



**HAL**  
open science

# Aspects électriques et thermiques de la fusion par induction en creuset froid

Daniel Delage

► **To cite this version:**

Daniel Delage. Aspects électriques et thermiques de la fusion par induction en creuset froid. Electromagnétisme. Institut National Polytechnique de Grenoble, 1982. Français. NNT: . tel-01331221

**HAL Id: tel-01331221**

**<https://hal.science/tel-01331221>**

Submitted on 13 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **THESE**

**Présentée à**

**L'INTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE  
DE GRENOBLE**

**pour obtenir le TITRE de DOCTEUR INGENIEUR**

**par**

**Daniel DELAGE**

**ASPECTS ELECTRIQUES ET  
THERMIQUES DE LA FUSION  
PAR INDUCTION EN CREUSET FROID**

**Soutenu le 25 mai 1982 devant la commission d'examen**

**Président : E. BONNIER**

**Examineurs : R. PERRET**

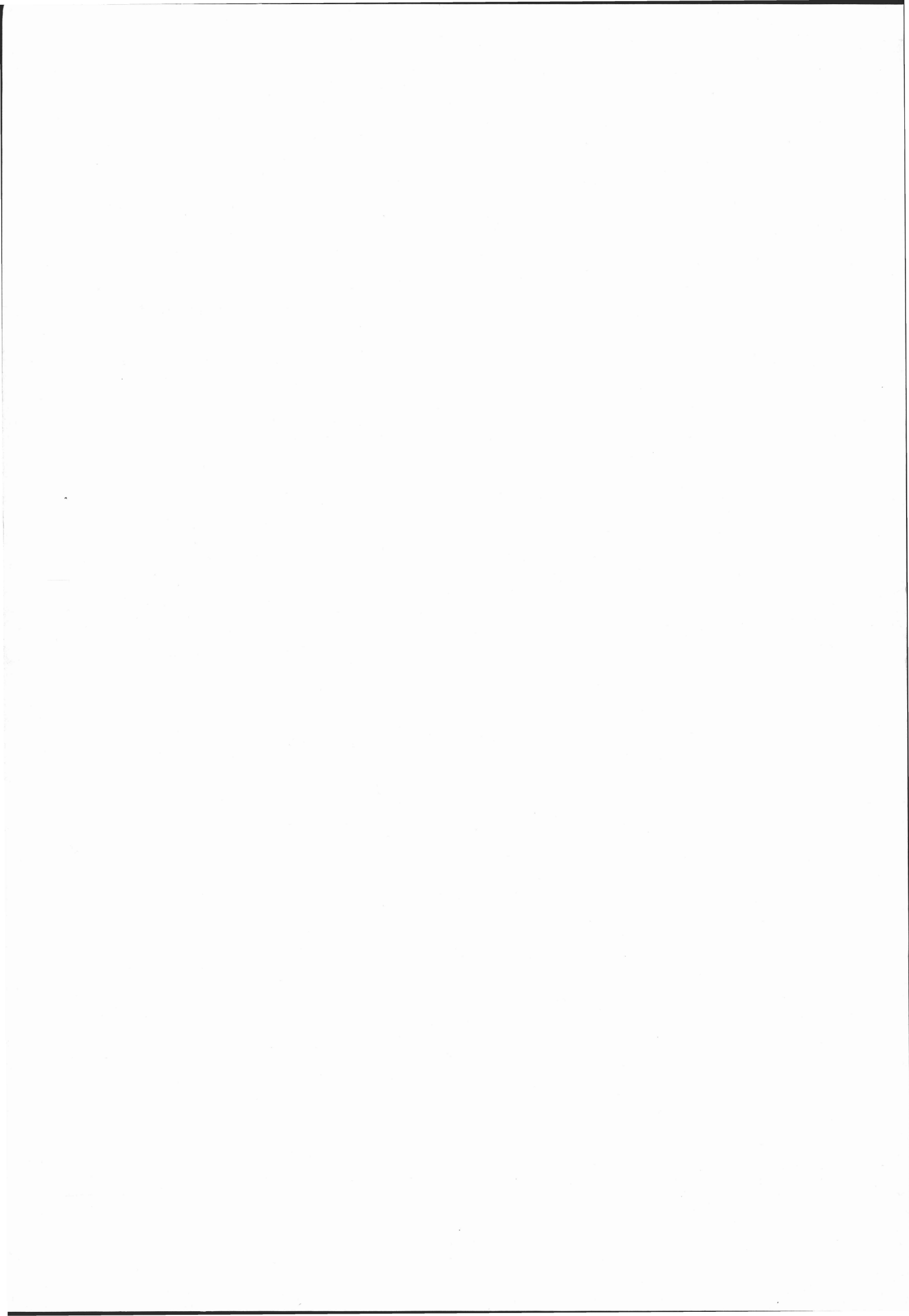
**A. FOGGIA**

**V. JOUAN**

**J. DRIOLE**

**Y. FAUTRELLE**

**Rapporteur : R. MOREAU**



*Ce travail a été réalisé, dans le cadre d'un contrat avec le CEA, à l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrochimie et d'Electrometallurgie, dans le Laboratoire de Thermodynamique et Physico-chimie Métallurgiques dirigé par Monsieur le Professeur DESRE.*

*Monsieur le Professeur E. BONNIER m'a fait l'honneur de présider le jury de ma thèse, je l'en remercie vivement.*

*Je tiens à remercier Monsieur JOUAN, Chef de Service au SAP du CEA Marcoule, pour avoir grandement favorisé une collaboration étroite et fructueuse avec son équipe, et pour avoir bien voulu faire partie du jury de la thèse.*

*J'exprime ma reconnaissance à Monsieur J. DRIOLE, Maître de Recherche au CNRS, pour avoir dirigé cette étude et pour le temps qu'il a bien voulu me consacrer tout au long du travail.*

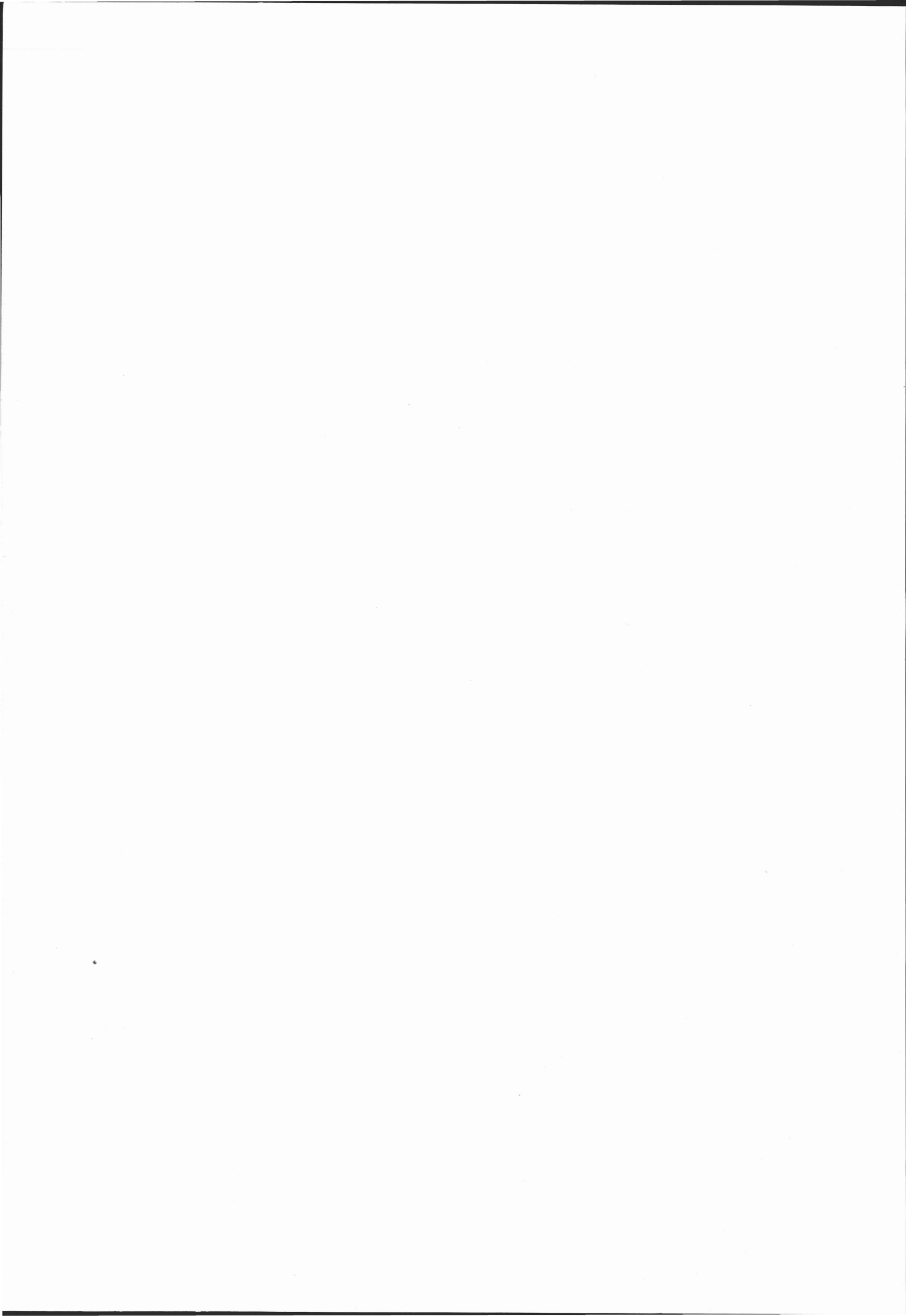
*Mes remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur FOGGIA, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon, pour ses conseils et pour avoir accepté d'agir en qualité de rapporteur extérieur.*

*Je remercie Monsieur le Professeur PERRET ainsi que Monsieur Y. FAUTRELLE, Maître Assistant à l'IMG, pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury.*

*Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur R. MOREAU pour les conseils et l'aide précieuse qu'il m'a apportés tout au long du travail.*

*Je remercie vivement Monsieur R. ERNST, Ingénieur au GIS-MADYLAM, pour m'avoir fait profiter de sa compétence dans un cadre amical, et pour avoir participé à mon travail de façon très active.*

*J'exprime mes cordiaux remerciements à tous mes camarades du laboratoire, chercheurs, secrétaires et techniciens, pour l'ambiance qu'ils ont su créer.*



## PLAN DU MEMOIRE

	<u>Pages</u>
<u>I N T R O D U C T I O N</u>	1
<u>P R E M I E R E P A R T I E - M O D E L I S A T I O N E L E C T R I Q U E</u>	5
I - M O D E L I S A T I O N	7
I.1. Rappel sur la théorie du transformateur	7
I.2. Rappel sur les courants de Foucault	8
I.3. Adaptation de la théorie du transformateur au cas d'un inducteur et d'une charge cylindriques	11
I.4. Adaptation de la théorie du transformateur au cas d'un inducteur, d'une charge et d'un creuset froid	22
I.5. Prise en compte des effets de bord	26
II - C O R R E L A T I O N A V E C L E S O B S E R V A T I O N S E X P E R I M E N T A L E S	34
II.1. L'inducteur, le creuset et la charge ont même hauteur	34
II.2. Cas où le creuset est plus haut que l'inducteur	38
III - O P T I M I S A T I O N D U C R E U S E T - R O L E D E L A F R E Q U E N C E E T D E L A R E S I S T I V I T E	46
III.1. Optimisation du creuset	46
III.2. Influence de la fréquence et de la résistivité de la charge	48
IV - A P P L I C A T I O N S D E L A M E T H O D E D E C A L C U L	56
IV.1. Mesure de résistivité	56
IV.2. Contrôle de la hauteur de la charge dans l'inducteur	58

<u>DEUXIEME PARTIE - ETUDE DES TRANSFERTS THERMIQUES</u>	61
I - INTRODUCTION	63
II - FUSION EN STATIQUE	66
II.1. Choix des laitiers	66
II.2. Dispositif expérimental et déroulement des essais	68
II.3. Résultats des essais	72
III - INTERPRETATION DES FAIBLES SURCHAUFFES OBSERVEES	80
III.1. Effets mécaniques du champ électromagnétique	80
III.2. Analyse des transferts thermiques	89
IV - CALCUL DE LA TEMPERATURE DU CREUSET	98
V - QUELQUES CONSIDERATIONS SIMPLES SUR LE TIRAGE EN CONTINU DE LINGOTS	106
<u>C O N C L U S I O N</u>	113
<u>B I B L I O G R A P H I E</u>	115

## I N T R O D U C T I O N

L'induction est un mode de chauffage des matériaux conducteurs électriques présentant de nombreux avantages, essentiellement dus à la facilité et à la souplesse d'utilisation. Elle permet notamment de concentrer sur des volumes réduits des puissances extrêmement importantes. Les temps de chauffage sont donc très faibles et, avec un choix approprié de la fréquence, les zones chauffées peuvent être localisées en surface ou en profondeur. C'est un système de chauffage très reproductible dont le contrôle est assuré par le réglage du courant dans l'inducteur. Les applications du chauffage par induction sont multiples : on peut réaliser préférentiellement un traitement de surface du matériau (hautes fréquences) ou un traitement à coeur (basses fréquences) ; on peut aussi réaliser des traitements localisés dans des problèmes de soudage, de brasage ou de recuit localisé par exemple. En plus des traitements thermiques, l'induction permet la fusion de matériaux plus ou moins conducteurs (métaux, semi-conducteurs, verres) et l'élaboration d'alliages

En général, la fusion est effectuée dans des creusets réfractaires (alumine, magnésie, silice...) ou métalliques. Selon la nature du creuset et la fréquence utilisée, deux cas peuvent se produire :

- ou bien le creuset est conducteur et couple avec le champ magnétique (cas des métaux et du graphite) ; la puissance active sert alors à chauffer le creuset qui transmet la chaleur à la charge par conduction,

- ou bien le creuset est transparent au champ magnétique et la charge couple directement avec le champ.

La fusion par induction est limitée dans son utilisation par les problèmes suscités par l'emploi de ces creusets (dits creusets chauds). En effet, d'une part ils subissent une usure mécanique importante à cause du brassage thermique et électromagnétique ; d'autre part, ils entraînent une contamination du matériau fondu lorsque celui-ci est réactif à haute température vis-à-vis du matériau constitutif du creuset. Ce type de problème a été résolu dans le cas de la fusion par arc ou par bombardement électronique [1] [2] [3] par l'utilisation de creusets métalliques refroidis par une circulation d'eau ; c'est ainsi que ces deux techniques ont pu conduire à l'élaboration de matériaux de haute qualité.

Dans le cas du chauffage par induction, l'utilisation d'un creuset métallique refroidi est plus délicate car celui-ci, s'il était réalisé en un seul bloc, constituerait un écran vis-à-vis du champ magnétique. C'est pourquoi on utilise des creusets segmentés tels que ceux utilisés par Shippereit [4]. Ces premiers creusets étaient constitués d'un cylindre



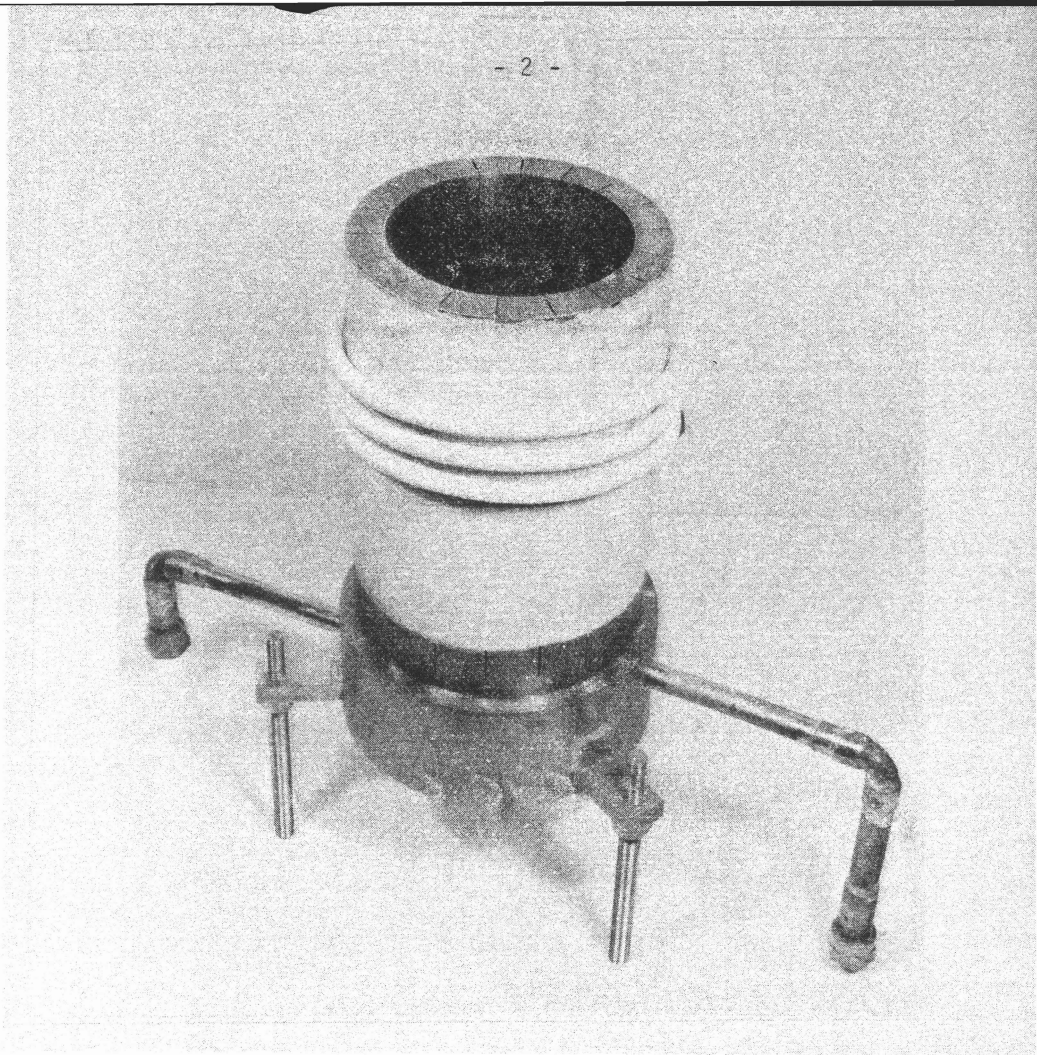


Photo 1 - Creuset froid : 18 secteurs ;  $\varnothing = 100$  mm.

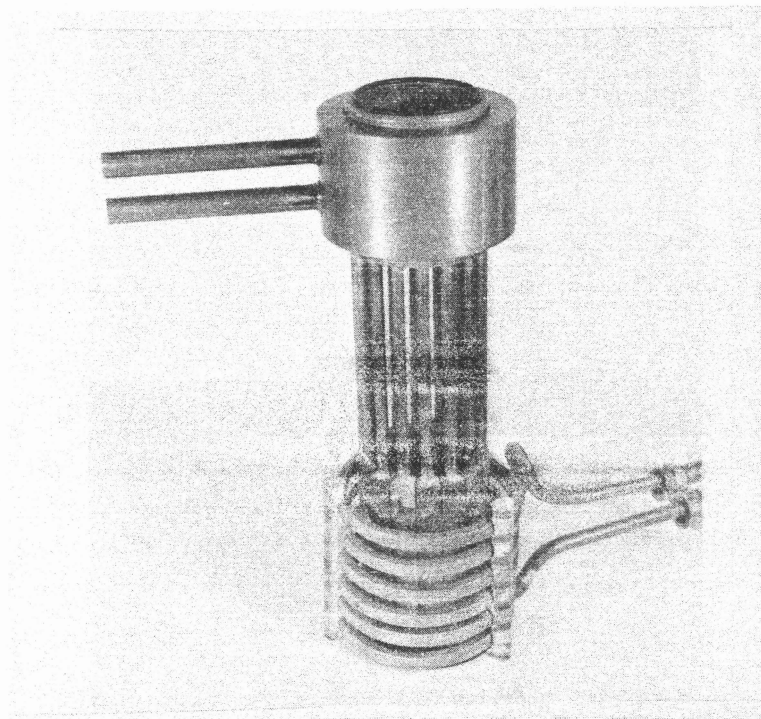


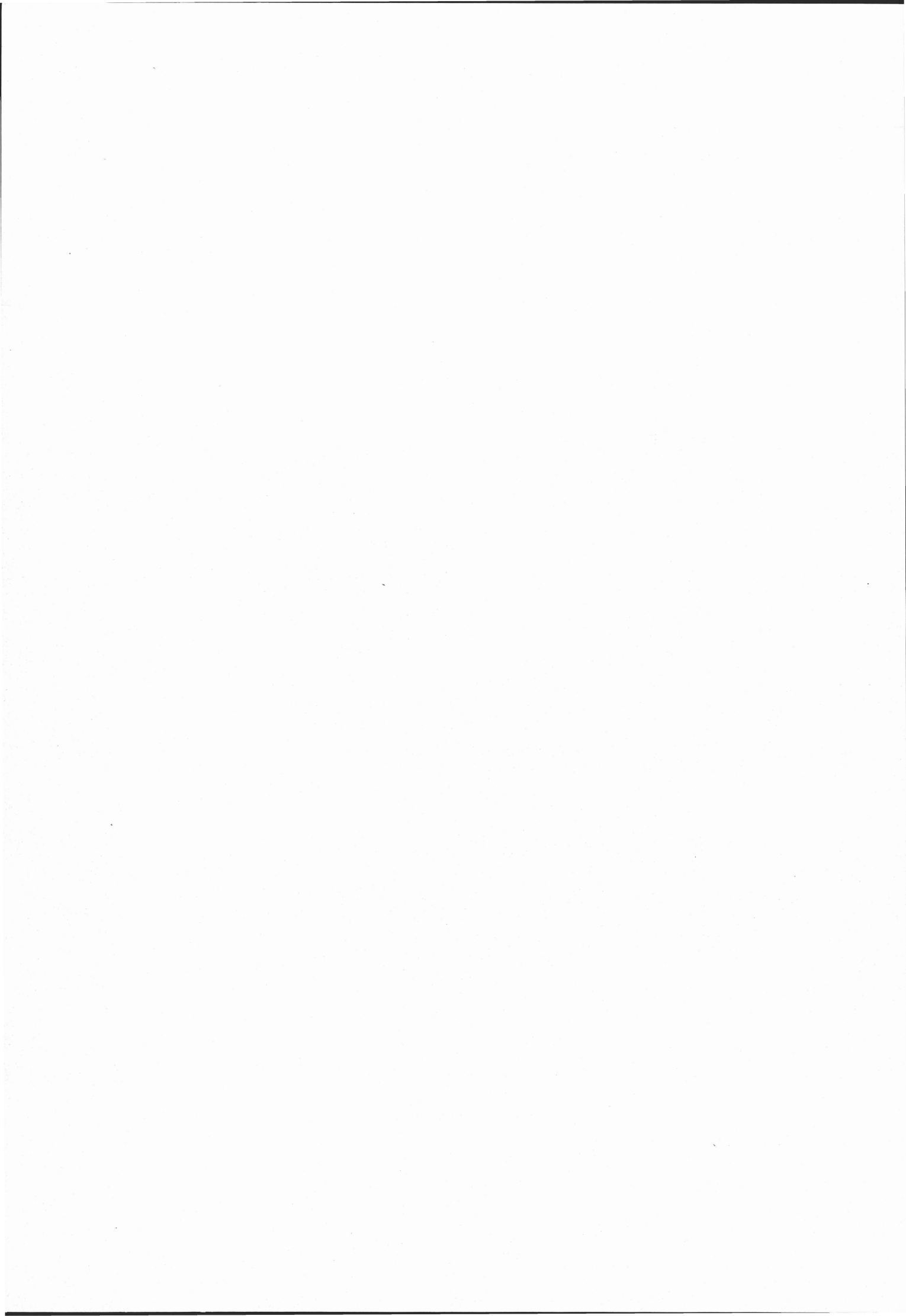
Photo 2 - Creuset froid : 18 secteurs ;  $\varnothing = 50$  mm.

en cuivre refroidi par une circulation d'eau interne, et sectionné, de sorte à empêcher les courants induits de se refermer sur la paroi externe du cylindre ; celui-ci ne fait donc plus écran au champ magnétique et le chauffage du matériau est possible. Néanmoins, un des inconvénients de ce type de creuset est dû au fait qu'il existe une forte différence de potentiel entre les deux parties en regard au niveau de la coupure, qui peut être à l'origine d'amorçages. C'est pourquoi, dans la deuxième génération, les creusets ont été réalisés avec un plus grand nombre de secteurs de façon à réduire la différence de potentiel entre les faces en regard [5] [6] [7] [8] [9]. Les creusets les plus courants sont constitués d'un nombre assez élevé de secteurs en cuivre (typiquement vingt pour un creuset de diamètre 100 millimètres). Chaque secteur est un tube de section ronde, rectangulaire ou trapézoïdale, refroidi par l'eau circulant à l'intérieur (photos 1-2).

L'étude électrique d'un système à induction simple formé par un inducteur et une charge cylindriques, a été résolu de façon analytique dans le cas où la hauteur de l'inducteur et de la charge est infinie [10] [11] [12]. Dans le cas général d'une hauteur quelconque, les modèles numériques basés sur des méthodes d'éléments finis donnent de bons résultats. Par contre, en ce qui concerne le comportement électrique du creuset froid, il existe très peu de données, dans la littérature, autres que qualitatives [8] [9]. Certains auteurs [6] ont testé, avec des essais sur différents creusets, l'influence du nombre de secteurs sur l'efficacité de la fusion, mais les résultats sont partiels et incomplets.

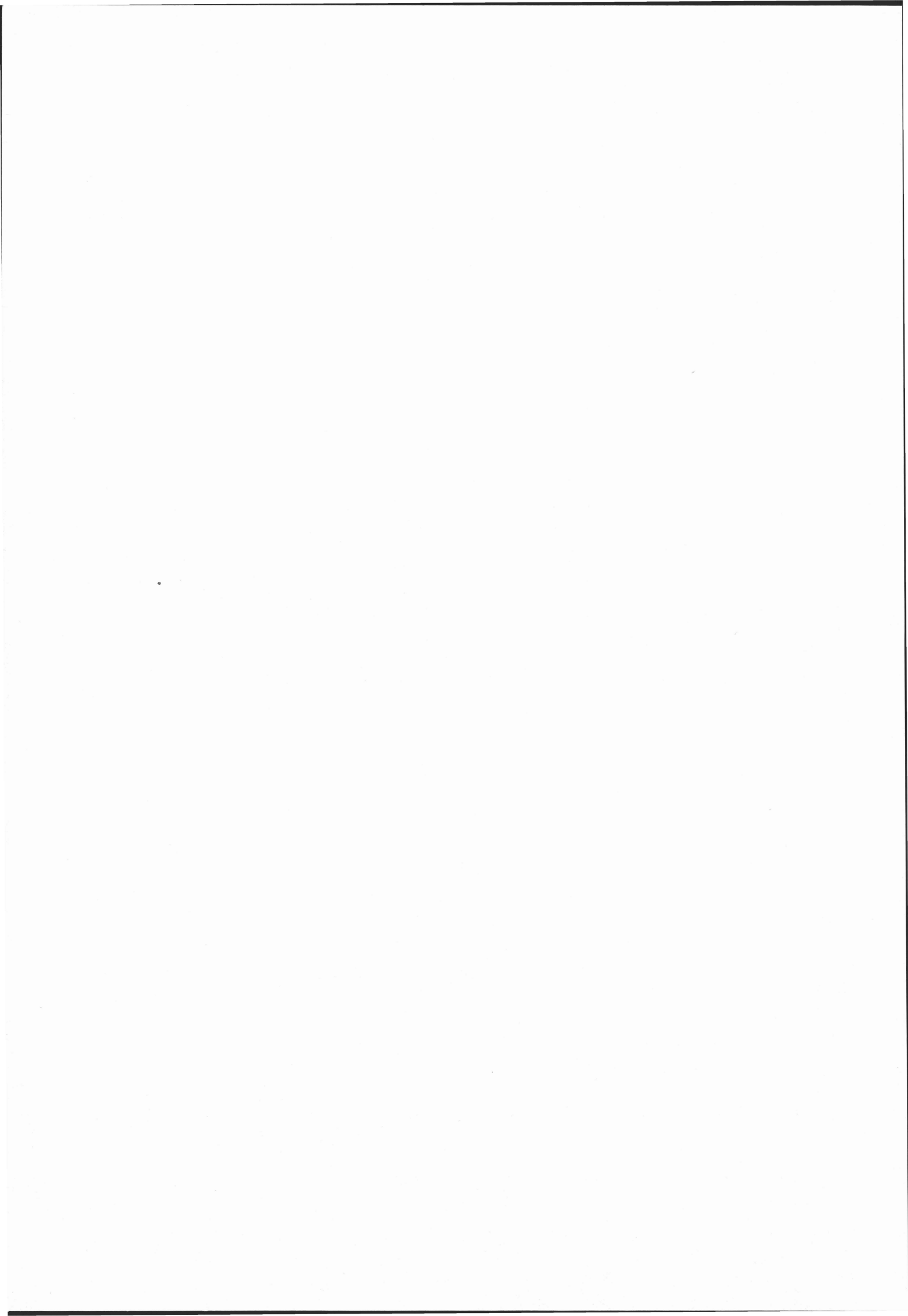
Dans une première partie de la présente étude, nous proposons une méthode analytique permettant le calcul des différentes grandeurs électriques d'un système de fusion en creuset froid dans le cas d'une hauteur finie de l'ensemble. Le modèle présenté est basé sur une analogie avec la théorie du transformateur, où l'inducteur est assimilé à un primaire de transformateur et la charge et les secteurs à plusieurs secondaires en court-circuit. Ainsi, à partir de cette modélisation, on a pu facilement étudier l'influence du nombre de secteurs du creuset, de leur forme et de la géométrie de l'installation (en particulier celle de l'élanement : rapport de la hauteur au diamètre de l'inducteur). De plus, le rôle de la fréquence nominale des courants sur le rendement ainsi que celui de la résistivité de la charge ont été examinés en détail. Deux conséquences directes de la méthode sont également présentées : l'une permet la mesure de la résistivité d'un matériau de la température ambiante jusqu'à sa température de fusion et même au-delà ; l'autre est une méthode de contrôle de la position de la charge dans l'inducteur par mesure de la fréquence.

Dans une seconde partie, la fusion en creuset froid est abordée par ses aspects thermiques. L'interprétation de nombreuses expériences sur des charges en acier a conduit à l'élaboration d'un modèle thermique tenant compte des différents modes de transfert. En particulier, l'analyse détaillée du contact thermique entre le métal fondu et le creuset semble essentielle pour expliquer le comportement thermique de la charge en fonction de la puissance qui lui est transmise par courants induits. Ainsi, l'influence de la présence et de la nature d'un laitier constituant une pellicule isolante à la surface du métal a été étudiée parallèlement d'un point de vue expérimental et théorique.



PREMIERE PARTIE

MODÉLISATION ÉLECTRIQUE



## I - MODELISATION

### I.1 - Rappel de la théorie du transformateur

Dans un transformateur constitué par un enroulement primaire 1, un enroulement secondaire 2 unique et un circuit magnétique (figure 1), les flux magnétiques complexes  $\bar{\phi}_1$  et  $\bar{\phi}_2$ , respectivement à travers les enroulements 1 et 2, sont reliés aux intensités complexes de courant  $\bar{I}_1$  et  $\bar{I}_2$  par les expressions :

$$\bar{\phi}_1 = L_1 \bar{I}_1 + M \bar{I}_2 \quad (I.1)$$

$$\bar{\phi}_2 = M \bar{I}_1 + L_2 \bar{I}_2 \quad (I.2)$$

où  $L_1$ ,  $L_2$  et  $M$  désignent respectivement les inductances propres des enroulements 1 et 2 et leur mutuelle inductance. Si  $R_1$  et  $R_2$  sont les résistances des deux enroulements, les tensions complexes  $\bar{U}_1$  et  $\bar{U}_2$  à leurs bornes s'écrivent, en appelant  $\omega$  la pulsation du courant alternatif :

$$\bar{U}_1 = R_1 \bar{I}_1 + i \omega \bar{\phi}_1 \quad (I.3)$$

$$- \bar{U}_2 = R_2 \bar{I}_2 + i \omega \bar{\phi}_2 \quad (I.4)$$

ou bien en utilisant I.1 et I.2 :

$$\bar{U}_1 = (R_1 + i \omega L_1) \bar{I}_1 + i \omega M \bar{I}_2 \quad (I.5)$$

$$- \bar{U}_2 = i \omega M \bar{I}_1 + (R_2 + i \omega L_2) \bar{I}_2 \quad (I.6)$$

Le cas particulier où le secondaire est en court-circuit conduit aux deux relations :

$$\bar{I}_2 = - \frac{i \omega M}{R_2 + i L_2 \omega} \bar{I}_1 \quad (I.7)$$

$$\bar{U}_1 = \left( R_1 + \frac{M^2 \omega^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2} R_2 \right) \bar{I}_1 + i \omega \left( L_1 - \frac{M^2 \omega^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2} L_2 \right) \bar{I}_1 \quad (I.8)$$

Cette dernière expression signifie que, vue du primaire, la résistance totale du circuit est obtenue en ajoutant à  $R_1$  la résistance  $R_2$  du secondaire multipliée par le coefficient :

$$n^2 = \frac{M^2 \omega^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}.$$

De même, l'inductance vue du primaire est obtenue en soustrayant à  $L_1$  l'inductance du secondaire multipliée par  $n^2$ . La présence du secondaire en court-circuit se traduit donc pour l'enroulement 1 par une augmentation apparente de la résistance et une diminution de l'inductance.

On remarquera que le coefficient  $n$ , appelé rapport de transformation, est égal au rapport des modules des courants  $\bar{I}_1$  et  $\bar{I}_2$  ; dans le cas idéal d'un transformateur parfait (sans flux magnétique de fuite),  $n$  serait rigoureusement le rapport  $n_1/n_2$  du nombre de spires des deux enroulements.

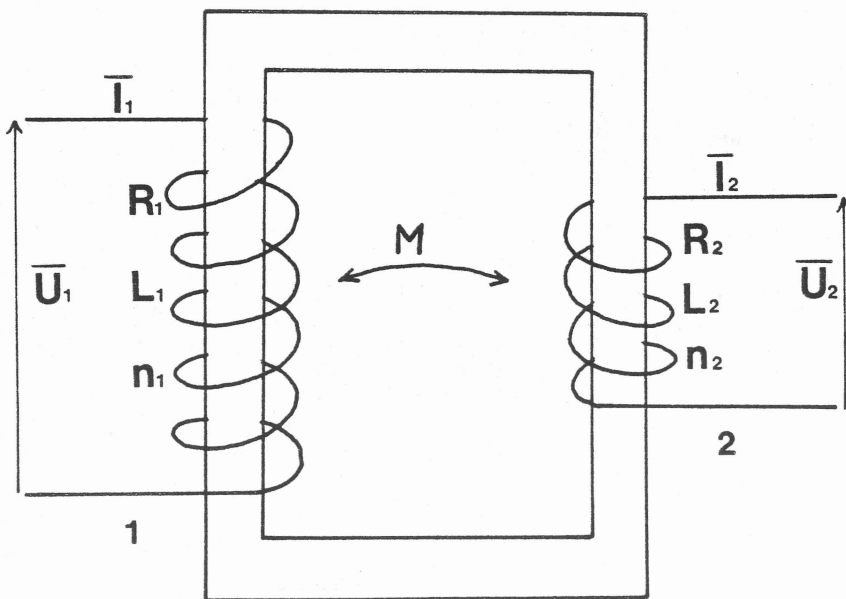


Figure 1 - Schéma d'un transformateur.

## 1.2 - Rappel sur les courants de Foucault

Un corps conducteur plongé dans un champ magnétique alternatif devient le siège de courants induits. La profondeur de pénétration des courants dans le corps est caractérisée par une grandeur  $\delta$  homogène à une longueur, appelée épaisseur de peau ; elle est dé-

finie à partir de la résistivité  $\rho$  du corps et de la fréquence  $f$  du champ par la relation :

$$\delta = \left( \frac{2\rho}{\mu 2\pi f} \right)^{1/2} \quad (I.9)$$

où  $\mu$  est la perméabilité magnétique du matériau. L'épaisseur de peau traduit aussi la profondeur de pénétration du champ magnétique.

Dans le cas d'un conducteur d'épaisseur infinie limité par le plan  $yoz$  (figure 2), baignant dans un champ magnétique uniforme  $\mu_0 H_0 e^{i\omega t}$ , le problème est assez facile à résoudre.

L'équation de diffusion du champ déduite des équations de Maxwell s'écrit, dans le cas où l'on peut négliger les courants de déplacement :

$$\Delta \vec{H} - i \frac{\mu\omega}{\rho} \vec{H} = 0 \quad (I.10)$$

Dans l'exemple considéré, le laplacien se réduit à un unique terme et l'équation devient :

$$\frac{\delta^2 H}{\delta x^2} - i \frac{\mu\omega}{\rho} H = 0 \quad (I.11)$$

qui admet pour solution, compte tenu du fait que pour les très grandes valeurs de  $x$ ,  $H$  doit tendre vers zéro :

$$H = H_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \quad (I.12)$$

L'expression de la densité de courant  $j$  s'en déduit par la relation :

$$j = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (I.13)$$

d'où :

$$j = - H_0 \frac{(1+i)}{\delta} e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \quad (I.14)$$

La puissance électrique sur une longueur  $L$  suivant  $Oy$  et  $h$  suivant  $Oz$  s'écrit alors, si  $j^*$  est la quantité conjuguée de  $j$  :

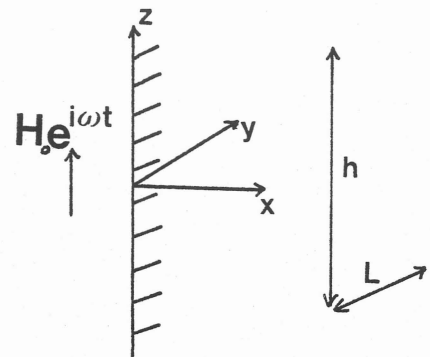


Figure 2



$$P = \frac{1}{2} Lh \int_0^{\infty} \rho j j^* dx \quad (I.15)$$

d'où :

$$P = \frac{1}{2} hL \rho \frac{H_0^2}{\delta} \quad (I.16)$$

Or, le théorème d'Ampère donne la valeur  $I_{\text{eff}}$  du courant efficace total sur la hauteur  $h$  :

$$I_{\text{eff}} = \frac{H_0 h}{\sqrt{2}}$$

qui permet d'écrire I.16 sous la forme :

$$P = \frac{\rho L}{\delta h} I_{\text{eff}}^2 \quad (I.18)$$

Cette relation simple montre notamment que, pour le calcul de la puissance il est légitime de faire comme si la densité de courant était répartie uniformément dans l'épaisseur  $\delta$ .

Dans le cas d'un conducteur cylindrique baignant dans un champ uniforme parallèle à son axe de symétrie, on peut garder la répartition de  $j$  obtenue dans le cas plan à condition que l'épaisseur de peau soit très petite devant le rayon de la charge, ce qui revient à négliger la courbure. Dans un cylindre infiniment long de rayon  $r_0$ , la puissance induite sur une hauteur  $h$  s'écrit donc, dans l'hypothèse  $\delta \ll r_0$  :

$$P = \frac{\rho 2 \pi r_0}{h \delta} I_{\text{eff}}^2 \quad (I.19)$$

où  $I_{\text{eff}}$  est la valeur efficace du courant induit sur la hauteur  $h$ .

### I.3 - Application de la théorie du transformateur au cas d'un inducteur et d'une charge cylindriques

#### I.3.1 - Cas où l'épaisseur de peau est très petite devant le rayon de la charge ( $\delta \ll r_0$ )

L'ensemble étudié est représenté sur la figure 3. Il est constitué par un inducteur cylindrique dans lequel circule un courant alternatif de fréquence  $f$ , et d'une charge dans laquelle sont induits les courants. La charge est cylindrique, de rayon  $r_0$  et de résistivité  $\rho_c$ .

Pour permettre le calcul, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices ont été faites :

- l'inducteur et la charge ont même hauteur  $h$ ,
- l'induction magnétique  $H_0$  à l'intérieur de l'inducteur et dans l'air est uniforme et parallèle à l'axe de symétrie ; on considère qu'il n'y a pas d'effet d'extrémité,
- l'épaisseur de peau dans la charge est très faible devant son rayon.

Ces hypothèses permettent d'utiliser la relation I.19 pour le calcul de la puissance transmise à la charge.

L'analogie entre la configuration envisagée et le transformateur à secondaire unique en court-circuit est assez facile. Il suffit d'une part de considérer la charge comme un secondaire à une spire en court-circuit que l'on fait glisser à l'intérieur du primaire, et d'autre part, de supprimer le circuit magnétique (figure 4).

Alors que dans un transformateur, le flux commun aux deux enroulements est le flux à travers le circuit magnétique, dans cette nouvelle configuration, le flux commun est le flux à travers la charge, ce flux tendant vers zéro lorsque  $\delta$  tend vers zéro.

Cette analogie permet d'utiliser directement l'équation I.8 où le rapport de transformation  $n_c$  s'écrit :

$$n_c = \left( \frac{M_c^2 \omega^2}{R_c^2 + L_c^2 \omega^2} \right)^{1/2} \quad (\text{I.20})$$

où  $M_c$  est la mutuelle inductance entre l'inducteur et la charge,  $R_c$  la résistance de la charge déduite de I.19 et  $L_c$  son inductance propre. On a donc :

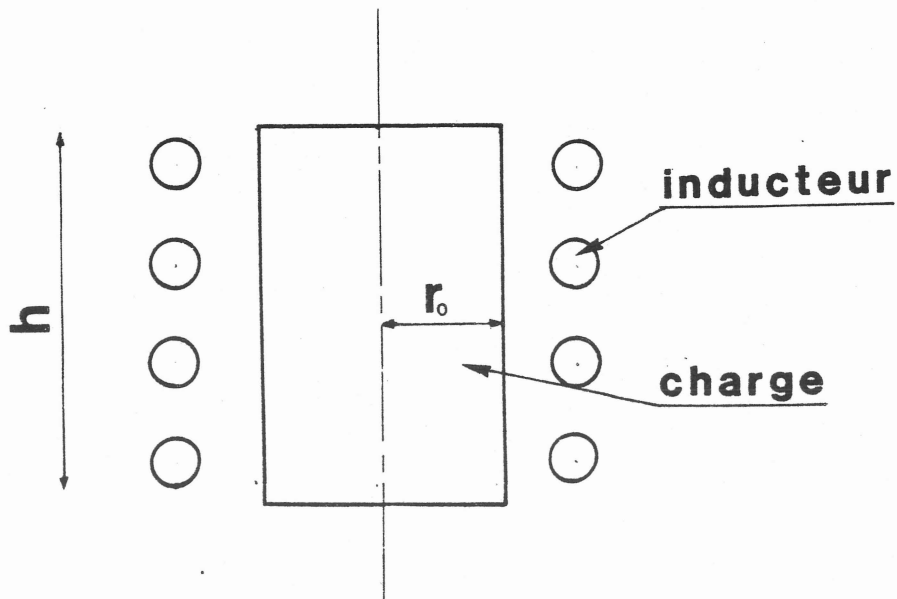


Figure 3 - Schéma de l'inducteur et de la charge.

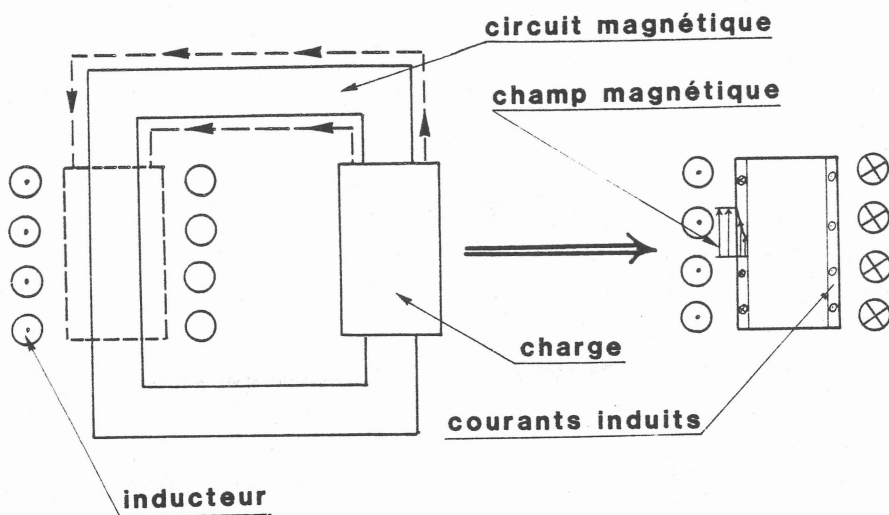


Figure 4 - Analogie entre le transformateur et la configuration inducteur-charge.

$$R_C = \frac{2 \pi r_0 \rho}{h \delta} \quad (\text{I.21})$$

$$L_C = \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{h K_C} \quad (\text{I.22})$$

où  $K_C$  est un coefficient supérieur à l'unité, appelé coefficient de Nagaoka [12] et qui traduit le rôle du rapport d'aspect rayon sur hauteur sur la valeur de l'inductance d'un solénoïde. Son expression est, dans le cas où  $h \geq 2 r_0$  :

$$K_C = 1 + 0,88 \frac{r_0}{h} \quad (\text{I.23})$$

Comparons les deux termes du dénominateur de l'expression I.20 de  $n_c$ . Compte tenu de l'expression I.9 de  $\delta$ , on a :

$$\frac{L_C^2 \omega^2}{R_C} = \frac{1}{K_C} \frac{r_0^2}{\delta^2} \gg 1 \quad (\text{I.24})$$

On peut donc négliger  $R_C^2$  devant  $L_C^2 \omega^2$  et le rapport de transformation I.20 devient :

$$n_c \approx \frac{M_C}{L_C} \quad (\text{I.25})$$

Pour calculer la mutuelle inductance entre l'inducteur et la charge, utilisons sa définition :

$$M_C = \frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} \quad (\text{I.26})$$

où  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  est le flux magnétique créé par le courant  $I_1$  de l'inducteur à travers la charge. En notant  $\phi_{1 \rightarrow 1}$  le flux magnétique dû à ce même courant  $I_1$ , mais à travers la totalité de l'inducteur, on peut écrire :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\phi_{1 \rightarrow 1}}{m} \cdot \frac{S_c}{S} \quad (\text{I.27})$$

où  $S_C$  et  $S$  sont respectivement les sections de la charge et de l'inducteur et  $m$  le nombre de spires. Si  $L_1$  est l'inductance propre de l'inducteur, les relations I.26 et I.27 conduisent à :

$$M_C = \frac{L_1 S_C}{m S} \quad (\text{I.28})$$

et

$$n_C = \frac{L_1 S_C}{m L_C S} \quad (\text{I.29})$$

qui se met sous la forme, si  $K_1$  est le coefficient de Nagaoka de l'inducteur :

$$n_C = m \frac{K_C}{K_1} \quad (\text{I.30})$$

Dans le cas limite où  $h$  tend vers l'infini,  $K_C$  et  $K_1$  tendent tous deux vers 1 ; on se trouve dans une situation analogue au transformateur parfait.

Dans le cas général où  $h$  est fini (et identique pour l'inducteur et la charge), le rapport  $K_C/K_1$  est inférieur à 1 et  $n_C$  est inférieur à  $m$ , ce qui traduit l'existence de fuites magnétiques.

L'expression reliant les grandeurs électriques de l'ensemble inducteur-charge à petite épaisseur de peau s'écrit finalement :

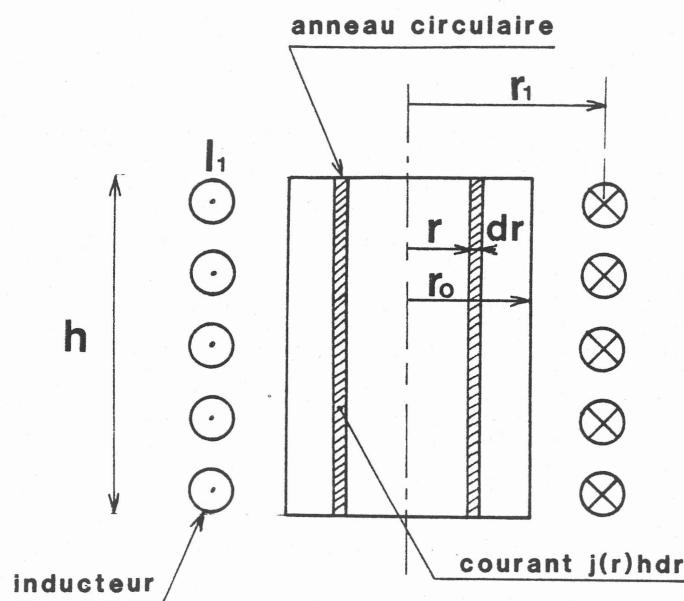
$$\bar{U}_1 = \left[ R_1 + \left( m \frac{K_C}{K_1} \right)^2 \frac{2\pi r_0^2}{h\delta} \right] \bar{I}_1 + j\omega \left[ L_1 - \left( \frac{mK_C}{K_1} \right)^2 \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{hK_C} \right] \bar{I}_1 \quad (\text{I.31})$$

### I.3.1 - Cas d'une épaisseur de peau quelconque

Comme dans le cas des petites épaisseurs de peau, nous nous limitons pour l'instant aux conditions simplifiées suivantes :

- l'inducteur et la charge ont même hauteur,
- l'induction magnétique dans l'air entre l'inducteur et la charge est uniforme et parallèle à l'axe de symétrie. Il n'y a pas d'effet de bord aux extrémités de la charge.

Les courants induits n'étant plus répartis sur une couche très fine à la surface de la charge mais au contraire distribués dans tout le volume, il n'est plus possible de définir la résistance ou l'inductance de la charge ni sa mutuelle inductance et donc, a fortiori, un rapport de transformation  $n$  de façon globale comme précédemment. Néanmoins, une analogie avec un transformateur à plusieurs secondaires est encore possible en divisant la charge en tranches circulaires de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  tendant vers zéro (figure 5) constituant une infinité de secondaires en court-circuit. Chaque couronne peut alors être caractérisée par une résistance, une inductance propre et ses mutuelles inductances avec l'inducteur d'une part et d'autre part avec chacune des autres couronnes qui lui sont concentriques.



*Figure 5 - Découpage de la charge en tranches circulaires de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ .*

Dans une première étape, nous allons calculer la répartition des courants dans la charge à partir des équations de Maxwell. Il suffira ensuite, pour traiter le problème, d'écrire les équations du transformateur pour le primaire ainsi que pour la tranche particulière de rayon  $r_0$  (rayon de la charge) et d'épaisseur  $dr$ .

On considère le cas d'un cylindre conducteur de longueur infinie placé dans un champ magnétique longitudinal  $\mu_0 H_0 e^{i\omega t}$ . La symétrie cylindrique et l'indépendance des quantités vis-à-vis de  $z$  imposent :

$$\frac{\delta}{\delta \theta} = \frac{\delta}{\delta z} = 0 \quad (I.32)$$

L'induction magnétique a une unique composante  $H$  suivant l'axe  $Oz$  et la densité de courant  $j$  est parallèle à la direction tangentielle  $\theta$ . Les équations de Maxwell donnent :

$$\bar{j} = - \frac{d\bar{H}}{dr} \quad (I.33)$$

$$\frac{d\bar{j}}{dr} + \frac{\bar{j}}{r} = i k^2 \bar{H} \quad (I.34)$$

où, si  $\rho$  est la résistivité électrique du cylindre :

$$k^2 = \frac{2 \pi f \mu}{\rho} \quad (I.35)$$

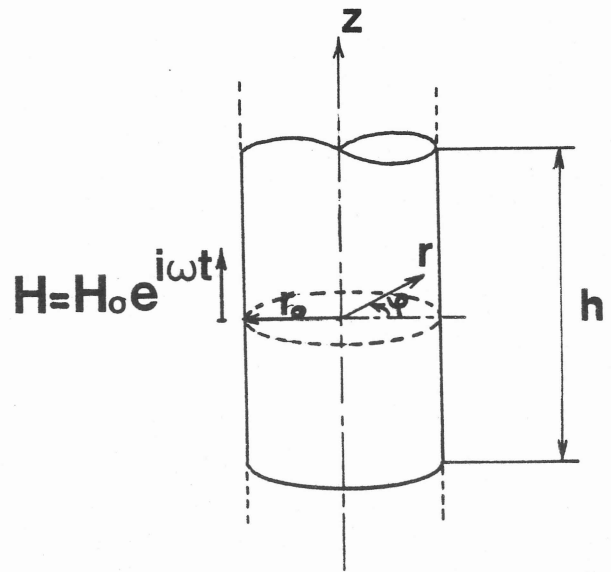


Figure 6

Les équations I.33 et I.34 conduisent, par élimination de  $j$ , à :

$$\frac{d^2 \bar{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{H}}{dr} - i k^2 \bar{H} = 0 \quad (I.36)$$

Cette équation a pour seule solution holomorphe à l'origine ( $r = 0$ ) :

$$\bar{H} = A J_0 (i^{3/2} kr) e^{i\omega t} \quad (I.37)$$

où  $J_0 (i^{3/2} kr)$  est la fonction de Bessel d'ordre zéro de l'argument  $z = i^{3/2} kr$ . A la surface du cylindre, l'intensité du champ magnétique étant  $H_0$ , on peut déterminer la constante  $A$  et donc :

$$\bar{H} = H_0 \frac{J_0 (z)}{J_0 (z_0)} e^{i\omega t} \quad (I.38)$$

avec  $z_0 = i^{3/2} kr_0$ . On déduit de cette expression et de I.33 la valeur de la densité de courant  $j$  :

$$\bar{j}(r) = i^{3/2} k H_0 \frac{J_1 (z)}{J_0 (z_0)} \quad (I.39)$$

où  $J_1(z)$  est la fonction de Bessel d'ordre 1 de l'argument  $z$ . Le courant total induit  $I_F$  sur une hauteur  $h$  est obtenu par intégration de 0 à  $r_0$  de la densité de courant  $j$ . On obtient, après calculs :

$$\overline{I_F} = h H_0 \frac{1 - J_0(z_0)}{J_0(z_0)} e^{i\omega t} \quad (I.40)$$

Par élimination de  $H_0$  dans I.39 et I.40, on peut exprimer la densité de courant  $j$  en fonction du courant total induit  $I_F$  sur la hauteur  $h$  du cylindre :

$$\overline{j(r)} = \frac{I_F}{hr_0} z_0 \frac{J_1(z)}{1 - J_0(z_0)} \quad (I.41)$$

La répartition du courant dans la charge étant connue, on va définir les résistances et les inductances de chacune des tranches circulaires définies sur la figure 5 :

- résistance de la couronne  $r_0$  d'épaisseur  $dr$

$$R_{r_0} = \rho \frac{2 \pi r_0}{h dr} \quad (I.42)$$

- inductance de la couronne  $r_0$  (I.43)

$$L_{r_0} = \frac{\mu \pi r_0^2}{h K_C} \quad (I.43)$$

où  $K_C$  est le coefficient de Nagaoka défini par  $K_C = 1 + 0,88 \frac{r_0}{h}$  dans le cas où  $h \geq 2 r_0$

- mutuelle inductance entre une couronne de rayon  $r$  et l'inducteur :

$$M_{r1} = M_{1r} = \frac{L_1}{m} \frac{S_r}{S} = \frac{\mu_0 \pi r^2}{h K_1} \quad (I.44)$$

$L_1$  étant l'inductance propre de l'inducteur,  $K_1$  le coefficient de Nagaoka de l'inducteur,  $S_r$  et  $S$  les sections respectivement de la couronne de rayon  $r$  et de l'inducteur.



- mutuelle entre une couronne de rayon  $r$  et la couronne de rayon  $r_0$  :

$$M_{r r_0} = M_{r_0 r} = L_{r_0} \frac{S_r}{S_{r_0}} = \frac{\mu_0 \pi r^2}{h K_C} \quad (I.45)$$

Ecrivons maintenant l'équation au primaire du transformateur (c'est-à-dire aux bornes de l'inducteur) ainsi que celle de la couronne particulière de rayon  $r_0$  qui est en court-circuit :

$$\bar{U}_1 = R_1 \bar{I}_1 + i \omega L_1 \bar{I}_1 + i \omega \int_0^{r_0} M_{r1} \bar{j}(r) h dr \quad (I.46)$$

$$0 = R_{r_0} \bar{j}(r_0) h dr + i \omega M_{1r_0} \bar{I}_1 + i \omega \int_0^{r_0} M_{rr_0} \bar{j}(r) h dr \quad (I.47)$$

flux dû à l'inducteur
flux dû aux couronnes  $r \leq r_0$

En remplaçant dans I.47  $\bar{j}(r)$  et  $\bar{j}(r_0)$  par leurs valeurs en fonction de  $I_F$  tirées de I.41, en remplaçant  $M_{1r_0}$ ,  $M_{rr_0}$  et  $R_{r_0}$  par leurs expressions, on obtient, après résolution de l'intégrale, une relation entre  $I_F$  et  $I_1$  :

$$\left[ \rho \frac{2\pi}{h} z_0 \frac{J_1(z_0)}{1-J_0(z_0)} + i \omega \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{h K_C} \frac{J_2(z_0)}{1-J_0(z_0)} \right] \bar{I}_F + i \omega M_{1r_0} \bar{I}_1 = 0 \quad (I.48)$$

où  $J_2(z_0)$  est la fonction de Bessel d'ordre 2 de l'argument  $z_0$ . Cette expression se met sous la forme :

$$\frac{I_F}{I_1} = \frac{m}{K_1} \frac{1 - J_0(z_0)}{-\frac{2}{z_0} J_1(z_0) + \frac{J_2(z_0)}{K_C}} \quad (I.49)$$

L'expression I.41 de  $\bar{j}(r)$  peut être exprimée en fonction de  $I_1$  :

$$\bar{j}(r) = -\frac{m}{K_1 h r_0} \frac{z_0 J_1(z)}{-\frac{2}{z_0} J_1(z_0) + \frac{J_2(z_0)}{K_C}} \quad (I.50)$$

On peut maintenant remplacer  $\overline{j(r)}$  et  $M_{r1}$  par leurs expressions I.50 et I.44 dans l'équation au primaire I.46. Après résolution de l'intégrale, l'équation générale de l'ensemble inducteur-charge s'écrit :

$$\bar{U}_1 = R_1 \bar{I}_1 + i\omega L_1 \bar{I}_1 - i\omega \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{h} \left( \frac{m}{K_1} \right)^2 F \bar{I}_1 \quad (I.51)$$

avec :

$$F = \frac{1 - \frac{2}{z_0} \frac{J_1(z_0)}{J_0(z_0)}}{\frac{1}{K_2} - \frac{2}{z_0} \frac{J_1(z_0)}{J_0(z_0)} \left( \frac{1}{K_C} - 1 \right)} \quad (I.52)$$

Les parties réelles et imaginaires de  $J_0(z_0)$  et  $J_1(z_0)$  peuvent être calculées à partir de séries mais il existe aussi des tables donnant les modules et les arguments de  $J_0$  et  $J_1$  en fonction de  $kr_0$  :

$$J_0 = M_0 e^{iv_0} \quad (I.53)$$

$$J_1 = M_1 e^{iv_1} \quad (I.55)$$

Par conséquent :

$$\frac{J_1}{J_0} = a + j b \quad (I.55)$$

avec :

$$a = \frac{M_1}{M_0} \cos(v_1 - v_0) \quad (I.56)$$

$$b = \frac{M_1}{M_0} \sin(v_1 - v_0) \quad (I.57)$$

Finalement, la fonction F se met sous la forme :

$$F = A + j B \quad (I.58)$$

avec :

$$A = \frac{K_C}{D} [ (x + a - b)(x + (a-b)(1-K_C) + (a+b)^2(1-K_C)) ] \quad (I.59)$$

$$B = \frac{K_C}{D} [(a+b)(x+(a-b)(1-K_C)) - (a+b)(x+a-b)(1-K_C)] \quad (I.60)$$

où :

$$x = r_0/\delta$$

$$D = x^2 + 2x(a-b)(1-K_C) + 2(a^2+b^2)(1-K_C)^2 \quad (I.61)$$

La relation I.51 se met sous la forme :

$$\bar{U}_1 = \left[ R_1 + \frac{\mu_0 \omega \pi r_0^2}{h} \left( \frac{m}{K_1} \right)^2 B \right] \bar{I}_1 + j\omega \left[ L_1 - \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{h} \left( \frac{m}{K_1} \right)^2 A \right] \bar{I}_1 \quad (I.62)$$

On reconnaît, dans cette équation, les termes correspondant à la résistance et à l'inductance de la charge ramenés au primaire. Connaissant la tension aux bornes de l'inducteur, il est facile de calculer le courant  $\bar{I}_1$  et d'en déduire la puissance transmise à la charge ainsi que la variation d'inductance due à sa présence.

#### Etude de cas limites

1 - Cas des très faibles épaisseurs de peau  $\delta \ll r_0$  : on montre facilement que  $A \rightarrow K_C$  et  $B \rightarrow K_C^2 \frac{\delta}{r_0}$  d'où :

$$\bar{U}_1 = \left[ R_1 + \left( m \frac{K_C}{K_1} \right)^2 \rho \frac{2\pi r_0}{h\delta} \right] \bar{I}_1 + j\omega \left[ L_1 - \left( m \frac{K_C}{K_1} \right)^2 \frac{\mu \pi r_0^2}{h K_C} \right] \bar{I}_1 \quad (I.63)$$

On retrouve l'expression I.32 du paragraphe I.3.1. traitant du cas limite  $\delta \ll r_0$ .

2 - Cas  $\delta \gg r_0$  : on peut montrer que F tend vers zéro et I.61 devient :

$$U_1 = R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 \quad (I.64)$$

On dit que la charge est transparente au champ.

3 - Cas où la hauteur h de l'inducteur et de la charge est très grande devant le rayon :  $h \gg r_0$ . Nous avons alors :

$$K_1 = K_C = 1$$

et F s'écrit simplement :

$$F = \frac{(x + a - b) + j(a + b)}{x} \quad (I.65)$$

et I.62 devient :

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 = & \left[ R_1 + m^2 \frac{\rho 2\pi r_0}{h\delta} H_s(\sqrt{2}x) \right] \bar{I}_1 + j\omega \bar{I}_1 \left[ L_1 - m^2 \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{h} \right] \\ & + j\omega \bar{I}_1 m^2 \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{hx} G_s(\sqrt{2}x) \end{aligned} \quad (I.66)$$

Le terme réel correspond à la puissance active dans l'inducteur et dans la charge. Le terme imaginaire correspond à la puissance réactive dans l'entrefer et dans la charge. Les fonctions  $H_s(\sqrt{2}x)$  et  $G_s(\sqrt{2}x)$  sont les fonctions de Stansel [10] dont les allures sont données sur la figure 7.

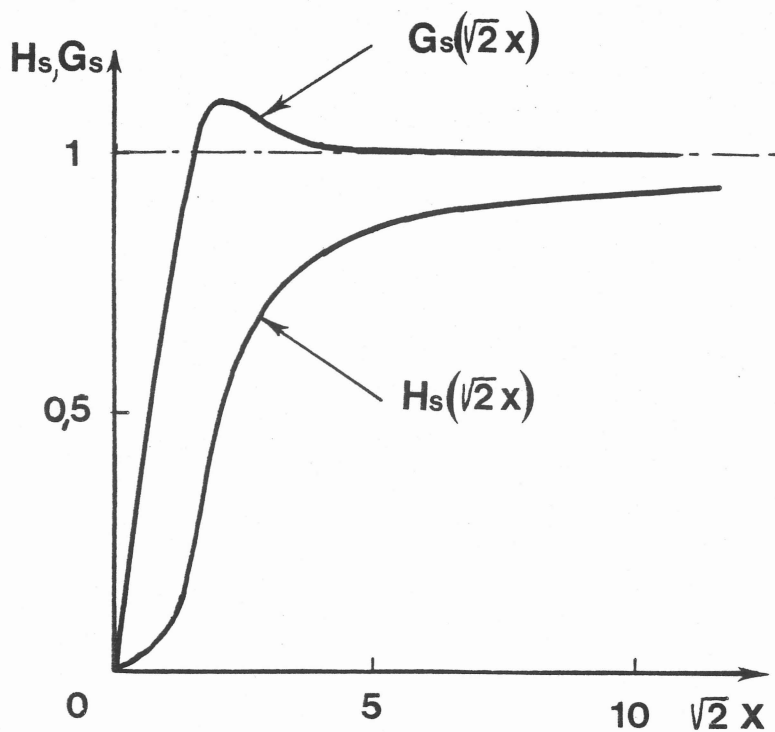


Figure 7 - Allures des fonctions  $G_s(\sqrt{2}x)$  et  $F_s(\sqrt{2}x)$ .

#### I.4 - Adaptation de la théorie du transformateur au cas d'un inducteur, d'une charge et d'un creuset froid

L'ensemble étudié est représenté sur la figure 8. Il est formé d'un inducteur, d'une charge cylindrique et d'un creuset constitué de N secteurs de section ronde ou rectangulaire. On suppose, comme dans le chapitre précédent, que l'inducteur, le creuset et la charge ont même hauteur et que le champ à l'intérieur de l'inducteur et dans l'air est uniforme. A première vue, l'adaptation des équations du transformateur à cette configuration, c'est-à-dire au cas où il y a plusieurs secondaires en court-circuit paraît très compliquée : en effet, il intervient dans les équations un grand nombre de termes correspondant aux mutuelles inductances entre secteurs d'une part, et secteurs et charge d'autre part. En réalité, dans la plupart des cas, il est justifié de négliger tous ces termes car ces mutuelles sont très faibles devant celles entre inducteur et secteur ou inducteur et charge, situations pour lesquelles un conducteur entoure l'autre. On peut d'ailleurs préciser cette approximation en évaluant le champ magnétique créé à l'extérieur de la charge ou d'un secteur par les courants circulant dans ceux-ci. Même dans le cas le moins favorable d'une monospire de hauteur nulle, le rapport entre le champ magnétique à la distance  $2a$  de l'axe de la monospire ( $a$  étant son rayon) et celui au centre de la monospire est inférieur à 15 %. Dès que la hauteur de la monospire devient grande par rapport aux dimensions transversales, ce rapport décroît très rapidement pour s'annuler lorsque la hauteur est infinie.

Dans ces conditions, chaque secteur peut être traité comme un secondaire en court-circuit indépendamment des autres secteurs et de la charge. Les secteurs étant en cuivre, l'épaisseur de peau  $\delta_s$  y est toujours très faible devant ses dimensions transversales. On peut donc utiliser les relations données dans le paragraphe I.3.1. Chaque secteur est alors caractérisé par sa résistance  $R_s$ , son inductance propre  $L_s$  et le facteur de transformation  $n_s$  dont les expressions sont :

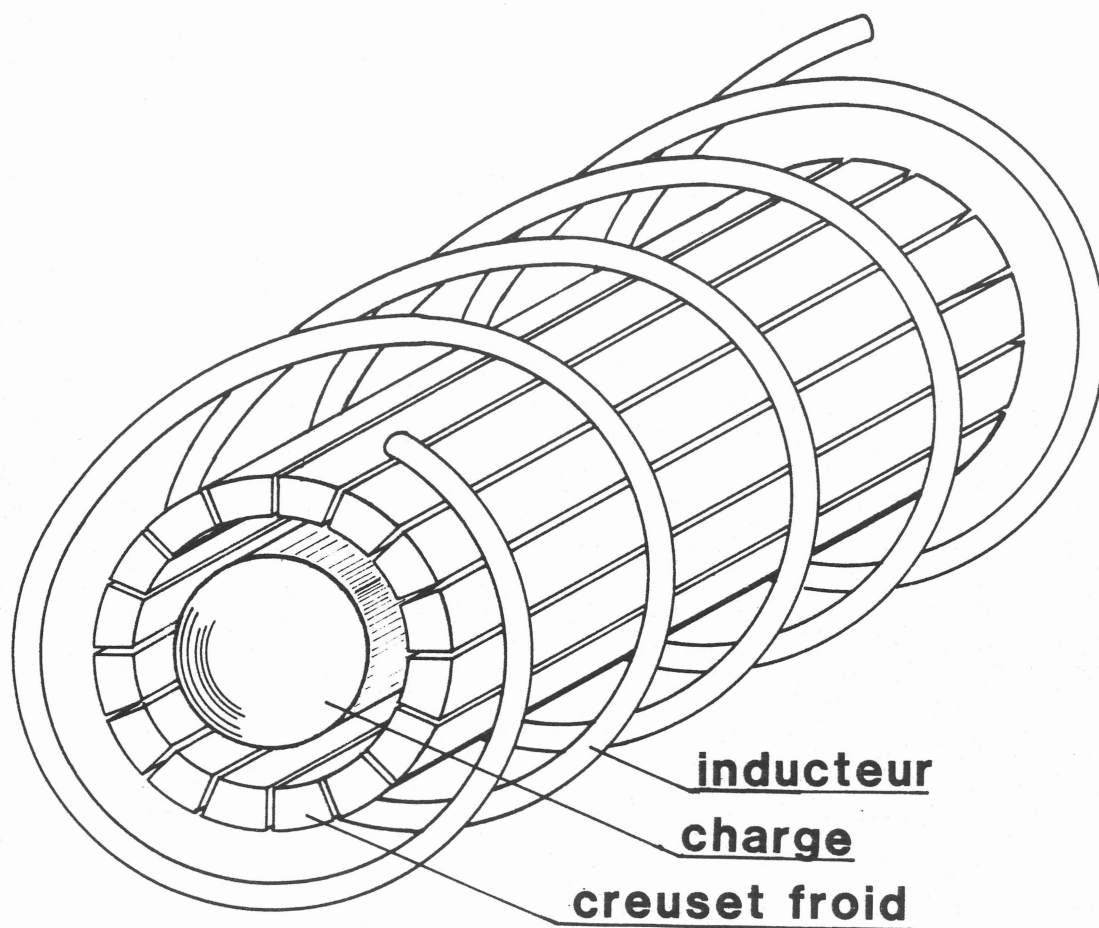
$$R_s = \frac{\rho_{cu} p}{h \delta_s} \quad (I.67)$$

$$L_s = \frac{\rho_{cu} S_s}{h K_s} \quad (I.68)$$

$$n_s = m \frac{K_s}{K_1} \quad (I.69)$$

où  $\rho_{cu}$  est la résistivité électrique du cuivre,  $p$  le périmètre transversal du secteur,  $S_s$  sa section et  $K_s$  le facteur de forme qui lui est associé ; dans le cas d'un secteur cylindrique,  $K_s$  est donnée par la formule de Nagaoka.

L'équation générale de l'ensemble ramené au primaire s'écrit donc, en représentant le terme correspondant à la charge donné par I.66 et en tenant compte des N secteurs :



*Figure 8 - Schéma de l'inducteur, du creuset froid et de la charge.*

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 = & \left[ R_1 + N n_s^2 R_s + \frac{\mu_0 \omega \pi r_o^2}{h} \left( \frac{m}{K_1} \right)^2 B \right] \bar{I}_1 \\ & + j \omega \left[ L_1 - N n_s^2 L_s - \frac{\mu_0 \pi r_o^2}{h} \left( \frac{m}{K_1} \right)^2 A \right] \bar{I}_1 \end{aligned} \quad (I.70)$$

Cette équation peut être traduite sous la forme d'un diagramme de Fresnel (figure 9). L'inductance de l'ensemble, lors de l'introduction du creuset et de la charge dans l'inducteur, voit sa valeur diminuée des deux termes correspondant aux N secteurs et à la charge.

La puissance transmise à la charge par courant de Foucault s'écrit simplement :

$$P_{ch} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \omega r_o^2}{h} \left( \frac{m}{K_1} \right)^2 B \bar{I}_1 \bar{I}_1^* \quad (I.71)$$

Celle transmise au creuset est :

$$P_{cr} = \frac{1}{2} N n_s^2 R_s \bar{I}_1 \bar{I}_1^* \quad (I.72)$$

Si l'on définit le rendement électrique  $\eta$  comme le rapport entre la puissance transmise à la charge et la puissance totale injectée aux bornes de l'inducteur, on a :

$$\eta = \frac{\frac{\mu_0 \omega \pi r_o^2}{h} \left( \frac{m}{K_1} \right)^2 B}{R_1 + N n_s^2 R_s + \frac{\mu_0 \omega \pi r_o^2}{h} B} \quad (I.73)$$

Le calcul, programmé sur une calculatrice HP41C, permet, connaissant les paramètres géométriques et physiques de l'installation, de calculer les puissances, les valeurs d'inductance et le rendement électrique. Ainsi, on a pu étudier les variations de puissance transmise et de rendement en fonction des deux paramètres fréquence et résistivité de la charge. Les résultats sont donnés dans le chapitre III ainsi qu'une optimisation du creuset.

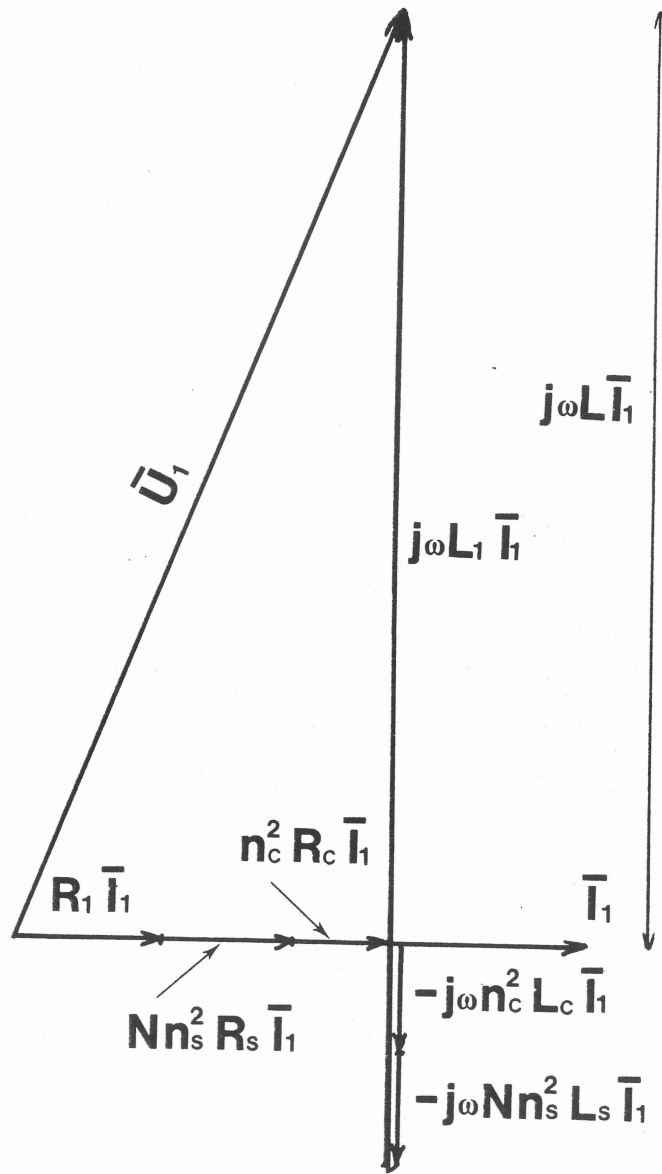


Figure 9 - Diagramme de Fresnel.



### I.5 - Prise en compte des effets de bord

En réalité, la présence d'extrémités anguleuses, suite au choix d'une hauteur finie du modèle de calcul précédent, apporte une non uniformité du champ et de la densité de courant dans la charge. On note en effet un accroissement important de la densité de courant localement au voisinage de ces extrémités, lorsque l'épaisseur de peau est faible devant le rayon de la charge. Pour faire une estimation de la contribution de ces effets d'extrémité sur l'augmentation des pertes joules, on peut utiliser une méthode numérique par éléments finis. Cette méthode a l'avantage d'être applicable quelle que soit l'épaisseur de peau mais présente l'inconvénient d'être assez lourde à mettre en oeuvre, notamment dans le cas des petites peaux. Dans ce dernier cas, il est possible d'utiliser une méthode analytique basée sur les transformations conformes.

La transformation de Schwartz Christoffel est particulièrement bien adaptée à notre géométrie. Elle transforme en effet un contour polygonal dans le plan de départ  $Z$  en une ligne droite dans le plan d'arrivée  $z$ . Dans le cadre de l'hypothèse d'une épaisseur de

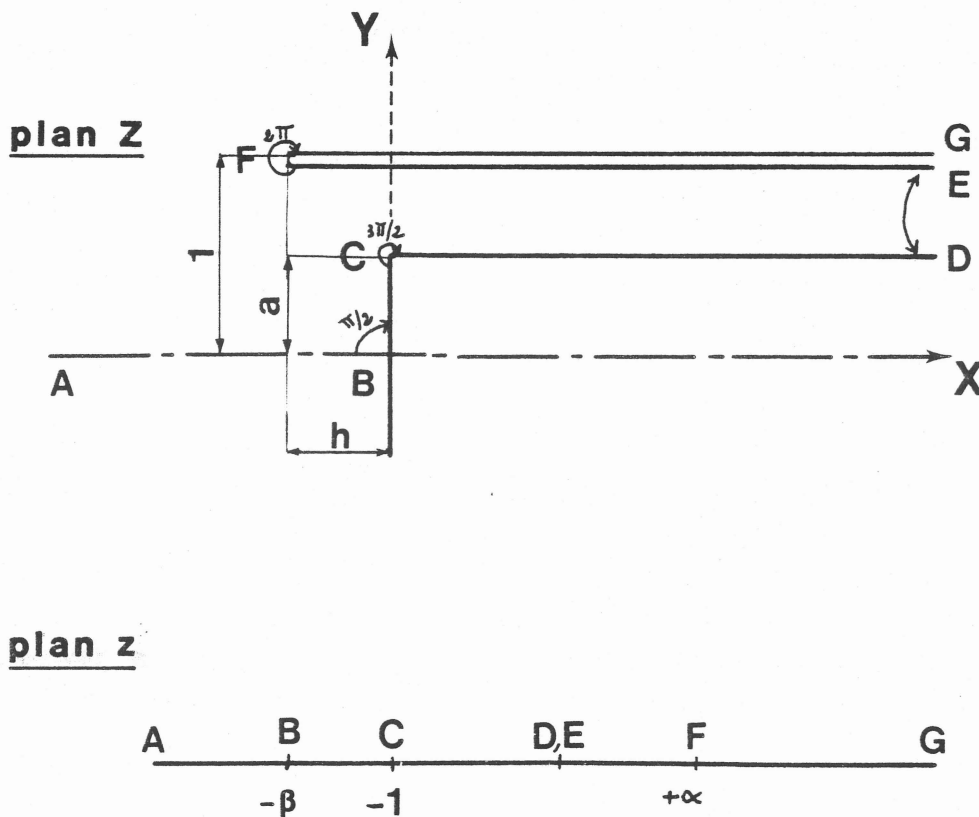


Figure 10 - Géométrie étudiée dans le plan  $Z$  et correspondance par la transformation de Schwartz Christoffel dans le plan  $z$ .

peau très faible devant le rayon de la charge, il est justifié de négliger la courbure de la charge, ce qui nous ramène à un problème bidimensionnel. Pour des raisons de simplicité, on ne traitera que le cas d'une charge en présence d'un inducteur sans creuset froid, en considérant que les résultats de ce calcul seront extrapolables aux secteurs. De plus, on suppose que les deux extrémités de la charge sont suffisamment éloignées pour ne pas s'influencer mutuellement. Dans cette hypothèse, on peut se limiter à l'étude d'une seule extrémité, en considérant le cylindre et l'inducteur comme infinis.

Le contour polygonal ABCDEFG (figure 10) passe par la surface de la charge (BCD) et rejoint à l'infini l'inducteur (EFG). Toutes les dimensions sont ramenées au rayon de l'inducteur qui est pris égal à l'unité pour le calcul ; a représente le rayon de la charge et h son enfoncement algébrique ; la géométrie du problème est ainsi fonction des deux paramètres h et a.

La transformation de Schwartz Christoffel établit la correspondance entre le contour ABCDEFG du plan Z et l'axe réel du plan z ; elle s'écrit :

$$\frac{dZ}{dz} = A (z+\beta)^{-1/2} (z+1)^{1/2} z^{-1} (z-\alpha)^1 = A \frac{(z+1)^{1/2}}{z+\beta} \frac{(1-\alpha)}{z} \quad (I.74)$$

Mis à part les points à l'infini, il est possible de fixer arbitrairement trois points du plan z. On choisit de placer C en -1, D en 0 et E en 0. Il faut donc introduire les paramètres  $\beta$  ( $\beta > 1$ ) et  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) pour fixer les abscisses respectivement des points B et F.

L'intégration de l'équation I.74 s'effectue assez simplement ; on effectue le changement de variable :

$$t^2 = \frac{z+1}{z+\beta} \quad (I.75)$$

et après calculs, on obtient la relation reliant Z et z par l'intermédiaire de t :

$$Z - H = A \left[ \left( \alpha + \frac{\beta-1}{2} \right) \text{Log} \frac{t-1}{t+1} - \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \text{Log} \frac{+\sqrt{\beta}-1}{+\sqrt{\beta}+1} - (\beta-1) \frac{t}{t^2-1} \right] \quad (I.76)$$

H étant une constante d'intégration. Il reste à déterminer H,  $\alpha$ ,  $\beta$  et A à partir des positions des points B, C et F. Tous calculs faits, on obtient :

$$H = 0 \quad (I.77)$$

$$\alpha + \frac{\beta - 1}{2} - \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} = \frac{a}{A \pi} \quad (I.78)$$

$$A \pi \left( \alpha + \frac{\beta - 1}{2} \right) = 1 \quad (I.79)$$

$$-h = A \left[ \left( \alpha + \frac{\beta - 1}{2} \right) \text{Log} \frac{\sqrt{\alpha + \beta} - \sqrt{\alpha + 1}}{\sqrt{\alpha + \beta} + \sqrt{\alpha + 1}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \text{Log} \frac{\sqrt{\beta(\alpha + 1)} - \sqrt{\alpha + \beta}}{\sqrt{\beta(\alpha + 1)} + \sqrt{\alpha + \beta}} + \sqrt{(\alpha + \beta)(\alpha + 1)} \right] \quad (I.80)$$

d'où, en remplaçant A par sa valeur tirée de I.79 dans I.70 et I.80 :

$$\alpha = \frac{(1 - a)(\beta - 1)}{\frac{2}{\sqrt{\beta}} - 2(1 - a)} \quad (I.81)$$

$$h = \frac{1 - a}{\pi} \text{Log} \frac{\sqrt{\beta(\alpha + 1)} - \sqrt{\alpha + \beta}}{\sqrt{\beta(\alpha + 1)} + \sqrt{\alpha + \beta}} - \frac{1}{\pi} \text{Log} \frac{\sqrt{\alpha + \beta} - \sqrt{\alpha + 1}}{\sqrt{\alpha + \beta} + \sqrt{\alpha + 1}} - \frac{\sqrt{(\alpha + 1)(\alpha + \beta)}}{\pi \left( \alpha + \frac{\beta - 1}{2} \right)} \quad (I.82)$$

La relation I.76 s'écrit alors :

$$Z = \frac{1}{\pi} \text{Log} \frac{t-1}{t+1} - \frac{1-a}{\pi} \text{Log} \frac{t\sqrt{\beta}-1}{t\sqrt{\beta}+1} - \frac{2}{\pi} (1 - \sqrt{\beta}(1-a)) \frac{t}{t^2-1} \quad (I.83)$$

où

$$z = \frac{1 - \beta t^2}{t^2 - 1} \quad (I.84)$$

Les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $a$  et  $h$  sont calculées à partir des relations I.81 et I.82.

Dans le plan Z (figure 10), on considère, pour des raisons de simplicité, que tout le flux magnétique vient de D et E, et contourne la charge et l'inducteur qui sont des lignes de force. En réalité, cette hypothèse suppose que les lignes de champ ne traversent pas la paroi de l'inducteur, ce qui a pour effet de majorer le champ à l'intérieur de l'inducteur par rapport au cas réel où il existe des fuites magnétiques.

L'analogie entre le champ magnétique  $\vec{B}$  et la vitesse  $\vec{v}$  d'un écoulement d'un fluide incompressible créé par une source de vitesse uniforme sur le segment DE à l'infini est tout à fait évidente. En électromagnétisme, le potentiel complexe  $\omega_m$  s'écrit :

$$\omega_m = I + i \phi \quad (I.85)$$

avec :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}} I \quad (I.86)$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{Rot}} \phi \quad (I.87)$$

$\phi$  n'ayant qu'une seule composante  $\phi$  perpendiculaire au plan des composantes du champ. De même, en hydraulique, le potentiel complexe  $\omega_h$  s'écrit :

$$\omega_h = \Theta + i \psi \quad (I.88)$$

avec :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \Theta \quad (I.89)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{Rot}} \psi \quad (I.90)$$

Par conséquent, la détermination du champ  $\vec{B}$  est la même que celle du champ de vitesse  $\vec{v}$ .

La source de débit Q devient ponctuelle dans le plan z et est placée à l'origine 0 (0 étant l'homologue de l'infini) ; il lui correspond le potentiel complexe classique :

$$\omega = \frac{Q}{2\pi} \text{Log } z \quad (I.91)$$

Par dérivation par rapport à z, on obtient les composantes u et v du champ dans le plan z :

$$u - i v = \frac{d\omega}{dz} = \frac{Q}{2\pi z} \quad (I.92)$$

On doit calculer B dans le plan Z ; ses composantes U et V vérifient :

$$U - iV = \frac{d\omega}{dZ} = \frac{d\omega}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{Q}{2\pi z} \frac{dz}{dZ} \quad (I.93)$$

où  $\frac{dz}{dZ}$  est donnée par la relation I.74 et A,  $\alpha$  et  $\beta$  par les relations I.79, I.81 et I.82. Si on s'intéresse au contour BCD où l'on a :

$$z = - \xi \quad \text{avec } \xi \in [0, \beta] \quad (I.94)$$

la relation I.93 devient :

$$U - iV = - \frac{Q}{2\pi A} \frac{1}{\alpha + \xi} \left( \frac{\beta - \xi}{1 - \xi} \right)^{1/2} \quad (\text{I.95})$$

La racine est imaginaire sur BC car  $1 \leq \xi \leq \beta$  ; elle est réelle sur CD car  $0 \leq \xi \leq 1$  et  $1 - \xi \leq 0$ . Par conséquent, sur le segment BC, on a :

$$V = - \frac{Q}{2\pi A} \frac{1}{\alpha + \xi} \left( \frac{\beta - \xi}{\xi - 1} \right)^{1/2} \quad (\text{I.96})$$

et sur la demi droite CD :

$$U = \frac{Q}{2\pi A} \frac{1}{\alpha + \xi} \left( \frac{\beta - \xi}{1 - \xi} \right)^{1/2} \quad (\text{I.97})$$

Aux valeurs de U et V sont associées les abscisses X et Y à déduire de l'équation paramétrique I.83. La détermination du champ le long du contour de la charge BCD se fait donc de la manière suivante :

- on détermine les constantes A,  $\alpha$  et  $\beta$  avec les relations I.79, I.81 et I.82,
- sur le contour CD, on choisit des valeurs de  $\xi$  comprises entre 0 et  $\alpha$  d'où sont issues les valeurs correspondantes de t (relation I.75) et donc de X par l'équation I.83. Pour ces mêmes valeurs de  $\xi$ , on obtient la composante U du champ par la relation I.97,
- sur le contour BC, on choisit  $\xi$  compris entre 1 et  $\beta$  et une même démarche permet de calculer Y et V.

Connaissant les expressions du champ tangentiel le long des contours extérieurs de la charge, on peut calculer la puissance qui lui est transmise. On rappelle que la puissance transmise à un volume conducteur de surface extérieure S baignant dans un champ tangentiel à sa surface,  $B_0 e^{i\omega t}$ , s'écrit, dans le cas d'une épaisseur de peau  $\delta$  infiniment petite :

$$P = \frac{1}{4} \left( \frac{2\omega}{\mu\sigma} \right)^{1/2} \frac{1}{\mu} \int_S B_0^2 dS \quad (\text{I.98})$$

$\omega$  étant la pulsation du champ,  $\mu$  la perméabilité magnétique du matériau et  $\sigma$  sa conductivité électrique. Dans notre problème,  $B_0$  a pour valeur U sur la demi droite CD et V sur le segment BD. La puissance transmise à la charge sur une longueur L suivant Oz (L étant en réalité la circonférence déroulée de la charge cylindrique) est par conséquent égale à :

$$P = \frac{1}{4} \left( \frac{2\omega}{\mu\sigma} \right)^{1/2} \frac{L}{\mu} \left[ \int_0^a V^2 dY + \int_0^e U^2 dX \right] \quad (I.99)$$

où  $a$  est le rayon de la charge et  $e$  la longueur réelle de la charge étudiée. On suppose qu'au delà de la distance  $e$  de l'extrémité de la charge, cette extrémité n'a plus d'influence sur la valeur du champ. Loin de l'extrémité, celui-ci peut donc être calculé en faisant  $\xi = 0$  dans l'expression I.97 de  $U$  et sa valeur est :

$$U_\infty = - \frac{Q}{2\pi A} \frac{\beta^{1/2}}{\alpha} \quad (I.100)$$

La puissance correspondante  $P_\infty$  si le champ avait partout cette valeur serait égale à :

$$P_\infty = \frac{1}{4} \left( \frac{2\omega}{\mu\sigma} \right)^{1/2} \frac{Le}{\mu} \left( \frac{Q}{4\pi A} \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} \right)^2 \quad (I.101)$$

On peut calculer l'effet de l'extrémité considérée en faisant le rapport  $P/P_\infty$  qui s'écrit :

$$\frac{P}{P_\infty} = \frac{\alpha^2}{\beta e} \left[ \int_0^a \frac{1}{(\alpha+\xi)^2} \frac{\beta-\xi}{\xi-1} dY + \int_0^e \frac{1}{(\alpha+\xi)^2} \frac{\beta-\xi}{1-\xi} dX \right] \quad (I.102)$$

Les deux intégrales peuvent être exprimées entièrement en fonction de  $\xi$  une fois remplacés  $dY$  et  $dX$  par leurs expressions en fonction de  $\xi$  (pour ceci, on exprime  $X$  et  $Y$  en fonction de  $\xi$  par les relations I.75, I.83 et I.94, puis on effectue les dérivations). Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_\infty} = & \frac{2b^{1/2}\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2\pi\beta e} \left\{ \frac{bv_e}{v_e^2-1} - \frac{b}{2} \text{Log} \frac{v_e-1}{v_e+1} + (1-a) \beta^{1/2} \left[ \frac{c^2(\beta+1+3b(\beta-3))+b(3-\beta)+\beta+1}{4(1-c^2)^2} \text{Log} \frac{v_e-1}{v_e+1} \right. \right. \\ & \left. \left. - (1-a)\beta^{1/2} \left( \frac{b(3-\beta)-(\beta+1)}{1-c^2} \right) \frac{v_e}{2(v_e^2-1)} + \frac{(1-a)\beta^{1/2}c}{2} \left( \frac{(3-\beta)bc^2-(\beta+1)}{(c^2-1)^2} \right) \text{Log} \frac{v_e-c}{v_e+c} \right] \right\} \\ & + \frac{\alpha^2 b^{3/2}}{\beta e(\alpha+\beta)^2} \left[ 1 - (1-a)\beta^{1/2} \left[ \frac{-2b^5c^5+bc^4(1+3b)+4bc^3+c^2(1-8b-b^2)-2c+3b+1}{2b(1-c^2)^2} \right] \right] \quad (I.103) \end{aligned}$$

avec :

$$b = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 1} \quad c^2 = \frac{\beta}{b} \quad v_e = \left( \frac{\beta - \xi_e}{1 - \xi_e} \right)^{1/2} \frac{1}{b^{1/2}}$$

où  $\xi_e$  est la valeur de  $\xi$  correspondant à  $X = e$ .

Cette expression assez lourde est néanmoins facilement programmable sur une petite calculatrice. Ainsi, on a étudié trois cas numériques représentés sur la figure 11. Dans les trois cas, charge de même longueur que l'inducteur, charge plus longue et charge moins longue que l'inducteur, on a représenté les valeurs calculées de  $B/U_\infty$  sur les contours BC et CD ainsi que les valeurs des rapports  $P/P_\infty$  sur le couvercle et les faces latérales. Dans le cas d'une charge de même longueur que l'inducteur, l'ordre de grandeur de la surpuissance due aux extrémités anguleuses est de 35 % (17 % pour chacune des deux extrémités). On peut noter que le fait d'avoir déroulé le couvercle est à l'origine d'une surestimation de la puissance dans le couvercle (BC).

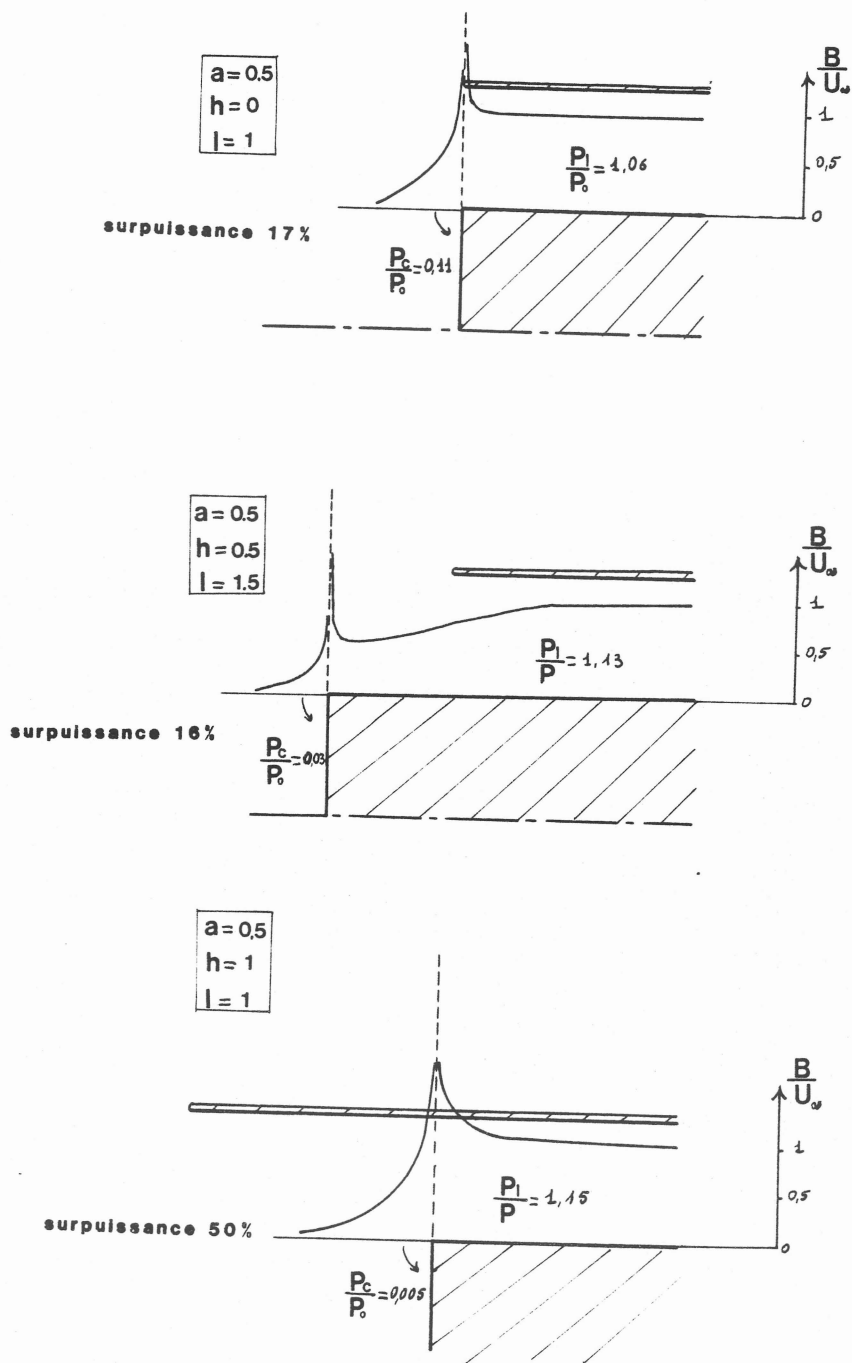


Figure 11 - Profils de champ magnétique et surpuissance due à l'extrémité dans trois différents cas.



## II - CORRELATION AVEC LES OBSERVATIONS EXPERIMENTALES

### II.1 - L'inducteur, le creuset et la charge ont même hauteur

Le but de cette série d'essais est de tester la validité de la théorie exposée dans le chapitre précédent sur un certain nombre de cas simples. On dispose d'un générateur CELES de 100 KW, dit générateur apériodique [15]. La fréquence nominale du courant est assurée par un circuit oscillant dont l'inductance L est constituée par l'inducteur, et la capacité C par un coffret qui permet d'osciller à des fréquences comprises entre 80 Kz et 200 KHz. Ce type de générateur oscille toujours à la fréquence propre du circuit oscillant (donnée par la relation  $LC \omega^2 \approx 1$ ) et la variation d'inductance provoquée par l'adjonction d'une charge dans l'inducteur peut être facilement détectée à l'aide d'un fréquencemètre numérique. La tension aux bornes de l'inducteur est réglée à partir d'un potentiomètre et sa valeur est affichée sur la console. Connaissant cette valeur ainsi que celle des capacités montées en parallèles avec l'inducteur, le modèle électrique permet de calculer l'inductance du circuit et les puissances transmises au creuset et à la charge.

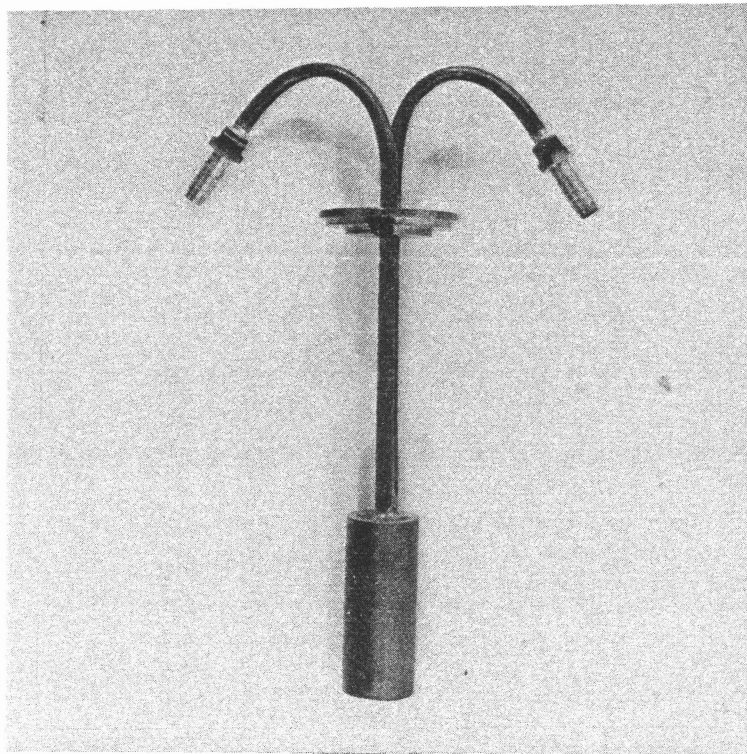
Expérimentalement, les méthodes utilisées pour mesurer la variation d'inductance ainsi que les résistances ramenées au primaire sont de deux types. La première, appelée méthode du décrement logarithmique, consiste, lorsque le générateur n'est pas en fonctionnement, à charger par une tension continue les condensateurs du circuit oscillant puis à les laisser se décharger en enregistrant la décroissance du signal sur un oscilloscope à mémoire (figure 12). On mesure ainsi d'une part la fréquence f d'oscillation, d'autre part la valeur de la résistance  $R_T$  vue du primaire qui est donnée par la relation :

$$R_T = \frac{L\omega}{n\pi} \text{Log} \frac{A_0}{A_n}$$

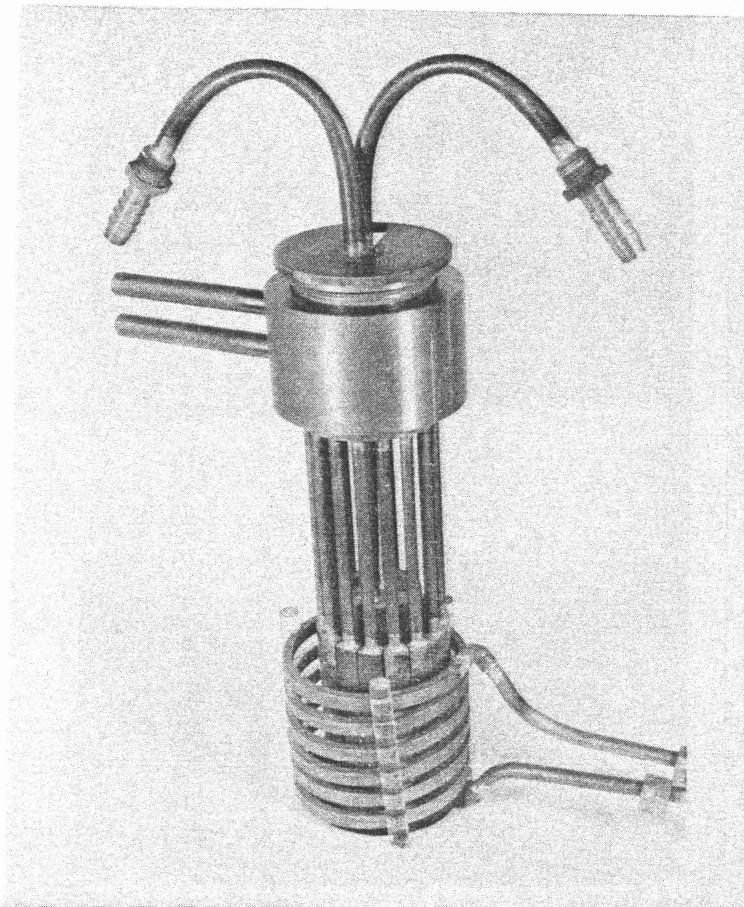
où  $A_0$  est l'amplitude de la première oscillation et  $A_n$  celle de la  $n^{\text{ième}}$  (figure 12). Une première mesure avec l'inducteur seul donne sa résistance. Deux autres mesures avec la charge puis avec la charge et le creuset permettent d'accéder aux valeurs de leurs résistances vues du primaire. La deuxième méthode consiste à utiliser une charge refroidie par une circulation d'eau interne et à mesurer la puissance transmise par bilan thermique de l'eau de refroidissement. Pour ceci, on a réalisé une charge cylindrique en cuivre, refroidie par une circulation d'eau (photo 3) et des capteurs de température ont été disposés sur les entrées et sorties d'eau. La précision sur les valeurs des températures est de 1/10 de degré. Le débit Q étant mesuré par ailleurs, la puissance évacuée s'écrit :

$$P = \rho C_p Q \Delta T$$

où  $\Delta T$  est la différence entre la température d'entrée et de sortie de l'eau,  $\rho$  la masse volumique de l'eau et  $C_p$  sa capacité calorifique.



*Photo 3 - Charge cylindrique en cuivre refroidie.*



*Photo 3 bis - Ensemble inducteur-creuset-charge refroidie.*

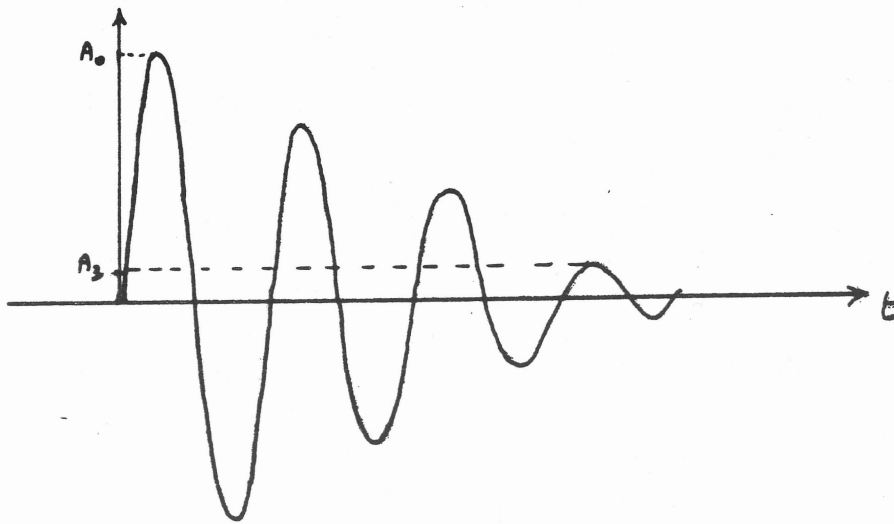


Figure 12 - Mesure par décrétement logarithmique : décroissance du signal.

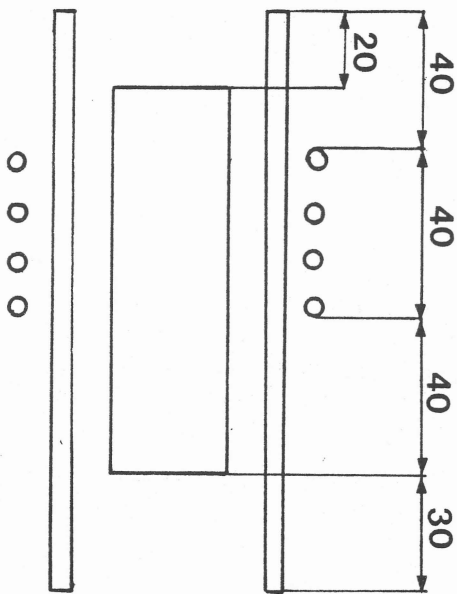


Figure 13 - Dispositif expérimental dans le cas d'un inducteur de 6 spires.

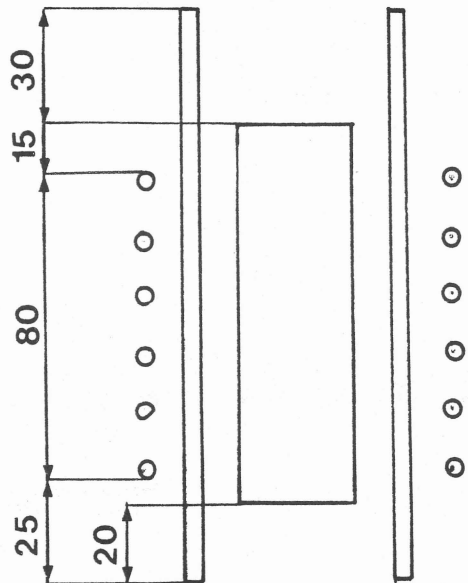


Figure 14 - Dispositif expérimental dans le cas d'un inducteur de 4 spires.

	f KHz	Pind KW	Pcr KW	a <sub>cr</sub> %
Valeurs calculées	93,9	-	2,7	11
Valeurs mesurées	93,3	3,0	3,0	

Tableau 1 - Bilan de puissance : inducteur  $h = 80$  mm ; creuset  $h = 80$  mm (a<sub>cr</sub> est le pourcentage d'erreur sur la valeur calculée).

	f KHz	Pind KW	Pch KW	a <sub>ch</sub> %
Valeurs calculées	93,8	-	0,60	11
Valeurs mesurées	93,5	-	0,85	

Tableau 2 - Bilan de puissance : inducteur  $h = 80$  mm ; charge = 100 mm (a<sub>ch</sub> est le pourcentage d'erreur sur la valeur calculée).

	f KHz	Pind KW	Pcr KW	Pch KW	a <sub>cr</sub> %	a <sub>ch</sub> %
Valeurs calculées	104,3	4	3,4	0,8		
Valeurs mesurées	105,3	3,9	4,2	1,1		

Tableau 3 - Bilan de puissance : inducteur  $h = 80$  mm ; creuset  $h = 80$  mm ; charge  $h = 100$  mm.

L'inducteur utilisé pour les essais est un inducteur de 6 spires, de hauteur 80 mm et de diamètre 85 mm ; son inductance à vide est de  $2,2 \mu\text{H}$  et il est connecté en parallèle avec un coffret de capacité de valeur totale  $1,6 \mu\text{F}$ . Le creuset est composé de 16 secteurs (photo 2) identiques en cuivre, de section trapézoïdale ; son diamètre intérieur est de 50 mm, son diamètre extérieur de 65 mm et sa hauteur de 80 mm. La charge utilisée est un cylindre en cuivre de diamètre 42 mm et de hauteur 100 mm. Etant donné la faible valeur de la résistivité électrique du cuivre, l'épaisseur de peau dans la charge est toujours très petite aux fréquences utilisées.

Les tableaux 1, 2 et 3 donnent les valeurs mesurées en comparaison avec les valeurs théoriques respectivement dans le cas de l'inducteur et de la charge, dans le cas de l'inducteur et du creuset, et enfin dans le cas de l'inducteur, de la charge et du creuset. La tension aux bornes de l'inducteur est fixée à 500 V pour tous ces essais. La valeur de la résistance de l'inducteur à 90 KHz mesurée par décrétement logarithmique et confirmée par bilan thermique est de  $13 \text{ m}\Omega$  ; la fréquence d'oscillation à vide (sans le creuset et sans la charge) est de 84,8 KHz.

Dans les trois essais, on constate le très bon accord entre les prévisions des valeurs de fréquence et les valeurs mesurées. Cependant, en ce qui concerne les puissances dissipées, l'accord est moins bon puisque les valeurs mesurées sont supérieures d'environ 15 % à 25 % pour le creuset et 40 % pour la charge. Cet écart de 40 % pour la charge ne peut être attribué à d'éventuelles mutuelles entre secteurs et charge puisqu'il existe même en l'absence de creuset. Ces résultats suggèrent que les paramètres essentiellement géométriques (résistances et inductances) sont correctement estimés, alors que la théorie sous estime les courants de Foucault totaux dans chaque secteur et dans la charge. La prise en compte des effets de bord par la méthode développée au chapitre I.5 permet d'expliquer ces différences puisque le calcul donne une surpuissance due aux extrémités de l'ordre de 20 % à 40 % pour la charge.

## II.2 - Cas où le creuset est plus haut que l'inducteur

Dans de nombreuses installations et en particulier dans les installations de tirage en continu, le creuset froid est nettement plus haut que l'inducteur. Dans ces conditions, des essais ont été effectués afin de voir dans quelle mesure la théorie du chapitre précédent donne encore des valeurs correctes pour les puissances et l'inductance.

Le creuset utilisé pour cette étude a exactement les mêmes caractéristiques que le creuset précédent si ce n'est que sa hauteur est de 150 mm (au lieu de 80 mm). Dans les tableaux 4, 5, 6 et 7, on a donné les résultats des mesures avec deux inducteurs ; le premier est l'inducteur de 6 spires décrit dans le chapitre II.1 ; le second est un inducteur de 4 spires, de diamètre 85 mm et de hauteur 40 mm, dont l'inductance à vide est  $1,5 \mu\text{H}$ .

	f KHz	Pind KW	Pcr KW	acr %
Valeurs calculées	93,3	-	2,7	92
Valeurs mesurées	95,6	3,3	5,2	

Tableau 4 - Bilan thermique : inducteur  $h = 80$  mm  
creuset  $h = 150$  mm.

	f KHz	Pind KW	Pcr KW	Pc KW	acr %	ach %
Valeurs calculées	104,3		3,4	0,8	26	25
Valeurs mesurées	104,5	4,0	4,3	1,0		

Tableau 5 - Bilan thermique : inducteur  $h = 80$  mm - creuset  $h = 150$  mm  
charge  $h = 100$  mm.

	f KHz	Pind KW	Pcr KW	acr %
Valeurs calculées	111	-	2,3	160
Valeurs mesurées	114,5	4,5	6,0	

Tableau 6 - Bilan thermique : inducteur  $h = 40$  mm  
creuset  $h = 150$  mm.

	f KHz	Pind KW	Pcr KW	Pcr KW	acr %	ach %
Valeurs calculées	121	-	2,8	0,74	68	19
Valeurs mesurées	123	4,7	4,7	0,6		

Tableau 7 - Bilan thermique : inducteur  $h = 40$  mm - creuset  $h = 150$  mm  
charge  $h = 100$  mm.

Les configurations exactes sont représentées sur les figures 13 et 14.

Les tableaux 4 et 6 montrent que, lorsque l'inducteur et le creuset sont seuls (pas de charge), l'accord entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées des fréquences est à peu près satisfaisant (quoique moins bon que dans le cas où le creuset et l'inducteur ont même hauteur). Par contre, l'erreur sur le calcul de la puissance atteint près de 100 % de la valeur calculée avec l'inducteur 6 spires et près de 160 % avec celui de 4 spires. Il semble donc que l'écart soit d'autant plus grand que le dépassement du creuset est grand. Ces pertes supplémentaires importantes ont pu être analysées grâce à des mesures de champ magnétique (figure 15 et 16) qui révèlent :

- un saut important de la composante verticale du champ entre l'extérieur et l'intérieur du creuset : dans l'inducteur, cette composante du champ est nettement plus faible à l'intérieur du creuset qu'à l'extérieur ; par contre, au-dessus ou au-dessous de l'inducteur, la composante verticale du champ diminue très rapidement à l'extérieur du creuset alors qu'elle reste à peu près constante dans le creuset, et le sens du saut de champ suivant la direction radiale est inversé (figure 15).

- un champ magnétique horizontal (suivant la direction  $O_r$ ) très intense entre deux secteurs qui laisse supposer la présence de courants longitudinaux (donc parallèles à  $O_z$ ) le long des parois du creuset. Ces courants intenses sont à l'origine des pertes par effet joule importantes mesurées.

La figure 19 montre la répartition des courants induits correspondant à la répartition du champ. Le phénomène observé peut être interprété en considérant que les nappes de courant de la face extérieure du creuset (qui font face à l'inducteur) étant de sens opposé au courant inducteur, sont attirées par lui, alors que celles de la face interne, de même sens, sont repoussées.

L'ordre de grandeur des surpuissances entraînées par l'existence de courants longitudinaux peut être évalué à partir d'un petit modèle simple. Pour ceci, on considère un secteur de section rectangulaire avec une répartition uniforme et horizontale de courant sur les deux faces parallèles au plan  $xOz$  (figure 17). La face du plan  $y = 0$  est face à l'inducteur (de hauteur  $2h$ ) et on suppose, compte tenu de la figure 19, que le courant  $I_y$  est réparti sur la hauteur  $2h$ . Par contre, sur la face opposée (dans le plan  $y = e$ ), on considère que ce même courant  $I$  est réparti uniformément sur toute la hauteur  $2H$  du secteur. On admet que les lignes de courant se referment sur les deux autres faces suivant la direction  $Oz$  pour  $|z| > h$  et suivant la direction  $Oy$  pour  $|z| < h$  (figure 17). La répartition des courants est donc la suivante :

$$\begin{array}{llll} \text{- sur la face } y = 0 : & |z| < h & j_x = \frac{I}{2h} & j_y = 0 \quad j_z = 0 \\ & |z| > h & j_x = 0 & j_y = 0 \quad j_z = 0 \end{array}$$

où  $j_x$ ,  $j_y$  et  $j_z$  sont les intensités de courants dans les directions  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ .

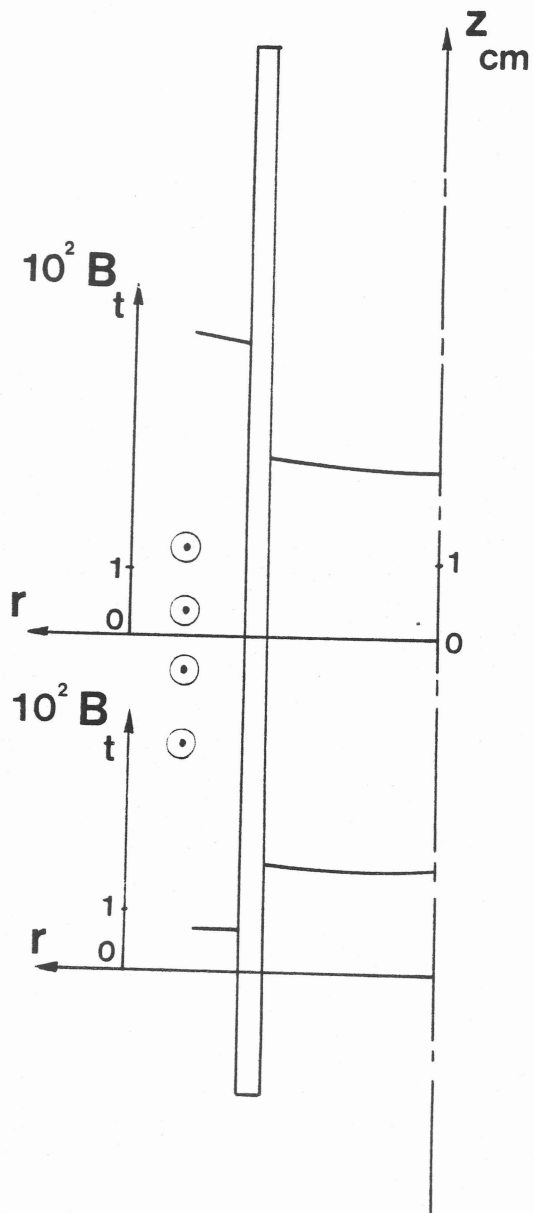


Figure 15 - Mesure de la composante verticale du champ magnétique suivant la direction radiale.

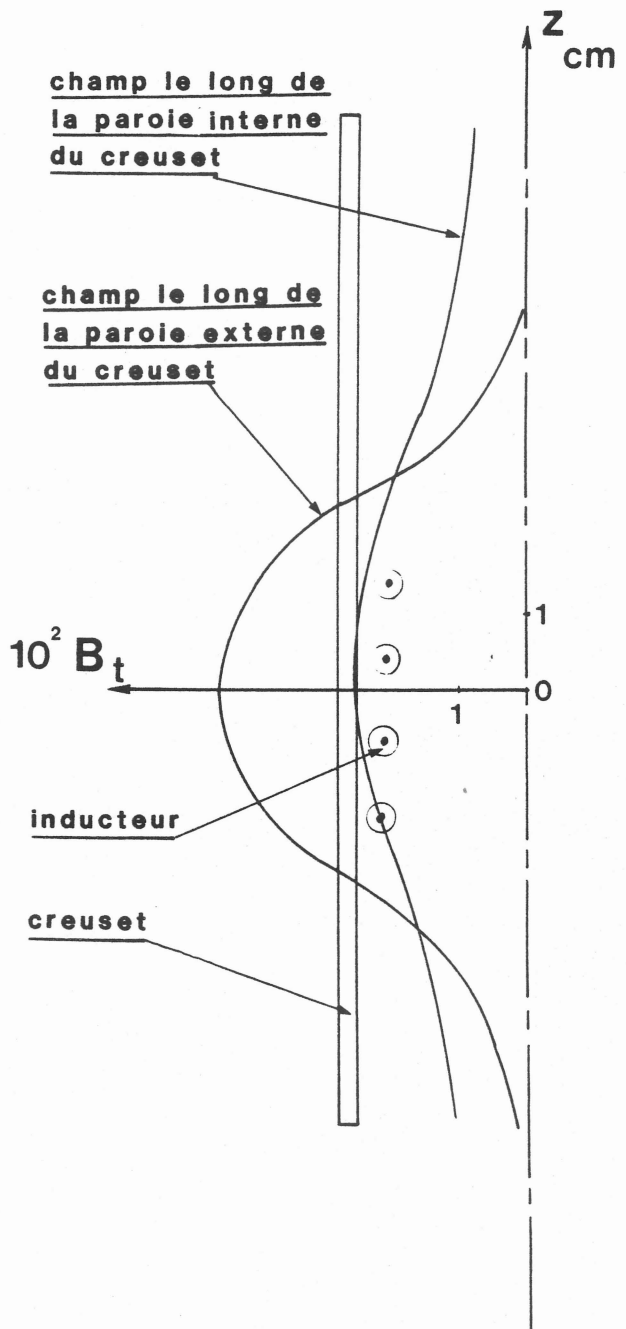


Figure 16 - Mesure de la composante verticale du champ magnétique suivant la direction axiale à l'intérieur et à l'extérieur du creuset.



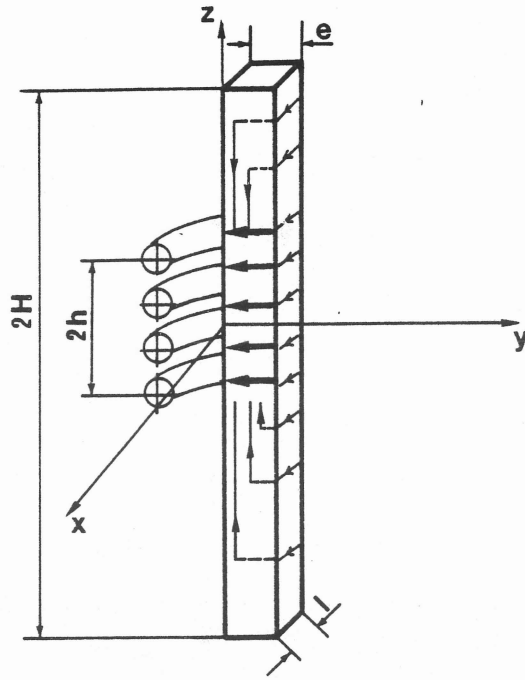


Figure 17 - Répartition supposée des courants induits dans un secteur.

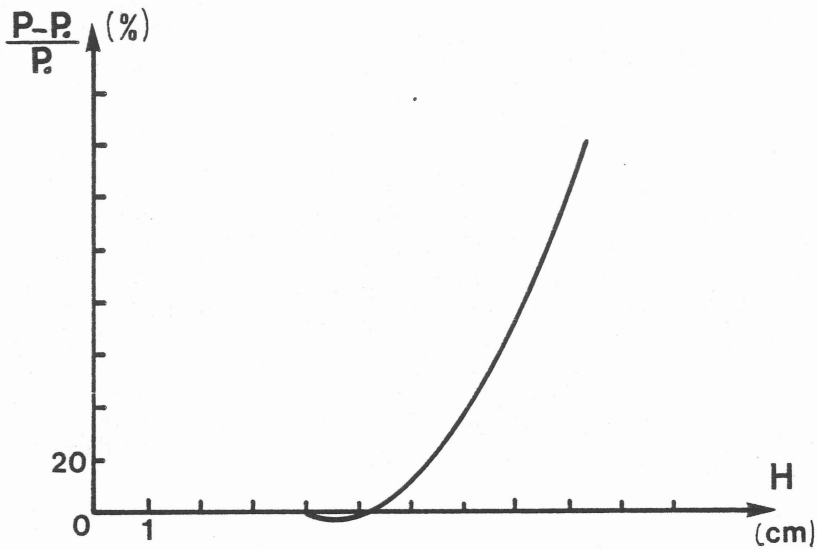


Figure 18 - Surpuissance due aux extrémités calculées d'après le modèle pour  $l = 11 \cdot 10^{-3}$  cm,  $e = 8 \cdot 10^{-3}$  cm et  $h = 40 \cdot 10^{-3}$  cm.

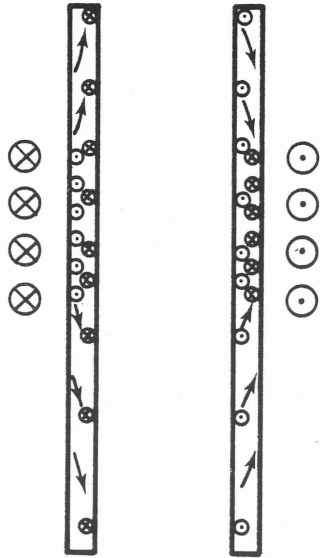


Figure 19 - Répartition des courants dans le creuset en l'absence de charge.

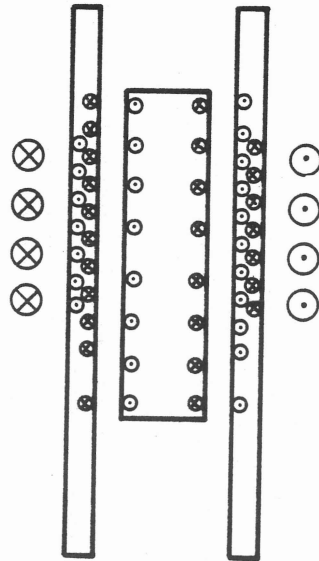


Figure 20 - Répartition des courants dans le creuset et la charge (avec inducteur 4 spires).

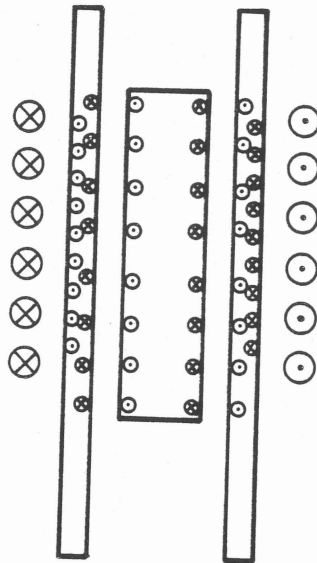


Figure 21 - Répartition des courants dans le creuset et la charge (avec inducteur 6 spires).

- sur la face  $y = e$  :  $j_x = \frac{I}{2H}$      $j_y = 0$      $j_z = 0$

- sur les faces  $x = 0$   
 et  $y = -1$  :  $|z| < h$      $j_x = 0$      $j_y = \frac{I}{2H}$      $j_z = 0$   
 $|z| > h$      $j_x = 0$      $j_y = 0$      $j_z = \frac{I}{2} \left(1 - \frac{y}{H}\right)$

La puissance dissipée par les courants du secteur est :

$$P = \left( \frac{\rho l}{2h\delta} + \frac{\rho l}{2H\delta} + \frac{\rho e}{2h\delta} \right) I^2 + 4 \int_h^H \frac{\rho}{4e\delta} \left(1 - \frac{y}{H}\right)^2 dy I^2$$

où  $\rho$  est la résistivité du secteur et  $\delta$  l'épaisseur de peau. Après intégration, on obtient :

$$P = \frac{\rho}{2\delta} \left[ \frac{1}{h} + \frac{1}{H} + \frac{2e}{h} + \frac{2}{3} \frac{H}{e} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^3 \right] I^2$$

Si  $P_0$  est la puissance correspondant à des nappes de courant horizontales réparties sur une hauteur  $2h$ , on a :

$$P_0 = 2 \rho \frac{(1 + e)}{2h\delta} I^2$$

et par conséquent, la surpuissance due à la longueur du secteur s'écrit :

$$\frac{P - P_0}{P_0} = \left[ -\frac{1}{2} + \frac{Hh}{3e} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2 \right] \frac{\left(1 - \frac{h}{H}\right)}{1 + e}$$

Sur la figure 18, on a tracé  $(P-P_0)/P_0$  en fonction de  $H$  pour  $l = 11$  mm,  $e = 8$  mm et  $h = 40$  mm (valeurs qui correspondent à la géométrie des secteurs du creuset). La courbe montre que la surpuissance entraînée par la répartition des courants induits considérée devient très importante pour les grandes valeurs de  $H$ . Néanmoins, ce calcul approché sur-estime les valeurs des surpuissances, d'une part parce qu'il ne tient pas compte de la décroissance du champ vertical donc des courants sur la face interne du creuset (figure 15), d'autre part parce que la répartition réelle des courants en ce qui concerne les refermetures sur les faces parallèles au plan  $yOz$  peut être différente de celle du modèle.

Dans le cas où la charge est placée à l'intérieur du creuset, les résultats des tableaux 5 et 7 montrent que les effets observés précédemment semblent s'atténuer et même disparaître complètement lorsque l'inducteur et la charge ont sensiblement la même hauteur :

en effet, la surpuissance n'est plus alors que de 25 % pour le creuset et 30 % pour la charge. Des mesures de champ magnétique ont par ailleurs révélé la disparition du saut de champ entre l'intérieur et l'extérieur du creuset ainsi qu'une nette diminution du champ horizontal (suivant  $O_r$ ) entre deux secteurs. La nouvelle répartition des courants est donnée sur les figures 20 et 21. On peut interpréter ces résultats en considérant que les courants induits dans la charge étant de sens opposé aux nappes de courant intérieures au creuset, attirent celles-ci.

Ces résultats conduisent à penser que le calcul issu de la modélisation électrique permet d'accéder aux valeurs de puissance avec une bonne approximation même lorsque le creuset est plus haut que l'inducteur à condition que la charge ait la même hauteur que l'inducteur.

Dans le cas d'une charge plus grande, le calcul sous-évalue les pertes dans le creuset (à cause des courants longitudinaux entre secteurs) et surévalue celles dans la charge (à cause du saut de champ qui subsiste en partie et qui a pour conséquence un champ affaibli dans le creuset).

### III - OPTIMISATION DU CREUSET - ROLE DE LA FREQUENCE ET DE LA RESISTIVITE

#### III.1 - Optimisation du creuset

Le rendement électrique d'une installation de fusion en creuset froid et en partie limité par les pertes par effet Joule dans les secteurs du creuset. Il paraît donc intéressant d'étudier l'influence du nombre de secteurs ainsi que celle du diamètre du creuset sur ces pertes.

La résistance des N secteurs ramenée au primaire s'écrit (cf § I.4) :

$$n_s^2 R_s = \left(m \frac{K_s}{K_1}\right)^2 \frac{\rho \omega p N}{h \delta} \quad (\text{III.1})$$

où on rappelle que p est le périmètre du secteur pris dans un plan perpendiculaire à l'axe du creuset, et  $K_s$  le facteur de forme qui lui est associé. Pour un secteur de section rectangulaire,  $K_s$  a pour valeur [12] :

$$K_s = 1 + 0,44 \frac{a}{h} \quad (\text{III.2})$$

où a est la longueur du grand côté du rectangle.

La relation III.1 montre que les pertes sont d'autant plus petites que le terme  $Np$  est petit. De ce point de vue, il y a donc intérêt d'une part à limiter au maximum l'épaisseur du creuset, d'autre part à réduire le nombre de secteurs. Par contre, lorsqu'on augmente la longueur a, le facteur de forme  $K_s$  augmente et donc aussi les pertes. On a représenté sur la figure 22 la résistance de différents creusets en fonction du nombre de secteurs. Toutes les courbes ont été tracées pour un inducteur de 6 spires, de hauteur 100 mm et dont le diamètre est supérieure de 30 mm à celui du creuset ; l'épaisseur des secteurs est constante et égale à 8 mm pour tous les creusets. Les courbes montrent que, dans tous les cas étudiés, la résistance ramenée du creuset donc les pertes augmentent avec le nombre de secteurs. Néanmoins, lorsque le nombre de secteurs devient faible, leur longueur a augmente et la courbure ne peut plus être négligée ce qui rend la relation III.1 imprécise. Parallèlement, il peut alors apparaître des différences de potentiel d'origine inductive entre deux secteurs adjacents. Sur la figure 22, les zones correspondant à un nombre de secteurs idéal ont été encadrées.

On remarque, sur la figure 22, que l'influence du nombre de secteurs est d'autant plus sensible que le diamètre du creuset est petit. On remarque aussi que si l'on double le diamètre du creuset, la résistance du creuset, ramenée au primaire, ne double pas, loin de là : il est vrai que le terme  $Np$  est environ multiplié par 2, mais par contre, le

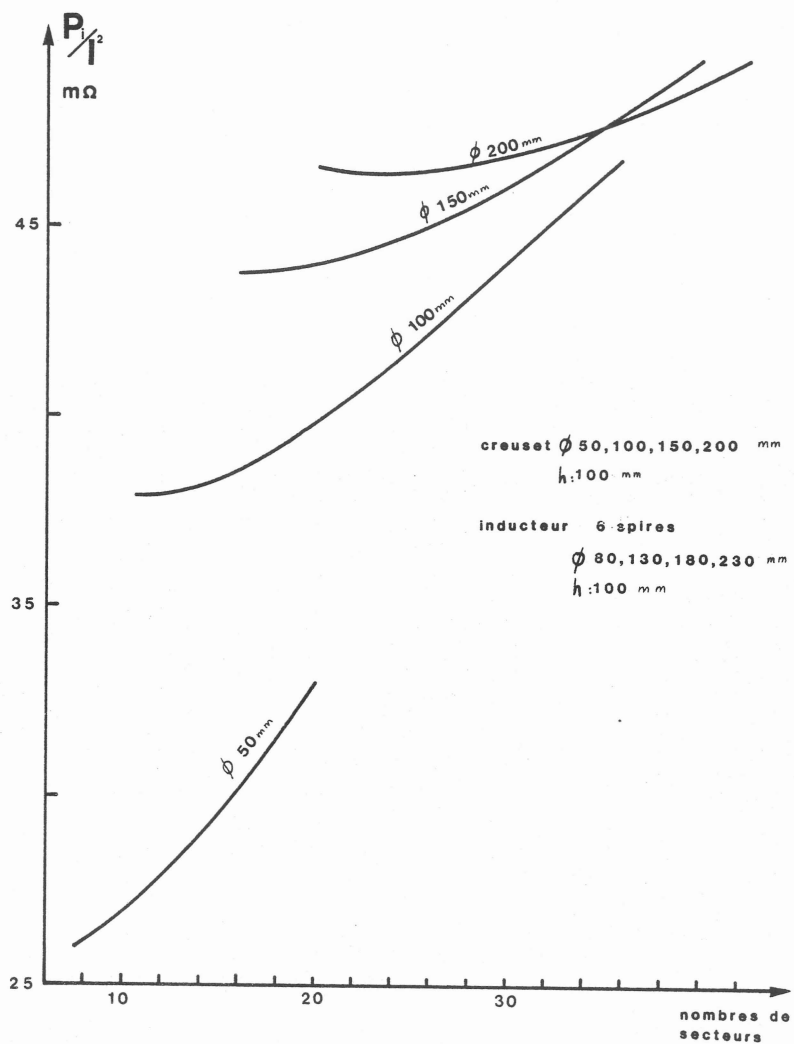
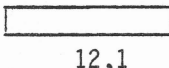





Figure 22 - Résistance ramenée au primaire de différents creusets en fonction du nombre de secteurs.

coefficient de Nagaoka de l'inducteur augmentant de façon importante (le rapport diamètre sur hauteur double), le rapport de transformation  $n_s$  diminue sensiblement. Sur le tableau 8, les valeurs des rendements électriques sont donnés pour différentes installations de diamètre variable : le nombre de spires de l'inducteur et la hauteur sont constants ; le nombre de secteurs a été déterminé à partir des courbes de la figure 22 ; la charge a pour résistivité électrique  $100 \mu\Omega m$  (résistivité d'un acier). Il apparaît que le rendement croît assez fortement avec le diamètre puisque le rendement est de 58 % pour un diamètre 80 mm et 72 % pour un diamètre de 230 mm. Cette augmentation du rendement avec le diamètre est due au fait que la puissance transmise à la charge croît à peu près proportionnellement au diamètre, alors que celle des secteurs croît beaucoup plus lentement, comme nous l'avons signalé précédemment.

INDUCTEUR	C R E U S E T			CHARGE	Rendement maximum %
	Diamètre mm	Diamètre mm	Dimensions des secteurs mm		
80	50	12	8  12,1	48	58,4
130	100	18	8  16,5	98	65,4
180	150	24	8  18,6	148	69,8
230	200	28	8  21,4	198	72,3

*Tableau 8 - Rendement électrique maximum en fonction du diamètre de l'inducteur.  
(Caractéristiques du système : inducteur 6 spires  
 $h = 100 \text{ mm}$  ; charge  $\rho = 10^{-6} \Omega m$ ).*

### III.2 - Influence de la fréquence et de la résistivité de la charge

#### III.2.1 - Puissance transmise à la charge

Reprenons l'expression I.71 de la puissance transmise à la charge par courants induits que l'on écrit sous la forme :

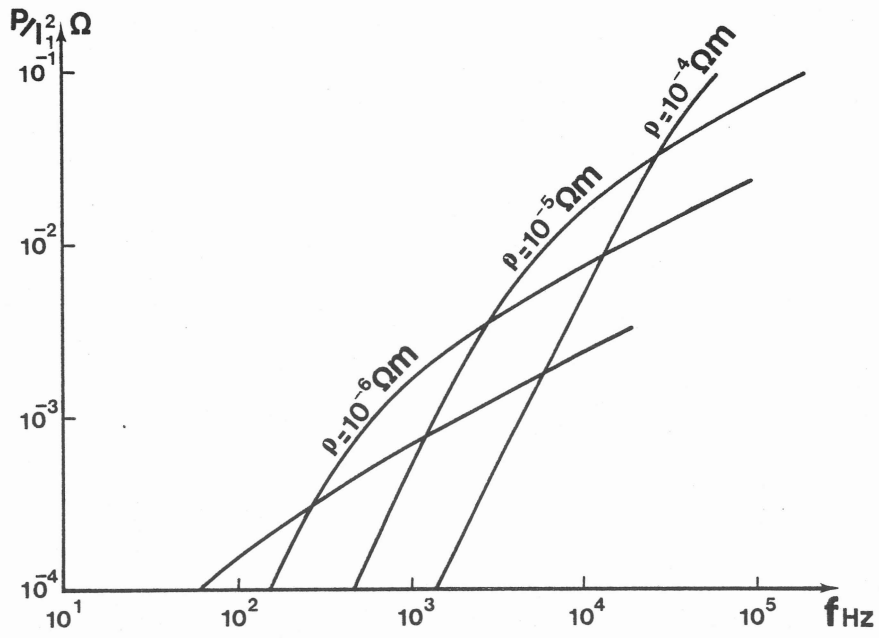


Figure 23 - Puissance transmise à la charge à courant  $I_1$  constant en fonction de la fréquence  $f$ .

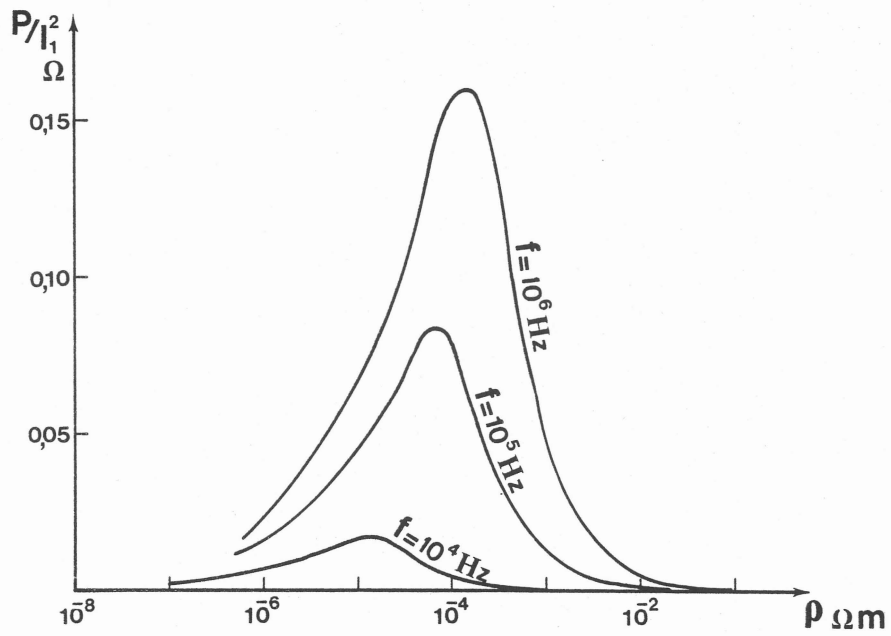


Figure 24 - Puissance transmise à la charge à courant  $I_1$  constant en fonction de la résistivité  $\rho$ .



$$P_{ch} = \frac{1}{2} \rho \frac{2\pi r_0}{h\delta} \frac{r_0}{\delta} \left(\frac{n}{K_1}\right)^2 B \bar{I}_1 \bar{I}_1^* \quad (\text{III.3})$$

Sur la figure 23,  $P/|\bar{I}_1|^2$  est représenté en fonction de la fréquence pour des conditions géométriques données. Dans le cas limite où  $\delta$  tend vers zéro, la relation I.63 montre que  $P/|\bar{I}_1|^2$  varie comme  $1/\delta$  donc comme  $f^{1/2}$ . Dans le cas des très grandes épaisseurs de peau, on montre que  $B$  est proportionnel à  $r_0^2/\delta^2$  et par conséquent  $P/|\bar{I}_1|^2$  varie comme  $f^2$ . Pour un matériau de résistivité donnée, il y a donc un premier domaine, aux basses fréquences, de variation rapide de puissance transmise, un domaine intermédiaire et enfin, vers les hautes fréquences, une zone de variation lente. On peut remarquer que les matériaux les plus résistifs nécessitent les fréquences les plus élevées mais qu'à même courant et à fréquence assez haute, la puissance qui leur est transmise est aussi plus grande.

Sur la figure 24,  $P/|\bar{I}_1|^2$  est représenté en fonction de la résistivité de la charge. A faible résistivité, la loi de variation est en  $\rho^{1/2}$  alors qu'à forte résistivité, elle est en  $1/\rho$ . Ces courbes présentent un maximum d'autant plus haut et plus décalé vers les fortes résistivités que la fréquence est plus grande.

Dans la plupart des installations, les générateurs qui alimentent le circuit oscillant sont des générateurs de tension. La puissance transmise à la charge peut être exprimée en fonction de  $\bar{U}_1$  en remplaçant dans III.3  $\bar{I}_1$  par sa valeur en fonction de  $\bar{U}_1$  tirée de la relation I.70. On trouve :

$$P_{ch} = \frac{\rho 2\pi}{h} \left(\frac{r_0}{\delta}\right)^2 \left(\frac{n}{K_1}\right)^2 B \frac{1/2 \bar{U}_1 \bar{U}_1^*}{(R_1 + Nn_s^2 R_s + \frac{\mu_0 \omega \pi r_0^2}{h} \left(\frac{n}{K_1}\right)^2 B)^2 + \omega^2 (L_1 - Nn_s^2 L_s - \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{h} \left(\frac{n}{K_1}\right)^2 A)^2} \quad (\text{III.4})$$

On peut, de la même manière que précédemment, étudier les variations de cette expression en fonction de la résistivité et de la fréquence à tension  $\bar{U}_1$  donnée.

### III.2.2 - Inductance de la charge ramenée au primaire

L'inductance  $\mathcal{L}_c$  de la charge ramenée au primaire a pour expression :

$$\mathcal{L}_c = \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{h} \left(n \frac{K_2}{K_1}\right)^2 \frac{A}{K_2^2} \quad (\text{III.5})$$

Sur la figure 25, l'inductance adimensionnalisée  $\frac{L_c}{\mu_0 \pi r_0^2} \left( n \frac{K_2}{K_1} \right)^2$  est représentée en fonction de  $r_0/\delta$ . Dans le cas des très faibles épaisseurs de peau,  $A_{K_1}$  tend vers  $K_2$  et on retrouve l'expression calculée au chapitre I.3.1. Lorsque au contraire, l'épaisseur de peau devient très grande devant le rayon de la charge,  $L_c$  tend vers zéro : la charge devient transparente au champ.

### III.2.3. Etude du rendement électrique

Le rendement électrique est défini comme étant le rapport entre la puissance transmise à la charge et la puissance totale fournie aux bornes de l'inducteur. Il s'écrit sous la forme :

$$\eta = \frac{R_{ch}}{R_1 + N n_s^2 R_s + R_{ch}} \quad (\text{III.6})$$

où  $R_{ch}$  est la résistance de la charge vue du primaire égale à :

$$R_{ch} = \frac{\mu_0 \omega \pi r_0^2}{h} \left( \frac{n}{K_1} \right)^2 B \quad (\text{III.7})$$

Compte tenu des fréquences généralement utilisées, l'épaisseur de peau dans l'inducteur en cuivre est très petite et  $R_1$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$R_1 = a f^{1/2} \quad (\text{III.8})$$

où  $a$  est une constante indépendante de la fréquence.

Dans le cas limite où l'épaisseur de peau dans la charge est très petite, la résistance  $R_{ch}$  s'écrit (d'après I.31) :

$$R_{ch} = \left( m \frac{K_c}{K_1} \right)^2 \frac{2 \pi r_0}{h} (\mu \pi \rho)^{1/2} f^{1/2} \quad (\text{III.9})$$

Le rendement limite  $\eta_{lim}$  correspondant a pour expression, en utilisant les relations I.67 et I.69 donnant  $n_s$  et  $R_s$  :

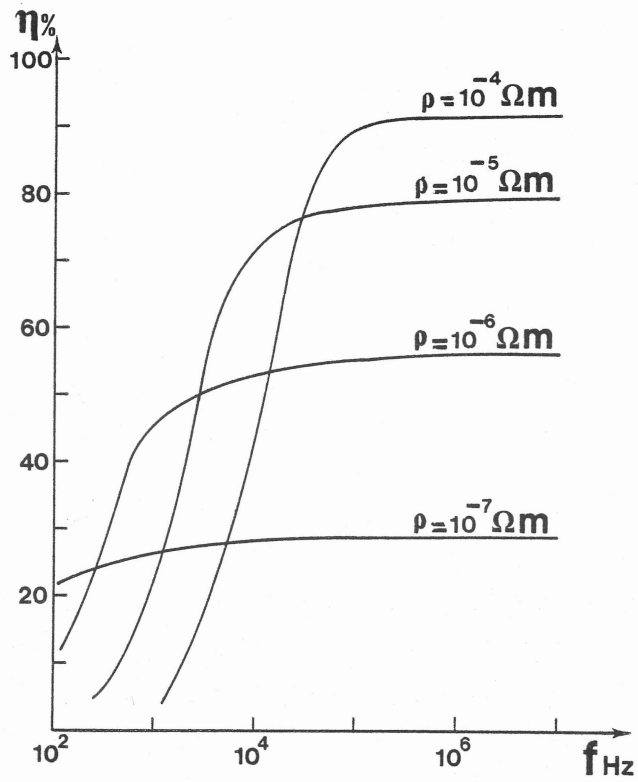


Figure 26 - Courbes de rendement en fonction de la fréquence.

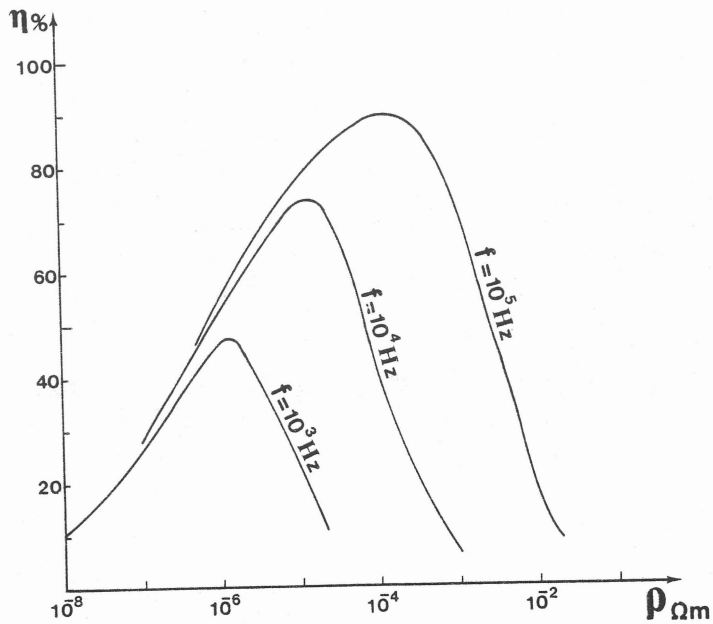


Figure 27 - Courbes de rendement en fonction de la résistivité.

$$\eta_{lim} = \frac{\rho^{1/2}}{C + \rho^{1/2}} \quad (III.10)$$

où C est une constante indépendante de  $\rho$  et de f égale à :

$$C = \frac{a + N \left(m \frac{K_1}{K_S}\right)^2 \frac{\rho^{1/2} p}{h} (\pi \mu)^{1/2}}{m \left(\frac{K_C}{K_1}\right)^2 \frac{2 \pi r_0}{h} (\pi \mu)^{1/2}} \quad (III.11)$$

Le rendement limite aux très petites épaisseurs de peau est donc indépendant de la fréquence et fonction croissante de la résistivité de la charge ; lorsque  $\rho$  tend vers l'infini,  $\eta_{lim}$  tend vers 1.

Sur la figure 26, sont tracés, pour des conditions géométriques données, les courbes de rendement en fonction de la fréquence, la résistivité  $\rho$  de la charge étant le paramètre variable. Aux faibles fréquences, l'accroissement du rendement est rapide car il correspond à une variation de  $R_{ch}$  en  $f^2$  (voir § III.2.1) alors que  $R_1$  et  $Nn_s^2 R_s$  varient en  $f^{1/2}$ . Par contre, quand la fréquence est assez grande, tous les termes varient approximativement comme  $f^{1/2}$ , le rendement tend vers la limite asymptotique  $\eta_{lim}$ . On peut remarquer que le rendement limite croît avec la résistivité de la charge mais qu'il faut des fréquences de plus en plus élevées pour l'atteindre.

Les courbes de rendement en fonction de la résistivité (figure 27) présentent, comme les courbes de puissance transmise à la charge, un maximum qui traduit le fait que si la charge est très résistive, elle est transparente au champ magnétique, alors que si elle est très conductrice, la puissance transmise à l'inducteur et au creuset devient prépondérante devant celle transmise à la charge.

Lorsqu'on désire chauffer un matériau donné, on utilise souvent, comme critère de choix de la fréquence, le rapport  $r_0/\delta$  du rayon de la charge sur l'épaisseur de peau. Pour relier les résultats précédents à ce critère, on définit un rendement optimum  $\eta_{opt}$  égal à 90 % du rendement limite ; on peut ainsi considérer que les conditions de fonctionnement sont bonnes lorsque la fréquence est suffisamment haute pour que le rendement optimum ainsi défini soit atteint. Sur la figure 28, on a représenté les valeurs de  $r_0/\delta$  pour lesquelles on a le rendement optimum en fonction de la résistivité de la charge (pour des conditions géométriques données). On constate que pour un matériau peu résistif,  $\eta_{opt}$  est atteint pour des valeurs de  $r_0/\delta$  de l'ordre de 3 ou 4, alors que pour un matériau isolant, il l'est pour des valeurs de  $r_0/\delta$  de l'ordre de 1 à 1/2. Cette différence de comportement est due physiquement au fait que, alors que pour un matériau dont la résistivité est proche de celle d'un métal, le rendement optimum est atteint lorsque le terme  $R_{ch}$  varie comme  $f^{1/2}$ , par contre, pour un matériau très résistif, il est atteint lorsque  $R_{ch}$  devient prépondérant devant  $R_1$  et  $Nn_s^2 R_s$  (ce qui peut arriver à des fréquences telles que  $R_{ch}$  varie encore en  $f^2$ ).

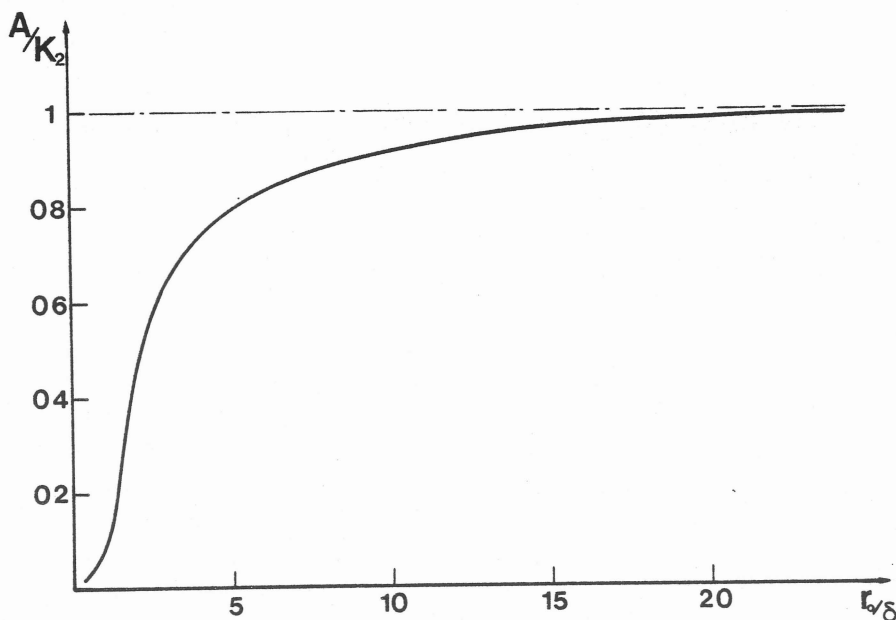


Figure 25 - Inductance adimensionnalisée de la charge ramenée au primaire, en fonction de  $r_0/\delta$ .

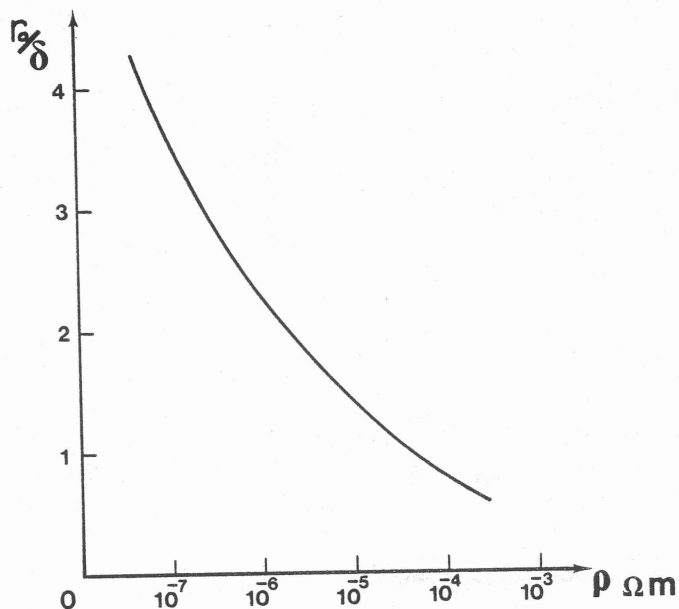


Figure 28 - Valeurs de  $r_0/\delta$  pour lesquelles le rendement optimum est atteint en fonction de la résistivité de la charge.

Pour conclure, on peut estimer, à titre d'exemple, que pour chauffer par induction un verre de résistivité  $10^{-2} \Omega\text{m}$ , il n'y a aucun avantage, du point de vue électrique, à avoir une épaisseur de peau plus petite que le rayon de la charge ; par contre, pour un acier de résistivité  $10^{-6} \Omega\text{m}$ , les conditions optimales correspondent à des épaisseurs de peau égales à  $1/3$  ou  $1/6$  du rayon de la charge.

#### IV - APPLICATIONS DE LA METHODE DE CALCUL

##### IV.1 - Mesure de résistivité

Une application intéressante de la connaissance de l'impédance complexe du secondaire ramenée au primaire est la détermination de la résistivité du matériau constituant le secondaire. En effet, lorsqu'on introduit la charge dans un inducteur alimenté par un générateur apériodique [13], la mesure de la variation de fréquence, suite à la diminution de l'inductance, permet de connaître la résistivité de cette charge. Parallèlement, la mesure de la résistance ramenée, par décrétement logarithmique permet de confirmer ce résultat.

Pour des raisons de simplicité de calcul, on peut avantageusement choisir un inducteur de hauteur grande vis-à-vis de son diamètre et y introduire une charge cylindrique (dont la résistivité est à mesurer) de même hauteur. Ainsi, on est dans le cas où les deux coefficients de Nagaokade l'inducteur et de la charge  $K_1$  et  $K_C$  sont égaux à 1. L'impédance du système ramenée au primaire apparaît donc dans l'expression I.66 ; l'inductance  $\mathcal{L}_C$  et la résistance  $\mathcal{R}_C$  de la charge ramenée au primaire s'écrivent :

$$\mathcal{R}_C = m^2 \rho \frac{2 \pi r_0}{h \delta} H_s (\sqrt{2} x) \quad (\text{IV.1})$$

$$\mathcal{L}_C = m^2 \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{h} \left( 1 - \frac{G_s (\sqrt{2} x)}{x} \right)$$

avec  $x = r_0/\delta$ .

L'inductance ramenée  $\mathcal{L}_C$  représente donc la diminution de l'inductance à vide  $L_1$  lorsque la charge est introduite dans l'inducteur. La résistivité  $\rho$  à mesurer intervient par l'intermédiaire de l'épaisseur de peau  $\delta$ .

Pour que la méthode présente une bonne sensibilité, il faut, d'une part que  $\mathcal{L}_C$  soit le plus grand possible, ce qui est obtenu avec un rayon  $r_0$  le plus grand possible ; d'autre part que la fréquence soit choisie de telle sorte que l'on se trouve dans une zone de la courbe  $\mathcal{L}_C(x)$  très sélective vis-à-vis de la résistivité. La figure 29 représente l'inductance du secondaire ramenée au primaire adimensionnalisée :

$$\mathcal{L}_C / \frac{m^2 \mu_0 \pi r_0^2}{h} = 1 - \frac{G_s (\sqrt{2} x)}{x} \quad (\text{IV.3})$$

en fonction de  $X = \sqrt{2} r_0/\delta$ . On constate que la sensibilité est maximale au point d'inflexion de la courbe, donc pour des valeurs de  $r_0/\delta$  proches de  $\sqrt{2}$ . Si l'on connaît un ordre de grandeur grossier de la résistivité, on peut donc choisir la fréquence de l'inducteur à vide de

façon à être proche de cette condition. Le mode opératoire est alors le suivant : la condition de résonance et la mesure de la variation de fréquence après introduction de la charge dans l'inducteur donne la valeur de  $L_C$ . Par correspondance sur la courbe de la figure 29, on déduit la valeur de  $r_0/\delta$  et donc de la résistivité  $\rho$  de la charge.

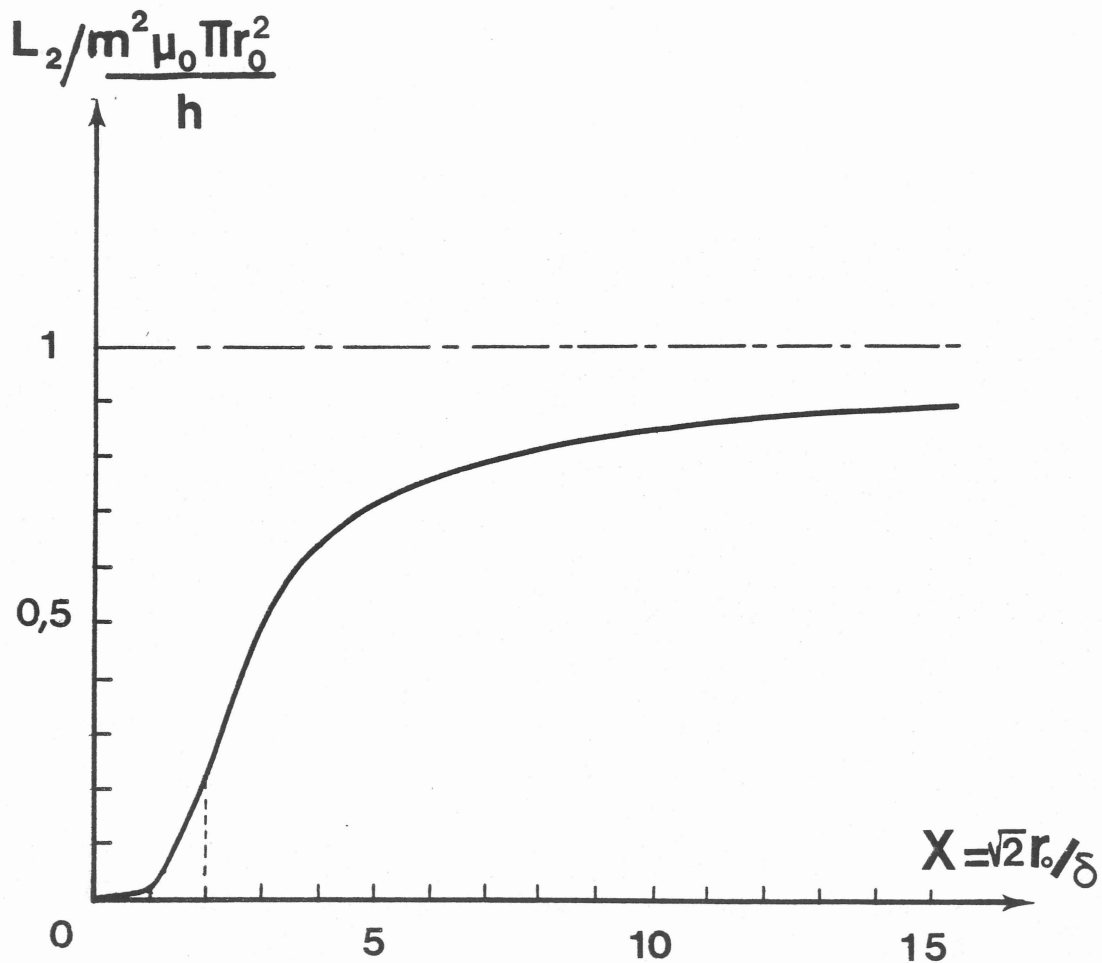


Figure 29 - Inductance de la charge ramenée au primaire en fonction de  $X = \sqrt{2} r_0 / \delta$ .

La courbe de  $R_C$  en fonction de  $\rho$  (figure 24), présente un maximum et par conséquent, à une valeur de  $R_C$  correspondent deux valeurs de  $\rho$ . La mesure de  $R_C$  ne permet pas de façon univoque, de déterminer la valeur de la résistivité mais néanmoins, associée à la mesure de la variation d'inductance, permet de préciser le résultat.



Des expériences de mesures de résistivité effectuées sur des matériaux de résistivité connue ont donné des valeurs correctes avec une erreur inférieure ou égale à 10 %.

Enfin, l'avantage de cette méthode est que, en plus du fait qu'elle ne nécessite aucun contact d'une électrode avec l'échantillon, elle permet de mesurer la résistivité pratiquement de la température ambiante jusqu'à la température de fusion, suivant le niveau de puissance injecté dans l'inducteur par le générateur.

#### IV.2 - Contrôle de la hauteur de la charge dans l'inducteur

Une installation de chauffage par induction en creuset froid peut être utilisée de façon à faire du tirage de lingot. La charge repose alors sur une sole refroidie que l'on tire vers le bas tandis que le bain liquide est alimenté par le haut avec des copeaux ou de la poudre. La connaissance de l'évolution de la hauteur de la charge dans l'inducteur permet un contrôle par asservissement de la vitesse en fonction de l'alimentation ou inversement. Ce contrôle peut être réalisé par mesure de l'inductance qui augmente lorsque la hauteur de la charge dans l'inducteur diminue. Selon que le circuit oscillant est alimenté par un générateur apériodique ou un alternateur, la mesure de la fréquence ou celle du  $\cos \phi$  du circuit traduit de façon assez précise la position de la charge dans l'inducteur.

D'un point de vue théorique, la modélisation électrique présentée ne permet pas de calculer de façon précise la variation d'inductance due à une hauteur de charge dans l'inducteur variable. En effet, le calcul suppose que la hauteur de l'inducteur et de la charge est la même, ce qui n'est évidemment plus le cas ici. Néanmoins, on peut reprendre le raisonnement du chapitre I.3 en considérant la charge moins haute que l'inducteur et faire alors intervenir les hauteurs de la charge ( $h_c$ ) et de l'inducteur ( $h$ ). Ainsi, on obtient, dans le cas des petites peaux :

$$L_c = \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{h_c K_c} \quad (\text{IV.4})$$

$$M_c = \frac{L_1 S_c}{m s} \quad (\text{IV.5})$$

et donc :

$$n_c = m \frac{K_c}{K_1} \frac{h_c}{h} \quad (\text{IV.6})$$

L'inductance de la charge ramenée au primaire s'écrit alors :

$$\mathcal{L}_c = \left(\frac{m}{K_1}\right)^2 \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{h^2} \frac{h_c}{K_c} \quad (\text{IV.7})$$

où  $K_c$  est le coefficient de Nagaoka de la charge égal à :  $1 + 0,88 \frac{r_0}{h_c}$  dans le cas où  $h_c \gg 2 r_0$ .  $\mathcal{L}_c$  se met sous la forme :

$$\mathcal{L}_c = D \times \frac{h_c^2}{h_c + 0,88 r_0}$$

où  $D$  est une constante indépendante de  $h_c$ . L'inductance totale ramenée au primaire étant  $L_1 - L_c$ , on constate qu'elle augmente lorsque la hauteur  $h_c$  de la charge diminue, toutes choses étant égales par ailleurs.

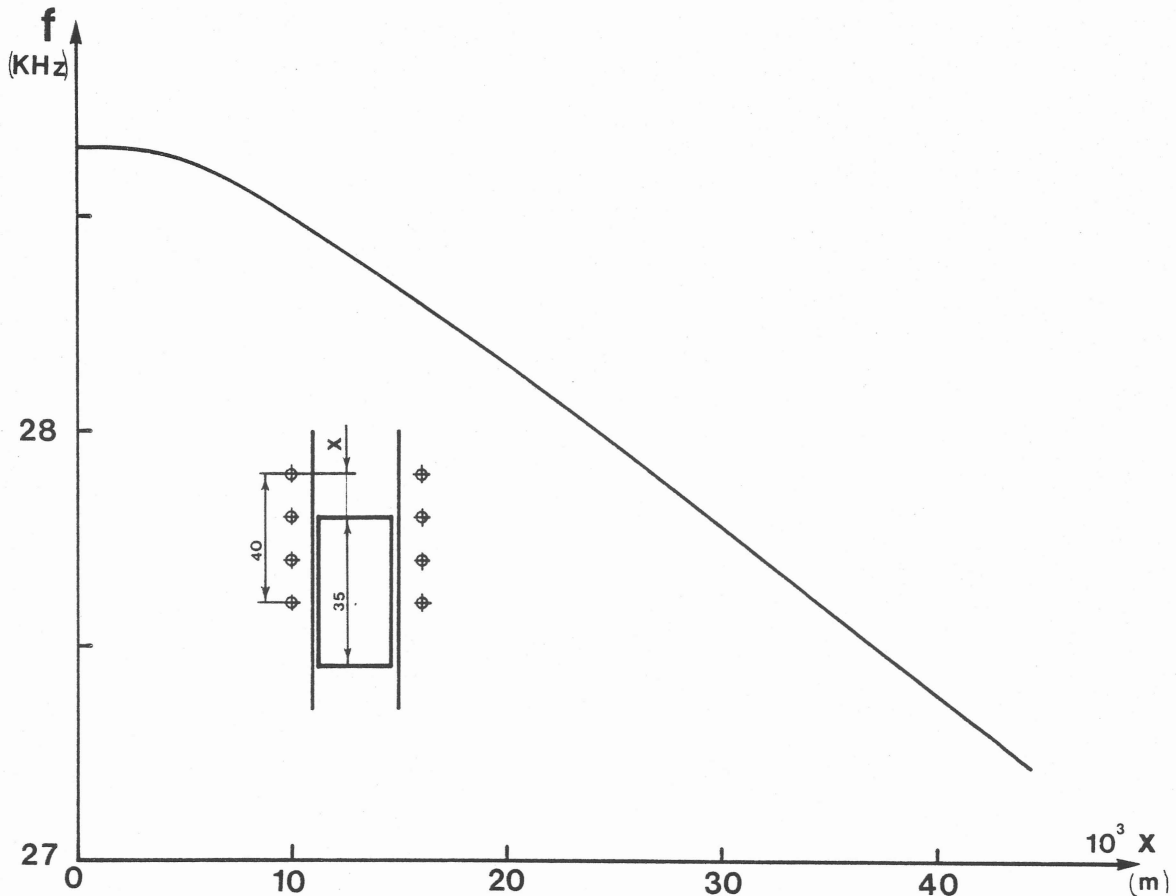


Figure 30 - Valeurs de la fréquence nominale en fonction de la position de la charge dans l'inducteur.

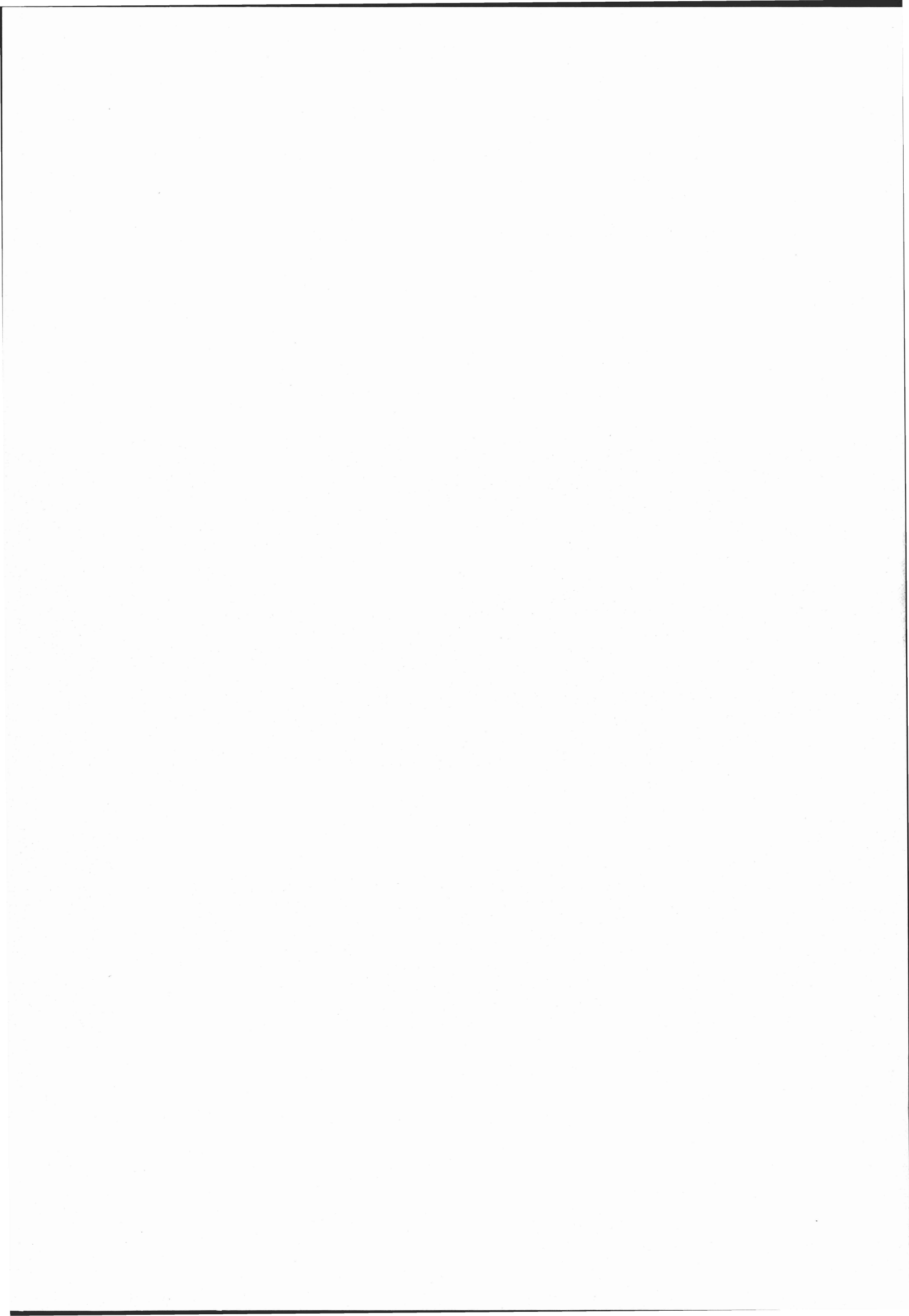
Expérimentalement, des mesures de fréquences ont été faites avec une charge cylindrique en acier de diamètre 45 mm et de hauteur 35 mm, dont la position dans l'inducteur était variable. Le schéma du dispositif expérimental est représenté sur la figure 30 : la charge est disposée à l'intérieur du creuset et repose sur le support dont le mouvement vertical est assuré par un moteur. La longueur  $x$  représente la distance entre le haut de l'inducteur et le sommet de la charge. La puissance injectée est assez faible pour que la charge reste solide. Sur la figure 30, on a représenté la fréquence mesurée en fonction des différentes valeurs de  $x$ . On constate que dès que la charge n'est plus entièrement dans l'inducteur, la fréquence diminue de façon à peu près linéaire ; une variation de hauteur de 1 mm entraîne une variation de fréquence d'environ 30 à 40 Hz, ce qui est facilement détectable et contrôlable.

Le contrôle de la hauteur de la charge a par ailleurs été réalisé avec succès dans des essais de fusion de charges en acier avec tirage d'un lingot.

Si la sensibilité de la méthode semble suffisante pour assurer le contrôle de la hauteur de la charge dans l'inducteur lorsque l'épaisseur de peau  $\delta$  est petite, ce n'est plus le cas lorsque  $\delta$  est de l'ordre de grandeur du rayon ou supérieure : en effet, l'inductance ramenée est alors beaucoup plus faible (figure 25) et les variations de fréquence beaucoup plus faibles aussi.

DEUXIEME PARTIE

**ÉTUDE DES TRANSFERTS THERMIQUES**



## I - INTRODUCTION

Dans la partie précédente, la modélisation électrique du fonctionnement du creuset froid permet d'estimer, avec une bonne précision, la répartition de la puissance active injectée par courants induits dans l'inducteur, le creuset métallique refroidi et la charge. Nous nous proposons dans celle-ci de décrire et d'interpréter l'échauffement de la charge.

### I.1 - La fusion statique

En l'absence de tirage de lingot, lorsqu'un régime permanent est atteint, la température de la charge est contrôlée à la fois par la puissance active qui lui est fournie, et par les échanges de chaleur avec le milieu extérieur. Ces échanges de chaleur sont schématisés sur la figure 31. Ils concernent :

- la surface supérieure de la charge (dôme) où les pertes  $P_r$  sont essentiellement radiatives ; elles peuvent contenir un effet convectif s'il y a présence d'une atmosphère ambiante,

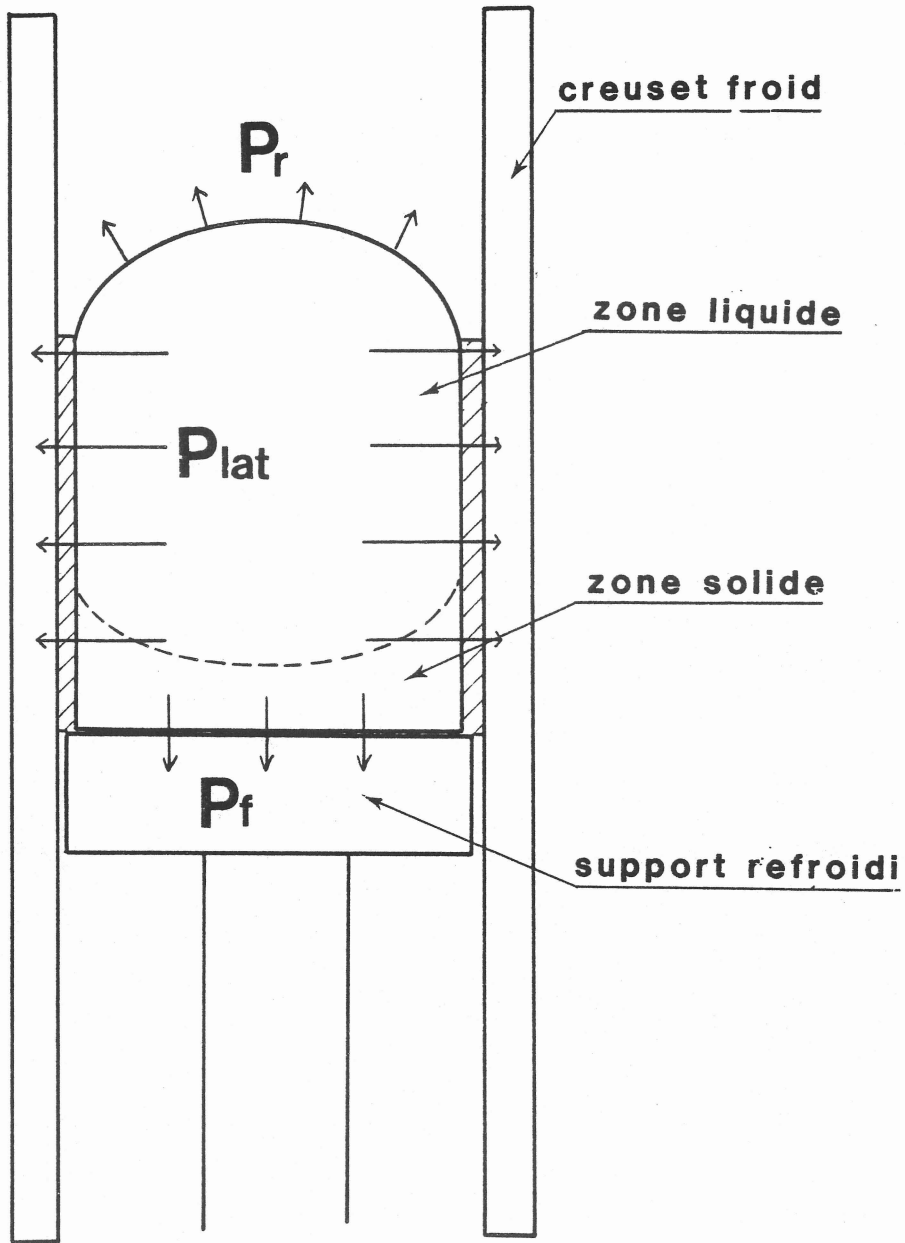
- les parois latérales, où les pertes  $P_{lat}$  résultent des échanges entre la charge et le creuset ; ces pertes dépendent de la nature du contact thermique métal - cuivre refroidi. A l'équilibre de température, les pertes  $P_{lat}$  sont évacuées par l'eau de refroidissement du creuset,

- le fond de la charge où les pertes  $P_f$  dépendent de l'épaisseur de métal solidifié sur le support refroidi ; la conduction est le principal phénomène mis en jeu.

Si les pertes  $P_r$  par la surface supérieure sont relativement faciles à modéliser, les pertes latérales et celles par le fond le sont beaucoup plus difficilement. En effet, la présence d'une part du front de solidification (figure 31) d'autre part d'une barrière thermique entre la charge fondue et le creuset, font que ces pertes dépendent à la fois des conditions expérimentales de fusion (présence ou non d'un laitier par exemple) et de la nature de la charge.

Dans le cas de la fusion des verres par exemple, les valeurs des conductivités électriques et thermiques à la fusion sont relativement élevées, mais ce sont de bons isolants à froid. On adopte alors pour ces matériaux un mode de fusion à coeur et il se forme une paroi de verre solidifié sur la surface réalisant un véritable autocreuset.

Dans le cas des métaux, très bons conducteurs à chaud ou à froid, les rendements optimum sont atteints lorsque l'épaisseur de peau est inférieure à 1/3 ou 1/4 du rayon



*Figure 31 - Echanges de chaleur entre la charge et le milieu extérieur.*

de la charge. Il s'agit donc d'un chauffage superficiel. Le métal peut être entièrement liquide au niveau de l'inducteur et homogène en température, compte tenu du brassage électromagnétique. De plus, il faut alors éventuellement tenir compte de l'utilisation de laitiers qui constituent une barrière thermique isolante entre la charge et les secteurs refroidis.

La fusion de matériaux présentant des résistivités élevées nécessite l'utilisation de creusets de grands diamètres ou des fréquences très élevées : l'étude au laboratoire est difficile de part la technologie qui est alors nécessaire. Par contre, la fusion des métaux est beaucoup plus facile aux fréquences courantes (10 KHz à 100 KHz) dans des creusets assez petits de 5 à 10 centimètres de diamètre. C'est pourquoi, pour effectuer nos études expérimentales, nous avons choisi un acier inoxydable, le NS22S, dont la résistivité ( $100 \mu\Omega \text{ cm}$ ) est suffisamment grande devant celle du cuivre pour que le rendement électrique de l'installation atteigne des valeurs de l'ordre de 50 %.

La détermination des pertes thermiques est effectuée expérimentalement en étudiant les états d'équilibre en température pour lesquels la puissance injectée  $P_i$  dans la charge par courants de Foucault est égale aux pertes :

$$P_i = P_r + P_{lat} + P_f$$

Ainsi, la mesure de la variation de la température d'équilibre de la charge en fonction de la puissance injectée  $P_i$  traduit la variation des pertes thermiques en fonction de la température et de la puissance injectée.

Afin de tester l'influence de la présence d'un laitier et de sa nature, un certain nombre de laitiers ont été utilisés : ils ont été sélectionnés parmi ceux couramment employés dans la refusion de l'acier par le procédé E.S.R. (Electro Slag Remelting).

## I.2 - La fusion avec tirage

Lors de fusions avec tirage, le lingot est tiré vers le bas au fur et à mesure qu'on alimente le bain fondu par le haut avec de la poudre ou des copeaux. Deux notions supplémentaires interviennent :

- la vitesse du tirage peut être imposée soit par les qualités métallurgiques que l'on attend du matériau solidifié (vitesses généralement lentes), soit par le critère de rendement optimum (grandes vitesses),
- la puissance utile  $P_u$  qui est définie comme la puissance effectivement utilisée pour fondre les copeaux supplémentaires ajoutés.

Cette notion de puissance utile permet de définir un rendement de l'installation et une vitesse limite maximum de tirage dépendant de la puissance injectée.



## II - FUSION EN STATIQUE : RESULTATS EXPERIMENTAUX SUR L'ACIER

### II.1 - Choix des laitiers

L'utilisation des laitiers a connu un développement important dans les installations de refusion E.S.R. [1] [2]. En effet, un des principaux avantages de ce procédé est de mettre en pratique la puissance de raffinage des flux. Pour comprendre cet aspect, il est nécessaire de considérer la thermochimie générale du procédé avec des références spécifiques au comportement des éléments vis-à-vis des phases métalliques et des laitiers. Mis à part ses propriétés chimiques, le choix du laitier dans le procédé E.S.R. est motivé par ses propriétés thermiques et surtout électriques qui sont essentielles dans ce cas. Dans les lingotières de coulée continue [14] [15] [16] l'utilisation de laitier permet d'avoir un échange de chaleur plus uniforme entre le métal et la lingotière ; de plus, ses qualités de lubrifiant facilite le mouvement du lingot et améliore son état de surface.

Dans le cas de la fusion en creuset froid, compte tenu des fréquences utilisées et de la forte résistivité électrique des laitiers ( $\sim 10^{-2} \Omega m$ ), ceux-ci sont pratiquement transparents au champ magnétique jusqu'à des épaisseurs de quelques centimètres. Du point de vue électrique, ils ne jouent par conséquent aucun rôle sauf dans des cas très particuliers où l'on utilise des fréquences spécialement adaptées (très hautes fréquences). Par contre, comme dans le procédé E.S.R. et dans des lingotières de coulée continue, on constate qu'une fine couche de laitier de quelques dixièmes de millimètres vient se solidifier sur les parois latérales de la charge ; elle forme ainsi une barrière isolante entre le métal et les secteurs refroidis du creuset. Le laitier a donc un triple rôle d'isolation thermique, de purification et de lubrification dans le cas de tirage du lingot. On note que les échanges métal-laitier sont favorisés par un brassage électromagnétique important.

Les laitiers les plus couramment utilisés sont à base de fluorine ( $CaF_2$ ), de chaux ( $CaO$ ), d'alumine ( $Al_2O_3$ ) et de magnésie ( $MgO$ ). En règle générale, afin que le laitier puisse fondre facilement et se répartir sur les parois latérales, il faut que sa température de fusion soit inférieure à celle du métal ( $1410^\circ C$  pour l'acier choisi pour nos essais).

Afin d'étudier l'influence de la composition chimique du laitier sur les transferts thermiques, nous avons choisi quatre laitiers dont les températures de fusion et les viscosités sont données dans le tableau 9 [17]. Les valeurs des conductivités thermiques des laitiers sont rares dans la littérature ; de plus, elles varient de façon rapide avec la température. Nous avons réuni dans le tableau 10 les principales données physiques sur un certain nombre de laitiers solides dans une gamme de température allant de  $300^\circ C$  à  $1200^\circ C$ . Ces données sont extraites des rapports NPL [18]. On peut remarquer que les valeurs des conductivités thermiques sont sensiblement différentes selon que leur détermination a été faite sous vide ou sous atmosphère d'air ou d'argon. L'ordre de grandeur des conductivités thermiques des laitiers solides est de  $1,5 W/mK$ . Au passage à l'état liquide (Figure 32), les conductivités décroissent très brutalement d'un facteur 10 à 150 selon les cas. Nous retiendrons, comme ordre de grandeur des conductivités des laitiers liquides la valeur de  $10^{-2} W/mK$ .

n° de laitier	composition du laitier			température de fusion °K	viscosité $\times 10^3$ Nsm <sup>-2</sup>
	CaF <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaO		
1	70	15	15	1570	8
2	60	20	20	1520	4
3	83	0	17	1660	5
4	70	30	0	1540	10

Tableau 9 - Caractéristiques des laitiers utilisés dans les différents essais.

n° de laitier	T K	C <sub>p</sub> JK <sup>-1</sup> g <sup>-1</sup>	ρ gcm <sup>-3</sup>	sous vide		sous argon	
				10 <sup>3</sup> a cm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	k Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	10 <sup>3</sup> a cm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	k Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
1	573	0.97	3.13	3.4	1.03		
	673	0.99	3.12	3.4	1.05		
	873	1.07	3.10	3.4	1.12		
	1073	1.19	3.08	3.55	1.32		
	1273	1.38	3.04	3.15	1.49		
3	573	1.02	3.32	2.1	0.71	4.1	1.38
	673	1.03	3.31			3.9	1.32
	873	1.08	3.27			3.7	1.31
	1073	1.18	3.23			3.5	1.34
	1273	1.34	3.19			3.2	1.37
4	573	0.98	2.78	5.9	1.16		
	673	1.01	2.76	6.0	1.69		
	873	1.09	2.73	5.2	1.55		
	1073	1.22	2.69	4.2	1.37		
	1273	1.40	2.64	4.1	1.49		

Tableau 10 - Valeurs des capacités calorifiques C<sub>p</sub>, des masses volumiques ρ, des diffusivités thermiques a et des conductivités thermiques k pour différents laitiers en phase solide.

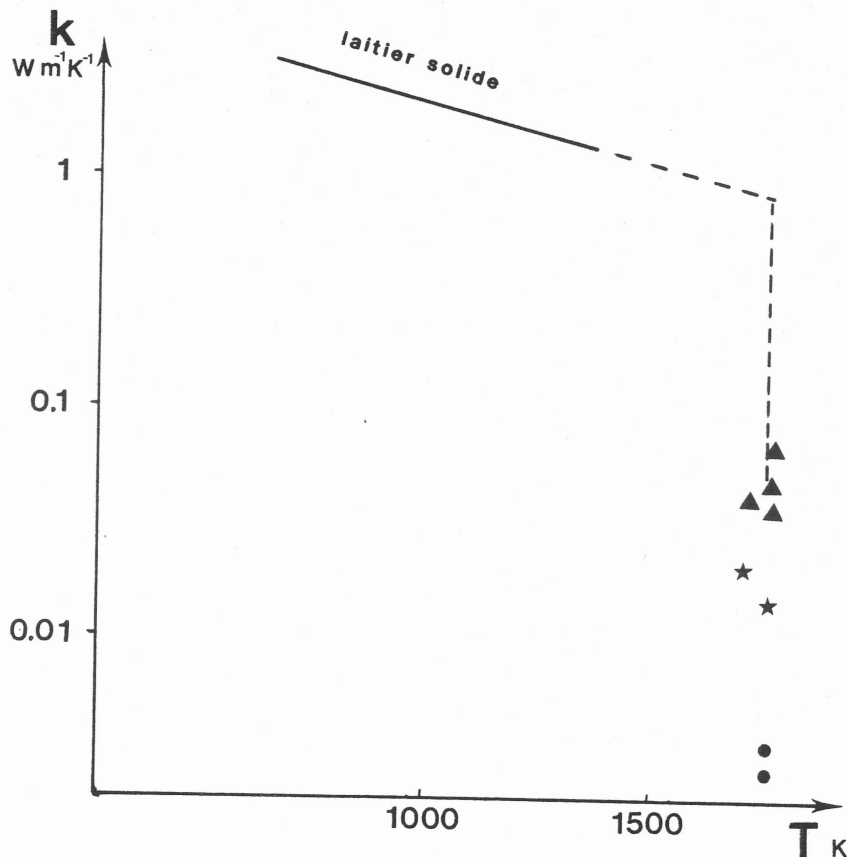


Figure 32 - Conductivité thermique des laitiers liquides : CaF<sub>2</sub> ; 90 % CaF<sub>2</sub> - 10 % CaO ; 90 % CaF<sub>2</sub> - 10 % MgO.

## II.2 - Dispositif expérimental et déroulement des essais

L'inducteur, le creuset froid et la charge sont représentés dans leur position avant fusion sur la figure 33. Le creuset comprend 18 secteurs en épingle. Le support de la charge (figure 34) est formé de 4 secteurs en cuivre, refroidis par une circulation d'eau interne.

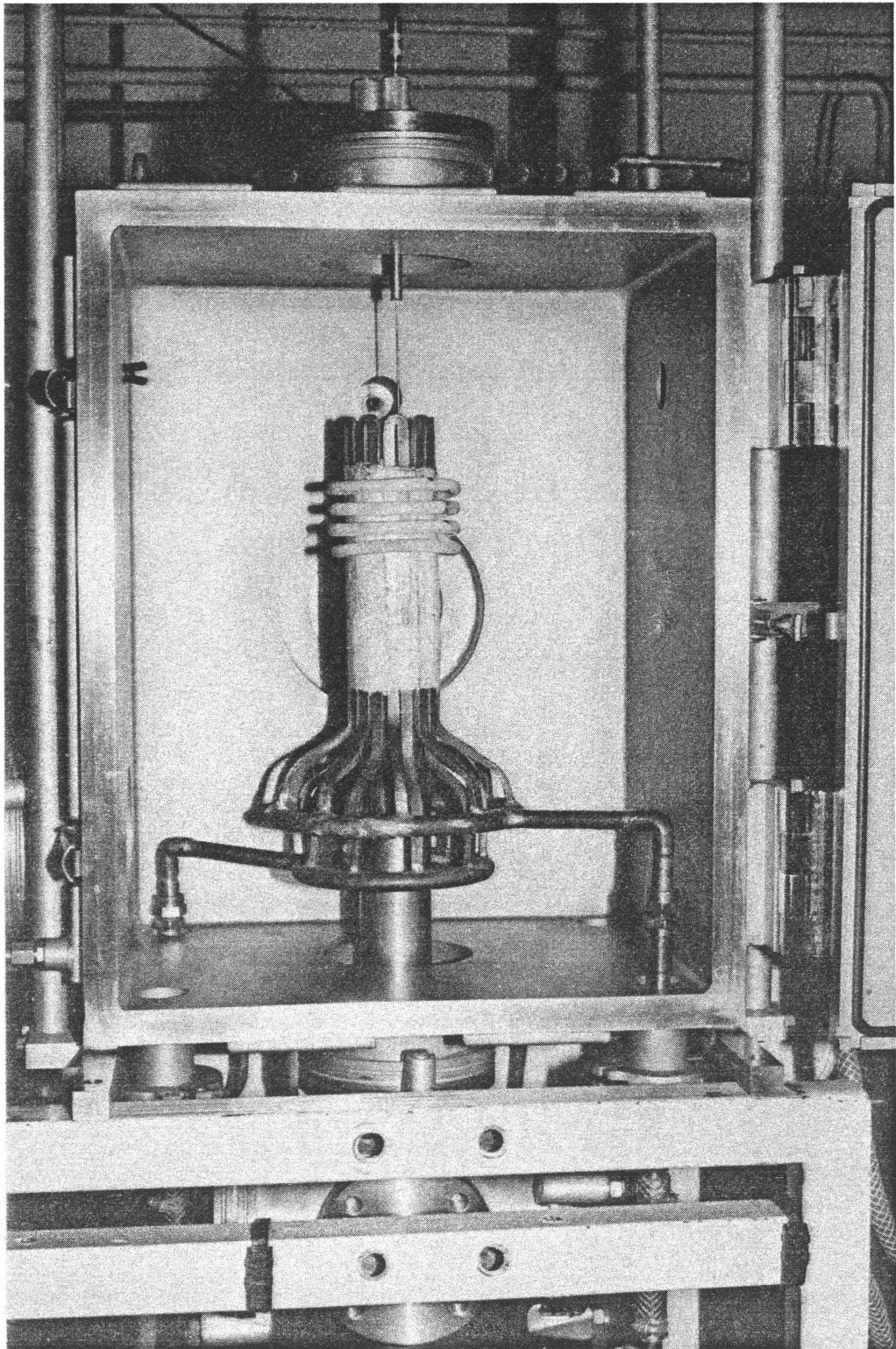
On a intercalé entre la charge et le fond froid un cylindre en acier d'épaisseur 10 mm de même diamètre que le creuset ; ce cylindre ne fond que partiellement dans sa partie supérieure et constitue la base du lingot.

Tous les essais ont été effectués avec une charge identique de diamètre 45 mm et de hauteur 40 mm (poids environ 500 g).

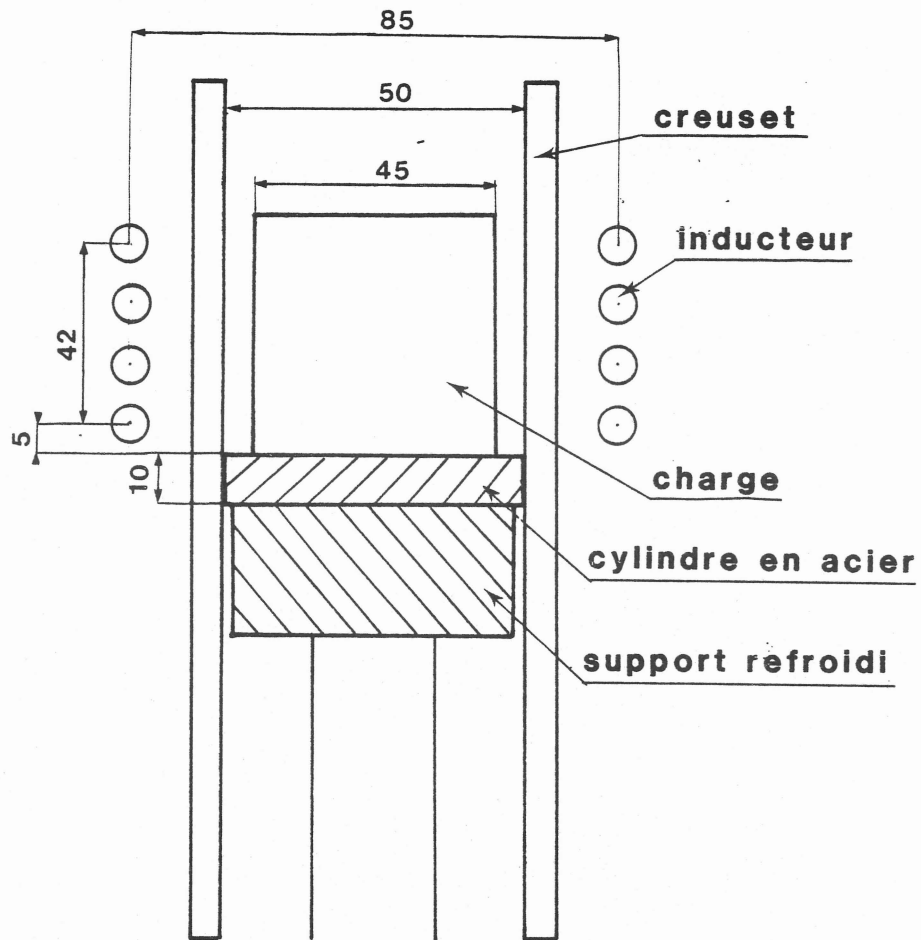
L'ensemble du dispositif est placé dans une enceinte métallique (photo 4) refroidie par une circulation d'eau permettant d'effectuer les fusions sous vide ou sous atmosphère contrôlée. La majorité des fusions effectuées pour nos essais l'ont été sous légère dépression d'argon (0,3 bar). Si la pression est plus faible, on observe, à haute fréquence, une ionisation du gaz dans l'enceinte qui conduit à une perte des qualités diélectriques de l'atmosphère ambiante : il y a alors risque d'amorçage entre spires de l'inducteur.

L'inducteur est alimenté par le générateur apériodique CECES de 100 KW. Pour nos essais, la puissance maximale mise en jeu a été 60 % de la puissance nominale. Deux coffrets de capacité permettent d'osciller à des fréquences comprises entre 7 KHz et 30 KHz pour le coffret moyenne fréquence, 100 KHz et 300 KHz pour le coffret haute fréquence.

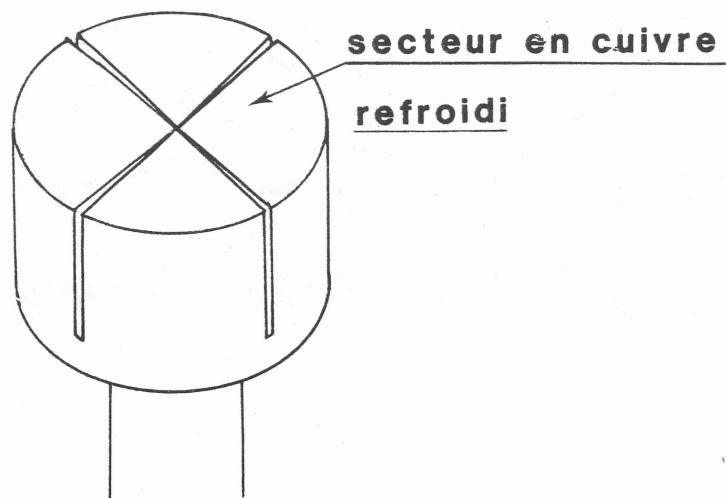
Sur le pupitre de contrôle, on peut lire la tension aux bornes de l'inducteur et la puissance totale active fournie par le générateur. La température de l'eau de refroidissement de l'inducteur, du creuset et du support est mesurée avec des capteurs de température (diodes Zener au silicium) avec une précision de 1/10 de degré. Le contrôle de la température de la charge est assuré par des thermocouples platine rhodié 30/6 gainés de molybdène, puis recouverts d'alumine pour les protéger du contact de l'acier liquide. Ces thermocouples, au nombre de deux au maximum, sont introduits dans l'enceinte par l'intermédiaire de deux passages étanches sur la bride supérieure (photo 4) permettant le mouvement vertical. Dans la majorité des cas, la température étant pratiquement uniforme dans la zone fondue de la charge, nous avons utilisé un unique thermocouple placé au centre.



*Photo 4 - Dispositif expérimental de fusion dans le creuset de 18 secteurs et de diamètre 50 mm.*



*Figure 33 - Dispositif expérimental avant fusion.*



*Figure 34 - Support en cuivre refroidi.*

### Déroulement des essais

La puissance injectée aux bornes de l'inducteur est augmentée par paliers et la température de la charge est enregistrée en continue en fonction du temps (figure 35). Dans l'exemple de la figure 35 d'un essai à 25 KHz avec le laitier n° 1, la température de la charge augmente rapidement jusqu'à la fusion du métal ; celle-ci est obtenue pour une puissance injectée de 7,5 kW puisque la température du métal dépasse alors 1410°C. Une fois le métal fondu, la variation de la température en fonction de la puissance injectée est beaucoup plus lente ce qui suggère un changement dans le mode de transfert thermique comme nous le verrons par la suite.

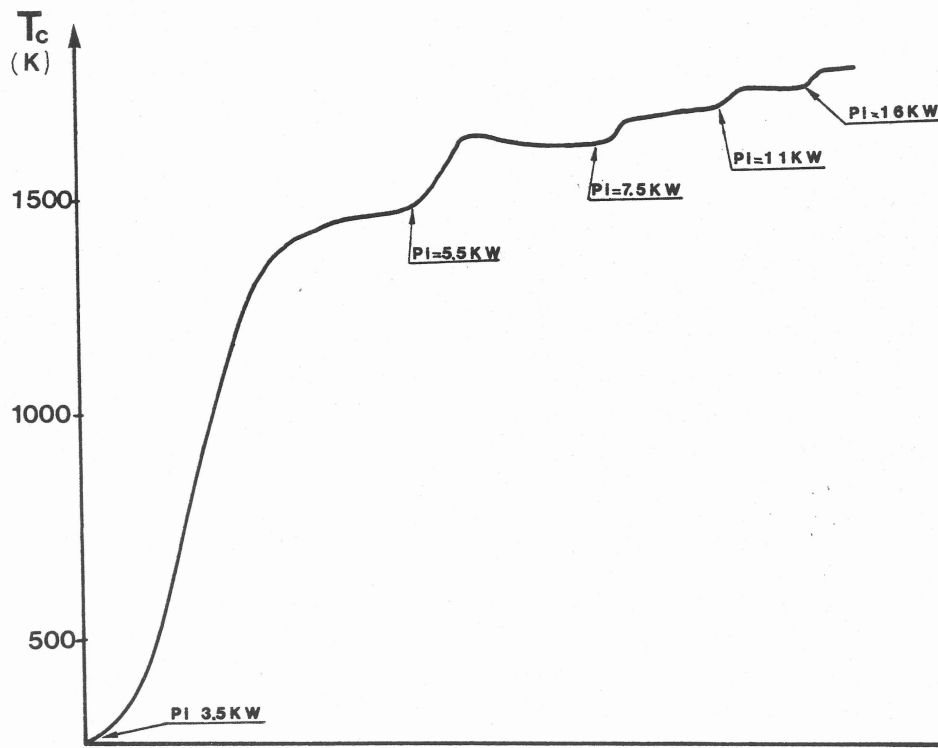


Figure 35 - Enregistrement de la température de la charge en fonction du temps : la puissance  $P_i$  est augmentée par paliers.

Sur le palier 5,5 kW, on note une diminution en température de l'ordre de 20 °C avant la stabilisation en température. Ce phénomène traduit le fait que la charge ayant atteint la température de fusion du laitier, celui-ci commence à fondre et à établir un contact thermique entre le creuset et la charge ; de plus, il se peut que, près des angles de la charge où il existe des densités de courant plus importantes (cf. première partie), le métal

ait commencé à fondre et à couler sur les parois du creuset. Le mode de transfert latéral passe alors d'un mode par rayonnement à un mode par conduction. Dans le cas de la fusion sans laitier, ce phénomène de décroissance de température n'est pas observé.

## II.3 - Résultats des essais

### II.3.1. Aspect des lingots - Limite de la zone de fusion

L'état de surface est différent selon que la fusion est faite en présence de laitier ou non. Dans ce dernier cas, on distingue très nettement sur la charge solidifiée et refroidie l'empreinte des secteurs. Par contre, en présence de laitier, celui-ci forme une enveloppe solidifiée sur la paroi latérale de la charge (photo 5) constituant une protection mécanique vis-à-vis du creuset. L'état de surface du lingot est alors régulier et lisse.

L'épaisseur de la pellicule de laitier solidifiée sur le lingot est de l'ordre de 3/10 à 5/10 de millimètres vers le bas du lingot et atteint quelques millimètres au niveau du dôme.

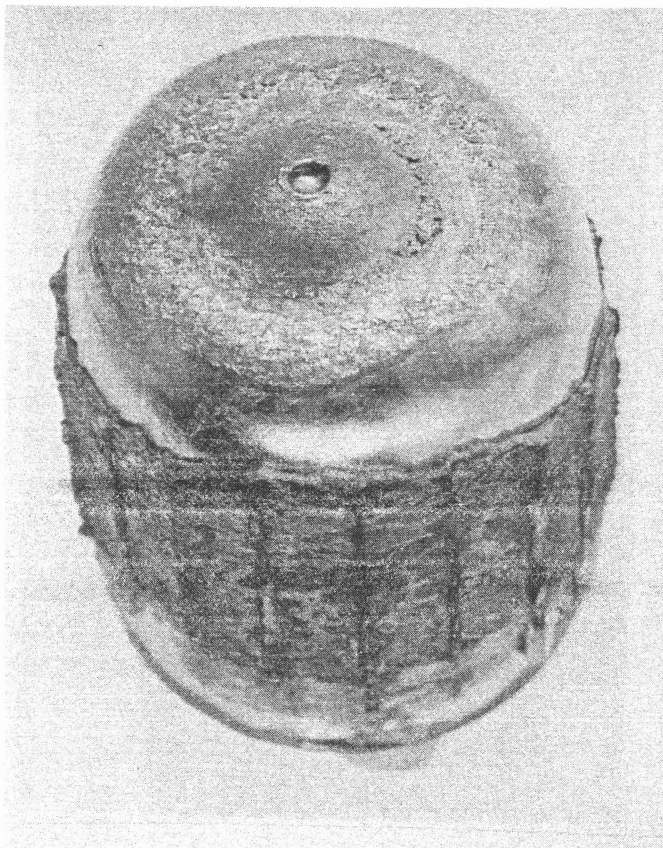


Photo 5 - Charge en acier inoxydable recouverte de laitier.

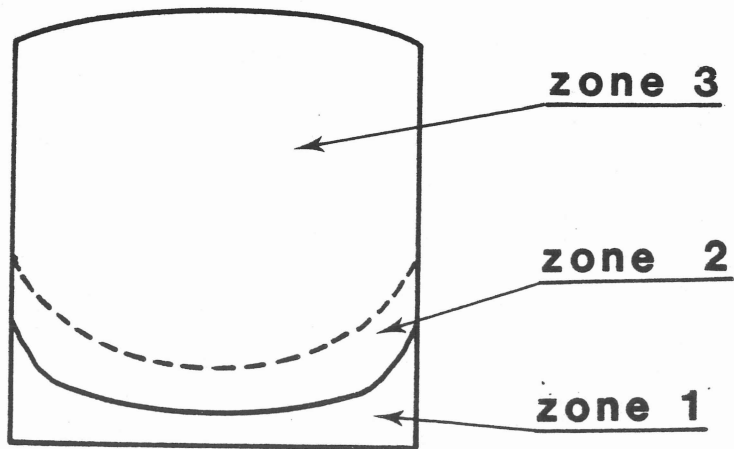


Figure 36 - Observation microscopique des lingots en coupe : limites des zones 1, 2 et 3.

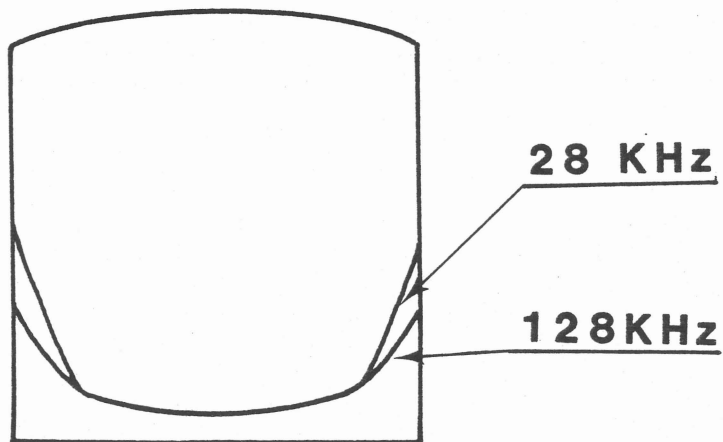


Figure 37 - Limites de la zone solide dans des essais à 28 KHz et à 128 KHz.



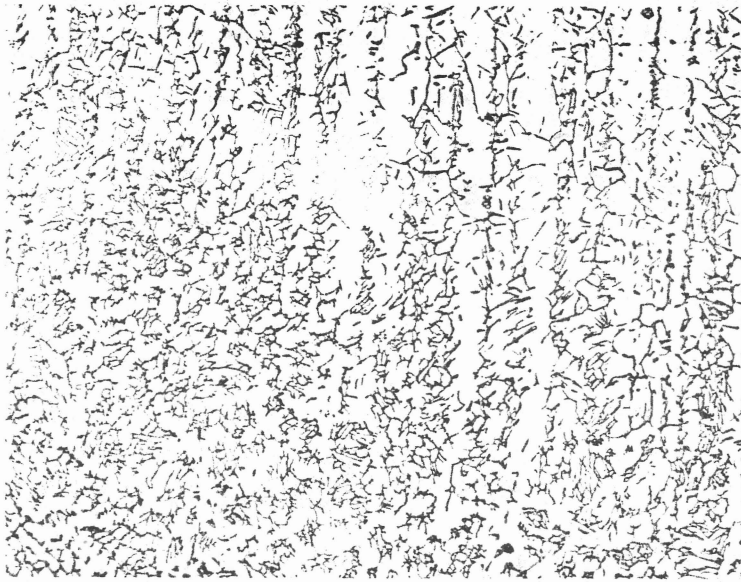


Photo 6 - Observation au microscope des lingots :  
- en haut à droite : gros cristaux correspondant à la zone restée solide,  
- en bas à gauche : début de la zone liquide.

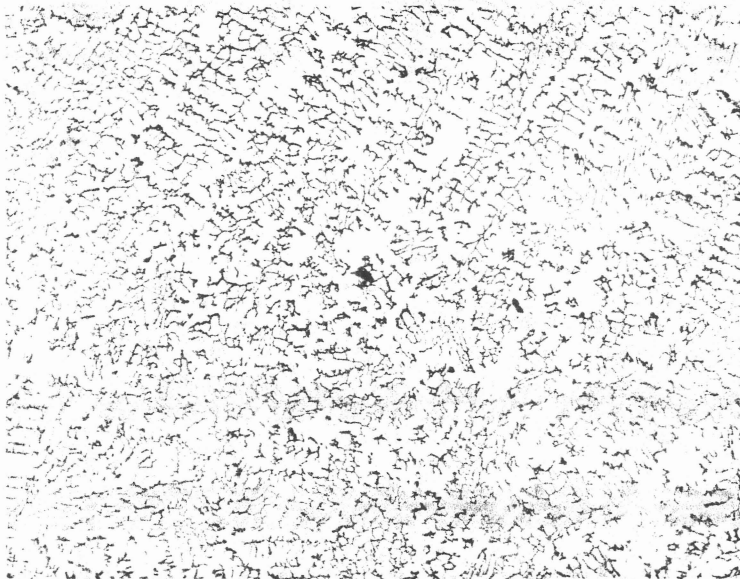


Photo 7 - Observation au microscope des lingots :  
- en haut à droite : cristallisation colonnaire,  
- en bas à gauche : cristallisation équiaxe.

Pour analyser la forme de la zone liquide, les lingots, après refroidissement rapide, ont été tronçonnés suivant des plans méridiens pour être observés. Après polissage et attaque à l'acide oxalique, les observations au microscope optique ont révélé trois zones schématisées sur la figure 36 :

- une zone 1 dans la partie inférieure du lingot avec de gros cristaux réguliers comparables à ceux qu'on observe sur l'acier avant fusion (photo 6). Cette région est donc restée solide,
- une zone 2 de cristallisation colonnaire dans la direction perpendiculaire au front de solidification (photos 6-7),
- une zone 3 au centre de la charge où la cristallisation est uniaxe (photo 7).

Pour confirmer ces premières observations, nous avons fait des essais de fusion en rajoutant au bain liquide et stabilisé en température quelques grammes d'étain qu'on laisse se disperser dans la zone fondue pendant quelques dizaines de secondes avant de refroidir. Par analyse au microscope à balayage de coupes effectuées dans le lingot, on a pu ainsi déterminer la répartition de l'étain dans le lingot et en déduire la zone liquide. Les analyses ont révélé que l'étain est sous la forme de globules constitués de 44 % d'étain, 32 % de nickel, 19 % de fer et 4 % de chrome. Il est très abondant dans la zone 3 et réparti uniformément. Il est présent en quantité moins importante dans la zone 2 et décroît pour s'annuler dans la zone 1. En réalité, la région 2 initialement proche de la zone solide cristallise en premier au cours du refroidissement, en rejetant l'étain dans la zone liquide. Lorsque la région centrale est sursaturée en étain, celui-ci précipite, ce qui explique la forte densité dans la zone 3.

En conséquence, ces observations montrent que la zone 1 marque effectivement la région restée solide au cours de la fusion. Celle-ci a la forme d'un puits (figure 36).

Les essais à haute fréquence (128 KHz) et moyenne fréquence (28 KHz) donnent des résultats sensiblement identiques si ce n'est que la limite de la zone liquide remonte légèrement plus haut (4 à 5 mm) sur les côtés de la charge dans les essais à 25 KHz (figure 37). Cette observation est en accord avec le fait qu'à haute fréquence, l'énergie dissipée par effet Joule est localisée plus près de la surface du métal.

### II.3.2 - Analyse des bilans de puissance

Si on injecte une puissance donnée  $P_i$  dans la charge, on a l'égalité, lorsque la température est stabilisée :

$$P_i = P_r + P_{lat} + P_f \quad (II.1)$$

où on rappelle que  $P_r$  est la puissance perdue par rayonnement à la surface supérieure du métal,  $P_{lat}$  les pertes latérales vers le creuset et  $P_f$  les pertes vers le fond refroidi.

On peut, dans une première étape, faire une évaluation des ordres de grandeurs des différentes contributions des pertes :

- la puissance rayonnée  $P_r$  peut être évaluée en utilisant la loi classique de Stephan :

$$P = \epsilon \sigma S T^4 \quad (II.2)$$

où  $\epsilon$  est l'émissivité de l'acier liquide,  $S$  la surface rayonnante,  $\sigma$  la constante de Stephan-Boltzmann et  $T$  la température de surface du métal en kelvin. En calculant  $P_r$  par la relation II.2, on majore légèrement la valeur de la puissance rayonnée car on ne tient pas compte du facteur de forme du à la présence du creuset au-dessus de la charge. Une application numérique avec des valeurs typiques de nos essais :

$$\epsilon = 0,4 \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-12} / \text{Wcm}^2 \text{K}^{-4} \quad S = 20 \text{ cm}^2 \quad T = 1730^\circ\text{C}$$

donne  $P_r = 400$  W. En comparaison avec les puissances injectées dans la charge (voir tableau 3) qui varient entre 8 et 15 KW, la puissance rayonnée à la surface ne représente pas plus de 5 % des pertes totales :

- les pertes dans le fond refroidi ont été mesurées pour différents essais par bilan thermique de l'eau de refroidissement ; les valeurs sont données dans le tableau 11. Dans tous les cas, elles ne dépassent pas 1000 W soit environ 10 % des pertes totales.

- compte tenu des ordres de grandeur de la puissance rayonnée et des pertes dans le fond refroidi qui n'excèdent à elles deux pas 15 % de la puissance injectée, les pertes latérales représentent 85 % au moins des pertes totales. Elles prédominent donc largement et jouent un rôle essentiel dans l'équilibre thermique.

La puissance mesurée par bilan thermique de l'eau de refroidissement du creuset comprend deux effets : d'une part l'effet Joule des courants induits dans les secteurs, d'autre part les pertes latérales par conduction de la charge vers le creuset (soit environ 85 % de la puissance injectée par effet Joule dans la charge). Comme il n'est pas possible, expérimentalement, de dissocier ces deux puissances, ce sont les résultats de la modélisation électrique qui seront utilisés. On calcule ainsi les valeurs des résistances ramenées au primaire  $n_{cr}^2 R_{cr}$  et  $n_c^2 R_c$  (cf. première partie) ; le courant  $I$  de l'inducteur est déduit par la relation :

$$I = \frac{U}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}} \approx \frac{U}{L\omega} = UC\omega \quad (II.3)$$

où R est la résistance totale ramenée au primaire et C la valeur des capacités en parallèle avec l'inducteur. Les puissances injectées par courants induits dans le creuset et la charge s'en déduisent par les relations :

$$P_{cr} = n_{cr}^2 R_{cr} I^2 \quad (II.4)$$

$$P_c = n_c^2 R_c I^2 \quad (II.5)$$

Dans nos essais, la charge est sensiblement de même hauteur que l'inducteur et le modèle électrique est applicable. Par contre, la présence du dôme est une cause d'erreur, cependant nettement moins grande que l'erreur due à la présence d'une extrémité anguleuse, comme dans le cas de la charge simulée refroidie (cf. première partie). On adopte donc une valeur de puissance transmise à la charge supérieure de 20 % à la puissance calculée, cette surpuissance correspondant à la présence d'une unique extrémité anguleuse. Pour le creuset, compte tenu des résultats expérimentaux avec la charge simulée, on prend une surpuissance due à la hauteur des secteurs de 35 %.

Le tableau 11 donne les résultats des bilans thermiques pour des essais à haute fréquence (128 Hz) et moyenne fréquence (28 KHz). En parallèle avec les mesures expérimentales, les valeurs calculées des puissances transmises à la charge et au creuset sont indiquées. On vérifie que la somme de ces deux valeurs est bien égale, à 10 ou 20 % près, à la puissance effectivement mesurée par bilan thermique de l'eau du creuset.

f KHz	P <sub>totale</sub> kW	Valeurs mesurées			Valeurs calculées		
		P <sub>ind</sub> kW	P <sub>cr</sub> kW	P <sub>f</sub> kW	P <sub>c</sub> kW	P <sub>cr</sub> kW	P <sub>c</sub> + P <sub>cr</sub> kW
128	32	10	19	1,4	17	4	21
	20	6	13	0,8	11	2,5	13,5
28	22	7	13,5	0,7	12	3	15
	13	4	8	0,4	7	1,5	8,5

*Tableau 11 - Bilans thermiques : fusion de charges en acier à 128 KHz et 28 KHz.*

### II.3.3 - Etude de la température de la charge en fonction de la puissance

La température d'équilibre de la charge liquide a été relevée à différents niveaux de puissance pour les essais à 28 KHz et ceux à 128 KHz. Les résultats des mesures sont donnés sous la forme de courbes sur la figure 38.

Pour les essais à moyenne fréquence (28 KHz), on note que la fusion est obtenue avec des puissances injectées dans la charge de l'ordre de 8 kW. L'influence de la nature et même de la présence du laitier est très faible puisque toutes les courbes sont pratiquement superposées à 2 ou 3°C près. La température de l'acier varie très lentement avec la puissance : lorsqu'on double la puissance injectée, la température de l'acier n'augmente que de 30°C.

Dans les essais à 128 KHz, la sensibilité vis-à-vis de la nature du laitier est plus grande, surtout aux fortes puissances. Pour une même puissance injectée dans la charge, la température est en général plus faible que pour les essais à 28 KHz. Néanmoins, avec le laitier n° 1, le phénomène s'inverse à partir de 13,5 KW et la température de l'acier devient supérieure à celle des essais à moyenne fréquence. On remarque que le métal reste liquide jusqu'à des valeurs de puissance injectée de l'ordre de 9 KW.

Les différents essais montrent que la surchauffe de la charge, c'est-à-dire l'élévation de température par rapport à sa température de fusion, est toujours très faible même avec des puissances nettement supérieures à la puissance minimum nécessaire pour maintenir le bain liquide. De plus, l'influence de la présence d'un laitier et de sa nature est nulle ou très petite. Ces résultats suggèrent que la résistance thermique entre le métal liquide et la paroi interne du creuset en cuivre décroît de façon rapide lorsque la puissance augmente. De plus, on peut penser que la température de surface du métal liquide varie très peu et que la surchauffe est uniquement due au gradient de température dans la couche limite thermique de l'acier liquide. Une interprétation plus détaillée est donnée dans le chapitre suivant.

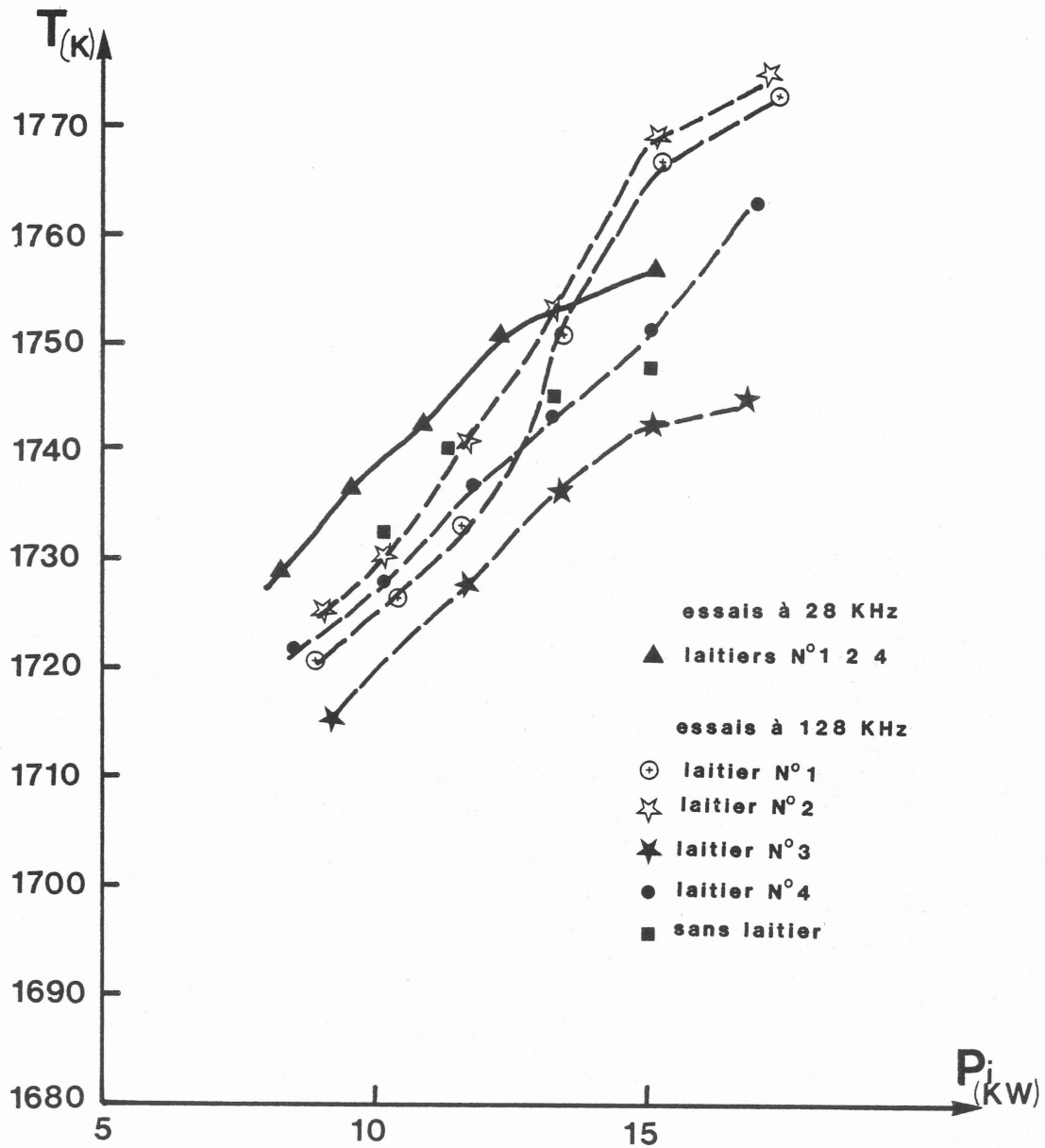


Figure 38 - Température mesurée de la charge en fonction de la puissance transmise à la charge  $P_i$ .

### III - INTERPRETATION DES FAIBLES SURCHAUFFES OBSERVEES

#### III.1. Effets mécaniques du champ électromagnétique

Les effets mécaniques dans la charge, c'est-à-dire la présence d'un dôme à la surface supérieure et les mouvements de brassage électromagnétique, résultent des interactions entre le champ magnétique  $\vec{B}$  et les densités de courants  $\vec{J}$  induits. La force correspondante de Lorentz par unité de volume s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (\text{III.1})$$

La symétrie du problème permet d'exprimer  $\vec{F}$  en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Les courants induits sont circulaires, centrés sur l'axe de symétrie et dans des plans perpendiculaires à celui-ci, le champ magnétique  $\vec{B}$  n'a pas de composante orthoradiale et le potentiel vecteur  $\vec{A}$  correspondant a une unique composante  $A$  suivant la direction  $\theta$ . En régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$ ,  $A$  peut s'écrire :

$$A = A_0 \cos(\omega t + P) \quad (\text{III.2})$$

où l'amplitude  $A_0$  et la phase  $P$  qui dépendent des coordonnées  $r$  et  $z$ , sont gouvernées par les équations de Maxwell et les conditions aux limites. La densité de courant  $\vec{J}$  et le champ  $\vec{B}$  sont reliés à  $\vec{A}$  par les relations :

$$\vec{J} = -\sigma \frac{\delta \vec{A}}{\delta t} \quad (\text{III.3})$$

$$\vec{B} = \text{Rot } \vec{A} \quad (\text{III.4})$$

où  $\sigma$  est la conductivité électrique du matériau considéré. La force  $\vec{F}$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\vec{F} = \sigma \omega A_0 \cdot \vec{\nabla} \left[ A_0 \sin(\omega t + P) \cos(\omega t + P) \right] - \sigma \omega A_0^2 \cdot \vec{\nabla} P \cdot \sin^2(\omega t + P) \quad (\text{III.5})$$

Il apparaît une somme de deux termes dont le premier, de pulsation  $2\omega$ , a une valeur moyenne nulle. Dans le domaine des fréquences étudiées, on montre facilement [19] que les pulsations des forces électromagnétiques sont sans conséquence hydrodynamique et on peut prendre la valeur moyenne de  $\vec{F}$  :

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{1}{2} \sigma \omega A_0^2 \vec{\nabla} P \quad (\text{III.6})$$

que l'on peut écrire sous la forme d'un terme gradient et d'un terme irrotationnel :

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{2} \sigma \omega \left[ \text{grad} (A_0^2 P) - 2 A_0 P \text{grad} A_0 \right] \quad (\text{III.7})$$

### III.1.1. Détermination de la surface libre

Pour la détermination de la surface libre, l'approximation magnétostatique consiste à négliger l'influence du mouvement sur la déformation de la surface libre, face à l'action des forces électromagnétiques. Cette hypothèse est légitime lorsque l'épaisseur de peau  $\delta$  dans la charge est petite devant son rayon et que la pression dynamique est faible devant la pression magnétique [20] [21]. Dans ces conditions, l'équilibre magnétostatique se traduit par la relation :

$$\frac{P}{\rho} + g z + \langle \phi \rangle = \text{Cte} \quad (\text{III.8})$$

où  $\phi$  est le potentiel complexe dont dérive la force  $\vec{F}$ . Lorsque l'épaisseur de peau est petite devant le rayon de la charge, les forces électromagnétiques se réduisent principalement à une force normale à la paroi, dérivant du potentiel  $\langle \phi \rangle$  tel que [20] :

$$\langle \phi \rangle = \frac{\langle B^2 \rangle}{2 \mu \rho} \quad \text{ou} \quad \frac{A_0^2 \sigma \omega}{4 \rho} \quad (\text{III.9})$$

B étant le champ magnétique sur la surface libre. Ainsi, en résolvant l'équation III.8 par méthode numérique, on obtient la forme de la surface libre. Ce calcul a été fait par J.N. BARBIER et Y. FAUTRELLE [20] et nous avons utilisé leur programme de résolution pour connaître la forme de la surface libre pour nos essais à moyenne fréquence (25 KHz). Les résultats sont donnés sur la figure 39 pour un courant conducteur de 900 A. Le dôme est très important et la surface en contact avec le creuset est petite. Il suffirait que le courant I soit un peu plus grand pour qu'il n'y ait plus aucun contact. En réalité, notre configuration d'inducteur présentant une très faible raideur de centrage, on a une grande instabilité de la surface libre d'autant plus forte que le champ est grand et la charge a une position qui fluctue d'une paroi à l'autre du creuset. Visuellement, on observe très bien ces fluctuations et ces mouvements de la surface libre.

Dans le cas des essais à haute fréquence (125 KHz) la résolution numérique devient difficile car l'épaisseur de peau est alors très faible devant le rayon de la charge,



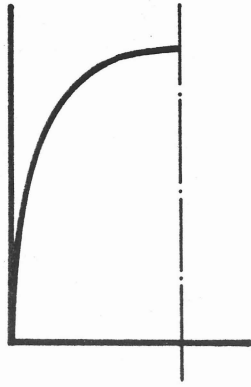
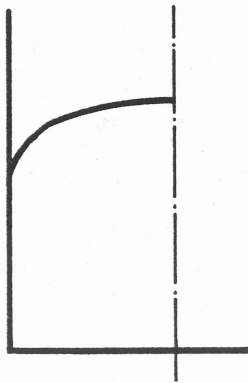


Figure 39 - Surface libre calculée pour  $B_0 = 1000$  Gauss (essai MF).

a)



b)

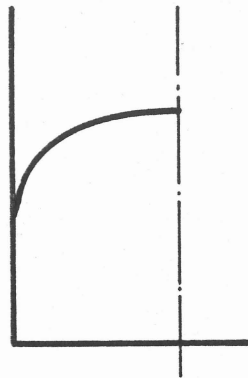


Figure 40 - Surface libre mesurée pour a)  $B_0 = 580$  Gauss  
(essai HF) b)  $B_0 = 650$  Gauss.

ce qui nécessite un découpage très fin. Néanmoins, on peut évaluer de manière approchée la hauteur du dôme  $h$  en utilisant la relation [ 20 ] :

$$h = \frac{B_0^2}{2 \mu \rho g} \quad (\text{III.10})$$

où  $B_0$  est le champ efficace le long de la charge. Pour calculer le champ  $B_0$ , on utilise la relation classique  $\phi = L I$  qui donne :

$$B_0 = \frac{L I}{n S_{\text{air}}} \quad (\text{III.11})$$

$S_{\text{air}}$  étant la surface de l'inducteur moins celle du creuset et de la charge,  $n$  le nombre de spires de l'inducteur et  $L$  l'inductance de l'ensemble inducteur-creuset-charge. (On se reportera à la modélisation électrique pour le calcul de  $L$  et de  $I$ ). Une application numérique pour un essai à 125 KHz avec une tension aux bornes de l'inducteur de 500 V donne :

$$B_0 = 580 \text{ Gauss} \quad \text{et} \quad h = 1,7 \text{ cm}$$

Expérimentalement, nous avons mesuré la forme du dôme en utilisant un peigne formé de tiges en molybdène que l'on introduit dans le métal une fois le niveau de puissance désiré atteint. Le molybdène en contact avec l'acier se dissout et lorsqu'on retire le peigne, on a en négatif la forme de la surface libre. Nous avons donné sur la figure 40 les résultats obtenus pour un essai avec  $B_0 = 580$  Gauss et  $B_0 = 650$  Gauss. Les hauteurs des dômes sont d'environ 1 cm, donc assez nettement inférieures aux valeurs de  $h$  calculées.

### III.1.2. Evaluation des vitesses de brassage

Dans la décomposition III.7 de la force  $\langle \vec{F} \rangle$ , le terme à rotationnel non nul est responsable du mouvement dans le métal. Dans le cas d'un régime de brassage turbulent, J.N. BARBIER et Y.R. FAUTRELLE ont montré par résolution des équations magnéto-hydrodynamiques par une méthode de différences finies [ 20 ] que la vitesse moyenne  $U$  dans le bain liquide a pour valeur environ 10 à 20 % de la vitesse d'Alfen  $U_0$  définie par :

$$U_0 = B_0 / (\mu \rho)^{1/2} \quad (\text{III.12})$$

Pour une même puissance injectée dans la charge (14 KW) dans des essais à 125 KHz et à 25 KHz, on obtient :

- à 125 KHz      B = 580 Gauss       $U_0 = 0,58$  m/s      U = 8,5 cm/s
- à 25 KHz      B = 1 200 Gauss       $U_0 = 1,2$  m/s      U = 18 cm/s

Le mouvement dans le métal est caractérisé par un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds Re, qui a pour expression :

$$Re = \frac{UR}{\delta} \quad (III.13)$$

où R est le rayon du creuset et  $\delta$  le rapport de la viscosité dynamique du métal sur sa masse volumique. Avec  $R = 2,5 \cdot 10^{-2}$  m et  $\delta \approx 10^{-6}$  S.I., on obtient respectivement pour les essais à haute fréquence et à moyenne fréquence des nombres de Reynolds égaux à 2125 et 4500. Ces valeurs sont suffisamment élevées pour que l'on puisse considérer l'écoulement comme étant turbulent, ce qui est par ailleurs confirmé par les instabilités observées à la surface du métal.

Pour conclure, la vitesse moyenne U étant proportionnelle au champ  $B_0$  et la puissance injectée Pi dans la charge variant en  $B_0^2$  suivant la relation :

$$Pi = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta \sigma} S \quad \text{où} \quad \delta = \left( \frac{2}{\mu \sigma \omega} \right)^{1/2} \quad (III.14)$$

si S est la surface latérale de la charge et R son rayon, on a finalement :

$$U = 0,15 \left( \frac{\mu_0 \delta \sigma}{\rho} \right)^{1/2} \left( \frac{Pi}{S} \right)^{1/2} \quad (III.15)$$

### III.1.3. Gradient de température dans la charge

La production de chaleur est développée par effet Joule essentiellement dans l'épaisseur de peau  $\delta$ . Néanmoins, la bonne conductivité thermique des métaux et les mouvements de brassage assurent une bonne homogénéisation de température que l'on peut considérer comme uniforme sauf au voisinage immédiat des parois.

Pour évaluer le gradient de température dans le métal liquide en régime turbulent, on introduit la diffusivité thermique turbulente  $\chi_{turb}$  défini par [24] :

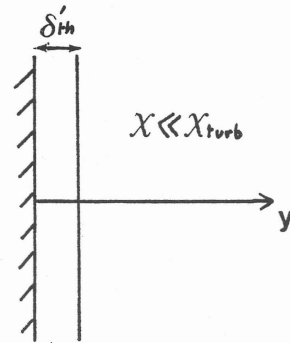
$$\chi_{turb} = \alpha U y \quad (III.16)$$

où  $U$  peut être considéré comme la vitesse moyenne du métal,  $y$  est la distance comptée à partir de la paroi et  $\alpha$  une constante. Si  $\phi$  est le flux de chaleur par unité de surface, on a :

$$\phi = \rho C_p (\chi + \chi_{\text{turb}}) \frac{\delta T}{\delta y} \quad (\text{III.17})$$

$\chi$  étant la diffusivité thermique moléculaire reliée à la conductivité thermique  $k$  par :

$$\chi = \frac{k}{\rho C_p} \quad (\text{III.18})$$



On peut grossièrement définir deux domaines dans le fluide :

*Figure 41*

- un premier domaine où  $\chi > \chi_{\text{turb}}$  pour les faibles valeurs de  $y$  ( $y < \delta' \text{ th}$ )
- un deuxième domaine où  $\chi < \chi_{\text{turb}}$  pour  $y > \delta' \text{ th}$ .

On définit  $\delta' \text{ th}$  en écrivant qu'à la limite des deux domaines,  $\chi = \chi_{\text{turb}}$  ; par conséquent :

$$\delta' \text{ th} = \frac{\chi}{\alpha U} \quad (\text{III.19})$$

Dans la région  $y < \delta' \text{ th}$ , on peut négliger la diffusivité turbulente et le problème thermique se réduit à un simple problème de conduction ; l'équation de conservation de la chaleur s'écrit alors :

$$\rho C_p \frac{d^2 T}{dy^2} = - Q \quad (\text{III.20})$$

si  $Q$  est la production de chaleur par unité de volume. Dans le cas où la profondeur de pénétration des courants de Foucault  $\delta$  est petite, on a :

$$Q = \frac{2 P_s}{\delta} \exp(-2 y/\delta) \quad (\text{III.21})$$

où  $P_s$  est la puissance injectée dans la charge par unité de surface.

Les constantes d'intégration de l'équation III.20 sont obtenues en écrivant que :

- à la surface, la température est fixée à  $T_s$  :  $y = 0$   $T = T_s$

- en régime permanent, le flux de chaleur à la surface est égal à la quantité de chaleur apportée par effet Joule  $P_s$ , c'est-à-dire :

$$+ k \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = P_s \quad (\text{III.22})$$

On obtient, après intégration de l'équation II.20 :

$$T = T_s + \frac{P_s \delta}{2 \rho C_p} (1 - e^{-2y/\delta}) \quad (\text{III.23})$$

La différence de température entre  $y = \delta' th$  et  $y = 0$  est donc :

$$\Delta T_1 = T(y = \delta th) - T_s = \frac{P_s \delta}{2 k} (1 - e^{-2\delta' th/\delta}) \quad (\text{III.24})$$

Dans la région  $y > \delta' th$ , on peut négliger la diffusivité moléculaire et l'équation de conservation de la chaleur s'écrit alors :

$$\text{div} (\chi_{\text{turb}} \text{grad } T) = - \frac{Q}{\rho C_p} \quad (\text{III.25})$$

ou bien :

$$\frac{\delta}{\delta y} \left[ \alpha v_0 y \frac{\delta T}{\delta y} \right] = - \frac{2 P_s}{\delta \rho C_p} \exp(-2 y/\delta) \quad (\text{III.26})$$

Une première intégration donne :

$$\frac{\delta T}{\delta y} = \frac{P_s}{\alpha v_0 \rho C_p} \frac{\exp(-2 y/\delta)}{y} + \frac{C}{y} \quad (\text{III.27})$$

C étant une constante d'intégration. On intègre une seconde fois entre  $y = \delta' th$  et  $y$  :

$$T = T(y = \delta' th) + \frac{P_s}{\alpha v_0 \rho C_p} \int_{\delta' th}^y \frac{\exp(-2y/\delta)}{y} dy + C \log \frac{y}{\delta' th} \quad (III.28)$$

On détermine la constante C en écrivant que pour  $y = \delta' th$ , les deux distributions III.23 et III.28 coïncident et en particulier que leurs dérivées sont égales :

$$\frac{P_s}{\alpha v_0 \rho C_p} \frac{\exp(-2\delta' th/\delta)}{\delta' th} + \frac{C}{\delta' th} = \frac{P_s}{\chi \rho C_p} \exp(-2\delta' th/\delta) \quad (III.29)$$

En remplaçant  $\delta' th$  par son expression II.19, il vient immédiatement :

$$C = 0 \quad (III.30)$$

En résumé, le profil de température dans la charge est donné par :

$$y \leq \delta' th \quad T = T_s + \frac{P_s \delta}{2k} (1 - e^{-2y/\delta}) \quad (III.31)$$

$$y \geq \delta' th \quad T = T(y=\delta' th) + \frac{P_s \delta' th}{k} \int_{\delta' th}^y \frac{\exp(-2y/\delta)}{y} dy \quad (III.32)$$

$$\text{et } \delta' th = \frac{1}{\alpha} \frac{\chi}{v_0}$$

Pour valeur du coefficient  $\alpha$ , nous prenons celle donnée par LEVITCH [24] qui est égale à 0,085. Ainsi, nous avons tracé sur la figure 42 le profil de température pour un acier liquide. Le nombre de Prandtl étant plus petit que l'unité, l'épaisseur de la sous-couche visqueuse  $\delta_0$  est plus petite que  $\delta' th$  comme nous l'avons indiqué sur la figure.

On peut considérer que pour  $y > \delta$ , la température de la charge est à peu près uniforme et égale à  $T_c$ , température moyenne du métal liquide. L'expression III.32 donne :

$$\Delta T_2 = T_c - T(y=\delta' th) = \frac{P_s \delta' th}{k} \int_{\delta' th}^{\delta} \frac{\exp(-2y/\delta)}{y} dy \quad (III.33)$$

En utilisant III.24 et III.33, on obtient la différence  $\Delta T$  entre la température moyenne  $T_c$  et la température à la surface de la charge :

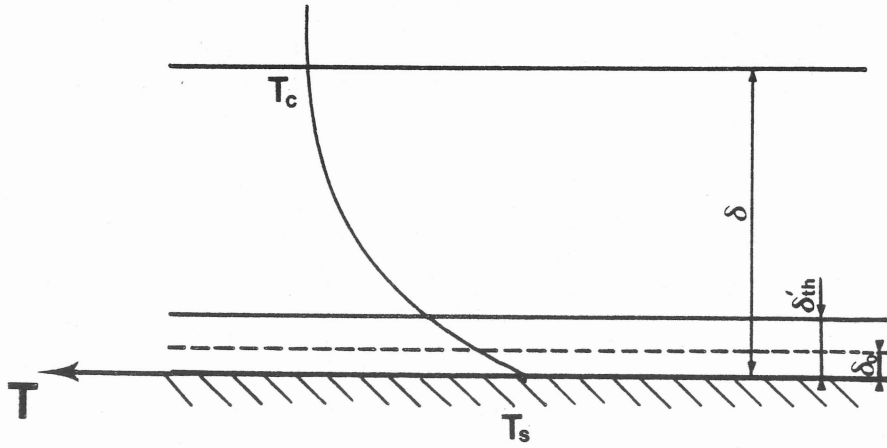


Figure 43 - Surchauffe du métal par rapport à la température de surface en fonction de la puissance surfacique transmise.

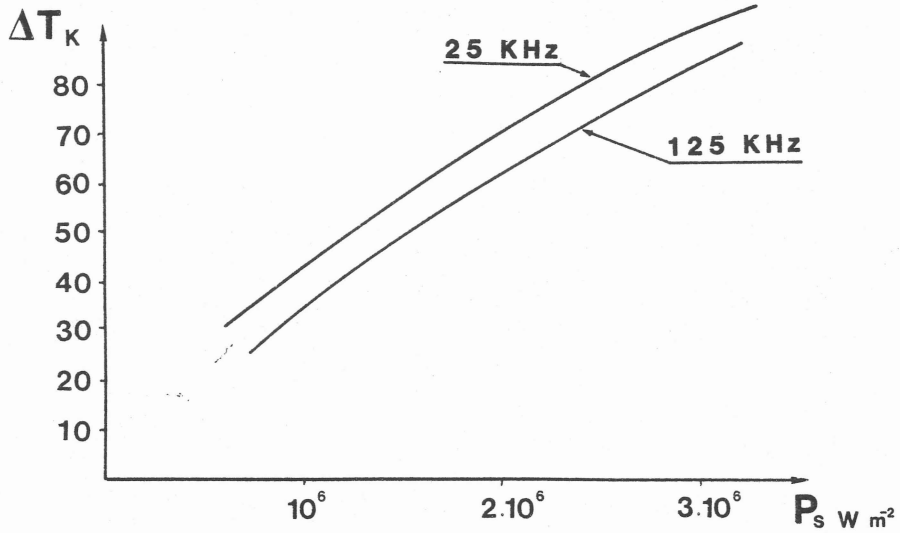


Figure 42 - Profil de température dans l'acier liquide.

$$\Delta T = T_C - T_S = \frac{P_S}{k} \left[ \delta \left( \frac{1 - e^{-2\delta'_{th}/\delta}}{2} \right) + \delta'_{th} \int_{\delta'_{th}}^{\delta} \frac{\exp(-2y/\delta)}{y} dy \right] \quad (\text{III.34})$$

$\Delta T$  est ainsi relié à la puissance par unité de surface  $P_S$  injectée dans la charge par courants de Foucault et à la vitesse moyenne  $U$  dans le métal liquide par l'intermédiaire de  $\delta'_{th}$ .

Nous avons tracé, sur la figure 43, la différence  $\Delta T = T_C - T_S$  en fonction de la puissance injectée  $P_S$  par unité de surface pour une charge en acier (de résistivité électrique  $100 \mu\Omega\text{cm}$  et conductivité thermique  $13 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ) et pour des fréquences de 125 KHz et 25 KHz. Les différentes valeurs de  $U$  et  $\delta'_{th}$  sont calculées à partir des expressions III.15 et III.19.

Les deux courbes ont même allure mais pour une même puissance  $P_S$ ,  $\Delta T$  est légèrement supérieure à moyenne fréquence d'environ 6 à  $8^\circ\text{C}$ .

## III.2. Analyse des transferts thermiques

### III.2.1. Introduction et hypothèses

Nous avons vu, au chapitre II, que les pertes par rayonnement à la surface de la charge et par conduction vers le fond refroidi ne représentaient, dans nos essais, pas plus de 15 % des pertes totales. Les 85 % restantes sont les pertes par conduction vers les parois du creuset. Si  $R$  est la résistance thermique entre la charge fondue et la surface en cuivre des secteurs, on a :

$$T_C - T_0 = R \phi \quad (\text{III.35})$$

où  $T_C$  est la température au centre de la charge,  $T_0$  celle des secteurs du creuset et  $\phi$  le flux thermique suivant la direction radiale. On remarque que la température  $T_0$  est contrôlée par le flux  $\phi$  et le débit d'eau de refroidissement des secteurs : le calcul détaillé est effectué au chapitre IV ; de façon générale, le débit doit toujours être suffisant pour que  $T_0$  ne dépasse pas  $200^\circ\text{C}$  pour éviter d'abimer ou même de percer le creuset (cf § IV).

Les résultats des essais ont montré que la température de la charge  $T_C$  varie très lentement avec la puissance injectée : si on double la puissance injectée donc aussi le flux  $\phi$ ,  $T_C$  n'augmente que d'environ  $30^\circ\text{C}$  (Fig. 38). Ces faibles surchauffes montrent que la résistance thermique  $R$  n'est pas constante mais au contraire, qu'elle diminue fortement quand le flux thermique augmente.



Le but de l'analyse qui va suivre est de montrer comment la résistance thermique  $R$  varie avec le flux thermique et ainsi, d'expliquer les difficultés à surchauffer la charge dans le cas de fusion en présence de laitier ou non.

Afin de nous ramener à un problème simple à une dimension, nous faisons un certain nombre d'hypothèses. Nous admettons que l'échange par conduction entre la charge liquide et les secteurs du creuset est réparti uniformément sur les parois latérales sur une hauteur  $H$  indépendante de la puissance injectée. Cette hypothèse suppose essentiellement deux choses :

- lors de la fusion avec laitier, celui-ci est réparti uniformément sur la surface latérale de la charge ; son épaisseur  $y$  est constante,

- les variations de la hauteur du dôme lorsque la puissance injectée varie n'influent pas ou très peu sur la hauteur  $H$  d'échange.

Nous avons représenté sur la figure 44a la configuration réelle de la charge dans le creuset pour les essais à 125 KHz. L'épaisseur de la croûte solide de laitier a été mesurée sur les lingots refroidis : elle est de l'ordre de 3/10 mm à 6/10 mm sauf au niveau du dôme où elle peut faire plusieurs millimètres.

Pour notre modèle thermique, nous considérons (Figure 44b) que l'épaisseur de laitier est constante sur toute la hauteur  $H = 35$  mm d'échange et on néglige le flux thermique au niveau du dôme (qui est faible étant donnée l'épaisseur importante de laitier).

Pour les essais en moyenne fréquence, nous avons vu au chapitre III.1.1. que la surface libre est très instable. On peut considérer, compte tenu des fluctuations de la position de la charge, qu'il y a un contact moyen avec le creuset ou le laitier solide, tel que l'échange est uniforme sur la presque totalité de la hauteur de la charge ; on prend donc une valeur de  $H$  constante et égale, comme en haute fréquence, à 35 mm.

Remarque : on peut remarquer qu'il ne peut pas y avoir de couche de laitier liquide entre la charge fondue et le laitier solide au-dessous du dôme puisque la pression du métal y est telle que le laitier liquide est repoussé vers la surface. Cependant, cela n'exclut pas qu'il puisse exister, au-delà du front de solidification du laitier, une pellicule très mince de laitier visqueux qui assure un certain gradient.

### III.2.2. Etude des transferts thermiques : cas de fusion avec laitier

Etant donné le brassage électromagnétique très efficace dans le métal liquide, nous avons montré au chapitre III.1.3. que l'on peut y considérer la température uniforme

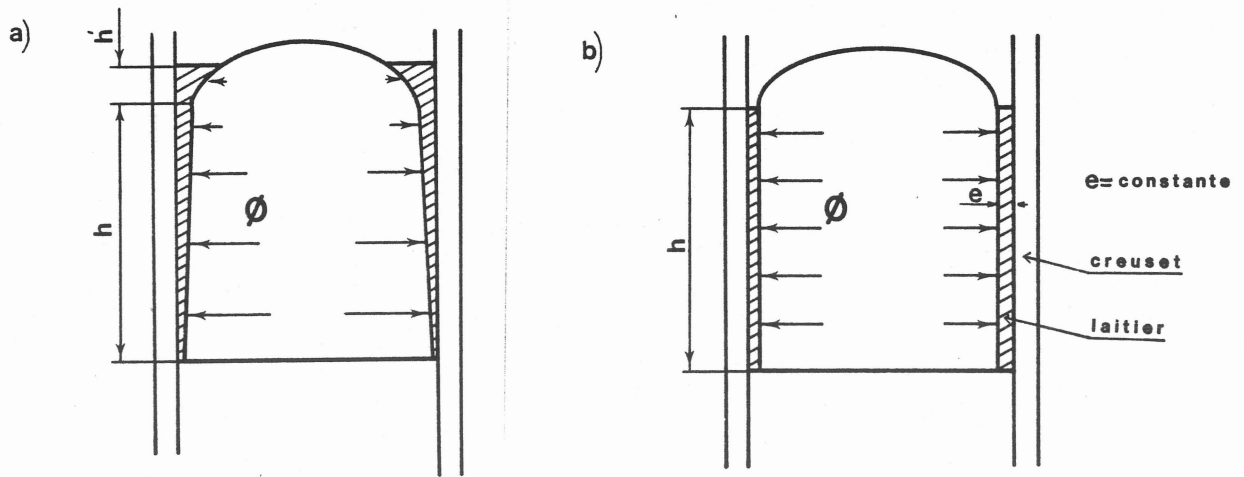


Figure 44 - Configuration de la charge dans le creuset.  
 a) Réelle  
 b) Choisie pour le modèle.

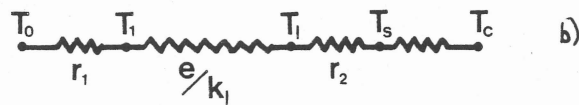
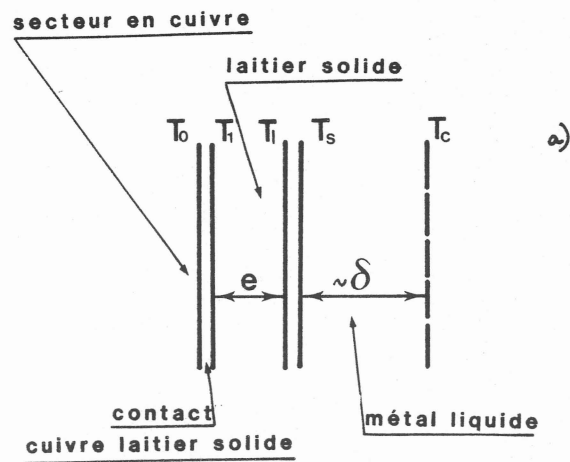


Figure 45 - Schématisation des barrières thermiques entre le métal liquide et le creuset.

sauf dans une couche très fine à la surface de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau  $\delta$ . Nous avons schématisé sur la figure 45a les différentes barrières thermiques entre le métal liquide de température moyenne  $T_c$  et la surface du creuset refroidi à la température  $T_0$ . Sur la figure 45b, nous avons représenté les résistances thermiques équivalentes. On rencontre successivement :

- une résistance thermique de contact cuivre-laitier solide  $r_1$  qui assure un gradient amenant la surface du laitier à la température  $T_1$ ,

- une épaisseur  $e$  de laitier solide de résistance thermique  $e/k_e$  ( $k_e$  étant la conductivité thermique du laitier solide) ; la température de surface du laitier côté charge  $T_e$  est fixée puisque c'est la température de solidification du laitier,

- une résistance thermique  $r_2$  entre la surface du laitier solide à la température  $T_e$  et celle du métal liquide à la température  $T_s$ . Cette résistance  $r_2$  peut être soit une couche microscopique de laitier liquide (cf remarque 1), soit une croûte de métal solide, soit les deux. Dans tous les cas,  $r_2$  est toujours faible devant la résistance constituée par la couche de laitier solide, ce qui signifie en d'autres termes que  $r_2$  ne peut pas assurer un gradient très important ; nous en discuterons plus en détail dans la suite.

- la résistance thermique dans le métal liquide qui assure le gradient entre  $T_s$  et  $T_c$  ; le calcul de  $T_c - T_s$  a été donné précédemment dans le paragraphe III.1.3.

L'existence d'une température imposée  $T_e$  au front de solidification du laitier liquide a des conséquences très importantes sur la résistance thermique totale  $R$  et sur la surchauffe de la charge. En effet, nous allons voir qu'une augmentation de puissance injectée a pour conséquence de diminuer l'épaisseur  $e$  de laitier solide donc la résistance thermique  $e/k_e$ .

De plus, le fait que  $T_e$  soit toujours inférieure à la température de fusion  $T_m$  du métal autorise l'existence d'une croûte de métal solidifié : dans cette hypothèse, la température de surface  $T_s$  du métal liquide est imposée et égale à  $T_m$  et la surchauffe n'excède pas une centaine de degrés (Fig. 43).

Dans une première étape, nous allons évaluer  $r_1$  et  $e/k_e$  puis ensuite, pour calculer la surchauffe de la charge liquide, nous envisagerons successivement le cas où une croûte de métal solidifié existe et celui où elle n'existe pas.

#### Evaluation de $e$ et $r_1$

En régime stabilisé, on peut écrire, par définition de  $r_1$  et  $e/k_e$  :

$$T_e - T_0 = \left( r_1 + \frac{e}{k_e} \right) \phi \quad (\text{III.36})$$

La température de surface du creuset  $T_0$  est faible devant  $T_e$  ( $T_0 < 200^\circ\text{C}$  ;  $T_e > 1250^\circ\text{C}$ ) et on peut considérer que la différence  $T_e - T_0$  varie très peu lorsque le flux  $\phi$  varie.

La relation (III.36) montre que lorsque le flux thermique  $\phi$  augmente,  $T_e - T_0$  et  $r_1$  étant sensiblement constants, c'est le terme  $\frac{e}{k_e}$  qui diminue. L'épaisseur de la couche de laitier solide entre les parois du creuset et la charge est donc imposée par le flux  $\phi$ .

La valeur de la résistance de contact  $r_1$  ne peut pas être déterminée autrement que par une méthode expérimentale. Pour cela, nous avons effectué des essais pour lesquels, une fois la température de l'acier stabilisée au niveau de puissance souhaité, on coupe brutalement la puissance : on mesure ensuite, sur le lingot refroidi, l'épaisseur de laitier solidifié sur les parois latérales de la charge. Il n'est pas possible d'effectuer des mesures très précises, compte tenu de la non régularité de la couche de laitier et des valeurs pas toujours très fiables de leurs conductivités. Néanmoins, pour des essais avec les laitiers 1 et 2, nous avons mesuré une épaisseur moyenne de 0,45 mm pour une puissance injectée de 12 kW. Ainsi, en prenant :

$$\phi = 220 \text{ W/cm}^2 \quad T_e = 1545^\circ\text{C} \quad T_0 = 420^\circ\text{C} \quad k_e = 1,4 \text{ W/m}^2\text{K}$$

on trouve :

$$r_1 = \frac{T_e - T_0}{\phi} - \frac{e}{k_e} = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ S.I.}$$

Les essais avec les autres laitiers ont donné des valeurs sensiblement égales de  $r_1$  et nous retiendrons pour  $r_1$  :  $r_1 \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ S.I.}$

Pour conclure, l'épaisseur  $e$  de laitier est donc donnée par la relation :

$$e = \left[ \frac{(T_e - T_0)}{\phi} - 2 \cdot 10^{-4} \right] k_e \quad (\text{III.37})$$

et la résistance thermique entre la surface du creuset et le front de solidification est simplement :  $\frac{T_e - T_0}{\phi}$ .

#### Calcul de la surchauffe : cas où il existe une croûte de métal solide

Dans cette hypothèse, la résistance  $r_2$  est composée d'une part d'une résistance de contact métal solide-laitier solide  $r'_1$  et d'autre part de l'épaisseur  $e'$  de métal solide.

Ce cas est relativement simple puisque la température de l'interface métal solide-métal liquide est fixe et égale à la température de fusion de l'acier  $T_m$ . L'épaisseur de métal est alors imposée par le flux suivant la relation :

$$e' = \left( \frac{T_m - T_e}{\phi} - r'_1 \right) k_m \quad (\text{III.38})$$

où  $k_m$  est la conductivité thermique du métal solide.

La température de la charge est donnée par la relation III.34 où  $T_s = T_m$  :

$$T_c = T_m + \frac{P_s}{k} \left[ \delta \frac{(1 - e^{-2\delta' th/\delta})}{2} + \delta' th \int_{\delta' th}^{\delta} \frac{\exp(-2y/\delta)}{y} dy \right] \quad (\text{III.39})$$

avec :

$$P_s = \frac{P_i - P_r - P_f}{2 \pi R H}$$

où  $P_i$  est la puissance injectée dans la charge,  $P_r$  et  $P_f$  les pertes sur la surface et vers le fond refroidi et  $R$  le rayon de la charge.

Le profil de température entre la surface du secteur et la charge liquide est représenté sur la figure 46 pour deux valeurs de  $P_s$ . On constate que lorsque  $P_s$  double, l'épaisseur  $e$  de laitier solide est diminuée par un facteur 2,5 et la résistance thermique totale  $R$  décroît donc fortement. La surchauffe, assurée par le gradient thermique dans le métal liquide, varie très peu.

Nous avons tracé sur la figure 47, les valeurs de  $T_c$  calculées par la relation (III.39) en fonction de la puissance injectée dans la charge  $P_i$ , ainsi que les points expérimentaux des essais à 25 KHz et à 125 KHz.

Dans le cas des essais à moyenne fréquence, les courbes expérimentales obtenues (Fig. 38) sont indépendantes du laitier utilisé et de plus, l'accord avec la courbe théorique est assez bon : l'hypothèse d'une croûte (même très fine) de métal solide à la surface semble donc justifiée et expliquer les faibles surchauffes observées.

Par contre, dans les essais à haute fréquence, l'influence du choix de laitier est assez nette surtout à forte puissance, ce qui laisse penser qu'à faible puissance, la croûte de métal solide peut exister mais qu'elle disparaît lorsque le flux thermique devient assez important. On remarque que les courbes théoriques prévoient une surchauffe plus faible à 125 KHz qu'à 25 KHz, ce qui est effectivement observé pour les petites valeurs de  $P_i$ .

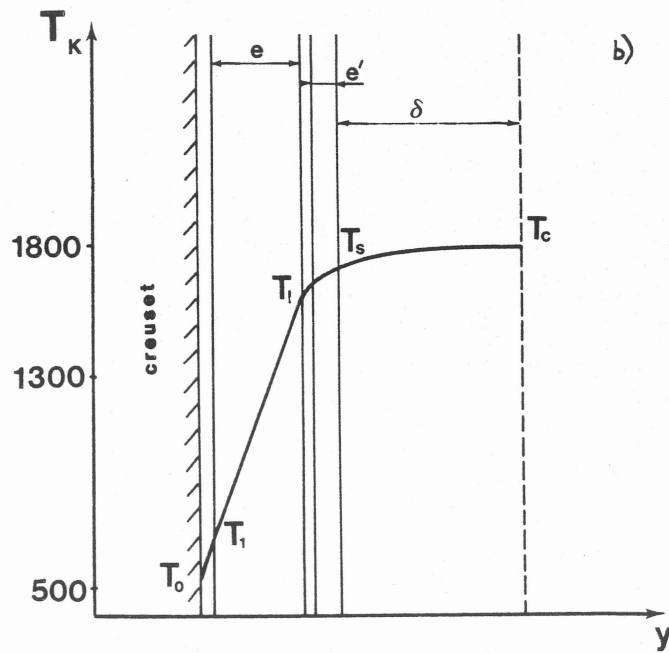
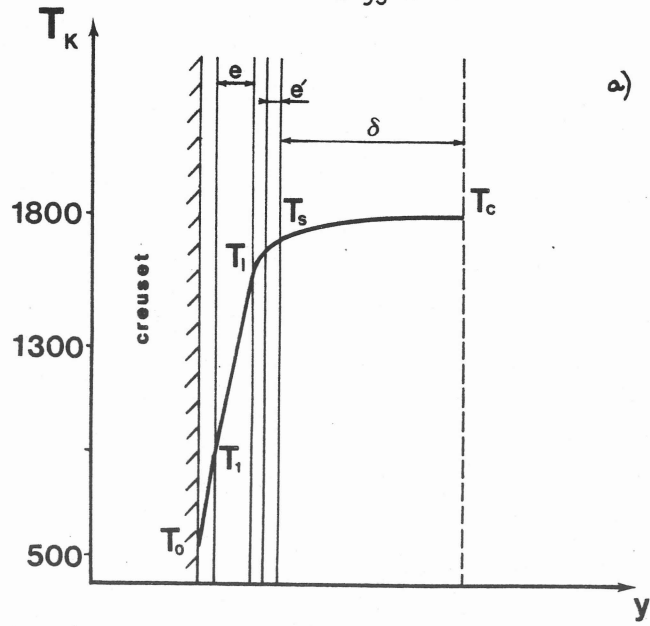


Figure 46 - Profil de température entre la surface du secteur et la charge liquide pour deux valeurs de  $P_s$  :

- a)  $P_s = 2 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$
- b)  $P_s = 10^6 \text{ W/m}^2$

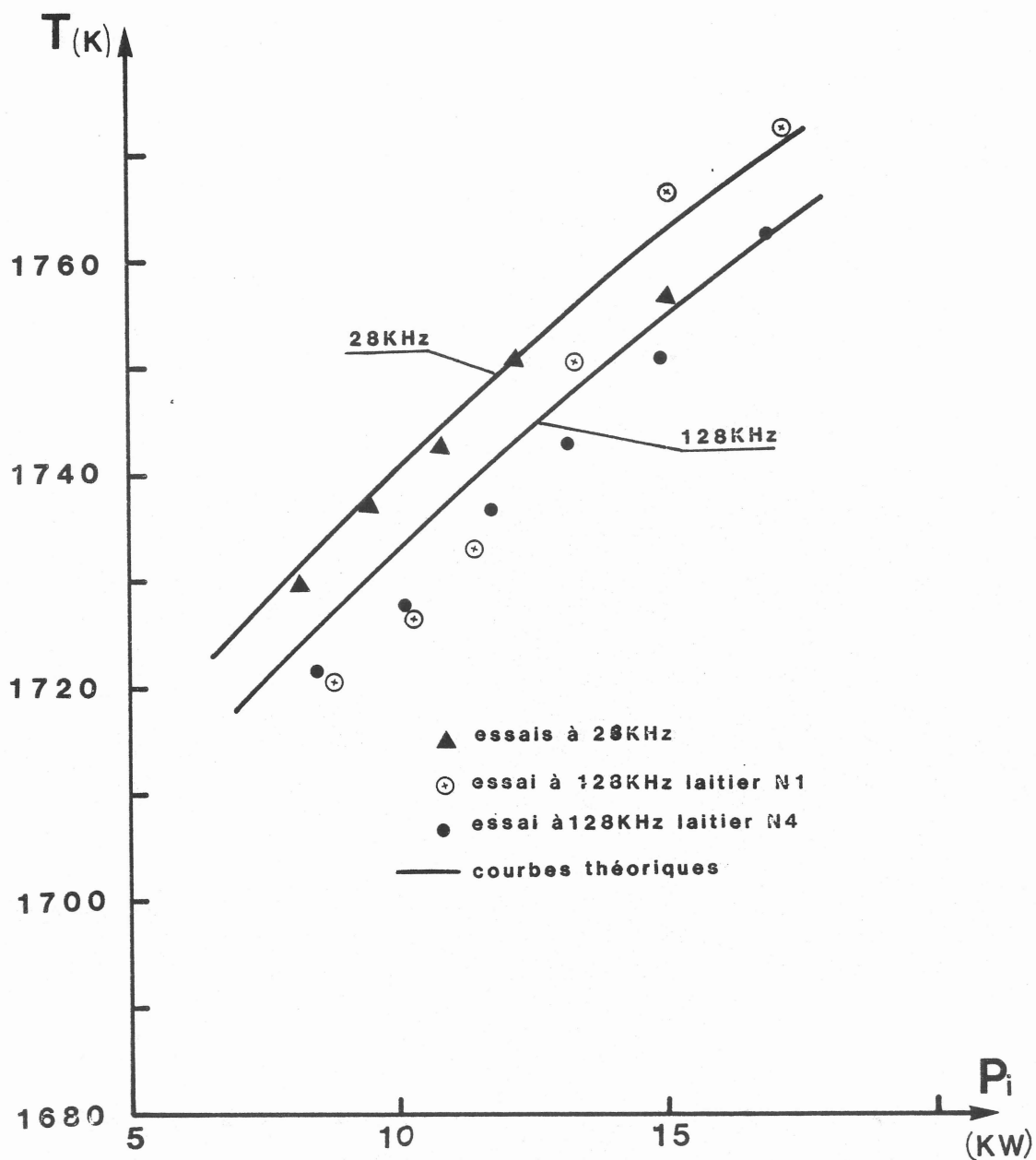


Figure 47 - Courbes théoriques et points expérimentaux représentatifs de la température de la charge en fonction de la puissance qui lui est transmise.

Calcul de la surchauffe : cas où il n'y a pas de pellicule de métal solidifié

La température de surface de la charge liquide  $T_s$  est alors supérieure à la température de fusion de l'acier  $T_m$  (1410°C). On peut donc s'attendre à des surchauffes plus importantes : en effet,  $T_c$  est toujours donnée par la relation III.34 et par rapport au cas où il y a une croûte de métal solide, l'élévation supplémentaire est égale à  $T_s - T_m$ .

Le gradient entre la température de solidification du laitier  $T_e$  et  $T_s$  est alors assuré par une couche très fine de laitier liquide dont un ordre de grandeur de l'épaisseur  $l$  est donné par :

$$l = \frac{T_s - T_e}{\phi} \times k_l$$

où  $k_l$  est la conductivité thermique du laitier liquide. En prenant  $k_l = 10^{-1}$  S.I. (valeur intermédiaire entre la conductivité du laitier solide et liquide), on trouve  $l \sim 5 \mu\text{m}$ . En conséquence, il s'agit d'une couche microscopique dont il est très difficile de définir les caractéristiques du point de vue thermique.

Néanmoins, dans cette hypothèse, la surchauffe de la charge peut dépendre de la composition chimique du laitier et expliquer les différentes courbes obtenues à 125 KHz.

Remarque : En réalité, il est probable que la surface du métal est dans un état instable oscillant entre un état solide et liquide. La température de surface du métal n'est dans ces conditions jamais très différente de sa température de fusion.

III.2.3. Etude des transferts thermiques : cas de fusion sans laitier

Des essais ont été effectués avec des charges en acier de même diamètre que le creuset de sorte qu'il y avait un assez bon contact au départ entre la charge et les secteurs refroidis : la fusion dans ces conditions s'est révélée très difficile, voire impossible avec les puissances utilisées. Par contre, lorsque la charge avant fusion n'est pas en contact avec le creuset, la fusion ne pose pas de problème et les températures atteintes sont du même ordre de grandeur que dans les essais avec laitier ; on note qu'on retrouve sur la surface latérale de la charge et du creuset une fine poudre de fer.

Ces observations semblent montrer que la poudre de fer joue un rôle analogue à celui du laitier et augmente la résistance thermique entre la charge et les secteurs du creuset. On peut alors supposer qu'une couche de métal solide existe soit de façon permanente, soit de façon instable et la température de la charge est calculée avec la relation III.39 ; les courbes théoriques sont celles de la figure 47.



#### IV - CALCUL DE LA TEMPERATURE DU CREUSET

Dans les installations de fusion en creuset froid, il est important que la température des secteurs refroidis ne s'élève pas trop afin d'éviter une ébullition de l'eau qui pourrait entraîner une surchauffe locale des secteurs et un risque de percer le creuset. L'eau de refroidissement des secteurs étant sous pression et circulant à grande vitesse, les températures limites admissibles pour le creuset sont de l'ordre de 200°C.

Dans le cas où les secteurs sont refroidis indépendamment les uns des autres, on peut se limiter à l'étude d'un unique secteur, représenté sur la figure 48b : il s'agit d'un tube à section rectangulaire d'épaisseur  $e$  à l'intérieur duquel circule l'eau à la vitesse  $U$ . La quantité de chaleur évacuée par l'eau a deux origines :

- d'une part elle provient des pertes par conduction, de valeur  $Q_1$  par unité de surface, de la charge vers les secteurs. Ces pertes sont localisées sur la face  $b_1b'_1$  et sur la hauteur  $H$  de la charge,

- d'autre part, l'énergie dissipée par effet Joule des courants induits dans le secteur, de valeur  $Q_2$  par unité de surface, répartie uniformément sur le pourtour du secteur et sur la hauteur de l'inducteur prise égale à  $H$ .

Etant donnée la symétrie du problème, on peut se limiter à l'étude d'un demi-secteur  $a_1b_1c_1d_1$ . Pour des raisons de simplicité, on déroule le demi secteur de façon à transformer le contour polygonal  $a_1b_1c_1d_1$  en un segment de droite (Fig. 49).

La surface ainsi déroulée du secteur est divisée en trois zones :

- dans le rectangle  $a_1a_2b_2b_1$ , l'énergie  $Q$  apportée par unité de surface est due à la contribution des pertes de la charge et des courants induits dans les secteurs ; elle est égale à :

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (IV.1)$$

- dans le rectangle  $b_1b_2d_2d_1$ , l'énergie  $Q'$  apportée par unité de surface est uniquement due aux courants induits et donc :

$$Q' = Q_2 \quad (IV.2)$$

- sur le reste de la surface, il n'y a aucune source d'énergie.

Etant données la bonne conductivité thermique du cuivre et la valeur de l'épaisseur  $e$  des secteurs toujours faible ( $\sim 1$  mm), le gradient thermique suivant la direction  $z$  est très petit. On considère, pour la suite que la température du secteur ne varie pas dans l'épaisseur  $e$ .

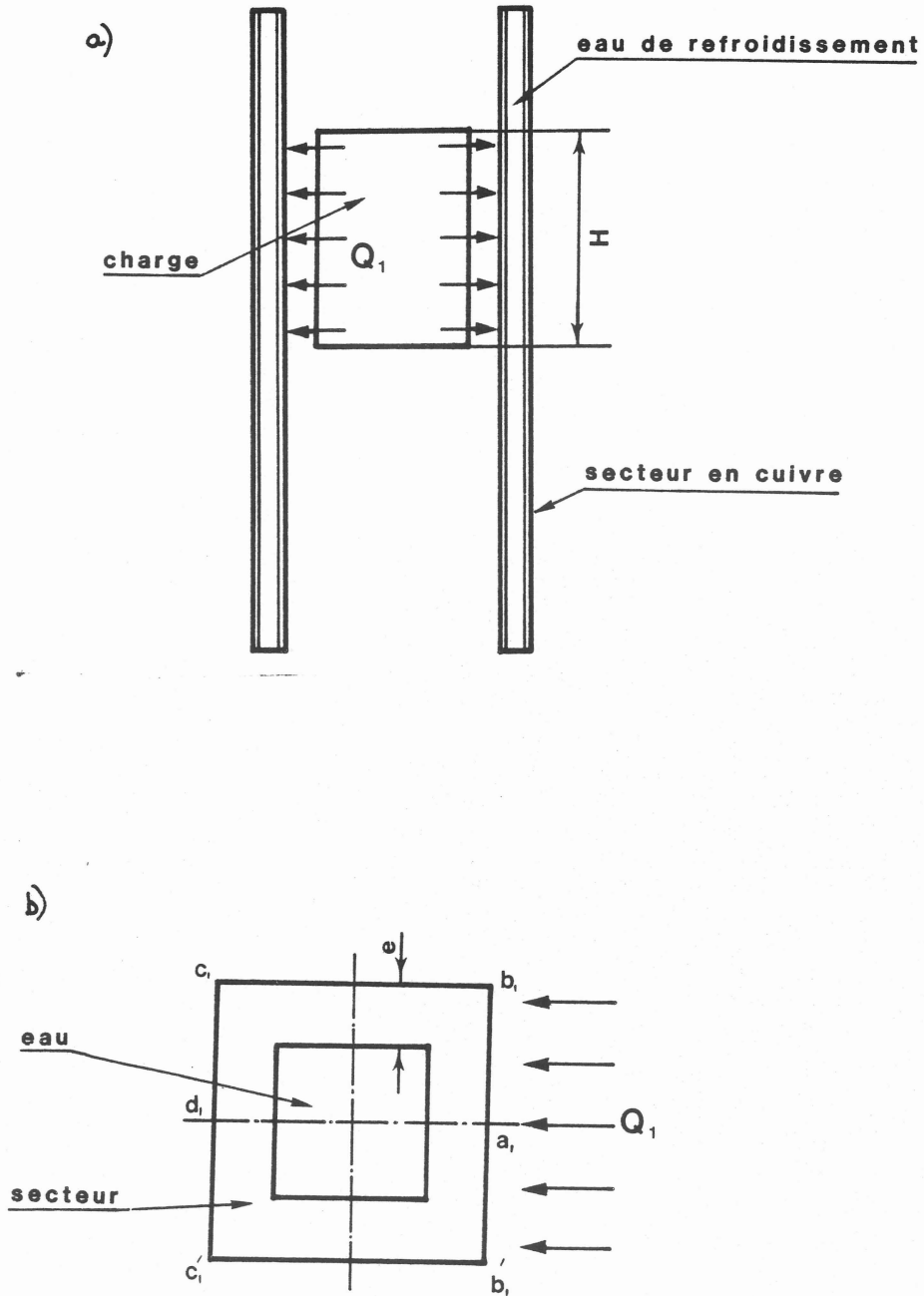


Figure 48 - Calcul de la température du creuset :  
a) Schéma du creuset et de la charge  
b) Schéma du secteur dans un plan perpendiculaire à l'axe du creuset.

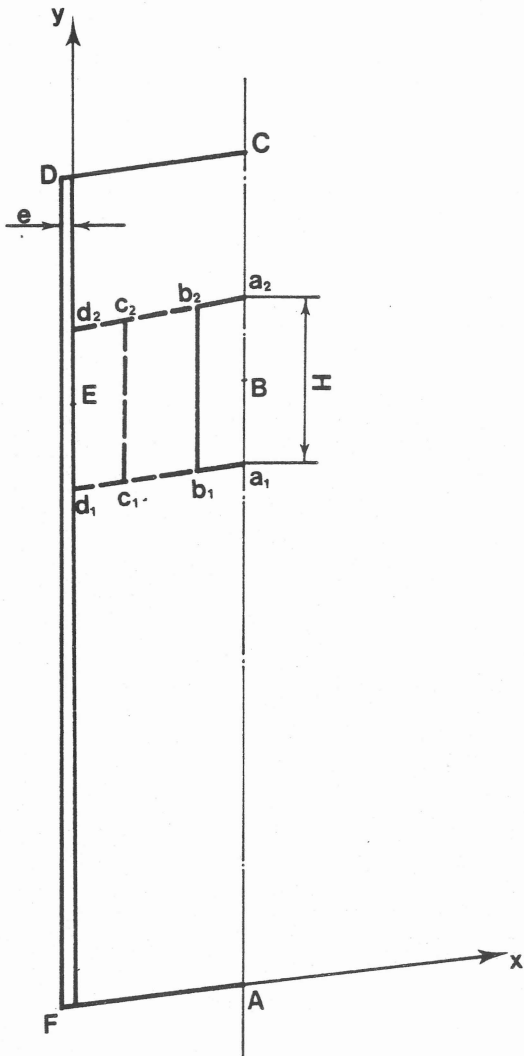


Figure 49 - Demi-secteur découlé.

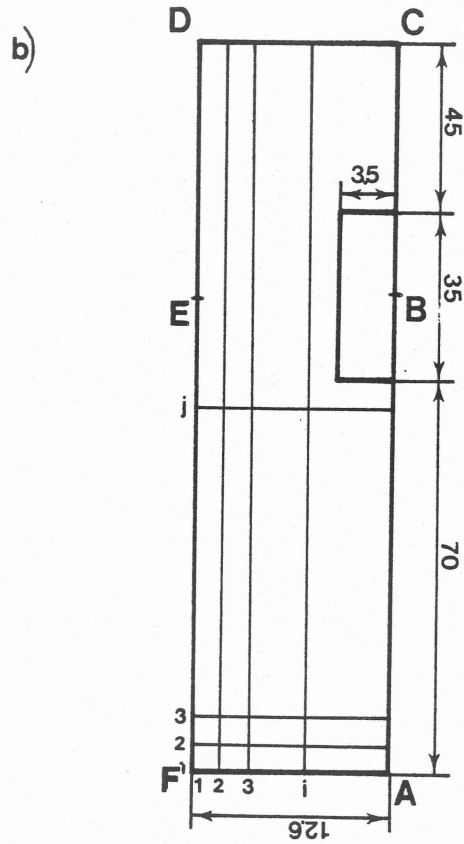
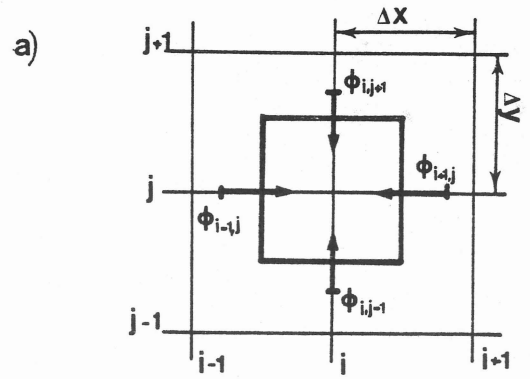


Figure 50 - Découpage du secteur en mailles.

Par contre, il faut tenir compte de la quantité de chaleur  $Q_3$  par unité de surface évacuée par l'eau. Si  $h$  est le coefficient d'échange eau-cuivre, on a :

$$Q_3 = h (T - T_{\text{eau}}) \quad (\text{IV.3})$$

où  $T$  est la température du creuset au point considéré (à déterminer),  $T_{\text{eau}}$  est la température de refroidissement.

La valeur du coefficient d'échange  $h$  est déterminée, dans le cas d'un régime d'écoulement turbulent, à partir de la relation de COLBURN [ 28 ] :

$$Nu = 0,023 P_r^{1/3} R_e^{0,8} \quad (\text{IV.4})$$

où  $R_e$  et  $P_r$  sont les nombres de Reynolds et de Prandtl et  $Nu$  le nombre de Nusselt relié à la valeur de  $h$  cherchée par la relation :

$$Nu = \frac{hD}{k_{\text{eau}}} \quad (\text{IV.5})$$

$k_{\text{eau}}$  est la conductivité thermique de l'eau et  $D$  le diamètre de la canalisation si elle est cylindrique ; dans le cas d'une canalisation rectangulaire, on prend pour  $D$  la valeur :  $D = 4 A/P$  où  $A$  est la surface de la canalisation et  $P$  son périmètre.

Ainsi, la relation IV.4 permet de calculer la valeur du coefficient d'échange  $h$  en fonction des dimensions du secteur et de la vitesse de circulation de l'eau.

Le problème thermique ainsi posé peut être résolu de façon relativement simple par une méthode numérique de différences finies.

On découpe la surface globale ACDF du secteur en un réseau de mailles rectangulaires (Figure 50) et on appelle  $T_{i,j}$  la température au noeud  $(i,j)$  (avec  $1 < i < n$  et  $1 < j < m$ ). Les équations aux différences finies pour les noeuds à l'intérieur du domaine peuvent être obtenues en écrivant le bilan thermique pour l'élément de volume de surface  $\Delta x \Delta y$  (Fig. 50a) et d'épaisseur  $e$  qui entoure le noeud  $(i,j)$ . Ce bilan exprime que la somme algébrique des flux  $P_{i,j}$  traversant la frontière de cet élément, de la puissance due aux sources  $W$  et de la puissance évacuée par l'eau, est nulle :

$$P_{i,j-1} + P_{i,j+1} + P_{i-1,j} + P_{i+1,j} - h(T - T_{\text{eau}}) \Delta x \Delta y + W = 0 \quad (\text{IV.6})$$

avec :

$$\begin{aligned} P_{i,j-1} &= R_1 (T_{i,j-1} - T_{i,j}) \\ P_{i,j+1} &= R_1 (T_{i,j+1} - T_{i,j}) \\ P_{i-1,j} &= R_2 (T_{i-1,j} - T_{i,j}) \\ P_{i+1,j} &= R_2 (T_{i+1,j} - T_{i,j}) \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les résistances thermiques égales à, si  $k_c$  est la conductivité thermique du cuivre :

$$R_1 = k_c e \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (IV.7)$$

$$R_2 = k_c e \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Ainsi, l'équation IV.6 s'écrit :

$$R_1 (T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}) + R_2 (T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - 2T_{i,j}) - h (T_{i,j} - T_{\text{eau}}) + W = 0 \quad (IV.8)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$T_{i,j} = \frac{R_1 (T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) + R_2 (T_{i-1,j} + T_{i+1,j}) + h T_{\text{eau}} + W}{2 (R_1 + R_2) + h} \quad (IV.9)$$

où :

$$W = (Q_1 + Q_2) \Delta x \Delta y \quad \text{dans le rectangle } a_1 a_2 b_2 b_1$$

$$W = Q_2 \Delta x \Delta y \quad \text{dans le rectangle } b_1 b_2 d_2 d_1 \quad (IV.10)$$

$$W = 0 \quad \text{partout ailleurs}$$

L'expression IV.9 est valable pour tous les noeuds internes au domaine tels que  $2 < i < n - 1$  et  $2 < j < m - 1$ . Pour les noeuds situés à la frontière du domaine, il faut tenir compte des conditions de surface.

#### Equation pour les noeuds situés sur la frontière

1 - Pour les noeuds tels que  $i = 1$  et  $i = n$ , la symétrie par rapport à la direction  $y$  conduit à :

$$T_{i,j} = \frac{R_1 (T_{1,j+1} + T_{1,j-1}) + 2R_2 T_{2,j} + h T_{\text{eau}} + W}{2 (R_1 + R_2) + h} \quad (IV.11)$$

$$T_{n,h} = \frac{R_1 (T_{n,j+1} + T_{n,j-1}) + 2R_2 T_{n-1,j} + h T_{\text{eau}} + W}{2 (R_1 + R_2) + h} \quad (IV.12)$$

2 - Pour les noeuds tels que  $j = 1$  et  $j = m$ , les équations donnent :

$$T_{i,1} = \frac{2R_1 T_{i+2} + R_2 (T_{i+1,1} + T_{i-1,1}) + h T_{\text{eau}} + W}{2 (R_1 + R_2) + h} \quad (\text{IV.13})$$

$$T_{i,m} = \frac{2R_1 T_{i,m-1} + R_2 (T_{i+1,m} + T_{i-1,m}) + h T_{\text{eau}} + W}{2 (R_1 + R_2) + h} \quad (\text{IV.14})$$

L'ensemble des équations IV.9, IV.11, IV.12, IV.13, IV.14 associées aux relations IV.10 constituent un système de  $m \times n$  équations à  $m \times n$  inconnues. Il existe de nombreuses méthodes de résolution d'un tel système et nous avons choisi pour l'application à notre géométrie de creuset, la méthode itérative de GAUSS-SEIDEL [28]. On se donne a priori une série de valeurs  $T_{i,j}$  puis on calcule  $T_{1,1}$  à partir de ces valeurs ; on introduit la nouvelle valeur de  $T_{1,1}$  dans l'expression de  $T_{1,2}$  et ainsi de suite. On arrête le calcul lorsqu'on observe de faibles écarts entre les valeurs successives des températures.

En application numérique nous avons découpé le secteur en rectangles tels que  $\Delta x = 1,4 \text{ mm}$  et  $\Delta y = 5 \text{ mm}$ . Les données géométriques sont indiquées sur la figure 50. La valeur de  $h$  a été calculée à partir de la relation IV.4 pour une vitesse de circulation de l'eau correspondant à celle de nos essais expérimentaux ( $V \approx 1,7 \text{ m/s}$ ) ; ainsi, on trouve  $h = 8900 \text{ W/m}^2$ . On a pris  $Q_1 = 3.10^6 \text{ W/m}^2$  et  $Q_2 = 2,3.10^5 \text{ W/cm}^2$  (correspondant à une puissance injectée dans la charge de 16 kW).

Les résultats sont donnés sous la forme de trois courbes sur la figure 51 :

- Figure 51a : la température est représentée suivant BE
- Figure 51b : la température est représentée le long de AC
- Figure 51c : la température est représentée le long de FD.

Les résultats montrent que l'échange thermique avec l'eau de refroidissement a lieu essentiellement au niveau de la charge mais que toutes les faces du secteur participent à l'échange. Au-dessous et au-dessus de la charge, la température du creuset décroît très rapidement.

Expérimentalement, on ne peut pas mesurer la température du creuset sur sa face en contact avec la charge. Par contre, sur la face extérieure du creuset (correspondant à FD sur la figure 19), on a mesuré la température à l'aide de thermopoints collés sur les secteurs pour des puissances correspondantes aux valeurs de  $Q_1$  et  $Q_2$  du programme de calcul. Les valeurs des températures mesurées sont représentées sur la figure 51c. Celles-ci sont légèrement supérieures à celles calculées mais la décroissance de la température dans la direction  $Oy$  est bien vérifiée.

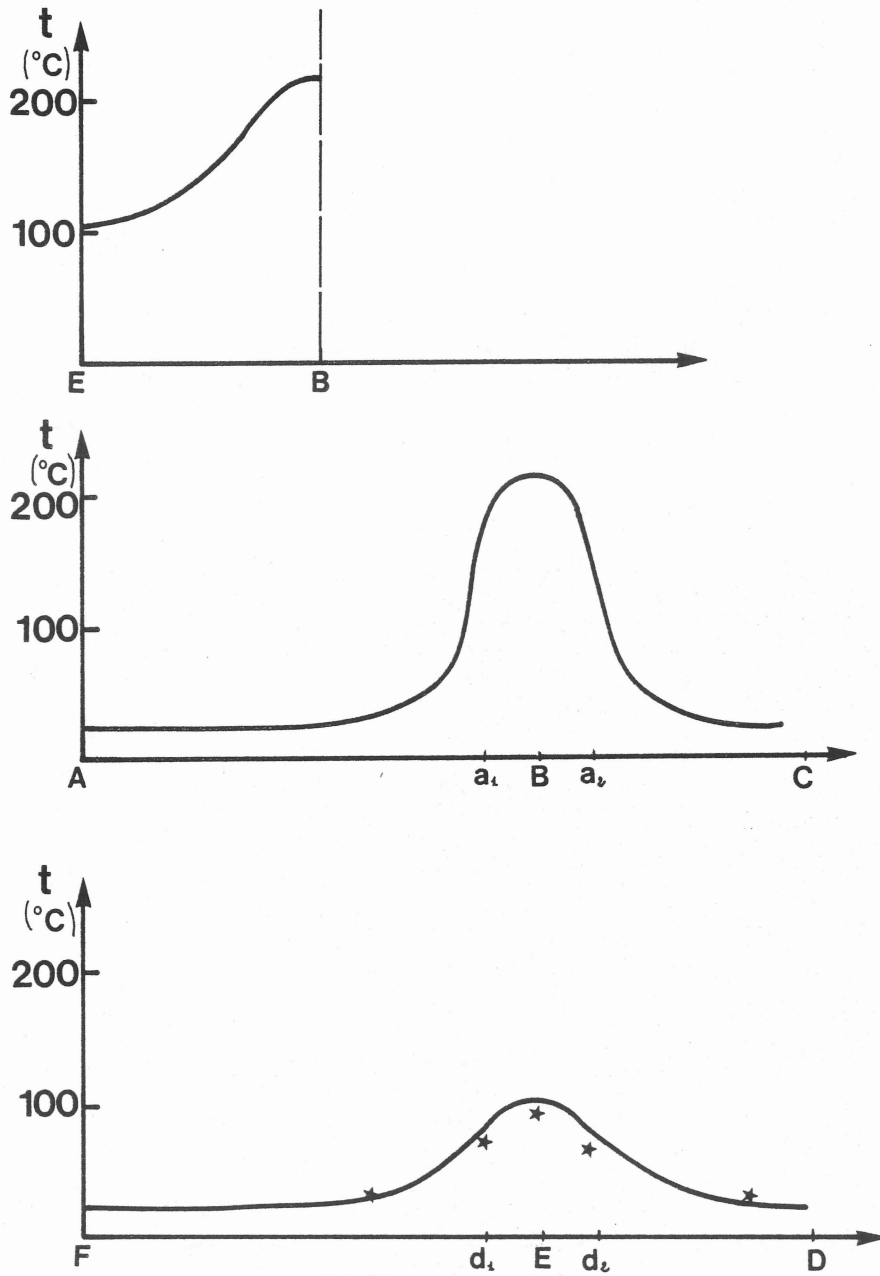


Figure 51 - Température du creuset :

- a) Suivant le demi périmètre
- b) Suivant la direction axiale à l'intérieur du creuset
- c) Suivant la direction axiale à l'extérieur du creuset  
( points expérimentaux).

Les résultats des mesures étant en accord avec les calculs sur la face externe du creuset, on peut penser que les valeurs calculées sur la face interne sont correctes. La température du creuset atteint donc localement des valeurs proches de 200°C ce qui est très probablement proche des valeurs limites admissibles.



V - QUELQUES CONSIDERATIONS SIMPLES SUR LE TIRAGE EN CONTINU DE LINGOTS

Les installations de fusion en creuset froid se prêtent facilement au tirage en continu de lingots. Le support refroidi sur lequel repose la charge est alors tiré vers le bas tandis que l'alimentation en copeaux ou en poudre est assurée par le haut. Des essais à l'échelle de laboratoire ou semi-industrielle ont montré la fiabilité de telles installations. Il semble que l'utilisation de laitier, grâce à ses qualités de lubrifiant [16], améliore de façon notable les conditions de tirage en évitant que la charge n'accroche au creuset, et en donnant des lingots ayant un état de surface de meilleure qualité.

Le choix de la vitesse de tirage est déterminée soit d'après un critère de rendement de l'installation (vitesses rapides), soit en fonction des qualités métallurgiques souhaitées du matériau (vitesses généralement lentes). Nous nous sommes limités, dans ce chapitre, à l'étude simple d'un cylindre métallique solide se déplaçant dans un inducteur suivant la direction de son axe. Même si cette configuration est assez éloignée de la fusion en creuset froid, elle permet de comprendre l'influence de la vitesse sur la distribution de température dans le lingot et sur le rendement d'une telle installation.

On considère un cylindre métallique infiniment long de rayon R se déplaçant à la vitesse  $v$  suivant l'axe d'un inducteur de longueur  $L$  (Fig. 52). On se ramène à un problème à une dimension en supposant que l'on peut négliger les variations de température suivant la direction radiale  $y$  : la température  $T(x)$  est alors uniquement fonction de la variable  $x$ .

Dans l'inducteur ( $0 < x < L$ ), la puissance active  $P_i$  transmise à la charge est supposée répartie uniformément sur la hauteur  $L$  de l'inducteur. Les pertes thermiques  $P_e$  entre la surface du cylindre et le milieu extérieur sont caractérisées par le coefficient d'échange  $h$  défini par :

$$d P_e = h dS (T(x) - T_0) \tag{V.1}$$

où  $dS$  est la surface d'échange et  $T_0$  la température du milieu extérieur supposée indépendante de  $x$ .

Dans ces conditions, en régime stabilisé, le bilan thermique d'une tranche d'épaisseur  $dx$  (Figure 53) s'écrit, si  $\rho$  est la

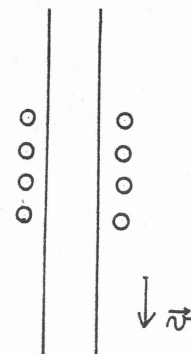


Figure 52

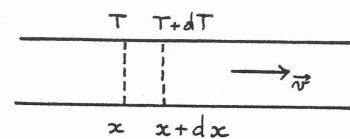


Figure 53

masse volumique du métal,  $C_p$  sa chaleur spécifique, et  $k$  sa conductivité thermique :

$$Q \, dt \, dx - \pi R^2 \rho C_p v \, dt \, dT + k \pi R^2 \left[ \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} - \frac{dT}{dx} \Big|_x \right] - h 2 \pi R \, dx (T - T_0) \, dT = 0 \quad (V.2)$$

où :

$$- Q = \frac{P_i}{L} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L$$

$$Q = 0 \quad \text{pour } x < 0 \text{ et } x > L$$

-  $\pi R^2 C_p v \, dt \, dT$  représente la différence entre l'énergie qui entre dans le volume d'épaisseur  $dx$  et celle qui sort par l'effet du mouvement du cylindre

- le troisième terme traduit l'effet de conduction thermique

- le dernier terme représente les pertes par la surface latérale avec le milieu extérieur.

L'équation V.2 se met sous la forme :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{v}{D} \frac{dT}{dx} - \frac{2h}{kR} T = \frac{1}{k\pi R^2} \left[ Q + 2 \pi R h T_0 \right] \quad (V.3)$$

avec  $D = \frac{k}{\rho C_p}$  (diffusivité thermique).

La solution du problème est obtenue en cherchant les solutions de l'équation II.3 dans les trois domaines  $x \leq 0$ ,  $0 \leq x \leq L$  et  $x \geq L$ , puis en écrivant les conditions de continuité des températures et de leurs dérivées en  $x = 0$  et  $x = L$ . La solution générale est de la forme :

$$T = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x} + \frac{Q}{2\pi R h} + T_0 \quad (V.4)$$

avec :

$$r_1 = \frac{v}{2D} \left( 1 + \left( 1 + \frac{4a}{(v/D)^2} \right)^{1/2} \right) > 0$$

$$\text{et } a = \frac{2h}{kR}$$

$$r_2 = \frac{v}{2D} \left( 1 - \left( 1 + \frac{4a}{(v/D)^2} \right)^{1/2} \right) \leq 0$$

\* pour  $x \leq 0$  : quand  $x \rightarrow -\infty$ ,  $T = T_0$  ; par conséquent  $B = 0$

$$T = A_1 e^{r_1 x} + T_0 \quad (V.5)$$

\* pour  $0 \leq x \leq L$

$$T = A_2 e^{r_1 x} + B_2 e^{r_2 x} + \frac{P_i}{2 \pi R L h} + T_0 \quad (V.6)$$

\* pour  $x \geq L$  : quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $T = T_0$  ; par conséquent  $A = 0$

$$T = B_3 e^{r_2 x} + T_0 \quad (V.7)$$

Les conditions de continuité en  $x = 0$  et  $x = L$  donnent :

$$A_1 = A_2 + B_2 + \frac{P_i}{2 \pi R L} \quad (V.8)$$

$$B_3 e^{r_2 L} = A_2 e^{r_1 L} + B_2 e^{r_2 L} + \frac{P_i}{2 \pi R L h} \quad (V.9)$$

$$A_1 r_1 = A_2 r_2 + B_2 r_2 \quad (V.10)$$

$$B_3 r_2 e^{r_1 L} = A_2 r_1 e^{r_1 L} + B_2 r_2 e^{r_2 L} \quad (V.11)$$

d'où les valeurs des constantes :

$$A_2 = \frac{P_i}{4 \pi R L h} e^{-r_1 L} \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{4a}{(v/D)^2}\right)^{1/2}} - 1 \right] \quad (V.12)$$

$$B_2 = \frac{P_i}{4 \pi R L h} \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{4a}{(v/D)^2}\right)^{1/2}} + 1 \right] \quad (V.13)$$

$$A_1 = \frac{P_i}{4 \pi R L h} \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{4a}{(v/D)^2}\right)^{1/2}} (e^{-r_1 L} - 1) + 2 - e^{-r_1 L} \right] \quad (V.14)$$

$$B_3 = \frac{P_i}{4 \pi R L h} \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{4a}{(v/D)^2}\right)^{1/2}} + 1 \right] (e^{-r_2 L} - 1) \quad (V.15)$$

En application numérique, afin d'étudier l'influence de la vitesse sur le profil de température dans le cylindre, on a pris les valeurs numériques suivantes :

$$D = 23.10^{-7} \text{ S.I.} \quad h = 1500 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad k = 40 \text{ W/m K} \quad R = 25.10^{-3} \text{ m} \quad L = 4.10^{-2} \text{ m}$$

Sur la figure 54, le profil de température est représenté pour différentes valeurs de la vitesse  $v$ . On remarque qu'aux faibles vitesses, le profil de température est symétrique par rapport au milieu de l'inducteur ce qui traduit le fait que l'effet de vitesse est négligeable devant la conduction thermique. Par contre, aux grandes vitesses, l'effet de conduction est moins sensible et les profils sont décalés vers la droite, la valeur du maximum de la température  $T_m$  diminuant assez rapidement lorsque la vitesse augmente.

L'abscisse  $x_m$  correspondant au maximum de température  $T_m$  dans le cylindre est obtenue en annulant la dérivée de l'expression V.6 :

$$A_2 r_1 e^{r_1 x_m} + B_2 r_2 e^{r_2 x_m} = 0 \quad (\text{V.16})$$

qui conduit, en remplaçant  $A_2$  et  $B_2$  par leurs expressions, à :

$$x_m = \frac{r_1 L}{r_1 - r_2} = \frac{L}{2} \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{4a}{(v/D)^2}\right)^{1/2}} + 1 \right] \quad (\text{V.17})$$

Ainsi, en remplaçant  $x$  par  $x_m$  dans l'expression V.6, on obtient la valeur de  $T_m$ . Sur la figure 55, on a représenté  $\frac{T_m - T_0}{P_i / 2\pi R h}$  en fonction de la vitesse  $v$ . Le régime où la conduction prédomine correspond au domaine où  $T_m$  est à peu près indépendant de la vitesse (faibles vitesses). Par contre, au delà d'une certaine vitesse, la température  $T_m$  décroît rapidement pour tendre vers zéro aux très grandes vitesses.

Si on désire avoir des conditions de fonctionnement d'un tel système telles que la température du lingot atteigne une température donnée  $T_{m1}$ , la courbe de la figure 55 permet de faire le lien entre la puissance transmise à la charge et la vitesse limite correspondant à ces conditions : par exemple, si l'on a  $\frac{T_{m1} - T_0}{P_i / 2\pi R h} = 0,6$ , on lit sur la courbe  $v = 10$  mm/minute ; si l'on double la puissance  $P_i$ , une vitesse de 45 mm/minute permet d'atteindre une même valeur de  $T_m$ .

Le rendement du système est d'autant plus élevé que le rapport entre la vitesse (donc aussi le débit massique) et la puissance injectée est grand. L'exemple numérique précédent montre que le rendement est augmenté par l'utilisation de grandes puissances.

Dans le cas réel de la fusion en creuset froid, la résolution du problème est beaucoup plus difficile, d'une part parce qu'il faut tenir compte de l'existence d'une

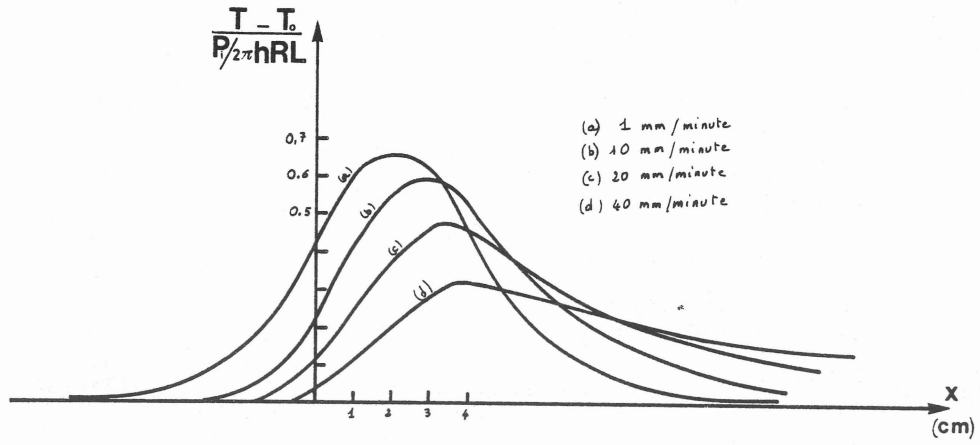


Figure 54 - Profil de température dans le cylindre pour différentes vitesses de tirage  $v$ .

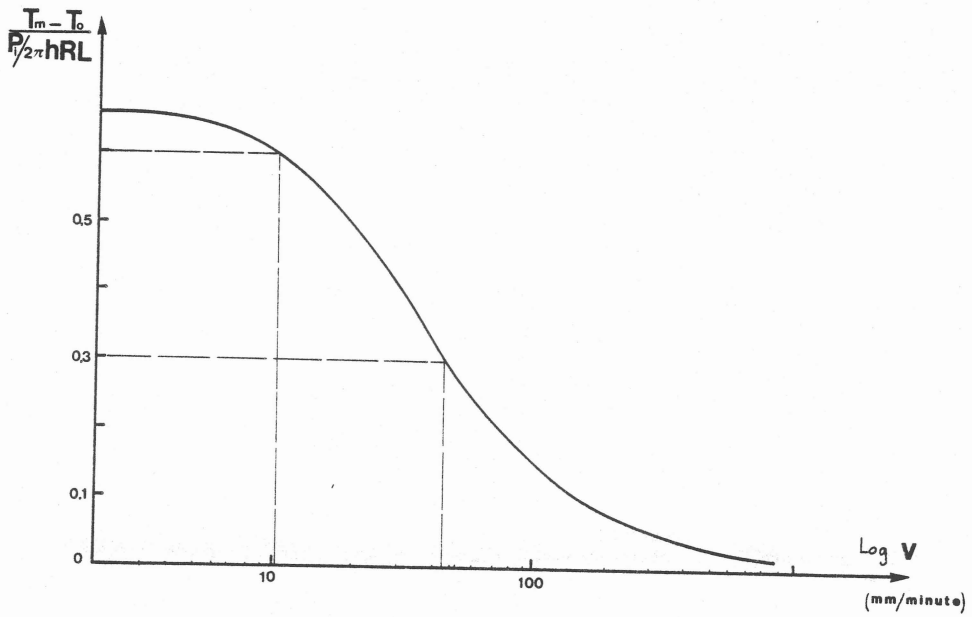
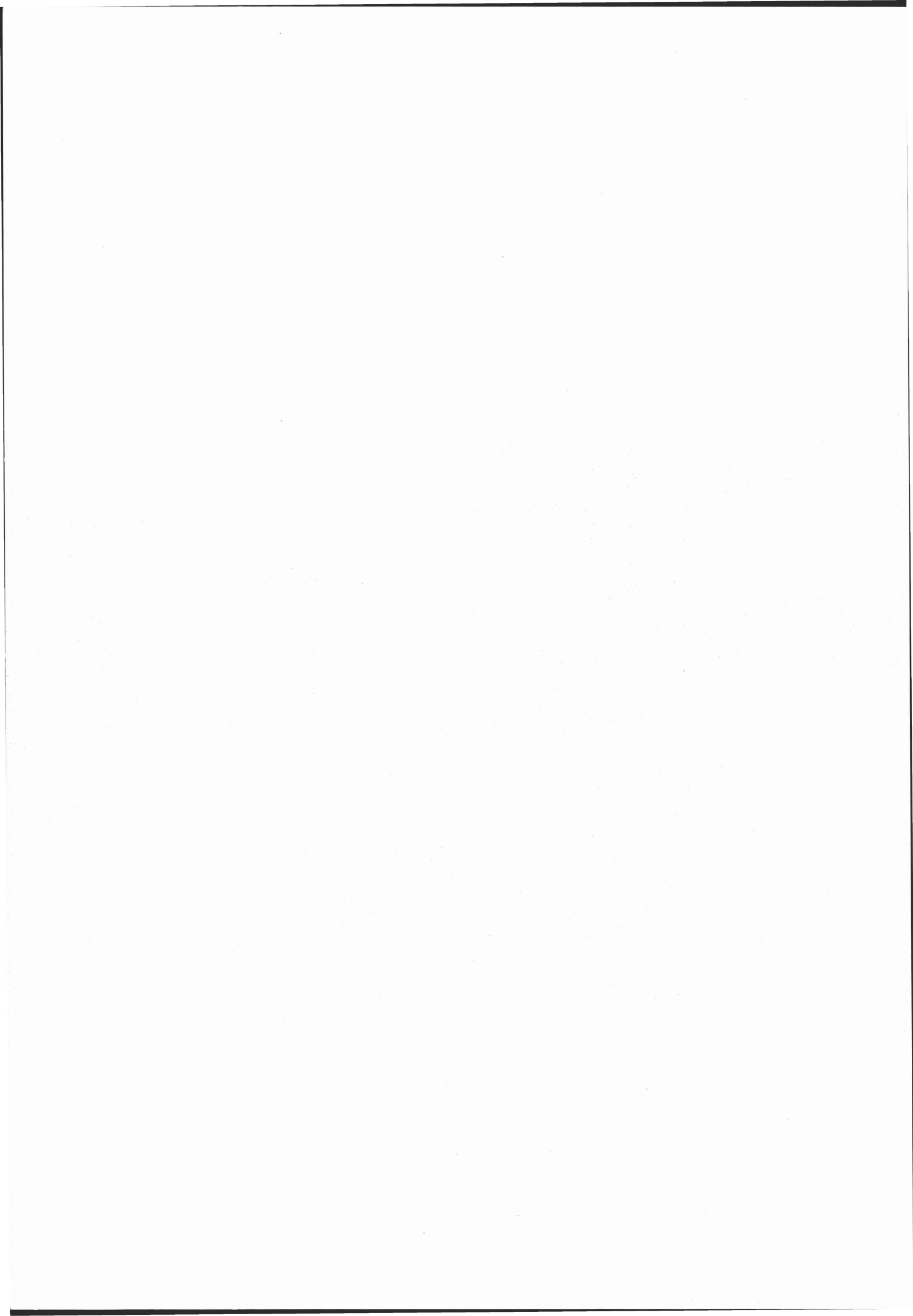


Figure 55 - Représentation de  $\frac{T_m - T_0}{\frac{\pi}{2} h R L}$  en fonction de la vitesse de tirage  $v$ .

zone liquide et de coefficients d'échange  $h$  avec le milieu extérieur différents selon le niveau dans le creuset, d'autre part car il faut tenir compte de la présence d'un puits de solidification, donc de gradients thermiques selon la direction radiale. Les méthodes de résolutions les plus appropriées d'un tel problème sont les méthodes numériques.

Néanmoins, qualitativement, on peut penser que les conclusions du modèle précédent en ce qui concerne l'influence de la vitesse sur la température du métal demeurent et entre autres, que les rendements d'une installation de fusion en creuset froid sont fortement augmentés si l'on utilise de fortes puissances. Ces conclusions ont par ailleurs été confirmées par des mesures expérimentales.



## C O N C L U S I O N

Un certain nombre de modèles simples ont permis d'étudier un système de chauffage par induction en creuset froid, tant par son aspect électrique que par son aspect thermique.

Le modèle électrique, grâce à l'analogie avec un transformateur à plusieurs secondaires, conduit au dimensionnement et à l'optimisation d'une installation de fusion de laboratoire ou industrielle. Ainsi, un certain nombre de règles pratiques facilement utilisables ont pu être définies concernant :

- le choix de la fréquence idéale compte tenu du type de matériau à chauffer,
- le rendement limite de l'installation qui est nettement plus grand pour des charges de haute résistivité,
- l'amélioration sensible du rendement lorsqu'on augmente les dimensions transversales de l'installation.

Ce calcul trouve plus particulièrement son intérêt dans le dimensionnement d'installations de grande taille où il est important, vues les puissances mises en jeu, de maîtriser l'ensemble des paramètres électriques.

L'analyse du système à creuset froid sur le plan des transferts thermiques a conduit au choix d'un modèle permettant de déterminer la température d'équilibre de la charge, en fonction de la puissance électrique injectée. Ce modèle donne une interprétation des observations expérimentales révélant l'impossibilité d'obtenir des surchauffes importantes au-dessus de la température de fusion, même à forte puissance et indépendamment de la présence d'un laitier.

L'obtention des surchauffes plus importantes (de l'ordre de quelques centaines de degrés) pourrait être assurée par suppression de tout contact physique entre le métal liquide et le creuset froid. Deux solutions mettant en jeu des forces électromagnétiques pourraient être envisagées :

- rendre "actif" le creuset froid en superposant aux courants induits horizontaux un courant vertical haute fréquence avec alternance de sens d'un secteur à l'autre. Cette configuration est du type à trou de potentiel présentant une forte raideur de centrage radiale [23] [24] [25],



- utiliser un creuset froid à fond sphérique donnant naissance à des forces de lévitation électromagnétique suffisantes pour que la charge ne soit plus en contact avec le creuset [26] [27] [9].

Dans une étape future, il nous semble intéressant d'orienter les recherches vers la détermination de la forme du puits de solidification en tenant compte des conditions expérimentales de fusion (fréquence nominale du courant, résistivité de la charge, géométrie de l'installation...). En particulier, dans le cas dynamique du tirage de lingot, la connaissance de la profondeur et de la forme de solidification est essentielle pour comprendre la structure cristallographique du métal solidifié qui conditionne les qualités métallurgiques du lingot. Parallèlement, l'étude des problèmes de diffusion, ainsi que celles des problèmes de décantation d'inclusions sur les parois et à la surface, permettraient de déterminer ce que l'on peut attendre de ces deux procédés de purification appliqués à la technique du creuset froid.

R E F E R E N C E S

- [ 1 ] Duckworth and Hoyle, Electroslag Refining, Chapman and Hall LTD (1969).
- [ 2 ] R.H. Nafziger, The electroslag melting process, U.S. Bureau of Mines, Bulletin 669, 1976.
- [ 3 ] R. Bakish, Introduction to electron beam technology, J. Wiley and Sons, Inc, New-York, London 1962.
- [ 4 ] G.H. Schippereit, A.F. Leatherman and D. Evers, J. Metals, 13, 1961.
- [ 5 ] P.G. Clites and R.A. Beall, Inductoslag melting of titanium, U.S. Bureau of Mines, R.I. 7268, 1969.
- [ 6 ] P.G. Clites and R.A. Beall, Proceedings of the 5th international symposium on electroslag and other special melting technologies, part II, oct. 1974.
- [ 7 ] A.A. Prostyakof, M.Y. Stolov, L.L. Tir, N.I. Fomin, The use of magneto-hydrodynamic phenomena and devices-progressive way of improvement in induction melting furnaces Congrès electrotechnique mondial, juin 1977, Moscou-Section A4.
- [ 8 ] V.I. Dobrovolskeya, D.G. Ratnikov, A.N. Shamov, High frequency equipment for the production of semi conductive and other materials in highly purified state, Congrès electrotechnique mondial, juin 1977, Moscou, section A4.
- [ 9 ] B.A. Smith, Some aspects and the design of construction of the cold crucible, Mat. Res. Bull. Vol. 14, 1974.
- [ 10 ] N.R. Stansel, Induction heating, Mac Graw Hill Book Company, 1949.
- [ 11 ] G.H. Brown, C.N. Hoyler, R.A. Bierwirth, Theory and application of radio frequency heating, D. Van Nostrand Company, 1947.
- [ 12 ] S. Duperrier, Pratique du chauffage électronique, Ed. Chiron, 1952.
- [ 13 ] R. Ernst, Analyse du fonctionnement d'un générateur à triode destiné au chauffage par induction, Revue Générale d'Electricité, sept. 1981.

- [ 14 ] R. Alberny, D. Amaury, La lingotière de coulée continue de brames et son bilan thermique, Revue de métallurgie, juillet-août 1976.
- [ 15 ] M. Larrecq, C. Saguez, M. Wanin, Modèle mathématique de la solidification en coulée continue, Revue de métallurgie, juin 1978.
- [ 16 ] P.V. Riboud et M. Larrecq, Lubrification et transferts de chaleur dans la lingotière de coulée continue, Revue de métallurgie, janvier 1981.
- [ 17 ] Slag Atlas, Verlag Stahleisen M.B.H. Düsseldorf.
- [ 18 ] Physical properties of slags, Final Report, N.P.L., 1979.
- [ 19 ] R. Moreau, On flows drivers by alternative magnetic fields, 2nd Bat-Sheva Seminar on MHD Flow and turbulence, 1978, ed. H. Branover (Israël Univ. Press, 1980).
- [ 20 ] J.N. Barbier, Y.R. Fautrelle, J.W. Evans, P. Cremer, Simulation numérique des fours chauffés par induction, Journal de Mécanique théorique et appliquée (à paraître).
- [ 21 ] Y.R. Fautrelle, Analytical and numerical aspects of the electromagnetic stirring induced by alternating magnetic field, J. Fluid Mech. Vol. 102 (1981).
- [ 22 ] V.G. Levitch, Physicochemical Hydrodynamics, Prentice-Hall, Inc. (1962).
- [ 23 ] M. Garnier, Dynamique des métaux liquides sous l'action de champs magnétiques alternatifs. Perspectives d'applications métallurgiques, Thèse de Doct. Ing. (1982).
- [ 24 ] M. Garnier, Une analyse des possibilités de contrôle électromagnétique des surfaces libres de métaux fondus, Thèse de Doct. d'Etat, (1981).
- [ 25 ] J.M. Biasse, La lévitation électromagnétique. Une proposition d'application à la soudure, Thèse (1981).
- [ 26 ] H.F. Sterling and R.W. Warren, Metallurgia 67, 301 (1963).
- [ 27 ] D.A. Hukin, Brit. Pat. No. 1,269, 762 (1972).
- [ 28 ] J.F. Sacadura, Initiation aux transferts thermiques, Technique et Documentation.

A U T O R I S A T I O N   d e   S O U T E N A N C E

VU les dispositions de l'article 3 de l'arrêté du 16 avril 1974,

VU les rapports de présentation de Messieurs

- . A. FOGGIA, Professeur à l'E.C.L.
- . J. DRIOLE, Maître de recherche au C.N.R.S.

Monsieur Daniel DELAGE

est autorisé à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du diplôme de DOCTEUR-INGENIEUR, spécialité "Métallurgie".

Fait à Grenoble, le 3 mai 1982

Le Président de l'I.N.P.-G.

D. BLOCH  
Président  
de l'Institut National Polytechnique  
de Grenoble



