UN PRE PROCESSEUR POUR L'ÉLECTROMAGNÉTISME, L'ÉLECTRO-MÉCANIQUE ET L'ÉLECTRO-ACOUSTIQUE

François-Xavier Zgainski

▶ **To cite this version:**

François-Xavier Zgainski. UN PRE PROCESSEUR POUR L'ÉLECTROMAGNÉTISME, L'ÉLECTRO-MÉCANIQUE ET L'ÉLECTRO-ACOUSTIQUE . Energie électrique. Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996. Français. NNT : . tel-01330987

HAL Id: tel-01330987
https://hal.science/tel-01330987

Submitted on 13 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

François-Xavier ZGAINSKI
Ingénieur ENSIEG/INPG

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE
(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité : GÉNIE ÉLECTRIQUE

UN PRÉ PROCESSEUR POUR L'ÉLECTROMAGNÉTISME, L'ÉLECTRO-MÉCANIQUE ET L'ÉLECTRO-ACOUSTIQUE

Date de soutenance : 18 Septembre 1996

Composition du jury :

Messieurs	José Roberto CARDOSO	*Président, Rapporteur*
	Jean-Noël DECARPIGNY	*Rapporteur*
	Didier BOUCHER	*Examinateur*
	Frank CLAEYSSEN	*Examinateur*
	Jean-Louis COULOMB	*Examinateur*
	Yves MARECHAL	*Examinateur*
	Xavier BRUNOTTE	*Invité*

Thèse réalisée au sein du Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble en collaboration avec Cedrat Recherche et la DCN.

THÈSE

François-Xavier ZGAINSKI
Ingénieur ENSIEG/INPG

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE
(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité : GÉNIE ÉLECTRIQUE

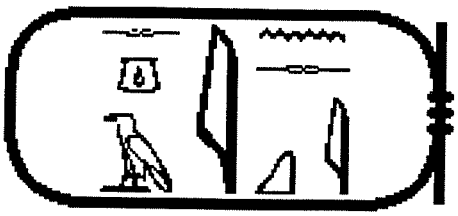
UN PRÉ PROCESSEUR POUR L'ÉLECTROMAGNÉTISME, L'ÉLECTRO-MÉCANIQUE ET L'ÉLECTRO-ACOUSTIQUE

Date de soutenance : 18 Septembre 1996

Composition du jury :

Messieurs	José Roberto CARDOSO	*Président, Rapporteur*
	Jean-Noël DECARPIGNY	*Rapporteur*
	Didier BOUCHER	*Examinateur*
	Frank CLAEYSSEN	*Examinateur*
	Jean-Louis COULOMB	*Examinateur*
	Yves MARECHAL	*Examinateur*
	Xavier BRUNOTTE	*Invité*

Thèse réalisée au sein du Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble en collaboration avec
Cedrat Recherche et la DCN



A Élisabeth pour m'avoir supporté et aidé

A mes parents, pour les *conditions optimales* dans lesquelles j'ai pu grandir

A ma famille, pour ce qu'elle est...

À Léonard...

Remerciements

Je remercie vivement les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail et l'honneur qu'ils me font de juger cette thèse.

Messieurs

José Roberto CARDOSO, professeur à l'université de Sao Paulo au Brésil, futur grand maître de cérémonie de Compumag'97, et éminent spécialiste en CAO et électrotechnique. Sa bonne humeur et son tempérament en font un personnage très abordable malgré toutes les responsabilités qui lui incombent.

Jean-Noël DECARPIGNY, directeur de l'ISEN et initiateur d'ATILA. Il a pu suivre mon travail de recherche au cours de ces trois années passées au LEG.

Didier BOUCHER, ingénieur à la DCN dans la division Lutte Sous Marine (LSM). Ce projet n'aurait pu voir le jour sans le financement de la DCN. Je tiens tout spécialement à le remercier pour l'opportunité qu'il m'a donné de participer à de nombreux congrès internationaux dans le monde entier. Une recherche sans rencontres et participations à des congrès n'a que très peu de sens. Un thésard qui n'a pas l'occasion d'aller se confronter aux meilleurs chercheurs dans le monde n'a pas à mon avis une *bonne expérience* de la recherche.

Frank CLAEYSSEN, docteur-ingénieur à Cédrat Recherche, responsable de l'activité matériax actifs. Je tiens à le remercier pour son souci permanent *d'industrialisation* de ce travail. L'aspect pragmatique de ce rapport (deux chapitres d'applications) montre à quel point ce sujet de recherche répondait à une attente.

Jean-Louis COULOMB, professeur à l'ENSIEG, et père de FLUX3D. Son calme et sa disponibilité m'ont été très utile pour les traquas quotidiens...

Yves MARÉCHAL, maître de conférence à l'ENSIEG, pour ses conseils avisés sur les développements réalisés pendant ce projet de recherche.

Xavier BRUNOTTE, responsable de FLUX3D à Cedrat Recherche, qui a accepté le rôle d'*invité* dans mon jury de thèse.

Je tiens aussi à souligner le rôle du professeur KONRAD du département *Electrical engineering and computer science* de l'université de Toronto qui m'a initié à la recherche en 1993.

Je remercie aussi les décideurs du laboratoire pour m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions matérielles.

Je remercie de plus tout particulièrement les ITAs: Patrice LABIE pour l'aide ponctuelle qu'il a pu m'apporter dans les développements, mais surtout pour les randonnées à skis ou à pieds autour de Grenoble et ses conseils d'oeunologue averti autour d'une tasse de café. Patrick EUSTACHE pour tous les *shells* mis à la disposition des utilisateurs du réseau de stations de travail, pour sa disponibilité et surtout pour le *folk* grenoblois. Patrick GUILLOT et Étiennette CALLEGHER pour la gestion des problèmes informatiques. Gary BEDROSIAN pour les discussions intéressantes *via* internet qui ont fait démarrer rapidement ce projet sur la bonne piste.

Mes collègues thésards venant d'horizons lointains m'ont aussi permis de voyager au cours de ce projet pendant mon séjour au LEG: BUDI, Luis DE MEDEIROS, Demba DIALLO, Martha Cecilia AMAYA, Francesco, Georges BARAKAT, Mohamed BENBOUZID, *Bruce* LEKIM, Silvio NABETA, Bachir NEKHOUL, Viviane SILVA, Saleh TABAGA, *Cheb* Ahmed AMARI...

Mens sana in corpore sano pourrait être la devise de l'équipe du foot du labo. C'est probablement le *meilleur* du LEG: Nico RETIÈRE, Christophe BODY, Lucas *Maradona* SALUDJIAN, Gérard MEUNIER, Bernhard GOTZIG, Mouhoub MEKHICHE, Stéphane RAËL, Stéphane *The Wall* CATELLANI, Jean-Charles PAPAZIAN, Yves André *Cantona* CHAPUIS, Frédéric MÉRIENNE, Laurent GROS... et tous les autres...

Je tiens aussi à remercier les thésards avec qui j'ai pu discuter et partager au fil de ces trois années: Sébastien ADENOT, Samuel NUGUES, Pascal PETIN, Jean-Marc BOUCHE, Damien CHASSOULIER (et Cécile), Jean-Yves VOYANT, Fabrice LEDORZE, Nicolas LABBE, Christophe GUERIN, Remi et Thomas PERRIN BIT-DREHER,...

Enfin, *last but not least*, quelques beaux sourires, rayons de soleil dans le dur monde de l'électrotechnique: Fabienne CORTIAL-GOUTAUDIER, Claire DIVOUX, Gwenaëlle LE COAT, Valérie NGUYEN, Laure-Line ROUVE, Catherine TALOWSKI,...et les secrétaires Josiane VERNA-EVEN, Sylvie PELLETIER et Jacqueline DELAYE.

Et tous ceux que j'aurai pu oublier....

Introduction

Le travail présenté dans ce mémoire a été entrepris à l'initiative de l'équipe matériau actif de Cedrat Recherche, et avec le soutien de la DRET et du CNRS, au sein du Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble (LEG). Il concrétise une collaboration étroite entre:

- Le Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble (LEG).

- Le Centre d'Étude et de Recherche en Détection Sous Marine (CERDSM).

- L'entreprise Cedrat Recherche.

La méthode des éléments finis est un outil très performant de conception assistée par ordinateur. Elle permet de résoudre des équations aux dérivées partielles qui n'ont pas de solutions analytiquement simples. Cette méthode est très puissante et ramène le problème physique à une équation matricielle linéaire où l'inconnue est la valeur de la variable d'état en certains points du domaine. La base de la méthode des éléments finis est le découpage du domaine physique en éléments et en noeuds, que l'on étudie séparément avant d'obtenir une solution générale. La découpe du domaine physique en éléments finis est appelée maillage.

Cette opération intervient avant la résolution du système et a une grande importance vis à vis du conditionnement du problème. Un *bon maillage* donnera un résultat plus fiable et plus rapidement. On cherche à améliorer le maillage en jouant sur le nombre d'éléments et sur leur qualité. En effet, plus le nombre d'élément est faible, moins on a de noeuds et plus la résolution est rapide, mais la qualité de la solution peut aussi être moins bonne. On a de plus intérêt à avoir des éléments proches de l'équilatéralité pour avoir une solution convenable. Il existe deux grandes familles de mailleurs, les mailleurs automatiques et les mailleurs manuels ou réglés. Les mailleurs automatiques permettent à l'utilisateur de mailler des domaines de forme géométrique complexe en triangles (2D) ou tétraèdres (3D), mais ils génèrent cependant un trop grand nombre d'éléments dans certains cas. Ils sont utilisés en électrotechnique. Avec les mailleurs manuels l'utilisateur doit choisir son maillage et l'adapter à son problème; les éléments générés sont entièrement contrôlés par l'utilisateur, mais ce type de mailleur ne permet pas de traiter toutes les surfaces ou tous les volumes de formes complexes. Ils sont utilisés en mécanique.

Conscient du fait que chaque mailleur présente des avantages, le but de notre projet de recherche est de concevoir un mailleur qui permette de mailler à la fois en automatique et en manuel. Un nouveau mailleur doit donc être développé. Il devra intégrer les deux cultures de maillage: Le maillage tétraédrique (utilisé en électromagnétique) et le maillage hexaédrique (utilisé en mécanique). Ce mailleur sera intégré au préprocesseur de [FLUX3D], logiciel de calcul de champ électromagnétique, et servira de pré processeur au logiciel d'électromécanique [ATILA], utilisé en conception d'actionneurs acoustiques sous marins.

Ce projet de recherche réunit deux logiciels éléments finis, spécialisés dans leur domaine, FLUX3D et ATILA.

FLUX3D est un logiciel de calcul de champs électromagnétiques, développé au LEG et commercialisé par Cedrat Recherche, basé sur les éléments finis. Il permet une analyse tridimensionnelle des dispositifs électriques et magnétiques. Depuis sa création en 1987, il dispose d'un mailleur tridimensionnel libre de Delaunay très performant. La finesse du maillage suivant les zones est contrôlée par le choix de la taille des tétraèdres au voisinage des points. Différents essais et comparaisons ont montré qu'il est capable de mailler rapidement des géométries complexes, et qu'il est particulièrement efficace pour mailler la boite d'air. Ce logiciel possède de plus un descripteur géométrique très performant car paramètré. Ce paramétrage permet l'utilisation de repères locaux, des transformations géométriques et des coordonnées des points. La topologie de la géométrie est conservée même si on modifie ses dimensions. FLUX3D est de plus un logiciel très convivial (interaction graphique continuelle, système de menus arborescents et outils de visualisation complets).

Le logiciel ATILA, développé par le laboratoire d'Acoustique de l'ISEN*, est un logiciel de calcul basé sur la méthode des éléments finis. Sa particularité réside dans la prise en compte des effets piézo-électriques et magnétostrictifs. Ce logiciel est par conséquent utilisé dans la conception des actionneurs ou transducteurs magnétostrictifs (*Geant Magnetostrictif Alloy*). Le point faible d'ATILA est l'absence de pré processeur et de mailleur généraliste qui pourrait simplifier le maillage des parties fluides de forme complexe en pouvant les gérer de manière automatique, tout en laissant à l'utilisateur le choix de mailler les pièces mécaniques à sa guise.

Le couplage entre les différents mailleurs est la pièce manquante pour que le préprocesseur de FLUX3D soit utilisé comme pré processeur du logiciel ATILA. Il doit être de type fort entre mailles de types différents (hexaèdres, tétraèdres et prismes). Un tel mailleur a un intérêt général important car il permettra de mailler des boites d'air de forme complexe, et d'abaisser sensiblement le nombre d'éléments du maillage, donc un gain au niveau coût de résolution très important aussi bien en

* Institut Supérieur d'Electronique du Nord (basé à Lille).

électrotechnique qu'en électromécanique ou acoustique.

Cette recherche représente un travail novateur et ambitieux sur lequel peu d'équipes françaises ou étrangères ont investi, parce qu'entre autres, peu de logiciels s'intéressent comme ATILA aux problèmes électromécaniques fortement couplés.

Le chapitre I est principalement bibliographique. Après avoir rappelé rapidement le principe de la méthode des éléments finis, nous faisons un état des lieux sur les différentes descriptions de données géométriques. Ensuite, nous étudions l'état de l'art concernant les mailleurs, la discrétisation spatiale par éléments finis ainsi que l'amélioration du maillage. Nous relatons également les demandes des utilisateurs de mailleurs pour mettre en évidence leurs problèmes, aussi bien au sein du laboratoire qu'au CERDSM.

Dans le chapitre II, nous présentons une approche originale sur l'évaluation de la qualité *a priori* d'un maillage. Cela était nécessaire dans la mesure où nous avons développé des nouveaux éléments non standards.

Dans le chapitre III, nous définissons un élément de transition permettant de relier fortement et simplement des facettes rectangulaires à des facettes triangulaires. Cet élément pyramide est, de fait, la pierre angulaire de notre approche.

Ensuite, il est nécessaire d'insérer ces éléments de transition dans un maillage mixte non conforme. Le chapitre IV présente donc un algorithme de traitement du maillage dans le but d'insérer aux bons endroits les éléments pyramides de raccordement.

Dans le chapitre V, nous validons cette approche par la présentation de résultats obtenus sur des problèmes industriels résolus en collaboration au sein du laboratoire ou dans l'industrie.

Enfin, dans le dernier chapitre, le chapitre VI, nous présentons une utilisation de notre pré processeur généraliste sur une application électro-acoustique.

Chapitre I

C.A.O.* , Éléments finis et Maillage

Le but de ce chapitre est de faire un état des lieux dans le domaine du maillage et de présenter notre objectif de recherche. Après avoir rappelé quelques généralités sur la méthode des éléments finis et sur les modèles de description des données C.A.O., nous présenterons un panorama des techniques de maillage existant dans la littérature. Enfin, nous présenterons le mailleur "idéal", qui pourra tirer parti de tous les avantages de chaque technique de maillage en permettant à l'utilisateur de les mélanger.

* Pour Conception Assistée par Ordinateur.

I-1 La méthode des éléments finis

1-1 Généralités

Un moyen naturel d'étude d'un problème complexe qui n'a pas de solution simple* est de le partager en différents domaines. Chacun de ces domaines est décomposé en composants élémentaires ou éléments dont le comportement peut être plus facilement étudié, et le système initial peut être reconstruit à partir de ces composants.

Dans de nombreux cas, un modèle approprié peut être résolu en utilisant un nombre fini de degrés de liberté, ces problèmes peuvent être appelés discrets. Depuis l'avènement de l'ère numérique, les problèmes discrets peuvent être résolus en général directement, même si le nombre d'éléments est grand. De plus, grâce à la miniaturisation des circuits imprimés et des progrès remarquable de la technologie du silicium, des problèmes de taille de plus en plus importante peuvent être résolus de plus en plus rapidement.

Les problèmes continus, à base d'équations aux dérivées partielles, mettent en jeu la notion mathématique d'infini. Pour tenter de les résoudre, on se ramène à un problème discret via une approximation. Celle ci est réalisée grâce à la discrétisation du problème continu. Les mathématiciens ont commencé par développer des méthodes de type différences finies, puis des méthodes de type résidus pondérés à partir de "fonctionnelles"** bien choisies.

Les ingénieurs ont adopté la plupart du temps une attitude plus intuitive des problèmes et ont commencé à parler d'analogie entre éléments discrets et partie finie d'un milieu continu. Pour l'analyse des problèmes des milieux continus, une méthode classique de résolution a été mise en oeuvre [ZIENCKIEWICZ-91], [DHATT-83]: La méthode des éléments finis qui peut être considérée comme une méthode d'approximation telle que:

- Le milieu est subdivisé en un nombre fini d'éléments dont le comportement est défini par un nombre fini de paramètres.

- La résolution de la structure globale obtenue par assemblage de ses éléments respecte précisément les mêmes règles que celles qui régissent les structures discrètes.

Les premiers ouvrages et applications résolues en électromagnétisme sont sortis à la fin des années 1970, début des années 1980 ([CHARI-80], [SILVESTER-83]). Après avoir défini de manière générale la méthode des éléments finis, nous allons aborder rapidement et succinctement ses applications en électromagnétisme et calcul de champ.

1-2 Utilisation de la méthode des éléments finis pour le calcul de champ électromagnétique: ... Des équations des milieux continus aux formulations en passant par les modèles

Les machines électriques, les appareillages de coupure, les têtes de lecture/enregistrement sont durant leur fonctionnement soumis à l'action de champ électromagnétique. La connaissance du champ électrique ou magnétique permet d'avoir accès au calcul des performances et du fonctionnement de cet appareil en régime permanent ou transitoire. Dans de nombreuses étapes du processus de conception d'un appareil électrique, l'évaluation des champs électriques et magnétiques apparaît comme un travail nécessaire.

Tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut étudier au sein des dispositifs électriques sont régis par les quatre équations aux dérivées partielles de Maxwell (1) à (4) et les trois équations du milieu considéré (5) à (7).

---

* C'est à dire pas de solution analytique.

**Une fonctionnelle est une intégrale fonction de fonction.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1) \qquad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}\ ^{*} \quad (2) \qquad \text{div } \vec{D} = \rho \quad (4)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (5)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (7)$$

où

$\vec{B}$ (T)	est l'induction magnétique	μ (H.m^{-1}) perméabilité
$\vec{B}_r$ (T)	est l'induction magnétique rémanente	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ perméabilité absolue
$\vec{D}$ (C.m^{-2})	est l'induction électrique	ε (F.m^{-1}) permittivité
$\vec{E}$ (V.m^{-1})	est le champ électrique	$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ permittivité absolue
$\vec{H}$ (A.m^{-1})	est le champ magnétique	ρ(C.m^{-1}) charge volumique
$\vec{J}$ (A.m^{-2})	est la densité de courant	σ(S.m^{-1}) conductivité
t	est le temps	

Ces équations décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques mais à l'heure actuelle, on ne peut pas les résoudre directement dans la plupart des cas. De plus, suivant les dispositifs étudiés, certains phénomènes deviennent négligeables et des hypothèses simplificatrices peuvent être proposées; les équations deviennent alors plus simples, elles sont appelées modèles.

Les modèles peuvent se diviser en deux grandes familles, les modèles statiques et les modèles dynamiques. Nous n'aborderons que des modèles statiques par soucis de simplification. Pour en savoir plus, on pourra consulter [SABONNADIERE-88]. Quelques modèles statiques classiques sont les suivants:

- électrostatique

où l'inconnu est le potentiel scalaire électrique V tel que:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \quad (8)$$

- magnétostatique vectoriel

où l'inconnu peut être le potentiel scalaire magnétique $\vec{A}$ tel que:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (9)$$

dans ce cas là, il est nécessaire d'introduire une jauge, pour que $\vec{A}$ soit totalement défini, on peut imposer une divergence nulle, c'est à dire que div $\vec{A}$ = 0. Cette jauge est encore appelée jauge de Coulomb.

- électrocinétique

où l'inconnu est le potentiel scalaire électrique V tel que:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \quad (10)$$

Certains modèles supposent des conditions aux limites particulières et ne prennent pas en

* On suppose que l'on se trouve en basses fréquences (quelques dizaines de kHz), fréquences électrotechniques.

compte la globalité du problème à cause des approximations. Une des premières difficultés de la modélisation sera par conséquent le choix du bon modèle, au sens où les hypothèses simplificatrices doivent être bien vérifiées. Une bonne connaissance du problème physique est donc nécessaire pour le développeur ou l'ingénieur utilisant l'analyse par la méthode des éléments finis.

La méthode de Galerkine est la plus utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles que constituent les modèles. Un exemple de résolution sur un problème magnétostatique vectoriel bidimensionnel linéaire avec des sources de courant permet d'aborder le problème du passage de l'équation aux dérivées partielles valable sur un milieu continu vers le problème discret. On travaille dans le plan (Oxy). L'équation du potentiel vecteur $\vec{A}$, en bidimensionnel ne possède qu'une composante A_z, l'induction magnétique $\vec{B}$ se trouvant dans le plan d'étude (Oxy), et la densité de courant $\vec{J}$ est perpendiculaire au plan d'étude et est égale à J_z

A partir de l'équation (9) et de l'équation (2), on obtient, en supposant l'absence d'induction rémanente (équation 11), il vient (équation 12):

$$\vec{B}_r = \vec{0} \tag{11}$$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\vec{A_z}\right) = \vec{J_z} \tag{12}$$

qui devient, en deux dimensions:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}\right) + J = 0 \tag{13}$$

où A est l'inconnu, J la densité de courant connue sur tout le domaine. Les conditions aux limites les plus utilisées sont les conditions de Dirichlet $A=A_0$ ou les conditions de Neumann $\frac{\partial A}{\partial n}=0$

On recherche alors la solution A(x,y) dans l'ensemble des solutions possibles, c'est à dire continues, dérivables par morceau sur le domaine d'étude et qui vérifient les conditions aux limites aux frontières du domaine. On peut dire que A(x,y) est solution de l'équation (13) et des conditions aux limites associées si quelle que soit W(x,y), continue, dérivable par morceau et telle que W=0 au niveau des conditions aux limites de type Dirichlet, on a:

$$\iint_{\substack{\text{volume}\\ \text{étudié}}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}\right) + J\right).W.d\Omega = 0 \tag{14}$$

La méthode de Galerkine, consiste à avoir n fonctions de projections $W_1, W_2, .. W_n$, ces fonctions sont appelées fonctions tests et sont si possible orthogonales.

$$\iint_{\substack{\text{volume}\\ \text{étudié}}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right).W_i.d\Omega = -\iint_{\substack{\text{volume}\\ \text{étudié}}} J.W_i.d\Omega \right. \tag{15}$$

En intégrant par partie, l'équation (15) devient:

$$\iint_{\substack{\text{volume}\\ \text{étudié}}} \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial W_i}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial W_i}{\partial y}\right).d\Omega - \oint_{\substack{\text{contour du}\\ \text{domaine}}} \frac{1}{\mu}.\frac{\partial A}{\partial n}.W_i.d\Gamma = -\iint_{\substack{\text{volume}\\ \text{étudié}}} J.W_i.d\Omega \tag{16}$$

On définit alors N fonctions d'approximation du plan (une par noeud du problème) ou fonctions de forme telles que:

$$A(x,y) = \sum_{j=1}^{N} A_j N_j(x,y) \tag{17}$$

Les fonction N_i ont les propriétés suivantes, lorsqu'elles sont évaluées au noeud $A_j(x_j,y_j)$ on a:

$$N_i(x_j,y_j) = \delta_{ij} \tag{18}$$

où

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \quad \text{si } i=j \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned} \tag{19}$$

Le problème qui était continu devient discret grâce à la projection de la fonction solution dans l'espace des N fonctions d'approximation. En choisissant les fonctions tests égales* aux fonctions de forme, on obtient le système linéaire suivant:

$$\iint_{\substack{\text{domaine}\\ \text{étudié}}} \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{N} A_j \left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right).d\Omega - \oint_{\substack{\text{contour du}\\ \text{domaine}}} \sum_{j=1}^{N} A_j \frac{1}{\mu}.\frac{\partial N_j}{\partial n}.N_i.d\Gamma = -\iint_{\substack{\text{domaine}\\ \text{étudié}}} J.N_i.d\Omega \tag{20}$$

Ce système peut encore s'écrire sous la forme suivante (21):

$$\sum_{j=1}^{N} A_j \left(\iint_{\substack{\text{domaine}\\ \text{étudié}}} \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right).d\Omega - \oint_{\substack{\text{contour du}\\ \text{domaine}}} \frac{1}{\mu}.\frac{\partial N_j}{\partial n}.N_i.d\Gamma\right) = -\iint_{\substack{\text{domaine}\\ \text{étudié}}} J.N_i.d\Omega \tag{21}$$

On se ramène alors à un système linéaire de taille NxN (équation 22), avec N égal au nombre de noeuds du problème, A_j étant les inconnues aux noeuds, J les courants dans le domaine, N_i la fonction de forme associée au noeud i. On a choisi des fonctions N_i s'annulant sur le contour du domaine. Le terme de bord (intégrale sur le contour du domaine) s'annule alors quelle que soit la condition de potentiel imposé sur la frontière du domaine. On note cependant que ce terme est naturellement nul pour une dérivée normale de A nulle sur la frontière du domaine. C'est ce comportement que l'on obtient si on n'impose pas d'autres conditions de frontière.

$$\sum_{j=1}^{N} M_{ij}A_j = F_i \tag{22}$$

où

$$M_{ij} = \iint_{\substack{\text{domaine}\\ \text{étudié}}} \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right).d\Omega \tag{22.1}$$

et

$$F_i = -\iint_{\substack{\text{domaine}\\ \text{étudié}}} J.N_i.d\Omega \tag{22.2}$$

Le domaine d'étude (ici le plan P) est découpé en éléments de différentes formes (Fig. 1). Ces éléments constituent une partition du domaine d'étude, c'est à dire qu'ils ne se recouvrent pas les uns les autres et recouvrent la totalité du domaine: C'est ce qu'on appelle le maillage du domaine.

* Le choix des fonctions de projection égales aux fonctions de forme permet d'obtenir un système d'équations mieux adapté à une résolution numérique précise, c'est à dire mieux "conditionné".

On peut remarquer que M_{ij} est nul pour tous les indices i et j tels que les noeuds P_i et P_j ne sont pas voisins et ce terme se calcule en limitant le domaine aux deux éléments ayant une frontière commune (P_i et P_j). F_i se calcule en limitant le domaine d'intégration aux éléments ayant le noeud P_i comme sommet.

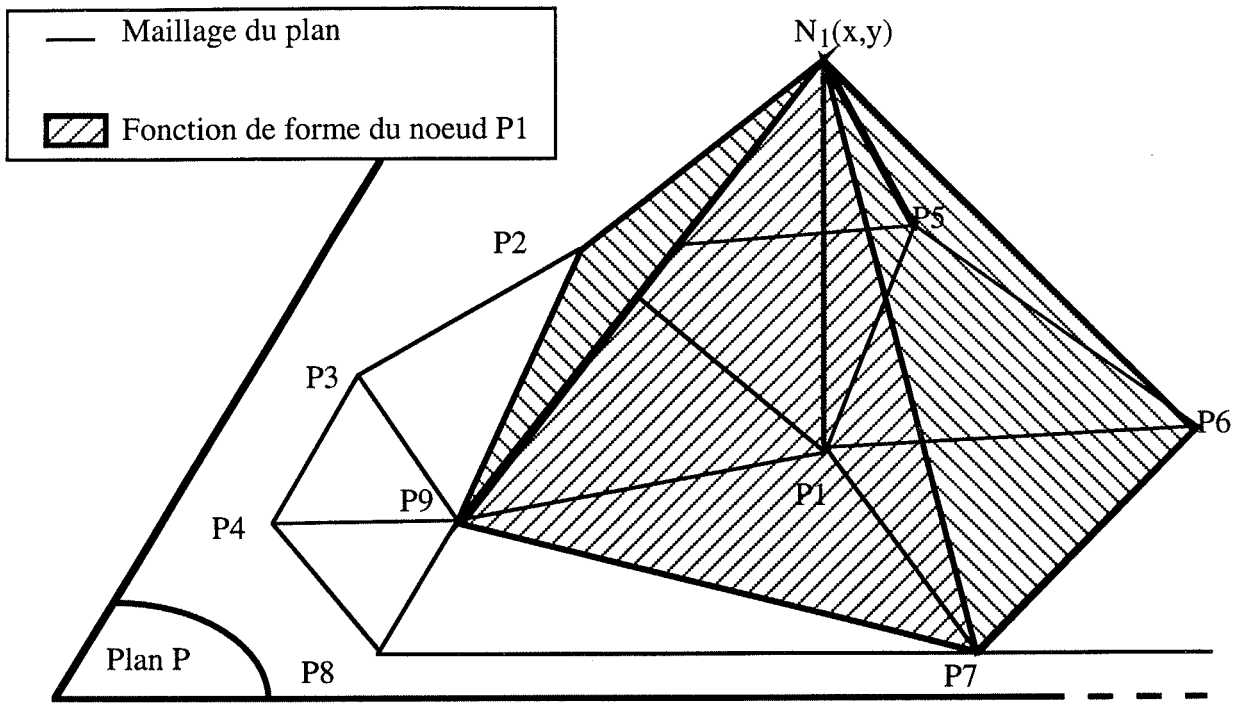


Fig.1: Détail d'un maillage d'un plan et fonction de forme

La matrice M est composée essentiellement de termes nuls. En numérotant de manière adaptée les noeuds, on peut obtenir une matrice ayant une largeur de bande plus petite et donc plus facile à manipuler et à inverser* .

En fait, on intègre cette équation sur chaque élément de référence, et le calcul des intégrales est obtenu via la matrice Jacobienne G de la transformation de l'élément réel vers l'élément de référence (Fig.2). En effet, on peut réaliser un changement de variable lors de l'intégration élément par élément.

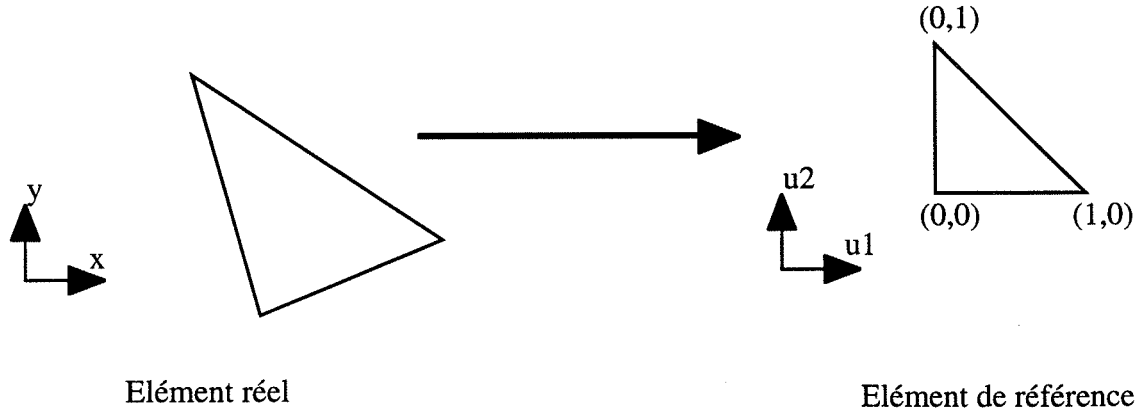


Fig.2: L'intégration de l'élément réel à partir de l'élément de référence

* On se réferrera aux algorithmes de numérotation de type Cuthill Mac Kee [LASCAUX THEODOR].

$$\iint_{\substack{\text{élément}\\ \text{réel}}} f(x,y).dx.dy = \iint_{\substack{\text{élément de}\\ \text{référence}}} f(u_1,u_2).\det(G).du_1.du_2 \qquad (23.1)$$

avec

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{bmatrix} \qquad (23.2)$$

L'équation (23) montre le changement de variable réalisé de l'élément réel (coordonnées x et y) vers l'élément de référence (coordonnées u_1 et u_2).

1-3 Remarques diverses

Dans le cas général, les propriétés des matériaux peuvent dépendre de la solution (saturation). Alors, le système (22) correspondant est non linéaire.

Nous avons présenté une approche bidimensionnelle, mais il est maintenant courant de faire de l'analyse tridimensionnelle. C'est dans ce cadre là que nous proposons un outil de maillage 3D.

Enfin, il est possible de coupler cette résolution éléments finis (dans l'espace) avec une résolution différence finie (dans le temps) et faire ainsi du calcul *pas à pas dans le temps*. Une application possible peut être l'étude de phénomènes de propagation [ZGAINSKI-94].

I-2 Description des données C.A.O. et définition d'un maillage

2-1 Intégration du maillage dans le processus de conception

La mise en oeuvre d'une méthode numérique de calcul débouche inévitablement sur un logiciel associé, structuré de façon à pouvoir traiter de manière générique tout type (ou au moins un grand nombre) de problème. Chaque problème est défini par sa géométrie et sa physique.

Traditionnellement, un logiciel de calcul en analyse (voire conception) se décompose en trois grandes parties ou modules (Fig.3). Cette structure est utilisée aussi bien en calcul de structure [NOEL-94] qu'en mécanique des fluides [JACQUOTTE-93] ou qu'en génie électrique [COULOMB-81].

- Le préprocesseur permet la description de la géométrie, la définition et l'affectation des matériaux aux domaines géométriques et des conditions aux limites. Il s'agit aussi d'élaborer le maillage du domaine, c'est à dire définir les éléments finis et les noeuds utilisés par la méthode.

- Le processeur réalise l'intégration élément par élément et résout le système linéaire creux par une méthode itérative de type gradient conjugué [MAGNIN-91].

- Le post-processeur permet d'exploiter les résultats et de faire des calculs de manière globale sur le dispositif étudié. C'est la phase d'analyse des résultats. Elle utilise des modules spécifiques de visualisation. Des traitements de la solution fournie par le module de calcul peuvent être incorporés dans cette phase (lissage, interpolations,...). Il est alors possible de collecter à la fois des grandeurs locales (courbes de champs), ou des grandeurs globales (énergies, force exercée sur une région volumique).

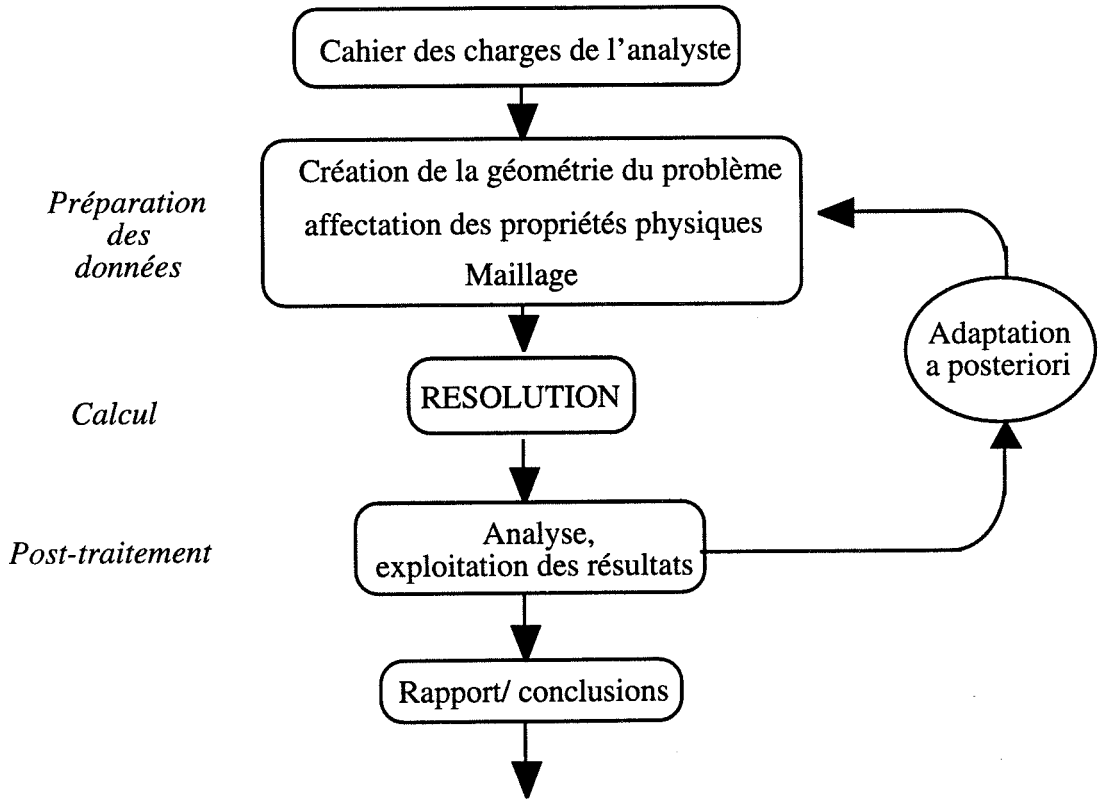


Fig.3: Les différentes phases du calcul dans le logiciel C.A.O.

Une fois l'exploitation du calcul réalisée, l'analyste peut affiner ces paramètres et définir une nouvelle géométrie.

2-2 Modèles de représentation géométrique

Avant d'aller plus loin dans la définition d'un maillage, il est nécessaire de préciser les caractéristiques de la géométrie à discrétiser et le modèle utilisé pour décrire les objets géométriques nécessaires à la représentation de la structure à analyser. En effet, il est clair que le maillage s'appuie directement sur le modèle de représentation de la géométrie.

Lors de certains calculs, on peut simplifier la géométrie éliminant les pièces non actives dans le processus étudié. Par exemple, l'air (ou les phénomènes qui se produisent dans l'air) n'est pas étudié par les analystes en mécanique des structures (en général, sauf ceux qui font de l'aérodynamique), alors que pour les électrotechniciens, il doit être systématiquement décrit, car les boucles de champ magnétique ou les champs électriques apparaissent dans l'air. Il n'existe pas de règle générale qui, pour une simulation donnée, permette de définir la géométrie bien adaptée au calcul. L'utilisateur va souvent avoir à trouver un compromis entre la complexité de sa géométrie et son coût: Plus il représentera fidèlement sa géométrie et plus elle coûtera cher en construction et en temps de résolution. La phase de simplification de la géométrie ou "d'idéalisation" nécessite une expérience du phénomène étudié.

Enfin, par symétrie, il est en général possible de simplifier le calcul à effectuer, donc la géométrie en amont de la résolution.

Une fois la géométrie définie, celle-ci est représentée par des modèles classiques plus ou moins standards, qui se divisent en deux grandes familles: La *B-Rep** (ou représentation frontière) et *CSG*** (ou modeleur solide).

2-2-1 La *B-Rep* ou représentation frontière

Ce modèle de représentation a la caractéristique de représenter un objet par ses frontières. Une frontière est une surface fermée qui partage l'espace. La topologie d'un dispositif tridimensionnel est donc décrit par:

- Des points
- Des lignes
- Des faces
- Des volumes

Chacune de ces entités, de dimension n, étant décrite par la liste de ses relations avec les entités de dimension n-1. Une relation existe entre les cardinaux des entités volume, face, et ligne, dans le cas où l'on a une information minimale (une ligne est représentée par deux points):

On notera que cette relation suppose le volume sans trous et que la *B-Rep* a l'avantage de donner une représentation unique d'un objet.

La relation suivante (24) lie les cardinaux des ensembles des points, lignes et faces de la représentation frontière:

$$f - l + p = 2 \qquad (24)$$

où

p = nombre de points de la géométrie
f = nombre de faces de la géométrie
l = nombre de lignes de la géométrie

Dans le cas suivant (Fig.4), un volume est défini par 5 points, 9 lignes et 6 faces. La relation précédente est par conséquent bien vérifiée.

* Pour Boundary Representation.
** Pour Constructive Solid Geometry.

Entité géométrique	Définition de l'entité
Lignes	L1 = P1,P3 L2 = P1,P2 L3 = P2,P5 L4 = P4,P5 L5 = P3,P5 L6 = P1,P4 L7 = P2,P4 L8 = P2,P3 L9 = P3,P4
Faces	F1 = L1,L6,L9 F2 = L2,L7,L6 F3 = L7,L3,L4 F4 = L9,L4,L5 F5 = L8,L3,L5 F6 = L1,L8,L2
Volumes	V1 = F1,F3,F2,F3,F4,F5,F6

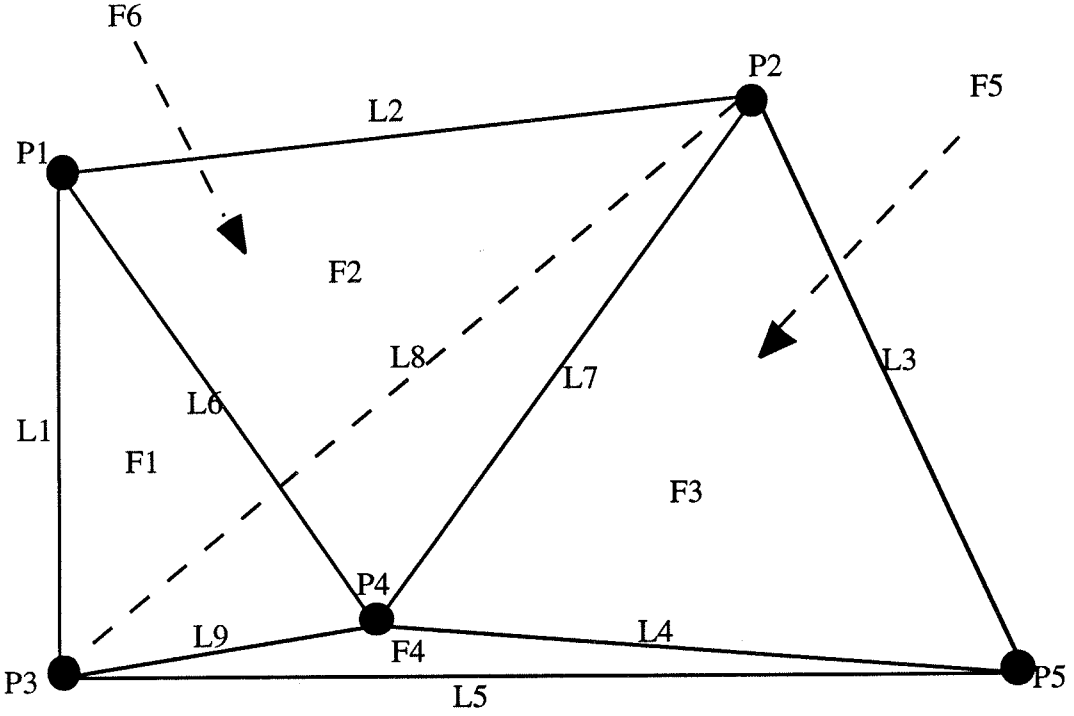


Fig.4: Exemple de description B-Rep

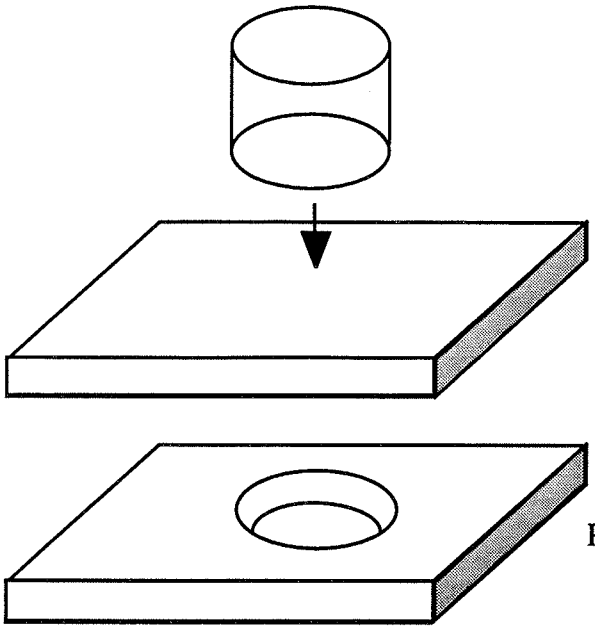
La qualité de la représentation de la géométrie dépend de la qualité de représentation des frontières: courbes 3D, surfaces gauches ou facettisées. Actuellement, la plupart des techniques de maillage s'appuient sur une représentation *B-Rep* de la géométrie. Nous verrons plus loin, qu'une *B-Rep* est particulièrement bien adaptée à un maillage de type libre basé sur la triangulation de Delaunay.

2-2-2 La *C.S.G.* ou historique de construction

Les modeleurs solides de type *C.S.G.* sont largement utilisés en C.A.O. Ils gardent en mémoire l'historique de construction de la géométrie. Celle-ci est construite par une série d'opérations booléennes sur des objets de forme simple: Parallélépipède, cylindre, section extrudée, sphère...Les opérateurs booléens utilisés sont les suivants:

- "$\cap$" L'intersection
- "$\cup$" L'union
- "-" La différence

D'autres opérateurs moins basiques peuvent se ramener aux trois opérateurs précédemment définis. La principale difficulté de ce type de description géométrique vient du fait qu'il est difficile de gérer les intersections de volume complexe et qu'il est nécessaire de savoir traiter des géométries "limites" (cylindre tangent à un autre cylindre, quelle intersection?).



Plaque percée = Plaque moins cylindre

Fig.5: Exemple de description C.S.G.

Les algorithmes de maillage n'utilisent quasiment pas l'arbre de l'historique de construction du modeleur solide. Cependant, il peut être utilisé pour le test d'intersection d'un pavé avec le domaine, ou le test d'appartenance d'un point à un volume. [MOUNOURY-95] présente un mailleur basé sur l'arbre de construction de la géométrie.

Contrairement à la *B-Rep*, la représentation de la géométrie n'est pas unique, la figure suivante (Fig.6) montre deux descriptions géométriques différentes d'un même problème.

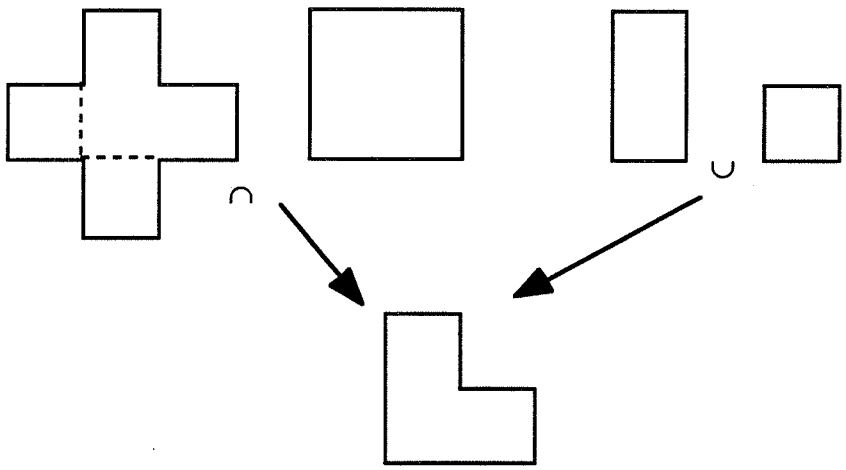


Fig.6: Deux représentations C.S.G. différentes de la même géométrie

On peut noter que la notion de sémantique métier est utilisée par ces modeleurs solides: L'utilisateur peut manipuler des opérations technologiques telles que le taraudage, le chanfrein, la gorge, le congé, le trou, qui sont plus difficile à définir lors de la construction d'une *B-Rep*. De plus le paramétrage est probablement plus souple lorsque l'on utilise une *C.S.G.* La figure suivante (Fig.7) montre le paramétrage d'un cylindre en torsion. La *B-Rep* ne peut plus représenter le volume cylindrique avec alpha différent de zéro car les faces latérales ne sont plus simplement cylindriques.

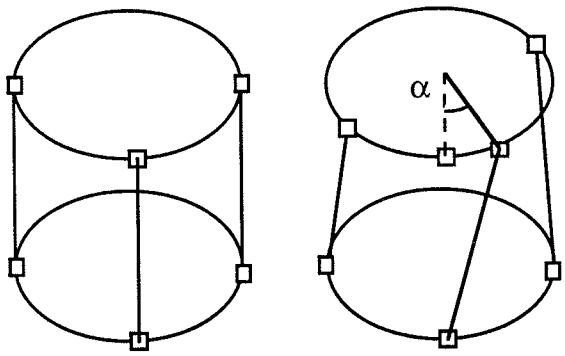


Fig.7: Maillage d'un cylindre avec paramétrage d'un angle alpha

La comparaison des modèles est délicate, car les critères d'évaluation des performances dépendent des applications envisagées. Cependant, une hiérarchie peut exister entre modèles. On peut dire qu'un modèle de représentation *MR1* est plus puissant qu'un autre *MR2* s'il existe un moyen de décrire *MR2* à partir de *MR1*. La conversion d'une géométrie issue d'un modeleur solide en représentation de frontière s'obtient en étudiant les frontières des objets de forme simple décrivant la géométrie du problème. A notre connaissance, il n'existe pas de conversion de *B-Rep* en *C.S.G.* En ce qui concerne le génie électrique, une comparaison est réalisée dans [CHIA-90], qui montre que ces deux modèles de représentation sont complémentaires. La représentation *C.S.G.* est puissante pour la description car les géométries sont issues de géométries de niveau inférieur (combinées via les opérateurs décrits plus haut), ce qui permet une complexification de la géométrie. Cependant, le modeleur solide ne peut pas être exploité directement par un générateur de maillage. Avant le maillage, le modèle doit être retraité en utilisant des opérations de bas niveau de manière à le décomplexifier.

Enfin, il faut noter que la plupart des modeleurs solides de type *C.S.G.* définissent les surfaces par des morceaux [NOEL-94]: Des carreaux, dont l'ensemble permet de décrire une géométrie plus complexe. Par définition, un carreau est une surface 2D paramétrée dont on connaît une représentation mathématique. On peut définir le carreau mathématiquement comme suit, par une fonction P vectorielle de trois variables:

- $X=P(Ca,u,v)$ ou $(u,v)\in \Delta(Ca)$

  où $\Delta(Ca)$ correspond au domaine 2D paramétré.
  X correspond aux coordonnées d'un point de la surface, et (u,v) aux paramètres.

Il existe de nombreux types de carreaux qui correspondent à des formes différentes de la fonction P: Carreaux de Béziers, *Coons*, *B-Splines*, *NURBS**. Ces derniers fournissent le formalisme le plus général et tendent à devenir un standard dans la représentation de surface gauche. Pour la description des lignes, le formalisme est quasiment identique, et elles sont paramétrées:

- $X=P(Li,u)$ ou $0\leq u\leq 1$

  où X correspond aux coordonnées d'un point de la droite, et (u) au paramètre.

Une fois la géométrie C.A.O. construite, il est alors possible dans une deuxième étape de générer un maillage ou une discrétisation de la géométrie saisie de manière à pouvoir appliquer la méthode des éléments finis à notre problème physique.

* Pour Non Uniform Rational B-Spline.

2-3 Préliminaire et définitions d'un maillage, quelques bases

2-3-1 Définitions

Une définition formelle simple d'un maillage d'un domaine Ω est la suivante [GEORGE-90]:

Définition: Un maillage d'un domaine Ω est un ensemble M d'éléments E_i tels que:

$$\Omega = M = \cup E_i.$$

Les E_i peuvent être des segments, des triangles, des quadrangles en dimension 2 ou ces mêmes éléments et des tétraèdres, des pentaèdres et des hexaèdres en dimension 3.

Les E_j doivent vérifier la condition suivante de conformité (voir Fig. 8):

Définition: Un maillage d'un domaine Ω est conforme quand:

L' intersection de deux éléments E_i et E_j de M est:

- Soit vide,
- Soit réduite à un point,
- Soit réduite à une arête ou une face.

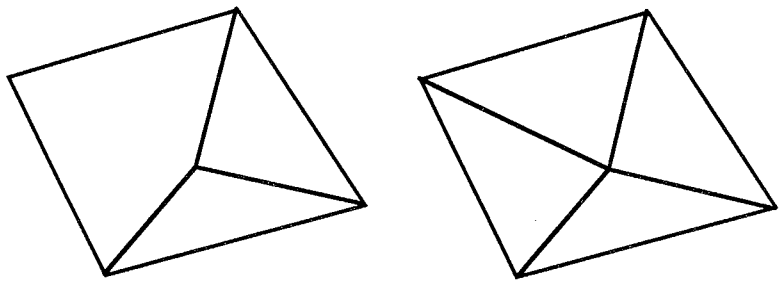


Fig.8: Maillage non conformes et conformes

2-3-2 Propriétés

Un maillage est représenté par un ensemble de polyèdres qui partagent des facettes, des arêtes et des noeuds. Une maille est le support géométrique d'un élément fini, peut être définie au minimum par l'ensemble de ses noeuds ordonnés et par le type de volume qu'elle représente : Elle peut être de type tétraèdre, brique, triangle, prisme.

D'une manière plus générale, on peut représenter une maille par le triplet suivant : (F,A,N) où

F est l'ensemble de ses faces,
A est l'ensemble de ses arêtes,
N est l'ensemble des noeuds où s'appuient les mailles,

et le maillage par le quadruplet (M,F,A,N) où

M est l'ensemble des mailles.

Pour le maillage suivant (Fig.9), comportant les mailles m_1 et m_2

$M = \{m_1,m_2\}$
$F = \{f_1,f_2,f_3,\ldots,f_7\}$
$A = \{a_1,a_2,\ldots,a_9\}$
$N = \{n_1,\ldots,n_7\}$

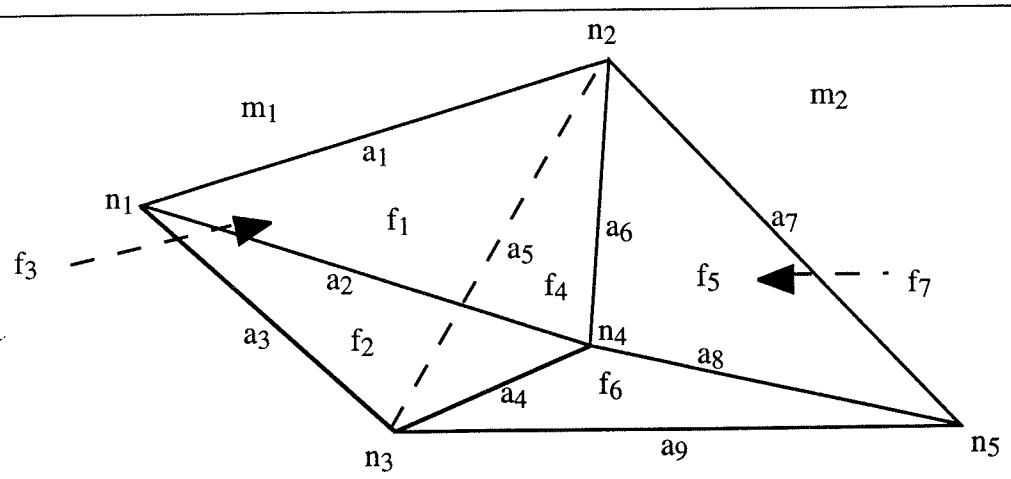


Fig.9: Maillage M

Comme pour les polyèdres, une relation lie les cardinaux des ensembles définis précédemment. Pour un maillage conforme, on a la relation suivante:

$$m - f + a - n = -1 \qquad (24)$$

avec

$m = Card(M)$
$f = Card(F)$
$a = Card(A)$
$n = Card(N)$

La démonstration est obtenue par récurrence sur m. La relation peut se généraliser à des domaines constitués de plusieurs composantes connexes, avec des trous, des cavités.

Dans le cas de la figure précédente, on a: m=2, f=7, a=9, n=5, et l'égalité est bien vérifiée.

2-3-2 Modèle de représentation de FLUX3D

Dans le logiciel de calcul utilisé au sein du laboratoire, [FLUX3D], dédié au calcul de champ électromagnétique 3D, la base de données du maillage est caractérisée par les structures simplifiées suivantes (Fig.10):

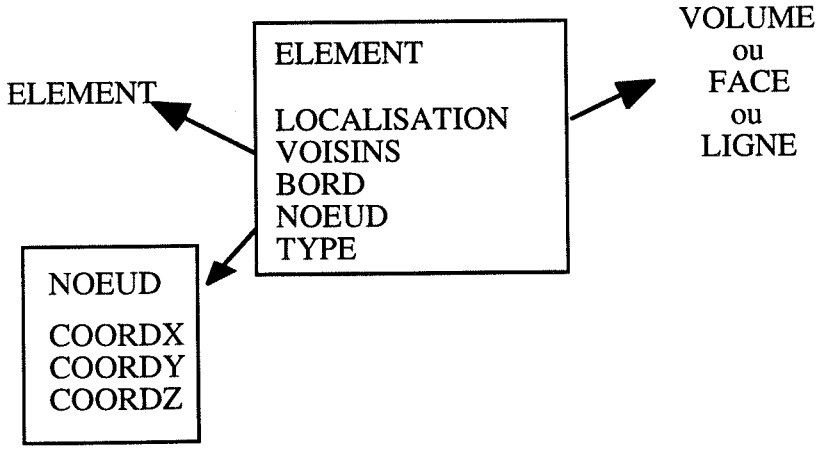


Fig.10: Représentation simplifiée de la structure d'un élément dans la base de données de FLUX3D

Cette structure de base de données n'est utilisée qu'à la fin du processus de maillage pour stocker l'information sur la discrétisation. Pendant tout le processus de maillage, des tables locales créées "dynamiquement" permettent de gérer de manière souple les itérations de création de noeuds

dans le maillage par la triangulation de Delaunay (voir paragraphe 3-3-1).

2-4 Quelques pré processeurs et mailleurs existants

La plupart des codes éléments finis contiennent un ensemble de pré processeurs permettant la génération des maillages. Si tel n'est pas le cas, soit ils ont prédéfini une structure de données correspondante que l'utilisateur doit créer selon ses spécifications, soit ils sont couplés à des logiciels de C.A.O.

- [ANSYS] de Swanson Analysis.
- [EUCLID] de Matra Datavision.
- [I-DEAS Master Series] de S.D.R.C.
- [SIMAIL] de Simulog.
- [SYSMESH] de Framasoft+CSI.

Alors que les trois premiers sont des pré processeurs (ils comportent un descripteur géométrique et un mailleur), les deux derniers travaillent à partir de fichier de description géométrique (format universel IGES, format STEP,...).

I-3 Quelques techniques de maillage

Dans cette partie, on décrit les principales techniques de maillage trouvées dans la littérature. Après un très bref historique, on divise les familles de mailleur en deux parties: Les mailleurs structurés, où l'utilisateur intervient, et les mailleurs libres (ou *presse-bouton*).

3-1 Rapide historique

Les méthodes de maillage, ont commencé à être développées à la fin des années 1970 devant le besoin devenant de plus en plus pressant des solveurs éléments finis. Le mailleur, au départ quasiment manuel est devenu de plus en plus automatique.

Au départ bidimensionnels, les mailleurs sont devenus systématiquement tridimensionnels. Le premier mailleur tridimensionnel du laboratoire est décrit dans [ALBERTINI-88]. Des algorithmes d'amélioration de la qualité des éléments ont été publiés récemment [HENOT-93], et de plus, des essais sont tentés pour que le mailleur vérifie une carte de taille bien précise.

Les travaux récents essaient de rendre plus fiable et plus rapide le mailleur tridimensionnel libre de type Delaunay [BOUROUCHAKI-95-1] et [BOUROUCHAKI-95-2], le but étant d'obtenir de plus des éléments de bonne qualité au vue d'un critère *a priori* ou après une résolution. De nombreux chercheurs se penchent aussi sur la décomposition automatique d'un domaine en hexaèdres [MONOURY-96].

3-2 Mailleurs structurés

Les algorithmes de maillage suivant sont dits structurés ou assistés car ils génèrent des maillages réguliers. Ils nécessitent l'intervention de l'utilisateur, à l'opposé des mailleurs appelés libres ou *presse boutons*.

3-2-1 mailleur réglé

Le maillage réglé est un mailleur manuel*. Le principe de la méthode utilisée est schématisé par la figure suivante [GEORGE 90-1].

Par cette approche, on peut créer le maillage de tout domaine de topologie simple. La partition du domaine est liée à l'information sur les côtés opposés de la bordure du domaine. La donnée de ce mailleur est donc une discrétisation de la frontière du domaine traité, c'est à dire le maillage du contour. Le nombre de points sur deux côtés logiquement connecté doit être identique.

Cette technique se décompose en plusieurs phases:

1. Transport sur les côtés de l'élément unité de même nature que le domaine des points du contour de ce dernier en conservant les distances relatives entre les points.

2. Maillage canonique de l'élément unité. Ce maillage revient à connecter les points se correspondant deux à deux d'un côté à l'autre du domaine unité.

3. Transport de ce maillage de référence sur le domaine réel.

Soit M un point du maillage canonique, de coordonnées x et y, pour un domaine topologiquement analogue à un rectangle, on utilise la transformation suivante:

$$\underline{M} = (1-y).f_1(x)+x.f_2(y)+y.f_3(x)+(1-x).f_4(y) \\ -((1-x).(1-y).a_1+x.(1-y).a_2+x.y.a_3+(1-x).y.a_4) \qquad (26.1)$$

* Au sens où l'utilisateur doit intervenir en général dans l'utilisation de ce type de mailleur.

où les f_i sont des paramétrisations des cotés du domaine et les a_i ses sommets.

Les f_i sont définis comme suit:

$$f_i\ [0,1] \rightarrow \text{courbe } (a_i, a_{i+1}) \qquad (26.2)$$

Cette transformation permet de connaître l'image M du point M(x,y).

La figure suivante (Figure 11) montre le fonctionnement du mailleur réglé pour un quadrilatère quelconque.

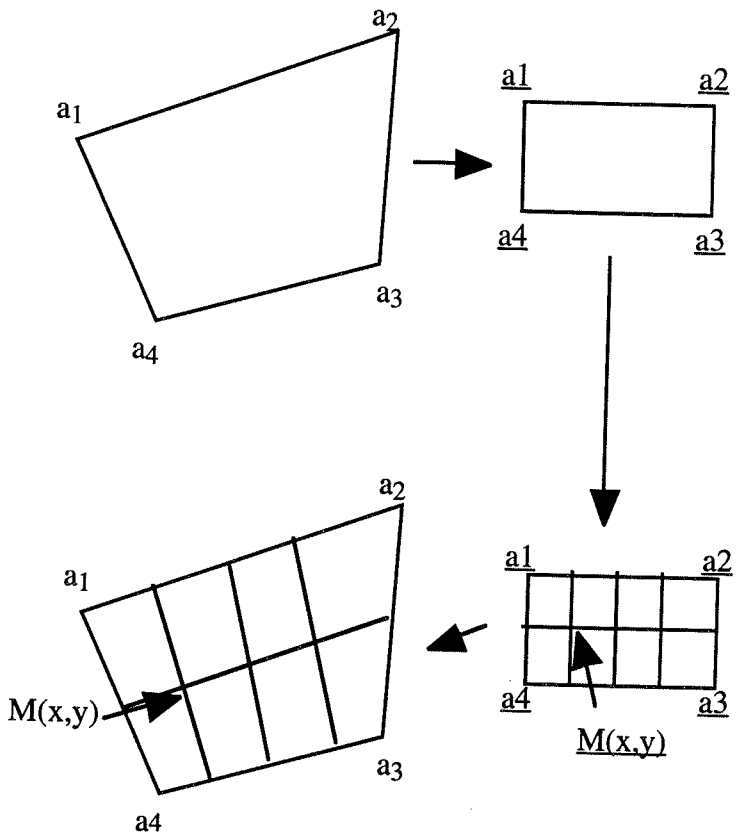


Fig.11: Principe du maillage réglé

Ces transformations respectent les sommets et les côtés du domaine (d'autres transformations assurant la même propriété sont envisageables pour d'autres formes de géométrie): On peut remarquer que ce traitement peut être appliqué sur des domaines topologiquement analogues à un triangle, ou autre forme simple géométrique. On peut généraliser cette approche à la troisième dimension.

3-2-2 mailleur extrusif

Le maillage par extrusion d'un domaine de dimension *d* est une méthode de maillage semi automatique. Ce maillage est obtenu par transformation d'un maillage de dimension *d-1*. Le mailleur extrusif de FLUX3D a été développé par [SIMON-93]. Il est défini par une transformation, un nombre de couches et nécessite un maillage préalable périodique des deux faces en vis à vis qui sont liées l'une à l'autre par la transformation. Il est utilisable à la fois en 2D et en 3D.

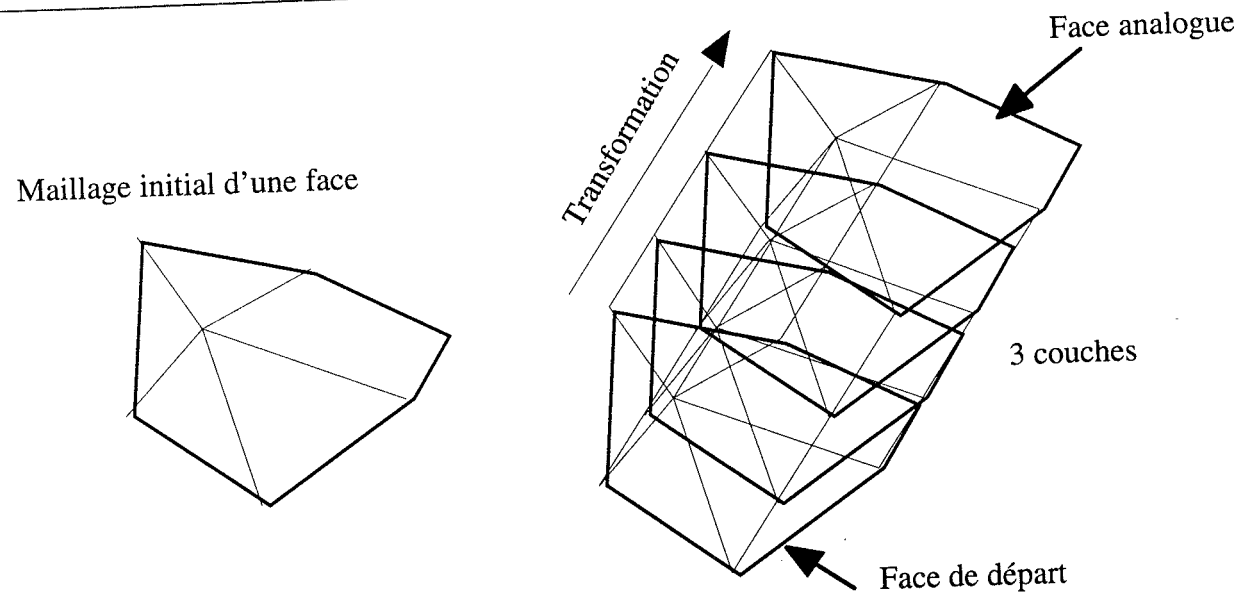


Fig.12: Principe du maillage extrusif

D'un abord simple, cette technique demeure limitée à une famille restreinte de dispositifs. Il faut noter que les applications de la DCN de type transducteur SONAR sont particulièrement bien adaptées à ce type de mailleur.

3-3 Mailleur non-structuré ou libre

3-3-1 La méthode de Delaunay

La méthode de Delaunay est très populaire. A partir d'un ensemble de points pré définis, représentant les noeuds du maillage, grâce à l'algorithme proposé par [HERMELINE-82], il est possible de générer une triangulation satisfaisant les critères de Delaunay. Cette triangulation, représentation duale de celle de Voronoï, génère automatiquement les éléments les plus équilatéraux possibles pour l'ensemble des noeuds de départ.

La triangulation obtenue représente le convexe englobant les points initiaux; des adaptations près des frontières permettent d'en respecter le contour. Cette méthode est très efficace en dimension deux ou trois [GEORGE-92] et on la développera plus précisément dans le chapitre IV.

3-3-2 Frontal

Les méthodes frontales partent en général d'une discrétisation du contour du domaine. Des noeuds et/ou* des mailles sont alors définis selon des règles expertes [GOLGOLAB-89], [RASSINEUX-95], [SEVENO-95].

Le processus est itératif: A partir d'un contour donné, une analyse des angles formés par deux segments consécutifs et de leurs longueurs respectives permet de sélectionner une zone de départ. Paul-Louis George dans [GEORGE-90-2] donne un exemple d'algorithme frontal pour un maillage 2D en triangles d'un domaine défini par des segments frontière.

Selon la taille des angles de départ, trois cas sont considérés:

- Cas 1: $\alpha < \frac{\pi}{2}$, les deux segments d'angle α sont retenus et vont être les deux cotés de l'unique triangle créé.

* Les méthodes frontales peuvent ne définir que des noeuds ou que des mailles ou les deux simultanément à partir d'un paquet de points existants.

• Cas 2: $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$, à partir des deux segments d'angle α, on va définir et générer un point interne à la face et deux triangles.

• Cas 3: $\frac{2\pi}{3} < \alpha$, un seul segment est retenu, un triangle est construit avec ce segment comme coté et un point interne.

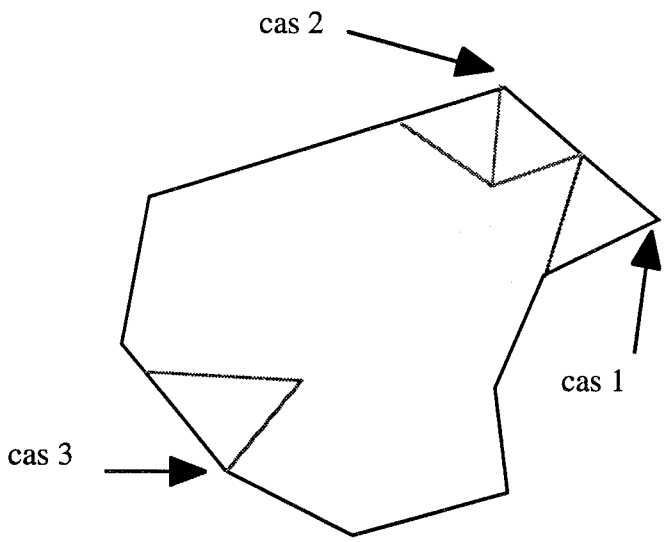


Fig.13: Stratégie de maillage 2D frontal en triangle

Un nouveau contour est formé en éliminant du contour actuel les arêtes du ou des éléments construits communes avec le contour initial et en insérant à leur place la ou les arêtes construits non communes à deux triangles (remise à jour du front).

Quand le contour est réduit à l'ensemble vide, le maillage final est obtenu.

Les difficultés liées à ces méthodes proviennent de la fermeture des fronts où les éléments dégénérés peuvent aisément apparaître. Certaines de ces méthodes frontales offrent, par contre, l'avantage de générer des quadrangles.

3-3-3 Maillage par Quadtree(2D) ou Octree(3D)

Ce type de mailleur [GEORGE 90-1] construit le recouvrement du domaine considéré à partir des points de son contour.

Étape 1.

Un premier rectangle est construit qui contient tous les points du contour. La méthode consiste à découper, à partir de ce rectangle initial, chaque rectangle (ou père) en quatre rectangles (ou fils), de façon récursive, jusqu'à obtention d'une partition du rectangle initial en éléments quadrangulaires tels que chacun contienne au plus un seul point du contour. Cette dernière propriété permet de contrôler la taille de chaque maille.

Étape 2.

La partition issue de l'étape ci-dessus est équilibrée (voir Fig. 14) par définition de fils de telle sorte qu'au plus un point intermédiaire existe sur une arête d'une maille.

Étape 3.

Une analyse des mailles ainsi générées est menée:

- Maille extérieure ne contenant aucun point: Une telle maille est détruite,
- Maille intérieure ne contenant aucun point: Une telle maille produit un quadrangle (qui peut être découpé en triangles) si ses arêtes ne possèdent pas de points intermédiaires ou est découpée en triangles dans le cas inverse.
- Maille contenant un " morceau " du contour: les points intersections du contour et des arêtes de la maille sont crées, on définit de la sorte une partition de la maille dont on ne garde que la partie interne au domaine (le contour final du maillage est donc formé a ce stade).

Étape 4.

Une régularisation des points internes est alors effectuée (les points internes sont les sommets hors contour des mailles de la partition issue de l' étape 2 de ce processus).

Remarque: Il existe de nombreuses variantes de cette méthode.

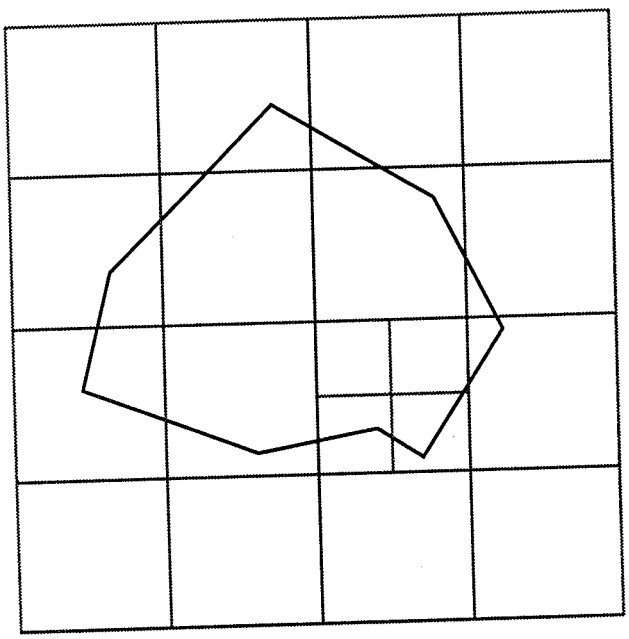


Fig.14: Maillage Quadtree

La méthode présente des avantages certains:

- Les éléments générés à l'intérieur du volume sont de bonne qualité.
- Les raffinements de maillage peuvent être obtenus très facilement.

Mais aussi quelques inconvénients:

- Les éléments générés près de la frontière sont de moins bonne qualité
- Si le maillage de la frontière du domaine est très anisotrope, on risque d'obtenir un maillage très fin uniformément.

I-4 Contraintes de maillage en électromagnétisme

Les problèmes de maillage sont nombreux en électrotechnique, et sont dus à deux raisons essentielles: La géométrie de l'application électrotechnique, qui est souvent complexe en étude bidimensionnelle comme en tridimensionnelle; et la forte anisotropie de la répartition de la variable d'état dans certains cas physiques.

4-1 Les problèmes géométriques

Les applications électrotechniques présentent généralement des géométries complexes. Il est souvent nécessaire de mailler à la fois les pièces composant la machine électrique ou le transformateur et l'air qui se trouve entre des pièces massives (le négatif de l'objet).

Un des problèmes lié à ce maillage est l'effet d'échelle: On cherche à mailler un entrefer de quelques dixièmes de millimètres et un dispositif d'une dizaine de centimètres. L'exemple le plus classique en 2D, est l'entrefer d'une machine électrique. Les éléments de petite taille nécessaires dans l'entrefer se propagent autour de la faible épaisseur et nécessite un maillage fin du rotor et du stator en périphérie, ce qui augmente le nombre de noeuds, donc d'éléments et par conséquent le temps de calcul.

La figure 15.1 (document [NABETA-94]) montre une machine synchrone, qui présente une géométrie complexe autour de l'entrefer, maillé très fin en triangle.

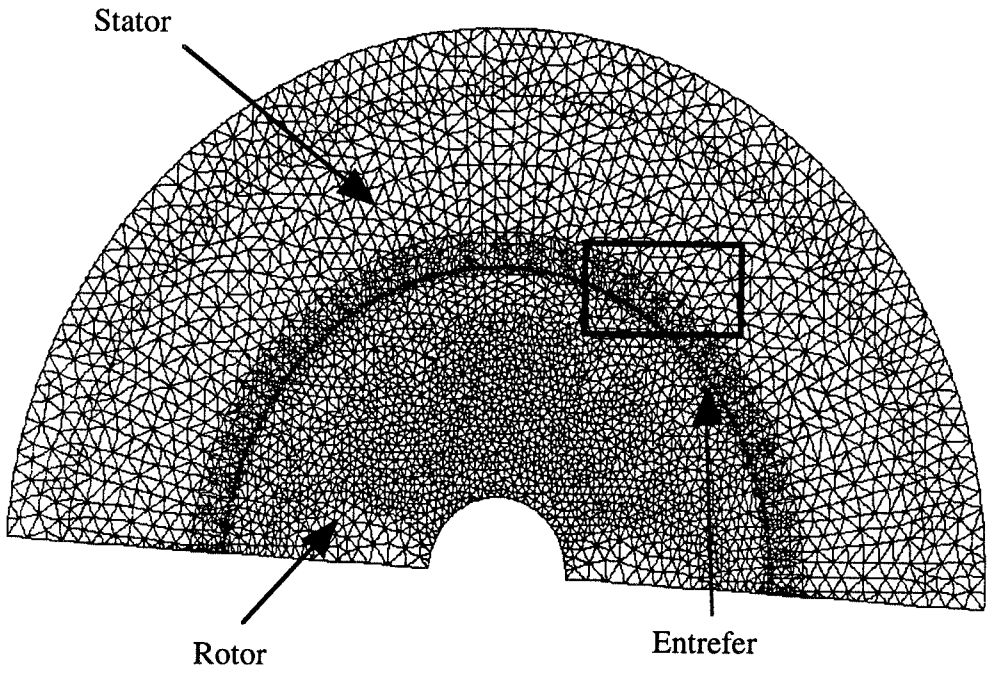


Fig.15.1: Maillage d'une machine synchrone (document [NABETA-94])

La figure suivante montre un détail du maillage de cette machine synchrone, au niveau de l'entrefer de la machine, là où les éléments finis sont les plus petits.

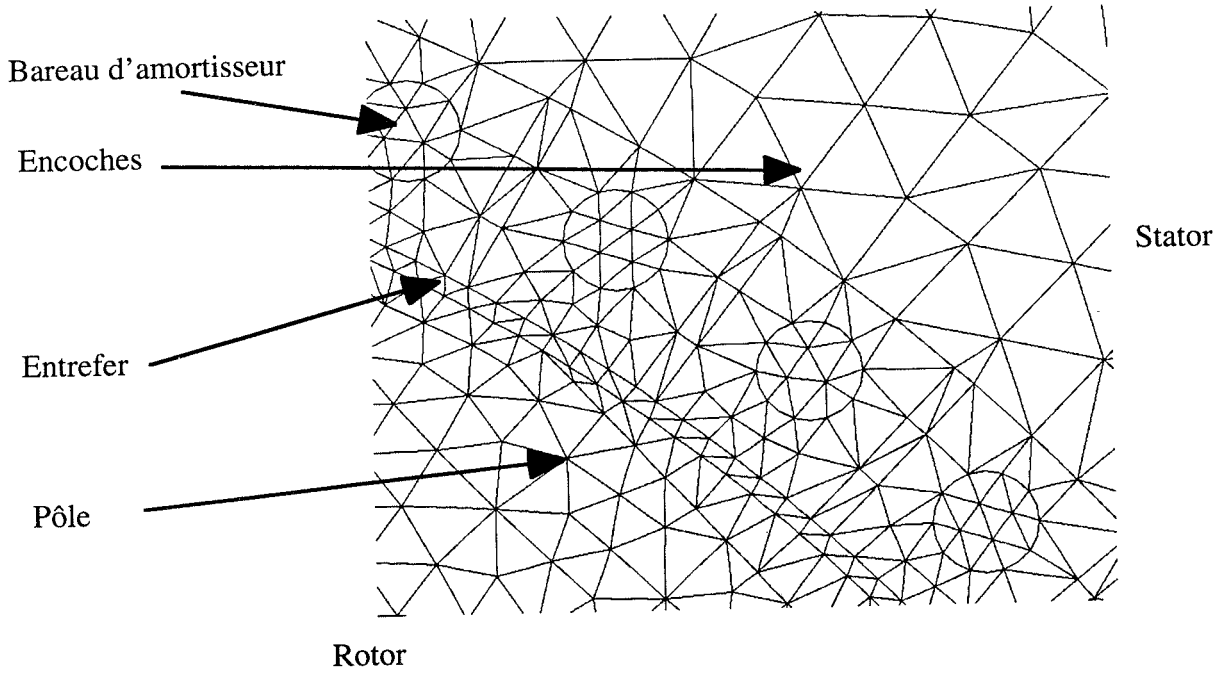


Fig.15.2: Zoom sur les pôles de la machine

En trois dimensions, le problème est évidemment encore plus accentué. [PERRIN-BIT-94] et [DREHER-94] présentent un maillage optimal de machine électrique. Ils proposent de mailler la partie quasi 2D du moteur puis de l'extruder de manière à générer des prismes, et seule la partie 3D du moteur est maillée en libre (Fig.16.1).

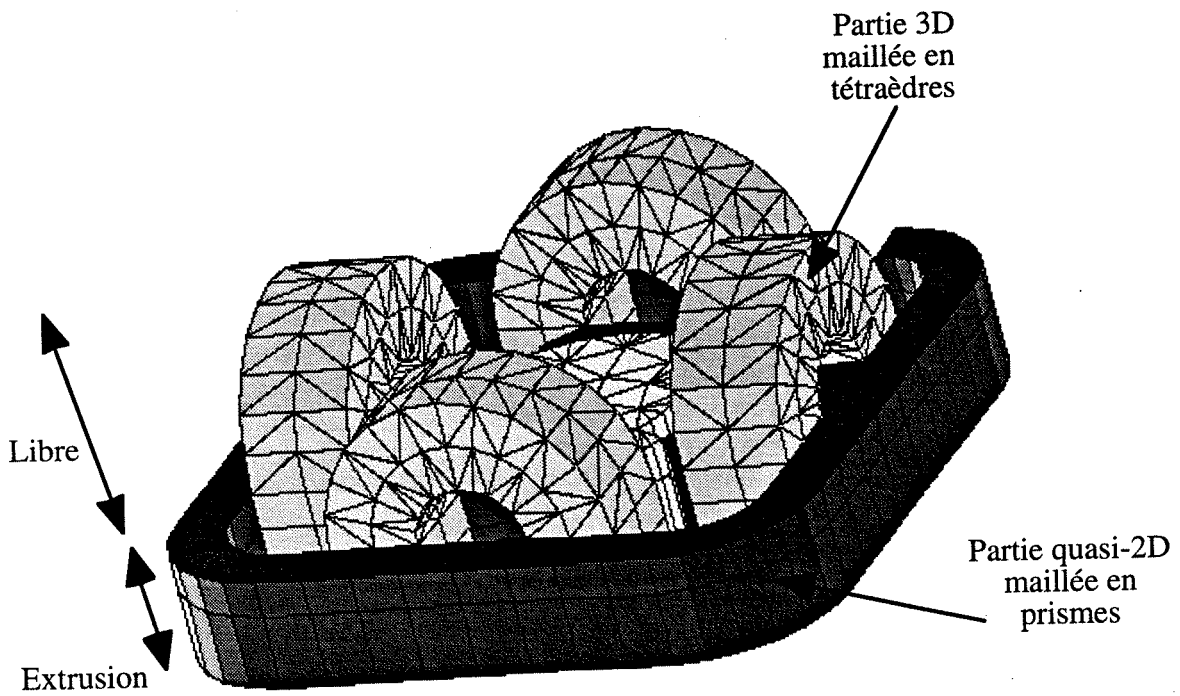


Fig.16.1: Maillage tridimensionnel d'un moteur universel à réluctance variable (document DREHER-94])

	Mailleur automatique	Mailleur mixte
Nombre de noeuds	26066	17060
Nombre d'éléments finis	18746	7740

Fig.16.2: Résultat des maillages spécifiques d'une machine tournante en 3D

La figure précédente (Fig.16.2) présente le nombre de noeuds et d'éléments finis qu'ils ont obtenu avec deux mailleurs distincts*: Le mailleur automatique et le mailleur mixte (mélange des mailleurs automatique et extrusion)..

On peut remarquer que le gain est évident en utilisant un mailleur mixte. L'effet d'échelle peut donc être diminué en utilisant de manière judicieuse un mailleur mixte.

4-2 Les problèmes physiques: L'anisotropie de la variable d'état

Lorsque la variable d'état présente un fort gradient sur un domaine, il est nécessaire de prendre en compte cette anisotropie et de mailler plus finement ce domaine.

Des exemples significatifs apparaissent aisément dans le domaine du chauffage par induction. Le phénomène de courants de Foucault apparaît dans une épaisseur caractéristique appelée épaisseur de peau. Si on veut un calcul correct des grandeurs globales dans le cylindre, il est nécessaire de mailler finement l'épaisseur de peau. Les mailleurs automatiques ne sont pas bien adaptés, car ils génèrent des éléments triangulaires ou tétraédriques quasi équilatéraux plutôt inadaptés à l'anisotropie de la variable d'état.

L'étude dun cylindre métallique chauffé par induction permet de prendre conscience de ce problème.

4-2-1 L'étude d'un problème à effet de peau

Le phénomène physique étudié est l'apparition de courant de Foucault dans un cylindre métallique supposé infiniment long soumis à un champ magnétique variable, créé par une bobine. Le cylindre étant infiniment long, on peut se restreindre à une étude simplifiée de ce phénomène. On suppose que la bobine est collée au cylindre.

Le cylindre est décrit géométriquement comme ci-dessous, et ces caractéristiques physiques sont une résistivité de 10^{-7} Ohm-mètre et une perméabilité de 16. Il a un rayon de 5 mm et il est entouré d'une bobine infinie d'épaisseur 1 mm. Cette bobine est parcourue par un courant de densité 5 A/mm^2 et de fréquence importante (de l'ordre de quelques kHz).

On se place par conséquent en régime harmonique. Ce courant crée un champ magnétique à l'intérieur du cylindre, dans la direction de son axe, important en module sur la surface et plus faible sur son axe, ainsi qu'un courant, dit courant de Foucault à l'intérieur du cylindre.

La figure suivante (Fig.17) montre une section de la moitié de ce cylindre ainsi que son axe de révolution.

* On pourra aussi appeler ce maillage un maillage hybride.

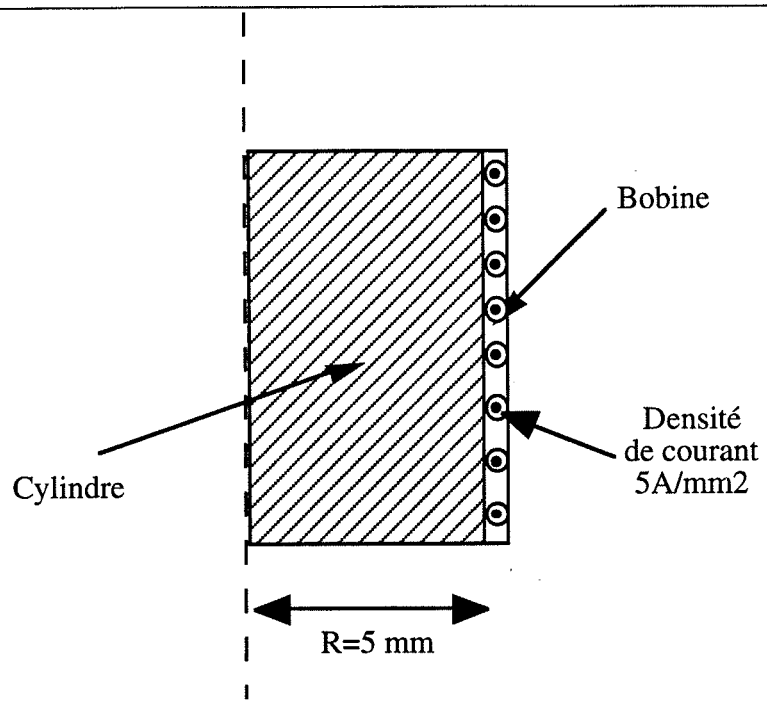


Fig.17: Section du cylindre métallique

4-2-2 Rappels théoriques

L'apparition des courants de Foucault s'explique directement à partir des équations de Maxwell. On a en effet une relation qui lie l'induction au courant dans le cas des fréquences pas trop élevées (on néglige les courants de déplacement):

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} \tag{27}$$

Or la densité de courant est liée au champ électrique par l'équation suivante :

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{28}$$

En prenant le rotationnel de cette dernière équation et en combinant ces deux équations avec la relation de Maxwell qui lie l'induction au champ électrique.

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{29}$$

On obtient :

$$-\text{rot}(\text{rot}(\vec{H})) = \mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{30}$$

Or

$$\text{div}(\vec{H}) = 0 \tag{31}$$

donc l'équation finale à résoudre est du type :

$$\Delta\vec{H} = -\mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{32}$$

En coordonnées cylindriques, les plus adaptées à notre problème axisymétrique, en utilisant le fait que l'induction dans le cylindre est parallèle à z et que le problème est en fait unidimensionnel, on peut alors écrire l'équation suivante :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \vec{H}}{\partial r}\right) = \sigma\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (33)$$

Si on utilise le théorème d'Ampère ou l'équation de Maxwell liant l'induction au courant, on trouve :

$$\vec{J} = -\frac{\partial Hz}{\partial r}\vec{\mu_\theta} \qquad (34)$$

Cette équation est de type diffusion, et une de ses caractéristiques est l'épaisseur de peau, qui mesure la distance de pénétration du champ. Cette longueur est définie par :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\sigma\mu\omega}} \qquad (35)$$

où σ est la conductivité $(\Omega m)^{-1}$, μ la perméabilité (H/m) et ω (rad/s) la pulsation du courant d'excitation.

Dans le cas étudié, δ = 0,563 mm. On le vérifie sur le tracé théorique (Fig.20) des courbes de densité de courant et de la puissance volumique [TECHNIQUE DE L'INGE]. On a comparé cette courbe aux valeurs obtenues par la méthode des éléments finis.

Pour résoudre ces équations analytiquement, on peut les découpler en espace et en temps, ainsi que la simplifier pour la résoudre de manière unidirectionnelle. La solution de ces équations peut être obtenue grâce aux fonctions de Bessel. La solution développée s'exprime d'après [BOZORTH] comme ci-dessous :

$$H(r) = H_0\frac{ber^2(2\theta r/d) + bei^2(2\theta r/d)}{ber^2(\theta) + bei^2(\theta)} \qquad (36)$$

ou θ est la fréquence réduite du problème, définie par :

$$\theta = \frac{d}{2\delta\sqrt{2}} \qquad (37)$$

avec d, diamètre du cylindre et δ l'épaisseur de peau.

On en déduit, en dérivant l'expression de l'induction :

$$J(r) = K\frac{ber(2\theta r/d)\,ber'(2\theta r/d) + ber(2\theta r/d)\,ber'(2\theta r/d)}{ber^2(\theta) + bei^2(\theta)} \qquad (38)$$

Les expressions précédentes ont permis un calcul analytique du champ et de l'induction grâce à la librairie Harwell [HARWELL] de procédures mathématiques.

4-2-3 L'approche éléments finis

Le logiciel utilisé est FLUX2D. Il comporte un descripteur géométrique, un module pour affecter à chaque domaine un matériau, des propriétés physiques et des conditions aux limites, un gestionnaire de matériaux, un solveur et un module permettant d'exploiter les résultats.

La géométrie du problème est relativement simple, elle est axisymétrique. La variable d'état utilisée pour la résolution est la composante θ du potentiel vecteur A.

Physiquement, on utilise deux régions : Une région surfacique, le cylindre métallique et l'autre linéique, la bobine autour du cylindre.

En ce qui concerne le maillage (Fig.18), conscient du fait que l'épaisseur de peau est une grandeur caractéristique à cause de la variation importante de la variable d'état dans ce domaine, on décide de placer deux éléments dans l'épaisseur de peau (δ=0,563mm). En vue de comparer deux solutions obtenues par des maillages différents, on fait le choix de mailler la section du cylindre en triangles (mailleur automatique) puis en rectangles (mailleur structuré). Dans les deux cas, on utilise des éléments du deuxième ordre. On essaie d'avoir un nombre comparable d'éléments en hauteur et en largeur pour pouvoir discuter sur des problèmes de même taille, et des éléments géométriquement de même conditionnement, bien que l'on puisse améliorer de manière considérable le temps de résolution en ne prenant qu'un élément sur la hauteur. On a placé, en moyenne, 5 éléments en largeur et 25 éléments en hauteur. Un calcul a été réalisé en utilisant des éléments très longs, les résultats sont les mêmes qu'avec le mailleur rectangulaire classique mais le temps de résolution est bien plus faible.

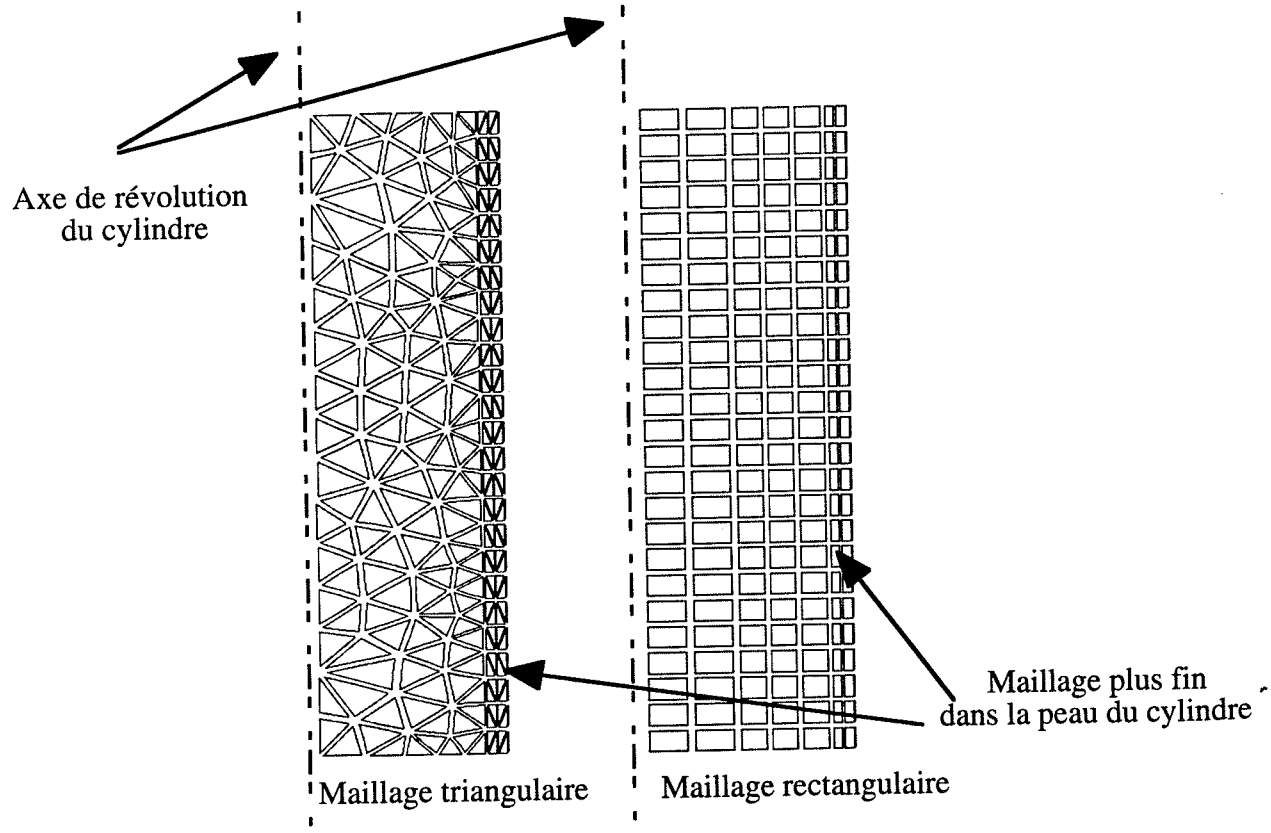


Fig.18: Maillages utilisés pour la résolution du problème éléments finis

La variable d'état est le potentiel vecteur magnétique A, la formulation est magnétodynamique.

4-2-4 Données du maillage et du calcul

- Le nombre d'éléments est plus faible avec le mailleur structuré ou assisté, ce qui a une influence sur la taille du système et le temps de résolution. On a cependant utilisé le même nombre d'éléments dans l'épaisseur de peau. On aurait pu exploiter le fait que le problème est unidimensionnel pour le maillage rectangulaire et ne mailler qu'avec un élément en hauteur et obtenir des éléments finis très plats. L'expérience a été tentée et malgré la qualité très mauvaise des éléments (leur longueur de l'ordre de dix fois leur largeur) on obtient de très bons résultats avec un coût bien plus faible.

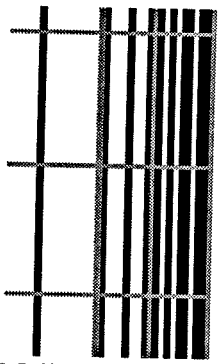
Le tableau suivant résume les caractéristiques du problème discrétisé en triangles, puis en rectangles.

	Maillage triangulaire	Maillage rectangulaire classique/réduit*
Nombre d'éléments :	271	200/22
- Surfaciques :	246	175/20
- Linéiques :	25	25/2
Nombre de noeuds	551	590/85
Longueur moyenne des lignes de la matrice (termes)	5	7/7
Temps CPU de résolution	1 minute 4 secondes	44 secondes/16 secondes

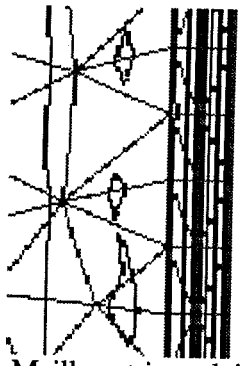
4-2-5 Résultats obtenus

Les résultats obtenus sont les suivants:

	Résultat théorique [BOZORTH]	Résultat avec mailleur triangulaire	Résultat avec mailleur rectangulaire
- Puissance active stockée dans le cylindre (W)	2,63228	2,62091 err-relative = 4,3 %.	2,63238 err-relative = 0,03 %.
- Puissance réactive stockée dans le cylindre (W)	2,79403	2,7798 err-relative = 5,06 %.	2,78979 err-relative = 1,51 %.
Courant efficace dans la section du cylindre (A)	100,084	100,128 err-relative = 0,44 %.	100,098 err-relative = 0,14 %.



Maillage rectangulaire



Maillage triangulaire

Fig.19: Comparaison des résultats obtenus avec les deux maillages et zoom dans l'épaisseur de peau

- L'aspect des lignes équiflux (Fig.19) est bien meilleur avec un maillage rectangulaire car le problème étant unidimensionnel, on devrait théoriquement obtenir des lignes de champ concentriques autour de l'axe de révolution du cylindre. C'est à dire des droites parallèles à l'axe du cylindre dans la vue en coupe. Dans la solution obtenue avec un maillage triangulaire (automatique), on observe un bruit numérique flagrant.

- La valeur du courant total efficace traversant le cylindre s'avère plus proche de la réalité, même commentaire pour le calcul des puissances dissipées. L'erreur relative est quatre fois plus faible avec

* Le maillage réduit comprend deux éléments dans la hauteur du cylindre, et dix dans son épaisseur.

le maillage rectangulaire qu'avec le maillage triangulaire.

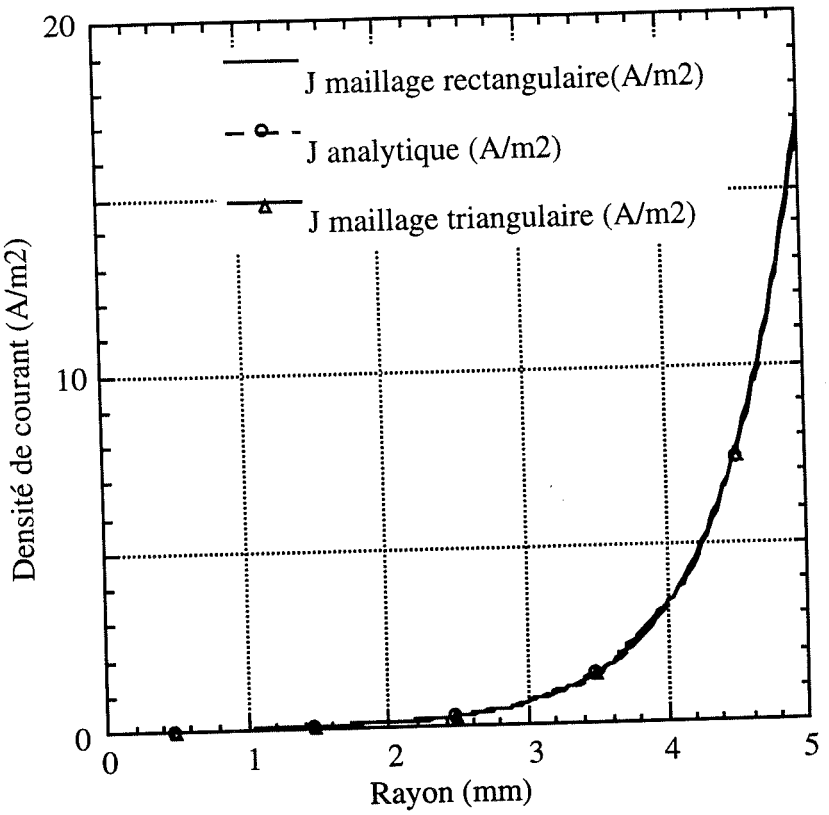


Fig.20: Courbes de densité de courants obtenues par maillage rectangulaire et triangulaires comparées à la solution analytique

- Les courbes de densité de courant (Fig.20) sont sensiblement les mêmes avec un temps moindre de résolution pour le mailleur automatique en rectangles.

- Si on prend une épaisseur de peau plus petite (en augmentant la perméabilité du cylindre, ou la fréquence d'alimentation de la bobine), le maillage en rectangles va s'avérer être de plus en plus performant, car il permet de mailler de fines épaisseurs avec peu d'éléments contrairement au maillage automatique triangulaire (contraintes sur la dimension des triangles).

- La valeur de la densité de courant obtenue par la méthode des éléments finis (rectangulaires et triangulaires), calculée sur le rayon du cylindre (coupé en son milieu) a été comparée à la valeur analytique et théorique obtenue par calcul de la fonction de Bessel au premier ordre, ainsi que sa dérivée. La densité de courant calculée par la méthode des éléments finis est légèrement inférieure à la densité de courant calculée de manière analytique. On peut de plus remarquer que les solutions par maillage rectangulaire et maillage triangulaire sont comparables. Cependant, il faut noter que la solution triangulaire dépend du plan de coupe car les isovaleurs présentent des irrégularités. On a choisi de prendre un critère tel que le courant pour comparer les différentes solutions car il est plus "proche" de la variable d'état A_θ, en effet J est directement lié au potentiel, alors que le champ magnétique H l'est à une intégration supplémentaire.

4-2-6 Conclusion et extension de cette étude

Pour les problèmes à géométrie très simple, il est préférable d'utiliser des mailleurs dits structurés, qui génèrent des éléments rectangulaires régulièrement avec de très bonnes propriétés :

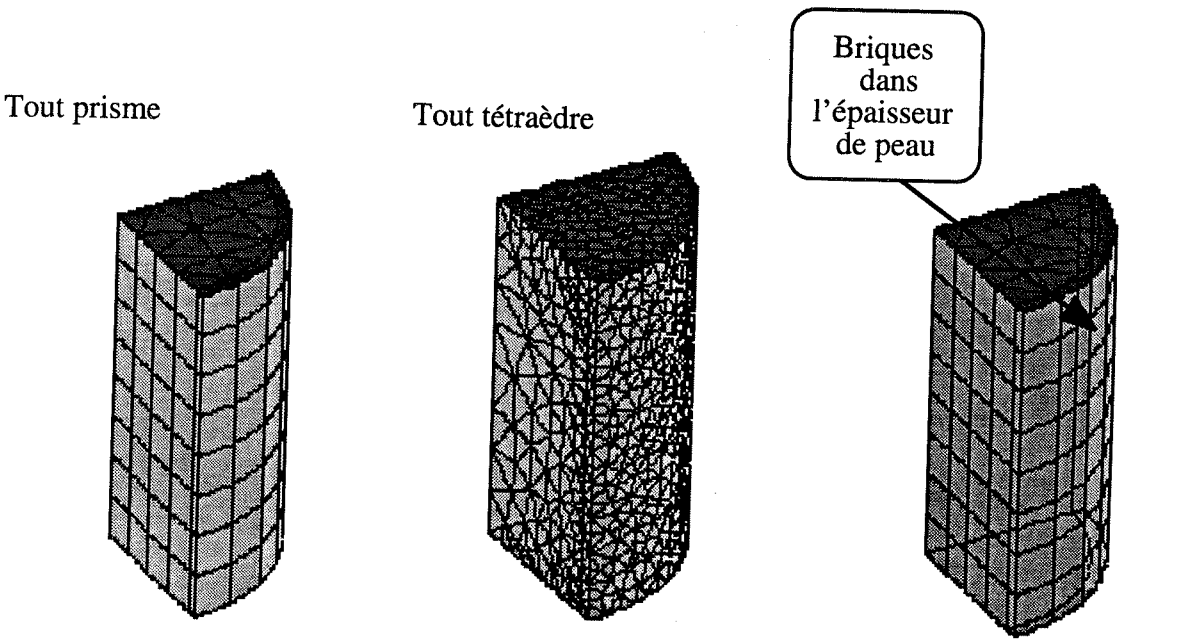
- L'utilisateur peut contrôler facilement le nombre d'éléments qu'il souhaite dans chaque domaine, sans être dépendant du mailleur automatique qui ne contrôle que la densité d'élément.

- L'utilisation d'éléments rectangulaires fins est possible pour les domaines présentant une

variable d'état très peu sensible dans une des directions, ce qui diminue la considérablement la taille du problème à résoudre. Les éléments finis rectangulaires sont particulièrement adaptés à des problèmes anisotropes.

- Le mailleur de Delaunay, qui génère de manière automatique des triangles reste cependant incontournable lorsque la géométrie est compliquée (type boîte d'air), et le problème isotrope.

Ces constats sont généralisables en 3D, ou le mailleur structuré (contrôlable) peut être basé sur des méthodes de transport/projection, d'extrusion, chaque discrétisation devant être adaptée au problème physique posé. On a essayé de mailler le cylindre en tridimensionnel, en tétraèdres, puis en prismes, et enfin en rectangles. La base du cylindre a été maillée en triangles, puis par extrusion ou a obtenu des prismes (cas 1), que l'on a comparé au maillage automatique de Delaunay en tétraèdres (cas 2), et à un maillage obtenu par extrusion du mailleur rectangulaire (cas 3). On a obtenu les données suivantes au premier ordre:



	Cas 1	Cas 2	Cas 3
Nombre de Noeuds	168	1249	168
Nombre d'éléments volumiques	240	5941	192

Fig.21: Différents cas de maillages tridimensionnels

On constate donc que l'étude réalisée sur le cylindre en deux dimensions axisymétriques, est tout à fait généralisable à la 3D, qui amplifie encore le gain en nombre d'éléments et en conditionnement du problème.

4-3 Des solutions...

Nous sommes encore loin du mailleur *presse-bouton* qui optimiserait le maillage d'un dispositif électrotechnique. Il est par conséquent nécessaire d'avoir un utilisateur connaissant *a priori* le problème et ayant des idées sur la solution physique.

Cependant, il peut être très utile de développer des outils de maillage utilisables directement par l'utilisateur. Il devrait pouvoir affecter pour chaque volume un type de mailleur, automatique (Delaunay) ou structuré (Projectif ou extrusif), et ainsi utiliser l'anisotropie du maillage. En effet, les mailleurs structurés, qui génèrent des éléments de type quadrangles ou prismes permettent de gérer au mieux l'anisotropie, alors que les mailleurs automatiques maillent des géométries très complexes. Il est alors nécessaire de construire des éléments de transition et de les insérer au bon endroit dans le maillage mixte.

Une boite à outil de maillage et la possibilité de mélanger des cultures de maillage semblent être des solutions appropriées aux problèmes rencontrés par les concepteurs et analystes utilisant la méthode des éléments finis.

I-5 Conclusions

Au cours de ce chapitre, nous avons évoqué et développé la méthode des éléments finis sur un exemple magnétostatique bidimensionnel.

Ensuite, la C.A.O. et la description géométrique des données ont été présentées, puis nous avons fait un rapide état de l'art des méthodes de maillage.

Auprès des différents utilisateurs des méthodes de maillage, nous avons pu élaborer un catalogue des difficultés de maillage, de manière à essayer de répondre le plus possible aux lacunes de chaque méthode de maillage.

Il semble donc clair, et c'est ce que nous allons développer dans les chapitres suivants, qu'il est nécessaire de pouvoir générer des différents types de maillages de manière à tirer parti des avantages de chaque méthode de maillage. Cela devrait être réalisé de manière automatique.

Enfin, il est aussi nécessaire de pouvoir évaluer la qualité d'un maillage *a priori*. Dans le chapitre suivant, nous présentons nos travaux sur un critère de qualité de maillage générique.

Chapitre II

Qualité des éléments finis en vue d'optimiser un maillage

L'expérience montre que la qualité de la solution obtenue par la méthode des éléments finis est très dépendante du maillage réalisé. De plus, les mailleurs automatiques ne sont pas parfaits: un maillage peut contenir des éléments mal conditionnés ou dont les caractéristiques ne sont pas adaptées aux propriétés du phénomène physique étudié. Le maillage est alors impropre au calcul et doit être corrigé ou régénéré. Dans ce chapitre, nous traiterons de la qualité des éléments finis, en vue de caractériser un *bon* maillage.

Au niveau de l'amélioration de la qualité du maillage, deux approches sont possibles:

- Soit améliorer la qualité de la solution après des résolutions successives (adaptativité [MORANCAY-93], [ZIENCKIEWICZ-91]), solution efficace mais coûteuse en temps de résolution.

Le principe de cette méthode est l'introduction de degrés de liberté* là où la solution est mal calculée. C'est à ce niveau qu'il est nécessaire de parler de mesure d'erreurs *a posteriori* [RAIZER-94]. L'intérêt de cette méthode est qu'elle garantit presque à coup sûr la qualité de la solution.

- Soit améliorer la qualité de la solution *a priori* de manière à avoir un maillage optimal avant la résolution. L'intérêt de cette approche réside dans le fait qu'elle ne nécessite pas de résolution, mais un traitement du maillage de manière indépendante du solveur. Pour pouvoir améliorer le maillage, il est nécessaire de disposer de bons critères ou de bonnes mesures de qualité locale au niveau de la maille du problème éléments finis.

La figure suivante (Fig.1) présente les deux approches possibles concernant l'amélioration de maillage dans un problème éléments finis.

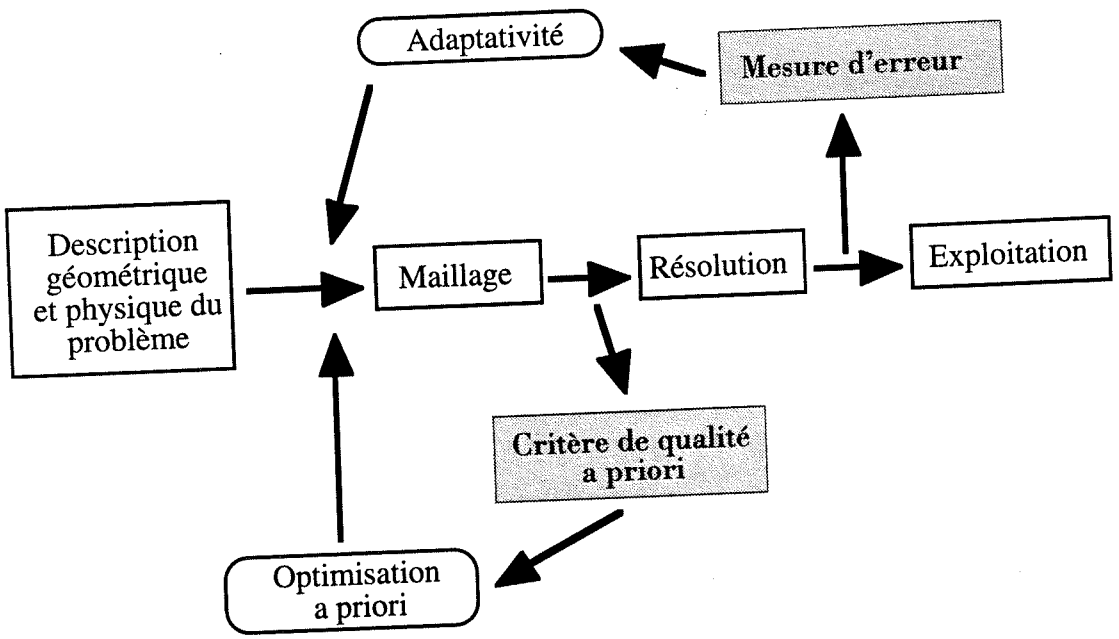


Fig.1: Les deux approches pour faire de l'amélioration de maillage

En fait, ces deux approches sont complémentaires. Il est en effet préférable d'avoir un bon maillage initial avant de partir en maillage adaptatif. De plus, les critères de qualité *a priori* sont utilisables en adaptatif.

Notre étude sera restreinte à une approche *a priori* de la qualité du maillage. En effet, l'adaptativité est un domaine de recherche "en soi", et de plus cette approche est très liée au solveur. Notre objectif étant de réaliser un préprocesseur généraliste, il nous est par conséquent nécessaire de travailler en amont du solveur, indépendamment de ce dernier. De plus, il est clair que la résolution du problème est l'étape la plus coûteuse du problème éléments finis (elle est souvent exécutée en *batch*) et il est pertinent de rechercher à améliorer la qualité du maillage avant de résoudre.

Dans ce chapitre, nous présenterons d'abord des critères de qualité de maillage trouvés dans la littérature, dont le choix peut être proposé à l'utilisateur C.A.O., et dont l'utilisation est nécessaire pour faire de l'amélioration de maillage**. En effet, la sélection du critère d'évaluation de maillage entraîne la génération d'un type de maillage.

Ensuite, les outils d'améliorations topologiques ou non topologiques trouvés dans la littérature

* On peut augmenter le nombre de noeuds (ou la finesse du maillage), adaptativité h; ou bien augmenter le degré d'interpolation des fonctions de forme, adaptativité p.

** On notera que l'amélioration de maillage dans la littérature est quasi exclusivement appliquée à des maillages de type "simplexe" (triangles en 2D et tétraèdres en 3D).

seront exposés et comparés. On abordera aussi le problème des algorithmes de supervision de ces outils d'amélioration de maillage.

Enfin, dans une troisième partie, on apportera une contribution à l'évaluation de la qualité des éléments finis. Après avoir mis en évidence l'absence de critère généraliste (ou universel), on proposera une approche nouvelle d'évaluation de maillage mixte: Une évaluation de la qualité basée sur le conditionnement matriciel.

II-1 Critères géométriques *a priori*

Ils permettent de classer et d'évaluer un maillage éléments finis. Le choix d'un bon critère est primordial en vue de l'amélioration du maillage.

L'expérience montre que des corrections du maillage sont souvent nécessaires avant de passer au calcul de manière à obtenir un maillage de qualité.

Les maillages éléments finis peuvent contenir des mailles non conformes ou qui ont des volumes négatifs ou nuls. Des procédures semi-automatiques sont proposées dans certains logiciels. Par exemple, dans [I-DEAS] il est possible de détecter :

- Les arêtes libres * d'un maillage 2D ou facettes libres d'un maillage 3D.
- Les éléments coïncidents: Deux éléments différents partagent les mêmes noeuds.
- Les noeuds du deuxième ordre mal positionnés.

Ces tests, bien que nécessaires, ne sont pas suffisants car les résultats obtenus ne permettent pas d'évaluer la qualité d'un maillage. La détection et la localisation des éléments non satisfaisants est une tâche difficile à cause de l'absence d'une définition formelle et générale du "non satisfaisant" et à cause de la difficulté d'appréhender un maillage tridimensionnel visuellement. Pour cette raison, [STAB-93], se propose de distinguer deux niveaux:

- La validité : le maillage est conforme.
- La qualité : un maillage est de bonne qualité si ses éléments sont bien adaptés pour le calcul éléments finis.

Dans cette partie, nous nous intéresserons à la qualité des éléments finis générés par le maillage, telle qu'on la trouve dans la littérature. D'une part les éléments de type simplexe (triangles en 2D et tétraèdres en 3D), puis ensuite les rectangles et hexaèdres seront traités.

1-1 Qualité des éléments finis de type simplexe

Après avoir répertorié les critères d'évaluation de qualité existants pour les simplexes, nous chercherons à les classifier et à les évaluer.

1-1-1 Une classification des éléments finis tétraédriques

On s'intéresse aux tétraèdres du premier ordre générés par un mailleur automatique. La forme du tétraèdre peut être responsable de deux types d'erreur [STAB-93] :

- Un arrêt de calcul si le volume du tétraèdre est négatif ou nul.
- Une erreur d'approximation qui est fonction de la taille et de la forme géométrique du tétraèdre.

Un coefficient géométrique qui traduit l'erreur d'approximation est calculé. Il est appelé critère de qualité. Dans tous les cas, on prend ce critère égal à un pour un tétraèdre équilatéral. Ce coefficient, dans la littérature, est le plus souvent égal à [STAB-93], [RASSINEUX-95], [I-DEAS]:

$$Q_1 = \alpha = C\frac{r}{L} \qquad (1)$$

où r est le rayon de la boule inscrite, L la longueur d'arête maximum, et C un coefficient de normalisation.

$C = \sqrt{12}$ pour des triangles le α_{min} toléré avant résolution est fixé à 0,5 pour [I-DEAS].

* Une arête libre ne doit apparaître que sur la frontière du domaine. Les éléments adjacents doivent partager les noeuds et arêtes communs (ou facettes communes en 3D).

$C = \sqrt{24}$ pour des tétraèdres.

Cependant, dans [FLUX3D], on utilise le critère suivant [TALON-87], [ALBERTINI-88] :

$$C_2 = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \frac{\text{Vol sphère inscrite dans le tétraèdre}}{\text{Vol du tétraèdre}} \qquad (2.1)$$

qui sous une forme normalisée entre 0 et 1 devient:

$$Q_2 = 216\sqrt{3}\frac{V_K^2}{S_K^3} \qquad (2.2)$$

où V_K est le volume du tétraèdre considéré et S_K sa surface.

D'autres encore choisissent [GEORGES-93]:

$$C_3 = \gamma \frac{h}{r} \qquad (3.1)$$

$$Q_3 = \frac{C_3}{C_e} \qquad (3.2)$$

où r est le rayon de la boule inscrite, et h la longueur d'arête maximum, γ un coefficient de normalisation.

Pour [CAVENDISH-85], le critère de qualité de l'élément tétraèdre peut se déduire directement de la valeur des rayons des sphères inscrites et circonscrites aux éléments finis.

$$C_4 = 3 \frac{R_{\text{sphère inscrite}}}{R_{\text{sphère circonscrite}}} \qquad (4.1)$$

$$Q_4 = \frac{C_4}{C_e} \qquad (4.2)$$

Les quatre critères normalisés Q_i donnent une valeur nulle pour les éléments très mauvais et une valeur égale à l'unité pour un élément équilatéral. Ce qui nous autorise à pouvoir les comparer plus tard.

Enfin, d'autres mesures de qualité utilisent l'angle solide [JOE-91] [FORSMAN-94].

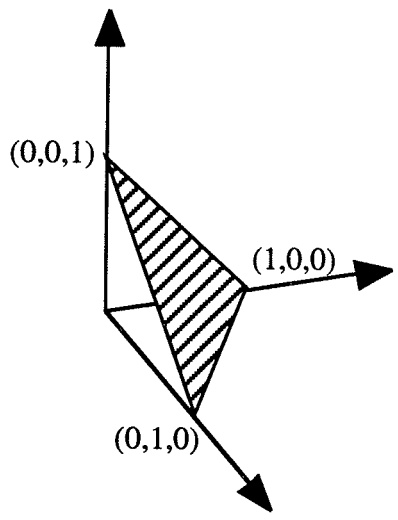


Fig.2: Qualité de l'élément tétraèdre situé dans un coin égale à 61,5%

La qualité du maillage est mesurée par le calcul de la moyenne et de la déviation standard de

tous les tétraèdres du maillage. Les angles solides sont exprimés en pourcentage par rapport à l'angle solide du tétraèdre régulier. Par exemple, la qualité d'un élément tétraédrique situé dans un coin (0,0,0) (1,0,0) (0,1,0) (0,0,1) est de 61,5 % (Fig.2). Ce critère de qualité est employé par [JOE-91] dans le processus d'insertion des noeuds et évite ainsi de générer des tétraèdres aplatis mal conditionnés.

1-1-2 Pour aller plus loin dans la classification des mailles tétraédriques

Les critères généraux présentés précédemment ne donnent malheureusement pas d'informations concernant la correction adaptée permettant d'améliorer l'élément. Pour y remédier, [STAB-92] présente les deux critères suivants:

$$K = \frac{L}{l} \tag{5.1}$$

où L est la longueur de l'arête maximum et l la longueur de l'arête minimum.

$$\omega = \frac{R}{L} \tag{5.2}$$

où R est le rayon de la boule circonscrite et L la longueur de l'arête maximum.

Ces coefficients permettent de classifier les éléments mal conditionnés en trois catégories (Fig.3). Pour chaque catégorie, [STAB-92] propose un traitement particulier ou diagnostic de correction du maillage.

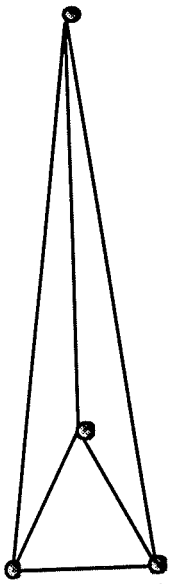
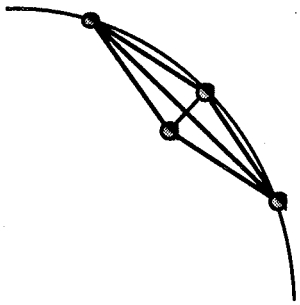
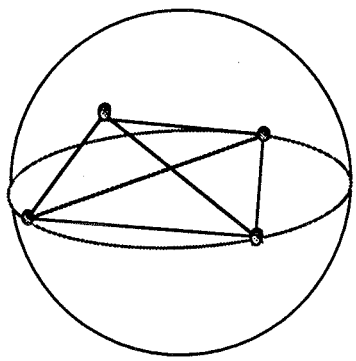
Cas 1	**Cas 2**	**Cas 3**
$K >> 1$ $\omega \cong 1$	$\omega >> 1$	$K \cong 1$ $\omega \cong 1$
		
Éléments aplatis qui résultent d'une mauvaise répartition des noeuds. Une correction locale de suppression d'arêtes responsables de l'aplatissement peut être envisagée.	Éléments aplatis qui proviennent d'une mauvaise connexion des noeuds. Le critère de Delaunay peut éviter le cas 2. Des techniques de correction sont proposées. [CAVENDISH-85] note que près de 10% des tétraèdres sont aplatis après un Delaunay. [JOE-91] prouve que le critère de Delaunay n'est pas suffisant pour générer un "bon maillage" et propose d'ajouter un critère de max-min* angle solide .	

Fig.3: Classement plus fin des déformations de mailles tétraèdres

Pour obtenir un bon critère de maillage, [PARTHASARATHY-93] se propose de comparer les

* [JOE-91] propose en fait de minimiser l'angle solide maximum de l'élément tétraèdre.

critères de qualité sur les tétraèdres, soumis à des tests de distorsion et compare de plus les coûts de chacune de ces mesures de qualité, afin de déduire le meilleur critère de qualité.

Il compare sept critères de qualité (normalisés par rapport au tétraèdre équilatéral) sur quatre tests de distorsion [A-B-C-D]. Les tests de distorsion de tétraèdres sont présentés à la figure suivante (Fig.4) et se nomment: Test A, test B, test C et test D. Il faut que chaque critère puisse mesurer convenablement ces quatre tests de distorsion.

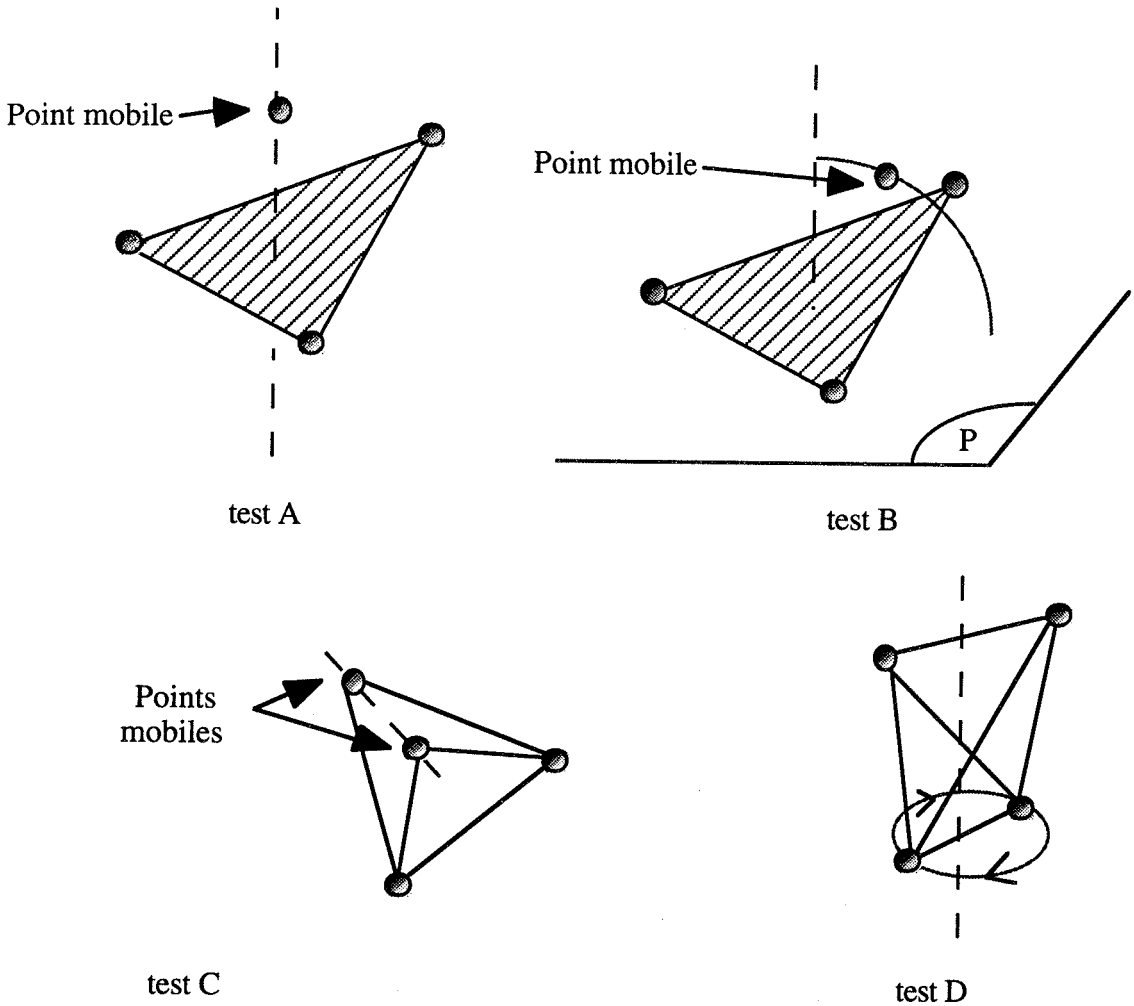


Fig.4: Tests de déformation de tétraèdres

Par rapport à ces quatre tests, une première sélection est faite sur les sept critères proposés au départ. Parmi les critères de qualité qu'il propose au départ, il reste : α, β, σ, γ.

$$\alpha = \frac{(\text{moy. des arêtes})^3}{\text{Vol du TD}} \qquad \alpha_o = 8{,}479670 \qquad \text{[CAVENDISH-85]}$$

$$\beta = \frac{\text{Rayon sph. circonscrite}}{\text{Rayon sph. incrite}} \qquad \beta_0 = 3{,}0$$

$$\sigma = \frac{\text{long. arête max.}}{\text{rayon sph. inscr.}} \qquad \sigma_0 = 4{,}898979 \qquad \text{[GEORGES 93]}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \text{long.arêtes}^2}}{\text{Vol. du TD}} \qquad \gamma_0 = 8{,}479670$$

Remarque: Les valeurs indicées " 0 " sont les mesures pour un tétraèdre équilatéral.

1-1-3 Évaluation des coûts de calcul de chaque critère

Le coût d'évaluation de chaque critère revient à:

- α: 6 arêtes + volume de l'élément tétraèdre.
- γ: (6 arêtes)^2 + volume de l'élément tétraèdre.
- β: Rayon du cercle circonscrit : calcul du centre du cercle (résolution système linéaire 3x3) + calcul du rayon.
  Rayon du cercle inscrit : calcul des aires des 4 facettes triangulaires et du volume.
- σ: Maximum des longueurs des arêtes + volume de l'élément tétraèdre.

D'après Parthasarathy, il semble que α et γ soient les moins chers à calculer. Cependant, il est à noter que la quantité de calculs, donc le coût, dépend aussi de la structure de données utilisée dans le mailleur.

1-2 Critère de qualité pour les rectangles ou hexaèdres

Dans le cas du maillage en quadrangles, il n'existe pas de fonction d'évaluation privilégiée, mais certains aspects peuvent être estimés indépendamment. Néanmoins, l'existence d'une fonction unique apparaît essentielle, lorsque l'évaluation doit guider un processus, par exemple un processus d'optimisation.

Par exemple, dans [I-DEAS], on se propose de mesurer pour un rectangle:

- Sa distorsion avec la valeur de ses angles intérieurs.

- Son allongement caractérisé par le rapport (Lmin/Lmax)*$\sqrt{2}$, où Lmin mesure l'arête minimale et Lmax, la diagonale maximale de l'élément (le coefficient $\sqrt{2}$ normalise le critère).

[MOUNOURY-96] propose de construire à partir de ces critères indépendants, une fonction d'évaluation unique, qui soit suffisamment représentative de la forme des éléments et puisse être modulée en fonction des exigences qualitatives de l'utilisateur.

Pour chaque critère considéré, on connaît l'intervalle [min_k, max_k], dans lequel il prend ses valeurs, et sa valeur idéale c_k, valeur obtenue, pour ce critère, dans le cas d'un élément parfait. Pour chaque mesure X_k, effectuée sur un élément, on peut caractériser l'écart, notée d_k, entre l'élément évalué et l'élément parfait par rapport à ce critère, en calculant (6.1):

$$d_k = (X_k - c_k)^2 \qquad (6.1)$$

Pour obtenir un résultat normalisé (i.e. un critère entre 0 et 1), noté dn_k, il suffit de calculer (6.2):

$$dn_k = \frac{d_k}{Max(max_k - c_k, c_k - min_k)^2} \qquad (6.2)$$

Cette fonction correspond à la mesure d'un seul critère. Pour pouvoir prendre en compte p critères simultanément, il faut pouvoir combiner les dn_k dans une seule fonction d'évaluation, qui soit suffisamment représentative de la qualité globale de l'élément.

Plusieurs types de fonctions sont envisageables. On peut utiliser simplement:

- Une moyenne arithmétique (7.1):

$$m_a = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} dn_k \qquad (7.1)$$

- Ou une moyenne géométrique (7.2):

$$m_g = \sqrt[p]{\prod_{k=1}^{p} dn_k} \qquad (7.2)$$

qui fournissent directement des résultats normalisés. La qualité sera alors $1\text{-}m_a$, ou $1\text{-}m_g$ (par convention, l'élément idéal a une qualité égale à 1). Certains critères peuvent éventuellement être privilégiés en attribuant des poids aux différentes mesures. Par exemple, pour la moyenne arithmétique pondérée, on utiliserait (7.3):

$$m_{ap} = \frac{\sum_{k=1}^{p} a_k dn_k}{\sum_{k=1}^{p} a_k} \qquad (7.3)$$

De nombreuses fonctions plus complexes peuvent être construites. Pour obtenir une fonction plus discriminante dans les zones proches des valeurs idéales, on peut choisir d'utiliser une fonction du type:

$$\exp(-\alpha\, m_{ap}) \qquad (8)$$

Cette fonction fournit, comme les précédentes, un résultat normalisé. Elle a l'avantage de permettre, grâce à son paramètre α, un meilleur contrôle du niveau de tolérance autour de la valeur idéale.

Néanmoins, il faut noter que cette fonction présente un inconvénient: elle a tendance à "lisser" les résultats obtenus pour les différents critères, c'est à dire que des erreurs importantes peuvent être atténuées par des erreurs plus faibles, et ainsi fournir un critère d'évaluation moyen.

Une fonction d'évaluation idéale, pour pallier cet inconvénient, devrait caractériser, à la fois, la valeur globale de l'évaluation et l'uniformité des différentes mesures y participant. La fonction entropie, notée H est proposée par [MONOURY-95]. Elle peut permettre dans notre cas de caractériser l'uniformité des différentes mesures. Pour un ensemble de valeurs x_k, telles que:

$$\forall k,\ 0 \le x_k \le 1,\ \sum_{k=1}^{p} x_k = 1 \qquad (9)$$

L'entropie H est définie par (9):

$$H = -\sum_{k=1}^{p} x_k \log(x_k) \qquad (10)$$

Cette fonction prend ses valeurs dans l'intervalle [0, log p]. Elle atteint son maximum uniquement lorsque tous les x_k sont égaux (et valent donc l/p). Pour illustrer l'intérêt de la fonction entropie, nous l'avons représentée, sur la figure suivante (Fig.5), pour deux valeurs x_1 et x_2, appartenant à [0, 1] et telles que: $x_1 + x_2 = 1$. Là où la fonction exponentielle fournit un résultat constant, la fonction entropie permet de différencier les situations.

Cette fonction pourrait être utilisée seule ou en complément de la fonction exponentielle (en effectuant le produit des deux fonctions par exemple). Les contraintes imposées par la fonction entropie sur les mesures à combiner ne permettent pas de généraliser son utilisation à tout ensemble de

critères. Néanmoins dans le cas où les quatre angles du quadrangle ont une somme constante, la fonction entropie peut servir à préciser l'évaluation.

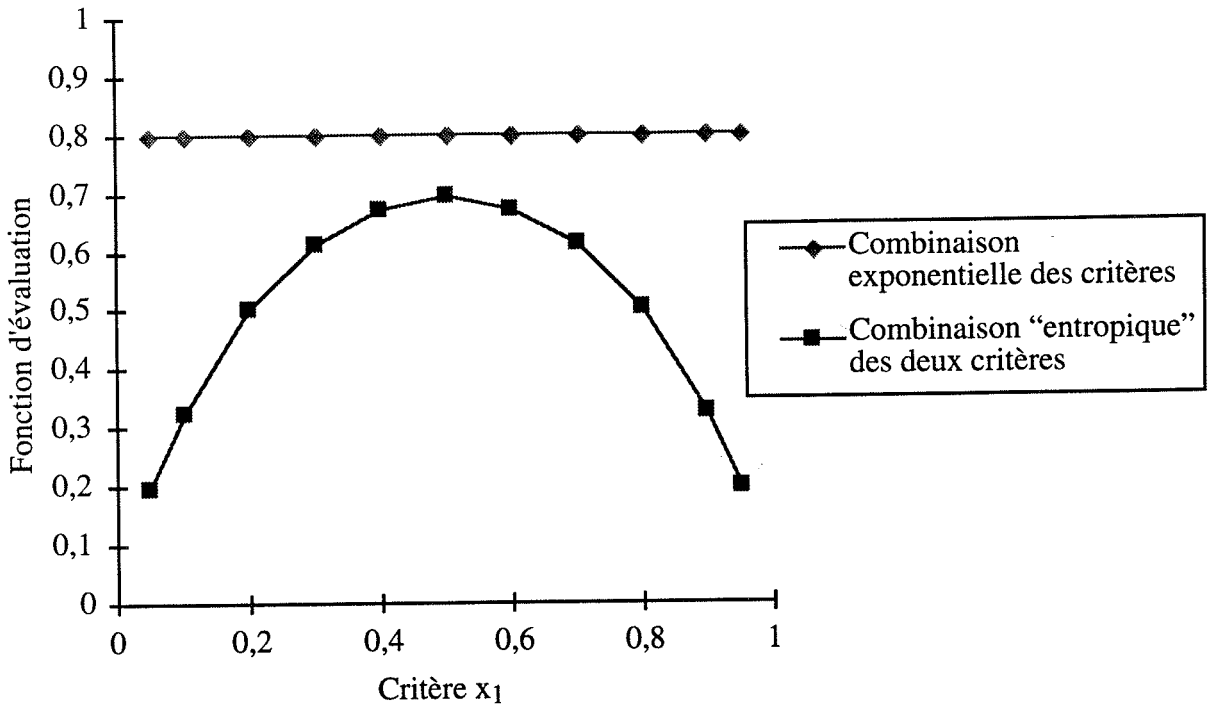


Fig.5: Fonction entropie pour caractériser l'uniformité de deux valeurs

En conclusion, il n'est pas évident de trouver un "bon critère" pour l'élément rectangle, car il est nécessaire de combiner plusieurs critères de type "savoir faire". Enfin, l'évaluation de ce critère global dépend de plusieurs paramètres, et peut être coûteux au sens du temps de calcul.

1-3 Quel choix pour l'utilisateur: triangle ou rectangle, hexaèdre ou tétraèdre?

Nous avons présenté au début de cette partie des critères de qualité dédiés aux triangles et tétraèdres, puis des critères concernant les rectangles ou briques. Mais l'utilisateur ayant le choix entre ces deux types d'éléments va devoir judicieusement utiliser soit des triangles ou tétraèdres, soit des rectangles ou hexaèdres.

La revue Benchmark [RAMSEY-95] a réalisé une comparaison entre des maillages hexaèdres ou tétraèdres sur un cas simple mécanique d'encastrement avec différents cas de charges, d'une pièce utilisée sur les plates-formes pétrolières.

Ses conclusions sont les suivantes:

- Pour avoir un calcul équivalent des maxima de contraintes (dérivée de la variable d'état), il est nécessaire d'avoir un plus grand nombre de tétraèdres. Cependant, en utilisant le raffinement de maillage (auto-adaptativité [RAIZER-94][MORANCAY-93] ou intervention manuelle), on améliore de manière probante le calcul des maxima de contraintes sur un maillage en tétraèdres.

- Un maillage grossier en tétraèdres donne des mauvais résultats comparé à un maillage grossier en hexaèdres.

- La génération de maillage tétraédrique est plus aisée que la génération de maillage structuré en hexaèdres.

En conclusion, [RAMSEY-95] de Benchmark assure qu'il a "encore des réserves sur la

précision des résultats issus de maillages tétraédriques dans certaines situations, et sa capacité a être utilisé de manière universelle".

II-2 Quelques algorithmes d'optimisation de maillages tétraédriques

Après avoir passé en revue les différents critères de qualité publiés dans la littérature, nous sommes capables de définir une fonction objective qui définit la qualité globale du maillage à partir de l'évaluation de chaque élément. Il est aussi possible de repérer et visualiser les plus mauvais éléments du maillage. Afin de supprimer ces mauvais éléments, il est utile de disposer d'outils permettant de modifier localement le maillage par région.

Les outils interactifs d'amélioration peuvent être élémentaires : déplacer un noeud, détruire des éléments, permuter une arête ... L'utilisation "manuelle" de ces outils reste envisageable en 2D [NOEL-94], mais elle risque d'être fastidieuse et pas forcément fiable en 3D. La solution pourrait être de tout automatiser et de fixer un critère *a priori* . Mais le résultat n'est pas garanti. De plus, la maîtrise de la convergence des boucles d'essais et de calcul d'erreur nécessite une bonne connaissance des algorithmes et une bonne expérience du logiciel de maillage. La solution est donc peut être de permettre à l'utilisateur de contrôler le nombre d'itérations d'optimisation qu'il veut réaliser sur son maillage.

Les outils d'amélioration de maillage peuvent être divisés en deux grandes familles: Ceux qui entraînent des modifications topologiques (modification de la connexion entre les noeuds), et ceux qui entraînent des modifications non topologiques (déplacement des noeuds sans modifier la connectivité entre eux).

2-1 Solutions empiriques de modifications topologiques

Le problème est d'améliorer la qualité des mailles générées par une méthode automatique ou libre. Les mailles créées sont exclusivement tétraédriques (à notre connaissance*). Quelques solutions empiriques sont proposées aujourd'hui : le remaillage local, les inversions locales ou la suppression d'arête.

2-1-1 Le remaillage local

Le remaillage local consiste à détruire les mailles dans une région où elles sont de mauvaise qualité et à remailler. Les méthodes frontales sont adaptées à ce type de traitement quand elles autorisent les destructions, mais elles génèrent de nouveaux noeuds.

Il semble difficile d'appliquer cette méthode de remaillage local au mailleur basé sur l'insertion de noeuds par Delaunay [HERMELINE-82].

2-1-2 Inversions locales

Les inversions locales utilisent deux opérations élémentaires. L'opérateur 2T->3T qui détruit deux tétraèdres partageant une face et génèrent trois tétraèdres partageant une arête, ainsi que l'opération inverse 3T->2T. [JOE-91] applique cette permutation sur le maillage en cours de réalisation. Il réalise des permutations d'arêtes (*swapping*) lors de chaque ajout de noeud dans le maillage.

[CAVENDISH-85] propose des modifications topologiques dans le maillage pour supprimer les tétraèdres plats. En effet, il propose un mailleur 3D automatique à partir d'une géométrie CSG** par insertion de noeuds dans des plans de coupes de la pièce, puis en générant un maillage pour l'algorithme de Delaunay. Il se trouve alors qu'on crée des tétraèdres plats et il est alors nécessaire de les traiter par permutations d'arêtes ou "regonflage".

Soit ABCD un tétraèdre plat. La stratégie est de déterminer comment ABCD s'adapte au maillage. [CAVENDISH-85] propose de traiter les tétraèdres plats en les divisant en deux grandes

* A notre connaissance, seul MERLIN produit par ALGOR permet de générer des briques à partir d'un maillage de peau en triangles.
** pour Constructive Solid Geometry.

familles. La première est celle ou deux tétraèdres voisins au tétraèdre plat partagent une même facette (Fig.6), la deuxième est celle où il n'y a pas de voisins ayant de facette commune entre eux (Fig.7). Dans le premier cas (Fig.6) on peut supprimer une arête, dans le deuxième cas (Fig.7), on peut "regonfler" le tétraèdre plat par déplacement d'un noeud.

Premier cas : 2 Tétraèdres voisins de ABCD partagent un même noeud :

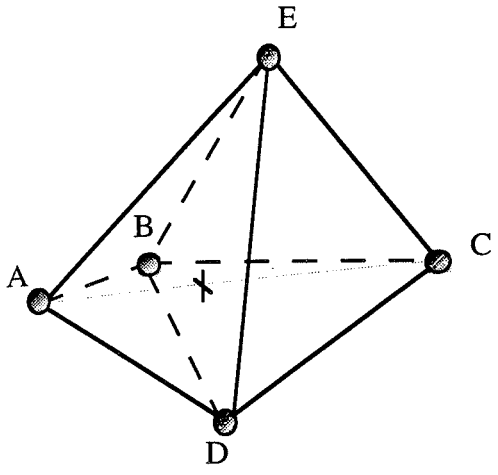


Fig.6: Modification topologique #1 proposée par Cavendish

On remplace {ABCD, ABDE, BDCE}

par {ABCE, ADCE}.

Deuxième cas : il n'y a pas 2 voisins avec un même sommet :

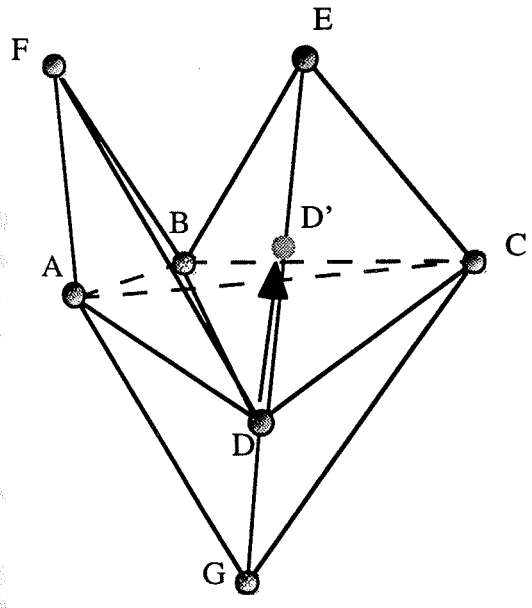


Fig.7: Modification topologique #2, "regonflage" proposée par Cavendish

Pour améliorer la qualité du tétraèdre ABCD qui est plat,
La solution est de loger arbitrairement le point D à la position $\frac{(D+E)}{2}$, c'est à dire D' sur la figure 7.

Le Tétraèdre ABCD reste acceptable et la qualité du tétraèdre s'améliore.

Remarque :

Le cas 1 se ramène à l'opération de suppression d'arête 2T->3T proposée par [TALON-87] et [GEORGES-93].

Cavendish ne fournit pas d'histogrammes permettant d'évaluer ses outils d'amélioration de maillage, son article étant basé sur un mailleur "automatique" de manière globale qui travaille à partir d'une géométrie issue de modeleur *CSG*.

2-1-3 Suppression d'arêtes

Une autre technique supprime les arêtes sur lesquelles se trouvent les éléments aplatis. Si on appelle C la coquille* de tétraèdres s'appuyant sur l'arête en question "a", supprimer "a" revient à proposer des tétraédrisations (dans l'ensemble des tétraédrisations possibles de C) qui ne font pas apparaître "a" et qui améliorent la qualité de la coquille.

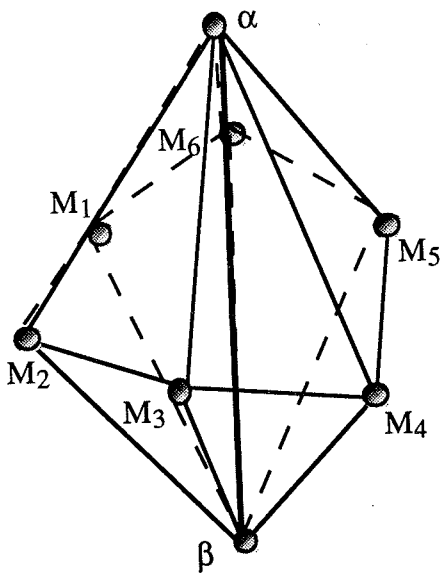


Fig.8: Coquille de six tétraèdres autour de l'arête "a" (αβ)

Dans ce cas particulier, [GEORGES-93] chiffre le nombre de remaillages d'une coquille convexe**: $(M_i \alpha M_{i+1} \beta)_{i=1,n}$. Soit n, le nombre de tétraèdres dans la coquille initiale, N_n est le nombre de manières de trianguler l'ensemble des noeuds M_i, on a alors (11):

$$N_n = \sum_{i=3}^{n} N_{i-1} N_{n+2-i} \qquad \text{avec } N_2=1 \text{ et } n>2 \qquad (11)$$

Les figures suivantes (Fig.9) illustrent les triangulations possibles des noeuds M_i médians de la coquille convexe autour de l'arête "a".

* Une coquille est un ensemble de tétraèdres partageant une arête donnée.

** Le fait qu'une coquille soit non convexe ne fait que restreindre le nombre de réécritures possibles.

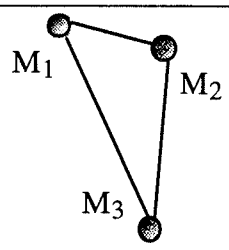


Fig.9.1: Une triangulation possible n=3, N_3=1

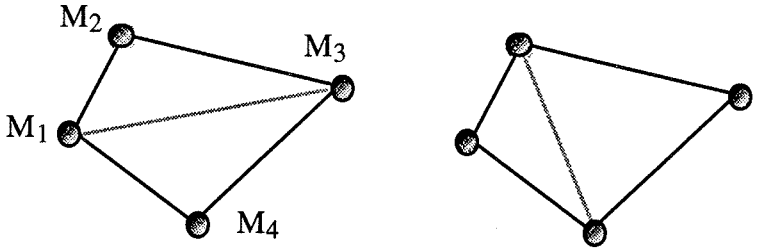


Fig.9.2: Deux triangulations possibles n=4, N_4=2

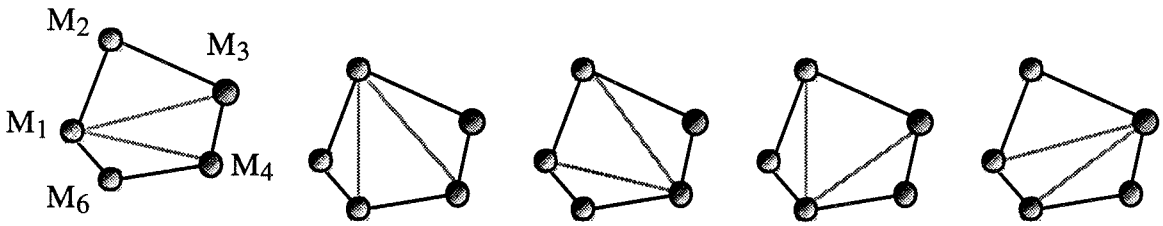


Fig.9.3: Cinq triangulations possibles n=5, N_5=5

Soit NT_n, le nombre de triangles (tétraèdres) différents constructibles à partir des sommets M_i, il croît seulement en n^3 : $NT_n = \frac{(n-1)(n-2)n}{6}$.

Par exemple, avec une coquille de 7 noeuds (soit 5 noeuds médians), on a (12):

$$NT_5=10 \qquad (12)$$
$$N_5 = N_2 \times N_{7-3} + N_3 \times N_3 + N_4 + N_2$$
$$= 1 \times 2 + 1 + 2 = 5$$

D'où le tableau suivant:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{N_n}$	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862
$\mathbf{NT_n}$	1	4	10	20	35	56	84	120	165

NT_n croît beaucoup moins vite que N_n, certains triangles réapparaissant très souvent. On ne calcule donc qu'une fois la qualité d'un couple ($M_jM_lM_e\alpha$) et ($\beta M_jM_lM_e$) de tétraèdres s'appuyant sur $M_jM_lM_e$. [GEORGES-93] propose de calculer toutes les tétraédrisations et de les comparer quant t est petit ($t \leq 9$). On peut aussi prendre la première tétraédrisation qui améliore l'angle minimum au sens de [JOE -91].

La suppression d'arête peut être réalisée sur toutes les arêtes libres, internes au maillage.

2-1-4 Suppression de noeuds

Une autre méthode est possible pour les sommets libres du maillage, dans le cas exceptionnel où un point est connecté à quatre tétraèdres (Fig.10), on peut supprimer ce point (4T->1T).

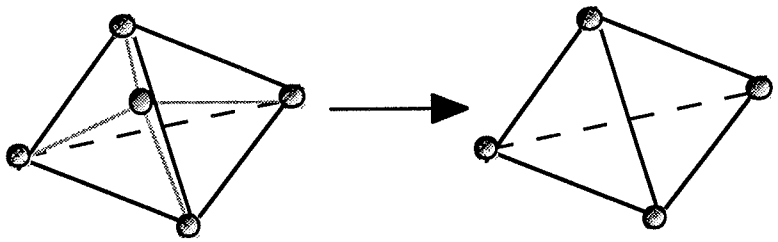


Fig.10: Suppression d'un noeud connecté à quatre tétraèdres.

La figure précédente (Fig.10) montre le passage de quatre tétraèdres partageant un noeud commun à un tétraèdre par suppression d'un noeud.

2-1-5 Insertion de noeuds

Il est aussi possible d'insérer un noeud pour casser une arête. Soit $\alpha\beta$ une arête libre du maillage et $C_{\alpha\beta}$ la coquille associée. Il est possible de créer un point P sur l'arête $\alpha\beta$ et de former un nouveau maillage valide du polyèdre correspondant. Cette opération peut être réalisée si les autres outils présentés ne donnent pas satisfaction, ou si l'arête $\alpha\beta$ est jugée trop longue par rapport aux autres arêtes de la coquille [GEORGES-93]. En pratique, on peut positionner P au milieu de $\alpha\beta$ puis lui appliquer un algorithme de barycentrage.

2-1-6 Suppression de faces

La suppression d'une face libre ou l'insertion d'une arête, est possible si les deux tétraèdres adjacents par cette face forment un polyèdre convexe. Le remaillage de ce polyèdre en 3 tétraèdres [TALON-87] peut être effectué si la qualité s'améliore.

2-2 Algorithmes de modifications non topologiques

Ces outils d'améliorations de maillage présentent la particularité de ne pas modifier la topologie du maillage, c'est-à-dire que seules les coordonnées de noeuds du maillage peuvent être ajustées sans modifier les liaisons entre les noeuds. On développe deux techniques: Le barycentrage et le bougé de points.

2-2-1 Barycentrage

L'algorithme de barycentrage a été préconisé par [ALBERTINI-88]. En prenant tous les noeuds un par un et à partir des noeuds voisins du noeud sélectionné, on le déplace à leur barycentre pondéré via un coefficient choisi par l'utilisation (Fig.11).

On peut considérer chaque ligne du maillage comme un ressort qui déplace les points jusqu'à obtenir une position d'équilibre, le maillage "idéal".

Cet algorithme fonctionne relativement bien pour l'amélioration de maillage en triangles, par contre il est décevant pour les tétraèdres.

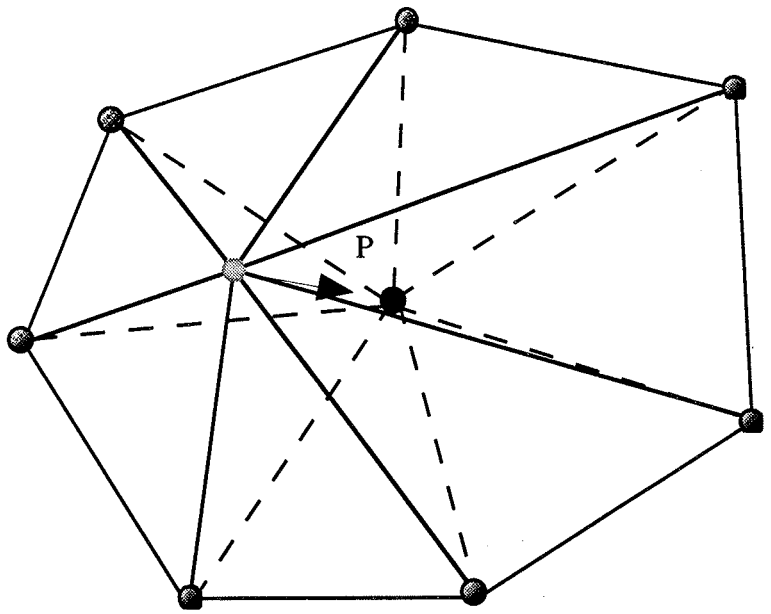


Fig.11: Barycentrage

Il faut tout de même placer des verrous pour éviter tout retournement de triangle qui pourrait avoir lieu, notamment près des frontières concaves. [TALON-87] indique que l'algorithme converge en quatre ou cinq itérations et que les opérations de barycentrage seules ne sont pas intéressantes en trois dimensions car elles dégradent en général la fonction objective, et génèrent des éléments plats.

2-2-2 Bougé de points

"Le principe [GEORGES-93] consiste à déplacer le point P pas à pas (via un coefficient α) vers un point optimal P_{opt} calculé à partir des tétraèdres idéaux s'appuyant sur les faces extérieures de la boule de tétraèdres connectés au point". Schématiquement, on peut écrire :

$$P = P + \vec{d} \text{ avec } \vec{d} = \alpha \overrightarrow{PP}_{opt} \tag{13}$$

et

$$P_{opt} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j P_{idj} \text{ avec } \beta_j = \frac{1}{n} \text{ par exemple} \tag{14}$$

où

- n est le nombre de points connectés à P.
- P_{idj} est la position idéale de P pour le triangle de numéro j, déterminé à partir des faces extérieures de la boucle de tétraèdres contenant P.
- β_j est le poids associé au point j ($\Sigma\beta_j=1$).

Le point P est déplacé vers P_{opt} tant que la qualité s'améliore, dans le cas contraire le pas de déplacement est diminué et inversé. Un algorithme complet est présenté dans [RASSINEUX-95].

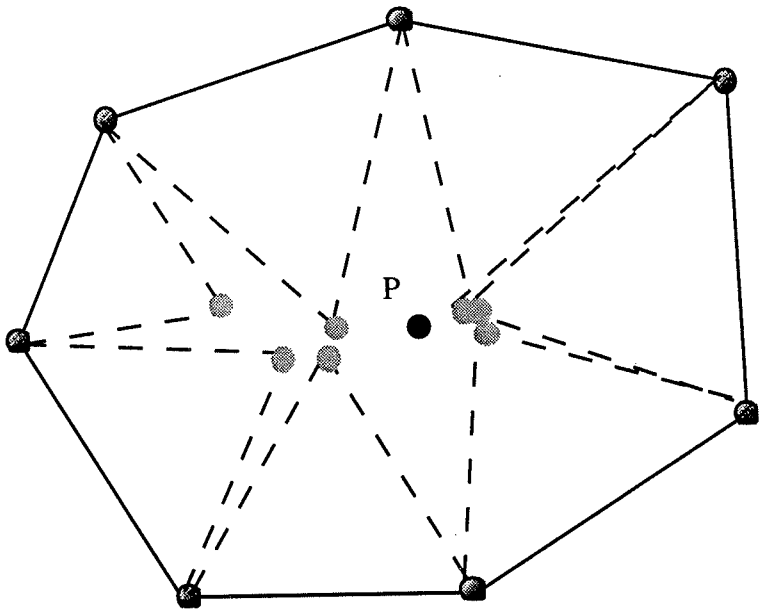


Fig.12: Bougé de points optimal

Cet algorithme semble plus performant que l'algorithme précédent, car ici on explore l'espace pour trouver le noeud idéal à partir des positions P_{idj} (position idéale de P pour le triangle de numéro j). Enfin, on peut faire une recherche dichotomique du meilleur point milieu via le coefficient α.

2-2-3 Perspectives

Les opérations non topologiques ne sont pas intéressantes en elles-mêmes, mais le deviennent quand elles sont associées à des modifications topologiques, particulièrement en 3D [TALON-87]. Ceci est probablement dû au fait que l'on bouge les noeuds un par un, et que l'on crée des singularités dans le maillage (éléments finis aplatis), qu'il faudrait supprimer ou retraiter.

Pour éviter ce problème de création de singularité dû au traitement séquentiel des noeuds, on peut imaginer un algorithme de modification non topologique global de maillage. En effet, les algorithmes génétiques [GOLDBERG-89] peuvent trouver une application dans l'amélioration non topologique du maillage. On peut considérer par exemple une chaîne génétique construite à partir des gènes qui seraient les coordonnées du vecteur déplacement de chaque noeud. Le déplacement de chaque noeud serait évidement borné par une sphère pour éviter de générer des mailles de volume négatif.

Les difficultés résident dans le réglage des paramètres de la méthode (Nombre d'individus dans la population "maillages possibles", taux de probabilité de *cross-over*, taux de probabilité de mutation...). Cette méthode originale et prometteuse a été entamée par [SALUDJIAN-96].

2-3 Algorithmes généraux d'amélioration de maillage

Cette partie présente des outils superviseurs permettant de gérer les outils d'amélioration locale de la qualité d'un maillage topologique ou non topologique. On présente donc, un algorithme glouton [TALON-87], un algorithme stochastique de recuit, ainsi qu'un glouton plus performant, basé sur les travaux de [GEORGE-93].

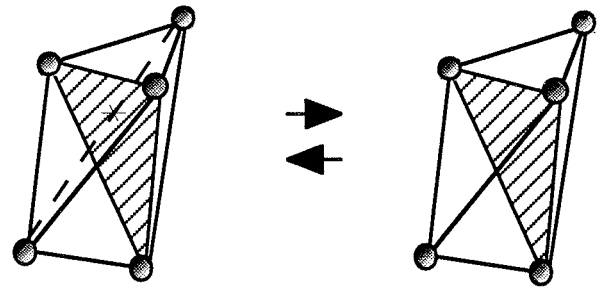
2-3-1 Un algorithme de trempe ou "glouton"

L'algorithme glouton[TALON-87] est basé sur les deux transformations T2->T3 ou T3->T2 et ne fait pas intervenir le hasard (non stochastique). Pour chaque tétraèdre considéré, on regarde si on peut améliorer la qualité du tétraèdre et de ses voisins en permutant une arête. Si oui, on modifie localement la topologie du maillage. En résumé, chaque fois qu'une modification locale améliore le

maillage, on la prend en compte.

Les algorithmes stochastiques, par exemple le recuit simulé, sont légèrement plus performants en terme d'amélioration de qualité de maillage mais bien plus coûteux en temps *CPU*.

On choisit une fonction objective à minimiser et, pour chaque tétraèdre T_i, on recherche parmi ses voisins s'il en est un qui permet d'effectuer la première modification topologique (ajout d'une arête). On effectue le changement topologique s'il correspond à la diminution de la fonction objective.



3 Tétraèdres 2 Tétraèdres

Fig.13.1: Modifications non topologique réversibles: T2->T3 et T3->T2

Si un tel voisin n'existe pas, l'ajout de l'arête centrale rend la topologie irréalisable où l'opération dégrade la fonction objective, on teste si T_i possède une arête entourée de trois tétraèdres pour appliquer le second changement topologique (suppression d'une arête). Cela revient à rechercher deux voisins de T_i par une face qui soient aussi voisins entre eux par une face. Le changement est fait si on améliore la fonction objective.

L'algorithme glouton se termine quand il n'y a plus possibilité d'effectuer la première ou la seconde opération topologique. Cet algorithme est de type descendant : un changement de topologie est accepté seulement lorsqu'il améliore la fonction objective à minimiser.

L'ordre d'examen des tétraèdres peut être modifié, on peut réaliser les opérations topologiques dans un ordre différent, mais l'algorithme reste stable et optimise la fonction objective vers une valeur constante.

On peut noter que les meilleurs résultats ont été obtenus sur des maillages initiaux de Delaunay.

La fonction d'optimisation atteint beaucoup de minima locaux qui défavorisent un algorithme glouton de type descente qui converge systématiquement vers un minimum local qui n'est pas forcément le minimum global.

La structure de données utilisée dans les algorithmes présentés est telle que:

Soit n est le nombre de tétraèdres.

xyz [1...3, 1...n]	3 Coordonnées / noeuds.
nst [1...4, 1...n]	4 Noeuds sommets/tétraèdres.
voisin [1...4, 1...n]	4 Voisins/tétraèdres.
coef [1...n]	Liste des coefficients géométriques par tétraèdre (évaluation de la qualité).

L'algorithme glouton est présenté dans la figure suivante (Fig.13.2):

```
début
n = nombre de tétraèdres de la topologie de départ
pour i : 1,n
      candidat(i) : = vrai
      {Ti est donné par les 4 points (x,y,z,w)}
      calcul du coefficient associé au tétraèdre Ti coef(i)
      recherche des 4 voisins par face du tétraèdre Ti :
                voisin(1,i) ; voisin(2,i) ; voisin(3,i) ; voisin(4,i) ;
fin pour
calcul du coefficient de qualité Cmoy : = Σi=1,n (1-coef(i)/ceq)
tant qu'il existe i tel que candidat(i) = vrai

                {Opération ajout d'une arête T2->T3}
pour j : = 1,4
           k:=voisin(j,i)
           {soit (x,y,z,v) les 4 points du tétraèdre Tk}
           {Tk et Ti sont voisins par la face (x,y,z)}
           si l'arête (w,v) coupe le triangle (x,y,z) alors
                     calculer les coefficients c1c2c3 des tétraèdres (x,y,w,v) (x,z,w,v) et
                          (y,z,w,v)
                     si (Cmoy + c1 + c2 +c3 - coef(i) - coef(k)) / (n+1) < Cmoy / n alors
                               (le changement est avantageux)
                               Cmoy := Cmoy + c1 + c2 +c3 - coef(i) - coef(k)
                               n := n+1
                               {le nouveau tétraèdre Ti correspond aux 4 points (x,y,w,v)}
                               {le nouveau tétraèdre Tk correspond aux 4 points (x,z,w,v)}
                               {le nouveau tétraèdre Tn corresppnd aux 4 points (y,z,w,v)}
                               mise à jour des voisins de ces 3 tétraèdres
                               candidat(i) := vrai
                               candidat(k) := vrai
                               candidat(n) := vrai
                               mise à vrai également du tableau candidat pour tous les
                                    voisins des tétraèdres Ti,Tk et Tn

                     finsi
           finsi
finpour
                {Opération de suppression d'une arête T3->T2}
pour (Tj,Tk) une paire de tétraèdres voisins de Ti par une face

           si Tj et Tk sont déclarés voisins par une face alors
                {soient (x,y,w,v) les 4 points définissant le tétraèdre Tj}
                {soient (x,y,z,v) les 4 points définissant le tétraèdre Tk}
                {l'arête (x,y) est alors complètement entourée par les 3 tétraèdres Ti,Tj,Tk}
                si l'arête (x,y) coupe le triangle (z,w,v) alors
                          calcul des coefficients c1 et c2 des tétraèdres (x,z,w,v) et
                               (y,z,w,v)
                          si (Cmoy + c1 + c2 - coef(i) - coef(k)) / (n+1) < Cmoy / n alors
                                    {la suppression est avantageuse}
                                    Cmoy := Cmoy + c1 + c2 - coef(i) - coef(k)
                                    n := n-1
                                    {le nouveau tétraèdre Ti est défini par les points
                                          (x,y,w,v)}
                                    {le nouveau tétraèdre Tj est défini par (x,z,w,v)}
                                    {le tétraèdre Tk n'existe plus}
                                    mise à jour des voisins de ces 3 tétraèdres
                                    candidat(i) := vrai
                                    candidat(k) := vrai
                                    candidat(n) := vrai
                               mise à vrai du tableau candidat pour tous les voisins des
                                    tétraèdres Ti,Tj

                     finsi
                finsi
           finsi
finpour
candidat(i) := faux
fin tant que
fin
```

Fig.13.2: Algorithme glouton

2-3-2 Un algorithme de recuit

C'est un algorithme stochastique qui est inspiré d'une analogie à la physique du solide et à la métallurgie. Le désordre étant fonction de la température, on se propose d'élever la température du maillage, puis de le refroidir petit à petit. C'est un algorithme avec perte de réalisabilité. Le système (maillage) passe par des états non admissibles correspondant à des tétraèdres emboîtés les uns dans les autres. Ces états restent admissibles tant que la température est haute, mais doivent devenir interdits quand la température est plus faible.

Le recuit peut être local: La température peut être choisie plus haute dans les zones mal discrétisées du domaine et plus basse dans les parties comprenant des tétraèdres moins allongés.

On peut aussi accorder une probabilité de tirage qui dépend de sa géométrie et de ses voisins. Les tétraèdres les plus plats sont tirés en premiers et le recuit s'applique aux zones les plus défavorisées. Il semble que le recuit soit un algorithme génétique sans *cross-over* d'amélioration par modification topologique du maillage, où seules les mutations sont autorisées.

Les entrées de l'algorithme sont:

- P_{deb} : Probabilité (entre 0 et 1) qui correspond à la probabilité de dégradation du maillage par ajout d'une arête en début de traitement. Une valeur par défaut pourrait être 0,8.

- P_{fin}: Probabilité (entre 0 et 1) qui correspond à la probabilité de passer par un état de dégradation de maillage à la fin du processus. Une valeur par défaut pourrait être de 0,1.

- K_N : Coefficient qui donne le nombre d'itérations sans changements qui amène à la fin de l'algorithme (deuxième test d'arrêt).

- K_a : Coefficient qui donne le nombre total d'itérations qui abaisse la température initiale T_0 à la température finale T_f.

- T : Données du maillage.

On peut avancer que la stabilité et l'efficacité de cette approche stochastique sont très dépendants des réglages initiaux des entrées de l'algorithme et que, par conséquent, ce dernier n'est pas évident à mettre en oeuvre.

```
Algorithme de recuit (Pdeb, Pfin, KN, Ka, T)
début
      n := nombre de tétraèdres de la topologie T
      pour i := 1,n
            calculer le coefficient coef(i) du tétraèdre Ti: coef(i) = 1- Ci/Ceq
      fin pour
      Cmoy := Σi=1,n (1-Ci/Ceq)
      calculer T0 telle que exp (-3 / (T0.n)) = Pdeb
      calculer Tf telle que exp (-0,01 / (Tf.n)) = Pfin
      calculer a tel que Tf = a(Ka.n)T0
      N := KN.n, pas_change := 0, Temp := T0
      tant que (Temp > Tf)
            tant que (pas_change <N)
                  tirer un tétraèdre Ti défini par les 4 points (x,y,z,w)
                  tirer une des deux opérations élémentaires ajout ou suppression d'une arête
                  si ajout alors
                        s'il existe un tétraèdre Tj donné par (x,y,z,v) voisin de Ti par la face
                              (x,y,z)
                        alors
                              {(w,v) coupe le triangle(x,y,z):l'ajout de l'arête est réalisable}
                              calculer les coefficients c1, c2,c3 des tétraèdres (x,y,w,v)
                                    (x,z,w,v), (y,z,w,v)
                              E1 := (Cmoy + c1 +c2 + c3 - coef(i) - coef(j)) / (n+1)
                              E2 := Cmoy / n
                              tirer un nombre aléatoire x entre 0 et 1
                              si (E1<E2) ou (si E1>E2 et si x<exp ((E1-E2) / Temp) alors
                                    {la modification topologique est acceptée}
                                    Cmoy = Cmoy + c1 +c2 + c3 - coef(i) - coef(j)
                                    n := n+1
                                    {le nouveau Ti correspond aux 4 points (x,y,w,v)}
                                    {le nouveau Tj correspond aux 4 points (x,z,w,v)}
                                    {le tétraèdre Tn correspond aux 4 points (y,z,w,v)}
                                    pas_change := 0, Temp := a.Temp
                              sinon
                                    pas_change := pas_change + 1
                              finsi
                        sinon
                              pas_change := pas_change + 1
                        finsi
                  si suppression alors
                        s'il existe (2 tétraèdres Tj donné par (x,y,z,v) et Tk donné par
                        (x,y,w,v) voisins de Ti tels que (x,y) soit complètement entourée par les
                        3 tétraèdres TiTjTk
                        alors
                              calculer les coefficients c1, c2 des tétraèdres (x,z,w,v),(y,z,w,v)
                              E1 := (Cmoy + c1 + c2 - coef(i) - coef(j) - coef(k)) / (n-1)
                              E2 := Cmoy / n
                              tirer un nombre aléatoire x entre 0 et 1
                              si (E1<E2) ou (si E1>E2 et si x<exp (E1-E2) / Temp) alors
                                    {la modification topologique est acceptée}
                                    Cmoy := Cmoy + c1 +c2 - ceof(i) - coef(j) - coef(k)
                                    n := n-1
                                    {le nouveau Ti correspond aux 4 points (x,z,w,v)}
                                    {le nouveau Tj correspond aux 4 points (y,z,w,v)}
                                    {le tétraèdre Tk n'existe plus}
                                    pas_change := 0
                                    Temp := a.Temp
                              sinon
                                    pas_change := pas_change + 1
                              finsi
                        sinon
                              pas_change := pas_change + 1
                        finsi
                  finsi
            fin tant que
            Temp := Tf
      fin tant que
fin
```

Fig.14: Algorithme de recuit

En résumé, on peut dire que le recuit a les propriétés suivantes:

- Il est efficace s'il est utilisé localement.
- Il converge lentement à cause de la température qui ne doit pas décroître trop vite.
- L'algorithme va trop loin dans l'irréalisabilité, c'est-à-dire qu'à à la fin du processus on risque d'avoir encore des tétraèdres irréalisables.

2-3-3 Un glouton plus performant

[GEORGES-93] propose l'algorithme suivant pour optimiser un maillage tétraédrique à partir de la boîte à outils définie précédemment. Cet algorithme est de type descendant. Un changement n'est accepté que s'il y a amélioration de la qualité du maillage. Il est de plus non stochastique. On peut le qualifier de glouton, et l'algorithme publié semble plus complet que celui proposé par [TALON-87].

```
"Utilisation des divers outils tant que cela améliore la qualité de manière significative:

     (a)   suppression d'arêtes pour toutes les arêtes libres
     (b)   insertion de points pour toutes les arêtes libres
     (c)   suppression de face pour toutes les arêtes libres
     (d)   suppression des points libres pour les boucles de 4 tétraèdres
     (e)   bougé de points pour tous les sommets libres
     (f)   calcul de l'histogramme et de l'évolution de la qualité du maillage

Sauvegarde des données du maillage dans un nouveau fichier".
```

Fig.15: Algorithme simplifié glouton généralisé

Ses résultats [GEORGE-93] sont très convaincants et la qualité du maillage en moyenne croît en même temps que les plus mauvais éléments disparaissent.

2-4 Conclusion

Nous avons présenté différents critères de qualité trouvés dans la littérature. Ensuite, des outils et algorithmes développés et expérimentés améliorant la qualité du maillage par des opérations de modifications topologiques on non topologiques sont détaillés. Il semble qu'il soit opportun de laisser le choix à l'utilisateur en ce qui concerne le critère de qualité, mais l'amélioration de maillage devrait se faire de manière automatique, l'utilisateur pouvant contrôler à tout moment la qualité de son maillage.

Enfin, il est nécessaire de donner des outils de visualisation et de détection des mauvais éléments, et de création d'histogrammes de qualité à l'utilisateur C.A.O., qui pourrait ainsi avoir accès à une information plus grande sur son maillage et donc sur la qualité qu'il peut attendre sur le résultat de son calcul.

II-3 Un critère généraliste

Les deux parties précédentes ont permis de faire un état des lieux sur les critères de qualité *a priori* et sur l'amélioration de maillage. Cependant, on peut noter qu'il n'existe pas, à notre connaissance, de mesure de qualité pour tous les types d'éléments finis, et pas d'outils d'optimisation de maillage pour des maillages autres que ceux qui sont de type simplexes. Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un critère généraliste (au sens où il peut traiter différents types d'éléments).

Cette partie présente une méthode d'analyse originale [ZGAINSKI-96-3] de la qualité d'un problème éléments finis *a priori*. La distorsion de l'élément fini, l'ordre d'interpolation ainsi que la formulation utilisée sont liés au critère de qualité présenté, basé sur le conditionnement matriciel. Une étude est réalisée sur les éléments "standards" du premier et second ordre.

Notre but est de trouver un bon estimateur de qualité pour différentes formes d'éléments finis (triangles, quadrilatères, tétraèdres, hexaèdres...) à différents ordres, en vue de l'implanter pour l'évaluation d'un maillage mixte.

En fait, on définira tout d'abord ce qu'est le conditionnement matriciel puis on calculera le conditionnement de la matrice global d'un problème physique discrétisé en motif régulier que l'on va distordre. A partir de là, on essaiera de dresser des conclusions sur la qualité d'un élément par rapport à la position de ses noeuds, de son degré d'interpolation et de la fonctionnelle utilisée.

3-1 Rappels brefs sur la résolution du système linéaire dans la méthode des éléments finis

Dans ce paragraphe, on rappelle les principes de la résolution itérative d'un système matriciel "creux". On expliquera rapidement les bases de l'algorithme du gradient conjugué (ou CG*).

3-1-1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons vu que la méthode des éléments finis conduit à résoudre de grands systèmes d'équations, la taille de ces derniers étant directement liée au nombre d'éléments finis utilisés lors de la discrétisation.

Dans le cas où le système global d'équations est non linéaire, il est possible de ramener le problème à la résolution de plusieurs systèmes linéaires, en utilisant un algorithme itératif comme par exemple celui de Newton-Raphson, qui est le plus répandu.

Les relations liant entre elles les inconnues du problème discrétisé étant en corrélation directe avec les voisinages entre les éléments finis, les matrices des systèmes linéaires obtenus sont très creuses, c'est-à-dire contiennent beaucoup de coefficients nuls.

Du fait de la génération automatique des maillages en éléments finis, mais parfois aussi par l'utilisation de formulations différentes sur plusieurs "régions" (sous domaines) d'un même problème, la distribution des coefficients nuls dans la matrice ne répond à aucune règle macroscopique *a priori*. Ainsi, le mode de stockage en mémoire de la matrice, ainsi que la numérotation des équations et des inconnues, ont une importance capitale au niveau de l'implantation effective d'un algorithme de résolution.

Dans [FLUX3D], la résolution des systèmes d'équations linéaires est réalisée grâce à des méthodes du type gradients conjugués avec préconditionnenent [MAGNIN-91]. Le principal avantage de ces algorithmes est qu'ils permettent d'obtenir rapidement la solution du système d'équations, cela sans l'inconvénient du remplissage (génération de nouveaux coefficients non nuls dans la matrice) que possèdent les méthode "directes" de résolution.

* Pour Conjugate Gradient.

Les matrices sont stockées en mémoire grâce à une représentation statique par ligne, encore connue sous le nom de "stockage Morse", avec laquelle seuls les coefficients non nuls de la matrice sont gardés en mémoire.

Il est clair que lorsque des problèmes tridimensionnels "concrets" sont traités par éléments finis, la taille des systèmes linéaires à résoudre devient importante (100000 équations est un chiffre courant), et donc il en est de même pour les temps de calcul. Le solveur est donc un point clé de la méthode des éléments finis, le temps de résolution est souvent très long, et l'utilisation des *batchs* reste très courante.

3-1-2 Algorithme de base de la méthode du gradient conjugué

Soit à résoudre le système linéaire de n équations à n inconnues, défini par la matrice A, le second membre b, et le vecteur colonne X des n inconnues:

$$A.X = b \tag{15}$$

La méthode est basée sur la minimisation d'une fonction quadratique F définie par l'équation (16):

$$F(X)=\frac{1}{2}X^t.A.X-X^t.b \tag{16.1}$$

Ce qui est équivalent à annuler le résidu (16.2)

$$r = AX-b \tag{16.2}$$

Dans le cas où la matrice A est symétrique et définie positive* (SDP), la minimisation de (16) revient à minimiser la forme quadratique (17):

$$h = {}^tr.A^{-1}.r \tag{17}$$

où l'inverse A^{-1} de A est elle aussi SDP.

Afin d'assurer que le minimum de h se produit bien pour r=0 (c'est-à-dire pour X vérifiant (15), La condition que A^{-1} (donc A) soit symétrique et définie positive est nécessaire** , sinon on pourrait trouver des valeurs non nulles de r telles que h soit minimal (h égal ou même inférieur à zéro). Dans ce dernier cas, la minimisation de h pourrait se produire pour des valeurs non nulles de r, donc pour des valeurs de X ne vérifiant pas (15).

La méthode du gradient conjugué repose sur la construction d'une suite de valeurs X_i, telle que cette suite soit convergente et que sa limite se produise pour X solution de (15).

Pour le lecteur intéressé, les fondements de la méthode peuvent être facilement trouvés dans la littérature [NAKATA-88], [TEMPLATES]. L'algorithme tiré de [MAGNIN-91] est présenté ci-dessous (Fig.16):

* $(Ax \mid x) > 0$, quelque soit x réel non nul, $(x \mid y)$ représente le produit scalaire entre les deux vecteurs x et y.
** Dans la plupart des cas simples que l'on va traiter, on utilisera un solveur de type gradient conjugué.

X_0 arbitraire
$r_0 = b - A X_0$ (résidu initial)
$p_0 = r_0$ (direction de recherche initiale)
i =0
répéter jusqu'à convergence ($||r_j|| < \varepsilon$)
$\alpha_i = (r_i|r_i)/(p_i|A.p_i) = (p_i|r_i)/(p_i|A.p_i)$
$X_{i+1} = X_i + \alpha_i.p_i$
$r_{i+1} = r_i - \alpha_i.A.p_i$
$\beta_i = (r_{i+1}|r_{i+1})/(r_i|r_i) = -(r_{i+1}|A.p_i)/(p_i|A.p_i)$
$p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i.p_i$
i=i+1
fin

Fig.16: Algorithme du gradient conjugué

De par la construction des directions de recherche p_j, on a les relations d'orthogonalité suivantes:

$$(p_i|A.p_j) = 0, \forall\ i \neq j \tag{18.1}$$

$$(r_i|p_j) = 0, \forall\ i > j \tag{18.2}$$

$$(r_i|r_j) = 0, \forall\ i \neq j \tag{18.3}$$

L'équation (18.2) exprime que les directions de recherche p_j sont toutes deux à deux orthogonales, par rapport au produit scalaire défini par A. Donc la famille (p_0, p_1, ...p_{n-1}) de vecteurs est une base d'un espace Réel de dimension n. En utilisant (18.3) avec i=n, on montre que r_n est orthogonal à tous les vecteurs p_j (i = 0 à n-1), donc à tout vecteur de l'espace réel de dimension n.

La seule valeur possible pour r_n est donc d'être égal au vecteur nul, ce qui s'exprime par (19):

$$r_n = 0 \Leftrightarrow A.X_n = b \tag{19}$$

Cette dernière égalité prouve que mathématiquement, l'algorithme du gradient conjugué converge en n itérations maximum, n étant la taille du système d'équations (nombre d'inconnues).

3-2 Une mesure de la qualité d'une matrice avec le conditionnement matriciel

Cette partie est composée de rappels succincts sur le conditionnement matriciel [LASCAUX THEODOR]. On développera seulement les aspects qui nous semblent importants pour notre approche concernant l'évaluation de la qualité d'un problème éléments finis *a priori.*

3-2-1 Définition du conditionnement

Le conditionnement d'une matrice A est défini par l'équation suivante (20):

$$c(A) = ||A||.||A^{-1}|| \tag{20}$$

Il est aussi défini par le rapport de la plus petite valeur singulière (ou valeur propre pour une matrice symétrique définie positive) sur la plus grande de la matrice A. En fait, c'est une possibilité de mesure de la sensibilité de la solution du système linéaire. Plus le conditionnement est petit, meilleure est la qualité numérique de la matrice. Par exemple, la matrice identité a un condtionnement égal à l'unité.

3-2-2 Propriétés

De plus, le conditionnement c vérifie les deux inégalités suivantes (21)-(22):

$$\|X_k - X^*\| < 2\,\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}\,\|X_0 - X^*\| \qquad (21)$$

$$\|X_0 - X^*\| < c.\varepsilon.\|X^*\| \qquad (22)$$

où X^* est la solution numérique, X_k est la solution au pas k de l'algorithme gradient conjugué, X_0 la valeur initiale de X dans l'algorithme du gradient conjugué et ε la précision machine. Les conséquences de ces inégalités sont que le coût de la solution du système linéaire peut être estimé et que l'erreur numérique relative de la solution est aussi donnée par la connaissance du conditionnement de la matrice du système.

3-2-3 Calcul du conditionnement d'une matrice

Le conditionnement peut être calculé avec des algorithmes efficaces et robustes du domaine public. LINPACK est disponible sur Internet et peut être téléchargé sous forme de routines FORTRAN du domaine public.

Notre utilisation de LINPACK se fera en amont du solveur, lors de l'intégration et de l'assemblage des matrices élémentaires du problème éléments finis (Fig.17).

En sortie de LINPACK, il est possible de récupérer les valeurs propres de notre matrice élémentaire, ou le conditionnement matriciel.

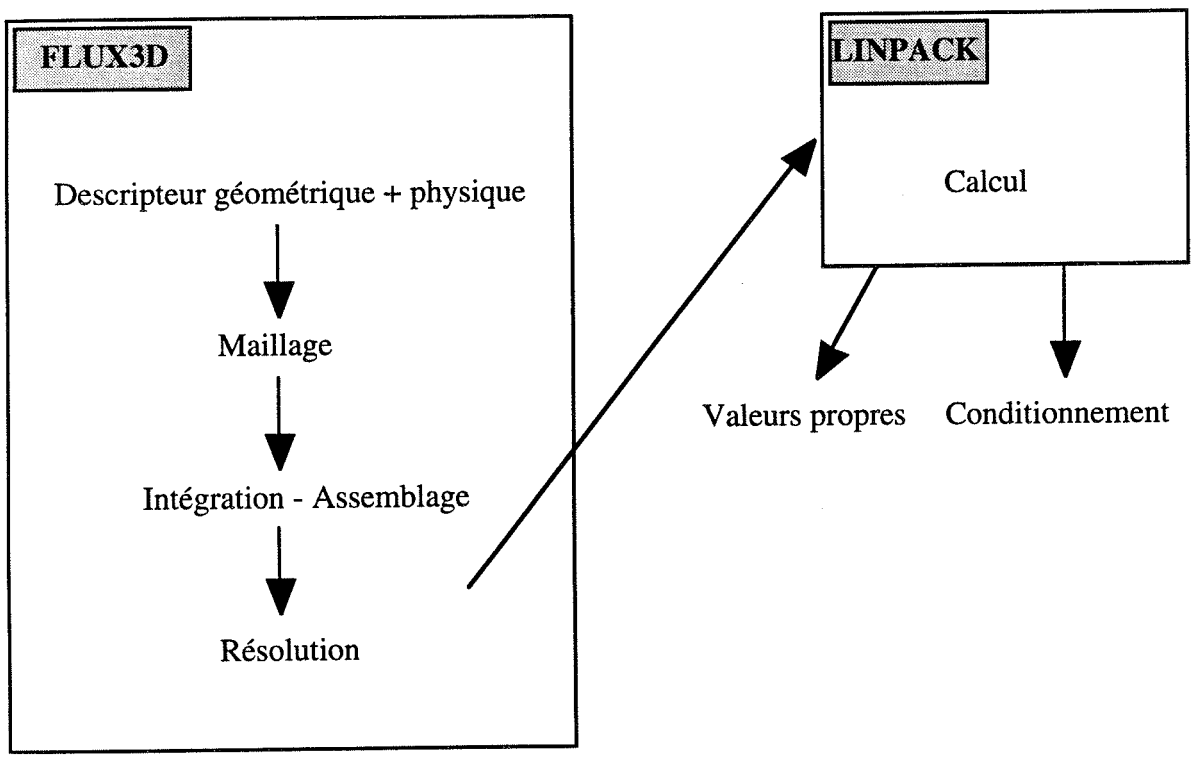


Fig.17: Utilisation de LINPACK couplé à FLUX3D

L'objet de cette thèse n'est pas de détailler les divers algorithmes utilisés pour le calcul des valeurs propres. Pour cela on se référera à [CLINE-79].

3-3 Étude d'un problème simple éléments finis composé d'un motif

Dans cette partie, on étudiera l'évolution du conditionnement d'un problème éléments finis dont le maillage est déformé, et on comparera alors l'évolution du conditionnement de la matrice globale du système à l'évolution des critères de qualité récupérés dans la littérature éléments finis. Nous utilisons quatre critères développés comme suit:

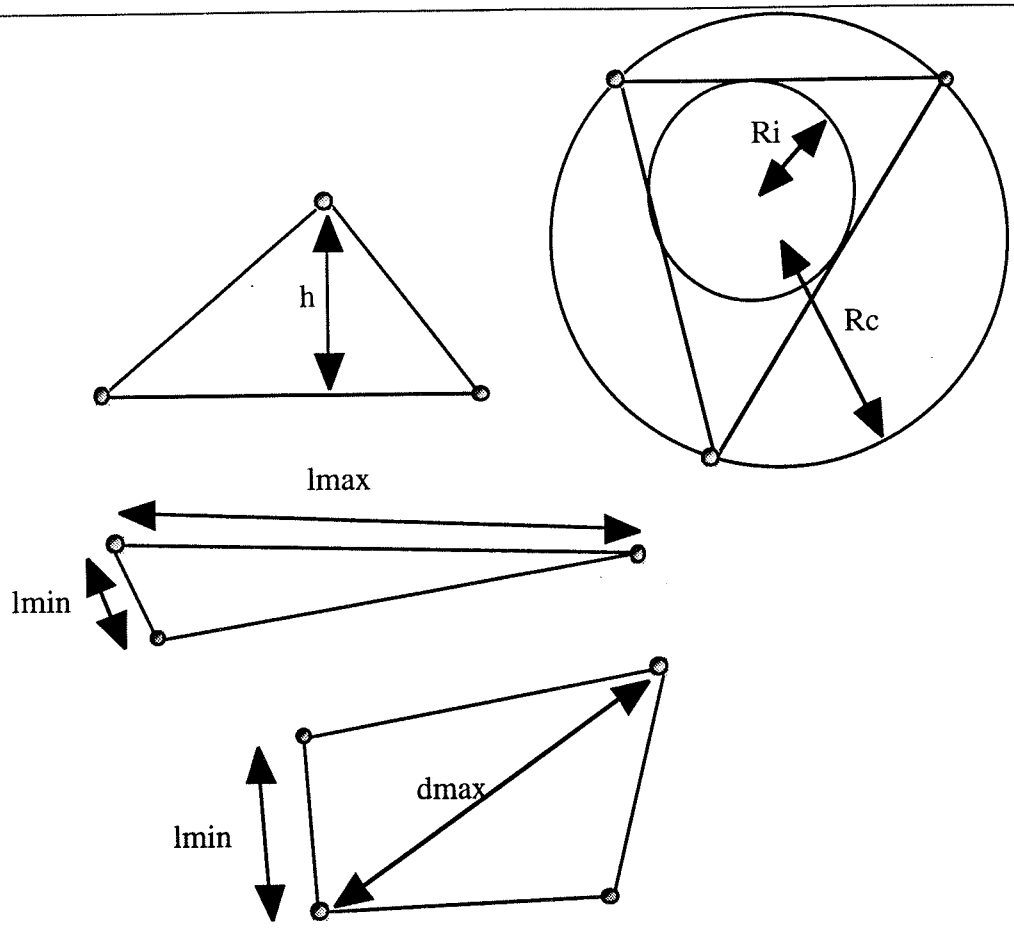


Fig.18: Grandeurs caractéristiques des éléments finis triangles et rectangles

Critères de qualité pour les éléments finis triangles

Mesure de qualité	**Valeur de la mesure pour un bon élément.....et pour un mauvais**	**Utilisé dans**
$Q_1=2x\frac{R_i}{R_c}$	1.....0	[CAVENDISH-85]
$Q_2=\frac{lmin}{lmax}$	1.....0	[BAKER-89]
$Q_3=3,446\ x\frac{R_i}{lmax}$	1.....0	[STAB-93]

Critère de qualité pour éléments finis rectangle

Mesure de qualité	Valeur de la mesure pour un bon élément.....et pour un mauvais	Utilisé dans
$Q_4=\sqrt{2} \times \frac{lmin}{dmax}$	1.....0	[MOUNOURY-95]

Pour valider l'approche proposée basée sur le conditionnement matriciel, nous avons étudié un problème très simple (Fig.19).

C'est un conducteur thermique de 3 mm d'épaisseur, des conditions aux limites sont imposées sur deux lignes opposées, et le maillage est déformé d'un angle α . Le potentiel utilisé (en l'occurrence ici la température) est un potentiel scalaire (un seul degré de liberté par noeud). On conserve ce maillage régulier pour différentes valeur de l'angle α afin de comparer l'effet de la distorsion sur le conditionnement du problème complet.

3-3-1 Cas d'un motif triangulaire

Le motif de ce maillage est triangulaire.

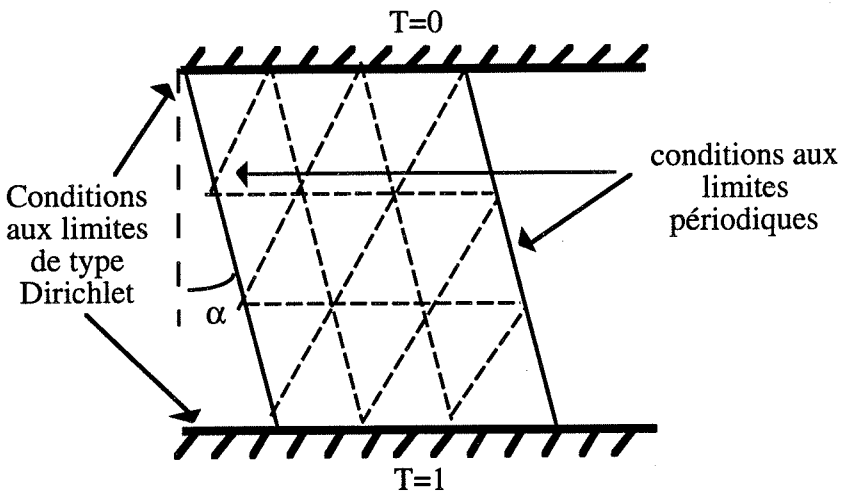


Fig.19: Maillage triangulaire d'un problème simple thermique

Dans le cas de ce problème, nous avons six degrés de liberté au premier ordre à cause des conditions aux limites de type Dirichlet et de type périodique.

La figure suivante (Fig.20) montre l'évolution du conditionnement en fonction de l'angle de distorsion α. Bien que peu sensible à la variation de l'angle α, la plage de variation lorsque l'angle α passe de 0,1 a 1,1 radian est de l'ordre de 20%.

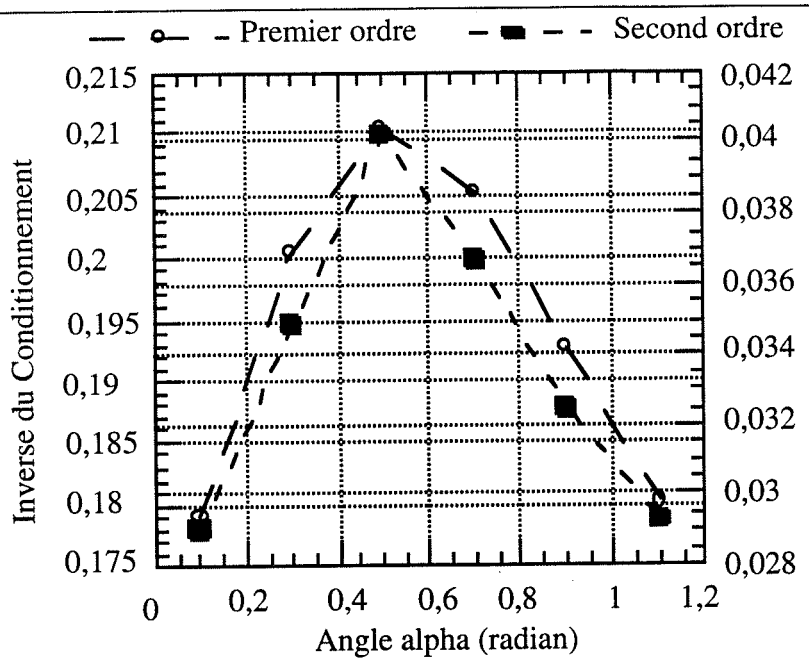


Fig.20: Inverse du conditionnement fonction de l'angle α de distorsion

On peut constater que le minimum du conditionnement est atteint lorsque $\alpha = 0{,}52$ rad $= \frac{\pi}{6}$, lorsque les triangles sont isocèles. On a tracé l'inverse du conditionnement dans le but de comparer son évolution avec les critères de qualité normalisés du triangle. De plus, on peut noter que le conditionnement est plus grand au second ordre, ceci est dû au fait que le maillage au deuxième ordre présente plus de degrés de libertés (30) que le premier ordre (6).

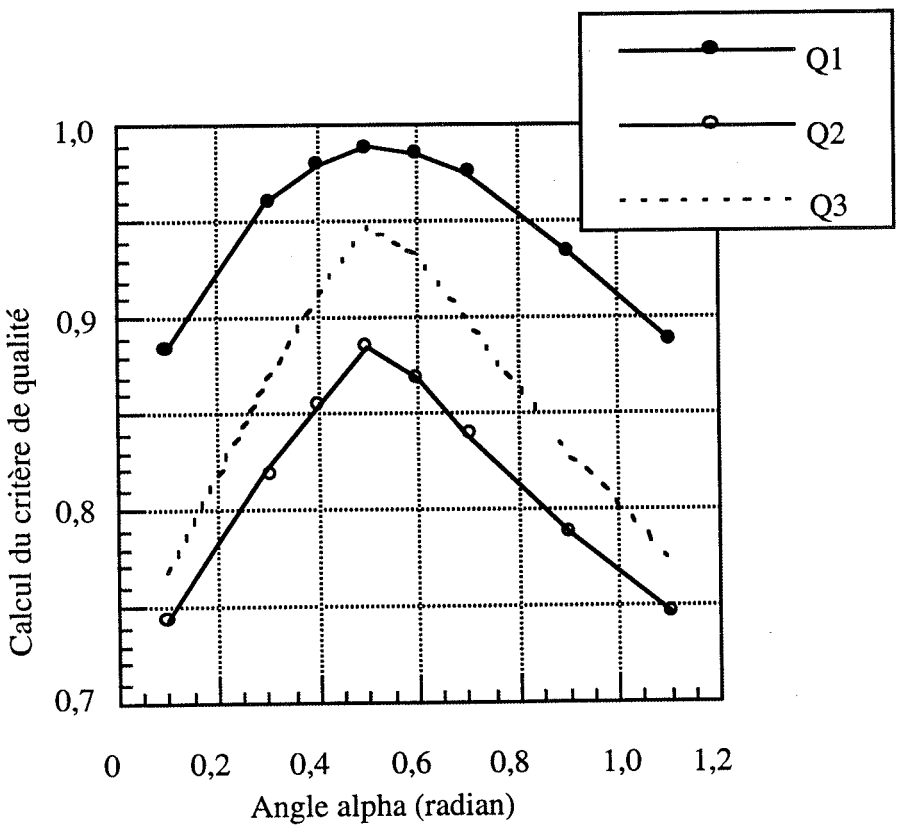


Fig.21: Indicateurs de qualité pour un triangle du motif

La figure 21 montre les évolutions des indicateurs de qualité obtenus à partir des caractéristiques géométriques des éléments finis triangulaires. On peut souligner le fait que l'évolution de ces critères est la même pour tous les triangles du motif. De plus, le maximum de ces critères ne passent pas par la valeur unité car on n'a jamais de triangles équilatéraux.

Il est possible de superposer le conditionnement de la matrice globale du système avec ces indicateurs.

3-3-2 Cas d'un motif rectangulaire

Un autre test peut être l'évaluation d'un motif maillé en quadrangles (Fig.22), en gardant les mêmes propriétés physiques.

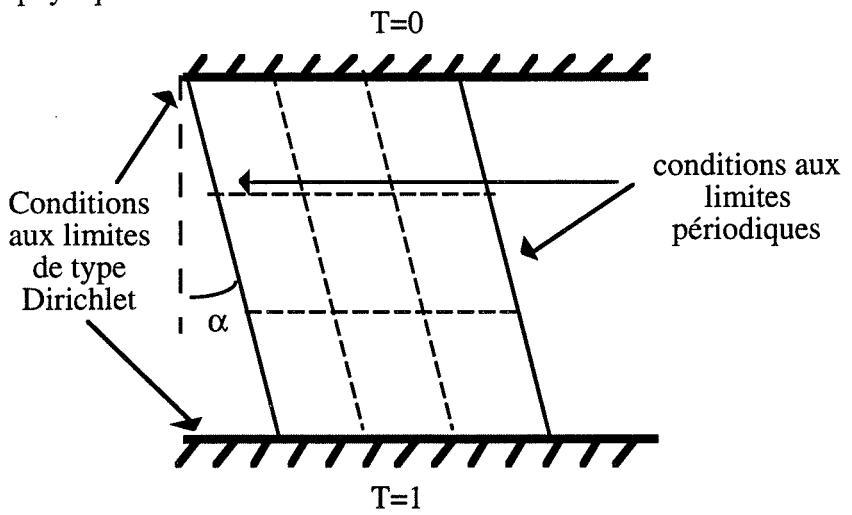


Fig.22: Maillage quadrangulaire d'un problème thermique

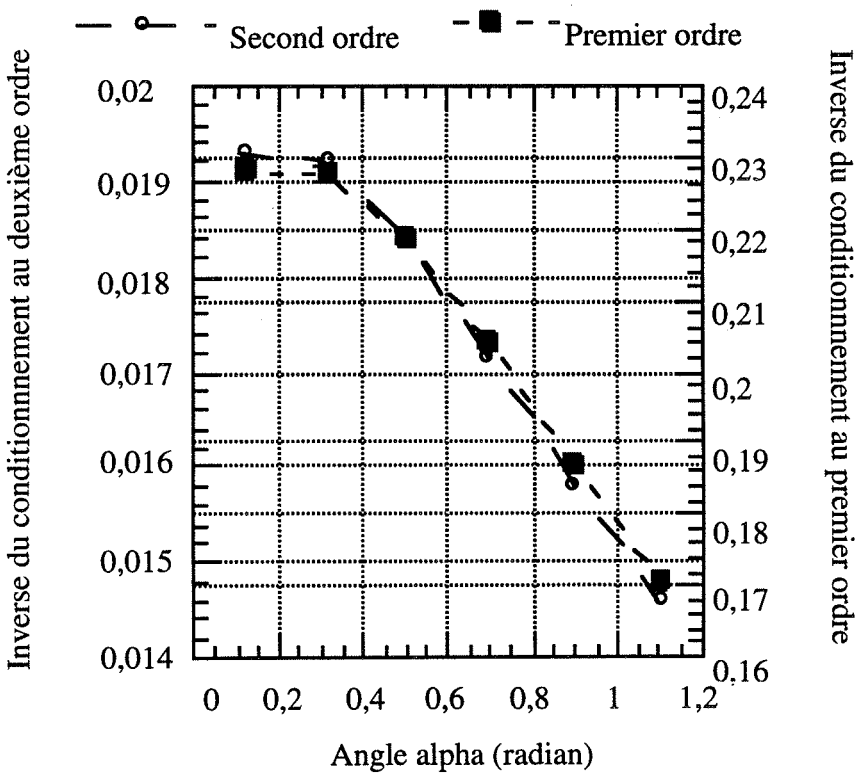


Fig.23: Conditionnement pour la matrice globale du motif rectangulaire

Cette fois, les quadrangles sont distordus et on peut remarquer que sur la figure précédente (Fig.23), que le maximum de l'inverse du conditionnement est atteint lorsque les quadrilatères ont des angles droits. Les conditionnements des rectangles et des triangles peuvent aussi être comparés.

La figure suivante montre l'évolution du critère Q_4 pour les rectangles déformés de la figure 22.

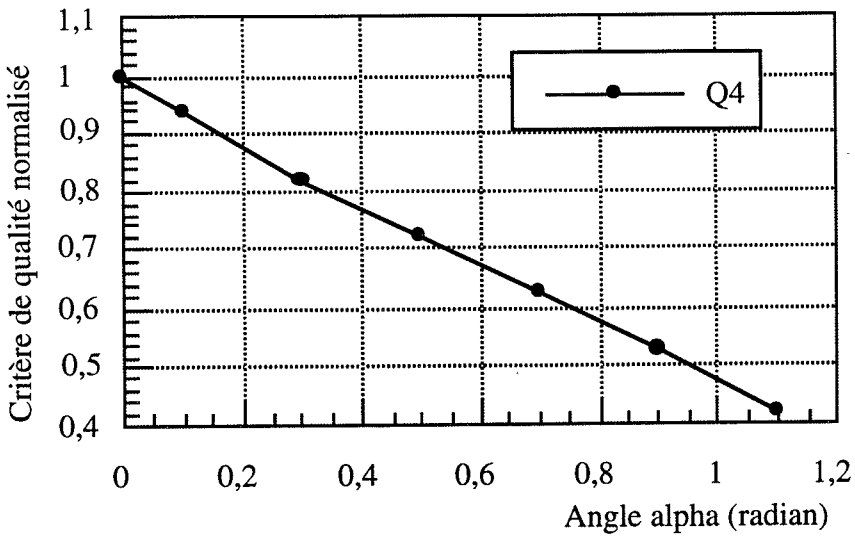


Fig.24: Critère de qualité Q_4 pour les quadrangles du motif

3-3-3 Cas de la déformation d'un maillage régulier

Un autre test peut être la déformation élastique d'un maillage régulier. Nous présentons ici l'évaluation du conditionnement de la matrice d'un maillage régulier, que l'on va déformer.

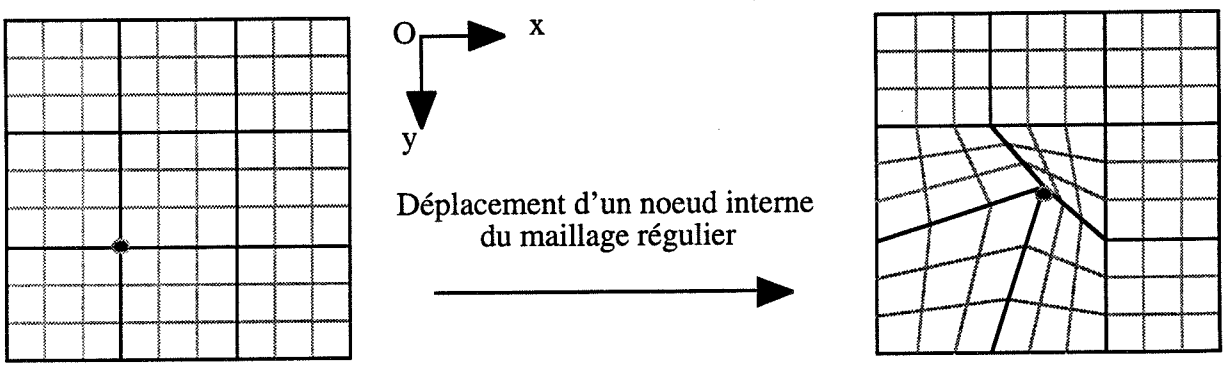


Fig.25: Cas de déformation d'un maillage réglé régulier

La figure suivante présente l'évolution du conditionnement de la matrice globale du problème résolu au premier ordre avec 80 degrés de libertés en potentiel scalaire (on impose des conditions de Dirichlet sur les lignes supérieures et inférieures du problème (soit 20 degrés de liberté). On utilise une formulation scalaire de type gradient gradient* au niveau des sous matrices assemblées.

De plus, il est clair que la numérotation des noeuds entre en jeu dans le conditionnement d'une matrice d'un problème éléments finis. L'algorithme utilisé est du type *Chuthill Mac Kee*.

* Lorsque les matrices élémentaires sont composées de produits de terme gradient fois gradient intégrés sur l'élément.

Position du noeud déplacé	Nombre d'itérations gradient conjugué préconditionné	Conditionnement matriciel
(1;2)	6	48,99
(1,3;1,7)	7	60,15
(1,4;1,6)	7	75,6
(1,49;1,51)	7	134,8

Fig.26: Évolution du conditionnement de la matrice en fonction de la position du noeud déplacé

Nous pouvons remarquer que le conditionnement de la matrice globale du système éléments finis se dégrade au fur et à mesure que la déformation devient importante.

3-3-4 Conclusion

L'évaluation de la qualité globale d'un problème, telle que nous l'avons présenté dépend bien du conditionnement de la matrice globale du système. En effet, nous pouvons constater qu'il y a une corrélation forte entre l'évolution du conditionnement et les critères de qualité existant dans la littérature. L'intérêt de ces exemples était de montrer qu'à nombre de noeuds égal, qu'à conditions limites et problèmes physiques identiques, et à connectivité et numérotation égale, le conditionnement nous permet bien de mesurer la qualité d'un problème *a priori*.

Cependant, pour l'utilisateur éléments finis, il semble essentiel d'avoir un indicateur fiable et significatif pour chaque élément fini. En effet, une grandeur globale comme le conditionnement matriciel n'a pas de sens pour l'utilisateur, car il dépend en outre de la forme des éléments, du nombre de noeuds du problème et de la numérotation des noeuds.

C'est pourquoi, une approche locale sur la matrice élémentaire nous semble pertinente pour aller plus loin dans la classification des mailles. Le lien entre l'approche globale et l'approche locale n'est pas trivial, mais semble intéressant et prometteur. En ce qui nous concerne, et par manque de temps, nous avons franchi le pas et nous allons maintenant définir, à partir d'une extrapolation de l'approche globale, un critère de qualité original et local.

3-4 De l'approche globale à l'approche locale

Une autre possibilité pour calculer la qualité d'un maillage est ouverte par [MARIH-94]. En effet, à partir du calcul de l'erreur faite par l'approximation éléments finis, il obtient un majorant de l'erreur fonction de P^{-1}, où P est définie par la base de la fonction d'approximation évaluée aux différents noeuds du maillage.

Par exemple, pour le triangle, P est égale à (23):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \qquad (23)$$

où $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ sont les coordonnées des sommets du triangle

Cela l'amène à calculer le conditionnement de P^{-1} qu'il appelle facteur de stabilité. Finalement, ce facteur de stabilité lui permet de déterminer une configuration optimale pour l'approximation éléments finis. L'exemple de l'élément triangulaire est traité et il obtient un indicateur de distorsion fonction du conditionnement optimal (égal à 1) pour un triangle équilatéral.

L'intérêt de ce critère est qu'il peut s'appliquer sur tout type d'élément fini, aussi bien en 1D, qu'en 2D ou en 3D. Il permet donc d'évaluer tout type d'élément (triangle, rectangle, tétraèdre, brique...). Cependant, la théorie et la validation de ce nouveau critère n'est pas évidente, et des

difficultés peuvent se présenter pour le calcul du conditionnement de la matrice P, le calcul peut aussi être coûteux...mais il reste original à notre connaissance.

Après avoir étudié des motifs réguliers dans une première approche globale, nous avons essayé de trouver un lien entre une valeur globale comme le conditionnement de la matrice globale et la qualité matricielle d'un élément unique.

3-4-1 Cas du triangle du premier ordre en formulation gradient/gradient

En effet, la matrice globale d'un problème éléments finis est définie par l'assemblage de matrice locale associée à chaque type d'élément. Ces matrices peuvent être définies par l'équation intégrale suivante (24):

$$M_{ij}^{e} = \iint_{\text{Surf de l'elt}} \vec{\nabla}N_i.k.\vec{\nabla}N_j.dS \qquad (24)$$

où N_i est la fonction de forme du noeud numéro i. En fait, pour un triangle au premier ordre, les fonctions de forme peuvent être définies comme une solution de l'équation suivante (25) dans la base polynomiale [1,x,y] des coordonnées réelles de l'élément.

$$[N_1\ N_2\ N_3] = [1\ x\ y]\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} = [1\ x\ y]\,P^{-1} \qquad (25)$$

où la matrice P peut être appelée matrice de sensibilité [MARIH-94]. Le gradient de cette expression devient alors (26):

$$\vec{\nabla}.N = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x\ P^{-1} \qquad (26)$$

où la matrice $\vec{\nabla}.B$ représente le gradient de la base polynomiale (27):

$$\vec{\nabla}.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (27)$$

Il est alors possible de calculer la matrice locale de l'élément à partir de la base polynomiale des fonctions de forme et de la matrice P de l'élément.

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla}.N\right)^t.\vec{\nabla}.N &= \left(\vec{\nabla}.B.P^{-1}\right)^t\left(\vec{\nabla}.B.P^{-1}\right) \\ &= \left(P^{-1}\right)^t.\vec{\nabla}B^t.\vec{\nabla}B.P^{-1} \\ &= \left(P^{-1}\right)^t\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.P^t \\ &= \left(P^{-1}\right)^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.P^{-1} \end{aligned} \qquad (28)$$

d'où la relation finale, pour le triangle au premier ordre :

$$M^{e}_{\substack{\text{élément} \\ \text{triangulaire}}} = A\ x\ k\ x\left(P^{-1}\right)^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x\left(P^{-1}\right) \qquad (29)$$

A ce niveau, nous pouvons faire quelques remarques:

- Conditionnement infini de la matrice de l'élément e, car $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est non inversible !
- La précision sur le calcul de M^e dépend de la précision sur (P^{-1}).

Afin de pouvoir travailler sur son conditionnement, nous avons décidé de prendre en compte seulement les valeurs propres non nulles de la matrice élémentaire.

3-4-2 Cas du triangle en formulation $N_i.N_j$

Dans le cas d'une formulation $N_i.N_j$, la matrice élémentaire est composée de l'intégrale du produit des fonctions de forme dans l'élément fini. Bien que moins souvent utilisée* que les précédentes, nous proposons un calcul de la matrice élémentaire, dans cette formulation, dépendant de la matrice de sensibilité P:

La matrice élémentaire peut s'écrire (30):

$$M^e = \iint_{\Delta} N_i.k N_j \, dS = \sum_{k=1}^{Nbp^tg} w_k N_i(x_k,y_k).K N_j(x_k,y_k) \qquad (30)$$

où w_k et (x_k,y_k) sont les poids et points de Gauss associés à l'élément.

En développant de manière matricielle le produit $N^t.N$, il vient (31):

$$N^t.N = (B.P^{-1})^t \,.\, (B.P^{-1})$$
$$= P^{-1t} \,.\, B^t \,.\, B \,.\, P^{-1}$$
$$N^t.N = = P^{-1\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} . P^{-1}$$
$$N^t.N = p^{-1\,t} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} . p^{-1} \qquad (31)$$

Donc, l'intégration par Gauss permet d'obtenir l'équation si dessous (32).

$$M^e = k \times \left(P^{-1}\right)^t \times \sum_{k=1}^{Nb\ pg} W_k \begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k \\ x_k & x_k^2 & x_k y_k \\ y_k & x_k y_k & y_k^2 \end{bmatrix} \times P^{-1} \qquad (32)$$

Si les fonctions de forme sont linéaires (du premier ordre), un point de Gauss suffit à l'intégration, et on se retrouve avec (33):

$$M^e = k \times \left(P^{-1}\right)^t \times \lambda \times P^{-1} \qquad (33)$$

où λ est une matrice de dimension 3x3 constante et dépendante de la localisation du point de Gauss dans l'élément.

* Ces formulations sont utilisées en magnétodynamique, en pas à pas dans le temps, et lors du calcul d'impédances de surface en électrotechnique.

Comme pour le premier ordre, on peut conclure que la matrice élémentaire est dépendante de la matrice P de sensibilité.

3-5 Une approche locale *a priori*: dans le cas du triangle

Ce qui suit est un ensemble de deux tests de sensibilité qui permettent d'évaluer la fidélité des critères de mesure trouvés dans la littérature précédemment, et le critère basé sur le conditionnement de la matrice élémentaire. Les tests ont été tirés des observations de la nature des distorsions qui apparaissent pendant un maillage ou une amélioration de maillage. Ces deux tests nous semblent représentatifs des distorsions classiques du triangle.

Pour le test A, en partant d'un triangle équilatéral, le sommet du triangle est déplacé par petits pas le long de la hauteur du triangle. Lorsque le sommet est près de la base (Fig.27), on a alors un élément triangulaire plat. La hauteur du noeud sommet est liée au paramètre h.

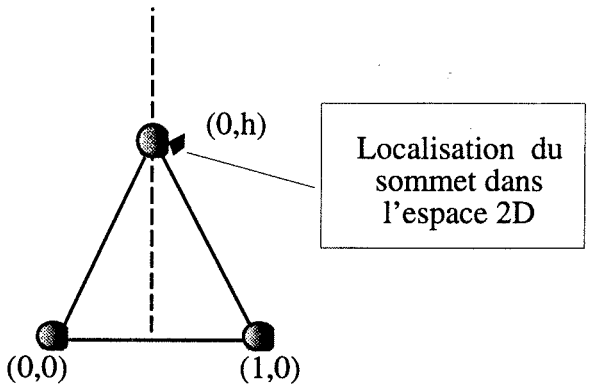


Fig.27: Test A pour le triangle

Le test simule la forme d'un élément triangulaire plat et pour une hauteur importante, la forme d'un élément fin peut être étudiée. En utilisant [MAPPLE], un outil de calcul formel dédié à la résolution analytique d'équations, il est possible de calculer une expression analytique des valeurs propres de la matrice élémentaire, de manière à obtenir les valeurs propres les plus éloignées l'une de l'autre de la matrice élémentaire et à évaluer le conditionnement de celle-ci.

Le rapport des valeurs propres est égal à (34):

$$\text{rapport des valeurs propres} = \frac{4}{3}h^2 \text{ quand } h<\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (34.1)$$

$$\text{rapport des valeurs propres} = \frac{3}{4\,h^2} \text{ quand } h>\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (34.2)$$

Pour ce test, la mesure de la sensibilité montre que le point optimum est obtenu pour $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i.e. pour un élément équilatéral. La figure suivante (Fig.28) montre la variation du critère en fonction de la distance du sommet mobile à la base du triangle.

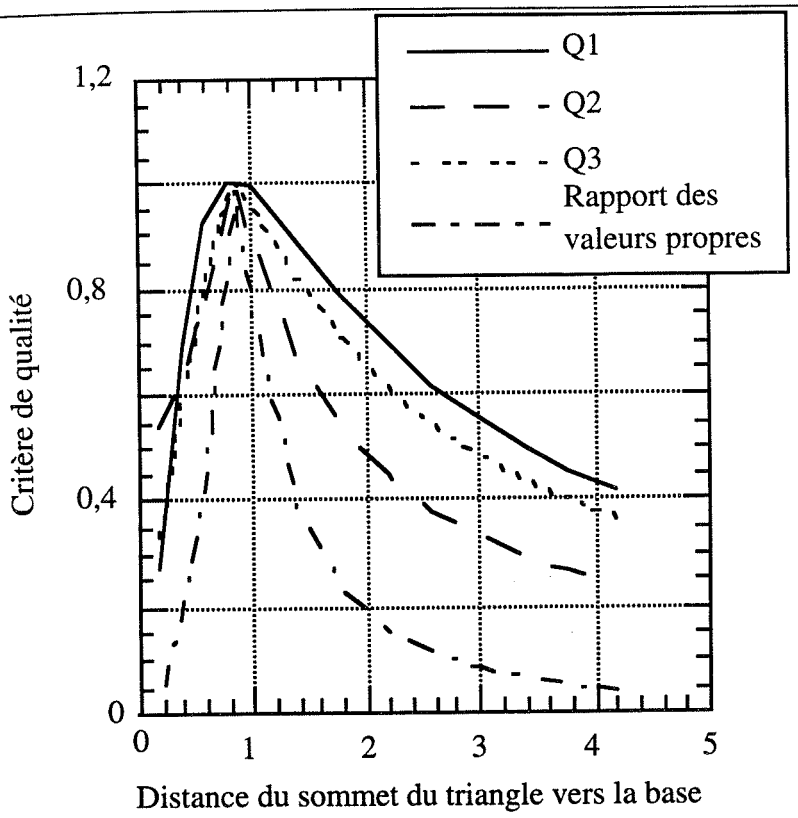


Fig.28: Sensibilité des mesures de qualité au test A

Pour le test B, on part d'un triangle équilatéral, le sommet décrit alors un quart de cercle à petits pas de rayon égal à la hauteur du triangle équilatéral. La position finale du sommet est sur la ligne de base du triangle (Fig.29). La position du noeud sommet est liée au paramètre α.

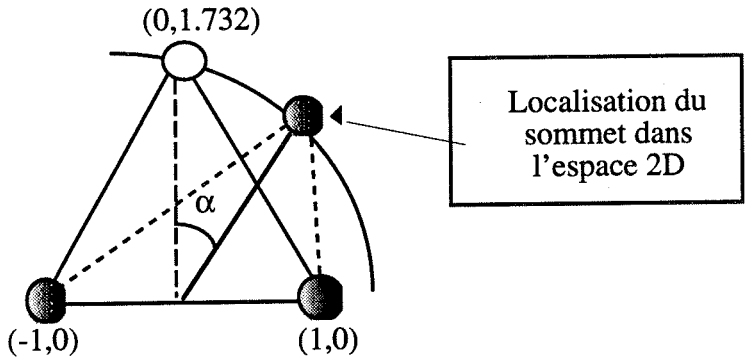


Fig.29: Test B pour le triangle

De manière analytique, comme précédemment, on obtient une expression du conditionnement, rapport des valeurs propres égal à (35):

$$\text{Rapport des valeurs propres} = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \qquad (35)$$

On peut remarquer que lorsque l'élément est plat, la valeur du critère est égale à zéro.

Comme pour le test A, on trace les variations des critères de qualité en fonction de l'angle que fait le noeud sommet avec sa position initiale

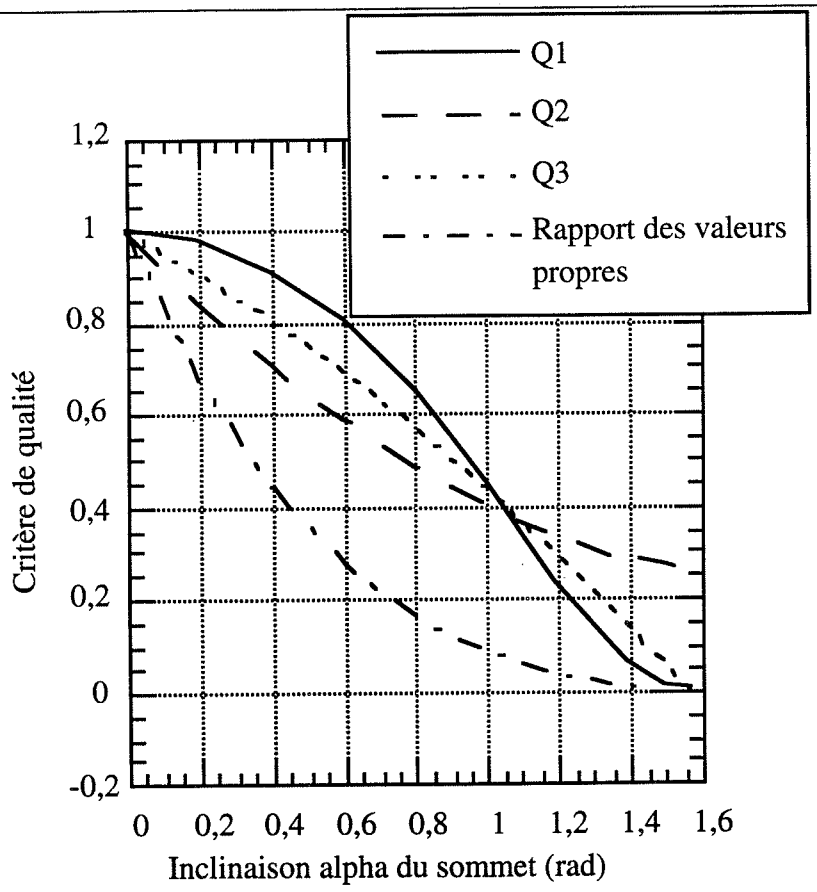


Fig.30: Sensibilité des mesures de qualité au test B

Comme pour le test A, on peut constater que les critères de qualité varient de manière similaire et que le rapport des valeurs propres est un critère acceptable. Cette méthode peut être étendue à d'autres types d'éléments finis.

II-5 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'état de l'art sur l'évaluation de la qualité de maillage *a priori* ainsi que sur les algorithmes d'optimisation de maillage sur deux niveaux: Modification locale du maillage (topologique et non topologique) ainsi que pilotage global de l'optimisation (glouton, recuit, ...).

Ensuite, après avoir constaté qu'il n'existait pas de critère généraliste, pouvant évaluer différents types d'éléments, nous avons travaillé sur une approche originale, à notre connaissance, basée sur le conditionnement matriciel.

Tout d'abord en ayant une approche globale de la matrice du système éléments finis, étudiée à partir de motifs déformés, puis ensuite en ayant une approche locale sur la matrice élémentaire d'un triangle. Enfin, nous avons comparé l'évolution des différents critères sur des déformations d'éléments finis, en nous assurant que notre critère prenait bien en compte les différentes déformations des éléments.

Cependant, quelques questions restent en suspend:

Il faudrait tester ce critère sur tous les types d'éléments, donc cataloguer toutes les déformations possibles par élément et étudier l'évolution de ce critère par rapport aux déformations.

Ensuite, à partir de ce critère de qualité généraliste, il est possible de faire de l'optimisation de maillage sur tout type de maillage y compris ceux issus de mailleurs assistés (maillage réglé ou extrusion), qui génèrent des quadrangles, hexaèdres ou prismes qui peuvent être éventuellement mal conditionnés. Un travail sur l'amélioration de maillage assisté pourrait être envisagé ayant comme pierre angulaire le critère de qualité généraliste.

Dans le cadre de notre projet de thèse, ce critère de qualité nous aidera à évaluer les éléments de transition évoqués au chapitre suivant.

Chapitre III

Les éléments pyramides

Dans ce chapitre, nous présentons les éléments pyramides. Tout d'abord, le développement de cette nouvelle famille d'éléments finis, puis leur validation en formulation éléments finis nodaux. Enfin, dans une dernière partie, nous aborderons le sujet des éléments finis pyramides d'arête.

Le but de cette partie est de définir les éléments pyramidaux qui sont utilisés comme éléments de transition en éléments finis ou éléments d'arêtes.

Avant propos

A ma connaissance, le premier à parler des éléments pyramides a été [BEDROSIAN-92], qui *parachute* une *fonction lapin* *, c'est à dire les fonctions de forme du premier et deuxième ordre incomplet nodale, sans justifier ni expliquer la démarche de leur création et sans l'approche de couplage de maillage. De plus, l'intégration n'est pas développée, alors qu'elle présente quelques particularités intéressantes.

D'autres auteurs ont signalé l'existence de la pyramide (CEA, Touzot), mais nous n'avons jamais pu obtenir de documentations....

* ou *rabbit function* (dans son article, il fait référence à un lapin que l'on sort d'un chapeau pour l'étonnement de l'auditoire).

III-1 Introduction: Rapide présentation des éléments finis standards

Un type d'élément fini est décrit par un ensemble de fonctions de formes, qui interpolent la valeur de la variable d'état à l'intérieur de l'élément, et par des points et poids d'intégration qui permettent d'intégrer numériquement des combinaisons des fonctions de forme, de leur gradient, divergence ou rotationnel à l'intérieur de l'élément fini.

Le sujet des fonctions de forme et de l'intégration numérique a été étudié de manière quasi complète par [DHATT-83], et par [ZIENCKIEWICZ-91], dans leurs ouvrages généraux sur la méthode des éléments finis. Cependant, dans la littérature " éléments finis ", il est toujours question d'éléments finis standards (tétraédriques, hexaédriques ou encore prismatiques, en trois dimensions, Fig.1), mais l'élément pyramidal n'est jamais traité et ses fonctions de forme et son intégration ne sont pas abordés, probablement à cause de son originalité et des difficultés qu'il amène à surmonter.

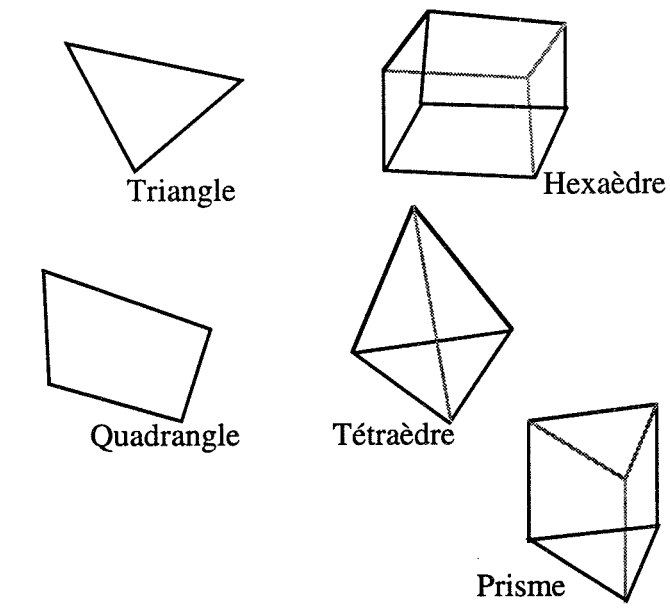


Fig.1: Éléments finis standards

III-2 Fonctions de forme des éléments pyramides nodaux

2-1 Généralités sur les fonctions de forme

2-1-1 Utilité des fonctions de forme dans la chaîne de calcul éléments finis

De manière générale, les fonctions de forme peuvent être générées à partir de bases polynomiales bien choisies. Ces fonctions de forme (ou d'interpolation) permettent d'une part la projection de la fonctionnelle (voir Chapitre I), et d'autre part d'approcher la solution en tout point du problème à partir des valeurs aux noeuds, résultant de la résolution du système éléments finis (voir Chapitre I).

Une des caractéristiques essentielles des fonctions de forme est leur capacité à interpoler la valeur de la variable d'état du problème en un point P à partir de la valeur aux sommets (noeuds) de l'élément fini auquel appartient le point P. En effet, après la résolution (inversion matricielle), la valeur de la fonction exacte solution du problème $\Phi(x)$ n'est connue qu'aux noeuds sommets du problème.

2-1-2 Définition et condition de validités des fonctions de forme "standard"*

On cherche alors les fonctions de forme (ou d'interpolation) N_i telles que:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i N_i (x) \qquad (1.1)$$

avec $\Phi(x)$, l'interpolation au point x, Φ_i la valeur au noeud i et N_i (x) la valeur au point x de la fonction de forme du noeud i.

en imposant les trois conditions suivantes:

- *Condition 1:*

$$N_i (A_i) = 1 \qquad (1.2)$$
$$N_i (A_j) = 0 \qquad \text{si } i \neq j$$

- *Condition 2:*

L'interpolée de Φ en tout point d'une arête d'un élément ne dépend que des noeuds de cette arête. De plus, en trois dimensions, l'interpolée sur un point d'une facette d'un élément ne dépend que des noeuds de cette facette. Par exemple, N_i (P) = 0 si P appartient à une arête ou facette ne contenant pas le noeud numéro i.

- *Condition 3:*

L'ordre de l'interpolation sur chaque arête d'un élément dépend du nombre de noeuds de cette arête. Par exemple, en une dimension (Fig.2), connaissant la valeur $\Phi 1$ du potentiel au point A_1, d'abscisse x_1, et la valeur $\Phi 2$ du potentiel F au point A_2, d'abscisse x_2 il est possible de calculer la valeur du potentiel Φ au noeud A d'abscisse x avec (Équations 2):

* On dit qu'un élément fini est standard quand il vérifie les trois conditions suivantes (par opposition à hierarchique).

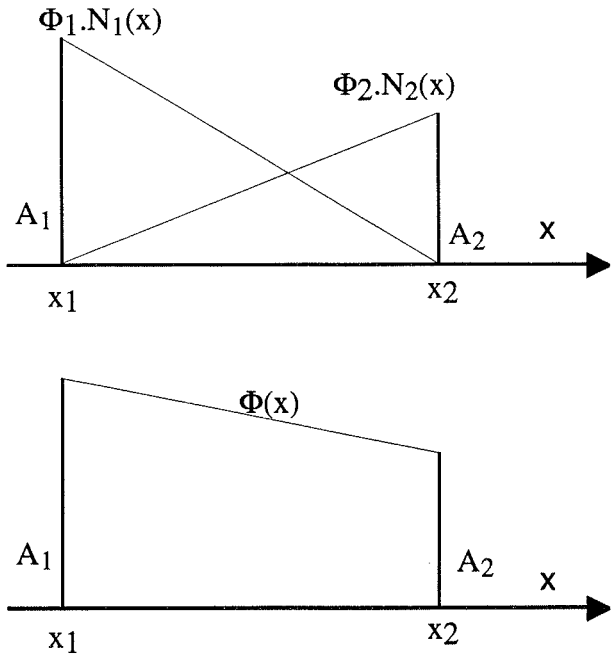


Fig.2: Élément fini unidimensionnel

Si $x_1 \leq x \leq x_2$, alors on peut dire que

$$\Phi(x) = \Phi 1.N_1(x)+\Phi 2.N_2(x) \qquad (2.1)$$

avec

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \text{ et } N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (2.2)$$

Cette interpolation unidimensionnelle est linéaire. Avec trois noeuds sur l'arête A_1,A_2 elle serait quadratique.

2-2 Méthodes d'investigations pour trouver des fonctions de forme

2-2-1 Génération de fonction de forme à partir d'une base polynomiale

Une méthode généralisable à tout type d'élément est basée sur la connaissance *a priori* des polynômes générateurs de fonction de forme. En effet, sachant que les fonctions de forme (ou d'interpolation) peuvent être générées avec des fonctions de base polynomiale plus ou moins complexe, il est possible, à partir des propriétés géométriques de l'élément, de calculer les fonctions de forme associées à chaque noeud par inversion d'une matrice de manière quasi systématique[DHATT-83].

Par exemple, pour un triangle dans le plan (xOy), on obtient les fonctions de forme des trois noeuds sommet $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$ et $A_3(x_3,y_3)$ en résolvant un système linéaire d'ordre 3.

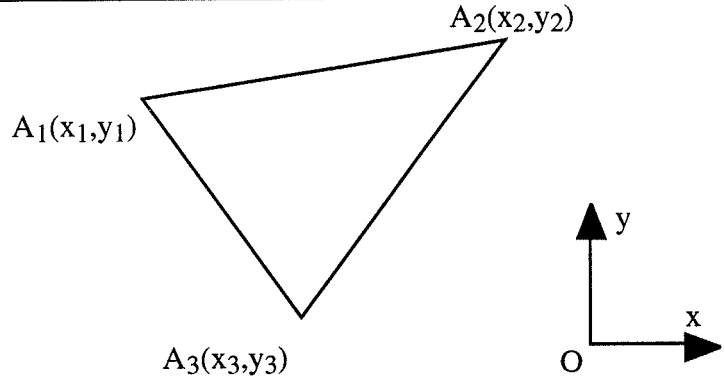


Fig.3: Élément fini triangulaire

On suppose que l'on connaît le degré de chaque fonction de forme, et sa base polynomiale. Pour le triangle de la figure 3, une base de cardinal 3 suffit. En effet, la base $B = \langle x, y, 1 \rangle^t$ permet de générer les fonctions de forme des trois noeuds A_1, A_2 et A_3 décrits à la figure précédente. En fait, on obtient les trois fonctions de forme des trois noeuds par l'équation (3):

$$N_i(x_i,y_i) = [a_{i1}\, a_{i2}\, a_{i3}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } N_j\,(x_i,y_i) = \delta_{ij} \qquad (3)$$

Pour obtenir les coefficients de ces fonctions de forme, il suffit alors de résoudre le système linéaire suivant (4):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

où les inconnues sont les coefficients a_{ij} des fonctions de forme N_i.

Cette méthode, systématique, permet à partir d'une base polynomiale bien choisie de générer des fonctions de forme pour un élément quelconque, par résolution d'un système linéaire de dimension égale au nombre de noeuds de l'élément.

On a tenté dans une première approche d'appliquer cette méthode générale de construction de fonctions d'interpolation à la pyramide à cinq noeuds ci-dessous (Fig.4):

Ayant cinq noeuds, on a choisi la base suivante de cardinalité cinq* suivantes (5) en supposant que le terme en u_3 devait être découplé des termes en u_1, u_2, à cause de la géométrie de la pyramide.

$$B = < 1, u_1, u_2, u_3 , u_1 \,.\, u_2> \qquad (5)$$

où u_1, u_2, u_3 sont les coordonnées du repère local de l'élément pyramide.

* Le fait de choisir 5 éléments dans la base n'est pas innocent car la pyramide possède cinq noeuds et le système à résoudre est donc de dimension 5.

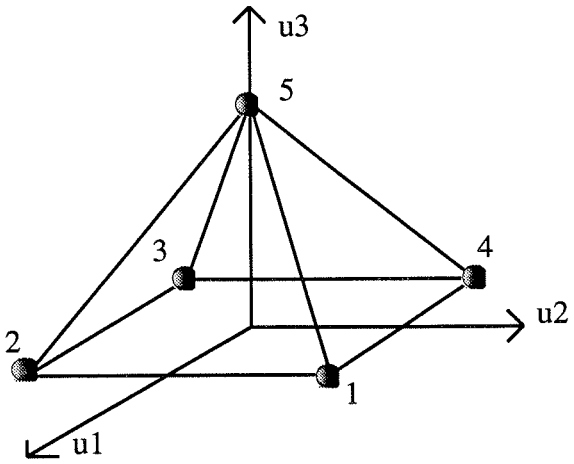


Fig.4: Numérotation des noeuds de l'élément pyramidal du premier ordre à cinq noeuds

On a alors obtenu les fonctions de forme suivantes (équations 6) dans le repère local (u_1, u_2, u_3):

$$N_1 = \frac{1}{4}.((1 + u_1).(1 + u_2) - u_3) \quad (6.1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}.((1 + u_1).(1 - u_2) - u_3) \quad (6.2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}.((1 - u_1).(1 - u_2) - u_3) \quad (6.3)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}.((1 - u_1).(1 + u_2) - u_3) \quad (6.4)$$

$$N_5 = u_3 \quad (6.5)$$

Bien que ces fonctions de forme présentent à première vue toutes les propriétés des fonctions de forme classiques, elles ont tout de même un défaut: La continuité C^{0*} de la variable d'état n'est pas assurée sur les facettes triangulaires de la pyramide avec les fonctions de forme classiques du triangle. De manière équivalente, on peut avancer que la condition 2 (voir § 2-1-2 ci dessus) n'est pas vérifiée.

Cela est visible en projetant une des fonctions de forme liées aux noeuds 1,2,3 ou 4 sur les facettes triangulaires (par exemple le plan $u_3=1-u_1$ ou $u_3=1-u_2$), on peut aisément vérifier qu'un terme produit $u_1.u_2$ apparaît et se trouve en trop dans la fonction de forme, ce qui n'assure plus la continuité C^0 avec les classiques fonctions de forme du triangle.

2-2-2 Dégénération d'un cube pour créer une pyramide.

Une autre tentative pour générer les fonctions de forme de la pyramide a consisté à dégénérer un cube. En effet, si on rassemble les quatre noeuds d'une des faces du cube, on peut obtenir une pyramide (Fig.5).

* On dit que f est C^0 en x si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall a \in F)(|a-x| < \alpha \Rightarrow |f(a)-f(x)| < \varepsilon)$.

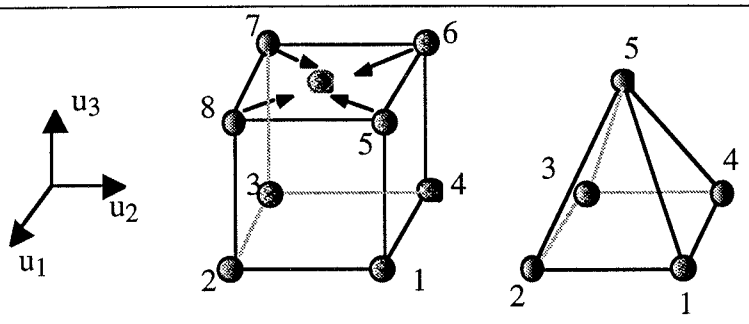


Fig.5: Dégénération d'un hexaèdre (8 noeuds) en pyramide (5 noeuds)

Les fonctions de forme des noeuds non dégénérés sont les mêmes que précédemment (c'est-à-dire celles des noeuds du cube correspondant): Elles s'annulent toutes très bien au sommet de la pyramide. La fonction de forme du noeud dégénéré est la somme des fonctions de forme d'origines de la face dégénérées, et s'annule bien sur la base de la pyramide. La figure 5 montre l'élément cubique et pyramidal dans le repère local de référence (u_1,u_2,u_3):

$$N_1 = \frac{1}{4}.(1 + u_1).(1 + u_2).(1 - u_3) \quad (7.1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}.(1 + u_1).(1 - u_2).(1 - u_3) \quad (7.2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}.(1 - u_1).(1 - u_2).(1 - u_3) \quad (7.3)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}.(1 - u_1).(1 + u_2).(1 - u_3) \quad (7.4)$$

$$N_5 = u_3 \quad (7.5)$$

Ces fonctions de forme ne vérifient pas non plus la condition de continuité avec les éléments voisins car elles sont de degré élevé sur les facettes triangulaires de l'élément pyramide. De manière équivalente, on peut avancer que ces fonctions de forme ne vérifient pas les conditions 2 et 3.

2-3 Une méthodologie plus empirique

2-3-1 Cas de l'élément rectangle linéaire à quatre noeuds

Sur une maille rectangulaire, on propose la numérotation des noeuds suivantes (Fig.6):

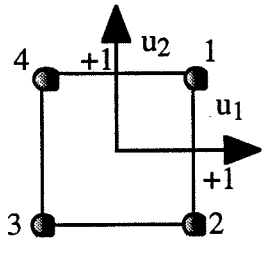


Fig.6: Élément fini rectangulaire

Pour la fonction de forme associée au noeud 1, on cherche à annuler la fonction pour les noeuds 2, 3 et 4. Or les équations des droites 3-4 et 2-3 sont respectivement les suivantes: u_1=-1 et u_2=-1.

Une solution F (équation 8) vérifie la première condition des fonctions de forme.

$$F(u_1,u_2) = (u_1+1)(u_2+1) \quad (8)$$

Si on vérifie les conditions de dépendance linéaire sur les arêtes liées au noeud 1, on obtient:

sur 1-2:
$F(u_1=1,u_2) = 2(u_2+1)$ (9.1)

sur 1-4:
$F(u_1,u_2=1) = 2(u_1+1)$ (9.2)

$F(u_1,u_2)$ est bien linéaire et vérifie donc bien la condition 2.

La valeur de la fonction F au noeud 1 est :

$F(u_1=1,u_2=1) = 4$ (9.3)

D'où la fonction de forme N_1 qui vérifie bien les trois conditions de validité (équation 10.1):

$$N_1 (u_1,u_2) = \frac{1}{4}(u_1+1)(u_2+1) \quad (10.1)$$

De la même manière, on obtient pour les autres noeuds les fonctions suivantes:

$$N_2 (u_1,u_2) = \frac{1}{4}(u_1+1)(u_2-1) \quad (10.2)$$

$$N_3 (u_1,u_2) = \frac{1}{4}(u_1-1)(u_2-1) \quad (10.3)$$

$$N_4 (u_1,u_2) = \frac{1}{4}(u_1-1)(u_2+1) \quad (10.4)$$

2-3-2 Cas de l'élément pyramide linéaire à cinq noeuds

Soit l'élément pyramide à cinq noeuds suivants (Fig.7), dans son repère de référence (u_1,u_2,u_3).

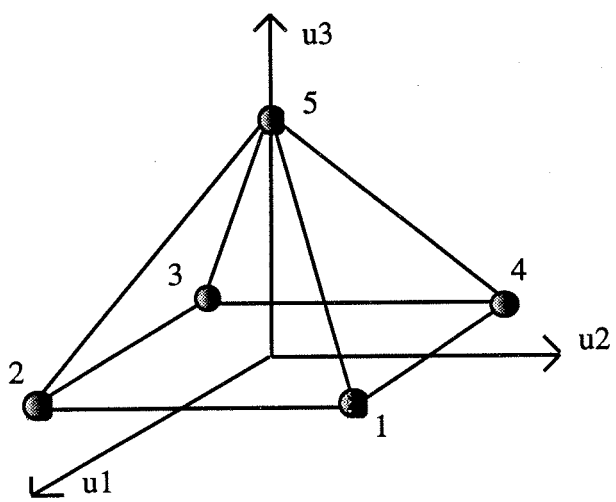


Fig.7: L'élément pyramide de référence au premier ordre (5 noeuds)

Pour déterminer les fonctions de forme de la maille pyramide, et pour commencer la fonction de forme N_1, imposons tout d'abord des conditions de nullité dans les plans suivants:

L'équation du plan 3-4-5 est:
$u_3=1 - u_1$ (11.1)

L'équation du plan 2-3-5 est:
$u_3=1 - u_2$ (11.2)

La fonction qui s'annule sur ces deux plans peut alors s'écrire (équation 12):

$$F(u_1,u_2,u_3) = (1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3) \quad (12)$$

Si on vérifie les conditions de dépendance sur les arêtes, on obtient les équations suivantes:

Sur l'arête 1-2, on a

$$F(u_1=1,u_2,u_3=0) = 2.(1+u_2) \quad (13.1)$$

Sur l'arête 1-4, on a

$$F(u_1,u_2=1,u_3=0) = 2.(1+u_1) \quad (13.2)$$

Sur l'arête 1-5, on a

$$F(u_1=1-u_3,u_2=1-u_3,u_3) = 4.(1-u_3)^2 \quad (13.3)$$

La variation sur u_3 est quadratique sur l'arête 1-5, donc non linéaire. Pour la rendre linéaire, on peut diviser F par $1-u_3$ en vérifiant que cette division n'altère pas les conditions sur les autres noeuds. F devient alors:

$$F(u_1,u_2,u_3) = \frac{(1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3)}{1-u_3} \quad (14.1)$$

De plus la valeur de F au noeud 1 (1,1,0) est égale à :

$$F(1,1,0) = 4 \quad (14.2)$$

La fonction suivante (équation 15.1) satisfait par conséquent aux trois conditions préliminaires:

$$N_1(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{4}\frac{(1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3)}{1-u_3} \quad (15.1.a)$$

Une autre manière d'écrire cette fonction de forme est la suivante:

$$N_1 = \frac{1}{4}((1+u_1)(1+u_2) - u_3 + \frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}) \quad (15.1.b)$$

Pour les fonctions de forme associées aux autres noeuds de la base de la pyramide ($u_3 = 0$), de la même manière, on peut obtenir facilement les quatre fonctions. Pour le sommet, on se place au noeud 5, et on cherche une fonction F telle que F soit nulle en tout point du plan 1-2-3-4.

Or l'équation du plan 1-2-3-4 est:

$$u_3 = 0 \quad (15.2)$$

Les conditions de dépendances linéaires sont bien vérifiées, car $F(u_1,u_2,u_3) = u_3$.

De plus la valeur de la fonction F au point 5 est: $F(0,0,1) = 1$.

D'où la solution suivante (équation 16.1-16.5):

$$N_1 = \frac{1}{4}((1+u_1)(1+u_2) - u_3 + \frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}) \quad (16.1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}((1+u_1)(1-u_2) - u_3 - \frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}) \quad (16.2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}((1-u_1)(1-u_2) - u_3 + \frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}) \quad (16.3)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}((1-u_1)(1+u_2) - u_3 - \frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}) \quad (16.4)$$

$$N_5 = u_3 \quad (16.5)$$

On reconnaît ici les fonctions de forme générées à partir de la base B (définie plus haut (5)), 'réajustées' afin de les rendre continue sur les facettes rectangulaires et triangulaires. En fait, elles sont corrigées par le terme rationnel du type $\frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}$ pour chaque fonction de forme d'un noeud de la base. Cet ajout rationnel devient polynomial sur les facettes triangulaires de la pyramide.

2-3-3 Faut-il s'inquiéter de l'aspect rationnel des fonctions de forme?

L'aspect rationnel et le dénominateur ne vont pas sans poser quelques problèmes mathématiques et numériques, notamment lorsque u_3 est proche de 1 (on se rapproche du sommet de la pyramide).

La singularité du dénominateur s'annulant en $u_3 = 1$ (au sommet de la pyramide) est en fait un faux problème, car lorsque u_3 se rapproche de 1, alors u_1 et u_2 tendent simultanément vers zéro, *i.e.* l'indétermination est levée par le numérateur qui tend plus rapidement vers zéro et ces fonctions de formes sont calculables et finies au sommet P_5 de la pyramide. Numériquement, on résout cette singularité en posant que $N_5(P)$ est égal à 1 lorsque $P(u_1,u_2,u_3)$ se trouve dans une boule de centre $P_5(0,0,1)$ et de rayon ε, de l'ordre de la précision machine.

On constate la continuité C^0 sur les quatre facettes et sur la base de la pyramide à l'aide des courbes isovaleurs tracées ci-dessous (Fig. 8) pour la fonction de forme au noeud 1.

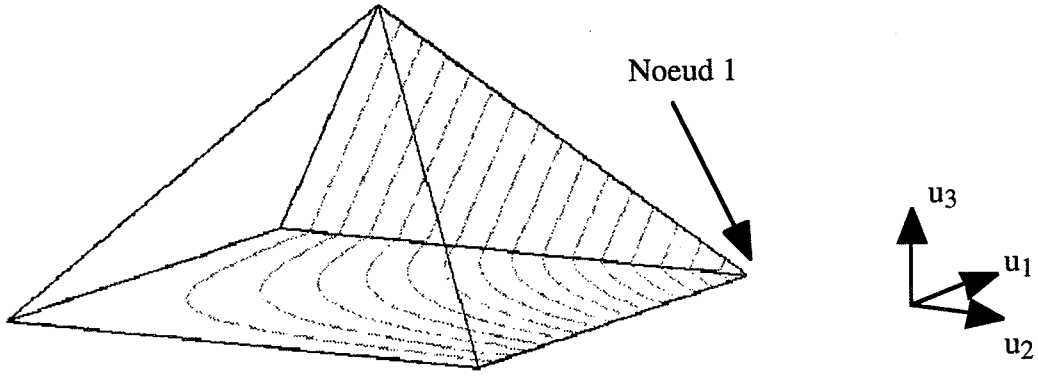


Fig.8: Fonction de forme du noeud 1 à la surface de l'élément

On reconnaît à la base de la pyramide la fonction de forme du rectangle au premier ordre, et sur les faces triangulaires, la classique fonction de forme linéaire du triangle au premier ordre.

2-4 Fonctions de forme du deuxième ordre incomplet

De la même manière, en gardant la même méthodologie que pour les fonctions de forme du premier ordre, on a obtenu les treize fonctions de forme de la pyramide incomplète suivante (Fig.9):

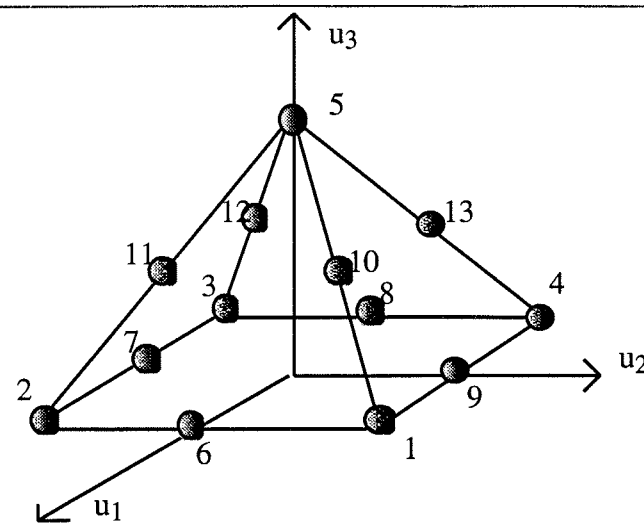


Fig.9: L'élément pyramide de référence au second ordre incomplet (13 noeuds)

Au lieu de traiter chaque noeud, et pour simplifier la lecture, on va diviser cette partie et traiter chaque cas suivant la position du noeud examiné dans la géométrie de l'élément de référence. On peut étudier séparément les noeuds 1,2,3,4; puis les noeuds 6,7,8,9 au milieu des arêtes de la base; puis les noeuds 10,11,12,13 situés à l'étage; et enfin le noeud 5 sommet de la pyramide.

2-4-1 Premier cas: Noeuds aux coins de la base

Pour le noeud 1, on cherche une fonction F telle que F soit nulle sur les plans:

Plan 2-7-3-11-5-12

$$u_3 = 1 - u_2 \qquad (17.1)$$

Plan 3-8-4-13-5-12

$$u_3 = 1 - u_1 \qquad (17.2)$$

Plan 10-9-6

$$u_1 = 1 - u_2 \qquad (17.3)$$

La fonction qui s'annule sur ces deux plans peut alors s'écrire (équation 18):

$$F(u_1,u_2,u_3) = (1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3)(1-u_1-u_2) \qquad (18)$$

Si on vérifie, comme à l'ordre 1, les conditions de dépendance, sur les arêtes suivantes, on a:

Sur l'arête 1-2, F est égale à:

$$F(u_1=1,u_2,u_3=0) = -2.u_2(1+u_2) \qquad (19.1)$$

Sur l'arête 1-4, F est égale à:

$$F(u_1,u_2=1,u_3=0) = -2.u_1(1+u_1) \qquad (19.2)$$

Sur l'arête 1-5, F est égale à:

$$F(u_1=u_2=1-u_3) = 4.(1-u_3)^2.(2u_3 -1) \qquad (19.3)$$

La variation suivant u_3 n'est pas quadratique sur l'arête 1-5, elles est en u_3^3. Pour la rendre quadratique, on peut diviser F par $1-u_3$ en vérifiant que cette division n'altère pas les conditions sur les autres noeuds. F devient alors:

$$F(u_1,u_2,u_3) = \frac{(1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3)(1-u_1-u_2)}{1-u_3} \qquad (20.1)$$

De plus la valeur de F au noeud 1 (1,1,0) est égale à :

$$F(1,1,0) = -4 \qquad (20.2)$$

La fonction suivante (équation 21.1) satisfait par conséquent aux trois conditions préliminaires et correspond donc à la fonction de forme du noeud 1 de la base:

$$N_1(u_1,u_2,u_3) = -\frac{1}{4}\frac{(1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3)(1-u_1-u_2)}{1-u_3} \qquad (21.1.a)$$

Une autre manière d'écrire cette fonction de forme est la suivante:

$$N_1(u_1,u_2,u_3)= \frac{1}{4}((1+u_1)(1+u_2) - u_3 + \frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3})(u_1+u_2-1) \qquad (21.1.b)$$

De la même manière, on peut générer les fonctions de forme des noeuds 2,3,4 en utilisant la même méthodologie.

2-4-2 Deuxième cas: Noeuds aux milieux des arêtes de la base

Pour le noeud 6, on cherche une fonction F telle que F soit nulle sur les plans:

Plan 2-7-3-11-5-12

$$u_3 = 1 + u_2 \qquad (22.1)$$

Plan 3-8-4-13-5-12

$$u_3 = 1 + u_1 \qquad (22.2)$$

Plan 1-9-4-13-5-10

$$u_3 = 1 - u_2 \qquad (22.3)$$

La fonction qui s'annule sur ces deux plans peut alors s'écrire (équation 23.1):

$$F(u_1, u_2, u_3) = (1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3)(1-u_3-u_2) \qquad (23.1)$$

Si on vérifie les conditions de dépendance sur l'arête 1-2 qui passe par le noeud 6, on obtient alors:

Sur l'arête 1-6-2, F est égale à:

$$F(u_1=1, u_2, u_3=0) = -2.u_2(1+u_2) \qquad (24.1)$$

On peut en plus vérifier que la fonction sur le chemin 6-5 et 6-10 est bien quadratique.

Sur le chemin 6-5, F est égale à:

$$F(u_1=1-u_3, u_2=0, u_3) = 2.(1-u_3)^3 \qquad (24.2)$$

Sur le chemin 6-10, F est égale à:

$$F(u_1=1-u_3, u_2=u_3, u_3) = 2.(1-u_3)(1-2u_3) \qquad (24.3)$$

La variation suivant u_3 n'est pas quadratique sur la ligne 6-5. Pour la rendre quadratique, on peut diviser F par $1-u_3$ en vérifiant que cette division n'altère pas les conditions sur les autres noeuds. F devient alors:

$$F(u_1 ,u_2 ,u_3) = \frac{(1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3)(1-u_3-u_2)}{1-u_3} \qquad (25.1)$$

De plus la valeur de F au noeud 6 (1,1,0) est égale à:

$$F(1, 0, 0) = 2 \qquad (25.2)$$

La fonction suivante (équation 26.1.a) satisfait par conséquent aux trois conditions préliminaires et correspond donc à la fonction de forme du noeud 1 de la base:

$$N_6(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{2}\,\frac{(1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3)(1-u_1-u_2)}{1-u_3} \qquad (26.1.a)$$

ou encore, on peut écrire que:

$$N_6(u_1,u_2,u_3) = \frac{1-u_2-u_3}{2}.((1+u_1)(1+u_2)-u_3+\frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}) \qquad (26.1.b)$$

Les fonctions de forme des noeuds 7,8 et 9 peuvent être déduites de cette fonction de forme.

2-4-3 Troisième cas: Noeuds situés à l'étage 1/2

Pour traiter le cas des noeuds situés à $u_3 = 1$, intéressons nous tout d'abord au noeud 10, les fonctions de forme des noeuds 11,12,13 pouvant être déduites de cette fonction du noeud 10.

On cherche une fonction F telle que F soit nulle sur les plans:

Plan 1-6-2-7-3-8-4-9

$$u_3 = 0 \qquad (27.1)$$

Plan 2-7-3-11-5-12

$$u_3 = 1 + u_2 \qquad (27.2)$$

Plan 3-8-4-13-5-12

$$u_3 = 1 + u_1 \qquad (27.3)$$

La fonction qui s'annule sur ces deux plans peut alors s'écrire (équation 28):

$$F(u_1,u_2,u_3) = u_3(1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3) \qquad (28)$$

Vérifions les conditions de dépendance des arêtes liées au noeud 10:

Sur l'arête 10-11, F est égale à:

$$F(u_1=\frac{1}{2},u_2,u_3=\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+u_2) \qquad (29.1)$$

Sur l'arête 1-10-5, F est égale à:

$$F(u_1=u_2,u_2,u_3=1-u_1) = 4.u_3(1-u_3)^2 \qquad (29.2)$$

La variation suivant u_3 n'est pas quadratique sur l'arête 1-10-5. Pour la rendre quadratique, on peut diviser F par $1-u_3$ en vérifiant que cette division n'altère pas les conditions sur les autres noeuds. F devient alors:

$$F(u_1,u_2,u_3) = \frac{u_3(1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3)}{1-u_3} \qquad (30.1)$$

De plus la valeur de F au noeud 6 (1,1,0) est égale à:

$$F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 1 \qquad (30.2)$$

La fonction suivante (équation 31.1) satisfait par conséquent aux trois conditions préliminaires et correspond donc à la fonction de forme du noeud 10:

$$N_{10}(u_1,u_2,u_3) = \frac{u_3(1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3)}{1-u_3} \qquad (31.1)$$

ou encore,

$$N_{10}(u_1,u_2,u_3) = u_3.((1+u_1)(1+u_2)-u_3+\frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}) \qquad (31.2)$$

Les fonctions de formes des noeuds 11,12 et 13 peuvent être déduites de cette fonction de forme.

2-4-4 Quatrième cas: Noeud sommet de la pyramide

Pour le noeud 5, on cherche une fonction F telle que F soit nulle sur les plans:

Plan 1-6-2-7-3-8-4-9

$$u_3 = 0 \qquad (32.1)$$

Plan 10-11-12-13

$$u_3 = \frac{1}{2} \qquad (32.2)$$

La fonction qui s'annule sur ces deux plans peut alors s'écrire (équation 33.1):

$$F(u_1,u_2,u_3) = u_3(\frac{1}{2}-u_3) \qquad (33.1)$$

Si on vérifie les conditions de dépendance sur les arêtes suivantes, on a:

Sur l'arête 1-5, 2-5, 3-5, 4-5, F est égale à:

$$F(u_1,u_2,u_3) = u_3(\frac{1}{2}-u_3) \qquad (33.2)$$

La variation suivant u_3 est quadratique sur toutes les arêtes.

De plus la valeur de F au noeud 5 (0,0,1) est égale à:

$$F(0,0,1) = -\frac{1}{2} \qquad (33.3)$$

La fonction suivante (équation 34) satisfait par conséquent aux trois conditions préliminaires et correspond donc à la fonction de forme du sommet de la pyramide:

$$N_5 = u_3(2u_3-1) \qquad (34)$$

2-4-5 Récapitulatif

Les fonctions de forme associées à ces treize noeuds sont les suivantes (équations 35):

$$N_1 = \frac{1}{4}(u_1+u_2-1)\left[(1+u_1)(1+u_2)-u_3+\frac{u_1u_2u_3}{1-u_3}\right] \quad (35.1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(u_1-u_2-1)\left[(1+u_1)(1-u_2)-u_3-\frac{u_1u_2u_3}{1-u_3}\right] \quad (35.2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(-u_1-u_2-1)\left[(1-u_1)(1-u_2)-u_3+\frac{u_1u_2u_3}{1-u_3}\right] \quad (35.3)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(-u_1+u_2-1)\left[(1-u_1)(1+u_2)-u_3-\frac{u_1u_2u_3}{1-u_3}\right] \quad (35.4)$$

$$N_5 = u_3(2u_3-1) \quad (35.5)$$

$$N_6 = \frac{(1+u_2-u_3)(1-u_2-u_3)(1+u_1-u_3)}{2(1-u_3)} \quad (35.6)$$

$$N_7 = \frac{(1+u_1-u_3)(1-u_1-u_3)(1-u_2-u_3)}{2(1-u_3)} \quad (35.7)$$

$$N_8 = \frac{(1+u_2-u_3)(1-u_2-u_3)(1-u_1-u_3)}{2(1-u_3)} \quad (35.8)$$

$$N_9 = \frac{(1+u_1-u_3)(1-u_1-u_3)(1+u_2-u_3)}{2(1-u_3)} \quad (35.9)$$

$$N_{10} = \frac{u_3(1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3)}{(1-u_3)} \quad (35.10)$$

$$N_{11} = \frac{u_3(1+u_1-u_3)(1-u_2-u_3)}{(1-u_3)} \quad (35.11)$$

$$N_{12} = \frac{u_3(1-u_1-u_3)(1-u_2-u_3)}{(1-u_3)} \quad (35.12)$$

$$N_{13} = \frac{u_3(1-u_1-u_3)(1+u_2-u_3)}{(1-u_3)} \quad (35.13)$$

Une fois de plus, on peut s'assurer que ces fonctions vérifient la continuité C^0 avec les éléments du second ordre adjacents.

Cet élément incomplet est particulièrement utile si l'utilisateur travaille au second ordre incomplet pour les briques et les prismes d'un coté (de manière à ne pas avoir trop de degrés de liberté sur le maillage réglé) et au second ordre pour les tétraèdres.

2-5 A la recherche des fonctions de forme du deuxième ordre complet

L'intérêt d'utiliser le second ordre complet est de pouvoir coupler des éléments rectangulaires de type Lagrange (un noeud au centre de la face), générés par des mailleurs structurés et des tétraèdres du deuxième ordre. Les éléments de Lagrange sont utilisés pour des études de phénomène couplés grâce à leur interpolation performante des variables d'état. A première vue, on constate que les fonctions de forme du deuxième ordre incomplet peuvent être réutilisées, et on va employer un algorithme dit de Serendip [ZIENCKIEWICZ-91] pour rajouter un noeud au centre de la base. On notera N_i la fonction de forme du noeud i pour la pyramide à 13 noeuds et $\underline{N}_i$, la nouvelle fonction de forme du noeud i (pyramide à 14 noeuds).

La méthodologie suivante a été utilisée:

1. Quelle fonction de forme pour le noeud ajouté?
On veut annuler la fonction de forme sur les cotés de la base (abs(u_1)=abs(u_2)=1)

et aux étages ($u_3=\frac{1}{2}$ et $u_3=1$). Une fonction de forme possible, et la plus simple est:

$$\underline{N}_{14}(u_1,u_2,u_3) = (1-u_1^2)(1-u_2^2)(1-u_3)(\frac{1}{2}-u_3) \qquad (36)$$

2. On se doit alors de modifier les autres fonctions de forme $N_{i\ (i=1..13)}$...
Il faut impérativement les annuler au point placé au centre de la base pyramidale (coordonnées locales 0,0,0). On va alors utiliser:

$$\underline{N}_i(u_1,u_2,u_3) := N_i(u_1,u_2,u_3) - N_i(0,0,0) \times \underline{N}_{14}(u_1,u_2,u_3) \qquad (37)$$

3. On s'assure que les propriétés des fonctions de forme sont bien vérifiées.

En utilisant cette méthodologie systématique, on a obtenu les fonctions de forme suivantes pour la pyramide complète (équation 38):

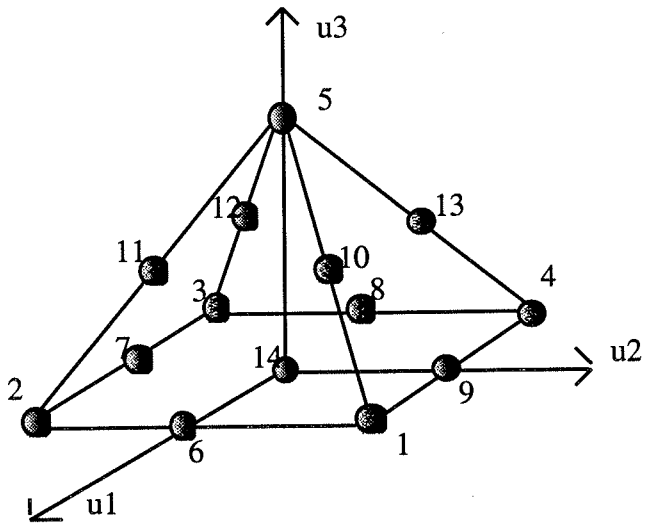


Fig.10: La pyramide au second ordre complet à 14 noeuds

$$N_1 = \frac{1}{4}(u_1+u_2-1)\left[(1+u_1)(1+u_2)-u_3+\frac{u_1u_2u_3}{1-u_3}\right]+\frac{1}{4}N_{14} \qquad (38.1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(u_1-u_2-1)\left[(1+u_1)(1-u_2)-u_3-\frac{u_1u_2u_3}{1-u_3}\right]+\frac{1}{4}N_{14} \qquad (38.2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(-u_1-u_2-1)\left[(1-u_1)(1-u_2)-u_3+\frac{u_1u_2u_3}{1-u_3}\right]+\frac{1}{4}N_{14} \qquad (38.3)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(-u_1+u_2-1)\left[(1-u_1)(1+u_2)-u_3-\frac{u_1u_2u_3}{1-u_3}\right]+\frac{1}{4}N_{14} \qquad (38.4)$$

$$N_5 = u_3(2u_3-1) \qquad (38.5)$$

$$N_6 = \frac{(1+u_2-u_3)(1-u_2-u_3)(1+u_1-u_3)}{2(1-u_3)}-\frac{1}{2}N_{14} \qquad (38.6)$$

$$N_7 = \frac{(1+u_1-u_3)(1-u_1-u_3)(1-u_2-u_3)}{2(1-u_3)}-\frac{1}{2}N_{14} \qquad (38.7)$$

$$N_8 = \frac{(1+u_2-u_3)(1-u_2-u_3)(1-u_1-u_3)}{2(1-u_3)}-\frac{1}{2}N_{14} \qquad (38.8)$$

$$N_9 = \frac{(1+u_1-u_3)(1-u_1-u_3)(1+u_2-u_3)}{2(1-u_3)}-\frac{1}{2}N_{14} \qquad (38.9)$$

$$N_{10} = \frac{u_3(1+u_1-u_3)(1+u_2-u_3)}{(1-u_3)} \quad (38.10)$$

$$N_{11} = \frac{u_3(1+u_1-u_3)(1-u_2-u_3)}{(1-u_3)} \quad (38.11)$$

$$N_{12} = \frac{u_3(1-u_1-u_3)(1-u_2-u_3)}{(1-u_3)} \quad (38.12)$$

$$N_{13} = \frac{u_3(1-u_1-u_3)(1+u_2-u_3)}{(1-u_3)} \quad (38.13)$$

$$N_{14} = (1-u_1^2)(1-u_2^2)(1-u_3)(\frac{1}{2}-u_3) \quad (38.14)$$

2-6 Problème de la non dérivabilité au sommet de la pyramide

Lorsque l'on dérive la fonction de forme au premier ordre du noeud 1 par rapport à u_3 (par exemple), on obtient:

$$\frac{\partial N_1}{\partial u_3} = \frac{1}{4}\left(-1 + \frac{u_1.u_2}{(1-u_3)^2}\right) \quad (39)$$

C'est le cas le plus défavorable où le dénominateur présente une singularité de degré deux.

Cette fonction est indéterminée en $u_3 = 1$ et pose problème car pour l'exploitation du résultat (en fait pour le bon fonctionnement du post-processeur de [FLUX3D]), il est nécessaire de savoir calculer la dérivée à tous les noeuds du maillage (exemple: Pour calculer le champ magnétique $\vec{B}$ dans l'élément, il est nécessaire de connaître la dérivée du potentiel A aux noeuds du maillage). u_1 et u_2 étant bornés et inférieurs à la valeur de u_3 (on reste à l'intérieur de la pyramide), on peut écrire:

$$-1 \le \frac{u_1 u_2}{(1-u_3)^2} \le 1 \qquad \text{et par conséquent :} \qquad -\frac{1}{2} \le \frac{\partial N_1}{\partial u_3} \le 0 \quad (40)$$

La valeur de la dérivée est donc bornée, elle ne tend pas vers l'infini, mais elle varie suivant l'approche du point critique P_5, sommet de la pyramide. La figure suivante (Fig.11) montre l'aspect de la dérivée dans un plan parallèle à la base à u_3 constante (égal à $u_3 = 0{,}9$).

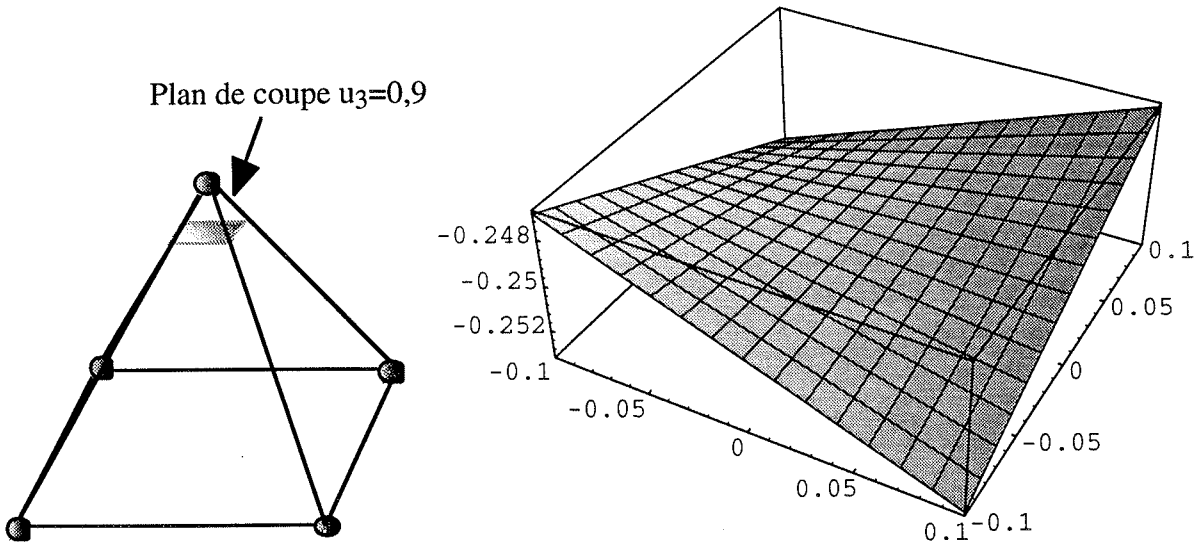


Fig.11: Aspect de la dérivée de la fonction $N_1(u_1,u_2,u_3)$ par rapport à u_1 dans un plan u_3 constante, près du sommet de la pyramide

La dérivée de la fonction de forme présente un aspect selle de cheval sur un plan parallèle à la base situé près du noeud sommet. Pour résoudre ce problème, on va essayer de prendre une dérivée systématique, conscient du fait de la non dérivabilité au sommet de la pyramide des fonctions de forme. On fait donc une approximation "moyenne" ou "intégrale", en prenant la valeur de la dérivée sur l'axe au point sommet, i.e. sur le segment qui relie le centre de la base de la pyramide et son sommet, ainsi :

$$\frac{1}{4}\frac{\partial N_1}{\partial u_3}(0,0,1) = -\frac{1}{4} \qquad (41)$$

Le calcul des dérivées des fonctions de forme rationnelles a été réalisé avec [MACSYMA], dérivateur formel.

2-7 Conclusion

Nous avons maintenant une famille de trois fonctions de forme pyramidale (5, 13, 14 noeuds - premier ordre, deuxième ordre incomplet et complet) qui va nous permettre de réaliser un raccordement de type fort (C^0) entre des éléments 3D à facettes rectangulaires et des éléments à facettes triangulaires quel que soit l'ordre des éléments finis utilisés. Il reste tout de même le problème de l'intégration de ces fonctions de forme non classiquement polynomiales, qui semblent être *a priori* plutôt mal conditionnées. En effet, il est nécessaire de tenir compte de l'indétermination au sommet de la pyramide pour le calcul de l'intégrale des fonctions de forme et de leurs dérivées.

III-3 Intégration

Pour résoudre l'équation variationelle issue de la fonctionnelle, il est nécessaire de pouvoir intégrer les termes suivantes:

$$\int_{\substack{\text{élément}\\ \text{réel}}} \vec{\nabla}N_i.D.\vec{\nabla}N_j.dv \;,\; \int_{\substack{\text{élément}\\ \text{réel}}} N_i.dv \;,\; \int_{\substack{\text{élément}\\ \text{réel}}} N_i.D.N_j.dv$$

En intégrant dans l'élément de référence, on obtient les intégrales suivantes:

$$\int_{\substack{\text{élément de}\\ \text{référence}}} \vec{\nabla}N_i.D.\vec{\nabla}N_j.\det(G)^{-1}dv, \int_{\substack{\text{élément de}\\ \text{référence}}} N_i.\det(G)^{-1}dv, \int_{\substack{\text{élément de}\\ \text{référence}}} N_i.D.N_j.\det(G)^{-1}dv$$

Le terme en $\det(G)^{-1}$ contient des sommes de termes en $\frac{\partial N(u)}{\partial u}$. En effet, le calcul du jacobien est donné dans [DHATT-83]. Dans le cas de la pyramide, la matrice jacobienne peut s'écrire (42):

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial u_1} & \frac{\partial N_2}{\partial u_1} & \frac{\partial N_3}{\partial u_1} & \frac{\partial N_4}{\partial u_1} & \frac{\partial N_5}{\partial u_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial u_2} & \frac{\partial N_2}{\partial u_2} & \frac{\partial N_3}{\partial u_2} & \frac{\partial N_4}{\partial u_2} & \frac{\partial N_5}{\partial u_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial u_3} & \frac{\partial N_2}{\partial u_3} & \frac{\partial N_3}{\partial u_3} & \frac{\partial N_4}{\partial u_3} & \frac{\partial N_5}{\partial u_3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \end{bmatrix} \qquad (42)$$

La valeur du déterminant de G étant égale à l'unité pour l'intégration dans l'élément standard (non déformé). Dès que l'élément se déforme, l'inverse du déterminant de G dépend de u, mais si la déformation est faible, on peut considérer que le terme est constant.

3-1 Une intégration analytique est-elle vraiment nécessaire...?

Il est clair que nous avons obtenu des fonctions de forme qui garantissent le raccordement fort entre les facettes triangulaires et quadrangulaires. Cependant, il est maintenant nécessaire de les intégrer. Après avoir rappelé les principes de l'intégration par points de Gauss, on essaiera d'intégrer les fonctions de forme rationnelles de la pyramide.

3-1-1 Intégration par points et poids de Gauss

De manière classique, dans la méthode des éléments finis, on utilise une intégration par la méthode de Gauss. Cette méthode est très intéressante pour intégrer les fonctions de forme, leur produit, ou le produit de leur gradient, car elle est peu coûteuse et très performante. En effet, lorsque l'on connaît le degré d'un polynôme à intégrer, à partir de la valeur de la fonction en certains points du domaine (points de Gauss), on peut atteindre la valeur de l'intégrale en pondérant ces valeurs (poids de Gauss). Plus le degré du polynôme est important (degré de 2m-1 par exemple), plus le nombre de points de Gauss doit être élevé (m points) si l'intégration est à une dimension. Pour comprendre ce calcul, prenons un exemple simple:

Soit la fonction polynomiale $f(x) = x^2+4x+3$, que l'on cherche à intégrer sur [-1,1]. Le tracé de cette fonction est présenté figure 12.

On cherche à trouver les points et poids de Gauss, qui permettent de calculer l'intégrale grâce à une combinaison linéaire, telle que:

$$I = \sum_{i=1}^{nb} w_i f(x_i) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \qquad (43)$$

où nb est le nombre de points de Gauss nécessaires, x_i les abscisses des points et w_i les poids des points.

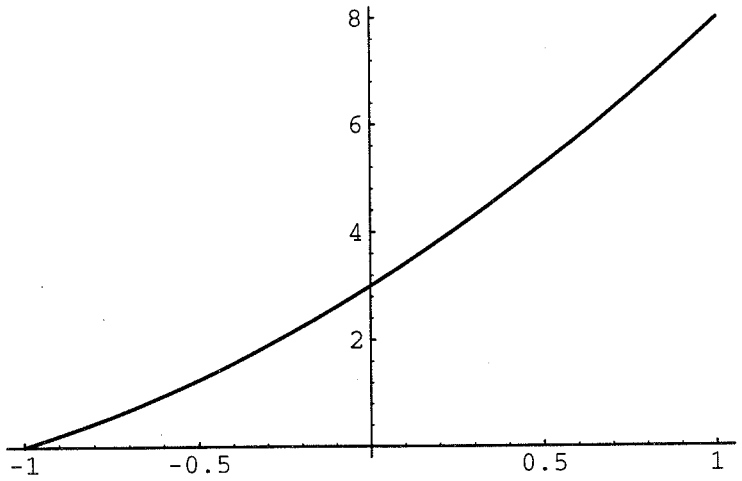


Fig.12: Représentation du polynôme sur [-1,1]

Pour calculer exactement I, il suffit de prendre deux points de Gauss. En effet, l'intégrale sur l'intervalle [-1,1] de f est égale à (équation 44):

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \qquad (44)$$

Ici, les points de Gauss sont caractérisés par leur poids: 1,1 et par leur abscisse : $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

On peut signaler que dans le cas du rectangle (intégration surfacique), on peut découpler l'intégration dans chaque direction et se ramener à deux intégrations unidimensionnelles.

Des tables de poids et points de Gauss existent dans la littérature [DHATT-83] pour l'intégration des polynômes classiques. Cette méthode ne semble pas bien adaptée *a priori* à nos fonctions de forme obtenues plus haut, que l'on doit intégrer sur le domaine pyramidal. En effet, elles sont rationnelles (donc non polynomiales).

3-1-2 Liste des fractions rationnelles à intégrer exactement

Il faut de plus que l'on sache intégrer des produits de ces fonctions, ou leurs dérivées ou encore des produits de leurs dérivés dans le cas des fonctions de formes rationnelles trouvées plus haut. On se propose de classifier les polynômes à intégrer de manière à savoir ce que l'on veut intégrer.

3-1-2-1 Remarques

Pour commencer, on peut tout d'abord faire deux remarques, de manière à simplifier la recherche de ces polynômes.

Remarque 1:

Une des propriétés de ces fonctions de forme est d'être polynomiales sur un plan u_3 constant, donc de pouvoir s'intégrer de manière 'connue' sur des plans parallèles (i.e. des rectangles) à la base plane $u_3=0$ (plan Ou_1u_2). En effet, en projetant les fonctions de forme des pyramides au premier ordre, au deuxième ordre incomplet et complet sur des plans u_3 constant, on retrouve des polynômes

de degré égal aux polynômes des quadrangles au premier, deuxième ordre complet et incomplet. Par conséquent, si on dispose de manière symétrique des points de Gauss dans le plan Ou_1u_2, on peut supprimer les termes contenant des u_1 et u_2 avec des puissances impaires.

Remarque 2:

Si les points sont symétriques dans le plan Ou_1u_2, alors il suffit de traiter tous les termes en u_1, les termes symétriques correspondants en u_2 étant vérifiés aussi.

3-1-2-2 Liste des fonctions à intégrer exactement

Dans le cas des fonctions de forme du premier ordre de la pyramide à cinq noeuds, on a les bases suivantes à intégrer (compte tenu des remarques précédentes), pour chaque type de fonction à intégrer:

Fonction N:

$$I_1 = \{ 1, u_3, u_1.u_2, \frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3} \} \tag{45.1}$$

Fonction N.N:

$$I_2 = \{ 1, u_3, u_1.u_2, \frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}, u_1.u_2.u_3, \frac{u_1^2.u_2^2.u_3}{1-u_3}, \frac{u_1.u_2.u_3^2}{1-u_3}, \left(\frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}\right)^2 \} \tag{45.2}$$

Fonction $\vec{\nabla}N.\vec{\nabla}N$:

$$I_3 = \{ 1, \frac{u_1.u_2}{(1-u_3)^2}, \frac{u_1^2.u_3^2}{(1-u_3)^2}, \frac{u_1^2.u_3}{1-u_3}, \frac{u_1^2.u_2^2.u_3^2}{(1-u_3)^4} \} \tag{45.3}$$

On peut remarquer, et pour simplifier, que la fonction à intégrer dans la pyramide est du type (46.1):

$$f(u_1,u_2,u_3) = P_1(u_1,u_2,u_3) + \frac{P_2(u_1^i,u_2^j,u_3^k)}{(1-u_3)^n} \tag{46.1}$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes de u_1,u_2,u_3, et le problème principal est d'intégrer numériquement la partie rationnelle de f. On peut remarquer que le degré du dénominateur est toujours inférieur ou égal à la somme des degrés de u_1 et de u_2 au numérateur (équation 46.2).

$$\text{avec } i+j \geq n \tag{46.2}$$

La méthode d'intégration utilisée, et la pierre angulaire de notre approche, réside dans le changement de variable subtil lors de l'intégration sur le volume de la pyramide (ou du cône dans le cas le plus général). Lorsqu'on résout analytiquement l'intégrale d'une fonction de forme pyramidale, on peut découpler la somme sur u_3 de la somme sur u_1 et u_2 (en fait, on intègre par "étage" u_3 constant dans la pyramide), et par un changement de variable adéquat, on se retrouve finalement dans le cas d'un polynôme particulier, ne possédant pas certains termes, mais que l'on sait intégrer . En effet, quelque soit la formulation, on cherche à intégrer une fonction du type (47):

$$\iiint_{\text{element}} f(u_1,u_2,u_3).dv = \int_{u_3=0}^{1} \left(\iint_{(u_1,u_2)\in[-1+u_3,1-u_3]^2} f(u_1,u_2,u_3)du_1.du_2 \right) .du_3 \tag{47}$$

On effectue alors un changement de variable: $x = \frac{u_1}{1-u_3}$ et $y = \frac{u_2}{1-u_3}$. La matrice Jacobienne G de ce changement de repère est tel que (48):

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-u_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-u_3} \end{bmatrix} \quad (48.1)$$

et le déterminant est tel que:

$$\det (G)^{-1} = (1-u_3)^2 \quad (48.2)$$

L'intégrale (47) devient alors (49):

$$\iiint_{element} f(u_1,u_2,u_3).dv = \int_{u_3=0}^{1} (1-u_3)^2 \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1} f(x,y,u_3)dx.dy.du_3 \quad (49)$$

Avec le changement de variable et la propriété des fonctions à intégrer (46), on peut remarquer que la partie rationnelle de l'intégrale disparaît et que l'on se retrouve avec les polynômes suivants à intégrer:

$$f(x, y, u_3) = P_1(x,y,u_3)+P_2(x^i,y^j,u_3^k) \quad (50)$$

A ce niveau du calcul, on s'aperçoit que la partie rationnelle a disparue, et que l'intégration numérique est possible: L'intégration sur les variables x et y ne pose aucun problème à u_3 constant, car cela revient à intégrer un polynôme de manière classique (on retrouve en fait l'intégration sur un quadrangle premier ordre, deuxième ordre complet ou incomplet). Finalement, on intègre en utilisant des points de Gauss situés en "étage", et répartis de manière classique sur chaque plan.

Pour l'intégration sur la hauteur de la pyramide (variable u_3), on peut remarquer que le polynôme à intégrer est du type:

$$P_3 (u_3) = (1-u_3)^2 . P(u_3) \quad (51)$$

où P est un polynôme de degré n. Un nouveau changement de variable sur u_3 en utilisant $z=1- u_3$, nous permet d'écrire (52):

$$\iiint_{element} f(u_1,u_2,u_3).dv = \int_{z=0}^{1} z^2 \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1} f(x,y,z)dx.dy.dz \quad (52)$$

En fait, sur z, le degré minimum du polynôme à intégrer en z est égal à 2, on va donc faire appel à des points et poids de Gauss particuliers.

Ces points et poids de Gauss non classiques peuvent être trouvés dans la littérature ancienne [HAMMER-56] et sont résumés dans la table associée à l'algorithme suivant (Fig.13):

```
i=0
do j=1,n
     do k=1,m
          i=i+1
          u1(i):=x(k)*u1_2d(j)
          u2(i):=u1(i)
          u3(i):=1-x(k)
          w(i):=w2d(j)*b(k)
     end do
end do
```

Où n est le nombre de points d'intégration dans la direction u_3, u1_2d est la coordonnée du point d'intégration en 2D sur un plan rectangulaire u_3 constante, et w2d est le poids La table suivante donne la valeur de x et b suivant l'ordre n* .

	x	b
n=1	0.75	0.333333333333333
n=2	x	b
	0.455848155988775	0.100785882079825
	0.877485177344559	0.232547451253508
n=3	x	b
	0.294997790111502	0.029950703008581
	0.652996233961648	0.146246269259866
	0.927005975926850	0.157136361064887
n=4	x	b
	0.204148582103227	0.010352240749918
	0.482952704895632	0.068633887172923
	0.761399262448138	0.143458789799214
	0.951499450553003	0.110888415611278
n=5	x	b
	0.148945787052984	0.004113825203099
	0.365666527369113	0.032055600722962
	0.610113612934481	0.089200161221590
	0.826519679228305	0.126198961899911
	0.965421060081785	0.081764784285771

Fig.13: Table des points d'intégration: Coordonnées et poids

On peut noter que les points de Gauss sont relativement éloignés du sommet u_3=1, où l'on a "lissé" la valeur de la dérivée (§ 2-6). Ce qui signifie qu'en pratique, on ne se pose pas le problème de l'indétermination au sommet au cours de l'intégration et de l'assemblage.

3-2 Nombre de points et de poids de Gauss nécessaires pour chaque ordre

Après avoir dressé la liste des fonctions polynomiales à intégrer exactement, on donnera, pour chaque ordre, le nombre de points de Gauss nécessaires.

3-2-1 Liste des fonctions polynomiales à intégrer exactement

3-2-1-1 Premier ordre

Dans le cas de l'ordre 1, on étudie trois fonctions à intégrer, comme précédemment (§3-3-1-2):

* ici n correspond en fait au nombre de points de Gauss nécessaires dans la hauteur. En fait, n points permettent d'intégrer $z^{2n-1}.z^2$.

Fonction N:

$$I_1 = \{\ 1,\ u_3,\ u_1.u_2,\ \frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}\ \} \tag{53.1}$$

Après les changements de variables adéquats sur (53.1), l'intégration des fonctions précédentes est équivalente à l'intégration de:

$$I_1' = \{\ z^2,\ z^3,\ x.y.z^4\ \} \tag{53.2}$$

Fonction N.N:

$$I_2 = \{\ 1,\ u_3,\ u_1.u_2,\ \frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}\ ,\ u_1.u_2.u_3,\ \frac{u_1^2.u_2^2.u_3}{1-u_3},\ \frac{u_1.u_2.u_3^2}{1-u_3},\ \left(\frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}\right)^2\} \tag{54.1}$$

qui devient après les changements de variable (54.1):

$$I_2' = \{\ z^2,\ z^3,\ x.y.z^4,\ x^2.y^2.z^4,\ x.y.z^3\} \tag{54.2}$$

Fonction $\vec{\nabla}N.\vec{\nabla}N$:

$$I_3 = \{\ 1,\ \frac{u_1.u_2}{(1-u_3)^2},\ \frac{u_1^2.u_3^2}{(1-u_3)^2},\ \frac{u_1^2.u_3}{1-u_3},\ \frac{u_1^2.u_2^2.u_3^2}{(1-u_3)^4}\} \tag{55.1}$$

$$I_3' = \{\ z^2,\ x.y.z^2,\ x.z^3,\ x^2.y^2.z^4\} \tag{55.2}$$

3-2-1-2 Deuxième ordre incomplet et complet

Pour l'intégration des fonctions du deuxième ordre, on s'intéressera directement aux monômes de plus haut degré.

Fonction N:

$$I_1 = \{\ 1,\ u_1,\ u_3,\ u_1^2,\ u_1.u_2,\ u_1.u_3,u_1^2.u_2,\ \frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3},\ \frac{u_1^2.u_2.u_3}{1-u_3}\ \} \tag{56.1}$$

En ne gardant que les degrés les plus élevés, il reste (56.2):

$$I_1' = \{\ z^2,\ z^3,\ x^2.y.z^2,x.y.z^4,\ x^2.y.z^4\ \} \tag{56.2}$$

Fonction N.N:

$$I_2 = \{\ 1,\ u_3,\ u_1.u_2,\ \frac{u_1.u_2.u_3}{1-u_3}\ ,\ u_1.u_2.u_3,\ \frac{u_1^2.u_2^2.u_3}{1-u_3},\ \frac{u_1^3.u_2^2.u_3^2}{(1-u_3)^2},\ \frac{u_1^4.u_2^2.u_3}{1-u_3},\ \frac{u_1^2.u_2^2.u_3}{1-u_3}\} \tag{57.1}$$

qui devient après les changements de variable (57.2):

$$I_2' = \{\ z^2,\ z^3,\ x.y.z^4,\ x^2.y^2.z^4,\ x^4.y^2.z^2,\ x.y.z^3\} \tag{57.2}$$

Fonction $\vec{\nabla}N.\vec{\nabla}N$:

$$I_3 = \{\ 1,\ \frac{u_1.u_2}{(1-u_3)^2},\ \frac{u_1^2.u_3^2}{(1-u_3)^2},\ \frac{u_1^2.u_3}{1-u_3},\ \frac{u_1^2.u_2^2.u_3}{1-u_3},\ \frac{u_1^2.u_2^2.u_3^4}{(1-u_3)^4}\} \tag{58.1}$$

$$I_3' = \{ z^2, x.y.z^2, x.z^3, x^2.y^2.z^6 \} \quad (58.2)$$

Remarque:

Le fait d'éliminer les termes en u_1 ou u_2 présentant des puissances impaires (remarque 1 du §3-1-2-a) permet de traiter l'intégration des pyramides au premier ordre.

3-2-2 Points et poids de Gauss

Pour intégrer ces fonctions, on utilise le découplage entre l'intégration sur les plans xy, et puis selon l'axe z.

On peut remarquer que dans le cas des fonctions du premier ordre, le degré maximum sur x et y est de 2. Ceci signifie que l'on peut utiliser deux points de Gauss dans la direction x et deux points de Gauss dans la direction y, symétriques par rapport à (Oz).

En ce qui concerne l'intégration suivant l'axe (Oz), il reste des monômes de degré maximum égal à quatre au premier ordre, et au maximum égal à six au second ordre. Deux points de Gauss judicieusement placés permettent d'intégrer ce polynôme à l'ordre cinq sur z, et trois points de Gauss permettent d'intégrer le polynôme à l'ordre sept en z. Les points de Gauss pour la pyramide de premier ordre se répartissent finalement comme suit (Fig.14):

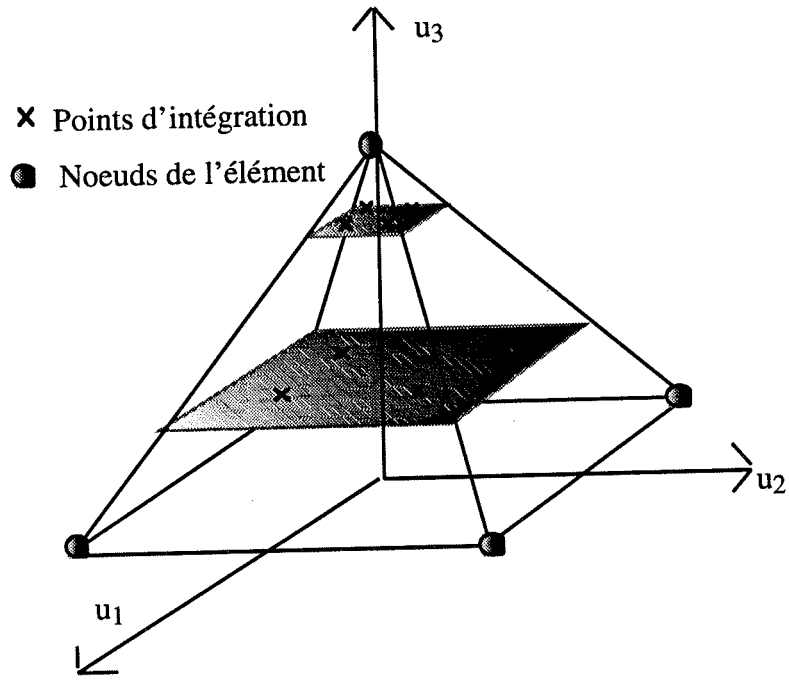


Fig.14: Plans d'intégration sur l'élément pyramidal (ici 2)

Pour le second ordre, on augmente le nombre de points de Gauss. La figure suivante compare l'intégration "standard" avec l'intégration dans les pyramides (Fig.15.1).

Les formules classiques	1 point 2 points 3 points	degré 1 degré 3 degré 5
L'intégration par [HAMMER]	1 point 2 points 3 points	degré 3 degré 5 degré 7

Fig.15.1: Comparaison des points d'intégrations classiques et pyramides

Élément pyramide	Nombre de points de Gauss suivant u_1	Nombre de points de Gauss suivant u_2	Nombre de points de Gauss suivant u_3	Nombre de points pour l'élément
1er ordre	2	2	2	8
2eme ordre incomplet	3	3	3	27
2eme ordre complet	3	3	3	27

Fig.15.2: Nombre de points de Gauss pour les pyramides

En conclusion, on a prouvé que l'on pouvait intégrer de manière exacte sur l'élément pyramide de référence, qui vérifie par conséquent les propriétés d'un élément standard: Fonction de forme et intégration par méthode de Gauss sont possibles pour cet élément.

III-4 Validation de la nouvelle famille d'éléments pyramidaux

Les éléments pyramidaux étudiés de manière théorique dans une première partie, doivent être utilisés et validés dans des cas tests judicieusement choisis.

Préliminaire

Pour réaliser cette batterie de tests, des outils ont été développés sur [FLUX3D] pour faciliter la validation des trois nouveaux éléments. On a développé un outil de décomposition d'hexaèdres en pyramides, qui permet le *patch-test* des nouveaux éléments. La programmation du passage de la pyramide du premier ordre à celle du second ordre (complet ou incomplet) et réciproquement a été effectuée, ainsi que le calcul des fonctions de forme, de leurs dérivées et la saisie des points d'intégration sur la hauteur de la pyramide dans la bibliothèque d'éléments.

On a effectué deux séries de tests, le premier sur un problème unidimensionnel en essayant de générer des pyramides mal conditionnées (aplaties ou déformées), le deuxième sur un problème bidimensionnel de condensateur cylindrique, le problème étant traité en coordonnées cartésiennes. A chaque fois, on compare la solution obtenue avec un maillage pyramidal avec la solution analytique et la solution éléments finis tétraédriques ou hexaédriques.

4-1 Premier test: Un test d'évaluation du comportement de la pyramide déformée ou patch-test

Le patch-test [IRONS-83] est un test universel qui permet de savoir si un élément a un bon comportement et peut être utilisé de manière courante dans un logiciel éléments finis. A partir d'un problème simple, on va utiliser quelques éléments pour le résoudre et étudier le comportement de l'élément que l'on déforme, à partir d'une variable nodale dont on connaît une solution analytique.

4-1-1 Présentation

On décompose un cube à six noeuds en six pyramides, dont le sommet commun est le noeud situé au centre du cube (Fig.16).

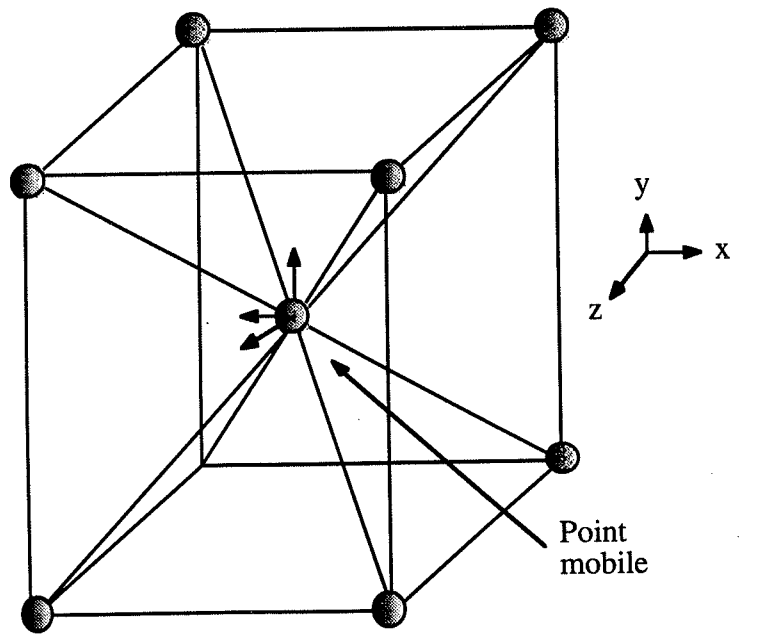


Fig.16: Géométrie du problème test
un cube décomposé en six pyramides

La formulation choisie est électrostatique tridimensionnelle. On remplit le cube étudié d'un diélectrique quelconque, et on regarde le comportement numérique des pyramides. Le problème est unidimensionnel car on impose des conditions aux limites de type Dirichlet (potentiel imposé et constant) sur le potentiel scalaire électrique (V = 0 et V =1) sur les faces en vis à vis au dessus du cube et en dessous. La permittivité relative ε_r est choisie égale à 1.

La solution analytique de ce problème est triviale: Le potentiel est linéaire en z et le champ constant dans tout l'espace du cube.

4-1-2 Résultats

On mesure la valeur du potentiel et du champ électrostatique sur le noeud central sommet des six pyramides.

L'erreur absolue obtenue dans tous les cas de déformation des pyramides est négligeable. On constate que l'erreur relative commise sur la variable d'état et sur sa dérivée est de l'ordre de la précision machine (10^{-16}). On peut d'ailleurs observer sur les courbes les quatre valeurs que prend la dérivée de la variable d'état autour d'une position d'erreur absolue nulle. Cela correspond probablement aux valeurs que prend le dernier digit de la valeur calculée.

En distordant les six pyramides obtenues par découpage du cube en déplaçant le noeud central vers un des cotés du cube, les remarques du paragraphe précédent sont toujours valables et l'erreur sur le résultat obtenu est toujours de l'ordre de la précision machine.

4-1-3 Conclusions

De ce problème unidimensionnel simple, on peut tirer quelques conclusions:

- Le fait de déplacer le noeud central à l'intérieur du cube n'a pas une grande influence sur l'erreur de calcul sur le potentiel et le champ.

- Les éléments pyramidaux sont des éléments dont les performances sont comparables aux éléments tétraédriques et hexaédriques. En effet, la variable d'état est relativement bien approchée et le calcul du champ n'est pas trop mauvais.

- Une étude 2D/3D est nécessaire pour compléter cette analyse unidimensionnelle.

4-2 Deuxième test: Calcul de la capacité d'un quart de condensateur cylindrique

4-2-1 Présentation

On travaille sur la géométrie suivante, vue en coupe (Fig.17):

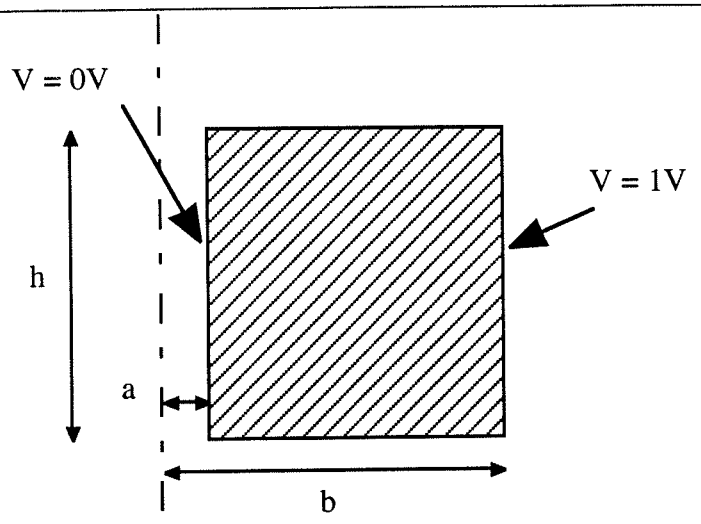


Fig.17: Coupe du condensateur cylindrique utilisé pour valider l'élément pyramide

La géométrie est un quart de cylindre, On applique deux potentiels électriques différents sur ces faces cylindriques externes et internes:

Données géométriques:

Rayon intérieur a = 1mm, rayon extérieur b = 5mm, hauteur h = 5mm
Potentiel à l'intérieur du cylindre = 0 V

Données physiques:

Potentiel à l'extérieur = 1 V
Matériau diélectrique de permittivité relative $\varepsilon_r = 3$.

Les différents maillages sont obtenus à partir d'un maillage projectif régulier hexaédrique de 4x4x9 hexaèdres, c'est-à-dire que pour chaque maillage interne de ce dispositif, on va utiliser ce même maillage de base et insérer des noeuds au centre de chaque hexaèdre pour générer des briques (un hexaèdre se décompose en 6 pyramides), ou partir des noeuds internes et de chaque hexaèdre pour générer des tétraèdres (Fig.18).

En travaillant sur un maillage similaire au niveau de la densité de la discrétisation, on peut s'autoriser à comparer les différents types d'éléments finis.

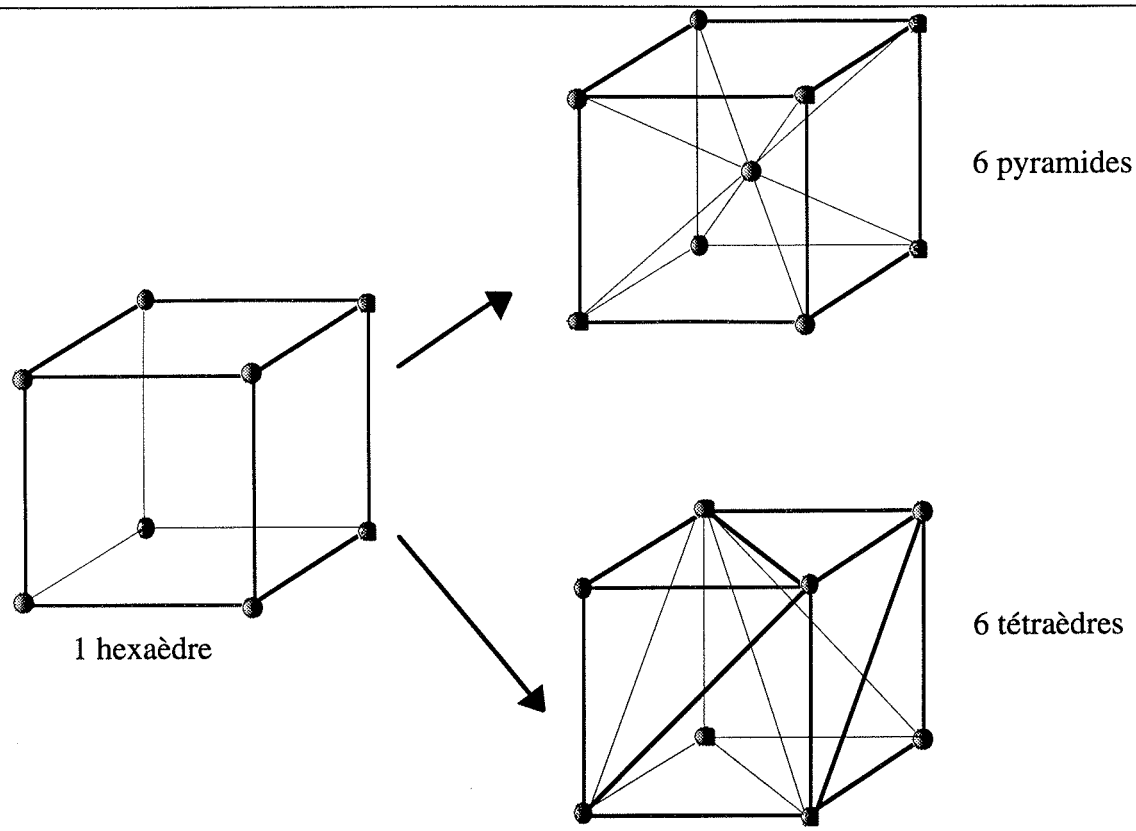


Fig.18: Décomposition du maillage hexaédrique en maillage pyramidal et tétraédrique

Le maillage est réalisé en utilisant le procédé de subdivision illustré précédemment (Fig.18). Pour chaque maillage le nombre de noeuds reste identique, sauf dans le cas des pyramides où l'on ajoute un noeud interne par élément hexaédrique initial.

Le maillage de peau de la capacité est montré sur la figure suivante (Fig.19). Le chemin de mesure du potentiel électrique V et de son gradient est intermédiaire entre les deux faces cylindriques.

L'intérêt de travailler sur cet exemple, est aussi de pouvoir confronter les calculs réalisés sur le potentiel électrique V et sur son gradient E1 ($-\vec{\nabla}V$). Les calculs analytiques donnent (59):

Pour le champ électrique (59.a):

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \times \frac{1}{r} \qquad (59.1)$$

Pour le potentiel électrique (59.b):

$$V = \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \times (\ln(r) - \ln(a)) \qquad (59.2)$$

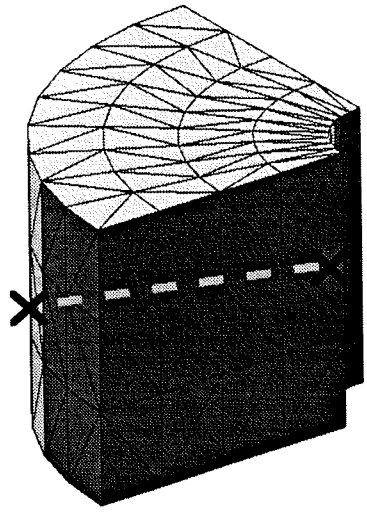


Fig.19: Maillage surfacique du quart de condensateur cylindrique et chemin utilisé pour les mesures

La capacité théorique de ce quart de cylindre est égale à (59.3):

$$C = \frac{2\,\pi\,h\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{4\,\ln(\frac{b}{a})} \qquad (59.3)$$

Par conséquent, on peut calculer la charge qui se trouve sur les armatures du condensateur à partir de la valeur de la capacité et des potentiels imposés sur les armatures. On obtient donc une charge de:

$$Q = 0{,}1294.10^{-12}\ C \qquad (60)$$

4-2-2 Résultats

A partir de ce calcul analytique, on a résolu le problème en maillant avec tous les éléments disponibles actuellement (hexaèdres premier, deuxième ordre complet et incomplet - tétraèdres premier, deuxième ordre - pyramides, premier ordre, deuxième ordre complet et incomplet) afin d'évaluer les performances du nouvel élément pyramidal.

En comparant les valeurs numériques globales obtenues par le calcul éléments finis, on observe que les valeurs obtenues au premier ordre sont identiques pour tous les types d'éléments ainsi que les valeurs obtenues au second ordre. Les valeurs obtenues par un maillage au second ordre sont très proches de la solution analytique. En effet, on obtient:

$$Q_{\text{E.F. premier ordre}} = 0{,}132.10^{-12}\ C \qquad (61.1)$$

$$Q_{\text{E.F. deuxième ordre}} = 0{,}129.10^{-12}\ C \qquad (61.2)$$

Soit une erreur relativement faible au deuxième ordre (0,3 %) et une erreur de 2% au premier ordre.

Pour avoir une meilleure comparaison de ces maillages réalisés avec différents éléments, il est nécessaire de tracer les valeurs de la variable d'état et de sa dérivée sur un chemin identique pour chaque type de maillage, on va choisir un chemin 'milieu' (Fig.19). On va de plus, comparer les solutions obtenues avec la solution analytique du problème (équation 59) et calculer l'erreur relative de l'approximation éléments finis.

La figure suivante (Fig.20) montre le potentiel et le champ électrique calculés par la méthode des

éléments finis sur le maillage présenté plus haut sur un le chemin présenté figure 19. On visualise de plus l'erreur relative de la méthode par rapport à la solution analytique connue (équation 59). On constate qu'au premier ordre (Fig.20), l'ordre de grandeur des erreurs relatives est le même dans les trois cas, *i.e.* que la pyramide est un élément de premier ordre comparable aux classiques tétraèdres et hexaèdres. D'ailleurs les courbes obtenues sont superposables.

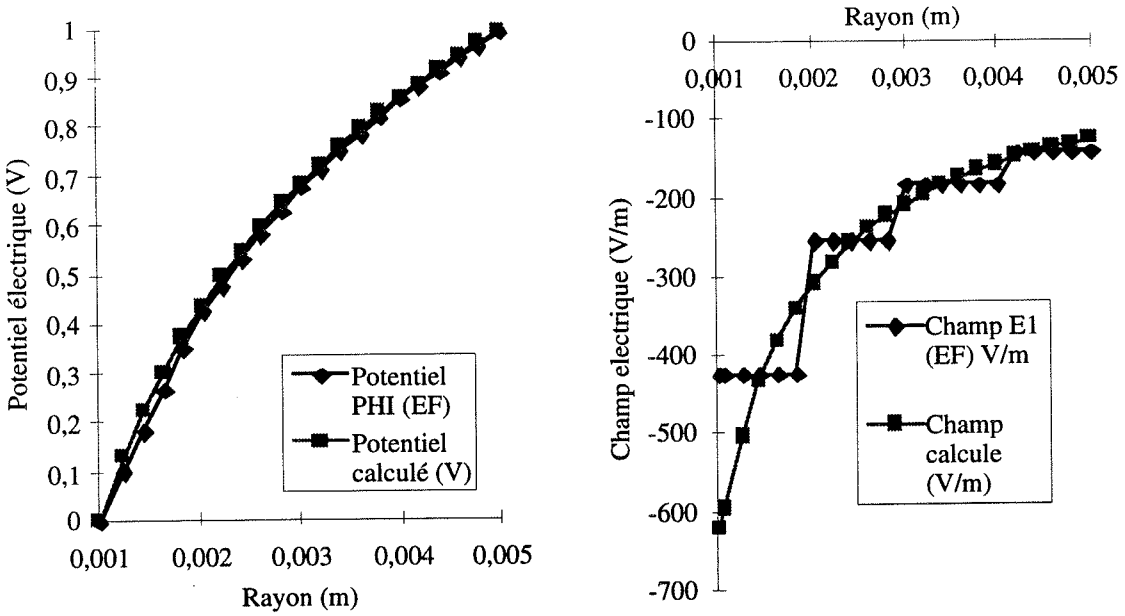


Fig.20.1: Calcul du potentiel électrique et du champ électrique avec un maillage du premier ordre

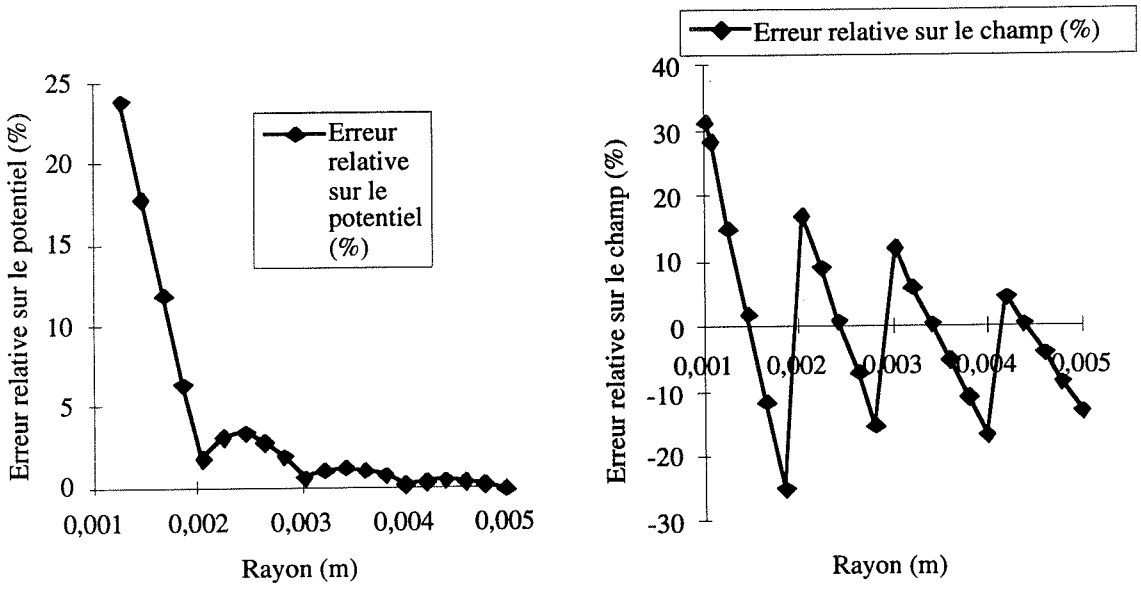


Fig.20.2: Erreurs relatives sur le potentiel et le champ avec un maillage du premier ordre

Au vu des courbes, on peut constater tout d'abord que le passage d'un élément à l'autre est flagrant sur les valeurs du champ. Dans tous les cas, on observe une discontinuité. Le problème est inhérent à la méthode des éléments finis, qui n'assure pas la continuité de la dérivée de la variable d'état entre les éléments. On observe bien ainsi pour chaque courbe trois discontinuités, qui correspondent aux quatre éléments traversés.

Ensuite, on peut constater que l'erreur relative à la variable d'état a une valeur très importante

lorsque le rayon est petit, cela est dû au fait qu'elle à une valeur nulle au premier point où une condition de type Dirichlet est imposée.

La visualisation de l'approximation faite au premier ordre par la méthode des éléments finis pour le calcul du champ électrique (égal au gradient de la variable d'état) est très grossière. Elle est approximée par des paliers horizontaux au premier ordre, puis par des segments au deuxième ordre. Ceci explique la décroissance 'en moyenne' de l'erreur relative de la dérivée: On approche par des paliers ou des segments une courbe en $\frac{1}{r}$, donc une importante erreur lorsque r est petit. La parade à ce genre de problème est de mailler plus finement l'espace où le gradient de la variable d'état est important.

Ces valeurs d'erreurs relatives sont importantes, ceci est dû à la discrétisation qui est très grossière dans l'épaisseur du condensateur.

4-2-3 Conclusion

Cet exemple physiquement bidimensionnel, confirme le bon comportement (analogue aux éléments classiques) des nouveaux éléments en particulier au premier ordre. Il semble de plus que le nombre de pyramides dans un maillage mixte (tétraèdres / hexaèdres) sera moindre, et que la qualité des éléments pyramidaux soit suffisante pour pouvoir les intégrer à l'interface d'un maillage mixte.

Les éléments pyramidaux après leur validation dans le logiciel [FLUX3D], ont été intégrés en collaboration avec la société Cedrat Recherche et l'ISEN (Institut Supérieur d'Électronique du Nord) dans le logiciel [ATILA], en vue de pouvoir les utiliser dans la modélisation de transducteurs sonar, moteurs piézo électriques et magnétostrictifs.

III-5 Famille d'éléments pyramides en éléments d'arête

La méthode des éléments finis permet de transformer un système d'équations aux dérivées partielles associé à des conditions aux limites en un système matriciel. Elle est applicable à de nombreux domaines de la physique, comme l'électromagnétisme, la résistance des matériaux, la mécanique des fluides, la thermique, etc.

Dans l'approximation des éléments finis, le domaine à étudier est décomposé en petits éléments, et une fonction approchant la solution, définie par une interpolation sur chaque élément est ensuite recherchée .

Les premiers éléments finis ont accepté des valeurs scalaires, et ils avaient comme inconnues les valeurs d'un champ scalaire sur les sommets des éléments ou noeuds. Par exemple, un élément tétraédrique nodal de premier ordre interpole les valeurs dans l'élément à partir des valeurs de la variable inconnue aux quatre sommets:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{4} N_i \Phi_i \qquad (62)$$

où N_i est la coordonnée barycentrique associée au noeud i.

Puis, au fur et à mesure des développements des moyens informatiques, le passage de 2 à 3 dimensions a porté l'attention vers les inconnues vectorielles. L'approche naturelle était de traiter le vecteur inconnu H tout simplement par ses trois composantes, Hx, Hy et H_z. Les éléments scalaires ont été employés de nouveau, mais cette fois chaque noeud portent trois inconnues au lieu d'une.

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{4} (H_x.\vec{x} + H_y.\vec{y} + H_z.\vec{z}).N_i \qquad (63)$$

Les éléments de ce type sont les éléments nodaux. Ils ont été et ils sont toujours utilisés. Mais les vecteurs ne sont pas un simple triplet de nombres. Ils ont des propriétés physiques et mathématiques qui ne peuvent pas être pris en compte en considérant le vecteur comme ayant trois composantes cartésiennes indépendantes.

Une alternative pour les éléments nodaux sont les éléments d'arête. Dans la section qui suit on introduit la notion d'élément d'arête.

5-1 Définition des éléments d'arête

Les éléments finis d'arête tétraédriques utilisés sont définis par arête à partir des fonctions de forme classique de ses deux sommets .[WEBB-1993].

Si i est l'arête de n vers m, la fonction associée à l'arête i peut s'écrire (64):

$$\overrightarrow{W_i} = \overrightarrow{W_{nm}} = N_n . \vec{\nabla}.N_m - N_m . \vec{\nabla}.N_n \qquad (64)$$

$\vec{\nabla}N_m$ ne dépendant que des arêtes du tétraèdre, est donc constant dans le tétraèdre: c'est le vecteur orthogonal à la face opposée au sommet m, dirigé vers m et de longueur égale à l'inverse de la hauteur passant par m .

$\overrightarrow{W_i}$ peut se représenter comme le champ de vecteurs ci-après. On remarquera qu'au voisinage du noeud n, $N_n = 1$ et $N_m = 0$, et donc que $\overrightarrow{W_i} = \vec{\nabla}.N_m$ qui est un vecteur orthogonal à la face (n,o,p):

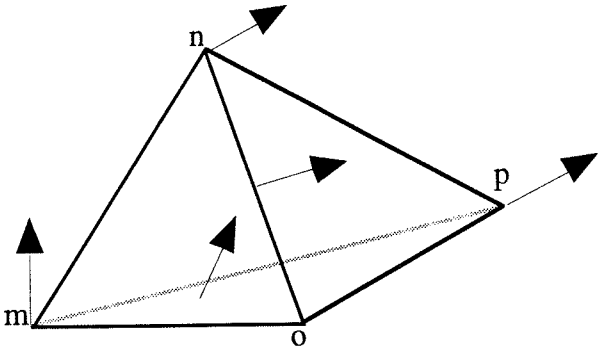


Fig.21: Fonction de forme $\overrightarrow{W_i}$ associée à l'arête mn

5-2 Propriétés des éléments d'arête

On peut démontrer les résultats suivants:

- Sur toute arête autre que l'arête i, $\overrightarrow{W_i}$ est orthogonal à l'arête .

- La circulation de $\overrightarrow{W_i}$ sur une arête différente de i est nulle . En revanche, elle vaut plus ou moins un sur l'arête i:

$$\int_1^2 \overrightarrow{W_{n\,m}} \quad \begin{cases} = 1 & \text{si } (1, 2) = (n, m) \\ = -1 & \text{si } (1, 2) = (m, n) \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (65)$$

- A la traversée d'une face de tétraèdre, la valeur de $\overrightarrow{W_i}$ change mais sa composante tangentielle est continue. Ceci est très exactement la propriété recherchée pour l'approximation du champ magnétique.

- Le rotationnel de ces éléments d'arête est un vecteur constant par tétraèdre:

En effet, on peut remarquer rapidement que:

- Pour un tétraèdre ne s'appuyant pas sur l'arête nm, $\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{W_{nm}}) = \vec{0}$

- Pour un tétraèdre s'appuyant sur l'arête nm, $\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{W_{nm}}) = 2\ \vec{\nabla}.N_m \wedge \vec{\nabla}N_m$

- Le flux du rotationnel de W_{nm} à travers une face peut se calculer aisément en ayant défini une normale orientée par (m, n, p).

- La divergence de la fonction de forme est nulle. C'est une propriété remarquable des éléments d'arête tétraédrique de premier ordre parce que la jauge de Coulomb est implicite et ne doit pas être imposée explicitement, si on utilise des variables de type potentiel comme inconnue .

En conclusion, on peut dire que l'utilisation des éléments d'arête permet de représenter le champ vectoriel à l'intérieur d'un tétraèdre (arête) par six fonctions associées aux six arêtes:

$$\vec{H} = \sum_{n=1}^{6} \overrightarrow{W_i}\,.\,H_i \qquad (66)$$

et l'inconnue H_i représente la projection du champ H sur l'arête i.

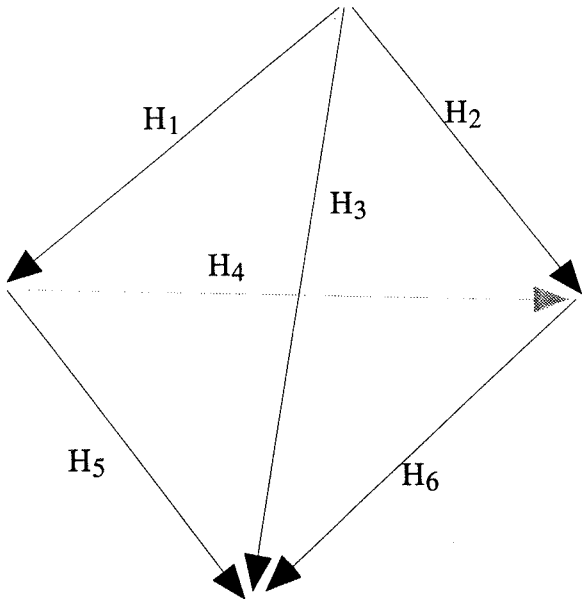


Fig.22: Élément tétraédrique d'arête du premier ordre

De manière plus générale, un élément d'arête est un élément qui a les propriétés suivantes:

- Il a les degrés de liberté associés aux arêtes.
- Il assure la continuité de la composante tangentielle du champ vectoriel mais pas la continuité de la composante normale.
- Il assure la continuité de la composante normale du rotationnel.

tandis qu'un élément nodal est un élément qui vérifie:

- Des degrés de liberté associées aux noeuds.
- Il assure la continuité du champ vectoriel entièrement .
- Il assure la continuité du rotationnel du champ vectoriel.

Remarques

Toutes les grandeurs électromagnétique ($\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{E}$ et $\vec{J}$) peuvent être discontinues aux interfaces électriques ou magnétiques. Dans ce cas, il y a deux possibilités pour résoudre ce problème sans avoir à imposer à l'utilisateur de rentrer des valeurs aux interfaces de discontinuité .

- Une première approche est basée sur l'introduction des potentiels vecteurs et scalaires, exprimant le champ magnétique par l'expression:

$$\vec{H} = \vec{T} \pm \overrightarrow{\text{grad}}\Omega \qquad (\vec{T} \text{ est le potentiel vecteur électrique}) \qquad (67)$$

Et le champ électrique par l'expression:

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \pm \overrightarrow{\text{grad}}V \qquad (\vec{A} \text{ est le potentiel vecteur magnétique}) \qquad (68)$$

A l'aide de cette approche, sur les interfaces magnétiques, le saut possible de la composante normale du champ magnétique $\vec{H}$ est transféré sur la discontinuité de $\overrightarrow{\text{grad}}\Omega$, Ω , et les trois

composantes de $\vec{T}$ peuvent être continues. La même remarque reste valable pour le champ électrique $\vec{E}$ aux interfaces électriques .Le prix à payer pour cette approche est l'introduction d'une nouvelle inconnue scalaire (un potentiel scalaire), qui ajoute une autre équation.

- Une deuxième approche est basée sur l'utilisation des éléments d'arête, qui assure la continuité de la composante tangentielle de l'inconnue à l'interface, sans imposer la continuité de la composante normale. Cette approche permet d'avoir directement comme inconnue les variables champ magnétique ou électrique.

5-3 Les éléments d'arête pyramides

[COULOMB-96] présente les fonctions de base des éléments pyramides. La pyramide dans laquelle nous définissons les fonctions d'arête est la suivante (Fig.23):

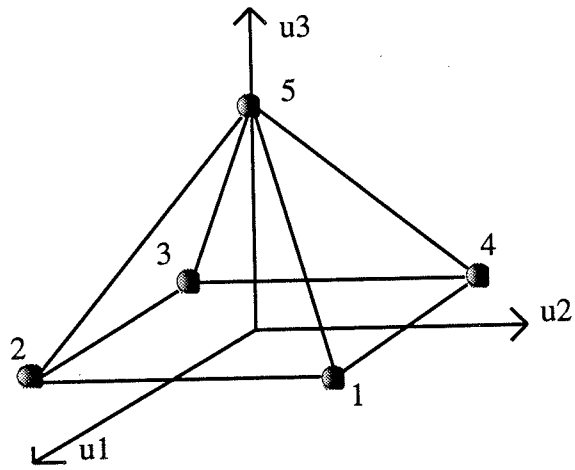


Fig.23: L'élément nodal pyramide du premier ordre à cinq noeuds

Dans le cas de la pyramide au premier ordre, on définit un degré de liberté par arête. Les degrés de liberté sont la circulation de la variable d'état sur les cotés des éléments [NEDELEC-81]. Pour une arête horizontale, par exemple 1-2, la fonction locale et son rotationnel sont égaux à (69):

$$\overrightarrow{W_{12}} = N_1 \overrightarrow{\nabla_u} N_{23} - N_2 \overrightarrow{\nabla_u} N_{41} \qquad (69.1)$$

$$\overrightarrow{\nabla_u} \Lambda \overrightarrow{W_{12}} = \overrightarrow{\nabla_u} N_1 \Lambda \overrightarrow{\nabla_u} N_{23} - \overrightarrow{\nabla_u} N_2 \Lambda \overrightarrow{\nabla_u} N_{41} \qquad (69.2)$$

où les N_i sont les fonctions de forme associées aux noeuds de l'élément pyramide, $\overrightarrow{\nabla_u}$ est l'opérateur gradient dans le repère local (u_1, u_2, u_3) et les N_{ij} sont des fonctions égales à 1 sur le coté ij, égale à 0 sur les facettes opposées, et linéaires dans les directions u_1, u_2 et u_3 (en fait $N_{ij} = N_i + N_j$). Par exemple, le gradient local de N_{23} est défini par (70):

$$\overrightarrow{\nabla_u} N_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (70)$$

Pour les arêtes obliques, comme pour 1-5, nous avons les équations (71):

$$\overrightarrow{W_{15}} = N_1 \overrightarrow{\nabla_u} N_5 - N_5 \overrightarrow{\nabla_u} \qquad (71.1)$$

$$\vec{\nabla}_u \Lambda \vec{W}_{15} = 2\vec{\nabla}_u N_1 \Lambda \vec{\nabla}_u N_5 \qquad (71.2)$$

Comme ces fonctions contiennent des termes rationnels, on use des formules d'intégration spéciales, comme pour le traitement des éléments nodaux.

5-4 Les éléments d'arêtes pyramidaux hiérarchiques

Les fonctions du premier ordre incomplet (principalement le tétraèdre et l'hexaèdre) sont les éléments d'arêtes les plus utilisés, mais les éléments de plus haut ordre sont aussi utilisables [WEBB-93]. Lier des éléments hexaèdres, prismes et tétraèdres d'ordre élevé requiert des éléments pyramides adéquats.

Le tableau suivant (Fig.24) montre les fonctions de forme des trois types d'éléments pyramides: l'élément incomplet du premier ordre donné plus haut (ordre intermédiaire 0,5), le premier ordre complet (ordre 1) et le second ordre incomplet (ordre intermédiaire 1,5). Pour chaque ordre, le nombre de fonctions est donné. Chaque fonction de base est associée à une arête (E), une face (F) ou un volume (V).

Ordre	Nombre	Association	Fonctions de base
		E_{i-j}	$N_i \vec{\nabla}_u(N_j + N_k) - N_j \vec{\nabla}_u(N_i + N_l)$
		E_{i-5}	$N_i \vec{\nabla}_u N_5 - N_5 \vec{\nabla}_u N_i$
0.5	8		
		E_{i-j}	$N_i \vec{\nabla}_u(N_j + N_k) - N_j \vec{\nabla}_u(N_i + N_l)$
		E_{i-5}	$\vec{\nabla}_u(N_i N_5)$
1	16		
		$F_{1-2-3-4}$	$N_i.N_j \vec{\nabla}_u(N_k + N_l)$
		F_{i-j-5}	$N_i N_5 \vec{\nabla}_u(N_j + N_k)$ $N_j N_5 \vec{\nabla}_u(N_i + N_l)$
		V	$N_1.N_3 \vec{\nabla}_u N_5$
1.5			

Fig.24: Fonctions de base de l'élément d'arête pyramide

5-4-1 Fonctions associées aux arêtes:

Soient 1, 2, 3 et 4, les quatre noeuds situés sur la base de la pyramide et 5 le sommet de la pyramide. Les quatre arêtes horizontales sont: 1-2, 2-3, 3-4 et 4-1 et les quatre arêtes obliques sont 1-5, 2-5, 3-5 et 4-5. Quand on considère une arête horizontale, E_{ij}, qui relie les sommets i et j, les symboles k et l sont les noeuds adjacents qui définissent les arêtes horizontales E_{j-k} et E_{l-j}. Les fonctions arêtes se décomposent en deux classes, quatre fonctions arêtes horizontales E_{i-j} et quatre arêtes obliques E_{i-5}.

5-4-2 Fonctions associées aux faces

Les fonctions des faces se composent de quatre fonctions associées à la face $F_{1-2-3-4}$ et de huit pour les faces F_{i-j-5}. Les symboles i,j,k et l ont la même signification que plus haut).

5-4-3 Fonctions associées au volume

On définit seulement une fonction associée au volume de la pyramide.

5-4-4 Conclusions

Ces trois éléments sont hiérarchiques. Cela signifie que les fonctions de base pour un élément sont un sous ensemble des fonctions de forme pour un élément d'ordre plus élevé. Par exemple, l'élément incomplet du premier ordre (ordre 0,5) a huit fonctions de base (une par arête). L'élément complet au premier ordre (ordre 1) a les huit précédentes fonctions de base plus huit fonctions additionnelles (une par arête). L'élément du second ordre incomplet (ordre 1,5) est obtenu en ajoutant treize fonctions de plus (quatre par faces horizontales, deux par faces obliques et une pour le volume). Les propriétés hiérarchiques permettent de mélanger des éléments de différents ordres dans le même maillage très facilement. [WEBB-93]. Comme on l'a vu dans la présentation de l'élément fini pyramide nodal, les fonctions N_i sont compatibles avec les fonctions standards. Ceci implique la continuité des fonctions nodales triangulaires et quadrangulaires à l'interface triangle/rectangle et autres éléments standards avec des formes compatibles. Cela implique aussi la continuité de la composante tangentielle de leur gradient ($\vec{\nabla}_u N_i$) et la composante tangentielle des fonctions définies à la figure précédente.

En conséquence, sur les facettes et le long des arêtes, les composantes tangentielles de ces fonctions sont identiques avec les fonctions issues des facettes quadrilatères ou triangulaires des prismes, hexaèdres, tétraèdres ou pyramides correspondants aux éléments d'arêtes hiérarchiques.

La singularité de la dérivée des fonctions de forme de la base par rapport à la hauteur au sommet de la pyramide a été traité dans la partie qui concernait les éléments nodaux.

Les éléments d'arêtes pyramides ont été validés sur le *TEAM* workshop* numéro 13. Cet exemple sera traité plus loin dans la partie application (Chapitre V). Il faut cependant savoir que ce problème présente de très faibles entrefers à mailler très fin en trois dimensions.

* pour Testing Electromagnetic Analysis Method (test pour des méthodes d'analyse des phénomènes électromagnétiques).

III-6 Conclusion

En conclusion, dans cette partie nous avons tout d'abord tenté de générer des fonctions de forme des éléments pyramides. Après quelques essais infructueux, nous avons mis en place une méthodologie permettant de créer les éléments pyramides nodaux au premier ordre, au second ordre incomplet et au second ordre complet [ZGAINSKI-96-1]. Pour cela, il a fallu surmonter la difficulté de la continuité de la variable d'état sur les facettes triangulaires et rectangulaires. Il a fallu de plus traiter le problème de la dérivé indéterminée au sommet de la pyramide.

Ensuite, nous avons traité le problème de l'intégration dans cet élément fini des intégrales de type N, N.N, $\vec{\nabla}N.\vec{\nabla}N$. Après avoir dénombré les types de fractions rationnelles à intégrer, nous avons pu intégrer en utilisant des points et poids de Gauss dans l'élément pyramide,

Cette démarche nous a permis de prouver que la pyramide peut être assimilée à un élément standard.

Pour valider ce nouveau type d'élément, nous avons effectué deux tests: Le premier, un simple patch-test nous a permis d'étudier la pyramide aux trois ordres en déformation (aplatie, allongée). Ensuite, nous avons réalisé un test bidimensionnel, en comparant la solution éléments finis obtenue avec différents types d'éléments avec la solution analytique connue du calcul d'une capacité cylindrique.

Enfin, et pour terminer, en collaboration avec Jean-Louis Coulomb [COULOMB-96], nous avons développé un élément pyramide arête présentant les mêmes caractéristiques que l'élément nodal permettant de traiter des problèmes en éléments d'arête.

Chapitre IV

Maillage mixte et insertion des éléments pyramides

Dans le cadre de ce chapitre, nous avons été amené à travailler sur les algorithmes de maillage. Partant de l'expérience du laboratoire en maillage libre automatique, basé sur la méthode de Delaunay, nous avons écrit, implanté et validé un algorithme de gestion des interfaces non conformes qui consiste à insérer des éléments pyramides aux bons endroits.

Ce chapitre reprend en le développant l'article [ZGAINSKI-96-2] et traite de l'insertion des éléments pyramides aux interfaces non conformes du maillage entre des facettes rectangulaires et des facettes triangulaires.

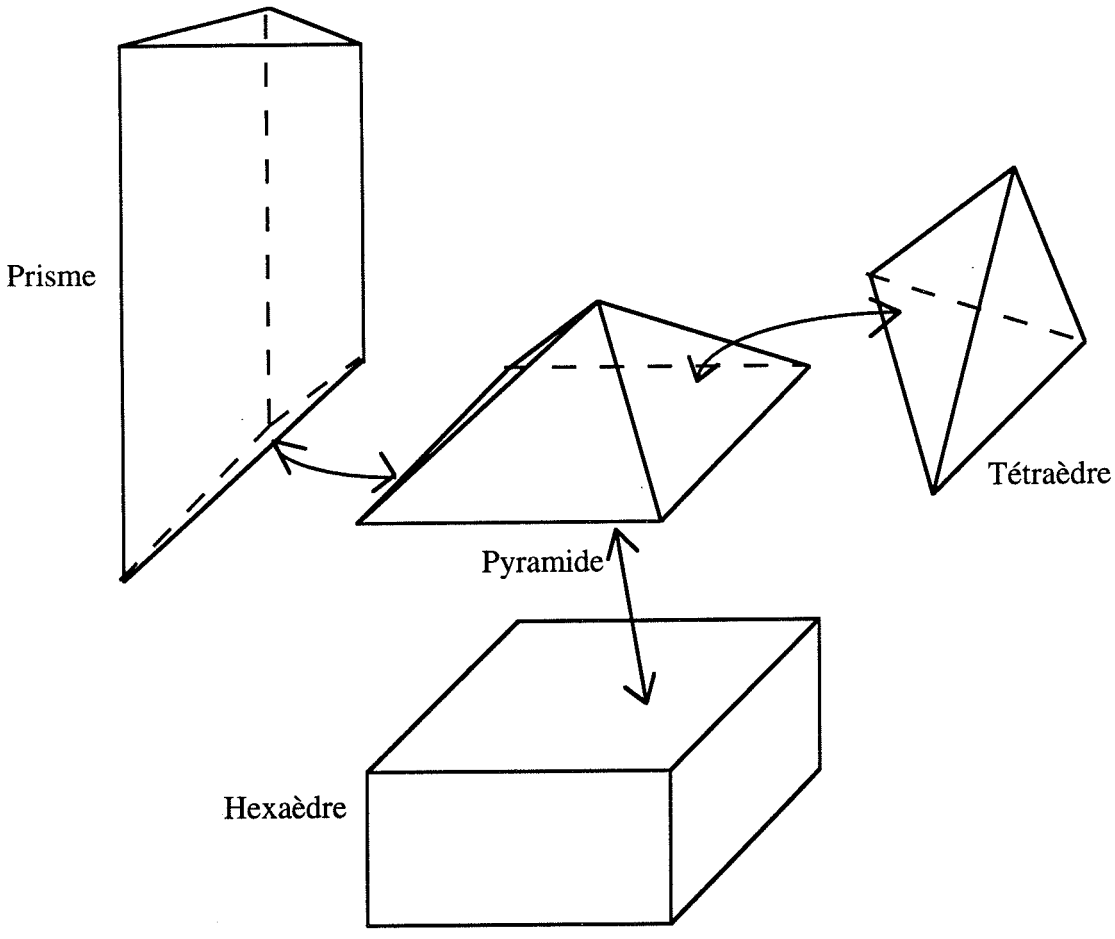


Fig.1: Objectifs de l'élément pyramide

Bien qu'il existe d'autres méthodes pour assurer la continuité de la variable d'état entre deux types d'éléments non conformes, entre autres les multiplicateurs de Lagrange [MARECHAL-92], il semble plus intéressant, car moins coûteux et plus fiable*, de traiter les non-conformités avec des éléments de raccordement (définis au chapitre précédent).

Comme le montre la figure 1, l'élément pyramide est la pierre d'angle du mailleur mixte. Sans elle, pas de raccord de type fort possible entre les divers éléments finis couramment utilisés.

Dans un premier temps, on parlera de la triangulation de Delaunay, basée sur le critère "de la sphère vide". Après avoir énoncé quelques définitions, on exposera les propriétés de cet algorithme de maillage, et on étudiera brièvement sa mise en oeuvre informatique.

Ensuite, après avoir énoncé quelques hypothèses de travail, on parlera de l'insertion des pyramides et de l'algorithme de gestion des non conformités. On montrera sur quelques exemples simples la pertinence de notre approche ainsi que d'autres utilisations des éléments pyramides

Enfin, et grâce au critère de qualité développé au chapitre II, il nous est possible d'évaluer la qualité des éléments pyramides générés et de définir une pyramide optimale au sens du critère proposé au chapitre II.

* Au sens où les multiplicateurs de Lagrange détériorent la qualité de la matrice globale, sont coûteux en temps de calcul et conduisent à des algorithmes spécifiques.

IV-1 Rappels sur la triangulation de Delaunay

Dans cette partie, nous aborderons tout d'abord quelques définitions et propriétés concernant la triangulation de Delaunay. Nous regarderons également les difficultés de mise en oeuvre de l'algorithme correspondant.

1-1 Quelques définitions et propriétés

Nous ne prétendons pas être complet dans cette partie, et pour aller plus loin, on pourra se référer à [HERMELINE-82] ou [ALBERTINI-88].

1-1-1 Polyèdres de Voronoï

Soit N = ensemble de n noeuds $\{P_1, P_2, \ldots P_n\}$ d'un domaine D d'un espace affine E de dimension n_E. Pour définir le principe de triangulation de Delaunay, il est nécessaire de présenter les polyèdres de Voronoï V_i du domaine D.

En fait, les V_i, sont des polyèdres qui sont associés aux noeuds de l'ensemble N, tels que (1):

$$V_i = \{x \in D / \forall P \in N, d(x, P_i) \leq d(x, P)\} \quad (1)$$

On peut démontrer que ces polyèdres ont les propriétés suivantes:

Ils sont:
- convexes
- d'intérieurs non vide
- forment un recouvrement de E
  tel que $(V_i \cap V_j)_{i \neq j} = \emptyset$
  ou bien $(V_i \cap V_j)_{i \neq j} = [N_i, N_j]$ hyperplan médiateur

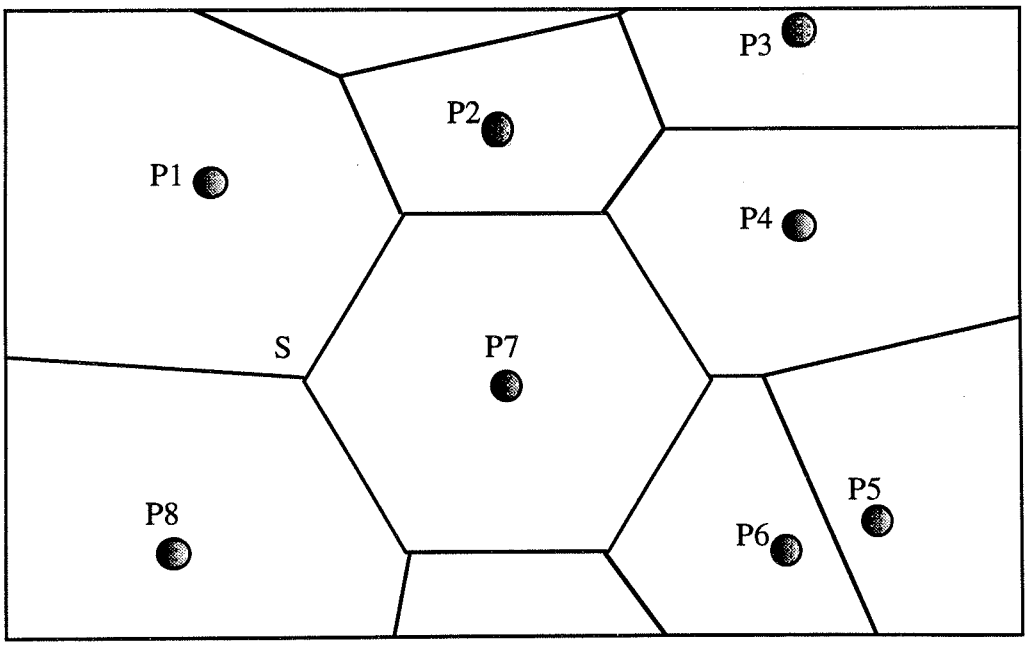


Fig.2: Polyèdres de Voronoï associés aux points du plan

On appelle N_S, sous ensemble de N, l'ensemble des noeuds dont les polyèdres de Voronoï associés ont pour sommet S.

1-1-2 Le dual des polyèdres, un ensemble de simplexes

A partir des données sur les polyèdres de Voronoï, on peut associer à chaque sommet de polyèdre un ensemble de noeuds. Par exemple, pour le noeud S, on a (2):

$$N_S = \{P_1, P_7, P_8\} \qquad (2)$$

L'ensemble des noeuds N_S définit le polytope de Delaunay associé à S (enveloppe connexe de N_S est en général un simplexe* .

On dispose alors d'un pavage du plan en polytopes de Delaunay. En clair, on obtient alors une triangulation de Delaunay, que l'on peut définir comme suit:

Définition rapide: Triangulation de Delaunay

Soit S un ensemble de P points de l'espace. La triangulation s'appuyant sur tous les points de S est une triangulation de Delaunay si et seulement si pour tous les éléments T de cette triangulation, la boule circonscrite à T est vide (critère de la "sphère vide"). La figure 3 montre deux configurations de maillage en triangle. La première respecte le critère de la sphère vide (Delaunay), la deuxième ne le vérifie pas.

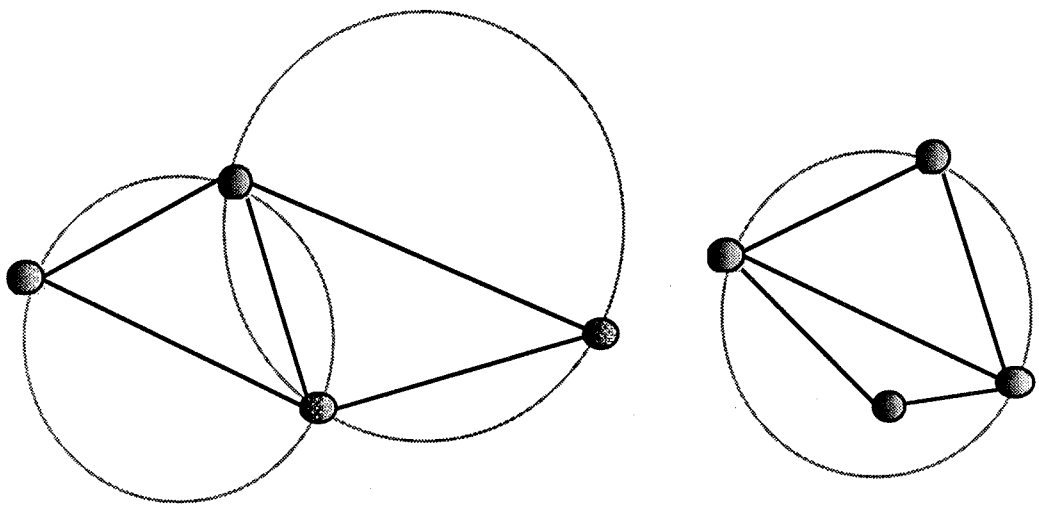


Fig.3: Critère de la sphère vide

Propriété
Soit S un ensemble de point de l'espace. Un triangulation de Delaunay est unique si pour tout simplexe T de cette triangulation, aucun point de S n'est cosphérique avec les sommets de T.

1-2 Algorithme mis en oeuvre en 2D

Le maillage pour construire une triangulation de Delaunay peut se décomposer en trois grandes parties. Tout d'abord, on crée une boite englobant les points du domaine(première étape). Ensuite, on insère un par un les noeuds du domaine de manière à obtenir une triangulation de Delaunay du domaine (deuxième étape). Enfin, on peut détruire la boite englobante (troisième étape).

Première étape: * Création d'une boîte extérieure (Fig.4):

* un simplexe est un élément de d+1 noeuds dans un domaine de dimension d (triangle en 2D ou tétraèdre en 3D).

→ mesure de l'extension de N sur les axes de coordonnées,

→ création de "coins" points et d'arêtes,

→ maillage de Delaunay de ses points en "coins".

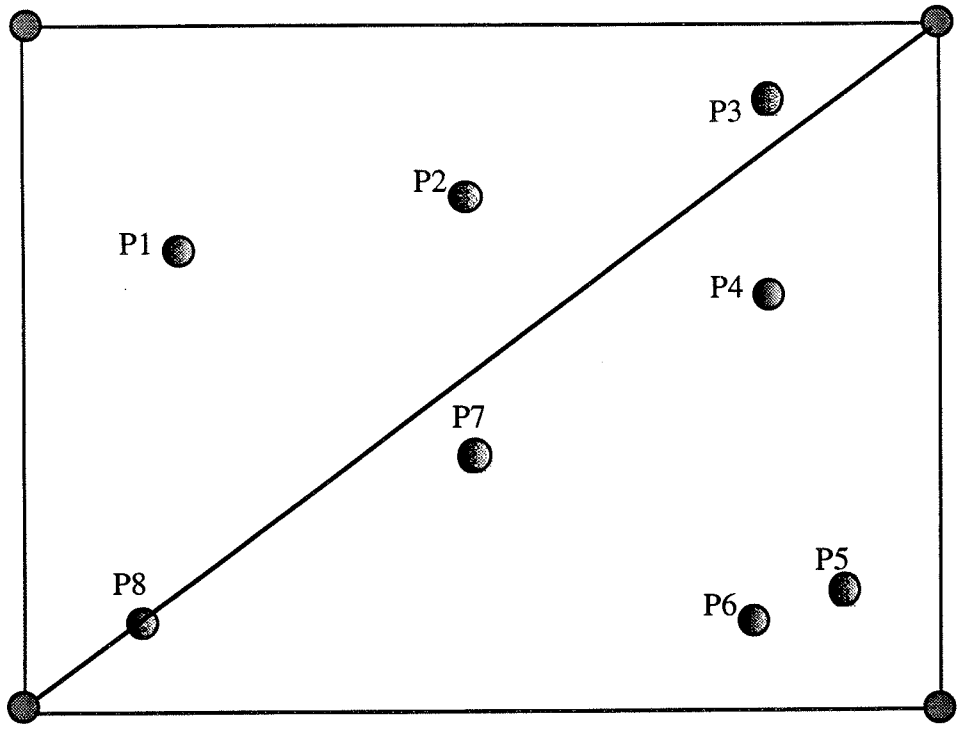


Fig.4: Création d'une boite englobante

Deuxième étape: * Insertion des points de N l'un après l'autre dans le maillage de Delaunay

Avant de présenter l'insertion des noeuds un par un, nous introduisons les notations suivantes:

$B_P(K)$:
"Le simplexe K a une hypersphère circonscrite dont la boule ouverte associée contient le point P".
S(P) :
Ensemble des simplexes K du maillage vérifiant $B_P(K)$.

L'algorithme utilisé est itératif [HERMELINE-82]: On insère successivement les points en maintenant à chaque stade une triangulation de Delaunay. Lorsqu'on insère le $n+1^{ème}$ point, les simplexes ne satisfaisant pas le critère de la sphère vide sont détruits et de nouveaux simplexes s'appuyant sur le noeud ajouté sont construits.

Soit T une triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de S s'appuyant sur tous les noeuds de S. T est formée d'un ensemble de simplexes t. On veut ajouter un nouveau point P.

→ Première étape: Recherche des éléments à détruire $S_P(K)$

```
Soit TD un ensemble vide de simplexes
Pour chaque simplexe K de T
     Si la sphère circonscrite à K contient P, alors on ajoute t à
     l'ensemble TD
Fin_pour
```

→ Deuxième étape: Destruction des éléments de TD

```
Pour chaque élément simplexe K de TD, on le supprime dans T
```

→ Troisième étape: Construction des nouveaux éléments

```
Soit F l'ensemble des facettes de la frontière de TD. Les faces sont
     des triangles (maillage 3D) ou des arêtes (maillage 2D).
Pour chaque face f de F
     Construire le simplexe K s'appuyant sur f et le point P
     Ajouter t à T
Fin_pour
```

L'insertion des points se fait de manière itérative, jusqu'à ce que tous les points soient insérés.

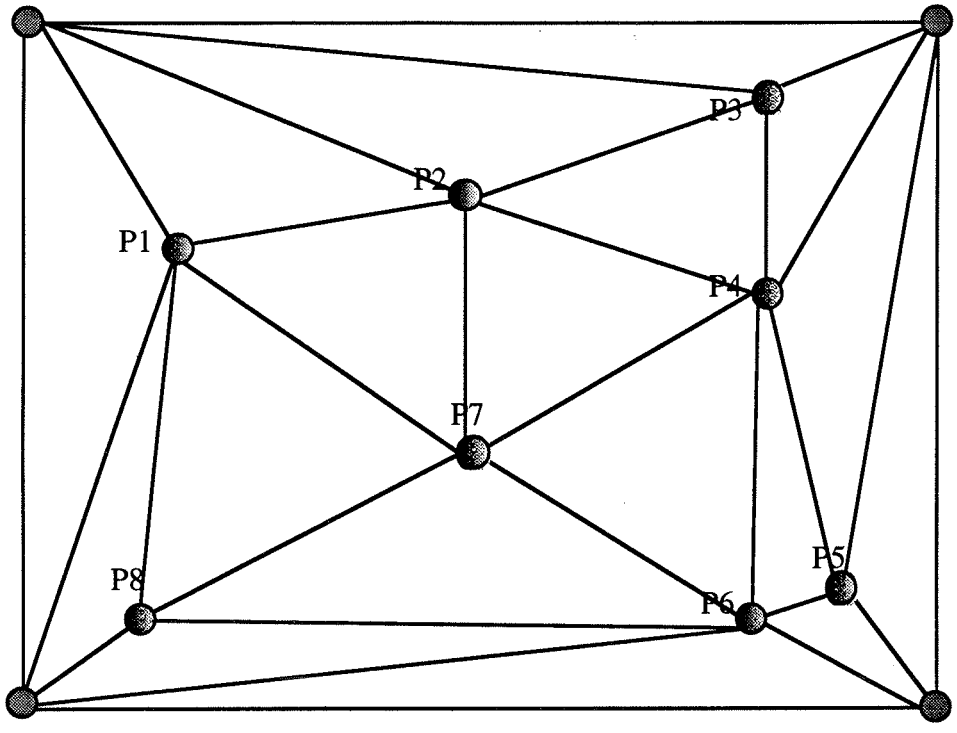


Fig.5: Insertion de tous les points dans le maillage

Troisième étape: * Suppression de la boîte extérieure

Après avoir inséré tous les points dans le maillage, on peut supprimer les points de "coins" et tous les tétraèdres s'appuyant dessus (*i.e.* un sommet fait partie des points des "coins").

Il est alors nécessaire de remettre à jour les codes de voisinage des éléments sur le pourtour du maillage.

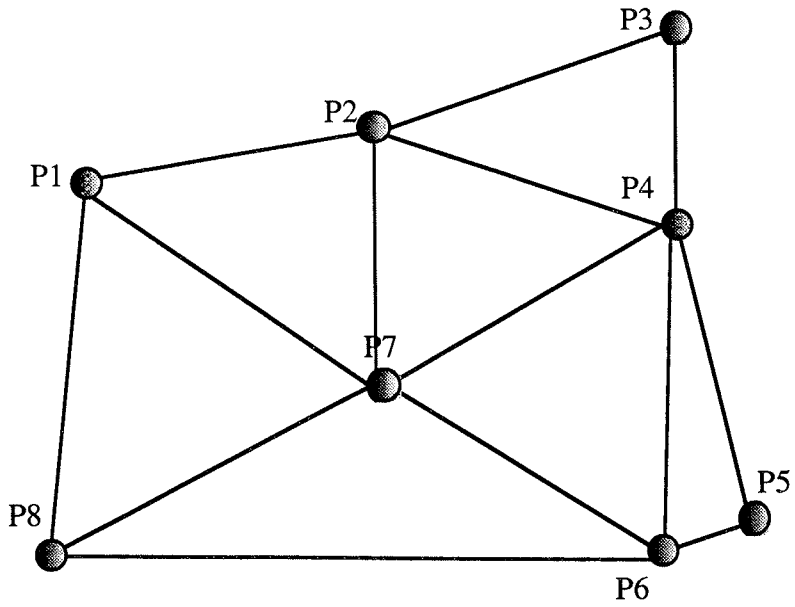


Fig.6: Maillage final de Delaunay

En 2D, la complexité de l'algorithme [MORANCEY-93] est en $O(n^2)$ au pire, où n est le nombre de points à insérer. Cela correspond au cas où tous les triangles déjà formés sont détruits lors de l'ajout d'un point (en dimension 2, le nombre de triangles est proportionnel au nombre de points). La recherche des simplexes dont la boule circonscrite contient le nouveau noeud influe sur la complexité de l'algorithme. La plupart des optimisations proposées tentent de diminuer le nombre de simplexes parcourus lors d'une telle recherche.

Cette technique de maillage présente de multiples avantages: Elle permet de mailler pratiquement toutes les géométries et permet de mailler les surfaces et les volumes. Elle convient tout à fait aux géométries décrites par *B-Rep*. Le modèle *B-Rep* représente l'objet par sa frontière. La frontière est une surface fermée qui délimite l'espace. On maille ainsi de manière automatique et chronologique, les lignes, les faces, puis les volumes.

1-3 Quelques difficultés de la méthode

1-3-1 évaluation du critère $B_N(K)$

Le point le plus délicat de l'algorithme est numérique: Comment évaluer le critère $B_N(K)$, i.e. le noeud N est-il dans l'hypersphère circonscrite à un simplexe K ?

En 2D, on peut calculer le déterminant suivant pour savoir si le noeud M est dans le triangle K défini par 3 points (3):

$$\det(M,K)=\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

où M(x,y) et K est le simplexe défini avec les noeuds suivants (Fig.7):

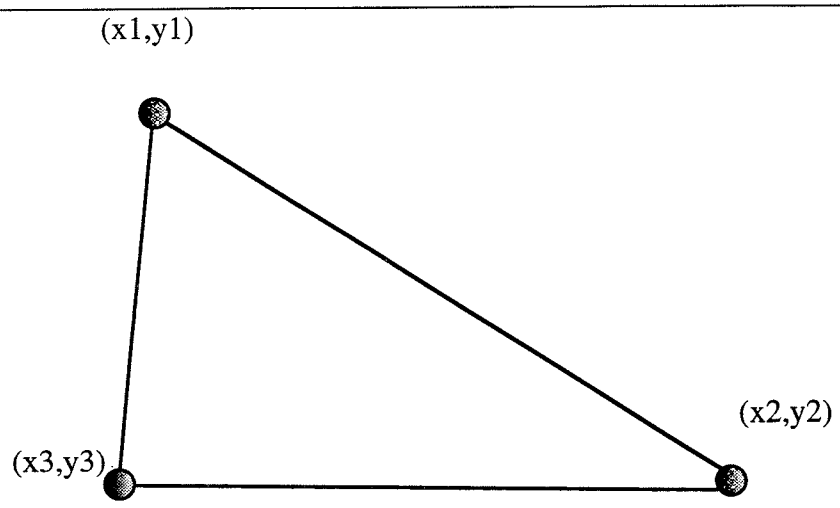


Fig.7: Simplexe à trois noeuds

Si det(M, K) = 0 le point M est sur l'hypersphère.
Si det(M, K) < 0 le point M est dans l'hypersphère et $B_M(K)$ est vérifié.

Ce critère est difficilement applicable en 3D pour les points proches de la frontière. En effet, numériquement il est difficile de savoir si le point est sur l'hypershère ou non. D'où la nécessité d'introduire une mesure "relative" (4):

R : rayon de la sphère de centre C circonscrite
d : distance CM

$$\begin{aligned} &| d^2 - R^2 | \leq 2 \varepsilon R d_{réf} && \Leftrightarrow \text{M est sur la sphère} \\ &d^2 - R^2 < - 2 \varepsilon R d_{réf} && \Leftrightarrow \text{M est dans la sphère} \\ & && \Leftrightarrow B_M(K) \text{ est vérifié} \end{aligned} \qquad (4)$$

où ε et $d_{réf}$ sont des paramètres internes au mailleur.

1-3-2 Recherche d'un simplexe contenant un noeud

L'algorithme est présenté dans [ALBERTINI-88], nous le rappelons ici car il va nous être utile pour insérer des pyramides aux interfaces non conformes. Nous recherchons un tétraèdre K contenant un noeud N dans un maillage convexe. La solution adoptée est la suivante:

Cet algorithme part d'un tétraèdre quelconque K_i, si possible assez proche de N (on peut prendre, par exemple un tétraèdre s'appuyant sur le sommet du maillage le plus proche de N). Il progresse ensuite par voisinage, en cherchant, à chaque fois, une face vue du noeud N (face dont la normale extérieure pointe vers N)* , puis en continuant la recherche sur le tétraèdre voisin sur cette face. Il s'arrête lorsque plus aucune face du tétraèdre K traité n'est vue, ce dernier contenant alors le noeud N. La mise en oeuvre de cet algorithme est la suivante:

Pour savoir si une facette FT d'un tétraèdre K est vue du noeud N, il suffit de tester si le déterminant (8), où les indices 1,2,3,4 correspondent respectivement aux trois noeuds de FT, orientée vers l'extérieur de K, et au noeud N, est positif.

Cet algorithme permet de trouver très rapidement un tétraèdre K contenant un noeud $N \in D$, même lorsque le tétraèdre initial K_i est assez éloigné de N. Son temps d'exécution dans un maillage

* On peut remarquer que cela suppose une orientation des éléments.

quelconque de n tétraèdres est, en général, proportionnel à $\sqrt[d]{n}$* [ALBERTINI-88] (alors qu'il faut un temps proportionnel à n pour une recherche systématique, avec une boucle sur tous les tétraèdres du maillage).

```
     K := Kj
     IFAC := 0
     Répéter
          MEMETD := Vrai
          NUMFT := 0
          Tant que ( NUMFT < 4 et MEMETD ), faire
          NUMFT := NUMFT + 1
          Si ( NUMFT := IFAC ), alors
               Récupérer la facette FT de numéro NUMFT sur K
               Si ( la facette FT est vue de N ), alors
                    K := voisin de K sur la facette FT
                    IFAC := numéro de la facette FT sur K
                    MEMETD := Faux
               Fin si
          Fin si
     Fin tant que
Jusqu'à ( MEMETD )
```

Fig.8: Recherche du simplexe contenant le noeud N

1-3-3 Recherche de l'ensemble $S_N(K)$ vérifiant le critère $B_N(K)$

Pour rechercher l'ensemble des simplexes dont la boule circonscrite contient un point N, il est nécessaire de travailler par voisinage de manière à avoir le moins possible à évaluer le critère par le calcul du déterminant de l'équation (3), qui est plutôt coûteux. Après avoir trouvé un simplexe K dont la boule contient N, on peut évaluer ces voisins, jusqu'à ce que tous les voisins successifs soient traités.

```
Initialisation S(N)
Initialisation de la pile
Trouver un simplexe K vérifiant B_N(K) : il est trouvé par voisinage (demi plans)
Enregistrer K dans S(N) / Empiler K
Tant que (pile non vide) Faire
     Dépiler K
     Construire V(K) : ensemble des simplexes voisins du simplexe K
     Pour (K' ∈ V(K))
     Si (K' ∉ Pile).(K' ∉ S(N).(B_N(K'))
     enregistrer K' / Empiler K'
Fin tant que
```

Fig.9: Recherche de $B_N(K)$

1-4 Les différents mailleurs utilisés

L'utilisateur peut affecter à chaque face ou volume, le type mailleur qu'il souhaite. Ces types mailleurs se décomposent en trois familles caractérisées par leurs méthodes:

- Le maillage libre, basé sur la triangulation de Delaunay, que génère des simplexes.

- Le maillage réglé, basé sur un algorithme de transport/projection qui génère des

* Où d est la dimension du domaine.

hexaèdres ou des rectangles (pour l'instant).

- Le maillage extrusion, basé sur l'extrusion du maillage d'une face (ou d'une ligne) le long d'une transformation. Les deux premiers mailleurs n'étant pas modifiables par l'utilisateur, ce dernier peut être créé, modifié ou supprimé. Ce type de mailleur génère tout type d'élément.

Il est de plus nécessaire d'assurer une cohérence pour ces différents mailleurs de manière à ne pas créer d'impossibilités. Cette cohérence est en fait une base de règles au sens intelligence artificielle. Le moteur d'inférence de gestion de la cohérence est appelé à chaque modification de données concernant le maillage.

IV-2 Gestion des non conformités

Le but est d'insérer des pyramides aux bons endroits sur la frontière triangle/rectangle de manière à garantir la continuité C^0 de la variable d'état entre les éléments.

Dans un premier temps, nous dresserons un panorama des différents algorithmes de gestion de frontière en deux dimensions.

Puis, après avoir annoncer les hypothèses de travail, nous présenterons un algorithme original permettant de traiter en surface le maillage tétraédrique de manière à pouvoir insérer de éléments pyramides le plus facilement possible.

2-1- Hypothèses: le respect de la frontière

La figure suivante (Fig.10) montre un maillage triangulaire 2D ne vérifiant pas l'arête AB.

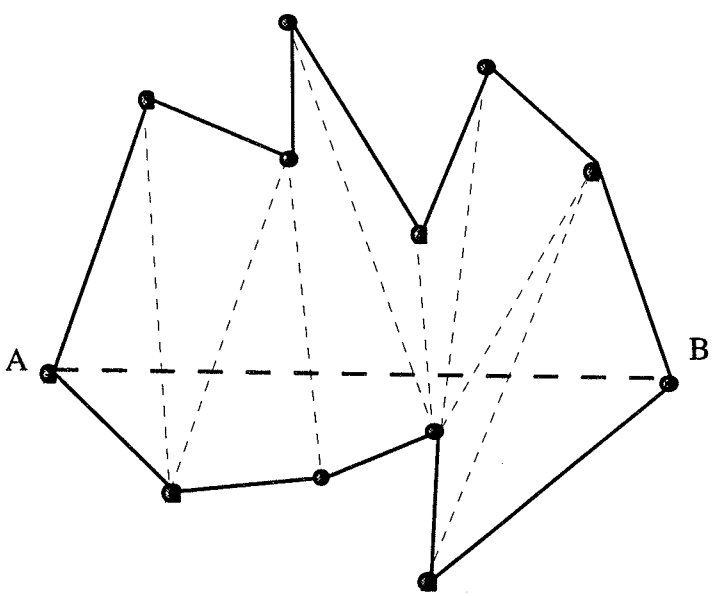


Fig.10: Maillage 2D d'un domaine ne respectant pas l'arête AB

L'objet de cette partie est de faire un état des lieux sur le respect de la frontière pour un maillage de type Delaunay. Après avoir étudié quelques cas en 2D, nous passerons en 3D. Pour le respect de la frontière, il existe plusieurs façons de poser ce problème et, par suite, plusieurs réponses possibles.

2-1-1 L'insertion de noeud

La première idée consiste à trouver la régularité que doivent satisfaire les données de telle sorte que le problème ne se pose pas, c'est-à-dire que le maillage contenant les extrémités des arêtes données contienne ces arêtes. Une deuxième idée consiste à recenser les arêtes manquantes et à les couper en deux par création du point milieu. Le nouvel ensemble de points ainsi formé sert alors de donnée au processus d'insertion de points avec le secret espoir que le maillage obtenu contienne toutes les arêtes données (arêtes initiales ou arêtes initiales coupées en deux). Intuitivement, une application récursive du procédé donne le résultat car elle revient à former numériquement un ensemble de données Delaunay admissible*. On trouvera dans [FLUX3D] la mise en application de cette méthode. Une autre idée consiste à transformer localement le maillage initial pour régénérer les arêtes manquantes (et supprimer les arêtes gênantes). Plusieurs manières de procéder existent, parmi lesquelles nous choisissons les deux méthodes exposées ci-dessous [BOROUCHAKI-96].

* Un maillage de Delaunay respecte alors la frontière.

2-1-2 Décomposition en sous problèmes

Soit T le maillage de départ ne vérifiant pas l'arête AB. On définit T_{AB} l'ensemble des triangles dont une arête est coupée par AB. Ainsi $T = T' \cup T_{AB}$ où T' est l'ensemble des triangles non intéressés par AB.

T_{AB} définit un polygone (non convexe) dont on note les sommets par a_k, $k = 1, n_1$ avec $a_1 = A$ et $a_{max} = B$ pour la partie située d'un côté de AB et b_k, $k = 1, n_2$ avec $b_1 = A$ et $b_{max} = B$ pour la partie située dans le demi-plan délimité par AB ne contenant pas les a_k (Fig.11). On note par M le problème à résoudre i.e., le remaillage de T_{AB}. Il est clair que, si on appelle M_1 le problème du remaillage du polygone constitué par les a_k, et M_2 celui du remaillage du polygone formé par les b_k, le problème initial revient à traiter indépendamment les deux sous problèmes M_i. La complexité est moindre d'une part, et d'autre part, elle revient à traiter en fait que l'un de ces sous problèmes. Considérons donc le problème M. On trace AB et on cherche dans a_k le point le plus proche de AB, soit a_l ce point, on trace Aa_l et a_lB puis on forme le triangle ABa_l. La solution du problème M est donc la suivante:

- construire le triangle a_1,a_{max},a_l;

- définir le problème M_{11} qui est celui du maillage du polygone $a_1,a_2,...,a_l$;

- définir le problème M_{12} qui est celui de maillage du polygone a_l, a_{l+1}, a_{max} .

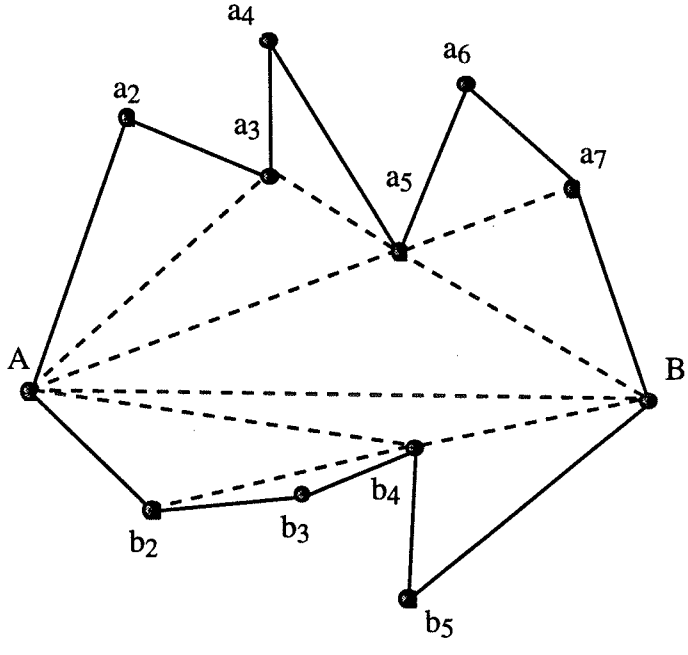


Fig.11: Maillage 2D d'un domaine par décomposition en sous problèmes

Le problème est donc décomposé en sous problèmes de complexité inférieure, en appliquant récursivement le procédé, la solution est obtenue (un polygone réduit à trois points donne la solution et arrête la décomposition). La description complète de cette méthode figure dans [GEORGE-92].

2-1-3 Une solution par retournement d'arêtes

La méthode ci-dessus donne le résultat mais celui-ci est peu équilibré. Par suite une autre solution, basée sur le procédé de retournement d'arête, est proposée.

L'idée de base est la suivante: appliquer, d'une manière aléatoire, des retournements d'arêtes

dans T_{AB} pour créer des triangles qui n'intersectent par AB. La solution proposée [BOROUCHAKI-96] est donc la suivante:

- a) Définir une triangulation initiale de T_{AB};

- b) Essayer de retourner une arête interne quelconque de T_{AB};

  - bl) Le retournement marche* , aller en c);

  - b2) Le retournement ne marche pas, aller en b);

- c) Mettre à jour T_{AB} (c'est-à-dire si un triangle K, non intersectant AB, est formé, faire $T_{AB} = T_{AB}-\{K\}$;

- d) Si Card(T_{AB}) = 2 et l'un des éléments de T_{AB} contient le segment AB alors Fin, sinon, aller en b)

2-1-4 Extension à trois dimensions

Alors que le respect de frontière se fait facilement et est bien maîtrisé en deux dimensions, le passage à la troisième dimension n'est pas aisé, peu d'auteurs s'y sont risqués, et il semble qu'il n'y ait pas de solution simple et systématique.

[GEORGE-95] propose un algorithme de respect des points, arêtes et facettes en trois dimensions. La méthode qu'il préconise est un mélange de :

Permutation d'arête (ou *swapping*)

Ajouts de noeuds

Dans notre cas, on dispose de deux volumes ayant des facettes de type différent. Pour relier deux sortes d'éléments, nous partons de l'hypothèse suivante. On suppose** que nous avons deux éléments triangulaires pour un élément quadrangulaire (Fig.12). En fait, cette condition est satisfaite quand le maillage de surface quadrangulaire est suffisamment régulier, ou quand le maillage automatique est de densité comparable au maillage réglé. Dans le cas où le maillage quadrangulaire est rectangulaire, cette condition est tout le temps vérifiée.

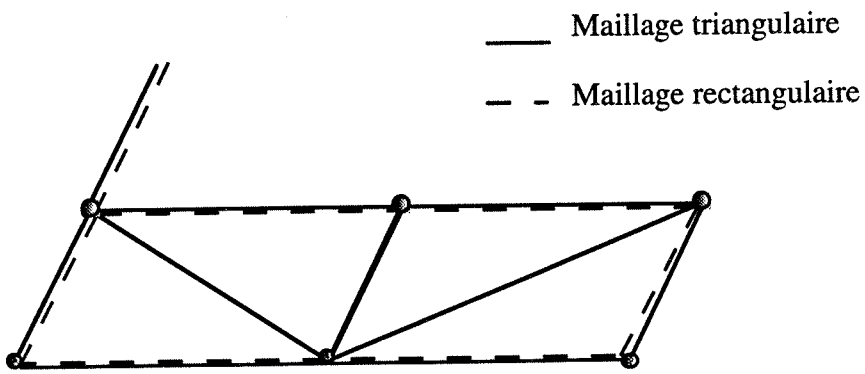


Fig.12: L' interface à traiter - un rectangle sur deux triangles

On suppose donc que les non conformités sont Delaunay admissibles. En réalité, et pour toute les géométries traitées, le maillage de peau en quadrangle reste régulier, et est par conséquent

* au sens où le triangle formé n'est pas intersécant à AB.
** Et cette hypothèse est fondamentale.

Delaunay admissible. La figure suivante (Fig.13) présente deux maillage réglés en rectangles. Alors que le premier maillage est Delaunay admissible, le deuxième ne l'est plus car une arête d'un triangle coupe une arête d'un rectangle.

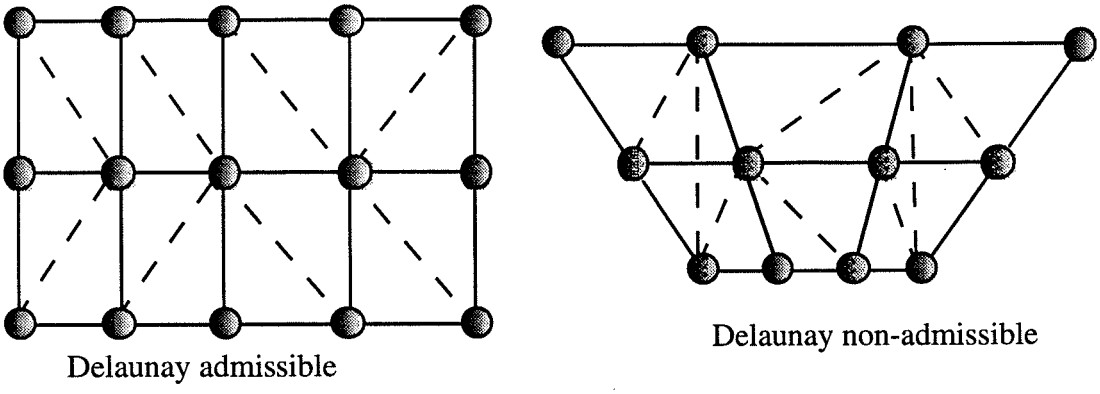


Fig.13: Maillage Delaunay admissible et Delaunay non-admissible

2-2 Méthodologie

On va travailler sur les volumes discrétisés en tétraèdres de manière à modifier le maillage de manière locale pour insérer des pyramides.

Le cas le plus simple et le plus trivial est celui de la figure suivante (Fig.14): On a deux tétraèdres voisins de la non-conformité.

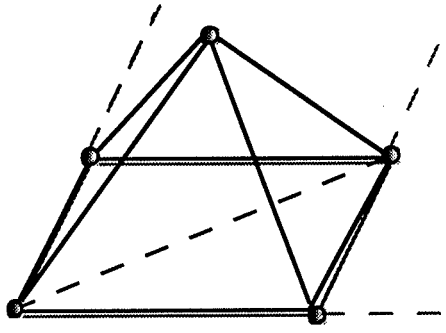


Fig.14: Les deux tétraèdres situés sur l'élément rectangulaire ont un sommet commun

Dans ce cas, il suffit de détruire les deux tétraèdres bien placés, et de construire une pyramide à leur place. On dispose alors d'un maillage conforme (Fig.15).

On appellera cette transformation 2T -> 1P* .

* T pour Tétraèdre et P pour Pyramide.

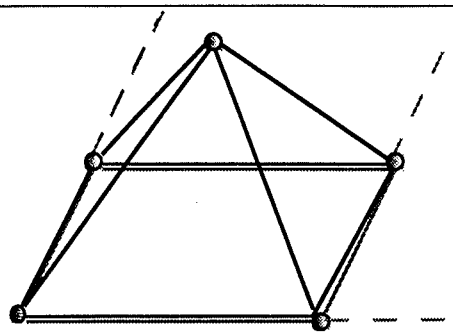


Fig.15: La pyramide créée

Un cas plus complexe se pose lorsque les deux tétraèdres n'ont pas un sommet commun (Fig.16). Dans ce cas là, on peut avoir trois ou plus de tétraèdres voisins de la non conformité.

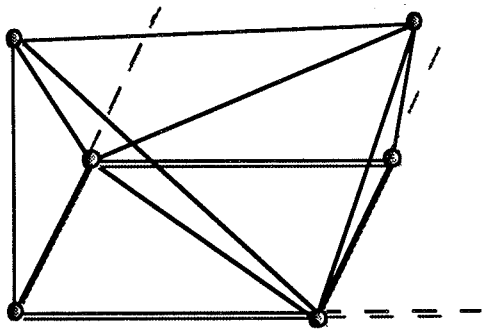


Fig.16: Trois tétraèdres au voisinage de l'élément rectangulaire

La difficulté va être d'essayer de traiter ce cas où l'on a plus de deux tétraèdres autour de l'arête non conforme. Il est nécessaire alors de traiter localement le maillage en tétraèdres.

2-2-1 Première piste: Faire de la permutation d'arête ou "swapping"

Pour tenter la permutation, il est nécessaire d'isoler le problème de la non-conformité à un nombre de tétraèdre "pas trop grand", ou encore approcher localement le problème. Pour cela, on rappelle la définition suivante:

Définition: On appelle coquille de l'arête [a,b], l'ensemble des tétraèdres ayant [a,b] pour arête.

On a tenté de trouver une solution systématique pour transformer cette coquille de manière à pouvoir créer une pyramide, donc se ramener au cas précédent. En effet, on peut tenter de faire de la permutation d'arête (2T -> 3T) de manière à se retrouver dans le cas de figure le plus favorable où l'on a deux tétraèdres ayant trois sommets communs.

Pour simplifier notre approche, on se place dans le cas où l'on a trois tétraèdres dans la coquille.

La figure suivante montre une permutation d'arête possible (2T -> 3T) permettant de se ramener à un cas plus favorable. Le quadrilatère ADBC est relié aux deux tétraèdres APCB et ABDS (Fig.17). En effet, il est possible d'ajouter une arête CS lorsque l'intersection entre cette arête et le triangle APB est non nulle.

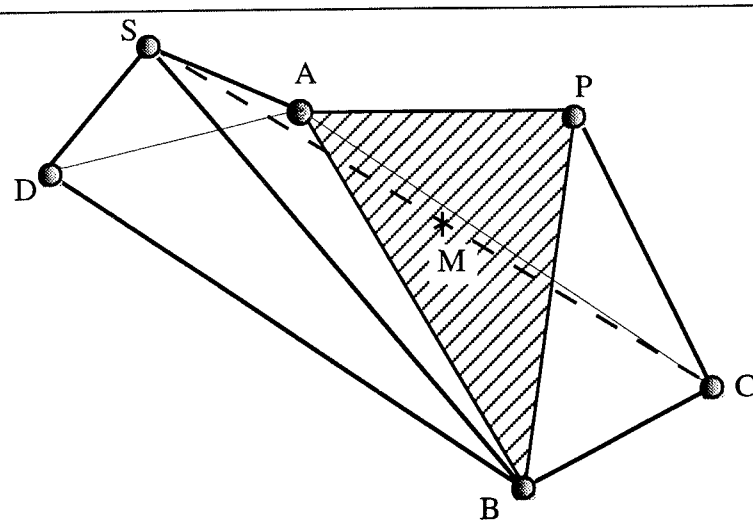


Fig.17:Permutation d'arête possible

Cependant, si on modifie la configuration des deux tétraèdres, ou même si on bouge les noeuds P et S, on s'aperçoit que l'on a une position limite de permutation lorsque [CS] est dans le plan PAC (Fig.18).

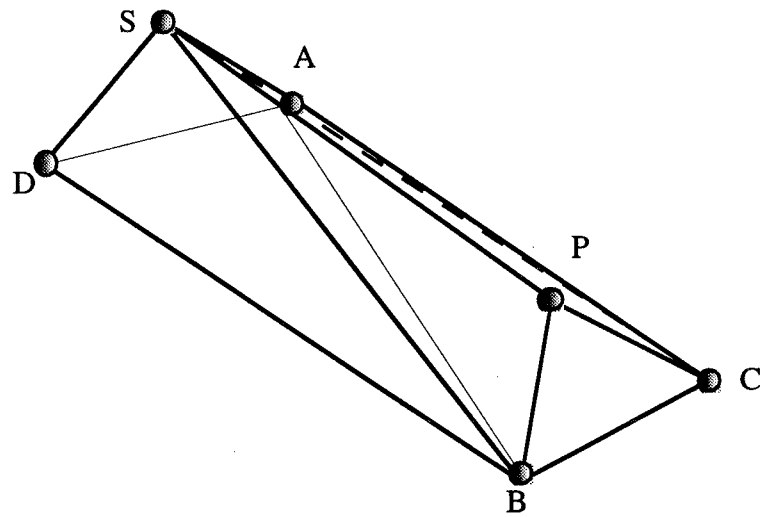


Fig.18: Permutation d'arête cas limite

Alors que la figure précédente montre le cas limite où l'on peut encore créer l'arête CS, le cas suivant montre bien que dès que la coquille n'est plus convexe, la permutation d'arête est impossible (Fig.19).

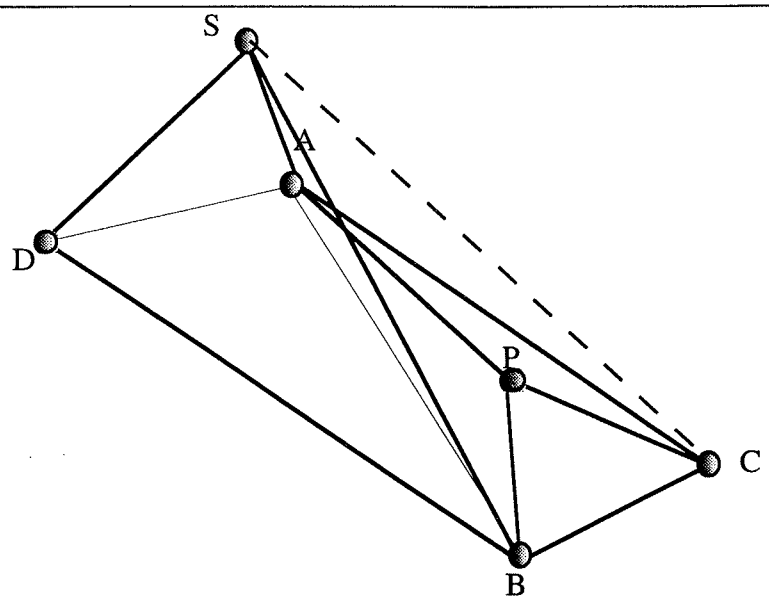


Fig.19: Permutation d'arête impossible

A l'aide d'un modeleur géométrique, on s'est rapidement convaincu que la permutation d'arête n'était pas une bonne solution du fait de la non convexité possible de la coquille *a priori*, et on l'a abandonnée.

2-2-2 Deuxième piste: Faire de l'insertion de noeuds

Partant du fait que l'algorithme de Delaunay permet d'insérer des noeuds dans un maillage donné en simplexes, on peut tenter d'insérer des noeuds "au bon endroit" au niveau de l'interface non conforme.

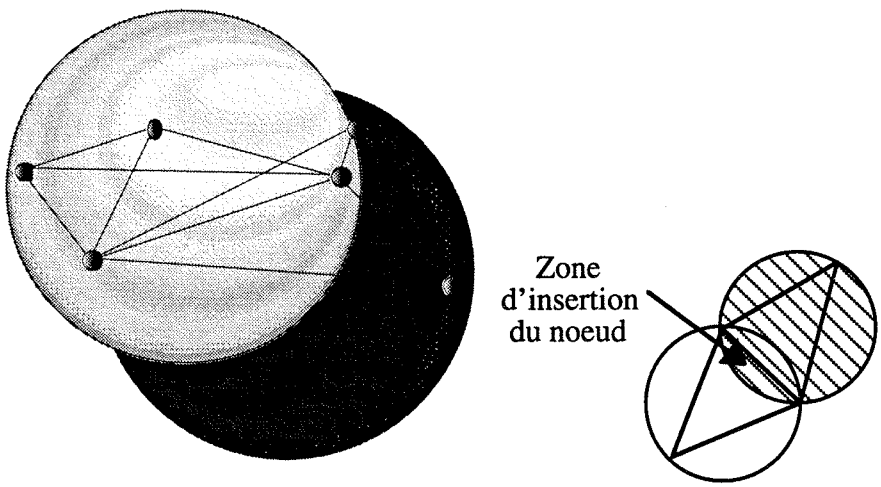


Fig.20: Insertion de noeuds dans l'intersection des deux boules circonscrites aux deux tétraèdres

Propriété: Soient T1 et T2, deux tétraèdres d'une coquille [a,b] non conforme. L'intersection des boules circonscrites à ces deux tétraèdres est non nulle et elle contient [a,b].

A partir de là, on peut chercher le point situé dans l'intersection des boules englobantes respectives B1 et B2 des tétraèdres T1 et T2 qui conditionne le mieux la pyramide à créer (i.e. qui est le plus haut possible à la verticale de la non conformité). On peut aussi calculer les coordonnées du point analytiquement à partir des données des points de T1 et T2. Son insertion va casser les tétraèdres de la coquille pour créer des tétraèdres bien placés, et on se ramène ainsi au premier cas.

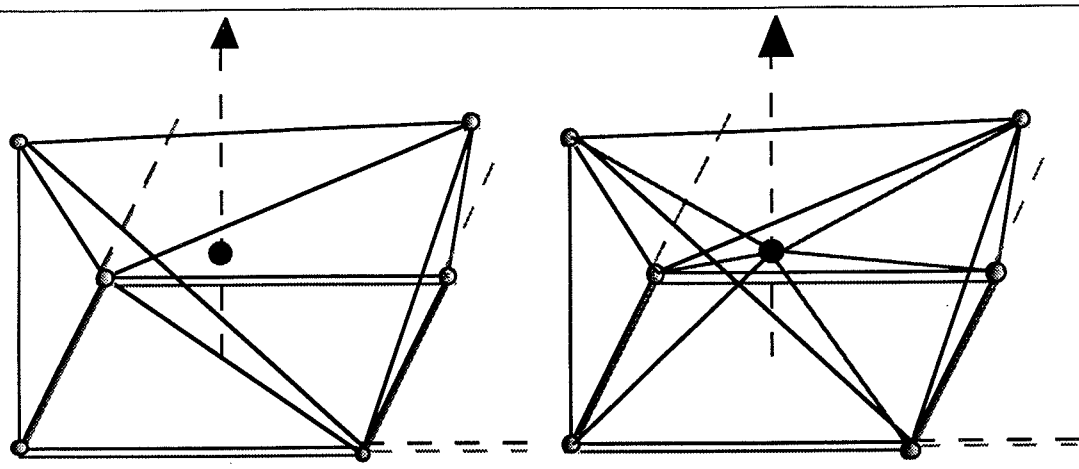


Fig.21: Insertion du noeud par la méthode de Delaunay

En fait, Les transformations successives sont: 3T -> 6T, puis finalement de 6T -> 4T +1P.

2-2-3 Algorithme général

On traite le maillage tétraèdre et on le modifie pour créer une pyramide . On travaille sur chaque volume maillé en tétraèdres de manière indépendante des autres volumes, et de manière itérative. La méthode proposée utilise la technique bien "rodée" dans [FLUX3D] d'insertion de noeuds pour ajouter un noeud (Fig.21) où deux éléments tétraèdres ne peuvent construire une pyramide.

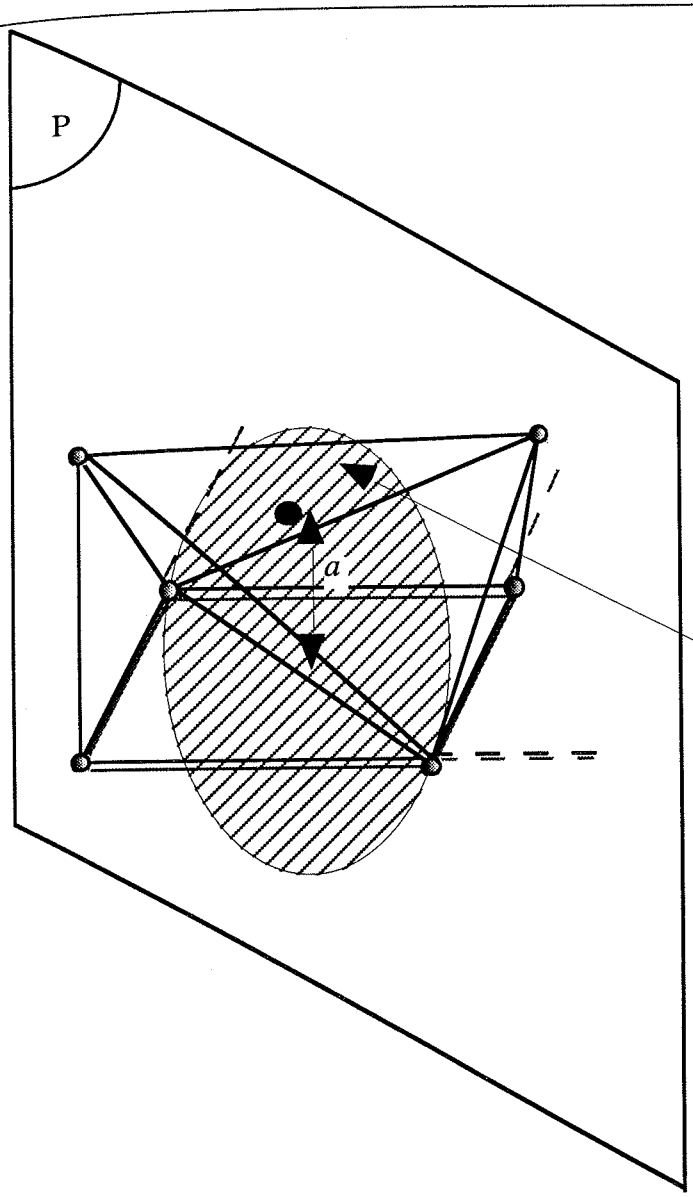


Fig.22: Insertion du noeud à une hauteur a paramétrée

Au niveau de l'insertion du noeud, on se dit que l'on a le plus de chance d'être dans les deux boules circonscrites aux deux tétraèdres non conformes en plaçant le noeud à insérer au dessus de l'intersection des diagonales et à une hauteur *a* paramétrable. Cette hauteur a ne doit pas être choisie ni trop petite (génération de deux tétraèdres plats), ni trop grande (on ne "casse" plus les deux tétraèdres qui ont une facette commune avec le quadrangle).

La figure (Fig.22) montre la projection de l'intersection des deux boules circonscrites aux tétraèdres à modifier sur un plan normal à la base rectangulaire et passant par l'arête non conforme.

La zone hachurée sur la figure 22 indique l'emplacement possible du noeud à insérer.

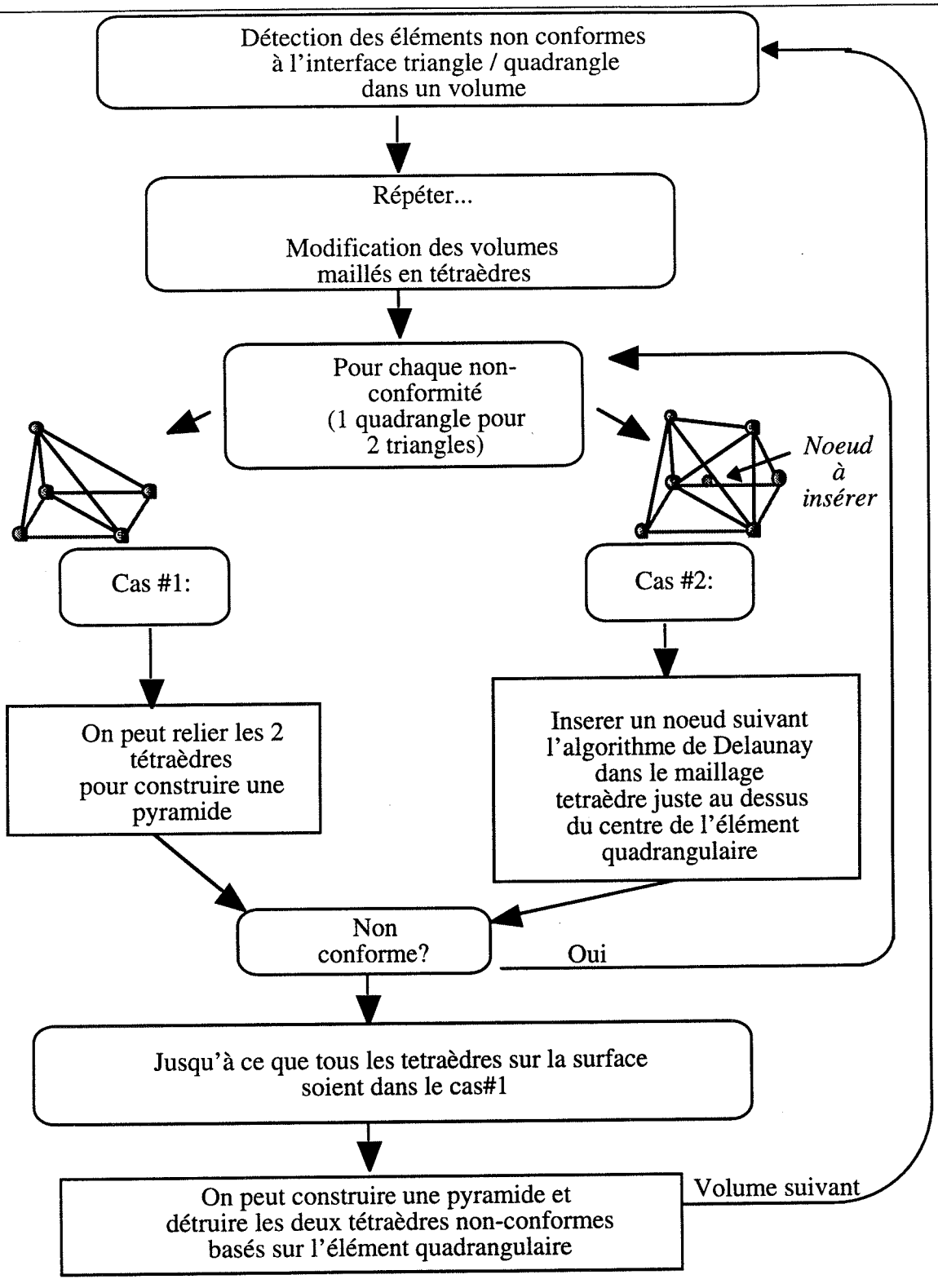


Fig.23: Algorithme simplifié de gestion des non-conformités

La stratégie de gestion des non-conformités est simple: Soit les deux tétraèdres à l'interface non conforme peuvent former une pyramide, alors on la crée, soit une insertion de noeuds permet de modifier localement la coquille en se ramenant au cas favorable précédent.

Cet algorithme est relativement simple à implanter. Après la création des éléments pyramides, la conformité est satisfaite entre les deux maillages. Un des inconvénients de cette méthode est qu'elle peut générer des pyramides plates, mais la qualité du maillage à l'interface peut être améliorée par des méthodes qui ne modifient pas la topologie du maillage tétraédrique.

En fait, il est possible de paramétrer la hauteur d'insertion du noeud au dessus de la base non-conforme de manière à optimiser le maillage de peau pyramide. Pour cela, il suffit de rechercher le plus grand a possible tel que le noeud créé soit toujours dans l'intersection des deux boules circonscrites aux deux tétraèdres.

2-2-4 Un petit piège

Il est évident que dans le cas suivant, l'algorithme sera perdu, et il est nécessaire de traiter ce dernier comme un cas particulier (Fig.24):

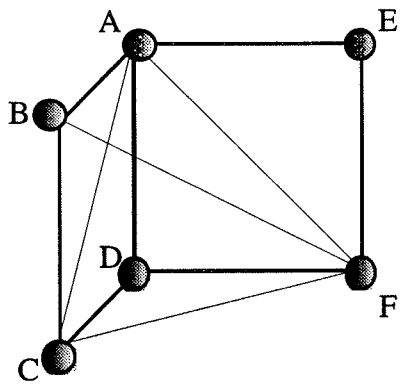


Fig.24: Un même tétraèdre ACDF sur deux non conformités

Les deux tétraèdres ABCF et ADCF peuvent former une pyramide, mais un problème se posera alors si on veut traiter la facette non conforme AEFD. La solution que nous préconisons reste l'insertion de noeud pour débloquer la situation et se retrouver dans le cas de figure suivant (Fig.25):

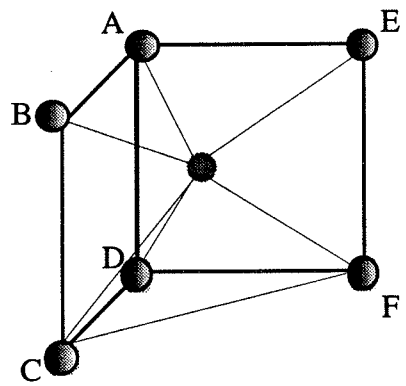


Fig.25: Maillage modifié

La figure 26 montre un agrandissement de la couche de l'interface pyramidale entre les faces triangulaires et rectangulaires.

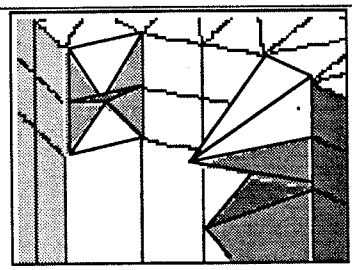


Fig.26: Pyramides à l'interface prismes / tétraèdres

2-3 Retour sur les hypothèses...ou comment s'en sortir à tous les coups

Cet algorithme d'insertion de noeud est très séduisant. En effet, il permet d'utiliser les routines déjà existantes et bien "rodées" au laboratoire pour se ramener à un cas simple et facile à traiter.

Cependant, l'algorithme de gestion des non conformités présente certaines contraintes, notamment l'hypothèse de Delaunay admissibilité des noeuds et des arêtes. Mais, n'est-il pas possible d'aller plus loin?

Il nous semble possible de modifier localement la frontière non -Delaunay admissible par insertion de noeud au dessus de faces quadrangles dans le maillage en tétraèdres de manière à modifier localement le maillage libre. En effet, si on se place dans le plan (les points en grisé étant légèrement au dessus du plan), on a (Fig.27):

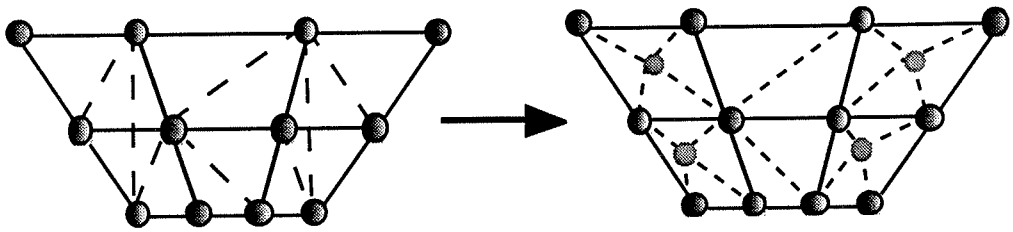


Fig.27: Maillage transformé

La figure précédente montre que l'hypothèse de départ peut éventuellement devenir obsolète. Nous n'avons pas expérimenté complètement cette piste, mais elle nous semble réaliste et permettrait de traiter bien plus de cas possibles.

IV-3 Application et validation sur des problèmes simples

Dans cette partie, nous présentons trois petits exemples très simples nous permettant de tester l'algorithme d'insertion des points, ainsi que des maillages où la pyramide apparaît naturellement (troisième exemple).

3-1 Un quart de barreau de section carrée dans de l'air

La géométrie est composée de deux volumes de forme simple imbriqués l'un dans l'autre. Au volume de forme rectangulaire, on a associé un mailleur structuré, et on a maillé son complémentaire dans le cube en maillage libre. Des non-conformités sont alors présentent sur l'interface entre les deux volumes.

Pour traiter de telles non-conformités, on voit que l'ajout d'un noeud est nécessaire pour créer une pyramide par facette rectangulaire. La figure suivante montre un détail du maillage, avec deux éléments de type hexaèdre ou brique qui sont reliés chacun à plus de deux tétraèdres.

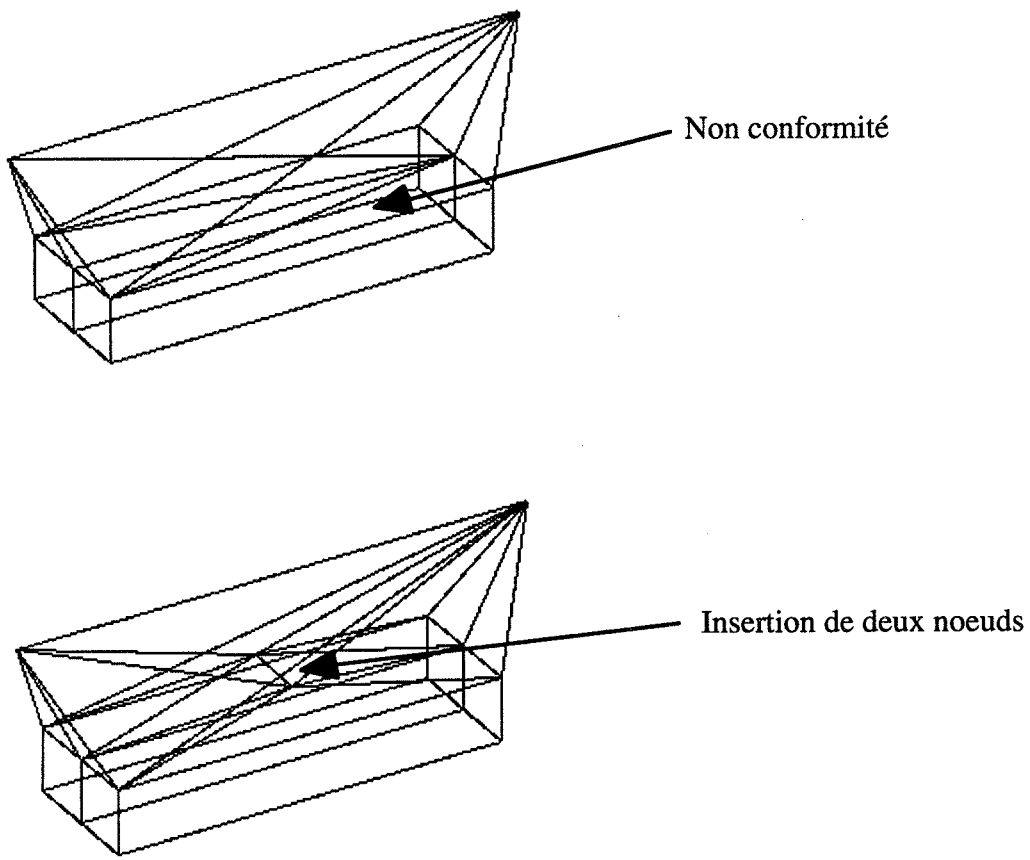


Fig.28: Traitement du maillage - Avant et après insertion de noeuds

Dans le maillage présenté ci-dessus, on passe de 2H+6T à 2H+2P+9T par ajout de 2 noeuds.

3-2 Autres applications de l'élément pyramide

D'autres utilisations des pyramides peuvent être le raccord de maillage brique de densité

différente (Fig. 29) ou encore le cas de l'extrusion d'un maillage triangle autour d'un axe (Fig.30).

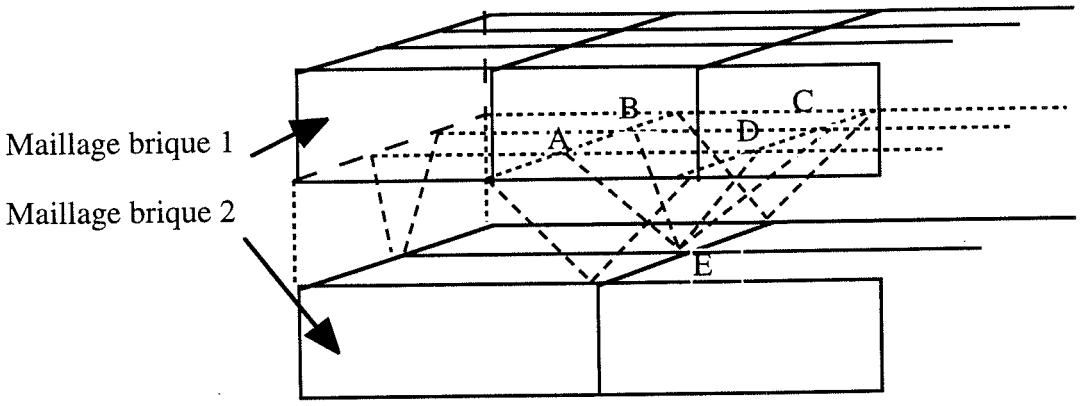


Fig.29: Raccordement de deux maillages briques

Si on veut connecter les deux morceaux de maillage à l'aide d'une épaisseur d'éléments finis, on peut créer sur notre exemple quatre briques, en face de chaque face carrée correspondante, quatre prismes entre les faces rectangulaires et des arêtes correspondantes, et il reste à insérer des pyramides entre les faces rectangulaires restantes et des noeuds du maillage correspondant (sur la Fig.29 A B C D E). Cette méthode peut se généraliser à des densités de mailles briques quelconques en vis à vis.

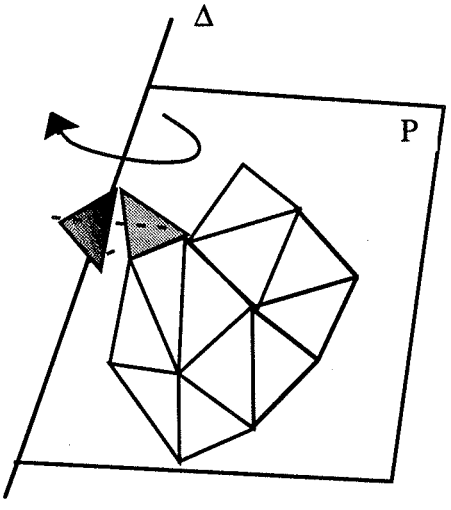


Fig.30: Construction d'un maillage 3D par extrusion (rotation autour d'un axe Δ) d'un maillage 2D triangulaire

Alors que l'extrusion autour de l'axe Δ du maillage triangulaire situé sur le plan P ne pose pas de problèmes particuliers pour les triangles qui n'ont pas de sommet sur l'axe Δ (ils sont transformés en prismes), les triangles ayant un seul noeud sur l'axe Δ sont transformés en pyramides. On peut de plus remarquer que des triangles du plan P ayant deux noeuds sur l'axe Δ se transforment en tétraèdres.

IV-4 Qualité des éléments pyramides

L'approche généraliste développée au chapitre II concernant la qualité des éléments finis et basée sur le conditionnement matriciel nous permet de définir l'élément pyramide optimal dans un maillage. Il est pertinent d'étudier la qualité de la pyramide créée par notre générateur de maillage à l'interface quadrangle/triangle afin d'essayer d'améliorer le raccordement. Lorsqu'on créée la pyramide par insertion de noeuds, son sommet est situé juste au dessus du centre de la base quadrilatère (Fig.31).

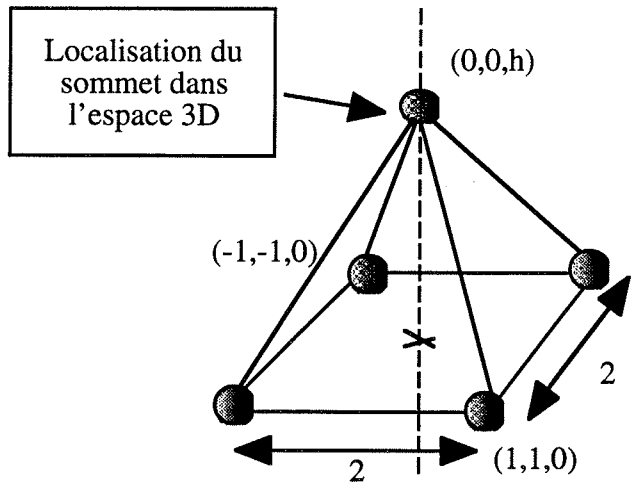


Fig.31: Test de qualité sur l'élément pyramide au premier ordre

Pour étudier la qualité de cet élément, nous pouvons déplaçer le noeud juste au dessus du centre de la base carrée.

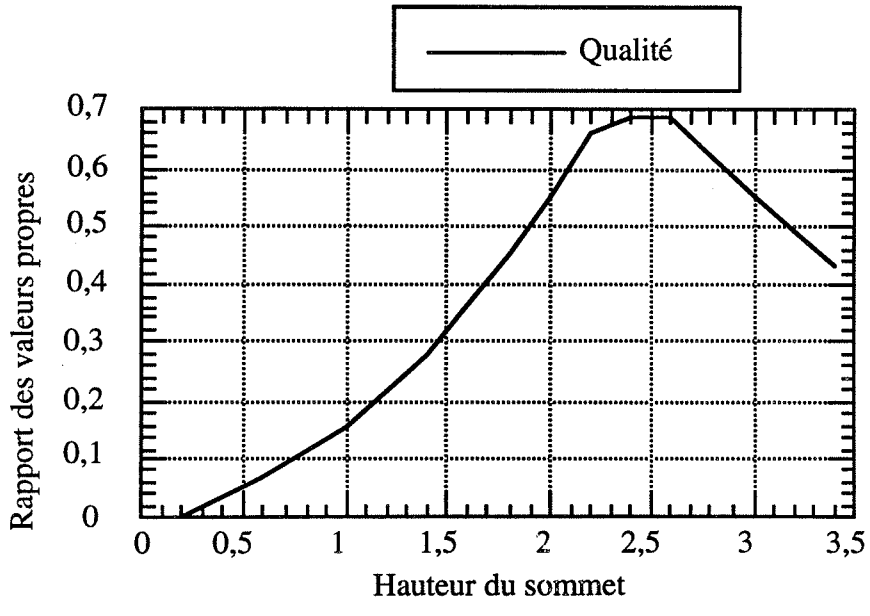


Fig.32: Variation du critère de qualité en fonction de la hauteur h du noeud sommet

La meilleure qualité est atteinte pour une hauteur h égale à 2,3. Ce test montre bien qu'une pyramide trop plate ou trop allongée est plutôt mal conditionnée.

IV-5 Conclusion

Après avoir rappelé les principes de l'insertion de noeud dans une triangulation de Delaunay, et les différents algorithmes utilisés, nous avons développé un outil permettant de créer des pyramides aux interfaces tétraèdres/hexaèdres, où les mailles ne se raccordent pas.

Le traitement des non-conformités est entièrement automatique et itératif et ne fait pas intervenir l'utilisateur. L'utilisation de cet algorithme d'insertion de noeud semble prometteur au niveau du respect de la frontière.

Testé sur des géomètries simples, ne présentant pas un grand nombre de noeuds et d'éléments, cet algorithme fonctionne et donne de bons résultats.

Le critère de qualité défini au Chapitre II nous a permis de répondre à la question de l'évaluation de l'interface pyramide générée.

Pour valider l'élément et l'algorithme de traitement de maillage sur des problèmes "grandeur réelle", nous devons tester cette méthodologie de gestion des non conformités sur des problèmes plus complexes, au sens du nombre de noeuds, et au sens de la géométrie. Ces cas tests, en général électrotechniques, ont été le fruit de collaborations avec d'autres doctorants du laboratoire, ou d'industriels. Ils font l'objet du chapitre suivant.

Chapitre V

Problèmes tests en électrotechnique et électro-mécanique

Dans le cadre de ce chapitre, nous avons été amené à valider nos travaux et algorithmes sur des cas "industriels" de manière à qualifier le mailleur mixte ainsi que le raccordement fort. Ce chapitre est donc un assemblage d'applications diverses nées de collaboration au sein du laboratoire ou dans le cadre de partenariats extérieurs.

V-1 Introduction

Une partie de ces cas tests a été présenté dans [ZGAINSKI-95], notamment le contacteur et le problème de chauffage par induction, l'exemple du maillage paramétré du Kumada est tiré de [ZGAINSKI-96-4] à partir des travaux de [LE LETTY-94].

Dans chaque cas, une rapide présentation du problème physique est faite. Ensuite, un maillage est décrit et analysé. Enfin, quand c'est possible*, on présentera des résultats de calcul éléments finis.

* Quand l'étude n'est pas confidentielle....

V-2 Calcul d'un contacteur télémécanique (Groupe Schneider)

Nous avons utilisé le logiciel [FLUX3D] pour modéliser un contacteur (Fig. 1) proposé par l'entreprise Télémécanique. Nous avons utilisé des éléments hexaèdres du second ordre pour le circuit magnétique et la bobine et des tétraèdres pour l'air autour des pièces massives.

La géométrie du dispositif est présentée sur la figure suivante (Fig.1.1).

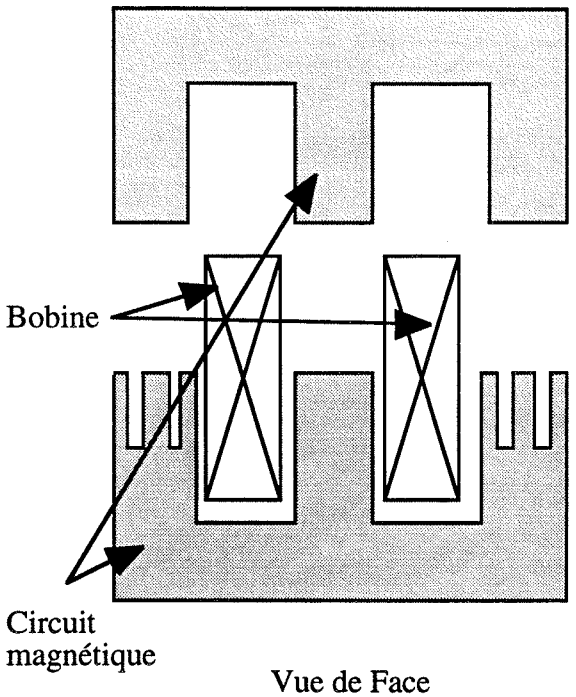


Fig.1.1: Géométrie du contacteur étudié

Un quart de la géométrie est étudiée, il reste par conséquent deux tronçons de circuits magnétiques en U, un quart de bobine, noyés dans une boîte d'air englobant la géométrie (Fig.1.2).

Pour valider et évaluer notre nouvel outil, nous avons comparé deux calculs: Le premier, réalisé avec un maillage entièrement libre et un autre maillé en éléments mixtes. En fait, nous avons conservé le même maillage pour la boîte d'air (en dehors du circuit magnétique et de la bobine, mais les volumes massiques sont maillés tout d'abord en tétraèdres puis en éléments réguliers (briques). L'entrefer n'a pas subi de traitement particulier.

La formulation utilisée est de type magnétostatique tridimensionnelle. Le potentiel vecteur $\vec{A}$ est calculé en tout point de l'espace à partir des courants imposés dans la bobine d'excitation du contacteur.

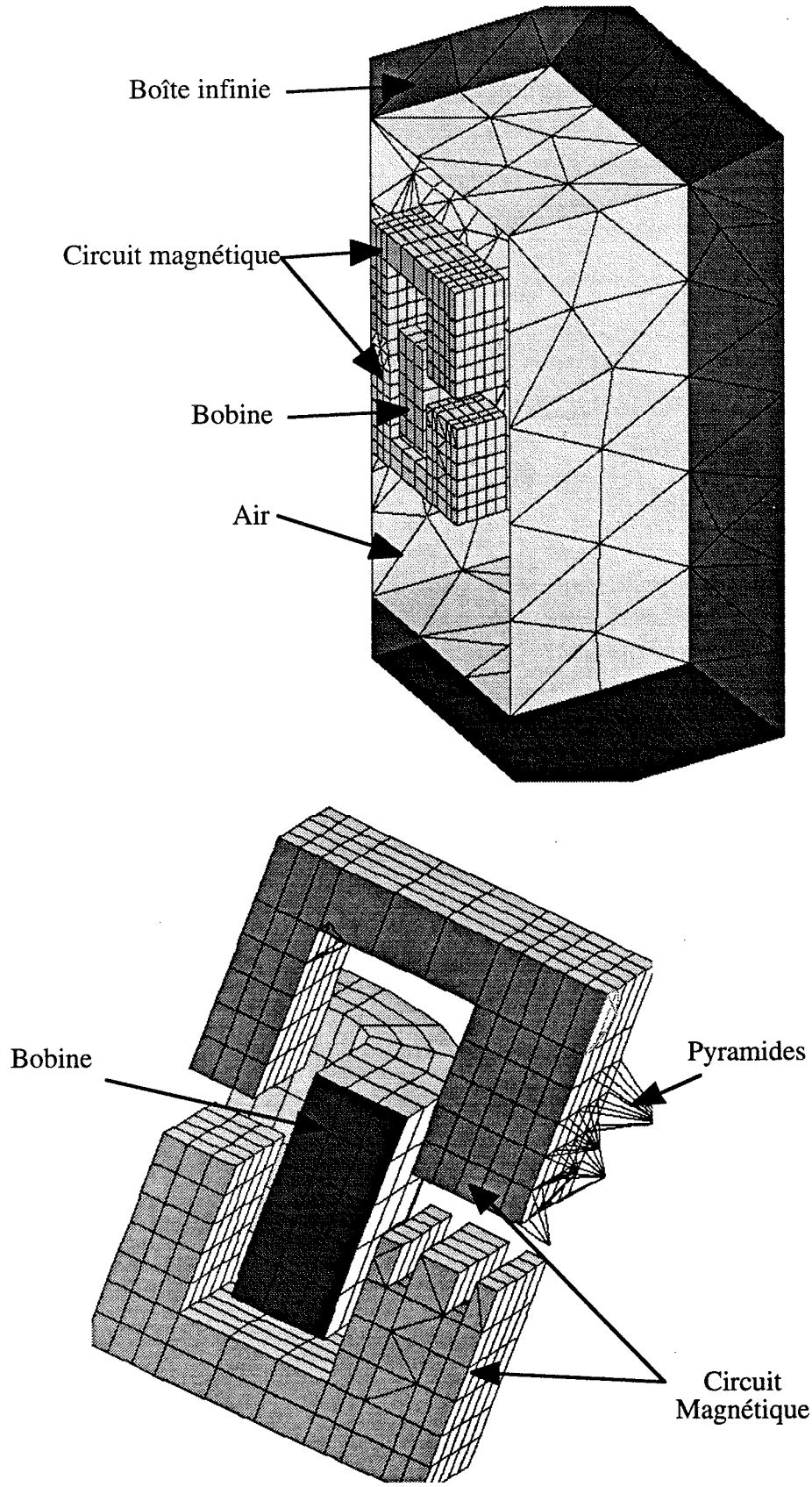


Fig.1.2: Maillage du quart de bobine et de circuit magnétique

Le calcul de la force exercée sur le circuit magnétique est basé sur le principe des travaux virtuels [COULOMB-84]. La courbe suivante (Fig. 2.1) montre la comparaison des forces calculées et mesurées.

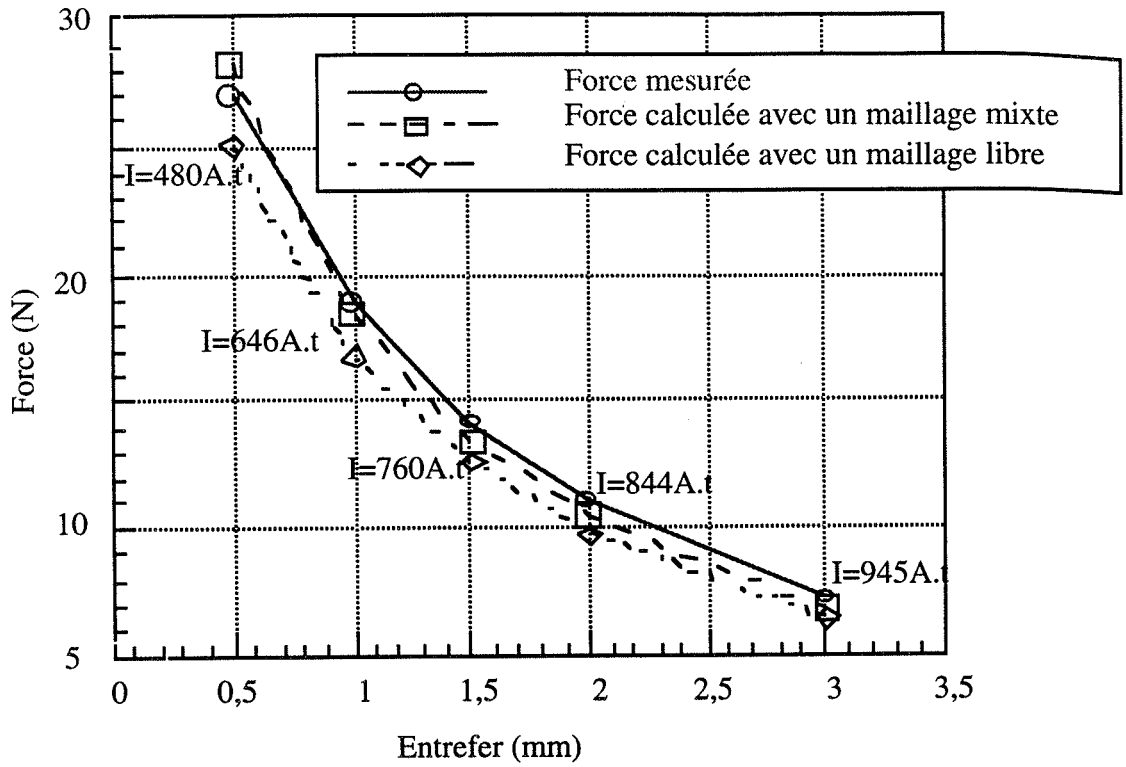


Fig.2.1: Comparaison du calcul de la force- Maillage mixte et maillage libre comparés aux mesures

Nous avons étudié l'évolution de la force appliquée au circuit magnétique (μ_r=1000) comme fonction de deux paramètres: L'épaisseur de l'entrefer et le courant dans la bobine. On peut noter que nous avons simplifié largement le problème en supposant que le circuit magnétique a une caractéristique linéaire (perméabilité constante)..

On peut vérifier sur la courbe précédente que les résultats sont plus précis quand on utilise des briques. Cela est dû au fait que ces dernières suivent rigoureusement le gradient de la variable d'état $\vec{A}$, potentiel vecteur magnétique, dans les secteurs droits du contacteur.

La figure suivante (Fig.2.2) montre l'allure de l'induction $\vec{B}$, ainsi que le courant dans la bobine.

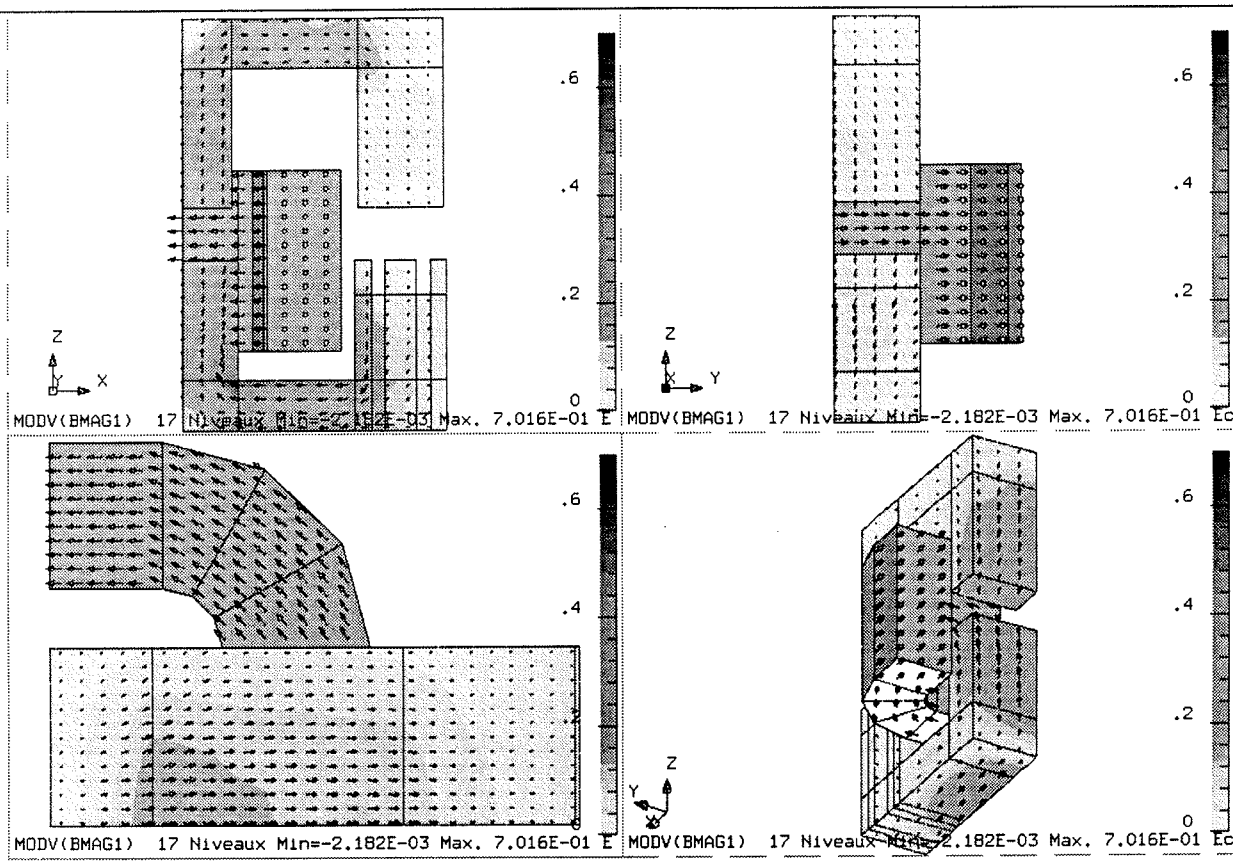


Fig.2.2: Visualisation de l'induction et du courant dans la bobine du contacteur

La table suivante (Fig.3) montre que le maillage mixte est moins coûteux en nombre de noeuds que le maillage brique. De plus, on constate un gain important en nombre d'itérations *ICCG* (gradient conjugué) au niveau de la résolution du système linéaire.

Courant dans la bobine (A.t)	1050	1007	945	844	760	646	480
Entrefer (mm)	5	4	3	2	1.5	1	0.5
Nombre de noeuds avec le maillage mixte	8948	8944	8917	8506	8860	8859	9027
Nombre d' itérations ICCG avec le maillage mixte	99	103	109	104	111	133	136
Nombre de noeuds avec le maillage libre	12610	12225	11521	10903	10086	9901	9865
Nombre d' itérations ICCG avec le maillage libre	143	153	152	156	150	165	203

Fig.3: Statistiques de calculs maillage mixte et maillage libre

Ce même contacteur a été modélisé par [RAIZER-94] qui utilise un algorithme adaptatif qui raffine un maillage libre de type Delaunay entièrement tétraédrique. Les éléments utilisés sont d'ordre deux (p=2). Nous comparons nos résultats avec les siens (raffinement de type h) dans la table suivante (Fig.4):

	Force (N)	Erreur (%)
Maillage initial (p=2) tétraèdres 2282 Noeuds	7.48	32
Raffinement h-type tétraèdres (p=2) 9005 Noeuds [10]	10.65	3.1
Maillage mixte 8506 Noeuds (p=2)	10.48	4.7
Mesure entrefer = 2mm, NI=844 A.t	11.00	

Fig.4: Comparaison avec un maillage adaptatif

On observe que nos résultats sont comparables avec les siens, alors qu'ils ne nécessitent qu'un calcul. Nous constatons que le maillage mixte donne d'excellents résultats.

V-3 Calcul du chauffage par induction: Trempe superficielle d'une roue dentée

L'exemple suivant est issu de l'industrie automobile, et plus précisément d'une boîte de vitesse. Pour traiter en surface, dans le but de durcir des dentures d'engrenage, un des moyens de modification locale des caractéristiques physiques du matériau est la trempe superficielle. On utilise alors un dispositif de chauffage par induction: Il est constitué d'un inducteur (Fig.5) enroulé autour du dispositif à traiter, ici une roue dentée dont on veut modifier les caractéristiques mécaniques en faisant de la trempe superficielle.

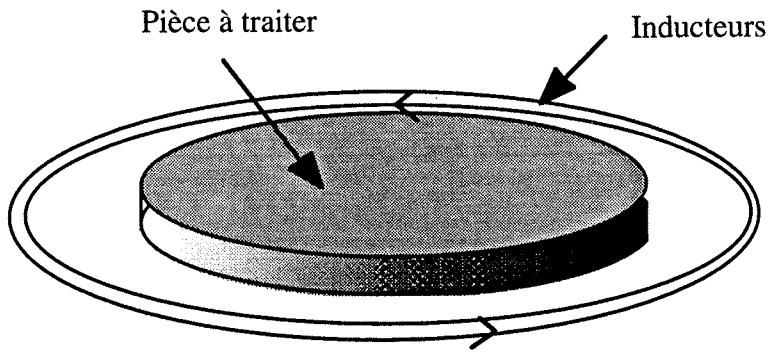


Fig.5: Principe du chauffage par induction

Les traitements thermiques par induction sont en général complexes, en raison de la géométrie de la pièce à traiter et de celle de l'inducteur. La méthode des éléments finis associés à un "bon maillage", permet d'étudier la répartition de puissance au niveau des dentures.

La fréquence du courant dans l'inducteur est de 200 kHz et il provoque des courants induits dans la partie métallique. Ces courants circulent dans le sens opposé au courant des inducteurs pour s'opposer à la pénétration du champ magnétique dans la pièce.

La figure suivante (Fig.6) montre la géométrie et le maillage utilisés pour calculer la puissance reçue par les dentures. Par symétrie et périodicité des dentures, on peut représenter un douzième de la géométrie.

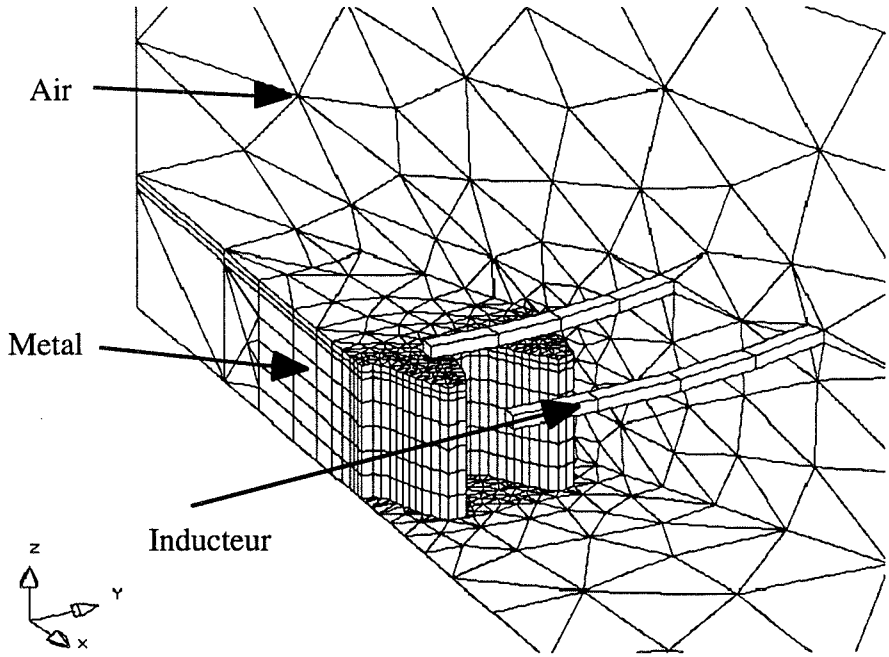


Fig.6: Maillage du douzième de la pièce chauffée

Cet exemple, résolu en formulation A-V magnétodynamique est relativement coûteux à cause des quatre inconnues complexes par noeud (*i.e.* huits inconnues réelles). De plus, la précision de la solution est très sensible au maillage dans l'épaisseur de peau, où les courants induits sont créés. La figure 6 montre la discrétisation du conducteur, de l'air et de l'inducteur: L'air est maillé en tétraèdres (maillage libre), l'inducteur en hexaèdres et la denture en prismes, en densifiant le maillage au niveau de l'épaisseur de peau.

La figure suivante (Fig.7) montre un grossissement de l'épaisseur de peau de la denture ainsi que l'allure des lignes équidensitées de courant calculées dans le métal.

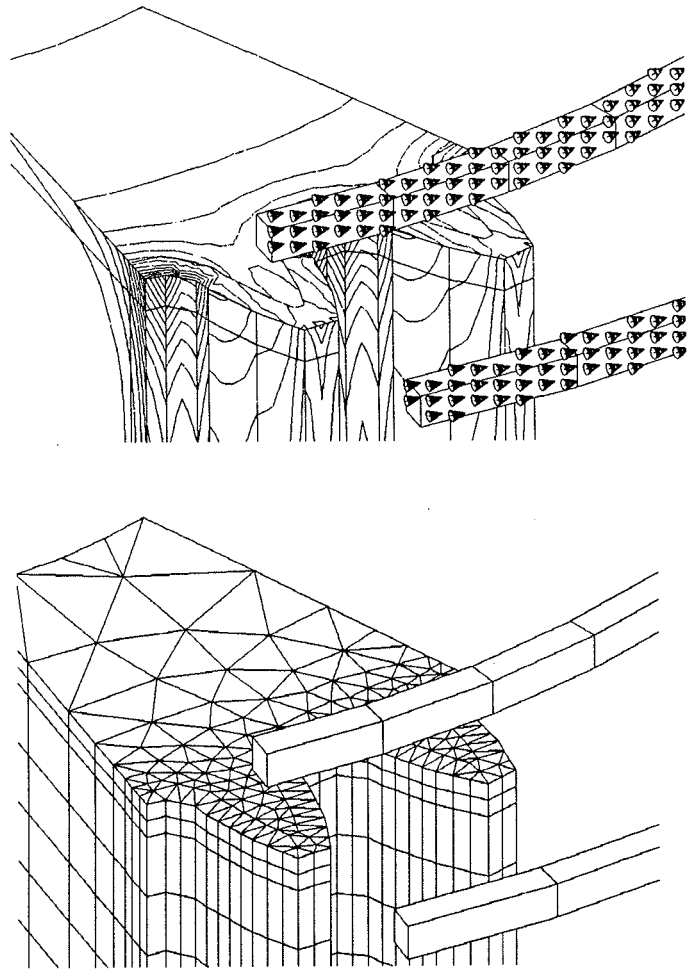


Fig.7: Densité de courant et maillage dans les dents

Le problème en maillage mixte a pu être résolu plus rapidement à cause d'un nombre de degré de liberté moins important qu'un maillage complètement libre en tétraèdres si l'on veut avoir un bon maillage, c'est à dire suffisamment d'éléments dans l'épaisseur de peau. Le maillage utilisé est du deuxième ordre.

	Maillage libre	**Maillage mixte**
Nombre de variables nodales	36540	21414
Nombre d'équations	34101	19559
Longueur de la plus courte ligne	9	7
Longueur de la plus grande ligne	407	439
Moyenne des longueurs des lignes	91	113

Fig.8: Comparaison des statistiques de résolution

La table de la figure précédente (Fig.8) compare des statistiques de la résolution en maillage libre contre la résolution en maillage mixte. On peut remarquer que le nombre de degré de liberté est plus petit pour un maillage mixte. Cependant, la longueur de ligne moyenne de la matrice du système

est plus importante avec le maillage mixte. Cela est dû à la connectivité* des éléments finis et à la numérotation utilisée.

Si l'on examine les résultats obtenus (Fig.7), sur la roue dentée, on constate une non-uniformité de répartition de la densité de courant induit. En effet, le courant a tendance à court-cicuiter les sommets des dents et à se concentrer au niveau des creux des dents. Ce résultat est tout à fait différent de la modélisation bidimensionnelle et est corroboré par l'expérience.

* Au sens ou un noeud d'un maillage triangle est relié à six noeuds dans le cas d'un maillage régulier (largeur de bande égale à sept) alors que dans le cas d'un maillage rectangulaire, un noeud est relié à huit noeuds (largeur de bande égale à neuf), dans le cas d'une numérotation optimale.

V-4 Plaques métalliques autour d'une bobine

Après avoir traité du problème d'anisotropie de la solution, le deuxième problème caractéristique des difficultés de maillage est le problème de l'effet d'échelle.

On rencontre cette dernière difficulté lorsque les dimensions caractéristiques de l'objet étudié présente de grosses différences. Le problème suivant est évoqué dans [COULOMB-96], et il traite du calcul de champ dans un dispositif présentant un très faible entrefer et des plaques du circuit magnétique très fines. Il est présenté comme *TEAM workshop problem 13* dans [NAKATA-92].

Ce test a permis la validation des éléments d'arêtes pyramides [COULOMB-96]. L'intérêt de ce test provient du fait que l'on dispose de mesures permettant de comparer la solution calculée aux mesures.

La géométrie du problème étudié est montrée sur la figure suivante: Une bobine d'excitation est placée entre deux circuits magnétiques en U et une plaque centrale dans le but de créer un champ typiquement tridimensionnel canalisé par le circuit magnétique.

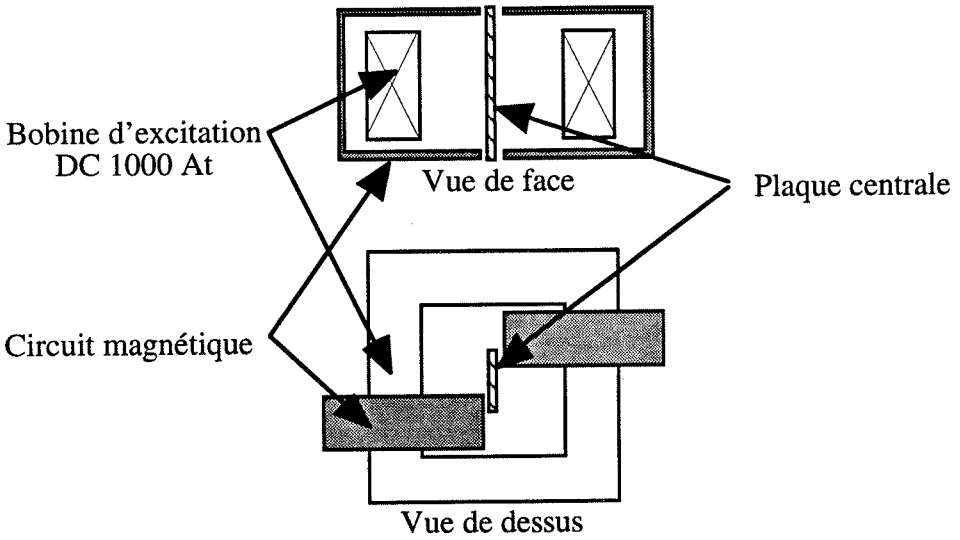
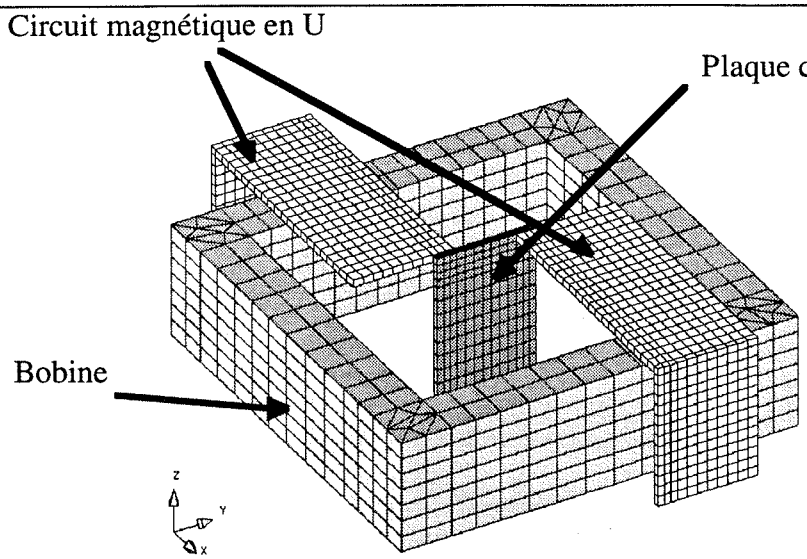


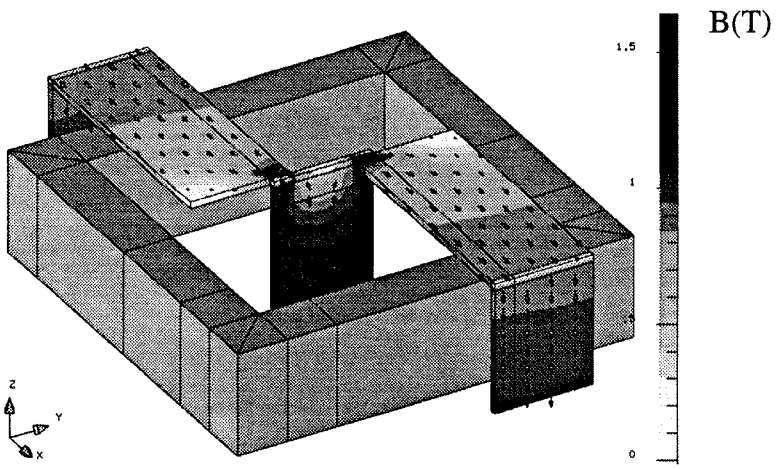
Fig.9: Géométrie du dispositif

La figure suivante (Fig.9) montre la moitié de la géométrie maillée et étudiée que l'on a simplifiée grâce à une symétrie selon le plan (Oxy). L'entrefer entre les circuits magnétiques est de l'ordre du dixième de centimètre, l'épaisseur des plaques est de 3,2 mm alors que la bobine a un coté de longueur égal à 200 mm. On a donc un effet d'échelle de l'ordre du millier.

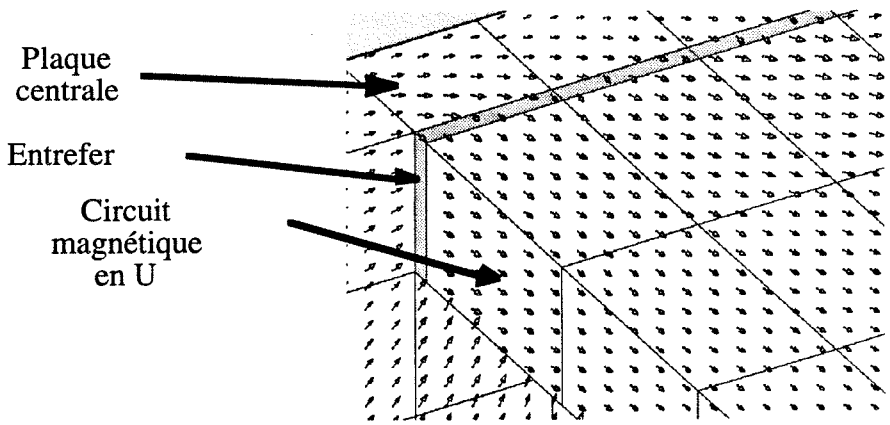
En exploitant une symétrie du problème, on peut se restreindre au calcul du domaine suivant (Fig.10).



Maillage de la moitié du dispositif



Calcul du champ dans le circuit magnétique



Zoom sur l'entrefer et visualisation du vecteur champ magnétique à proximité de l'entrefer

Fig.10: Bobine et circuit magnétique présentant un faible entrefer , maillage et résultats du calcul

En ce qui concerne l'anisotropie du problème, on sait que les courants dans la bobine sont perpendiculaires à sa section et que le champ magnétique B est aussi normal à la section du circuit magnétique.

La bobine de section carrée est parcourue par un courant de 1000 At. Dans les deux circuits magnétiques et au niveau de la plaque centrale, on calcule le champ B. La figure 10 représente le module du champ dans le circuit magnétique ainsi que sa direction.

Dans le cas de cette application, on a maillé les pièces massives en maillage réglé, ainsi que l'entrefer entre le circuit magnétique en U et la plaque centrale. Le reste, c'est à dire la boite d'air autour du dispositif a été maillé en libre par une méthode de type Delaunay. Le raccord a été réalisé par une couche d'éléments pyramides à l'interface métal/air. On a alors: 927 hexaèdres, 160 prismes, 8840 tétraèdres et 400 pyramides.

On peut noter que l'on a généré une couche d'éléments hexaédriques au niveau de l'entrefer du circuit magnétique (Fig. 10). Cette figure montre aussi la forte anisotropie du problème où les vecteurs champ magnétique sont normaux à la section du circuit magnétique et à la section de la plaque centrale.

Les résultats obtenus avec un maillage mixte ont été comparés avec un maillage complètement tétraédrique (18760 tétraèdres). Dans les deux cas, on a résolu le problème en utilisant des éléments d'arête au premier ordre et au second ordre incomplet.

Tout d'abord, on a vérifié que les éléments mélangés marchaient aussi bien que les éléments standards classiques tétraédriques. En d'autres termes, le raccord réalisé avec des éléments pyramides n'affecte pas la qualité globale de la solution.

Ensuite, les caractéristiques numériques du système linéaire (nombre de degrés de liberté, nombre de termes non nuls, nombre d'itérations *ICCG*) dépendent principalement de l'élément dominant du maillage (tétraèdres et/ou hexaèdres). Autrement dit, les éléments pyramides utilisés en transition n'affectent pas la qualité globale de la solution et leur influence sur le système linéaire est négligeable.

Enfin, la qualité locale de la solution au niveau de la zone de transition entre hexaèdres et tétraèdres n'est pas affectée par les pyramides. La figure suivante (Fig.11) montre les résultats obtenus avec deux maillages: mixtes (mix) et tétraèdres (td) au premier ordre incomplet (1) et au deuxième ordre incomplet (2).

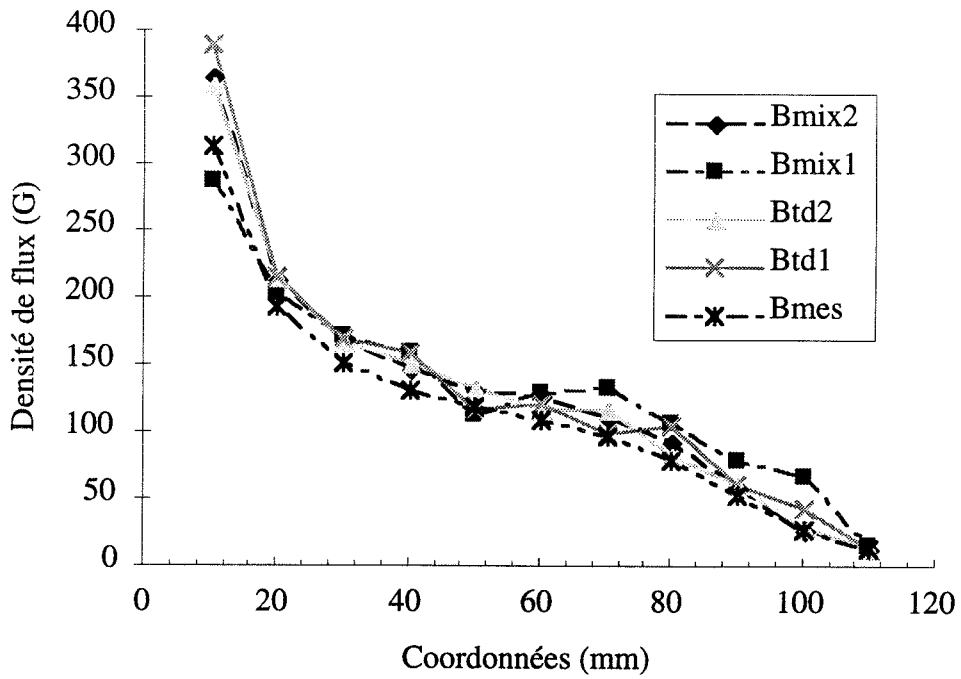


Fig.11: Densité de champ B le long de la ligne ab pour un maillage en tétraèdres et un maillage mixte au premier ordre incomplet et au second ordre incomplet éléments d'arête

Les résultats obtenus avec des tétraèdres et ceux obtenus avec des pyramides sont superposables en nécessitant moins de temps de calcul.

V-5 Ralentisseur électromagnétique

Cet exemple est issu des travaux de recherche de [LABBE-96], qui a utilisé notre outil de maillage pour modéliser et étudier des phénomènes couplés (magnétique et thermique) au niveau des ralentisseurs électromagnétiques. Ce travail, financé par TELMA, division ralentisseur du groupe LABINAL, a permis de caractériser un ralentisseur tridimensionnel de type *Focal*. Ils sont installés sur des véhicules de poids lourds ou autocars.

Le principe de fonctionnement des ralentisseurs électromagnétiques est basé sur la loi de Lenz et les courants induits. Lorsque le conducteur freine, il fait circuler un courant plus ou moins fort dans la bobine, issu de la batterie du véhicule. Le courant dans les bobines crée un champ magnétique dans l'induit qui est alors en rotation par rapport au châssis et aux bobines qui sont fixes. L'induit lié à l'arbre de transmission, en rotation devient alors le siège de courants induits, et donc soumis à un couple: c'est un couple de freinage, conformément à la loi de Lenz, selon laquelle les forces créées ont leurs effets qui s'opposent aux phénomènes qui les ont engendrées.

La figure suivante (Fig.12) montre la coupe simplifiée d'un ralentisseur électromagnétique ainsi que la disposition des pôles et des bobines de l'arbre de transmission.

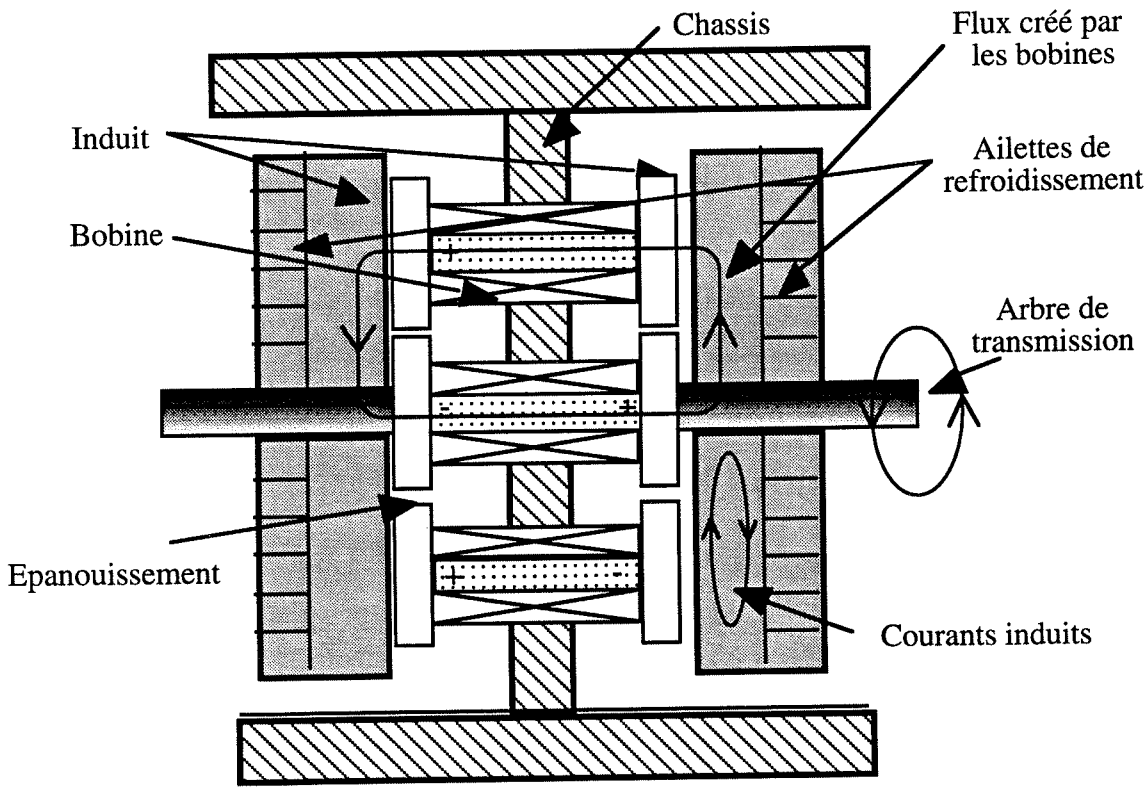


Fig.12: Schéma de principe en coupe du ralentisseur

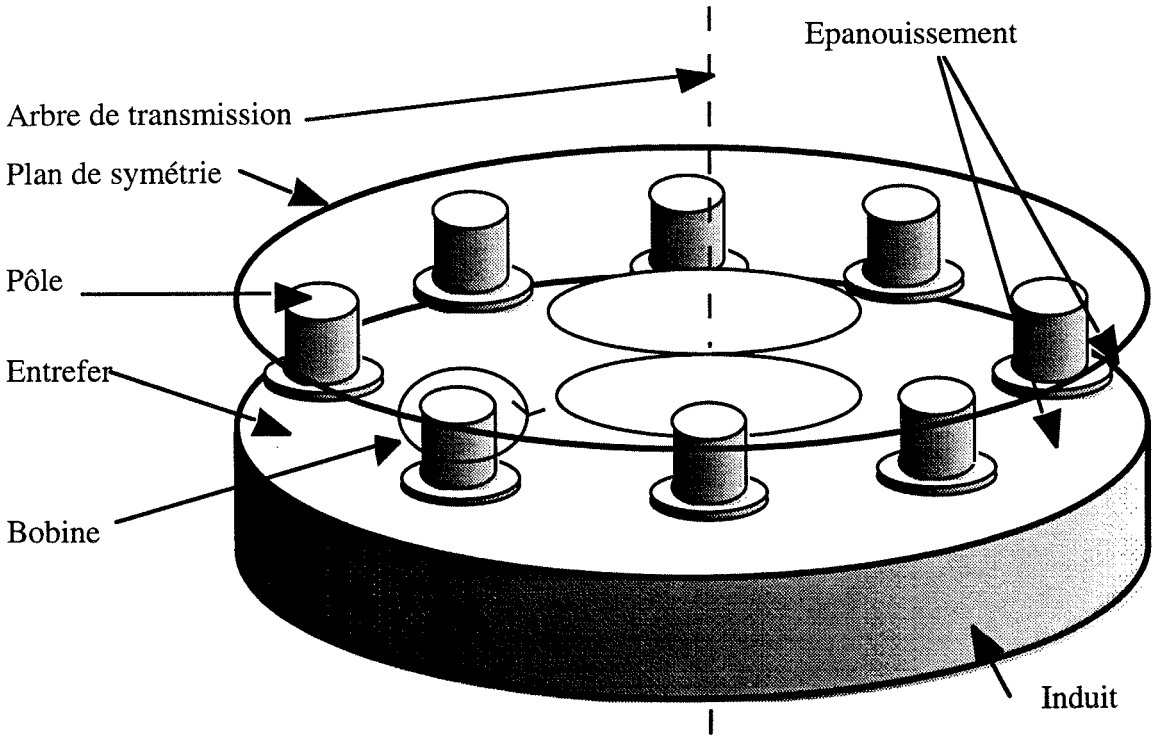


Fig.13: Schéma de principe 3D du ralentisseur

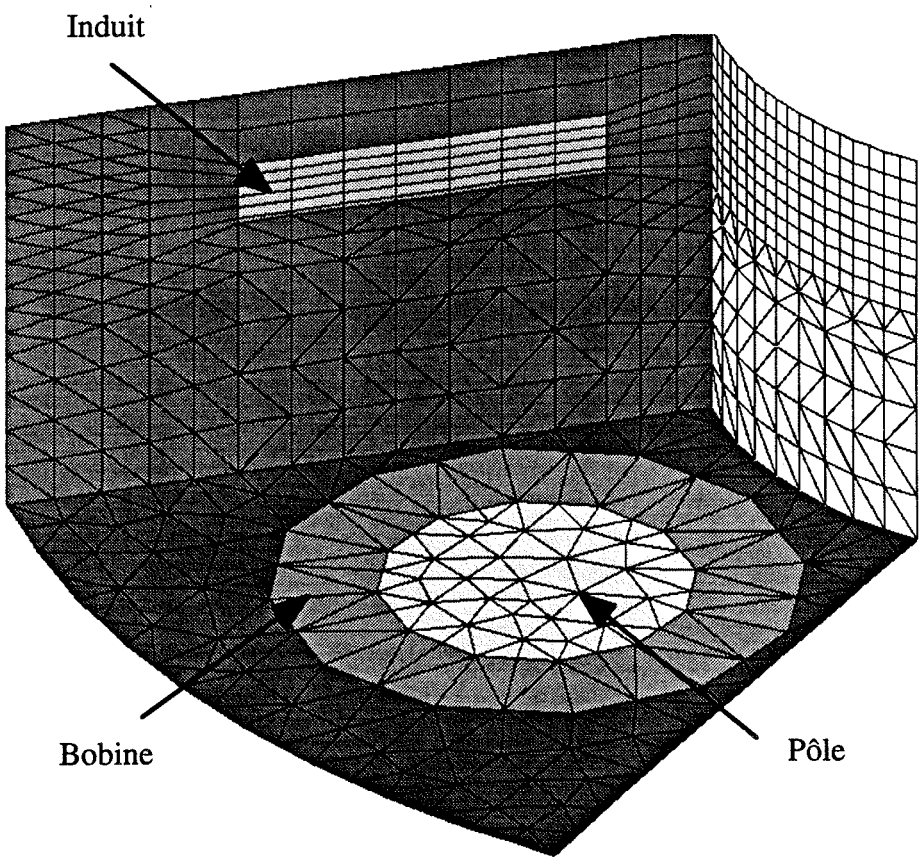


Fig.14: Maillage global du seizième de ralentisseur

Sur un cercle centré, sont disposées huits bobines autour des huit pôles. Elles sont réparties régulièrement autour de l'axe de rotation de l'arbre de transmission.

Pour l'analyse éléments finis, on simplifie le modèle en supprimant les ailettes et en ne traitant qu'un seizième de géométrie.

Le maillage réalisé doit être un maillage mixte. En effet, dans l'induit en mouvement, un terme de transport (décentrage) doit être pris en compte ([MARECHAL-92], [LABBE-96]), et seuls les éléments briques ou hexaèdres sont adaptés au problème. L'utilisation des hexaèdres est donc nécessaire à cause de la nature physique du problème.

Alors que l'induit, mobile, est maillé en brique, le reste du dispositif est discrétisé en tétraèdres.

Le maillage comprend 9202 éléments volumiques, 3611 noeuds au premier ordre et 19333 noeuds au deuxième ordre.

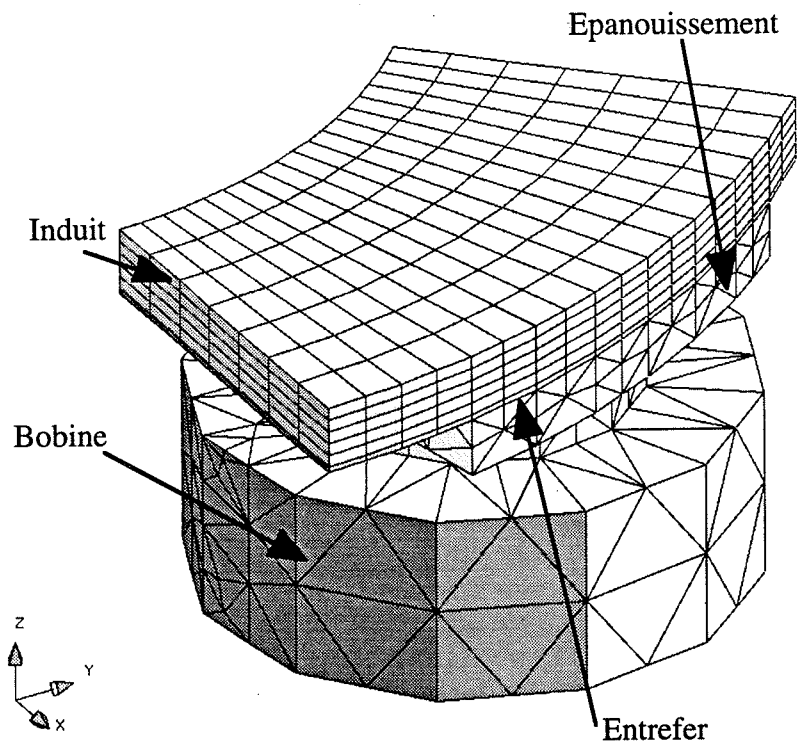


Fig.15: Géométrie du ralentisseur

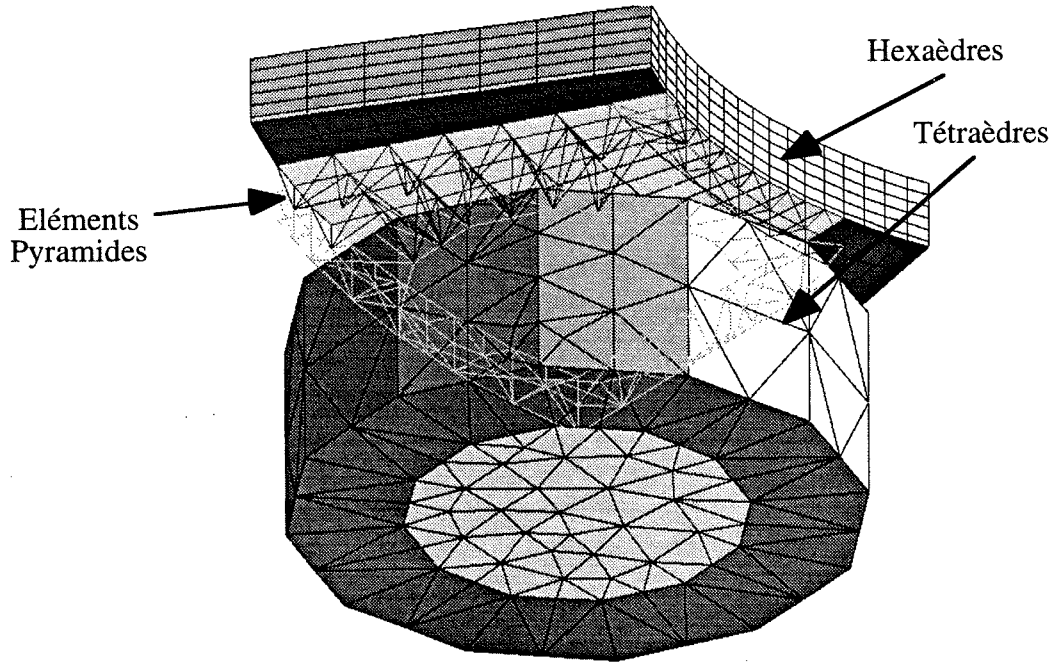


Fig.16: Maillage du ralentisseur et pyramides de raccordement

La figure (Fig.16) met en évidence les éléments pyramides qui raccordent fortement les éléments hexaèdres de l'induit avec les tétraèdres de l'air environnant.

V-6 Application électromécanique: Le coupleur de Kumada

Un cas test pour notre nouveau mailleur est lié au moteur ultrasonore étudié par R. Le Letty [LE LETTY-94]: Le coupleur de Kumada.

Cette pièce mécanique est à la base du moteur de Kumada. Elle convertit une vibration longitudinale en une vibration de torsion d'une poutre.

Le mouvement longitudinal est obtenu par une structure piézo-électrique de type Langevin. L'une des extrémités est munie d'un coupleur de torsion. Celui-ci, représenté figure 17.1, possède une gouttière qui privilégie un diamètre de flexion nodale, quand il est soumis à une vibration dans la direction axiale. Un angle α, entre cette gouttière et la poutre est responsable de cette flexion.

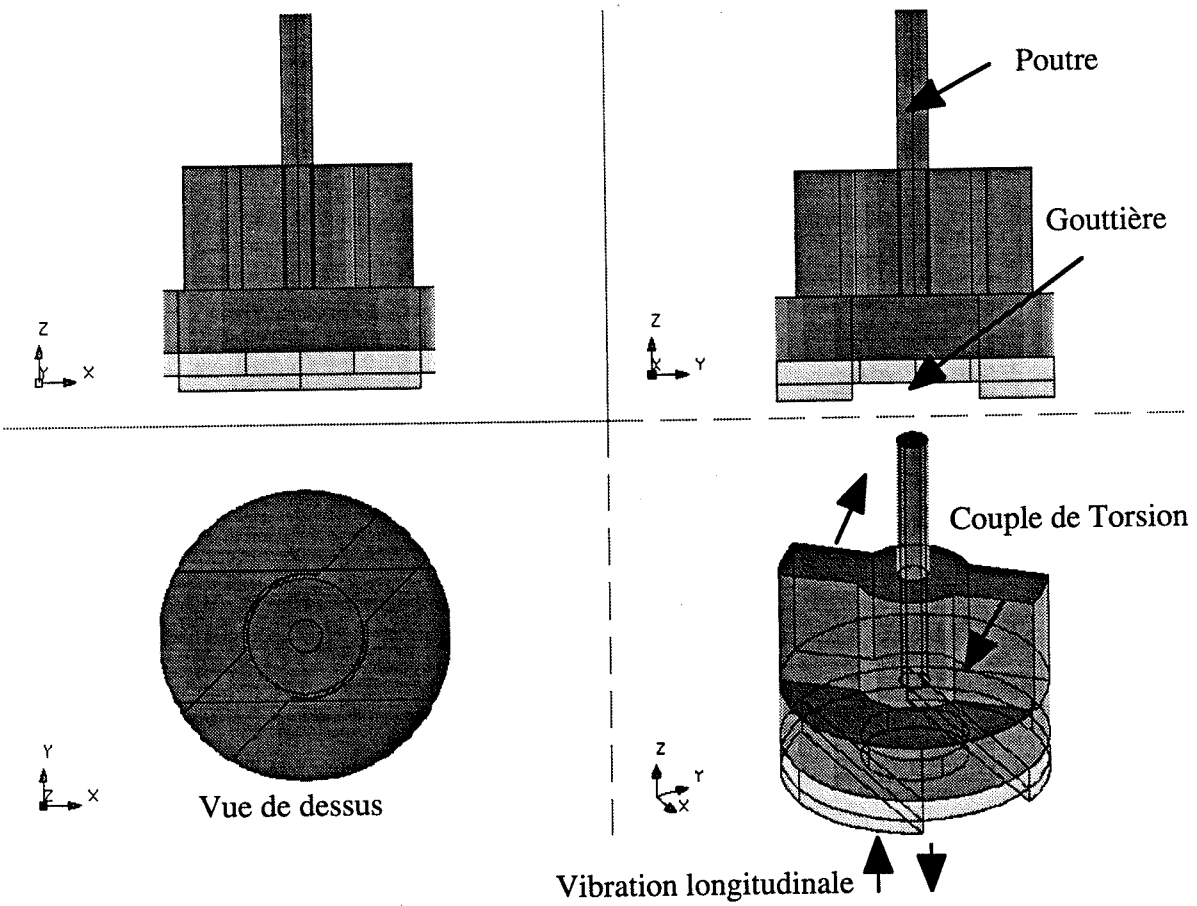


Fig.17.1: Géométrie du coupleur de Kumada

En principe, ce moteur ne permet qu'un sens de rotation (de la gouttière vers la poutre), et ne nécessite en contrepartie qu'une voie d'excitation électrique. Cependant, l'utilisation d'un second mode de vibration permet parfois d'offrir un second sens de rotation, aux performances inférieures à celles obtenues avec le mode principal.

C'est une pièce réalisée en deux parties (Fig.17.2): L'une contenant une gouttière (partie inférieure) maillée en prisme, l'autre contenant une poutre (partie supérieure), maillée en prisme, et avec une zone de raccord en tétraèdres.

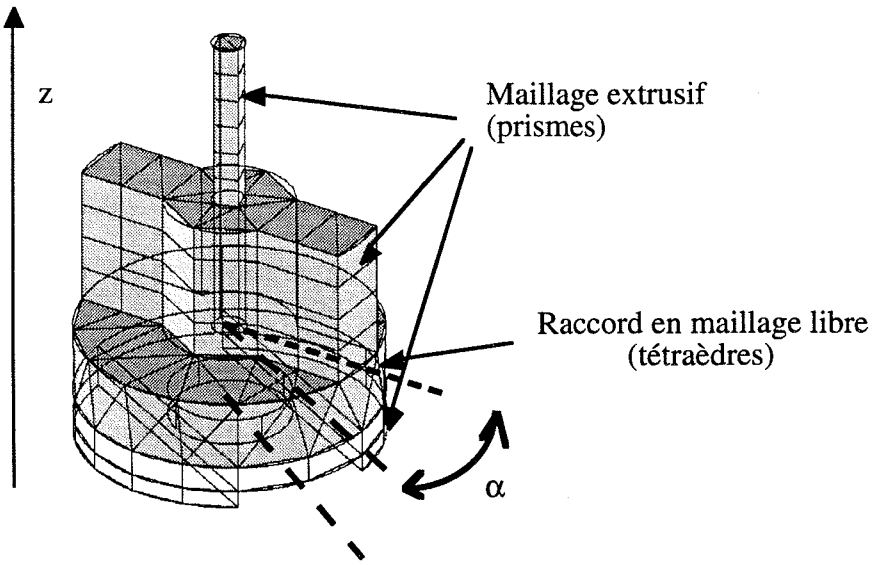
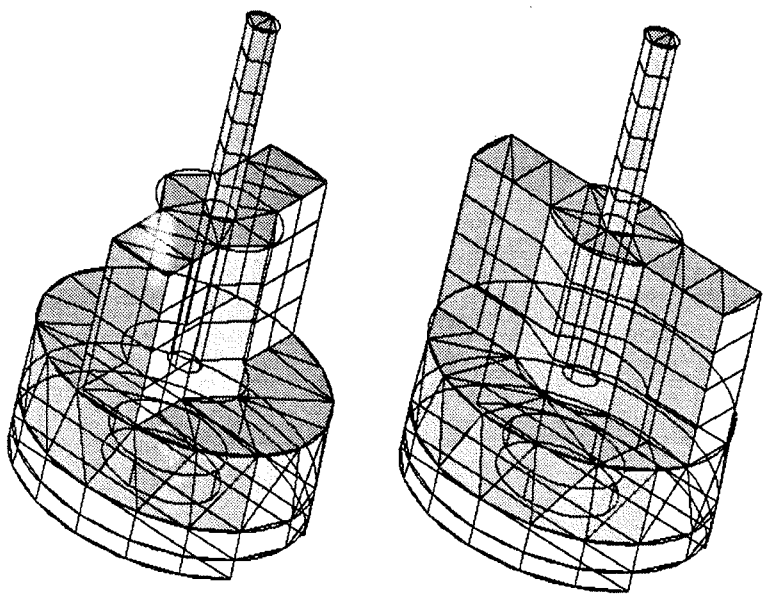


Fig.17.2: Maillage et paramétrage du coupleur de Kumada

Sur le plan du maillage et de la modélisation, il est intéressant de pouvoir faire varier l'angle α que fait la poutre avec la gouttière. Il existe en effet un angle optimum qui couple au mieux le mode de torsion de poutre à partir d'une excitation longitudinale (suivant l'axe z) de la base dans laquelle se situe la gouttière. A titre d'exemple, la figure suivante (Fig.18) montre des maillages pour α=0° et α=90°. Grâce à l'outil de maillage proposé, il est possible de mailler en prismes et en tétraèdres de manière automatique pour chaque valeur du paramètre α.



a) angle $\alpha = 90°$ b) angle $\alpha = 0°$

Fig.18: Le coupleur de Kumada pour deux positions α extrêmes

Bien qu'il ne s'agisse que d'une toute petite partie d'un maillage complet de moteur, il est assez représentatif des problèmes rencontrés.

V-7 Conclusion

Nous avons présenté plusieurs applications réalisées en collaboration avec d'autres doctorants ou des industriels: Un contacteur conçu par la société Télémécanique (groupe Schneider), un calcul de chauffage par induction (application de l'industrie automobile), un problème international IEEE de test et d'évaluation de logiciels de modélisation, un maillage de ralentisseur TELMA (société Labinal), et enfin un coupleur de Kumada.

D'autres applications ont été traitées et ont fait l'objet de publications:

- [NEKHOUL-96] a modélisé des prises de mise à la terre pour EDF en utilisant notre mailleur. La principale difficulté surmontée est l'effet d'échelle.

- [SPORNIC-95] a utilisé au cours de son DEA notre mailleur lors de la caractérisation d'un banc de mesure de champ. Notre outil lui a permis de décrire son problème éléments finis de manière satisfaisante.

- [ADENOT-96] a utilisé au cours de son projet de thèse notre mailleur pour l'étude tridimensionnelle d'un micro moteur électrique en collaboration avec le LETI (Laboratoire d'Électronique de Technologie et d'Instrumentation). D'autres applications ont été réalisées avec la SAGEM.

- [MIGLIANO-96] a étudié et construit une structure périodique et magnétique utilisée pour générer un champ magnétique variant de manière sinusoïdale dans le temps. Cet appareil est utilisé dans l'onduleur d'un laser électron libre infra rouge (IR-FEL)* .

Des comparaisons ont été faites entre les différents types de maillage avec [FLUX3D], et on a constaté des gains en nombre d'éléments et en qualité de solution en utilisant notre mailleur mixte. Cela est dû principalement au fait qu'une information a priori sur la solution est transmise par le concepteur C.A.O. via le type de maillage choisi sur chaque domaine physique. Ce nouvel outil de maillage a de nombreuses applications dans de multiples domaines et disciplines.

Le dernier exemple traité, le coupleur de Kumada, met en valeur l'aspect paramétrage du préprocesseur mixte. En paramétrant la géométrie d'un angle α et en maillant en utilisant un mailleur assisté pour les parties fixes et inchangées, raccordées par un maillage libre en tétraèdres, on a réalisé plusieurs maillages, dépendant du paramètre, et cela en opérant de manière "presse bouton".

Ce nouvel outil de conception permettant de mailler des géométries paramétrées est très prometteur et commence à être utilisé par les concepteurs C.A.O. au sein du laboratoire et dans l'industrie. En effet, l'utilisateur peut choisir et contrôler son maillage de manière plus facile et par conséquent ajouter des informations et de la connaissance dans son maillage. De nombreuses applications peuvent être traitées grâce à ce nouvel outil: Des appareillages électriques aux transducteurs électroacoustiques Sonars et problèmes acoustiques.

* Infra-Red Free-Electron Laser.

Chapitre VI

Application aux transducteurs électro-acoustiques

Les transducteurs électro-acoustiques et plus généralement les applications des matériaux actifs (matériaux piézoélectriques, magnétostrictifs), génèrent, pour leur conception, des besoins nouveaux et spécifiques en terme de maillage. Le mailleur mixte s'adresse précisément a ces besoins.

Les transducteurs électro-acoustiques utilisés par la Marine pour la détection sous marine (transducteurs sonars) constituent historiquement la première application des matériaux piézoactifs. Pour des raisons stratégiques, cette application a motivé pendant longtemps des efforts de recherche

considérables notamment sur le plan technologique. C'est dans ce contexte qu'ont été développées les céramiques piezoélectriques de type PZT en France et à l'étranger dans les années 60, et qu'ont été mis au point aux USA les alliages magnétostrictifs de type Terfenol-D dans les années 80 [BOUCHER-88], [CLAEYSSEN-89].

Sur le plan de la modélisation, ces applications ont ainsi motivé en France à partir de 1980, le développement du code de calcul ATILA basé sur la méthode des éléments finis, par la Laboratoire d'Acoustique de l'ISEN, pour le compte de la Direction des Constructions Navales [DECARPIGNY-90]. A lui tout seul, le code ATILA suffisait pour couvrir les besoins des modélisations des concepteurs de transducteurs. La majorité des transducteurs opérationnels est constitué encore actuellement de transducteurs de formes assez simples (transducteurs Tonpilz ou Janus, anneaux *free-flooded*) susceptibles de pouvoir être modélisés en 2D en symétrie axiale ou au pire en 3D avec peu d'éléments. Lors d'une étude réalisée à l'aide du logiciel ATILA, le maillage d'une telle structure pouvait être fait aisément sans outil de maillage assistant l'utilisateur.

Depuis une dizaine d'année [BOUCHER-88], le renouveau de sonar actif engendre des besoins nouveaux en terme de sources sonores basses fréquences, qui se traduisent par des besoins nouveaux en conception de transducteurs:

- Pour obtenir des transducteurs compacts en basse fréquence, des concepts de transducteurs, beaucoup plus complexes doivent être mis en oeuvre. Parmi ces concepts, il faut citer le cas des Flextenseurs, faisant appel à des mécanismes d'amplifications mécaniques, ou les transducteurs Helmholtz, exploitant la résonancee d'une cavité fluide en plus du mode de structure. Ces transducteurs impliquent des maillages bidimensionnels complexes a cause de la géométrie de la structure, du fluide environnant et éventuellement du fluide de la cavité qui épouse le complémentaire de la structure.

- L'autre voie étudiée pour obtenir des transducteurs compacts en basse fréquence consiste à utiliser les alliages magnétostrictifs de type Terfenol-D pour profiter de leur élasticité et de leur densité d'énergie supérieure à celle des céramiques PZT. De tels matériaux actifs nécessitent, contrairement aux piezoélectriques, le maillage de la bobine d'excitation, du circuit magnétique et de l'air entourant le matériau actif, ce qui rend aussi les maillages complexes.

- À cause des effets accrus en basse fréquence des interactions acoustiques entre les transducteurs constituant l'antenne sonar d'émission, il devient de plus en plus souhaitable de modéliser non pas le transducteur seul mais l'antenne sonar. Sur le plan de la taille informatique du système à résoudre, une telle modélisation bien qu'encore lourde dans les cas où le domaine ne peut être réduit par symétrie, passe à l'ordre du jour compte tenu des progrès rapides des puissances de calculs. Il reste encore à être capable de générer les maillages du fluide, au moins, entre les transducteurs (les méthodes d'équations intégrales de surface prenant le relais au delà).

Pour justifier encore plus l'intérêt d'un mailleur assistant fortement l'utilisateur du code ATILA dans sa démarche, il faut signaler que ATILA s'est imposé comme le logiciel de référence en matière de transducteurs sonars. Il est en effet non seulement utilisé en France sur les sites DCN concernés (Toulon, Brest) mais aussi aux USA dans la plupart des laboratoires d'acoustique sous marine de l'*US Navy* (*NUWC* New London, *NRL* Orlando, *NOSC* San Diego, *NPGS* Monterey).

Dans le cas de ces applications 'transducteurs sonars', il est souhaité de pouvoir mailler les matériaux actifs et les parties mécaniques les plus importantes avec des éléments dont les arêtes respectent les directions d'anisotropie des matériaux et les lignes d'écoulement de contraintes, tels que des hexaèdres ou des prismes. Par contre pour le reste le fluide, l'air dans les magnétostrictifs, les parties mécaniques moins importantes,...) un maillage à base de tétraèdres apparaît suffisant.

Enfin, une motivation supplémentaire est apportée par le développement récent mais très rapide des applications électromécaniques complexes des matériaux actifs: Les actionneurs amplifiés et les moteurs piézoactifs, à base de matériaux piezoélectriques ou magnétostrictifs. Dans ces applications, le besoin d'un mailleur mixte en pré processeur du logiciel ATILA apparaît également, pour les

mêmes raisons que précédemment.

La mise en oeuvre d'un tel mailleur mixte pour ATILA pose toutefois une difficulté supplémentaire à la question du maillage: Celle d'éléments finis pyramidaux dans ATILA, pour la mécanique, le fluide et les domaines magnétiques. Ce point a été traité et validé à travers l'exemple d'une poutre encastrée à une extrémité et chargée d'une masse à l'autre extrémité

Pour répondre à l'objectif de début de thèse et appliquer notre pré processeur à un problème intéressant la DCN, il a donc été nécessaire de réaliser tout d'abord quelques développements dans ATILA.

Ensuite, et de manière très succincte, nous présenterons les principaux aspects de l'acoustique sous-marine (qui vont nous intéresser lors de la caractérisation et de l'analyse du transducteur de type Janus Helmholtz magnétostrictif) et nous définirons en particulier ce qu'est un sonar actif.

Après un bref rappel de la physique de fonctionnement du transducteur sonar, nous présenterons un calcul éléments finis d'un transducteur sonar de type Janus Helmholtz magnétostrictif. La géométrie et le maillage utilisés seront issus de notre pré processeur généraliste.

VI-1 Cadre de notre travail avec ATILA

Ces développement ont eu pour principal objectif d'intégrer l'élément pyramide et de pouvoir utiliser le maillage issu de FLUX3D pour une résolution dans ATILA.

ATILA (Analyse de Transducteurs par Intégration des équations de Laplace) est un code de calcul par éléments finis spécialement développé pour permettre la modélisation de transducteurs rayonnant dans un fluide. Il peut être utilisé pour une analyse statique, modale ou harmonique de structures élastiques, piézo-électriques ou magnétostrictives.

1-1 L'élément pyramide

L'intégration de l'élément pyramide a été simplifié par la modularité du logiciel ATILA. L'élément pyramide incomplet a été implanté pour différentes formulations mécaniques ou acoustiques. Ensuite, une validation sur un cas simple dont on connaissait la solution analytique a été réalisée.

1-1-1 L'intégration au code ATILA

Pour plus d'informations techniques, on pourra se reporter au document [ZGAINSKI-96-0]. On peut cependant noter que seules les pyramides incomplètes à treize noeuds ont été implantées.

1-1-2 La validation

La validation des éléments pyramides a été effectuée notamment sur un calcul de modes propres longitudinal et de flexion d'un système de masse fixée.

Le problème étudié est un cas d'école dont on connaît une solution analytique [BLEVINS].

Nous avons étudié les modes propres d'un système constitué d'une barre a section carrée d'aluminium (AU4G) et relié à une masse en acier (Fig.1).

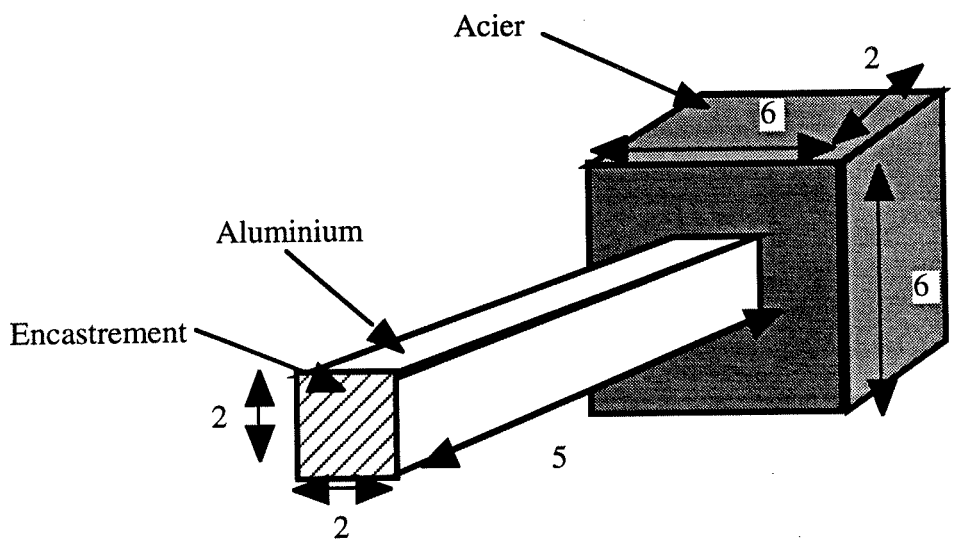


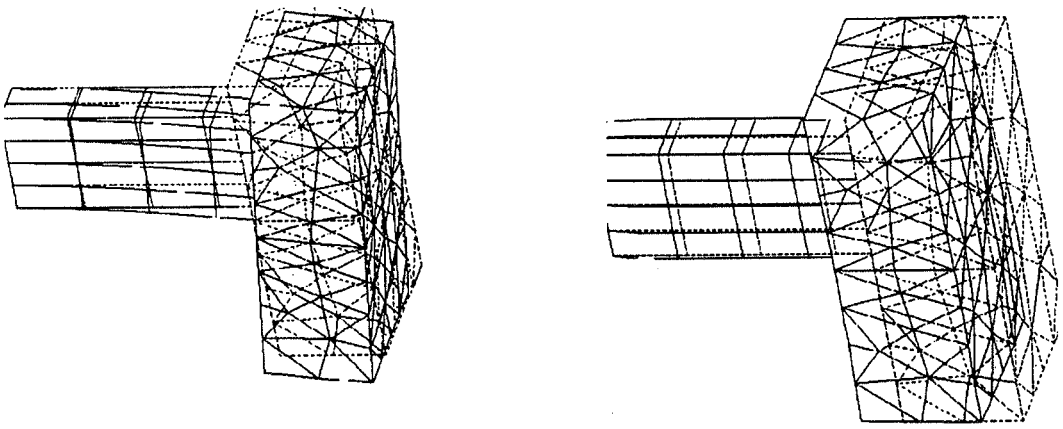
Fig.1: Géométrie du problème

Nous avons imposé des conditions aux limites de type encastrement à l'extrémité libre de la barre en aluminium et nous avons modélisé une moitié de la géométrie en jouant sur les symétries du problème.

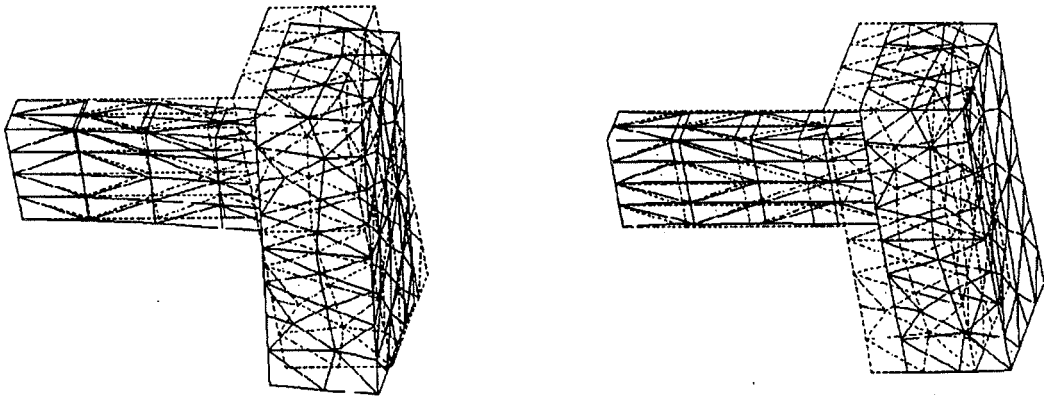
Trois configurations ont été étudiés avec ATILA sur différents maillages:

- Modal1: Tige en hexaèdres - Masse en tétraèdres.
- Modal2: Tout en tétraèdres.
- Modal3: Tout en hexaèdres.

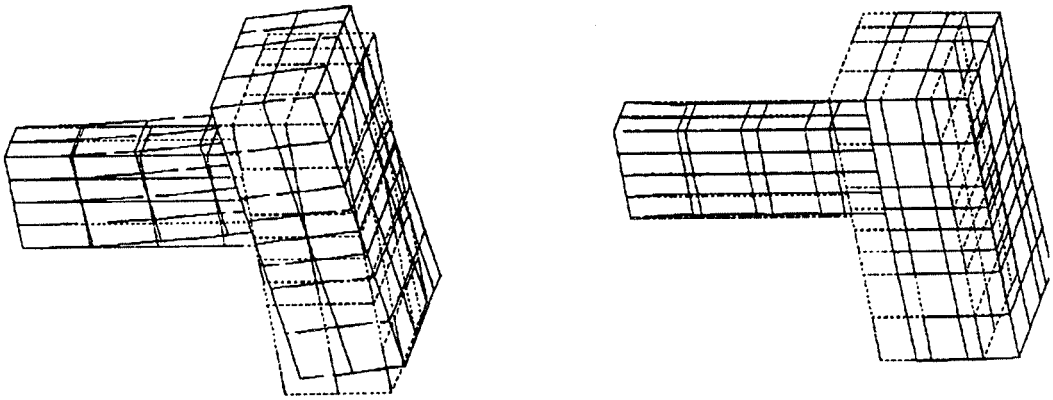
Les maillages sont visualisés sur les figures déformées suivantes (Fig.2):



Déformées de Modal1



Déformées de Modal2



Déformées de Modal3

Fig.2: Visualisation des déformées en mode de flexion et longitudinal

On peut constater que les déformées sont superposables. Pour aller plus loin, nous avons réalisé un calcul de mode propre pour chaque configuration.

Les caractéristiques des matériaux sont les suivantes (Fig.3.1):

Matériaux	Module de Young	Coefficient de Poisson	Masse volumique
AU4G	$7,14.10^{10}$ N/m^2	0,344	2780 kg/m^3
ACIER	$21,5.10^{10}$ N/m^2	0,31	7800 kg/m^3

Fig.3.1: Caractéristique des matériaux

Les résultats du calcul fournis par ATILA sont les suivants:

	Modal1 *mixte*	Modal2 *tétra*	Modal3 *hexa*
Masse de la tige en alu	$2x2,78.10^{-5}$ kg	$2x2,78.10^{-5}$ kg	$2x2,78.10^{-5}$ kg
Masse de l'acier	$3,086.10^{-4}$ kg	$3,086.10^{-4}$ kg	$3,086.10^{-4}$ kg
Mode flexion	6972,5 Hz	6968,6 Hz	6973,3 Hz
Mode longitudinal	48886,7 Hz	48833,0 Hz	48923,8 Hz
Nombre d'équations	2728	3294	1756
Largeur de bande	29 %	28 %	26 %

Fig.3.2: Calcul des modes propres, des masses, et statistiques de résolution dans les trois configurations

La largeur de bande est plus faible pour les hexaèdres à cause du nombre d'équations ou de noeuds libres qui est plus petit.

Les calculs analytiques donnent (d'après [BLEVINS]):

Mode de flexion	50027 Hz
Mode longitudinal	7093,8 Hz

Fig.3.3: Calcul analytique des modes propres

Les résultats obtenus par modélisation sont très proches de ceux obtenus par formules analytiques. Cependant, on peut remarquer que le maillage en hexaèdres complet donne une solution numérique plus proche de l'analytique avec un nombre de noeuds plus petit, et cela aussi bien en flexion qu'en longitudinal.

	Modal1 *mixte*	Modal2 *tétra*	Modal3 *hexa*
Erreur relative sur le mode de flexion	1,71 %	1,77 %	1,7 %
Erreur relative sur le mode longitudinal	2,29 %	2,38 %	2,2 %

Fig.3.4: Calcul des erreurs relatives sur les modes propres dans les trois configurations

Le comportement du maillage mixte (Modal1) est intermédiaire entre le tout hexaèdre (Modal3) et le tout tétraèdre (Modal2). L'élément pyramide donne de bons résultats en mécanique élastique.

1-2 Le couplage avec FLUX3D

Afin de pouvoir utiliser le maillage généré par FLUX3D, il est nécessaire de définir des règles de communication entre les logiciels. Dans notre cas, le transfert se fait pour l'instant par fichier (Fig.4).

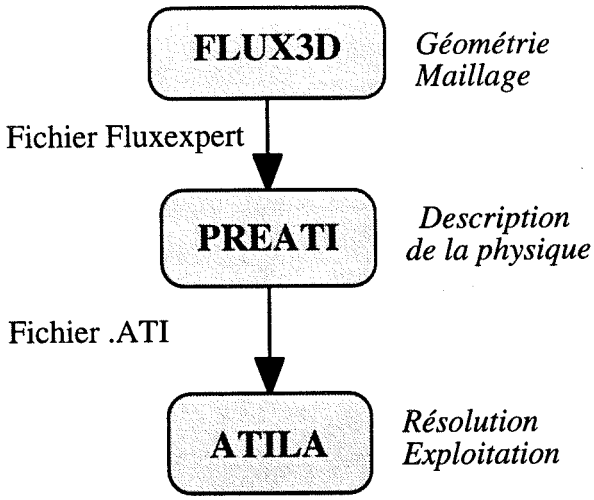


Fig.4: La chaîne logicielle utilisée

[PREATI] est un mailleur extrusif développé par N. Lhermet de Cedrat Recherche basé sur le mailleur 2D PREFLU (bidimensionnel) qui permet de mailler des structures tridimensionnelles présentant un profil extrudé.

Alors que l'utilisateur décrit sa géométrie et son maillage paramétré dans FLUX3D, les caractéristiques physiques du problème sont gérées par PREATI. Ensuite, un fichier ATILA est généré et permet alors une résolution et une exploitation par les outils d'ATILA.

A terme, il est envisageable et souhaité, de passer directement de FLUX3D à ATILA sans grands coûts de développements.

VI-2 Un peu d'acoustique sous-marine...

Cette partie, largement inspirée de [HUSSON-89], rappelle les bases de l'acoustique sous marine et défini le sonar actif.

2-1 Introduction

Le milieu marin se révèle peu propice à la propagation de la plupart des supports physiques d'information dès qu'on approche des distances importantes (plusieurs kilomètres). C'est en particulier le cas de la lumière, des faisceaux laser, des ondes électromagnétiques. Seules les ondes sonores permettent des portées de transmission appréciables. Il en résulte que, malgré les bruits et les imperfections du milieu marin, l'acoustique sous-marine est encore, et pour de nombreuses années, le moyen le plus efficace de détection de cibles immergées, en particulier, pour le domaine militaire: sous-marins, mines, torpilles. Les systèmes SONAR (SOund NAvigation and Ranging) peuvent être séparés en deux familles: les sonars passifs détectent le bruit rayonné involontairement par leur cible; les sonars actifs émettent un signal acoustique et détectent l'écho de ce signal sur la cible.

Dans le cadre de notre travail, nous focaliserons notre étude sur le sonar actif. Après avoir été délaissé quelques années, il est réapparu comme une solution attrayante en matière de détection sous-marine. Ce retour en grâce du sonar actif s'accompagne d'une tendance nouvelle pour les transducteurs électroacoustiques[BOUCHER-88], les éléments de la chaîne du sonar réalisant une conversion de l'énergie électrique en énergie acoustique.

2-2 Le sonar actif

Un sonar actif émet un signal connu, de durée limitée, et cherche à détecter l'écho renvoyé par la cible. On peut le décomposer en trois parties: l'antenne d'émission et l'électronique qui lui est associée, l'antenne de réception, et le récepteur. Les fonctions demandées au sonar actif sont les mêmes que celles demandées au sonar passif: détection, localisation, poursuite, identification des cibles.

L'énergie du signal reçu et la portée de détection du sonar étant directement proportionnelles à l'énergie du signal émis, on cherche en général à émettre un maximum de puissance acoustique dans l'eau. La conception des antennes d'émission fait largement appel aux techniques de l'électronique de puissance: une antenne moderne peut émettre quelques centaines de kilowatts acoustiques ! Cette puissance est limitée essentiellement par la technologie et les matériaux employés. Les transducteurs qui effectuent la transformation du signal électrique en signal acoustique sont des systèmes mécaniques résonnants; ils ne peuvent donc émettre que dans une bande de fréquence de largeur limitée, leur taille est inversement proportionnelle à la fréquence de travail: un transducteur fonctionnant à 5 kHz à une longueur d'environ 20 cm. Comme celles du sonar passif, les performances du sonar actif sont limitées par les bruits présents dans la mer: bruit propre et bruit ambiant. Elles sont, de plus, affectées par la réverbération des ondes acoustiques émises sur les particules, les bulles, les micro-organismes, contenus dans le volume du milieu marin, et sur les irrégularités de la surface et du fond. Pour pouvoir émettre dans une direction privilégiée, en vue de diminuer la réverbération des ondes émises sur la surface et le fond, et d'augmenter l'énergie transmise dans cette "bonne" direction, il est nécessaire de concevoir des antennes d'émission directives, de taille supérieure à la longueur d'onde acoustique.

L'antenne d'émission du sonar actif peut être également utilisée comme antenne de réception. Cependant, les sonars modernes utilisent souvent des antennes de réception séparées de l'antenne d'émission, pour gagner en efficacité, les transducteurs d'émission étant mal adaptés à la réception, et pour pouvoir disposer d'un mode "sonar passif". Un gain d'antenne améliorant le rapport S/B est obtenu, comme en sonar passif, en utilisant des antennes de réception de grande taille, et en formant des voies électroniquement. Comme le signal émis est connu, un gain de traitement significatif peut être obtenu en filtrant le signal reçu avec un filtre adapté au signal émis. Ce gain est schématiquement

proportionnel a la largeur de bande fréquentielle du signal émis, et à sa durée. Il est limité par la largeur de bande passante de la chaîne d'émission, et par la durée de stationnarité du canal marin.

Le sonar actif permet d'obtenir instantanément la direction et la distance de la cible avec une précision suffisante pour guider la manoeuvre tactique, voire le lancement des armes. L'utilisation de codes d'émission adaptés permet de préciser les mesures de distance, et de calculer la vitesse de la cible, par effet Döppler. Par contre, l'identification d'un bateau à partir de la forme de l'écho qu'il renvoie est encore du domaine des études.

Le sonar actif est un moyen de détection très indiscret: une cible intercepte le signal sonar bien avant qu'elle ne puisse elle-même être détectée. Les sous-marins répugnent donc à l'utiliser, et le sonar actif est actuellement essentiellement un outil des bâtiments de surface (Fig.5). Les sonars en service actuellement ont des antennes sphériques ou cylindriques, d'environ un à quelques mètres de diamètre. Leur portée de détection est de l'ordre de la dizaine de kilomètres; elle dépend de la cible et des conditions de propagation (en particulier de la présence des zones de convergence). Une meilleure couverture de l'espace marin est obtenue avec des sonars remorqués dans les poissons: en choisissant opportunément l'immersion de la source, il est possible de réduire les zones d'ombre acoustique. Une autre solution est d'utiliser un sonar émettant volontairement vers le bas et de détecter des échos ayant subis des réflexions sur le fond.

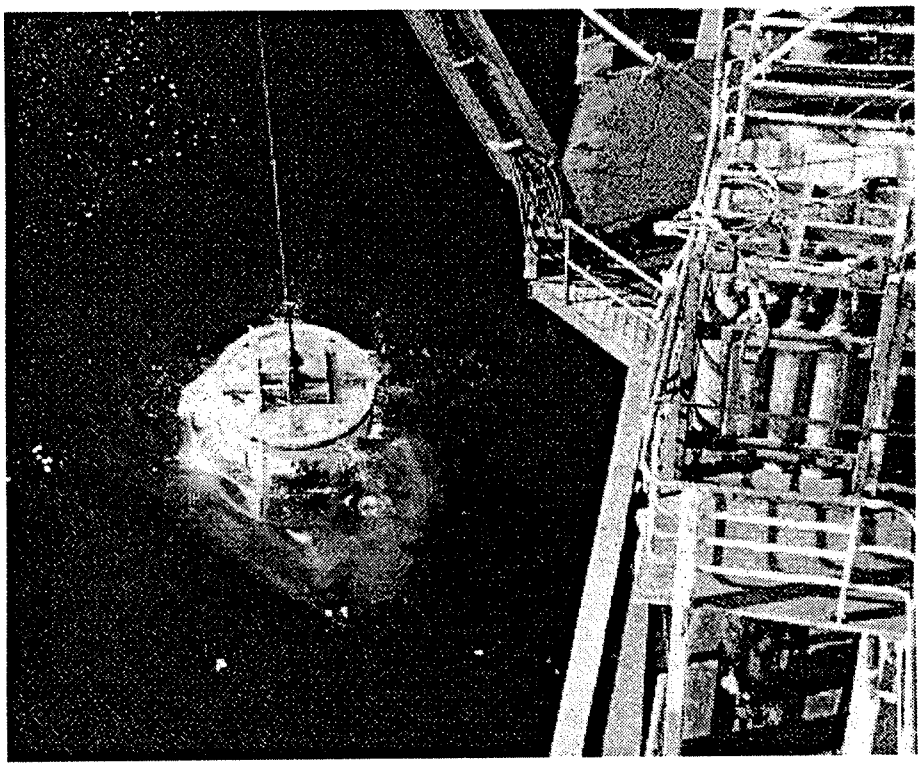


Fig.5: Sonar actif trempé d'un navire

Comme pour le sonar passif, l'évolution du sonar actif passe par une baisse sensible de la fréquence. Les basses fréquences, moins atténuées, se propagent plus loin. Elles sont plus difficiles à amortir par des revêtements spécifiques dont les sous-marins modernes sont déjà, pour certains, revêtus. Elles offrent donc des portées de détection plus importantes. Les sonars actuels fonctionnent en général a des fréquences de l'ordre ou supérieures à quelques kHz. On voit apparaître des projets de sonar fonctionnant en très basse fréquence, dont les portées seront de plusieurs dizaines de km. En contrepartie, les antennes correspondantes seront très volumineuses, très lourdes, posant de sérieux problèmes de manutention.

Les hélicoptères utilisent également un sonar actif, trempé au bout d'un câble permettant de

l'immerger à quelques centaines de mètres de profondeur. Pour des problèmes de poids et d'encombrement, ces sonars fonctionnent aujourd'hui à des fréquences relativement hautes (typiquement au dessus de 5 kHz). Leur portée est de l'ordre de la dizaine de kilomètres; pour les sonars trempés d'hélicoptère, on assiste également à une course vers les basses fréquences, au moins pour ceux destinés aux hélicoptères moyens-lourds.

VI-3 Caractérisation d'un transducteur sonar

Après avoir défini le sonar actif, nous nous intéressons au transducteur proprement dit, c'est à dire une composante de l'antenne d'émission. Son principe est simple: Il s'agit d'émettre avec le plus de puissance possible des ondes acoustiques dans l'eau. La figure suivante (Fig.6), résume bien la physique du problème.

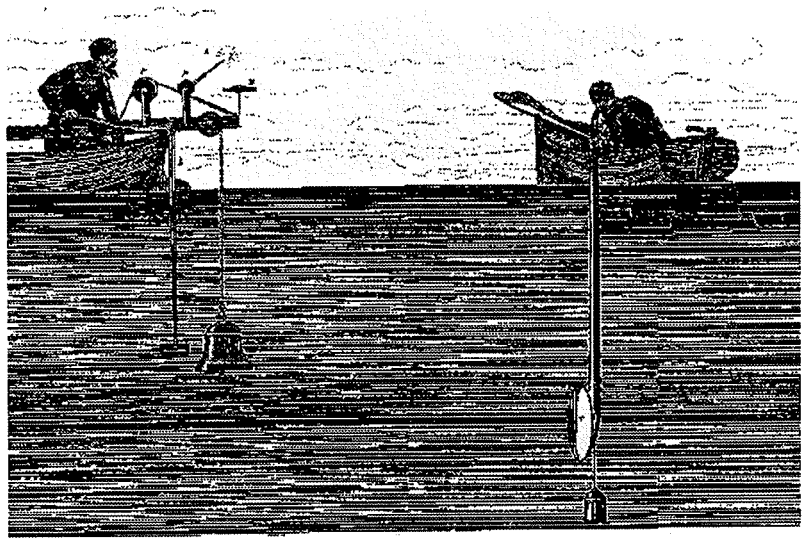


Fig.6: Schéma de principe de l'émission et de la réception d'ondes acoustiques dans l'eau

L'antenne d'émission est à gauche, le moteur d'émission étant le marteau et la cloche. L'antenne de réception est à droite, c'est le pavillon. Nous focaliserons notre attention sur le moteur du transducteur.

3-1 Quelques familles de transducteurs

Les familles de transducteurs sont nombreuses et dans une première partie, nous développerons les principales géométries de transducteur.

3-1-1 Le Tonpilz piézo électrique

Le transducteur Tonpilz est très répandu. Les principaux composants du transducteur sont un "moteur" comprenant des disques en céramiques et des électrodes (pour le cas du Tonpilz piézo électrique), un pavillon qui transmet l'énergie mécanique en onde de pression entre les céramiques et l'eau, une contremasse arrière, une tige de précontrainte et un boîtier pour rendre le tout étanche à l'eau.

La figure suivante (Fig.7) présente le schéma de principe d'un Tonpilz piézo électrique. On pourra trouver également une version de Tonpilz magnétostrictif où les céramiques piézo électriques vibrant sous l'effet d'un champ électrique sont remplacées par un barreau de matériau magnétostrictif vibrant sous l'effet d'un champ magnétique .

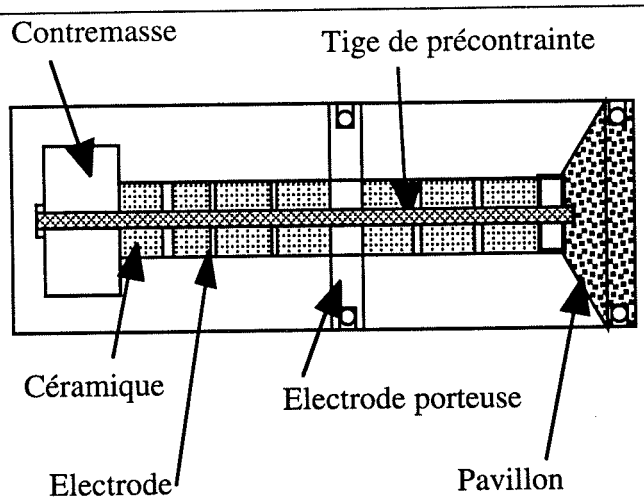


Fig.7: Schéma de principe du Tonpilz

Le noeud de vibration du Tonpilz se trouve au niveau de l'électrode porteuse.

3-1-2 Le transducteur Flextensionnel piézo électrique

Ce transducteur est constitué d'une colonne de céramiques fonctionnant en mode piston excitant une coque. L'amplification mécanique résultante produit un niveau d'émission important en basse fréquence. Cela est dû à une plus grande surface de rayonnement relativement aux transducteurs de type Tonpilz.

Son encombrement est faible, de l'ordre de la dizaine de centimètres, il peut émettre à quelques kilohertz. On pourra descendre au dessous du kilohertz en utilisant une structure plus grande.

La figure suivante (Fig.8) présente la géométrie du flextensionnel. On peut noter que son mode de vibration n'est pas de type "piston", comme le Janus et le Tonpilz présentés plus bas.

L'axe d'émission principale est le petit axe de l'ellipse formée par le transducteur. En effet, les déplacements sont plus important sur la paroi parallèle au grand axe.

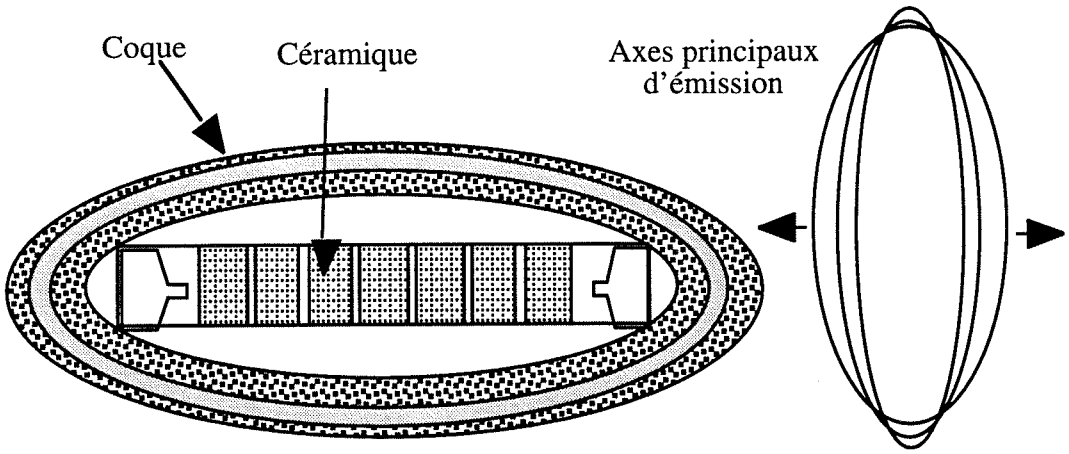


Fig.8: Schéma de principe du Flextensionnel

Les céramiques, situées entre les électrodes vibrent sous l'effet d'un champ électrique variable, et cette vibration est transmise à la coque qui transforme une énergie mécanique en onde de pression dans le milieu environnant.

3-1-3 Le Janus magnétostrictif

Il est constitué de deux moteurs et de deux pavillons disposés symétriquement. Du point de vue acoustique, il se différencie du Tonpilz par sa directivité symétrique. A part cette différence acoustique, il fonctionne en mode piston, le noeud de vibration étant situé au centre du Janus. La figure suivante présente la géométrie du Janus (Fig.9).

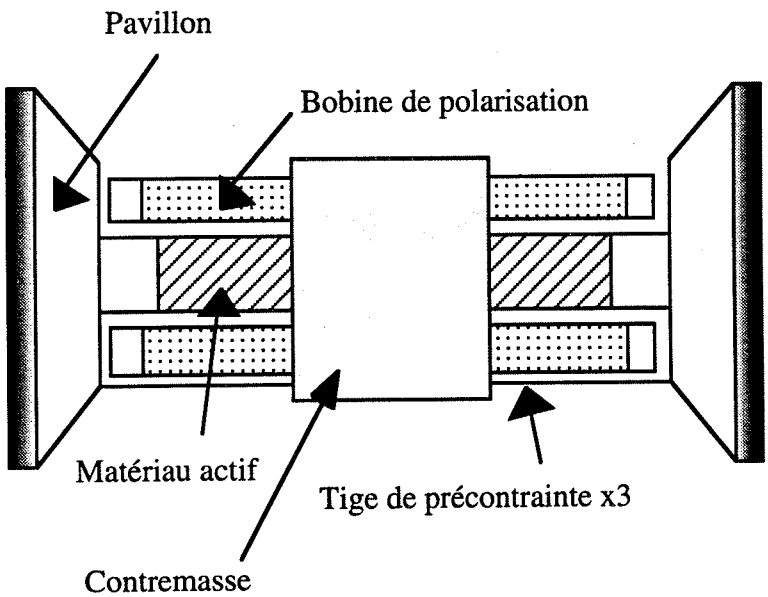


Fig.9: Schéma de principe du Janus magnétostrictif

3-2 Moteur du transducteur

A l'heure actuelle, deux types de moteurs sont utilisées: Les moteurs piézo-électriques et les moteurs magnétostrictifs qui utilisent les caractéristiques électriques et magnétiques des matériaux actifs.

Le moteur piézo électrique est largement le plus répandu. Les matériaux utilisés pour les moteurs piézo électriques sont des céramiques PZT telles les céramiques P189 commercialisées par Quartz & Silice.

Cependant, et plus récemment les moteurs magnétostrictifs ont fait leur apparition avec les progrès réalisés en science des matériaux et en particulier ils utilisent le Terfenol-D. Ses propriétés semblent prometteuses [CLAEYSSEN-88].

3-3 Le résonateur de Helmholtz

Le résonateur de Helmholtz est constitué d'une cavité couplée au milieu extérieur par l'intermédiaire d'un évent (Fig.10). L'élasticité de la cavité et de la masse d'eau en mouvement dans l'ouverture (col du résonateur) produisent la résonance de Helmholtz.

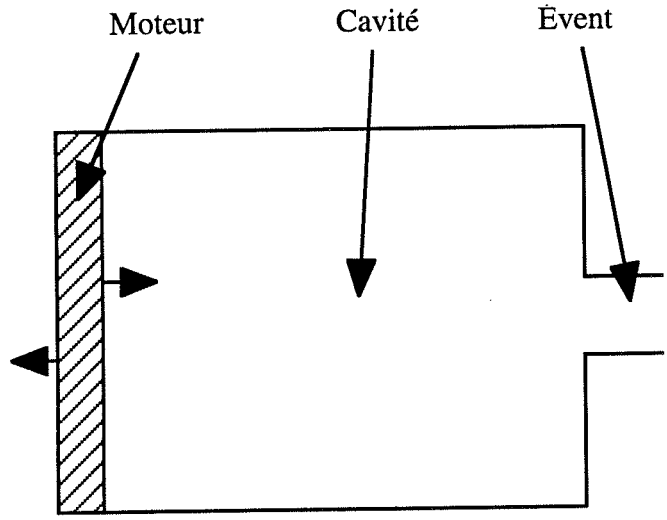


Fig.10: Le résonateur de Helmholtz

La fréquence de résonance de Helmholtz est toujours inférieure à la fréquence de résonance du moteur quelque soit le type de moteur utilisé.

Ce type de résonateur, soumis à la pression hydrostatique est apte à supporter les grandes immersions. Par contre, les résonateurs de Helmholtz ont une bande passante étroite et un faible rendement. De plus, obtenir des basses fréquences nécessite une valeur suffisamment grande de la compressibilité de la cavité, qui ne peut être obtenue qu'avec une grande cavité. L'introduction de tubes élastiques dans la cavité augmente la compressibilité de celle-ci, mais le risque d'écrasement des tubes réduit l'immersion.

VI-4 Étude d'un transducteur sonar de type Janus Helmholtz magnétostrictif

4-1 Géométrie

Réalisé par le département Lutte sous-marine de DCN Ingénierie Sud, le transducteur Janus-Helmholtz (Fig.11) est composé de deux moteurs de type Tonpilz, c'est-à-dire de deux piliers de matériaux actifs insérés symétriquement entre les pavillons et la contre masse. Cette structure est montée à l'intérieur d'un boîtier ou baffle cylindrique ouvert en son milieu, créant ainsi l'évent de ce transducteur de type *bass-reflex*, le découplage pavillons boîtier étant assuré par une fente de quelques millimètres. En basse fréquence, le mouvement de compression-dilatation de la colonne active autorise un bon couplage avec les pavillons rayonnants. De façon à satisfaire la condition de résonance de Helmholtz et pour couvrir une bande plus basse en fréquences, des tubes élastiques en Composite Verre-Résine (C.V.R.) remplis d'air sont insérés dans la cavité du projecteur. L'écrasement de ces tubes soumis à la pression hydrostatique limite malheureusement l'immersion à 600 m.

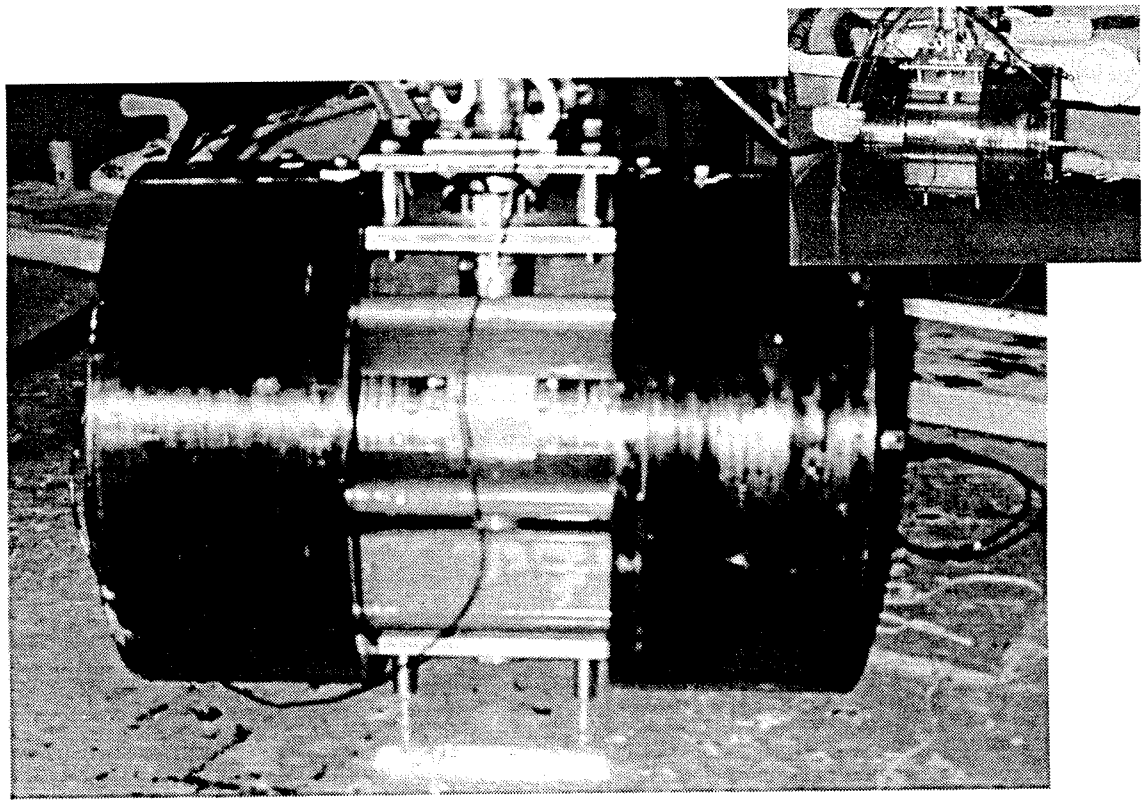


Fig.11: Vues photographiques du prototype de Janus magnétostrictif

Sur la photographie, on voit bien les deux boîtiers cylindriques ainsi que les pavillons. Les tubes compliants de forme elliptique sont visibles au centre. On aperçoit aussi la contre masse.

L'utilisation de ce transducteur permet l'obtention de basses fréquences avec des niveaux élevés.

4-2 Maillage réalisé

La figure suivante (Fig.12.1) montre le maillage d'un seizième de Janus réalisé pour l'analyse du transducteur par la méthode des éléments finis. L'eau est maillée en tétraèdres, et les pièces

mécaniques essentielles sont maillées en prismes ou en briques.

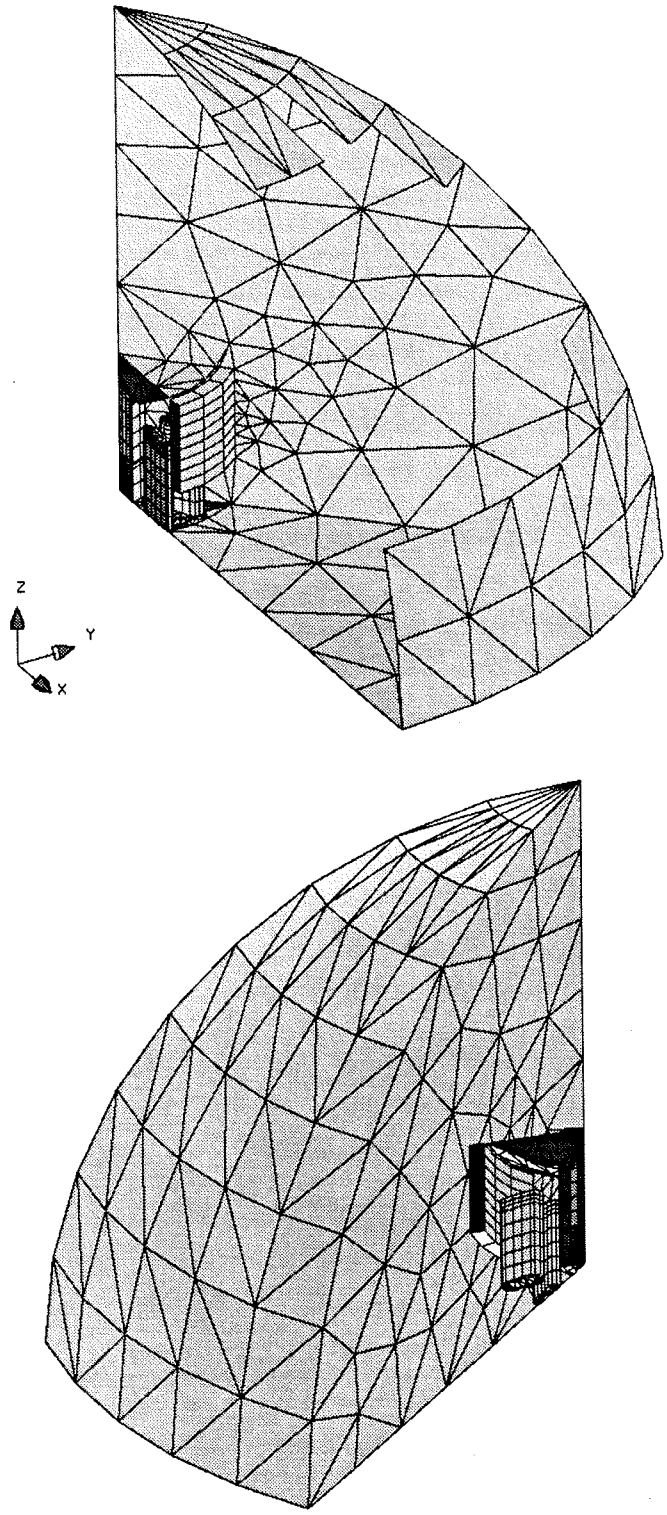


Fig.12.1: Maillage du transducteur et de sa sphère d'eau

Cette géométrie est typiquement tridimensionnelle. La principale difficulté de ce maillage est de discrétiser les tubes compliants et leur intérieur. De plus une portion de sphère doit être maillée. La figure 12.2 montre le détail du transducteur et des tubes compliants. Pour parfaire ce maillage, on pourrait créer une portion de sphère maillée en briques au niveau de la surface sphérique extérieure

pour avoir un maillage qui respecte les lignes de pression au voisinage de la condition aux limites de rayonnement de surface.

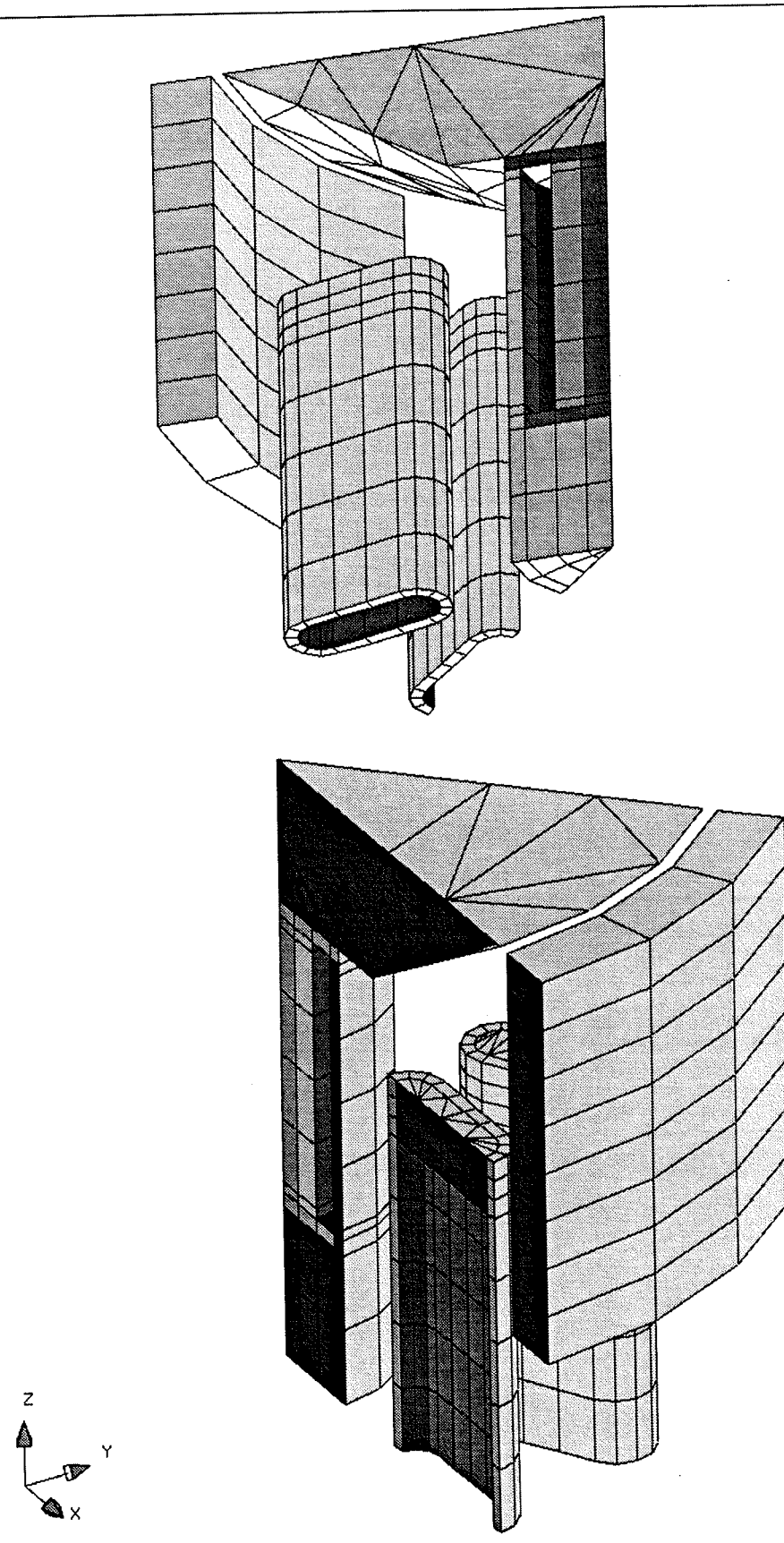


Fig.12.2: Maillage du transducteur

4-3 Résolution et exploitation

La résolution du calcul éléments finis de transducteur ont été réalisés à Cedrat Recherche par Nicolas Lhermet.

L'exploitation des résultats donne la déformée suivante (Fig.13).

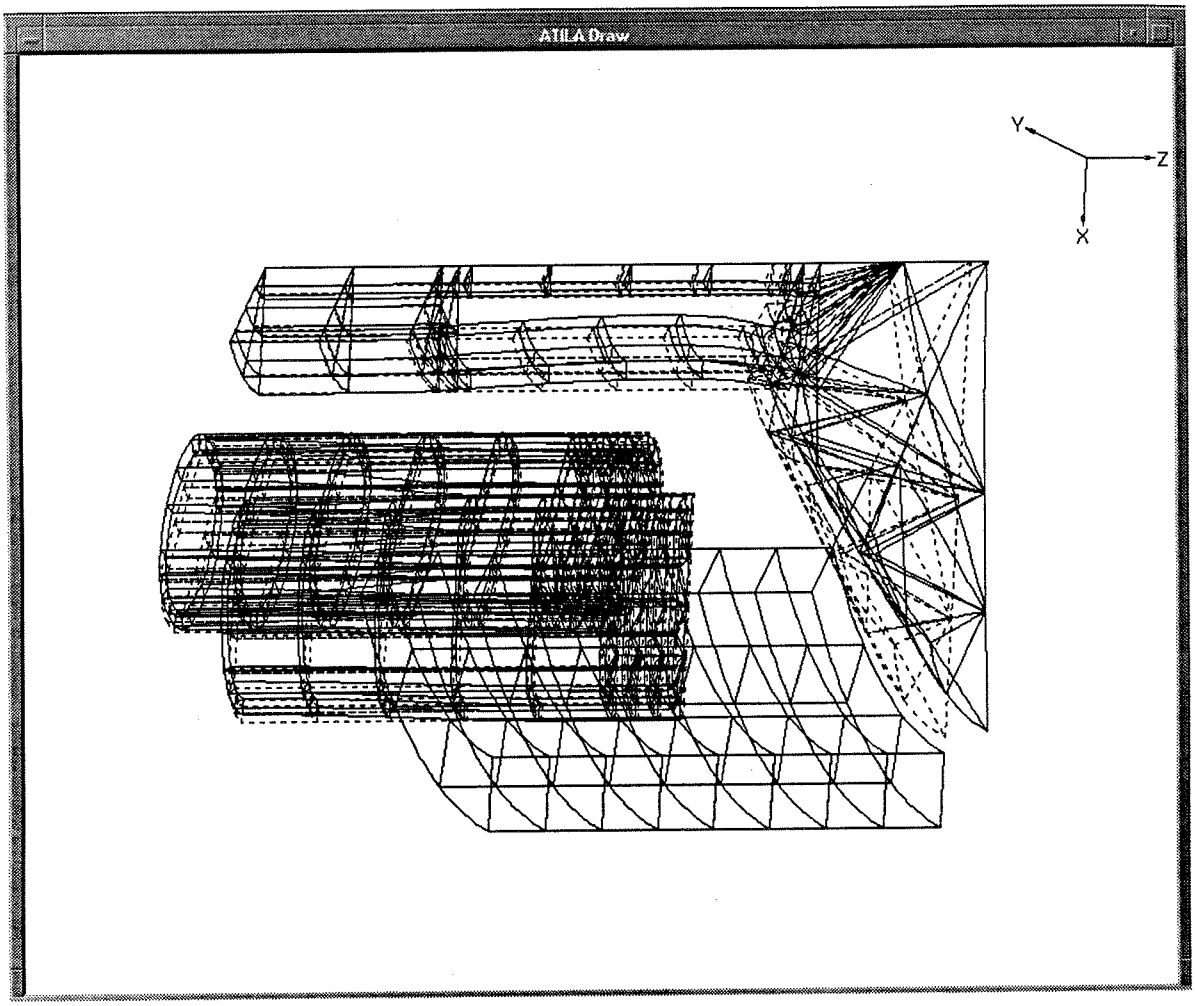


Fig.13: Déformée des déplacements à la résonnance (600 Hz)

On peut, sur cette figure, observer le mode de *respiration* des tubes compliants qui contribuent à rendre la cavité élastique, la variation de volume étant plus importante pour le mode de respiration.

De plus, on constate une forte déformation du boitier entourant la céramique dans la région située près du pavillon.

La baffle qui entoure le pavillon reste fixe.

Enfin, les déplacements du pavillon sont relativement uniformes au niveau du contact avec le fluide externe au transducteur, ce qui est nécessaire à une bonne émission d'onde. La figure suivante conforte cette propriété (Fig.14).

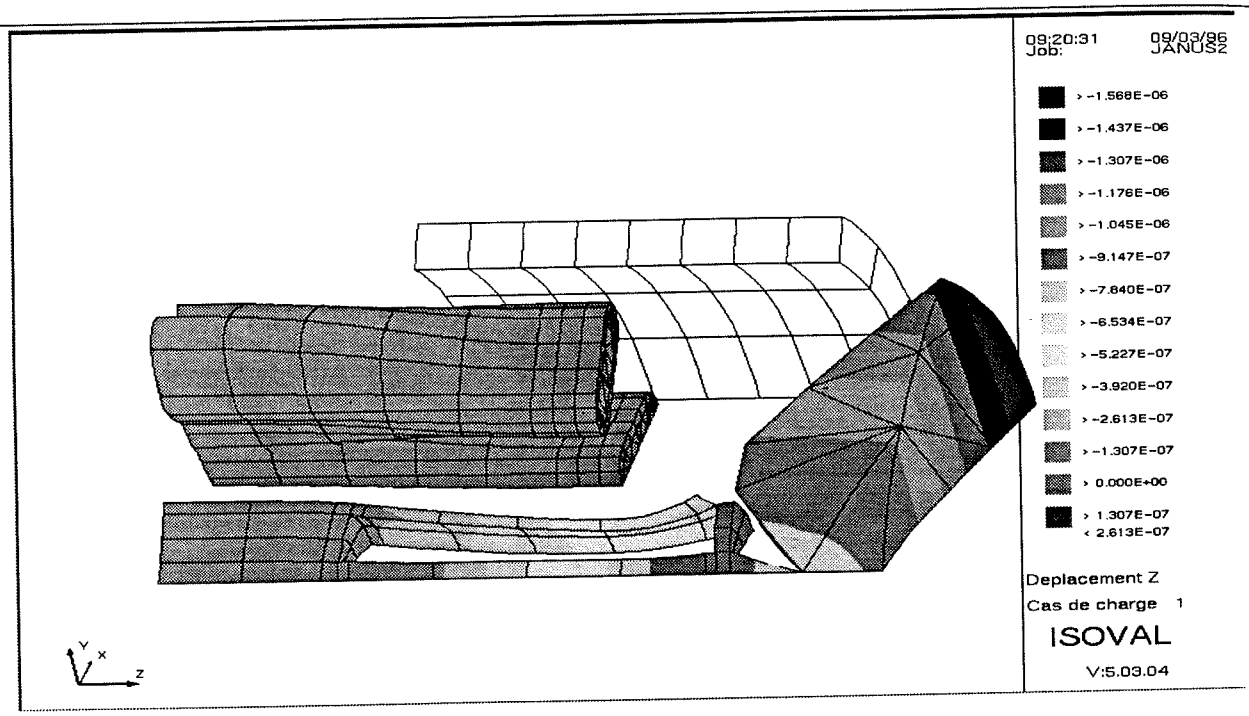


Fig.14: Isovaleurs de déplacements à la résonance

Nous avons donc pu résoudre un problème couplé en utilisant un maillage généré par notre pré processeur. Cette résolution n'a pas la prétention de donner tous les bons résultats physiques mais seulement de valider la chaîne logicielle utilisée pour l'analyse de ce transducteur.

VI-5 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons tout d'abord fait le point sur l'intégration et la validation des éléments pyramides dans ATILA.

Puis, nous avons présenté succinctement les enjeux de l'acoustique sous marine ainsi que la physique des sonars actifs à base de transducteurs construits autour de matériaux actifs.

Ensuite, nous avons présenté le maillage d'un transducteur Janus Helmholtz magnétostrictif. L'objectif de maillage et de modélisation de transducteur sonar est atteint, et même dépassé: On maille séparément les parties mécaniques en maillage structuré et les parties fluides en maillage libre. On peut de plus évaluer la qualité du maillage et l'optimiser à l'aide des outils présentés au Chapitre II.

Enfion l'exploitation du premier calcul complet de ce transducteur sonar intégral dans l'eau est présenté.

Cet outil révolutionne la conception des transducteurs électro-acoustiques. Avant, l'utilisateur pouvait utiliser un mailleur 2D pour décrire des transducteurs de type Tonpilz piézo électrique. L'arrivée de nouveaux matériaux actifs, ainsi que les progrès réalisés dans la capacité de calcul des ordinateurs nous permet d'avoir de nouvelles ambitions. Les implications de ce travail dans l'analyse des problèmes de transducteurs électro-acoustiques sont à trois niveaux:

- On pourra se permettre l'étude moins fastidieuse, au niveau description géométrique paramétrée et maillage, de nouvelles structures de transducteurs magnétostrictifs.

- L'étude de transducteurs complexes de type flextensionnel sera possible, en tenant compte des effets 3D et des boîtes d'air et d'eau à discrétiser.

- Enfin, l'étude des antennes de transducteurs, nécessite toujours des calculateurs puissants. Mais il est maintenant possible de générer le maillage de ce gros problème rapidement, en gagnant des degrés de liberté par la génération d'un maillage structuré contrôlable et subtil.

La paramétrisation du pré processeur permet de plus de faire de l'analyse de sensibilité et de l'optimisation, autour des dimensions caractéristiques du transducteur à un coût moindre: L'utilisateur décrit une fois pour toute sa géométrie paramétrée, le maillage mixte permettant d'économiser un temps important de caractérisation manuelle des mailles.

Enfin, l'outil proposé dépasse largement les applications visées initialement: Ce pré processeur permettra d'analyser d'autres types de structures notamment les micro-systèmes, les moteurs à base de matériaux actifs, ainsi que tous les phénomènes couplés.

Conclusion

Nous avons au cours de ce projet de recherche réalisé un outil capable de mailler en trois dimensions tout type de problèmes (électrotechnique, électromécanique, acoustique) en mélangeant de manière avantageuse les types de mailleurs et les types d'éléments.

L'innovation de ce mailleur est de pouvoir mélanger automatiquement tout type d'algorithme de maillage et en raccordant automatiquement via l'utilisation d'éléments adéquats et originaux.

Après avoir analysé les méthodes de maillage existant et leurs spécificités dans la littérature, nous avons, avec les utilisateurs, classifié les difficultés de maillage. En mélangeant les cultures de maillage, il est possible d'améliorer la définition d'un problème.

Nous avons ensuite proposé un indicateur de qualité *a priori* de maillage permettant d'évaluer la définition et le maillage d'un problème élément fini.

Un élément fini original a été développé, étudié et validé, de manière à raccorder fortement les différents maillages issus de mailleurs manuels et assistés. Cet élément a été validé sur des formulation éléments finis nodaux et éléments finis d'arête.

Ensuite, nous avons proposé un algorithme de gestion des interfaces non conformes via un procédé d'insertion de noeud dans le maillage mixte de manière à générer un maillage conforme.

En cherchant à perfectionner l'outil développé, nous l'avons qualifié via de nombreuses collaborations universitaires et industrielles sur des problèmes tests réalistes.

Enfin, le mailleur a été utilisé pour analyser un transducteur magnétostrictif de type Janus de géométrie typiquement tridimensionnelle. La description géométrique paramétrée couplée au mailleur *presse bouton* permettent une modélisation rapide et performante de ce type de dispositifs ou le temps d'élaboration de maillage peut être négligée par rapport au temps de résolution (effectuée systématiquement en *batch* à partir de fichier espion).

Ce logiciel généraliste sera commercialisé avec FLUX3D ou indépendamment sous le nom PREFLU3D. Il est évidemment possible de l'utiliser comme préprocesseur d'ATILA.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses:

- Les surfaces gauches, *NURBS* au niveau du préprocesseur. En effet, la géométrie et le maillage ne prennent en compte que les surfaces de type plane ou cylindrique, et il devrait être possible de pouvoir traiter des problèmes ayant des géométrie plus complexes.

- Le respect des arêtes frontières en tridimensionnel. Au cours de notre travail, une expérience d'ajout de noeud a été développée et validée. D'autres méthodes comme la permutation d'arête (ou *swapping*) pourraient être tentées. Des travaux de l'INRIA de P.L. George sont une bonne approche du problème. Un mailleur tridimensionnel soumis à une carte de taille [GEORGE-94] pourrait aussi être un bon outil pour vérifier la frontière du domaine.

- Les critères *a priori*: lien entre le conditionnement de la matrice locale et la matrice globale. Nos travaux n'ont pu aller au bout de cette voie par manque de temps, mais une analyse plus poussée pourrait être faite. En cataloguant les déformations possibles par type d'éléments, on pourrait valider le critère généralisé développé au Chapitre II en étudiant son évolution en fonction des déformations répertoriées.

- Les critères *a posteriori* et l'adaptativité p et h. Ce sujet est toujours d'actualité et, couplé à notre outil, pourrait permettre d'améliorer encore un peu plus la qualité de la solution proposée en formulant entre autre une estimation de l'erreur sur la solution. De nombreux travaux en mécanique sont exploitables et transposables en électromagnétisme.

- Enfin, le chantier de l'amélioration de maillage reste ouvert et de nombreuses équipes

dans le monde y participe ([BAKER-89], [HENOT-93], [FORSMAN-94]). De nouveaux algorithmes d'optimisation peuvent apporter des contributions originales dans ce domaine.

Bibliographie

[ALBERTINI-88]
J.B. Albertini, "Contribution à la réalisation d'un logiciel de modélisation de phénomènes électromagnétiques en trois dimensions par la méthode des éléments finis: FLUX3D", Thèse INPG, Novembre 1988.

[ADENOT-96]
Acte du premier forum national Adémis, "Microtechnologies et Microsystèmes", Novembre 1995, Paris.

[ANSYS]
User Guide, Swanson Analysis System, Inc., Houston, PA,15342-0065, USA.

[ATILA]
Analyse des Transducteurs par Intégration des équations de LAplace, Institut Supérieur d'Electronique du Nord, Lille, France.

[BAKER-89]
T.J. Baker, "Element quality in tetrahedral meshes", Proc. 7th Int. Conf. on Finite Elements method in Flow Problems, Huntsville, AL, April 3-7 1989.

[BEDROSIAN-92]
G. Bedrosian, "Shape functions for 3-D elements", international journal for numerical methods in engineering, Vol 35, 1992.

[BLEVINS]
Blevins,"Formulas for natural frequency and mode shape".

[BOROUCHAKI-95-1]
H. Borouchaki, P.L. Georges, "Encore Delaunay", INRIA, Rapport de Recheche N°2461, 1995.

[BOROUCHAKI-95-2]
H. Borouchaki, P.L. Georges, "Quelques conclusions sur la construction 2D d'un mailleur de type Delaunay", INRIA, Rapport de Recheche N°2463, 1995.

[BOUCHER-88]
D. Boucher,"Trends and problems in low frequency sonar projectors design", Power sonic and ultrasonic transducer design, Ed. Hamonis B, Decarpigny J.N., Springer Verlag, Berlin, 1988, Chapitre 5.

[BOZORTH]
Richard M. Bozorth, "Ferromagnetism", Bell telephone laboratories, D. Van Nostrand Company, Inc.-Chapitre 17 : Change of magnetization with time.

[BUISSON-89]
G. Buisson, "Exploitation et maintenance du mailleur de FLUX3D". Rapport interne CEDRAT/LEG, 1989.

[BUSSLER-94]
M.L. Bussler et A. Rameh, "The eight-node hexahedral "brick " element in finite element analysis", Algor inc, Pittsburgh, PA U.S.A.

[CALMELS-86]
C. Calmels, "Un mailleur autoadaptatif pour FLUXLAB", Rapport de DEA au LEG, 1986.

[CARDOSO-94]
J.R. Cardoso, P.A. Benites, "Finite Element applied to moving linear induction motors", présenté à la conférence IEEE CEFC'94, Aix les bains (France).

[CAVENDISH-85]
J.C. Cavendish, D.A. Field, W.H. Frey," An approach to automatic three-dimensionnal finite element mesh generation", international journal for numerical methods in engineering, 21, 1985, pp329-347.

[CHARI-80]
M.V.K. Chari, P.P. Silvester, "Finite elements in electrical and magnetic field problem"; Ed. Wileys and sons, 1980.

[CHIA-90]
B.T. Chia, J.L. Coulomb, J.C. Vérité, "Impact of solid modelers on electromagnetic device design", Journal Appl. Phys. 67 (9), May 1990.

[CLAEYSSEN-89]
F. Claeyssen, "Conception et réalisation de transducteurs sonar basse fréquence à base d'alliages magnétostrictifs terres rares-fer", Thèse de docteur ingénieur, 1989.

[CLINE 79]
A.K. Cline, B. Moler, W. Stewart and J.H. Wilkinson, "an estimate of the condition number of a matrix", SIAM J. Numer. Anal., Vol 16, No 2, Avril 1979.

[COULOMB-84]
J.L. Coulomb and G. Meunier, "Finite element implementation of virtual work principle for magnetic and electric force and torque computation", IEEE Trans on Mag, Vol. MAG-20, No 5, 1894-1896, September 1984.

[COULOMB-86]
J.L. Coulomb, J.C. Sabonnadiere, "La C.A.O. en électrotechnique", 1986, Hermès Publishing 51 rue Rennequin Paris.

[COULOMB-87]
J.L. Coulomb, J.C. Sabonnadiere, "Elements finis et C.A.O.", 1987, Hermès Publishing, 51 rue Rennequin Paris.

[COULOMB-96]
J.L. Coulomb, F.X. Zgainski, Y. Marechal, "A pyramidal element to link hexahedral, prismatic and tetrahedral edge finite elements", papier invité, presenté à IEEE CEFC'96 Okayama (Japon).

[DECARPIGNY-90]
Decarpigny, Hamonic, "General introduction to ATILA", Proceeding of the workshop, Toulon, France, Juin 1990.

[DHATT-83]
G. Dhatt , G. Touzot, "Une présentation de la méthode des éléments finis", Collection UTC, Ed Maloine, 543p, 1983.

[DREHER-94]
T. Dreher, "Couplage de la méthode des éléments finis tridimensionnels avec une méthode d'analyse du circuit électrique: Application à la modélisation des machines électriques tournantes", Thèse de docteur de l'INPG, 1994.

[EUCLID]
CD-ROM démonstration, Matra-Datavision, France.

[FLUX2D]
Flux2D, User Manual, Cedrat Recherche (EU), Magsoft Co (Troy NY, USA).

[FLUX3D]
Flux3D, version 2.01, User Manual, Cedrat Recherche (EU), Magsoft Co (Troy NY, USA).

[FORSMAN-94]
Forsman, Kettunen, "Tetrahedral mesh generation in convex primitives by maximising solid angles", IEEE Trans. on Magnetics, vol.30, n°5, Sept. 1994.

[GEORGE]
P.L. George, "MODULEF, Génération automatique de maillage", INRIA Collection didactique.

[GEORGE-88]
P.L. George, F. Hecht, E. Saltel, "Tétraédrisation automatique et respect de frontière", INRIA, Avril 1988.

[GEORGE-90-1]
P.L. George, "Génération automatique de maillage: Applications aux méthodes d'éléments finis", Paris, Masson, 1990.

[GEORGE-90-2]
P.L. George, "génération des maillages pour la simulation par éléments finis de problèmes physiques", Revue de Phys. Appl. 25, pp 567-581, 1990.

[GEORGE-92]
P.L. Georges, F. Hermeline, "Delaunay's mesh of a convex polyhedron in dimension d. Application to arbitrary polyhedra", International Journal for Numerical methods in engineering, Vol 33, 975-995, 1992.

[GEORGE-94]
P.L. George, "Les problèmes de l'adaptation sur l'exemple d'un mailleur 2D soumis à une carte de taille", Acte du congrès STRUCOME, Nov. 1994, Paris.

[GOLBERG-89]
Goelberg, "Genetic algorithms in search optimization and machine learning", Addison Wesley, 1989.

[GOLGOLAB-89]
A. Golgolab, "Mailleur 3D automatique pour des géométries complexes", RR INRIA N° 1004, 1989.

[HAMMER-56]
P.C. Hammer, O.J. Marlowe and A.H. Stroud, "Numerical integration over simplexes and cones", Math Tables Aids, Comp.-10, 130-137 (1956).

[HAMONIC-90]
B.F. Hamonic, J.C. Debus, J.N. Decarpigny, Proceedings of the Workshop held in TOULON, The finite element code ATILA, ISEN-RECHERCHE, 1990.

[HARWELL]
Librairie mathématique HARWELL.

[HENOT-93]
Henot, Briere de l'isle, P.L. George, "Optimisation de maillages tridimensionnels", INRIA, SDRC, Acte de la conférence STRUCOME 1993.

[HERMELINE-82]
F. Hermeline, "Triangulation automatique d'un polyèdre en dimension N", RAIRO Analyse numérique, vol 16, pp211-242, 1982.

[HUSSON-89]
Husson et Roy, "Accoustique sous-marine", dans sciences de la mer, entretiens sciences et défenses 23 et 24 mai 1989, cité des sciences et de l'industrie de la vilette , DGA.

[I-DEAS Master Series]
"User guide finite element modeling", S.D.R.C., Herfordshire SG49AL, England.

[IRONS-83]
Bruce Irons, Matti Loikkanen, "An engineers' defense of the patch test", international journal for numerical methods in engineering, Vol 19, 1983.

[JACQUOTTE-93]
O.P. Jacquotte, L. de Chanterac, A. Ormancey, "Quelques aspects de la mécanique des fluides numérique": Maillage, schémas et modèles", Revue scientifique et technique de la défense, 1993.

[JOE-91]
B. Joe, "Delaunay versus max-min solid angle triangulations for three-dimensional mesh generation", international journal for numerical methods in engineering, Vol.31, 1991.

[KAGI-93]
F.Kagi, "Introduction d'un maillage périodique dans le mailleur automatique de FLUX3D", Rapport de stage de fin d'études, Cedrat Recherche, 1993

[LABBE-96]
N. Labbe, "Modélisation du couplage magnéto-thermique appliquée aux ralentisseurs électromagnétiques", thèse de l'INPG, 1996.

[LASCAUX THEODOR]
Lascaux, Théodor, "Analyse numérique appliquée à l'art de l'ingénieur", Vol.1 méthodes directes.

[LE GALL-94]
Y. Le Gall, "Transducteur basse fréquence , grande immersion, large bande et à rendement élevé pour l'océanographie acoustique", L'onde électrique, Septembre-Octobre 1994, Vol 74, No 5.

[LE LETTY-94]
R. Le Letty, "Conception de moteurs piezoactifs à l'aide de la modélisation", thèse de doctorat en acoustique de l' INSA de Lyon, 1994.

[LINPACK-79] J.J. Dongarra, J.R. Bunch, C.B. Moler and G.W. Stewart, "LINPACK User's guide", Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1979.

[LONGEOT-95]
O. Longeot, M De Sousa Dias, X. Brunotte et D. Colombanni, "Une approche numérique pour des géométries traitées complexes. Application aux dentures", ATT Paris, Juin 1995.

[MACSYMA]
copyright 1982, Massachussetts Institute of Technology, 1982-87 Symbolics Inc.

[MAGNIN-91]
Henri Magnin, "Eléments finis, parallelisme et calcul réparti, amélioration d'un logiciel de calcul de champs électromagnétiques pour l'électrotechnique", Thèse de l'INPG, 1991.

[MAPPLE]
MAPPLE V, Release 2, copyright U of Waterloo, Ont., Canada.

[MARIH-94]
Marih, "Mise en oeuvre de l'approximation diffuse et des éléments diffus pour la résolution de

problèmes mécaniques", Thèse UT Compiègne, 1994.

[MARECHAL-92]
Y. Maréchal, G. Meunier, J.L. Coulomb, H. Magnin, "A general purpose tool for restoring inter-element continuity", IEEE Trans. on Mag., Vol.22, No 2, pp 1728-1731, Mars 1992.

[MIGLIANO-96]
A.C.C. Migliano, C.R.S. Stoppa, J.R. Cardoso, J.L. Coulomb, F.X. Zgainski, "Design and construction of a Periodic Magnetic Structure of SmCo5 Magnets", presenté à IEEE CEFC'96 Okayama (Japon).

[MORANCAY-93]
L. Morancay, "Représentation paramètrée et modélisation de systèmes physiques pour la conception optimale", Thèse de Docteur UTC, 1993.

[MOUNOURY-95]
V. Mounoury, O. Stab, "Automatic quadrilateral and hexahedral finite element mesh generation : review of existing methods", Revue européenne des éléments finis, Vol. 4, No 1, 75-102, 1995.

[NABETA-94]
S. Nabeta, "Etude des régimes transitoires des machines synchrones par la méthode des éléments finis", thèse de l'INPG, 1994.

[NAKATA-88]
T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara, "Efficient solving techniques of matrix equations for finite element analysis of eddy currents", IEEE Trans. on Mag., Vol.24, No 1, Janvier 1988.

[NAKATA-92]
T. Nakata, K. Fujiwara, "Sumary results for Benchmark Problem 13 (3D non linear Magneto Static Model), COMLPEL, Vol.11, No3, pp345-369, Sept.92.

[NEKHOUL-96]
B. Nekhoul, F.X. Zgainski, P. Labie, F. Morillon, S. Bourg, "Calculating the impedance of a grounding system", IEEE Trans. on Mag., Vol 32, N°3, Mai 1996.

[NOEL-94]
Frédéric Noel, "Mailleur autoadaptatif pour des surfaces gauches en vue de la conception intégrée", thèse de l'INPG, 1994.

[PARTHASARATHY-93]
V.N. Parthasarathy et al, " A Comparison of tetrahedron quality measures", Finite Elements in Analysis and Design, Vol 15, 255-261, 1993.

[PERRIN-BIT -94]
Remi Perrin-Bit, "Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionels: Calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement", Thèse de l'INPG, 1994.

[PREATI]
N. Lhermet, "PREATI: Notice technique utilisateur", Cedrat Recherche, 1993.

[RAIZER-94]
A. Raizer, "A 3D autoadaptative mesh generator for Magnetostatic and magnetodynamic problems",IEEE Trans on Mag, Vol.30, 3531-3534,1994.

[RAMSEY-95]
A. Ramsey, "Comparison of HEX and TET meshes", Benchmark, June 1995, 11-13.

[RASSINEUX-95]
A. Rassineux, "Maillage automatique tridimensionnel par une méthode frontale pour la méthode des éléments finis ", Thèse Univ. Nancy I, 1995.

[SABONNADIERE-88]
J.C. Sabonnadière, J.L. Coulomb, "Calcul des champs électromagnétiques", Techniques de l'ingénieur, 1988.

[SALUDJIAN-96]
L. Saludjian, "Optimisation de maillage à l'aide d'un algorithme génétique", Acte du congrès FIRELEC, Avril 1996, Ecole centrale de Lyon.

[SAUT-95]
Acte du colloque du "saut technologique", thème B, Institut méditerranéen de Technologie, Marseille, mars 1995.

[SEVENO-95]
E. Seveno, "Mailleur frontal 3D", INRIA, Acte de la conférence STRUCOME, Paris, Novembre 95.

[SILVERSTER-83]
P.P. Silverster, R.L. Ferrari, "Finite elements for electrical engineering", Second edition, Cambridge University press, Cambridge.

[SIMAIL]
Notice technique, Simulog, France.

[SIMON-93]
Fabrice Simon, "Développement et application d'un mailleur par extrusion sur FLUX3D", Rapport CEDRAT/LEG, Sept.1993.

[SPORNIC-95]
S. Spornic, "Détermination et analyse des pertes magnétiques en régime d'induction tournante", DEA de génie électrique au LEG , INPG, 1995.

[STAB-93]
O. Stab, "Maillage automatique par opération booléenne", Thèse de l'école des mines de Paris, 1993.

[SYSMESH]
CD-Rom de démonstration, Framasoft+CSI, 1995.

[TALON-87]
J.Y.Talon, Algorithmes de générations et d'améliorations de maillage en deux dimensions, Rapport RT20 de l'IMAG, 1987.

[TECHNIQUE DE L'INGE]
Technique de l'ingénieur D 828, Électrothermie, Chauffage par induction électromagnétique.

[TEMPLATES]
R. Barret et al.,"Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative method".

[WEBB-96]
J.P. Webb, B. Forghani, "Hierarchichal scalar and vector tetrahedra", IEEE Trans. on Mag., vol.29, no 2, pp 1728-1731, Mars 1993.

[YERRY-84]
M.A. Yerry and M.S. Shephard, "Automatic 3D mesh generation by the modifyed-octree technique",

International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 20, 1965-1990, 1984.

[ZGAINSKI-94]
F.X. Zgainski, G. Meunier, A. Konrad, "Analysis of microwave planar circuits, MIC2D: A user friendly software based on time domain finite element method", présenté à CEFC'94, publié dans IEEE Trans. on Mag., 1995.

[ZGAINSKI-95]
F.X. Zgainski, J.L. Coulomb, Y. Marechal, F. Claeyssen and X. Brunotte, "PREFLU3D: Un mailleur pour l'électromécanique", Proceeding de la conférence STRUCOME, Paris, Nov. 1995.

[ZGAINSKI-96-0]
F.X. Zgainski, "Création et validation des éléments pyramides dans ATILA", Rapport interne Cédrat Recherche/LEG, mars 1996.

[ZGAINSKI-96-1]
F.X. Zgainski, J.L. Coulomb, Y. Marechal, F. Claeyssen and X. Brunotte, "A new family of finite elements: The pyramidal elements", IEEE Trans. on Mag., Vol.32, N°3, Mai 1996.

[ZGAINSKI-96-2]
F.X. Zgainski, J.L. Coulomb, Y. Marechal, F. Claeyssen and X. Brunotte, "A tool box for 3-D mesh generation in electromechanical engineering", IEEE Trans. on Mag., Vol 32, N°3, Mai 1996.

[ZGAINSKI-96-3]
F.X. Zgainski, Y. Marechal, J.L. Coulomb, M. Vanti, A. Raizer, "An a priori indicator of finite element quality based on the condition number of the stiffness matrix", presenté à IEEE CEFC'96 Okayama (Japon), va être publié dans IEEE Trans. on Mag., Mai 1997.

[ZGAINSKI-96-4]
F.X. Zgainski, "Un mailleur pour l'électro-acoustique en vue de la conception de transducteurs sonars", acte du congrès FIRELEC'96, Journées Jeunes Chercheurs en Génie Electrique, Avril 1996.

[ZIENCKIEWICZ-91]
O.C. Zienckiewicz, Taylor, "La méthode des éléments finis, Formulation de base et problème linéaire", Afnor Techniques 1991.

Table des figures

Chapitre I
C.A.O. éléments finis et Maillage

Fig.1
Détail d'un maillage d'un plan et fonction de forme....16
Fig.2
L'intégration de l'élément réel à partir de l'élément de référence....16
Fig.3
Les différentes phases du calcul dans le logiciel C.A.O....18
Fig.4
Exemple de description B-Rep....20
Fig.5
Exemple de description C.S.G....21
Fig.6
Deux représentations C.S.G. différentes de la même géométrie....21
Fig.7
Maillage d'un cylindre avec paramétrage d'un angle alpha....22
Fig.8
Maillage non conformes et conformes....23
Fig.9
Maillage M....24
Fig.10
Représentation simplifiée de la structure d'un élément dans la base de données de FLUX3D....24
Fig.11
Principe du maillage réglé....27
Fig.12
Principe du maillage extrusif....28
Fig.13
Stratégie de maillage 2D frontal en triangle....29
Fig.14
Maillage Quadtree....30
Fig.15.1
Maillage d'une machine synchrone....31
Fig.15.2
Zoom sur les pôles de la machine....32
Fig.16.1
Maillage tridimensionnel d'un moteur universel à réluctance variable....32
Fig.16.2
Résultat des maillages spécifiques d'une machine tournante en 3D....33
Fig.17
Section du cylindre métallique....34
Fig.18
Maillages utilisés....36
Fig.19
Comparaison des résultats obtenus avec les deux maillages et zoom dans l'épaisseur de peau....37
Fig.20
Courbes de densité de courants obtenues par maillage rectangulaire et triangulaires comparées à la solution analytique....38
Fig.21
Différents cas de maillages tridimensionnels....39

Chapitre II
Qualité des éléments finis en vue d'optimiser un maillage

Fig.1 Les deux approches pour faire de l'amélioration de maillage 44
Fig.2 Qualité de l'élément tétraèdre situé dans un coin égale à 61,5% 47
Fig.3 Classement plus fin des déformations de mailles tétraèdres 48
Fig.4 Tests de déformation de tétraèdres 49
Fig.5 Fonction entropie pour caractériser l'uniformité de deux valeurs 52
Fig.6 Modification topologique #1 proposée par Cavendish 55
Fig.7 Modification topologique #2, "regonflage" proposée par Cavendish 55
Fig.8 Coquille de six tétraèdres autour de l'arête "a" (ab) 56
Fig.9.1 Une triangulation possible n=3, N3=1 57
Fig.9.2 Deux triangulations possibles n=4, N4=2 57
Fig.9.3 Cinq triangulations possibles n=5, N5=5 57
Fig.10 Suppression d'un noeud connecté à quatre tétraèdres 58
Fig.11 Barycentrage 59
Fig.12 Bougé de points optimal 60
Fig.13.1 Modifications non topologique réversibles *T2->T3 et T3->T2* *61*
Fig.13.2 Algorithme glouton 62
Fig.14 Algorithme de recuit 64
Fig.15 Algorithme simplifié glouton généralisé 65
Fig.16 Algorithme du gradient conjugué 68
Fig.17 Utilisation de LINPACK couplé à FLUX3D 69
Fig.18 Grandeurs caractéristiques des éléments finis triangles et rectangles 70
Fig.19 Maillage triangulaire d'un problème simple thermique 71
Fig.20 Inverse du conditionnement fonction de l'angle a de distorsion 72
Fig.21 Indicateurs de qualité pour un triangle du motif 72
Fig.22 Maillage quadrangulaire d'un problème thermique 73
Fig.23 Conditionnement pour la matrice globale du motif rectangulaire 73
Fig.24 Critère de qualité Q4 pour les quadrangles du motif 74
Fig.25 Cas de déformation d'un maillage réglé régulier 74

Fig.26
Évolution du conditionnement de la matrice en fonction de la position du noeud déplacé 75
Fig.27
Test A pour le triangle 78
Fig.28
Sensibilité des mesures de qualité au test A 79
Fig.29
Test B pour le triangle 79
Fig.30
Sensibilité des mesures de qualité au test B 80

Chapitre III
Les éléments pyramides

Fig.1
Éléments finis standards 85
Fig.2
Élément fini unidimensionnel 87
Fig.3
Élément fini triangulaire 88
Fig.4
Numérotation des noeuds de l'élément pyramidal du premier ordre à cinq noeuds 89
Fig.5
Dégénération d'un hexaèdre (8 noeuds) en pyramide (5 noeuds) 90
Fig.6
Élément fini rectangulaire 90
Fig.7
L'élément pyramide de référence au premier ordre (5 noeuds) 91
Fig.8
Fonction de forme du noeud 1 à la surface de l'élément 93
Fig.9
L'élément pyramide de référence au second ordre incomplet (13 noeuds) 94
Fig.10
La pyramide au second ordre complet à 14 noeuds 99
Fig.11
Aspect de la dérivée de la fonction N1(u1,u2,u3) par rapport à u1 101
Fig.12
Représentation du polynôme sur [-1,1] 103
Fig.13
Table des points d'intégration
Coordonnées et poids *106*
Fig.14
Plans d'intégration sur l'élément pyramidal (ici 2) 108
Fig.15.1
Comparaison des points d'intégrations classiques et pyramides 108
Fig.15.2
Nombre de points de Gauss pour les pyramides 109
Fig.16
Géométrie du problème test 110
Fig.17
Coupe du condensateur cylindrique utilisé pour valider l'élément pyramide 112
Fig.18
Décomposition du maillage hexaédrique en maillage pyramidal et tétraédrique 113
Fig.19
Maillage surfacique du quart de condensateur cylindrique 114
Fig.20.1
Calcul du potentiel électrique et du champ électrique avec un maillage du premier ordre 115
Fig.20.2

Erreurs relatives sur le potentiel et le champ 115
Fig.21 Fonction de forme $\overrightarrow{W}_i$ associée à l'arête mn 118
Fig.22 Élément tétraédrique d'arête du premier ordre 119
Fig.23 L'élément nodal pyramide du premier ordre à cinq noeuds 120
Fig.24 Fonctions de base de l'élément d'arête pyramide 121

Chapitre IV
Maillage mixte et insertion des pyramides

Fig.1 Objectifs de l'élément pyramide 126
Fig.2 Polyèdres de Voronoï 127
Fig.3 Critère de la sphère vide 128
Fig.4 Création d'une boite englobante 129
Fig.5 Insertion de tous les points dans le maillage 130
Fig.6 Maillage final de Delaunay 131
Fig.7 Simplexe à trois noeuds 132
Fig.8 Recherche du simplexe contenant le noeud N 133
Fig.9 Recherche de BN(K) 133
Fig.10 Maillage 2D d'un domaine ne respectant pas l'arête AB 135
Fig.11 Maillage 2D d'un domaine par décomposition en sous problèmes 136
Fig.12 L' interface à traiter - un rectangle sur deux triangles 137
Fig.13 Maillage Delaunay admissible et Delaunay non-admissible 138
Fig.14 Les deux tétraèdres situés sur l'élément rectangulaire ont un sommet commun 138
Fig.15 La pyramide créée 139
Fig.16 Trois tétraèdres au voisinage de l'élément rectangulaire 139
Fig.17 Permutation d'arête possible 140
Fig.18 Permutation d'arête cas limite 140
Fig.19 Permutation d'arête impossible 141
Fig.20 Insertion de noeuds dans l'intersection des deux boules circonscrites aux deux tétraèdres 141
Fig.21 Insertion du noeud par la méthode de Delaunay 142
Fig.22 Insertion du noeud à une hauteur a paramétrée 143

Fig.23
Algorithme simplifié de gestion des non-conformités 144
Fig.24
Un même tétraèdre ACDF sur deux non conformités 145
Fig.25
Maillage modifié 145
Fig.26
Pyramides à l'interface prismes / tétraèdres 146
Fig.27
Maillage transformé 146
Fig.28
Traitement du maillage - Avant et après insertion de noeuds 147
Fig.29
Raccordement de deux maillages briques 148
Fig.30
Construction d'un maillage 3D par extrusion (rotation autour d'un axe D) 148
Fig.31
Test de qualité sur l'élément pyramide au premier ordre 149
Fig.32
Variation du critère de qualité en fonction de la hauteur h du noeud sommet 149

Chapitre V
Problèmes tests en électrotechnique et électro-mécanique

Fig.1.1
Géométrie du contacteur étudié 153
Fig.1.2
Maillage du quart de bobine et de circuit magnétique 154
Fig.2.1
Comparaison du calcul de la force- Maillage mixte et maillage libre comparés aux mesures 155
Fig.2.2
Visualisation de l'induction et du courant dans la bobine du contacteur 156
Fig.3
Statistiques de calculs maillage mixte et maillage libre 157
Fig.4
Comparaison avec un maillage adaptatif 157
Fig.5
Principe du chauffage par induction 158
Fig.6
Maillage du douzième de la pièce chauffée 159
Fig.7
Densité de courant et maillage dans les dents 160
Fig.8
Comparaison des statistiques de résolution 160
Fig.9
Géométrie du dispositif 162
Fig.10
Bobine et circuit magnétique présentant un faible entrefer , maillage et résultats du calcul
Fig.11
Densité de champ B le long de la ligne ab pour un maillage en tétraèdres et un maillage mixte au premier ordre incomplet et au second ordre incomplet éléments d'arête 165
Fig.12
Schéma de principe en coupe du ralentisseur 166
Fig.13
Schéma de principe 3D du ralentisseur 167
Fig.14
Maillage global du seizième de ralentisseur 167
Fig.15

Géométrie du ralentisseur.....168
Fig.16
Maillage du ralentisseur et pyramides de raccordement.....169
Fig.17.1
Géométrie du coupleur de Kumada.....170
Fig.17.2
Maillage et paramétrage du coupleur de Kumada.....171
Fig.18
Le coupleur de Kumada pour deux positions a extrêmes.....171

Chapitre VI
Application aux transducteurs électro-acoustiques

Fig.1
Géométrie du problème.....176
Fig.2
Visualisation des déformées en mode de flexion et longitudinal.....177
Fig.3.1
Caractéristique des matériaux.....178
Fig.3.2
Calcul des modes propres, des masses, et statistiques de résolution dans les trois configurations178
Fig.3.3
Calcul analytique des modes propres.....178
Fig.3.4
Calcul des erreurs relatives sur les modes propres dans les trois configurations.....178
Fig.4
La chaîne logicielle utilisée.....179
Fig.5
Sonar actif trempé d'un navire.....181
Fig.6
Schéma de principe de l'émission et de la réception d'ondes acoustiques dans l'eau.....183
Fig.7
Schéma de principe du Tonpilz.....184
Fig.8
Schéma de principe du Flextensionnel.....185
Fig.9
Schéma de principe du Janus magnétostrictif.....185
Fig.10
Le résonateur de Helmholtz.....186
Fig.11
Vues photographiques du prototype de Janus magnétostrictif.....187
Fig.12.1
Maillage du transducteur et de sa sphère d'eau.....188
Fig.12.2
Maillage du transducteur.....190
Fig.13
Déformée des déplacements à la résonnance (600 Hz).....191
Fig.14
Isovaleurs de déplacements à la résonance.....192

Table des matières

Introduction
p 7

Chapitre I
C.A.O. éléments finis et Maillage
p 11

I-1 La méthode des éléments finis....12
1-1 Généralités....12
1-2 Utilisation de la méthode des éléments finis pour le calcul de champ électromagnétique: ... Des équations des milieux continus aux formulations en passant par les modèles....12
1-3 Remarques diverses....17
I-2 Description des données C.A.O. et définition d'un maillage....18
2-1 Intégration du maillage dans le processus de conception....18
2-2 Modèles de représentation géométrique....19
2-2-1 La B-Rep ou représentation frontière....19
2-2-2 La C.S.G. ou historique de construction....20
2-3 Préliminaire et définitions d'un maillage, quelques bases....23
2-3-1 Définitions....23
2-3-2 Propriétés....23
2-3-2 Modèle de représentation de FLUX3D....24
2-4 Quelques pré processeurs et mailleurs existants....25
I-3 Quelques techniques de maillage....26
3-1 Rapide historique....26
3-2 Mailleurs structurés....26
3-2-1 mailleur réglé....26
3-2-2 mailleur extrusif....27
3-3 Mailleur non-structuré ou libre....28
3-3-1 La méthode de Delaunay....28
3-3-2 Frontal....28
3-3-3 Maillage par Quadtree(2D) ou Octree(3D)....29
I-4 Contraintes de maillage en électromagnétisme....31
4-1 Les problèmes géométriques....31
4-2 Les problèmes physiques: L'anisotropie de la variable d'état....33
4-2-1 L'étude d'un problème à effet de peau....33
4-2-2 Rappels théoriques....34
4-2-3 L'approche éléments finis....35
4-2-4 Données du maillage et du calcul....36
4-2-5 Résultats obtenus....37
4-2-6 Conclusion et extension de cette étude....38
4-3 Des solutions....40
I-5 Conclusions....41

Chapitre II
Qualité des éléments finis en vue d'optimiser un maillage
p 43

II-1 Critères géométriques a priori....46
1-1 Qualité des éléments finis de type simplexe....46
1-1-1 Une classification des éléments finis tétraédriques....46
1-1-2 Pour aller plus loin dans la classification des mailles tétraédriques....48

1-1-3 Évaluation des coûts de calcul de chaque critère....50
1-2 Critère de qualité pour les rectangles ou hexaèdres....50
1-3 Quel choix pour l'utilisateur: triangle ou rectangle, hexaèdre ou tétraèdre?....52
II-2 Quelques algorithmes d'optimisation de maillages tétraédriques....54
2-1 Solutions empiriques de modifications topologiques....54
2-1-1 Le remaillage local....54
2-1-2 Inversions locales....54
2-1-3 Suppression d'arêtes....56
2-1-4 Suppression de noeuds....57
2-1-5 Insertion de noeuds....58
2-1-6 Suppression de faces....58
2-2 Algorithmes de modifications non topologiques....58
2-2-1 Barycentrage....58
2-2-2 Bougé de points....59
2-2-3 Perspectives....60
2-3 Algorithmes généraux d'amélioration de maillage....60
2-3-1 Un algorithme de trempe ou "glouton"....60
2-3-2 Un algorithme de recuit....63
2-3-3 Un glouton plus performant....65
2-4 Conclusion....65
II-3 Un critère généraliste....66
3-1 Rappels brefs sur la résolution du système linéaire dans la méthode des éléments finis....66
3-1-1 Introduction....66
3-1-2 Algorithme de base de la méthode du gradient conjugué....67
3-2 Une mesure de la qualité d'une matrice avec le conditionnement matriciel....68
3-2-1 Définition du conditionnement....68
3-2-2 Propriétés....68
3-2-3 Calcul du conditionnement d'une matrice....69
3-3 Étude d'un problème simple éléments finis composé d'un motif....69
3-3-1 Cas d'un motif triangulaire....71
3-3-2 Cas d'un motif rectangulaire....73
3-3-3 Cas de la déformation d'un maillage régulier....74
3-3-4 Conclusion....75
3-4 De l'approche globale à l'approche locale....75
3-4-1 Cas du triangle du premier ordre en formulation gradient/gradient....76
3-4-2 Cas du triangle en formulation Ni.Nj....77
3-5 Une approche locale a priori: dans le cas du triangle....78
II-5 Conclusions et perspectives....81

Chapitre III
Les éléments pyramides
p 83

Avant propos....84
III-1 Introduction: Rapide présentation des éléments finis standards....85
III-2 Fonctions de forme des éléments pyramides nodaux....86
2-1 Généralités sur les fonctions de forme....86
2-1-1 Utilité des fonctions de forme dans la chaîne de calcul éléments finis....86
*2-1-2 Définition et condition de validités des fonctions de forme "standard"**....86
2-2 Méthodes d'investigations pour trouver des fonctions de forme....87
2-2-1 Génération de fonction de forme à partir d'une base polynomiale....87
2-2-2 Dégénération d'un cube pour créer une pyramide.....89
2-3 Une méthodologie plus empirique....90
2-3-1 Cas de l'élément rectangle linéaire à quatre noeuds....90
2-3-2 Cas de l'élément pyramide linéaire à cinq noeuds....91
2-3-3 Faut-il s'inquiéter de l'aspect rationnel des fonctions de forme?....93
2-4 Fonctions de forme du deuxième ordre incomplet....93
2-4-1 Premier cas: Noeuds aux coins de la base....94
2-4-2 Deuxième cas: Noeuds aux milieux des arêtes de la base....95

2-4-3 Troisième cas: Noeuds situés à l'étage 1/2 ..... *96*
2-4-4 Quatrième cas: Noeud sommet de la pyramide *97*
2-4-5 Récapitulatif *97*
2-5 A la recherche des fonctions de forme du deuxième ordre complet 98
2-6 Problème de la non dérivabilité au sommet de la pyramide 100
2-7 Conclusion 101
III-3 Intégration 102
3-1 Une intégration analytique est-elle vraiment nécessaire...? 102
3-1-1 Intégration par points et poids de Gauss *102*
3-1-2 Liste des fractions rationnelles à intégrer exactement *103*
3-1-2-1 Remarques 103
3-1-2-2 Liste des fonctions à intégrer exactement 104
3-2 Nombre de points et de poids de Gauss nécessaires pour chaque ordre 106
3-2-1 Liste des fonctions polynomiales à intégrer exactement *106*
3-2-1-1 Premier ordre 106
3-2-1-2 Deuxième ordre incomplet et complet 107
3-2-2 Points et poids de Gauss *108*
III-4 Validation de la nouvelle famille d'éléments pyramidaux 110
Préliminaire 110
4-1 Premier test: Un test d'évaluation du comportement de la pyramide déformée ou patch-test 110
4-1-1 Présentation *110*
4-1-2 Résultats *111*
4-1-3 Conclusions *111*
4-2 Deuxième test: Calcul de la capacité d'un quart de condensateur cylindrique 111
4-2-1 Présentation *111*
4-2-2 Résultats *114*
4-2-3 Conclusion *116*
III-5 Famille d'éléments pyramides en éléments d'arête 117
5-1 Définition des éléments d'arête 117
5-2 Propriétés des éléments d'arête 118
5-3 Les éléments d'arête pyramides 120
5-4 Les éléments d'arêtes pyramidaux hiérarchiques 121
5-4-1 Fonctions associées aux arêtes: *121*
5-4-2 Fonctions associées aux faces *121*
5-4-3 Fonctions associées au volume *121*
5-4-4 Conclusions *122*
III-6 Conclusion 123

Chapitre IV
Maillage mixte et insertion des pyramides
p 125

IV-1 Rappels sur la triangulation de Delaunay 127
1-1 Quelques définitions et propriétés 127
1-1-1 Polyèdres de Voronoï *127*
1-1-2 Le dual des polyèdres, un ensemble de simplexes *128*
1-2 Algorithme mis en oeuvre en 2D 128
1-3 Quelques difficultés de la méthode 131
1-3-1 évaluation du critère BN(K) *131*
1-3-2 Recherche d'un simplexe contenant un noeud *132*
1-3-3 Recherche de l'ensemble SN(K) vérifiant le critère *133*
1-4 Les différents mailleurs utilisés 133
IV-2 Gestion des non conformités 135
2-1- Hypothèses: le respect de la frontière 135
2-1-1 L'insertion de noeud *135*
2-1-2 Décomposition en sous problèmes *136*
2-1-3 Une solution par retournement d'arêtes *136*
2-1-4 Extension à trois dimensions *137*
2-2 Méthodologie 138
2-2-1 Première piste: Faire de la permutation d'arête ou "swapping" *139*

2-2-2 Deuxième piste: Faire de l'insertion de noeuds *141*
2-2-3 Algorithme général *142*
2-2-4 Un petit piège *145*
2-3 Retour sur les hypothèses...ou comment s'en sortir à tous les coups 146
IV-3 Application et validation sur des problèmes simples 147
3-1 Un quart de barreau de section carrée dans de l'air 147
3-2 Autres applications de l'élément pyramide 147
IV-4 Qualité des éléments pyramides 149
IV-5 Conclusion 150

Chapitre V
Problèmes tests en électrotechnique et électro-mécanique
p 151

V-1 Introduction 152
V-2 Calcul d'un contacteur télémécanique (Groupe Schneider) 153
V-3 Calcul du chauffage par induction: Trempe superficielle d'une roue dentée 158
V-4 Plaques métalliques autour d'une bobine 162
V-5 Ralentisseur électromagnétique 166
V-6 Application électromécanique: Le coupleur de Kumada 170
V-7 Conclusion 172

Chapitre VI
Application aux transducteurs électro-acoustiques
p 173

VI-1 Cadre de notre travail avec ATILA 176
1-1 L'élément pyramide 176
1-1-1 L'intégration au code ATILA *176*
1-1-2 La validation *176*
1-2 Le couplage avec FLUX3D 179
VI-2 Un peu d'acoustique sous-marine 180
2-1 Introduction 180
2-2 Le sonar actif 180
VI-3 Caractérisation d'un transducteur sonar 183
3-1 Quelques familles de transducteurs 183
3-1-1 Le Tonpilz piézo électrique *183*
3-1-2 Le transducteur Flextensionnel piézo électrique *184*
3-1-3 Le Janus magnétostrictif *185*
3-2 Moteur du transducteur 186
3-3 Le résonateur de Helmholtz 186
VI-4 Étude d'un transducteur sonar de type Janus Helmholtz magnétostrictif 187
4-1 Géométrie 187
4-2 Maillage réalisé 187
4-3 Résolution et exploitation 191
VI-5 Conclusion 193

Conclusion
p 195

Bibliographie
p 199

Table des matières p 203

Mots clés:

Eléments finis
Modélisation 3D
Qualité des éléments finis
Electromagnetisme
Maillage 3D
Conception assistée par ordinateur
Elément pyramide
Acoustique sous marine

Résumé:

Dans ce rapport, nous décrivons un outil capable de mailler en trois dimensions destiné à une approche multidisciplinaire de la physique (électrotechnique, électromécanique, acoustique) en mélangeant de manière avantageuse les types de mailleurs. L'innovation de ce préprocesseur est de pouvoir utiliser différents algorithmes de maillage en raccordant les éléments automatiquement via l'introduction d'éléments pyramidaux originaux.

Après avoir analysé les méthodes de maillage existantes et leurs spécificités dans la littérature, nous avons, avec les utilisateurs, classifié les difficultés de maillage. Ensuite, un indicateur de qualité *a priori* de maillage (basé sur le conditionnement de la matrice élémentaire), permettant d'évaluer la définition et le maillage d'un problème élément fini, est proposé.

Un élément fini pyramide original a été développé, étudié et validé, de manière à raccorder fortement les différents maillages issus de mailleurs manuels et assistés. Cet élément a été validé sur des formulations éléments finis nodaux et éléments finis d'arête. Ensuite, nous proposons un algorithme de gestion des interfaces non conformes *via* un procédé d'insertion de noeuds dans le maillage mixte de manière à générer un maillage conforme.

En cherchant à perfectionner l'outil développé, une qualification a été réalisée via de nombreuses collaborations universitaires et industrielles sur des problèmes tests réalistes. Enfin, nous présentons le maillage et le calcul d'une structure de transducteur Janus Helmholtz magnétostrictif.

Abstract:

In this document, we describe a tool that is able to mesh in three dimensions every kind of problems (electrotechnic, electromechanical or acoustic) by mixing advantageously different kind of meshes and finite elements. The innovation of this pre processor is to allow the user the mixing of every kind of mesh and element type by using pyramid original elements to ensure the continuity automatically.

After having analyzed mesh generation existing methods and their specificities in the litterature, we have classified mesh generation difficulties. Then, we propose a quality indicator of a finite element mesh based on the condition number of the finite element matrix.

A new finite element is presented and tested in order to link different meshes coming from assisted or free mesh generators. This pyramid element is developped for nodal and edge finite elements. Then we propose an algorithm that deals with non conform interfaces using node insertion.

Few electrical engineering applications coming from universitary and industrial analysis problems are presented in order to test the proposed tool on realistic problems. Finally, the mesh and the computation of a janus helmotz magnetostrictive transducer is presented.