



HAL
open science

Modélisation numérique 3D des phénomènes couplés dans les procédés d'élaboration par induction : couplage faible et couplage fort

Peeteenut Triwong

► **To cite this version:**

Peeteenut Triwong. Modélisation numérique 3D des phénomènes couplés dans les procédés d'élaboration par induction : couplage faible et couplage fort. Electromagnétisme. INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 2008. Français. NNT : . tel-01338724

HAL Id: tel-01338724

<https://hal.science/tel-01338724>

Submitted on 29 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée au laboratoire SIMAP/EPM de l'Institut National Polytechnique de Grenoble. Je remercie Monsieur Yves FAUTRELLE et Monsieur Yves DU TERRAIL de m'avoir accueillie au sein du laboratoire.

J'exprime toute ma reconnaissance à Madame Annie GAGNOUD qui a dirigé ce travail en m'accordant toute sa confiance.

Je remercie tout particulièrement Monsieur François BAY et Monsieur Mouloud FELIACHI, qui ont accepté de participer à mon jury de thèse en tant que rapporteurs. Je remercie également à Monsieur Jean-Pierre BRANCHER qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse. Je remercie aussi Monsieur Jean Marc DEDULLE et Monsieur Gérard MEUNIER qui ont accepté de participer au jury de cette thèse.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au bon déroulement de cette thèse.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE 1	7
Phénomènes physiques couplés dans les systèmes inductifs	
1 Introduction.....	9
2 Principe d'un système inductif.....	9
3 Procédé d'élaboration par induction.....	10
4 Phénomènes physiques du procédé d'élaboration.....	12
4.1 Phénomène électromagnétique.....	14
4.1.1 Equations de Maxwell.....	14
4.1.2 Lois constitutives des milieux.....	15
4.1.3 Conditions entre deux milieux.....	15
4.1.4 Loi d'Ohm.....	16
4.1.5 Equation aux dérivées partielles.....	16
4.1.6 Densité de puissance Joule.....	16
4.1.7 Densité de force de Laplace.....	17
4.1.8 Epaisseur de peau électromagnétique.....	17
4.2 Phénomène thermique.....	18
4.3 Phénomène hydrodynamique.....	19
5 Termes de couplage.....	20
6 Conclusion.....	22
CHAPITRE 2.....	25
Démarche de modélisation dans procédés inductifs	
1 Introduction.....	27
2 Les méthodes numériques.....	28
2.1 Méthode des éléments finis.....	29
2.2 Méthode des intégrales de frontière.....	29
2.3 Méthode des volumes finis.....	29
2.4 Méthode intégrale.....	29

3 Choix des méthodes numériques pour la modélisation de systèmes inductifs.....	29
3.1 Choix de la méthode numérique pour le problème électromagnétique.....	29
3.2 Choix de la méthode numérique pour le problème thermique.....	31
4 Modèle électromagnétique.....	32
4.1 Les équations de la méthode intégrale.....	32
4.2 Discrétisation des équations de la méthode intégrale.....	33
4.2.1 Modélisation des régions en fine peau.....	33
4.2.2 Modélisation des régions en grande peau.....	35
4.2.3 Prise en compte de l'inducteur.....	35
4.2.4 Discrétisation des équations.....	36
5 Modèle thermique.....	38
5.1 Application de la méthode des résidus pondérés.....	38
5.1.1 Terme transitoire.....	38
5.1.2 Terme de diffusion.....	39
5.1.3 Equation de l'énergie totale.....	39
5.2 Interpolation de la température.....	39
6 Modèle couplé.....	41
6.1 Modélisation du couplage faible.....	41
6.1.1 Résolution du problème électromagnétique par MIGEN.....	41
6.1.2 Résolution du problème thermique par FLUX-EXPERT.....	42
6.1.3 Interpolations du couplage faible par MALICE3D.....	42
6.1.3.1 Les maillages des deux méthodes.....	42
6.1.3.2 Interpolation de la densité de source thermique.....	43
6.1.3.3 Interpolation de la conductivité électrique.....	47
6.1.4 Algorithmes couplés de MALICE3D.....	48
6.2 Modélisation du couplage fort.....	57
6.2.1 Principe du couplage fort de MIGEF.....	58
6.2.2 Interpolations du couplage fort.....	59
6.2.2.1 Interpolation de la densité de source thermique.....	60
6.2.2.2 Interpolation de la conductivité électrique.....	61
6.2.3 Algorithme couplé de MIGEF.....	62

6.2.4 Développement du logiciel MIGEF.....	64
7 Conclusion.....	68
CHAPITRE 3.....	69
Validation et exploitation du couplage faible MALICE3D	
1 Introduction.....	71
2 Processus d'une modélisation couplée de MALICE3D.....	71
2.1 Préparation des données pour le couplage.....	71
2.1.1 Préparation des données de MIGEN.....	71
2.1.2 Préparation des données de FLUX-EXPERT.....	72
2.2 Résolution du modèle couplé par MALICE3D.....	73
2.3 Exploitation des résultats obtenus par MALICE3D.....	73
2.4 Equations thermiques du modèle couplé.....	73
2.4.1 THERS3D.....	73
2.4.2 THERT3D.....	74
3 Validation du logiciel MALICE3D.....	74
3.1 Test de l'interpolation de la méthode intégrale vers la méthode des éléments finis.....	74
3.1.1 Cas de la fine épaisseur de peau.....	74
3.1.2 Cas de la grande épaisseur de peau.....	83
3.2 Test de l'interpolation de la méthode des éléments finis vers la méthode intégrales.....	87
3.2.1 Cas de la fine épaisseur de peau.....	88
3.2.2 Cas de la grande épaisseur de peau.....	91
3.3 Test de l'algorithme transitoire dans le cas de propriétés physique constantes.....	98
3.4 Evolution de la température pour les propriétés physiques variant en fonction de la température.....	100
4 Exploitation du logiciel MALICE3D.....	101
5 Synthèse.....	104

CHAPITRE 4	105
Validation du Couplage fort	
1 Introduction	107
2 Processus de mise en oeuvre du logiciel MIGEF	107
2.1 Description d'un problème.....	107
2.1.1 Description de la géométrie de l'installation.....	107
2.1.2 Choix des paramètres du maillage.....	108
2.1.3 Définition des propriétés physiques.....	108
2.1.4 Définition des régions.....	108
2.1.5 Définition des conditions aux limites.....	109
2.1.6 Définition du modèle de couplage.....	109
2.1.7 Définition de l'algorithme de résolution.....	109
2.2 Résolution du problème.....	110
3 Validation du couplage fort	111
3.1 Validation de la modélisation de la source thermique.....	111
3.1.1 Cas de la fine épaisseur de peau.....	111
3.1.2 Cas de la grande épaisseur de peau.....	114
3.2 Validation de l'algorithme de couplage fort non linéaire.....	116
3.2.1 Cas de la fine épaisseur de peau.....	116
3.2.2 Cas de la grande épaisseur de peau.....	118
4 Conclusion	120
CHAPITRE 5	121
Modélisation numérique 3D de problèmes magnéto thermiques	
1 Introduction	123
2 Procédé d'élaboration par induction sans le creuset froid	123
2.1 Résultats du problème électromagnétique.....	124
2.2 Résultats du problème thermique.....	124
3 Procédé d'élaboration par induction avec le creuset froid	127
4 Conclusion	132
4.1 MALICE3D.....	132

4.2 MIGEF.....	133
CONCLUSION.....	135
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	141
ANNEXES.....	147
ANNEXE 1 Formulaire analyse vectorielle.....	149
ANNEXE 2 Epaisseur de peau électromagnétique.....	150
ANNEXE 3 Formulation en éléments fins de l'équation thermique en régime permanent cas linéaire.....	151
ANNEXE 4 Formulation en éléments fins de l'équation thermique en régime transitoire cas linéaire.....	154
ANNEXE 5 Formulation en éléments fins de l'équation thermique en régime permanent cas non linéaire.....	155
ANNEXE 6 Formulation des éléments fins de l'équation thermique en régime transitoire cas non linéaire.....	157
ANNEXE 7 Dérivation partielle de l'équation thermique.....	158
NOMENCLATURE.....	161

Introduction générale

Dans l'industrie, l'induction est une technique usuelle, aux applications très variées. Le principe de l'induction est basé sur le fait que tout conducteur placé dans un champ magnétique variable est le siège de courants de Foucault. Ainsi, des courants induits se développent dans tout matériau conducteur d'électricité placé dans un inducteur parcouru par un courant alternatif. La présence de courant dans le matériau a deux effets. La puissance Joule dissipée dans le matériau permet de le chauffer sans contact direct avec une source d'énergie électrique. L'interaction des courants induits avec le champ magnétique est à l'origine des forces de Laplace. Ainsi, lorsque le matériau est liquide on peut le déformer et l'homogénéiser par brassage électromagnétique. Depuis de nombreuses années cette technique est largement utilisée dans la métallurgie pour l'élaboration, la transformation et le traitement des métaux. Compte tenu des progrès de l'électronique l'induction est maintenant appliquée dans d'autres domaines tels que la chimie, l'agroalimentaire, le culinaire, le séchage, le retraitement des déchets. L'utilisation de hautes fréquences permet l'application de cette technique à des matériaux non métalliques tels que les semi-conducteurs, les oxydes, les plasmas (*Develey Tech. Ing.*). L'induction présente de nombreux avantages comparée aux techniques classiques de chauffage :

- le choix de la zone de chauffage. La position, la forme de l'inducteur et la fréquence sont des paramètres qui permettent d'adapter la source de chaleur à l'application désirée. On peut disposer d'une zone de chauffage large ou localisée (traitement thermique),
- le chauffage de parties inaccessibles, par exemple des morceaux métalliques encastrés dans un isolant (bois, PVC),
- de meilleures conditions de travail notamment en terme de propreté, pas de fumées contrairement aux installations traditionnelles de chauffage.

Les inconvénients du procédé d'élaboration par induction sont :

- d'autres objets peuvent être involontairement chauffés (enceinte). Pour y remédier, on utilise le procédé le refroidissement par eau,
- des coûts d'acquisition élevés pour les fortes puissances,
- des champs électromagnétiques peuvent perturber l'environnement lorsque les isolation sont mauvaises.

Au sein du laboratoire SIMAP, le groupe EPM étudie et conçoit des installations d'élaboration de matériaux sous champ magnétique. La plage des fréquences des champ magnétiques alternatifs utilisés est très large, elle s'étend de quelques Hz au Mhz (plasma inductif). Les matériaux élaborés peuvent être des métaux, des semi-conducteurs (photovoltaïque) ou des oxydes (retraitement de déchets). L'étude et l'optimisation de telles installations est complexe. En effet, dans les installations d'élaboration par induction trois phénomènes physiques interviennent systématiquement : le phénomène électromagnétique, le phénomène thermique et le phénomène hydrodynamique. Les interactions entre les phénomènes physiques sont pilotés par les termes sources (densité de puissance Joule, densité de forces électromagnétique), les propriétés physiques dépendant de la température, la vitesse dans le liquide et les interfaces libres. Suivant la nature des matériaux mis en œuvre et le domaine de fréquence utilisé ces interactions sont plus ou moins fortes. De plus les géométries de ces installations sont souvent tridimensionnelles.

Pour atteindre ces objectifs, il faut être capable de connaître l'influence des divers paramètres. Ainsi, la modélisation numérique de procédés d'élaboration par induction est un outil particulièrement performant pour optimiser et acquérir une bonne maîtrise du procédé. Cependant celui-ci doit permettre une modélisation numérique d'un large spectre de problèmes. Pour mener à bien ces travaux de modélisation numérique le groupe EPM s'appuie sur plusieurs méthodes numériques : la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis et la méthode intégrale. La démarche utilisée depuis une quinzaine d'années est le couplage "faible" de méthodes numériques, en choisissant pour chaque phénomène physique la méthode la mieux adaptée. Ainsi, dans les années antérieures ont été développés et exploités plusieurs couplages pour des configurations 2D axisymétriques. L'objectif actuel est de développer des couplages pour les configurations 3D. Compte tenu des avancées du matériel informatique ces modélisations 3D sont maintenant envisageables. Certains travaux ont déjà été menés, répondants à une demande spécifique : modélisation de la coulée continue (*Dumont 2000*), d'un procédé de vitrification de déchets radioactifs (*Jacoutot 2006*).

Durant cette thèse, nous avons travaillé sur la modélisation numérique 3D des phénomènes couplés dans les procédés d'élaboration par induction en régime permanent ou transitoire. Nous avons choisi de travailler sur le couplage de deux méthodes numériques : la méthode intégrale pour l'électromagnétisme et la méthode des éléments finis pour la thermique et l'hydrodynamique. Notre objectif était double :

- d'une part nous souhaitions disposer d'un logiciel 3D permettant de modéliser des installations d'élaboration par induction en prenant en compte les principaux phénomènes intervenants dans ce type de configuration. Nous voulions que ce logiciel puisse répondre à un large spectre d'applications (gamme de fréquence large et divers type de matériaux). Dans ce contexte nous avons développé une bibliothèque d'algorithmes de couplage faible entre deux logiciels : MIGEN (logiciel électromagnétique 3D dédié aux systèmes inductifs) et FLUX-EXPERT (logiciel éléments finis général disposant d'un générateur d'équations). Le logiciel ainsi développé est dénommé MALICE3D.
- d'autre part nous souhaitions étudier et analyser la modélisation des interactions entre les phénomènes physiques. Aussi nous avons abordé la modélisation du couplage fort entre deux méthodes numériques : la méthode intégrale pour l'électromagnétisme et la méthode des éléments finis pour la thermique. Il s'agit de résoudre simultanément les deux phénomènes physiques, afin de prendre en compte les couplages forts. Un prototype, MIGEF a été développé et évalué.

Dans la première partie de cette thèse les phénomènes physiques et les interactions entre ces phénomènes intervenant dans les systèmes inductifs sont présentés. Une description de principe d'un système inductif est présenté. Ensuite, la configuration en creuset froid est choisie pour expliciter les phénomènes physiques : le phénomène électromagnétique issu des équations de Maxwell et des lois des milieux, l'équation de transfert thermique, le phénomène hydrodynamique décrit par l'équation de Navier-Stoke et l'équation de continuité. Les termes d'interaction entre phénomènes sont mis en évidence : termes sources, propriétés physiques, vitesse. Les facteurs importants et influents pour les termes de couplage sont mis en évidence : tels que l'épaisseur de peau , le comportement du matériau en fonction de la température.

La deuxième partie concerne la description des formulations numériques en 3D des

phénomènes physiques. Dans cette présentation nous avons considéré seulement les phénomènes électromagnétique et de thermique. Nous décrivons les formulations numériques du modèle électromagnétique par la méthode intégrale et du modèle thermique par la méthode des éléments finis. Nous présentons aussi le principe des deux couplages : couplage faible MALICE3D et couplage fort MIGEF . Le logiciel MALICE3D couplage faible entre la méthode intégrale de MIGEN et la méthode des éléments finis de FLUX-EXPERT est présenté en détail. L'interpolation des grandeurs de couplage entre l'électromagnétisme et la thermique est décrite dans les cas de fine épaisseur de peau et de grande épaisseur de peau. Nous présentons les principaux algorithmes de couplage développés pour MALICE3D . Ensuite le développement du nouveau logiciel MIGEF est présenté. Un développement au sein du logiciel MIGEN a permis d'introduire la description du phénomène thermique. On constitue un seul système linéaire : on parle alors de couplage fort. MIGEF permet de résoudre le problème électromagnétique-thermique dans les cas de fine épaisseur de peau et de grande épaisseur de peau.

Dans la troisième partie le logiciel MALICE3D est testé. Nous validons les interpolations des termes de couplage et les algorithmes de couplage linéaire et non linéaire sur une configuration simple en régime permanent ou transitoire dans les cas de fine peau électromagnétique et de grande peau électromagnétique. Dans cette présentation nous avons considéré seulement les phénomènes couplés électromagnétique-thermique, cependant une modélisation plus complète est possible en insérant la formulation hydrodynamique à l'aide du générateur d'équation de FLUX-EXPERT.

La quatrième partie concerne la validation du logiciel MIGEF. Les premiers tests effectués permettent de valider les interpolations des termes de couplage dans les cas de fine épaisseur de peau et de grande épaisseur de peau. L'algorithme non linéaire est testé sur une configuration simple en régime permanent.

La cinquième partie est consacrée à la modélisation numérique 3D de configurations plus complexes. L'objectif de cette partie est double. Tout d'abord nous avons confronté les résultats obtenus par les deux logiciels. Nous avons aussi voulu montrer les possibilités des logiciels développés. Nous avons abordé le cas de deux configurations : un procédé d'élaboration par induction sans le creuset froid et un procédé d'élaboration par induction avec le creuset froid. Les modélisations magnéto-thermiques sont conduites dans le cas du régime permanent.

En conclusion nous présentons les avantages et les inconvénients de chacun des logiciels développés. Le logiciel MALICE3D a un large spectre d'applications et peut être mis en œuvre pour des faibles et fortes variations de propriétés physiques. Il permet de modéliser des problèmes en régime permanent, en régime transitoire. Il est possible de modéliser un problème magnéto-thermo-hydraulique car le logiciel FLUX-EXPERT dispose d'un générateur d'équations. Le logiciel MIGEF est adapté à la modélisation de fortes interactions entre les phénomènes, la convergence est plus rapide qu'avec MALICE3D. Par contre la taille des problèmes que l'on peut modéliser est plus limitée.

CHAPITRE 1

Phénomènes physiques couplés dans les systèmes inductifs

1 Introduction

Le système inductif fait partie des techniques de l'électrothermie qui permettent de chauffer un matériau sans contact direct avec une source d'énergie électrique. Il consiste à plonger le corps à chauffer dans un champ électromagnétique variable dans le temps par une bobine entourant tout ou une partie du corps et à dissiper sous forme de chaleur l'énergie entrant dans le corps. Il se distingue cependant nettement des autres techniques par la nature des matériaux chauffés et par la bande de fréquence électrique utilisée. Il ne s'applique qu'aux matériaux conducteurs de l'électricité. La conductivité électrique de matériau varie entre $10(\Omega.m)^{-1}$ (verres fondus) et $10^8(\Omega.m)^{-1}$ (cuivre). La bande de fréquence est comprise entre $50kHz$ et quelques MHz . Les épaisseurs de peau s'étagent entre quelques μm et quelques cm . La densité de puissance surfacique peut atteindre $10^5 kW/m^2$ (*Develey Tech. Ing. : principes*). Dans un système inductif la résolution du phénomène électromagnétique permet d'optimiser le transfert de puissance entre la source (inducteur) et le matériau, la résolution du phénomène thermique permet de connaître le champ de température et son évolution dans le temps (*Favennec 2003*). La puissance nécessaire au traitement thermique est imposée par le matériau à chauffer, la température à atteindre et le temps de chauffe. Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord le principe d'un procédé d'élaboration par induction, puis nous analysons les phénomènes physiques et les termes d'interaction entre ces phénomènes.

2 Principe d' un système inductif

Le principe de l'induction a été découvert en 1831 par Faraday. Au cours des siècles, ce procédé s'est largement imposé dans le domaine industriel. Une installation utilisant le principe de l'induction est constituée de trois principaux éléments (Figure 1.1) :

- Un convertisseur ou générateur branché sur le réseau électrique ($50 Hz$). Il permet de délivrer une puissance électrique à une fréquence différente de celle du réseau,
- Un coffret d'adaptation d'impédance comprenant un transformateur et des condensateurs réglables. Il permet l'ajustement de la tension et de la fréquence suivant l'impédance de l'ensemble inducteur charge,
- Un inducteur alimenté par un courant alternatif sinusoïdal. Il crée un champ électromagnétique agissant sur la charge. La charge est alors le siège de courants induits. Elle est directement chauffée par la puissance Joule. Il s'agit d'un mode de chauffage sans contact. De plus l'interaction entre les courants induits et le champ magnétique est à l'origine de la force électromagnétique. L'induction permet aussi d'agir mécaniquement sur une charge à distance.

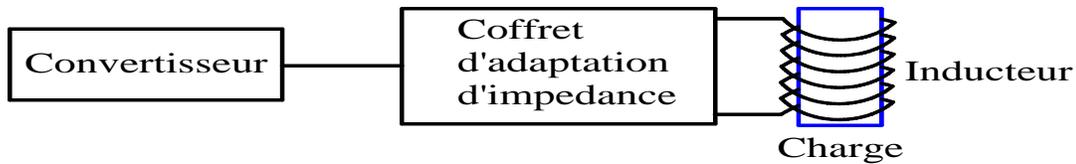


Figure 1.1 Schéma général d'une installation utilisant le principe de l'induction.

Quelques ordres de grandeur sur le système inductif permettent de mieux cerner ses spécificités. On peut les caractériser par la puissance surfacique P_s . Le choix de la fréquence dépend fortement du matériau à traiter. Nous présentons ici trois modes des systèmes inductifs :

– **Le chauffage pénétrant :**

- Fréquence : de 1 à 50kHz pour les métaux et de 0,1 à 4MHz pour les semi conducteurs
- Puissance surfacique : $10^2 \text{ kW/m}^2 < P_s < 10^3 \text{ kW/m}^2$
- Exemples d'applications : forge, fusion.

– **Le chauffage superficiel :**

- Fréquence : de 10 à 500kHz pour les métaux
- Puissance surfacique : $5 \cdot 10^3 \text{ kW/m}^2 < P_s < 5 \cdot 10^4 \text{ kW/m}^2$
- Exemples d'applications : trempe superficielle, brassage.

– **Le chauffage pelliculaire :**

- Fréquence : de 10 à 1000kHz pour les métaux
- Puissance surfacique : $P_s < 10^5 \text{ kW/m}^2$
- Exemples d'applications : soudages de tubes, thermo scellage.

3 Procédé d'élaboration par induction

Dans l'industrie, le procédé d'élaboration par induction est devenu une technique usuelle aux applications très variées. Il est appliqué à de nombreux matériaux : métaux, semi conducteurs et oxydes. A partir de 1980, les travaux menés au laboratoire MADYLAM ont permis de progresser dans la connaissance des procédés d'élaboration par induction. L'objectif recherché alors, était l'optimisation du rendement énergétique de ces installations de fusion. Dans ce cadre, nous nous intéressons plus particulièrement aux procédés d'élaboration par induction à la haute fréquence ($\approx 10^4 - 10^6 \text{ Hz}$) utilisés pour la fusion des matériaux. On distingue deux techniques d'élaboration de matériau par induction.

La technique classique de fusion par induction dite technique du “creuset chaud” (Figure 1.2) consiste à induire des courants dans un creuset conducteur d’électricité (métal, graphite) en plaçant celui-ci dans un inducteur parcouru par un courant alternatif sinusoïdal. Le creuset est ainsi directement chauffé par la puissance Joule. L’énergie thermique est transmise au matériau contenu dans le creuset par contact et rayonnement. Dans une telle situation le creuset et la charge sont à la même température. Des échanges physico-chimiques s’établissent entre le creuset et la charge.

Il en résulte un certain nombre d’inconvénients :

- La pollution du matériau par le creuset,
- L’usure du creuset,
- La limitation en température à la température de fusion du creuset.

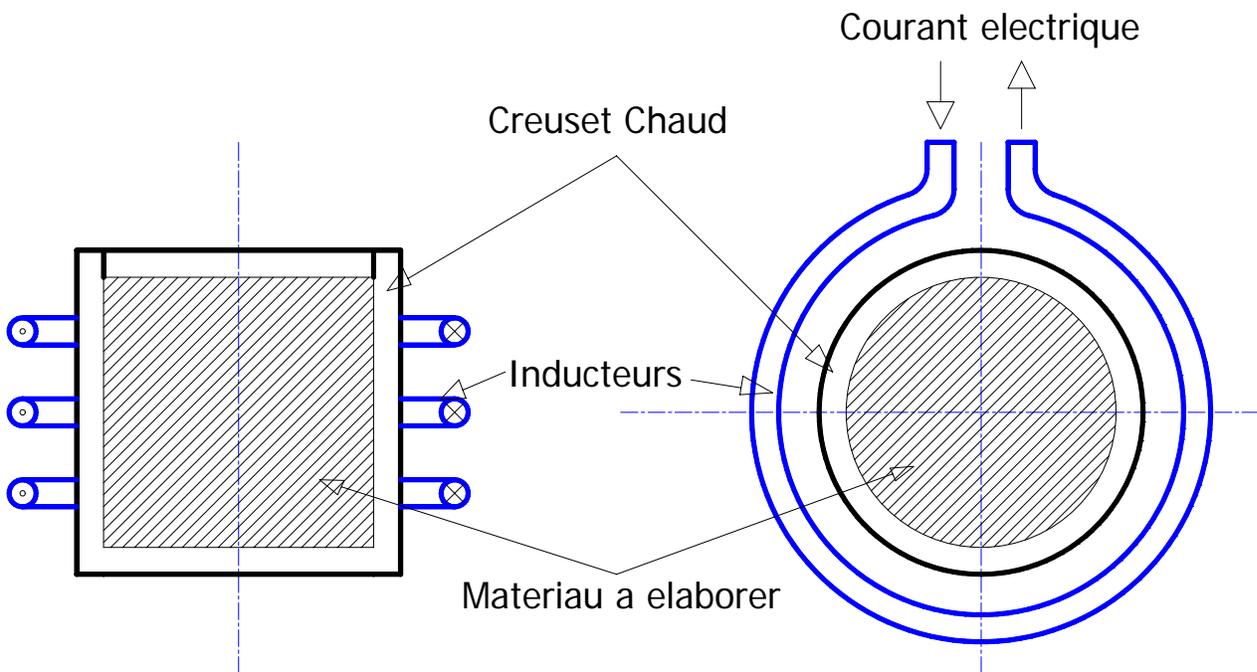


Figure 1.2 Principe d'un four à induction en creuset chaud.

Face à cette technique classique, le “creuset froid” (Figure 1.3) se présente comme une solution aux problèmes rencontrés dans le creuset chaud. En effet, dans ce cas, le creuset est en cuivre, refroidi par une circulation d’eau interne et sectorisé. Ainsi placé dans un inducteur parcouru par un courant alternatif sinusoïdal, le creuset est le siège de courants induits qui circulent autour de chaque secteur. Grâce à la sectorisation du creuset, le champ magnétique n’est pas nul à l’intérieur du creuset. Le matériau, conducteur d’électricité, placé dans le creuset est lui aussi parcouru par des courants induits et donc chauffé par effet Joule. Le matériau fondu, au contact de la paroi froide du creuset, se solidifie. Sont ainsi évités tous les problèmes de pollution du matériau, d’usure du creuset et de limitation en température. Un inconvénient apparaît toutefois dans cette technique : le médiocre rendement électrique de l’installation (rapport de la puissance Joule injectée dans la charge sur la puissance fournie par le générateur). Ainsi cette

technique très prometteuse, qui présente des avantages évidents est à réserver à des applications particulières comme les matériaux à haute valeur ajoutée.

Deux applications différentes de cette technique existent :

- Un procédé continu dans lequel on utilise un creuset de forme cylindrique (ou creuset droit) pour refondre un métal ou un alliage,
- Un procédé discontinu d'élaboration d'alliage ou de matériau utilisant un creuset à fond sectorisé (ou creuset de lévitation).

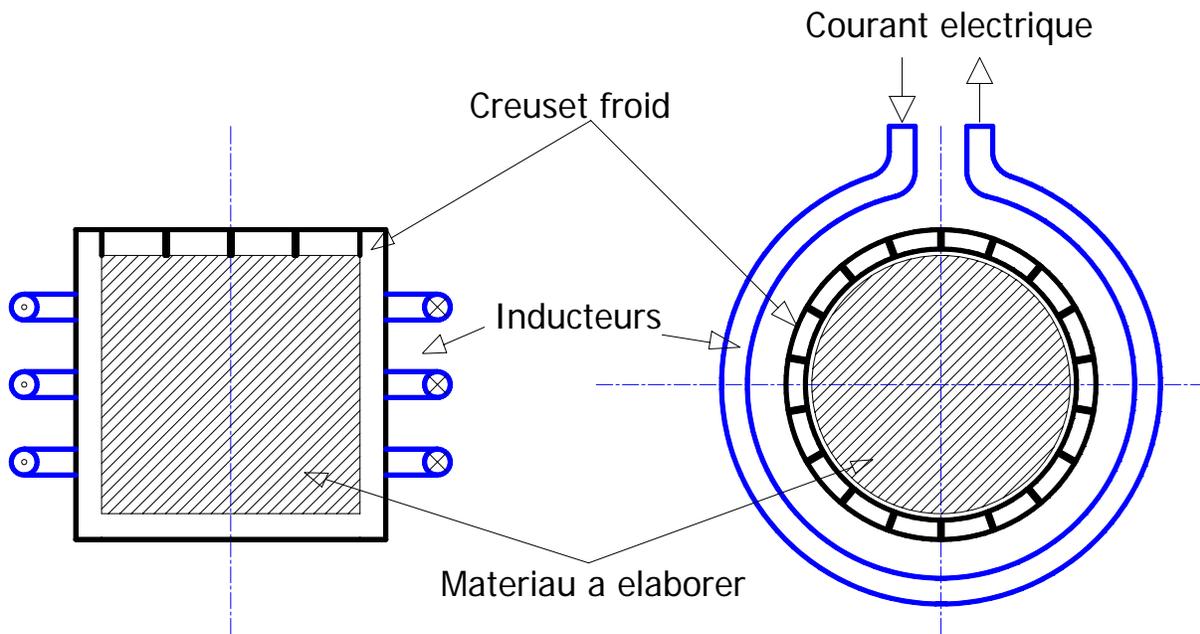


Figure 1.3 Principe d'un four à induction en creuset froid.

4 Phénomènes physiques du procédé d'élaboration

Pour l'élaboration des métaux, le principal procédé étudié est celui du tirage en continu (Gagnoud 1991). Les mécanismes d'interactions entre les divers phénomènes physiques sont complexes. Les courants induits, qui sont créés dans la charge métallique, sont à la source de deux effets :

- Un effet thermique dû à la densité de puissance Joule qui se développe dans le matériau. Celui-ci chauffe et fond. La présence des parois froides du creuset entraîne une solidification du métal au contact de celles-ci. Un équilibre thermique s'établit : un front de solidification apparaît.
- Un effet hydrodynamique dû à la densité des forces de Laplace. Ces forces se décomposent en deux termes :
 - La partie irrotationnelle des forces de Laplace, ce terme est prépondérant lorsque

l'épaisseur de peau électromagnétique est faible,

- La partie rotationnelle des forces de Laplace, ce terme est faible et localisé dans une faible épaisseur de peau. Celui-ci est à l'origine d'un écoulement turbulent dans le bain liquide.

Le domaine liquide est délimité par deux frontières libres :

- Le front de solidification issu du couplage électromagnétique-thermique,
- La surface du liquide issu du couplage électromagnétique-hydrodynamique.

La forme de ce domaine influe sur les trois phénomènes électromagnétique, thermique et hydrodynamique. Trois phénomènes physiques distincts interviennent dans le fonctionnement d'un procédé d'élaboration par induction (Figure 1.4) :

- Le phénomène électromagnétique, qui concerne toute l'installation,
- Le phénomène thermique, qui concerne le lingot,
- Le phénomène hydrodynamique, qui concerne la zone liquide du lingot.

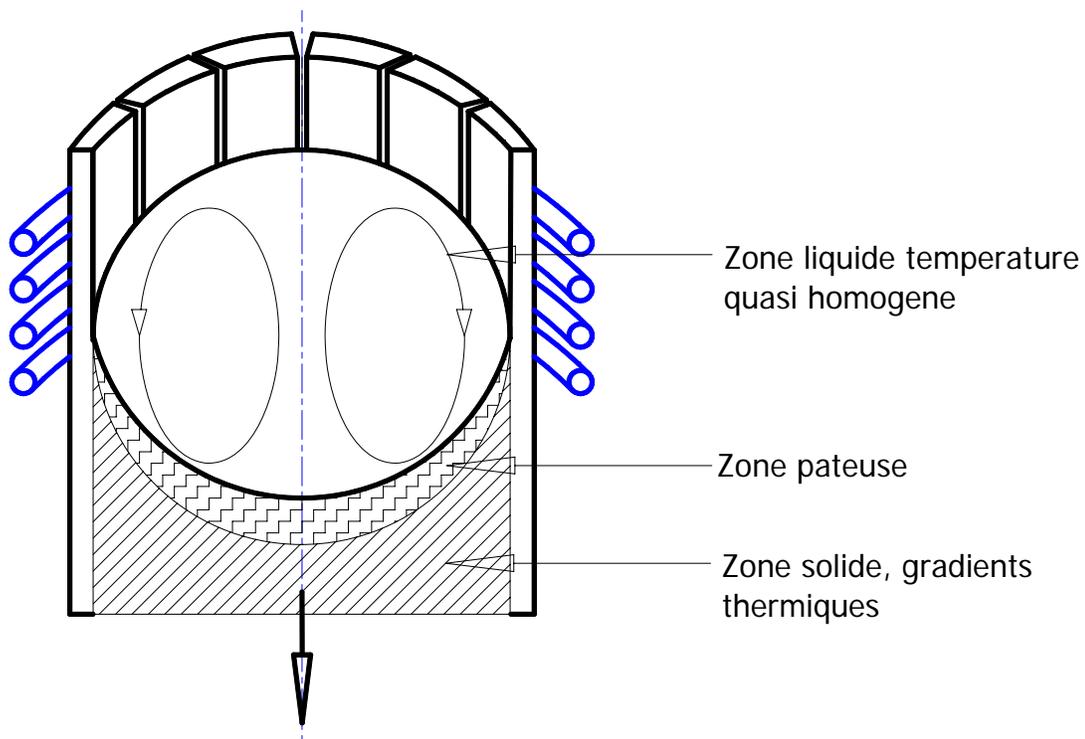


Figure 1.4 Principe du couplage des phénomènes électromagnétique, thermique et hydrodynamique.

4.1 Phénomène électromagnétique

L'induction résulte de l'interaction entre les champs électrique et magnétique. Les équations qui gouvernent ce phénomène sont les équations de Maxwell, les lois constitutives des milieux, la loi d'Ohm et les conditions entre deux milieux.

4.1.1 Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell s'écrivent, sous la forme suivante qui ne fait intervenir aucune propriété physique du matériau :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = q \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Où \vec{B} est le vecteur induction magnétique,

\vec{E} est le vecteur champ électrique,

\vec{D} est le vecteur déplacement électrique,

\vec{H} est le vecteur champ magnétique,

\vec{J} est le vecteur densité de courant électrique,

q est la densité de charge électrique,

t est le temps.

Elles sont vraies dans le vide aussi bien que dans les matériaux les plus isolants ou que dans les matériaux très conducteurs. Dans le cas de l'induction les fréquences des courants inducteurs sont inférieures au MHz , en conséquence le courant de déplacement $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ est négligeable. De plus généralement les matériaux sont conducteurs d'électricité et la densité de charge électrique est nulle. Ainsi les équations (1.3) et (1.4) se simplifient comme suit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (1.6)$$

L'équation (1.1) traduit le fait que le vecteur induction magnétique \vec{B} est à flux conservatif. La relation (1.1) implique aussi que l'induction magnétique dérive d'un potentiel vecteur magnétique \vec{A} , défini à un gradient près par la relation :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.7)$$

L'équation (1.2) traduit l'interaction entre le champ électrique et l'induction magnétique. Cette équation (1.2) permet d'explicitier le vecteur champ électrique \vec{E} à l'aide du potentiel vecteur

magnétique \vec{A} et du potentiel scalaire électrique V :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.8)$$

L'équation (1.6) a une autre conséquence fort importante. Elle implique que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.9)$$

4.1.2 Lois constitutives des milieux

Aux équations de Maxwell, s'ajoutent les lois constitutives qui s'écrivent pour des milieux linéaires :

$$\vec{B} = \mu * \vec{H} = \mu_0 \mu_r * \vec{H} \quad (1.10)$$

$$\vec{D} = \varepsilon * \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r * \vec{E} \quad (1.11)$$

Où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide : $4\pi \cdot 10^{-7}$,

μ_r est la perméabilité magnétique relative du matériau,

ε_0 est la perméabilité diélectrique du vide : $\frac{1}{36}\pi \cdot 10^9$,

ε_r est la perméabilité diélectrique relative du matériau.

Généralement dans les configurations que nous étudions nous aurons : $\mu_r=1$ et $\varepsilon_r=1$.

4.1.3 Conditions entre deux milieux

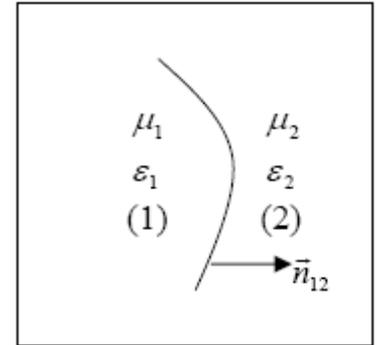
Quatre relations décrivent les conditions de passage d'un milieu à l'autre :

$$\vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1} = \vec{J}_s \times \vec{n}_{12} \quad (1.12)$$

$$(\vec{B}_{n2} - \vec{B}_{n1}) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \quad (1.13)$$

$$\vec{E}_{t2} - \vec{E}_{t1} = 0 \quad (1.14)$$

$$(\vec{D}_{n2} - \vec{D}_{n1}) \cdot \vec{n}_{12} = \rho_{free} \quad (1.15)$$



Où \vec{n}_{12} est la normale à la surface séparant les milieux (1) et (2),

\vec{J}_s est le vecteur densité surfacique de courant,

ρ_{free} est la densité surfacique de charge libre.

Les relations (1.13) et (1.14) induisent les conséquences suivantes : \vec{B}_n et \vec{E}_t sont continus à l'interface et \vec{H}_n et \vec{D}_t sont discontinus à l'interface si $\mu_1 \neq \mu_2$ et $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$.

De plus dans notre cas nous avons $\vec{J}_s=0$ et $\rho_{free}=0$ donc \vec{D}_n et \vec{H}_t sont continus à l'interface. Ainsi si $\mu_1 \neq \mu_2$ et $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, \vec{B}_t et \vec{E}_n sont aussi discontinus.

4.1.4 Loi d'Ohm

En présence d'un champ électrique \vec{E} , un matériau conducteur de l'électricité est parcouru par un courant électrique. On définit la densité de courant électrique \vec{J} par la relation suivante :

$$\vec{J} = \sigma * (\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}) \quad (1.16)$$

Où \vec{U} est la vitesse de déplacement du matériau,

σ est la conductivité électrique du matériau,

Les relations (1.8) et (1.16) conduisent à l'équation :

$$\vec{J} = -\sigma \vec{\nabla} V - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma (\vec{U} \times \vec{B}) \quad (1.17)$$

La forme de la loi d'Ohm dans un milieu conducteur au repos s'écrit :

$$\vec{J} = \sigma * \vec{E} \quad (1.18)$$

Lorsque la vitesse est nulle la densité de courant électrique s'exprime en fonction du potentiel scalaire électrique et du potentiel vecteur magnétique selon la relation :

$$\vec{J} = -\sigma \vec{\nabla} V - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.19)$$

4.1.5 Equation aux dérivées partielles

La mise en équation du problème électromagnétique dépend du choix des variables prises. Le choix des variables dépend du problème à résoudre. Il est courant dans les systèmes inductifs de prendre comme inconnues le potentiel scalaire électrique et le potentiel vecteur magnétique. L'équation aux dérivées partielles se déduit des relations (1.6), (1,7), (1,10) et (1,19) :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\nabla} V = 0 \quad (1.20)$$

A cette équation il faut adjoindre la conservation du courant.

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\sigma \vec{\nabla} V + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.21)$$

Ainsi dans le cas d'une configuration 3D les inconnues du problème électromagnétique sont les trois composantes complexes du potentiel vecteur et le potentiel scalaire électrique complexe.

4.1.6 Densité de puissance Joule

Dans un matériau où circule une densité de courant électrique \vec{J} se développe une densité de puissance instantanée dP . Elle s'exprime à l'aide la relation suivante :

$$dP = \frac{\vec{J} \cdot \vec{J}}{\sigma} \quad (1.22)$$

Dans les procédés inductifs la densité de courant varie sinusoidalement avec le temps. A des fréquences supérieures au kHz on définit généralement la densité de puissance Joule dP_J comme la moyenne temporelle (sur une période) de la densité de puissance instantanée. Nous pouvons ainsi calculer la densité de puissance Joule à partir l'amplitude J_a du vecteur densité de courant \vec{J} :

$$dP_J = \frac{J_a \cdot J_a}{2\sigma} \quad (1.23)$$

En utilisant la notation complexe pour les grandeurs électromagnétiques on peut encore exprimer la densité de puissance Joule moyenne par la relation suivante :

$$dP_J = \frac{\vec{J}_c \cdot \vec{J}_c^*}{2\sigma} \quad (1.24)$$

Où \vec{J}_c est la densité de courant complexe associée à la densité de courant réelle,

\vec{J}_c^* est le conjuguée de la densité de courant complexe \vec{J}_c .

4.1.7 Densité de force de Laplace

Un volume conducteur dans lequel circule un courant électrique et placé dans un champ magnétique est le siège d'une force électromagnétique appelée aussi force de Laplace. Cette force résulte de l'interaction entre l'induction magnétique et la densité de courant. La valeur instantanée de cette densité de force de Laplace \vec{F}_L s'exprime suivant la relation :

$$\vec{F}_L = \vec{J} \times \vec{B} \quad (1.25)$$

Dans le cas de l'induction les grandeurs varient sinusoidalement avec le temps on utilise la notation complexe. De plus pour des fréquences suffisamment élevées on utilise la densité de force électromagnétique moyenne \vec{F}_{moy} qui s'exprime sous la forme suivante :

$$\vec{F}_{moy} = \frac{1}{2} \Re(\vec{J}_c \times \vec{B}_c^*) \quad (1.26)$$

Où \vec{J}_c est la densité de courant complexe associée à la densité de courant réelle,

\vec{B}_c^* est le conjuguée de l'induction complexe \vec{B}_c .

4.1.8 Epaisseur de peau électromagnétique

L'équation aux dérivées partielles du champ magnétique se déduit des équations (1.2), (1.6), (1.10) et (1.18). On obtient donc (*Annexe2*) :

$$\nabla^2 \vec{H} = \sigma \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.27)$$

Dans le cas du champ alternatif sinusoidal on travaille en variables complexes. La grandeur vectorielle sera complexe en $e^{i\omega t}$. Cette équation se déduit de l'équation (1.27). Compte tenu de la variation en fonction du temps on obtient :

$$\nabla^2 \vec{H} = i_c \mu \sigma \omega \cdot \vec{H} \quad (1.28)$$

Où ω est la pulsation du courant inducteur.

On peut mettre en évidence la longueur caractéristique de diffusion du champ magnétique dans le matériau, appelée épaisseur de peau électromagnétique (δ) et définie par la relation suivante :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}} \quad (1.29)$$

La valeur de épaisseur de peau électromagnétique (δ) par rapport à la grandeur caractéristique du matériau L_c , on distingue deux cas :

- $\frac{\delta}{L_c} \leq \frac{1}{3}$, on parle de fine épaisseur de peau : les grandeurs électromagnétiques sont maximales à la surface du matériau et décroissent à l'intérieur. On peut supposer que le champ magnétique évolue à l'intérieur du domaine selon une loi de décroissance exponentielle en fonction de la normale à la surface du domaine. Ainsi on a le champ magnétique de la forme :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cdot e^{-\frac{(1+i_c) \cdot n}{\delta}} \cdot e^{i_c \omega t} \quad (1.30)$$

Où \vec{H}_0 est le vecteur champ magnétique à la surface du domaine.

- $\frac{\delta}{L_c} \geq \frac{1}{3}$, on parle de grande épaisseur de peau : les grandeurs électromagnétiques pénètrent dans tout le matériau.

4.2 Phénomène thermique

L'élaboration du matériau dépend ensuite de la propagation de la chaleur dans tout le matériau, des échanges avec l'extérieur et du temps durant lequel est injectée la puissance. La partie chauffée constitue la zone de pénétration thermique. Le matériau, en cours d'élaboration, est le siège de nombreux transferts thermiques. Ainsi, interviendront les effets de la conduction et de la convection thermique, en présence de source dues, d'une part, à la densité de puissance Joule et, d'autre part, au changement d'état liquide-solide dans le cas d'un procédé d'élaboration en continu. Les échanges avec l'extérieur sont de deux types : convection et rayonnement. La répartition des température à chaque instant est solution de l'équation du bilan énergétique :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot (-k_{th} \vec{\nabla} T) - Q_{th} - \Delta H = 0 \quad (1.31)$$

On peut réécrire ce bilan en développant $\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \right)$ suivant :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T + \vec{\nabla} \cdot (-k_{th} \vec{\nabla} T) - Q_{th} - \Delta H = 0 \quad (1.32)$$

Où T est la température,

ρ est la masse volumique,

C_p est la capacité calorifique,

\vec{U} est la vitesse (vitesse de tirage, vitesse de brassage.)

k_{th} est la conductivité thermique,

Q_{th} est la source de chaleur ou la densité de puissance dissipée par effet Joule,

ΔH est la chaleur latente de changement d'état.

Les phénomènes de surface sont pris en compte en explicitant aux interfaces les conditions aux limites ou de passage naturelles, soit sur la valeur de l'inconnue température, soit sur la valeur du flux thermique. Les conditions aux limites de cette équation sont les suivantes :

- Condition de Dirichlet : Température imposée à la frontière T_d
- Condition de Neumann homogène : $k_{th} \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0$
- Flux (densité de puissance surfacique) imposé en paroi : $-k_{th} \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -Flux$
- Flux convectif en paroi : $-k_{th} \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h_{cv} (T - T_{amb})$
- Flux radiatif en paroi : $-k_{th} \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varepsilon \sigma_{SB} (T^4 - T_{amb}^4)$

Où T_d est la température imposée à la frontière,

$Flux$ est la chaleur transfert à la surface,

h_{cv} est le coefficient d'échange convectif à la surface,

ε est l'émissivité du matériau constituant la charge,

σ_{SB} est la constante de Stefan Boltzmann,

T_{amb} est la température ambiante.

4.3 Phénomène hydrodynamique

Le phénomène hydrodynamique apparaît dans le domaine liquide du matériau élaboré. La densité de force de Laplace provoque la déformation et la mise en mouvement du liquide. Il en résulte le phénomène soit de formage électromagnétique dû à la pression électromagnétique engendrée, soit le brassage électromagnétique. Ce dernier est largement utilisé pour assurer le mélange des matériaux fondus. Il doit cependant être bien contrôlé car il accélère l'usure des parois du creuset dans le cas des creusets chauds et en diminue la durée de vie. L'écoulement d'un fluide incompressible est décrit par l'équation de continuité et l'équation de Navier-Stoke.

- Équation de bilan de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (1.33)$$

- Équation de bilan de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = -\vec{\nabla} p + \rho \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U} + \vec{F}_{ext} \quad (1.34)$$

Où ν est la viscosité cinématique,

p est la pression,

\vec{F}_{ext} est le vecteur de la densité force extérieur.

Généralement dans les procédés inductifs, La densité de force extérieur (\vec{F}_{ext}) est la densité de force de Laplace moyenne (\vec{F}_{moy}) mais pour la simplification présenté, on va décomposer la densité de force de Laplace (\vec{F}_L) en une partie rotationnelle et une partie irrotationnelle, en utilisant la relation de Maxwell-Ampère ($\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$) dans le cas où la perméabilité magnétique relative μ_r vaut 1 :

$$\vec{F}_L = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \frac{1}{2\mu_0}\vec{\nabla} B^2 = \vec{F}_{rot} + \vec{F}_{irrot} \quad (1.35)$$

Où $\vec{F}_{rot} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$ est la densité de force rotationnelle,

$\vec{F}_{irrot} = -\frac{1}{2\mu_0}\vec{\nabla} B^2$ est la densité de force irrotationnelle.

Pour l'écoulement on distingue deux variables la vitesse (3 composantes réelles) et la pression (1 composante réelle).

5 Termes de couplage

Les trois phénomènes électromagnétique, thermique et hydrodynamique sont intimement liés et la variation de l'un des trois influence les deux autres. Nous pouvons représenter ces interaction par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\nabla} V = 0 \\ & \rho C_p \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + \rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{T} + \vec{\nabla} \cdot (-k_{th} \vec{\nabla} \vec{T}) - \Delta H = \frac{\vec{J} \cdot \vec{J}^*}{2\sigma} \\ & \rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = -\vec{\nabla} p + \rho \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U} + \frac{1}{2} \Re(\vec{J} \times \vec{B}^*) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ainsi les interactions entre les phénomènes physiques sont pilotés par quatre termes :

– **Les termes sources :**

- La source thermique Q_{th} est issue du phénomène électromagnétique. Les courants induits dans la charge créent une densité de puissance Joule dP_J , à l'origine de la source de chaleur.

$$Q_{th} = \frac{\vec{J} \cdot \vec{J}^*}{2\sigma} \quad (1.37)$$

- La source hydrodynamique (\vec{F}_{ext}) est issue du phénomène électromagnétique. L'interaction entre les courants induits et le champ d'induction magnétique crée la densité de force de Laplace moyenne (\vec{F}_{moy}) .

$$\vec{F}_{ext} = \frac{1}{2} \Re(\vec{J} \times \vec{B}^*) \quad (1.38)$$

- La densité de force de Laplace se décompose en deux parties :
 - La partie irrotationnelle de force de Laplace induit une pression électromagnétique qui impose la forme de la frontière liquide-air,
 - La partie rotationnelle de force de Laplace induit un mouvement dans le liquide (brassage électromagnétique).
- **Les propriétés physiques variant avec la température T** : Ainsi phénomène thermique a une influence sur les autres phénomènes.
- La conductivité électrique $\sigma(T)$: la variation de la température entraîne une modification de la conductivité électrique, entraînant une modification de la répartition des courants induits. Voici des exemples de loi de la conductivité électrique en fonction de la température :

- Fer (*Brandes 1983(pp. 14.4)*) :

$$\sigma(T) = -30000T + 1,9 \cdot 10^7 : 300K \leq T < 500K$$

$$\sigma(T) = -10000T + 9 \cdot 10^6 : 500K \leq T < 700K$$

$$\sigma(T) = -2750T + 3,925 \cdot 10^6 : 700K \leq T \leq 1100K$$

- Verre (*Jacoutot 2006 (pp. 10-13)*) : $\sigma(T) = e^{\left(3,7921 - \frac{3179,8}{T}\right)}$

- La masse volumique $\rho(T)$: la variation de la température entraîne une modification de la masse volumique. Cette variation pour les métaux, semi conducteurs et oxydes est relativement faible. Elle est principalement à l'origine des effets thermo-convectifs.
- La capacité calorifique $C_p(T)$: la variation de la température entraîne une modification de la capacité calorifique, entraînant l'évolution de la température en régime transitoire et convectif.
- La conductivité thermique $k_{th}(T)$: la variation de la température entraîne une modification de la conductivité thermique, entraînant l'évolution de la température. Voici des exemples de loi :
 - Fer : $k_{th}(T) = -0,0559T + 89,6787 : 300K \leq T < 1100K$
 - Verre : $k_{th}(T) = 4,83 \cdot 10^{-4}T + 5,4 \cdot 10^{-1} : 293K \leq T < 693K$
 $k_{th}(T) = 7,97 \cdot 10^{-3}T + 4,65 : 693K \leq T < 1296K$
 $k_{th}(T) = 1,81 \cdot 10^{-3}T + 3,337 : 1296K \leq T \leq 1473K$

- La viscosité cinématique $\nu(T)$: la variation de la température entraîne une modification de la viscosité dynamique, entraînant l'évolution de la vitesse dans le domaine liquide du matériau.
- **Le terme de la vitesse dans le liquide \vec{U}** : issu du phénomène hydrodynamique. L'écoulement dépend de la forme et de la position du front liquide-solide. Il intervient dans les termes convectifs des phénomènes électromagnétique et thermique.
- **Les interfaces libres** : ce sont la surface du liquide et l'interface liquide-solide.
 - Forme de la surface du liquide ou la forme du dôme due à l'effet de l'équilibre des pressions magnétique, hydrostatique et hydrodynamique : couplage magnéto-mécanique. Une modification de la forme entraîne une variation des lignes de champ magnétique donc, des forces de Laplace et un changement du domaine d'étude de l'écoulement.
 - Forme de l'interface liquide-solide résultant de la thermo-hydraulique et du changement d'état liquide solide. Le front de solidification dépend simultanément du champ de vitesses et du changement de phase : il résulte de la répartition de température.

6 Conclusion

Je viens de présenter les équations pilotant les trois principaux problèmes et les termes de couplages entre les phénomènes physiques intervenant dans un procédé d'élaboration de matériau par induction. Tout d'abord faisons une remarque préliminaire sur le nombre d'inconnues d'un tel problème. Lorsque la configuration est 2D on a 1 inconnue complexe et 4 inconnues réelles. En 3D on a 4 inconnues complexes et 5 inconnues réelles. Comme nous venons de le voir le nombre d'inconnues est très élevé dans le cas 3D. De plus certaines sont complexes et d'autres réelles.

Quelques remarques sur ces termes de couplage peuvent déjà être faites. La loi d'évolution de la conductivité électrique en fonction de la température a une forte influence sur la nature l'interaction entre la thermique et électromagnétisme. Si cette propriété varie fortement avec la température comme dans le cas des oxydes l'interaction électromagnétique thermique sera forte. De plus, l'épaisseur de peau électromagnétique (dépendant à la fois des propriétés électromagnétiques du matériau et de la fréquence joue un rôle important dans le couplage des phénomènes physiques. En effet, les termes sources suivent une loi de décroissance exponentielle en $(e^{-2n/\delta})$. Ainsi, dans le cas des fines épaisseurs de peau le maillage utilisé pour la résolution des problèmes thermiques et hydrodynamiques doit être suffisamment fin au voisinage de la surface pour prendre en compte les sources.

Nous pouvons déjà préciser une différence importante concernant les domaines d'études associés à chaque phénomène physique :

- Le domaine électromagnétique est "infini" car les conditions aux limites sont à l'infini,
- Le domaine thermique peut se limiter à la charge,
- Le domaine hydrodynamique est limité à la région liquide de la charge.

-

Dans les travaux que j'ai mené au cours de cette thèse je n'ai pas abordé le problème du couplage par les interfaces libres. Celui-ci est très complexe à modéliser surtout pour des configurations tridimensionnelles. La modélisation dépend de la nature du problème et nécessite des temps de calcul élevés. De plus généralement dans les procédés inductifs pour des fréquences suffisantes les courants dus au déplacement du fluide dans un champ magnétique sont faibles par rapport à ceux issus de la variation du champ magnétique dans le temps.

CHAPITRE 2

Démarche de modélisation des procédés inductifs

1 Introduction

La modélisation numérique des procédés d'élaboration par induction a débuté dans les années 80. Les premiers travaux concernaient les configurations axisymétriques ou 2D. La modélisation était comparée avec l'expérience pour optimiser et acquérir une bonne maîtrise du procédé (*Sadeghipour 1996, Dughiero 1998*). Depuis une dizaine d'année, elle est de plus en plus souvent appliquées aux problèmes 3D (*Le Bisson 1993, Cingoski 1996*). Notre objectif est le développement de logiciels de modélisation numérique 3D adaptés aux phénomènes couplés intervenant dans les procédés d'élaboration par induction. Dans le chapitre précédent nous avons présentés les phénomènes physiques et les interactions entre ces phénomènes qui interviennent dans un procédé d'élaboration par induction. Pour modéliser de tels procédés en tenant compte des interactions entre les phénomènes physiques plusieurs démarches sont possibles :

- On utilise une seule méthode numérique pour modéliser l'ensemble des phénomènes physiques. Dans ce cas se pose le problème du choix de la méthode numérique et le choix de la modélisation des termes de couplage. On peut construire un seul système (*Féliachi 1991, Driesen 1999*). Quel choix doit-on faire en terme d'inconnues : complexes ou réelles ? La résolution est-elle possible en terme de taille de problème (nombre d'inconnues : 13 réelles) ? On peut construire un système par phénomène. Dans ce cas un algorithme de couplage doit piloter les itérations entre les phénomènes physiques (*Natarajan 2004*).
- On utilise plusieurs méthodes numériques. Dans ce cas il faut choisir la méthode numérique la mieux adaptée à chaque phénomène afin d'obtenir les résultats les plus pertinents et de réduire les coûts en temps de calcul et en place mémoire. Ensuite, il faut choisir la méthode de couplage, deux démarches sont possibles :
 - On peut effectuer un couplage faible. Celui-ci consiste à construire un algorithme itératif qui lance successivement la résolution de chaque phénomène physique en interpolant le terme de couplage,
 - On peut effectuer un couplage fort en construisant un seul système linéaire à partir des formulations obtenues pour chacune des méthodes et phénomènes.

Différentes méthodes numériques sont utilisées pour résoudre un problème aux phénomènes couplées. Face aux difficultés et au temps de calcul onéreux le choix de la méthode est important (*Masse 1992*). Les solutions retenues sont souvent un couplage faible mettant en œuvre un simple calcul séquentiel ou itératif (*Cardelli 1994*). Les méthodes numériques choisies couramment pour résoudre les phénomènes physiques intervenant dans un problème couplé sont la méthode des éléments finis(MEF), la méthode des intégrales de frontière (BEM), la méthode des volumes finis (MVF) et la méthode intégrale (MI). La méthode des éléments finis, notamment la méthode projective de Galerkin permet de résoudre les équations aux dérivées partielle des milieux continus. Ainsi, avec cette méthode les problèmes électromagnétique, thermique et hydrodynamique peuvent être modélisés. La méthode des intégrales de frontière est bien adaptée pour calculer les courants induits dans le cas des fréquences élevées. La méthode des volumes finis est plus particulièrement dédiée à la résolution du problème hydrodynamique (*Morandini 1994*). La méthode intégrale permet de résoudre le problème électromagnétique en présence de fine ou grande peau électromagnétique.

La résolution du problème des phénomènes couplées, peut être réalisée par un couplage

faible ou un couplage fort. On peut choisir une ou plusieurs méthodes numériques pour résoudre chacun des phénomènes. Lorsqu'une seule méthode numérique est utilisée pour la modélisation des phénomènes couplés, généralement il s'agit de la méthode des éléments finis, par exemple, pour modéliser un couplage électromagnétique-thermique linéaire et non linéaire (*Morandini 1992, Feliachi 1991,1992, Minoune 1995, Cingoski 1996, Lüdtke 1998, Ernst 1999, Favennec 2003*). La méthode des éléments finis a aussi été utilisée pour la modélisation électromagnétique-thermomécanique (*Pantelyat 2002, Bay 2003*). L'utilisation de différences méthodes met en jeu généralement deux méthodes numériques. Ainsi, le couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis est utilisé pour résoudre le problème électromagnétique-hydrodynamique (*Trophime 1996, Gardin 2001, Song 2005*). Le couplage entre la méthode intégrale et la méthode des éléments finis est utilisée pour modéliser le couplage entre l'électromagnétisme et la thermique ou/et l'hydrodynamique (*Gagnoud 1991, Servant 1992, Saumabere 1997*). Le couplage entre la méthode intégrale et la méthode des volumes finis est utilisée pour modéliser le couplage entre l'électromagnétisme et la thermohydraulique (*Jacoutot 2006, 2008*).

Dans ce chapitre, nous présentons le choix des méthodes numériques et les démarches du modélisation du couplage. Les formulations numériques du phénomène électromagnétique et du phénomène thermique sont présentées.

2 Les méthodes numériques

La modélisation des phénomènes physiques des milieux continus s'appuie sur des méthodes numériques qui consistent en une discrétisation des équations aux dérivées partielles (*Morandini 1992*). Les méthodes numériques les plus courantes sont la méthodes des éléments finis, la méthode des volumes finis, la méthodes des différences finies et la méthode intégrale de frontières. Ces dernières peuvent être utilisées pour la modélisation de divers phénomènes. D'autres méthodes comme la méthode intégrale sont dédiés à des domaines spécifiques. Nous exposons dans ce paragraphe brièvement quelques unes de ces méthodes.

2.1 Méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments finis consiste à mailler l'espace en éléments. Le maillage peut être constitué de triangles ou de quadrilatères pour des domaines axisymétriques ou 2D et de prismes ou d'hexaèdres pour des domaines 3D. Généralement on associe à chaque élément réel un élément de référence. Chaque élément a un nombre de nœuds définis suivant le polynôme d'interpolation choisi. Couramment les polynômes de Lagrange d'ordre un ou deux sont utilisés. L'inconnue est définie aux nœuds des éléments. Les polynômes définis sur l'élément de référence sont utilisé pour interpoler la grandeur inconnue sur l'élément. La méthode projective de Galerkin consiste à projeter l'équation aux dérivées partielles sur la base polynômiale précédemment définie. On obtient ainsi un système d'équation dont la matrice est constituée d'intégrales et dont le vecteur inconnue est constituée de l'inconnue aux nœuds du maillage. Le système obtenu peut être linéaire si les coefficients de la matrice sont indépendant de l'inconnue. Il peut non linéaire si certains coefficients de la matrice dépendent de l'inconnue. La matrice obtenue est une matrice creuse. Le formalisme général de cette technique est adapté à la résolution problème non linéaire avec le géométrie complexe (*Albanese 1992, Lavers 1993, Dughiero 1996*).

2.2 Méthode des intégrales de frontière (BEM)

La méthode des intégrales de frontière est très utile lorsque le matériau est homogène et linéaire (*Katsumura 1996*). Elle ramène le traitement de l'équation aux dérivées partielles dans l'ensemble du matériau à celui limité à la frontière du domaine. Elle ne nécessite pas de maillage volumique. Cette méthode s'appuie sur une discrétisation des frontières en éléments. Comme dans la méthode des éléments finis on utilise des éléments de référence. Le formalisme de cette méthode conduit à un système d'équations linéaires dont la matrice est pleine. Elle a été utilisée pour la modélisation de problèmes de phénomènes couplés électrique thermique (*Kurgan 2002*).

2.3 Méthode des volumes finis (MVF)

Le domaine d'étude est discrétisé en volumes élémentaires appelées cellules. L'équation aux dérivées partielles est intégrée dans chacune des cellules. Elle assure ainsi une bonne conservation des flux. L'inconnue est généralement définie au centre des cellules. On obtient ainsi un système d'équations dont les termes sont explicités partir d'un développement en série de Taylor dans des volumes élémentaires entourant les centres des cellules (*Hirt 1989*). Le système obtenu peut être linéaire ou non linéaire. La matrice obtenue est une matrice creuse.

2.4 Méthode intégrale (MI)

La méthode intégrale est dédiée au phénomène électromagnétique dans les systèmes inductifs. Son formalisme s'appuie sur la loi d'Ohm, la conservation des courants électrique et sur la loi de Biot et Savart qui permet d'exprimer le potentiel vecteur en fonction des densités de courant. Ces équations ne sont explicités que dans les conducteurs électriques. Ainsi, les régions conductrices sont discrétisées en éléments. Comme dans la méthode des éléments finis on utilise des éléments de référence. Les polynômes d'interpolation sont des polynômes de Lagrange, généralement d'ordre 1. Cette méthode permet à la fois de calculer les grandeurs locales (densités de courant, densités de puissance...) et globales (puissance Joule, rendement, impédance électrique du système...) (*Gagnoud 2004*).

3 Choix des méthodes numériques pour la modélisation de systèmes inductifs

L'objectif de ce travail est la modélisation numérique tridimensionnelle des phénomènes couplés dans les systèmes inductifs. Nous présentons notre démarche dans le cas du couplage électromagnétique et thermique. Nous n'aborderons pas en détail la modélisation hydrodynamique. La démarche de modélisation numérique suivie, s'appuie sur le couplage de méthodes numériques, en choisissant pour chaque phénomène physique la méthode la mieux adaptée (*Masse 1992*).

3.1 Choix de la méthode numérique pour le problème électromagnétique

La modélisation numérique tridimensionnelle électromagnétique se heurte à trois difficultés :

- La géométrie tridimensionnelle induite par la géométrie de l'installation (sectorisation de

creuset froid, installation de section rectangulaire ...)

- La faible profondeur de pénétration du champ magnétique devant la taille de l'installation dans la gamme de fréquence utilisée dans les régions métalliques conductrices d'électricité : cas de la fine épaisseur de peau.
- Le système électromagnétique est ouvert : les conditions aux limites correspondent aux grandeurs électromagnétiques nulles à l'infini.

Pour modéliser un tel système on peut faire appel aux méthodes numériques suivantes : la méthode des éléments finis, la méthode des intégrales de frontière et la méthode intégrale.

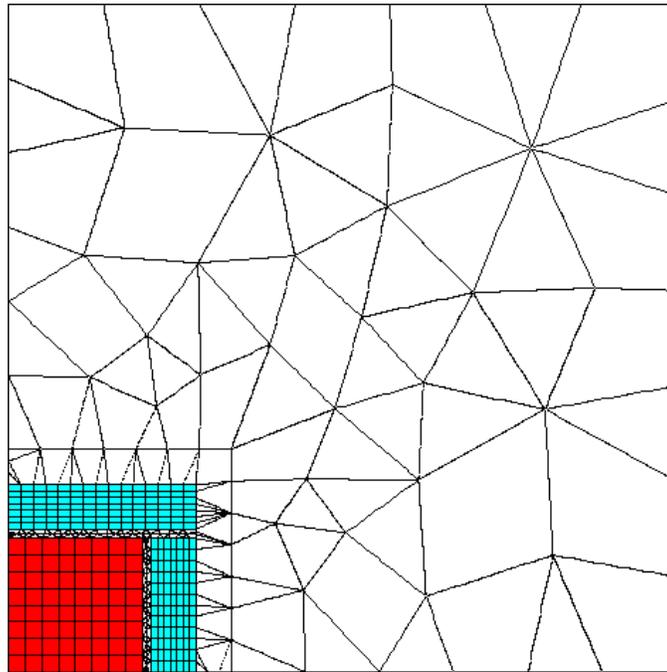


Figure 2.1 Exemple d'un maillage éléments finis en coupe avec présence d'entrefer et fine peau

Dans le domaine de l'induction la méthode des éléments finis peut s'avérer délicate d'utilisation. En effet pour appliquer la méthode des éléments finis au problème électromagnétique l'air doit être maillé afin de prendre en compte les conditions aux limites à l'infini. La présence d'entrefer par exemple en présence de fines fentes entre les secteurs génère un grand nombre de mailles (Figure 2.1). Les régions de fine épaisseur de peau doivent être suffisamment maillées (2 mailles dans l'épaisseur de peau) pour que la modélisation soit correcte. Ainsi, dans un tel contexte (3D avec creuset froid et fine épaisseur de peau) la taille d'un maillage éléments finis peut conduire à des systèmes d'équations de trop grande taille. Pour adapter la méthode des éléments finis à ces problèmes il existe plusieurs possibilités. Les techniques de transformations de parois conduisent à une procédure efficace pour modéliser des problèmes à frontières ouvertes (*Brunotte 1992*). Le couplage de la méthode des éléments finis et de la méthode intégrale de frontière pour l'air est une autre possibilité pour la modélisation des régions ouvertes (*Pascal 2003*). Les formulations éléments finis en impédance de frontière sont adaptées à la fine peau (*Sakalleris 1992, Dumont 2000, Louai 1996*), mais certains critères doivent être respectés notamment en présence d'angle (*Aymard 1997*). La création de maillages adaptés comme les maillages de peau est aussi une possibilité intéressante lors de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis (*Simon 2002*).

Pour modéliser un problème électromagnétique différentes formulations peuvent être utilisées : les formulations en potentiel vecteur magnétique et en potentiel scalaire électrique et les formulations duales en potentiel scalaire magnétique et potentiel vecteur électrique (*Biro 1989, Meunier 1998*). Le choix de la formulation peut se faire suivant la région, une attention particulière doit alors être portée sur les conditions aux limites. Le nombre d'inconnues complexes dépend de la formulation choisie : trois ou quatre pour les formulations en potentiel vecteur. Les systèmes obtenus sont à matrices creuses généralement symétriques. On peut utiliser des méthodes itératives pour la résolution de ces systèmes.

Pour résoudre ce type de problème nous pouvons utiliser la méthode intégrale de frontière ou la méthode intégrale. Nous nous focaliserons plutôt sur la méthode intégrale au formalisme moins général mais plus proche de la physique. Cette méthode présente un certain nombre d'avantages pour la modélisation de systèmes inductifs 3D (*Gagnoud 2004*). Le formalisme utilisé permet de ne mailler que les parties électriquement actives. En particulier, l'air n'est pas maillé, ce qui permet de réduire de manière conséquente le nombre de mailles lorsque l'air sépare des régions de conductivités très différentes. Les conditions aux limites à l'infini sont automatiquement prises en compte en exprimant le potentiel vecteur par la loi de Biot et Savart. De plus lorsque l'épaisseur de peau électromagnétique est fine devant la taille d'une région électriquement active on peut limiter le maillage à la surface de cette région. La présence de régions fine peau et grande peau n'a pas d'incidence sur la taille du maillage car l'air entre les objets n'est pas maillé. Les systèmes obtenus sont à matrice pleine. Le nombre d'inconnues complexes vaut trois (fine peau) ou quatre (grande peau). La résolution de ce système nécessite une méthode directe. On obtient directement la répartition des densités de courant et du potentiel électrique.

En comparant ces deux méthodes nous constatons que la taille du système est beaucoup plus importante dans le cas de la méthode des éléments finis que dans le cas de la méthode intégrale. Cependant le temps de résolution du système obtenu par la méthode intégrale peut être important car la résolution se fait par une méthode directe. Les résultats sont moins sensibles au maillage car la méthode intégrale prend en compte l'interaction entre chaque courant. Nous prendrons la méthode intégrale pour la modélisation électromagnétique car celle est bien adaptée à la modélisation des systèmes inductifs.

Pour la modélisation électromagnétique nous utiliserons le logiciel MIGEN développé au laboratoire. Ce logiciel est basé sur la méthode intégrale et permet de modéliser des systèmes inductifs 3D et 2D axisymétrique. Des régions conductrices et faiblement conductrices d'électricité peuvent être simultanément modélisées en utilisant respectivement des modèles en fine et en grande épaisseur de peau.

3.2 Choix de la méthode numérique pour le problème thermique

Pour la modélisation thermique, le domaine d'étude est le lingot du procédé. La méthode des éléments finis est parfaitement adaptée à la résolution des échanges thermiques. Elle permet de traiter les problèmes thermiques statique ou transitoire en prenant éventuellement en compte des non linéarités issues soit des échanges en frontières par rayonnement soit des propriétés variant avec la température. Elle permet aussi de mailler des géométries complexes.

Pour cette modélisation dans le cas du couplage faible, nous choisissons le logiciel général basé sur la méthode des éléments finis : FLUX-EXPERT logiciel distribué par la société

Astek.

Le logiciel FLUX-EXPERT présente l'avantage d'être doté d'un générateur d'équations (Baudon 1985) :

- Il est possible de décrire ou développer des nouveaux algorithmes,
- Il est possible de décrire ou développer des nouveaux modèles de propriétés physiques,
- Il est possible de développer les formulations adaptées à chaque phénomène que l'on veut modéliser par la méthode des éléments finis. Ainsi, il est possible de décrire les équations d'un problème thermique ou thermo-hydrodynamique.

Pour le couplage fort nous développerons un nouveau module au sein du logiciel MIGEN. Celui-ci correspondra à la formulation par la méthode des éléments finis du problème thermique.

4 Modèle électromagnétique

Nous avons choisi la méthode intégrale pour résoudre le problème électromagnétique. Dans cette section, nous présentons les équations utilisées dans ce modèle, Nous précisons la mise en équation dans les cas de fine et grande épaisseur de peau électromagnétique.

4.1 Les équations de la méthode intégrale

Le phénomène électromagnétique est décrit par les équations de Maxwell et les lois des milieux. En présence de courant sinusoïdal on utilise la notation complexe pour les grandeurs électromagnétiques. A chaque grandeur $A_{max} \cos(\omega t + \varphi)$ on associe la grandeur complexe $A_c e^{i_c \omega t}$ avec $A_c = A_{max} e^{i_c \varphi}$. Où ω est la pulsation du courant inducteur, c est l'indice des grandeurs complexes, i_c est le nombre imaginaire pur tel que $i_c^2 = -1$, φ est la phase du potentiel.

La méthode intégrale s'appuie sur les deux équations suivantes :

$$- \text{Loi d'Ohm : } \vec{J}_c e^{i_c \omega t} + \sigma \frac{\partial (\vec{A}_c e^{i_c \omega t})}{\partial t} + \sigma \vec{\nabla} (V_c e^{i_c \omega t}) = 0 \quad (2.1)$$

$$- \text{Conservation du courant : } \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_c = 0 \quad (2.2)$$

Avec la notation complexe nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{\partial \vec{A}_c e^{i_c \omega t}}{\partial t} = i_c \omega \vec{A}_c e^{i_c \omega t} \quad (2.3)$$

La loi Biot-Savart, forme intégrale générale de l'équation Maxwell-Ampère, permet de calculer le potentiel vecteur créé par une distribution de densités de courant \vec{J}_c :

$$\vec{A}_c = \iiint_{\Omega} \frac{\mu_0 \vec{J}_c}{4\pi r} dv \quad (2.4)$$

Où r est la distance entre le point de calcul du potentiel vecteur et le point de densité de

courant \vec{J}_c , dv est l'élément de volume, Ω est le domaine volumique des régions conductrices.

On peut écrire la loi d'Ohm (2.1) en insérant l'expression du potentiel vecteur en fonction de la densité courant :

$$\vec{J}_c + i_c \sigma \omega \iiint_{\Omega} \frac{\mu_0 \vec{J}_c}{4\pi r} dv + \sigma \vec{\nabla} V_c = 0 \quad (2.5)$$

Pour expliciter la conservation du courant (2.2), on utilise la formule de Green :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_c = 0 \rightarrow \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_c dv = \iint_{\Gamma} \vec{J}_c \cdot \vec{n}_{ext} ds = 0 \quad (2.6)$$

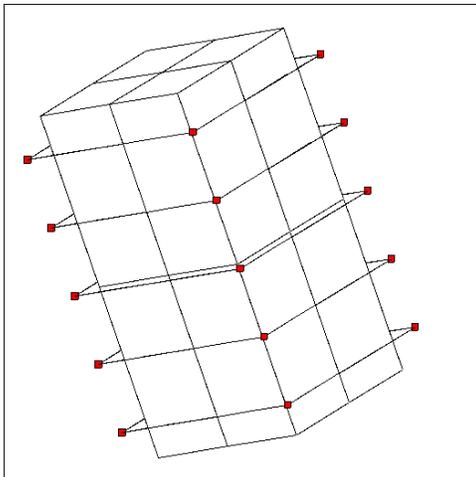
Où Γ est la frontière du volume, \vec{n}_{ext} est la normale extérieure à la frontière Γ .

4.2 Discrétisation des équations de la méthode intégrale

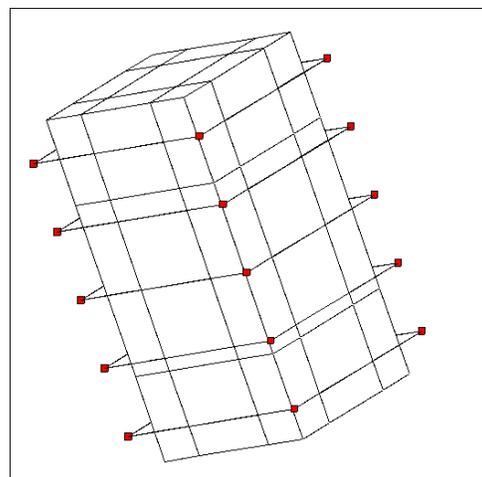
Les inconnues du problème sont les densités de courants \vec{J}_c et le potentiel électrique V_c . Les diverses régions conductrices sont maillées. Deux maillages décalés sont construits : un maillage pour l'inconnue V_c et un maillage pour l'inconnue \vec{J}_c . Le maillage de la méthode intégrale est construit en deux temps. La première étape consiste à construire le maillage en V. Ensuite les éléments J sont créés. Le maillage de chaque région conductrice dépend de l'épaisseur de peau électromagnétique. Nous distinguons deux cas : le cas de la fine épaisseur de peau électromagnétique et le cas de la grande épaisseur de peau électromagnétique.

4.2.1 Modélisation des régions en fine peau

Lorsque dans une région conductrice l'épaisseur de peau est fine cette région est maillée en surface. Les éléments du maillage sont des quadrilatères à quatre nœuds ou des triangles à trois nœuds. Sur la figure 2.2 nous présentons un exemple de maillages en V et en J d'une région fine peau. Le principe de décalage des maillages V et J est présenté sur la figure 2.3. Sur la face de l'objet les nœuds de densité de courant sont situés au centre d'un élément V, le long d'une arête les nœuds J sont situés sur l'arête de l'objet au centre d'une arête d'un élément V.

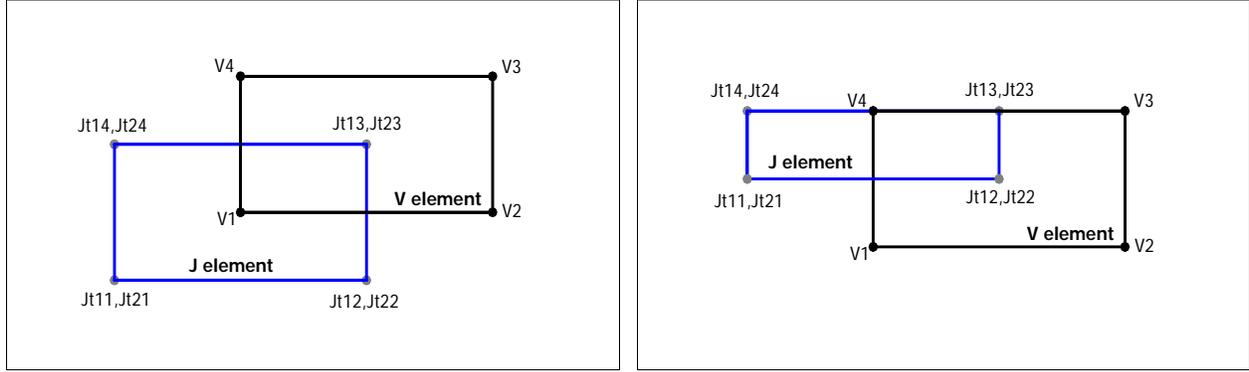


a) maillage en V



b) maillage en J

Figure 2.2 Principe de maillage en V et en J d'une région fine épaisseur de peau.



a) Sur une face de l'objet

b) Suivant une arête de l'objet

Figure 2.3 Principe de décalage des éléments V et J dans le cas de la fine épaisseur de peau.

Dans le modèle en fine épaisseur de peau, la densité de courant à l'intérieur de la région s'exprime selon la loi de décroissance exponentielle faisant intervenir le terme d'épaisseur de peau électromagnétique ($\delta = \sqrt{2/\mu_0 \sigma \omega}$) :

$$\vec{J}_c = \vec{J}_{c,s} \cdot e^{-\frac{(1+i_c) \cdot n}{\delta}} \quad (2.7)$$

Où $\vec{J}_{c,s}$ est la valeur complexe de la densité de courant à la surface. Ce vecteur $\vec{J}_{c,s}$ a deux composantes suivant les deux vecteurs directeurs unitaires tangents à la surface de la région, n est la distance du point intérieur à la surface.

Le potentiel vecteur créé par les régions modélisées en fine peau $A_{c,FP}$ s'écrit :

$$A_{c,FP} = \iiint_{\Omega_{FP}} \frac{\mu_0 \vec{J}_c}{4\pi r} dv = \sum_{e=1}^{NBEJ} \left[\iint_{S_e} \frac{\mu_0 \vec{J}_{c,s}}{4\pi r} ds \cdot \int e^{-\frac{(1+i_c) \cdot n}{\delta_e}} dn \right] \quad (2.8)$$

Où $NBEJ$ est le nombre total d'éléments surfaciques de densité de courant,

S_e est la surface de l'élément de densité de courant e ,

δ_e est l'épaisseur de peau électromagnétique de l'élément e .

On peut calculer l'intégrale en considérant que l'épaisseur de peau est faible devant la dimension caractéristique de la région conductrice. On obtient la relation suivante :

$$\int e^{-\frac{(1+i_c) \cdot n}{\delta_e}} dn \simeq \int_0^{\infty} e^{-\frac{(1+i_c) \cdot n}{\delta_e}} dn = \frac{\delta_e}{(1+i_c)}$$

Ainsi le potentiel vecteur des régions conductrices (fine peau) s'exprime selon la relation suivante :

$$A_{c,FP} = \iiint_{\Omega_{FP}} \frac{\mu_0 \vec{J}_c}{4\pi r} dv = \sum_{e=1}^{NBEJ} \left[\frac{\delta_e}{(1+i_c)} \iint_{S_e} \frac{\mu_0 \vec{J}_{c,s}}{4\pi r} ds \right] \quad (2.9)$$

4.2.2 Modélisation des régions modélisées en grande peau

Lorsque dans une région conductrice l'épaisseur de peau est grande cette région est maillée en volume. Les éléments du maillage sont des hexaèdres à huit nœuds ou des prismes à six nœuds. Les maillages V et J sont décalés. Dans le volume les nœuds J sont situés au centre des éléments V, en surface au centre de la facette des éléments V et le long d'une arête au centre de l'arête des éléments V. La densité de courant \vec{J}_c a trois composantes. Le potentiel vecteur crée par les régions modélisées en grande peau $A_{c,GP}$ s'écrit :

$$A_{c,GP} = \iiint_{\Omega_{GP}} \frac{\mu_0 \vec{J}_c}{4\pi r} dv = \sum_{e=1}^{NBEJ} \left[\iiint_{\Omega_e} \frac{\mu_0 \vec{J}_c}{4\pi r} dv \right] \quad (2.10)$$

Où $NBEJ$ est le nombre total d'éléments volumiques de densité de courant,

Ω_e est le volume de l'élément de densité de courant e .

4.2.3 Prise en compte de l'inducteur

Dans la version actuelle de MIGEN nous traitons deux cas : le cas de l'inducteur modélisé en fine peau et le cas de l'inducteur non modélisé.

Lorsque l'inducteur est modélisé, il est maillé en surface comme toutes les régions en fine peau en éléments V et J. La différence de potentiel électrique est imposée aux bornes de l'inducteur. Le potentiel vecteur crée par l'inducteur $A_{c,inducteur}$ est la somme des intégrales sur les éléments J de la région de l'inducteur :

$$A_{c,inducteur} = \iiint_{\Omega_{inducteur}} \frac{\mu_0 \vec{J}_c}{4\pi r} dv = \sum_{e=1}^{NBEJ_{inducteur}} \left[\frac{\delta_e}{(1+i_c)} \iint_{S_e} \frac{\mu_0 \vec{J}_{c,s}}{4\pi r} ds \right] \quad (2.11)$$

Où $\Omega_{inducteur}$ est le volume de la région inducteur,

$NBEJ_{inducteur}$ est le nombre d'éléments J de l'inducteur,

S_e est la surface de l'élément J numéro e.

Les inducteurs non modélisés sont des régions linéiques. Si l'inducteur n'est pas modélisé, le courant est imposé dans l'inducteur et noté $\vec{I}_{inducteur}$. Le potentiel vecteur

$A_{c,inducteur}$ est l'intégrale suivante :

$$A_{c,inducteur} = \int_{L_{inducteur}} \frac{\mu_0 \vec{I}_{inducteur}}{4\pi r} dl \quad (2.12)$$

Où $L_{inducteur}$ est la région linéique de l'inducteur.

4.2.4 Discrétisation des équations

La loi d'Ohm (2.5) est écrite pour tous les nœuds de densité de courant du maillage. La conservation du courant (2.6) est écrite pour chaque élément de densité de courant contenant un nœud V_c . Les polynômes de Lagrange d'ordre 1 sont utilisés pour interpoler le potentiel électrique et la densité de courant :

$$V_c = \sum_{j=1}^m \alpha_{V,j} V_{c,j} \quad \vec{J}_c = \sum_{j=1}^n \alpha_{J,j} \vec{J}_{c,j} \quad (2.13)$$

Où m est le nombre de nœuds de l'élément V ,

n est le nombre de nœuds de l'élément J ,

$\alpha_{V,j}$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange du nœud j de l'élément V ,

$\alpha_{J,j}$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange du nœud j de l'élément J .

On peut écrire le terme de gradient de V suivant la relation :

$$\vec{\nabla} V_c = \sum_{j=1}^m \left(\vec{\nabla} \alpha_{V,j} \right) V_{c,j} \quad (2.14)$$

La loi d'Ohm en chaque nœud i de densité de courant est donnée par la relation suivante :

– dans le cas de l'inducteur modélisé :

$$\begin{aligned} \vec{J}_{c,i} + \frac{(1+i_c)}{4\pi} \cdot \frac{\sigma_i \omega \mu_0}{2} \left(\sum_{e=1}^{NBEJS} \delta_e \left(\sum_{j=1}^n \left(\iint_{S_e} \frac{\alpha_{J,j}}{r} ds \right) \vec{J}_{c,s,j} \right) \right) + i_c \frac{\sigma_i \omega \mu_0}{4\pi} \sum_{e=1}^{NBEJV} \left(\sum_{j=1}^n \left(\iiint_{\Omega_e} \frac{\alpha_{J,j}}{r} dv \right) \vec{J}_{c,j} \right) \\ + \sigma_i \sum_{j=1}^m \left(\vec{\nabla}_i \alpha_{V,j} \right) V_{c,j} = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

– dans le cas de l'inducteur non modélisé :

$$\begin{aligned} \vec{J}_{c,i} + \frac{(1+i_c)}{4\pi} \cdot \frac{\sigma_i \omega \mu_0}{2} \left(\sum_{e=1}^{NBEJS} \delta_e \left(\sum_{j=1}^n \left(\iint_{S_e} \frac{\alpha_{J,j}}{r} ds \right) \vec{J}_{c,s,j} \right) \right) + i_c \frac{\sigma_i \omega \mu_0}{4\pi} \sum_{e=1}^{NBEJV} \left(\sum_{j=1}^n \left(\iiint_{\Omega_e} \frac{\alpha_{J,j}}{r} dv \right) \vec{J}_{c,j} \right) \\ + \sigma_i \sum_{j=1}^m \left(\vec{\nabla}_i \alpha_{V,j} \right) V_{c,j} = -i_c \sigma \omega \int_{L_{\text{inducteur}}} \frac{\mu_0 \vec{I}_{\text{inducteur}}}{4\pi r} dl \end{aligned} \quad (2.16)$$

Où $NBEJS$ est le nombre d'éléments surfaciques J ,

$NBEJV$ est le nombre d'éléments volumiques J .

La conservation du courant (2.6) sur un élément surfacique J , s'écrit selon la relation :

$$\sum_{j_s}^n \left(\int_{L_e} \alpha_{J,j} \cdot \vec{n}_{ext} dl \right) \vec{J}_{c,s,j} = 0 \quad (2.17)$$

Où L_e est la frontière linéique de l'élément surfacique de densité de courant,

\vec{n}_{ext} est la normale sortante de l'élément .

La conservation du courant (2.6) sur un élément volumique J, s'écrit selon la relation :

$$\sum_j^n \left(\iint_{\Gamma_e} \alpha_{J,j} \cdot \vec{n}_{ext} ds \right) \vec{J}_{c,j} = 0 \quad (2.18)$$

Où Γ_e est la frontière surfacique de l'élément volumique de densité de courant,

\vec{n}_{ext} est la normale sortante de l'élément .

On obtient ainsi un système d'équations linéaires qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{J1} & M_{V1} \\ M_{J2} & 0 \end{bmatrix}}_M * \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{J}_c \\ V_c \end{bmatrix}}_I = \underbrace{\begin{bmatrix} K_S \\ 0 \end{bmatrix}}_K \quad (2.19)$$

M est une matrice pleine non symétrique complexe qui est compose des termes issus de la loi d'Ohm (M_{J1} , M_{V1}) et de la conservation du courant M_{J2} . K est le second membre du système. K_S s'exprime soit en fonction du potentiel électrique appliquée aux bornes de l'inducteur modélisé, soit en fonction du courant imposé dans l'inducteur non modélisé. La résolution de ce système est réalisé par la méthode de Gauss avec recherche du pivot maximum. Elle permet d'obtenir les vecteurs densités de courant aux nœuds du maillage en densité de courant et les potentiels électriques aux nœuds du maillage en potentiel électrique. On peut en déduire le calcul de grandeurs locales comme l'induction magnétique, la densité de puissance Joule , la densité de force électromagnétique. Ces grandeurs sont calculées aux nœuds J du maillage. La densité de puissance Joule au nœud de densité de courant i (dP_i) s'exprime

simplement en fonction de la densité de courant au nœud i $J_{c,i}$: $dP_i = \frac{J_{c,i} \cdot J_{c,i}^*}{2\sigma}$

Des grandeurs globales sont calculées : comme l'impédance électrique de l'installation, la puissance Joule dans chaque objet et région de l'installation. Le calcul de la puissance dans un objet dépend du modèle électromagnétique choisi. Dans le cas du modèle fine peau la densité de puissance Joule à l'intérieure de l'objet suit une loi de décroissance exponentielle. Ainsi la puissance Joule sur les régions fine peau la puissance Joule ($P_{J,FP}$) s'exprime selon la relation suivante :

$$P_{J,FP} = \iiint_{\Omega_{FP}} \frac{J_c \cdot J_c^*}{2\sigma} dv = \sum_{e=1}^{NBEJS} \left[\iint_{S_e} \frac{J_{c,s} \cdot J_{c,s}^*}{2\sigma} ds \cdot \int e^{\frac{-2.n}{\delta_e}} dn \right]$$

$$P_{J,FP} = \sum_{e=1}^{NBEJS} \left[\frac{\delta_e}{2} \cdot \iint_{S_e} \frac{J_{c,s} \cdot J_{c,s}^*}{2\sigma} ds \right] \quad (2.20)$$

Où $NBEJS$ est le nombre d'éléments J surfaciques des régions fine peau.

Sur les régions grande peau la puissance Joule ($P_{J,GP}$) s'exprime selon la relation suivante :

$$P_{J,GP} = \iiint_{\Omega_{GP}} \frac{J_c \cdot J_c^*}{2\sigma} dv = \sum_{e=1}^{NBEJV} \left[\iiint_{V_e} \frac{J_c \cdot J_c^*}{2\sigma} dv \right] \quad (2.21)$$

Où $NBEJV$ est le nombre d'éléments J volumiques des régions grande peau.

5 Modèle thermique

Pour la modèle thermique, nous utilisons la méthode des éléments finis. Dans ce paragraphe nous appliquons cette méthode à l'équation thermique de conduction en régime transitoire avec un terme source :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (-k_{th} \vec{\nabla} T) - Q_{th} = 0 \quad (2.22)$$

Cette équation aux dérivées partielles est projetée avec la méthode de Galerkin sur une base de polynômes de Lagrange d'ordre 2 (α_i) .

5.1 Application de la méthode des résidus pondérés

Le domaine de calcul Ω est cartésien de dimension 3. La projection de Galerkin sur l'espace des fonctions α_i conduit à la formulation suivante :

$$\iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv - \iiint_{\Omega} \alpha_i \vec{\nabla} \cdot (k_{th} \vec{\nabla} T) dv = \iiint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} dv \quad (2.23)$$

Nous précisons maintenant le traitement de chacune de ces intégrales.

5.1.1 Terme transitoire

Le terme d'évolution temporelle peut être explicité par un schéma aux différences finies implicite ou un schéma de Crank-Nicolson. Nous utiliserons dans le cadre de cette thèse le schéma implicite. Ainsi pour l'équation de l'énergie le terme transitoire s'exprime selon la relation suivante :

$$\iiint_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv = \iiint_{\Omega} \rho C_p \frac{T^n - T^{n-1}}{\Delta t} dv \quad (2.24)$$

Où T^n est la température au pas de temps n,

T^{n-1} est la température au pas de temps précédent n-1,

Δt est le pas de temps.

5.1.2 Terme de diffusion

On va faire apparaître naturellement les conditions aux limites, dans ce terme, en procédant à une intégration par partie :

$$\iiint_{\Omega} \alpha_i \vec{\nabla} \cdot (k_{th} \vec{\nabla} T) dv = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\alpha_i k_{th} \vec{\nabla} T) dv - \iiint_{\Omega} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} T dv \quad (2.25)$$

Qui par la formule de Green nous donne :

$$\iiint_{\Omega} \alpha_i \vec{\nabla} \cdot (k_{th} \vec{\nabla} T) dv = \iint_{\Gamma} \alpha_i (k_{th} \vec{\nabla} T) \cdot \vec{n} ds - \iiint_{\Omega} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} T dv \quad (2.26)$$

Cette expression nous permet de prendre naturellement en compte trois types de conditions d'échange aux frontières : les échanges convectifs, les échanges radiatifs et un flux surfacique. Nous obtenons la relation suivante :

$$\iint_{\Gamma} \alpha_i (k_{th} \vec{\nabla} T) \cdot \vec{n} ds = - \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} (T - T_a) ds - \iint_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{SB} (T^4 - T_a^4) ds + \iint_{\Gamma} \alpha_i Flux ds \quad (2.27)$$

Où h_{cv} est le coefficient d'échange convectif,

T_a est la température ambiante,

ε est l'émissivité.

5.1.3 Equation de l'énergie totale

Les relations (2.23)-(2.27), nous permettent d'explicitement finalement la formulation de l'équation de l'énergie :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p \frac{T^n - T^{n-1}}{\Delta t} dv + \iiint_{\Omega} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} T^n dv + \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} (T^n - T_a) ds \\ & + \iint_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{SB} (T^{n4} - T_a^4) ds = \iiint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} dv + \iint_{\Gamma} \alpha_i Flux ds \end{aligned} \quad (2.28)$$

5.2 Interpolation de la température

La relation (2.28) permet d'exprimer l'équation de l'énergie en tous les nœuds i du maillage en éléments finis. Sur chaque élément du maillage on utilise pour la température l'interpolation suivante :

$$T = \sum_{j=1}^k \alpha_j T_j \quad (2.29)$$

Où k est le nombre de nœuds de l'élément T ,

α_j est le polynôme de Lagrange d'ordre 2 au nœud j .

On peut exprimer l'équation thermique par la méthode des éléments finis par la relation suivante au nœud i :

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^{NBET} \left\{ \sum_{j=1}^k \left[\iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_j \rho C_p dv \right] T_j^n \right\} + \Delta t * \sum_{e=1}^{NBET} \left\{ \sum_{j=1}^k \left[\iiint_{\Omega} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dv \right] T_j^n \right\} \\
& + \Delta t * \sum_{f=1}^{NBFT} \left\{ \sum_{j=1}^k \left[\iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_j h_{cv} ds \right] T_j^n \right\} + \Delta t * \sum_{f=1}^{NBFT} \left\{ \sum_{j=1}^k \left[\iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_j \varepsilon \sigma_{SB} (T_{m-1}^n)^3 ds \right] T_j^n \right\} \\
& = \sum_{e=1}^{NBET} \left\{ \sum_{j=1}^k \left[\iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_j \rho C_p dv \right] T_j^{n-1} \right\} + \Delta t * \sum_{e=1}^{NBET} \left\{ \iiint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} dv \right\} \quad (2.30) \\
& + \Delta t * \sum_{f=1}^{NBFT} \left\{ \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T_a ds \right\} + \Delta t * \sum_{f=1}^{NBFT} \left\{ \iint_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{SB} T_a^4 ds \right\} + \Delta t * \sum_{f=1}^{NBFT} \left\{ \iint_{\Gamma} \alpha_i Flux ds \right\}
\end{aligned}$$

Où $NBET$ est le nombre total d'éléments volumiques de la température,

$NBFT$ est le nombre total d'éléments surfaciques de la température,

$m-1$ est l'indice pour les valeurs à l'itération précédente.

De cette formulation générale de l'équation thermique (2.30) on peut déduire une formulation en régime permanent et une formulation en régime transitoire.

Pour obtenir une formulation en régime permanent il suffit de choisir des modèles nuls pour les propriétés physiques ρC_p . En régime permanent on a le système suivant :

$$[M_T] * [T] = [K_{Qth} + K_{CAL}] \quad (2.31)$$

En régime transitoire on a le système suivant :

$$[L_T] * [T]^n + \Delta t [M_T] * [T]^n = [L_T] * [T]^{n-1} + \Delta t [K_{Qth} + K_{CAL}] \quad (2.32)$$

L_T et M_T sont des matrices réelles symétriques dont les termes peuvent éventuellement dépendre des températures inconnues. T est le vecteur des températures inconnues. K_{Qth} est le vecteur issu de la source thermique. K_{CAL} est un vecteur constant issu des conditions aux limites.

Lorsque l'équation thermique est non linéaire (Albanese 1992), on construit un nouveau système à partir des relations (2.33) et (2.34) obtenu à l'aide de simples combinaisons d'expressions matricielles, mettant en œuvre les dérivées de ces matrices par rapport à l'inconnue T . On définit les matrices suivantes :

$$\left[\frac{\partial}{\partial T} ([M] * [T]) \right] = [M] + [DM] \quad (2.33)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial T} ([L] * [T]) \right] = [L] + [DL] \quad (2.34)$$

On obtient ainsi la matrice Jacobienne dans le cas d'un problème non linéaire transitoire :

$$[J] = [L]^n + [DL]^n - [DL]^{n-1} + \Delta t \left([M]^n + [DM]^n \right) \quad (2.35)$$

Les termes de la matrice Jacobienne sont explicités dans les *Annexes 5 et 6*. Cette matrice Jacobienne sera utilisée dans la méthode de Newton Raphson (*Neagoe 1994, Jänicke 1998*). Dans la matrice Jacobienne, toutes les valeurs de l'inconnue au pas $n-1$ sont connues et toutes les valeurs au pas de temps n sont approchées par les valeurs obtenues à l'itération précédente $m-1$ du processus de Newton-Raphson.

6 Modèle couplé

Nous venons de présenter les méthodes numériques que nous utiliserons pour la modélisation des phénomènes physiques : la méthode intégrale pour l'électromagnétisme et la méthode des éléments finis pour la thermique. Chacune de ces méthodes numériques est basée sur une discrétisation de l'espace qui lui est propre. Les maillages diffèrent. Des interpolations sont donc nécessaires pour transférer les informations entre les deux méthodes c'est à dire pour calculer les termes de couplage.

Dans ce paragraphe nous présentons la modélisation du couplage entre ces deux phénomènes physiques. Pour ce faire nous avons choisi deux approches :

- Le couplage faible des deux méthodes choisies,
- Le couplage fort des deux méthodes choisies.

6.1 Modélisation du couplage faible

Dans le modèle du couplage faible, chacune des équations aux dérivées partielles est résolue séparément, ce qui impose le transfert des résultats d'une équation aux dérivées partielles sur l'autre. Dans un tel cas, chaque système peut mettre en œuvre une variable de type mathématique différent, réel ou complexe, des constantes de temps ou des pulsations distinctes et divers domaines d'étude. Le logiciel couplant la méthode intégrale et la méthode des éléments finis est nommé MALICE3D. Il est basé sur le couplage des deux logiciels du laboratoire MIGEN et FLUX-EXPERT.

6.1.1 Résolution du problème électromagnétique par MIGEN

Les équations aux dérivées partielles électromagnétiques de la méthode intégrale conduisent à la construction d'un système linéaire. La matrice de ce système est composée de coefficients complexes. Le système d'équations linéaires peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{J1} & M_{VI} \\ M_{J2} & 0 \end{bmatrix}}_M * \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{J}_c \\ V_c \end{bmatrix}}_I = \underbrace{\begin{bmatrix} K_S \\ 0 \end{bmatrix}}_K$$

M est une matrice pleine non symétrique complexe qui est composée des termes issus de la loi d'Ohm (M_{JI} , M_{VI}) et de la conservation du courant M_{J2} . Si la conductivité électrique varie avec la température $\sigma(T)$, les termes M_{JI} et M_{VI} vont dépendre de la température.

I est le vecteur complexe des valeurs inconnues constitué des trois composantes de la densité de courant et de la composante du potentiel électrique. K est le vecteur second membre. Il dépend du potentiel électrique de l'inducteur ou du courant imposé dans l'inducteur. Si la conductivité électrique varie avec la température K_s varie avec la température. La résolution de ce système permet d'obtenir les vecteurs densités de courant aux nœuds du maillage en densité de courant et les potentiels électriques aux nœuds du maillage en potentiel électrique.

6.1.2 Résolution du problème thermique par FLUX-EXPERT

De la formulation générale de l'équation thermique présentée précédemment on peut déduire :

- une formulation en régime permanent dont le système est le suivant :

$$[M_T] * [T] = [K_{Qth} + K_{CAL}]$$

- une formulation en régime transitoire dont le système est le suivant :

$$[L_T] * [T]^n + \Delta t [M_T] * [T]^n = [L_T] * [T]^{n-1} + \Delta t [K_{Qth} + K_{CAL}]$$

L_T et M_T sont des matrices réelles dont les termes peuvent éventuellement dépendre des températures inconnues. T est le vecteur des températures inconnues. K_{Qth} est le vecteur issu de la source thermique ($Q_{th} = \frac{J \cdot J^*}{2\sigma}$) qui dépend de la densité de courant calculée par le logiciel MIGEN. K_{CAL} est un vecteur constant issu des conditions aux limites.

6.1.3 Interpolations du couplage faible MALICE3D

Les termes de couplage entre le modèle électromagnétique et le modèle thermique sont le terme source thermique (densité de puissance Joule) et la conductivité électrique fonction de la température. Les maillages des deux modèles étant de nature différente, ces grandeurs seront interpolées d'un maillage à l'autre.

6.1.3.1 Les maillages des deux méthodes

Dans le logiciel MALICE3D, les constructions des maillages du modèle électromagnétique et du modèle thermique sont différentes. Le maillage du modèle électromagnétique est construit par le code MIGEN. Dans le cas 3D les éléments du maillage de la méthode intégrale sont des éléments d'ordre 1. Les régions modélisées en fine épaisseur de peau sont discrétisées en surface. Les éléments sont des quadrilatères à quatre nœuds ou des triangles à trois nœuds. Les régions modélisées en grande peau électromagnétique sont discrétisées en volume. Les éléments sont des hexaèdres à huit nœuds ou des prismes à six nœuds. On construit un premier maillage pour le potentiel scalaire, puis un second maillage pour les densités de courant. Ces deux maillages sont décalés. Le maillage utilisé dans le logiciel

FLUX-EXPERT est construit par le logiciel MIME3D. Le domaine d'étude est discrétisé en éléments d'ordre 2. Dans le cas 3D, il est constituée d'hexaèdres à vingt nœuds et de prismes à 15 nœuds.

Pour la méthode intégrale et la méthode des éléments finis nous utilisons les éléments de référence et les polynômes de Lagrange définis sur ces éléments de référence (Figure 2,4). Les éléments de référence facilitent le calcul des polynômes d'interpolations et de leurs dérivées, le calcul des intégrales. Les coordonnées réelles s'expriment en fonction des coordonnées des éléments de référence à l'aide des polynômes de Lagrange par les relations suivantes :

$$x = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \quad y = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \quad z = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\xi, \eta, \zeta) z_i$$

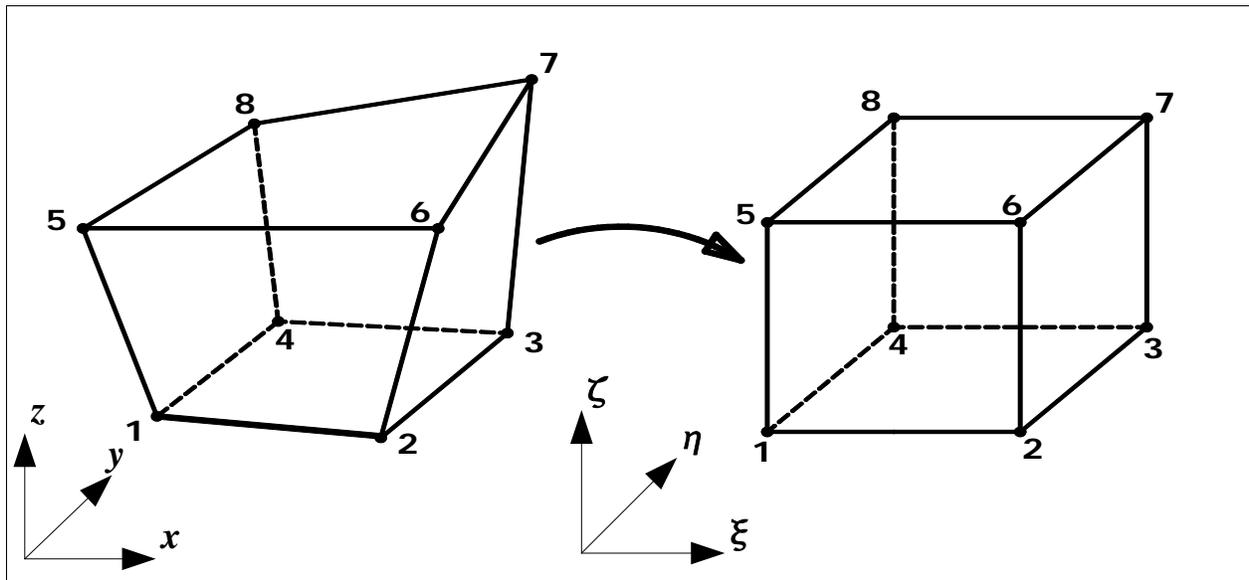


Figure 2.4 Elément réel à gauche - élément de référence à droite

Nous examinons maintenant la mise en œuvre de l'interpolation des termes de couplage :

- Densité de puissance, Migen => Flux-Expert,
- Conductivité électrique, Flux-Expert => Migen.

6.1.3.2 Interpolation de la densité de source thermique (MIGEN => FLUX-EXPERT)

La formulation en éléments finis de la température (2.30) met en évidence la nécessité de calculer la densité de puissance Joule aux points d'intégration du maillage thermique. En chaque point d'intégration d'un élément de FLUX-EXPERT nous interpolons la densité de courant à partir de ses valeurs aux nœuds de la méthode intégrale puis nous calculons la densité de puissance Joule. Nous explicitons l'interpolation suivant les deux modèles du logiciel MIGEN : modèle en fine peau et modèle en grande peau.

1 Interpolation de la densité de puissance Joule dans le cas du modèle en fine épaisseur de peau

Dans ce cas le maillage élément fini est volumique et le maillage de la méthode intégrale

est surfacique. On note Q un des points d'intégration d'un élément T. Q a pour coordonnées (x_Q, y_Q, z_Q) . Pour chaque point d'intégration Q nous recherchons le projeté orthogonal P du point Q sur la frontière du domaine où nous effectuons le couplage. Le vecteur \overrightarrow{PQ} doit être orthogonal à la surface. On garde le point P si $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}$ est négatif sinon on ne le garde pas. Pour trouver ce point P nous effectuons le processus suivant :

- Par chaque point d'intégration Q de l'élément T :
 - Récupération du nombre d'éléments J surfaciques.
 - Pour chaque élément J surfacique numéro k on résout le système non linéaire dont les 2 équations sont $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{A}_1 = 0$ et $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{A}_2 = 0$ par la méthode de Newton-Raphson :
 - n = 1
 - Initialisation des coordonnées $(\xi_p, \eta_p)_n$ du point P dans l'élément de référence,
 - Début des itérations de recherche de P
 - itération n
 - Calcul des coordonnées réelles $(x_p, y_p, z_p)_n$ du point P_n correspondantes aux coordonnées $(\xi_p, \eta_p)_n$ dans l'élément de référence en utilisant les interpolations polynomiales de Lagrange de MIGEN.
 - Calcul des vecteurs tangents \vec{A}_1 et \vec{A}_2 à la surface au point P_n en utilisant les dérivées des polynômes de Lagrange de MIGEN.
 - Calcul de la distance entre les points P_n et Q à partir des coordonnées cartésiennes des deux points,
 - Calcul des deux projections $\overrightarrow{P_nQ} \cdot \vec{A}_1$, $\overrightarrow{P_nQ} \cdot \vec{A}_2$ et $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}$.
 - Les nouvelles valeurs des coordonnées de point de projeté orthogonal d'élément de référence $(\xi_p, \eta_p)_{n+1}$ sont calculés par l'algorithme de Newton-Raphson :
 - Calcul de $(\Delta \xi_p, \Delta \eta_p)_n$ en résolvant le système suivant :
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \overrightarrow{P_nQ} \cdot \vec{A}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \overrightarrow{P_nQ} \cdot \vec{A}_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \overrightarrow{P_nQ} \cdot \vec{A}_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \overrightarrow{P_nQ} \cdot \vec{A}_2}{\partial \eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\Delta \xi_p)_n \\ (\Delta \eta_p)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_nQ} \cdot \vec{A}_1 \\ \overrightarrow{P_nQ} \cdot \vec{A}_2 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$
 - Calcul de $(\xi_p, \eta_p)_{n+1}$ par $(\xi_p, \eta_p)_{n+1} = (\xi_p, \eta_p)_n + (\Delta \xi_p, \Delta \eta_p)_n$
 - Si les composantes de $(\Delta \xi_p, \Delta \eta_p)_n$ ne sont pas suffisamment petites devant 1 on continue les itérations. On revient au début des itérations de recherche de P (itération n).

- Si les composantes de $(\Delta \xi_p, \Delta \eta_p)_n$ sont suffisamment petites on doit vérifier que les coordonnées $(\xi_p, \eta_p)_{n+1}$ sont comprises entre -1 et 1 pour l'élément quadrilatère et entre 0 et 1 pour l'élément triangle. La précision de ce test est de l'ordre de 10^{-6} . Si $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}$ est négatif on a trouvé sur l'élément k un point P projeté orthogonal de Q.
- Passage à l'élément J suivant,
- Fin d'itération sur les éléments surfaciques J.
- Si on a trouvé plusieurs points P on garde celui qui se trouve à la plus faible distance du point Q.

• Calcul de la densité de puissance Joule au point Q lorsque le point P a été trouvé

On connaît l'élément J auquel appartient le point P, les coordonnées du point P dans l'élément de référence sont (ξ_p, η_p) : les polynômes d'interpolation de Lagrange $\alpha_{j,j}$ sont calculés au point (ξ_p, η_p)

- Interpolation de la densité du courant induit au point de coordonnées réduites

$$J_p = \sum_{j=1}^n \alpha_{j,j}(\xi_p, \eta_p) \cdot J_j \quad (2.37)$$

Où n est le nombre des nœuds d'élément référence.

- Interpolation de la conductivité électrique en un point de coordonnées réduites

$$\sigma_p = \sum_{j=1}^n \alpha_{j,j}(\xi_p, \eta_p) \sigma_j \quad (2.38)$$

- Calcul de la densité de puissance Joule au point P projeté orthogonal de Q ($dP_{J(P)}$) .

$$dP_{J(P)} = \frac{J_p \cdot J_p^*}{2\sigma_p} \quad (2.39)$$

- Calcul de la densité de source thermique au point d'intégration (Q_{th}) en appliquant la loi de décroissance exponentielle en fonction de la distance PQ .

$$Q_{th(Q)} = dP_{J(P)} \cdot e^{\frac{-2 \cdot PQ}{\delta}} \quad (2.40)$$

2 Interpolation de la densité de puissance Joule dans le cas du modèle en grande épaisseur de peau

Dans le cas du modèle en grande épaisseur de peau du logiciel MIGEN le maillage de la charge est un maillage volumique, différent du maillage de FLUX-EXPERT. Le calcul de la densité de puissance Joule au point d'intégration Q du maillage de FLUX-EXPERT se fait en deux étapes : la localisation du point Q dans le maillage de MIGEN, puis le calcul de la densité de puissance Joule à partir de l'interpolation de la densité de courant en ce point. L'interpolation de la densité de puissance Joule au point d'intégration Q est réalisée selon le processus suivant :

- Pour chaque point d'intégration Q de l'élément T :
 - Récupération du nombre d'éléments J volumiques.
 - Pour chaque élément J numéro k on résout un système non linéaire à 3 équations par la méthode de Newton-Raphson pour trouver les coordonnées réduites du point Q dans l'élément k.
 - $n = 1$
 - Initialisation des coordonnées $(\xi, \eta, \zeta)_n$ dans l'élément de référence,
 - début de l'itération n
 - Calcul des coordonnées réelles (x_n, y_n, z_n) correspondantes aux coordonnées $(\xi, \eta, \zeta)_n$ dans l'élément de référence en utilisant les interpolations polynomiales de Lagrange de MIGEN.
 - Les nouvelles valeurs des coordonnées dans l'élément de référence $(\xi, \eta, \zeta)_{n+1}$ sont calculés par l'algorithme de Newton-Raphson :
 - Calcul de $(\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta)_n$ en résolvant le système suivant

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial \xi} & \frac{\partial x_n}{\partial \eta} & \frac{\partial x_n}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y_n}{\partial \xi} & \frac{\partial y_n}{\partial \eta} & \frac{\partial y_n}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z_n}{\partial \xi} & \frac{\partial z_n}{\partial \eta} & \frac{\partial z_n}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\Delta \xi)_n \\ (\Delta \eta)_n \\ (\Delta \zeta)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q - x_n \\ y_Q - y_n \\ z_Q - z_n \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

- Calcul de $(\xi, \eta, \zeta)_{n+1}$ par $(\xi, \eta, \zeta)_{n+1} = (\xi, \eta, \zeta)_n + (\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta)_n$
- Si les composantes de $(\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta)_n$ ne sont pas suffisamment petites devant 1 on continue les itérations. On revient au début des itérations de recherche des coordonnées réduites (itération n) si le numéro d'itération ne dépasse pas une valeur fixée. Si le nombre d'itérations est trop grand on passe à l'élément suivant.
- Si les composantes de $(\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta)_n$ sont suffisamment petites on doit vérifier que les coordonnées $(\xi, \eta, \zeta)_{n+1}$ sont comprises entre -1 et 1 pour l'élément hexaèdre et entre 0 et 1 pour l'élément prisme avec une précision de l'ordre de 10^{-6} , on a trouvé les coordonnées réduites dans l'élément k du point Q.
- On prend le premier élément trouvé.

• Calcul de la densité de puissance Joule au point Q lorsqu'on a trouvé le point P

On connaît l'élément J auquel appartient le point Q, les coordonnées du point Q dans l'élément de référence sont (ξ_Q, η_Q, ζ_Q) . Les polynômes d'interpolation de Lagrange de cet éléments sont $\alpha_{J,j}$

- Interpolation de la densité du courant induit au point Q

$$J_Q = \sum_{j=1}^n \alpha_{J,j}(\xi_Q, \eta_Q, \zeta_Q) \cdot J_j \quad (2.42)$$

Où n est le nombre des nœuds d'élément référence J.

- Interpolation de la conductivité électrique en un point de coordonnées réduites

$$\sigma_Q = \sum_{j=1}^n \alpha_{J,j}(\xi_Q, \eta_Q, \zeta_Q) \sigma_j \quad (2.43)$$

- Calcul de la densité de puissance Joule au point Q $(dP_{J(Q)})$.

$$dP_{J(Q)} = \frac{J_Q \cdot J_Q^*}{2 \sigma_Q} \quad (2.44)$$

6.1.3.3 Interpolation de la conductivité électrique (FLUX-EXPERT => MIGEN)

Dans la formulation électromagnétique la conductivité électrique intervient dans l'écriture de la loi d'Ohm locale. Compte tenu de la formulation choisie on a besoin de la conductivité électrique au nœud de densité de courant du maillage de la méthode intégrale :

$$\vec{J}_{i,c} + i_c \sigma_i(T) \omega \iiint_{\Omega} \frac{\mu_0 \vec{J}_{i,c}}{4 \pi r} dv + \sigma_i(T) \vec{\nabla}_i V_c = 0 \quad (2.45)$$

L'interpolation de la conductivité électrique en chaque nœud i de densité de courant du maillage de MIGEN est réalisée en deux étapes : interpolation de la température au nœud i puis calcul de la conductivité électrique au nœud i en utilisant le modèle choisit pour celle-ci. L'interpolation de la conductivité électrique est réalisée selon le processus suivant :

Pour chaque nœud i de maillage MIGEN :

- Chaque nœud i de maillage MIGEN est localisé dans le maillage éléments finis,
- Récupération du nombre d'éléments du logiciel FLUX-EXPERT,
- Pour chaque élément k du logiciel FLUX-EXPERT on recherche les coordonnées réduites du point i dans l'élément k (ξ_i, η_i, ζ_i) . On résout un système non linéaire à 3 équations par la méthode de Newton-Raphson similaire au système (2.41).
- Interpolation de la température T_i de nœud i dans l'élément T avec les polynômes d'interpolation de Lagrange d'ordre 2 $(\alpha_{T,j})$

$$T_i = \sum_{j=1}^n (\alpha_{T,j}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot T_j) \quad (2.46)$$

- Calcul de la conductivité électrique au nœud i en fonction de la température.

$$\sigma_i(T) = \sigma(T_i) \quad (2.47)$$

6.1.4 Algorithmes couplés de MALICE3D

Le logiciel MALICE est construit sur la base de deux logiciels existants : MIGEN en méthode intégrale et FLUX-EXPERT en méthode éléments finis. Chaque logiciel a son propre système d'équations à résoudre. Pour coupler ces logiciels nous avons choisi d'exploiter les possibilités du logiciel FLUX-EXPERT : description et insertion de nouveaux algorithmes de résolution, description et insertion de nouvelles propriétés physiques. Nous avons donc développé une bibliothèque algorithmes qui ont la particularité d'appeler le logiciel MIGEN. De plus pour l'interpolation de la densité de puissance Joule nous avons développé un modèle de propriété. Ainsi nous disposons d'un solveur unique pour modéliser les couplages intervenant dans les systèmes inductifs. Nous présentons ici les algorithmes que nous avons développés :

- l'algorithme statique linéaire : RLSSYMI,
- l'algorithme transitoire linéaire : RTLDMI,
- les algorithmes statiques non linéaire : RSNSMI, RSLSMN,
- les algorithmes transitoires non linéaire : RTNDMI, RTLDMN.

Les deux premiers algorithmes sont les principaux algorithmes que l'on trouve dans la littérature concernant la modélisation des phénomènes couplés.

Algorithme statique linéaire

Cet algorithme permet de résoudre un problème linéaire en régime permanent. Les propriétés physiques (la conductivité électrique et la conductivité thermique) sont constantes. Les systèmes obtenus pour chaque phénomène sont des systèmes linéaires. L'algorithme de résolution de ce problème est un algorithme séquentiel : la première étape est le calcul électromagnétique et la seconde est le calcul thermique en régime statique (Figure 2.5).

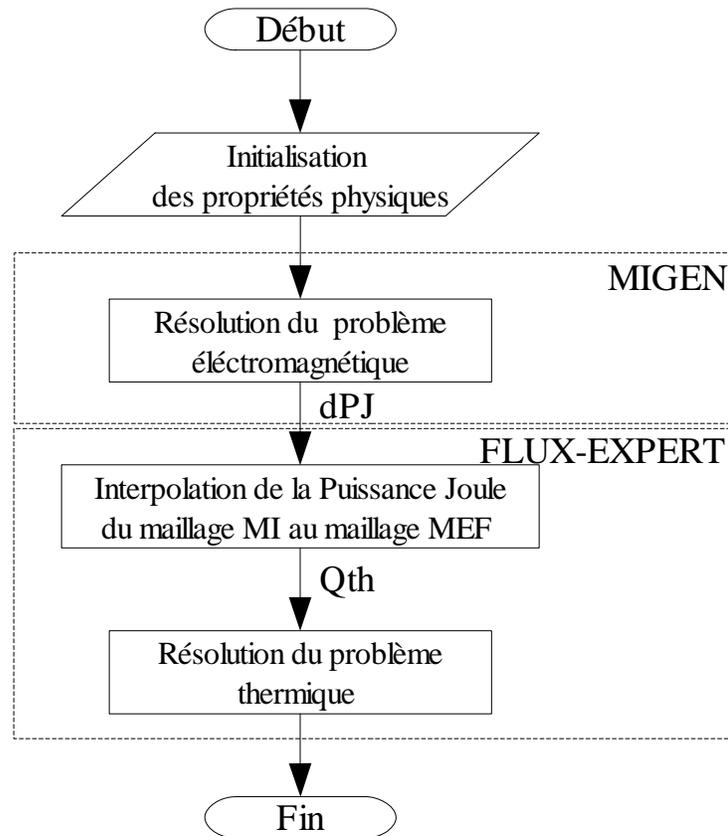


Figure 2.5 Schéma de principe de l'algorithme statique linéaire

Le processus détaillé de cet algorithme de résolution est le suivant :

- Initialisation de la modélisation électromagnétique :
 - initialisation des constantes : μ_0 et ω ,
 - initialisation des données géométriques,
 - initialisation des tables d'intégration,
 - initialisation des propriétés physiques : σ et μ_r ,
 - maillage électromagnétique,
- Résolution électromagnétique par la méthode intégrale MIGEN :
 - Construction du système linéaire complexe dont les inconnues sont J et V.
 - Résolution du système linéaire par la méthode Gauss-Pivot total. On obtient ainsi les valeurs de la densité de courant J et du potentiel électrique V aux nœuds du maillage de la méthode intégrale.
- Résolution thermique par la méthode des éléments finis :
 - Construction du système linéaire réel :
 - Calcul des intégrants de la formulation thermique statique linéaire : pour le terme source on utilise un modèle de propriété qui interpole la densité de puissance Joule aux points d'intégration de FLUX-EXPERT,

- Assemblage du système linéaire réel symétrique bien conditionné,
- Résolution du système linéaire par une méthode itérative (gradient conjugué),
- Stockage des résultats électromagnétique et thermique dans des fichiers.

Algorithme transitoire implicite linéaire

Cet algorithme a été développé pour résoudre un problème linéaire en régime transitoire. Les propriétés physiques qui interviennent dans les phénomènes électromagnétique et thermique sont la conductivité électrique σ , la conductivité thermique k_{th} , la masse volumique ρ et la capacité thermique C_p . Elles ne dépendent pas de la température. Ainsi le phénomène électromagnétique n'évolue pas au cours du temps, la densité de puissance Joule ne dépend pas du temps. Dans ce cas le régime transitoire concerne uniquement le phénomène thermique. Dans cet algorithme on résout séquentiellement le problème électromagnétique (linéaire) et thermique (transitoire linéaire) (Figure 2.6).

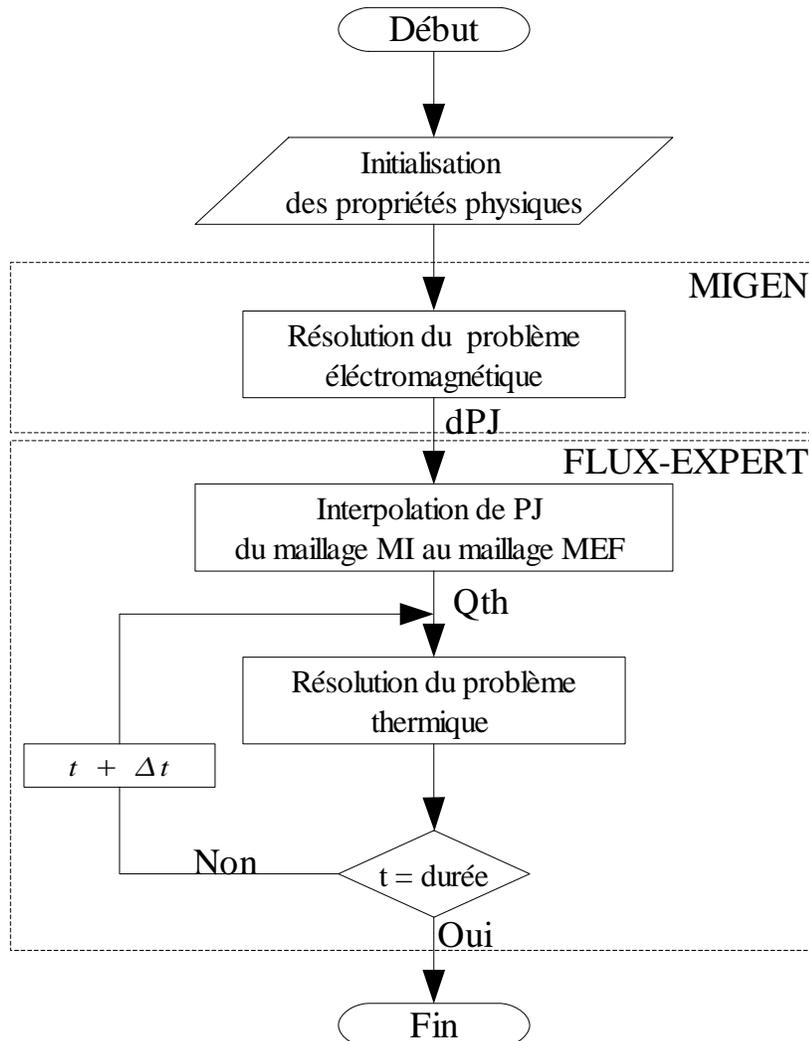


Figure 2.6 Schéma de l'algorithme transitoire implicite linéaire.

Le processus détaillé de cet algorithme de résolution est le suivant :

- Initialisation de la modélisation électromagnétique,
- Résolution électromagnétique par la méthode intégrale MIGEN : Construction et résolution par la méthode Gauss-Pivot total du système linéaire complexe. On obtient ainsi les valeurs de la densité de courant J et du potentiel électrique V aux nœuds du maillage de la méthode intégrale,
- Stockage des grandeurs électromagnétiques,
- Résolution thermique en régime transitoire par un système linéaire transitoire implicite de système réel de FLUX-EXPERT :
 - Initialisation de la température (T_0) ,
 - Initialisation du pas de temps Δt ,
 - ($t^1 = t^0 + \Delta t$)
 - Début de la boucle sur le temps :
 - Construction du système linéaire réel du problème thermique :
 - Calcul des intégrants de la formulation thermique statique linéaire : pour le terme source on utilise le modèle de propriété qui interpole la densité de puissance Joule aux points d'intégration de FLUX-EXPERT,
 - Assemblage du système linéaire réel symétrique bien conditionné,
 - Résolution du système linéaire par une méthode itérative (gradient conjugué), On obtient les valeurs de température T_n à l'instant t^n aux nœuds du maillage thermique.
 - Mise à jour de temps : $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.
 - Mise à jour les conditions aux limites dépendantes du temps,
 - Stockage de la température si $n = k * N$ (stockage tous les N pas de temps),
 - Pas de temps suivant (t^{n+1}) , retour en début de boucle si la durée totale n'est pas atteinte.
- Si la durée totale de l'étude est atteinte on arrête le calcul.

Algorithmes statiques non linéaires : RSNSMI, RSLSMN

L'algorithme RSNSMI permet de résoudre les problèmes magnéto-thermique non linéaire en régime permanent. Les propriétés physiques qui interviennent sont la conductivité électrique σ , la conductivité thermique K_{th} . Les propriétés physiques, conductivités électrique et thermique sont fonction de la température. Ainsi le système obtenu pour le problème thermique est non linéaire et les coefficients du système électromagnétique dépendent de la température.

L'algorithme RSLSMN permet de résoudre les problèmes magnéto-thermique non linéaire en régime permanent. Les propriétés physiques qui interviennent sont la conductivité électrique σ , la conductivité thermique K_{th} . La conductivité électrique est fonction de la température.

La conductivité thermique est constante, on ne prend pas en compte le rayonnement à l'infini. Ainsi le système obtenu pour le problème thermique est linéaire et les coefficients du système électromagnétique dépendent de la température.

Dans ces algorithmes un processus itératif de résolution des deux phénomènes est mis en place. Le schéma de principe est donné (Figure 2.7).

Le processus détaillé de cet algorithme de résolution est le suivant :

- **Etape linéaire** : résolution des problèmes électromagnétique et thermique pour les propriétés physiques initiales :
 - Initialisation de la température aux nœuds du maillage éléments finis,
 - Initialisation de la modélisation électromagnétique,
 - Initialisation de la température aux nœuds de densité de courant du maillage de la méthode intégrale,
 - Résolution électromagnétique initiale par la méthode intégrale MIGEN correspondant à la température initiale : Construction et résolution du système linéaire complexe. On obtient ainsi les valeurs de la densité de courant J et du potentiel électrique V aux nœuds du maillage de la méthode intégrale,
 - Résolution du problème thermique initial :
 - Construction du système linéaire réel du problème thermique : Calcul des intégrants de la formulation thermique statique linéaire : pour le terme source on utilise le modèle de propriété qui interpole la densité de puissance Joule aux points d'intégration de FLUX-EXPERT, le modèle de conductivité thermique utilise la température initiale,
 - Assemblage et résolution du système linéaire réel. On obtient les températures aux nœuds du maillage de FLUX-EXPERT.

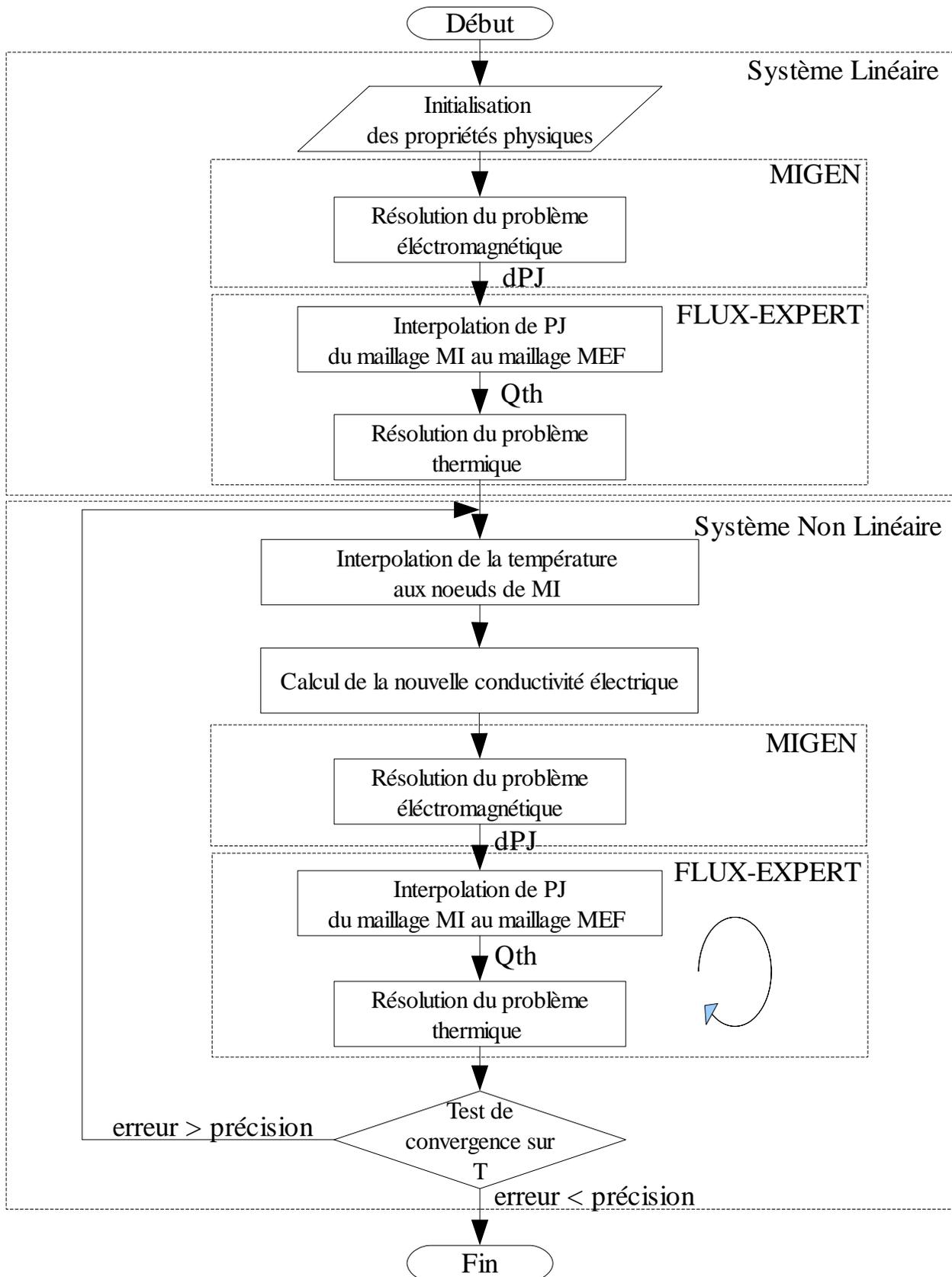


Figure 2.7 Schéma de l'algorithme statique non linéaire.

- **Etape non linéaire** : résolution itérative des phénomènes électromagnétique et thermique. Les modèles des propriétés physiques sont fonction de la température au pas précédent :
 - Boucle de résolution non linéaire, pas de résolution m :
 - Interpolation de la température obtenue au pas précédent (m-1) aux nœuds de densité de courant du maillage de la méthode intégrale,
 - Résolution électromagnétique par la méthode intégrale MIGEN correspondant à la température du pas précédent : Construction et résolution du système linéaire complexe. On obtient ainsi les densités de courant J et les potentiels électriques V aux nœuds du maillage de la méthode intégrale,
 - Résolution du problème thermique au pas m :
 - Construction du système non linéaire réel du problème thermique : Calcul des intégrants de la formulation thermique statique non linéaire : pour le terme source on utilise un modèle de propriété qui interpole la densité de puissance Joule aux points d'intégration de FLUX-EXPERT, le modèle de conductivité thermique utilise la température initiale,
 - Assemblage et résolution par la méthode Newton-Raphson du système non linéaire réel. On obtient les températures du pas m aux nœuds du maillage de FLUX-EXPERT
- Test de la convergence de la température entre deux itérations de couplage : L'écart est calculé par une méthode quadratique :

$$Err_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (T_{i,m} - T_{i,m-1})^2}{\sum_{i=1}^k T_{i,m-1}^2}} \quad (2.48)$$

On note $T_{i,m}$ la température à l'itération m au nœud i,

$T_{i,m-1}$ est la température à l'itération précédente m-1 au point i,

EPS est la précision définie.

- * Si $Err_m < EPS$ la convergence est atteinte, on stocke les résultats obtenus pour le problème électromagnétique et thermique. Fin du programme.
 - * Si $Err_m > EPS$ la convergence n'est pas atteinte,
- Si la convergence n'est pas atteinte, on stocke la température obtenue dans la table des température du pas précédent, on revient en début de boucle pas m+1.

Algorithmes transitoires implicites non linéaires RTNDMI, RTLDMN

L'algorithme RTNDMI est dédié à la résolution de problèmes couplés non linéaire en régime transitoire. Les propriétés physiques intervenant dans cet algorithme sont la conductivité électrique σ , la conductivité thermique K_{th} , la masse volumique ρ , la capacité thermique C_p . Les propriétés physiques (conductivités électrique et thermique...) sont fonctions de la température. A chaque pas de temps le système du problème thermique est non linéaire.

L'algorithme RTLDMN est dédié à la résolution de problèmes couplés non linéaire en régime transitoire. Les propriétés physiques intervenant dans cet algorithme sont la conductivité électrique σ , la conductivité thermique k_{th} , la masse volumique ρ , la capacité thermique C_p . La conductivité électrique est fonction de la température. On ne prend pas en compte le rayonnement à l'infini. A chaque pas de temps le système du problème thermique est linéaire.

Ainsi au cours du temps les phénomènes électromagnétique et thermique évoluent. On utilise un schéma implicite. Le schéma de principe de cet algorithme est donné (Figure 2.8).

Le processus détaillé de cet algorithme de résolution est le suivant :

- Initialisation de la température (T_0),
- Initialisation de la modélisation électromagnétique,
- **La boucle transitoire pas de temps n** (t^n)
 - **L'initialisation linéaire du calcul** : les propriétés physiques sont fonction de la température du pas de temps précédent,
 - Chargement de la table de température FLUX-EXPERT du pas de temps précédent,
 - Interpolation de la température aux nœuds de densité de courant de la méthode intégrale à partir des valeurs aux nœuds de la méthode éléments finis,
 - Construction et résolution du système linéaire complexe électromagnétique de MIGEN avec la conductivité électrique calculée pour la température du pas de temps précédent,
 - Construction et résolution du système linéaire thermique. Les intégrants du systèmes sont calculés pour la température du pas précédent. L'intégrant du terme source est calcul par le modèle d'interpolation aux points d'intégration de la méthode éléments finis.

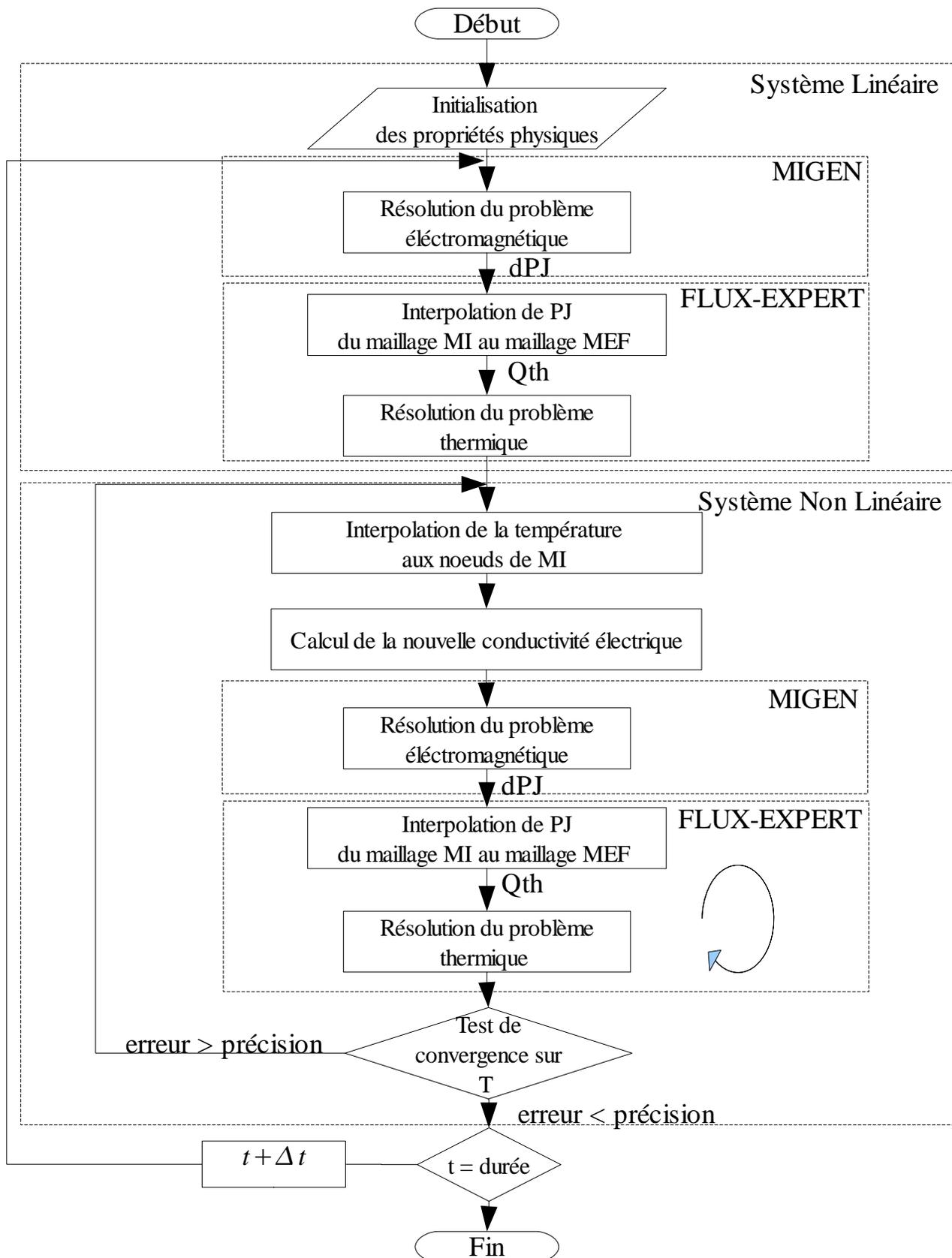


Figure 2.8 Schéma de l'algorithme transitoire implicite non linéaire.

- **La résolution non linéaire** : calcul itératif avec résolution successive par la méthode intégrale et la méthode des éléments finis. A chaque itération les propriétés physiques et la densité de puissance évolue :
 - Boucle de résolution non linéaire, pas de résolution m :
 - Interpolation de la température obtenue au pas précédent $m-1$ aux nœuds de densité de courant du maillage de la méthode intégrale,
 - Résolution électromagnétique par la méthode intégrale MIGEN correspondant à la température du pas précédent $m-1$: Construction et résolution du système linéaire complexe. La conductivité électrique est fonction de la température du pas de résolution précédent,
 - Résolution du problème thermique au pas m :
 - Construction du système non linéaire réel du problème thermique : Calcul des intégrants de la formulation thermique transitoire non linéaire : pour le terme source on utilise le modèle de propriété qui interpole la densité de puissance Joule aux points d'intégration de FLUX-EXPERT, le modèle de conductivité thermique est fonction de la température initiale,
 - Assemblage et résolution par la méthode Newton-Raphson du système non linéaire réel. On obtient les températures du pas m aux nœuds du maillage de FLUX-EXPERT.
 - Test de la convergence de la température entre deux itérations de couplage comme dans l'algorithme statique non linéaire,
 - Si la convergence n'est pas atteinte on continue les itérations du problème non linéaire, on a une nouvelle température T_m , on passe au pas de résolution $m+1$,
 - Si la convergence est atteinte on arrête les itérations non linaires, on stocke les résultats si le pas de temps correspond à un multiple de l'échantillonnage choisi. On passe au pas de temps suivant $n+1$.
- Mise à jour du temps : $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.
- Si la durée totale n'est pas atteinte on retourne au début de la boucle sur le temps,
- Si la durée totale de l'étude est atteinte on arrête le calcul.

6.2 Modélisation du couplage fort

Nous avons développé un logiciel couplant fortement la méthode intégrale et la méthode des éléments finis. Celui-ci a été construit à partir du logiciel MIGEN. Nous l'avons appelé MIGEF. Le couplage fort consiste construire un seul système linéaire dont les équations sont issues de formulations basées sur des méthodes numériques différentes : méthode intégrale et méthode des éléments finis. Le développement a consisté à ajouter au système linéaire du logiciel MIGEN les lignes de la formulation thermique en éléments finis. Nous avons pour l'instant développé un seul algorithme non linéaire correspondant au cas du régime permanent. A chaque itération le système d'équations de MIGEF est résolu par la méthode Gauss-Pivot total. Tout d'abord nous présentons le principe de ce couplage fort. Ensuite nous donnons quelques précisions sur le développement MIGEF.

6.2.1 Principe du couplage fort de MIGEF

Rappelons tout d'abord les équations de notre problème suivant le formalisme de chacune des méthodes :

- Loi d'Ohm (méthode intégrale)

$$\vec{J}_c + i_c \sigma \omega \iiint_{\Omega} \frac{\mu_0 \vec{J}_c}{4\pi r} dv + \sigma \vec{\nabla} V_c = 0$$

- Conservation du courant (méthode intégrale)

$$\iint_{\Gamma} \vec{J}_c \cdot \vec{n}_{ext} ds = 0$$

- Equation de l'énergie totale (méthode des éléments finis), nous n'introduisons pas d'échange radiatif aux frontières

$$\iiint_{\Omega} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} T dv + \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T ds = \iiint_{\Omega} \alpha_i \frac{J \cdot J^*}{2\sigma} dv + \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T_a ds + \iint_{\Gamma} \alpha_i Flux ds$$

Notre objectif est de construire à partir de ces équations un seul système d'équations. Les inconnues de notre problème sont les trois composantes de la densité de courant, un potentiel électrique et une température. Les grandeurs électromagnétiques sont complexes, la température est réelle. L'inconnue de notre système est un vecteur dont toutes les composantes doivent bien sur avoir le même type (*Molfino 1990, Driesen 1999*). Nous la choisissons de type complexe ainsi dans notre vecteur inconnue nous aurons les composantes complexes de la densité de courant, le potentiel électrique complexe et la température complexe dont la partie imaginaire devra être nulle. Le système obtenu sera non linéaire : les propriétés physiques dépendent de la température et la source thermique dépend de la densité de courant. Dans cette approche nous utiliserons une méthode de résolution itérative. Pour décrire ce problème par un seul système d'équations nous avons deux choix possibles :

Source de chaleur placée dans le second membre :

Nous construisons un système d'équations en plaçant la source de l'équation thermique au second membre du système. Nous obtenons le système suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{J1} & M_{V1} & 0 \\ M_{J2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_T \end{bmatrix}}_M * \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{J}_c \\ V_c \\ T_c \end{bmatrix}}_I = \underbrace{\begin{bmatrix} K_S \\ 0 \\ Q_{th} + CAL \end{bmatrix}}_K \quad (2.49)$$

La matrice M est complexe non symétrique et pleine. Les blocs M_{J1} , M_{V1} correspondent à l'écriture de la loi d'Ohm issue de la formulation par la méthode intégrale. Les coefficients de ces deux blocs dépendent de la température par l'intermédiaire de la conductivité électrique. Celle-ci sera calculée par un modèle fonction de la température au pas précédent, interpolée aux nœuds de densité de courant. Le bloc M_{J2} correspond à la conservation du

courant. Le bloc M_T est issu de la formulation de Galerkin de l'énergie totale, il dépend de la température. I est le vecteur complexe des inconnues. K est le vecteur complexe du second membre. Le bloc K_S est proportionnel au potentiel vecteur créé par les régions où la densité de courant est imposée, il dépend de la température par l'intermédiaire de la conductivité électrique. Le bloc $CAL = \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T_a ds + \iint_{\Gamma} \alpha_i Flux ds$ correspond aux conditions aux limites thermiques. Le bloc $Q_{th} = \iiint_{\Omega} \alpha_i \frac{(J.J^*)_{m-1}}{2\sigma} dv$ est le terme source de l'équation thermique : il dépend de l'inconnue densité de courant.

Source de chaleur placée dans le premier membre

Nous construisons un système en plaçant le terme source de l'équation de la chaleur dans le premier membre du système. Il s'agit de la densité de puissance Joule $\left(\frac{J.J^*}{2\sigma}\right)$. Elle dépend de l'inconnue. Nous obtenons alors le système suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{J1} & M_{V1} & 0 \\ M_{J2} & 0 & 0 \\ M_{Qth} & 0 & M_T \end{bmatrix}}_M * \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{J}_c \\ V_c \\ T_c \end{bmatrix}}_I = \underbrace{\begin{bmatrix} K_S \\ 0 \\ CAL \end{bmatrix}}_K \quad (2.50)$$

La matrice M est complexe non symétrique et pleine. Les blocs M_{J1} , M_{V1} , M_{J2} , M_T , K_S et CAL sont identiques à ceux de la mise en équation précédente. Les coefficients de la matrice dépendent de l'inconnue car le système est non linéaire. Ainsi dans un processus itératif les coefficients du système sont calculés en fonction de l'inconnue au pas précédent. Le bloc M_{Qth} est dû à la source de chaleur. Les termes de ce bloc s'expriment en fonction de la densité de courant du pas précédant m-1. Il s'écrit sous la forme suivante :

$M_{Qth} = \iiint_{\Omega} \alpha_{T,i} \cdot \alpha_{J,j} \frac{(J^*)_{m-1}}{2\sigma} dv$ avec $\alpha_{T,i}$ polynôme de Lagrange du maillage élément fini de la température et $\alpha_{J,j}$ polynôme de Lagrange du maillage de la densité de courant.

6.2.2 Interpolations du couplage fort

La méthode intégrale s'appuie sur un système de maillages décalés en densité de courant et potentiel électrique. De plus lorsque l'épaisseur de peau électromagnétique est faible le maillage est surfacique. Le maillage de la méthode des éléments finis est différent de celui de la méthode intégrale. Ainsi les termes de couplage : conductivité électrique et densité de puissance Joule doivent être interpolés d'un maillage à l'autre.

6.2.2.1 Interpolation de la densité de source thermique

La densité de source thermique aux points d'intégration (Q) des éléments finis d'ordre 2 du maillage thermique doit être calculée à partir des densités de courants induits aux nœuds J des éléments J d'ordre 1. On va présenter l'interpolation de la densité de source thermique par chaque cas :

Cas de la source de chaleur en second membre :

Calcul de l'intégrant $\iiint_{e,T} \alpha_i \frac{J \cdot J^*}{2\sigma} dv$ sur un élément fini du maillage en température (élément d'ordre 2). Dans ce cas la démarche est la même que celle décrite pour le couplage faible.

- Lecture des coordonnées des nœuds T,
- Pour chaque point d'intégration Q on calcule la densité de puissance Joule par interpolation, la démarche est celle décrite dans le cas du couplage faible :
 - Pour le cas de la fine épaisseur de peau : pour chaque point d'intégration Q, on recherche le projeté orthogonale P sur la frontière du domaine et l'élément surfacique J auquel il appartient. Les polynômes d'interpolation de Lagrange α_j permettent de calculer en ce point P la densité de courant, puis la densité de puissance Joule $dP_{J(P)}$ au point P (2.37),(2.39). La densité de puissance au point Q s'en déduit par une loi de décroissance exponentielle (2.40) :

$$Q_{th(Q)} = dP_{J(P)} \cdot e^{-\frac{2 \cdot PQ}{\delta}}$$
 - Pour le cas de la grande épaisseur de peau : chaque point d'intégration Q est localisé dans le maillage en densité de courant de la méthode intégrale. Les polynômes de Lagrange de l'élément densité de courant sont utilisés pour calculer la densité de courant au point Q (2.42),(2.43). On en déduit la densité de puissance Joule au point Q (2.44).

Cas de la source de chaleur au premier membre

Calcul de l'intégrant $\iiint_{e,T} \alpha_{T,i} \cdot \alpha_{J,j} \frac{(J^*)_{m-1}}{2\sigma} dv$ sur un élément fini du maillage en température (élément d'ordre 2). Dans ce cas la démarche diffère de celle décrite pour le couplage faible.

- Lecture des coordonnées des nœuds T,
- Pour chaque point d'intégration (Q) de coordonnées réduites (ξ_Q, η_Q, ζ_Q)
 - Calcul de la température du pas précédent au point Q en utilisant les polynômes de Lagrange α_T de l'élément T, calcul de la conductivité électrique au point Q.
 - Calcul de la densité de courant au point Q par interpolation entre les deux maillages. On a deux cas :
 - Cas de la fine peau : recherche du projeté orthogonal P sur le maillage de surface en densité de courant. P appartient à un élément e_J , soit (ξ_P, η_P) les

coordonnées réduites de P dans cet élément et α_j les polynômes d'interpolation de cet élément. Interpolation de la densité de courant $J_{P,m-1}$ au point P à partir des valeurs de densités au pas précédent. La contribution du point d'intégration Q à l'intégrant est de la forme suivante :

$$\alpha_{T,i}(\xi_Q, \eta_Q, \zeta_Q) \left[\alpha_{J,j}(\xi_P, \eta_P) \frac{J_{P,m-1}^*}{2\sigma} \cdot e^{\frac{-2 \cdot PQ}{\delta}} \right] * W_Q \quad (2.51)$$

Où W_Q est le poids d'intégration de la méthode de Gauss

- Cas de la grande peau : localisation du point Q dans le maillage en densité de courant. Q appartient à un élément e_j , soit $(\xi_{Q,j}, \eta_{Q,j}, \zeta_{Q,j})$ les coordonnées réduites de Q dans cet élément e_j et α_j les polynômes d'interpolation de cet élément. Interpolation de la densité de courant $J_{Q,m-1}$ au point Q à partir des valeurs de densités au pas précédent. La contribution du point d'intégration Q à l'intégrant est de la forme suivante :

$$\alpha_{T,i}(\xi_Q, \eta_Q, \zeta_Q) \left[\alpha_{J,j}(\xi_{Q,j}, \eta_{Q,j}, \zeta_{Q,j}) \frac{J_{P,m-1}^*}{2\sigma} \right] * W_Q \quad (2.52)$$

Dans ce processus on remarquera que les points d'intégration d'un élément T n'appartiennent pas tous au même élément J. Par conséquent ce terme de couplage est délicat à mettre en œuvre.

6.2.2.2 Interpolation de la conductivité électrique

La variation de la température entraîne une modification de la conductivité électrique. Dans la formulation électromagnétique la conductivité électrique est calculée aux nœuds des éléments de densités de courant. Cette propriété dépend de la température. On interpole la température aux nœuds de densités de courant pour ensuite calculer la conductivité électrique. Les tâches d'interpolation sont les suivantes :

- Chaque nœud i de densité de courant est localisé dans le maillage thermique,
- Interpolation de la température au nœud i en utilisant les polynômes d'interpolation de l'élément T (2.46),
- Calcul la conductivité électrique au nœud i en fonction de la température (2.47).

6.2.3 Algorithme couplé de MIGEF

Nous avons développé un algorithme non linéaire en régime permanent pour modéliser le couplage fort de la méthode intégrale et de la méthode des éléments finis. Celui-ci est valable pour les deux mises équations présentées précédemment (2.49) et (2.50). Le schéma de principe de cet algorithme est présenté (Figure 2.9).

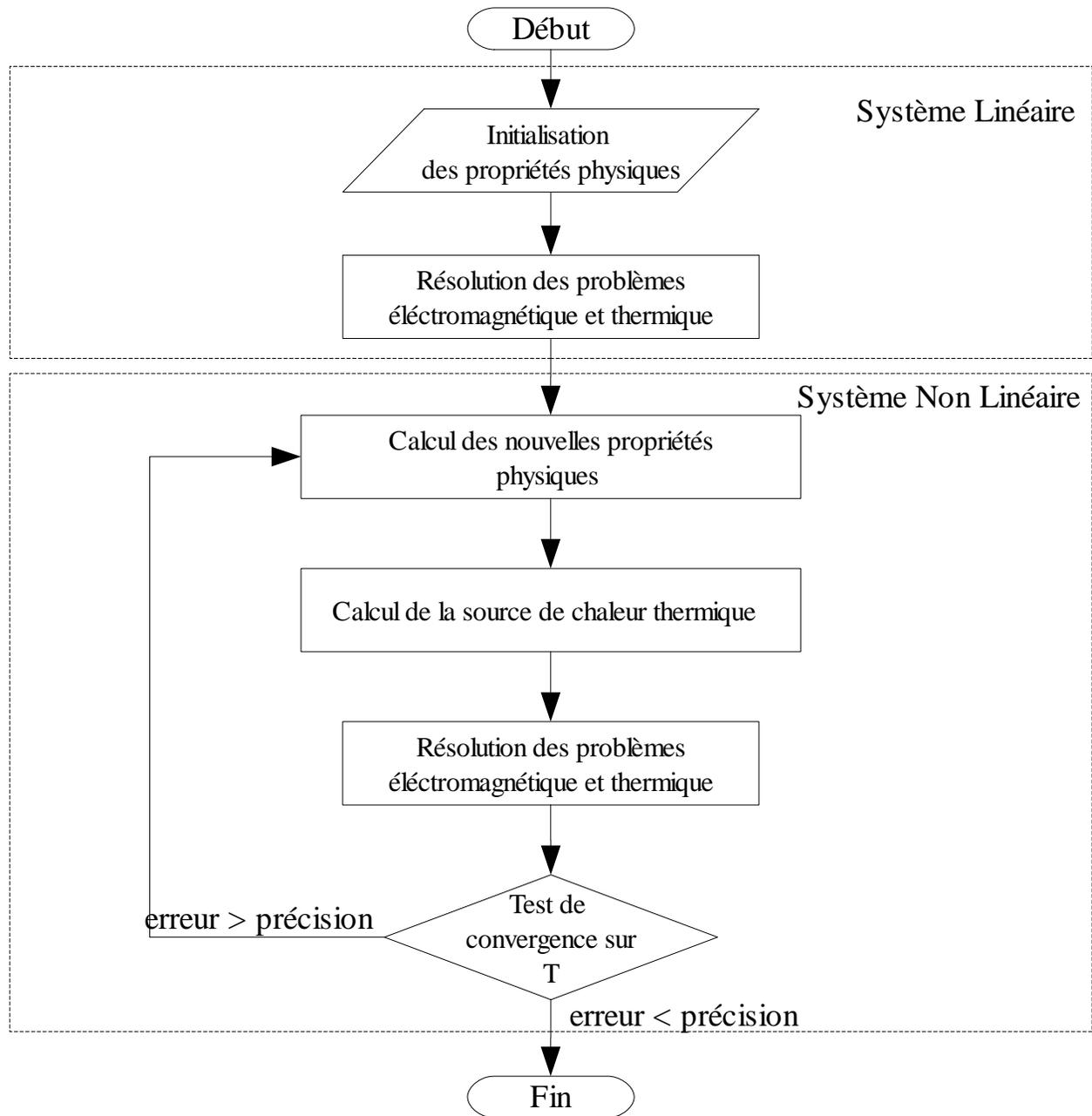


Figure 2.9 Schéma de l'algorithme non linéaire du couplage fort.

Les propriétés physiques intervenant dans cette formulation sont la conductivité électrique σ et la conductivité thermique K_{th} . Elles sont fonction de la température. Le procédé de résolution de cet algorithme est le suivant :

– **Etape linéaire :**

- Initialisation de la modélisation électromagnétique et thermique : constantes, données géométriques, maillage,
- Initialisation de la température T et des grandeurs électromagnétiques J,V,
- Initialisation des propriétés physiques,
- Construction du système complexe d'équations électromagnétique thermique : lignes correspondant à la loi d'Ohm, lignes correspondant à la conservation du courant, lignes correspondant aux échanges thermiques. Le terme source est nul,
- Résolution du système par la méthode Gauss avec Pivot total : on obtient J, V et T.

– **Etape non linéaire :**

- Itération m
- Construction du système complexe d'équations électromagnétique thermique :
 - lignes correspondant à la loi d'Ohm : interpolation de la température de l'itération précédente aux nœuds de densité de courant et application du modèle de la conductivité électrique,
 - lignes correspondant aux échanges thermiques :
 - conductivité thermique fonction de la température en fonction de la température de l'itération précédente,
 - terme source calculé à partir de l'interpolation de la densité de courant calculé à l'itération précédente au point d'intégration du maillage en T, deux possibilités :
 - Intégrant de la densité de puissance Joule au second membre : (2.40) et (2.44),
 - Intégrant de la densité de puissance Joule au premier membre : pour chaque point d'intégration d'un élément T on a la contribution du nœud j de densité de courant selon les relations (2.51), (2.52).
- Résolution du système par la méthode Gauss-Pivot total,
- Test de la convergence de la température entre deux itérations de couplage, calcul de l'écart quadratique :

$$Err = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (T_{i,m} - T_{i,m-1})^2}{\sum_{i=1}^k T_{i,m-1}^2}} \quad (2.53)$$

Si $Err < EPS$; la convergence atteinte,

Si $Err > EPS$; la convergence non atteinte,

Où $T_{i,m}$ est la température à l'itération m au nœud i,

$T_{i,m-1}$ est la température à l'itération précédente m-1 au nœud i,

EPS est la précision choisie.

- Si la convergence n'est pas atteinte, on pass au pas d'itération suivant : $m = m+1$, retour en début d'itération non linéaire.

6.2.4 Développement du logiciel MIGEF

Dans ce paragraphe nous donnons quelques précisions sur le développement du logiciel MIGEF. Le logiciel MIGEF a été construit sur la base du logiciel MIGEN qui utilise sur une base de donnée programmable *mime.bd* développée par Y. Du Terrail. L'ensemble des structures du logiciel sont décrites dans le fichier MIGEN.STR. Dans un premier temps, nous avons introduit de nouvelles structures dédiées au problème thermique et au couplage.

L'étape de construction du maillage a été modifiée : nous avons introduit la possibilité pour chaque objet de construire un maillage thermique. Un module de maillage des objets de type hexaèdre à l'ordre 2 a été développé. Les étapes de la construction du maillage thermique de MIGEF sont :

- Création les nœuds T dans chaque objet (hexaèdre) du modèle thermique. A l'hexaèdre nous associons un élément de référence et à partir d'un nombre de nœuds choisi pour chaque direction nous définissons une discrétisation de cet élément. Les coordonnées des nœuds T sont calculées par les polynômes d'interpolation de Lagrange à partir des coordonnées des sommets de l'objet hexaèdre.
- Construction des éléments. On a deux types d'éléments les éléments de volumes et les éléments de frontières. Les éléments de volumes sont des hexaèdres à 8 nœuds aux sommets et 12 nœuds aux centres des arêtes. Les éléments de surface sont des quadrilatères à 4 nœuds aux sommets et 4 nœuds aux centres des arêtes. Aux éléments de frontières on associe la face de l'objet à laquelle il appartient.
- Construction des éléments voisins.

La construction du système a été modifiée : nous avons introduit la construction des lignes correspondant à l'équation thermique. Deux formulations sont disponibles correspondant aux constructions de système (2.49) et (2.50). En explicitant la température par interpolation polynomiale la formulation de l'équation thermique sans le terme de rayonnement s'exprime selon la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^{NBET} \left\{ \sum_{j=1}^k \left[\iiint_{\Omega_e} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dv \right] T_j \right\} + \sum_{f=1}^{NBFT} \left\{ \sum_{j=1}^k \left[\iint_{\Gamma_e} \alpha_i \alpha_j h_{cv} ds \right] T_j \right\} = \sum_{e=1}^{NBET} \left\{ \iiint_{\Omega_e} \alpha_i Q_{th} dv \right\} \\
 + \sum_{f=1}^{NBFT} \left\{ \iint_{\Gamma_e} \alpha_i h_{cv} T_a ds \right\} + \sum_{f=1}^{NBFT} \left\{ \iint_{\Gamma_e} \alpha_i Flux ds \right\} \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

Pour les termes du premier membre $NBET$ est le nombre d'élément T auxquels appartiennent les nœuds i et j. Pour les termes du second membre $NBET$ est le nombre d'élément T auxquels appartient le nœud i. Dans cette formulation les polynômes α_i et α_j sont les polynômes de Lagrange d'ordre 2 des éléments T.

Nous pouvons maintenant expliciter les termes du système lorsque nous insérons la formulation thermique élément fini. Nous avons deux systèmes matriciels :

Lorsque la source de chaleur est en second membre nous avons :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} M_{J1} & M_{V1} & 0 \\ M_{J2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \iiint_{\Omega_e} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dv + \iint_{\Gamma_e} \alpha_i \alpha_j h_{cv} ds \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \vec{J}_c^m \\ V_c^m \\ T_c^m \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} K_S \\ 0 \\ \underbrace{\iiint_{\Omega_e} \alpha_i \frac{J^{m-1} \cdot J^{*m-1}}{2\sigma} dv}_{Q_{th}} + \underbrace{\iint_{\Gamma_e} \alpha_i h_{cv} T_a ds + \iint_{\Gamma} \alpha_i Flux ds}_{CAL} \end{bmatrix} \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

Dans cette méthode, la construction du terme Q_{th} à l'itération m est calculée à partir de la densité de courant à l'itération précédente m-1 et de la température à l'itération précédente.

Lorsque la densité de puissance Joule est au premier membre du système nous avons :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} M_{J1} & M_{V1} & 0 \\ M_{J2} & 0 & 0 \\ -\underbrace{\iiint_{\Omega_e} \alpha_i \alpha_{J,j} \frac{(J^*)^{m-1}}{2\sigma} dv}_{M_{Q_{th}}} & 0 & \underbrace{\iiint_{\Omega_e} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dv}_{MT_i} + \underbrace{\iint_{\Gamma_e} \alpha_i \alpha_{T,j} h_{cv} ds}_{MT_j} \end{bmatrix} \\
 * \begin{bmatrix} \vec{J}_c^m \\ V_c^m \\ T_c^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_S \\ 0 \\ \underbrace{\iint_{\Gamma_e} \alpha_i h_{cv} T_a ds + \iint_{\Gamma_e} \alpha_i Flux ds}_{CAL} \end{bmatrix} \quad (2.56)
 \end{aligned}$$

Dans cette méthode, le terme $M_{Q_{th}}$ de la matrice à l'itération m est calculé à partir

l'interpolation du conjuguée de la densité de courant à l'itération précédente m-1.

La construction des termes du système de la formulation thermique est donc réalisée selon le processus suivant :

- Création de la structure ligne correspondant au nœud thermique i,
- Initialisation à 0 de tous les termes de la ligne,
- Récupération des éléments T auxquels le nœud i appartient,
- Calcul des intégrales des termes matriciels et des termes du second membre. Les calculs des intégrales sont effectuées sur les éléments de référence par la méthode de Gauss.
 - Le terme de conduction sur l'élément Ω_e s'écrit ainsi :

$$\iiint_{\Omega_e} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dv = \iiint_{\Omega_e} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot \vec{\nabla} \alpha_j(\xi, \eta, \zeta) |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (2.57)$$

Où $|J|$ est le déterminant de matrice Jacobienne au point (ξ, η, ζ) de l'élément de référence,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} .$$

En utilisant la méthode de Gauss nous obtenons la sommation suivante :

$$\sum_{l=1}^{NPI} \left\{ k_{th} * \vec{\nabla} \alpha_i(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \cdot \vec{\nabla} \alpha_j(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) * |J| * W_l \right\}$$

Où NPI est le nombre des points d'intégration, (ξ_l, η_l, ζ_l) sont les coordonnées dans l'élément de référence du point d'intégration l, W_l est le poids d'intégration de Gauss-Legendre au point d'intégration l.

- Le terme de convection s'exprime :

$$\iint_{\Gamma_e} \alpha_i \alpha_{T,j} h_{cv} ds = \iint_{\Gamma_e} \alpha_i(\xi, \eta) \alpha_j(\xi, \eta) h_{cv} |J| d\xi d\eta$$

En utilisant la méthode de Gauss nous obtenons la sommation suivante :

$$\sum_{l=1}^{NPI} \left\{ h_{cv} * \alpha_i(\xi_l, \eta_l) \cdot \alpha_j(\xi_l, \eta_l) * |J| * W_l \right\}$$

- Les termes des conditions aux limites s'exprime :

$$\iint_{\Gamma_e} \alpha_i h_{cv} T_a ds = \iint_{\Gamma_e} \alpha_i(\xi, \eta) h_{cv} T_a |J| d\xi d\eta$$

$$\iint_{\Gamma_e} \alpha_i Flux ds = \iint_{\Gamma_e} \alpha_i(\xi, \eta) Flux |J| d\xi d\eta$$

En utilisant la méthode de Gauss nous obtenons les sommations suivantes :

$$\sum_{l=1}^{NPI} \left\{ \alpha_i(\xi_l, \eta_l) * h_{cv} * T_a * |J| * W_l \right\}$$

$$\sum_{l=1}^{NPI} \left\{ \alpha_i(\xi_l, \eta_l) * Flux * |J| * W_l \right\}$$

- Le terme source au second membre :

$$\iiint_{\Omega_e} \alpha_i Q_{th} dv = \iiint_{\Omega_e} \alpha_i(\xi, \eta, \zeta) Q_{th} |J| d\xi d\eta d\zeta$$

En utilisant la méthode de Gauss nous obtenons la sommation suivante :

$$\sum_{l=1}^{NPI} \left\{ \alpha_i(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) * Q_{th} * |J| * W_l \right\}$$

- Le terme source au premier membre : le calcul de cette intégrale est beaucoup plus complexe, puisque chaque point d'intégration de l'élément T doit être localisé dans le maillage J. Ainsi, lorsqu'un point d'intégration l de coordonnées ξ_l, η_l, ζ_l est localisé dans un élément J, nous calculons une contribution à plusieurs termes de la matrice correspondant aux nœuds J de cet élément. Soit j un des nœuds de cet élément J, $\xi'_l, \eta'_l, \zeta'_l$ les coordonnées du point d'intégration l dans l'élément J. La contribution au coefficient matriciel i,j est la suivante :

- dans le cas grande peau :

$$\alpha_i(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) * \alpha_{J,j}(\xi'_l, \eta'_l, \zeta'_l) * \sum_{k=1}^{nbj} \left\{ \alpha_{J,k}(\xi'_l, \eta'_l, \zeta'_l) * \frac{(J_k^*)^{m-1}}{2\sigma} \right\} * |J| * W_l$$

- dans le cas fine peau :

$$\alpha_i(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) * \alpha_{J,j}(\xi'_l, \eta'_l, \zeta'_l) * \sum_{j=1}^{nbj} \left\{ \alpha_{J,k}(\xi'_l, \eta'_l, \zeta'_l) * \frac{(J_k^*)^{m-1}}{2\sigma} \right\} * e^{\frac{-2.n}{\delta}} * |J| * W_l$$

La conductivité électrique est aussi interpolée au point d'intégration $\xi'_l, \eta'_l, \zeta'_l$

Lorsque le système est construit, celui-ci est résolu par la méthode de Gauss avec Pivot total. On obtient ainsi les densités de courant, le potentiel électrique et la température aux nœuds du maillage à l'itération m.

Le logiciel MIGEF calcule les mêmes grandeurs que le logiciel MIGEN : impédance électrique, puissance Joule. Nous avons ajouté le calcul de l'intégrale de la source thermique

Q_{th} :

$$Q_{thg} = \sum_{e=1}^{NBET} \iiint_{\Omega} Q_{th} dv = \sum_{e=1}^{NBET} \iiint_{\Omega} Q_{th} |J| d\xi d\eta d\zeta$$

En utilisant la méthode de Gauss nous obtenons la sommation suivante :

$$Q_{thg} = \sum_{e=1}^{NBET} \sum_{l=1}^{NPI} \left\{ \alpha_i(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) * Q_{th} * |J| * W_l \right\}$$

La grandeur Q_{th} doit être interpolée à partir des densités de courant. Le calcul de cette grandeur nous permet de tester la précision des interpolations.

7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la démarche de modélisation 3D des procédés d'élaboration par induction que nous avons choisie de suivre. Elle s'appuie sur le couplage de deux méthodes numériques : la méthode intégrale pour l'électromagnétisme et la méthode des éléments finis pour la thermique, l'hydrodynamique ou la thermo-hydraulique. L'avantage de la méthode intégrale réside dans le fait que seules les parties électriquement actives sont modélisées. Elle permet de simuler aisément au sein d'une même configuration des régions en fine peau électromagnétique et en grande peau électromagnétique. Nous avons pour les autres phénomènes physiques choisi la méthode projective de Galerkin des éléments finis dont le formalisme est général.

Dans ce contexte nous avons abordé deux approches pour la modélisation des phénomènes couplés :

- Le couplage faible basé sur une résolution alternative et itérative des deux méthodes numériques. Ceci a conduit au développement de MALICE3D, logiciel à caractère général, permettant de décrire et modéliser divers procédés d'élaboration par induction.
- Le couplage fort qui consiste à construire un seul système d'équations à partir des deux méthodes numériques. Deux formulations ont ainsi été développées. La première est obtenue en plaçant les sources thermiques dues à la densité de puissance Joule dans le second membre du système. Cette formulation est en réalité semblable à un couplage faible. La seconde formulation est obtenue en plaçant les sources thermiques dues à la densité de puissance Joule dans le premier membre du système. Cette formulation est plus délicate à développer car les phénomènes électromagnétique et thermique ont des maillages différents. Cette formulation traduit un couplage fort entre les deux phénomènes modélisés.

Dans les prochains chapitres nous présenterons des modélisations réalisées avec ces couplages.

CHAPITRE 3

Validation et exploitation du couplage faible

MALICE3D

1 Introduction

Dans le chapitre précédent le principe du couplage faible de la méthode intégrale et de la méthode des éléments finis a été présenté. Nous avons mis en place le logiciel MALICE3D résultant du couplage faible des logiciels MIGEN et FLUX-EXPERT. Le phénomène électromagnétique tridimensionnel est résolu par la méthode intégrale de MIGEN qui a été développé par A. Gagnoud. Le modèle thermique (ou et hydrodynamique) tridimensionnel est résolu par la méthode des éléments finis de FLUX-EXPERT. Le code FLUX-EXPERT possède un générateur d'équations permettant de décrire des formulations obtenues par méthode projective de Galerkin d'équations aux dérivées partielles. De plus FLUX-EXPERT dispose d'un outil permettant le développement et la description de nouveaux algorithmes de résolution et de nouvelles propriétés physiques. Nous avons exploités ces possibilités. Une bibliothèque d'algorithmes de résolution itérative permettant de traiter des problèmes en régime permanent ou transitoire du procédé d'élaboration par induction a été construite. Des modules d'interpolation entre maillage éléments finis et maillage de la méthode intégrale ont été développés. Le logiciel MALICE3D a la généralité du logiciel FLUX-EXPERT. Il offre la possibilité de décrire et sélectionner les phénomènes physiques à résoudre en les couplant avec le modèle électromagnétique. Ainsi, nous disposons d'un outil général de modélisation des systèmes inductifs MALICE3D.

Dans ce chapitre nous présentons tout d'abord brièvement le processus de modélisation de ce logiciel ensuite un ensemble de modélisations visant d'une part à la validation des modules développés et d'autre part à étudier l'influence de certains paramètres.

2 Processus d'une modélisation couplée avec MALICE3D

MALICE3D permet de résoudre un problème préalablement défini par les préprocesseurs de MIGEN et FLUX-EXPERT. Nous allons voir le processus de modélisation d'un problème couplé :

- la préparation des données,
- la résolution du problème couplé,
- l'exploitation des résultats.

2.1 Préparation des données pour le couplage

Le solveur de MALICE3D s'appuie sur deux jeux de données :

- le fichier de données de la méthode intégrale "*nom.DONM*" utilisé pour la modélisation par le logiciel MIGEN,
- le fichier de description du problème éléments finis "*nom.PRO*" utilisé pour la modélisation par le logiciel FLUX-EXPERT.

2.1.1 Préparation des données de MIGEN

Le logiciel MIGEN dispose d'un module "**ex_dmigen**" pour décrire le problème à modéliser. L'ensemble des données sont stockées dans un fichier "*nom.DONM*". Ce fichier

contient la description géométrique de l'installation constituée d'un ensemble d'objets, les paramètres du maillage, les modèles choisis pour chaque objet (fine peau ou grande peau), les régions associées à un ou plusieurs objets, les propriétés physiques de chaque région, les paramètres du problème électromagnétique (fréquence, phase, courant inducteur...), l'algorithme du modèle électromagnétique sans contrainte ou avec contraintes (par exemple la puissance ou la capacité peuvent être imposées).

2.1.2 Préparation des données de FLUX-EXPERT

Pour décrire un problème pour le logiciel FLUX-EXPERT il faut choisir une équation et un maillage. La préparation d'une équation nécessite la mise en œuvre de deux modules de FLUX-EXPERT :

- **gnoyau** : permet de décrire les variables utilisables dans l'écriture des formulations. Ces informations sont regroupées dans une base de données "BASEGN.NOY". Elles sont constituées :
 - des identificateurs d'inconnues et de propriétés physiques,
 - d'opérateurs, permettant la description et la résolution d'un problème (opérateurs de propriétés, intégrant, algorithmes de résolution...),
 - des matériaux,
 - des modèles de propriétés physiques.
- **genere** : est utilisé pour construire la description formelle d'une équation par l'assemblage d'opérateurs présents dans la base de données "BASEGN.NOY". La construction d'une équation impose la description de la totalité des identificateurs et des opérateurs nécessaires. *genere* crée un fichier "équation.EQU".

Pour la construction du maillage nous avons utilisé le module "*mime3d*" développé par Y. Du Terrail. La description de la géométrie s'appuie sur des objets 3D (*Du Terrail Couvat 2000*). La construction du maillage passe par une projection 2D de l'ensemble des objets, un maillage 2D de la projection et une construction des éléments 3D par élévation. Le maillage obtenu est constitué d'éléments d'ordre 2. Les régions utiles pour la modélisation ultérieure sont décrites dans ce module.

La description d'un problème est ensuite réalisée à l'aide du module "*prophy*". Celui-ci permet de faire le choix d'une équation et d'un maillage. Puis, les modèles de propriétés du problème sont décrites et affectées aux régions définies dans le maillage. Les conditions aux limites sont introduites ainsi que le choix de l'algorithme de résolution. On construit un fichier "*nom.PRO*".

Dans le cas de la mise en œuvre de MALICE3D :

- l'algorithme choisi sera un des algorithmes de couplage que nous avons développés.
- le modèle de propriété physique permettant de calculer la densité de puissance Joule pour le problème électromagnétique utilisera le module d'interpolation décrit dans le chapitre précédent.

2.2 Résolution du modèle couplé par MALICE3D

malice3d est le solveur de résolution d'un problème couplé à partir du fichier de données "*nom.DONM*" du MIGEN et du fichier problème "*nom.PRO*" de FLUX-EXPERT. Ce logiciel met en oeuvre les algorithmes de couplage faible décrits dans la section 6.1 du chapitre 2. Il résout alternativement le problème électromagnétique et thermique. Les résultats obtenus en température sont stockés dans le fichier "*nom.PRO*" et pour les grandeurs électromagnétiques dans les fichiers ("*nom .SOLM*" et "*nom.TABM*").

2.3 Exploitation des résultats obtenus par MALICE3D

Pour exploiter les résultats obtenus nous disposons de deux outils :

- ***ex_trmigen*** : ce module permet de tracer les résultats obtenus avec le logiciel MIGEN. Il permet de tracer le maillage (éléments V, éléments J, nœuds du maillage) et les vecteurs densités de courant en surface des objets.
- ***xpmalice3d*** : ce module est une adaptation au couplage du module d'exploitation du FLUX-EXPERT. Il permet la représentation des grandeurs du modèle éléments finis : température, propriétés physiques, notamment la densité de puissance Joule interpolée à partir du modèle électromagnétique. Les résultats peuvent être visualisés par des isovaleurs en 3D ou sur coupe. Des courbes d'une grandeur peuvent être tracées le long d'un chemin. Une grandeur peut aussi être intégrée sur une région.

2.4 Equations thermiques du modèle couplé

Afin de modéliser des problèmes inductifs avec le logiciels MALICE3D nous avons décrit avec le module *genere* de FLUX-EXPERT deux équations aux dérivées partielles thermiques. Ces deux équations sont les suivantes :

- THERS3D.EQU : équation thermique 3D en régime statique,
- THERT3D.EQU : équation thermique 3D en régime transitoire.

2.4.1 THERS3D

Cette équation permet résoudre des problèmes couplés magnéto-thermiques linéaires ou non linéaires en régime permanent. Elle dispose des trois algorithmes suivants :

RLSSYMI : Réel Linéaire Statique Symétrique couplage avec MIGEN. Cet algorithme permet de résoudre séquentiellement le problème électromagnétique et le problème thermique. Il est limité au cas des propriétés constantes.

RSLSMN : Réel Statique Linéaire Symétrique couplage avec MIGEN. Cet algorithme permet de résoudre itérativement le problème électromagnétique et thermique. Le problème thermique est linéaire. Il permet de résoudre un problème où la conductivité électrique varie avec la température.

RSNSMI : Réel Statique Non linéaire Symétrique couplage avec MIGEN. Cet algorithme permet de résoudre itérativement le problème électromagnétique et le problème thermique. Il permet de résoudre un problème où les propriétés varient avec la température.

2.4.2 THERT3D

Cette équation permet résoudre des problèmes couplés magnétothermiques linéaire ou non linéaire en régime transitoire. Elle dispose des trois algorithmes suivants :

RTLMI : Réel Transitoire implicite Linéaire Symétrique couplage avec MIGEN. Cet algorithme permet de résoudre séquentiellement le problème électromagnétique et le problème thermique transitoire.

RTLDMN : Réel Transitoire implicite Linéaire Dissymétrique couplage avec MIGEN. Cet algorithme permet à chaque pas de temps de résoudre itérativement le problème électromagnétique et le problème thermique linéaire.

RTNDMI : Réel Transitoire implicite Non linéaire Dissymétrique couplage avec MIGEN. Cet algorithme permet à chaque pas de temps de résoudre itérativement le problème électromagnétique et le problème thermique.

3 Validation du logiciel MALICE3D

L'objectif de ce paragraphe est de valider l'ensemble des modules développés lors de l'élaboration de ce logiciel couplé. Nous analyserons le comportement des interpolations et des algorithmes.

3.1 Test de l'interpolation de la méthode intégrale vers la méthode des éléments finis

Ce test concerne l'interpolation de la densité de puissance Joule depuis le maillage de la méthode intégrale vers le maillage de la méthode des éléments finis. Pour tester l'interpolation de la densité de puissance Joule nous nous plaçons dans le cas d'un problème magnéto-thermique linéaire en régime permanent. Le problème thermique est régi par l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot (-k_{th} \vec{\nabla} T) - Q_{th} = 0 \quad (3.1)$$

Les propriétés physiques intervenant dans ce problème (conductivité électrique et conductivité thermique) sont indépendantes de la température. Les conditions aux limites du problème thermique sont des échanges convectifs. Nous utilisons l'algorithme séquentiel RLSSYMI pour résoudre ce problème.

Du point de vue électromagnétique nous étudions le cas de la fine peau et le cas de la grande peau.

3.1.1 Cas de la fine épaisseur de peau

Nous choisissons une configuration simple constituée des éléments suivants (Figure 3.1) :

- une charge hexaédrique de section $0,05\text{ m} \times 0,05\text{ m}$ et de hauteur $0,1\text{ m}$,
- un inducteur composé de 3 spires filiformes carrées $0,08\text{ m} \times 0,08\text{ m}$ dont les positions verticales respectives sont les suivantes $0,07\text{ m}$, $0,08\text{ m}$ et $0,09\text{ m}$.

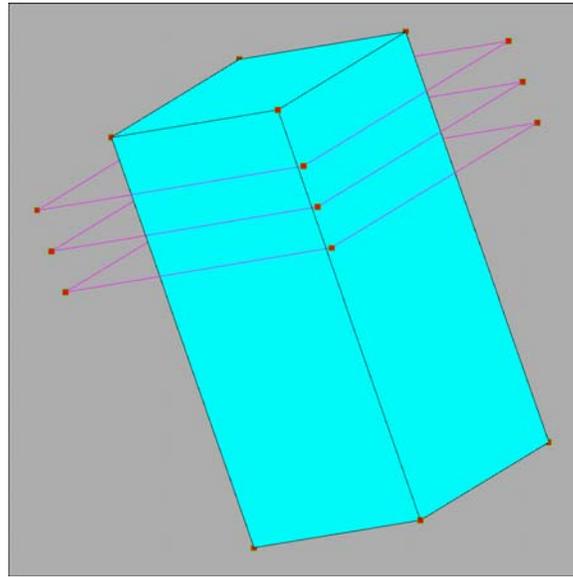


Figure 3.1 Géométrie étudiée

La charge est en inox. Les propriétés physiques de la charge sont constantes. La conductivité électrique vaut $1,43 \times 10^6 (\Omega \cdot m)^{-1}$. La perméabilité relative vaut 1. La conductivité thermique vaut $40 W/m/K$.

Les conditions aux limites thermiques sur toutes les surfaces de la charge sont des échanges convectifs. Le coefficient d'échange sur les faces supérieures et inférieures vaut $100 W/m^2/K$. Le coefficient d'échange sur les parois latérales vaut $250 W/m^2/K$. La température ambiante vaut $300 K$.

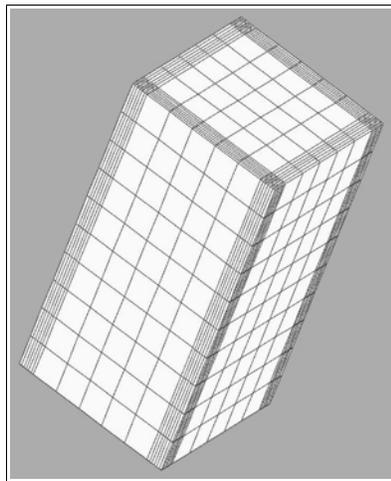
Dans l'inducteur le courant est fixé à $934 A$, la fréquence vaut $150 kHz$. Dans la charge l'épaisseur de peau électromagnétique vaut $1,08 mm$. Elle est faible devant la taille de la charge, le paramètre d'écran est grand devant 1 : $R\omega = 2 \frac{L^2}{\delta^2} = \mu\sigma\omega L^2 = 1071,67$.

Nous comparons les résultats obtenus pour différents maillages de la charge. Le maillage de la méthode intégrale est un maillage surfacique en quadrilatères d'ordre 1 (modèle fine peau). C'est un maillage régulier. Le maillage de la méthode des éléments finis est volumique en hexaèdres d'ordre 2. Pour chacun des maillages le nombre d'éléments de chaque méthode est précisé dans le tableau 3.1. Nous sommes dans le cas fine peau aussi nous avons tester pour le problème thermique divers types de maillage (Figure 3.2) :

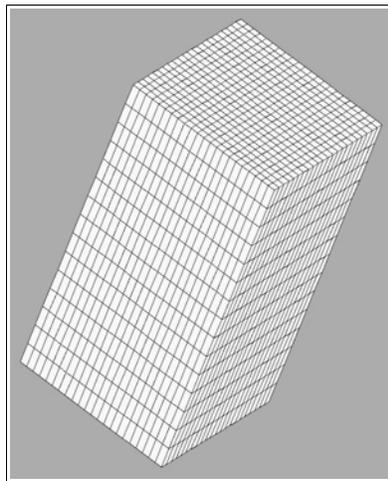
- maillage régulier, cas du maillage 2
- maillage affiné en périphérie, dans ce cas nous avons au voisinage des parois latérales verticales créé une zone de $5mm$ d'épaisseur maillée plus finement. C'est le cas des maillages 1, 3 et 5.
- maillage affiné en périphérie et au niveau de la paroi supérieure, dans ce cas deux zones de faible épaisseur ont été créés : une au voisinage des parois latérales verticales et une au voisinage de la paroi supérieure. C'est le cas des maillages 4 et 6.

Tableau 3.1 : Maillages de la méthode intégrale et de la méthode des éléments finis

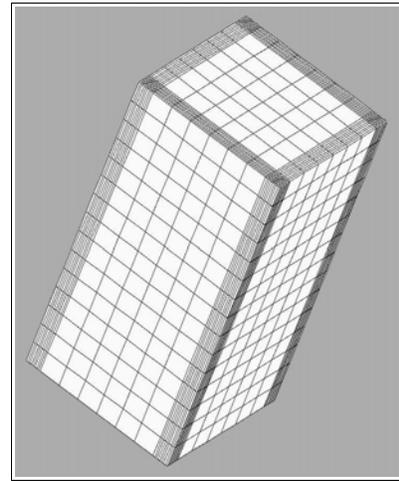
Maillages	MIGEN			FLUX-EXPERT	
	Nb éléments V	Nb éléments J	Taille Système	Nb éléments T	Taille Système
Maillage n°1	230 (6*6*10)	312	767	4148	13536
Maillage n°2	462 (8*8*14)	576	1495	9548	32591
Maillage n°3	462 (8*8*14)	576	1495	9548	32591
Maillage n°4	462 (8*8*14)	576	1495	7232	24395
Maillage n°5	960 (11*11*20)	1122	3037	19488	68585
Maillage n°6	960 (11*11*20)	1122	3037	16412	57431



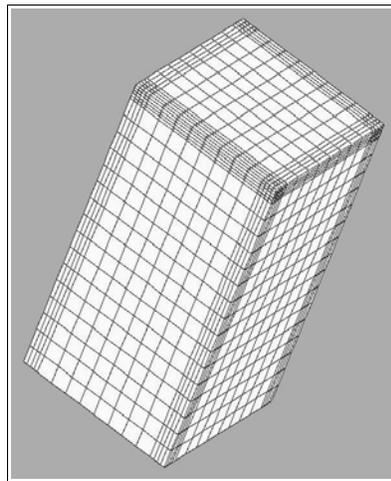
a) maillage n°1



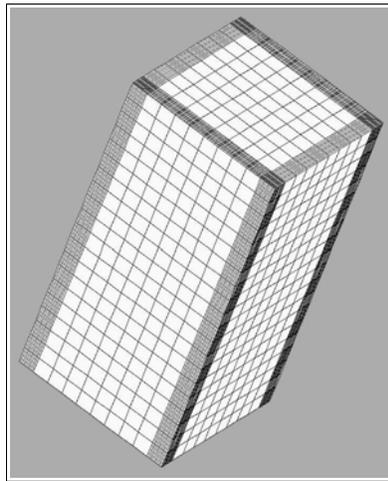
b) maillage n°2



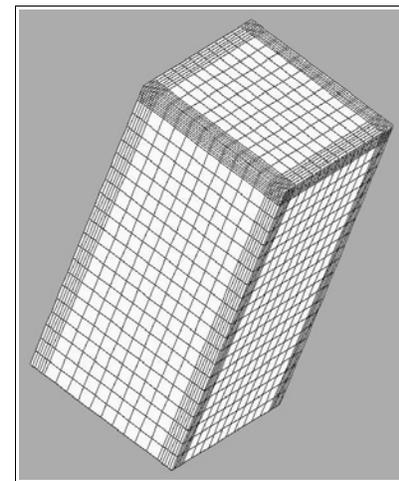
c) maillage n°3



d) maillage n°4



e) maillage n°5



f) maillage n°6

Figure 3.2 Maillages éléments finis du problème thermique

Dans le tableau 3.2 nous présentons les résultats globaux obtenus pour les différents maillages étudiés. $P_{J,MI}$ représente la puissance Joule calculée par le logiciel MIGEN, $P_{J,FE}$ représente la puissance Joule calculée par le logiciel FLUX-EXPERT à partir des densités de puissance interpolées aux points d'intégration de FLUX-EXPERT. Nous définissons l'écart relatif entre ces deux valeurs $\Delta P/P = |P_{J,MI} - P_{J,FE}| / P_{J,MI}$. Dans ce tableau sont données aussi la température maximale T_{max} et la température minimale T_{min} .

Tableau 3.2 : Influence du nombre d'éléments dans le cas fine épaisseur de peau.

Maillages	$P_{J,MI}(W)$	$P_{J,FE}(W)$	$\Delta P/P$	$T_{max}(K)$	$T_{min}(K)$
Maillage n°1	4894,49	4715,41	$3,66 \cdot 10^{-2}$	1598.19	721,550
Maillage n°2	4935,87	4791,16	$2,93 \cdot 10^{-2}$	1629.62	726,761
Maillage n°3	4935,87	4804,48	$2,66 \cdot 10^{-2}$	1630,97	727,910
Maillage n°4	4935,87	4836,45	$2,01 \cdot 10^{-2}$	1639,54	730,306
Maillage n°5	4952,88	4827,95	$2,52 \cdot 10^{-2}$	1646,67	729,315
Maillage n°6	4952,88	4846,97	$2,14 \cdot 10^{-2}$	1652,17	730,691

Les résultats présentés dans le tableau 3.2 mettent en évidence l'influence du maillage sur les résultats obtenus. La puissance Joule $P_{J,MI}$ dépend du nombre des éléments de MIGEN, elle converge lorsqu'on augmente le nombre d'éléments. Le résultat du maillage 5 est proche de la convergence. La puissance Joule $P_{J,FE}$ dépend de l'interpolation entre les éléments de MIGEN et les éléments de FLUX-EXPERT. Sur la figure 3.3 nous avons représenté l'évolution de $P_{J,FE}$ en fonction de la taille du système électromagnétique. Globalement la puissance Joule interpolée converge vers une valeur voisine de $4850W$ lorsqu'on augmente la taille du système. De plus pour une taille de système électromagnétique donnée la nature du maillage thermique modifie $P_{J,FE}$. Le maillage affiné en périphérie et en partie supérieure donne les valeurs $P_{J,FE}$ les plus proches de la puissance Joule $P_{J,MI}$. Plus les maillages électromagnétique et thermique sont fins plus l'écart relatif $\Delta P/P$ est petit. En comparant les résultats obtenus pour les maillages 2, 3 et 4 nous constatons que l'écart relatif $\Delta P/P$ diminue de manière significative (de 2,93% à 2%). Ainsi en affinant le maillage thermique au voisinage de la surface de la charge nous améliorons l'interpolation. Les régions où le maillage thermique est affiné correspondent aux régions où la densité de puissance Joule est la plus importante. Les températures maximales dépendent bien sur de la puissance transmise. Ainsi la qualité du maillage thermique influence la modélisation du couplage et la température obtenue. Dans le cas de la fine peau le choix du maillage thermique est délicat.

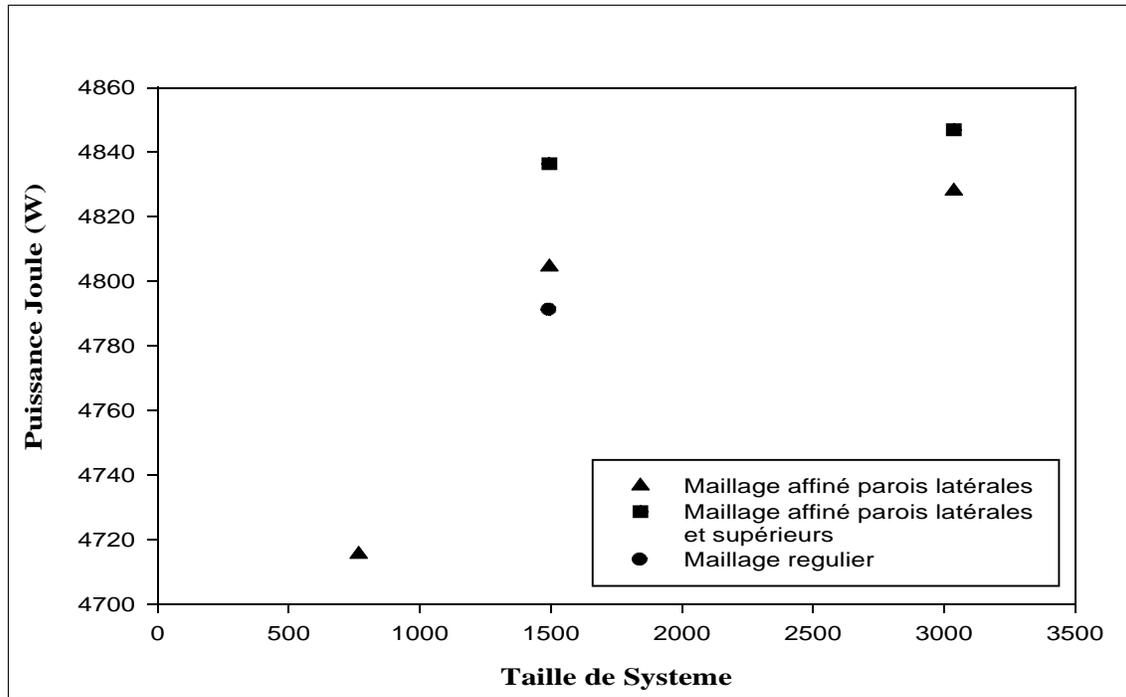


Figure 3.3 Comparaison la puissance Joule par la taille de système.

Examinons maintenant dans le cas du maillage n° 3 l'évolution de la densité de puissance Joule interpolée en fonction de la distance à la surface (Figure 3.4). Nous comparons l'interpolation à la loi décroissance exponentielle que nous traçons à partir de la valeur de la densité de puissance Joule donnée par le logiciel MIGEN au point de coordonnées (0, -0,025, 0). L'écart relatif entre la densité de puissance Joule en ce point et la valeur interpolée vaut $\Delta dP/P = 7,16 \cdot 10^{-7}$. Cette valeur correspond à la précision des modèles de propriétés physiques dans le logiciel FLUX-EXPERT. Nous constatons donc que l'interpolation locale est réalisée avec précision.

Les différences que nous observons sur la puissance viennent du mode d'intégration qui diffère d'une méthode à l'autre. L'intégration dans le logiciel MIGEN est réalisée selon la relation (2.20) que nous rappelons ici :

$$P_{J,MI} = \sum_{e=1}^{NBETS} \left[\frac{\delta_e}{2} \cdot \iint_{S_e} \frac{J_{c,s} \cdot J_{c,s}^*}{2\sigma} dS \right] \quad (3.2)$$

Dans le logiciel FLUX-EXPERT l'intégration est effectuée selon la relation suivante :

$$P_{J,FE} = \sum_{e=1}^{NBET} \left[\iiint_{V_e} \frac{J_{c,P} \cdot J_{c,P}^*}{2\sigma} \cdot e^{-\frac{2 \cdot n}{\delta_e}} dV \right] \quad (3.3)$$

avec NBET le nombre d'éléments T , $J_{c,P}$ la densité de courant interpolée au point P, projeté orthogonal d'un point d'intégration de l'élément de température.

Ces deux formules (3.2) et (3.3) conduisent à des valeurs différentes en présence de faibles rayons de courbure ou en présence d'angle. Les écarts relatifs que nous avons observé sont

directement liés au mode de calcul de la puissance Joule qui diffère d'un logiciel à l'autre. Ceci correspond aussi aux zones où le modèle fine peau par décroissance exponentielle est mis en défaut. Rappelons que ce modèle est équivalent à l'impédance de frontière 1D. *AYMARD (1997)* a mis en évidence les erreurs sur la puissance dues à une modélisation avec l'impédance de frontière 1D sur des quadrilatères et les limites de validité de ce modèle suivant le rapport L/δ .

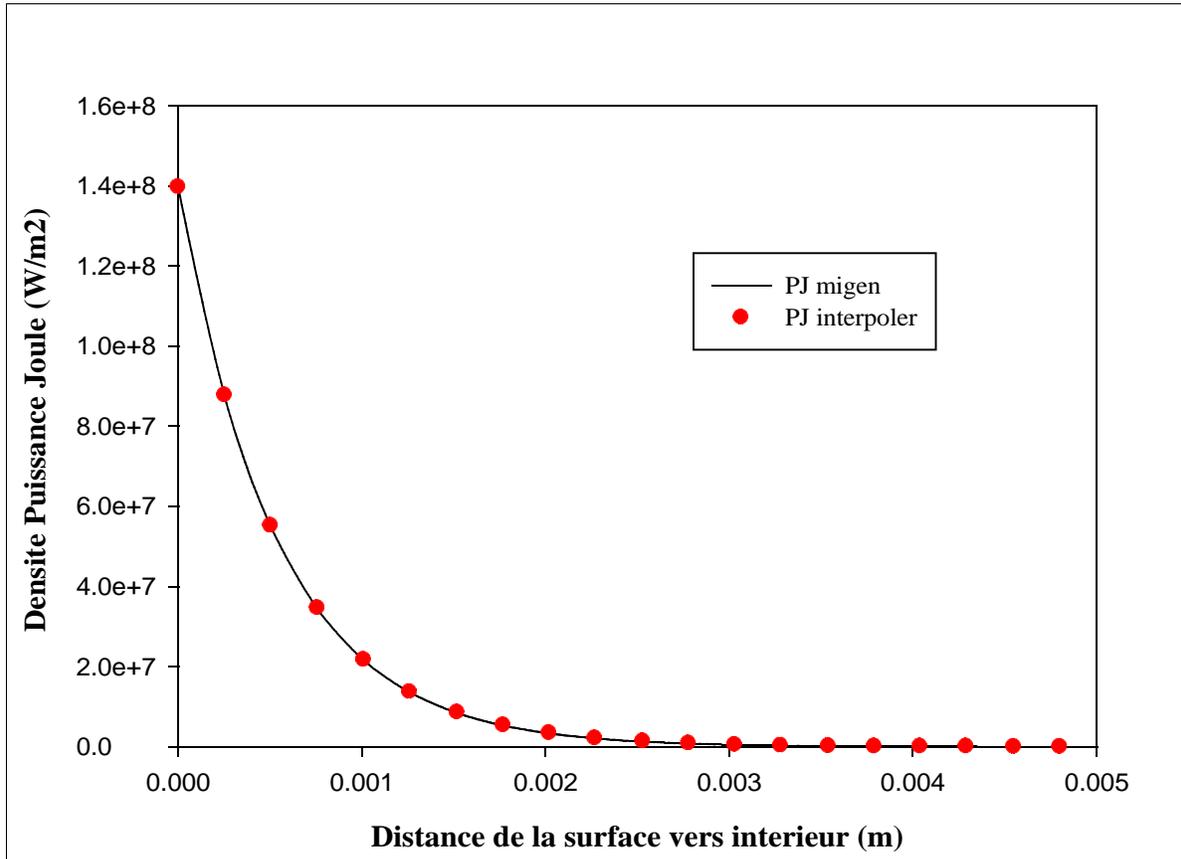


Figure 3.4 Décroissance de la densité de puissance Joule.

Nous présentons maintenant la répartition de la densité de puissance Joule et de la température sur des plans de coupe et sur l'enveloppe 3D de la charge pour plusieurs maillages. La répartition sur l'enveloppe (Figure 3.5) présente un maximum de densité de puissance face à l'inducteur. On voit l'influence du maillage sur cette répartition. Le résultat obtenu dans le cas du maillage n°1 (maillage grossier) met en évidence des variations brutales de la densité de puissance d'un élément à l'autre. Les résultats obtenus pour les maillages n°5 et n°6 sont très proches. La répartition de la densité de puissance Joule sur une coupe verticale (Figure 3.6) met en évidence l'effet de peau. La densité de puissance Joule est maximale en surface et vaut $0,151 \cdot 10^{10}$. Elle décroît très rapidement à l'intérieur de la charge et devient nulle au centre de celle-ci. Le maximum de densité de puissance est localisé au voisinage des parois latérales dans la partie haute de la charge.

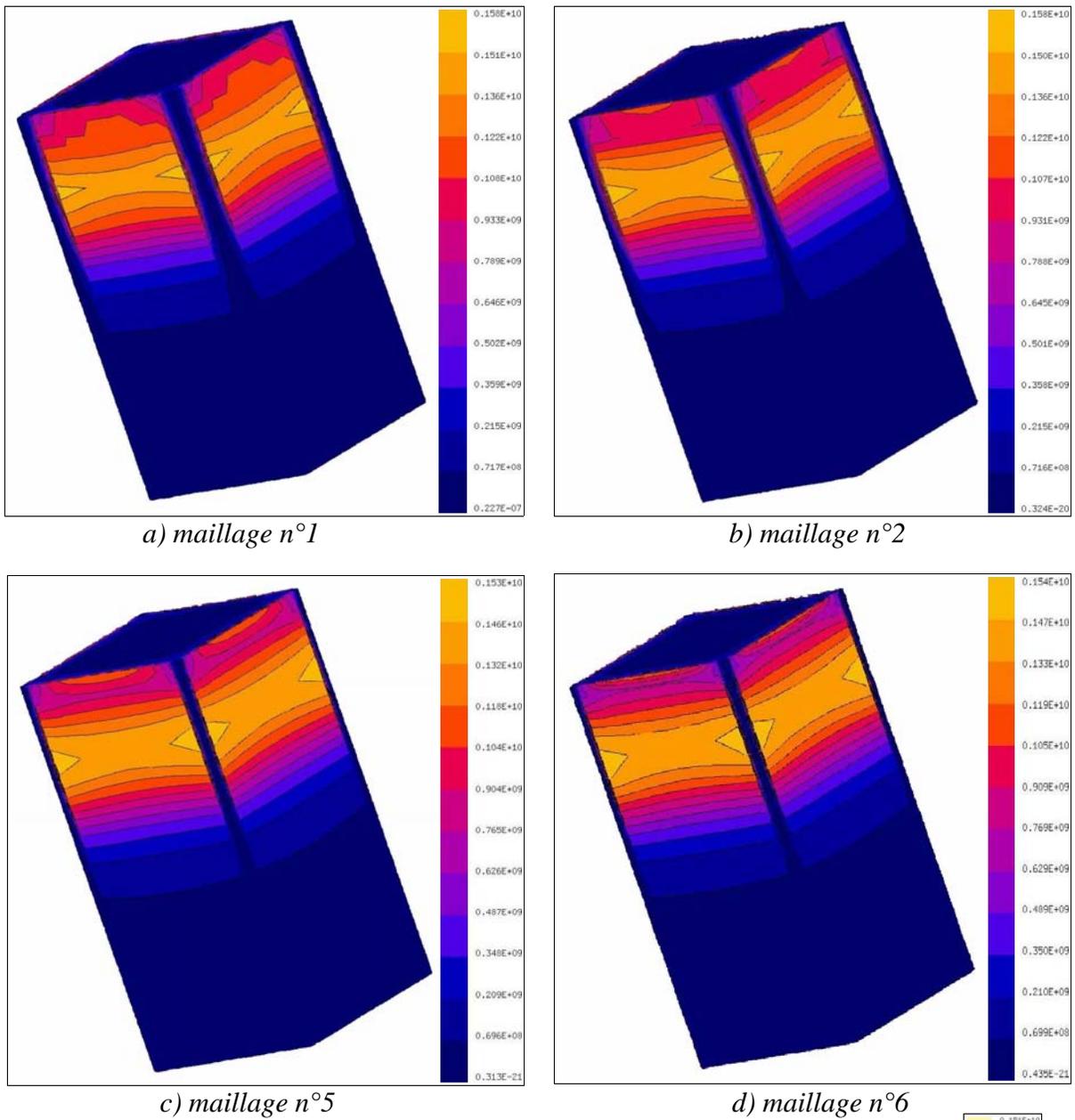


Figure 3.5 Isovaleurs de la densité de puissance Joule sur l'enveloppe 3D.

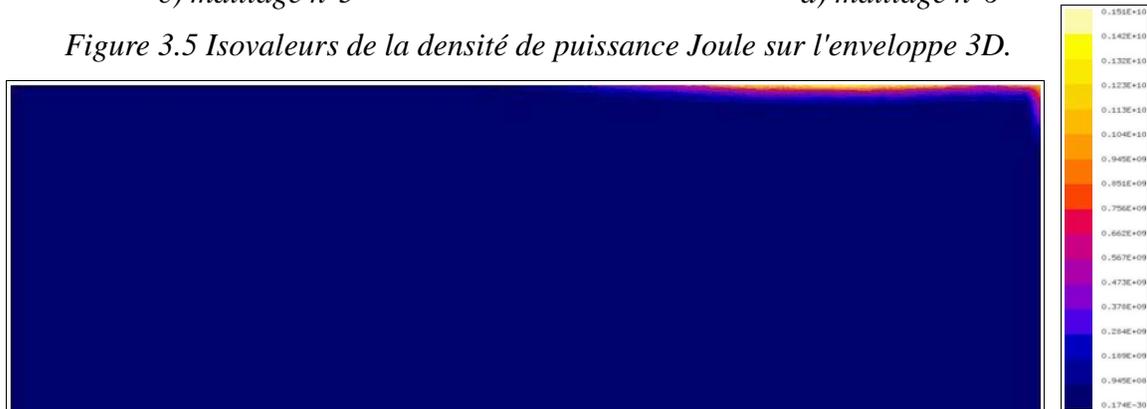


Figure 3.6 Isovaleurs de la densité de puissance Joule sur une coupe verticale.

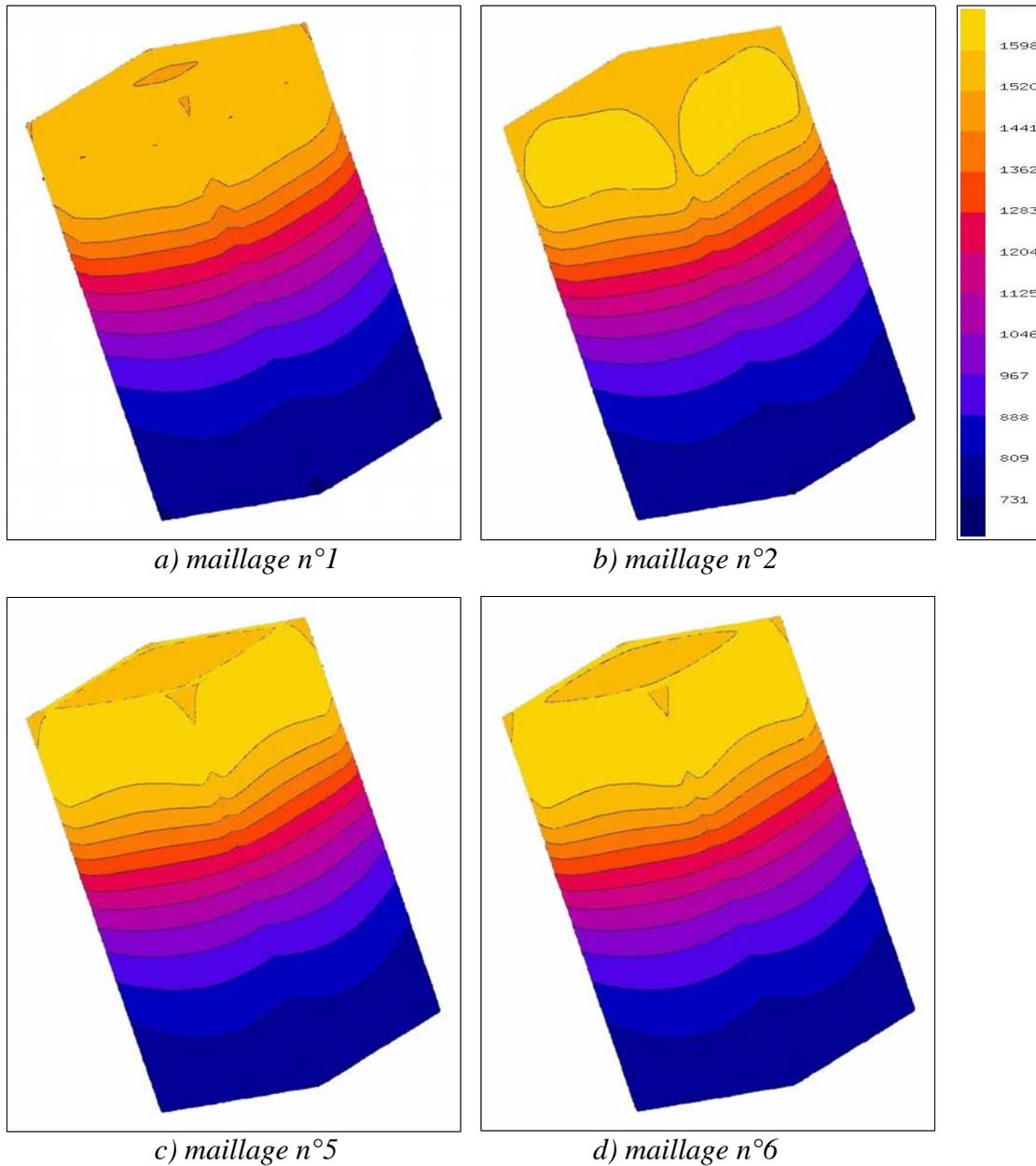


Figure 3.7 Isovaleurs de la température sur l'enveloppe 3D.

Sur la figure 3.7 la répartition de température sur l'enveloppe présente un maximum de température dans la zone de puissance maximale. Dans la partie basse du lingot, zone où la densité de puissance est très faible on obtient des résultats très proches pour les 4 maillages. Dans la partie haute on note des différences plus significatives entre les maillages. Pour le maillage le plus grossier, maillage n°1, la température maximale est plus faible que pour les autres maillages.

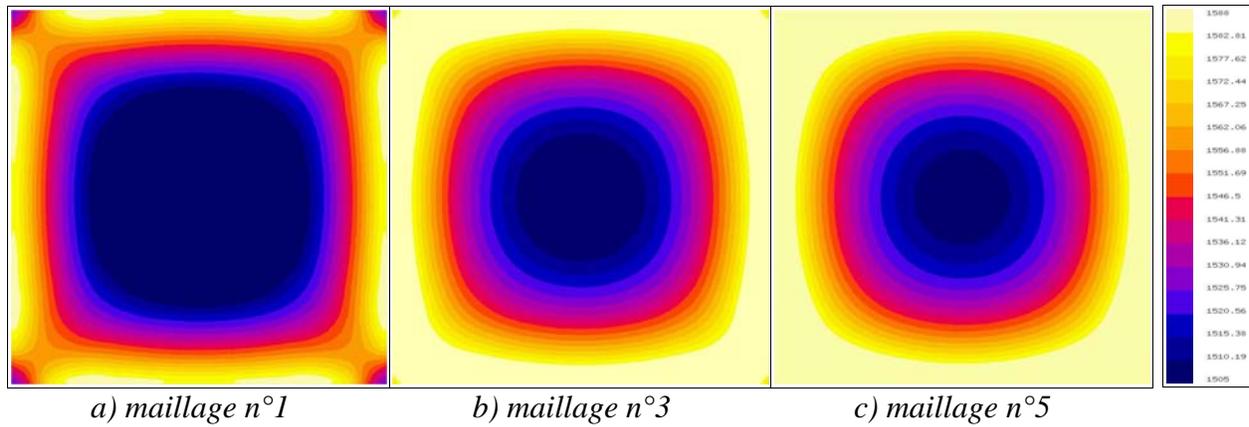


Figure 3.8 Isovaleurs de la température - coupe horizontale à la hauteur 0,07m.

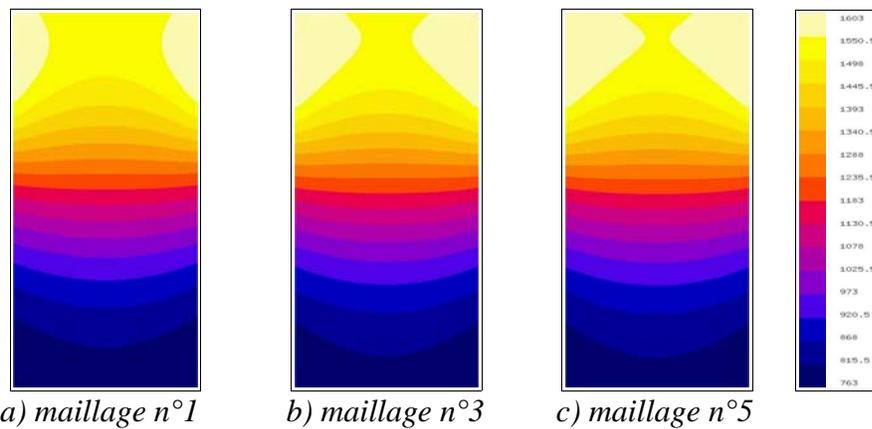


Figure 3.9 Isovaleurs de la température - coupe verticale au centre de la charge.

Les coupes (Figures 3.8 et 3.9) mettent en évidence une température maximale près des parois latérales et de la face supérieure où la densité de puissance Joule est la plus importante. Dans les coupes horizontales le gradient de température est de l'ordre de 33K/cm. La température diffuse vers le centre de la charge. Dans les coupes verticales le gradient de température est plus important, il est de l'ordre de 84K/cm. La face inférieure est principalement le siège d'échanges convectifs ainsi sa température est minimale.

Dans le cas du maillage grossier le tracer des isovaleurs présente certains défauts notamment dans les coins (Figure 3.8). Plus le maillage est fin plus les résultats sont qualitativement bons. Les maillages 3 et 5 donnent des résultats très proches.

3.1.2 Cas de la grande épaisseur de peau

Dans le cas de la grande peau nous étudions la configuration présentée sur la Figure 3.10.

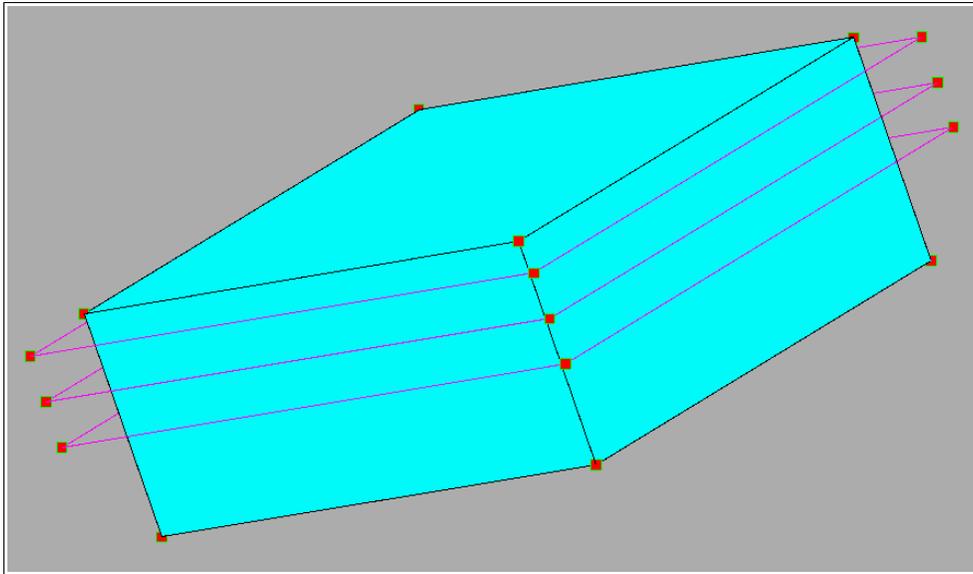


Figure 3.10 Géométrie étudiée

Cette configuration est constituée des éléments suivants :

- une charge hexaédrique de section $0,443\text{ m} \times 0,443\text{ m}$ et de hauteur $0,185\text{ m}$,
- un inducteur composé de 3 spires filiformes carrées $0,513\text{ m} \times 0,513\text{ m}$ dont les positions verticales sont les suivantes $0,0925\text{ m}$, $0,12975\text{ m}$ et $0,1675\text{ m}$.

La charge est en verre. Les propriétés physiques sont pour ce premier calcul indépendantes de la température. La conductivité électrique est fixée à $1(\Omega.m)^{-1}$. La conductivité thermique vaut 4 W/m/K . Les conditions aux limites thermiques sont des échanges convectifs. La température ambiante vaut 300 K . Sur les faces supérieure et inférieure le coefficient d'échange vaut $100\text{ W/m}^2/\text{K}$ et sur les parois latérales le coefficient d'échange vaut $300\text{ W/m}^2/\text{K}$.

L'inducteur est parcouru par un courant de 1200 A . La fréquence du signal électrique vaut 282 kHz . L'épaisseur de peau dans la charge vaut $947,75\text{ mm}$. Elle est grande devant la taille de la charge, le paramètre d'écran est faible devant 1: $R\omega = 2 \frac{L^2}{\delta^2} = \mu \sigma \omega L^2 = 0,109$.

Nous étudions les résultats obtenus pour différents maillages de la charge. Le maillage de la méthode intégrale est un maillage volumique en hexaèdre d'ordre 1 (modèle grande peau). Le maillage de la méthode des éléments finis est volumique en hexaèdres d'ordre 2. Pour chacun des maillages le nombre d'éléments de chaque méthode est précisé dans le tableau 3.3.

Tableau 3.3 : Nombre d'éléments des maillages de la méthode intégrale et de la méthode des éléments finis dans le cas grande épaisseur de peau.

Maillage	MIGEN			FLUX-EXPERT	
	Nb éléments V	Nb éléments J	Taille Système	Nb éléments T	Taille Système
Grossier	128 (5*5*9)	225	992	1600	4961
Moyen	432 (7*7*13)	637	2748	3300	10656
Fin	896 (9*9*15)	1215	5174	10400	35721

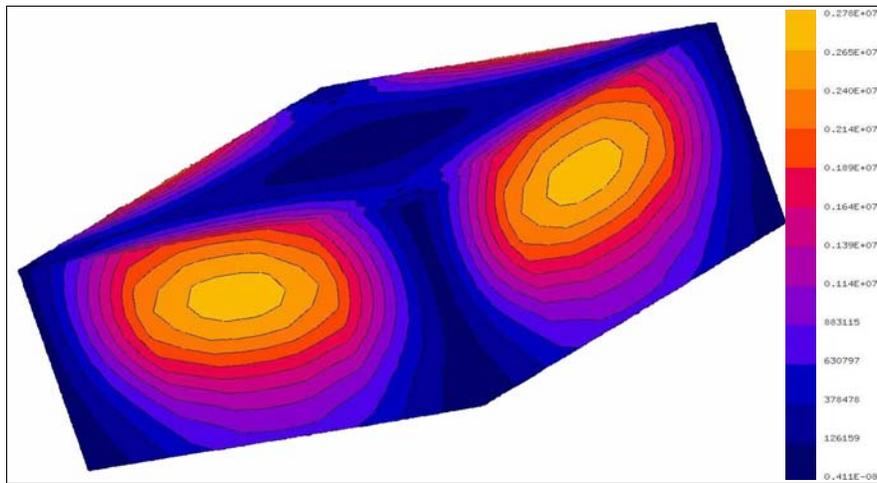
Dans le tableau 3.4 nous présentons les puissances Joule calculées par le logiciels MIGEN et les puissances Joules calculées par interpolations pour les différents maillages étudiés dans le cas grande épaisseur de peau.

Tableau 3.4 : Influence du nombre d'éléments dans le cas grande épaisseur de peau.

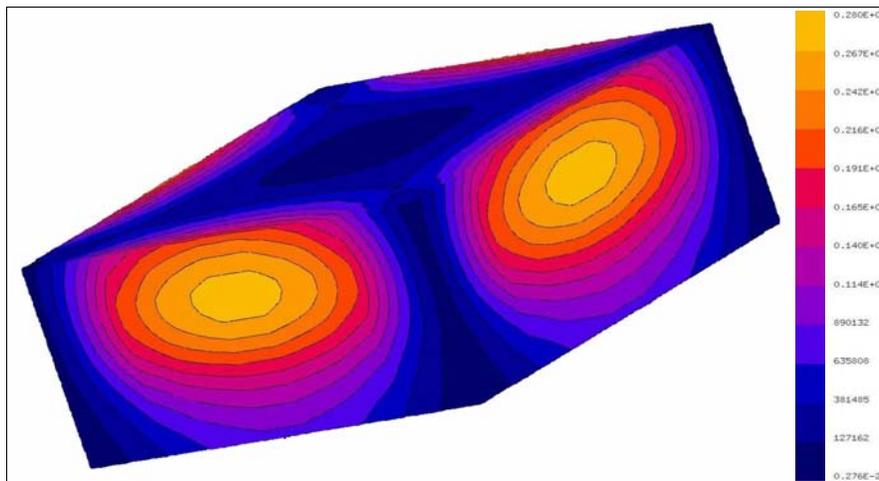
Maillages	$P_{J,MI}(W)$	$P_{J,FE}(W)$	$\Delta P/P$	$T_{max}(K)$	$T_{min}(K)$
Grossier	29911,0	29899,5	$3,85 \cdot 10^{-4}$	1193,94	309,856
Moyen	30121,8	30120,5	$4,32 \cdot 10^{-5}$	1209,52	309,779
Fin	30207,9	30207,1	$2,65 \cdot 10^{-5}$	1219,63	309,749

La puissance Joule $P_{J,MI}$ de MIGEN et la puissance Joule $P_{J,FE}$ issue de l'interpolation entre les éléments de MIGEN et les éléments de FLUX-EXPERT varient lorsqu'on affine le maillage et convergent vers la valeur 30207W. L'écart relatif $\Delta P/P$ décroît rapidement lorsque le nombre d'éléments augment. Pour le maillage fin l'écart relatif vaut $2,65 \cdot 10^{-5}$. On peut mettre ainsi en évidence la validation de l'interpolation de la puissance Joule dans le cas de la grande peau. La température maximum converge vers 1219,63K.

Nous présentons la répartition de la densité de puissance Joule et de la température sur l'enveloppe 3D de la charge et en coupe pour les maillages moyens et fins. La figure 3.11 présente la répartition de la densité de puissance Joule à la surface de la charge. La densité de puissance Joule est maximale sur les parois latérales et très faibles sur les parois supérieure et inférieure. Les résultats obtenus pour les deux maillages sont proches. Dans le cas du maillage fin les lignes d'isovaleurs ne sont plus des lignes brisées. Dans le cas de la grande épaisseur de peau, les gradients de la densité de puissance Joule sont beaucoup plus faibles que ceux du cas fine peau. La valeur maximale de densité de puissance se situe sur la paroi latérale face à l'inducteur et vaut $0,278 \cdot 10^7$. La densité de puissance pénètre dans le matériau dans un tiers de l'épaisseur (Figure 3.12).



a) maillage moyen



b) maillage fin

Figure 3.11 Isovaleurs de la densité de puissance Joule sur l'enveloppe 3D.

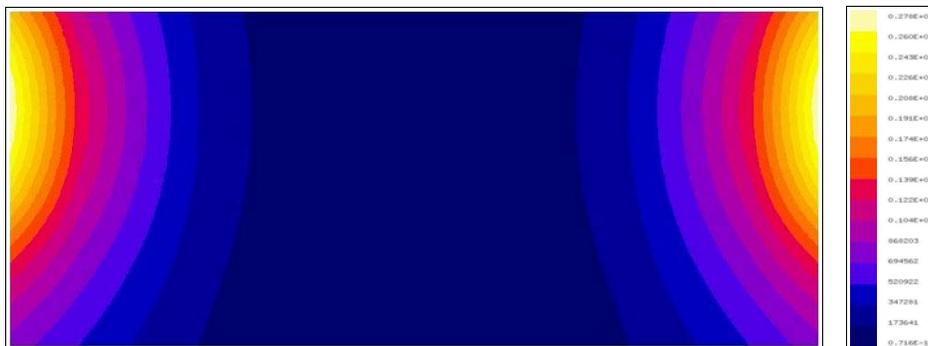
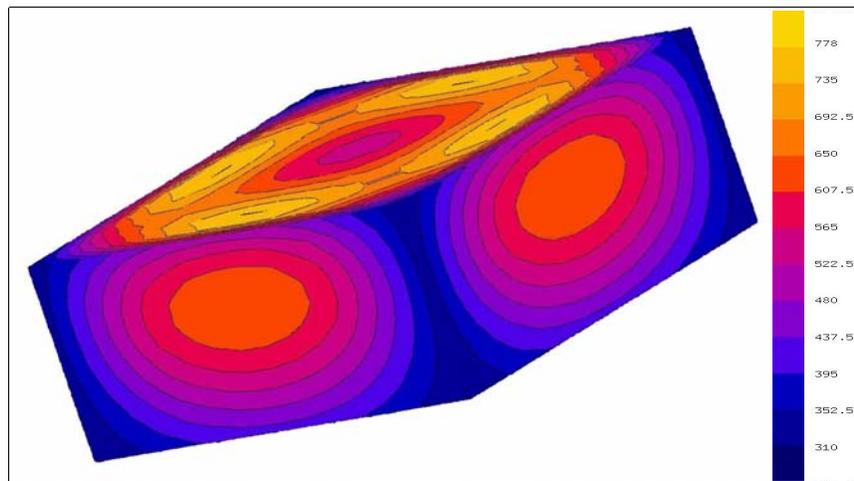
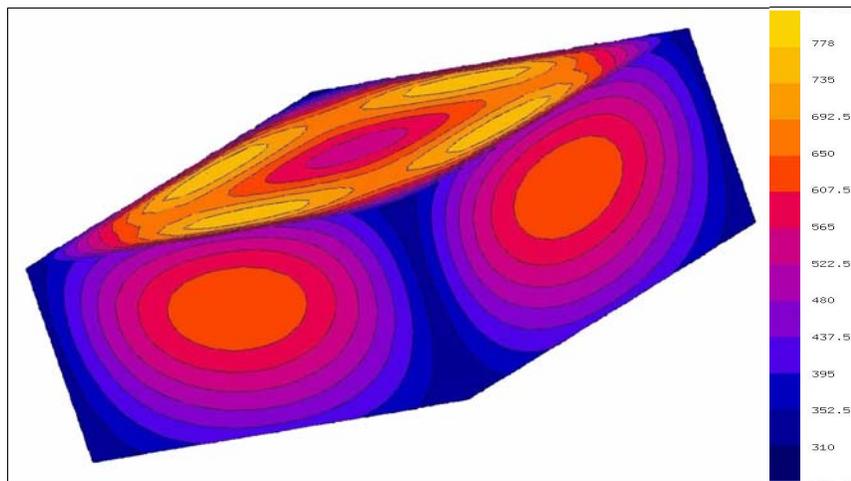


Figure 3.12 Isovaleurs de la densité de puissance Joule - coupe verticale au centre de la charge.



a) maillage moyen



b) maillage fin

Figure 3.13 Isovaleurs de la température sur l'enveloppe 3D.

Sur la figure 3.13 les températures minimales et maximales sont les mêmes pour les deux maillages. La répartition de la température en surface de la charge est très proche pour les maillages moyen et fin. Un accroissement de la finesse du maillage permet d'obtenir des résultats un peu plus précis. Dans le cas du verre la température maximale n'est pas située à la surface de la charge.

Les figures 3.14 et 3.15 présentent la répartition de la température dans la charge. Compte tenu de la pénétration de la densité de puissance Joule dans la charge et de la faible conductivité thermique du verre la valeur maximum de température se situe à l'intérieur de la charge. La température décroît au voisinage des parois à cause des pertes par échanges convectifs. Elle est minimale au centre des faces inférieure et supérieure car dans ces zones la densité de puissance Joule est nulle, seuls interviennent les échanges convectifs. Les deux maillages donnent des résultats très proches.

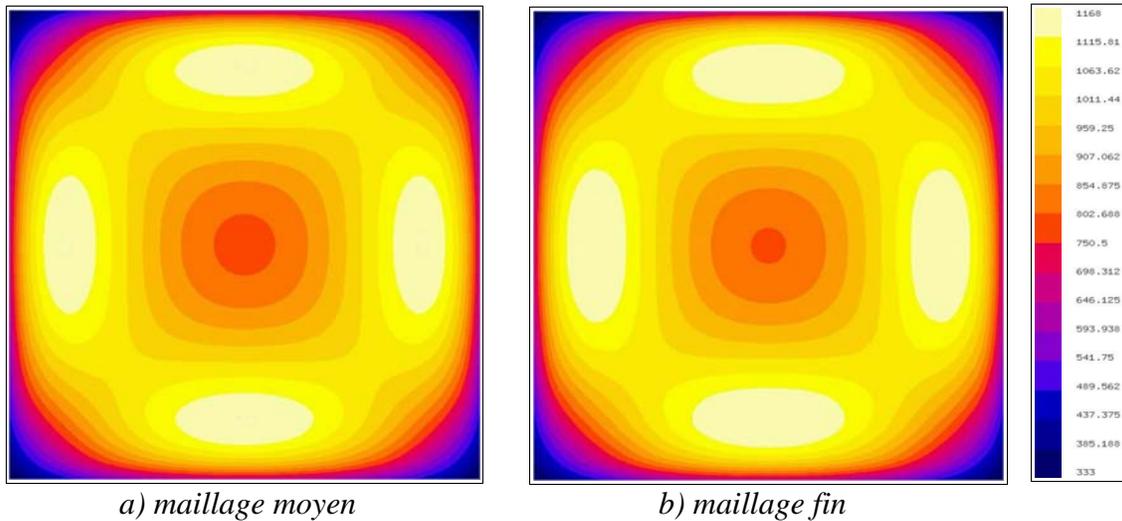


Figure 3.14 Isovaleurs de la température coupe horizontale à la hauteur 0,13 mm.

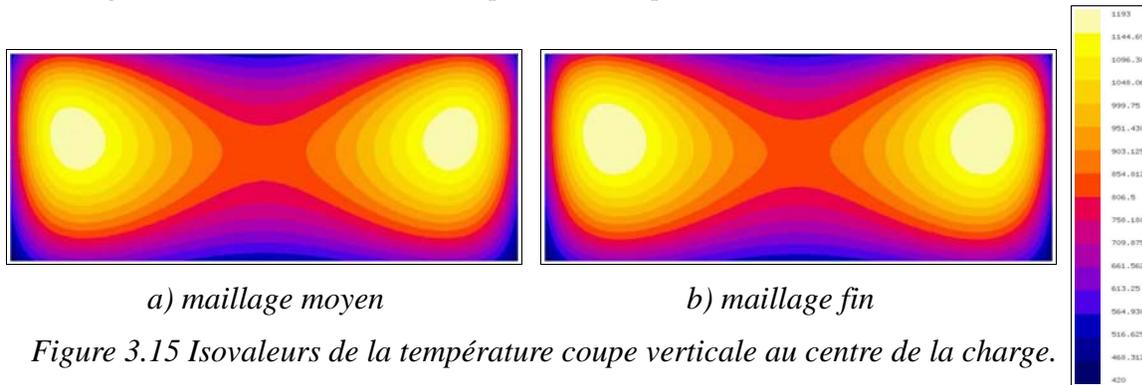


Figure 3.15 Isovaleurs de la température coupe verticale au centre de la charge.

3.2 Test de l'interpolation de la méthode des éléments finis vers la méthode intégrale

Ce test concerne l'interpolation de la conductivité électrique depuis le maillage éléments finis vers le maillage de la méthode intégrale. Pour tester l'interpolation de la conductivité électrique nous nous plaçons dans le cas d'un problème magnéto-thermique non linéaire en régime permanent. Le problème thermique est régi par l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot (-k_{th} \vec{\nabla} T) - Q_{th} = 0$$

La conductivité électrique dépend de la température. Nous considérerons la conductivité thermique indépendante de la température. Les conditions aux limites du problème thermique sont des échanges convectifs. L'algorithme itératif RLSMN est utilisé pour résoudre ce problème couplé non linéaire en régime permanent.

Du point de vue électromagnétique nous étudions le cas de la fine peau et le cas de la grande peau.

3.2.1 Cas de la fine épaisseur de peau

La configuration étudiée est la même que celle présentée (Figure 3.1). Nous nous plaçons dans les mêmes conditions que dans le cas de la section 3.1.1 pour la conductivité thermique, les échanges aux frontières et l'alimentation électrique. Par contre nous prenons en compte une conductivité électrique dépendant de la température selon le modèle suivant (Figure 3.16) :

$$\sigma(T) = 1.10^7 : T \leq 300K$$

$$\sigma(T) = -30000T + 1,9.10^7 : 300K \leq T < 500K$$

$$\sigma(T) = -10000T + 9.10^6 : 500K \leq T < 700K$$

$$\sigma(T) = -2750T + 3,925.10^6 : 700K \leq T \leq 1100K$$

$$\sigma(T) = 9.10^5 : 1100K \leq T$$

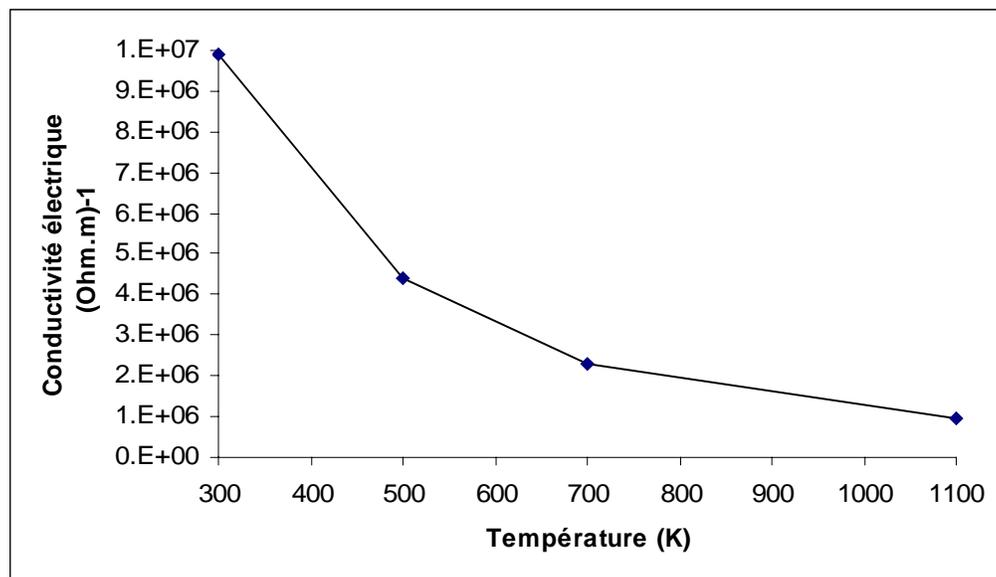


Figure 3.16 Modèle de conductivité électrique en fonction de la température.

Nous utilisons l'algorithme de couplage itératif entre les deux phénomènes en choisissant une précision de 3.10^{-6} sur la température et un nombre maximum d'itérations de couplage de 10. La température initiale T_0 est fixée à $300 K$. La puissance Joule est imposée dans la charge à $5kW$. A chaque itération de couplage la résolution thermique est linéaire. L'évolution de l'écart relatif sur la température entre deux itérations de couplage est présentée sur la figure 3.17. Le maillage 5 permet d'obtenir une convergence plus rapide. Au bout de 3 itérations nous obtenons une précision de 2.10^{-6} avec le maillage 5. Pour obtenir une convergence à $2,5.10^{-6}$ près il faut 4 itérations avec le maillage 3. On ne peut atteindre une précision plus importante car dans la version utilisée de FLUX-EXPERT les propriétés physiques sont des réels en simple précision.

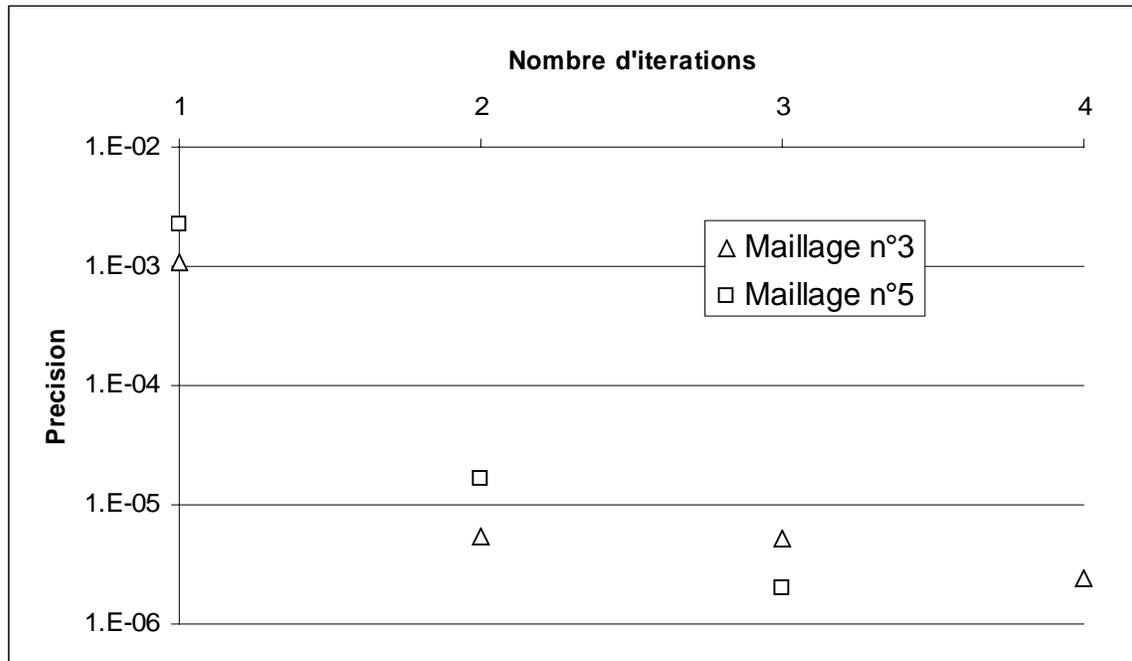


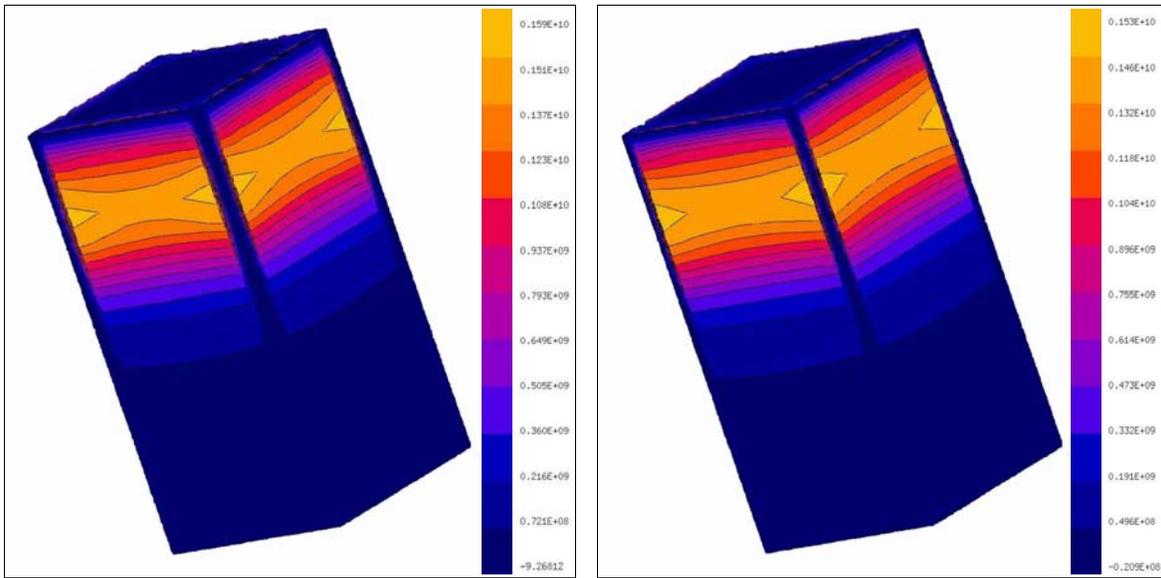
Figure 3.17 Convergence du problème non linéaire dans le cas fine épaisseur de peau.

Dans le tableau 3.5 nous présentons les résultats globaux obtenus lorsque le calcul a convergé. Nous avons une précision sur l'interpolation de la puissance Joule de $2,73 \cdot 10^{-2}$ pour le maillage 5. On retrouve l'ordre de grandeur obtenu précédemment pour la fine peau électromagnétique. Les températures extrêmes sont peu influencées par la prise en compte de la variation de la conductivité électrique en fonction de la température.

Tableau 3.5 : Influence du maillage sur les grandeurs globales dans le cas non linéaire

Maillages	$P_{J,MI} (W)$	$P_{J,FE} (W)$	$\Delta P/P$	$T_{max} (K)$	$T_{min} (K)$
Maillage n°3	5000	4861,50	$2,77 \cdot 10^{-2}$	1645,84	732,43
Maillage n°5	5000	4863,60	$2,73 \cdot 10^{-2}$	1653,41	731,53

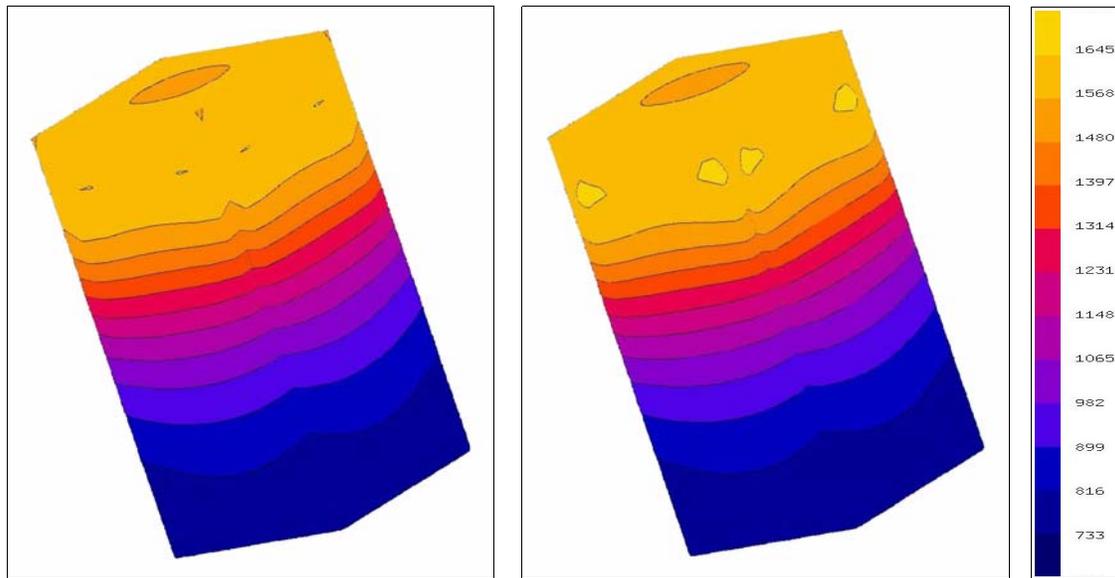
Les figures 3.18, 3.19 et 3.20 présentent les répartitions de la densité puissance Joule, la température et de la conductivité électrique en surface de la charge. La répartition de la densité de puissance Joule est très proche de celle que nous avons obtenu dans le cas où la conductivité électrique était constante. La densité de puissance Joule est localisée dans le haut de la charge, sa valeur maximale vaut $0,153 \cdot 10^{10}$ pour le maillage 5. Les isovaleurs des températures sont proches de celles obtenues pour σ constant. La répartition de la conductivité électrique met en évidence des variations dans le bas de la charge qui correspond à la zone de faible densité de puissance Joule. La conductivité électrique ne varie pas dans la partie haute, la température est supérieure à 1100K. La conductivité vaut $9 \cdot 10^5$ dans la partie haute de la charge.



a) maillage n°3

b) maillage n°5

Figure 3.18 Isovaleurs de la densité puissance Joule sur l'enveloppe 3D.



a) maillage n°3

b) maillage n°5

Figure 3.19 Isovaleurs de la température sur l'enveloppe 3D.

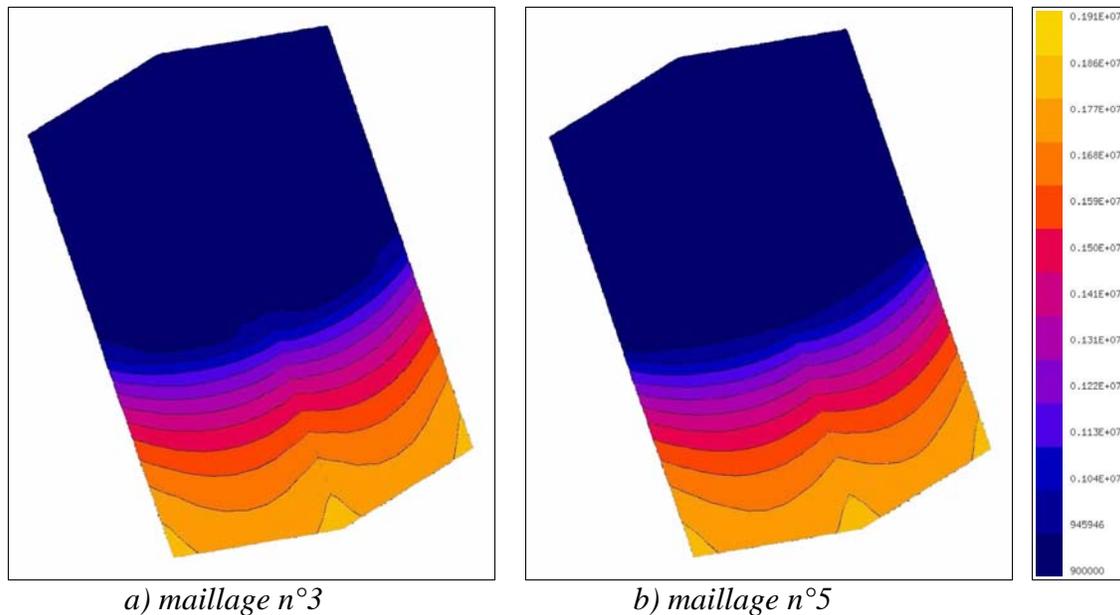


Figure 3.20 Isovaleurs de la conductivité électrique sur l'enveloppe 3D.

3.2.2 Cas de la grande épaisseur de peau

La configuration étudiée est constituée d'une charge hexaédrique de section $0,443\text{ m} \times 0,443\text{ m}$ et de hauteur $0,185\text{ m}$ centrée dans un inducteur filiforme composé de 3 spires carrées $0,513\text{ m} \times 0,513\text{ m}$ (Figure 3.10).

Nous étudions deux cas :

- dans le premier cas seule la conductivité électrique est variable,
- dans le deuxième cas la conductivité électrique et la conductivité thermique sont variables.

Conductivité électrique variable

La charge est en verre. Pour ce calcul la conductivité thermique est considérée constante ($k_{th} = 4\text{ Wm}^{-1}\text{ K}^{-1}$) par contre la conductivité électrique varie en fonction de la température selon la loi (Figure 3.17) :

$$\sigma(T) = 10^{3,7921 - \frac{3917,8}{T}} : 500\text{K} \leq T \leq 2000\text{K}$$

$$\sigma(T) = 9,05 \cdot 10^{-5} : T \leq 500\text{K}$$

$$\sigma(T) = 68,108 : 2000\text{K} \leq T$$

La conductivité électrique varie fortement sur cette plage de 6 ordres de grandeur.

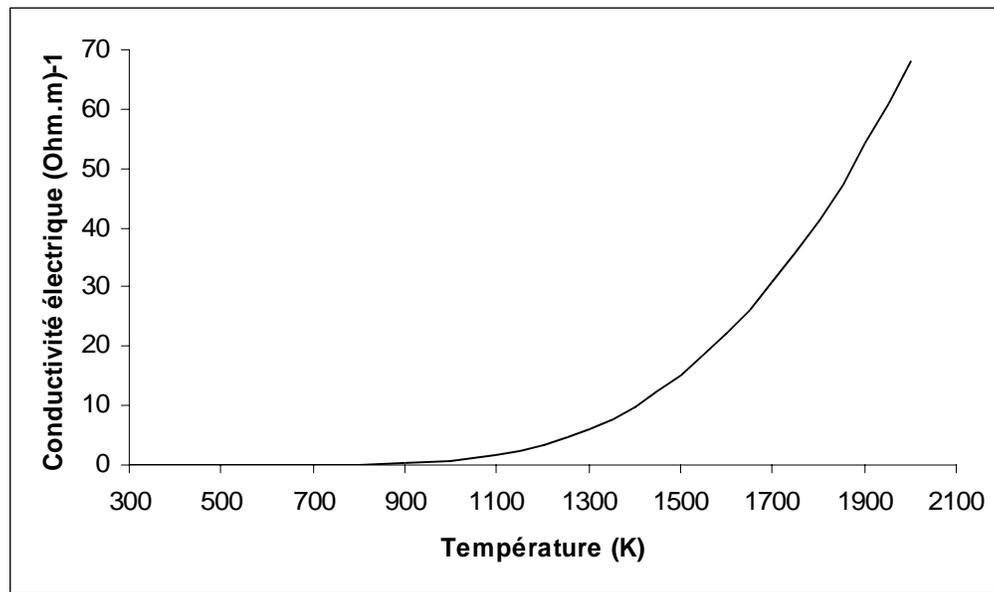


Figure 3.21 Modèle de conductivité électrique du verre en fonction de la température.

Les conditions aux limites thermiques sont des échanges convectifs. Sur la face supérieure le coefficient d'échange vaut $20 \text{ W/m}^2/\text{K}$ et sur les faces latérales et la face inférieure il vaut $300 \text{ W/m}^2/\text{K}$. La température ambiante vaut 303K .

La fréquence du signal de l'inducteur est fixée à 282 kHz . Pour la modélisation électromagnétique on choisit un algorithme de résolution avec contrainte. On impose la puissance dans la charge à 30 kW .

Nous utilisons l'algorithme itératif en choisissant une précision de 10^{-4} pour la température et un nombre maximum d'itérations de couplage de 10. La température initiale T_0 est fixée à 900 K . A chaque itération de couplage la résolution thermique est linéaire.

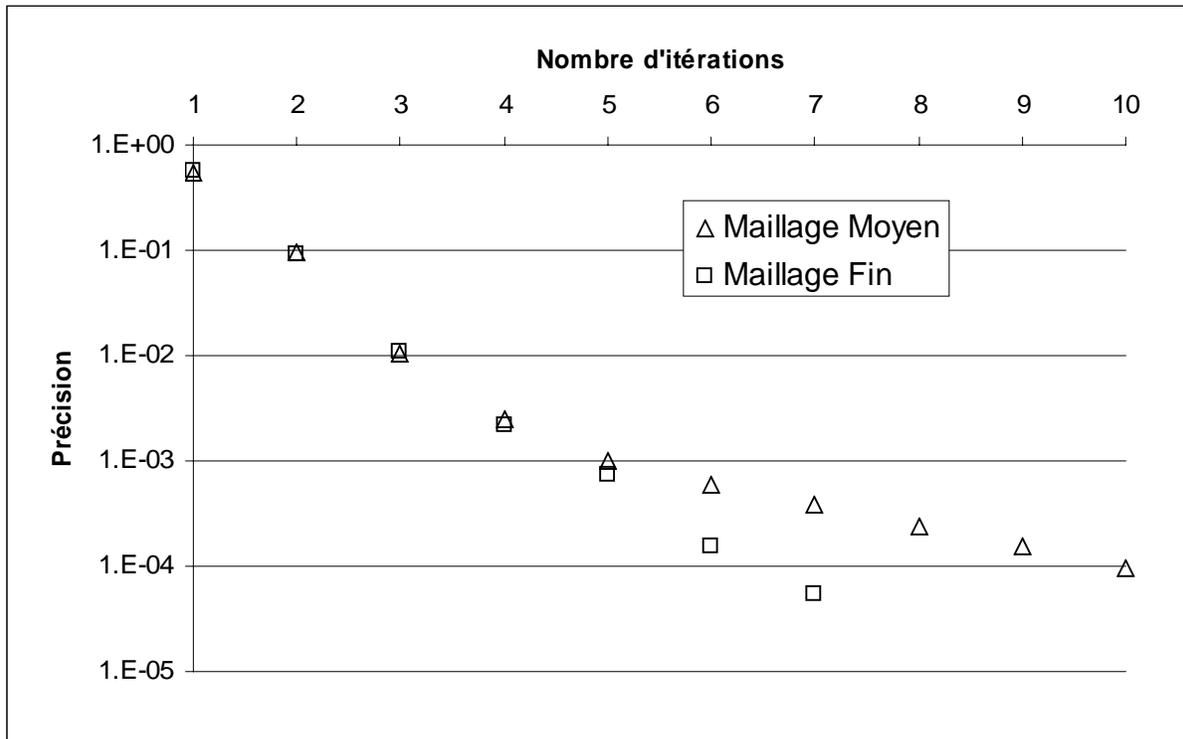
Les calculs sont effectués pour deux maillages. Dans le tableau 3.6 nous précisons les nombres d'éléments pour les maillages électromagnétiques et thermiques. Pour les deux calculs effectués on a affiné seulement le maillage électromagnétique.

Tableau 3.6 : Maillages de la méthode intégrale et de la méthode des éléments finis.

Maillage	MIGEN			FLUX-EXPERT	
	Nb éléments V	Nb éléments J	Taille Système	Nb éléments T	Taille Système
Moyen	245(7*7*5)	384	1670	3300	10656
Fin	405(9*9*5)	600	2590	3300	10656

Sur la figure 3.22, l'évolution de l'écart relatif sur la température entre deux itérations de couplage est présentée. Le maillage électromagnétique le plus fin permet d'atteindre plus rapidement la convergence. Au bout de 7 itérations on a une précision de $0,55 \cdot 10^{-4}$.

Figure 3.22 Convergence du problème non linéaire dans le cas grande épaisseur de peau.



Dans le tableau 3.7 les grandeurs globales obtenues après convergence sont présentées. Nous constatons que l'écart relatif sur la puissance Joule vaut $1,07 \cdot 10^{-3}$ pour le maillage le plus fin. Les valeurs obtenues pour les écarts relatifs sont supérieures à celles obtenues pour le cas linéaire. La modélisation non linéaire conduit à une valeur de température maximale beaucoup plus élevée dans le cas linéaire.

Tableau 3.7 : Influence du maillage sur les grandeurs globales dans le cas non linéaire

Maillages	$P_{J,MI}(W)$	$P_{J,FE}(W)$	$\Delta P/P$	$T_{max}(K)$	$T_{min}(K)$
Moyen	30000	30014,8	$4,93 \cdot 10^{-4}$	2674,84	305,474
Fin	30000	30032,0	$1,07 \cdot 10^{-3}$	2654,38	305,521

Les répartitions de la densité de puissance Joule, de la température et de la conductivité électrique lorsque le calcul a convergé sont présentées dans un plan de coupe vertical au centre de la charge (Figure 3.23, 3.24, 3.25). Les résultats que nous obtenons dans le cas de conductivité électrique variable sont très différents de ceux obtenus pour la conductivité constante. Comparons la densité de puissance Joule (Figure 3.23) avec celle à conductivité fixée (Figure 3.12). La prise en compte de la variation de la conductivité électrique est à l'origine d'un déplacement de la zone de densité maximale elle se déplace vers les régions de températures élevées (Figure 3.24). Plus la température augmente plus le matériau devient conducteur d'électricité. Les résultats obtenus ici sont cohérents avec ceux de *L. Jacoutot (2006)*. La carte de températures obtenue met en évidence une température minimale dans la partie inférieure de la charge et le long des parois latérales. Le coefficient d'échange sur ces parois est grand $300 W/m^2/K$. Les gradients thermiques dans la charge sont importants. Les gradients de conductivité électrique sont très importants dans une zone très localisée (Figure 3.25). Les figures 3.23, 3.24 et 3.25 montrent une faible influence du maillage.

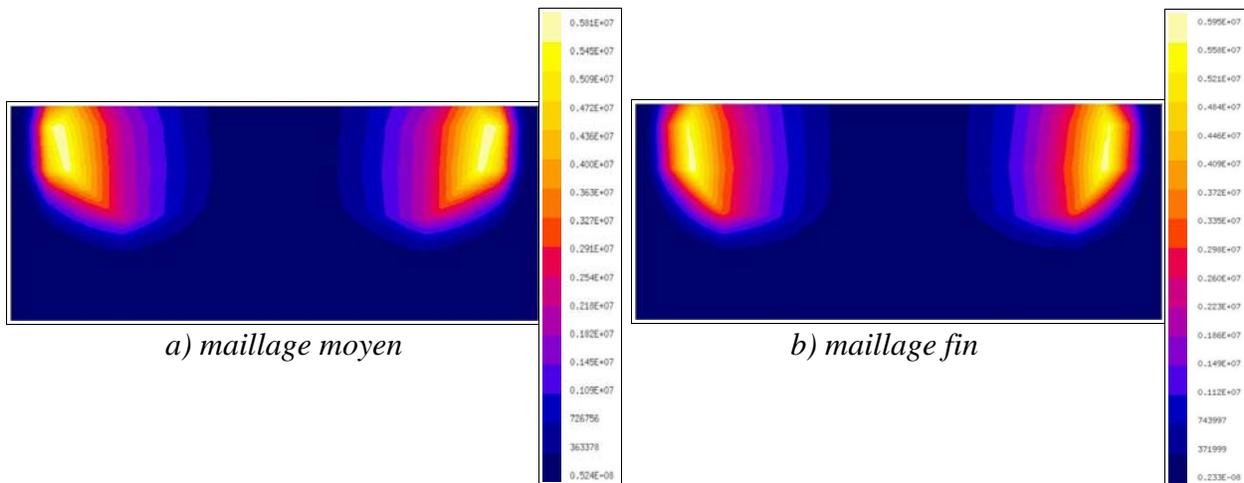


Figure 3.23 Isovaleurs de la densité puissance Joule - coupe verticale au centre de la charge.

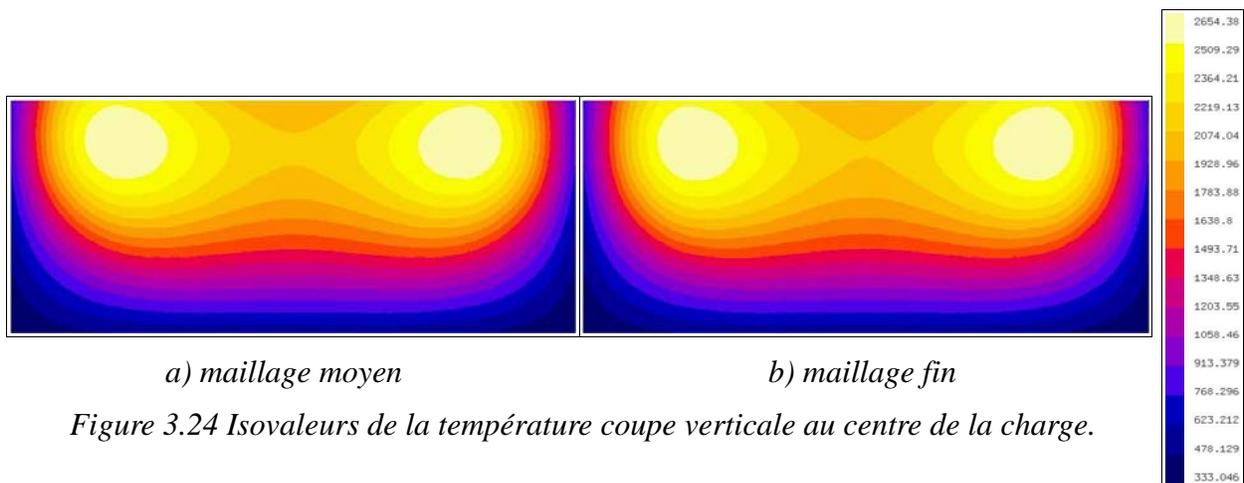


Figure 3.24 Isovaleurs de la température coupe verticale au centre de la charge.

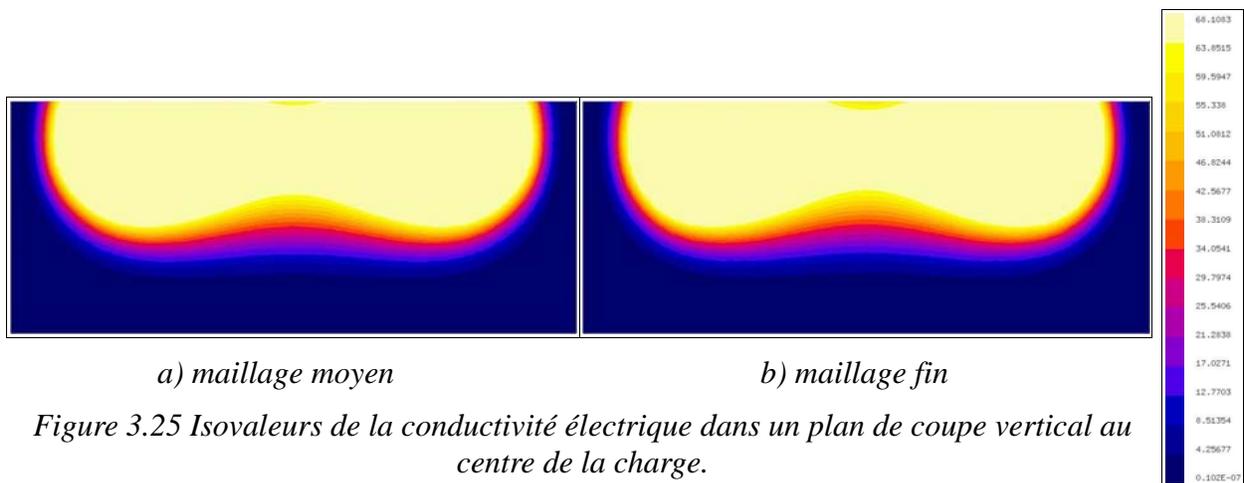


Figure 3.25 Isovaleurs de la conductivité électrique dans un plan de coupe verticale au centre de la charge.

Conductivités électrique et thermique variables

Pour ce calcul la conductivité thermique varie en fonction de la température selon la loi (Figure 3.26) :

$$k_{th}(T) = 6,815 \cdot 10^{-1} : \leq T < 293K$$

$$k_{th}(T) = 4,83 \cdot 10^{-4} T + 5,4 \cdot 10^{-1} : 293K \leq T < 693K$$

$$k_{th}(T) = 7,97 \cdot 10^{-3} T + 4,65 : 693K \leq T < 1296K$$

$$k_{th}(T) = 1,81 \cdot 10^{-3} T + 3,337 : 1296K \leq T \leq 1473K$$

$$k_{th}(T) = 6,003 : 1473K \leq T$$

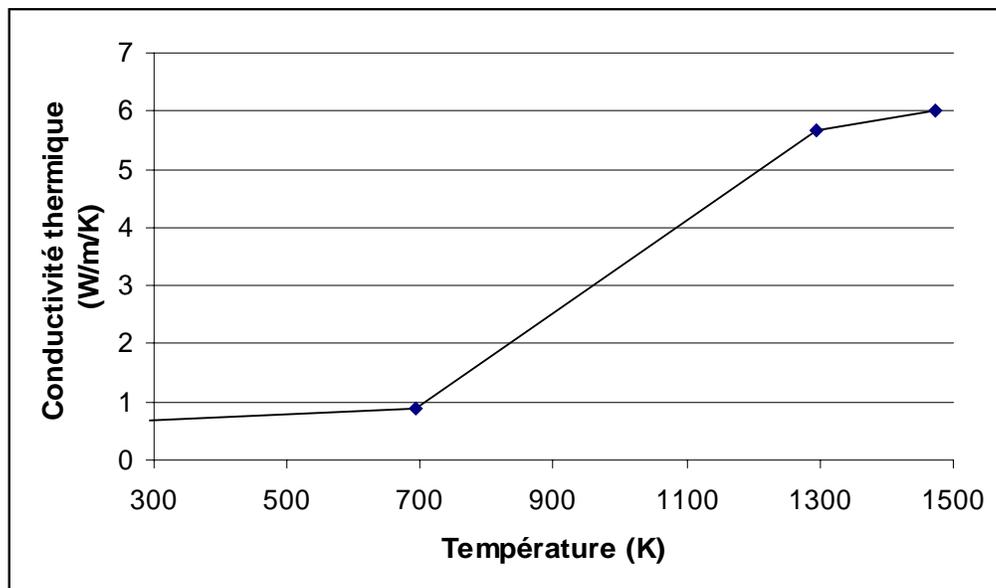


Figure 3.26 Modèle de conductivité thermique du verre en fonction de la température.

Les conditions aux limites thermiques sont différentes du cas précédent. Nous prenons d'une part en compte des échanges convectifs. Sur les faces inférieure et supérieure le coefficient d'échange vaut $20 W/m^2/K$ et sur les faces latérales il vaut $300 W/m^2/K$. Sur la face supérieure, nous prenons aussi en compte le rayonnement à l'infini avec une valeur d'émissivité du matériau de 0,9. La température de référence vaut $303K$ pour les parois latérales et la paroi inférieure et $423 K$ pour la paroi supérieure.

Les maillages utilisés pour cette modélisation sont présentés dans le tableau 3.8.

Tableau 3.8 : Maillages de la méthode intégrale et de la méthode des éléments finis.

Maillage	MIGEN			FLUX-EXPERT	
	Nb éléments V	Nb éléments J	Taille Système	Nb éléments T	Taille Système
Moyen	245(7*7*5)	384	1670	3300	10656
Fin	405(9*9*5)	600	2590	5966	19880

L'algorithme de résolution utilisé est RSNSMI. La précision demandée pour le problème thermique à chaque itération de couplage est de 10^{-6} , le nombre d'itérations maximal est fixé à 22. La précision demandée pour le couplage est de 10^{-4} le nombre maximal d'itérations est fixé à 10. La température initiale vaut 900K. Sur la figure 3.27 nous présentons l'évolution de la précision au cours des itérations de couplage. Au bout de 10 itérations avec le maillage moyen on atteint une précision de $0,97.10^{-3}$ et avec le maillage fin on atteint une précision de $0,66.10^{-3}$. Au cours des itérations de couplage le nombre d'itérations thermiques passe de 17 à 9. La résolution électromagnétique est effectuée en imposant la puissance Joule à 30kW.

Le tableau 3.9 présente les résultats globaux obtenus en fin de calcul. La précision sur la puissance Joule interpolée est meilleure dans le cas du maillage le plus fin. Nous constatons que la température maximale est plus faible dans cette modélisation que dans le cas précédent. Ceci est du en partie au fait que nous avons pris en compte des échanges radiatifs sur la surface supérieure de la charge.

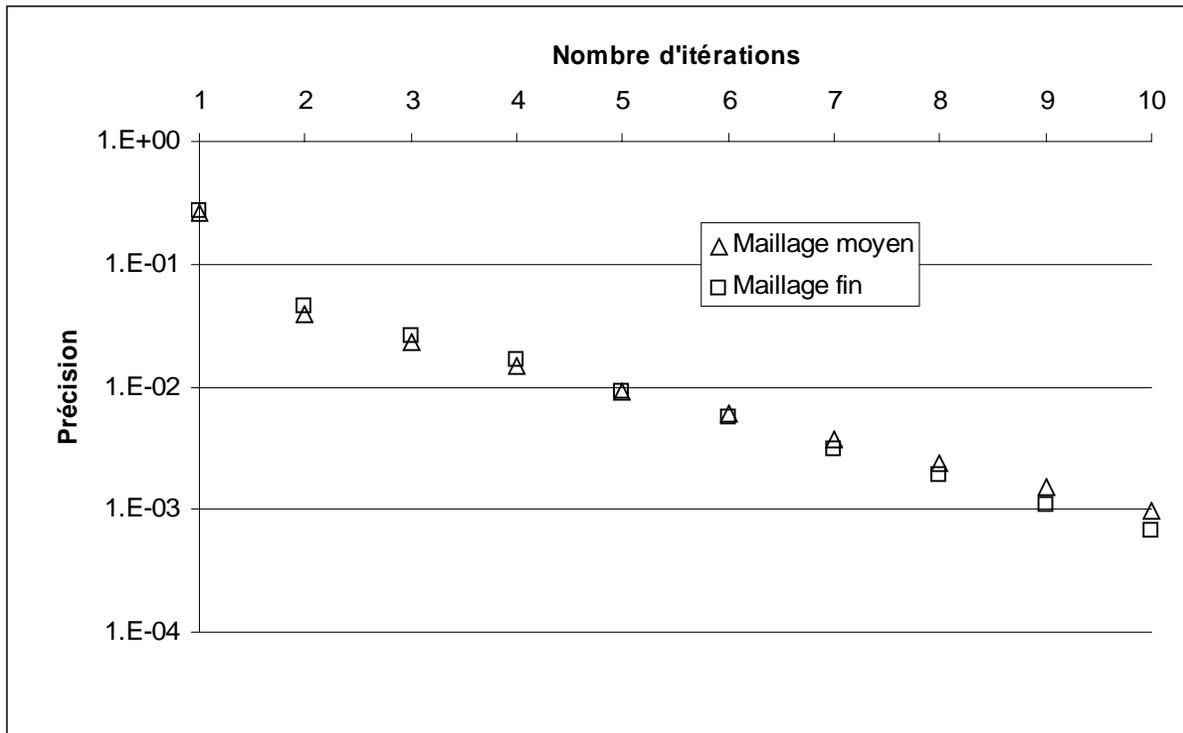


Figure 3.27 Convergence du problème non linéaire dans le cas grande épaisseur de peau.

Tableau 3.9 : Influence du maillage sur les grandeurs globales dans le cas non linéaire.

Maillages	$P_{J,MI}(W)$	$P_{J,FE}(W)$	$\Delta P/P$	$T_{max}(K)$	$T_{min}(K)$
Moyen	30000	30011,19	$0,373 \cdot 10^{-3}$	2004,98	321,133
Fin	30000	29996,13	$0,129 \cdot 10^{-4}$	1982,56	318,404

Dans une coupe verticale au centre de la charge sont représentées les répartitions de la densité de puissance Joule, de la température, des conductivités électrique et thermique (Figures 3.28, 3.29, 3.30 et 3.31). Comme dans le cas précédent la densité de puissance maximale est située dans la zone de température maximale. Plus la température est élevée plus le matériau est conducteur, meilleur est le couplage. La température maximale est située à mi-hauteur de la charge. Dans cette modélisation les gradients thermiques sont plus faibles que dans le cas précédent. Le rayonnement sur la surface supérieure induit une diminution de la température en surface. La température maximale est voisine de 2000K. Ainsi les variations de conductivité électrique sont moins localisées que dans le cas précédent. Le maximum se situe à mi-hauteur. La conductivité thermique varie à proximité des frontières. Elle ne varie pas dans une large zone à l'intérieur de la charge car pour une température supérieure à 1473K, la conductivité thermique est constante.

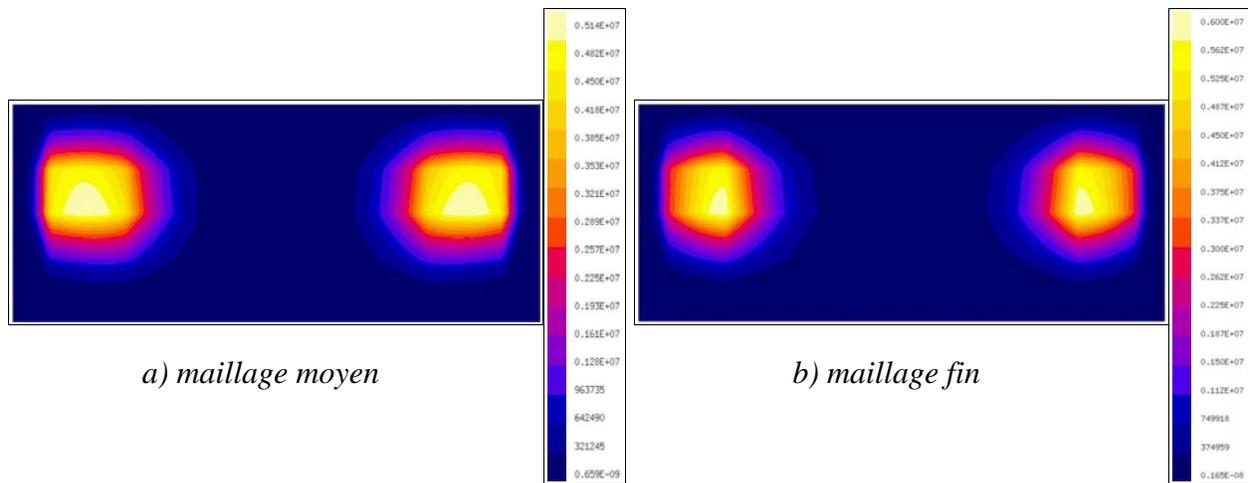


Figure 3.28 Isovaleurs de la densité puissance Joule - coupe verticale au centre de la charge.

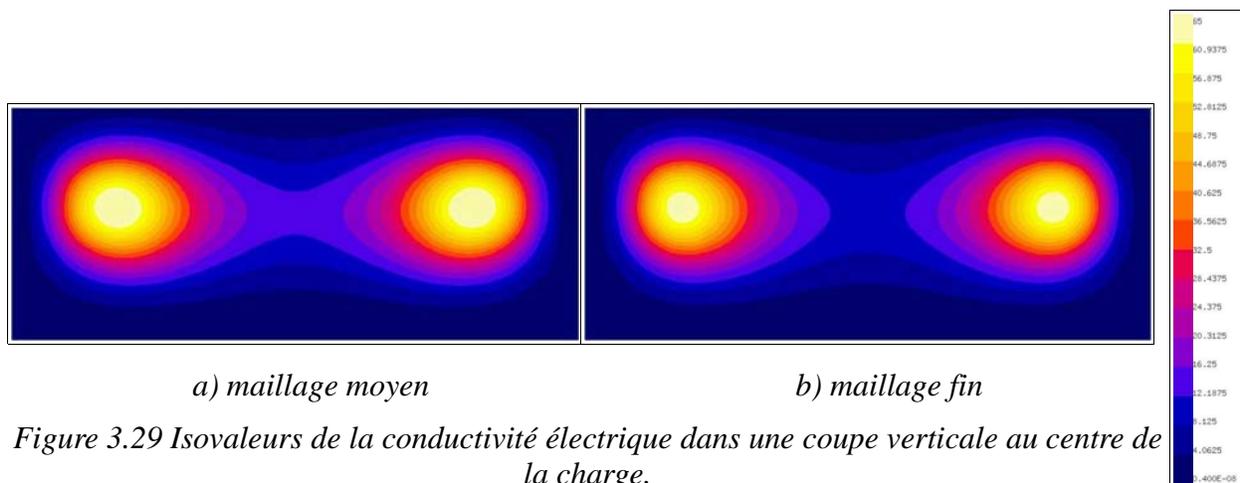
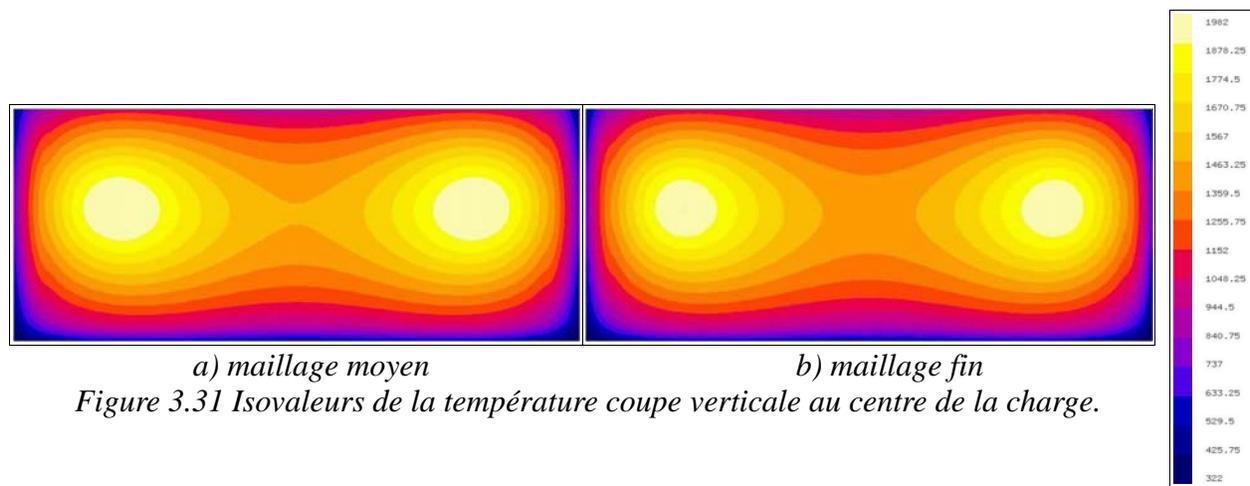
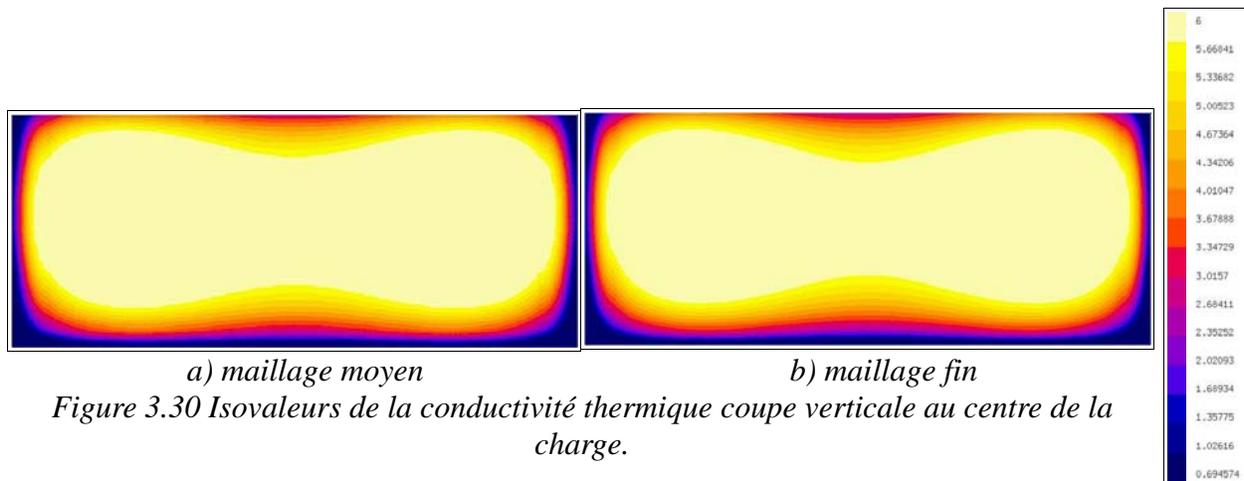


Figure 3.29 Isovaleurs de la conductivité électrique dans une coupe verticale au centre de la charge.



3.3 Test de l'algorithme transitoire dans le cas de propriétés physiques constantes

Dans ce paragraphe nous testons l'algorithme transitoire. Ce premier test concerne l'étude de l'évolution de la température au cours du temps dans le cas où les propriétés physiques sont constantes. Le problème électromagnétique n'évolue pas au cours du temps seul le problème thermique est transitoire.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (-k_{th} \vec{\nabla} T) - Q_{th} = 0$$

La configuration étudiée est la même que celle de la section 3.1. La charge est en inox. Les propriétés physiques de la charge sont constantes. La masse volumique (ρ) vaut 7870 kg/m^3 . La chaleur spécifique (C_p) vaut 600 J/kg/K . La conductivité électrique vaut $1,43 \times 10^6 (\Omega \cdot m)^{-1}$. La perméabilité relative vaut 1. La conductivité thermique vaut 40 W/m/K . Les conditions aux limites thermiques sur toutes les surfaces de la charge sont des échanges convectifs. Le coefficient d'échange sur les faces supérieures et inférieures vaut

$100 \text{ W/m}^2/\text{K}$. Le coefficient d'échange sur les parois latérales vaut $250 \text{ W/m}^2/\text{K}$. La température ambiante vaut 300 K .

Dans l'inducteur le courant est fixé à 934 A , la fréquence vaut 150 kHz . La durée de l'étude (t) vaut 60 min et les pas de temps (Δt) valent 2 min , 3 min et 5 min . Les calculs sont effectués sur le maillage n°3.

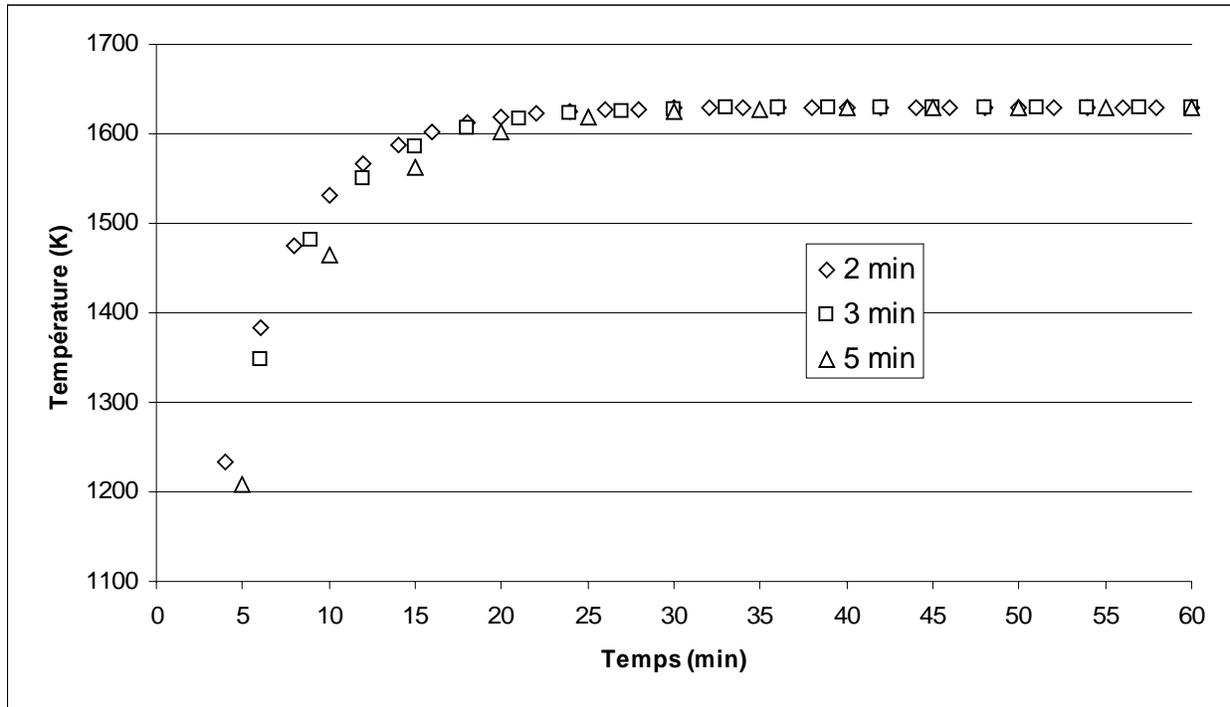
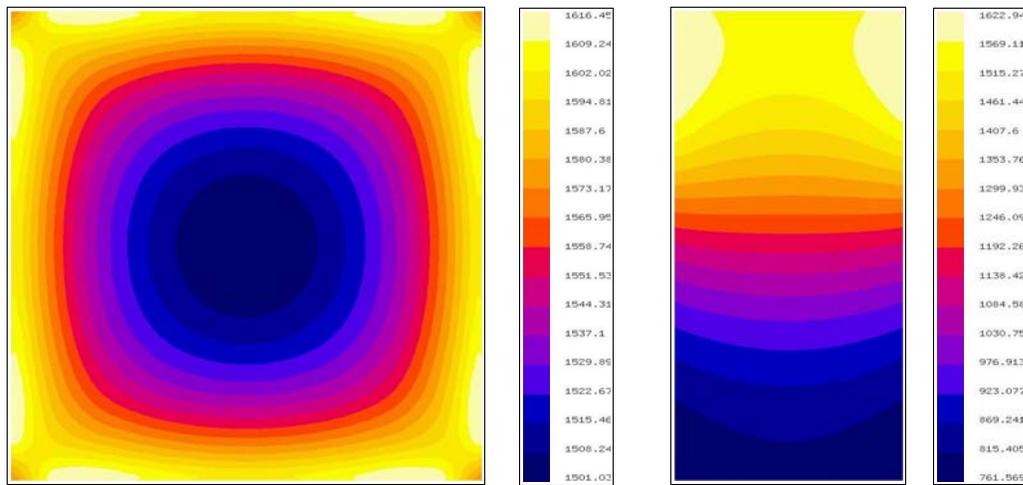


Figure 3.32 Evolution de la température maximale dans la charge au cours du temps.

Dans cette section, les calculs ont été effectués pour un maillage moyen avec des tailles de systèmes relativement faibles, afin de réduire les temps de calculs. La figure 3.32 présente les évolutions de la température maximale en fonction du temps suivant les différents pas de temps choisis. La température maximale croît au cours du temps et converge vers 1630 K au bout de 30 minutes. On constate que plus le pas de temps est faible plus la convergence est atteinte rapidement.

Sur la figure 3.33 nous présentons la répartition de température obtenue à la 60^{e} min pour la modélisation effectuée pour le pas de temps de 2 min dans une coupe horizontale et une coupe verticale. Le résultat obtenu correspond au régime permanent.



a) coupe horizontale à la hauteur 0,07m b) coupe verticale au centre de la charge

Figure 3.33 Isovaleurs de la température.

3.4 Evolution de la température pour les propriétés physiques variant en fonction de la température

Dans cette section nous étudions l'évolution de la température au cours du temps dans le cas d'une conductivité électrique variable avec la température. Nous utilisons l'algorithme transitoire implicite non linéaire. La configuration étudiée est la même que celle de la section 3.3. La conductivité électrique dépendant de la température selon la loi présentée sur la figure 3.13. Les propriétés physiques thermiques sont constantes comme la section 3.3. La masse volumique (ρ) vaut 7870 kg/m^3 . La chaleur spécifique (C_p) vaut 600 J/(kg.K) . La conductivité thermique vaut 40 W/m/K . Les conditions aux limites thermiques sur toutes les surfaces de la charge sont des échanges convectifs. Le coefficient d'échange sur les faces supérieure et inférieure vaut $100 \text{ W/m}^2/\text{K}$. Le coefficient d'échange sur les parois latérales vaut $250 \text{ W/m}^2/\text{K}$. La température ambiante vaut 300 K .

Dans l'inducteur le courant est fixé à 934 A , la fréquence vaut 150 kHz . La durée de l'étude (t) vaut 60 min et les pas de temps (Δt) valent 2 min et 5 min . Pour cette étude nous choisissons le maillage n°3.

La figure 3.34 représente l'évolution de la température maximale en fonction du temps pour deux pas de temps. La température maximale converge vers $1645,78 \text{ K}$. Ceci correspond au résultat obtenu en régime permanent dont la température maximale était $1645,85 \text{ K}$. Le pas de temps le plus faible permet d'atteindre plus rapidement la température du régime permanent. Sur la figure 3.35 nous présentons la température en fin de calcul dans le cas du pas de temps 2 min à l'instant 60^{e} min.

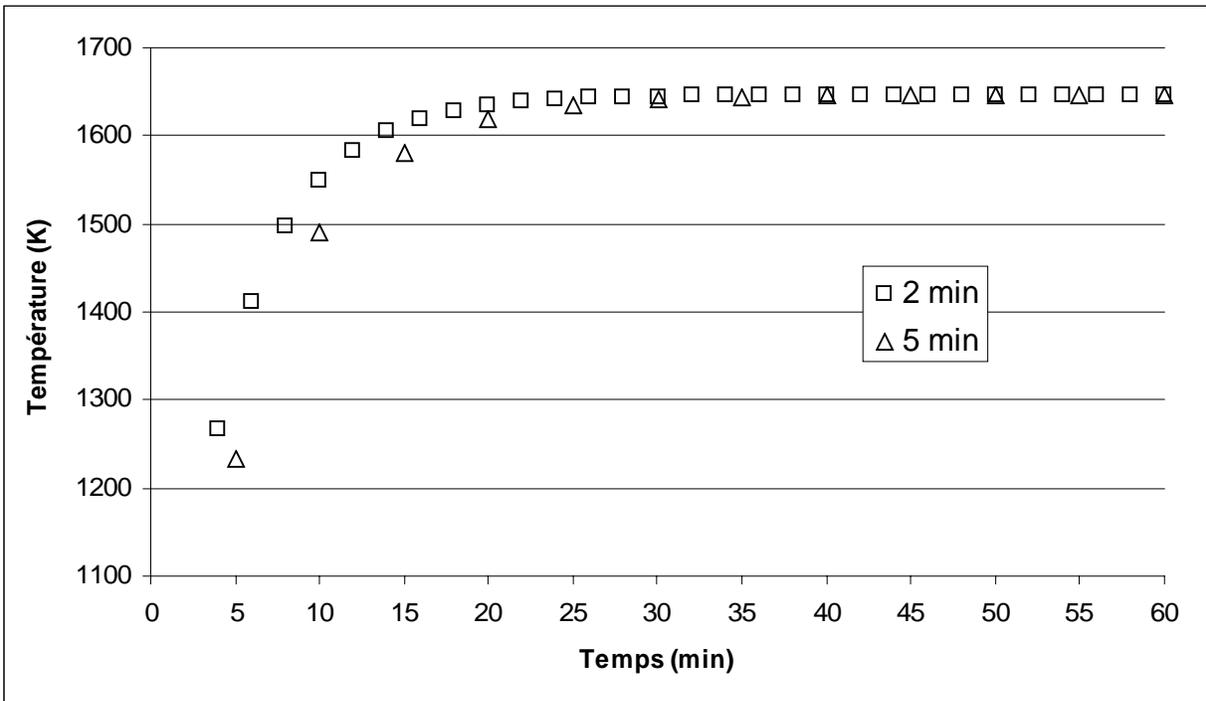
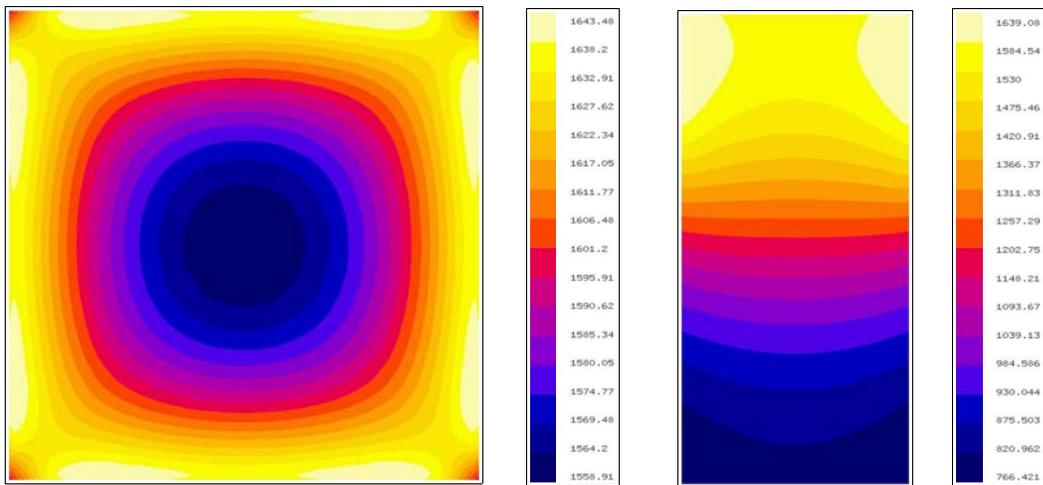


Figure 3.34 Evolution de la température maximale dans la charge au cours du temps.



a) coupe horizontale à la hauteur 0,07m b) coupe verticale au centre de la charge

Figure 3.35 Isovaleurs de la température.

4 Exploitation du logiciel MALICE3D

La modélisation numérique 3D permet de mettre en évidence des effets 3D. Dans ce paragraphe nous étudions l'effet de l'hélicité d'un inducteur dans un procédé d'élaboration. La configuration modélisée (Figure 3.36) est constituée d'une charge hexaédrique de section $0,05\text{ m} \times 0,05\text{ m}$ de hauteur $0,01\text{ m}$, placée dans un inducteur filiforme hélicoïdal à trois tours de section $0,08\text{ m} \times 0,08\text{ m}$. Les propriétés physiques dans la charges sont constantes. La modélisation est réalisée en régime permanent.

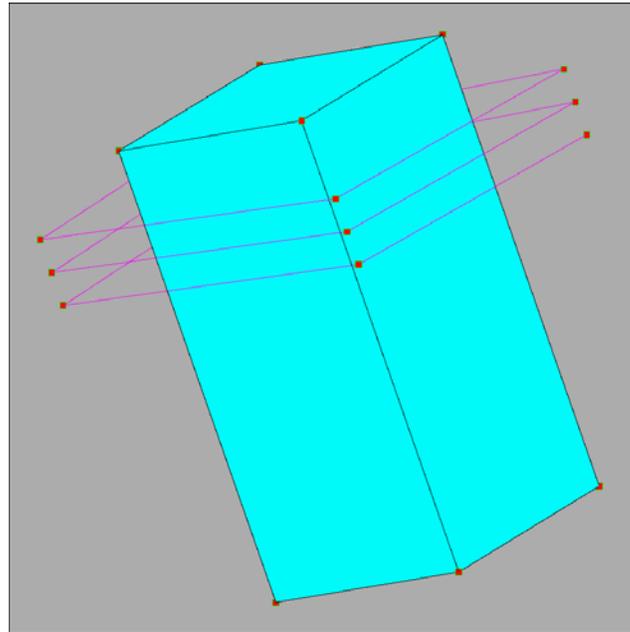


Figure 3.36 Charge dans un inducteur hélicoïdal.

Nous nous plaçons dans les mêmes conditions que dans le cas de la section 3.1.1 et reprenons le maillage n°3. Nous comparons les résultats obtenus avec ceux de la section 3.1.1 dans le cas d'un inducteur constitué de 3 spires filiformes horizontales. On constate un effet de l'hélicité de l'inducteur sur la répartition de la densité de puissance Joule : la répartition diffère d'une face verticale à l'autre (Figure 3.37). L'influence de l'hélicité de l'inducteur est plus significative sur la répartition de la température (Figure 3.38). Des gradients de température apparaissent le long de la paroi externe dans la partie haute de la charge. On observe une dissymétrie. Ces effets se retrouvent sur les coupes horizontales et verticales (Figures 3.39, 3.40).

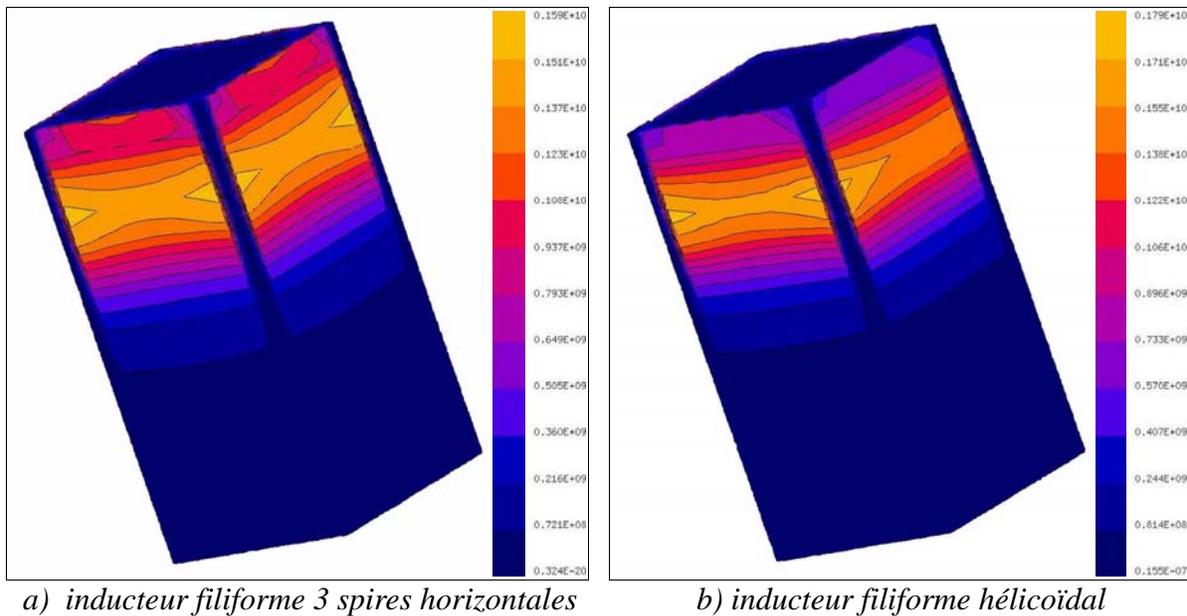
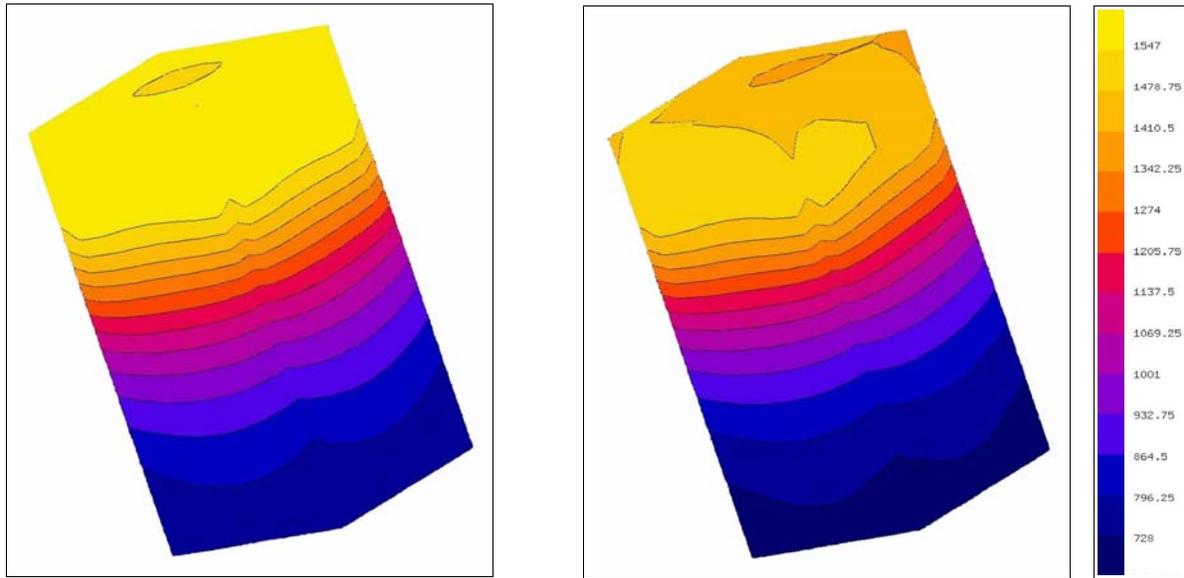


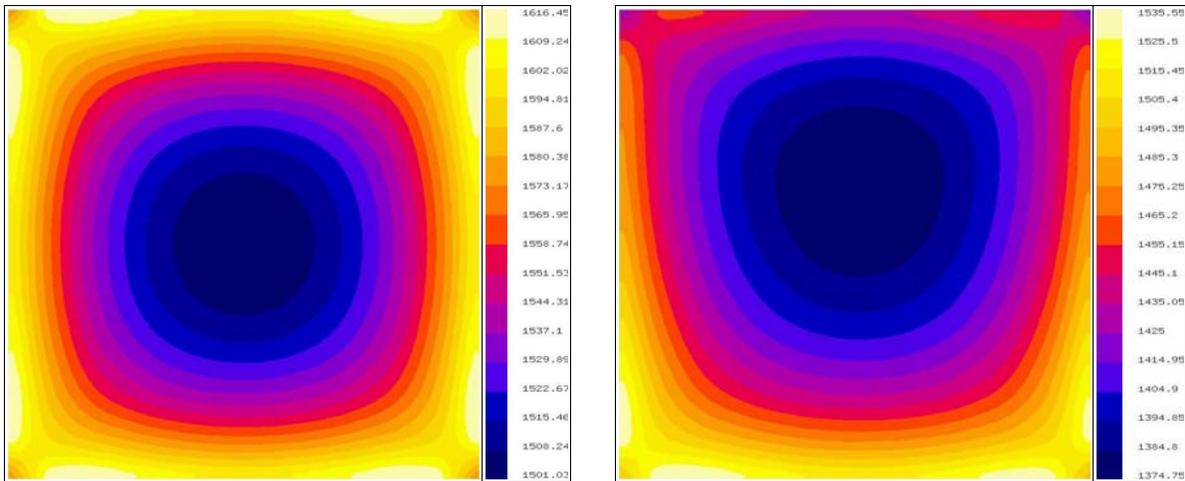
Figure 3.37 Densité de puissance Joule sur l'enveloppe 3D .



a) inducteur filiforme 3 spires horizontales

b) inducteur filiforme hélicoïdal

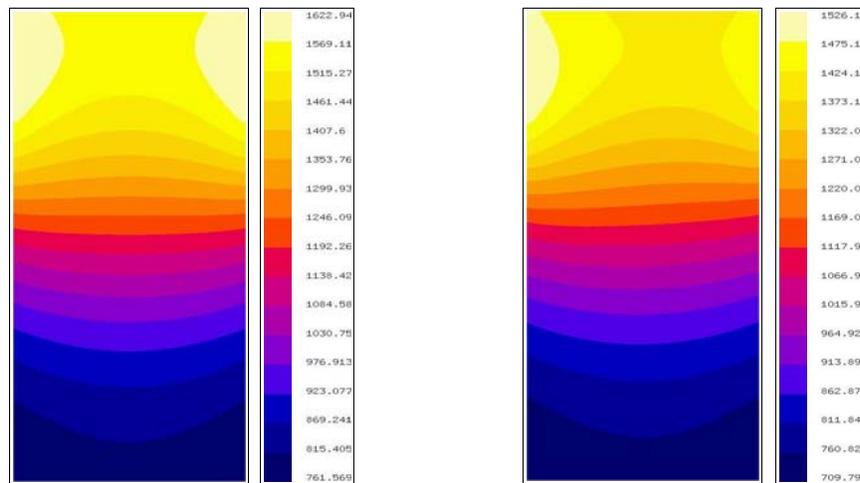
Figure 3.38 Isovaleurs de la température sur l'enveloppe 3D.



a) inducteur filiforme 3 spires horizontales

b) inducteur filiforme hélicoïdal

Figure 3.39 Isovaleurs de la température coupe horizontale à la hauteur 0,07 mm.



a) inducteur filiforme 3 spires horizontales b) inducteur filiforme hélicoïdal
 Figure 3.40 Isovaleurs de la température coupe verticale au centre de la charge.

5 Synthèse

Dans ce chapitre nous avons présenté un ensemble de tests effectués avec le logiciel MALICE3D dans le cas de la modélisation magnéto-thermique de systèmes inductifs. Les modules d'interpolation entre les deux méthodes numériques ont été validés à la fois pour les domaines bons conducteurs d'électricité et les domaines faiblement conducteurs. Des essais sur plusieurs maillages ont été effectués. Dans le cas du modèle en fine épaisseur de peau, ils ont permis de mettre en évidence l'importance du maillage thermique. Les divers algorithmes ont été exploités. Dans le cas de la grande épaisseur de peau nous avons retrouvé des résultats cohérents avec de précédentes modélisations (*Jacoutot 2006*).

Nous disposons maintenant d'un logiciel permettant de prendre en compte les couplage entre phénomènes physiques pour la modélisation des procédés inductifs. Nous pourrions en décrivant de nouvelles formulations éléments finis modéliser diverses configurations d'élaboration de matériau par exemple en prenant en compte de l'écoulement dans le domaine liquide, le changement d'état.

CHAPITRE 4

Validation du couplage fort

1 Introduction

Dans le chapitre 2 nous avons présenté le logiciel MIGEF. Ce logiciel est construit sur le couplage fort entre la méthode intégrale utilisée pour la modélisation électromagnétique et la méthode des éléments finis pour la modélisation thermique. Ce logiciel est dédié à la modélisation 3D des installations inductives. Il permet de calculer la répartition des densités de courant induit (J), du potentiel électrique (V) et de la température (T) dans toutes les régions de installation inductive. Ce logiciel est dédié aux cas des fortes interactions entre phénomènes électromagnétique et thermique. Il dispose d'un algorithme en régime permanent de résolution itérative adapté aux problèmes non linéaires.

Dans ce chapitre nous présentons tout d'abord le processus de mise en œuvre de ce logiciel puis des tests de validation.

2 Processus de mise en œuvre du logiciel MIGEF

Le logiciel MIGEF dispose des deux modules suivants :

- **ex_dmigef** : ce module permet de décrire les problèmes que l'utilisateur souhaite modéliser.
- **ex_migef** : ce module permet de résoudre le problème 3D électromagnétique et thermique par un couplage fort.

2.1 Description d'un problème

Le module *ex_dmigef* permet de décrire l'ensemble des données utiles à la modélisation magnéto-thermique. On obtient ainsi un fichier de données "nom.DONM". Ce module est une extension et adaptation à la prise en compte de la thermique de celui de MIGEN (*ex_dmigen*). La préparation des données nécessite les étapes suivantes :

- la description de la géométrie,
- le choix des paramètres du maillage,
- la définition des propriétés physiques,
- la définition des régions,
- la définition des conditions aux limites,
- le choix du modèle de couplage,
- le choix de l'algorithme de résolution.

2.1.1 Description de la géométrie de l'installation

On choisit tout d'abord l'espace de travail et le type de repère. Dans le cas de MIGEF on doit choisir un espace de travail de dimension 3 et un repère cartésien. Ensuite on décrit l'installation d'élaboration par induction comme un ensemble d'objets. Dans le cas 3D on peut modéliser les objets suivants : ligne brisée, cercle, hélice ou spirale, hexaèdre, cylindre, sphère et enroulement. Dans le cadre du couplage fort seul le maillage à l'ordre 2 a été développé pour les

hexaèdres. Ainsi actuellement, on ne peut pas effectuer une modélisation magnéto-thermique sur les cylindres, les sphères et les enroulements.

2.1.2 Choix des paramètres du maillage

Pour chaque objet modélisé, on choisit le modèle électromagnétique : soit le modèle en fine épaisseur de peau, soit le modèle en grande épaisseur de peau. Pour chaque objet on précise si le modèle thermique est activé.

Le modèle en fine épaisseur de peau électromagnétique est utilisé lorsque l'épaisseur de peau électromagnétique est faible devant la taille de l'objet. Ce choix permet de mailler la surface de l'objet. L'évolution des grandeurs à l'intérieur de l'objet suit alors une loi de décroissance exponentielle. On dispose d'un maillage de surface 3D de ces objets en quadrilatères d'ordre 1 et en triangles d'ordre 1.

Le modèle en grande épaisseur de peau électromagnétique est utilisé lorsque l'épaisseur de peau électromagnétique est voisine de la taille de l'objet. Dans ce cas le maillage de l'objet est volumique. On dispose d'un maillage de volume de ces objets en hexaèdres d'ordre 1 et en prismes d'ordre 1.

Le modèle thermique est utilisé lorsque l'on veut calculer la température dans un objet. Dans ce cas l'objet est maillé en volume pour le modèle thermique. On dispose d'un maillage de volumique des objets en hexaèdres à l'ordre 2.

2.1.3 Définition des propriétés physiques

Plusieurs matériaux peuvent être définis. Pour chaque matériau, on définit les propriétés physiques électromagnétiques et thermiques suivantes : la conductivité électrique, la perméabilité relative, la masse volumique, la conductivité thermique et la capacité calorifique. Chacune de ces propriétés physiques peut être décrite soit par un modèle constant soit par une fonction. Dans le cadre du logiciel MIGEF nous avons mis en place des modèles fonctions de la température pour la conductivité électrique et pour la conductivité thermique. Deux modèles ont été développés pour la conductivité électrique : un modèle linéaire par morceaux, le nombre de zones linéaires varie de un à trois et un modèle en puissance de 10 suivant la loi : $10^{A-\frac{B}{T}}$

Un modèle a été développé pour la conductivité thermique, linéaire par morceaux, le nombre de zones linéaires varie de un à trois. Tous les modèles sont décrits sur un intervalle $[T_{min}, T_{max}]$ choisi par l'utilisateur. Pour une température inférieure à T_{min} la propriété est constante et prend la valeur en T_{min} . Pour une température supérieure à T_{max} la propriété est constante et prend la valeur en T_{max} .

2.1.4 Définition des régions

Dans le cas 3D, on a deux types de régions. Les régions volumiques qui servent à décrire les charges induits ou les creuset froids et les inducteurs modélisés. Les régions linéiques qui servent à décrire les inducteurs filiformes non modélisés.

Chaque région peut être constituée d'un ou plusieurs objets. Pour chaque région, on choisit un matériau. L'inducteur peut être constituée d'une ou plusieurs régions. Il est constitué de

plusieurs régions dans le cas des courants polyphasés par exemple. Lorsque l'inducteur est filiforme on impose le module du courant inducteur. Lorsque l'inducteur est modélisé, on impose soit le module du courant inducteur, soit le module de la tension aux bornes de l'inducteur.

2.1.5 Définition des conditions aux limites

Les conditions aux limites électromagnétiques sont automatiquement mises en œuvre par le solveur. Par contre l'utilisateur doit définir les conditions aux limites du problème thermique. On définit tout d'abord le nombre de conditions aux limites. Celles-ci peuvent être de deux types :

- Condition de Dirichlet : La température est imposée à la frontière T_d ,
- Condition de Neumann : On définit les grandeurs suivantes :
 - Le flux de chaleur imposé à la surface : $Flux$,
 - Le coefficient d'échange convectif à la surface h_{cv} ,
 - La température ambiante T_a .

Pour chaque condition aux limites définie par l'utilisateur celui-ci précise le nombre de faces et la liste des faces des objets auxquels elles sont appliquées.

2.1.6 Définition du modèle de couplage

Dans le chapitre 2 section 6.2.1 nous avons présenté deux modes de couplage fort. Nous disposons ainsi dans MIGEF de deux constructions du système d'équations couplées. Ces deux choix concernent le terme dû à la source thermique. Les deux choix possibles sont les suivants :

- **Source de chaleur placée dans le second membre du système.** Dans ce cas on définit la source de chaleur thermique initiale Q_{th0} qui permet de calculer le vecteur K à la première itération. Pour les itérations suivantes ce terme sera calculé à partir des grandeurs électromagnétiques de la résolution précédente.
- **Densité de puissance Joule placée dans le premier membre du système.** Dans ce cas on définit la densité de courant initiale J_0 pour construire le terme d'intégration de M_{Qth} de la matrice M à la première itération. Pour les itérations suivantes on utilisera la densité calculée à la résolution précédente.

2.1.7 Définition de l'algorithme de résolution

Un seul algorithme est disponible : non linéaire en régime permanent. Du point de vue électromagnétique la fréquence est imposée, ainsi que le courant inducteur ou la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur. L'utilisateur précise le nombre maximum d'itérations et la précision souhaitée.

2.2 Résolution du problème

Le module *ex_migef* permet de résoudre un problème magnéto-thermique décrit dans un fichier de données "nom.DONM". Il construit le maillage de l'installation, puis met en œuvre l'algorithme non linéaire. A chaque itération le système d'équations est construit puis résolu par la méthode de Gauss avec Pivot total. Lorsque l'algorithme a convergé on stocke les grandeurs calculées : les densités de courant aux nœuds du maillage en \vec{J} , le potentiel électrique aux nœuds du maillage en V et la température aux nœuds du maillage en T. Des grandeurs locales dérivées des inconnues sont aussi disponibles si l'utilisateur le demande : densité de puissance Joule, induction magnétique, densité de force électromagnétique. Des grandeurs globales sont calculées notamment : l'impédance électrique équivalente de l'installation, la puissance Joule dans chaque objet et l'intégrale volumique de la source thermique. L'ensemble de ces résultats sont stockés dans des fichiers.

Pour l'exploitation des résultats on utilise le module *ex_trmigen* pour les grandeurs électromagnétique et *sigmaplot* pour le tracé d'isovaleurs.

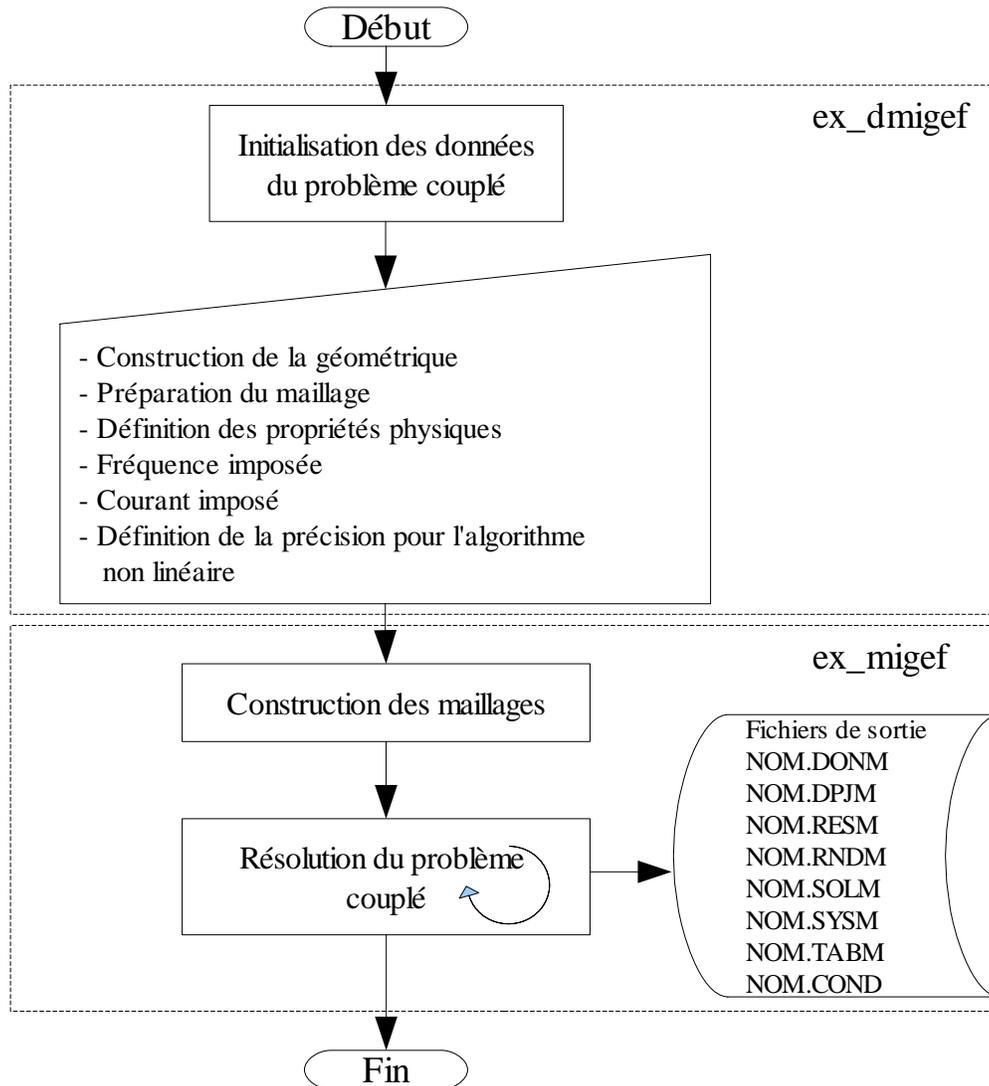


Figure 4.1 Organigramme de MIGEF.

3 Validation du couplage fort

Dans ce paragraphe plusieurs modélisations magnéto thermiques ont été réalisées afin de valider le couplage fort. Nous avons tout d'abord testé la prise en compte de la densité de puissance Joule au sein de l'équation thermique puis nous avons testé l'algorithme non linéaire en régime permanent.

3.1 Validation de la modélisation de la source thermique

Comme nous l'avons précisé dans le chapitre 2 le couplage fort mis en œuvre dans le logiciel MIGEF nécessite une interpolation des sources entre les deux maillages de densité de courant et de température. Pour effectuer ce test nous considérons des propriétés constantes. Le problème magnéto thermique étudié est linéaire statique. L'utilisation d'un logiciel tel que MIGEF pour un problème linéaire statique ne présente pas d'intérêt. Le but de cette modélisation est de tester les interpolations des sources pour les diverses formulations thermiques mis en place.

La configuration étudiée est constituée d'une charge hexaédrique : de section $0,05m \times 0,05m$ et de hauteur $0,1m$, centrée dans un inducteur filiforme de 5 spires équidistantes de section carrée : $0,06m \times 0,06m$.

Nous nous placerons dans les deux cas suivants : le cas fine épaisseur de peau et le cas grande épaisseur de peau.

3.1.1 Cas de la fine épaisseur de peau

Dans ce cas, la charge est en cuivre. La conductivité électrique vaut $0,5 \times 10^8 (\Omega \cdot m)^{-1}$. La perméabilité relative (μ_r) vaut 1. La conductivité thermique (k_{th}) vaut $400 W/m/K$. Les conditions aux limites sur les faces de la charge sont des conditions de Neumann. On choisit des échanges convectifs. Le coefficient d'échange vaut $10 W/m^2/K$. La température ambiante est fixée à $300 K$. Dans l'inducteur le module du courant est fixé à $1000 A$. La fréquence du courant inducteur est $1 kHz$. L'épaisseur de peau électromagnétique (δ) vaut $2,25 mm$. Elle est faible devant la taille caractéristique de la charge. Des essais ont été effectués pour divers maillages.

Pour chaque cas nous avons testé et comparés les deux formulations de la thermique. La formulation Q_{th0} est la formulation où la source thermique est dans le second membre de l'équation. La formulation J_0 est la formulation où la source thermique est dans la matrice du système. Dans ce cas élémentaire les deux formulations doivent donner des résultats identiques. Les résultats obtenus pour plusieurs maillages sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 4.2. P_J représente la puissance Joule issue de la méthode intégrale. $P_{J,MEF}$ représente la puissance Joule injectée dans la formulation thermique.

Dans le tableau 4.1 seul le maillage thermique change. Les cas regroupés dans ce tableau permettent de comparer les résultats obtenus avec ces deux formulations. Nous constatons que les deux formulations thermiques donnent des résultats identiques en température et puissance. L'écart relatif entre les puissances P_J et $P_{J,MEF}$ varie entre $1,59 \cdot 10^{-2}$ et $4,76 \cdot 10^{-2}$. En affinant le maillage l'écart relatif diminue. Les résultats obtenus pour les deux maillages thermiques dont

les nombres d'éléments T sont 160 et 432 sont très proches. Ces premiers résultats nous ont permis de valider la prise en compte de la densité de puissance Joule dans les formulations thermiques. Les temps de calcul sont beaucoup plus long avec la formulation thermique J_0 . Ceci est normal car la construction du système est plus longue.

Dans les tableaux 4.2 et 4.3 nous avons regroupés des calculs réalisés avec la formulation Q_{th0} pour trois maillages. Pour ces trois maillages la précision sur l'interpolation de la puissance Joule est la même. La puissance Joule et la température augmentent lorsque le maillage est affiné.

Tableau 4.1 : Comparaison des formulations de la thermique dans le cas fine peau.

Résultats	24 Nb éléments V et 54 Nb éléments J					
	32 Nb éléments T		160 Nb éléments T		432 Nb éléments T	
	Formulation Q_{th0}	Formulation J_0	Formulation Q_{th0}	Formulation J_0	Formulation Q_{th0}	Formulation J_0
$P_J(W)$	137,735	137,735	137,735	137,735	137,735	137,735
$P_{J,MEF}(W)$	131,183	131,183	135,539	135,539	135,259	135,259
$\Delta P/P$	$4,76 \cdot 10^{-2}$	$4,76 \cdot 10^{-2}$	$1,59 \cdot 10^{-2}$	$1,59 \cdot 10^{-2}$	$1,80 \cdot 10^{-2}$	$1,80 \cdot 10^{-2}$
$T_{max}(K)$	825,169	825,169	842,561	842,561	841,444	841,444
Temps (s)	39	499	206	3708	971	12841

Tableau 4.2 : Nombre d'éléments des maillages des configurations étudiées.

Maillage	Nb éléments V	Nb éléments J	Nb éléments T	Taille de système
Grossier	96	150	432	1562
Moyen	210	288	896	3376
Fin	378	480	1600	6192

Tableau 4.3 : Influence du nombre d'éléments dans le cas fine peau.

Maillages	$P_{J,MI}(W)$	$P_{J,MEF}(W)$	$\Delta P/P$	$T_{max}(K)$	$T_{min}(K)$
Grossier	148,606	145,721	$1,94 \cdot 10^{-2}$	883,121	882,488
Moyen	149,495	146,591	$1,94 \cdot 10^{-2}$	884,033	883,560
Fin	151,889	148,859	$1,99 \cdot 10^{-2}$	895,718	895,010

Nous présentons maintenant les résultats locaux pour deux maillages. La répartition de la température est présentée sur une coupe horizontale figure 4.3 et une coupe verticale figure 4.4. L'écart relatif sur la température entre les deux maillages est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-3}$.

Dans le cas de fine épaisseur de peau les températures sont presque uniformes car l'inducteur a une hauteur proche de celle de la charge et la conductivité thermique est importante. La température est un peu plus faible sur les parois inférieure et supérieure car sur ces faces la densité de puissance Joule est plus faible.

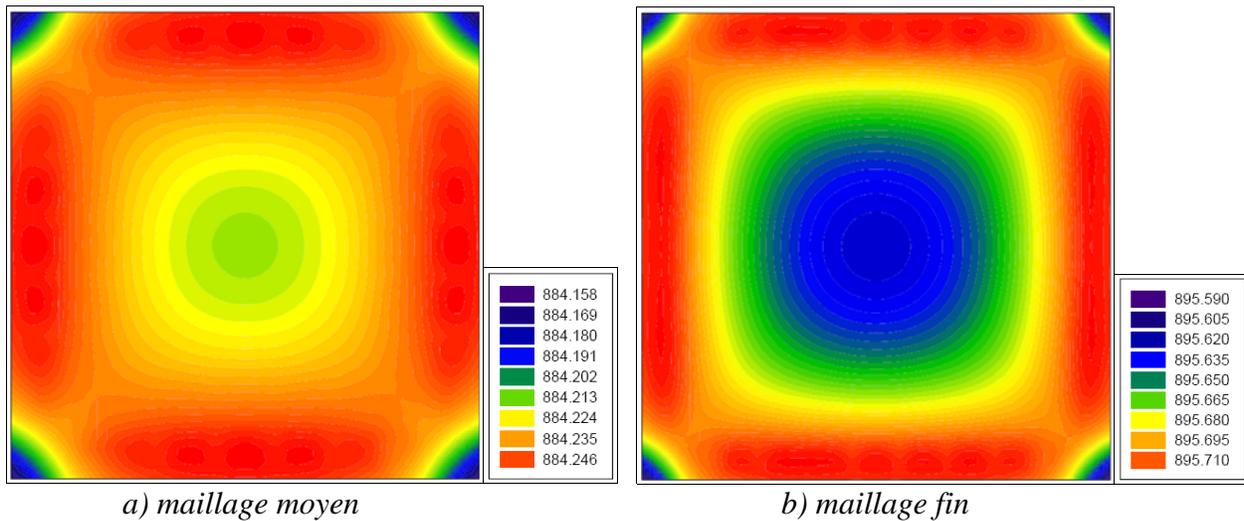


Figure 4.3 Isovaleurs de température dans la coupe horizontale à mi-hauteur.

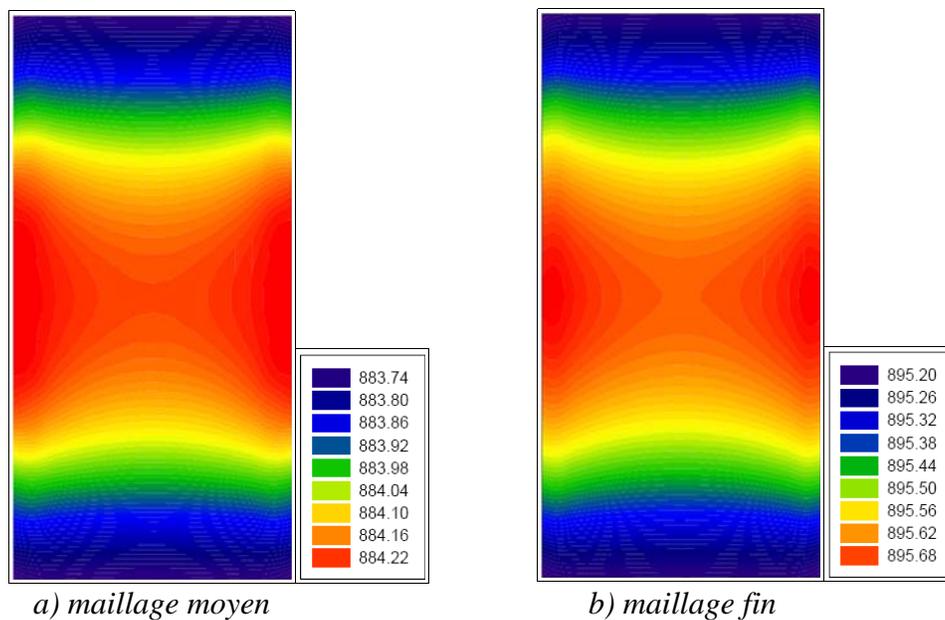


Figure 4.4 Isovaleurs de la température dans la coupe verticale.

3.1.2 Cas de la grande épaisseur de peau

Dans ce cas, la charge est en silicium. La conductivité électrique vaut $0,5 \times 10^4 (\Omega \cdot m)^{-1}$. La perméabilité relative vaut 1. La conductivité thermique vaut $148 W/m/K$. Les conditions aux limites sur les faces de la charge sont des conditions de Neumann. On choisit des échanges convectifs. Le coefficient d'échange vaut $10 W/m^2/K$. La température ambiante est fixée à $300 K$. Dans l'inducteur le module du courant est fixé à $1000 A$. La fréquence du courant inducteur est $5 kHz$. L'épaisseur de peau électromagnétique (δ) vaut $225 mm$. Elle est comparable à la taille caractéristique de la charge nous sommes dans un cas de grande épaisseur de peau. Des essais ont été effectués pour divers maillages.

Dans le tableau 4.4 nous présentons les résultats obtenus pour plusieurs maillages. Les deux formulations thermiques sont comparées. Pour chacun des maillages les deux formulations thermiques donnent les mêmes résultats : les puissances Joule $P_{J,MEF}$ et les températures maximales sont identiques. L'écart relatif entre P_J et $P_{J,MEF}$ diminue lorsque le maillage est affiné. Il tend vers 10^{-3} . Ces premiers résultats nous permettent de valider les intégrants des termes sources dans le cas de la grande épaisseur de peau. Les temps de calcul croissent rapidement avec la taille du maillage.

Tableau 4.4 : Comparaison des formulations de la thermique dans le cas grande peau.

Résultats	8 Nb éléments V et 27 Nb éléments J					
	32 Nb éléments T		160 Nb éléments T		432 Nb éléments T	
	Formulation Q_{th0}	Formulation J_0	Formulation Q_{th0}	Formulation J_0	Formulation Q_{th0}	Formulation J_0
$P_J (W)$	85,488	85,488	85,488	85,488	85,488	85,488
$P_{J,MEF}$	83,834	83,834	85,435	85,435	85,257	85,257
$\Delta P/P$	$1,93 \cdot 10^{-2}$	$1,93 \cdot 10^{-2}$	$6,2 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$
$T_{max} (K)$	636,012	636,012	642,429	642,429	641,716	641,716
Temps (s)	122	349	240	2009	885	6738

Dans les tableaux 4.5 et 4.6 nous reportons les résultats obtenus en affinant les maillages électromagnétiques et thermiques. En affinant le maillage la précision sur l'interpolation de la puissance Joule est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-4}$. Les températures maximales convergent vers $783,56 K$.

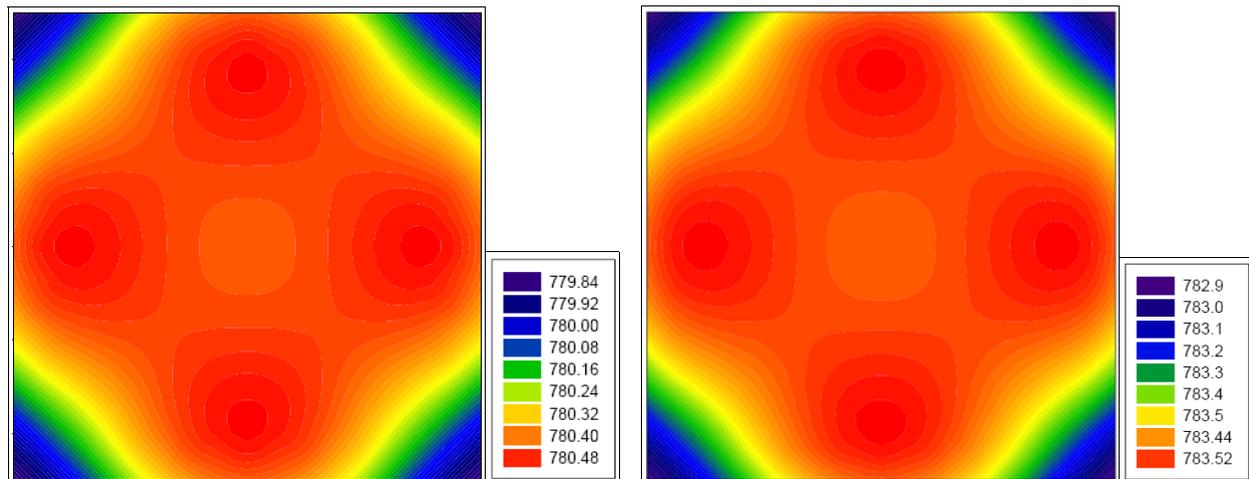
Tableau 4.5 : Nombre d'éléments des maillages des configurations étudiées.

Maillage	Nb d'éléments V	Nb d'éléments J	Nb d'éléments T	Taille de système
Grossier	64	125	432	1781
Moyen	200	324	896	4088
Fin	490	704	1600	7986

Tableau 4.6 : Influence du nombre d'éléments dans le cas grande peau.

Maillages	$P_{J,MI} (W)$	$P_{J,MEF} (W)$	$\Delta P/P$	$T_{max} (K)$	$T_{min} (K)$
Grossier	114,467	114,001	$4,1 \cdot 10^{-3}$	756,546	755,042
Moyen	119,895	119,878	$1,4 \cdot 10^{-4}$	780,480	778,945
Fin	120,666	120,643	$1,9 \cdot 10^{-4}$	783,559	782,000

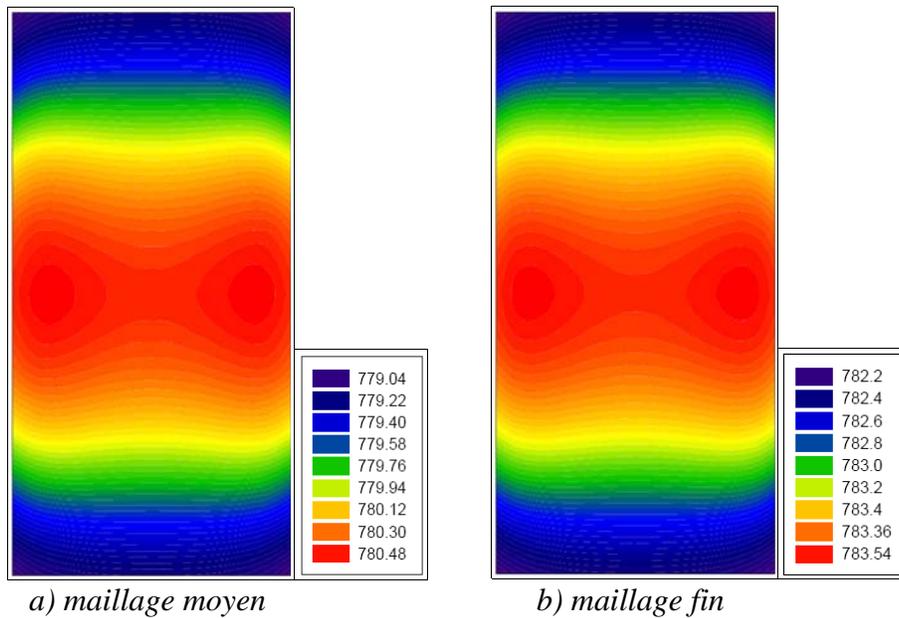
Nous présentons les résultats locaux pour des maillages moyen et fin. Sur les figures 4.5 et 4.6 nous avons les isovaleurs de la température dans une coupe horizontale et une coupe verticale obtenues pour deux maillages thermiques. Les gradients de température dans la charge sont faibles. La configuration choisie avec un inducteur centré et d'une hauteur proche de celle de la charge en est la cause. Les écarts relatifs entre les températures des deux maillages thermiques sont de l'ordre de $1.5 \cdot 10^{-5}$.



a) maillage moyen

b) maillage fin

Figure 4.5 Isovaleurs de température dans la coupe horizontale à mi-hauteur.



a) maillage moyen b) maillage fin
 Figure 4.6 Isovaleurs de la température dans la coupe verticale.

3.2 Validation de l'algorithme de couplage fort non linéaire

Pour valider l'algorithme de couplage fort nous nous plaçons dans le cas où la conductivité électrique dépend de la température. Ce problème est non linéaire statique. Le modèle électromagnétique est le modèle fine peau. Nous comparons les deux formulations thermiques.

3.2.1 Cas de la fine épaisseur de peau

La configuration étudiée est celle de la section 3.1. Elle est constituée des éléments suivants :

- une charge hexaédrique de section $0,05\text{ m} \times 0,05\text{ m}$ et de hauteur $0,1\text{ m}$,
- un inducteur composé de 3 spires filiformes carrées $0,08\text{ m} \times 0,08\text{ m}$ dont les positions verticales respectives sont les suivantes $0,07\text{ m}$, $0,08\text{ m}$ et $0,09\text{ m}$.

Les propriétés physiques de la charge sont constants seule la conductivité électrique dans la charge dépend de la température selon la loi linéaire par morceau définie suivant la relation :

$$\sigma(T) = 1.10^7 : T \leq 300\text{K}$$

$$\sigma(T) = -30000T + 1,9.10^7 : 300\text{K} \leq T < 500\text{K}$$

$$\sigma(T) = -10000T + 9.10^6 : 500\text{K} \leq T < 700\text{K}$$

$$\sigma(T) = -2750T + 3,925.10^6 : 700\text{K} \leq T \leq 1100\text{K}$$

$$\sigma(T) = 9.10^5 : 1100\text{K} \leq T$$

La perméabilité relative vaut 1 . La conductivité thermique vaut 40 W/m/K . Les conditions aux limites thermiques sont des échanges convectifs. Le coefficient d'échange sur les faces supérieure et inférieure vaut $100\text{ W/m}^2/\text{K}$. Le coefficient d'échange sur les parois latérales vaut $250\text{ W/m}^2/\text{K}$. La température ambiante vaut 300 K . Dans l'inducteur le

module du courant est fixé à $934A$. La fréquence du courant inducteur est $150kHz$. La puissance bloquée vaut $2000W$. Compte tenu de la loi de variation de la conductivité électrique l'épaisseur de peau électromagnétique (δ) varie entre $0,411mm$ et $1,012mm$.

La modélisation magnéto thermique est réalisée avec l'algorithme non linéaire de MIGEF. La température initiale est $300K$, la précision demandée est 3.10^{-5} .

Le maillage électromagnétique est constitué de 210 éléments surfaciques V, 288 éléments surfaciques J et le maillage thermique de 896 éléments volumique T. Dans le tableau 4.7 sont présentés les résultats globaux pour les deux formulations. Sur la figure 4.7 est présentée la convergence de l'algorithme non linéaire pour chacune des formulations thermiques de MIGEF. La formulation où la densité de puissance Joule est dans le premier membre du système (formulation J_0) converge au bout de 8 itérations tandis que la formulation où la densité de puissance Joule est au second membre converge au bout de 13 itérations. Pour les deux formulations on obtient des résultats très proches. La puissance Joule $P_{J,MEF}$ pour la formulation J_0 vaut $1951,08W$ et la température maximum (T_{max}) vaut environ $881,53K$. Le couplage fort, formulation J_0 converge plus rapidement.

La figure 4.8 présente la répartition de la température obtenue à la convergence. La température est plus élevée à la surface de la charge. Dans le plan de coupe horizontal les gradients de température sont plus faibles que dans le plan de coupe verticale. Dans cette configuration l'inducteur est de faible hauteur et situé au niveau de la partie haute de la charge. Le bas de la charge est le siège de pertes convectives. Ceci explique la différence importante de température entre le haut et le bas de la charge.

Tableau 4.7 : Résultats du problème non linéaire dans le cas de fine épaisseur de peau.

Maillages	$P_{J,Mi}(W)$	$P_{J,MEF}(W)$	$\Delta P/P$	$T_{max}(K)$	$T_{min}(K)$
Formulation Q_{th0}	2000	1950,37	$2,48 \cdot 10^{-2}$	876,437	473,48
Formulation J_0	2000	1951,08	$2,45 \cdot 10^{-2}$	881,532	473,50

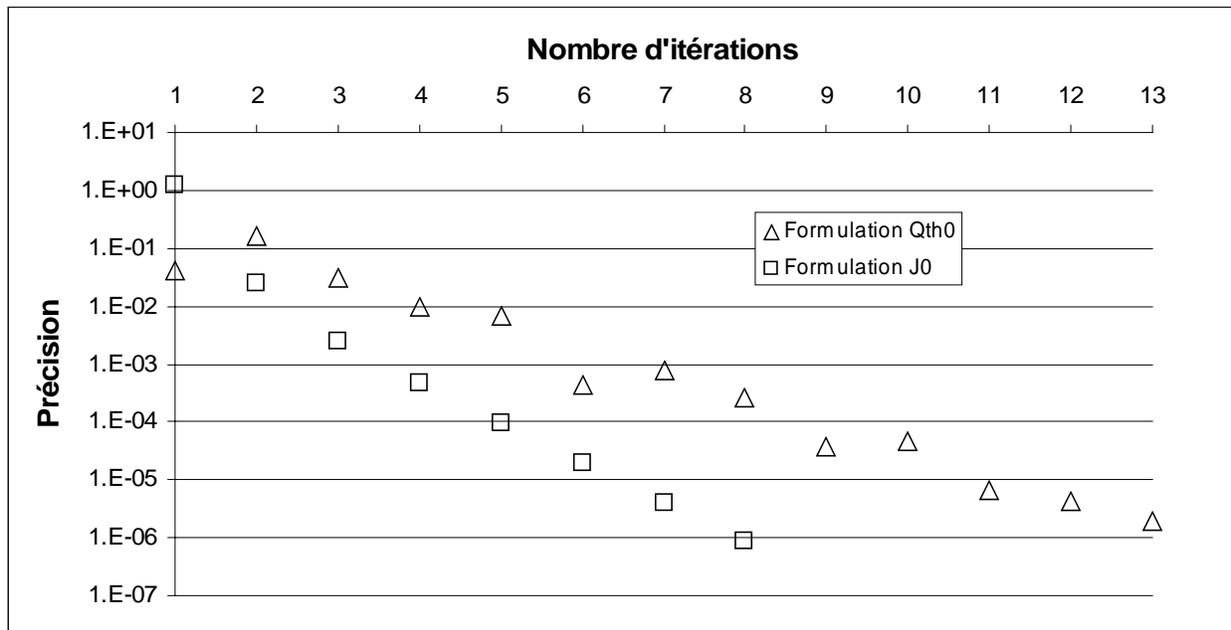
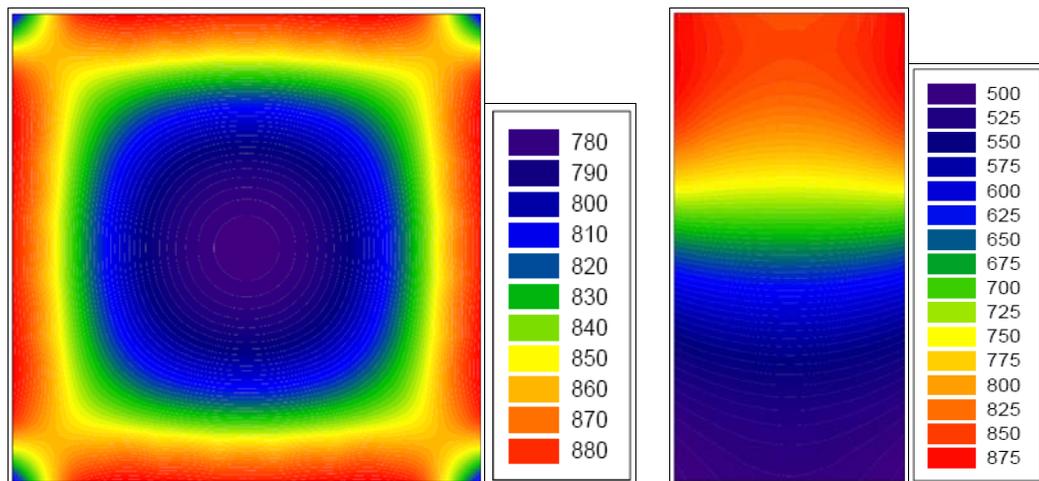


Figure 4.7 La convergence de la température.



a) coupe horizontale à la hauteur 0,07 mm. b) coupe verticale au centre de la charge

Figure 4.8 Isovaleurs de la température.

3.2.2 Cas de la grande épaisseur de peau

La configuration est constituée des éléments suivants :

- une charge hexaédrique de section $0,443\text{ m} \times 0,443\text{ m}$ et de hauteur $0,185\text{ m}$,
- un inducteur composé de 3 spires filiformes carrées $0,513\text{ m} \times 0,513\text{ m}$ dont les positions verticales sont les suivantes $0,0925\text{ m}$, $0,12975\text{ m}$ et $0,157\text{ m}$.

La charge est en verre. Les propriétés physiques de la charge sont constants seule la conductivité électrique dans la charge dépend de la température selon la loi linéaire définie suivant la relation :

$$\sigma(T) = 10^{3,7921 - \frac{3917,8}{T}} : 300K \leq T \leq 2000K$$

$$\sigma(T) = 5,4 \cdot 10^{-10} : T \leq 300K$$

$$\sigma(T) = 68,108 : 2000K \leq T$$

La perméabilité relative vaut 1 . La conductivité thermique vaut $4 W/m/K$. Les conditions aux limites thermiques sont des échanges convectifs. Le coefficient d'échange sur les faces supérieures et inférieures vaut $100 W/m^2/K$. Le coefficient d'échange sur les parois latérales vaut $300 W/m^2/K$. La température ambiante vaut $300 K$. Dans l'inducteur le module du courant est fixé à $1000 A$ au début du calcul. La fréquence du courant inducteur est $282 kHz$. La puissance bloquée vaut $30 kW$. Compte tenu de la loi de variation de la conductivité électrique l'épaisseur de peau électromagnétique (δ) varie entre $114,1 mm$ et $947,8 mm$.

La modélisation magnéto thermique est réalisée avec l'algorithme non linéaire de MIGEF. La température initiale est $800K$ la précision demandée est 10^{-3} .

Le maillage électromagnétique est constitué de 144 éléments volumiques V, 245 éléments volumiques J et le maillage thermique de 1320 éléments volumiques T. Dans le tableau 4.8 sont présentés les résultats globaux pour chacune des formulations thermiques de MIGEF. Sur la figure 4.9 est présentée la convergence de l'algorithme non linéaire pour chacune des formulations thermiques de MIGEF. La formulation où la densité de puissance Joule est dans le premier membre du système (formulation J_0) converge au bout de 15 itérations. La formulation où la densité de puissance Joule est dans le second membre du système (formulation Q_{th0}) converge au bout de 22 itérations. Pour les deux formulations on obtient des résultats très proches. Pour la formulation J_0 la puissance Joule $P_{J,MEF}$ vaut $29999,40W$ et de la température maximum T_{max} vaut $2368,98K$. La précision sur l'interpolation de la puissance Joule est bonne voisine de $2 \cdot 10^{-5}$. Pour cette modélisation non linéaire nous constatons encore une convergence plus rapide de la formulation J_0 correspondant au couplage fort. La répartition en température dans une coupe verticale au centre de la charge obtenue a la convergence est présentée la figure 4.10. Les gradients de température sont importants dans la charge.

Tableau 4.8 : Résultats du problème non linéaire dans le cas de grande épaisseur de peau.

Maillages	$P_{J,MI}(W)$	$P_{J,MEF}(W)$	$\Delta P/P$	$T_{max}(K)$	$T_{min}(K)$
Formulation Q_{th0}	30000	29999,38	$2,07 \cdot 10^{-5}$	2368,66	473,35
Formulation J_0	30000	29999,40	$2 \cdot 10^{-5}$	2368,98	473,48

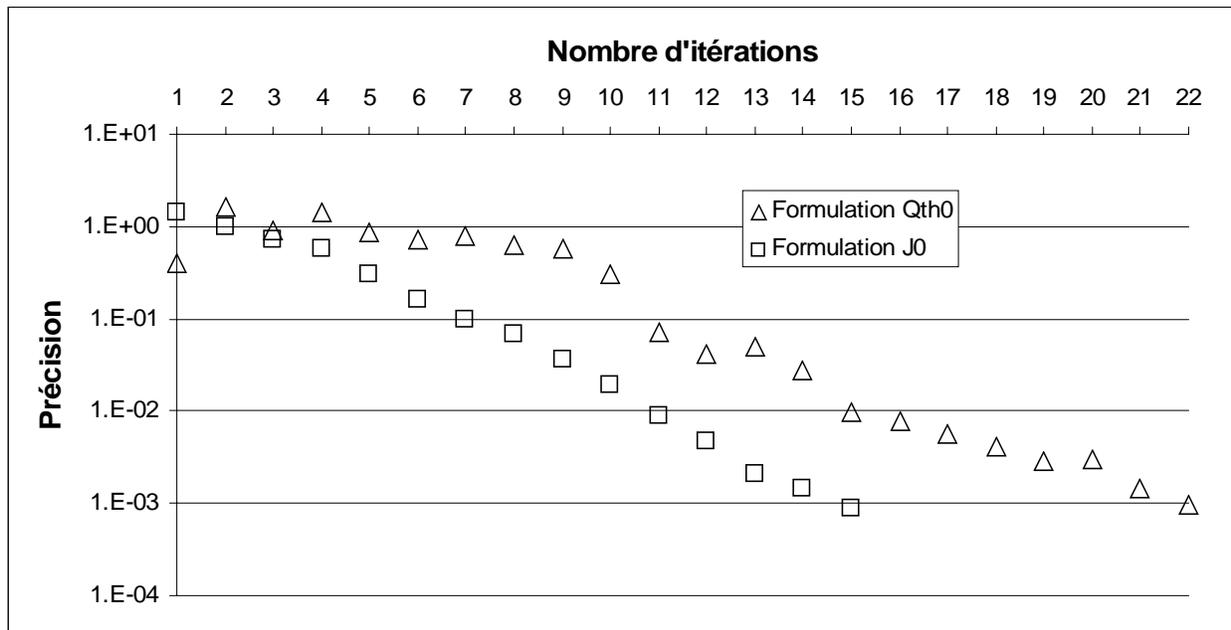


Figure 4.9 La convergence de la température.

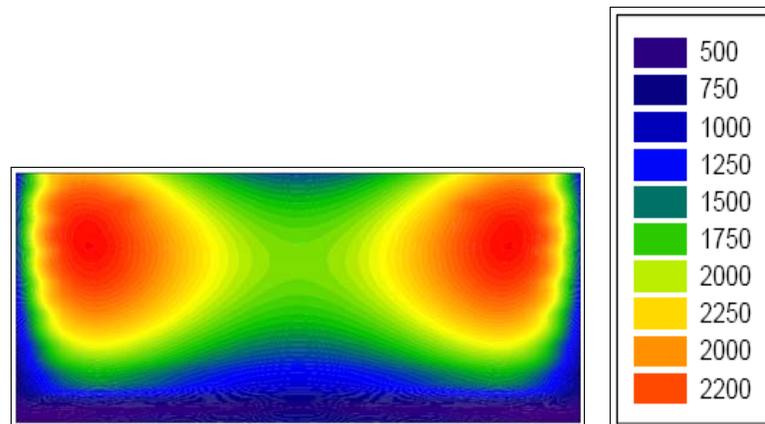


Figure 4.10 Isovaleurs de la température.

4 Conclusion

Ce chapitre concerne la validation du logiciel MIGEF construit sur le couplage fort de la méthode intégrale et de la méthode des éléments finis. Les tests effectués concernent les deux formulations développées dans le logiciel MIGEF. Ces deux formulations sont comparées dans le cas des modélisations en fine épaisseur de peau et en grande épaisseur de peau. Avec ce logiciel nous avons modélisés des problèmes magnéto thermiques en régime permanent. Dans le cas non linéaire nous obtenons la convergence est plus rapide avec la deuxième formulation où la densité de puissance Joule est dans le premier membre du système.

CHAPITRE 5

Modélisation numérique 3D de problèmes magnéto thermiques

1 Introduction

Dans les chapitres 3 et 4, nous avons effectué de tests sur les couplages développés au cours de cette thèse : sur le couplage faible (MALICE3D) et sur le couplage fort (MIGEF). Dans ce chapitre, nous utilisons les logiciels MALICE3D et MIGEF pour réaliser la modélisation numérique 3D de quelques problèmes de chauffage par induction. Nous comparerons les résultats obtenus avec ces deux logiciels. Le logiciel MIGEF ne permettant pas de résoudre des problèmes en régime transitoire nous considérons seulement des problèmes en régime permanent. Nous présentons des résultats pour des procédés d'élaboration par induction en creuset froid inductif. Nous étudions plusieurs géométries, plusieurs matériaux.

Tout d'abord nous considérons un procédé d'élaboration par induction sans modéliser le creuset froid dans le cas d'une charge modélisée en fine épaisseur de peau. La modélisation est réalisée avec les deux logiciels afin de comparer les résultats obtenus.

Ensuite le procédé d'élaboration en creuset froid est modélisé.

2 Procédé d'élaboration par induction sans creuset froid

La configuration d'élaboration étudiée est constituée d'une charge et d'un inducteur filiforme (Figure 5.1). La charge est un hexaèdre dont les dimensions sont les suivantes : $0,06m \times 0,06m \times 0,1m$. L'inducteur est constitué de 5 spires de section carrée : $0,08m \times 0,08m$, réparties régulièrement. Les positions verticales des spires sont suivantes : $0,03m$, $0,04m$, $0,05m$, $0,06m$ et $0,07m$.

La charge est en cuivre. La conductivité électrique σ vaut $0,5 \times 10^8 (\Omega \cdot m)^{-1}$ et la conductivité thermique k_{th} vaut $400 W/m/K$. Les conditions aux limites thermiques sont des échanges convectifs sur toutes les faces de la charge. Le coefficient d'échange h_{cv} vaut $80 W/m^2/K$ et la température ambiante T_a vaut $300 K$. L'inducteur est parcouru par un courant de module de $1000A$ à une fréquence de $20 kHz$.

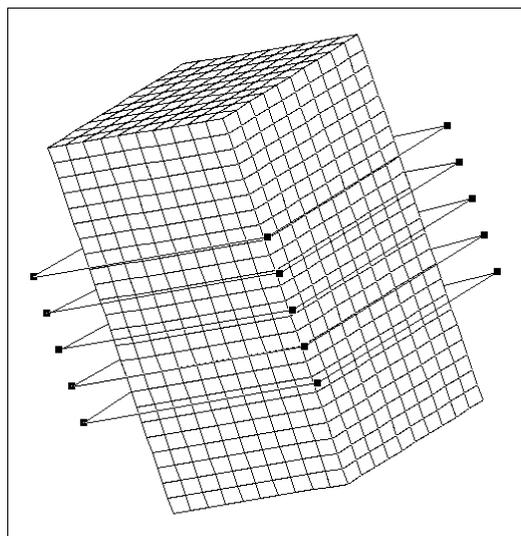


Figure 5.1 Charge + inducteur filiforme.

Ce problème magnéto thermique est linéaire. Dans MALICE3D, nous choisissons l'algorithme réel linéaire statique symétrique (RLSSYMI) pour résoudre ce problème. Dans MIGEF, nous choisis la formulation avec la source de chaleur en second membre pour résoudre ce problème.

2.1 Résultats du problème électromagnétique

Dans ce problème l'épaisseur de peau électromagnétique de la charge vaut 0,5 mm. Le paramètre d'écran vaut 7200. L'épaisseur de peau électromagnétique est très faible devant la taille de la charge. Le modèle électromagnétique est le modèle fine peau. La charge est discrétisée en éléments surfaciques. Les nombres d'éléments dans les trois directions sont $10 \times 10 \times 24$. Le nombre d'éléments V est 1160. Les figures 5.2 (a) et (b) présentent les vecteurs densités de courant induit à la surface de la charge. La direction principale des densités de courant est horizontale. Elle tourne autour de la charge dans le sens opposé au courant électrique circulant dans l'inducteur. La densité maximale de courant vaut $0,16 \times 10^9 J/m^2$. La puissance Joule induite dans la charge vaut 1285W.

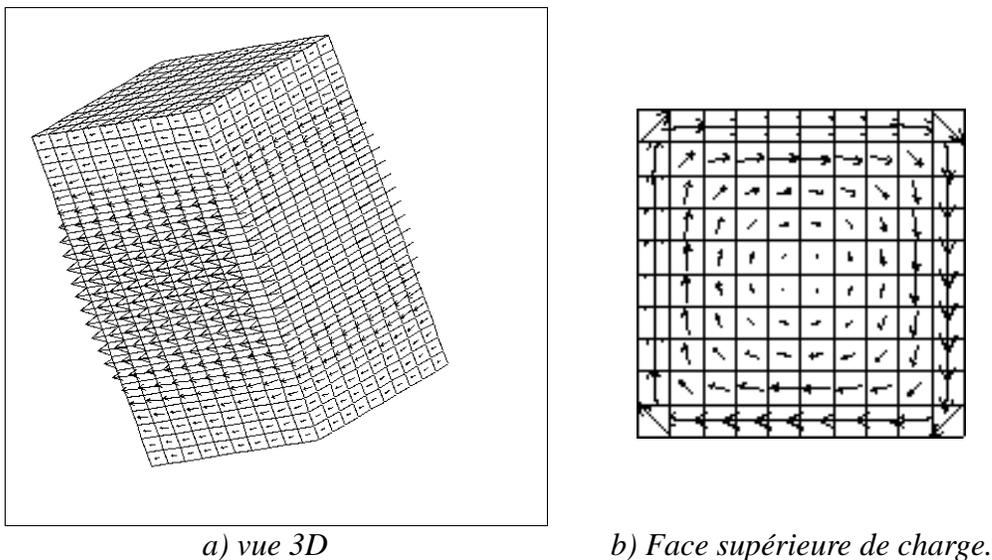


Figure 5.2 Vecteurs densités de courant à la surface de la charge

2.2 Résultats du problème thermique

Dans cette section, on compare les résultats thermiques obtenus par les méthodes de couplage faible MALICE3D et de couplage fort MIGEF.

Dans ce problème l'épaisseur de peau électromagnétique est faible ainsi la densité de puissance Joule varie selon une loi de décroissance exponentielle suivant la normale à la surface. La taille des éléments au voisinage de la surface de la charge doit être suffisamment faible afin d'avoir une interpolation correcte de la densité de puissance Joule. Nous avons effectué des modélisations magnéto thermiques pour des maillages thermiques réguliers et pour un maillage thermique affiné au voisinage des parois latérales (Figure 5.3). Le maillage thermique régulier de MALICE3D est constitué de 19488 éléments soit une discrétisation dans les trois directions de $(28 \times 28 \times 20)$. Avec le mailleur MIME on peut adapter le maillage au cas fine peau : le

maillage thermique est affiné à proximité des parois latérales de la charge (Triwong 2007). Les mailles sont plus grandes au centre de la charge. Le maillage affiné en périphérie est constitué de 19488 éléments. Le maillage thermique régulier de MIGEF est constitué de 1600 éléments soit une discrétisation dans les trois directions de $(10 \times 10 \times 10)$. Le nombre d'éléments dans MIGEF est limité par la taille du système que l'on peut construire. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le système d'équations du logiciel MIGEF est plein et la méthode de résolution est une méthode directe.

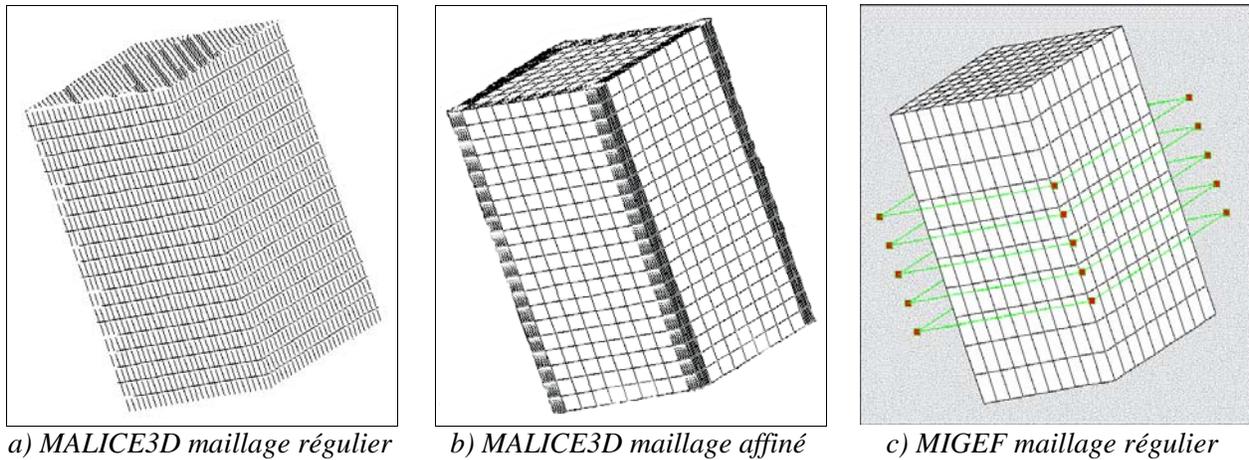


Figure 5.3 Maillages thermiques

Sur la figure 5.4 nous présentons la source de chaleur thermique interpolée à partir de la densité de puissance Joule de la méthode intégrales à la surface la densité de puissance Joule a une valeur maximale de $6,15 \times 10^8 \text{ W/m}^3$. Elle décroît rapidement à l'intérieur de la charge. Elle dévient pratiquement nulle à une distance de $1,5 \text{ mm}$ de la surface de la charge.

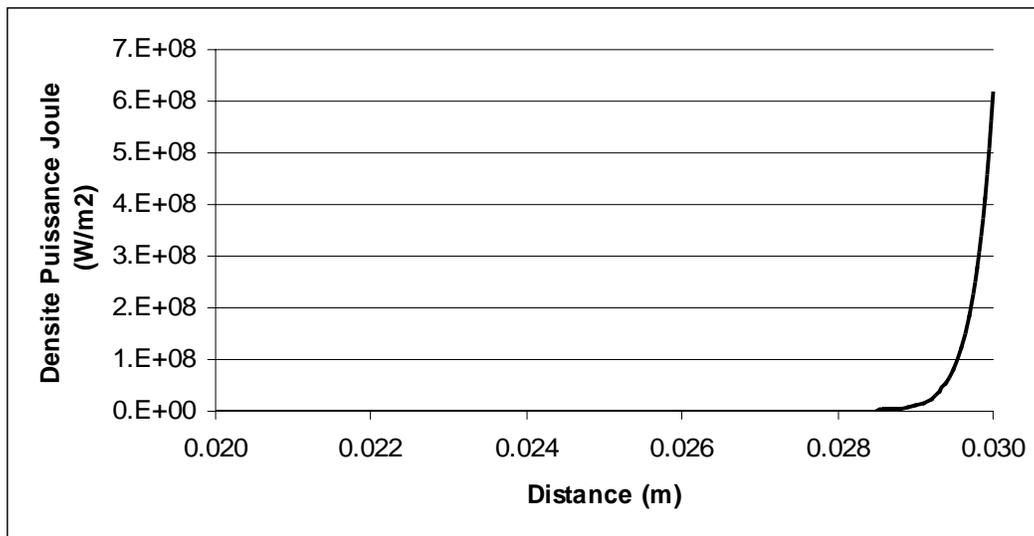


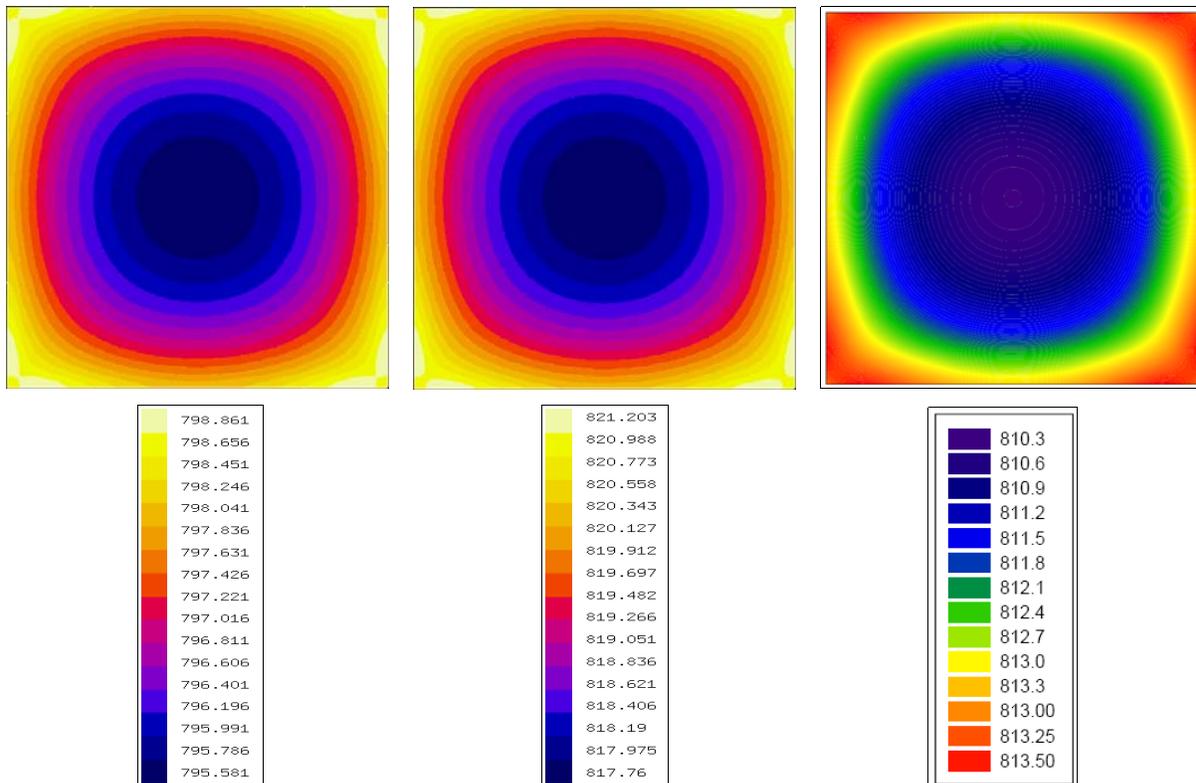
Figure 5.4 Source de chaleur thermique dans la charge.

Dans le tableau 5.1 sont regroupés les résultats globaux obtenus par les logiciels MALICE3D et MIGEF. Dans ce tableau nous comparons les intégrales des sources thermiques dans la charge obtenues par les deux logiciels $P_{J,EF}$. Celles-ci sont comparées à la puissance

Joule par l'écart relatif $\Delta P/P = (P_J - P_{J,EF})/P_J$. Lorsque les maillages sont réguliers nous obtenons un meilleur résultat avec le logiciel MIGEF malgré un nombre d'éléments plus faible. En adaptant le maillage thermique au cas fine peau nous améliorons considérablement les résultats obtenus avec le logiciel MALICE3D : pour un nombre de mailles identiques l'écart relatif sur la puissance Joule passe de $4,31 \cdot 10^{-2}$ pour le maillage régulier à $1,2 \cdot 10^{-4}$ pour le maillage adapté. L'écart relatif sur la puissance Joule obtenu avec le logiciel MIGEF est correct $1,48 \cdot 10^{-2}$. Par ailleurs, les résultats montrent une cohérence entre la valeur de $P_{J,EF}$ et la température maximale dans la charge.

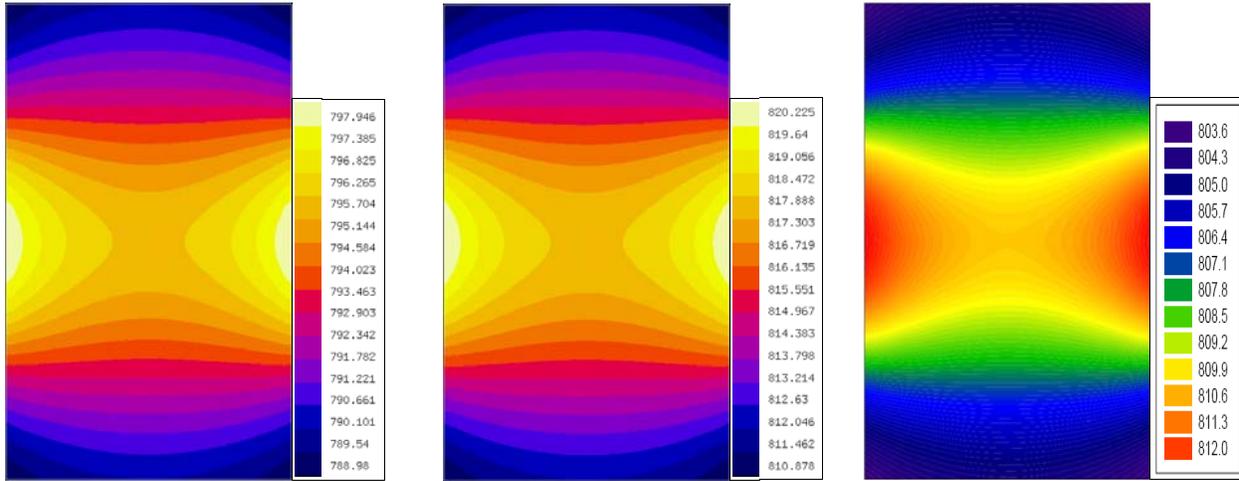
Tableau 5.1 : Comparaison des résultats des logiciels MALICE3D et MIGEF.

Logiciel	MALICE3D		MIGEF
	Régulier	Affiné	Régulier
Maillage thermique			Régulier
Nb éléments T	19488	19488	1600
P_J (W)	1285,00	1285,00	1285,00
$P_{J,EF}$ (W)	1229,67	1284,84	1266,00
$\Delta P/P$	$4,31 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,48 \cdot 10^{-2}$
T_{max} (K)	798,861	821,201	813,575
T_{min} (K)	787,732	809,597	802,123



a) MALICE3D maillage régulier b) MALICE3D maillage affiné c) MIGEF maillage régulier

Figure 5.5 : Isovaleurs de la température obtenues dans une coupe horizontale à mi-hauteur.



a) MALICE3D maillage régulier b) MALICE3D maillage affiné c) MIGEF maillage régulier
 Figure 5.6 : Isovaleurs de la température obtenues dans une coupe verticale.

Nous comparons maintenant la répartition en température obtenue avec les deux logiciels (Figures 5.5 et 5.6). Les répartitions des températures obtenues pour ces trois modélisations sont proches. Toutefois des écarts apparaissent : les températures diffèrent de l'ordre de 10 degrés. La modélisation avec MALICE3D et le maillage adapté à la fine épaisseur de peau donne les températures les plus élevées. Ce résultat est le plus correct puisque l'interpolation de la puissance Joule est la plus juste. Si on prend ce cas comme référence. On constate que les températures obtenues avec le logiciel MIGEF sont plus faibles avec un écart relatif de l'ordre de 1%. Ces résultats montrent une bonne adéquation entre les deux logiciels et permettent de valider le logiciel MIGEF.

3 Procédé d'élaboration par induction avec le creuset froid

Le procédé d'élaboration par induction en creuset froid est une configuration complexe. Elle est constituée d'un creuset froid sectorisé conducteur d'électricité, d'une charge et d'un inducteur (Figure 5.7). Dans cette modélisation nous considérons un creuset de section carré. Il est constitué de 4 secteurs. Ces secteurs sont des hexaèdres. Deux secteurs ont les dimensions suivantes : $0,01\text{ m} \times 0,08\text{ m} \times 0,06\text{ m}$ et de deux autres secteurs : $0,01\text{ m} \times 0,05\text{ m} \times 0,06\text{ m}$. La hauteur du creuset vaut $0,06\text{ m}$. Le creuset froid est en cuivre de conductivité électrique égale à $0,5 \times 10^8 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. La charge est un hexaèdre dont les dimensions sont les suivantes $0,05\text{ m} \times 0,05\text{ m} \times 0,1\text{ m}$. L'inducteur est filiforme. Il est constitué de 3 spires carrés de dimension $0,1\text{ m} \times 0,1\text{ m}$, réparties régulièrement. Les positions verticales de spires sont : $0,075\text{ m}$, $0,085\text{ m}$, $0,095\text{ m}$. Dans cette section nous abordons la modélisation de ce procédé avec le logiciel MIGEF. Nous étudierons : une charge conductrice d'électricité modélisée en fine peau.

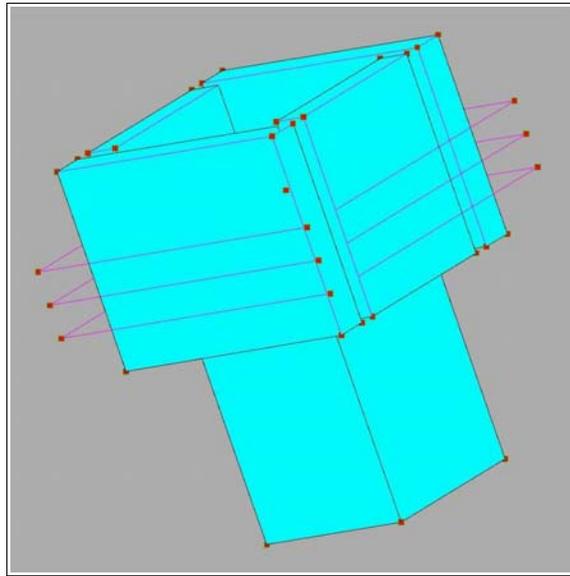


Figure 5.7 Géométrie 3D.

Le matériau de la charge est l'inox. La conductivité électrique est fonction de la température comme la section 3.2.1 de chapitre 3 :

$$\sigma(T) = -30000T + 1,9 \cdot 10^7 : 300K \leq T < 500K$$

$$\sigma(T) = -10000T + 9 \cdot 10^6 : 500K \leq T < 700K$$

$$\sigma(T) = -2750T + 3,925 \cdot 10^6 : 700K \leq T \leq 1100K$$

La conductivité thermique de la charge est prise constante, égale à 40 W/m/K . Les conditions aux limites thermiques sur toutes les surfaces de la charge sont des échanges convectifs. Le coefficient d'échange sur les faces supérieure et inférieure vaut $100 \text{ W/m}^2/\text{K}$. Le coefficient d'échange sur les parois latérales vaut $300 \text{ W/m}^2/\text{K}$. La température ambiante vaut 300 K . Le problème magnéto thermique est non linéaire.

L'inducteur est parcouru par un courant sinusoïdal dont le module est de 934 A . La fréquence vaut 150 kHz . Pour la modélisation électromagnétique on choisit un algorithme de résolution avec contrainte. On impose la puissance dans la charge à 20 kW .

Tableau 5.2 : Nombre d'éléments des maillages de MALICE3D et MIGEF dans le cas fine épaisseur de peau.

Maillages MALICE3D	MIGEN			FLUX-EXPERT	
	Nb éléments V	Nb éléments J	Taille Système	Nb éléments T	Taille Système
Maillage n°1	814	1144	2747	1088	3285
Maillage n°2	814	1144	2747	9548	32591

Maillage MIGEF	Nb éléments V	Nb éléments J	Nb éléments T	Taille Système
Maillage n°3	616	918	1088	5410

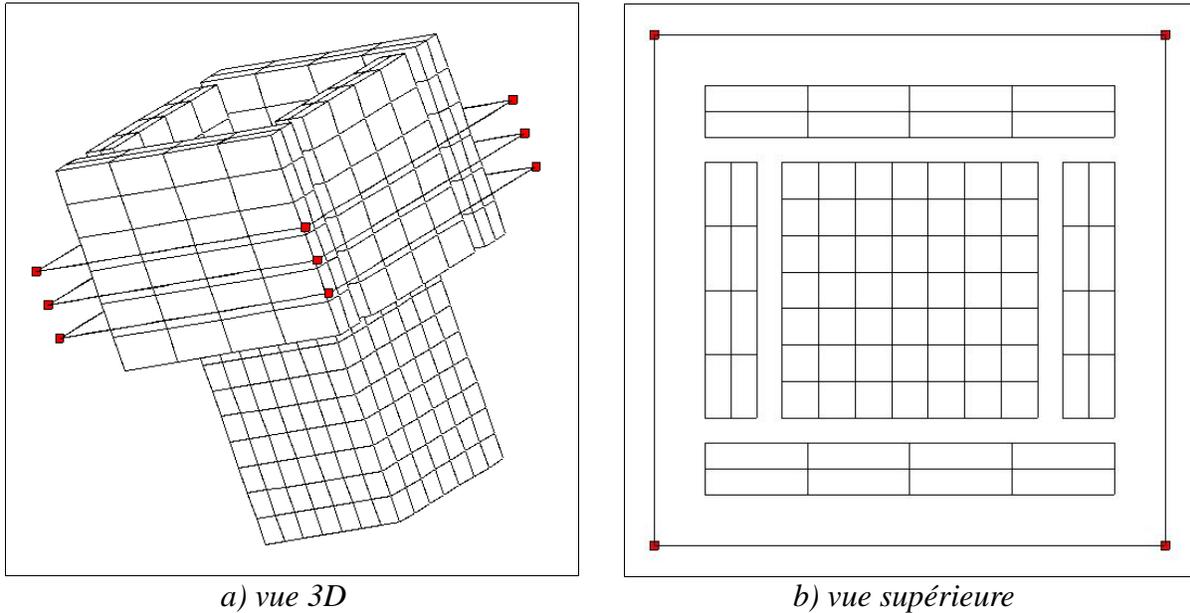


Figure 5.8 Maillage électromagnétique du logiciel MIGEF.

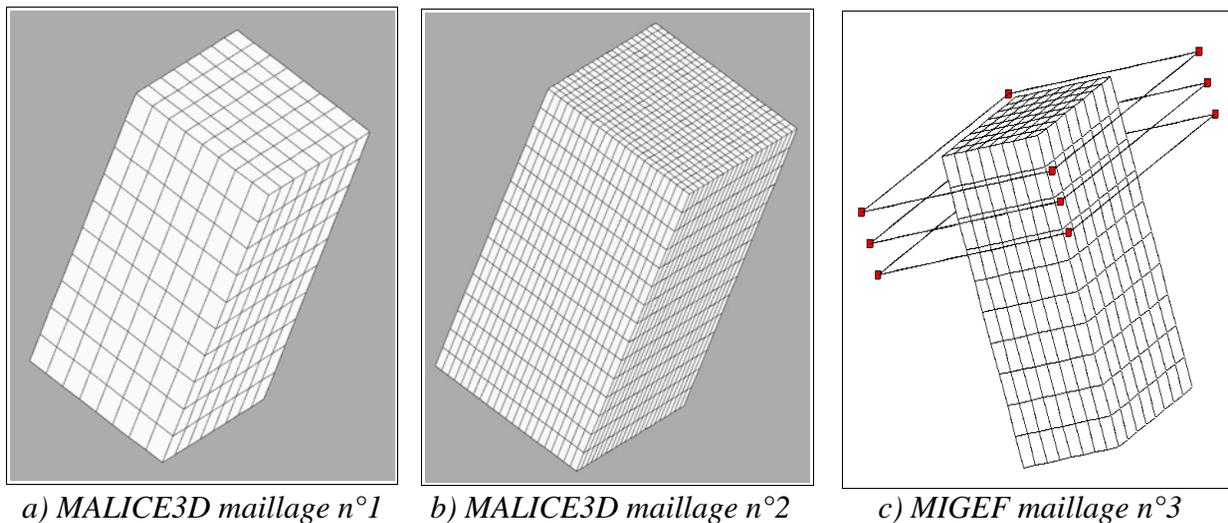


Figure 5.9 Maillages thermiques des logiciels MALICE3D et MIGEF.

Le problème modélisé est non linéaire. Dans le logiciel MALICE3D nous utilisons l'algorithme RLSMN et dans le logiciel MIGEF nous utilisons la formulation où les sources sont dans le premier membre du système. Dans le tableau 5.2 nous donnons les caractéristiques des maillages utilisés pour les deux logiciels. Sur la figure 5.8 le maillage électromagnétique de MIGEF est présenté. Sur la figure 5.9 est présentée les maillages thermiques utilisés pour les deux logiciels. Les calculs ont été arrêtés pour une précision de $3 \cdot 10^{-5}$. Nous présentons les résultats électromagnétiques globaux dans le tableau 5.3. Dans le tableau 5.4 sont présentés les résultats thermiques globaux. Les grandeurs présentées sont celles de la charge.

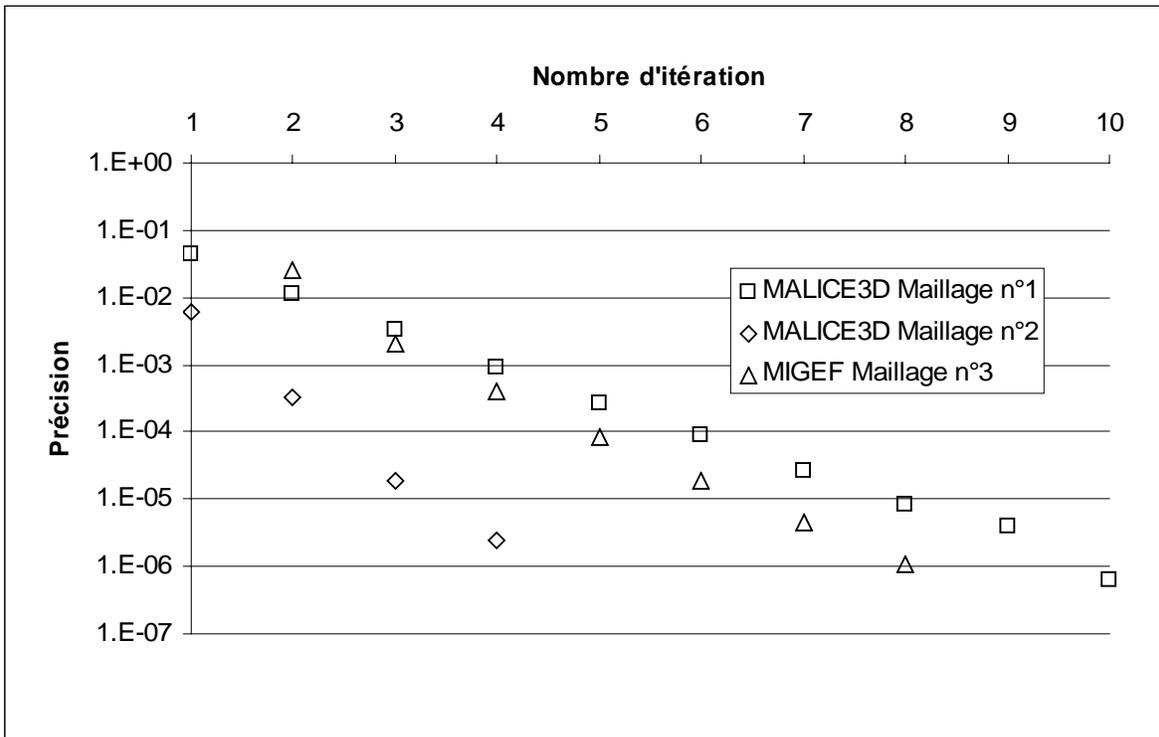


Figure 5.10 Comparaison de la convergence du problème non linéaire des 2 logiciels .

Tableau 5.3 : Résultats électromagnétiques dans la charge.

Logiciel	Nb itérations	$\sigma_{moy} (\Omega . m)^{-1}$	$\delta_{moy} (mm)$	$P_J (W)$
MALICE3D maillage n°1	10	$4,025 \cdot 10^6$	0,648	2000
MALICE3D maillage n°2	4	$3,305 \cdot 10^6$	0,715	2000
MIGEF maillage n°3	8	$3,060 \cdot 10^6$	0,743	2000

Tableau 5.4 : Résultats thermiques dans la charge.

Logiciel	$P_{J,EF} (W)$	$\Delta P/P$	$T_{max} (K)$	$T_{min} (K)$
MALICE3D maillage n°1	1481,17	$2,59 \cdot 10^{-1}$	736,445	428,499
MALICE3D maillage n°2	1885,79	$5,71 \cdot 10^{-2}$	849,373	465,871
MIGEF maillage n°3	1929,94	$3,50 \cdot 10^{-2}$	864,257	469,788

La convergence la plus rapide a été obtenue avec le logiciel MALICE3D et le maillage n°2 (figure 3.10). Les résultats obtenus avec les deux logiciels sont très proches notamment pour MALICE3D avec le maillage n°2 et MIGEF avec le maillage n°3. L'écart relatif entre les valeurs moyennes de la conductivité électrique des deux calculs vaut 8%. L'écart sur les températures maximales est de l'ordre de 1,7% entre MALICE3D maillage n°2 et MIGEF maillage n°3.

Sur les figures 5.11 et 5.12 sont représentées les répartitions de température dans une coupe horizontal et une coupe verticale. Les deux logiciels donnent des répartitions de température très proches. Les gradients thermiques sont voisins.

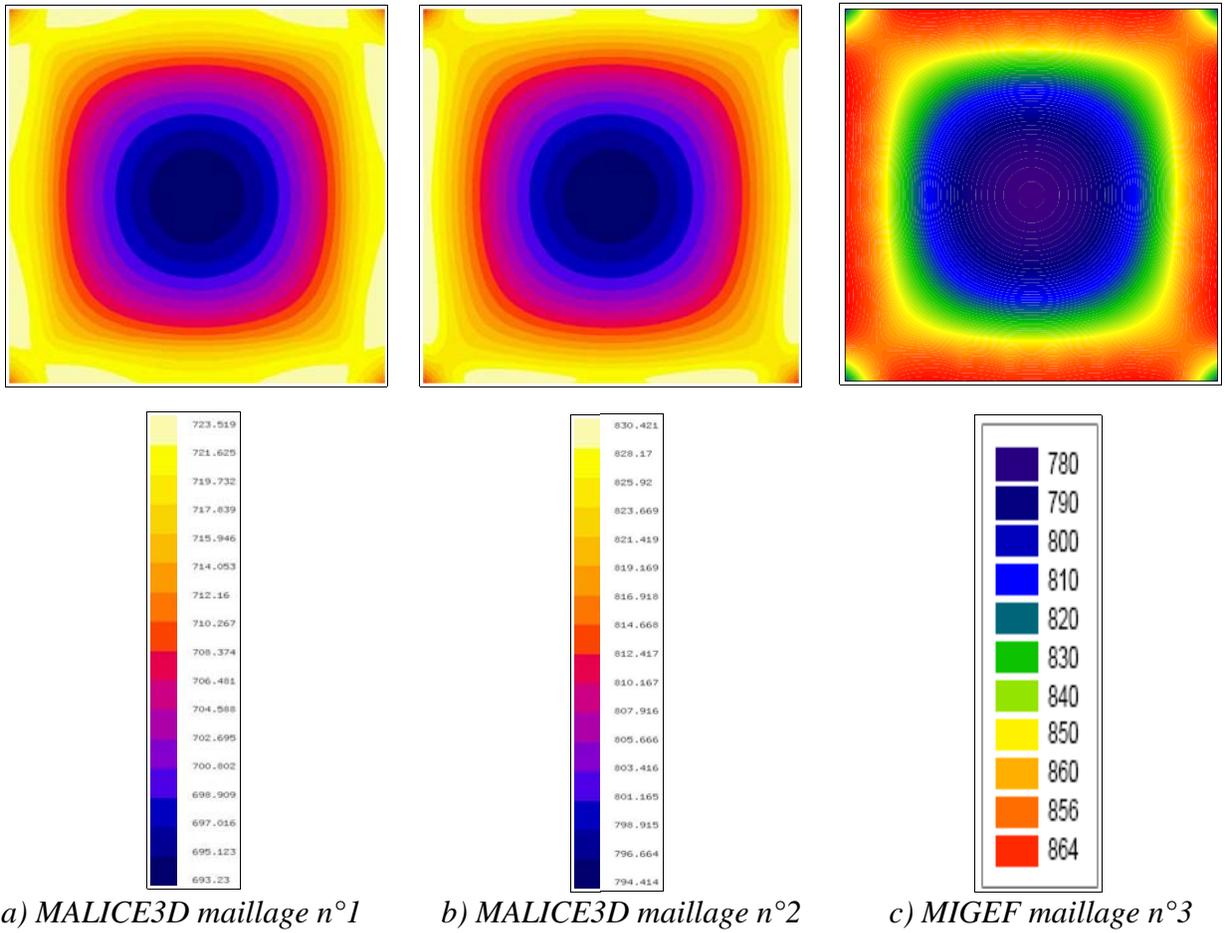


Figure 5.11 Profils de température dans une coupe horizontale

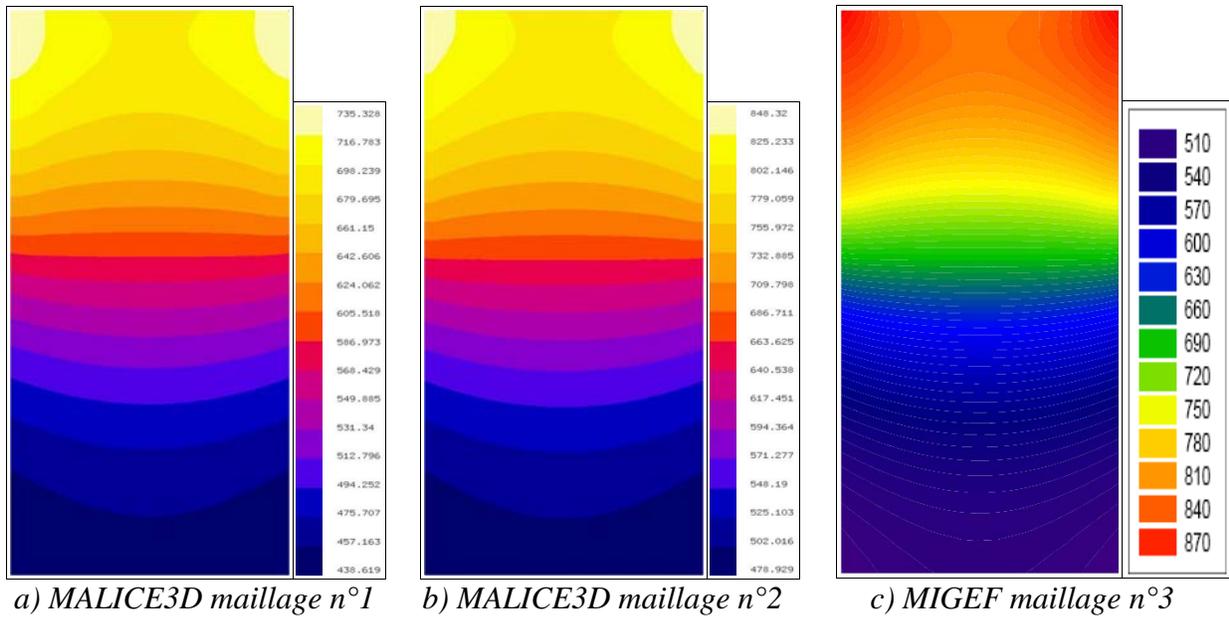


Figure 5.12 Profils de température dans une coupe verticale

4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté des modélisations magnéto-thermiques de quelques configurations. Systématiquement les modélisations ont été effectuées avec les deux logiciels MALICE3D et MIGEF. Nous avons vu que les résultats obtenus par les deux logiciels étaient très proches. Nous allons pour conclure ce chapitre présenter les avantages et les inconvénients de chaque logiciel.

4.1 MALICE3D

Les avantages du logiciel MALICE3D :

- Il dispose d'une bibliothèque d'algorithmes de couplage. On peut ainsi choisir l'algorithme adapté à la résolution de chaque problème.
- Le logiciel MALICE3D a été développé sur la base d'un couplage faible : on construit un système linéaire pour chaque phénomène. Ceci nous donne la possibilité de mettre en œuvre une discrétisation plus fine pour chacun des phénomènes physiques.
- Ce logiciel a la généralité du logiciel FLUX-EXPERT. Il est donc doté d'un générateur d'équations. Nous pouvons décrire de nouvelles formulations éléments finis, introduire de nouveaux intégrants. Il est possible ainsi de mettre en place un modèle couplé magnéto thermo-hydraulique.
- Il est possible de décrire ou développer des nouveaux modèles de propriétés physiques.
- La visualisation et l'exploitation des résultats est relativement aisée car ce logiciel dispose du post processing de FLUX-EXPERT.

Les inconvénients du logiciel MALICE3D :

- La description d'un problème est complexe, elle nécessite l'utilisation de plusieurs outils. Notamment la description de la géométrie doit être réalisée deux fois. Une fois pour le logiciel électromagnétique MIGEN en utilisant son pré-possesseur et une seconde fois pour le problème thermique (ou éléments finis) en utilisant le mailleur MIME3D. Ceci peut être une source d'erreurs.
- La localisation des points d'intégration des éléments de FLUX EXPERT dans le maillage de la méthode intégrale est effectuée à chaque itération, de même la localisation des nœuds J dans le maillage de la méthode éléments finis est effectuée à chaque itération. Ces localisations pourraient être effectuées une seule fois au début du calcul et les informations mémorisées dans des tables. Ceci permettrait un gain de temps significatif lors de la résolution d'un problème non linéaire.
- Dans la version de FLUX-EXPERT que nous avons utilisés les propriétés physiques sont des réels simple précision. Ceci limite la précision de la convergence d'un problème non linéaire.

4.2 MIGEF

Les avantages du logiciel MIGEF :

- La description d'un problème est plus aisée car elle nécessite un seul préprocesseur. La description de la géométrie est effectuée une seule fois.
- La convergence d'un problème non linéaire avec le logiciel MIGEF (source au premier membre) nécessite moins d'itération qu'un couplage faible. Ce logiciel est mieux adapté au couplage fort.
- Ce logiciel est dédié aux problèmes non linéaires.

Les inconvénients du logiciel MIGEF :

- Ce logiciel dispose d'un algorithme statique non linéaire. Il faudrait développer un algorithme transitoire non linéaire.
- La description de nouvelles formulations est délicate et fastidieuse car elle nécessite un développement au sein du logiciel. Aucun générateur d'équations n'est disponible. Ceci limite les possibilités du logiciel.
- Cette approche de couplage fort consistant à construction d'un système linéaire unique (à chaque itération) a un autre inconvénient majeur : la taille du système à résoudre est limitée. Cette limite est d'autant plus contraignante dans le cas d'une matrice pleine.

Conclusion

Les travaux décrits dans cette thèse concernent la modélisation numérique 3D des phénomènes couplés dans les procédés d'élaboration par induction. Dans les recherches menées au laboratoire SIMAP dans le groupe EPM de nombreuses configurations ont des géométries tridimensionnelles et nécessitent des études de plus en plus précises. Ainsi la modélisation numérique 3D devient, depuis quelques années incontournable. Nous nous étions donnés deux objectifs. Le premier consistait à construire un outil pour la modélisation 3D des phénomènes couplés capable de modéliser des installations variées. Cette première étape a donné lieu à la réalisation du logiciel MALICE3D, résultant du couplage faible des logiciels MIGEN et FLUX-EXPERT. Le second objectif était plus fondamental. Il consistait à étudier la modélisation par couplage fort de deux phénomènes physiques basé sur le couplage fort de deux méthodes numériques. Il a donné lieu à la réalisation du logiciel MIGEF.

Pour tester et présenter les possibilités des logiciels développés nous avons modélisé des problèmes couplant les phénomènes électromagnétique et thermique. Les termes couplant ces phénomènes sont la conductivité électrique variant en fonction de la température $\sigma(T)$ et la densité de puissance Joule $J.J^*/2\sigma$. Nous avons procédé au couplage numérique de deux méthodes : la méthode intégrale pour le problème électromagnétique et la méthode des éléments finis pour le problème thermique. Deux démarches numériques ont été développées :

- une basée sur le couplage faible, résolution successive des deux phénomènes physiques, logiciel MALICE3D.
- une basée sur le couplage fort, résolution simultanée des deux phénomènes, logiciel MIGEF.

Dans les deux approches nous avons travaillé sur le couplage de deux méthodes numériques, donc deux maillages différents. L'interpolation des termes de couplages d'un maillage à l'autre ont été au cœur des développements réalisés. La méthode intégrale étant doté d'un modèle spécifique pour les régions en fine peau électromagnétique des interpolations entre maillage surfacique et volumique ont du être mise en place. Le couplage faible a fait l'objet du développement d'une bibliothèque d'algorithmes permettant de résoudre aussi bien des problèmes en régime permanent qu'en régime transitoire. Le développement du couplage fort s'est révélé beaucoup plus complexe. Notamment, le couplage fort avec le terme source dans la matrice a nécessité la création d'un intégrant spécifique avec interpolation entre les deux maillages.

Une validation systématique des interpolations de termes de couplage a été effectuée pour chacun des logiciels. Nous avons mis en évidence les difficultés rencontrées en présence de la fine peau électromagnétique. Dans ce cas le maillage thermique doit être adapté : affiné vers les frontières dans les zones où les valeurs de la densité de puissance est grande. Les divers algorithmes du logiciel MALICE3D ont été testés. Nous avons aussi mis en évidence quelques possibilités de modélisations 3D avec ce logiciel, comme par exemple les effets thermiques 3D générés par un inducteur hélicoïdal. Nous avons aussi confronté les résultats obtenus avec ces deux logiciels sur des configurations d'induction avec et sans creuset froid. A l'issue de ces travaux nous disposons donc de deux outils que nous avons validés.

MALICE3D est un logiciel couplant la méthode intégrale et la méthode des éléments finis. Il est basé sur le couplage des deux logiciels : MIGEN et FLUX-EXPERT. MIGEN a été développé au laboratoire EPM par A.Gagnoud. Il permet la modélisation électromagnétique des installations inductives en présence d'un inducteur alimenté par un courant alternatif sinusoïdal. FLUX-EXPERT est un logiciel de modélisation numérique par la méthode des éléments finis qui

possède un générateur d'équations. Il a été développé par Ph. Massé. Le logiciel MALICE3D a la généralité de FLUX-EXPERT. Il est ainsi possible en exploitant les possibilités du logiciel FLUX-EXPERT d'introduire de nouvelles formulations et ainsi par exemple de conduire une modélisation magnéto thermo-hydraulique. Compte tenu de la bibliothèque d'algorithmes de couplage que nous avons développé nous disposons d'un outil permettant la modélisation 3D des phénomènes couplés dans les procédés inductifs.

MIGEF est un programme développé sur la base du code MIGEN couplant fortement la méthode intégrale et la méthode des éléments finis doté d'un algorithme du couplage de résolution itérative adapté aux problèmes magnéto-thermique 3D non linéaires. Deux formulations ont été développées : une en plaçant la source de chaleur au second membre du système et l'autre la densité de puissance Joule dans la matrice (premier membre du système). La première formulation est en réalité un couplage faible et ne présente pas un intérêt majeur. Elle nous a surtout permis de tester nos développements. C'est bien sur la deuxième formulation qui est représentative du couplage fort entre les deux méthodes numériques. Sa mise en œuvre permet d'obtenir la convergence à une précision donnée d'un problème non linéaire avec un nombre plus faible d'itérations comparativement à un couplage faible. Toutefois ce logiciel nous conduit à un système linéaire plein. Nous sommes ainsi limités par la taille de la matrice et ne pouvons affiner les maillages comme nous l'avons fait dans le cas de MALICE3D. Ce logiciel est à dédier au cas des couplages forts.

Suite à ces travaux nous pouvons envisager d'aborder des recherches permettant de faire évoluer ces outils et aussi de les exploiter sur des cas concrets.

Le logiciel MALICE3D pourrait être amélioré de plusieurs manières, notamment en effectuant des développements pouvant diminuer les temps de calcul. Les interpolations des grandeurs nécessitent la localisation de point d'un maillage dans l'autre maillage. Dans la version actuelle, cette localisation est effectuée à chaque itération. Plus les maillages sont conséquents plus cette opération est coûteuse. Nous envisageons donc d'effectuer la localisation de l'ensemble des points d'un maillage dans l'autre maillage lors de la première interpolation et de mémoriser ces informations. Nous nous proposons aussi d'introduire de nouvelles formulations afin de disposer d'un ensemble de modèles couplés pour divers problèmes rencontrés dans les procédés d'élaboration par induction. Nous pourrions ainsi effectuer des modélisations de diverses configurations d'élaboration en creuset froid de métaux, d'oxydes.

Le logiciel MIGEF a un spectre d'applications plus étroit que le logiciel MALICE3D à la fois en ce qui concerne les configurations que l'on peut étudier et les phénomènes que l'on peut modéliser. Certaines évolutions sont tout à fait envisageables notamment pour les géométries. Plusieurs solutions sont possibles comme développer en interne le maillage à l'ordre 2 des cylindres, des sphères ou construire le maillage à l'aide d'un mailleur externe ou coupler MIGEF au mailleur MIME. Nous envisageons aussi de développer un algorithme transitoire. Cependant, avant d'étendre le domaine d'application de ce logiciel nous pourrions approfondir notre étude sur le couplage, selon deux axes. Il serait intéressant de travailler sur le couplage fort dans le cas de configurations axisymétriques. Ce choix est réalisable car le logiciel MIGEN, sur lequel a été construit MIGEF dispose d'une formulation électromagnétique axisymétrique. Introduire une formulation magnéto thermique axisymétrique est tout à fait envisageable. Dans le logiciel MIGEF la taille du système que nous résolvons est limitée car la matrice est pleine. Ainsi, une formulation axisymétrique serait très utile pour effectuer des tests plus poussés en affinant les maillages. Nous souhaitons aussi travailler sur les algorithmes de résolution de système non

linéaire en mettant en œuvre la méthode de Newton-Raphson. Cette méthode permet d'accélérer la convergence. Elle nécessite la construction de la matrice Jaobienne du système. La construction de cette matrice pour une formulation thermique éléments finis a déjà été réalisée dans le cadre de cette thèse nous nous proposons de l'expliciter dans le cas du couplage fort pour le problème magnéto thermique. Ceci permettrait de compléter l'étude de la convergence.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

R. Albanese, G. Rubinacci, "Numerical Procedures for the Solution of Nonlinear Electromagnetic Problems", IEEE Transaction on magnetics, March 1992, Vol.28, No.2, pp.1228-1231.

N. Aymard, M. Feliachi, B. Paya, "An Improved modified surface impedance for transverse electric problems", IEEE Transaction on magnetics, March 1997, Vol.33, No.2, pp.1267-1270.

E.A. Brandes, "Smithells Metals Reference Book", 6^e Edition, 1983, pp.14.4.

Y. Baudon, Y. Brassard, Ph. Masse, "The Use of a Generator System to Solve Magnetothermodynamic Problems by Finite Element Method", IEEE Transaction on magnetics, November 1985, Vol.21, No.6, pp. 2563-2566.

F. Bay, V. Labbe, Y. Favennec, J. L. Chenot, "A Numerical Model for Induction Heating Processes Coupling Electromagnetism and Thermomechanics", Int. J. Numer. Meth. Engng, 2003, Vol.58, pp.839-867.

O. Biro, K. Preis, "On the Use of the Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of Three-Dimensional Eddy Currents", IEEE Transaction on magnetics, July 1989, Vol.25, No.4, pp.3145-3159.

X. Brunotte, G. Meunier, J. F. Imhoff, "Finite Element Modeling of Unbounded Problems Using Transformations : a Rigorous, Powerful and Easy Solution", IEEE Transaction on magnetics, March 1992, Vol.28, No.2, pp. 1663-1666.

E. Cardelli, M. Gimignani, M. Raugi, "Numerical Modelling of 3-D Coupled Electromagnetic and Heating Diffusion Problems", IEEE Transaction on magnetics, September 1994, Vol.30, No.5, pp.3335-3338.

V. Cingoski, A. Namera, K. Kaneda, H. Yamashita, "Analysis of Magneto-Thermal Coupled Problem Involving Moving Eddy-Current Conductors", IEEE Transaction on magnetics, May 1996, Vol.32, No.3, pp.1042-1045.

G. Develey, "Chauffage par induction électromagnétique : principes", Techniques de l'ingénieur, traité Génie électrique, D5 935-pp.1-22.

G. Develey, "Chauffage par induction électromagnétique : technologie", Technique de l'ingénieur, traité Génie électrique, D5 936-pp.1-10.

J. Driesen, R. Belmans, K. Hameyer, "Adaptive Relaxation Algorithms for Thermo-Electromagnetic FEM problems", IEEE Transaction on magnetics, May 1999, Vol.35, No.3, pp.1622-1625.

F. Dughiero, M. Forzan, S. Lupi, "Solution of Coupled Electromagnetic and Thermal Problems in Induction Heating Applications", Computation in electromagnetics conference publication, April 1996, Vol.420, pp.301-305.

F. Dughiero, M. Forzan, S. Lupi, M. Tasca, "Numerical and Experimental Analysis of an Electro-Thermal Coupled Problem for Transverse Flux Induction Heating Equipment", IEEE Transaction

on magnetics, September 1998, Vol.34, No.5, pp.3106-3109.

B. Dumont, A. Gagnoud, "3D Finite Element Method with Impedance Boundary Condition for the Modeling of Molten Metal Shape in Electromagnetic Casting", IEEE Transaction on magnetics, July 2000, Vol.36, No.4, pp.1329-1332.

Y. Du Terrail Couvat, M. Garnier, C. Alleman, "3D Parametered Magneto Thermal Simulations for Modular Induction Heating Devices", Proceeding of EPM Congress, Nagoya, Japon, Avril 2000.

R. Ernst, Ph. Gosse, L. Philippe, "An electromagnetic-thermal coupling example solved on a high frequency inductive systeme with the Matlab finite elements solver", Int. J. Therm. Sci., 1999, Vol. 38, pp. 481-491.

Y. Favennec, V. Labbe, F. Bay, "Induction Heating Processes Optimisation a General Optimal Control Approach", J. Of Computational Physics, 2003, Vol. 187, pp. 68-94.

M. Feliachi, G. Develey, "Magneto-Thermal Behavior Finite Element Analysis for Ferromagnetic Materials in Induction Heating Devices", IEEE Transaction on magnetics, November 1991, Vol. 27, N°6, pp. 5235-5237.

M. Feliachi, A. Perronet et G. Develey, "Modélisation par éléments finis des phénomènes couplés électromagnéto-thermiques caractérisant le frittage par induction", J. Phys. III, Novembre 1992 Vol 2, pp 2005-2013.

A. Gagnoud, I. Leclercq, "Electromagnetic Modelling of Induction Melting Devices in Cold Crucible", IEEE Transaction on magnetics, January 1988, Vol.24, No.1, pp.573-575.

A. Gagnoud, "Three Dimensional Integral Method for Modeling Electromagnetic Inductive Processes", IEEE Transaction on magnetics, January 2004, Vol. 40, N°1, pp. 29-36.

A. Gagnoud, "A 3D Integral Method for Modeling 3D Effects in Coils Used in Inductive Processes", Int. J. of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2004, Vol. 19, N°1, pp. 613-617.

A. Gagnoud, B. Maestrali, Ph. Masse, "Modelling of Motion in Liquid Metal Limited by a Free Surface and Solidification Front", Eur. J. Mech. B Fluids, 1991, Vol.10, No.5, pp.552-562.

P. Gardin, B. Dumont, M. Anderhuber, J. M. Galpin, Y. Delannoy, A. Gagnoud, J. Hamburger, "CC électromagnétique de brames : développement de modèle numériques de la configuration AC+DC en lingotière", La Revue de Métallurgie, Novembre 2001, pp. 1015-1024,

C.W. Hirt and B.D. Nichols, "Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries", J. Comp. Phys., 1981, Vol.39, pp.201.

L. Jacoutot, "Modélisation numérique de phénomènes couplés dans des bains de verre brassés mécaniquement et élaborés en creuset froid inductif", Thèse de docteur de l'INPG, 2006.

L. Jacoutot, P. Brun, A. Gagnoud, Y. Fautrelle, "Numerical modelling of natural convection in molten glass heated by induction", Chemical Engineering and Processing, 2008, Vol. 47, N°3,

pp.449-455.

L. Jänicke, A. Kost, "Convergence Properties of the Newton-Raphson Method for Nonlinear Problems", IEEE Transaction on magnetics, September 1998, Vol.34, N°5, pp.2505-2508.

Y. Katsumura, H. Hashizume, S. Toda, "Numerical Analysis of Fluid Flow with Free Surface and Phase Change under Electromagnetic Force", IEEE Transaction on magnetics, May 1996, Vol.32, No.3, pp.1002-1005.

E. Kurgan, "Analysis of Coupled Electric and Thermal Field Problems by Boundary-Element Method", IEEE Transaction on magnetics, March 2002, Vol.38, No.2, pp.949-952.

J.D. Lavers, "Electromagnetic Field Computation in Power Engineering", IEEE Transaction on magnetics, 1993, Vol.29, No.6, pp.2347-2352.

S.H. Le G. Bisson, P. J. Leonard, D. Rodger, "Finite Element Analysis of Transient Electromagnetic Heating Effects in Three Dimensions", IEEE Transaction on magnetics, January 1993, Vol.29, No.1, pp.1102-1106.

F. Z. Louai, D. Benzerga, M. Feliachi, F. Bouillault, "A 3D Finite Element Analysis coupled to Impedance Boundary condition for the magnetodynamic problemn in radiofrequency Plasma Devices, IEEE Transaction on magnetics, May 1996, Vol. 32, N°3 pp, 812,815.

U. Lüdtke, D. Schulze, "Numerical Simulation of Continuous Induction Steel Bar End Heating with Material Properties depending on Temperature and Magnetic Field", IEEE Transaction on magnetics, September 1998, Vol.34, No.5, pp.3110-3113.

Ph. Masse, Y. Fautrelle, A. Gagnoud, "Coupled Methods for 3D Coupled Problems 10 Years of Experiments in MHD", IEEE Transaction on magnetics, March 1992, Vol.28, No.2, pp.1275-1278.

G. Meunier, H. J. Luong, Y. Marechal, "Computation of Coupled Problem of 3D Eddy Current and Electrical Circuit by Using T_0 - T - ϕ Formulation", IEEE Transaction on magnetics, September 1998, Vol.34, No.5, pp.3074-3077.

S.M. Mimoune, J. Fouladgar, G. Develey, "Modeling of 3D Electromagnetic and Heat Transfer Phenomena for Materials with Poor Conductivity", IEEE Transaction on magnetics, November 1995, Vol.31, No.6, pp.3578-3580.

P. Molfino, M. Repetto, "Comparison of Different Strategies for the Analysis of Nonlinear Coupled Thermo-Magnetic Problems under Plused Conditions", IEEE Transaction on magnetics, March 1990, Vol.26, No.2, pp.559-562.

J. Morandini, "Contribution à la résolution multi-méthode des équations aux dérivées partielles couplées rencontrées en magnéto-thermo-hydrodynamique", 1992, Thèse de docteur de l'INPG,

J. Morandini, Y. du Terrail Couvat, Ph. Masse, "Résolution des Equations Thermo-Electriques 3D Couplées par la Méthode des Eléments Finis. Application à un Four Polyphasé", J. Phys. III France 2, November 1992, pp. 1979-1990.

- J. Morandini, Y. du Terrail Couvat, Ph. Masse, A. Gagnoud, "Modelling of Coupled Thermo-Magneto- Hydrodynamic Phenomena", *Int. J. of computer applications in technology*, 1994, Vol.7, Nos.3-6, pp. 176-184.
- T. T. Natarajan, N. El-Kaddah, "Finite Element Analysis of Electromagnetic and Fluid flow phenomena in rotary electromagnetic stirring of steel", *Applied Mathematical Modelling*, 2004, Vol 28, pp. 47-61.
- C. Neagoe, F. Ossart, "Analysis of Convergence in Nonlinear Magnetostatic Finite Elements Problems", *IEEE Transaction on magnetics*, September 1994, Vol.30, No.5, pp.2865-2868.
- M.G. Pantelyat, M. Feliachi, "Magneto-Thermo-Elastic-Plastic Simulation of Inductive Heating of Metals", *Eur. Phys. J. AP*, 2002, Vol.17, pp.29-33
- R. Pascal, Ph. Conraux, J-M. Bergheau, "Coupling Between Finite Elements and Boundary Elements for the Numerical Simulation of Induction Heating Processes Using a Harmonic Balance Method", *IEEE Transaction on magnetics*, May 2003, Vol.39, No.3, pp.1535-1538.
- K. Sadeghipour, J.A. Dopkin, K. Li, "A Computer Aided Finite Element / Experimental Analysis of Induction Heating Process of Steel", *Computers and Structures*, 1996, Vol.28, pp.195-205.
- J. Sakellaris, G. Meunier, A. Raizer, A. Darcherif, "The Impedance Boundary Condition Applied to the Finite Element Method Using the Magnetic Vector Potential as state variable : a Rigorous solution for High Frequency Axisymmetric Problems", *IEEE Transaction on magnetics*, March 1992, Vol.28, No.2, pp. 1663-1666.
- D. Saumabere, A. Gagnoud, Y. du Terrail, "Modelisation Magneto-Thermique avec Prise en Compte du Transfert Radiatif dans les Procédes d'Elaboration des Verres par Induction en Creuset Froid", *International congress electromagnetic processing of materials*, Mai 1997, Vol.2, pp.167-172.
- S. Servant, D. Saumabere, A. Gagnoud, Y. du Terrail Couvat, "MALICE : un logiciel couplant la méthode intégral et la méthode des éléments finis. Application à la fusion des oxydes en creuset froid", *J. Phys. III France 2*, November 1992, Vol.11, pp. 1991-2004.
- A. Simon, J. L. Corbier, Y. Du Terrail Couvat, A. Gagnoud, "Finite Element Method Adapted to AC Problems", *IEEE Transaction on magnetics*, March 2002, Vol.38, No.2, pp. 625-1628.
- J. H. Song, B. T. Min, J. H. Kim, H. W. Kim, S. W. Hong, S. H. Chung, "An Electromagnetic and Thermal Analysis of a Cold Crucible Melting", *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, 2005, Vol.32, pp.1325-1336.
- Ch. Trophime, Ph. Masse, J. Etay, "MHD3D : A Numerical Code for the Strong Coupling in MagnetoHydroDynamic Application to an EM Stirrer", *IEEE Transaction on magnetics*, May 1996, Vol.32, No.3, pp.1006-1009.
- P. Triwong, A. Gagnoud, "3D Numerical Modelling of Coupled Phenomena in Induced Processes of Heat Treatment with Malice", *Serbian journal of electrical engineering*, May 2008, Vol. 5, No.1, pp 87-98.

ANNEXES

ANNEXE 1

Formulaire d'analyse vectorielle

Relations entre opérateurs

Soit \vec{A} un vecteur, soit V un scalaire, on a les relations suivantes :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (\text{A1.1})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0 \quad (\text{A1.2})$$

$$\Delta \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (\text{A1.3})$$

Opérateurs en coordonnées cartésiennes

Gradient :

$$\vec{\nabla} V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.4})$$

Rotationnel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.5})$$

Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A1.6})$$

Laplacien scalaire :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (\text{A1.7})$$

Laplacien vectoriel :

$$\Delta \vec{A} = \begin{bmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{bmatrix} \quad (\text{A1.8})$$

ANNEXE 2

Epaisseur de peau électromagnétique

Equation aux dérivées partielles du champ magnétique

L'équation aux dérivées partielles du champ magnétique se déduit des équations de Maxwell. On prend le rotationnel du vecteur champ magnétique et on obtient :

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{H}] = \vec{\nabla} \times \vec{J} \quad (\text{A2.1})$$

La loi d'Ohm, nous permet d'exprimer la densité de courant en fonction du champ électrique. Ainsi on obtient :

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{H}] = \vec{\nabla} \times [\sigma \cdot \vec{E}] \quad (\text{A2.2})$$

En supposant que les variations de la conductivité électrique sont faibles on peut écrire cette dernière relation sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{H}] = \sigma \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{E}] \quad (\text{A2.3})$$

Les équations de Maxwell, nous permettent d'exprimer le second membre de cette relation en fonction de l'induction magnétique :

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{H}] = -\sigma \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{A2.4})$$

La relation de la loi constitutives des milieux, nous permet de déduire l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{H}] = -\sigma \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{A2.5})$$

Les relations sur les opérateurs vectoriels nous permet d'exprimer le $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times)$ selon la relation suivante :

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{H}] = \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot (\vec{H})] - \nabla^2 \vec{H} \quad (\text{A2.6})$$

De plus on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$, on obtient donc :

$$\nabla^2 \vec{H} = \sigma \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{A2.7})$$

Dans le cas d'un champ alternatif sinusoïdal on travaille en variables complexes. Compte tenu de la variation en fonction du temps le champ magnétique sera complexe et facteur de $e^{i_c \omega t}$. On obtient alors la relation suivante :

$$\nabla^2 \vec{H}_c = i_c \mu \sigma \omega \cdot \vec{H}_c \quad (\text{A2.8})$$

ANNEXE 3

Formulation en éléments finis de l'équation thermique en régime permanent cas linéaire

Equation aux dérivées partielles du bilan énergétique thermique avec terme convectif :

$$\rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T + \vec{\nabla} \cdot (-k_{th} \vec{\nabla} T) = Q_{th} \quad (A3.1)$$

On projette l'équation aux dérivées partielles (A3.1) avec la méthode de Galerkin sur l'espace des fonctions α_i conduit à la formulation suivante :

$$\iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) T \, dV - \iiint_{\Omega} \alpha_i \vec{\nabla} \cdot (k_{th} \vec{\nabla} T) \, dV = \iiint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} \, dV \quad (A3.2)$$

– Terme de transport

Le terme de transport se caractérise par la vitesse de déplacement des matériaux (les charges). Nous ne prenons pas en compte l'écoulement ainsi ce terme fait intervenir de la vitesse de tirage dans le cas de l'élaboration de matériau en continue :

$$\vec{U} = \vec{U}_t \quad (A3.3)$$

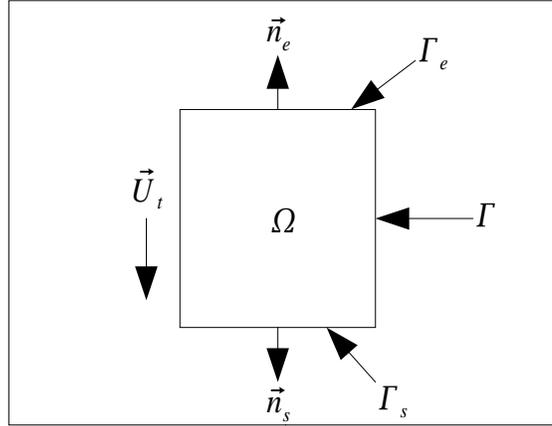
Même si la vitesse de tirage est souvent relativement faible (de $10^{-5} m/s$ à $5 \cdot 10^{-5} m/s$), on ne peut pas la négliger car elle entraîne des variations de l'énergie totale du système. Le terme de tirage fait intervenir les conditions aux limites d'entrée et de sortie de matière. Pour faire apparaître ces conditions aux limites ce terme est intégré par partie. On obtient ainsi l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p (\vec{U}_t \cdot \vec{\nabla}) T \, dV &= \iint_{\Gamma_e} \alpha_i \rho C_p T_e (\vec{U}_t \cdot \vec{n}_e) \, dS + \iint_{\Gamma_s} \alpha_i \rho C_p T (\vec{U}_t \cdot \vec{n}_s) \, dS \\ &- \iiint_{\Omega} \rho C_p T \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{U}_t \, dV - \iiint_{\Omega} \alpha_i C_p T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \vec{\nabla} T \cdot \vec{U}_t \, dV - \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho T \left(\frac{\partial C_p}{\partial T} \right) \vec{\nabla} T \cdot \vec{U}_t \, dV \end{aligned} \quad (A3.4)$$

Où \vec{n}_e est la normale extérieure de la surface entrée du lingot Γ_e ,

T_e est la température imposée à l'entrée du lingot,

\vec{n}_s est la normale extérieure de la surface sortie du lingot Γ_s .



Conditions aux limites

– Terme de diffusion

On va faire apparaître naturellement les conditions aux limites, dans ce terme, en procédant à une intégration par partie :

$$\iiint_{\Omega} \alpha_i \vec{\nabla} \cdot (k_{th} \vec{\nabla} T) dV = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\alpha_i k_{th} \vec{\nabla} T) dV - \iiint_{\Omega} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} T dV \quad (A3.5)$$

La formule de Green nous donne :

$$\iiint_{\Omega} \alpha_i \vec{\nabla} \cdot (k_{th} \vec{\nabla} T) dV = \iint_{\Gamma} \alpha_i (k_{th} \vec{\nabla} T) \cdot \vec{n} dS - \iiint_{\Omega} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} T dV \quad (A3.6)$$

Cette expression nous permet de prendre naturellement en compte les conditions d'échange aux frontières convectif ou de à flux imposé :

$$\iint_{\Gamma} \alpha_i (k_{th} \vec{\nabla} T) \cdot \vec{n} dS = - \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} (T - T_a) dS + \iint_{\Gamma} \alpha_i Flux dS \quad (A3.7)$$

On a donc finalement la formulation de l'équation de l'énergie pour un problème thermique avec propriétés physiques constantes :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} T dV - \iiint_{\Omega} \rho C_p T \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{U}_t dV + \iint_{\Gamma_s} \alpha_i \rho C_p T (\vec{U}_t \cdot \vec{n}_s) dS + \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T dS \\ & \dot{=} \iiint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} dV + \iint_{\Gamma} \alpha_i Flux dS - \iint_{\Gamma_e} \alpha_i \rho C_p T_e (\vec{U}_t \cdot \vec{n}_e) dS + \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T_a dS \end{aligned} \quad (A3.8)$$

Le système linéaire s'écrit sous la forme

$$[M_T] * [T] = [K_{Qth} + K_{CAL}] \quad (A3.9)$$

Dans le tableau suivant nous présentons les coefficients de la matrice et des vecteurs :

Tableau de coefficients de la matrice M_T et des vecteurs K_{Qth} et K_{CAL}

Terme intégrant	Formule	Constitution du système
Terme de conduction	$\iiint (\nabla \alpha_i * \nabla \alpha_j * k_{th}) dV$	M_T
Terme de transport	$\iiint (\nabla \alpha_i * U_i * \alpha_j) * (-\rho * C_p) dV$	M_T
Terme sortie lingot	$\iint (\alpha_i * \alpha_j * \rho * C_p) * (U_i \cdot n) dS$	M_T
Terme de convection	$\iint (\alpha_i * \alpha_j * h_{cv}) dS$	M_T
Terme de source thermique	$\iiint (\alpha_i * Q_{th}) dV$	K_{Qth}
Terme de flux imposé en frontière	$\iint (\alpha_i * Flux) dS$	K_{CAL}
Terme d'apport de matière	$\iint (\alpha_i * \rho * C_p) * (-U_i \cdot n * T_{ent}) dS$	K_{CAL}
Terme de convection ambiance	$\iint (\alpha_i * h_{cv} * T_a) dS$	K_{CAL}

ANNEXE 4

Formulation en éléments finis de l'équation thermique en régime transitoire cas linéaire

Equation aux dérivées partielles du bilan énergétique thermique :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T + \vec{\nabla} \cdot (-k_{th} \vec{\nabla} T) = Q_{th} \quad (A4.1)$$

On projette l'équation aux dérivées partielles (A4.1) avec la méthode de Galerkin sur l'espace des fonctions α_i conduit à la formulation suivante :

$$\iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV + \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) T dV - \iiint_{\Omega} \alpha_i \vec{\nabla} \cdot (k_{th} \vec{\nabla} T) dV = \iiint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} dV \quad (A4.2)$$

– Terme transitoire

Ce terme d'évolution temporelle par l'équation aux différences finies implicite de Crank-Nicolson suivante :

$$\iiint_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = \iiint_{\Omega} \rho C_p \frac{T^n - T^{n-1}}{\Delta t} dV \quad (A4.3)$$

Problème thermique transitoire avec les propriétés physiques constantes

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p T^n dV + \Delta t \iiint_{\Omega} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} T^n dV - \Delta t \iiint_{\Omega} \rho C_p T^n \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{U}_t dV \\ & + \Delta t \iint_{\Gamma_s} \alpha_i \rho C_p T^n (\vec{U}_t \cdot \vec{n}_s) dS + \Delta t \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T^n dS = \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p T^{n-1} dV + \Delta t \iiint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} dV \\ & + \Delta t \iint_{\Gamma} \alpha_i Flux dS - \Delta t \iint_{\Gamma_e} \alpha_i \rho C_p T_e (\vec{U}_t \cdot \vec{n}_e) dS + \Delta t \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T_a dS \end{aligned} \quad (A4.4)$$

Le système linéaire s'écrit sous la forme

$$[L_T]^n * [T]^n + \Delta t [M_T]^n * [T]^n = [L_T]^{n-1} * [T]^{n-1} + \Delta t [K_{Qth} + K_{CAL}] \quad (A4.5)$$

Les coefficients de la matrice M_T et des vecteurs K_{Qth} et K_{CAL} ont été donnés dans l'annexe 3. Nous donnons ici les coefficients de la matrice L_T dans le tableau suivant :

Tableau des coefficients de la matrice L_T

Terme intégrant	Formule	Constitution du système
Terme transitoire	$\iiint (\alpha_i * \alpha_j * \rho * C_p) dV$	L_T^n ou L_T^{n-1}

ANNEXE 5

Formulation en éléments finis de l'équation thermique en régime permanent cas non linéaire

Problème thermique en régime permanent avec les propriétés physiques en fonction de la température

Dans ce cas on introduit la prise en compte des échanges radiatifs aux frontières. On a donc finalement la formulation de l'équation de l'énergie :

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\Omega} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} T_m \, dV - \iiint_{\Omega} \rho C_p T_m \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{U}_t \, dV + \iint_{\Gamma_s} \alpha_i \rho C_p T_m (\vec{U}_t \cdot \vec{n}_s) \, dS \\
 & - \iiint_{\Omega} \alpha_i C_p T_m \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \vec{\nabla} T_{m-1} \cdot \vec{U}_t \, dV - \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho T_m \left(\frac{\partial C_p}{\partial T} \right) \vec{\nabla} T_{m-1} \cdot \vec{U}_t \, dV \\
 & + \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T_m \, dS + \iint_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{SB} T_m^4 \, dS = \iiint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} \, dV + \iint_{\Gamma} \alpha_i Flux \, dS \\
 & - \iint_{\Gamma_e} \alpha_i \rho C_p T_e (\vec{U}_t \cdot \vec{n}_e) \, dS + \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T_a \, dS + \iint_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{SB} T_a^4 \, dS \tag{A5.1}
 \end{aligned}$$

Le système linéaire s'écrit sous la forme

$$[M_T] * [T] = [K_{Qth} + K_{CAL}] \tag{A5.2}$$

$$[J] = [M_T] + [DM_T] \tag{A5.3}$$

J est la matrice jacobienne du système non linéaire nous présentons le calcul de cette matrice dans l'annexe 7.

Tableau des coefficients à ajouter à la matrice M_T et au vecteur K_{CAL}

Terme intégrant	Formule	Constitution du système
Terme de transport 2	$\iiint (\alpha_i * \alpha_j * U_t \cdot \nabla T_{m-1}) * \left(-\frac{\partial \rho}{\partial T} * C_p \right) dV$	M_T
Terme de transport 3	$\iiint (\alpha_i * \alpha_j * U_t \cdot \nabla T_{m-1}) * \left(-\rho * \frac{\partial C_p}{\partial T} \right) dV$	M_T
Terme de rayonnement	$\iint (\alpha_i * \alpha_j * T_{m-1}^3) * (\sigma_{SB} * \varepsilon) dS$	M_T
Terme de rayonnement ambiante	$\iint (\alpha_i * \sigma_{SB} * \varepsilon) * (T_a^4) dS$	K_{CAL}

Tableau des coefficients de la matrice DM_T

Terme intégrant	Formule	Constitution du système
DTR1RHO	$\iiint (\nabla \alpha_i \cdot U_t * \alpha_j * T_{m-1}) * \left(-\frac{\partial \rho}{\partial T} * C_p \right) dV$	DM_T
DTR1CP	$\iiint (\nabla \alpha_i \cdot U_t * \alpha_j * T_{m-1}) * \left(-\rho * \frac{\partial C_p}{\partial T} \right) dV$	DM_T
DTR2RHO	$\iiint (\alpha_i * \nabla \alpha_j \cdot U_t * T_{m-1}) * \left(-\frac{\partial \rho}{\partial T} * C_p \right) dV$	DM_T
DTR3CP	$\iiint (\alpha_i * \nabla \alpha_j \cdot U_t * T_{m-1}) * \left(-\rho * \frac{\partial C_p}{\partial T} \right) dV$	DM_T
DTR	$\iiint (\alpha_i * \alpha_j * U_t \cdot \nabla T_{m-1}) * \left(-\frac{\partial \rho}{\partial T} * \frac{\partial C_p}{\partial T} \right) dV$	$2 * DM_T$
DCD	$\iiint \left(\nabla \alpha_i \cdot \nabla T_{m-1} * \alpha_j * \frac{\partial k_{th}}{\partial T} \right) dV$	DM_T
DTRSRHO	$\iint \left(\alpha_i * \alpha_j * \frac{\delta \rho}{\delta T} * C_p \right) * (U_t \cdot n * T_{m-1}) dS$	DM_T
DTRSCP	$\iint \left(\alpha_i * \alpha_j * \rho * \frac{\partial C_p}{\partial T} \right) * (U_t \cdot n * T_{m-1}) dS$	DM_T
DTRERHO	$\iint \left(\alpha_i * \alpha_j * \frac{\partial \rho}{\partial T} * C_p \right) * (U_t \cdot n * T_{ent}) dS$	DM_T
DTRECP	$\iint \left(\alpha_i * \alpha_j * \rho * \frac{\partial C_p}{\partial T} \right) * (U_t \cdot n * T_{ent}) dS$	DM_T
DCV	$\iint \left(\alpha_i * \alpha_j * \frac{\partial h_{cv}}{\partial T} * T_{m-1} \right) dS$	DM_T
DCVA	$\iint \left(\alpha_i * \alpha_j * \frac{\partial h_{cv}}{\partial T} * (-T_a) \right) dS$	DM_T
DRAY	$\iint (\alpha_i * \alpha_j * T_{m-1}^4) * \left(\sigma_{SB} * \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right) dS$	DM_T
RAY	$\iint (\alpha_i * \sigma_{SB} * \varepsilon) * (T_a^4) dS$	$3 * DM_T$
DRAYA	$\iint (\alpha_i * \alpha_j * T_a^4) * \left(-\sigma_{SB} * \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right) dS$	DM_T

ANNEXE 6

Formulation des éléments finis de l'équation thermique en régime transitoire cas non linéaire

Problème thermique transitoire avec les propriétés physiques en fonction de la température

On a donc finalement la formulation de l'équation de l'énergie :

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p T_m^n dV + \Delta t \iiint_{\Omega} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} T_m^n dV - \Delta t \iiint_{\Omega} \rho C_p T_m^n \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{U}_t dV \\
 & + \Delta t \iint_{\Gamma_s} \alpha_i \rho C_p T_m^n (\vec{U}_t \cdot \vec{n}_s) dS - \Delta t \iiint_{\Omega} \alpha_i C_p T_m^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \vec{\nabla} T_{m-1} \cdot \vec{U}_t dV \\
 & - \Delta t \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho T_m^n \left(\frac{\partial C_p}{\partial T} \right) \vec{\nabla} T_{m-1} \cdot \vec{U}_t dV + \Delta t \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T_m^n dS + \Delta t \iint_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{SB} T_m^n (T_{m-1}^n)^3 dS \\
 & = \iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p T_m^{n-1} dV + \Delta t \iiint_{\Omega} \alpha_i Q_{th} dV + \Delta t \iint_{\Gamma} \alpha_i Flux dS - \Delta t \iint_{\Gamma_e} \alpha_i \rho C_p T_e (\vec{U}_t \cdot \vec{n}_e) dS \\
 & + \Delta t \iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T_a dS + \Delta t \iint_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{SB} T_a^4 dS \tag{A6.1}
 \end{aligned}$$

Le système linéaire s'écrit sous la forme

$$[L_T]^n * [T]^n + \Delta t [M_T]^n * [T]^n = [L_T]^{n-1} * [T]^{n-1} + \Delta t [K_{Qth} + K_{CAL}] \tag{A6.2}$$

$$[J] = [L_T]^n + [DL_T]^n - [DL_T]^{n-1} + \Delta t ([M_T]^n + [DM_T]^n) \tag{A6.3}$$

Tableau des coefficients de la matrice DL_T

Terme intégrant	Formule	Constitution du système
DTRANSIT1	$\iiint \left(\alpha_i * \alpha_j * \frac{\partial \rho}{\partial T} * C_p \right) * T_{m-1}^n dV$	DL_T^n
DTRANSIT2	$\iiint \left(\alpha_i * \alpha_j * \rho * \frac{\partial C_p}{\partial T} \right) * T_{m-1}^n dV$	DL_T^n
DTRANS01	$\iiint \left(\alpha_i * \alpha_j * \frac{\delta \rho}{\delta T} * C_p \right) * T_{m-1}^{n-1} dV$	DL_T^{n-1}
DTRANS02	$\iiint \left(\alpha_i * \alpha_j * \rho * \frac{\partial C_p}{\partial T} \right) * T_{m-1}^{n-1} dV$	DL_T^{n-1}

ANNEXE 7

Dérivation partielle de l'équation thermique

Pour appliquer la méthode de Newton-Raphson à ce système et on calcule sa matrice Jacobienne. On obtient cette matrice Jacobienne par dérivation partielle de l'équation thermique par rapport à T_j . Voici l'expression des dérivées de chaque intégrant :

$$\frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_{T,j} \rho C_p dV \right] = \iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) C_p T_{m-1}^n dV + \iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_{T,j} \rho \left(\frac{\partial C_p}{\partial T} \right) T_{m-1}^n dV \quad (A7.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iiint_{\Omega} k_{th} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_{T,j} dV \right] = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial k_{th}}{\partial T} \right) (\vec{\nabla} \alpha_i \cdot \alpha_{T,j}) \vec{\nabla} T_{m-1}^n dV \quad (A7.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \alpha_{T,j} \rho C_p U_t dV \right] &= \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) C_p U_t T_{m-1}^n dV \\ &+ \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \alpha_{T,j} \rho \left(\frac{\partial C_p}{\partial T} \right) U_t T_{m-1}^n dV \end{aligned} \quad (A7.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) C_p U_t \vec{\nabla} T_{m-1}^n dV \right] &= \iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial C_p}{\partial T} \right) U_t \vec{\nabla} T_{m-1}^n dV \\ &+ \iiint_{\Omega} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) C_p U_t T_{m-1}^n dV \end{aligned} \quad (A7.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_{T,j} \rho \left(\frac{\partial C_p}{\partial T} \right) U_t \vec{\nabla} T_{m-1}^n dV \right] &= \iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial C_p}{\partial T} \right) U_t \vec{\nabla} T_{m-1}^n dV \\ &+ \iiint_{\Omega} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_{T,j} \rho \left(\frac{\partial C_p}{\partial T} \right) U_t T_{m-1}^n dV \end{aligned} \quad (A7.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iiint_{\Omega} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_{T,j} \rho C_{pce} \vec{U}_t dV \right] &= \iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) C_{pce} \vec{U}_t \vec{\nabla} T_{m-1}^n dV \\ &+ \iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_{T,j} \rho \left(\frac{\partial C_{pce}}{\partial T} \right) \vec{U}_t \vec{\nabla} T_{m-1}^n dV \end{aligned} \quad (A7.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_{T,j} \rho C_p (U_t \cdot \vec{n}_s) dS \right] &= \iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) C_p (U_t \cdot \vec{n}_s) T_{m-1}^n dS \\ &+ \iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_{T,j} \rho \left(\frac{\partial C_p}{\partial T} \right) (U_t \cdot \vec{n}_s) T_{m-1}^n dS \end{aligned} \quad (\text{A7.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_{T,j} h_{cv} dS \right] = \iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial h_{cv}}{\partial T} \right) T_{m-1}^n dS \quad (\text{A7.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_{T,j} \varepsilon \sigma_{SB} (T_{m-1}^{n-1})^3 dS \right] = \iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right) \sigma_{SB} (T_{m-1}^n)^4 dS \quad (\text{A7.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iiint_{\Omega} \alpha_i \rho C_p T_j^{n-1} dV \right] = \iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) C_p T^{n-1} dV + \iiint_{\Omega} \alpha_i \alpha_{T,j} \rho \left(\frac{\partial C_p}{\partial T} \right) T^{n-1} dV \quad (\text{A7.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iint_{\Gamma} \alpha_i \rho C_p (U_t \cdot \vec{n}_e) T_e dS \right] &= \iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) C_p (U_t \cdot \vec{n}_e) T_e dS \\ &+ \iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_{T,j} \rho \left(\frac{\partial C_p}{\partial T} \right) (U_t \cdot \vec{n}_e) T_e dS \end{aligned} \quad (\text{A7.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iint_{\Gamma} \alpha_i h_{cv} T_a dS \right] = \iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial h_{cv}}{\partial T} \right) T_a dS \quad (\text{A7.12})$$

$$\frac{\partial}{\partial T_j^n} \left[\iint_{\Gamma} \alpha_i \varepsilon \sigma_{SB} T_a^4 dS \right] = \iint_{\Gamma} \alpha_i \alpha_{T,j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right) \sigma_{SB} T_a^4 dS \quad (\text{A7.13})$$

NOMENCLATURE

\vec{A}	potentiel vecteur magnétique	$T m$
\vec{B}	induction magnétique	T
C_p	capacité calorifique	$J kg^{-1} K^{-1}$
\vec{D}	déplacement électrique	$C m^{-2}$
\vec{E}	champ électrique	$V m^{-1}$
\vec{F}_{ext}	densité force extérieur	$N m^{-3}$
\vec{F}_{irrot}	densité de force irrotationnelle	$N m^{-3}$
\vec{F}_L	densité de force de Laplace	$N m^{-3}$
$Flux$	chaleur transfert à la surface	$W m^{-2}$
\vec{F}_{rot}	densité de force rotationnelle	$N m^{-3}$
f	fréquence	Hz
f_s	fraction solide	
\vec{H}	champ magnétique	$A m^{-1}$
ΔH	chaleur latente de changement d'état	W
h_{cv}	coefficient d'échange convectif à la surface	$W m^{-2} K^{-1}$
\vec{J}	densité de courant électrique	$A m^{-2}$
\vec{J}_s	densité surfacique de courant	$A m^{-1}$
k_{th}	conductivité thermique	$W m^{-1} K^{-1}$
L	chaleur latente de fusion	$J kg^{-1}$
P_J	puissance Joule	W
$\Delta P/P$	écart relatif	
p	pression	Pa
Q_{th}	source de chaleur	W
$R\omega$	paramètre d'écran	
q	densité de charge électrique	$C m^{-3}$
T	température	K
T_{amb}	température ambiante	K
T_d	température imposée à la frontière	K

t	temps	s
\vec{U}	vitesse de déplacement du matériau	m
\vec{U}_t	vitesse de tirage	m
V	potentiel scalaire électrique	V

lettres grecques

α	polynôme d'interpolation de Lagrange	
δ	épaisseur de peau électromagnétique	m
μ_0	perméabilité magnétique du vide : $4\pi \cdot 10^{-7}$	$H m^{-1}$
μ_r	perméabilité magnétique relative du matériau	$H m^{-1}$
ν	viscosité cinématique	$m^2 s^{-1}$
ω	pulsation du courant inducteur : $2\pi f$	$Rad s^{-1}$
ρ	masse volumique	$kg m^{-3}$
ρ_{free}	densité surfacique de charge libre	$C m^{-2}$
σ	conductivité électrique du matériau	$\Omega^{-1} m^{-1}$
σ_{SB}	constante de Stefan Boltzmann	$W m^{-2} K^{-4}$
ϵ_0	perméabilité diélectrique du vide : $\frac{1}{36}\pi \cdot 10^9$	$F m^{-1}$
ϵ_r	perméabilité diélectrique relative du matériau	$F m^{-1}$
ϵ	émissivité du matériau constituant la charge	

indice

c	grandeur complexe
i	nombre imaginaire
\vec{n}	vecteur normal à la surface
\vec{n}_e	vecteur normale extérieure de la surface entrée du lingot
\vec{n}_s	vecteur normale extérieure de la surface sortie du lingot

repères

(x, y, z)	repère cartésien
(ξ, η, ζ)	repère cartésien dans l'élément référence

grandeurs géométriques

L_c	grandeur caractéristique du matériau	m
-------	--------------------------------------	-----

Γ	grandeur frontière du volumique de contrôle	m^{-2}
Γ_e	grandeur frontière d'entrée du volumique de contrôle	m^{-2}
Γ_s	grandeur frontière de sortie du volumique de contrôle	m^{-2}
Ω	grandeur volumique de contrôle	m^{-3}

opérateurs vectorielle

$\vec{\nabla}$	gradient
$\vec{\nabla} \cdot$	divergence
$\vec{\nabla} \times$	rotationnel
Δ	Laplacien