induction sur la surface active de l'entrefer, le flux magnétique ϕ_o à travers un pôle est alors :

$$\phi_o = \frac{4}{\pi} B_o \tau c \quad \text{Maxwell}$$

Pour une tension d'alimentation U le coefficient K_e qui fait l'objet d'une évaluation hypothétique en début de calcul est :

$$K_e = \frac{U}{I_\mu x_{o\mu}}$$

où I_μ est le courant d'aimantation

$x_{o\mu}$ est la réactance inductive du flux utile par phase.

La valeur donnée à K_e fixe le nombre w de spires successives par phase de l'enroulement :

$$w = \frac{U\, 10^8}{4{,}44\, K_e K_{enr} f \phi_o}$$

$$K_{enr} = \frac{\sin 30°}{q \sin\left(\frac{30°}{q}\right)}$$

K_{enr} , où q est le nombre d'encoches par pôle et par phase tient compte de la géométrie de l'enroulement

La force magnétomotrice F nécessaire à la production du champ B nécessite de produire le courant I_μ

$$I_\mu = \frac{p\,F}{1{,}35\, w\, K_{enr}}$$

La profondeur des encoches en découle compte-tenu de la section S nécessaire au passage de ce courant dans les n conducteurs logés dans chaque encoche

$$n = \frac{w}{2p}$$

Le calcul des différentes pertes qui permet la vérification de la valeur se conduit de la façon suivante :

- Résistance d'une phase r

$$r = \ell \frac{\rho_c}{S} w \left(\ell c + K_\phi \tau\right)$$ où ρ_c = résistivité du cuivre = $2{,}7\ 10^{-6}\ \Omega$ cm

- Réactance inductive de dispersion par phase x_s

$$x_s = 0{,}158 \frac{f}{100} \times \left(\frac{w}{100}\right)^2 \times \frac{\ell c}{p} \left(\lambda_{enc} + \lambda_f + \lambda_D\right)$$

où - λ_{enc} caractérise la dispersion par les encoches

$$\lambda_{enc} = \frac{h_{enc}}{3\, b_{enc}}$$

- λ_f caractérise la dispersion par la partie frontale de l'enroulement

$$\lambda_f = \frac{A\tau}{c}\left(K_\phi - 0{,}64\right) \qquad A = 0{,}175 - \frac{\delta}{100}$$

- λ_d caractérise la dispersion par la couronne des dents

$$\lambda_d = \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{\delta^2}{4 b_{enc}^2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{2\delta}{b_{enc}} \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b_{enc}}{\delta}\right)\right]$$

- Réactance inductive du flux utile par phase $x_{o\mu}$

$$x_{o\mu} = \frac{U}{K_e I_\mu}$$

- Réactance totale x

$$x = x_s + x_{o\mu}$$

- Résistance totale apparente par phase z

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}$$

Cette valeur de z permet de déduire la valeur calculée de K_e à comparer à la valeur supposée

$$K_e = \frac{z}{x_{o\mu}}$$

- Puissance mise en jeu

- Puissance réactive Q du circuit secondaire

$$Q = 4 \Delta c \ell s^2 f^2 \tau^2 B^2 \sigma K_p \, 10^{-16}$$

avec σ = conductivité du métal liquide en mho/cm

s = glissement

$K_p = f(\varepsilon, \frac{c}{\tau})$ est déterminé à partir des diagrammes reportés figure 8

- Puissance active P_a du circuit secondaire

$$P_a = Q \frac{K_a}{K_p}$$

Les courants réactifs I_r et actif I_a s'en déduisent :

$$I_r = \frac{Q K_e}{3 U_p} \qquad I_a = \frac{P_a K_e}{3 U_p}$$

et par conséquent le courant de phase I et la puissance apparente à fournir P

$$I = \sqrt{(I_\mu + I_r)^2 + (I_a)^2}$$

$$P = 3 U I$$

- Résultats des calculs relatifs aux inducteurs de la Filière Electromagnétique

Ces résultats se trouvent résumés sur la figure 9, où encoches et conducteurs sont représentés à l'échelle 1.

L'inducteur dessiné en (1), qui a servi de base de calcul pour les inducteurs (2) et (3) est de conception irrationnelle. En effet à cause de la profondeur importante de l'encoche, relativement à sa largeur, il se produit un phénomène de déplacement de courant très important qui écarte fortement la répartition de I

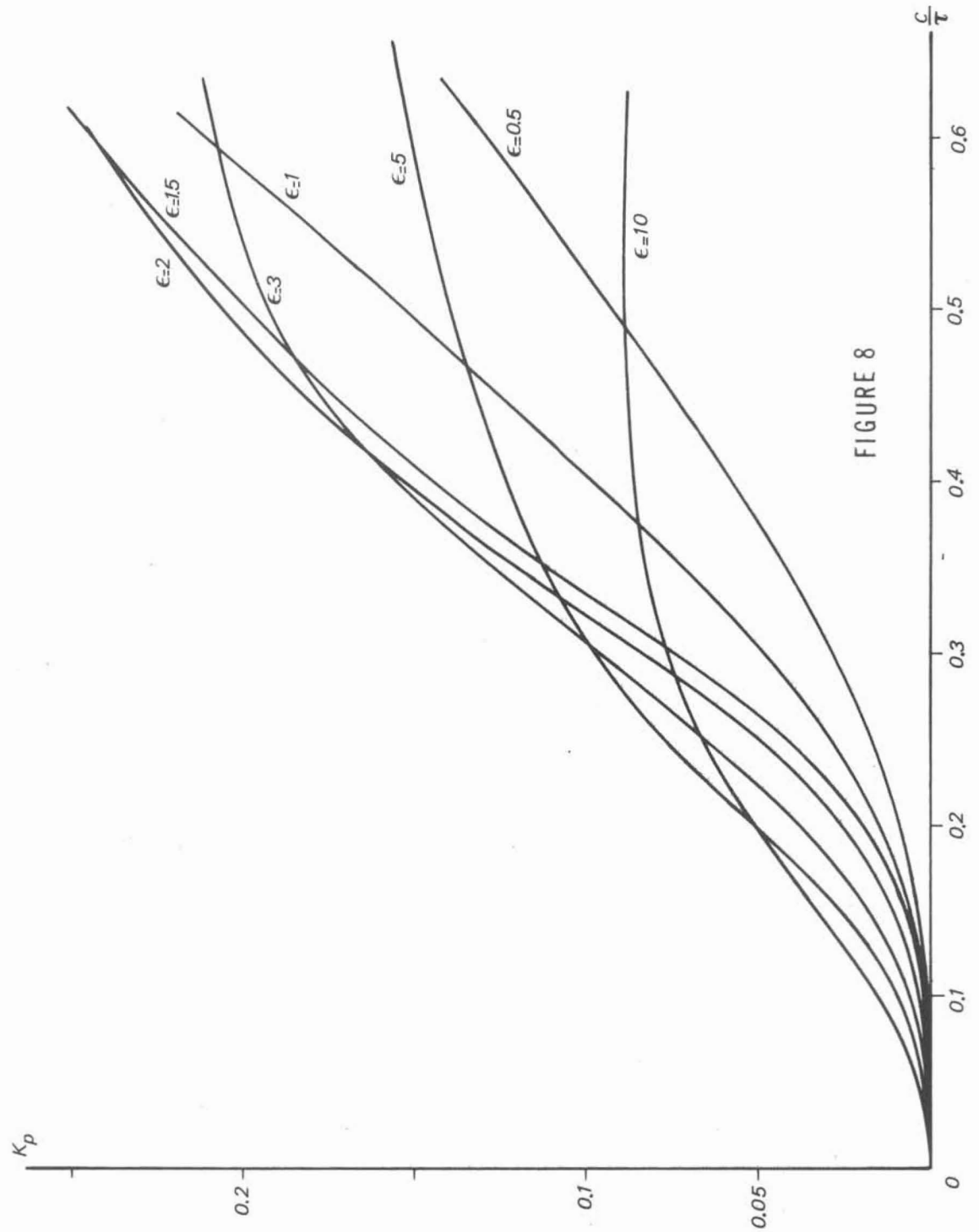
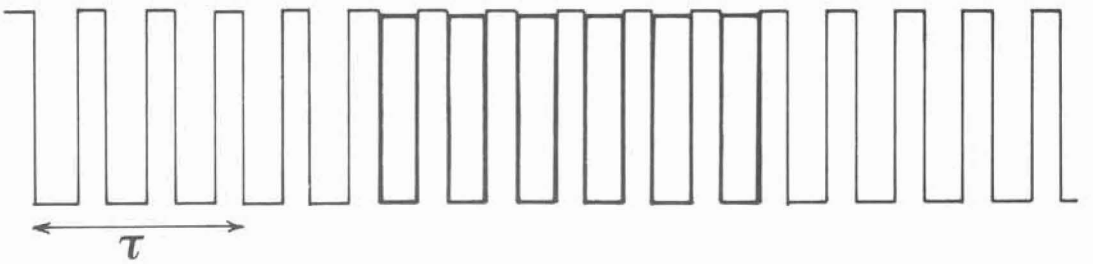

K_p
0.2
0.1
0.05
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
$\frac{c}{t}$
ϵ=2
ϵ=1.5
ϵ=3
ϵ=1
ϵ=5
ϵ=0.5
ϵ=10

FIGURE 8

$f = 2000HZ$ ~ 16 paires de poles ~ Entrefer = 3cm

(1)

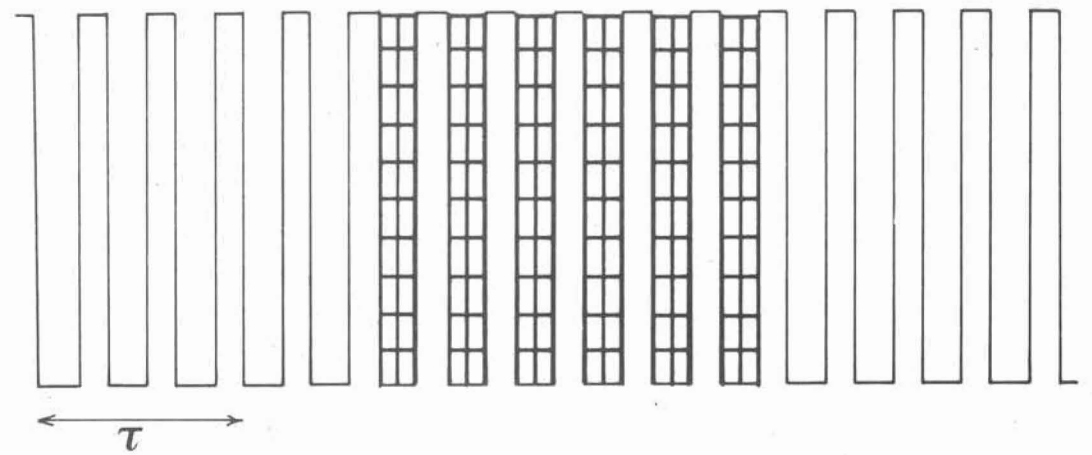


1 spire par encoche $I = 1367A$ $J = 11\ A/mm^2$

$U = 330\ V$ $P = 1360\ KVA$ $P_a = 3KW$

****

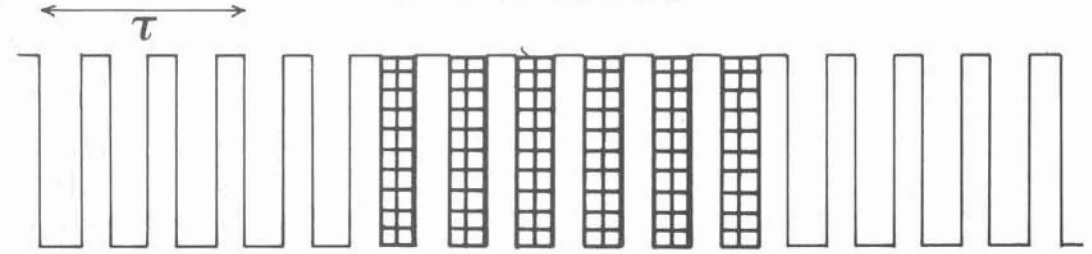
(2)



20 spires par encoche $I = 68,4A$ $J = 5\ A/mm^2$

si spires en série: $U = 10^4\ V$ $P = 2050\ KVA$ $P_a = 1,5\ KW$

****



(3)

20 spires par encoche $I = 68,4A$ $J = 10\ A/mm^2$

si spires en série: $U = 6650\ V$ $P = 1360\ KVA$ $P_a = 3KW$

FIGURE 9

de la répartition uniforme dans la section. Il s'ensuit une augmentation de la résistance effective des conducteurs et une remise en cause des différentes valeurs mentionnées sous le schéma.

III. CONCLUSIONS

Plusieurs remarques s'imposent à la suite des différents calculs de performance et de dimensionnement de la Filière Electromagnétique qui amènent à s'interroger sur leur validité et le crédit qui doit leur être accordé.

En premier lieu il convient de s'arrêter sur l'approximation la plus importante faite : nous avons considéré tout au long de l'analyse précédente que le métal liquide était animé d'un mouvement en masse comme celui qui serait communiqué à un solide de même géométrie et de même conductivité électrique que le liquide. L'aspect liquide du métal n'est, en réalité, pris en compte que dans la contrainte imposée par la conservation du débit, mais se trouve totalement ignoré dans la détermination des efforts d'origine magnétique. En fait, s'il est légitime de penser que l'effet principal produit par le champ glissant est globalement celui qui fut trouvé de cette façon, il ne faut cependant pas oublier que le métal liquide ne doit pas rester parfaitement insensible à l'effet de la non uniformité et de la périodicité des sollicitations magnétiques. Acceptable à la rigueur dans une veine où le métal liquide est confiné par des parois, cet effet doit être analysé très en détail dans le cas d'un jet libre : l'action des forces, pulsant dans une direction radiale, dont le sens alterne à la distance d'un pas polaire, que nous avons mises en évidence, peut modifier complètement la géométrie du jet et même conduire à le tronçonner. Par le biais de la pulsation des forces électromagnétiques se constitue, en outre, une véritable réserve d'énergie susceptible d'alimenter d'éventuelles perturbations de la surface libre et de les amplifier, mettant en péril la géométrie cylindrique du jet et par conséquent l'efficacité même de la Filière Electromagnétique.

Au niveau du dimensionnement des inducteurs, il faut signaler que la méthode de calcul ne tient pas compte de facteurs secondaires dans la gamme de fréquences habituellement utilisées tels que la composante de la force magnétomotrice correspondant au trajet du flux magnétique dans le fer des conducteurs magnétiques. Les pertes qui en résultent risquent de ne plus être négligeables pour des fréquences d'utilisation de plusieurs Kilohertz pour lesquelles, d'ailleurs, leur calcul devient tout à fait hasardeux et hypothétique. La puissance à fournir, déjà fort élevée, peut donc se trouver encore accrue de façon notable.

Arrivé à ce stade d'étude d'une Filière Electromagnétique il ne serait pas judicieux d'entreprendre la construction d'un prototype. De nombreuses questions restent posées sur la plan électrotechnique, comme sur le plan magnétohydrodynamique auxquelles il importe de donner des réponses avant de s'engager plus avant dans la réalisation d'une machine linéaire d'un type aussi particulier. La détermination des effets produits sur une veine libre par un champ glissant est très complexe et nécessite au préalable de comprendre parfaitement le mécanisme d'action d'un tel champ sur un écoulement de métal liquide confiné par des parois : c'est ce dernier problème qui retiendra tout notre intérêt dans le chapitre suivant.

B I B L I O G R A P H I E

1 A.I. VOL'DEK : "Problèmes de l'établissement du projet des pompes à induction linéaire". Travaux de la Conférence sur l'hydrodynamique magnétique. Ed. Akad. Nauk de la Latvie (1959).

2 A.L. VERTE : "Chenal électromagnétique pour le transport de la fonte liquide", Meshcanizacia i Automatizacia prisvodstra, 15, n° 8, 1961.

3 A.L. VERTE : "Contrôle de la coulée de la fonte liquide au moyen d'un champ magnétique mobile". Metallurg. n° 12, (1961) - 6-8; 54-56.

4 A.L. VERTE : "Transport électromagnétique du métal liquide", Editions Metallurgija, Moscou (1965), 2 tomes. Traduction I.R.S.I.D.

5 D. JORRE - J. RAGUIN : "Transport de la fonte et de l'acier liquides par chenal et pompe électromagnétiques". Rapport I.R.S.I.D. d'une étude proposée par le C.E.C.A.

6 F.R. BLOCK : "Goulottes et pompes électromagnétiques". Rapport final de la Convention n° 6210 - 21/070 - C.E.C.A.

7 N.M. OKHREMENKO : "Travelling-field induction pumps". Magnitnaya Gidrodinamika, Vol. 1, n° 4 - 3,23 - 1965.

8 S.V. VASILEV - N.M. OKHREMENKO - L.G. SMIRNOVA : "Experimental study of the magnetic fields in induction pumps". Magnitnaya Gidrodinamika - vol. 1, n° 2, 111, 122, 1965.

9 A.D. BARINBERG - K.P. DONCHENKO - V.G. OLEINIK : "MHD instruments and prospective, monitoring and control equipment". Magnitnaya Gidrodinamika, n° 4, 73,83 - 1973

CHAPITRE III

I. ACTION DE CHAMPS MAGNETIQUES GLISSANTS SUR DES ECOULEMENTS DE METAUX LIQUIDES

I.1. Principales études réalisées dans ce domaine

Les pompes électromagnétiques à induction ont depuis bien longtemps déjà été employées dans l'industrie, en métallurgie principalement où elles permettent de véhiculer les métaux fondus comme la fonte ou l'aluminium, et leur utilisation va croissante notamment à cause du développement de la technologie du sodium liquide. Cependant les phénomènes aussi bien hydrodynamiques qu'électromagnétiques dont elles sont le siège n'ont encore jamais été parfaitement étudiés et bon nombre de mystères subsistent. Le dimensionnement d'une pompe électromagnétique à induction et la prévision de ses performances procède à l'heure actuelle de méthodes fondées essentiellement sur l'expérience, l'empirisme et l'habitude. Il est facile d'imaginer alors les difficultés auxquelles se heurtent les constructeurs spécialisés lorsqu'ils envisagent la conception de grosses pompes pour lesquelles il n'existe aucune expérience antérieure.

Les difficultés rencontrées dans la prévision des effets produits par un champ magnétique mobile sur un écoulement de métal liquide sont importantes et leurs origines nombreuses. Dans la majorité des cas, l'écoulement d'un liquide électroconducteur dans le canal interne d'une pompe électromagnétique n'est pas laminaire. L'inhomogénéité de la distribution des forces électromagnétiques et sa périodicité, liées directement à la périodicité du champ magnétique mobile, engendrent des écoulements secondaires et conduisent à des fluctuations de pression et de vitesse. Par conséquent le mouvement du fluide ne peut être ni permanent ni unidirectionnel, si bien que, même dans l'hypothèse d'un écoulement laminaire, il est impossible de trouver une solution analytique du système formé par les équations de Navier-Stokes et de Maxwell dont la particularité essentielle est d'être non linéaire. En outre, des difficultés surviennent au niveau de l'expression des conditions aux limites. En effet le canal d'une pompe électromagnétique est de dimension finie ce qui entraîne deux effets gênants

importants : un "effet de parois" dû à la présence obligatoire des parois normales aux inducteurs (cet effet n'existe pas dans les pompes à induction cylindriques:CLIP) et un "effet de bout" qui apparaît à l'entrée et à la sortie de la partie active du canal où il devient très délicat d'exprimer avec précision les conditions sur la vitesse et le champ magnétique. Le problème abordé dans toute sa généralité paraît donc tout à fait insoluble. Différents auteurs ont donc essayé de le résoudre en utilisant des modèles simplifiés pour l'étude de l'écoulement laminaire.

La formulation habituelle du problème est la suivante : seul l'écoulement plan d'un liquide incompressible conducteur de l'électricité contenu entre deux plans parallèles constitués par les inducteurs est pris en compte pour éliminer les deux effets de bout et de parois. Le mouvement du fluide résulte de la présence des forces électromagnétiques dues à l'interaction des courants induits et du champ magnétique glissant dans une direction parallèle aux inducteurs. Les conditions aux limites sont données aux parois ; en particulier la composante normale ou la composante tangentielle du champ magnétique y est fixée sous la forme d'une onde de fréquence et de longueur d'onde déterminées. Ensuite, nombreuses sont les hypothèses faites dans le but de s'affranchir des difficultés posées par la non linéarité du système mis en jeu.

Dans le cas d'une approche analytique du problème, l'écoulement est généralement considéré comme établi ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$) et plan parallèle ($(\vec{v}\vec{\nabla}).\vec{v} \equiv \vec{0}$) : ces deux hypothèses conduisent à la nullité des forces d'inertie. En ce qui concerne le champ magnétique, plusieurs hypothèses sont couramment faites. Ou bien il est supposé que les phénomènes électromagnétiques ne dépendent que faiblement de l'écoulement, dont l'effet n'est pris en compte qu'en terme de vitesse moyenne, comme si le fluide n'était qu'un solide se déplaçant à la vitesse moyenne de l'écoulement (hypothèse dite de l' "approximation électrodynamique") [TROPP (1968), TKACHENKO (1970)] ; ou bien il est admis que cet effet peut être totalement négligé, ce qui signifie que les courants induits ne modifient pas le champ magnétique appliqué : il est alors possible de déterminer indépendamment le champ magnétique et le champ de vitesse [VEZE-KRUMIN (1965), TROPP (1969)] . Tous ces travaux conduisent nécessairement, à cause de la sévérité des hypothèses faites, à une grande perte d'information sur l'écoulement réel et ne permettent d'atteindre que l'écoulement moyen. Des essais de résolution du système d'équations complet furent entrepris [TKACHENKO (1972)] en utilisant une méthode basée sur la décomposition de la solution en série de Fourier dont les différents modes étaient multiples de l'harmonique fondamentale imposée par le champ magnétique appliqué. La seule hypothèse faite concerne la vitesse moyenne du fluide qui doit rester faible devant la vitesse de translation du champ (glissement important) pour assurer la convergence des séries mises en jeu. Dans un premier cas considérant un seul inducteur surmonté d'un demi espace de fluide visqueux électroconducteur, des

fluctuations de vitesse de même fréquence que celle du champ magnétique sont mises en évidence. Dans le problème classique de l'inducteur bilatéral, seule l'harmonique de rang zéro a pu être calculée, les harmoniques de rang supérieur donnant lieu à des calculs d'une complication extrême ; ainsi seul l'écoulement moyen a pu être déterminé.

Quelques auteurs envisagèrent la détermination du champ de vitesse par la mise en oeuvre de méthodes numériques. Sans faire la moindre hypothèse à propos des équations électromagnétiques, PETROVITCH et ULMANIS en 1969 envisagèrent l'écoulement plan parallèle établi : seules les valeurs moyennes des différentes variables purent ainsi être déterminées tout en permettant une meilleure définition du glissement local. L'étude à la fois la plus complète et la plus intéressante fut menée par MERKULOV, TKACHENKO et YATSENKO en 1973 puisque le système complet d'équations était retenu avec la seule hypothèse d'un fluide non visqueux. L'évolution de l'écoulement sous l'action du champ magnétique glissant créé par un inducteur bilatéral est envisagée depuis l'état de repos du fluide. Le calcul montre que le champ magnétique produit au sein du métal liquide des écoulements secondaires qui donnent à l'écoulement une structure périodique : la distance entre les zones de recirculation est alors égale au pas polaire de l'inducteur.

Notre étude se situe dans le droit fil de ces divers travaux, en focalisant cependant notre intérêt sur la recherche des caractères spécifiques imposés à l'écoulement par la périodicité à la fois temporelle et spatiale du champ magnétique. Il serait vain de chercher à mettre en évidence ces caractères en abordant le problème dans toute sa généralité. Aussi, nous retiendrons les hypothèses couramment faites, destinées à éliminer les effets gênants de bout et de parois, et limiterons notre étude à l'écoulement laminaire.

I.2. Formulation du problème

Le schéma adopté est celui décrit précédemment : sous l'action d'un champ magnétique glissant dans la direction Oz avec la vitesse V_c un fluide visqueux, incompressible, conducteur de l'électricité s'écoule dans une conduite de largeur 2a dans la direction Ox et de dimensions infinies dans les directions Oy et Oz. Les inducteurs générateurs du champ magnétique mobile, forment les deux plans pariétaux ainsi définis. La dimension a, pourra dans certains cas particuliers être infinie ; le problème sera alors de déterminer le mouvement produit dans un demi espace de fluide électroconducteur par un mono-inducteur.

Le champ magnétique dans le domaine fluide peut être déterminé à partir de l'équation d'évolution déduite des équations de Maxwell, par élimination du champ électrique $\vec{E}$ et de la densité de courant $\vec{J}$:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma}\,\vec{\Delta B} + \vec{Rot}\,(\vec{V}\wedge\vec{B})$$

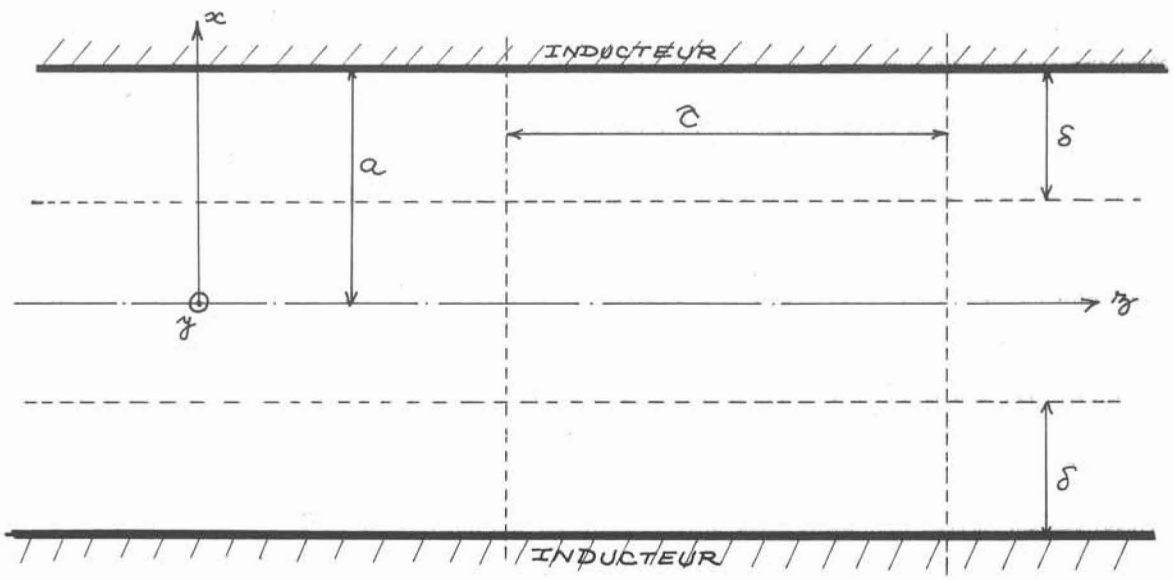
où μ, σ, V représentent respectivement la perméabilité magnétique, la conductivité et la vitesse du fluide.

Une difficulté importante de résolution apparaît dans cette équation par la présence du terme convectif $\vec{Rot}\,(\vec{V}\wedge\vec{B})$ qui assure un couplage entre les équations électromagnétiques et les équations du mouvement. Une classe de problèmes, intéressants par leur relative simplicité, correspond aux cas dans lesquels il est possible de négliger le terme de convection devant le terme de diffusion $\frac{1}{\mu\sigma}\,\vec{\Delta B}$. Il convient donc d'examiner avec précision les conditions de légitimité de cette approximation qui permet de calculer le champ magnétique indépendamment du champ de vitesse.

Les différentes grandeurs caractéristiques d'un champ magnétique glissant dans le domaine fluide dont la géométrie vient d'être définie sont les suivantes :

- l'amplitude Bo du champ magnétique inducteur
- la vitesse de glissement du champ : V_c
- la pulsation des courants inducteurs : ω
- le pas polaire τ = demi-longueur d'onde du champ magnétique mobile
- la demi-largeur de la conduite a
- la profondeur de pénétration du champ magnétique à l'intérieur du domaine fluide : δ

Cette profondeur de pénétration est définie par la relation : $\mu\sigma\omega\delta^2 = 1$



V_c, ω, $\mathcal{L}$ et f fréquence des courants inducteurs sont liés par les relations :

$$V_c = 2\mathcal{L} f \; ; \quad \omega = 2\pi f \qquad \frac{V_c}{\omega} = \frac{\mathcal{L}}{\pi}$$

L'importance relative des grandeurs $\mathcal{L}$, δ et a permet de définir différents cas particuliers que nous allons envisager successivement. Il est à noter que dans les installations industrielles courantes $2a \leqslant \mathcal{L}$. De plus, la vitesse du fluide tend toujours à égaler la vitesse du champ magnétique. Le glissement $s = 1 - \frac{V}{V_c}$ entre le fluide et le champ magnétique n'est pratiquement jamais nul et par conséquent

$$V \leqslant V_c$$

a) Cas où $\delta \gg \mathcal{L}$: ceci se trouve réalisé lorsque les fréquences des courants inducteurs sont peu élevées (quelques dizaines de Hz pour les métaux fondus classiques).

La dimension caractéristique de la variation spatiale du champ magnétique est alors $\mathcal{L}$. L'importance relative des termes de l'équation d'évolution du champ magnétique est la suivante :

$$\frac{\left\| \overrightarrow{Rot}\,(\vec{V} \wedge \vec{B}) \right\|}{\left\| \frac{1}{\mu\sigma} \overrightarrow{\Delta B} \right\|} \sim \frac{B_0 V}{\mathcal{L}} \times \frac{\mu\sigma\mathcal{L}^2}{B_0} = \mu\sigma V \mathcal{L} = R_m$$

$$\frac{\left\| \frac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial t} \right\|}{\left\| \frac{1}{\mu\sigma} \overrightarrow{\Delta B} \right\|} \sim \omega B_0 \times \frac{\mu\sigma\mathcal{L}^2}{B_0} = \mu\sigma\omega\mathcal{L}^2 = R_\omega = \frac{\mu\sigma V_c \mathcal{L}}{\pi} = \frac{R}{\pi}$$

$$= \mu\sigma\omega\delta^2 \frac{\mathcal{L}^2}{\delta^2} = \left(\frac{\mathcal{L}}{\delta}\right)^2$$

avec $R = \mu\sigma V_c \mathcal{L}$

Par suite $R_\omega = \frac{\mu\sigma V_c \mathcal{L}}{\pi} = \frac{\mathcal{L}^2}{\delta^2} \ll 1$

- On peut donc négliger $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ devant $\frac{1}{\mu\sigma} \overrightarrow{\Delta B}$

- De plus $V \leqslant V_c$ et par conséquent $R_m \ll 1$, a fortiori. Il est donc possible de négliger $\overrightarrow{Rot}\,(\vec{V} \wedge \vec{B})$ devant $\frac{1}{\mu\sigma} \overrightarrow{\Delta B}$

Il s'ensuit que le champ magnétique est harmonique dès que se trouvent vérifiés $\mu\sigma\omega\mathcal{L}^2 \ll 1$ et $\mu\sigma V \mathcal{L} \ll 1$. Ces deux conditions signifient que

les forces électromotrices induites dans le fluide d'une part à cause de la pulsation du champ magnétique, d'autre part à cause du mouvement du fluide à travers les lignes de champ, sont trop faibles pour créer des courants électriques induits susceptibles de modifier de façon sensible le champ magnétique appliqué. Ce dernier est exactement celui qui existerait dans le vide, en l'absence totale de fluide :

$$\left.\begin{array}{l} \mu\sigma\omega\tau^2 \ll 1 \\ \mu\sigma V\tau \ll 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{0}$$

b) Cas où $\delta \ll \tau$

La réalisation de cette condition nécessite des fréquences élevées pour des installations industrielles et des métaux fondus courants.

La dimension caractéristique associée à $\overrightarrow{B}$ est alors δ et :

$$\frac{\left\| \overrightarrow{Rot}\,(\vec{V}\wedge\vec{B}) \right\|}{\left\| \frac{1}{\mu\sigma}\,\overrightarrow{\Delta B} \right\|} \sim \frac{B_0 V}{\delta} \times \frac{\mu\delta^2}{B_0} = \mu\sigma V\delta = R'_m = \frac{1}{\pi}\frac{V}{V_c}\frac{\tau}{\delta}$$

$$\frac{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \right\|}{\left\| \frac{1}{\mu\sigma}\,\overrightarrow{\Delta B} \right\|} \sim \omega B_0 \times \frac{\mu\sigma\delta^2}{B_0} = \mu\sigma\omega\delta^2 = 1$$

Ainsi :

- Les termes $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\frac{1}{\mu\sigma}\overrightarrow{\Delta B}$ sont du même ordre de grandeur : ceci est évident puisque leur égalité permet de définir la profondeur de pénétration δ .
- Il sera possible de négliger le terme $\overrightarrow{Rot}\,(\vec{V}\wedge\vec{B})$ devant $\frac{1}{\mu\sigma}\,\overrightarrow{\Delta B}$ à la seule condition que R'_m demeure petit devant l'unité. Ceci nécessite que la vitesse du fluide soit faible devant la vitesse de synchronisme V_c puisque cette condition s'écrit :

$$V \ll V_c \frac{\tau}{\delta}$$

alors que nous sommes dans le cas $\frac{\tau}{\delta} \gg 1$

Le champ magnétique sera déterminé par une équation de diffusion pure :

$$\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma}\,\overrightarrow{\Delta B}$$

Contrairement au cas précédent les forces électromotrices induites dans le fluide par la pulsation du champ magnétique seront importantes et engendreront des courants induits

intenses en opposition de phase avec les courants électriques inducteurs et par conséquent le champ magnétique inducteur sera fortement modifié au point d'être rigoureusement nul au centre de la conduite. Ce fait est traduit par la condition $\mu\sigma\omega\tau^2 \gg 1$. La condition $V \ll V_c \frac{\tau}{\delta}$ assure par contre que les forces électromotrices résultant du mouvement du fluide seront très faibles et donneront naissance à des courants électriques trop faibles pour perturber le champ magnétique résultant de l'effet précédent.

Il est à noter que $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim \frac{1}{\delta^2} \gg \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sim \frac{1}{\tau^2}$ par suite $\overrightarrow{\Delta B} \sim \frac{\overrightarrow{\partial^2 B}}{\partial x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \mu\sigma\omega\tau^2 \gg 1 \\ V \ll V_c \frac{\tau}{\delta} \end{array}\right\} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2}$$

Nous allons envisager les deux cas particuliers a) et b) pour lesquels il sera possible de déterminer le champ magnétique indépendamment des variables hydrodynamiques. Notre souci principal sera la détermination des effets produits sur l'écoulement du métal électroconducteur par la pulsation des forces électromagnétiques.

II. GRAND NOMBRE DE REYNOLDS MAGNETIQUE $\mu\sigma\omega\tau^2 \gg 1$

Le champ magnétique glissant créé au niveau de chacun des inducteurs diffuse à partir de la paroi dans une couche d'épaisseur $\delta \sim (\mu\sigma\omega)^{-1/2}$ où sont également localisés les courants induits et par conséquent les forces électromagnétiques susceptibles de mettre le fluide en mouvement. Le moteur de l'écoulement étant confiné dans des couches minces au voisinage des parois d'où seule la diffusion par viscosité peut engendrer un mouvement dans tout le fluide, il est logique de penser que l'efficacité d'un tel système sera faible, c'est à dire que le glissement $s = 1 - \frac{V}{V_c}$ sera important. Ceci permet d'envisager la possibilité de vérifier la condition $V \ll V_c \frac{\tau}{\delta}$ qui pouvait a priori paraître très sévère et très restrictive. En ce qui concerne les courants induits, leur production sera le fait des variations de flux importantes engendrées par la non-stationnarité du champ magnétique si bien que la loi d'Ohm s'écrira sous la forme :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

où $\vec{A}$ est le potentiel vecteur dont dérive le champ magnétique.

Les courants inducteurs imposent aux parois ($x = \pm a$) la composante tangentielle du champ magnétique qui dans tout le domaine fluide vérifie :

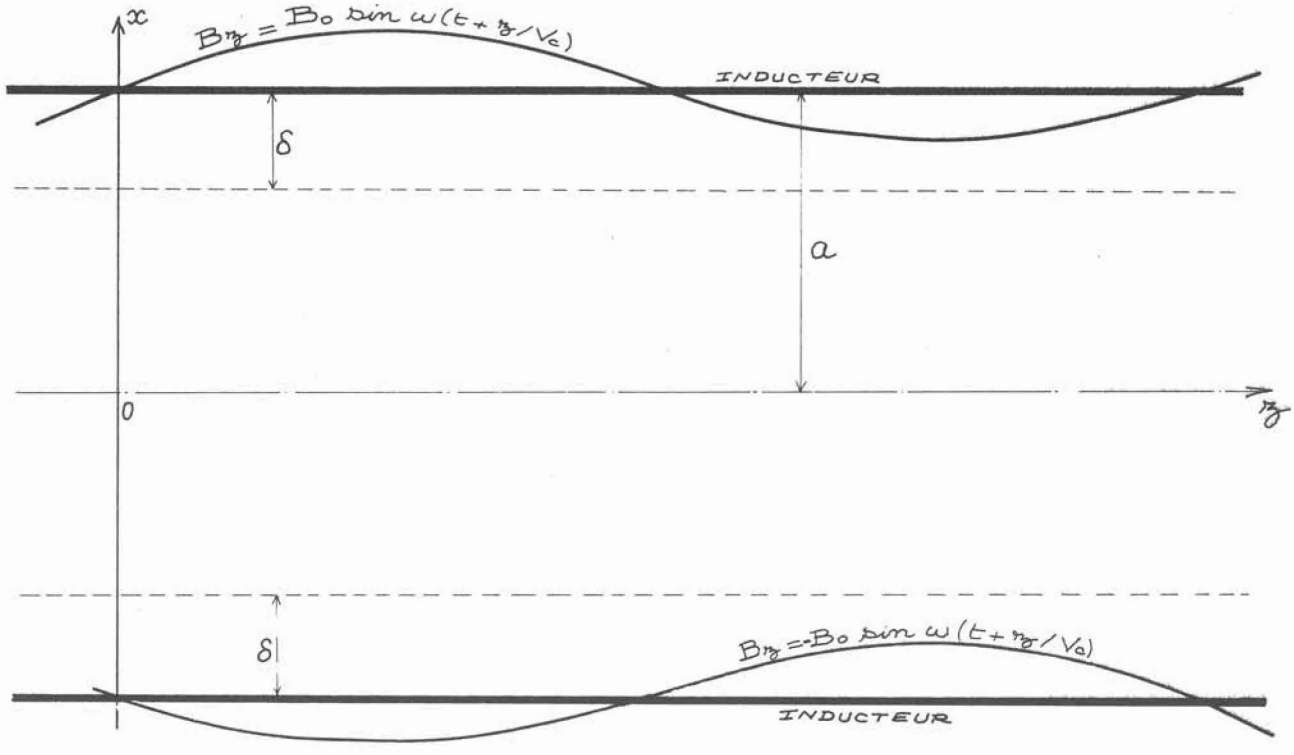
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2}$$

avec pour conditions aux limites

$$x = a \qquad B_{zy} = B_0 \sin \omega \left(t + \frac{z_y}{V_c} \right)$$

$$x = -a \qquad B_{zy} = -B_0 \sin \omega \left(t + \frac{z_y}{V_c} \right)$$

Le choix de la composante B_{zy} imposée aux parois sous la forme de deux ondes glissantes en opposition de phase ne particularise pas le problème. En effet la relation $\delta \ll \tau$ jointe à la condition réalisée dans les installations classiques $2a \leqslant \tau$, $2a$ restant cependant toujours de l'ordre de τ, assure la non interaction des deux inducteurs et permet d'affirmer que deux ondes en phase donneraient rigoureusement le même résultat en ce qui concerne le champ de vitesse.



Dans tout le domaine fluide nous avons :

$$B_x = -\frac{1}{\alpha}\frac{B_0}{sh\left(\frac{\pi\alpha a}{\tau}\right)} ch\left(\frac{\pi\alpha x}{\tau}\right) e^{i\left(\omega t + \frac{\pi z}{\tau}\right)}$$

$$B_z = -i\frac{B_0}{sh\left(\frac{\pi\alpha a}{\tau}\right)} sh\left(\frac{\pi\alpha x}{\tau}\right) e^{i\left(\omega t + \frac{\pi z}{\tau}\right)}$$

$$A = -i\frac{\tau}{\pi\alpha}\frac{B_0}{sh\left(\frac{\pi\alpha a}{\tau}\right)} ch\left(\frac{\pi\alpha x}{\tau}\right) e^{i\left(\omega t + \frac{\pi z}{\tau}\right)}$$

avec $\alpha^2 = iR = i\frac{\mu\sigma V_c \tau}{\pi}$

$$\alpha = \sqrt{\frac{R}{2}}(1+i)$$ choix du signe indifférent

$\vec{B} = \vec{Rot}(\vec{A}) = \vec{Rot}(A\vec{i_y})$; $\vec{i_y}$ = vecteur unitaire de Oy.

$$j = -\sigma\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\sigma V_c}{\alpha}\frac{B_0}{sh\left(\frac{\pi\alpha a}{\tau}\right)} ch\left(\frac{\pi\alpha x}{\tau}\right) e^{i\left(\omega t + \frac{\pi z}{\tau}\right)}$$

$\vec{j} = j\vec{i_y}$

L'interaction de $\vec{B}$ et de $\vec{j}$ produit des forces électromagnétiques $\vec{F} = \vec{j}\wedge\vec{B}$

$$\vec{F}\begin{cases} Re(j)\,Re(B_z) = F_x \\ -Re(j)\,Re(B_x) = F_z \end{cases}$$

$Re(X)$ = Partie réelle de X

Soit α^* le complexe conjugué de α

$$\alpha^* = \sqrt{\frac{R}{2}}(1-i)$$

Les composantes de F s'écrivent :

$$F_x = \overline{F_x} + f_x$$

$$F_z = \overline{F_z} + f_z$$

$(f_x, 0, f_z)$ représente la partie instationnaire de $\vec{F}$, pulsant à une fréquence double de la fréquence du champ autour de la valeur moyenne $(\overline{F_x}, 0, \overline{F_z})$.

$$\overline{F_x} = i\frac{\sigma V_c B_o^2}{4}\left[\frac{\alpha \operatorname{ch}\left(\frac{\pi\alpha^* x}{\ell}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\alpha x}{\ell}\right) - \alpha^* \operatorname{ch}\left(\frac{\pi\alpha x}{\ell}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\alpha^* x}{\ell}\right)}{\alpha\alpha^* \operatorname{sh}\left(\frac{\pi\alpha a}{\ell}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\alpha^* a}{\ell}\right)}\right]$$

$$\overline{F_z} = -\frac{\sigma V_c B_o^2}{\ell}\left[\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\alpha x}{\ell}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\alpha^* x}{\ell}\right)}{\alpha\alpha^* \operatorname{sh}\left(\frac{\pi\alpha a}{\ell}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\alpha^* a}{\ell}\right)}\right]$$

$$f_x = \frac{i\sigma V_c B_o^2}{4}\left[\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\alpha x}{\ell}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\alpha x}{\ell}\right)}{\alpha \operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\ell}\right)} e^{2i\left(\omega t + \frac{\pi z}{\ell}\right)} - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\alpha^* x}{\ell}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\alpha^* x}{\ell}\right)}{\alpha^* \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\alpha^* a}{\ell}} e^{-2i\left(\omega t + \frac{\pi z}{\ell}\right)}\right]$$

$$f_z = -\frac{\sigma V_c B_o^2}{4}\left[\frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi\alpha x}{\ell}\right)}{\alpha^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\ell}\right)} e^{2i\left(\omega t + \frac{\pi z}{\ell}\right)} + \frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi\alpha^* x}{\ell}\right)}{\alpha^{*2} \operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi\alpha^* a}{\ell}\right)} e^{-2i\left(\omega t + \frac{\pi z}{\ell}\right)}\right]$$

Il est aisé de remarquer que la partie $\vec{f} = (f_x, 0, f_z)$ est purement irrotationnelle

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ \phi$$

avec

$$\phi = -i\frac{\sigma V_c B_o^2 \ell}{8\pi}\left[\frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi\alpha x}{\ell}\right)}{\alpha^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\ell}\right)} e^{2i\left(\omega t + \frac{\pi z}{\ell}\right)} - \frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi\alpha^* x}{\ell}\right)}{\alpha^{*2} \operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi\alpha^* a}{\ell}\right)} e^{-2i\left(\omega t + \frac{\pi z}{\ell}\right)}\right]$$

Ainsi seule la partie moyenne de $\vec{F}$ engendrera le mouvement du fluide. La partie pulsante se trouvera équilibrée par un gradient de pression qui sera lui aussi, par conséquent instationnaire. La substitution de sa valeur à α, compte-tenu du fait que $\sqrt{\frac{R}{\ell}} \gg 1$ et par suite que :

$$\operatorname{sh}\left(\pi\sqrt{\frac{R}{\ell}}\frac{a}{\ell}\right) \sim \operatorname{ch}\left(\pi\sqrt{\frac{R}{\ell}}\frac{a}{\ell}\right) \sim \frac{e^{\left(\pi\sqrt{\frac{R}{2}}\frac{a}{\ell}\right)}}{2}$$ conduit aux expressions suivantes pour $\overline{F_x}$, $\overline{F_z}$ et ϕ.

$$\overline{F_x} = -\frac{\sigma V_c B_o^2}{\sqrt{2R}}\, e^{-\pi\sqrt{2R}\frac{a}{c}}\left(\operatorname{sh}\pi\sqrt{2R}\frac{x}{c} + \sin\pi\sqrt{2R}\frac{x}{c}\right)$$

$$\overline{F_z} = -\frac{\sigma V_c B_o^2}{R}\, e^{-\pi\sqrt{2R}\frac{a}{c}}\left(\operatorname{ch}\pi\sqrt{2R}\frac{x}{c} + \cos\pi\sqrt{2R}\frac{x}{c}\right)$$

$$\phi = -\frac{B_o^2}{2\mu}\, e^{-\frac{\pi}{c}\sqrt{2R}\,a}\left[\left[\sin 2\left(\omega t + \frac{\pi z}{c} - \sqrt{\frac{R}{2}}\frac{\pi a}{c}\right)\right]\left[\operatorname{sh}\pi\sqrt{2R}\frac{x}{c}\sin\pi\sqrt{2R}\frac{x}{c}\right] + \left[\cos 2\left(\omega t + \frac{\pi z}{c} - \sqrt{\frac{R}{2}}\frac{\pi a}{c}\right)\right]\left[\operatorname{ch}\pi\sqrt{2R}\frac{x}{c}\cos\pi\sqrt{2R}\frac{x}{c} + 1\right]\right]$$

Détermination du champ de vitesse

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} = -\dfrac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p^* + \dfrac{\vec{\vec{F}}}{\rho} + \nu\,\nabla^2\vec{V} \\ \vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \end{cases}$$

avec

$$p^* = p + \phi = p^*(x, z, t) \quad ; \quad \vec{\vec{F}} = \vec{\vec{F}}(x)$$

L'équation du tourbillon $\vec{\Omega}$ qui permet d'éliminer la pression prend la forme :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{\Omega} = -\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{Rot}(\vec{\vec{F}}) + \nu\,\overrightarrow{\nabla^2\Omega}$$

avec

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{Rot}\,\vec{\vec{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial \overline{F_x}}{\partial z} - \dfrac{\partial \overline{F_z}}{\partial x} = -\dfrac{\partial \overline{F_z}}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si l'on introduit la fonction de courant ψ $\left(u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \; ; \; w = \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$ cette équation devient :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2 \psi\right) + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 \psi\right) - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla^2 \psi\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{F_z}}{\partial x} - \nu \nabla^4 \psi$$

Puisque la source de vorticité $\left(\frac{\partial \overline{F_z}}{\partial x}\right)$ ne dépend ni du temps ni de la variable z il est logique de penser que la vorticité elle-même ($\omega = -\nabla^2 \psi$), et partant la fonction de courant ψ ne dépendront pas de ces deux variables. Par suite :

$$\psi = \psi(x) \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0$$

$$w = w(x)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{F_z}}{\partial x} + \nu \nabla^4 \psi = 0$$

ou encore $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -\dfrac{1}{\rho \nu}\dfrac{\partial \overline{F_z}}{\partial x}$ ce qui conduit à l'expression

$$w = \frac{\sigma V_c B_0^2 \tau^2}{2\pi^2 \rho \nu R^2} e^{-\frac{\pi}{\tau}\sqrt{2R'}a}\left(ch\, \pi\sqrt{2R'}\frac{x}{\tau} - \cos \pi\sqrt{2R'}\frac{x}{\tau}\right) + C\frac{x^2}{2} + Dx + E$$

Conditions aux limites

Ces conditions expriment :

- le repos relatif du fluide par rapport à la paroi :

$$w(a) = w(-a) = 0$$

- la valeur imposée de l'extérieur au gradient de pression longitudinal :

$$\frac{\partial P^*}{\partial z} = K$$

Champ de pression

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \overline{F_x} \qquad \frac{\partial P^*}{\partial z} = \overline{F_z} + \rho \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

or $$\overline{F_z} + \rho\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho\nu C = K$$

Soit

$$P^* = -\frac{B_0^2}{2\mu} e^{-\pi\sqrt{2R}\frac{a}{c}} \left(ch\,\pi\sqrt{2R}\frac{x}{c} - \cos\pi\sqrt{2R}\frac{x}{c} \right) + Kz + Cte$$

En introduisant le nombre de Hartmann $M = B_0 c \left(\frac{\sigma}{\rho\nu}\right)^{1/2}$

et puisque $R_\omega = \frac{R}{\pi} = \mu\sigma V_c c/\pi = \mu\sigma\omega c^2$

$$w = -\frac{M^2}{4R_\omega^2} V_c \left[1 - 2 e^{-\sqrt{2\pi R_\omega}\frac{a}{c}} \left(ch\sqrt{2\pi R_\omega}\frac{x}{c} - \cos\sqrt{2\pi R_\omega}\frac{x}{c} \right) \right] + \frac{K}{2\rho\nu} (x^2 - a^2)$$

Cette expression fait apparaître deux termes principaux : le premier dû à la force motrice exercée par le champ magnétique, le second résultat de la présence d'un gradient de pression (Parabole de Poiseuille).

La vitesse est maximale sur l'axe de la conduite où elle prend la valeur

$$w_M = -\frac{M^2}{4R_\omega^2} V_c - \frac{K a^2}{2\rho\nu}$$

Cette expression tient compte du fait que $R_\omega \gg 1$ et donc que $2e^{-\sqrt{2\pi R_\omega}\frac{a}{c}} \ll 1$.

Ainsi pour un fluide déterminé, plus le champ magnétique est intense (plus M est grand), plus le "moteur" de l'écoulement est puissant et plus w_M est élevée. Par contre plus R_ω est grand, (fréquence des courants inducteurs élevée), plus le domaine d'efficacité de ce "moteur", limité à δ, devient réduit et donc plus w_M diminue. A la limite, pour une fréquence infiniment grande le métal liquide se comporte comme un fluide parfaitement conducteur s'opposant à toute pénétration du champ magnétique dont l'effet est alors réduit à néant.

Si on s'intéresse à l'action spécifique du champ magnétique, donc au cas particulier $K \equiv 0$, le simple examen de l'expression de w semblerait montrer qu'il est possible, par un choix judicieux de l'intensité du champ magnétique et de sa fréquence, de dépasser la vitesse de synchronisme V_c . En fait, il n'en est rien puisque le calcul effectué et par conséquent l'expression obtenue pour w ne sont valables qu'à la condition que la vitesse typique du fluide vérifie :

$$V \ll V_c \frac{\tau}{\delta}$$

Or :

$$V \sim \frac{M^2}{4 R_w^2} V_c \ll V_c \frac{\tau}{\delta} \qquad \text{implique}$$

$$\frac{\pi}{16} \frac{M^4}{R_w^5} \ll 1$$

Cette relation fixe pour une fréquence donnée le champ magnétique maximum et pour un champ donné la fréquence minimum pour que la théorie développée demeure valable.

La pression au sein du fluide est donnée par l'expression

$$\overline{P} = -\frac{B_o^2}{2\mu} e^{-\sqrt{2\pi R_w}\frac{a}{c}} \left(ch\sqrt{2\pi R_w}\frac{x}{c} - \cos\sqrt{2\pi R_w}\frac{x}{c} \right) + Kz + C$$

$$p = -\frac{B_o^2}{2\mu} e^{-\sqrt{2\pi R_w}\frac{a}{c}} \left[\begin{array}{l} \sin 2\left(\omega t + \frac{\pi z}{c} - \sqrt{\frac{\pi R_w}{2}}\frac{a}{c}\right) sh\sqrt{2\pi R_w}\frac{x}{c} \sin\sqrt{2\pi R_w}\frac{x}{c} + \\ + \cos 2\left(\omega t + \frac{\pi z}{c} - \sqrt{\frac{\pi R_w}{2}}\frac{a}{c}\right)\left[1 + ch\sqrt{2\pi R_w}\frac{x}{c} \cos\sqrt{2\pi R_w}\frac{x}{c}\right] \end{array} \right]$$

C est une constante qui sera déterminée par les conditions extérieures
En particulier au centre de la conduite $x = 0$

$$P = -\frac{B_o^2}{4\mu}\left[1 + 4 e^{-\sqrt{2\pi R_w}\frac{a}{c}} \cos 2\left(\omega t + \frac{\pi z}{c} - \sqrt{\frac{\pi R_w}{2}}\frac{a}{c}\right) \right] + Kz + C$$

Soit puisque $R_\omega \gg 1$:

$$P_{x=0} = -\frac{B_0^2}{4\mu} + Kz + C$$

Le long des parois $x = \pm a$

$$P = -\frac{B_0^2}{4\mu}\left[1 + \cos 2\left(\omega t + \frac{\pi z}{c} - \sqrt{2\pi R_\omega}\,\frac{a}{c}\right) + 2\,e^{-\sqrt{2\pi R_\omega}\,\frac{a}{c}} \cos 2\left(\omega t + \frac{\pi z}{c} - \sqrt{\frac{\pi R_\omega}{2}}\,\frac{a}{c}\right)\right] + Kz + C$$

de même puisque $R_\omega \gg 1$

$$P_{x=\pm a} = -\frac{B_0^2}{4\mu} + Kz - \frac{B_0^2}{4\mu}\cos 2\left(\omega t + \frac{\pi z}{c} - \sqrt{2\pi R_\omega}\,\frac{a}{c}\right) + C$$

Ainsi la pression au voisinage des parois est la pression au centre de la conduite à laquelle se superpose une onde se déplaçant à la vitesse du champ magnétique et déphasée par rapport à lui. L'amplitude de cette onde est rapidement décroissante dès que l'on s'écarte des parois pour s'annuler au centre. La présence d'une telle onde qui en un point donné de la conduite engendre une succession de surpressions et de dépressions serait évidemment à prendre en considération dans le cas où l'on voudrait déterminer des conditions de cavitation.

Le résultat essentiel de cette étude est que la périodicité à la fois temporelle et spatiale du champ magnétique appliqué ne conduit pas à donner une structure périodique à l'écoulement. Seul le champ de pression est marqué par ce caractère spécifique du champ magnétique.

La figure (1) donne le profil de vitesse induit par le champ magnétique dans le cas particulier où le gradient de pression K est nul, et différentes valeurs de β pour le cas précis où le pas polaire c est égal à la demi-largeur a du canal.

$$\beta = \sqrt{2\pi R_\omega}$$

Le paramètre β est directement lié à la profondeur de pénétration δ du champ magnétique dans le métal liquide puisque

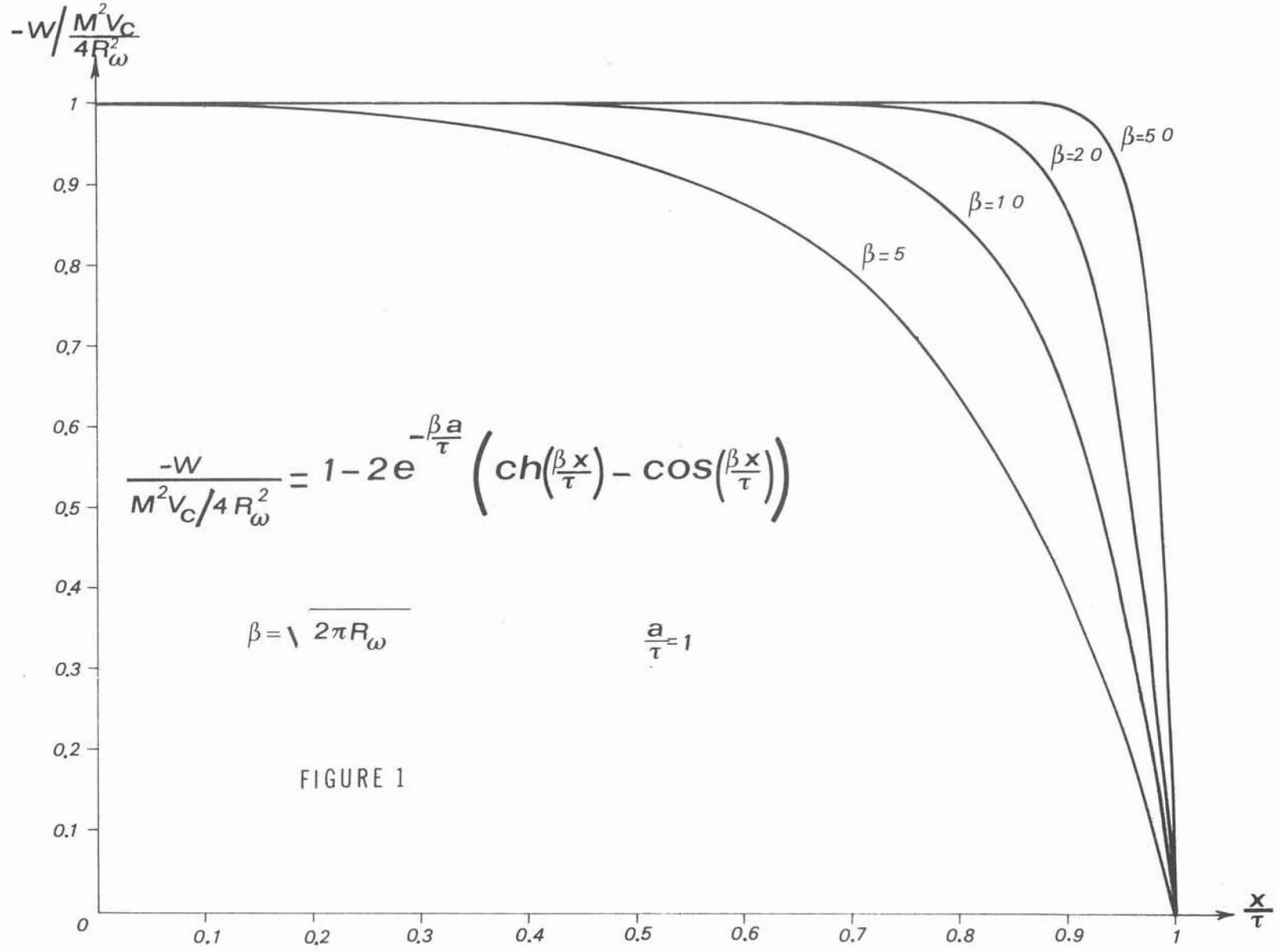

$-W/\frac{M^2V_c}{4R_\omega^2}$
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
$\frac{x}{\tau}$
$\beta=5\,0$
$\beta=2\,0$
$\beta=1\,0$
$\beta=5$
$\frac{-W}{M^2V_c/4R_\omega^2} = 1-2e^{-\frac{\beta a}{\tau}}\left(ch\left(\frac{\beta x}{\tau}\right)-\cos\left(\frac{\beta x}{\tau}\right)\right)$
$\beta=\sqrt{2\pi R_\omega}$
$\frac{a}{\tau}=1$

FIGURE 1

$$\frac{\delta}{\tau} = \frac{\ell}{\beta}$$

Pour une valeur convenablement choisie du gradient de pression K il est possible d'annuler complètement le débit à l'intérieur du canal. Le débit entraîné par le champ magnétique dans les couches pariétales est dans ce cas égal et opposé au débit imposé au centre par le gradient de pression adverse.

Cette valeur de K est donnée par :

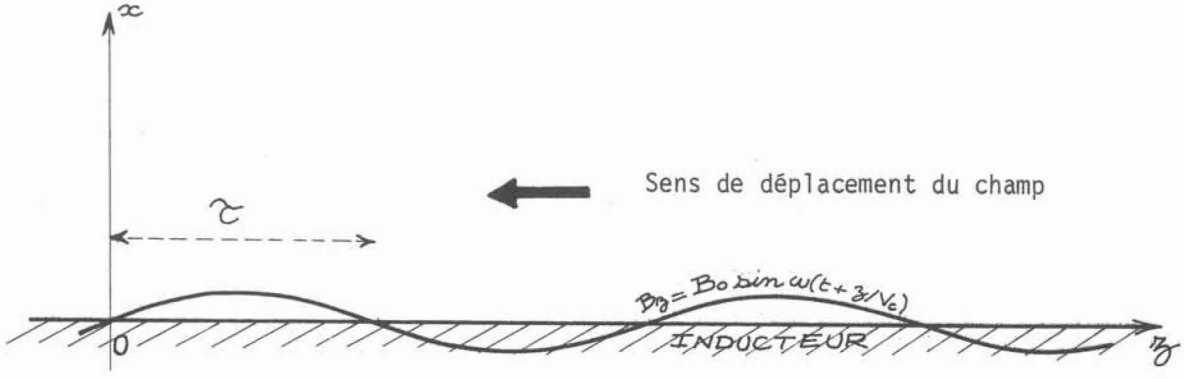
$$\frac{K}{\ell \rho \nu} = \frac{-3 M^2 V_c}{8 R_\omega^2 a^2} \left[1 - \frac{1}{\beta} \right]$$

La figure (2) donne pour différentes valeurs de β les profils de vitesse obtenus dans ce cas.

III. PETIT NOMBRE DE REYNOLDS MAGNETIQUE $\mu\sigma\omega\tau^2 \ll 1$ (ou $\mu\sigma V_c \tau \ll 1$)

III.1. Demi espace fluide soumis à l'action d'un mono-inducteur

Le cas particulier du demi espace fluide ($x \geqslant 0$) soumis au champ magnétique d'un inducteur à champ glissant situé en x = 0 possède à la fois le mérite d'être simple et de mettre en évidence les mécanismes essentiels par lesquels agit le champ magnétique. L'inducteur impose le long de la paroi la composante du champ magnétique glissant dans la direction Oz à la vitesse $-V_c$. Puisque nous supposons vérifiée la condition $\mu\sigma\omega\tau^2 \ll 1$, le champ magnétique est harmonique dans tout le domaine fluide. Le problème est plan, invariant dans une translation parallèle à Oy.



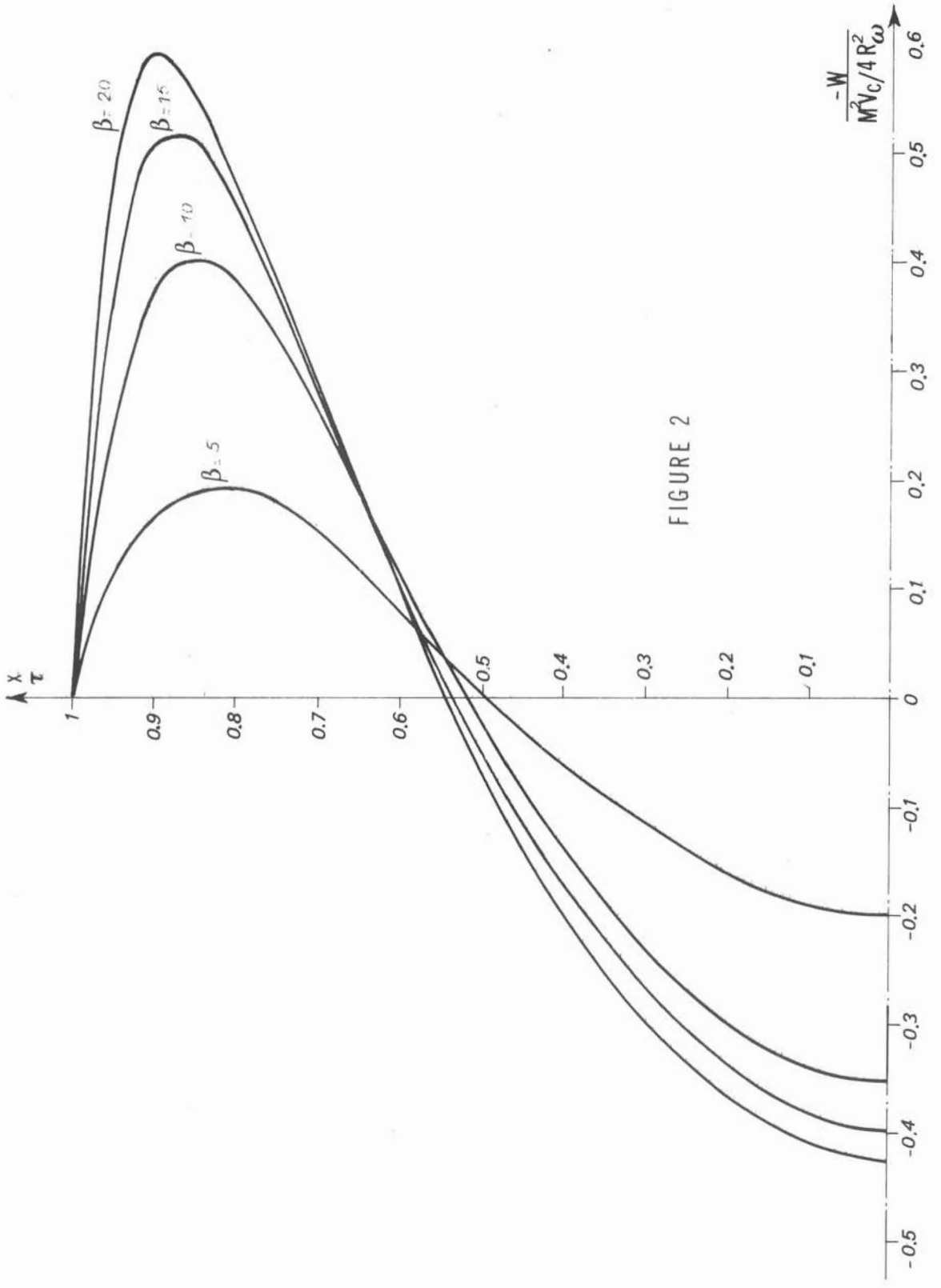

β= 20
β=15
β= 10
β= 5
χ/τ
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-W / M²Vc/4R²ω

FIGURE 2

$$\overrightarrow{\Delta B} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} B_y = B_0 \sin \omega \left(t + \frac{y}{V_c} \right) & x = 0 \\ B_x \text{ et } B_y \longrightarrow 0 & \text{quand } x \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

Ainsi le champ magnétique dans le domaine fluide est donné par :

$$\begin{cases} B_x = B_0 \, e^{-\frac{\pi x}{\tau}} \cos \left(\omega t + \frac{\pi y}{\tau} \right) \\ B_y = B_0 \, e^{-\frac{\pi x}{\tau}} \sin \left(\omega t + \frac{\pi y}{\tau} \right) \end{cases}$$

Plaçons nous dans un repère lié au champ magnétique. Un tel repère se déplace à la vitesse uniforme $-V_c$ dans la direction Oz.

Soit :

$$Z = y + V_c \tau \quad ; \quad \omega \left(t + \frac{y}{V_c} \right) = \omega \frac{Z}{V_c} = \frac{\pi Z}{\tau}$$

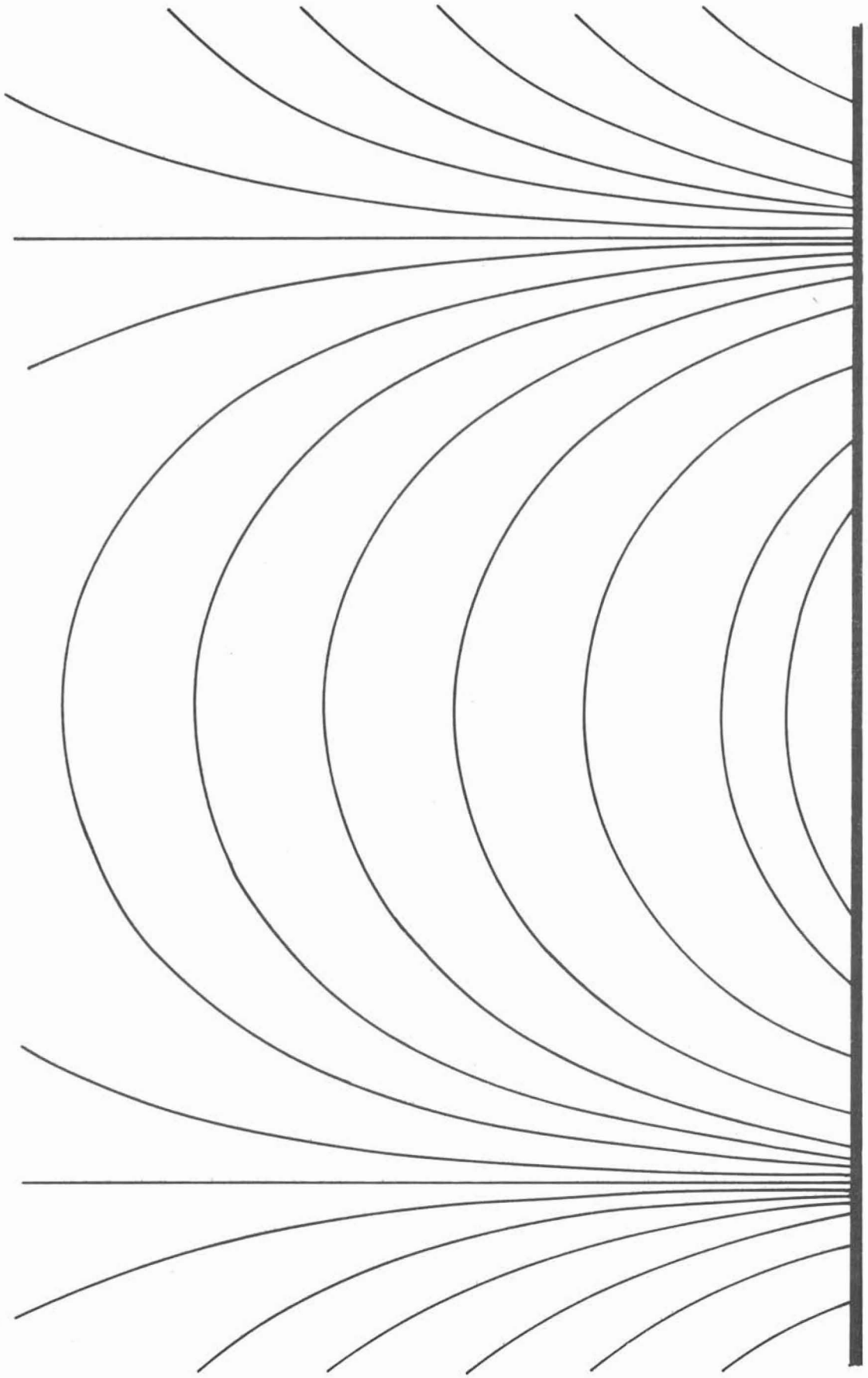
Par suite :

$$B_x = B_0 \, e^{-\frac{\pi x}{\tau}} \cos \frac{\pi Z}{\tau} \qquad \text{(cf. Figure 3)}$$

$$B_z = B_0 \, e^{-\frac{\pi x}{\tau}} \sin \frac{\pi Z}{\tau}$$

Les courants induits dans le fluide sont :

$$\overrightarrow{J} = \sigma \begin{vmatrix} e_x \\ e_y + V_z B_x - V_x B_z \\ e_z \end{vmatrix}$$



LIGNES DE CHAMP

FIGURE 3

Or dans le repère lié au champ $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ et par conséquent le champ électrique est irrotationnel :

$$\frac{\partial e_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial e_z}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial x} = 0$$

Ainsi $\frac{\partial e_y}{\partial x} = \frac{\partial e_y}{\partial y} = \frac{\partial e_y}{\partial z} = 0$ et e_y est constant dans tout l'espace fluide et il est commode de considérer $e_y = 0$ si aucun champ électrique n'est imposé aux frontières.

De plus $div \vec{J} = 0$ entraîne que e_x et e_z sont harmoniques:

$$\Delta e_x = \Delta e_z = 0$$

La force électromagnétique résultant de l'interaction de J et B devient :

$$\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} = \begin{cases} \sigma B_z (V_z B_x - V_x B_z) = F_x \\ \sigma (e_z B_x - e_x B_z) = F_y \\ -\sigma B_x (V_z B_x - V_x B_z) = F_z \end{cases}$$

Nous limitons volontairement notre intérêt au seul écoulement dans le plan xOz, ainsi nous ne nous préoccupons pas de la composante Fy qui ne donnerait éventuellement qu'un écoulement dans la direction Oy que nous ne prenons pas en compte. Il n'est pas nécessaire donc de préciser davantage les expressions de e_x et e_z que nous pourrions, sans dénaturer le cas très particulier envisagé, supposer nulles dans tout l'espace fluide.

Nous recherchons le mouvement en régime établi qui vérifiera :

$$\begin{cases} (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{grad}\,P + \frac{F}{\rho} + \nu\,\overrightarrow{\nabla^2 V} \\ \vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \end{cases}$$

Si l'on introduit les variables adimensionnelles :

$$\eta = \frac{x}{\tau} \qquad \xi = \frac{z}{\tau} \qquad u = \frac{V_x}{V_c} \qquad w = \frac{V_z}{V_c} \qquad P = \frac{\mathcal{P}}{\rho V_c^2}$$ nous obtenons

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + w\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial P}{\partial \eta} + N e^{-2\eta}\sin\xi\,(w\cos\xi - u\sin\xi) + \dfrac{\pi}{Re}\,\Delta u \\ u\dfrac{\partial w}{\partial \eta} + w\dfrac{\partial w}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial P}{\partial \xi} - N e^{-2\eta}\cos\xi\,(w\cos\xi - u\sin\xi) + \dfrac{\pi}{Re}\,\Delta w \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + \dfrac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \end{cases}$$

avec :

$$Re = \frac{V_c\,\tau}{\nu} \qquad M^2 = \frac{\sigma B_o^2 \tau^2}{\rho \nu} \qquad N = \frac{M^2}{\pi Re}$$

Les conditions aux limites sur la vitesse sont :

$$\eta = 0 \qquad u = 0 \qquad w = +1$$

$$\eta \longrightarrow +\infty \qquad u \longrightarrow 0 \qquad w \longrightarrow 0$$

Nous envisageons de plus le cas où aucun gradient de pression n'est imposé entre l'infini amont et l'infini aval $(\xi = \pm\infty)$.

Le paramètre d'interaction N qui traduit l'importance relative des forces électromagnétiques et des forces d'inertie peut permettre dans deux cas très précis de contourner la difficulté introduite dans la recherche d'une solution analytique du système par la non linéarité des termes inertiels.

III.1.1. Faible paramètre d'intéraction $N \ll 1$

Les forces d'inertie très élevées dans ce cas par rapport aux forces électromagnétiques vont être déterminantes dans la forme de l'écoulement. L'inertie du fluide ne lui permet pas de répondre aux sollicitations imposées par l'inhomogénéité

du champ magnétique. L'écoulement ne peut donc être marqué par l'empreinte périodique en ξ du champ magnétique inducteur et se trouve déterminé par l'action des forces moyennées en ξ .

Dans ce cas $u \equiv 0$, $w = w(\eta)$ et l'équation régissant w s'écrit :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{M^2}{2\pi^2} e^{-2\eta} w = 0$$

La résolution de cette équation permettant d'accéder à l'écoulement moyen a été faite de nombreuses fois par différents auteurs [cf. par exemple TROPP 1969]. Le profil de vitesse est constitué, dans un repère absolu, d'une couche pariétale d'épaisseur $\delta \sim \frac{1}{M}$, analogue à une couche de Hartmann, marquée par des gradients de vitesse importants, surmontée d'un profil uniforme correspondant à la vitesse de synchronisme V_c . L'étude de ce cas asymptotique ne peut permettre de répondre à la question essentielle que nous nous posons, à savoir la détermination de l'influence de la répartition périodique des forces électromagnétiques sur l'écoulement. Ceci nous conduit donc naturellement à envisager le cas opposé du régime à forte interaction.

III.1.2. Paramètre d'interaction élevé $N \gg 1$

Ce sont les forces électromagnétiques qui dominent cette fois l'écoulement. Les forces d'inertie peuvent être négligées dans la presque totalité de l'espace fluide (la périodicité du champ magnétique risque en effet de faire apparaître des régions où les forces électromagnétiques restent faibles devant les forces d'inertie). Cette simplification permet en outre de ne retenir que la partie linéaire des équations du mouvement en éliminant une fois encore les difficultés de résolution inhérentes à la non linéarité. Afin de saisir de façon plus évidente encore l'influence du champ magnétique et de sa périodicité nous considérerons le cas de champs magnétiques de fortes intensités donc de nombres de Hartman M très élevés. Ceci permet une grande souplesse de résolution des équations en recherchant la solution comme un développement en série selon les puissances de $\frac{1}{M}$ et autorise un découpage du domaine fluide en régions bien individualisées soumises à des mécanismes tout à fait spécifiques.

Le simple examen de la carte du champ magnétique peut permettre de guider l'intuition en donnant une allure générale de l'écoulement : dans le repère considéré lié au champ magnétique c'est la paroi et elle seule qui est le moteur de l'écoulement puisqu'elle est animée d'une vitesse unité suivant $O\xi$. Dans sa translation elle entraîne, grâce à la viscosité, du fluide qui doit nécessairement couper les lignes de champ. Dans les régions telles que $\xi = 2k\pi$ les lignes de courants, parallèles à la paroi, coupent les lignes de champ presque orthogonalement. Il en résulte donc une

force électromagnétique très grande qui s'oppose à l'entraînement du fluide par la paroi. Au contraire dans les régions pour lesquelles $\xi \sim \frac{2k+1}{2}\pi$, les lignes de courant et les lignes de champ ont des directions quasiment parallèles, si bien que l'effet du champ magnétique sera insignifiant et le mouvement imposé par la paroi aura toute liberté de diffuser loin d'elle. Ainsi, la paroi entraîne dans sa translation, une quantité de fluide qui se trouve modulée par la périodicité du champ magnétique. Cette quantité croît et atteint son maximum au voisinage de $\xi = k\pi$ et se trouve être minimum au voisinage de $\xi = \frac{2k+1}{2}\pi$. Par continuité, dans certaines régions, du fluide doit donc quitter la proximité de la paroi, dans d'autres au contraire, du fluide est prélevé de l'extérieur pour alimenter la zone pariétale et obéir ainsi à la modulation périodique imposée par le champ. Si le champ magnétique est intense il s'opposera violemment à tout déplacement de fluide qui aurait tendance à couper les lignes de champ ; ceci aura deux effets : tout d'abord de limiter la profondeur de diffusion du mouvement depuis la paroi, ensuite de canaliser le fluide qui sera prélevé ou injecté loin d'elle, lignes de champ et lignes de courant devenant alors confondues. L'écoulement apparaît ainsi sous forme de cellules indépendantes dont la dimension caractéristique est égale au pas polaire.

Résolution analytique

Le raisonnement précédent nous a amenés à distinguer deux régions bien différentes : la zone pariétale et la région loin de la paroi que nous étudierons successivement.

a) La zone pariétale

Elle sera essentiellement marquée par la viscosité et les forces électromagnétiques. Dans cette région :

$$w \gg u \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} \gg \frac{\partial}{\partial \xi}$$

Sauf si $\cos\xi$ ou $\sin\xi \sim 0$ c'est à dire sauf si $\xi \sim k\frac{\pi}{2}$ la condition $N \gg 1$ rend légitime de négliger les forces d'inertie devant les forces électromagnétiques Les équations du mouvement se réduisent à :

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} - \frac{M^2}{\pi^2}\cos^2\xi \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0$$

Compte-tenu des conditions aux limites :

$$w \text{ et } \frac{\partial w}{\partial \eta} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \eta \longrightarrow +\infty$$

$$w(0) = 1$$

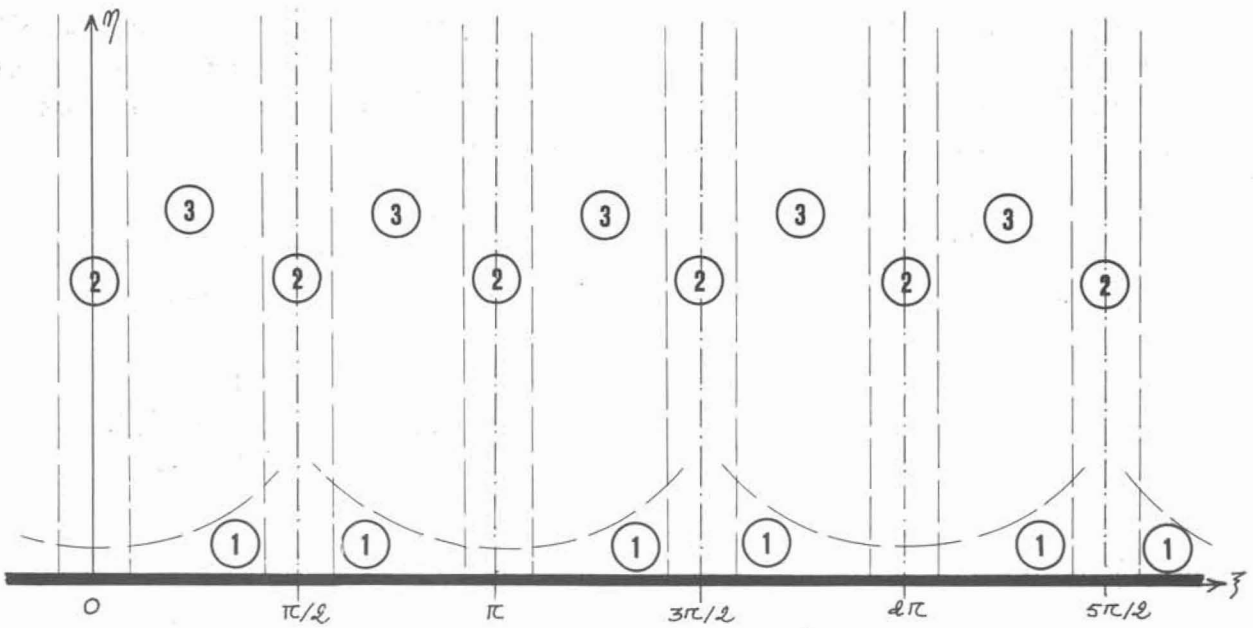
on obtient :

$$w = e^{-\frac{M}{\pi}|\cos\xi|\eta}$$

ce qui s'écrit encore $w = e^{-\eta/\delta(\xi)}$ où $\delta(\xi) = \frac{\pi}{M|\cos\xi|}$ représente l'épaisseur de la couche de paroi modulée comme prévu par le champ magnétique. Le débit Q qui transite dans cette couche est donnée par :

$$Q_p = \int_0^{+\infty} w\, d\eta = \frac{\pi}{M|\cos\xi|} = \delta(\xi)$$ qui a le même caractère périodique que $\delta(\xi)$

Le domaine fluide se trouve découpé de la façon suivante :



(1) La couche pariétale

(2) Les couches perpendiculaires à la paroi (dans lesquelles les forces d'inertie peuvent jouer un rôle

(3) La zone éloignée de la paroi que nous dénommerons "coeur"

b) Le coeur

Dans cette région, éloignée du moteur de l'écoulement, u et w seront faibles de même que leur gradient et par conséquent le rôle de la viscosité sera négligeable. Seul par conséquent le gradient de pression pourra contrebalancer les forces électromagnétiques. Le système d'équations devient alors :

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = N e^{-2\eta} \sin\xi \,(w\cos\xi - u\sin\xi)$$

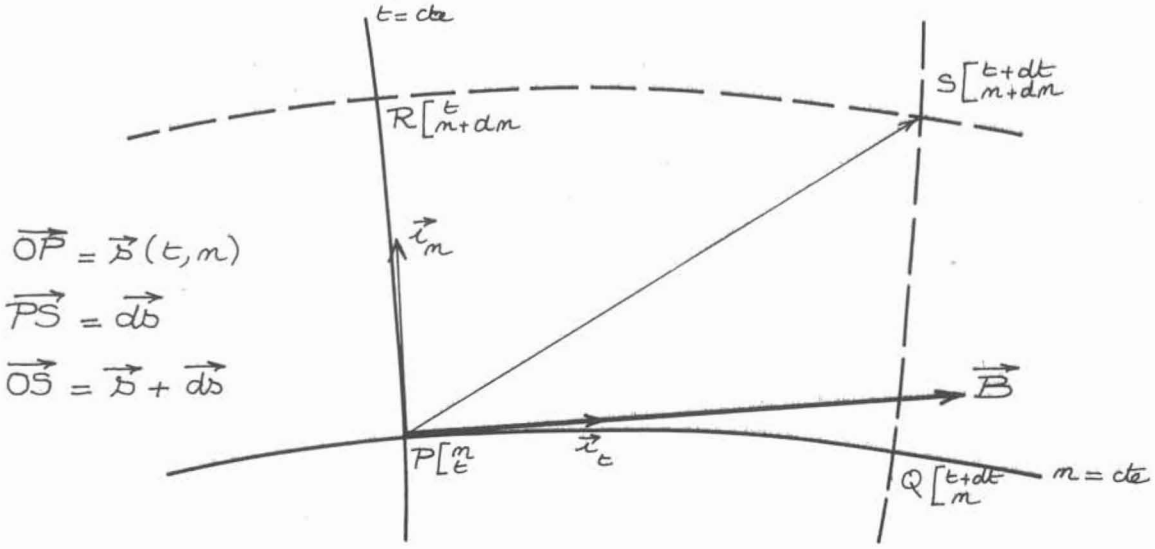
$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = -N e^{-2\eta} \cos\xi \,(w\cos\xi - u\sin\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$$

Or nous avons vu que dans le coeur les lignes de champ magnétique jouaient un rôle tout à fait particulier, puisque l'intensité du champ était telle que le fluide était contraint de se mouvoir en leur restant parallèle. De plus le champ magnétique étant harmonique et plan, il dérive à la fois d'un potentiel scalaire φ et d'une fonction de courant ψ (déterminée par la seule composante non nulle du potentiel vecteur de $\vec{B}$). Il est donc tout naturel d'abandonner le repère initial tout à fait inadapté à l'étude du champ de vitesse dans cette région et d'adopter le repère plus approprié formé par le réseau orthogonal des lignes φ = cste et ψ = cste. Ceci est réalisé en prenant pour nouveau couple de variables :

$t = -e^{-\eta}\cos\xi$ coordonnée tangente aux lignes de champ

$n = -e^{-\eta}\sin\xi$ coordonnée normale aux lignes de champ



$\vec{\imath}_t$ et $\vec{\imath}_n$ sont définis par $\vec{\imath}_t = \dfrac{\overrightarrow{grad}\, t}{\left\| \overrightarrow{grad}\, t \right\|}$ $\qquad \vec{\imath}_n = \dfrac{\overrightarrow{grad}\, n}{\left\| \overrightarrow{grad}\, n \right\|}$

$$\left\| \overrightarrow{grad}\, t \right\| = \left\| \overrightarrow{grad}\, n \right\| = e^{-\eta}$$

Par suite :

$$\vec{\imath}_t = \begin{bmatrix} \cos\xi \\ 0 \\ \sin\xi \end{bmatrix} \qquad \vec{\imath}_n = \begin{bmatrix} \sin\xi \\ 0 \\ -\cos\xi \end{bmatrix}$$

La matrice M de passage de $(\vec{\imath}_t, \vec{\imath}_n, \vec{\imath}_y)$ à $(\vec{\imath}_\eta, \vec{\imath}_y, \vec{\imath}_\xi)$ s'écrit

$$M = \begin{bmatrix} \cos\xi & \sin\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin\xi & -\cos\xi & 0 \end{bmatrix}$$

et correspond à une rotation locale autour de Oy

Si l'on exprime que le vecteur $\vec{ds}$ a même module dans les deux systèmes de coordonnées

$$\vec{ds} = \begin{bmatrix} d\eta \\ 0 \\ d\xi \end{bmatrix} \text{ dans } (\vec{\imath}_\eta, \vec{\imath}_y, \vec{\imath}_\xi) \longrightarrow \vec{ds} = \begin{bmatrix} h_1 dt \\ h_2 dn \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dans } (\vec{\imath}_t, \vec{\imath}_n, \vec{\imath}_y)$$

$$\left\| \vec{ds} \right\|^2 = h_1^2\, dt^2 + h_2^2\, dn^2 = d\eta^2 + d\xi^2$$

$$dt = e^{-\eta} \cos\xi\, d\eta + e^{-\eta} \sin\xi\, d\xi$$
$$dn = e^{-\eta} \sin\xi\, d\eta - e^{-\eta} \cos\xi\, d\xi$$

Par suite $h_1 = h_2 = h = e^{\eta}$

$$div\, \vec{V} = div\left(u_t \vec{\imath}_t + u_n \vec{\imath}_n\right) = \frac{1}{h^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(h^2 u_t\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(h^2 u_n\right)\right] = 0$$

Soit après simplification $\dfrac{\partial u_t}{\partial t} + \dfrac{\partial u_n}{\partial n} - \dfrac{t\, u_t + n\, u_n}{t^2 + n^2} = 0$

$$\overrightarrow{grad}\, \varphi = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{\imath}_t + \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{\imath}_n$$

Les équations du mouvement s'écrivent dans le nouveau repère :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = - N u_n \left(t^2 + n^2 \right)^{1/2}$$

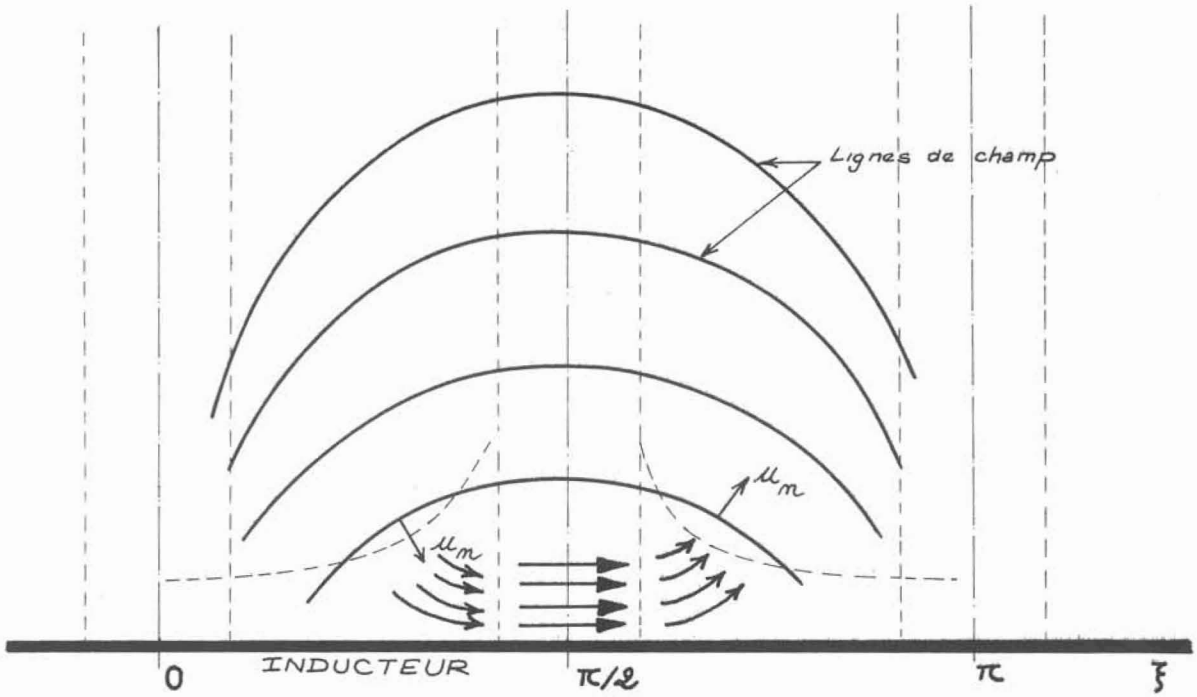
$$\frac{\partial u_t}{\partial t} + \frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{t u_t + n u_n}{t^2 + n^2} = 0$$

ce qui donne pour

$$u_n = \frac{f(n)}{N \left(n^2 + t^2 \right)^{1/2}}$$

La fonction $f(n)$ reste à déterminer. L'équation de continuité fixera u_t

Avant de déterminer u_t essayons de préciser la forme de la fonction inconnue $f(n)$
Pour ce faire plaçons-nous au voisinage d'une couche perpendiculaire $\xi = \frac{2k+1}{2} \pi$



La couche de paroi injecte du fluide dans le coeur entre $\xi = \frac{\pi}{2}$ et $\xi = \pi$ et en reçoit du coeur entre $\xi = 0$ et $\xi = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent u_n doit changer de signe de part et d'autre de $\xi = \frac{\pi}{2}$.

Plaçons nous, pour η fixé, en $\xi = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ d'une part, $\xi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ d'autre part, ε étant suffisamment petit pour être au voisinage de la couche mais à l'extérieur de celle-ci.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right) = \cos\varepsilon$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right) = \mp \sin\varepsilon$$

Par suite pour η fixé :

$$t\left(\eta, \tfrac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = - t\left(\eta, \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

$$n\left(\eta, \tfrac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = + n\left(\eta, \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

c'est à dire $f\left[n\left(\eta, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)\right] = f\left[n\left(\eta, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right]$ et par conséquent

$u_n\left(\eta, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = u_n\left(\eta, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ ce qui serait en contradiction avec l'équation de continuité à moins que, et c'est la seule solution : $f(n) \equiv 0$

Donc :

$$u_n \equiv 0 \quad \text{dans le coeur}$$

Ceci confirme bien le résultat attendu : le fluide dans le coeur suit parfaitement les lignes de champ magnétique.

u_t vérifie (équation de continuité) $\dfrac{\partial u_t}{\partial t} - \dfrac{t\, u_t}{t^2 + n^2} = 0$

$$u_t = A(n)\left[t^2 + n^2\right]^{1/2}$$

$A(n)$ doit être déterminée par les conditions aux limites c'est à dire, ici, grâce au bilan global des échanges de débit entre coeur et couche pariétale soit :

$$\frac{dq}{d\xi} = u_{\eta=0} = \frac{\pi}{M} \frac{\sin\xi}{\cos^2\xi} \frac{\cos\xi}{|\cos\xi|}$$

ce qui donne

$$A(n) = \frac{-\pi}{M} \frac{n}{(1-n^2)^{3/2}}$$

Dans le repère initial le champ de vitesse est alors :

$$u = -\frac{\pi}{M} \frac{e^{-2\eta} \sin\xi \cos\xi}{(1 - e^{-2\eta} \sin^2\xi)^{3/2}}$$

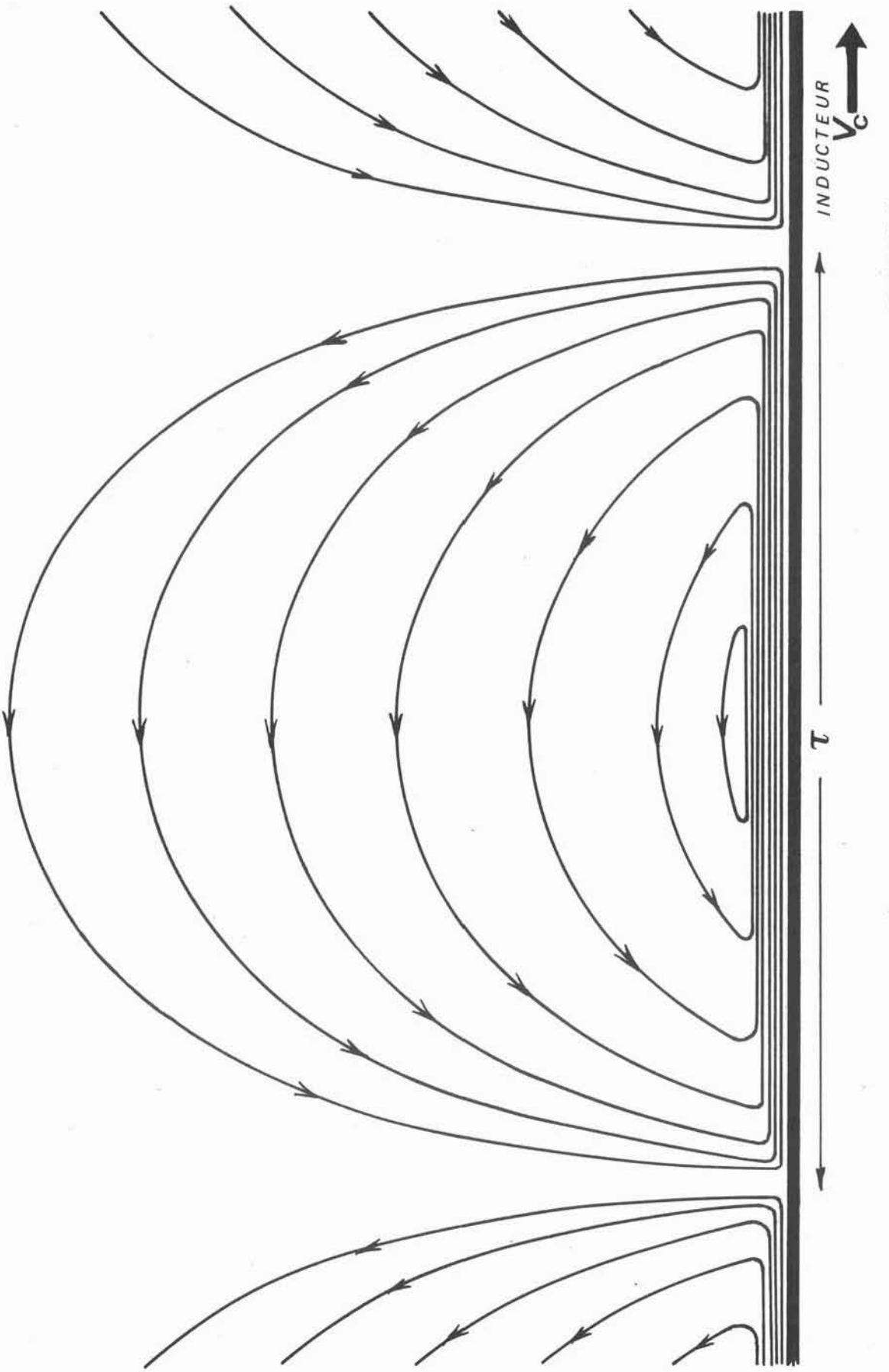
$$w = -\frac{\pi}{M} \frac{e^{-2\eta} \sin^2\xi}{(1 - e^{-2\eta} \sin^2\xi)^{3/2}}$$

et la fonction de courant ψ telle que $u = -\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ $\quad w = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}$

$$\psi = \frac{\pi}{M} \left(1 - e^{-2\eta} \sin^2\xi\right)^{-1/2}$$ (cf. Figure 5)

Il convient maintenant de s'interroger sur la validité des hypothèses faites pour l'étude de l'écoulement dans le coeur. En effet nous avons supposé que les forces dominantes dans cette région étaient les forces électromagnétiques et le gradient de pression, or le résultat du calcul indique que toutes ces forces sont nulles et remet bien évidemment en question le fait d'avoir négliger aussi bien les forces d'inertie que les forces de viscosité. En fait toutes ces approximations sont justifiées et il est aisé de s'en convaindre et considérant le développement de la solution en série asymptotique de $1/M$, ce que nous avons fait implicitement sans l'écrire tout au long du calcul précédent.

Puisque la paroi est à l'origine du mouvement dans le coeur par l'intermédiaire du débit $Q \sim \frac{1}{M}$ qu'elle y injecte, il est clair que les vitesses dans cette région auront pour ordre de grandeur $1/M$. Nous cherchons donc u et w sous la forme :



LIGNES DE COURANT

FIGURE 5

$$u = u_{-1} M^{-1} + u_{-2} M^{-2} + u_{-3} M^{-3} + O(M^{-4})$$
$$w = w_{-1} M^{-1} + w_{-2} M^{-2} + w_{-3} M^{-3} + O(M^{-4})$$
$$u_{-i} \text{ et } w_{-i} = O(1)$$

En injectant ces séries dans les équations du mouvement, toujours avec l'hypothèse de faibles gradients de vitesse dans le coeur, on est conduit à résoudre le système d'équations suivantes :

$$0 = -\frac{\partial P_1}{\partial \eta} + \frac{M}{\pi Re} e^{-2\eta} \sin\xi \left(w_{-1} \cos\xi - u_{-1} \sin\xi \right)$$

$$0 = -\frac{\partial P_2}{\partial \eta} + \frac{1}{\pi Re} e^{-2\eta} \sin\xi \left(w_{-2} \cos\xi - u_{-2} \sin\xi \right)$$

$$0 = -\frac{\partial P_3}{\partial \eta} + \frac{M^{-1}}{\pi Re} e^{-2\eta} \sin\xi \left(w_{-3} \cos\xi - u_{-3} \sin\xi \right) + \frac{\pi M^{-1}}{Re} \Delta u_{-1}$$

ainsi que les équations équivalentes en projection sur $O\xi$. Notre calcul précédent a donc consisté dans la résolution au premier ordre du système, ordre auquel toutes les forces sont nulles. L'introduction d'un gradient de pression entre l'infini amont et l'infini aval, si bien sûr ce gradient reste limité c'est à dire d'un ordre de grandeur $\ll M$, n'apporterait ainsi qu'une modification à l'ordre 2. Quant aux forces d'inertie et de viscosité leur effet ne se ferait sentir qu'aux ordres respectifs 4 et 3.

Le champ de vitesse ainsi trouvé est donc tout à fait juste et l'erreur commise par négligeance des différents termes considérés petits est du troisième ordre au plus en $1/M$.

III.2. *Cas d'une bande métallique de largeur finie soumise à l'action du champ magnétique glissant créé par un inducteur bilatéral.*

Alors que la condition $\mu\sigma\omega C^2 \gg 1$ permettait de fixer indépendamment les conditions aux limites sur le champ magnétique pour ce qui est de la phase, il en est tout à fait différemment maintenant. Puisque nous sommes dans le cas $\mu\sigma\omega C^2 \ll 1$,

le champ magnétique engendré aux parois traverse la bande de métal liquide de largeur 2a. La configuration du champ magnétique montre que cette traversée s'opère différemment dans le cas d'inducteurs montés en phase et d'inducteurs montés en opposition de phase (figures 6 et 7). Dans le cas d'un montage en opposition de phase, deux pôles de signes contraires se font face à chaque instant de part et d'autre du métal liquide, si bien que la majorité des lignes de champ traverse l'entrefer. Par contre dans le cas d'un montage en opposition de phase, deux pôles identiques sont à chaque instant face à face de telle sorte que les lignes de champ issues d'un inducteur tendent à fuir celles venant de l'inducteur opposé. Ainsi aucune ligne de champ, mise à part une ligne singulière, ne traverse l'entrefer. Les lignes de champ, pour un tel montage, vont d'un pôle à l'autre sur le même inducteur.

La condition $\mu\sigma\omega\tau^2 \ll 1$ impose un champ magnétique harmonique :

$$\overrightarrow{\Delta B} = \vec{O}$$

avec pour conditions aux limites

$$\begin{cases} x = +a & B_{rz} = B_0 \sin\omega\left(t + \dfrac{z}{V_c}\right) \\ x = -a & B_{rz} = \mathcal{E} B_0 \sin\omega\left(t + \dfrac{z}{V_c}\right) \end{cases}$$

$\mathcal{E} = +1$ pour un montage en phase

$\mathcal{E} = -1$ pour un montage en opposition de phase

Ceci détermine le champ magnétique dans tout le domaine fluide :

$$B_\eta = -\frac{B_0}{\operatorname{ch}\frac{\pi a}{\tau}} \operatorname{sh}\eta \cos\xi$$

Montage en phase

$$B_\xi = -\frac{B_0}{\operatorname{ch}\frac{\pi a}{\tau}} \operatorname{ch}\eta \sin\xi$$

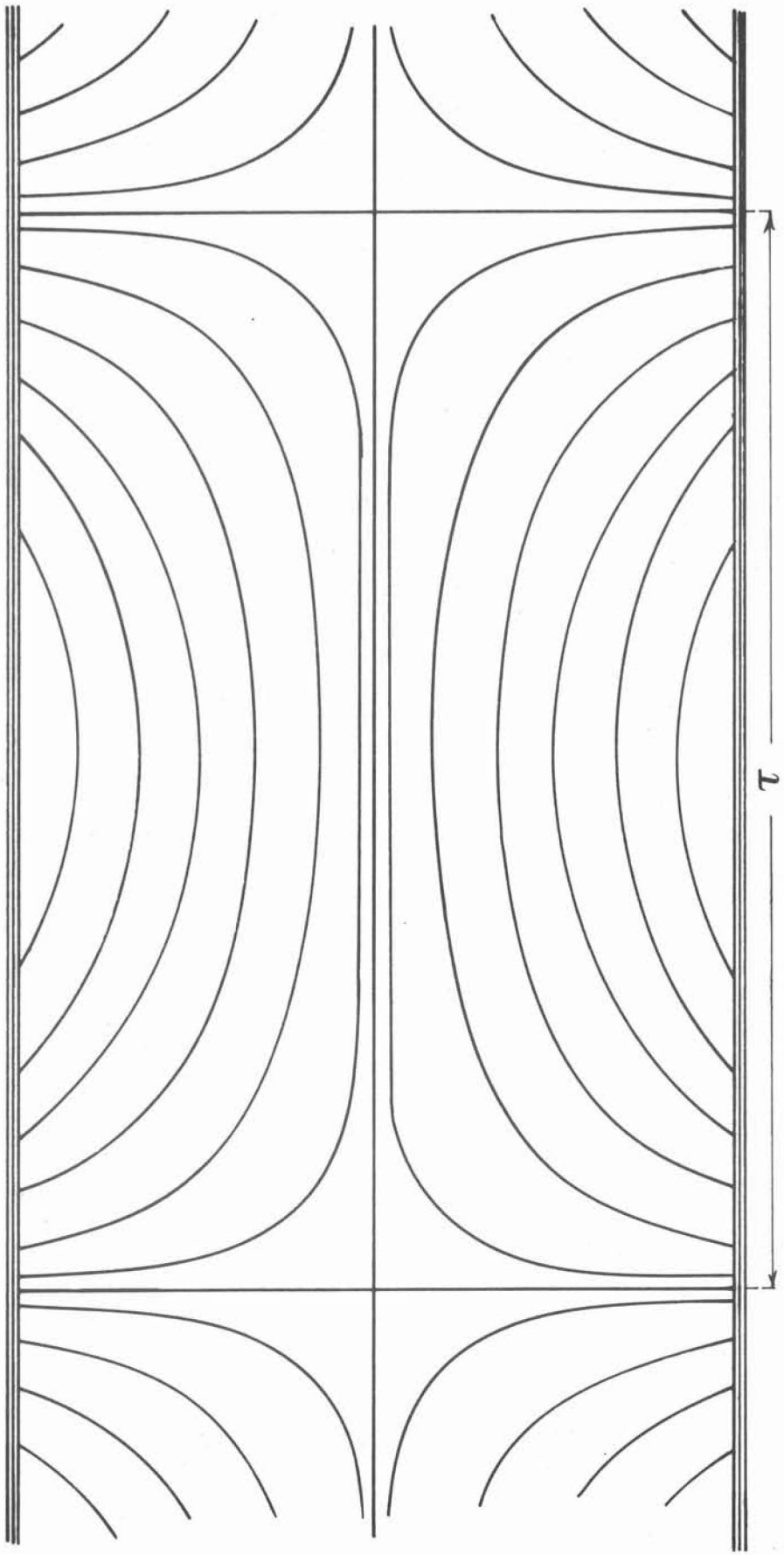
et

$$B_\eta = -\frac{B_0}{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{\tau}} \operatorname{ch}\eta \cos\xi$$

Montage en opposition de phase

$$B_\xi = +\frac{B_0}{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{\tau}} \operatorname{sh}\eta \sin\xi$$

où η et ξ désignent les variables adimensionnelles définies précédemment.

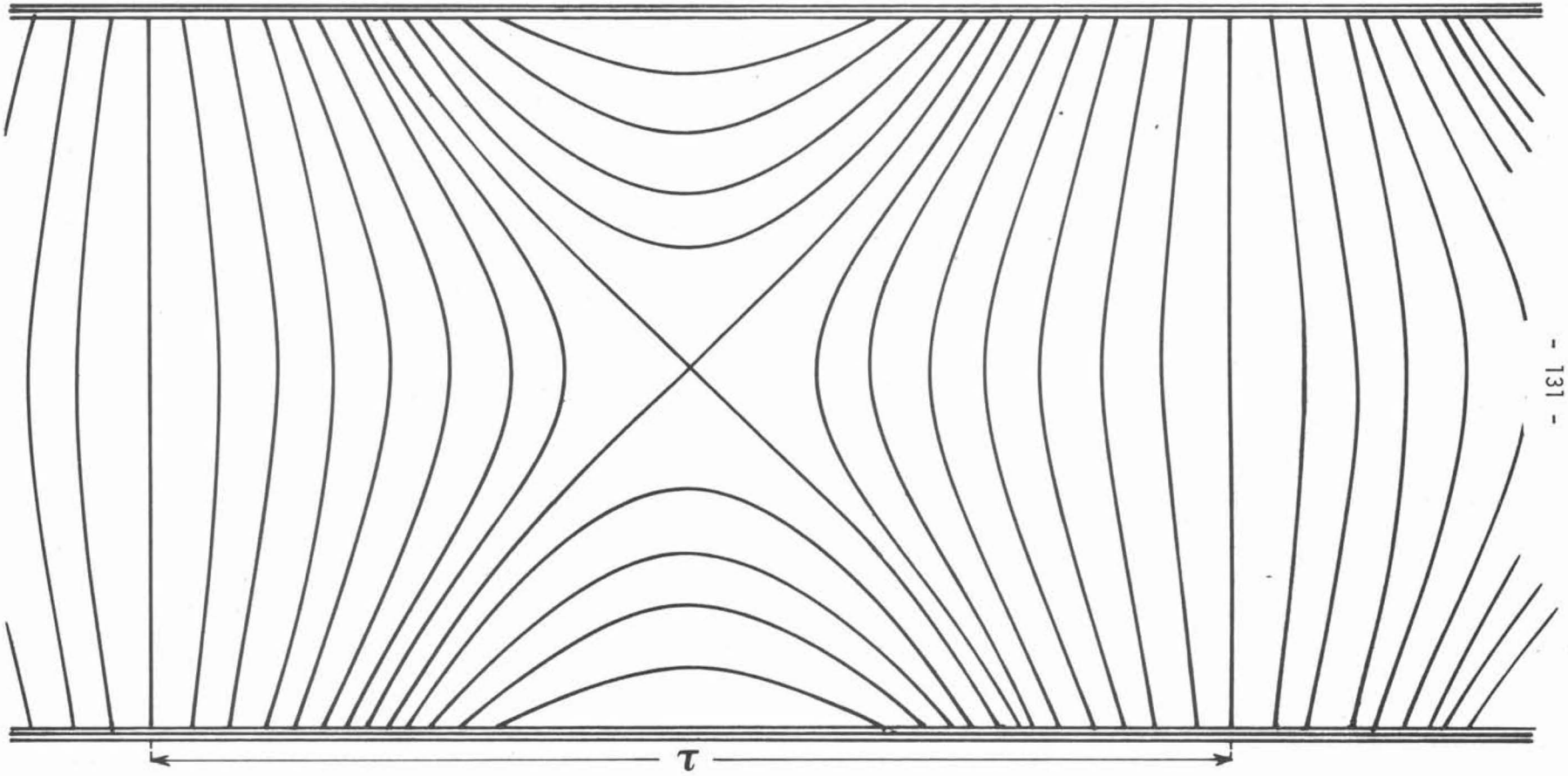


MONTAGE EN PHASE

LIGNES DE CHAMP

FIGURE 6

MONTAGE EN OPPOSITION



LIGNES DE CHAMP

FIGURE 7

Il est à noter que dans le cas d'un montage en phase, le champ magnétique au centre de la conduite est dirigé suivant l'axe de la conduite ($B_\eta = 0$) et n'oppose aucune résistance à d'éventuels mouvements du fluide dans la direction axiale (si l'on adopte le point de vue de l'observateur placé dans un repère fixe). Au contraire dans le cas d'un montage en opposition de phase le champ magnétique au centre de la conduite est purement transversal. Cette différence notable est à l'origine d'une meilleure efficacité du montage en opposition de phase vis à vis du montage en phase. En outre cette différence sera importante dans la détermination du champ de vitesse et du champ de pression dans le métal liquide. Il est bon de remarquer également que, quelle que soit la valeur du rapport a/c, la configuration du champ magnétique reste globalement inchangée dans le cas d'un montage en phase, même lorsque le rapport a/c devient très faible. Par contre si quelques lignes de champ vont d'un pôle à l'autre sur le même inducteur pour un montage en opposition de phase d'entrefer élevé, ces mêmes lignes de champ coupent l'entrefer en devenant toutes orthogonales à son axe, si l'entrefer est réduit (figure 8). Ces différences importantes nous conduisent à envisager successivement les deux montages, en commençant par le montage en phase qui présente beaucoup d'analogie avec l'étude précédente du demi-espace fluide mis en mouvement par un mono-inducteur. Nous n'envisagerons que le cas asymptotique de champs magnétiques intenses ($M \gg 1$) et de paramètre d'interaction élevé ($N \gg 1$).

II.2.1. *Montage en phase*

Les équations du mouvement, écrites dans un repère lié au champ magnétique sont les suivantes :

$$u\frac{\partial u}{\partial \eta} + w\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\partial P}{\partial \eta} - N \operatorname{ch}\eta \sin\xi \left(w \operatorname{sh}\eta\cos\xi + u \operatorname{ch}\eta \sin\xi\right) + \frac{\pi}{Re}\Delta u$$

$$u\frac{\partial w}{\partial \eta} + w\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} - N \operatorname{sh}\eta\cos\xi \left(w \operatorname{sh}\eta\cos\xi + u \operatorname{ch}\eta \sin\xi\right) + \frac{\pi}{Re}\Delta w$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$$

avec : $N = \dfrac{M^2}{Re} \times \dfrac{1}{\pi \operatorname{ch}^2 \dfrac{\pi a}{c}}$

MONTAGE EN OPPOSITION DE PHASE

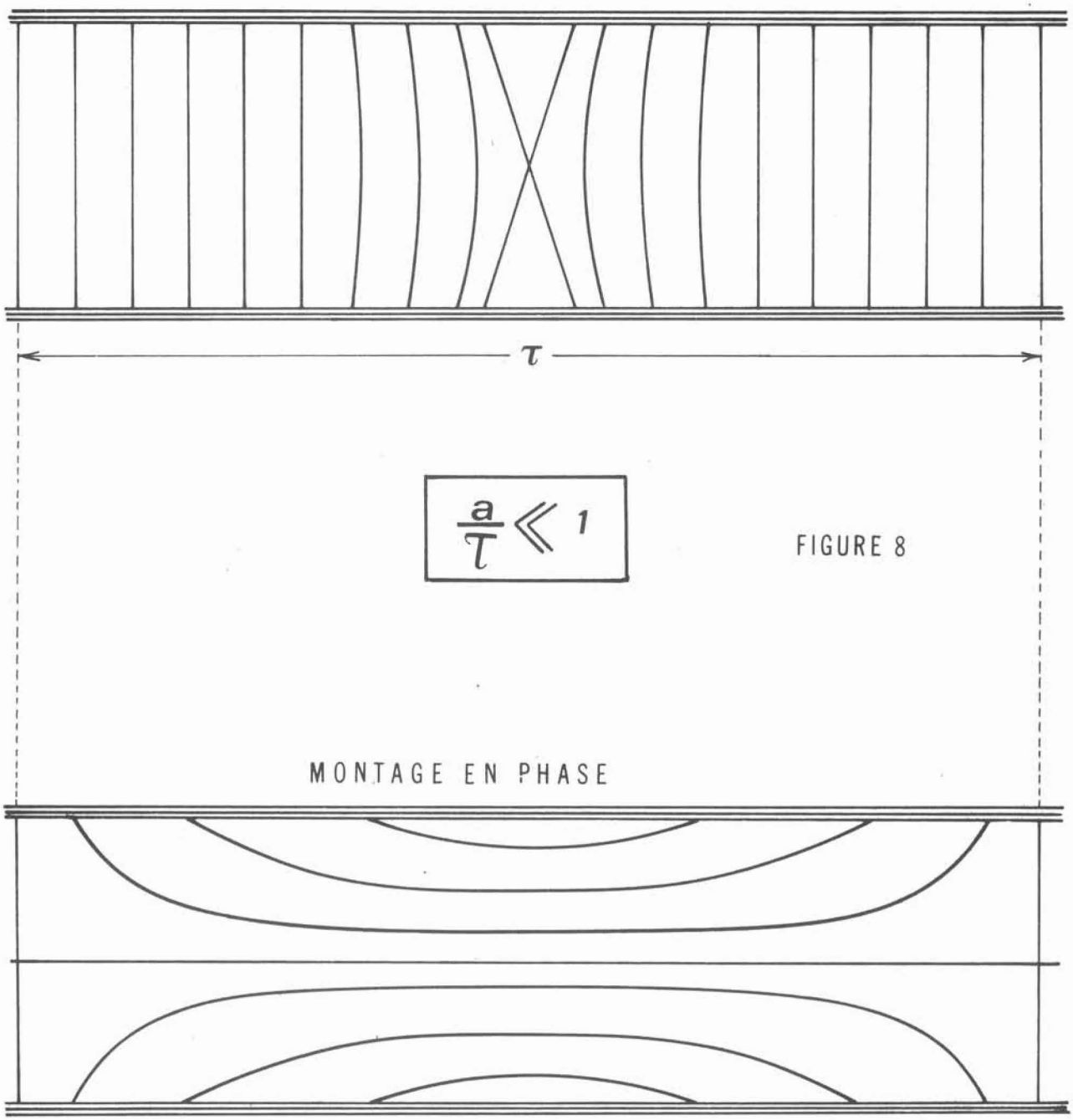


FIGURE 8

LIGNES DE CHAMP

Au proche voisinage de la paroi, où seules les forces électromagnétiques peuvent équilibrer les forces de frottement visqueux, ainsi que dans la région à la fois "loin" de la paroi et du centre de la conduite où il n'y a que le gradient de pression qui peut contrabalancer les effets électromagnétiques, le raisonnement qualitatif fait dans l'étude précédente peut s'appliquer parfaitement. Ainsi nous pouvons nous attendre à retrouver une couche pariétale d'épaisseur $\delta \sim 1/M|\cos\xi|$ et des coeurs dans lesquels les lignes de courant et les lignes de champ sont confondues. En plus de ces régions particulières, nous retrouverons également les couches perpendiculaires aux parois ($\xi \sim k\frac{\pi}{2}$) et nous devons nous interroger sur l'existence d'une nouvelle couche au voisinage du centre de la conduite. En effet, dans cette région, nous avons remarqué la faiblesse des forces électromagnétiques, rigoureusement nulles sur l'axe, qui pourraient cesser d'avoir une influence dominante au profit d'autres forces, telles que les forces d'inertie ou les forces de viscosité.

Le calcul mené précédemment dans la couche pariétale et les coeurs conduit aux résultats suivants :

- Couche pariétale

- épaisseur $$\delta = \frac{\pi c}{M\left(\text{th}\frac{\pi a}{c}\right)|\cos\xi|}$$

- vitesse $$w = e^{-\beta/\delta} \qquad \text{avec} \quad \beta = -\frac{\eta^2}{|\eta|} + \frac{\pi a}{c}$$

- débit circulant dans la couche :

$$Q = \frac{\pi c}{M\left(\text{th}\frac{\pi a}{c}\right)|\cos\xi|} = \delta$$

- Coeurs

$$u = \frac{\eta}{|\eta|}\,\frac{\pi\,\text{ch}\frac{\pi a}{c}}{M}\,\frac{\text{sh}^2\eta\sin\xi\cos\xi}{\left(\text{sh}^2\frac{\pi a}{c} - \text{sh}^2\eta\sin^2\xi\right)^{3/2}}$$

$$w = -\frac{\eta}{|\eta|}\,\frac{\pi\,\text{ch}\frac{\pi a}{c}}{M}\,\frac{\text{sh}\eta\,\text{ch}\eta\sin^2\xi}{\left(\text{sh}^2\frac{\pi a}{c} - \text{sh}^2\eta\sin^2\xi\right)^{3/2}}$$

$$\psi = -\frac{\eta}{|\eta|}\,\frac{\pi\,\text{ch}\frac{\pi a}{c}}{M}\left(\text{sh}^2\frac{\pi a}{c} - \text{sh}^2\eta\sin^2\xi\right)^{-1/2}$$

- Couche centrale

Un calcul identique à celui mené dans le cas d'un monoinducteur par développement de la solution en séries des puissances de $1/M$ montre que la solution trouvée dans le coeur reste valable dans cette région. Les forces d'inertie résultant du champ de vitesse trouvé dans le coeur et les forces de viscosité correspondantes ont pour ordre de grandeur respectif $\frac{\eta^3}{M^2}$ et $\frac{1}{2M}$ en projection sur $O\eta$ et $\frac{\eta^2}{M^2}$ et $\frac{\eta}{M}$ en projection sur $O\xi$. Elles n'interviendront donc qu'à des ordres supérieurs à celui correspondant au champ de vitesse trouvé qu'elles ne peuvent affecter. La solution du coeur peut donc être étendue jusqu'au centre de la conduite : la couche centrale est par conséquent tout à fait triviale et ne se distingue plus du coeur.

L'écoulement dans ce cas est constitué de cellules individualisées dont l'échelle caractéristique est le pas polaire τ. La figure (9) donne une représentation de cet écoulement.

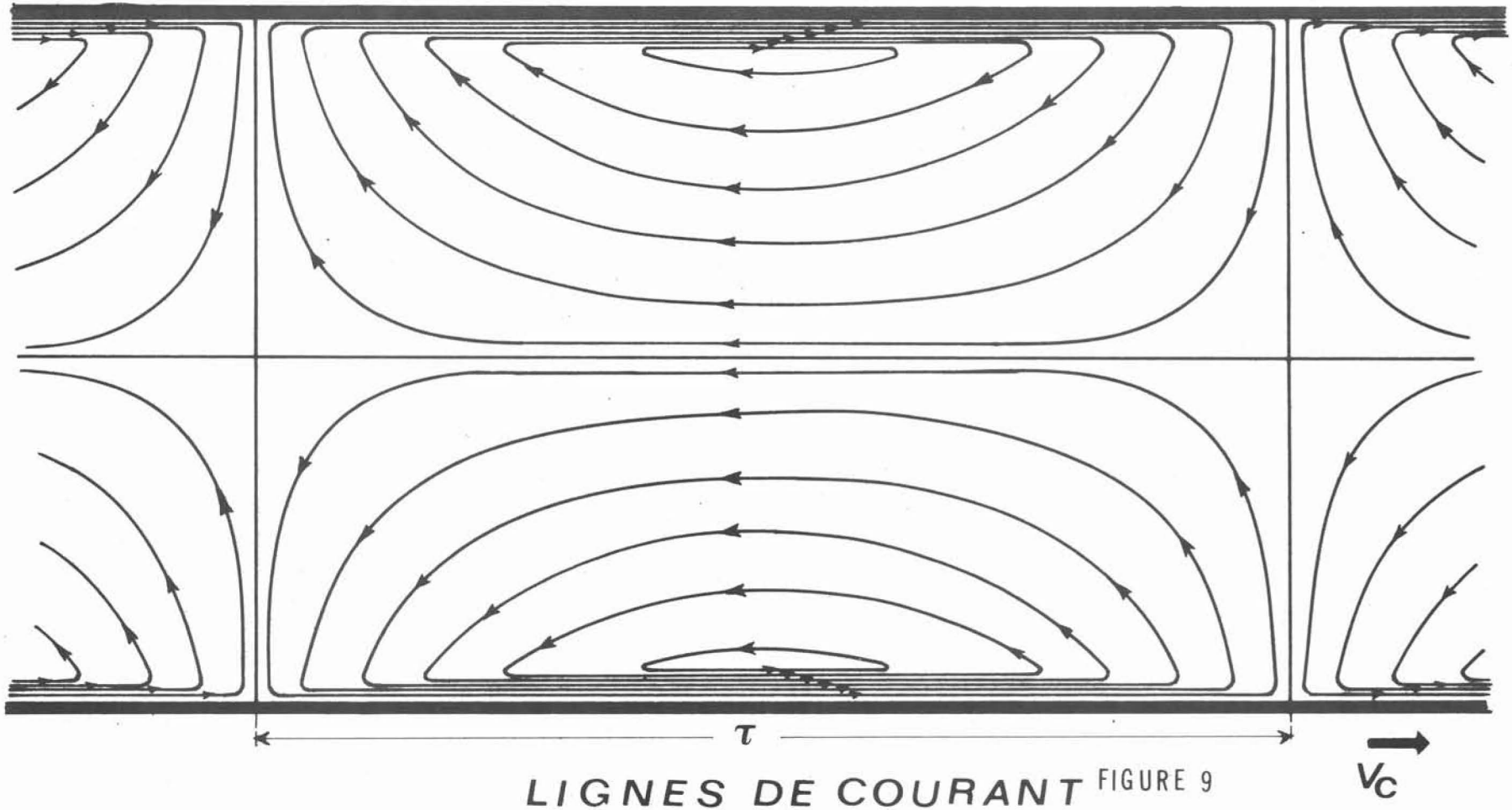
III.2.2. Montage en opposition de phase

Les différences de configuration du champ magnétique entre le cas présent et le cas précédent laissent entrevoir des différences également au niveau de la structure de l'écoulement ou des mécanismes qui vont l'engendrer. Afin de mettre clairement en évidence ces différences, reprenons l'analyse qualitative de ces mécanismes en partant du moteur de l'écoulement : la paroi.

Au proche voisinage de la paroi, il est assez légitime de penser qu'une particule fluide ignore totalement la nature exacte du montage électromagnétique qui va déterminer sa trajectoire puisque les différences essentielles entre les deux montages particuliers se trouvent au voisinage de l'axe. Ce sont donc les mêmes mécanismes qui vont intervenir dans la région pariétale, pour chacun des deux montages en phase et en opposition de phase. Nous devons ainsi retrouver une couche de paroi, marquée essentiellement par les effets électromagnétiques et les effets visqueux, d'épaisseur $\delta \sim 1/M|\cos\xi|$. Cette couche périodique en ξ, de même que la composante w de la vitesse, implique nécessairement un échange de fluide entre la région pariétale et l'extérieur, puisque la composante u résultante est périodique elle aussi et non nulle à la frontière de cette couche.

Dans le coeur cependant le raisonnement qualitatif du montage en phase ne peut être transposé exactement sans conduire à une impossibilité. En effet, pour :

MONTAGE EN PHASE



LIGNES DE COURANT FIGURE 9

$\frac{2k+1}{2}\pi \leqslant \xi \leqslant (k+1)\pi$ du fluide est injecté par la couche pariétale dans la région centrale où les particules fluides ne peuvent traverser les lignes de champ sans faire apparaître des forces électromagnétiques très intenses ($N \gg 1$) s'opposant à leur mouvement. Cependant, dans l'hypothèse où les particules fluides sont contraintes de suivre les lignes de champ qui les canalisent, il apparaît une incohérence au voisinage de l'axe. Dans cette région les particules fluides forcées à l'encontre les unes des autres doivent obligatoirement couper les lignes de champ. Ceci suppose l'existence d'une force motrice très intense qui, compte-tenu de l'éloignement de la paroi génératrice du mouvement, ne peut trouver son origine que dans un gradient de pression.

Afin de mieux analyser les mécanismes qui apparaissent avec un tel montage nous allons accentuer fortement les caractères qui lui sont spécifiques en ne considérant que le cas particulier des entrefers faibles : $a/\tau \ll 1$

Le champ magnétique dans ce cas est donné par :

$$B_\eta = -\frac{B_0 \tau}{\pi a} \cos \xi$$

$$B_\xi = \frac{B_0 \tau}{\pi a} \eta \sin \xi$$

et le paramètre d'intéraction correspondant s'écrit $N = \frac{M^2}{Re} \frac{\tau^2}{\pi^3 a^2}$

La condition $\frac{\pi a}{\tau} \ll 1$ implique en effet $|\eta| \leqslant \frac{\pi a}{\tau} \ll 1$ et rend légitime de ne retenir pour les fonctions $sh\,\eta$ et $ch\,\eta$ que leur développement limité au premier ordre en η . Dans ce cas le champ magnétique est quasi unidirectionnel puisque

$$|B_\xi| \ll |B_\eta|$$

Il est possible de schématiser plus encore ce cas particulier en imposant cette unidirectionnalité. Il suffit pour cela de considérer le champ magnétique :

$$\mathcal{B} = [B_\eta, 0, 0] \quad \text{avec} \quad B_\eta = -\frac{B_0 \tau}{\pi a} \cos \xi$$

Ceci revient en fait à ne retenir que le cas particulier des entrefers extrêmement faibles. Pour que l'étude que nous allons entreprendre garde tout son sens il faut cependant respecter une condition fixant une limite inférieure pour a afin de permettre que la couche pariétale, qui est une couche de Hartmann modulée par la périodicité du champ magnétique, puisse se développer sans contrainte. Cette condition s'écrit :

$$\frac{\pi a}{c} > \frac{a}{c}\,\frac{\pi^2}{M}$$

c'est à dire :

$$\frac{\pi}{M} < 1$$

condition qui sera toujours réalisée puisque nous n'envisageons que le cas asymptotique $M \gg 1$.

Nous nous plaçons ainsi dans le cas le plus défavorable en ce qui concerne l'existence d'une recirculation telle qu'elle existait dans le cas d'un montage en phase : en effet l'intensité élevée du champ magnétique et sa configuration rectiligne à travers l'entrefer font que, loin de la paroi les particules fluides ne peuvent être animées d'une vitesse axiale sans être soumises à une force de freinage très vive.

Examinons tout d'abord la couche pariétale. Cette couche est essentiellement dominée par les forces électromagnétiques et les forces de viscosité. Cependant si nous faisons l'hypothèse de l'existence d'une recirculation nous devons obligatoirement admettre la présence dans le coeur d'un gradient de pression axial très fort, susceptible de permettre la traversée des lignes de champ aux particules fluides. L'équation déterminant w s'écrit alors :

$$\frac{\pi}{R_e}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - N \cos^2\xi\; w = \frac{\partial P}{\partial \xi}$$

Puisque dans la couche limite ainsi définie la pression ne varie pas dans la direction perpendiculaire à l'écoulement, le gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ est seulement imposé par l'écoulement dans le coeur.

Ainsi $$\frac{\partial P}{\partial \xi} = - N \cos^2\xi\; w_c$$

si bien que dans la couche de paroi :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{M^2 c^2}{\pi^2 a^2} \cos^2\xi\,(w - w_c) = 0$$

En fait, dans la couche pariétale w est de l'ordre de 1 et est très supérieur à w_c,

ce que nous vérifierons a posteriori. Négligeons donc w_c devant w, ce qui revient à dire que même s'il existe dans le coeur un gradient de pression axial, qui se manifeste également dans la couche de paroi, il ne peut modifier de façon sensible l'équilibre qui existe dans cette région entre les forces électromagnétiques et les forces de viscosité.

Par suite nous avons :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{M^2 \tau^2}{\pi^4 a^2} \cos^2 \xi \, w = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$$

avec :

$$w \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |\eta| \longrightarrow \infty$$

$$w \longrightarrow -1 \quad \text{et} \quad u \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \eta \longrightarrow \pm \frac{\pi a}{\tau}$$

la vitesse qui en résulte est :

$$w = - e^{\frac{\tau M}{a \pi^2} |\cos \xi| \left(\frac{\eta^2}{|\eta|} - \frac{\pi a}{\tau} \right)}$$

$$u = - \operatorname{tg} \xi \left(\frac{\eta^2}{|\eta|} - \frac{\pi a}{\tau} \right) e^{\frac{\tau M}{a \pi^2} |\cos \xi| \left(\frac{\eta^2}{|\eta|} - \frac{\pi a}{\tau} \right)} +$$

$$+ \frac{\eta}{|\eta|} \operatorname{tg} \xi \times \frac{\pi^2 a}{|\cos \xi| M \tau} \left(e^{\frac{\tau M}{a \pi^2} |\cos \xi| \left(\frac{\eta^2}{|\eta|} - \frac{\pi a}{\tau} \right)} - 1 \right)$$

Comme dans le cas d'un montage en phase nous retrouvons une couche d'épaisseur $\delta(\xi)$

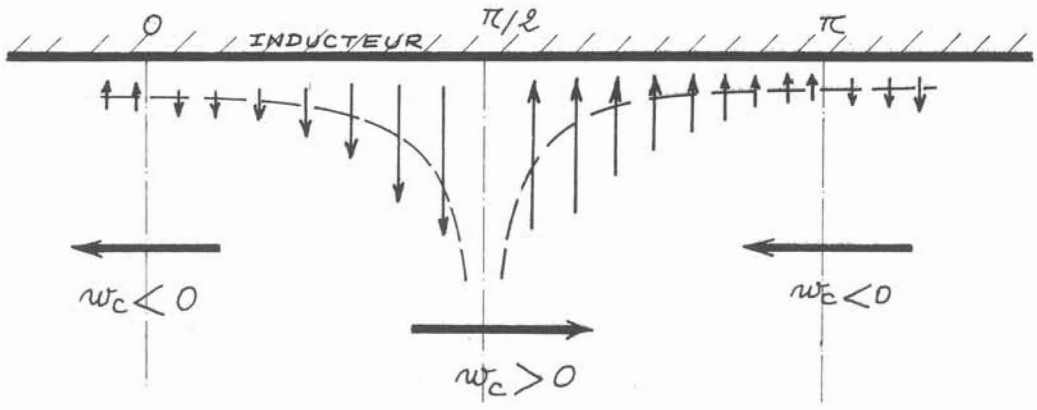
$$\delta(\xi) = \frac{\pi \tau^2}{M |\cos \xi|} \frac{a}{\tau}$$

Ceci implique nécessairement des échanges de fluide entre la couche pariétale et le coeur. En effet, si $|\eta| \longrightarrow \infty$, c'est à dire à la frontière séparant la couche pariétale du coeur, nous avons :

$$u_e = \frac{m}{|m|} \frac{\pi^2 a}{\tau} \times \frac{1}{M} \frac{\sin \xi}{\cos \xi \, |\cos \xi|}$$

$$\xi = k\pi \qquad u_e \equiv 0$$

$$\xi \to \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad u_e \to \infty$$



L' injection de fluide dans le coeur impose donc, si la composante w_c est non nulle :

$$\xi \sim k\pi \longrightarrow w_c < 0$$

$$\xi \sim \frac{\pi}{2} + k\pi \to w_c > 0$$

Coeur

Dans le coeur le seul équilibre possible est un équilibre entre gradient de pression et forces électromagnétiques, ce qui s'écrit :

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0$$

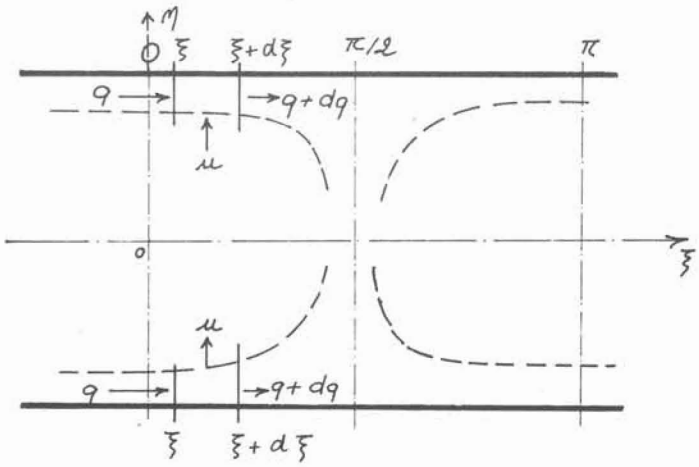
$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = - \frac{M^2}{Re} \frac{\tau^2}{\pi^3 a^2} \cos^2 \xi \; w_c$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial \eta} + \frac{\partial w_c}{\partial \xi} = 0$$

Ainsi $P = P(\xi)$ et par conséquent

$$w_c = F(\xi) \qquad u_c = -\eta\, F'(\xi)$$ puisque u_c est nécessairement impaire en η

La fonction F(ξ) ne peut être déterminée que par un raccordement globale entre le coeur et la couche pariétale



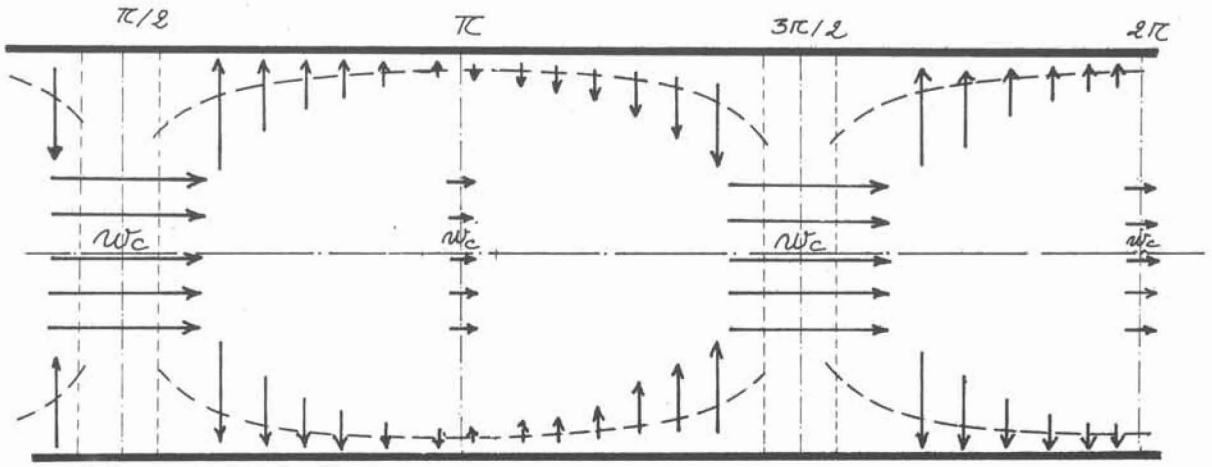
$$\eta > 0, \left(u_c\right)_{\frac{\pi a}{c}} = \frac{dq}{d\xi} = -\frac{d\delta}{d\xi}$$

$$\eta < 0, \left(u_c\right)_{-\frac{\pi a}{c}} = -\frac{dq}{d\xi} = \frac{d\delta}{d\xi}$$

$$u_c = -\eta \cdot \frac{dF}{d\xi}$$

$$F = \frac{c}{\pi a}\,\delta(\xi) + C \qquad C$$

$$w_c = \frac{\pi}{M|\cos\xi|} + C \qquad u_c = -\eta\,\frac{\pi}{M}\,\frac{\sin\xi}{|\cos\xi|\cos\xi}$$



La symétrie de l'injection par rapport à $\xi = k\pi$ de même que l'intensité du champ magnétique maximale en cette région, qui impose un véritable mur infranchissable aux particules fluides, nécessite que la composante w_c soit nulle pour cette valeur de ξ . Ainsi dans le coeur nous avons :

$$w = \frac{\pi}{M}\left(\frac{1}{|\cos\xi|} - 1\right)$$

$$u = -\eta\frac{\pi}{M}\frac{\sin\xi}{|\cos\xi|\cos\xi}$$

Cette valeur de w impose :

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = -\frac{M^2}{Re}\frac{\pi^2}{\pi^2 a}\cos^2\xi\left(\frac{1}{|\cos\xi|} - 1\right)$$

la pression présente donc une périodicité en ξ . C'est cette périodicité du gradient de pression qui permet de mouvoir les particules fluides à travers les lignes de champ.

Nous pouvons maintenant vérifier la légitimité de la simplification apportée dans le calcul de la couche pariétale en négligeant w_c devant w puisque $w \sim 1$ $w_c \sim \frac{1}{M}$

Une singularité apparaît dans le champ de vitesse au voisinage de $\xi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où les équations du coeur ne sont plus valables.

Voisinage de $\xi = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$w_c \longrightarrow +\infty \qquad |u_c| \longrightarrow +\infty \qquad |u_c| / w_c \longrightarrow +\infty$

Dans cette nouvelle couche les gradients de vitesse deviennent importants si bien que les forces de viscosité contribuent elles aussi à l'équilibre qui est traduit par les équations :

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\pi}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = -\frac{M^2}{Re}\frac{\pi^2}{\pi^3 a^2}\cos^2\xi\, w + \frac{\pi}{Re}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$$

Soit : $x = \xi - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\pi}{Re}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{M^2}{Re}\,\frac{\varepsilon^2}{\pi^3 a^2}\,x^2 w + \frac{\pi}{Re}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad ; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

ou en éliminant la pression :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\frac{M^2 \varepsilon^2}{\pi^4 a^2}\,x^2\,\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \eta}$$

or $\quad \frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{\delta} \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} \ll \frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u \sim \frac{w}{\delta} \qquad w \ll u$$

Ainsi les ordres de grandeurs des différents termes de l'équation précédente s'écrivent

$$\frac{u}{\delta^3} \quad , \quad M^2 \delta^2 w \quad , \quad \frac{w}{\delta^2}$$

soit $\quad \frac{u}{\delta^3} \quad , \quad M^2 u \delta^3 \quad , \quad \frac{u}{\delta}$

$\qquad\quad (1) \qquad\qquad (2) \qquad\qquad (3)$

$(1) \gg (3)$ si bien que le seul équilibre possible est $(1) \sim (2)$ qui impose :

$$\frac{1}{\delta^3} \sim M^2 \delta^3 \quad \Rightarrow \quad \delta \sim M^{-1/3}$$

Les équations du mouvement dans cette couche s'écrivent alors :

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\pi}{Re}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{M^2}{Re}\,\frac{\varepsilon^2}{\pi^3 a^2}\,x^2 w \qquad ; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

L'équation éliminant P, écrite en terme de fonction de courant est alors :

$$\frac{1}{x^2}\,\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} - M^2\,\frac{\tau^2}{\pi^4 a^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} = 0$$

A la frontière de cette couche d'épaisseur $\delta \sim M^{-1/3}$, il est possible de calculer l'ordre de grandeur de la vitesse du coeur :

$$w_c = \frac{\tau}{M}\left(\frac{1}{|\cos\xi|} - 1\right) \sim \frac{\tau}{M}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

$$w_c \sim \frac{\tau}{M}\left(M^{1/3} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad w_c \sim \tau\, M^{-2/3}$$

$$u_c = -\eta\,\frac{\tau}{M}\,\frac{\sin\xi}{|\cos\xi|\cos\xi}$$

$$\Rightarrow \quad u_c \sim -\eta\,\tau\, M^{-1/3}$$

Si l'on pose

$$x = y\left(M^2\,\frac{\tau^2}{\pi^4 a^2}\right)^{-1/6}$$

l'équation en ψ s'écrit :

$$\frac{1}{y^2}\,\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} = 0$$

Cherchons une solution à variables séparées $\psi = f(\eta)\,g(y)$

$$\frac{1}{y^2}\,\frac{g^{IV}}{g} = \frac{f''}{f} = C$$

$$f'' - C f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = A e^{\sqrt{C}\eta} + B e^{-\sqrt{C}\eta}$$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -f g' \qquad w = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = f' g$$

or $u(\eta = 0) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ à moins que, et c'est la seule solution

$$f'' = C = 0$$

alors

$$f(\eta) = A\eta + B \quad ; \quad g(y) = Cy^3 + Dy^2 + Ey + F$$

mais

$$u(\eta = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\eta) = A\eta$$

Puisque w est nécessairement paire en y :

$$C \equiv E \equiv 0$$

si bien que

$$g(y) = Dy^2 + F$$

de plus

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad \text{si} \quad y = 0$$

ainsi

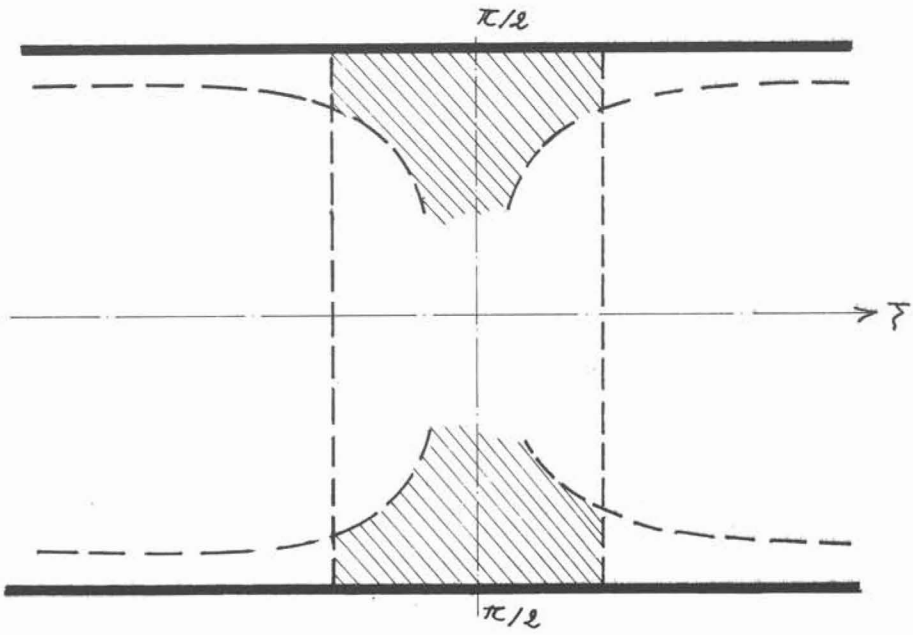
$$g(y) = Dy^2$$

et $$\psi = A\eta y^2$$

ce qui conduit à :

$$u = -2AM\,y \qquad w = A y^2$$

Seul un raccordement global au niveau du débit peut fixer la valeur de la constante A.



Cependant un problème apparaît si l'on tente d'exprimer une conservation globale du débit. En effet la couche transversale coupe les deux couches pariétales et les zones d'intersection apportent une contribution non négligeable au débit injecté dans la couche transversale. Il est donc indispensable d'étudier plus finement la couche pariétale au voisinage de $\xi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, où elle est évidemment singulière, pour pouvoir chiffrer précisément la part du débit qu'elle injecte dans la couche transversale.

La zone d'intersection des deux couches échappe encore à notre analyse, si bien que nous ne pouvons préciser davantage le champ de vitesse dans la couche transversale. Il est possible cependant, compte-tenu de la finesse de cette couche, d'extrapoler sans grand risque d'erreur les lignes de courant calculées dans le coeur et la couche pariétale, comme il est fait sur la figure 10.

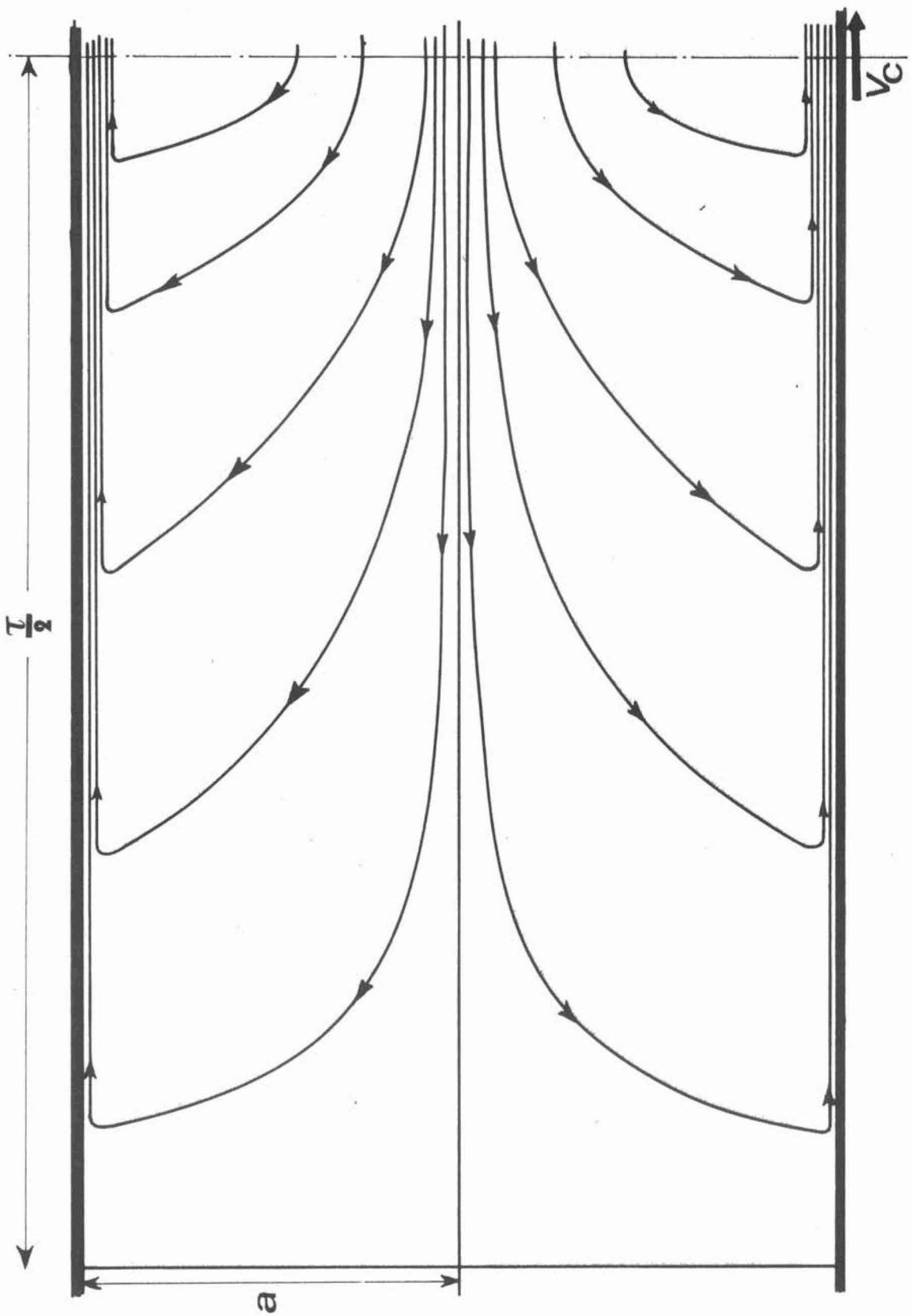


FIGURE 10

LIGNES DE COURANT

V. CONCLUSION

Bien que nous ayions volontairement limité notre ambition à l'étude de l'effet produit par des champs magnétiques glissants sur des métaux liquides dans un schéma très simple et très dépouillé (problème plan, écoulement permanent, régime établi, comportements asymptotiques seuls), les difficultés rencontrées n'ont pas permis de déterminer le champ de vitesse dans tous les cas que nous avons envisagés puisque le cas du montage en phase, aux petits nombres de Reynolds magnétiques, reste encore à analyser sauf dans le cas où l'entrefer 2a est faible devant le pas polaire τ. Si le rapport a/τ n'est pas petit devant l'unité nous pouvons cependant supposer qu'il existe aussi une recirculation à l'échelle du pas polaire semblable à celle du montage en phase. Ce n'est pas, en effet, faire preuve de beaucoup d'imprudence que d'affirmer que la recirculation mise en évidence dans les deux cas extrêmes $a/\tau \ll 1$ et $a/\tau \gg 1$ (demi espace fluide soumis à l'action d'un mono-inducteur) existe également aux valeurs intermédiaires du paramètre a/τ : les mécanismes responsables de cette recirculation procèdent alors de chacun des mécanismes existant dans les cas extrêmes. Chacun des tourbillons formé, quel que soit le type de montage lorsque le nombre de Reynolds magnétique est petit, dissipe de l'énergie cinétique et contribue à accroître la perte de charge existant dans les pompes à induction.

La figure 11 montre dans l'espace des paramètres N, M, R_ω, les régions que nous avons expolorées et analysées.

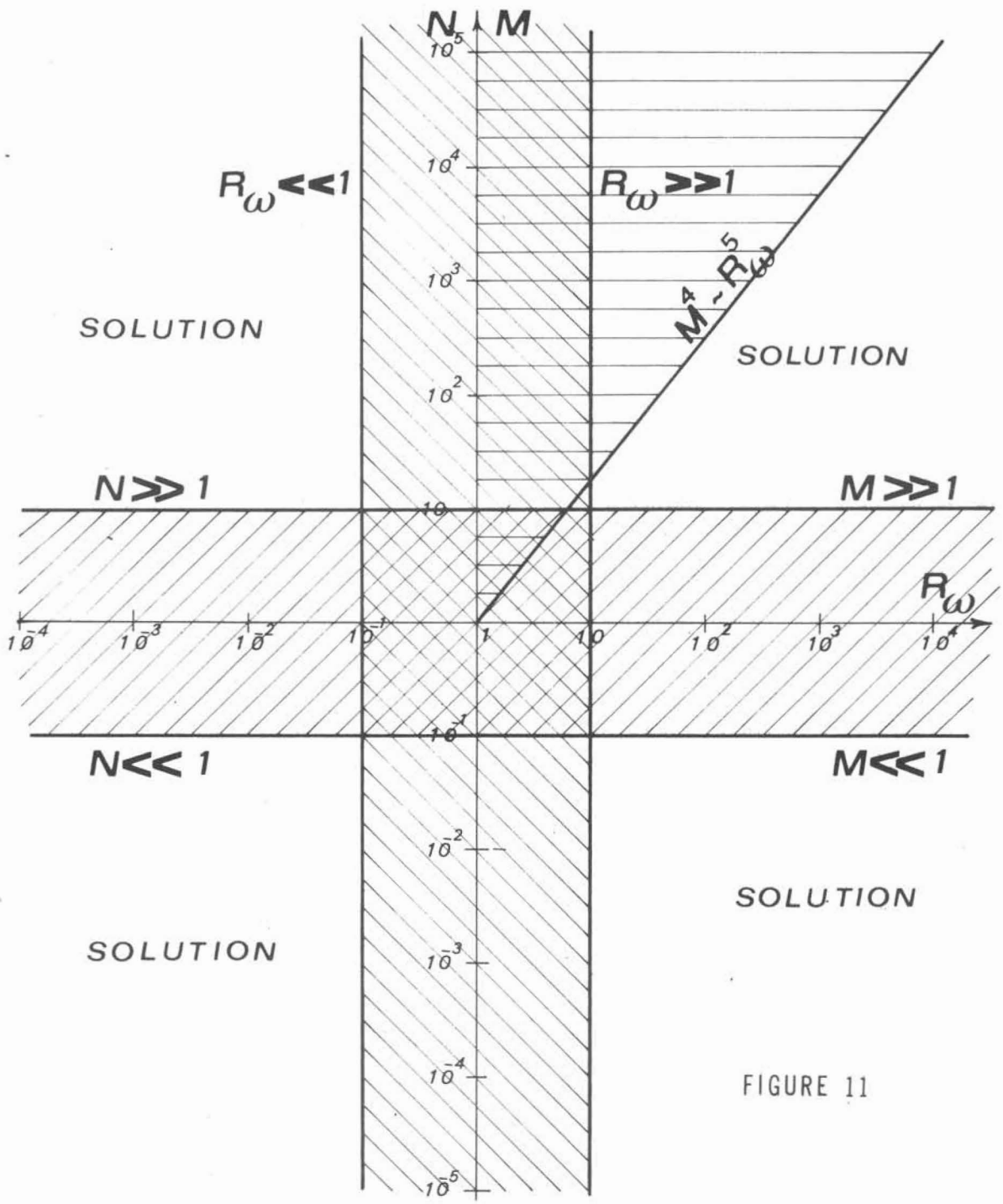

N
M
10^5
10^4
10^3
10^2
10
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
R_ω
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
10^2
10^3
10^4
$R_\omega << 1$
$R_\omega >> 1$
$M^4 \sim R_\omega^5$
SOLUTION
SOLUTION
$N >> 1$
$M >> 1$
$N << 1$
$M << 1$
SOLUTION
SOLUTION

FIGURE 11

B I B L I O G R A P H I E

1 E.A. TROPP : "Laminar flow of a viscous conducting fluid between parallel walls in a traveling magnetic field". Magnitnaya Gidrodinamika, (1968), vol. 4, 75-82.

2 V.F. TKACHENKO : "Stationnary flow of a conducting fluid in a traveling field" Magnitnaya Gidrodinamika, (1970), n° 4 - 65.70.

3 A.K. VEZE - Yu. K. KRUMIN : "Electromagnetic force acting on an infinitely wide conducting sheet in the traveling magnetic field of plane inductors". Magn. Gidrod., (1965), vol. 1, n° 4 - 99.107.

4 E.A. TROPP : "Flow of a conducting fluid in a traveling magnetic field with matched and opposed inductors". Magn. Gidrod., (1969), vol. 5, n° 3 - 47 51.

5 V.F. TKACHENKO : "Investigation of MHD phenomena in the flow of a viscous conducting fluid in a traveling magnetic field", Magn. Gidrod., (1973), n° 2 - 19.24.

6 R.A. PETROVICH - L. Ya ULMANIS : "Laminar flow of an electrically conductive fluid between parallel planes in a travelling magnetic field". Magn. Gidrod., (1969), vol. 5, n° 3 - 57.62

7 V.I. MERKULOV - V.F. TKACHENKO - V.I. YATSENKO :"Periodic flow of a conducting liquid in a traveling magnetic field"., Magn. Gidrod. (1973), n° 1 - 43.48.

8 D.L. TURCOTTE - J. M. LYONS : "A periodic boundary layer flow in magnetohydrodynamics" Journ. Fluid Mech., (1962), 519-528.

9 N.M. OKHREMENKO : "Traveling-field induction pumps", Magn. Gidrod., (1965), vol. 1, n° 4, 3-23.

10 S.V. VASILEV - N.M. OKHREMENKO - L.G. SMIRNOVA : "Experimental study of the magnetic fields in induction pumps". Magn. Gidrod., (1965), vol. 1, n°2, 111-122.

11 Yu. K. ZANDER - Ya. Ya LIELPETER : "Experimental study of the flow of mercury in a traveling magnetic field". Magn. Gidrod. (1967), vol. 3, n° 2 - 93.97.

CHAPITRE IV

1. INTRODUCTION

Certains procédés récents d'élaboration ou de coulée continue de métaux fondus utilisent un champ magnétique alternatif créé par un inducteur extérieur : ainsi OKRESS et al. (1952) et SAGARDIA (1977) réalisent la lévitation d'une masse de métal liquide, GETSELEV et al. (1966 et 1971) suppriment la lingotière matérielle des systèmes traditionnels de coulée continue de l'aluminium. Parallèlement, notre dispositif électromagnétique de confinement des métaux liquides permet de contracter une veine métallique liquide sans l'aide d'aucune paroi. Dans toutes ces techniques brevetées, le contact entre le métal liquide et des parois solides est supprimé. L'équilibre entre les forces électromagnétiques appliquées, les forces de pesanteur et les forces fictives d'inertie définit alors la frontière qui sépare le métal liquide de l'atmosphère ambiante et la stabilité de cette interface est une des questions cruciales à résoudre.

Les résultats connus sur l'action d'un champ magnétique permanent et uniforme sur la stabilité d'une interface (CHANDRASEKHAR, 1961) sont tout à fait indépendants de la question posée ici. Ils concernent l'action en général stabilisante de la dissipation par effet Joule de l'énergie cinétique des perturbations. Ici, c'est la déformation géométrique de l'interface entre l'atmosphère isolante et le liquide conducteur qui engendre, par un mécanisme de mutuelle influence entre le liquide conducteur et l'inducteur extérieur, une perturbation des courants induits et des forces électromagnétiques dans la couche superficielle où ceux-ci pénètrent. Cette interaction entre la déformation de l'interface et l'inducteur extérieur est spécifique aux systèmes alternatifs et n'a aucun équivalent lorsque le champ magnétique est permanent. Ainsi la solution proposée par MELCHER (1966) d'utiliser deux champs magnétiques alternatifs croisés, de telle sorte que chacun d'eux puisse agir sur les vecteurs d'onde qui échappent à l'action de l'autre, ne peut être retenue et se trouve par là même totalement étrangère au problème posé ici. En effet cette solution

basée sur le résultat bien connu suivant lequel un champ magnétique uniforme et permanent n'a aucune action sur les perturbations caractérisées par des vecteurs d'onde normaux à la direction de ce champ, est inacceptable avec des champs magnétiques alternatifs. De même les résultats de ROBERTS (1973) concernent l'influence d'un champ magnétique permanent sur des instabilités de Kelvin Helmoltz, relatives à des écoulements instationnaires et sont hors du sujet abordé ici.

Les équations générales régissant l'action d'un champ magnétique alternatif sur un écoulement parallèle non permanent comportant une interface de cisaillement ont été écrites par DRAZIN (1967). Cet auteur s'est essentiellement attaché à retenir dans son intégralité la pulsation des forces électromagnétiques de façon à en caractériser l'influence. Cependant pour venir à bout des difficultés analytiques d'un problème aussi vaste, dans lequel il parvint à mettre en évidence une tendance déstabilisatrice des sollicitations pulsantes, il a dû limiter son étude au cas particulier d'une interface entre deux fluides parfaits, l'un isolant, l'autre parfaitement conducteur de l'électricité, négligeant ainsi tout mécanisme dissipatif. Dans ces conditions qui correspondent à des fréquences modérées, le champ magnétique alternatif est trouvé avoir une influence stabilisante plus faible qu'un champ magnétique permanent de même amplitude.

Notre étude concerne au contraire le domaine des fréquences assez élevées pour que la pulsation des forces électromagnétiques soit négligeable devant sa valeur moyenne. Ceci suppose vérifiée la double condition :

$$\begin{cases} R_\delta = \left(\dfrac{\mu\sigma}{\omega}\right)^{1/2} V \ll 1 \\ N_\delta = \left(\dfrac{\sigma}{\mu\omega}\right)^{1/2} \dfrac{B^2}{\rho V} \ll 1 \end{cases}$$

où R_δ et N_δ désignent respectivement le nombre de Reynolds magnétique et le paramètre d'interaction formés avec la profondeur de pénétration $\delta \sim (\mu\sigma\omega)^{-1/2}$. Ici μ, σ, ρ désignent la perméabilité magnétique du fluide, sa conductivité électrique et sa masse volumique ; B désigne l'amplitude de l'induction magnétique et V une vitesse caractéristique. Il sera montré ultérieurement que, lorsque cette double condition est vérifiée, c'est à dire lorsque la pulsation ω est assez élevée, une approximation quasi-stationnaire peut être dégagée, parallèle à celle introduite par ALEMANY et MOREAU (1977) dans un contexte voisin, suivant laquelle la pulsation du champ magnétique alternatif appliqué intervient uniquement par l'intermédiaire

de l'effet de peau. L'état d'équilibre de référence, alors stationnaire, permet une analyse beaucoup plus simple que celle envisagée par DRAZIN.

Il se trouve que la double condition portant sur ω correspond également aux systèmes industriels mentionnés plus hauts, où, avec des métaux liquides courants et des fréquences de l'ordre de 10^3 à 10^5 Hz les nombres R_δ et N_δ ont des valeurs généralement inférieures à 10^{-2}.

Il est clair que l'influence de la fréquence peut être caractérisée par le produit adimensionnel $k\delta$ du nombre d'onde de la perturbation par la profondeur de pénétration. Ce paramètre a déjà été introduit par SCHAFFER (1968) à propos de l'influence d'un champ magnétique alternatif sur des ondes de surface dont la fréquence propre a été étudiée et observée pour différentes longueurs d'onde et diverses profondeurs de pénétration. Cet auteur a montré et vérifié expérimentalement que le champ magnétique peut modifier notablement la fréquence des ondes, pourvu que la profondeur de pénétration demeure inférieure à la longueur d'onde considérée. L'effet du champ magnétique sur la fréquence des ondes est constamment décroissant dès que le produit $k\delta$ devient supérieur à l'unité. Cette étude du seul phénomène de résonnance entre les ondes superficielles et les sollicitations pulsantes engendrées par le champ magnétique dans la peau du métal liquide ne peut fournir de renseignements très précieux en ce qui concerne le problème de la stabilité de l'interface qui nous intéresse.

Ce sont les effets de mutuelle influence qui constituent l'objet de ce travail. La formulation précise de ce problème de stabilité fait l'objet du paragraphe suivant ; l'approximation quasi-stationnaire et l'état d'équilibre de référence y sont définis. Le paragraphe III traite de manière détaillée les cas asymptotiques de perturbations de longueurs d'onde très grandes ou très petites qui présentent l'avantage de fournir une interprétation physique claire des phénomènes de mutuelles influences et permettent de comprendre en termes simples pourquoi la force électromagnétique introduite par la perturbation s'exerce toujours dans un sens tel qu'elle tend à accroître l'amplitude de cette perturbation et par conséquent à déstabiliser le système. Les équations linéarisées par rapport à la petite perturbation introduite dans l'état d'équilibre de référence conduisent naturellement (paragraphe IV) à une équation de dispersion, analogue à celles des problèmes classiques de Kelvin Helmoltz et de Rayleigh Taylor, mais comportant un terme nouveau caractérisant le couplage par mutuelle influence entre la perturbation et le champ magnétique extérieur. Cet effet est trouvé toujours déstabilisant et cela de plus en plus lorsque l'angle des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{k}$ s'accroît. Le paragraphe V regroupe, en conclusion, quelques remarques de portée générale et quelques perspectives d'extension de ce travail.

II. FORMULATION DU PROBLEME

Considérons deux fluides parfaits, incompressibles, de masses volumiques ρ_i , $[i = (1,2)]$, occupant chacun l'un des demi-espaces $z \lessgtr 0$, et s'écoulant dans une même direction $\overrightarrow{Om}$ avec des vitesses uniformes $\overrightarrow{Ui}$.

Le fluide (1) , situé du côté $z < 0$, a une conductivité électrique finie σ.

Le fluide (2) , situé du côté $z > 0$ est isolant et est soumis à un champ magnétique alternatif $B_{20} = (B_0 \cos \omega t, 0, 0)$, dirigé suivant Ox (voir figure 1). Ce champ magnétique pénètre dans le fluide (1) sur une épaisseur de l'ordre de $\delta = (2/\mu\sigma\omega)^{1/2}$, en accord avec l'équation :

$$\mu\sigma \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{\nabla}^2 \vec{B}_1$$

Celle-ci suppose bien entendu que les courants électriques induits par le mouvement du fluide (1) , de l'ordre de $\sigma |\vec{U}_1 \wedge \vec{B}_1|$, assez faibles par rapport aux courants induits par les variations périodiques du champ, pour leur part de l'ordre de $|\vec{B}_1|/\mu\delta$, pour ne pas modifier l'induction magnétique $\vec{B}_1$. Autrement dit, nous supposons petit devant l'unité le nombre de Reynolds magnétique $R_\delta = \mu\sigma V\delta$, construit avec la vitesse typique V du fluide (1) et avec l'épaisseur de peau δ :

$$R_\delta = \mu\sigma V \delta \ll 1$$

Il est à noter que la conséquence de cette hypothèse est simplement de rendre le champ magnétique $\vec{B}_1$ totalement indépendant du champ de vitesse $\vec{U}_1$. A elle seule, cette condition rend encore possible de tenir compte à la fois de la dissipation par effet Joule de l'énergie cinétique d'une éventuelle perturbation et des effets de mutuelle influence qui vont être introduits de façon plus précise par la suite.

La solution de cette équation, dans l'état d'équilibre de référence, est alors :

$$\vec{B}_{10} = \left[B_0 e^{z/\delta} \cos(\omega t + z/\delta), 0, 0 \right]$$

Introduisons maintenant une perturbation par rapport à cet état de référence. Cette perturbation est supposée assez petite pour permettre une linéarisation des équations et peut toujours se ramener, dans le cadre d'une décomposition en modes normaux, à une perturbation périodique.

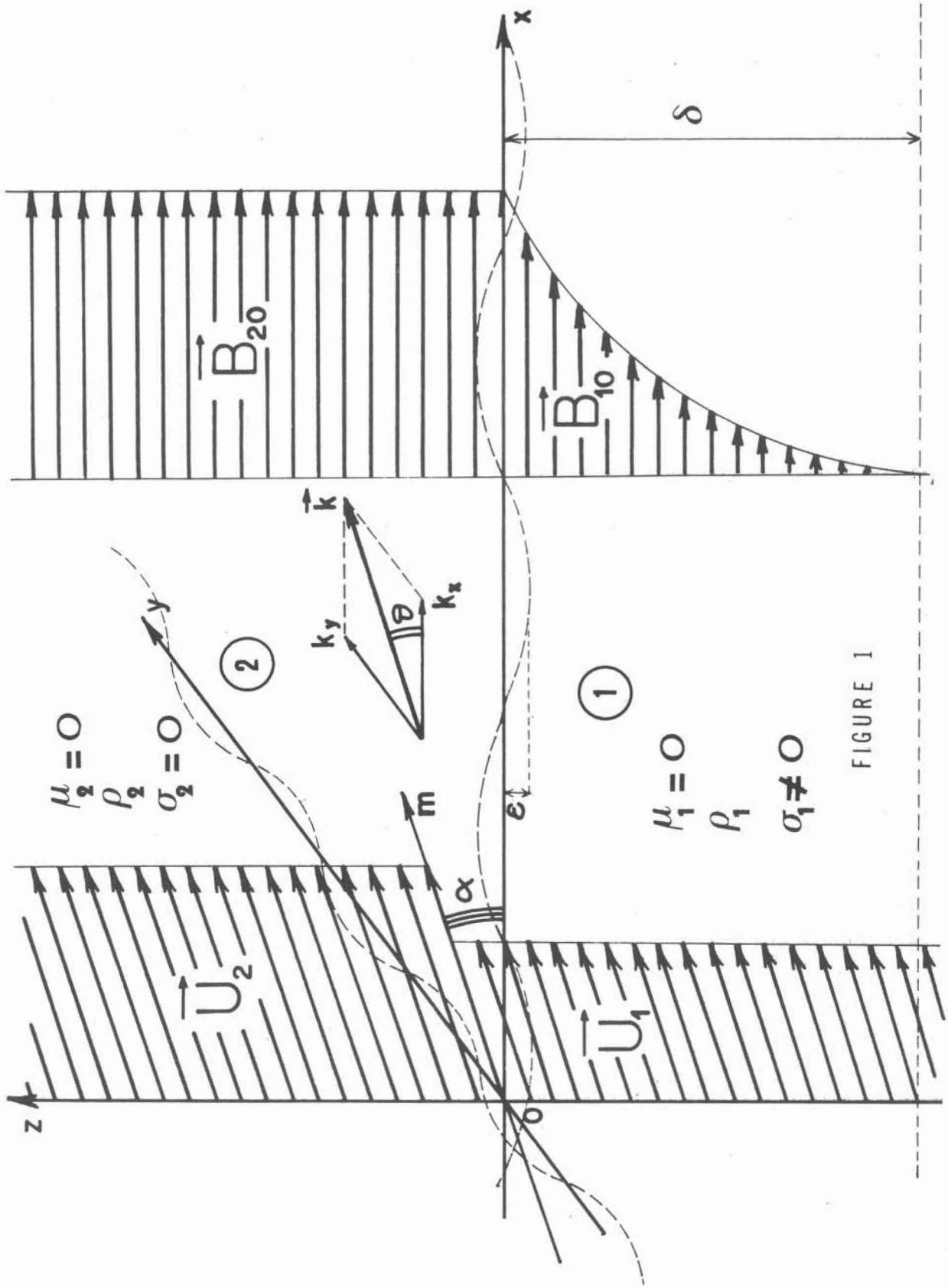

x
δ
$\vec{B}_{20}$
$\vec{B}_{10}$
$\vec{k}$
k_y
k_x
θ
y
2
1
$\mu_2 = 0$
ρ_2
$\sigma_2 = 0$
$\vec{m}$
ε
α
$\mu_1 = 0$
ρ_1
$\sigma_1 \neq 0$
$\vec{U}_2$
$\vec{U}_1$
z
o

FIGURE 1

Notons alors :

$$z_0 = \mathcal{E}\, e^{i(st + \vec{k}.\vec{r})}$$

l'équation de l'interface perturbée, caractérisée par :

- un vecteur d'onde réel $\vec{k} = (k_x, k_y, 0)$
- un incrément complexe s
- une amplitude $\mathcal{E}$

Le champ magnétique, la vitesse et la pression, dans chacun des deux milieux, peuvent alors être écrits comme la somme de leur valeur dans l'état d'équilibre et d'une quantité caractéristique de la perturbation, désignée dans la suite par une lettre minuscule.

$$\begin{cases} \vec{B_i} = \vec{B_{i0}} + \vec{b_i} \\ \vec{V_i} = \vec{U_i} + \vec{u_i} \\ P_i = P_{i0} + p_i \end{cases}$$

Les conditions de continuité à l'interface de la pression et de la composante normale de la vitesse amènent naturellement à rechercher les perturbations de ces variables sous la forme :

$$f(z)\, e^{i(st + \vec{k}.\vec{r})}$$

Il est clair qu'une telle forme ne peut pas convenir pour la perturbation du champ magnétique, caractérisé lui aussi par une dépendance temporelle périodique, auquel la conductivité électrique finie des deux milieux impose la continuité des trois composantes à la traversée de l'interface perturbée :

$$\left(\vec{B_1}\right)_{z=z_0} = \left(\vec{B_2}\right)_{z=z_0}$$

Ceci a pour effet de lier le saut des composantes b_{ix} à celui des composantes B_{i0x} :

$$\begin{cases} (b_{1x} - b_{2x})_{z=z_0} = (B_{20x} - B_{10x})_{z=z_0} \\ (b_{1y} - b_{2y})_{z=z_0} = 0 \\ (b_{1z} - b_{2z})_{z=z_0} = 0 \end{cases}$$

Cette condition revêt une importance capitale pour la suite de cette étude puisque c'est par elle que se trouvent introduits, de façon implicite, les effets de mutuelle influence.

Puisque nous nous intéressons uniquement aux conditions critiques d'instabilité, l'amplitude $\mathcal{E}$ de la perturbation peut toujours être supposée aussi petite que l'on veut ce qui permet une linéarisation en $\mathcal{E}$ de la première condition qui s'écrit :

$$(b_{1x} - b_{2x})_{z=z_0} = -i \frac{B_0 \mathcal{E}}{\sqrt{2}\,\delta} \left(e^{i\vartheta_1} - e^{i\vartheta_2} \right)$$

où l'on a noté :

$$\begin{cases} \vartheta_1 = (\nu + \omega)\, t + \vec{k}.\vec{r} - \frac{\pi}{4} \\ \vartheta_2 = (\nu - \omega)\, t + \vec{k}.\vec{r} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Cette condition amène alors à rechercher la perturbation $\vec{b}$ du champ magnétique sous la forme :

$$\vec{b} = \overrightarrow{f(z)}\, e^{i\vartheta_1} + \overrightarrow{g(z)}\, e^{i\vartheta_2}$$

L'équation de Laplace pour le milieu isolant ainsi que l'équation de diffusion pour le fluide conducteur conduisent alors aux expressions suivantes, dans lesquelles il a déjà été tenu compte des conditions à l'infini qui imposent à toutes les perturbations de s'éteindre asymptotiquement lorsqu'on s'éloigne de l'interface :

$$\begin{cases} \vec{b_2} = \vec{A}\, e^{i\vartheta_1 - kz} + \vec{C}\, e^{i\vartheta_2 - kz} \\ \vec{b_1} = \vec{M}\, e^{i\vartheta_1 + \gamma z} + \vec{N}\, e^{i\vartheta_2 + \gamma' z} \end{cases}$$

Les facteurs γ et γ' sont définis par :

$$\begin{cases} \gamma^2 = k^2 + i\mu\sigma(s+\omega) \\ \gamma'^2 = k^2 + i\mu\sigma(s-\omega) \end{cases}$$

Puisque nous n'envisageons d'étudier que la naissance d'une instabilité, proche voisinage de l'état marginal, nous admettrons que :

$$\omega \gg Re(s)$$

hypothèse qui sera vérifiée par la suite et qui permet de simplifier encore les expressions de γ et γ' qui s'écrivent au voisinage des conditions marginales :

$$\gamma^2 = k^2 + 2i/\delta^2$$

$$\gamma'^2 = k^2 - 2i/\delta^2 = \gamma^{*2}$$

où γ^* désigne le nombre complexe conjugué de γ

Finalement les expressions de la perturbation du champ magnétique dans le milieu conducteur sont les suivantes :

$$\begin{cases} b_{1x} = -i\dfrac{B_0\mathcal{E}}{\sqrt{2}\,\delta}\left[\dfrac{k_y^2+\gamma k}{k(\gamma+k)}\, e^{i\vartheta_1+\gamma z} - \dfrac{k_y^2+\gamma^* k}{k(\gamma^*+k)}\, e^{i\vartheta_2+\gamma^* z}\right] \\ b_{1y} = i\dfrac{B_0\mathcal{E}}{\sqrt{2}\,\delta}\left[\dfrac{k_x k_y}{k(\gamma+k)}\, e^{i\vartheta_1+\gamma z} - \dfrac{k_x k_y}{k(\gamma^*+k)}\, e^{i\vartheta_2+\gamma^* z}\right] \\ b_{1z} = -\dfrac{B_0\mathcal{E}}{\sqrt{2}\,\delta}\left[\dfrac{k_x}{\gamma+k}\, e^{i\vartheta_1+\gamma z} - \dfrac{k_x}{\gamma^*+k}\, e^{i\vartheta_2+\gamma^* z}\right] \end{cases}$$

Il est maintenant élémentaire de déduire de la relation d'Ampère l'expression de la densité de courant $\vec{j}$ associée à la perturbation $\vec{b_1}$, tout comme la densité de courant $\vec{J}$ à l'équilibre peut être déduite de l'expression de $\vec{B}_{10}$. Mais ce courant électrique $\vec{j}$ ne tient compte en fait que de la déformation de la surface libre : il naît des phénomènes de mutuelle influence qui apparaissent entre l'inducteur et le milieu conducteur liquide, mais ignore totalement le mouvement de ce milieu. Il faut donc lui ajouter un courant de conduction lié quant à lui au mouvement du fluide conducteur en présence du champ magnétique $\vec{B}_1$. Ce courant de conduction joue un rôle capital dans la dissipation par effet Joule de l'énergie cinétique de la perturbation.

Distinguons alors les différents termes intervenant dans la loi d'Ohm généralisée relative aux courants induits par la perturbation :

$$\vec{j} = \sigma \left[\vec{e} + (\vec{u} \wedge \vec{B}) + (\vec{U} \wedge \vec{b}) \right]$$

en écrivant :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{j_1} = \sigma \vec{e} \\ \vec{j_2} = \sigma (\vec{u} \wedge \vec{B}) \\ \vec{j_3} = \sigma (\vec{U} \wedge \vec{b}) \end{array} \right.$$

courant d'induction

courants de conduction

avec également $\vec{j_1} = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{Rot}\, \vec{b}$ puisque $\vec{b}$ comme $\vec{B}$ est régi par un mécanisme de diffusion pure.

Par souci de simplicité, les indices ont été supprimés dans les expressions de $\vec{u}$, $\vec{U}$, $\vec{b}$, $\vec{B}$, $\vec{e}$ qui désignent pour l'instant les variables $\vec{u_1}$, $\vec{U_1}$, $\vec{b_1}$, $\vec{B}_{10}$ et $\vec{e_1}$ précédemment introduites.

Il est important de se livrer à une analyse d'ordre de grandeur des différents courants électriques élémentaires pour déterminer quelle sera la part de chacun dans la production de forces électromagnétiques et dans la dissipation de l'énergie. Nous distinguerons pour cela les perturbations de grandes longueurs d'onde d'une part et les perturbations de petites longueurs d'onde d'autre part.

L'équation de diffusion, qui détermine le champ magnétique $\vec{B}$ impose :

- la profondeur de pénétration δ caractérisée par $\mu \sigma \omega \delta^2 = 1$
- la petitesse des termes de convection du champ magnétique devant les termes de diffusion :

$$\frac{\left\|\overrightarrow{Rot}(\vec{U}\wedge\vec{B})\right\|}{\left\|\frac{1}{\mu\sigma}\,\overrightarrow{\Delta B}\right\|} \sim \frac{\left\|\overrightarrow{Rot}(\vec{U}\wedge\vec{B})\right\|}{\left\|\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\|} = \frac{U}{\omega_0\,\delta} \ll 1$$

Soit :

$$\mu\sigma\omega\delta^2 = 1 \; ; \; \frac{U}{\omega_0\,\delta} \ll 1 \quad \text{ou} \quad \mu\sigma U\delta \ll 1$$

L'ordre de grandeur de la perturbation du champ magnétique $\vec{b}$ est :

$$b \sim \frac{B_0\mathcal{E}}{\delta}$$

- Perturbations de grandes longueurs d'onde : $k\delta \ll 1$

Des deux échelles de longueurs en présence, c'est la plus petite, δ, qui impose la dimension caractéristique en ce qui concerne les variations dans la direction $\overrightarrow{Oz}$: nous reviendrons plus précisément sur cette affirmation dans le paragraphe suivant.

Dans ce cas :

$$\left\|\vec{b}\right\| \sim \frac{B_0\mathcal{E}}{\delta} \qquad \left\|\vec{j}_1\right\| = \left\|\frac{\overrightarrow{Rot}\,\vec{b}}{\mu}\right\| \sim \frac{B_0\mathcal{E}}{\mu\delta^2}$$

$$\left\|\vec{j}_2\right\| \sim \sigma\mu B_0$$

$$\left\|\vec{j}_3\right\| \sim \frac{\sigma U B_0\mathcal{E}}{\delta}$$

Par suite :

$$\frac{\left\|\vec{j}_1\right\|}{\left\|\vec{j}_3\right\|} = \frac{1}{\mu\sigma U\delta} \gg 1$$

ce qui rend légitime de négliger le courant de conduction dû au mouvement du fluide en présence de la perturbation du champ magnétique devant le courant d'induction :

$$\left\|\vec{j}_1\right\| \gg \left\|\vec{j}_3\right\|$$

L'évaluation de $\vec{f}_2$ nécessite de connaître l'ordre de grandeur de la perturbation de vitesse. Les conditions aux limites à l'interface, qui doit être une surface matérielle, permettent de déterminer cet ordre de grandeur. Nous devons en effet vérifier que :

$$\frac{d z_0}{dt} = (w)_{z_0} = i\,\mathcal{E}\,(\sigma + \vec{k}.\vec{U})$$

ce qui au voisinage de l'état marginal permet d'évaluer w :

$$w \sim \mathcal{E}\, k\, U$$

L'équation de continuité, dans laquelle $\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial y} \sim k$, donne l'ordre de grandeur des deux autres composantes u et v

$$ku \sim kv \sim \frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{\mathcal{E}\, k\, U}{\delta}$$

Ainsi u et $v \sim \frac{w}{k\delta}$, déterminent l'ordre de grandeur de la perturbation de vitesse: puisque $k\delta \ll 1$

$$\left\| \vec{u} \right\| \sim u, v \sim \frac{\mathcal{E}\, U}{\delta}$$

si bien que :

$$\left\| \vec{f}_2 \right\| \sim \frac{\sigma B_0 \mathcal{E}\, U}{\delta} \sim \left\| \vec{f}_3 \right\| = \mu \sigma U \delta \left\| \vec{f}_1 \right\| \ll \left\| \vec{f}_1 \right\|$$

Par conséquent, au voisinage de l'état marginal, les deux courants élémentaires de conduction $\vec{f}_2$ et $\vec{f}_3$, dus au mouvement du fluide en présence du champ magnétique sont parfaitement négligeables devant le courant d'induction $\vec{f}_1$:

$$\sigma \left\| \vec{u} \wedge \vec{B} \right\| \sim \sigma \left\| \vec{U} \wedge \vec{b} \right\| \ll \frac{1}{\mu} \left\| \overrightarrow{Rot}\, \vec{b} \right\|$$

- <u>Perturbations de petites longueurs d'onde</u> : $k\delta \gg 1$

C'est encore l'échelle de longueur la plus faible, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, qui impose la dimension caractéristique de variation dans la direction $\vec{O_z}$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sim k$$

$$\left\| \vec{b} \right\| = \frac{B_0 \varepsilon}{\delta} \qquad \left\| \vec{j_1} \right\| = \left\| \frac{\vec{R_0 t}\ \vec{b}}{\mu} \right\| \sim \frac{B_0 \varepsilon k}{\mu \delta}$$

$$\left\| \vec{j_2} \right\| \sim \sigma \mu B_0$$

$$\left\| \vec{j_3} \right\| \sim \frac{\sigma U B_0 \varepsilon}{\delta}$$

Il en résulte que :

$$\frac{\left\| \vec{j_1} \right\|}{\left\| \vec{j_3} \right\|} = \frac{k\delta}{\mu\sigma U\delta} \qquad \text{or} \quad k\delta \gg 1 \ \text{et} \ \mu\sigma U\delta \ll 1$$

par conséquent

$$\left\| \vec{j_1} \right\| \gg \left\| \vec{j_3} \right\|$$

L'ordre de grandeur de la vitesse typique u du milieu conducteur se détermine comme précédemment à l'aide de la condition à l'interface et de l'équation de continuité :

$$w \sim \varepsilon k U \quad ; \quad ku \sim kv \sim \left\| \frac{\partial w}{\partial z} \right\| \sim \varepsilon U$$

Par suite

$$\vec{u} \sim \varepsilon k U$$

$$\frac{\left\| \vec{j_1} \right\|}{\left\| \vec{j_2} \right\|} = \frac{1}{\mu\sigma\delta U} \gg 1$$

Pour les petites longueurs d'onde également les courants de conduction $\vec{j_1}$ et $\vec{j_2}$ sont négligeables devant le courant de diffusion :

$$\left\| \vec{j_2} \right\| = \mu\sigma U\delta \left\| \vec{j_1} \right\|$$

$$\left\| \vec{j_3} \right\| = \mu\sigma U\delta \times k\delta \left\| \vec{j_1} \right\|$$

Cette analyse d'ordre de grandeur rend légitime de négliger dans toute la suite de l'étude les courants électriques dus au mouvement des particules fluides à travers les lignes de champ :

$$\vec{j} = \sigma (\vec{u} \wedge \vec{B}) + \sigma (\vec{U} \wedge \vec{b})$$

devant le courant de diffusion résultant du caractère alternatif du champ magnétique appliqué :

$\vec{j} = \sigma \vec{e}$ déterminé par conséquent par la relation d'Ampère :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{Rot}\, \vec{b}$$

Ainsi, c'est le courant de diffusion, et les phénomènes de mutuelle influence qui vont être déterminants dans l'évolution d'une perturbation de l'interface entre le milieu isolant et le milieu conducteur, tant que les hypothèses permettant une linéarisation seront justifiées : c'est à dire à la naissance de la perturbation.

Il est facile maintenant d'exprimer la force électromagnétique $\vec{F}$ qui apparaît par unité de volume dans le fluide (1) (nous supprimerons désormais l'indice 1 puisque le fluide (2) isolant n'est soumis à aucune force électromagnétique) :

$$\vec{F} = \left[J_y b_z \, , \; j_z B_{0x} \, , \; - J_y b_x - j_y B_{0x} \right]$$

avec :

$$\begin{cases} j_y = i \dfrac{B_0 \varepsilon}{\sqrt{2}\mu\delta} \left[\left(\dfrac{k_x^2 + \gamma k}{k} \right) e^{(\gamma z + i\vartheta_1)} - \left(\dfrac{k_x^2 + \gamma^* k}{k} \right) e^{(\gamma^* z + i\vartheta_2)} \right] \\ j_z = - \dfrac{B_0 \varepsilon}{\sqrt{2}\mu\delta} \; k_y \left[e^{(\gamma z + i\vartheta_1)} - e^{(\gamma^* z + i\vartheta_2)} \right] \end{cases}$$

Les composantes de cette force sont des combinaisons linéaires des quatre termes suivants :

$$e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_0)} \; ; \; e^{i(\vartheta_2 + \vartheta_0)} \; ; \; e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_0)} \; ; \; e^{i(\vartheta_2 - \vartheta_0)}$$

où l'on a introduit

$$\vartheta_0 = \omega t + z/\delta$$

Les arguments respectifs s'écrivent :

$$\begin{cases} \vartheta_1 + \vartheta_0 = 2\omega t + st + \vec{k}.\vec{r} - \frac{\pi}{4} + \frac{z}{\delta} \\ \vartheta_2 + \vartheta_0 = st + \vec{k}.\vec{r} + \frac{\pi}{4} + \frac{z}{\delta} \\ \vartheta_1 - \vartheta_0 = st + \vec{k}.\vec{r} - \frac{\pi}{4} + \frac{z}{\delta} \\ \vartheta_2 - \vartheta_0 = -2\omega t + st + \vec{k}.\vec{r} + \frac{\pi}{4} + \frac{z}{\delta} \end{cases}$$

dans le premier et dans le dernier, au voisinage de l'état marginal, st est négligeable devant $2\omega t$; ces deux exposants conduisent donc à des forces qui pulsent à une fréquence double de celle du champ magnétique.

Il est aisé d'imaginer que si la fréquence du champ magnétique est élevée, l'inertie du fluide peut l'empêcher de suivre ces forces pulsantes. Pour s'en convaincre, évaluons la variation de vitesse δV d'une particule fluide soumise à de telles sollicitations pendant une durée δt

$$\rho \frac{\delta V}{\delta t} \sim \left\| \vec{J} \wedge \vec{B} \right\| \sim \frac{B^2}{\mu \delta}$$

Pendant la durée $\delta t \sim \omega^{-1}$ d'une alternance de signe fixé des forces pulsantes, la variation relative de vitesse de la particule fluide considérée s'écrit donc :

$$\frac{\delta V}{V} \sim \frac{B^2}{\rho \mu \delta V \omega} \sim \frac{\sigma B^2 \delta}{\rho V}$$

et il est clair que si ce paramètre d'interaction $N_\delta = \frac{\sigma B^2 \delta}{\rho V}$ est assez petit, c'est à dire si la fréquence du champ magnétique est assez élevée, ces pulsations des forces électromagnétiques peuvent être négligées devant la partie de ces forces qui correspond aux arguments $(\vartheta_2 + \vartheta_0)$ et $(\vartheta_1 - \vartheta_0)$ qui ne portent pas la marque de la pulsation du champ magnétique.

Cette condition qui porte sur la pulsation ω vient s'ajouter à la condition $R_\delta \ll 1$ formulée précédemment. Ceci revient à imposer à la pulsation ω d'être

beaucoup plus élevée que la plus grande des deux pulsations $\mu\sigma V^2$ et $\frac{\sigma}{\mu}\left(\frac{B^2}{\rho V}\right)^2$, Notre analyse sera donc valable dès que la pulsation ω vérifiera :

$$\begin{cases} \omega \gg \mu\sigma V^2 & (R_\delta \ll 1) \\ \omega \gg \frac{\sigma}{\mu}\left(\frac{B^2}{\rho V}\right)^2 & (N_\delta \ll 1) \end{cases}$$

Il est intéressant de noter que la condition portant sur R_δ revient à imposer que la longueur caractéristique de convection du champ magnétique pendant une alternance $L_{conv} \sim \frac{V}{\omega}$ soit très petite par rapport à la longueur caractéristique de diffusion δ . La condition portant sur N_δ revient à imposer que la déviation d'une particule fluide hors de son trajet moyen sous l'action de la pulsation des forces électromagnétiques qu'elle subit, $L_{dev} = \frac{\delta V}{\omega} \sim B^2/\rho\mu\delta\omega^2$, soit très petite devant son trajet moyen pendant une alternance qui n'est autre que $L_{conv} = \frac{V}{\omega}$

La double condition portant sur la pulsation ω s'écrit donc encore :

$$L_{dev} \ll L_{conv} \ll \delta$$

et exige finalement que la déviation des particules fluides hors de la trajectoire moyenne soit extrêmement petite par rapport à l'épaisseur active du phénomène.

Cette approximation conduit donc à prendre égaux à zéro les facteurs $e^{i(\theta_1+\theta_0)}$ et $e^{i(\theta_2-\theta_0)}$, c'est à dire à ne retenir que la valeur moyenne, vis à vis des phénomènes instationnaires associés à l'échelle de temps ω^{-1}, des forces électromagnétiques. D'un point de vue purement analytique, l'intérêt de cette approximation provient du fait que cette force moyenne se présente sous la forme $f(z)\exp i(\omega t + \vec{k}.\vec{r})$, bien que la perturbation du champ magnétique ait une forme différente. Cette condition est nécessaire pour que l'on puisse utiliser la méthode de décomposition en modes normaux.

Finalement la force électromagnétique qui apparaît par unité de volume s'écrit :

$$F_x = i\,\frac{B_0^2\,\varepsilon\,k_x}{2\mu\delta^2}\left[\frac{e^{(\gamma+\frac{1-i}{\delta})z}}{k+\gamma} - \frac{e^{(\gamma^*+\frac{1+i}{\delta})z}}{k+\gamma^*}\right]e^{i(\omega t+\vec{k}.\vec{r})}$$

$$F_y = -\frac{B_0^2\,\varepsilon\,k_y}{4\mu\delta}\left[(1-i)e^{(\gamma+\frac{1-i}{\delta})z} - (1+i)e^{(\gamma^*+\frac{1+i}{\delta})z}\right]e^{i(\omega t+\vec{k}.\vec{r})}$$

$$F_y = \frac{B_0^2 \mathcal{E}}{2\mu\delta} \left[\begin{array}{l} \dfrac{k_y^2 + \gamma k}{k(\gamma + k)} \, e^{(\gamma + \frac{1-i}{\delta})y} + \dfrac{k_y^2 + \gamma^* k}{k(\gamma^* + k)} \, e^{(\gamma^* + \frac{1+i}{\delta})y} + \\ + (1-i)\left(\dfrac{k_y^2}{k} - \dfrac{1}{\delta(\gamma + k)} \right) e^{(\gamma + \frac{1-i}{\delta})y} - (1+i)\left(\dfrac{k_y^2}{k} - \dfrac{1}{\delta(\gamma^* + k)} \right) e^{(\gamma^* + \frac{1+i}{\delta})y} \end{array} \right] e^{i(\omega t + \vec{k}.\vec{x})}$$

III. INTERPRETATION PHYSIQUE DES CONDITIONS ASYMPTOTIQUES

Avant d'entreprendre l'étude de la stabilité proprement dite, par la prise en compte dans les équations du mouvement des sollicitations électromagnétiques précédemment calculées, il est bon de marquer un temps d'arrêt dans cette analyse pour tenter d'interpréter les divers mécanismes qui viennent d'être mis en évidence et les principaux résultats obtenus. Des considérations intuitives permettent de prévoir, dès à présent, d'une manière simple quelle sera l'influence du champ magnétique sur la stabilité de l'interface. Nous envisageons pour cela deux cas asymptotiques qui se prêtent à une interprétation physique aisée : les perturbations caractérisées par de grandes longueurs d'onde ($k\delta \ll 1$) et les perturbations de très petites longueurs d'onde ($k\delta \gg 1$)

III.1. Perturbations de grandes longueurs d'onde : $k\delta \ll 1$

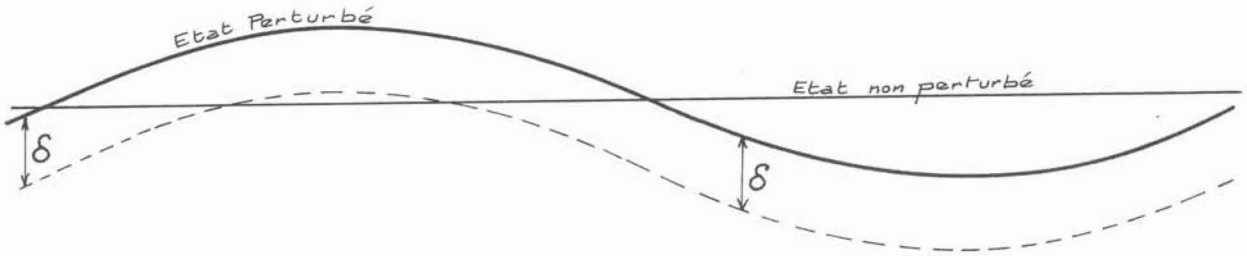
Nous sommes en présence de deux échelles de longueur typiques :

- la profondeur de pénétration δ du champ magnétique associée au mécanisme de diffusion du champ
- la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ qui a une influence sur la répartition spatiale du champ magnétique puisque la diffusion se fait à partir de l'interface perturbée

$$\delta \ll \lambda$$

L'échelle caractéristique de la variation spatiale du champ magnétique est δ ; ceci signifie que le champ magnétique ignore totalement les phénomènes qui évoluent à une échelle beaucoup plus grande, ou plus précisément, que ceux-ci ne peuvent bouleverser les mécanismes associés au champ magnétique et attachés à la longueur δ. En particulier, le mécanisme d'établissement du champ dans le milieu conducteur reste parfaitement insensible à l'ondulation de l'interface associée à l'échelle λ . Ainsi, à son échelle, le champ magnétique voit une interface plane qui subit simplement une translation, parallèlement à elle-même, de la quantité $\mathcal{E}$. A partir de cette surface libre "déplacée", le champ magnétique diffuse dans le milieu conducteur exactement comme il le faisait dans l'état non perturbé et pénètre sur une bande

d'épaisseur δ dont la frontière interne au milieu conducteur reste parallèle à l'interface.



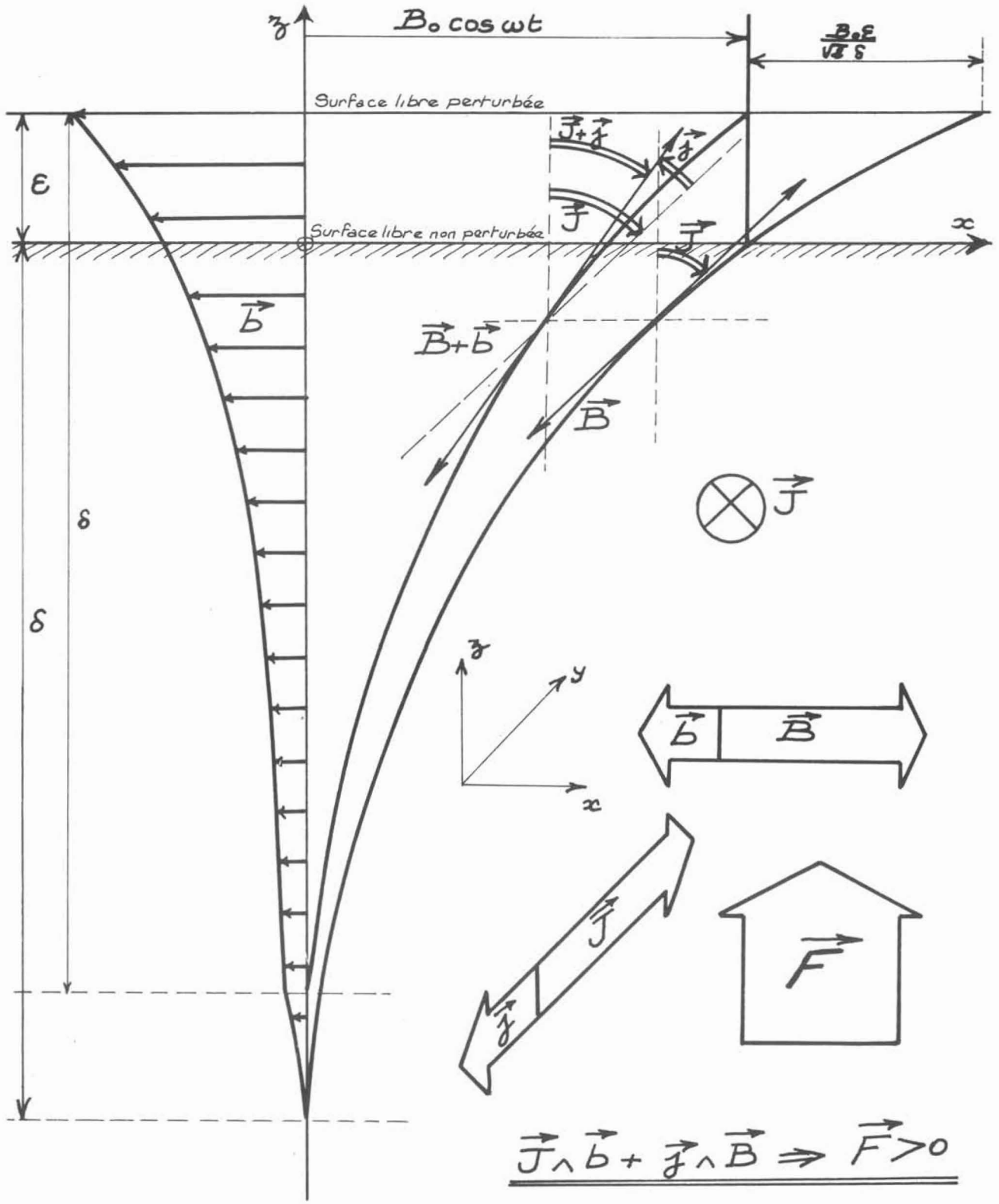
Les expressions déduites de l'analyse menée dans les paragraphes précédents, pour le champ magnétique, les courants induits et les forces électromagnétiques associés à la perturbation témoignent du fait que la perturbation est attachée à l'échelle de longueur δ .

En effet ce sont les fonctions $e^{\gamma z}$ et $e^{(\gamma + \frac{1-i}{\delta})z}$ qui traduisent la pénétration du champ magnétique perturbé et des courants induits qui lui sont associés dans le milieu conducteur. Un développement limité au premier ordre en $k\delta$ des divers incréments, compte-tenu que $\gamma^2 = k^2 + \frac{2i}{\delta^2}$, montre que :

$$k\delta \ll 1 \Rightarrow e^{\gamma z} \sim e^{(\gamma + \frac{1-i}{\delta})z} \sim e^{z/\delta}$$

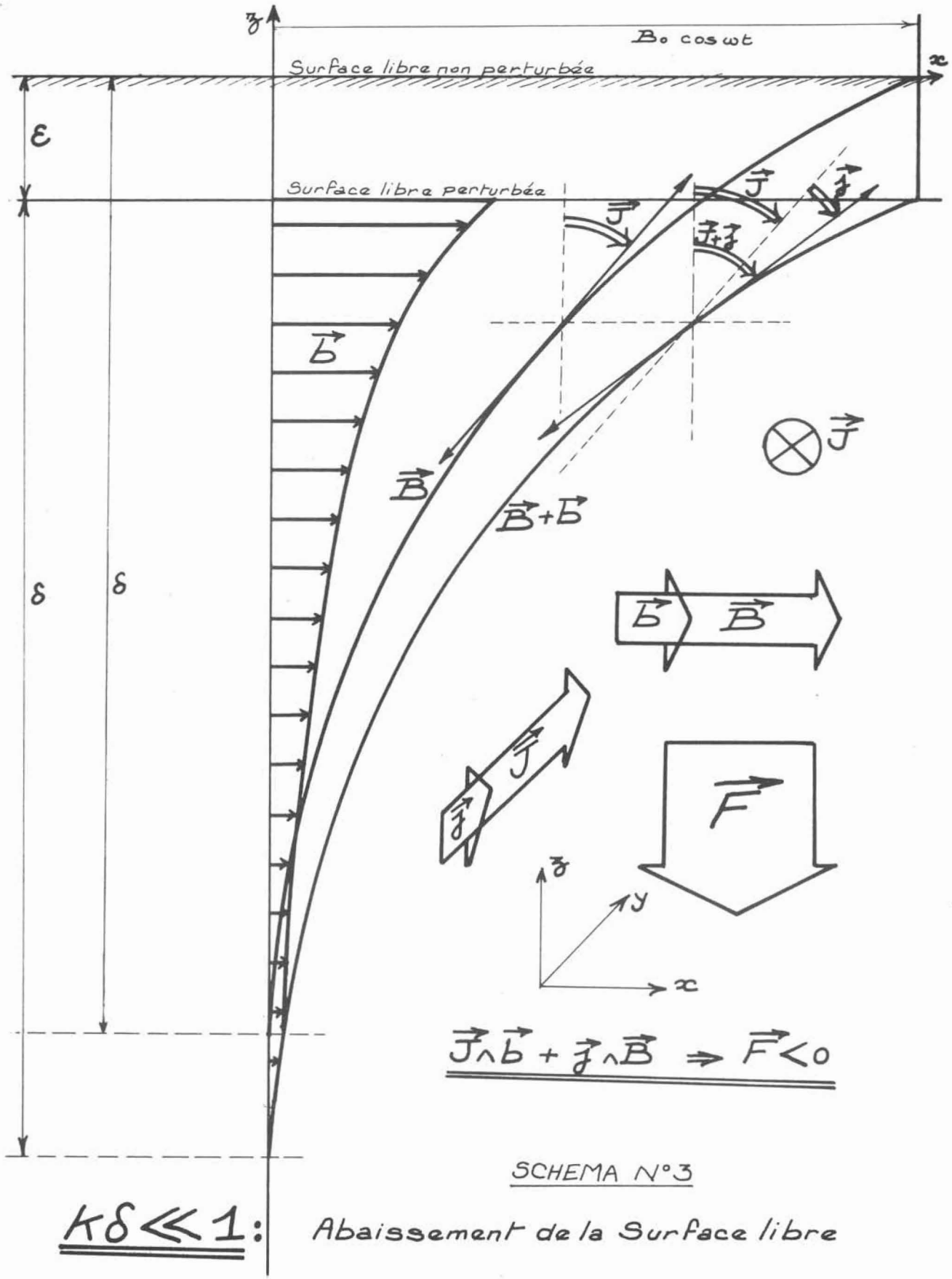
La connaissance du mécanisme d'établissement du champ magnétique peut permettre de déterminer qualitativement, au moyen de schémas simples, la perturbation $\vec{b}$ du champ magnétique et $\vec{j}$ des courants induits et par conséquent d'accéder à la force électromagnétique engendrée par la perturbation.

Puisque la diffusion à partir de l'interface est à l'origine du champ magnétique existant dans le milieu conducteur liquide, le profil du champ est exponentiel décroissant, ce que nous avons rendu de façon qualitative sur les deux schémas [2] et [3] . Nous avons vu qu'à l'échelle du champ magnétique l'état perturbé se déduit de l'état d'équilibre de référence par une translation parallèle à Oz. Le profil du champ magnétique déterminant $\vec{B} + \vec{b}$ se déduit donc lui aussi du profil donnant $\vec{B}$ à l'état d'équilibre par la même translation. La relation $\overrightarrow{Rot}\,\vec{B} = \mu\vec{J}$ permet d'accéder au courant induit $\vec{J}$: celui-ci est déterminé par la tangente de l'angle que fait, en un point donné, la tangente au profil du champ magnétique avec



$K\delta \ll 1$: *Elévation de la Surface libre*

SCHEMA N° 2



SCHEMA N°3

$K\delta \ll 1$: Abaissement de la Surface libre

l'axe Oz. Ces deux schémas très simples fournissent ainsi tous les renseignements nécessaires à la détermination de la force électromagnétique $(\vec{\mathcal{J}} \wedge \vec{b}) + (\vec{j} \wedge \vec{B})$, au moins pour ce qui concerne son signe.

Si une élévation de la surface libre est envisagée, la force électromagnétique est dirigée suivant les z positifs, par contre dans le cas d'un abaissement de la surface libre cette force est dans la direction opposée. Ainsi à tout écart de la position d'équilibre, le système répond par la production de forces qui ont tendance à accentuer plus encore le déséquilibre. Cependant il faut se garder de tirer des conclusions trop hâtives de ce fait ; ces forces en effet pourraient être purement irrotationnelles et être équilibrées par un gradient de pression adapté qu'il est impossible de prendre en compte dans un schéma aussi simple qui simule les effets électromagnétiques seuls et ne peut saisir les phénomènes hydrodynamiques.

Pourtant dans le cas envisagé, $k\delta \ll 1$, il est possible de conclure que le champ magnétique est parfaitement incapable de réduire une éventuelle instabilité de l'interface : son effet est nul ou déstabilisant mais en aucun cas il ne peut être stabilisant.

Ce premier résultat concernant l'influence du champ magnétique sur une perturbation de grande longueur d'onde est important et peut être précisé davantage en exploitant les résultats obtenus dans l'étude analytique des paragraphes précédents. Examinons pour cela la composante F_y de la force électromagnétique :

$$F_y = - j_y B - J b_x$$

avec, dans le cas où $k\delta \ll 1$

$$\begin{cases} b_x = 2 \dfrac{B_0 \mathcal{E}}{\sqrt{2}\,\delta} \sin\left(\dfrac{z}{\delta} + \omega t - \dfrac{\pi}{4}\right) e^{z/\delta}\, e^{i\theta} \\ j_y = 2 \dfrac{B_0 \mathcal{E}}{\sqrt{2}\,\mu\delta} \left[\dfrac{k_y^2}{k} \sin\left(\dfrac{z}{\delta} + \omega t - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{\delta} \sin\left(\dfrac{z}{\delta} + \omega t\right) \right] e^{z/\delta}\, e^{i\theta} \\ B = B_0 e^{z/\delta} \cos\left(\omega t + \dfrac{z}{\delta}\right) \\ J = \dfrac{\sqrt{2}\,B_0}{\mu\delta} \cos\left(\omega t + \dfrac{z}{\delta} + \dfrac{\pi}{4}\right) e^{z/\delta} \end{cases}$$

ce qui conduit, moyennant les hypothèses de quasi stationnarité, aux expressions

$$F_{z_1} = -j_y B = \frac{B_0^2 \mathcal{E}}{2\mu} \frac{k_x^2}{k\delta} e^{2z/\delta} e^{i\vartheta}$$

$$F_{z_2} = -J b_x = \frac{B_0^2 \mathcal{E}}{\mu \delta^2} e^{2z/\delta} e^{i\vartheta}$$

$$\frac{\| F_{z_1} \|}{\| F_{z_2} \|} \sim \frac{k_y^2 \delta^2}{k\delta} \leqslant k\delta \ll 1$$

Ainsi, pour les grandes longueurs d'onde, la composante suivante Oz de la force électromagnétique est due uniquement à l'interaction de la perturbation du champ magnétique et des courants induits présents à l'état non perturbé :

$$F_z = \frac{B_0^2 \mathcal{E}}{\mu \delta^2} e^{2z/\delta} e^{i\vartheta}$$

La figure [4] donne une représentation de F_z dans le cas particulier où le terme $e^{i\vartheta}$ qui traduit l'ondulation de la surface libre est pris égal à $\cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$. Nous obtenons ainsi une confirmation de l'analyse qualitative faite précédemment : si le fluide supérieur, isolant, est moins dense que le fluide conducteur, les forces de pesanteur ont tendance à ramener l'interface perturbée à sa position d'équilibre horizontale ; au contraire les forces électromagnétiques, en phase avec les forces de pesanteur, vont à l'encontre de celles-ci en accentuant la perturbation puisqu'elles ont pour effet de surélever les bosses et d'accroître la profondeur des creux.

Les autres composantes de la force électromagnétique s'écrivent

$$\begin{cases} F_x = \frac{B_0^2 \mathcal{E}}{2\mu\delta} k_x e^{2z/\delta} e^{i\vartheta} \\ F_y = i \frac{B_0^2 \mathcal{E}}{2\mu\delta} k_y e^{2z/\delta} e^{i\vartheta} \\ F_z = \frac{B_0^2 \mathcal{E}}{\mu\delta^2} e^{2z/\delta} e^{i\vartheta} \end{cases}$$

Il apparaît clairement dans ces expressions que $F_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ et $F_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ si $\varphi = \frac{B_0^2 \mathcal{E}}{2\mu\delta} e^{2z/\delta} e^{i\vartheta}$. Il est donc commode de séparer partie rotationnelle et partie irrotationnelle de $\vec{F}$. Ainsi :

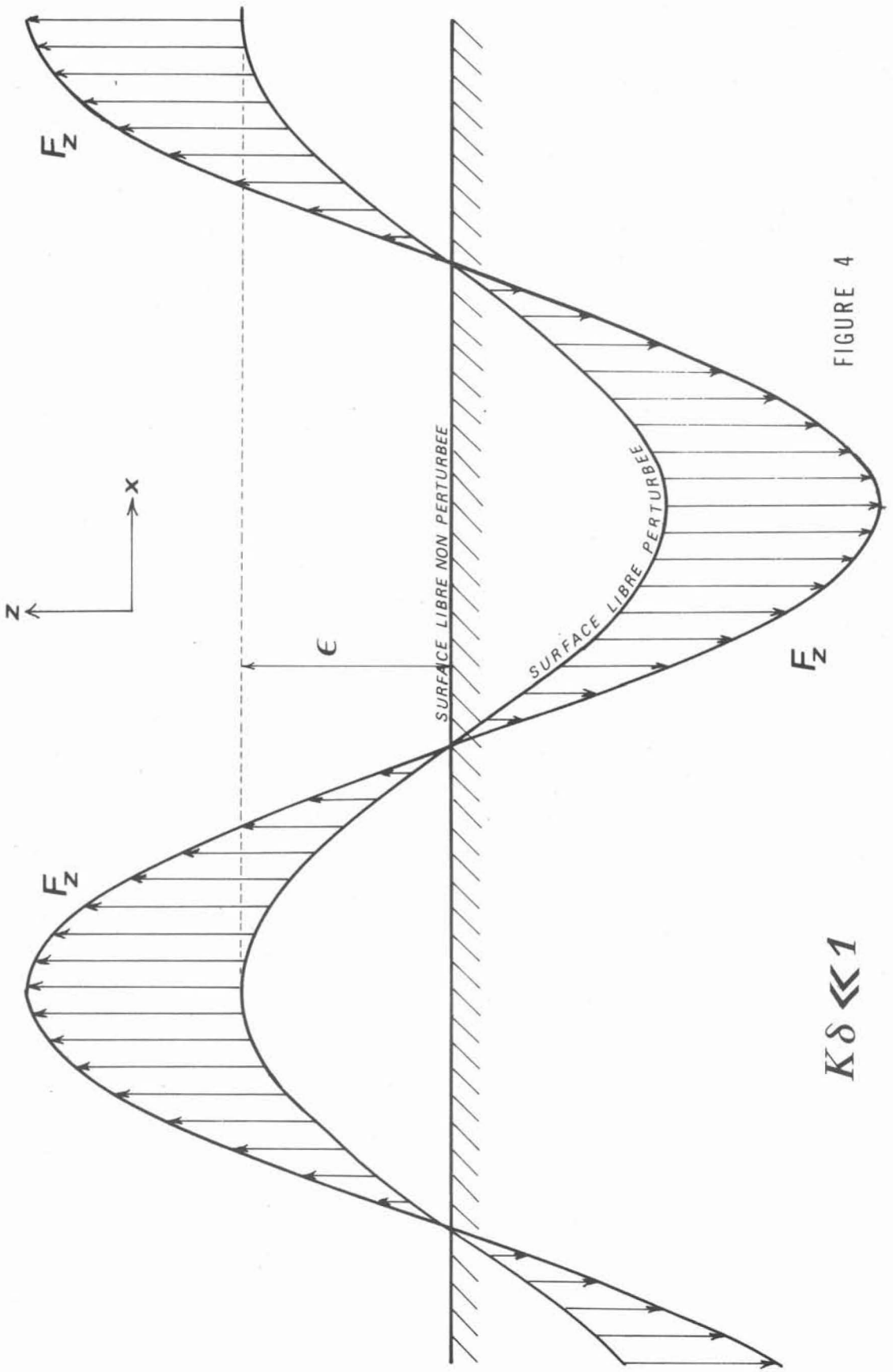


FIGURE 4

$K\delta \ll 1$

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\,\varphi + \vec{F_1}$$

avec $\vec{F_1} = (F_1, 0, 0)$

et $F_1 = -\frac{B_0^2 \mathcal{E}}{\sqrt{2}\,\mu\,\delta}\, k_\infty\, e^{z/\delta}\, e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}$

Si notre analyse qualitative et l'examen de l'expression analytique de F_{1z} permettaient seulement de conclure à l'incapacité du champ magnétique à réduire une éventuelle perturbation de la surface libre, l'expression globale de la force électromagnétique permet pour sa part d'affirmer que le champ magnétique a un effet déstabilisant. Si la partie irrotationnelle des forces électromagnétiques peut être équibibrée par un gradient de pression, rien ne peut s'opposer à leur partie rotationnelle que nous avons représentée sur la figure [5] .

L'effet du champ magnétique sur une interface présentant une faible ondulation est désormais clair :

- la partie irrotationnelle des forces électromagnétiques, éventuellement atténuée par un gradient de pression, augmente l'amplitude de cette ondulation.

- la partie rotationnelle pour sa part tend à provoquer un déferlement en faisant basculer la crête des vagues ainsi formées.

III.2. Perturbations de petites longueurs d'onde : $k\delta \gg 1$

Les deux échelles de longueur typiques en présence sont toujours l'épaisseur de peau δ et la longueur d'onde λ de la perturbation mais cette fois :

$$\delta \gg \lambda$$

Contrairement à ce qui se passe lorsque la longueur d'onde de la perturbation est beaucoup plus grande que l'épaisseur de peau, cas dans lequel le champ magnétique dans son ensemble réagit aux changements de forme de l'interface qui se ramènent pour lui à de simples translations, c'est la longueur d'onde qui impose la dimension caractéristique de la perturbation du champ magnétique. A mesure que l'on s'enfonce dans le milieu conducteur le champ magnétique oublie que la surface libre est perturbée et au-delà d'une distance λ de l'interface le champ magnétique est exactement celui qui existait dans le milieu conducteur en l'absence de perturbation.

Une autre différence importante apparaît entre ce cas et le cas précédent : lorsque la longueur d'onde de la perturbation est très grande, le champ magnétique dans le milieu isolant n'est pas affecté et demeure identique à celui qui régnait

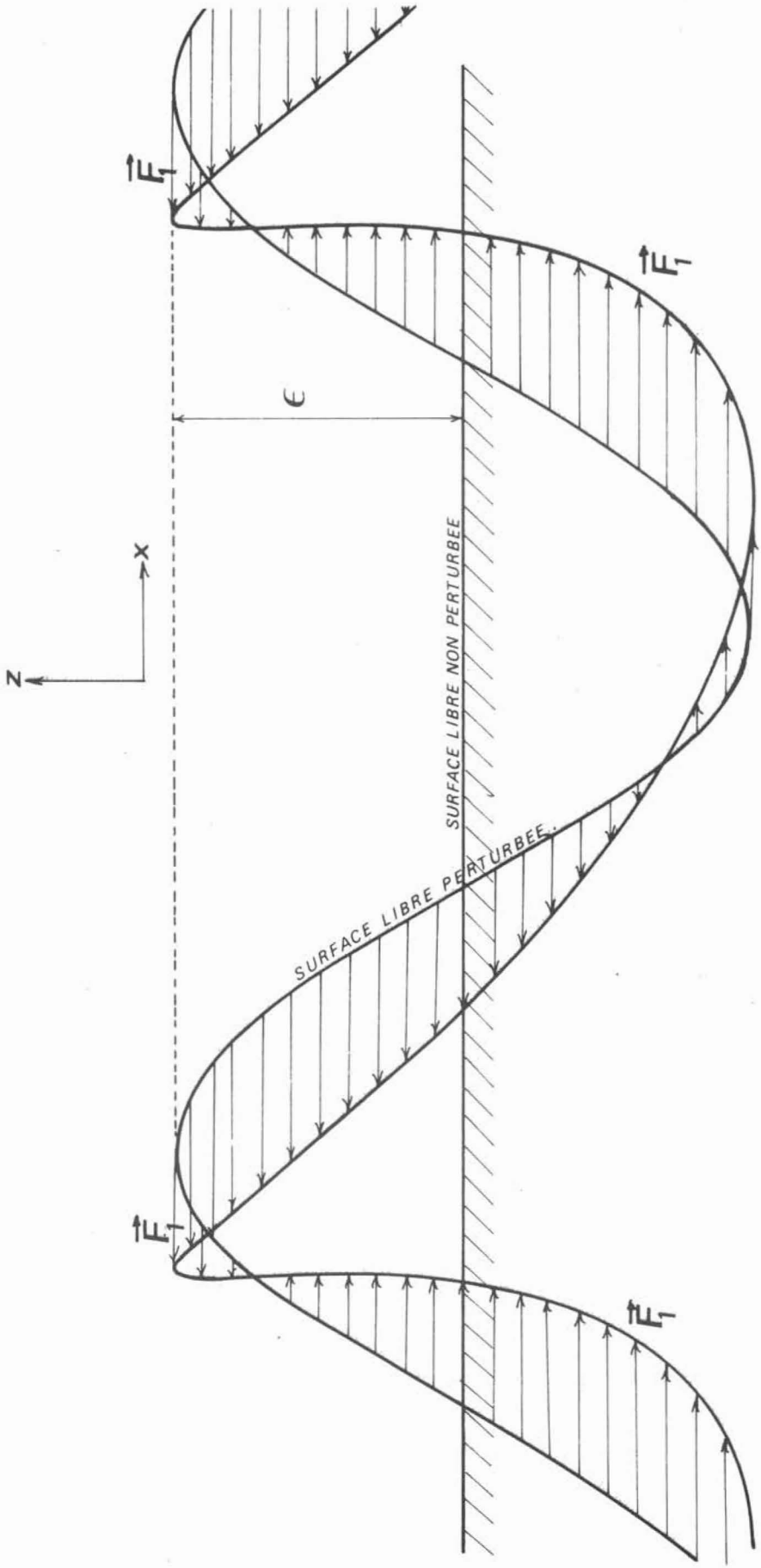


FIGURE 5

$K\delta \ll 1$

dans ce milieu à l'équilibre. Il ne peut en être de même lorsque la longueur d'onde est faible : dans ce cas en effet maxima et minima successifs sont très rapprochés sur la surface libre et l'équation de continuité, que doit nécessairement vérifier le champ magnétique, interdit que celui-ci prenne la même valeur sur un maximum et sur un minimum de l'interface. Une perturbation affecte donc également le champ magnétique dans le milieu isolant. Dans ce milieu, le champ magnétique est harmonique et ne connaît qu'une échelle de longueur : λ , longueur d'onde de la perturbation de l'interface qui sera également l'échelle typique de la variation de la perturbation du champ dans le milieu isolant.

Ainsi, lorsque la longueur d'onde de la perturbation est faible devant l'épaisseur de peau δ , la perturbation du champ magnétique intéresse deux domaines de hauteur λ situés de part et d'autre de l'interface dans chacun des deux milieux.

Une analyse qualitative, semblable à celle faite dans le cas précédent, peut à nouveau permettre de déterminer le signe de la perturbation du champ magnétique et des courants induits et ainsi préciser le sens de la composante F_z qui a le rôle le plus important dans le retour éventuel à la position d'équilibre initiale. Cette analyse nécessite cependant le support des expressions analytiques de la perturbation du champ magnétique, afin de préciser de quelle façon les perturbations dans le milieu isolant et dans le milieu conducteur allient leurs efforts pour résorber la discontinuité introduite par la déformation de l'interface. Cette discontinuité est parfaitement naturelle puisque, en ce qui concerne les champs magnétiques appliqués, la continuité en z = 0 est maintenue et les mécanismes qui régissent l'établissement du champ dans chacun des deux milieux sont préservés : ceci justifie l'extrapolation dans le milieu isolant du profil du champ magnétique relatif au milieu conducteur dans le cas d'une élévation de la surface libre, de même que l'extrapolation dans le milieu conducteur du profil du champ magnétique relatif au milieu isolant lors d'un abaissement de la surface libre. Ces extrapolations consécutives aux modifications dans la position de l'interface introduisent chaque fois une discontinuité d'amplitude $\frac{B_0 \mathcal{E}}{\sqrt{2}\,\delta}$, réduite par la perturbation du champ magnétique. Celle-ci s'écrit dans le cas où $k\delta \gg 1$:

$$\begin{cases} b_{1x} = i \dfrac{B_0 \mathcal{E}}{2\sqrt{2}\,\delta} \dfrac{k_x^2}{k} \left[e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} \right] e^{-kz} \\ b_{2y} = i \dfrac{B_0 \mathcal{E}}{2\sqrt{2}\,\delta} \dfrac{k_x k_y}{k^2} \left[e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} \right] e^{-kz} \\ b_{2z} = - \dfrac{B_0 \mathcal{E}}{2\sqrt{2}\,\delta} \dfrac{k_x}{k} \left[e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} \right] e^{-kz} \end{cases}$$

pour le milieu isolant

$$\begin{cases} b_{1x} = -i\,\dfrac{B_0\mathcal{E}}{2\sqrt{2}\,\delta}\left(\dfrac{k_y^2}{k}+1\right)\left[e^{i\vartheta_1}-e^{i\vartheta_2}\right]\,e^{kz} \\ b_{1y} = i\,\dfrac{B_0\mathcal{E}}{2\sqrt{2}\,\delta}\,\dfrac{k_x k_y}{k^2}\left[e^{i\vartheta_1}-e^{i\vartheta_2}\right]\,e^{kz} \\ b_{1z} = -\dfrac{B_0\mathcal{E}}{2\sqrt{2}\,\delta}\,\dfrac{k_x}{k}\left[e^{i\vartheta_1}-e^{i\vartheta_2}\right]\,e^{kz} \end{cases}$$

pour le milieu conducteur

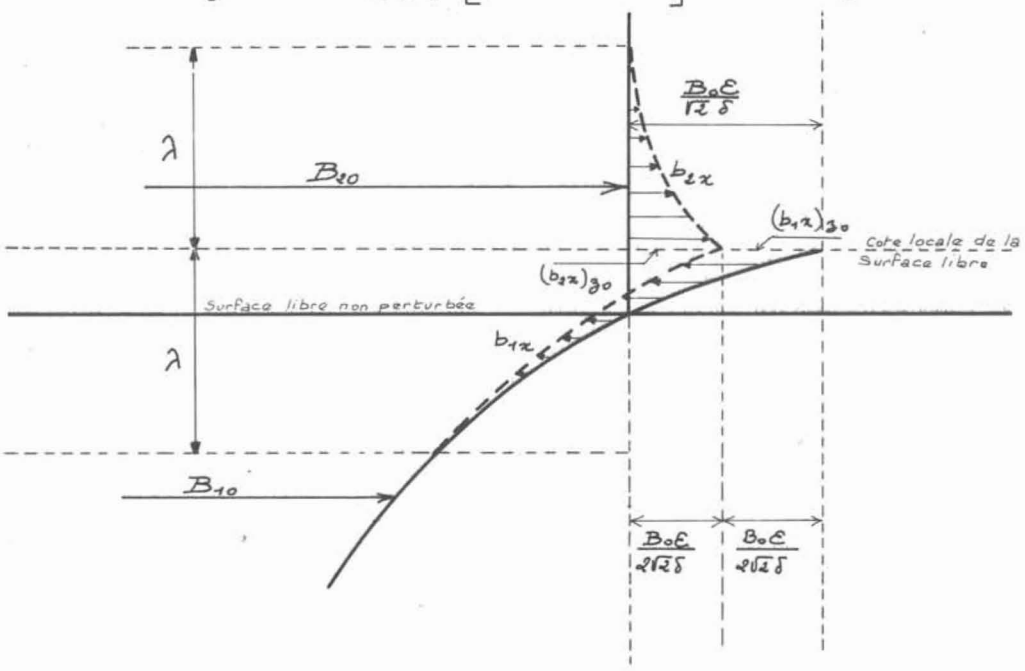
Nous avons évidemment

$$(b_{1y})_{z_0} = (b_{2y})_{z_0} \quad ; \quad (b_{1z})_{z_0} = (b_{2z})_{z_0}$$

$$\left\| (b_{1x})_{z_0} + (b_{2x})_{z_0} \right\| = \frac{B_0\mathcal{E}}{\sqrt{2}\,\delta}$$

Pour préciser davantage les importances relatives de $(b_{1x})_{z_0}$ et $(b_{2x})_{z_0}$, prenons le cas particulier $k_x \neq 0$ et $k_x \gg k_y$ qui conduit à :

$$(b_{1x})_{z_0} = -i\,\frac{B_0\mathcal{E}}{2\sqrt{2}\,\delta}\left[e^{i\vartheta_1}-e^{i\vartheta_2}\right] = -(b_{2x})_{z_0}$$



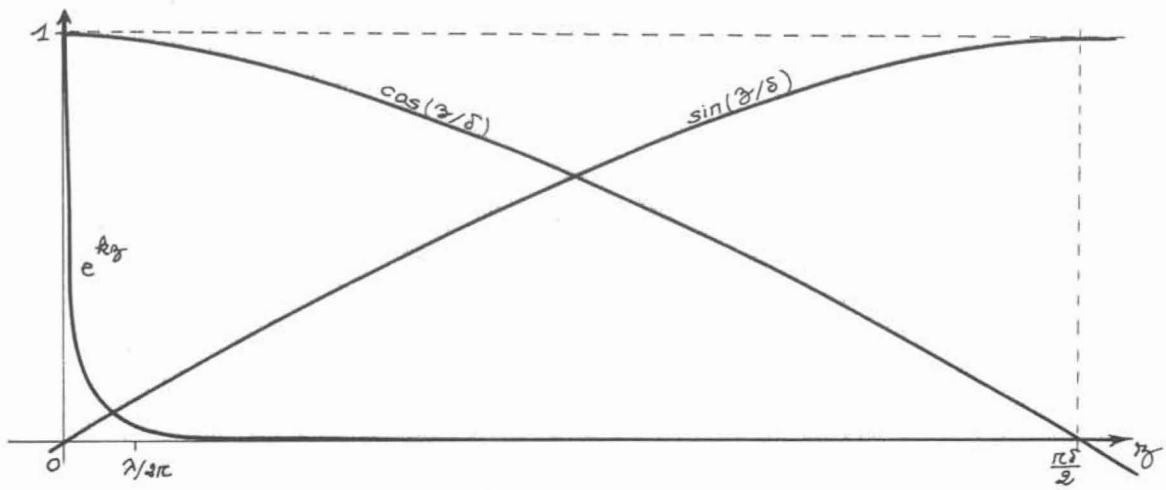
Par conséquent la perturbation du champ magnétique dans le milieu isolant et la perturbation dans le milieu conducteur apportent une contribution égale à la réduction de la discontinuité $\frac{B_o \mathcal{E}}{\sqrt{2}\,\delta}$ qu'elles résorbent chacune par moitié.

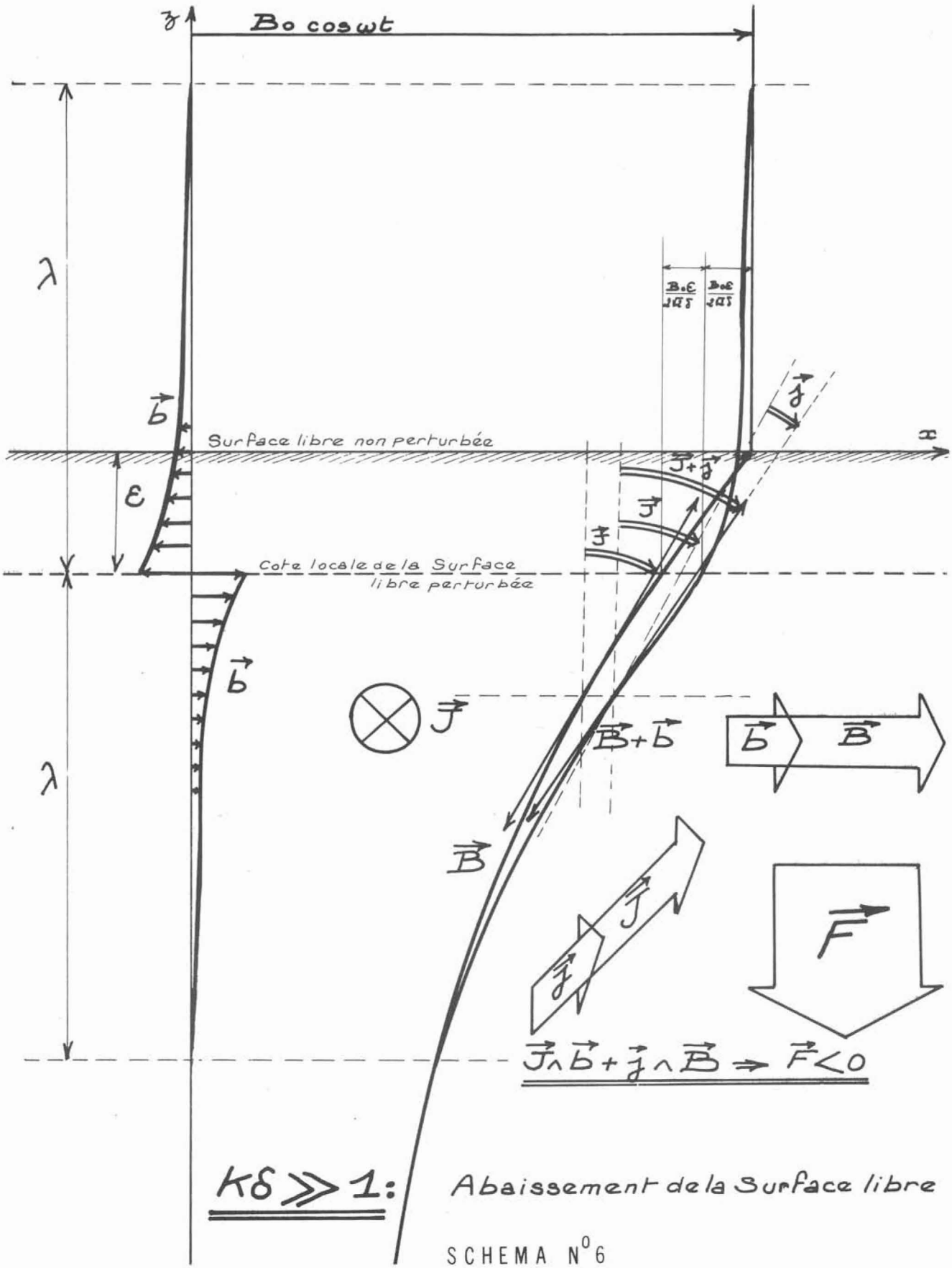
Les schémas [6] et [7] rendent compte de ce fait et déterminent les sens respectifs de $\vec{j}$, $\vec{J}$, $\vec{b}$ et $\vec{B}$. La composante F_z de la force électromagnétique résultante est, dans ce cas également, dirigée dans un sens tel qu'elle tend à accroître la déformation de la surface libre, démontrant une fois encore l'incapacité du champ magnétique à produire des forces de rappel susceptibles de ramener le système à sa position d'équilibre initiale.

Les trois composantes de la force électromagnétique sont données, dans le cas des petites longueurs d'onde, par les expressions suivantes :

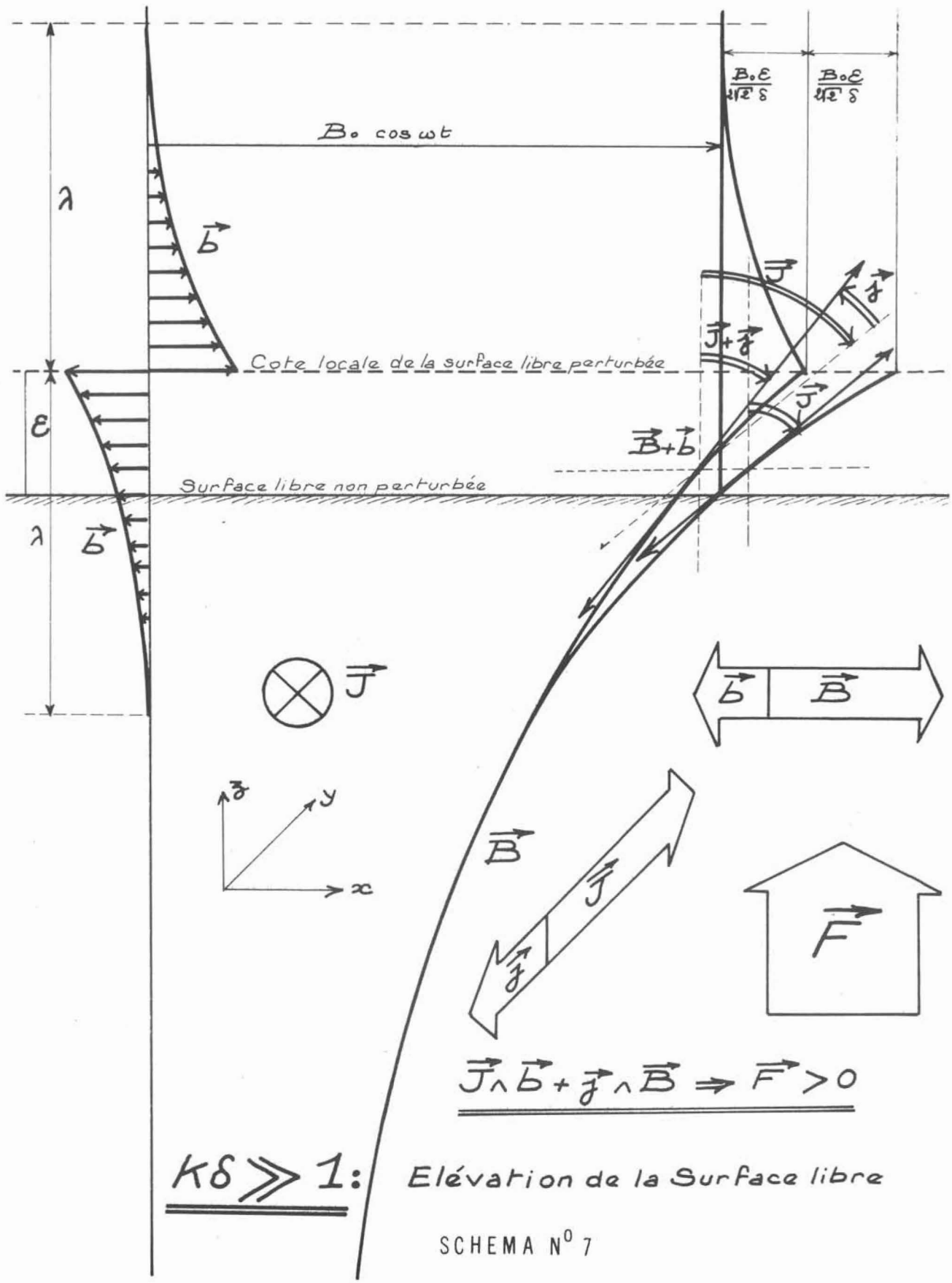
$$\begin{cases} F_x = \dfrac{B_o^2 \mathcal{E}}{2\mu\delta}\ \dfrac{k_x}{k\delta}\ \sin\left(\dfrac{z}{\delta}\right) e^{k_z} e^{i\vartheta} \\ F_y = i\,\dfrac{B_o^2 \mathcal{E}}{2\mu\delta}\ k_y \left[\sin\left(\dfrac{z}{\delta}\right) + \cos\left(\dfrac{z}{\delta}\right)\right] e^{k_z} e^{i\vartheta} \\ F_z = \dfrac{B_o^2 \mathcal{E}}{2\mu\delta}\ \dfrac{k_y^2}{k}\left[\sin\left(\dfrac{z}{\delta}\right) + \cos\left(\dfrac{z}{\delta}\right)\right] e^{k_z} e^{i\vartheta} \end{cases}$$

qui compte-tenu de la condition $\delta \gg \lambda$ par laquelle l'exponentielle impose son caractère décroissant à toute autre fonction, comme il est schématisé ci-dessous, se réduisent à :




y
Bo cos ωt
λ
ε
x
Surface libre non perturbée
Cote locale de la Surface libre perturbée
λ
J
B+b
b
B
B
F
J∧b + j∧B → F<0
Kδ ≫ 1: Abaissement de la Surface libre

SCHEMA N°6


$B_0 \cos \omega t$
$\frac{B_0 \varepsilon}{\sqrt{2}\delta}$
$\frac{B_0 \varepsilon}{\sqrt{2}\delta}$
λ
$\vec{b}$
$\vec{J}$
$\vec{J}+\vec{j}$
$\vec{j}$
$\vec{J}$
ε
Cote locale de la surface libre perturbée
$\vec{B}+\vec{b}$
Surface libre non perturbée
λ
$\vec{b}$
$\vec{J}$
$\vec{b}$
$\vec{B}$
z
y
x
$\vec{B}$
$\vec{J}$
$\vec{j}$
$\vec{F}$
$\vec{J} \wedge \vec{b} + \vec{j} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F} > 0$
$K\delta \gg 1$: Elévation de la Surface libre

SCHEMA N° 7

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = i \dfrac{B_0^2 \mathcal{E}}{2\mu\delta} k_y e^{kz} e^{i\vartheta} \\ F_z = \dfrac{B_0^2 \mathcal{E}}{2\mu\delta} \dfrac{k_y^2}{k} e^{kz} e^{i\vartheta} \end{cases}$$

A titre d'exemple considérons $k_x = 0, k_y = k$; dans ce cas :

$$F_y = i \frac{B_0^2 \mathcal{E}}{2\mu\delta} k e^{kz} e^{i\vartheta} \; ; \; F_z = \frac{B_0^2 \mathcal{E}}{2\mu\delta} k e^{kz} e^{i\vartheta} \; ; \; F_x = 0$$

Cette force est purement rotationnelle : $\vec{F} = \overrightarrow{Rot}\, \vec{A}$ avec

$$\vec{A} = \left[i \frac{B_0^2 \mathcal{E}}{2\mu\delta} e^{kz} e^{i\vartheta}, 0, 0 \right]$$

Ceci prouve que vis à vis des perturbations de petites longueurs d'onde, le champ magnétique a un effet déstabilisant.

Les figures [8] et [9] représentent respectivement la composante F_y et la force $\vec{F}$ dans le cas particulier d'une interface d'équation $z = \mathcal{E} \cos(ky)$

La composante F_z est comme dans le cas des perturbations de grandes longueurs d'onde exactement en phase avec l'ondulation de la surface libre et les forces de pesanteur auxquelles elle s'oppose constamment.

L'effet de la composante F_y est de surélever les crêtes formées sur la surface libre en exerçant une traction visant à rapprocher les flancs des diverses ondes.

Le couple exercé par la force rotationnelle $\vec{F}$ est clairement mis en évidence sur la figure [9].

Nous devons donc attendre de l'étude analytique qui va être poursuivie maintenant une mise en évidence du caractère déstabilisant du champ magnétique par l'intermédiaire des phénomènes de mutuelle influence entre l'inducteur situé dans le milieu isolant et l'induit constitué par le métal liquide. C'est ce mécanisme seul que nous avons analysé dans ce paragraphe. L'action des courants de conduction ne peut absolument pas donner lieu à une interprétation aussi simple ; nous pouvons tout au plus

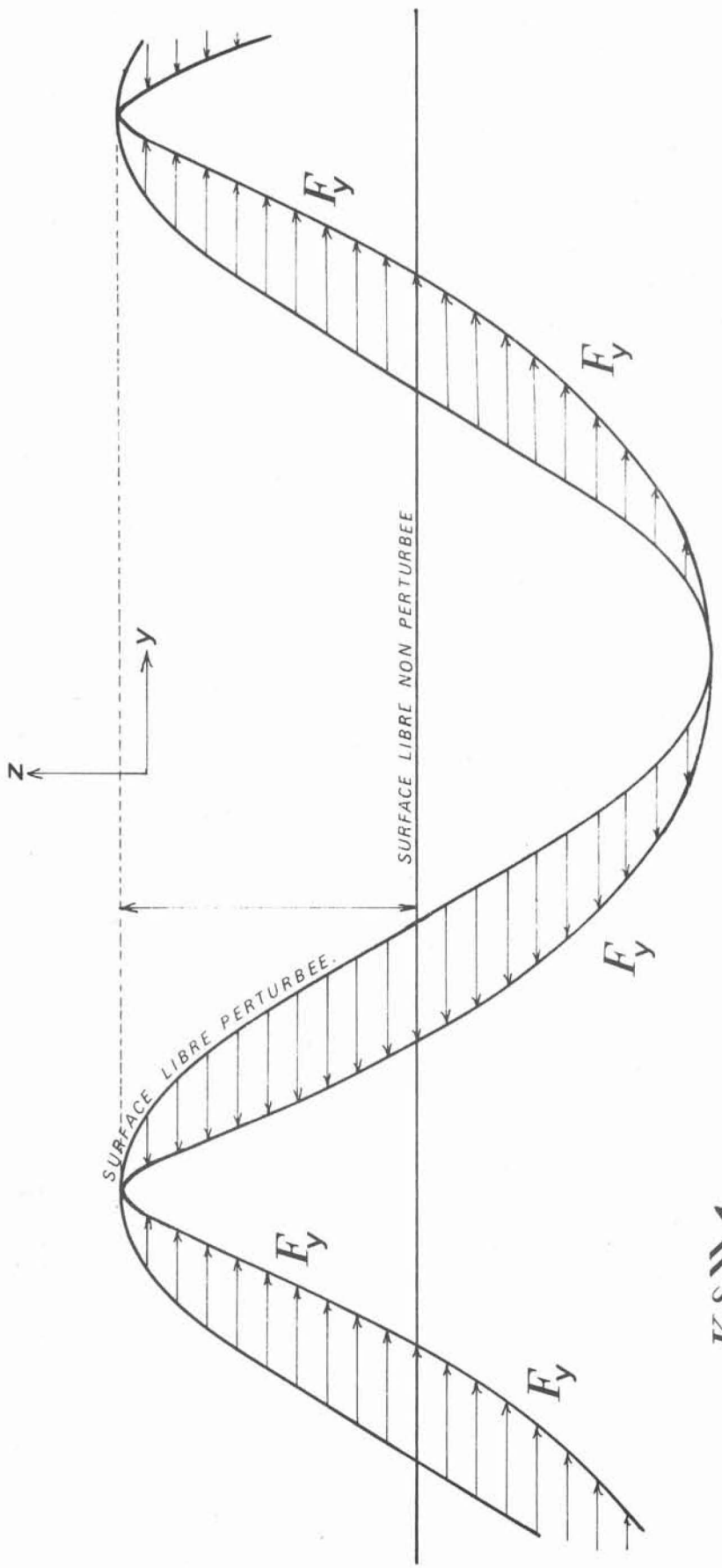
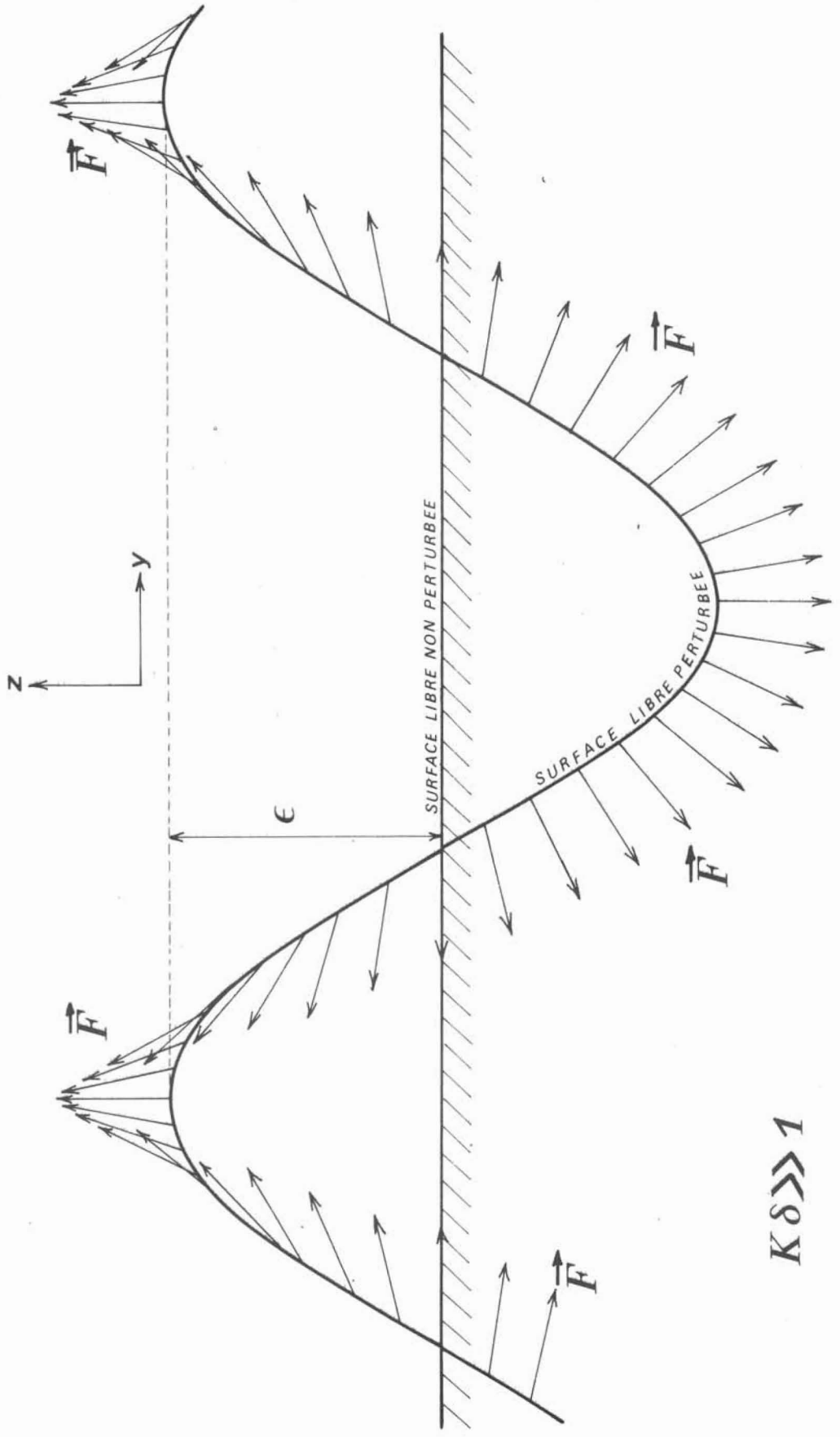

F_y
F_y
F_y
F_y
F_y
F_y
SURFACE LIBRE NON PERTURBEE
SURFACE LIBRE PERTURBEE
y
z
$K\delta \ll 1$

FIGURE 8



$K\delta \gg 1$

FIGURE 9

dire que par l'intermédiaire des forces électromagnétiques engendrées par ces courants le champ magnétique possède généralement un effet stabilisant. L'analyse de l'ordre de grandeur du paragraphe précédent a cependant montré que les courants de conduction et les effets qui leur sont associés sont tout à fait négligeables devant les courants d'induction et les phénomènes de mutuelle influence. C'est donc par un effet strictement déstabilisant que devrait se solder l'influence du champ magnétique alternatif sur l'évolution des perturbations de l'interface.

IV. EQUATION DE DISPERSION ET RESULTATS

La mise en équation du problème se fait en introduisant les expressions des forces électromagnétiques, précédemment calculées, dans les équations locales du mouvement :

$$\begin{cases} \rho_i \dfrac{\partial \vec{V_i}}{\partial t} + \rho_i \left(\vec{V_i} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{V_i} = -\vec{\nabla} P_i + \vec{F_i} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V_i} = 0 \end{cases}$$

qui peuvent s'écrire :

$$\rho_i \left(s + \vec{k} \cdot \vec{U_i}\right)\left(D^2 - k^2\right) w_i = i k^2 F_{iz} - D\left(\vec{k} \cdot \vec{F_i}\right)$$

$$i k^2 P_i = \rho_i \left(s + \vec{k} \cdot \vec{U_i}\right) D w_i + \vec{k} \cdot \vec{F_i}$$

en notant $D = \dfrac{\partial}{\partial z}$

Une simplification importante apparaît dans les équations relatives au fluide ② puisque $\vec{F_2} = \vec{0}$.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- toutes les perturbations s'éteignent à l'infini
- l'interface est une surface matérielle
- la pression subit à la traversée de l'interface une discontinuité introduite par la présence de forces de tension superficielle liées à la courbure locale de l'interface.

Les deux premières conditions s'expriment comme en fluide non conducteur [voir CHANDRASEKHAR (1961)] et il est facile de vérifier qu'il en est de même pour la troisième malgré la contribution des forces électromagnétiques à la pression.

Si l'on nomme ΔP le saut de pression dû à la tension superficielle T la relation suivante doit être vérifiée :

$$\left(P_{20} + p_2\right)_{z=z_0} = \left(P_{10} + p_1\right)_{z=z_0} + \Delta P$$

Mais P_{20} et P_{10} sont liés par la condition assurant la continuité de la pression le long de l'interface non perturbée $z = 0$

$$P_{20} - P_{10} = \left(\rho_1 - \rho_2\right) g z + \frac{1}{2\mu}\left[B^2 - B^2(0)\right]$$

La condition dans l'état perturbé s'écrit donc :

$$\left(p_2 - p_1\right)_{z=z_0} + \left(\rho_1 - \rho_2\right) g z_0 + \frac{1}{2\mu}\left[B^2(z_0) - B^2(0)\right] = \Delta P$$

soit en linéarisant le terme de pression électromagnétique

$$\Delta P + \left(P_1 - P_2\right)_{z=z_0} = \left[\left(\rho_1 - \rho_2\right) g - \frac{B_0^2}{2\mu\delta} \sin \omega t\right] \varepsilon\, e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})}$$

Puisque cette pression d'origine électromagnétique pulse à la fréquence ω, notre approximation quasi stationnaire conduit à la négliger devant le terme de pesanteur et ramène cette condition à sa forme habituelle en fluide non conducteur :

$$\left(P_1 - P_2\right)_{z=z_0} + \Delta P = \left(\rho_1 - \rho_2\right) g z_0$$

La solution des équations du mouvement qui s'annule à l'infini peut s'écrire :

$$\begin{cases} w_1 = \left[A\, e^{kz} + w_0(z)\right] e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})} \\ P_1 = -\dfrac{i}{k^2}\left[\rho_1 \left(\omega + \vec{k}.\vec{U_1}\right)\left(kA e^{kz} + w_0'(z)\right) e^{i(\omega t + k.r)} + \vec{k}.\vec{F_1}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_2 = C\, e^{-kz}\, e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})} \\ P_2 = \dfrac{i}{k^2}\, \rho_2 \left(\omega + \vec{k}.\vec{U_2}\right) C e^{-kz}\, e^{i(\omega t + \vec{k}.\vec{r})} \end{cases}$$

si :

$$w_0(z) = \frac{i B_0^2 \mathcal{E}}{8\mu\rho_1(s + \vec{k}.\vec{U}_1)} \left[\frac{\beta}{\gamma}(1+i) e^{\alpha z} + \frac{\beta^*}{\gamma^*}(1-i) e^{\alpha^* z} \right]$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha = \gamma + \dfrac{1-i}{\delta} \\ \beta = k k_y^2 \dfrac{1}{\delta(k+\gamma)} + \dfrac{1+i}{2} + \dfrac{2k^2(1-i)}{\delta^2(k+\gamma)} - \dfrac{\alpha}{2} k_x^2 + i k^2 \\ X^* = \text{partie réelle du nombre complexe} \end{cases}$$

En imposant à l'interface d'être une surface matérielle, ce qui implique à la fois la continuité du déplacement et de la vitesse w, on détermine les constantes A et C toutes les deux proportionnelles à $\mathcal{E}$. Finalement, en traduisant le saut de pression à la traversée de l'interface, on obtient l'équation de dispersion :

$$\rho_1(s + \vec{k}.\vec{U}_1)^2 + \rho_2(s + \vec{k}.\vec{U}_2)^2 - g k(\rho_1 - \rho_2) + T k^3 + F(k) = 0$$

où le terme électromagnétique, qui ne fait que s'ajouter aux différents termes présents en hydrodynamique classique, s'écrit :

$$F(k) = \frac{B_0^2 k}{2\mu\delta} \left[1 - \cos^2\vartheta \frac{x\left\{\left[x^2 + (x^4+4)^{1/2}\right]^{1/2} + (1-x)\left[(x^4+4)^{1/2} - x^2\right]^{1/2}\right\}}{\sqrt{2}\,(x^4+4)^{1/2}} \right]$$

avec $x = k\delta$ et en désignant par ϑ l'angle $(\vec{B}, \vec{k})$

s se trouve donc déterminé par une équation du second degré admettant toujours deux racines complexes correspondant nécessairement à une solution amortie pour l'une, à une solution amplifiée pour l'autre. Par suite la seule solution interdisant qu'une perturbation s'amplifie est la solution réelle qui exige que le discriminant de l'équation de dispersion soit positif ou nul, c'est à dire :

$$-\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2} k^2 (U_1 - U_2)^2 \cos^2\vartheta_1 + g k(\rho_1 - \rho_2) + T k^3 - F(k) \geqslant 0$$

si ϑ_1 désigne l'angle $(\vec{U}, \vec{k})$

Chacun des quatre termes en présence dans cette relation influe sur le développement d'une instabilité de la façon suivante :

- Quelles que soient les valeurs de U_1, U_2, ρ_1, ρ_2 et ϑ_1 le premier terme est négatif et possède un effet déstabilisant, d'autant plus marqué que $|U_1 - U_2|$ est plus grand et que ϑ_1 est plus faible.

- Le signe du second terme est celui de la différence $\rho_1 - \rho_2$. Il traduit l'influence stabilisante ou déstabilisante des forces de pesanteur suivant que ρ_1 est supérieur ou inférieur à ρ_2 .

- Le troisième terme est toujours positif ; par conséquent la tension superficielle, luttant contre toute déformation de l'interface a un effet stabilisant d'autant plus fort que la courbure locale imposée par la perturbation est plus grande (k très grand). Cet effet est spécifique à la géométrie plane et devient au contraire déstabilisant en géométrie de révolution.

- Le dernier terme traduit l'effet du champ magnétique dont l'influence ne pourra être stabilisante que sur les vecteurs d'onde $\vec{k}$ qui rendront la fonction F(k) négative ou nulle.

Les deux premiers termes sont séparément responsables des instabilités de Kelvin Helmoltz ($|U_1 - U_2| \neq 0$) et de Rayleigh Taylor ($|U_1 - U_2| = 0$). Rappelons brièvement les principaux résultats acquis relativement à ces deux instabilités dans le but de voir comment ils seront modifiés par la présence du champ magnétique alternatif :

- Instabilité de Rayleigh Taylor en hydrodynamique

L'arrangement est stable $\forall k$ si $\rho_1 > \rho_2$; instable si $\rho_2 > \rho_1$ pour $0 \leqslant k < k_c$

avec
$$k_c = \left[\frac{(\rho_1 - \rho_2) g}{T}\right]^{1/2}$$

- Instabilité de Kelvin Helmoltz en hydrodynamique

Dans le cas de l'arrangement statique stable ($\rho_1 > \rho_2$) la tension superficielle supprime totalement l'instabilité dès que :

$$(U_1 - U_2)^2 < \frac{2(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2} \sqrt{Tg(\rho_1 - \rho_2)}$$

En l'absence de tension superficielle, l'instabilité se développe si $k > k_c$

avec : $$k_c = \frac{g(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{\rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 \cos^2 \vartheta_1}$$

Examinons maintenant l'influence du champ magnétique, au travers de la fonction F(k).

a) Le cas particulier $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ correspondant aux vecteurs d'onde perpendiculaires au champ magnétique se prête à une conclusion rapide puisque pour cette valeur de ϑ

$$F(k) = \frac{B_o^2 k}{2\mu\delta} \geqslant 0$$

F(k) comme le terme relatif aux forces de pesanteur est proportionnelle au module du vecteur d'onde. Il est clair que le champ magnétique possède dans ce cas une influence déstabilisante : en effet, par sa présence, le système est soumis à une pesanteur fictive g' telle que :

$$g' = g - \frac{B_o^2}{2\mu\delta(\rho_1 - \rho_2)}$$

ainsi lorsque $\rho_1 > \rho_2$, le champ magnétique diminue la pesanteur ($g' < g$) et par conséquent réduit l'effet stabilisant qu'elle possède dans ce cas. De même si $\rho_1 < \rho_2$ le champ magnétique augmente la pesanteur ($g' > g$) et par là même amplifie son effet déstabilisant.

Vis à vis des vecteurs d'onde perpendiculaires à sa direction, le champ magnétique est tout à fait incapable de réduire l'une ou l'autre des deux instabilités de Kelvin Helmoltz ou de Rayleigh Taylor.

Son influence déstabilisante se traduit par :

- une réduction de la vitesse relative admissible $|U_1 - U_2|$ des deux fluides dans le rapport $(g'/g)^{1/4}$ soit :

$$\left[1 - \frac{B_o^2}{2\mu\delta g(\rho_1 - \rho_2)}\right]^{-1/4}$$ vis à vis de l'écart de vitesse critique en l'absence de champ magnétique, en ce qui concerne l'instabilité de Kelvin Helmoltz.

- une réduction du domaine des vecteurs d'onde stables dont il ramène la valeur k_c à la valeur inférieure k'_c telle que $k'_c = \left(\frac{g'}{g}\right) k_c$, pour ce qui est de l'instabilité de Rayleigh Taylor.

b) Grandes longueurs d'ondes : $\alpha = k\delta \ll 1$

$$\text{Si } x \longrightarrow 0 \qquad F(k) \longrightarrow \frac{B_0^2 k}{2\mu\delta} > 0$$

Par suite pour les grandes longueurs d'onde :

- la fonction F(k) ne dépend pas de l'orientation du vecteur d'onde

- F(k) prend la valeur trouvée précédemment dans le cas des vecteurs d'onde perpendiculaires à la direction du champ magnétique. Toutes les conclusions énoncées pour $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ sont donc valables pour les perturbations de grandes longueurs d'onde. Ceci recoupe parfaitement le résultat de l'analyse qualitative faite dans le paragraphe précédent.

c) Petites longueurs d'onde : $\alpha = k\delta \gg 1$

$$\text{si } \vartheta \neq 0 \qquad F(k) = \frac{B_0^2 k}{2\mu\delta} \sin^2\vartheta > 0$$

$$\text{si } \vartheta = 0 \qquad F(k) = \frac{B_0^2}{2\mu\delta^2} > 0$$

Ainsi pour les petites longueurs d'onde, quelle que soit l'orientation du vecteur $\vec{k}$, la fonction F(k) est positive et traduit une nouvelle fois l'influence déstabilisante du champ magnétique.

d) Longueurs d'onde quelconque

La courbe suivante [10] donne les variations de F(k) en fonction de $x = k\delta$ pour différentes orientations du vecteur d'onde. Cette courbe, témoigne de l'influence constamment déstabilisante du champ magnétique puisque F(k) reste positive quels que soient le module du vecteur k et son orientation par rapport au champ magnétique :

$$0 \leqslant F(k) \leqslant \frac{B_0^2 k}{2\mu\delta}$$

Puisque pour les faibles valeurs de k, $\forall\vartheta$, la fonction F(k) se comporte comme $\frac{B_0^2 k}{2\mu\delta}$, une condition suffisante de stabilité s'écrira :

$$-\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2} k^2 (U_1 - U_2)^2 \cos^2\vartheta_1 + g k (\rho_1 - \rho_2) + T k^3 - \frac{B_0^2 k}{2\mu\delta} \geqslant 0$$

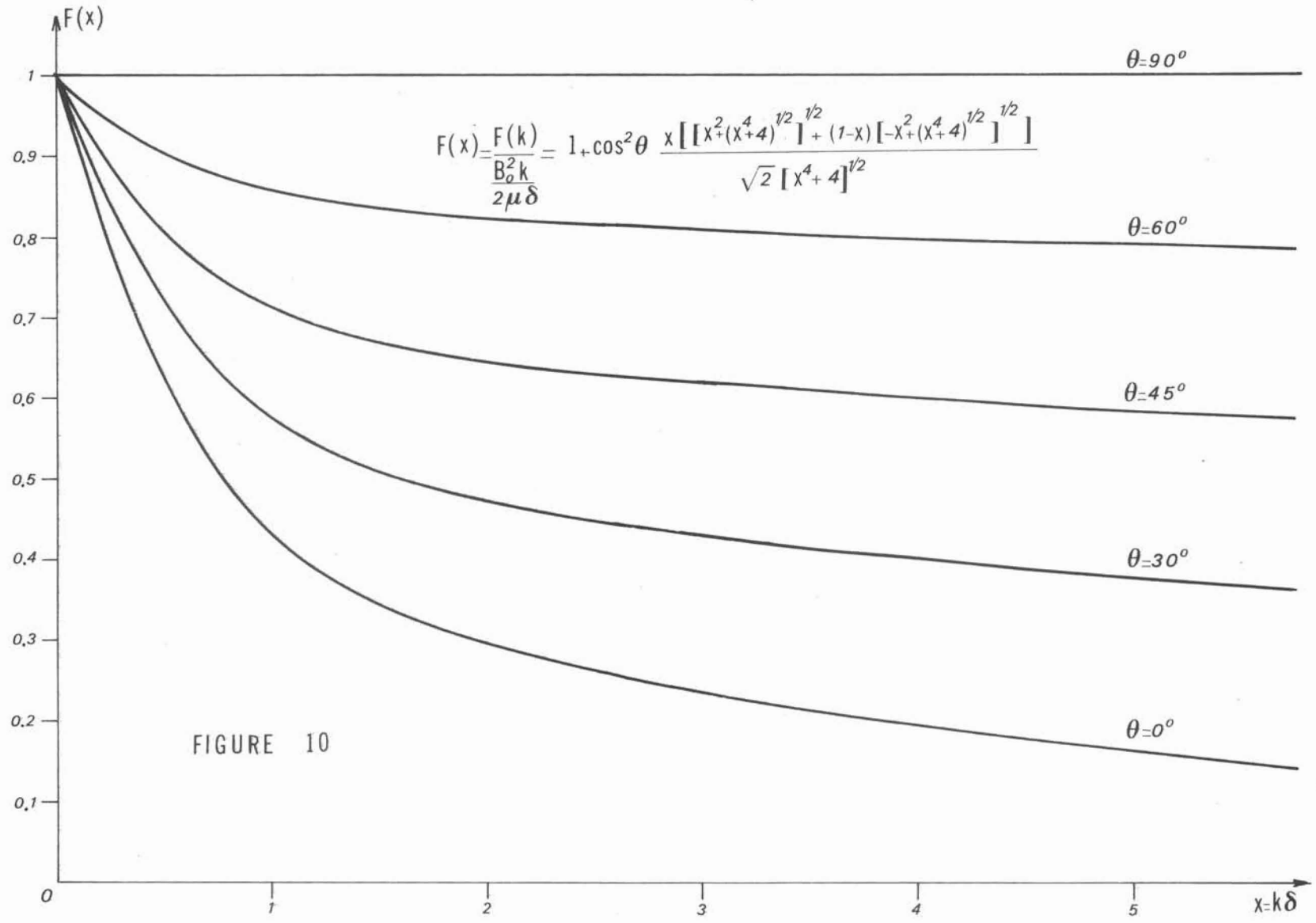

F(x)
$F(x)=\frac{F(k)}{\frac{B_o^2 k}{2\mu\delta}}=1+\cos^2\theta\ \frac{x\left[\left[x^2+(x^4+4)^{1/2}\right]^{1/2}+(1-x)\left[-x^2+(x^4+4)^{1/2}\right]^{1/2}\right]}{\sqrt{2}\left[x^4+4\right]^{1/2}}$
θ=90°
θ=60°
θ=45°
θ=30°
θ=0°
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1
2
3
4
5
x=kδ

FIGURE 10

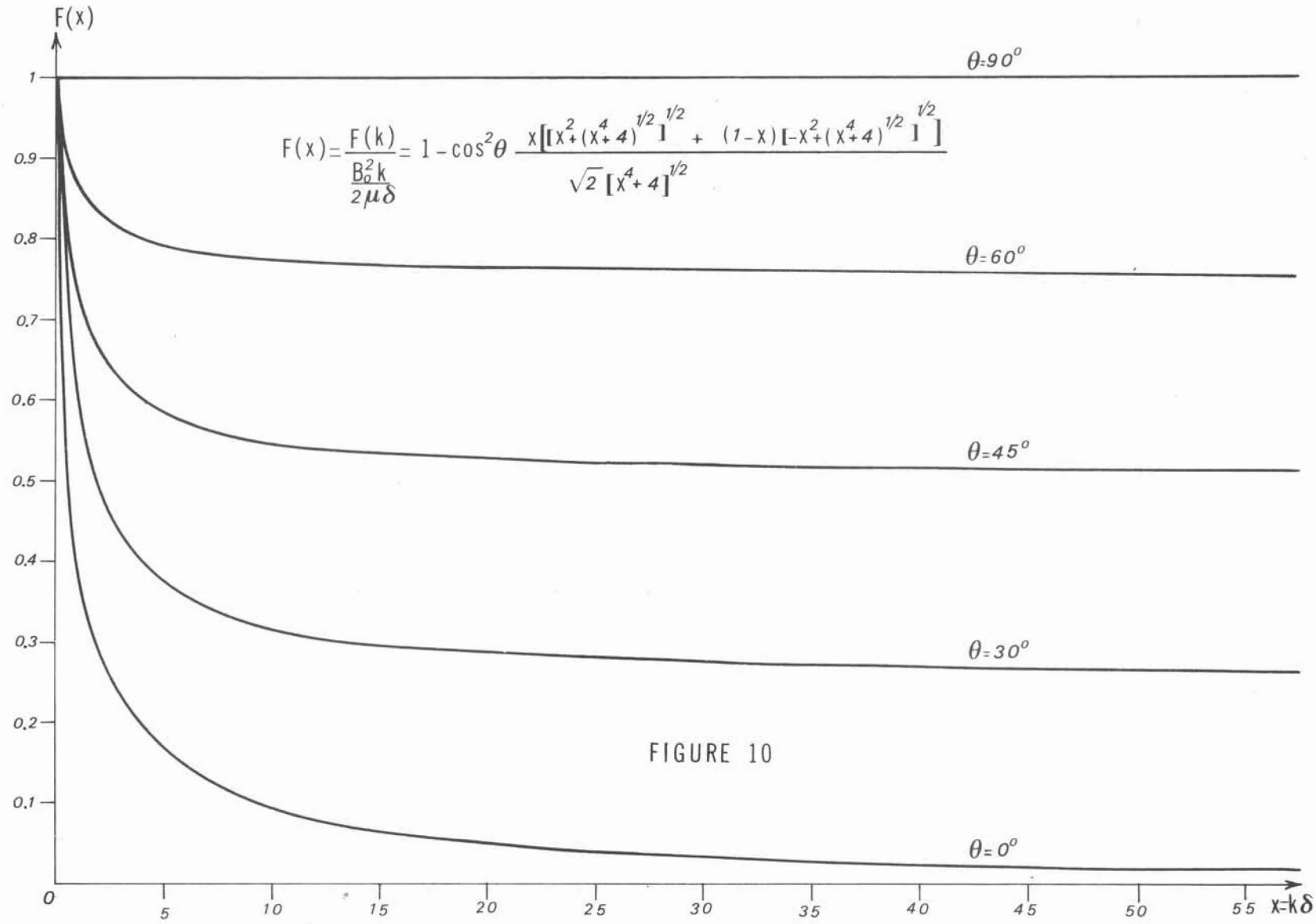

F(x)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
x=kδ
θ=90°
θ=60°
θ=45°
θ=30°
θ=0°
$F(x)=\frac{F(k)}{\frac{B_o^2 k}{2\mu\delta}}=1-\cos^2\theta\ \frac{x\left[\left[x^2+(x^4+4)^{1/2}\right]^{1/2}+(1-x)\left[-x^2+(x^4+4)^{1/2}\right]^{1/2}\right]}{\sqrt{2}\left[x^4+4\right]^{1/2}}$

FIGURE 10

- Instabilité de Rayleigh Taylor

Si $\rho_2 < \rho_1$ il y aura instabilité dès que $k \geqslant k_c$

$$\text{avec} \quad k_c^2 = \frac{1}{T}\left[(\rho_1 - \rho_2)\, g - \frac{B_0^2}{2\mu\delta}\right]$$

et instabilité $\forall k$ si

$$\frac{B_0^2}{2\mu\delta g\,(\rho_1 - \rho_2)} \geqslant 1$$

Par conséquent, un champ magnétique alternatif de pulsation ω ,(à laquelle est associée l'épaisseur de peau δ) et d'amplitude B_0 convenablement choisies peut détruire complètement les influences stabilisantes de la tension superficielle ou même d'un champ magnétique continu, dans l'arrangement de Rayleigh Taylor.

- Instabilité de Kelvin Helmoltz

Une fois encore si $\dfrac{B_0^2}{2\mu\delta g\,(\rho_1 - \rho_2)} \gg 1$, en l'absence de tension superficielle, tous les nombres d'onde sont instables, ce qui signifie que quel que soit l'écart relatif de vitesse entre les deux fluides l'instabilité se développera.

V. CONCLUSION

L'étude que nous venons d'entreprendre a permis d'isoler, d'analyser et d'interpréter de façon simple un mécanisme original, spécifique aux champs magnétiques alternatifs : le mécanisme de mutuelle influence. Ce mécanisme apparaît chaque fois qu'un inducteur alimenté par un courant alternatif se trouve à proximité d'un milieu conducteur : les courants induits dans ce milieu, alors soumis à des variations de flux importantes donnent naissance à des forces électromagnétiques d'un sens tel qu' elles tendent à augmenter l'amplitude d'ondes éventuellement présentes sur la surface libre de ce milieu. Il en résulte un effet déstabilisant du champ magnétique qui se manifeste :

- quelle que soit la longueur d'onde de la perturbation
- quelle que soit l'orientation du vecteur d'onde qui lui est associé.

La déstabilisation s'opère de façon d'autant plus intense que la longueur de la perturbation initiale est plus grande et que l'angle entre le vecteur d'onde et le champ magnétique est plus ouvert. Ce sont en effet les vecteurs d'onde normaux du champ magnétique qui sont le plus affectés par ce phénomène de mutuelle influence.

Dans les configurations plus précisément étudiées de Kelvin Helmoltz et de Rayleigh Taylor, l'amplitude et la fréquence du champ magnétique peuvent être choisies de telle façon que le mécanisme de mutuelle influence annihile totalement les effets stabilisants de la pesanteur ou de la tension superficielle : ceci se produit dès que la condition suivante est réalisée :

$$\frac{B_0^2}{2\mu\delta g(\rho_1 - \rho_2)} \geqslant 1$$

Notre étude s'est limitée à la seule géométrie plane pour laquelle la tension superficielle possède une influence stabilisante en s'opposant à toute déformation de la surface libre. Les résultats acquis sont bien évidemment valables pour des jets de métal liquide dont le rayon R, important, est très supérieur à la profondeur de pénétration du champ magnétique δ . Il serait bon cependant d'étendre cette étude au problème général de la stabilité de jets cylindriques par la prise en compte du nouveau paramètre R/δ . Dans une telle géométrie la tension superficielle agit de façon différente puisqu'elle ajoute un mécanisme déstabilisant tout à fait parallèle à celui du champ magnétique puisqu'il vise à accroître la courbure locale de la surface libre.

Il convient d'insister sur le domaine de validité de notre analyse. Dans celle-ci nous avons limité notre ambition à la seule détermination de l'effet produit par le champ magnétique sur une perturbation naissante. Les phénomènes de mutuelle influence, prédominants alors, masquent complètement d'autres mécanismes stabilisants, notamment la dissipation par effet Joule qui s'opère par l'intermédiaire des courants de conduction, directement liés au champ de vitesse. On peut alors imaginer que ce mécanisme dissipatif, négligeable lorsque la perturbation apparaît, s'intensifie à mesure que les phénomènes de mutuelle influence la forcent à s'amplifier. Une véritable compétition peut alors s'engager entre ces deux mécanismes qui devrait conduire à une saturation de l'amplitude de la perturbation à un certain niveau lorsqu'un parfait équilibre existe entre les deux effets antagonistes d'amplification par mutuelle influence et d'amortissement par effet Joule.

L'étude de la vie d'une perturbation de l'interface depuis sa naissance jusqu'à ce point de saturation revêt un grand intérêt. En effet, ce ne sont pas les mêmes modes qui sont excités par mutuelle influence et amortis par effet Joule. L'effet de mutuelle influence s'exerce essentiellement sur les vecteurs d'onde perpendiculaires au champ magnétique, c'est à dire précisément ceux qui sont parfaitement insensibles à la dissipation par effet Joule. Ce sont alors les interactions non linéaires entre les différents modes qui peuvent seules, permettre de transférer l'énergie des

perturbations depuis les régions où elle est produite (direction normale au champ magnétique) jusqu'aux régions où elle peut être dissipée (direction parallèle au champ magnétique). Cette prise en compte des mécanismes non linéaires sera l'un des objets de nos prochains travaux.

B I B L I O G R A P H I E

1 E.C. OKRESS - D.M. WROUGHTON - G. COMENETZ - P.M. BRACE - J.C.F. KELLY : "Electromagnetic levitation of solid an molten metals", Journal of Applied Physics, (1952), 23. 5.545.

2 S.R. SAGARDIA - R.S. SEGSWORTH : "Electromagnetic levitation melting of large conduction loads". I.E.E. Transactions on Industry Applications (1977), 1A-13-1, 49.

3 N. GETSELEV : "Procédé de coulée continue et semi continue de métaux et installation pour sa mise en oeuvre". Brevet n° 1.509.962 - B 22d - 4 Octobre 1966 Kuibishevsky Metallurgichesky Zavod Imeni V.I. Lenina.

4 Z.N. GETSELEV
"Dispositif pour la fabrication de lingots métalliques". Brevet n° 2.160.281-B 22 d. 17 Novembre 1971. Kuibishevsky Metallurgichesky Zavod Imeni V.I. Lenina.

5 CHANDRASEKHAR : "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Oxford University Press, (1961).

6 R.P. ZHEZHERIN : "Voprosi Magnitnoy Gidrodinamiki i Dinamiki Plasmi". Akad. Nauk Latv. SSR. Riga, Latvia, SSR (1959) - 279 (en russe)

7 J.R. MELCHER : "Continuum feedback control of instabilities on an infinite fluid interface". The Physics of Fluids, (1966), 9-10-1973.

8 J.R. MELCHER - E.P. WARREN : "Continuum feedback control of a Rayleigh -Taylor type instability". The Physics of Fluids (1966) - 9-11 - 2085.

9 V.F. GUBAREV - E.S. PASLAVSKII : "Problem of containment of large masses of liquid metal by automatically controlled magnetic field", Magnitnaya Gidrodinamika, (1973) 2 - 105.110.

10 V.F. GUBAREV - E.S. PASLAVSKII : "Suppression of hydromagnetic instabilities in liquid metal by an automatically controlled magnetic field". Magnit. Gidrod., (1973) - 4 - 45.54.

11 M.J. SCHAFFER : "Hydrodynamic surface waves with alternating magnetic fields" J. Fluid Mechanics, (1968) - 33-2- 337-351.

12 R.E. KELLY : "The stability of an unsteady Kelvin Helmoltz flow", J. Fluid Mechanics (1965), 22-3- 547.560.

13 B. ROBERTS : "On the hydromagnetic stability of an unsteady Kelvin Helmoltz flow". J. Fluid Mechanics, (1973) - 59.1. 65-76.

14 P.G. DRAZIN : "Stability of parallel flow in an oscillating magnetic field". Quart. Journ. Mech. and Applied Math., (1967), XX, 2, 201-218.

15 P.W. CONRAD - W.O. CRIMINALE : "The stability of time dependant laminar flow : parallel flows". Z. Angew. Math. Phys., (1965), 16 - 233.254.

16 A. ALEMANY - R. MOREAU : "Ecoulement d'un fluide conducteur de l'électricité en présence d'un champ magnétique tournant". Journal de Mécanique, (1977), 16 - 4 (à paraître).

17 M. GARNIER : "Rôle déstabilisant d'un champ magnétique alternatif appliqué au voisinage d'une interface'. C.R. Acad. Sc. Paris, (1977), tome 284, Série B. 365.

C O N C L U S I O N

Des études que nous avons entreprises et dont nous venons de faire l'exposé des enseignements nombreux peuvent être tirés tant sur le plan des applications que sur le plan purement fondamental.

L'étude de la Busette Electromagnétique et du dispositif de centrage et de guidage a permis de chiffrer les performances d'un procédé électromagnétique permettant de réaliser des opérations qui semblaient impossibles sans recours aucun à des parois. Comme dans le cas du procédé soviétique de coulée continue de l'aluminium, les parois sont parfaitement inutiles dans notre dispositif qui réalise un convergent, ou un divergent, électromagnétique dans lequel des lignes de champ se substituent aux parois en exerçant des efforts identiques à ceux qu'elles produisent habituellement. Il convient d'insister encore sur les avantages de ce dispositif qui élimine purement et simplement les difficultés technologiques liées à la présence des parois c'est à dire le bouchage ou encore la contamination du métal liquide par les oxydes, principaux constituants des matériaux réfractaires.

Il est difficile, cependant, de retirer une satisfaction complète de cette étude : en effet, bien que nos travaux expérimentaux aient pu mettre en évidence tous les phénomènes caractéristiques permettant de conclure que le procédé envisagé était capable de remplir les fonctions pour lesquelles il avait été conçu, avec les performances attendues, nous n'avons pu, à cause des difficultés déjà mentionnées, nous placer dans les conditions optimales de fonctionnement et ainsi apporter la preuve éclatante de la véracité des affirmations déduites de l'étude théorique. Une modification de l'installation expérimentale est en cours qui permettra, à très court terme, de réunir ces conditions favorables susceptibles de fournir une manifestation assez nette du phénomène attendu pour être accessible à l'appareil de mesure le plus crédible et le moins contestable : l'oeil. L'expérimentation des divers systèmes de centrage, de guidage et de correction de forme fera également l'objet de la même campagne d'essais.

L'étude de la "Filière Electromagnétique" pour avoir conduit à la conclusion d'une réalisation momentanément impossible n'est pas négative, bien au contraire. Elle a permis en effet de soulever un grand nombre de questions qui se posent sur les phénomènes magnétohydrodynamiques qui apparaissent dans les pompes à induction. Malheureusement les quelques éléments de réponse que nous avons pu fournir n'ont fait que soulever un petit coin du voile : les problèmes dans ce domaine sont en effet très nombreux et très délicats à aborder. Les difficultés rencontrées dans les cas simples que nous avons envisagés laissent présager de celles qu'il faudra surmonter pour mener à bien l'étude la plus générale prenant en considération les effets tridimensionnels, les effets d'entrée et de sortie, avec le souci de ne pas se limiter aux seuls comportements asymptotiques. De la poursuite de telles études dépendent les véritables possibilités d'optimisation des pompes électromagnétiques à induction et par voie de conséquence leur utilisation à plus grande échelle.

L'étude de la stabilité de l'interface métal liquide-atmposphère a permis de mettre en évidence un mécanisme très particulier par lequel un champ magnétique possède un effet déstabilisant. Ce mécanisme de mutuelle influence entre l'inducteur et l'induit liquide viole quelque peu l'intuition basée sur la connaissance des mécanismes qui régissent l'action de champs magnétiques permanents, réputés pour leur part avoir un effet généralement stabilisant : le mécanisme de mutuelle influence, absent avec de tels champs, laisse toute liberté à l'Effet Joule de dissiper l'énergie cinétique de perturbations éventuelles. Cette étude apporte un premier élément de réponse à la question posée sur l'origine des instabilités qui apparaissent à la surface d'un métal liquide confiné ou en état de lévitation. Il est à noter cependant que cette étude correspond à un cas idéal puisque l'inducteur placé à l'infini ne ressent pas les perturbations de la surface libre du métal liquide loin de laquelle il impose toujours la même valeur au champ magnétique. En outre, le champ magnétique non perturbé est parfaitement uniforme ce qui nous éloigne de la lévitation qui nécessite de réaliser un champ magnétique avec de forts gradients semblables à ceux présents dans les trous de potentiel de guidage. Ainsi en plus de la poursuite de l'étude de la stabilité de l'interface lorsque l'amplitude de la perturbation s'accroît et intensifie le mécanisme dissipatif lié aux courants de conduction, il serait bon d'envisager une nouvelle étude relative non plus à un champ magnétique uniforme mais à un champ magnétique susceptible de faire apparaître des forces de rappel (trou de potentiel) antagonistes à celles engendrées dans le métal liquide par le mécanisme de mutuelle influence.

Plutôt que d'apporter un véritable point final à chacune des études regroupées dans ce mémoire, cette synthèse ouvre des perspectives et suscite de nombreux prolongements. Ceci n'est pas pour surprendre compte-tenu de cet avantage inestimable que possède la Magnétohydrodynamique avec champs magnétiques alternatifs d'être nouvelle,

pratiquement inexplorée. Il aurait fallu, pour avoir quelque chance d'épuiser complètement un sujet, n'en retenir qu'un seul, mais il était difficile de résister à la tentation de s'engager simultanément dans plusieurs voies aussi riches et aussi prometteuses les unes que les autres.

Puissent les quelques études développées ici susciter une réelle motivation reposant sur une vision plus juste des possibilités d'application de la M.H.D. en métallurgie et servir de point de départ à d'autres travaux plus complets et plus diversifiés aboutissant à la mise au point de procédés technologiques performants susceptibles de faire progresser encore les techniques dans ce domaine et par là même de diminuer la pénibilité de certains travaux de métallurgie et de fonderie, tel est le souhait que je voudrais formuler en conclusion de ce mémoire.