HAL
open science

Convection naturelle sous champ magnétique en cavité verticale élancée - Application aux couvertures des réacteurs de fusion

Guillaume Authié

To cite this version:

Guillaume Authié. Convection naturelle sous champ magnétique en cavité verticale élancée - Application aux couvertures des réacteurs de fusion. Electromagnétisme. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 2002. Français. NNT : . tel-01338731

HAL Id: tel-01338731

https://hal.science/tel-01338731v1

Submitted on 29 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : Mécanique et Energétique.

présentée et soutenue publiquement

par

Guillaume Authié

le 28 Mars 2002.

Convection naturelle sous champ magnétique en cavité verticale élancée. Application aux couvertures des réacteurs de fusion.

sous la direction de René MOREAU

JURY

Joël	SOMMERIA	Président
Hamda	BEN HADID	Rapporteur
Jean Paul	GARANDET	Rapporteur
Thierry	ALBOUSSIERE	Examinateur
Joërg	REIMANN	Examinateur
René	MOREAU	Directeur de thèse
Gabriel	MARBACH	Co-directeur de thèse

A mes parents

Remerciements

Les travaux ici présentés ont étés réalisés au Laboratoire EPM-MADYLAM, et financés par le CEA-Cadarache. Je rend hommage, comme beaucoup d'autres avant moi, à l'environnement exceptionnel dont j'ai bénéficié au Madylam. Je suis vivement reconnaissant envers le CEA pour avoir financé cette étude.

Je tiens a exprimer ma profonde gratitude à Mr **René Moreau**, professeur des universités, qui m'a soutenu durant ces trois années de thèse. Quoique académicien, il a toujours été disponible pour m'expliquer les phénomènes physiques avec des mots simples. Je le remercie pour ses conseils avisés et sa patience. Mr Moreau est atteint d'un enthousiasme contagieux, et a constamment animé la vie scientifique du laboratoire.

Je remercie Mr **Gabriel Marbach**, responsable de la recherche sur les couvertures au CEA-Cadarache, qui a accepté de co-diriger ce travail. Je le remercie également pour sa gentillesse et son ouverture d'esprit. Je remercie aussi Mr **Guy Laffont** et Mr **Dumesnil**, qui ont étés des interlocuteurs privilégiés du CEA.

I also cordially thank Mr **Martin Cowley**, professor at Cambridge university, who accepted to initiate me to the analytical solutions of the side layers, during his 3 month stay in Madylam in 1998.

Je remercie chaleureusement Mr **Robert Bolcato**, expérimentateur de génie, sans qui l'expérience Mascot-V n'aurait pas vu le jour. Il a su trouver mieux que quiconque les parades aux montagnes de difficultées, allant de la fuite de mercure à la réduction du bruit des signaux. Je n'oublierai pas son sens de l'humour, ses anecdotes sur l'histoire du laboratoire, ni les soirées amicales avec Toshio et quelques amis à l'ombre de ses tilleuls.

L'aide de Toshio a été l'un des pilliers de cette thèse. Docteur et chercheur de l'université de Kuyshu, Mr **Toshio Tagawa** est resté au Madylam un an entre 1998 et 1999, et m'a initié aux joies de la simulation numérique. Toshio a réussi l'exploit d'apprendre le français en 6 mois, tout en venant au laboratoire pour que nous puissions adapter son code numérique à nos besoins. Il est ensuite revenu un mois l'été 2000, afin de faire évoluer notre outil. L'été 2001, je n'ai pu le voir qu'un unique jour. J'espère, et crois, que la prochaine rencontre sera plus longue.

Je n'oublie pas que la mécanique des fluides n'était pas ma spécialité avant cette thèse, et que la mise à niveau n'a pas toujours été facile. Je rend donc hommage à tous les collègues qui m'ont aidé a combler ces lacunes. Ils ont rendu cette expérience enrichissante et ont donné cette sympathique ambiance, si particulière au Madylam.

Table des matières

1 Introduction **11**

1.1 Les défis hydrodynamiques des couvertures tritigènes 11

1.2 Les couvertures dans un contexte MHD 13

1.3 La spécificité de la convection naturelle sous champ magnétique . . . 15

1.4 Le besoin de comprendre l'écoulement en cavité verticale élancée . . . 15

1.5 Les principaux régimes d'écoulements 16

1.6 Etat des connaissances 17

1.7 Méthodologie 18

2 Modélisation des écoulements convectifs MHD **21**

2.1 Hypothèses, mise en équation et adimensionnalisation 21

2.1.1 Les hypothèses de la dynamique des fluides 21

2.1.2 Les hypothèses de la thermique 22

2.1.3 Les hypothèses de l'électromagnétisme 22

2.1.4 L'état de surface des parois 23

2.1.5 Mise en équation du problème 23

2.1.6 Adimensionnalisation 24

2.1.7 Nombre de Reynolds 27

2.2 Circuit électrique et structure de l'écoulement 29

2.2.1 Coeur non visqueux 31

2.2.2 Couches limites de Hartmann 32

2.2.3 Couches limites parallèles 37

2.3 Diffusion et convection de la chaleur 39

2.4 Ecoulement parallèle en cavité infinie 41

2.4.1 Cas parallèle avec chauffage pariétal 44
2.4.2 Cas perpendiculaire avec chauffage pariétal 46
2.5 Retour sur certaines hypothèses 48
2.5.1 Variations de la pression à travers les couches limites 49
2.5.2 Variations de la température à travers les couches limites . . . 49
2.5.3 Induction du champ magnétique 51
2.5.4 Dissipation Ohmique 51
2.5.5 Approximation de Boussinesq 51
2.5.6 Effets thermoélectriques 52
2.6 Bidimensionnalisation de l'écoulement laminaire 53
2.7 En résumé... 55
2.8 Méthodes numériques 56

3 L'expérience MASCOT-Verticale 61
3.1 Introduction 61
3.2 Cellule de convection n°1 62
3.3 Cellule de convection n°2 65
3.4 Contrôle des paramètres 67
3.4.1 Paramètres géométriques : dimensions, orientation et centrage 67
3.4.2 Etat de surface : planéité, isolation électrique 68
3.4.3 Températures et nombre de Grashoff 69
3.4.4 Champ magnétique et nombre de Hartmann 72
3.5 Ordres de grandeur attendus 72
3.5.1 Cas perpendiculaire 72
3.5.2 Cas parallèle 73
3.6 Dispositifs de mesure 73
3.6.1 Le thermocouple classique à boule 73
3.6.2 Le thermocouple avec contact sur métal liquide 74
3.6.3 Le thermocouple sans boule cylindrique 76
3.6.4 Mesures de potentiel électrique et de vitesse 79
3.6.5 La sonde mobile 80
3.6.6 Mesure du flux de chaleur global 81
3.6.7 Acquisition des signaux 83

3.6.8 Mesures locales 85
3.7 Bilan des résultats expérimentaux 90

4 Champ magnétique et flux de chaleur perpendiculaires 95
4.1 Introduction 95
4.2 Tendance à la bidimensionnalisation 96
4.3 Constitution d'un modèle bidimensionnel 99
4.4 Ecoulement 2D recirculant dans la limite Pe<<1 101
4.4.1 Construction du modèle de recirculation 101
4.4.2 Comparaison du modèle et des simulations numériques 104
4.5 Régime stratifié 105
4.5.1 Modèle analytique du régime de jets thermiques 105
4.5.2 Comparaison du modèle de jets avec les résultats numériques et expérimentaux 110
4.6 Régimes pluri-cellulaires et chaotiques 115
4.7 Conclusion 119

5 Champ magnétique et flux de chaleur parallèles 127
5.1 Introduction 127
5.2 Recirculation des jets 129
5.2.1 Circulation du fluide 129
5.2.2 Courants électriques induits 132
5.3 Transport de chaleur 136
5.4 Stabilité des jets 136

6 Conclusion 141

A Annexes 145
A.1 Résolution complète des couches parallèles 145
A.1.1 détermination des fonctions F_n 145
A.1.2 Un peu de mathématiques... 146
A.1.3 Calculs du débit dans la couche parallèle 146
A.1.4 Calcul du potentiel électrique 147
A.2 Ecoulement établi dans quelques cas simples 149

A.2.1 Cas parallèle avec chauffage volumique 150

A.2.2 Cas perpendiculaire avec chauffage volumique 152

A.2.3 Cas perpendiculaire avec chauffage pariétal et une paroi de Hartmann conductrice 154

A.2.4 Cas perpendiculaire avec chauffage pariétal et les deux parois de Hartmann conductrices 156

A.3 Recirculation dans la limite Pe<<1 et N>>1 158

A.3.1 Recirculation 158

A.3.2 Transport de chaleur 161

B Bibliographie **165**

Chapitre 1
INTRODUCTION

1.1 Les défis hydrodynamiques des couvertures tritigènes

Dans les réacteurs de fusion thermonucléaire, le plasma, siège de la fusion, doit être confiné à très haute température. L'une des configurations possibles pour le confinement est le tokamak, que l'on peut décrire simplement comme une boite magnétique torique : un champ magnétique toroïdal très intense maintient les trajectoires des particules chargées à l'intérieur d'un tore 5 (figure 1). L'intensité du champ peut atteindre 5 à 10 Tesla, ce qui correspond à une pression magnétique d'environ 100 MPa. Le plasma est enveloppé d'une couverture, ayant le double rôle d'extraire l'énergie et de régénérer le combustible. C'est une structure en acier, constituée d'éléments verticaux, dits "segments", de deux sortes : les segments intérieurs, sur l'axe du tore, sont rectilignes, et les segments extérieurs, entourant le tore, sont courbés en forme de banane, comme le montre la figure 2. Dans chacun de ces segments sont aménagés des canaux verticaux dans lesquels un alliage liquide de plomb et de lithium s'écoule lentement, ainsi qu'un réseau de tubes d'eau réfrigérants à haut débit (figure 3). Le plomb capte les neutrons et autres rayonnements issus du plasma, et restitue leur énergie sous forme d'agitation thermique. Le lithium donne une réaction nucléaire avec les neutrons issus du plasma, qui régénère le tritium, combustible de la fusion thermonucléaire. L'alliage est extrait de la couverture à faible débit de façon à réaliser l'extraction du tritium dans une installation appropriée. En cas de risque de diffusion du tritium vers l'eau, au travers des tubes, une installation de décontamination supplémentaire est nécessaire, ce qui génère des coûts élevés. On pense donc utiliser des tubes double paroi recouverts d'une couche d'oxyde (ex. alumine) réalisant une barrière de perméation.

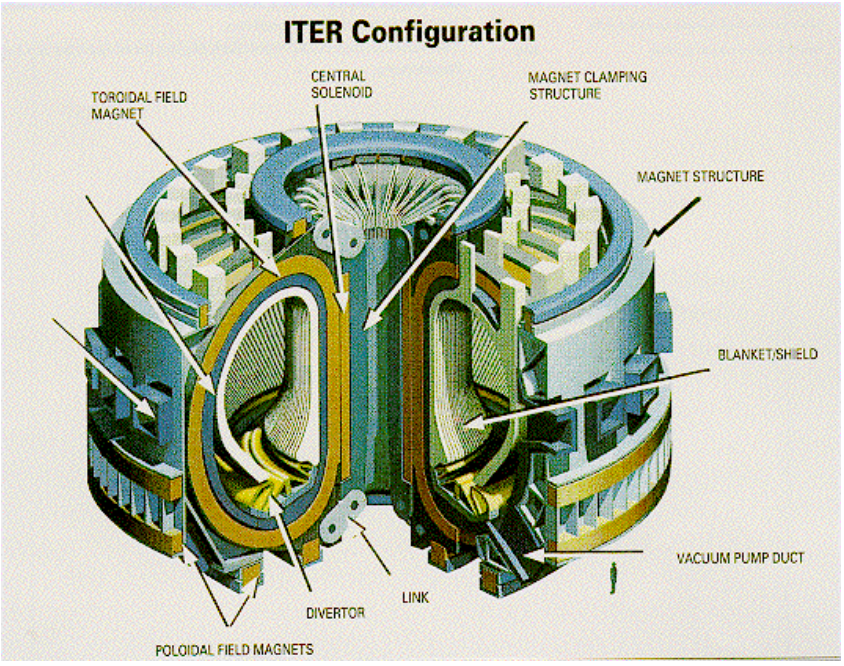


FIG. 1 Schéma d'ensemble du prochain Réacteur Expérimental Thermonucléaire International (ITER)

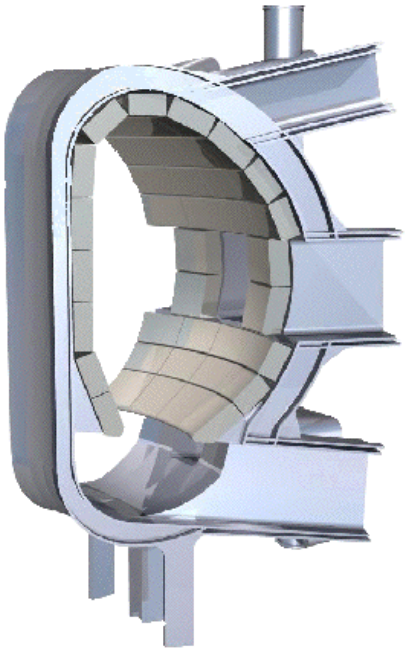


FIG. 2 Schéma des deux segments intérieurs (droit) et extérieur (courbe) de la couverture.

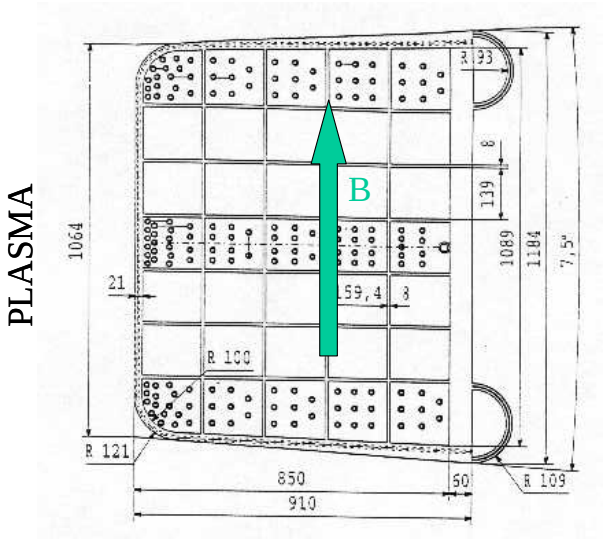


FIG. 3 Section droite du segment extérieur de la couverture. Le segment a environ 1m de côté, les canaux environ 15cm, et les tubes réfrigérents (non tous représentés) environ 1cm de diamètre.

1.2 Les couvertures dans un contexte MHD

La couverture est soumise comme le plasma au champ magnétique horizontal intense créé par des bobines supraconductrices poloïdales, ainsi qu'au flux de chaleur pariétal venant du plasma, et au flux de chaleur volumique d'origine neutronique. Les mouvements du métal liquide (ML) sont fortement freinés par les courants de Foucault qu'ils engendrent, et leur énergie est dissipée par effet joule. Il en résulte, d'une part, d'importantes pertes de charges pour le débit d'extraction du ML, mais surtout un fort ralentissement de la convection naturelle. Le nombre de Hartmann Ha représente la racine carrée du rapport de la force de Laplace aux forces visqueuses dans le coeur non visqueux de l'écoulement. Il donne aussi une mesure adimensionnelle du champ magnétique. Lorsque le champ est suffisamment fort pour laminariser l'écoulement, les couches limites visqueuses sont extrêmement minces. Les couches limites non parallèles au champ magnétique sont dites 'couches de Hartmann', et leur épaisseur varie en $(Ha.cos(B.n))^{-1}$. Les autres couches, dites 'couches parallèles', ont une épaisseur variant en $Ha^{-1/2}$. Dans les couvertures des tokamaks, les épaisseurs de ces couches peuvent respectivement atteindre le micromètre et le millimètre. Les pre-

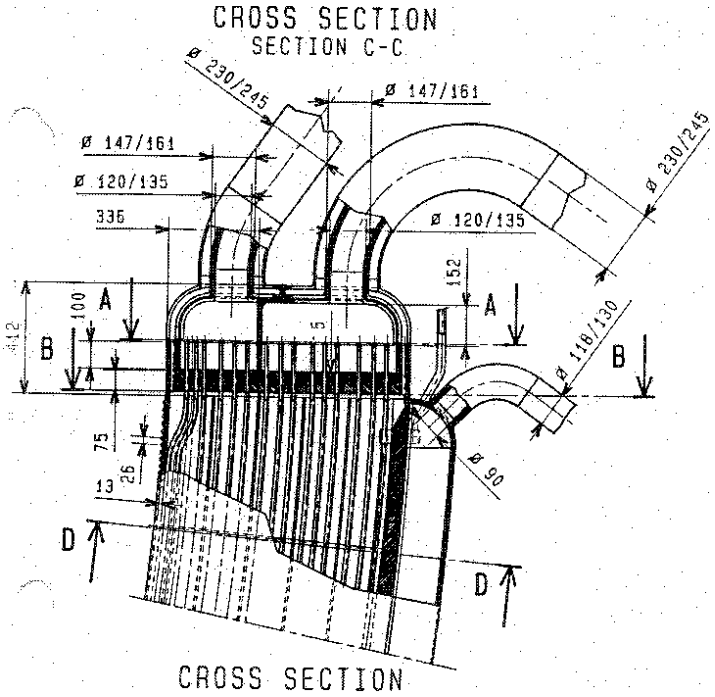


FIG. 4 Schéma de la partie supérieure du segment extérieur, avec notamment les tubes d'entrée/sortie du PbLi.

mières études d'écoulement de métaux liquides en conduite sous champ magnétique ont montré que ces couches constituaient une partie essentielle du circuit électrique, et que cela leur conférait des propriétés mécaniques primordiales : le champ électromoteur dans le coeur induit un courant électrique vers les parois 'parallèles'. Si ces parois sont isolantes, le courant est dévié dans la direction du champ, provoquant l'effondrement de la force de Laplace. Les couches parallèles peuvent ainsi être le siège de jets avec des vitesses importantes. Si le circuit électrique boucle dans les couches de Hartmann, la densité de courant y est Ha fois plus élevée que dans le coeur, et dans le sens opposé. La force de Laplace est l'opposée de celle du coeur, si bien que la résultante nulle diminue fortement le freinage du coeur. La couche de Hartmann est alors dite 'active'. Aucun jet ne peut alors apparaître dans les couches parallèles. Ces deux effets associés aux couches limites n'existent pas si les parois sont conductrices, ou d'autant moins qu'elles le sont. Ils sont en revanche susceptibles d'être présents dans les couvertures, si une barrière de perméation isole électriquement les parois.

1.3 La spécificité de la convection naturelle sous champ magnétique

La force de flottabilité due à la dilatation thermique est par nature non uniforme, et exerce un couple. Elle est comparée aux forces visqueuses par l'intermédiaire du nombre de Grashoff, noté Gr. Dans les couvertures, le métal liquide circule dans des sous-canaux des segments élancés verticalement. Si ces canaux sont reliés entre eux, comme le suggère la figure 4, le mouvement s'organise à une échelle globale, le fluide étant ascendant dans les canaux chauds, et descendants dans les canaux froids. De même, si les parois conduisent le courant électrique d'un canal à l'autre, le circuit électrique s'organise à un niveau global. Dans ce cas, les couches de Hartmann sont court-circuitées, et la vitesse dans les canaux est faible. Si les parois sont isolantes, les couches de Hartmann transportent généralement un courant électrique, sauf symétrie particulière [3]. Elles ne peuvent rester inactives que si le débit moyen dans le canal est nul (canal isolé), et si le flux de chaleur est parallèle au champ magnétique. Le champ magnétique est horizontal et de direction toroïdale, et le flux de chaleur principal est radial. Cependant, il est possible que sous l'influence des tubes réfrigérants, le flux de chaleur soit localement parallèle au champ magnétique. La conception des couvertures n'est pas encore achevée, et les options envisageables conduisent à des phénomènes très différents. L'ordre de grandeur des vitesses est déterminée en premier lieu par la conductance des parois : des parois isolantes provoqueraient des vitesses en Gr/Ha de l'ordre du m/s. Dans des zones où flux de chaleur et champ magnétique sont parallèles, ou bien sous l'"ombre" de parois ou d'obstacles conducteurs vis-à-vis du champ magnétique, le métal liquide stagne avec des vitesses en Gr/Ha^2 de l'ordre 0,1 mm/s, inférieure à la vitesse moyenne débitante ($\sim$5mm/s). Si toutes les parois sont conductrices, la vitesse est uniformément faible, en Gr/Ha^2.

1.4 Le besoin de comprendre l'écoulement en cavité verticale élancée

L'enjeu de cette étude est de donner les principales clefs pour caractériser ces phénomènes hydrodynamiques, électriques et thermiques. Pour cela, nous considérons deux configurations, basées sur une géométrie simplifiée, et à partir de laquelle nous nous autorisons quelques variations, pour éclairer le propos, voire l'élargir selon des

critères pertinents vis-à-vis des couvertures. Nous privilégions volontairement le cas de parois électriquement isolantes, qui permet de bien mettre en évidence ces phénomènes de couches limites décrits au paragraphe ci-dessus. Cette géométrie de base est la suivante : un métal liquide remplit une cavité parallélépipédique élancée suivant la verticale, de section carrée, et dont les parois sont électriquement isolantes. Deux des parois verticales face-à-face sont maintenues à des températures différentes, et la température à l'interface ML/paroi est supposée isotherme. Les deux autres parois verticales, ainsi que les parois horizontales (fond et bouchon) sont adiabatiques. Par la suite, nous appellerons direction du flux de chaleur la direction perpendiculaire aux deux parois isothermes, appellation qui n'est exacte que dans la limite des températures régies par la conduction. La cellule ainsi constituée est soumise à un champ magnétique horizontal et uniforme, disposé soit parallèlement, soit perpendiculairement au flux de chaleur. Ces deux configurations conduisent à des lois d'échelles très différentes, que nous avons citées au paragraphe précédent. Leur étude a permis de valider un code numérique qui pourra par la suite être appliqué à des cas plus complexes, et plus proches des couvertures.

Dans le chapitre 2, nous avons explicité les conséquences des quelques variations suivantes : parois parfaitement conductrices où de conductivités finies ; débit moyen non nul (convection mixte) ; source de chaleur volumique (seule où cumulée avec le flux de chaleur pariétal)...

1.5 Les principaux régimes d'écoulements

La quantité de mouvement est diffusée le long des lignes de champ magnétique. Dans le cas perpendiculaire, la vorticité est parallèle au champ, donc fortement diffusée. Il en résulte hors des couches limites de Hartmann une tendance à la bidimensionnalité. Nous bornerons notre étude au cas où le champ magnétique est suffisamment fort pour établir cette bidimensionnalité. Dans le cas parallèle, au contraire, la vorticité est perpendiculaire au champ, impliquant la persistance d'effets tridimensionnels.

Dans chacun des cas, un champ magnétique transversal suffisamment fort peut, en ralentissant l'écoulement, rendre négligeable les phénomènes de transport, tels que

la convection thermique et l'inertie. Alors, un régime d'écoulement vertical et établi peut exister. Dans le chapitre 2, nous en donnons une description asymptotique pour Ha>>1, qui nous permet de décrire la structure de base des écoulements, et de déduire les lois d'échelles en Gr/Ha dans le 'cas perpendiculaire', et en Gr/Ha^2 dans le 'cas parallèle'. Ce chapitre établit les particularités de chaque configuration, et permet d'appréhender les régimes thermohydrauliques à des vitesses plus élevées. Le cas perpendiculaire est marqué par la bidimensionnalité. Au fur et à mesure que le rapport Gr/Ha croît, on s'attend à voir successivement : (i) un régime laminaire thermo-conductif, et établi dans sa partie centrale ; (ii) une stratification des températures, avec un régime de couches limites, puis (iii) un régime ayant plusieurs cellules tourbillonnaires, et enfin (iv) un régime turbulent. Le cas parallèle est caractérisé par la présence de jets dans les couches parallèles. Bien que confinées près de la paroi, elles transportent l'essentiel du débit, et sont fortement sujettes aux instabilités. Aussi la succession des régimes peut elle être différente que dans le cas perpendiculaire..

1.6 Etat des connaissances

Les propriétés des écoulements forcés en conduite sous champ magnétique sont déjà bien connues [31]. L'influence primordiale des couches limites de Hartmann sur l'écoulement de coeur a conduit Hunt et Ludford, dès 1968, à dériver des lois de conservation à travers ces couches des conditions aux limites applicables directement au coeur non visqueux [16]. Ces conditions ont étés revues par Hunt et Shercliff [17] et permettent d'obtenir une solution exacte pour les grands nombres de Hartmann. Elles s'appliquent a la fois au coeur et aux couches parallèles [20]. Les cas de conduites de section variable [38], [39], d'un champ magnétique non uniforme [36], [30], et de parois non isolantes [41] ont ensuite étés envisagés. Le besoin de contrôler la croissance cristalline donne de l'intérêt au contrôle de la convection naturelle dans la configuration Bridgman horizontale par un champ magnétique : Les écoulements sont caractérisés [11], [2] dans la limite des températures conductives, et une expérience [8] confirme ces résultats. Alboussière [1], [3] explique l'importance des symétries pour la détermination des lois d'échelles, tandis que Cowley [7] explore la convection dans des cavités d'orientations variées.

C'est essentiellement pour les besoins de la fusion contrôlée qu'ont commencés les études de convection en cavité verticale. Dans la limite asymptotique Ha>>1, où la thermique est régie par la conduction seule, Bühler propose une résolution semi-numérique valable pour des parois de conductivités arbitraires [5]. Sur la base de simulations numériques, Ben Hadid obtient des résultats similaires [13], [14]. Dans le même temps où se déroule cette présente thèse, Aleksandrova propose des solutions semi-numériques tridimensionnelles dans des cavités parallélépipédiques ou cylindriques, incluant la recirculation [4], toujours sous les hypothèses d'une inertie nulle et des températures conductives. Maclean étudie numériquement la configuration parallèle, à la différence près que ses parois chaudes et froides imposent un flux de chaleur, et non une température uniforme [21]. Il observe un régime conductif pour $Ra/Ha^2<<1$, et stratifié pour $Ra/Ha^2>>1$, mais n'intègre pas les couches limites parallèles à sa solution. Or ces couches sont susceptibles de transporter l'essentiel du débit [19].

Les connaissances actuelles ne permet donc pas de prédire ou de calculer la convection MHD dans les couvertures. Même dans le cas d'une géométrie simple et d'un écoulement stationnaire, la modélisation analytique trouve rapidement ses limites lorsque des phénomènes non-linéaires, tels que l'inertie et l'advection de la chaleur, prennent de l'importance. Dans la géométrie complexe des couvertures, il est illusoire même d'y penser : aux difficultés précédentes s'ajoutent le couplage électrique des canaux et la redistribution des débits. Le recours à l'expérience et à la simulation numérique est inévitable. L'objectif à terme est de disposer d'un code numérique simulant les écoulements MHD dans les couvertures. La première étape de ce travail, réalisée ici, consiste à caractériser au mieux l'écoulement dans le cas d'une géométrie simple, à l'aide des trois outils dont nous disposons : la modélisation analytique, l'expérience et la simulation numérique. Une fois validés, ces outils pourront évoluer simultanément et par étapes vers des géométries plus complexes.

1.7 Méthodologie

Contrairement à ce qui abonde dans la littérature, notre objectif n'est pas de prendre en compte des géométries variées, ou des parois de conductances arbitraires. Nous avons choisi les caractéristiques les plus simples, de façon à pouvoir introduire

les extrémités de la cavité, et considérer des régimes où l'écoulement peut transporter une chaleur significative. Trois outils sont utilisés pour décrire ces écoulements : la modélisation analytique, l'expérience, et la simulation numérique. Ces outils ne sont pas appliqués dans les mêmes gammes de paramètres : la modélisation analytique concerne surtout les régimes laminaires à faible vitesse ; l'expérience, exploitée dans le cas perpendiculaire, donne une fenêtre sur la gamme de paramètres où s'effectue la transition entre le régime stratifié et le régime à plusieurs tourbillons. La simulation numérique couvre l'ensemble des paramètres, excepté les faibles nombres de Hartmann (Ha<100), où la modélisation asymptotique des couches de Hartmann n'est pas applicable. Les résultats analytiques et expérimentaux visent aussi à confirmer ponctuellement les simulations numériques.

Dans le chapitre 2, nous présentons les équations régissant les phénomènes thermiques, hydrodynamiques et électriques. Nous décrivons la structure bien connue de l'écoulement en un coeur non visqueux bordé de couches limites visqueuses. Nous montrons que la structure bien connue des couches limites de Hartmann n'est pas modifiée par la présence des forces de flottabilité, et nous dérivons des lois de conservation à travers ces couches des conditions aux limites applicables directement au coeur. Ces conditions peuvent être ensuite utilisés pour résoudre analytiquement le régime établi dans chacune des deux configurations dans une cavité infinie, dans la limite, où la thermique est régie par la conduction pure. En nous limitant aux cas des parois parfaitement isolantes et conductrices, nous proposons une résolution purement analytique basée sur des fonctions auto-similaires dans les couches parallèles, et déjà appliquée avec succès aux cas des écoulements forcés [23]. Ces solutions nous permettent de fixer les lois d'échelles, et servent de références pour la validation du code numérique.

Le chapitre 3 présente le dispositif de l'expérience MASCOT-Verticale, dans laquelle la cavité est finie et d'élancement 7,5. Les résultats expérimentaux constituent une autre référence pour valider les simulations numériques. Les chapitres 4 et 5 sont dédiés à l'étude des régimes d'écoulement en cavité finie, dans chacune des deux configurations. Aux nombres de Hartmann élevés, une description de l'écoulement aux extrémités de la cavité vient compléter la solution établie au chapitre 2. A des nombres de Hartmann plus modérés apparaissent les autres régimes d'écoulement que

nous avons cités ci-dessus. Le chapitre 4 rassemble l'ensemble des résultats acquis dans la configuration perpendiculaire, et donne une description de ces différents régimes. Le chapitre 5 tente, sur la base des simulations numériques, de donner un scénario plausible des différents régimes et transitions dans la configuration parallèle.

Chapitre 2
MODÉLISATION DES ÉCOULEMENTS CONVECTIFS MHD

2.1 Hypothèses, mise en équation et adimensionnalisation

2.1.1 Les hypothèses de la dynamique des fluides

La présente étude se situe dans le cadre de la dynamique des fluides incompressibles et newtoniens. Les propriétés du fluide sont supposées uniformes, et indépendantes de la température, excepté la densité qui, conformément à l'approximation de Boussinesq, varie faiblement et linéairement avec la température : faiblement pour que l'on puisse négliger la contribution directe de la dilatation au débit, et linéairement pour avoir une écriture simple de la flottabilité, force motrice de l'écoulement. Dans les canaux des couvertures les plus proches du plasma, les variations de températures sont de l'ordre de 200 K, correspondant à des variations relatives de densité de 4 %.

La dilatation peut donc modifier faiblement l'écoulement au sein d'un canal, mais surtout induire un débit volumique des canaux chauds vers les canaux froids. Ces effets ne sont pas étudiés, mais on tentera d'en donner l'ordre de grandeur.

La quasi-totalité de ce travail suppose la convection purement naturelle. Néanmoins, une ouverture sur la convection mixte sera introduite analytiquement pour les écoulements établis et numériquement, pour se rapprocher de la configuration des couvertures et répondre à la question fondamentale de la topologie et de la mobilité des lignes de courant.

2.1.2 Les hypothèses de la thermique

Le coeur du travail est réalisé avec une source de chaleur d'origine pariétale, pour rendre possible la comparaison avec les résultats expérimentaux. Néanmoins, le cas d'une source volumique sera abordé analytiquement et numériquement. Nous supposons en plus que la dissipation Ohmique est négligeable, ce qu'il faudra vérifier, tout particulièrement dans les couches limites, où les densités de courant peuvent être importantes.

2.1.3 Les hypothèses de l'électromagnétisme

Les métaux liquides sont suffisamment conducteurs d'électricité pour que la relaxation des charges soit considérée comme instantanée par rapport aux échelles de temps des phénomènes abordés, de sorte que la conservation de la charge se réduise à la conservation du courant électrique. Ainsi, le courant électrique comme la vitesse seront traités comme des champs conservatifs.

Le champ magnétique imposé est considéré comme invariant et uniforme. Dans la partie de l'entrefer de l'aimant utilisée pour l'expérience MASCOT-Verticale, les variations sont inférieures à 2%, donc en effet négligeables. Par contre, il n'en est pas de même dans les couvertures, qui subissent un champ dont le dimensionnement est motivé par la MHD du plasma seule, et dont les effets dans les couvertures sont considérés comme des épiphénomènes. Au champ magnétique principal, toroïdal, crée par des bobines poloïdales, est ajouté un champ magnétique secondaire, vertical, créé par des bobines toroïdales, pour prévenir les déviations verticales du plasma. Néanmoins, ce champ poloïdal étant inférieur à 10% du champ toroïdal, on considère le champ magnétique comme localement uniforme et horizontal. Encore une fois, cette approche vise à valider un code numérique qui prendra par la suite les distributions réelles en considération. Enfin, les vitesses mises en jeu sont suffisamment faibles pour ne perturber le champ magnétique que de façon négligeable. Le nombre de Prandtl magnétique $P_m = \mu\sigma\nu$ vaut environ 10^{-7} pour les métaux liquides et le nombre de Reynolds est majoré par Gr/Ha. Donc le nombre de Reynolds magnétique est faible dans notre étude, $R_m = P_m.Re << 1$, ce qui nous amène à négliger le champ

magnétique induit $b \sim R_m.B^\circ$. Ce champ est uniquement utilisé en tant que potentiel vecteur de la densité de courant électrique : $J = rot\, b/\mu$.

2.1.4 L'état de surface des parois

Les parois sont supposées planes, et de rugosité très inférieure aux dimensions des couches limites. Si dans MASCOT-V, l'épaisseur des couches limites de Hartmann ($\delta_{Ha} = 1/B^\circ.\sqrt{\rho\nu/\sigma} \sim 10^{-5}/B^\circ$) reste importante devant la rugosité (au minimum $5\mu m$ contre quelques dixièmes de μm), il n'en est pas de même pour les couvertures des réacteurs où des champs très intenses rendent l'épaisseur théorique des couches de Hartmann comparable à la rugosité. Une paroi non plane à l'échelle de la couche pourrait modifier considérablement l'écoulement de coeur, qui est piloté par les couches limites de Hartmann. Néanmoins, des travaux menés au Laboratoire des Champs Magnétiques Intenses de Grenoble [22] ont montré que les propriétés des couches de Hartmann ne variaient pas quand leur épaisseur était inférieure à la rugosité.

2.1.5 Mise en équation du problème

Les équations gouvernant les phénomènes sont l'équation de la chaleur, l'équation de Navier-Stokes intégrant la force de Laplace $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, la loi d'Ohm et les conservations de la masse et de la charge, qui se traduisent en conservation des courants hydrodynamique et électrique :

$$\rho Cp \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}.\nabla)\, T \right\} = \lambda.\nabla^2 T + \Pi_V \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}.\nabla)\, \mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu.\nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{\rho} - \beta(T - T_0)\mathbf{g} \tag{2.2}$$

$$\frac{\mathbf{J}}{\sigma} = -\nabla\varphi + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \tag{2.3}$$

$$div\mathbf{V} = 0 \tag{2.4}$$

$$div\, \mathbf{J} = 0 \tag{2.5}$$

La source volumique de chaleur Π_V comprend la dissipation Ohmique $\mathbf{j}^2/\sigma$, que nous considérons comme négligeable. A ces équations, il faut ajouter les conditions aux

limites thermiques, hydrodynamiques et électriques.

$$\begin{aligned} \text{2 parois isothermes} \quad T_{(n=0)} &= T_c \quad ou \quad T_f && (2.6)\\ \text{4 parois adiabatiques} \quad \frac{\partial T}{\partial n} &= 0 && (2.7)\\ \text{6 parois adhérentes} \quad \mathbf{V} &= 0 && (2.8)\\ \text{6 Parois électriquement isolantes} \quad \mathbf{J}.\mathbf{n} &= 0 && (2.9) \end{aligned}$$

D'autres conditions aux limites sont ponctuellement utilisées de façon à généraliser le propos. La modélisation des couches de Hartmann est établie pour des parois minces de conductivités finies, à l'interface desquelles Shercliff [31] propose de réduire la conservation du courant à [23, p. 132] :

$$\mathbf{J}.\mathbf{n} = \sigma_W.\delta_W.\nabla_\perp^2 \Phi_W \tag{2.10}$$

Le cas d'une surface libre en $z = h$, susceptible d'exister dans l'expérience DIADEMO, est caractérisé par l'absence de frottement et l'équilibre de la pression. La tension superficielle et la convection Marangoni qu'elle engendre sont négligés.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_{//}}{\partial z} &= 0, \\ P &= P_{ext} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Enfin, dans les couvertures, un faible débit D impose une convection faiblement mixte (Ri<<1). La puissance que l'opérateur doit appliquer est fonction des pertes de charges (voir), qui dépendent du régime d'écoulement, voire de la précision des modèles analytiques et numériques. Les résultats ne sont pas comparables en fonction de leur perte de charge, mais de leur débit volumique :

$$\iint_{z=cte} W.dX.dY = D \tag{2.12}$$

Dans le cas d'une convection naturelle en une cavité infinie, la nullité du débit n'est pas imposée par des parois imperméables, mais par la condition $D = 0$.

2.1.6 Adimensionnalisation

On s'intéresse au régime stationnaire pour lequel on construit l'adimensionnalisation. Le choix des grandeurs de référence est guidé par l'équilibre entre flottabilité

et force de Laplace d'une part, et entre densité de courant électrique et champ électromoteur $V \times B$ d'autre part. Comme on le verra dans le paragraphe consacré aux écoulements parallèles établis suivant la verticale, ce choix n'est pertinent que lorsque le flux de chaleur et le champ magnétique sont parallèles. Néanmoins cette unification des notations pour deux configurations aux lois d'échelles différentes facilite leur comparaison. Majuscules et minuscules désignent respectivement les variables avec et sans dimension. Les vecteurs sont indiqués en gras. On désigne l'écart de température par $\Delta T = T_C - T_F$ (le laplacien étant toujours noté ∇^2). Coordonnées cartésiennes, temps, température, densité de chauffage volumique, vitesse, densité de courant, potentiel électrique et pression adimensionnels s'écrivent :

$$(x, y, z) = \frac{(X, Y, Z)}{L}, \qquad \tau = \frac{t\nu}{L^2},$$

$$\theta = \frac{T - \frac{T_C + T_F}{2}}{T_C - T_F}, \qquad \pi_V = \frac{\Pi_V . L^2}{\lambda \Delta T},$$

$$\mathbf{v} = (u, v, w) = \frac{\mathbf{V} L}{\nu} = \frac{(U, V, W)\, L}{\nu}, \qquad \mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z) = \frac{\mathbf{J} L}{\sigma \nu B^\circ},$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{\nu B^\circ}, \qquad p = \frac{P L^2}{\rho \nu^2}. \tag{2.13}$$

Parmi les nombres adimensionnels utilisés, on distingue les paramètres imposés des nombres servant à quantifier un effet ou à montrer qu'il est négligeable, conformément aux hypothèses faites plus haut. La vitesse de référence n'étant pas une vitesse caractéristique, il est plus prudent de ne pas donner ici leur interprétation classique aux paramètres Gr, Pr, Ra, Ha. Les rapports de force ou de temps caractéristiques pour chacune des deux configurations parallèles et perpendiculaires apparaîtront plus clairement après leur résolution.

paramètres	**symbole**	**valeur**
Nombre de Grashoff	Gr	$\dfrac{g\beta(T_h - T_c)L^3}{\nu^2}$
Nombre de Prandt	Pr	$\dfrac{\nu}{k}$
Nombre de Rayleigh	Ra	$Pr.Gr$
Nombre de Hartmann	Ha	$\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho\nu}}B^{\circ}L$
Conductance relative de la paroi	C_w	$\dfrac{\sigma_w e}{\sigma L}$
Elancement	H	$\dfrac{L_z}{L}$

et aussi...

Nombre de Prandt magnétique	P_m	$\mu\sigma\nu$

autres nombres	**symbole**	**valeur**
Nombre de Reynolds	Re	$\dfrac{VL}{\nu}$
Paramètre d'interaction	N	$\dfrac{Ha^2}{\mathrm{Re}}$
Nombre de Péclet	Pe	$\mathrm{Pr}\,.\,\mathrm{Re}$
Nombre de Reynolds magnétique	Rm	$P_m.\,\mathrm{Re}$
Nombre de Nusselt	Nu	$\dfrac{\Pi.L}{\lambda\Delta T}$,

où Π est le flux global de chaleur.

Les équations de la chaleur, de Navier-Stokes, les loi d'Ohm et de conservations s'écrivent en notations adimensionnelles

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + (\mathbf{v}.\nabla)\,\theta = \mathrm{Pr}^{-1}\left[\nabla^2\theta + \pi_V\right] \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v}.\nabla)\,\mathbf{v} = -\nabla p + \nabla^2\mathbf{v} + Ha^2.\mathbf{j}\times\mathbf{y} + Gr.\theta\mathbf{z} \tag{2.15}$$

$$\mathbf{j} = -\nabla\varphi + \mathbf{v}\times\mathbf{y} \tag{2.16}$$

$$div\,\mathbf{v} = 0 \tag{2.17}$$

$$div\,\mathbf{j} = 0 \tag{2.18}$$

Les conditions aux limites ne changent pas de forme, excepté les limites de la température adimensionnelle, $\theta_{C,F} = \pm 0.5$. A l'interface d'une paroi mince non isolante, la conservation du courant (2.10) devient :

$$\mathbf{j}.\mathbf{n} = C.\nabla^2_{\perp}\varphi_w \tag{2.19}$$

L'étude analytique qui suit concerne les écoulements stationnaires($\partial_\tau = 0$), sans advection de chaleur ni de quantité de mouvement ($(\mathbf{v}.\nabla)\,\theta = 0$, $(\mathbf{v}.\nabla)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$). Les instationnarités et l'influence des termes de transport seront considérées dans les chapitres suivants.

2.1.7 Nombre de Reynolds

En hydrodynamique classique, le nombre de Reynolds est une mesure de l'inertie globale d'un écoulement (sa quantité de mouvement totale), et permet d'estimer, si l'écoulement n'est pas parallèle et établi (équivalent d'un mouvement rectiligne uniforme, en mécanique du solide), le rapport des forces d'inertie et de viscosité. En MHD, le paramètre d'interaction, dont l'inverse compare les forces d'inertie aux forces de Laplace est plus pertinent, celles-ci dominant dans le coeur. Au chapitre 4, nous montrons que le critère de bidimensionnalité dans la configuration perpendiculaire dépend du paramètre d'interaction et non du nombre de Reynolds. Au demeurant, il existe une relation simple entre les deux nombres (cf. chapitre 4). La vitesse adimensionnelle est construite comme un nombre de Reynolds (**??**), et donne une estimation des forces d'inerties si l'écoulement est assez homogène. En revanche, l'inertie dans un jet n'est pas donnée par sa vitesse, mais par son débit. Lorsque l'inertie prend

de l'importance le régime s'écarte des solutions asymptotiques, et devient instable. Il est donc nécessaire d'estimer les forces d'inertie. Dans les jets de parois que nous rencontrons (jets des couches parallèles ou jets thermiques), les forces visqueuses sont comparables aux autres forces, donc le nombre de Reynolds est pertinent. De plus, ces jets transportent l'essentiel du débit, donc déterminent le nombre de Reynolds (le nombre de Reynolds global est égal au nombre de Reynolds construit sur le jet). Au chapitre 5, nous étudions la stabilité des jets dans les couches parallèles, et l'utilisation d'un nombre de Reynolds permet la comparaison avec les résultats obtenus pour des jets similaires, en convection forcée. Lorsque l'écoulement est parallèle et établi, les forces d'inertie sont nulles. En convection naturelle, le nombre de Reynolds donne alors une estimation des forces d'inertie dans les écoulements recirculants.

En convection forcée, le nombre de Reynolds est défini à l'aide de la vitesse moyenne débitante, facilement mesurable, et en donne une mesure adimensionnelle. En convection naturelle, le débit moyen est nul, ce qui nous amène à considérer une nouvelle définition. La première solution est de considérer le 'débit absolu' $\iint |W|\, dX.dY$ à travers une section. Son utilisation est simple dans le cas d'un écoulement établi en cavité infinie. Expérimentalement, il est mesurable par l'intermédiaire d'une série d'électrodes à une hauteur donnée (à mi-hauteur dans Mascot, voir chapitre 3), dans la configuration perpendiculaire où l'écoulement est bidimensionnel, et où il existe une relation entre le potentiel électrique et le débit (chapitre 4). Hors la série d'électrodes peut ne voir qu'un espace entre deux tourbillons, où la vitesse est très faible. Etant donnée l'impossibilité d'avoir des sondes sur toute la surface d'une paroi de Hartmann, le nombre de Reynolds reste expérimentalement inaccessible. Aucune définition du nombre de Reynolds n'est donc préférable du point de vue du manipulateur. Nous choisissons donc une définition établissant un lien évident avec l'énergie cinétique. La même définition est utilisable en cavité finie et infinie, ce qui facilite les comparaisons, et elle s'exprime en notations dimensionnelles et adimensionnelles par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}^{\infty} &= \frac{\sqrt{\iint \mathbf{V}^2 dX.dY}}{\nu} = \sqrt{\iint \mathbf{v}^2 dx.dy} \\
\mathrm{Re} &= \frac{1}{\nu}\left(\frac{\iiint \mathbf{V}^2 dX.dY.dZ}{\int dZ}\right)^{1/2} = \left(\frac{\iiint \mathbf{v}^2 dx.dy.dz}{H}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, l'énergie cinétique par unité de volume est

$$Ec_{vol} = \frac{\rho\nu^2}{2L^2}\,\mathrm{Re}^2$$

En cas de convection forcée ou mixte, la définition ne correspond pas tout à fait à la définition générale : outre le fait qu'elle moyenne une énergie cinétique, et non une vitesse, elle utilise seulement le quart du périmètre mouillé, L, donc donne une valeur quatre fois plus élevée que la définition standard.

La résolution du régime établi qui suit permet d'estimer le nombre de Reynolds, au premier ordre en Ha^{-1}. Pour le cas parallèle, on peut distinguer le nombre de Reynolds lié au coeur, très faible, et le nombre de Reynolds global, qui est imposé par les jets. Le nombre de Reynolds construit sur un jet est intéressant pour en étudier la stabilité.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}_{\perp}^{\infty} &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{Gr}{Ha} \\ \mathrm{Re}_{//}^{\infty} &\sim \frac{Gr}{Ha^{3/2}} \end{aligned}$$

2.2 Circuit électrique et structure de l'écoulement

La force de Laplace $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ qui équilibre la flottabilité est très hétérogène : d'une part, le courant électrique peut être confiné dans des couches limites minces, et d'autre part, la force s'annule lorsque la densité de courant s'aligne avec le champ magnétique, comme c'est la cas le long des parois isolantes et parallèles au champ magnétique. Ainsi, les couches limites pariétales ne sont pas seulement le lieu d'apparition de la viscosité, mais aussi le siège de phénomènes électriques originaux. Les couches limites parallèles au champ magnétique peuvent donner des jets de fluide avec des débits supérieurs au débit du coeur, et les couches limites de Hartmann peuvent piloter l'écoulement de coeur. La structure de l'écoulement en un coeur et des couches limites est donc également pertinente pour le circuit électrique. Nous désignons les variables du coeur par l'exposant ($^\circ$).

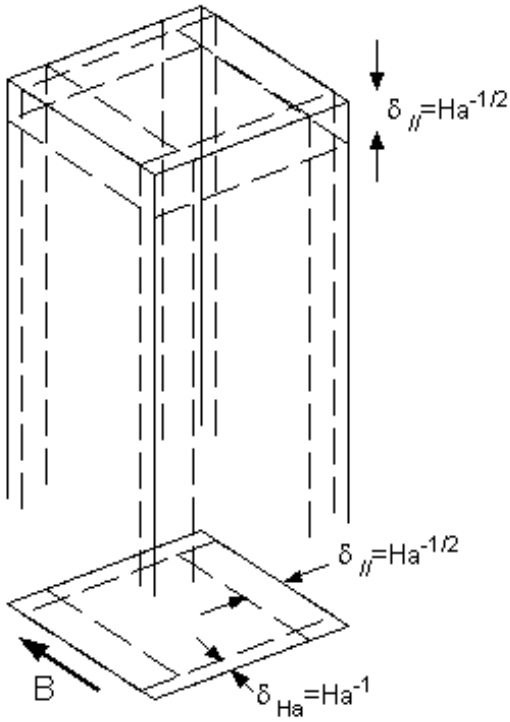


FIG. 1 Structure de l'écoulement en un coeur non visqueux, et des couches limites parallèles et de Hartmann.

La loi d'Ohm permet d'exprimer la conservation du courant électrique par :

$$\nabla^2\varphi = (\nabla_\perp \times \mathbf{v}_\perp)\,.\mathbf{y} = \Omega_\mathbf{y}, \tag{2.20}$$

ce qui permet, en négligeant l'inertie et en utilisant le couple de la force de Laplace $rot\,\mathbf{j} \times \mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y}$, de projeter l'équation du moment cinétique suivant y :

$$0 = \nabla^4\varphi - Ha^2.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - Gr.\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{2.21}$$

Dans le coeur, on accède ainsi directement à la dérivée seconde du potentiel de coeur dans la direction du champ magnétique, et à son Laplacien dans la direction perpendiculaire :

$$\frac{\partial^2\varphi^\circ}{\partial y^2} = -\frac{Gr}{Ha^2}\frac{\partial\theta^\circ}{\partial x} \tag{2.22}$$

$$\nabla_\perp^2\varphi^\circ = \Omega_\mathbf{y}^0 + \frac{Gr}{Ha^2}\frac{\partial\theta^\circ}{\partial x} \tag{2.23}$$

Par soustraction avec la solution de coeur, on obtient une équation, valable à la fois pour les couches limites de Hartmann et les couches limites parallèles. On reconnaît de gauche à droite les moments des forces de viscosité, de Laplace et de flottabilité :

$$0 = \nabla^4 (\varphi - \varphi^\circ) - Ha^2 \frac{\partial^2 (\varphi - \varphi^\circ)}{\partial y^2} - Gr. \frac{\partial (\theta - \theta^\circ)}{\partial x} \tag{2.24}$$

La simplification du Laplacien donne les épaisseurs respectives des couches, $\delta_{Ha} = Ha^{-1}$, $\delta_{//} = Ha^{-1/2}$. Les solutions données aux paragraphes suivants supposent que la température et la pression ne varient pas à travers les couches limites. Ces hypothèses seront vérifiées au paragraphe **2.5**. L'équation précédente donne alors la variation exponentielle du potentiel dans la couche de Hartmann. Les trois paragraphes qui suivent donnent la résolution couplée des équations dans le coeur, les couches limites de Hartmann, et les couches limites parallèles.

2.2.1 Coeur non visqueux

En l'absence d'inertie, la composante j_x^0 du courant électrique est déterminée par l'équilibre dans (2.15) entre les forces de flottabilité et de Laplace :

$$j_x^0 = -\frac{Gr}{Ha^2}\theta. \tag{2.25}$$

La conservation du courant électrique établit donc un lien entre le potentiel du coeur aux variations de la flottabilité, ainsi que nous l'avons montré par la relation (2.22). Cette relation est une variante du théorème de Taylor-Proudman MHD [23, p. 128], qui établit la bidimensionnalité d'un écoulement forcé en conduite : en l'absence de flottabilité, la relation se réduit à $\partial_y^2 \varphi^\circ = 0$, et si aucun courant n'est imposé dans la direction du champ, à $\partial_y \varphi^\circ = 0$. La relation (2.20) indique alors que la composante $\Omega_{\mathbf{y}}^0$ de la vorticité ne varie pas dans la direction du champ. En présence de flottabilité, la forme générale de (2.22) dépend des orientations relatives de la gravité $\mathbf{g}$, du gradient de température $\nabla\theta$, et du champ magnétique $\mathbf{B}$:

$$\frac{\partial^2 \varphi^\circ}{\partial y^2} = \frac{Gr}{Ha^2} (\nabla\theta \times \mathbf{y}) . \frac{\mathbf{g}}{g} \tag{2.26}$$

Dans le cas parallèle, le potentiel est nul dans le coeur. Dans le cas perpendiculaire, il est parabolique : $\partial_y^2 \varphi^\circ = Gr/Ha^2$. La section suivante, consacrée aux couches de

Hartmann, montre que si les parois sont isolantes, des potentiels en Gr/Ha sont nécessaires pour forcer le courant à boucler dans ces couches. Ces potentiels se répercutent sur le coeur, masquant cet effet parabolique. On peut alors déjà déduire ce que l'on établira en fin de chapitre : la bidimensionnalisation de l'écoulement laminaire dans la configuration perpendiculaire, avec des parois isolantes, ne dépend que du paramètre Ha, et le taux de variation résiduelle dans la direction du champ décroît en Ha^{-1}.

Le modèle des couches de Hartmann qui suit permet de définir des conditions aux limites applicables au coeur, donc d'intégrer (2.22), et ainsi de déterminer complètement l'écoulement de coeur. Cette intégration fait intervenir deux constantes, respectivement liées au courant injecté par les plaques parallèles, ici nul, et au débit total de l'écoulement. Des couches parallèles ayant un débit important doivent être considérées pour le calcul de la dernière constante (ex. chauffage volumique). Dans certains cas particuliers (chauffage pariétal), la symétrie nous affranchit de ce calcul.

2.2.2 Couches limites de Hartmann

Les couches de Hartmann se distinguent des couches limites visqueuses classiques par leurs propriétés électriques. Dans le coeur, le courant électrique est lié à la vitesse par une relation locale (la loi d'Ohm). Dans les couches de Hartmann, la vitesse s'annule donc n'est plus génératrice de courant électrique. Le courant est alors déterminé par le potentiel électrique. Celui ci peut être imposé de l'extérieur (injection de courant), ou par la nécessité de boucler le courant de coeur. La couche de Hartmann peut être court-circuitée totalement ou partiellement par la paroi, selon sa conductance. Ces deux éléments du circuit électrique sont "en parallèle", avec les conductances adimensionnelles respectives Ha et C (celle du coeur étant 1). Lorsque la paroi est isolante, le courant transversal s'annule, donc le potentiel varie peu à travers la couche ($\partial_y \varphi = -j_y << j_x \simeq \partial_x \varphi$). Il résulte que les variations du potentiel dans la couche sont imposées au coeur, et y sont équilibrées non par le courant, mais par le champ électromoteur $\mathbf{v} \times \mathbf{y}$. Lorsque les deux couches de Hartmann réalisent la fermeture du circuit électrique, elles sont le siège d'une force de Laplace opposée à celle du coeur, réduisant le freinage du coeur aux seules forces de frottement dans les couches. Elles sont alors dites **actives**, et le sont simultanément.

Une structure simple

L'analyse quantitative qui suit montre que la vitesse du coeur à la sortie de la couche est proportionnelle à l'intensité transitant dans la couche. Bien sûr, cette propriété disparaît lorsque la couche de Hartmann est **passive**, c'est à dire lorsqu'elle ne transporte pas de courant significatif. Dans les deux cas, la connaissance de solutions analytiques simples nous dispense de leur résolution (analytique ou numérique) en reportant leur influence sur de nouvelles conditions aux limites pour le coeur. Ce qui suit concerne uniquement les couches de Hartmann. L'équation du mouvement dans le plan perpendiculaire est

$$0 = -\nabla_\perp p + \nabla^2 \mathbf{v}_\perp - Ha^2 \left(\nabla_\perp \varphi + \mathbf{v}_\perp\right) + Gr.\theta \mathbf{z} \tag{2.27}$$

Après soustraction avec la solution de coeur, simplification du Laplacien, et en tenant compte du fait que $Ha^2 \nabla_\perp \left(\varphi - \varphi^\circ\right)$ soit seulement de l'ordre de $\Omega_{\mathbf{y}}$, on obtient une équation valable à l'ordre Ha^{-1}, et de laquelle résulte, avec la condition d'adhérence, les profils bien connus des couches limites de Hartmann :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Ha^2}\frac{\partial^2 \mathbf{v}_\perp}{\partial y^2} &= \left(\mathbf{v}_\perp - \mathbf{v}_\perp^0\right) + \vartheta(Ha^{-1}) \\ \mathbf{v}_\perp &= \mathbf{v}_\perp^0 - \left[\mathbf{v}_\perp^0\right]_{n=0} e^{-Ha.n} + \vartheta(Ha^{-1}) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Dans la projection de la loi d'Ohm dans le plan perpendiculaire, $\mathbf{j}_\perp - \mathbf{j}_\perp^0 = -\nabla_\perp \left(\varphi - \varphi^0\right) + \left(\mathbf{v}_\perp - \mathbf{v}_\perp^0\right) \times \mathbf{y}$, le champ électrique est Ha^2 fois plus petit que le champ électromoteur, ce qui permet d'accéder au profil de la densité de courant électrique :

$$\mathbf{j}_\perp - \mathbf{j}_\perp^0 = -\left(\left[\mathbf{v}_\perp^0\right]_{n=0} \times \mathbf{y}\right) e^{-Ha.n} + \vartheta(Ha^{-1}) \tag{2.29}$$

Un courant électrique j_y^0 pénètre dans la couche de Hartmann, et y est d'autant plus déviée en un courant longitudinal $j_\perp$ que la paroi est isolante. La conservation du courant électrique permet de donner au premier ordre les variations du potentiel dans la couche :

$$\frac{\partial^2 \left(\varphi - \varphi^\circ\right)}{\partial n^2} = -\left(\nabla_\perp \times \left[\mathbf{v}_\perp^0\right]_{n=0}\right) .\mathbf{y}.e^{-Ha.n} + \vartheta(Ha^{-1}) \tag{2.30}$$

$$\varphi = \varphi^\circ - \frac{\left[\Omega_{\mathbf{y}}^0\right]_{n=0}}{Ha^2}.e^{-Ha.n} + \vartheta(Ha^{-3}) \tag{2.31}$$

Une action sur le coeur

La relation (2.29) entre le courant dans la couche de Hartmann et la vitesse du coeur, peut être exprimée de façon globale, par une intégration sur l'épaisseur de la couche.

$$\mathbf{I}_{Ha} = \int \left(\mathbf{j}_\perp - \mathbf{j}_\perp^0\right) dn = -\frac{1}{Ha}\left(\left[\mathbf{v}_\perp^0\right]_{n=0} \times \mathbf{y}\right) + \vartheta(Ha^{-2}) \tag{2.32}$$

$$\left[\mathbf{v}_\perp^0\right]_{n=0} = Ha.\left(\mathbf{I}_{Ha} \times \mathbf{y}\right) \tag{2.33}$$

Cet effet, fondamental, est réversible, c'est à dire qu'un mouvement dans le coeur entraîne un courant électrique dans la couche, et que *a contrario*, l'imposition d'un courant électrique dans la couche impose de fortes vitesses au coeur. Il existe des pompes MHD fonctionnant sur ce principe [24, p. 44], qui permet d'éviter l'intrusion d'une hélice dans le métal liquide, souvent chaud et corrosif. Quantité d'expériences de MHD l'utilisent pour mettre un fluide en mouvement. Dans l'expérience MATUR [22], un courant radial dans un cylindre engendre un écoulement azimutal. Dans la configuration qui nous intéresse, le courant est engendré par l'écoulement dans le coeur. Dans le cas perpendiculaire, la nécessité de boucler le circuit électrique force le courant à se retourner dans les couches de Hartmann. La force de Laplace dans la couche est donc de même amplitude, mais opposée à la force de Laplace dans le coeur.

Un bilan du courant électrique à travers la couche établit la relation entre la vorticité et les échanges de courant :

$$\nabla_\perp I_{Ha} = \left[j_n - j_n{}^\circ\right]_{n=0} = -\frac{\left[\Omega_{\mathbf{y}}^0\right]_{n=0}}{Ha} + \vartheta(Ha^{-2}) \tag{2.34}$$

Ainsi, un tourbillon d'axe parallèle au champ injecte un courant dans la couche. En supposant le tourbillon bidimensionnel entre les deux parois de Hartmann, chaque tranche du tourbillon comprise dans [y,y+dy] engendre un courant radial, qui est dévié au coeur du tourbillon vers les couches de Hartmann. Pothérat [26] montre que le courant total $\mathbf{I}_y$ généré par le tourbillon varie linéairement avec y, donc que le potentiel varie quadratiquement. Le tourbillon n'est pas tout à fait 2D, mais légèrement bombé, comme un "tonneau". Quoiqu'il en soit, la relation (2.34) montre aussi que l'on ne

peut produire un tourbillon en injectant un courant par la paroi de Hartmann : un courant traversant la couche ne suffit pas, il faut qu'il y soit dévié, pour devenir une source du courant transversal ($\nabla_\perp I_{Ha} \neq 0$). Lorsque la paroi est isolante, cette relation s'écrit

$$\left[\Omega^0_{\mathbf{y}}\right]_{n=0} = Ha.\left[j^0_n\right]_{n=0} \tag{2.35}$$

En convection naturelle, l'activation des couches limites de Hartmann dépend des symétries [3]. Intégrée d'une paroi de Hartmann à l'autre, la relation (2.22) donne le courant injecté par le coeur dans les deux couches de Hartmann :

$$-\left[j^0_n(y=0) + j^0_n(y=1)\right] = \frac{Gr}{Ha^2}\int_{y=0}^{y=1} \frac{\partial\theta^\circ}{\partial x}.dy \tag{2.36}$$

Cette relation donne seulement une condition suffisante à l'activation des couches. Il apparaît clairement que le profil pair de $\theta(y)$ dans la configuration perpendiculaire provoque l'activation des couches de Hartmann. Intuitivement, la vitesse du coeur ne change pas de signe le long d'une couche parallèle. Le courant injecté dans celle-ci est nécessairement dévié vers les couches de Hartmann. Au contraire, l'imparité de la vitesse dans la configuration parallèle permet au courant de faire demi-tour dans la couche limite parallèle. La relation (2.36) montre qu'il n'y a pas de courant échangé entre le coeur et les couches de Hartmann.

Les profils exponentiels dans la couche permettent de faire un bilan des forces. Nous avons expliqué que lorsque tout le courant passe dans la couche de Hartmann (parois nécessairement isolantes), la résultante de la force de Laplace sur l'ensemble de la cavité était nulle. La structure locale de la couche (2.28, 2.29) indique que en tout point de la couche, la somme des forces de Laplace et des forces visqueuses est toujours en Ha^0 : si la couche transporte un courant ($\mathbf{j}_\perp - \mathbf{j}^0_\perp = \vartheta(Ha^{-1})$), ces deux forces sont en Ha^1, mais s'annulent à cet ordre ; si la couche ne transporte pas de courant ($\mathbf{j}_\perp - \mathbf{j}^0_\perp = \vartheta(Ha^{-2})$), la vitesse est faible et les deux forces sont en Ha^0 :

$$\begin{aligned} Ha^2\left(\mathbf{j}_\perp - \mathbf{j}^0_\perp\right)\times\mathbf{y} &= -\nabla^2\mathbf{v} + \vartheta\left((\mathbf{j}_\perp - \mathbf{j}^0_\perp)Ha\right) \\ &= -Ha^2\left[\mathbf{v}^0_\perp\right]_{n=0} e^{-Ha.n} + \vartheta\left((\mathbf{j}_\perp - \mathbf{j}^0_\perp)Ha\right) \end{aligned} \tag{2.37}$$

La résultante de ces forces s'applique dans l'environnement immédiat de la paroi ($\delta_{Ha} = Ha^{-1}$), si bien que son action sur le coeur de l'écoulement peut être traduite

par un frottement $\boldsymbol{\tau}_{Ha}$ à la surface :

$$\boldsymbol{\tau}_{Ha} = -\int_0^{Ha^{-1}} \left[Ha^2 \left(\mathbf{j}_\perp - \mathbf{j}_\perp^0\right) \times \mathbf{y} + \nabla^2 \mathbf{v}\right] dn = +\vartheta(1) \tag{2.38}$$

Cet ordre de grandeur signifie que son action est aussi importante que celle de la flottabilité ou la force de Laplace dans le coeur. Dans le paragraphe qui suit, nous déterminons les conditions qu'il faut appliquer au coeur pour traduire cet effet.

Des conditions aux limites pour le coeur

Une caractéristique des couches de Hartmann est que leur minceur rend ces profils invariants, quels que soient les caractéristiques du coeur. Il est alors possible d'exprimer les lois de conservation à l'interface coeur/couche de Hartmann, donc d'exprimer des nouvelles conditions aux limites pour le coeur, applicables au niveau de la paroi. Du point de vue de la mécanique, la conservation de la masse $\frac{\partial(v-v^\circ)}{\partial y} + \nabla_\perp.\left(\mathbf{v}_\perp - \mathbf{v}_\perp^0\right) = 0$, intégrée sur l'épaisseur de la couche, donne

$$\left[v^\circ\right]_{n=0} = \frac{1}{Ha}\left[\nabla_\perp.\mathbf{v}_\perp^0\right]_{n=0} + \vartheta(Ha^{-2}) \simeq \vartheta(Ha^{-1}) \tag{2.39}$$

La forte pente du profil de vitesse longitudinale dans la couche permet de supposer celle du coeur négligeable :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{v}_\perp^0}{\partial y}\right]_{n=0} = \frac{1}{Ha}\left[\frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial y}\right]_{n=0} \simeq \vartheta(Ha^{-1}) \tag{2.40}$$

La première condition exprime la faible ampleur des transferts de masse à travers l'interface coeur/couche limite de Hartmann, tandis que la seconde exprime l'absence de cisaillement. Ce sont donc des conditions de glissement que nous utiliserons pour le coeur, tant analytiquement que numériquement.

Du point de vue électrique, la conservation du courant entrant dans la couche est assurée par un courant longitudinal, dont une partie circule dans la couche (2.34), l'autre dans la paroi, supposée mince. On écrit la conservation du courant j_w dans la paroi en tenant compte de la conductivité σ_w de la paroi :

$$-\frac{\partial j_{w,n}}{\partial n} = \left[\nabla_\perp.j_{w,\perp}\right] = -\frac{\sigma_w}{\sigma}.\nabla_\perp^2 \varphi_w \tag{2.41}$$

Intégrée sur l'épaisseur adimensionnelle e/L de la paroi, cette conservation fait apparaître la conductance adimensionnelle $C_w = \sigma_w e/\sigma L$ de la paroi :

$$[0 - j_n]_{n=0} = -\frac{\sigma_w e}{\sigma L}.\nabla_\perp^2 \varphi, \qquad soit \qquad \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial n} \simeq -C_w.\nabla_\perp^2 \varphi^\circ \tag{2.42}$$

La conservation du courant dans à travers la couche et la paroi s'écrit :

$$-\left[j_n{}^\circ\right]_{n=0} = \left[j_n - j_n{}^\circ\right]_{n=0} + \left[0 - j_n\right]_{n=0} = \nabla_\perp I_{Ha} + \nabla_\perp I_w \tag{2.43}$$

soit

$$\left[\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial n}\right]_{n=0} = -\frac{\left[\Omega_{\mathbf{y}}^0\right]_{n=0}}{Ha} - C_w.\left[\nabla_\perp^2 \varphi^\circ\right]_{n=0} \tag{2.44}$$

Les relations (2.39), (2.40), et surtout (2.44) seront par la suite utilisées comme conditions aux limites de l'écoulement de coeur pour les résolutions analytiques comme numériques. Le bénéfice apporté par ce modèle se fait sentir dès qu'une couche de Hartmann transporte du courant. Pothérat [27] propose de tenir compte d'une faible inertie dans la couche en introduisant un développement au premier ordre par rapport à l'inverse du paramètre d'interaction.

2.2.3 Couches limites parallèles

Les deux sortes de parois parallèles au champ magnétique, verticales (x=0,1) et horizontales (z=0,h), donnent lieu à des frottements dans une couche limite parallèle d'épaisseur variant en $Ha^{-1/2}$. Lorsque l'écoulement est vertical et établi, la résolution analytique des premières est possible. La structure de l'écoulement près des extrémités de la cavité est susceptible d'être influencée par l'inertie, surtout lorsque, comme dans le cas parallèle, la vitesse ascendante est fortement hétérogène (présence de jets). Dans le cas perpendiculaire où l'écoulement est bidimensionnel, ces couches sont résolues en négligeant l'inertie (chapitre 4). Pour la simulation numérique, les solutions analytiques suivantes ne débouchent pas sur des conditions aux limites applicables au coeur, comme les couches de Hartmann. D'autre part, les variations fortes et non-monotones de la vitesse dans les jets demandent un surcoût en maillage. Nous décrivons ici la résolution des couches parallèles bordant un écoulement vertical établi.

Le champ magnétique total est la somme du champ imposé $\mathbf{B}^\circ$, uniforme et constant, et de la perturbation $\mathbf{b}$ induite par le mouvement du fluide. L'équation

de l'induction $rot\,\mathbf{b} = \mu\,\mathbf{J}$ indique que le courant électrique dérive de la perturbation du champ magnétique. L'écoulement de coeur étant supposé établi et vertical, la composante j_z du courant électrique est nulle. Par conséquent, le courant électrique circule dans des plans horizontaux et induit un champ vertical b. On appelle $h(x,y) = \mathbf{b_z}/\mu\sigma\nu B^\circ$ la fonction de courant adimensionnée telle que $j_x = \partial h/\partial y$ et $j_y = -\partial h/\partial x$. Pression et température variant peu a travers les couches limites, les équations du mouvement et de l'induction s'écrivent,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2\left(w-w^\circ\right)}{Ha^2} + \frac{\partial\left(h-h^\circ\right)}{\partial y} &= 0 \\ \nabla^2\left(h-h^\circ\right) + \frac{\partial\left(w-w^\circ\right)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Après simplification du Laplacien, l'épaisseur de la couche limite parallèle apparaît être $\delta = Ha^{-1/2}$ et en utilisant les variables d'Elssasser $\nu^\pm = (w-w^\circ) \pm Ha\,(h-h^\circ)$, on obtient des équations découplées pour ν^+ et ν^- :

$$\frac{\partial^2\nu^+}{\partial x^2} + Ha.\frac{\partial\nu^+}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2\nu^-}{\partial x^2} - Ha.\frac{\partial\nu^-}{\partial y} = 0 \tag{2.46}$$

Les couches parallèles sont comme le coeur soumises aux conditions fixées par les couches de Hartmann, soit pour des parois de Hartmann isolantes :

$$\left[\frac{\partial\nu^+}{\partial x}\right]_{y=1} = 0, \qquad \left[\frac{\partial\nu^-}{\partial x}\right]_{y=0} = 0 \tag{2.47}$$

Le système étant linéaire, nous recherchons des solutions auto-similaires sous la forme $\nu^+ = \nu_0^+(y).F(\eta^+)$ et $\nu^- = \nu_0^-(y).F(\eta^-)$, avec $\eta^\pm = \frac{x}{\delta^\pm(y)}$ (couche limite x=0) ou $\eta^\pm = \frac{1-x}{\delta^\pm(y)}$ (couche limite x=1). Les deux équations (2.46) deviennent (dans "$\mp$", les symboles du dessus et du dessous sont respectivement attribués aux équations pour ν^+ et ν^-) :

$$F''(\eta) \mp Ha.\delta(y).\delta'(y).\left[\eta.F'(\eta) - \frac{\nu_0{}'(y)}{\nu_0(y)}.\frac{\delta(y)}{\delta'(y)}.F(\eta)\right] = 0 \tag{2.48}$$

L'existence de solutions auto-similaires exige donc que $\delta^2(y)$ soit affine et que $\nu_0(y)$ soit une puissance de $\delta(y)$. Avec les conditions supplémentaires $F(0) = 1$ et $F(\infty) = 0$, l'équation différentielle obtenue donne une famille de fonctions basée sur $exp(-\eta^2)$ et $erfc(\eta)$. Avec de telles solutions, les conditions aux parois de Hartmann deviennent $\delta^+(1) = 0$ et $\delta^-(0) = 0$, soit

$$\delta^+(y) = \delta_0.\sqrt{1-y}, \qquad \delta^-(y) = \delta_0.\sqrt{y} \tag{2.49}$$

Les conditions d'adhérence et d'isolation électrique à la paroi s'écrivent $w = h = 0$. Dans chacun des cas d'écoulements établis avec une thermique diffusive, la solution de coeur impose que ν^+ et ν^- soient des polynômes de y, respectivement décomposables en monômes de $\delta^{2+}(y)$ et $\delta^{2-}(y)$ (les puissances demi-entières seront utilisées pour les calculs du potentiel et du débit de la couche) :

$$\left[\nu^+\right]_{\eta^+=0} = \left[-w^\circ - Ha.h^\circ\right]_{x=0\,ou\,1} = \sum E_n^+.(1-y)^{n/2} \tag{2.50}$$

$$\left[\nu^-\right]_{\eta^-=0} = \left[-w^\circ + Ha.h^\circ\right]_{x=0\,ou\,1} = \sum E_n^-.(y)^{n/2} \tag{2.51}$$

Dans les cas d'une thermique plus complexe (mais toujours conductive), les variables d'Elssasser à la paroi peuvent être approchées par des polynômes de $\sqrt{1-y}$ et $\sqrt{y}$, le coût de la précision étant le nombre de termes et la complexité des expressions. Avec les choix $\delta_0 = 2Ha^{-1/2}$, $\nu_0^+(y) = (1-y)^{n/2}$ et $\nu_0^-(y) = y^{n/2}$, les deux équations (2.48) donnent une même équation différentielle pour la famille de fonctions F_n :

$$F_n''(\eta) + 2\eta.F_n'(\eta) - 2n.F_n(\eta) = 0 \tag{2.52}$$

La résolution de cette famille de fonctions F_n, ainsi que la détermination du débit et du potentiel dans la couche sont données en annexe A. Cette solution auto-similaire développée ici pour des parois isolantes est aisément transposable au cas d'une paroi parallèle conductrice, et comme nous en donnons l'exemple en annexe B, au cas d'une paroi de Hartmann conductrice. Néanmoins, elle reste limitée au cas des parois isolantes ou conductrices. Pour les parois de conductances arbitraires, Bühler [24, p. 47] propose une solution basée sur les séries de Fourier. Le nombre d'harmoniques nécessaires pour représenter les couches parallèles varie en $Ha^{1/2}$, alors que notre solution comporte un nombre de termes restreint et indépendant de Ha.

2.3 Diffusion et convection de la chaleur

Les métaux liquides étant bons conducteurs de la chaleur, il est naturel de s'intéresser d'abord au cas où la température est gouvernée par la diffusion. Ce découplage des phénomènes thermiques d'une part, et électro-mécanique d'autre part, simplifie considérablement le problème. Nous sommes alors en mesure de mieux comprendre les phénomènes intervenant dans le couplage mécanique-électrique, mais aussi

d'en donner les lois d'échelles et une solution analytique, qui permet de valider les résultats numériques dans la limite des températures diffusives. Le code numérique utilisé nous permet de balayer une très grande plage de paramètres, allant des températures gouvernées par la diffusion ($Pe << 1$) aux températures gouvernées par la convection ($Pe >> 1$, en pratique dès Pe =quelques unités). Analytiquement, nous aborderons le premier cas avec un développement de l'équation de la chaleur au premier ordre en Pe, quantifiant ainsi l'influence d'un faible transport convectif de la chaleur.

Au fur et à mesure qu'augmente le nombre de Péclet (c'est à dire la vitesse), les isothermes sont entraînées par l'écoulement. Il est un cas intermédiaire, dit 'stratifié', où le fluide chaud (léger) occupe le haut de la cavité et le fluide froid la partie basse. Le gradient thermique s'oriente alors suivant la verticale, ce qui réduit la convection dans le coeur (le couple moteur étant $-Gr.\frac{\partial\theta}{\partial x}$), et confine le mouvement dans des couches limites thermiques près des parois isothermes. Lorsqu'on augmente le paramètre Gr, et que le temps de retournement du fluide (w/H) est inférieur au temps de la diffusion thermique (L^2/k), du fluide chaud peut descendre non loin de la paroi froide. Ces phénomènes dits d'écoulements secondaires ont étés étudiés par Elder [9](voir aussi [12]). L'accroissement de la vitesse et son changement de direction dans les zones recirculantes accroissent l'importance des forces d'inertie, et provoquent des instabilités. Néanmoins les simulations numériques montrent qu'il existe pour la configuration perpendiculaire une plage de valeurs où le fluide est stable et stratifié, où l'on distingue nettement le coeur au repos et les couches limites thermiques. C'est cet écoulement que nous voulons modéliser analytiquement.

A des nombres de Péclet plus élevés encore, et avant d'atteindre les écoulements chaotiques, plusieurs cellules de recirculation se forment et assurent un meilleur échange thermique. Prenons l'exemple d'une paroi froide, dont la température est uniforme, comme par exemple la paroi externe d'un tube réfrigérant à haut débit d'eau, dans les couvertures. Le métal liquide se refroidit au fur et à mesure qu'il descend le long de la paroi, donc apporte de moins en moins de chaleur. En ramenant du fluide chaud près de la paroi froide, une nouvelle cellule tourbillonnante augmente l'échange thermique.

2.4 Ecoulement parallèle en cavité infinie

La cavité est suffisamment élancée pour que l'on puisse s'attendre, loin de ses extrémités et dans la limite des températures conductives, à un écoulement laminaire, vertical et établi. Son existence est confirmé par les simulations numériques 3D, pour les grands nombres de Hartmann (chapitres 4 et 5). L'un des intérêts de cet écoulement réside dans son accessibilité analytique : les variations suivant la verticale $\mathbf{z}$ sont supprimées, ce qui élimine les effets de la pression et de l'inertie, et simplifie l'intégration de la vorticité pour accéder à la vitesse en $w^0 = -\int \Omega^{\mathbf{0}}_{\mathbf{y}} \mathbf{dx}$. Ces simplifications nous permettent de prendre en compte une convection mixte de débit total $D = \iint w.dx.dy$, où l'on retrouve les contributions du coeur et des couches limites, ainsi qu'une source volumique de chaleur π_V, entièrement évacuée par conduction. Nous commençons donc par nous donner le profil de température correspondant au problème. Pour les deux types de chauffage, pariétal et volumique, on suppose que le flux de chaleur est unidirectionnel, c'est à dire que la température ne dépend que d'une coordonnée. L'équation de Navier Stokes (2.15), projetée sur la verticale z devient

$$0 = \nabla^2 w + Ha^2.j_x + Gr.\theta. \tag{2.53}$$

L'équilibre entre les forces de flottabilité et de Laplace dans le coeur donne la composante du courant électrique j_x, qui est relié à la vitesse w par la loi d'Ohm. On en déduit

$$w^\circ = \frac{Gr}{Ha^2}.\theta - \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial x}. \tag{2.54}$$

Potentiel, vitesse (et vorticité) sont tirés de l'intégration de la relation (2.22) suivant y, et à partir du plan médian $y = 1/2$:

$$\varphi^\circ = \frac{Gr}{Ha^2}\left[-\int_{1/2}^{y}\int_{1/2}^{y'}\frac{\partial\theta}{\partial x}.dy''.dy' + \left(y - \frac{1}{2}\right).A(x) + C(x)\right], \tag{2.55}$$

$$w^\circ = \frac{Gr}{Ha^2}\left[\theta + \int_{1/2}^{y}\int_{1/2}^{y'}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.dy''.dy' - \left(y - \frac{1}{2}\right).A'(x) - C'(x)\right]. \tag{2.56}$$

A la résolution du potentiel et de la vitesse, on joint celle de la fonction de courant électrique $h(x, y)$, telle que $j_x = \partial h/\partial y$, et $j_y = -\partial h/\partial x$. Elle permet, *via* les variables d'Elssasser, de résoudre les couches limites parallèles, ainsi que de visualiser les lignes

du courant électrique. L'intégration du courant électrique donné par la loi d'Ohm donne finalement :

$$h^\circ(x,y) = \frac{Gr}{2Ha^2}\left[\int_0^x A(x').dx' + \int_1^x A(x').dx' - \int_0^y \theta(x,y').dy' - \int_1^y \theta(x,y').dy'\right] \tag{2.57}$$

En utilisant l'équation de la chaleur $\nabla^2\theta + \pi_V = 0$,

$$w^\circ = \frac{Gr}{Ha^2}.\left[\begin{array}{c}\theta(x,1/2) + \left(y-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial y}_{(x,1/2)} - \int_{1/2}^y\int_{1/2}^{y'}\pi_V.dy''.dy' \\ -\left(y-\frac{1}{2}\right).A'(x) - C'(x)\end{array}\right] \tag{2.58}$$

$$\Omega_{\mathbf{y}}^{\mathbf{0}} = \frac{Gr}{Ha^2}.\left[\begin{array}{c}-\frac{\partial\theta}{\partial x}_{(x,1/2)} - \left(y-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}_{(x,1/2)} + \int_{1/2}^y\int_{1/2}^{y'}\frac{\partial\pi_V}{\partial x}.dy''.dy' \\ +\left(y-\frac{1}{2}\right).A''(x) + C''(x)\end{array}\right] \tag{2.59}$$

La condition (2.44), appliquée en y=0 et 1, donne le système

$$\begin{aligned} Ha\int_0^{1/2}\frac{\partial\theta}{\partial x}.dy' + Ha.A(x) &= \frac{\partial\theta}{\partial x}_{(x,1/2)} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}_{(x,1/2)} - \int_{1/2}^0\int_{1/2}^{y'}\frac{\partial\pi_V}{\partial x}.dy''.dy' \\ &\quad + \frac{A''(x)}{2} - C''(x), \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} Ha\int_{1/2}^1\frac{\partial\theta}{\partial x}.dy' - Ha.A(x) &= \frac{\partial\theta}{\partial x}_{(x,1/2)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}_{(x,1/2)} - \int_{1/2}^1\int_{1/2}^{y'}\frac{\partial\pi_V}{\partial x}.dy''.dy' \\ &\quad - \frac{A''(x)}{2} - C''(x). \end{aligned} \tag{2.61}$$

La somme et la différence de ces deux équations renvoient au courant total entrant dans les deux couches (voir 2.36), et à l'asymétrie des courants entrant dans les deux couches. Elles sont donc respectivement liées aux parties paire et impaire du potentiel électrique par rapport à $(y-1/2)$, donc à $C(x)$ et $A(x)$. C'est donc cette formulation qui permet le découplage des conditions sur $A(x)$ et $C(x)$:

$$\begin{aligned} C''(x) &= -\frac{Ha}{2}\int_0^1\frac{\partial\theta}{\partial x}.dy' + \frac{\partial\theta}{\partial x}_{(x,1/2)} + \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\int_{1/2}^{y'}\frac{\partial\pi_V}{\partial x}.dy''.dy' \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{1/2}^1\int_{1/2}^{y'}\frac{\partial\pi_V}{\partial x}.dy''.dy', \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} \frac{A''(x)}{2Ha} - A(x) &= +\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{\partial\theta}{\partial x}.dy' - \frac{1}{2}\int_{1/2}^1\frac{\partial\theta}{\partial x}.dy' + \frac{1}{2Ha}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}_{(x,1/2)} \\ &\quad -\frac{1}{2Ha}\int_0^1\int_{1/2}^{y'}\frac{\partial\pi_V}{\partial x}.dy''.dy', \end{aligned} \tag{2.63}$$

où

$$
\begin{aligned}
C''(x) &= -\frac{Ha}{2}\int_0^1 \frac{\partial\theta}{\partial x}.dy' + \frac{\partial\theta}{\partial x}_{(x,1/2)} - \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\int_{y'}^{1/2}\frac{\partial\pi_V}{\partial x}.dy''.dy' \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{1/2}^1\int_{1/2}^{y'}\frac{\partial\pi_V}{\partial x}.dy''.dy', \qquad (2.64)\\
A''(x) - 2Ha.A(x) &= Ha\left\{\int_0^{1/2}\frac{\partial\theta}{\partial x}.dy' - \int_{1/2}^1\frac{\partial\theta}{\partial x}.dy'\right\} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}_{(x,1/2)} \\
&\quad +\int_0^1\int_{y'}^{1/2}\frac{\partial\pi_V}{\partial x}.dy''.dy'. \qquad (2.65)
\end{aligned}
$$

Bien sûr, la solution pour $A(x)$ doit exclure toute exponentielle en $exp(\pm\sqrt{2Ha}.x)$, qui rendrait impossible la condition (2.40). Ici apparaît une analogie entre les propriétés de symétrie des courants entrant dans les couches de Hartmann et celles des quantités de chauffage apportées dans les deux demi-sections séparées par le plan y=1/2. Les deux équations sont grandement simplifiées en cas de chauffage uniforme. Pour que le terme dominant dans l'équation donnant $A(x)$ soit non nul, il faut au moins que $\partial^2\theta/\partial x\partial y$ soit non nul, c'est à dire que le flux de chaleur ne doit être aligné ni avec x, ni avec y. Cela ne veut pas dire que le flux de chaleur ne doit pas être unidirectionnel : le lecteur pourra prendre le cas d'une source de chaleur uniforme associée à un flux de chaleur pariétal variant linéairement le long des parois, $\theta = (x+y)^2/4 - 5/24$ pour s'en convaincre.

Dans les deux cas que nous étudions, le chauffage volumique est nul, le flux de chaleur est parallèle à $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$, et le débit total est nul. Les conditions (2.64) et (2.65) deviennent :

$$
\begin{aligned}
A(x) &= 0 \\
C(x) &= \int_{1/2}^x \left[-\frac{Ha}{2}\int_0^1 \theta(x',y').dy' + \theta(x',1/2)\right].dx'
\end{aligned}
$$

D'autres résolutions prenant en compte un chauffage volumique, ou des parois conductrices, sont données en annexe B.

2.4.1 Cas parallèle avec chauffage pariétal

Flux de chaleur d'origine pariétale, **parallèle** à B. Les 4 parois sont électriquement isolantes.

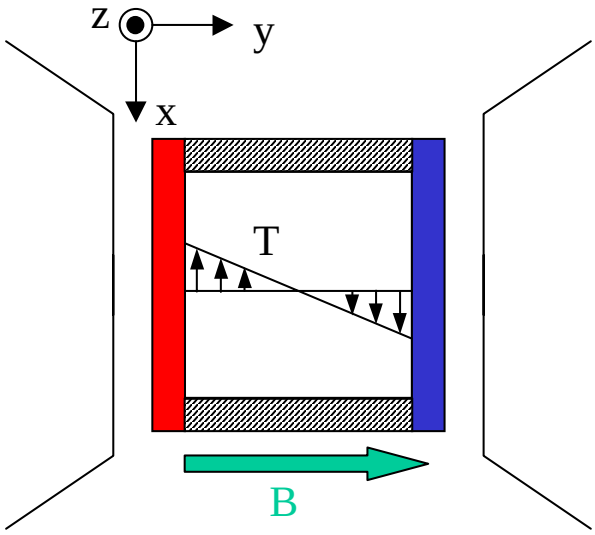


FIG. 2 Profil de température conductif dans la configuration parallèle.

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{1}{2} - y \\
C(x) &= C^{\circ}.\left(x - \frac{1}{2}\right) \\
w^{\circ} &= -\frac{Gr}{Ha^2}.\left(y - \frac{1}{2} + C^{\circ}\right) \\
\varphi^{\circ} &= \frac{Gr}{Ha^2}.C^{\circ}.\left(x - \frac{1}{2}\right) \\
h^{\circ} &= -\frac{Gr}{Ha^2}\frac{y(1-y)}{2}
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

Dans le cas d'une convection purement naturelle, la constante C° est nulle, et le potentiel est nul dans le coeur. Le courant électrique est donc purement dirigé par le champ électromoteur $V \times B$. Dans le cas d'une convection mixte avec un débit total D, il faut calculer les différentes contributions du débit en fonction de C°. La symétrie donne les mêmes coefficients pour les couches $x \sim 0,1$:

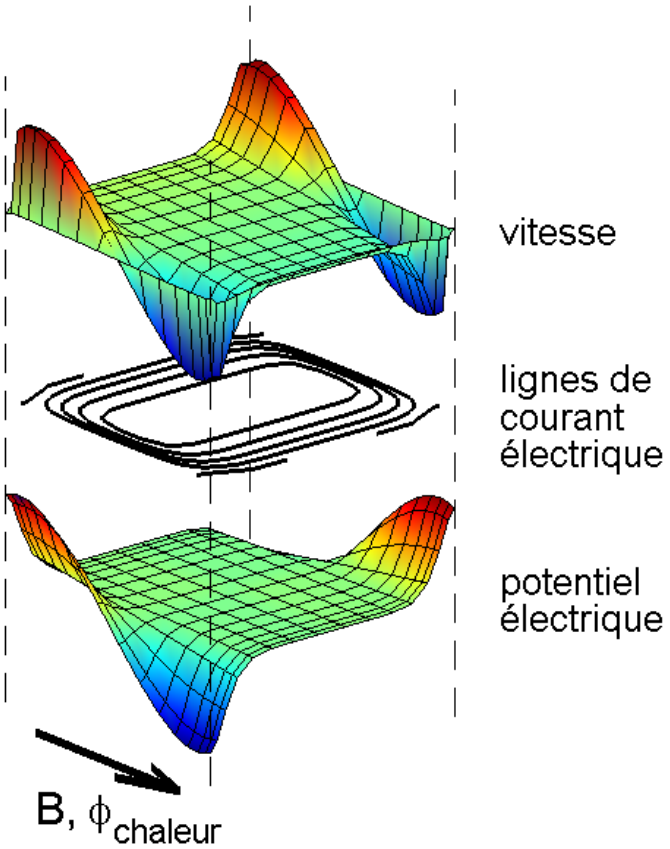


FIG. 3 Solution analytique du régime établi - configuration parallèle. De haut en bas, profil de vitesse w(x,y) normalisé, lignes de courant électrique, potentiel électrique φ(x,y) normalisé.

n/2	**0**	**1**	**2**
$\frac{Ha}{Gr}.\mathbf{E}_n^+$	$\frac{2C^\circ+1}{2Ha}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{Ha}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{Ha}{Gr}.\mathbf{E}_n^-$	$\frac{2C^\circ-1}{2Ha}$	$\frac{1}{Ha}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Les débits des parties ascendante et descendante de chaque couche parallèle s'annulent partiellement, et il ne reste que la part due à la convection forcée, soit pour chaque couche

$$D^S = C^\circ.\frac{1.}{3\sqrt{\pi}}.\frac{Gr}{Ha^{5/2}} \tag{2.67}$$

ce qui donne un débit total globalement égal à celui du coeur.

$$D \simeq -C^\circ.\frac{Gr}{Ha^2}\left[1+\frac{2}{3\sqrt{\pi Ha}}\right] \sim -C^\circ.\frac{Gr}{Ha^2} \tag{2.68}$$

En revanche, le débit transporté par la moitié ascendante d'une couche varie en $Gr/Ha^{3/2}$, et est donc supérieur au débit de la moitié ascendante du coeur.

2.4.2 Cas perpendiculaire avec chauffage pariétal

Flux de chaleur d'origine pariétale, **perpendiculaire** à B. Les 4 parois sont électriquement isolantes.

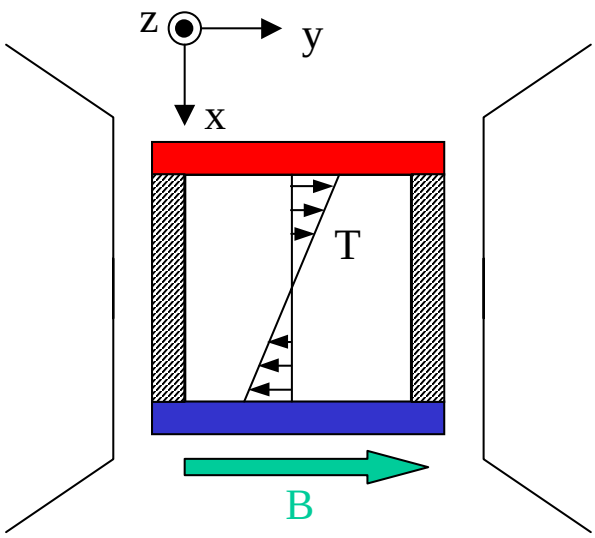


FIG. 4 Profil de température conductif dans la configuration perpendiculaire.

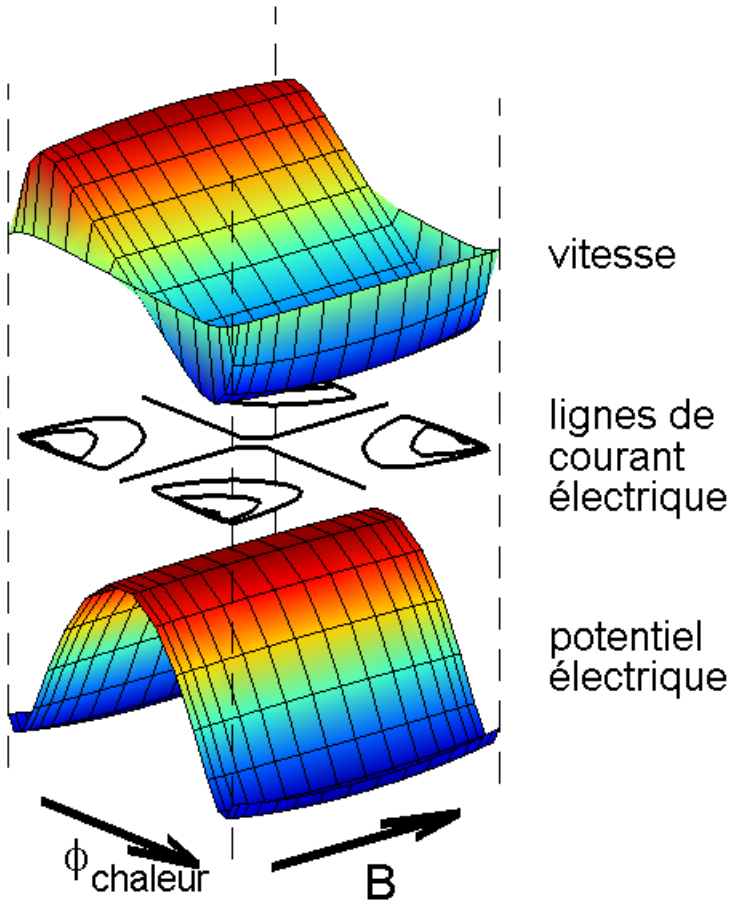


FIG. 5 Solution analytique du régime établi - configuration parallèle. De haut en bas, profil de vitesse w(x,y) normalisé, lignes de courant électrique, potentiel électrique φ(x,y) normalisé.

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{1}{2} - x \\
C(x) &= -\left(\frac{Ha}{2} - 1\right)\left[\frac{x(1-x)}{2} - \frac{1}{8}\right] + C^{\circ}.\left(x - \frac{1}{2}\right) \\
w^{\circ} &= \frac{Gr}{2Ha}.\left[\left(\frac{1}{2} - x\right) - \frac{2C^{\circ}}{Ha}\right] \\
\varphi^{\circ} &= \frac{Gr}{2Ha^2}\left[-\left(\frac{Ha}{2} - 1\right)x(1-x) - y(1-y) + 2C^{\circ}.\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{Ha}{8}\right] \\
h^{\circ} &= \frac{Gr}{Ha^2}.\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

Ici, la symétrie impose que ce soient ν^+ et ν^- qui dans une même couche aient les mêmes coefficients :

	n/2	**0**	**1**
$\mathbf{x \sim 0}$	$\frac{Ha}{Gr}.\mathbf{E}_n^{\pm}$	$\frac{C^{\circ}}{Ha}$	$-\frac{1}{2}$
$\mathbf{x \sim 1}$	$\frac{Ha}{Gr}.\mathbf{E}_n^{\pm}$	$\frac{C^{\circ}}{Ha}$	$\frac{1}{2}$

Le débit total est :

$$
D \simeq -C^{\circ}.\frac{Gr}{Ha^2}\left[1 - \frac{2}{3\sqrt{\pi Ha}}\right] \sim -C^{\circ}.\frac{Gr}{Ha^2} \tag{2.70}
$$

Cette fois-ci, le jet des couches parallèles est masqué par les fortes vitesses du coeur.

Ces résultats obtenus dans les deux configurations sont identiques aux résultats semi-numériques obtenus par Bühler [5], ou Aleksandrova [4] et numériques obtenus par Ben Hadid [13], [14], ou Maclean [21].

2.5 Retour sur certaines hypothèses

Les ordres de grandeur obtenus pour une cavité infinie permettent d'ores et déjà d'estimer certains phénomènes supposés négligeables. On utilise pour cela les nombres de Reynolds $\mathrm{Re}_{\perp}^{\infty} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{Gr}{Ha}$, et $\mathrm{Re}_{//}^{\infty} \sim \frac{Gr}{Ha^{3/2}}$.

2.5.1 Variations de la pression à travers les couches limites

Les variations de la pression sont majoritairement localisées aux extrémités de la cavité, où elles doivent permettre le retournement de l'écoulement. Ces zones de recirculation ne sont pas minces ($\delta_R \sim 1$), et admettent de fortes variations de pression ($\Delta p \sim Gr$). La projection de l'équation de Navier-Stokes suivant la normale à une paroi permet d'estimer l'influence de la viscosité dans une couche d'épaisseur δ :

$$\frac{\delta p}{\delta} \sim \frac{\mathbf{v}_n}{\delta^2}.$$

La résolution des couches de Hartmann (d'épaisseur $\delta_{Ha} = Ha^{-1}$) suggère que la vitesse normale à la paroi est d'ordre de grandeur Gr/Ha^2 (2.39). Les variations relatives de pression à travers la couche de Hartmann sont donc négligeables :

$$\frac{\delta p_{Ha}}{\Delta p} \sim \frac{1}{Ha}. \tag{2.71}$$

De même, la conservation de la matière dans une couche parallèle établit que la vitesse normale $\mathbf{v}_n$ est $\sqrt{Ha}$ fois plus petite que la vitesse longitudinale. Donc, selon que la vitesse dans la couche parallèle est en Gr/Ha ou Gr/Ha^2, les taux de variation de la pression sont

$$\frac{\delta p_{Ha}}{\Delta p} \sim \frac{1}{Ha^{1/2}}, \frac{1}{Ha^{3/2}}. \tag{2.72}$$

Il est donc légitime de négliger les effets de la pression à travers les couches limites visqueuses, dès lors que $Ha >> 1$. Il est bien connu que la pression varie peu à travers les couches limites cisaillées minces, et ces ordres de grandeur montrent que la force de Laplace ne change pas cette propriété. En revanche, des phénomènes thermiques peuvent en cas de fortes vitesses (configuration perpendiculaire), engendrer de fortes variations de pression dans la couche limite thermique (sur-couche de la couche parallèle), et la déstabiliser. Ce phénomène est l'une des clefs d'interprétation des écoulements présentant plusieurs cellules de recirculation.

2.5.2 Variations de la température à travers les couches limites

Les couches parallèles sont sujettes à des phénomènes susceptibles d'y modifier la force de flottabilité. Dans le cas parallèle, ce sont les jets des couches limites

parallèles visqueuses, et dans le cas perpendiculaire, ce sont les jets thermiques, encore mal connus. La suite de ce chapitre montre que dans les deux configurations, la vitesse maximale varie asymptotiquement vers $\frac{Gr}{Ha}$, pour les grands nombres de Hartmann (s'il existe des parois isolantes). On peut supposer que, à des nombres de Hartmann moins élevés, la vitesse dans les jets thermiques ne dépassera pas cet ordre de grandeur. Le jet thermique plus épais que la couche limite visqueuse parallèle n'a que peu d'influence sur elle. On estime donc son effet avec l'hypothèse défavorable $\delta_{th} \sim \delta_{//} = Ha^{-1/2}$. L'équation de la chaleur dans le jet s'écrit

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial n^2} \simeq \nabla^2\theta = \mathrm{Pr}\,.\left[(\mathbf{v}_\perp.\nabla_\perp)\,\theta + v_n\frac{\partial\theta}{\partial n}\right] \tag{2.73}$$

La conservation de la masse montre que les termes parallèles et transversaux du membre de droite sont du même ordre de grandeur $\vartheta(\mathrm{Pr}\,.\mathbf{v}_\perp) = Ra/Ha$. On peut donc majorer la variation de température dans la couche parallèle par

$$\frac{(\theta-\theta^\circ)_{\mathrm{CL}\ //}}{\theta^\circ} \lesssim \frac{Ra}{Ha^2}. \tag{2.74}$$

Du fait de leur minceur, des jets près des couches de Hartmann n'engendreraient pas de perturbation thermique supérieurs à

$$\frac{(\theta-\theta^\circ)_{\mathrm{CL\ de\ Ha}}}{\theta^\circ} \lesssim \frac{Ra}{Ha^3}. \tag{2.75}$$

Si des parois conductrices suppriment les effets de couche limite, la vitesse varie alors en $\frac{Gr}{Ha^2}$, et ces perturbations relatives varient respectivement en $\frac{Ra}{Ha^3}$ et $\frac{Ra}{Ha^4}$. L'effet n'est donc pas perceptible dans les couches limites de Hartmann ($\frac{Ra}{Ha^{3,4}} << 1$).

L'équation *(2.24)* permet d'estimer l'effet sur le potentiel électrique d'une éventuelle variation de la flottabilité $Gr.\delta\theta$ (avec des conditions aux parois de températures uniformes, on a toujours $\delta\theta < 1$)dans les couches limites visqueuses. La variation de potentiel correspondante est $\delta\varphi = \frac{Gr}{Ha^4}\delta\theta$ dans une couche de Hartmann, et $\delta\varphi = \frac{Gr}{Ha^{3/2}}\delta\theta$ dans une couche parallèle. Ces perturbations sont négligeables devant les variations dues aux seuls effets hydro-électriques en $\frac{Gr}{Ha^3}$ dans la couche de Hartmann et $\frac{Gr}{Ha^{1/2}}$ dans la couche parallèle, que nous allons établir dans ce chapitre. En résumé, les variations de la flottabilité dans les couches limites visqueuses sont souvent négligeables, et lorsqu'elles apparaissent, elles n'ont que peu d'effet sur la structure des couches. On considérera par la suite que $\theta = \theta^\circ$ (et on utilisera θ).

2.5.3 Induction du champ magnétique

Le champ magnétique b engendré par l'écoulement est

$$\frac{b}{B^\circ} = R_m = P_m.\,\mathrm{Re} \sim \frac{P_m Gr}{Ha}, \frac{P_m Gr}{Ha^{3/2}} \tag{2.76}$$

Le nombre de Prandtl des métaux liquides étant de l'ordre de 10^{-7}, le champ magnétique induit est négligeable. Avant que le paramètre de contrôle $Gr/Ha^{1,3/2}$ n'atteigne P_m^{-1}, d'autres hypothèses de cette étude auront déjà étés invalidées. Dans les conditions expérimentales (chapitre 3), il faut qu'il atteigne 2.10^5 pour que le champ induit soit comparable aux variations spatiales du champ imposé (2%).

2.5.4 Dissipation Ohmique

Dans le coeur l'ordre de grandeur de $\mathbf{J}^\circ$ est donné par l'équilibre entre la flottabilité et la force de Laplace, et ne contribue pas au chauffage du fluide. En cas de parois isolantes, les densités de courant dans les couches parallèles et dans les couches de Hartmann peuvent être $Ha^{1/2}$ et Ha fois plus importante que dans le coeur. Dans chacune des régions, le chauffage Ohmique adimensionnel est :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}^{\circ 2}/\sigma}{\lambda \nabla^2 T} &= \frac{\nu\rho\beta g L}{\lambda}.\frac{Gr}{Ha^2} \sim 10^{-7}.\frac{Gr}{Ha^2}, \\ \frac{\mathbf{J}^2_{//}/\sigma}{\lambda \nabla^2 T} &\sim 10^{-7}.\frac{Gr}{Ha}, \\ \frac{\mathbf{J}^2_{Ha}/\sigma}{\lambda \nabla^2 T} &\sim 10^{-7}.Gr. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Dans le cas de MASCOT-V, le nombre de Grashoff atteint 9.10^7, et la force de flottabilité peut être sensiblement modifiée dans les couches de Hartmann. Néanmoins, cet effet est extrêmement localisé, et n'implique qu'une perturbation du potentiel électrique en $10^{-7}.Gr^2/Ha^4$, négligeable devant les variations en Gr/Ha^3 dans la couche.

2.5.5 Approximation de Boussinesq

L'approximation de Boussinesq $\rho = \rho_0\left[1 - \beta\left(T - T_0\right)\right]$, qui permet d'exprimer la flottabilité en fonction de la température, suppose $\beta\left(T - T_0\right) << 1$. Dans les

couvertures et dans MASCOT, les variations de la température sont d'environ 25 et 200K, et $\beta\,(T - T_0)$ est majoré par 4% et 0.4%. Cette approximation permet également d'estimer la divergence réelle de la vitesse : la conservation de la masse prenant en compte les variations de densité s'écrit

$$\mathbf{0} = div(\rho\mathbf{V}) = \mathbf{V}.\nabla\rho + \rho.div\mathbf{V}, \tag{2.78}$$

qui conduit à

$$\frac{div\mathbf{V}}{\mathbf{V}/\mathbf{L}} \lesssim \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \sim \beta\Delta T. \tag{2.79}$$

Dans les couvertures, l'écoulement non solénoïdal peut modifier de quelques pourcents le débit des canaux chauds vers les canaux froids.

2.5.6 Effets thermoélectriques

La perturbation du potentiel électrique par l'effet thermoélectrique au sein du métal liquide est estimée par rapport au champ électromoteur $\mathbf{V} \times \mathbf{B}^\circ$ **:**

$$\frac{P_{ML}.\nabla T}{\mathbf{V} \times \mathbf{B}^\circ} \sim \frac{P_{ML}.\Delta T}{\nu\,\mathrm{Re}\,\mathbf{B}^\circ} = \frac{P_{ML}}{g\beta}\sqrt{\frac{\sigma\nu}{\rho}}.\frac{Gr/Ha}{\mathrm{Re}}. \tag{2.80}$$

Pour le mercure et le Lithium-Plomb (le pouvoir thermoélectrique de ce dernier étant de l'ordre de $10\mu V/K$), le coefficient $\frac{P_{ML}}{g\beta}\sqrt{\frac{\sigma\nu}{\rho}}$ prend respectivement les valeurs 6.10^{-6} et 2.10^{-3}. Dans MASCOT, même lorsque les vitesses sont faibles ($Re \sim Gr/Ha^2$), le champ électromoteur est $10^5/Ha$ fois plus important que le potentiel thermoélectrique. En revanche, l'effet thermoélectrique peut ne pas être totalement négligeable dans le Li-Pb des couvertures.

Le pompage thermoélectrique à une interface ML/paroi conductrice (W) est connu sous le nom d'effet Seebeck : les variations de température de l'interface entraînent une discontinuité de la composante tangentielle du courant électrique :

$$\frac{\mathbf{J}_{W,\perp}}{\sigma_{Cu}} - \frac{\mathbf{J}_{ML,\perp}}{\sigma_{ML}} = -\left(P_W - P_{ML}\right) \bigtriangledown_\perp T. \tag{2.81}$$

En présence d'un champ magnétique B, cet effet génère une force de Laplace. Près d'une paroi parallèle au champ, cette force est normale à la paroi, et peut donc stabiliser, ou déstabiliser les jets de couche parallèle. Près d'une paroi de Hartmann, la

force est tangentielle. Un gradient de température vertical cause une force horizontale et parallèle à la paroi, entraînant un écoulement secondaire horizontal. Un gradient de température horizontal cause une force verticale, qui peut s'ajouter ou se soustraire à la flottabilité. On peut majorer le courant Seebeck et comparer la force à la flottabilité :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{ML,\perp} &< \sigma_{ML}.\Delta P_i.\nabla_\perp T = \sigma_{ML}.\Delta P_i.\frac{\Delta T}{L}, \\ \frac{\mathbf{J}_{ML,\perp} \times B}{\rho\beta g\Delta T} &< \frac{\sigma_{ML}.\Delta P_i.B}{\rho\beta g L} = Ha\frac{\Delta P_i}{\beta g L^2}\sqrt{\frac{\sigma\nu}{\rho}}. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Dans le cas de MASCOT-V, en cas de défaut d'isolation d'une paroi, l'interface est Hg/Cu, et le rapport des deux forces motrices est majoré par $6.10^{-3}Ha$. Le pompage thermoélectrique peut tout de même devenir important aux forts champs magnétiques, si la surface non isolée est importante, ou si deux points non isolés sont à des températures très différentes. Durant l'utilisation de la cellule MASCOT-V, nous n'avons pas constaté de rupture de l'isolation électrique.

Dans les cas de DIADEMO et des couvertures, l'alliage liquide Pb-Li peut être en contact avec l'acier des structures de la couverture, ou l'acier des tubes réfrigérants, s'il n'y a pas de barrière de perméation, si elle est à l'intérieur du tube, ou si elle présente des défauts. Le rapport des deux forces motrices est alors majoré par $3.10^{-3}Ha$.

2.6 Bidimensionnalisation de l'écoulement laminaire

Comme on l'explique au chapitre 4, le champ magnétique est responsable, par l'intermédiaire des ondes d'Alfvén, d'une diffusion de la quantité de mouvement dans sa propre direction. Mais comme nous l'avons vu avec le cas des écoulements établis, les variations de la vitesse (et du potentiel électrique) dans la direction du champ magnétique dépendent de la répartition de la force motrice, ainsi que du circuit électrique. Si les couches de Hartmann ne transportent pas de courant, soit parce qu'elles sont court-circuitées par des parois conductrices, soit parce que le courant électrique se referme dans le coeur, la vitesse du coeur est d'ordre de grandeur Gr/Ha^2, et ses variations suivent celles de la flottabilité. Si les parois parallèles à B sont isolantes, on a vu que l'évanouissement de la force de Laplace était responsable de l'apparition

de jets tridimensionnels avec des vitesses en Gr/Ha. Il en est tout autrement lorsque les couches de Hartmann transportent un courant électrique.

La relation (2.36) montre que pour activer les couches de Hartmann, il faut que le couple de la force motrice dans la direction du champ ait une moyenne non nulle entre les deux couches de Hartmann, forçant un courant moyen non nul vers les couches parallèles. Le circuit de retour du courant électrique est constitué par les deux couches de Hartmann, de conductances relatives identique $1/Ha$, et les parois de Hartmann, de conductances relatives C_w^+ et C_w^-, en parallèles. Les deux couches de Hartmann transportent donc la même quantité de courant, soit en proportion du courant total donné par la relation (2.36),

$$\begin{aligned} \frac{I_{Ha}^{\pm}}{I_{total}} &\simeq \frac{1}{2+Ha(C_w^+ + C_w^-)}, \\ I_{total} &= \frac{Gr}{Ha^2}\int_{y=0}^{y=1}\frac{\partial\theta}{\partial x}.dy. \end{aligned} \tag{2.83}$$

La vitesse du coeur est identique à proximité des couches de Hartmann, et vaut à l'ordre Ha^{-1}

$$\left[\mathbf{v}_\perp^0\right]_{n=0} = Ha.\left(I_{Ha}\times\mathbf{y}\right) = \frac{Gr}{Ha}.\frac{1}{2+Ha(C_w^+ + C_w^-)}.\int_{y=0}^{y=1}\frac{\partial\theta}{\partial x}.dy. \tag{2.84}$$

On retrouve ici le fait qu'une seule paroi de Hartmann conductrice ($C_w^- = \infty$) suffit à court-circuiter les deux couches de Hartmann et à faire chuter la vitesse d'un facteur Ha. Si les deux parois de Hartmann sont isolantes, cette vitesse, uniforme suivant y, est importante devant les variations de la vitesse en Gr/Ha^2 engendrées par la composante complémentaire $\theta - <\partial_\perp\theta>$ de la température, et est aussi suffisamment élevée pour masquer l'effet de jet le long de parois parallèles. On peut alors estimer l'importance des effets tridimensionnels résiduels dans le coeur :

$$\frac{<\partial_y w^\circ>}{<\partial_x w^\circ>} = \vartheta\left\{\frac{2+Ha.(C_w^+ + C_w^-)}{Ha}.\frac{\theta - <\partial_\perp\theta>_y}{<\partial_\perp\theta>_y}\right\} \tag{2.85}$$

La relation entre la vitesse du coeur et le courant dans la couche de Hartmann est valable en tout point de celle-ci. Il est connu que si deux zones conductrices sont disposées symétriquement dans les parois de Hartmann, la vitesse chute localement d'un facteur Ha, c'est à dire qu'à l'ordre dominant, la colonne ayant pour pieds ces

zones est vue comme un obstacle que le fluide doit contourner. Si seulement une zone est conductrice dans l'une des parois, elle affecte globalement le courant électrique dans les deux couches : en effet, l'épaisseur de la couche étant Ha^{-1}, le courant rencontre une moins grande résistance électrique en traversant le coeur jusqu'à la portion conductrice de l'autre paroi, qu'en restant dans la couche, dont l'épaisseur en Ha^{-1}, offre une grande résistance. Une description plus complète de ces phénomènes a été réalisée par Hunt et al. [18] et peut être trouvée dans la monographie de Moreau [23, p. 147]. L'un des résultats est que la perturbation occasionnée à l'écoulement par des portions de parois non parallèles conductrices est proportionnelle à leur surface. Dans l'Expérience Mascot-V (chapitre suivant) les électrodes des thermocouples utilisés perturbent les phénomènes à observer proportionnellement à leur surface. Il sera donc important de les réaliser les plus petites possibles.

Dans le cas où les couches limites de Hartmann sont actives, l'importance des effets tridimensionnels dans les couches parallèles diminue comparativement aux vitesses élevées du coeur bidimensionnel. Les solutions dans les couches parallèles peuvent alors être approchées par une simple exponentielle sur l'épaisseur $Ha^{-1/2}$:

2.7 En résumé...

L'application d'un champ magnétique sur l'écoulement d'un liquide conducteur a deux principaux effets : il freine l'écoulement par l'intermédiaire de la force de Laplace, et il structure fortement l'écoulement, en un coeur non visqueux, et des couches limites extrêmement minces. La distribution de la force de Laplace dans ces différentes régions est une donnée importante de l'écoulement. Dans les couches parallèles d'épaisseur $Ha^{-1/2}$, où le courant $\mathbf{J}$ devient parallèle au champ $\mathbf{B}$, ce frein s'annule et rend possible l'existence de jets aux vitesses élevées. Un courant circulant dans les couches de Hartmann, d'épaisseur Ha^{-1}, est également réparti entre les deux couches, et impose *via* la force de Laplace un écoulement bidimensionnel. Les solutions dans chacune de ces couches sont explicitées. Des conditions aux limites en sont déduites pour traduire l'effet des couches de Hartmann sur le coeur. Dans les simulations numériques, elles permettent de ne pas mailler ces couches, donc d'économiser du temps de calcul et de la mémoire, tout en donnant une bonne précision,

dès que Ha>100. En convection naturelle dans la configuration qui nous intéresse, le circuit électrique est différent selon que le flux de chaleur est parallèle ou perpendiculaire au champ magnétique. L'écoulement établi loin des extrémités est résolu analytiquement.

Dans le cas parallèle, la force de flottabilité est anti-symétrique par rapport au plan médian y=1/2. Elle est équilibrée par la force de Laplace, donc le courant circule dans le coeur, et les couches parallèles sans passer par les couches de Hartmann. Cet équilibre donne des vitesses en $\mathrm{Gr}/\mathrm{Ha}^2$ dans le coeur. L'effondrement de $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ dans la couche parallèle provoque l'émergence de deux jets anti-symétriques avec des vitesses en Gr/Ha. Le débit de ces jets est donc $Ha^{1/2}$ fois plus élevé que le débit du coeur.

Dans le cas perpendiculaire, le courant nécessaire à l'équilibrage de la flottabilité ne change pas de signe entre les deux couches de Hartmann. Il se referme donc en utilisant les couches de Hartmann, dans lesquelles la force de Laplace équilibre au premier ordre le frottement. Il résulte un coeur avec de fortes vitesses en Gr/Ha, et des profils variant peu dans la direction du champ.

Ce chapitre jette donc les bases pour comprendre l'écoulement en cavité élancée. La fermeture de la cavité à ses deux extrémités engendre des zones de recirculation qui sont étudiées dans les chapitres suivants. A nombres de Grashoff égaux, la convection de la chaleur et les forces d'inertie apparaîtront pour des Ha moins élevés dans le cas parallèle que dans le cas perpendiculaire. De nombreux résultats des chapitres 4 et 5 sont obtenus sur la base des simulations numérique. Avant de décrire la partie expérimentale de ce travail, nous donnons au paragraphe suivant un bref descriptif du code numérique utilisé.

2.8 Méthodes numériques

Le code numérique utilisé résout les équations couplées de la thermique, de la mécanique et de l'électricité. Ce code n'est pas destiné à simuler les régimes transitoires, et comme nous l'avons déjà mentionné, il est validé ponctuellement par comparaison avec les résultats analytiques et expérimentaux. Il est basé sur les différences finies, appliquées sur un maillage orthogonal et sur un schéma temporel explicite. Ces principales caractéristiques étant données, nous pouvons préciser et commenter

les différents choix effectués pour le maillage, les méthodes de résolution spatiale et temporelle, la résolution des conditions aux limites et des lois de conservations.

Le maillage utilisé est régulier, et composé de 32 mailles élémentaires orthogonales par unité de longueur dans chaque direction. Un tel maillage présente de multiples avantages : tout d'abord il simplifie la discrétisation des équations ; ensuite il correspond a la géométrie du problème (il est le maillage "intuitif" pour une cavité parallélépipédique), et de ce fait simplifie l'écriture des conditions aux limites ; enfin il assure aux termes dont le schéma de discrétisation est centré un caractère conservatif. Ainsi, comme en volumes finis, la friction et la dissipation thermique sont modélisés en conservant la quantité de mouvement et la chaleur. Le maillage de base est constitué de $32 \times 32 \times 240$ mailles, et est affiné près des parois, ceci afin de tenir compte des couches limites pariétales, qu'elles soient visqueuses ou thermiques. Lorsqu'un jet est confiné très près d'une paroi, le besoin de résolution spatiale nous a amené a prendre jusqu'à 64 mailles dans la direction normale a la paroi. Cette option a été prise pour étudier les jets thermiques au chapitre 4, ainsi que l'instabilité de la couche parallèle au chapitre 5. L'épaisseur de la plus fine maille (environ 0,01 près des parois) est le cinquième de l'épaisseur de la plus épaisse (environ 0,05 au centre de la cavité). Chaque maille a donc un rapport d'aspect inférieur à 5, et les mailles les plus allongées (près des parois) ont leur grande dimension parallèle à l'écoulement, ce qui minimise les risques d'instabilité numérique. Le défaut de ce maillage est sa rigidité : en effet, son affinement en un point se propage suivant les trois axes principaux passant par ce point, et de part la nécessité de limiter le rapport d'aspect des mailles, il se propage dans tout le maillage. Les possibilités d'affinement local sont donc très limitées, et sont en contradiction avec la limitation du rapport d'aspect des mailles.

La discrétisation des équations sur ce maillage est de type décalée, les grandeurs scalaires telles que la pression, le potentiel électrique et la température étant calculés aux centre des mailles, tandis que les grandeurs vectorielles telles que la vitesse et la densité de courant électrique sont calculées aux centre des faces. Les dérivés des termes linéaires sont discrétisées selon un schéma centré. Les termes de transport sont discrétisés selon un schéma décentré amont du troisième ordre. Ce décentrage introduit un léger défaut dans les propriétés de conservation de la quantité de mouvement et de la chaleur, mais renforce, de même que le choix d'un maillage décalé,

la convergence spatiale du code numérique.

Le schéma temporel est explicite, ce qui permet une résolution très simple, sans résoudre de systèmes d'équations. En revanche, les termes de diffusion peuvent provoquer des instabilités. La stabilité du code est donc soumise à la condition de Von Neumann, liant le pas de temps au pas d'espace, et qui s'écrit en notations adimensionnelles $\frac{D.\Delta\tau}{\Delta X^2} < \frac{1}{6}$, avec D le coefficient de diffusion de la quantité considérée (la limite de stabilité est de $\frac{1}{4}$ en 2 dimensions). Ainsi, $D = 1$ pour le terme de friction dans Navier-Stokes, tandis que $D = Pr^{-1} \sim 40$ pour la diffusion de la chaleur. C'est donc la résolution de l'équation de la chaleur qui est la plus sujette à ces instabilités. Dans la pratique, les termes non linéaires introduisent également des instabilités, et le pas de temps utilisé peut être jusqu'à dix fois inférieur à la limite fixée par la condition de Von Neumann. Le choix d'un maillage fin et d'un pas de temps réduit garantissent la précision et la stabilité, mais néanmoins allongent considérablement le temps de calcul. La majeure partie de ce temps de calcul est utilisée dans les algorithmes de correction de pression et de potentiel électrique, de type HSMAC [15]. par une méthode itérative, ces algorithmes permettent de rétablir les lois de conservations, une fois la vitesse et le courant éléctrique modifiés par l'application des équations du mouvement et de la loi d'Ohm discrétisées. Les itérations sont arrêtées lorsque l'erreur commise sur les lois de conservation devient acceptable. Quelques itérations sont suffisantes en régime stationnaire. leur nombre croît avec le nombre de Rayleigh, et décroît avec le nombre de Hartmann. Il est pour cela très long d'effectuer un calcul avec $Ra = 10^7$, ou plusieurs centaines voire plusieurs milliers d'itérations sont nécessaires a chaque pas de temps. Il est impossible de satisfaire les lois de conservation aussi précisément lors des régimes transitoires. Il est nécessaire de tronquer l'algorithme en limitant le nombre d'itérations, ceci afin de rester dans des temps de calculs inférieurs à la durée d'une thèse. La méthode employée introduit donc une erreur sur le calcul du transitoire, qui converge néanmoins vers la solution du régime stationnaire. Lorsque plusieurs régimes d'écoulement sont possibles avec les mêmes paramètres, la résolution du transitoire peut devenir déterminante. Au chapitre 4, on a décidé de s'affranchir du calcul du transitoire en faisant lentement évoluer la simulation à partir d'un état unique et connu. La première étape est donc de déterminer cet état : un première simulation à nombre de Hartmann élevé ($Ha = 10^3$ ou 10^4) aboutit à un régime ther-

mique conductif, avec de faibles vitesses, et ce indépendamment du transitoire simulé. La suite constitue une étude d'hystérésis : on fait décroître le nombre de Hartmann de façon a observer la succession des différents régimes d'écoulement. Lorsque Ha a atteint la limite imposée par le modèle des couches de Hartmann ($Ha = 100$), on le fait croître jusqu'à boucler le cycle d'hystérésis.

Le modèle analytique des couches de Hartmann établi dans ce chapitre débouche sur les relations (2.39), (2.40), et (2.44), applicables comme conditions aux limites pour le coeur aux parois de Hartmann. Des simulations numériques utilisant ou non ce modèle ont étés comparés avec les solutions analytiques du régime établi [34] : les simulations sans modèle des couches de Hartmann approchent la solution analytique lorsque la couche contient au moins trois mailles (voir aussi [33]). La dépendance en Ha^{-1} de l'épaisseur de la couche, et la nécessité de limiter les rapports d'aspects des mailles conduit à un nombre total de mailles variant en Ha^3. Le modèle des couches de Hartmann est une approximation à l'ordre 1 de lois de conservation, avec une erreur de l'ordre de Ha^{-1}. Utilisé dans les simulations, il permet d'atteindre la solution analytique avec une très grande rapidité et une grande précision, et ceci sans affiner le maillage. Il est dès lors préférable de ne pas utiliser le modèle lorsque la couche de Hartmann est susceptible d'être plus épaisse que la première maille ($Ha < 100$), et de l'utiliser lorsqu'elle est plus fine ($Ha > 100$).

Signalons pour finir l'existence d'une version bidimensionnelle du code, utilisable dans la configuration perpendiculaire lorsque le champ magnétique est suffisant pour assurer la bidimensionnalité. Ce modèle est basé sur l'intégration du couple de la force de Laplace d'une paroi de Hartmann à l'autre. Ce couple se réduit à un terme proportionnel à la vorticité, et amène à représenter la force de Laplace par un terme linéaire en fonction de la vitesse. Les simulations 2D présentent donc les avantages d'une grille réduite d'un facteur 32, et de ne pas résoudre le problème électrique (loi d'Ohm + méthode itérative de correction du potentiel électrique). Les gains ainsi réalisés en mémoire et temps de calcul permettent d'effectuer de nombreuses simulations et d'atteindre des nombres de Rayleigh plus élevés. De plus amples détails sur le modèle bidimensionnel sont donnés au chapitre 4.

Chapitre 3
L'EXPÉRIENCE MASCOT-VERTICALE

3.1 Introduction

Le but de cette expérience est non seulement de valider les modèles analytiques et numériques et d'en préciser les limites, mais aussi de permettre un accès directe aux phénomènes. Nous avons donc conçu une cellule de convection naturelle, parallélépipédique, élancée suivant la verticale, de section carrée. La cavité, de dimensions $40 \times 40 \times 300$ (mm), qui lui confèrent un élancement de 7.5, est réalisée par le rassemblement de ses six parois, réalisant chacune des conditions aux limites spécifiques. Rappelons que l'objectif était de réaliser six parois électriquement isolantes, avec deux parois verticales isothermes, l'une étant chauffée, celle d'en face refroidie. Les parois isothermes ont été réalisées en cuivre, et électriquement isolées du mercure par un traitement de surface, consistant en un dépôt d'une couche mince d'époxy, qui permet une parfaite isolation électrique tout en minimisant la résistance thermique engendrée. Les plaques adiabatiques sont réalisées en ertalyte (plexiglass).

Dans une première réalisation de la cellule, une plaque de cuivre est chauffée par une résistance électrique tandis que l'autre est refroidie à l'eau. Les inhomogénéités de température des plaques en cuivre ont été très importantes (jusqu'à 50 % de l'écart de température entre les deux plaques sur la plaque chaude), et une fuite de mercure est apparue. Ces inconvénients nous ont conduit à réaliser une deuxième version des plaques, entièrement régulées par circulation d'eau. La cavité a été montée dans l'entrefer d'un aimant, le flux de chaleur horizontal étant perpendiculaire au champ magnétique. Dans cette configuration, il existe une relation simple entre le potentiel électrique et la vitesse à l'extérieur de la couche de Hartmann (cf chapitre 4). Lorsque l'écoulement est bidimensionnel, la mesure du potentiel électrique à la

paroi de Hartmann donne accès à la vitesse dans le coeur. Dans la configuration parallèle, en revanche, un tel outil n'existe pas, et les signaux attendus sont très faibles. Aussi, vu l'amplitude du bruit généré par la chaîne d'amplification et d'acquisition, nous avons décidé de ne pas mettre la cellule dans la configuration parallèle.

3.2 Cellule de convection n°1

Dans une première version de la cellule, le chauffage est assuré par une résistance Ohmique disposée dans la masse de cuivre de la plaque chaude. La plaque opposée est refroidie par une circulation d'eau dans un canal en "U" creusé dans la masse de cuivre (fig.1). Les résultats des expériences ont montré que les deux plaques étaient sujettes à de fortes inhomogénéités de température.

Le chauffage Ohmique dans la plaque chaude est uniforme, et le cuivre séparant la résistance du mercure était supposé lisser les variations de température à l'interface Hg/paroi. Ceci est impossible en présence de stratification, où les inhomogénéités de la température sont engendrées dans le métal liquide, et non dans la paroi. La plaque chaude ne peut donc pas être isotherme. Dans la plaque froide, la circulation d'eau impose bien une température, aux variations près dues à son échauffement. La température d'interface est d'autant moins uniforme que la résistance thermique entre le mercure et l'eau est élevée, et la forme en "U" du canal d'eau provoque des variations de température suivant l'horizontale. Les circuits de régulation des températures chaude et froide sont représentés sur la figure 2.

L'étanchéité de la cavité est assurée par des joints toriques, partiellement insérés dans des rainures, et compressés entre deux plaques. Les points faibles de cette solution sont les contacts entre les joints linéïques verticaux et les joints carrés horizontaux, aux coins de la cavité. Au démontage de la cellule, les joints n'ont pas été mis en cause dans le problème de la fuite de mercure. Il s'est révélé que le mercure a fui par les sondes : en effet, afin de permettre l'insertion d'une résistance électrique, la paroi chaude est constituée de deux plaques, assemblées par soudure, et traversées par les sondes. Le mercure s'est infiltré dans l'interstice entre une sonde et la première plaque, et a attaqué l'étain jusqu'au bord de la plaque.

Un circuit propre au mercure (figure 3) permet de remplir la cavité à l'abri

FIG. 1 Vue partielle de la première version de la cavité. Deux parois adiabatiques ne sont pas représentées ; les plaques isothermes sont montrées transparentes pour laisser apparaître leur dispositif de contrôle. Plaque de gauche : chauffage Ohmique ; plaque de droite : refroidissement à l'eau.

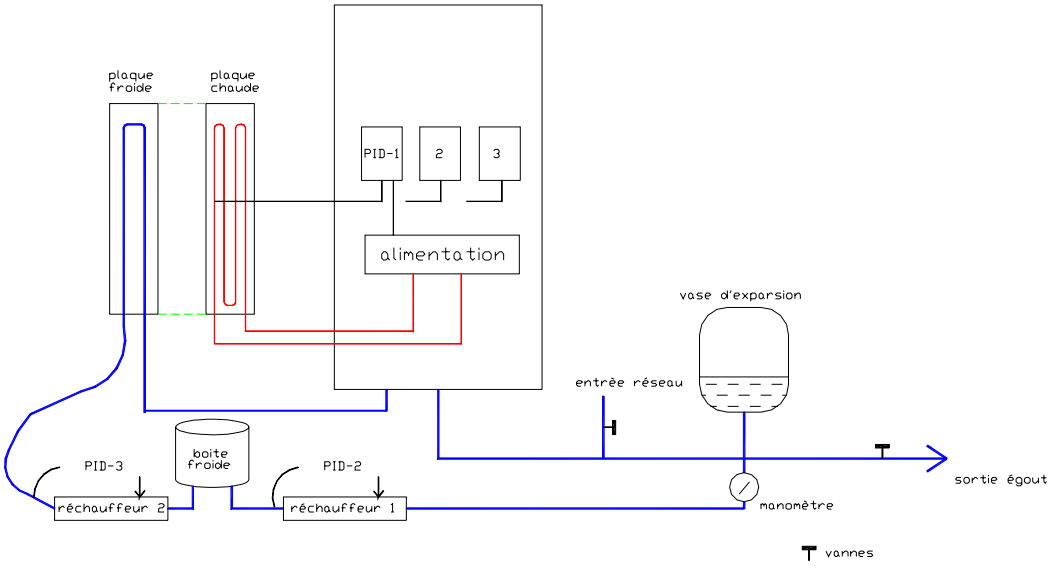


FIG. 2 Circuits électriques et hydrauliques d'asservissement des températures des plaques, dans leur 1ère version.

de l'air (sous vide et atmosphère d'argon), de la maintenir sous atmosphère d'argon, voire de réintroduire la quantité de mercure compensant les fuites. Le protocole de remplissage est proche de celui décrit par Davoust [8] pour une cellule horizontale : plusieurs fois, le vide a été fait dans la cavité alternativement avec un remplissage d'argon, ceci afin de réaliser le dégazage des parois et de minimiser les traces d'oxygène. La tenue à long terme du vide permet de tester l'étanchéité de la cavité. Ainsi, avant le remplissage de la cellule, aucun défaut d'étanchéité n'a été observé. Ensuite, le mercure a été poussé par de l'argon sous pression dans la cavité alors vide. Deux bouteilles étant nécessaires pour le remplissage, l'air introduit dans les tubes pendant le changement de bouteille a été de nouveau pompé, et le cycle vide-argon a été renouvelé au dessus de la surface libre avant d'introduire le mercure de la seconde bouteille. Il est apparu que de l'air passait à travers les parois des tubes par porosité, et que la bulle d'air dans le tube surplombant la cavité était très difficile à chasser.

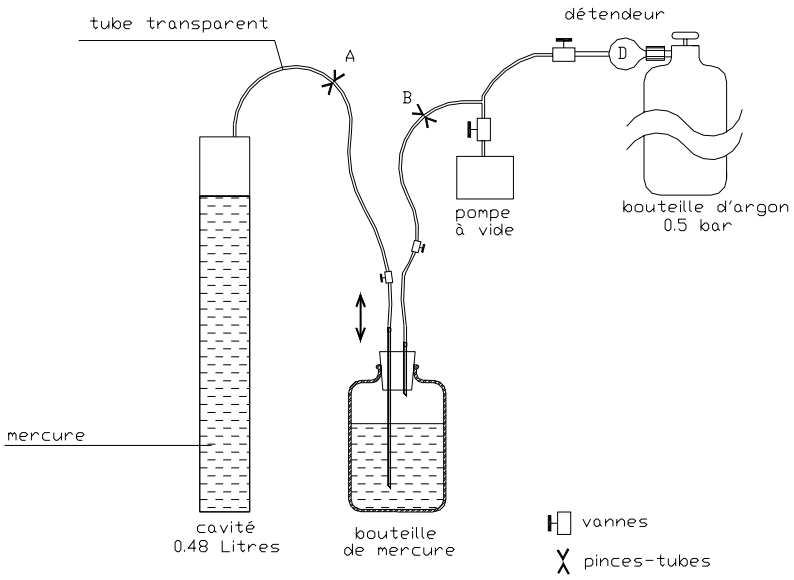


FIG. 3 Circuit de mercure dans le 1ère version de Mascot-V

3.3 Cellule de convection n°2

Dans la deuxième version, les deux plaques sont identiques, et traversées de haut en bas par de l'eau dans un réseau de canaux (figure 4).. L'eau froide circule de haut en bas, tandis que l'eau chaude circule de bas en haut. Les deux échangeurs eau-mercure à contre courant ainsi réalisés ont un effet qui s'oppose à la stratification. Les inhomogénéités ont ainsi été réduites de quasiment un ordre de grandeur, pour atteindre moins de 1 degré lorsque $T_c - T_f = 25K$. Les sondes ont étés redistribuées pour éviter les canaux, et sont maintenant réparties en deux paquets de 7 (horizontalement) $\times$ 4 (verticalement) sondes.

Le même système de joints d'étanchéité a été conservé, à ceci près que les joints ont étés collés avec une fine couche de colle acétique. Les sondes ne traversent plus de soudure, et sont collés sur près de la totalité de l'épaisseur de la plaque (le caractère thermoplastique de la colle permet de diminuer sa viscosité). Cette solution, plus satisfaisante que la première, n'a pas empêché l'apparition d'une fuite, d'une ampleur bien moindre que la précédente. Au cours des manipulations, cette fuite a été partiellement annihilée par une dépression dans la partie supérieure de la cavité.

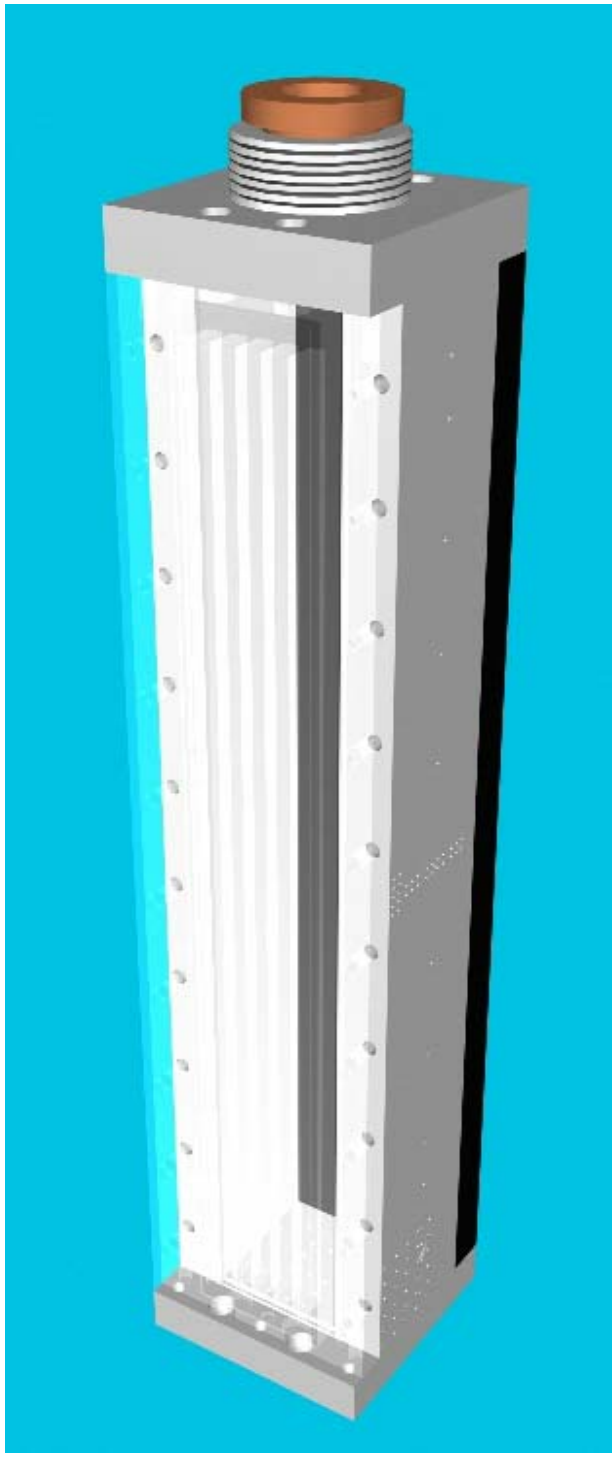


FIG. 4 Vue partielle de la deuxième version de la cavité, dans laquelle les températures des plaques isothermes sont imposées par circulation d'eau. Une plaque isotherme est montrée en transparence pour laisser apparaître le réseau de canaux. Les deux plaques isothermes sont symétriques.

Le retournement du réservoir permet la continuité du mercure jusqu'à la cavité, et assure ainsi la compensation des fuites. Un tube reliant le haut et le bas de la cavité a été rajouté de manière à contrôler le niveau de mercure.

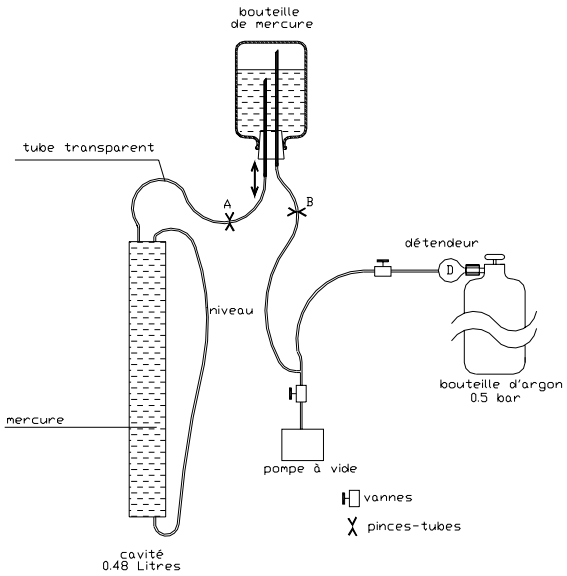


FIG. 5 Circuit de mercure dans la 2ème version de Mascot-V

Dans la suite de ce chapitre et de ce manuscrit, nous ne donnons que les caractéristiques et les résultats relatifs à cette deuxième version de la cavité.

3.4 Contrôle des paramètres

3.4.1 Paramètres géométriques : dimensions, orientation et centrage

La précision sur les dimensions des pièces est importante pour assurer une bonne étanchéité. Cette précision est de l'ordre du centième de millimètre, et la dilatation thermique, dans les gammes de températures utilisées, ne provoque pas un allongement supérieur. L'écart à l'orthogonalité entre deux pièces adjacentes (ex : le bouchon et les plaques de cuivre) est donc très en deçà du centième de degré, ce qui est tout à fait acceptable du point de vue du système d'étanchéité.

Les orientations du champ magnétique et de la cavité dans l'espace sont réalisées au fil à plomb et au niveau. Les déviations maximales des axes de l'entrefer et de la cavité par rapport à la verticale sont de l'ordre de quelques dixièmes de degrés. Le repère (O,x,y,z) est associé à la cavité. Le parallélisme des faces de la cavité et des plaques de l'entrefer, limité par leur petite dimension (horizontale), est correct au degré près. D'après l'ensemble de ces données d'orientation, l'orthogonalité du champ aux parois de Hartmann est précise au millième près ($(\mathbf{B}.\mathbf{y})/B > 0.999$), et les composantes parallèles à ces parois sont majorées par $(\mathbf{B}.\mathbf{x})/B < 5\%$ et $(\mathbf{B}.\mathbf{z}/B)/B < 0.3\%$.

Le centrage de la cellule dans l'entrefer admet les précisions δx, $\delta y < 5\,mm$, et $\delta z < 1\,cm$. Les variations correspondantes de l'intensité du champ magnétique inférieures au pourcent, donc inférieures aux non uniformités du champ dans le volume de la cellule.

3.4.2 Etat de surface : planéité, isolation électrique

La rugosité des parois est de l'ordre de quelques dixièmes de micromètres, et en tout cas très inférieure à l'épaisseur des couches limites (voir 1.1.4). Les plaques thermo-régulées doivent conduire le mieux possible la chaleur, de façon à réaliser l'interface la plus isotherme possible. Il y a a priori une contradiction entre les propriétés de conduction thermique et d'isolation électrique voulues. La plaque est donc réalisée en cuivre, et isolée électriquement par un traitement de surface minimisant la résistance thermique : une couche d'époxy de $15\,\mu m$ est déposée par cataphorèse (procédé électrochimique très utilisée pour la protection des carrosseries automobiles). Des tests réguliers entre le mercure et le cuivre de la plaque ont montré que les propriétés d'isolation de la couche ont résisté aux contraintes thermo-mécaniques d'une part, et à la corrosion du mercure d'autre part.

Les couches sont cependant localement court-circuitées par le métal des sondes. Même s'ils sont de bons conducteurs d'électricité, ils représentent moins de 0.4 mm^2par sonde, soit moins de 0.6% de la surface de la paroi pour 60 sondes. De même, la tige conductrice de la sonde mobile est susceptible de freiner l'écoulement. Néanmoins, elle est au centre de la cavité, où par symétrie, la vitesse et le courant électrique sont faibles.

3.4.3 Températures et nombre de Grashoff

Le dispositif suivant a pour but de réaliser les températures aux interfaces ML/paroi les plus uniformes possibles. Chacune des deux plaques "isothermes" a son propre circuit hydraulique circulant en boucle fermée, ce qui atténue l'influence des variations de température et de débit du réseau de distribution. Les circuits comprennent une pompe, une sonde type PT100 (remplaçant avantageusement le thermocouple de type K utilisé dans la première version de Mascot-V), un contrôleur PID, un réchauffeur électrique, un échangeur froid (avec l'eau du réseau), un vase d'expansion, quelques vannes et une purge. La température réellement contrôlée est la température à la sortie des réchauffeurs. Le calorifugeage des tuyaux jusqu'aux plaques permet de minimiser les pertes thermiques. Un débit minimum de $D > 5\,l/s$ permet de réduire les variations relatives de la température de l'eau dans les plaques.

$$\frac{|T_{sortie} - T_{entrée}|}{T_c - T_f} = Nu.\frac{\lambda_{Hg}.L_z}{\rho_{eau}.C_{peau}.D} < 0.01Nu$$

Le nombre de Nusselt maximum observé étant environ 3.6 (pour $T_c - T_f = 25\,K$, $B = 0.25\,T$), les variations précédentes ne dépassent pas 4%. Ces variations sont négligeables devant les inhomogénéités de la température aux interfaces. Il y a un paradoxe entre la réduction des inhomogénéités horizontales et verticales : Les canaux ne peuvent occuper toute la largeur de la plaque, du fait de la nécessité de laisser un passage pour les sondes pariétales. Une épaisseur $e_{Cu} = 2\,mm$ de cuivre entre l'eau et l'interface permet de lisser les variations horizontales de la température. En cas de stratification, le flux de chaleur entre l'extrémité haute et chaude de la cavité, et la plaque froide est importante. La différence entre les températures de l'eau et de l'interface ML/paroi est proportionnelle à la résistance thermique due à l'épaisseur de cuivre, à la couche d'époxy, et au mauvais mouillage du mercure sur l'époxy. La résistance thermique du cuivre, $R_{Cu} \simeq 3.10^{-3}\ KW^{-1}$, est négligeable devant celle de l'isolant, $R_{epoxy} \simeq 3.10^{-2}\ KW^{-1}$. En négligeant la résistance de contact, difficile à évaluer, on obtient

$$\frac{|T_{eau} - T_{Hg}|}{T_c - T_f} \simeq Nu.\lambda_{Hg}L\,(R_{Cu} + R_{epoxy}) \simeq 0.34\,R_{th}\,Nu \simeq 10^{-2}\,Nu.$$

Ce résultat est du même ordre de grandeur que les inhomogénéités effectivement observés à l'interface, qui ne dépassent pas 10%. L'utilisation d'une plaque régulée à

l'eau dans la deuxième version a permis de réduire les inhomogénéités d'un facteur 5. Néanmoins, la prise en compte de la température réelle des plaques est nécessaire : on suppose que les variations principales des températures aux interfaces 1 (plaque chaude) et 2 (plaque froide) sont linéaires en z, avec par symétrie, le même coefficient γ. La différence de ces températures ne varie alors pas significativement suivant z :

$$\Delta T(z) = T_1(z) - T_2(z) \simeq T_1(0) - \gamma.\left(z - \frac{L_Z}{2}\right) - T_2(0) + \gamma.\left(z - \frac{L_Z}{2}\right) = \Delta T.$$

Le nombre de Grashoff est construit sur cet écart de température ΔT. Dans la plage de paramètres utilisés, et sous les régimes stratifié et multi-cellulaire observés, on constate que les températures d'interface varient peu suivant l'horizontale (moins de 4%), et dépendent peu du champ magnétique (environ 6%). Le graphique 6 suggère une variation linéaire de ΔT en fonction de $T_c - T_f$. La figure 7 donne la valeur de

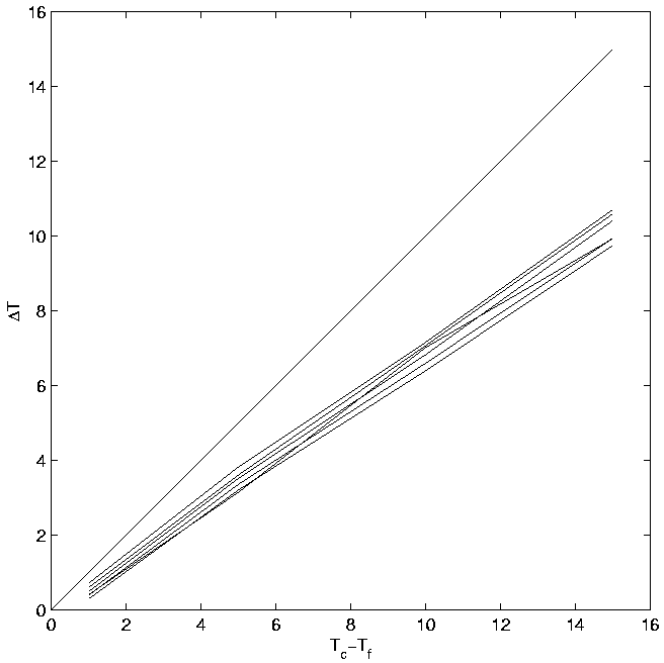


FIG. 6 Ecart de température effectif ΔT en fonction de T_c-T_f (=1,5,10,15), pour différentes valeurs de B. Le première bissectrice est aussi représentée.

la pente. Les variations horizontales et l'influence de la température sont comprises dans la barre d'erreur. On propose l'approximation :

$$\Delta T = 0.685\ (T_c - T_f) \pm 5\%.$$

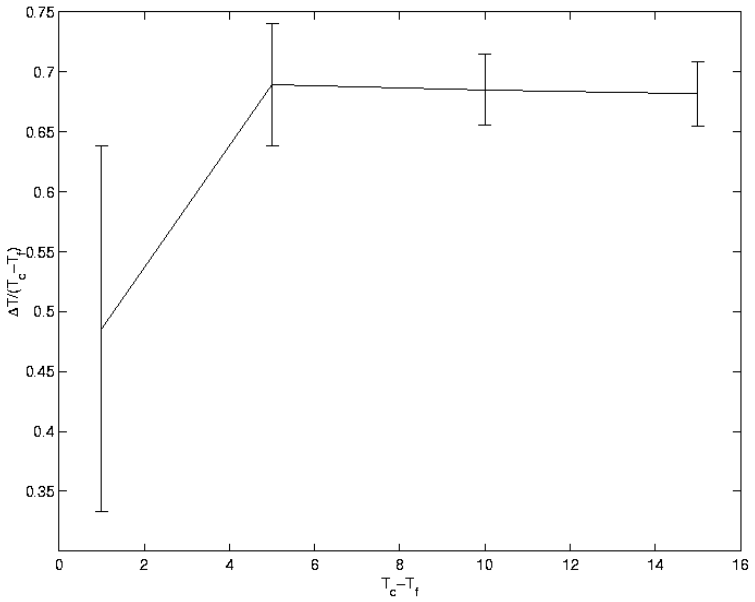


FIG. 7 rapport de l'écart de température effectif à l'écart imposé. $\Delta T \,/\, (T_c - T_f)$. Pour $T_c - T_f > 5K$, ce rapport vaut environ 0.685.

La température de la boite isotherme contenant les soudures froides des thermocouples est choisie légèrement supérieure à celle du réseau, 17°C en hiver et 18°C en été. L'eau est ensuite réchauffée de 1K pour atteindre la température voulue pour la plaque froide. L'incertitude des mesures est trop élevée à $T_c - T_f = 1K$, donc nous considérons le minimum $T_c - T_f = 5K$. Malgré le fait que le mercure soit confiné dans une enceinte fermée (aux fuites près auxquelles nous avons du faire face), nous préférons éviter les températures supérieures à 45°C, limitant ainsi l'écart de température $T_c - T_f$ à $25K$. Ainsi, les nombres de Grashoff et de Rayleigh évoluent à $\pm 5\%$ dans les plages suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} 3.0\ 10^7 & < & Gr = 6.0\ 10^6.\,(T_c - T_f) & < & 1.5\ 10^8, \\ 6.0\ 10^5 & < & Ra = 1.2\ 10^5.\,(T_c - T_f) & < & 3.0\ 10^6. \end{array}$$

3.4.4 Champ magnétique et nombre de Hartmann

L'électro-aimant utilisé, ainsi que son alimentation et son circuit de refroidissement sont ceux que Davoust a utilisés pour une précédente version de l'expérience Mascot, dans une configuration horizontale. Davoust a montré que les non-uniformités du champ sont inférieures à 2%, que ses variations temporelles, dues à la précision du générateur, n'excédent pas 1 mT. Le champ magnétique varie donc entre l'aimantation rémanente, de l'ordre de 1,5 mT, et le maximum de 0.735 T. En conséquence, le nombre de Hartmann varie de quasiment 0 à 796 :

$$Ha = 1035.B^{\circ}(Tesla).$$

3.5 Ordres de grandeur attendus

L'étude asymptotique du chapitre précédent permet d'estimer les variations de potentiel électrique (observable) et de vitesse (non directement observable) que l'on devrait observer sous un champ suffisamment fort, dans chacune des deux configurations, perpendiculaire ou parallèle.

3.5.1 Cas perpendiculaire

Pour cause de bidimensionnalité, les variations dans la direction du champ sont négligeables. Dans la direction perpendiculaire, les variations de potentiel sont de l'ordre de

$$\triangle\varphi \sim \frac{Gr}{16.Ha}.\nu B^{\circ} = 60\,\triangle T(K) \quad \mu V.$$

La vitesse maximale et

$$\begin{aligned} W_{\max} &\sim \frac{Gr}{4.Ha}.\frac{\nu}{L} = 6.0\,\frac{\triangle T(K)}{B(T)} \quad mm\,s^{-1}, \\ \text{soit } W_{\max} &\sim 8.2\,\triangle T(K) \quad mm\,s^{-1} \quad \text{pour B=B}_{\max}\text{=0.735.T.} \end{aligned}$$

Pour l'écart de température maximal $\triangle T = 25K$, on atteint 1.5 mV et 20 cm/s.

3.5.2 Cas parallèle

Les variations, d'un ordre de grandeur plus faible que dans le cas précédent, sont observables dans les couches parallèles,

$$\begin{aligned} W_{\max} &\sim 0.70.\frac{\triangle T(K)}{B(T)} \quad mm\, s^{-1}, \\ \text{soit } W_{\max} &\sim 0.95.\triangle T(K) \quad mm\, s^{-1} \quad \text{pour B=B}_{\max}. \end{aligned}$$

$$\triangle\varphi \sim 1.3\,\triangle T(K) \quad \mu V.$$

Pour un champ magnétique maximal et un écart de température maximal, la vitesse et la différence de potentiel atteignent 2.4 $cm\, s^{-1}$ et 33 μV.

3.6 Dispositifs de mesure

Nous utilisons deux types de sondes pariétales. Le premier est un thermocouple classique de type E, de pouvoir thermoélectrique 21 $\mu V/°C$, dont la boule est collée dans la plaque, à moins de 1 mm de l'interface cuivre-mercure. Le second reprend la technologie des thermocouples sans boule (le métal liquide assurant lui-même le contact électrique), dans une géométrie cylindrique permettant de minimiser les effets du champ électromoteur $V \times B$. Une paire de sondes de ce deuxième type permet également la mesure de potentiels électriques.

3.6.1 Le thermocouple classique à boule

La boule (point m) est un alliage des métaux 1 et 2. Sur chacun des éléments du circuit [mpqrsm], la loi d'Ohm s'écrit :

$$\frac{j}{\sigma} = -\nabla\varphi - P\nabla T.$$

La valeur mesurable est le potentiel φ. Le champ dû à l'effet thermoélectrique ne dérive pas forcément d'un potentiel (en cas d'inhomogénéités du pouvoir thermoélectrique). Le courant est nul, puisqu'il entre dans un amplificateur supposé idéal. Les

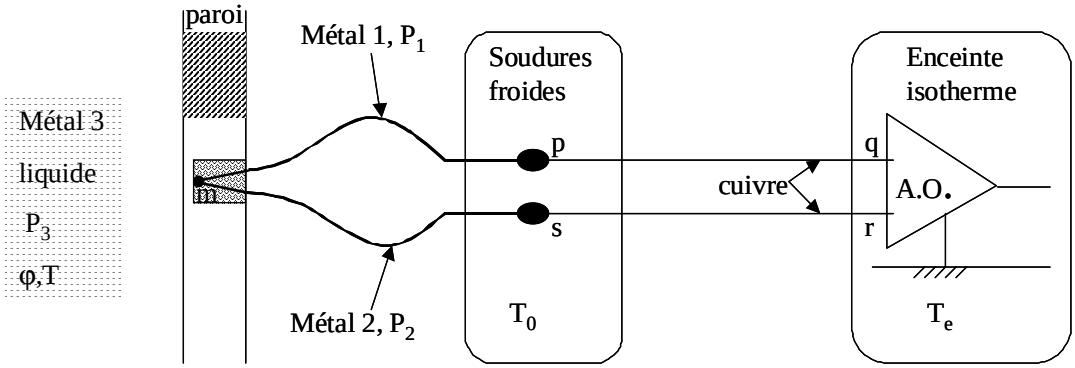


FIG. 8 Circuit de mesure de température avec un thermocouple classique à boule

différences de potentiel sur les portions [m,q] et [m,r] du circuit sont

$$\begin{aligned}\varphi_q - \varphi_m &= P_1(T_m - T_0) + P_{Cu}(T_0 - T_e),\\ \varphi_r - \varphi_m &= P_2(T_m - T_0) + P_{Cu}(T_0 - T_e).\end{aligned}$$

Par soustraction et en notant $P_{1/2} = P_1 - P_2$ le pouvoir thermoélectrique du thermocouple considéré, la tension à l'entrée de l'amplificateur est une mesure de la température T relativement à la référence T_0 :

$$\varphi_{rq} = \varphi_q - \varphi_r = P_{1/2}(T_m - T_0).$$

Le signal φ_{rq} est soumis à une chaîne de filtrage et d'amplification dans l'enceinte isotherme. Le signal à la sortie des amplis est

$$S_{rq} = A_i \varphi_{rq} + O_i,$$

où A_i et O_i sont le gain et l'offset de l'ampli $n°i$ utilisé. Une mesure préalable des offsets et des gains est nécessaire avant chaque acquisition, les offsets étant sensibles aux dérives thermiques.

3.6.2 Le thermocouple avec contact sur métal liquide

Au circuit précédent, il faut rajouter la portion de métal liquide [mn], où la loi d'Ohm inclut le champ électromoteur $V \times B$, et un courant j non nul :

$$\begin{aligned}\varphi_q - \varphi_n &= P_1(T_n - T_0) + P_{Cu}(T_0 - T_e),\\ \varphi_r - \varphi_m &= P_2(T_m - T_0) + P_{Cu}(T_0 - T_e),\end{aligned}$$

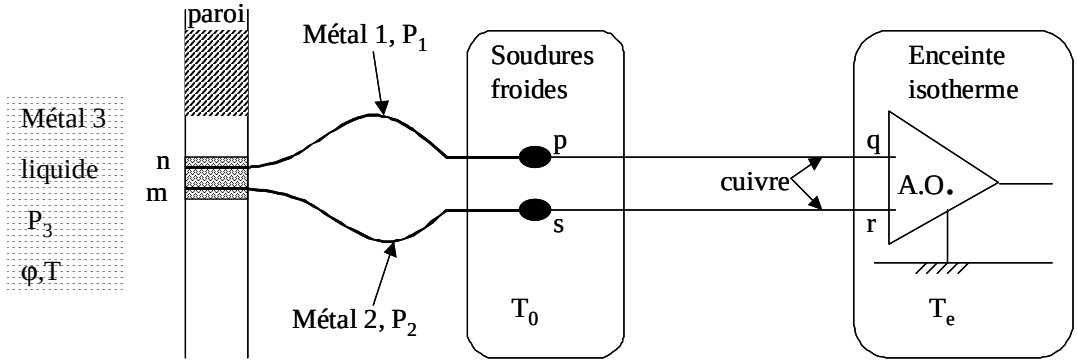


FIG. 9 Circuit de mesure de température avec un thermocouple sans boule

$$\frac{j}{\sigma} = -\nabla\varphi + V \times B - P\nabla T,$$

soit intégrée de m à n,

$$\varphi_{mn} = \varphi_n - \varphi_m = \int_m^n \left[V \times B - \frac{j}{\sigma} \right] ds + P_3(T_m - T_n).$$

La tension à l'entrée de l'ampli est donc

$$\varphi_{rq} = \varphi_q - \varphi_r = P_{1/2}\left(\frac{T_m + T_n}{2} - T_0\right) - \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)(T_m - T_n) + \varphi_{mn}. \tag{3.1}$$

Pour mesurer la température, il faut donc minimiser $(T_m - T_n)$ et φ_{mn}, c'est à dire rapprocher le plus possible m et n. L'avantage est qu'on mesure directement la température du métal liquide, et non celle d'une boule. On supprime ainsi l'inertie thermique, responsable d'erreurs de mesure et d'une réponse non instantanée. Les inconvénients sont (i) de rajouter une erreur due au métal liquide 3, (ii) de rajouter des perturbations électromagnétiques diverses, et (iii) de rendre plus complexe la disposition de la sonde, puisqu'elle doit être étanche. Le potentiel φ_{mn} dans le mercure est déterminé par le courant électrique seul, puisque la vitesse est nulle à la paroi et puisque le pouvoir thermoélectrique absolu du mercure n'est que de 1 à 2 $\mu V/K$. Lorsque la densité de courant est importante dans la couche de Hartmann, celle ci est active, et les variations de potentiels sont liés à la vitesse. Appliquée à la paroi, et réécrite avec le potentiel et les dimensions, la relation (2.29) montre que le potentiel électrique φ_{mn} est proportionnel au débit de fluide entre les deux sondes :

$$\nabla_\perp \varphi \simeq V^\circ \times B. \tag{3.2}$$

La sonde suivante tente de minimiser l'erreur due à ce champ électromoteur, dans la mesure de la température.

3.6.3 Le thermocouple sans boule cylindrique

Si la vitesse est uniforme à l'échelle de la sonde, la contribution d'une portion de circuit dl peut être annulée par celle de la portion symétrique $-dl$. D'où l'idée d'utiliser une électrode circulaire centrée.

Du point de vue mathématique, la justification utilise le théorème de Green.

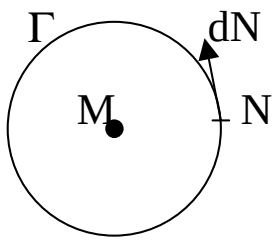


FIG. 10 Principe de la mesure de température avec un thermocouple cylindrique parfaitement centré

Le potentiel livré par la sonde est une sommation sur le contour (figure 10, avec $dN = ||d\vec{N}||$) :

$$\begin{aligned}
\varphi_\Gamma - \varphi_M &= \int_\Gamma (\varphi_N - \varphi_M)\, dN = \int_\Gamma \left(\int_M^N \vec{\nabla}\varphi . d\vec{r} \right) dN \\
&\simeq \int_\Gamma \left(\int_M^N \left(\vec{V}^\circ \times \vec{B} \right) . d\vec{r} \right) dN \\
&\simeq -\vec{B} \int_\Gamma \left(\int_M^N \vec{V}^\circ \times d\vec{r} \right) dN.
\end{aligned}$$

L'uniformité de la vitesse implique

$$\begin{aligned}
\varphi_\Gamma - \varphi_M &\simeq -\vec{B} \left(\vec{V}^\circ \times \int_\Gamma \int_M^N d\vec{r} dN \right), \\
\varphi_\Gamma - \varphi_M &\simeq -\vec{B} \left(\vec{V}^\circ \times \int_\Gamma \overrightarrow{MN} . dN \right).
\end{aligned}$$

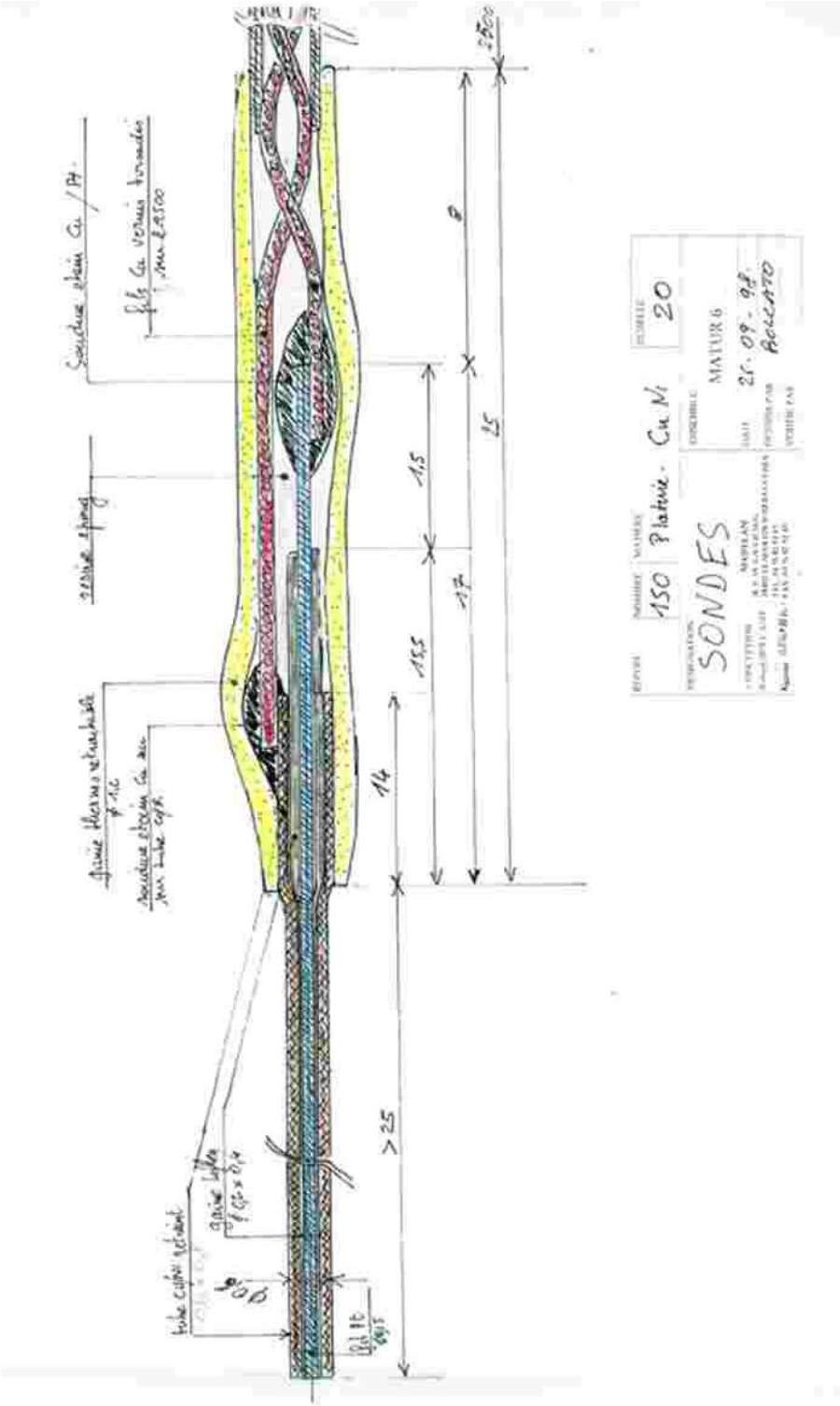


FIG. 11 Shéma d'un thermocouple sans boule cylindrique.

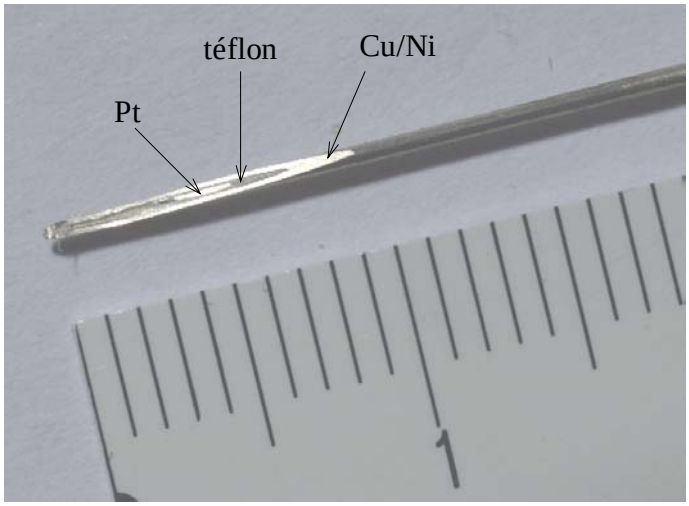


FIG. 12 Photo d'un thermocouple sans boule cylindrique

La sonde qui minimise la contribution du métal liquide au potentiel doit donc être symétrique $\left(\int_\Gamma \overrightarrow{MN}.dN = 0\right)$. Les figures 11 et 12 montrent schéma de principe et la réalisation d'une telle sonde.

Si l'électrode extérieure, de rayon R, est de centre $I \neq M$, cette intégrale devient

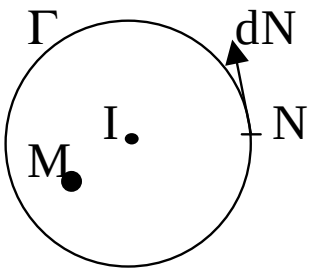


FIG. 13 Principe de la mesure de température avec un thermocouple cylindrique décentré

$$\int_\Gamma \overrightarrow{MN}.dN = 2\pi R.\overrightarrow{MI}.$$

L'erreur introduite est donc :

$$|\varphi_\Gamma - \varphi_M| \simeq \left|-2\pi R\left(\vec{V}^\circ \times .\overrightarrow{MI}\right)\vec{B}\right| < 2\pi R.MI.BV^\circ.$$

De même, si la vitesse n'est pas exactement uniforme, l'erreur produite est de l'ordre de :

$$\varphi_\Gamma - \varphi_M \simeq -\vec{B}\int_\Gamma \left(\int_M^N \vec{V}_e^0 \times d\vec{r}\right) dN = \vartheta\left(2\pi R^2 B \left\langle \left|\vec{V}^\circ - \frac{1}{S}\iint \vec{V}^\circ ds\right|\right\rangle\right).$$

La relation potentiel-vitesse à la base de cette sonde étant une approximation dont l'erreur est de l'ordre de Ha^{-1}, on ne cherchera pas à avoir une meilleure précision par le dimensionnement de la sonde. Ceci donne la précision attendue sur le centrage et le niveau de turbulence admissible au niveau de la sonde :

$$\begin{aligned} \frac{MI}{R} &\preceq \frac{1}{2Ha}, \\ \frac{\left|\vec{V}^\circ - \frac{1}{S}\iint \vec{V}^\circ ds\right|}{V^\circ} &\preceq \frac{1}{2Ha}. \end{aligned}$$

3.6.4 Mesures de potentiel électrique et de vitesse

Avec deux thermocouples sans boule, reliés comme l'indique la figure 14, il est possible de mesurer les variations du potentiel électrique au sein du métal liquide.

Les différences de potentiel entre les soudures froides et les entrées de l'amplificateur, et par soustraction le potentiel φ_{rq} amplifié sont

$$\begin{aligned} \varphi_q - \varphi_n &= P_1(T_n - T_0) + P_{Cu}(T_0 - T_e), \\ \varphi_r - \varphi_m &= P_1(T_m - T_0) + P_{Cu}(T_0 - T_e), \\ \varphi_q - \varphi_r &= \varphi_n - \varphi_m + P_1(T_n - T_m). \end{aligned}$$

Dans le métal liquide, un effet thermoélectrique s'ajoute au potentiel d'origine purement MHD :

$$\varphi_{mn} = [\varphi_{mn}]_{MHD} + P_3(T_m - T_n).$$

On mesure donc le potentiel du métal liquide, à l'erreur près introduite par l'effet thermoélectrique du couple métal liquide/électrode, de pouvoir thermoélectrique $P_{1/3}$:

$$\varphi_{rq} = [\varphi_{mn}]_{MHD} + P_{1/3}(T_n - T_m).$$

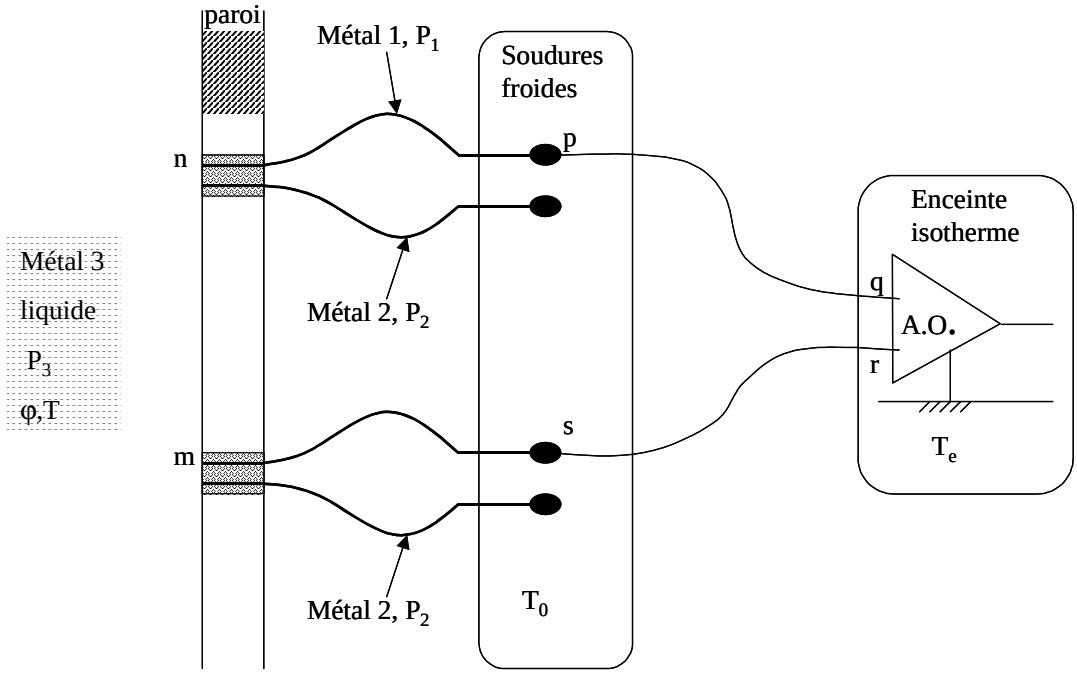


FIG. 14 Circuit de mesure de potentiel avec deux thermocouples sans boule

Dans l'expérience MASCOT-V, le choix du platine pour métal 1, dont le pouvoir thermoélectrique est proche de celui du mercure à température ambiante (vers 15°c), minimise cette erreur. La relation (3.2) indique que l'on a alors une mesure précise du flux linéïque de la vitesse à travers [MN] :

$$[\varphi_{mn}]_{MHD} = \int_m^n [V^\circ \times B]\, ds = B \int_m^n (V^\circ.n)\, ds$$

3.6.5 La sonde mobile

Une sonde mobile a été introduite dans la cavité dans le but de mesurer à la fois des températures et des vitesses. Cette sonde est représentée figure (15). Les 5 extrémités du peigne sont des thermocouples cylindriques sans boule permettant de mesurer 5 températures le long d'un axe. Ces thermocouples sont situés à 2 mm au dessus d'un fil de platine à chaleur pulsée. La mesure du temps de transit d'une bouffée de chaleur entre son émission et sa réception par les thermocouples devait en théorie constituer une mesure de la vitesse. En pratique, le fil de platine (de seulement 50 μm de diamètre) a été rompu très tôt, soit attaqué par le mercure après une rupture de

son isolation, soit lors du montage de la cellule. Pour la deuxième version de Mascot-V, la sonde mobile a été remontée sans le fil chauffant, conservant la seule fonction de mesure de température.

FIG. 15 Photographie de la sonde mobile à chaleur pulsée. Le fil chauffant a été supprimé pour la deuxième version de la cellule, réduisant la sonde à un peigne mobile de thermocouples.

3.6.6 Mesure du flux de chaleur global

Le flux de chaleur global Φ_{Hg} transitant par le mercure peut être estimé par la puissance Φ_{chaud} perdue par l'eau chaude, ou Φ_{froid} reçue par l'eau froide. Chacune de ces deux puissances est déterminée par un bilan d'enthalpie de l'eau à travers la plaque, faisant intervenir le débit de l'eau et son échauffement. Un débit important (5 à 10 l/mn) permet d'avoir un échauffement faible. Deux thermocouples montés en opposition donnent cet échauffement avec précision (figure 16). La température du circuit froid est proche de la température ambiante (à $2°C$ près), minimisant ainsi les pertes thermiques. Par contre, du côté chaud, le calorifugeage de la plaque et des tuyaux est limité par l'étroitesse de l'entrefer, et des pertes Φ_{pertes} subsistent, de l'ordre de 14-18%. L'estimation du flux de chaleur se fait donc du côté froid :

$$\Phi_{Hg} \simeq \Phi_{froid} \pm 2\ \%$$

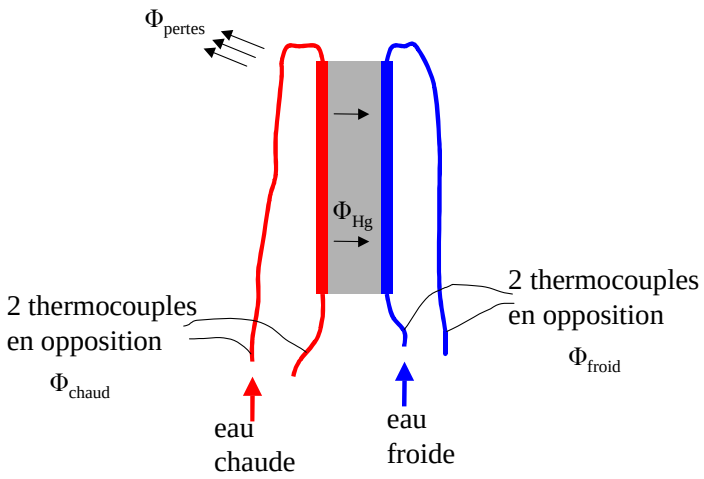


FIG. 16 échanges globaux de chaleur et principe de la mesure

Les mesures dans la configuration perpendiculaire ont permis de tracer le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Hartmann, pour différents nombres de Grashoff (figure 17). Ces mesures ont étés faites à champ croissant, puis décroissant, ce qui permet d'évaluer l'incertitude. Les résultats apparaissent en général assez reproductibles. Il n'est pas exclu que le cycle décrit donne lieu à un hystérésis, ainsi que les simulations numériques le montrent (chapitre 4). Ces mesures mettent en évidence (1) la décroissance asymptotique du flux de chaleur avec Ha, et (2) le maximum du transfert thermique à champ magnétique modéré (200<Ha<300). La première constatation n'est pas surprenante, étant donné la dépendance de la vitesse en Gr/Ha, aux forts Ha (voir chapitre 2). Un tel maximum du transfert thermique a été observé expérimentalement par Nakagawa dès 1957, puis en 1980 [10]. Il a également été simulé numériquement en 1989 [25], mais ce n'est qu'en 1997 que Tagawa et Ozoe montrent sur la base de simulations numériques que ce maximum était lié à la bidimensionnalisation de l'écoulement [35]. En effet, un champ magnétique même modéré diffuse la vorticité Ω le long des lignes de champ (chapitre 4). Dans la configuration perpendiculaire, c'est cette composante Ω_y qui transporte la chaleur de la paroi chaude à la paroi froide. Lorsque l'écoulement est bidimensionnel ($\Omega \simeq \mathbf{y}.\Omega_y$), tout le mouvement du fluide contribue efficacement au transport de la chaleur. Une augmentation

supplémentaire du champ ne peut alors plus que freiner l'écoulement. Ces considérations nous donnent un moyen simple pour estimer le champ minimum pour lequel l'écoulement est bidimensionnel, soit dans la gamme de Gr utilisée, $Ha_{2D} \simeq 300$.

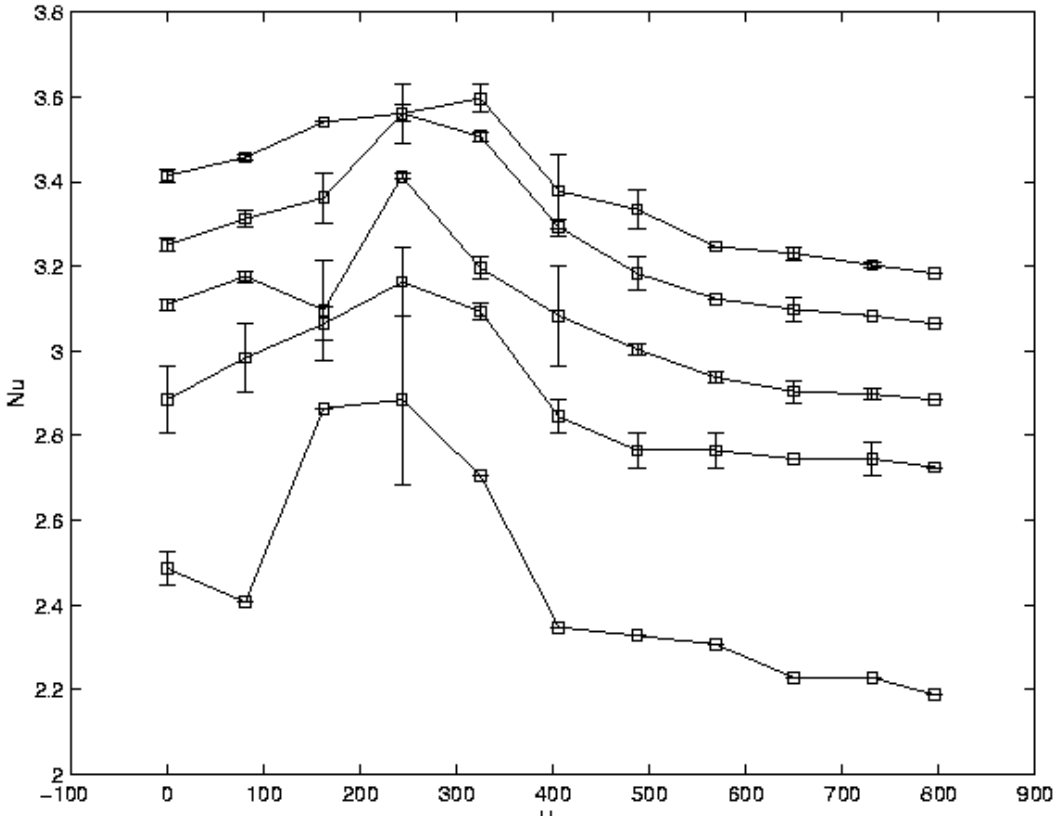


FIG. 17 Nu(Ha) pour différentes valeurs de Gr. De bas en haut, Gr=3.10^7, 6.10^7, 9.10^7, $1.2.10^8$, $1.5.10^8$. Cas perpendiculaire

3.6.7 Acquisition des signaux

Les 146 sondes cylindriques sans boule sont réparties en 5 paquets comme le montre la figure 18. Des profils peuvent donc être tracés à mi-hauteur et en bas de la cavité, et comparés avec les résultats analytiques et numériques. Sur la paroi adiabatique, une série de 15 thermocouples classiques de type E (Cu/Ct) est destinée à mesurer les variations de température dues à la stratification.

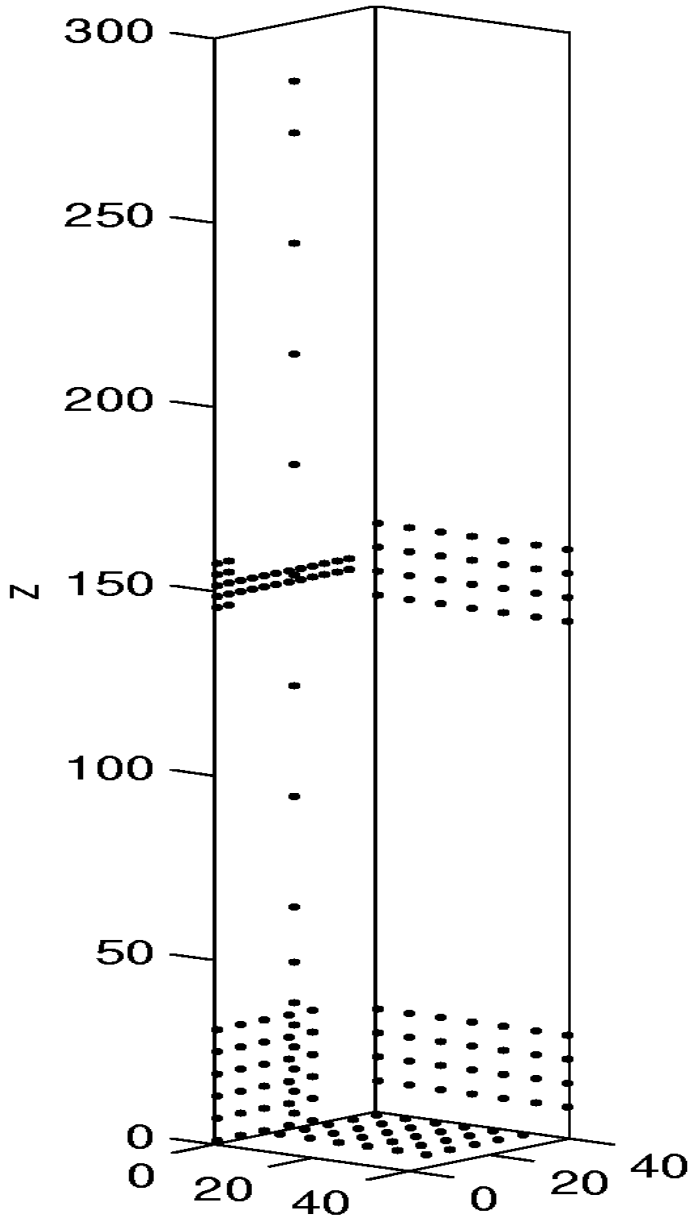


FIG. 18 disposition des sondes à la surface de la cavité

Le matériel permet d'acquérir 60 signaux. Des connecteurs de type 'araignées' permettent de sélectionner des paquets de 30 températures ou de 29 potentiels à mesurer. Les dérives thermiques des offsets obligent à mettre les amplificateurs, et les contrôleurs PID dans une armoire isotherme. Cette précaution ne suffit cependant pas et les mesures doivent être effectuées selon le protocole décrit par Davoust, dont l'objectif est de mesurer les gains et les offsets à chaque acquisition. Enfin, les masses de la cavité, des amplificateurs, et de la carte d'acquisition doivent être reliées selon un montage en étoile (voire figure 19), ceci afin d'éviter des boucles de courant parasites.

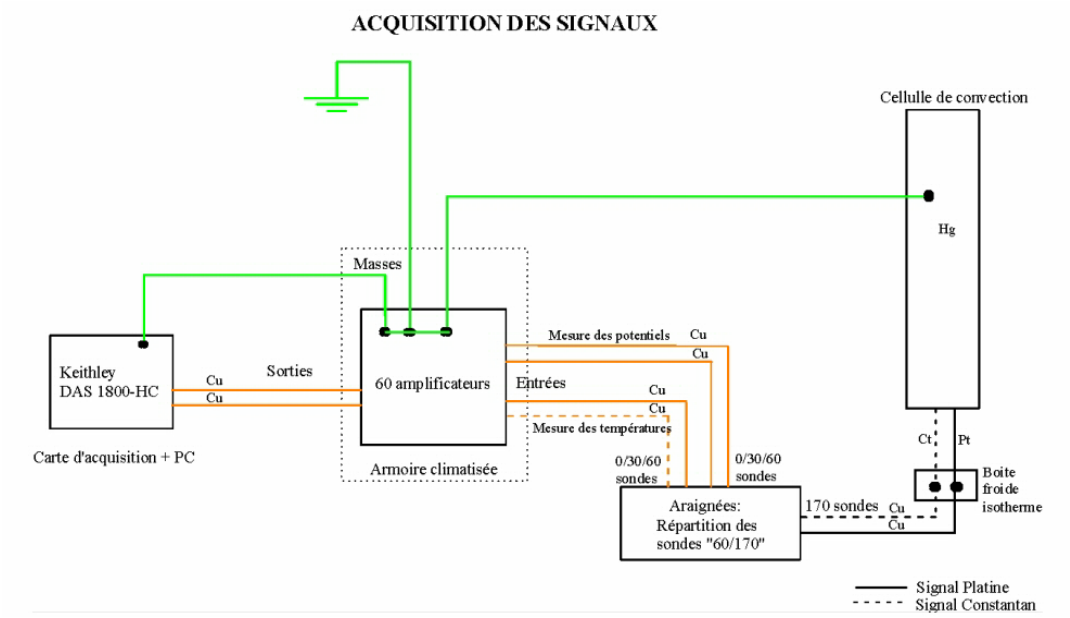


FIG. 19 schéma synoptique d'acquisition des signaux

3.6.8 Mesures locales

La figure 20 représente les profils de température à mi hauteur. Le cas $T_c - T_f = 1K$ présente un rapport signal/bruit trop faible pour être exploité. Ces résultats suggèrent que dans toute la gamme de champ magnétique utilisé, le fluide est stratifié. Ceci est confirmé par les mesures du potentiel électrique, qui permettent d'estimer la vitesse. La figure 21 reconstitue ces profils de vitesse. A première vue, la vitesse ne varie pas en Ha^{-1}. Remarquons que les deux premières sondes sont à 0.5 et 3.5 mm de la paroi chaude, donc que la mesure la plus proche de la paroi chaude est effectuée

à 2 mm de la paroi. L'étude analytique du régime stratifié suggère que le débit est localisé dans un jet thermique mince. Cependant les profils de température permettent d'établir que l'épaisseur de la couche limite thermique est de l'ordre du centimètre, et ce dans toute la gamme de paramètres. Si la vitesse ne varie pas sensiblement avec B, alors le potentiel doit être linéaire en B. La reconstitution du profil du potentiel électrique, par intégration des mesures réalisées entre électrodes voisines 22 est plus à même de séparer les différentes courbes, et de les identifier.

La figure 23 montre le potentiel électrique en bas de la cavité, et ses isovaleurs, les lignes de courant électrique, pour Gr=9.10^7 et Ha=796. L'écoulement de recirculation est symétrique, et d'épaisseur environ 10 mm. Ces caractéristiques varient peu dans la gamme de paramètres explorés.

A champ magnétique nul, le potentiel électrique est uniformément nul, et ne peut donner une mesure de la vitesse. Aux champs faibles, le potentiel électrique croît nécessairement avec le champ. Aux champs forts, il tend vers une constante : le potentiel asymptotique en Gr/Ha (2.69) doit être multiplié par le potentiel de référence νB°. La figure 24 donne les variations de $\varphi_{\max} L/B$ en fonction de Ha. Aux champs forts, la mesure peut être interprétée en terme de débit, et on constate seulement une décroissance en $Ha^{-0.22}$. Comme on l'a vu précédemment, le potentiel continue de croître, donc le régime asymptotique n'est pas atteint. Au chapitre suivant, nous tentons de présenter un modèle du régime stratifié, qui suggère que le débit varie en $Ha^{-1/2}$, donc que le potentiel varie en $Ha^{1/2}$. Il y a toujours une inadéquation entre le modèle et le résultat expérimental.

Pour comprendre les irrégularités du débit dans la plage Ha=180-320, nous avons affiné la courbe correspondant à Gr=3.10^7 25. Il apparaît une inversion du débit, que nous interprétons comme la trace d'un tourbillon contra-rotatif devant les sondes à mi-hauteur. La discontinuité vers Ha=300 est interprétée comme la transition entre un régime mono-cellulaire, stratifié, et un régime tri-cellulaire, où deux tourbillons principaux entraînent par friction un troisième tourbillon, central et contra-rotatif (il joue le rôle d'un roulement, et permet de minimiser les frottements). Cette transition, réalisant une forte restructuration de l'écoulement, est sous-critique. Au chapitre suivant, nous montrons que les simulations numériques confirment ce scénario, et prédisent une hystérésis liée à cette transition. Ces points sont issus de deux campagnes

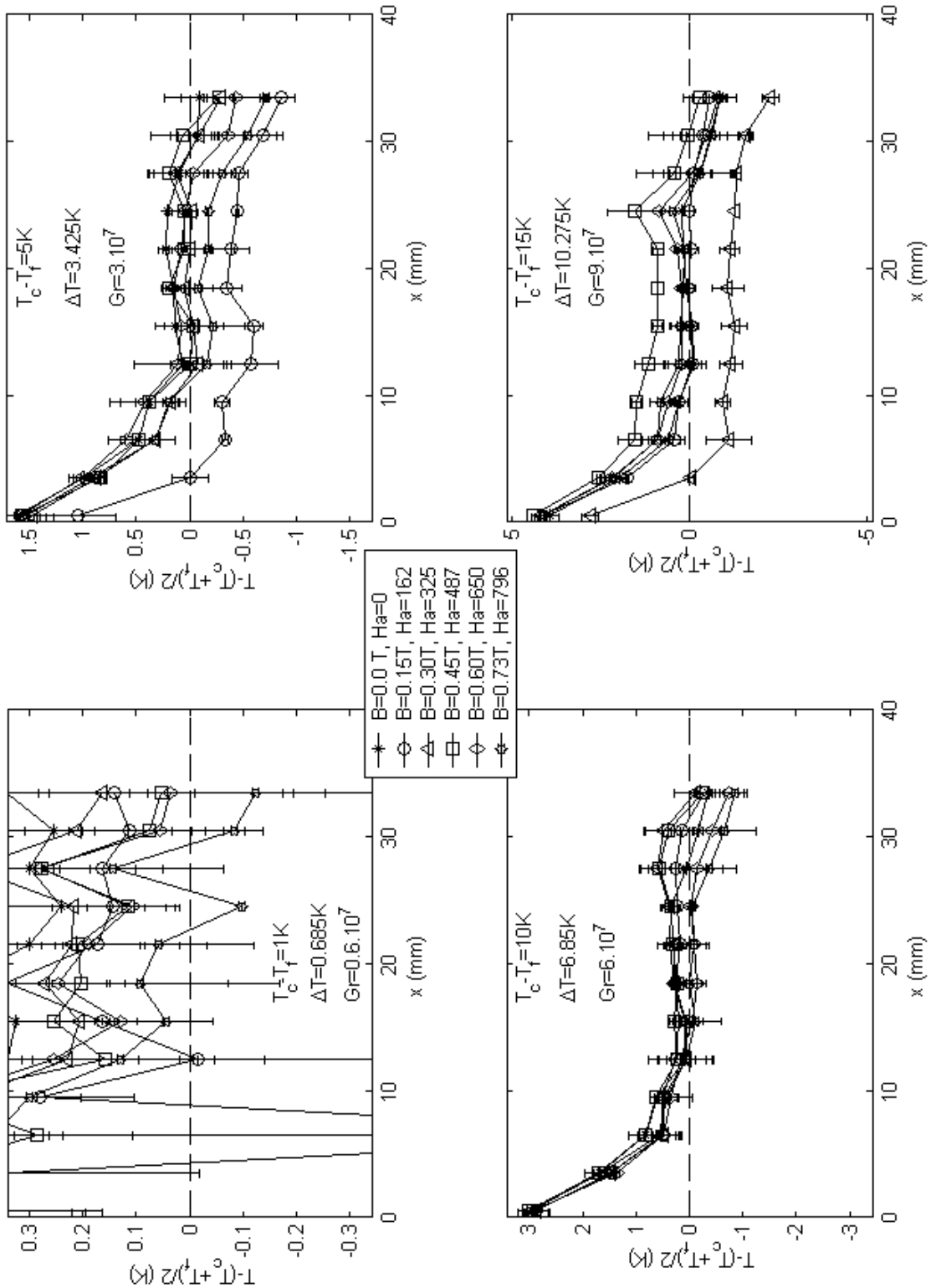


FIG. 20 Températures mesurées à mi-hauteur de la plaque adiabatique, en fonction de la position x.

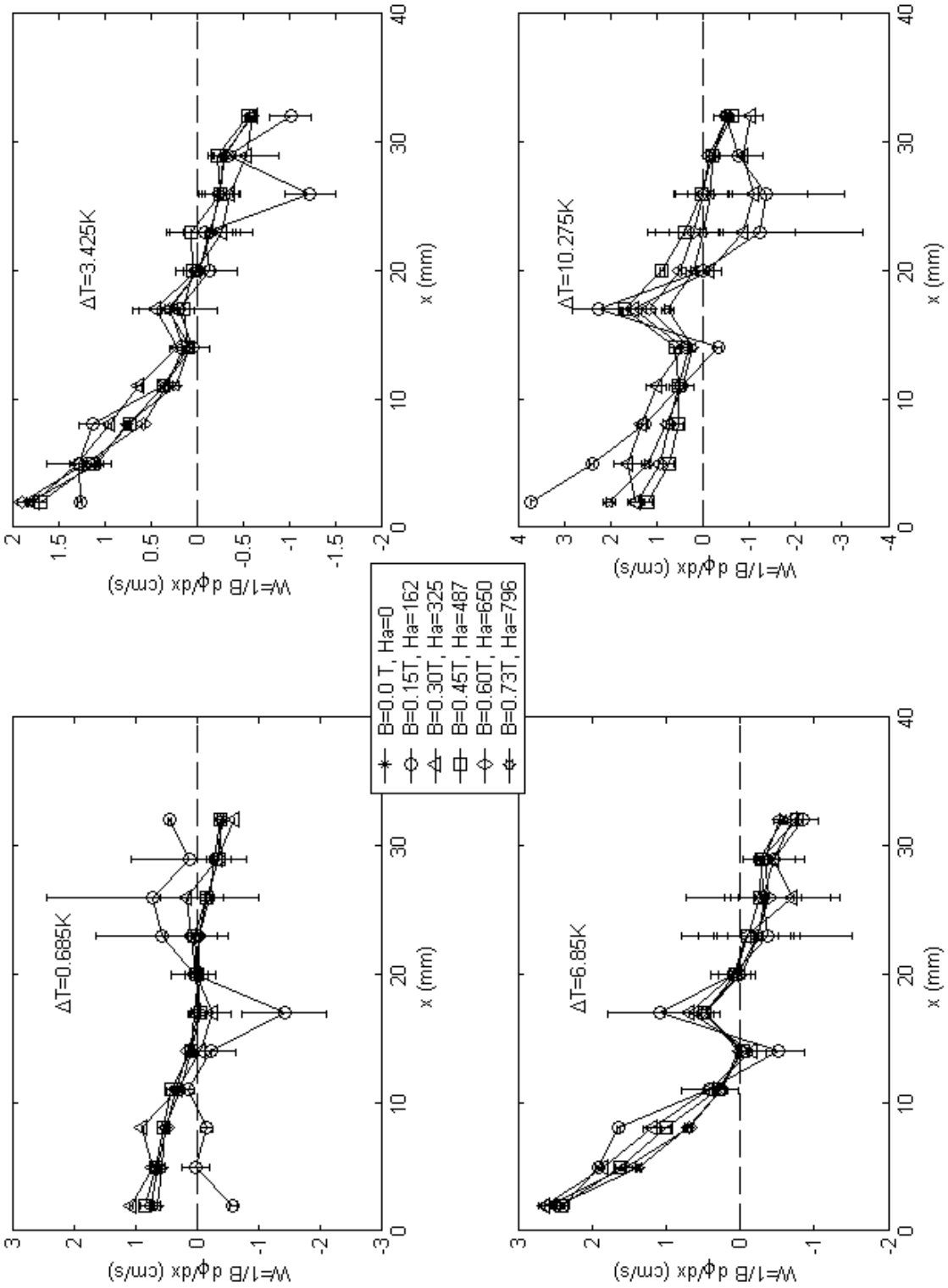


FIG. 21 Vitesses mesurées à mi-hauteur de la plaque adiabatique, en fonction de la position x.

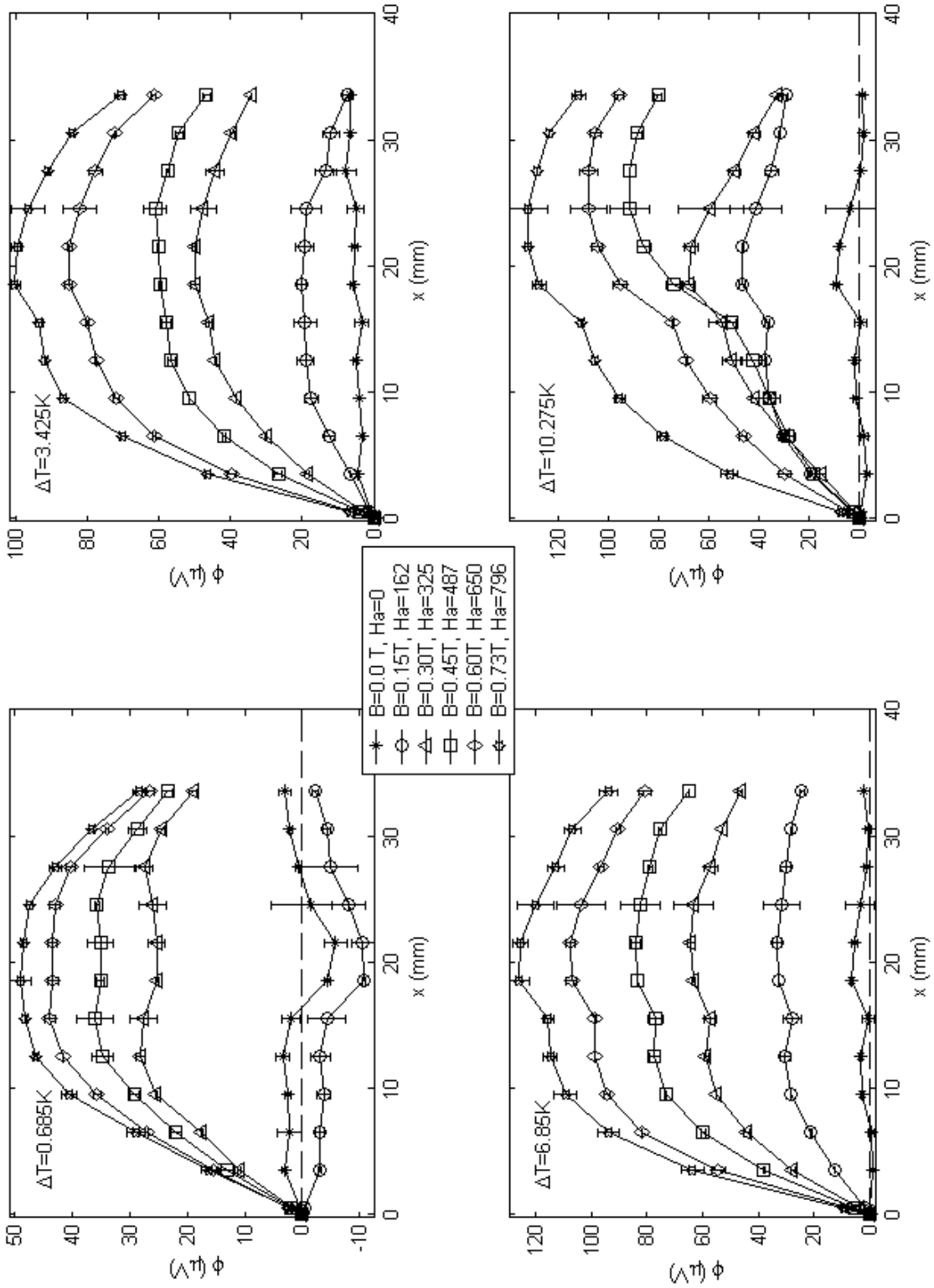


FIG. 22 Potentiels mesurés à mi-hauteur de la plaque adiabatique, en fonction de la position x.

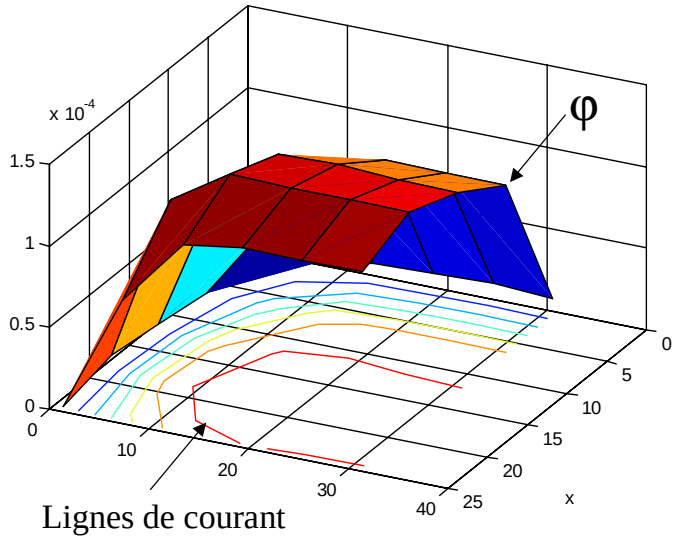


FIG. 23 Ecoulement recirculant en bas de la cavité : potentiel électrique et lignes de courant.

de mesures, réalisées à plus d'une semaine d'intervalle. La reproductibilité du profil, même dans la plage d'inversion, suggère que les différentes structures d'écoulement sont relativement stables. Ainsi, il est probable que les singularités en Ha=250 et 150 marquent l'apparition de nouvelles cellules, par paires et de vorticités de signes contraires (le débit reste négatif). Là encore, la simulation montre (chapitre suivant) que dans une large plage de paramètres, les cellules sont en nombre impair (1,3,5), et stables. La variation du débit à Ha=150 est continue, ce qui correspond plus à un déplacement qu'à une création de cellule (sans toutefois l'exclure). Le régime pour Ha<150 est difficile à caractériser, puisque la relation potentiel-débit touche à sa limite de validité.

3.7 Bilan des résultats expérimentaux

L'expérience MASCOT-V fournit dans le cas perpendiculaire un ensemble de résultats auxquels seront comparés les modèles analytiques et les simulations numériques. Entre autres résultats, l'expérience confirme :

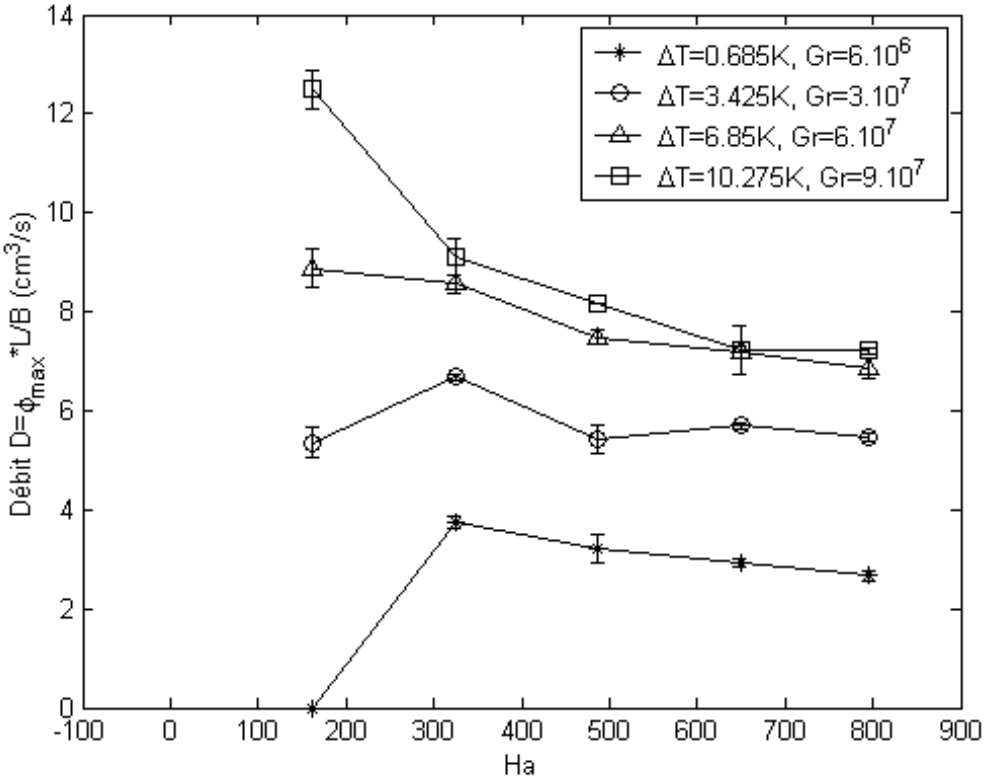


FIG. 24 Débit recirculant en fonction de Gr.

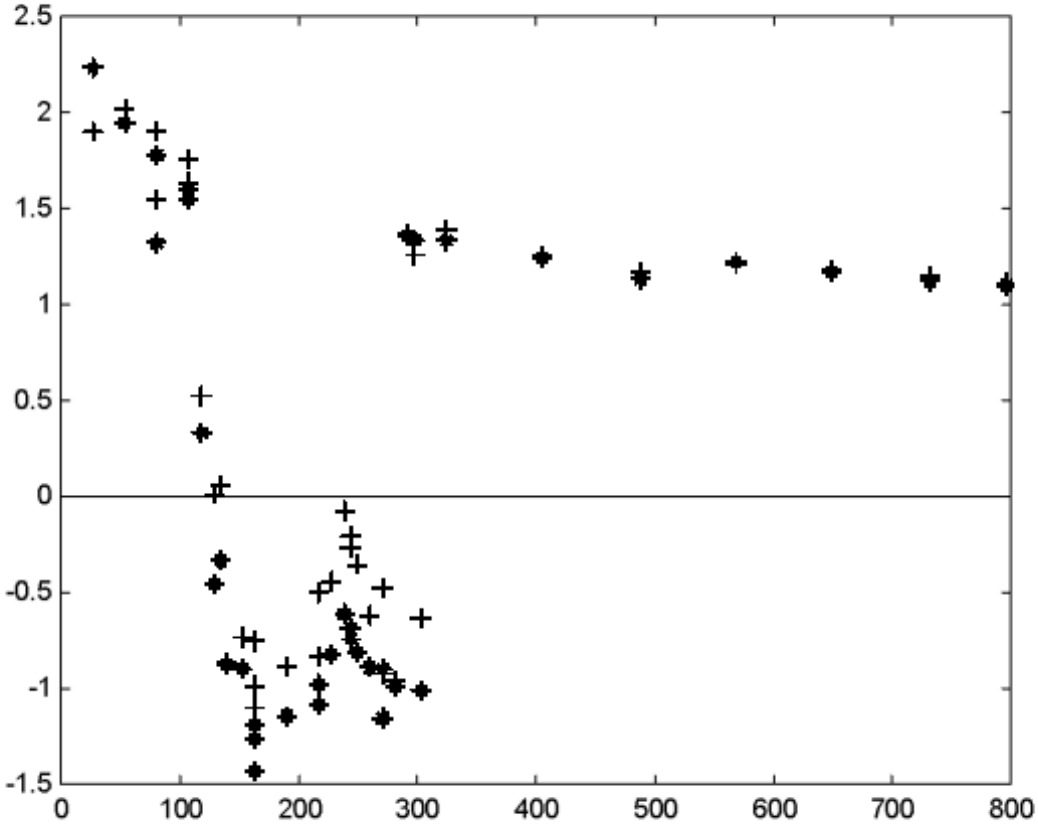


FIG. 25 Débit de la moitié "chaude" à mi-hauteur en fonction de Ha par unité de longueur dans la direction de B, en cm^2/s. (+) sondes supérieures (z =151.5 mm) ; (-) sondes inférieures (z =148.5 mm).

• que l'épaisseur de recirculation est d'ordre l, comme le suggère l'équilibre entre les forces de pression et de Laplace. Elle confirme l'existence de deux régimes d'écoulement :

• l'existence d'un régime stratifié, dans lequel le coeur est au repos, le débit et le flux de chaleur étant concentrés dans des jets thermiques, près des parois isothermes.

• l'existence de régimes "(2n+1)-cellulaires", avec des transitions sous-critiques.

De plus elle établit un résultat nouveau, que nous n'avions pas prévu, et qui n'est pas apparu dans les simulations numériques :

• il existe un maximum de flux de chaleur à champ modéré ($Ha \sim 250$), lié à la bidimensionnalisation de l'écoulement. En deçà du maximum, l'écoulement est tridimensionnel, et doit être simulé avec un code 3D.

Chapitre 4
CHAMP MAGNÉTIQUE ET FLUX DE CHALEUR PERPENDICULAIRES

4.1 Introduction

Au chapitre n°2, nous avons expliqué pourquoi un régime particulier s'instaure dès que $(\mathbf{g} \times \nabla\theta) .\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ (relation 2.22), la couche de Hartmann devenant capable de contrôler l'écoulement de coeur. Cet effet diminue si les parois de Hartmann ne sont pas isolantes. Dans les couvertures, le flux de chaleur à l'échelle globale est dirigé de la paroi interne (côté plasma) à la paroi externe, c'est à dire perpendiculairement au champ magnétique. On doit donc s'attendre à des écoulements comparables avec ceux de la configuration perpendiculaire simplifiée, avec des lois d'échelles en Gr/Ha. L'étude de l'hydrodynamique des couvertures commence donc par celle de la convection naturelle dans la géométrie simplifiée décrite plus haut, et par la configuration perpendiculaire. On a expliqué comment l'écoulement devient bidimensionnel, et l'origine du paramètre pertinent dans cette configuration, le nombre sans dimension Gr/Ha. Ainsi, en supposant le champ magnétique suffisamment fort pour instaurer la bidimensionnalité, on peut supposer que divers régimes d'écoulement peuvent exister suivant les valeurs de Gr et Ha. Lorsque Gr/Ha croît, on doit s'attendre successivement à : (i) un régime conductif, où la température est gouvernée par conduction ; (ii) un régime stratifié (dit également 'régime de couches limites'), où le coeur est stratifié et au repos, l'essentiel du mouvement étant confiné dans des couches limites thermiques (dits 'jets thermiques') ; (iii) un régime multi-cellulaire, où plusieurs tourbillons alignés verticalement, assurent les échanges ; et (iv) un régime chaotique et déstructuré. Le régime conductif et une bonne partie du régime stratifié

sont laminaires. Les premières instabilités apparaissent aux extrémités de la cellule et annoncent l'avènement du régime multi-cellulaire, turbulent.

Parmi les outils d'investigation dont nous disposons, seule la simulation numérique peut couvrir l'ensemble de ces régimes. Nos modèles analytiques ne concernent que le régime conductif (i) et le régime de couches limites (ii). Une explication de la transition vers le régime multi-cellulaire est tentée. L'expérience MASCOT-V ne permet d'accéder qu'aux régimes stratifié (ii) et multi-cellulaire (iii). Seule la simulation numérique permet de balayer toute la gamme du paramètre Gr/Ha. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 2, il existe une plage de champ magnétique modéré où l'utilisation du modèle des couches de Hartmann ne donne pas des résultats satisfaisants, ne permettant pas alors l'utilisation du modèle bidimensionnel donné au paragraphe 3. Il est alors nécessaire de faire une simulation 3D, en maillant les couches limites de Hartmann. Le code utilisé a été développé pour simuler des écoulements laminaires, et validé par comparaison avec les solutions analytiques pour Ha>>1. Il n'a pas été validé pour les écoulements turbulents. Néanmoins, la turbulence bidimensionnelle présente un caractère beaucoup plus déterministe que la turbulence classique, si bien que certains auteurs ne parlent pas de turbulence. Nous pouvons donc penser que les écoulements turbulents bidimensionnels établis sont bien représentés par une simulation de type numérique directe. Chaque calcul commence nécessairement par un régime transitoire, durant lequel l'équilibre thermo-mécanique s'établit. Afin d'accélérer cette étape, une violation importante des lois de conservation est tolérée. Ainsi, la simulation du régime transitoire ne peut pas être considérée comme valide. En l'absence d'hystérésis, ceci n'a pas de conséquence sur la simulation du régime établi. Nous allons décrire successivement les différents stades de l'écoulement, en comparant pour chacun d'eux les résultats des outils correspondants. Pour commencer, nous allons définir les conditions dans lesquelles l'écoulement est bidimensionnel, où quasi-bidimensionnel, et nous allons donner un modèle 2D de ces écoulements.

4.2 Tendance à la bidimensionnalisation

Au chapitre 2, nous avons expliqué les conditions nécessaires à l'établissement d'un écoulement laminaire bidimensionnel. Elles tiennent essentiellement à l'activa-

tion des couches de Hartmann et aux propriétés de symétrie. Nous allons donc nous placer dans le cas le plus favorable d'un flux de chaleur orthogonal au champ magnétique, dans une cavité où toutes les parois sont isolantes, et nous allons examiner comment évolue ce caractère de bidimensionnalité lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, et que l'écoulement devient turbulent. Nous commencerons par rappeler une propriété bien connue depuis 1982 [32], de diffusion de la vorticité dans la direction du champ.

Une des caractéristiques des écoulements MHD est que, lorsque le nombre de Reynolds magnétique R_m est petit (la vitesse ne perturbe que faiblement le champ magnétique), et le paramètre d'interaction N est grand (inertie négligeable devant les forces électromagnétiques), la vorticité est diffusée dans la direction du champ magnétique. Ce phénomène est lié au mécanisme de propagation des ondes électromécaniques d'Alfvén, décrit ainsi par Moreau [23, p. 98] : au sein d'un fluide au repos, une portion de fluide poussé dans la direction perpendiculaire au champ magnétique génère un courant électrique qui se referme à l'extérieur de la portion (la topologie des lignes de courant est identique aux lignes de champ magnétique rayonnées par un dipôle). Le changement du sens de $\mathbf{j}$, fait que le fluide est freiné à l'intérieur et accéléré à l'extérieur. La perturbation se propage ainsi dans les deux directions $\pm B^\circ$, à l'image d'une onde élastique le long d'une corde. En décrivant les ondes d'Alfvén avec les variables d'Elssasser (les relations (2.46) écrites pour les couches parallèles sont en fait très générales), Alboussière [1, p. 13] met en évidence leur importance particulière dans les couches limites parallèles. En effet, lorsque les parois sont isolantes, le freinage de Laplace devient inhomogène dans la direction du champ (voir les solutions de l'écoulement établi pour les deux cas où $\mathbf{B}^\circ \,//\, \nabla T$). Si le mécanisme de propagation par ondes d'Alfvén n'est pas toujours suffisamment fort pour bidimensionnaliser l'écoulement dans les couches parallèles, il intervient en revanche dans la structure des solutions : chacune des variables d'Elssasser $\nu^\pm$ obéit à une condition (2.47) à la paroi $y = 0, 1$ qui ne peut être satisfaite que si la couche est d'épaisseur nulle, et se propage par le mécanisme des ondes d'Alfvén à partir de cette singularité jusqu'à la paroi de Hartmann opposée (voir Moreau [23, p. 140]). Ainsi, ν^+ et ν^- sont respectivement liées à la propagation des ondes dans les directions $-\mathbf{B}^\circ$ et $+\mathbf{B}^\circ$.

Roberts [29] décompose la force de Laplace en un terme de pression magnétique

et un terme rotationnel

$$J \times B = \frac{(B.\nabla)\, B}{\mu} - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu} \right),$$

et sous l'hypothèse d'un champ imposé uniforme avec $R_m << 1$, il montre que Le Laplacien de la partie rotationnelle dépend des variations de la vitesse dans la direction du champ magnétique, selon la relation

$$\nabla^2 \left\{ \frac{(B.\nabla)\, B}{\mu} \right\} = -\sigma B_0^2 \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2}.$$

Sommeria et Moreau [32] inversent le Laplacien (ceci n'est légitime que si l'écoulement est assez homogène), et réécrivent l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}.\nabla)\, \mathbf{V} = -\frac{\nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu} \right)}{\rho} + \nu.\nabla^2 \mathbf{V} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \nabla^{-2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2} - \beta (T - T_0) \mathbf{g}$$

Cette partie rotationnelle de la force de Laplace est alors interprétée en termes de diffusion de la quantité de mouvement dans la direction du champ magnétique. Une structure turbulente 3D de taille $(l_\perp, l_{//})$, non écrasée dans la direction du champ sera diffusée avec un coefficient de diffusion $\alpha = \sigma B^{\circ 2} l_\perp^2 / \rho$. Ainsi, le temps de diffusion entre les deux parois de Hartmann est

$$t_{2D} = \frac{\rho}{\sigma B^{\circ 2}} \left(\frac{L}{l_\perp} \right)^2.$$

Ce résultat montre que les petites structures demeurent 3D plus longtemps que les grandes, et sont donc atténuées plus efficacement. Pendant son temps de retournement t_{tu}, une telle structure a été diffusée sur la longueur $(\alpha.t_{tu})^{1/2}$, qui est sa taille $l_{//}$ à l'équilibre

$$\begin{aligned} t_{tu} &= \frac{l_\perp}{V_\perp} = \frac{l_\perp L}{\nu\, \mathrm{Re}}, \\ l_{//} &= (\alpha.t_{tu})^{1/2} = \left(\frac{Ha^2}{\mathrm{Re}} . \frac{l_\perp}{L} \right)^{1/2} l_\perp \end{aligned}$$

Les structures dont la tridimensionnalité persiste sont les petites structures, car elles n'ont pas diffusé sur une longueur égale à la taille de la cavité :

$$l_{//} < L \qquad \Longrightarrow \qquad l_\perp < L. \left(\frac{\mathrm{Re}}{Ha^2} \right)^{1/3}$$

Dans la géométrie qui nous intéresse ici, les cellules de recirculation, qui sont des tourbillons de taille $l_\perp \simeq L$, seront bidimensionnelles si

$$\frac{t_{tu}}{t_{2D}} = \frac{Ha^2}{\mathrm{Re}} >> 1$$

Pothérat [26, p. 24] montre l'existence d'un effet tridimensionnel dû au pompage d'Ekmann dans les couches de Hartmann (couches dites alors de Hartmann-Ekmann). On peut l'expliquer comme suit : la vorticité près des parois de Hartmann provoque deux injections symétriques de courant dans le coeur du tourbillon (selon la relation 2.20). Ce courant est linéairement rejeté à l'extérieur du tourbillon pour être nul au plan médian. Si le courant dans la direction du champ varie linéairement entre les deux parois de Hartmann, alors le potentiel et la vorticité varient quadratiquement, donnant au tourbillon la forme d'un tonneau. Ce phénomène baptisé "l'effet tonneau" a été simultanément découvert grâce aux simulations numériques, par Bühler [24]. Si l'on envisage la circulation dans notre cavité comme un tourbillon, cet effet va apparaître près des parois parallèles. On a en effet remarqué un effet tridimensionnel dans les couches parallèles de l'écoulement établi (chapitre 2). Les résolutions analytiques comme numériques montrent que le profil de vitesse dans la couche est effectivement bombé comme un tonneau, et que le courant électrique est bien injecté par les couches de Hartmann dans la couche parallèle, puis dévié vers le coeur, de façon symétrique. Cet effet ne dépend que du nombre de Hartmann, et devient imperceptible pour $Ha > 200$.

4.3 Constitution d'un modèle bidimensionnel

Lorsque les conditions précédentes sont réunies ($Ha >> 1$ et $N >> 1$), un modèle d'écoulement plan est pertinent. Il s'obtient en moyennant l'équation du moment cinétique (rot (2.15)) entre les deux parois de Hartmann. La contribution des couches limites de Hartmann au moment cinétique global est négligée, puisqu'elle est Ha fois plus petite que celle de l'ensemble coeur+couches limites parallèles (elle varie en $Re/Ha = Gr/Ha^2$ pour $\theta = 1/2 - x$). La contribution de la force de Laplace dans les couches de Hartmann équilible exactement celle du coeur, puisque ces deux régions transportent des intensités opposées. On a vu au chapitre 2 que la force de

Laplace dans la couche de Hartmann équilibrait exactement la viscosité. Le bilan des forces se résume donc au calcul de l'une de ces trois résultantes :

$$\int_{coeur} Laplace \quad = \int_{CL\ de\ Ha} vis\cos ité \quad = \int_{CL\ de\ Ha} -Laplace. \tag{4.1}$$

Le couple de la force de Laplace $rot\,.\mathbf{j}\times\mathbf{y} = -\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\varphi)$ s'écrit dans la direction du champ magnétique

$$[rot\,.\mathbf{j}\times\mathbf{y}]_y = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \nabla_\perp\varphi - \Omega^0_{\mathbf{y}}.$$

La loi d'Ohm intégrée d'une paroi à l'autre, et la condition (2.44) pour une paroi isolante, donnent de deux façons différentes le courant total entrant dans les deux couches :

$$\begin{aligned} j_y(y &= 1) - j_y(y=0) = \int_0^1 \nabla_\perp j_\perp.dy = \int_0^1 \left(-\nabla^2_\perp\varphi + \Omega^0_{\mathbf{y}}\right).dy, \\ j_y(y &= 1) - j_y(y=0) = \frac{\Omega^0_{\mathbf{y}}(y=0)}{Ha} + \frac{\Omega^0_{\mathbf{y}}(y=1)}{Ha} = \frac{2\Omega^0_{\mathbf{y}}}{Ha}. \end{aligned}$$

Ce qui donne la moyenne du couple,

$$\int_0^1 [rot\,.\mathbf{j}\times\mathbf{y}]_y\,dy = -\frac{2\Omega^0_{\mathbf{y}}}{Ha}.$$

Des parois de Hartmann isolantes assurent la nullité de la résultante globale des forces de Laplace. La résultante des trois forces citées en 4.1 est réduite au frottement à la paroi. Il est égal au premier ordre à la force de Laplace dans le coeur. Les deux représentations sont donc équivalentes. L'équation moyennée du moment cinétique est :

$$\frac{\partial\Omega_{\mathbf{y}}}{\partial\tau} + (\mathbf{v}.\nabla)\,\Omega_{\mathbf{y}} = +\nabla^2\Omega_{\mathbf{y}} - 2Ha.\Omega_{\mathbf{y}} - Gr.\frac{\partial\theta}{\partial x}. \tag{4.2}$$

Il est courant d'inclure les composantes non rotationnelles des forces dans le terme de pression et d'intégrer cette équation pour donner l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\tau} + (\mathbf{v}.\nabla)\,\mathbf{v} = -\nabla p' + \nabla^2\mathbf{v} - 2Ha.\mathbf{v} + Gr.\theta\mathbf{z} \tag{4.3}$$

Outre le fait de simplifier le problème en supprimant une dimension (y) et une inconnue (φ), cette représentation a le mérite de donner immédiatement les ordres

de grandeur des nombres de Reynolds, $Re \sim Gr/Ha$, et du paramètre d'interaction, $N \sim Ha/\,\mathrm{Re}$. Dans le cas d'une turbulence tridimensionnelle, le courant électrique se referme à l'échelle des structures turbulentes, plus petites que la cavité, donc ignore les couches de Hartmann. Le freinage électromagnétique en Ha^2 est alors maximum, ce qui explique pourquoi le paramètre d'interaction généralement utilisé est $N = Ha^2/\,\mathrm{Re}$. Ici, l'organisation de l'écoulement permet d'avoir une force de Laplace, donc un paramètre d'interaction Ha fois plus faible. Ces deux expressions sont donc des limites asymptotiques du paramètre d'interaction pour les écoulements 2D laminaires et 3D turbulents.

Avant de passer à la résolution de ces équations, montrons que le potentiel est une approximation de la fonction de courant à l'ordre Ha^{-1} : l'équilibre entre les forces de flottabilité et de Laplace conduit à des courants en $GrHa^{-2}$, et la vitesse w dans la partie centrale, où l'écoulement est vertical, est de l'ordre de $GrHa^{-1}$. La fonction de courant $\Psi(x,z)$, définie par $u = -\partial\Psi/\partial z$ et $w = \partial\Psi/\partial x$, est donc aussi d'ordre $GrHa^{-1}$ et la loi d'Ohm s'écrit :

$$\vec{j} = -\vec{\nabla}(\varphi + \Psi),$$

puisque $j = \vartheta\,(GrHa^{-2})$ (2.25), il est clair que

$$\Psi = -\varphi + \vartheta\left(\frac{Gr}{Ha^2}\right).$$

4.4 Ecoulement 2D recirculant dans la limite Pe<<1

4.4.1 Construction du modèle de recirculation

Dans cette section, nous pouvons compléter le modèle d'écoulement établi (chapitre 2) par l'introduction des bouts de la cavité. Le nombre de Reynolds est fixé par la partie centrale, $Re = Gr/Ha$ et le paramètre d'interaction $N = Ha^2/\,\mathrm{Re}$ est supposé suffisamment grand pour que l'on puisse considérer l'écoulement bidimensionnel et l'inertie négligeable. Le système ainsi linéarisé est alors résolu par la méthode des séries de Fourier. La cas d'une surface libre est également considéré, motivé par le fait qu'il pourrait y avoir une surface libre dans l'expérience DIADEMO-MHD, et

que son observation fourni un moyen d'évaluation de la vitesse du fluide. Nous analyserons donc l'influence du choix des conditions aux limites, adhérence ou surface libre aux extrémités de la cavité. On rappelle que les parois $x = \pm 1/2$ sont isothermes, alors que les extrémités $z = 0, H$ sont adiabatiques.

L'ordre de grandeur δ_R de la zone de recirculation est évalué en considérant l'équilibre pression-flottabilité à la base de la recirculation. La conservation de la masse $\nabla_\perp . \mathbf{v}_\perp = 0$, et les projections de (4.3) suivant z et x, donnent les estimations :

$$\frac{w}{\delta_R} \sim \frac{u}{1}, \qquad \frac{\Delta P}{\delta_R} \sim Gr, \qquad et \qquad \frac{\Delta P}{1} \sim Ha.u,$$

à partir desquelles, et avec $w \sim Gr/Ha$ découle simplement

$$\delta_R \sim 1.$$

Il s'ensuit, dans le cas d'une paroi adhérente, l'existence d'une sous-souche visqueuse de type 'couche parallèle'. Dans cette sous-couche comme dans les deux couches limites parallèles verticales, la solution asymptotique lorsque $Ha \to \infty$ est une exponentielle sur une épaisseur $Ha^{-1/2}$. La résolution à l'aide des séries de Fourier de la fonction de courant $\Psi(x, z)$ telle que $u = -\partial\Psi/\partial z$ et $w = \partial\Psi/\partial x$, est détaillée en annexe C. Bien que le résultat ne soit pas réductible à une simple exponentielle, on montre que les fonctions de courant obtenues peuvent être approchées par des modèles exponentiels simples basés sur les épaisseurs δ_R de la zone recirculante et δ_v d'une éventuelle sous-couche limite visqueuse. Ces épaisseurs sont obtenues par optimisation :

$$\begin{aligned} \text{surface libre} \quad &: \quad \Psi = \Psi^0(x).\left[1 - e^{-\frac{z}{\delta_R}}\right] \\ \text{adhérence} \quad &: \quad \Psi = \Psi^0(x).\left[1 + \frac{\delta_R}{\delta_R - \delta_v} e^{-\frac{z}{\delta_R}} - \frac{\delta_v}{\delta_R - \delta_v} e^{-\frac{z}{\delta_v}}\right] \end{aligned}$$

Le graphique 1 montre l'évolution des épaisseurs δ_R et δ_v dans le cas d'une adhérence. Dès que Ha dépasse la centaine, δ_R atteint quasiment sa limite, $\delta_R^L = 0.3181$, et δ_v varie asymptotiquement en $Ha^{-1/2}$. On constate une bifurcation à $Ha^c = 18.6$, en deçà de laquelle la totalité de la zone de recirculation est visqueuse.

Ces épaisseurs montrent, mieux que la solution analytique brute, la structure de l'écoulement recirculant et de sa sous-couche limite visqueuse. Elles sont correcte-

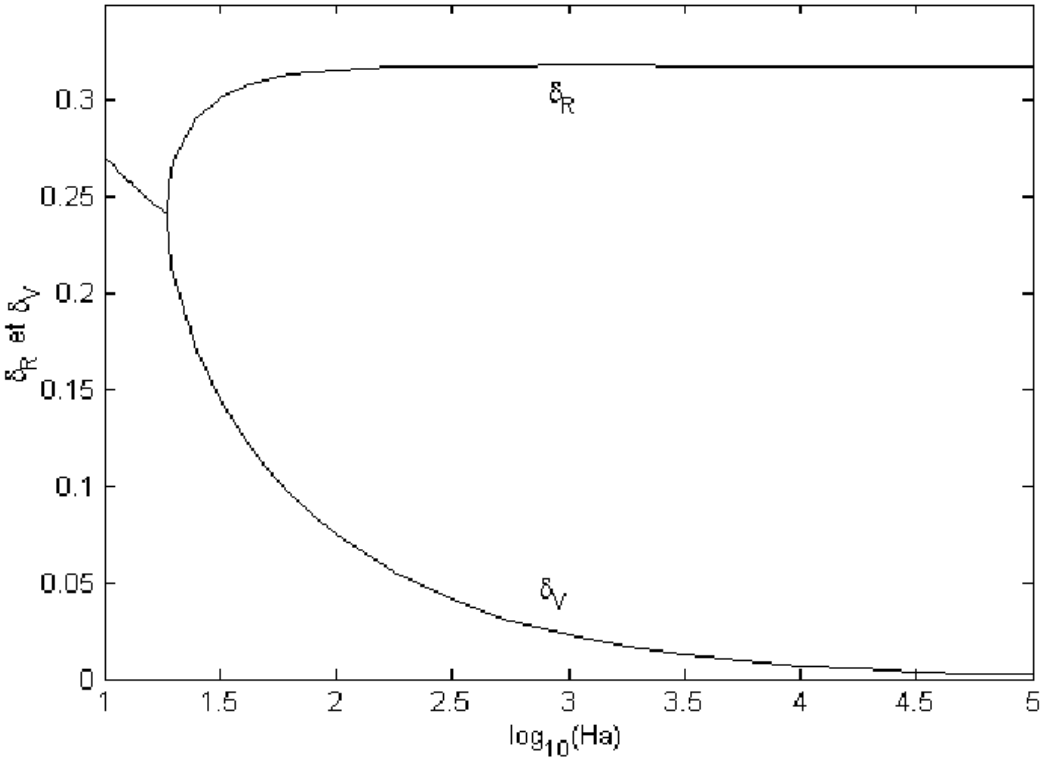


FIG. 1 Epaisseurs de la zone de recirculation δ_R et de la sous couche limite visqueuse δ_v.

ment représentées par les expressions analytiques :

$$\begin{array}{lcll} Ha & < & 18.6 & \delta_R \simeq \delta_v \simeq 0.1591 + \dfrac{0.3548}{\sqrt{Ha}} \\ Ha & > & 18.6 & \delta_v \simeq 0.2413 \dfrac{1 - 3.5230\ 10^{-16}(Ha - Ha^c)^{0.1347}}{1 + \quad 0.1321.(Ha - Ha^c)^{0.6347}} \\ Ha & > & 18.6 & \delta_R \simeq \delta_R^L - \delta_v + \dfrac{0.7096}{\sqrt{Ha}} \end{array}$$

Dans la zone subcritique, la solution peut être réécrite sous la forme

$$\begin{array}{rcl} \text{adhérence } Ha & < & 20 : \Psi = \Psi^0(x).\left[1 + \left(1 + \dfrac{Z}{\delta}\right) e^{-\frac{Z}{\delta}}\right] \\ \text{avec } \delta & = & \delta_R - \delta_v \end{array}$$

L'épaisseur de recirculation obtenue expérimentalement en régime stratifié, pour Ha$\simeq$800, est environ 1cm. Elle est donc très proche des valeurs prédites ici : 4cm*0.3,

mais légèrement inférieure. On peut interpréter ce résultat ainsi : la concentration du débit dans les jets provoque l'augmentation de la force d'inertie qui écrase la couche.

De même, l'équation de la chaleur est résolue par la méthode des perturbations ($Pe = Ra/Ha << 1$), et permet d'accéder aux faibles déformations des isothermes dans la zone de recirculation, ainsi qu'au flux de chaleur convecté. Les résultats de cette étude analytique ne sont pas montrés globalement (par exemple avec les lignes de courant et les isothermes), mais des profils de vitesse et de température sont comparés au chapitre suivant avec ceux obtenus par simulation numérique. La proportion convectée du flux de chaleur varie en Pe^2, selon l'approximation (l'expression plus précise est donnée dans l'annexe) :

$$Nu - 1 \sim \frac{Pe^2}{H} 10^{-3}.$$

Le rapport des deux membres $Nu - 1$ et $\frac{Pe^2}{H} 10^{-3}$ de l'équation précédente ne dépend que de Ha, et ne varie que d'un ordre de grandeur, comme le montre la figure 2 :

4.4.2 Comparaison du modèle et des simulations numériques

La figure 3 illustre l'évolution de l'écoulement dans la zone de recirculation, lorsque le nombre de Péclet croît, et tant que le coeur admet un profil de température conductif, et un régime d'écoulement établi. Les graphiques du dessus donnent les lignes de courant et les isothermes obtenues par simulation numérique. Les 3 lignes qui suivent montrent dans l'ordre, quelques profils des composantes u(z) et w(z) de la vitesse et de la température t(z), pour les abscisses $x = 0$, ± 0.2477, ± 0.3889, et pour $z \in [0; 1.5]$. Les profils bleus et rouges montrent respectivement les résultats de la simulation numérique et du modèle analytique. Pour les faibles valeurs de Pe et N^{-1}, les deux approches donnent le même résultat. Les effets inertiels se manifestent par l'écart à la solution analytique, et par une asymétrie de u et v par rapport à l'axe médian $x = 0.5$. Ces effets croissent avec N^{-1} et sont déjà détectables pour $N^{-1} = 4.10^{-4}$. De même, l'advection de la chaleur croît avec Pe, et est pour Pe=10, 25,50, respectivement indétectable, faible, et important.

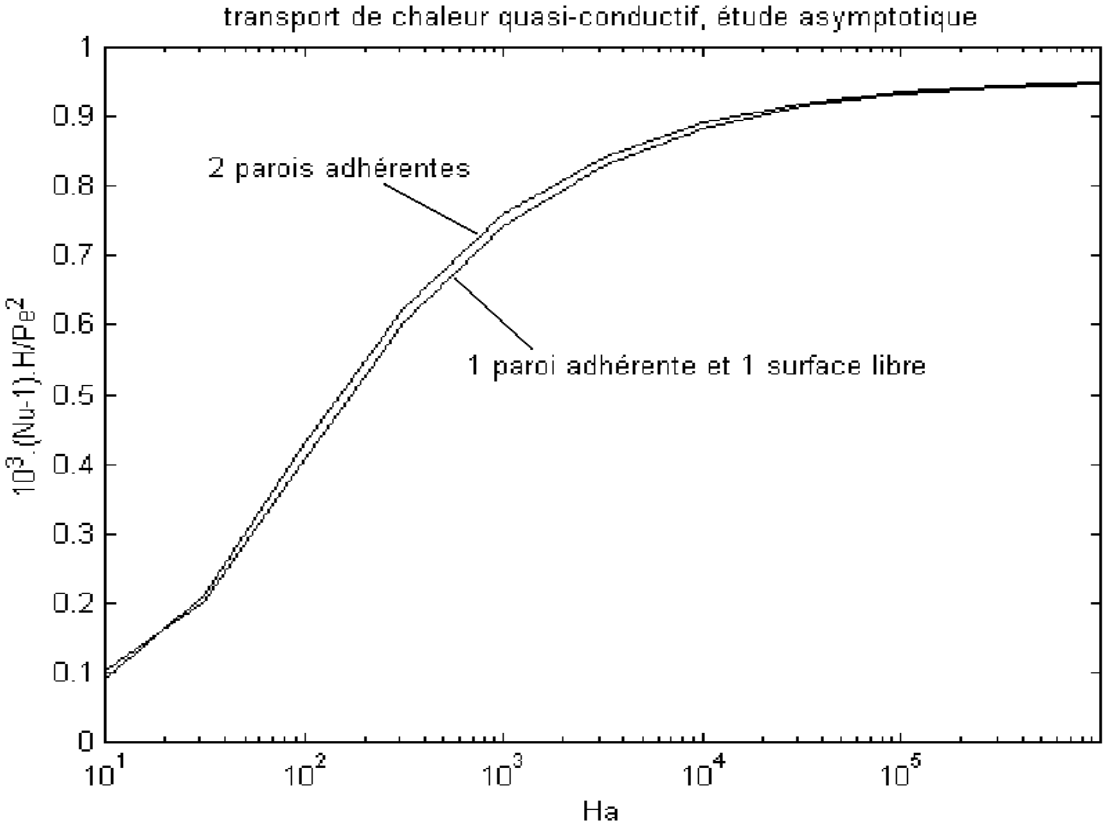


FIG. 2 Transport de chaleur convectif, pour Pe<<1 : la quantité $10^3(Nu-1)H/Pe^2$ est tracée en fonction du nombre de Hartmann.

4.5 Régime stratifié

4.5.1 Modèle analytique du régime de jets thermiques

On suppose l'écoulement bidimensionnel et on utilise les équations intégrées de Navier-Stokes (4.3) et de la thermique (2.14). Le coeur de la cavité est au repos, donc la grandeur caractéristique n'est pas la distance entre les deux parois, mais l'épaisseur δ de la couche limite thermique. La couche cisaillée est donc $Ha^{1/2}$ fois plus petite que la couche limite thermique. Ne pas la prendre en compte n'engendre que des surestimations relatives du débit et du flux de chaleur de respectivement $Ha^{-1/2}$ et $H^{-1}.Ha^{-1/2}$. Analytiquement, cette couche cisaillée introduit un terme exponentiel supplémentaire dans l'expression de la vitesse. Numériquement, elle est beaucoup plus petite que la première maille, ce qui engendre un calcul de la vitesse

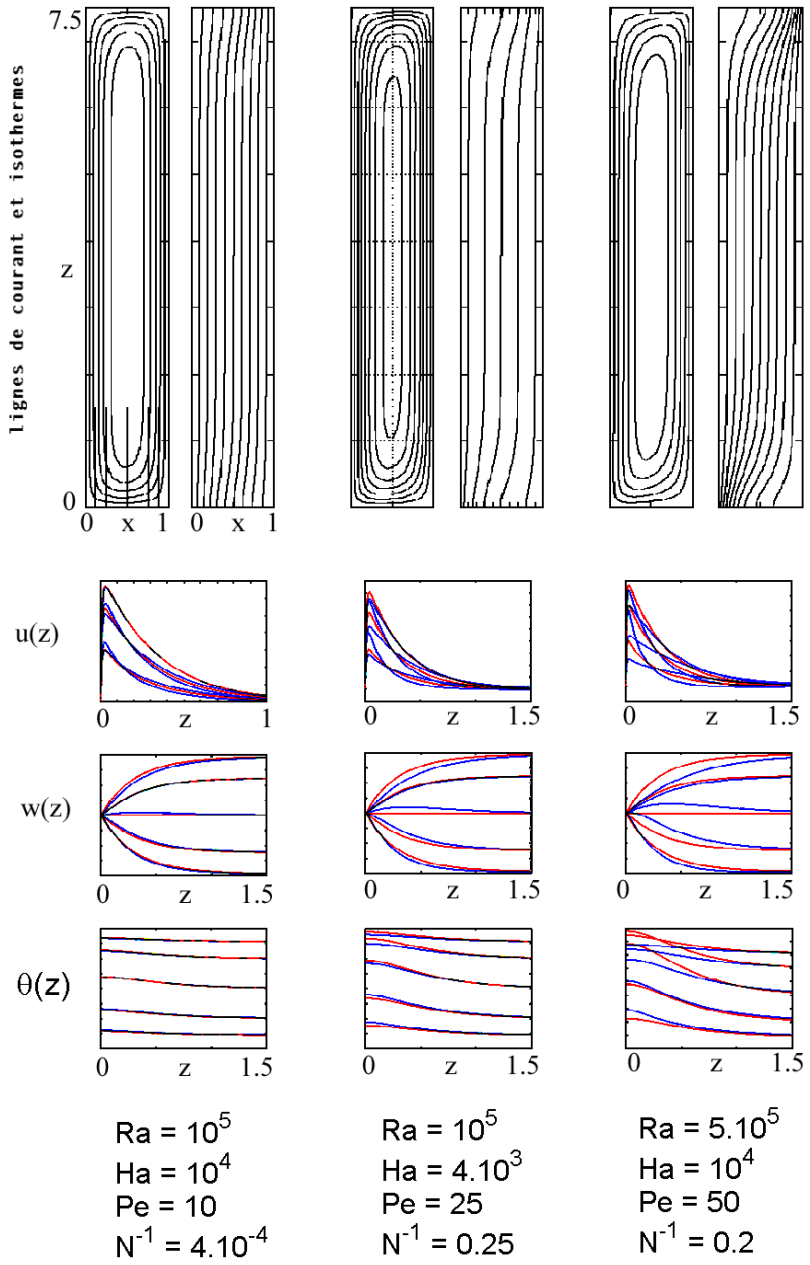


FIG. 3 Apparition de l'influence des termes non linéaires lorsque Pe et N^{-1} croissent. En haut, les lignes de courant et les isothermes calculées numériquement montrent une asymétrie aux extrémités de la cavité. En bas, les profils de vitesse et de température (en bleu) sont comparés avec la solution analytique linéaire (en rouge), le long des abscisses x=0.1111,0.2523,0.5000,0.7477,0.8889 et pour $0<z<1.5$ (voir graph en haut à gauche).

faux : en effet, la condition d'adhérence utilise le centre de la première maille, donc est écrite sur l'échelle de la couche limite thermique, et non celle de la couche limite visqueuse. A l'avenir, il serait souhaitable de remplacer la condition d'adhérence par une condition de glissement à la paroi, comme nous l'avons fait pour les couches limites de Hartmann (chapitre 2), ou par une condition représentant l'influence du frottement dans la sous-couche. Le régime stationnaire s'écrit

$$\begin{aligned} \nabla p' &= -2Ha.\mathbf{v}+Gr.\boldsymbol{\theta}\mathbf{z} \\ \Pr\left(\mathbf{v}.\nabla\right)\boldsymbol{\theta} &= \nabla^2\boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

Le coeur stratifié n'a qu'une composante verticale du gradient de température, qui engendre une variation de pression stabilisante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_0 &= \alpha\left(z-\frac{H}{2}\right), \\ \frac{\partial p'}{\partial z} &= Gr\alpha\left(z-\frac{H}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Le rotationnel de Navier-Stokes donne :

$$\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=\Omega=-\frac{Gr}{2Ha}.\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial x}.$$

Si la couche limite thermique est mince, un calcul d'ordre de grandeur utilisant la conservation de la matière montre que l'écoulement est quasi vertical ($u/w \sim \delta/H$), et que la vorticité est réduite aux variations horizontales de la composante verticale w de la vitesse ($\frac{\partial u}{\partial z}/\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \sim \delta^2/H^2$). Le coeur étant au repos, on en déduit :

$$w=\frac{Gr}{2Ha}.\left(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0\right).$$

A ce stade nous pouvons dire que la vitesse w et la surtempérature $\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0$ décroissent le long du jet. Ce résultat est lié à la condition de température uniforme imposée à la paroi. Maclean [21, p. 46] montre qu'avec une paroi uniformément chauffée, la vitesse et la surtempérature ne varient pas le long du jet. L'équation de l'énergie est

$$\Pr\left(u\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial x}+w\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\boldsymbol{\theta}}{\partial x^2}. \tag{4.5}$$

On recherche une solution auto-similaire sous la forme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\theta}_0+(1/2-\boldsymbol{\theta}_0)f(\eta) \\ \eta &= \frac{x}{\delta(z)} \end{aligned}$$

soit

$$w = \frac{Gr}{2Ha}.(1/2 - \boldsymbol{\theta}_0)f(\eta)$$

Il est nécessaire que la primitive de $f(\eta)$, $F(\eta) = \int_0^\eta f(\eta')d\eta'$ soit bornée, donc que $\eta f(\eta) \underset{\eta\to\infty}{\to} 0$. La conservation de la matière permet de déduire l'autre composante de la vitesse :

$$u = \frac{Gr}{2Ha}\left(\boldsymbol{\theta}_0'\delta(z).F(\eta) + (1/2 - \boldsymbol{\theta}_0)\delta'(z)\left(\eta f(\eta) - F(\eta)\right)\right)$$

Le jet thermique injecte donc un débit de vitesse dans le coeur

$$u^\circ(z) = -\frac{Gr}{2Ha}\left[(1/2 - \boldsymbol{\theta}_0)\delta\right]' F_\infty$$

L'équation (4.5) devient

$$\frac{2Ha}{Ra}f''(\eta) = \delta^2(z)\boldsymbol{\theta}_0'(z)\left[f(\eta)(1 - f(\eta)) + f'(\eta)F(\eta)\right] - (1/2 - \boldsymbol{\theta_0}(z))\,\delta(z)\delta'(z)f'(\eta)F(\eta)$$

Une solution auto-similaire exigerait donc que l'épaisseur de la couche soit constante, ce qui impliquerait une vitesse $u^\circ(z)$ constante. C'est impossible pour des raisons de symétrie. On cherche alors une solution semi-intégrée suivant l'épaisseur de la couche. En notant $F_{2,\infty} = \int_0^\infty f^2(\eta')d\eta'$,

$$-\frac{2Ha}{Ra}f'(0) = \delta^2(z)\boldsymbol{\theta}_0'(z)\left[F_\infty - 2F_{2,\infty}\right] + (1/2 - \boldsymbol{\theta_0}(z))\,\delta(z)\delta'(z)F_{2,\infty}$$

En choisissant arbitrairement $f(\eta) = \exp(-\eta)$, l'équation précédente se simplifie et s'intègre avec la condition $u^\circ(H/2) = 0$ en :

$$\begin{aligned}
\delta(z) &= \delta_0.\sqrt{1 - 2\log\left[1 - 2\alpha\left(z - \frac{H}{2}\right)\right]} \\
\text{pour } z &\in \left[\frac{H}{2} + \frac{1 - e^{1/2}}{2\alpha}; \frac{H}{2} + \frac{1}{2\alpha}\right] = [1.72; 6.87] \\
\text{et avec } \delta_0 &= \delta\left(\frac{H}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{Ha}{\alpha Ra}}
\end{aligned}$$

Le régime est stratifié lorsque que le gradient vertical de température, $\alpha = \left(\frac{\partial\theta^0}{\partial z}\right)$, est de l'ordre de H^{-1}. D'après les simulations numériques (figure **??**), la valeurs de α

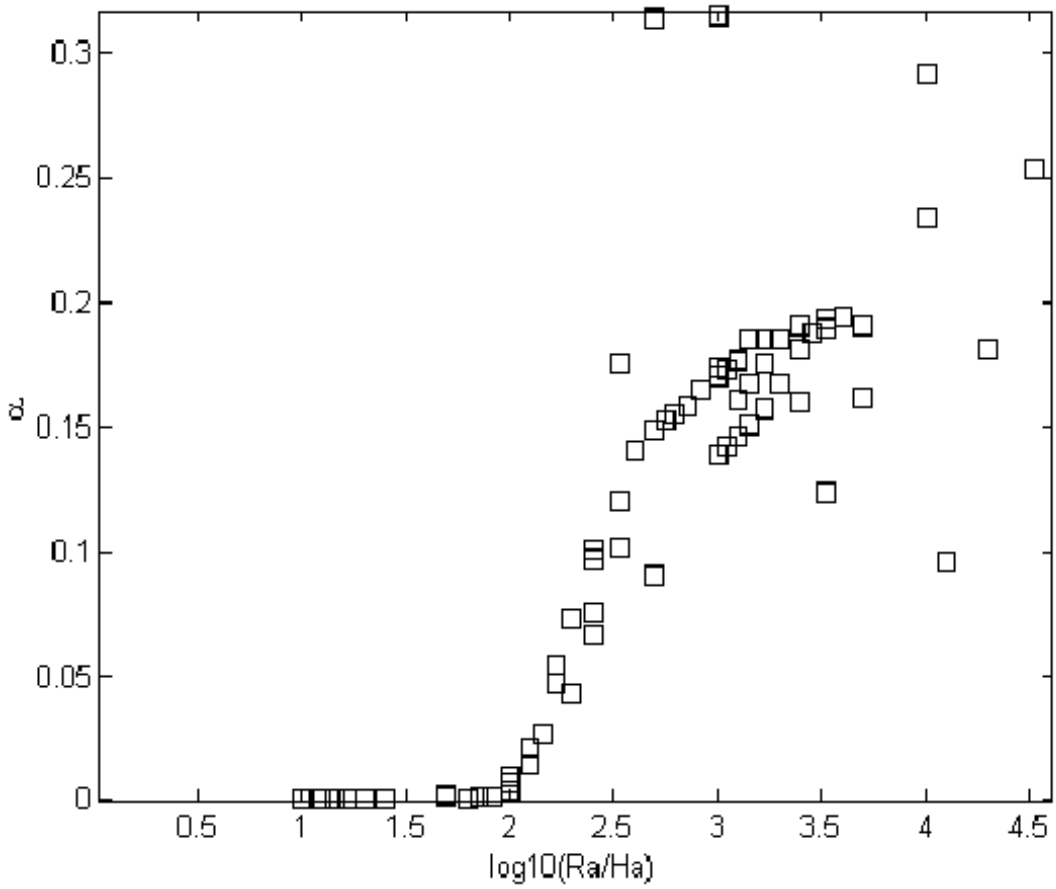


FIG. 4 Gradient vertical de température dans le coeur, en fonction de Ra/Ha.

décolle pour $Ra/Ha > 100$, atteint une limite $0.15 < \alpha^L < 0.2$ ($1 < \alpha^L H < 1.5$). Les points hors de la tendance générale correspondent à des régimes pluri-cellulaires ou chaotiques.

Il est remarquable que la dimension caractéristique L de la cavité n'est pas une grandeur pertinente vis à vis du phénomène de jet thermique, puisque son épaisseur dimensionnelle, $\delta_{th}.L$, ne dépend pas de L. Le flux de chaleur local qui se dégage à la paroi $x = 0$ et le nombre de Nusselt sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x}_{(x=0)} &= -\frac{1+\alpha H}{2}\frac{1+\alpha H - 2\alpha z}{1+\alpha H + 2\alpha z}, \\ Nu &= \sqrt{\frac{\alpha Ra}{Ha}}\left[\frac{(1+\alpha H)^2}{2\alpha H}\ln\left(\frac{1+2\alpha H}{1+\alpha H}\right) + \frac{\alpha H - 1}{2}\right]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Cette représentation n'est pas du tout valable aux extrémités de la cavité, où toute la chaleur est convectée par l'écoulement de recirculation. Néanmoins, quelques arguments qualitatifs simples permettent de minimiser l'influence de ces zones : la couche ascendante en bas de la cavité est écrasée par l'inertie de l'écoulement arrivant de l'autre paroi, tandis qu'elle tend à s'épaissir en haut de la paroi. La solution auto-similaire extrapolée sur toute la hauteur de la cavité sous-estime donc l'échange de chaleur en bas de la cavité et le sur-estime en haut de la cavité. Pour l'élancement $H = 7.5$ qui nous concerne, on peut approcher dans l'équation (4.6) le terme entre crochets pour $0 < \alpha < 2/H$, par 6α. Moyennant quoi nous avons une expression simplifiée du nombre de Nusselt,

$$Nu_{(H=7.5)} = 6\alpha^{3/2}\sqrt{\frac{Ra}{Ha}}.$$

4.5.2 Comparaison du modèle de jets avec les résultats numériques et expérimentaux

Les simulations numériques pour le cas $Ra = 10^7$ et $Ha = 10^4$ confirment une à une les étapes de ce modèle. La figure 5 montre les variations de la température du coeur $\theta_0(z) = \theta(0, z)$ suivant la verticale (en bleu), et une approximation analytique (en rouge) comprenant un terme linéaire et un terme cubique. Conformément à l'hypothèse (4.4), le terme linéaire seul (en vert) représente bien la température dans le coeur ($2 < z < 5.5$), confinant l'influence du terme cubique aux zones de

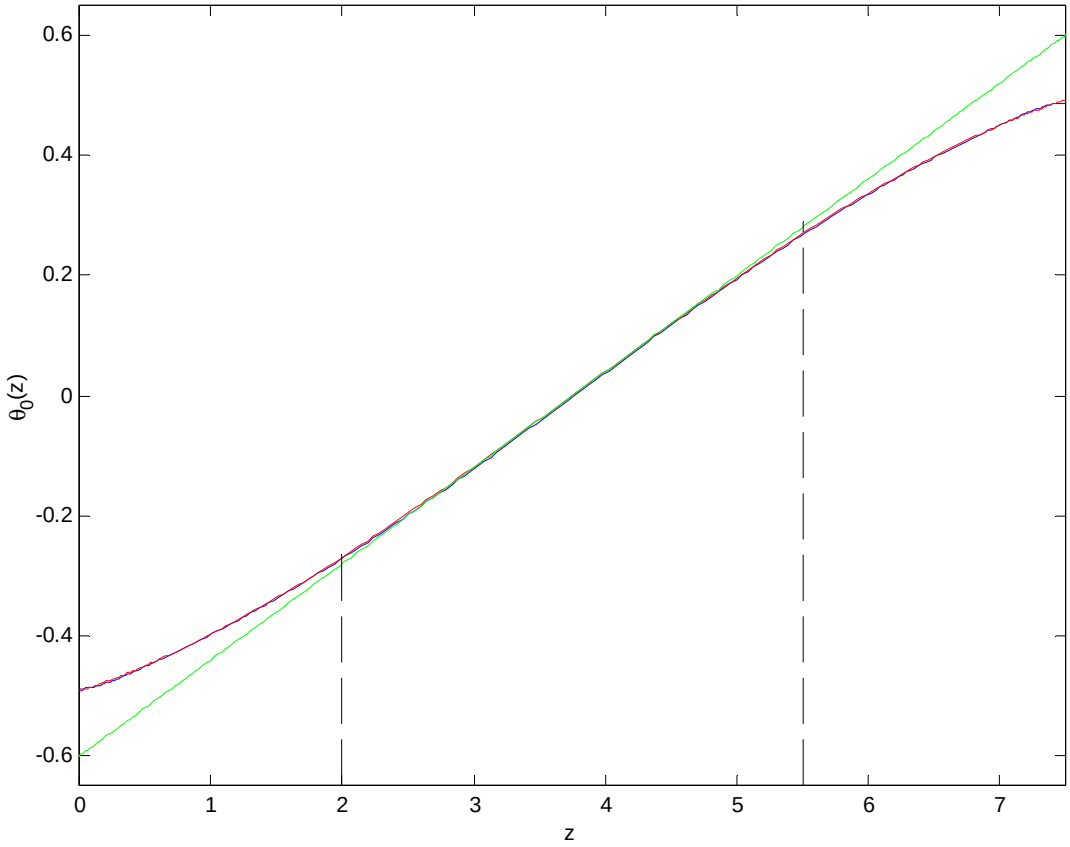


FIG. 5 Variations de la température suivant la verticale en x=0. bleu=simulation numérique ; vert=composante linéaire ; rouge=composantes linéaire + cubique

recirculation. Le coefficient du terme linéaire est $\alpha = 0.1602$. Le graphique **??** compare les épaisseurs des jets thermiques obtenus analytiquement et numériquement. L'épaisseur trouvée ne coïncide pas exactement avec celle déduite des simulations numériques, mais elle est du même ordre de grandeur et varie dans le même sens (le jet s'épaissit pendant son développement). Le résultat important est la confirmation de l'ordre de grandeur $\delta_0 \propto \sqrt{\frac{Ha}{Ra}}$. La figure (**??**) compare les profils de température et de vitesse, obtenus par simulation numérique à plusieurs hauteurs de la cavité, et illustre la mauvaise mise en oeuvre de la condition d'adhérence.

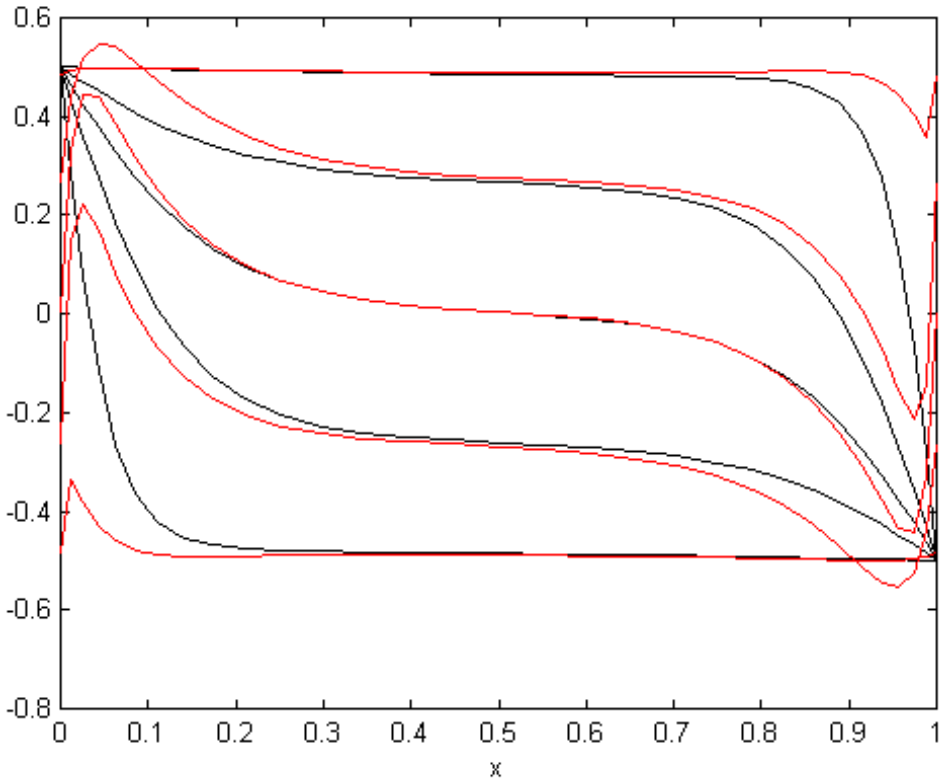


FIG. 6 profil de temtérature t(x,z) en noir, et de vitesse 2Ha/Gr.w(x)-t(0,z) en rouge à plusieurs hauteurs z=0.0978 2.0225 3.7249 5.4354 7.3895

La figure **??** donne les isothermes obtenues numériquement et analytiquement, et les figures 8 et 9 comparent les résultats numériques et expérimentaux pour $Ra = 3.75\ 10^3$ et $Ha = 730$.

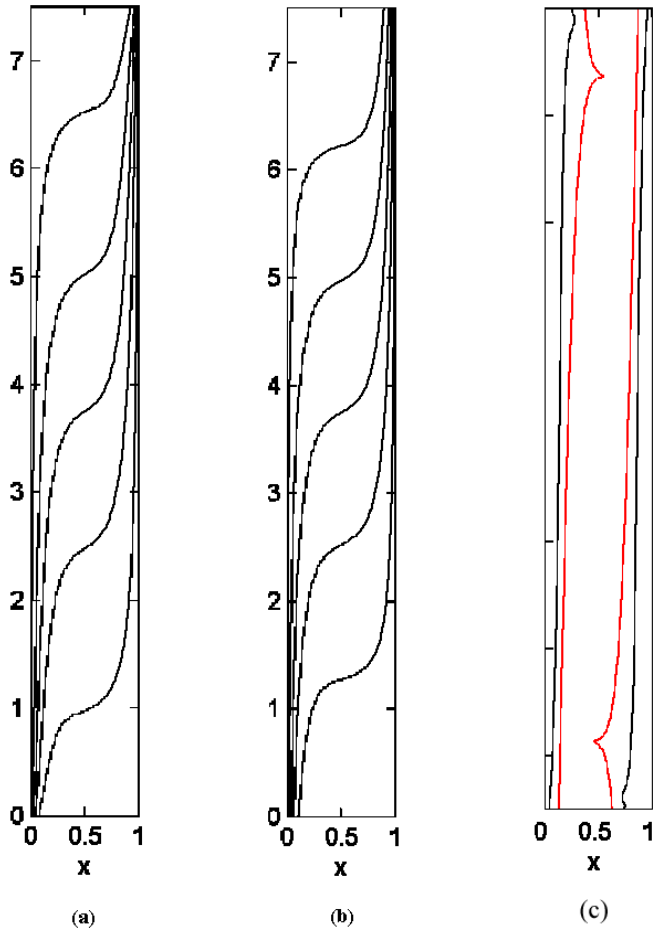


FIG. 7 Comparaison des isothermes obtenues par simulation numérique (a) et avec le modèle analytique du régime stratifié (b). Epaisseurs du jet thermique obtenues numériquement (c-rouge) et analytiquement (c-noir).

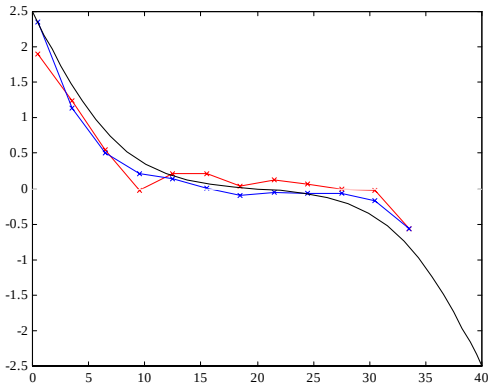


FIG. 8 Profils de température obtenus à mi-hauteur, expérimentalement en rouge et bleu (suivant les deux séries de sondes) et numériquement en noir.

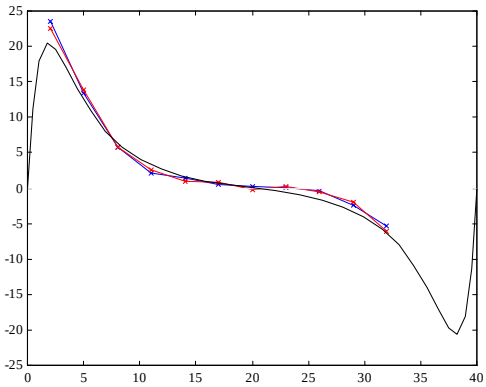


FIG. 9 Profils de vitesse obtenus à mi-hauteur, expérimentalement en rouge et bleu (suivant les deux séries de sondes) et numériquement en noir.

Les forces d'inerties sont importantes dans les zones de recirculation, où la trajectoire du fluide est la plus courbée. Elles y engendrent les premières instabilités. On évalue ces forces à l'aide de la vitesse issue du jet, et de l'épaisseur unité de l'écoulement recirculant :

$$N = \frac{Ha^2}{Gr}.$$

Il est remarquable que le paramètre d'interaction a la même expression que dans le régime établi. Les simulations numériques confirment que le paramètre pertinent pour l'instabilité du jet est Gr/Ha^2, et donnent la valeur critique suivante :

$$\left(\frac{Gr}{Ha^2}\right)^* = 83.$$

4.6 Régimes pluri-cellulaires et chaotiques

La simulation numérique montre l'apparition de régimes pluri-cellulaires, puis chaotiques, à des nombres Ra/Ha^2 $(= N^{-1})$ identiques. La transition aboutit préférentiellement pour les faibles Ha et Ra, à un régime pluri-cellulaire stable et structuré, et pour Ha et Ra élevés, à un régime pluri-cellulaire beaucoup moins structuré, marqué par des oscillations, et proche du chaos. Cette déstabilisation est attendue puisque à Ra/Ha^2 constant, le débit des cellules augmente avec Ha $(Re \propto \sqrt{\frac{HaH}{N\,\mathrm{Pr}}})$, tandis que la couche limite thermique se rétrécit $(\delta_{th} = \sqrt{N/Ha})$. Busse [6] a montré dans le cas d'une convection Rayleigh-Bénard qu'un champ magnétique pouvait stabiliser les cellules de convection.

Du point de vue thermique, la pluri-cellularité accroît l'échange thermique. En effet, chaque cellule a la même structure interne qu'un coeur stratifié entre deux jets thermiques, et voit la même différence de température ΔT. Donc si l'écoulement présente n vortex, le nombre de Nusselt varie en

$$Nu_{(H=7.5)} \sim \left(\frac{n}{H}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{Ra}{Ha}}.$$

Le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses est moindre $(Re \sim n^{-1/2})$, mais le débit cumulé de tous les vortex augmente en $n^{-1/2}$. La figure 10 montre le résultat de la simulation pour $Ra = 10^5$, $Ha = 300$, 250, 200, 100, et $Ra = 10^6$, $Ha = 100$.

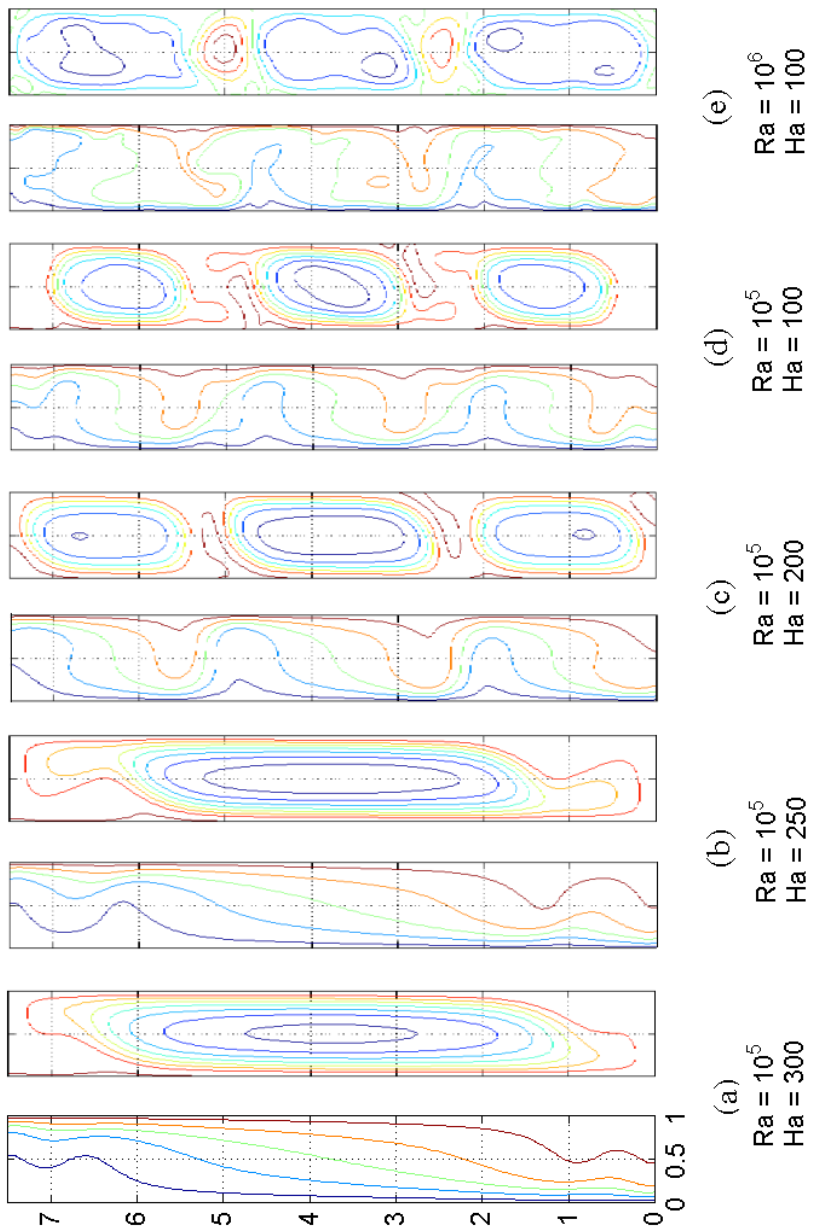


FIG. 10 Simulation de la transition du régime mono-cellulaire aux régimes à 3 tourbillons. (a) et (b), régime mono-cellulaire ; (c) et (d) régime à 3 tourbillons ; (e) apparition de 2 tourbillons contre-rotatifs.

On constate pour Ha=300, puis Ha=250 un rétrécissement de l'unique cellule, entraînant un quasi-repos des extrémités. Cette tendance est à rapprocher de deux phénomènes cités auparavant. D'une part, l'étude de la recirculation a montré dans un cas simple (celui des températures quasi-diffusives), que l'épaisseur de la zone visqueuse augmente si Ha diminue, éloignant le débit recirculant des parois. D'autre part, le courant $u^{\circ}(z)$ injecté par les jets thermiques dans le coeur stratifié varie en $\sqrt{Gr/Ha}$, c'est-à-dire qu'il prend proportionnellement de l'importance aux faibles champs magnétiques. Ce courant de coeur court-circuite donc la recirculation aux extrémités (Ha=300), et l'isole par étranglement (Ha=250) jusqu'à séparation et génération de deux cellules supplémentaires (Ha=200). Le même phénomène de rétrécissement des cellules se poursuit (Ha=100), et lorsque la distance entre les cellules devient suffisante, des cellules contre-rotatives sont entraînées par vorticité (Ra=10^6, Ha=100). Cette configuration alternée minimise les frottements aux interfaces de deux cellules (c'est comme mettre un roulement entre deux roues co-rotatives). Ainsi, l'écoulement présente toujours un nombre impair de cellules. Ces régimes multi-cellulaires ont étés déduits expérimentalement par l'observation d'inversions de débit (chapitre 3). Les transitions entre ces différents régimes consistent en une réorganisation profonde de l'écoulement. Une transition sous-critique a été observée vers Ha=300. Une simulation numérique a donc été réalisée pour mettre en évidence une hystérésis : le nombre de Grashoff est constant, et Ha est successivement décroissant, puis croissant. La courbe 11 confirme l'existence de cette hystérésis. De plus, le maximum de la vitesse moyenne est à rapprocher avec le maximum du flux de chaleur observé expérimentalement dans les mêmes conditions, c'est-à-dire à Ha croissant et modéré. Néanmoins, cette coïncidence peut n'être que fortuite étant donné que le maximum du flux de chaleur a été expliqué par des arguments tridimensionnels, alors que cette simulation est bidimensionnelle.

La simulation numérique directe suggère que l'apparition des premières instabilités coïncide avec celle du régime pluri-cellulaire, autrement dit que la transition entre les régimes mono et pluri-cellulaires est provoquée par la déstabilisation du jet thermique. Dans une large gamme de paramètres, les cellules des écoulements pluri-cellulaires sont fixes, même si des instabilités peuvent exister près des parois. Une simulation numérique à Ra=10^7, Ha=400 a tout de même abouti à la mobilité des

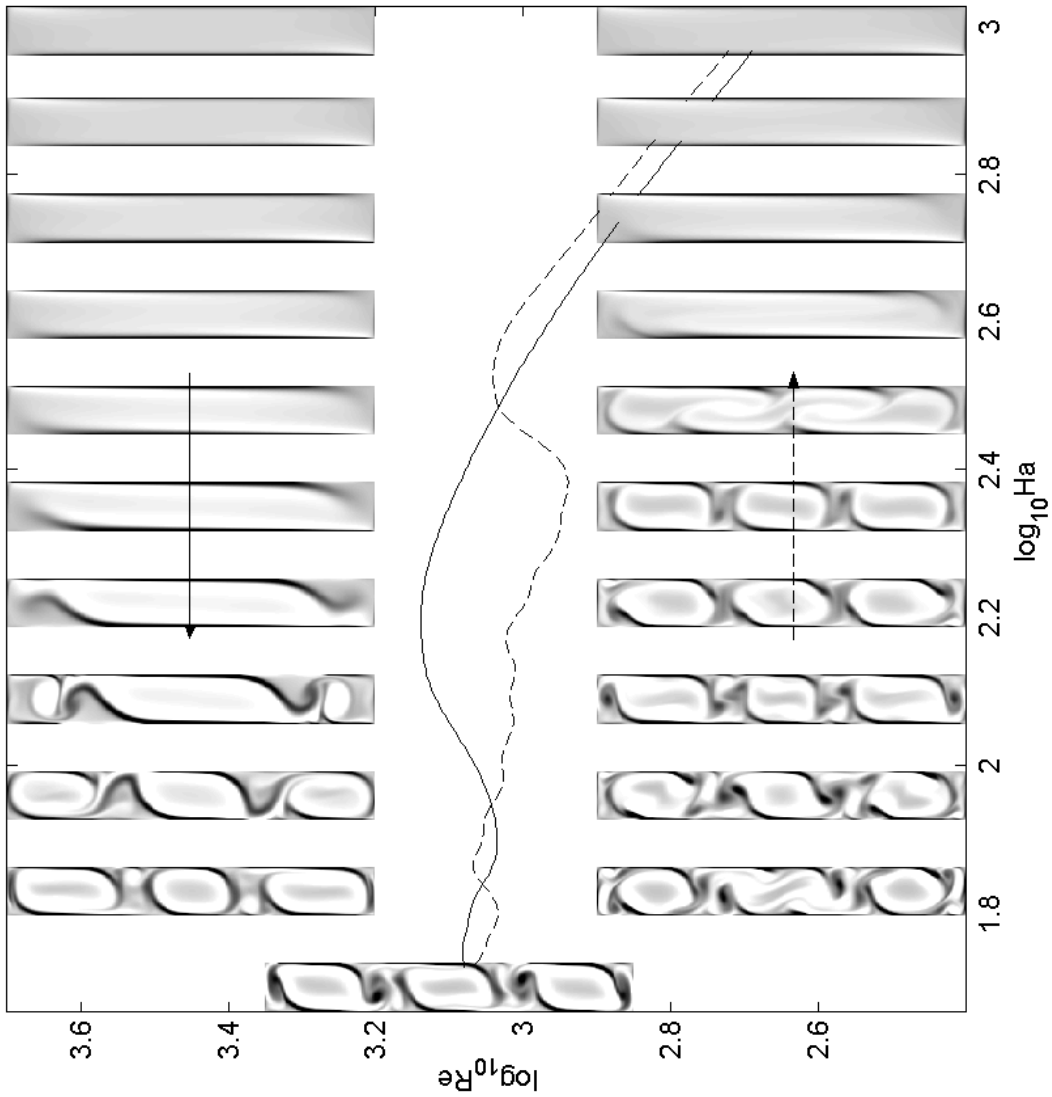


FIG. 11 Hysteresis dans la transition entre les régimes mono et pluri cellulaires (simulation 2D, Ra=105). Les courbes représentent le nombre de Reynolds (définition au chapitre 2) en fonction du nombre de Hartmann, à l'aller (Ha décroît, ligne pleine), et au retour (Ha croît, ligne pointillée). La distribution de vorticité est montrée pour quelques valeurs de Ha.

tourbillons. Les vortex sont toujours en mouvement et interagissent entre eux dans des phénomènes de coalescence et de division.

4.7 Conclusion

Nous sommes maintenant en mesure de dresser un diagramme de bifurcation dans le plan (Ha,Ra) (ou Ha,Gr), localisant les différents régimes d'écoulement.

Il est possible d'identifier chacun des régimes étudiés sur un diagramme, où chaque simulation dans le plan ($\log_{10}$(Ha), $\log_{10}$(Ra)) est illustrée par une 'photo' de l'écoulement à un instant donné. A gauche et à droite de chaque point de calcul sont respectivement reportées les isothermes et les lignes de courant. Pour des raisons de lisibilité, ce diagramme est réparti sur deux pages, la première pour $100 < Ha < 3100$, la seconde pour $3100 < Ha < 10^5$.

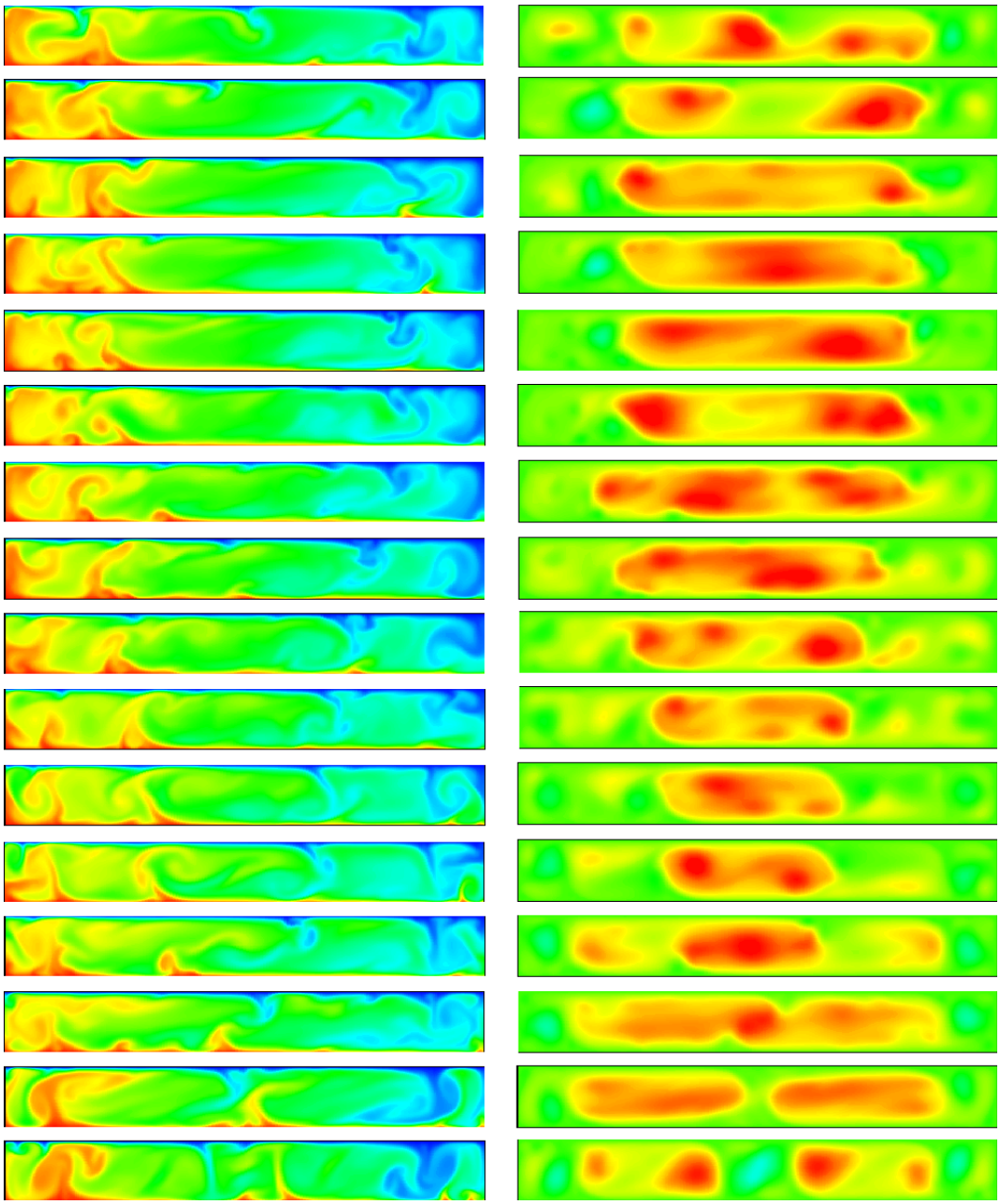


FIG. 12 Simulation d'un écoulement turbulent pour Ra=107, Ha=400. En haut, les isothermes, en bas, la vorticité. Axe des temps de gauche à droite.

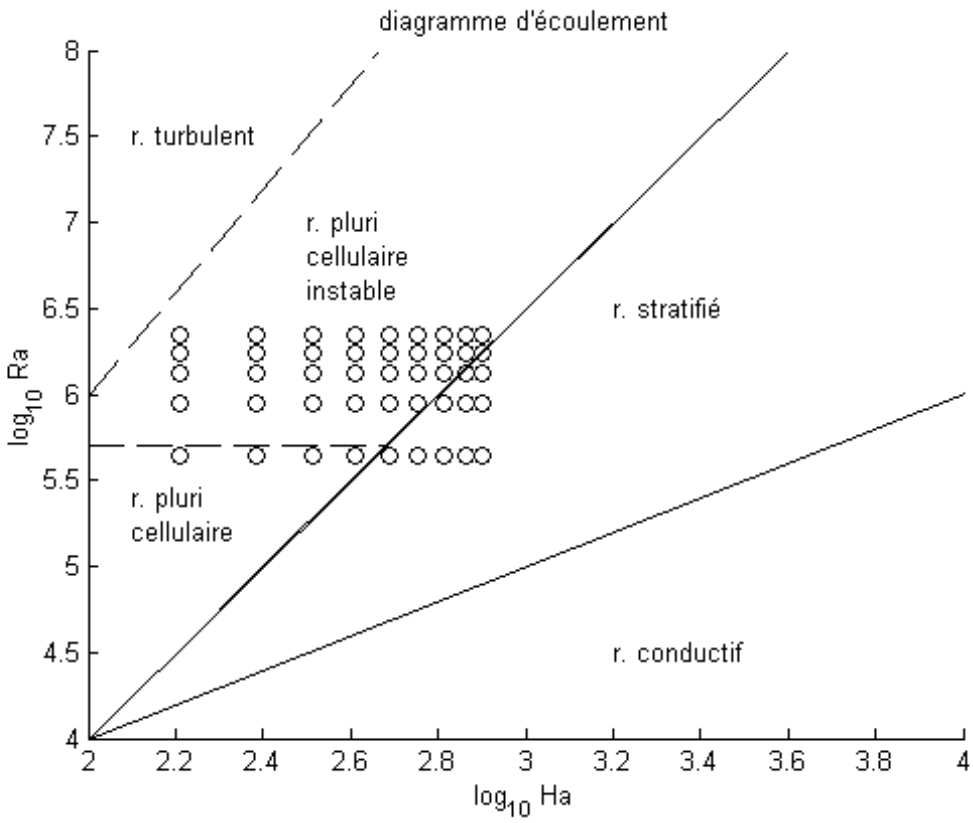
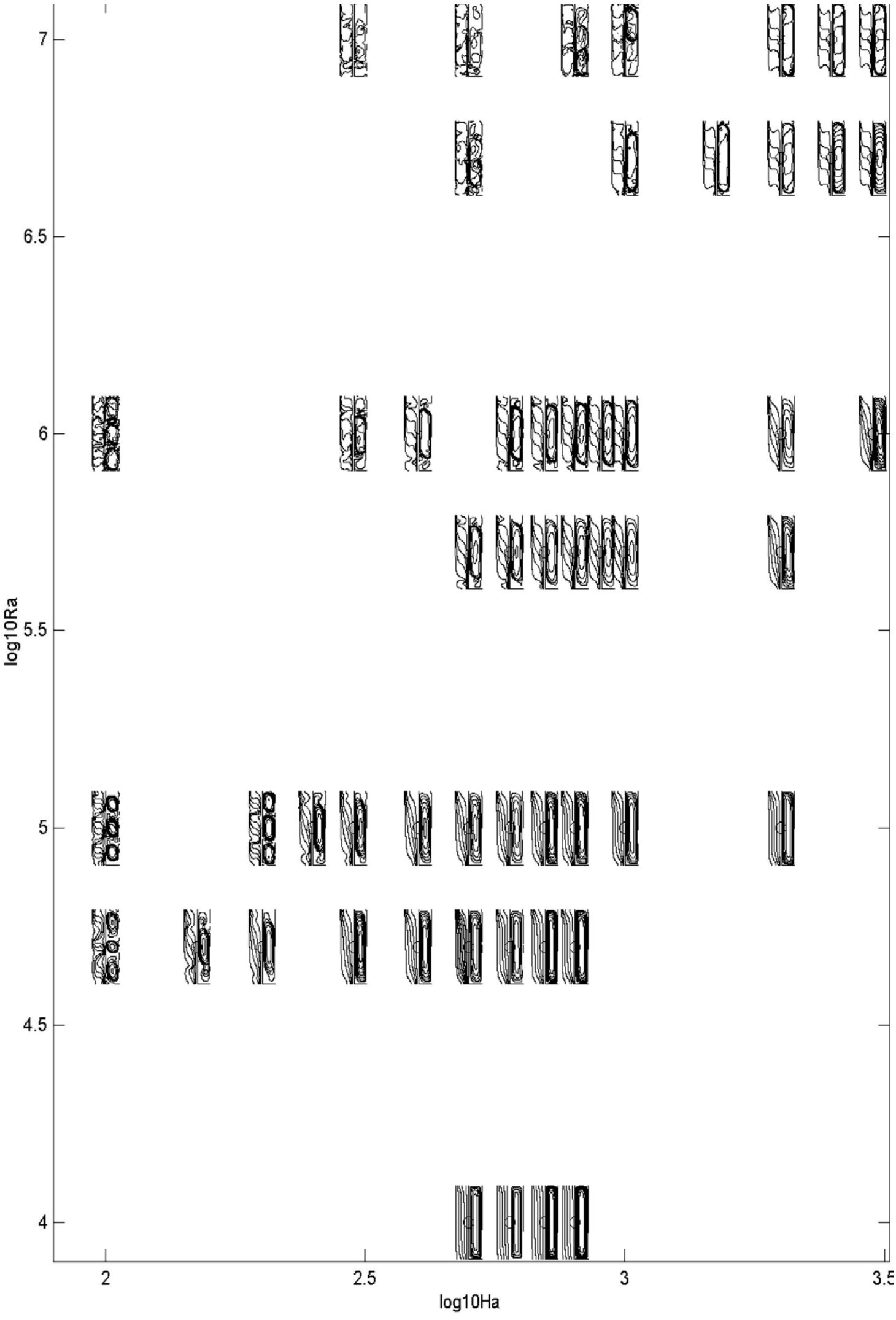
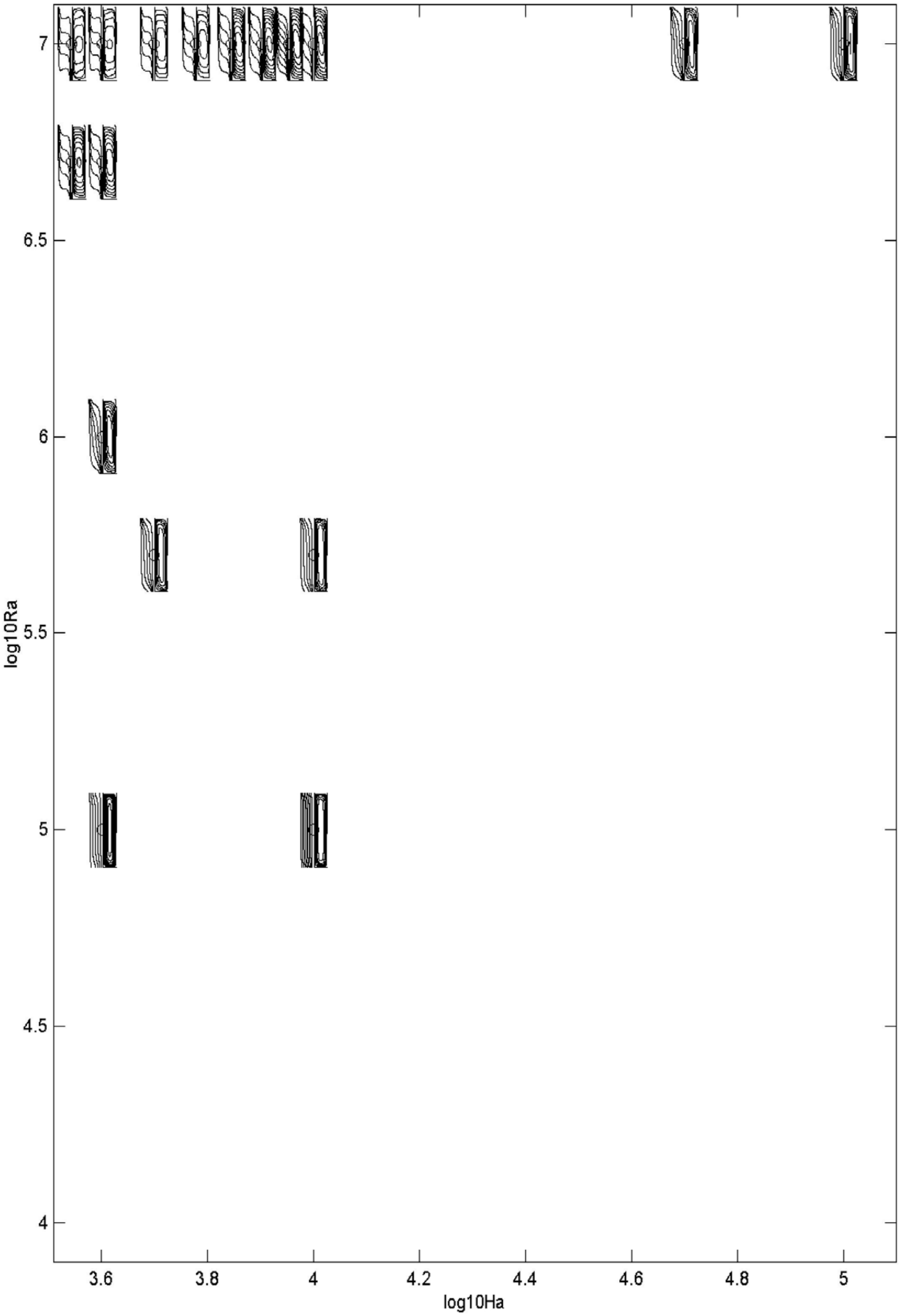


FIG. 13 Diagramme de bifurcation issu des simulations numériques. o = point expérimental - x = simulation numérique


7
6.5
6
5.5
5
4.5
4
log10Ra
2
2.5
3
3.5
log10Ha


7
6.5
6
5.5
5
4.5
4
log10Ra
3.6
3.8
4
4.2
4.4
4.6
4.8
5
log10Ha

La validité du régime pluri-cellulaire a été mis en cause lors de la soutenance. En effet, il suppose que le panache issu du décollement du jet thermique reste bidimensionnel. Or un tel décollement pourrait se faire ponctuellement, et engendrer d'importants effets tridimensionnels. Une simulation numérique 3D a donc été entreprise de façon à valider ou invalider le modèle bidimensionnel pour ces régimes. Les nombres de Rayleigh et de Hartmann sont Ra=107, et Ha=360. Les résultats sont présentés sur la figure 14. Ils montrent que les effets tridimensionnels existent lors du décollement, mais qu'ils sont faibles (regarder vers z≃3.5 et 5.5). La condition de stabilité des jets n'est pas identique en 2 ou 3 dimensions, ce qui peut expliquer pourquoi le régime pluri-cellulaire n'est souvent observé qu'en simulation 2D (par exemple pour Ra=10^5, Ha=100 ou 200, etc.). Le régime pluri-cellulaire existe donc, mais dans des plages différentes de celles observées en simulation 2D.

Le résultat de cette simulation semble expliquer aussi la façon dont se forme les cellules contra-rotatives : entre le jet ayant décollé en z≃5 et celui qui se reforme en z≃5.5, un interstice est soumis à une friction importante. On peut voir la trace de sa vorticité négative en bleu. Cette vorticité est entraînée dans le coeur de l'écoulement, où se forme le tourbillon contra-rotatif (vers z≃6.2, voir aussi vers z≃1.8). La friction entre deux cellules co-rotatives n'est pas suffisante pour s'opposer à la flottabilité et inverser le débit. En effet, le rapport d'aspect des cellules est d'ordre 1, ce qui limite la composante horizontale de la vitesse et le frottement à $u \lesssim w < GrHa^{-1}$, $\partial_z^2 u < GrHa^{-1}$, alors que la flottabilité est d'ordre Gr. C'est la faible épaisseur du jet qui permet lors de son décollement de générer une friction suffisante pour s'opposer à la flottabilité. En rappelant que le jet a toujours une vitesse en $GrHa^{-1}$(voir), et une épaisseur en $\sqrt{\frac{Ha}{\alpha Ra}}$, on obtient un frottement en $Pr.(Gr/Ha)^2$, supérieur à la flottabilité dès que $\alpha Ra/Ha^2 > 1$.

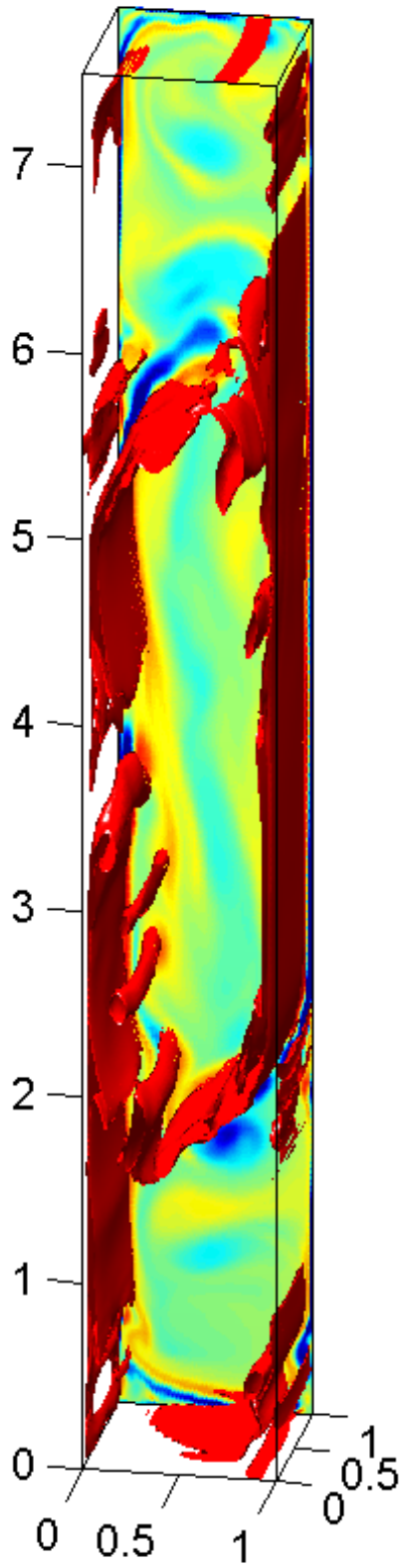


FIG. 14 Simulation numérique 3D dans la configuration perpendiculaire, avec Ra=10^7 et Ha=360. La composante de la vorticité parallèle au champ est considérée : la nappe rouge correspond à l'isosurface $1/12^{ème}$ de la valeur maximale, tandis que la distribution dans le plan médian (y=0.5) est reportée sur le plan y=1.

Chapitre 5
CHAMP MAGNÉTIQUE ET FLUX DE CHALEUR PARALLÈLES

5.1 Introduction

L'étude du régime d'écoulement établi (chapitre 2) a montré que le débit recirculant était Ha fois plus faible lorsque le champ magnétique et le flux de chaleur sont parallèles que lorsqu'ils sont perpendiculaires. Dans ces conditions, les phénomènes de transport sont réduits. C'est notamment le cas pour le transport de la chaleur, d'autant plus que les seules zones où la vitesse est élevée sont des jets près des parois adiabatiques. Ainsi, jusqu'à des nombres de Rayleigh très élevés, la température est gouvernée par la seule conduction, ce qui introduit un découplage des phénomènes mécaniques et thermiques.

On peut alors construire un modèle d'écoulement avec un coeur où la vitesse est verticale et établie, et des bouts où s'effectue la recirculation. Une analyse d'ordre de grandeur montre que comme dans la configuration perpendiculaire, la recirculation s'effectue sur une hauteur l (distance entre les parois chaude et froide). La recirculation du coeur non visqueux peut être modélisée avec les séries de Fourier, suivant la même démarche qu'au chapitre précédent, et comme l'a déjà fait Garandet [11] dans une configuration horizontale. (la diminution de la composante verticale de la vitesse entraîne juste un évanouissement de la force de Laplace. Mais qualitativement, le circuit électrique est le même que dans le régime d'écoulement établi). La recirculation des jets pose, quant à elle, plus de questions : on peut s'attendre à ce que ceux-ci s'écrasent sous l'effet de l'inertie et s'éloignent des parois parallèles près desquelles elles sont, dans le régime établi, confinées. Cette déviation suivant l'axe x induit un courant vertical dans le sens opposé de la vitesse, qui contamine toute la zone d'écoulement établi. Nous verrons les deux principales conséquences de ce courant : (i) le

régime d'écoulement établi n'est pas une représentation parfaite de la zone centrale, même si à première vue, il est très bien confirmé par les simulations numériques, (ii) ce courant rompt la symétrie entre les deux couches limites parallèles (les deux paires de jets) et par l'intermédiaire de la force qu'il engendre, induit un écoulement de deuxième ordre. La représentation analytique de ces phénomènes (dont l'origine est une non-linéarité) n'est pas envisagée. Nous pensons qu'il est plus utile d'exploiter les simulations numériques.

A des nombres de Rayleigh plus élevés, le débit des jets devient important alors que leur taille reste la même ($\delta_{//} = l.Ha^{-1/2}$). L'augmentation du nombre de Reynolds, d'une part, et le profil fortement inflexionnel de la vitesse, d'autre part, nous permettent de prévoir la déstabilisation des jets. Cependant, la configuration d'écoulement dans ces couches parallèles, avec un jet montant et un descendant, ne permet pas l'établissement d'un tourbillon allant d'une paroi de Hartmann à l'autre. La seule turbulence qui peut subsister sous champ magnétique est bidimensionnelle (voir Sommeria et Moreau [32]). Donc en déformant un tourbillon, l'écoulement moyen doit provoquer son extinction, puis la reformation du jet initial. On pourrait donc s'attendre à observer un phénomène cyclique de naissance-mort des tourbillons. De tels phénomènes ont déjà étés observés dans des écoulements forcés, avec un jet unique dans chaque couche parallèle, dont le profil parabolique dans la direction du champ engendre aussi une déformation des tourbillons [40]. La réelle nouveauté dans le cas de la convection naturelle est que la vorticité ne change pas seulement de valeur le long de la couche, mais aussi de sens. La question de l'organisation de la turbulence reste ouverte.

Le transport convectif de la chaleur doit intervenir pour des nombres de Rayleigh extrêmes, pour lesquels les instabilités des couches parallèles ont vraisemblablement dégénéré en turbulence. Ce régime est difficilement accessible par simulation numérique, aussi, nous n'aurons que peu de choses à dire sur ce régime.

Les considérations qui suivent sont inspirées par les simulations numériques. Ce chapitre propose d'expliciter les différents phénomènes précédents en analysant les résultats de la simulation numérique. Au chapitre 2, la forte dépendance de l'organisation de l'écoulement en fonction de l'orientation du champ magnétique nous a conduit à fixer son orientation suivant $\vec{y}$, et à faire varier celle du flux de chaleur.

Cette commodité analytique ne correspond pas en fait à l'approche expérimentale, où les parois isothermes sont fixées dans le repère de la cavité, laquelle est orientée manuellement dans l'entrefer d'un électro-aimant. De même, du point de vue numérique, l'existence d'une paroi chaude et d'une paroi froide nous a conduit à définir l'orientation du flux de chaleur suivant $\vec{x}$, et celle du champ magnétique par rapport au flux de chaleur. Dans la configuration perpendiculaire étudiée au chapitre 4, ces choix conduisent aux mêmes notations. Mais dans la configuration parallèle envisagée ici du point de vue numérique, les deux vecteurs sont orientés suivant $\vec{x}$.

5.2 Recirculation des jets

5.2.1 Circulation du fluide

Le scénario que nous proposons pour la recirculation des jets est basé sur leur écrasement contre les parois horizontales, et sur les effets inertiels qui en résultent. Nous proposons, à l'aide d'une simulation numérique ($Ra = 10^4$, $Ha = 100$), de confirmer, d'illustrer et de compléter ce scénario pas à pas. La figure (1) montre l'écrasement de deux tubes de courant, partant du coeur des deux jets ascendants, contre la paroi supérieure de la cavité (z=7.5). De même, des tubes de courant partant des points symétriques dans les jets descendants s'écraseraient contre la paroi inférieure (z=0). Au terme de leur écrasement, les deux tubes ascendants se heurtent l'un à autre, au niveau du plan y=0.5, qui reste un plan de symétrie. Ils sont déviés vers la paroi x=1, sans que rien ne les oblige à réintégrer les jets descendants. Ceci explique les ruptures de symétrie par rapport au plan x=0.5, mais aussi par rapport au plan z=3.75, puisque la composante u de la vitesse dans les écrasements aux deux extrémités de la cavité sont de signes opposés. Finalement, la seule autre symétrie qui subsiste est la symétrie par rapport au centre de la cavité (les symétries d'axe, en tant que composition des deux premières, sont exclues). En se rejoignant, les deux jets forment un jet libre, unique et parallèle au champ magnétique. Du point de vue du circuit électrique, cet écrasement comporte une composante v de la vitesse, non nulle, qui induit elle même des courants électriques verticaux. La figure (2) montre les signatures respectives de l'écrasement et de la recirculation ($v_{max}(z)$ et $u_{max}(z)$). Elle montre que la 'vitesse d'écrasement' est presque aussi élevée que la 'vitesse de

recirculation', mais que son épaisseur est plus mince (environ 0.2 contre 0.5). On doit donc s'attendre à voir apparaître des circuits électriques complexes, qui sont étudiés au paragraphe suivant.

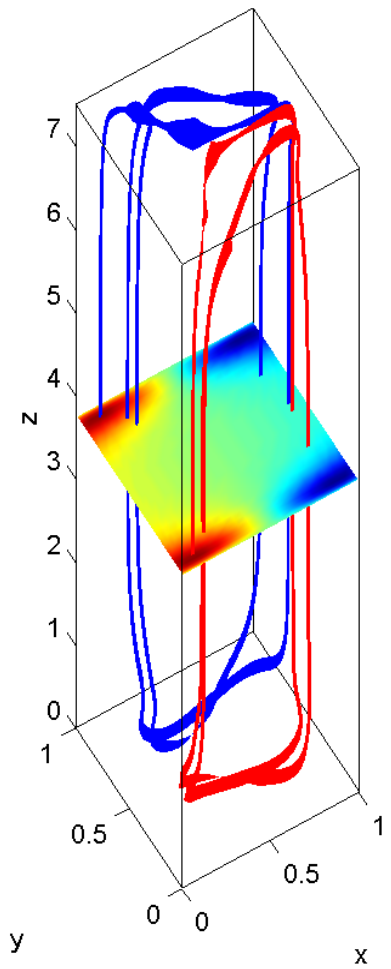


FIG. 1 Tubes de courant partant des coeur des jets ascendant. A mi-hauteur, profil de la vitesse w(x,y,H/2). $Ra = 10^4$, $Ha = 100$. L'écoulement étant stationnaire, les tubes de courant sont des ensembles de trajectoires.

On remarque que les tubes ne redescendent pas dans le jet opposé après avoir effectué leur recirculation, mais restent dans le coeur de l'écoulement. En regardant plusieurs tours complets du tube rouge, on constate qu'il se rapproche à chaque tour du jet descendant, alors qu'en même temps il s'écarte du jet ascendant. Il y a donc un phénomène périodique où le tube intègre alternativement les deux jets de la couche

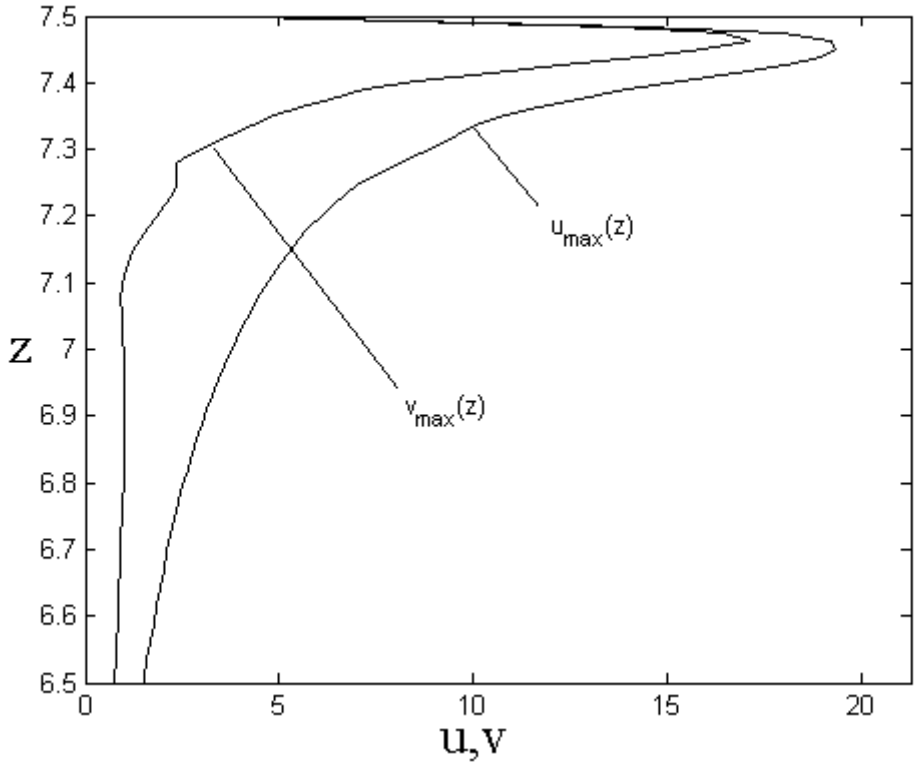


FIG. 2 Profils des maximums de vitesse u et v dans les plans horizontaux, en fonction de la hauteur. $Ra = 10^4$, $Ha = 100$.

parallèle. Il est probable que le tube ne revienne jamais exactement en position initiale, mais en revanche parcoure tout le volume du fluide compris entre les plans y=0 et y=0.5. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les résultats présentés ici sont une photographie des tubes de courant à un instant donné. Parce que l'écoulement est stationnaire, ce sont également des trajectoires. La présence d'instationnarités aurait sans doute la conséquence d'accélérer ce 'remplissage' du demi-volume par le tube de champ. Cette configuration topologique confère des bonnes propriétés de mélange à l'écoulement. Dans les couvertures des réacteurs de fusion, on veut éviter que le tritium produit au sein du fluide ne s'accumule et ne diffuse au travers des parois des tubes d'eau. Les risques de zones d'accumulation, dues par exemple à un tourbillon immobile, ou à une zone stagnante, sont ainsi réduits. De plus, il est probable que ces propriétés ne varient pas fondamentalement en présence du faible débit imposé pour

extraire et traiter le métal liquide. On peut donc supposer que tout le fluide contenu entre la conduite de sortie et la surface de séparation (la surface équivalente du plan y=0.5 du cas présent) sera tôt ou tard évacué. En revanche, le fluide situé de l'autre côté de cette surface risque de n'être évacué que très lentement, voire jamais. La figure (3) compare à chaque hauteur la composante v à l'interface et sa valeur maximale atteinte dans l'ensemble du fluide. Les deux courbes correspondent aux minimum et au maximum dans la direction x (celle du champ magnétique). Elles suggèrent que le fluide allant vers ce plan y=0.5 avec une vitesse v_{max} est fortement freiné, que sa vitesse résiduelle au niveau du plan est au moins 10^{-4} fois plus faible, et quasiment uniforme dans la direction du champ magnétique. La quasi-imperméabilité de cette surface tient au fait qu'elle est un plan de symétrie pour l'écoulement, et que un jet se dirigeant vers elle est toujours stoppé par le jet symétrique. Ainsi, la pression doit toujours atteindre un extremum (le plus souvent un maximum) au niveau du plan y=0.5. Des géométries plus compliquées peuvent empêcher l'existence de telles surfaces, néanmoins, le risque est demeure important pour les couvertures, où les forts champs magnétiques tendent à laminariser l'écoulement.

5.2.2 Courants électriques induits

Comme nous l'avons remarqué plus haut, l'écrasement des jets induit des courants électriques verticaux. Les composantes de la vitesse v et donc du courant induit j_z ne changent pas de signe lors de la recirculation du tube. La figure (4) montre la trace des lignes de courant sur le plan où la composante v est maximale, ainsi que la valeur de cette composante. Les deux jets ascendants écrasés (en rouge et bleus) génèrent des courants j_z opposés, ce qui suggère que ce courant électrique secondaire ne se boucle pas dans les couches parallèles ($y \sim 0,1$), mais plutôt près, ou dans la couche de Hartmann $x \sim 0$. Près des deux coins x=1, y=0,1, une faible inversion de la composante v va induire un autre courant électrique, vertical mais de sens opposé au précédent, et se refermant à proximité de la couche de Hartmann $x \sim 1$. La concentration des lignes de courant sur la ligne (y=0.5, z=7.45) suggère que le jet recirculant est mince. Sa structure de couche parallèle libre doit lui conférer une épaisseur en $Ha^{-1/2}$.

Les fortes variations du potentiel électrique du régime établi dans les plans

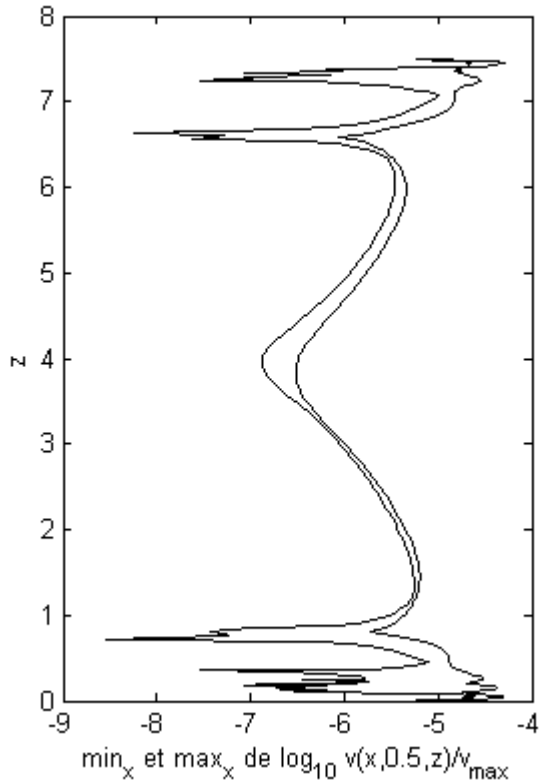


FIG. 3 vitesse résiduelle v au plan y=0.5 en fonction de z, en comparaison de la vitesse maximale. Les deux courbes représentent les extrémums suivant x. $Ra = 10^4$, $Ha = 100$.

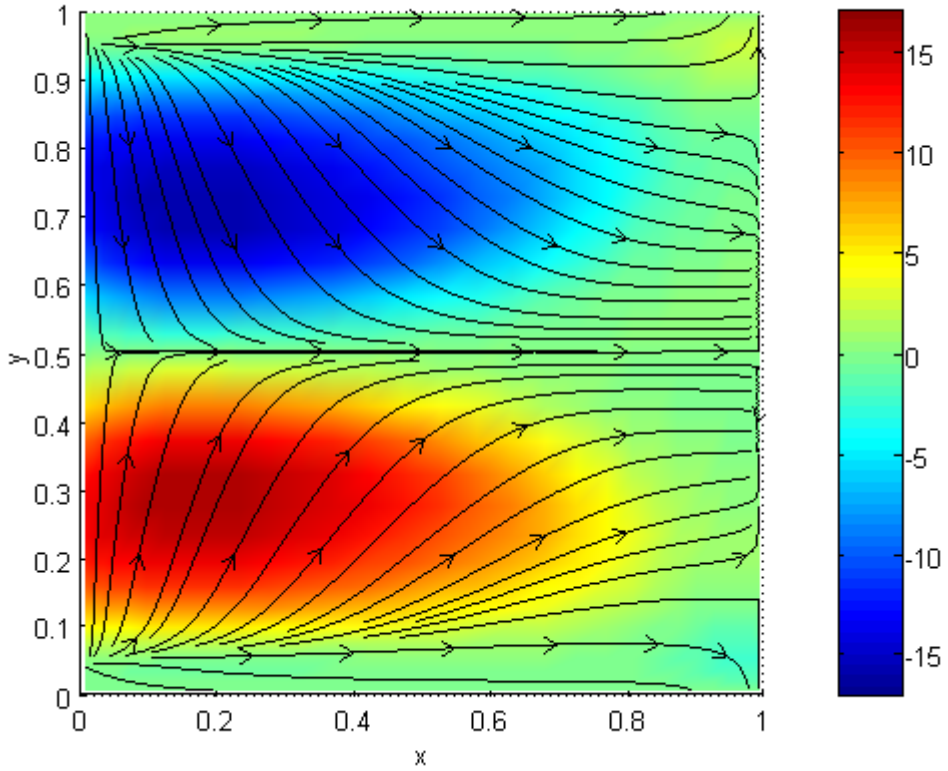


FIG. 4 trace des lignes de courant dans le plan z=7.45 (noires), et intensité de la composante de la vitesse v. $Ra = 10^4$, $Ha = 100$.

horizontaux sont dues à la composante w de la vitesse des jets. La figure (5) montre que ces variations décroissent, comme w, sur l'épaisseur de recirculation. Au niveau de la paroi supérieure (z=7.5), ces variations sont deux fois moindres qu'au niveau du plan médian (z=3.75). Selon les importances respectives des courants j_z induit par v et j_y induit par w, les lignes de courant sont de deux types : les lignes bleues font, comme dans le régime établi, le tour de la section, tandis que les lignes rouges ont plutôt une tendance à décrire des boucles verticales. Le type quadripolaire du potentiel les empêche de refermer près des parois de Hartmann (x=0,1), mais favorise la déviation des lignes de courant vers le centre de la paroi supérieure. D'après les lignes rouges, les zones où le courant électrique est vertical correspondent bien aux zones d'écrasement (près de x=0), et aux coins (près de x=1, y=0,1), où il existe une faible inversion de v.

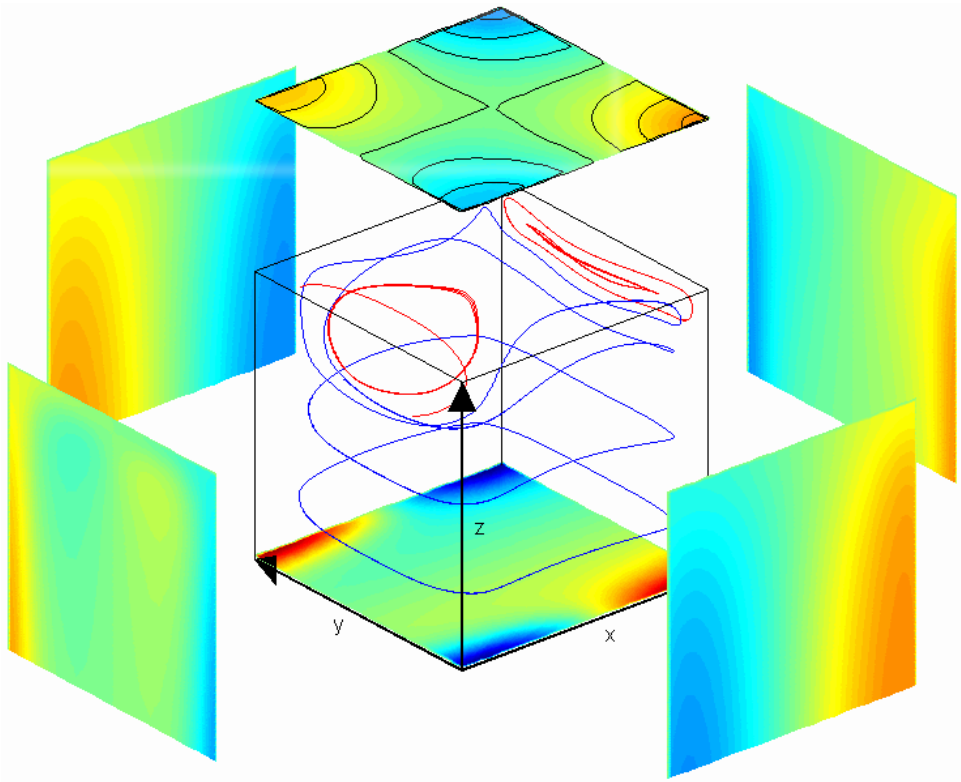


FIG. 5 Lignes de courant électrique dans la partie supérieure de la cavité ($6.5 < z \leq 7.5$), et potentiel électrique sur les parois (vue éclatée) et au niveau du plan z=6.5. Les isopotentielles de la paroi supérieure ont été rajoutées. ($Ra = 10^4$, $Ha = 100$.).

5.3 Transport de chaleur

Les jets transportent la totalité du flux de chaleur convectif. Lorsqu'ils traversent les surfaces isothermes, les jets améliorent l'échange thermique. La figure 6 illustre la trace de leur recirculation sur ces isothermes. Elle montre que le transport convectif de la chaleur reste extrêmement confiné.

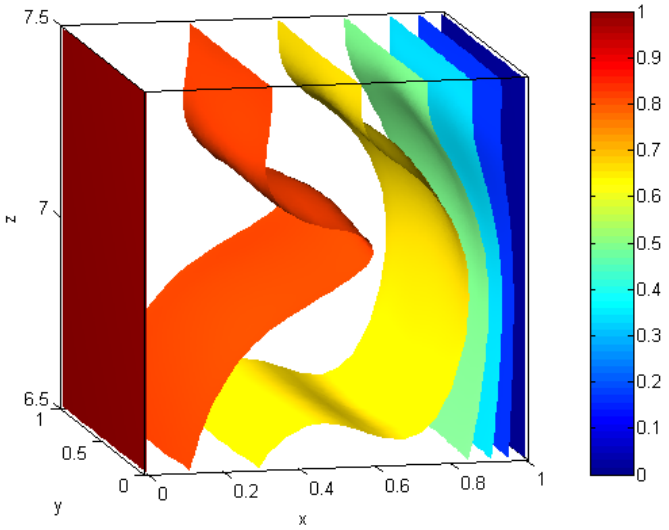


FIG. 6 Isothermes dans la partie supérieure de la cavité. $Ra = 10^5$, $Ha = 100$.

A des débits plus élevés, nous avons observé un régime stratifié, comme l'illustre la figure 7. Les jets dans les couches limites parallèles ne sont plus significatifs.

5.4 Stabilité des jets

Les profils fortement inflexionnels des jets les rend instable. Des instabilités dans des couches limites parallèles ont déjà été observés, pour des écoulements de convection forcée [28] : l'instabilité de la couche engendre un tourbillon, parallèle au champ magnétique. Ce tourbillon est emporté par l'écoulement moyen, dont le profil est parabolique. Le tourbillon est donc déformé pendant le temps L/W au delà duquel il ne peut plus subsister. L'analyse de la stabilité linéaire conduit à une transition à Re*=313 [37], alors qu'elle est observée expérimentalement vers Re*=2000.

La véritable originalité de la convection naturelle est d'avoir deux jets de vitesse opposés dans la même couche. Non seulement chacun d'entre eux donnent des

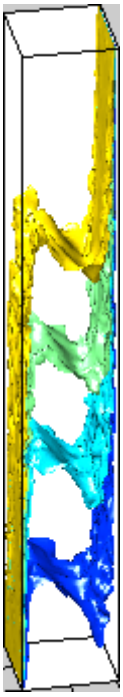


FIG. 7 Régime stratifié dans la configuration parallèle. Isothermes pour Ra=3.10^8, Ha=300.

tourbillons de vorticité opposée, mais en plus, ces tourbillons sont emportés dans des sens opposés. La structure de cette turbulence demeure, à ce stade, inconnue. On peut par exemple supposer que chacun des deux tourbillons domine alternativement l'autre, pendant sa durée de vie, ou alors que les tourbillons quittent la couche parallèle et investissent le coeur.

Nous tentons de caractériser la turbulence à l'aide des simulations numériques. Les tourbillons ont les pieds dans les couches de Hartmann, et y injectent un courant. Il est donc nécessaire d'utiliser les conditions aux limites dérivées des couches de Hartmann, donc de ne pas avoir un nombre de Hartmann inférieur à 100. Par ailleurs, l'épaisseur des couches parallèles est $Ha^{-1/2}$, et leur maillage est difficile aux grands nombres de Hartmann. Nous proposons donc le compromis Ha=300. Avec 63 points entre les deux parois de Hartmann, il y a donc environ 8 points à travers une couche parallèle (grille non uniforme). Comme en convection forcée, la totalité du débit est dans les jets, et le nombre de Reynolds de la couche est égal au nombre de Reynolds

global, soit (chapitre 2)

$$\mathrm{Re} = \frac{V_{CL//}}{\nu}\frac{L}{\sqrt{Ha}} = \frac{Gr}{Ha^{3/2}} \tag{5.1}$$

La valeur critique précédente permet alors de prédire l'instabilité autour de $Ra = 2.5.10^5$. Les simulations numériques que nous avons faites n'ont quant à elles pas donné d'instabilités avant $Ra = 3.10^8$. La figure 8 montre les évolutions de certaines vitesses dans la couche, pour $Ra = 3.10^8$, $Ha = 300$. Elle montre que la déstabilisation n'est pas immédiate, et suggère l'existence d'un régime métastable. La durée

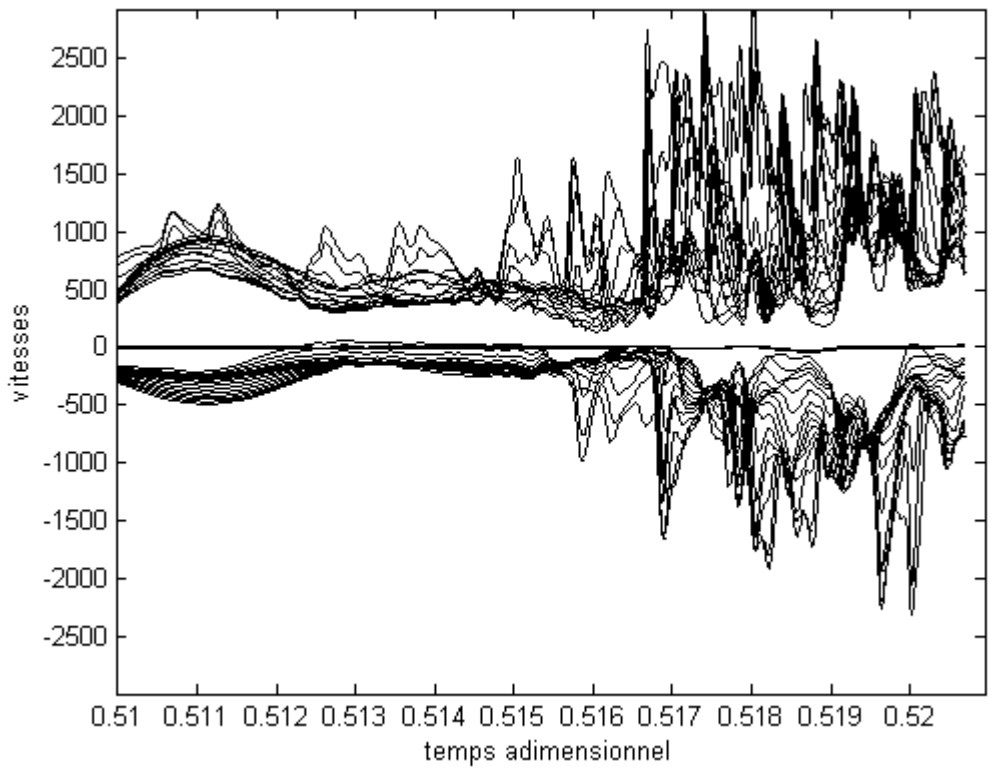


FIG. 8 mesures de vitesse en 3 paquets de 15 points traversant la couche parallèle au niveau des extremums des jets, et de l'axe central. On distingue bien les trois paquets, le dernier ayant des vitesses quasiment nulles. Ra=3.10^8, Ha=300.

de vie d'un tourbillon est $\tau_{distorsion} = w^{-1}$. La figure 9 réalise un zoom de l'un des enregistrements, et montre que ce temps (en rouge) coïncide parfaitement avec le temps caractéristique de l'instabilité.

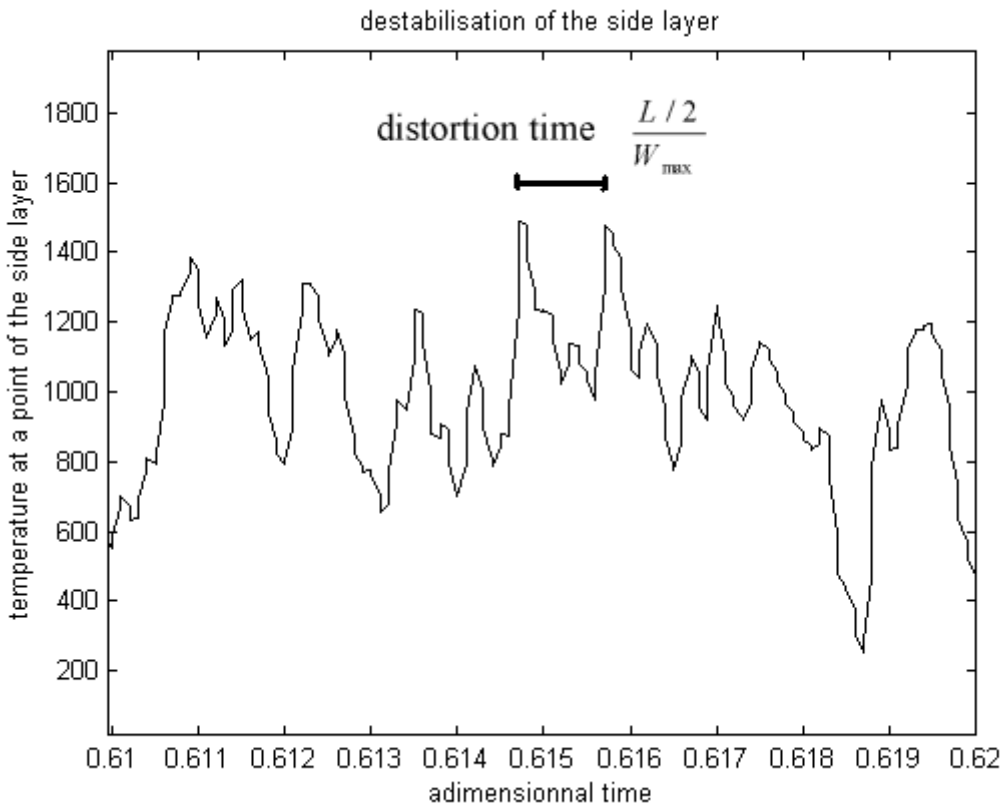


FIG. 9 Signal de température dans un jet de couche parallèle turbulente . Ra=2.10^8, Ha=300.

La figure 8 montre également que la vitesse est nulle en x=0.5, et que les vorticités de part et d'autre de cet axe ne change pas de signe. Il est donc vraisemblable que les tourbillons des jets ascendants et descendants soient séparés, et confinés aux deux moitiés de la cavité. Les tourbillons seraient alors fortement tridimensionnels, ce qui est un résultat surprenant [32]. Des enregistrements plus complets doivent permettre de caractériser plus précisément cette turbulence.

Chapitre 6
CONCLUSION

La convection thermogravitaire en cavité verticale élancée, sous champ magnétique horizontal et uniforme est étudiée. Un effort particulier a tout d'abord été porté aux écoulements à faibles vitesses, pour lesquels les phénomènes de transport sont négligeables. Ceci permet, premièrement, de réduire les phénomènes thermiques à la seule conduction, et de se concentrer sur les phénomènes mécaniques et électriques, et deuxièmement, d'envisager un écoulement vertical et établi, loin des extrémités de la cavité. La structure bien connue de l'écoulement est alors dégagée : elle comporte un coeur non visqueux, des couches limites de Hartmann d'épaisseur Ha^{-1}, et des couches parallèles d'épaisseur $Ha^{-1/2}$. Ces éléments sont aussi les éléments du circuit électrique : la force de Laplace s'annule dans une couche parallèle, où la densité de courant électrique s'aligne avec le champ magnétique ; lorsqu'une couche de Hartmann transporte un courant électrique I_{Ha}, elle contrôle l'écoulement du coeur, et est dite électriquement active : la force de Laplace équilibre le frottement, et la vitesse dans le coeur est proportionnelle à I_{Ha}. Des conditions aux limites applicables au coeur sont dérivées, et permettent d'éviter le maillage des couches de Hartmann. Ces caractéristiques peuvent donc provoquer des phénomènes originaux, selon l'organisation du circuit électrique, donc selon les symétries [3]. En convection naturelle et dans la configuration qui nous intéresse, deux orientations du champ magnétique permettent de mettre en valeur et d'étudier séparément les spécificités de chacune des couches :

- Lorsque le champ magnétique est parallèle au flux de chaleur, la vitesse dans le coeur varie en Gr/Ha^2, déterminée par l'équilibre entre la flottabilité et le freinage électromagnétique. Celui-ci est nul dans les couches parallèles, et des jets apparaissent, avec une vitesse en Gr/Ha résultant de l'équilibre entre les forces de flottabilité et de

frottement. Le courant électrique se referme sans passer par les couches de Hartmann, qui restent passives.

- Lorsque le champ magnétique est perpendiculaire au flux de chaleur, la totalité du courant freinant le coeur se referme dans les couches de Hartmann, et y induit une force de Laplace opposée à celle du coeur. L'écoulement est bidimensionnel, et la vitesse en Gr/Ha est déterminée par l'équilibre entre la flottabilité dans le coeur et le frottement dans les couches de Hartmann. Des jets ne peuvent donc pas apparaître dans les couches parallèles.

Les vitesses très différentes obtenues dans le coeur peuvent être expliquées d'une autre façon : on sait que le champ magnétique tend à uniformiser l'écoulement. Ce phénomène est interprété en terme de diffusion de la vorticité le long des lignes de champ [32]. Or dans le cas perpendiculaire, le couple moteur de la flottabilité est parallèle au champ magnétique, et son intensité ne varie pas dans cette direction. Il n'y a donc pas de vorticité significative à diffuser. En revanche, dans le cas parallèle, le couple moteur est perpendiculaire au champ magnétique, et la vorticité est fortement diffusée vers les couches parallèles, où elle est parallèle au champ, et maximale. L'écoulement de coeur est donc fortement freiné.

Une fois le couplage des phénomènes électriques et mécaniques compris, on s'intéresse, dans chacune des deux orientations du champ magnétique, aux régimes d'écoulements en cavité élancée finie. En introduisant les extrémités de la cavité, on introduit également les phénomènes de transport, et notamment l'advection de la chaleur et de la quantité de mouvement. Aux nombres de Hartmann élevés, Ha>>1, les vitesses sont lentes, et l'écoulement au centre de la cavité tend asymptotiquement vers le régime établi précédent. Les régimes qui se succèdent au fur et à mesure que l'on diminue Ha, marquent l'importance de la part convectée du flux de chaleur, et des forces d'inertie : stratification, instabilités, etc... Ces régimes, pour un champ magnétique perpendiculaire et parallèle au flux de chaleur, sont respectivement caractérisés aux chapitres 4 et 5.

Le caractère bidimensionnel de l'écoulement dans le cas perpendiculaire facilite grandement son étude : expérimentalement, les propriétés des couches de Hartmann

actives donnent un accès direct à la vitesse dans le coeur, par la mesure du potentiel électrique ; analytiquement et numériquement, la suppression d'une dimension (la direction du champ) et du problème électrique (le potentiel électrique est, au premier ordre, l'opposé de la fonction de courant), simplifie considérablement le problème. Ainsi, on montre que :

- l'écoulement de recirculation, clôturant le régime établi, est d'épaisseur $\delta_R \sim 0.3$, dans la limite Ha>>1. Les résultats numériques et expérimentaux montrent que cette épaisseur ne varie pas, même en présence de jets thermiques. Le premier effet de l'inertie n'est pas de changer cette échelle, mais de rompre la symétrie de la recirculation. Par une méthode de perturbation, on évalue les plus faibles transports convectifs de la chaleur : $Nu - 1 \sim 10^{-3} Ra^2 Ha^{-2} H^{-1}$. L'épaisseur et le nombre de Nusselt ne changent pas dans le cas d'une surface libre, et la hauteur des vagues varie en L/Ha ;

- un régime de jets thermiques avec un coeur stratifié au repos apparaît pour Ra/Ha>100. Il est caractérisé par une épaisseur de jet $\delta_0 = \sqrt{HHa/Ra}$, des vitesses en Gr/Ha, et un nombre de Nusselt $Nu \sim \sqrt{RaH^{-1}Ha^{-1}}$. Les profils de vitesse et de température obtenus par voie expérimentale et numérique concordent. Le rapport des forces d'inertie aux forces de Laplace dans la recirculation du jet thermique varie en Gr/Ha^2. Les simulations numériques suggèrent que les premières instabilités apparaissent pour $Gr/Ha^2 \simeq 83$;

- la transition du régime stratifié vers le régime pluri-cellulaire est liée à l'instabilité du jet, et à l'existence d'un point de séparation provoquant la recirculation prématurée du jet (c'est à dire avant d'avoir atteint l'extrémité de la cavité). Cette bifurcation est sous-critique, et s'accompagne d'une hystérésis ;

- enfin, les résultats expérimentaux montrent l'existence d'un flux de chaleur à champ magnétique modéré. Il est expliqué par l'organisation de l'écoulement [35], et doit donc être déterminé par le paramètre d'interaction $N = Ha/Re \sim Ha^2/Gr$. La valeur du nombre de Hartmann pour laquelle le maximum est atteint n'est pas mesuré avec suffisamment de précision pour que la pertinence de ce paramètre ait pu être vérifié.

Le cas parallèle est fortement marqué par la présence des jets ;

- dans la limite Ha>>1, ces jets n'ont aucune inertie, et recirculent dans des plans, avec une épaisseur comparable à celle du cas perpendiculaire ;

- lorsque la vitesse augmente, ces jets s'écrasent contre les extrémités de la cavité, sous l'effet de leur inertie. Leur recirculation est tridimensionnelle, et induit des courants électriques verticaux qui se referment près des parois de Hartmann. Les deux jets ascendants dans les couches parallèles opposées se joignent et forment un jet libre parallèle au champ magnétique. Ce jet libre d'une paroi isotherme à l'autre améliore localement l'échange thermique ;

- a des vitesses plus élevées, on observe, également dans le cas parallèle, une stratification.

- lorsqu'un jet a un débit élevé et une épaisseur mince, il est instable, et engendre des tourbillons. Ces tourbillons sont déformés par l'écoulement moyen, et ont une durée de vie $L^2/\nu.Ha/Gr$.

Ces travaux ont permis d'appréhender les phénomènes de base liés à la convection naturelle dans les couvertures. Beaucoup de choix technologiques pour les couvertures ont des conséquences importantes sur ces phénomènes. Par exemple, la disposition d'une barrière de perméation à l'extérieur des tubes réfrigérants, ou sur d'autres parois augmente considérablement les vitesses du Plomb-Lithium. Il est essentiel de prendre en compte ces phénomènes dans la conception des couvertures. Actuellement, les estimations de la température dans les couvertures sont basées sur la conduction pure. Dans la réalité, le métal liquide est certainement stratifié, ce qui entraîne d'une part, des températures plus importantes en haut des couvertures, et d'autre part, de nouvelles contraintes thermo-mécaniques.

D'autres phénomènes liés à la structure complexe du segment de couverture doivent être étudiés, comme notamment la répartition du débit entre les différents canaux, le couplage électrique des canaux, etc... Pour les problèmes d'accumulation du tritium, on peut s'intéresser à la mobilité des différentes cellules tourbillonnantes. L'ensemble de ces phénomènes doit encore tenir compte du chauffage volumique et des conditions aux limites hybrides réalisées dans les couvertures : les parois du côté du plasma fournissent un flux de chaleur, tandis que les tubes réfrigérants réalisent plutôt une température uniforme. Nous avons développé dans un cadre simple des outils qui peuvent être maintenant utilisés pour simuler ces phénomènes.

Annexe A

ANNEXES

A.1 Résolution complète des couches parallèles

A.1.1 détermination des fonctions F_n

En remarquant que $F'_n = F'_n(0).F_{n-1}$, et $F_0 = erfc(\eta)$, il est aisé de calculer toute la famille de fonctions $\{F_n(\eta)\}$. En notant $\alpha_n = F'_n(0)$, P_n et Q_n deux polynômes, et A_n un scalaire, on montre par récurrence que

$$\begin{aligned} F_n(\eta) &= A_n.\left[P_n(\eta).\exp(-\eta^2) - \sqrt{\pi}.Q_n(\eta).\operatorname{erf}c(\eta)\right] \\ \alpha_{2n} &= -\frac{4^n n!^2}{(2n)!}.\frac{2}{\sqrt{\pi}}, \qquad A_{2n} = \frac{4^n n!}{(2n)!}.\frac{2}{\sqrt{\pi}}, \\ \alpha_{2n+1} &= -\frac{(2n+1)!}{4^n n!^2}.\sqrt{\pi}, \qquad A_{2n+1} = \frac{1}{n!}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

où les polynômes P_n et Q_n sont obtenus par une même relation de récurrence, avec différentes conditions initiales :

$$\begin{aligned} P_n(\eta) &= \frac{n-1}{2}P_{n-2}(\eta) - \eta.P_{n-1}(\eta), \qquad P_0 = 0, \qquad P_1 = +1, \\ Q_n(\eta) &= \frac{n-1}{2}Q_{n-2}(\eta) - \eta.Q_{n-1}(\eta), \qquad Q_0 = -1, \qquad Q_1 = \eta. \end{aligned} \tag{A.2}$$

La solution est

$$\begin{pmatrix} P_{2n+1}, Q_{2n+1} \\ P_{2n}\ , Q_{2n} \end{pmatrix} = T_n.T_{n-1}...T_1 \begin{pmatrix} 1, & \eta \\ 0, & -1 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

$$\text{avec} \qquad T_n = \begin{bmatrix} n+\eta^2 & -\left(\frac{n-1}{2}\right)\eta \\ -\eta & \left(\frac{n-1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

A.1.2 Un peu de mathématiques...

Les calculs du débit et du potentiel électrique nécessitent le calcul préliminaire des deux intégrales suivantes :

$$I_n(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} \frac{F_n(\eta')}{\eta'^{n+3}} d\eta', \qquad H_n(x,y) = \int_{1/2}^{y} y'^{\frac{n}{2}}.F_n(\eta^-(x,y')).dy' \tag{A.4}$$

Une intégration par parties donne la relation de récurrence

$$I_n(\eta) = \frac{F_n(\eta)}{(n+2)\eta^{n+2}} + \frac{\alpha_n}{n+2} I_{n-1}(\eta). \tag{A.5}$$

Avec les conventions $\prod_{j=n+1}^{j=n} = 1$, et $F_{-1} = \frac{F_0'(\eta)}{\alpha_0} = e^{-\eta^2}$, l'intégrale peut être exprimée par :

$$I_n(\eta) = \sum_{i=-1}^{i=n} \left[\frac{F_i(\eta)}{(i+2)\eta^{i+2}}. \prod_{j=i+1}^{j=n} \frac{\alpha_j}{j+2} \right] - \sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,c(\eta) \prod_{j=0}^{j=n} \frac{\alpha_j}{j+2} \tag{A.6}$$

Il s'ensuit

$$H_n(x,y) = 2\left(\frac{x}{\delta_0}\right)^{n+2}. \left[I_n(\eta^-_{(x,y)}) - I_n(\eta^-_{(x,\frac{1}{2})}) \right]. \tag{A.7}$$

A.1.3 Calculs du débit dans la couche parallèle

Le calcul du débit dans la couche parallèle proche de la paroi $x = 0$ doit commencer par la contribution élémentaire $D_n^s = \iint_{\substack{cross \\ section}} y^{\frac{n}{2}}.F_n(\eta^-).dx.dy = \iint_{\substack{cross \\ section}} (1-y)^{\frac{n}{2}}.F_n(\eta^+).dx.dy$. On intègre une première fois suivant x, en utilisant la relation $F_n(\eta) = \frac{F_{n+1}'(\eta)}{\alpha_{n+1}}$, puis suivant y :

$$D_n^s = -\frac{4}{(n+3)\,\alpha_{n+1}\sqrt{Ha}}. \left[1 - (n+3).\left(\frac{\sqrt{Ha}}{2}\right)^{n+3}.I_{n+1}\left(\frac{\sqrt{Ha}}{2}\right) \right], \tag{A.8}$$

Il est utile de donner un équivalent de D_n^s lorsque $Ha \to \infty$: après un changement de variable dans l'intégrale définissant la fonction $erfc$, puis quatre intégrations par parties,

$$\mathrm{erf}\,c(\eta) \underset{\eta \longrightarrow \infty}{=} \frac{1}{\eta.\sqrt{\pi}}.\exp(-\eta^2).\left(1 - \frac{1}{2\eta^2} + o\left(\frac{1}{\eta^2}\right)\right).$$

Les termes d'ordre dominant dans P_n et Q_n s'annulent dans F_n et en introduisant un coefficient non calculé B_n, on peut donner les équivalents suivants :

$$F_n(\eta) \underset{\eta\longrightarrow\infty}{\sim} B_n.\eta^{n-3}.\exp(-\eta^2), \qquad et \qquad I_n(\eta) \underset{\eta\longrightarrow\infty}{\sim} -\frac{\exp(-\eta^2)}{\eta}.\prod_{j=0}^{j=n}\frac{\alpha_j}{j+2}.$$

Il résulte que le terme comprenant $I_{n+1}(\sqrt{Ha})$ est négligeable dans D_n^s, qui admet alors un équivalent simple, que l'on exprime pleinement pour les premiers entiers n :

$$D_n^s \underset{Ha\longrightarrow\infty}{\sim} -\frac{1}{(n+3)\,\alpha_{n+1}\sqrt{Ha}}. \tag{A.9}$$

n	0	2	4	6
$\mathbf{D}_n^s$	$\frac{1}{3\sqrt{\pi Ha}}$	$\frac{2}{15\sqrt{\pi Ha}}$	$\frac{8}{105\sqrt{\pi Ha}}$	$\frac{16}{315\sqrt{\pi Ha}}$

On néglige la contribution au débit des couches limites de Hartmann, qui est Ha fois plus petite que la contribution de la région qui lui fait face (coeur ou couche limite parallèle). Finalement, le débit d'une couche parallèle (+ pour $x \sim 1$ et − pour $x \sim 0$) et le débit total sont :

$$D^s = \sum_{n\geqslant 0}\frac{E_n^+. + E_n^-}{2}.D_n^s, \qquad et \qquad D = D^c + D^{s+} + D^{s-}. \tag{A.10a}$$

A.1.4 Calcul du potentiel électrique

Le potentiel est donné par :

$$\Phi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{1/2}^{y} h.dY\right) - \int_{1/2}^{x}\left(V + \frac{\partial h}{\partial y}\right)_{(x',1/2)}.dx' \tag{A.11}$$

Son calcul dans les couches parallèles nécessite les définitions et résultats suivants :

$$\begin{aligned}
K_n^-(x,y) &\triangleq \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{1/2}^{y} y'^{\frac{n}{2}}.F_n(\eta^-).dy'\right) &&= \frac{\sqrt{Ha}}{2}.\alpha_n.H_{n-1}(x,y)\\
M_n^-(x) &\triangleq \int_{1/2}^{x}\left[y^{\frac{n}{2}}.F_n(\eta^-)\right]_{(x',1/2)}.dx' &&= \frac{\left[F_{n+1}(\eta^-)\right]_{\eta^-(1/2,1/2)}^{\eta^-(x,1/2)}}{\alpha_{n+1}2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{Ha}}\\
N_n^-(x) &\triangleq \int_{1/2}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^{\frac{n}{2}}.F_n(\eta^-)\right]_{(x',1/2)}.dx' &&= \frac{\left[(n+1)\frac{F_{n+1}(\eta^-)}{\alpha_{n+1}} - \eta^-.F_n(\eta^-)\right]_{\eta^-(1/2,1/2)}^{\eta^-(x,1/2)}}{\sqrt{Ha}.2^{\frac{n-1}{2}}}
\end{aligned}$$

et avec des définitions analogues pour ν^-, $K_n^+(x,y) = -K_n^-(x,1-y)$, $M_n^+(x) = M_n^-(x)$, $N_n^+(x) = -N_n^-(x)$. Nous sommes alors en mesure de donner le potentiel électrique :

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2Ha}\sum_{n\geqslant 0}\left\{\begin{array}{c}(E_n^+ + E_n^-).\left[N_n^-(x) - Ha.M_n^-(x)\right] \\ -\left[E_n^-.K_n^-(x,y) + E_n^+.K_n^-(x,1-y)\right]\end{array}\right\} \tag{A.12}$$

La vitesse suit les éventuelles symétries de la température par rapport à $y = 1/2$. Pour une température symétrique, on a $E_n^+ = E_n^-$, et pour une température anti-symétrique, $E_n^+ = -E_n^-$. L'expression du potentiel se simplifie en conséquence :

T y_symétrique :

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2Ha}\sum_{n\geqslant 0}E_n^+\left\{\begin{array}{c}2\left[N_n^-(x) - Ha.M_n^-(x)\right] \\ -\left[K_n^-(x,y) + K_n^-(x,1-y)\right]\end{array}\right\} \tag{A.13}$$

T y_anti-symétrique :

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2Ha}\sum_{n\geqslant 0}E_n^+\left(K_n^-(x,y) - K_n^-(x,1-y)\right) \tag{A.14}$$

Pour la couche parallèle $x \sim 1$, $K_n^\pm(x,y)$, $M_n^\pm(x)$, $N_n^\pm(x)$ doivent être respectivement remplacés par $-K_n^\pm(1-x,y)$, $-M_n^\pm(1-x)$, $-N_n^\pm(1-x)$ (attention au fait que les coefficients $E_n^\pm$ ont changé).

A.2 Ecoulement établi dans quelques cas simples

Dans chacun des cas présentés ci-dessus (chauffage nul ou uniforme, et flux de chaleur parallèle à $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$), les conditions (2.64) et (2.65) deviennent :

$$\begin{aligned} A(x) &= 0 \\ C(x) &= \int_{1/2}^{x} \left[-\frac{Ha}{2} \int_{0}^{1} \theta(x', y').dy' + \theta(x', 1/2) \right] .dx' + C^{\circ}. \left(x - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

La constante C° est à déterminer par le calcul du débit global. En cas de convection purement naturelle, elle est nulle pour les deux premiers profils de température. Les résolutions suivantes comprennent aussi le calcul des constantes d'Elssasser $\mathbf{E}_n^{\pm}$. Les graphiques représentent le cas d'une convection purement naturelle ($D = 0$).

A.2.1 Cas parallèle avec chauffage volumique

Flux de chaleur d'origine volumique, parallèle à B. Parois électriquement isolantes.

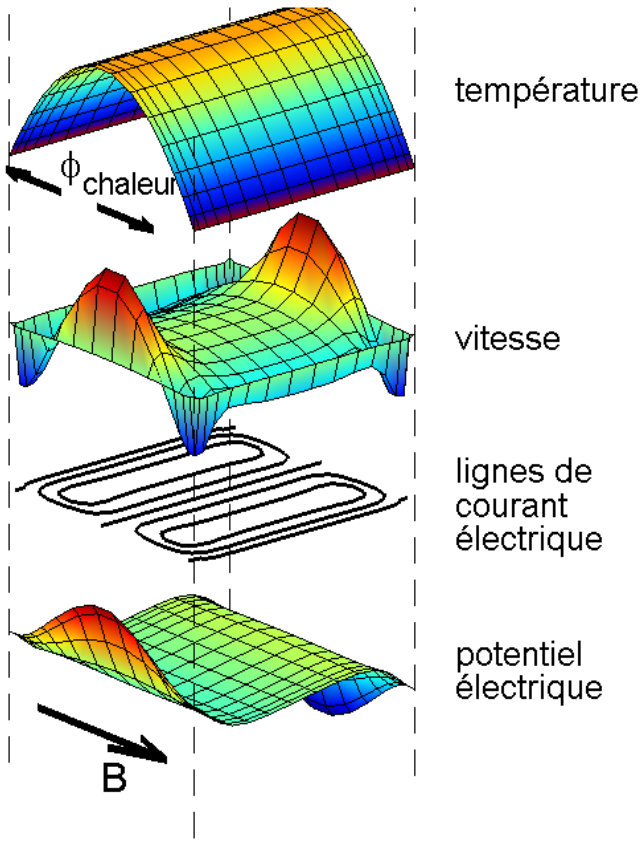


FIG. 1 Configuration parallèle avec une source volumique de chaleur - solution analytique du régime établi. configuration parallèle avec une source volumique de chaleur. De haut en bas, profil de température T(x,y) et de vitesse w(x,y) normalisés, lignes de courant électrique, potentiel électrique φ(x,y) normalisé.

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{1}{24} - \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \\
C(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{24} + C^\circ\right] \\
\varphi^\circ &= \frac{Gr}{Ha^2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{24} + C^\circ\right] \\
w^\circ &= \frac{Gr}{Ha^2}\left[-\frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - C^\circ\right] \\
h^\circ &= \frac{Gr}{Ha^2}\left(\frac{1}{2} - y\right)\frac{y(1-y)}{6}
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

	n/2	**0**	**1**	**2**	**3**
$\mathbf{x \sim 0,1}$	$\frac{Ha}{Gr}.\mathbf{E}_n^{\pm}$	$\frac{1}{8Ha} + \frac{C^\circ}{Ha}$	$\frac{1}{12} - \frac{1}{2Ha}$	$\frac{1}{2Ha} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

La symétrie de la température fait que contrairement au cas d'un chauffage pariétal, la contribution du jet au débit total est non nulle, et peut être supérieure à celle du coeur d'un facteur$\sqrt{Ha}$.

$$
D \simeq -\frac{Gr}{Ha^2}\left(\frac{1}{24} + C^\circ\right) + \frac{2}{3}\frac{Gr}{Ha\sqrt{\pi Ha}}\left(\frac{1}{630} + \frac{1}{Ha}\left(C^\circ + \frac{11}{280}\right)\right) \tag{A.16}
$$

A.2.2 Cas perpendiculaire avec chauffage volumique

Flux de chaleur d'origine volumique, perpendiculaire à B. Parois isolantes.

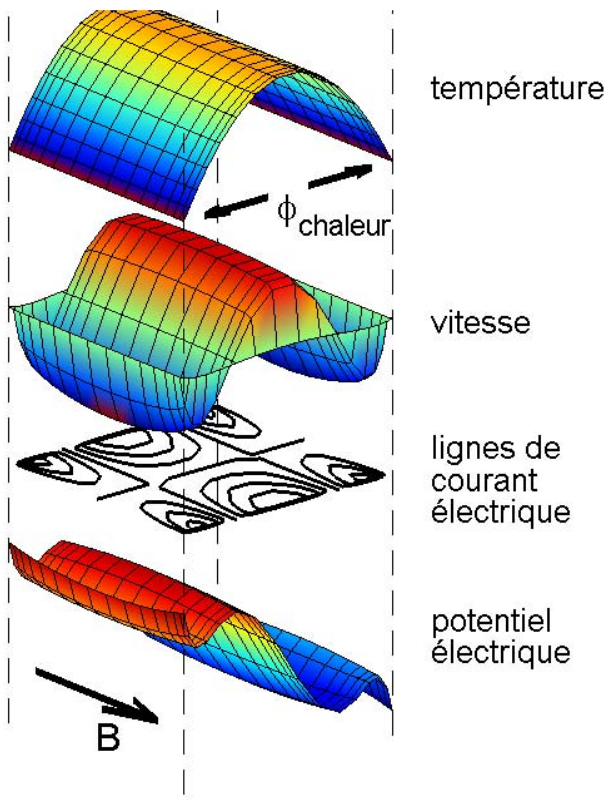


FIG. 2 Configuration perpendiculaire avec une source volumique de chaleur - solution analytique du régime établi. De haut en bas, profil de température T(x,y) et de vitesse w(x,y) normalisés, lignes de courant électrique, potentiel électrique φ(x,y) normalisé.

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{1}{24} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\
C(x) &= \left(\frac{Ha}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - x\right)\frac{x(1-x)}{6} + C^\circ.\left(x - \frac{1}{2}\right) \\
\varphi^\circ &= \frac{Gr}{Ha^2}.\left(\frac{1}{2} - x\right)\left[\left(\frac{Ha}{2} - 1\right)\frac{x(1-x)}{6} + \frac{y(1-y)}{2} - \frac{1}{8} + C^\circ\right] \\
w^\circ &= \frac{Gr}{Ha^2}\left[\frac{Ha}{2}.\theta + \frac{y(1-y)}{2} - \frac{1}{8} - C^\circ\right] \\
h^\circ &= \frac{Gr}{Ha^2}\left(\frac{1}{2} - y\right).\theta
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

	n/2	**0**	**1**	**2**
$\mathbf{x \sim 0,1}$	$\frac{Ha}{Gr}.\mathbf{E}_n^{\pm}$	$\frac{1}{Ha}\left(\frac{1}{8} + C^\circ\right)$	$\frac{1}{12} - \frac{1}{2Ha}$	$\frac{1}{2Ha}$

Le débit total est

$$
D = -\frac{Gr}{Ha^2}C^\circ + \frac{Gr}{Ha}\frac{2}{3\sqrt{\pi Ha}}\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{Ha}\left(C^\circ + \frac{11}{280}\right)\right) \tag{A.18}
$$

Pour mieux illustrer l'effet des couches de Hartmann, les deux résolutions suivantes d'une convection purement naturelle sous le profil de température $\theta = \frac{1}{2} - x$ tiennent compte d'une, ou des deux parois de Hartmann parfaitement conductrices.

A.2.3 Cas perpendiculaire avec chauffage pariétal et une paroi de Hartmann conductrice

La condition (2.44) devient à la paroi de Hartmann ($y = 1$) conductrice $\partial^2\varphi^\circ/\partial x^2 = 0$, ce qui donne en utilisant l'expression (2.55) du potentiel, et associée à (2.61), la solution suivante :

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{1}{2} - x \\
A(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{Ha} \\
C(x) &= C^\circ(x - 1/2) \\
w^\circ &= \frac{Gr}{Ha^2}\left[\theta - C^\circ\right] \\
h^\circ &= -\frac{Gr}{2Ha^2}.\left(\frac{1}{2} - x\right).\left(y - \frac{1}{Ha}\right)
\end{aligned} \tag{A.19}$$

On remarque que la vitesse de coeur a chuté d'un facteur Ha, par rapport au cas où les deux parois de Hartmann sont isolantes, laissant ressortir les jets dans les couches parallèles ('jets side layers'). Si la paroi isolante en $y = 0$ maintient la condition $\delta^-(0) = 0$, il en est tout différemment pour la paroi conductrice $y = 1$. Les solutions dans les couches parallèles doivent vérifier

$$0 = \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]_{y=1} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{w + \frac{\partial h}{\partial y}\right\}_{y=1}. \tag{A.20}$$

Si la contribution des termes en $(1-y)^{n/2}.F_n(\eta^+)$ à cette expression est nulle, celle de $y^{n/2}.F_n(\eta^-)$ ne l'est pas. On est donc amené à l'annuler en $y = 1$ par une autre décomposition de ν^+, faisant intervenir un terme en $(2-y)^{n/2}.F_n(\eta_2^+)$, où $\eta_2^+ = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{Ha}{2-y}}$, qui prend exactement la même valeur que le terme correspondant dans ν^+. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\nu^- &= \sum E_n^-.y^{n/2}.F_n(\eta^-) \\
\nu^+ &= \sum E_n^+.(1-y)^{n/2}.F_n(\eta^+) - \sum E_n^-.(2-y)^{n/2}.F_n(\eta_2^+)
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Les coefficients E_n^+, sont ajustés pour respecter $\nu^+ + \nu^{\circ+} = 0$ en $x = 0, 1$. Le calcul du potentiel doit être ajusté, mais l'antisymétrie dans la direction de x nous affranchit du calcul du débit (au moins en convection naturelle, où $C^\circ = 0$).

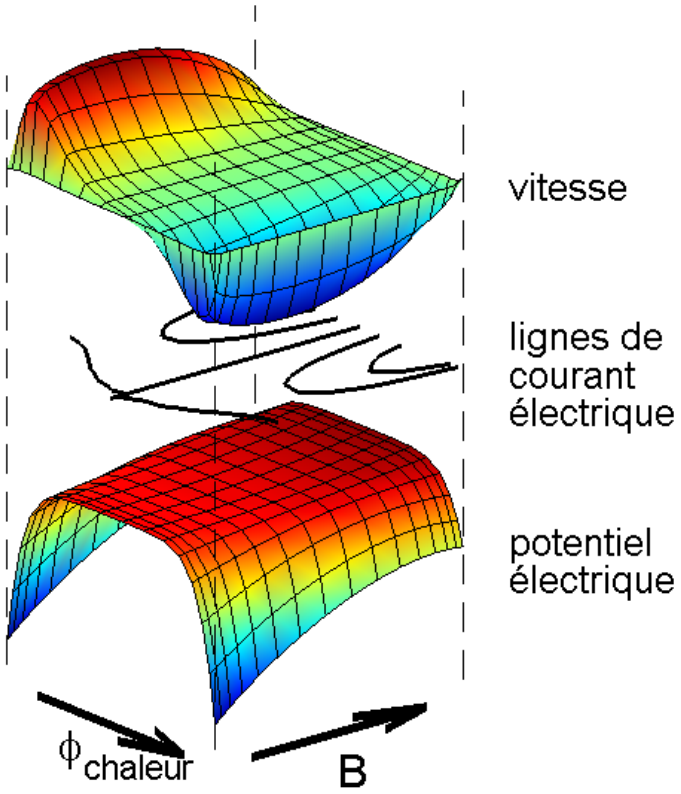


FIG. 3 Configuration perpendiculaire avec une paroi de Hartmann conductrice - solution analytique du régime établi. De haut en bas, profil de vitesse w(x,y) normalisé, lignes de courant électrique, potentiel électrique φ(x,y) normalisé.

A.2.4 Cas perpendiculaire avec chauffage pariétal et les deux parois de Hartmann conductrices

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} - x \\ \varphi^\circ &= \frac{Gr}{Ha^2}\left[-\frac{y(1-y)}{2} + \left(y - \frac{1}{2}\right).A(x) + C(x)\right] \end{aligned} \tag{A.22}$$

La condition imposée aux deux parois de Hartmann, conductrice, $\left[\frac{\partial^2 \varphi^\circ}{\partial x^2}\right]_{y=0,1} = 0$ donne $A"(x) = C"(x) = 0$. La nullité du débit et la symétrie concluent $A(x) = C(x) = 0$, soit

$$\begin{aligned} \varphi^\circ &= -\frac{Gr}{Ha^2}\frac{y(1-y)}{2} \\ w^\circ &= \frac{Gr}{Ha^2}\left(\frac{1}{2} - x\right) \\ h^\circ &= \frac{Gr}{Ha^2}\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right) \end{aligned} \tag{A.23}$$

La méthode de compensation utilisée au cas précédent n'est pas applicable. En remarquant que w° et h° varient en Gr/Ha^2 alors que les variables d'Elssasser, varient en Gr/Ha, on déduit que la contribution d'une couche limite parallèle à w et h est Ha fois plus petite aux parois de Hartmann que dans la couche parallèle. Ainsi les conditions imposées par les couches limites de Hartmann aux couches limites parallèles sont vérifiées à l'ordre Gr/Ha :

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right]_{y=0,1} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{w + \frac{\partial h}{\partial y}\right\}_{y=0,1} = \vartheta\left(\frac{Gr}{Ha^2}\right) \tag{A.24}$$

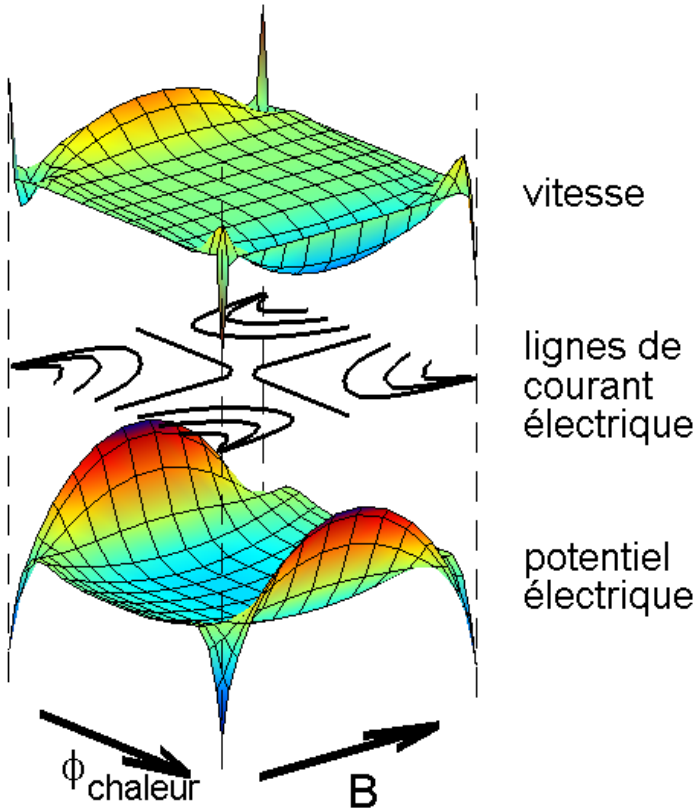


FIG. 4 Configuration perpendiculaire avec les deux parois de Hartmann conductrices - solution analytique du régime établi. De haut en bas, profil de vitesse w(x,y) normalisé, lignes de courant électrique, potentiel électrique φ(x,y) normalisé.

A.3 Recirculation dans la limite Pe<<1 et N>>1

A.3.1 Recirculation

Nous plaçons l'origine du repère en bas de la cavité, sur le plan de symétrie de façon à utiliser les notions de parité suivant x. Les coordonnées sont donc $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ et $z \in [0; H]$. On suppose que le champ de température est conductif, c'est-à-dire $T = -x$. On utilise la fonction de courant $\Psi(x, z)$ telle que les composantes de la vitesse soient $u = -\partial\Psi/\partial z$, $w = \partial\Psi/\partial x$ et la vorticité $\Omega = -\triangle\Psi$. Dans le coeur, la solution est

$$\frac{Ha}{Gr}\,\Psi^0 = \frac{\frac{1}{4} - x^2}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2.Ha}}\frac{ch(\sqrt{2.Ha}x) - ch(\sqrt{2.Ha}\frac{1}{2})}{sh(\sqrt{2.Ha}\frac{1}{2})}$$

On utilise la décomposition de Ψ^0 en séries de Fourier, soit avec la notation $N = (2n+1)\pi$,

$$\begin{aligned}
\Psi^0 &= \frac{Gr}{Ha}\sum_{n\geqslant 0} a_n \cos(Nx) \\
a_n &= \frac{2(-1)^n}{N}\left[\frac{1}{N^2} - \frac{\coth\left(\sqrt{\frac{Ha}{2}}\right)}{2\sqrt{2.Ha}}\frac{1}{1+\frac{N^2}{2Ha}}\right]
\end{aligned}$$

Notons que la prise en compte des couches limites parallèles verticales ne change que la valeur des coefficients de Fourier, qui seraient sans cela $b_n = \frac{2(-1)^n}{N^3}$. La différence relative est

$$\frac{b_n - a_n}{b_n} = \frac{\coth\left(\sqrt{\frac{Ha}{2}}\right)}{2\sqrt{2.Ha}}\frac{1}{\frac{1}{N^2} + \frac{1}{2Ha}} \underset{Ha\to\infty}{\sim} \frac{N^2}{2\sqrt{2.Ha}}$$

Quel que soit Ha, il existe un ordre N à partir duquel la différence des deux représentations se fera sentir, c'est à dire où la couche parallèle ne sera plus représentée avec les coefficients b_n. Cet ordre varie en $Ha^{1/4}$. L'équation du moment cinétique est

$$0 = \frac{\triangle\left(\Omega - \Omega^0\right)}{Ha} - 2\left(\Omega - \Omega^0\right), \tag{A.25}$$

à laquelle il faut joindre les conditions aux limites d'adhérence aux parois verticales. Le fluide est toujours sujet à une condition d'adhérence au fond de la cavité ($z = 0$),

mais il y a une possibilité de surface libre en $z = H$, cette coordonnée dénotant alors la hauteur du liquide, et non celle de la cavité. L'adhérence se traduit par l'imperméabilité et le non-glissement ($\Psi = 0$ et $\partial\Psi/\partial n = 0$) le long de la paroi, tandis que la surface libre se traduit par l'absence de friction ($\partial^2\Psi/\partial z^2 = 0$) et l'uniformité de la pression (la pression non réduite doit être égale à la pression atmosphérique). Nous ferons l'hypothèse que la surface libre est plane, remplaçant la condition sur la pression par une condition d'imperméabilité. En s'affranchissant du sens de la gravité par symétrie, on cherche une solution dans la zone de recirculation $z \sim 0$, sous la forme

$$\Psi - \Psi^0 = -\frac{Gr}{Ha}\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-k_n Z}\cos(Nx),$$

soit

$$\begin{aligned}
\Omega - \Omega^0 &= \frac{Gr}{Ha}\sum_{n\geqslant 0} a_n\left(k_n^2 - N^2\right)e^{-k_n Z}\cos(Nx),\\
\triangle\left(\Omega - \Omega^0\right) &= \frac{Gr}{Ha}\sum_{n\geqslant 0} a_n\left(k_n^2 - N^2\right)^2 e^{-k_n Z}\cos(Nx).
\end{aligned}$$

Chaque harmonique n donne dans l'équation du moment cinétique (4.2)

$$\frac{\left(k_n^2 - N^2\right)^2}{Ha} - 2\left(k_n^2 - N^2\right) = 0.$$

Les racines positives sont N et $k_n = \sqrt{N^2 + 2Ha}$. La fonction de courant est donc une fonction du type

$$\Psi_R = -\frac{Gr}{Ha}\sum_{n\geqslant 0} a_n\cos(Nx)\left[c_n e^{-k_n Z} - d_n e^{-NZ}\right],$$

Quelle que soit la condition considérée, l'imperméabilité impose ($c_n - d_n = 1$). En cas d'adhérence, le non-glissement impose $c_n k_n - d_n N = 0$, alors qu'en cas de surface libre, l'absence de friction impose $c_n k_n^2 - d_n N^2 = 0$, soit

$$\begin{aligned}
\text{adhérence} \quad &\Longrightarrow \quad c_n = \frac{-N}{k_n - N} \quad \text{et} \quad d_n = \frac{-k_n}{k_n - N},\\
\text{surface libre} \quad &\Longrightarrow \quad c_n = \frac{-N^2}{k_n^2 - N^2} \quad \text{et} \quad d_n = \frac{-k_n^2}{k_n^2 - N^2}.
\end{aligned}$$

Cette solution montre que l'épaisseur de la zone de recirculation est d'ordre 1. Elle introduit un glissement le long des parois $x = \pm 1/2$, qu'il faut compenser par une contribution supplémentaire des couches parallèles verticales,

$$\Psi_{R-SL} = \frac{Gr}{Ha}\left(\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n N\left[c_n e^{-k_n Z} - d_n e^{-NZ}\right]\right)\frac{ch(\sqrt{2.Ha}x) - ch(\sqrt{2.Ha}\frac{1}{2})}{\sqrt{2.Ha}sh(\sqrt{2.Ha}\frac{1}{2})}.$$

Le débit de cette contribution est identique pour les deux types de condition, adhérence ou surface libre, et doit être comparé au débit d'un demi-coeur, $D_R = \frac{1}{16}\frac{Gr}{Ha}$:

$$\begin{aligned}\frac{Ha}{Gr}D_{R-SL} &= [\Psi_{R-SL}(x,0)]_{-1/2}^{0} = \frac{\left[ch(\sqrt{2.Ha}x)\right]_{-1/2}^{0}}{\sqrt{2.Ha}sh(\sqrt{\frac{Ha}{2}})}\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n N \simeq \frac{\sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{N^2}}{\sqrt{2.Ha}sh(\sqrt{\frac{Ha}{2}})}\\ D_{R-SL} &\simeq \frac{Gr}{Ha^{3/2}}\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}} \simeq \sqrt{\frac{779}{Ha}}D_R\end{aligned}$$

L'effet de cette contribution, nettement visible lors du tracé des solutions, n'est donc pas négligeable. Bien évidemment, cette solution introduit, dans une moindre mesure, une violation de la condition à la limite $z = 0$. Nous verrons par la suite qu'elle modifie localement le transport de chaleur près des parois $x = \pm 1/2$, mais que le champ de température qui lui est associé n'est pas simplement calculable. Aussi, le nombre de Nusselt ne sera pas calculé à la paroi, mais au plan médian ($x = 0$).

Surface libre : vérification de l'hypothèse de planéité

Nous devons maintenant vérifier l'hypothèse de planéité faite dans le cas d'une surface libre. Les calculs ont été faits avec des conditions de glissement le long d'une paroi imperméable. Les variations de la pression le long de cette hypothétique paroi correspondent à la hauteur des vagues qui apparaissent si on enlève cette paroi. L'équation du mouvement donne ces variations :

$$Ha.\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\triangle u}{Ha} - Ha.j_Z.$$

Or $\vartheta(j_Z) = Ha^{-1}$, donc

$$\vartheta\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{1}{Ha},$$

ce qui correspond à une variation de hauteur beaucoup plus petite que la taille de la zone de recirculation :

$$O\left(\frac{\delta_{surface-libre}}{L}\right) = \beta.\triangle T << 1.$$

L'approximation faite est donc directement liée à l'approximation de Boussinesq.

A.3.2 Transport de chaleur

On développe les champs de vitesse et de température en fonction du nombre de Péclet, $Pe = \frac{\Pr Gr}{Ha}$, supposé petit :

$$\begin{aligned} T &= T_0 + Pe.T_1 + Pe^2.T_2 + ... + Pe^n.T_n + o(Pe^n) \\ V &= V_0 + Pe.V_1 + Pe^2.V_2 + ... + Pe^n.V_n + o(Pe^n) \end{aligned}$$

L'équation de la chaleur, $\Pr(\vec{V}.\vec{\nabla})T = \triangle T$, s'écrit aux ordres 1 et 2 en Pe :

$$\begin{aligned} \triangle T_1 &= \frac{Ha}{Gr}(\vec{V}_0.\vec{\nabla})T_0 \\ \triangle T_2 &= \frac{Ha}{Gr}\left\{(\vec{V}_0.\vec{\nabla})T_1 + (\vec{V}_1.\vec{\nabla})T_0\right\} \end{aligned}$$

Nous nous limitons ici à l'ordre 1, et nous associerons par linéarité une composante de la perturbation T_1 à chaque composante de la fonction de courant Ψ_0 :

$$\begin{aligned} \frac{Gr}{Ha}\triangle T_1 &= -u_0 = \frac{\partial \Psi_0^{core}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_0^{R}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_0^{R-SL}}{\partial z}, \\ \triangle T_1^{core} &= 0, \\ \triangle T_1^{R} &= \sum_{n\geqslant 0} a_n \cos(Nx)\left[c_n k_n e^{-k_n Z} - d_n N e^{-NZ}\right], \\ \triangle T_1^{R-SL} &= -\left(\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n N\left[c_n k_n e^{-k_n Z} - d_n N e^{-NZ}\right]\right) ... \\ &\qquad ... \times \frac{ch(\sqrt{2.Ha}x) - ch(\sqrt{2.Ha}\frac{1}{2})}{\sqrt{2.Ha}sh(\sqrt{2.Ha}\frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

En remarquant que $\triangle^{-1}\left[e^{-k_n Z}\cos(Nx)\right] = \left[\frac{1}{2Ha}e^{-k_n Z} + vect\left(e^{\pm NZ}\right)\right].\cos(Nx)$, que $\triangle^{-1}\left[e^{-NZ}\cos(Nx)\right] = \left[\frac{-z}{2N}e^{-NZ} + vect\left(e^{\pm NZ}\right)\right].\cos(Nx)$, on donne la forme de la solution pour la contribution principale :

$$T_1^R = \sum_{n\geqslant 0} a_n \cos(Nx)\left[\frac{c_n k_n}{2Ha}\, e^{-k_n Z} + \left(\frac{d_n}{2}\, z + e_n\right).e^{-NZ}\right]$$

La condition de flux nul en $z = 0$, $\partial T_1/\partial z = 0$ donne

$$e_n = \frac{1}{2N}\left(d_n - \frac{c_n k_n^2}{Ha}\right)$$

Le calcul de l'échange thermique se fait par la pente à la paroi, et est indépendant de la condition en $z = 0$, du moment qu'il y a imperméabilité :

$$-\int_{z=0}^{z=H}\left[\frac{\partial T_1^R}{\partial x}\right]_{x=-\frac{1}{2}} dz = \sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{(-1)^n}{N} = \frac{1}{48} - \frac{1}{16}\frac{\coth\left(\sqrt{\frac{Ha}{2}}\right)}{\sqrt{\frac{Ha}{2}}} + \frac{1}{8Ha}$$

Cette estimation de l'échange est artificiellement dopée par le glissement vertical introduit le long des parois parallèles. Il n'est pas possible d'apporter une correction en introduisant la contribution des couches parallèles verticales, puisque le calcul de T_1^{R-SL} ferait intervenir des constantes d'intégration en $\triangle^{-1}[0] = vect\left(\cos(Nx).e^{\pm NZ}\right)$, qui sont nulles en $x = \pm 1/2$, ne permettant pas de respecter les conditions de température uniforme.

La contribution T_1^R seule ne perturbe pas la condition de température uniforme, et on peut supposer que le glissement introduit aux parois isothermes n'a qu'un effet local sur le transport de chaleur. Les solutions obtenues représentent correctement les champs de vitesse et de température au plan médian $x = 0$, sur lequel nous pouvons alors calculer le flux de chaleur :

$$\Phi = \int_{z=0}^{z=H}\left[-\frac{\partial T}{\partial x} + Pe\,(uT)\right]_{x=0} dz \simeq H + \Pr Pe \int_{z=0}^{z=H}\left[u_0 T_1\right]_{x=0} dz$$

La difficulté réside évidemment dans le produit des deux séries.

$$\begin{aligned}
\Pr Pe\left[u_0 T_1\right]_{x=0} &= Pe^2\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n\left[-c_n k_n e^{-k_n Z} + d_n N_n e^{-N_n Z}\right]\right)\ldots \\
&\quad \ldots\times\left(\sum_{m\geqslant 0} a_m\left[\frac{c_m k_m}{2Ha}\,e^{-k_m Z} + \left(\frac{d_m}{2}\,z + e_m\right).e^{-N_m Z}\right]\right) \\
\Pr Pe\int_{z=0}^{z=H}\left[u_0 T_1\right]_{x=0} dz &= Pe^2\sum_{p\geqslant 0}\sum_{q=0}^{p} a_p a_q \left[\begin{array}{c} \frac{c_q k_q}{2Ha}\left(\frac{d_p N_p}{k_q+N_p} - \frac{c_p k_p}{k_p+k_q}\right) \\ -\frac{c_p k_p}{k_p+N_q}\left(\frac{d_q}{2(k_p+N_q)} + e_q\right) \\ +\frac{d_p N_p}{N_p+N_q}\left(\frac{d_q}{2(N_p+N_q)} + e_q\right)\end{array}\right]
\end{aligned}$$

Les résultats en cas d'adhérence et de surface libre sont très proches, et bien représentés sur toute la gamme du nombre de Hartmann (Ha>10) par les fonctions suivantes :

$$\text{adhérence} \quad : \quad \frac{\mathrm{Pr}}{Pe}\int_{z=0}^{z=H}\left[u_0T_1\right]_{x=0}dz = 10^{-3}\left(0.478 - 4.19.Ha^{-0.500} + 5.47.Ha^{-0.785}\right),$$

$$\text{glissement} \quad : \quad \frac{\mathrm{Pr}}{Pe}\int_{z=0}^{z=H}\left[u_0T_1\right]_{x=0}dz = 10^{-3}\left(0.477 - 7.01.Ha^{-0.569} + 8.09.Ha^{-0.747}\right).$$

Les erreurs commises en $Ha = 10, 100$, et 1000 sont respectivement de $10\%, 2\%$ et 0.5%. Les écarts entre les deux types de conditions en ces mêmes points sont de 25%, 11%, 4% et cet écart s'annule à l'infini. L'influence du choix de la condition à la limite est donc minime, et tient à l'existence d'une sous-couche visqueuse d'épaisseur $Ha^{-1/2}$: dans le cas d'une adhérence, le transport de chaleur est localement affecté par la diminution de la vitesse due à la friction. Nous pouvons maintenant associer les deux bouts de la cavité et donner une estimation du nombre de Nusselt. Dans le cas mixte d'une paroi adhérente et d'une surface mixte, les coefficients ont été ré-optimisés, et la corrélation donnée est juste à 20%, 2% et 0.2% à $Ha = 10, 100$, et 1000 :

$$\text{2 parois adhérentes} \quad : \quad Nu - 1 = \frac{Pe^2}{H}10^{-3}\left(0.956 - 8.38.Ha^{-0.500} + 10.9.Ha^{-0.785}\right)$$

$$\text{1 surface libre} \quad : \quad Nu - 1 = \frac{Pe^2}{H}10^{-3}\left(0.955 - 16.9.Ha^{-0.564} + 19.1.Ha^{-0.705}\right)$$

Les résultats exacts du produit de la série ont été reportés sur le graphique 2. Si $(Nu-1)H/Pe^2$ ne varie que d'un ordre de grandeur lorsque Ha passe de 10 à l'infini, on rappelle que dans ces conditions asymptotiques, c'est le terme en Pe^2 ($Pe = Ra/Ha$) qui impose les principales variations du flux de chaleur convecté.

Annexe B

BIBLIOGRAPHIE

1. Alboussière, T. *Magnétohydrodynamique et Ségrégation Solutale En Croissance Bridgman Horizontale*. PhD dissertation, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1994.
2. Alboussiere, T., et al. "Buoyancy-Driven Convection with a Uniform Magnetic Field. Part 1. Asymptotic Analysis," *J. Fluid Mech.*, *vol. 253* :545–563 (1993).
3. Alboussière, T., et al. "Asymptotic Analysis and Symetry in MHD Convection," *Phys. Fluids*, *vol. 8, No 8* :2215–2226 (August 1996).
4. Aleksandrova, S. *Buoyant Convection in Cavities in a Strong Magnetic Field*. PhD dissertation, School of Mathematical and Information Sciences, Coventry University, 2001.
5. Bühler, L. "Laminar Buoyant Magnetohydrodynamic Flow in Vertical Rectangular Ducts," *Physics of Fluids*, *vol. 10* :223–236 (Jan. 1998).
6. Busse, F. H. and R. M. Clever. "Stability of Convection Rolls in the Presence of a Vertical Magnetic Field," *Phys. Fluids*, *vol. 25* :931–935 (1982).
7. Cowley, M.D. "Natural Convection in Rectangular Enclosures of Arbitrary Orientation with Magnetic Field Vertical," *Magnetohydrodynamics*, *32* :390–398 (1996).
8. Davoust, L. *Convection Naturelle MHD Dans Une Cavité Horizontale Élancée*. PhD dissertation, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1992.
9. Elder, J. W. *J. Fluid Mech.*, *vol. 23* :77 (1965).
10. Fumizawa, M. "Natural Convection Experiment with Liquid NaK under Transverse Magnetic Field," *J. Nuclear Science Technology*, *vol. 17, nř2* :98–105 (1980).
11. Garandet, J. P., et al. "Buoyancy Driven Convection in a Rectangular Enclosure with a Transverse Magnetic Field," *Int. J. Heat Mass Transfer.*, *vol. 35* :741–748 (1992).

12. Gill, A. E. "The Boundary Layer Regime for Convection in a Rectangular Cavity," *J. Fluid Mech.*, *vol. 26, part 3* :515–536 (1966).

13. Hadid, H. Ben and D. Henry. "Numerical Study of Convection in the Horizontal Bridgman Configuration under the Action of a Constant Magnetic Field. I. Two-Dimensional Flow," *J. Fluid Mech.*, *vol. 333* :23–56 (1997).

14. Hadid, H. Ben and D. Henry. "Numerical Study of Convection in the Horizontal Bridgman Configuration under the Action of a Constant Magnetic Field. 2. Three-Dimensional Flow," *J. Fluid Mech.*, *vol. 333* :57–83 (1997).

15. Hirt, C.W., et al. *A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows*. Los Alamos Scientific Laboratory report, LA-5852, 1975.

16. Hunt, J. C. R. and G. S. S. Ludford. "Three-Dimensional MHD Duct Flows with Strong Transverse Magnetic Fields. Part 1. Obstacles in a Constant Area Channel," *J. Fluid Mech*, *vol. 33* :693–714 (1968).

17. Hunt, J. C. R. and J. A. Shercliff. "Magnetohydrodynamics at High Hartmann Number," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, *vol. 3* :37–62 (1971).

18. Hunt, J. C. R. and W. E. Williams. "Some Electrically Driven Flows in Magnetohydrodynamics. Part 1. Theory," *J. Fluid Mech.*, *vol. 31* :705–722 (1968).

19. Ma, N. and J. S. Walker. "A Model of Dopant Transport During Bridgman Crystal Growth with Magnetically Damped Buoyant Convection," *J. Heat Mass Transfer*, *vol. 122, No. 1* :159–64 (2000).

20. Ma, N. and J.S. Walker. "Buoyant Convection During the Growth of Compound Semiconductors by the Liquid-Encapsulated Czochralski Process With an Axial Magnetic Field and With a Non-Axisymmetric Temperature," *Journal of Fluids Engineering*, *vol. 118* :155–159 (March 1996).

21. Maclean, D. *Coupled Heat / Species Transfer and Buoyancy-Driven Magnetohydrodynamic Convection*. PhD dissertation, University of Cambridge, Department of Engineering, 2000.

22. Messadek, K. *Une Expérience sur la Turbulence M.H.D. Quasi-Bidimensionnelle*. PhD dissertation, INPG, spécialité génie des procédés, 2001.

23. Moreau, R. *Magnetohydrodynamics*. Kluwer Academic publishers, 1990.

24. Müller, U. and L. Bühler. *Magnetofluiddynamics in Channels and Containers*. 2001.

25. Ozoe, H. and K. Okada. "The Effect of the Direction of the External Magnetic Field on the Three-Dimensional Natural Convection in a Cubical Enclosure," *Int. J. Heat Mass Transfer*, *vol. 32* :1939–1954 (1989).
26. Pothérat, A. *Etude et Modèles Effectifs D'écoulements Quasi-2D*. PhD dissertation, INPG, spécialité Energétique Physique, 2000.
27. Potherat, A., et al. "Effective Boundary Conditions for Magnetohydrodynamic Flows with Thin Hartmann Layers," *Phys. Fluids* (2000).
28. Reed, C.B. and B. F. Picologlou *Fusion Tech. 15*. 705. 1989.
29. Roberts, P. H. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Elsevier, 1967.
30. Sellers, C. C. and J. S. Walker. "Liquid-Metal Flow in an Electrically Insulated Rectangular Duct with a Non-Uniform Magnetic Field," *International Journal of Engineering Science*, *vol. 37* :541–552 (1999).
31. Shercliff, J. A. "The Flow of Conducting Fluids in Circular Pipes under Transverse Magnetic Fields," *J. Fluid Mech.*, *vol. 1* :644–666 (1956).
32. Sommeria, J. and R. Moreau. "Why, How, and When, MHD Turbulence Becomes Two-Dimensional," *J. Fluid Mech.*, *vol. 118* :507–518 (1982).
33. Sterl, A. "Numerical Simulation of Liquid-Metal MHD Flows in Rectangular Ducts," *J. Fluid Mech.*, *216* :161–191 (1990).
34. Tagawa, T., et al. "Buoyant Flow in Long Vertical Enclosures in the Presence of a Strong Horizontal Magnetic Field. Part 1. Fully Established Flow.," *European Journal of Mechanics/B-Fluids* (2002).
35. Tagawa, T. and H. Ozoe. "Enhancement Heat of Heat Transfer Rate by Application of a Static Magnetic Field During Natural Convection of Liquid Metal in a Cube," *J. Heat Transfer*, *119 (2)* :265–271 (May 1997).
36. Ting, A., et al. "Liquid-Metal Flow in a Rectangular Duct with Thin Metal Walls and with a Non-Uniform Magnetic Field," *Int. J. Engng Sci*, *vol. 31, No. 3* :357–372 (Mar. 1993).
37. Ting, A. L., et al. "Linear Stability Analysis for High-Velocity Boundary Layers in Liquid-Metal Magnetohydrodynamic Flows," *Int. J. Engng Sci.*, *vol. 29* :939–948 (1991).
38. Walker, J. S. and G. S. S. Ludford. "Three-Dimensional MHD Duct Flows with Transverse Magnetic Fields. Part 4. Fully Insulated, Variable-Area Rectangular Ducts with Small Divergences," *J. Fluid Mech.*, *vol. 56, part 3* :481–496 (1972).

39. Walker, J. S., et al. "Three-Dimensional MHD Duct Flows with Transverse Magnetic Fields. Part 3. Variable-Area Rectangular Ducts with Insulating Walls," *J. Fluid Mech.*, *vol. 56, part 1* :121–141 (1972).

40. Walker, J. S. and B. F. Picologlou. "Liquid-Metal Flow in an Insulated Rectangular Expansion with a Strong Transverse Magnetic Field," *J. Fluid Mech.*, *vol. 305* :111–126 (1995).

41. Walker, J. S. and M. G. Williams. "Effects of the Crystal's Non Zero Electrical Conductivity on the Rotationally Driven Melt Motion During Czochralski Silicon Qrowth with a Uniform, Transverse Magnetic Field," *Journal of Crystal Growth*, *vol. 132* :31–42 (1993).