



HAL
open science

M.H.D. à l'échelle du Laboratoire - Quelques résultats, quelques applications

Antoine Alemany

► **To cite this version:**

Antoine Alemany. M.H.D. à l'échelle du Laboratoire - Quelques résultats, quelques applications. Electromagnétisme. UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE; INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1978. Français. NNT : . tel-01330985

HAL Id: tel-01330985

<https://hal.science/tel-01330985>

Submitted on 13 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE

ET

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'ÉTAT ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Antoine ALEMANY

Ingénieur E.N.S.H.G.

Attaché de recherche au C.N.R.S.

SUJET

M.H.D. à l'échelle du Laboratoire Quelques résultats, quelques applications

Soutenue le 14 Mars 1978 devant la Commission d'Examen

M. MATHIEU	Président
M. FRISCH	
M. GUYON	
M. HUNT	Examineurs
M. LESPINARD	
M. MOREAU	

A V A N T P R O P O S

Je voudrais tout d'abord évoquer la mémoire du Professeur CRAVA qui après avoir assuré ma formation en Mécanique des Fluides m'a permis d'être intégré au sein de son Groupe, puis a appuyé et favorisé mon entrée au C.N.R.S. en tant que chercheur.

Je remercie Monsieur le Professeur MATHIEU de l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du Jury ainsi que Messieurs FRISCH, HUNT, GUYON et LESPINARD, pour leur participation à ce Jury.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur MOREAU pour avoir assuré la direction de mes travaux. Par ses conseils avisés, son enthousiasme et son expérience, il m'a permis de mener à bien mes recherches. Je le remercie pour les perspectives exaltantes que son dynamisme a ouvert pour chaque membre de l'Equipe.

Je ne saurais passer sous silence la collaboration très fructueuse que j'ai rencontrée auprès de l'Equipe de Uriel FRISCH (Maître de Recherche au C.N.R.S.), de l'Observatoire de Nice, et notamment de Pierre Louis SULEM (Attaché de Recherche au C.N.R.S.), dont j'ai tiré le plus grand profit pour l'interprétation des résultats expérimentaux sur la turbulence en M. H. D. Je souhaite vivement que cette collaboration se prolonge et même s'accroisse dans les années à venir.

C'est avec plaisir que je remercie Monsieur BARBET, Technicien de l'Equipe, collaborateur efficace et compétent, pour le soin qu'il apporte à chacune de ses réalisations. Ses initiatives heureuses aussi bien dans la conception que dans la réalisation des expériences ont souvent permis de surmonter de grandes difficultés technologiques.

Je remercie tous les chercheurs de l'Equipe M. H. D. et tout particulièrement Monsieur Yves FAUTRELLE pour sa participation à la réalisation du deuxième prototype du pulvérisateur électromagnétique, participation qui s'est avérée très efficace et très précieuse.

Je tiens à souligner enfin qu'il m'a souvent été nécessaire de faire appel au personnel technique et administratif du Laboratoire, réparti dans les divers services généraux. J'ai toujours rencontré auprès de ces personnes un accueil sympathique, beaucoup de dévouement et une grande compétence. A ce sujet, je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur LOUIS, Electronicien, qui a eu la charge d'assurer une grande part de la mise au point et de la maintenance des divers composants de la chaîne anémométrique du solénoïde, et qui s'est toujours acquitté parfaitement de cette tâche.

S O M M A I R E

	Page
<u>NOTATIONS</u>	1
<u>INTRODUCTION</u>	3
1. BASES DE LA M. H. D.	3
2. APERCU SUR L'ETAT ACTUEL DES CONNAISSANCES EN M. H. D. A FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS MAGNETIQUE	7
2.1. Domaine des champs uniformes	7
2.2. Cas des champs variables	8
3. IDEES DIRECTRICES DE CETTE THESE	9
3.1. Turbulence M. H. D. en champ uniforme	9
3.2. Ecoulements en champs variables	10
 <i>P R E M I E R E P A R T I E</i> <i>ETUDE DE LA TURBULENCE HOMOGENE M. H. D.</i>	
<u>CHAPITRE I : ORIGINALITE ET INTERET DU PROBLEME</u>	15
1. RAPPEL SUR LES EQUATIONS	16
2. BASES PHENOMENOLOGIQUES ET ASPECTS SPECIFIQUES	18
3. ANALOGIE AVEC D'AUTRES PROBLEMES DE TURBULENCE HOMOGENE	22

<u>CHAPITRE II : INFLUENCE OF AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD ON M. H. D.</u>	
<u>TURBULENCE (Article soumis au Journal de Mécanique)</u>	30
1. INTRODUCTION	35
2. EXPERIMENTAL INVESTIGATION FOR MODERATE VALUES OF THE INTERACTION PARAMETER	37
2.1. Description of the experiment	37
2.2. Experimental results	40
2.3. Interpretation of the experimental results	43
3. RESPONSE OF THE TURBULENCE TO SUDDEN APPLICATION OF A STRONG MAGNETICE FIELD	47
3.1. A possible experiment	47
3.2. Theory : the linear phase	49
4. THE QUASI TWO-DIMENSIONAL PHASE	50
4.1. The magnetic field is switched off	51
4.2. The magnetic field is maintained	53
5. CONCLUDING REMARKS	58
Appendix 1 : The quasi static approximation	60
Appendix 2 : Measurements technique	61
Appendix 3 : Global regularity of the quasi static equations at positive viscosity and sufficiently large viscosity- dependent magnetic fields	64
 <u>CHAPITRE III : COMPLEMENTS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX</u>	 84
1. REEXAMEN DE LA THEORIE DE KOLMOGOROV EN PRESENCE D'EFFET JOULE	85
2. TECHNIQUE D'ETALONNAGE ET DE MESURE	87
3. PERSPECTIVES ULTERIEURES	90
 <i>DEUXIEME PARTIE</i>	
<i>ECOULEMENT M. H. D. EN PRESENCE DE CHAMPS MAGNETIQUES TOURNANTS</i>	102
 <u>LE CONTEXTE</u>	 103
1. LE CONTEXTE INDUSTRIEL	103

2. LE CONTEXTE SCIENTIFIQUE	105
<u>CHAPITRE I : ETUDE DU PULVERISATEUR ELECTROMAGNETIQUE</u>	108
1. SON PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT	109
2. INSTALLATION PRELIMINAIRE A EAU	109
3. REGIMES TYPQUES ET TRANSITION	110
4. INSTALLATION EXPERIMENTALE	114
5. RESULTATS EXPERIMENTAUX	116
Annexe au chapitre I de la deuxième partie	
PROCEDE ELECTROMAGNETIQUE DE PULVERISATION DE METAUX LIQUIDES. BREVET FRANCAIS N° 77.17296	130
<u>CHAPITRE II : ECOULEMENT D'UN FLUIDE CONDUCTEUR DE L'ELECTRICITE EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE TOURNANT</u> (Article accepté par le Journal de Mécanique)	145
1. INTRODUCTION	148
2. FORMULATION DU PROBLEME	149
3. REGIMES A INTERACTION MODEREE ($N \ll 1$)	152
3.1. Cas général	153
3.2. Cas asymptotique	158
3.3 Remarque sur l'influence de la pulsation des forces électromagnétiques	160
4. REGIMES A INTERACTION FORTE ($N \gg 1$)	161
5. CONCLUSION	164
<u>CHAPITRE III : ECOULEMENT M. H. D. EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE TRANSVERSAL A PLUSIEURS PAIRES DE POLES</u> (Article soumis au Journal de Mécanique)	173
1. INTRODUCTION	176
2. FORMULATION DU PROBLEME	178

3. APPROXIMATION ASYMPTOTIQUE $M \gg 1$	180
3.1. Equations	180
3.2. Solutions partielles	182
3.3. Solutions complètes	186
4. ETUDE QUALITATIVE DE L'ECOULEMENT DANS LES REGIONS SINGULIERES	189
4.1. La zone axiale	190
4.2. Les couches parallèles	193
5. CONCLUSION	197
<u>CONCLUSION GENERALE</u>	207

NOTATIONS



Les principales notations utilisées sont, sauf indications spécifiées dans le texte :

\vec{B} (B_x, B_y, B_z) ou (B_r, B_θ, B_z) : Vecteur induction magnétique

\vec{E} (E_x, E_y, E_z) ou (E_r, E_θ, E_z) : Vecteur champ électrique

\vec{F} (F_x, F_y, F_z) ou (F_r, F_θ, F_z) : Vecteur force

g : Accélération de la pesanteur

\vec{J} (J_x, J_y, J_z) ou (J_r, J_θ, J_z) : Vecteur densité de courant électrique

P : Pression

Q : Débit

\vec{V} (u, v, w) ou (V_r, V_θ, V_z) : Vecteur vitesse

μ : Perméabilité magnétique

ν : Viscosité cinématique

ρ : Masse volumique

σ : Conductivité électrique

T_s : Tension superficielle

$$M = B_0 \ell_0 (\sigma / \rho \nu)^{1/2} \quad : \quad \text{Nombre de Hartmann}$$

$$N = M^2 / R_e = \sigma B_0 \ell_0 / \rho V_0 \quad : \quad \text{Paramètre d'interaction}$$

$$R_e = V_0 \ell_0 / \nu \quad : \quad \text{Nombre de Reynolds}$$

$$R_m = V_0 \ell_0 \mu \sigma \quad : \quad \text{Nombre de Reynolds magnétique}$$

$$R_o = V_0 / \omega R \quad : \quad \text{Nombre de Rossby}$$

$$W_e = \rho V_0^2 \ell_0 / T_s \quad : \quad \text{Nombre de Weber}$$

I N T R O D U C T I O N

1. BASES DE LA M. H. D.

La magnétohydrodynamique (M. H. D.) est définie, dans tous les ouvrages qui lui ont été consacrés, comme l'intersection de la dynamique des fluides et de l'électromagnétisme. Son champ d'investigation fort considérable couvre aussi bien des phénomènes à échelle astrophysique (auto-entretien du champ magnétique terrestre [1] , turbulence hélicitaire dans le soleil [2]) que des phénomènes à l'échelle du laboratoire ou des réalisations industrielles ; il englobe tous les phénomènes classiques de l'une des deux disciplines, revus avec l'originalité du couplage avec l'autre discipline, mais il en contient aussi de nouveaux, qui n'ont aucun équivalent en hydrodynamique ou en électromagnétisme (ondes d'Alfen [3] par exemple).

Les équations générales concernent l'approximation des fluides électro-conducteurs comme les métaux liquides par exemple, pour lesquels il est justifié de négliger les courants électriques de déplacement prépondérant dans les fluides isolants comme les diélectriques qui appartiennent au domaine de l'E. H. D. (Electrohydrodynamique). Ces équations générales sont dans le cas du fluide incompressible :

- Les équations de Navier Stokes :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P + \vec{j} \wedge \vec{B} + \nu \nabla^2 \vec{V}$$

- L'équation de conservation de la masse qui dans le cas incompressible se réduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

- Les équations de Maxwell (sans courant de déplacement) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \text{div} \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{B} &= \mu \vec{j} \implies \text{div} \vec{j} = 0 \end{aligned}$$

et la loi d'Ohm :

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

La M. H. D. peut être divisée en plusieurs classes d'écoulement caractérisées chacune par des mécanismes typiques et régies par des équations plus simples que ces équations générales complexes. Comme c'est toujours le cas en mécanique des fluides, ces simplifications sont basées sur l'évaluation des ordres de grandeurs caractéristiques de paramètres adimensionnels.

En combinant les équations de Maxwell et la loi d'Ohm, on obtient l'équation classique régissant la distribution de l'induction magnétique dans un écoulement de fluide conducteur. Cette équation mise sous forme adimensionnelle s'écrit :

$$\frac{\ell_0}{V_0 \cdot t_0} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{V} \wedge \vec{B}') + \frac{1}{R_m} \nabla^2 \vec{B}'$$

où $\vec{B}' = \frac{\vec{B}}{B_0}$ désigne le champ magnétique rapporté à une valeur B_0 de référence, t_0 une durée typique de ses variations, ℓ_0 et V_0 respectivement une longueur et une vitesse caractéristiques de l'écoulement, $R_m = \ell_0 V_0 \mu \sigma$ le nombre de Reynolds magnétique. Dans les phénomènes astrophysiques caractérisés par des échelles de longueurs considérables, le nombre de Reynolds magnétique est en général élevé de sorte que l'effet de diffusion du champ magnétique peut être négligé (au moins à grande échelle). Le champ magnétique apparaît alors convecté par l'écoulement du fluide, c'est l'hypothèse du champ gelé. Nous n'envisagerons au contraire dans ce travail que le cas des expériences de laboratoire avec du mercure ($R_m \sim 10^{-2}$) ou des installations industrielles caractérisées pour la plupart par des valeurs faibles du nombre de Reynolds magnétique. Dans le cas des écoulements en charge soumis à l'action de champs magnétiques extérieurs appliqués, la distribution de l'induction magnétique est alors indépendante de celle du champ de vitesse. Dans le cas des écoulements à surface libre, il peut subsister un couplage étroit entre la position et la forme de cette surface et la distribution de l'induction magnétique, notamment lorsqu'il s'agit d'écoulement en champs alternatifs. Le rapport $\ell_0/V_0 t_0$ caractérise la rapidité d'évolution du champ magnétique (durée d'une alternance pour les champs alternatifs). Si $\ell_0/V_0 t_0$

est très inférieur à l'unité et si $R_m \ll 1$, une approximation quasi stationnaire est justifiée. L'induction magnétique \vec{B}_0 qui serait imposée dans le vide par un champ extérieur vérifie alors l'équation :

$$\nabla^2 \vec{B}_0 = 0$$

En présence de liquide conducteur, un champ supplémentaire \vec{b} est engendré, il est faible devant le champ extérieur appliqué ($|\vec{b}/\vec{B}_0| \sim R_m$), c'est de lui cependant que résultent les courants électriques induits. Ce champ supplémentaire vérifie l'équation :

$$\frac{1}{R_m} \nabla^2 \vec{b} + \text{Rot } \vec{V} \wedge \vec{B}_0 = 0$$

La forme vectorielle adimensionnée des équations de Navier Stokes s'écrit en choisissant $t^* = l_0/v_0$ comme temps caractéristique de référence et en notant \vec{j}' et P' respectivement les rapports $\vec{j}/B_0 l_0 v_0$ et $P/\rho v_0^2$:

$$Re \left[\frac{\partial \vec{V}'}{\partial t'} + \text{grad} P' \right] - \Delta \vec{V}' - M^2 (\vec{j}' \wedge \vec{B}') = 0$$

En plus du nombre de Reynolds, cette équation fait apparaître le nombre de Hartmann $M = B_0 l_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$ rapport des forces électromagnétiques (ou forces de Laplace) aux forces de viscosité. Le rapport $\left(\frac{M^2}{Re}\right)$ noté N et appelé paramètre d'interaction caractérise l'effet du champ magnétique sur l'écoulement. Il s'interprète comme le rapport des forces électromagnétiques aux forces d'inertie. Ce paramètre divise les problèmes de M. H. D. en deux grandes classes :

- $N \gg 1$: L'inertie du fluide peut être négligée, le nombre de Hartmann caractérise alors seul l'influence du champ magnétique. Dans la plupart des expériences de laboratoire ou des installations industrielles, ce nombre peut atteindre facilement des valeurs de plusieurs centaines justifiant l'approximation des champs intenses et des méthodes asymptotiques pour l'analyse théorique :
- $N \ll 1$: L'inertie du fluide limite les effets des forces de Laplace dans le cas des champs permanents ou étouffe les fluctuations de vitesse dans le cas des champs pulsants. Dans ce dernier cas, l'influence du champ magnétique sur l'écoulement moyen peut éventuellement être grande.

La difficulté concernant l'évaluation judicieuse des ordres de grandeurs typiques des paramètres caractéristiques provient du choix des échelles cinématiques. Dans l'essentiel des études de M. H. D. qui concernent le cas du champ homogène, l'écoulement étant toujours permanent (au moins en moyenne) les échelles sont choisies uniquement selon des critères hydrodynamiques. Elles sont évidentes si on s'intéresse uniquement à cet écoulement moyen, les dimensions

du domaine fluide (dimensions de l'installation pour les études expérimentales) et la vitesse débitante étant alors imposées. Pour les études de turbulence, le choix des échelles cinématiques se porte naturellement, du moins si on s'intéresse à des propriétés globales, vers l'échelle intégrale et la valeur quadratique moyenne u_0 des fluctuations de vitesse. Ici, une parenthèse importante s'impose. En effet, bien que faibles, dans l'hypothèse des faibles valeurs du nombre de Reynolds magnétique, les perturbations de champs magnétiques sont néanmoins susceptibles d'engendrer des phénomènes ondulatoires (ondes d'Alfven) dont le temps de transit est de l'ordre de :

$$\tau_{Alf} \sim \ell \sqrt{\rho \mu} / B_0$$

Dans la plupart des expériences de laboratoire, le temps de diffusion des perturbations de champ magnétique à l'échelle de la turbulence :

$$\tau_{diff.} \sim \ell_0^2 \mu \sigma$$

est en général beaucoup plus court que le temps de transit des ondes d'Alfven puisqu'en effet le rapport :

$$\tau_{diff.} / \tau_{Alf} = R_m \cdot \frac{B \sqrt{\rho \mu}}{u_0}$$

appelé nombre de Lundquist et noté S est inférieur à 10^{-1} pour des valeurs modérées de B ($B \leq 1T.$). Par contre, l'utilisation de bobines supra-conductrices permettant d'atteindre aisément des champs magnétiques de $5T$ (Service National des Champs Intenses, C. N. R. S.) pourrait déterminer des nombres de Lundquist assez élevés ouvrant la perspective d'une autre classe d'étude de la turbulence M. H. D. dans laquelle des interactions non locales analogues aux ondes inertielles en fluide tournant sont susceptibles de modifier profondément les lois de dévolution de l'écoulement.

Le choix des échelles cinématiques est assez délicat lorsqu'il s'agit d'études liées à l'utilisation de champs alternatifs, puisqu'alors le champ magnétique a sa propre échelle de temps : sa pulsation ω , et sa propre échelle de longueur : la profondeur de pénétration du champ dans le milieu pendant une alternance, soit $\ell_0 = \delta = \sqrt{1/\mu \sigma \omega}$ (cf. équation de l'induction). Il convient alors de dissocier le domaine fluide dans lequel agissent les forces électromagnétiques, limité par l'effet de peau, du domaine libre caractérisé, lui, par des critères purement hydrodynamiques. Le cas des champs glissants est encore plus complexe puisque, outre l'effet de peau toujours présent, le champ magnétique a une seconde échelle de longueur, sa périodicité spatiale caractérisée par la distance D_p entre deux pôles successifs, et une échelle

de vitesse représentée par sa célérité C de propagation, le rapport D_p/C forme donc une seconde échelle de temps. Toutefois, dans beaucoup de problèmes, il est heureusement possible de dissocier les deux couples d'échelles. C'est le cas notamment lorsque la pulsation du champ magnétique est suffisamment faible pour que sa pénétration dans le milieu soit totale. On peut alors choisir comme échelle de vitesse la célérité du champ magnétique, et comme échelle de longueur, le pas polaire qui est souvent du même ordre de grandeur que les dimensions de l'installation.

2. APERÇU SUR L'ETAT ACTUEL DES CONNAISSANCES EN M. H. D. A FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS MAGNETIQUE

2.1. Domaine des champs uniformes

Les écoulements en conduite de fluide électroconducteur soumis à l'influence de champs magnétiques homogènes et constants ont fait l'objet de nombreuses études tant expérimentales que théoriques depuis les premiers travaux connus de Hartmann (1937) puis de Hartmann et Lazarus (1937). Citons notamment ceux de Schercliff qui s'est intéressé au cas de la conduite de conductivité électrique uniforme, puis de Hunt et Stewartson lorsque la conduite présente des discontinuités de conductivité, ou encore sur le plan expérimental ceux de Lykoudis, Branover, Tsinober, Rosant, etc... (voir Partie 2, Chapitre III pour des références précises). Dans la plupart des cas, l'approximation des champs intenses permet une interprétation physique simple des divers phénomènes de l'écoulement. Celui-ci peut alors être divisé en régions caractéristiques, précisant notamment la structure des couches pariétales en fonction de l'orientation du champ magnétique vis à vis des parois (couches de Hartmann perpendiculaires au champ magnétique d'épaisseur $\delta \sim 1/M$, couches de Hunt et Stewartson parallèles au champ magnétique d'épaisseur $\delta \sim 1/M^{1/2}$). Les études de sillage ou de jet confiné en champ magnétique transversal ou aligné ont fait également l'objet de travaux assez nombreux (Moreau [4], voir aussi le livre de Branover [5]). Tous ces problèmes ont en commun le caractère stabilisant du champ magnétique dont l'effet consiste essentiellement en une uniformisation de l'écoulement, atténuant voir supprimant les gradients de vitesse.

Sur le plan des applications industrielles de ces champs homogènes, citons entre autre l'utilisation assez répandue des débitmètres électromagnétiques ou encore celle des pompes électromagnétiques à conduction. Il est bon tout de même de souligner à ce sujet que le calcul de ces pompes électromagné-

tiques fait encore largement appel à l'empirisme (voir à ce sujet le livre de L.A. Verte [6]).

Les connaissances dans le domaine de la turbulence homogène M. H. D. à faibles R_m étaient jusqu'ici assez fragmentaires. Les études théoriques connues concernaient essentiellement des théories linéarisées. Celles-ci sont relatives, soit aux premiers instants du déclin et font appel à l'hypothèse de distorsion rapide, soit au stade ultime du déclin pour lequel il est judicieux de négliger les termes de transferts inertiels (Moffatt, Lehnert, Deissler, etc... voir partie 1, chapitre II pour références précises). Seul pour l'instant Schumann [7] a pris en compte la totalité des termes de transfert par une simulation numérique directe limitée cependant à des nombres de Reynolds de l'ordre de 60 nettement plus faibles que ceux qu'on peut atteindre au laboratoire. Les nombreux résultats expérimentaux (Branover, Tsinober, Rosant, Lykoudis, etc ..., voir partie 1, chapitre II pour références) concernent les possibilités de laminarisation d'un écoulement turbulent introduit dans l'entrefer d'un électroaimant. Ces études suscitent encore quelques controverses dont la mieux connue concerne la persistance anormale de la turbulence qui se manifeste dans certaines conditions expérimentales malgré l'effet stabilisant de forts champs magnétiques ; elle a été attribuée par les uns au caractère bidimensionnel de l'écoulement, le champ magnétique étant alors sans effet sur celui-ci ([8] , [9]), par les autres à l'apport d'une source extérieure d'énergie engendrée par l'effet de pénétration dans le champ magnétique. Cette dernière explication semble actuellement admise par la plupart des expérimentateurs (Branover [10]). Quoiqu'il en soit, ces études expérimentales ne permettent guère d'isoler les mécanismes spécifiques de la dissipation par effet Joule en raison du caractère fortement inhomogène de l'écoulement (voir pour une bibliographie précise : partie 1, chapitre 2).

2.2. Cas des champs variables

Le cas des champs variables, beaucoup plus complexe puisqu'au contraire des champs uniformes, l'inhomogénéité de la répartition des forces électromagnétiques engendre un fort brassage de l'écoulement, a été beaucoup moins étudié. Le profil en M bien connu qui se développe lorsqu'un fluide électroconducteur pénètre dans l'entrefer d'un électroaimant est une manifestation de ce brassage liée à l'inhomogénéité du champ magnétique aux extrémités de l'inducteur. Bien que l'explication qualitative en soit connue, il n'existe pas à l'heure actuelle de théorie précisant la distribution de vitesse de ce profil en M . Or, les perspectives d'applications industrielles de la M. H. D.

font largement appel à l'utilisation de champs pulsants à haute fréquence ou de champs glissants caractérisés les uns comme les autres par de fortes inhomogénéités dues, soit à l'effet de peau, soit à la périodicité spatiale du champ magnétique caractérisé par son pas polaire. Citons notamment parmi les développements des recherches actuelles :

- les pompes électromagnétiques à induction déjà commercialisées mais dont le calcul fait encore largement appel à l'empirisme et qui sont par ce fait encore limitées dans leurs performances,
- les possibilités de contrôle de forme d'un jet métallique sans aucun contact avec des parois [11] , [12] ,
- les problèmes de brassage ou au contraire de séparation de constituants dans les fours à induction [13] , [14] ,
- la lévitation électromagnétique [15] limitée encore par des phénomènes d'instabilité à des poches de petites dimensions, mais qui permet déjà d'obtenir après refroidissement d'une masse métallique liquide en l'absence de tout contact superficiel des cristaux d'une grande pureté.

Outre l'influence de l'inhomogénéité spatiale des forces électromagnétiques, tous ces problèmes ont aussi en commun le caractère pulsatoire du champ magnétique. A notre connaissance, il n'existe aucune étude qui prenne en compte l'influence de cette pulsation ni dans un calcul de stabilité où elles sont susceptibles d'entretenir d'éventuelles perturbations, ni dans un calcul d'écoulement laminaire où la plupart du temps les forces électromagnétiques sont assimilées à leurs valeurs moyennes.

3. IDEES DIRECTRICES DE CETTE THESE

3.1. Turbulence M. H. D. en champ uniforme

Puisque les idées concernant les écoulements laminaires sont assez claires, c'est plus particulièrement sur la turbulence homogène M. H. D. qu'un effort était à faire. Les circonstances ont été particulièrement favorables. En effet, les développements théoriques de Moffatt pour les premiers stades après l'application soudaine d'un fort champ magnétique et de Moreau pour les stades ultérieurs où les mécanismes non linéaires deviennent importants [16] avaient bien mis en évidence une certaine tendance vers la bidimensionnalité de cette turbulence. La turbulence bidimensionnelle présente des aspects très spécifiques qui ont été élucidés au cours des dix dernières années par

Kraichnan [17] , Batchelor [18] , Leith [19] puis Pouquet, Lesieur, André et Basdevant [20] , etc... Ce problème de turbulence M. H. D. à faible nombre de Reynolds magnétique prenait alors un intérêt tout particulier justifiant la construction d'une expérience de laboratoire pour éclairer les mécanismes dominants de cet écoulement, dans ce contexte favorable où les concepts théoriques assez avancés apportaient une base solide à l'interprétation physique des résultats expérimentaux. De plus, nous avons bénéficié par la suite du lancement d'une A. T. P. du C.N.R.S. (instabilité dans les fluides et les plasmas), et de la collaboration fructueuse avec U. Frisch et P.L. Sulem (Observatoire de Nice) qui ont développé une analyse théorique dans le cas asymptotique des champs intenses.

Notre effort expérimental a été centré sur une installation dont la conception semble unique et dont la construction et la mise au point se sont avérées très délicates. La description précise de cette installation est reportée dans le chapitre II de la première partie. Nous voulons seulement, ici, mettre l'accent sur ce qui fait son originalité par rapport à toutes les expériences connues en turbulence M. H. D. Cette originalité tient essentiellement à l'homogénéité de la turbulence engendrée dans un entrefer circulaire de grande dimension (20 cm de diamètre) directement dans le champ magnétique (suppression de l'effet d'entrée) par une grille mobile en translation verticale (contrôle rigoureux de la vitesse moyenne). Cette installation expérimentale permet donc d'isoler, en l'absence de toute source extérieure d'énergie, les mécanismes engendrés par l'action anisotrope du champ magnétique.

3.2. Ecoulements en champs variables

L'étude des écoulements laminaires de liquides électroconducteurs soumis à l'influence de champs magnétiques tournants à plusieurs paires de pôles (cas particulier des champs glissants) soulève des questions nouvelles. En effet, ces écoulements présentent par rapport au cas classique du champ magnétique homogène transversal une différence essentielle : l'inhomogénéité du champ magnétique lorsque le nombre de paires de pôles est supérieur à l'unité. Ils posent en outre un problème typique : quelle est l'influence de la rotation du champ magnétique sur la distribution de vitesse dans une section droite ? Comment se manifeste l'influence du nombre de paires de pôles sur la rotation du fluide, la vitesse de synchronisme peut-elle toujours être atteinte ? Ce problème ouvre en outre des possibilités d'application industrielle originales comme par exemple la centrifugation électromagnétique, ou encore, comme nous l'avons développé au laboratoire, la pulvérisation électromagnétique utilisant

la force centrifuge pour briser un jet de métal liquide.

Notre effort a été ici à la fois expérimental et théorique. Les expériences ont été orientées vers la réalisation d'un prototype de pulvérisateur électromagnétique, l'évaluation de ses performances comprenant notamment des essais au mercure et la caractérisation de ses régimes typiques de fonctionnement. L'analyse théorique concernant le cas idéal d'un inducteur infiniment long et relative exclusivement à l'écoulement établi et au régime permanent dans un repère lié au champ magnétique, ne constitue qu'une approche idéalisée de l'écoulement dans le pulvérisateur électromagnétique. Toutefois, le caractère fondamental de ces calculs suffit pour en justifier l'importance puisqu'à notre connaissance, ils constituent une des toutes premières approches de ces problèmes de M. H. D. en champs alternatifs, domaine qui nous semble promis à un bel avenir, où l'influence du champ magnétique sur l'écoulement n'est pas seulement passive mais constitue un élément moteur capable à lui seul d'entretenir le mouvement.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] FAUTRELLE Y. - "Baroclinic waves in the presence of magnetic field".
Journal de Mécanique, 1978. A paraître.
- [2] POUQUET A. - "Etude de la turbulence magnétohydrodynamique par simulation
numérique et techniques de fermeture".
Thèse d'Etat. Université de Nice. 1976.
- [3] ALFVEN H. "The existence of electromagnetic-hydrodynamic waves, Nature
150, 1942, p 405.
- [4] MOREAU R. - "Contribution à l'étude des écoulements hydromagnétiques".
Thèse d'Etat présentée à la Faculté des Sciences de Grenoble. Juin 1967.
- [5] BRANOVER H.H., TSINOBER A.B., - "Magnetodynamics of incompressible fluids".
Nauka, 1970, (en Russe).
- [6] VERTE L.A. - "Le transport électromagnétique du métal liquide".
Edit. Metallurgija (Moscou, 1965).
- [7] SCHUMANN U. - "Numerical simulation of the transition from three to two
dimensional turbulence under a uniform magnetic field".
J. Fluid Mech., Vol. 74, part 1, 1976, p 31.
- [8] BRANOVER H., GELFGAT Y. , KIT L., PLATNIEKS I. - "The effect of a transverse
magnetic field on the turbulence intensity profiles in rectangular channel".
Magnitnaya Gidrodinamika, Vol. 6, N° 3, 1970, p 41.
- [9] KIT L.G., TSINOBER A.B. - "Possibilité de créer et d'étudier une turbulence
bidimensionnelle dans un champ magnétique intense".
Magnitnaya Gidrodinamika, N° 3, 1971, p 23.
- [10] BRANOVER H., GERSHON P. - "On some aspect of turbulence suppression by
transverse magnetic field".
Symposium on turbulent shear flows, Pennsylvania University, 1977, p 12-21.
- [11] GETSELEV N. - "Procédé de coulée continue et semi-continue de métaux,
et installation pour sa mise en oeuvre".
Brevet n° 1.509.962-B 22d, 4 octobre 1966. Kuibishevsky Metallurgichesky.
Zavod Imeni V. I. Lenina.

- [12] GARNIER M., MOREAU R. - "Dispositif électromagnétique de confinement des métaux liquides".
Brevet Français n° 75.021.75, 4 juillet 1975.
- [13] KHALETZKY D. - "Etude théorique du brassage électromagnétique dans les fours à induction. Application à l'analyse d'un procédé de séparation électromagnétique".
Thèse de 3ème Cycle, Institut de Mécanique de Grenoble, 1976.
- [14] BONNIER E., ALLIBERT C., DRIOLE J. - "Procédé de séparation des particules ou inclusions essentiellement non miscibles d'une masse en fusion".
Brevet Français n° 75.22.557, 18 juillet 1975.
- [15] SAGARDIA S. , SEGWORTH R. - "Electromagnetic levitation melting of large conduction loads".
I.E.E. Transaction on industry application 1977.
- [16] MOREAU R. - "On Magnetohydrodynamic turbulence".
Proc. of symp. on turbulence of fluid and plasma, Polyt. Inst. of Brooklyn, 1968, p 359.
- [17] KRAICHNAN R.H. - "Inertial ranges in two-dimensional turbulence".
Phys. Fluids 10, 1967 a, p 1417.
- [18] BATCHELOR G.K. - "Computation of the energy spectrum in homogeneous two dimensional turbulence".
Phys. Fluids (suppl. 2) 12, 1969, p 233.
- [19] LEITH C.E. - "Atmospheric predictability and two-dimensional turbulence".
J. Atm. Sci., n° 28, 1971, p 145.
- [20] POUQUET A., LESIEUR M., ANDRE J.C., BASDEVANT C. - "Evolution of high Reynolds number two-dimensional turbulence".
J. Fluid Mech., Vol. 72, 1975, p 305.

PREMIERE PARTIE
=====

ETUDE DE LA TURBULENCE HOMOGENE M.H.D

CHAPITRE I

ORIGINALITE ET INTERET DU PROBLEME

1. RAPPEL SUR LES EQUATIONS.

Dans le cadre des approximations classiques de la M.H.D. à l'échelle du laboratoire ($R_m \ll 1$, $S \ll 1$), l'équation régissant les fluctuations de l'induction magnétique dans un écoulement turbulent s'écrit :

$$(1) \quad \text{Rot}(\vec{v}' \wedge \vec{B}_0) + \frac{1}{R_m} \nabla^2 \vec{b}' = 0$$

\vec{B}_0 désignant le champ magnétique moyen, \vec{b}' les fluctuations de champ magnétique ($|\vec{b}'| \sim |\vec{v}'| R_m$) et \vec{v}' les fluctuations de vitesse.

Les équations de Maxwell s'écrivent au deuxième ordre près :

$$(2) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}' \neq B_0$$

$$(3) \quad \text{Rot} \vec{b}' = \mu \vec{j}'$$

$$(4) \quad \text{Rot} \vec{e}' = -\frac{\partial \vec{b}'}{\partial t}$$

\vec{j}' et \vec{e}' représentant respectivement les courants induits et le champ électrique fluctuants. La force de Laplace \vec{f}' agissant sur chaque unité de volume du fluide s'en déduit immédiatement :

$$(5) \quad \vec{f}' \neq \vec{j}' \wedge \vec{B}_0 = \frac{\text{Rot} \vec{b}' \wedge \vec{B}_0}{\mu}$$

Introduisant cette force dans les équations de l'hydrodynamique il est possible en principe de décrire le mouvement du fluide. Toutefois, l'écriture des trois composantes de cette force dans l'espace de Fourier où elles s'expriment directement à partir des composantes du champ de vitesse fournit une forme commode à l'interprétation physique.

$$(6) \quad \hat{f}_x = \frac{-\sigma B_0^2}{\rho} \left(\frac{k_z^2}{k^2} \hat{u} - \frac{k_x k_z}{k^2} \hat{w} \right)$$

$$(7) \quad \hat{f}_y = \frac{-\sigma B_0^2}{\rho} \left(\frac{k_z^2}{k^2} \hat{v} - \frac{k_y k_z}{k^2} \hat{w} \right)$$

$$(8) \quad \hat{f}_z = 0$$

L'accent circonflexe désigne la transformée de Fourier. L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$(9) \quad \frac{\partial \widehat{V}}{\partial t} = \widehat{q} - i \vec{k} \cdot \widehat{P} - \widehat{f} - \nu k^2 \widehat{V}$$

dans laquelle \widehat{q} désigne la transformée de Fourier du terme inertiel. Utilisant la condition d'incompressibilité $k_i \widehat{u}_i = 0$, il est aisé d'éliminer la pression de cette équation. On obtient ainsi

$$(10) \quad \widehat{P} = \rho i \frac{\vec{k}}{k^2} \widehat{q} - \rho i \frac{\vec{k}}{k^2} \widehat{f}$$

et par suite l'équation du mouvement :

$$(11) \quad \frac{\partial \widehat{V}}{\partial t} = -\vec{k} \left(\frac{\vec{k}}{k^2} \cdot \widehat{q} \right) + \widehat{q} - \left(\nu + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{k_z^2}{k^2} \right) k^2 \widehat{V}$$

En première approximation on peut considérer que l'action du champ magnétique se manifeste par un accroissement fictif de la viscosité. Toutefois cette analogie est relativement superficielle puisqu'en effet la dissipation supplémentaire d'énergie engendrée par le champ magnétique, proportionnelle au rapport $k_z^2/k^2 = \cos^2 \theta$, est indépendante du nombre d'onde (elle est donc concentrée sur les échelles énergétiques) et est anisotrope puisqu'elle dépend de l'angle θ que fait le vecteur d'onde avec la direction du champ magnétique appliqué. En remplaçant la viscosité réelle par sa valeur fictive dans les équations classiques des tenseurs spectraux en turbulence Homogène (Craya [1]) on obtient directement la forme particulière de ces équations en turbulence M.H.D (Moreau [2], Schumann [3]) :

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi_{ij} = \Omega_{ij} - 2 \left(\nu + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{\cos^2 \theta}{k^2} \right) k^2 \phi_{ij}$$

ou ϕ_{ij} désigne la transformée de Fourier des corrélations doubles de vitesse en deux points :

$$(13) \quad R_{ij} = \langle \tilde{u}_i(\vec{x}, t) \cdot \tilde{u}_j(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ij}(\vec{k}, t) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 k$$

et ou Ω_{ij} désigne le taux de transfert de ϕ_{ij} . La dissipation supplémentaire d'énergie, l'effet Joule, s'interprète comme la puissance des forces électromagnétiques.

$$(14) \quad \epsilon_j = \langle \widehat{\tilde{f}} \cdot \widehat{\tilde{V}} \rangle = \frac{2 \sigma B_0^2}{\rho} \mathcal{E} \cos^2 \theta$$

ou \mathcal{E} désigne l'énergie cinétique dont on notera désormais E la transformée de Fourier. L'équation de l'énergie, forme globale de l'équation des tenseurs spectraux s'écrit par conséquent, en désignant par $T = \Omega_{ii}/2$ le taux de transfert d'énergie dans l'espace des \vec{k} :

$$(15) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = T - \frac{2\sigma B_0^2}{\rho} \cos^2 \theta E - 2\nu k^2 E$$

2. BASES PHENOMENOLOGIQUES ET ASPECTS SPECIFIQUES.

C'est la dissipation par effet Joule, essentiellement anisotrope qui produit la tendance à la bidimensionnalité de la turbulence M.H.D. En effet, en l'absence de tout autre mécanisme, l'énergie portée par les vecteurs d'ondes d'angle θ serait dissipée en un temps de l'ordre de $\rho/2\sigma B_0^2 \cos^2 \theta$. On aboutit ainsi à la formation de structure colonnaire, l'énergie ne subsistant au bout d'un temps assez long qu'au voisinage du plan $\theta = 0$. L'expression (10) de la pression comporte une partie linéaire \tilde{P}_\parallel , qui assure une part des transferts d'énergie (correlation vitesse, partie linéaire de la pression) que nous appellerons dorénavant partie linéaire des transferts. Son rôle est déterminant dans les mécanismes conduisant à la bidimensionnalité puisqu'elle assure une redistribution d'énergie ; la composante de la vitesse parallèle au champ magnétique alimentant avec un taux de transfert égale à

$$(16) \quad \left\langle \tilde{w} \frac{\partial \tilde{P}_\parallel}{\partial z} \right\rangle = \sigma B_0^2 \cos^2 \theta \langle \tilde{w}^2 \rangle$$

les deux composantes de la vitesse perpendiculaire à cette direction

$$(17) \quad \left\langle \tilde{u} \frac{\partial \tilde{P}_\parallel}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{P}_\parallel}{\partial y} \right\rangle = -\sigma B_0^2 \cos^2 \theta \langle \tilde{w}^2 \rangle$$

sur lesquelles s'opère exclusivement la dissipation par effet Joule. Il faut noter que le terme bidimensionnel recouvre ici un aspect purement géométrique puisqu'il s'applique seulement à la formation des structures colonnaires caractérisées par deux échelles de longueur fort différentes, l'une ℓ_\perp perpendiculaire au champ magnétique étant beaucoup plus faible que l'autre ℓ_\parallel parallèle à cette direction ($\ell_\parallel/\ell_\perp \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$). En effet, en raison notamment des mécanismes que nous venons d'exposer, les trois composantes de la vitesse doivent conserver des valeurs de même ordre de grandeur.

Dans la théorie linéaire développée par Moffatt [4], le rapport $\sqrt{\langle \tilde{w}^2 \rangle / (\langle \tilde{u}^2 \rangle + \langle \tilde{v}^2 \rangle)}$ reste borné et tend asymptotiquement vers l'unité quant t tend vers l'infini.

Pour pousser plus loin l'interprétation physique des mécanismes de base de cette turbulence M.H.D. il est nécessaire d'utiliser les échelles de longueur et de temps bien spécifique des mécanismes que l'on souhaite appréhender. En turbulence ordinaire à fort nombre de Reynolds, les distributions spectrales sont gouvernées par le processus de cascade bien connu (Kolmogorov [5]) qui conduit dans l'espace de Fourier l'énergie des régions où elle est pour l'essentiel contenue, caractérisées par l'échelle intégrale ℓ , vers les échelles dissipatives caractérisées par l'échelle de Kolmogorov η :

$$(18) \quad \eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

ϵ désignant la quantité d'énergie qui parcourt cette cascade. Le rapport η/ℓ est de l'ordre de $R_\ell = (u_0 \ell / \nu)^{-3/4}$ de sorte que dans l'hypothèse des grandes valeurs du nombre de Reynolds R_ℓ il existe un large fossé entre ces deux échelles. C'est le temps mis par l'énergie pour franchir ce fossé qui gouverne le déclin de la turbulence indépendamment de l'appétit du puits visqueux. Ce temps lié au niveau de saturation des corrélations triples est de l'ordre de :

$$(19) \quad \tau_{tu} \sim \frac{\ell}{u_0}$$

il représente aussi le temps de retournement des tourbillons porteurs d'énergie. Ce raisonnement conduit à une loi de déclin de l'énergie cinétique indépendante de la viscosité. Différentes lois de déclin ont été proposées, toutes de la forme : $t^{-\alpha}$. La fourchette des valeurs de α trouvées expérimentalement est assez large puisque les résultats s'étalent de $\alpha = 1$ jusqu'à $\alpha = 1,4$. La valeur expérimentale probablement la plus précise à ce sujet peut sans doute être attribuée à Comte Bellot et Corrsin [6] ($\alpha = 1,25$). Sur le plan théorique, les résultats les plus récents obtenus à partir de la simulation numérique directe de l'équation spectrale E D Q D M [7] conduisent à $\alpha = 1,33$.

L'analyse est moins aisée en turbulence M.H.D. du fait de l'anisotropie qui introduit plusieurs échelles de longueurs (perpendiculaire et paral-

lèle au champ magnétique). Considérons donc tout d'abord pour simplifier, le cas d'une turbulence M.H.D. isotrope ou modérément anisotrope. Une part de l'énergie cinétique est dissipée par effet Joule dont l'essentiel est concentré au voisinage des échelles énergétiques. Le temps caractéristique de ce prélèvement est de l'ordre de :

$$(20) \quad \tau_{J_0} \sim \frac{\rho}{\sigma B_0^2}$$

Il est naturel de caractériser l'influence du champ magnétique par le rapport du temps de retournement qui détermine à lui seul la dissipation d'énergie en turbulence ordinaire, au temps Joule. On obtient ainsi un nombre sans dimension :

$$(21) \quad N_0 = \frac{\tau_{t_{u_0}}}{\tau_{J_0}} = \frac{\sigma B_0^2 \ell}{\rho \mu_0}$$

qui n'est autre que le paramètre d'interaction de l'écoulement et dont la valeur conditionne aussi le niveau de saturation des moments de tout ordre (qui obéissent à des équations analogues à celles des corrélations doubles). En particulier, les moments d'ordre trois, qui s'interprètent comme le taux de transfert de l'énergie vérifient l'équation écrite sous forme symbolique :

$$(22) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{J_0}} \right) \langle v v v \rangle = \frac{1}{\ell} \langle v v v v \rangle .$$

Le taux initial de leur croissance ($\frac{\partial}{\partial t} \sim u_0/\ell$) est indépendant du champ magnétique mais la saturation est atteinte plus rapidement qu'en turbulence ordinaire et donc à un niveau plus bas que l'on peut estimer de l'ordre de (cf. Partie 1, chapitre II, 2.).

$$(23) \quad \langle v v v \rangle \sim \frac{\langle v v \rangle^{3/2}}{1 + N_0}$$

Si $N_0 \ll 1$, la turbulence est toujours gouvernée par des mécanismes de type inertiel et le paramètre d'interaction représente le rapport de l'énergie dissipée par effet Joule à l'énergie dissipée par viscosité. Imaginons alors une turbulence caractérisée par un flux d'injection d'énergie \mathcal{E}_0 . La part \mathcal{E}_ν qui atteint le puit visqueux est telle que :

$$(24) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_\nu + N_0 \mathcal{E}_\nu = \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{E}_\nu = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + N_0} \neq \mathcal{E}_0 (1 - N_0) \end{cases}$$

de sorte que l'échelle de Kolmogorov

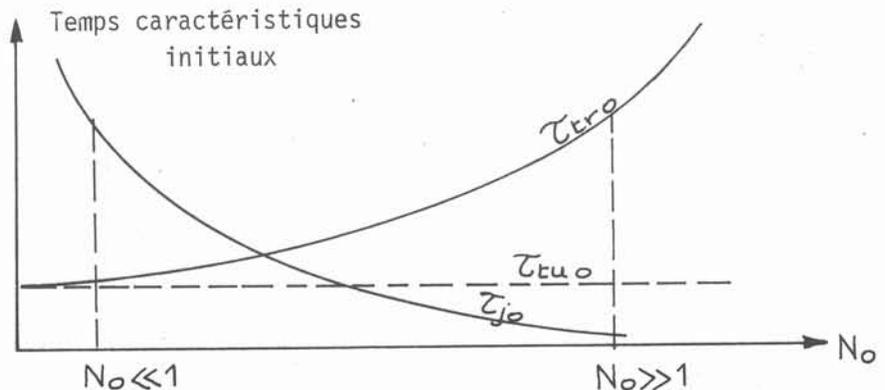
$$(25) \quad \eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon_0} \right)^{1/4} (1 - N_0)^{-1/4}$$

se trouve déplacée vers les petits nombres d'onde par rapport à sa valeur en l'absence de champ magnétique. On peut penser dans ce cas que, le déclin de l'énergie cinétique doit suivre une loi voisine du cas ordinaire de la turbulence homogène et isotrope.

Si $N_0 \gg 1$, l'écoulement est entièrement dominé par les forces électromagnétiques et l'essentiel de la dissipation est dû à l'effet Joule. Mais alors, le taux de transfert de l'énergie étant d'après (23) N_0 fois plus faible qu'en turbulence ordinaire, le temps de retournement ne peut plus être identifié à la durée caractéristique de ces transferts inertiels puisque :

$$(26) \quad \tau_{tr} = N_0 \tau_{tu}$$

Par ailleurs, l'équation (24) suggère que ces valeurs élevées du paramètre d'interaction correspondent aussi à la suppression du processus de cascade puisque l'énergie est essentiellement dissipée par effet Joule concentré au voisinage des grosses échelles de l'écoulement. Ceci est à rapprocher de l'analyse théorique développée par Sulem et Frisch (Première partie, chap. II, appendice 3) montrant que pour des valeurs de l'induction magnétique \vec{B} supérieures à une valeur critique, et dans la limite de viscosité nulle, l'évolution de la turbulence M.H.D ne conduit vraisemblablement à aucune singularité au cours du temps. La figure ci-dessous schématise l'évolution des temps caractéristiques quand N_0 augmente et situe chacun des deux cas asymptotiques : N_0 fort, N_0 faible.



En l'absence d'injection et lorsque le temps augmente, l'énergie tend de toute façon à être confinée dans une portion réduite de l'espace de Fourier du fait de la dissipation anisotrope par effet Joule. La turbulence présente alors des structures colonnaires (Partie 1, chap. II, fig. 11) et deux échelles de longueur ℓ_{\perp} et ℓ_{\parallel} très différentes. Le rapport de ces deux échelles est de l'ordre de :

$$(27) \quad \frac{\ell_{\perp}}{\ell_{\parallel}} = \tan \alpha(t)$$

$\alpha(t)$ désignant l'angle solide de l'espace de Fourier contenant l'essentiel de l'énergie (c. f. Partie 1, chap. II, éq. 6 pour une définition précise). Pour des valeurs de α assez faibles, on peut penser que le caractère fortement bidimensionnel de l'écoulement est susceptible de favoriser les transferts inverses d'énergie vers les petits k . Toutefois, cette question demeure assez délicate en raison de l'effet fortement dissipatif de l'effet Joule concentré justement dans ces petits nombres d'ondes et par conséquent éventuellement capable de masquer le phénomène. Une autre question est l'importance des transferts angulaires d'énergie globalement nuls en turbulence isotrope. Sont-ils locaux en θ et en k , et l'emportent-ils sur les transferts radiaux ? Enfin, le déclin de l'énergie cinétique associé à ces transferts suit-il toujours une loi en puissance ? En plus des expériences réalisées au laboratoire, ces questions ont fait l'objet d'une approche phénoménologique que nous avons développée en collaboration étroite avec U. Frisch et P.L. Sulem de l'observatoire de Nice, qui ont aussi développé parallèlement un calcul numérique utilisant comme technique de fermeture l'approximation quasi normale markovianisée (E D Q N M). Les résultats de ces différentes approches apparaissent tout à fait convergentes et constituent l'essentiel du chapitre II.

3. ANALOGIE AVEC D'AUTRES PROBLEMES DE TURBULENCE HOMOGENE.

Une bonne part des motivations de l'étude de la turbulence homogène en M.H.D., vient de ce qu'elle est susceptible de représenter toute une classe de situations dans lesquelles le champ de force extérieur favorise la formation d'une configuration quasi bidimensionnelle. Parmi celles-ci figurent notamment

Les écoulements tournants et les écoulements stratifiés en densité. Ces analogies ne peuvent-êtré analysées qu'à travers le mode d'action des forces extérieures. Celles-ci s'écrivent dans le cas des fluides stratifiés (la stratification étant produite par exemple par un gradient de température vertical comme c'est le cas dans les expériences de laboratoire et dans l'atmosphère).

$$(28) \quad \begin{cases} \tilde{F}_x = 0 \\ \tilde{F}_y = 0 \\ \tilde{F}_z = g \frac{\tilde{\theta}}{T_0} \end{cases}$$

$\tilde{\theta}$ désignant les fluctuations de température et T_0 la température du fluide en équilibre adiabatique (Richardson [8]). Dans le cas des fluides tournants, les forces de masse s'écrivent :

$$(29) \quad \begin{cases} \tilde{F}_x = -2 \Omega_0 \tilde{u} \\ \tilde{F}_y = 2 \Omega_0 \tilde{v} \\ \tilde{F}_z = 0 \end{cases}$$

où Ω_0 désigne l'intensité du vecteur rotation supposé vertical.

Seul le travail des forces d'Archimede est susceptible comme le travail des forces électromagnétiques de prélever de l'énergie cinétique à l'écoulement. Ce prélèvement prend la forme bien connue des correlations vitesse température dans l'équation d'évolution de l'énergie cinétique de la turbulence en fluide stratifié :

$$(30) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = g \frac{\langle \tilde{w} \tilde{\theta} \rangle}{T_0} + \nu \left\langle \tilde{u}_i \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle$$

L'énergie cinétique ainsi prélevée étant transformée en énergie potentielle (la température de toute particule fluide déplacée de son état d'équilibre

s'identifiant par diffusion moléculaire à la température locale en un temps beaucoup plus court que celui nécessaire pour la ramener dans sa position initiale sous l'action des forces de rappel). Dans les mécanismes régissant l'évolution de cette turbulence en fluide stratifié, la partie linéaire des transferts inertiels joue un rôle essentiel puisqu'en effet elle assure une redistribution d'énergie des composantes horizontales de la vitesse

$$(31) \quad \left\langle \tilde{u} \cdot \frac{\partial \tilde{P}_\rho}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \tilde{v} \frac{\partial \tilde{P}_\rho}{\partial y} \right\rangle = \rho \frac{k_z^2}{k^2} \left\langle \tilde{\theta} \tilde{w} \right\rangle$$

vers la composante verticale

$$(32) \quad \left\langle \tilde{w} \cdot \frac{\partial \tilde{P}_\rho}{\partial z} \right\rangle = -\rho \frac{k_z^2}{k^2} \left\langle \tilde{\theta} \tilde{w} \right\rangle$$

ou elle est dissipée par le travail des forces d'Archimède. On aboutit ainsi, comme en M.H.D., à enrichir (relativement) en énergie les vecteurs d'onde voisins de $\pi/2$ (par rapport à l'axe vertical de la stratification) qui sont peu affectés par ce mécanisme, et même pas du tout si $k_z = 0$.

Le paramètre extérieur jouant le rôle du champ magnétique est le gradient vertical de température θ auquel est liée la valeur quadratique moyenne des fluctuations de température : $\theta_0 = (1/T) \int_0^T (\tilde{\theta}^2)^{1/2} dt = \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \ell$, ℓ désignant toujours l'échelle intégrale. Le temps caractéristique de la force d'Archimède, assimilable au temps Joule en M.H.D est alors de l'ordre de :

$$(33) \quad \tau_A \sim \left[T_0 / g \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]^{1/2}$$

Il est naturel ici aussi de comparer l'action de la force extérieure et de la dissipation anisotrope qui lui est associée à celui des effets inertiels. On met ainsi en évidence un nombre sans dimension comparable au paramètre d'interaction, le nombre de Richardson :

$$(34) \quad R_i = \frac{\tau_{tu}}{\tau_A} = \frac{\rho g \theta_0}{u_0 T_0}$$

(voir pour des compléments Gence et Mathieu 9).

Cette analogie avec la M.H.D se traduit également (c.f. Partie 1, chap. II) par

une loi spectrale de l'énergie en k^{-3} obtenue dans une expérience tout à fait analogue à notre installation (grille mobile horizontalement dans un fluide stratifié sans vitesse moyenne) dont les résultats nous ont été rapportés par Farrel [10] .

L'action de la force de Coriolis est réduite à une redistribution d'énergie entre les diverses composantes du vecteur d'onde. Cette redistribution, travail de chacune des composantes de la force de Coriolis augmentée de la partie linéaire des termes de transferts s'exprime aisément dans l'espace de Fourier :

$$(35) \left\{ \begin{aligned} -2\Omega_0 \langle \widehat{u}\widehat{v} \rangle - \langle \widehat{u} \frac{\partial \widehat{P}_p}{\partial x} \rangle &= \frac{2\Omega_0 k_z}{k^2} (k_y \langle \widehat{w}\widehat{u} \rangle - k_z \langle \widehat{v}\widehat{u} \rangle) \\ 2\Omega_0 \langle \widehat{v}\widehat{u} \rangle - \langle \widehat{v} \frac{\partial \widehat{P}_p}{\partial y} \rangle &= \frac{2\Omega_0 k_z}{k^2} (k_z \langle \widehat{u}\widehat{v} \rangle - k_x \langle \widehat{w}\widehat{v} \rangle) \\ \langle \widehat{w} \frac{\partial \widehat{P}_p}{\partial z} \rangle &= \frac{2\Omega_0 k_z}{k^2} (k_x \langle \widehat{v}\widehat{w} \rangle - k_y \langle \widehat{u}\widehat{w} \rangle) \end{aligned} \right.$$

Il apparait clairement, qu'en l'absence de source extérieure d'énergie, le seul état d'équilibre est celui pour lequel $k_z = 0$. On aboutit donc ici aussi à la formation de structure colonnaire théoriquement sans dissipation d'énergie autre que celle due à la viscosité. Toutefois il ressort des travaux récents de Ibbetson et Tritton [11] , que la nécessaire présence de paroi dans toute expérience de fluide tournant, et la formation d'ondes inertielles liées à la rotation, introduisent finalement une dissipation supplémentaire essentiellement non locale, l'énergie turbulente étant transportée par ces ondes jusque dans les couches pariétales où elle est dissipée par viscosité. Le mécanisme pariétal, par nature inhomogène, semble extrêmement délicat à représenter dans le cadre d'une théorie homogène ; l'interprétation des mesures de Ibbetson et Tritton est tributaire de la même difficulté.

Le temps caractéristique de la force extérieure et de la redistribution d'énergie dans l'espace des \vec{k} est ici déterminé par l'intensité de la rotation Ω_0 :

$$(36) \quad \tau_c \sim \frac{1}{\Omega_0}$$

et le nombre de Rossby rapport de τ_c au temps caractéristique des transferts inertiels τ_{tu} :

$$(37) \quad R_o = \frac{\tau_c}{\tau_{tu}} = \frac{u_o}{\Omega_o l}$$

est représentatif de l'influence de cette force et joue un rôle comparable à celui du paramètre d'interaction N_o .

Ces ressemblances assez évidentes entre les deux classes d'écoulement (fluide stratifié, fluide tournant) qui ont été analysées ici essentiellement par leur mécanismes linéaires, doivent être rapprochées des résultats généraux bien connus de théories linéaires qui conduisent également à une configuration bidimensionnelle de l'écoulement : la colonne de Taylor [12] en fluide tournant et son équivalent dans les fluides stratifiés (voir à ce sujet le livre de Yih [13]). La différence essentielle avec les calculs de turbulence vient de ce que ces deux situations concernent uniquement un état d'équilibre.

Des remarques qui précèdent, un ensemble de questions communes peuvent être dégagées, basées sur des considérations phénoménologiques indépendantes des détails de nature des mécanismes dominants. Ces questions peuvent être résumées ainsi : Pour des valeurs assez élevées du champ de force extérieur, l'énergie tend à partir d'un état initial sensiblement isotrope à être confinée au bout d'un temps égal à τ_{j_0} , τ_A , ou τ_c dans une portion réduite de l'espace de Fourier au voisinage du plan $\theta = \pi/2$. Quelles sont alors les lois gouvernant les transferts angulaires d'énergie ? Globalement nuls en turbulence isotrope ordinaire, ils sont ici susceptibles d'avoir un rôle déterminant sur la dynamique de l'écoulement. Que deviennent les mécanismes régissant les transferts radiaux auxquels est associée la dissipation visqueuse ? Enfin, un état d'équilibre ou de quasi équilibre est-il possible entre les transferts inertiels et l'effet anisotrope caractérisant la force extérieure ?

A ces commentaires sur les possibilités d'analogies assez intéressantes, il est nécessaire d'ajouter une remarque qui limite et précise leur portée. Ce qui tient aux détails de nature comme la distribution exacte de la force extérieure et les mécanismes qui conduisent à la création de cette force dans le fluide (couplage avec les équations de Maxwell en M. H. D., avec

l'équation de la chaleur dans les fluides stratifiés thermiquement) et à des équations propres à chaque problème est bien évidemment spécifique à chacun d'eux. Mais dans la mesure où certains phénomènes sont indépendants de ces détails et peuvent être interprétés sans faire appel à eux, sur la seule base du temps caractéristique de la contrainte extérieure, il semble bien que pour ces aspects là, les analogies proposées soient très prometteuses.

Le cas de la M. H. D. approfondi dans le chapitre qui suit est sans aucun doute celui des trois qui permet de réaliser les conditions expérimentales les plus souples puisque le paramètre extérieur, le champ magnétique, peut être réglé très facilement et de façon continue par un simple rhéostat tout à fait indépendamment des caractéristiques hydrodynamiques de l'écoulement.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] CRAYA A. - "Contribution à l'Analyse de la turbulence associée à des vitesses moyennes". P.S.T. Ministère de l'aire n° 345.
- [2] MOREAU R.- "Contribution à l'étude des écoulements hydromagnétiques. Thèse d'état, faculté des sciences de Grenoble 1967.
- [3] SCHUMANN U. - "Numerical simulation of the transition from three to two dimensionnal turbulence under uniform magnetic field". J. Fluid. Mech. Vol. 74, part. 1, 1976 p 31.
- [4] MOFFATT H.K. - "On the suppression of turbulence by a uniform magnetic field". J. Fluid. Mech., Vol. 28, part. 3, 1967, p 571.
- [5] KOLMOGOROV A.N. - "The local structure of turbulence incompressible viscous fluid for very large Reynolds number". C.R.Ac. Sc. URSS, n° 30, 1941, p 301.
- [6] COMTE-BELLOT G. and CORRISIN S. - "The use of contraction to improve the isotropy of grid generated turbulence". J. Fluid. Mech. , Vol. 25, part. 4, 1965 p 657.
- [7] LESIEUR M., SCHERTSER D. - "Amortissement auto-similaire d'une turbulence à grand nombre de Reynolds". Soumis au journal de mécanique.
- [8] RICHARDSON L.F. "The supply of energy from and to atmospheric eddies." Proc. Roy. Soc. A, 97, 354.

- [9] MATHIEU J. et GENGE J.N. - "Tenseur spectral des correlations vitesse temperature pour une turbulence homogene associee a des champs moyens de vitesse et de temperature a gradients constants. C.R Acad. Sci., t 278.

- [10] FARRELC.- Communication privée.

- [11] IBBETSON A. and TRITTON D.J. - "Experiments on turbulence in rotating fluid". J. Fluid Mech. , Vol. 68, part. 4, 1974 p 639.

- [12] TAYLOR G.I. - "Experiments with rotating fluids. Proceedings of the royal society, A, vol. C, 1921 , p 114 .

- [13] YIH C.S. - "Dynamics of non homogeneous fluids." Mac Millan series in advanced mathematics and theoretical physics. 1965

C H A P I T R E I I

INFLUENCE OF AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD ON

HOMOGENEOUS M. H. D. TURBULENCE

INFLUENCE OF AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD
ON HOMOGENEOUS MHD TURBULENCE

A. Alemany, R. Moreau
Institut de Mécanique de Grenoble

P. L. Sulem and U. Frisch
Observatoire de Nice

Submitted to J. Mécanique

November 1977

Institut de Mécanique de Grenoble, B.P. 53 - Centre de Tri,
38041. GRENOBLE-CEDEX (France)

Observatoire de Nice, B.P. 252 - 06007 - NICE-CEDEX (France)

ABSTRACT

This paper is concerned with experimental and theoretical investigations on MHD-turbulence at low magnetic Reynolds numbers. An external magnetic field produces an anisotropic wavenumber-independent dissipation ; its strength is characterized by the initial interaction parameter N_0 , the ratio of the large eddy-turnover time τ_{tu}^0 to the Joule-dissipation time.

An experiment is reported which has initial interaction parameter less or of order unity. It uses a vertical cylinder (interior diameter 0.2 m, height 2.7 m) filled with mercury subject to an external field (from 0 to 0.25 Tesla). Measurements of the velocity parallel to the magnetic field $u_{//}$ are done with quartz-coated hot film probes attached to a moving grid. Reynolds numbers based on integral scale and r.m.s. velocity fluctuations of order of several hundred are obtained. A $k_{//}^{-3}$ energy spectrum and a $t^{-1.7}$ law of decay of the energy are observed. A quasi-steady equilibrium between transfer and Joule dissipation is proposed as an explanation.

The case $N_0 \rightarrow \infty$ is analyzed theoretically. For isotropic or moderately anisotropic initial conditions, the Joule dissipation strongly inhibits the build-up of triple correlations. Hence, a dissipation-dominated linear phase is found which lasts up to $t_{NL} \sim \tau_{tu}^0 N_0^{1/3}$. After t_{NL} , the energy is confined to nearly transverse wavevectors out of a cone of semi-angle θ with $|\theta - \pi/2| \leq \epsilon = N_0^{-2/3}$ where θ is the angle of the wave vector with the external field. In a thought experiment where the external field is then suddenly switched off, isotropy is restored in a time $t_{3D} \sim t_{NL} \log 1/\epsilon$, by a mechanism analogous to the migration of errors from small to large scales in the predictability problem for strictly two-dimensional flows. Actually, the non-linear phase is not governed by the laws of two-dimensional turbulence ; Joule dissipation and energy transfer are comparable and their competition produces again a quasi-steady equilibrium. Further insight is obtained by application of a standard two-point closure. In particular, a universal range is found wherein the angular spectrum follows a $t^{-4} \varphi^{-9}$ law ($\varphi = \pi/2 - \theta$).

RESUME

L'étude de la turbulence homogène MHD à faible nombre de Reynolds magnétique a été abordée conjointement par voie expérimentale et par une analyse théorique. Un champ magnétique extérieur produit une dissipation anisotrope indépendante du nombre d'onde. Son importance peut être caractérisée par le paramètre d'interaction initial N_0 , rapport du temps de retournement τ_{tu}^0 des tourbillons porteurs d'énergie au temps de dissipation par effet Joule.

L'étude expérimentale est limitée à une gamme de paramètres d'interaction initiaux inférieurs ou de l'ordre de l'unité. L'installation est constituée d'un cylindre vertical de 0,2m de diamètre et 2,7m de hauteur rempli de mercure et soumis à l'influence d'un champ magnétique de 0 à 0,25 Tesla. Les mesures des fluctuations de vitesse dans la direction du champ magnétique $u_{||}$ ont été effectuées à l'aide de sondes à film chaud quartzées solidaires d'une grille mobile. Les nombres de Reynolds atteints, construits avec l'échelle intégrale et la valeur quadratique moyenne des fluctuations de vitesse, sont de l'ordre de plusieurs centaines. Des distributions spectrales en $k_{||}^{-3}$ et une loi de décroissance de l'énergie en $\epsilon^{-1,7}$ ont été observés. Ces résultats sont interprétés en termes d'un équilibre quasi-stationnaire entre transfert inertiel et dissipation par effet Joule.

Le cas $N_0 \rightarrow \infty$ a été analysé théoriquement. Pour des conditions initiales isotropes ou modérément anisotropes, la dissipation Joule réduit fortement le niveau de saturation des corrélations triples. Il se produit alors une phase de déclin linéaire qui se prolonge jusqu'au temps $t_{NL} \sim \tau_{tu}^0 N_0^{1/5}$. Après t_{NL} , l'énergie est confinée à l'extérieur d'un cône de demi-angle θ avec $|\theta - \pi/2| \leq \epsilon = N_0^{-2/3}$ (θ est l'angle du champ magnétique avec le vecteur d'onde). Dans une expérience par la pensée où le champ magnétique serait soudainement supprimé, l'isotropie serait restaurée en un temps $t_{3D} \sim t_{NL} \log 1/\epsilon$.

par un mécanisme analogue à celui de la migration d'erreurs des petites vers les grandes échelles dans les problèmes de prédictibilité des écoulements strictement bidimensionnels. Si par contre, le champ magnétique est maintenu, la phase non linéaire n'est pas régie par les lois de la turbulence bidimensionnelle ; la dissipation par effet Joule et les transferts d'énergie sont du même ordre et s'équilibrent de nouveau d'une manière quasi-stationnaire. Une analyse plus approfondie est faite au moyen d'une fermeture à deux points classique ; elle conduit en particulier à une zone universelle où le spectre angulaire suit une loi en $t^{-4} \varphi^{-9}$ ($\varphi = \pi/2 - \theta$)

I - INTRODUCTION

Flows of liquid metals generally encountered in industrial installations and laboratory experiments are characterized by a magnetic diffusion time much smaller than any other time scale. The dynamics of such low magnetic Reynolds number flows is then described by the so-called quasi-static approximation (Roberts 1967 [1], see also appendix 1). The electromagnetic effect then reduces to an anisotropic Joule dissipation with a rate proportional to the squared cosine of the angle θ between the wavevector \vec{k} and the (uniform) external field B_0 , but independent of wavenumber (Fig. 1). Let $\vec{F}(\vec{x}, t)$ denote the rotational part of the Lorentz force and $\hat{F}(\vec{k}, t)$ its Fourier transform; the solenoidal part being included in a modified pressure p , the equations of motion read (\hat{u} denotes the Fourier transform of \vec{u}):

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t) + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{u} + \vec{F}(\vec{x}, t) \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \hat{F}(\vec{k}, t) = -\frac{\sigma B_0^2}{\rho} \cos^2 \theta \hat{u}(\vec{k}, t) \end{cases}$$

σ is the electric conductivity, ρ the (uniform) density and ν the kinematic viscosity. From the r.m.s. velocity u , the integral scale ℓ , the external field B_0 and the fluid parameters ρ, σ, ν , three time-scales can be constructed: the eddy turnover-time: $\tau_{tu} = \ell/u$, the Joule time: $\tau_j = \rho / \sigma B_0^2$ and the viscous time: $\tau_\nu = \ell^2 / \nu$. The Reynolds number $R = \tau_\nu / \tau_{tu} = \ell u / \nu$ measures the strength of non-linear relative to viscous terms. The interaction parameter $N = \tau_{tu} / \tau_j = \sigma B_0^2 \ell / \rho u$ measures the strength of the Joule relative to the non linear terms.

Previous theoretical investigations of the problem were mostly restricted to the initial response of the energy - containing eddies to a sudden switch - on of a strong magnetic field (Moffatt 1967 [2]) or to the final stage of decay (Lehnert 1955 [3]). During such phases, non-linear transfer is negligible and the turbulence dynamics is dominated by the linear anisotropic Joule damping; this amounts to a diffusion which tends to uniformize the velocity field in the direction of the external field. Moreau (1968 [4]) has shown that during the non-linear phase, angular transfer of energy becomes very important. Schumann (1976 [5]) has made a direct numerical simulation at Reynolds numbers up to 60 and interaction parameters up to 50. Over a period of the order of one large eddy turnover time, he found that the full non-linear simulations agree with the linear solutions within 3%. As we shall see in Section II, longer integrations are needed to produce sizeable non-linear effects.

Experiments on low magnetic Reynolds number turbulence have so far been carried out in duct flows in electromagnet gaps, first in Riga ([6], [7], [8], [9], [10]), and Purdue ([11], [12], [13]) and more recently, in Beer-Sheva ([14]) and Grenoble ([15]). Because of the influence of boundary layers and even more so because of the M-shaped velocity profiles, these turbulent flows were far from homogeneous. Nevertheless, "universal" results such as a k_{\perp}^{-3} energy spectrum of the transverse velocity component with respect to the transverse wavenumber have been reported. Such results together with an abnormal persistence of turbulence energy were interpreted as evidence of two-dimensionality ([16], [17]). Recently, Branover ([14]) has shown that the abnormal persistence is more likely to be an effect of the realimentation of turbulence from the mean flow, through instabilities of the M-shaped profiles.

The main motivation of this work is to get a better understanding of the relationship between homogeneous low magnetic Reynolds number turbulence and two-dimensional turbulence. In Section II, we present an experiment on homogeneous MHD turbulence with interaction parameters up to 20. Several "universal" results are reported and given a phenomenological interpretation. We then investigate the limit of large interaction parameters using various theoretical tools : asymptotic expansions, phenomenology and closure techniques. The linear "initial" phase is studied in Section III; the non-linear quasi-two-dimensional phase is studied in Section IV. In Section V, we present a few concluding remarks.

II - EXPERIMENTAL INVESTIGATION FOR MODERATE VALUES OF THE INTERACTION PARAMETER :

1 - Description of the experiment :

The choice of the apparatus (Fig. 2) has been motivated by the requirement of performing an experiment on homogeneous turbulence, whose properties in absence of magnetic field constitutes a well-defined reference. The mercury is at rest in a cylinder of diameter 0.20 m and height 2.70 m. The magnetic field is produced by a solenoid surrounding the cylinder. It can be varied continuously from 0 to 0.25 Tesla with an homogeneity degree better than 1% over a two-meter height. A grid fixed to a moving piece which translates with constant velocity $0 \leq U \leq 80 \text{ cm/s}$, produces behind it the turbulent wake. This grid is similar to those which are used in classical wind-tunnel experiments (Comte-Bellot and Corrsin 1965 [18], Baines and Patterson 1951 [19]). It is constituted by 0.5cm square section bars with a mesh of 2 cm. The solidity is 0.44. Measurements of the velocity

parallel to the external field are done with hot film probes, attached to the grid at a distance adjustable from 0 to 38 cm (19 meshes) and maintained at a constant temperature (see appendix 2 for details of the measurement techniques).

The grid motion is produced by a 90 kg load which slides on a fixed guide of diameter 7,5 cm and height 3 m. The load and the grid-supporting shaft are connected by three stems of height 2,9m and diameter 2 cm, making a 120° angle between them. The grid shaft is constituted by six bars. On two of them, the probe carriage can slide. The probes can also move laterally, which gives the possibility of testing the turbulence homogeneity in the transverse directions. All the pieces constituting the apparatus are made of non-magnetic stainless steel.

The velocity of the shaft is maintained constant by a motor with regulated alimentation. It is mounted on the top of the guide and connected to the load by a chain. It is also used to ride up the shaft. In the upper position, the shaft is completely immersed, which facilitates the regulation. The acceleration and deceleration phases are relatively short (20 cm).

This set up has several advantages : turbulence with a good homogeneity degree is obtained with a moderate amount of mercury (1300 Kg), the mean velocity is fixed with a precision better than 1% and the probe calibration is made in situ. On the other hand, the generation of turbulence could be affected by the external field. This question has not been completely clarified but several studies on the wake created by a unique bar (of diameter L) indicate that for a mean flow interaction parameter $N_m = \sigma B_0^2 L / \rho U \leq 1$,

the velocity distribution downstream and upstream the bar is insensitive to the magnetic field (Branover [20]). It is then expected that if the grid solidity is not too large, the effect of the magnetic field on the turbulence generation will be weak for small values of N_m . In the present experiment, the mean flow interaction parameter constructed with the grid bar side $l_0 = 0.5$ cm, the magnetic field $B_0 = 0.25$ Tesla and one of the mean velocities $U = 5$ cm/s, 10 cm/s, 20 cm/s takes the values $N_m = 0.45, 0.22$ and 0.11 respectively. In this range of parameters, the turbulence intensity seems almost independent of the magnetic field. In contrast, the parallel integral scale increases with N_m (see section II.2.) but the isotropy of the generated turbulence does not seem to be affected.

The generated turbulence is characterized by the turbulence interaction parameter $N_0 = \sigma B_0^2 l_0 / \rho u_0$ and the Reynolds number $u_0 l_0 / \nu$, wherein u_0 is the maximum of the r.m.s. velocity fluctuations in the direction of both U and B_0 . According to Baines and Peterson ([19]), u_0 equals $0.3 U$ and is obtained at the so-called effective origin, situated at a distance z_0 of three to four meshes from the grid. The integral scale l_0 is identified with the grid bar side, probably an overestimate. Table 1 gives the values of N_0 and R_0 obtained with $B_0 = 0.25$ Tesla and different grid velocities

U	5 cm/s	10 cm/s	20 cm/s	60 cm/s
N_0	1.36	0.68	0.35	0.1
R_0	750	1500	3000	9000

Table 1

The values of N_0 seem to be small or order one. However, the interaction parameter $N_{||} = \sigma B_0^2 \ell_{||}(z) / \rho u(z)$ grows with the distance z from the grid because the integral scale increases and even more so because the turbulence energy decays (see section II.2.).

2. Experimental results

Velocity fluctuations \tilde{u} have been measured with hot film probes only in the direction of the mean flow which coincides in the present experiment with the direction of the external field. The measurements give thus information on quantities such as

i) the r.m.s. parallel velocity $u_{||} = \langle \tilde{u}_{||}^2(z, t) \rangle^{1/2}$ which gives information on the effect of the magnetic field on the energy decay ;

ii) the temporal correlation function $\langle \tilde{u}_{||}(z, t) \cdot \tilde{u}_{||}(z, t + \tau) \rangle$ which yields the parallel integral scale $\ell_{||}$ through the Taylor hypothesis ;

iii) the "one-dimensional" spectrum in the direction of the external field

$$(2) \quad E_{||}(k_{||}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_{||} \Delta z} \langle \tilde{u}_{||}^2(z + \Delta z) \rangle d\Delta z$$

where $k_{||}$ denotes the wavenumber component parallel to the magnetic field.

a) Energy decay

Fig. 3a shows the energy decay at zero magnetic field ; the decay law is found to be empirically representable by

$$(3) \quad \frac{u_{||}}{U} = \frac{A}{(z - z_0)^{n/2}}$$

with $n \approx 1$, $z_0 = 4$ meshes and $A = 0.2$. Wind tunnel experiments are reported to give slightly higher exponents ($n \approx 1.25$)

according to Comte Bellot and Corrsin 1965 [18]). This discrepancy is likely due to be mostly due to the short length of the measure range (19 meshes). As noticed by Lesieur and Schertzer (1977 [21]) , n will often depend upon the initial conditions. We also mention that a value $n \approx 1$ has recently been obtained in an apparatus intended to study turbulence in rotating fluids (Ibbetson and Tritton 1975 [22]).

The magnetic field will, through Joule dissipation, enhance the decay of turbulence. However, near the grid, the interaction parameter is small and the turbulence intensity remains close to what is observed at zero magnetic field. The relative strength of the Joule dissipation increases with distance from the grid and for large enough z , the decay law still follows eq. (3) but with an exponent n close to 1.7 and independent of the magnetic field (Fig. 3 b). Transition between the two regimes occurs when $N_{||} = \sigma B_0^2 \ell_{||} / \rho u_{||}$ equals a few units. In the experimental conditions (see table 2) this corresponds to a distance from the grid of 6 to 10 meshes.

b) Evolution of the parallel integral scale

Fig.(4) shows the variation with z of the integral scale $\ell_{||}$ for different values of the grid velocity and the external field. At a given distance from the grid, the integral scale is larger in presence of a magnetic field than in its absence. Nevertheless, the rate of increase of the integral scale with distance from the grid seems to be independent of the magnetic field. Table 2 gives the values of the ratio $\ell_{||0}(B_0) / \ell_{||0}(0)$ of the integral scales at the effective origin in presence and absence of magnetic field.

U cm/s	5	5	10	20	60
B ₀ Tesla	0.25	0.18	0.25	0.25	0.25
N ₀	1.36	0.68	0.68	0.35	0.1
$\ell_{ 0}(B_0) / \ell_{ 0}(0)$	1.86	1.61	1.63	1.35	1.1

Table 2

c) Evolution of the parallel interaction parameter

In isotropic turbulence, the r.m.s. velocity fluctuations u and the integral scale l define a unique eddy turnover time l/u . In axisymmetric turbulence in contrast, we must a priori distinguish l_{\perp} from l_{\parallel} and u_{\perp} from u_{\parallel} . Actually, the structure of the anisotropic term in eq (1) suggest that u_{\parallel} and u_{\perp} should remain of the same order u , while l_{\parallel} and l_{\perp} may become appreciably different for strong external fields and long times (Moffatt 1967 [2] and sect. III.2.). In such a situation, two time scales must be considered :

i) the turnover time l_{\perp}/u which is the characteristic time for an eddy to be significantly distorted and, in this distortion process, generate smaller eddies.

iii) the "toppleover time" l_{\parallel}/u which measures the time for an eddy to be rocked.

Measurements in the direction of the external field give only the eddy toppleover time. The increase of l_{\parallel} and the decrease of u with distance from the grid produces an increase of the eddy toppleover time and consequently of the "parallel interaction parameter" $N_{\parallel}(z) = \sigma B_0^2 l_{\parallel}(z) / \rho u_{\parallel}(z)$ defined as the ratio of the eddy toppleover time to the Joule time. In our experiments, the highest value this parameter can reach is 24 (see Fig. 5). Consequently, the anisotropy produced by the external field remains moderate (see section II.2.).

The effective origin, by definition, corresponds to an infinite turbulence energy and consequently to a zero interaction parameter ; hence it can be conveniently located by extrapolating the curves $N_{\parallel}(z)$, (approximately straight lines) up to their commun intersection Z_0 with the z axis. We obtain $Z_0 \approx 4$, which is in agreement with the classical results ([18], [19]).

d) Evolution of the turbulent energy spectra

Fig. 6 shows the energy spectra $E_{\parallel}(k_{\parallel})$ of the parallel velocity component with respect to the parallel wavenumber for different conditions specified in table 3. When N_{\parallel} is less than 3 (small magnetic field or large grid velocity), a $k_{\parallel}^{-5/3}$ inertial range is observed over one decade. When N_{\parallel} increases, this range disappears and is replaced by a k_{\parallel}^{-3} range. Fig. (7) indicates that the time dependence of the spectrum is given by a t^{-2} law. Anisotropy is far too weak for this k^{-3} spectrum to be in any way related with two-dimensionality. Notice that at the "time" $t = 6M/U$ (M is the mesh-length), the low wavenumbers contain more energy in presence than in absence of a magnetic field. We shall see that this is related to the reduction of the energy transfer by an external field (see section II 3 a)

U cm/s	B ₀ Tesla	z = 6		z = 13		z = 19	
		N _∥	R	N _∥	R	N _∥	R
20	0	0	636			0	616
	0.25	0.96	874			5.1	616
10	0	0	340	0	211	0	240
	0.25	1.4	570	5	330	9.9	260
5	0	0	140	0	85	0	70
	0.18	1.4	198	5.7	96	11.2	75
	0.25	3.5	240	13.2	107	22.1	75

Table 3

3. Interpretation of the experimental results

The above experimental results reveal three distinct phases in the evolution of the turbulence.

a) The first few eddy turnover times

This is the phase of establishment of a fully developed turbulence from the initial large eddies generated by the grid. The r.m.s. parallel velocity is weakly affected by the magnetic field. In contrast, the parallel integral scale $l_{||}$ is appreciably increased in comparison with the non magnetic case. The energy spectra (Fig. 6) show that for short times ($t = 6M/U$), large scales contain more energy and the small ones less, in presence of the external field. One could invoke the perturbation of the bar-wake induced by the magnetic field, but the small values of the mean flow interaction parameter make this hypothesis unlikely. A more relevant interpretation is probably given in terms of the influence of the Joule dissipation on the build-up of triple correlations. Triple correlations, assumed to vanish initially will reach a smaller value in the presence of the magnetic field, something like $\langle vvv \rangle \approx \langle vv \rangle^{3/2} / (1 + N_0)$ (see Fig. 8 and the discussion of section III.2) the amount of energy transferred to small scales is reduced by a factor $(1 + N_0)$ and the bulk of the energy at larger scale is increased by a factor $1 + N_0$. In spite of some difficulties to get precise measurements of N_0 near the grid, these order of magnitude calculations fit well the experimental results even when N_0 is of the order unity (cf. table 2). Note that in the absence of magnetic field, the integral scale of high Reynolds number turbulence is not a monotonic function of time ; if only large eddies are present initially, the integral scale will at first decrease because of the transfer to small scales ; latter on, however, when an appreciable rate of dissipation is obtained, the integral scale will increase because the energy-containing eddies are depleting faster than the very large eddies. Therefore, our argument on the influence of the magnetic field, applies only for short times.

b) The quasi-isotropic phase of decay

As long as the interaction parameter $N(t)$ remains

small, Joule dissipation is negligible in comparison with transfer and the Kolmogorov analysis can be applied. However the energy flux toward the viscous range is probably reduced by a factor of the order of $(1 + N(t))$ because of the added Joule dissipation. We then obtain an energy spectrum

$$(4) \quad E(k) \sim \varepsilon_0^{2/3} (1 + N(t))^{-2/3} k^{-5/3}$$

limited at high wavenumbers by the Kolmogorov scale

$$(5) \quad \eta(t) \sim \left[\frac{\nu^3}{\varepsilon_0} \right]^{1/4} (1 + N(t))^{1/4}$$

where ε_0 denotes the energy transfer rate in absence of magnetic field. The characteristic time for transfer in the energy containing scales evolves almost as in absence of magnetic field, i.e. is equal to t itself with a possible correction of order N (see on Fig. 9). During this quasi-isotropic phase the Joule time keeps its initial value $\tau_j^0 = \rho / \sigma B_0^2$. Consequently $N(t) \sim t / \tau_j^0$. From eqs (4) and (5) (see also Fig. 9) it follows that if t is long enough, $t > \tau_j^0$, the $k^{-5/3}$ range tends to be suppressed. The Joule dissipation can then compete with transfer and the anisotropy is no longer negligible.

c) The anisotropic phase of decay

For $t > \tau_j^0$, anisotropy develops. Let us characterize it as in Moreau (1968) by the angle $\alpha(t)$ defined by

$$(6) \quad \cos^2 \alpha(t) = \frac{\int_0^\infty dk \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cdot E(k, \theta, t) d\theta}{\int_0^\infty dk \int_0^{\pi/2} E(k, \theta, t) d\theta}$$

where $E(k, \theta, t)$ denotes the energy density for wavenumber of modulus k , making an angle θ with the magnetic field. Clearly, $\cos^2 \alpha(t)$ characterizes the elongation in the direction of the external field, of the eddies still containing energy at time t : most of the Joule dissipation takes place in the cone of axis \vec{B}_0 and semi-angle $\alpha(t)$.

The evolution of the total energy $\mathcal{E}(t)$ is governed by the equation

$$(7) \quad \frac{d \xi(t)}{dt} + \frac{\cos^2 \alpha(t)}{\tau_j^0} \xi(t) = 0$$

where viscous dissipation has been neglected. The characteristic Joule time as a function of the time t elapsed is then

$$(8) \quad \tau_j(t) = \frac{\tau_j^0}{\cos^2 \alpha(t)}$$

Assuming that the energy decay still follows a power law, we obtain

$$(9) \quad \cos \alpha(t) \sim \left(\frac{\tau_j^0}{t} \right)^{1/2}$$

and

$$(10) \quad \tau_j(t) \sim t$$

The increase of $\alpha(t)$ means that the turbulence becomes more and more anisotropic. This suggests that a significant part of the energy is transferred from the energy containing region to the dissipative cone. If a quasi-steady equilibrium is established between Joule dissipation and angular transfer, the equality of the eddy turnover time and the Joule time gives

$$(11) \quad \frac{\xi(t)}{\ell_{\perp}^2(t)} \sim t^{-2}$$

The experiment gives a power law for the variation of the parallel velocity component with an exponent close to 0,85.

The structure of the Joule term suggesting that the dissipation is the same for all the velocity components, we can conclude $\xi(t) \sim t^{-1.7}$. The experimental results (Fig. 4) indicate that for sufficiently large Reynolds number, the parallel integral scale $\ell_{\parallel}(t) \sim t^s$ with $s \approx 0.5$ (independent of the magnetic field). Since $\ell_{\perp}(t) \sim \ell_{\parallel}(t) (\tau_j^0/t)^{1/2}$ it follows that $\ell_{\perp}(t)$ must evolve very slowly. This is in agreement with eq (11) together with $\xi(t) \sim t^{-1.7}$.

Up to this point, we only consider a global quasi-equilibrium between angular transfer and Joule dissipation. Let us go further and assume that this quasi-equilibrium holds

actually at each wavenumber. The Joule time is the same for all the wavenumbers $\tau_j(k, t) \sim t$. The axisymmetry leads to define two transfer times. Let $u_{\perp}(k_{\perp})$ denote the transverse velocity difference over a transverse distance $1/k_{\perp}$ and $u_{\parallel}(k_{\parallel})$ the parallel velocity difference across a parallel distance $1/k_{\parallel}$. We have

$$(12) \quad \begin{cases} \tau_{tr\parallel} = \frac{k_{\parallel}^{-1}}{u_{\parallel}(k_{\parallel})} = \frac{1}{\sqrt{k_{\parallel}^3 E_{\parallel}(k_{\parallel})}} \\ \tau_{tr\perp} = \frac{k_{\perp}^{-1}}{u_{\perp}(k_{\perp})} = \frac{1}{\sqrt{k_{\perp}^3 E_{\perp}(k_{\perp})}} \end{cases}$$

Equality of the Joule time and the transfer times gives

$$(13) \quad \begin{cases} E_{\parallel}(k_{\parallel}) \sim t^{-2} k_{\parallel}^{-3} \\ E_{\perp}(k_{\perp}) \sim t^{-2} k_{\perp}^{-3} \end{cases}$$

So, the k_{\parallel}^{-3} law we have obtained experimentally as well the k_{\perp}^{-3} laws measured in duct flows put in electromagnet gaps can be interpreted in term of a quasi-steady equilibrium between Joule dissipation and non-linear transfer. To test the time dependence of the spectrum, we have plotted on Fig.(7) $E_{\parallel}(k_{\parallel}, t)$ versus t for two given values of k_{\parallel} . The agreement with a t^{-2} law is fairly good.

III RESPONSE OF THE TURBULENCE TO SUDDEN APPLICATION OF A STRONG MAGNETIC FIELD

1. A possible experiment

The experiment described in section II 1 is restricted to moderate values of the interaction parameter. To obtain large interaction parameters, Moffatt (1967 [2]) suggested an apparatus where an isotropic grid turbulence is swept with velocity U into the gap of an electromagnet. If the penetration time of the turbulence into the fringing distance of the

field (roughly the gap width d of the electromagnet)

$\tau_p = d / U$, is short compared to τ_j^0 , this experiment should simulate sudden switch-on of a strong magnetic field on isotropic turbulence. But precautions must be taken to prevent perturbations of the turbulence characteristics during the penetration phase. In effect, the penetration of the fluid into a magnetic field B_0 , induces a three dimensional current density $j \approx \sigma B_0 U$ and Lorentz forces ($\approx \sigma B_0^2 U$).

As a consequence, during the penetration time τ_p , the fluid is subject to a strong electromagnetic stirring ; the turbulent kinetic energy per unit mass is increased by an amount $\sigma B_0^2 U d / \rho$ which easily dominates the initial turbulence energy. This additional energy being essentially concentrated in length scales of order d (the scales of the producing mechanism), the turnover time of the energy containing eddies becomes

$$(14) \quad \tau_{tu}^0 = d \left[\frac{\rho}{\sigma B_0^2 U d} \right]^{1/2} = \frac{d}{U} \left[\frac{\rho U}{\sigma B_0^2 d} \right]^{1/2} \ll \tau_p \ll \tau_j^0,$$

This indicates the existence of a strong non-linear transfer during the penetration phase.

This effect is nothing but the well known formation of M-shaped velocity profiles, a mechanism controlled by the walls and which is present even in the laminar regime. When an initially isotropic turbulence enters into the field, any eddy of scale l and r.m.s velocity u is subject to electric currents and to an electric field of the same length scale l . The dynamic consequence of this electromagnetic effect is to reduce the variations of magnetic flux, hence to rotate any material plane surface. Thus at all scales smaller than d an electromagnetic stirring occurs and generates additional turbulent energy.

To perform an experiment on an initially isotropic turbulence suddenly subject to a uniform magnetic field,

it is therefore necessary to strongly inhibit this stirring. This could perhaps be achieved by putting a non-conducting honey-comb in the magnetic fringe. This could reduce the current length scale to the mesh length δ , and consequently reduce the order of the electric field to $(\delta/d) B_0 U$ and that of the current density to $\sigma B_0 U (\delta/d)$. The energy increase in each mesh of the comb would then be limited to $\sigma B_0^2 U \delta / \rho$ an appreciable fraction of which is actually dissipated by friction. In addition, this artifice reduces the turbulence inhomogeneity by maintaining a quasi-uniform velocity profile.

2. Theory : the linear phase

When the interaction parameter is large, the dominant mechanism is first a linear decay of the kind studied by Moffatt (1967 [2]). Indeed, non-linear transfer is strongly inhibited over one eddy turnover time (Fig.(8)) because Joule dissipation limits the build-up of triple correlations : the triple correlations will saturate under the effect of Joule dissipation after a time τ_j° and not, as usual, under the effect of non linear scrambling of the flow, after a time τ_{tu}° ; the saturation level is then reduced by a factor $\tau_{tu}^\circ / \tau_j^\circ = N_0$. The time to transfer a given amount of energy is then increased by a factor N_0 in the presence of the magnetic field. The characteristic transfer time is then, initially

$$(15) \quad \tau_{tr}^\circ = \tau_{tu}^\circ N_0 = \tau_j^\circ N_0^2$$

which strongly exceeds the Joule time. Consequently, the linear phase will last much longer than the eddy turnover time.

The time to dissipate by the Joule effect energy carried by wavevectors making an angle θ with \vec{B}_0 is $\tau_j^\circ / \cos^2 \theta$; hence appreciable departure from initial isotropy requires a time of the order τ_j° , after which the remaining energy is essentially confined to wavevectors whose angles θ with \vec{B}_0 satisfy

$$(16) \quad |\cos \theta| \leq \cos \alpha(t) = \left(\frac{\tau_j^\circ}{t} \right)^{1/2}$$

The Joule time of the energy-containing eddies is then

$$(17) \quad \tau_j(t) = \frac{\tau_j^0}{\cos^2 \alpha(t)} = t \cdot$$

Total energy $\mathcal{E}(t)$, which is proportional to the solid angle of the energy-containing wavevectors ($\alpha \leq \theta \leq \pi/2$) is then given by (see Moffatt 1967 [2] for a more precise calculation)

$$(18) \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \left(\frac{\tau_j^0}{t} \right)^{1/2}$$

Presumably the transverse integral length scale will not appreciably change during the linear phase; it follows that the eddy turnover time at time t is given by

$$(19) \quad \tau_{tu}^t(t) \sim \frac{\ell_0}{[\mathcal{E}(t)]^{1/2}} = \tau_{tu}^0 \left(\frac{t}{\tau_j^0} \right)^{1/4}$$

and the transfer time by

$$(20) \quad \tau_{tr}(t) \sim \tau_{tu}(t) \left(\frac{\tau_{tu}(t)}{\tau_j(t)} \right) = (\tau_{tu}^0)^{3/2} N_0^{1/2} t^{-1/2}$$

Comparison of eqs. (17) and (20) shows that the transfer time dominates the Joule time up to $t_{NL} = \tau_0 N_0^{1/3}$, where $\tau_{tr}(t)$ and $\tau_j(t)$ become equal (see Fig. 10). Afterwards non linear transfer can compete with Joule dissipation.

IV THE QUASI - TWO - DIMENSIONAL PHASE

At the end of the linear phase, the Reynold number has dropped to the value $R_{NL} = \ell_0 \sqrt{\mathcal{E}(t_{NL})} / \nu = R_0 N_0^{-1/3}$, a value we shall assume to be still very large. The energy containing eddies are schematically represented by oscillating columns for which the ratio of parallel to transverse length scales is $\ell_{||} / \ell_{\perp} = \mathcal{E}^{-1} = N_0^{2/3}$. Thus for N_0 large enough, a quasi-two-dimensional configuration has been obtained. The parallel and transverse velocity components being of the same

order, this enables us to neglect all parallel derivatives in eq. (1) except in the Joule term (because of the large coefficient), we then obtain (\perp means transverse)

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t) + (\vec{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \vec{u}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}_{\perp} p + \nu \Delta_{\perp} \vec{u}_{\perp} + \vec{F}(\vec{x}, t) \\ \nabla_{\perp} \cdot \vec{u}_{\perp}(\vec{x}, t) = 0 \\ \hat{F}(\vec{k}, t) = -\frac{\sigma B_0^2}{\rho} \cos^2 \theta \hat{u}(\vec{k}, t) \end{cases}$$

Note that in eq. (21), parallel and transverse velocity components are decoupled and that the flows in different transverse planes are coupled only by Joule dissipation.

i. The magnetic field is switched-off (thought experiment)

In order to reinterpret the trend of the non-linear terms to restore three-dimensionality, it is of interest to consider the thought experiment of suddenly switching off the magnetic field at time t_{NL} . The evolution of the flow is then governed (as long as quasi-two dimensionality is maintained) by eqs. (22) which, in each transverse plane, are just the two-dimensional Navier Stokes equations :

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}_{\perp}}{\partial t}(\vec{p}, z, t) + (\vec{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \vec{u}_{\perp} = -\vec{\nabla}_{\perp} p + \nu \Delta_{\perp} \vec{u}_{\perp} \\ \nabla_{\perp} \cdot \vec{u}_{\perp} = 0 \\ \frac{\partial u_{\parallel}}{\partial t}(\vec{p}, z, t) + (\vec{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) u_{\parallel} = \nu \Delta_{\perp} u_{\parallel} \end{cases}$$

At $t = t_{NL}$, we have a situation of the kind represented in Fig. 11a : the turbulent eddies can be thought of as columns of diameter $\sim \ell_0$ with longitudinal oscillations of wavelength $\sim \ell_0 N_0^{2/3}$. The subsequent developments can be understood by considering the motion in two transverse planes separated by ℓ_0 . Initially, the flows in the two planes are strongly correlated at scales $\sim \ell_0$ and decorrelated at scales $\sim \ell_0 N_0^{-2/3}$,

(Fig. 11 a). In other terms, if the flow in one of the planes is known exactly, the flow in the other plane can be predicted except for "errors" in scales $\sim \rho_0 N_0^{-2/3}$,

As we shall now show such errors will migrate to larger scales and, eventually restore three-dimensionality (Fig. 11 b). Let us here make a digression concerning the question of predictability which arises naturally in weather forecast. There are motions in the earth atmosphere on all scales from planetary-scale to centimeter-scale. However, the initial state for numerical prediction model is based only on observations of scales of motion large enough to be resolved by the observing network. Smaller scales of motion remain completely undetermined. The question is then to estimate the time after which the flow instabilities make these errors to contaminate the initially well described large scales. In its largest scales, the atmosphere can be roughly described by the two-dimensional Navier-Stokes equations. The mathematical model introduced by Lorenz (1969 [23]) assumes two random solutions with the same statistics which are initially strongly correlated in the scales larger than the network mesh and completely decorrelated in the smaller scales. One solution can be regarded as the exact turbulence state and the other as the result of the measurement. Direct numerical simulations (Herring, Riley Patterson and Kraichnan 1974 [24]) and also closure techniques (Leith 1971 [25], Leith and Kraichnan 1972 [26]) show that the errors (i.e. the decorrelation) migrate from small to large scales, the time to move up one octave being roughly the local eddy turnover time. The time for errors to propagate from wavenumber k_2 to wavenumber $k_1 \ll k_2$ is then $\int_{k_1}^{k_2} \left[\int_0^k P^2 E(p) dp \right]^{1/2} dk/k$. For the atmosphere, with a resolution of a hundred kms, this gives a predictability time of 10 to 14 days. This technique can readily be used to estimate the restoration time of three-dimensionality by free

evolution of a quasi-two-dimensional turbulence. The time t_{3D} for decorrelation to move up from length scale $\ell_0 \varepsilon$ to length scale ℓ_0 is the product of the eddy-turnover time and the number of spectral octaves separating ℓ_0 from $\ell_0 \varepsilon$.

$$(23) \quad t_{3D} \sim t_{NL} L_n(\varepsilon^{-1}) \sim \tau_{tu}^0 N_0^{2/3} L_n N_0$$

2. The magnetic field is maintained

The quasi-two dimensional phase can be investigated in detail by using two-point closures such as the eddy-damped-quasi-normal Markovian approximation (EDQNM) introduced by Orszag and Krauss (1968 [27]) ; for reviews of these methods see also Orszag (1976 [28]) and Rose and Sulem (1977 [29]). The EDQNM leads to a closed integro-differential equation for the correlation function $U_{\perp}(\rho, z, t)$ of the transverse velocity component or for its Fourier transform with respect to the transverse coordinate $U_{\perp}(k_{\perp}, z, t)$:

$$(24) \quad \frac{\partial \hat{U}_{\perp}(k_{\perp}, z, t)}{\partial t} + \frac{2}{\tau_0} \frac{1}{k_{\perp}^2} \frac{\partial^2 \hat{U}_{\perp}(k_{\perp}, z, t)}{\partial z^2} + \nu k_{\perp}^2 \hat{U}_{\perp}(k_{\perp}, z, t) = T_{\perp}(k_{\perp}, z, t)$$

with

$$(25) \quad T_{\perp}(k_{\perp}, z, t) = 2 \iint k^2 \theta(t) b_{k_{\perp}, p_{\perp}, q_{\perp}}^{(2)} [\hat{U}(p_{\perp}, z, t) \hat{U}(q_{\perp}, z, t) - \hat{U}(q_{\perp}, 0, t) \hat{U}(k_{\perp}, z, t)] dp_{\perp} dq_{\perp}$$

θ which actually depends on wavevectors denotes the triad-relaxation time and $b_{k_{\perp}, p_{\perp}, q_{\perp}}^{(2)}$ is a given function of the $(k_{\perp}, p_{\perp}, q_{\perp})$ wavevectors. When $z=0$, the transfer term $T(k_{\perp}, 0, t)$ is exactly the same as for truly two-dimensional turbulence (Leith 1971, Pouquet and al. 1975 [30]). Eq. (24) is easily integrated using a logarithmic step discretization in the variable (Leith 1971, Leith and Kraichnan 1972) and a constant step discretization in the z variable. The evolutionary tendency of the turbulence is seen on Fig. 12 a . This figure shows the reduced correlation function

$$W_{\perp}(k_{\perp}) = \frac{\hat{U}_{\perp}(k_{\perp}, 0, t) - \hat{U}_{\perp}(k_{\perp}, \ell_0, t)}{\hat{U}_{\perp}(k_{\perp}, 0, t)}$$

of the transverse velocity components in two planes distant by one initial integral scale $l_0 = k_0^{-1}$ and at different times. The decorrelation W characteristic of two-dimensionality defects is seen to migrate to smaller scales. This contrasts with Eq. (12b) which shows the same reduced correlation function in the absence of magnetic field : the decorrelation then migrates to larger scales. Fig. (13) shows the energy spectrum $E_{\perp}(k_{\perp}, t) = 2\pi k_{\perp} \hat{U}(k_{\perp}, 0, t)$ of the transverse velocity component. We notice a k_{\perp}^{-3} range, in agreement with the phenomenological analysis made in section II.3 on the basis of a local quasi-steady equilibrium between Joule dissipation and non linear transfer. The transfer term in the equation for $E_{\perp}(k_{\perp}, t)$ is the same as in the purely two-dimensional turbulence. It then produces an appreciable inverse energy transfer (Fig. 14). Nevertheless, this effect is compensated by the Joule dissipation whose characteristic time is of the same order. This prevents the energy from increasing in the small scales.

In a quasi-two dimensional configuration, the spectrum with respect to the transverse wavenumber differs very slightly from the radial spectrum $E_{r\perp}(k) = \int_0^{\pi/2} E_{\perp}(k, \varphi) d\varphi$ ($E_{\perp}(k, \varphi)$ denotes the energy density of the transverse velocity field carried by wavevectors of modulus k making an angle $\pi/2 - \varphi$ with the external field). If $\tilde{E}_{\perp}(k_{\perp}, k_{\parallel})$ denotes the energy density carried by wavevectors of components k_{\perp} and k_{\parallel} , we have

$$(26) \quad E_{r\perp}(k) = k \int_0^{\pi/2} \tilde{E}_{\perp}(k \cos \varphi, k \sin \varphi) d\varphi .$$

Energy being carried mostly by wavevectors for which $\varphi \ll 1$, we can make the replacement

$$(27) \quad E_{r\perp}(k) = k \int_0^{\pi/2} \tilde{E}_{\perp}(k, k\varphi) d\varphi \approx \int_0^{\infty} E_{\perp}(k, k_{\parallel}) dk_{\parallel} = E_{\perp}(k) .$$

Consequently, the radial energy spectrum of the transverse velocity component satisfies also a k^{-3} law

$$(28) \quad E_{r\perp}(k) \propto k^{-3}$$

Let us now define the transfer function $T_{\perp}(k, \varphi, t)$ as the rate of change of the spectrum $E(k, \varphi, t)$ due to nonlinear terms. In Fig. (15), we have represented $T_{\perp}(k, \varphi)$ for fixed $k \sim \ell_0^{-1}$ and different values of $\tau = (t - t_{NL}) / t_{NL}$

Fig. (15a) (no magnetic field) shows the broadening of the energy-containing region due to non-linear transfer. In contrast, Fig. (15b) (with magnetic field) shows a narrowing of this region.

Now, we turn to the angular energy spectrum $E_{\alpha 1}(\varphi) = \int_0^{\infty} E_{\perp}(k, \varphi) dk$. Taking the z Fourier transform of eq. (24) and using the definition of $\tilde{E}(k_{\perp}, k_{\parallel})$ we obtain (viscous dissipation neglected)

$$(29) \quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{E}_{\perp}(k_{\perp}, k_{\parallel}, t) + \left(\frac{2}{\tau_j} \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2} + 2\nu k_{\perp}^2 \right) \tilde{E}_{k_{\perp}}(k_{\perp}, k_{\parallel}, t) = \tilde{T}_{\perp}(k_{\perp}, k_{\parallel}, t)$$

with

$$(30) \quad \tilde{T}_{\perp}(k_{\perp}, k_{\parallel}, t) = \frac{1}{\pi} \int_{p_{\parallel} + q_{\parallel} = k_{\parallel}} dq_{\parallel} \iint dp_{\perp} dq_{\perp} \theta_{\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}}^{(2)}(t) \frac{k_{\perp}^2}{p_{\perp} q_{\perp}} b_{k_{\perp}, q_{\perp}, p_{\perp}}^{(2)} \times \\ [k_{\perp} \tilde{E}(p_{\perp}, p_{\parallel}) \tilde{E}(q_{\perp}, q_{\parallel}) - p_{\perp} \tilde{E}(q_{\perp}, q_{\parallel}) \tilde{E}(k_{\perp}, k_{\parallel})]$$

We shall now simplify eq. (30) by noticing that most of the energy is carried by wavevectors belonging to the domain \mathcal{D}_E of the Fourier space for which $0 \leq \varphi \leq \varphi_E(t) \approx (\tau / \tau_j)^{1/2}$.

Most of the energy transfer to wavevector \vec{k} outside \mathcal{D}_E , comes from the beating of waves with wavevectors $\vec{p} = (p_{\perp}, p_{\parallel})$ and $\vec{q} = (q_{\perp}, q_{\parallel})$ belonging to \mathcal{D}_E and of modulus of order $1/\ell_E$ (the inverse transverse integral scale). These wavevectors satisfy

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} < \varphi_E & , & \frac{q_{\parallel}}{q_{\perp}} < \varphi_E \\ p_{\perp} \sim q_{\perp} \sim \ell_E^{-1} \end{cases}$$

Hence, the most efficient interacting triads (k, p, q) are those which satisfy

$$(32) \quad \begin{cases} k_{\perp} \ll p_{\perp} \approx q_{\perp} \approx \ell_E^{-1} \\ k_{\parallel} \approx p_{\parallel} \approx q_{\parallel} \leq \varphi_E \ell_E^{-1} \end{cases}$$

Based on this remark, we shall now give a semi-heuristic derivation of the angular energy spectrum (47). Taking into account in the transfer terms (30) only those interacting triads which satisfy conditions (32), we obtain by a standard expansion (see e.g. Lesieur and Schertzer 1977 [21])

$$(33) \quad T_{\perp}(k_{\perp}, k_{\parallel}) \sim k_{\perp}^3 \int_{\mathcal{D}_{\vec{k}}} dp_{\perp} dp_{\parallel} \theta_{k, p, q}(t) E_{\perp}(p_{\perp}, p_{\parallel}) \frac{\partial E_{\perp}}{\partial p_{\perp}}(p_{\perp}, p_{\parallel})$$

with

$$(34) \quad \mathcal{D}_{\vec{k}} = \left\{ p_{\perp} \sim \ell_E^{-1}, p_{\parallel} + q_{\parallel} = k_{\parallel}, 0 \leq p_{\parallel} \leq \varphi_E \ell_E^{-1}, 0 \leq q_{\parallel} \leq \varphi_E \ell_E^{-1} \right\}$$

\vec{k} being inside the dissipative cone, its associated Joule time dominates in the triad-relaxation-time which then reduces to

$$(35) \quad \theta_{\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}} \approx \frac{\tau_j^0}{\sin^2 \varphi}$$

The transfer term then reads

$$(36) \quad T_{\perp}(k_{\perp}, k_{\parallel}) \sim \frac{k_{\perp}^3}{\sin^2 \varphi} A$$

where the integral

$$(37) \quad A = \tau_j^0 \int_{\mathcal{D}_{(k)}} dp_{\perp} dp_{\parallel} E_{\perp}(p_{\perp}, p_{\parallel}) \frac{\partial E_{\perp}}{\partial p_{\perp}}(p_{\perp}, p_{\parallel})$$

has a negligible dependence in k_{\perp} and k_{\parallel} . In effect, the total energy of the transverse velocity field is

$$(38) \quad \frac{1}{2} \langle |u_{\perp}(t)|^2 \rangle = \iint E_{\perp}(p_{\perp}, p_{\parallel}) dp_{\perp} dp_{\parallel} \approx E(p_{\perp} \sim \frac{1}{\ell_E}, p_{\parallel} \sim \frac{\varphi_E}{\ell_E}) \ell_E^2 \varphi_E$$

with $\vec{p} \in \mathcal{V}_E$; so we have

$$(39) \quad E_{\perp}(p_{\perp}, p_{\parallel}) \approx \frac{1}{2} \frac{\langle |u_{\perp}(t)|^2 \rangle \ell_E^2}{\varphi_E}$$

then, taking the integral (37) to be local, we obtain

$$(40) \quad A \approx \frac{\tau_j^0 \langle |u_{\perp}(t)|^2 \rangle \ell_E^3}{\varphi_E}$$

Consequently, the transfer term in eq.(29) becomes

$$(41) \quad T_{\perp}(k_{\perp}, k_{\parallel}) \approx \frac{\tau_j \langle |u_{\perp}(t)|^2 \rangle \rho_E^{-3}}{\varphi_E} \frac{k_{\perp}^3}{\sin^2 \varphi}$$

The angular transfer then reads

$$(42) \quad T_{\perp}(\varphi) = \int_0^{\infty} k T(k \cos \varphi, k \sin \varphi) dk \approx \int_0^{\frac{\varphi_E \rho_E^{-1}}{\sin \varphi}} k T_{\perp}(k \cos \varphi, k \sin \varphi) dk \\ \approx \tau_j \varphi_E^4 \rho_E^{-2} \langle |u_{\perp}(t)|^2 \rangle \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

The time-evolution of the angular energy spectrum of the transverse velocity component is then governed by (viscous term neglected)

$$(43) \quad \frac{\partial E_{\perp}(\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_j^0} \sin^2 \varphi \cdot E_{\perp}(\varphi) = \tau_j^0 \varphi_E^4 \rho_E^{-2} \langle |u_{\perp}(t)|^2 \rangle \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} .$$

This has a quasi-stationary solution

$$(44) \quad E_{\perp}(\varphi) = (\tau_j^0)^2 \varphi_E^4 \rho_E^{-2} \langle |u_{\perp}(t)|^2 \rangle \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

This quasi-steady equilibrium written for the energy containing eddies gives

$$(45) \quad \frac{\langle |u_{\perp}(t)|^2 \rangle}{\rho_E^2} \sim t^{-2} .$$

The angle φ_E varies like $(\tau_j^0 / t)^{1/2}$. This gives finally

$$(46) \quad E_{\perp}(\varphi) \sim \left(\frac{\tau_j^0}{t} \right)^4 \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \langle |u_{\perp}(t)|^2 \rangle$$

or, φ being small ,

$$(47) \quad E_{\perp}(\varphi) \sim \left(\frac{\tau_j^0}{t} \right)^4 \varphi^{-9} \langle |u_{\perp}(t)|^2 \rangle$$

A similar calculation can be made for the angular energy spectrum of the parallel velocity component. The same angular dependence is obtained. Indeed, the transfer term $T_{\parallel}(k_{\perp}, k_{\parallel})$ also behaves like $(k_{\perp}^3 / \sin^2 \varphi) A'$ where \vec{A}' is an integral, analogous to A , whose dependence in k is again negligible.

V CONCLUDING REMARKS

The present studies indicate that a low magnetic Reynolds number turbulence subject to an external magnetic field with moderate or large interaction parameter evolves towards a state where the dynamics is characterized by a quasi-steady equilibrium between transfer and Joule dissipation. Even at high interaction parameters, when the flow has reached a quasi-two-dimensional configuration, its dynamics differs strongly from that of truly two-dimensional turbulence.

As soon as the interaction parameter becomes of order unity it seems that the action of the Joule dissipation on the whole wavenumber range prevents the establishment of the usual Kolmogorov energy cascade. This leads to ask a mathematical problem : does a sufficiently large magnetic field insure the smoothness of the velocity field for arbitrary large time in the limit of zero viscosity ? If the Joule dissipation is made isotropic by dropping the $\cos^2 \theta$ in the quasi-static MHD equation (1), it is easy to show the existence of a critical value B_c for the magnetic field : above B_c smoothness is insured for all times and below B_c , the solution behaves like the solution of the inviscid Navier-Stokes equation (Euler equation); in the latter cases, singularities are expected after a finite time (Rose and Sulem 1977 [29]). The existence of such a critical magnetic field follows by noticing that the change of variables $\vec{u} = e^{-\frac{B_0^2}{\sigma\mu} t} \vec{u}'$ and $\tau = t - e^{-\frac{B_0^2}{\sigma\mu} t} / (\frac{B_0^2}{\sigma\mu})$ reduces this modified quasi-static MHD equation to the Euler equation. The solution of this equation is known to remain differentiable up to a time τ_* which depends upon the initial conditions (typically, $\tau_* \sim (\sup |\text{curl } \vec{v}(x, 0)|)^{-1}$). Consequently the global regularity of the modified MHD equation is insured if $\sigma\mu / B_0^2 < \tau_*$.

With the anisotropic Joule term, it has only been possible so far to show global regularity for arbitrary positive viscosity and sufficiently large viscosity dependent magnetic fields (the mathematically minded reader will find a few details in appendix 3 written with C. Bardos).

Finally, we recall that the observed k^{-3} spectrum could be explained on the basis of equality of the Joule dissipation time and the transfer time. Such a result could possibly hold for a broader class of problems, not necessarily MHD, in which the fluid is subject to an external constraint with a privileged direction and a scale independent (but not angle independent) characteristic time. Coriolis and buoyancy forces are possible candidates.

ACKNOWLEDGMENTS

We have benefited from useful discussions with J. R. Herring, E. J. Hopfinger and H. K. Moffatt.

Appendix 1 : The quasi-static approximation

The general MHD equations for an incompressible fluid read

$$(A1) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} + \nu \Delta \vec{u}$$

$$(A2) \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{H} = (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{u} + \lambda \Delta \vec{H}$$

$$(A3) \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$(A4) \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

Where $\vec{H} = \vec{B} (\mu \rho)^{-1/2}$ and $\lambda = (\mu \sigma)^{-1} \mu$ is the magnetic permeability and λ the magnetic diffusivity. The magnetic field is the sum of the external field \vec{B}_0 and the induced field \vec{b} . Similarly $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$. Now, make the scaling $\lambda = \frac{1}{\epsilon} \tilde{\lambda}$, $H_0 = 1/\sqrt{\epsilon} \tilde{H}_0$ and let $\epsilon \rightarrow 0$. This corresponds to the following limits for the usual nondimensional numbers :

$$\text{Prandtl number } Pr = \frac{\text{magnetic diffusion time}}{\text{viscous time}} = \frac{\nu}{\lambda} \rightarrow 0$$

$$\text{Magnetic Reynolds number } Rm = \frac{\text{magnetic diffusion time}}{\text{turnover time}} = \frac{u \ell}{\lambda} \rightarrow 0$$

$$\text{Lundquist number } S = \frac{\text{magnetic diffusion time}}{\text{Alfen wave period}} = \frac{H_0 \ell}{\lambda} \rightarrow 0$$

$$\text{Magnetic interaction parameter } N = \frac{\text{turnover time}}{\text{Joule time}} = \frac{H_0^2 \ell}{\lambda u} = \frac{s^2}{Rm} \text{ finite}$$

In these limits, eq (A 2) reduces to the quasi-static

$$(A5) \quad \Delta \vec{h} = -\frac{1}{\lambda} (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \vec{u}$$

Replacing \vec{h} in (A1) by its expression as a function of \vec{u} given by (A5), and using $H_0^2/\lambda = \sigma B_0^2/\rho$, one obtains eq (1).

Appendix 2 : Measurement technique

The hot film anemometry which is now a well known technique in air, leads to specific difficulties when it is used in mercury. As already shown by several authors (Sajben 1964 [31], Hoff 1969 [32], Malcolm 1969 [33]), one of the main difficulties is due to deposits of oxydes or impurities on the sensor, which produce random fluctuations of the thermal resistance. This difficulty is particularly important with the large amount of mercury (1300 kg) used in this experiment : it is almost impossible to maintain the mercury clean during a few hours. In order to reduce the effect of the impurety deposits, we avoid as much as possible the crossing of the free surface by the probes and, at each crossing, we verified that the calibration has not changed.

The geometry of our apparatus generates another difficulty : the pressure difference between the top and the bottom of the cylinder reaches four atmospheres. This produces a monotonic increase of the signal delivered by the probe, as it travels from the top to the bottom of the cylinder. The increase can reach 20% of the initial signal if no special precaution are taken. It is probably due to the effect of pressure on the thermal resistance of the mercury-quartz and quartz-platinum contacts. We have reduced this effect to less than 2% by improving the quality of the probes and frequently cleaning them.

To reduce the influence of the probe contamination on the measurements, most of the authors recommend to plot in ordinate of the calibration curve the difference $E - E_0$, E_0 being the zero velocity signal (Fig. 16). This eliminates most of the voltage-departures which are velocity independent.

The effect of the magnetic field on the probe calibration is characterized by the parameter $N_\phi = B_0^2 r \phi / \rho U$ where

ϕ is the typical dimension of the active probe element. As long as $N\phi \ll 1$, the inertial forces in the convective motion around the hot film are larger than the electromagnetic forces which then have negligible effect on the heat exchanges. In contrast, for $N\phi \gg 1$, the convective heat exchanges are inhibited by blocking of the flow near the probes. It is then necessary to make distinct calibrations for each value of the magnetic field. We have used thermosystem probes n° 1230 Hg of resistance $R_0 \sim 3 \Omega$; the correction becomes then important only for Peclet numbers $Pe = \frac{U\phi}{\chi} < 20$ (χ denotes the thermic diffusivity), i.e. $U < 5 \text{ cm/s}$ (see Fig. 16). For the lowest velocity of the moving grid, the slope of the calibration curve is increased by a factor 0.2.

When measuring the velocity fluctuations, the following supplementary difficulties arised :

i) the useful displacement of the moving grid (about one meter) corresponds to a time of few seconds (5 s for $U = 20 \text{ cm/s}$ and 20 s for $U = 5 \text{ cm/s}$). This duration is too short to obtain good statistical averages. A supplementary average has thus been made on the signals obtained in successive displacement of the grid.

ii) Pressure produces a voltage increase, the spectrum of which is superposed on the turbulence spectrum. This additional contribution is concentrated in the low frequencies of the signal and has been suppressed by using a high-pass filter. The cut-off frequency is always below 0,7 hz and consequently does not affect the turbulent signal.

iii) the moving piece was subject to a low intensity vibration. This perturbed only slightly the signal for large mean velocities (e.g. $U = 20 \text{ cm/s}$) ; but for $U = 5 \text{ cm/s}$, the vibration increased the signal by about 30% . We have solved

this difficulty by putting before the grid a second probe subject only to the mechanical vibration, and by cutting-off its signal from the first one. This requires the equilibration of the sensitivities of the two probes by setting an adjustable potentiometer in their electrical circuit.

The instrumentation we have used consists of two standard T. S. I. anemometers (n° 1050), a Kronc-Hite high-pass filter and a differential amplifier (Ectron 1050) to cut off the mechanical vibration. To analyse the signals, we used an integrator voltmeter and a correlator and Fourier transformer (Shlumberger CNTR 1024, TFM 1024).

Because of the specific difficulties discussed above, the precision of our measurements is probably smaller than those made with hot film probes in air: for the r.m.s. velocity fluctuation, it can be estimated to be about 15 %.

Appendix 3 : Global regularity of the quasi-static equations at positive viscosity and sufficiently large viscosity-dependent magnetic fields (written with C. Bardos).

Let us first rewrite eq (1) in the form

$$(c1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \mu \Delta^{-1} \frac{\partial^3 \vec{u}}{\partial z^2} = - \nabla p \\ \nabla \vec{u} = 0 \end{cases}$$

wherein $\mu = \frac{\sigma B_0^2}{\rho}$

The essence of the method consists in obtaining estimates for the Sobolev norm (denoted $|\cdot|_{H^s}$) of the solution of eq. (c1). In order to simplify the proof we shall restrict to the case of periodic boundary conditions. In absence of viscous and magnetic terms, the smallest integer order norm for which a close inequality can be obtained is $|\vec{u}|_{H^3} = (\vec{u}, (-\Delta)^3 \vec{u})$ [Kato 1972[34)]; see also Rose and Sulem [29] Chapter IV for a rather simplified review of the mathematical properties of the Euler and Navier-Stokes equations]. In these references, it is shown that

$$(c2) \quad |\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla p|_{H^3} \leq C |\vec{u}|_{H^3}^3$$

where C is a constant.

In the magnetic case, we then obtain

$$(c3) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{u}|_{H^3}^2}{\partial t} + \nu |\vec{u}|_{H^4}^2 + \mu \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right|_{H^2}^2 \leq C |\vec{u}|_{H^3}^3$$

In a bounded domain the Poincaré inequality implies

$$(c4) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{u}|_{H^3}^2}{\partial t} + \nu |\vec{u}|_{H^4}^2 + \mu c_1 |\vec{u}|_{H^2}^2 \leq C |\vec{u}|_{H^3}^3$$

Now, since for $\varepsilon > 0$

$$(c5) \quad |\vec{u}|_{H^3}^2 \leq |\vec{u}|_{H^2} |\vec{u}|_{H^4} \leq \frac{1}{2} (\varepsilon |\vec{u}|_{H^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\vec{u}|_{H^4}^2)$$

eq. (c4) becomes

$$(c6) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\vec{u}|_{H^3}^2 + \mu c_1 |\vec{u}|_{H^2}^2 + \nu \varepsilon [2 |\vec{u}|_{H^3}^2 - \varepsilon |\vec{u}|_{H^2}^2] \leq c |\vec{u}|_{H^3}^3$$

We choose $\varepsilon = (\mu c_1 / \nu)^{1/2}$. Eq (c4) reduces to

$$(c7) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\vec{u}|_{H^3}^2 \leq [c |\vec{u}|_{H^3} - 2(c_1 \mu \nu)^{1/2}] |\vec{u}|_{H^3}^2$$

Let the initial condition $u_0(\cdot)$ satisfy

$$(c8) \quad c |\vec{u}_0|_{H^3} - 2(c_1 \mu \nu)^{1/2} < 0$$

or, equivalently, with $K = c^2 / 2c_1$

$$(c9) \quad \frac{\sigma B_0^2}{\rho} = \nu > \frac{K}{\nu} |\vec{u}_0|_{H^3}^2$$

From (c7) we then conclude that $|\vec{u}(t)|_{H^3}$ remains bounded. Higher moments may then be bounded using (Kato 1972 [34], see also Rose and Sulem 1977 [29])

$$(c10) \quad \frac{d}{dt} |\vec{u}|_{H^3}^2 \leq c' |\vec{u}|_{H^3} |\vec{u}|_{H^3}^2$$

The condition (c9) ensures that the solution of the quasi-static equations will remain for all time as smooth as the initial conditions.

REFERENCES

- [1] ROBERTS P.H., "An introduction to Magnetohydrodynamics". Lingmans, 1967.
- [2] MOFFATT H.K., "On the suppression of turbulence by a uniform magnetic field". *J. Fluid Mech.*, vol. 28, part. 3, 1967, p. 571.
- [3] LEHNERT B., "The decay of magneto-turbulence in the presence of magnetic field and Coriolis force". *Quart. Appl. Math.*, vol. 12, n° 4, 1955, p. 321.
- [4] MOREAU R., "On magnetohydrodynamic turbulence". *Proc. of Symp. on Turbulence of fluid and plasma*, Polyt. Inst. of Brooklyn, 1968, p. 359.
- [5] SCHUMANN U., "Numerical simulation of the transition from three to two dimensional turbulence under a uniform magnetic field", *J. Fluid Mech.*, vol. 74, part. 1, 1976, p. 31.
- [6] BRANOVER H.H., GEL'FGAT Y.M. and TSINOBER, A.B., "Turbulent magneto hydrodynamic flows in prismatic and cylindrical ducts", *Magnitnaya Gidrodynamika*, vol. 2, n° 3, 1966, p. 3.
- [7] BRANOVER H.H. and GEL'FGAT Y.M., "Stabilization of plane parallel flow in a transverse magnetic field". *Magnitnaya Gidrodynamika*, vol. 4, n° 3, 1968, p. 9.
- [8] BRANOVER H.H., GEL'FGAT Y.M., PETERSON D.A. and TSINOBER A.B., "Turbulent Hartmann flow". *Magnitnaya Gidrodynamika*, vol. 5, n° 1, 1969, p. 61.
- [9] BRANOVER H.H., GEL'FGAT Y.M., KIT L.G. and PLATNICKS E.A., "The effect of a transverse magnetic field on the turbulence intensity profiles in rectangular channel". *Magnitnaya Gidrodynamika*, vol. 6, n° 3, 1970, p. 41.
- [10] KIT L.G., PETERSON D.E., PLATNICKS E.A. and TSINOBER A.B., "Investigation of the influence of fringe effects on magnetohydrodynamic flow in a duct with non conducting walls". *Magnitnaya Gidrodynamika*, Vol. 6, n° 4 1970, p. 47.
- [11] LYKOURDIS P.S., "Transition from laminar to turbulent flow in Magnetofluid Mechanic Channel". *Rev. Mod. Phys.*, vol. 32, 1960, p. 796.
- [12] BROUILLETTE E.C. and LYKOURDIS P.S., "Magneto fluid mechanic channel flow Experiment". *Phys. of Fluids*, vol. 10, n° 5, 1967, p. 995.
- [13] GARDNER R.A. and LYKOURDIS P.S., "Magneto fluid mechanic pipe flow". *J. Fluid Mech.*, vol. 47, part. 4, 1971, p. 737.
- [14] BRANOVER H. and GERSHON P., "On some aspect of turbulence suppression by transverse magnetic field", *Symposium on Turbulent Shear Flows*, Pennsylvania University, 1977, p. 12-21 - 12-26.

- [15] ROSANT J.M., "Écoulement hydromagnétique en conduite rectangulaire".
Thèse de Docteur-Ingénieur, Institut de Mécanique de
Grenoble, 1976
- [16] KOLESNIKOV Yu. B., TSINOBER A.B., "Experimental study of two dimensional
grid turbulence". *Isvestia Akademii Nauk, Gidkosti y Gaza*,
n° 4, 1974, p. 146
- [17] VOTSICH A.D., KOLESNIKOV Yu. B., "Spatial correlations and vorticity in
homogeneous two dimensional turbulence". *Magnitnaya
Gidrodynamika*, vol. 6, n° 3, 1976, p. 41
- [18] COMTE-BELLOT G. and CORRSIN S., "The use of contraction to improve the
isotropy of grid generated turbulence", *J. Fluid Mech.*,
vol. 25, part 4, 1965, p. 657.
- [19] BAINES W.D. and PETERSON E.G., "An investigation of flow through screens",
American Society of Mechanical Engineers, vol. 73, 1951, p. 467
- [20] BRANOVER H.H., TSINOVER A.B., "Magnitodynamics of incompressible fluids",
Nauka, 1970, (in Russian).
- [21] LESIEUR M, SCHERTZER D., "Amortissement auto-similaire d'une turbulence
à grand nombre de Reynolds". Submitted to *J. Mecanique*
- [22] IBBETSON A. and TRITTON D.J., "Experiments on turbulence in a rotating
fluid". *J. Fluid Mech.*, vol. 68, part 4, 1974, p. 639.
- [23] LORENZ E.N., "The predictability of a flow which possesses many scales
of motion". *Tellus*, n° 21, 1969, p. 289.
- [24] HERRING J.R., RILEY J.J., PATTERSON G.S. and KRAICHNAN R.H., "Growth of
uncertainty in decaying isotropic turbulence", *J. Atm.
Sci.*, n° 30, 1973, p. 937.
- [25] LEITH C.E., "Atmospheric predictability and two-dimensional turbulence",
J. Atm. Sci., n° 28, 1971, p. 145.
- [26] LEITH C.E. and KRAICHNAN R.H., "Predictability of turbulent flows".
J. Atm. Sci., n° 19, 1972, p. 1041.
- [27] ORSZAG S.A. and KRUSKAL M.O., "Formulation of the theory of turbulence",
Phys. Fluids, n° 11, 1968, p. 43.
- [28] ORSZAG S.A., "Statistical theory of turbulence" in "Fluid Dynamics",
1973 - Les Houches - Summer School of Physics, R. Balian and J-L. Peube
eds., Gordon and Breach, 1977.
- [29] ROSE H.A. and SULEM P.L., "Fully developed turbulence and statistical
Mechanics", Submitted to *J. Physique (Paris)*.

- [30] POUQUET A., LESIEUR M, ANDRE J-C. and BASDEVANT C., "Evolution of high Reynolds number two-dimensional turbulence", *J. Fluid Mech.*, vol. 72, 1975, p. 305-319.
- [31] SAJBEN M., "Hot wire measurements in a liquid mercury jet subject to an axial magnetic field", S.C. D. Thesis, Mass. Inst. Tech.. 1964.
- [32] HOFF M., "Hot film anemometry in liquid mercury. Instruments and control systems", vol. 42, 1969.
- [33] MALCOLM D.G., "Some aspects of turbulence measurement in liquid mercury using cylindrical quartz-insulated hot-film sensors". *J. Fluid Mech.*, vol. 37, part. 4, 1969, p. 701
- [34] KATO T., "Non stationary flows of viscous and ideal fluids in R^3 ". *J. Funct. Anal.*, vol. 9, 1972, p. 296.

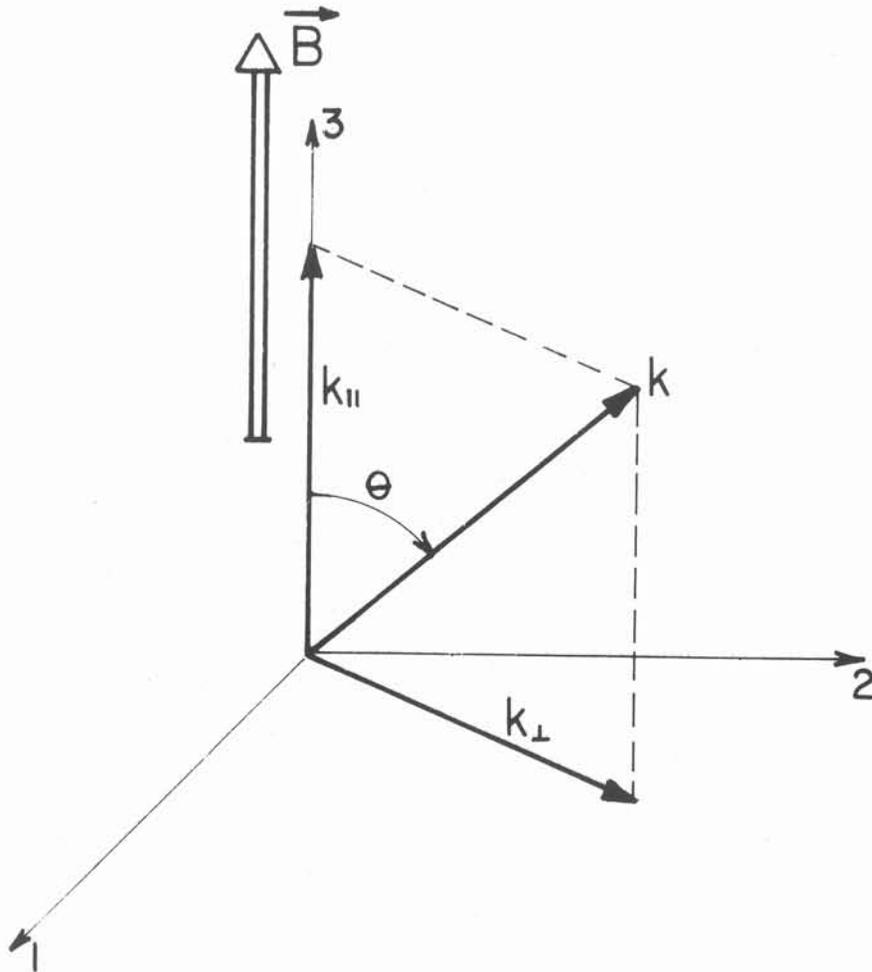


Fig.1.- Notation

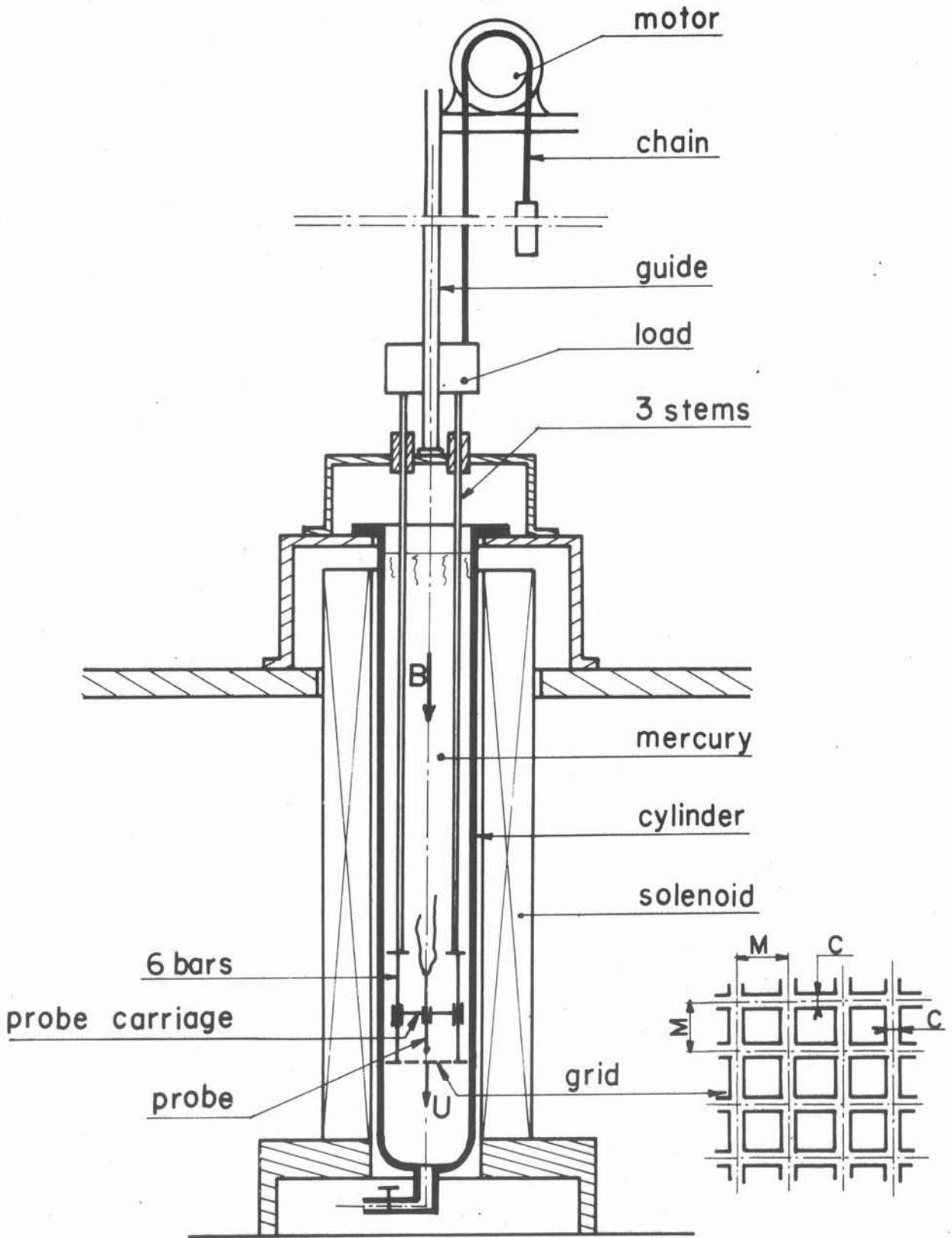


Fig.2 - Experimental apparatus

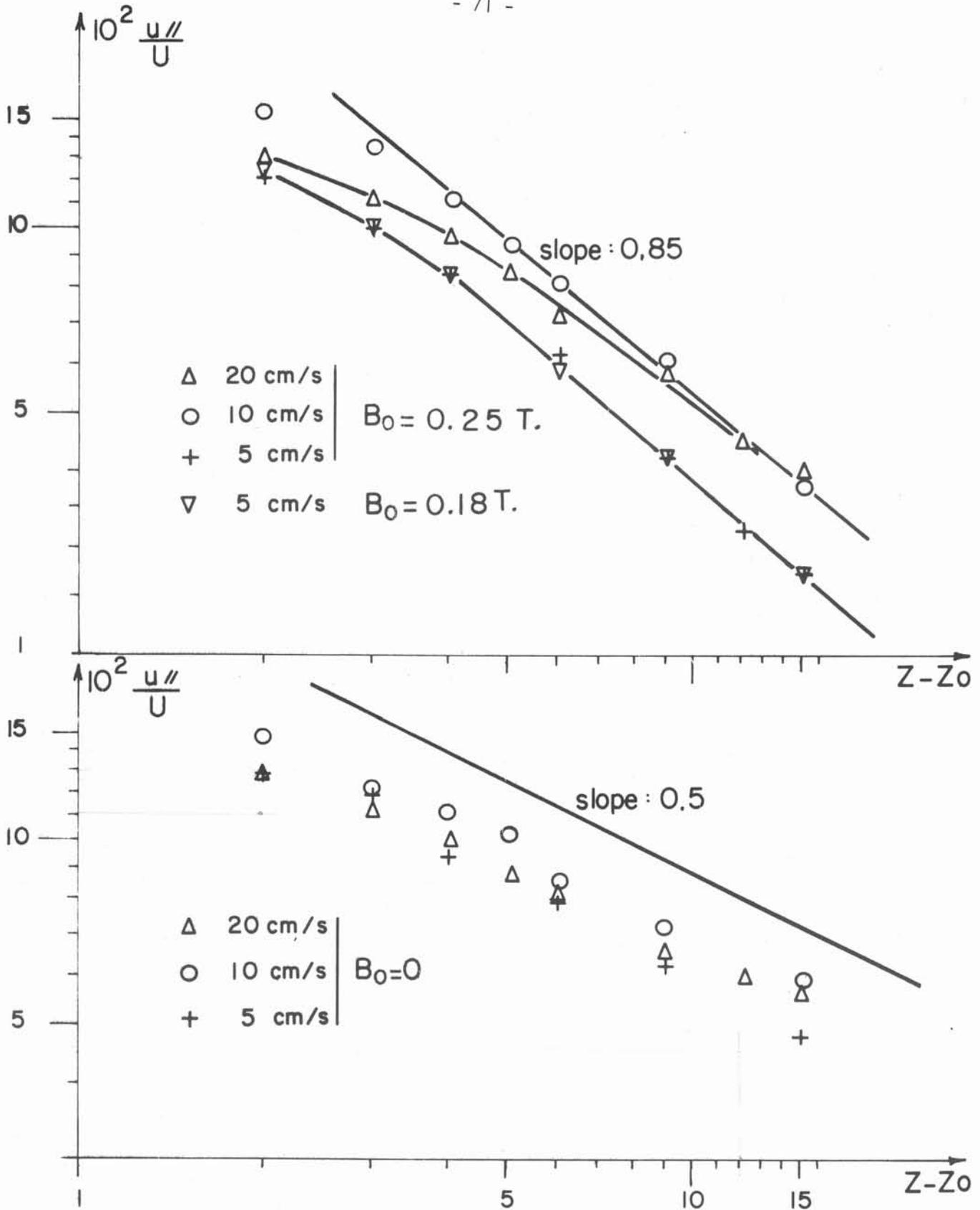


Fig.3- Decay of the r.m.s parallel velocity component

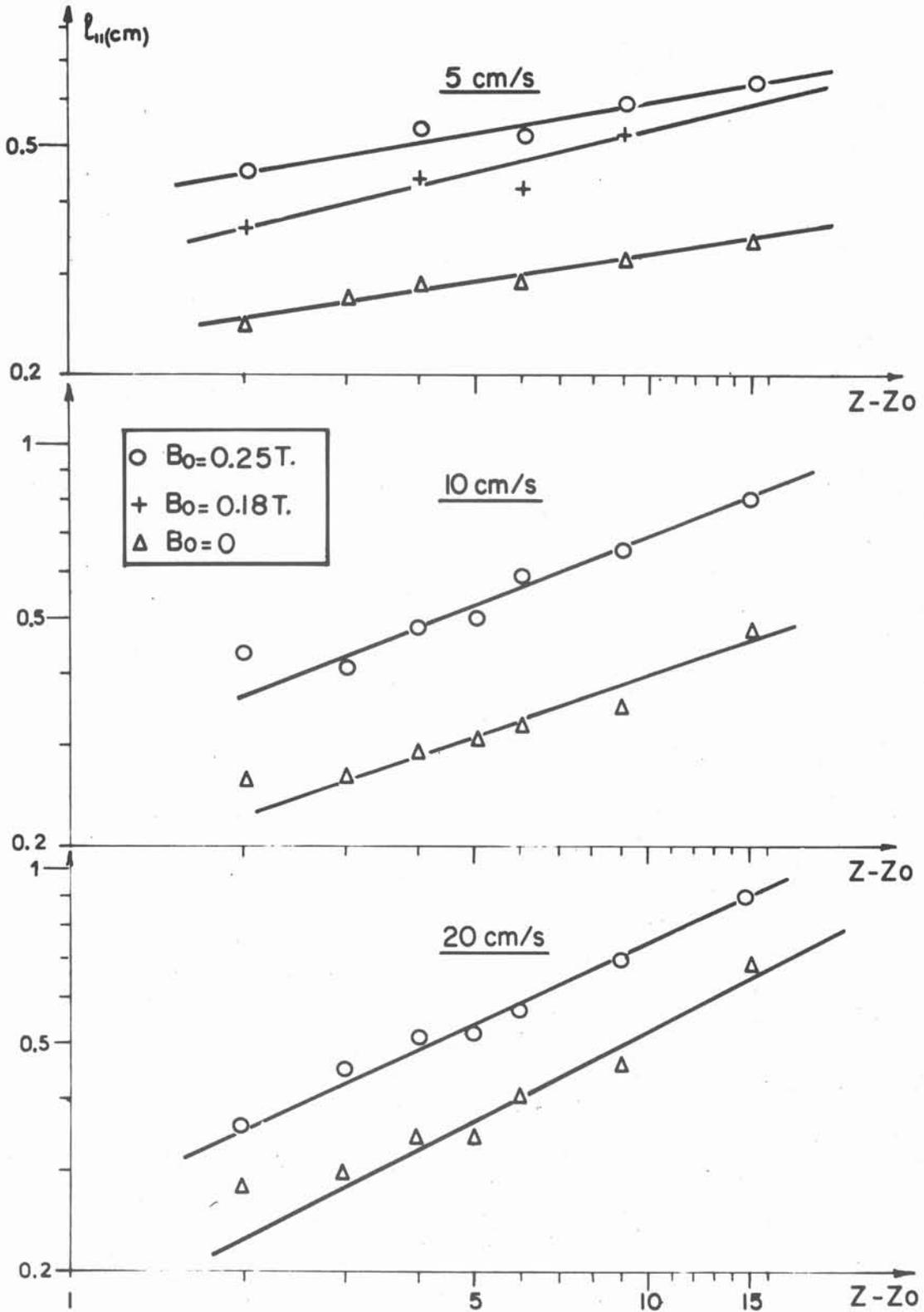


Fig.4 - Evolution of the parallel integral scale

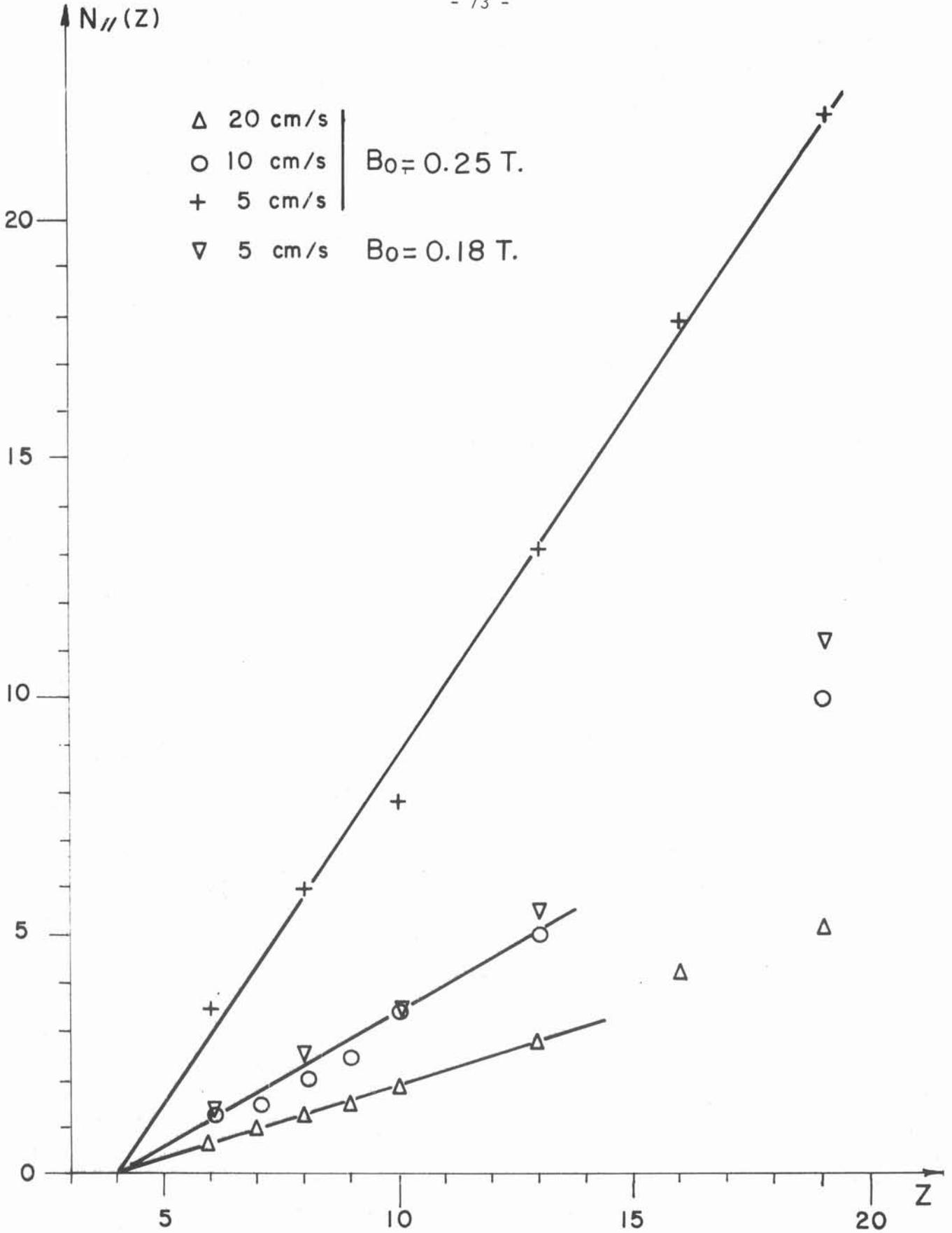


Fig.5. Evolution of the parallel interaction parameter ($N_{||} = \sigma B_0^2 \ell_{||} / \rho u_{||}$)

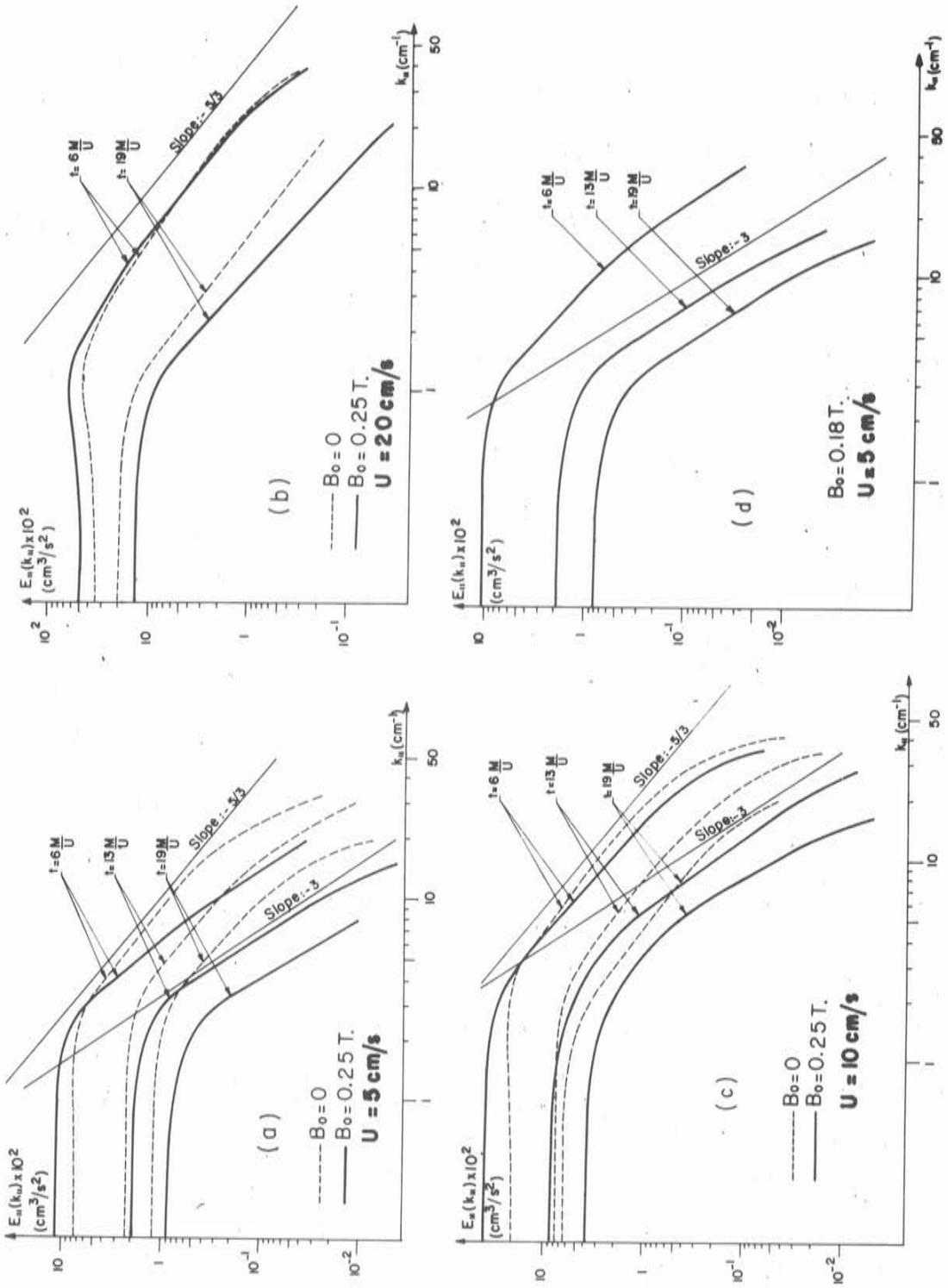


Fig. 6 - Evolution of the parallel energy spectrum (with respect to the parallel wave number)

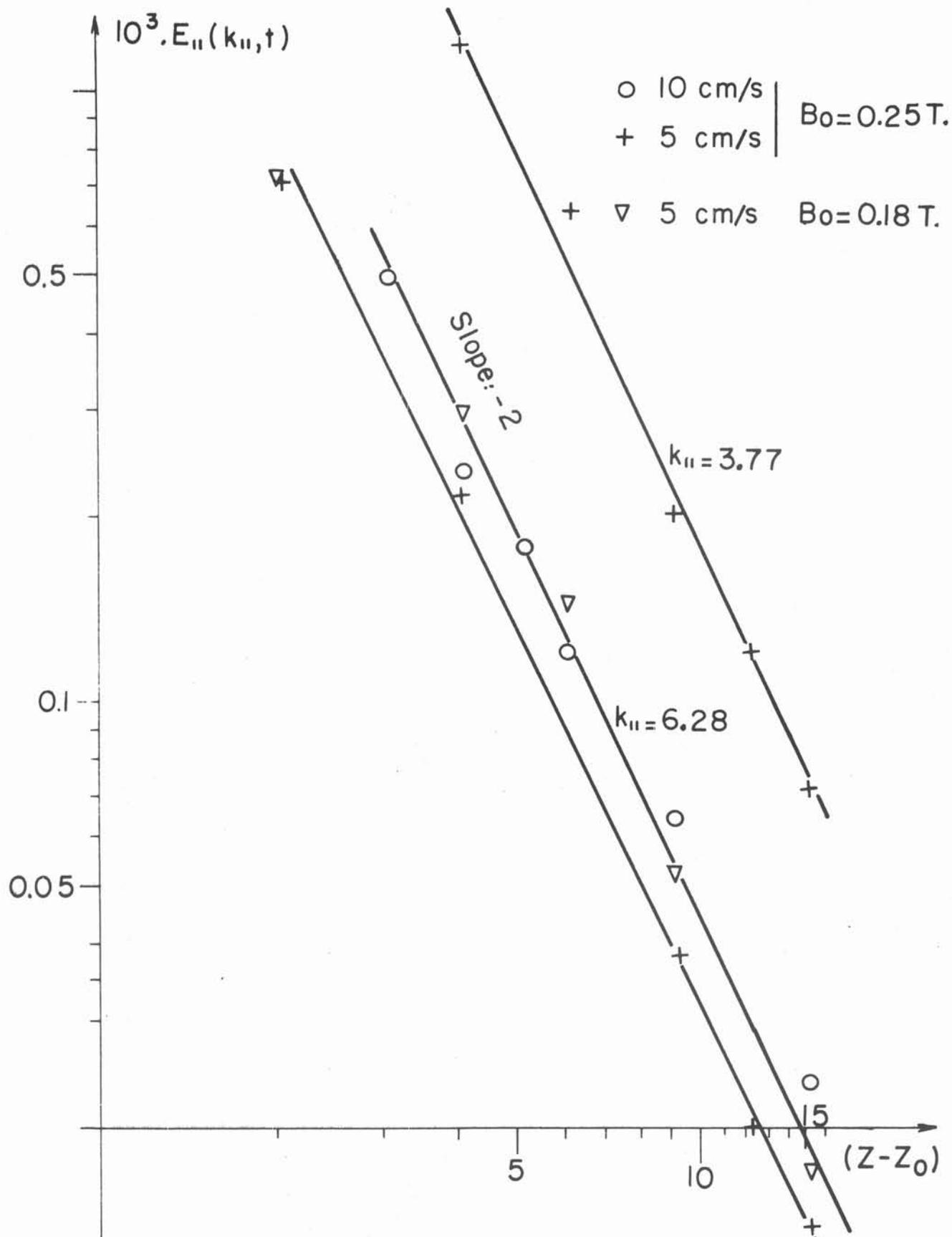


Fig.7. Time dependence of parallel energy spectrum

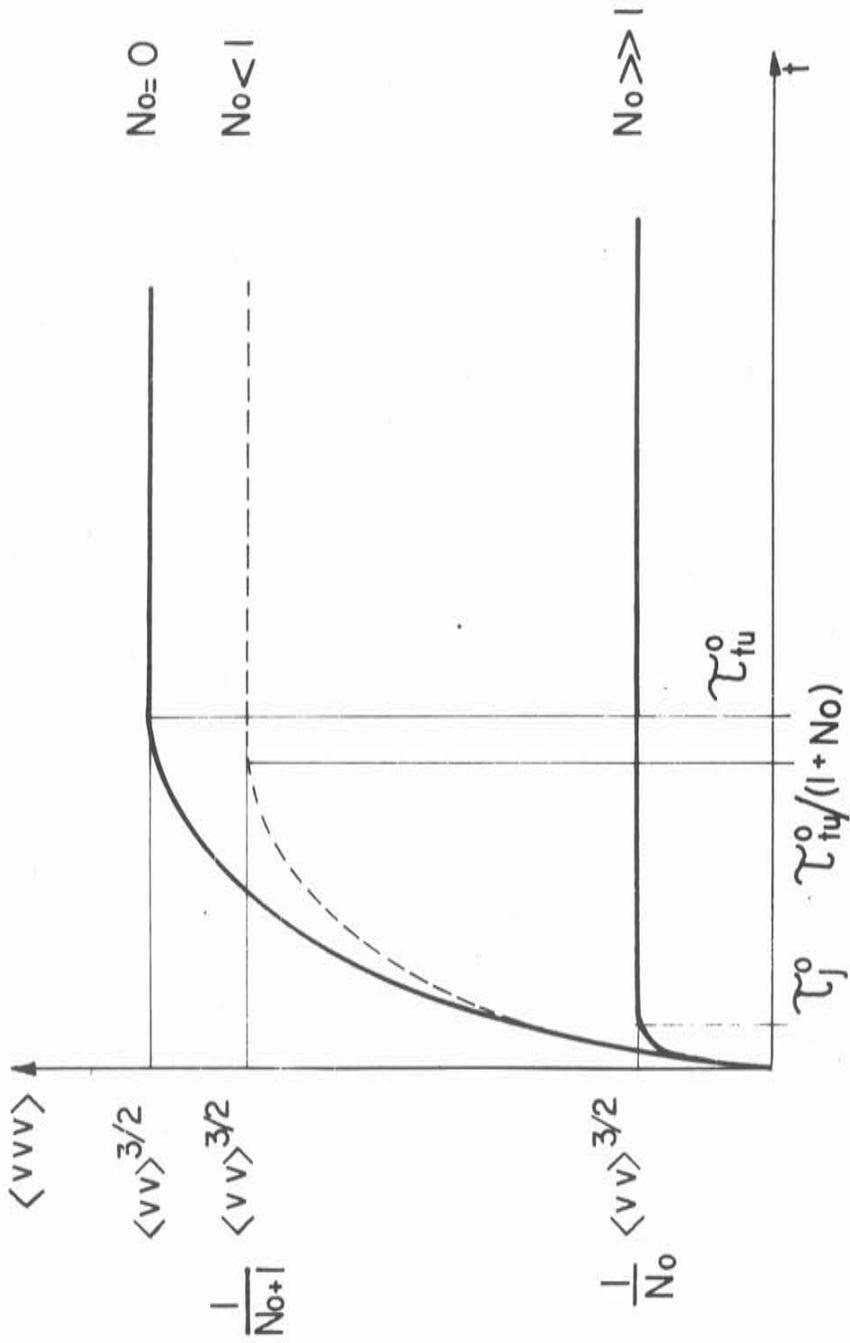


Fig. 8 - Evolution of triple correlations for various interaction parameters

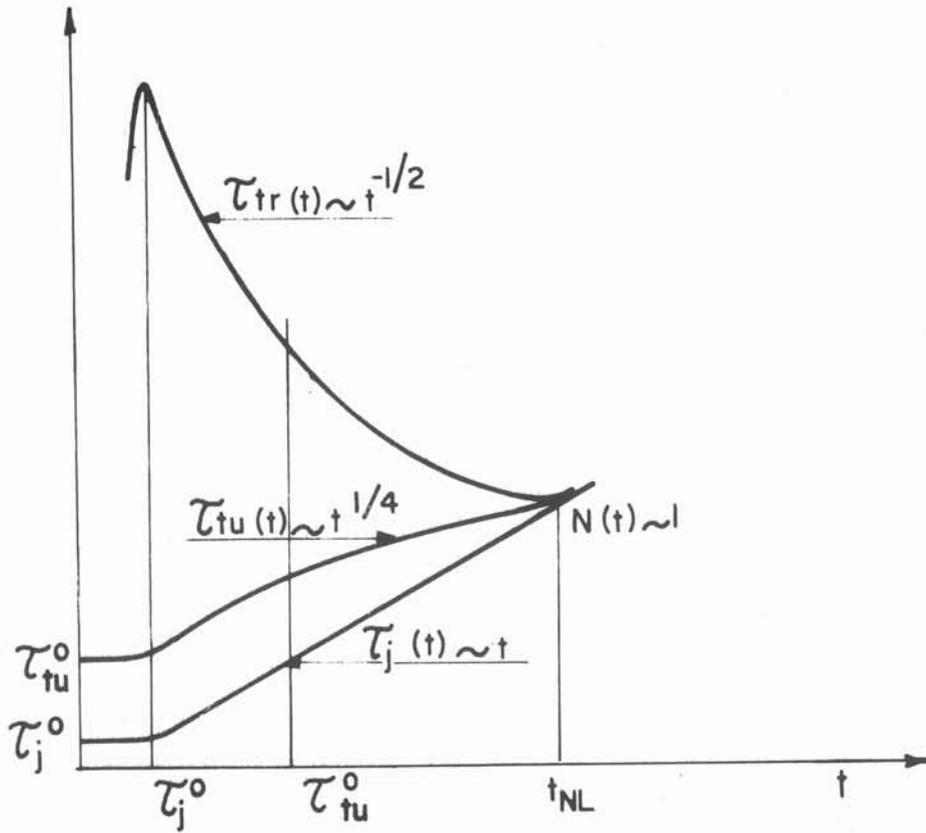


Fig.10- Evolution of the Joule time, the transfer time and the turnover time for large initial interaction parameters

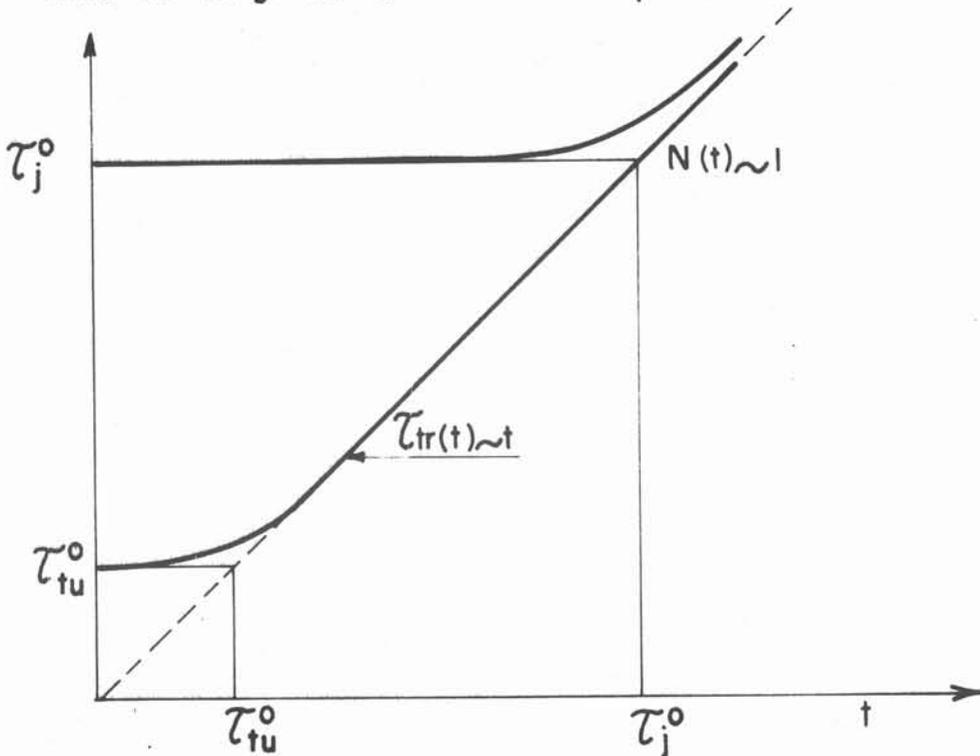


Fig.9- Evolution of the Joule and transfer times for small initial interaction parameter

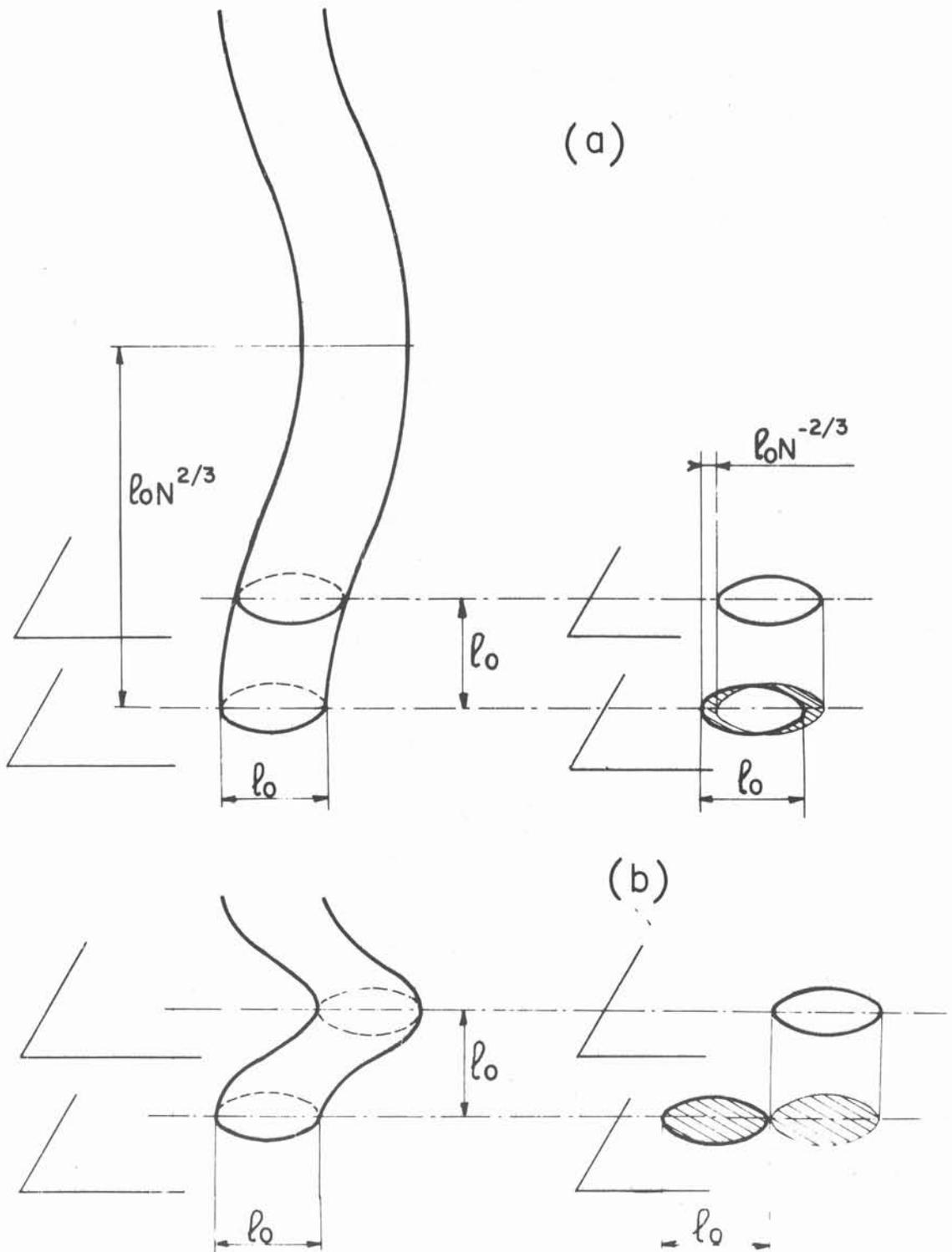


Fig.II- Return to three-dimensionality(no magnetic field). A Typical energy containing eddy

(a) at time t_{NL} when the turbulence is quasi-two- dimensional

(b) at time t_{3D} when three - dimensionality has been restored

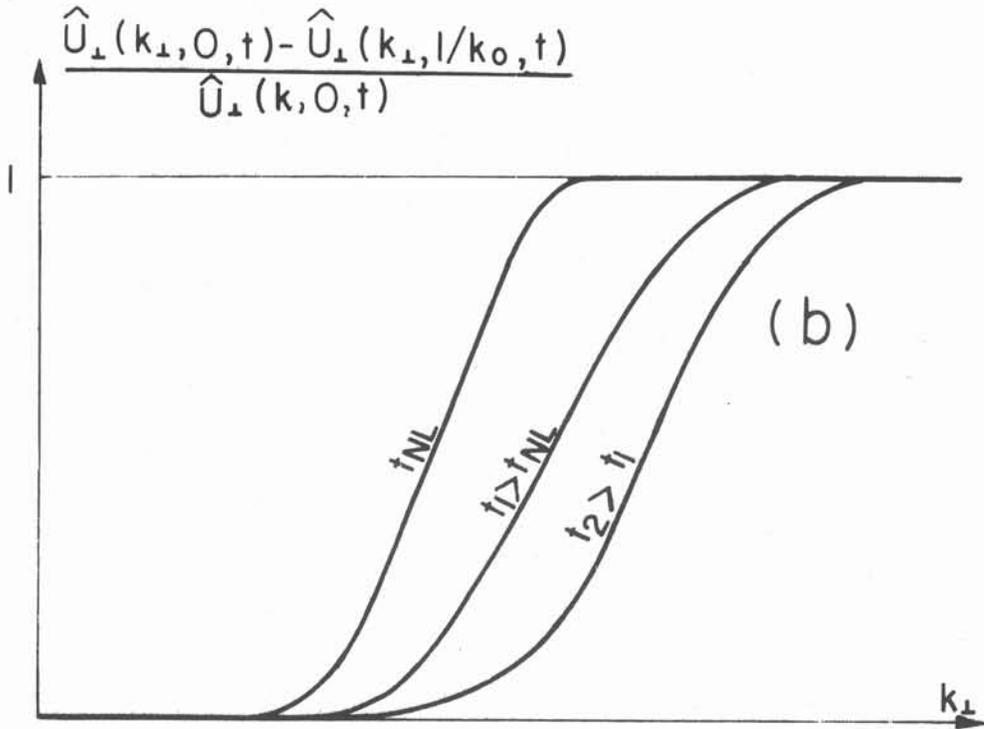
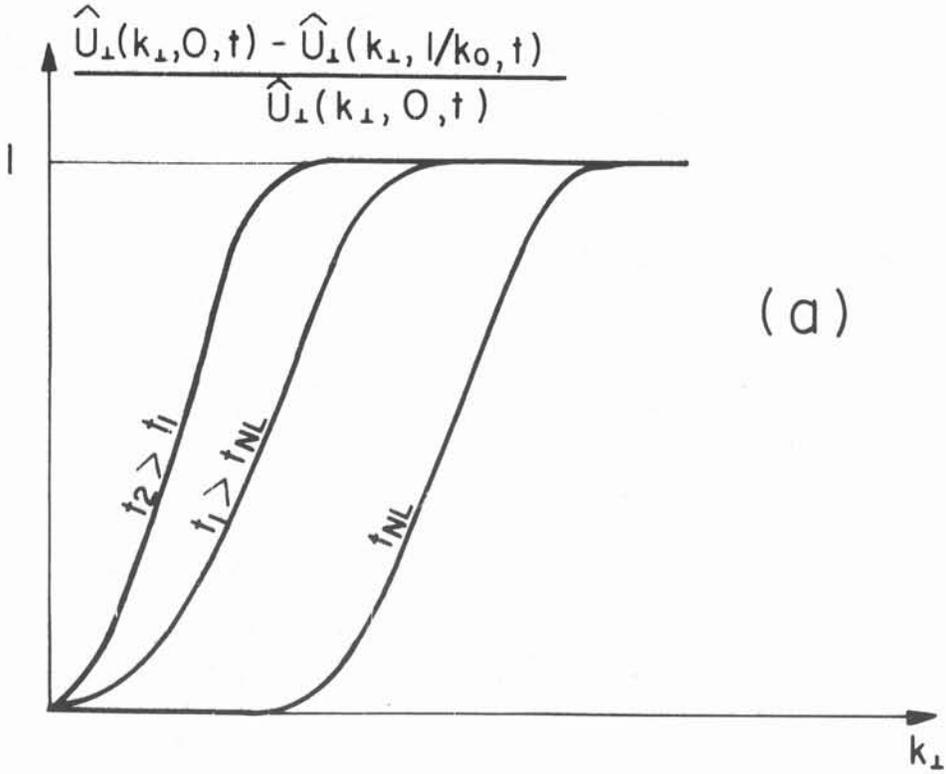


Fig.12. Evolution of the correlation function of the transverse velocity component in two transverse planes distant of one initial integral scale $\ell_0 = k_0^{-1}$, (a) in presence of magnetic field, (b) with magnetic field switched-off at t_{NL} .

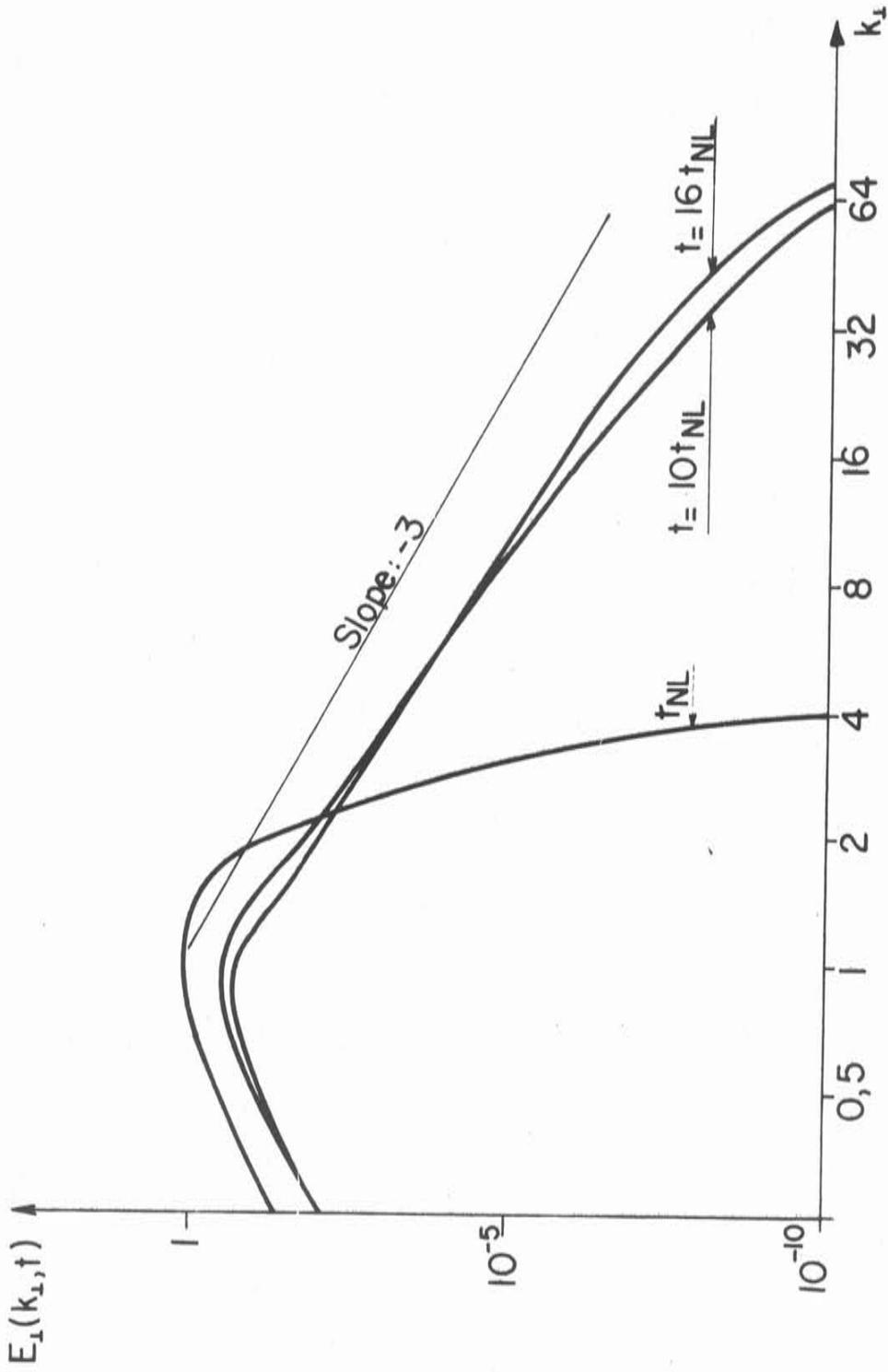


Fig.13- Energy spectrum of the transverse velocity component as a function of the transverse wave number

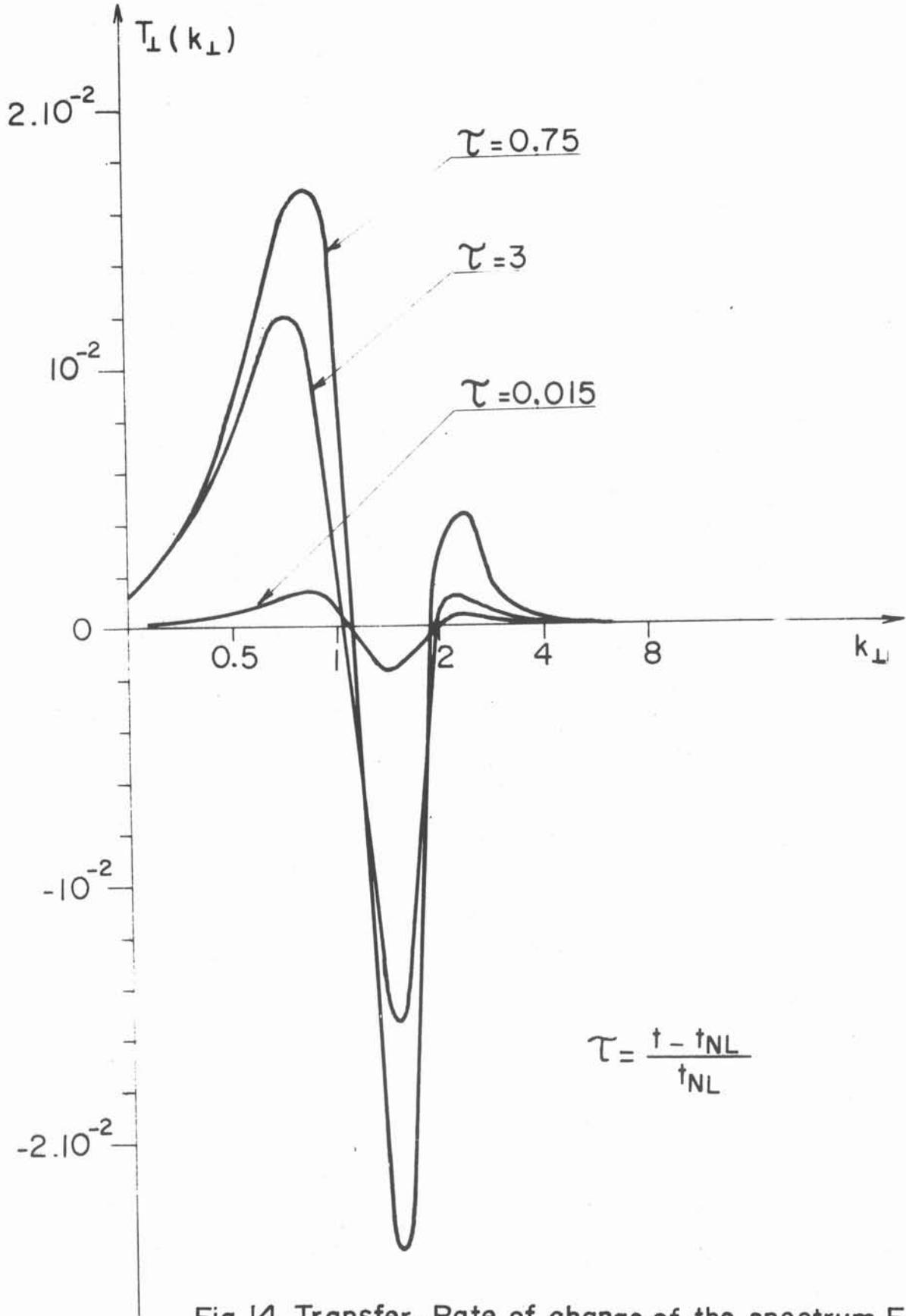


Fig.14. Transfer : Rate of change of the spectrum $E_{\perp}(k_{\perp}, t)$ due to non-linear terms

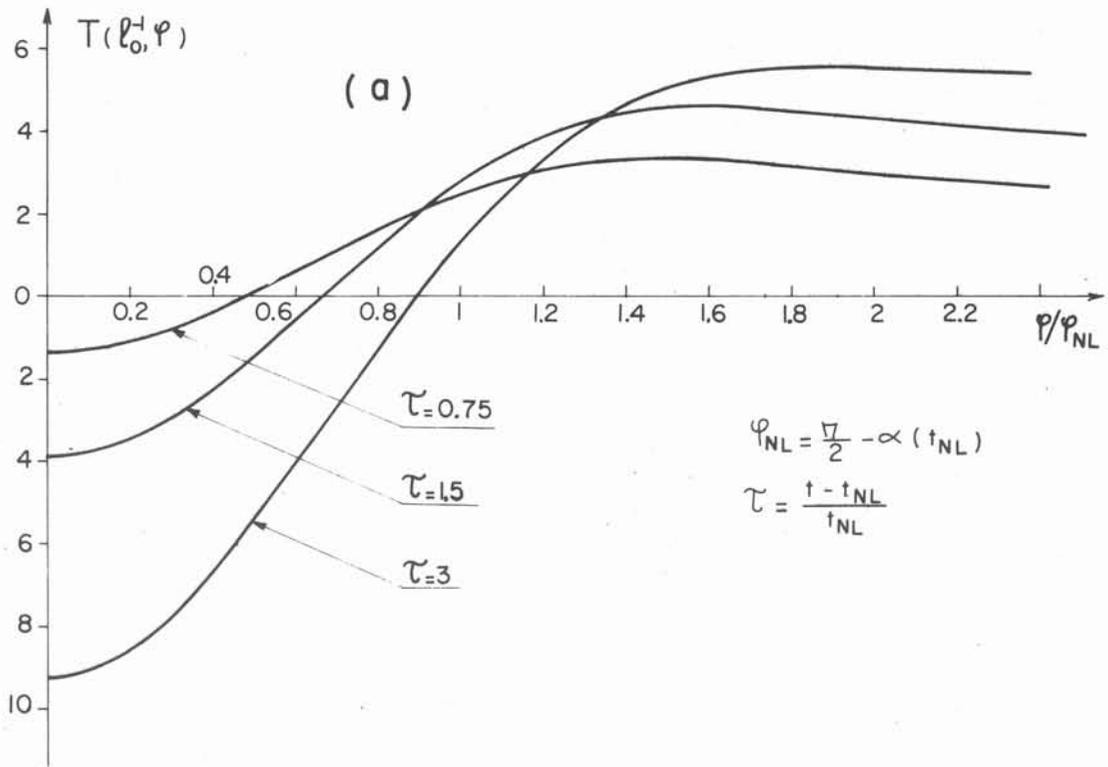
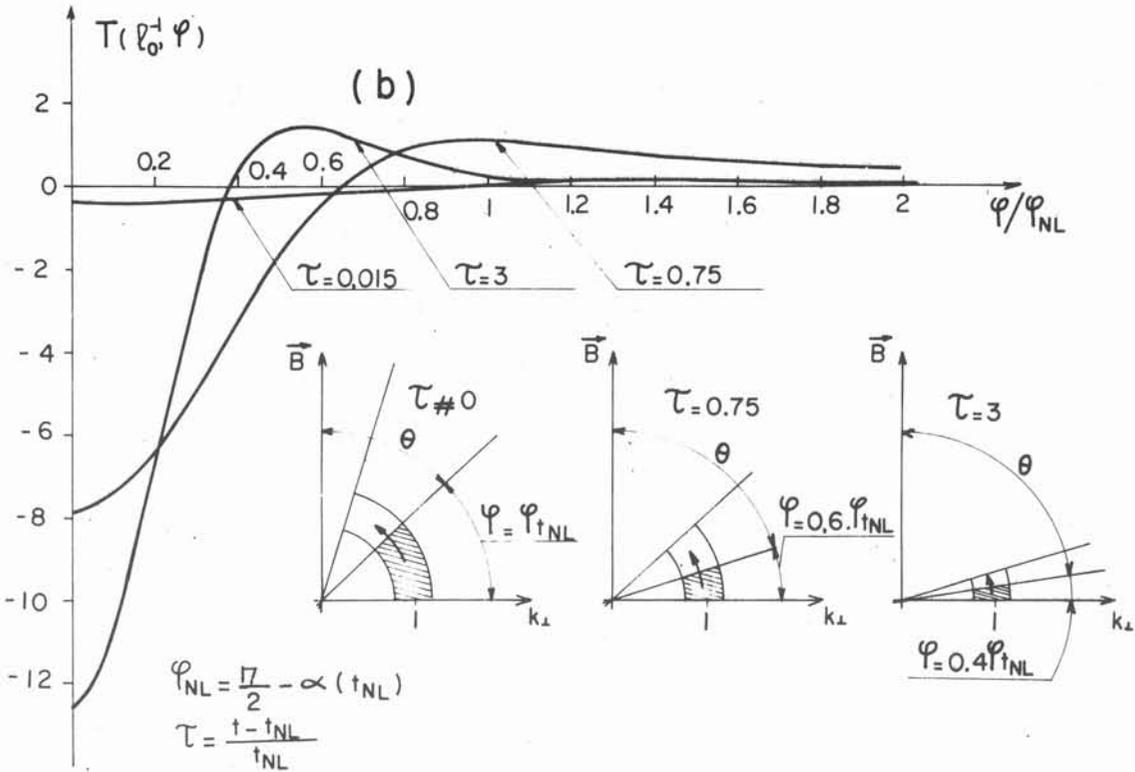


Fig.15-Transfer:Rate of change of the spectrum $E_{\perp}(l_0^{-1}, \varphi, t)$ due to non linear terms.

- (a) in absence of magnetic field
- (b) in presence of magnetic field

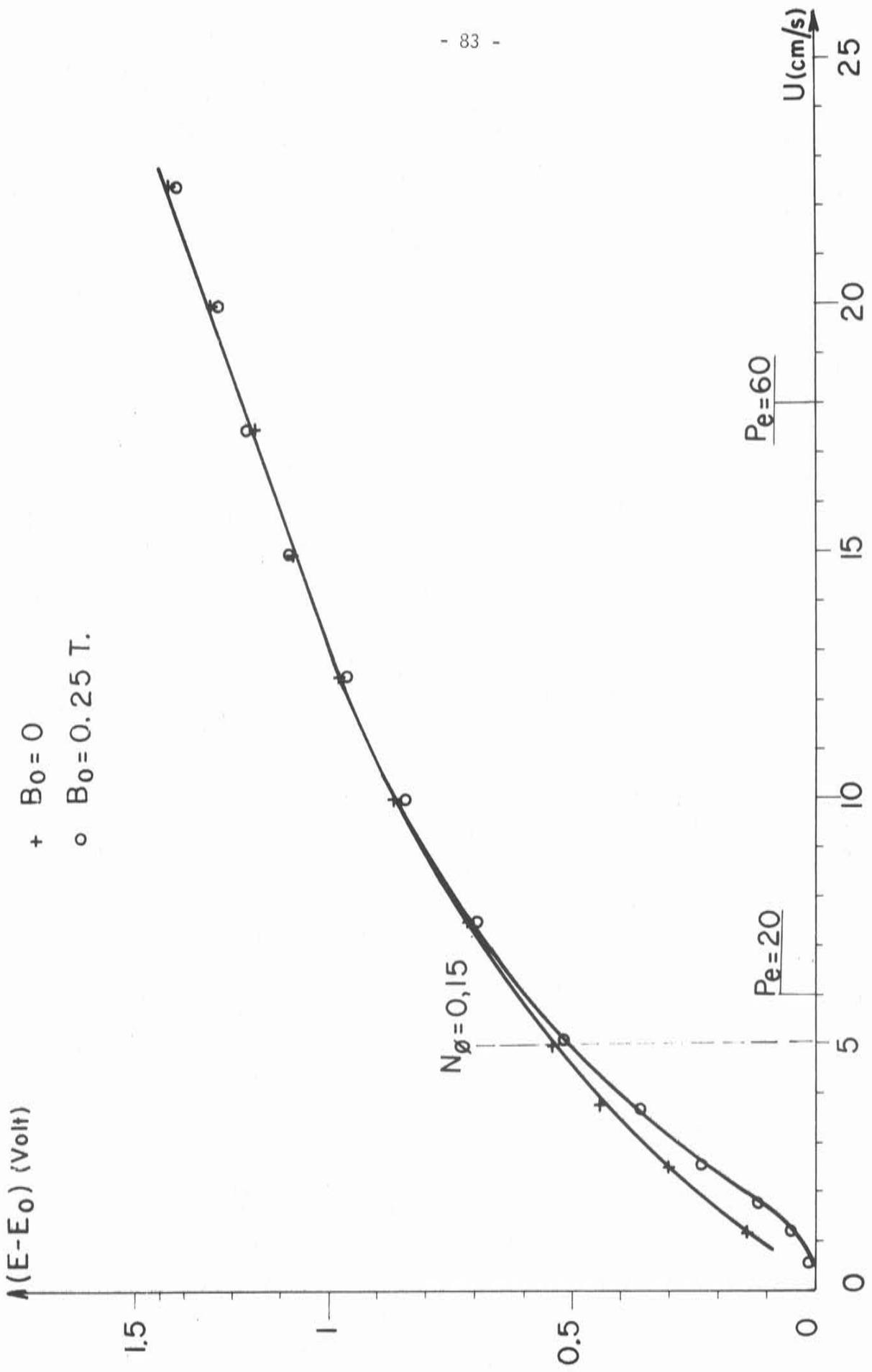


Fig.16_Calibration curves of conical hot film probe in mercury ($R_0 \sim 3\Omega$).

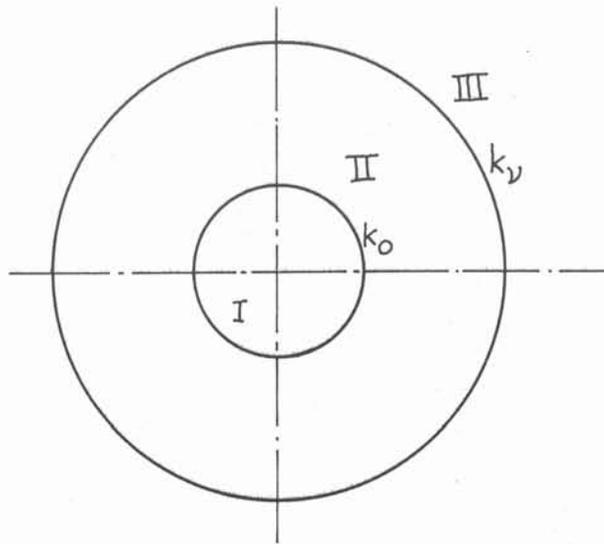
CHAPITRE III

COMPLEMENTS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

1. REEXAMEN DE LA THEORIE DE KOLMOGOROV EN PRESENCE D'EFFET JOULE

La remarque qui suit a simplement pour objet de donner un autre éclairage aux résultats énoncés dans le chapitre précédent en s'appuyant sur l'analyse dimensionnelle.

On considère un écoulement turbulent M. H. D. caractérisé par un flux d'injection \mathcal{E}_0 et par un temps d'évolution suffisamment long pour qu'un état stationnaire soit atteint. On convient de découper l'espace de Fourier en trois régions :



- La région I caractérise la zone de production d'énergie, elle est limitée par une sphère de rayon k_0 .
- La région II est la zone de dissipation ohmique. Elle est limitée par la sphère de rayon k_ν à partir de laquelle la dissipation visqueuse peut éventuellement devenir prépondérante.

On suppose, faisant un raisonnement semblable à celui de Kolmogorov, que l'essentiel des transferts d'énergie entre une sphère de rayon k et le reste de l'espace de Fourier, se fait de façon privilégiée au voisinage de cette sphère (hypothèse de localité). On s'intéresse alors à la distribution spectrale de la densité d'énergie dans la région II, qui est supposée ne dépendre d'après ce qui précède que du flux d'énergie \mathcal{E} échangé et de k .

L'analyse dimensionnelle conduit alors au résultat classique :

$$(1) \quad E(k) = A \mathcal{E}^{2/3} k^{-5/3}$$

En turbulence M. H. D., \mathcal{E} n'est pas constant et varie de sphère à sphère sous l'action du prélèvement énergétique dû à l'effet joule. Le flux d'injection \mathcal{E}_0 et le rayon k_0 de la région de production étant fixé, $\mathcal{E}(k)$ ne dépend que du champ magnétique par le groupement $\sigma B^2/\rho$ et de k , ce qui dimensionnellement s'exprime par une forme simple :

$$(2) \quad \mathcal{E}(k) = A' \left(\frac{\sigma B^2}{\rho} \right)^3 k^{-2}$$

reportant cette expression dans (1), on obtient :

$$(3) \quad E(k) = A'' \left(\frac{\sigma B^2}{\rho} \right)^2 k^{-3}$$

Cette forme est d'ailleurs la seule qui permette au temps de transfert inertiel d'être indépendant du nombre d'onde et du même ordre que le temps de dissipation par effet joule :

$$\tau_{tr} \sim \sqrt{k^3 E(k)} \sim \frac{\sigma B^2}{\rho}$$

Ici, deux remarques s'imposent. Tout d'abord, la constante A' n'est pas universelle mais dépend du flux d'injection \mathcal{E}_0 et de k_0 . En effet, pour $k = k_0$, $\mathcal{E}(k) = \mathcal{E}_0$ donc :

$$(4) \quad A' = \mathcal{E}_0 k_0^2 \left(\frac{\sigma B^2}{\rho} \right)^{-3}$$

Ensuite A' et A'' ne sont pas indépendants. Si on suppose le champ magnétique suffisamment intense, la quasi totalité de l'énergie issue de la sphère de rayon k_0 est dissipée par effet joule de sorte que $\mathcal{E}_0 \neq \mathcal{E}_{J(k_0)}$. Mais $\mathcal{E}_{J(k_0)}$ dépend de la totalité de l'énergie située à l'extérieur de la zone de production :

$$(5) \quad \mathcal{E}_{J(k_0)} = \int_{k_0}^{\infty} \frac{\sigma B^2}{\rho} \cos^2 \theta_E \cdot E(k) dk$$

On en déduit $A'' = - \frac{2 \mathcal{E}_0 k_0^2 (\sigma B^2 / \rho)^{-3}}{\cos^2 \theta_E}$ et finalement :

$$(6) \quad \begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left(\frac{k_0}{k} \right)^2 \\ E = \frac{2 \mathcal{E}_0 \rho k_0^2}{\sigma B^2 \cos^2 \theta_E} \cdot k^{-3} \end{cases}$$

Ces résultats ont été obtenus sans hypothèse d'aucune sorte sur l'anisotropie de l'écoulement, il apparaît donc de nouveau que des distributions spectrales en k^{-3} ne sauraient être une preuve de bidimensionnalité. D'ailleurs une telle loi en k^{-3} a aussi été obtenue par un raisonnement analogue pour la turbulence en fluide stratifié dans une situation quasi isotrope (Lumley 1963)*.

2. TECHNIQUE D'ETALONNAGE ET DE MESURE

Ce paragraphe et le suivant ont pour objet de détailler un peu plus les techniques expérimentales exposées de façon nécessairement très synthétique dans le chapitre précédent soumis pour publication au Journal de Mécanique. Les planches (1), (2), (3) représentent des vues d'ensemble du solénoïde, de son alimentation et des différents appareils de mesure, de commande et de contrôle. Le schéma de la chaîne anémométrique est représenté fig. 4.

Il convient d'insister sur le fait que l'installation réalisée permet aisément d'effectuer l'étalonnage des sondes in situ. Il suffit pour cela d'avancer les sondes devant la grille mobile et de faire varier d'une course à l'autre la vitesse de translation verticale de cette grille. On notera que cette facilité d'établir la courbe d'étalonnage et surtout de procéder à son contrôle permanent est tout à fait essentielle pour obtenir des mesures bien significatives et reproductibles, ce qui est toujours très délicat dans le mercure.

Sans précaution particulière, la variation de tension délivrée par la sonde (influence de la pression) observée pendant une même course de l'équipage mobile à vitesse constante est représentée fig. 5. Cette augmentation ne peut en aucun cas être assimilée aux écarts de température entre les deux extrémités de l'installation puisque ceux-ci mesurés par variation de la résistance à l'aide d'une deuxième sonde à film chaud provoqueraient des écarts de tension d'un ordre de grandeur inférieur à ceux observés. Par ailleurs, leur sens de variation devrait être différent.

* LUMLEY J.L. - "The spectrum of nearly inertial turbulence in stably stratified field".
J. of the Atm. Sc., Vol. 21, p 99-102, 1963.

Pour caractériser indépendamment de toute autre cause possible d'erreur l'influence de la pression sur le signal, délivrée par les sondes à films chauds, nous avons réalisé l'expérience suivante : une sonde est placée dans un récipient étanche rempli de mercure de propreté contrôlable, dans lequel on peut faire varier continuellement la pression à l'aide d'un compresseur auquel le réservoir est relié (fig. 6). Dans de bonnes conditions de propreté de la sonde, son signal est peu sensible aux variations de pression. Par contre, après une immersion dans du mercure couvert d'une pellicule d'oxyde, on observe une variation considérable de la tension quand la pression augmente, les ordres de grandeur de cette variation étant voisins de ceux observés dans l'installation expérimentale pour de mêmes écarts de pression. On remarquera que la tension se sature pour des pressions assez élevées ; nous avons attribué ceci au fait que, lorsque les impuretés sont parfaitement plaquées sur l'élément sensible des sondes, toute augmentation ultérieure de pression est sans effet sur les échanges thermiques ; la pression de saturation est d'autant plus faible que la sonde est moins chargée d'impuretés. Il faut noter que lors du vieillissement des sondes, l'influence de la pression se fait sentir très légèrement même dans de bonnes conditions de propreté. On peut attribuer ceci à un léger décollement de la pellicule de quartz recouvrant le film de platine, l'augmentation de la pression favorisant son recollement et ainsi les échanges thermiques.

Même dans de très bonnes conditions de propreté, il s'est avéré impossible d'obtenir un signal rigoureusement constant pour une augmentation de pression de trois bars qui correspond à la course verticale de l'équipage mobile. Nous avons donc toléré des écarts de tension de 100 mV au plus sur un niveau de tension moyenne de l'ordre de 5 à 10 V, et réalisé un dispositif permettant un étalonnage à pression constante. Ce dispositif comporte essentiellement une mémoire échantillonnée qui enregistre la tension délivrée par la sonde au cours d'une course de l'équipage mobile, à des intervalles de temps réguliers, la fréquence d'enregistrement étant programmable continuellement. Ces informations sont ensuite transcrites sur une imprimante. On dispose ainsi pour chaque course de l'équipage mobile, à vitesse affichée, d'une série de chiffres représentant la tension à différentes cotes dans le mercure et donc à différentes pressions. Il est ensuite aisé de tracer les courbes d'étalonnage à pression constante. Compte tenu du phénomène de saturation précédemment défini, il est naturel d'établir l'étalonnage à des pressions suffisamment élevées (qui correspondent à une immersion suffisante dans le mercure) ; la courbe donnée Partie 1, chapitre II, fig. 16, correspond à la côte inférieure de l'installation expérimentale où il est aisé de mesurer la tension à vitesse nulle E_0 immédiatement après l'arrêt de l'équipage mobile, la quantité $E - E_0$

(cf. Partie 1, chapitre II, appendice 2) étant portée en ordonnée de la courbe détalonnage plutôt que la tension moyenne \bar{E} . Nous avons vérifié d'autre part que bien qu'il existe de faibles écarts de tension moyenne entre le haut et le bas de l'installation, les tangentes aux courbes d'étalonnage correspondant à ces deux extrémités restent sensiblement voisines, ce qui est essentiel pour définir les caractéristiques de la turbulence.

Avant de procéder aux mesures de turbulence proprement dites, nous avons vérifié avant chaque essai que la tension à vitesse nulle délivrée par la sonde au sommet de l'installation était comprise dans une fourchette de 100 mV par rapport à sa valeur lors de l'étalonnage. Pour compenser la faiblesse de la course de l'équipage mobile qui limite la durée du signal à quelques secondes, nous avons procédé à plusieurs courses successives, le dépouillement portant sur leur addition. La figure 7 met en évidence une amélioration de la précision des mesures d'intensité de turbulence moyennées sur n courses lorsque n croît. Bien que théoriquement l'intensité de turbulence doit converger vers une valeur fixe lorsque n devient très grand, nous avons mis en évidence une limite au nombre de courses au-delà de laquelle la précision des mesures chute. Ceci est dû au salissement progressif des sondes lorsqu'elles restent longtemps immergées sans être nettoyées, ce salissement au sein même du mercure étant favorisé par des attractions électrostatiques mal connues, d'impuretés de très petites dimensions en suspension dans le mercure et en concentration d'autant plus grande que la surface libre est plus proche. Nous avons limité le nombre n à 20 ce qui correspond pour la vitesse de 20 cm/s de l'équipage mobile à un temps de dépouillement total de 100 s, la précision globale étant alors de l'ordre de 10 %.

La vibration mécanique qui perturbe le signal surtout aux faibles vitesses est engendrée par le choc au démarrage de l'équipage mobile. Elle est favorisée par le porte-à-faux important entre la charge et la grille mobile (reliées entre elles par des tiges de trois mètres de longueur ; Partie 1, chapitre II, fig. 2). Cette vibration s'atténue au cours du temps pendant une même course. Son spectre (fig. 8) se situe autour d'une fréquence centrale de 7,5 hz pour la vitesse moyenne 5 cm/s de l'équipage mobile. On peut alors vérifier en comparant ce spectre et un spectre de turbulence perturbée que cette vibration est totalement décorrélée du signal turbulent. La technique de correction s'impose d'elle même, il suffit de retrancher instantanément la tension délivrée par une deuxième sonde placée devant la grille du signal (cf. Partie 1, chapitre II, appendice 2 pour les détails techniques et fig. 4 pour le schéma

de la chaîne anémométrique). La figure 9 montre la bonne valeur de cette correction.

3. PERSPECTIVES ULTERIEURES

C'est une panne du solénoïde, irréparable du fait de sa conception monobloc qui a limité le programme expérimental ancien aux mesures unidirectionnelles (direction du champ magnétique) ; ce programme a néanmoins permis d'obtenir des résultats expérimentaux très importants. Seuls pour l'instant, l'interprétation phénoménologique de ces premiers résultats et les calculs numériques (Frisch et Sulem) apportent des éclaircissements sur les mécanismes anisotropes de la turbulence en M. H. D. La poursuite de cette étude sera donc axée pour l'essentiel vers la caractérisation expérimentale de l'anisotropie de l'écoulement afin d'appuyer complètement et de façon déterminante les conjectures théoriques et phénoménologiques développées. Le programme nouveau devra donc compléter les résultats antérieurs de façon à caractériser complètement :

- Les deux composantes du champ de vitesse et les spectres d'énergie cinétique ($E_{//}(k_{\perp})$, $E_{//}(k_{//})$, $E_{\perp}(k_{\perp})$, $E_{\perp}(k_{//})$) en fonction des deux composantes du nombre d'onde .
- Les échelles intégrales dans la direction du champ magnétique et dans sa direction perpendiculaire, le rapport de ces deux échelles étant un paramètre tout à fait essentiel pour définir la structure de l'écoulement.

Pour réaliser ce programme nous allons disposer de deux installations complémentaires.

La première est celle ayant permis de réaliser l'ancien programme, équipée d'un nouveau solénoïde plus performant puisqu'il permettra d'atteindre des champs magnétiques de 0,4 T. Ce nouveau solénoïde en cours de réalisation est de conception tout à fait différente du précédent puisqu'il est constitué de 20 galettes superposées concentriques interchangeables et autonomes, la panne de l'une d'entre elles n'arrêtant pas l'ensemble de l'installation. Nous envisageons de compléter les résultats anciens dans deux directions. Tout d'abord, l'utilisation de sondes à deux films chauds croisés doit théoriquement nous donner accès à la composante de la vitesse perpendiculaire à la direction du champ magnétique et au spectre d'énergie $E_{\perp}(k_{//})$. Ensuite, l'intensité accrue du champ magnétique nous permettra de nous rapprocher des conditions

théoriques caractérisées par de fortes valeurs du nombre de Reynolds tout en conservant les mêmes valeurs au paramètre d'interaction $N = M^2/Re$. Quoiqu'il en soit, cette installation ne permet, par la technique classique de l'anémométrie à film chaud, de caractériser l'influence du vecteur d'onde que par sa composante parallèle au champ.

La seconde installation actuellement achevée et qui a bénéficié du support de la nouvelle A. T. P. (combustion et turbulence 77) est de conception classique (fig. 10). Il s'agit d'un écoulement de mercure ($0 \leq V \leq 50 \text{ cm/s}$) dans une conduite rectangulaire ($S = 5 \times 6 \text{ cm}^2$) introduit dans l'entrefer d'un électroaimant ($B_{\text{max}} \sim 0,8 \text{ T}$). La turbulence est engendrée par une grille de même solidité $\Delta = 0,44$ que celle utilisée dans l'installation précédente. L'originalité de cette installation par rapport aux expériences connues du même type (cf. Partie 1, chapitre II, [6] [15]) provient essentiellement de la présence d'un nid d'abeilles destiné à supprimer les effets de bout électromagnétiques et le profil en M qui leur est associé. On peut espérer ainsi, malgré les dimensions relativement faibles du canal, disposer d'une turbulence convenablement homogène. Du fait de sa géométrie ($\vec{V} \perp \vec{B}$) cette installation doit nous permettre d'accéder aux spectres d'énergie en fonction de la composante du vecteur d'onde perpendiculaire à la direction du champ magnétique (la vitesse perpendiculaire au champ étant mesurée avec une sonde simple, la vitesse parallèle au champ avec une sonde à deux films croisés) et à l'échelle intégrale dans la même direction. L'exploration du domaine des champs intenses et l'accroissement important de la plage d'étude qui peut atteindre 70 mailles font également partie des objectifs de cette installation.

Sur le plan des techniques de mesures à mettre en oeuvre, il faut noter que les premiers essais d'utilisation de sondes à deux films chauds croisés dans le mercure ont révélé de grandes difficultés notamment au niveau de l'étalonnage. En effet, sans entrer dans les détails techniques, il convient de noter que pour séparer les deux composantes de la vitesse instantanément, il faut procéder à une différence pondérée entre les signaux délivrés par chacun des films. Or, le salissement de l'un de ces films, aussi faible soit-il, est toujours différent de celui de l'autre, et s'il affecte peu chacun des signaux séparément (dans de bonnes conditions de propreté), par contre il perturbe fortement leur différence pondérée. L'utilisation de sondes de mesures de potentiel développée récemment par J.M. Rosant (Partie 1, chapitre II, [15]) et dont les résultats semblent prometteurs fait aussi partie des techniques de mesures qui sont susceptibles d'être utilisées.

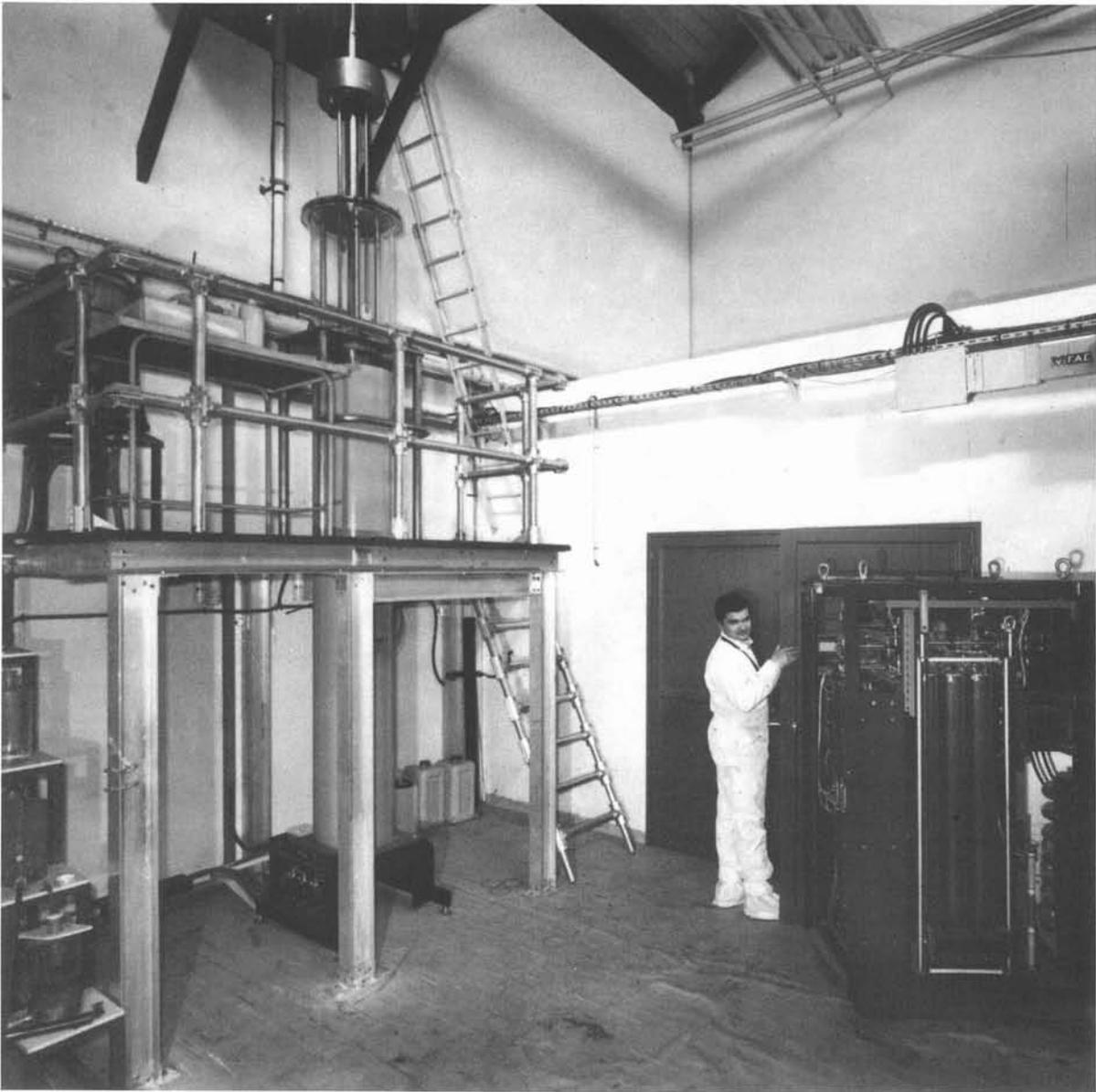


Fig.1- Vue d'ensemble du solénoïde et de son alimentation.

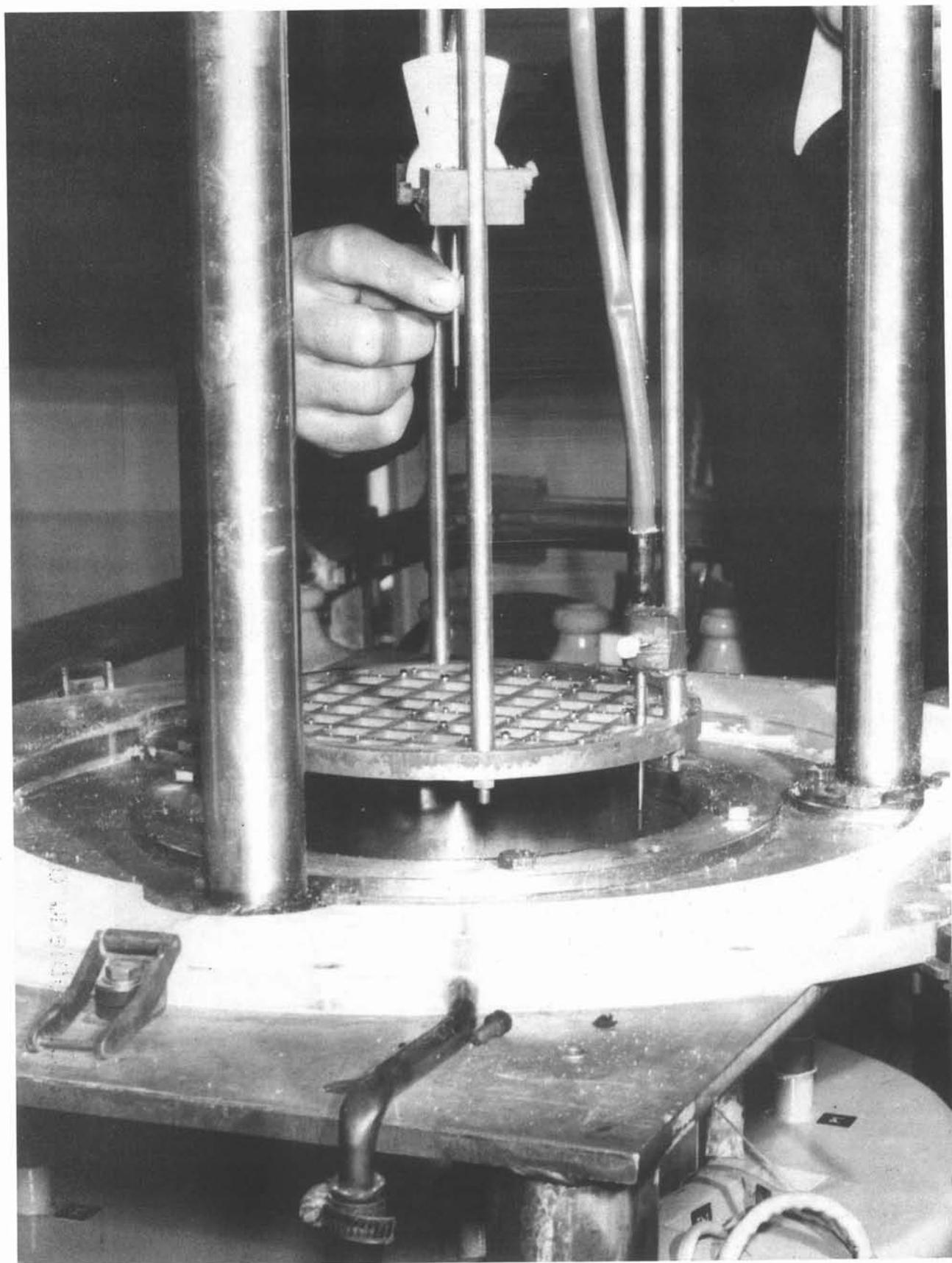


Fig.2_ Vue partielle de l'installation expérimentale .

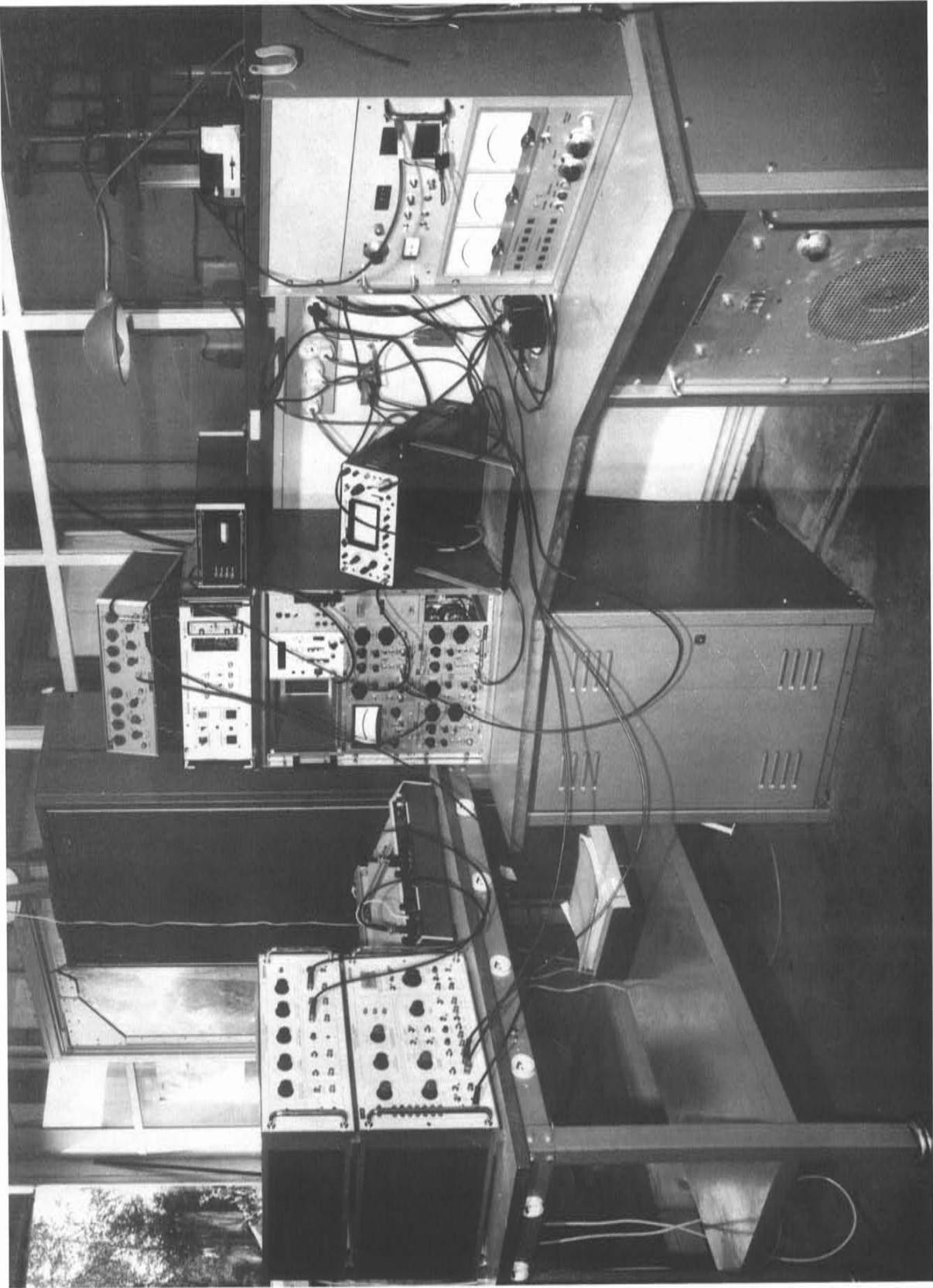


Fig.3- Tableau de commande de mesure et de controle .

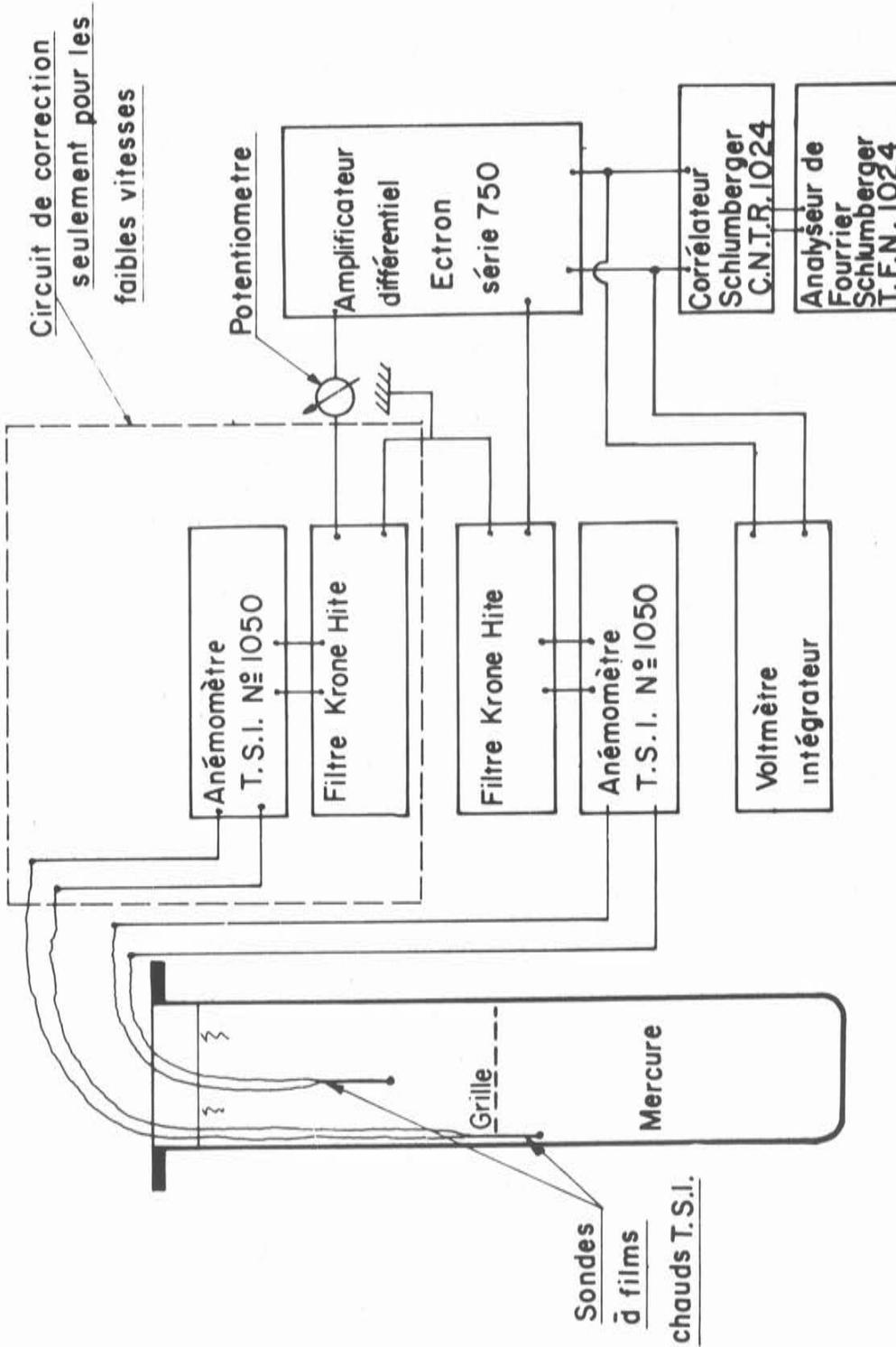


Fig.4- Schéma de la chaîne anémométrique

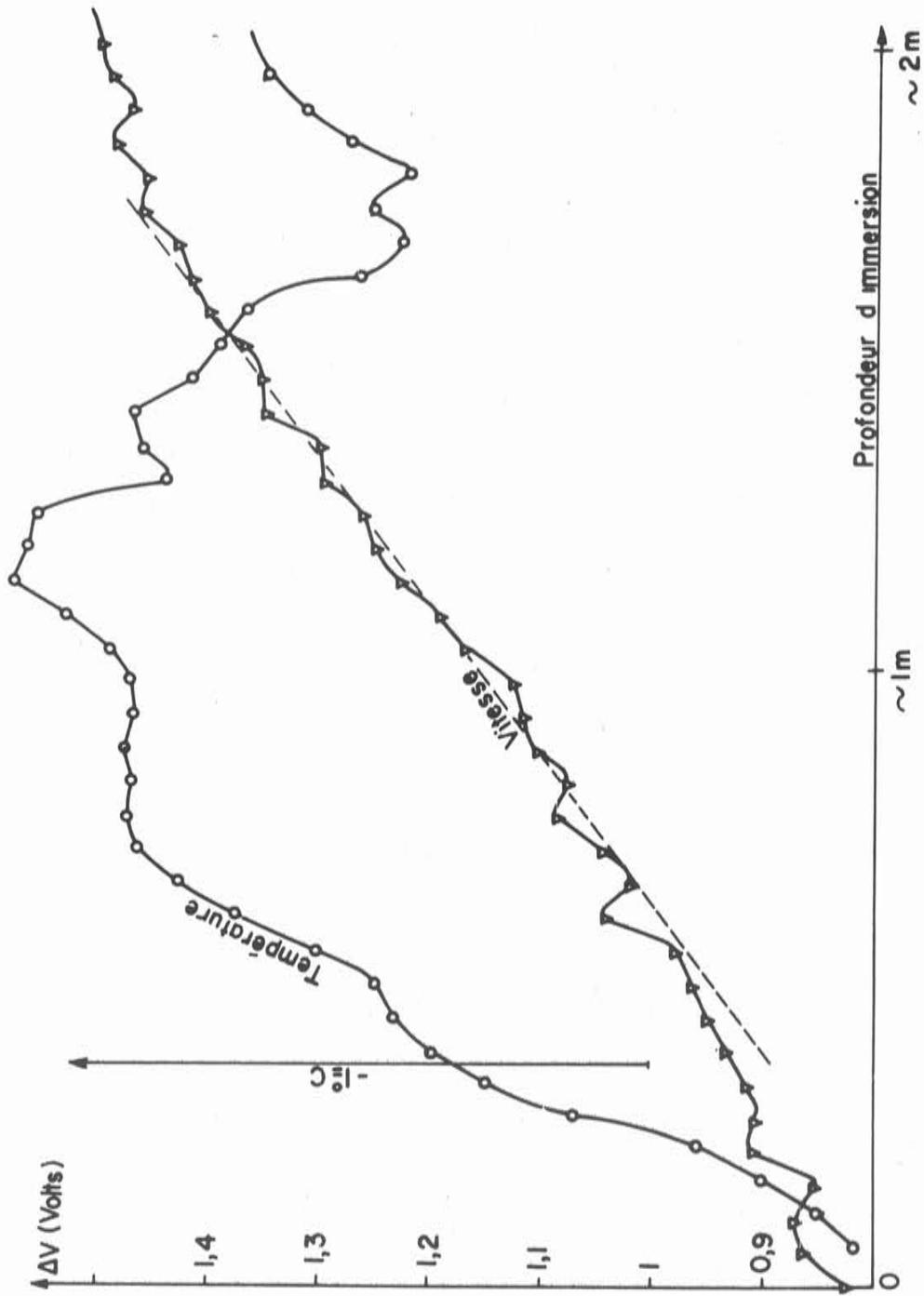


Fig.5_ Influence de la profondeur d'immersion dans le mercure sur la tension délivrée par une sonde à film chaud sale

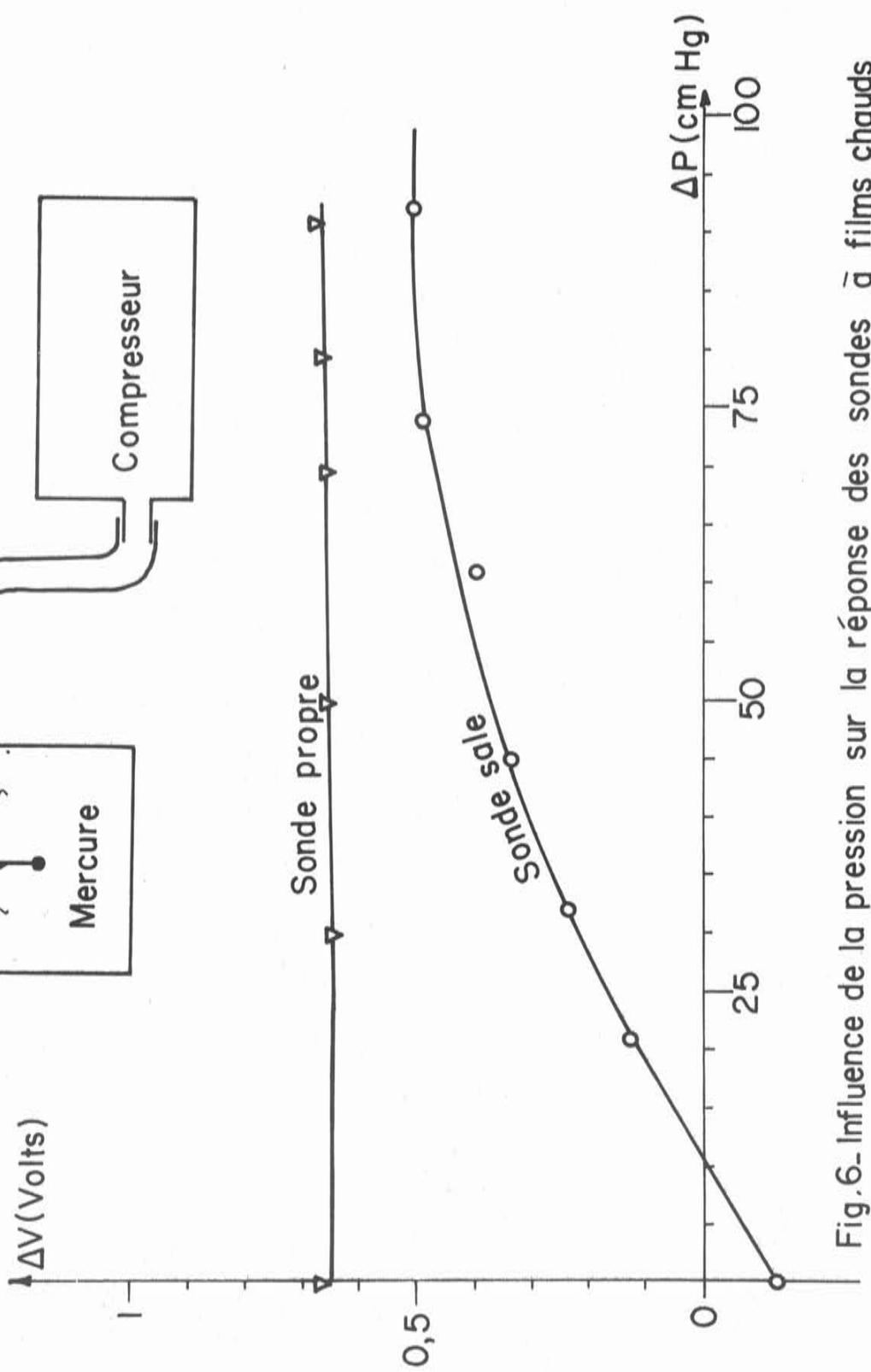
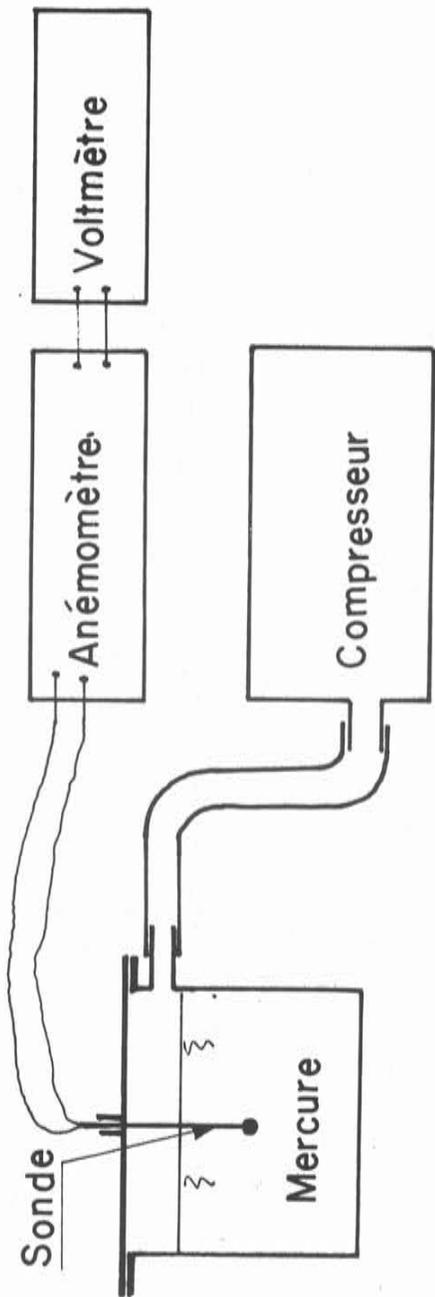


Fig. 6.- Influence de la pression sur la réponse des sondes à films chauds

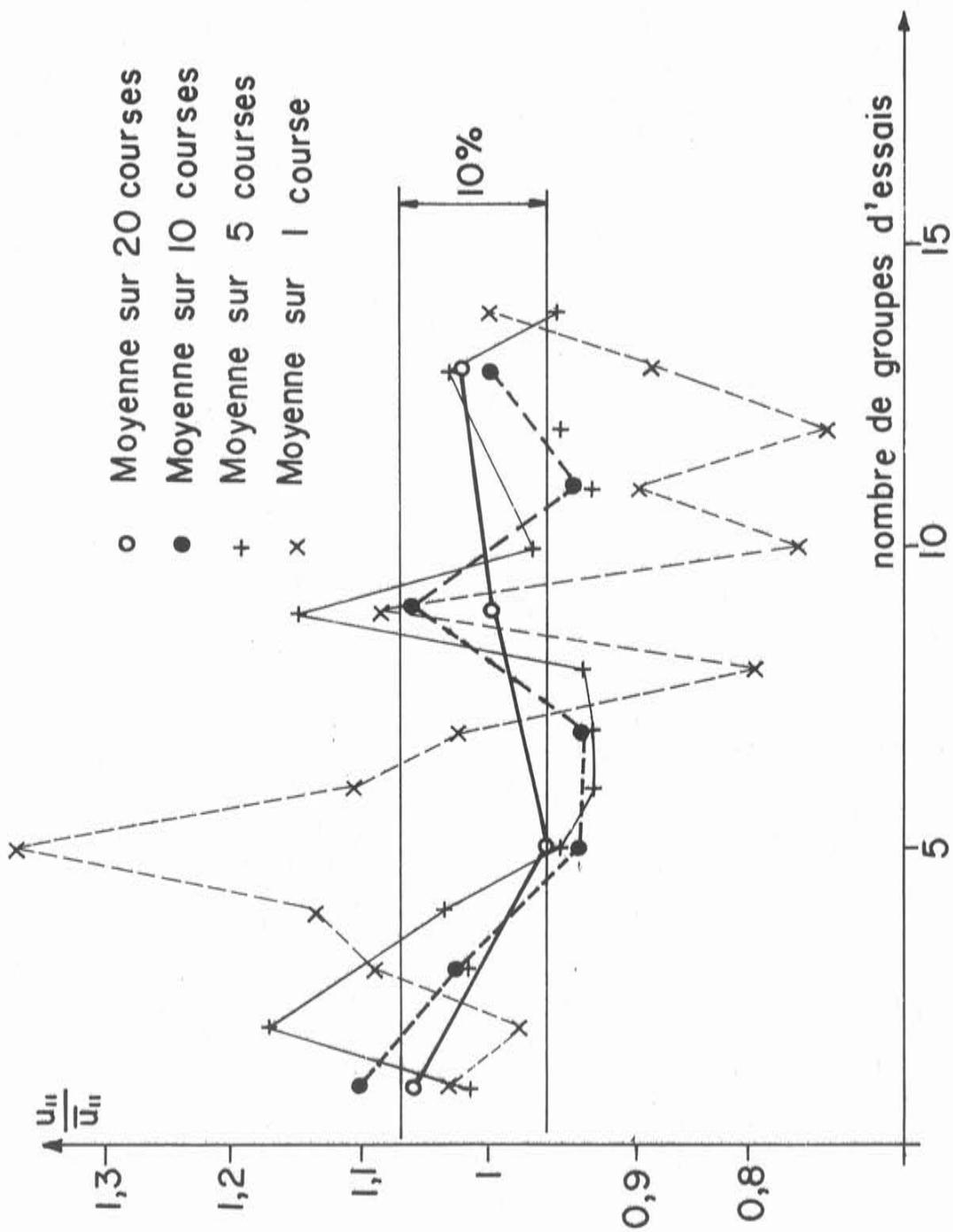


Fig.7.- Amélioration de la précision des mesures d'intensité de turbulence quand le nombre de courses augmente

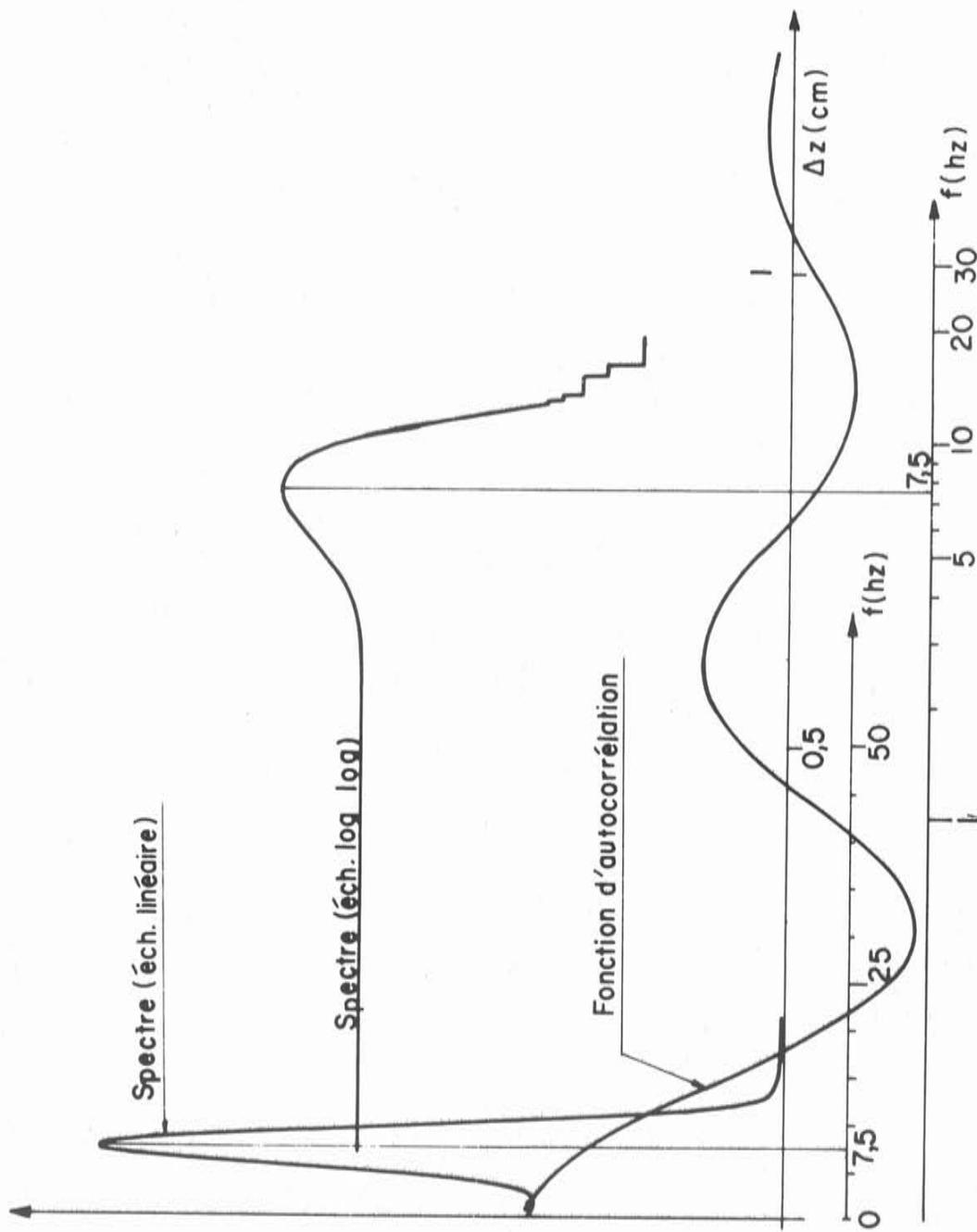


Fig.8.- Caractérisation de la vibration de l'équipage mobile

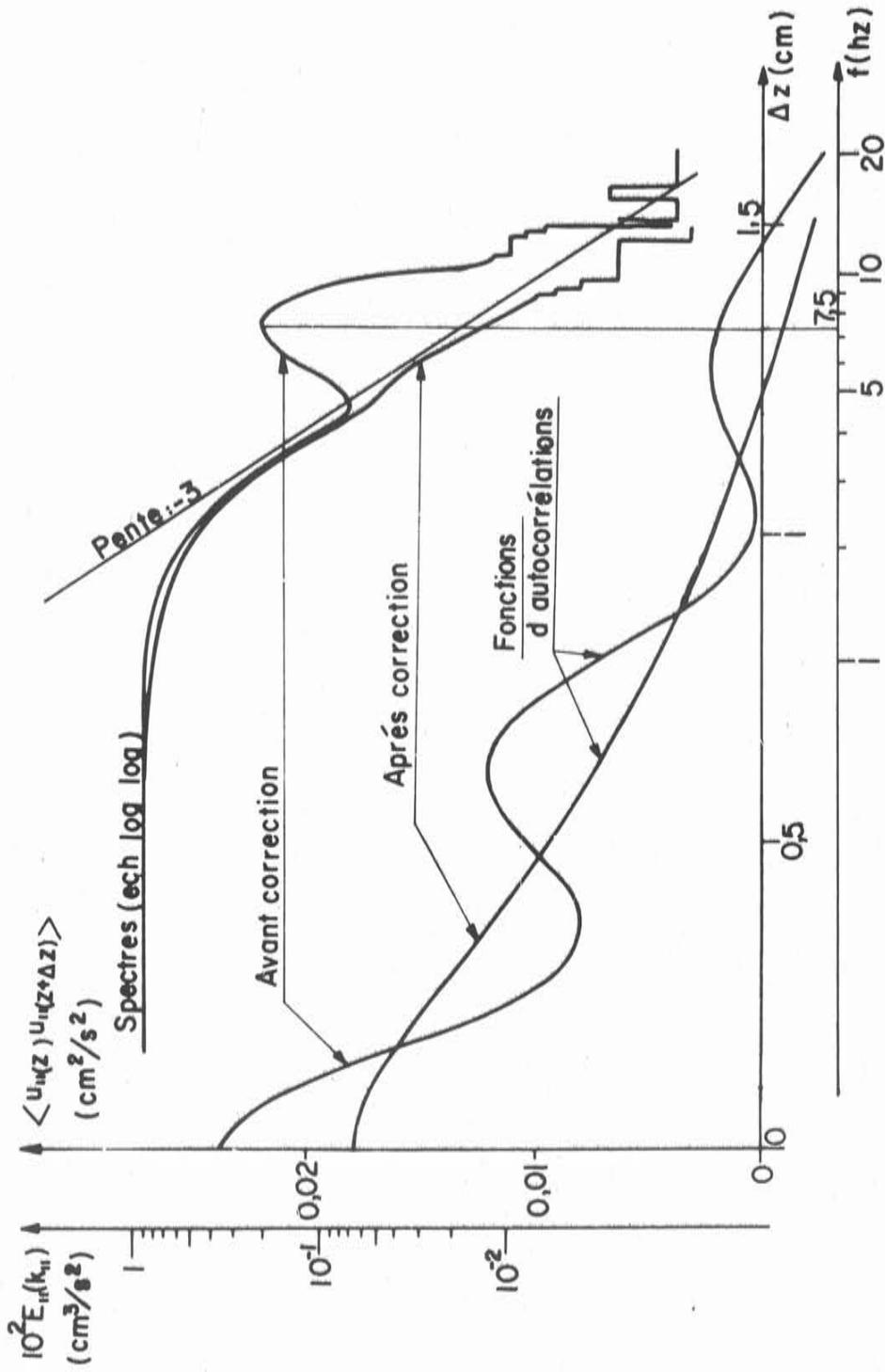


Fig.9_ Spectres avant et après correction

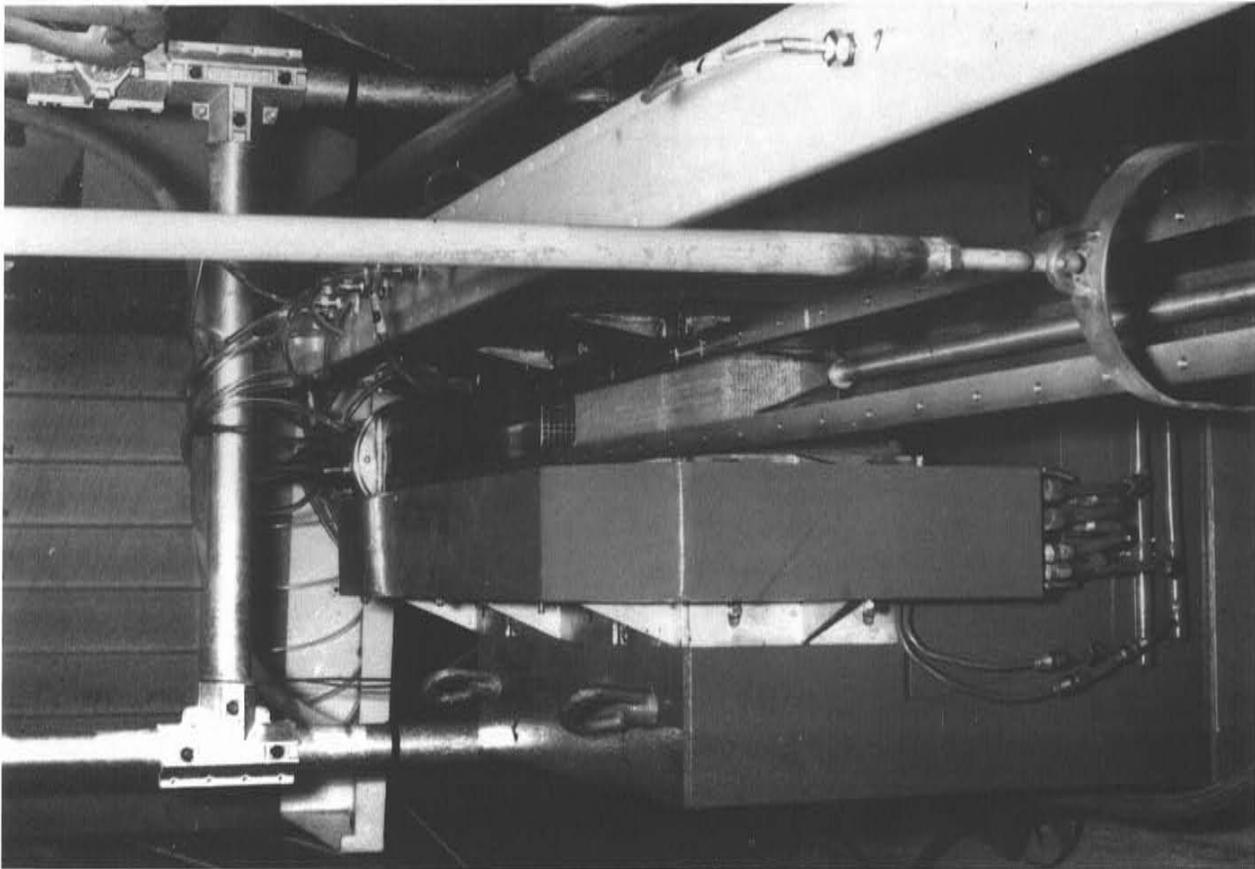
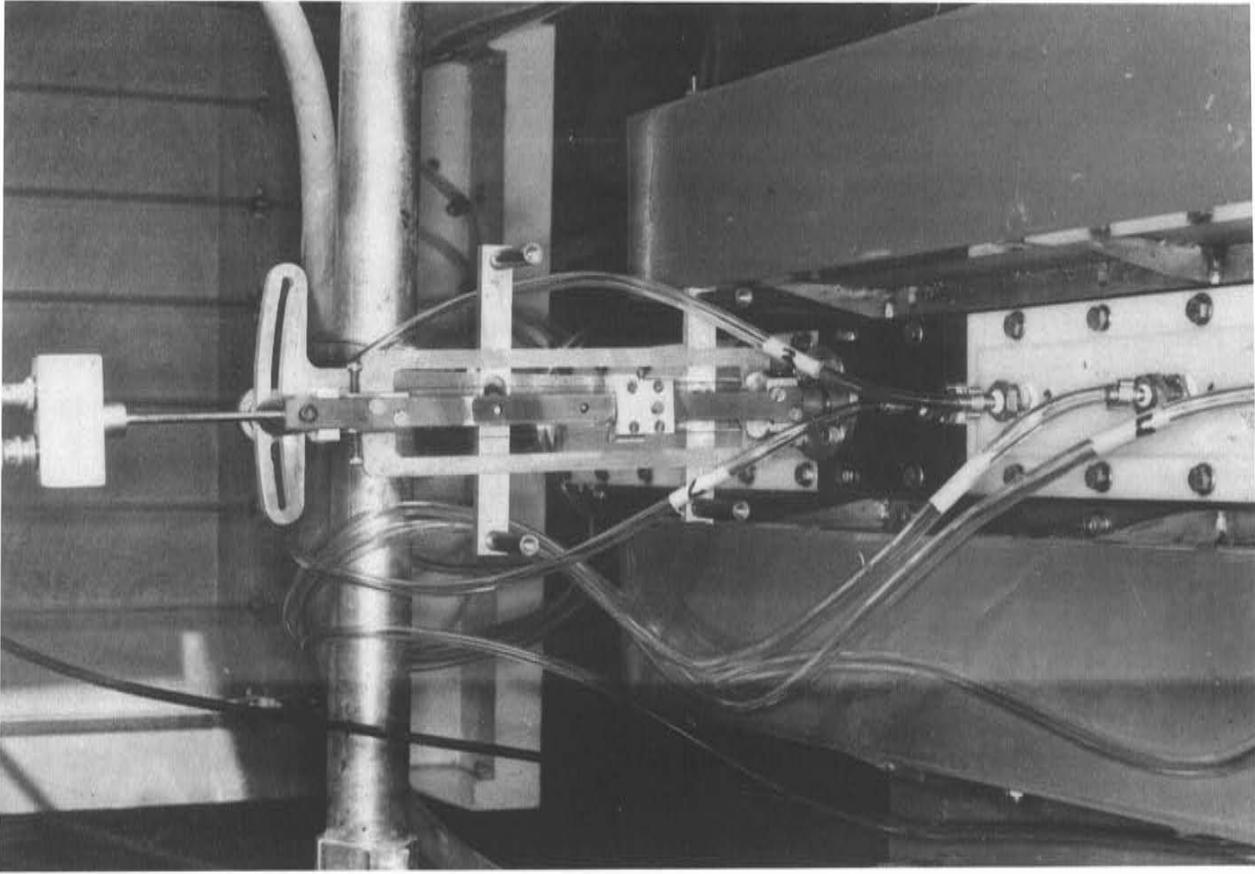


Fig.10- Installation expérimentale de turbulence M.H.D en champ magnétique transversal.

DEUXIEME PARTIE

ECOLEMENT M.H.D. EN PRESENCE DE CHAMPS
MAGNETIQUES TOURNANTS

LE C O N T E X T E

1. LE CONTEXTE INDUSTRIEL

Mis à part le développement largement industrialisé des pompes électromagnétiques pour véhiculer les métaux liquides, les applications industrielles des champs alternatifs sont encore très limitées. Pourtant, en considérant seulement le cas des champs magnétiques tournants, les possibilités d'utilisation sont nombreuses. Parmi celles ayant fait l'objet d'essais pré-industriels et données des résultats satisfaisants, citons la possibilité d'affinage du grain au cours de la coulée continue de barre d'acier en imposant une rotation au métal en cours de refroidissement (partie 2, chap. II , [1]). Cette rotation imposée au fluide par le champ magnétique tournant permet aussi de réaliser des pompes électromagnétiques centrifuges. Celles-ci sont utilisées seulement dans des conditions très particulières ; par exemple pour prélever le métal liquide d'une poche de coulée. La rotation engendre alors l'ascension du métal le long des parois d'un récipient cylindrique ouvert à sa partie inférieure qui plonge dans le liquide, lequel est évacué à la partie supérieure du récipient (Brevet Pechiney). Une application très intéressante, récemment expérimentée* concerne la possibilité de réaliser des paliers électromagnétiques, la rotation du champ magnétique est alors mise à profit pour améliorer la portance du métal liquide utilisé comme lubrifiant. On peut encore citer parmi les applications potentielles, la centrifugation électromagnétique qui pourrait permettre

* BONNEFILLE R., BARRAL J., SCHOENHENZ D., "Etude de la lubrification par voie magnétohydrodynamique." Etude effectuée pour le compte du ministère de l'industrie et de la recherche. Convention n° 290 156 d. Rapport n° E.T. 1.77. (Lab. de Génie elec. de Paris)

notamment de prélever des inclusions isolantes au sein d'un métal liquide. Nous avons nous mêmes réalisé et expérimenté au laboratoire un pulvérisateur électromagnétique qui s'apparente à l'atomiseur centrifuge dont le principe a été énoncé pour la première fois par G.I. Taylor et qui utilise la force centrifuge pour briser et disperser en fines gouttelettes un jet de métal liquide.

Notre étude d'un procédé de pulvérisation électromagnétique a été entreprise dans le cadre de deux contrats successifs avec la société Aluminium Pechiney. Ces contrats concernaient plus spécialement la réalisation de tôles et de tubes minces par projection sur des surfaces planes ou cylindriques de gouttelettes métalliques qui se soudent entre elles après refroidissement. Les performances requises pour cette pulvérisation utilisée à des fins bien précises portaient plus spécialement sur l'homogénéité aussi bien de la granulométrie que de la répartition spatiale des gouttelettes métalliques. Ces deux impératifs étaient tout à fait incompatibles avec l'utilisation des techniques traditionnelles à air comprimée ou à jet d'eau. Un autre avantage commun à tous les procédés électromagnétiques à induction est l'absence de pièce mobile. Dans un environnement aussi agressif que l'aluminium liquide il permet d'envisager des dispositifs d'une très grande durée de vie (de l'ordre de celle des moteurs électriques)

L'idée fondamentale du procédé consiste à mettre en rotation rapide une colonne de liquide s'écoulant dans un tube circulaire de rayon R, cette rotation étant encore accentuée par la convergence des filets fluides qui précède l'orifice de sortie de dimension inférieure à celle du tube (fig 1). Lors de son expulsion, le jet de liquide éclate sous l'action de la force centrifuge. Dans l'atomiseur centrifuge habituel (Taylor, Valdenazzi...) la rotation est engendrée par une arrivée tangentielle de liquide à l'intérieur d'une chambre circulaire. La nécessité d'obtenir des rotations rapides pour pulvériser caractérise alors le régime hydraulique de l'installation par un nombre de Rossby très inférieur à l'unité

$$(1) \quad R_0 = \frac{V_0}{\omega_0 R} \ll 1$$

V_0 et ω_0 désignent respectivement une vitesse axiale et une vitesse de rotation typique du fluide.

Le jet liquide issu de l'atomiseur centrifuge se présente sous forme d'un voile mince qui se brise très rapidement en fines gouttelettes. L'écoulement à l'intérieur du tube peut être décomposé en deux régions bien distinctes : un coeur sensiblement irrotationnel et une couche limite qui se développe le long du convergent de sortie (fig. 1) et dans laquelle transite l'essentiel du débit. Cette couche limite est analogue aux couches d'Ekman, elle est gouvernée par les gradients de pression dans le coeur qui résultent eux mêmes de la rotation du fluide.

L'étude de l'évolution de la forme du voile à la sortie de l'atomiseur centrifuge a été développée par Valdenazzi [2] sur la base d'un équilibre entre les forces d'inertie et la force de tension superficielle ; Le rapport de ces deux forces est caractérisé par le nombre de Wéber $We = \rho V_0^2 \lambda / T_s$ (λ désignant l'épaisseur du voile). Les résultats de cette étude (fig. 2) sont intéressants notamment dans la perspective du contrôle ultérieur de la forme du jet issu du pulvérisateur électromagnétique.

2. LE CONTEXTE SCIENTIFIQUE

L'étude de l'écoulement d'un fluide électroconducteur soumis à l'influence d'un champ magnétique tournant à une vitesse constante Ω n'a été envisagée jusqu'à présent que dans le cas simple où le champ magnétique n'a qu'une seule paire de pôles (cas du champ homogène tournant) et où le débit dans une section droite est nul. L'analyse de ces travaux antérieurs et leurs références précises sont inclus dans les chapitres II et III. Nous nous contenterons ici d'insister plus précisément sur le cadre qui limite l'étude théorique et qui est défini par les valeurs caractéristiques des paramètres adimensionnels régissant les écoulements M.H.D.

Deux nombres caractérisent le régime électromagnétique de fonctionnement

$$(2) \quad R_m^* = \mu \sigma \Omega R^2$$

$$(3) \quad R_m = \mu \sigma UR$$

(R désigne le rayon de la conduite et U une vitesse typique de l'écoulement).

Le premier R_m^* est représentatif de l'influence de la pulsation du champ magnétique ; on peut l'interpréter comme un nombre de Reynolds magnétique construit avec une vitesse typique égale à la vitesse tangentielle du champ magnétique. Aux valeurs faibles de R_m^* correspond une bonne pénétration du champ magnétique dans le milieu. Au contraire, aux valeurs fortes est associé l'effet de peau et une profondeur de pénétration $\delta/R \sim R_m^{-1/2}$; les forces électromagnétiques sont alors distribuées uniquement sur une couronne mince d'épaisseur δ . Le second R_m est le nombre de Reynolds magnétique habituel, il caractérise l'effet du mouvement du fluide sur la distribution du champ magnétique (c. f. introduction générale).

Le régime hydrodynamique peut être caractérisé par les deux nombres habituels, le paramètre d'interaction N et le nombre de Hartmann M .

$$(4) \quad N = \frac{B_0^2 \sigma}{\rho \Omega}$$

$$(5) \quad M = B_0 R \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$$

Le premier N caractérise l'influence de la pulsation du champ magnétique sur l'écoulement. Si $N \ll 1$, l'inertie du fluide étouffe les fluctuations de vitesse engendrées par cette pulsation. Il est alors justifié de n'introduire dans les équations du mouvement que la partie moyenne des forces électromagnétiques. Cette approximation concerne la quasi totalité des études antérieures. Si $N \gg 1$, l'écoulement est dominé par les forces électromagnétiques dont la distribution exacte doit alors être prise en compte. Le second M met en évidence le rôle de la viscosité dont l'effet est limité à la profondeur de diffusion du tourbillon à partir de la paroi. Si M est élevé, cette profondeur est faible et justifie l'approximation asymptotique des champs forts, l'influence de la viscosité n'est alors sensible que dans la couche limite (couche de Hartmann) d'épaisseur de l'ordre de $1/M$. Si M est faible, l'influence de la viscosité est étendue à tout le domaine fluide.

Notre étude est limitée aux cas $R_m^* \ll 1, R_m \ll 1$.
Son originalité réside dans l'analyse de l'influence du nombre de paires de

pôles et dans la superposition d'un écoulement axial à l'écoulement tournant. Elle concerne plus précisément l'analyse des deux situations asymptotiques suivantes :

a) $N \ll 1$. Comme dans tous les travaux antérieurs on n'introduit dans les équations du mouvement que la valeur moyenne des forces électromagnétiques. L'analyse est alors menée pour toute valeur de M , mais une étude détaillée du cas des champs intenses $M \gg 1$, permet une interprétation physique très claire des résultats obtenus.

b) $N \gg 1$. On examine alors précisément l'influence de l'inhomogénéité de la répartition spatiale des forces électromagnétiques seulement dans l'approximation des champs intenses ($M \gg 1$) où cet effet est le plus marqué, et notamment sur l'écoulement axial qui présente alors des différences fondamentales, si le nombre de paires de pôles p est supérieur à l'unité, avec le cas du champ homogène $p = 1$.

CHAPITRE I

ETUDE DU PULVERISATEUR ELECTROMAGNETIQUE

1. SON PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT

Les difficultés d'usinage des matériaux réfractaires nécessairement utilisés pour la construction du tube de centrifugation suppriment pratiquement la possibilité de réaliser un pulvérisateur centrifuge classique à arrivées tangentielles. L'obstruction probable des orifices d'admission ajouterait d'ailleurs aux difficultés technologiques de réalisation de ce dispositif l'inconvénient d'une durée de vie trop brève. Dans le pulvérisateur électromagnétique (fig. 3) cet orifice d'admission est coaxial au tube de centrifugation et situé au dessus de celui-ci ; sa section droite peut d'ailleurs être exactement celle du tube de centrifugation. La mise en rotation progressive du métal liquide est assurée par la composante tangentielle des forces électromagnétiques engendrées par un champ magnétique tournant créée par un inducteur construit comme le stator d'un moteur asynchrone. Ces forces électromagnétiques sont distribuées continument au sein du métal liquide, sur chaque unité de volume. La différence essentielle avec l'atomiseur centrifuge provient de ce que la vitesse de rotation du fluide peut être réglée indépendemment du débit de sorte que l'écoulement peut couvrir une gamme très large de nombre de Rossby.

2. INSTALLATION PRELIMINAIRE A EAU

Pour caractériser l'influence de ce paramètre (R_0) sur les performances du pulvérisateur électromagnétique, nous avons construit une installation préliminaire à eau permettant aussi de faire varier séparément les deux composantes de la vitesse (axiale et tangentielle) grâce à l'adjonction sur un atomiseur centrifuge classique d'une arrivée d'eau axiale située à la partie supérieure de la chambre de mise en rotation et indépendante des deux arrivées tangentielles. La possibilité d'injecter du colorant par cette arrivée axiale permet alors de caractériser deux régimes distincts de fonctionnement suivant la valeur du nombre de Rossby.

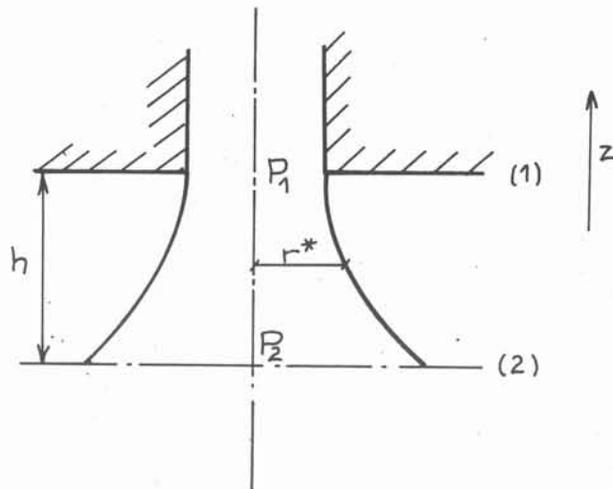
a) Pour les faibles intensités de rotation $R_0 \gg 1$ (fig.4a) le jet issu du pulvérisateur ne se présente pas sous forme du voile habituel mais au contraire forme un cône plein qui se brise peu après l'orifice de sortie. Dans toute section droite perpendiculaire à l'axe du jet, les gouttelettes fluides sont distribuées de façon continue et assez homogène (d'après une estimation à l'oeil). La coloration est alors limitée à un cylindre de

rayon inférieur à celui de la chambre de mise en rotation, la distribution de vitesse dans une section droite pouvant être grossièrement assimilée à celle d'un vortex à l'extérieur de la zone colorée et à une rotation en masse à l'intérieur. L'énergie cinétique du fluide introduit par l'orifice axial est alors suffisante pour vaincre les gradients de pression adverse nés de la rotation (c.f. Partie 2, chap.II, 3).

b) Pour de fortes intensités de rotation ($R_o \ll 1$, fig. 4 b) le jet se présente sous forme du voile classique et la coloration envahit tout l'espace intérieur du pulvérisateur ce qui traduit bien la présence de courants secondaires.

3. REGIMES TYPIQUES ET TRANSITION

Examinons ce qui se passe lorsqu'on augmente progressivement la rotation du fluide en maintenant le débit constant. Tout d'abord, pour de faibles intensités de rotation le jet se présente sous forme d'un cône plein. Les mécanismes qui conduisent à la divergence du jet puis à son éclatement sont alors assez simples.



La rotation du fluide issu de l'orifice de sortie est freinée sous l'action du frottement avec l'air ambiant. Or, l'absence de paroi impose la pression atmosphérique sur la surface latérale du jet et par conséquent, du fait de la décélération angulaire une pression sur l'axe qui augmente dans le sens de l'écoulement.

$$(1) \quad \frac{\partial P}{\partial z} \approx - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{r^*} \rho \frac{v_\theta^2}{r} dr$$

Ce gradient de pression adverse produit alors une décélération du mouvement axial et la section du jet doit s'élargir pour que la conservation du débit soit assurée. On obtient ainsi la formation d'un jet divergent.

Considérons alors l'équilibre d'une tranche d'épaisseur h de ce jet. Elle est soumise à son poids propre mg et à la résultante des forces de pression qui, si h est suffisamment grand peut être assimilée à la dépression totale dans la section (1). On en déduit la décélération globale du jet entre les sections (1) et (2) :

$$(2) \quad \gamma_d \approx g - \frac{1}{m} \int_0^{r_1} 2\pi r \left[\int_0^r \rho \frac{v_\theta^2}{r} dr \right] dr$$

L'hypothèse du cône plein correspond bien sûr à des valeurs de γ_d suffisamment faibles pour que la vitesse axiale du jet reste positive. Il est clair de plus que cette décélération γ_d est localisée dans les tranches du jet situées au voisinage de l'orifice ; elle devient vite faible devant l'accélération de la pesanteur g lorsqu'on s'éloigne de l'orifice. Il existe donc une hauteur particulière h' correspondant à un poids $m'g$ qui équilibre exactement la dépression au droit de l'orifice de sortie :

$$(3) \quad (m'g)_{\text{éclat}} \approx \int_0^{r_1} 2\pi r \left[\int_0^r \rho \frac{v_\theta^2}{r} dr \right] dr$$

au delà de laquelle tout équilibre du jet sous sa forme globale devient impossible ce qui correspond à l'éclatement. Il apparaît que, $m'g$ étant toujours positif, la pulsérisation prend toujours naissance après l'orifice de sortie.

Le nombre de Rossby critique dans la section (1) $R_{01 \text{ crit}}$ qui marque la transition entre le jet en cône plein et le jet en cône creux correspond à des valeurs de γ_d suffisamment élevées pour annuler la vitesse axiale sur l'axe du jet. Ce nombre de Rossby peut être évalué aisément par application du théorème de Bernoulli sur l'axe (toujours valable sur une

ligne de courant en négligeant la viscosité) entre la section de l'orifice (1) et la section où se produit l'éclatement (2) :

$$(4) \quad \frac{P_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} \neq \frac{P_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g}$$

Dans la section (2) la pression est partout égale à la pression atmosphérique. Dans la section (1) la dépression sur l'axe est imposée par la rotation du fluide :

$$(5) \quad P_1 = - \int_0^{r_1} \rho \frac{v_\theta^2}{r} dr$$

soit faisant l'approximation $v_\theta \neq \omega_1 r$

$$(6) \quad P_1 \neq - \rho \frac{\omega_1 r_1^2}{2}$$

Les conditions critiques sont celles pour lesquelles l'énergie cinétique du fluide est juste suffisante pour qu'une particule qui se déplace sur l'axe du jet atteigne la section d'éclatement avec une vitesse nulle ($w_2 = 0$). La vitesse de rotation critique est donc telle que

$$(7) \quad \frac{w_1^2}{2g} \neq \rho \omega_1^2 \frac{r_1^2}{2\rho g}$$

ce qui impose :

$$(8) \quad R_{o1 \text{ crit}} = 1$$

Il est facile de montrer alors que l'angle de divergence du jet en cône plein ne peut pas dépasser la valeur critique $\varphi = 45^\circ$ telle que $\text{tg } \varphi = 1$. En effet, lorsque les conditions critiques sont atteintes, le jet se brise assez près de l'orifice de sortie et la trajectoire de la goutte formée au voisinage immédiat de la surface latérale fait avec l'axe un angle φ tel que :

$$(9) \quad \text{tg } \varphi \neq \frac{\omega_1 r_1}{w_1} = \frac{1}{R_{o1 \text{ crit}}} = 1$$

Au delà de la valeur $Ro_{1crit.} = 1$, il existe un point d'arrêt pour l'écoulement axial, une surface libre se forme et monte de plus en plus haut à l'intérieur de la chambre le long de l'axe lorsque la rotation du fluide augmente. Cette transition correspond aussi à un bouleversement complet de l'écoulement interne caractérisé par des recirculations intenses et à la formation du voile qui remplace le jet plein.

Les mécanismes conduisant à l'élargissement du voile sont étroitement liés aux forces de tension superficielle, négligeables dans le cas du cône plein. L'équilibre globale d'une demi tranche fluide de hauteur unité résulte de l'égalité entre la force centrifuge et la résultante des forces de tension superficielle :

(10)
$$2pr^2ew^2 \approx 4T_s$$

ou e , l'épaisseur du voile est liée au débit Q qui transite dans le jet

(11)
$$e = \frac{Q}{2\pi r w}$$

Il résulte des équations (10) et 11 une condition globale liant la vitesse angulaire ω du jet et son rayon moyen r .

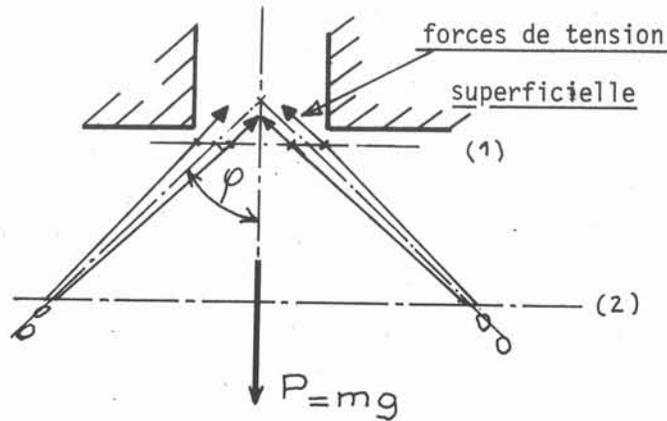
(12)
$$\omega^2 r \approx \frac{4\pi T_s w}{\rho Q}$$

Envisageons donc le jet en cône creux issu de l'orifice de sortie. Sous l'action du frottement visqueux intense avec l'air ambiant qui agit de part et d'autre du voile, il se produit une décélération angulaire de la rotation auquel est nécessairement lié d'après (12) un élargissement du jet et la forme

conique. Pour un calcul plus rigoureux il serait judicieux de prendre aussi en compte les courbures dans un plan diamétral perpendiculaire à la section droite, négligées dans cette analyse qualitative qui n'introduit que le mécanisme dominant.

C'est aussi la tension superficielle qui détermine la position de la section d'éclatement. En effet l'équilibre de la tranche de jet de hauteur h , comprise entre la section d'éclatement et la section de l'orifice de sortie, résulte en première approximation de l'égalité entre les forces de tension superficielle et le poids du fluide. Lorsque ω est grand ce qui correspond au voile mince cette égalité s'écrit :

$$(13) \quad m \cdot g \approx r_1 \cdot 4 \pi T_s \cos \varphi$$



Quand ω_1 augmente, l'angle de divergence du jet devient de plus en plus proche de $\pi/2$, la masse du fluide en équilibre diminue et la section d'éclatement se rapproche de l'orifice de sortie. Bien que très approchés, les raisonnements présentés ici décrivent qualitativement les mécanismes essentiels qui conduisent à la divergence du jet et à son éclatement.

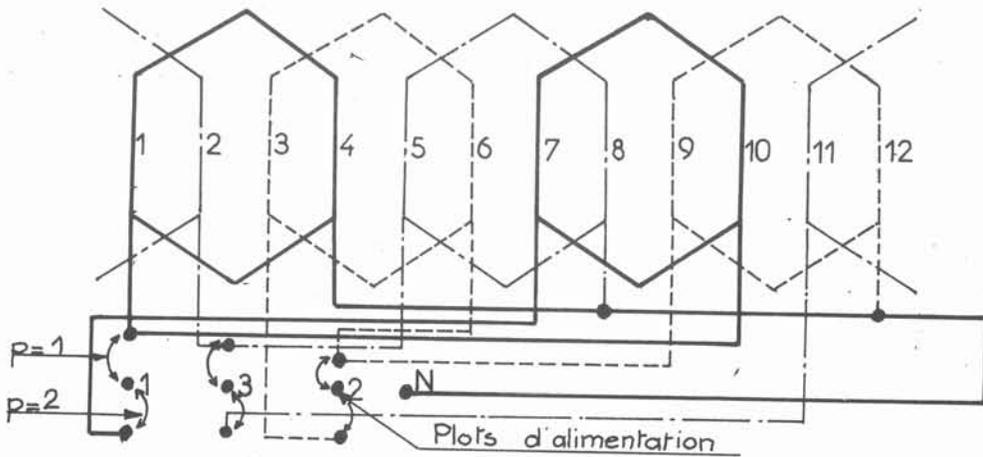
4. INSTALLATION EXPERIMENTALE.

La figure (5) montre les différents éléments de l'installation expérimentale qui a fait l'objet du premier contrat (la réalisation d'un prototype susceptible d'être utilisé pour l'aluminium liquide est décrite

dans l'annexe au chapitre I de la 2ème partie.

- La boucle à mercure comprend une cuve à niveau constant qui alimente la chambre de mise en rotation par l'intermédiaire d'un tuyau flexible muni d'un robinet destiné au réglage du débit et de la charge. Un diaphragme permet la mesure du débit. Le jet est pulvérisé à l'intérieur d'une enceinte en plexiglass, le mercure est ensuite évacué vers le réservoir d'alimentation.

- Le stator réalisé par nos soins est constitué de 90 toles en acier doux de 1 mm d'épaisseur isolées électriquement les unes des autres, son entrefer fait 3 cm de diamètre. Il peut engendrer par simple commutation un champ magnétique bipolaire ou quadripolaire (schéma de bobinage ci-dessous).



Le dimensionnement du stator a été arrêté sur les bases suivantes : Les forces électromagnétiques tangentielles engendrées par un champ magnétique à P paires de poles tournant à la vitesse angulaire Ω sont de l'ordre de :

$$(14) \quad f_{\theta} = \frac{\sigma B_0^2}{2P} \left(\frac{r}{R}\right)^{2(P-1)} s \cdot \Omega r$$

(c.f. chap.II pour une définition précise de la distribution spatiale du champ magnétique en fonction de P) ou $s = (\Omega r - v_{\theta}) / \Omega r$ désigne le glissement (écart relatif entre la vitesse de synchronisme et la vitesse tangentielle du fluide). Supposant que l'écoulement est constitué d'une série de couronnes de rayon moyen r qui se déplacent en tournant dans le tube de centrifugation sans aucune interaction les unes sur les autres, l'équation régissant le glissement de chacune d'elles s'écrit :

$$(15) \quad \frac{ds}{dt} \approx \frac{\sigma B_0^2}{P} \left(\frac{r}{R}\right)^{2(P-1)} s$$

Sa solution telle que s soit égal à l'unité à l'instant initial s'écrit :

$$(16) \quad s = e^{-\frac{\sigma B_0^2}{2\rho} \left(\frac{r}{R}\right)^{2(p-1)} \cdot t}$$

L'intensité des courants inducteurs prévus permet d'atteindre un champ B_0 de l'ordre de 1000 gauss si $p=1$ et de l'ordre de 2000 gauss si $p=2$. Pour une vitesse débitante maximale de 2 à 3 cm/s ($Q = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$) le glissement est égal à 0,1 pour $r = R$ et une longueur du stator de l'ordre de 9 cm qui correspond au choix que nous avons fait.

- L'alimentation électrique comprend un générateur de courant continu à excitation indépendante entraîné par un moteur asynchrone. Ce générateur alimente un moteur couplé à un alternateur triphasé qui délivre le courant au stator. En faisant varier le courant d'excitation du générateur ou de l'alternateur respectivement à l'aide d'un rhéostat ou d'un alternostat on modifie soit la vitesse de rotation du moteur c'est à dire la fréquence du courant et la vitesse de synchronisme, soit l'intensité du courant et du champ magnétique qui peut être caractérisé par un nombre de Hartmann $M = B_0 R (\sigma/\rho v)^{1/2}$. Les performances de cette installation sont les suivantes : La fréquence f peut varier continûment de 0 à 400 hz et la vitesse de synchronisme $\Omega_{\text{(tour/mn)}} = 60 \cdot f / p$ de 0 à 24 000 tours par minute, l'intensité du courant électrique de 0 à 10 ampères.

- La visualisation sélective d'un plan méridien du jet est obtenue à l'aide d'un faisceau lumineux plan fig. 6. Ce dispositif a permis de réaliser des films soit à vitesse normale, soit à vitesse ultra rapide qui ont apportés des précisions importantes sur les caractéristiques du jet pulvérisé. Une pointe mobile en translation horizontale placée dans le plan du faisceau lumineux peut être amenée à tangenter le jet à une distance fixée de l'orifice de sortie ; on peut en déduire directement l'angle de divergence maximum des particules fluides.

5. RESULTATS EXPERIMENTAUX

Nos objectifs (notamment ceux du premier contrat) consistaient avant tout à évaluer la possibilité de produire des gouttes de très petit diamètre et

de contrôler la forme du jet. Nous nous sommes également attachés à caractériser l'influence de la répartition spatiale du champ magnétique en examinant les deux cas : $p = 1$ et $p = 2$. Nos obligations contractuelles imposaient des débits de l'ordre de 1 tonne/heure pour l'aluminium sous une charge motrice de l'ordre du mètre (ou inférieure). Le second contrat avait un objectif plus précis et plus limité. Il concernait essentiellement la construction d'un appareil susceptible de fonctionner avec de l'aluminium liquide (c. f. Brevet, Partie 2, en annexe) et la détermination au préalable de ses performances avec du mercure (et cela surtout dans le cas de la pulvérisation en voile qui semble donner la meilleure stabilité au jet).

Tout d'abord, il s'est avéré impossible d'obtenir un régime de fonctionnement stable avec un champ magnétique quadri-polaire ($p = 2$). Il nous a semblé que ceci pourrait être attribué à l'inhomogénéité spatiale qui caractérise alors sa distribution ; et c'est en partie pour mieux comprendre cela que nous avons entrepris l'étude théorique des chapitres II et III qui mettent bien en évidence la présence d'écoulement secondaires, de recirculations très intenses qui sont susceptibles d'expliquer les instabilités observées.

Ensuite nous avons obtenu, tout comme l'avaient révélé au préalable les essais à l'eau, les deux sortes de jets (fig. 9) (cône plein - cône creux). Il est intéressant de noter à ce propos que la transition entre les deux régimes se produit précisément comme le suggérait l'évaluation théorique pour des angles du jet plein voisins de 45° (fig. 7) qui correspondent à des nombres de Rossby dans la section de sortie proche de l'unité. Dans le sens cône plein vers voile, cette transition se traduit par une diminution de l'angle du jet qui s'explique aisément par l'augmentation de vitesse axiale associée à la diminution de section de passage du fluide (d'autant plus prononcée que le diamètre de l'orifice de sortie est plus grand. Il est clair par conséquent que lorsque ce diamètre tend vers zéro, ce qui correspond en première approximation au cas de l'atomiseur centrifuge, l'angle de divergence minimum du jet en voile tend vers 45° . Il est remarquable de constater (fig. 2) que cet angle minimum correspond précisément à l'angle le plus faible mesuré par Valdennazzi.

Il s'est avéré facile de faire croître l'angle du jet au delà de cette valeur critique de 45° et de réaliser des jets en cône creux très stables.

Il suffit pour cela d'augmenter la rotation du fluide à débit fixé. Pour obtenir ce résultat, on peut soit augmenter la fréquence des courants inducteurs, soit, ce qui est encore plus simple, à fréquence fixée suffisamment élevée (400 hz par exemple) augmenter l'intensité du courant électrique (donc celle du champ magnétique). L'influence de ces deux paramètres est bien représentée par la formule (16).

Les régimes hydrodynamiques associés aux deux types de jet sont très différents. Dans le cas du voile, il se produit un blocage très fort du débit de sorte que, celui-ci étant fixé, la charge motrice croît très vite lorsque la rotation augmente. (fig. 8). Dans le cas du jet plein, la diminution de la charge quand ω croît correspond à une dépression sur l'axe d'autant plus forte que la rotation est plus rapide. Dans des conditions voisines de la transition, nous avons observé un fonctionnement assez irrégulier comme si le jet hésitait entre les deux régimes. La charge motrice, de l'ordre de 50 cm s'est avérée suffisante pour entretenir un débit équivalent à 300 kg/heure d'aluminium de sorte qu'on peut penser qu'en doublant la charge et en augmentant les dimensions de l'orifice de sortie l'utilisateur éventuel pourra obtenir relativement aisément les débits souhaités.

Le diamètre des gouttes obtenues (assez homogène lors de chaque essai) est caractérisé par un nombre de Weber :

$$(17) \quad W_g = \frac{\rho V_e^2 r_g}{T_s}$$

ou V_e désigne la vitesse d'éjection, et r_g le rayon des gouttes. Ce rayon peut varier de 0,2 à 0,4 mm suivant les essais. On peut penser à ce sujet que, dans le cas du fonctionnement en cône creux, le diamètre des gouttes est représentatif de l'épaisseur du voile, de sorte qu'il apparaît une certaine possibilité de contrôle des dimensions des gouttes, l'épaisseur du voile étant étroitement associée à l'intensité de la rotation.

Les règles de similitudes approchées qui permettent à partir des résultats au mercure d'extrapoler des réalisations avec d'autres métaux liquides sont exposées dans le brevet qui suit.

Ce brevet (voir annexe au chapitre I de la 2^e partie) concerne plus spécialement la réalisation d'un prototype susceptible de fonctionner à l'aluminium liquide et en situe les performances et les possibilités. Il indique également quels pourraient être les aménagements particuliers d'un stator de hautes performances (relativement à l'amplitude du champ magnétique et aux dimensions de l'entrefer). En ce qui concerne les résultats expérimentaux, on remarquera la possibilité d'obtenir en même temps des gouttes très fines et des angles de dispersion du jet très élevé. Les deux sont corrélés puisqu'on les obtient aux grandes vitesses de rotation et avec des orifices de sortie de grandes dimensions (10 mm). Ces angles de dispersion du jet étaient d'ailleurs sensiblement plus importantes que ceux prévus par la théorie (Valdennazzi [2]). Ceci peut s'expliquer par le fait que, dans l'atomiseur centrifuge, le nombre de Rossby dans la section de sortie varie assez peu puisque toute augmentation de la rotation passe aussi par une augmentation du débit, ce qui n'est pas le cas dans le pulvérisateur électromagnétique où ces deux fonctions sont découplées.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] TAYLOR G.I. - "The boundary layer in the converging nozzle of a swirl atomizer", Quaterly Journal of mechanics and applied mathematics, Vol. 3, p. 129 , 1950 .
- [2] VALDENAZZI L. - "On the form of a jet issuing from a swirl atomizer". Ingenieur Archiv. p. 330, 1956.

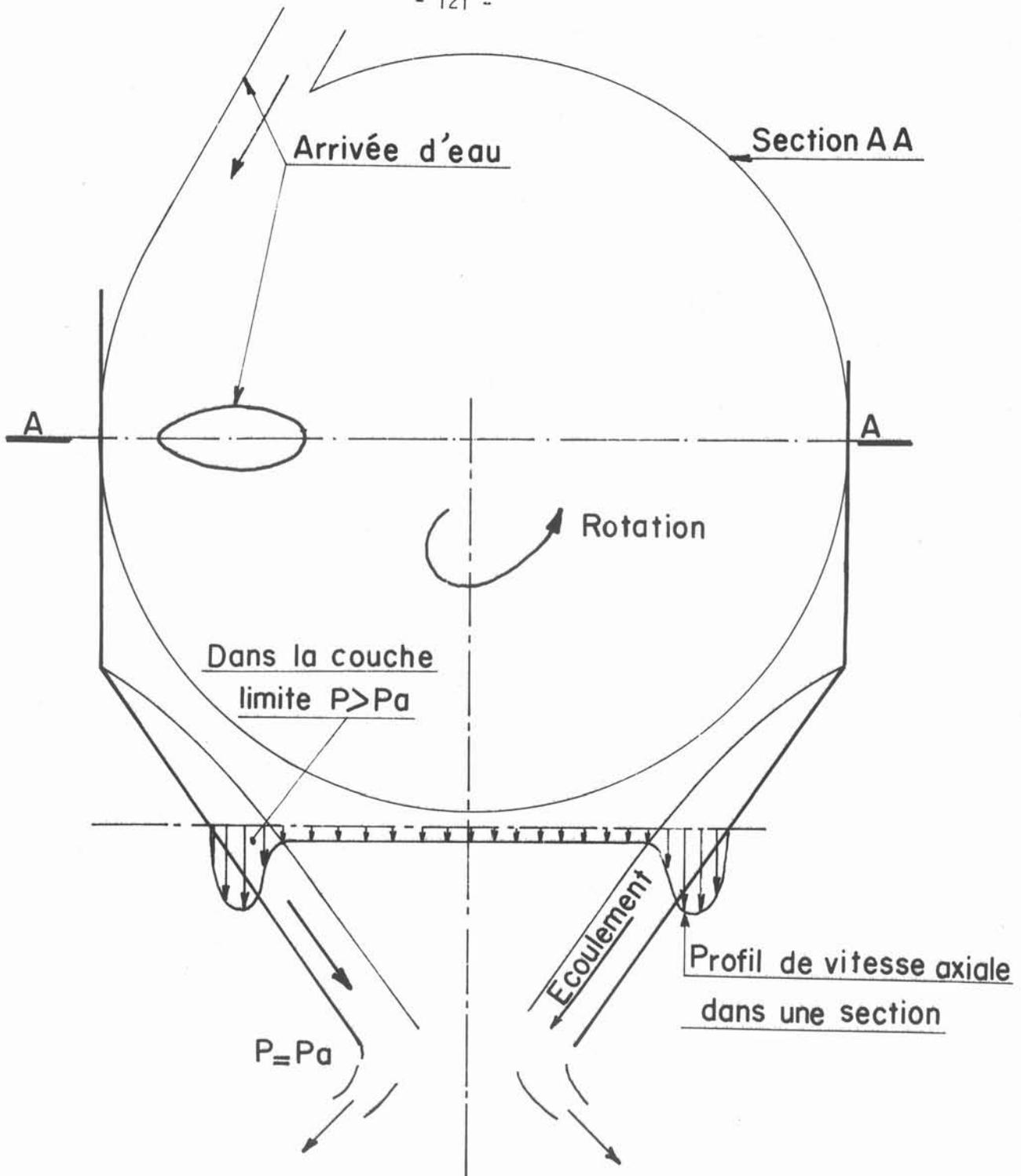


Fig.1.-Schéma de principe de l'atomiseur centrifuge

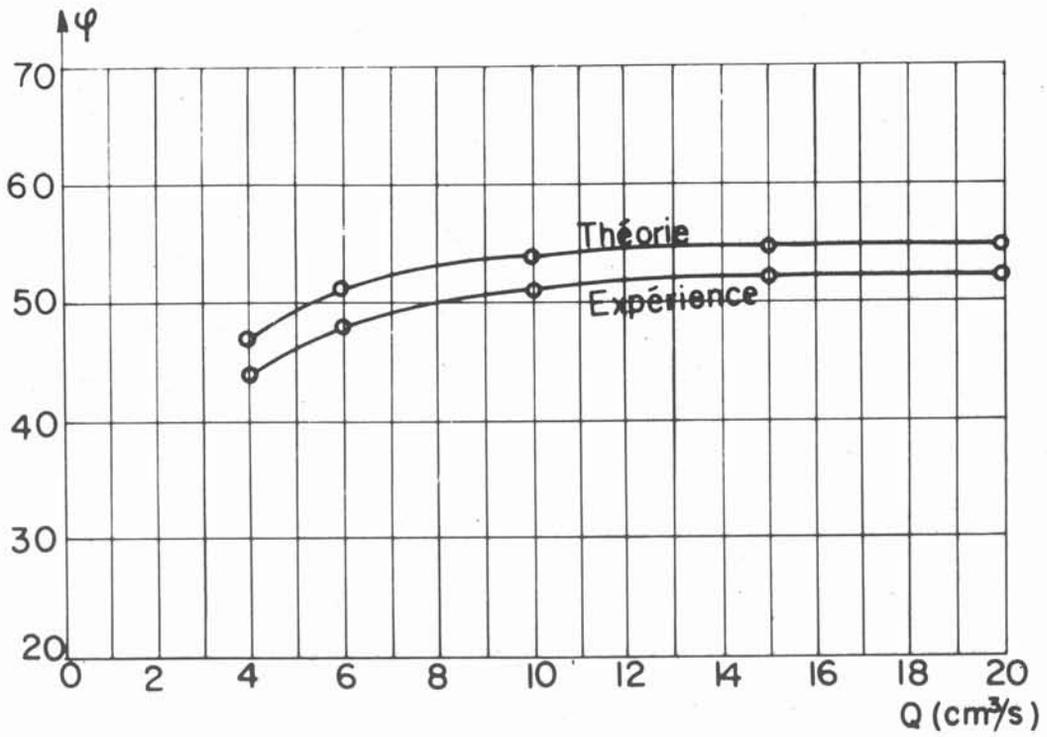
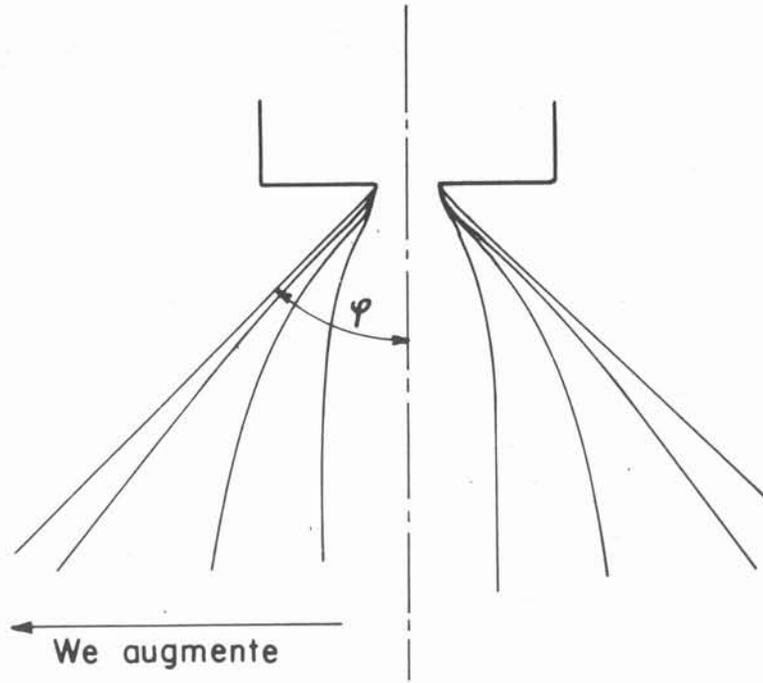


Fig.2 - Variation de l'angle du jet issue de l'atomiseur centrifuge d'après Valdenazzi

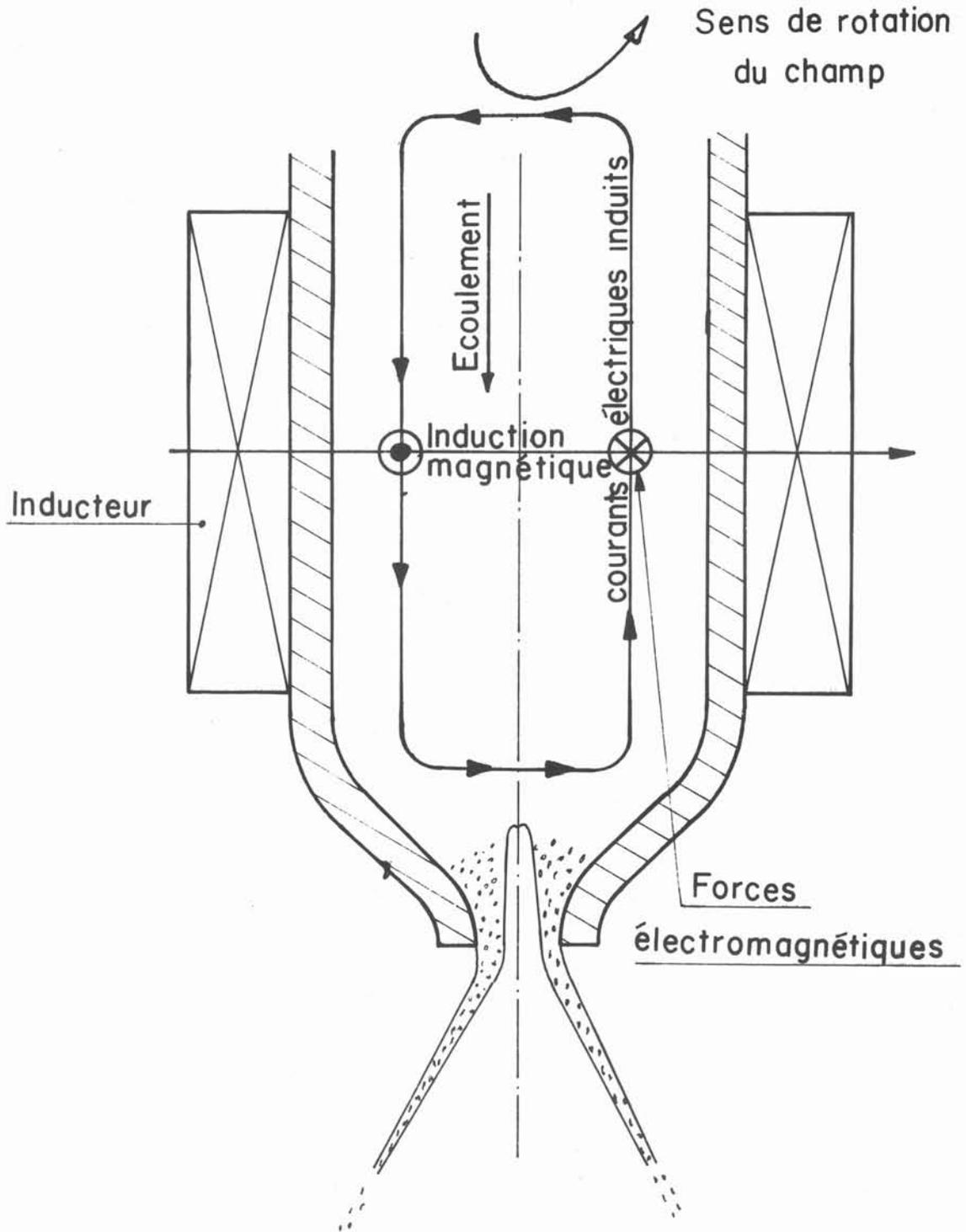


Fig.3_ Schéma de principe du pulvérisateur électromagnétique

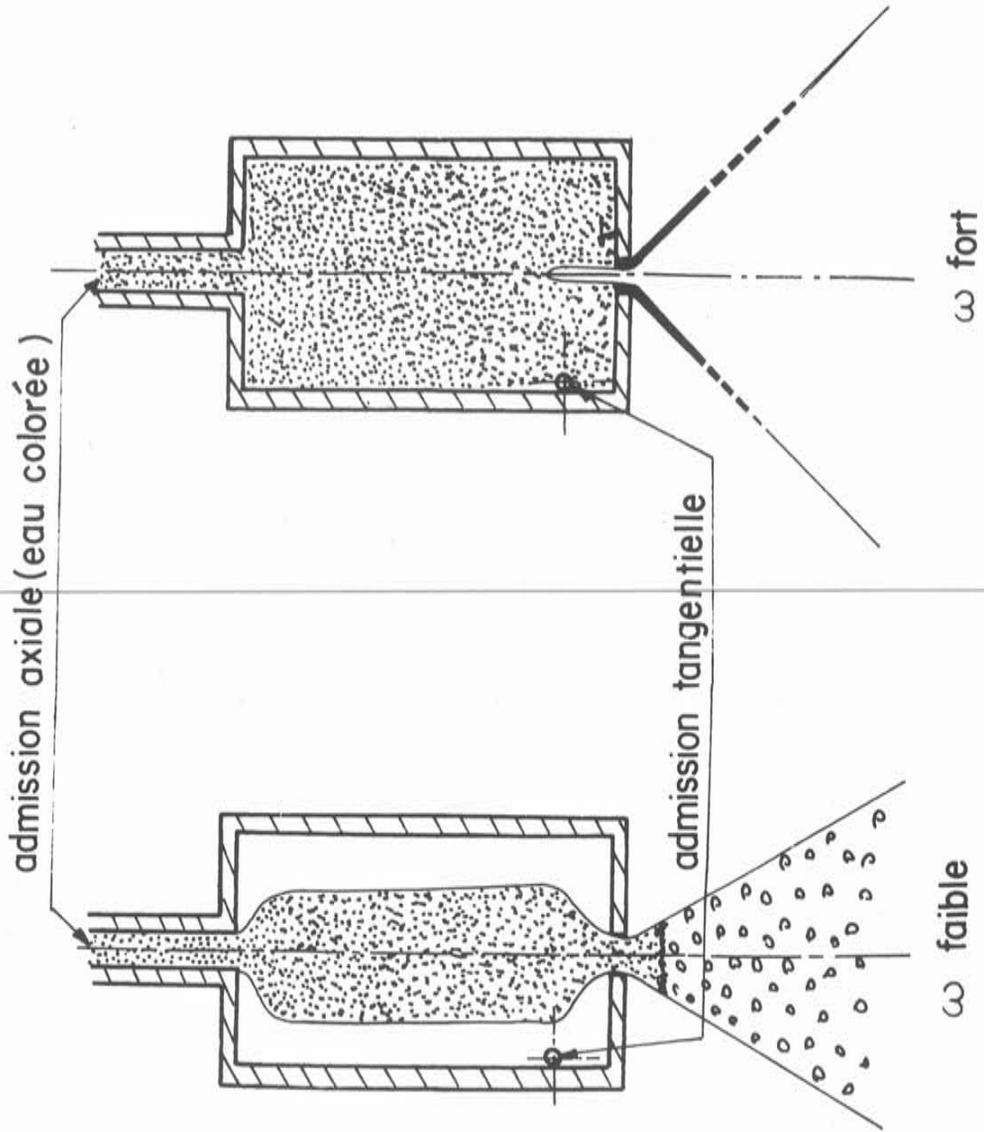


Fig.4.- Les deux types de jet observés lors de essais préliminaires à eau

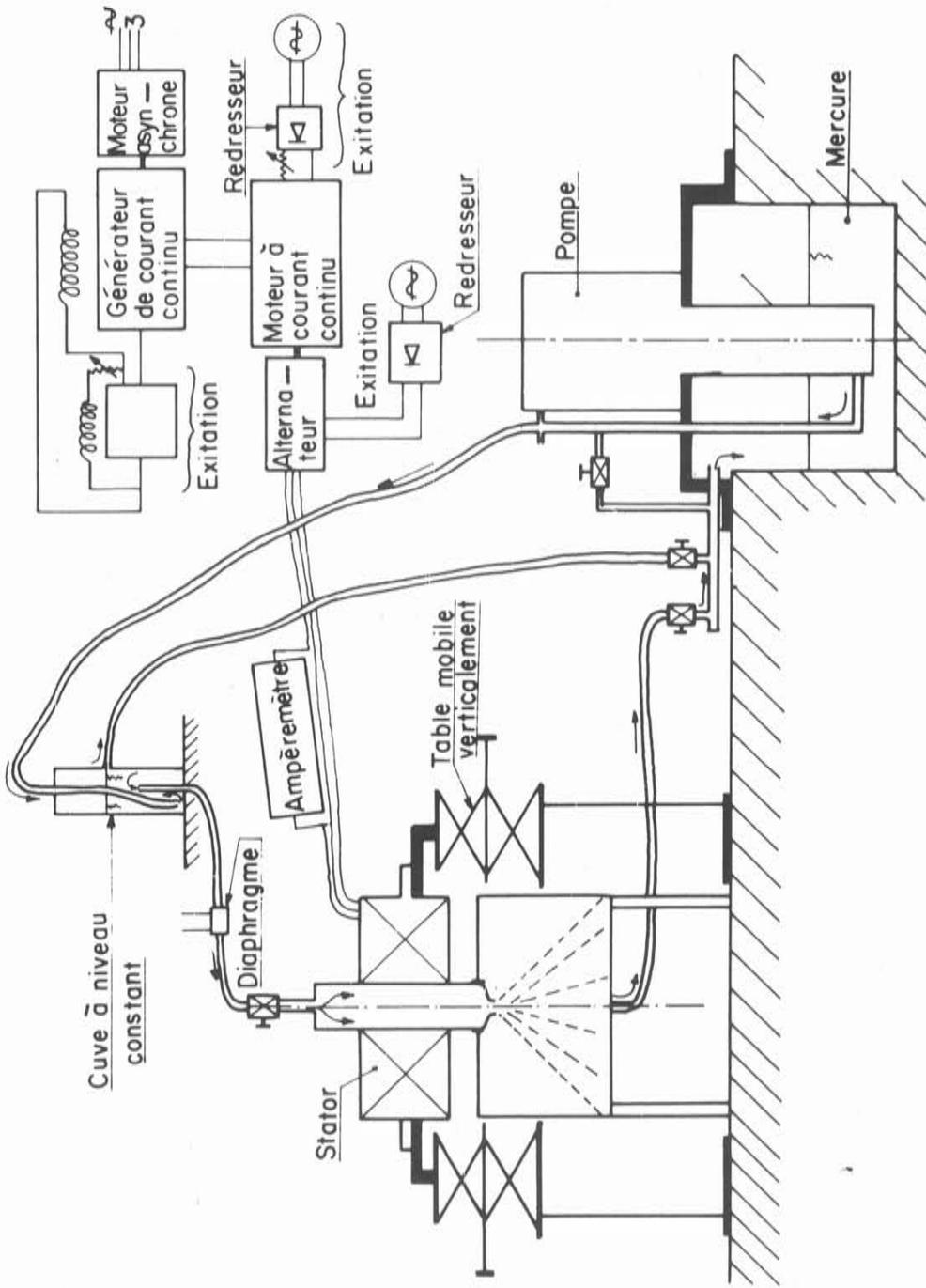


Fig.5- Schéma d'ensemble de la première installation expérimentale

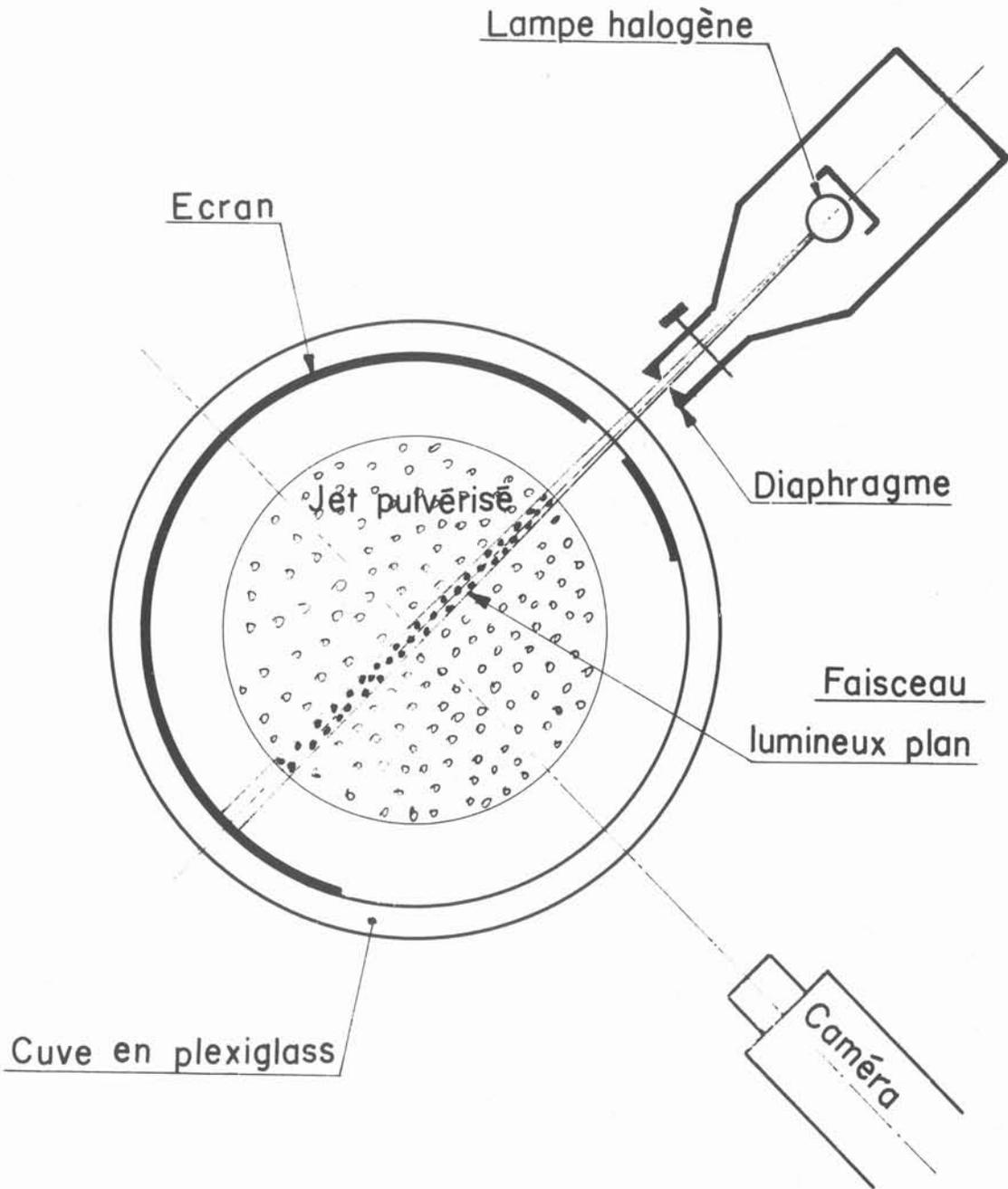


Fig.6 _ Dispositif de visualisation sélective d'un plan méridien du jet

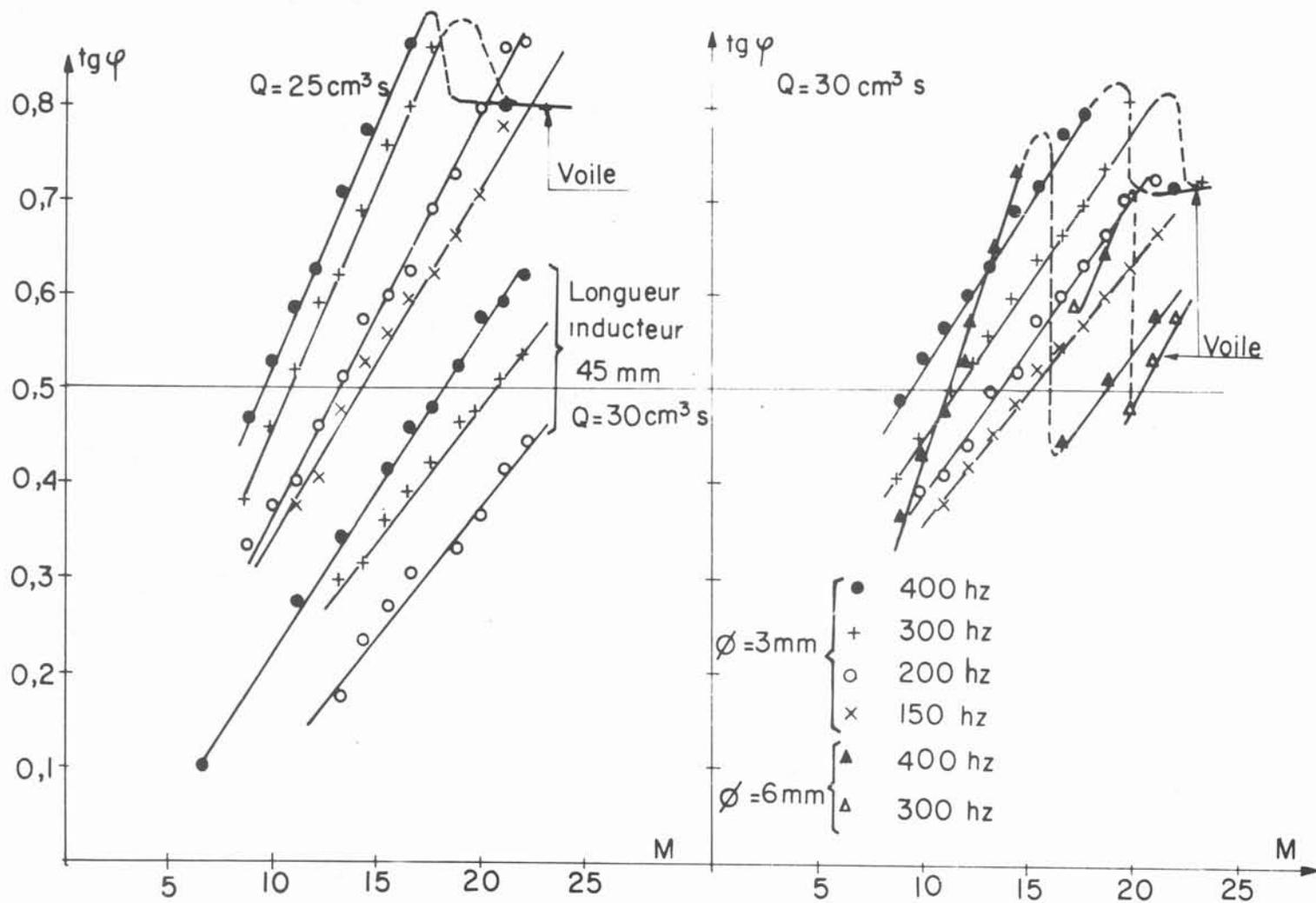


Fig.7.- Evolution de l'angle du jet en fonction de la fréquence et du nombre de Hartmann

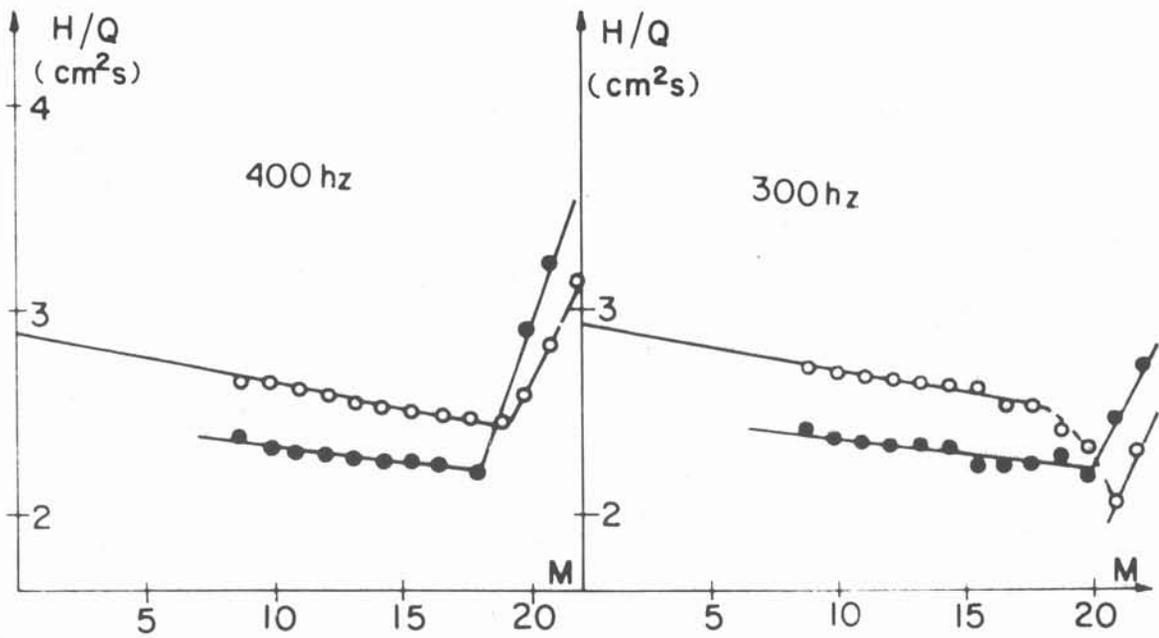
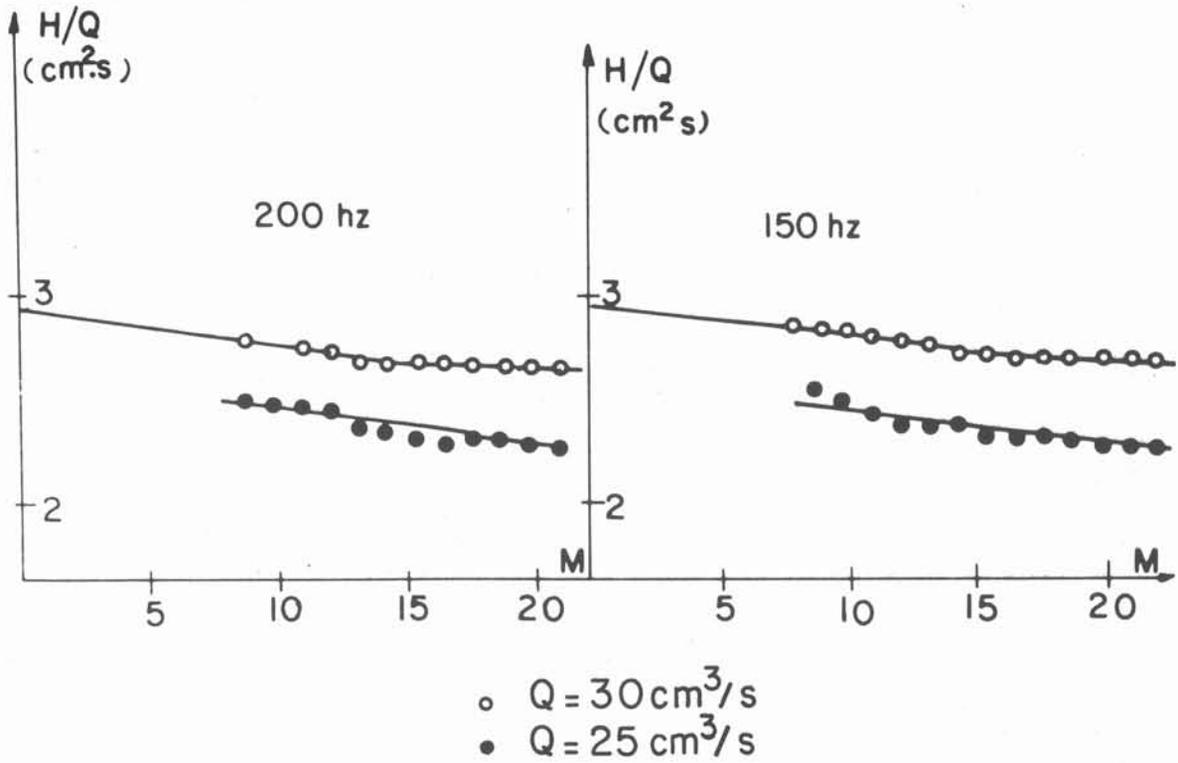
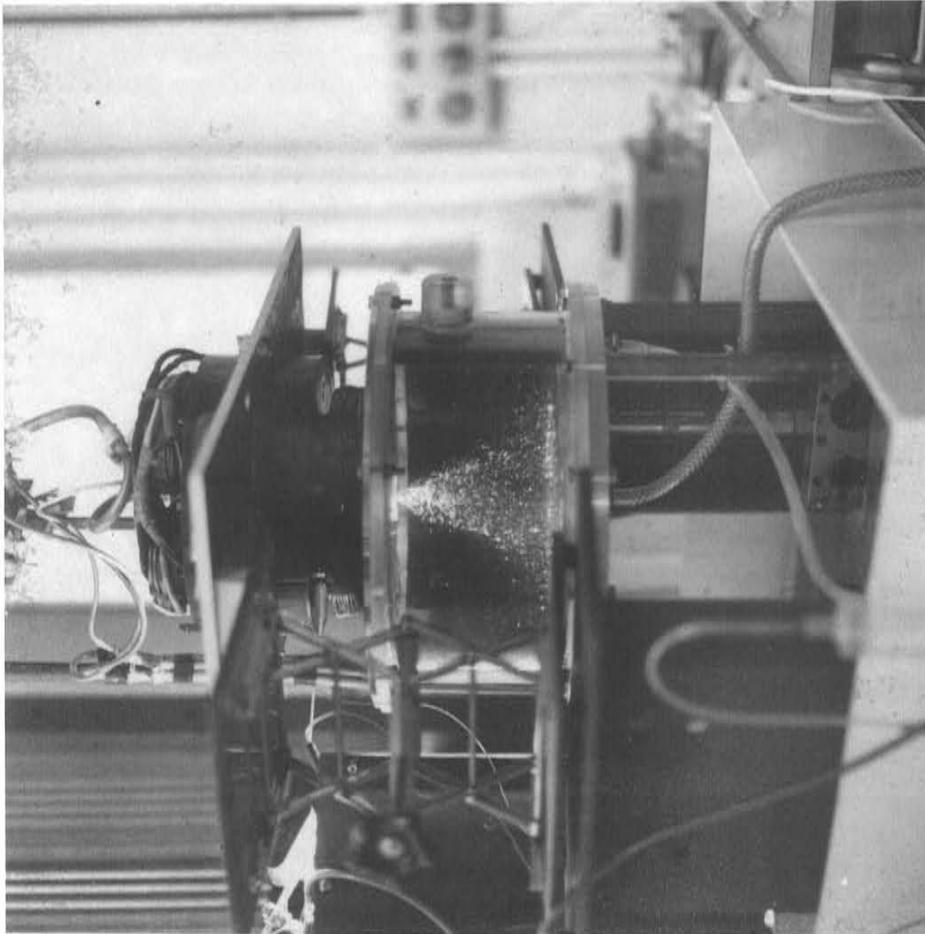
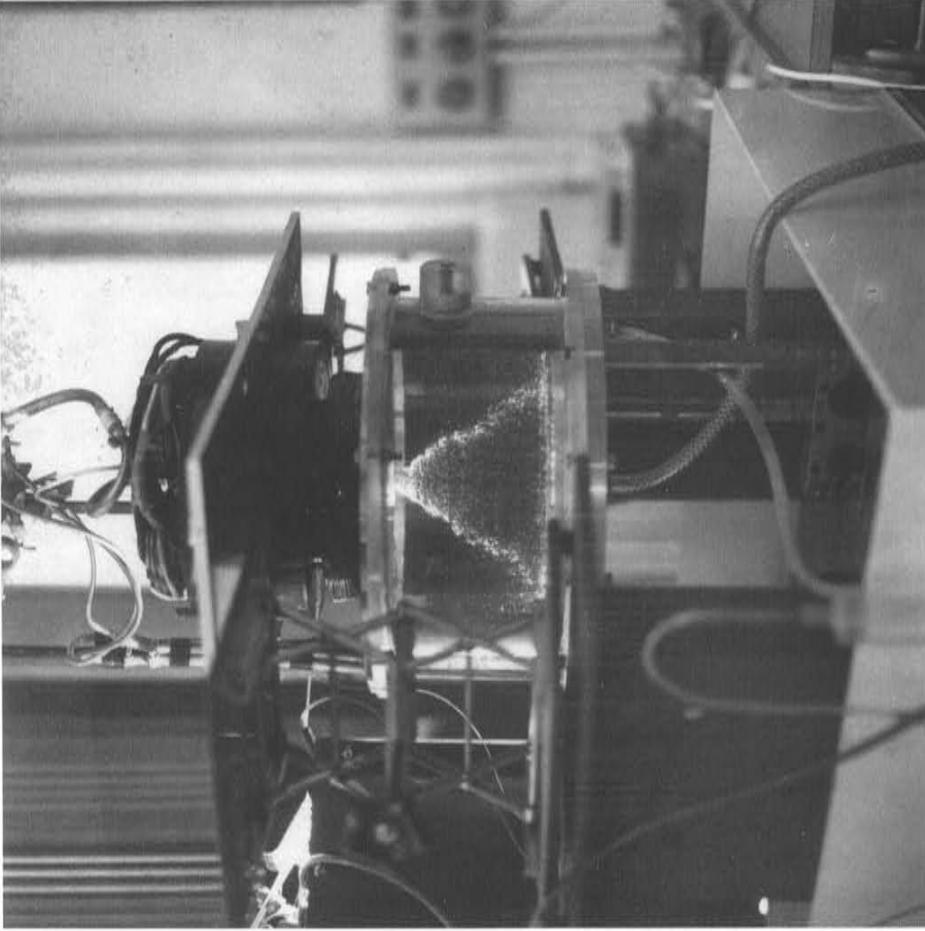


Fig.8. Variation de la charge motrice du pulvérisateur à débit fixé quand la rotation augmente



(a) Jet en cône plein



(b) Jet en cône creux

Fig.9- Vue partielle de la première installation expérimentale de pulvérisation électromagnétique.

Annexe au chapitre I de
la deuxième partie.

France

BR 2000

Déposé le 27 Mai 1977

Sous le n° 77.17296

BREVET D'INVENTION

PROCEDE DE PULVERISATION ELECTROMAGNETIQUE DE METAUX LIQUIDES

Inventeurs :

Antoine ALEMANY

Jean BARBET

Yves FAUTRELLE

René MOREAU

Sociétés dites :

SOCIETE DE VENTE DE L'ALUMINIUM PECHINEY

AGENCE NATIONALE DE VALORISATION DE LA RECHERCHE

A.N.V.A.R.

L'invention concerne un procédé et un dispositif électromagnétique pour la pulvérisation de métaux fondus. Les poudres métalliques ou les granulés de petites dimensions ont de nombreuses applications industrielles dont l'une des plus importantes est la fabrication de pièces par frittage. Cette technique permet en particulier de réaliser des pièces impossibles à réaliser par les autres techniques classiques de mise en forme. Ceci est en particulier le cas d'alliages d'aluminium très chargés susceptibles de présenter des caractéristiques très élevées mais dont la coulée et la transformation sont impossibles ou très difficiles, parce que, en raison précisément de leur taux élevé en élément d'addition, ils ont une tendance à la crique considérable.

Parmi les procédés utilisables pour l'obtention de ces poudres, on peut citer l'atomisation et la pulvérisation.

L'atomisation consiste à disperser en fines gouttelettes le jet de métal liquide par l'action d'un violent courant d'air ou de vapeur d'eau sous pression. Le procédé a l'avantage d'être économique mais il conduit à des poudres qui, surtout dans le cas d'alliages particulièrement oxydables comme les alliages d'aluminium ont des grains élémentaires recouverts d'une relativement importante couche d'oxyde ce qui peut présenter des inconvénients.

Il est évidemment possible d'utiliser comme gaz d'atomisation un gaz inerte au lieu de l'air ou de la vapeur d'eau mais cela est défavorable à l'économie du procédé.

La pulvérisation consiste à disperser le métal liquide en fines gouttelettes par des moyens mécaniques à la sortie d'un tube étroit. Ces moyens mécaniques consistent le plus souvent à communiquer au métal un mouvement de rotation soit à l'aide d'une tête de pulvérisation tournante, soit en faisant tomber le jet de métal sur un disque muni éventuellement de couteaux tournant à grande vitesse (jusque 10.000 tours/minute).

L'inconvénient de ces procédés est la nécessité d'avoir des pièces tournantes qui à ces vitesses doivent être bien équilibrées et qui sont soumises par ailleurs à des conditions difficiles de fonctionnement : corrosion des têtes de pulvérisation par les métaux liquides : encrassage des canaux ou des disques, érosion des canaux de pulvérisation, etc ...

Or, dans ces deux méthodes, il s'agit en fait de communiquer à la veine de métal liquide une vitesse suffisante pour que, sous l'action de la force centrifuge et des forces de tension superficielle, elle se résolve en fines gouttelettes.

Les déposants ont alors eu l'idée de communiquer au métal liquide son énergie cinétique de rotation sans organe mobile en utilisant le couple électromagnétique fourni par un champ électromagnétique tournant.

L'invention concerne donc un procédé et un dispositif permettant l'obtention de poudres métalliques par pulvérisation dans lesquels l'énergie de pulvérisation est fournie par un champ magnétique tournant.

Mais d'autres applications de ce procédé font également partie de l'invention, dans lesquelles le métal est recueilli avant que les gouttes n'aient eu le temps de se solidifier. Il s'agit d'une part de tous les processus métallurgiques exigeant une grande surface d'échange entre le métal liquide et un gaz, et d'autre part de processus dans lesquels on laisse les gouttelettes individuelles se ressouder immédiatement avant leur solidification. Ces applications seront décrites plus loin.

Le dispositif, objet de l'invention, se compose essentiellement des éléments suivants :

- un tube de pulvérisation,
- un stator permettant d'obtenir un champ magnétique tournant,
- l'alimentation électrique de ce stator,
- le circuit de refroidissement de ce stator.

La figure 1 représente schématiquement l'ensemble tube de pulvérisation stator.

La figure 2 représente les schémas d'alimentation électrique ainsi que le circuit de refroidissement du stator. Une coupe du stator avec son circuit de refroidissement d'huile est représenté sur la figure 3.

Enfin, les figures 4 et 5 représentent le schéma de deux applications particulières de ce procédé.

Le tube de pulvérisation, figure 1, repère 1, est un tube cylindrique de section circulaire, il est ouvert à sa partie supérieure par laquelle on verse dans le tube le métal liquide. Sa partie inférieure est partiellement obturée par un fond muni d'un orifice central par où s'écoule le jet de métal liquide pulvérisé.

Les parois du tube sont en matériau réfractaire résistant au métal liquide à pulvériser.

A titre d'exemple, non limitatif et dans le cas de l'aluminium liquide, la partie active du tube réfractaire (1), c'est à dire celle se trouvant à l'intérieur du stator, peut être comprise entre 10 cm et 25 cm seulement. Le diamètre intérieur du tube est de l'ordre de 3 à 4 cm ; l'épaisseur de paroi du tube atteignant 1,5 cm à 2 cm.. L'orifice de sortie a un diamètre de 6 à 10 mm.

Dans le cas de l'acier liquide, à titre d'exemple également non limitatif, ce tube de pulvérisation peut comporter deux parties distinctes. Une première partie de section circulaire constante est réalisée en matériau réfractaire

ordinaire et comporte le tronçon actif à l'intérieur du stator ; sa longueur peut être de l'ordre de 50 cm ; le diamètre intérieur du tube réfractaire peut aller de 4 à 10 cm, l'épaisseur de paroi du tube atteignant 1,5 à 3 cm suivant le matériau utilisé. L'orifice de sortie constitue la seconde partie du pulvérisateur ; il peut être réalisé en matériau spécial, par exemple en oxyde de zirconium, de façon à résister assez bien à l'érosion mécanique due à l'écoulement très rapide de l'acier liquide à son contact. L'avantage d'avoir prévu de réaliser ce tube en deux parties distinctes tient à la possibilité ainsi offerte de ne remplacer périodiquement, par exemple entre deux coulées, que l'orifice lui-même, sans que l'ensemble du tube réfractaire ne soit changé.

Ce tube de pulvérisation est placé à l'intérieur d'un stator (2) représenté en coupe sur la figure 3.

Pour des appareils de dimensions relativement petites, comme celles données à titre d'exemple pour l'aluminium, ce stator se présente extérieurement comme un cylindre creux muni d'une enveloppe extérieure (3) et d'un fond (4). A l'intérieur de cette enveloppe sont placés les bobinages (5) et le circuit magnétique (6). Les bobinages sont alimentés par les arrivées de courant (7) reliées à des bornes (8), fixées sur un couvercle (9). Ce couvercle est fixé de façon étanche sur le cylindre car l'ensemble du stator est plongé dans de l'huile en circulation afin de dissiper les calories provenant principalement des courants de Foucault prenant naissance dans les circuits magnétiques du stator. Pour assurer cette circulation d'huile, le cylindre étanche contenant le stator est muni d'une tubulure d'arrivée (10) et d'une tubulure de sortie (11). Le cylindre est muni d'un orifice central cylindrique (12) à l'intérieur duquel est placé le tube de pulvérisation. L'enveloppe extérieure du stator de même que les parois du tube central sont de préférence exécutées en acier inoxydable.

Enfin, les bornes de connexion électrique sont protégées par un capot (13) percé d'un trou pour le passage du tube de pulvérisation.

Pour des appareils de dimensions nettement plus importantes, comme celles données ci-dessous à titre d'exemple pour l'acier liquide, le circuit magnétique (6), analogue à celui des moteurs asynchrones, peut être complètement supprimé. Dans ce cas, en effet, le volume de l'entrefer non magnétique est tellement grand qu'il contrôle l'ensemble des pertes électromagnétiques de l'appareil ; il n'est plus avantageux alors de chercher à réduire ces pertes à l'aide d'un circuit feuilleté de faible réluctance ; il peut par contre devenir avantageux d'utiliser l'espace en augmentant le nombre de spires des bobinages, c'est-à-dire d'occuper avec du cuivre inducteur le volume occupé par du fer dans les appareils

de petites dimensions. Pour ces gros appareils, le bobinage peut être réalisé en tube de cuivre creux à l'intérieur duquel est forcée une circulation d'huile de façon à évacuer les calories dissipées par les courants de Foucault et par effet Joule. Il peut alors ne pas être nécessaire de prévoir un cylindre étanche pour contenir ce stator ; la seule protection des tubes de cuivre peut être un dépôt isolant (émail, ou matière plastique ou autre, destiné essentiellement à éviter des amorçages d'arc électriques.

Le stator est alimenté en énergie électrique selon le schéma de la figure 2.

Le stator doit être alimenté en courant alternatif polyphasé, par exemple triphasé comme représenté sur le schéma à une fréquence supérieure à celle du courant industriel, 400 hertz par exemple. Ce courant est fourni de façon classique par un groupe comprenant :

- une génératrice de courant continu (14)
- un moteur à courant continu (15) entraînant un alternateur (16) disposé sur le même arbre et délivrant du courant à 400 périodes/seconde par exemple.

Ce courant triphasé est ensuite envoyé aux bornes du stator, sur chacune de ses trois phases. Afin de compenser le déphasage dû à l'impédance pratiquement purement inductive du stator, des batteries de condensateurs (17) sont montées en parallèle sur chacune des trois phases du circuit d'alimentation.

Des indications sur les valeurs des principaux paramètres électriques de fonctionnement de ce stator seront données plus loin à titre d'exemple non limitatif. Le circuit de refroidissement du stator comprend, comme cela a déjà été indiqué une circulation d'huile à l'intérieur du cylindre contenant le stator ; à la sortie du stator, l'huile chaude est envoyée dans un échangeur (18) dans lequel elle est refroidie par une circulation d'eau (19), puis elle retourne dans un récipient (20) d'où une pompe (21) la renvoie dans le stator par la tubulure d'alimentation (10). Le dispositif ainsi décrit fonctionne de façon suivante : le métal liquide est versé à la partie supérieure du tube de pulvérisation. Durant sa traversée du stator, le fluide est mis progressivement en rotation rapide par le couple d'entraînement dû au champ magnétique tournant. La rotation du métal liquide croît durant la traversée de l'entrefer ce qui fait que le glissement s , différence relative des vitesses de rotation Ω du champ tournant et ω du métal liquide décroît avec z , distance du point considéré de l'entrée du stator. A la distance z , le glissement peut être représenté par

formule :

$$s = \frac{\Omega - \omega}{\Omega} = c e^{-\frac{\sigma B_0^2 z \eta R^2}{2Q}}$$

avec B_0 = amplitude de l'induction magnétique,

Q = débit du fluide,

ρ = masse volumique du métal,

σ = conductivité électrique du fluide,

R = rayon intérieur du tube de pulvérisation

Le coefficient C permet d'adapter la loi exponentielle théorique ci-dessus ($C = 1$) qui suppose négligeables le frottement et le champ électrique. La valeur $C = 1$ donne une approximation par excès de la rotation du fluide, elle permet cependant une première approche du dimensionnement.

En outre, cette formule n'est valable que pour le champ magnétique bipolaire et pour des valeurs du glissement assez élevées ($> 20\%$).

L'efficacité des bobinages à plusieurs paires de pôles est moindre que celle des bobinages bipolaires, la pénétration du champ magnétique dans le liquide devenant d'autant plus faible que le nombre de pôles est plus élevé.

La vitesse de rotation est encore augmentée par un phénomène annexe qui est le confinement de la veine de métal liquide au passage à travers l'orifice de sortie du tube de pulvérisation. Ce confinement ou diminution de la section de la veine conduit corrélativement à l'augmentation de la vitesse dans la section.

Le métal liquide s'échappe alors du tube de pulvérisation à travers l'orifice de sortie de ce tube et sous l'action de la force centrifuge ainsi acquise, il éclate presque instantanément.

D'une façon générale, et compte tenu des règles de similitude qui gouvernent le phénomène, on peut indiquer les lois approximatives suivantes :

- a- la puissance nécessaire est proportionnelle au carré du diamètre du tube,
- b- elle est proportionnelle à la longueur du stator
- c- la vitesse de rotation du fluide à une distance z de l'entrée du stator ne dépend du métal liquide utilisé que par le rapport σ/ρ
- d- pour des vitesses d'éjection V élevées, le diamètre des gouttelettes obtenues varie comme le rapport $T/\rho V^2$ où T désigne la tension superficielle du métal liquide.

Les expériences réalisées ont mis en évidence deux types de jets :

- pour des vitesses de rotation faibles : on obtient un jet en cône plein dont le demi-angle au sommet peut atteindre la valeur limite de 45° . Dans toute section droite du jet, les particules fluides sont réparties de façon sensiblement homogène.

- pour des vitesses de rotation élevées : on obtient un jet en cône creux dont l'angle au sommet peut atteindre 140° . Dans toute section droite du jet, les gouttelettes métalliques n'occupent qu'une couronne externe de faible largeur. Au voisinage de l'orifice de sortie, l'écoulement se présente sous forme d'un voile, dont l'épaisseur diminue lorsque la vitesse de rotation augmente.

Dans ce dernier type de fonctionnement, la dimension des gouttelettes est comparable à l'épaisseur du voile ; ceci explique la faible dispersion observée de la granulométrie. Il est possible dans une certaine mesure d'agir sur la taille du grain de pulvérisation en modifiant la vitesse de rotation du fluide :

- soit par variation de la fréquence des courants inducteurs,
- soit plus facilement par variation de l'amplitude du champ magnétique tournant.

L'évolution du jet en cône plein vers le jet creux est dû à l'accroissement de la dépression dans l'orifice de sortie quand la rotation du fluide augmente.

Suivant l'application souhaitée, l'une des configurations en cône plein ou en cône creux sera préférable à l'autre.

A titre d'exemple, un appareil pour la pulvérisation de l'aluminium et de ses alliages liquides a été réalisé avec les caractéristiques suivantes : le tube de pulvérisation, en alumine a une longueur utile (à l'intérieur du stator) de 25 cm, un diamètre intérieur de 3 cm et une épaisseur de 1,5 cm. Il est percé à sa base d'un orifice de 6mm de diamètre.

Le stator, est alimenté en courant triphasé 400 hertz par l'intermédiaire d'un alternateur. A pleine puissance, la tension par phase est de 167 volts, et la résistance du circuit étant de $8,32 \cdot 10^{-3} \Omega$ et sa self de $2,71 \cdot 10^{-4}$ henry, on doit donc insérer en parallèle une capacité de $585 \mu F$ pour compenser complètement le déphasage inductif de la self.

La puissance dissipée dans ces conditions par courants de Foucault atteint alors environ 10 kw. A cette puissance, qui doit être évacuée par le circuit d'huile s'ajoute celle beaucoup plus faible (de l'ordre de 1 kw) transmise du métal liquide au travers du tube de pulvérisation.

Le circuit de refroidissement se compose d'un échangeur de 10m^2 de surface 'échange destiné à refroidir l'huile circulant dans le carter.

Les essais à demi-puissance de ce prototype ont été réalisés avec le mercure comme métal liquide : on a alors noté avec un débit d'huile de $0,25\text{l}/\text{seconde}$ et un débit d'eau de $0,55\text{ l}/\text{seconde}$, une élévation de température de l'eau de $2,2^\circ\text{C}$.

Dans ces conditions, on obtient un cône de pulvérisation creux avec un angle au sommet de 90° et un débit de métal liquide de $50\text{ cm}^3/\text{seconde}$ (environ 450 kg de métal à l'heure), sous une charge de métal liquide (hauteur du métal dans le tube) de 1 mètre environ.

Le grain moyen des gouttelettes, d'ailleurs très homogène est de l'ordre de $0,3\text{ mm}$ à $0,4\text{ mm}$.

La stabilité du jet et son angle d'ouverture augmentent avec le diamètre de l'orifice de sortie. Cependant, la mise en charge du tube de centrifugation devient en même temps plus difficile.

D'une manière générale, les éléments donnés ci-dessus permettent de déduire la configuration d'un appareil efficace, pour une application donnée, à partir de deux indications essentielles : le diamètre souhaité des gouttes, et le débit du fluide. On préférera en général un pulvérisateur à grand orifice de sortie, à la fois plus stable sur le plan hydrodynamique, et soumis à une érosion mécanique plus faible. La fréquence de 400 hertz indiquée ci-dessus, est relative à une expérience précise. Il va de soi que ce paramètre peut notamment être amené à 50 hertz dans le cas des gros appareils pour ne pas réduire leur efficacité par un effet de peau important ; dans ce cas, on pourra compenser cette réduction de la vitesse de synchronisme par une augmentation du courant électrique, grâce à l'utilisation de conducteur creux en cuivre mentionnée plus haut.

Le premier domaine d'applications de ce procédé est la pulvérisation traditionnelle des métaux : fabrication de poudre ou de grenaille. Dans ce domaine, les avantages spécifiques de ce procédé sont : la possibilité de contrôler le diamètre des gouttes (en changeant la valeur du courant électrique dans l'inducteur, ou bien en changeant la fréquence de ce courant), la réduction de la dispersion des granulométries par rapport aux techniques traditionnelles. Les gouttes de métal liquide sont alors solidifiées soit par convection dans l'atmosphère ambiante soit en les faisant tomber dans un liquide froid.

Un second domaine d'applications est offert par tous les processus qui exigent une grande surface d'échange entre le métal liquide et l'atmosphère pour réaliser des conditions favorables à une opération de transfert physique ou chimique. Exemples :

- dégazage des métaux liquides sous vide : la grandeur échangée est alors le gaz dissous dans le métal liquide,

- oxydation des métaux dissous et séparation ultérieure de ces oxydes par décantation ou filtration ou centrifugation (nettoyage du mercure).

Un troisième domaine d'applications est celui dans lequel les gouttes sont reçues sur un support refroidi avant qu'elles ne soient solides : elles ont la possibilité de se ressouder les unes aux autres en formant une surface continue.

A titre d'exemple, on peut obtenir des tôles en utilisant le dispositif schématiquement représenté sur la figure 4.

Une surface refroidie (22) se déplace sous le dispositif de pulvérisation schématisé simplement par le tube de pulvérisation (1). La distance entre la surface refroidie est choisie de telle façon que les gouttelettes projetées par l'orifice à la base du tube arrivent encore liquides sur la surface (22). Elles se ressoudent alors puis se solidifient rapidement et on obtient en utilisant éventuellement plusieurs pulvérisateurs parallèles ou disposés en quinconce une tôle continue.

Dans le système représenté sur la figure 5, la surface refroidie (23) est une surface de révolution animée d'un mouvement relatif par rapport au tube de pulvérisation parallèle à son axe. On peut obtenir ainsi un tube moulé directement sur la coquille en acier refroidie sans avoir à faire tourner ni la coquille ni le pulvérisateur. Il est clair que, dans ce cas, il est avantageux d'utiliser un jet en cône creux.

Parmi les avantages des produits tôles ou tubes obtenus par ces derniers procédés, on peut citer :

- la possibilité d'obtenir des tôles ou tubes en des alliages que l'on ne sait pas couler ni transformer par les techniques classiques,

- la possibilité d'utiliser des alliages très chargés dans lesquels les éléments d'addition bien qu'au-dessus de leur limite de solubilité sont susceptibles de rester cependant en solution solide sursaturée.

REVENDEICATIONS

1°) Procédé de pulvérisation d'alliages métalliques liquides dans lequel le métal liquide, introduit dans un tube fixe muni sur son axe d'un orifice à la partie inférieure, est mis en rotation rapide à l'intérieur du tube par l'effet d'un champ tournant créé par un stator fixe entourant le tube de pulvérisation, avec une vitesse suffisante pour que, à sa sortie par l'orifice inférieur du tube, le métal se résolve en fines gouttelettes en formant un cône dont le sommet est l'orifice du tube.

2°) Dispositif de pulvérisation de métal liquide comprenant :

- un tube de pulvérisation dont le fond, à la partie inférieure est percé d'un orifice calibré,

- un stator entourant au moins une partie de la longueur du tube de pulvérisation muni de bobinages alimentés en courant triphasé créant à l'intérieur du tube de pulvérisation un champ magnétique tournant et muni éventuellement de circuits magnétiques.

3°) Dispositif de pulvérisation de métal liquide selon la revendication 2, caractérisé en ce que le tube de pulvérisation est réalisé en deux parties : le corps du tube et l'extrémité avale munie de l'orifice calibré interchangeable.

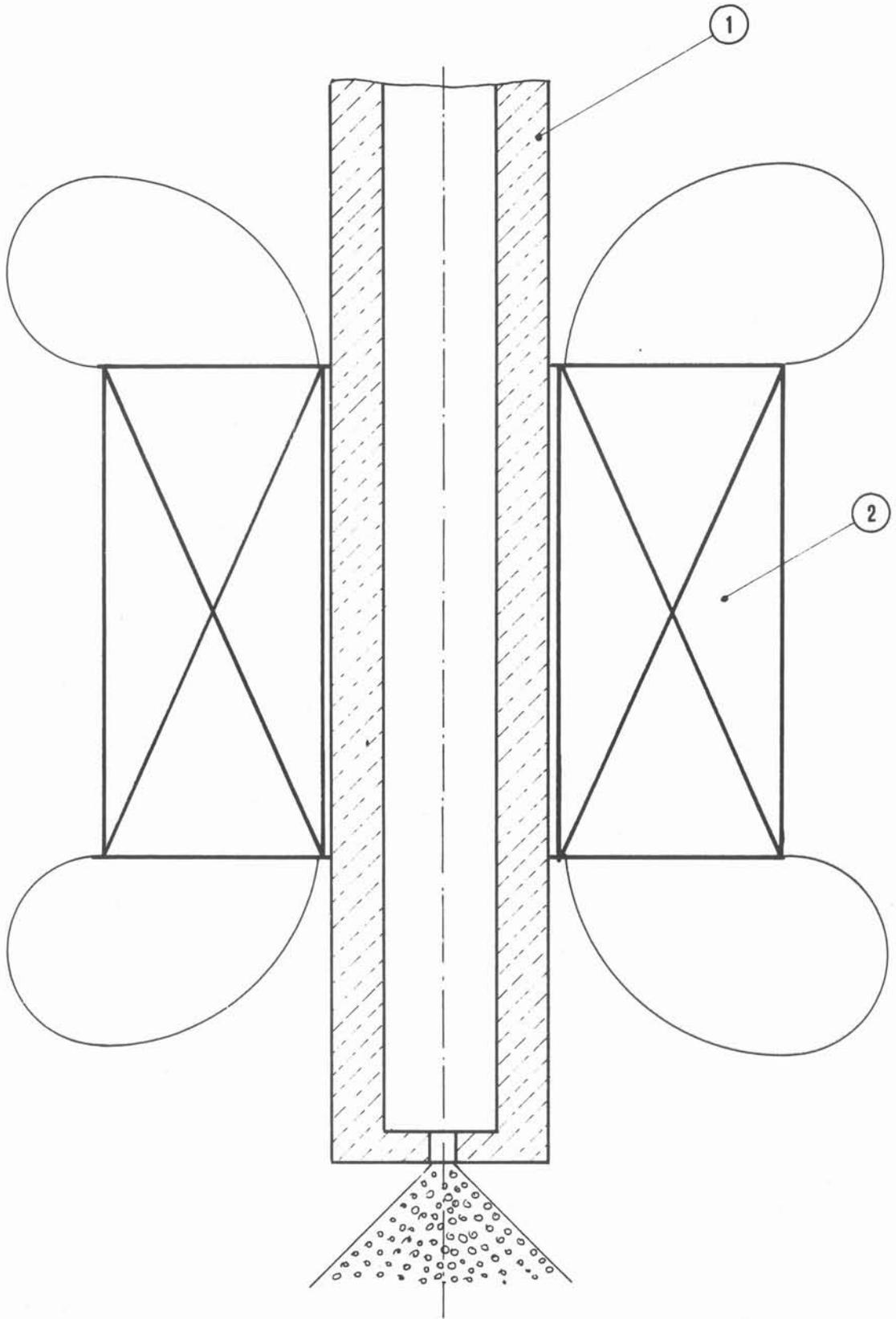
4°) Dispositif de pulvérisation de métal liquide à grandes dimensions selon la revendication 2 ou 3 ne comprenant aucun circuit magnétique, caractérisé en ce que les bobinages sont réalisés en conducteurs tubulaires dont l'épaisseur est adaptée à la fréquence utilisée parcourus par une circulation d'huile pour évacuer l'énergie dissipée en chaleur.

5°) Application du procédé de la revendication 1, à la fabrication de poudres métalliques, ou de grenaille, de granulométrie contrôlée, en laissant refroidir et solidifier les gouttelettes de métal liquide, soit dans l'atmosphère ambiante par convection, soit en les laissant tomber dans un liquide froid.

6°) Application du procédé de la revendication 1 à l'obtention de tôles ou de tubes métalliques par réception de gouttelettes encore liquides sur un support plan ou cylindrique refroidi.

7°) Application du procédé de la revendication 1, au contrôle des opérations de transfert physique ou chimique en réglant la surface d'échange entre le métal liquide et l'atmosphère ambiante par l'intermédiaire d'une variation de la dimension des gouttelettes formées.

FIG.1



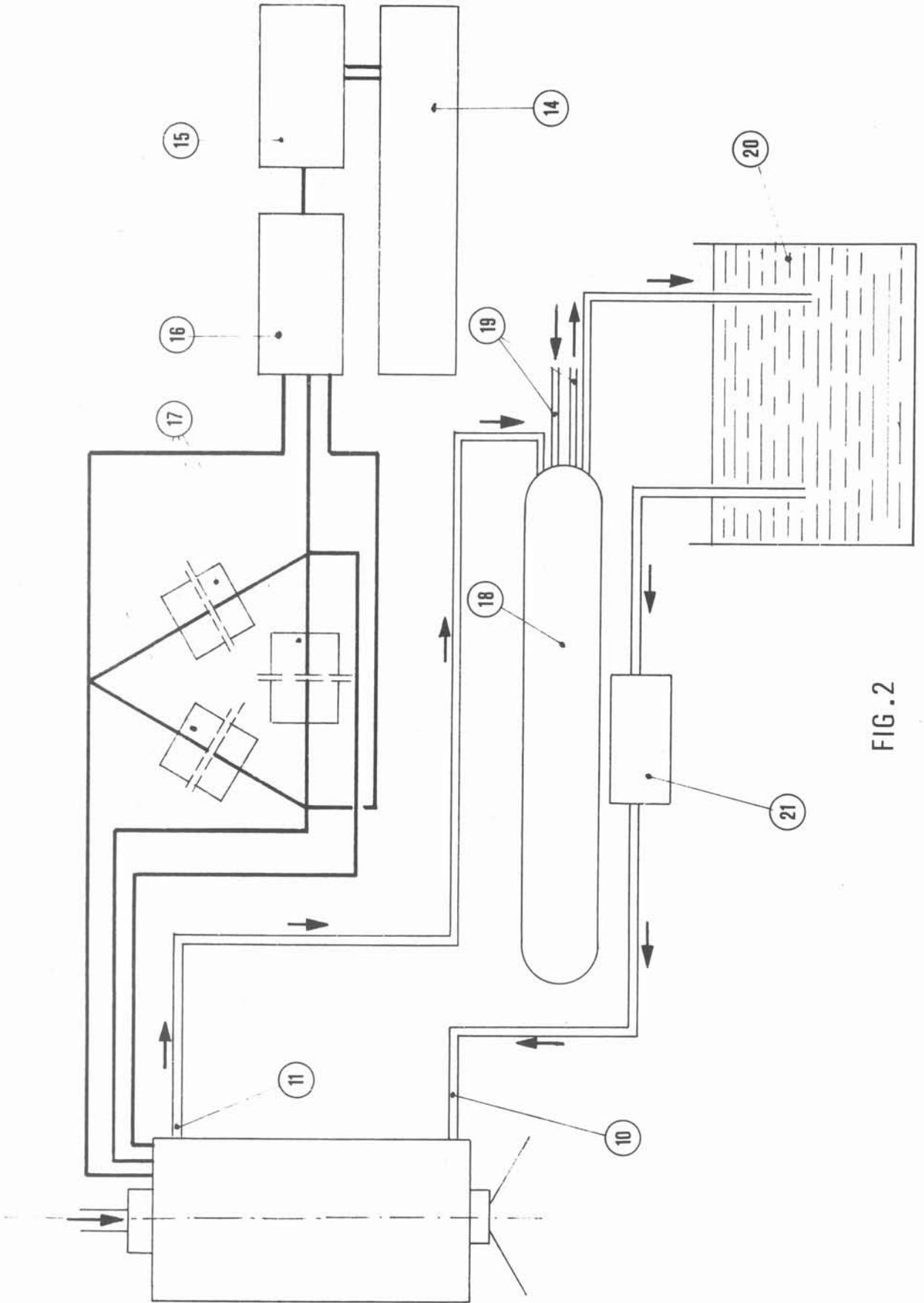


FIG. 2

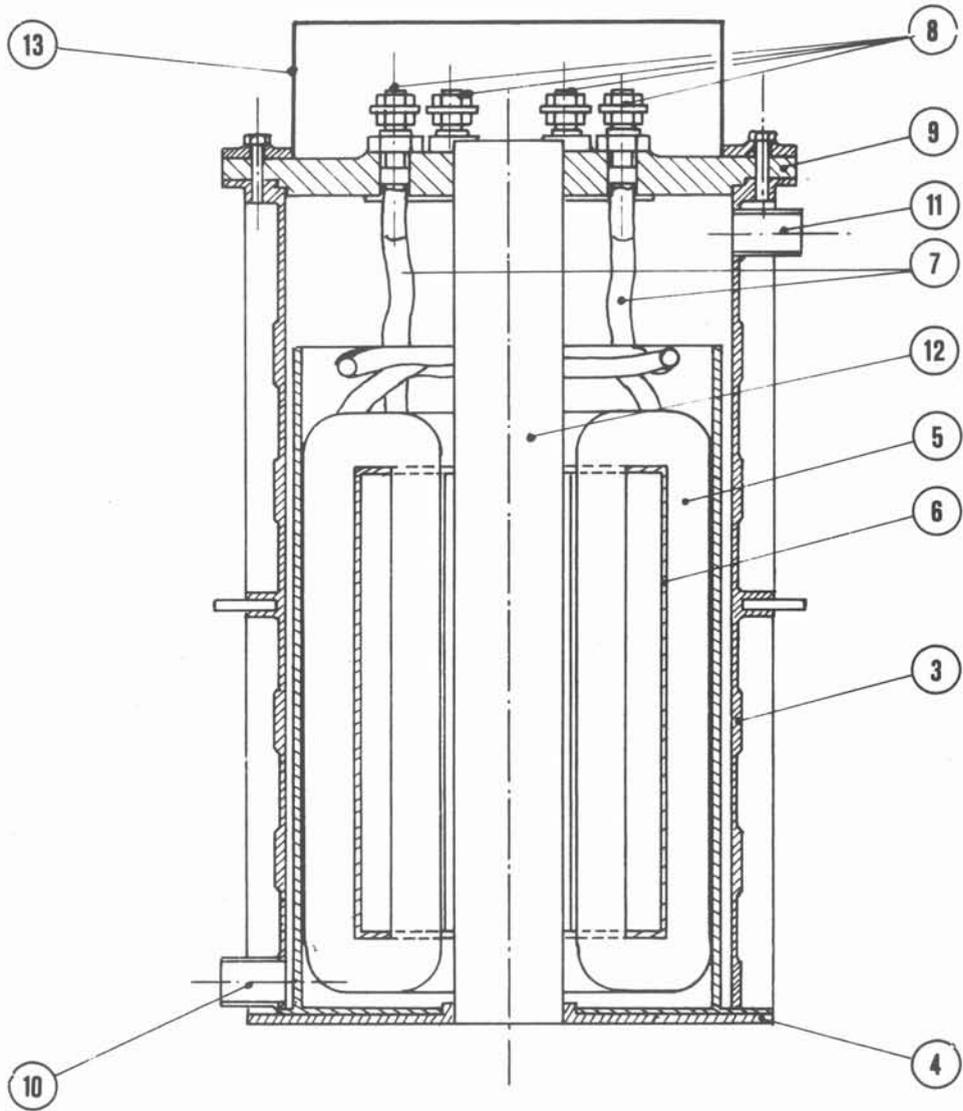


FIG. 3

FIG.4

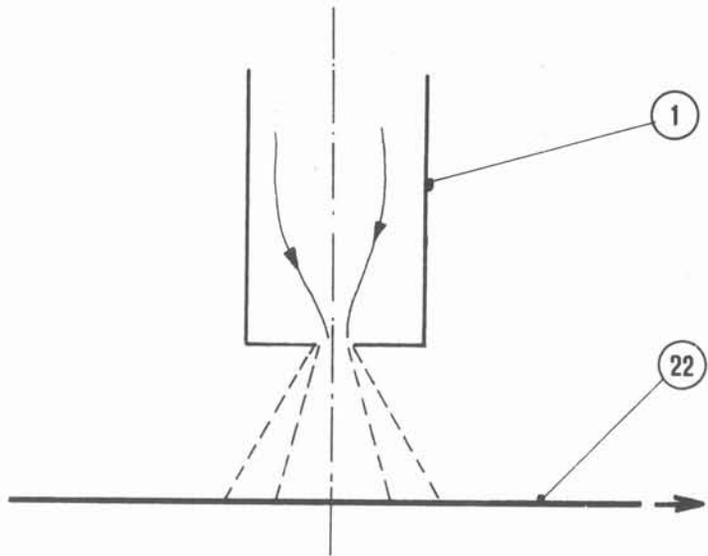
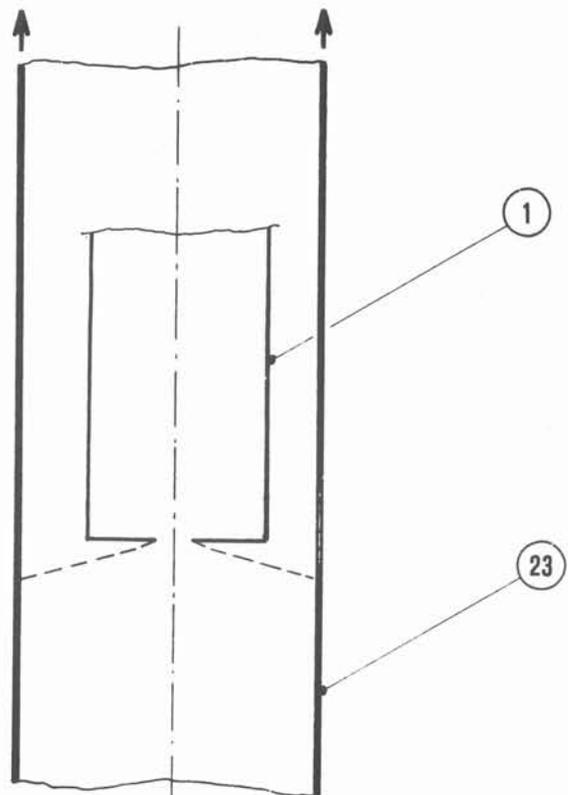


FIG.5



ABREGE

L'invention concerne un procédé de pulvérisation de métaux liquides. Elle consiste à communiquer au métal liquide une énergie cinétique de rotation, sans organe mobile en utilisant le couple électromagnétique fourni par un champ électromagnétique tournant. Le dispositif utilisé comprend à cet effet :

- un tube de pulvérisation
- un stator polyphasé permettant d'obtenir un champ magnétique tournant
- l'alimentation électrique de ce stator
- le circuit de refroidissement de ce stator

L'invention s'applique en particulier à l'obtention de particules métalliques d'alliages d'aluminium et d'acier de taille voisine de 0,3 à 0,4 mm.

Fig. 1

CHAPITRE II

ECOULEMENT D'UN FLUIDE CONDUCTEUR DE
L'ELECTRICITE EN PRESENCE D'UN CHAMP
MAGNETIQUE TOURNANT

ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE CONDUCTEUR
DE L'ÉLECTRICITÉ EN PRÉSENCE D'UN
CHAMP MAGNÉTIQUE TOURNANT

A. ALEMANY* et R. MOREAU *

RÉSUMÉ

On étudie l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible et conducteur de l'électricité, dans une conduite circulaire, en présence d'un champ magnétique tournant multipolaire. Lorsque l'inertie du fluide est assez élevée (faibles valeurs du paramètre d'interaction N), l'écoulement est peu perturbé par la pulsation des forces électromagnétiques, on calcule alors les distributions de la vitesse et du potentiel électrique en ne tenant compte que de la valeur moyenne des forces électromagnétiques. Lorsque l'inertie du fluide est faible ($N \gg 1$) on montre que la variation des forces engendre dans la section droite des courants secondaires ou vortex, en nombre égal au nombre de pôles tournant tous dans le sens opposé à la rotation du champ magnétique. L'influence du nombre de paires de pôles p se manifeste aussi par la présence d'un jet axial lorsque $p \geq 2$. L'influence de la conductivité électrique de la paroi est mise en évidence en considérant les deux cas extrêmes : paroi isolante et paroi beaucoup plus conductrice que le fluide.

*Institut de Mécanique de Grenoble, B.P. 53 - Centre de Tri, 38041- GRENOBLE CEDEX
(France)

ABSTRACT

We study the laminar motion of a viscous, incompressible and electrically conducting fluid, in a circular duct, in the presence of a rotating magnetic field. When the interaction parameter is weak ($N \ll 1$), we calculate the distributions of the velocity and of the electric potential in taking in account only the mean part of the electromagnetic forces. When this parameter is large ($N \gg 1$) we consider the exact distribution of these forces ; we show that their inhomogeneity lead to secondary flows, or vortices, their number being equal to the number of poles, all rotating in the opposite sense of the magnetic field. The influence of the number of pairs of poles p also appears in forcing an axial jet when $p \gg 2$. The influence of the electrical conductivity of the wall is cleared up by considering the two extreme cases : insulating wall, wall much more conducting than the fluid.

I. INTRODUCTION

L'application d'un champ magnétique tournant à des écoulements de métaux liquides tels que ceux que l'on rencontre en métallurgie (par exemple dans la coulée continue de l'acier ou de l'aluminium) peut permettre de résoudre des difficultés technologiques importantes ([1],[2]). Elle présente en effet par rapport à tout procédé mécanique traditionnel l'avantage considérable d'exercer les forces au sein même du métal, sans aucun contact et par conséquent sans usure ni contamination. Les expériences réalisées en laboratoire avec du mercure ([2], [3]) et les tentatives d'application à la coulée continue de l'acier [1] ont cependant révélé des effets curieux, des structures bidimensionnelles complexes et des instabilités.

Indépendamment de ces motivations appliquées, le problème envisagé présente un intérêt tout particulier en raison du caractère alternatif du champ magnétique et des courants induits qui provoquent une pulsation des forces autour de leur valeur moyenne, que l'observateur tournant à la vitesse de synchronisme voit comme une variation périodique dans l'espace. Les théories antérieures ([4], [5], [6]) sont limitées au cas le plus simple d'un champ magnétique à une seule paire de pôles et négligent la variation angulaire des forces électromagnétiques. Elles ne s'intéressent qu'à une seule composante de la vitesse.

Le sujet peut être divisé en deux grandes classes de problèmes : ceux caractérisés par des fréquences élevées et un effet de peau important, et ceux au contraire caractérisés par des fréquences faibles et par une bonne pénétration de l'induction magnétique. Dans ceux de la première classe ([4]) le couple moteur est limité à l'épaisseur de peau et la partie centrale du fluide est mise en rotation par entraînement visqueux ; lorsque l'épaisseur de peau est très mince ces problèmes sont analogues aux problèmes de parois mobiles en hydrodynamique classique. Dans ceux de la seconde classe (fréquences limitées à quelques centaines de hertz dans la plupart des métaux liquides) la distribution de l'induction magnétique est très proche de ce qu'elle serait dans le vide et le couple moteur est continûment réparti dans le volume. C'est à cette seconde classe de problèmes que nous nous limiterons ici, ce qui suppose :

$$(1) \quad R_m^* = \Omega R e \mu^* \nu^* \ll 1$$

$$(2) \quad R_m = UR \mu \nu \ll 1$$

où R désigne le rayon intérieur de la conduite, e l'épaisseur de la paroi, μ^* et σ^* la perméabilité magnétique et la conductivité électrique de la paroi, μ et σ celles du fluide, $\Omega = \frac{\omega}{P}$ la vitesse de synchronisme et U une vitesse typique du fluide dans un repère lié au champ magnétique. Les paramètres qui caractérisent les forces électromagnétiques sont alors la pulsation des courants inducteurs ω , leur intensité et le nombre de paires de pôles p . Ces conditions signifient que le champ magnétique n'est affecté ni par la présence de la paroi (1) ni par le mouvement du fluide (2).

L'originalité de cette étude par rapport aux travaux antérieurs déjà cités tient à l'analyse de l'influence du nombre de pôles $2p$ et surtout à la prise en compte de la distribution exacte des forces électromagnétiques. La superposition d'un écoulement axial au mouvement tournant est également envisagée, mais seulement dans les régimes à interaction électromagnétique modérée ($N \ll 1$).

Après le paragraphe 2, qui a pour objet la formulation générale du problème, l'étude est séparée en deux parties. Le paragraphe 3 concerne le cas des faibles valeurs du paramètre d'interaction ($N \ll 1$) où la pulsation des forces électromagnétiques demeure sans effet sur le champ de vitesse. Le paragraphe 4 au contraire a pour objet de mettre en évidence l'influence de cette pulsation sur le mouvement tournant, il concerne donc le cas des fortes valeurs du paramètre d'interaction ($N \gg 1$). Un dernier paragraphe dégage quelques remarques de portée générale.

2. FORMULATION DU PROBLEME

On considère un fluide visqueux, incompressible, conducteur de l'électricité, s'écoulant dans une conduite circulaire et soumis à l'influence d'un champ magnétique tournant multipolaire dont l'expression en coordonnées cylindrique s'écrit :

$$(3) \quad \begin{cases} B_r = B_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{(p-1)} \sin(p\theta - \omega t) \\ B_\theta = B_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{(p-1)} \cos(p\theta - \omega t) \end{cases}$$

L'amplitude B_0 de l'induction magnétique, est liée au courant électrique circulant dans l'inducteur. Cette expression (3) est celle du champ magnétique que produirait un inducteur idéal constitué d'une nappe cylindrique de courants électriques longitudinaux. Le champ magnétique des inducteurs réels, où les fils conducteurs sont placés dans des encoches de largeur finie, comporte en plus des harmoniques

de ce champ fondamental (3). Mais ces harmoniques s'estompent assez vite dès que l'on s'écarte de la surface du stator à une distance qui est du même ordre de grandeur que la largeur des encoches, ce qui est toujours le cas, en pratique, en raison de la présence d'une paroi entre le fluide et l'inducteur.

Dans le cadre de l'approximation (1) (2) le champ de vitesse \vec{V} , le champ électrique \vec{E} , la densité de courant \vec{j} et la pression Γ vérifient les équations :

$$(4) \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{j} = 0 \\ \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \\ \text{div } \vec{V} = 0 \\ m \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = - \text{grad } \Gamma + \vec{j} \wedge \vec{B} + m \nu \nabla^2 \vec{V} \end{cases}$$

où m désigne la masse volumique et ν la viscosité cinématique du fluide.

On ne s'intéresse qu'au régime hydrodynamiquement établi ($\frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \text{Cte}$
 $\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{j}}{\partial z} = 0$). Et il est commode d'utiliser le repère tournant à la vitesse de synchronisme Ω dans lequel le champ magnétique et l'écoulement sont permanents. Le champ électrique est alors irrotationnel et plan*. Les notations adimensionnelles :

$$(5) \quad \begin{cases} \eta = \frac{r}{R} \\ (u, v, w) = \frac{1}{\Omega R} (V_r, V_\theta, V_z) \\ P = \frac{\Gamma}{m \Omega^2 R^2}, \quad K = - T^{1/2} R \frac{\partial P}{\partial z} \\ (e_r, e_\theta) = \frac{1}{B_0 \Omega R} (E_r, E_\theta) \end{cases}$$

conduisent, après avoir éliminé la densité de courant \vec{j} , aux équations :

* Une composante longitudinale E_z , nécessairement indépendante de r et de θ , conduirait à une force supplémentaire irrotationnelle incapable de modifier le champ de vitesse et toujours susceptible d'être incluse dans le gradient de pression.

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta u) + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

$$(7) \quad u \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{v}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{(v+\eta)^2}{\eta} = - \frac{\partial P}{\partial \eta} \\ + \frac{N}{2} \eta^{2(p-1)} [v \sin 2p\theta - u(1+\cos 2p\theta)] + T^{-1/2} (\Delta u - \frac{2}{\eta^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{\eta^2})$$

$$(8) \quad u \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{\eta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u(v+\eta)}{\eta} = - \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ + \frac{N}{2} \eta^{2(p-1)} [u \sin 2p\theta - v(1-\cos 2p\theta)] + T^{-1/2} (\Delta v + \frac{2}{\eta^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\eta^2})$$

$$(9) \quad u \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{v}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \kappa T^{-1/2} \\ + N \eta^{(p-1)} [e_r \cos p\theta - e_\theta \sin p\theta - \eta^{(p-1)} w] + T^{-1/2} \Delta w$$

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta e_\theta) - \frac{\partial e_r}{\partial \theta} = 0$$

$$(11) \quad \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta e_r) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = \eta^{(p-1)} \cos p\theta \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} - \eta^{(p-2)} \sin p\theta \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

où apparaissent les nombres sans dimension suivants, qui désignent respectivement, le nombre de Taylor, le nombre de Hartmann et le paramètre d'interaction.

$$(12) \quad T = \frac{\Omega^2 R^4}{\nu^2}, \quad M = B_0 R \left(\frac{\sigma}{m\nu} \right)^{1/2}, \quad N = \frac{M^2}{T^{1/2}}.$$

Les conditions aux limites sur les composantes de la vitesse s'écrivent dans ce repère lié au champ magnétique :

$$(13) \quad \begin{cases} u=0, & v=-1, & w=0, & \text{si } \eta=1 \\ u=0, & v=0, & \frac{\partial w}{\partial \eta}=0, & \text{si } \eta=0 \end{cases}$$

Celles sur les composantes du champ électrique dépendent de la conductivité électrique de la paroi. Nous nous contenterons de schématiser l'influence de ce paramètre en étudiant les deux cas extrêmes : paroi isolante ($\sigma^* = 0$, les lignes de courant électrique se referment dans le fluide) et paroi très conductrice ($\sigma^* e \gg \sigma R$, les lignes de courant électrique se referment dans la paroi et sont orthogonales à l'interface fluide-paroi). Elles s'écrivent :

$$(14) \quad \begin{cases} e_r (\eta = 1) = 0 & \text{si } \sigma^* = 0 \\ e_\theta (\eta = 1) = 0 & \text{si } \sigma^* e \gg \sigma R \end{cases}$$

On pourra remarquer que la condition (14) écrite dans le cas d'une paroi très conductrice n'est pas en contradiction avec la condition (1) qui suppose la conductance de cette paroi assez petite pour que l'induction magnétique pénètre dans le fluide ; la petitesse de la pulsation peut en effet compenser la grandeur de sa conductance.

Il apparaît que les équations (6), (7), (8) et les conditions aux limites associées sont découplées du reste du système ; ceci signifie que les composantes radiale u et azimutale v de la vitesse sont indépendantes de la composante axiale w et du champ électrique (e_r, e_θ), et par conséquent aussi de la conductivité électrique de la paroi.

3. REGIMES A INTERACTION MODEREE ($N \ll 1$)

L'écoulement étant dominé par les forces d'inertie, on est conduit, comme les auteurs déjà cités ([4], [5], [6]) à négliger la variation angulaire des forces électromagnétiques et à calculer le champ de vitesse en ne prenant en compte que la moyenne sur chaque cercle de ces forces, espérant que l'inertie du fluide l'empêche de suivre leurs fluctuations rapides. On peut évaluer le degré de validité de cette approximation à l'aide de l'équilibre des termes d'inertie et des termes électromagnétiques :

$$(15) \quad m \left| \frac{d\vec{V}}{dt} \right| \sim \sigma B_0^2 |\vec{V}|$$

Pour un observateur lié à la particule fluide, l'ordre de grandeur de la perturbation de vitesse $\delta \vec{V}$ produite pendant la durée δt d'une alternance des forces électromagnétiques s'en déduit directement :

$$(16) \quad \frac{|\delta \vec{v}|}{|\vec{v}|} < \frac{\sigma B_0^2}{m} \delta t .$$

Mais l'évaluation de la durée lagrangienne δt de cette alternance demeure délicate. Si le mouvement tournant du fluide est faible par rapport à celui du champ magnétique, ce qui est toujours vrai près de la paroi, on a $\delta t \sim \frac{\pi}{\omega}$; alors :

$$(17) \quad \frac{|\delta \vec{v}|}{|\vec{v}|} < \frac{N}{P}$$

et l'approximation est justifiée. Mais cette évaluation de δt serait tout à fait erronée dans le cas où la vitesse de synchronisme serait atteinte, puisqu'alors toute particule fluide subirait une force qui ne changerait pas de sens ($\delta t \rightarrow \infty$). Nous admettons cependant, dans tout ce paragraphe que cette approximation conserve une signification lorsque $N \ll 1$, et nous reviendrons à postériori sur l'examen de sa validité.

3.1. Cas général

D'après (10) le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire $\psi(\eta, \theta)$:

$$(18) \quad e_r = -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} , \quad e_\theta = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

pour lequel l'équation (11) suggère la forme à variables séparées :

$$(19) \quad \psi(\eta, \theta) = f(\eta) \cdot \eta^p \cos p\theta$$

et conduit, après une intégration à :

$$(20) \quad \eta f' + 2pf = w_0 - w + 2pf_0$$

où w_0 et f_0 désignent les valeurs au centre de $w(\eta)$ et $f(\eta)$. Les composantes de la vitesse $v(\eta)$ et $w(\eta)$ vérifient alors les équations déduites de (8) et (9) :

$$(21) \quad \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{dv}{d\eta} \right) - \frac{v}{\eta^2} - \frac{M^2}{2} \eta^{2(p-1)} v = 0$$

$$(22) \quad \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{dw}{d\eta} \right) - \frac{M^2}{2} \eta^{2(p-1)} (w + w_0 + 2pf_0) = K$$

et la composante radiale du gradient de pression équilibre exactement l'accélération centrifuge et l'accélération de Coriolis :

$$(23) \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{(v + \eta)^2}{\eta}$$

Il est remarquable que le potentiel électrique n'intervient dans l'équation de $w(\eta)$ que par la valeur au centre f_0 de la fonction $f(\eta)$. Les équations (20) et (22) ne sont donc couplées que par les conditions aux limites.

Les solutions des équations (21) et (22) satisfaisant aux conditions aux limites (13) s'écrivent :

$$(24) \quad \begin{cases} v = - \frac{I_{(1/P)}(P)}{I_{(1/P)}(P_1)} \\ w = (w_0 + 2pf_0) \left[\frac{I_0(P)}{I_0(P_1)} - 1 \right] + \frac{2K}{M^2} I_0(P) \int_p^{P_1} \frac{F(x)}{x I_0^2(x)} dx \end{cases}$$

où $I_n(P)$ désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce, et où l'on a noté :

$$p = \frac{M \eta^p}{p \sqrt{2}} \quad , \quad P_1 = P_{(1)} = \frac{M}{p \sqrt{2}}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\gamma I_0(\gamma)}{\left(\frac{p \sqrt{2}}{M} \right)^{\frac{2}{p}(p-1)}} d\gamma$$

Dans le cas particulier du champ magnétique à une seule paire de pôles ($p = 1$) l'expression de w se simplifie considérablement :

$$(25) \quad w_{(p=1)} = \left[w_0 + 2pf_0 - \frac{2K}{M^2} \right] \left[\frac{I_0 \left(\frac{M}{\sqrt{2}} \eta \right)}{I_0 \left(\frac{M}{\sqrt{2}} \right)} - 1 \right]$$

Ces résultats sont illustrés par les figures 1, 2 et 3, où les profils de vitesse sont tracés pour deux valeurs du nombre de Hartmann ($M = 7$ et $M = 30$) et pour plusieurs valeurs du nombre de paires de pôles, dans le cas de la paroi isolante et dans le cas de la paroi très conductrice.

Le cas limite $p \rightarrow \infty$ se ramène au problème classique de l'écoulement de Poiseuille puisqu'alors le champ magnétique ne pénètre pas dans le fluide ; les figures 1 et 2 ont donc en commun cette parabole de Poiseuille. Lorsque p diminue les valeurs de $w(\eta)$ et le débit sont de plus en plus faibles. Ceci correspond à une perte d'énergie égale au travail des forces électromagnétiques plus importante lorsque le champ magnétique est plus intense (M plus grand) ou pénètre mieux dans le fluide (p plus petit). Cette perte d'énergie et cette réduction du débit sont plus forts lorsque la paroi est conductrice que lorsqu'elle est isolante.

On notera que la résistance électromagnétique opposée à l'écoulement diffère aussi selon la conductivité électrique de la paroi. Ceci peut s'interpréter assez simplement en considérant l'équilibre global d'une tranche fluide :

$$(26) \quad \left(\frac{dw}{d\eta} \right)_{\eta=1} = \frac{M^2}{2} \left[\frac{w_0 + 2pf_0}{2p} + \int_0^1 w \eta^{2p-1} d\eta \right] - \frac{K}{2}$$

La solution générale de (20) :

$$(27) \quad f = \frac{w_0 + 2pf_0}{2p} - \frac{1}{\eta^{2p}} \int_0^\eta w(\zeta) \zeta^{2p-1} d\zeta$$

et les conditions aux limites électriques :

$$(28) \quad \begin{cases} f_{(1)} = \frac{w_0 + 2pf_0}{p}, & \text{si } \sigma^* = 0 \\ f_{(1)} = 0, & \text{si } \sigma^* e \gg \sigma R \end{cases}$$

permettent d'expliciter l'intégrale figurant dans le terme de résistance électromagnétique de la relation (26) :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 w \eta^{2p-1} d\eta = - \frac{w_0 + 2pf_0}{2p}, \text{ si } \sigma^* = 0 \\ \int_0^1 w \eta^{2p-1} d\eta = \frac{w_0 + 2pf_0}{2p}, \text{ si } \sigma^* e \gg \sigma R \end{array} \right.$$

Et l'expression générale de $w(\eta)$ permet de préciser la valeur du groupement $w_0 + 2pf_0$:

$$(30) \quad w_0 + 2pf_0 = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{2K}{M^2} \frac{\alpha}{\beta}, \text{ si } \sigma^* = 0 \\ \frac{2K}{M^2} \frac{p\alpha}{1-\beta p}, \text{ si } \sigma^* e \gg \sigma R \end{array} \right.$$

où les coefficients α et β désignent :

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \int_0^1 \left[I_0(p) \int_p^1 \frac{F(x)}{x I_0^2(x)} dx \right] \eta^{2p-1} d\eta \\ \beta = \frac{1}{I_0(p)} \int_0^1 I_0(p) \eta^{2p-1} d\eta \end{array} \right.$$

Il apparaît ainsi que, lorsque la paroi est isolante, les lignes de courant électrique se refermant dans le fluide, la composante axiale de la résistance électromagnétique est nulle. L'équilibre global de chaque tranche fluide impose alors l'égalité du frottement à la paroi et du gradient de pression :

$$(32) \quad \left(\frac{dw}{d\eta} \right)_{\eta=1} = - \frac{K}{2}$$

Ceci se traduit sur la figure 1 par le fait que les profils de vitesse w ont tous la même tangente à la paroi. On retrouve là un caractère bien classique de l'écoulement de Hartmann entre plans parallèles.

Lorsque la paroi est beaucoup plus conductrice que le fluide, les lignes de courant électrique se refermant dans la paroi, cette résistance électromagnétique n'est plus nulle. L'équilibre de chaque tranche fluide s'écrit alors :

$$(33) \quad \left(\frac{dw}{d\eta} \right)_{\eta=1} = -\frac{K}{2} + M^2 \frac{w_0 + 2p f_0}{2p} = K \left[\frac{\alpha}{1 + \beta p} - \frac{1}{2} \right]$$

Le gradient de vitesse à la paroi est d'autant plus faible que M est plus grand et p plus petit ; il peut même s'annuler et changer de signe si le nombre de Hartmann devient assez grand (ce point sera précisé dans le paragraphe suivant). La composante de vitesse axiale est toujours plus faible que, toutes choses égales par ailleurs, lorsque la paroi est isolante.

Le cas $p = 1$ (champ magnétique uniforme) est particulièrement simple ; il met en évidence un aplatissement du profil de vitesse axiale dans la région centrale, exactement comme dans l'écoulement de Hartmann entre deux plans parallèles. On peut alors considérer que, pour ce qui concerne la composante de vitesse axiale, la rotation a simplement pour effet de supprimer la direction privilégiée du champ magnétique et de restituer les profils de Hartmann simultanément sur tous les rayons. Pour les autres valeurs de p le champ magnétique est nul au centre et faible au voisinage de ce point ; la faiblesse de la résistance électromagnétique dans cette région centrale explique que la vitesse y soit plus grande.

On pourra noter que dans le repère choisi, où l'axe z est dirigé dans le sens du vecteur rotation, K n'est pas forcément positif. Mais, de toute façon, w est du même signe que K , que la paroi soit isolante ou conductrice. Les figures 1 et 2 montrent la variation du rapport $W = \frac{4w}{K}$ en fonction de η ; l'ordonnée à l'origine des diverses courbes donne la valeur de $w_0(p, M)$.

En ce qui concerne la composante azimutale de la vitesse $v(\eta)$, indépendante de la conductivité électrique de la paroi, la figure 3 met en évidence la nécessité d'avoir de fortes valeurs du nombre de Hartmann et de faibles valeurs

du nombre de paires de pôles pour qu'une région centrale atteigne la vitesse de synchronisme.

3.2. Cas asymptotique

Pour les grandes valeurs du nombre de Hartmann ($M \gg 1$), assez faciles à obtenir au laboratoire même lorsque le paramètre d'interaction demeure faible ($N \ll 1$), il est facile de déduire des équations (21) et (22) des solutions asymptotiques beaucoup plus parlantes que la solution générale (24).

Pour l'écoulement azimuthal, le couple visqueux dû à l'effet d'entraînement de la paroi s'affaiblit très rapidement dès qu'on s'en éloigne puisqu'il faut bien d'après (21) que les gradients de vitesse dans cette région soient forts ($\frac{\partial v}{\partial \eta} \sim M$) pour compenser l'effet de blocage du champ magnétique ($\sim M^2 v$). Il existe donc une couche pariétale où la distribution de vitesse v vérifie l'équation simplifiée :

$$(34) \quad \frac{d^2 v}{d\eta^2} - \frac{M^2}{2} v = 0$$

Dans la région centrale, l'effet de la viscosité est très faible, l'équation (21) montre qu'alors, puisque $(M^2/2)\eta^{2(p-1)} v \neq 0$, il faut bien que v soit très petit, ce qui correspond au synchronisme. La solution de (34) vérifiant les conditions à la paroi $v(\eta=1) = -1$ et permettant la continuité avec la solution dans la région centrale ($v \neq 0$) conduit au profil de Hartmann :

$$(35) \quad v = - e^{-M(1-\eta)/\sqrt{2}}$$

La zone axiale où $(M^2/2)\eta^{2(p-1)} \ll 1$, où le champ magnétique et les forces électromagnétiques deviennent faibles, n'existe que dans les systèmes possédant au moins deux paires de pôles ($p \geq 2$). Elle tourne bien sûr elle aussi à la vitesse de synchronisme. La faiblesse du couple électromagnétique dans cette région axiale a pour seule conséquence une durée plus longue de la phase initiale de mise en rotation, caractérisée par la diffusion visqueuse du tourbillon.

En ce qui concerne l'écoulement longitudinal, l'équation (22) amène à considérer trois zones distinctes :

a - une zone pariétale qui vérifie l'équation déduite de (22) :

$$(36) \quad \frac{d^2 w_p}{d\eta^2} - \frac{M^2}{2} (w_p + w_0 + 2p f_0) = -K$$

L'indice p caractérise la région pariétale où cette équation est justifiée. La solution, telle que la vitesse s'annule à la paroi et telle que w_p tende vers la limite sans viscosité $\frac{2K}{M^2} - (w_0 + 2pf_0)$ loin de la paroi, est aussi une couche de Hartmann. Elle s'écrit :

$$(37) \quad w = \left[\frac{2K}{M^2} - w_0 + 2pf_0 \right] \left[1 - e^{-\eta(1-\eta)/\sqrt{2}} \right]$$

b - une zone intermédiaire, éloignée à la fois de l'axe et de la paroi, marquée par un équilibre entre le gradient de pression et la résistance électromagnétique. En caractérisant la distribution de vitesse axiale dans cette région par l'indice i , on a :

$$(38) \quad w_i = \frac{2K}{M^2} \eta^{-2(p-1)} - (w_0 + 2pf_0)$$

c - une zone axiale où η devient petit, où la vitesse w_i et ses dérivées deviennent tellement grandes que les forces de viscosité ne peuvent plus être négligées. Ce qui est spécifique à cette région est le fait que progressivement les forces de viscosité viennent relayer les forces électromagnétiques, de telle sorte qu'ensemble elles puissent équilibrer le gradient de pression uniforme. Posons alors, en utilisant α pour caractériser la distribution de vitesse dans cette région :

$$(39) \quad w_\alpha = - (w_0 + 2pf_0) + \frac{K}{p^2} \frac{p\sqrt{2}}{M} H(p)$$

L'équation (22) devient :

$$(40) \quad p \frac{d}{dp} \left[p \left(\frac{dH}{dp} \right) \right] - p^2 H = -p^{2/p}$$

Au voisinage de l'axe ($p \rightarrow 0$) la solution de (40) tend vers une expression de la forme :

$$(41) \quad H(p)_{(p \rightarrow 0)} = - \left(\frac{p}{2} \right)^2 p^{2/p} + H(0)$$

satisfaisant une des conditions aux limites, la symétrie de la distribution de vitesse ($\frac{\partial w_\alpha}{\partial \eta} = 0$ si $\eta = 0$) qui s'exprime par :

$$(42) \quad \left[\frac{dH}{dp} \cdot p^{\frac{p-2}{p}} \right]_{(p=0)} = -p/2$$

L'autre condition aux limites se déduit du raccordement asymptotique avec la solution intermédiaire. Elle s'écrit :

$$(43) \quad \frac{dH}{dp} (p \rightarrow \infty) \Rightarrow 0$$

La solution complète de (40) est illustrée par les figures (4) et (5). Elle peut s'écrire :

$$(44) \quad H(p) = I_0(p) \int_p^\infty \frac{F(x)}{x I_0^2(x)} dx$$

On remarquera le caractère universel de ce jet axial, dont la solution $H(p)$ est indépendante du nombre de Hartmann et de la conductivité des

parois. Les valeurs $H(0)$, qui caractérisent la vitesse sur l'axe, sont les suivantes :

$$(45) \quad H(0) = \begin{cases} 1,57 \pm 0,001 & \text{si } p=2 \\ 2,84 \pm 0,01 & \text{si } p=3 \\ 4,61 \pm 0,01 & \text{si } p=4 \end{cases}$$

On remarquera aussi que ce jet axial se réduit au résultat trivial $w_a = w_i = C^{te}$ lorsque $p=1$, puisque le champ magnétique traverse toute la section droite.

Dans les régions, intermédiaire et pariétale, la distribution de vitesse $w(\eta)$ dépend des conditions électriques à la paroi (29) par l'intermédiaire du groupement $w_0 + 2pf_0$. L'intégrale $\left[\frac{w_0 + 2pf_0}{2p} - \int_0^1 w\eta^{2p-1} d\eta \right]$, qui représente la différence de potentiel électrique entre le centre et la paroi, est bien sûr la somme des contributions respectives des trois régions. Il apparaît toutefois que la région axiale donne une contribution négligeable à cette intégrale, ce qui signifie que la zone axiale où $w_a - w_i$ est non négligeable, et où le champ magnétique est très faible, est pratiquement équipotentielle. Le calcul est alors élémentaire et conduit aux valeurs :

$$(46) \quad w_0 + 2pf_0 = \begin{cases} -\frac{K}{M\sqrt{2}} & \text{si } \sigma^* = 0 \\ \frac{Kp}{M^2} & \text{si } \sigma^* e \gg \sigma R \end{cases}$$

On peut en déduire la valeur $w_i(1)$ de la vitesse à la frontière des couches de Hartmann :

$$(47) \quad w_i(1) = \begin{cases} \frac{K}{M\sqrt{2}} & \text{si } \sigma^* = 0 \\ \frac{(2-p)K}{M^2} & \text{si } \sigma^* e \gg \sigma R \end{cases}$$

Il est intéressant de remarquer que, lorsque la paroi est très conductrice, cette vitesse est nulle si $p=2$ (ce qui rend triviale la zone pariétale) et négative si $p > 2$. On notera aussi que, lorsque la paroi est isolante, cette vitesse est indépendante de p .

3.3. Remarque sur l'influence de la pulsation des forces électromagnétiques.

Il est maintenant possible de préciser l'approximation (16), toujours bien justifiée dans la région pariétale et dans la zone intermédiaire

si le glissement est assez important. Mais cette approximation doit être réexaminée dans le cas où le glissement devient très faible, c'est-à-dire lorsque le nombre de Hartmann est très élevé. Dans toute la région centale, l'écoulement moyen doit être considéré comme strictement axial puisque $v \sim M^{-1}$. Par conséquent, w_i est la seule composante de vitesse qui puisse être modulée suivant θ par les variations périodiques des forces électromagnétiques. Notons \tilde{w}_i ses variations. Les termes supplémentaires à ceux de (22) sont liés par la relation :

$$(48) \quad \frac{1}{2} \eta^P \frac{df}{d\eta} \cos 2p\theta + \eta^{P-1} \tilde{w}_i = 0$$

qui conduit, avec la valeur de $f(\eta)$ calculée à partir de la solution asymptotique, à :

$$(49) \quad \tilde{w}_i = -\frac{(P-1)K}{M^2} \frac{\cos 2p\theta}{\eta^{2(p-1)}}$$

Si $p=1$, quelle que soit la conductivité de la paroi, il apparaît que cette partie périodique de l'écoulement est identiquement nulle, alors l'approximation est bien justifiée. Pour $p \geq 2$, nous avons vu que $w_i(1)$ est de l'ordre de $\frac{K}{M}$ si la paroi est isolante, et de $\frac{K}{M^2}$ si elle est très conductrice. On peut donc conclure que, si $M \gg 1$, les modulations de la vitesse axiale doivent rester faibles lorsque la paroi est isolante. Par contre, elles sont importantes en valeur relative, lorsque la paroi est très conductrice.

En ce qui concerne le jet axial, il n'est réellement significatif d'examiner le degré de validité de la solution que dans le cas de la paroi isolante puisque c'est seulement dans ce cas que l'approximation (16) est justifiée dans la zone intermédiaire. On peut alors penser que les fluctuations de vitesse resteront faibles dans cette zone axiale, puisque, faibles dans la zone intermédiaire, elles doivent s'annuler sur l'axe par symétrie.

4. REGIMES A INTERACTION FORTE ($N \gg 1$)

L'influence de la variation angulaire des forces électromagnétiques devient cruciale lorsque les termes d'inertie ne peuvent plus en limiter les effets. Mais alors, la linéarité des équations rend le problème assez simple. Nous nous limitons ici à étudier la distribution de vitesse dans la section droite.

Nous nous limitons au cas asymptotique $M \gg 1$ qui permet d'étudier

séparément une couche pariétale d'épaisseur $\delta \sim M^{-1}$ et une région centrale non influencée par la viscosité. Dans la couche pariétale, analogue aux couches de Hartmann, les équations des composantes u et v de la vitesse s'écrivent :

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - M^2 v \sin^2 p \theta = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Dans la région centrale caractérisée par l'équilibre entre les forces de pression et les forces électromagnétiques, il est commode d'utiliser les variables

$$(51) \quad n = \eta^P \sin p \theta, \quad t = -\eta^P \cos p \theta$$

qui représentent, respectivement, le potentiel et la fonction de courant du champ magnétique. Les équations des composantes de vitesse normale à la direction du champ magnétique (u_n) et tangente à cette direction (u_t) dans ce repère lié aux lignes de courant et aux lignes équipotentielles du champ magnétique s'écrivent :

$$(52) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial n} \left[(t^2 + n^2)^{(1-P)/2P} u_t \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[(t^2 + n^2)^{(1-P)/2P} u_n \right] = 0 \\ \frac{\partial P'}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial P'}{\partial t} = -\frac{N}{P} (t^2 + n^2)^{(P-1)/2P} u_n \end{cases}$$

Le potentiel de la force centrifuge $\eta^2/2$ est ici contenu dans la pression totale P' .

La solution de (48), qui vérifie la condition de non glissement à la paroi et qui empêche v de devenir grand hors de la couche pariétale, s'écrit :

$$(53) \quad v = e^{-M|\sin p \theta|(1-\eta)}$$

On notera que l'épaisseur δ de cette couche pariétale croît quand $|\sin p \theta|$ diminue, tout comme le débit q entraîné par la paroi :

$$(54) \quad q = \int_{(1-\eta)=0}^{(1-\eta) \sim M^{-1}} v(1-\eta) d(1-\eta) = -\frac{1}{M|\sin p \theta|}$$

On notera aussi que la dérivée $dq/d\theta$ change de signe de part et d'autre des diamètres E O perpendiculaires au champ (fig. 6), ceci signifie que la

couche pariétale reçoit un débit en provenance du coeur de $p\theta = \frac{\pi}{2}$ à $p\theta = 0$, et le restitue dans celui-ci, de $p\theta = 0$ à $p\theta = -\frac{\pi}{2}$, et ainsi de suite.

Dans le coeur, les équations (52) imposent à la solution la forme générale :

$$(55) \quad \begin{cases} u_n = \mathcal{L}(t) (t^2 + n^2)^{\frac{1-p}{2p}} \\ u_t = -\frac{1}{p} (t^2 + n^2)^{\frac{p-1}{2p}} \left[\int_0^n \frac{\partial}{\partial t} \left\{ p (t^2 + n^2)^{\frac{1-p}{p}} \mathcal{L}(t) \right\} dn - g(t) \right] \end{cases}$$

Et les fonctions $\mathcal{L}(t)$ et $g(t)$ sont précisées, l'une par la symétrie de la distribution de l'induction magnétique et de la solution dans la zone pariétale, $u(-n) = -u(n)$:

$$(56) \quad u_n \equiv \mathcal{L}(t) = 0$$

l'autre, $g(t)$, par l'expression du débit entraîné par la paroi dans la couche pariétale. On en déduit directement :

$$(57) \quad \begin{cases} g(t) = -\frac{P^2 t}{M(1-t^2)^{3/2}} \\ u_t = -\frac{P}{M} \frac{t (t^2 + n^2)^{\frac{p-1}{2p}}}{(1-t^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Ces résultats s'interprètent très simplement ; ils signifient que dans les régions éloignées de la paroi, le champ magnétique, par hypothèse, très fort, refuse toute composante de vitesse qui lui serait perpendiculaire et impose la coïncidence des lignes de courant des deux champs \vec{V} et \vec{B} .

Ce mouvement dans le plan de la section droite est représenté sur la figure 6 dans les deux cas particuliers $p=1$ et $p=2$. Il correspond à $2p$ courants de recirculation tournant tous dans le sens de la paroi. On notera que la vitesse induite dans les régions centrales, c'est-à-dire le glissement, est de l'ordre de M^{-1} ; elle est dirigée dans le sens contraire à la vitesse de la paroi, ce qui signifie que la vitesse de rotation moyenne est légèrement supérieure à la vitesse de synchronisme.

Il est intéressant d'évaluer la correction qu'apporteraient à la solution obtenue (56) (57) les termes d'inertie. Le plus important de ceux-ci, l'accélération de coriolis, a pour module u_t dans ce repère et est orthogonale au champ magnétique. Cette force de coriolis a donc pour effet de provoquer

une vitesse u_n non nulle qui subit une résistance électromagnétique $N u_n$. L'équilibre de ces deux forces orthogonales au champ magnétique :

$$N u_n \sim u_t$$

montre bien que l'écart par rapport à cette solution est négligeable lorsque $N \gg 1$.

Finalement, on notera que la seule région où la distribution de vitesse n'est pas précisée est une portion de la couche pariétale située au voisinage des points E et O , dont l'étendue $\delta\theta$ est de l'ordre de N^{-1} .

5. CONCLUSION

Les principaux résultats de ce travail concernent l'influence du nombre de pôles $2p$ et de la pulsation ω du champ magnétique. Ces deux paramètres peuvent être séparés grâce à une approximation qui permet de négliger la pulsation des forces électromagnétiques et du champ de vitesse. Dans cette approximation, seul le paramètre p intervient. Son effet consiste essentiellement à rendre les forces électromagnétiques de plus en plus faibles au voisinage de l'axe, quand p s'accroît. Alors l'écoulement longitudinal passe d'une structure voisine de celle de l'écoulement de Hartmann, à une configuration marquée par un jet axial où la viscosité joue un rôle non négligeable. Une partie importante du débit transite dans ce jet.

En ce qui concerne le mouvement dans la section droite de la conduite, l'influence de p se traduit essentiellement par une efficacité de moins en moins grande de la mise en rotation lorsque p s'accroît.

L'influence de la pulsation du champ magnétique est importante dans l'hypothèse d'un régime à interaction forte ($N \gg 1$) qui conduit à des équations linéaires. Elle est analysée dans le cas de fluides assez peu visqueux ($M \gg 1$), et seulement pour le mouvement dans la section droite. Cette pulsation engendre des courants secondaires superposés à la rotation générale du fluide et régulièrement espacés dans des secteurs limités par les pôles successifs.

Finalement ces deux paramètres p et ω ont une influence beaucoup plus grande sur le mouvement longitudinal (w) que sur le mouvement transversal (u et v). Il est bien certain que c'est l'hypothèse d'un écoulement établi qui, en assurant un découplage de ces deux mouvements, permet d'analyser chaque mécanisme séparément. Dans les expériences réelles, où l'on

utilise des inducteurs courts, ces mécanismes interagissent et deviennent plus complexes en raison de leur caractère tridimensionnel. On peut penser, en raison de la complexité du brassage ainsi produit, que cet écoulement doit être extrêmement instable, et qu'une partie importante du travail des forces électromagnétiques sert finalement à agiter le fluide.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] ALBERNY R., BACKER R., BIRAT J-P., GOSSELIN P., WANIN M., "Quality improvement of strand cast billets through electromagnetic stirring".
Electric Furnace Proceedings, 1973, 237-247.
- [2] ALEMANY A., BARBET J., FAUTRELLE Y., MOREAU R., "Procédé de pulvérisation électromagnétique de métaux liquides"
(Brevet A.N.V.A.R. - PECHINEY, à paraître incessamment).
- [3] ROBINSON T., "An experimental investigation of a magnetically driven rotating liquid-metal flow"
J. Fluid Mech., vol. 60, part 4, 1973, p. 641-664.
- [4] MOFFAT H.K., "On fluid flow induced by a rotating magnetic field"
J. Fluid Mech., vol. 22, part 3, 1965, p. 521-528.
- [5] KAPUSTA A.B., "Motion of conducting fluid under the action of a rotating magnetic field"
Magn. Hidrodin., vol. 4, n° 2, 1968, p. 71-76, *Magn. hydrodynamics*, vol. 4, n° 2, 1970, p. 51-54.
- [6] DALBERG E., "On the action of a rotating magnetic field on a conducting liquid. AB Atomenergi, Studsvik, Sweden, Rep. AE-447, 1972.

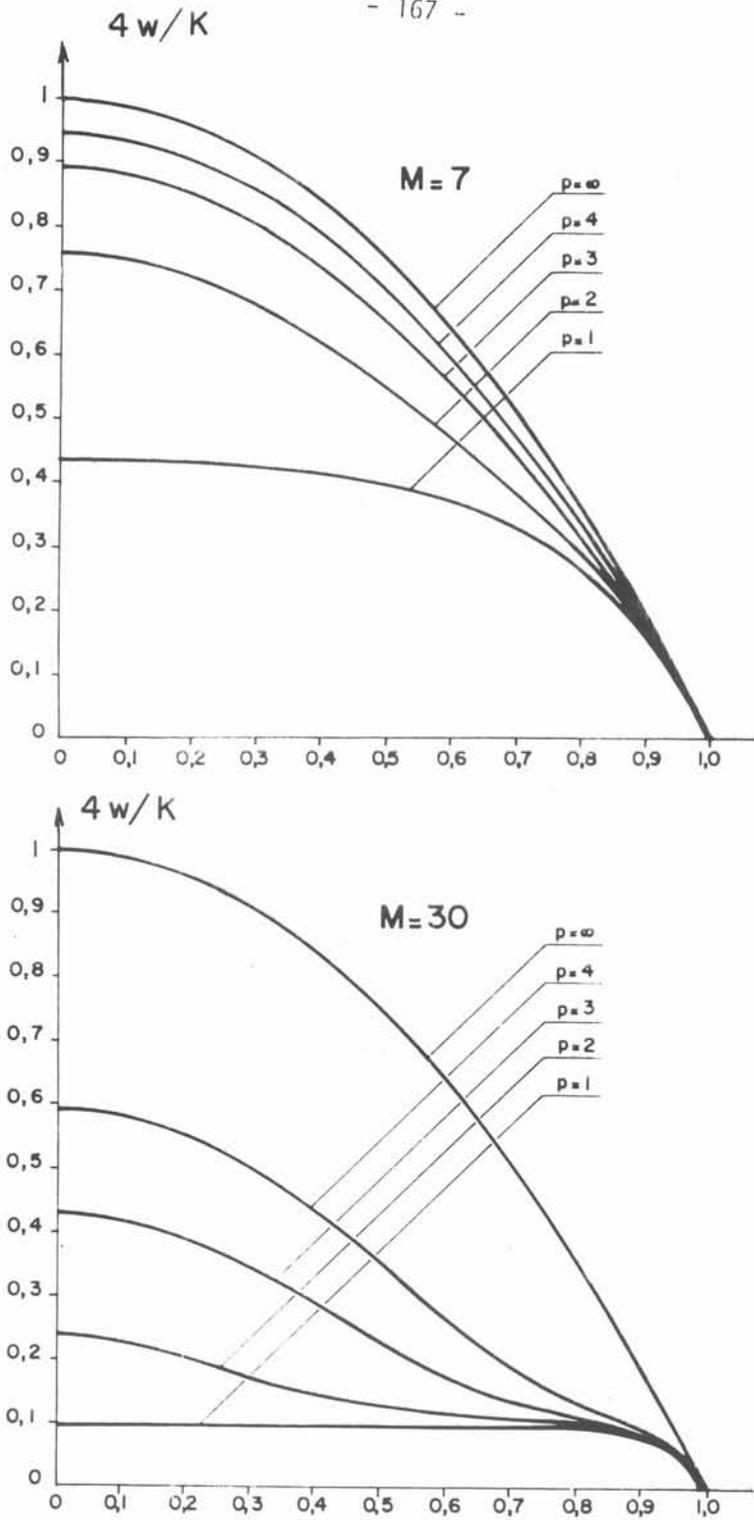


Fig. 1. Profils de vitesse axiale w lorsque $N \ll 1$ et $\nabla^* = 0$

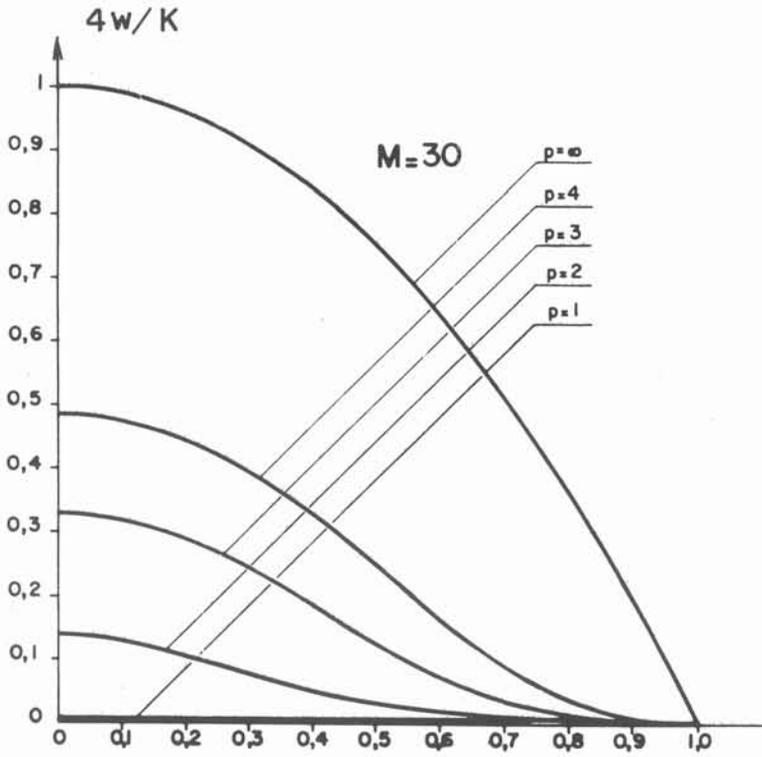
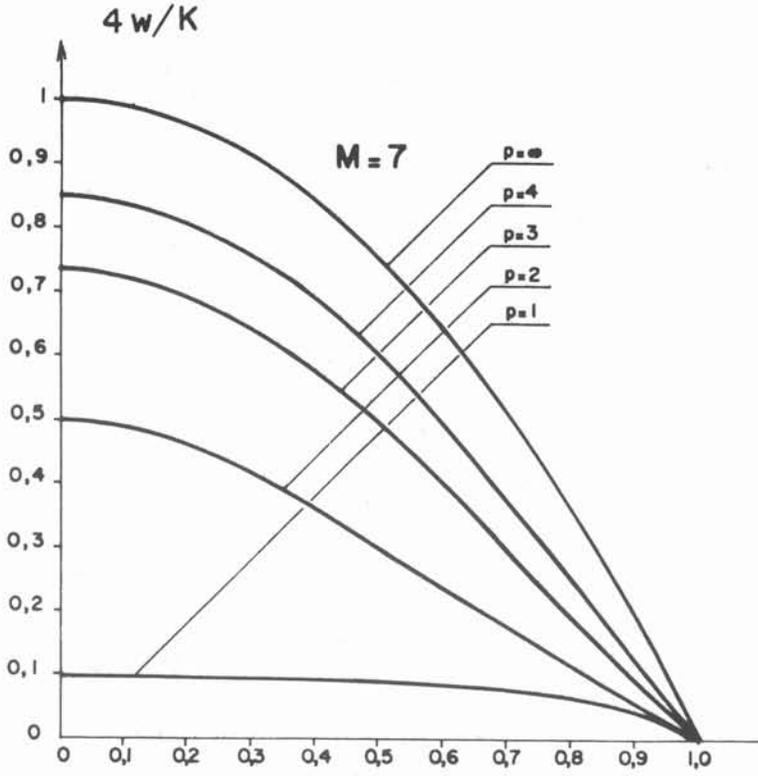


Fig.2.- Profils de vitesse axiale w lorsque $N \ll 1$ et $\tau^* e \gg \nabla R$

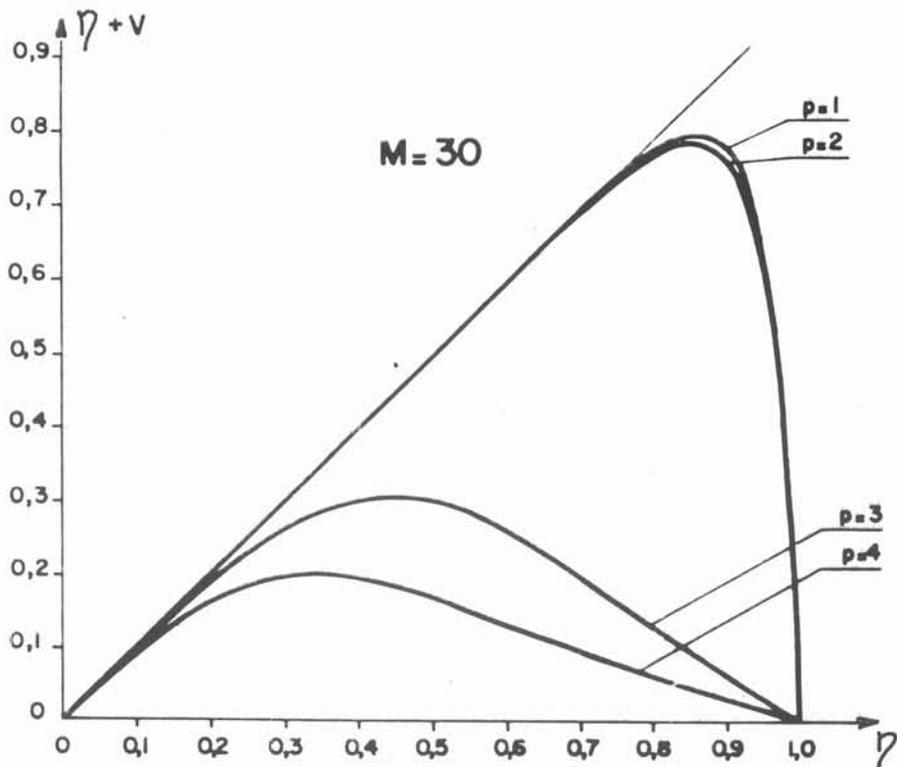
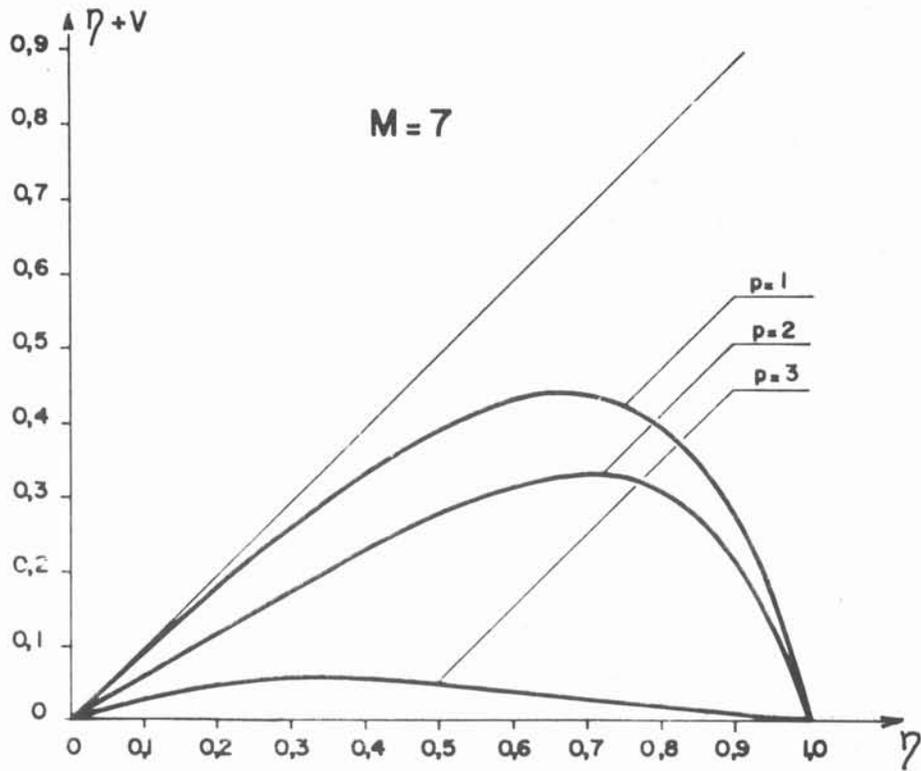


Fig.3- Profils de vitesse azimutale $\eta + v$ lorsque $N \ll 1$

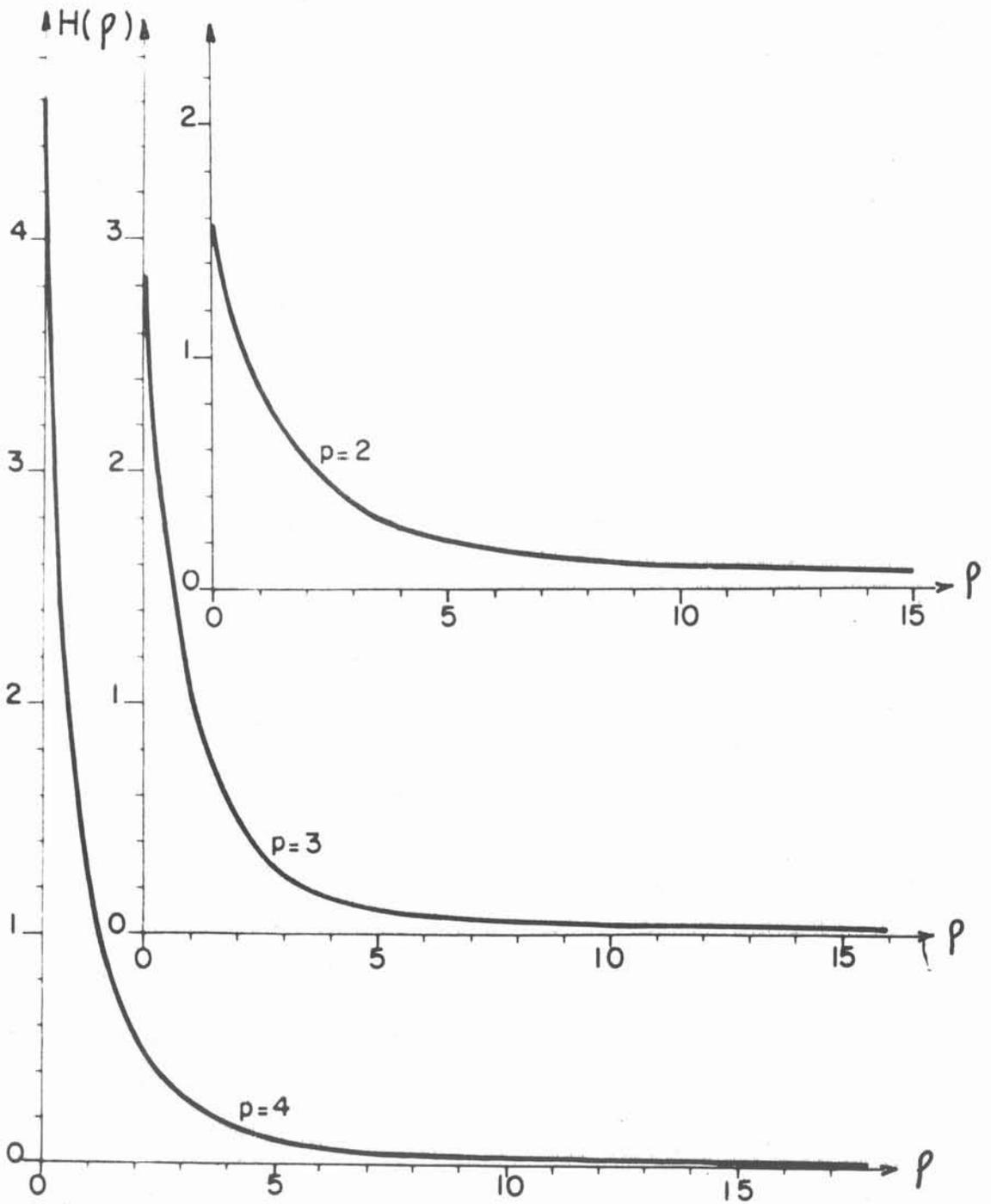


Fig.4_ Profils de vitesse axiale normalisée $H(\rho)$ dans le jet central lorsque $N \ll 1$

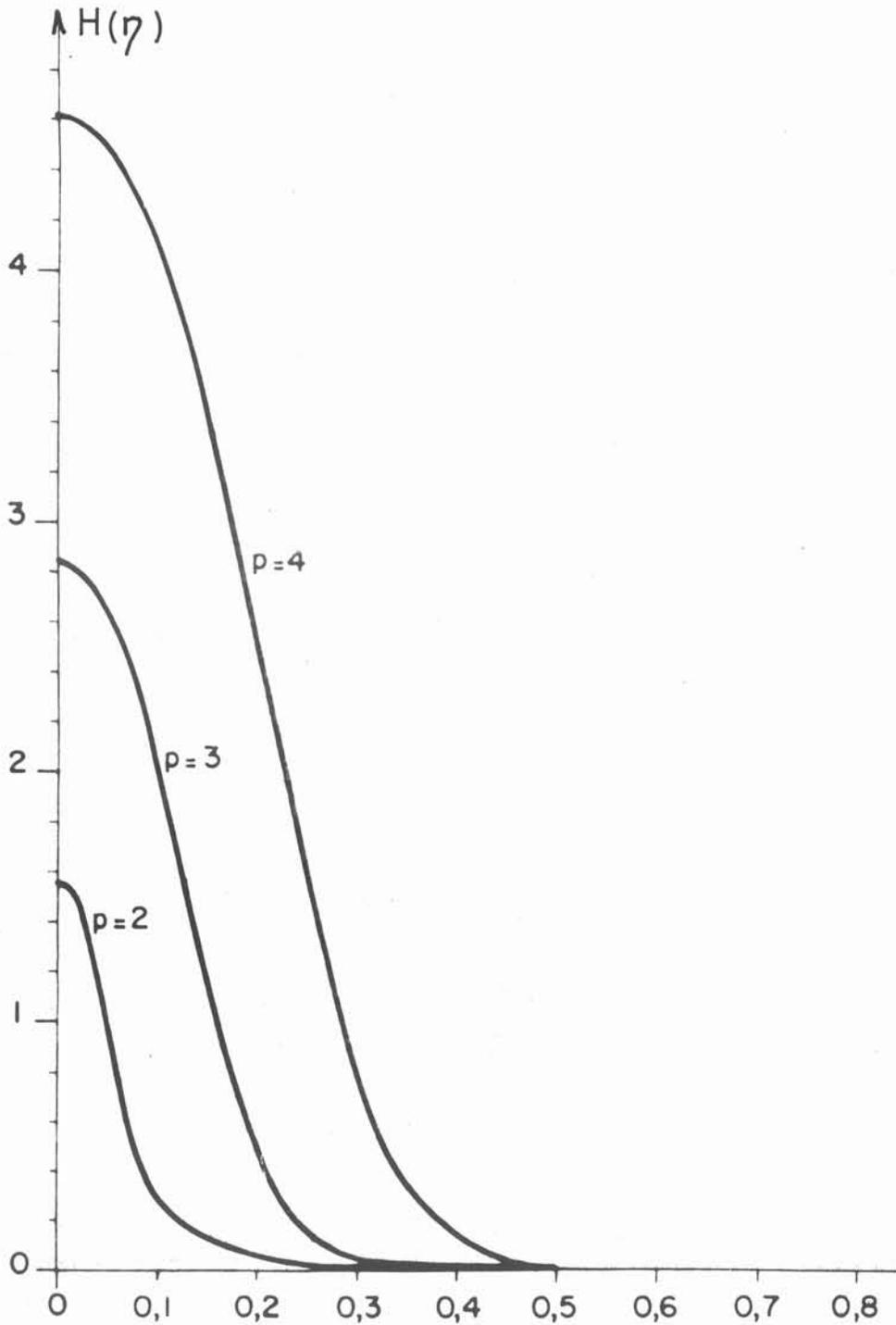


Fig. 5 - Profils de vitesse axiale $H(\eta)$ dans le jet central lorsque $N \ll 1$ et $M = 10^3$

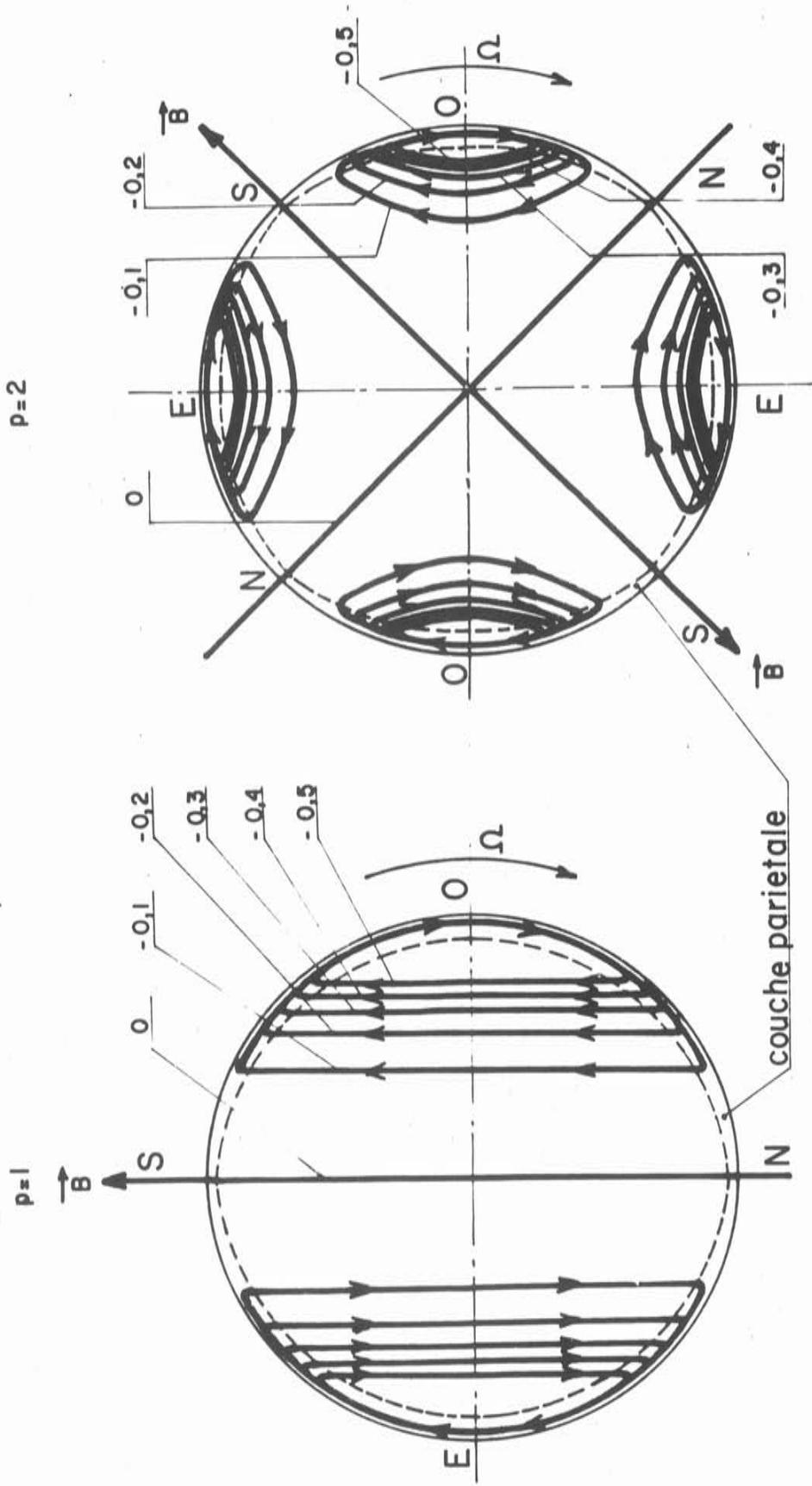


Fig.6.- Lignes de courant de l'écoulement secondaire dans une section droite lorsque $N \gg 1$

C H A P I T R E I I I

ECOULEMENT M. H. D. EN PRESENCE D'UN CHAMP
MAGNETIQUE TRANSVERSAL A PLUSIEURS PAIRES DE POLES



ÉCOULEMENT MHD
EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE TRANSVERSAL
A PLUSIEURS PAIRES DE POLES

A. ALEMANY* et R. MOREAU*

RESUME

On étudie l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible et conducteur de l'électricité dans une conduite circulaire en présence d'un champ magnétique transversal à P paires de pôles. Lorsque les forces électromagnétiques sont grandes devant les forces d'inertie et pour le cas du régime hydrodynamiquement établi, l'écoulement axial est peu perturbé par une rotation éventuelle du champ magnétique. Dans le cadre de l'approximation asymptotique des champs intenses caractérisée par des valeurs élevées du nombre de Hartmann on met en évidence, si $P > 1$, une forte inhomogénéité spatiale du champ de vitesse liée à l'inhomogénéité spatiale de la distribution du champ magnétique. Cette inhomogénéité est caractérisée essentiellement par la présence de régions singulières très minces, où les vitesses sont très élevées, l'une est voisine de l'axe de la conduite, les autres en nombre égal au nombre de pôles sont des couches dont les axes coïncident avec les lignes du champ magnétique lorsque celui-ci est purement radial. L'influence de la conductivité électrique de la paroi est mise en évidence en considérant les deux cas extrêmes : paroi isolante, paroi parfaitement conductrice.

* Institut de Mécanique de Grenoble, B.P. 53 - Centre de Tri, 38041 GRENOBLE CEDEX (FRANCE).

MHD FLOW IN THE PRESENCE OF
A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD WITH SEVERAL DIPOLES

ABSTRACT

We study the laminar motion of a viscous, incompressible and electrically conducting fluid in a circular duct, in the presence of a transverse magnetic field with P pairs of poles. When the electromagnetic forces are stronger than the inertial forces and if there is no variation in the flow direction, the axial velocity profile is not influenced by an eventual rotation of the field. In the case of high values of the Hartmann number and if P greater than one, the inhomogeneity of the magnetic field leads to an inhomogeneity in the axial flow. This is characterized by the presence of thin singular regions where the velocity is very large ; one region is located near the axis of the duct, the others, the number of which is equal to $2p$ are layers located in the vicinity of the poles lines where the magnetic field is purely radial. The influence of the electrical conductivity of the wall is cleared up by considering the two extreme cases : insulating wall, wall much more conducting than the field.

1. INTRODUCTION

La plupart des études relatives aux écoulements hydromagnétiques en conduites concernent le cas où le champ magnétique appliqué est uniforme, et nécessairement à deux pôles. La première solution connue de ce type de problème, due à Hartmann [1], concerne l'écoulement entre deux plans parallèles infinis. Le problème plus réaliste de l'écoulement en conduites de section rectangulaire ou circulaire a été résolu par Schercliff ([2], [3], [4]). Des études plus récentes assez nombreuses ont été consacrées aux cas où la conductivité des parois de la conduite présente des discontinuités simulant la présence d'électrodes (Hunt [5], [6], voir aussi pour une bibliographie récente Hunt et Moreau [7]). Dans tous les cas, à côté des solutions exactes, des solutions asymptotiques particulièrement simples et facilement interprétables ont été obtenues dans le cadre de l'approximation des champs intenses et des valeurs élevées du nombre de Hartmann qui correspond bien aux expériences de laboratoire et aux situations industrielles.

Ces études théoriques relatives pour la plupart au cas du régime hydrodynamiquement établi supposent que les inducteurs sont de dimension infini. Dans les écoulements réels caractérisés par contre par des inducteurs courts limités à la longueur des pièces polaires d'électroaimant, l'écoulement présente un caractère tridimensionnel très marqué lié à l'effet de pénétration du fluide dans le champ magnétique. Cet effet, (profil en M) bien connu par la plupart des expérimentateurs (Hartmann et Lazarus [8], Lykoudis [9], Branover [10], Rosant [11] etc...) serait d'après les travaux les plus récents [10] responsable de la persistance anormale de la turbulence qui se manifeste dans certaine condition expérimentale malgré l'effet stabilisant du champ magnétique. Même dans le cas simple du champ bi-polaire, il n'existe aucune théorie exacte précisant la formation de ce profil en M ; ces effets de bout, à fortiori, plus complexe encore dans le cas des champs à plusieurs paires de pôles ne seront pas examinés dans cet article.

De récentes perspectives d'applications métallurgiques, comme la pulvérisation ou le brassage électromagnétique des métaux liquides, ont renouvelé l'intérêt de ces écoulements en conduites en introduisant des champs magnétiques tournants à plusieurs paires de pôles [12]. Outre l'influence de la rotation du champ magnétique sur l'écoulement dans le plan de la section droite, récemment analysée [12], une autre caractéristique

essentielle de ces champs est leur inhomogénéité (le champ magnétique s'annule sur l'axe de la conduite, et le long d'un cercle sa direction varie constamment), qui impose une forte inhomogénéité de la composante de vitesse axiale. La première étude de cette inhomogénéité peut-être attribuée à Yule [13] qui a étudié le cas d'un champ magnétique quadripolaire fixe. Cette étude à caractère essentiellement expérimentale diffère toutefois de toutes celles précédemment citées par le fait que les courants électriques circulant dans le fluide ne résultent pas d'un phénomène d'induction mais sont reliées par des électrodes à un circuit extérieur.

Nous nous proposons d'analyser l'écoulement laminaire hydrodynamiquement établi d'un fluide conducteur de l'électricité s'écoulant dans une conduite circulaire de rayon intérieur R , sous l'influence d'un champ magnétique transversal à p paires de pôles. Cette étude se situe dans le cadre des approximations classiques :

$$(1) \quad \begin{cases} R_m = UR\mu\sigma \ll 1 \\ M = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} BR \gg 1 \end{cases}$$

La première, portant sur la petitesse du nombre de Reynolds magnétique R_m , signifie que le champ magnétique appliqué n'est pas modifié par l'écoulement du fluide (de vitesse typique U , de perméabilité magnétique μ , de conductivité électrique σ , de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν), la seconde, portant sur la grandeur du nombre de Hartmann M limite la portée de l'étude aux champs magnétiques assez intenses. L'originalité de ce travail réside dans l'analyse de l'influence du nombre de paires de pôles du champ magnétique que nous noterons p pour les deux cas extrêmes :

- paroi isolante :

$$\sigma^* = 0$$

- paroi beaucoup plus conductrice que le fluide :

$$\sigma^* e \gg \sigma R$$

(σ^* désigne la conductivité électrique de cette paroi mince d'épaisseur e).

Sous réserve des approximations déjà citées, cette étude permet de dégager les principaux caractères de l'écoulement liés à l'inhomogénéité du champ magnétique si $p > 1$.

2. FORMULATION GENERALE DU PROBLEME

La distribution du champ magnétique appliqué dans une section droite de la conduite exprimée en coordonnées cylindriques (r, θ) est de la forme :

$$(2) \quad \begin{cases} B_r = B_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{(p-1)} \sin(p\theta - \omega t) \\ B_\theta = B_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{(p-1)} \cos(p\theta - \omega t) \end{cases}$$

La justification de cette expression (4) qui est celle d'un champ magnétique tournant à la vitesse angulaire $\Omega = \omega/p$ constante (ω est la fréquence des courants électriques inducteurs) a été donnée dans un article antérieur [12]. Dans le cadre de l'approximation des petits nombres de Reynolds magnétiques, la vitesse \vec{V} , le champ électrique \vec{E} , la densité de courant \vec{j} et la pression π vérifient les équations :

$$(3) \quad \begin{cases} \text{Rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{j} = 0 \\ \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \\ \text{div } \vec{V} = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = - \text{grad } \pi + \vec{j} \wedge \vec{B} + \rho \nu \nabla^2 \vec{V} \end{cases}$$

On ne s'intéresse qu'au régime permanent et hydrodynamiquement établi, et il est commode de se placer dans un repère tournant à la vitesse de synchronisme. On envisage alors que le cas où le mouvement axial du fluide est dominé par les forces électromagnétiques de l'ordre de $\sigma B_0^2 W$ (W désignant la vitesse

axiale) ; ce qui signifie que les forces d'inertie dans ce mouvement axial, égales pour l'essentiel à $\rho v \omega / \sigma$ (v désignant la vitesse tangentielle) doivent demeurer faibles devant ces forces électromagnétiques. La composante V étant au plus égale à la vitesse de synchronisme (et en fait toujours beaucoup plus faible hors de la couche pariétale si $M \gg 1$), un ordre de grandeur majoré des forces d'inertie est donc $2\rho\Omega RW/\eta$ de sorte que l'approximation du régime à interaction forte s'écrit encore :

$$\sigma B_0^2 W \gg 2\rho\Omega RW/\eta$$

$$\text{soit } \frac{\sigma B_0^2}{\rho\Omega R} = N \gg 1$$

Si $\Omega = 0, (\omega = 0)$ l'écoulement du fluide est réduit au seul mouvement axial et la condition $N \gg 1$ est à fortiori vérifiée.

Le champ électrique \vec{E} , irrotationnel dans ce repère tournant, nécessairement plan si le régime est établi, est indépendant des composantes radiales et tangentielles de la vitesse tout comme la composante axiale de la force électromagnétique induite. Dans ces conditions, les équations du mouvement axial et du champ électrique sont découplées de celles du mouvement dans la section droite ; ces grandeurs sont donc indépendantes de la rotation du champ magnétique, c'est à dire de la pulsation ω , et des mouvements secondaires qui lui sont associés. On ne s'intéresse dans ce qui suit qu'à cet écoulement axial** En désignant par E_r, E_θ les deux composantes du champ électrique et par $Re = UR/\nu$ le nombre de Reynolds et en introduisant les notations adimensionnelles suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{D} = \frac{r}{R} \\ \mathcal{P} = \frac{\Pi}{\rho U^2}, \quad K = -Re R \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \\ e_r, e_\theta = \frac{1}{B_0 U} (E_r, E_\theta) \\ w = \frac{W}{U} \end{cases}$$

** L'écoulement dans une section droite fait également partie de cet article antérieur [12]

Les équations (3) conduisent après simplification et après avoir éliminé la densité de courant \vec{j} à :

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta e_{\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta} e_r = 0$$

$$(6) \quad \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta e_r) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial e_{\theta}}{\partial \theta} = \eta^{(p-1)} \cos p\theta \frac{\partial w}{\partial \eta} - \eta^{(p-2)} \sin p\theta \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$(7) \quad M^2 \eta^{(p-1)} (e_r \cos p\theta - e_{\theta} \sin p\theta - \eta^{(p-1)} w) + K + \Delta w = 0$$

Les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent :

$$(8) \quad \begin{cases} w = 0 & \text{si } \eta = 1 \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 & \text{si } \eta = 0 \end{cases}$$

Celles sur les composantes du champ électrique dépendent de la conductivité de la paroi. Si la paroi est isolante ($\sigma^* = 0$) les courants électriques induits se rebouclent dans le fluide et :

$$(9) \quad e_r (\eta = 1) = 0$$

Ils se rebouclent dans la paroi si elle est parfaitement conductrice ($\sigma^* e \gg \sigma R$) et :

$$(10) \quad e_{\theta} (\eta = 1) = 0$$

3. APPROXIMATION ASYMPTOTIQUE $M \gg 1$

3.1. Equations

Pour les fortes valeurs du nombre de Hartmann, il est aisé de déduire du système général (5), (6), (7) des équations particulières valables seulement dans certaines régions caractérisées par des mécanismes spécifiques. On peut distinguer à priori pour cet écoulement deux types de régions (figure 1), nous réservant de revenir sur ce découpage si la solution obtenue dans chacune d'elles n'est pas conforme aux approximations.

a) *La couche pariétale* où η est voisin de 1 ; elle est caractérisée par des gradients radiaux de vitesse très élevés du fait de la proximité de la paroi ($\partial/\partial\eta \sim M$). Il est donc possible d'y négliger les dérivées par rapport à θ devant les dérivées par rapport à η ; e_r et e_θ étant au plus de l'ordre de w , l'équation (6) se réduit alors à :

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial\eta} e_{rP} = \frac{\partial}{\partial\eta} w_P \cdot \cos p\theta$$

En affectant de l'indice p toute quantité relative à cette couche pariétale et en utilisant les différentes approximations déjà citées, les autres équations régissant l'écoulement au voisinage de la paroi s'écrivent :

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial\eta} e_{\theta P} - \frac{\partial}{\partial\theta} e_{rP} = 0$$

$$(13) \quad M^2(\cos p\theta \cdot e_{rP} - \sin p\theta \cdot e_{\theta P} - w_P) + K + \frac{\partial^2 w_P}{\partial\eta^2} = 0$$

b) *La région centrale ou coeur*, éloignée de la paroi, où les gradients de vitesse sont beaucoup plus faibles que dans la couche pariétale. On peut y négliger l'effet de la viscosité. Cette région est donc caractérisée par un équilibre entre forces électromagnétiques et gradient de pression.

Les coordonnées cylindriques, commode pour l'expression des conditions aux limites dans la couche pariétale lorsque $\eta = 1$, ne constituent plus pour cette région centrale le système de référence le mieux adapté au problème, et il est plus simple de poser les équations du mouvement dans un repère naturel orthonormé dont les axes sont parallèles et perpendiculaires aux lignes de champ magnétique en tout point. Si on adopte donc un nouveau couple de variable (figure 1) :

$$(14) \quad \begin{cases} r = \eta^P \sin p\theta \\ r = -\eta^P \cos p\theta \end{cases}$$

qui représente respectivement le potentiel et la fonction de courant du champ magnétique, et en désignant par e_n la composante du champ électrique normale à la direction du champ magnétique et par e_t la composante tangente à cette direction, les équations simplifiées du mouvement dans la région centrale s'écrivent :

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial n} \left[p (t^2 + n^2)^{\frac{1-p}{2p}} e_t \right] = \frac{2(p-1) K t}{M^2} (t^2 + n^2)^{\frac{1-2p}{p}}$$

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial n} \left[p (t^2 + n^2)^{\frac{1-p}{2p}} e_n \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[p (t^2 + n^2)^{\frac{1-p}{2p}} e_t \right]$$

$$(17) \quad -M^2 (t^2 + n^2)^{\frac{p-1}{2p}} \left[e_{n+} (t^2 + n^2)^{\frac{p-1}{2p}} W \right] + K = 0$$

3.2. Solutions partielles

a) Dans la *couche pariétale*, la variation $\Delta e_{\theta p}$ de la composante tangentielle du champ électrique à travers l'épaisseur $\delta \ll 1$ de la couche pariétale ne peut pas être grande puisque d'après (12) :

$$(18) \quad \Delta e_{\theta p} \sim \delta e_{r p}$$

Donc $e_{\theta p}$ varie très peu suivant η (en particulier, s'annulant à la paroi lorsque celle-ci est parfaitement conductrice, $e_{\theta p}$ demeure dans ce cas très faible dans toute l'épaisseur de la couche pariétale). La forme générale de cette composante du champ électrique s'écrit donc simplement :

$$(19) \quad e_{\theta p} \neq f_1(\theta)$$

où $f_1(\theta)$ est une fonction arbitraire de θ , identiquement nulle lorsque la paroi est parfaitement conductrice.

La forme générale de l'autre composante du champ électrique se déduit aisément de l'équation (11) :

$$(20) \quad e_{r_p} = \cos p\theta \cdot (w_p + f_2(\theta))$$

où $f_2(\theta)$ est une seconde fonction arbitraire de θ , identiquement nulle d'après (9) si la paroi est isolante.

La distribution de vitesse axiale vérifie, d'après (13) et en introduisant les expressions (19) et (20), l'équation :

$$(21) \quad \frac{\partial^2 w_p}{\partial \eta^2} - M^2 \sin^2 p\theta \cdot w_p + M^2 (\cos^2 p\theta \cdot f_2 - \sin p\theta \cdot f_1) + K = 0$$

En désignant par $w_\infty(\theta)$ la vitesse au raccordement entre couche pariétale et coeur, où l'effet de la viscosité s'estompe, définie par :

$$(22) \quad w_\infty = \frac{\cos^2 p\theta \cdot f_2 - \sin p\theta \cdot f_1}{\sin^2 p\theta} + \frac{K}{M^2 \sin^2 p\theta}$$

Cette équation (21) s'écrit simplement :

$$(23) \quad \frac{\partial^2 w_p}{\partial \eta^2} - M^2 \sin^2 p\theta [w_p - w_\infty] = 0$$

Sa solution qui vérifie les conditions à la paroi (8) s'écrit :

$$(24) \quad w_p = w_\infty [1 - e^{-M \sin p\theta (1-\eta)}]$$

On trouve là une couche limite de Hartmann dont l'épaisseur varie suivant θ comme $1/M \sin p\theta$. La vitesse dans cette couche, de l'ordre de w_∞ , dépend de l'intensité des courants induits J_{rp} et $J_{\theta p}$ qui s'y développent :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \sigma^* \gg \sigma R \\ \text{si } \sigma^* = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} J_{rP} = \left(w_\infty - \frac{K}{M^2 \sin^2 p\theta} \right) \frac{\sin^2 p\theta}{\cos p\theta} \\ J_{\theta P} = \sin p\theta \cdot w_\infty \left[1 - e^{-M|\sin p\theta|(1-\eta)} \right] \\ J_{rP} \neq 0 \\ J_{\theta P} = -\sin p\theta \cdot w_\infty e^{-M|\sin p\theta|(1-\eta)} + \frac{K}{M^2 \sin^2 p\theta} \end{array} \right.$$

qui sont bien sûr liés aux flux d'injection des courants induits en provenance du coeur et à leurs conditions de bouclage. Nous reviendrons par la suite sur la définition du domaine de validité de la solution (24).

b) Dans le *coeur*. La composante du champ électrique tangente à la direction du champ magnétique admet d'après (15) une expression de la forme :

$$(26) \quad e_t = \frac{K(t^2+n^2)^{\frac{P-1}{2P}}}{M^2 t P} \left[\frac{2(P-1)n}{(t^2+n^2)^{\frac{P-1}{P}}} + \phi(n,t) + R(t) \right]$$

dans laquelle l'introduction de la fonction :

$$(27) \quad \phi(n,t) = \frac{(P-2)(P-1)}{P} \int_{-n}^{+n} (x^2+t^2)^{\frac{1-2P}{P}} x^2 dx$$

n'a pour but que de simplifier l'écriture et où $R(t)$ désigne une fonction arbitraire de t . L'autre composante du champ électrique se déduit aisément de l'équation (16) ; elle s'écrit :

$$(28) \quad e_n = \frac{K(t^2+n^2)^{\frac{P-1}{2P}}}{PM^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{t} \left[P(P-1)(t^2+n^2)^{1/P} + \int_0^n \phi(y,t) dy + n R(t) \right] + L(t) \right\}$$

où $L(t)$ est une autre fonction arbitraire de t . La distribution de vitesse dans cette région centrale s'exprime alors facilement à partir de e_n puisque d'après (17) :

$$(29) \quad w = \frac{K}{M^2(t^2+n^2)^{\frac{P-1}{P}}} - \frac{e_n}{(t^2+n^2)^{\frac{P-1}{2P}}}$$

Il est clair que si l'on change B_0 en $-B_0$ dans la formulation du problème, ce qui revient à intervertir les pôles Nord-Sud, les équations générales du mouvement et les conditions aux limites associées restent inchangées. La distribution de vitesse admet donc une symétrie par rapport aux axes $n = 0$ (fig. 1) puisqu'une inversion de pôles correspondrait à une symétrie par rapport à ces axes. Cette remarque précise immédiatement la fonction $R(t)$ qui doit être identiquement nulle pour que la vitesse soit une fonction paire de n . La fonction $L(t)$ peut s'exprimer en fonction de la vitesse w_∞ à la frontière entre coeur et couche pariétale. Utilisant pour cela les expressions (28) et (29), on obtient :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_\infty \neq \frac{K}{M^2} - e_n (\eta \neq 1) \text{ ou} \\ L(t) = P \left[\frac{1 - M^2 w_\infty}{K} \right] - \left\{ P(P-1) \left(\frac{2}{P} - \frac{1}{t^2} \right) + \int_0^{\eta=\sqrt{1-t^2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \phi(\eta, t) \right) d\eta \right\} \end{array} \right.$$

ce qui permet une écriture relativement commode de la distribution de vitesse : dans le coeur :

$$(31) \quad w = w_\infty + \frac{K}{M^2} \left\{ \frac{P-2}{P} \left[1 - (t^2+n^2)^{\frac{1-P}{P}} \right] + \frac{P-1}{t^2} \left[(t^2+n^2)^{\frac{1}{P}} - 1 \right] - \frac{1}{P} \int_0^{\eta=\sqrt{1-t^2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \phi(\eta, t) \right) d\eta \right.$$

Les deux composantes J_{rc} et $J_{\theta c}$ des courants induits dans cette région centrale ont pour expression :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{rc} = -\frac{K}{M^2} \left[\frac{2(P-1)\sin^2 p\theta + P\cos^2 p\theta}{P\cos p\theta} + \frac{1}{P\eta} \operatorname{rg} p\theta \cdot \phi(\eta, t) \right] \\ J_{\theta c} = \frac{K}{M^2} \left[\frac{2-P}{P} \frac{\sin p\theta}{\eta^{P-1}} - \frac{\phi(\eta, t)}{\eta} \right] \end{array} \right.$$

Il est remarquable que la distribution et l'intensité de ces courants électriques induits (figure 2) ne dépendent pas de la conductivité de la paroi. Ceci s'interprète aisément puisque dans l'équilibre global de cette région centrale n'interviennent de façon significative que les forces de pression (indépendantes de σ^*) et les forces électromagnétiques qui doivent donc leur être égales et opposées, ce qui impose \vec{J} puisque \vec{B} est fixé. Remarquons aussi que si $p = 2$ la distribution des courants induits est purement radiale, la fonction ϕ étant nulle pour $p = 1$ et $p = 2$.

3.3. Solutions complètes

Ce sont les conditions de bouclage des courants induits qui permettent de préciser complètement la solution dans chacune de ces deux régions. Si la paroi est isolante, les courants électriques induits se rebouclent dans une section droite de la conduite de sorte que :

$$(33) \quad J_{rc}(\eta \neq 1) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{\delta} J_{\theta p} d(1-\eta)$$

Si elle est parfaitement conductrice, ils se rebouclent dans la paroi donc :

$$(34) \quad J_{rc}(\eta \neq 1) = J_{rp}(\eta = 1)$$

Utilisant les expressions (25) et (32) de \vec{J}_p et \vec{J}_c , il est aisé de déduire de chacune de ces conditions de bouclage une équation régissant la vitesse à la frontière entre coeur et couche pariétale. Cette équation s'écrit dans le cas de la paroi isolante, en utilisant le couple de variable (n, t) et la relation $(\left[\frac{\partial(\)}{\partial \theta}\right]_{\eta=1} = p(1-t^2)^{1/2} \frac{\partial(\)}{\partial t})$:

$$(35) \quad -\frac{p}{M} (1-t^2)^{1/2} \frac{\partial W_{\infty}}{\partial t} = \frac{(2-p) K t}{M^2 p} + \frac{2(p-1) K}{M^2 t p} + \frac{K \phi(t, n = \sqrt{1-t^2})}{M^2 t p}$$

La solution exprimant que la totalité du flux de courants induits circulant dans la couche pariétale est injectée dans le coeur s'écrit :

$$(36) \quad W_{\infty}(t) (\sigma^* = 0) = \frac{K}{M p^2} \left[(2-p)(1-t^2)^{1/2} + 2(p-1) \log \left| \frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right| - \int_1^t \frac{\phi(t, n = \sqrt{1-t^2}}{t (1-t^2)^{1/2}} dt \right]$$

Dans le cas de la paroi parfaitement conductrice, l'équation (34) donne directement :

$$(37) \quad w_{\infty}(t) (\sigma^* e \gg \sigma R) = \frac{K}{M^2} \left[\frac{2-p}{p} - \frac{\phi(t, n = \sqrt{1-t^2})}{p(1-t^2)} \right]$$

Ces résultats sont illustrés sur les figures 3 et 4. Si $p = 1$, ils coïncident avec ceux obtenus par SCHERCLIFF [3] pour le cas du champ uniforme et homogène. Si $p = 2$ l'inhomogénéité du champ magnétique se manifeste de façon surprenante. En effet, outre les variations angulaires importantes de la vitesse, il apparaît que l'écoulement est opposé en partie ou totalité au gradient de pression moteur suivant que la paroi de la conduite est isolante ou parfaitement conductrice, le signe du débit global étant dans les deux cas l'inverse de celui de K . L'explication de ce résultat paradoxal ne peut qu'être lié aux hypothèses de calcul dont le domaine de validité doit être déterminé avec attention.

Ce qui caractérise la région centrale ou coeur est le fait que les forces de viscosité sont assez faibles pour être négligées devant le gradient de pression moteur imposé et les forces électromagnétiques qui lui sont opposées. Cet équilibre définit les limites de la solution (31), (36), (37) dont le domaine de validité doit être restreint à la partie de la section droite de la conduite où les gradients de vitesse restent modérés. Si $p = 1$, cette condition est réalisée dans la totalité de la section droite hors de la couche pariétale. Par contre, si $p \gg 2$, la distribution de vitesse (31) fait apparaître deux régions autres que la couche pariétale où les gradients de vitesse deviennent tellement grands que l'effet de la viscosité ne peut plus être ignoré.

Il s'agit tout d'abord de la région proche de l'axe de la conduite où le champ magnétique s'annule. La dimension de cette région peut être caractérisée par le rayon où les forces de viscosité deviennent du même ordre que les forces de pression. Désignant par r^* ce rayon et ne retenant dans l'expression de w que les termes qui contribuent le plus à rendre les gradients de vitesse élevés (ils sont indépendants de w_{∞} et de σ^* ,

il vient :

$$(38) \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)_{\eta \sim \eta^*} \sim K \Rightarrow \eta^* \sim M^{-\frac{1}{p+1}}$$

Il apparait que η^* dépend du nombre de paires de pôles, c'est-à-dire de la rapidité de décroissance du champ magnétique lorsque η tend vers zéro qui caractérise le "trou électromagnétique" dans la zone axiale.

Il s'agit ensuite des couches concentrées autour des axes $\cos p\theta = 0$ (couches libres parallèles au champ magnétique) où le champ magnétique est purement radial. La dimension angulaire α^* de cette couche peut également être caractérisée par la limite de validité de la solution (31), dont les termes prépondérants, les mêmes que dans le cas précédent si $\sigma^* e \gg \sigma R$ sont de l'ordre de $K/M^2 \alpha^{*2}$ lorsque $\alpha \Rightarrow 0$. Si $\sigma^* = 0$ il convient aussi de prendre en compte certains termes dépendant de la conductivité électrique de la paroi [d'après (36): $\partial w_0 / \partial \theta^2 \sim K/M \alpha^{*2}$ si $\alpha \Rightarrow 0$], toutefois celle-ci n'a pas une influence déterminante sur l'ordre de grandeur de α^* qui est tel que :

$$(39) \quad \frac{1}{\eta^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right]_{\left(\theta = \frac{\pi}{2p} - \alpha^* \right)} \sim K \Rightarrow \alpha^* \sim M^{-1/2}$$

Il apparaît ici que la dimension caractéristique de ces couches est indépendante de p et est analogue à celle des couches parallèles au champ magnétique ([5], [6]) pour les conduites de section rectangulaire. On est bien entendu tenté de rechercher une analogie profonde entre les couches parallèles de Hunt et Stewartson et ces couches cisailées nouvelles, en dépit du fait que celles-ci semblent étroitement liées à l'inhomogénéité du champ magnétique. Notons pour l'instant qu'il s'agit dans les deux cas de couches purement passives vis à vis de l'écoulement central ; et réservons pour cette question une étude ultérieure plus détaillée de ces couches.

4. ETUDE QUALITATIVE DE L'ÉCOULEMENT DANS LES RÉGIONS SINGULIÈRES

Ce paragraphe a essentiellement pour but de situer les ordres de grandeur principaux de l'écoulement dans les régions singulières ($p > 1$) caractérisées par des conditions aux limites imposées par la solution dans le coeur. Il dégage les mécanismes régissant l'équilibre de ces régions, lesquels sont étroitement liés à la continuité obligatoire du potentiel électrique dans toute la section droite. La détermination de ce potentiel électrique apparaît alors comme une donnée principale du calcul.

Le champ électrique irrotationnel dans le repère choisi, nécessairement symétrique par rapport aux axes où $\text{cosp}\theta = 0$ en vertu de la distribution de l'induction magnétique, dérive d'un potentiel φ défini dans la région centrale ou coeur (en négligeant les faibles variations de potentiel à travers l'épaisseur δ de la couche pariétale, $\Delta\varphi_p/\varphi \sim 1/M$) par :

$$(40) \quad \varphi(\eta, \theta) = \varphi_c(\eta=1, \theta) - \int_1^\eta e_{r_c}(\eta) d\eta$$

($e_{r_c} = e_r \sin p\theta - e_\theta \cos p\theta$). Cette équation n'admet de solution analytique simple que pour les cas $p = 1$ et $p = 2$. Elles s'écrivent alors :

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma^* \gg \sigma_R \\ \sigma^* = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} p=1 \Rightarrow \varphi \neq 0 \\ p=2 \Rightarrow \varphi = \frac{K}{2M^2} \left[1 - \frac{1}{\eta^2} \right] \frac{1}{\cos 2\theta} \\ \\ p=1 \Rightarrow \varphi = \frac{K}{M^2} \left[\eta \cos \theta - \frac{M}{2} (\text{Arc sin}(\eta \cos \theta) + \eta \cos \theta \sqrt{1 - \eta^2 \cos^2 \theta}) \right] \\ p=2 \Rightarrow \varphi = \frac{K}{M^2} \left[\frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 \cos 2\theta} - \frac{M}{4} \left\{ \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - \eta^4 \cos^2 2\theta}}{\eta^2 \cos 2\theta} \right| \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \eta^2 \cos 2\theta + \text{Arc sin}(\eta^2 \cos 2\theta) \right\} \right] \end{array} \right.$$

Quel que soit p , l'origine arbitraire des potentiels correspond à un choix tel que si $\text{cosp}\theta$ change en $-\text{cosp}\theta$, $\varphi(\eta, \theta)$ change en $-\varphi(\eta, \theta)$. La distribution du potentiel électrique pour $p = 2$ (fig. 5) est représentative de l'ensemble des cas $p \geq 2$.

4.1. La zone axiale

Ces résultats (fig. 5) révèlent l'aspect spécifique de la zone axiale que l'on caractérisera par l'indice a . La périodicité angulaire de la distribution du potentiel électrique impose nécessairement que celui-ci s'annule sur l'axe $\eta=0$ pour que sa continuité et ses nécessaires symétries soient satisfaites. Alors la valeur élevée du potentiel à la frontière coeur-couche ($\Psi_c(\eta \sim \eta^*) \sim KM^{\frac{p+2}{p+1}}$) détermine un fort champ électrique au voisinage de l'axe :

$$(42) \quad \begin{cases} e_{ra} \sim \frac{\Psi_c(\eta=\eta^*)}{\eta^*} \sim \frac{K}{M} \\ e_{\theta a} \sim e_{ra} \end{cases}$$

dont la composante radiale a toujours le signe inverse de son homologue dans le coeur si $\sigma^* e \gg \sigma R$

$$(43) \quad \begin{cases} e_{ra}/K < 0 & \text{si } \cos p\theta > 0 \\ e_{ra}/K > 0 & \text{si } \cos p\theta < 0 \end{cases}$$

La condition de conservation des courants (32) injectés dans cette couche axiale permet d'évaluer leur intensité dans cette région :

$$(44) \quad J_{\theta a} \sim J_{ra} \sim KM^{-\frac{p+3}{p+1}}$$

Il apparaît que cette intensité est faible devant celle du champ électrique, leur rapport $|\vec{J}_a/\vec{e}_a|$ est en effet de l'ordre de $M^{-\frac{2}{p+1}}$. Il est clair alors que l'interaction du champ magnétique et du champ de vitesse doit engendrer une force électromotrice de même intensité que celle du champ électrique (force contre-électromotrice) de sorte que les courants électriques, somme de ces deux termes, aient une intensité beaucoup plus faible que chacun d'eux. Connaissant les caractéristiques du champ électrique dans la zone axiale, on peut donc déduire aisément l'ordre de grandeur de la vitesse dans cette région :

$$(45) \quad w_a \# \frac{e_{ra}}{\eta^*(p-1)} \sim KM^{\frac{-2}{p+1}}$$

et son signe puisque d'après (43) celui-ci est toujours le même que celui du gradient de pression K . Le débit qui transite dans la zone axiale est alors de l'ordre de :

$$(46) \quad Q_a \sim K M^{\frac{-4}{p+1}}$$

Le cas limite où p tend vers l'infini, pour lequel le champ magnétique ne pénètre pas dans le fluide, se ramène à l'écoulement de Poiseuille. La zone axiale s'étend alors à toute la section droite et le débit global de l'ordre de Q_a est indépendant du nombre de Hartmann. Les cas plus typiques sont donc ceux des petites valeurs de $p > 1$ pour lesquels cette zone axiale est très concentrée au voisinage de l'axe de la conduite.

Les ordres de grandeur présentés, dont la précision est limitée à une puissance de M , sont relatifs à la partie de la section droite où les dérivées par rapport à θ demeurent faibles (devant les dérivées par rapport à γ). Les régions proches de la couche parallèle échappent donc à leur domaine de validité. Sous les mêmes réserves, le débit qui transite dans le coeur est de l'ordre de :

$$(47) \quad \begin{cases} Q_c \sim K M^{\frac{-4}{p+1}} & \text{et } Q_c/K < 0 \text{ si } \sigma^* e \gg \sigma R \\ Q_c \sim K/M & \text{et } Q_c/K > 0 \text{ si } \sigma^* = 0 \end{cases}$$

Dans le cas de la paroi isolante et dans les conditions asymptotiques envisagées pour le calcul, le débit dans le coeur est toujours du même signe que le gradient axial de pression K , et toujours supérieur à celui qui transite dans la couche axiale. Leur rapport Q_a/Q_c est en effet de l'ordre de $M^{\frac{1-p}{p+1}}$, de sorte qu'on peut conclure qu'indépendamment de ce qui se passe au voisinage de la couche parallèle que nous examinerons par la suite, l'essentiel du débit de l'ordre de K/M transite dans le coeur.

Si la paroi est parfaitement conductrice, le débit dans le coeur, du signe inverse de celui du gradient de pression moteur, est du même ordre de grandeur que celui qui transite dans la couche axiale, de sorte qu'on ne peut déduire de cette première analyse ni l'ordre de grandeur ni le signe

de la somme de ces deux débits. Pour lever ces deux indéterminations, on peut s'appuyer sur un critère global, la différence de potentiel entre la paroi et l'axe.

$$(48) \quad \varphi(\eta=1) - \varphi(\eta=0) = - \int_0^1 J_r d\eta - \int_0^1 \eta^{(p-1)} \cos p\theta w d\eta$$

identiquement nulle si la paroi est conductrice ($\varphi(\eta=1) = \varphi(\eta=0) = 0$), qui s'exprime alors sous forme d'une relation entre une intégrale du champ de vitesse et la circulation du courant électrique suivant un rayon :

$$(49) \quad \int_0^1 \eta^{(p-1)} w d\eta = - \frac{\int_0^1 J_r d\eta}{\cos p\theta}$$

L'intégrale figurant au membre de gauche de l'équation ci-dessus est inférieure à la valeur moyenne de la vitesse suivant un rayon :

$$\overline{w(\eta)} = \int_0^1 w \eta d\eta \geq \int_0^1 \eta^{(p-1)} w d\eta \quad \text{si } p \geq 2$$

de sorte que, connaissant l'ordre de grandeur des courants induits, on peut minorer l'ordre de grandeur de la somme des débits (intégrale suivant θ de cette vitesse moyenne) :

$$(50) \quad Q_a + Q_c \geq \sim KM^{\frac{-p+4}{p+1}} \quad \text{si } p \geq 2$$

Connaissant le signe de ces courants induits (fig. 2.6),

$$(51) \quad \begin{cases} J_{ra}/K < 0 & \text{si } \cos p\theta > 0 \\ J_{ra}/K > 0 & \text{si } \cos p\theta < 0 \end{cases}$$

on peut préciser le signe de cette somme. Il apparaît alors que celui-ci est toujours le même que celui du gradient axial de pression K.

Dans le cas de la paroi parfaitement conductrice, l'écoulement suivant un plan diamétral (fig. 7) comporte donc essentiellement un jet axial de forte intensité ($Q_a \sim KM^{\frac{-4}{p+1}}$) bordé par un écoulement inverse d'intensité voisine, leur somme étant toujours du même signe que le gradient de pression moteur K.

4.2. Les couches parallèles

Les couches parallèles en nombre égal au nombre de pôles $2p$, toutes identiques, sont régulièrement déphasées d'un angle π/p . On se limitera donc à l'étude de la couche $\rho\theta = \pi/2$ qu'on caractérisera par l'indice // .

Le potentiel électrique dans le coeur change de signe de part et d'autre de la couche et est très élevé à son voisinage (fig. 5). Cette couche est donc le siège d'un fort champ électrique transversal :

$$(52) \quad e_{\theta//} \sim \frac{\psi_c(\theta = \pi/2p - \alpha^*)}{\alpha^*} \sim K/M$$

et le signe de ce champ électrique transversal est toujours opposé à celui du gradient de pression moteur :

$$(53) \quad e_{\theta//} / K < 0$$

La conservation des courants induits injectés dans la couche, purement radiaux à sa frontière puisque $(J_{\theta c} / J_{r c})_{\theta \Rightarrow \pi/2} \Rightarrow 0$, permet d'évaluer l'intensité et le signe des courants électriques traversant cette couche.

$$(54) \quad \begin{cases} J_{\theta//} / K > 0 \sim 1/M^2 \\ J_{r//} \sim KM^{-3/2} \text{ et } J_{r//} / K \cos p\theta < 0 \end{cases}$$

Il apparait alors, puisque $J_{\theta//} / e_{\theta//} \sim 1/M$, qu'il doit exister une force électromotrice transversale de forte intensité associée à des vitesses élevées dans la couche parallèle :

$$(55) \quad w_{//} \# - \frac{e_{\theta//}}{\eta^{(p-1)}} \sim K/M$$

et le signe de cette vitesse est d'après (59) toujours le même que celui du gradient de pression K . Le débit qui transite dans cette couche est alors de l'ordre de :

$$(56) \quad Q_{//} \sim w_{//} \cdot \alpha^* \sim KM^{-3/2}$$

Ces résultats supposent que les dérivées par rapport à η restent modérées devant les dérivées par rapport à θ , ce qui exclut de leur domaine de validité le voisinage de la couche axiale. Le débit qui transite dans la partie du coeur suffisamment éloignée de l'axe (au sens qui vient d'être défini) est alors :

a) Pour le cas de la paroi isolante, d'un ordre de grandeur identique ($Q_c'' \sim K/M$) à celui donné par la formule (47) qui intègre la proximité de la couche axiale mais exclut le voisinage de la couche parallèle. L'intensité du débit dans le coeur est donc peu influencé par de faibles déplacements de la frontière fictive de cette région près des régions singulières. On pourra noter aussi que Q_c'' qui a le même signe que le gradient de pression K est toujours supérieur à $Q_{||}$ ($Q_c''/Q_{||} \sim M^{-1/2}$) de sorte que l'on peut conclure que dans ce cas l'essentiel du débit transite dans le coeur et est de l'ordre de K/M .

b) Pour le cas de la paroi conductrice, le débit dans le coeur dépend beaucoup de la distribution de vitesse à proximité des régions singulières. Excluant donc le voisinage de la couche axiale, il n'est pas surprenant que ce débit $Q_c'' \sim K M^{-3/2}$ soit différent de celui donné par la formule (47), en outre il est toujours opposé au gradient de pression K . Le rapport $Q_c''/Q_{||}$ étant de l'ordre de 1, il apparaît de nouveau une indétermination sur le signe et l'intensité du débit total (ou, ce qui est équivalent, sur le signe et l'intensité de la vitesse moyenne suivant un cercle).

Pour lever cette indétermination, on va comme pour le jet axial utiliser un critère global, la différence de potentiel entre deux points d'un même cercle situés l'un sur l'axe $\theta=0$ et l'autre sur l'axe $\theta=\pi/2$, qui s'écrit :

$$(57) \quad \varphi(\eta, \theta=0) - \varphi(\eta, \theta=\pi/2) = \int_0^{\pi/2} \eta^p \sin p\theta w d\theta - \int_0^{\pi/2} J_\theta \eta d\theta$$

Le potentiel électrique s'annulant (par continuité sur l'axe de chaque couche parallèle, on déduit aisément de (57) une condition sur la circulation du champ électrique :

$$(58) \quad \int_0^{\pi/2p} \eta^p \sin p\theta w d\theta = -\varphi(\eta, \theta=0) + \int_0^{\pi/2p} J_\theta \eta d\theta$$

dont on peut déduire la vitesse moyenne dans la couche parallèle (où $\sin p\theta$ est voisin de 1) en fonction des caractéristiques de l'écoulement dans le coeur, ce qui confirme le caractère passif de ces couches. En effet, considérant une autre forme de (58) :

$$(59) \quad \frac{1}{\alpha^*} \int_{\pi/2p-\alpha^*}^{\pi/2p} w_{//} d\theta = -\frac{1}{\alpha^*} \left[- \int_0^{(\pi/2p)-\alpha^*} \sin p\theta w_c d\theta - \frac{1}{\eta^p} \varphi(\eta, \theta=0) + \frac{1}{\eta^p} \int_0^{\pi/2p} J_\theta d\eta \right]$$

dans laquelle les termes figurant dans le dernier membre représentent :

- une intégrale du champ de vitesse qui porte sur la région extérieure à la couche parallèle
- le champ électrique défini sur l'axe $\theta = 0$ qui coupe le coeur en son milieu.
- la circulation du courant électrique dont on peut négliger la faible part due à la traversée de la couche parallèle :

$$\left[\int_{(\pi/2p)-\alpha^*}^{\pi/2p} J_{\theta//} \eta d\theta / \int_0^{(\pi/2p)-\alpha^*} J_{\theta c} \eta d\theta \sim M^{-1/2} \right]$$

on est conduit, introduisant les expressions de la vitesse, du courant induit et du potentiel électrique dans le coeur ($\varphi(\eta, \theta=0) = \int_1^p e_{r_c} \eta d\eta$), dans l'équation (59), au résultat énoncé :

$$(60) \quad \begin{aligned} \overline{w}_{//\theta} = & \frac{K}{M^2 \alpha^*} \left[\frac{p-1}{p} \frac{1-\eta^2}{p \eta^p \alpha^*} + \frac{1}{p} \int_0^{(\pi/2p)-\alpha^*} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{t} \varphi(\eta, r) d\eta \right\} \sin p\theta d\theta \right. \\ & - \frac{1}{\eta^p} \int_0^{(\pi/2p)-\alpha^*} \varphi(\eta, t) d\theta + \int_0^{(\pi/2p)-\alpha^*} \frac{\varphi(\sqrt{1-t^2}, t)}{p(1-t^2)} \sin p\theta d\theta + \int_1^p \frac{\varphi}{p(1-t^2)} \\ & \left. + \int_{\sqrt{1-t^2}}^0 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{t} \varphi(\eta, t) d\eta \right]_{\theta=0} \eta^{p-1} d\eta \end{aligned}$$

Les termes prépondérants (si $\alpha^* \sim M^{-1/2}$) sont le premier et le deuxième du second membre, tous deux positifs et du même ordre K/M, ce qui confirme l'évaluation antérieure (55) concernant l'intensité de la vitesse dans la couche parallèle. On peut observer encore que, la fonction ϕ s'annulant pour $p = 2$, l'expression de la vitesse moyenne dans la couche est alors particulièrement simple. Elle s'écrit :

$$(61) \quad \overline{w}_{/\theta} = \frac{K}{4M^2\alpha^{*2}} \frac{1-\eta^2}{\eta^p}$$

Si $p = 1$, le débit dans une tranche fluide $\eta\alpha^*$ autour de l'axe $\theta = \pi/2$, de l'ordre de $KM^{-5/2}$, est égal au seul terme négligé, et effectivement négligeable si $p > 1$, dans l'équation (59) (il s'agit de la circulation du courant induit à travers l'épaisseur de la couche parallèle). Il n'est donc pas surprenant que la formule (60) donne alors un résultat inexact $w_{/\theta(p=1)} = 0$ (la fonction ϕ s'annulant également pour $p = 1$), ce qui correspond aussi au fait que, dans ce cas, la part du débit global qui transite dans une tranche d'épaisseur comparable à la couche parallèle est faible puisque la solution dans le coeur ne présente aucune singularité.

La vitesse moyenne dans le coeur ($0 \leq \theta \leq (\pi/2p) - \alpha^*$) se calcule aisément à partir de la solution générale pour l'écoulement dans cette région :

$$(62) \quad \overline{w}_{c\theta} = \frac{2pK}{\pi M^2} \left[\frac{\pi(2-p)}{2p^2} \frac{1}{\eta^{2(p-1)}} + \frac{(p-1)}{p^2\alpha^*} \frac{\eta^2-1}{\eta^{2p}} \right. \\ \left. - \int_0^{(\pi/2p) - \alpha^*} \left\{ \int_{\eta=\sqrt{1-t^2}}^{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \phi(y,t) \right) dy \right\} d\theta - \int_0^{(\pi/2p) - \alpha^*} \frac{\phi(t, \eta=\sqrt{1-t^2})}{p(1-t^2)} d\theta \right]$$

Il est alors remarquable que la vitesse moyenne globale suivant un cercle, égale à la somme

$$\frac{\overline{w}_{/\theta} \cdot \alpha^* + \overline{w}_{c\theta} \cdot (\frac{\pi}{2p} - \alpha^*)}{\pi/2p}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{w}_\theta &= \frac{2PK}{\pi M^2} \left[\frac{2-P}{P\eta^{2(P-1)}} - \frac{1}{\eta^P} \int_0^{\pi/2p} \phi(\eta, r) d\theta + \int_0^{(\pi/2p)-\alpha^*} \frac{\phi}{P(1-t^2)} (\sin p\theta - 1) d\theta \right. \\
 &+ \frac{1}{P} \int_0^{(\pi/2p)-\alpha^*} \left\{ \int_{\eta=\sqrt{1-t^2}}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \phi(\gamma, r) \right) d\gamma \right\} (\sin p\theta - 1) d\theta - \frac{1}{P\eta} \int_1^\eta \left\{ \frac{\phi(r, \eta=\sqrt{1-t^2})}{1-t^2} \right. \\
 &\left. - \int_{\eta=\sqrt{1-t^2}}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \phi(\gamma, r) \right) d\gamma \right\} d\eta \Big]_{\theta=0}
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

dépende peu de α^* , les intégrales figurant dans l'expression (63) étant toutes convergentes (puisque $\sin p\theta$ tend vers 1 quand $p\theta$ tend vers $\pi/2$). On aboutit alors au résultat important suivant :

si $p = 1$	$\overline{w}_\theta = K/M^2$	
si $p = 2$	$\overline{w}_\theta = 0$	
si $p > 2$	$\overline{w}_\theta < 0$	et de l'ordre de K/M^2

qui lève complètement l'indétermination sur le signe et sur l'intensité du débit global dans la partie de la section droite extérieure à la couche axiale.

On peut donc conclure qu'en ce qui concerne le cas de la paroi parfaitement conductrice, et associant les résultats obtenus aussi bien pour la zone axiale que pour la couche parallèle, que tout le débit transite si $p \geq 2$ dans un jet confiné au voisinage de l'axe de la conduite. En ce sens, les résultats pour les grandes valeurs du paramètre d'interaction N ressemblent beaucoup à ceux obtenus pour le cas $N \ll 1$ [12].

5. CONCLUSION

L'influence du nombre de paires de pôles du champ magnétique a été étudiée dans le cas des champs intenses caractérisés par des nombres de Harmann élevés. A cet égard, il faut remarquer (fig. 3, 4) que seuls les cas $p = 1$ et $p = 2$ sont vraiment représentatifs du cas asymptotique pour $M = 1000$. Si $p \geq 2$ l'écoulement très différent de celui déterminé par un champ magnétique uniforme ($p = 1$) est marqué par une forte inhomogénéité angulaire et radiale. Cette inhomogénéité se manifeste surtout par la présence de régions singulières très minces caractérisées par des vitesses élevées. L'une (zone axiale) est concentrée au voisinage de l'axe de la conduite, les autres sont des couches

cisaillées dont les axes sont confondus avec les lignes de champ magnétique lorsque celles-ci sont purement radiales ($\cos p\theta = 0$). Les principaux résultats de ce travail qui concerne aussi l'analyse de l'écoulement à l'extérieur de ces régions singulières peuvent être résumés ainsi.

Le champ magnétique s'annule si $p > 1$ sur l'axe de la conduite et est d'autant plus faible à son voisinage que le nombre de pôles est plus grand. Ceci explique la formation du jet axial d'autant plus large que $p > 1$ est plus élevé ($\eta^* \sim M^{-1/(p+1)}$). Les vitesses dans ce jet sont de l'ordre de $KM^{-2/p+1}$, et le débit qui transite a toujours le même signe que le gradient de pression moteur.

La dimension caractéristique des couches parallèles ($\alpha^* \sim M^{-1/2}$) est indépendante du nombre de pôles. La vitesse dans ces couches est de l'ordre de K/M et le débit est du même signe que le gradient de pression.

A l'extérieur de ces régions singulières, l'écoulement dépend beaucoup de la conductivité de la paroi. Il est caractérisé par une couche de Hartmann d'épaisseur variable $\delta \sim |M \sin p\theta|$ et par une région centrale ou coeur dans laquelle le débit, si la paroi est isolante est du même signe que K et de l'ordre de K/M , si la paroi est parfaitement conductrice et si $p > 1$ est du signe inverse de celui du gradient de pression moteur et de l'ordre de $K M^{-4/(p+1)}$, les vitesses étant alors toujours du signe inverse de K .

Au total, il ressort finalement que, si la paroi est isolante, l'essentiel du débit transite dans le coeur. Si la paroi est parfaitement conductrice, le débit transite essentiellement dans le jet axial. Il existe alors des écoulements de recirculation intense aussi bien entre le jet axial et le coeur qu'entre le jet axial et les couches parallèles.

Bien sûr, l'étude des régions singulières est loin d'être achevée, toutefois, les résultats essentiels de ce travail mettent déjà en évidence la grande complexité de ces écoulements en champ non homogène et en particulier des phénomènes de brassage, des zones à fort cisaillement, qui malgré l'effet stabilisant du champ magnétique sont toujours susceptibles d'engendrer la turbulence.

REFERENCES

- [1] HARTMANN J. - *Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field.* Math. Phys. Medd. 15, n° 6, 1937.
- [2] SHERCLIFF J.A. - *Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields.* Proc. Camb. Phil. Soc. 49, p. 136-144, 1953
- [3] SHERCLIFF J.A. - *The flow of conducting fluids in circular pipes under transverse magnetic field.* J. Fluid Mech., Vol. 1, part , pp 644-666, 1956.
- [4] SHERCLIFF J.A. - *Magneto hydrodynamic pipe flow. Part 2. High Hartmann number.* J. Fluid Mech., Vol. 13, part 4, pp 513-518, 1962.
- [5] HUNT J.C.R. - *Magneto hydrodynamic flow in rectangular ducts.* J. Fluid Mech., Vol. 21, part 4, pp 577-590, 1964.
- [6] HUNT J.C.R., STEWARTSON K. - *Magneto hydrodynamic flow in rectangular ducts. II.* J. Fluid Mech., Vol. 23, part 3, pp 563-581, 1965.
- [7] HUNT J.C.R., MOREAU R. - *Liquid-metal magneto hydrodynamics with strong magnetic fields ; a report on Euromech 70.* J. Fluid Mech., Vol. 78, part 2, pp 261-288, 1976.
- [8] HARTMANN J., LAZARUS F. - *Experimental investigations in the flow of mercury in homogeneous magnetic field.* Math. Phys. Medd. 15, n° 7, 1937.
- [9] GARDNER R.A., LYKOURIS P.S. - *Magneto fluid mechanic pipe flow in a transverse magnetic field. Part 1. Isothermal flow.* J. Fluid Mech., Vol. 47, pp 737-764, 1970.
- [10] BHANOVER H., GERSHON P. - *On some aspects of turbulence suppression by transverse magnetic fields.* In "Proceedings of the symposium on turbulent shear flows, Pennsylvania University, pp 12.21 à 12.26, 1977.
- [11] ROSANT J.M. - *Ecoulements hydromagnétiques turbulents en conduite rectangulaire.* Thèse Docteur-Ingénieur, Institut de Mécanique de Grenoble, 1976.
- [12] ALEMANY A., MOREAU R. - *Ecoulement d'un fluide conducteur de l'électricité en présence d'un champ magnétique tournant.* J. De Mech., Vol. 16, n° 4, pp 1-22, 1977.
- [13] YULE A.J. - *Turbulent and laminar pipe flow distorted by magnetic forces.* J. Fluid Mech., Vol. 72, part 3, pp 481-498, 1975.

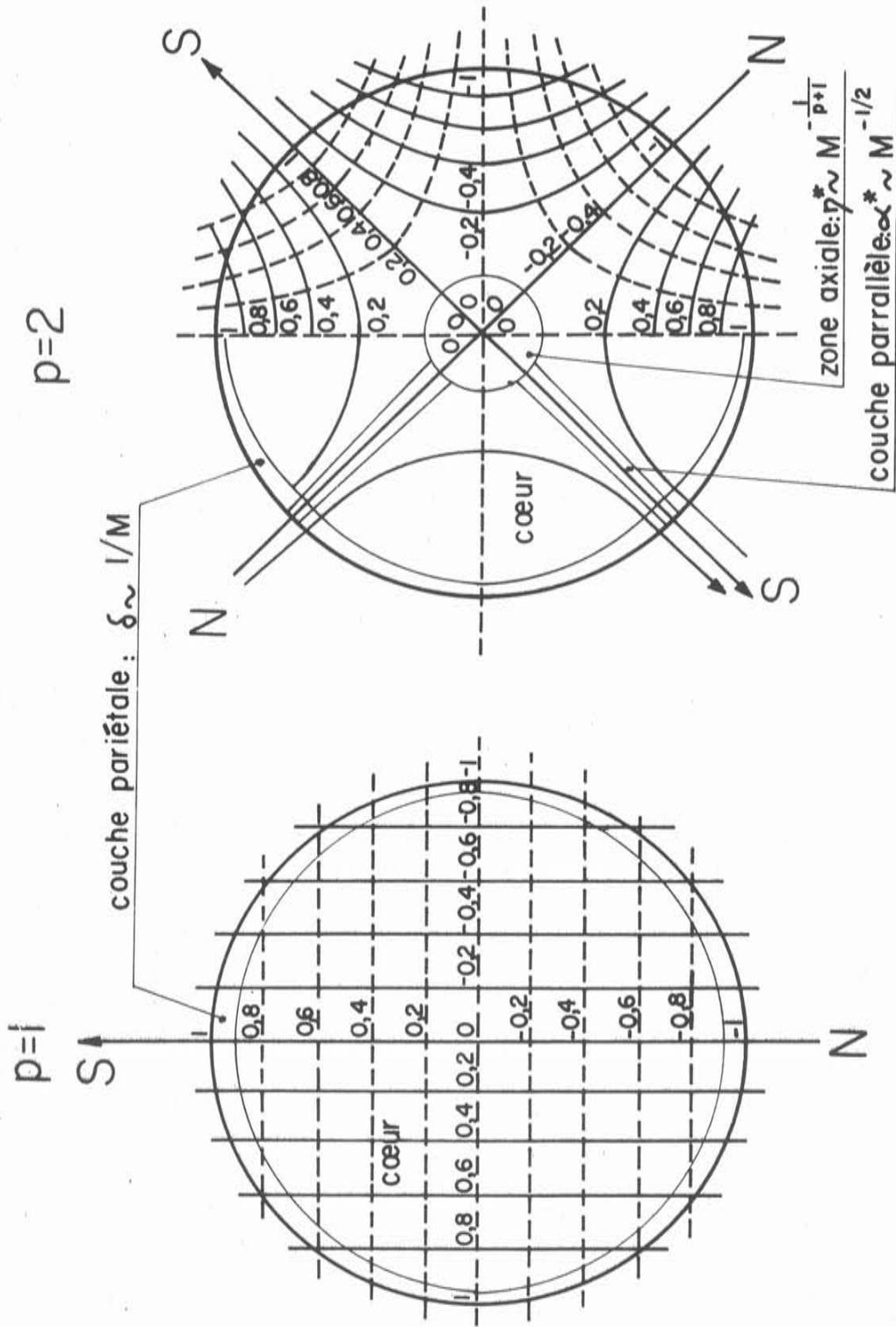
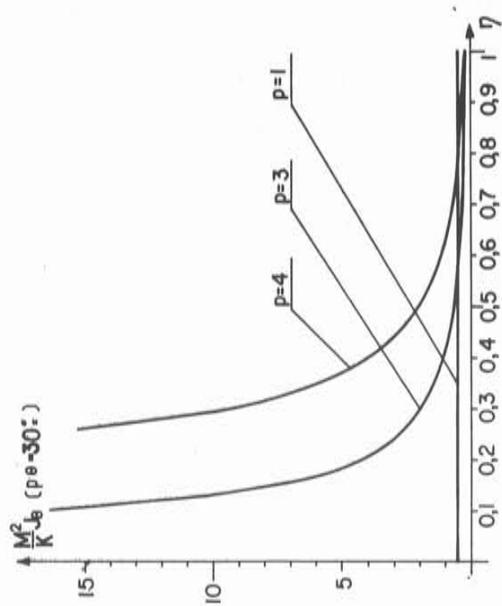


Fig.1.- Découpage de la section droite en régions caractéristiques
 ——— lignes $t = cte$, - - - - - lignes $n = cte$.



$\eta = 0,7$

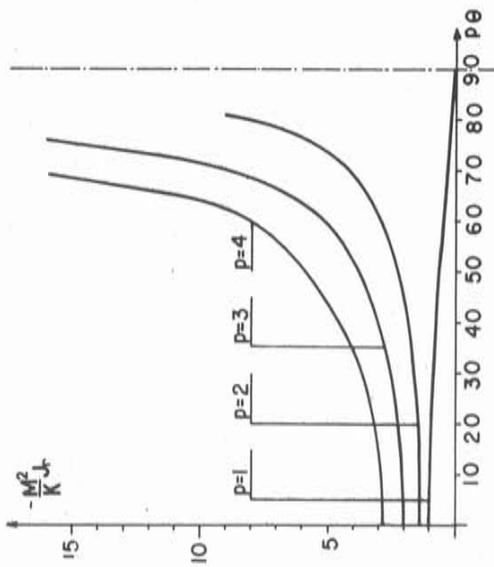
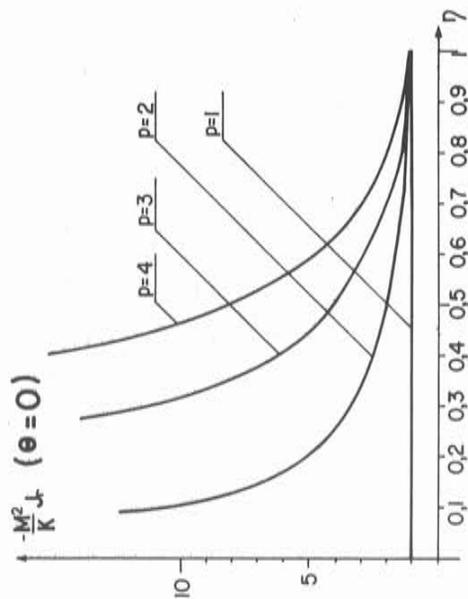
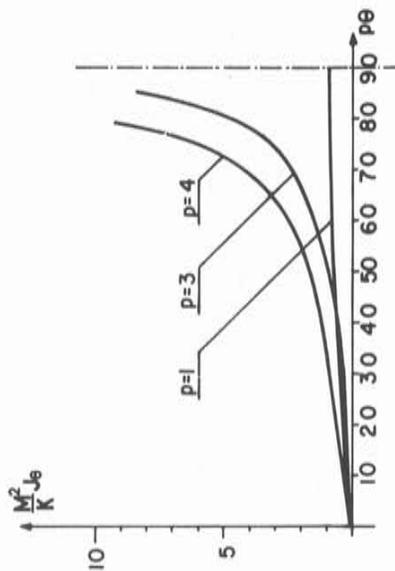


Fig.2. - Distribution des courants induits dans le cœur

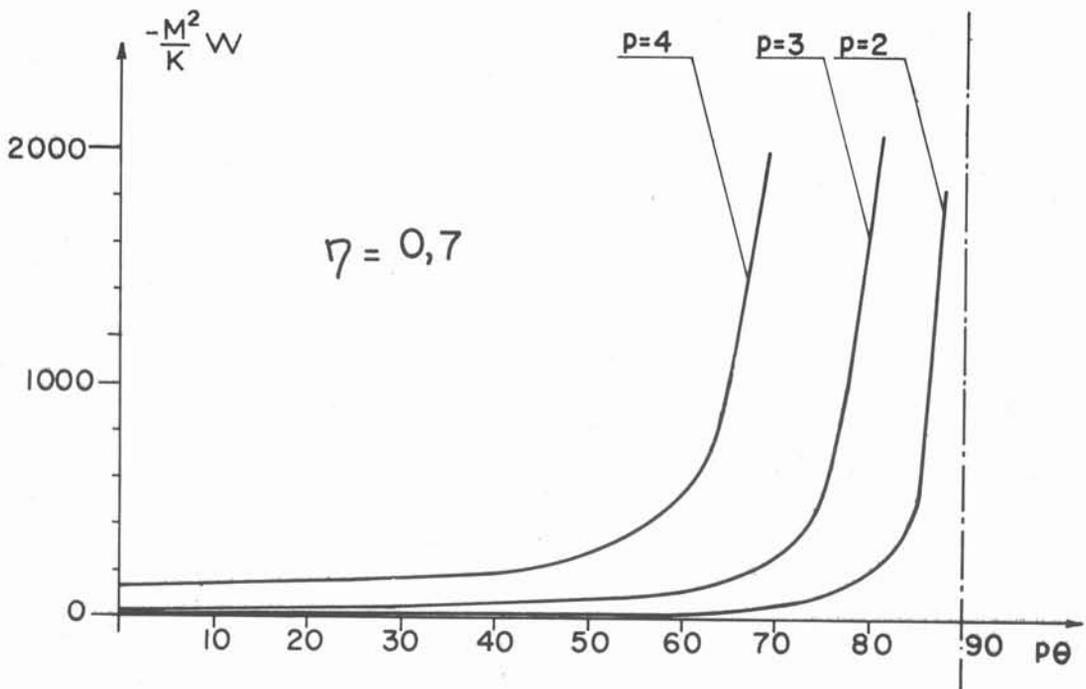
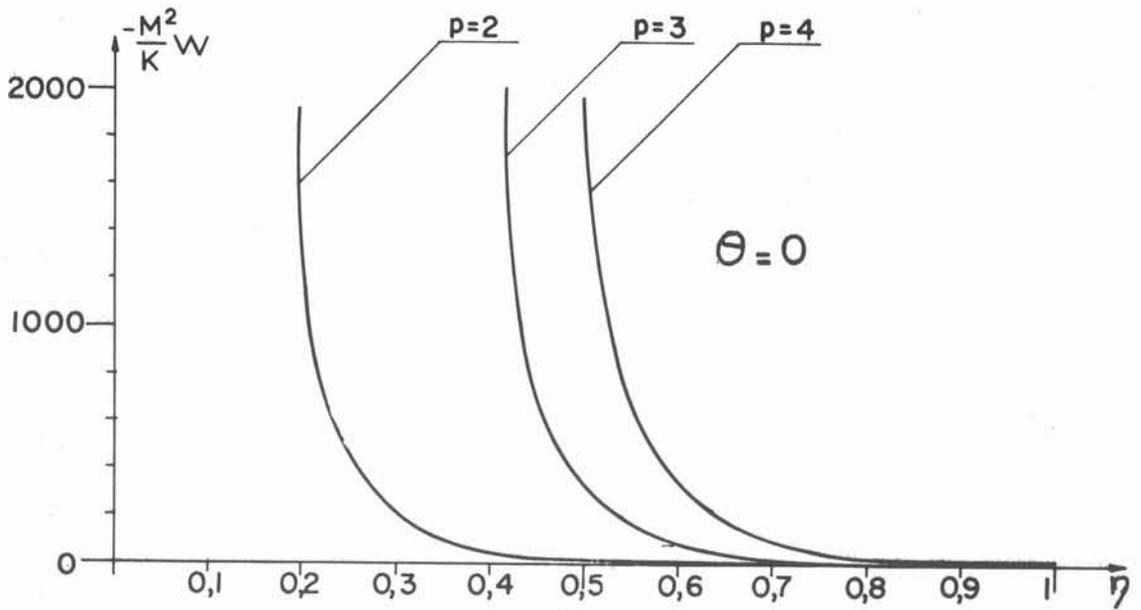


Fig. 3. Distribution de la vitesse dans le cœur
lorsque $\sigma^* e \gg \sigma R$

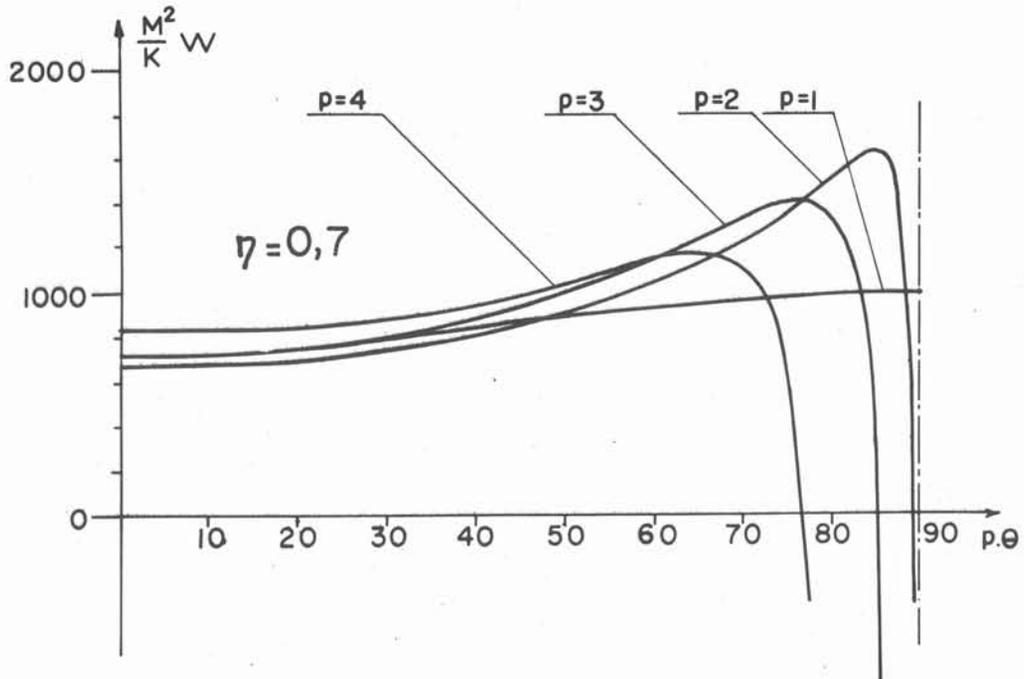
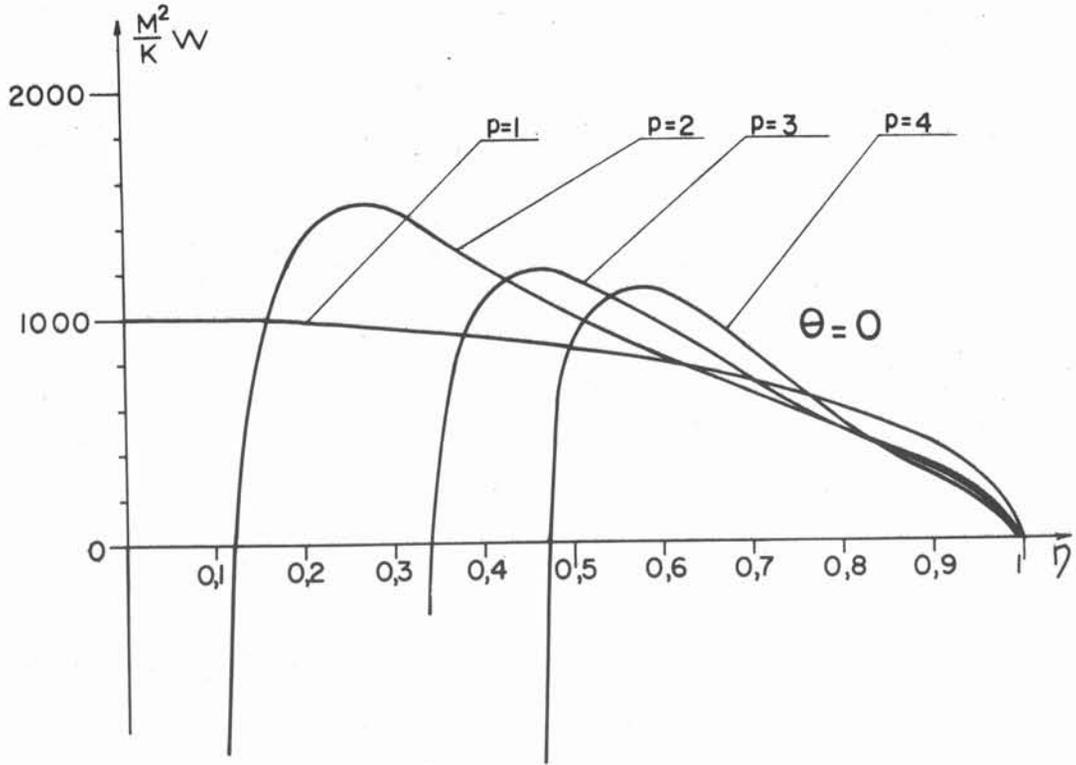


Fig.4. Distribution de vitesse dans le cœur
lorsque $\tau^* = 0$

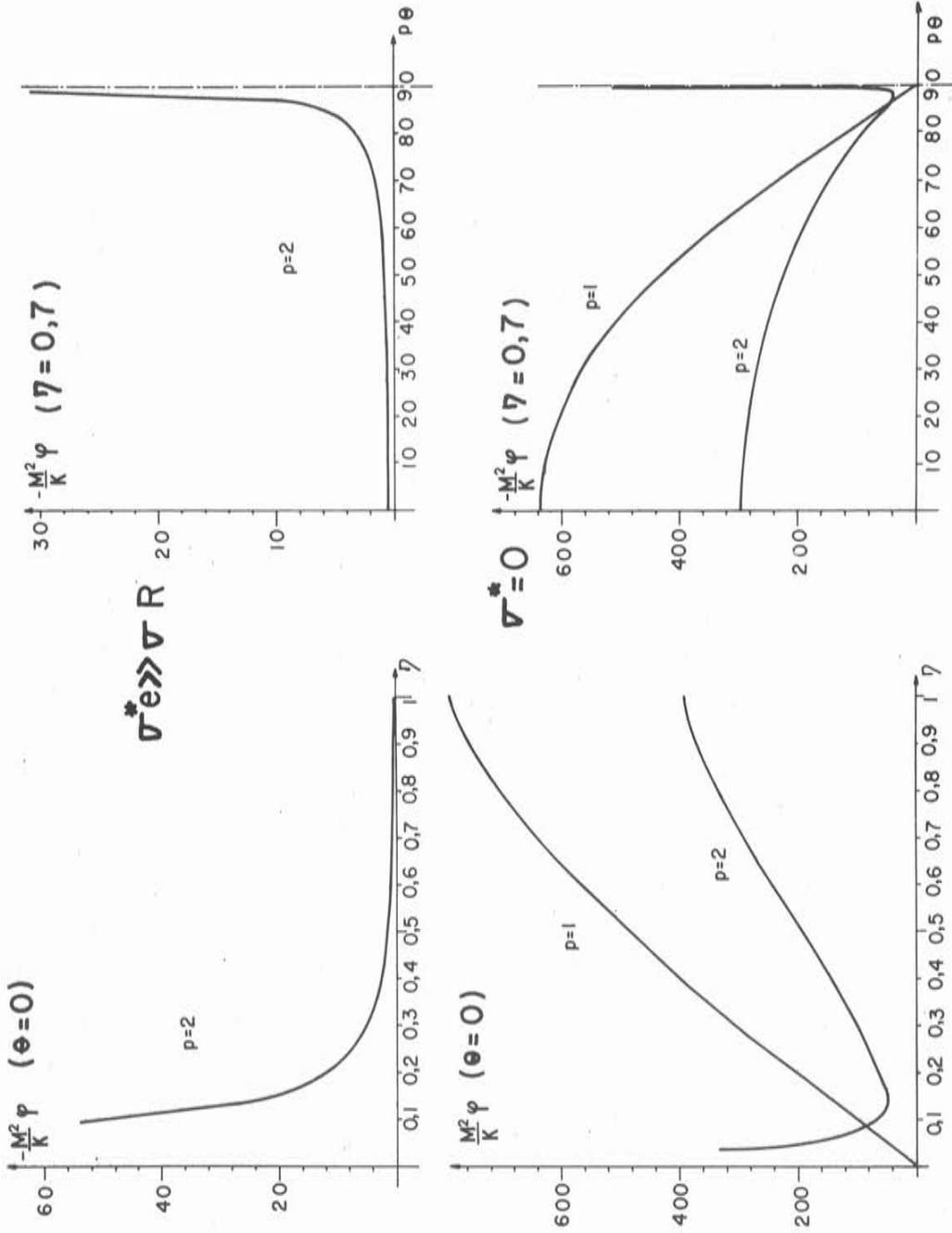


Fig.5.- Distribution du potentiel électrique dans le cœur pour $p=1$ et $p=2$

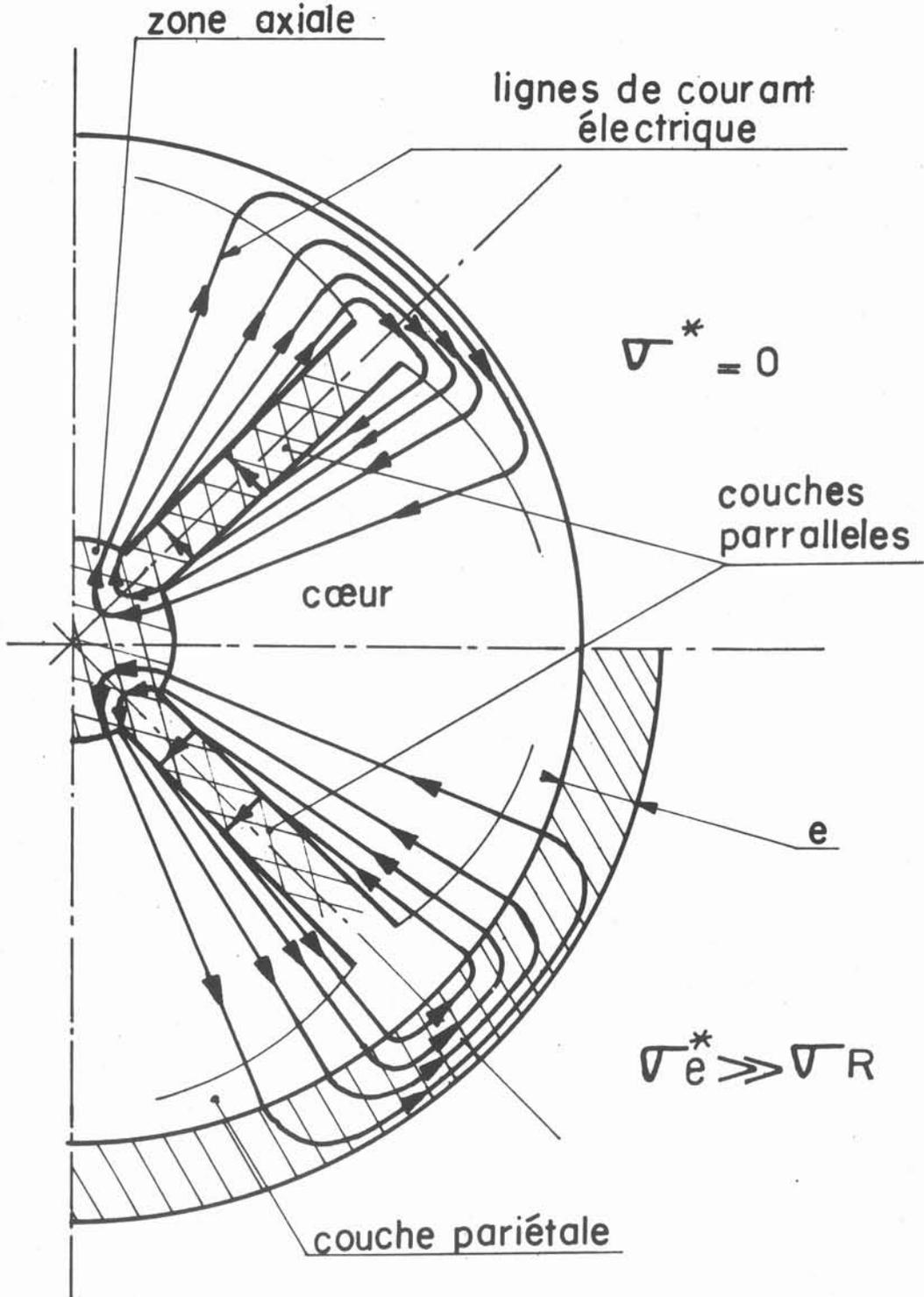


Fig.6_ Représentation schématique des lignes de courant électrique dans une section droite pour $p=2$

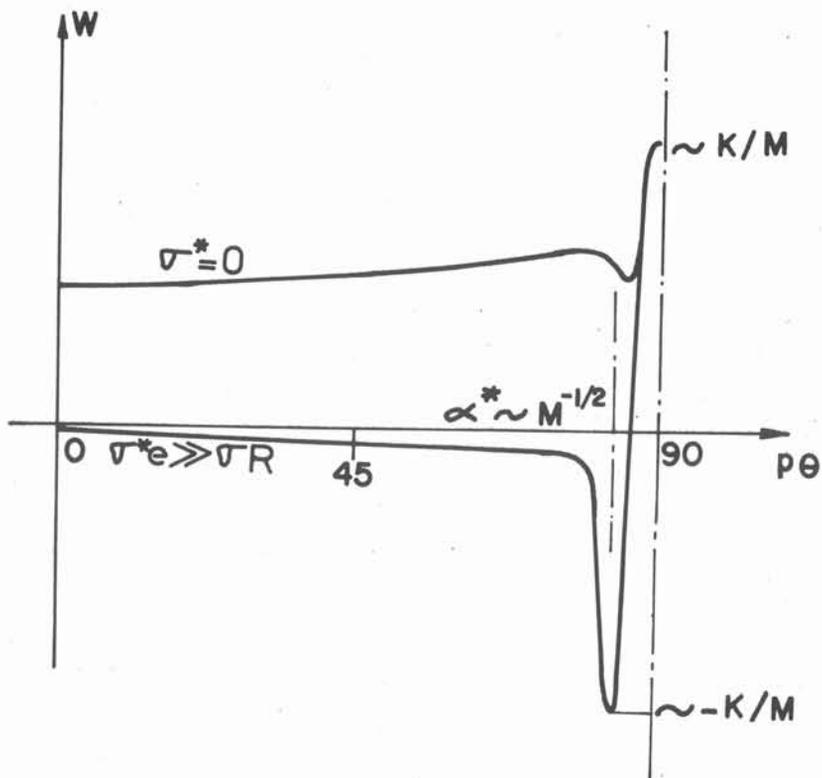
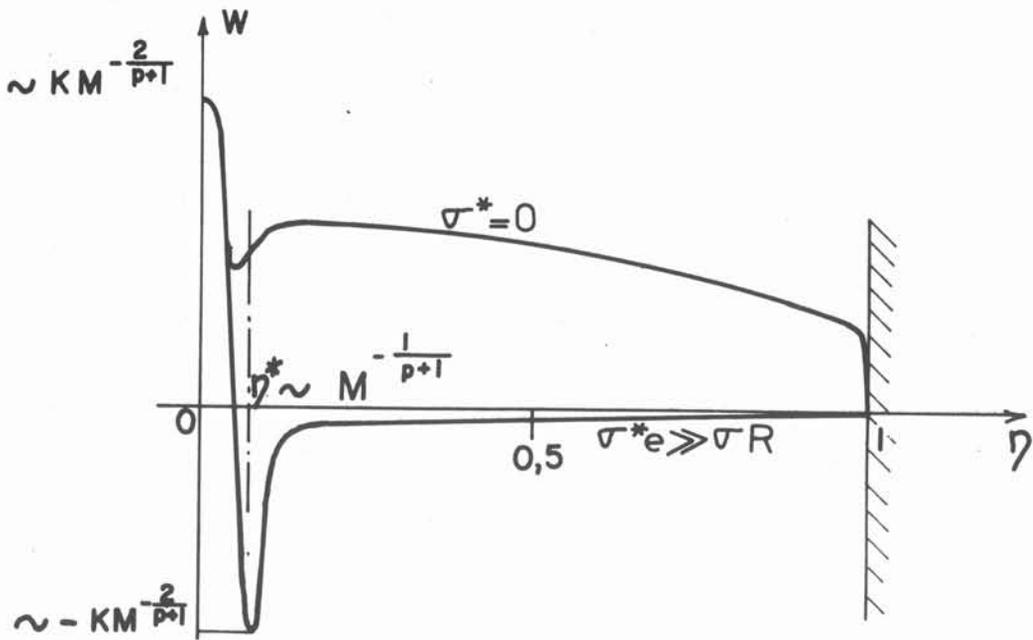


Fig. 7. Représentation schématique de la distribution de vitesse dans une section droite

C O N C L U S I O N G E N E R A L E

Durant ses années de thèse, au cours desquelles le chercheur s'interroge souvent sur l'intérêt de son travail, des résultats acquis et sur les difficultés encore à vaincre, ou même sur l'opportunité de poursuivre l'effort entrepris, le doute ou l'optimisme, le découragement ou l'enthousiasme alternent au gré des échecs ou des succès. La rédaction de la thèse qui est sûrement une étape importante apparaît alors comme un moment privilégié qui permet de faire le point. Les idées s'affirment, la pensée se précise, un bilan objectif des travaux entrepris peut alors être dressé et ouvre la voie à des prolongements sur lesquels souvent le chercheur engage son avenir. Au terme de la rédaction de ce mémoire, voici ce que je voudrais dire en guise de conclusion de ce travail sur la M. H. D. à l'échelle du laboratoire.

Des conclusions partielles détaillées ayant déjà été développées dans les différents chapitres, je me bornerai à indiquer ce qui me semble être les perspectives de la M. H. D. à faible R_m . Après une période faste qui s'est étalée en gros entre les années 1956 et 1970, durant laquelle de nombreuses études ont été publiées, consacrées pour la plupart à revoir les problèmes classiques de l'hydrodynamique modifiés par un champ magnétique extérieur uniforme, la M. H. D. à l'échelle du laboratoire a cherché son second souffle. Un des derniers bastions du domaine de ces champs uniformes est certainement celui de la turbulence homogène. Plus que son originalité intrinsèque, toujours susceptible de motiver le chercheur, c'est surtout par ses analogies avec d'autres que ce domaine présente encore de l'intérêt. Toutefois, ces analogies ont leurs limites et si les études de turbulence en fluide stratifié ou tournant ont de belles années devant elles en raison des nombreuses situations naturelles qu'elles recouvrent, l'étude de la turbulence homogène en M. H. D. devrait être probablement plus limitée dans le temps.

Les véritables perspectives de la M. H. D. à l'échelle du laboratoire, dans lesquelles elle puise de nouvelles forces, proviennent incontestablement de l'utilisation des champs alternatifs dont les possibilités d'applications industrielles sont multiples et qui ouvre la voie à un grand nombre de problèmes fondamentaux. Dans ce cadre riche d'applications, il nous semble tout à fait indispensable que les efforts soient menés conjointement par voie théorique et par voie expérimentale. C'est seulement de la convergence de ces deux approches que de réels progrès pourront être accomplis. Si le mercure apparaît encore comme le liquide privilégié pour les expériences en ce sens qu'il supprime les problèmes technologiques engendrés par l'utilisation des métaux liquides à haute température, il est souhaitable que le chercheur ne se désintéresse pas complètement de ces problèmes concrets, ne serait-ce que pour accroître la crédibilité de ses travaux au niveau des applications potentielles. Enfin, sur le plan des techniques de mesure, limitées jusqu'à présent aux procédés classiques souvent mal adaptés au mercure, un effort considérable est à entreprendre dans la perspective d'utiliser au mieux les effets liés aux champs alternatifs et de développer les possibilités de visualisation tout à fait inexistantes.

