



**HAL**  
open science

# Modélisation du comportement non-linéaire des poutres mixtes acier-béton avec prise en compte des effets différés

Quang Huy Nguyen

► **To cite this version:**

Quang Huy Nguyen. Modélisation du comportement non-linéaire des poutres mixtes acier-béton avec prise en compte des effets différés. Mécanique des structures [physics.class-ph]. INSA de Rennes, 2009. Français. NNT: . tel-01326345

**HAL Id: tel-01326345**

**<https://hal.science/tel-01326345>**

Submitted on 3 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# PhD Thesis

MODELLING OF THE NONLINEAR BEHAVIOUR  
OF COMPOSITE BEAMS TAKING INTO ACCOUNT TIME EFFECTS

*by*

**NGUYEN Quang Huy**

*Volume 1 : Full French version*

*The viva-voce took place July 13 2009 in front of the following examination panel :*

J.M. ARIBERT	INSA de Rennes	Chair
V. DE VILLE DE GOYET	Université de Liège	INSA nominated examiner
S. EL-TAWIL	University of Michigan	INSA nominated examiner
J.P. JASPART	Université de Liège	UoW nominated examiner
A. ELGHAZOULI	Imperial College	UoW nominated examiner
M. HJIAJ	INSA de Rennes	Supervisor
B. UY	University of Western Sydney	Co-Supervisor
A. REMENNIKOV	University of Wollongong	Co-Supervisor



*à mes parents  
à mon épouse Mai Lan  
à mon fils Cua  
et à mon pays natal Vietnam*



## AVANT-PROPOS

Le travail présenté dans ce rapport a été réalisé dans le cadre d'une cotutelle internationale de thèse entre l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Rennes (France) et l'Université de Wollongong (Australie). Le rapport est composé de deux volumes. Une version complète de la thèse rédigée en français est présentée au volume 1. Le volume 2 est dédié à une présentation résumée de la thèse en anglais.

C'est avec un grand plaisir que je remercie les personnes, qui de près ou de loin, m'ont accompagné et aidé au cours de ces années de travail.

Tout d'abord, je tiens à remercier Monsieur Mohammed HJIAJ, Directeur de ce travail de thèse à l'INSA de Rennes, pour la confiance qu'il m'a accordée dès le début et tout au long de ces années, pour son encouragement dans les moments difficiles et en particulier pour la qualité de son encadrement. Je tiens également à lui exprimer toute ma gratitude pour l'aide qu'il m'a apportée lors de la rédaction du mémoire en langue française.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Brian UY, Professeur à l'Université de Western Sydney (Australie), pour son encadrement scientifique et son accueil lors de mon séjour en Australie, pour tout le savoir qu'il m'a transmis, pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je suis reconnaissant à Monsieur Alex REMENNIKOV, Co-directeur de ce travail de thèse à l'Université de Wollongong (Australie), pour son accueil lors de mon séjour scientifique à l'Université de Wollongong.

J'adresse toute ma gratitude à Monsieur Jean-Marie ARIBERT, Professeur Emérite à l'INSA de Rennes, qui a accepté de présider mon jury de thèse et d'examiner ce mémoire avec beaucoup d'attention. Ses remarques et suggestions lors de la relecture de mon mémoire m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de ce dernier.

Je remercie chaleureusement Monsieur Sherif EL-TAWIL, Professeur à l'Université de Mi-

chigan (États-Unis), et Monsieur Vincent DE VILLE DE GOYET, Professeur à l'Université de Liège (Belgique), de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse. Leurs appréciations et critiques constructives ont été fondamentales et fructueuses. Je leur en suis très reconnaissant.

Je remercie également Monsieur Ahmed ELGAZOULI, Reader à l'Imperial College (Angleterre), et Monsieur Jean-Pierre JASPART, Professeur à l'Université de Liège (Belgique), d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse et d'examiner ce mémoire.

Un grand merci à toutes les personnes de l'Équipe Structures de l'INSA de Rennes pour la très bonne ambiance, aussi bien de travail que de détente, avec qui j'ai partagé de beaux moments de discussion. Merci à leur aide pour finaliser la rédaction de ce rapport et préparer la soutenance.

Enfin, j'exprime toutes mes reconnaissances à mes parents, ma sœur et à mon épouse pour leur encouragement et leur soutien éternel, malgré la distance, le long de toutes ces années. Cette thèse est un peu la leur, aussi.

## RÉSUMÉ

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur le comportement des poutres mixtes avec interaction partielle . L'objectif de ce travail est de développer des outils de simulation numérique, capable de prédire le comportement instantané et différé des poutres mixtes acier-béton. ***La première partie*** est consacrée à la modélisation du comportement élastique linéaire des poutres mixtes en considérant deux modèles de connexion à l'interface : connexion discrète et connexion continue. Un élément fini avec matrice de raideur "exacte" est développé pour les deux modèles de connexion qui permet une analyse critique de la modélisation de la connexion. Dans ***la deuxième partie***, le comportement différé du béton (fluage et retrait) est abordé à l'aide d'un modèle viscoélastique linéaire. Une solution semi-analytique originale est proposée pour les deux modèles de connexion. Ces solutions permettent d'analyser le comportement au cours du temps des poutres mixtes et d'évaluer les performances des méthodes classiques à un pas. ***La troisième partie*** est consacrée à la modélisation du comportement non-linéaire des constituants de la poutre mixte (acier, béton et connecteur). Un modèle élastoplastique avec endommagement permettant de prendre en compte la dégradation du béton est proposé. ***La quatrième partie*** est dédiée au développement de trois formulations élément fini (déplacement, équilibre, mixte) afin de simuler le comportement non-linéaire des poutres mixtes. Pour les formulations "équilibre" et "mixte", un algorithme de calcul original est proposé permettant de prendre en compte une charge répartie. Enfin, dans ***la dernière partie***, nous proposons, en première approche, un modèle viscoélastique/plastique pour simuler l'interaction entre les effets différés et la fissuration du béton.

**Mots clés :** poutres mixtes, éléments finis, effets du temps, plasticité, endommagement.



## ABSTRACT

This thesis deals with the behaviour of composite steel-concrete beams with partial shear connexion. The goal of this study is to develop and implement numerical tools which are able to predict the short and long-term behaviour of composite steel-concrete beams. *The first part* concerns the modelling of composite beams in the linear elastic range in which two bond models at the interface are considered : discrete bond and distributed bond. A finite element with exact stiffness matrix is developed in order to conduct a critical analysis of these two bond models. In *the second part*, the time-dependent behaviour of the concrete (creep and shrinkage) is considered by adopting a linear viscoelastic model. An original semi-analytical solution is proposed for the two bond models. This solution enables the analysis of the time-dependent behaviour of composite beams and to evaluate the performances of simplified viscoelastic approaches for concrete creep. *The third part* deals with the constitutive modelling of the materials (steel, concrete and connector) based on nonlinear continuum mechanics concepts. A coupled elastoplastic damage model for concrete is proposed. *The fourth part* is dedicated to the development of three nonlinear F.E. formulations (displacement-based, force-based and two-field mixed formulation) for composite beams and for the two bond models. An original state determination, taking into account the element internal load, is proposed for the force-based and two-field mixed formulations. Finally, in *the last part*, we propose, as a first approach, a viscoelastic/plastic model for concrete in order to simulate the interaction between the time-dependent effects and the cracking of concrete.

**Keywords :** composite beams, finite element, time-dependent, elastoplastic, cracking, damage.





2.5.1	Poutre isostatique P1 . . . . .	36
2.5.2	Poutre hyperstatique à deux travées inégales P2 . . . . .	47
2.6	Synthèse et Conclusions . . . . .	53
<b>CHAPITRE 3 : LES EFFETS DU TEMPS DANS LE BÉTON . . . . .</b>		<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	55
3.2	Comportement dépendant du temps du béton . . . . .	55
3.2.1	Retrait . . . . .	57
3.2.2	Fluage . . . . .	58
3.2.3	Fluage en traction . . . . .	61
3.3	Viscoélasticité linéaire . . . . .	61
3.3.1	Formulation différentielle : Différents modèles rhéologiques . . . . .	62
3.3.2	Formulation intégrale . . . . .	69
3.3.3	Approximation du comportement viscoélastique . . . . .	72
3.4	Solution semi-analytique . . . . .	83
3.4.1	Connexion discrète . . . . .	85
3.4.2	Connexion continue . . . . .	90
3.5	Applications numériques . . . . .	95
3.5.1	Description de la poutre et objet des différentes simulations . . . . .	95
3.5.2	Comparaison avec le résultat de DEZI 1993 . . . . .	97
3.5.3	Comparaison des modèles de connexion discrète et continue . . . . .	100
3.5.4	Comparaison des différentes méthodes de discrétisation en temps . . . . .	106
3.5.5	Effets du fluage et du retrait . . . . .	115
3.6	Conclusions . . . . .	119
<b>CHAPITRE 4 : MODÉLISATION DU COMPORTEMENT MATÉRIEL . . . . .</b>		<b>121</b>
4.1	Introduction . . . . .	121
4.2	Acier : Aspects expérimentaux du comportement . . . . .	122
4.3	Modèles de comportement de l'acier . . . . .	124
4.3.1	Modèles mécaniques explicite pour l'acier . . . . .	124
4.3.2	Modélisation élastoplastique de l'acier . . . . .	128
4.4	Béton : Aspects expérimentaux du comportement . . . . .	130
4.4.1	Béton en compression . . . . .	130
4.4.2	Béton en traction . . . . .	132
4.5	Modèles de comportement du béton . . . . .	133

4.5.1	Modèles mécaniques explicites pour le béton . . . . .	134
4.5.2	Modèles basés sur la théorie de l'endommagement scalaire . . . . .	137
4.5.3	Modèles basés sur le couplage plasticité-endommagement . . . . .	139
4.6	Modèle mécanique proposé pour le béton . . . . .	145
4.6.1	Cas du béton en compression . . . . .	145
4.6.2	En traction . . . . .	149
4.6.3	Identification expérimentale . . . . .	151
4.7	Algorithme d'intégration local du modèle . . . . .	154
4.8	Effet de "tension stiffening" . . . . .	160
4.9	Connecteurs . . . . .	166
4.9.1	Modèles mécaniques choisis pour les connecteurs . . . . .	170
4.10	Synthèse et conclusions . . . . .	171
<b>CHAPITRE 5 : MODÈLE DES ÉLÉMENTS FINIS . . . . .</b>		<b>173</b>
5.1	Introduction . . . . .	173
5.2	Problème aux limites . . . . .	174
5.2.1	Problème aux limites continu . . . . .	174
5.2.2	Problème aux limites discret en temps . . . . .	175
5.3	Formulation en déplacements . . . . .	176
5.3.1	Connexion continue . . . . .	177
5.3.2	Connexion ponctuelle . . . . .	182
5.3.3	Algorithme de calcul . . . . .	183
5.4	Formulation équilibre . . . . .	185
5.4.1	Connexion continue . . . . .	185
5.4.2	Connexion ponctuelle . . . . .	194
5.4.3	Algorithme de calcul . . . . .	196
5.5	Formulation mixte . . . . .	203
5.5.1	Connexion continue . . . . .	203
5.5.2	Connexion ponctuelle . . . . .	208
5.5.3	Algorithme de calcul . . . . .	209
5.6	Validation des modèles . . . . .	214
5.6.1	Caractéristiques des modèles numériques . . . . .	217
5.7	Comparaison des deux modèles de connexion . . . . .	226
5.8	Comparaison des trois formulations . . . . .	230
5.8.1	Cas d'un chargement ponctuel . . . . .	230

5.8.2	Cas d'un chargement réparti . . . . .	235
5.9	Synthèse et Conclusions . . . . .	240
<b>CHAPITRE 6 : COUPLAGE FISSURATION/EFFETS DIFFÉRÉS . . . . .</b>		<b>243</b>
6.1	Introduction . . . . .	243
6.2	Modèle viscoélastique/plastique pour le béton . . . . .	244
6.2.1	Intégration numérique du modèle de comportement . . . . .	246
6.3	Applications . . . . .	251
6.3.1	Relaxation de contrainte . . . . .	251
6.3.2	Poutre mixte simplement appuyée PI4 . . . . .	253
6.3.3	Poutre mixte continue PH3 . . . . .	260
6.4	Conclusions . . . . .	268
<b>CONCLUSIONS GÉNÉRALES . . . . .</b>		<b>269</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b>		<b>273</b>

## LISTE DES TABLEAUX

2.1	Comparaison de deux modèles de connexion . . . . .	44
3.1	Écarts relatifs de notre modèle par rapport à celui de DEZI . . . . .	100
3.2	Écarts relatifs des différentes méthodes par rapport à la méthode générale .	107
3.3	Effets du fluage et du retrait . . . . .	115
4.1	Propriétés mécaniques du béton en compression [85] . . . . .	151
4.2	Propriétés mécaniques du béton en traction . . . . .	153
4.3	Algorithme de l'intégration locale du modèle élastoplastique endomma- geable : cas unidimensionnel . . . . .	159
5.1	Maillages disponibles pour la simulation numérique . . . . .	217
5.2	Ruine observée par le modèle numérique . . . . .	219
6.1	Algorithme de l'intégration locale du comportement viscoélastique-plastique : cas unidimensionnel . . . . .	250



## LISTE DES FIGURES

1.1	Exemple de poutre mixte acier-béton . . . . .	2
1.2	Élément fini de poutre mixte développé par SCHANZENBACH (1988) . . . . .	7
1.3	Élément fini de poutre mixte développé par BOERAEVE (1991) . . . . .	8
2.1	Modèles de connexion . . . . .	16
2.2	Élément infinitésimal d'une poutre mixte . . . . .	18
2.3	Élément de connecteur . . . . .	21
2.4	Cinématique de la poutre mixte . . . . .	22
2.5	Élément de poutre mixte avec connexion discrète . . . . .	28
2.6	Forces nodales et déplacements nodaux d'un élément de poutre mixte . . . . .	30
2.7	Assemblage des parties acier, béton et connecteur - matrice $\mathbf{K}_e$ . . . . .	32
2.8	Description de la poutre de référence P1 . . . . .	36
2.9	Poutre P1 : Distribution de la flèche le long de la poutre . . . . .	38
2.10	Poutre P1 : Distribution du glissement le long de la poutre . . . . .	40
2.11	Poutre P1 : Distribution du déplacement axial dans la dalle le long de la poutre . . . . .	40
2.12	Poutre P1 : Distribution du déplacement axial dans le profilé le long de la poutre . . . . .	41
2.13	Poutre P1 : Distribution de la courbure le long de la poutre . . . . .	41
2.14	Poutre P1 : Distribution du moment fléchissant total le long de la poutre . . . . .	42
2.15	Poutre P1 : Distribution de l'effort normal $N_c$ le long de la poutre . . . . .	42
2.16	Poutre P1 : Influence de l'espacement des connecteurs sur la répartition de la flèche le long de la poutre . . . . .	44
2.17	Poutre P1 : Influence de l'espacement des connecteurs sur la répartition du glissement le long de la poutre . . . . .	45
2.18	Poutre P1 : Influence de l'espacement des connecteurs sur la répartition du déplacement axial dans la dalle le long de la poutre . . . . .	45
2.19	Poutre P1 : Influence de l'espacement des connecteurs sur la répartition du déplacement axial dans le profilé le long de la poutre . . . . .	46
2.20	Poutre P1 : Influence de l'espacement des connecteurs sur la répartition de l'effort normal dans la dalle le long de la poutre . . . . .	46

2.21	Description de la poutre de référence P2 . . . . .	47
2.22	Poutre P2 : Distribution de la flèche le long de la poutre . . . . .	49
2.23	Poutre P2 : Distribution du glissement le long de la poutre . . . . .	50
2.24	Poutre P2 : Distribution du déplacement axial dans la dalle le long de la poutre . . . . .	50
2.25	Poutre P2 : Distribution du déplacement axial dans le profilé le long de la poutre . . . . .	51
2.26	Poutre P2 : Distribution de la courbure le long de la poutre . . . . .	51
2.27	Poutre P2 : Distribution du moment fléchissant total le long de la poutre .	52
2.28	Poutre P2 : Distribution de l'effort normal $N_c$ le long de la poutre . . . . .	52
3.1	Déformation du béton au cours du temps . . . . .	56
3.2	Évolution de la déformation de fluage complète . . . . .	60
3.3	Modèle de MAXWELL . . . . .	63
3.4	Modèle de KELVIN . . . . .	66
3.5	Modèle de ZENER . . . . .	68
3.6	Modèle rhéologique de KELVIN généralisé . . . . .	69
3.7	Principe de superposition . . . . .	70
3.8	Courbes de relaxation [25] : (a) échelle normale de temps ; (b) échelle logarithmique de temps . . . . .	72
3.9	Modèle vieillissant de KELVIN généralisé . . . . .	77
3.10	Élément de poutre mixte . . . . .	88
3.11	Description de la poutre mixte de DEZI et al. . . . .	96
3.12	Deux cas d'action considérés . . . . .	97
3.13	Cas d'action 1 : Évolution au cours du temps de la réaction de l'appui intermédiaire . . . . .	98
3.14	Cas d'action 2 : Évolution au cours du temps de la réaction de l'appui intermédiaire . . . . .	99
3.15	Cas d'action 1 : Évolution au cours du temps de la rotation à l'appui gauche	99
3.16	Cas d'action 2 : Évolution au cours du temps de la rotation à l'appui gauche	100
3.17	Évolution au cours du temps de la réaction de l'appui intermédiaire pour les deux modèles de connexion . . . . .	102

3.18	Distribution de la flèche le long de la poutre pour les deux modèles de connexion . . . . .	102
3.19	Distribution du glissement le long de la poutre pour les deux modèles de connexion . . . . .	103
3.20	Distribution du déplacement axial dans la dalle le long de la poutre pour les deux modèles de connexion . . . . .	103
3.21	Distribution du déplacement axial dans le profilé le long de la poutre pour les deux modèles de connexion . . . . .	104
3.22	Distribution de la courbure le long de la poutre pour les deux modèles de connexion . . . . .	104
3.23	Distribution du moment fléchissant total le long de la poutre pour les deux modèles de connexion . . . . .	105
3.24	Distribution de l'effort normal dans la dalle le long de la poutre pour les deux modèles de connexion . . . . .	105
3.25	Cas d'action 1 : Évolution de la réaction d'appui intermédiaire calculée par les différentes méthodes : (a) sans retrait ; (b) avec retrait . . . . .	109
3.26	Cas d'action 2 : Évolution de la réaction d'appui intermédiaire calculée par les différentes méthodes : (a) sans retrait ; (b) avec retrait . . . . .	110
3.27	Cas d'action 1 : Évolution de la flèche au milieu de travée calculée par les différentes méthodes : (a) sans retrait ; (b) avec retrait . . . . .	111
3.28	Cas d'action 2 : Évolution de la flèche au milieu de travée calculée par les différentes méthodes : (a) sans retrait ; (b) avec retrait . . . . .	112
3.29	Cas d'action 1 : Évolution du glissement à l'appui gauche calculée par les différentes méthodes : (a) sans retrait ; (b) avec retrait . . . . .	113
3.30	Cas d'action 2 : Évolution du glissement à l'appui gauche calculée par les différentes méthodes : (a) sans retrait ; (b) avec retrait . . . . .	114
3.31	Distribution de la flèche le long de la poutre . . . . .	116
3.32	Distribution de l'effort normal dans la dalle le long de la poutre . . . . .	117
3.33	Distribution du déplacement axial dans la dalle le long de la poutre . . . . .	117
3.34	Distribution du glissement le long de la poutre . . . . .	118
3.35	Distribution du moment fléchissant total le long de la poutre . . . . .	118
4.1	Courbe contrainte/déformation : (a) acier dur ; (b) acier doux . . . . .	122

4.2	Effet de BAUSCHINGER . . . . .	123
4.3	Modèles mécaniques explicites de l'acier. . . . .	124
4.4	Modèle multi-linéaire : (a) écrouissage isotrope ; (b) écrouissage cinématique	125
4.5	Modèle de MENEGOTTO-PINTO . . . . .	127
4.6	Comportement en compression uniaxiale . . . . .	131
4.7	Évolution du diagramme $\sigma - \varepsilon$ en fonction de sa résistance . . . . .	131
4.8	Comportement du béton en compression sous charges cycliques . . . . .	132
4.9	Courbe contrainte-déformation du béton soumis à traction cyclique . . . . .	133
4.10	Types de modèles utilisés pour le béton en compression : (a) endommage- ment pur ; (b) plasticité ; (c) couplage plasticité-endommagement . . . . .	133
4.11	Modèle de l'EUROCODE 2 [2] . . . . .	135
4.12	Modèle de CEB-FIP MODEL CODE 1990 . . . . .	137
4.13	Modèle élastoplastique endommageable . . . . .	141
4.14	Définition de trois régions pour la fonction d'écrouissage $R_c(p)$ . . . . .	147
4.15	Représentation schématique du comportement uniaxial en traction avec une loi adoucissante hyperbolique . . . . .	150
4.16	Courbe contrainte limite/déformation résiduelle . . . . .	152
4.17	Comparaison de l'essai de compression cyclique du béton avec le modèle proposé . . . . .	153
4.18	Comparaison de l'essai de traction cyclique du béton avec le modèle proposé	154
4.19	Intégration locale . . . . .	155
4.20	Fissuration dans un tirant en béton armé . . . . .	160
4.21	Comportement d'un tirant en béton armé . . . . .	161
4.22	Modèles de "tension stiffening" : (a) Modèle de SCANLON-MURRAY ; (b) Modèle de LIN-SCORDELIS ; (c) Modèle de VEBO-GHALI ; (d) Modèle de GILBERT-WARNER . . . . .	162
4.23	Modèle de MASSICOTTE et al. (1990) [96] : (a) Loi de "tension stiffening" ; (b) Définition des aires influencés par le tension stiffening. . . . .	163
4.24	Modèle proposé par CEB-FIP MODEL CODE 1990 . . . . .	164
4.25	Types de goujons soudés sur la semelle supérieure du profilé métallique . . . . .	166
4.26	Comportement des connecteurs . . . . .	167
4.27	Principe de l'essai "Push-out" . . . . .	168

4.28	Modèles mécaniques utilisés pour les connecteurs : (a) modèle élastique parfaitement plastique; (b) modèle généralisé de OLLGAARD et al; (c) modèle de SALARI . . . . .	171
5.1	Problème aux limites associé à une poutre mixte . . . . .	174
5.2	Élément de déplacement à 10 DDL . . . . .	181
5.3	Élément de poutre mixte : (a) avec modes rigides; (b) sans modes rigides .	190
5.4	Approximation parabolique de l'effort de cisaillement à l'interface . . . . .	191
5.5	Équilibre d'un tronçon de poutre mixte . . . . .	193
5.6	Élément de poutre mixte non connectée : (a) avec modes rigides; (b) sans modes rigides . . . . .	196
5.7	Algorithme de calcul pour la formulation équilibre . . . . .	198
5.8	(a) Degré liberté de déplacements; (b) Degré liberté de forces . . . . .	207
5.9	Algorithme de calcul pour la formulation mixte . . . . .	210
5.10	Description géométrique des poutres PI4 et PH3 . . . . .	215
5.11	Caractéristiques mécaniques des matériaux constituant les poutres PI4 et PH3 . . . . .	216
5.12	Courbes charges/flèches de la poutre PI4 - Modèle de connexion discrète avec 9 éléments de connexion . . . . .	220
5.13	Courbes charges/flèches de la poutre PI4 - Modèle de connexion continue .	220
5.14	Distribution du glissement de la poutre PI4 . . . . .	221
5.15	Courbes charges-flèches de la poutre PH3 - Modèle de connexion discrète avec 14 éléments de connexion par travée . . . . .	223
5.16	Courbes charges-flèches de la poutre PH3 - Modèle de connexion continue .	223
5.17	Courbes de variation, en fonction du chargement, des courbures - Modèle de connexion discrète avec 14 éléments de connexion par travée . . . . .	224
5.18	Courbes de variation, en fonction du chargement, des courbures - Modèle de connexion continue . . . . .	225
5.19	Poutre PI4 : Courbes charge/flèche obtenues pour les deux modèles de connexion . . . . .	228
5.20	Poutre PI4 : Distributions du glissement pour les deux modèles de connexion	228
5.21	Poutre PI4 : Distributions de la courbure pour les deux modèles de connexion	229

5.22	Poutre PI4 : Distributions de l'effort axial dans la dalle $N_c$ pour les deux modèles de connexion . . . . .	229
5.23	Courbes charges/flèches de la poutre PI4 : (a) Formulation en déplacement ; (b) Formulation en force ; (c) Formulation mixte . . . . .	232
5.24	Poutre PI4 : Distributions de la courbure pour les trois formulations . . . . .	233
5.25	Poutre PI4 : Distributions du glissement pour les trois formulations . . . . .	233
5.26	Poutre PI4 : Distributions du moment pour les trois formulations . . . . .	234
5.27	Poutre PI4 : Distributions d'effort axial dans la dalle $N_c$ pour les trois formulations . . . . .	234
5.28	Description de la poutre mixte SA . . . . .	235
5.29	Poutre SA : Diagrammes charges/flèches : (a) Formulation en déplacement ; (b) Formulation équilibre ; (c) Formulation mixte . . . . .	237
5.30	Poutre SA : Distributions du moment fléchissant obtenues par les trois formulations . . . . .	238
5.31	Poutre SA : Distributions de l'effort axial $N_c$ obtenues par les trois formulations . . . . .	239
5.32	Poutre SA : Distributions de la courbure obtenues par les trois formulations	239
5.33	Poutre SA : Distributions du glissement obtenues par les trois formulations	240
6.1	Relaxation de contrainte selon le modèle viscoélastique linéaire . . . . .	244
6.2	Modèle rhéologique viscoélastique - plastique . . . . .	245
6.3	Évolution de contrainte au cours du temps . . . . .	252
6.4	Évolution de déformation au cours du temps . . . . .	252
6.5	Poutre PI4 : Distribution de la flèche pour un chargement de 400 kN . . . . .	253
6.6	Poutre PI4 : Évolution de la flèche en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps . . . . .	255
6.7	Poutre PI4 : Évolution de la contrainte de la fibre de béton la plus comprimée en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps . . . . .	256
6.8	Poutre PI4 : Évolution de la déformation de la fibre de béton la plus comprimée en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps	257
6.9	Poutre PI4 : Évolution de la contrainte de la fibre de béton la plus tendue en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps . . . . .	258

6.10	Poutre PI4 : Évolution de la déformation de la fibre de béton la plus tendue en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps . . . .	259
6.11	Poutre PH3 : Évolution de la flèche en milieu de travée : (a) au cours de chargement ; (b) au cours du temps . . . . .	262
6.12	Poutre PH3 : Distribution de la flèche pour une charge de 150 kN . . . . .	263
6.13	Poutre PH3 : Distributions du moment fléchissant pour une charge de 150 kN . . . . .	263
6.14	Poutre PH3 : Évolution de la contrainte de la fibre de béton la plus comprimée en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps	264
6.15	Poutre PH3 : Évolution de la déformation de la fibre de béton la plus comprimée en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps . . . . .	265
6.16	Poutre PH3 : Évolution de la déformation de la fibre de béton la plus tendue au droit de l'appui intermédiaire : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps . . . . .	266
6.17	Poutre PH3 : Évolution de la contrainte de la fibre de béton la plus tendue au droit de l'appui intermédiaire : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps . . . . .	267
I.1	Modèle à fibres : discrétisation de section de poutre mixte . . . . .	xxxii
VIII.	Méthode <i>arc-length</i> pour un seul degré de liberté . . . . .	lii
VIII.	Choix de la solution évitant le retour sur le chemin d'équilibre parcouru . .	lv



## LISTE DES ANNEXES

Annexe I :	Modèle à fibres . . . . .	xxxi
Annexe II :	Modèle de fluage et de retrait . . . . .	xxxv
Annexe III :	Détermination de la fonction de relaxation . . . . .	xxxix
Annexe IV :	Détail des paramètres du paragraphe 3.4 . . . . .	xli
Annexe V :	Expressions des coefficients dans le paragraphe 4.6.1 . . . . .	xliv
Annexe VI :	Points d'intégration de Gauss - Lobatto . . . . .	xlvi
Annexe VII :	Constantes de la série de Dirichlet . . . . .	xlix
Annexe VIII :	Méthode de résolution <i>arc-length</i> cylindrique . . . . .	li



## NOTATION

### Notations relatives aux indices

- $c$  indice relatif au béton
- $s$  indice relatif à l'acier du profilé métallique
- $sr$  indice relatif à l'acier de l'armature
- $sc$  indice relatif au type de connexion continue à l'interface
- $st$  indice relatif au type de connexion discrète à l'interface

### Notations relatives à la géométrie

- $A_c$  aire de la section de béton de la dalle [ $m^2$ ]
- $A_s$  aire de la section du profilé métallique [ $m^2$ ]
- $A_{sr}$  aire de la section d'armature longitudinale de la dalle [ $m^2$ ]
- $H_c$  distance entre l'axe de référence de la dalle et l'interface [m]
- $H_s$  distance entre l'axe de référence du profilé métallique et l'interface [m]
- $L$  longueur d'un élément de poutre mixte [m]
- $I_c$  moment quadratique de la section de béton de la dalle par rapport à l'axe de référence [ $m^4$ ]
- $I_s$  moment quadratique de la section du profilé métallique par rapport à l'axe de référence [ $m^4$ ]
- $S_c$  moment statique de la section de béton de la dalle par rapport à l'axe de référence [ $m^3$ ]
- $S_s$  moment statique de la section du profilé métallique par rapport à l'axe de référence [ $m^3$ ]
- @ espacement longitudinal des connecteurs [m]
- $x_{gl}$  point d'intégration de GAUSS-LOBATTO

### Notations relatives aux déplacements

- $u_c(x)$  déplacement axial à l'axe de référence de la dalle de béton [m]
- $u_s(x)$  déplacement axial à l'axe de référence du profilé métallique [m]
- $v(x)$  déplacement transversal d'ensemble de la section de la poutre mixte [m]
- $d_{sc}(x)$  glissement du profilé métallique par rapport de la dalle (à l'interface) [m]

## Notations relatives aux déformations généralisées et aux contraintes généralisées

$\varepsilon_c$	déformation axiale à l'axe de référence de la dalle de béton armé [m/m]
$\varepsilon_s$	déformation axiale à l'axe de référence du profilé métallique [m/m]
$\kappa$	courbure [1/m]
$D_{sc}$	effort de cisaillement appliqué au procédé de connexion continue [N/m]
$Q_{st}$	effort de cisaillement appliqué au procédé de connexion discrète [N]
$N_c$	effort normal dans la dalle [N]
$N_s$	effort normal dans le profilé [N]
$M_c$	moment de flexion dans la dalle par rapport à l'axe de référence [N.m]
$M_s$	moment de flexion dans le profilé par rapport à l'axe de référence [N.m]
$T_c$	effort tranchant dans la dalle [N]
$T_s$	effort tranchant dans le profilé [N]

## Notations relatives aux vecteurs et matrices

$\mathbf{d}(x)$	vecteur des déplacements
$\mathbf{D}(x)$	vecteur des efforts internes
$\mathbf{e}(x)$	vecteur des déformations généralisées
$\mathbf{f}(x)$	matrice de flexibilité de section de la poutre mixte
$\mathbf{F}$	matrice de rigidité d'un élément fini de la poutre mixte
$\mathbf{k}(x)$	matrice de rigidité de section de la poutre mixte
$\mathbf{K}$	matrice de rigidité d'un élément fini de la poutre mixte
$\mathbf{K}_g$	matrice de rigidité globale
$\bar{\mathbf{q}}_g$	vecteur des déplacements nodaux globaux
$\mathbf{q}$	vecteur des déplacements nodaux d'un élément fini
$\mathbf{Q}$	vecteur des efforts nodaux d'un élément fini

## Notations relatives au comportement local

$\varepsilon$	déformation total [m/m]
$\varepsilon^e$	déformation élastique [m/m]
$\varepsilon^p$	déformation plastique [m/m]
$\varepsilon^d$	déformation de l'endommagement [m/m]
$\varepsilon^{pd}$	déformation inélastique [m/m]
$D^{da}$	variable d'endommagement [ $m^2/N$ ]
$p$	déformation plastique cumulée [m/m]
$R$	force thermodynamique associée à $p$ [N/m]
$\sigma$	contrainte [ $N/m^2$ ]
$f$	surface de charge

## Notations relatives aux paramètres matériau

$E_c$	module élastique du béton de la dalle [ $N/m^2$ ]
$E_s$	module élastique de l'acier du profilé [ $N/m^2$ ]
$E_{sr}$	module élastique de l'acier de l'armature [ $N/m^2$ ]
$f_{cm}$	résistance à la compression du béton [ $N/m^2$ ]
$f_{ctm}$	résistance à la traction du béton [ $N/m^2$ ]
$f_y$	limite d'élasticité de l'acier [ $N/m^2$ ]
$f_u$	résistance ultime à la traction de l'acier [ $N/m^2$ ]
$k_{sc}$	rigidité linéique du procédé de connexion [ $N/m^2$ ]
$k_{sc}$	rigidité ponctuelle du procédé de connexion [N/m]
$P_u$	résistance ultime d'un goujon [N]
$P_{Rd}$	résistance de calcul d'un goujon [N]
$\varepsilon_{ci}$	déformation au pic de contrainte de compression [m/m]

**Notations relatives aux effets du temps de béton**

$t$	temps [jours]
$\blacklozenge^{(n)}$	valeur de grandeur $\blacklozenge$ à l'instant $t_n$
$R$	fonction de relaxation [N/m <sup>2</sup> ]
$J$	fonction de fluage [m <sup>2</sup> /N]
$\varepsilon_{sh}$	déformation de retrait [m/m]
$\varepsilon_{cp}$	déformation de fluage [m/m]
$\eta$	coefficient de viscosité [Pa.s]
$AEMM$	méthode du module effectif ajusté
$EM$	méthode du module effectif
$MS$	méthode de la contrainte moyenne

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1 Contexte et motivation

De nos jours, les structures mixtes acier-béton sont largement utilisées dans le domaine du génie civil, notamment dans le secteur des Travaux Publics avec la conception de plus en plus fréquente de ponts mixtes de grande portée (50-80 mètres), ou encore dans le secteur du Bâtiment avec l'utilisation assez courante de planchers avec dalles mixtes, constituées de tôles minces en acier profilées à froid qui servent à la fois de coffrage pour le coulage de la dalle, et d'armature une fois le béton durci.

En générale, un élément structural de construction est défini comme mixte acier-béton s'il associe les deux matériaux de manière à tirer le meilleur parti de cette association. L'idée de base est similaire à celle exploitée en béton armé. Toutefois, en construction mixte, la solidarisation entre les composants de la section constituée de deux matériaux différents n'est généralement pas obtenue par adhérence (cas du béton armé), mais au moyen d'organes de liaison, appelés connecteurs. C'est cette connexion, troisième composant de la construction mixte, qui assure l'action composite d'une section faite de deux matériaux. Le rôle majeur de la connexion est d'empêcher, ou tout au moins de limiter, le glissement tendant à se produire à l'interface acier-béton sous l'effet des actions extérieures et de transmettre les efforts entre la partie acier et la partie béton de la section mixte. En d'autres termes, une section mixte tend à se comporter comme une section monolithique.

Dans une structure de bâtiment, plusieurs éléments peuvent revêtir un caractère mixte. La dalle mixte est probablement l'élément structural mixte le plus fréquemment rencontré. Une dalle mixte s'obtient, par exemple, en coulant du béton sur des bacs en acier nervurés et à parois minces, où la connexion est assurée par adhérence (dans certains cas) et par action mécanique, parfois complétée par des ancrages mécaniques discrets. Dans les poutres mixtes, l'action composite entre une dalle en béton (dalle coulée en place ou préfabriquée ou dalle mixte) et une section en acier (avec ou sans enrobage de béton) est assurée par des dispositifs mécaniques, tels que les goujons à tête. Un poteau mixte comporte soit une

section en acier totalement ou partiellement enrobée de béton, soit une section tubulaire en acier remplie de béton (éventuellement armé), pour laquelle la connexion est mobilisée essentiellement par adhérence, éventuellement renforcée par des dispositifs cités plus haut.

Par rapport aux structures métalliques ou en béton armé, les structures mixtes acier-béton offrent des avantages considérables sur les plans mécaniques, économiques et architecturaux. La structure porteuse en acier et la dalle de compression en béton, solidarisiées au moyen des connecteurs, favorisent un comportement homogène des deux matériaux en optimisant leurs propres caractéristiques. Les avantages les plus évidents sont :

- Une réduction du poids de la structure, à chargement égal,
- Une augmentation de la rigidité flexionnelle du plancher ou de la poutre,
- Une augmentation de la résistance au feu,
- Une plus grande stabilité vis-à-vis du voilement local et du déversement du profilé métallique,
- Une réduction de la hauteur des planchers, d'où la réduction de la hauteur totale du bâtiment pour un nombre d'étages fixé,
- Une réduction de la durée de construction engendrant des économies.

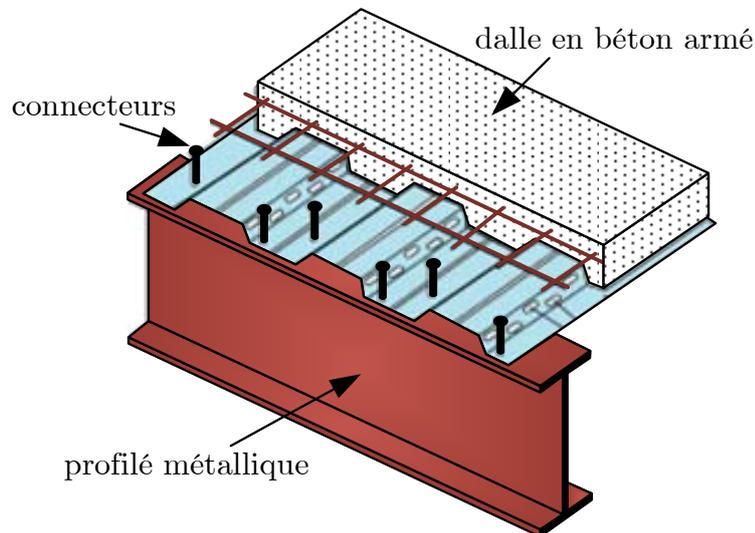


Figure 1.1 – Exemple de poutre mixte acier-béton

Les poutres mixtes acier-béton, qui sont l'objet principal de cette thèse, sont compo-

sées d'une poutre métallique et d'une dalle en béton armé, reliées entre elles à l'aide de connecteurs plus ou moins ductiles. Les connecteurs les plus souvent utilisés sont les goujons soudés sur la semelle supérieure de la poutre métallique et noyés dans la dalle (cf. Figure 1.1). L'étude du comportement des poutres mixtes suppose la connaissance des comportements de ses composants, à savoir :

- celui de la liaison acier-béton (connecteurs),
- celui de chaque matériau (acier, béton, armature).

## 1.2 Historique des modèles d'analyse des poutres mixtes acier-béton

TROUILLET (1987) [133] rappelle que c'est à ANDREWS (1912) que l'on doit une première approche. Dans celle-ci, l'acier et le béton restaient liés par adhérence. Par conséquent, les sollicitations internes étaient calculées avec les hypothèses classiques de la résistance de matériaux.

Cette première approche s'avère expérimentalement suffisante, au moins jusqu'à la rupture de l'adhérence. Pour reprendre les sollicitations au-delà de ce seuil, des connecteurs ponctuels ont été utilisés ultérieurement. Le modèle d'ANDREWS s'avérant inutilisable pour ces niveaux de sollicitations, plusieurs théories élastiques ont été proposées. Selon MOLENSTRA et JOHNSON [102], la première théorie élastique des poutres mixtes acier-béton en présence de connecteurs a été proposée par NEWMARK et al. [104] en 1951. Cette théorie est basée sur les hypothèses principales suivantes :

- il y a continuité de la liaison à l'interface acier/béton,
- le soulèvement de la dalle est négligé,
- le glissement à l'interface acier/béton en un point donné est proportionnel à l'effort de cisaillement en ce point.

En exprimant l'équilibre et la compatibilité des déformations à l'interface acier-béton d'un élément de la poutre, NEWMARK a établi une équation différentielle du deuxième ordre régissant la force axiale dans la dalle de béton. Ensuite, il a résolu analytiquement cette équation en considérant un comportement élastique linéaire pour l'acier et le béton. Ce modèle s'avère suffisant pour les charges de service mais trop approximatif pour des charges plus élevées. Son principal défaut réside dans l'hypothèse de la linéarité de la

courbe charge-glisement relative aux connecteurs.

En 1968, ADKOLA [8] a étendu la théorie de NEWMARK en tenant compte des effets de soulèvement de la dalle et du frottement à l'interface acier/béton. Il a proposé d'utiliser la méthode des différences finies pour résoudre les équations différentielles régissant le soulèvement et la force axiale dans la dalle de béton. ROBINSON et NARAINÉ (1988) [119] ont utilisé la même approche pour étudier le problème de glissement et de soulèvement à l'interface acier/béton en prenant en compte l'effet de la position du chargement (appliqué à la dalle ou au profilé métallique). COSENZA et MAZZOLANI (1993) [50] ont proposé une nouvelle solution pour ce problème avec différentes conditions de chargement. Cependant, tous ces modèles considèrent un comportement élastique linéaire.

Le domaine d'application du calcul linéaire des poutres mixtes peut être limité pour l'étude de certains phénomènes et les chercheurs ont très vite essayé de développer des modèles plus généraux. Le comportement non-linéaire des matériaux (plasticité, fissuration ...) et de la connexion ne peuvent en effet être négligés dès que l'on veut décrire le comportement de structures au delà des charges de service et surtout si l'on veut comprendre les phénomènes en jeu dans ces structures aux états-limites [40].

Plusieurs modèles numériques non-linéaires pour les poutres mixtes ont été proposés. Selon TROUILLET (1987) [133] toujours, c'est SIESS et DAI (1967) à l'Université d'Illinois (État-Unis) qui ont présenté le premier modèle élasto-plastique de poutre mixte en supposant que la liaison à l'interface acier-béton était discrète et la courbe force-glisement multilinéaire.

En 1968, l'apparition du calcul automatique des structures sur ordinateur a incité YAM et CHAPMAN [141] à réaliser le premier modèle de calcul de poutres mixtes à connexion partielle en adoptant un comportement des matériaux (acier et béton) de type élasto-plastique parfait et une modélisation continue de la connexion avec un comportement charge/glisement non-linéaire de type exponentiel. Ils ont considéré la force d'interaction nulle au droit des appuis d'une poutre isostatique et négligé l'influence du glissement à l'interface sur la distribution du moment de flexion pour les poutres hyperstatiques. Ils

ont également testé 12 poutres sous charge concentrée et 5 poutres sous charge répartie. En comparant les résultats de calcul avec leurs résultats expérimentaux mais aussi avec des résultats d'essais réalisés par VIEST [137], ils ont conclu à la validité de leur modèle.

En 1965, BALDWIN et al. [19] ont proposé une méthode simplifiée pour analyser les poutres mixtes. Ils ont introduit la notion d'interaction partielle, et l'hypothèse que la rigidité de la poutre mixte diminuait lorsque son degré d'interaction diminuait. Une relation empirique entre la réduction de rigidité de la poutre et le degré d'interaction a été proposée sur la base de résultats expérimentaux. Ces relations ont incité MCGARRAUGH et BALDWIN [98] à prouver que la résistance d'une poutre mixte augmente de façon non-linéaire avec le degré d'interaction. La résistance étant la plus faible s'il y a absence d'interaction et maximum si l'interaction est complète.

En 1977, BURKHARDT [45] a développé un modèle numérique qui est similaire à celui de YAM et CHAPMAN. Il a établi une équation différentielle qui porte sur le glissement, en prenant en compte les non linéarités matérielles (acier et béton) et l'effet de l'effort tranchant dans l'âme du profilé métallique. Il a étudié principalement des poutres sur appuis simple avec chargement symétrique et comparé son modèle à des expériences tirées de la littérature. Dans une étude paramétrique, il a étudié l'influence du degré de connexion sur le comportement global des poutres simplement appuyées et l'influence de la fissuration de la dalle sur le comportement des poutres continues.

En 1978, HALLAM [77] a proposé un modèle avec une loi de comportement des connecteurs qui prend en compte l'histoire du chargement. Un modèle de ce type a été développé par SEDDIK et BEHR au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées pour le cas des matériaux élasto-plastiques.

En 1982, un modèle a été développé par ARIBERT et LABIB [12]. Ce modèle a été ensuite généralisé par ARIBERT et ABDEL-AZIZ [13] avec une formulation mécanique plus fine à l'interface acier/béton, en tenant compte à la fois des forces de cisaillement verticale et horizontale agissant sur les connecteurs. Le modèle présente les caractéristiques suivantes :

- la loi de comportement de l'acier est élasto-plastique (avec ou sans écrouissage) et celle

- du béton présente une branche radoucissante et une résistance nulle en traction ;
- la connexion est modélisée de manière ponctuelle, donc discontinue ;
- la loi de comportement du connecteur est générale mais une loi exponentielle est généralement prise dans les applications ;
- l'énergie de déformation due à l'effort tranchant est négligée ;
- le soulèvement de la dalle par rapport au profilé est pris en compte ;
- le chargement est monotone croissant ;
- les équations différentielles sont formulées numériquement en terme de matrices de transfert, la solution non-linéaire étant obtenue de manière itérative ;
- le modèle peut être appliqué à des poutres de plusieurs travées symétriques ou dissymétriques et il permet de relever le mode de rupture de la poutre (écrasement de la dalle, rupture d'armature ou de connecteur et atteinte de l'allongement ultime de l'acier dans le profilé).

En Suisse, LEBET (1987) [90] a développé un modèle de poutre mixte applicable aux poutres mixtes connectées par groupes de goujons. Ce modèle est encore développé à partir de l'équation différentielle de glissement qui est résolue numériquement. Ce modèle tient compte de la discontinuité de la liaison due aux groupes de goujons. Il s'applique aux poutres à section variable et il permet d'intégrer la fissuration de la dalle tendue. LEBET a fait une série d'applications numériques orientées vers les ponts mixtes.

Plus récemment, en 1999, FABBROCINO et al. [62], [94] ont proposé un modèle basé, lui aussi, sur une résolution par différences finies. Ces auteurs ont établi une famille de courbes "moment-courbure" d'une section de poutre mixte pour différents degrés de connexion. Ce modèle prend en compte les non-linéarités matérielles, l'effet de la fissuration de la dalle et de l'adhérence entre l'armature et le béton.

Vu les avantages de la méthode des éléments finis pour le calcul des structures, les chercheurs ont été conduits à développer des modèles aux éléments finis pour les poutres mixtes. Les premiers modèles utilisant la méthode des éléments finis pour les poutres mixtes sont apparus à partir des années 80.

A notre connaissance, c'est ARIZUMI et HAMADA [16] qui ont développé le premier modèle de type "élément fini en déplacement" de poutres mixtes. Cet élément fini comportait 2 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud pour assurer une interpolation de type HERMITE sur les déplacements axiaux et transversaux dans l'acier et dans le béton. Cet élément présentait un intérêt essentiellement dans la cas d'une connexion continûment répartie, par exemple en présence d'adhérence physico-chimique de l'acier au béton.

RAZAQPUR et NOFAL (1989) [117] ont utilisé un élément barre 3D pour modéliser les connecteurs, un élément quadratique 2D pour modéliser l'âme du profilé métallique et un élément de plaque pour la dalle et les semelles du profilé. BURSI et BALLERINI (1996) [46] ont développé un modèle 2D pour étudier le comportement des poutres mixtes. En fait, l'utilisation des éléments finis 2D ou 3D nécessite beaucoup de temps de calcul et n'est pas pratique pour les structures de taille importante. Pour cette raison, il est préférable d'utiliser des éléments 1D de type poutre pour étudier les poutres mixtes.

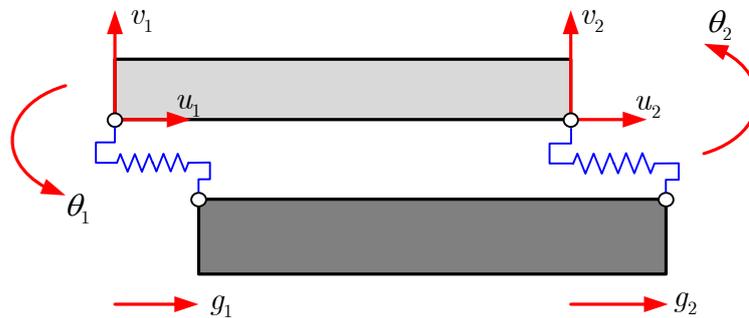


Figure 1.2 – Élément fini de poutre mixte développé par SCHANZENBACH (1988)

En Allemagne, SCHANZENBACH (1988) [125] a développé un élément fini en déplacement de poutre mixte plane à deux noeuds et 4 degrés de liberté par noeud ( $u, v, \theta, g$ ) où  $g$  est le glissement entre la dalle et le profilé métallique au noeud considéré (cf. Figure 1.2). Cet élément prend en compte les non-linéarités matérielles, l'effet de l'effort tranchant dans l'âme du profilé métallique par l'artifice d'une réduction de la limite d'élasticité du profilé, une loi de comportement de connecteur de type multilinéaire associée à une modélisation discrète du connecteur. SCHANZENBACH a fait une série de simulations d'essais réalisés

au laboratoire de l'Université de Kaiserslautern sur des poutres mixtes à trois appuis, avec un degré de connexion compris entre 17 % et 60 %.

En Suisse, DANIELS (1989) [55] a développé un élément fini de poutre mixte en déplacement avec connexion partielle, spécifiquement dédié à la simulation du comportement des planchers mixtes à bacs collaborants. Cet élément se présente sous la forme d'une poutre à trois noeuds et à 10 degrés de liberté au total, la connexion étant considérée continue sur l'élément et le comportement du connecteur pouvant être multilinéaire.

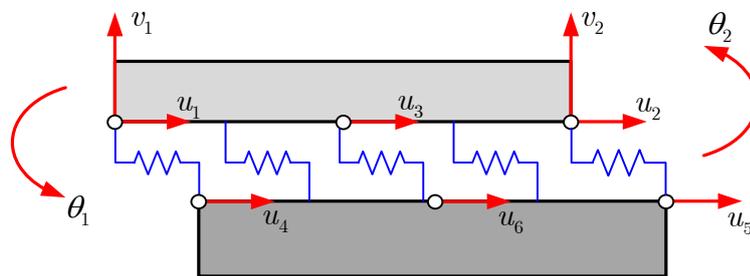


Figure 1.3 – Élément fini de poutre mixte développé par BOERAEVE (1991)

Plus récemment, BOERAEVE (1991) [40] a développé un modèle d'élément de poutre mixte, qui, au départ, ressemble à celui de DANIELS avec 3 noeuds et 10 degrés de liberté par élément (cf. Figure 1.3). En outre dans le modèle global de structures, l'auteur a pris en compte les grands déplacements.

En France, ARIBERT et al. (1995) [15] ont développé un élément fini de poutre mixte, toujours en déplacement, à deux noeuds à 8 degrés de liberté au total. Ce modèle est caractérisé par :

- une connexion discrète ;
- des lois constitutives non-linéaires (acier, béton et connecteur) ;
- un chargement monotone croissant ;
- un algorithme de résolution de type sécant ;
- la prise en compte, en plus de rotations due à la fissuration et à la plasticité, de celles dues au voilement local dans le profilé métallique (en fonction de la class de section).

ZHAO et ARIBERT (1996) [144] ont développé une formulation par éléments finis de type co-rotationnelle actualisée pour le calcul non linéaire (géométriquement et matériellement parlant) des portiques souples.

AYOUB et FILIPPOU (1997) [18] ont étendu le travail de YASSIN (1994) [143] sur les poutres en béton précontraint pour étudier le comportement des poutres mixtes avec connexion partielle soumises à des chargements cycliques. Dans ce travail, la force de cisaillement à l'interface est supposée linéaire le long de l'élément. En même temps, un modèle similaire à celui de AYOUB et FILIPPOU a été développé par SALARI et al. (1997) [122] en se basant sur le modèle original de AMADIO et FRAGIACOMO (1993) [10]. SALARI a comparé son modèle aux résultats des essais réalisés par BURSI et BALLERINI (1996) [46], et il a conclu que le modèle permettait de bien simuler le comportement d'une poutre mixte soumise à des moments de flexion positifs. Dans le cas de moments négatifs (où la partie inférieure du profilé métallique est en compression), les résultats expérimentaux ont montré l'existence d'un voilement local dans le profilé métallique que ce modèle n'a pas pu appréhender.

Tous les modèles aux éléments finis présentés précédemment sont basés sur la méthode des déplacements, où l'on recherche une solution approchée, mais cinématiquement admissible, du champ de déplacements. Cette méthode est simple et facile à implanter dans un programme mais peut conduire à des résultats pas toujours satisfaisants, notamment lorsque le comportement est dynamique et fortement non linéaire [130]. Normalement les fonctions d'interpolation des déplacements sont choisies de manière à fournir un champ de déplacement exact dans le cas élastique linéaire avec une section constante et sans charge appliquée à l'élément. Cette approche fournit de bons résultats dans le cas des poutres mixtes simplement appuyées où la dalle en béton est toujours en compression. Dans le cas des poutres continues, près des appuis intermédiaires, la dalle de béton va se fissurer et perdre sa résistance. Ce phénomène est très difficile à appréhender avec la méthode des déplacements. Le problème est typiquement résolu en utilisant un grand nombre d'éléments mais dans ce cas le coût de calcul augmente significativement.

Plus récemment, des modèles aux éléments finis, basés sur la formulation équilibre, ont été proposés. Ces éléments sont plus précis que les éléments en déplacements parce qu'ils

sont basés sur une approximation du champs des forces. Dans le cas géométriquement linéaire, le champ d'efforts internes est rigoureusement en équilibre ce qui conduit à une réponse plus précise avec la possibilité de représenter correctement le comportement d'un membre structural avec seulement un élément fini. A notre connaissance, c'est SALARI et al. [121] qui ont développé le premier modèle élément fini "équilibre" de poutre mixte. Dans ce modèle, la connexion est supposée être répartie le long de l'élément et une fonction d'interpolation cubique est utilisé pour approcher les forces de cisaillement à l'interface acier/béton. AYOUB (1999) [17] a développé un élément similaire à celui de SALARI en adoptant une fonction d'interpolation linéaire pour les efforts de cisaillement à l'interface.

La méthode "équilibre" a un avantage majeur du fait qu'un seul élément par membre structural est souvent suffisant pour simuler la structure, ce qui conduit à une réduction considérable du coût de calcul. Néanmoins, cette méthode reste délicate à implanter et les algorithmes en non-linéaire ne sont pas faciles à mettre en oeuvre (SPACON et al (1996) [130], NEUENHOFERE et FILIPPOU (1997) [103]). Pour cette raison, AYOUB (1999) [17] a développé un nouvel élément qui repose sur une formulation mixte. Dans cet élément, l'auteur a approché à la fois le champs de déplacements et le champs d'efforts internes. Ce nouvel élément combine les avantages de l'élément en déplacements et l'élément "équilibre".

### 1.3 Les effets du temps des poutres mixtes acier-béton

Contrairement à l'acier, le béton est un matériau qui a un comportement qui évolue au cours du temps. Cette dépendance vis-à-vis du temps conduit à une augmentation des déplacements (déformations) et une redistribution plus ou moins significative des efforts. Le comportement dépendant du temps du béton regroupe les phénomènes concomitants de fluage/relaxation et de retrait. Ce comportement est souvent approché par des méthodes simplifiées dites "élastiques équivalentes", c'est-à-dire où le béton est supposé se comporter de façon élastique linéaire et où son module élastique est remplacé par un module effectif. Ces méthodes ignorent donc l'histoire des sollicitations. Les trois méthodes simplifiées souvent rencontrées sont : la méthode du module effectif (EM method) ; la méthode de la contrainte moyenne (MS method) et la méthode du module effectif ajusté (AEMM method). Une autre approche qui apparaît plus rigoureuse à priori est celle fourni par la théorie de la viscoélasticité linéaire où la loi de comportement du béton se présente *a priori*

sous la forme d'une équation intégrale de BOLTZMANN héréditaire, impliquant le stockage complet de l'histoire des contraintes. Cette méthode est reconnue comme décrivant de façon réaliste le comportement complexe du béton dans les ouvrages en phase de service [26].

Le comportement viscoélastique du béton peut être aussi approché par la méthode dite "temps équivalent". Selon BOERAEVE [40], cette méthode développée par LAU, ACKER et al. (1986) [89] est admise par les règlements français. La méthode du temps équivalent remplace l'intégrale héréditaire par un seul terme qui est supposé caractériser toute l'histoire complète des sollicitations. Cette méthode présente de nombreux avantages pratiques mais elle ne peut être utilisée que dans le cas où la contrainte varie de manière monotone. Elle est incapable de représenter la recouvrance. Afin de remédier à ce problème, BOERAEVE [41] a proposé de décomposer la contrainte réelle en deux parties monotones pour que la méthode du temps équivalent puisse s'appliquer à chaque partie. BOERAEVE a appelé cette approche "méthode du temps équivalent améliorée".

Une autre manière de décrire le comportement viscoélastique du béton consiste à faire usage de la forme différentielle de la loi de comportement. Cette forme différentielle conduit à un modèle rhéologique avec les variables internes. Ce dernier évite le stockage de l'histoire de sollicitations. Il s'agit de la méthode "rate-type", initialement proposée par BAŽANT en 1975 [34].

Plusieurs travaux ont été publiés sur l'analyse des effets du temps des poutres mixtes acier-béton. À notre connaissance, dans tous ces travaux, le comportement mécanique des constituants a été supposé linéaire. GILBERT (1989) [71] a fait une analyse de section mixte en considérant une interaction complète à l'interface acier-béton (pas de glissement). L'auteur a utilisé la méthode AAEM pour prendre en compte le fluage et le retrait du béton. En supposant également une interaction complète et en utilisant la méthode AAEM, BRADFORD (1991) [43] a développé une méthode simplifiée (design method) pour calculer la flèche à long terme.

En 1991, BOERAEVE [40] a intégré la méthode du temps équivalent améliorée dans son modèle d'éléments finis en grands déplacements afin de prendre en compte les effets dif-

férés dans une poutre mixte avec l'interaction partielle. Ce modèle permet d'utiliser, au choix, les fonctions de retrait et de fluage codifiées de l'American Concrete Institute (ACI 209 model), du Comité Européen du Béton [1] et de BAŽANT et PANULA [32]. Par ailleurs, l'auteur a adopté un modèle de connexion continue.

AMADIO et FRAGIACOMO (1993) [10] ont développé un modèle élément fini pour étudier les effets de fluage et de retrait dans les poutres mixtes avec interaction partielle. Il s'agit de l'élément fini en déplacements géométriquement linéaire à 10 degrés de liberté au total. La connexion est modélisée de manière discrète. Le comportement de l'acier et d'un connecteur est supposé élastique linéaire. La méthode AAEM est utilisée pour prendre en compte les effets différés du béton.

DEZI et al. ont fait une série d'articles sur les effets différés dans les poutres mixtes avec interaction partielle ([58], [59], [60], [57], [61]). Ils ont développé un modèle basé sur la méthode des différences finies pour résoudre en espace les équations d'équilibre exprimées en fonction des déplacements. Dans ses premiers articles [58], [59], la relation du comportement viscoélastique du béton a été pris sous la forme intégrale qui a été discrétisée en temps par la méthode générale pas-à-pas de BAŽANT [21]. Ensuite, les auteurs ont utilisé les méthodes algébriques (AAEM, EM et MS) pour simplifier leur modèle [57], [61].

En 2002, FAELLA et al. [64] ont développé un élément fini basé sur la solution exacte en espace qui permet d'analyser les effets du temps des poutres mixtes avec interaction partielle par les méthodes algébriques (à un pas). Plus récemment, en 2006, RANZI et BRADFORD [115] ont développé une solution similaire, mais avec une écriture différente.

En 2004, VIRTUOSO et VIEIRA [138] ont développé un élément fini basé sur la formulation équilibre pour étudier les effets du temps dans les poutres mixtes continues avec interaction partielle. La viscoélasticité du béton est approchée par la méthode "rate-type" de BAŽANT [34]. Par ailleurs, en 2005, JURKIEWIEZ et al. [82] ont également utilisé la méthode "rate-type", mais ils ont résolu analytiquement en espace des équations fondamentales du problème.

Par souci de clarté, on précise que dans tous les modèles présentés précédemment :

- la connexion est supposée continue, sauf pour les modèles de AMADIO et FRAGIACOMO (1993) [10] où la connexion discrète est considérée ;
- l’hypothèse de petits déplacements est adoptée sauf pour le modèle de BOERAEVE [40] ;
- les lois de comportement sont supposées linéaires (élastique linéaire pour l’acier et les connecteurs, et viscoélastique linéaire pour le béton).

Il est à noter que la théorie de viscoélasticité linéaire est applicable pour le béton lorsque la contrainte ne dépasse pas sa résistance en traction et 40% de sa résistance en compression [2]. La prise en compte de la plasticité et de la fissuration est plus complexe. A notre connaissance, elle n’est pas encore intégrée dans les analyses des poutres mixtes. Dans cette thèse, le fluage a l’avantage d’être couplé à la plasticité afin de simuler l’évolution au cours du temps de la fissuration.

#### 1.4 Objectifs et structure de la thèse

Cette thèse porte sur la modélisation, dans le cadre des petits déplacements, du comportement des poutres mixtes acier-béton avec interaction partielle et prise en compte du comportement non-linéaire des matériaux ainsi que des effets différés. On peut énoncer les objectifs suivants :

1. Analyse de la réponse d’une poutre mixte pour les deux modélisations (discrète et continue) de la connexion.
2. Développement de trois formulations éléments finis (déplacement, équilibre et mixte) pour les deux modèles de connexion et comparaison de leurs performances respectives.
3. Développement d’outils d’analyse des effets différés dans les poutres mixtes avec prise en compte de l’interaction entre le fluage et la plasticité (fissuration).

Outre la conclusion, cette thèse est divisée en 6 chapitres, la chapitre 1 étant le présent chapitre introductif.

- **Le chapitre 2** présente les équations fondamentales qui gouvernent le comportement mécanique d’une poutre mixte. En supposant un comportement élastique linéaire, une

solution analytique est développée pour les deux modèles de connexion. A partir de ces solutions, des éléments finis basés sur une matrice de raideur "exacte" peuvent être formulés pour les deux modèles de connexion. On peut alors comparer rigoureusement les modèles de connexion en termes de champs mécaniques (déplacements et efforts internes).

- **Le chapitre 3** aborde les effets différés dans les poutres mixtes. L'acier et les goujons sont supposés élastiques et le comportement différé du béton est modélisé à l'aide d'une loi viscoélastique linéaire qui tient compte du vieillissement. Après avoir discrétisé cette dernière, une solution analytique des équations d'équilibre discrètes exprimées en fonction des déplacements est développée et conduit à la formulation de deux éléments finis dont la matrice de raideur est "exacte". Les méthodes à pas unique (AAEM, MS, EM) sont comparées à la solution semi-analytique pas-à-pas.

- **Le chapitre 4** traite de la formulation des lois de comportement des matériaux. Un modèle de plasticité couplé à l'endommagement est développé pour le béton. Ce nouveau modèle permet de reproduire exactement la courbe enveloppe contrainte/déformation en compression du modèle CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1] ainsi que le comportement uniaxial du béton sous charges/décharges multiples. Le formalisme adopté permet une intégration cohérente des relations de comportement, quelque soit la nature du chargement.

- **Le chapitre 5** aborde les trois formulations éléments finis (déplacement, équilibre et mixte) pour les deux modèles de connexion. Le chargement réparti, important en pratique, est pris en compte par les formulations équilibre et mixte. Une étude des performances des différents éléments finis est réalisée.

- **Le chapitre 6** traite de l'interaction entre les effets différés et les non-linéarités matérielles. Un modèle rhéologique représentatif de cette interaction est développé. Il repose sur une combinaison en série de la plasticité et de la viscoélasticité. L'algorithme d'intégration locale du comportement est présenté et validé. L'analyse de l'interaction est menée sur deux exemples.

## CHAPITRE 2

# MODÉLISATION DES POUTRES MIXTES ACIER-BÉTON EN COMPORTEMENT ÉLASTIQUE LINÉAIRE

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons la modélisation du comportement mécanique des poutres mixtes acier-béton. Les équations fondamentales y sont développées dans le détail. En particulier, deux modèles y sont présentés ; le premier porte sur une modélisation continue de la connexion (le caractère discret est ignoré) ; pour le second, le caractère discret est pris en compte, tel qu'il se présente dans la réalité. Les équations d'équilibre ainsi que les relations cinématiques sont développées pour ces deux modélisations de la connexion. Avant d'aborder la transposition en élément finis proprement dite (et qui constitue une partie essentielle de ce travail), une solution analytique est développée pour les deux modèles. La démarche est, pour l'essentiel, similaire à celle employée pour obtenir la matrice de raideur d'un élément de poutre classique. Elle permet d'établir une matrice de raideur exacte et ceci pour un chargement arbitraire. Ainsi, cette approche permet de réduire considérablement le nombre d'éléments qui, en pratique, est déterminé par les conditions d'appuis et les efforts concentrés.

### 2.2 Hypothèses et simplifications

L'objet de cette thèse est l'étude des poutres mixtes acier-béton soumises à un chargement quasi-statique. On considère que les transformations sont petites, c'est-à-dire que les déformations et les déplacements sont petits. Ainsi les différentes configurations peuvent être confondues avec la configuration initiale et les équations d'équilibre écrites en configuration non-déformée. Sur le plan cinématique, le déplacement vertical relatif entre la dalle de béton et la poutrelle métallique qui, en toute rigueur, pourrait se produire, sera négligé dans le présent modèle. La présence du glissement à l'interface acier-béton, ne permet pas d'adopter l'hypothèse cinématique de NAVIER-BERNOULLI pour l'ensemble de la section. Toutefois, il est permis de considérer que la dalle de béton et le profilé métallique se comportent l'un et l'autre comme une poutre en flexion dont la cinématique est définie

par l'hypothèse de NAVIER-BERNOULLI. Autrement dit, que dans chacune des parties de la poutre mixte, les sections planes et normales à la fibre moyenne avant déformation restent planes et normales à la fibre moyenne après déformation. Remarquons qu'en présence d'une armature, la fissuration de la dalle, notamment en zone de moment négatif et faible degré de connexion, ne remet pas en cause cette hypothèse. Par ailleurs, les dimensions habituelles des poutres mixtes ont un élancement longitudinal (rapport de la longueur de travée sur la hauteur transversale de section) supérieur à 10, ce qui permet généralement de négliger les déformations de cisaillement dues à l'effort tranchant. Dans le cadre de ces hypothèses, le comportement de la poutre mixte est alors dominé par la déformation axiale, la courbure de section de chaque partie de la poutre mixte et la déformation des connecteurs.

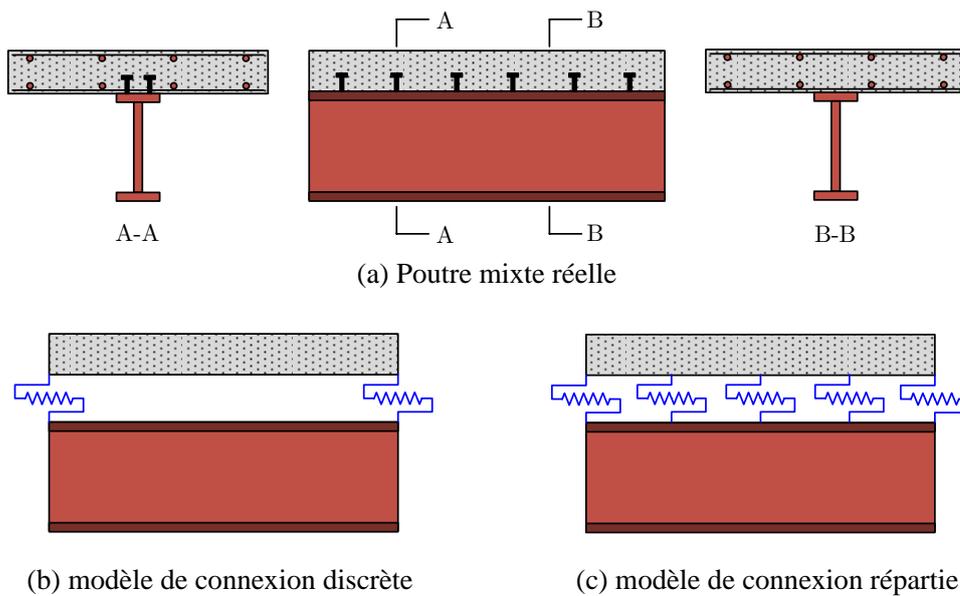


Figure 2.1 – Modèles de connexion

Un des objectifs de notre travail est la réalisation d'un code de calcul permettant de dimensionner des poutres mixtes avec les deux modèles de connexion, à savoir la connexion discrète et la connexion continue (cf. Figure 2.1). L'effort de cisaillement à l'interface sera ponctuel au droit du connecteur pour la connexion discrète [13] et réparti pour la connexion continue [104].

## 2.3 Poutre mixte acier-béton : équations fondamentales

Dans un premier temps, la connexion dalle-poutre est supposée répartie de manière continue. Le cas de la connexion discrète est traité au paragraphe 2.3.1.2. D'un point de vue mécanique, le comportement d'un corps déformable est régi par trois groupes d'équations :

1. les équations d'équilibre ;
2. les relations cinématiques ;
3. la loi de comportement.

Ces équations sont développées en détail, pour les deux modèles de connexion, dans les paragraphes ci-après. Seules les équations d'équilibre changent pour le cas de la connexion ponctuelle.

### 2.3.1 Équations d'équilibre

La connexion discrète introduit des discontinuités des champs de forces dont il conviendra de tenir compte dans les équations d'équilibre. La cinématique, traitée en section 2.3.2, n'est pas affectée par le mode de connexion.

#### 2.3.1.1 Cas de la connexion continue

Les équations d'équilibre sont obtenues en considérant l'équilibre d'un élément de poutre mixte de longueur infinitésimal  $dx$  soumis à une charge répartie  $p_z$  comme indiqué à la figure 2.2. L'équilibre de l'élément de poutre mixte est donc écrit dans la configuration non déformée. Pour ce faire, on considère l'équilibre de la dalle de béton et de la poutrelle métallique, pris séparément. Les grandeurs avec un indice  $c$  sont relatives à la dalle de béton, celle avec un indice  $s$  sont relatives à la poutrelle métallique. L'indice  $sc$  se rapporte à la connexion.

L'équilibre en résultante et moment (autour du point milieu) de la dalle en béton conduit à :

$$dN_c(x) + D_{sc}(x)dx = 0 \quad (2.1)$$

$$dT_c(x) + (V_{sc}(x) + p_z) dx = 0 \quad (2.2)$$

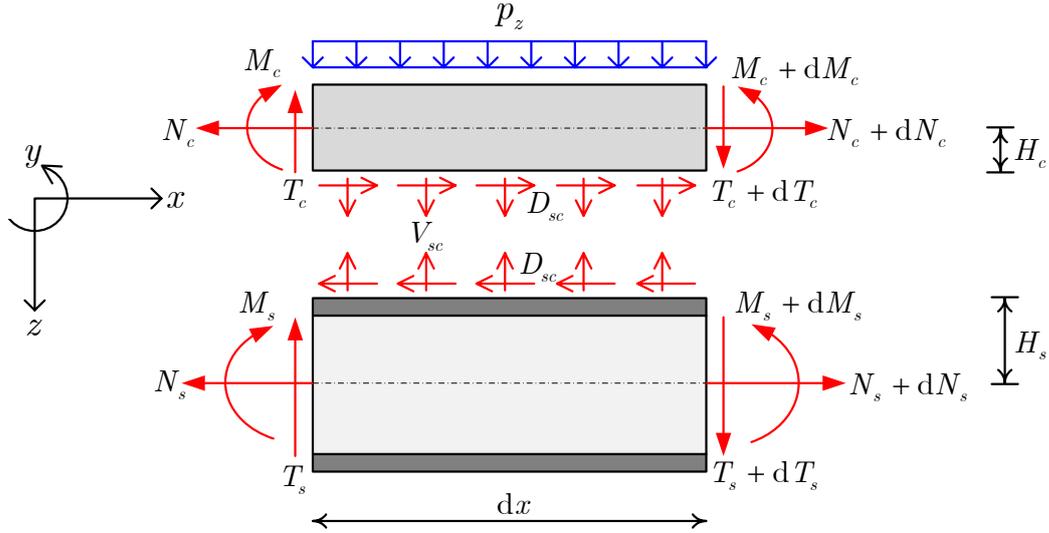


Figure 2.2 – Élément infinitésimal d'une poutre mixte

$$dM_c(x) - T_c(x)dx + H_c D_{sc}(x)dx - \frac{1}{2}dT_c(x) dx = 0 \quad (2.3)$$

où  $p_z$  désigne la charge uniforme répartie appliquée le long de l'élément. En négligeant les termes du second ordre, on obtient, pour la dalle de béton, le système d'équations suivants :

$$\frac{dN_c(x)}{dx} + D_{sc}(x) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{dT_c(x)}{dx} + V_{sc}(x) + p_z = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{dM_c(x)}{dx} - T_c(x) + H_c D_{sc}(x) = 0 \quad (2.6)$$

De même, l'équilibre en résultante et en moment (autour du point milieu) du profilé métallique conduit à :

$$dN_s(x) - D_{sc}(x)dx = 0 \quad (2.7)$$

$$dT_s(x) - V_{sc}(x)dx = 0 \quad (2.8)$$

$$dM_s(x) - T_s(x)dx + H_s D_{sc}(x)dx - \frac{1}{2}dT_s(x) dx = 0 \quad (2.9)$$

qui se simplifie, après avoir négligé les termes du second ordre :

$$\frac{dN_s(x)}{dx} - D_{sc}(x) = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{dT_s(x)}{dx} - V_{sc}(x) = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{dM_s(x)}{dx} - T_s(x) + H_s D_{sc}(x) = 0 \quad (2.12)$$

En combinant les équations 2.5 et 2.11, on retrouve la relation classique liant la charge répartie  $p_z$  à l'effort tranchant total  $T = T_c + T_s$  :

$$\frac{dT(x)}{dx} + p_z = 0 \quad (2.13)$$

De même, en combinant les équations 2.6 et 2.12, on obtient la relation suivante :

$$\frac{dM(x)}{dx} - T(x) + H D_{sc}(x) = 0 \quad (2.14)$$

où l'on désigne par :

- $H = H_c + H_s$  : la distance entre les axes de référence de la dalle et du profilé ;
- $M(x) = M_c(x) + M_s(x)$ .

Il convient de ne pas confondre  $M(x)$  avec le moment de flexion total de la section mixte  $M_t(x) = M_c(x) + M_s(x) + H N_s(x)$ . Par ailleurs, on observe dans la relation 2.14 que l'effet de la connexion apparaît clairement. L'effort tranchant est ensuite éliminé de l'équation 2.14, ce qui conduit à :

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} + H \frac{dD_{sc}(x)}{dx} + p_z = 0 \quad (2.15)$$

Cette dernière équation complétée des relations 2.4 et 2.10 constitue le système d'équations indépendantes qui régissent l'équilibre d'une poutre mixte avec un effort d'interaction  $D_{sc}$  (qui n'exclue pas l'existence d'un glissement). On remarquera, puisque l'effort tranchant s'obtient en dérivant le moment fléchissant total, que nous avons 4 efforts inconnus indépendants :  $N_c(x)$ ,  $N_s(x)$ ,  $D_{sc}(x)$  et  $M(x)$ .

Les équations d'équilibre (2.4), (2.10) et (2.15) peuvent également être écrites sous forme matricielle comme :

$$\partial \mathbf{D}(x) - \partial_{sc} D_{sc}(x) - \mathbf{P}_e = 0 \quad (2.16)$$

où :

$\mathbf{D}(x) = \left[ N_s(x) \quad N_c(x) \quad M(x) \right]^T$  désigne le vecteur des efforts internes d'une section mixte ;

$\mathbf{P}_e = \left[ 0 \quad 0 \quad p_z \right]^T$  désigne le vecteur forces extérieures appliquées le long de l'élément ;

$\partial$  et  $\partial_{sc}$  sont deux opérateurs différentiels définis par :

$$\partial = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix}, \quad \partial_{sc} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & H \frac{d}{dx} \end{bmatrix}^T \quad (2.17)$$

### 2.3.1.2 Cas de la connexion discrète

Pour ce type de connexion, il convient de distinguer deux zones : celle entre connecteurs et celle au droit du connecteur (cf. Figure 2.3). Dans la première zone, les équations d'équilibre sont identiques à celles développées au paragraphe précédent en prenant  $D_{sc} = 0$ , ce qui conduit à :

$$\frac{dN_c(x)}{dx} = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{dN_s(x)}{dx} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} + p_z(x) = 0 \quad (2.20)$$

Au droit des connecteurs, les efforts normaux dans la dalle et le profilé métallique sont discontinus. En supposant que la transmission des efforts entre la dalle de béton et le profilé métallique n'a lieu qu'en un point de l'interface acier-béton, les efforts au droit du connecteur se calculent de la manière suivante (en considérant un élément de longueur  $\Delta x$  :

$$N_c = N_c^+ - N_c^- = -Q_{st} \quad (2.21)$$

$$N_s = N_s^+ - N_s^- = Q_{st} \quad (2.22)$$

$$M_c = M_c^+ - M_c^- = -H_c Q_{st} \quad (2.23)$$

$$M_s = M_s^+ - M_s^- = -H_s Q_{st} \quad (2.24)$$

Ainsi, la discontinuité de l'effort normal dans la dalle de béton et dans le profilé métallique est égale à l'effort dans le connecteur  $Q_{st}$ , pris en valeur absolue. Cette relation s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} N_c \\ N_s \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -H \end{bmatrix} Q_{st} \quad (2.25)$$

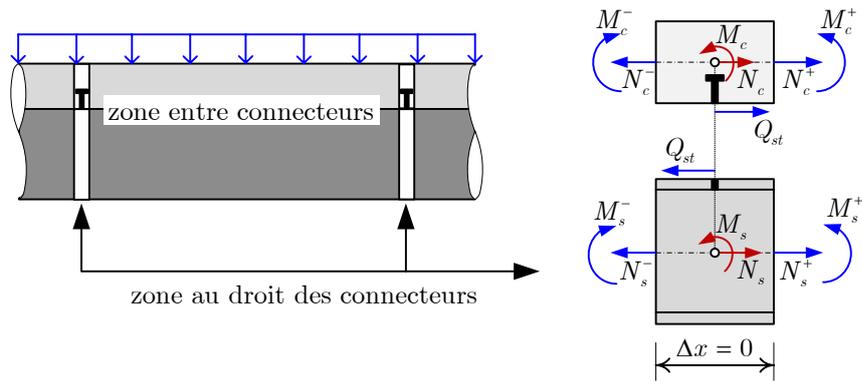


Figure 2.3 – Élément de connecteur

### 2.3.2 Relations cinématiques

Dans ce paragraphe, les relations qui relient les déformations généralisées (courbure et allongements) aux déplacements sont données dans le cadre des petits déplacements. En considérant que les sections droites restent planes et normales à l'axe neutre pour chaque composant de la poutre mixte, on obtient les relations suivantes :

– **Profilé métallique :**

$$\varepsilon_s(x) = \frac{du_s(x)}{dx} \quad (2.26)$$

$$\theta_s(x) = -\frac{dv_s(x)}{dx} \quad (2.27)$$

$$\kappa_s(x) = \frac{d\theta_s(x)}{dx} = -\frac{d^2v_s(x)}{dx^2} \quad (2.28)$$

– Dalle en béton :

$$\varepsilon_c(x) = \frac{du_c(x)}{dx} \quad (2.29)$$

$$\theta_c(x) = -\frac{dv_c(x)}{dx} \quad (2.30)$$

$$\kappa_c(x) = \frac{d\theta_c(x)}{dx} = -\frac{d^2v_c(x)}{dx^2} \quad (2.31)$$

où  $\varepsilon_i$  représente la déformation de l'axe de référence du composant  $i$  ;  $\theta_i$  représente la rotation de section du composant  $i$  et  $\kappa_i$  représente la courbure du composant  $i$ .

– **Interface acier-béton** : Un glissement  $d_{sc}$  se produit à l'interface acier-béton qui résulte d'un déplacement relatif. Les rotations étant petites, on peut assimiler la tangente à l'angle, ce qui fournit :

$$d_{sc}(x) = u_s(x) - H_s\theta_s(x) - u_c(x) - H_c\theta_c(x) \quad (2.32)$$

$$v_{sc}(x) = v_s(x) - v_c(x) \quad (2.33)$$

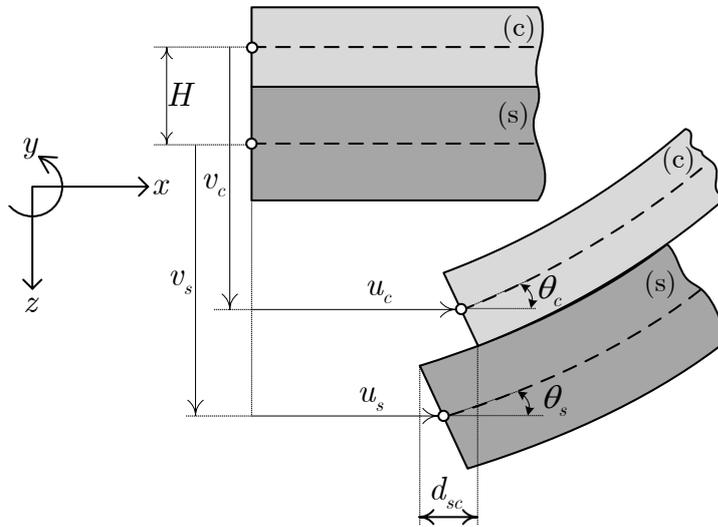


Figure 2.4 – Cinématique de la poutre mixte

En fait, plusieurs études à caractère théorique et expérimental montre que dans la plus part des cas, le soulèvement de la dalle par rapport au profilé métallique est très petit et ses effets sur le comportement global de la poutre mixte sont négligeables (ARIBERT et

ABDEL-AZIZ (1985) [13], ROBINSON et NARAINÉ (1988) [119]). Il est donc possible de négliger le phénomène de soulèvement de la dalle de béton par rapport du profilé métallique. Dans la suite du développement du modèle de calcul, l'hypothèse de non soulèvement sera systématiquement adoptée. Ainsi, en l'absence de soulèvement (décollement), le champ de déplacement transversal est identique pour la poutrelle métallique et la dalle en béton :

$$v(x) = v_s(x) = v_c(x) \quad (2.34)$$

Il en résulte que les rotations et les courbures sont identiques pour les deux composants :

$$\theta(x) = \theta_s(x) = \theta_c(x)$$

$$\kappa(x) = \kappa_s(x) = \kappa_c(x)$$

Ainsi les variables cinématiques indépendantes sont  $v(x)$ ,  $u_s(x)$  et  $u_c(x)$ , ce qui conduit aux relations cinématiques suivantes :

$$\varepsilon_s(x) = \frac{du_s(x)}{dx} \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_c(x) = \frac{du_c(x)}{dx} \quad (2.36)$$

$$\theta(x) = -\frac{dv(x)}{dx} \quad (2.37)$$

$$\kappa(x) = -\frac{d^2v(x)}{dx^2} \quad (2.38)$$

$$d_{sc}(x) = u_s(x) - u_c(x) + H \frac{dv(x)}{dx} \quad (2.39)$$

ou, sous forme matricielle :

$$\partial \mathbf{d}(x) - \mathbf{e}(x) = 0 \quad (2.40)$$

$$\partial_{sc}^T \mathbf{d}(x) - d_{sc}(x) = 0 \quad (2.41)$$

où

$\mathbf{d}(x) = \begin{bmatrix} u_s(x) & u_c(x) & v(x) \end{bmatrix}^T$  est le vecteur des déplacements ;

$\mathbf{e}(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_s(x) & \varepsilon_c(x) & \kappa(x) \end{bmatrix}^T$  est le vecteur des déformations généralisées associé au vecteur des efforts internes  $\mathbf{D}(x)$ .

### 2.3.3 Lois de comportement

L'objet de cette section est d'établir les relations de comportement généralisées à partir des relations uniaxiales contrainte/déformation de chacun des composants.

#### 2.3.3.1 Comportement de section : Relations entre efforts et déformations généralisées

En se basant sur l'hypothèse que les sections droites de chaque sous-poutre (dalle et profilé) restent planes après déformation, le champ de déformation normale s'écrit :

$$\text{dans le profilé :} \quad \varepsilon_s(x, z_s) = \varepsilon_s(x) + z_s \kappa(x) \quad (2.42)$$

$$\text{dans la dalle :} \quad \varepsilon_c(x, z_c) = \varepsilon_c(x) + z_c \kappa(x) \quad (2.43)$$

Le champ de contrainte normal se déduit du champ de déformation à l'aide de la relation de comportement des matériaux. Par définition, les efforts internes résultent de l'intégration du champ de contrainte sur la section droite :

$$N_s(x) = \int_{A_s} \sigma_c(x, z) \, dA \quad (2.44)$$

$$N_c(x) = \int_{A_c} \sigma_c(x, z) \, dA + \sum_{n_{sr}} \sigma_{sr}(x, z_{sr}) A_{sr} \quad (2.45)$$

$$M(x) = \int_{A_c} z_c \sigma_c(x, z_c) \, dA + \sum_{n_{sr}} z_{sr} \sigma_{sr}(x, z_{sr}) A_{sr} + \int_{A_s} z_s \sigma_s(x, z_s) \, dA \quad (2.46)$$

où  $A_s$ ,  $A_c$  et  $A_{sr}$  sont respectivement les aires de la section du profilé métallique, de la section de la dalle et de la section de l'armature ;  $n_{sr}$  est le nombre de barres d'armature. Ces équations montrent que le comportement de section dépend des propriétés matérielles et de la géométrie de la section. En général, dû au caractère inélastique du comportement des matériaux constituants, le comportement global de la section de la poutre mixte est non-linéaire. Autrement dit, dans la plupart des cas, la relation efforts-déformations généralisées de section de la poutre mixte ne peut être écrite de manière explicite. Toutefois, pour la suite des développements, nous la noterons par

$$\mathbf{D}(x) = \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{e}(x)) \quad \text{ou} \quad \mathbf{e}(x) = \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{D}(x)) \quad (2.47)$$

Au chapitre 4, le comportement non-linéaire des matériaux est abordé en détail. Dans ce chapitre 2, nous considérons un comportement élastique linéaire pour l'acier et le béton. Ainsi, l'introduction des relations (2.57) et (2.42) dans les relations (2.45 - 2.46) donne :

$$N_s(x) = (EA)_s \varepsilon_s(x) + (ES)_s \kappa(x) \quad (2.48)$$

$$N_c(x) = (EA)_c \varepsilon_c(x) + (ES)_c \kappa(x) \quad (2.49)$$

$$M(x) = (ES)_c \varepsilon_c(x) + (ES)_s \varepsilon_s(x) + (EI) \kappa(x) \quad (2.50)$$

où :

$$\begin{aligned} (ES)_c &= E_c S_c + \sum_{n_{sr}} E_{sr} A_{sr} z_{sr} & (ES)_s &= E_s S_s \\ (EA)_c &= E_c A_c + \sum_{n_{sr}} E_{sr} A_{sr} & (EA)_s &= E_s A_s \\ (EI) &= E_c I_c + E_s I_s + \sum_{n_{sr}} E_{sr} A_{sr} z_{sr}^2 \end{aligned}$$

avec

- $E_i$  : module élastique de la composante  $i$  ;
- $S_i = \int_{A_i} z_i dA$ ,  $i = c, s$  : moment statique de la section  $i$  exprimé par rapport à son axe de référence ;
- $I_i = \int_{A_i} z_i^2 dA$ ,  $i = c, s$  : moment d'inertie de la section  $i$  exprimé par rapport à son axe de référence ;

Les relations (2.48), (2.49) et (2.50) peuvent être écrites sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{k} \partial \mathbf{d}(x) \quad (2.51)$$

où  $\mathbf{k}$  désigne la matrice de rigidité de la section :

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} (EA)_s & 0 & (ES)_s \\ 0 & (EA)_c & (ES)_c \\ 0 & 0 & (EI) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

En choisissant comme axe de référence de chaque section (dalle et profilé) l'axe passant le centre de gravité de la section ( $S_c = S_s = 0$ ) et faisant usage des relations cinématiques (2.35 - 2.38), on peut écrire la loi de comportement en faisant apparaître explicitement les déplacements :

$$N_s = (EA)_s \frac{du_s}{dx} \quad (2.53)$$

$$N_c = (EA)_c \frac{du_c}{dx} \quad (2.54)$$

$$M = -(EI) \frac{d^2v}{dx^2} \quad (2.55)$$

### 2.3.3.2 Loi comportement de la connexion

La connexion peut être caractérisée par des essais push-out [3]. Plusieurs essais push-out ont été réalisés dans la littérature qui montrent que la relation force-glissement est fortement non-linéaire au-delà d'un glissement de 1 mm [112]. Ainsi, de manière générale, l'effort de cisaillement est lié au glissement par une loi constitutive non-linéaire que l'on écrit sous la forme :

$$\text{connexion discrète :} \quad Q_{st} = \hat{Q}_{st}(d_{sc}) \quad (2.56)$$

$$\text{connexion continue :} \quad D_{sc}(x) = \hat{D}_{sc}(d_{sc}(x)) \quad (2.57)$$

Si l'on suppose que la connexion a un comportement élastique linéaire, les relations (2.56) et (2.57) deviennent

$$\text{connexion discrète :} \quad Q_{st} = k_{st} d_{sc} \quad (2.58)$$

$$\text{connexion continue :} \quad D_{sc}(x) = k_{sc} d_{sc}(x) \quad (2.59)$$

où  $k_{st}$  [N/m] désigne la rigidité de la connexion discrète et  $k_{sc}$  [N/m<sup>2</sup>] désigne la rigidité de la connexion continue. Si la poutre est connectée de manière discrète (connecteur de type goujons, cornières ...) et que l'on souhaite la modéliser comme une connexion répartie, la rigidité  $k_{sc}$  est alors donnée par :

$$k_{sc} = \frac{k_{st}}{\text{①}} \quad (2.60)$$

où  $@$  est l'espacement longitudinal entre les connecteurs. Si l'espacement n'est pas régulier le long de la poutre, la raideur  $k_{sc}$  varie le long de la poutre.

## 2.4 Solution analytique et matrice de rigidité exacte dans le cas élastique linéaire

Dans cette partie, nous développons une solution analytique (exacte) pour une poutre mixte en considérant les deux modes de connexion : connexion discrète et connexion continue. On supposera que le comportement des matériaux et de la connexion est élastique linéaire. L'idée consiste à rechercher les fonctions d'interpolation exacte (qui par ailleurs dépendent du chargement) pour ensuite construire la matrice de raideur, dite "exacte". Dans cette démarche, l'ensemble des auteurs se sont inspirés de la solution exacte pour une poutre simplement appuyée, établie par NEWMARK [104]. La matrice de raideur (connexion répartie) a été proposée par FAELLA [63] en premier et une présentation différente en est faite par RANZI [116]. Ici, nous en faisons une présentation un peu différente des auteurs précités qui nous sera utile dans le chapitre 3. Par ailleurs, nous présentons également la solution analytique exacte pour la connexion discrète qui, bien que plus simple à obtenir, nous permettra de comparer l'effet de la modélisation de la connexion sur les champs mécaniques.

### 2.4.1 Connexion discrète

Afin de construire la matrice de raideur d'un élément de poutre mixte connecté de manière discrète à ses extrémités (cf. Figure 2.5), nous séparons cet élément en trois sous-éléments : un élément poutre mixte non-connectée ; deux éléments spécifiques de connexion discrète : il s'agit des éléments ponctuels (à un noeud) qui apportent une rigidité au cisaillement longitudinal au droit d'un connecteur. La matrice de raideur est obtenue en assemblant les matrices de raideur de ces trois éléments.

#### 2.4.1.1 Tronçon de poutre mixte non-connectée

L'objectif de cette section est d'établir une solution analytique pour un tronçon de poutre mixte compris entre deux connecteurs, soumis à un chargement arbitraire. Nous supposons que le chargement est décrit par la fonction  $p_z(x)$ . Les deux extrémités de la poutre

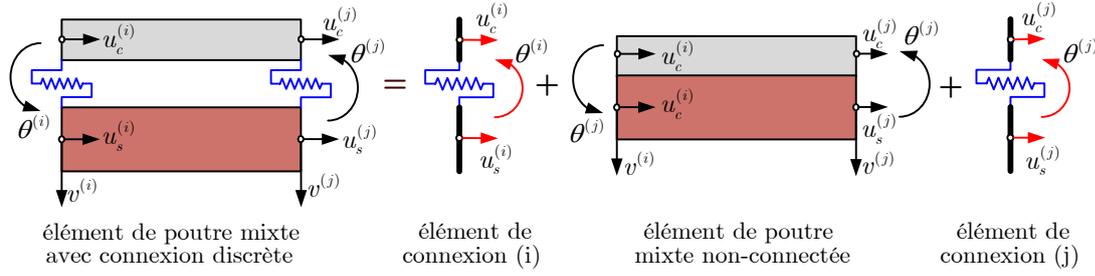


Figure 2.5 – Élément de poutre mixte avec connexion discrète

constituent des noeuds au sens des éléments finis.

En combinant les équations d'équilibre (2.18 - 2.20) et les relations de comportement exprimées en fonctions des déplacements (2.53 - 2.55), on obtient les équations d'équilibre exprimée en fonction des déplacements :

$$\partial_x^4 v(x) = \frac{p_z(x)}{(EI)} \quad (2.61)$$

$$\partial_x^2 u_c(x) = 0 \quad (2.62)$$

$$\partial_x^2 u_s(x) = 0 \quad (2.63)$$

où l'on désigne  $\partial_x^n \bullet = d^n \bullet / dx^n$ . L'absence de connexion conduit à un système découplé dont la solution est :

$$v(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 + v_{p_z}(x) \quad (2.64)$$

$$u_c(x) = C_5 x + C_6 \quad (2.65)$$

$$u_s(x) = C_7 x + C_8 \quad (2.66)$$

où  $v_{p_z}(x)$  est une solution particulière de l'équation différentielle (2.64). Les constantes  $C_i, i = 1..8$  sont déterminées en imposant que les déplacements aux extrémités sont égaux aux déplacements nodaux, qui sont les inconnues principales :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_c(0) \\ u_s(0) \\ -\partial_x v(0) \\ v(0) \\ u_c(L) \\ u_c(L) \\ -\partial_x v(L) \\ v(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L & 1 \\ -3L^2 & -2L & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\partial_x v_{p_z}(0) \\ v_{p_z}(0) \\ 0 \\ 0 \\ -\partial_x v_{p_z}(L) \\ v_{p_z}(L) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

D'où, sous forme matricielle :

$$\mathbf{q} = \mathbf{XC} + \mathbf{q}_{p_z} \quad (2.68)$$

Les déplacements étant indépendants, la matrice  $\mathbf{X}$  est inversible. On obtient ainsi les constantes  $C_i$  en fonction des déplacements nodaux  $q_i$  :

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}^{-1} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{p_z}) \quad (2.69)$$

Ceci équivaut à définir des fonctions d'interpolation qui dépendent du chargement. En l'absence de chargement, on retrouve exactement les fonctions d'interpolation pour les éléments finis de type poutre/poteau. Les efforts internes le long du tronçon de poutres mixte sont obtenus en substituant les relations (2.64 - 2.66) dans (2.53 - 2.55) :

$$M(x) = -(EI) (6 C_1 x + 2 C_2 + \partial_x^2 v_{p_z}(x)) \quad (2.70)$$

$$N_c(x) = (EA)_c C_5 \quad (2.71)$$

$$N_s(x) = (EA)_s C_7 \quad (2.72)$$

On observe que les efforts normaux sont constants, ce qui est cohérent avec les hypothèses du modèle. La matrice de raideur traduit le lien entre les efforts nodaux  $Q_i$  et les déplacements nodaux  $q_i$ . Elle s'obtient dans un premier temps en imposant les conditions aux limites statiques :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{YC} + \mathbf{Q}_{p_z} \quad (2.73)$$

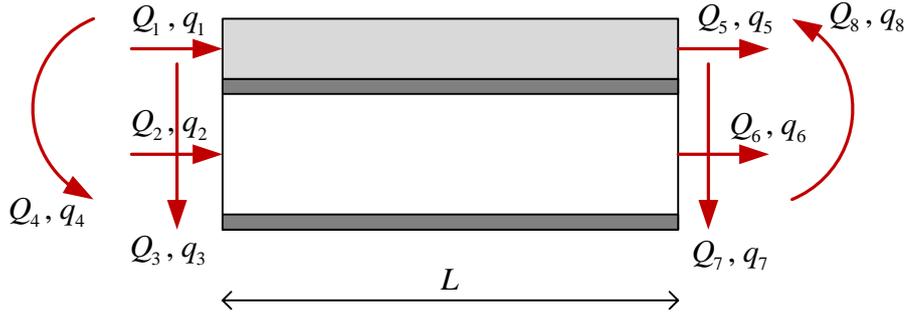


Figure 2.6 – Forces nodales et déplacements nodaux d'un élément de poutre mixte

où :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -(EA)_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(EA)_s & 0 \\ 6EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(EI) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (EA)_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (EA)_s & 0 \\ -6(EI) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6L(EI) & -2(EI) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

et

$$\mathbf{Q}_{p_z} = \left[ 0 \quad 0 \quad -EI\partial_x^3 v_{p_z}(0) \quad EI\partial_x^2 v_{p_z}(0) \quad 0 \quad 0 \quad EI\partial_x^3 v_{p_z}(L) \quad -EI\partial_x^2 v_{p_z}(L) \right]^T \quad (2.75)$$

En introduisant dans un deuxième temps l'équation (2.69) dans (2.73), on obtient :

$$\mathbf{K}_e^{(nc)} \mathbf{q} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_0 \quad (2.76)$$

où

$$\mathbf{K}_e^{(nc)} = \mathbf{YX}^{-1} \quad (2.77)$$

représente la matrice de rigidité exacte de l'élément de poutre mixte non-connectée et

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{YX}^{-1} \mathbf{q}_{p_z} - \mathbf{Q}_{p_z} \quad (2.78)$$

représente la vecteur de forces nodales dû à la charge répartie à l'intérieur de l'élément

(le vecteur des charges nodales équivalentes).

### 2.4.1.2 Élément spécifique de connexion ponctuelle

Le connecteur va provoquer une discontinuité du champ d'efforts internes qu'il convient de prendre en compte. Pour ce faire, la connexion est modélisée par un élément spécifique sans longueur physique mais pour lequel une raideur existe. Il s'agit d'un élément à 1 noeud localisé au droit des goujons.

Nous développons dans cette section la matrice de rigidité d'un tel élément dans le cas du comportement élastique linéaire des goujons. On suivra la même démarche pour le cas du comportement non-linéaire en travaillant avec une relation linéarisée. En introduisant la relation cinématique de glissement (2.39) dans l'équation (2.58), on obtient la relation

$$Q_{st} = k_{st} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ u_s \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

qui est ensuite introduite dans l'équation d'équilibre (2.25) afin de lier les efforts aux déplacements correspondants :

$$\begin{bmatrix} N_c \\ N_s \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -H \end{bmatrix} k_{st} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ u_s \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

D'où l'expression de la matrice de rigidité de l'élément de connexion :

$$\mathbf{K}_e^{(st)} = k_{st} \begin{bmatrix} 1 & -1 & H \\ -1 & 1 & -H \\ H & -H & H^2 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

### 2.4.1.3 Assemblage des éléments de connexion et l'élément de poutre mixte non-connectée

L'assemblage des matrices de rigidité élémentaires se fait en tenant compte des conditions cinématiques imposées aux noeuds. La figure 2.7 montre de manière schématique, comment se construit la matrice de raideur  $\mathbf{K}_e$  d'un élément de poutre mixte connectée de manière discrète aux deux extrémités, à partir des coefficients de  $\mathbf{K}_e^{(nc)}$ , de  $\mathbf{K}_i^{(st)}$  et de  $\mathbf{K}_j^{(st)}$  [140].

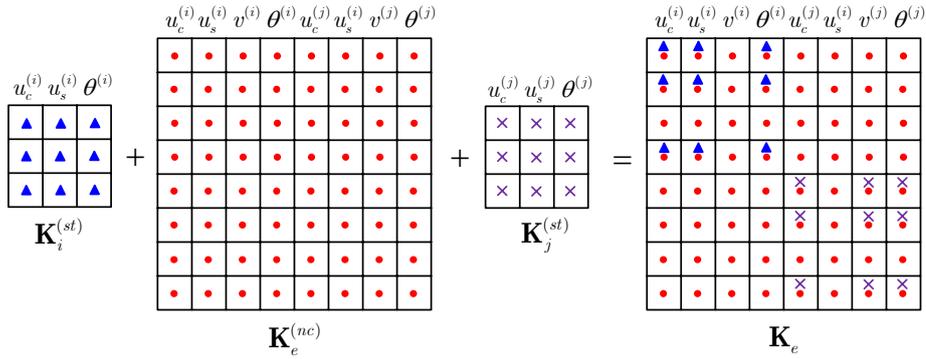


Figure 2.7 – Assemblage des parties acier, béton et connecteur - matrice  $\mathbf{K}_e$

### 2.4.2 Connexion continue

L'objectif de cette section est d'établir une solution analytique pour un élément de poutre mixte connecté de manière continue à l'interface acier-béton, soumis à une charge répartie  $p_z$ . La procédure est identique à celle pour la connexion discrète. Faisant usage des relations cinématiques (2.40 et 2.41) et les relations de comportement (2.51 et 2.59), on peut réécrire les équations d'équilibre (2.16) en fonction des déplacements comme :

$$\partial(\mathbf{k}\partial\mathbf{d}(x)) - \partial_{sc}(\mathbf{k}_{sc}\partial_{sc}\mathbf{d}(x)) - \mathbf{P}_e = 0 \quad (2.82)$$

En développant les produits des opérateurs différentiels  $\partial$  et  $\partial_{sc}$ , définis à la relation (2.17), l'équation (2.82) conduit aux systèmes d'équations différentielles suivant :

$$\partial_x^5 u_s(x) - \mu^2 \partial_x^3 u_s(x) = \zeta_1 \quad (2.83)$$

$$\partial_x^3 v(x) = \zeta_2 \partial_x^4 u_s(x) + \zeta_3 \partial_x^2 u_s(x) \quad (2.84)$$

$$u_c(x) = u_s(x) + \zeta_4 \partial_x^2 u_s(x) + H \partial_x v(x) \quad (2.85)$$

où les coefficients  $\mu$  et  $\zeta_{1..4}$  sont définis par :

$$\mu = \sqrt{k_{sc} \left( \frac{H^2(EA)_c + (EI) - 2H(ES)_c}{((EI)(EA)_c - ((ES)_c)^2)} + \frac{1}{(EA)_s} \right)} \quad (2.86)$$

$$\zeta_1 = \frac{(H(EA)_c - (ES)_c) p_z k_{sc}}{((EA)_c - ((ES)_c)^2) (EA)_s (EI)} \quad (2.87)$$

$$\zeta_2 = \frac{(EA)_c (EA)_s}{k_{sc} (H(EA)_c - (ES)_c)} \quad (2.88)$$

$$\zeta_3 = \frac{(EA)_c + (EA)_s}{H(EA)_c - (ES)_c} \quad (2.89)$$

$$\zeta_4 = -\frac{(EA)_c}{k_{sc}} \quad (2.90)$$

La première équation, qui ne fait intervenir que  $u_s$ , est résolue en premier. On ré-injecte ensuite le résultat dans les deux autres équations pour calculer les deux autres déplacements indépendants. La solution de l'équation différentielle (2.83) est de la forme :

$$u_s(x) = C_1 \sinh(\mu x) + C_2 \cosh(\mu x) + C_3 x^2 + C_4 x + C_5 - \frac{\zeta_1}{6\mu^2} x^3 \quad (2.91)$$

La solution de l'équation (2.84), après prise en compte de la solution de  $u_s(x)$  est :

$$\begin{aligned} v(x) = & C_1 \left( \zeta_2 \mu + \frac{\zeta_3}{\mu} \right) \cosh(\mu x) + C_2 \left( \zeta_2 \mu + \frac{\zeta_3}{\mu} \right) \sinh(\mu x) - \frac{\zeta_1 \zeta_3}{24\mu^2} x^4 \\ & + \frac{C_3 \zeta_3}{3} x^3 + C_6 x^2 + C_7 x + C_8 \end{aligned} \quad (2.92)$$

où  $C_{1..8}$  sont les constantes d'intégration, déterminées par les conditions aux limites statiques et cinématiques.

Posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_7 \ C_8]^T \\ \mathbf{X}_s(x) &= [\sinh(\mu x) \ \cosh(\mu x) \ x^2 \ x \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \\ \mathbf{X}_v(x) &= \left[ \left( \zeta_2 \mu + \frac{\zeta_3}{\mu} \right) \cosh(\mu x) \ \left( \zeta_2 \mu + \frac{\zeta_3}{\mu} \right) \sinh(\mu x) \ \frac{\zeta_3 x^3}{3} \ 0 \ 0 \ x^2 \ x \ 1 \right] \end{aligned}$$

$$Z_s(x) = -\frac{\zeta_1}{6\mu^2}x^3$$

$$Z_v(x) = -\frac{\zeta_1\zeta_3}{24\mu^2}x^4$$

On peut alors exprimer  $u_s(x)$  et  $v(x)$  sous la forme matricielle suivante :

$$u_s(x) = \mathbf{X}_s(x)\mathbf{C} + Z_s(x) \quad (2.93)$$

$$v(x) = \mathbf{X}_v(x)\mathbf{C} + Z_v(x) \quad (2.94)$$

En substituant les équations (2.93) et (2.94) dans l'équation (2.85), on obtient :

$$u_c(x) = \mathbf{X}_c(x)\mathbf{C} + Z_c(x) \quad (2.95)$$

où :

$$\mathbf{X}_c(x) = \mathbf{X}_s(x) + \zeta_4\partial_x^{(2)}\mathbf{X}_s(x) + H\partial_x\mathbf{X}_v(x) \quad \text{et} \quad Z_c(x) = -\frac{1 + H\zeta_3}{6\mu^2}x^3 - \frac{\zeta_4}{\mu^2}x \quad (2.96)$$

Finalement, en utilisant les conditions de compatibilité (2.40) et les relations constitutives (2.48 - 2.50), on peut déduire les autres inconnues du problème à partir des expressions de  $u_s(x)$ ,  $u_c(x)$  et  $v(x)$  obtenues précédemment comme :

$$\theta(x) = \mathbf{X}_\theta(x)\mathbf{C} + Z_\theta(x) \quad (2.97)$$

$$N_c(x) = \mathbf{Y}_{N_c}(x)\mathbf{C} + R_{N_c}(x) \quad (2.98)$$

$$N_s(x) = \mathbf{Y}_{N_s}(x)\mathbf{C} + R_{N_s}(x) \quad (2.99)$$

$$M(x) = \mathbf{Y}_M(x)\mathbf{C} + R_M(x) \quad (2.100)$$

$$T(x) = \mathbf{Y}_T(x)\mathbf{C} + R_T(x) \quad (2.101)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_c &= \mathbf{X}_s + \zeta_4\partial_x^2\mathbf{X}_s + H\partial_x\mathbf{X}_v & ; & & \mathbf{X}_\theta &= -\partial_x\mathbf{X}_v \\ \mathbf{Y}_{N_c} &= (EA)_c\partial_x\mathbf{X}_c - (ES)_c\partial_x^2\mathbf{X}_v & ; & & \mathbf{Y}_{N_s} &= EA_s\partial_x\mathbf{X}_s \\ \mathbf{Y}_M &= (ES)_c\partial_x\mathbf{X}_c - (EI)\partial_x\mathbf{X}_v & ; & & \mathbf{Y}_T &= \partial_x\mathbf{Y}_M + H\partial_x\mathbf{Y}_{N_s} \\ Z_c &= Z_s + \zeta_4\partial_x^2Z_s + H\partial_xZ_v & ; & & Z_\theta &= -\partial_xZ_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{N_c} &= (EA)_c \partial_x Z_v - (ES)_c \partial_x^2 Z_v & ; & & R_{N_s} &= (EA)_s \partial_x Z_s \\
 R_M &= (ES)_c \partial_x Z_c - (EI) \partial_x^2 Z_v & ; & & R_T &= \partial_x R_M + H \partial_x R_{N_s}
 \end{aligned}$$

A partir des expressions obtenues de façon exacte pour le champ de déplacements et le champ de forces, on peut facilement déduire l'expression de la matrice de rigidité d'un élément de poutre mixte, dite "exacte", en utilisant les conditions statiques et cinématiques aux limites. Cette matrice, qui représente la relation entre le vecteur de déplacements nodaux  $\mathbf{q}$  et le vecteur de forces nodales  $\mathbf{Q}$  (cf. Figure 2.6), va ensuite être utilisée dans la méthode des déplacements classique pour calculer les poutres mixtes à plusieurs travées. Soit un élément de la poutre mixte comme indiquée à la figure (2.6). En appliquant les conditions aux limites, le vecteur de déplacements nodaux  $\mathbf{q}$  et le vecteur de forces nodales  $\mathbf{Q}$  sont exprimés comme :

$$\mathbf{q} = \mathbf{XC} + \mathbf{Z} \quad (2.102)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{YC} + \mathbf{R} \quad (2.103)$$

où les matrices  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{Z}$  sont définies par :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_c(0) \\ \mathbf{X}_s(0) \\ \mathbf{X}_v(0) \\ \mathbf{X}_\theta(0) \\ \mathbf{X}_c(L) \\ \mathbf{X}_s(L) \\ \mathbf{X}_v(L) \\ \mathbf{X}_\theta(L) \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{N_c}(0) \\ \mathbf{Y}_{N_s}(0) \\ \mathbf{Y}_T(0) \\ \mathbf{Y}_M(0) \\ -\mathbf{Y}_{N_c}(L) \\ -\mathbf{Y}_{N_s}(L) \\ -\mathbf{Y}_T(L) \\ -\mathbf{Y}_M(L) \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{N_c}(0) \\ R_{N_s}(0) \\ R_T(0) \\ R_M(0) \\ -R_{N_c}(L) \\ -R_{N_s}(L) \\ -R_T(L) \\ -R_M(L) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_c(0) \\ Z_s(0) \\ Z_v(0) \\ Z_\theta(0) \\ Z_c(L) \\ Z_s(L) \\ Z_v(L) \\ Z_\theta(L) \end{bmatrix}$$

En éliminant le vecteur  $\mathbf{C}$  dans les équations (2.102) et (2.103), on obtient :

$$\mathbf{K}_e \mathbf{q} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_0 \quad (2.104)$$

où  $\mathbf{K}_e = \mathbf{YX}^{-1}$  représente la matrice de rigidité exacte de l'élément de poutre mixte;  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{YX}^{-1}\mathbf{Z} - \mathbf{R}$  représente la vecteur de forces nodales due à la charge répartie à

l'intérieur de l'élément.

*Remarque* : La présence de fonctions hyperboliques peut être la source d'instabilité numérique, notamment pour des valeurs élevées de  $k_{sc}$ .

### 2.5 Comparaison de deux modèles de connexion

La matrice de rigidité exacte  $\mathbf{K}_e$  précédente a été implantée dans un logiciel local développé sur MATLAB afin de comparer les deux modèles de connexion (discrète et continue). Nous analysons, dans ce paragraphe, le comportement élastique de deux poutres mixtes : une poutre isostatique et une poutre hyperstatique à deux travées inégales et avec un chargement excentré. Pour chacune de ces structures, nous considérons alternativement une connexion répartie et discrète. L'incidence du modèle sur les grandeurs fondamentales est alors examinée.

#### 2.5.1 Poutre isostatique P1

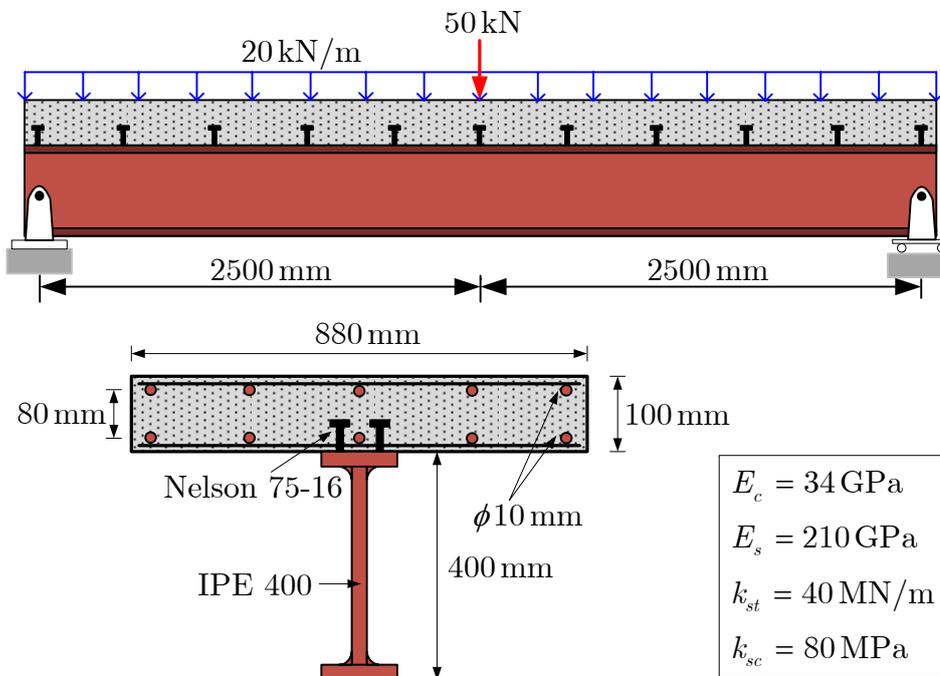


Figure 2.8 – Description de la poutre de référence P1

IL s'agit d'une poutre mixte acier béton isostatique reposant sur deux appuis simples, de longueur 5 mètres avec une charge répartie de 20 kN/m et une charge concentrée de 50 kN, appliquée en milieu de travée. La poutre se compose d'une dalle en béton armé de section 880 x 100 mm<sup>2</sup> avec deux nappes d'armature de 393 mm<sup>2</sup> chacune et d'un profilé métallique IPE400 connectés par 11 paires de goujons Nelson,  $h = 75$  mm,  $\phi = 16$  mm, régulièrement espacés le long de la poutre, chaque paire de goujons étant placée dans une même section transversale de la poutre (cf. Figure 2.8). Le module d'élasticité de l'acier vaut 210 GPa, celui du béton 34 GPa. La rigidité de chaque goujon sera prise égale à 20 MN/m. La rigidité du dispositif de connexion  $k_{st}$ , servant dans la simulation avec le modèle de connexion discrète, est donc égale à  $2 \times 20 = 40$  MN/m. La rigidité linéique de connexion  $k_{sc}$ , servant dans la simulation avec le modèle de connexion continue, est calculée par :

$$k_{sc} = \frac{k_{st}}{@} = \frac{40}{0.5} = 80\text{MPa} \quad (2.105)$$

où @ est l'espacement longitudinal des goujons. Les conditions aux limites cinématiques sont :  $v(x = 0) = 0$ ,  $v(x = L) = 0$  et  $u_s(x = 0) = 0$ .

### 2.5.1.1 Comparaison des résultats

A noter que dans cette étude comparative, on utilise les matrices de rigidité obtenues de manière exacte donc les résultats ne sont pas dépendants du maillage. La poutre est simulé avec 10 éléments de connexion ponctuelle dans un premier temps et ensuite avec 2 éléments de connexion répartie. L'usage de 2 éléments avec connexion continue s'impose par la présence de la charge ponctuelle.

En regardant les figures 2.9 à 2.15, nous constatons que modèle de connexion répartie (2 éléments) donne des résultats quasiment identiques à ceux obtenus avec la connexion discrète (10 élément).

Les figures 2.9 et 2.10 illustrent respectivement la répartition de la flèche de du glissement le long de la poutre. Il est à noter que le modèle de connexion continue surestime la flèche avec un écart de 2.1 %. Ceci résulte du fait que l'effort normal étant plus important avec un modèle de connexion discrète et que le moment total est constant, on en déduit un moment dans la dalle et le profilé moins important, et donc une courbure plus faible.

Également, on observe à la figure 2.10 que que le modèle de connexion continue surestime le glissement avec un écart de 9.2 %. En revanche, il sous-estime le déplacement axial de la dalle (écart de -16.7 %) (cf. Figure 2.11) et du profilé métallique (écart de -16.4 %) (cf. Figure 2.12).

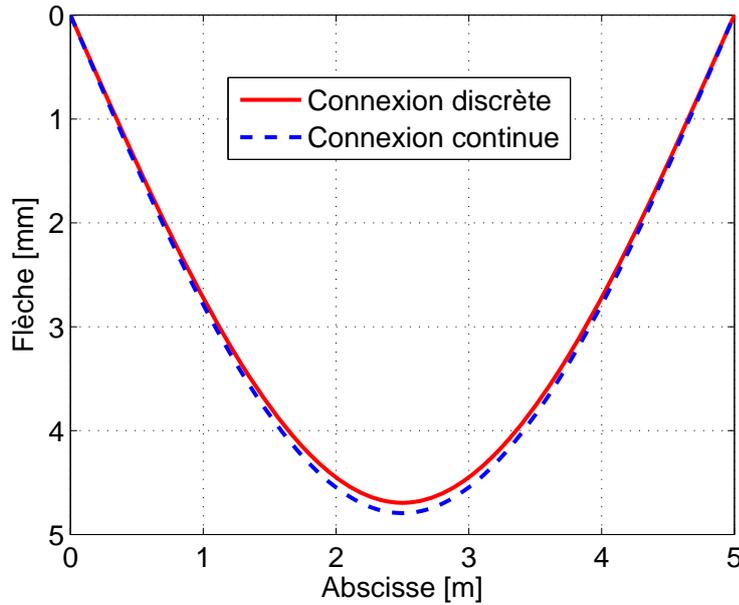


Figure 2.9 – Poutre P1 : Distribution de la flèche le long de la poutre

La répartition de la courbure le long de la poutre est présentée à la figure 2.13. Nous remarquons un bon accord entre les deux courbes sauf que le modèle de connexion discrète donne une discontinuité au droit des connecteurs. Cette discontinuité se produit par la nature de connexion discrète qui provoque des sauts de moment  $M = M_c + M_s$  au droit du connecteur due à la présence de l'effort dans les connecteurs. D'où discontinuité puisque la courbure  $\kappa = \frac{M_c}{(EI)_c} = \frac{M_s}{(EI)_s}$ .

La figure 2.14 montre la répartition du moment fléchissant total obtenue par les deux modèles. Il est clair que deux courbes sont identiques puisque la poutre est isostatique et soumise à un chargement statique donc le moment fléchissant total doit être unique, quelque soit la nature de connexion.

A la figure 2.15, on présente la répartition de l'effort normal dans la dalle. Nous remarquons que le l'effort normal est discontinu au droit des connecteurs et qu'il est également plus important pour le modèle de connexion discrète. Par ailleurs, pour le modèle de connexion continue, l'effort normal est égal à l'intégrale de la distribution des efforts de cisaillement longitudinaux.

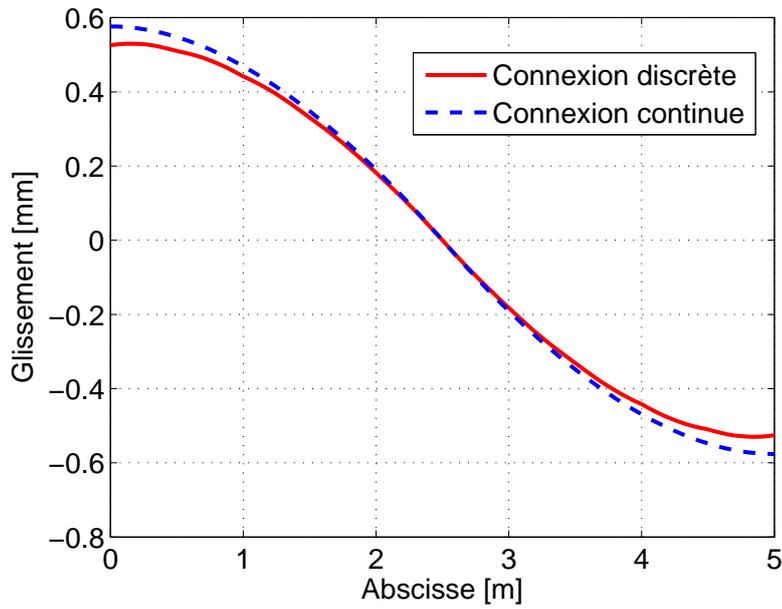


Figure 2.10 – Poutre P1 : Distribution du glissement le long de la poutre

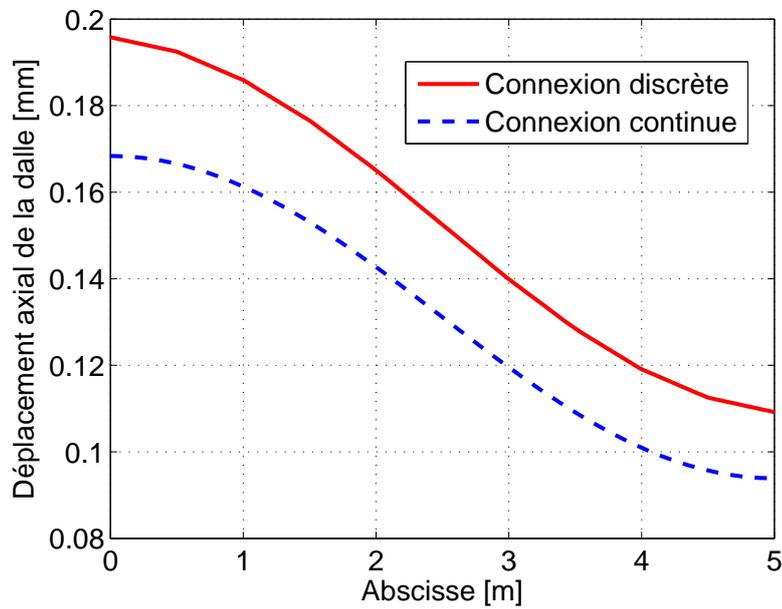


Figure 2.11 – Poutre P1 : Distribution du déplacement axial dans la dalle le long de la poutre

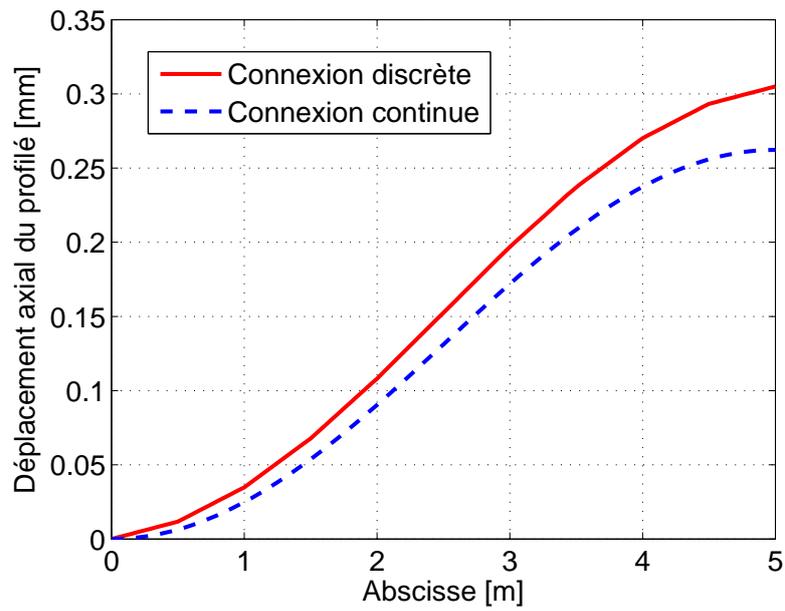


Figure 2.12 – Poutre P1 : Distribution du déplacement axial dans le profilé le long de la poutre

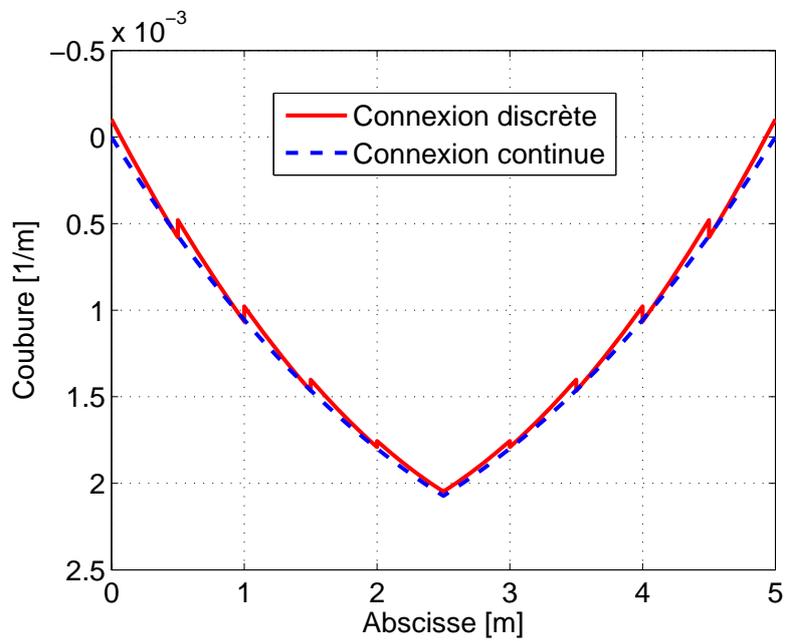


Figure 2.13 – Poutre P1 : Distribution de la courbure le long de la poutre

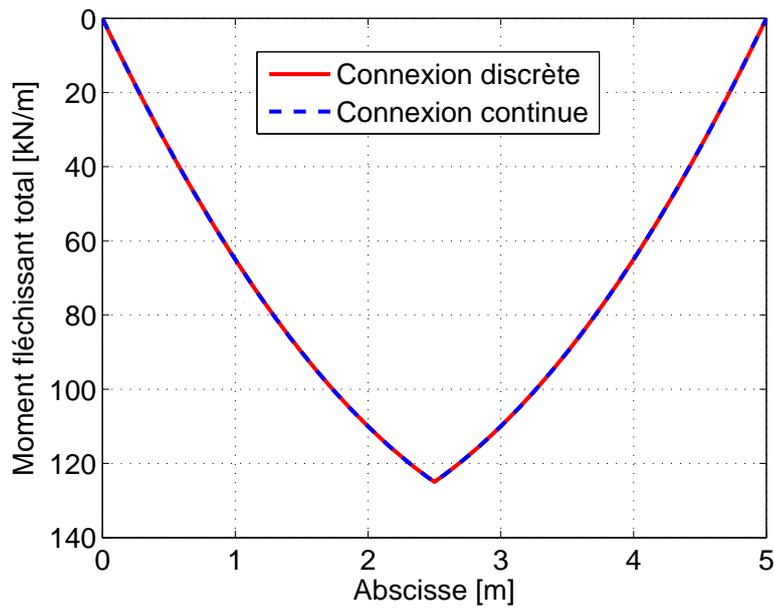


Figure 2.14 – Poutre P1 : Distribution du moment fléchissant total le long de la poutre

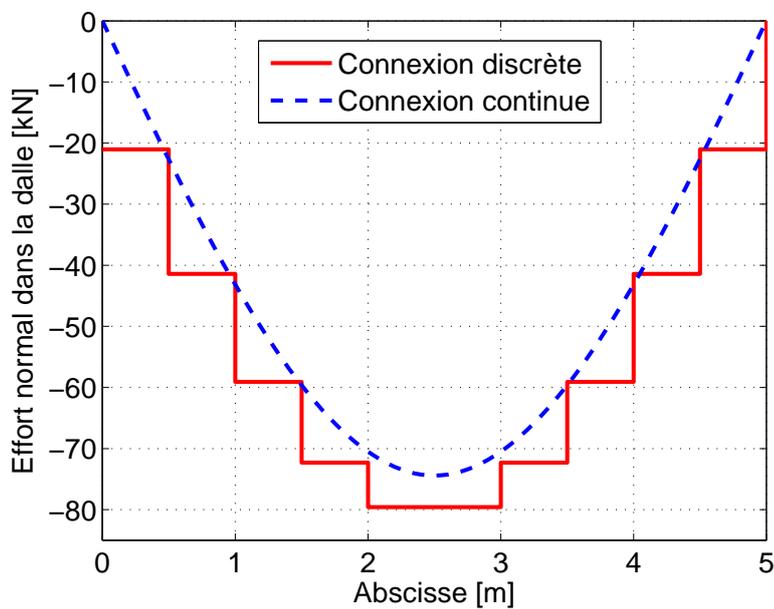


Figure 2.15 – Poutre P1 : Distribution de l'effort normal dans la dalle le long de la poutre

### 2.5.1.2 Influence de l'espacement des connecteurs

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que représenter la connexion, discrète par nature, par un modèle continu conduit à des résultats acceptables. Dans ce paragraphe, nous comparons le modèle de connexion continue avec 4 modèles de connexion discret équivalents qui correspondent à 4 espacements différents. Pour cela, nous conservons constante la rigidité linéique  $k_{sc} = 80$  MPa et considérons les quatre espacements suivants (même si les deux premiers ne sont pas autorisés en pratique) :

$$2500 \text{ mm}, \quad 1250 \text{ mm}, \quad 625 \text{ mm}, \quad 500 \text{ mm}.$$

La rigidité équivalente discrète  $k_{st}$ , déduite à partir de la relation (2.50) pour chaque espacement, est donc :

$$200 \text{ MN/m}, \quad 100 \text{ MN/m}, \quad 50 \text{ MN/m}, \quad 40 \text{ MN/m}.$$

Les figures 2.16, 2.17, 2.18 et 2.19 représentent l'influence de l'espacement des connecteurs sur la flèche, le glissement, le déplacement axial de la dalle et le déplacement axial du profilé. Le tableau 2.1 présente les valeurs maximales du déplacement transversal  $v$ , du glissement  $d_{sc}$  et des déplacements longitudinaux  $u_c$  et  $u_s$  obtenus à l'aide du modèle de connexion continue et discrète pour les 4 espacements. De plus, ce tableau contient l'écart en pourcentage entre des résultats maximum obtenus à l'aide du modèle de connexion discrète et ceux obtenus à l'aide du modèle de connexion continue équivalente. Nous rappelons que les valeurs maximum présentées se situent en bout de poutre, excepté pour la flèche où son maximum se trouve à mi-travée.

Nous observons à la figure 2.16 et au tableau 2.1 que l'espacement influence très peu la flèche (5.5% au maximum). Nous remarquons que la flèche diminue lorsque l'espacement augmente et que le modèle continu prédit une flèche plus importante que les modèles discrets. On en déduit que le modèle continu est plus souple que le modèle discret à raideur longitudinale constante. En revanche, le choix du modèle et l'espacement ont une influence plus importante sur le glissement. On constate à la figure 2.17 que le modèle continu surestime le glissement et l'écart entre modèle continu et discret atteint (-33.7% - voir tableau 2.1) pour l'espacement le plus important. Cette différence peut avoir des conséquences importantes sur le dimensionnement lorsque le critère de glissement est dimensionnant.

Valeur maximale	Connexion continue	Connexion discrète			
		Espacement des connecteurs [mm]			
		2500	1250	625	500
$v$ [mm]	4.795	4.545 (-5.5%)	4.592 (-4.4%)	4.674 (-2.6%)	4.695 (-2.1%)
$d_{sc}$ [mm]	0.576	0.382 (-33.7%)	0.462 (-19.8%)	0.514 (-10.8%)	0.523 (-9.2%)
$u_c$ [mm]	0.168	0.273 (62.5%)	0.230 (36.9%)	0.202 (20.2%)	0.196 (16.7%)
$u_s$ [mm]	0.262	0.426 (62.3%)	0.358 (33.6%)	0.315 (20.2%)	0.305 (16.4%)

Tableau 2.1 – Comparaison de deux modèles de connexion

Des conclusions similaires peuvent être faites pour les déplacements longitudinaux (voir tableau 2.1). En ce qui concerne l'effort dans la dalle, la figure 2.20 montre que le modèle de connexion continue donne la plus petite valeur maximale. L'espacement des connecteurs maximal qui correspond à 3 rangées de connecteurs, conduit à un effort normal constant le long de la poutre. Cet effort est par ailleurs le plus faible pour le modèle de connexion discret. On ne peut pas dégager une tendance sur l'évolution de l'effort normal en fonction de l'espacement.

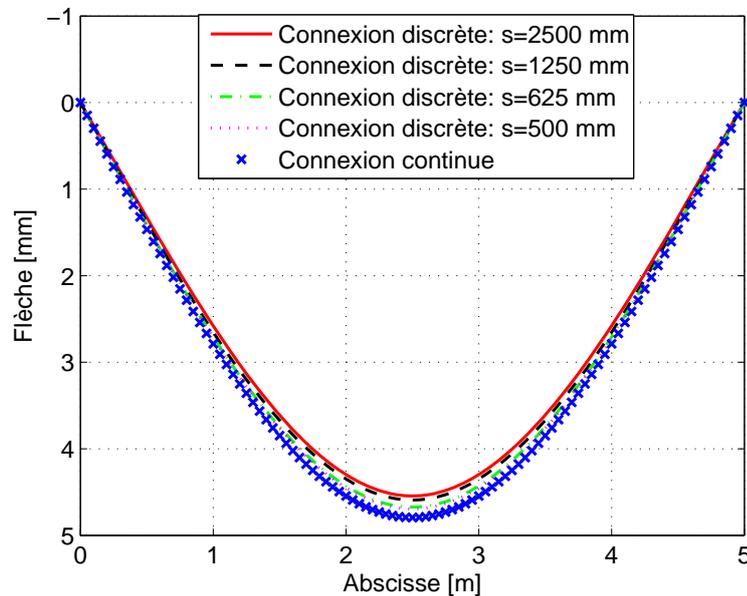


Figure 2.16 – Poutre P1 : Influence de l'espacement des connecteurs sur la répartition de la flèche le long de la poutre

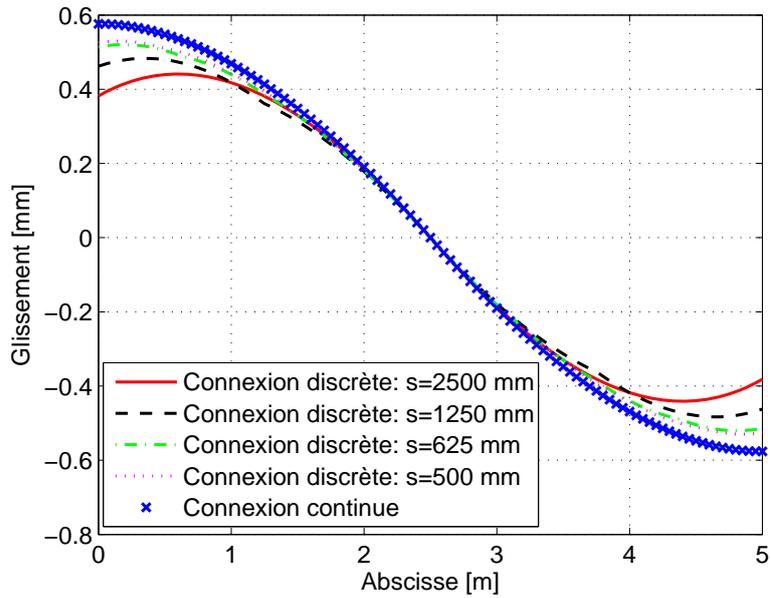


Figure 2.17 – Poutre P1 : Influence de l'espace des connecteurs sur la répartition du glissement le long de la poutre

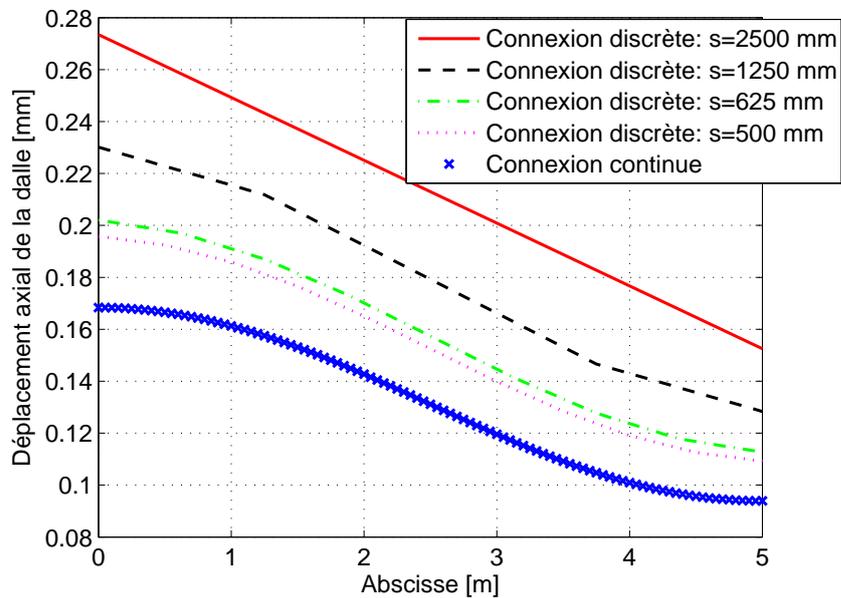


Figure 2.18 – Poutre P1 : Influence de l'espace des connecteurs sur la répartition du déplacement axial dans la dalle le long de la poutre

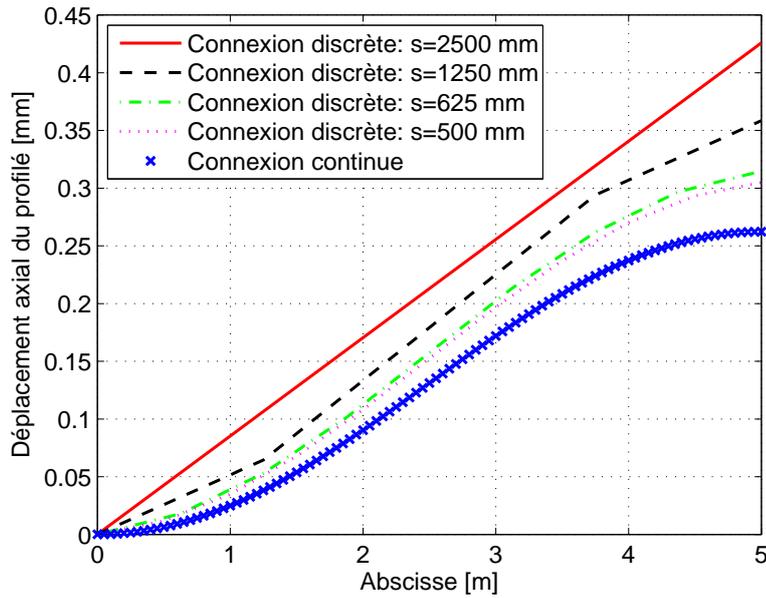


Figure 2.19 – Poutre P1 : Influence de l’espacement des connecteurs sur la répartition du déplacement axial dans le profilé le long de la poutre

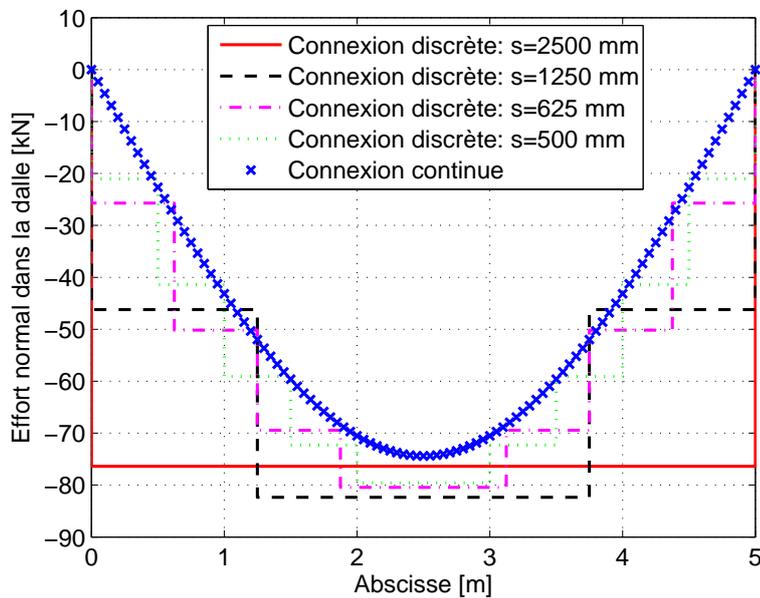


Figure 2.20 – Poutre P1 : Influence de l’espacement des connecteurs sur la répartition de l’effort normal dans la dalle le long de la poutre

### 2.5.2 Poutre hyperstatique à deux travées inégales P2

Dans le paragraphe précédent, nous avons fait une comparaison entre le modèle de connexion discrète et celui de connexion continue pour une poutre mixte isostatique simplement appuyée. Nous avons remarquer que si la poutre est connectée par des connecteurs discrets (goujons), l'écart de l'approche par connexion continue diminue lorsque l'espacement des connecteurs augmente. Nous allons examiner si pour une poutre hyperstatique, les mêmes conclusions peuvent être tirées.

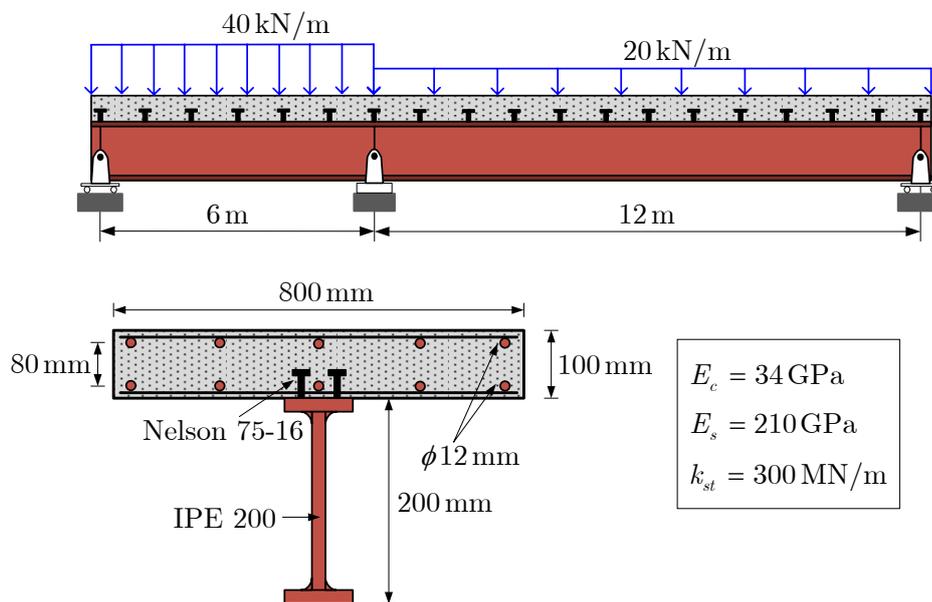


Figure 2.21 – Description de la poutre de référence P2

Nous analysons dans ce paragraphe une poutre mixte à deux travées inégales reposant sur trois appuis simples. Elle a une longueur totale de 18 m avec une première travée de 6 m et une seconde travée de 12 m. La poutre est constituée d'un profilé IPE 200 connecté à une dalle de béton dont la section est  $880 \times 100 \text{ mm}^2$ , renforcée par deux nappes d'armatures de 5 HA12. La première travée est soumise à une charge uniforme répartie de 40 kN/m tandis que la deuxième est soumise à une charge uniforme répartie de 20 kN/m comme indiqué sur la figure 2.21. La connexion se fait par 19 paires de goujons Nelson,  $h = 75 \text{ mm}$ ,  $\phi = 16 \text{ mm}$ , régulièrement espacées sur la longueur de la poutre. Autrement dit, l'espacement longitudinal des goujons, @, est égale à 1 m. La rigidité de chaque goujon

sera prise égale à 150 MN/m. La rigidité du dispositif de connexion  $k_{st}$ , servant dans la simulation avec le modèle de connexion discrète, est donc égale à  $2 \times 150 = 300$  MN/m. La rigidité linéique équivalente de connexion  $k_{sc}$ , servant dans la simulation avec le modèle de connexion continue, vaut :

$$k_{sc} = \frac{k_{st}}{\text{①}} = \frac{300}{1} = 300\text{MPa} \quad (2.106)$$

Les conditions aux limites cinématiques sont :  $v(x = 0) = 0$ ,  $v(x = 6m) = 0$ ,  $v(x = 12m) = 0$  et  $u_s(x = 6m) = 0$ . Par souci de clarté, les axes de références de la poutrelle et de la dalle passent par leurs centres de gravité. En pratique, au droit de l'appui intermédiaire, la dalle fissure. Dans le présent exemple, cette fissuration n'est pas considérée (exemple académique).

### 2.5.2.1 Comparaison des résultats

La poutre est simulé avec 19 éléments de connexion ponctuelle et 18 éléments de poutre mixte non-connectée dans un premier temps, et ensuite avec 2 éléments de connexion continue. En observant les résultats fournis par deux modèles de connexion, nous constatons ici que le modèle de connexion discrète conduit cette fois-ci à une flèche plus important pour la seconde travée (écart 4mm) alors qu'en première travée la distribution de la flèche est très proche pour les deux modèles (cf. Figure 2.22).

La distribution du glissement est donnée à la figure 2.23 pour les deux modèles. On observe que l'allure générale est la même pour les deux modélisations de la connexion avec un comportement local (entre deux connecteurs) assez singulier pour la connexion discrète. La discontinuité de pente, observée en connexion discrète, résulte de la discontinuité de la courbure au droit d'un connecteur. Par ailleurs, la solution exacte conduit à une distribution cubique (charge uniformément répartie) du glissement entre deux connecteurs avec une valeur du glissement plus important entre les connecteurs, ce qui explique l'allure de la courbe de glissement. La connexion discrète conduit à un glissement maximal plus important.

L'allure des déplacement axiaux est identique pour les deux modèles avec des valeurs de

déplacement très proches pour la dalle en béton et quasi identiques pour le profilé en acier (cf. Figures 2.24 et 2.25). L'espacement des goujons étant important (1m), on constate de fortes discontinuités de courbure (cf. Figures 2.26) alors que les distributions du moment fléchissant total est quasi identique pour les deux modèles (cf. Figure 2.27). Cette forte discontinuité de la courbure, due à la présence d'un connecteur, se double d'une discontinuité de l'effort normal (cf. Figure 2.28).

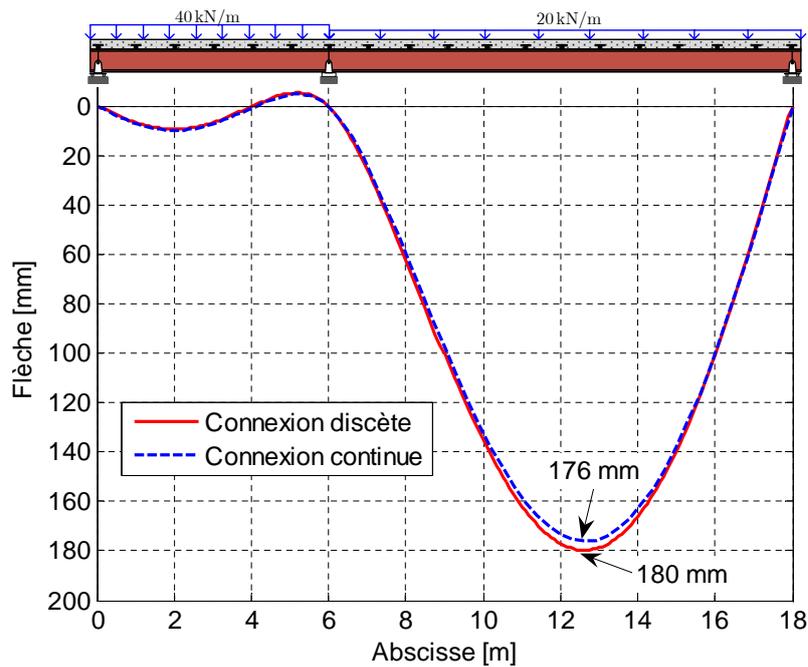


Figure 2.22 – Poutre P2 : Distribution de la flèche le long de la poutre

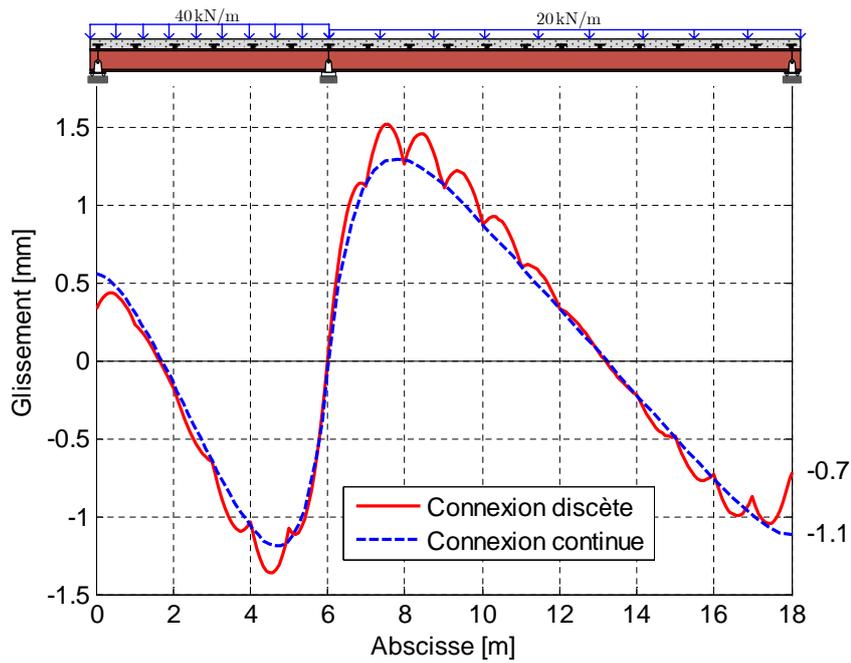


Figure 2.23 – Poutre P2 : Distribution du glissement le long de la poutre

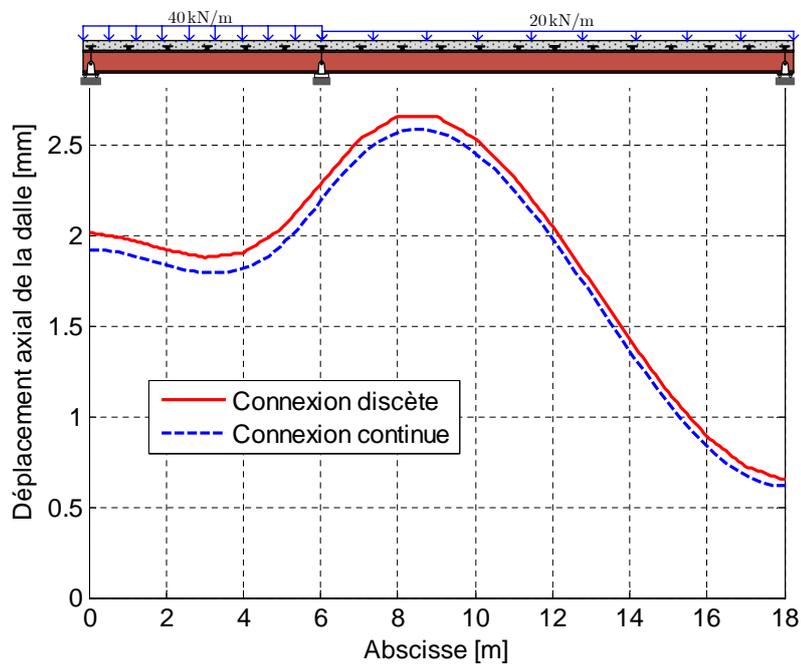


Figure 2.24 – Poutre P2 : Distribution du déplacement axial dans la dalle le long de la poutre

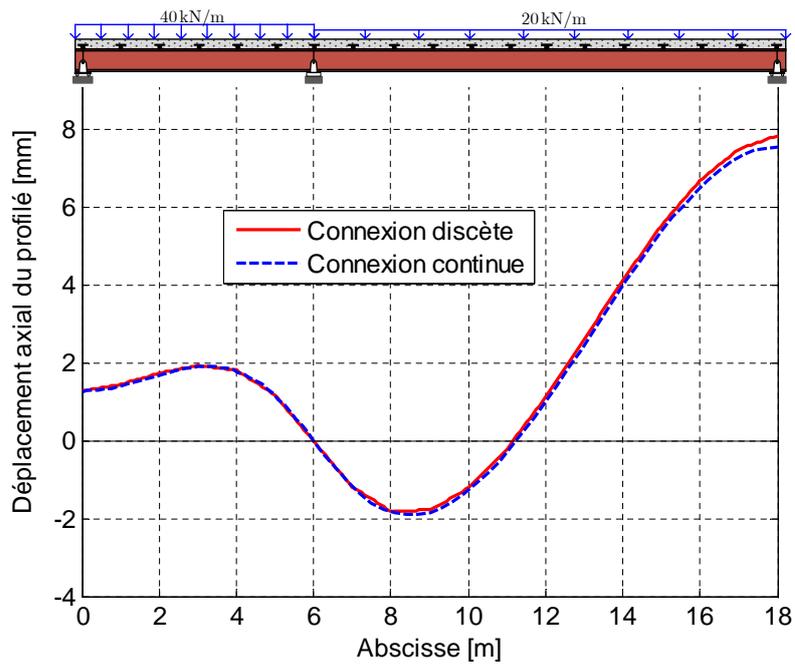


Figure 2.25 – Poutre P2 : Distribution du déplacement axial dans le profilé le long de la poutre

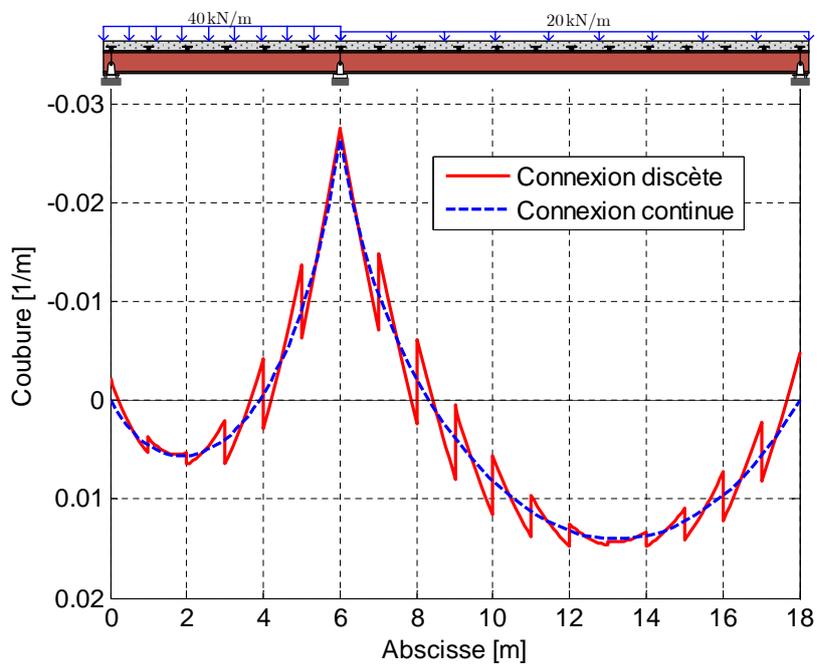


Figure 2.26 – Poutre P2 : Distribution de la courbure le long de la poutre

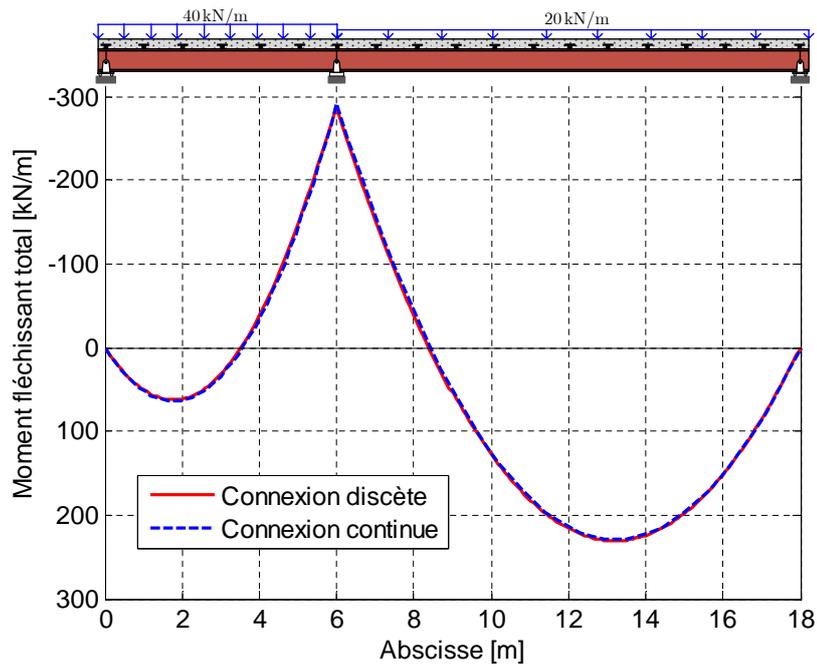


Figure 2.27 – Poutre P2 : Distribution du moment fléchissant total le long de la poutre

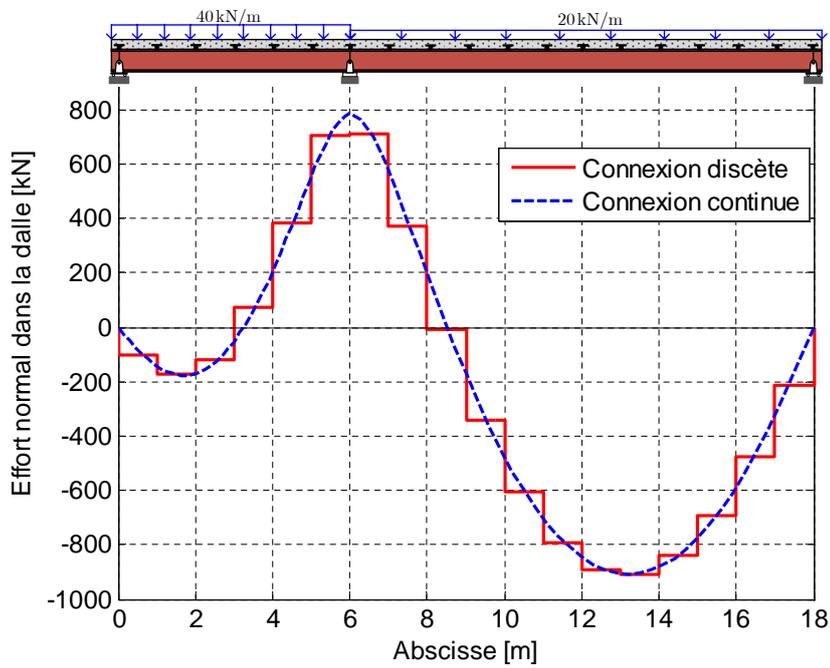


Figure 2.28 – Poutre P2 : Distribution de l'effort normal dans la dalle le long de la poutre

## 2.6 Synthèse et Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons abordé la modélisation des poutres mixtes en considérant deux modélisation de la connexion, à savoir un modèle de connexion discrète, conforme à la réalité et un modèle de connexion continue. Après avoir listé les hypothèses et les simplifications principales adoptées dans la modélisation, nous avons développé les équations fondamentales d'une poutre mixte acier-béton pour les deux modèles de connexion. En supposant que la poutre se comporte de manière élastique linéaire, les équations fondamentales sont analytiquement résolues. La matrice de raideur exacte est déduite et utilisée dans notre propre programme éléments finis qui est développé à l'aide de la langage Matlab. Ceci nous a permis d'analyser de manière exacte, avec un nombre minimum d'éléments, le comportement élastique d'une poutre mixte à plusieurs travées et avec un chargement chargée de manière quelconque.

Afin de comparer les deux modèles de connexion (discrète et continue), deux exemples ont été traités dans ce chapitre. On peut conclure que dans le cas où l'espacement des connecteurs est petit, le modèle de connexion continue fournit un résultat quasi identique à celui du modèle de connexion discrète, même avec un nombre d'éléments significativement réduit. Ainsi, malgré que le modèle de connexion discrète soit plus conforme à la réalité et qu'il reste simple à utiliser, il nécessite un plus grand nombre d'éléments, ce qui peut être prohibitif pour des structures de taille importante. L'approche par une connexion continue est raisonnable au niveau du temps de calcul, notamment avec une distribution très dense des connecteurs. Par contre, lorsque les connecteurs sont espacés, il est nécessaire d'utiliser le modèle de connexion discrète pour obtenir une distribution correcte des efforts internes. Bien que l'on ne puisse tirer des conclusions générales concernant une comparaison des deux modèles de connexion, puisque cela dépend de la structure et du chargement, on peut dire que le modèle de connexion répartie a tendance à sous-estimer la flèche. On doit ajouter que l'avantage premier du modèle de connexion discrète est un meilleur conditionnement de la matrice de raideur.

Les modèles numériques développés dans ce chapitre permettent d'analyser la comportement instantané de la poutre mixte en phase de service (domaine linéaire). Nous nous proposons dans le chapitre suivant d'étudier le comportement au cours du temps de la

## **Chapitre 2. Modélisation des poutres mixtes en comportement élastique**

---

poutre mixte, dû aux effets du temps sur le béton. Pour le comportement mécanique à l'approche de la ruine (non-linéaire matériel), nous développons dans le chapitre 5 des modèles appropriés d'éléments finis.

## CHAPITRE 3

### LES EFFETS DU TEMPS DANS LE BÉTON

#### 3.1 Introduction

Contrairement à l'acier, le béton est un matériau qui a un comportement qui évolue au cours du temps. Cette dépendance vis-à-vis du temps conduit à une augmentation des déplacements (déformations) et une redistribution plus ou moins significative des efforts. Ce chapitre a pour l'objet d'analyser les effets du temps sur le comportement des poutres mixtes acier-béton. Le comportement de l'acier et des goujons est supposé élastique linéaire tandis que le comportement du béton est considéré comme viscoélastique vieillissant. La modélisation du comportement viscoélastique est revue en détails. En particulier, la formulation différentielle "variables internes" et la formulation intégrale sont présentées pour un solide viscoélastique. A partir d'une version discrétisée de la formulation intégrale, une solution semi-analytique originale est développée pour les deux modèles de connexion. Cette solution semi-analytique permet d'établir une matrice de raideur "exacte" pour le modèle viscoélastique discret. Il est dès lors possible d'analyser des poutres continues avec un chargement arbitraire et des conditions d'appui générales. Cette solution semi-analytique nous permettra d'évaluer les performances des méthodes simplifiées (AAEM, EM et EM).

#### 3.2 Comportement dépendant du temps du béton

Le comportement dépendant du temps du béton a été étudié par beaucoup de chercheurs depuis qu'il a été observé pour la première fois, il y a environ un siècle. On attribue à HATT (1907) les premiers résultats sur le fluage du béton. Lorsqu'un spécimen en béton est soumis à une charge permanente, une déformation instantanée se produit immédiatement. Ensuite l'effet du fluage se manifeste et la déformation augmente graduellement avec le temps. L'augmentation de la déformation avec le temps ne peut être négligée car elle peut atteindre plusieurs fois la déformation instantanée. Le spécimen se déforme également avec le temps sous l'action du retrait qui est indépendant de la charge et est provoqué par la perte d'eau au cours des processus de dessiccation du béton et de carbonatation. La dé-

formation totale de béton peut être considérée comme étant la somme d'une déformation élastique qui apparaît immédiatement après l'application de la charge, d'une déformation du fluage qui dépend du temps et de la charge, et d'une déformation du retrait qui dépend du temps mais ne dépend pas de la charge. Cette décomposition est une simplification parce qu'en réalité, le fluage et le retrait sont deux phénomènes interdépendants.

L'évolution de la déformation du béton au cours du temps peut être illustrée en considérant un spécimen soumis à une contrainte de compression uniaxiale constante  $\sigma_0$  à l'instant  $t_0$ , la température étant maintenue constante. La déformation totale du spécimen pour les instants  $t > t_0$  peut s'exprimer comme (cf. Figure 3.1) :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{cp}(t) + \varepsilon_{sh}(t) \quad (3.1)$$

où  $\varepsilon_e(t)$  est le déformation instantanée,  $\varepsilon_{cp}(t)$  est la déformation de fluage et  $\varepsilon_{sh}(t)$  est la déformation de retrait.

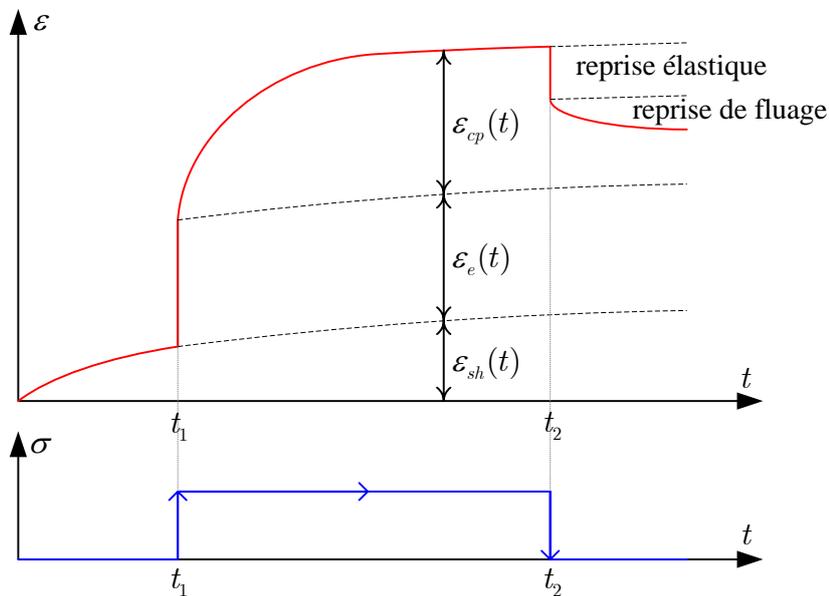


Figure 3.1 – Déformation du béton au cours du temps

### 3.2.1 Retrait

Le retrait du béton est défini comme un changement de volume du béton au cours du temps indépendant de la charge externe appliquée et de la variation de température. Ce changement de volume est dû à la perte de l'eau au cours du processus de dessiccation du béton et de la carbonatation. Les processus de diffusion hydrique de retrait tendent à se stabiliser à un an d'âge du béton. La déformation finale de retrait varie entre 500 et 1000  $\mu\text{m}/\text{m}$  sachant que la déformation élastique ultime en traction n'excède pas 100 à 200  $\mu\text{m}/\text{m}$  [39]. Par conséquent, le retrait est très souvent à l'origine des fissures que l'on trouve fréquemment dans presque tous les types d'ouvrages en béton.

En général, le retrait peut être divisé en quatre différents types, appelé retrait chimique, retrait plastique, retrait de dessiccation et retrait thermique [72].

#### Retrait chimique

Le retrait chimique est une conséquence directe des diverses réactions chimiques dans la pâte de ciment. Il se produit pendant le phase d'hydratation. Ce retrait, mis en évidence par LE CHÂTELIER en 1894, résulte d'une diminution de volume (8 à 12% du volume initial) de la pâte formée par rapport à la somme des volumes absolus des anhydres et de l'eau [6].

#### Retrait plastique

Le retrait plastique est définie comme une diminution de volume pendant que le béton se trouve dans la phase plastique, suite à une évaporation excessive de l'eau de gâchage, soit après ressuage, soit par les pores. Lorsque l'eau de surface s'évapore plus rapidement que l'eau de ressuage, il en résulte un retrait et les contraintes de tension en surface provoquent l'apparition de petites fissures irrégulières. L'armature d'une structure en béton ne peut pas contrôler ce type de fissuration parce que dans la phase plastique, l'adhérence entre l'armature et le béton n'est pas encore établie.

#### Retrait de dessiccation

Le retrait de dessiccation ou retrait de séchage par définition, se traduit par un départ d'eau inhérent à l'équilibre hydrique du matériau avec l'atmosphère ambiante non saturée

et ce, dès la mise en place du béton. Il possède une amplitude très importante devant les autres formes de retrait. La contraction produite permet l'évaporation de l'eau en excès, nécessaire au malaxage du béton frais, et dépend donc de la teneur en eau initiale de la composition de béton. Le retrait de dessiccation est notamment diminué si la proportion "granulats/pâte de ciment" augmente [39]. Le retrait de dessiccation dépend fortement de l'environnement hygrométrique et de ses variations (conditions de conservation) qui interviennent sur l'accélération ou le ralentissement du séchage. Selon le matériau et son épaisseur, le séchage peut prendre fin au bout de quelques années (structures massives) [95].

### Retrait thermique

Le retrait thermique est dû aux effets des gradients de température qui se manifestent dans le béton lors de la dissipation de la chaleur d'hydratation. Au coeur d'éléments massifs de structure, la température peut atteindre 50 à 70 °C. Par conséquence, des retraits différentiels d'origine thermique vont s'ajouter pour obtenir l'équilibre de l'élément avec la température du milieu environnant [4]. La durée de la réaction d'hydratation est relativement courte puisque 60% de l'hydratation est obtenue au bout d'un jour et 90% au bout de 4 à 5 jours. Par conséquence, le retrait thermique joue à très court terme.

### 3.2.2 Fluage

Le fluage est défini comme une augmentation graduelle des déformations d'un élément de structure sous charge maintenue constante au cours du temps. Il peut être de même ordre de grandeur que le retrait dû au séchage. Lorsqu'un élément de structure en béton est chargé, une déformation élastique instantanée apparaît (cf. Figure 3.1). Tel qu'on le définit, le fluage ne comprend aucune déformation élastique instantanée causée par le chargement, ni le retrait ou gonflement engendrés par les variations de teneur en humidité. Le fluage qui se produit dans un élément de structure en béton sec, sous charge, est une à deux fois plus important que celui se produit dans les conditions normales d'humidité [7]. Si on ajoute à ce qui précède le retrait dû au séchage, et si l'on tient compte du fait que le fluage peut être quelquefois beaucoup plus important que la déformation élastique lors du chargement, on conçoit que ces facteurs puissent engendrer des effets considérables en mécanique des structures. Si on enlève une charge permanente, la déformation décroît im-

médiatement d'une quantité égale à la déformation élastique existant à un âge déterminé ; elle est généralement inférieure à la déformation élastique créée au moment de la mise en charge, car le module d'élasticité a augmenté au cours de la période intermédiaire. Cette déformation de retour instantanée est suivie d'une diminution graduelle de la déformation, c'est le fluage réversible. Ce retour n'est pas complet car le fluage n'est pas un phénomène réversible.

La déformation de fluage se décompose suivant trois phases d'évolution (primaire, secondaire et tertiaire) qui possèdent des caractéristiques différentes en terme de déformation  $\varepsilon_{cp}$  (creep strain), de vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}_{cp}$  (creep strain rate) et d'accélération de la déformation  $\ddot{\varepsilon}_{cp}$  (creep strain acceleration) [111]. La déformation de fluage complète, c'est-à-dire, avec les trois phases (primaire, secondaire et tertiaire) n'est observée que lorsque la contrainte est proche de la résistance limite. En pratique, le niveau de contrainte au sein d'une structure, reste relativement faible et n'engendre que les phases de fluage primaire à secondaire [49], [39]. Dans cette gamme de contraintes, le mécanisme de fluage a tendance à modifier le béton en le compactant, ce qui lui confère un gain de résistance [105]. On remarque que la vitesse de déformation reste toujours positive  $\dot{\varepsilon}_{cp} > 0$ , quelque soit la phase d'évolution, tandis que différentes accélérations de la déformation  $\ddot{\varepsilon}_{cp}$  pour chaque phase sont à distinguer :

- Phase primaire : l'accélération est négative  $\ddot{\varepsilon}_{cp} < 0$  et ce qui conduit à une stabilisation de la déformation (comportement asymptotique).
- Phase secondaire : l'accélération oscille autour d'une valeur nulle  $\ddot{\varepsilon}_{cp} \approx 0$  entraînant une évolution de la déformation à vitesse constante.
- Phase tertiaire : l'accélération devient positive  $\ddot{\varepsilon}_{cp} > 0$ . La déformation augmente rapidement jusqu'à la rupture provoquée du béton.

Le fluage est influencé par les facteurs suivants :

- Charge appliquée : dans une période de temps et à condition que le niveau de charge appliquée ne passe pas de 40% de la résistance en compression de béton, la déformation du fluage est proportionnelle à la charge appliquée [1].

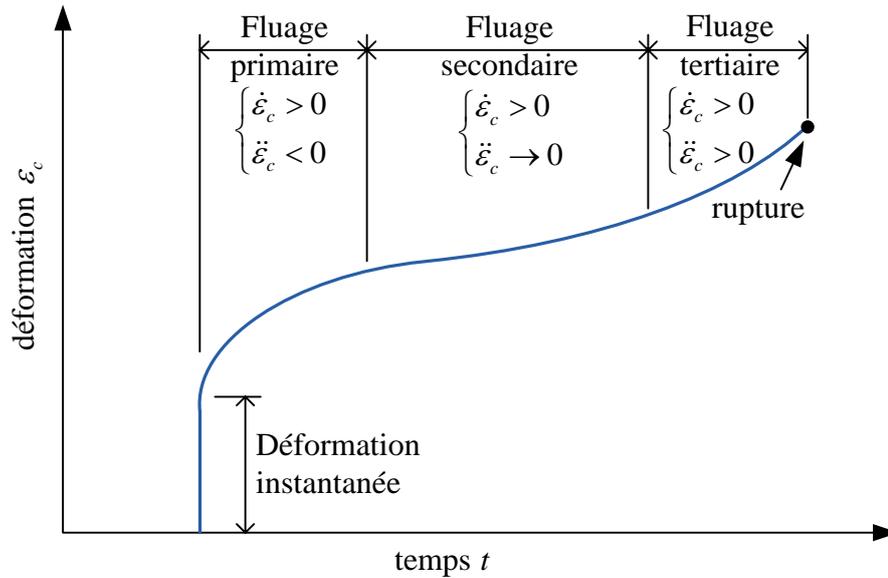


Figure 3.2 – Évolution de la déformation de fluage complète

- Température : pour une température comprise entre 18°C et 82°C, la déformation du fluage est proportionnelle à la température [44].
- Âge de béton au moment de l'application de la charge : un béton mûr produit une petite déformation de fluage.
- Humidité relative de l'ambiance : plus l'humidité relative est importante, plus la déformation de fluage est petite.
- Dimension de l'élément de béton : la déformation du fluage est plus grande dans les structures en béton de petites dimensions comparée à celle dans les structures de grandes dimensions.
- Composition du béton : la déformation du fluage est influencée par le type de ciment, l'agrégat et le rapport entre eau et ciment utilisé pour la composition du béton. Un agrégat avec un module de YOUNG faible va développer une déformation de fluage plus grande qu'un agrégat avec un module de YOUNG important. Le rapport entre eau et ciment influence fortement l'intensité du fluage ; par exemple, pour un rapport de 65%, la déformation de fluage finale peut être trois fois plus élevée que pour un rapport de 40% [128].

### 3.2.3 Fluage en traction

Alors que le fluage du béton en compression a été considérablement étudié, le cas du fluage en traction est moins bien connu. Le mécanisme de fluage en traction est différent du mécanisme de fluage en compression bien qu'à même niveau de contrainte, l'amplitude de la déformation soit similaire. En pratique, la mesure de l'amplitude et de la vitesse du fluage en traction est compliquée en raison de la difficulté à bien isoler la déformation du fluage de la déformation du retrait qui peut être grande par rapport à celle de fluage [70]. Certaines observations expérimentales montrent que, pour un même niveau de contrainte, le fluage en compression et le fluage en traction sont similaires, [73], tandis que d'autres observations expérimentales indiquent que la déformation de fluage en traction est plus grande que celle de fluage en compression [80]. Dans notre étude, nous considérerons que l'amplitude et le développement du fluage du béton en traction est similaire à celle du fluage de béton en compression. En adoptant cette hypothèse, plusieurs chercheurs ont obtenu un bon accord avec les résultats expérimentaux dans leurs analyses [35], [123].

### 3.3 Viscoélasticité linéaire

Le comportement viscoélastique d'un matériau se situe entre le comportement parfaitement élastique d'un solide et celui parfaitement visqueux d'un fluide. Un solide parfaitement élastique possède une parfaite mémoire de sa forme originale, alors qu'un fluide visqueux n'a aucune mémoire de sa forme originale. Après suppression du chargement, un fluide se déforme de manière continue pour prendre la forme de son container. Un matériau viscoélastique possède à la fois les caractéristiques d'un solide élastique et celui d'un solide visqueux. On dira qu'il possède une mémoire partielle de sa forme originale. Cette mémoire partielle implique que le comportement d'un matériau viscoélastique dépende de son histoire récente. On peut citer comme exemples de matériaux viscoélastiques : les plastiques, le bois, le béton etc...

Le comportement d'un matériau viscoélastique se caractérise par deux fonctions : la fonction de fluage et la fonction de relaxation. La fonction de fluage d'un matériau s'obtient en appliquant un état de contrainte constant au solide viscoélastique. Elle se déduit de la réponse en déformation. La fonction de relaxation s'obtient en appliquant un état de

déformation constant au solide viscoélastique et est déduite de la réponse en contrainte du solide .

Un matériau viscoélastique est dit linéaire si, à un instant donné, la contrainte est une fonction linéaire de la déformation. Bon nombre de matériaux sont quasi linéaires pour un intervalle plus ou moins grand de contrainte mais exhibent un comportement non-linéaire au-delà d'un certain niveau de contrainte ou après un certaine durée.

Dans cette section 3.3, les équations décrivant le comportement viscoélastique linéaire sont revues en détails. Pour les modèles non-vieillissants, ces équations peuvent être décrites de deux manières différentes : la forme différentielle et la forme intégrale pour laquelle le concept des variables internes s'applique. La formulation différentielle s'obtient en considérant un assemblage de ressorts élastiques et d'amortisseurs visqueux. A partir de la fonction de fluage (ou de relaxation), la formulation intégrale s'obtient en utilisant le principe de superposition de Boltzmann. Tous les développements sont faits en 1D (modèle fibre), l'extension au cas 3D ne posant pas de problème particulier.

### 3.3.1 Formulation différentielle : Différents modèles rhéologiques

Des modèles viscoélastiques ont été très tôt proposés; au départ empiriques, ils se sont vite basés sur la rhéologie du système où un (ou plusieurs) ressort élastique et un (ou plusieurs) amortisseur mis en parallèle ou en série. L'élongation du système mesurée sur le montage rhéologique correspond à la déformation  $\varepsilon(t)$ , et la force appliquée (qui produit cette élongation) correspond à la contrainte  $\sigma(t)$ .

Lorsque les éléments sont connectés en parallèle, la déformation de chaque éléments est identique et la contrainte totale s'obtient en sommant les contraintes sollicitant chaque élément. Lorsque les éléments sont connectés en série, la contrainte dans chaque éléments est identique et la déformation totale s'obtient en sommant les déformations de chaque élément. En utilisant ces deux règles, une équation différentielle décrivant le comportement uniaxial s'obtient. De la même manière que pour le comportement élastique, on supposera le comportement visqueux homogène (indépendant de la variable d'espace).

Un élément élastique est représenté par un ressort linéaire, la déformation et la contrainte étant reliées par

$$\sigma = E\varepsilon^e \quad (3.2)$$

où  $E$  est le module d'YOUNG du ressort. L'élasticité est associée à l'énergie  $U(\varepsilon)$  emmagasinée dans le ressort :

$$U(\varepsilon^e) = \frac{1}{2}E(\varepsilon^e)^2 \quad (3.3)$$

Cette énergie est restituée dès que la cause est supprimée. Elle caractérise l'aptitude du système à retrouver son état initial (après avoir été déformé).

Un élément visqueux est représenté par un amortisseur linéaire, la contrainte dépendant du taux de déformation :

$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon}^v \quad (3.4)$$

où  $\eta$  est le coefficient de viscosité. L'énergie dissipée par l'amortisseur est

$$\varphi(\dot{\varepsilon}^v) = \frac{1}{2}\eta(\dot{\varepsilon}^v)^2 \quad (3.5)$$

La viscosité représente la faculté d'un corps à s'écouler de façon irréversible. Le matériau viscoélastique se trouve donc dans un état intermédiaire entre le solide de HOOKE (purement élastique) et le fluide de NEWTON (purement visqueux). La différence essentielle avec un modèle de type "élasto-visco-plastique" est que l'écoulement inélastique (irréversible) n'est pas lié à un seuil.

### 3.3.1.1 Modèle de Maxwell

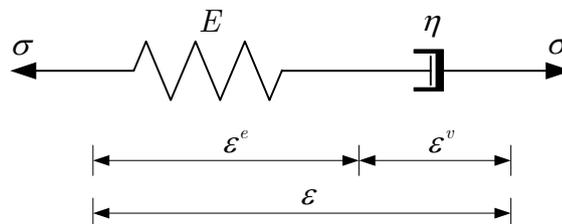


Figure 3.3 – Modèle de MAXWELL

Le modèle de MAXWELL est un modèle viscoélastique linéaire simple qui consiste à mettre en série un ressort élastique linéaire et un amortisseur (cf. Figure 3.3). Puisque ces éléments sont connectés en série, les déformations dans chacun des éléments sont différentes mais les contraintes sont identiques. Soient  $\varepsilon^e$  la déformation du ressort et  $\varepsilon^v$  la déformation de l'amortisseur respectivement, soit  $\sigma$  la contrainte dans les deux éléments. Dans ce modèle  $\varepsilon^v$  joue le rôle de variable interne.  $\varepsilon^e$  est lié à  $\sigma$  par la relation (3.2) et  $\varepsilon^v$  est lié à  $\sigma$  par la relation (3.4). Les deux éléments étant en série, la déformation totale s'obtient en additionnant les deux déformations :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \quad (3.6)$$

Différenciant les équations (3.2) et (3.6) par rapport à la variable temps et les combinant avec l'équation (3.4), on est conduit à :

$$E\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\sigma \quad (3.7)$$

Cette équation différentielle est précisément la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire représenté par le modèle de MAXWELL.

Pour obtenir la fonction de relaxation du modèle de MAXWELL, l'équation (3.7) est résolue pour une déformation constante, autrement dit  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ , où  $H(t)$  est la fonction échelon de *Heaviside*. L'équation (3.7) devient :

$$E\varepsilon_0\delta(t) = \dot{\sigma} + \frac{1}{\tau}\sigma \quad (3.8)$$

où  $\delta(t)$  est la distribution de Dirac, et  $\tau = \frac{\eta}{E}$ .

La résolution de (3.8) nécessite une condition initiale. L'application soudaine d'une déformation en  $t = 0$  implique que la dérivée  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  est singulière. Pour lever cette difficulté, on intègre en faisant intervenir le point immédiatement avant  $t = 0$  et le point immédiatement après  $t = 0$ , ce qui conduit à :

$$E(\varepsilon(t_0^+) - \varepsilon(t_0^-)) = \sigma(t_0^+) - \sigma(t_0^-) + \frac{E}{\eta} \int_{t_0^-}^{t_0^+} \sigma(t) dt \quad (3.9)$$

Quand  $t$  tends vers zéro, le dernier terme de cette équation tend vers zéro, et

$$E\varepsilon_0 = \sigma_0 \quad (3.10)$$

avec  $\varepsilon_0 = \varepsilon(0^+)$  et  $\sigma_0 = \sigma(0^+)$  sont les valeurs de la contrainte et de la déformation juste à droite de  $t = 0$ . Ainsi, la condition initiale du modèle de MAXWELL est la réponse élastique instantanée du ressort, et la déformation initiale de l'amortisseur est nulle. Avec cette condition initiale, la solution de l'équation (3.8) est :

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.11)$$

Le module de relaxation,  $R(t)$ , est obtenu à partir de la réponse en contrainte :

$$R(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.12)$$

En général, le module de relaxation est toujours une fonction monotone décroissante du temps. Pour obtenir la fonction de fluage du modèle de MAXWELL, l'équation (3.7) est résolue pour une contrainte constante  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ . L'équation (3.7) devient :

$$E \dot{\varepsilon} = \sigma_0 \delta(t) + \frac{E}{\tau} \sigma_0 H(t) \quad (3.13)$$

En intégrant cette équation et en faisant intervenir la condition initiale (3.10), la solution est :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\tau} t \quad (3.14)$$

La fonction de fluage  $J(t)$  est obtenue à partir de la réponse en déformation :

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} + \frac{1}{\tau} t \quad (3.15)$$

Le modèle de MAXWELL est un modèle simple de fluide viscoélastique, car il y a écoulement pour toute valeur de contrainte  $\sigma$ . Il permet de reproduire l'élasticité instantanée mais il n'est pas satisfaisant pour modéliser le fluage d'un matériau car  $J(t)$  est une fonction linéaire de  $t$  conduisant ainsi à une relation linéaire entre la contrainte et la déformation.

### 3.3.1.2 Modèle de Kelvin

Un autre modèle viscoélastique élastique est celui de KELVIN. C'est un modèle constitué d'un ressort et d'un amortisseur mis en parallèle (cf. Figure 3.4). Puisque les éléments sont connectés en parallèle, les contraintes sont différentes dans chaque composant mais les déformations sont identiques :  $\varepsilon^e = \varepsilon^v = \varepsilon$ . La contrainte s'obtient en sommant la contrainte dans l'amortisseur  $\eta\dot{\varepsilon}$  et la contrainte dans le ressort  $E\varepsilon$  :

$$\eta\dot{\varepsilon} + E\varepsilon = \sigma \quad (3.16)$$

Cette équation différentielle est précisément la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire décrit par le modèle de KELVIN.

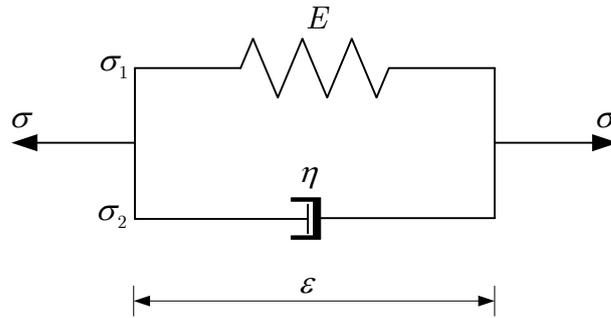


Figure 3.4 – Modèle de KELVIN

Contrairement au modèle de MAXWELL, le modèle de KELVIN n'a pas de module de relaxation. Lorsque une déformation constante est imposée,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ , l'équation (3.16) devient :

$$\varepsilon_0 [\tau \delta(t) + H(t)] = \sigma(t) \quad (3.17)$$

où le premier terme de la parenthèse conduit à une contrainte infinie à l'instant  $t = 0$ , qui est physiquement inaccessible. Ceci signifie que ce modèle ne permet pas de décrire la relaxation. Par ailleurs, pour obtenir la fonction de fluage de ce modèle, l'équation (3.16) est résolue pour une contrainte constante  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$  :

$$\eta\dot{\varepsilon} + E\varepsilon = \sigma_0 H(t) \quad (3.18)$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (3.19)$$

Le fonction de fluage est déduite à partir de la réponse en déformation :

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (3.20)$$

Le modèle de KELVIN est le modèle le plus simple de solide viscoélastique. Il permet de reproduire l'élasticité retardée (fluage), mais pas l'élasticité instantanée. Toutefois, ce modèle peut être combiné avec un ressort pour obtenir un modèle plus complet comme présenté dans la section qui suit.

### 3.3.1.3 Modèle de Zener

Les modèles de MAXWELL et de KELVIN ne sont pas capables de prendre en compte à la fois l'élasticité instantanée (déformation élastique initiale) et l'élasticité différée (comportement asymptotique élastique). Un modèle plus pratique, appelé modèle de ZENER, s'obtient en combinant en série un modèle de KELVIN et un ressort, comme le montre la figure 3.5. Soient  $\varepsilon^e$  la déformation du ressort de raideur  $E_0$  et  $\varepsilon^v$  la déformation de l'élément de KELVIN. La déformation totale est la somme des deux déformations :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \quad (3.21)$$

La contrainte dans le ressort est identique à la contrainte dans l'élément de KELVIN, pour lequel nous avons la relation suivante :

$$\sigma = E_0 \varepsilon^e = \eta \dot{\varepsilon}^v + E \varepsilon^v \quad (3.22)$$

La combinaison de deux équations ci-dessus conduit à :

$$\frac{E_0 + E}{\eta E_0} \sigma + \frac{1}{E_0} \dot{\sigma} = \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau} \varepsilon \quad (3.23)$$

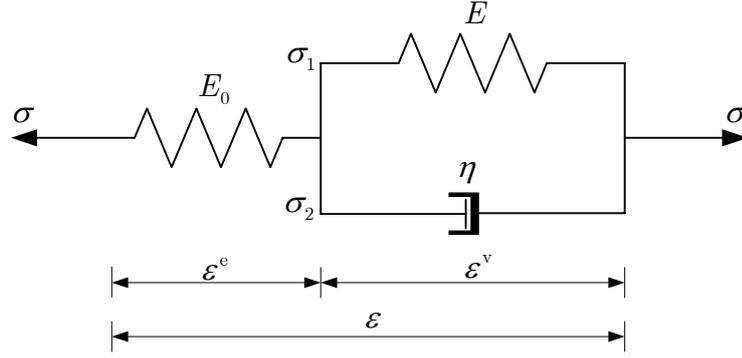


Figure 3.5 – Modèle de ZENER

Cette équation différentielle est précisément la loi de comportement d'un matériau visco-élastique linéaire représenté par le modèle de ZENER.

Pour obtenir la fonction de fluage de ce modèle, l'équation (3.23) est résolue pour une contrainte constante  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ . L'équation (3.23) devient :

$$\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau} \varepsilon = \frac{E_0 + E}{\eta E_0} \sigma_0 H(t) + \frac{1}{E_0} \sigma_0 \delta(t) \quad (3.24)$$

Multipliant les deux membres de l'équation (3.24) par un facteur d'intégration  $\exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$  et intégrant de 0 à  $t$ , on obtient :

$$\exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \varepsilon(t) - \varepsilon(0) = \frac{E_0 + E}{E_0 E} \sigma_0 \left[ \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right] \quad (3.25)$$

Vu que  $\varepsilon^v(0) = 0$ , la condition initiale nous est donnée par le ressort élastique  $\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_0}$ . En utilisant cette condition, la réponse en déformation du modèle de ZENER est :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (3.26)$$

ce qui permet de déduire la fonction de fluage de ce modèle :

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (3.27)$$

### 3.3.1.4 Modèle de Kelvin généralisé

Le modèle de KELVIN généralisé est construit à partir d'un groupement en série des plusieurs élément de KELVIN et un élément de ZENER. L'équation constitutive de ce modèle est :

$$\sigma(t) + \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial^i \sigma(t)}{\partial t^i} = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial^i \varepsilon(t)}{\partial t^i} \quad (3.28)$$

Pour ce modèle, la fonction de fluage est de la forme :

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) \quad (3.29)$$

Ce modèle sera développé dans le détail pour le cas du matériau vieillissant au paragraphe 3.3.3.3.

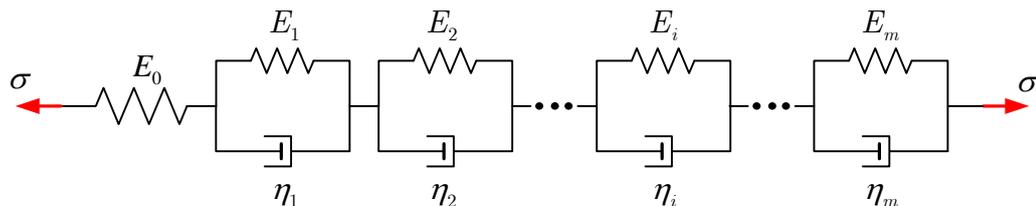


Figure 3.6 – Modèle rhéologique de KELVIN généralisé

### 3.3.2 Formulation intégrale

L'usage de la formulation différentielle s'avère pratique lorsque l'histoire de contrainte (déformation) est constante mais peu conviviale lorsque l'histoire de contrainte (déformation) est arbitraire. En revanche, la formulation intégrale permet de traiter ce dernier cas. Une relation de comportement intégrale peut décrire toutes les caractéristiques contenue dans une équation différentielle. Le formulation intégrale exploite la linéarité du comportement exprimée par  $\varepsilon = \sigma J(t, \tau)$  et fait intervenir deux variable temps :  $t$  qui correspond à l'instant courant, et  $\tau$  qui retrace l'histoire,  $\tau \leq t$ . Ainsi, le module de fluage est une fonction à la fois de  $t$  et  $\tau$ . Pour un matériau non-vieillissant, le matériau ne change pas avec le temps, et donc son module de fluage reste invariable sous l'effet d'une translation. Ainsi,  $J(t, \tau) = J(t - \tau)$ ,  $\tau \leq t$ , dépend uniquement de la différence  $t - \tau$ .

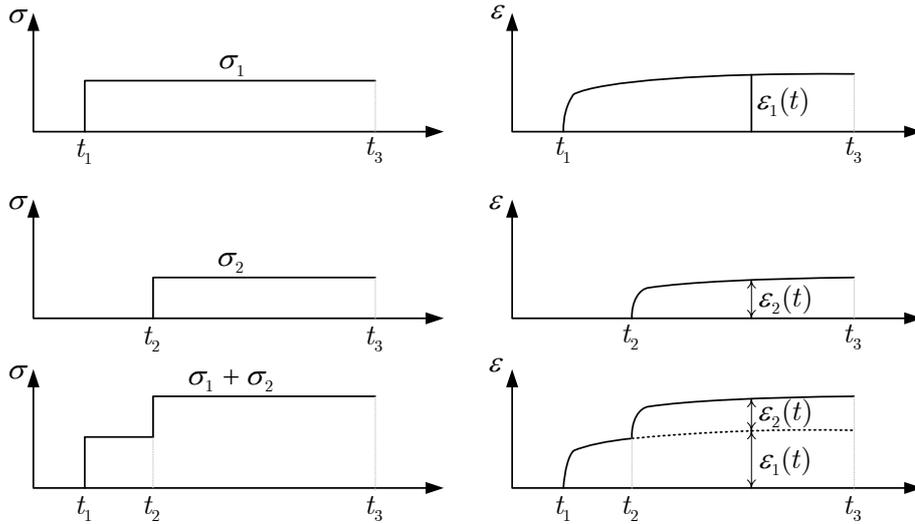


Figure 3.7 – Principe de superposition

Si on applique une contrainte  $\sigma(t_1) = \sigma_1$  à l'instant  $t_1$ , alors le processus de fluage commence en  $t_1$  et la déformation croît en suivant la relation  $\varepsilon(t) = \sigma_1 J(t, t_1)$  pour  $t \geq t_1$ . Si la contrainte ne change pas alors, l'évolution de la déformation est décrite par cette équation pour tous les instants  $t \geq t_1$ . Par contre, si en  $t = t_2$ , un incrément de contrainte  $\sigma_2$  vient s'ajouter, alors pour les instants  $t \geq t_2$ , une déformation supplémentaire égale  $\sigma_2 J(t - t_2)$  est produite selon le même module de fluage mais commence à l'instant  $t = t_2$ . Donc, la déformation totale pour  $t \geq t_2$  est déterminée par le principe de superposition de BOLTZMANN [42] (cf. Figure 3.7) comme :

$$\varepsilon(t) = \sigma_1 J(t, t_1) + \sigma_2 J(t, t_2) \quad (3.30)$$

La procédure décrite ci-dessus se généralise aisément. En considérant une histoire de contrainte arbitraire  $\sigma(t)$  non-nulle pour  $t \geq t_1$ , l'incrément de contrainte est donné par  $d\sigma = \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau$ , avec  $d\tau$  l'incrément de temps. En utilisant le principe de BOLTZMANN, la contrainte totale à l'instant  $t$  est la somme des contraintes produite par chaque incrément de déformation aux instants  $t < \tau$

$$\varepsilon(t) = \int_{t_1}^t J(t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.31)$$

Il est à noter que l'intégral dans l'équation (3.31) est une généralisation de l'intégrale

ordinaire (intégrale de RIEMANN), appelé intégrale de STIELTJES, où la continuité par morceaux de l'historique des contraintes  $\sigma(t)$  est permise. Considérons un matériau libre de contrainte jusqu'à l'âge  $t_1$  auquel on applique soudainement une contrainte  $\sigma(t_1)$  qui par la suite varie continûment  $\sigma(t)$ . L'équation (3.31) s'écrit à l'aide de l'intégrale de RIEMANN suivante :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_1)J(t, t_1) + \int_{t_1}^t J(t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau + \varepsilon_{sh}(t) \quad (3.32)$$

avec  $\varepsilon_{sh}(t)$  la déformation de retrait qui est une fonction du temps uniquement. Lorsque l'histoire de déformation  $\varepsilon(t)$  est imposée, l'équation (3.31) ou (3.32) représente une équation intégrale pour l'histoire de contrainte  $\sigma(t)$ . Il s'agit d'une équation intégrale de VOLTERRA [139], un cas particulier des équations intégrales du second type. La fonction de fluage  $J(t, \tau)$  est la fonction opérateur intégral du noyau.

Le béton étant un matériau vieillissant, la fonction  $J(t, \tau)$  dépend non seulement du temps retardé  $t - \tau$  mais encore des instants  $t$  et  $\tau$ . Les courbes de fluage du béton sollicité aux différents âges  $\tau$  sont très différentes [81]. Dans ce cas, la théorie basée sur l'équation (3.31) ou (3.32) est appelée la viscoélasticité linéaire vieillissante. A cause du vieillissement, la méthode de transformation de Laplace, très efficace pour la théorie de viscoélasticité linéaire non-vieillissante, ne peut malheureusement pas être utilisée. Ainsi le vieillissement est la complication majeure de la théorie de fluage du béton.

Le principe de superposition de BOLTZMANN peut être appliqué de façon différente en exprimant l'équation intégrale de superposition en fonction du module relaxation  $R(t, \tau)$ , qui est défini comme la contrainte causée par une déformation unitaire constante imposée à l'instant  $\tau$ . De cette manière, l'histoire de la contrainte peut s'exprimer en fonction de l'histoire de la déformation comme suit :

$$\sigma(t) = \int_0^t R(\tau, t) d[\varepsilon(\tau) - \varepsilon_{sh}(\tau)] \quad (3.33)$$

L'incrément de déformation du retrait doit être soustrait de l'incrément de déformation totale dans l'équation (3.33) puisque le développement du retrait, par définition, est indépendant de la contrainte. Pour les matériaux vieillissants, les fonctions de fluage sont

assez complexes car elles dépendent de beaucoup de paramètres. L'expression complète de la fonction de fluage du béton utilisée pour les applications numériques est donnée en Annexe II.

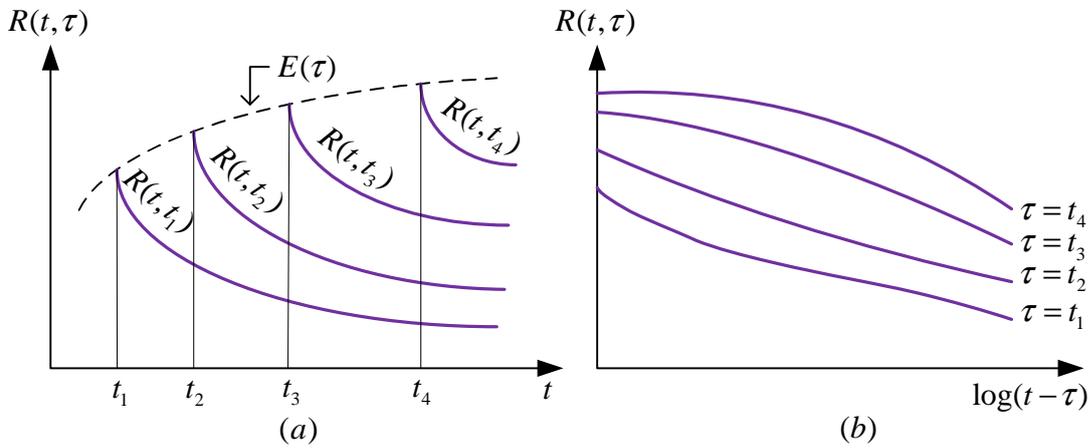


Figure 3.8 – Courbes de relaxation [25] : (a) échelle normale de temps ; (b) échelle logarithmique de temps

### 3.3.3 Approximation du comportement viscoélastique

On cherche à intégrer l'histoire de déformation/contrainte. En générale, l'équation intégrale (3.32) ne peut être résolue analytiquement pour une forme réaliste de  $J(t, \tau)$ . Une solution numérique, dans laquelle l'intégrale est approchée par une somme discrète, doit être envisagée. Une première approche consiste à discrétiser en temps la relation (3.32). Cette méthode, développée au paragraphe 3.3.3.1, est fastidieuse et nécessite de stocker des informations relatives à l'histoire de chargement. Pour éviter ce genre de problème, des méthodes dites algébriques (méthode à un pas) seront utilisées. Une autre façon de procéder consiste à approcher le fonction de fluage par une série de DIRICHLET (variables internes). Ceci permet de réduire considérablement le stockage bien que l'algorithme soit complexe à mettre en oeuvre et l'identification n'est pas aisée.

#### 3.3.3.1 Méthode générale (pas-à-pas)

L'intervalle de temps  $[t_1; t]$  est subdivisé en  $N$  incréments  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots, t_N$ . L'intégrale de la relation (3.32) est approximée à l'aide d'un schéma trapézoïdal dont l'erreur est d'ordre

2. Nous obtenons la relation contrainte-déformation suivante (voir [21], [23] pour plus de détails) :

$$\varepsilon^{(n)} \cong \varepsilon_{sh}^{(n)} + \sigma^{(1)} J_{n,1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (J_{n,i+1} + J_{n,i}) (\sigma^{(i+1)} - \sigma^{(i)}) \quad (3.34)$$

où  $\varepsilon^{(i)}$ ,  $\sigma^{(i)}$  désignent respectivement la déformation et la contrainte calculées aux instants  $t_i$  et  $J_{i,j} = J(t_i, t_j)$ .

L'équation (3.34) est transformée de la manière suivante :

$$\sigma^{(n)} \cong E^{(n)} \left( \varepsilon^{(n)} - \varepsilon_{sh}^{(n)} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \sigma^{(i)} \quad (3.35)$$

où

$$E^{(n)} = \frac{2}{J_{n,n} + J_{n,n-1}} \quad (3.36)$$

et

$$\Psi_{n,i} = \begin{cases} \frac{J_{n,2} - J_{n,1}}{J_{n,n} + J_{n,n-1}} & \text{si } i = 1 \\ \frac{J_{n,i+1} - J_{n,i-1}}{J_{n,n} + J_{n,n-1}} & \text{si } i > 1 \end{cases} \quad (3.37)$$

La relation (3.35) donne la contrainte à l'instant  $t_n$  en fonction de la déformation à l'instant  $t_n$  et de la valeur des contraintes aux pas de temps précédents. A chaque pas de temps, l'histoire de contrainte est connue et donc la relation (3.35) est équivalente affine à un comportement linéaire élastique avec déformations inélastiques [81]. La relation (3.35) sera utilisée dans un modèle poutre à fibres pour le calcul pratique des effets du temps dans les structures mixtes.

### 3.3.3.2 Méthodes algébriques

Afin de s'affranchir de la nécessité de résoudre l'équation intégrale (3.32), des méthodes dites algébriques basées sur l'hypothèse de linéarité entre la déformation et le coefficient de fluage ont été proposées par plusieurs auteurs [22], [78], ([99]). Ces méthodes conduisent à une forme simplifiée de l'équation intégrale (3.32) :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_1) J(t, t_1) + [\sigma(t) - \sigma(t_1)] J(t, \bar{\tau}) + \varepsilon_{sh}(t) \quad (3.38)$$

où  $\bar{\tau} \subseteq [t_1; t]$ . Chaque méthode propose une forme différente de  $J(t, \bar{\tau})$ . Dans littérature, trois méthodes algébriques sont souvent utilisées :

- méthode du module effectif (EM method).
- méthode de la contrainte moyenne (MS method).
- méthode du module effectif ajusté (AEMM method).

Ces trois méthodes sont détaillées dans les paragraphes qui suivent.

#### Méthode du module effectif (EM method)

Cette méthode, proposée par MCMILAN en 1916 [99], est la méthode la plus simple. L'auteur considère que la fonction de fluage n'évolue pas au cours du temps :

$$J(t, \bar{\tau}) = J(t, t_1) \quad (3.39)$$

L'équation (3.38) devient donc :

$$\sigma(t) = E_{EM} [\varepsilon(t) - \varepsilon_{sh}(t)] \quad (3.40)$$

où  $E_{EM}$  est appelé le module effectif, donné par :

$$E_{EM} = \frac{1}{J(t, t_1)} = \frac{E(t_1)}{1 + \varphi(t, t_1)} \quad (3.41)$$

Dans cette méthode, la variation de contrainte dans l'intervalle de temps  $[t_1; t]$  est négligée et la contrainte est toujours considérée être égale à la valeur finale. Ainsi, cette méthode est exacte à condition que les contraintes restent constantes à partir de l'application du chargement, ce qui est loin d'être vrai dans les structures hyperstatiques où il y a toujours une redistribution des contraintes due au fluage. Par conséquence, cette méthode peut engendrer des erreurs importantes, notamment pour la réponse à long terme de structures chargées au jeune âge [21]. Il est à noter, en utilisant cette méthode, que l'analyse des effets du temps peut être traitée comme une analyse élastique équivalente, où le module de YOUNG du béton  $E_c$  est multiplié par un coefficient  $1/[1 + \varphi(t, t_1)]$ .

### Méthode de la contrainte moyenne (MS method)

Cette méthode a été proposée par HANSEN en 1964 [78]. La fonction de fluage a l'expression suivante :

$$J(t, \bar{\tau}) = \frac{1}{2} [J(t, t) + J(t, t_1)] \quad (3.42)$$

L'équation (3.38) devient :

$$\sigma(t) = E_{MS} [\varepsilon(t) - \varepsilon_{sh}(t)] + \Psi_{MS} \sigma(t_1) \quad (3.43)$$

avec :

$$E_{MS} = \frac{2}{J(t, t) + J(t, t_1)} \quad (3.44)$$

$$\Psi_{MS} = \frac{J(t, t) - J(t, t_1)}{J(t, t) + J(t, t_1)} \quad (3.45)$$

On constate que cette méthode correspond au cas particulier de la méthode pas-à-pas avec un pas unique.

### Méthode du module effectif ajusté (AAEM method)

Cette méthode a été initialement proposée par TROST en 1967 [132] et ensuite améliorée par BAŽANT en 1972 [22]. La fonction  $J(t, \bar{\tau})$  est donnée par l'expression suivante :

$$J(t, \bar{\tau}) = \frac{1 + \chi(t, t_1) \varphi(t, t_1)}{E_c(t_1)} \quad (3.46)$$

où  $\chi(t, t_1)$  est le coefficient de vieillissement, donné par :

$$\chi(t, t_1) = \frac{E_c(t_1)}{E_c(t_1) - R(t, t_1)} - \frac{1}{\varphi(t, t_1)} \quad (3.47)$$

avec  $R(t, t_1)$  désignant la fonction de relaxation.

En combinant les équations (3.38) et (3.46), nous obtenons :

$$\sigma(t) = E_{AAEM} [\varepsilon(t) - \varepsilon_{sh}(t)] + \Psi_{AAEM} \sigma(t_1) \quad (3.48)$$

où :

$$E_{AAEM} = \frac{E_c(t_1)}{1 + \chi(t, t_1) \varphi(t, t_1)} \quad (3.49)$$

$$\Psi_{AAEM} = \frac{1}{J(t, t) + J(t, t_1)} \quad (3.50)$$

$E_{AAEM}$  est appelé le module effectif ajusté car le coefficient de vieillissement  $\chi$  ajuste essentiellement le module effectif afin de prendre en compte l'effet de vieillissement. BAŽANT et NAJJAR (1973) [31] ont montré que cette méthode fournit une bonne approximation de la solution exacte. Il est à noter que l'application des méthodes MS et EM est directe, tandis que la méthode AAEM nécessite la connaissance de la fonction de relaxation  $R(t, t_1)$ , qui n'est pas, en général, connue analytiquement. Par définition, la fonction de relaxation  $R(t, t_1)$  est l'histoire de contraintes produite par une déformation unitaire imposée. Ainsi la fonction de relaxation  $R(t, t_1)$  peut être calculée en résolvant l'équation intégrale suivante :

$$J(t, t_1)R(t_1, t_1) + \int_{t_1}^t J(t, \tau) dR(\tau, t_1) = 1 \quad (3.51)$$

L'équation (3.51) est résolue numériquement en utilisant la procédure pas-à-pas. Le détail de cette résolution se trouve en Annexe III.

Afin d'éviter la résolution numérique de l'équation intégrale (3.51) qui peut s'avérer compliquée, on peut utiliser une formule semi-empirique, proposée par BAZANT et KIM (1979) [30] :

$$R(t, t_1) = \frac{0.992}{J(t, t_1)} - \frac{0.115}{J(t, t - 1)} \left[ \frac{J((t + t_1)/2, t_1)}{J(t, (t - t_1)/2)} - 1 \right] \quad (3.52)$$

### 3.3.3.3 Approche par les variables internes : méthode incrémentale ("Rate-type")

La méthode générale (pas-à-pas), qui repose sur l'intégrale héréditaire, fournit un résultat avec une précision satisfaisante (erreur d'ordre deux), mais elle nécessite de stocker toute histoire de contrainte à chaque point d'intégration de chaque élément fini, ce qui peut être volumineux pour des structures de taille importante. Afin d'éviter le stockage et l'intégration de toute histoire des contraintes, les formes intégrales de la relation contrainte-déformation (3.31) ou (3.33) peuvent être transformées en formes différentielles (rate-type)

en se basant sur le modèle rhéologique de viscoélasticité vieillissant de MAXWELL ou de KELVIN. Il s'agit de formulations dites "rate-type", proposées par BAŽANT [34]. Dans une formulation de type différentiel, l'histoire de la sollicitation est caractérisée par les valeurs actuelles des variables internes. Puisque le nombre de variables internes est fixé, le coût de calcul de chaque pas est constant, indépendant du nombre de pas de l'analyse.

### Approche par modèle de Kelvin généralisé

Les modèles rhéologiques de type KELVIN et MAXWELL peuvent être mis avantageusement en parallèle et/ou en série. L'assemblage est alors appelé modèle de KELVIN (MAXWELL) généralisé. De plus, l'effet du vieillissement est pris en compte en considérant des modules de YOUNG et des amortisseurs qui dépendent du temps. Dans notre travail, nous utilisons le modèle de KELVIN généralisé.

BAŽANT a montré dans un article en 1974 [34] que l'on peut développer en série de DIRICHLET toute fonction de fluage  $J(t, \tau)$  sous la forme :

$$J(t, \tau) \approx \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{D_i(\tau)} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_i}\right) \right] \quad (3.53)$$

où  $\tau_{i=1..m}$  sont les paramètres fixés, appelés les temps de retard ;  $E_0$  est le module asymptotique et  $D_{i=1..m}$  sont les modules dépendant du temps qui sont déterminés par identification numérique de sorte que l'expression analytique (3.53) soit la plus proche possible la courbe du CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1]. Le détail de cette identification est présenté en Annexe VII.

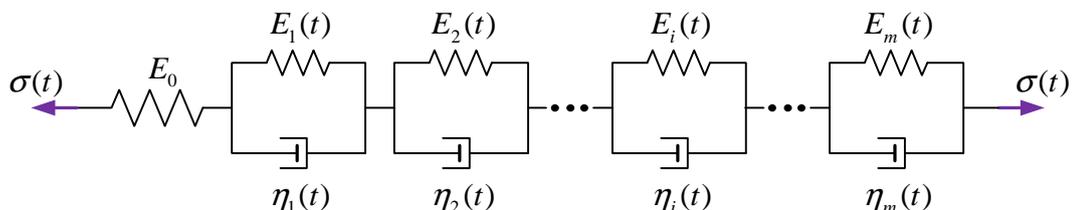


Figure 3.9 – Modèle vieillissant de KELVIN généralisé

En substituant la relation (3.53) dans la relation intégrale (3.32), nous obtenons :

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_{sh}(t) = \sum_{i=0}^m \varepsilon_i(t) \quad (3.54)$$

où

$$\varepsilon_0(t) = \int_0^t \frac{1}{E_0} d\sigma(\tau) = \frac{\sigma(t)}{E_0} \quad (3.55)$$

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t \frac{1}{D_i(\tau)} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_i}\right) \right] d\sigma(\tau) \quad (3.56)$$

La relation (3.54) signifie que la déformation totale dépendant des contraintes est la somme de la contribution de  $m + 1$  éléments couplés en série. Selon la relation (3.55), l'élément numéro 0 est un ressort élastique de raideur  $E_0$ . Pour déterminer le modèle rhéologique des autres éléments, nous différencions tout d'abord la relation (3.56) :

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau_i D_i(\tau)} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_i}\right) d\sigma(\tau) \quad (3.57)$$

En combinant cette relation avec la relation (3.56), nous trouvons :

$$\varepsilon_i(t) + \tau_i \dot{\varepsilon}_i(t) = \int_0^t \frac{d\sigma(\tau)}{D_i(\tau)} \quad (3.58)$$

Pour éliminer la forme intégrale du second membre de l'équation (3.58), nous devons différentier encore une fois la relation (3.58) :

$$\dot{\varepsilon}_i(t) + \tau_i \ddot{\varepsilon}_i(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{D_i(t)} \quad (3.59)$$

Nous constatons intuitivement que l'équation (3.59) représente l'expression mathématique d'un élément viscoélastique de KELVIN (un ressort couplé en parallèle avec un amortisseur), mais avec des caractéristiques mécaniques qui dépendent du temps. Néanmoins, le comportement d'un ressort de raideur vieillissant  $E_i(t)$  ne peut pas être écrit comme  $\sigma_i(t) = E_i(t)\varepsilon_i(t)$  car certaines conditions thermodynamiques liées à la nature du processus de vieillissement peuvent être violées (voir [23], [24] pour plus de détails). Le comportement d'un ressort de raideur vieillissant doit plutôt être écrit comme  $\dot{\sigma}_i(t) = E_i(t)\dot{\varepsilon}_i(t)$ . Ainsi, si nous considérons un élément de KELVIN, caractérisé par le ressort de raideur variable

$E_i(t)$  et un amortisseur de viscosité variable  $\eta_i(t)$ , l'équation différentielle correspondante de cet élément est

$$E_i(t)\dot{\varepsilon}_i(t) + \frac{d}{dt} [\eta_i(t)\dot{\varepsilon}_i(t)] = \dot{\sigma}(t) \quad (3.60)$$

ou bien

$$E_i(t)\dot{\varepsilon}_i(t) + \dot{\eta}_i(t)\dot{\varepsilon}_i(t) + \eta_i(t)\ddot{\varepsilon}_i(t) = \dot{\sigma}(t) \quad (3.61)$$

En comparant l'équation (3.61) avec l'équation (3.59), nous nous apercevons que les propriétés de l'élément de KELVIN doivent être identifiées comme

$$\eta_i(t) = \tau_i D_i(t) \quad (3.62)$$

$$E_i(t) = D_i(t) - \dot{\eta}_i(t) = D_i(t) - \tau_i \dot{D}_i(t) \quad (3.63)$$

Au regard des équations (3.54) et (3.61), nous pouvons conclure que la formulation viscoélastique vieillissante en fluage peut être représentée par un modèle rhéologique de KELVIN généralisé où  $E_i(t)$  et  $\eta_i(t)$  sont respectivement la raideur variable du ressort et la viscosité variable de l'amortisseur de la branche  $i$ .

Puisque l'équation différentielle (3.59) est du second ordre, outre la condition initiale sur la déformation  $\varepsilon_i(0) = 0$ , nous avons besoin d'une autre condition initiale pour la vitesse de déformation partielle  $\dot{\varepsilon}_i(0)$  (strain rate). Vu que pendant la période initiale qui s'étend de l'instant du coulage du béton  $t = 0$  à l'instant d'application du premier chargement  $t_1$ , la déformation et la vitesse de déformation sont nulles. Donc juste après l'instant d'application du premier chargement  $t_1$ , la vitesse de déformation est encore nulle, ce qui fournit la seconde condition initiale.

Si nous introduisons une variable interne  $\gamma_i(t)$ , proportionnelle à la vitesse de déformation partielle  $\dot{\varepsilon}_i(t)$ , soit :

$$\gamma_i(t) = \tau_i \dot{\varepsilon}_i(t) \quad (3.64)$$

l'équation (3.59) peut être remplacée par une équation différentielle du premier ordre

$$\dot{\gamma}_i(t) + \frac{1}{\tau_i} \gamma_i(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{D_i(t)} \quad (3.65)$$

avec la condition initiale  $\dot{\gamma}_i(0) = 0$ .

#### Algorithme de résolution

Cet algorithme est emprunté à l'ouvrage de JIRÁSEK et BAŽANT [81].

Une échelle croissante de temps commençant à l'instant  $t_0$  est envisagée ; elle est discrétisée en un certain nombre de pas de temps non nécessairement constants. Pour simplifier, le pas de temps séparant deux bornes de temps consécutives sera cependant pris constant et noté  $\Delta t$ . En général, l'équation (3.65) doit être intégrée numériquement pour  $i = 1, 2, \dots, m$ . La solution procède de  $t = t_{n-1}$  à  $t = t_n$  dans la succession des pas de temps. Au début de chaque pas, la valeur :

$$\gamma_i(t) = \gamma_i^{(n-1)} \quad (3.66)$$

est connue à partir du pas précédent (ou à partir de la condition initiale pour le premier pas). Concernant la sélection du pas de temps  $\Delta t$  pour une analyse à long terme de structures soumises à un chargement constant, il est à noter qu'au début de l'analyse, la réponse varie rapidement, donc que  $\Delta t$  doit être pris très petit (environ 0.001 jour), en revanche en fin d'analyse, la réponse varie lentement et  $\Delta t$  peut être beaucoup plus grand (environ 100 jours). Ainsi  $\Delta t$  doit considérablement augmenter pour l'efficacité de calcul. La méthode usuelle d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires (méthode d'EULER, méthode de RUNGE-KUTTA) va être instable ou très imprécise lorsque  $\Delta t \gg \tau_1$ . Ce problème peut être surmonté en utilisant un algorithme exponentiel, initialement proposé pour les matériaux non-vieillissants par ZIENKIEWICZ et al. (1968) [145] et étendu pour les matériaux vieillissants par BAŽANT (1971) [20]. Pour l'efficacité du calcul, il est souhaitable de choisir des pas de temps  $\Delta t$  sur la base d'une échelle logarithmique  $\log(t - t_1)$ . L'idée principale de l'algorithme exponentiel, qui permet d'avoir  $\Delta t \gg \tau_1$ , est que l'équation (3.65) peut être analytiquement résolue si le terme à droite reste constant pendant l'intervalle de temps  $[t_{n-1}; t_n]$ . En posant  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ ,  $\Delta\sigma = \sigma(t_n) - \sigma(t_{n-1})$  et  $D_i^{(n-1/2)} = D_i(t_{n-1} + \Delta t)$ , le terme à droite de l'équation (3.65) peut être approché par :

$$\frac{\dot{\sigma}(t)}{D_i(t)} \simeq \frac{\Delta\sigma}{\Delta t D_i^{(n-1/2)}} \quad (3.67)$$

L'équation (3.65) devient :

$$\dot{\gamma}_i(t) + \frac{1}{\tau_i} \gamma_i(t) = \frac{\Delta\sigma}{\Delta t D_i^{(n-1/2)}} \quad (3.68)$$

L'équation (3.68) est une équation différentielle ordinaire dont la solution générale est

$$\gamma_i(t) = \frac{\tau_i \Delta\sigma}{\Delta t D_i^{(n+1/2)}} + K \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \quad (3.69)$$

où  $K$  est une constante d'intégration, déterminée à partir de la condition (3.66) par :

$$K = \left( \gamma_i^{(n-1)} - \frac{\tau_i \Delta\sigma}{\Delta t D_i^{(n-1/2)}} \right) \exp\left(-\frac{t_{n-1}}{\tau_i}\right) \quad (3.70)$$

En introduisant la relation (3.70) dans la solution générale (3.69), la solution finale de l'équation (3.65) a la forme

$$\gamma_i(t) = \frac{\tau_i \Delta\sigma}{\Delta t D_i^{(n-1/2)}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t - t_{n-1}}{\tau_i}\right) \right] + \gamma_i^{(n-1)} \exp\left(-\frac{t - t_{n-1}}{\tau_i}\right) \quad (3.71)$$

La valeur de  $\gamma_i(t)$  à la fin du pas est donnée par :

$$\gamma_i^{(n)} = \gamma_i(t_n) = \lambda_i \frac{\Delta\sigma}{D_i^{(n-1/2)}} + \beta_i \gamma_i^{(n-1)} \quad (3.72)$$

où  $\lambda_i$  et  $\beta_i$  sont des constantes, données par :

$$\beta_i = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right) \quad (3.73)$$

$$\lambda_i = \frac{\tau_i}{\Delta t} (1 - \beta_i) \quad (3.74)$$

L'incrément de déformation dans l'intervalle de temps  $[t_{n-1}; t_n]$  peut être évalué en intégrant l'équation (3.64) :

$$\Delta\varepsilon_i = \frac{1}{\tau_i} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \gamma_i(t) dt = \frac{1 - \lambda_i}{D_i^{(n-1/2)}} \Delta\sigma + (1 - \beta_i) \gamma_i^{(n-1)} \quad (3.75)$$

A noter que  $0 < \lambda_i < 1$ , puisque  $\lambda_i \rightarrow 1$  si  $\Delta t \rightarrow 0$  et  $\lambda_i \rightarrow 0$  si  $\Delta t \rightarrow \infty$ . Lorsque  $\Delta t/\tau_i$  est suffisamment grand ( $>30$ ), l'expression (3.73) donne un résultat imprécis et

doit être remplacée par  $\beta_i = 0$ . D'autre part, lorsque  $\Delta t/\tau_i$  est beaucoup plus petit que 1,  $\beta_i$  s'approche 1 et l'évaluation de  $\lambda_i$  selon l'expression (3.74) est imprécise. Dans ce cas là, l'expression (3.74) peut être remplacée par les premiers termes d'un développement en série de TAYLOR

$$\lambda_i = 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\tau_i} + \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta t}{\tau_i} \right)^2 - \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta t}{\tau_i} \right)^3 + \dots \quad (3.76)$$

L'expression (3.75) représente seulement l'incrément de déformation d'un élément de la chaîne de KELVIN. En l'introduisant dans l'expression (3.54), nous obtenons l'incrément de déformation totale :

$$\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_{sh} = \sum_{i=0}^m \Delta \varepsilon_i = \Delta \sigma \left( \frac{1}{E_0} + \sum_{i=0}^m \frac{1 - \lambda_i}{D_i^{(n-1/2)}} \right) + \sum_{i=0}^m (1 - \beta_i) \gamma_i^{(n-1)} \quad (3.77)$$

Le premier terme du second membre de l'équation (3.77) peut être interprété comme l'incrément de déformation dû à l'incrément de contrainte où  $\bar{E}$  défini par

$$\frac{1}{\bar{E}} = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=0}^m \frac{1 - \lambda_i}{D_i^{(n-1/2)}} \quad (3.78)$$

représente le module d'YOUNG effectif. Le second terme du second membre de l'équation (3.77) peut être interprété comme l'incrément de déformation dû au fluage à contrainte constante, noté  $\Delta \varepsilon''$

$$\Delta \varepsilon'' = \sum_{i=0}^m (1 - \beta_i) \gamma_i^{(n-1)} \quad (3.79)$$

Avec ces notations, la relation (3.77) peut être réécrite sous la forme :

$$\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_{sh} = \frac{\Delta \sigma}{\bar{E}} + \Delta \varepsilon'' \quad (3.80)$$

ou encore :

$$\Delta \sigma = \bar{E} (\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon'' - \Delta \varepsilon_{sh}) \quad (3.81)$$

En substituant la relation (3.81) dans (3.72), nous obtenons la formule de mise à jour de la variable interne  $\gamma_i$  :

$$\gamma_i^{(n)} = \frac{\lambda_i \bar{E}}{D_i^{(n-1/2)}} (\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon'' - \Delta \varepsilon_{sh}) + \beta_i \gamma_i^{(n-1)} \quad (3.82)$$

La relation (3.81) représente une relation contrainte/déformation affine à l'instant  $t^{(n)}$ , que l'on peut écrire comme :

$$\sigma^{(n)} = \bar{E} (\varepsilon^{(n)} - \hat{\varepsilon}^{(n)}) + \sigma^{(n-1)} \quad (3.83)$$

où :

$$\hat{\varepsilon}^{(n)} = \varepsilon^{(n-1)} + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon_{sh} \quad (3.84)$$

### 3.4 Solution semi-analytique pour les effets du temps dans un élément de poutre mixte

Dans ce paragraphe, une solution semi-analytique est développée pour l'analyse des effets du temps dans les poutres mixtes acier-béton soumises à des charges permanentes. Le comportement de l'acier (profilé et goujons) est supposé élastique. Par ailleurs, le caractère non-linéaire du comportement du béton est ignoré. Ces restrictions seront levées au chapitre 6. Elle consiste à combiner les relations de comportement discrétisées avec les équations différentielles d'équilibre et de compatibilité, continues en espace. En fait, la solution sera exacte en espace mais discrète en temps. Nous avons vu au paragraphe 3.3 que la relation de comportement discrétisée du béton peut toujours s'écrire sous la forme d'une relation affine :

$$\sigma_c^{(n)} = E_c^{(n)} (\varepsilon_c^{(n)} - \tilde{\varepsilon}^{(n)}) + \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \sigma_c^{(i)} \quad (3.85)$$

où  $E_c^{(n)}$ ,  $\tilde{\varepsilon}^{(n)}$  et  $\Psi_{n,i}$  sont des paramètres connus, qui dépendent de la méthode utilisée (voir relation (3.35) pour la méthode pas-à-pas ; relations (3.40), (3.43) et (3.48) pour la méthode algébrique ; et relation (3.84) pour la méthode "rate-type").

Par définition, les efforts généralisés s'obtiennent par l'intégration du champ des contraintes sur la section droite. Ainsi les efforts internes à l'instant  $t_n$  pour la dalle de béton s'expriment par :

$$N_c^{(n)}(x) = \int_{A_c} \sigma_c^{(n)}(x, z) dA + \sum_{nr} \sigma_{sr}^{(n)}(x, z_{sr}) A_{sr} \quad (3.86)$$

$$M_c^{(n)}(x) = \int_{A_c} z \sigma_c^{(n)}(x, z) dA + \sum_{n_{sr}} z \sigma_{sr}^{(n)}(x, z_{sr}) A_{sr} \quad (3.87)$$

En introduisant les relations (3.85) et (2.57), nous obtenons :

$$N_c^{(n)} = (EA)_c^{(n)} \varepsilon_c^{(n)} - (EA)_{co}^{(n)} \tilde{\varepsilon}^{(n)} + (EB)_c^{(n)} \kappa^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} N_{co}^{(i)} \quad (3.88)$$

$$M_c^{(n)} = (EB)_c^{(n)} \varepsilon_c^{(n)} - (EB)_{co}^{(n)} \tilde{\varepsilon}^{(n)} + (EI)_c^{(n)} \kappa^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} M_{co}^{(i)} \quad (3.89)$$

où

$$\begin{aligned} (EA)_{co}^{(n)} &= E_c^{(n)} A_c & (EB)_{co}^{(n)} &= E_c^{(n)} B_c \\ (EA)_c^{(n)} &= EA_{co}^{(n)} + \sum_{n_{sr}} E_{sr} A_{sr} & (EB)_c^{(n)} &= (EB)_{co}^{(n)} + \sum_{n_{sr}} z_{sr} E_{sr} A_{sr} \\ (EI)_c^{(n)} &= E_c^{(n)} I_c + \sum_{n_{sr}} z_{sr}^2 E_{sr} A_{sr} \end{aligned}$$

et  $N_{co}^{(i)}$ ,  $M_{co}^{(i)}$  sont respectivement l'effort normal et le moment fléchissant de la section de la dalle sans prise en compte des armatures.

Ces formules montrent clairement que les efforts internes sont composés d'une partie propre à l'instant  $t_n$  et d'une partie qui relate l'histoire des contraintes. Il s'en suit que les développements analytiques du chapitre servant à la construction de la solution semi-analytique sont compliqués par la présence du terme héréditaire.

De même, en considérant un comportement élastique linéaire pour l'acier du profilé métallique et les connecteurs, et en choisissant comme axe de référence du profilé l'axe passant son centre de gravité ( $EB_s = 0$ ), les efforts internes à l'instant  $t_n$  dans le profilé et l'effort de cisaillement à l'interface s'expriment par :

$$N_s^{(n)} = \int_{A_s} \sigma_s^{(n)}(x, z) dA = (EA)_s \varepsilon_s^{(n)} \quad (3.90)$$

$$M_s^{(n)} = \int_{A_s} z \sigma_s^{(n)}(x, z) dA = (EI)_s \kappa^{(n)} \quad (3.91)$$

$$D_{sc}^{(n)} = k_{sc} d_{sc}^{(n)} \quad (3.92)$$

### 3.4.1 Connexion discrète

Dans ce paragraphe, nous présentons le solution semi-analytique pour le tronçon de poutre mixte non-connectée. La solution pour l'élément de connecteur est identique à celle présenté au paragraphe 2.4.1.2 puisque le comportement de ce dernier, en acier, est élastique.

En combinant les relations cinématiques (2.35 - 2.38), les relations constitutives (3.88 - 3.91) et les équations d'équilibre (2.18 - 2.20), nous obtenons les équations d'équilibre à l'instant  $t^{(n)}$  écrites en fonction des déplacements indépendants :

$$\partial_x^2 u_s^{(n)} = 0 \quad (3.93)$$

$$(EA)_c^{(n)} \partial_x^2 u_c^{(n)} - (EB)_c^{(n)} \partial_x^3 v^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \partial_x N_{co}^{(i)} = 0 \quad (3.94)$$

$$(EB)_c^{(n)} \partial_x^3 u_c^{(n)} - (EI)^{(n)} \partial_x^4 v^{(n)} + p_z(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \partial_x^2 M_{co}^{(i)} = 0 \quad (3.95)$$

La solution de l'équation (3.93) est :

$$u_s^{(n)}(x) = C_1^{(n)} x + C_2^{(n)} \quad (3.96)$$

Après arrangement des équations (3.94) et (3.95), on peut écrire ces équations sous la forme :

$$\partial_x^2 u_c^{(n)} = \varrho_1^{(n)} \partial_x^3 v^{(n)} + \varrho_2^{(n)} \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \partial_x N_{co}^{(i)} \quad (3.97)$$

$$\partial_x^4 v^{(n)} = \varrho_3^{(n)} p_z(x) + \varrho_3^{(n)} \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \partial_x^2 M_{co}^{(i)} + \varrho_4^{(n)} \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \partial_x^2 N_{co}^{(i)} \quad (3.98)$$

en posant :

$$\varrho_1^{(n)} = \frac{(EB)_c^{(n)}}{(EA)_c^{(n)}} \quad \varrho_2^{(n)} = -\frac{1}{(EA)_c^{(n)}}$$

$$\varrho_3^{(n)} = \frac{(EA)_c^{(n)}}{(EA)_c^{(n)}(EI)^{(n)} - \left[(EB)_c^{(n)}\right]^2} \quad \varrho_4^{(n)} = -\frac{(EB)_c^{(n)}}{(EA)_c^{(n)}(EI)^{(n)} - \left[(EB)_c^{(n)}\right]^2}$$

Afin de résoudre analytiquement ces équations différentielles, il est nécessaire de connaître les expressions de  $M_{co}$  et de  $N_{co}$ . Si l'on considère que  $p_z(x)$  est une charge uniformément répartie, vu la forme de la solution analytique instantanée au chapitre 2, on peut supposer que l'effort normal et le moment fléchissant dans la dalle (sans prise en compte des armatures) ont des variations quadratiques à l'instant  $t_i$  :

$$N_{co}^{(i)} = \iota_1^{(i)} x^2 + \iota_2^{(i)} x + \iota_3^{(i)} \quad (3.99)$$

$$M_{co}^{(i)} = \iota_4^{(i)} x^2 + \iota_5^{(i)} x + \iota_6^{(i)} \quad (3.100)$$

où  $\iota_i$ ,  $i = 1..6$ , sont des constantes, déterminées à la fin de chaque pas. On montrera sans difficulté que cette hypothèse est bien vérifiée à l'instant  $t_{i+1}$ . Il s'en suit que le terme héréditaire est de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} N_{co}^{(i)} = \pi_1^{(n)} x^2 + \pi_2^{(n)} x + \pi_3^{(n)} \quad (3.101)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} M_{co}^{(i)} = \pi_4^{(n)} x^2 + \pi_5^{(n)} x + \pi_6^{(n)} \quad (3.102)$$

où :

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \iota_j^{(i)} \quad \text{avec } j = 1..6$$

In introduisant les relations (3.101) et (3.102) dans l'équation (3.98), on obtient l'équation différentielle de l'ordre 4 pour  $v^{(n)}$  :

$$\partial_x^4 v^{(n)} = 24\varrho_5^{(n)} \quad (3.103)$$

où  $\varrho_5^{(n)}$  est une constante calculée à l'aide de

$$\varrho_5^{(n)} = \frac{1}{24} \left( \varrho_3^{(n)} p_z + 2\varrho_3^{(n)} \pi_4^{(n)} + 2\varrho_4^{(n)} \pi_1^{(n)} \right)$$

La solution de l'équation (3.103) est :

$$v^{(n)}(x) = \varrho_5^{(n)} x^4 + C_3^{(n)} x^3 + C_4^{(n)} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)} \quad (3.104)$$

Il s'en suit que la rotation  $\theta^{(n)}(x)$  est donnée par :

$$\theta^{(n)}(x) = -\partial_x v^{(n)}(x) = -4\varrho_5^{(n)} x^3 - 3C_3^{(n)} x^2 - 2C_4^{(n)} x - C_5^{(n)} \quad (3.105)$$

En introduisant les relations (3.101) et (3.104) dans l'équation (3.97), on obtient :

$$\partial_x^2 u_c^{(n)} = 6\varrho_6^{(n)} x + 6\varrho_1^{(n)} C_3^{(n)} + 2\varrho_7^{(n)} \quad (3.106)$$

avec

$$\varrho_6^{(n)} = 4\varrho_1^{(n)} \varrho_5^{(n)} + 2\varrho_2^{(n)} \pi_1^{(n)} \quad \text{et} \quad \varrho_7^{(n)} = \frac{1}{2} \varrho_2^{(n)} \pi_2^{(n)}$$

Cette équation a pour solution :

$$u_c^{(n)}(x) = \varrho_6^{(n)} x^3 + \left( 3\varrho_1^{(n)} C_3^{(n)} + \varrho_7^{(n)} \right) x^2 + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)} \quad (3.107)$$

En posant

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(n)} &= \left[ C_1^{(n)} \quad C_2^{(n)} \quad C_3^{(n)} \quad C_4^{(n)} \quad C_5^{(n)} \quad C_6^{(n)} \quad C_7^{(n)} \quad C_8^{(n)} \right]^T \\ \mathbf{X}_{u_s}^{(n)} &= \left[ x \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \\ \mathbf{X}_v^{(n)} &= \left[ 0 \quad 0 \quad x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right] \\ \mathbf{X}_\theta^{(n)} &= \left[ 0 \quad 0 \quad 3x^2 \quad 2x \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \\ \mathbf{X}_{u_c}^{(n)} &= \left[ 0 \quad 0 \quad 3\varrho_1^{(n)} x^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad x \quad 1 \right] \\ Z_v^{(n)} &= \varrho_5^{(n)} x^4 \\ Z_\theta^{(n)} &= -4\varrho_5^{(n)} x^3 \\ Z_{u_c}^{(n)} &= \varrho_6^{(n)} x^3 + \varrho_7^{(n)} x^2 \end{aligned}$$

on peut écrire la solution en déplacements sous la forme matricielle suivante :

$$u_s^{(n)}(x) = \mathbf{X}_{u_s}^{(n)}(x)\mathbf{C}^{(n)} \quad (3.108)$$

$$u_c^{(n)}(x) = \mathbf{X}_{u_c}^{(n)}(x)\mathbf{C}^{(n)} + Z_{u_c}^{(n)}(x) \quad (3.109)$$

$$v^{(n)}(x) = \mathbf{X}_v^{(n)}(x)\mathbf{C}^{(n)} + Z_v^{(n)}(x) \quad (3.110)$$

$$\theta^{(n)}(x) = \mathbf{X}_\theta^{(n)}(x)\mathbf{C}^{(n)} + Z_\theta^{(n)}(x) \quad (3.111)$$

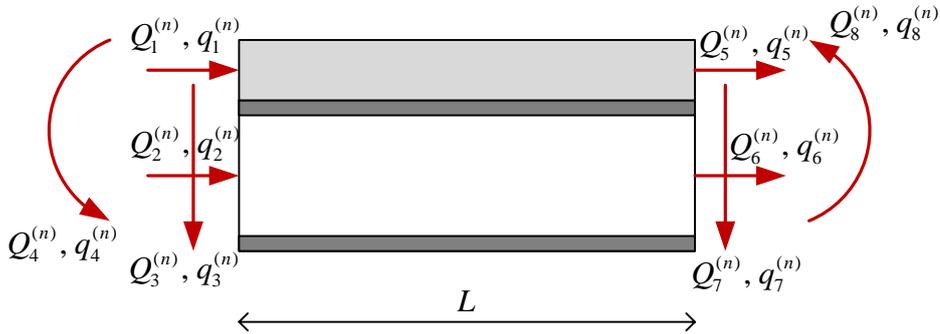


Figure 3.10 – Élément de poutre mixte

Les constantes  $C_i^{(n)}$ ,  $i = 1..8$  sont déterminées en imposant que les déplacements aux extrémités soient égaux aux déplacements nodaux à l'instant  $t^{(n)}$  (cf. Figure 3.10), qui sont les inconnues principales :

$$\mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n)}\mathbf{C}^{(n)} + \mathbf{Z}^{(n)} \quad (3.112)$$

$$\text{où : } \mathbf{q}^{(n)} = \begin{bmatrix} q_1^{(n)} \\ q_2^{(n)} \\ q_3^{(n)} \\ q_4^{(n)} \\ q_5^{(n)} \\ q_6^{(n)} \\ q_7^{(n)} \\ q_8^{(n)} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{X}^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{u_s}^{(n)}(0) \\ \mathbf{X}_{u_c}^{(n)}(0) \\ \mathbf{X}_v^{(n)}(0) \\ \mathbf{X}_\theta^{(n)}(0) \\ \mathbf{X}_{u_s}^{(n)}(L) \\ \mathbf{X}_{u_c}^{(n)}(L) \\ \mathbf{X}_v^{(n)}(L) \\ \mathbf{X}_\theta^{(n)}(L) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ Z_{u_c}^{(n)}(0) \\ Z_v^{(n)}(0) \\ Z_\theta^{(n)}(0) \\ 0 \\ Z_{u_c}^{(n)}(L) \\ Z_v^{(n)}(L) \\ Z_\theta^{(n)}(L) \end{bmatrix}$$

Les déplacements étant indépendants, la matrice  $\mathbf{X}^{(n)}$  est par conséquent inversible. On obtient ainsi les constantes  $C_i^{(n)}$  en fonction des  $q_i^{(n)}$  :

$$\mathbf{C}^{(n)} = [\mathbf{X}^{(n)}]^{-1} (\mathbf{q}^{(n)} - \mathbf{Z}^{(n)}) \quad (3.113)$$

Les efforts internes le long du tronçon de poutre mixte sont déduits à partir du champ de déplacements en utilisant les relations cinématiques et les lois de comportement :

$$N_s^{(n)}(x) = \mathbf{Y}_{N_s}^{(n)}(x) \mathbf{C}^{(n)} \quad (3.114)$$

$$N_c^{(n)}(x) = \mathbf{Y}_{N_c}^{(n)}(x) \mathbf{C}^{(n)} + R_{N_c}^{(n)}(x) \quad (3.115)$$

$$M^{(n)}(x) = \mathbf{Y}_M^{(n)}(x) \mathbf{C}^{(n)} + R_M^{(n)}(x) \quad (3.116)$$

$$T^{(n)}(x) = \mathbf{Y}_T^{(n)}(x) \mathbf{C}^{(n)} + R_T^{(n)}(x) \quad (3.117)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{N_s}^{(n)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3EA_s x^2 & 2EA_s x & EA_s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y}_{N_c}^{(n)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \left( \varrho_1^{(n)} EA_c^{(n)} - EB_c^{(n)} \right) x & -EB_c^{(n)} x & 0 & 0 & EA_c^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y}_M^{(n)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \left( \varrho_1^{(n)} EB_c^{(n)} - EI^{(n)} \right) x & -EI^{(n)} x & 0 & 0 & EB_c^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y}_T^{(n)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6H EA_s x - 6 \left( \varrho_1^{(n)} EB_c^{(n)} - EI^{(n)} \right) & EI^{(n)} - 2H EA_s & 0 & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ R_{N_c}^{(n)} &= \left( \pi_1^{(n)} + 3EA_c^{(n)} \varrho_6^{(n)} - 12EB_c^{(n)} \varrho_5^{(n)} \right) x^2 + \left( \pi_2^{(n)} + 2EA_c^{(n)} \varrho_7^{(n)} \right) x + \\ &\quad \pi_3^{(n)} - EA_{co}^{(n)} \varepsilon_{sh}^{(n)} \\ R_M^{(n)} &= \left( \pi_4^{(n)} + 3EB_c^{(n)} \varrho_6^{(n)} - 12EI^{(n)} \varrho_5^{(n)} \right) x^2 + \left( \pi_5^{(n)} + 2EB_c^{(n)} \varrho_7^{(n)} \right) x + \\ &\quad \pi_6^{(n)} - EB_{co}^{(n)} \varepsilon_{sh}^{(n)} \\ R_T^{(n)} &= 2 \left( \pi_4^{(n)} + 3EB_c^{(n)} \varrho_6^{(n)} - 12EI^{(n)} \varrho_5^{(n)} \right) x + \pi_5^{(n)} + 2EB_c^{(n)} \varrho_7^{(n)} \end{aligned}$$

La matrice de raideur, qui établit le lien entre les efforts nodaux  $Q_i^{(n)}$  (cf. Figure 3.10) et les déplacements nodaux  $q_i^{(n)}$ , s'obtient finalement en imposant les conditions aux limites statiques :

$$\mathbf{Q}^{(n)} = \mathbf{Y}^{(n)} \mathbf{C}^{(n)} + \mathbf{R}^{(n)} \quad (3.118)$$

où :

$$\mathbf{Q}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_1^{(n)} \\ Q_2^{(n)} \\ Q_3^{(n)} \\ Q_4^{(n)} \\ Q_5^{(n)} \\ Q_6^{(n)} \\ Q_7^{(n)} \\ Q_8^{(n)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X}^{(n)} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Y}_{N_s}^{(n)}(0) \\ -\mathbf{Y}_{N_c}^{(n)}(0) \\ -\mathbf{Y}_T^{(n)}(0) \\ -\mathbf{Y}_M^{(n)}(0) \\ \mathbf{Y}_{N_s}^{(n)}(L) \\ \mathbf{Y}_{N_c}^{(n)}(L) \\ \mathbf{Y}_T^{(n)}(L) \\ \mathbf{Y}_M^{(n)}(L) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -R_{N_c}^{(n)}(0) \\ -R_T^{(n)}(0) \\ -R_M^{(n)}(0) \\ 0 \\ R_{N_c}^{(n)}(L) \\ R_T^{(n)}(L) \\ R_M^{(n)}(L) \end{bmatrix}$$

En introduisant l'équation (3.113) dans (3.118), on obtient :

$$\mathbf{K}_e^{(n)} \mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{Q}^{(n)} + \mathbf{Q}_0^{(n)} \quad (3.119)$$

où

$$\mathbf{K}_e^{(n)} = \mathbf{Y}^{(n)} [\mathbf{X}^{(n)}]^{-1} \quad (3.120)$$

représente la matrice de rigidité exacte en espace de l'élément de poutre mixte non-connectée à l'instant  $n$  et

$$\mathbf{Q}_0^{(n)} = \mathbf{Y}^{(n)} [\mathbf{X}^{(n)}]^{-1} \mathbf{Z}^{(n)} - \mathbf{Q}_0^{(n)} \quad (3.121)$$

représente la vecteur de forces nodales dû à la charge répartie à l'intérieur de l'élément et à l'histoire de contraintes. La matrice de raideur de la structure s'obtient en assemblant les éléments de poutre mixte non-connectée avec les éléments de connecteurs en suivant la procédure déjà explicitée au chapitre 2.

### 3.4.2 Connexion continue

Dans ce paragraphe, nous présentons la solution analytique en espace pour un élément de poutre mixte connecté de manière continue et soumis à un chargement uniformément réparti  $p_z$ . La démarche est tout à fait similaire à celle présentée au paragraphe 3.4.1. Cependant le caractère continu de la connexion complique fortement les développements analytiques. En effet, la connexion introduit une variable statique supplémentaire sans mo-

difier le nombre d'équations d'équilibre. Il s'en suit un caractère hyperstatique, que l'on pourrait qualifier d'interne, puisqu'il y a plus d'inconnues que d'équations. En d'autres termes, contrairement à la poutre non-connectée, il n'est pas possible de donner l'allure générale des effort internes sur la base des équations d'équilibre uniquement.

En combinant les équations d'équilibre (2.4, 2.7 et 2.14), les équations de compatibilité (2.40 - 2.41) et les relations constitutives (3.88 - 3.92), le système des équations différentielles du problème se réduit aux trois équations différentielles suivantes :

$$\partial_x^5 u_s^{(n)} - \mu_n^2 \partial_x^3 u_s^{(n)} = \zeta_1^{(n)} + \zeta_2^{(n)} \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \partial_x^2 M_{co}^{(i)} + \zeta_3^{(n)} \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \partial_x^2 N_{co}^{(i)} \quad (3.122)$$

$$\partial_x^3 v^{(n)} = \zeta_4^{(n)} \partial_x^4 u_s^{(n)} + \zeta_5^{(n)} \partial_x^2 u_s^{(n)} + \zeta_6^{(n)} \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \partial_x N_{co}^{(i)} \quad (3.123)$$

$$u_c^{(n)} = u_s^{(n)} - \frac{(EA)_s}{k_{sc}} \partial_x^2 u_s^{(n)} + H \partial_x v^{(n)} \quad (3.124)$$

où  $\zeta_1^{(n)} \dots \zeta_6^{(n)}$  sont des constantes, définies dans l'Annexe IV, et  $\mu_n$  est donné par

$$\mu_n = \sqrt{k_{sc} \left( \frac{H^2 (EA)_c^{(n)} + (EI)^{(n)} - 2H (EB)_c^{(n)}}{(EI)^{(n)} (EA)_c^{(n)} - (EB_c^{(n)})^2} + \frac{1}{(EA)_s} \right)} \quad (3.125)$$

La réponse instantanée à l'instant  $t = t_1$  a été présentée au paragraphe 2.4. Dans ce paragraphe, nous allons présenter la solution analytique pour tout instant  $t > t_1$ . On observe que, comme pour la solution élastique de l'équation différentielle, le système d'équations est découplé. Il suffit donc de résoudre l'équation différentielle qui a pour inconnue  $u_s$  pour que la solution complète soit obtenue. La complication provient des termes héréditaires, ce qui a pour conséquence que l'équation différentielle (3.122) change à chaque pas de temps puisque le second membre de l'équation (3.122) est modifié à chaque point repère de temps. La solution de l'équation différentielle (3.122) se compose d'une solution *générale* et d'une solution *particulière*. La solution *générale* est identique à la solution élastique de NEWMARK. L'expression analytique des efforts internes comprend une partie

qui provient de la solution générale et qui est de la forme :

$$N_{co}^{(t)} = \alpha_1^{(t)} x^2 + \alpha_2^{(t)} x + \alpha_3^{(t)} + \beta_1^{(t)} \sinh(\mu_{(t)} x) + \beta_2^{(t)} \cosh(\mu_{(t)} x) \quad (3.126)$$

$$M_{co}^{(t)} = \alpha_4^{(t)} x^2 + \alpha_5^{(t)} x + \alpha_6^{(t)} + \beta_3^{(t)} \sinh(\mu_{(t)} x) + \beta_4^{(t)} \cosh(\mu_{(t)} x) \quad (3.127)$$

Il est à noter que la solution particulière de l'équation différentielle

$$\partial_x^5 f(x) - \mu^2 \partial_x^3 f(x) = a_1 + a_2 \sinh(\mu_0 x) + a_3 \cosh(\mu_0 x) \quad (3.128)$$

est de la forme :

$$f_0(x) = -\frac{a_1}{6\mu^2} x^3 + \frac{a_3}{\mu_0^3 (\mu_0^2 - \mu^2)} \sinh(\mu_0 x) + \frac{a_2}{\mu_0^3 (\mu_0^2 - \mu^2)} \cosh(\mu_0 x) \quad (3.129)$$

Ainsi, il apparaît que la solution particulière a la même forme que l'expression du second membre<sup>1</sup>. On en conclut que l'expression de l'effort normal et du moment fléchissant à l'instant  $t_i$  est de la forme :

$$N_{co}^{(i)} = \alpha_1^{(i)} x^2 + \alpha_2^{(i)} x + \alpha_3^{(i)} + \sum_{j=1}^i \left( \beta_1^{(i,j)} \sinh(\mu_j x) + \beta_2^{(i,j)} \cosh(\mu_j x) \right) \quad (3.130)$$

$$M_{co}^{(i)} = \alpha_4^{(i)} x^2 + \alpha_5^{(i)} x + \alpha_6^{(i)} + \sum_{j=1}^i \left( \beta_3^{(i,j)} \sinh(\mu_j x) + \beta_4^{(i,j)} \cosh(\mu_j x) \right) \quad (3.131)$$

où  $\alpha_{1..6}^{(i)}$  et de  $\beta_{1..4}^{(i,j)}$  sont des constantes, déterminées à chaque borne ( $i$ ). Les termes  $\beta$  indiquent clairement le caractère héréditaire du comportement. Ces constantes s'expriment en fonction des déplacements à l'instant  $t_i$  et des contraintes aux instants précédents, elles-mêmes fonctions des déplacements aux instants précédents. Les termes héréditaires sont de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} N_{co}^{(i)} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(n)} x^{3-k} + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \eta_1^{(n,i)} \sinh(\mu_i x) + \eta_2^{(n,i)} \cosh(\mu_i x) \right) \quad (3.132)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} M_{co}^{(i)} = \sum_{k=1}^3 \lambda_{k+3}^{(n)} x^{3-k} + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \eta_3^{(n,i)} \sinh(\mu_i x) + \eta_4^{(n,i)} \cosh(\mu_i x) \right) \quad (3.133)$$

---

<sup>1</sup>Attention si deux pas de temps consécutifs sont trop proche le terme  $\mu_1^2 - \mu_2^2$  tends vers zéro ce qui provoque des problèmes numériques.

où  $\lambda_{1..6}^{(i)}$  et  $\eta_{1..4}^{(i,j)}$  sont donnés dans l'Annexe IV. En substituant les équations (3.132) & (3.133) dans l'équation (3.122), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \partial_x^5 u_s^{(n)} - \mu_n^2 \partial_x^3 u_s^{(n)} = & (\zeta_1^{(n)} + 2\zeta_2^{(n)} \lambda_4^{(n)} + 2\zeta_3^{(n)} \lambda_1^{(n)}) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2 (\zeta_2^{(n)} \eta_3^{(i,j)} + \\ & \zeta_3^{(n)} \eta_1^{(i,j)}) \sinh(\mu_i x) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2 (\zeta_2^{(n)} \eta_4^{(i,j)} + \zeta_3^{(n)} \eta_2^{(i,j)}) \cosh(\mu_i x) \end{aligned} \quad (3.134)$$

Cette équation peut être analytiquement résolue avec une solution particulière de type (3.129) et la solution est de la forme :

$$\begin{aligned} u_s^{(n)} = & C_1^{(n)} \sinh(\mu_n x) + C_2^{(n)} \cosh(\mu_n x) + C_3^{(n)} x^2 + C_4^{(n)} x + C_5^{(n)} + \zeta_7^{(n)} x^3 \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (a_s^{(n,i)} \sinh(\mu_i x) + b_s^{(n,i)} \cosh(\mu_i x)) \end{aligned} \quad (3.135)$$

En introduisant l'équation (3.135) dans l'équation (3.123) que l'on résoud pour  $v^{(n)}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} v^{(n)} = & (\zeta_4^{(n)} + \frac{\zeta_5^{(n)}}{\mu_n})(C_1^{(n)} \cosh(\mu_n x) + C_2^{(n)} \sinh(\mu_n x)) + (\frac{\zeta_5^{(n)} C_3^{(n)}}{3} + \zeta_9^{(n)}) x^3 + \\ & C_6^{(n)} x^2 + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)} + \zeta_8^{(n)} x^4 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_v^{(n,i)} \sinh(\mu_i x) + b_v^{(n,i)} \cosh(\mu_i x)) \end{aligned} \quad (3.136)$$

Les constantes d'intégration  $C_{1..8}^{(n)}$  sont obtenues par les conditions aux limites statiques et/ou cinématiques ;  $\zeta_7^{(n)}$ ,  $\zeta_8^{(n)}$ ,  $\zeta_9^{(n)}$ ,  $a_s^{(n,i)}$ ,  $b_s^{(n,i)}$ ,  $a_v^{(n,i)}$  and  $b_v^{(n,i)}$  sont détaillés dans l'Annexe IV. Pour simplifier les développements,  $u_s^{(n)}$  et  $v^{(n)}$  sont exprimés sous formes vectorielles, à savoir :

$$u_s^{(n)} = \mathbf{X}_s^{(n)} \mathbf{C}^{(n)} + Z_s^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_s^{(n,i)} \sinh(\mu_i x) + b_s^{(n,i)} \cosh(\mu_i x)) \quad (3.137)$$

$$v^{(n)} = \mathbf{X}_v^{(n)} \mathbf{C}^{(n)} + Z_v^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_v^{(n,i)} \sinh(\mu_i x) + b_v^{(n,i)} \cosh(\mu_i x)) \quad (3.138)$$

où

$$\mathbf{C}^{(n)} = \left[ C_1^{(n)} \quad C_2^{(n)} \quad C_3^{(n)} \quad C_4^{(n)} \quad C_5^{(n)} \quad C_6^{(n)} \quad C_7^{(n)} \quad C_8^{(n)} \right]^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_s^{(n)} &= \begin{bmatrix} \sinh(\mu_n x) & \cosh(\mu_n x) & x^2 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{X}_v^{(n)} &= \begin{bmatrix} (\zeta_4^{(n)} + \frac{\zeta_5^{(n)}}{\mu_n}) \cosh(\mu_n x) & (\zeta_4^{(n)} + \frac{\zeta_5^{(n)}}{\mu_n}) \sinh(\mu_n x) & \frac{\zeta_5^{(n)}}{3} & 0 & 0 & x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \\ Z_s^{(n)} &= \zeta_7^{(n)} x^3 \\ Z_v^{(n)} &= \zeta_8^{(n)} x^3 + \zeta_9^{(n)} x^3 \end{aligned}$$

En substituant les équations (3.137) et (3.138) dans l'équation (3.124), nous trouvons la solution pour  $u_c^{(n)}$

$$u_c^{(n)} = \mathbf{X}_c^{(n)} \mathbf{C}^{(n)} + Z_c^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_c^{(n,i)} \sinh(\mu_i x) + b_c^{(n,i)} \cosh(\mu_i x)) \quad (3.139)$$

Finalement, en utilisant les relations de compatibilité et les relations constitutives, nous pouvons déduire les autres inconnues du problème à partir des expressions de  $u_s^{(n)}$ ,  $u_c^{(n)}$  et  $v^{(n)}$  :

$$\theta^{(n)} = \mathbf{X}_\theta^{(n)} \mathbf{C}^{(n)} + Z_\theta^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_\theta^{(n,i)} \sinh(\mu_i x) + b_\theta^{(n,i)} \cosh(\mu_i x)) \quad (3.140)$$

$$N_c^{(n)} = \mathbf{Y}_{N_c}^{(n)} \mathbf{C}^{(n)} + R_{N_c}^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{N_c}^{(n,i)} \sinh(\mu_i x) + b_{N_c}^{(n,i)} \cosh(\mu_i x)) \quad (3.141)$$

$$N_s^{(n)} = \mathbf{Y}_{N_s}^{(n)} \mathbf{C}^{(n)} + R_{N_s}^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{N_s}^{(n,i)} \sinh(\mu_i x) + b_{N_s}^{(n,i)} \cosh(\mu_i x)) \quad (3.142)$$

$$M^{(n)} = \mathbf{Y}_M^{(n)} \mathbf{C}^{(n)} + R_M^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_M^{(n,i)} \sinh(\mu_i x) + b_M^{(n,i)} \cosh(\mu_i x)) \quad (3.143)$$

$$T^{(n)} = \mathbf{Y}_T^{(n)} \mathbf{C}^{(n)} + R_T^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_T^{(n,i)} \sinh(\mu_i x) + b_T^{(n,i)} \cosh(\mu_i x)) \quad (3.144)$$

où toutes les expressions des notations inconnus sont définies dans Annexe IV.

A partir des expressions des champs de déplacements et d'efforts internes qui sont exactes en espace, on peut facilement déduire l'expression de la matrice de rigidité, dite "exacte", à chaque borne de temps en interprétant les degrés de liberté aux extrémités de l'élément comme des conditions aux limites pour les équations ci-dessus. Cette matrice, qui représente la relation entre le vecteur de déplacements nodaux  $\mathbf{q}^{(n)}$  et le vecteur de forces

nodales  $\mathbf{Q}^{(n)}$  à l'instant  $t_n$  (cf. Figure 3.10), va ensuite être utilisée dans une procédure d'éléments finis classique.

Soit un élément de la poutre mixte, comme le montre la figure 3.10, ; en appliquant les conditions aux limites, le vecteur de déplacements et le vecteur de forces peuvent être exprimés comme suit (similaire à 3.112 et 3.118) :

$$\mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n)} \mathbf{C}^{(n)} + \mathbf{Z}^{(n)} \quad (3.145)$$

$$\mathbf{Q}^{(n)} = \mathbf{Y}^{(n)} \mathbf{C}^{(n)} + \mathbf{R}^{(n)} \quad (3.146)$$

où la matrice  $\mathbf{X}^{(n)}$  est définie par :

$$\mathbf{X}^{(n)} = \left[ [\mathbf{X}_c^{(n)}(0)]^T \quad \dots \quad [\mathbf{X}_\theta^{(n)}(L)]^T \right]^T$$

On a des expressions de même type pour les vecteurs  $\mathbf{Z}^{(n)}$ ,  $\mathbf{Y}^{(n)}$  et  $\mathbf{R}^{(n)}$ .

En résolvant l'équation (3.145) pour  $\mathbf{C}^{(n)}$  et en l'introduisant ensuite dans l'équation (3.146), on obtient :

$$\mathbf{K}^{(n)} \mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{Q}^{(n)} + \mathbf{Q}_0^{(n)} \quad (3.147)$$

où  $\mathbf{K}^{(n)} = \mathbf{Y}^{(n)} (\mathbf{X}^{(n)})^{-1}$  représente la matrice de rigidité exacte au temps  $t_n$  et  $\mathbf{Q}_0^{(n)} = \mathbf{K}^{(n)} \mathbf{Z}^{(n)} - \mathbf{R}^{(n)}$  représente le vecteur de forces nodales dû à la charge répartie  $p_z$  et à l'histoire de contraintes.

## 3.5 Applications numériques

### 3.5.1 Description de la poutre et objet des différentes simulations

La poutre de référence servant à l'ensemble des simulations numériques effectuées est celle utilisée par DEZI et al. [59]. Il s'agit d'une poutre mixte acier-béton hyperstatique à deux travées égales reposant sur trois appuis simples. La figure 3.11 illustre les caractéristiques géométriques de la poutre de référence.

Le module de YOUNG du profilé métallique vaut 200000 MPa. Les auteurs ne précisent

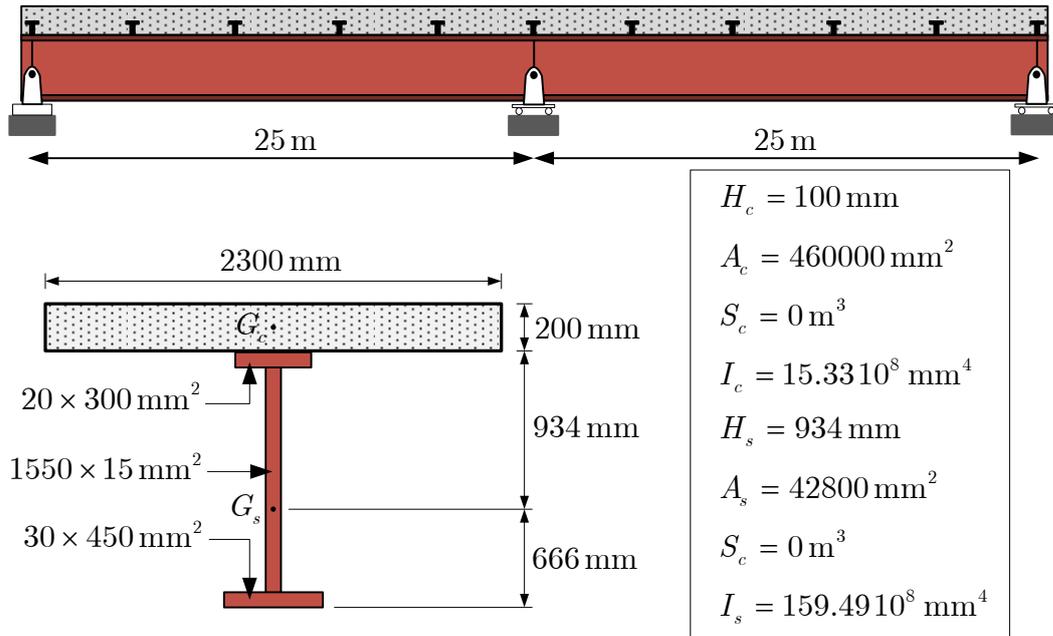


Figure 3.11 – Description de la poutre mixte de DEZI et al.

pas le type des goujons, ni combien de goujons sont utilisés. Ils ne donnent qu'une rigidité surfacique de connexion de  $400 \text{ N/mm}^2$ . Afin de simuler cette poutre avec le modèle de connexion discrète, nous considérons que cette poutre mixte est connectée à l'aide de rangées de goujons, espacées longitudinalement de  $625 \text{ mm}$ . Ainsi la rigidité de chaque rangée  $k_{st}$  vaut  $625 \times 400 = 250000 \text{ N/mm}$ .

Le chargement s'effectue à  $t_0 = 30$  jours et l'analyse de la poutre est réalisée sur une durée de  $25520$  jours, soit environ  $70$  années. Les fonctions de fluage et de retrait sont celles du CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1] données en annexe II avec les paramètres suivants :

- |                            |   |
|----------------------------|---|
| $t_0 = 30$ jours           | Temps initial   |
| $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$ | Résistance à la compression du béton à 28j                        |
| $RH = 80\%$                | Humidité relative   |
| $h_0 = 2A_c/u = 196$       | avec $u = 4700 \text{ mm}$ périmètre en contact avec l'atmosphère |
| $s = 0.25$                 | coefficient correcteur sur le fluage                              |

Une discrétisation en temps irrégulière est adoptée afin de déceler les changements qui

surviennent les premiers jours. Douze bornes de temps seront utilisées :

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$
30	32	35	38	45	65	100	200	600	3000	10000	25550

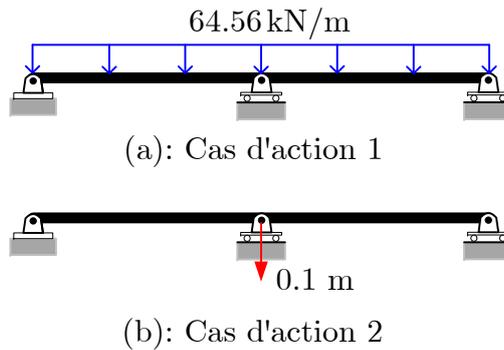


Figure 3.12 – Deux cas d'action considérés

Deux cas d'action seront considérés. Dans le premier cas, la poutre est soumise à un chargement uniformément réparti de 64.56 kN/m (poids propre compris). Le deuxième cas est un tassement de l'appui intermédiaire de 0.1 m.

### 3.5.2 Comparaison avec le résultat de Dezi 1993

Dans un premier de temps, nous comparons les résultats obtenus avec notre solution semi-analytique (exacte en espace et discrétisée en temps) avec ceux obtenus par DEZI [59], qui a utilisé la méthode des différences finies (40 intervalles de discrétisation) pour obtenir sa solution numérique en espace. Le but de ce paragraphe est de valider notre solution semi-analytique (exacte en espace et discrétisée en temps). Pour cela, nous utilisons la même méthode de discrétisation en temps (méthode pas-à-pas) et la même hypothèse de connexion (continue) que DEZI [59]. Les deux cas d'action sont considérés avec chacun deux valeurs de la connexion  $k_{sc}$  à savoir  $k_{sc} = 0.4 \text{ kN/mm}^2$  et  $k_{sc} = 1 \text{ kN/mm}^2$ .

Aux figures 3.13 et 3.14, l'évolution de la réaction d'appui, pour les deux cas d'action, est illustrée pour les deux valeurs de  $k_{sc}$ . On observe que les évolutions au cours du temps coïncident pour les deux cas d'action et les deux connexions. Il en est de même pour la

rotation à l'appui gauche (cf. Figures 3.15 et 3.16). De plus, on constate pour le premier cas de charge, que la réaction d'appui varie très peu au cours du temps tandis que la rotation à l'appui gauche varie considérablement pour le deuxième cas d'action. En revanche, pour le deuxième cas d'action, la rotation à l'appui gauche ne varie quasiment pas tandis que la réaction d'appui varie considérablement. Ceci peut être expliqué en partie par le fait que le chargement est constant (dans le premier cas d'action), et que la poutre se trouve dans une condition d'essai de fluage. En revanche, un déplacement imposé à l'appui médian place la poutre dans une condition d'essai de relaxation.

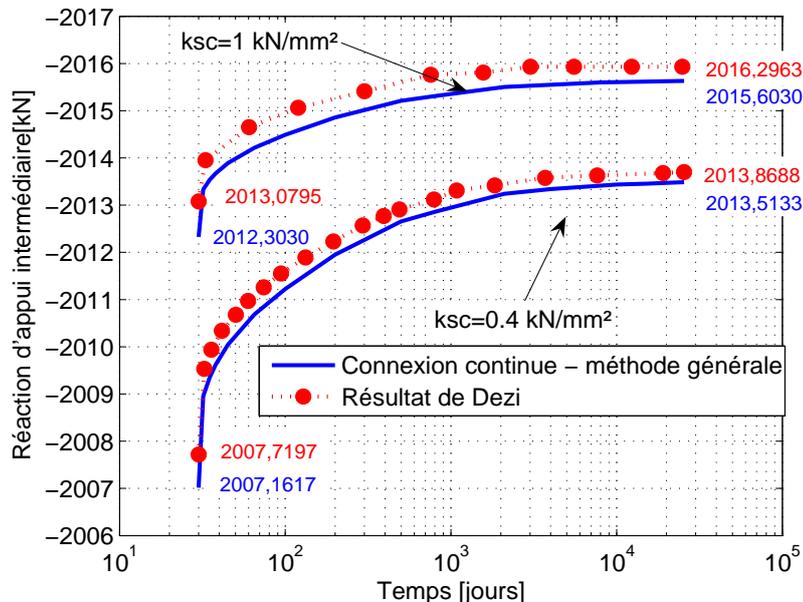


Figure 3.13 – Cas d'action 1 : Évolution au cours du temps de la réaction de l'appui intermédiaire

Le tableau 3.1 fournit les écarts relatifs sur la réaction à l'appui intermédiaire et la rotation de l'appui d'extrémité de gauche pour les deux cas d'action. On y observe une bonne concordance entre nos résultats et ceux de DEZI. Ainsi, on peut en conclure qu'aucune erreur grossière ne s'est glissée dans la programmation. Par ailleurs, les écarts sont plus grands lorsque la rigidité de connexion  $k_{sc}$  augmente. Ceci est vraisemblablement dû au

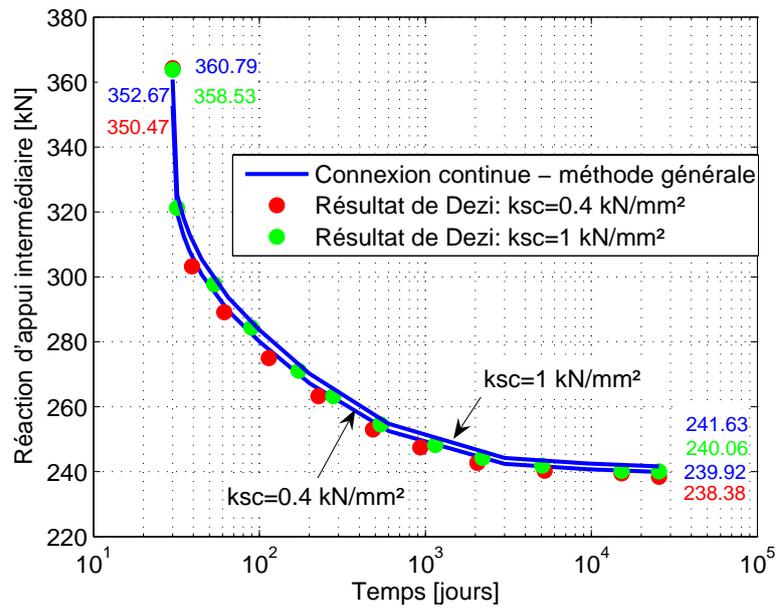


Figure 3.14 – Cas d'action 2 : Évolution au cours du temps de la réaction de l'appui intermédiaire

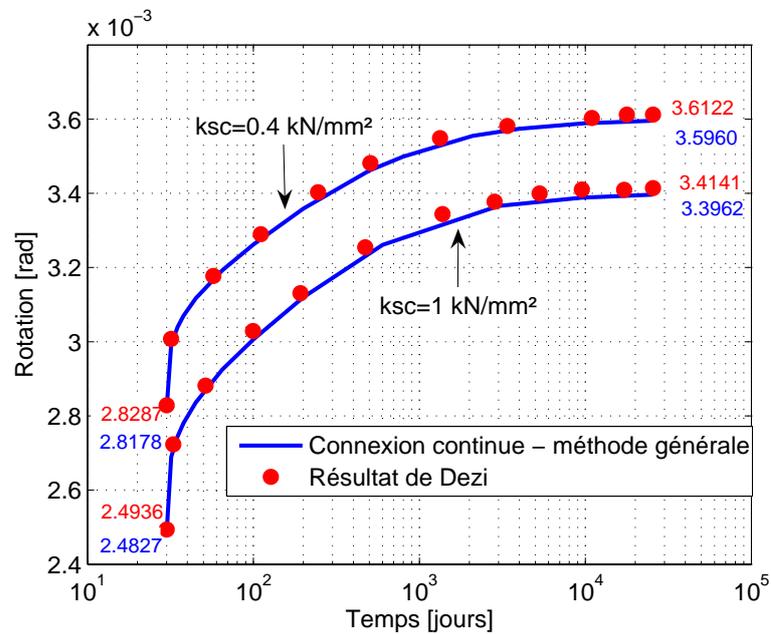


Figure 3.15 – Cas d'action 1 : Évolution au cours du temps de la rotation à l'appui gauche

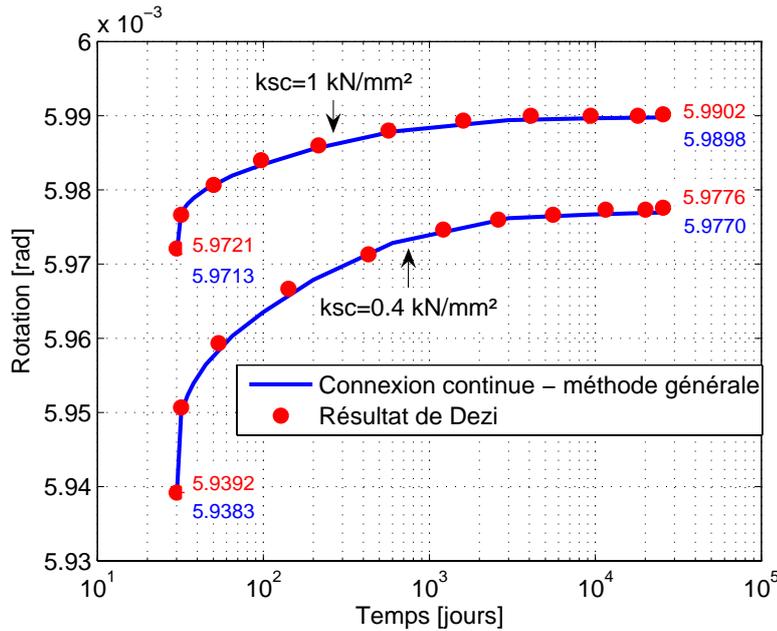


Figure 3.16 – Cas d’action 2 : Évolution au cours du temps de la rotation à l’appui gauche

fait que les résultats de DEZI sont obtenus par la méthode numérique aux différences finies tandis que les notres proviennent de la solution exacte en espace.

	Cas d’action 1				Cas d’action 2			
	$k_{sc} = 0.4$ [kN/mm <sup>2</sup> ]		$k_{sc} = 1$ [kN/mm <sup>2</sup> ]		$k_{sc} = 0.4$ [kN/mm <sup>2</sup> ]		$k_{sc} = 1$ [kN/mm <sup>2</sup> ]	
	$t_0$	$t_f$	$t_0$	$t_f$	$t_0$	$t_f$	$t_0$	$t_f$
Réaction	0.03%	0.02%	0.04%	0.03%	-0.62%	-0.64%	-0.63%	-0.65%
Rotation	0.39%	0.45%	0.04%	0.53%	0.02%	0.22%	0.44%	0.53%

Tableau 3.1 – Écart relatif de notre modèle par rapport à celui de DEZI

### 3.5.3 Comparaison des modèles de connexion discrète et continue

Dans ce paragraphe, les deux modèles de connexion sont comparés sur le premier cas d’action. Pour le modèle de connexion continue, seul deux éléments (un pour chaque travée) sont nécessaires tandis que le modèle de connexion discrète nécessite 80 éléments de connexion ponctuelle. La méthode générale (pas-à-pas) est utilisée pour discrétiser en

temps le comportement viscoélastique et vieillissant du béton. Cette méthode étant présumée la plus précise (ou bien on peut atteindre le degré de précision voulu). Il est à noter que le retrait n'est pas pris en compte dans ce paragraphe. L'effet de retrait sera étudié au paragraphe 3.5.5.

La figure 3.17 représente l'évolution au cours du temps de la réaction de l'appui intermédiaire. Il est clair que les deux courbes sont très proches avec un écart relatif de  $\simeq 0.02\%$ . La poutre étant fortement connectée (avec espacement entre goujons petit de 625 mm) et la loi de comportement discrétisée étant affine d'une loi d'élasticité (voir l'équation 3.85), il est naturel de retrouver la même conclusion que celle du chapitre 2, à savoir que les résultats obtenus à l'aide de 2 éléments de connexion continue sont quasi identiques à ceux obtenus avec 80 éléments de connexion discrète. Ainsi les distributions de la flèche se superposent pour les deux modèles de connexion (cf. Figure 3.18). On observe également sur la figure 3.19 que la connexion continue surestime le glissement dans les zones de moments positifs. Une bonne concordance est observée pour la distribution des déplacements axiaux (cf. Figures 3.20 et 3.21), la distribution de la courbure (cf. Figure 3.22), la distribution du moment fléchissant (cf. Figure 3.23) et la distribution de l'effort axial dans la dalle (cf. Figure 3.24) où les courbes se superposent. Comme remarqué au chapitre 2, le modèle de connexion discrète produit des discontinuités de la courbure et de l'effort axial (cf. Figures 3.22 et 3.24).

On peut conclure que malgré la complexité du modèle de connexion continue, il reste plus avantageux que celui de connexion discrète puisqu'il réduit significativement le nombre des éléments. Comme on le voit dans ce paragraphe, les résultats obtenus avec seulement 2 éléments "continus" sont quasi identiques que ceux obtenus avec 80 éléments "discrets". Au vu de l'avantage que le modèle de connexion continue apporte, nous n'utiliserons plus que ce modèle pour la suite des applications dans ce chapitre.

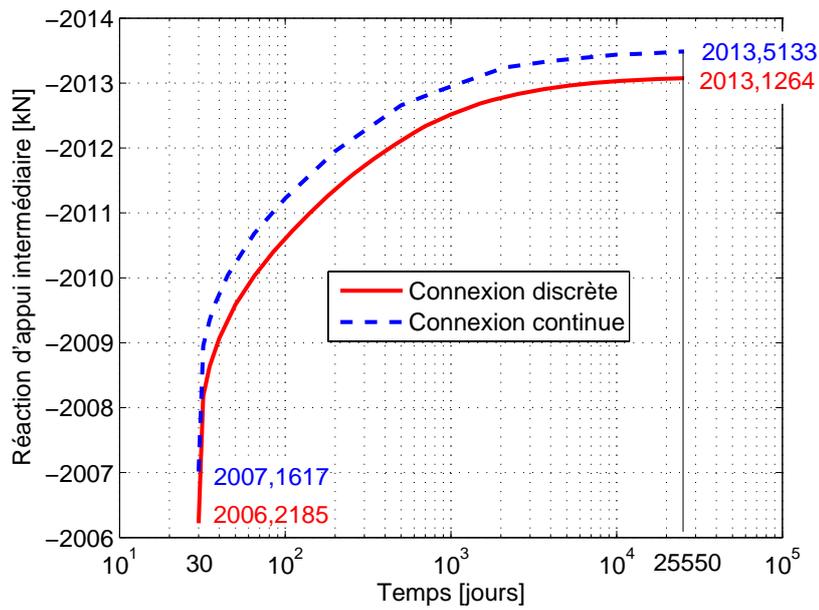


Figure 3.17 – Évolution au cours du temps de la réaction de l'appui intermédiaire pour les deux modèles de connexion

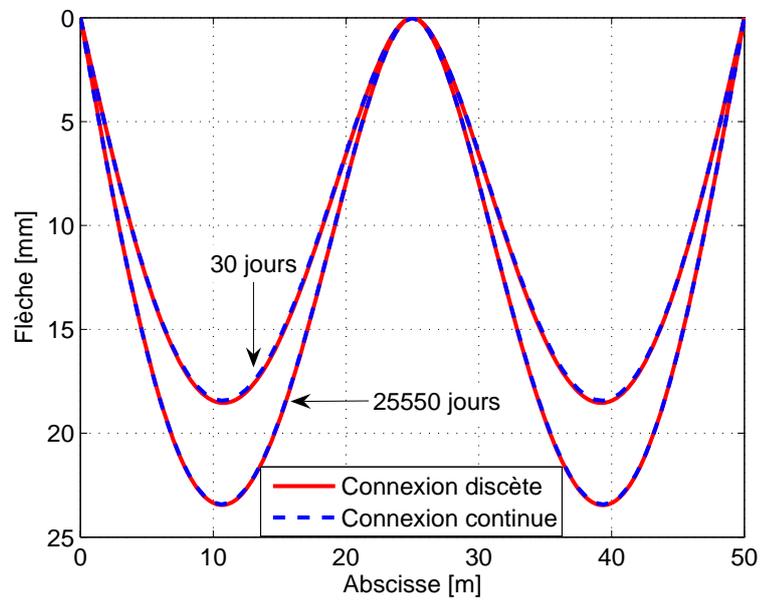


Figure 3.18 – Distribution de la flèche le long de la poutre pour les deux modèles de connexion

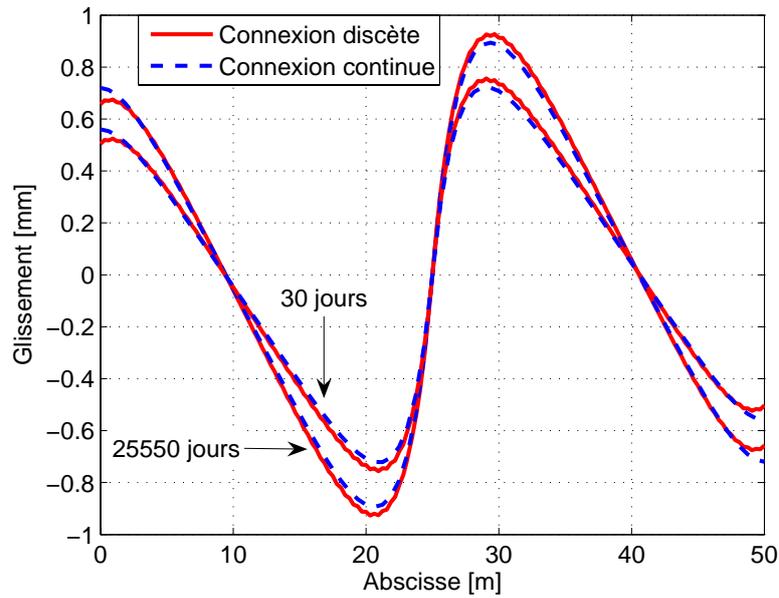


Figure 3.19 – Distribution du glissement le long de la poutre pour les deux modèles de connexion

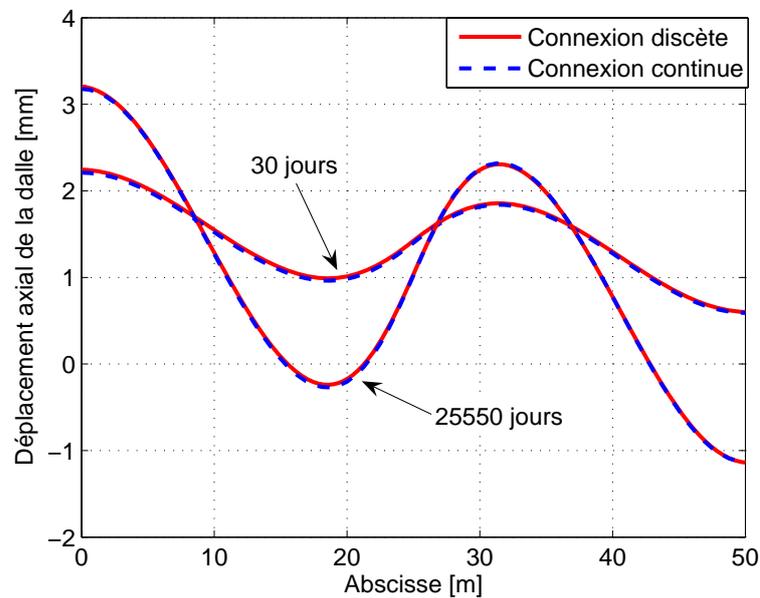


Figure 3.20 – Distribution du déplacement axial dans la dalle le long de la poutre pour les deux modèles de connexion

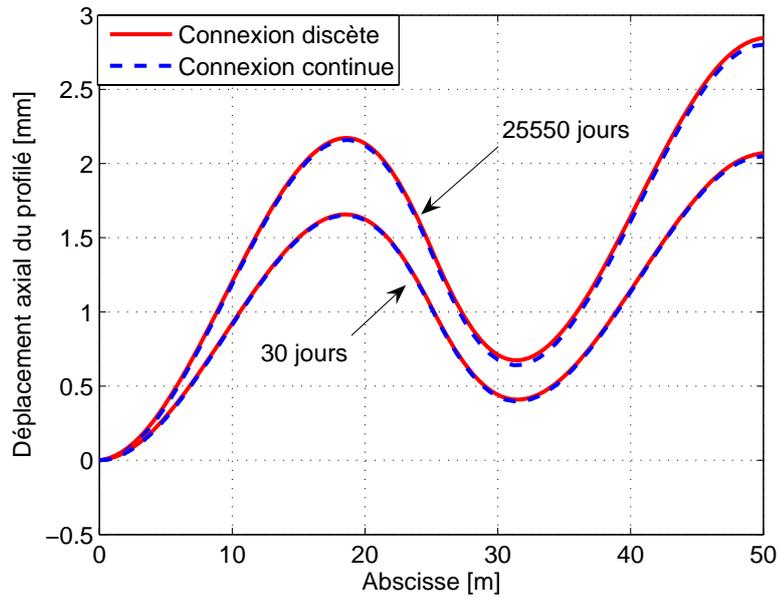


Figure 3.21 – Distribution du déplacement axial dans le profilé le long de la poutre pour les deux modèles de connexion

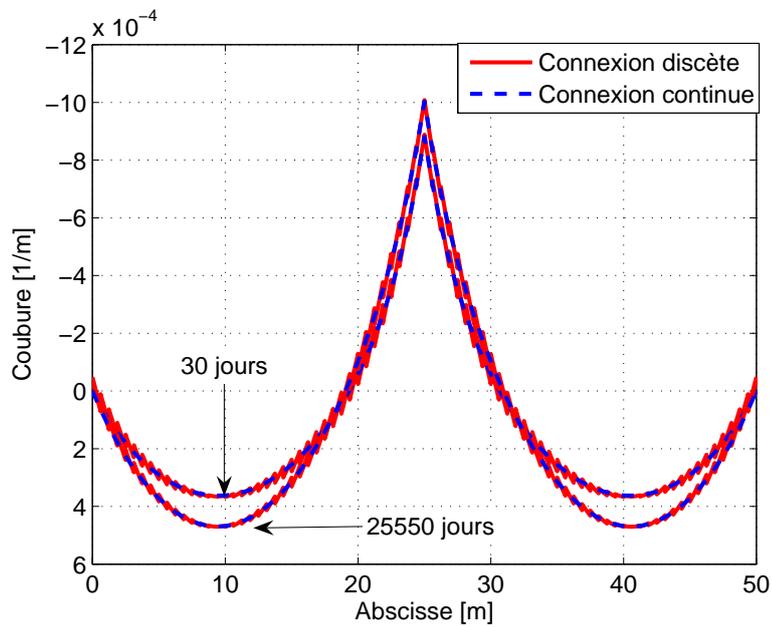


Figure 3.22 – Distribution de la courbure le long de la poutre pour les deux modèles de connexion

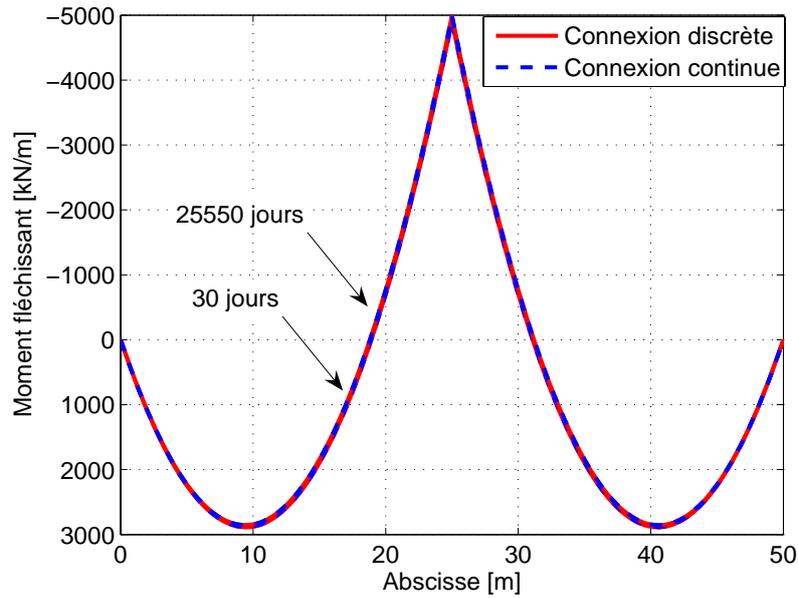


Figure 3.23 – Distribution du moment fléchissant total le long de la poutre pour les deux modèles de connexion

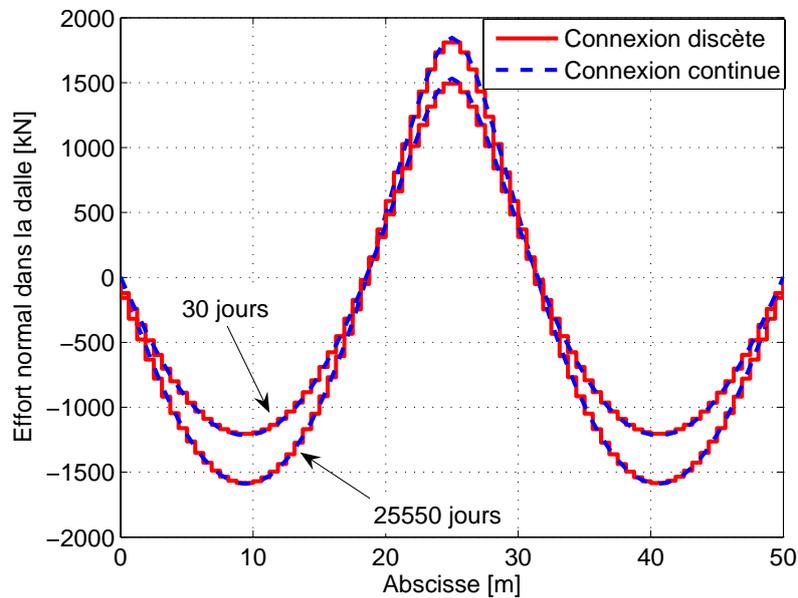


Figure 3.24 – Distribution de l'effort normal dans la dalle le long de la poutre pour les deux modèles de connexion

### 3.5.4 Comparaison des différentes méthodes de discrétisation en temps

La méthode pas-à-pas générale est consommatrice de temps de calcul et de mémoires tandis que la mise en oeuvre de la méthode "rate-type" (séries de DIRICHLET) se heurte au problème délicat de l'identification des paramètres du modèle. Il est alors naturel de rechercher des méthodes moins consommatrices de temps de calcul et facile à mettre en oeuvre. Ces méthodes sont presque toujours des méthodes à un pas (one step methods) qui tentent d'approcher le comportement sur tout l'intervalle de temps en considérant seulement l'instant initial et l'instant final. Ces méthodes sont qualifiées d'algébriques. Dans ce paragraphe, nous comparons toutes les méthodes mentionnées au début, à savoir la méthode générale pas-à-pas, la méthode "rate-type" (série de DIRICHLET), la méthode AAEM, la méthode EM et la méthode MS.

La figure 3.25 indique l'évolution de la réaction à l'appui intermédiaire pour le premier cas d'action avec et sans retrait. L'augmentation de la valeur absolue de la réaction est évidente et restituée par l'ensemble des méthodes. On relève la proximité des méthodes pas-à-pas et "rate-type", que le retrait soit pris en compte ou non. On observe également que la méthode AAEM est proche des deux méthodes précitées lorsque le retrait est négligé. La méthode MS a tendance à surestimer l'intensité de la réaction tandis que la méthode EM a plutôt tendance à la sous-estimer. La figure 3.26 représente l'évolution de la réaction à l'appui intermédiaire pour le second cas d'action avec et sans retrait. On observe encore une fois une excellente concordance entre les méthodes pas-à-pas et "rate-type". La méthode AAEM s'écarte significativement des deux méthodes précitées lorsque le retrait est pris en compte. Pour ce cas d'action, la méthode EM a tendance à surestimer l'intensité de la réaction tandis que la méthode MS a plutôt tendance à la sous-estimer. Le tableau 3.2 fournit les écarts relatifs sur les grandeurs mécaniques obtenues par les méthodes "rate-type", AAEM, EM, MS par rapport celles obtenues par la méthode pas-à-pas générale.

Les figures 3.27 et 3.28 présentent l'évolution au cours du temps de la flèche en milieu de travée pour les deux cas d'action. On y observe que la méthode AAEM a tendance à sous-estimer la flèche par rapport à la méthode pas-à-pas et "rate-type" lorsque le retrait

	Cas d'action 1		Cas d'action 2	
	Sans retrait	Avec retrait	Sans retrait	Avec retrait
<b>Méthode "rate-type"</b>				
Réaction	-0.001%	-0.082%	0.161%	-7.413%
Flèche	-0.058%	-0.131%	-0.002%	-0.036%
Glissement	0.085%	-0.571%	0.352%	-0.381%
<b>Méthode AAEM</b>				
Réaction	-0.003%	-1.261%	0.401%	-99.648%
Flèche	-0.283%	-1.454%	-0.004%	-0.480%
Glissement	0.433%	-7.527%	0.924%	-4.956%
<b>Méthode EM</b>				
Réaction	-0.030%	-2.132%	4.161%	-194.857%
Flèche	-1.076%	-2.951%	-0.045%	-0.853%
Glissement	1.484%	-13.248%	9.013%	-9.186%
<b>Méthode MS</b>				
Réaction	0.068%	1.003%	-9.420%	148.268%
Flèche	1.522%	1.991%	0.102%	0.396%
Glissement	-1.875%	6.113%	-20.117%	5.400%

Tableau 3.2 – Écart relatifs des différentes méthodes par rapport à la méthode générale

est pris en compte. La méthode MS surestime la flèche tandis que la méthode EM la sous-estime. L'évolution du glissement à l'extrémité gauche de la poutre est donnée aux figures 3.29 et 3.30 pour les deux cas d'action. On observe qu'en l'absence de retrait et pour les deux cas, le glissement décroît au cours du temps. Ainsi on peut conclure que le glissement diminue avec la diminution du module de Young de béton puisque le fluage a tendance à diminuer ce module. En l'absence de retrait, les trois méthodes pas-à-pas, "rate-type" et AAEM fournissent des résultats très proches. La méthode EM surestime le glissement tandis que la méthode MS le sous-estime. Lorsque le retrait est pris en compte, on observe une inversion du signe du glissement, et ce pour les deux cas d'action. Cela montre que la déformation de retrait influence considérablement le glissement. En présence du retrait, la méthode AAEM sous-estime l'amplitude du glissement, la méthode EM le sous-estime et la méthode MS le sur-estime.

Au vu des résultats, il apparaît clairement que les méthodes pas-à-pas et "rate-type" sont

équivalentes. Pourtant, leurs applications sont assez complexes. La méthode AAEM est précise en l'absence de retrait mais l'est moins lorsque le retrait est pris en compte. Les méthodes EM et MS ont tendance à sous-estimer ou surestimer les grandeurs mécaniques selon le cas d'action que l'on considère. La méthode AAEM est moins complexe que les méthodes pas-à-pas et "rate-type mais plus complexe que les méthodes EM et MS puisqu'elle nécessite la connaissance de la fonction de relaxation. On peut considérer d'un point de vue pratique que la méthode EM donne des résultats relativement acceptables. C'est la méthode la plus simple à utiliser. Cette méthode est recommandée dans le principal code technique de calcul pour l'analyse du fluage des poutres mixtes [61]. Par ailleurs, le retrait semble jouer un rôle important et est analysé plus particulièrement dans le paragraphe suivant.

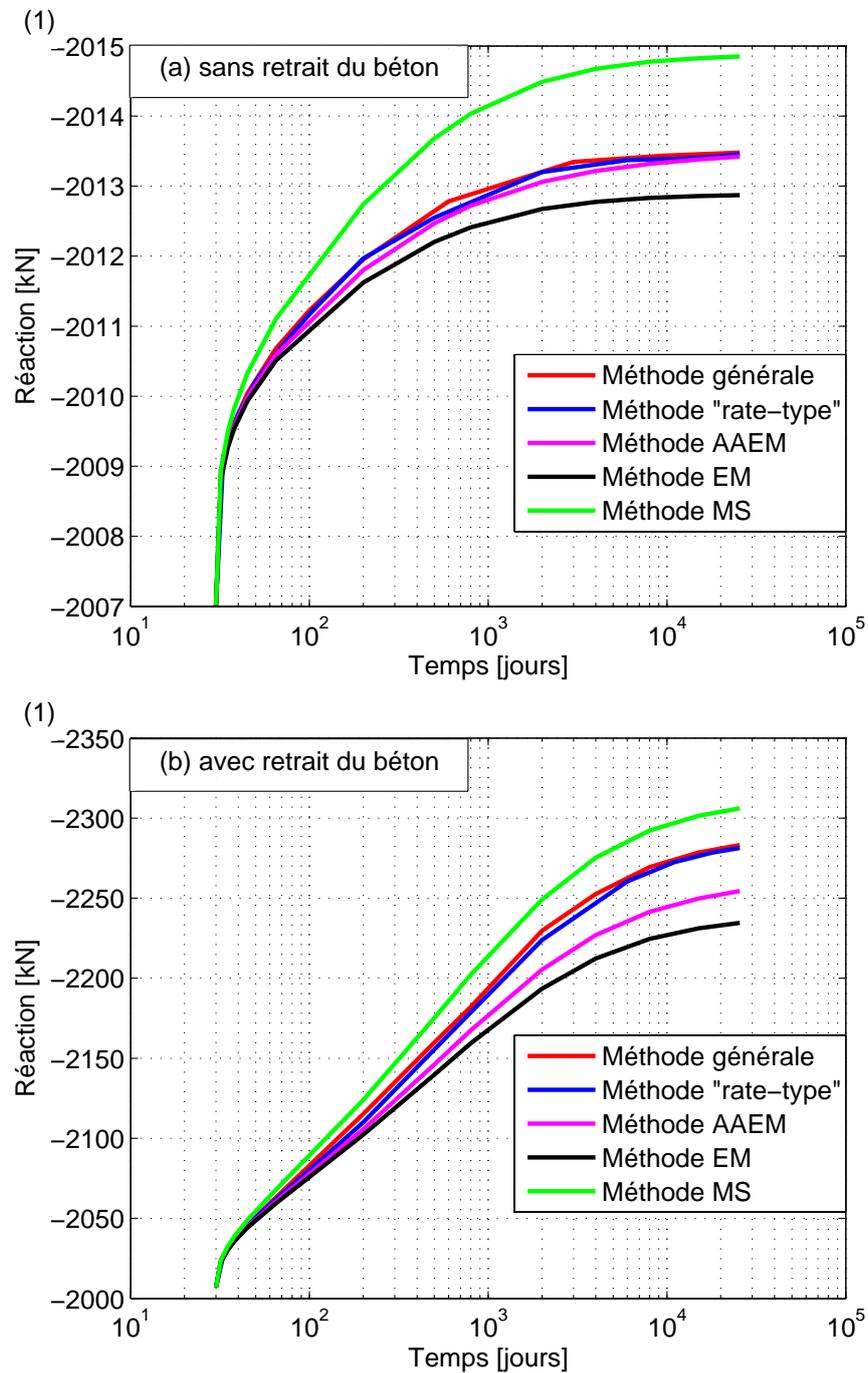


Figure 3.25 – Cas d'action 1 : Évolution de la réaction d'appui intermédiaire calculée par les différentes méthodes : (a) sans retrait ; (b) avec retrait

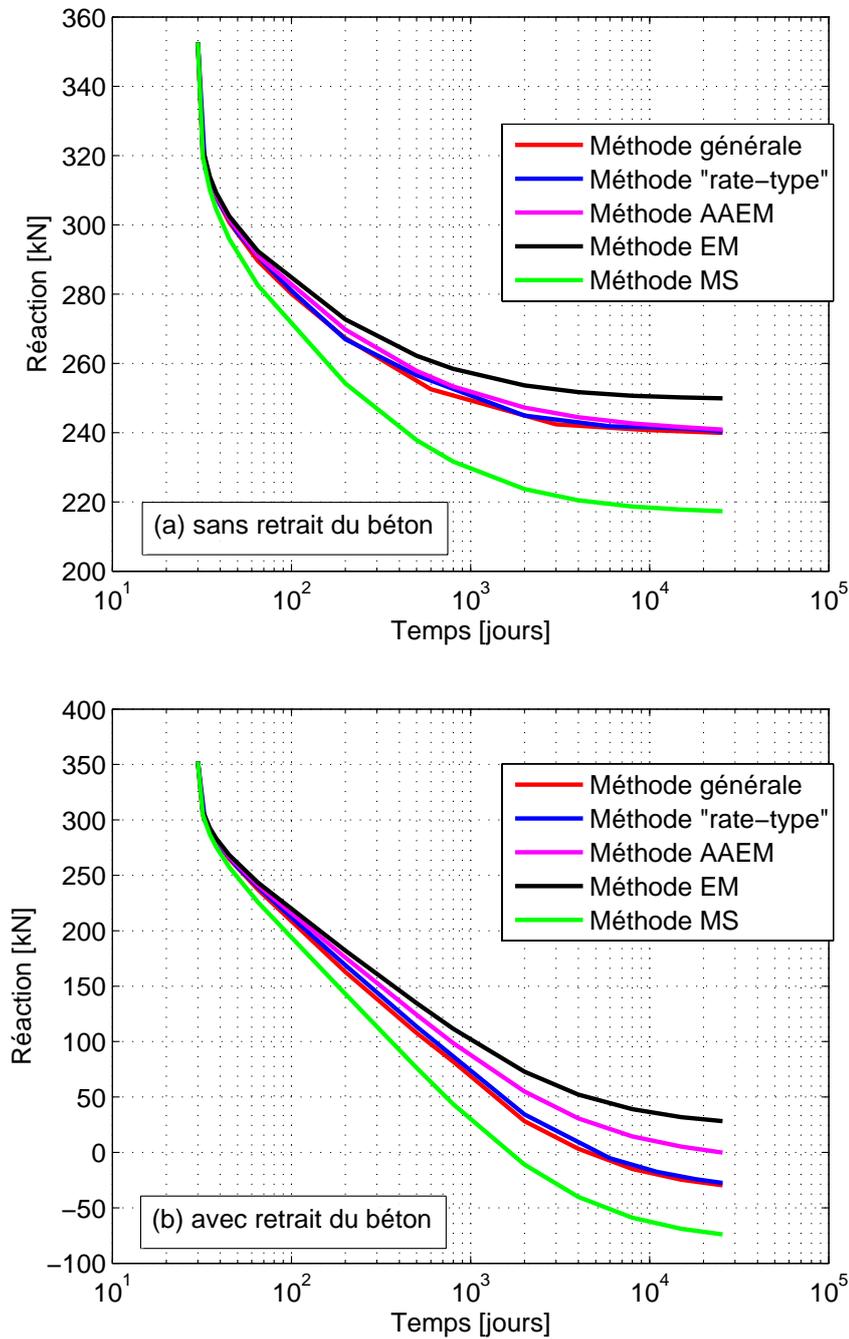


Figure 3.26 – Cas d'action 2 : Évolution de la réaction d'appui intermédiaire calculée par les différentes méthodes : (a) sans retrait ; (b) avec retrait

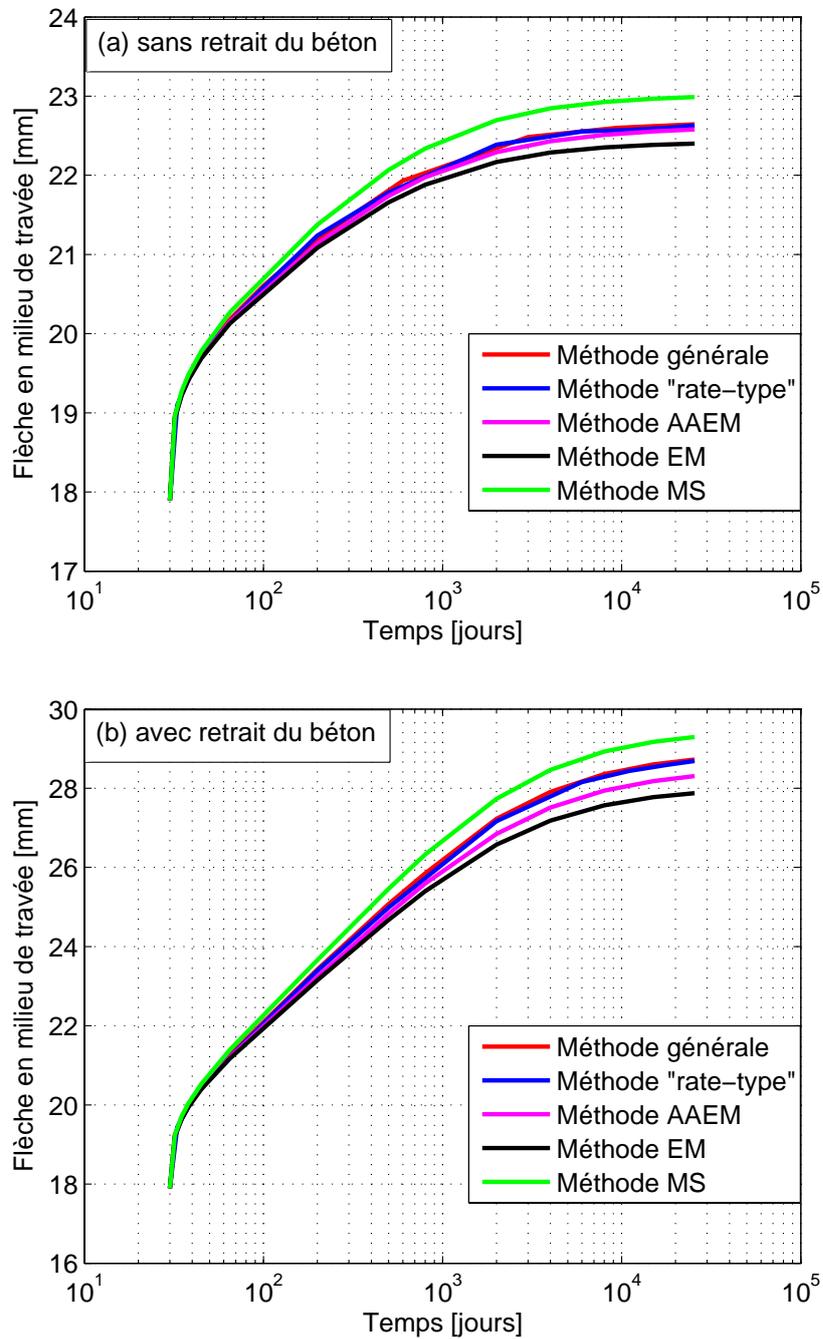


Figure 3.27 – Cas d'action 1 : Évolution de la flèche au milieu de travée calculée par les différentes méthodes : (a) sans retrait ; (b) avec retrait

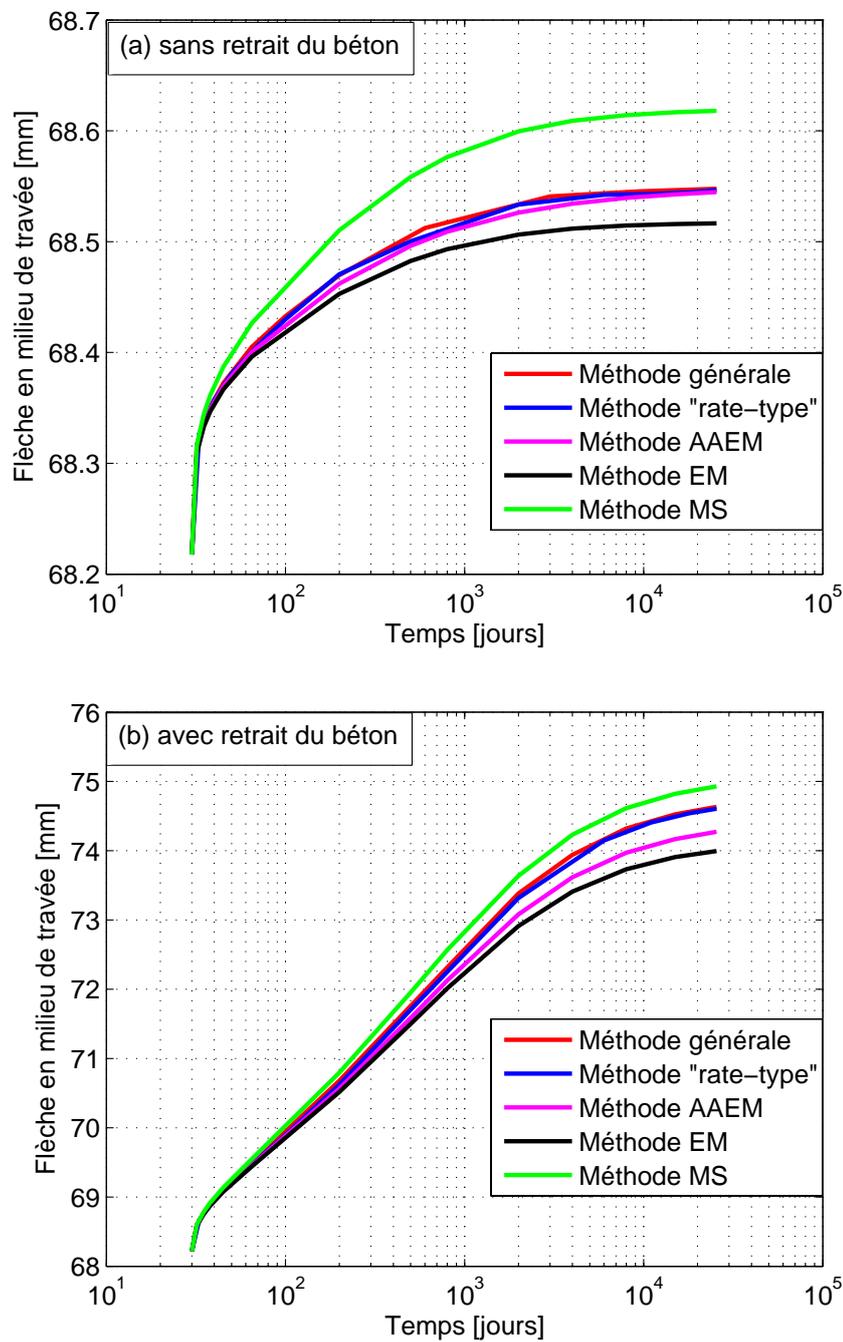


Figure 3.28 – Cas d'action 2 : Évolution de la flèche au milieu de travée calculée par les différentes méthodes : (a) sans retrait ; (b) avec retrait

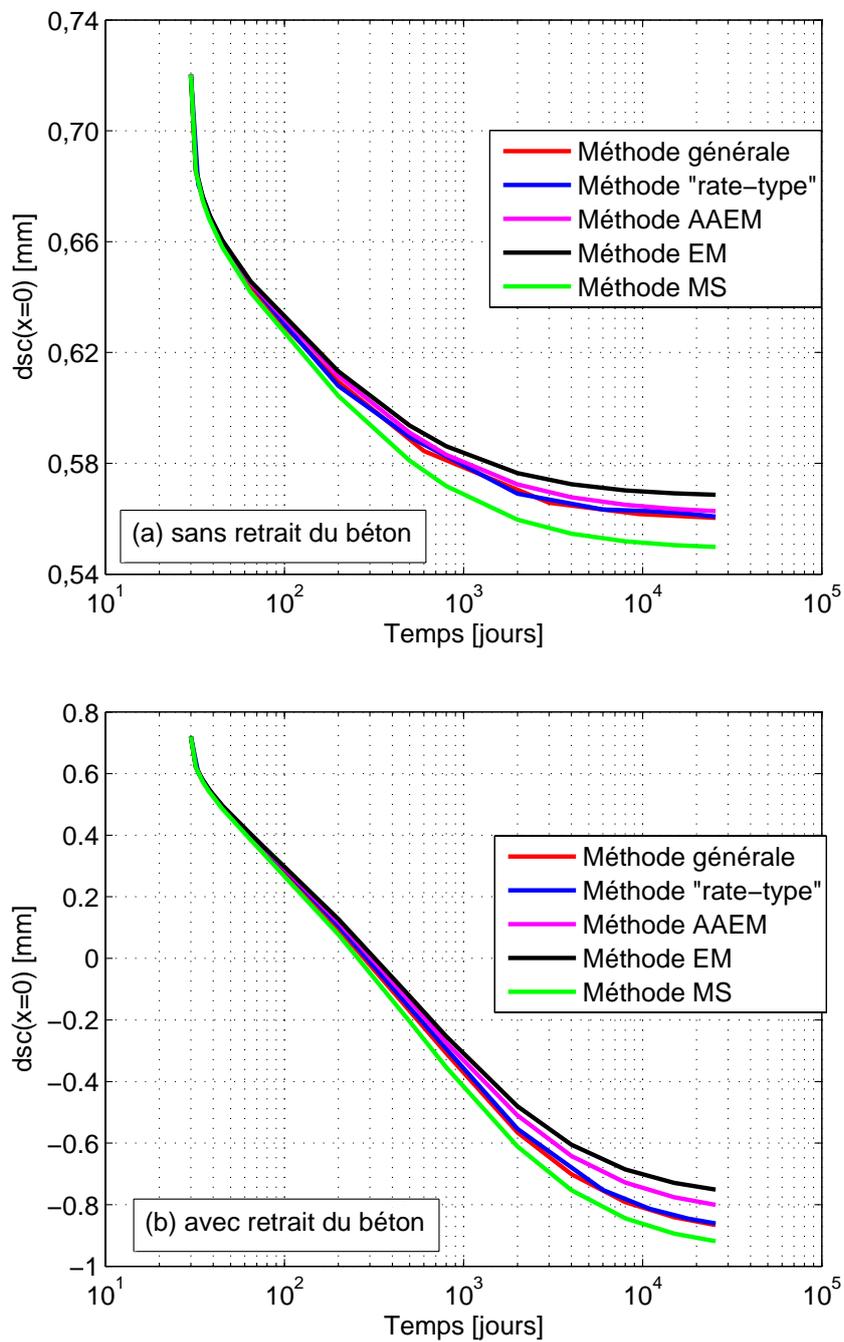


Figure 3.29 – Cas d'action 1 : Évolution du glissement à l'appui gauche calculée par les différentes méthodes : (a) sans retrait ; (b) avec retrait

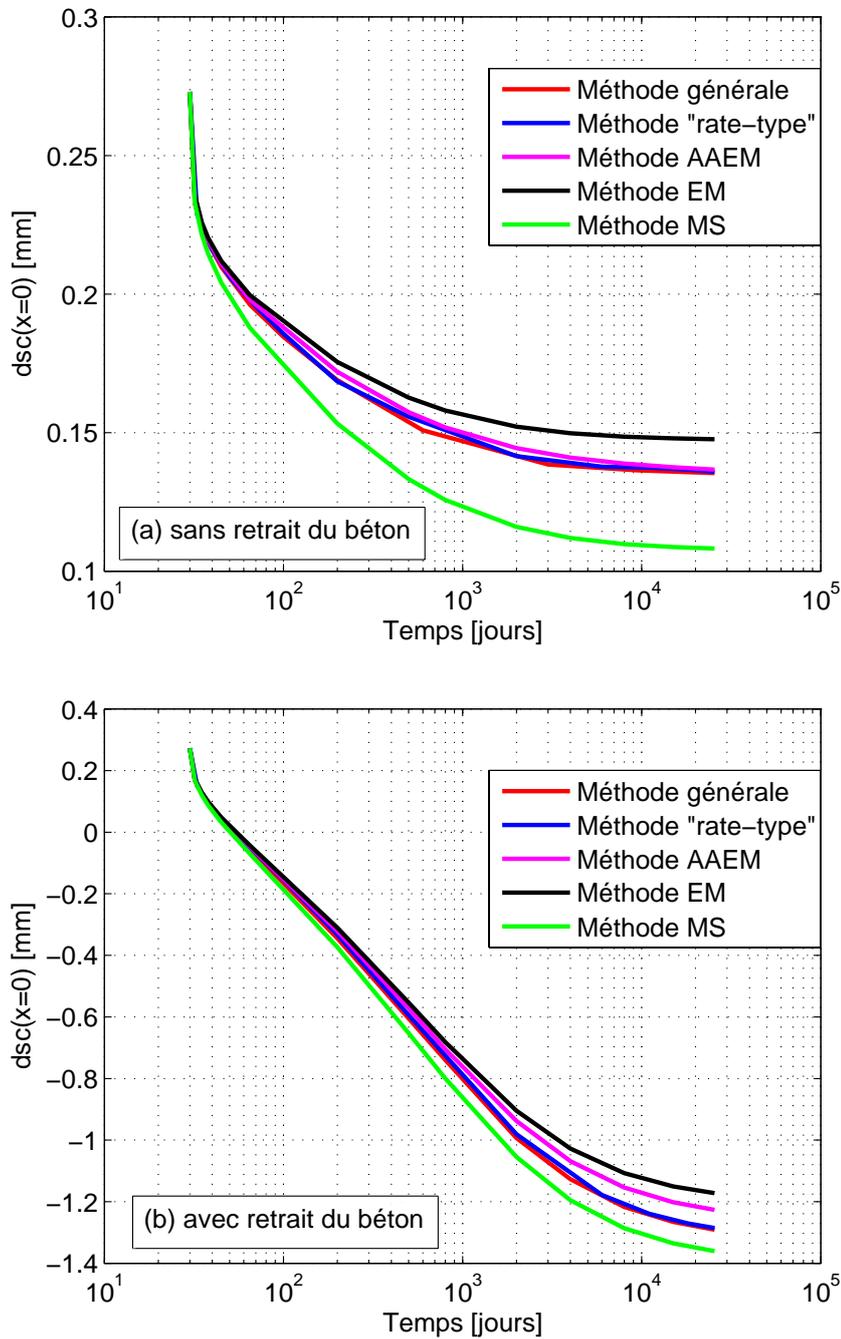


Figure 3.30 – Cas d’action 2 : Évolution du glissement à l’appui gauche calculée par les différentes méthodes : (a) sans retrait ; (b) avec retrait

### 3.5.5 Effets du fluage et du retrait

Physiquement, le mécanisme de fluage a tendance à modifier le béton de la dalle en diminuant son module de YOUNG. C'est la raison pour laquelle on observe à la figure 3.31 que le fluage seul augmente la flèche de la poutre (27.3%). Cette augmentation est accentuée si le retrait est pris en compte (39.3%). Cela peut être expliqué par le fait que le retrait a tendance à réduire la longueur de la dalle ce qui provoque une flexion positive se traduisant également par une redistribution singulière de l'effort normal dans la dalle à la figure 3.32. Il est à noter que la déformation de retrait au temps infini est de  $6 \times 10^{-4}$ , ce qui est assez important et explique une telle augmentation de la flèche. La distribution du déplacement axial de la dalle le long de la poutre est illustrée à la figure 3.33. On y observe que le déplacement axial à l'extrémité de la poutre augmente considérablement lorsque le retrait est pris en compte. La distribution du glissement le long de la poutre est donnée figure 3.34. On y observe que le fluage a tendance à diminuer le glissement aux appuis mais qu'il l'amplifie en travée, l'allure générale étant conservée. En revanche, comme on peut l'observer sur la figure 3.34, le retrait modifie significativement l'allure de la distribution précédente du glissement vers les extrémités de la poutre. La figure 3.35 représente la distribution de moment fléchissant. On observe que sans le retrait, il n'y a quasiment pas de redistribution de moment fléchissant tandis qu'avec le retrait, on a une redistribution remarquable avec une augmentation de 70.3% du moment fléchissant à l'appui intermédiaire.

La tableau 3.3 présente les écarts des grandeurs entre 30 et 25550 jours ainsi que les

	<b>Fluage seul</b>	<b>Fluage + Retrait</b>
$\Delta v(x=10 \text{ m})$	5.0 mm (27.3%)	11.8 mm (39.3%)
$\Delta d_{sc}(x=50 \text{ m})$	0.2 mm (-22.2%)	1.6 mm (-220.3%)
$\Delta u_c(x=50 \text{ m})$	-1.9 mm (-322%)	14.7 mm (-2496.7%)
$\Delta M(x=10 \text{ m})$	-32 kN·m (-1.1%)	-1381 kN·m (-48.0%)
$\Delta M(x=25 \text{ m})$	-80 kN·m (1.6%)	-3452 kN·m (70.3%)
$\Delta N_c(x=20 \text{ m})$	-315 kN (-17.1%)	-5215 kN (-282.5%)

Tableau 3.3 – Effets du fluage et du retrait

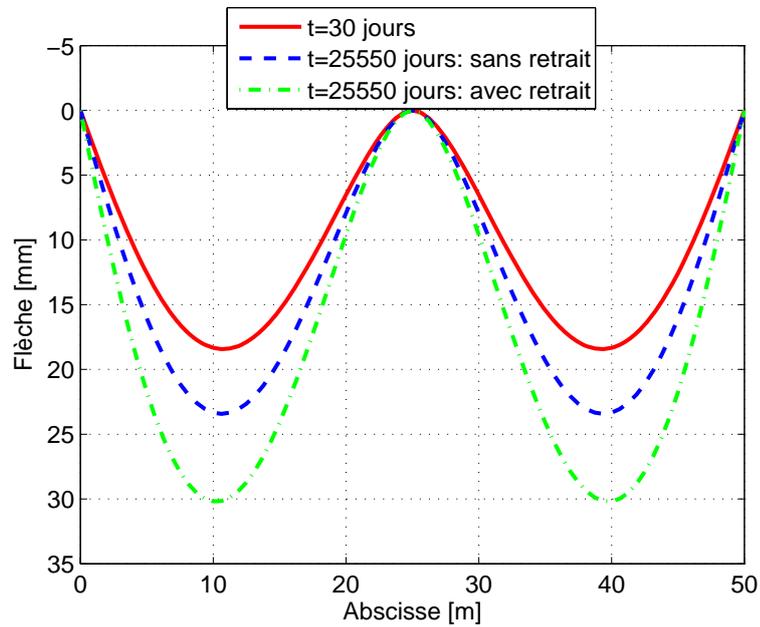


Figure 3.31 – Distribution de la flèche le long de la poutre

écarts relatifs sous les effets du fluage et du retrait. On y observe que le retrait joue un rôle très important. Mais on ne doit pas perdre de vue que le retrait peut provoquer des fissures dans le béton, ce qui implique un comportement non-linéaire que la présente méthode n'est pas capable de prendre en compte. La modélisation des effets du temps avec le comportement en fissuration sera l'objet du chapitre 6.

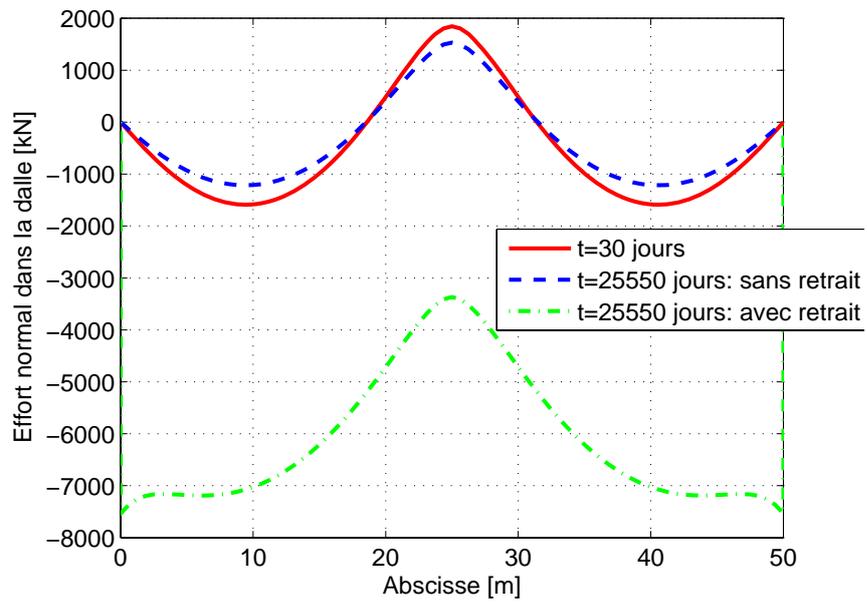


Figure 3.32 – Distribution de l'effort normal dans la dalle le long de la poutre

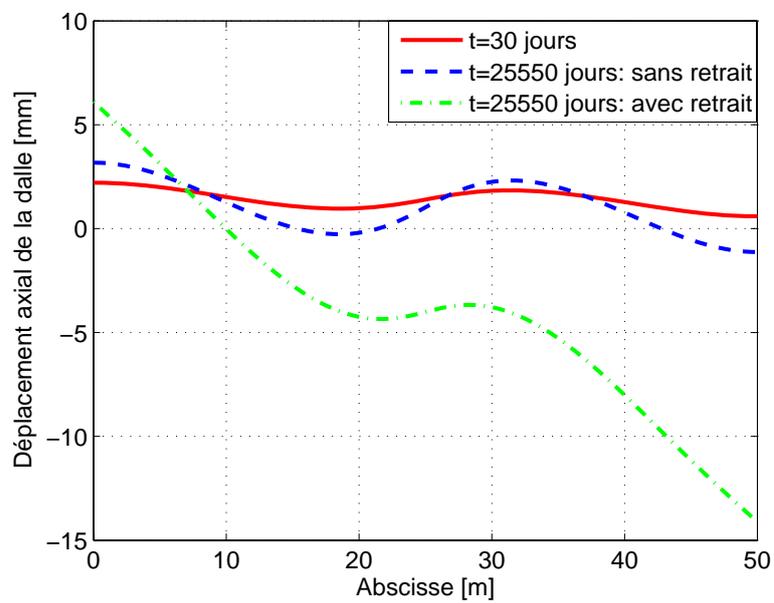


Figure 3.33 – Distribution du déplacement axial dans la dalle le long de la poutre

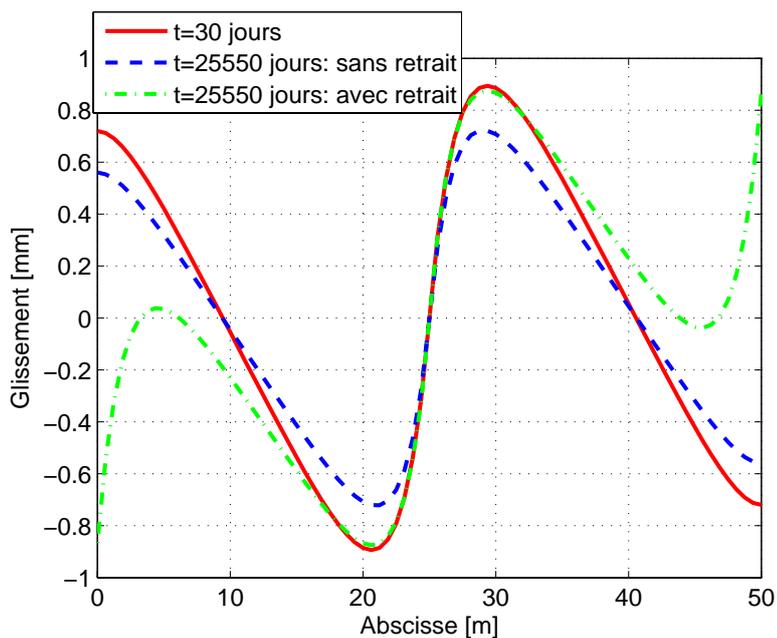


Figure 3.34 – Distribution du glissement le long de la poutre

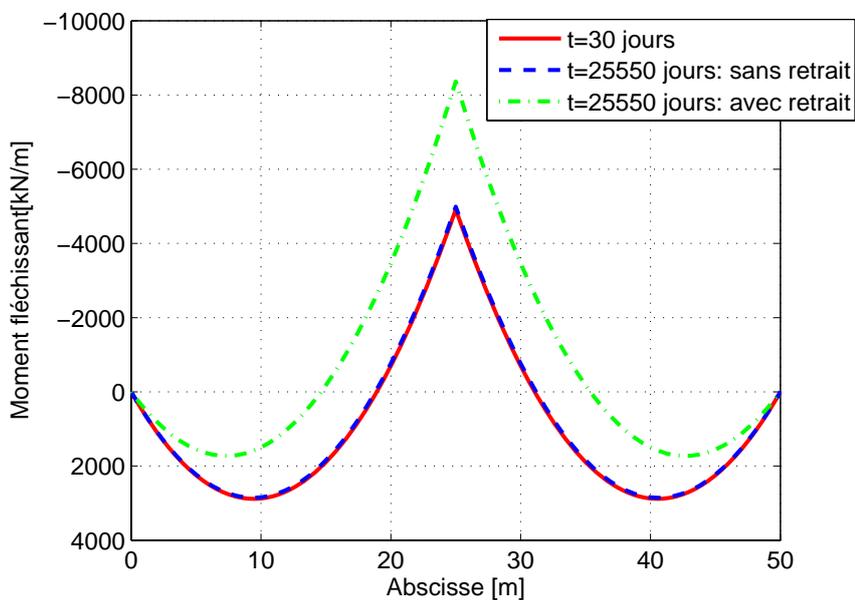


Figure 3.35 – Distribution du moment fléchissant total le long de la poutre

### 3.6 Conclusions

Au cours de ce chapitre, nous avons développé une solution semi-analytique originale relative au comportement viscoélastique linéaire des poutres mixtes avec prise en compte du retrait et du vieillissement du béton. Cette solution a été établie pour les deux modèles de connexion. Elle s'obtient en résolvant analytiquement un système d'équations différentielles qui correspond aux équations d'équilibre exprimées en fonction des déplacements. Ce système d'équations s'obtient donc en combinant les équations d'équilibre, de compatibilité et la loi de comportement viscoélastique discrétisée. Ainsi cette solution, exacte en espace, est approchée en temps. Néanmoins, l'usage d'un schéma trapézoïdale permet de d'obtenir une solution avec une précision suffisante. De cette solution semi-analytique, nous avons construit un élément fini avec matrice de raideur exacte pour la version discrétisée du comportement. Cet élément a été intégré dans un programme d'éléments finis classique qui nous avons ensuite utilisé pour analyser des poutres mixtes continues. Encore une fois, le caractère exact de la matrice de raideur conduit à une réduction importante du nombre d'éléments nécessaire. Nous avons ensuite confronté nos résultats avec ceux d'autres auteurs ayant utilisé d'autres méthodes de résolution et nous avons observé un bon accord.

Une étude comparative des deux modèles de connexion a été présentée et nous avons pu conclure que malgré la complexité induite par le modèle de connexion continue, il reste avantageux par rapport au modèle de connexion discrète car il permet une réduction significative du nombre d'éléments.

La méthode pas-à-pas générale fournit un résultat avec une précision satisfaisante mais elle nécessite de stocker toute l'histoire de sollicitation, ce qui peut conduire à un temps de calcul élevé notamment pour les structures de taille importante. La méthode "rate-type" de BAŽANT présente l'avantage d'éviter un stockage de toute l'histoire des contraintes puisque cette dernière est caractérisée par les valeurs actuelles des variables internes. En revanche la mise en oeuvre de la méthode rate-type se heurte au problème délicat de l'identification des paramètres de la fonction de fluage. Les méthodes algébriques (AAEM, EM et MS) présentent un avantage au niveau du temps de calcul et de la mise en oeuvre, facilitée par la forme simplifiée de la relation de comportement discrète (un seul pas).

Parmi ces trois méthodes, la méthode AAEM conduit aux meilleurs résultats qui dans certains cas peuvent être proches de ceux issus de la méthode générale pas-à-pas.

L'étude comparative de l'effet de fluage et retrait sur le comportement nous permet de conclure que le retrait joue un rôle très important sur le comportement de poutres mixte. Le retrait conduit à une augmentation des flèches et à une redistribution significative des efforts internes dans les poutres hyperstatiques. Également, le retrait peut provoquer des fissures dans le béton et nous conduire dans le domaine nonlinéaire du comportement du béton, qui est l'objet du chapitre suivant. L'interaction entre le fluage et la fissuration est abordé au chapitre 6.

## CHAPITRE 4

### MODÉLISATION DU COMPORTEMENT MATÉRIEL

#### 4.1 Introduction

Les poutres mixtes sont constituées de deux matériaux, l'acier et le béton, dont il convient de modéliser le comportement mécanique afin de pouvoir analyser le comportement des poutres mixtes jusqu'à la charge ultime. Dans une approche par éléments finis à fibres, un ingrédient essentiel est la relation contrainte/déformation en uniaxial. Ainsi, la majorité des modèles sont décrits à l'aide de relations explicites exprimant la contrainte en fonction de la déformation. Cette approche a l'avantage d'être intuitive mais peut conduire à des complications d'ordre algorithmique. À partir de cette écriture "ingénieur" des modèles, il est possible de formuler ces modèles dans le cadre mécaniquement rigoureux de l'approche par variables internes. L'avantage principal est que ce formalisme permet une intégration numérique cohérente du comportement et conduit à des algorithmes efficaces. Toutefois, soulignons que si le chargement n'est pas cyclique, il est possible d'éviter cette reformulation qui, dans le cas du béton, peut conduire à des fonctions d'écrouissage complexes.

Dans ce chapitre, nous décrivons brièvement les aspects phénoménologiques les plus marquants du comportement de l'acier et du béton et présentons les modèles correspondants. La modélisation de l'acier ne pose aucun souci spécifique car son comportement mécanique est bien décrit par les modèles classiques de l'élastoplasticité. Par contre, la modélisation du béton est moins évidente car ce matériau a un comportement qui diffère en traction et en compression (anisotropie) et qui exhibe un radoucissement compliquant ainsi la mise en oeuvre numérique. Pour le béton, le modèle CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1] a été retenu pour le comportement en charge. Un modèle de plasticité couplé à l'endommagement a été développé. L'endommagement permet de modéliser la dégradation de la raideur. Ce nouveau modèle permet de reproduire exactement la courbe enveloppe contrainte/déformation en compression du modèle CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1]. La procédure d'identification, qui est décrite, conduit à des courbes d'écrouissage complexes. Par ailleurs, lorsque le béton est associé à une armature, le phénomène de "tension-stiffening" apparaît dans la zone tendue. La modélisation de ce phénomène, par ailleurs important, est donnée. A

ces aspects, on doit ajouter une description des modèles de comportement des goujons.

## 4.2 Acier : Aspects expérimentaux du comportement

L'acier est un matériau cristallin, dont la structure présente des défauts de type dislocation. Sans mouvement de ces défauts, les déformations de la structure cristalline correspondent à des déformations réversibles, dites élastiques. Les mouvements des dislocations induisent des déformations irréversibles, dites plastiques [79].

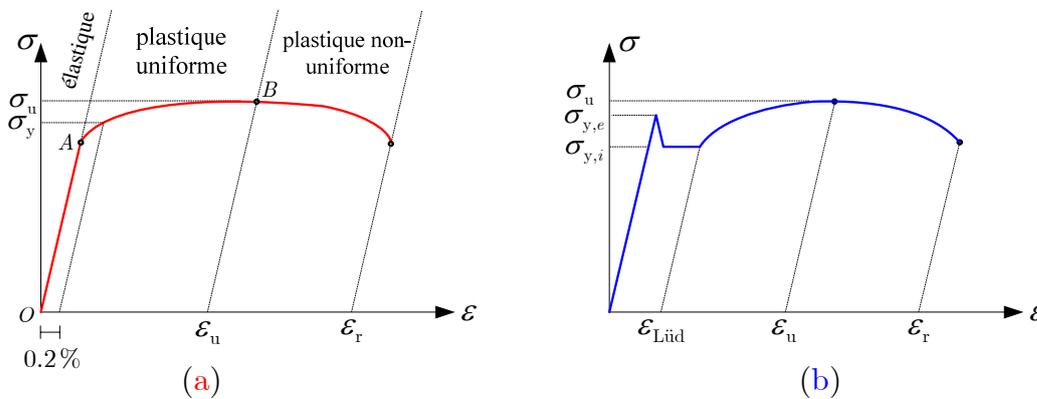


Figure 4.1 – Courbe contrainte/déformation : (a) acier dur ; (b) acier doux

Les propriétés mécaniques de l'acier sont déterminées par des procédures normalisées d'essais de traction d'éprouvettes normalisées. On considère une éprouvette que l'on soumet à un chargement monotone en augmentant progressivement la contrainte  $\sigma$  ou la déformation  $\epsilon$  (essai à déformation imposée) et on mesure la déformation qui en résulte (ou la contrainte). Cet essai met en évidence un domaine à l'intérieur duquel le comportement est linéaire et à l'extérieur duquel il devient non-linéaire. Selon les aciers, on observe un durcissement plus ou moins prononcé qui correspond au cas d'une courbe  $(\sigma, \epsilon)$  croissante. Au cours de cette phase on observe un allongement plastique uniforme. Au-delà d'une valeur de la déformation  $\epsilon_u$ , on note un radoucissement et donc une courbe  $(\sigma, \epsilon)$  décroissante au cours de laquelle se développe des déformation plastiques non uniformes (localisation). Cette partie de la courbe ne peut s'obtenir que si l'essai est piloté en déformation. Un aspect essentiel est la plus ou moins grande ductilité de l'acier qui se caractérise par sa

capacité plus ou moins grande à se déformer sans atteindre la rupture. Pour un acier doux, on observe que sitôt après la perte de linéarité, la courbe  $(\sigma, \varepsilon)$  présente un plateau avant de se redresser pour des déformations plus importante. La figure 4.1 montre des courbes contrainte-déformation pour deux types d'acier (dur et doux).

Après décharge complète, il subsiste une déformation résiduelle permanente qui correspond à la déformation plastique. Comme indiqué la figure 4.2, la déformation au point B se décompose donc une partie élastique réversible et une partie plastique qui subsiste après décharge. Lorsque l'on effectue une décharge de B à C et que l'on recharge à partir de C, on observe pour la plupart des métaux que la charge se fait à nouveau le long du trajet BC et de façon élastique (le trajet est donc réversible). Ainsi, la limite d'élasticité pour une charge à partir de l'état C est  $\sigma_B$ . Si la limite d'élasticité est fixe ( $\sigma_B = \sigma_y$  pour tout B), on dit le matériau est parfaitement plastique. Si la limite d'élasticité varie ( $\sigma_B \neq \sigma_y$ ), on dit que le matériau est écrouissable. Lorsque l'on soumet une éprouvette à un essai de traction suivi d'un essai de compression, on constate que la traction préalable a écroui le matériau dans le sens de la traction (augmentation de la limite d'élasticité) mais l'a adouci dans le sens de la compression. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet BAUSCHINGER [92]. La figure 4.2 montre que la limite d'élasticité actuelle en compression est plus faible que la limite d'élasticité en compression initiale.

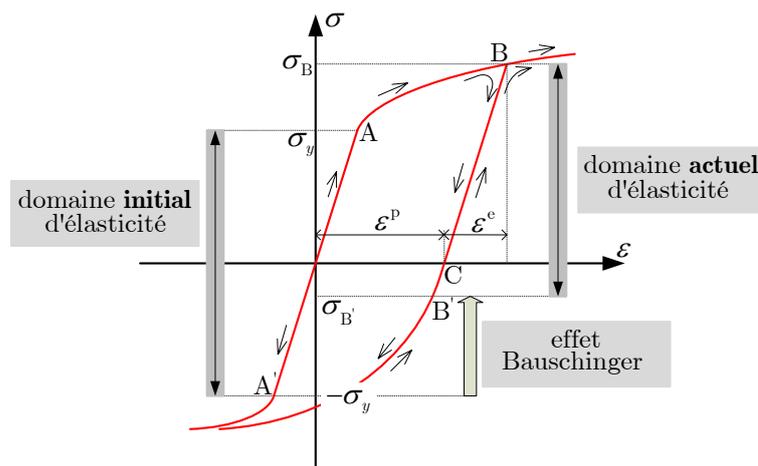


Figure 4.2 – Effet de BAUSCHINGER

### 4.3 Modèles de comportement de l'acier

Dans un contexte d'éléments à fibres, le comportement mécanique d'un matériau est décrit par une loi uniaxiale qui relie explicitement la contrainte et la déformation totale. Une première approche, satisfaisante pour un chargement monotone, consiste à décrire le comportement mécanique de l'acier à l'aide d'une ou plusieurs relations explicites qui correspondent aux phases observées expérimentalement. Schématiquement, les modèles les plus fréquents sont les modèles multi-linéaires et les modèles qui comportent à la fois une partie linéaire et une partie parabolique (voir figure 4.3). Ainsi, il ne semble a priori pas nécessaire de recourir à la théorie de la plasticité, comme on le ferait dans une situation tridimensionnelle tout à fait générale. En se souvenant que pour un état de contrainte uniaxial, les modèles élastoplastiques de l'acier les plus courants peuvent être intégrés exactement, on observe le parallèle qui existe entre les deux écritures. Pour des chargement cycliques avec inversement du signe de la contrainte, il est avantageux d'utiliser le cadre rigoureux de la plasticité.

#### 4.3.1 Modèles mécaniques explicite pour l'acier

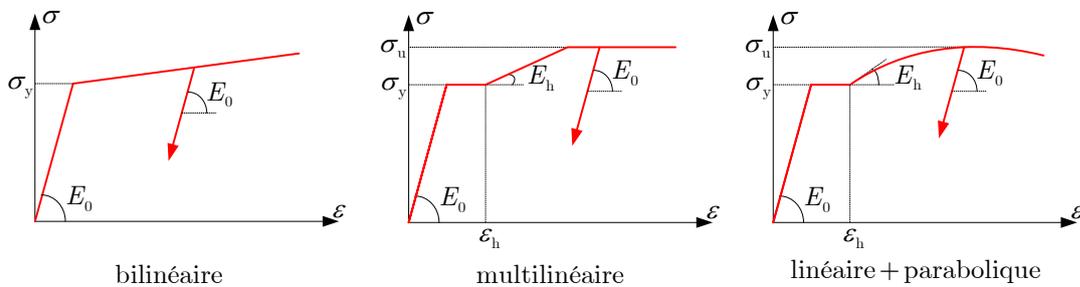


Figure 4.3 – Modèles mécaniques explicites de l'acier.

Ce sont des modèles qui sont destinés au cas unidimensionnel. A partir des essais traction-compression unidimensionnels ou la résolution analytique de l'équation d'évolution (en 1D) associée au modèle élastoplastique, on déduit une relation explicite entre la contrainte et le déformation totale. Ce type de modèle est souvent utilisé pour analyser le comportement des structures sous charges statiques monotones à cause de sa simplicité. Par contre, il devient assez complexe à mettre en oeuvre pour les chargements cycliques. En pratique,

pour une analyse sous chargement statique monotone, il est courant d'adopter les modèles explicites simples représentés à la figure 4.3.

Pour une analyse sous chargement cyclique, il existe des modèles explicites avec réactualisation des coefficients caractéristiques qui sont capables de restituer les effets d'érouissage linéaires, comme par exemple le modèle de MENEGOTTO-PINTO [100].

#### 4.3.1.1 Modèle multi-linéaire

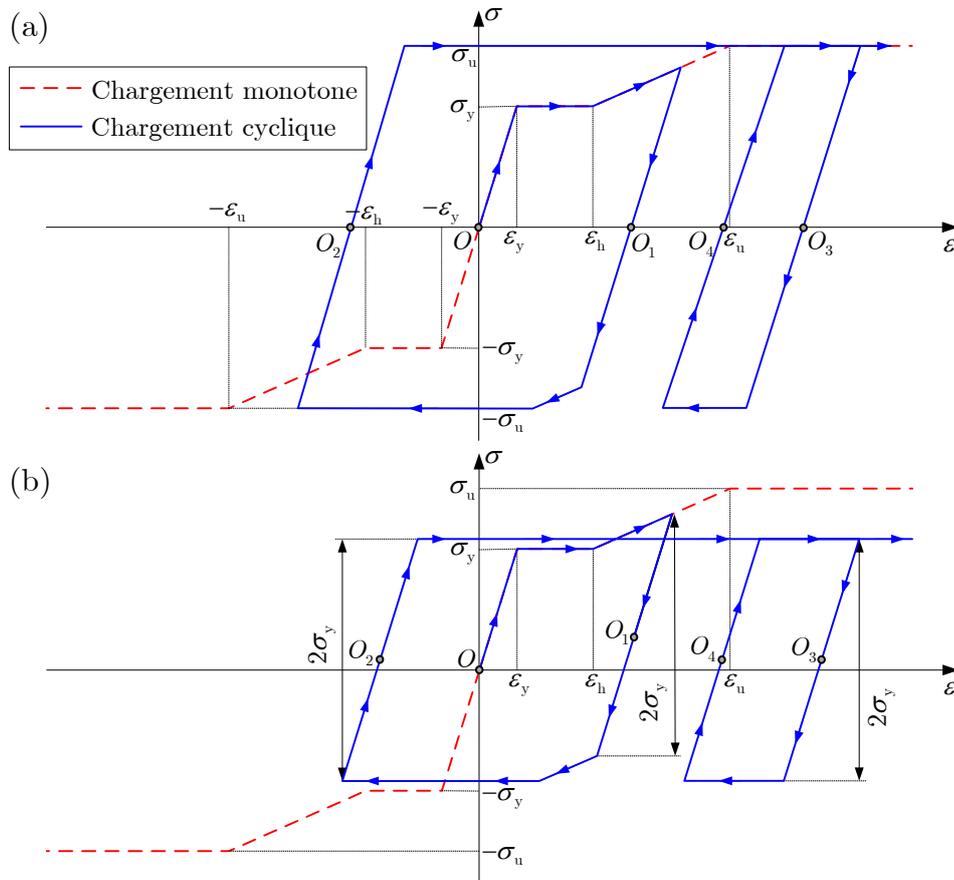


Figure 4.4 – Modèle multi-linéaire : (a) érouissage isotrope ; (b) érouissage cinématique

Dans l'analyse des structures, le modèle multi-linéaire est souvent utilisé pour représenter le comportement mécanique de l'acier. La relation contrainte-déformation est linéaire par morceaux après la présence de plateaux. Un point essentiel est la décharge qui peut se produire en tout point de la structure et dont il convient de prendre compte dans l'algorithme

de calcul. Pour définir de manière précise le chemin de contrainte, il est important de choisir le type d'écrouissage. La figure 4.4a représente un modèle bi-linéaire avec écrouissage isotrope avec plusieurs chemins de chargement. Ainsi, à partir de la donnée d'un incrément de déformation et de la contrainte initiale, il est possible de calculer la contrainte finale. De même, le modèle bi-linéaire avec écrouissage cinématique est représenté à la figure 4.4b. C'est ce modèle qui sera utilisé dans les applications numériques aux chapitres 5.

### 4.3.1.2 Modèle de Menegotto-Pinto

Le chargement monotone initial suit une loi bilinéaire. En cas de décharge après plastification, le comportement est initialement asymptotique à la droite de décharge élastique, avant de s'en écarter pour devenir asymptotique à la droite d'écrouissage. La courbure de la transition entre les deux droites augmente en fonction de la déformation plastique atteinte lors du cycle précédent (Fig. 4.5). La relation contrainte-déformation est définie par la relation suivante :

$$\bar{\sigma} = b\bar{\varepsilon} + \frac{(1-b)\bar{\varepsilon}}{(1+\bar{\varepsilon}^R)^{1/R}} \quad (4.1)$$

où :

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r} \quad (4.2)$$

et

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \quad (4.3)$$

avec :

- $\sigma_r$  et  $\varepsilon_r$  la contrainte et la déformation au dernier changement de signe de la variation de la déformation ;
- $\sigma_0$  et  $\varepsilon_0$  la contrainte et la déformation de la limite élastique (fictive) courante ;
- $b$  le rapport du module d'écrouissage au module élastique ;
- $R$  un paramètre définissant la forme de la loi de comportement et dépendant de la déformation plastique dans le demi-cycle précédent, c'est-à-dire entre changements de signe de la variation de la déformation. L'expression de  $R$  proposée par MENEGOTTO et PINTO [100] est :

$$R = R_0 - \frac{a_1 \xi}{a_2 + \xi} \quad (4.4)$$

où  $R_0 = 20$ ,  $a_1 = 18.5$  et  $a_2 = 0.35$  sont des paramètres du modèle et le paramètre  $\xi$  est mis à jour à chaque changement de signe de la variation de déformation :

$$\xi = \frac{\varepsilon_{r,i} - \varepsilon_{r,i-1} - \frac{\sigma_{r,i} - \sigma_{r,i-1}}{E_0}}{\varepsilon_{0,i} - \varepsilon_{r,i}} \quad (4.5)$$

où les indices  $i$  et  $i - 1$  désignent respectivement les valeurs au dernier et à l'avant dernier changement de signe de la variation de la déformation.

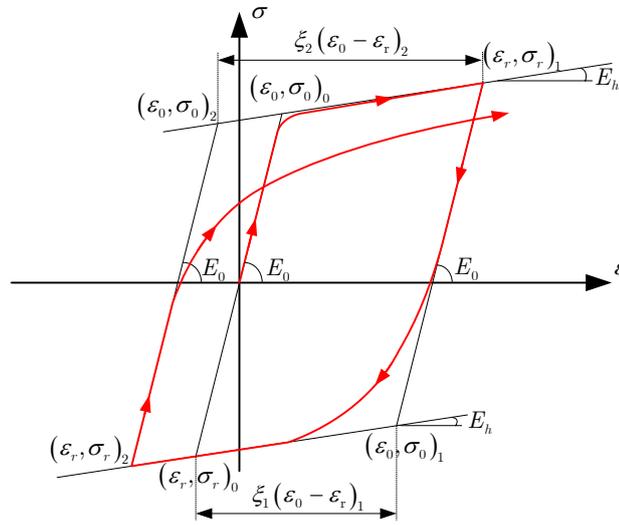


Figure 4.5 – Modèle de MENEGOTTO-PINTO [100]

Ce modèle a l'avantage de permettre d'intégrer un écrouissage isotrope en modifiant la limite d'élasticité à chaque changement de signe de la variation de contrainte. FILIPPOU et al [66] ont proposé la relation suivante :

$$\sigma_{0,\text{new}} = \sigma_{0,\text{ini}} a_3 \left( \frac{\varepsilon_{\text{max}}}{\varepsilon_{0,\text{ini}}} - a_4 \right) \quad (4.6)$$

où  $\varepsilon_{\text{max}}$  est la déformation maximale en valeur absolue lors du changement de signe de la variation de déformation.

Dans ce travail de thèse, tous les modèles explicites présentés précédemment sont programmés et intégrés dans notre propre programme.

### 4.3.2 Modélisation élastoplastique de l'acier

Les courbes monotones peuvent être remplacées par un modèle élastoplastique de manière assez aisée pour les chargements monotones. Il suffit pour cela d'adopter un type d'érouissage (isotrope et/ou cinématique) et d'identifier la fonction d'érouissage. Bien que cela ne soit pas nécessaire pour les modèles 1D en chargement monotone, il est préférable d'adopter le cadre général de la plasticité, en particulier si l'on souhaite décrire le comportement cyclique des matériaux. La formulation générale de ces modèles est écrite en 1D comme suit. Classiquement, on adopte une décomposition de la déformation totale  $\varepsilon$  en une partie élastique  $\varepsilon^e$  et une partie plastique  $\varepsilon^p$  :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (4.7)$$

Le contrainte est reliée à la déformation élastique par le module de Young :

$$\sigma = E^e (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (4.8)$$

Pour décrire l'évolution du domaine élastique, on introduit deux variables internes :  $p$  et  $\alpha$ . La variable interne  $p$  est associée à l'érouissage isotrope et la variable interne  $\alpha$  est associée à l'érouissage cinématique. A ces deux variables, on associe deux forces thermodynamiques conjuguées  $R$  et  $X$  de manière à ce que la puissance dissipée s'écrive :

$$\sigma \dot{\varepsilon}^p - X \dot{\alpha} - R \dot{p} \geq 0 \quad (4.9)$$

Le domaine élastique est défini par la surface de charge (expression générale) :

$$f(\sigma, R, X) = |\sigma - X| - (\sigma_y + R) \quad (4.10)$$

où  $\sigma_y$  est la taille initiale du domaine élastique. En adoptant le cadre général des Matériaux Standards Généralisés, l'évolution de la déformation plastique et des variables internes découle d'une règle de normalité généralisée dans laquelle la vitesse de déforma-

tion plastique  $\varepsilon^P$  et des variables internes  $-\dot{p}$  et  $-\dot{\alpha}$  s'obtiennent, comme le produit d'un scalaire positif proportionnel  $\dot{\lambda}$  donnant l'intensité et la dérivée du critère  $f(\sigma, X, R)$  par rapport à la force thermodynamique conjuguée qui donne le sens de l'évolution :

$$\varepsilon^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma - X) \quad (4.11)$$

$$-\dot{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} = -\dot{\lambda} \quad (4.12)$$

$$-\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial X} = -\dot{\lambda} \text{sign}(\sigma - X) \quad (4.13)$$

Le scalaire  $\dot{\lambda}$  est appelé le multiplicateur plastique. Il est nul en charge élastique ou en décharge élastique et il est strictement positif en charge plastique. Prenant en compte le critère de plasticité avec le caractère non-négatif du multiplicateur plastique, on obtient alors les conditions de complémentarité de KUHN-TUCKER pour déterminer  $\dot{\lambda}$  :

$$f(\sigma, R, X) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} f(\sigma, R, X) = 0 \quad (4.14)$$

On observe ainsi que  $\dot{\alpha} = \varepsilon^P$  et  $\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^P|$ . Ces deux relations traduisent les règles d'écrouissage cinématique et isotrope. Les forces thermodynamiques et les variables internes sont liées par les lois d'état :

$$X = C\alpha \quad (4.15)$$

$$R = R(p) \quad (4.16)$$

Le multiplicateur plastique s'obtient à partir de la condition de cohérence qui exprime le fait que le point correspondant à un état de charge ne peut quitter la surface de charge :

$$\dot{f}(\sigma, R, X) = 0 \quad (4.17)$$

On obtient alors

$$\dot{\lambda} = \frac{E^e \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\varepsilon}}{E^e \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial R} \right)^2 \frac{dR}{dp} + \left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)^2 \frac{dX}{d\alpha}} \quad (4.18)$$

Ainsi, lorsque l'expression de la surface de charge  $f(\sigma, R, X)$  est connue, l'évolution de la déformation plastique peut être déterminée. En combinant les équations (4.8), (4.11) et

(4.18), le taux de contrainte peut être relié à la vitesse de déformation totale comme :

$$\dot{\sigma} = E^{\text{ep}} \dot{\varepsilon} \quad (4.19)$$

où  $E^{\text{ep}}$  est le module élastoplastique dont l'expression est :

$$E^{\text{ep}} = E^e \left( 1 - \frac{E^e \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^2}{E^e \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial R} \right)^2 \frac{dR}{dp} + \left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)^2 \frac{dX}{d\alpha}} \right) \quad (4.20)$$

Le module élastoplastique tangent continu peut s'interpréter comme l'opérateur tangent obtenu à partir des relations discrétisées. Ceci n'est vrai que pour le cas unidimensionnel.

Bien qu'il ne soit pas strictement nécessaire d'adopter ce formalisme rigoureux lorsque l'on fait usage des modèles à fibres, l'identification des paramètres d'écroutissage  $C$  et  $R$  conduirait à des fonctions discontinues qui dépendent de l'état de déformation plastique.

#### 4.4 Béton : Aspects expérimentaux du comportement

Le béton est un matériau composite constitué d'une matrice de ciment et d'inclusions de granulats ou d'agrégats (sables, graviers). A l'hétérogénéité de la composition du béton vient s'ajouter celle dite structurelle et qui provient de l'existence de défauts initiaux (microfissures) entre l'interface des granulats et de la pâte de ciment qui constitue le lien le plus faible du matériau. De par sa nature hétérogène, le béton présente donc un comportement mécanique très complexe englobant un comportement fortement non linéaire sous un état de contraintes multiaxiales.

##### 4.4.1 Béton en compression

Considérons une éprouvette de béton comprimée par l'application d'une déformation imposée (Figure 4.6). Le comportement axial est non linéaire, et passe par un maximum.

En générale, jusqu'à plus ou moins 30% de la résistance en compression, noté  $f_{cm}$ , le comportement est linéaire. En suite, la non linéarité du comportement va croissant, jusqu'à

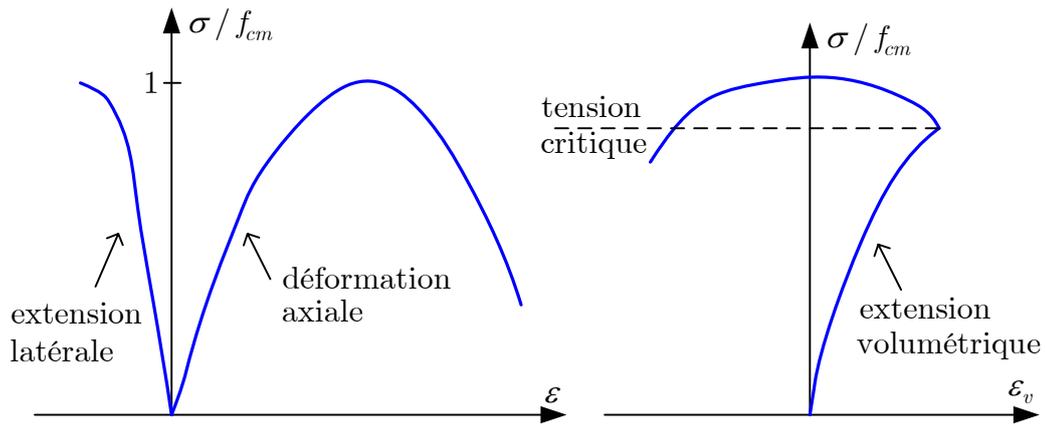
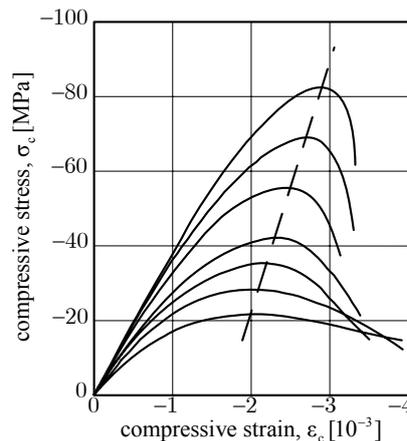


Figure 4.6 – Comportement en compression uniaxiale [79]

atteindre la contrainte maximale. Cette altération est due à l'apparition et la propagation des microfissures. Si la contrainte augmente encore, les déformations se concentrent et un mécanisme de ruine se met en place. La charge atteint son maximum et commence à décroître. Si des contraintes normales existent (en raison d'un frettage ou d'un confinement), le comportement post-pic est plus ductile et la descente qui fait suite à l'atteinte du maximum est moins brutale [53].

Figure 4.7 – Évolution du diagramme  $\sigma - \varepsilon$  en fonction de sa résistance [107]

L'allure du diagramme  $\sigma - \varepsilon$  change avec la résistance du béton (cf. Figure 4.7). Lorsque

celle-ci croît :

- le module initial et la déformation au pic augmentent,
- le comportement post-pic devient moins ductile.

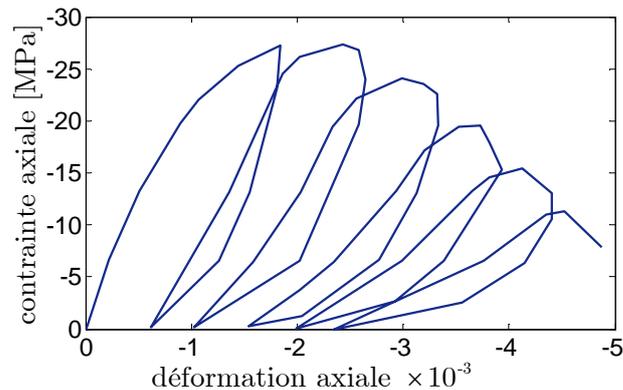


Figure 4.8 – Comportement du béton en compression sous charges cycliques [142]

Les décharges et recharges sont non linéaires, avec une raideur moyenne inférieure au module à l'origine. Cette raideur décroît avec la déformation maximale atteinte (cf. Figure 4.8).

### 4.4.2 Béton en traction

En traction uniaxial, la courbe  $\sigma - \varepsilon$  est différente de celle en compression. La résistance en traction du béton est beaucoup plus petite qu'en compression. C'est principalement dû à la résistance en traction de l'interface agrégat-mortier qui est bien plus faible que la résistance en traction de l'agrégat. Lorsqu'une éprouvette de béton est soumise à traction, elle a un comportement quasi linéaire jusqu'à la limite de fissuration (résistance en traction),  $f_{ctm}$ . Ensuite, si l'essai est effectué à déformation imposée, il apparaît une branche descendante non linéaire appelée "tension softening". La contrainte ne tombe pas directement à zéro, il faut maintenir un certain effort pour continuer à ouvrir la fissure.

Tout comme en compression, en cas de décharge, la rigidité est inférieure à la rigidité initiale et diminue lorsque la déformation maximale atteinte augmente (cf. Figure 4.9).

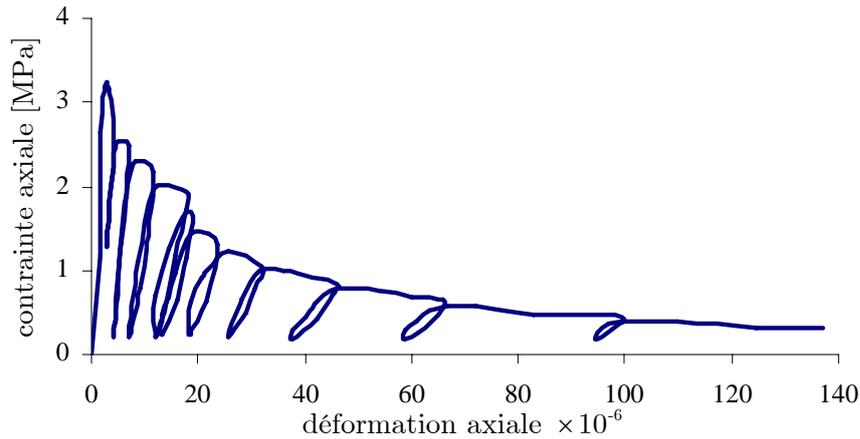


Figure 4.9 – Courbe contrainte-déformation du béton soumis à traction cyclique [118]

#### 4.5 Modèles de comportement du béton

Plusieurs modèles mécaniques ont été proposés pour décrire le comportement du béton. Les premiers modèles étaient basés sur des observations expérimentales directes. Ils étaient par nature incomplets. Les modèles actuels ont une base physique nettement plus sérieuse, et sont donc plus robustes. Cependant, ils font généralement l'hypothèse d'un comportement continu.

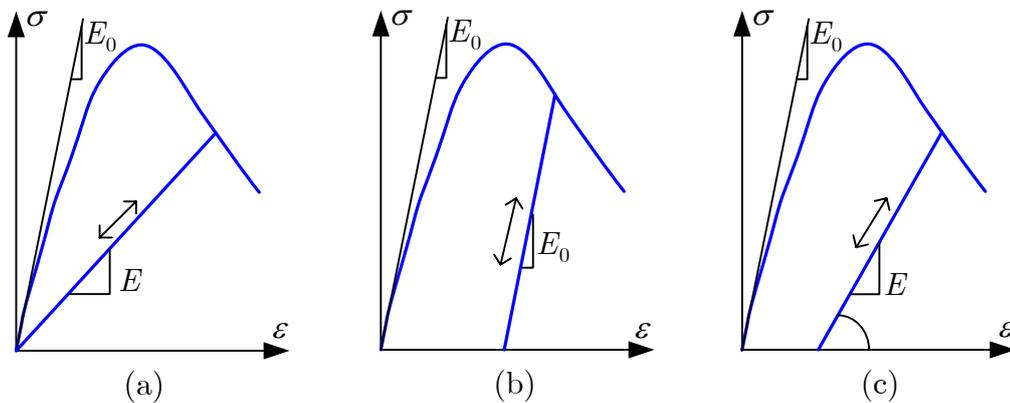


Figure 4.10 – Types de modèles utilisés pour le béton en compression : (a) endommagement pur ; (b) plasticité ; (c) couplage plasticité-endommagement [106]

Quatres formulations de base peuvent être distinguées :

- Les modèles basés sur une relation explicite entre les contraintes et les déformations.

Ils sont capables de restituer le comportement sous chargements croissants. Ils ont par contre plus de mal à reproduire le comportement en décharge et le comportement cyclique.

- Les modèles basés sur la théorie de la plasticité (cf. Figure 4.10b). Cette théorie permet de rendre compte des déformations résiduelles lors des décharges. Bien qu’initialement développée pour les matériaux cristallins comme les métaux, elle peut moyennant quelques adaptations être appliquée au béton.
- Les modèles basés sur la théorie de l’endommagement continu (cf. Figure 4.10a). Ces modèles simulent la dégradation progressive du matériau en diminuant la surface résistante. Les décharges se font selon des droites passant par l’origine.
- Les modèles basés sur le couplage plasticité-endommagement (cf. Figure 4.10c) qui permettent d’approcher le mieux les courbes expérimentales.

La modélisation élastoplastique du béton s’intègre dans le formalisme de la plasticité développé pour l’acier avec, comme différence essentielle, un critère de plasticité anisotrope pour distinguer la compression de la traction et des fonctions d’écrouissage (croissante/décroissante) pour décrire le durcissement et le radoucissement. Par ailleurs, le modèle élastoplastique endommageable dégénère en un modèle élastoplastique classique pour une variable d’endommagement égale à zéro.

### 4.5.1 Modèles mécaniques explicites pour le béton

Dans la majorité des cas, ces modèles fournissent une relation explicite entre la contrainte normale et la déformation axiale totale. Ils émanent d’une exploitation directe des essais de compression/traction. Chaque phase du comportement est décrite à l’aide d’une fonction analytique :

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4.21)$$

On retrouve ce type de description dans la plupart des normes. Ainsi ces modèles ont la faveur des ingénieurs qui en font usage dans des codes de calcul basés sur les éléments finis à fibres [131], [113], [136], [68]). Il est évident que la relation contrainte-déformation totale ne permet pas de prendre en compte la base physique du comportement du béton, notamment dans le cas de charge/décharge. Par ailleurs, il semble difficile de généraliser les modèles explicites aux sollicitations cycliques.

Nous allons présenter dans les paragraphes suivants deux modèles explicites largement utilisés en pratique.

#### 4.5.1.1 Modèle de l'EUROCODE 2

Pour les béton normaux, l'EUROCODE 2 [2] propose la relation contrainte-déformation totale (cf. Figure 4.11) donnée par l'expression (4.22) :

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2}{1 + (k - 2) \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)} \quad (4.22)$$

où  $\varepsilon_{c1}$  est la déformation au pic de contrainte et  $k$  est déterminé par :

$$k = \frac{1.1 E_{c,nom} \varepsilon_{c1}}{f_{cm}} \quad (4.23)$$

avec  $E_{c,nom}$  le module sécant relatif, calculé conventionnellement à une contrainte de  $0.4f_{cm}$ . Au-delà de la déformation ultime  $\varepsilon_{cu}$ , le modèle ne fournit aucune relation. Par ailleurs, l'EC2 néglige la résistance du béton en traction.

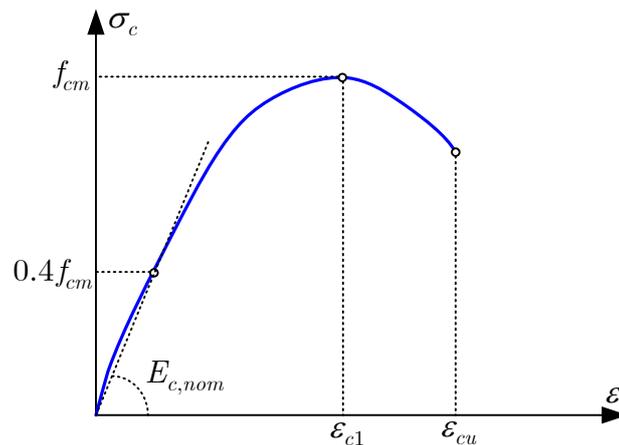


Figure 4.11 – Modèle de l'EUROCODE 2 [2]

*Remarque* : Ce modèle ne prédit aucune information sur la décharge.

#### 4.5.1.2 Modèle de CEB-FIP Model Code 1990

Le modèle proposé dans l'EUROCODE 2 [2] n'est pas adapté aux bétons à haute résistance qui ont une certaine ductilité. Par contre le modèle de CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1] est plus général et permet de bien décrire le comportement d'un béton à haute résistance. Par ailleurs, comme le modèle de l'EUROCODE 2, ce modèle ne fournit aucune information sur la décharge. La relation contrainte-déformation totale de ce modèle est donnée par :

– Pour  $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{c,lim}$

$$\sigma_c = \frac{-f_{cm}}{\left[ \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c,lim}} \xi - 2 \left( \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c,lim}} \right)^2 \right] \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 + \left( \frac{4\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c,lim}} - \xi \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} \quad (4.24)$$

avec

$$\xi = \frac{4 \left[ \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \left( \frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 + \frac{2\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} - \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} \right]} \quad (4.25)$$

– Pour  $\varepsilon_{c,lim} < \varepsilon_c \leq 0$

$$\sigma_c = \frac{- \left[ \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 \right] f_{cm}}{1 + \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} \quad (4.26)$$

– Pour  $0 < \varepsilon_c \leq 0.9f_{ctm}/E_{ci}$

$$\sigma_c = E_{ci}\varepsilon_c \quad (4.27)$$

– Pour  $0.9f_{ctm}/E_{ci} < \varepsilon_c \leq 0.00015$

$$\sigma_c = f_{ctm} - \frac{0.1f_{ctm} (0.00015 - \varepsilon_c)}{0.00015 - \frac{0.9f_{ctm}}{E_{ci}}} \quad (4.28)$$

– Pour si  $\varepsilon_c > 0.00015$

$$\sigma_c = 0 \quad (4.29)$$

Les notations utilisées dans les relations ci-dessus ont la signification suivante :

- $E_{ci}$  module initial tangent du béton à 28 jours [MPa];
- $E_{c1}$  module sécant de l'origine au pic de contrainte  $-f_{cm}$  [MPa];
- $f_{cm}$  résistance à la compression du béton [ $\text{N}/\text{m}^2$ ];
- $f_{ctm}$  résistance à la traction du béton [ $\text{N}/\text{m}^2$ ];
- $\varepsilon_{c1}$  déformation au pic de contrainte  $-f_{cm}$ .
- $\varepsilon_{c,lim}$  déformation correspond à la contrainte après le pic  $\sigma_c = -0.5f_{cm}$ .

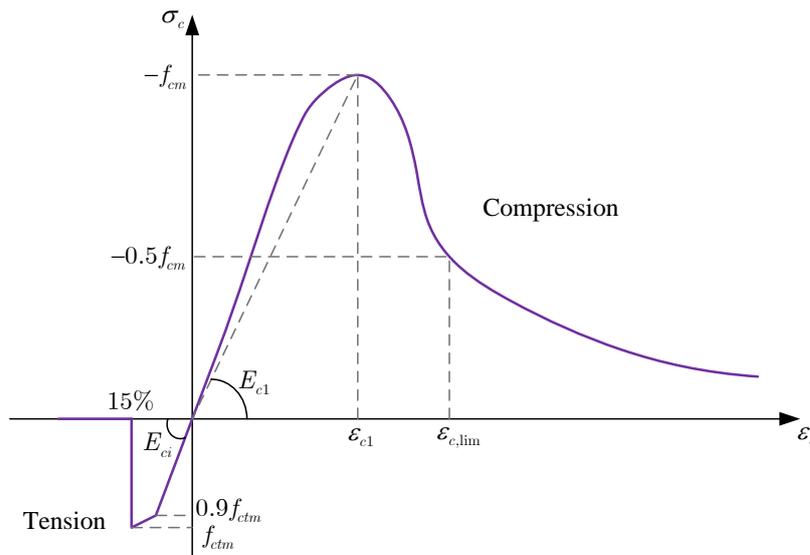


Figure 4.12 – Modèle de CEB-FIP MODEL CODE 1990

#### 4.5.2 Modèles basés sur la théorie de l'endommagement scalaire

L'idée d'une représentation répartie de l'endommagement (fissuration) des matériaux a été proposée initialement par KACHANOV [83]. Il s'en est suivi le concept de contrainte effective introduit par RABOTNOV [106]. Il faut cependant attendre le début des années 70 pour que la théorie de l'endommagement continu (Continuous Damage Theory) se développe avec dynamisme et le début des années 80 pour que le formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles apporte un cadre rigoureux et élégant. Depuis lors, plusieurs modèles d'endommagement continu ont été proposés dans la littérature. On distingue assez clairement deux classes de modèles : l'endommagement ductile et l'endommagement fragile. Le premier s'accompagne de grandes déformations et s'applique

plutôt aux métaux et alliages. L'endommagement fragile permet de modéliser l'apparition de micro-fissures et de micro-vides dans les bétons. Sa version la plus simple consiste à introduire une variable d'endommagement scalaire  $d$  définie comme la perte de rigidité du matériau lors d'un essai uniaxial :

$$d = 1 - \frac{E}{E_0} \quad (4.30)$$

où  $E_0$  est le module de YOUNG initial et  $E$  le module de YOUNG endommagé. La variable d'endommagement  $d$  varie entre 0 (matériau sain-pas de micro-fissures) et 1 (matériau rompu). Elle peut s'interpréter physiquement, soit comme une porosité relative, soit comme une densité de micro-fissures. Conformément au premier principe de la thermodynamique, on associe au matériau une énergie libre volumique (potentiel de HELMHOLTZ) qui dépend uniquement des valeurs actuelles des variables d'état qui sont la déformation et la variable interne  $d$  :

$$\Psi(\varepsilon, d) = \frac{1}{2}(1 - d)E_0 \varepsilon^2 \quad (4.31)$$

Les lois d'état s'obtiennent par dérivation du potentiel  $\Psi(\varepsilon, d)$ . On obtient ainsi

$$\sigma = \frac{\partial \Psi(\varepsilon, d)}{\partial \varepsilon} = (1 - d)E_0 \varepsilon \quad , \quad Y = -\frac{\partial \Psi(\varepsilon, d)}{\partial d} = \frac{1}{2}E_0 \varepsilon^2 \quad (4.32)$$

$Y$  est la force thermodynamique associée à la variable interne  $d$  et correspond au taux de restitution de l'énergie dû à l'endommagement. Il s'ensuit que le taux de dissipation mécanique est positif au cours de l'évolution puisque :

$$\dot{\mathfrak{D}} = \sigma \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} = \left( \sigma - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (4.33)$$

L'inégalité devant être satisfaite quelque soit  $\dot{\varepsilon}$  et  $\dot{d}$ , on obtient

$$\sigma = \frac{\partial \Psi(\varepsilon, d)}{\partial \varepsilon} = (1 - d)E_0 \varepsilon \quad , \quad Y = -\frac{\partial \Psi(\varepsilon, d)}{\partial d} = \frac{1}{2}E_0 \varepsilon^2 \quad (4.34)$$

Il s'en suit que :

$$-\frac{\partial \Psi(\varepsilon, d)}{\partial d} \dot{d} = Y_0 \dot{d} \geq 0 \quad (4.35)$$

puisque  $\Psi_0$  et  $\dot{d}$  sont tout deux positifs. Il convient encore de préciser l'évolution de la variable interne  $d$ . Autrement dit, il importe de définir quand l'endommagement commence (critère d'endommagement) et comment il évolue avec le chargement (loi d'évolution de  $d$ ). On adopte un critère qui s'exprime dans l'espace de la force thermodynamique associée :

$$f_d(Y, d) = Y - \frac{1}{2}k_0(1 + 2\gamma d) \quad (4.36)$$

où  $\frac{1}{2}k_0$  représente le seuil initial d'endommagement ;  $\gamma$  représente une pseudo-ductilité en référence à l'érouissage plastique (MARIGO). L'évolution de la variable interne  $d$  s'obtient à l'aide d'une règle de normalité :

$$\dot{d} = \lambda_d \frac{\partial f}{\partial Y} \quad (4.37)$$

et des relations de complémentarité

$$f_d \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda}_d \geq 0 \quad , \quad \dot{\lambda}_d f_d = 0 \quad (4.38)$$

La présentation ci-dessus rentre dans le cadre des "stress-based formulations". On retrouve dans la littérature des critères qui s'expriment en fonction des déformations ("strain-based formulations") dont le plus célèbre est celui de MAZARS(1984) [97]. Par analogie avec la plasticité, l'évolution de la variable d'endommagement  $d$  peut s'écrire à l'aide de l'inéquation variationnelle suivante (Principe de dissipation maximale de HILL) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall Y' \in K_{(d)} : \\ \dot{d}(Y - Y') \geq 0, \quad Y \in K_{(d)} \end{array} \right. \quad (4.39)$$

$$f_d \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda}_d \geq 0 \quad , \quad \dot{\lambda}_d f_d = 0 \quad (4.40)$$

où  $K_{(d)}$  est un convexe qui dépend de l'état d'endommagement au travers de  $d$  :

$$K_{(d)} = \{Y \in \mathbb{R}^+ \mid f(Y, d) \leq 0\} \quad (4.41)$$

### 4.5.3 Modèles basés sur le couplage plasticité-endommagement

Le modèle d'endommagement scalaire présenté ci-dessus permet de modéliser de manière satisfaisante la dégradation de la raideur du béton au cours du chargement. A lui seul, un

modèle de plasticité adoucissante avec prise en compte du comportement anisotrope n'est pas suffisant. Il semble alors assez naturel de combiner endommagement et plasticité afin d'obtenir un modèle complet qui puisse traduire le comportement réel du béton.

Il existe plusieurs façon de coupler la plasticité et la théorie de l'endommagement et une description complète des modèles serait trop longue. Pour une étude approfondie de la théorie de l'endommagement, le lecteur pourra consulter les références ([106],[101], [91], [65]). On peut toutefois signaler que l'endommagement peut également affecter les propriétés de résistance et pas uniquement le module de YOUNG comme il est souvent d'usage de le considérer. Dans ce travail, il nous a semblé judicieux d'adopter un modèle où l'évolution de la résistance est pilotée par un modèle de plasticité adoucissante et la dégradation de la raideur à l'aide d'un modèle d'endommagement scalaire tel que décrit plus haut. Un point particulier du modèle est le démarrage concomitant des deux processus. Autrement dit, dès que l'on plastifie, on endommage également. Ce modèle s'inspire du modèle présenté par MESCHKE et al. ([101]). Enfin signalons que l'écriture des modèles élasto-endommageables est loin d'être unique. Nous avons retenu une description dans l'espace des contraintes généralisées au sens thermodynamique. Un excellent résumé de cette théorie est donné par GOVINDJEE [75].

### 4.5.3.1 Equations fondamentales de la théorie de l'élastoplasticité endommageable : cas 1D

Dans cette thèse, notre choix s'est porté sur un modèle élastoplastique anisotrope avec endommagement de la raideur du béton. Afin de faciliter l'identification des paramètres du modèle, nous avons retenu un modèle qui couple les deux processus. Ce modèle a été présenté par MESCHKE [101] initialement. Nous en faisons ici une présentation 1D un peu différente. On peut également la trouver dans les références [127], [75], [88], [87]. Le concept qui suit est basé sur la formulation en contrainte de la théorie de l'élastoplasticité avec endommagement.

De façon similaire à la théorie de plasticité, on suppose que la déformation totale se dé-

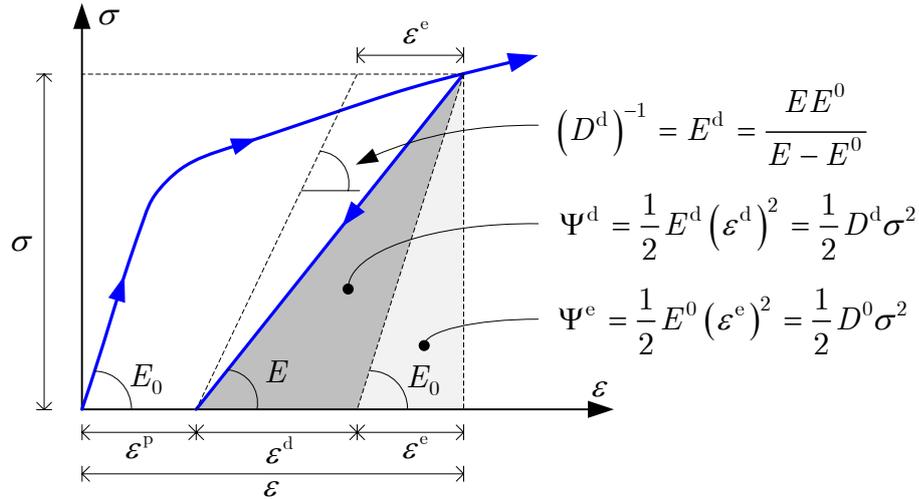


Figure 4.13 – Modèle élastoplastique endommageable

compose en une partie élastique  $\varepsilon^e$ , une partie plastique  $\varepsilon^p$  et une partie endommagement  $\varepsilon^d$  (cf. Figure 4.13) :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^d \quad (4.42)$$

Cela revient à substituer à la variable interne  $d$  la déformation  $\varepsilon^d$  qui résulte de l'endommagement. En conséquence, on considère un potentiel densité énergie libre d'HELMHOLTZ  $\Psi$  fonction des variables d'état  $\varepsilon^e$ ,  $\varepsilon^d$  et  $p$  :

$$\Psi = \Psi^e(\varepsilon^e) + \Psi^d(\varepsilon^d) + \Psi^p(p) \quad (4.43)$$

où :

- $\Psi^e(\varepsilon^e) = \frac{1}{2} E^0 (\varepsilon^e)^2$  : l'énergie libre qui est associée aux déformations élastiques
- $\Psi^d(\varepsilon^d) = \frac{1}{2} E^d (\varepsilon^d)^2$  : l'énergie libre qui est associée aux déformations d'endommagement
- $\Psi^p(p)$  : l'énergie libre qui est associée aux déformations plastiques

Le choix des variables internes indépendantes n'est pas unique. En effet, il est possible de substituer la déformation plastique à la déformation d'endommagement. Pour ce faire, il suffit d'observer que :

$$\sigma = E^0 \varepsilon^e = E^d \varepsilon^d = E (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (4.44)$$

et après quelques manipulations algébriques, on obtient une nouvelle expression de  $\Psi$  :

$$\Psi = \underbrace{\frac{1}{2}E^0 (\varepsilon^e)^2 + \frac{1}{2}E^d (\varepsilon^d)^2}_{\Psi^{\text{ed}}} + \Psi^p(p) = \underbrace{\frac{1}{2}(D^0 + D^d)^{-1} (\varepsilon - \varepsilon^p)^2}_{\Psi^{\text{ed}}} + \Psi^p(p) \quad (4.45)$$

En examinant le membre de droit de l'expression (4.45), on remarque que la complaisance  $D^d$  joue le rôle de variable interne, avec une fonction d'HELMHOLTZ de la forme :  $\Psi(\varepsilon - \varepsilon^p, D^d, p)$ .

L'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM s'écrit :

$$\mathfrak{D} = \sigma \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} = \left( \sigma - \frac{\partial \Psi}{\partial (\varepsilon - \varepsilon^p)} \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^p} \dot{\varepsilon}^p - \frac{\partial \Psi}{\partial D^d} \dot{D}^d - \frac{\partial \Psi}{\partial p} \dot{p} \geq 0 \quad (4.46)$$

Cette équation (4.46) doit être satisfaite pour toute évolution, y compris le cas élastique non endommagé  $\dot{\varepsilon}^p = 0$ ,  $\dot{p} = 0$  et  $\dot{D}^d = 0$  ; ceci implique la première loi d'état :

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial (\varepsilon - \varepsilon^p)} = D^{-1} (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (4.47)$$

De manière analogue, on définit les forces thermodynamiques associées aux variables internes  $p$  et  $D^d$  par dérivation de  $\Psi$  :

$$R = \frac{\partial \Psi}{\partial p} = \frac{\partial \Psi^p}{\partial p} \quad (4.48)$$

$$\hat{Y} = \frac{\partial \Psi}{\partial D^d} = -\frac{1}{2} \sigma^2 \quad (4.49)$$

Ayant retenu pour variable interne une complaisance, il est tout à fait naturel que la variable associée ne soit pas un taux de restitution d'énergie mais plutôt une fonction quadratique des contrainte. Ainsi, l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM est finalement réduite à :

$$\dot{\mathfrak{D}} = \sigma \dot{\varepsilon}^p + \frac{1}{2} \sigma^2 \dot{D}^d - R(p) \dot{p} \geq 0 \quad (4.50)$$

L'intérêt est d'introduire un couplage entre les deux phénomènes en introduisant un critère unique qui ne dépende que de  $\sigma$  et de  $R$ . En l'absence d'un critère explicite sur  $\hat{Y}$ , on peut s'affranchir de sa présence dans l'inégalité de dissipation. Le domaine de réversibilité convexe  $C$  est défini dans l'espace des forces thermodynamiques  $(\sigma, R)$ . A l'intérieur de

ce domaine, aucune irréversibilité n'est possible. Ce convexe est limité par la surface de charge  $f(\sigma, R) = 0$ .

$$C := \{(\sigma, R) | f(\sigma, R) \leq 0\} \quad (4.51)$$

On suppose une évolution normale des variables internes (normalité généralisée). Il s'en suit que l'évolution des variables internes  $\varepsilon^p$ ,  $D^d$  et  $p$  s'obtient à partir du principe de maximum de la dissipation (4.50) :

$$\inf_{(\sigma, R) \in C} [-\dot{\mathcal{D}}] \quad (4.52)$$

Ainsi, pour les variables d'état admissibles données  $(\sigma, R) \in C$ , les taux  $\dot{\varepsilon}^p$ ,  $\dot{D}^d$  et  $\dot{p}$  sont ceux qui produisent un point stationnaire de la dissipation  $\mathcal{D}$ . Pour trouver la solution de ce problème, la méthode du multiplicateur de Lagrange est utilisée. La fonctionnelle Lagrangienne suivante est introduite :

$$\sup_{\dot{\lambda} \geq 0} \inf_{(\sigma, R) \in C} \mathcal{L}(\sigma, R, \dot{\lambda}) \quad (4.53)$$

avec

$$\mathcal{L}(\sigma, R, \dot{\lambda}) = -\dot{\mathcal{D}} + \dot{\lambda} f(\sigma, R) = -\sigma \dot{\varepsilon}^p - \frac{1}{2} \sigma^2 \dot{D}^d + R(p) \dot{p} + \dot{\lambda} f(\sigma, R) \quad (4.54)$$

où  $\dot{\lambda} \geq 0$  est le multiplicateur de Lagrange. A partir des deux conditions de stationnarité, on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = -\dot{\varepsilon}^p - \dot{D}^d \sigma + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0 \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = \dot{p} + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} = 0 \quad (4.56)$$

En définissant l'incrément de déformation lié à la dégradation du module de souplesse :

$$\dot{\varepsilon}^{\text{da}} = \dot{D}^d \sigma \quad (4.57)$$

il s'en suit que :

$$\dot{\varepsilon}^p + \dot{\varepsilon}^{\text{da}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (4.58)$$

$$\dot{p} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} \quad (4.59)$$

En introduisant un taux de déformation inélastique définie par :

$$\dot{\varepsilon}^{\text{pd}} = \dot{\varepsilon}^{\text{p}} + \dot{\varepsilon}^{\text{da}} \quad (4.60)$$

La relation (4.55) peut être réécrite sous une forme analogue à la théorie de plasticité associée classique comme :

$$\dot{\varepsilon}^{\text{pd}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (4.61)$$

On constate que le taux de déformation inélastique  $\dot{\varepsilon}^{\text{pd}}$  est dû d'une part à la plasticité, d'autre part à l'endommagement. Comme proposé dans [101], pour séparer ces deux parties de déformation, un paramètre scalaire  $\beta$  avec  $0 \leq \beta \leq 1$ , est introduit :

$$\dot{\varepsilon}^{\text{p}} = (1 - \beta) \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (4.62)$$

$$\dot{\varepsilon}^{\text{da}} = \beta \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (4.63)$$

En combinant les relations (4.55) et (4.63) on obtient la loi d'évolution pour  $D^{\text{da}}$  :

$$\dot{D}^{\text{d}} = 2(1 - \beta) \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} \quad (4.64)$$

Le multiplicateur de Lagrange est déterminé par la relation de cohérence  $\dot{f}(\sigma, R) = 0$  qui exprime le fait que le point correspondant à un état de charge ne peut quitter la surface de charge  $f(\sigma, R) = 0$  [86]. On écrit alors le relation de KUHN-TUCKER pour déterminer  $\dot{\lambda}$  :

$$\dot{\lambda} f(\sigma, R) = 0 \quad \text{avec} \quad f(\sigma, R) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (4.65)$$

On obtient alors :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \varepsilon}{(1 - \beta) \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^2 + D \left( \frac{\partial f}{\partial R} \right)^2 \frac{\partial R}{\partial p}} \quad (4.66)$$

## 4.6 Modèle mécanique proposé pour le béton : Concept de détermination de la fonction d'écroûissage

Afin de tenter de traduire la non-linéarité matérielle et en particulier, la phase d'adoucissement du béton, dans cette section, le comportement non-linéaire du béton est décrit à l'aide d'un modèle de plasticité avec endommagement tel que décrit au paragraphe 4.5.3.1. Plus précisément, il s'agit de plasticité anisotrope avec écroûissage isotrope et endommagement de la raideur. Le modèle développé reproduit exactement la courbe enveloppe du CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1] pour la compression.

### 4.6.1 Cas du béton en compression

Le modèle de béton du CEB-FIP [1] fournit une relation explicite, par tronçon, entre la contrainte et la déformation totale. La principale lacune du modèle est l'absence d'une loi de décharge sachant qu'en pratique le module de décharge, qui correspond à la raideur, diminue avec la déformation maximale atteinte. L'objectif est de déterminer l'expression de la fonction d'écroûissage qui permette de reproduire exactement la courbe enveloppe du CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1].

En compression, l'expression du critère en uniaxial est :

$$f_c(\sigma, R_c) = -\sigma - R_c(p) \leq 0 \quad (4.67)$$

où l'indice "c" indique que nous sommes en compression. Les relations (4.47), (4.62), (4.63) deviennent alors :

$$\varepsilon = \left( \frac{1}{E_0} + D^d \right) \sigma + \varepsilon^p \quad (4.68)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = -(1 - \beta_c) \dot{\lambda} \quad (4.69)$$

$$\dot{\varepsilon}^{da} = \dot{D}^d \sigma = -\beta_c \dot{\lambda} \quad (4.70)$$

$$\dot{p} = -\dot{\varepsilon}^{pd} = \dot{\lambda} \quad (4.71)$$

avec  $E_0$  désignant le module élastique initial de béton. En dérivant une fois l'équation

(4.68) que l'on combine ensuite avec les équations (4.69) et (4.70), on obtient :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} + D^d \dot{\sigma} + \dot{\varepsilon}^{pd} \quad (4.72)$$

Une démarche pour permettre une identification ultérieure (en particulier courbe CEB-FIP [1]) consiste à supposer que la quantité  $D^d \dot{\sigma}$  est proportionnelle à  $\dot{\varepsilon}^{pd}$  :

$$D^d \dot{\sigma} = \zeta \dot{\varepsilon}^{pd} \quad (4.73)$$

où  $\zeta$  est un paramètre scalaire constant. Ce paramètre  $\zeta$  sera déterminé en accordant le résultat numérique avec la courbe expérimentale de l'essai de compression uniaxial de manière à reproduire au mieux le module de décharge. En introduisant les relations (4.71) et (4.73) dans (4.72), on obtient :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} - (1 + \zeta)\dot{p} \quad (4.74)$$

d'où

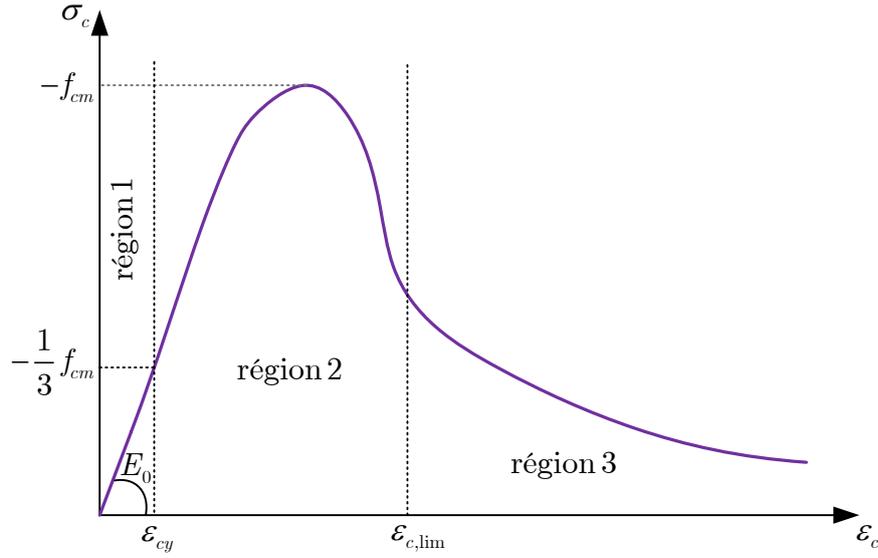
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} - (1 + \zeta)p \quad (4.75)$$

La relation (4.75) dévoile le sens de l'hypothèse (4.73). En effet, si l'on supprime la contrainte (décharge), on observe que le rapport entre la déformation totale et la déformation plastique cumulée  $\frac{\varepsilon}{p}$  est une constante qui vaut  $-(1 + \zeta)$ . Afin de déterminer la fonction d'érouissage  $R_c(p)$ , nous allons distinguer trois régions dans la courbe contrainte-déformation du modèle CEB-FIP MODEL CODE 1990 (cf. Figure 4.14).

*Région 1* : Dans cette région, le comportement est supposé être élastique linéaire jusqu'à une contrainte seuil  $f_{cy} = f_{cm}/3$  à laquelle correspond une déformation  $\varepsilon_{cy}$  (cf. Figure 4.14). Ce comportement est défini par le module de Young initial (non endommagé)

$$E_0 = \frac{f_{cy}}{\varepsilon_{cy}} \quad (4.76)$$

où la détermination de  $\varepsilon_{cy}$  est présentée en Annexe V. Ainsi, nous avons la condition

Figure 4.14 – Définition de trois régions pour la fonction d'écroutissement  $R_c(p)$ 

initiale pour  $R_c(p)$  :

$$R_c(p = 0) = f_{cy} = \frac{1}{3} f_{cm} \quad (4.77)$$

*Région 2* : Cette région est limitée par l'intervalle de déformation  $[\varepsilon_{c,lim} ; \varepsilon_{cy}]$ . Selon le CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1], la relation analytique du comportement dans cette région est :

$$\sigma = \frac{-\left[\frac{E_{ci}}{E_{c1}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}}\right)^2\right] f_{cm}}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2\right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}}} \quad (4.78)$$

En introduisant la relation (4.75) dans l'équation (4.78), nous obtenons :

$$\sigma = \frac{\left(\frac{\sigma}{E_0} - (1 + \zeta)p\right)^2 - \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c1}} \left(\frac{\sigma}{E_0} - (1 + \zeta)p\right)}{\frac{\varepsilon_{c1}}{f_{cm}} \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2\right) \left(\frac{\sigma}{E_0} - (1 + \zeta)p\right) + \frac{\varepsilon_{c1}^2}{f_{cm}}} \quad (4.79)$$

En résolvant l'équation (4.79) en  $\sigma$ , nous trouvons :

$$\sigma = \sqrt{\xi_1 p^2 + \xi_2 p + \xi_3^2} - \xi_4 p - \xi_3 \quad (4.80)$$

où les coefficients  $\xi_{i=1..4}$  sont donnés en Annexe V.

La condition d'être sur le critère  $f_c(\sigma, R_c) = 0$ , nous conduit, pour cette région, à l'expression de la fonction d'érouissage suivante :

$$R_c(p) = \sqrt{\xi_1 p^2 + \xi_2 p + \xi_3^2} - \xi_4 p - \xi_3 \quad \text{avec } \hat{p} \leq p < 0 \quad (4.81)$$

où  $\hat{p}$  a pour expression :

$$\hat{p} = -\frac{1}{1 + \zeta} \left( \varepsilon_{c,lim} + \frac{f_{cm}}{2E_0} \right) \quad (4.82)$$

*Région 3* : Cette région se trouve dans la partie adoucissante pour des déformations  $\varepsilon < \varepsilon_{c,lim}$ . Selon CEB-FIP 1990 code [1], la relation de comportement analytique dans cette région est :

$$\sigma = \frac{-f_{cm}}{\left[ \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c,lim}} \xi - 2 \left( \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c,lim}} \right)^2 \right] \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 + \left( \frac{4\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c,lim}} - \xi \right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}}} \quad (4.83)$$

En introduisant la relation (4.75) dans l'équation (4.83), nous obtenons :

$$\sigma = \frac{-f_{cm}}{\left( \frac{\xi}{\varepsilon_{c,lim}\varepsilon_{c1}} - \frac{2}{\varepsilon_{c,lim}^2} \right) \left( \frac{\sigma}{E_0} - (1 + \zeta)p \right)^2 + \left( \frac{4}{\varepsilon_{c,lim}} - \frac{\xi}{\varepsilon_{c1}} \right) \left( \frac{\sigma}{E_0} - (1 + \zeta)p \right)} \quad (4.84)$$

En résolvant cette équation (4.83) en  $\sigma$ , nous trouvons :

$$\sigma = \beta_1 p + \beta_2 + \left( \sum_{i=0}^2 \eta_i p^i \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \left( \sum_{i=0}^2 \eta_i p^i \right)^{\frac{3}{2}} \right) \sum_{i=0}^3 \mu_i p^i \right] \quad (4.85)$$

où les coefficients  $\beta_{i=1..2}$ ,  $\eta_{i=0..2}$ ,  $\mu_{i=0..3}$  sont définis en Annexe V. Ainsi, nous obtenons finalement l'expression de la fonction d'érouissage dans cette région :

$$R_c(p) = \beta_1 p + \beta_2 + \left( \sum_{i=0}^2 \eta_i p^i \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \left( \sum_{i=0}^2 \eta_i p^i \right)^{\frac{3}{2}} \right) \sum_{i=0}^3 \mu_i p^i \right] \quad \text{avec } p < \hat{p} \quad (4.86)$$

Finalement, nous pouvons écrire la fonction d'écroissage  $R_c(p)$  sous la forme :

$$R_c(p) = \langle p - \hat{p} \rangle^+ \left[ (\zeta_1 p^2 + \zeta_2 p + \zeta_2^2)^{\frac{1}{2}} - \zeta_3 - \zeta_4 p \right] + \langle p - \hat{p} \rangle^- \left\{ \beta_1 p + \beta_2 + \left( \sum_{i=0}^2 \eta_i p^i \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \left( \sum_{i=0}^2 \eta_i p^i \right)^{\frac{3}{2}} \right) \sum_{i=0}^3 \mu_i p^i \right] \right\} \quad (4.87)$$

où les symboles  $\langle \ \rangle^+$  et  $\langle \ \rangle^-$  désignent les opérateurs :

$$\langle x \rangle^+ = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \langle x \rangle^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (4.88)$$

#### 4.6.2 En traction

En traction, la fonction de charge a pour expression :

$$f_t(\sigma, R_t) = \sigma - R_t(p) \leq 0 \quad (4.89)$$

Les relations (4.47), (4.62), (4.63) deviennent alors :

$$\dot{\varepsilon}^p = (1 - \beta_t) \dot{\lambda} \quad (4.90)$$

$$\dot{\varepsilon}^{\text{da}} = \dot{D}^d \sigma = \beta_t \dot{\lambda} \quad (4.91)$$

$$\dot{p} = \dot{\varepsilon}^{\text{pd}} = \dot{\lambda} \quad (4.92)$$

Dans cet étude, de façon similaire à l'expression proposée par MESCHKE [101], une loi hyperbolique adoucissante est prise pour la fonction d'écroissage  $R_t(p)$  :

$$R_t(p) = \frac{f_{ct}}{\left( 1 + \frac{p}{p_u} \right)^2} \quad (4.93)$$

où le paramètre  $p_u$  est déterminé à partir de l'énergie de fissuration dissipée localement. Il faut que l'énergie de fissuration soit égale au travail externe total :

$$\frac{G_t}{l_c} = \int_0^\infty \sigma d\varepsilon \quad (4.94)$$

où  $G_t$  est l'énergie de fissuration par unité de surface fissurée et  $l_c$  est une longueur caractéristique (qui, en pratique, sont déterminées empiriquement). En introduisant dans (4.94) la relation (4.75) considérée avec une autre valeur de  $\zeta$  en traction, nous obtenons :

$$\frac{G_t}{l_c} = \int_0^{0+} \frac{\sigma}{E_0} d\sigma - (1 + \zeta) \int_{0+}^{\infty} \sigma dp = - (1 + \zeta) \int_{0+}^{\infty} \sigma dp \quad (4.95)$$

A partir de la condition de critère  $f_t(\sigma, R_t) = 0$  et de la relation (4.93), on déduit l'expression de  $\sigma$  en fonction de  $p$  :

$$\sigma(p) = \frac{f_{ct}}{\left(1 + \frac{p}{p_u}\right)^2} \quad (4.96)$$

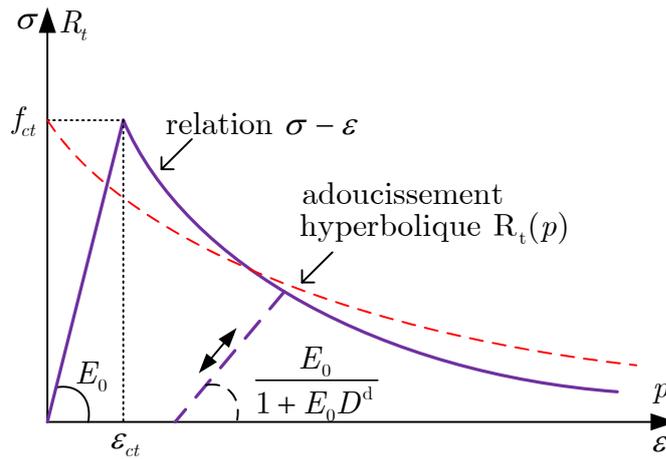


Figure 4.15 – Représentation schématique du comportement uniaxial en traction avec une loi adoucissante hyperbolique

En introduisant cette relation (4.96) dans (4.95), nous obtenons :

$$\frac{G_t}{l_c} = - (1 + \zeta) \int_0^{\infty} \frac{f_{ct}}{\left(1 + \frac{p}{p_u}\right)^2} dp = - (1 + \zeta) f_{ct} p_u \quad (4.97)$$

d'où

$$p_u = - \frac{G_t}{f_{ct} l_c (1 + \zeta)} \quad (4.98)$$

La relation contrainte-déformation (cf. Figure 4.15) peut être obtenue en substituant la relation (4.75) dans (4.96) :

$$\sigma = \begin{cases} E_c \varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_{ct} \\ E_c \left[ \frac{4\varepsilon}{3} + \frac{2p_u(1+\zeta)}{3} + 2p_1 \cos \left( \arccos \frac{-p_2}{2p_1^3} \right) \right] & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_{ct} \end{cases} \quad (4.99)$$

où :

$$p_1 = \frac{\varepsilon - p_u(1+\zeta)}{3} \quad p_2 = \frac{f_{ct} p_u^2 (1+\zeta)^2}{E_c} - \frac{2(\varepsilon - p_u(1+\zeta))^3}{27} \quad (4.100)$$

On peut également déduire à partir des relations (4.73) et (4.96) l'évolution de  $D^d$  en fonction de  $p$  :

$$D^d = \zeta \frac{dp}{d\sigma} = -\frac{p_u \zeta}{2f_{ct}} \left( 1 + \frac{p}{p_u} \right)^3 \quad (4.101)$$

La combinaison des équations (4.91), (4.92), (4.96) et (4.101) amène à la relation suivante :

$$\beta_t = -\frac{3}{2}\zeta \quad (4.102)$$

### 4.6.3 Identification expérimentale

On procède dans ce qui suit à l'identification des paramètres du modèle à partir de résultats d'essais. Ensuite, la réponse du modèle est confrontée à la courbe contrainte-déformation expérimentale.

#### 4.6.3.1 Comportement en compression

On considère les résultats de l'essai en compression avec décharges multiples de KARSAN et JIRSA [85]. Les caractéristiques mécaniques du béton en compression sont donnés dans le tableau 4.1.

$E_c$ (MPa)	$f_{cm}$ (MPa)	$\varepsilon_{c1}$ (N/m)
30000	27.9	-0.22%

Tableau 4.1 – Propriétés mécaniques du béton en compression [85]

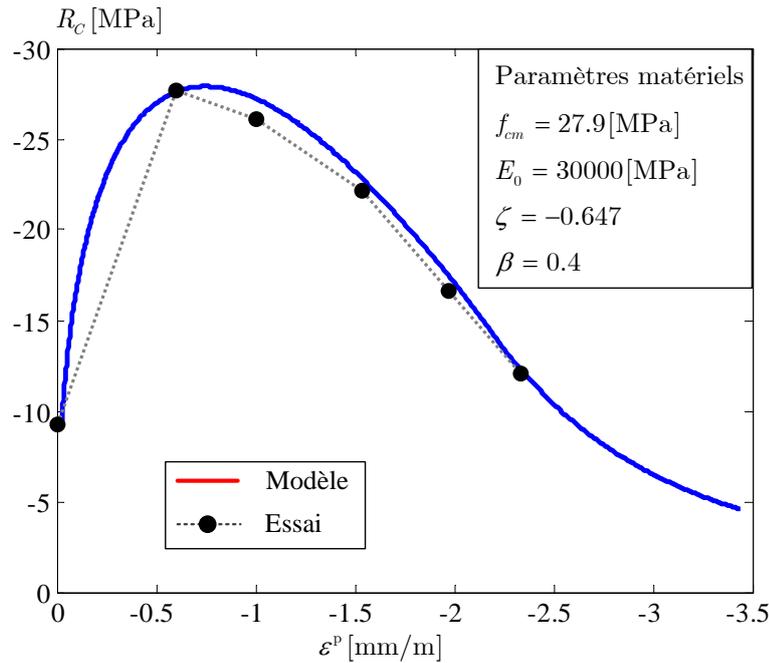


Figure 4.16 – Courbe contrainte limite/déformation résiduelle [85]

Les paramètres  $\zeta$  et  $\beta$  sont déterminés de sorte que la courbe contrainte/déformation résiduelle soit bien décrite (cf. Figure 4.16). Après avoir réalisé plusieurs tests, on constate qu'une valeur de 0.4 pour le paramètre  $\beta$  et une valeur de  $-0.647$  pour le paramètre  $\zeta$  permettent de restituer le comportement pour l'ensemble des décharges successives considérées. La courbe contrainte-déformation, obtenue avec ces paramètres, est représentée et comparée à celle de l'essai [85] à la figure 4.17. On constate que le modèle proposé décrit bien l'ensemble de comportement du béton en compression cyclique.

#### 4.6.3.2 Comportement en traction

On considère la courbe contrainte-déformation de l'essai de traction uniaxiale réalisé par GOPALARATNAM et SHAH en 1985 [74]. Des décharges ont été effectuées permettant de mesurer le module endommagé. Les caractéristiques mécaniques du béton en traction sont données au tableau 4.2.

Pour , On définit la valeur de la longueur caractéristique  $l_c$  à partir de la taille  $d_{max}$  du plus gros granulat :  $3d_{max} \leq l_c \leq 6d_{max}$ . Pour un béton standard  $20 \text{ mm} \leq d_{max} \leq 30 \text{ mm}$ . La

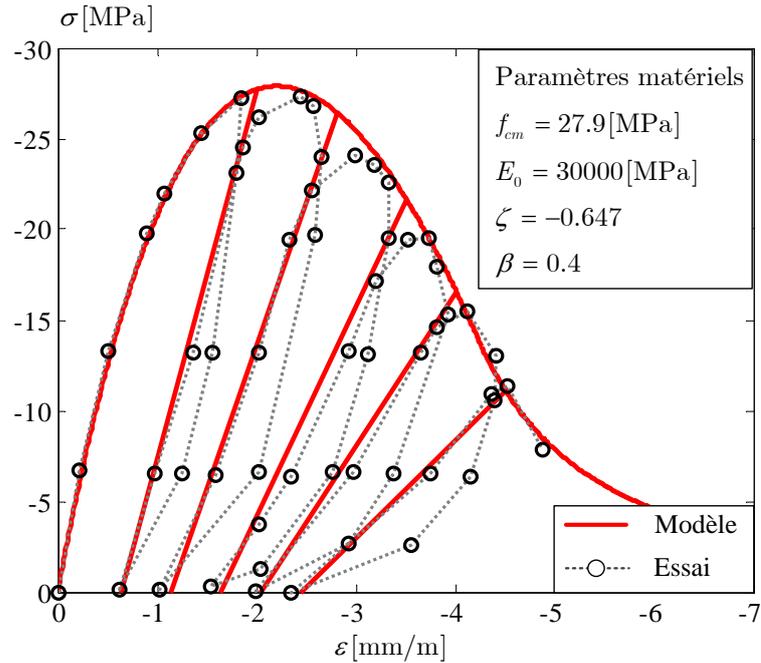


Figure 4.17 – Comparaison de l’essai de compression cyclique du béton [85] avec le modèle proposé

$E_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	$G_t$ (N/m)
31000	3.5	65

Tableau 4.2 – Propriétés mécaniques du béton en traction [74]

valeur  $l_c = 68\text{mm}$  est retenue ce qui permet de décrire correctement la phase adoucissante (cf. Figure 4.18).

De même, le paramètre  $\zeta$  est choisi de manière à ce que la phase de décharge soit restituée au mieux (cf. Figure 4.18). Après avoir réalisé plusieurs tests, il s’est avéré que la valeur de  $-0.2$  pour  $\zeta$  étant optimale. Ainsi, à partir de la relation (4.98), on peut déduire la valeur du paramètre  $p_u = 3.414 \cdot 10^{-4}$ . La courbe contrainte-déformation, obtenue avec ces paramètres, est illustrée et comparée à celle de l’essai [74] à la figure 4.18. On observe que le modèle proposé décrit bien le comportement du béton en traction avec décharges multiples.

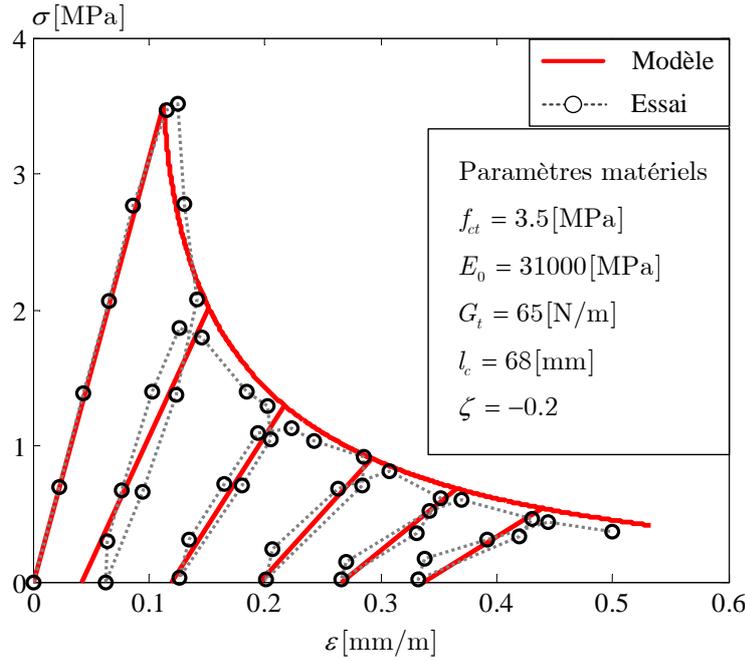


Figure 4.18 – Comparaison de l’essai de traction cyclique du béton [74] avec le modèle proposé

#### 4.7 Algorithme d’intégration local du modèle

Indépendamment de la méthode de résolution adoptée dans une analyse par éléments finis des problèmes matériellement non-linéaires, il est indispensable d’intégrer, en certains points, les relations de comportement. Le plus souvent, cette procédure est réalisée à déformation contrôlée. On adopte le cadre classique d’une plasticité indépendante du temps ou de la vitesse (“rate-independent plasticity”). On précise que le temps dont il est fait usage pour écrire commodément les relations de comportement, n’est pas le temps physique mais un temps purement cinématique, permettant de repérer sur une échelle croissante, une succession d’événements - généralement associés à des modifications des sollicitations - constituant le trajet de chargement. En pratique, l’intervalle  $[0, T]$  est divisé en  $N$  sous-intervalles tels que  $t_1 = 0$  et  $t_N = T$ . L’ensemble des bornes de temps est désigné par  $[0, T]_{\Delta} = \{t_1, \dots, t_n, \dots, t_N\}$ . Pour intégrer les lois d’évolution, on introduit une hypothèse sur l’évolution de la déformation au cours des sous-intervalles. On considère que le taux de variation temporel de la déformation est constant sur chaque sous-intervalle. Ainsi, l’intégration des équations constitutives consiste à déterminer l’état

mécanique à l'instant  $t_{n+1}$  en connaissant l'état mécanique à l'instant  $t_n$  et l'incrément de déformation totale  $\Delta\varepsilon$  associé à l'intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1}]$ . On a choisi ici d'utiliser le schéma implicite d'EULER (toutes les relations de comportement sont écrites à l'instant final  $t = t_{n+1}$ ) pour effectuer la mise à jour des variables. Cette méthode a l'avantage d'être précise et inconditionnellement stable, quelle que soit la complexité du critère de plasticité utilisé [109]. Ce schéma conduit à un algorithme basé sur une prédiction élastique des contraintes suivie d'un correcteur plastique/endommageable, afin de satisfaire les conditions de complémentarité (de KUHN-TUCKER).

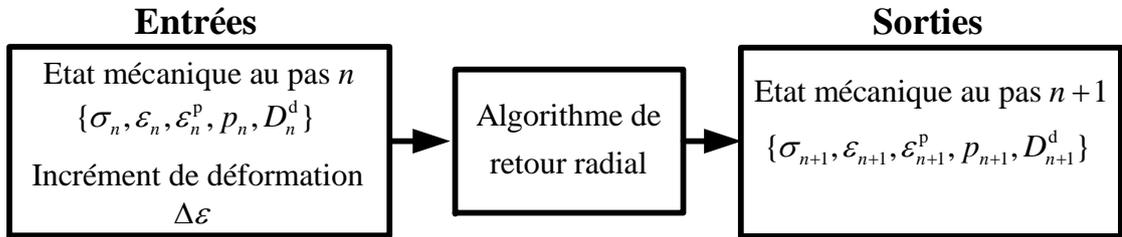


Figure 4.19 – Intégration locale

A l'instant  $t_{n+1}$  les relations de comportement discrètes s'écrivent :

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{D_{n+1}} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (4.103)$$

$$R_{n+1} = R(p_{n+1}) \quad (4.104)$$

$$\Delta\varepsilon^p = \varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p = (1 - \beta) \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (4.105)$$

$$\Delta\varepsilon^{\text{da}} = \varepsilon_{n+1}^{\text{da}} - \varepsilon_n^{\text{da}} = \Delta D^d \sigma_{n+1} = \beta \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (4.106)$$

$$\Delta p = p_{n+1} - p_n = \Delta\lambda \quad (4.107)$$

$$F_{n+1} = |\sigma_{n+1}| - R(p_{n+1}) \leq 0 \quad , \quad \Delta\lambda \geq 0 \quad , \quad \Delta\lambda F_{n+1} = 0 \quad (4.108)$$

En combinant les équations (4.103), (4.105) et (4.106), on obtient :

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{D_n} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - \frac{\Delta\lambda}{D_n} \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (4.109)$$

que l'on réécrit sous la forme suivante :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - \frac{\Delta\lambda}{D_n} \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (4.110)$$

avec

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \frac{1}{D_n} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \quad (4.111)$$

La relation (4.110) est transformée en :

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \left[ |\sigma_{n+1}| + \frac{\Delta\lambda}{D_n} \right] \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (4.112)$$

En tenant compte que  $\Delta\lambda \geq 0$ , on observe que deux situations distinctes apparaissent. Soit  $\Delta\lambda = 0$ ; alors on en déduit que  $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial}$ . Autrement  $\Delta\lambda > 0$ , et on en déduit que

$$\text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) = \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (4.113)$$

Tenant compte que si  $\Delta\lambda > 0$  on a  $F_{n+1} = 0$ , on peut déduire que

$$|\sigma_{n+1}^{trial}| = |\sigma_{n+1}| + \frac{\Delta\lambda}{D_n} \quad (4.114)$$

en ajoutant  $R_{n+1}$  des deux côtés de l'égalité et tenant compte que si  $\Delta\lambda > 0$  on a  $F_{n+1} = 0$ , il s'ensuit que

$$\Delta\lambda = \frac{F(\sigma_{n+1}^{trial})}{D_n} \quad (4.115)$$

En pratique on définit une prédiction élastique.

**Prédiction élastique :**

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \frac{1}{D_n} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \quad (4.116a)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p, trial} = \varepsilon_{n+1}^p \quad (4.116b)$$

$$p_{n+1}^{trial} = p_n \quad (4.116c)$$

$$D_{n+1}^{trial} = D_n \quad (4.116d)$$

$$F_{n+1}^{trial} = |\sigma_{n+1}^{trial}| - R(p_{n+1}^{trial}) \quad (4.116e)$$

ce qui revient à faire (temporairement) l'hypothèse d'une évolution purement élastique (et

donc en particulier telle que  $\Delta\lambda = 0$ ) des contraintes entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . Une fois la prédiction calculée, il reste alors à vérifier si  $F_{n+1}^{trial} \leq 0$ , donc si la prédiction élastique était admissible. L'intégration locale est achevée au pas  $n + 1$  avec :

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_{n+1}^{p, trial} \quad (4.117a)$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{trial} \quad (4.117b)$$

$$D_{n+1} = D_n^{trial} \quad (4.117c)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} \quad (4.117d)$$

Dans le cas contraire, on procède à une correction non-linéaire.

**Correction non-linéaire :** si  $F_{n+1}^{trial} > 0$ , l'écoulement inélastique a alors lieu . Il faut donc intégrer l'évolution de la plasticité et de l'endommagement durant le pas de temps, et donc  $\Delta\lambda > 0$ . La condition de complémentarité discrète

$$\Delta\lambda f(\sigma_{n+1}, R(p_{n+1})) = 0 \quad (4.118)$$

implique alors

$$f(\sigma_{n+1}, R(p_{n+1})) = 0 \quad (4.119)$$

L'équation (4.119), qui permet de calculer la déformation plastique cumulée  $p_{n+1}$ , est fortement non-linéaire. Pour la résoudre, un schéma itératif de type NEWTON-RAPHSON est adopté. Supposons qu'à l'itération  $i$ , le résidu de (4.119) soit supérieur à la tolérance fixée au préalable. Il faut alors procéder à une nouvelle itération de façon à forcer le résidu à être nul à l'itération  $i + 1$ . L'équation donnant le résidu au pas  $n + 1$  est alors linéarisée autour de la solution à l'itération  $i$ , soit :

$$f(p_{n+1}^{i+1}) = f(p_{n+1}^i) + \left( \frac{\partial f}{\partial p_{n+1}} \right)^i (p_{n+1}^{i+1} - p_{n+1}^i) = 0 \quad (4.120)$$

Une fois le résidu inférieur à la tolérance, le processus itératif est arrêté et les autres variables sont déterminées à l'aide des relations suivantes :

$$\Delta\lambda = \Delta p = p_{n+1} - p_n \quad (4.121a)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + (1 - \beta) \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \quad (4.121b)$$

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{D_n} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - \frac{\Delta\lambda}{D_n} \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \quad (4.121c)$$

$$D_{n+1}^d = D_n^d + \Delta D^d = D_n^d + \beta\Delta\lambda \frac{\text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial})}{\sigma_{n+1}} \quad (4.121d)$$

et l'intégrale locale au pas  $n + 1$  est alors achevée. La rigidité tangente à la fin du pas est donnée par :

$$E_{n+1}^{tg} = \left. \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} \right|_{n+1} = \frac{1}{D_{n+1}} - \frac{1}{D_{n+1} - (D_{n+1})^2 \left. \frac{\partial R}{\partial p} \right|_{n+1}} \quad (4.122)$$

L'algorithme de l'intégration locale du modèle est résumé dans le tableau 4.3.

**Remarque importante :** La présentation rigoureuse de l'intégration numérique du comportement qui vient d'être faite ci-dessus n'est pas nécessaire en pratique si le chargement n'induit pas de changement de signe de contrainte et s'il n'y pas de couplage avec les effets du temps.

1. Connues au pas  $n$  :  $\{\sigma_n, \varepsilon_n, \varepsilon_n^p, p_n, D_n^d\}$

2. Données au pas  $n + 1$  :  $\Delta\varepsilon \Rightarrow \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon$

3. Prédiction élastique : Calculer la contrainte de test et vérifier pour le chargement inélastique

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \frac{1}{D_n} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$R^{trial} = R(p_n)$$

$$f_{n+1}^{trial} = |\sigma_{n+1}^{trial}| - R^{trial}$$

**SI**  $f_{n+1}^{trial} \leq 0$

**ALORS**  $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \\ p_{n+1} = p_n \\ D_{n+1}^d = D_n^d \\ \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} \end{array} \right.$  **FIN** : l'intégration locale est terminée

**SINON** aller à l'étape 5

4. Correction : Résoudre l'équation (4.119) par la méthode NEWTON-RAPHSON pour obtenir la correction  $\Delta\lambda$  et corriger les autres variables

$$\Delta\lambda = \Delta p = p_{n+1} - p_n$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + (1 - \beta) \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial})$$

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{D_n} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - \frac{\Delta\lambda}{D_n} \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial})$$

$$D_{n+1}^d = D_n^d + \Delta D^d = D_n^d + \beta \Delta\lambda \frac{\text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial})}{\sigma_{n+1}}$$

**FIN** : l'intégration locale est terminée

5. Calculer la rigidité tangente prochaine itération globale

$$E_{n+1}^{tg} = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{n+1} = \frac{1}{D_{n+1}} - \frac{1}{D_{n+1} - (D_{n+1})^2 \left. \frac{\partial R}{\partial p} \right|_{n+1}}$$

Tableau 4.3 – Algorithme de l'intégration locale du modèle élastoplastique endommageable : cas unidimensionnel

4.8 Effet de "tension stiffening"

Si l'éprouvette est armée (cf. Figure 4.20a), la qualité de la liaison béton/acier influence considérablement l'apparition des fissures, leur espacement et leur largeur. La première fissure est formée lorsque la contrainte dans le béton, transférée de l'acier au béton via l'action de l'adhérence, atteint la résistance en traction du béton. Au droit de la fissure, la contrainte du béton est nulle et l'acier reprend à lui seul l'effort ; un glissement entre le béton et l'acier a lieu puisque la contrainte d'adhérence  $\tau_b$  est négligeable. Dans la zone adjacente à la fissure, la contrainte d'adhérence  $\tau_b$  augmente rapidement (cf. Figure 4.20b). Il s'en suit une augmentation de la contrainte de traction dans le béton  $\sigma_c$  (cf. Figure 4.20c) et une diminution de la contrainte de traction dans l'acier  $\sigma_s$  (cf. Figure 4.20d). A une certaine distance de la première fissure  $s_o$ , la contrainte d'adhérence s'anule et les contraintes dans le béton et l'acier ne sont plus influencées par la fissure. Ce n'est que si la force de traction augmente, une deuxième fissure va probablement se former lorsque la résistance de traction du béton est dépassée. La procédure continue jusqu'à ce que la fissuration se stabilise. Il n'y a plus de fissures qui se forment si la distance entre les fissures n'est pas suffisamment importante pour que la contrainte de l'adhérence puisse se développer et permettre à la contrainte dans le béton d'atteindre sa limite en une section quelconque située entre deux fissures.

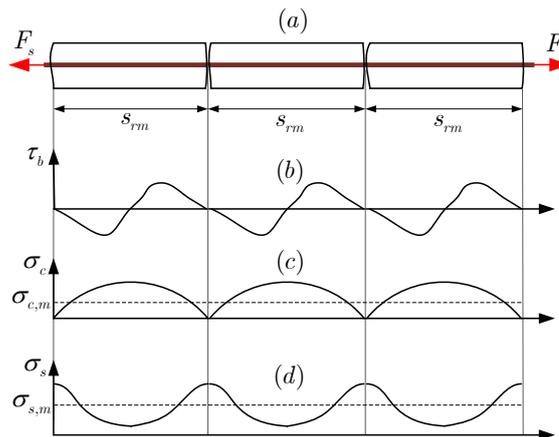


Figure 4.20 – Fissuration dans un tirant en béton armé

Un des principaux facteurs qui affecte la rigidité de l'élément en béton armé est l'adhérence

entre l'armature et le béton. En section fissurée, tous les efforts de traction sont repris par les armatures. Cependant entre fissures adjacentes, les efforts de traction sont transférés de l'armature au béton qui l'enrobe par l'adhérence. Par conséquent, la rigidité globale du béton armé fissuré est plus élevée que les barres d'armature seules. Ce effet est appelé effet de "tension stiffening". L'effet de "tension stiffening" est principalement influencé par la résistance du béton en traction, la valeur limite de la contrainte d'adhérence, la densité d'armature et l'histoire de chargement. La figure 4.21 illustre le diagramme force-déplacement d'un tirant de béton armé tel que proposé par le CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1]. Sur ce diagramme, quatre zones différentes peuvent être distinguées :

1. Une première phase élastique (zone a) ;
2. Ensuite, une phase de formation des fissures au cours de laquelle leur nombre augmente, jusqu'à l'atteinte d'un schéma stabilisé (zone b) ;
3. Une phase de fissuration stabilisée, durant laquelle une augmentation de l'effort entraîne une dégradation de l'adhérence béton/acier et une augmentation de l'ouverture des fissures (zone c) ;
4. La phase stabilisée prend fin avec la plastification de l'acier dans les fissures, qui entraîne une ruine du tirant. L'augmentation de rigidité apportée par le béton fissuré disparaît totalement (zone d).

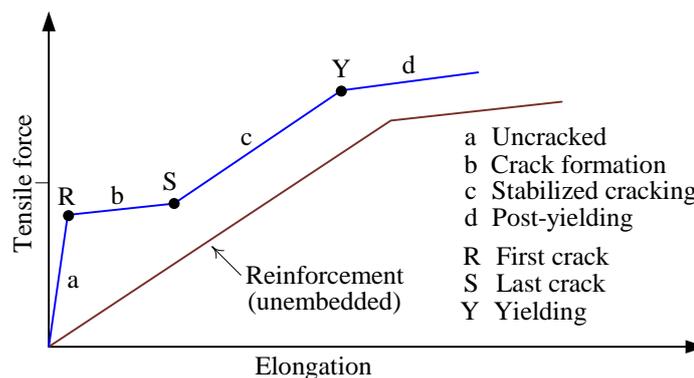


Figure 4.21 – Comportement d'un tirant en béton armé [1]

L'effet de "tension stiffening" dans le cas des poutres mixtes acier-béton se traduit par une augmentation significative de la rigidité de flexion en moment négatif après fissuration. Le

fait d'ignorer cet effet donne en général une surestimation de la flèche. C'est pourquoi une modélisation correcte de l'effet de "tension stiffening" est importante dans l'analyse du comportement des poutres mixtes en service dans la zone des moments négatifs. Notons d'ores et déjà que le module de décharge n'est pas évoqué, ce qui pourrait poser quelques difficultés si une décharge, même numérique, avait lieu au cours d'une simulation. Dans la littérature, il existe deux approches pour modéliser le comportement du béton armé après fissuration :

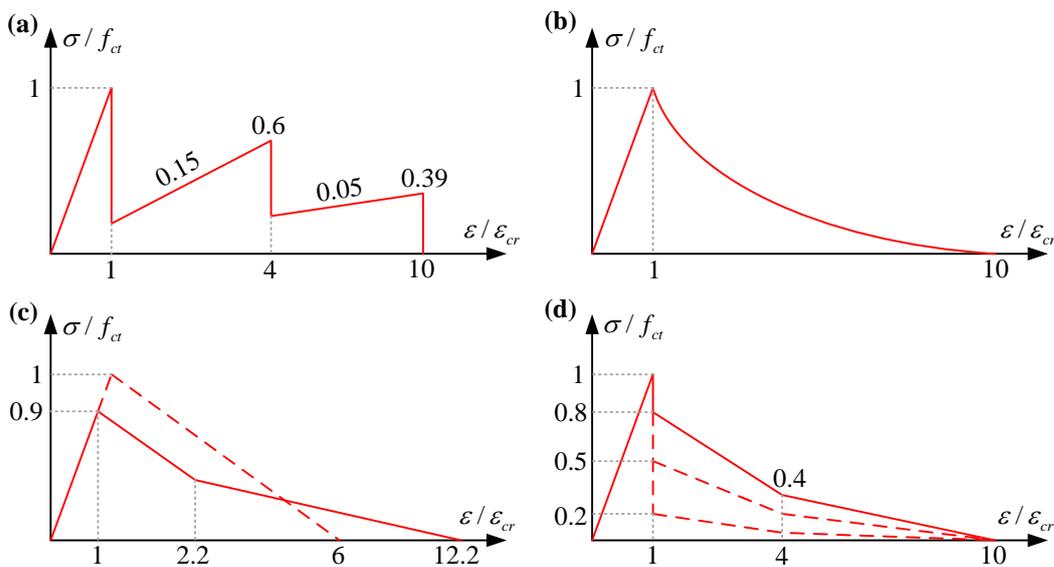


Figure 4.22 – Modèles de "tension stiffening" : (a) Modèle de SCANLON-MURRAY ; (b) Modèle de LIN-SCORDELIS ; (c) Modèle de VEBO-GHALI ; (d) Modèle de GILBERT-WARNER

**1. Approche béton.** En pratique, la résistance à la traction du béton est souvent négligée. Dans certains cas, on suppose un comportement élastique jusqu'à la résistance et on considère que la relation contrainte/déformation s'arrête à cette contrainte limite. Dans l'approche béton, on ajoute une branche adoucissante ("strain softening") à la loi de comportement du béton après fissuration (après la contrainte limite). Cette branche permet de prendre en compte la contribution du béton entre les fissures. La loi de comportement de l'acier reste inchangée. Cette approche a été proposée en premier par SCANLON et MURRAY (1971) [124], considéré plus tard par LIN et SCORDELIS (1975) [93], VEBO et GHALI (1977) [135], GILBERT et WARNER (1978) [69], CARREIRA et CHU (1986)

[47], KAKLAUSKAS et GHABOUSSI [84]. Quatre courbes contrainte-déformation du béton tendu sont présentées dans la figure 4.22. SCANLON et MURRAY (1971) [124] ont proposé une courbe contrainte-déformation avec des marches, présentée à la figure 4.22a. LIN et SCORDELIS (1975) [93] ont utilisé une courbe de décharge graduelle avec une branche polynomiale dans leurs recherches sur les dalles et coques de béton (Figure 4.22b). VEBO et GHALI (1977) [135] ont proposé une branche linéaire et une branche bi-linéaire descendante dans leurs analyses de dalles de béton (Figure 4.22c). GILBERT et WARNER (1978) [69] ont modifié la courbe bi-linéaire de VEBO-GHALI en considérant une discontinuité à la fissuration initiale. Ils ont également proposé une série de courbes pour les couches de béton à proximité de l'armature (Figure 4.22d).

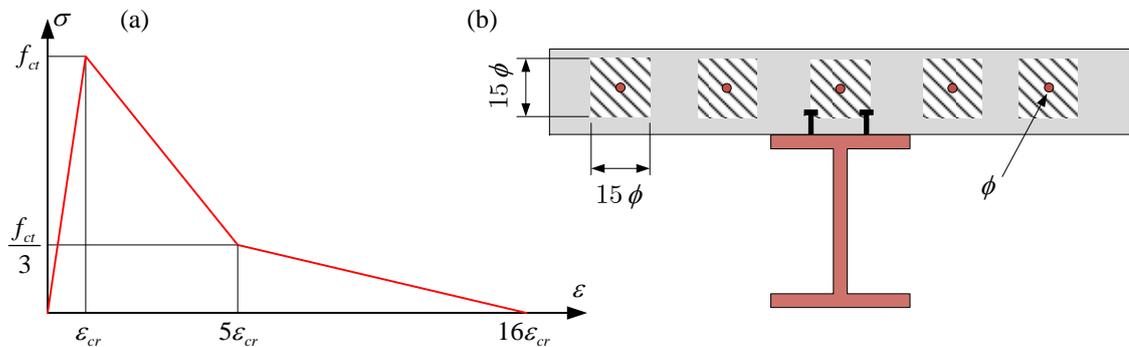


Figure 4.23 – Modèle de MASSICOTTE et al. (1990) [96] : (a) Loi de "tension stiffening" ; (b) Définition des aires influencés par le tension stiffening.

Plus récemment MASSICOTTE et al. (1990) [96] ont développé un modèle très abouti de "tension stiffening". Le modèle, initialement développé pour un tirant de béton, a été ensuite appliqué à l'étude de plaques. Ce modèle fait appel aux hypothèses suivantes :

- Le béton est divisé en deux zones, une intacte et une entièrement fissurée.
- Dans la zone entièrement fissurée, le béton suit une loi de "tension softening" (Figure 4.23a).
- A l'initiation de la fissuration, une liaison parfaite entre le béton et l'acier est supposée exister.
- Les déformations moyennes de l'acier et du béton sont supposées être les mêmes.
- Le "tension stiffening" est supposé s'annuler à la plastification de l'acier (même si l'acier

s'écrouit ensuite).

- Le béton dans lequel apparaît le "tension stiffening" est supposé occuper une zone de  $15\emptyset$  autour de chaque armature (Figure 4.23b).

**2. Approche armature.** Seule l'armature est considérée mais le comportement de l'acier d'armature est modifié pour tenir compte de l'effet "tension-stiffening". Ainsi, la courbe contrainte/déformation moyenne d'un tirant équivalent est utilisée pour l'armature. Cette courbe est obtenue soit par des modèles élément finis dans lesquels l'engrenage et la liaison des matériaux sont représentés (bond-slip based model), soit par des modèles semi-empiriques se basant sur des essais expérimentaux. Beaucoup d'études expérimentales et numériques ont été réalisées et plusieurs modèles ont été donnés : GILBERT et WARNER (1978) [69], SOMAYAJI et SHAS (1981) [129], FLOEGL et MANG (1982) [67], MURAKAMI and HEGEMIER (1986) [76], CHAN et al. [48], OUYANG et al. (1997) [110], BISCHOFF (2003)[38].

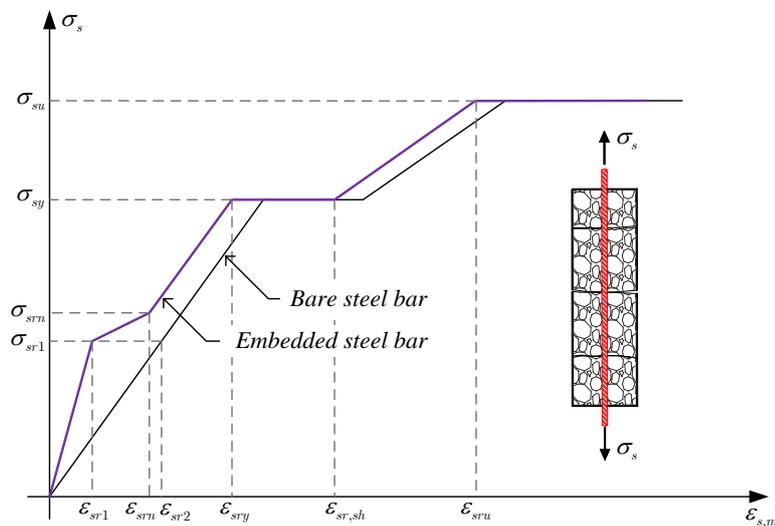


Figure 4.24 – Modèle proposé par CEB-FIP MODEL CODE 1990

Le CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1] a proposé une relation contrainte-déformation moyenne

de l'armature entourée de béton qui est la suivante :

$$\sigma_s = \left(1 + \frac{1}{\alpha\rho}\right) E_s \varepsilon_{s,m} \quad \text{si } \varepsilon_{s,m} \leq \varepsilon_{sr1} \quad (4.123a)$$

$$\sigma_s = \sigma_{sr1} + \frac{\sigma_{srn} - \sigma_{sr1}}{\varepsilon_{srn} - \varepsilon_{sr1}} (\varepsilon_{s,m} - \varepsilon_{sr1}) \quad \text{si } \varepsilon_{sr1} < \varepsilon_{s,m} \leq \varepsilon_{srn} \quad (4.123b)$$

$$\sigma_s = \sigma_{srn} + \frac{f_{sy} - \sigma_{srn}}{\varepsilon_{sry} - \varepsilon_{srn}} (\varepsilon_{s,m} - \varepsilon_{srn}) \quad \text{si } \varepsilon_{srn} < \varepsilon_{s,m} \leq \varepsilon_{sry} \quad (4.123c)$$

$$\sigma_s = f_{sy} \quad \text{si } \varepsilon_{sry} < \varepsilon_{s,m} \leq \varepsilon_{sr,sh} \quad (4.123d)$$

$$\sigma_s = f_{sy} + \frac{f_{su} - f_{sy}}{\varepsilon_{sru} - \varepsilon_{sry}} (\varepsilon_{s,m} - \varepsilon_{sry}) \quad \text{si } \varepsilon_{sr,sh} < \varepsilon_{s,m} \leq \varepsilon_{sru} \quad (4.123e)$$

$$\sigma_s = f_{su} \quad \text{si } \varepsilon_{s,m} > \varepsilon_{sru} \quad (4.123f)$$

où :

- $\alpha$  et  $\rho$  désignent respectivement le rapport des modules d'élasticité et le rapport entre la section d'armature et celle du béton concerné ;
- $\sigma_{sr1}$  est la contrainte dans l'armature au droit de la première fissure lorsque celle-ci se forme ;
- $\sigma_{srn}$  est la contrainte dans l'armature au droit de la dernière fissure lorsque celle-ci se forme ;
- $\varepsilon_{sr1}$  et  $\varepsilon_{sr2}$  sont respectivement les déformations dans l'armature au point de glissement nul et à la fissure lorsque la contrainte atteint la résistance  $f_{tm}$  ;
- $\varepsilon_{srn} = \sigma_{srn}/E_s - \beta_t(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1})$  ;
- $\varepsilon_{sry} = \varepsilon_{sy} - \beta_t(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1})$  ;
- $\varepsilon_{sr,sh} = \varepsilon_{sh} - \beta_t(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1})$  ;
- $\varepsilon_{sru} = \varepsilon_{sr,sh} + \delta(1 - \sigma_{sr1}/f_{sy})(f_{su} - f_{sy})/E_{sh}$  ;
- $\beta_t = 0.4$  pour le chargement instantané, et  $\beta_t = 0.5$  pour un chargement à long terme et un chargement cyclique ;
- $\delta = 0.8$  un coefficient qui prend en compte du rapport  $f_{su}/f_{sy}$  et la contrainte de résistance  $f_{sy}$ .

Dans les simulations que nous effectuons aux chapitres 5 et 6, nous ferons en fait usage de l'approche béton pour modéliser le tension-stiffening.

### 4.9 Connecteurs

Le rôle des connecteurs est primordial; sans eux, il n'y a pas de collaboration entre la section en acier et la dalle de béton. Ils permettent de limiter le glissement pouvant se produire le long de l'interface acier-béton. En assurant ainsi une reprise des efforts de cisaillement longitudinaux, ils permettent d'obtenir une section mixte dont les deux composants travaillent ensemble.

Les connecteurs les plus utilisés sont les goujons à tête soudés qui sont mis en place aujourd'hui sans problèmes. De plus, ces connecteurs ont l'avantage de présenter la même résistance dans toutes les directions latérales. Ils permettent également une bonne redistribution des efforts de cisaillement grâce à leur ductilité. La tête du goujon favorise sa résistance en cisaillement et surtout permet d'empêcher le soulèvement de la dalle de béton. La première utilisation des goujons est due à VIEST, SIESS et NEWMARK [104]. Au départ, ils étaient soudés manuellement jusqu'à l'apparition du système industriel proposé et commercialisé par Nelson Stud Welding (cf. Figure 4.25).

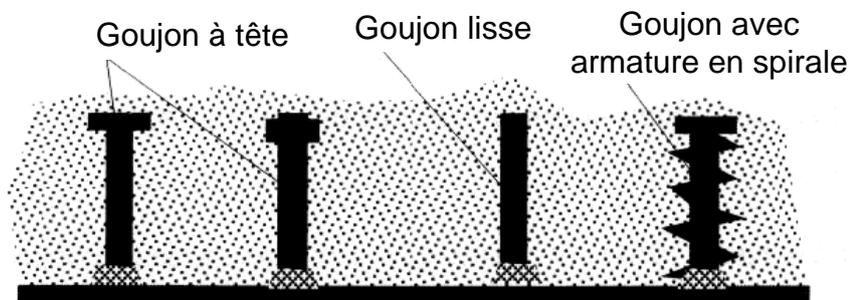


Figure 4.25 – Types de goujons soudés sur la semelle supérieure du profilé métallique

L'Eurocode 4 [3] distingue deux classes de connecteurs : les connecteurs ductiles et les connecteurs non-ductiles qui présentent des capacités différentes de déformation en glissement. Un connecteur est dit ductile lorsque sa capacité de déformation est suffisante pour justifier, à l'état limite ultime de la poutre, l'hypothèse d'un comportement parfaitement plastique de la connexion (cf. la courbe "effort de cisaillement-glissement" avec une branche quasi-horizontale à la figure 4.26). Dans le cadre des règles d'application de l'Eurocode

4 [3], les connecteurs sont considérés ductiles lorsqu'ils présentent une capacité de glissement au moins égale à 6 *mm*.

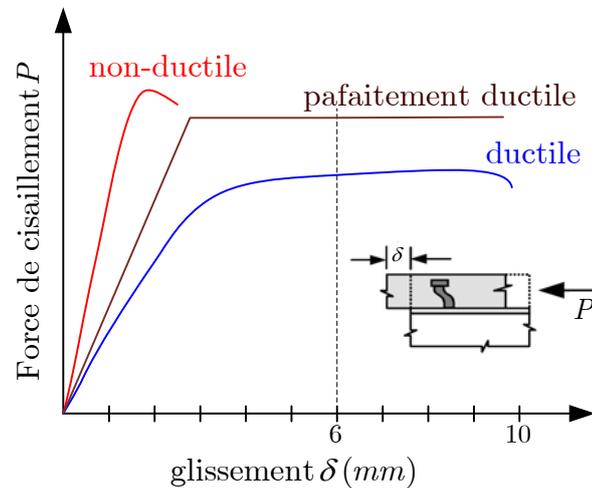


Figure 4.26 – Comportement des connecteurs

En revanche, un connecteur est dit non ductile, si son comportement est essentiellement élastique avant rupture. Ainsi, un connecteur non ductile présente une courbe "effort de cisaillement-glissement" sans palier avec une rupture dès que l'effort  $P$  atteint la résistance (cf. Figure 4.26).

Généralement, on utilise des connecteurs relativement plutôt ductiles : en priorité des goujons avec ou sans tête connecteurs, éventuellement des connecteurs soudés réalisés avec des tronçons de cornières. Dans le passé, on utilisait des connecteurs véritablement rigides (de type butée), mais ils sont moins pratiques à poser que les goujons et impliquent un dimensionnement élastique de la connexion en sécurité (en raison du risque de rupture fragile).

Depuis les années 50 [133], relativement à la résistance ultime d'un connecteur et à son comportement glissement-cisaillement, de nombreux chercheurs ont essayé de trouver des formules empiriques à partir d'essais de type "Push-out" (cf. Figure 4.27). Ce type d'essai, standardisé pour les goujons soudés, a fait l'objet de tentatives de généralisation à d'autre

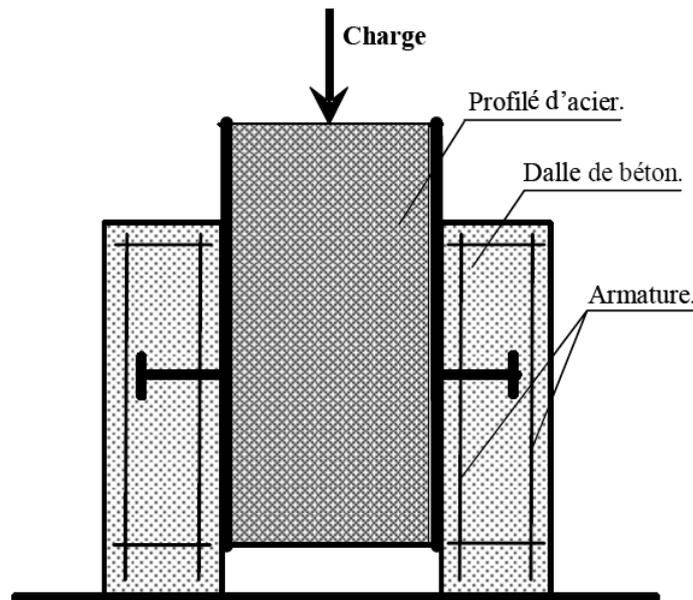


Figure 4.27 – Principe de l'essai "Push-out"

type de connecteurs, tentatives qui ne font pas l'unanimité sur le plan international en raisons de nombreux facteurs (géométrie des connecteurs, utilisation de tôle mince profilée en dalle mixte, découpage de l'âme acier en forme de queue d'aronde, etc..).

La version actuelle de l'Eurocode 4 (paragraphe 6.6.3.1) a adopté comme formule de calcul de la résistance ultime d'un goujon à tête soudé (automatique avec un bourrelet normal), après un recalibrage récent des coefficients partiels de sécurité, la formule suivante [140] :

$$P_{Rd} = \min \left[ P_{Rd}^{(1)}, P_{Rd}^{(2)} \right] \quad (4.124)$$

où  $P_{Rd}^{(1)}$  correspond à une ruine de l'acier du goujon :

$$P_{Rd}^{(1)} = \frac{0.8 f_u \pi d^2 / 4}{\gamma_v} \quad (4.125)$$

et  $P_{Rd}^{(2)}$  à une ruine de type pression diamétrale du béton enrobant le goujon :

$$P_{Rd}^{(2)} = \frac{0.29 \alpha d^2 \sqrt{f_{ck} E_{cm}}}{\gamma_v} \quad (4.126)$$

avec :

$$\alpha = 0.2 \left( \frac{h_{sc}}{d} + 1 \right) \quad \text{pour} \quad 3 \leq h_{sc}/d \leq 4 \quad (4.127)$$

$$\alpha = 1 \quad \text{pour} \quad h_{sc}/d > 4 \quad (4.128)$$

où :

- $\gamma_V$  est le facteur partiel dont la valeur recommandée est 1.25 ;
- $d$  est le diamètre de la tige du goujon, avec  $d \subseteq [16 ; 25]$  mm ;
- $f_u$  est la résistance à la traction ultime spécifiée du matériau du goujon, mais sans être supérieure à 500 N/mm ;
- $f_{ck}$  est la résistance caractéristique à la compression sur cylindre à l'âge considéré du béton ;
- $E_{cm}$  est la valeur moyenne du module sécant du béton ;
- $h_{sc}$  est la hauteur nominal hors-tout du goujon.

En ce qui concerne la loi de comportement d'un goujon soudé, OLLGAARD, SLUTTER et FISHER [108] ont proposé, à la suite d'une série de 48 essais "Push-out", la relation explicite "effort de cisaillement-glissement" suivante :

$$P = P_u [1 - \exp(-0.7 |\delta|)]^{0.4} \quad (4.129)$$

où le glissement  $\delta$  est exprimé en *mm* et  $P_u$  est la résistance ultime d'un connecteur en cisaillement.

En 1983, ARIBERT et al. ont réalisé une série d'essais "Push-out" sur des éprouvette comportant une couche de silicone entre l'acier et le béton pour éviter tout effet d'adhérence ; ces essais ont conduit à remplacer l'exposant 0.4 de la formule (4.129) par 0.8, donnant une meilleure concordance avec les courbes expérimentales.

Plus récemment, SALARI [120] a proposé un modèle explicite du comportement non-linéaire cyclique des goujons. Ce modèle est capable de prendre en compte la perte de résistance et de rigidité du connecteur au cours de sollicitations cycliques. La courbe

enveloppe est donnée par les formules (voir figure 4.28c) :

$$P = P_u \alpha_1 \bar{\delta} \exp\left(-\alpha_2 \bar{\delta}^{\alpha_3}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq \bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta_u} \leq 1 \quad (4.130)$$

$$P = P_u \beta_1 \exp\left(-\beta_2 (\bar{\delta} - 1)^{\beta_3}\right) + P_{fu} \quad \text{pour} \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta_u} > 1 \quad (4.131)$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{E_0 \delta_u}{P_u} & \beta_1 &= 1 - \frac{P_u}{P_{fu}} \\ \alpha_2 &= \text{Ln}(\alpha_1) & \beta_2 &= -\frac{\text{Ln}(R_1)}{(\bar{\delta}_1 - 1)^{\beta_3}} \\ \alpha_3 &= \frac{1}{\alpha_2} & \beta_3 &= \frac{\text{Ln}(R_1) - \text{Ln}(R_2)}{\text{Ln}(\bar{\delta}_1 - 1) - \text{Ln}(\bar{\delta}_2 - 1)} \\ R_i &= \frac{P_i - P_{fu}}{P_u - P_{fu}} & \bar{\delta}_i &= \frac{\delta_i}{\delta_u}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Dans ces formules, on désigne par :

- $\delta_u$  le glissement correspondant à l'effort ultime  $P_u$  ;
- $P_{fu}$  est la résistance d'adhérence relative à la friction ;
- $\delta_1$  est le glissement correspondant à l'effort  $P_1 = 0.95P_u$  après le pic ;
- $\delta_2$  est le glissement correspondant à l'effort  $P_2 = 1.05P_{fu}$  après le pic ;

Le comportement cyclique de ce modèle n'est pas abordée ici. Lecteur peut trouver plus de détail dans la référence [120].

#### 4.9.1 Modèles mécaniques choisis pour les connecteurs

Dans notre étude, les connecteurs sont modélisés comme un ressort dont le comportement peut être adopté soit par un modèle élasto-plastique soit par un modèle explicite de relation "effort de cisaillement-glissement". A l'état actuel, trois modèles ont été intégré dans notre propre programme (cf. Figure 4.28). Le premier est élastique parfaitement plastique. Le deuxième est basé sur la relation explicite généralisée de OLLGAARD et al. :

$$P = P_u [1 - \exp(c_1 |\delta|)]^{c_2} \quad (4.132)$$

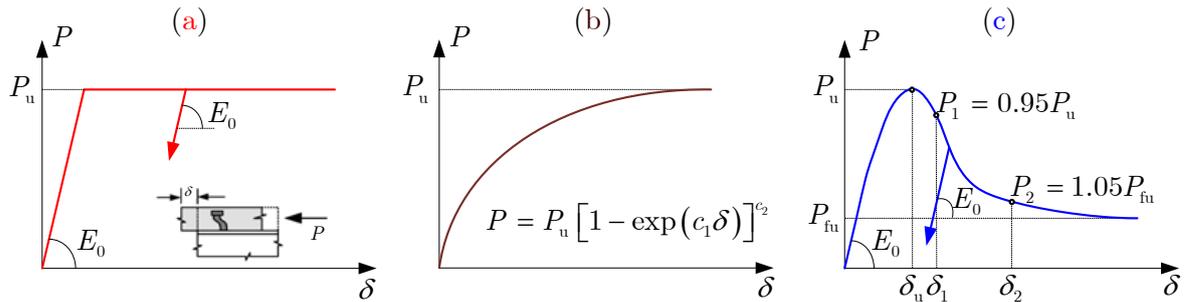


Figure 4.28 – Modèles mécaniques utilisés pour les connecteurs : (a) modèle élastique parfaitement plastique ; (b) modèle généralisé de OLLGAARD et al ; (c) modèle de SALARI

où les coefficients  $c_1$  et  $c_2$  sont déterminés de sorte que la courbe "effort de cisaillement-glissement" analytique est la plus proche possible de la courbe expérimentale. Le troisième modèle est celui de SALARI [120] qui peut être intéressant en comportement cyclique.

#### 4.10 Synthèse et conclusions

Dans ce chapitre, nous avons abordé la modélisation du comportement non linéaire de l'acier, du béton et des connecteurs de type goujon. Le fil conducteur du chapitre a été de présenter ces lois dans un cadre rigoureux qui est celui de la mécanique non-linéaire des matériaux qui repose sur l'usage de variables internes pour décrire les irréversibilités. Les modèles existant ont aussi été réécrits dans ce cadre. Classiquement, les modèles de comportement sont donnés sous la forme d'un diagramme contrainte-déformation et décrit par une ou plusieurs relations entre la contrainte et la déformation totale. Cette écriture, bien que satisfaisante dans un contexte "élément fibre", peut être à l'origine de difficultés d'ordre numérique. L'écriture des modèles de comportement dans un cadre rigoureux permet de rationaliser l'implémentation numérique sous un format unique. Cependant, la difficulté est qu'une telle démarche peut conduire à des fonctions d'écroutissement complexes.

Dans ce chapitre, un modèle de plasticité couplé à l'endommagement a été développé pour le béton. Ce modèle a été ici adapté pour permettre de reproduire exactement la courbe enveloppe contrainte/déformation en compression du modèle CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1]. La procédure d'identification, qui est décrite, conduit à des courbes d'écroutissement complexes. La comparaison entre les résultats obtenus par ce modèle et les résultats

expérimentaux indique le modèle est capable de prédire le comportement uniaxial du béton sous des charges/décharges multiples. Le phénomène de tension-stiffening a été pris en compte dans ce modèle en modifiant la fonction d'érouissage en traction du béton pour la zone concernée par le phénomène. Un algorithme d'intégration numérique des relations de comportement a été développé.

Enfin, les connecteurs (goujons) ont été modélisés par un ressort dont le comportement est décrit soit par un modèle élastoplastique, soit par un modèle explicite.

## CHAPITRE 5

### MODÈLES ÉLÉMENTS FINIS DE POUTRE MIXTE

#### 5.1 Introduction

Au chapitre 2, nous avons présenté une solution analytique pour une poutre mixte élastique quelconque avec chargement uniforme, et ce pour les deux modèles de connexion. Cette solution nous a servi de guide pour développer, au chapitre 3, une solution semi-analytique pour l'analyse des effets du temps dans les poutres mixtes en supposant un comportement viscoélastique linéaire pour le béton. Bien que complexe, de telles solutions ne sont possibles que si le comportement est linéaire ou, pour être plus exact affiné d'un comportement linéaire. Dès que le comportement des matériaux devient non linéaire, il est nécessaire de recourir à la méthode des éléments finis. L'approche en déplacements est la plus courante. Elle conduit aux éléments finis en déplacements qui peuvent rencontrer des problèmes de verrouillage de la courbure (curvature locking) pour le modèle de connexion continue à rigidité élevée, dont l'utilisation peut être donc limitée. Une manière simple d'éviter ces problèmes numériques consiste à recourir au modèle de connexion discrète, le prix à payer étant l'augmentation, parfois considérable, du nombre de degrés de liberté. Une autre façon d'améliorer les performances et la précision est d'abandonner la formulation déplacement pour les formulations équilibre et mixte qui présentent des avantages certains, notamment pour les problèmes fortement non-linéaires. Ainsi, ces formulations méritent que l'on y porte toute notre attention. Dans ce chapitre, nous présentons de façon détaillée les formulations éléments finis pour les poutres mixtes acier-béton et ce pour les deux modèles de connexion. Les trois formulations courantes (déplacement, équilibre et mixte) sont développées ainsi que les algorithmes associés. Le cas d'un chargement réparti entre les noeuds, qui n'a pas été traité dans la littérature, est inclus dans la formulation "équilibre". Dans notre présentation, nous partirons de la formulation la plus générale (connexion continue) et nous déduirons les relations fondamentales pour la connexion discrète en suivant le schéma développé au chapitre 2. Les outils numériques développés sont validés en comparant les prédictions des modèles à des résultats d'essais expérimentaux. On observe que les trois formulations conduisent à des résultats satisfaisants. Il s'en suit une analyse de l'influence du modèle de connexion sur la réponse d'une poutre mixte. Une

comparaison des performances des trois formulations clôture le chapitre.

## 5.2 Problème aux limites

### 5.2.1 Problème aux limites continu

On considère une poutre mixte qui occupe à l'instant  $t_0$ , un domaine  $\Omega$  de l'espace physique  $\mathcal{P}$  qui s'identifie à un espace euclidien à une dimension  $\mathbb{R}$  (cf. Figure 5.1). Le bord de ce domaine  $\partial\Omega$  est défini (constitué) par les deux points matériels d'extrémité. Tout point  $\mathcal{M} \in \bar{\Omega}$  est repéré par sa coordonnée  $x$ . La poutre mixte est soumise, au cours de l'intervalle  $[0, T]$ , à des sollicitations mécaniques que l'on peut caractériser à tout instant  $t$ , par une densité d'effort linéique  $p_z$  appliquée dans le domaine  $\Omega$ . Sur une partie  $\partial_u\Omega$  de la frontière, des déplacements généralisés sont imposés alors que sur la partie complémentaire  $\partial_t\Omega$  des efforts généralisés sont imposés. Les parties  $\partial_u\Omega$  et  $\partial_t\Omega$  (singletons) satisfont :

$$\partial_t\Omega \cup \partial_u\Omega = \partial\Omega \quad , \quad \partial_t\Omega \cap \partial_u\Omega = \emptyset \quad (5.1)$$

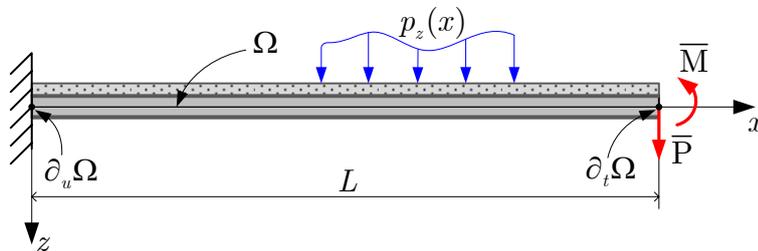


Figure 5.1 – Problème aux limites associé à une poutre mixte

Le chargement est supposé être quasi statique et on se place en condition isotherme. Sous l'action des sollicitations, la poutre mixte se déforme ; on note  $\mathbf{d}(\mathcal{M}, t)$  le vecteur déplacement au point  $\mathcal{M}$  de  $\Omega$  et à l'instant  $t$ . Se plaçant dans le cadre des petites déplacements, ce qui signifie que les différentes configurations occupées par le milieu peuvent être confondues avec la configuration initiale  $\Omega$ , on associe à  $\mathbf{d}$  le tenseur linéarisé des déformations généralisées  $\mathbf{e}(\mathbf{d})$ . Il importe de déterminer les champs inconnus de déplacement  $\mathbf{d}(\mathcal{M}, t)$ , de déformation  $\mathbf{e}(\mathcal{M}, t)$  et de contraintes généralisées  $\mathbf{D}(\mathcal{M}, t)$  sur  $\Omega \times [0, T]$ . Ils sont

solutions du problème aux limites  $\mathcal{P}_L^1$  suivant :

<p><math>\mathcal{P}_L^1</math> : Trouver <math>\mathbf{d}</math>, <math>\mathbf{D}</math> et <math>\mathbf{e}</math> sur <math>\Omega \times [0, T]</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Conditions initiales           <math display="block">\forall \mathcal{M} \in \Omega : \mathbf{d}(\mathcal{M}, 0) = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{D}(\mathcal{M}, 0) = \mathbf{0}</math> </li> <li>• Equations d'équilibre           <math display="block">\forall \mathcal{M} \in \Omega \text{ et } t \in [0, T] : \partial \mathbf{D}(x) - \partial_{sc} D_{sc}(x) - \mathbf{P}_e = 0</math> </li> <li>• Equations de compatibilité           <math display="block">\forall \mathcal{M} \in \Omega \text{ et } t \in [0, T] : \mathbf{e}(x) = \partial \mathbf{d}(x) \quad , \quad \partial_{sc} \mathbf{d}(x) - d_{sc}(x) = 0</math> </li> <li>• Comportement           <math display="block">\forall \mathcal{M} \in \Omega \text{ et } t \in [0, T] : \mathbf{D}(\mathcal{M}, t) = \mathcal{C}(\mathbf{d}(\mathcal{M}, \tau), \tau \leq t)</math> </li> <li>• Conditions aux limites           <p style="margin-left: 20px;">Sur les efforts : <math>\mathcal{M} \in \partial_t \Omega \text{ et } t \in [0, T] : \mathbf{D}(x = L) = \bar{\mathbf{D}}</math></p> <p style="margin-left: 20px;">Sur les déplacements : <math>\mathcal{M} \in \partial_u \Omega \text{ et } t \in [0, T] : \mathbf{d}(x = 0) = \bar{\mathbf{d}}</math></p> </li> </ul>	(5.2)
--	-------

La forme fonctionnelle de la loi de comportement synthétise le principe de causalité et le caractère local en variable d'espace. Tout champ de contraintes généralisées qui satisfait le groupe des équations d'équilibre (2.16) est dit statiquement admissible, en abrégé *s.a.*, et *s.a. à zéro* pour des efforts de bord nuls ( $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$ ). De même, tout champ de déplacement qui vérifie le groupe des équations cinématique (2.40-2.41) est dit cinématiquement admissible, en abrégé *c.a.*, et *c.a. à zéro* pour un vecteur déplacement imposé nul sur la frontière ( $\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$ ).

### 5.2.2 Problème aux limites discret en temps

Le caractère non-linéaire du comportement impose une discrétisation en temps du problème aux limites, ce qui revient à ne satisfaire les équations de champs (équilibre et compatibilité) qu'à certains instants particuliers. On adopte le cadre classique d'une plasticité indépendante du temps ou de la vitesse (rate-independent plasticity). Ainsi, le temps dont il est fait usage pour écrire commodément les relations de comportement, n'est pas le temps physique mais un temps purement cinématique, permettant de repérer sur une échelle croissante, une succession d'événements - généralement associés à des modifications des sollicitations - constituant le trajet de chargement. En pratique, l'intervalle  $[0, T]$  est

divisé en  $N$  sous-intervalles tel que  $t_1 = 0$  et  $t_N = T$ . L'ensemble des bornes de temps est désigné par  $[0, T]_\Delta = \{t_1, \dots, t_n, \dots, t_N\}$ . Les champs mécaniques sont continus en espace. L'équilibre à la borne de temps  $t_{n+1}$  est solution du problème aux limites suivant :

$\mathcal{P}_L^1$ : Trouver $\mathbf{d}$ , $\mathbf{D}$ et $\mathbf{e}$ sur $\Omega \times [0, T]_\Delta$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Conditions initiales                     <math display="block">\forall \mathcal{M} \in \Omega : \mathbf{d}(\mathcal{M}, 0) = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{D}(\mathcal{M}, 0) = \mathbf{0}</math> </li> <li>• Equations d'équilibre                     <math display="block">\forall \mathcal{M} \in \Omega : \partial \mathbf{D}_{n+1}(x) - \partial_{sc} D_{sc} _{n+1}(x) - \mathbf{P}_e _{n+1} = 0</math> </li> <li>• Equations de compatibilité                     <math display="block">\forall \mathcal{M} \in \Omega : \mathbf{e}_{n+1}(x) = \partial \mathbf{d}_{n+1}(x) \quad , \quad d_{sc} _{n+1}(x) = \partial_{sc} \mathbf{d}_{n+1}(x)</math> </li> <li>• Comportement                     <math display="block">\forall \mathcal{M} \in \Omega \text{ et } t \in [0, T] : \mathbf{D}(\mathcal{M}, t) = \mathcal{C}(\mathbf{d}(\mathcal{M}, \tau), \tau \leq t)</math> </li> <li>• Conditions aux limites                     <p>Sur les efforts : <math>\mathcal{M} \in \partial_t \Omega : \mathbf{Q}_{n+1}(x) = \overline{\mathbf{Q}}_{n+1}(x)</math></p> <p>Sur les déplacements : <math>\mathcal{M} \in \partial_u \Omega : \mathbf{d}_{n+1}(x) = \overline{\mathbf{d}}_{n+1}(x)</math></p> </li> </ul>	(5.3)
---	-------

Le problème nécessite une discrétisation en espace. Il est nécessaire de choisir le champ mécanique que l'on souhaite discrétiser qui devient le champ inconnu principal, les autres grandeurs mécaniques étant déduites (grandeurs secondaires). On peut également choisir de discrétiser en espace plus d'un champ mécanique ; on parle alors de méthode mixte.

### 5.3 Formulation en déplacements

Dans ce modèle, c'est le champ de déplacement qui est discrétisé et constitue ainsi l'inconnue fondamentale du problème aux limites. Ainsi, le champ de déplacement est connu en tout point de la structure tandis que le champ de contrainte n'est connu qu'aux points d'intégration. Ces éléments sont construits à partir d'une formulation variationnelle des équations d'équilibre qui relève du principe des travaux virtuels, applicable quelque soit le comportement du matériau constituant la structure. Dans la section qui suit, nous détaillons cette formulation pour le cas de la connexion répartie ; le cas de la connexion ponctuelle s'en déduit sans trop de difficultés. Avant de développer les éléments finis de type déplacement, il est nécessaire de réécrire les équations d'équilibre sous une forme

plus appropriée, forme dite "faible" ou variationnelle.

### 5.3.1 Connexion continue

#### 5.3.1.1 Formulation variationnelle des équations d'équilibre

Les éléments finis de type déplacement occupent une place importante car ils constituent la grande majorité des modèles utilisés en pratique. Leur introduction dans un code de calcul est classique. Toutefois, les modèles déplacement ne sont pas exempt de problèmes qui nécessitent un soin particulier dans le choix des fonctions de forme, et ce afin d'éviter le verrouillage numérique (connexion continue) qui sera expliqué plus tard. Dans cette formulation, le champ des déplacements est l'inconnue fondamentale et les champs d'efforts internes apparaissent comme des variables secondaires, déterminées (de manière itérative dans le cas non-linéaire) à partir des déplacements. Classiquement, le champ des déplacements s'exprime en fonction des déplacements nodaux des éléments finis à l'aide de fonctions d'interpolation appropriées de déplacements. Les déformations en section sont directement obtenues à travers des relations cinématiques. Par conséquent, les relations cinématiques sont satisfaites de manière stricte en tout point de la structure. Lorsque les déformations généralisées sont connues, on peut calculer les forces associées en utilisant les relations forces/déformations généralisées qui traduisent le comportement de la section. Ne pouvant satisfaire de manière stricte à la fois la cinématique et les relations d'équilibre, une formulation faible (variationnelle) des équations d'équilibre est considérée :

$$\int_L \delta \mathbf{d}^T (\partial \mathbf{D} - \partial_{sc} D_{sc} - \mathbf{P}_e) dx = 0 \quad \forall \delta \mathbf{d} \in \mathcal{U}_0(\Omega) \quad (5.4)$$

où  $\delta \mathbf{d}$  est tout vecteur de l'ensemble  $\mathcal{U}_0(\Omega)$  qui regroupe les déplacements virtuels (fonctions de poids) qui sont cinématiquement admissibles, sous réserve qu'ils soient suffisamment différentiables et que les conditions homogènes de frontière soient également satisfaites. L'équation (5.4) est la forme intégrale des équations d'équilibre pour une poutre mixte. En développant cette équation, on a :

$$\int_L \delta u_c \left( \frac{dN_c}{dx} + D_{sc} \right) dx + \int_L \delta u_s \left( \frac{dN_s}{dx} - D_{sc} \right) dx + \int_L \delta v \left( \frac{d^2 M}{dx^2} + H \frac{dD_{sc}}{dx} + p_z \right) dx = 0 \quad (5.5)$$

En intégrant par parties les trois termes de la relation (5.5) :

$$\int_L \delta u_c \frac{dN_c}{dx} dx = [\delta u_c N_c]_0^L - \int_L \frac{d\delta u_c}{dx} N_c dx \quad (5.6)$$

$$\int_L \delta u_s \frac{dN_s}{dx} dx = [\delta u_s N_s]_0^L - \int_L \frac{d\delta u_s}{dx} N_s dx \quad (5.7)$$

$$\int_L \delta v \frac{d^2 M}{dx^2} dx = \left[ \delta v \frac{dM}{dx} - \frac{d\delta v}{dx} M \right]_0^L + \int_L \frac{d^2 \delta v}{dx^2} M dx \quad (5.8)$$

$$\int_L \delta v \frac{dD_{sc}}{dx} dx = [\delta v D_{sc}]_0^L - \int_L \frac{d\delta v}{dx} D_{sc} dx \quad (5.9)$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \int_L \frac{d\delta u_c}{dx} N_c dx + \int_L \frac{d\delta u_s}{dx} N_s dx - \int_L \frac{d^2 \delta v}{dx^2} M dx + \int_L \left( \delta u_s - \delta u_c + H \frac{d\delta v}{dx} \right) D_{sc} dx \\ = \int_L \delta v p_z dx + [\delta u_c N_c + \delta u_s N_s + \delta v T + \delta \theta M]_{x=0}^{x=L} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Le dernier terme du membre de droite de l'équation (5.10), qui représente le travail virtuel des efforts de frontière, est remplacé par l'expression (produit scalaire) :  $\delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}$ . Par ailleurs, le champ de déplacements virtuels étant cinématiquement admissible, l'équation (5.10) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\int_L (\delta \mathbf{e}^T \mathbf{D} + \delta d_{sc} D_{sc}) dx = \int_L \delta \mathbf{d}^T \mathbf{P}_e dx + \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q} \quad (5.11)$$

La relation (5.11) n'est rien d'autre que principe des travaux virtuels qui traduit une *forme faible* des équations d'équilibre. L'avantage de cette forme est que l'on peut ajouter des efforts ponctuels (force, moment etc...) à la charge répartie  $p_z$ . Si l'on identifie la poutre à un élément fini de longueur  $L$ , la relation (5.11) permet de construire la relation forces/déplacement de l'élément fini (les efforts de frontière deviennent les forces nodales). Le principe des travaux virtuels doit être satisfait indépendamment de la loi de comportement. Lorsque les matériaux ont un comportement non-linéaire, il n'est pas possible de le satisfaire à chaque instant, il est alors satisfait de manière discrète à certaines bornes de temps qui correspondent à l'évolution du chargement, soit pour la borne  $t_{n+1}$  :

$$\int_L (\delta \mathbf{e}^T \mathbf{D}_{n+1} + \delta d_{sc} D_{sc} |_{n+1}) dx = \int_L \delta \mathbf{d}^T \mathbf{P}_e |_{n+1} dx + \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}_{n+1} \quad \forall \delta \mathbf{d} \quad (5.12)$$

On se place dans un sous-intervalle donné  $[t_n, t_{n+1}]$ . Dans cet intervalle, les relations de comportement (2.47) et (2.57) s'écrit sous la forme linéarisée suivante :

$$\mathbf{D}^i = \mathbf{D}^{i-1} + \mathbf{k}^{i-1} \Delta \mathbf{e} \quad (5.13)$$

$$D_{sc}^i = D_{sc}^{i-1} + k_{sc}^{i-1} \Delta d_{sc} \quad (5.14)$$

où l'indice "i" désigne l'itération d'équilibre,  $\mathbf{k}^{i-1}$  et  $k_{sc}^{i-1}$  sont respectivement la matrice de rigidité tangente de la section et la raideur de la connexion, déterminées à l'itération  $i - 1$ . En combinant l'équation (5.12) avec les relations (5.13) et (5.14), on obtient la relation suivante :

$$\int_L [\delta \mathbf{e}^T (\mathbf{D}^{i-1} + \mathbf{k}^{i-1} \Delta \mathbf{e}) + \delta d_{sc} (D_{sc}^{i-1} + k_{sc}^{i-1} \Delta d_{sc})] dx = \int_L \delta \mathbf{d}^T \mathbf{P}_e dx + \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q} \quad (5.15)$$

où les indices "n + 1" ont été supprimés afin de ne pas alourdir les notations. L'équation (5.15), qui satisfait l'équilibre de façon faible (sous forme intégrale) et les relations cinématiques et le comportement linéarisé de façon forte, est l'équation de base pour la formulation des éléments finis de type déplacement d'une poutre mixte avec l'interaction des composants acier et béton. Cette équation doit être discrétisée en terme de déplacements nodaux et de forces nodales d'un élément pour obtenir l'équation fondamentale de l'élément fini.

### 5.3.1.2 Discrétisation en élément fini

L'équation (5.11) peut être utilisée pour développer un élément de déplacement de poutre mixte. Pour cela, le champ de déplacement  $\mathbf{d}(x)$  est approché en terme de déplacements nodaux  $\mathbf{q}$  :

$$\mathbf{d}(x) = \mathbf{a}(x) \mathbf{q} \quad (5.16)$$

où  $\mathbf{a}(x) = [\mathbf{a}_s(x)^T \quad \mathbf{a}_c(x)^T \quad \mathbf{a}_v(x)^T]^T$  est la matrice des fonctions d'interpolation de déplacements. Elle dépend du nombre de degrés de liberté de l'élément que l'on a choisi.

En utilisant les relations cinématiques (2.40) et (2.41), les déformations généralisées et le glissement à l'interface peuvent également être calculées à partir des déplacements nodaux

par :

$$\mathbf{e}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{q} \quad (5.17)$$

$$d_{sc}(x) = \mathbf{B}_{sc}(x)\mathbf{q} \quad (5.18)$$

où  $\mathbf{B}(x) = \partial\mathbf{a}(x)$  et  $\mathbf{B}_{sc}(x) = \partial_{sc}\mathbf{a}(x)$ .

En substituant les relations (5.16), (5.17) et (5.18) dans l'équation (5.15), on obtient :

$$\delta\mathbf{q}^T \left\{ \int_L [\mathbf{B}^T (\mathbf{D}^{i-1} + \mathbf{k}^{i-1}\mathbf{B}\Delta\mathbf{q}) + \mathbf{B}_{sc}^T (D_{sc}^{i-1} + k_{sc}^{i-1}\mathbf{B}_{sc}\Delta\mathbf{q})] dx \right\} = \delta\mathbf{q}^T \left[ \int_L \mathbf{a}^T \mathbf{P}_e dx + \mathbf{Q} \right] \quad (5.19)$$

Cette relation doit être vérifiée quelque soit  $\delta\mathbf{q}$ , d'où :

$$\int_L [\mathbf{B}^T (\mathbf{D}^{i-1} + \mathbf{k}^{i-1}\mathbf{B}\Delta\mathbf{q}) + \mathbf{B}_{sc}^T (D_{sc}^{i-1} + k_{sc}^{i-1}\mathbf{B}_{sc}\Delta\mathbf{q})] dx = \int_L \mathbf{a}^T \mathbf{P}_e dx + \mathbf{Q} \quad (5.20)$$

Après arrangement, on a :

$$\left[ \int_L (\mathbf{B}^T \mathbf{k}^{i-1} \mathbf{B} + \mathbf{B}_{sc}^T k_{sc}^{i-1} \mathbf{B}_{sc}) dx \right] \Delta\mathbf{q} = \int_L \mathbf{a}^T \mathbf{P}_e dx + \mathbf{Q} - \int_L (\mathbf{B}^T \mathbf{D}^{i-1} + \mathbf{B}_{sc}^T D_{sc}^{i-1}) dx \quad (5.21)$$

ou bien :

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_R^{i-1} \quad (5.22)$$

où  $\mathbf{K}_e$  est la matrice de rigidité tangente de l'élément à l'itération  $i - 1$ , déterminée par :

$$\mathbf{K} = \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{k}^{i-1} \mathbf{B} dx + \int_L \mathbf{B}_{sc}^T k_{sc}^{i-1} \mathbf{B}_{sc} dx \quad (5.23)$$

$\mathbf{Q}_0$  est le vecteur des forces nodales équivalentes due à la charge répartie appliquée à l'élément, dont l'expression est :

$$\mathbf{Q}_0 = \int_L \mathbf{a}^T \mathbf{P}_e dx \quad (5.24)$$

et  $\mathbf{Q}_R^{i-1}$  est le vecteur des forces nodales équivalentes à l'itération  $i - 1$ , déterminé par :

$$\mathbf{Q}_R^{i-1} = \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{i-1} dx + \int_L \mathbf{B}_{sc}^T D_{sc}^{i-1} dx \quad (5.25)$$

### 5.3.1.3 Fonctions d'interpolation de déplacements

La solution analytique présentée au paragraphe 2.4.2 indique que les déplacements exacts en élasticité linéaire sont des fonctions complexes qui comportent à la fois une partie hyperbolique et une partie polynomiale. Bien entendu, on pourrait substituer à la partie hyperbolique une fonction polynomiale issue d'un développement en série de TAYLOR et qui conduirait à un polynôme comportant des termes de degré plus ou moins élevé (variant de zéro jusqu'à l'infini). Cela signifie que pour approcher le champ des déplacements, plus le nombre de degrés de liberté (DDL) est élevé, plus la précision est bonne. Remarquons, d'ores et déjà, que ce problème n'existe pas pour le modèle de connexion discrète pour lequel le champ de déplacement exact est un polynôme dont l'ordre dépend du chargement. Plusieurs éléments "déplacement" de nombre de degrés variable ont été proposés dans la littérature. L'élément à 8 DDL est certainement le plus simple, mais des analyses ont montré que cet élément présente des problèmes de verrouillage numérique (curvature locking) et conduit à des erreurs significatives lorsque la rigidité de la connexion devient grande [54]. En 1981, ARIZUMI et al. [16] ont proposé un élément à 12DDL. En 1993, DANIELS et CRISINEL [56] ont présenté un élément à 10DDL. Récemment en 2002, un élément à 16 DDL a été développé et comparé avec les éléments à 8 DDL, 10 DDL et 16 DDL par DALL'ASTA et ZONA [54]. La comparaison a mis en évidence les mauvaises performances de l'élément à 8 DDL qui sont la conséquence des problèmes de verrouillage numérique (curvature locking) évoqué plus haut et les bonnes performances de l'élément à 16 DDL, bien qu'il soit compliqué à implémenter.

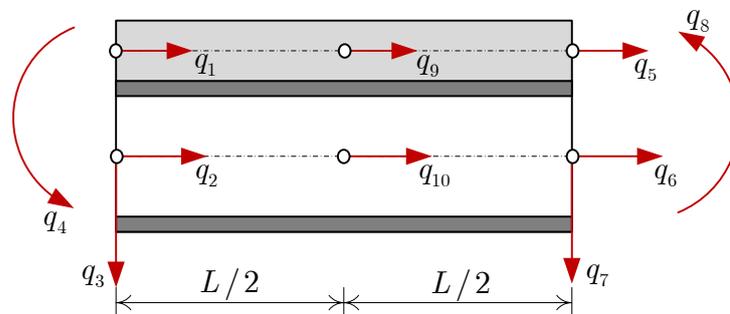


Figure 5.2 – Élément de déplacement à 10 DDL

Dans notre étude, nous considérons un élément à 10 degrés de libertés (cf. Figure 5.2). Des polynômes HERMITIENS cubiques sont utilisés pour approcher le déplacement transversal  $v(x)$  et une fonction d'interpolation quadratique est utilisée pour approcher les déplacements axiaux  $u_c(x)$  et  $u_s(x)$ . Ainsi, la matrice  $\mathbf{a}(x)$ , que l'on peut décomposer en trois vecteurs lignes, est donnée par :

$$\mathbf{a}_s(x) = \left[ 0 \quad 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right] \quad (5.26)$$

$$\mathbf{a}_c(x) = \left[ 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \quad 0 \right] \quad (5.27)$$

$$\mathbf{a}_v(x) = \left[ 0 \quad 0 \quad 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \quad 0 \quad 0 \right] \quad (5.28)$$

### 5.3.2 Connexion ponctuelle

Comme signalé plus haut, la solution analytique conduit à un champ de déplacement polynômial. Par conséquent, ces éléments ne présentent pas de problème de verrouillage numérique, inhérent à une modélisation continue de la connexion. On pourrait ainsi en conclure, qu'une modélisation discrète de la connexion est un remède au verrouillage numérique. Toutefois, le prix à payer est une augmentation significative du nombre d'éléments et donc du nombre total de DDL. Pour le modèle à connexion ponctuelle, la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  ainsi que la vecteur de forces nodales équivalentes  $\mathbf{Q}_R^{i-1}$  d'un élément de poutre mixte non-connectée s'obtiennent à partir de relations (5.23) et (5.25) en faisant  $k_{sc} = 0$  et  $D_{sc} = 0$  :

$$\mathbf{K} = \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{k}^{i-1} \mathbf{B} dx \quad (5.29)$$

$$\mathbf{Q}_R^{i-1} = \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{i-1} dx \quad (5.30)$$

La matrice de rigidité de l'élément de poutre mixte avec la connexion ponctuelle s'obtient en assemblant la matrice précédente avec les matrices de rigidité de l'élément de connexion (ressort) qui est développées au paragraphe 2.4.1.2.

### 5.3.3 Algorithme de calcul

La méthode de NEWTON-RAPHSON est utilisée pour résoudre le système d'équations non-linéaires global. L'itération NEWTON-RAPHSON ( $i$ ) comporte les étapes suivantes :

(1) *Résoudre le système global des équations et mettre à jour les déplacements de structure.*

A l'itération NEWTON-RAPHSON ( $i$ ) la matrice de rigidité globale  $\mathbf{K}_g^{i-1}$  à l'itération précédente ( $i-1$ ) est utilisée pour calculer les incréments de déplacement  $\Delta \bar{\mathbf{q}}^i$  correspondant aux incréments de chargement donnés  $\Delta \bar{\mathbf{P}}_{gU}^{i-1}$  qui représentent les forces hors équilibre par rapport à l'itération précédente.

$$\mathbf{K}_g^{i-1} \Delta \bar{\mathbf{q}}_g^i = \Delta \bar{\mathbf{P}}_{gU}^{i-1} \quad (5.31)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_g^i = \bar{\mathbf{q}}_g^{i-1} + \Delta \bar{\mathbf{q}}_g^i \quad (5.32)$$

(2) *Pour chaque élément, extraire les déplacements et les incréments de déplacement.*

Les incréments de déplacement nodal de chaque élément  $\Delta \mathbf{q}^i$  sont extraits à partir de ceux de la structure  $\Delta \bar{\mathbf{q}}_g^i$ .

$$\mathbf{q}^i = \mathbf{q}^{i-1} + \Delta \mathbf{q}^i \quad (5.33)$$

Pour chaque élément effectuer les opérations suivantes (3 - 9).

(3) *Calculer les déformations généralisées et le glissement aux points d'intégration  $x_{gl}$ .*

$$\mathbf{e}^i(x_{gl}) = \mathbf{B}(x_{gl}) \mathbf{q}^i \quad (5.34)$$

$$d_{sc}(x_{gl})^i = \mathbf{B}_{sc}(x_{gl}) \mathbf{q}^i \quad (5.35)$$

(4) *Pour chaque fibre, calculer la déformation.*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_s^i(x_{gl}, z_s) \\ \varepsilon_c^i(x_{gl}, z_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_s \\ 0 & 1 & z_c \end{bmatrix} \mathbf{e}^i(x_{gl}) \quad (5.36)$$

(5) *Pour chaque fibre, calculer la contrainte et le module tangent.*

La contrainte dans les fibres  $\sigma^i(x_{gl}, z)$  et le module tangent  $E^i(x_{gl}, z)$  qui correspondent à la déformation  $\varepsilon^i(x_{gl}, z)$  s'obtiennent en intégrant la loi de comportement des matériaux

(cf. chapitre 4).

(6) Calculer les efforts de cisaillement et mettre à jour le module tangent de connexion.

L'effort de cisaillement de connexion  $D_{sc}^i(x_{gl})$  et le module tangent  $k_{sc}^i(x_{gl})$  qui correspondent au glissement  $d_{sc}^i(x_{gl})$  s'obtiennent en intégrant la loi de comportement de la connexion (cf. chapitre 4).

(7) Pour chaque point d'intégration, calculer la matrice tangente de rigidité de section et les efforts internes.

La détermination de la matrice tangente de rigidité de section  $\mathbf{k}^i(x_{gl})$  et des efforts internes  $\mathbf{D}^i(x_g)$  est présentée dans l'annexe I.

(8) Calculer la matrice de rigidité de l'élément.

$$\mathbf{K}_e^i = \int_L \mathbf{B}(x)^T \mathbf{k}^i(x) \mathbf{B}(x) dx + \int_L \mathbf{B}_{sc}(x)^T k_{sc}^i(x) \mathbf{B}_{sc}(x) dx \quad (5.37)$$

(9) Calculer les efforts aux noeuds de l'élément.

$$\mathbf{Q}_R^i = \int_L \mathbf{B}(x)^T \mathbf{D}^i(x) dx + \int_L \mathbf{B}_{sc}(x)^T \mathbf{D}_{sc}^i(x) dx \quad (5.38)$$

(10) Calculer les efforts aux noeuds pour toute la structure et mettre à jour la matrice de rigidité globale à l'itération  $i$ .

Les efforts nodaux équivalents des éléments et les matrices de rigidité des éléments sont assemblés pour obtenir la mise à jour des efforts internes de structure et de la matrice de rigidité globale.

$$\mathbf{P}_{gR}^i = \text{assembler}(\mathbf{Q}_R^i) \quad (5.39)$$

$$\mathbf{K}_g^i = \text{assembler}(\mathbf{K}_e^i) \quad (5.40)$$

A ce stade, les efforts internes de la structure  $\mathbf{P}_{gR}^i$  sont comparés avec les forces totales appliquées. Si la différence  $\Delta \bar{\mathbf{P}}_{gU}^i$ , qui est le vecteur des forces hors-équilibre de la structure, n'est pas inférieure à une précision fixée, l'itération de NEWTON-RAPHSON suivante est entreprise. Les étapes de (1) à (19) sont répétées jusqu'à ce que la convergence au niveau de la structure soit obtenue.

Il est à noter que, en travaillant avec l'incrément de chargement (chargement contrôlé), on risque de dépasser le pic de chargement lorsque les matériaux ont un comportement élastique parfaitement plastique (acier) ou un comportement adoucissant (béton). Par conséquent, on risque de ne pas avoir convergence des itérations. Ce problème peut être résolu en travaillant avec l'incrément de déplacement (déplacement contrôlé), mais cela n'est possible que dans le cas où on peut admettre une variation du chargement à un seul paramètre. Dans cet étude, afin d'éviter le problème de divergence dû au pic de chargement, nous utilisons un algorithme de résolution se basant sur la méthode de longueur d'arc cylindrique [114]. Le détail de cet algorithme est présenté en annexe VIII.

## 5.4 Formulation équilibre

Dans la formulation des éléments finis de type "équilibre", les efforts internes de l'élément sont les inconnues fondamentales du problème. Ces inconnues sont interpolées à partir d'efforts aux noeuds et à l'aide de fonctions d'interpolation qui, par construction, doivent satisfaire les conditions d'équilibre d'un élément de poutre mixte. Il s'en suit que l'équilibre est satisfait de manière stricte le long de l'élément. Lorsque forces internes  $\mathbf{D}$  et  $D_{sc}$  sont connues, on peut calculer les déformations associées  $\mathbf{e}$  et  $d_{sc}$  en utilisant les relations constitutives force-déformation (2.47) et (2.57).

### 5.4.1 Connexion continue

#### 5.4.1.1 Formulation variationnelle des équations de compatibilité

Les déformations généralisées se déduisent des déplacements à l'aide des relations (2.40) et (2.41). La formulation intégrale des équations de compatibilité s'obtient en intégrant le produit des relations (2.40) et (2.41) par un champs de contraintes généralisées virtuelles, soit :

$$\int_L \delta \mathbf{D}^T (\partial \mathbf{d} - \mathbf{e}) dx + \int_L \delta D_{sc} (\partial_{sc} \mathbf{d} - d_{sc}) dx = 0 \quad (5.41)$$

$\delta \mathbf{D}$  et  $\delta D_{sc}$  sont les contraintes généralisées virtuelles (efforts internes virtuels) qui satisfont les équations différentielles d'équilibre homogènes :

$$\partial \delta \mathbf{D} - \partial_{sc} \delta D_{sc} = \mathbf{0} \quad (5.42)$$

On note  $\tilde{\mathcal{S}}_0(\Omega)$  l'espace des contraintes généralisées statiquement admissibles à zéro :

$$\tilde{\mathcal{S}}_0(\Omega) = \{\mathbf{D}, D_{sc} \in \mathcal{S} \mid \partial\delta\mathbf{D} - \partial_{sc}\delta D_{sc} = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{D} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_t\Omega\} \quad (5.43)$$

L'équation (5.41) est la forme intégrale des relations cinématiques pour une poutre mixte. Cette équation traduit que dans une formulation en contraintes généralisées, les relations de compatibilité ne sont satisfaites que de manière faible. En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_L \delta\mathbf{D}\partial\mathbf{d}dx + \int_L \delta D_{sc}\partial_{sc}\mathbf{d}dx &= \int_L \delta N_c \frac{du_c}{dx} dx + \int_L \delta N_s \frac{du_s}{dx} dx - \int_L \delta M \frac{d^2v}{dx^2} dx \\ &+ \int_L \delta D_{sc} \left( u_s - u_c + H \frac{dv}{dx} \right) dx = [\delta N_c u_c + \delta N_s u_s + \delta M \theta + \delta T v]_0^L - \\ \int_L u_c \left( \frac{d\delta N_c}{dx} + \delta D_{sc} \right) dx &- \int_L u_s \left( \frac{d\delta N_s}{dx} - \delta D_{sc} \right) dx - \int_L v \left( \frac{d^2\delta M}{dx^2} + H \frac{d\delta D_{sc}}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (5.44)$$

Prenant en compte que le champ d'efforts internes virtuels est choisi de manière à satisfaire les conditions d'équilibre homogènes, on en conclut que les trois derniers termes du second membre sont nuls. Par ailleurs, on observe que le premier terme du second membre représente le travail des efforts virtuels à la frontière que l'on peut remplacer par le produit scalaire  $\delta\mathbf{Q}^T\mathbf{q}$ . Ainsi, cette équation est réduite à :

$$\int_L \delta\mathbf{D}^T\partial\mathbf{d} dx + \int_L \delta D_{sc}\partial_{sc}\mathbf{d} dx = \delta\mathbf{Q}^T\mathbf{q} \quad (5.45)$$

En substituant l'équation (5.45) dans l'équation (5.41), on obtient la relation

$$\int_L \delta\mathbf{D}^T\mathbf{e} dx + \int_L \delta D_{sc}d_{sc} dx = \delta\mathbf{Q}^T\mathbf{q} \quad (5.46)$$

qui correspond au principe des forces virtuelles (ou travaux virtuels complémentaires). Enfin les déformations généralisées  $\mathbf{e}$  et le glissement  $d_{sc}$  sont éliminées de l'équation (5.46) en utilisant la forme linéarisée des relations de comportement inverse (2.47) et (2.57) :

$$\int_L \delta\mathbf{D}^T (\mathbf{e}^{i-1} + \mathbf{f}^{i-1}\Delta\mathbf{D}) dx + \int_L \delta D_{sc} (d_{sc}^{i-1} + f_{sc}^{i-1}\Delta D_{sc}) dx = \delta\mathbf{Q}^T\mathbf{q} \quad (5.47)$$

où  $\mathbf{f}^{i-1}$  et  $f_{sc}^{i-1}$  sont respectivement la matrice de flexibilité (souplesse) tangente de la section et celle de la connexion, déterminées à l'itération  $i - 1$ .

L'équation (5.47) est la relation de base pour la formulation des éléments finis type "équilibre" pour une poutre mixte avec interaction partielle. Cette équation doit être discrétisée afin d'établir la relation fondamentale force-déplacement de l'élément fini.

#### 5.4.1.2 Discrétisation en élément fini

L'équation (5.47), qui représente la forme variationnelle continue des équations fondamentales de poutre mixte, est utilisée dans ce qui suit pour développer un élément fini "équilibre" de poutre mixte. Sur chaque élément, les efforts généralisés  $\mathbf{D}$  et l'effort de cisaillement à l'interface  $D_{sc}$  sont interpolés entre les noeuds ici au moyen de fonctions polynomiales (fonctions de forme) devant satisfaire *a priori* les équations d'équilibre :

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}(x)\mathbf{Q} + \mathbf{c}(x)\mathbf{Q}_{sc} + \mathbf{D}_0(x) \quad (5.48)$$

$$D_{sc}(x) = \mathbf{b}_{sc}(x)\mathbf{Q} + \mathbf{c}_{sc}(x)\mathbf{Q}_{sc} \quad (5.49)$$

où  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{Q}_{sc}$  sont les contraintes généralisées et les efforts de cisaillement aux noeuds.  $\mathbf{b}(x)$ ,  $\mathbf{c}(x)$ ,  $\mathbf{b}_{sc}(x)$  et  $\mathbf{c}_{sc}(x)$  sont des fonctions d'interpolations polynomiales.  $\mathbf{D}_0(x)$  est une solution particulière des équations différentielles d'équilibre qui permet de prendre en compte la charge répartie  $p_z$  :

$$\partial \mathbf{D}_0(x) = \mathbf{P}_e \quad (5.50)$$

Les fonctions polynomiales  $\mathbf{b}(x)$ ,  $\mathbf{c}(x)$ ,  $\mathbf{b}_{sc}(x)$  et  $\mathbf{c}_{sc}(x)$  sont construites de manière à assurer la satisfaction *a priori* des équations d'équilibre homogènes, quelque soient  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{Q}_{sc}$ . Une particularité des éléments de poutre mixte réside dans le fait que le nombre de noeuds pour l'interpolation de  $D_{sc}$  n'est pas nécessairement égal à celui utilisé pour l'interpolation de  $\mathbf{D}$ . Ce point est détaillé au paragraphe 5.4.1.3. En introduisant les relations (5.48) et (5.49) dans l'équation (5.47), on obtient :

$$\int_L (\delta \mathbf{Q}^T \mathbf{b}^T + \delta \mathbf{Q}_{sc}^T \mathbf{c}^T) [\mathbf{e}^{i-1} + \mathbf{f}^{i-1} (\mathbf{b} \Delta \mathbf{Q} + \mathbf{c} \Delta \mathbf{Q}_{sc} + \Delta \mathbf{D}_0)] dx + \int_L (\delta \mathbf{Q}^T \mathbf{b}_{sc}^T + \delta \mathbf{Q}_{sc}^T \mathbf{c}_{sc}^T) [d_{sc}^{i-1} + f_{sc}^{i-1} (\mathbf{b}_{sc} \Delta \mathbf{Q} + \mathbf{c}_{sc} \Delta \mathbf{Q}_{sc})] dx = \delta \mathbf{Q}^T \mathbf{q} \quad (5.51)$$

Après quelques manipulations algébriques, nous obtenons :

$$\delta \mathbf{Q}^T \left( \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}} \Delta \mathbf{Q} + \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}} \Delta \mathbf{Q}_{sc} + \mathbf{q}_r + \Delta \mathbf{q}_0 - \mathbf{q} \right) + \delta \mathbf{Q}_{sc}^T \left( \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}}^T \Delta \mathbf{Q} + \mathbf{F}_{\mathbf{Q}_{sc}\mathbf{Q}_{sc}} \Delta \mathbf{Q}_{sc} + \mathbf{q}_{rsc} + \Delta \mathbf{q}_{0sc} \right) = 0 \quad (5.52)$$

L'équation précédente doit être vérifiée quelque soient  $\delta \mathbf{Q}$  et  $\delta \mathbf{Q}_{sc}$ , ce qui conduit à :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}} \Delta \mathbf{Q} + \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}} \Delta \mathbf{Q}_{sc} = \mathbf{q} - \Delta \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_r \quad (5.53)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}}^T \Delta \mathbf{Q} + \mathbf{F}_{\mathbf{Q}_{sc}\mathbf{Q}_{sc}} \Delta \mathbf{Q}_{sc} = -\Delta \mathbf{q}_{0sc} - \mathbf{q}_{rsc} \quad (5.54)$$

où :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}} = \int_L \mathbf{b}^T \mathbf{f}^{i-1} \mathbf{b} \, dx + \int_L \mathbf{b}_{sc}^T \mathbf{f}_{sc}^{i-1} \mathbf{b}_{sc} \, dx \quad (5.55)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}} = \int_L \mathbf{b}^T \mathbf{f}^{i-1} \mathbf{c} \, dx + \int_L \mathbf{b}_{sc}^T(x) \mathbf{f}_{sc}^{i-1} \mathbf{c}_{sc} \, dx \quad (5.56)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{Q}_{sc}\mathbf{Q}_{sc}} = \int_L \mathbf{c}^T \mathbf{f}^{i-1} \mathbf{c} \, dx + \int_L \mathbf{c}_{sc}^T \mathbf{f}_{sc}^{i-1} \mathbf{c}_{sc} \, dx \quad (5.57)$$

$$\mathbf{q}_r = \int_L \mathbf{b}^T \mathbf{e}^{i-1} \, dx + \int_L \mathbf{b}_{sc}^T d_{sc}^{i-1} \, dx \quad (5.58)$$

$$\mathbf{q}_{rsc} = \int_L \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{i-1} \, dx + \int_L \mathbf{c}_{sc}^T d_{sc}^{i-1} \, dx \quad (5.59)$$

$$\Delta \mathbf{q}_0 = \int_L \mathbf{b}^T \mathbf{f}^{i-1} \Delta \mathbf{D}_0 \, dx \quad (5.60)$$

$$\Delta \mathbf{q}_{0sc} = \int_L \mathbf{c}^T \mathbf{f}^{i-1} \Delta \mathbf{D}_0 \, dx \quad (5.61)$$

En résolvant l'équation (5.54) par rapport à  $\Delta \mathbf{Q}_{sc}$ , on obtient :

$$\Delta \mathbf{Q}_{sc} = -\mathbf{F}_{\mathbf{Q}_{sc}\mathbf{Q}_{sc}}^{-1} \left( \Delta \mathbf{q}_{0sc} + \mathbf{q}_{rsc} + \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}}^T \Delta \mathbf{Q} \right) \quad (5.62)$$

qui, ré-injectée dans l'équation (5.53) donne :

$$\mathbf{F} \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{q} - \Delta \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_r + \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}_{sc}\mathbf{Q}_{sc}}^{-1} (\mathbf{q}_{rsc} + \Delta \mathbf{q}_{0sc}) \quad (5.63)$$

où  $\mathbf{F}$  est la matrice de flexibilité tangente de l'élément à l'itération  $i - 1$ , déterminée par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}} - \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}_{sc}\mathbf{Q}_{sc}}^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}_{sc}\mathbf{Q}}^{\mathbf{T}} \quad (5.64)$$

Afin d'utiliser les éléments finis en efforts dans un programme classique d'éléments finis en déplacements, il est nécessaire d'inverser la matrice de flexibilité  $\mathbf{F}$  dans la relation (5.63) pour obtenir la matrice de rigidité d'un élément. Par construction, cette matrice est ici singulière (comme la matrice de rigidité) exigeant d'éliminer des modes rigides de l'élément. Ces modes rigides proviennent du fait que les éléments du vecteur  $\mathbf{Q}$  ne sont pas indépendants puisqu'ils satisfont les équations d'équilibre d'ensemble. Au préalable, il est donc nécessaire d'éliminer ces modes rigides. La figure 5.3a présente un élément de poutre mixte avec ses modes rigides. Pour éliminer les modes rigides, il est nécessaire de bloquer les 3 déplacements dans le plan (correspondant aux équations d'équilibre). Cela est réalisé à l'aide d'un appui simple et d'un appui à rouleau (cf. Figure 5.3b). On aurait pu choisir aussi un encastrement à une extrémité, par exemple. En identifiant les deux éléments, on obtient la relation entre les efforts nodaux de l'élément avec et sans modes rigides :

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}_{MR}^{\mathbf{T}} \mathbf{Q} + \bar{\mathbf{Q}}_0 \quad (5.65)$$

où  $\mathbf{T}_{MR}$  est une matrice de transformation :

$$\mathbf{T}_{MR} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & H/L & 0 & 0 & 0 & -H/L & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 1 & 0 & 0 & 1/L & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & H/L & 0 & 1 & 0 & -H/L & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

et

$$\bar{\mathbf{Q}}_0 = \left[ 0 \quad 0 \quad -\frac{p_z L}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{p_z L}{2} \quad 0 \right]^{\mathbf{T}} \quad (5.67)$$

En utilisant le principe des travaux virtuels, on en déduit la relation entre les déplacements nodaux de l'élément avec et sans modes rigides :

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_{MR} \bar{\mathbf{q}} \quad (5.68)$$

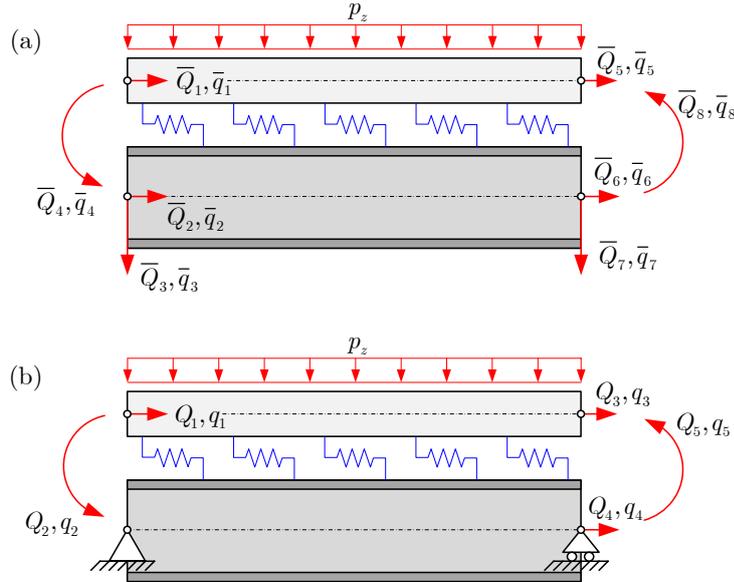


Figure 5.3 – Élément de poutre mixte : (a) avec modes rigides ; (b) sans modes rigides

L'équation (5.63) peut alors être réécrite comme :

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{q} = \Delta\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}_0 - \Delta\mathbf{Q}_r \quad (5.69)$$

où  $\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1}$  désignant la matrice de rigidité tangente de l'élément équilibre et

$$\Delta\mathbf{Q}_r = \mathbf{K} (\mathbf{q}^{i-1} - \mathbf{q}_r + \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}_{sc}\mathbf{Q}_{sc}}^{-1} \mathbf{q}_{rsc}) \quad (5.70)$$

$$\Delta\mathbf{Q}_0 = \mathbf{K} (\Delta\mathbf{q}_0 - \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}_{sc}\mathbf{Q}_{sc}}^{-1} \Delta\mathbf{q}_{0sc}) \quad (5.71)$$

La matrice de rigidité  $\mathbf{K}_e$  de l'élément fini (avec modes rigides) s'obtient aisément à partir de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  sans modes rigides en utilisant la relation suivante :

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_{MR}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{MR} \quad (5.72)$$

### 5.4.1.3 Fonctions d'interpolation de forces

Il est à noter que pour un élément de poutre classique, les fonctions d'interpolation des efforts internes, qui sont obtenues à partir des conditions d'équilibre, représentent la distribution exacte de ces efforts internes. Un élément de poutre mixte avec interaction partielle est intérieurement hyperstatique (voir les équations d'équilibre (2.13 - 2.15)) et donc la

distribution exacte des efforts internes n'est disponible que pour le cas élastique linéaire. Il s'en suit que si la distribution de l'effort de cisaillement à l'interface  $D_{sc}$  est connue, tous les autres efforts internes peuvent être déterminés à partir des conditions d'équilibre, quelque soit le comportement. Dans la présente formulation, l'effort de cisaillement à l'interface est considéré comme l'inconnue hyperstatique, que l'on détermine à partir des conditions de compatibilité à l'interface. Il est important de noter que si la connexion est continue, le degré d'hyperstaticité interne devient infini [120]. Afin de se ramener à un degré d'hyperstaticité fini, il est nécessaire d'approcher la distribution de l'effort de cisaillement par une fonction qui dépend d'un nombre fini de paramètres. Cela peut se faire en interpolant l'effort continu de cisaillement  $D_{sc}$  en terme des forces de cisaillement  $Q_{sc}$  en certains points de référence le long de l'élément. Dans le travail de SALARI en 1999 [120], une distribution cubique a été adoptée pour  $D_{sc}$ . Cette hypothèse a été ensuite reprise par ALEMDAR en 2001 [9]. Dans notre étude, la force de cisaillement le long de l'élément est interpolée par une fonction parabolique. Comme le montre la figure 5.4, une distribution parabolique de  $D_{sc}$  nécessite d'introduire les variables nodales internes  $Q_{sc1}$ ,  $Q_{sc2}$  et  $Q_{sc3}$ . Ainsi l'effort de cisaillement  $D_{sc}$  s'exprime comme :

$$D_{sc}(x) = \begin{bmatrix} \frac{2x^2}{L^2} - \frac{3x}{L} + 1 & : & \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} & : & \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{sc1} \\ Q_{sc2} \\ Q_{sc3} \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

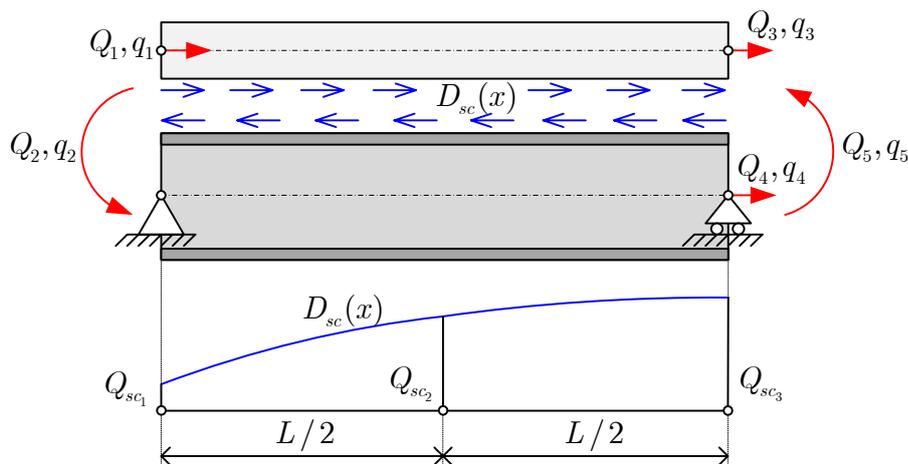


Figure 5.4 – Approximation parabolique de l'effort de cisaillement à l'interface

En exprimant l'équilibre de la dalle dans la direction  $x$ , on obtient une relation entre l'effort de cisaillement  $D_{sc}$  et les forces nodales :

$$\int_L D_{sc}(x)dx + Q_1 + Q_3 = 0 \quad (5.74)$$

En combinant les relations (5.73) et (5.74) et en intégrant le premier terme, on obtient :

$$Q_{sc3} = -\frac{6}{L}(Q_1 + Q_3) - Q_{sc1} - 4Q_{sc2} \quad (5.75)$$

En substituant l'équation (5.75) de nouveau dans l'équation (5.73), la distribution des forces de cisaillement  $D_{sc}$  exprimée en terme des forces nodales indépendantes (sans mode rigide) de l'élément  $\mathbf{Q}$  et les efforts de cisaillement de référence  $\mathbf{Q}_{sc}$  (cf. Figure 5.3) est obtenue plus précisément par :

$$D_{sc}(x) = \mathbf{b}_{sc}(x)\mathbf{Q} + \mathbf{c}_{sc}(x)\mathbf{Q}_{sc} \quad (5.76)$$

où les fonctions d'interpolation des efforts de cisaillement  $\mathbf{b}_{sc}(x)$  et  $\mathbf{c}_{sc}(x)$  sont définies par :

$$\mathbf{b}_{sc}(x) = \left[ \frac{6x}{L^2} - \frac{12x^2}{L^3} \quad \vdots \quad 0 \quad \vdots \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{12x^2}{L^3} \quad \vdots \quad 0 \quad \vdots \quad 0 \right] \quad (5.77)$$

$$\mathbf{c}_{sc}(x) = \left[ 1 - \frac{2x}{L} \quad \vdots \quad \frac{8x}{L} - \frac{12x^2}{L^2} \right] \quad (5.78)$$

La relation entre les efforts internes, les efforts nodaux indépendants  $Q_{1...5}$ , l'effort de cisaillement et le chargement extérieur s'obtient en exprimant l'équilibre d'un tronçon de poutre mixte (cf. Figure 5.5) :

$$N_c(x) = -\int_0^x D_{sc}(x)dx - Q_1 \quad (5.79)$$

$$N_s(x) = Q_1 + Q_3 + Q_4 + \int_0^x D_{sc}(x)dx \quad (5.80)$$

$$M(x) = H(Q_1 + N_c(x)) - Q_2 + \frac{Q_2 + Q_5}{L}x + \frac{p_z x(L-x)}{2} \quad (5.81)$$

En substituant l'équation (5.76) dans les trois équations ci-dessus et après quelques ma-

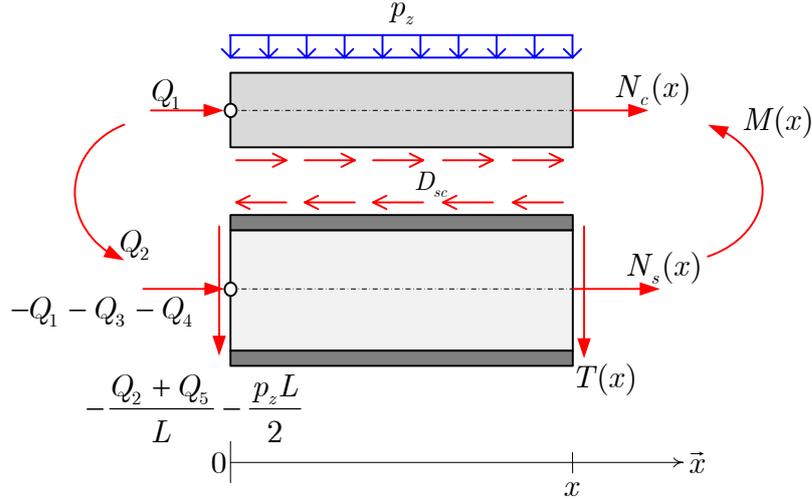


Figure 5.5 – Équilibre d'un tronçon de poutre mixte

nipulations algébriques, on obtient :

$$N_c(x) = \mathbf{b}_{N_c}(x)\mathbf{Q} + \mathbf{c}_{N_c}(x)\mathbf{Q}_{sc} \quad (5.82)$$

$$N_s(x) = \mathbf{b}_{N_s}(x)\mathbf{Q} + \mathbf{c}_{N_s}(x)\mathbf{Q}_{sc} \quad (5.83)$$

$$M(x) = \mathbf{b}_M(x)\mathbf{Q} + \mathbf{c}_M(x)\mathbf{Q}_{sc} + \frac{p_z x(L-x)}{2} \quad (5.84)$$

où :

$$\mathbf{b}_{N_c}(x) = \left[ \frac{4x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} - 1 \quad \vdots \quad 0 \quad \vdots \quad \frac{4x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} \quad \vdots \quad 0 \quad \vdots \quad 0 \right] \quad (5.85)$$

$$\mathbf{c}_{N_c}(x) = \left[ \frac{x^2}{L} - x \quad \vdots \quad \frac{4x^3}{L^2} - \frac{4x^2}{L^2} \right] \quad (5.86)$$

$$\mathbf{b}_{N_s}(x) = \left[ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x^3}{L^3} + 1 \quad \vdots \quad 0 \quad \vdots \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x^3}{L^3} + 1 \quad \vdots \quad 1 \quad \vdots \quad 0 \right] \quad (5.87)$$

$$\mathbf{c}_{N_s}(x) = \left[ x - \frac{x^2}{L} \quad \vdots \quad \frac{4x^2}{L^2} - \frac{4x^3}{L^2} \right] \quad (5.88)$$

$$\mathbf{b}_M(x) = \left[ H \left( \frac{4x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} \right) \quad \vdots \quad \frac{x}{L} - 1 \quad \vdots \quad H \left( \frac{4x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} \right) \quad \vdots \quad 0 \quad \vdots \quad \frac{x}{L} \right] \quad (5.89)$$

$$\mathbf{c}_M(x) = \left[ H \left( \frac{x^2}{L} - x \right) \quad \vdots \quad H \left( \frac{4x^3}{L^2} - \frac{4x^2}{L^2} \right) \right] \quad (5.90)$$

Sous forme matricielle, on peut écrire :

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}(x)\mathbf{Q} + \mathbf{c}(x)\mathbf{Q}_{sc} + \mathbf{D}_0(x) \quad (5.91)$$

avec :

$$\mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{N_c}(x) \\ \mathbf{b}_{N_s}(x) \\ \mathbf{b}_M(x) \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{c}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{N_c}(x) \\ \mathbf{c}_{N_s}(x) \\ \mathbf{c}_M(x) \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{D}_0(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p_z x(L-x)}{2} \end{bmatrix}$$

### 5.4.2 Connexion ponctuelle

Pour un élément de poutre mixte non connectée, puisqu'il n'y a pas d'effort à l'interface ( $D_{sc} = 0$ ), il s'en suit que cet élément est intérieurement isostatique (comme une poutre régulière). La distribution exacte des efforts internes est donc disponible, quelque soit le comportement. Ainsi les fonctions d'interpolation des efforts s'obtiennent directement à partir des conditions d'équilibre. Considérons un élément de poutre mixte non connectée sans mode de corps rigide comme le montre la figure 5.6b ; le champ des efforts internes est déterminé par :

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}(x)\mathbf{Q} + \mathbf{D}_0(x) \quad (5.92)$$

avec :

$$\mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{x}{L} - 1 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

De manière identique au cas de la connexion continue, la formulation faible des relations cinématiques est considérée :

$$\int_L \delta \mathbf{D}^T (\partial \mathbf{d} - \mathbf{e}) dx = 0 \quad (5.94)$$

En intégrant par partie et en faisant usage des relations cinématiques, l'équation (5.94) devient :

$$\int_L \delta \mathbf{D}^T \mathbf{e} dx = \delta \mathbf{Q}^T \mathbf{q} \quad (5.95)$$

En introduisant la forme linéarisée des relations de comportement inverse (2.47) et (2.57) dans l'équation (5.95), on obtient :

$$\int_L \delta \mathbf{Q}^T \mathbf{b}^T [\mathbf{e}^{i-1} + \mathbf{f}(\mathbf{b}\Delta \mathbf{Q} + \Delta \mathbf{D}_0)] dx = \delta \mathbf{Q}^T \mathbf{q} \quad (5.96)$$

Cette équation doit être vérifiée quelques soient  $\delta \mathbf{Q}$  et après quelques arrangements, nous obtenons donc :

$$\mathbf{F}\Delta \mathbf{Q} = \Delta \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}_r \quad (5.97)$$

où

$$\mathbf{F} = \int_L \mathbf{b}^T(x) \mathbf{f}(x) \mathbf{b}(x) dx \quad (5.98)$$

$$\Delta \mathbf{q}_r = \mathbf{q}^{i-1} - \int_L \mathbf{b}^T(x) [\mathbf{e}^{i-1}(x) + \mathbf{f}(x) \Delta \mathbf{D}_0(x)] dx \quad (5.99)$$

L'équation (5.97) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}\Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{Q} - \Delta \mathbf{Q}_r \quad (5.100)$$

où  $\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1}$  désignant la matrice de rigidité tangente de l'élément équilibre et

$$\Delta \mathbf{Q}_r = \mathbf{K}\Delta \mathbf{q}_r \quad (5.101)$$

La matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  de l'élément sans modes rigides peut être transformée pour obtenir la matrice de rigidité  $\mathbf{K}_e$  de l'élément qui contient les modes rigides en utilisant la relation (5.48). La matrice de transformation dans ce cas est :

$$\mathbf{T}_{MR} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L & 1 & 0 & 0 & 1/L & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 1/L & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

La matrice de rigidité de l'élément de poutre mixte avec la connexion ponctuelle s'obtient en assemblant la matrice précédente avec la matrice de rigidité de l'élément de connexion (ressort) qui a été développée au paragraphe 2.4.1.2.

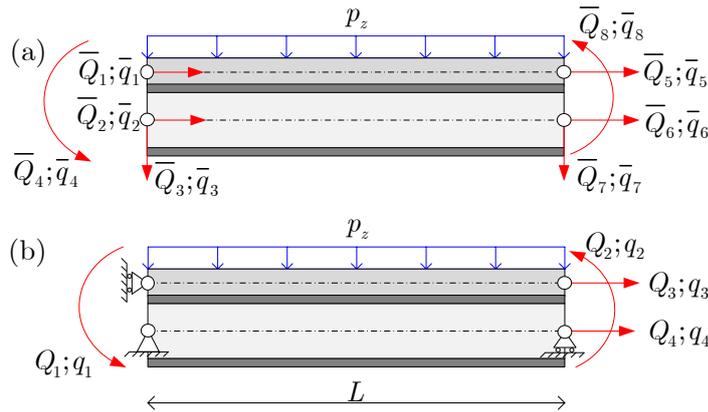


Figure 5.6 – Élément de poutre mixte non connectée : (a) avec modes rigides ; (b) sans modes rigides

### 5.4.3 Algorithme de calcul

Le calcul non-linéaire à l'aide d'éléments de type équilibre est plus compliqué qu'avec des éléments de type déplacement. La difficulté dans une formulation force provient du fait que le champ des déplacements dans l'élément n'est pas connu à l'intérieur de celui ; seules les déformations généralisées sont connues aux points d'intégration (connaissance faible du champ de déformation, qui est une propriété inhérente aux éléments de type équilibre). L'algorithme repose sur deux boucles imbriquées où la première correspond à une itération classique de NEWTON qui fournit le vecteur incrément de déplacement, solution des équations d'équilibre globales. Les incréments de déplacement agissent comme des déplacement imposés pour la seconde boucle, dont l'objectif est de déterminer les efforts correspondant à ces déplacements qui vérifient à la fois la loi de comportement et les équations d'équilibre fortes. Dans ce travail, l'algorithme de SPACONE 1996 [130] pour une poutre classique est étendu à la poutre mixte. De plus, le cas de la charge répartie, non abordé par SALARI 1999 [120] et ALEMDAR 2001 [9], est traité rigoureusement. Cela nous a conduit à proposer un algorithme spécifique pour l'actualisation des efforts internes. Par ailleurs, ces deux auteurs font une présentation très sommaire de l'algorithme de résolution qui n'en permet guère une utilisation pratique.

Les travaux récents ont montré la supériorité de l'élément équilibre (SALARI 1999 [120], ALEMDAR 2001 [9]) particulièrement dans le domaine non-linéaire, et ce malgré les diffi-

cultés de mise en oeuvre.

Dans le programme de l'analyse non-linéaire de structure, chaque pas de charge correspond à une application d'un incrément de charge extérieure sur la structure. L'incrément de déplacement correspondant de structure est déterminé et les déplacements nodaux sont extraits pour chaque élément. Puisque dans l'élément d'équilibre, il n'y a pas de fonctions d'interpolation de déplacement pour relier le champ des déformations dans l'élément avec les déplacements nodaux, la détermination des efforts internes n'est pas directe comme pour l'élément de déplacement. On a besoin d'un algorithme spécifique (au niveau de l'élément) pour déterminer les efforts internes de chaque élément.

---

#### ITÉRATION ÉQUILIBRE DE NEWTON-RAPHSON : BOUCLE I :

---

L'itération NEWTON-RAPHSON ( $i$ ) est organisée de la manière suivante :

(1) *Résoudre le système d'équations d'équilibre global et mettre à jour les déplacements de la structure.*

A l'itération de Newton-Raphson ( $i$ ), la matrice de rigidité globale  $\mathbf{K}_g^{i-1}$  à l'itération précédente ( $i-1$ ) est utilisée pour calculer les incréments de déplacement  $\Delta\bar{\mathbf{q}}^i$  correspondant aux incréments de chargement donnés  $\Delta\bar{\mathbf{P}}_{gU}^{i-1}$  qui représentent les forces hors équilibre par rapport à l'itération précédente (cf. Figure 5.7).

$$\mathbf{K}_g^{i-1} \Delta\bar{\mathbf{q}}_g^i = \Delta\bar{\mathbf{P}}_{gU}^{i-1} \quad (5.103)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_g^i = \bar{\mathbf{q}}_g^{i-1} + \Delta\bar{\mathbf{q}}_g^i \quad (5.104)$$

(2) *Pour chaque élément, extraire les déplacements et les incréments de déplacement.*

Les incréments de déplacements nodaux de chaque élément sans modes rigides  $\Delta\mathbf{q}^i$  sont extraits à partir de ceux avec modes rigides  $\Delta\bar{\mathbf{q}}^i$  en utilisant la matrice de transformation

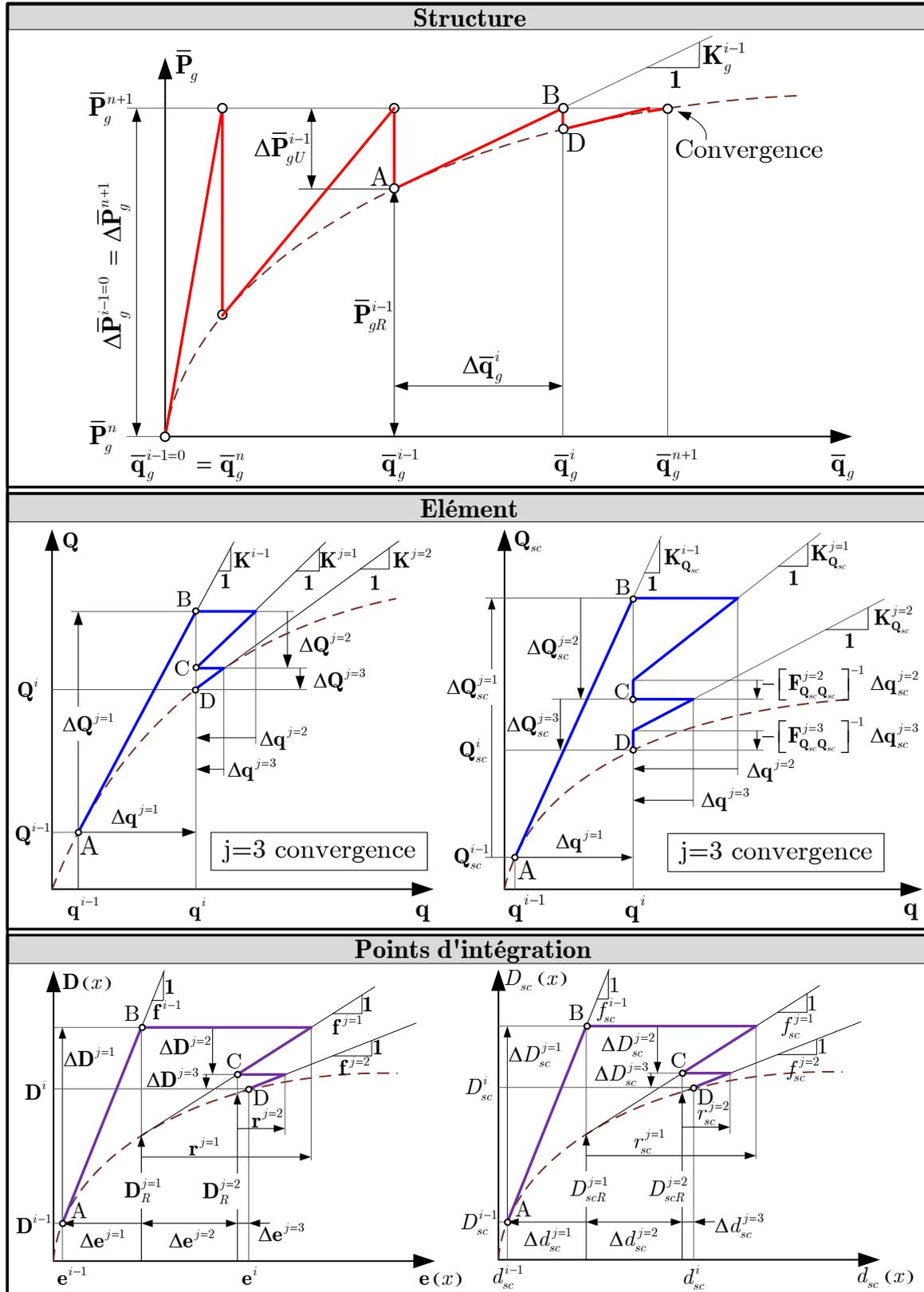


Figure 5.7 – Algorithme de calcul pour la formulation équilibre

$\mathbf{T}_{MR}$ .

$$\Delta \mathbf{q}^i = \mathbf{T}_{MR} \Delta \bar{\mathbf{q}}^i \quad (5.105)$$

$$\mathbf{q}^i = \mathbf{q}^{i-1} + \Delta \mathbf{q}^i \quad (5.106)$$

---

ACTUALISATION DES EFFORTS INTERNES : BOUCLE J :

---

(3) Pour chaque élément, effectuer les opérations (3) à (10).

Les déplacements  $\mathbf{q}^i$  sont maintenant imposés au niveau de l'élément afin de déterminer les efforts internes qui satisfont conjointement les équations d'équilibres locales et les relations de comportement. Pour cela, un processus itératif, repéré par l'indice  $j$ , est appliqué. L'indice de la première itération est  $j = 1$ .

$$\Delta \mathbf{q}^{j=1} = \Delta \mathbf{q}^i \quad (5.107)$$

Lorsque  $j > 1$ ,  $\Delta \mathbf{q}^j$  est égale aux déplacements résiduels de l'élément (cf. Figure 5.7), comme déterminé à l'étape (18).

(4) Calculer les incréments des efforts nodaux.

$$\Delta \mathbf{Q}^j = \mathbf{K}^{j-1} \Delta \mathbf{q}^j \quad (5.108)$$

$$\Delta \mathbf{Q}_{sc}^j = \mathbf{K}_{Q_{sc}}^{j-1} \Delta \mathbf{q}^j - [\mathbf{F}_{Q_{sc} Q_{sc}}^{j-1}]^{-1} \Delta \mathbf{q}_{sc}^j \quad (5.109)$$

avec

$$\mathbf{K}_{Q_{sc}}^{j-1} = - [\mathbf{F}_{Q_{sc} Q_{sc}}^{j-1}]^{-1} [\mathbf{F}_{Q Q_{sc}}^{j-1}]^T \mathbf{K}^{j-1} \quad (5.110)$$

Lorsque  $j = 1$ ,  $\mathbf{K}^{j-1} = \mathbf{K}^{i-1}$ ;  $\mathbf{F}_{Q_{sc} Q_{sc}}^{j-1} = \mathbf{F}_{Q_{sc} Q_{sc}}^{i-1}$ ,  $\mathbf{F}_{Q Q_{sc}}^{j-1} = \mathbf{F}_{Q Q_{sc}}^{i-1}$  et  $\Delta \mathbf{q}_{sc}^j = \mathbf{0}$  où  $i - 1$  correspond à la configuration finale de l'itération NEWTON-RAPHSON ( $i - 1$ ). Lorsque  $j > 1$ ,  $\Delta \mathbf{q}_{sc}^j$  est déterminé à l'étape (18).

(5) Actualiser les efforts nodaux.

$$\mathbf{Q}^j = \mathbf{Q}^{j-1} + \Delta \mathbf{Q}^j \quad (5.111)$$

$$\mathbf{Q}_{sc}^j = \mathbf{Q}_{sc}^{j-1} + \Delta \mathbf{Q}_{sc}^j \quad (5.112)$$

Lorsque  $j = 1$ ,  $\mathbf{Q}^{j-1} = \mathbf{Q}^{i-1}$  et  $\mathbf{Q}_{sc}^{j-1} = \mathbf{Q}_{sc}^{i-1}$ .

(6) Calculer les incréments des efforts internes et des efforts de cisaillement.

$$\Delta \mathbf{D}^j(x) = \mathbf{b}(x) \Delta \mathbf{Q}^j + \mathbf{c}(x) \Delta \mathbf{Q}_{sc}^j \quad (5.113)$$

$$\Delta D_{sc}^j(x) = \mathbf{b}_{sc}(x) \Delta \mathbf{Q}^j + \mathbf{c}_{sc}(x) \Delta \mathbf{Q}_{sc}^j \quad (5.114)$$

(7) Actualiser les efforts internes et les efforts de cisaillement.

$$\mathbf{D}^j(x) = \mathbf{D}^{j-1}(x) + \Delta \mathbf{D}^j(x) + \Delta \mathbf{D}_0^{i,j}(x) \quad (5.115)$$

$$D_{sc}^j(x) = D_{sc}^{j-1}(x) + \Delta D_{sc}^j(x) \quad (5.116)$$

où  $\Delta \mathbf{D}_0^{i,j}(x)$

$$\Delta \mathbf{D}_0^{i,j}(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \Delta p_z x (L - x) \end{bmatrix}^T, & \text{si } i = j = 1; \\ \mathbf{0}, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (5.117)$$

Lorsque  $j = 1$ ,  $\mathbf{D}^{j-1}(x) = \mathbf{D}^{i-1}(x)$ ;  $\mathbf{D}_{sc}^{j-1}(x) = \mathbf{D}_{sc}^{i-1}(x)$ .

(8) Calculer les incréments de déformations généralisées et de glissement aux points d'intégration  $x_{gl}$ .

$$\Delta \mathbf{e}^j(x_{gl}) = \mathbf{r}^{j-1}(x_{gl}) + \mathbf{f}^{j-1}(x_{gl}) \Delta \mathbf{D}^j \quad (5.118)$$

$$\Delta d_{sc}^j(x_{gl}) = r_{sc}^{j-1}(x_{gl}) + f_{sc}^{j-1}(x_{gl}) \Delta D_{sc}^j \quad (5.119)$$

où  $\mathbf{r}^{j-1}(x_{gl})$  et  $r_{sc}^{j-1}(x_{gl})$  sont respectivement les déformations généralisées résiduelles et les glissements résiduels de l'itération  $(j-1)$  (cf. Figure 5.7). Lorsque  $j = 1$ ,  $\mathbf{r}^{j-1}(x_{gl}) = \mathbf{0}$ ,  $r_{sc}^{j-1}(x_{gl}) = 0$ ,  $\mathbf{f}^{j-1}(x_{gl}) = \mathbf{f}^{i-1}(x_{gl})$  et  $f_{sc}^{j-1}(x_{gl}) = f_{sc}^{i-1}(x_{gl})$ .

(9) Actualiser les déformations généralisées et le glissement.

$$\mathbf{e}^j(x_{gl}) = \mathbf{e}^{j-1}(x_{gl}) + \Delta \mathbf{e}^j(x_{gl}) \quad (5.120)$$

$$d_{sc}^j(x_{gl}) = d_{sc}^{j-1}(x_{gl}) + \Delta d_{sc}^j(x_{gl}) \quad (5.121)$$

(10) *Pour chaque fibre, calculer la déformation.*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_s^j(x_{gl}, z_s) \\ \varepsilon_c^j(x_{gl}, z_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_s \\ 0 & 1 & z_c \end{bmatrix} \mathbf{e}^j(x_{gl}) \quad (5.122)$$

(11) *Pour chaque fibre, calculer la contrainte et le module tangent.*

La contrainte dans les fibres  $\sigma^j(x_{gl}, z)$  et le module tangent  $E^j(x_{gl}, z)$  correspondant à la déformation  $\varepsilon^j(x_{gl}, z)$  s'obtiennent en intégrant la loi de comportement des matériaux (cf. chapitre 4).

(12) *Calculer l'effort de connexion et mettre à jour le module tangent de connexion.*

L'effort de cisaillement  $D_{scR}^j(x_{gl})$  et le module tangent  $k_{sc}^j(x_{gl})$  correspondant au glissement  $d_{sc}^j(x)$  s'obtiennent en intégrant la loi de comportement de la connexion (cf. chapitre 4).

(13) *Calculer les matrices de flexibilité tangentes de section et de connexion.*

$$\mathbf{f}^j(x_{gl}) = [\mathbf{k}^j(x_{gl})]^{-1} \quad (5.123)$$

$$f_{sc}^j(x_{gl}) = [k_{sc}^j(x_{gl})]^{-1} \quad (5.124)$$

où l'expression de la matrice tangente de rigidité de section  $\mathbf{k}^j(x_{gl})$  est détaillée dans l'annexe I.

(14) *Calculer les efforts internes satisfaisant la loi de comportement.*

Les efforts internes  $\mathbf{D}_R^j(x_{gl})$  sont déterminés à l'aide de la condition d'équilibre de section (cf. Annexe I).

(15) *Calculer les forces hors-équilibre de section et de connexion aux points d'intégration.*

$$\mathbf{D}_U^j(x_{gl}) = \mathbf{D}^j(x_{gl}) - \mathbf{D}_R^j(x_{gl}) \quad (5.125)$$

$$D_{scU}^j(x_{gl}) = D_{sc}^j - D_{scR}^j(x_{gl}) \quad (5.126)$$

(16) Calculer les déformations généralisées résiduelles et les glissements résiduels.

$$\mathbf{r}^j(x_{gl}) = \mathbf{f}^j(x_{gl})\mathbf{D}_U^j(x_{gl}) \quad (5.127)$$

$$r_{sc}^j(x_{gl}) = f_{sc}^j(x_{gl})D_{scU}^j(x_{gl}) \quad (5.128)$$

(17) Calculer les matrices de flexibilité et rigidité de l'élément.

$$\mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}^j = \int_L \mathbf{b}^T \mathbf{f}^j \mathbf{b} dx + \int_L \mathbf{b}_{sc}^T \mathbf{f}_{sc}^j \mathbf{b}_{sc} dx \quad (5.129)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}}^j = \int_L \mathbf{b}^T \mathbf{f}^j \mathbf{c} dx + \int_L \mathbf{b}_{sc}^T(x) \mathbf{f}_{sc}^j \mathbf{c}_{sc} dx \quad (5.130)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{Q}_{sc}\mathbf{Q}_{sc}}^j = \int_L \mathbf{c}^T \mathbf{f}^j \mathbf{c} dx + \int_L \mathbf{c}_{sc}^T \mathbf{f}_{sc}^j \mathbf{c}_{sc} dx \quad (5.131)$$

$$\mathbf{F}^j = \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}^j - \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}}^j [\mathbf{F}_{\mathbf{Q}_{sc}\mathbf{Q}_{sc}}^j]^{-1} [\mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}}^j]^T \quad (5.132)$$

$$\mathbf{K}^j = [\mathbf{F}^j]^{-1} \quad (5.133)$$

(18) Vérifier la convergence au niveau de l'élément.

- Si  $\mathbf{D}_U^j(x)$  et  $D_{scU}^j(x)$  sont inférieurs ou égaux à la *tolérance* fixée pour la précision du calcul, la convergence au niveau de l'élément est atteinte. Passer à l'étape (19).
- Sinon, la convergence au niveau de l'élément n'est pas atteinte. Calculer les déplacements résiduels de l'élément :

$$\Delta \mathbf{q}_{sc}^{j+1} = \int_L [\mathbf{c}^T \mathbf{r}^j(x) + \mathbf{c}_{sc}^T r_{sc}^j(x)] dx \quad (5.134)$$

$$\Delta \mathbf{q}^{j+1} = - \int_L [\mathbf{b}^T \mathbf{r}^j(x) + \mathbf{b}_{sc}^T r_{sc}^j(x)] dx + \mathbf{F}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{sc}}^j [\mathbf{F}_{\mathbf{Q}_{sc}\mathbf{Q}_{sc}}^j]^{-1} \Delta \mathbf{q}_{sc}^{j+1}, \quad (5.135)$$

puis retourner à l'étape (4).

(19) Calculer les efforts aux noeuds pour toute la structure et actualiser la matrice de rigidité globale.

Lorsque pour tous les éléments, la convergence est atteinte, l'itération de NEWTON-RAPHSON (*i*) est terminée. Les forces nodales et les matrices de rigidité des éléments sont assemblées dans le but de mettre à jour la matrice de rigidité globale et le vecteur

des forces nodales de la structure :

$$\mathbf{P}_{gR}^i = \text{assembler} \left( \mathbf{T}_{MR}^T \mathbf{Q}^j + \overline{\mathbf{Q}}_0^i \right) \quad (5.136)$$

$$\mathbf{K}_g^i = \text{assembler} \left( \mathbf{T}_{MR}^T \mathbf{K}^j \mathbf{T}_{MR} \right) \quad (5.137)$$

A ce stade, les efforts internes de la structure  $\mathbf{P}_{gR}^i$  sont comparées aux forces externes appliquées. Si la différence  $\Delta \overline{\mathbf{P}}_{gU}^i$ , qui est le vecteur des forces hors-équilibre de la structure, n'est pas inférieure à la tolérance fixée, l'itération de NEWTON-RAPHSON suivante commence. Les étapes de (1) à (19) sont répétées jusqu'à ce que la convergence au niveau de la structure soit obtenue.

## 5.5 Formulation mixte

Les méthodes à un champ que nous venons de présenter imposent aux champs approchés de vérifier *a priori* des conditions de continuité au travers des frontières des éléments. On peut noter que la continuité forte et la continuité faible sont équivalentes en problème 1D. Dans les méthodes des éléments finis mixtes, plusieurs champs sont discrétisés de manière indépendante à l'intérieur des éléments. Dans le cadre des poutres mixtes, on distingue les formulations mixtes suivantes : formulation à deux champs ( $\mathbf{d} - \mathbf{D}$ ) ou formulations à trois champs ( $\mathbf{d} - \mathbf{e} - \mathbf{D}$  ou  $\mathbf{d} - \mathbf{e} - \mathbf{D}_{sc}$ ). Les résultats expérimentaux montrent que la courbure varie brusquement au voisinage de la zone plastique, tandis que la variation du glissement le long de l'interface acier/béton est moins brutale. Par conséquent, du point de vue numérique, il est plus avantageux d'approximer le champ de déplacement plutôt que le champ de courbure [17]. Dans notre étude, la formulation mixte de HELLINGER-REISSNER, où les champs  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{D}$  sont approchés, est développée pour les poutres mixtes, et ce pour les deux type de connexion.

### 5.5.1 Connexion continue

#### 5.5.1.1 Formulation variationnelle de Hellinger-Reissner

La formulation variationnelle mixte de HELLINGER-REISSNER obtenue en combinant la formulation variationnelle des équations d'équilibre et la formulation variationnelle des équations de compatibilité. En multipliant l'équations d'équilibre (2.16) par le terme  $\delta \mathbf{d}$  et

l'équations de compatibilité (2.40) par le terme  $\delta \mathbf{D}$  et en intégrant le tout sur la longueur, on aboutit à l'équation scalaire :

$$\int_L \delta \mathbf{d}^T (\partial \mathbf{D} - \partial_{sc} D_{sc} - \mathbf{P}_e) dx + \int_L \delta \mathbf{D}^T (\partial \mathbf{d} - \mathbf{e}) dx = 0 \quad (5.138)$$

En utilisant les développements du paragraphe 5.3.1.1, on a :

$$\int_L \delta \mathbf{d}^T (\partial \mathbf{D} - \partial_{sc} D_{sc} - \mathbf{P}_e) dx = \int_L \partial \delta \mathbf{d}^T \mathbf{D} dx + \int_L \delta d_{sc} D_{sc} dx - \int_L \delta \mathbf{d}^T \mathbf{P}_e dx - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}_e \quad (5.139)$$

L'équation (5.138) devient :

$$\int_L \partial \delta \mathbf{d}^T \mathbf{D} dx + \int_L \delta d_{sc} D_{sc} dx - \int_L \delta \mathbf{d}^T \mathbf{P}_e dx - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}_e + \int_L \delta \mathbf{D}^T (\partial \mathbf{d} - \mathbf{e}) dx = 0 \quad (5.140)$$

Faisant usage de la forme linéarisée des relations de comportement inverse (2.47) et (2.57), les déformations généralisées  $\mathbf{e}$  et l'effort de cisaillement  $D_{sc}$  sont éliminés de l'équation (5.140) :

$$\int_L \partial \delta \mathbf{d}^T \mathbf{D} dx + \int_L \delta d_{sc} (D_{sc}^{i-1} + k_{sc}^{i-1} \Delta d_{sc}) dx - \int_L \delta \mathbf{d}^T \mathbf{P}_e dx - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}_e + \int_L \delta \mathbf{D}^T (\partial \mathbf{d} - \mathbf{e}^{i-1} - \mathbf{f} \Delta \mathbf{D}) dx = 0 \quad (5.141)$$

L'équation (5.141) est l'équation fondamentale permettant de construire l'élément fini mixte dédié aux poutres mixtes avec interaction partielle. Il est à noter que la force de cisaillement à l'interface n'apparaît plus explicitement dans l'équation (5.141). En effet, à l'aide de la loi de comportement linéarisée,  $\Delta D_{sc}$  est éliminé au profit du glissement  $\Delta d_{sc}$ . Cette approche a été également adoptée par AYOUB (1999) [17] et ALEMDAR (2001) [9]. Une autre approche, qui correspond à la formulation de SALARI (1999) [120], consiste à déterminer  $D_{sc}$  à partir des équations d'équilibre. Par ailleurs, le glissement  $d_{sc}$  sera directement déterminé à partir de la relation cinématique (2.41), donc la cinématique à l'interface est vérifiée de manière stricte tandis que l'équilibre dans la direction horizontale n'est vérifié qu'en moyenne (équilibre faible).

### 5.5.1.2 Discrétisation d'élément fini

Les déplacements et les efforts généralisés sont interpolés en termes des déplacements nodaux  $\mathbf{q}$  et des forces nodales indépendantes  $\mathbf{Q}$  comme :

$$\mathbf{d}(x) = \mathbf{a}(x)\mathbf{q} \quad (5.142)$$

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}(x)\mathbf{Q} + \mathbf{D}_0(x) \quad (5.143)$$

En utilisant la relation cinématique (2.41), le glissement à l'interface est calculé à partir des déplacements nodaux :

$$d_{sc}(x) = \mathbf{B}_{sc}(x)\mathbf{q} \quad (5.144)$$

où  $\mathbf{B}_{sc}(x) = \partial_{sc}\mathbf{a}(x)$ .

En substituant les relations (5.142), (5.143) et (5.144) dans l'équation (5.141), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_L \delta\mathbf{q}^T \mathbf{B}^T [\mathbf{b}(\mathbf{Q}^i + \Delta\mathbf{Q}) + \mathbf{D}_0] dx + \int_L \delta\mathbf{q}^T \mathbf{B}_{sc}^T (D_{sc}^{i-1} + k_{sc}^{i-1} \mathbf{B}_{sc} \Delta\mathbf{q}) dx - \int_L \delta\mathbf{q}^T \mathbf{a}^T \mathbf{P}_e \\ & - \delta\mathbf{q}^T \mathbf{Q}_e + \int_L \delta\mathbf{Q}^T \mathbf{b}^T [\mathbf{B}(\mathbf{q}^{i-1} + \Delta\mathbf{q}) - \mathbf{e}^{i-1} - \mathbf{f}^{i-1} (\mathbf{b}\Delta\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{D}_0)] dx = 0 \end{aligned} \quad (5.145)$$

où  $\mathbf{B}(x) = \partial\mathbf{a}(x)$ .

En posant :

$$\mathbf{K}_{sc} = \int_L \mathbf{B}_{sc}^T k_{sc}^{i-1} \mathbf{B}_{sc} dx \quad (5.146)$$

$$\mathbf{G} = \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{b} dx \quad (5.147)$$

$$\mathbf{Q}_{sc}^{i-1} = \int_L \mathbf{B}_{sc}^T D_{sc}^{i-1} dx \quad (5.148)$$

$$\mathbf{Q}_0 = \int_L \mathbf{a}^T \mathbf{P}_e dx - \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 dx \quad (5.149)$$

$$\mathbf{F} = \int_L \mathbf{b}^T \mathbf{f}^{i-1} \mathbf{b} dx \quad (5.150)$$

$$\mathbf{q}_r^{i-1} = \int_L \mathbf{b}^T (\mathbf{e}^{i-1} + \mathbf{f}^{i-1} \Delta\mathbf{D}_0) dx - \mathbf{G}^T \mathbf{q}^{i-1} \quad (5.151)$$

et après quelques manipulations algébriques, l'équation (5.145) devient :

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K}_{sc} \Delta \mathbf{q} + \mathbf{G} \Delta \mathbf{Q} + \mathbf{G} \mathbf{Q}^{i-1} + \mathbf{Q}_{sc}^{i-1} - \mathbf{Q}_e - \mathbf{Q}_0) + \delta \mathbf{Q}^T (\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{q} - \mathbf{F} \Delta \mathbf{Q} - \mathbf{q}_r^{i-1}) = 0 \quad (5.152)$$

Cette équation doit être satisfaite quelque soient  $\delta \mathbf{q}$  et  $\delta \mathbf{Q}$ , ce qui conduit aux deux relations suivantes :

$$\mathbf{K}_{sc} \Delta \mathbf{q} + \mathbf{G} \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_0 - \mathbf{G} \mathbf{Q}^{i-1} - \mathbf{Q}_{sc}^{i-1} \quad (5.153)$$

$$\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{q} - \mathbf{F} \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{q}_r^{i-1} \quad (5.154)$$

Utilisant l'équation (5.154), on obtient l'expression de  $\Delta \mathbf{Q}$  en fonction de  $\Delta \mathbf{q}$  :

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{q} - \mathbf{q}_r^{i-1}) \quad (5.155)$$

que l'on ré-injecte dans l'équation (5.153) pour obtenir :

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}_R^{i-1} \quad (5.156)$$

où

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{sc} + \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}^T \quad (5.157)$$

est la matrice de rigidité de l'élément mixte ; et

$$\mathbf{Q}_R^{i-1} = \mathbf{G} \mathbf{Q}^{i-1} + \mathbf{Q}_{sc}^{i-1} - \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}_r^{i-1} \quad (5.158)$$

est le vecteur des efforts nodaux équivalents considérés à l'itération  $i - 1$ .

*Remarque* : Dans l'approche mixte retenue, les DDL "force" sont éliminés au niveau de l'élément et seuls les DDL "déplacement" subsistent après assemblage. Nous rappelons qu'il existe une autre formulation mixte qui conserve au cours de la résolution tous les DDL "force" et "déplacement" [17].

### 5.5.1.3 Fonction d'interpolation de déplacements et de forces

La méthode des éléments finis mixtes fournit des résultats précis mais elle peut s'avérer instable si certaines précautions ne sont pas prises. Afin de s'assurer que l'opérateur de raideur n'est pas singulier, il est nécessaire de satisfaire la condition suivante [17] :

$$n_{\mathbf{Q}x} \geq n_{\mathbf{q}x} - n_{mrx} \quad (5.159)$$

où  $n_{\mathbf{Q}x}$  désigne le nombre de DDL "force" dans la direction  $x$ ,  $n_{\mathbf{q}x}$  désigne le nombre de DDL "déplacement" dans la direction  $x$  et  $n_{mrx}$  le nombre de modes rigides qui vaut 1 dans une direction ou rotation. Cette condition fait que les nombres de DDL "déplacement" et "force" ne sont pas indépendants.

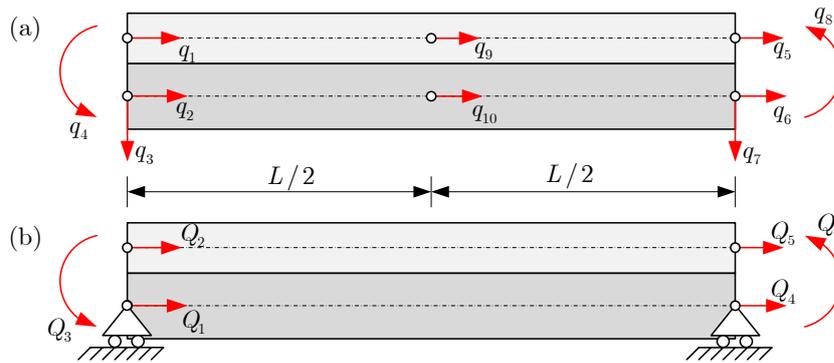


Figure 5.8 – (a) Degré liberté de déplacements ; (b) Degré liberté de forces

L'élément mixte considéré possède 10 degrés de liberté en déplacements  $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_{10}]^T$  (cf. Figure 5.8). Les fonctions d'interpolation du champ des déplacements sont celles que nous avons présenté au paragraphe 5.3.1.3.

Le nombre total de modes rigides est égal à 4 et correspond aux déplacements de translation selon  $x$  de la dalle et du profilé, à un déplacement d'ensemble (dalle + profilé) selon  $y$  et à un mouvement de rotation d'ensemble dans le plan. Ainsi, il faut que  $n_{\mathbf{Q}} \geq 6$ . Comme AYOUB (1999) [17] et ALEMDAR (2001) [9], nous avons considéré 6 degrés de liberté de forces  $\mathbf{Q} = [Q_1 \dots Q_6]^T$  définis à la Figure 5.8).

Le moment fléchissant  $M(x)$  et les forces axiales  $N_c(x)$ ,  $N_s(x)$  sont interpolés linéairement à partir des forces aux noeuds. Le vecteur des efforts généralisés est déterminé par :

$$\begin{bmatrix} N_s \\ N_c \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x}{L} - 1 & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ \frac{x}{L} - 1 & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{L} - 1 & 0 & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p_z x (L - x)}{2} \end{bmatrix} \quad (5.160)$$

ou bien sous forme matricielle :

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}(x)\mathbf{Q} + \mathbf{D}_0(x) \quad (5.161)$$

Les efforts internes  $N_s$ ,  $N_c$  et  $M$  ne sont pas continus *a priori* au passage d'un élément à un autre. Autrement dit, les  $Q_i$  sont associés à un élément et non à un noeud. Cependant, l'équilibre de noeud à l'assemblage des éléments va garantir la continuité du moment total. Par ailleurs, le moment total est une fonction polynomiale qui se compose d'une partie linéaire (pas de chargement entre les noeuds) et d'une partie quadratique (charge répartie constante). Ainsi, le moment total est approché à l'aide de fonction capable de reproduire la solution exacte. On peut donc s'attendre à une bonne estimation du moment total dans la poutre.

### 5.5.2 Connexion ponctuelle

Pour le modèle de connexion ponctuelle, il suffit de reprendre le développement précédent en prenant  $k_{sc} = 0$  et  $D_{sc} = 0$ . On ne présente ici que les expressions de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  et du vecteur de forces nodales équivalentes  $\mathbf{Q}_R^{i-1}$  d'un élément de poutre mixte non connectée :

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}^T \quad (5.162)$$

$$\mathbf{Q}_R^{i-1} = \mathbf{G} \mathbf{Q}^{i-1} - \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}_r^{i-1} \quad (5.163)$$

La matrice de rigidité de l'élément de la poutre mixte avec la connexion ponctuelle s'obtient en assemblant la matrice précédente avec les matrices de rigidité de l'élément de connexion (ressort) qui sont développées au paragraphe 2.4.1.2.

### 5.5.3 Algorithme de calcul

L'itération de NEWTON-RAPHSON ( $i$ ) est organisée comme suit :

(1) *Résoudre le système global des équations et actualiser les déplacements de la structure.*

A l'itération de NEWTON-RAPHSON ( $i$ ), la matrice de rigidité globale  $\mathbf{K}_g^{i-1}$  à l'itération précédente ( $i - 1$ ) est utilisée pour calculer les incréments de déplacement  $\Delta \bar{\mathbf{q}}^i$  correspondant aux incréments de chargement donnés  $\Delta \bar{\mathbf{P}}_{gU}^{i-1}$  qui représentent les forces hors équilibre par rapport à l'itération précédente (cf. Figure 5.9).

$$\mathbf{K}_g^{i-1} \Delta \bar{\mathbf{q}}_g^i = \Delta \bar{\mathbf{P}}_{gU}^{i-1} \quad (5.164)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_g^i = \bar{\mathbf{q}}_g^{i-1} + \Delta \bar{\mathbf{q}}_g^i \quad (5.165)$$

(2) *Pour chaque élément, extraire les déplacements et les incréments de déplacement.*

Les incréments de déplacements aux noeuds de chaque élément  $\Delta \mathbf{q}^i$  sont extraits à partir des ceux de la structure  $\Delta \bar{\mathbf{q}}_g^i$ .

$$\mathbf{q}^i = \mathbf{q}^{i-1} + \Delta \mathbf{q}^i \quad (5.166)$$

---

ACTUALISATION DES EFFORTS INTERNES : BOUCLE J :

---

(3) *Pour chaque élément effectuer les opérations (3) à (10).*

Les déplacements  $\mathbf{q}^i$  sont maintenant imposés au niveau de l'élément afin de déterminer les efforts internes correspondant qui satisfont la relation de comportement. Pour cela, un schéma itératif, repéré par l'indice  $j$ , est utilisé. L'indice de la première itération est  $j = 1$  (cf. Figure 5.9) .

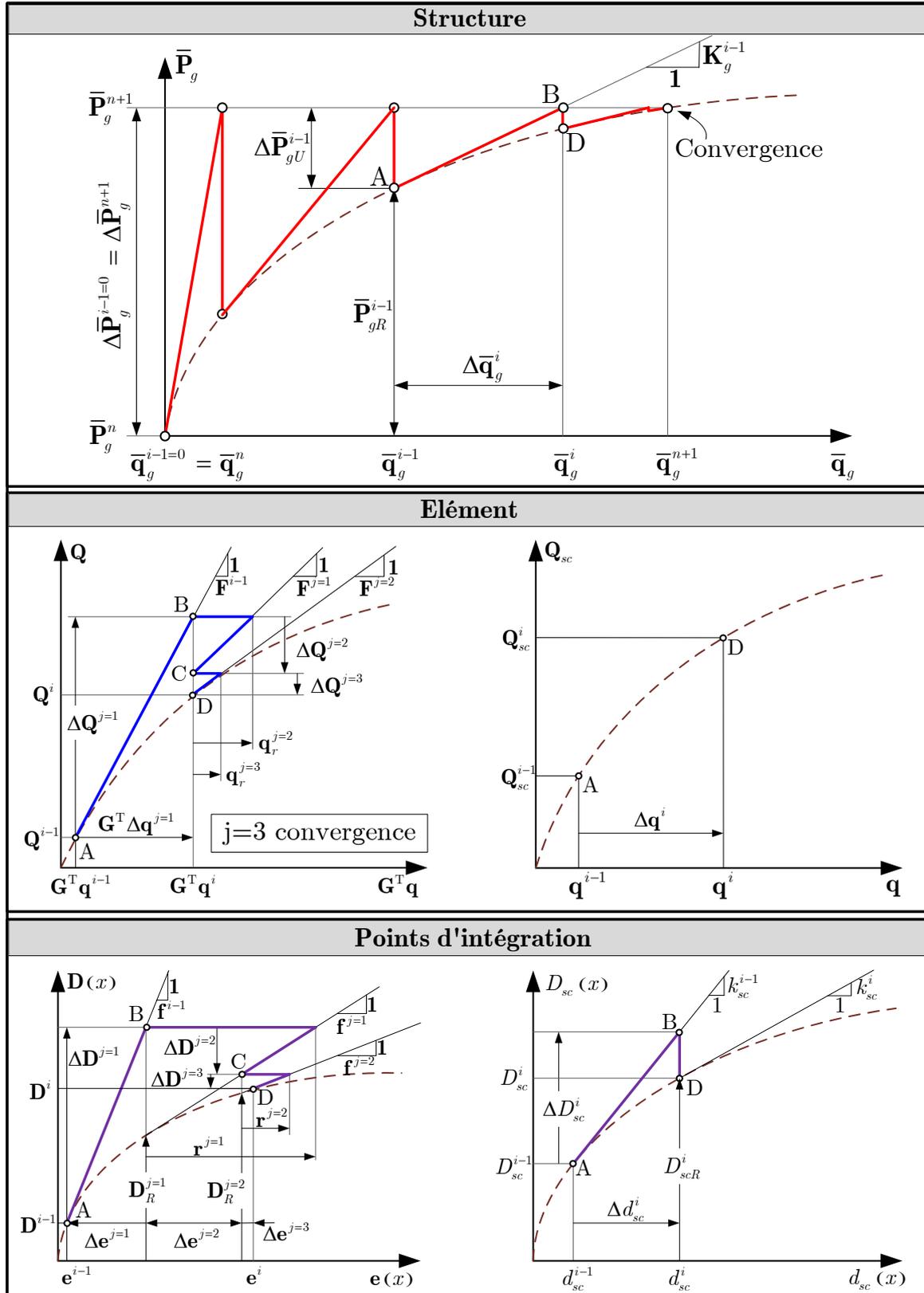


Figure 5.9 – Algorithme de calcul pour la formulation mixte

(4) Calculer les incréments des efforts nodaux.

$$\Delta \mathbf{Q}^j = [\mathbf{F}^{j-1}]^{-1} (\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{q}^j - \mathbf{q}_r^{j-1}) \quad (5.167)$$

avec, lorsque  $j = 1$ ,  $\mathbf{F}^{j-1} = \mathbf{F}^{i-1}$ ,  $\Delta \mathbf{q}^j = \Delta \mathbf{q}^i$  et  $\mathbf{q}_r^{j-1} = \mathbf{0}$ . Lorsque  $j > 1$ ,  $\Delta \mathbf{q}^j = \mathbf{0}$ .  $\mathbf{q}_r^{j-1}$  est déterminé comme indiqué à l'étape (16).

(5) Actualiser les efforts nodaux.

$$\mathbf{Q}^j = \mathbf{Q}^{j-1} + \Delta \mathbf{Q}^j \quad (5.168)$$

Lorsque  $j = 1$ ,  $\mathbf{Q}^{j-1} = \mathbf{Q}^{i-1}$ .

(6) Calculer les incréments des efforts internes aux points d'intégration.

$$\Delta \mathbf{D}^j = \mathbf{b} \Delta \mathbf{Q}^j \quad (5.169)$$

(7) Actualiser les efforts internes.

$$\mathbf{D}^j = \mathbf{D}^{j-1} + \Delta \mathbf{D}^j + \Delta \mathbf{D}_0^{i,j} \quad (5.170)$$

où  $\Delta \mathbf{D}_0^{i,j}$

$$\Delta \mathbf{D}_0^{i,j} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \Delta p_{zx} (L - x) \end{bmatrix}^T, & \text{si } i=j=1; \\ \mathbf{0}, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (5.171)$$

Lorsque  $j = 1$ ,  $\mathbf{D}^0 = \mathbf{D}^{i-1}$ .

(8) Calculer les incréments des déformations généralisées aux points d'intégration  $x_{gl}$ .

$$\Delta \mathbf{e}^j(x_{gl}) = \mathbf{r}^{j-1}(x_{gl}) + \mathbf{f}^{j-1}(x_{gl}) \Delta \mathbf{D}^j(x_{gl}) \quad (5.172)$$

où  $\mathbf{r}^{j-1}(x_{gl})$  sont les déformations généralisées résiduelles de l'itération  $(j - 1)$ . Lorsque  $j = 1$ ,  $\mathbf{r}^{j-1}(x_{gl}) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{f}^{j-1}(x_{gl}) = \mathbf{f}^{i-1}(x_{gl})$ .

(9) Actualiser les déformations généralisées.

$$\mathbf{e}^j(x_{gl}) = \mathbf{e}^{j-1}(x_{gl}) + \Delta \mathbf{e}^j(x_{gl}) \quad (5.173)$$

(10) Pour chaque fibre, calculer la déformation.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_s^j(x_{gl}, z_s) \\ \varepsilon_c^j(x_{gl}, z_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_s \\ 0 & 1 & z_c \end{bmatrix} \mathbf{e}^j(x_{gl}) \quad (5.174)$$

(11) Pour chaque fibre, calculer la contrainte et le module tangent.

La contrainte dans les fibres  $\sigma^j(x_{gl}, z)$  et le module tangent  $E^j(x_{gl}, z)$  correspondant à la déformation  $\varepsilon^j(x_{gl}, z)$  s'obtiennent en intégrant la loi de comportement des matériaux (cf. chapitre 4).

(12) Calculer la matrice de flexibilité tangente de section.

$$\mathbf{f}^j(x_{gl}) = [\mathbf{k}^j(x_{gl})]^{-1} \quad (5.175)$$

où l'expression de la matrice tangente de rigidité de section  $\mathbf{k}^j(x_{gl})$  est détaillée dans l'annexe I.

(13) Calculer les efforts internes satisfaisant la loi de comportement.

Les efforts internes  $\mathbf{D}_R^j(x_{gl})$  sont déterminés à l'aide de la condition d'équilibre de section (cf. Annexe I).

(14) Calculer les efforts hors-équilibre de section.

$$\mathbf{D}_U^j(x_{gl}) = \mathbf{D}^j(x_{gl}) - \mathbf{D}_R^j(x_{gl}) \quad (5.176)$$

(15) Calculer les déformations généralisées résiduelles.

$$\mathbf{r}^j(x_{gl}) = \mathbf{f}^j(x_{gl}) \mathbf{D}_U^j(x_{gl}) \quad (5.177)$$

(16) Calculer les matrices de flexibilité de l'élément et le vecteur des déplacements résiduels.

$$\mathbf{F}^j = \int_L \mathbf{b}^T \mathbf{f}^j \mathbf{b} dx \quad (5.178)$$

$$\mathbf{q}_r^j = \int_L \mathbf{b}^T [\mathbf{e}^j + \mathbf{r}^j] dx - \mathbf{G}^T \mathbf{q}^i \quad (5.179)$$

(17) Vérifier la convergence, de manière globale, au niveau de l'élément.

- Si  $\|\mathbf{q}_r^j\|$  est inférieur ou égal à la *tolérance* fixée pour la précision du calcul, la convergence au niveau de l'élément est atteinte. Passer à l'étape (18).

- Sinon, retourner à l'étape (4).

(18) Calculer les glissements, les efforts de cisaillement et actualiser le module tangent de la connexion.

$$d_{sc}^i = \mathbf{B}_{sc} \mathbf{q}^i \quad (5.180)$$

L'effort de cisaillement  $D_{sc}^i(x)$  et le module tangent  $k_{sc}^i$  correspondant au glissement  $d_{sc}^i$  s'obtiennent en intégrant la loi de comportement de la connexion (voir chapitre 4).

(19) Calculer les efforts nodaux et la matrice de rigidité de connexion de l'élément.

$$\mathbf{K}_{sc}^i = \int_L \mathbf{B}_{sc}^T k_{sc}^i \mathbf{B}_{sc} dx \quad (5.181)$$

$$\mathbf{Q}_{sc}^i = \int_L \mathbf{B}_{sc}^T D_{sc}^i dx \quad (5.182)$$

(20) Calculer les efforts aux noeuds pour toute la structure et actualiser la matrice de rigidité globale.

Lorsque pour tous les éléments la convergence est atteinte, l'itération de Newton-Raphson (*i*) est terminée. Les efforts nodaux et les matrices de rigidité des éléments sont assemblés pour obtenir la mise à jour des efforts internes aux noeuds de la structure et de la matrice de rigidité globale :

$$\mathbf{P}_{gR}^i = \text{assembler} (\mathbf{G} \mathbf{Q}^i + \mathbf{Q}_{sc}^i) \quad (5.183)$$

$$\mathbf{K}_g^i = \text{assembler} (\mathbf{K}_{sc}^i + \mathbf{G} [\mathbf{F}^i]^{-1} \mathbf{G}^T) \quad (5.184)$$

A ce stade les efforts internes de la structure  $\mathbf{P}_{gR}^i$  sont comparées avec les forces totales appliquées. Si la différence  $\Delta \bar{\mathbf{P}}_{gU}^i$ , qui est le vecteur des forces hors-équilibre de la structure, n'est pas inférieure à la tolérance fixée, l'itération de NEWTON-RAPHSON suivante commence. Les étapes de (1) à (20) sont répétées jusqu'à ce que la convergence au niveau de la structure soit obtenue.

### 5.6 Validation des modèles

Afin d'évaluer et de comparer la performance des trois formulations d'éléments finis précédentes, deux exemples sont étudiés dans ce paragraphe. Le premier exemple est une poutre mixte isostatique, nommée PI4, qui est issue d'une série d'essais réalisés par ARIBERT et al. [14]. Il s'agit d'une poutre simplement appuyée, de portée de 5 mètres, soumise à mi-portée à une charge concentrée  $P$ . La section se compose d'un profil IPE400 et d'une dalle de  $800 \times 100 \text{ mm}^2$  renforcée par deux nappes d'armature (5  $\phi 10$  par nappe). La description géométrique de cette poutre est détaillée à la figure 5.10. Le connexion se fait de manière discrète et régulière par deux rangées de connecteurs de type goujon NELSON. L'espacement des goujons est de 650 mm.

Le deuxième exemple est une poutre mixte hyperstatique, nommée PH3, qui est issue d'une série d'essais réalisée par ANSOURIAN [11]. Il s'agit d'une poutre continue à deux travées égales de 4.5m, soumise au milieu de chaque travée à une charge concentrée  $P$ , comme indiqué à la figure 5.10. On précise que la section est constituée d'un profil HEA200, et d'une dalle de  $800 \times 100 \text{ mm}^2$  renforcée par deux nappes d'armature dont le pourcentage varie selon qu'on est en zone de moment positif ou négatif. La connexion se fait de manière discrète par trois rangées de connecteurs de type goujon NELSON. L'espacement des goujons est respectivement de 350 mm en zone de moment positif et de 300 mm en zone de moment négatif.

La figure 5.11 présente les caractéristiques des matériaux constituant les deux poutres ainsi que les lois de comportement adoptées dans la simulation numérique. A noter que, pour les besoins du calcul avec le modèle théorique, on a été contraint d'introduire des valeurs vraisemblables de certaines caractéristiques inconnues. Par exemple, pour l'énergie de rupture du béton en traction, nous avons considéré  $G_{ft} = 1000 \text{ N/m}$ .

Ces deux poutres sont respectivement simulées par les deux modèles de connexion (discrète et continue) en utilisant trois formulations différentes : formulation en déplacement, formulation équilibre et formulation mixte.



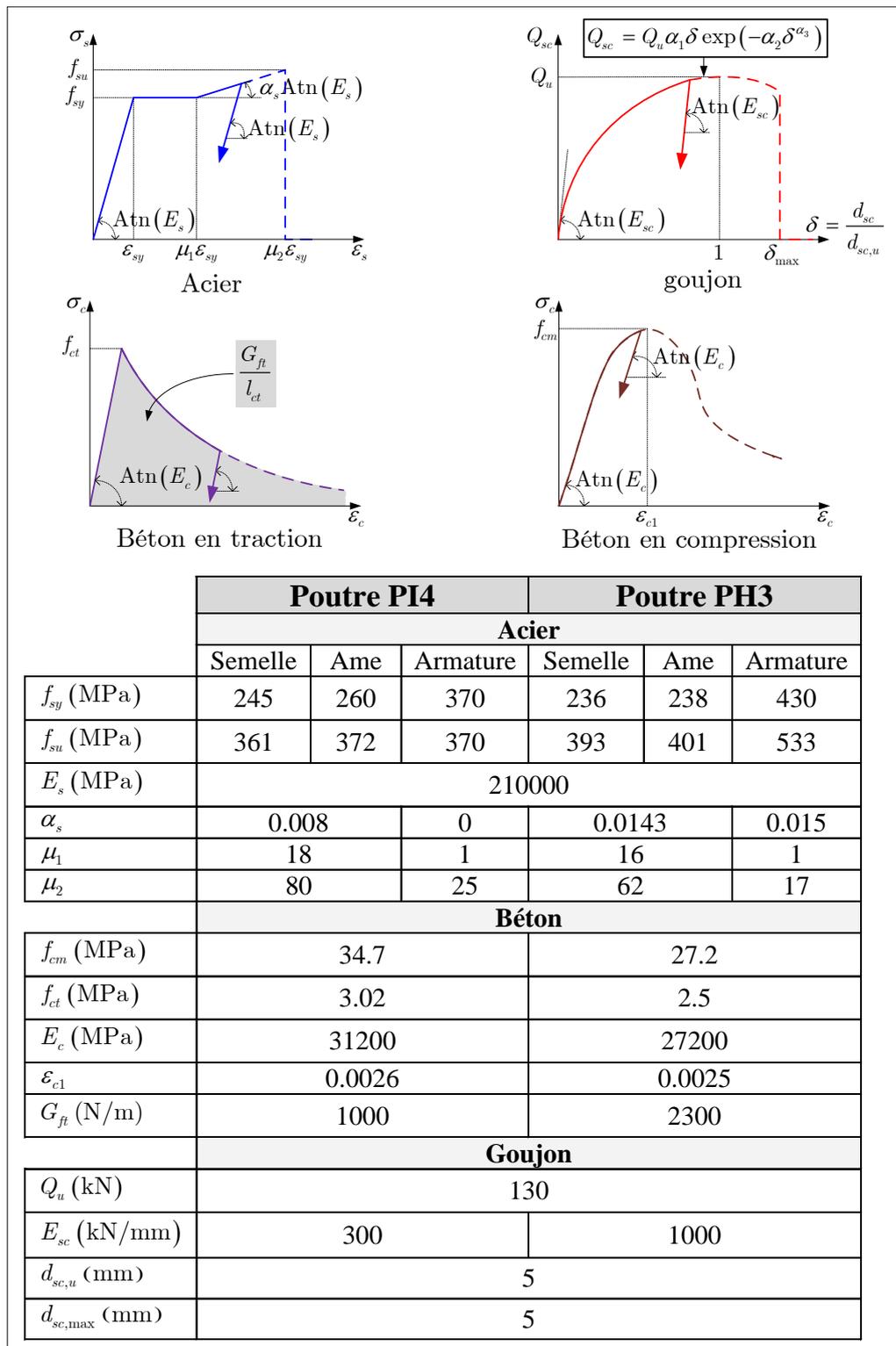


Figure 5.11 – Caractéristiques mécaniques des matériaux constituant les poutres PI4 et PH3

### 5.6.1 Caractéristiques des modèles numériques

Chaque élément fini comporte 5 points d'intégration longitudinaux (schéma de GAUSS-LOBATTO), quelque soit la formulation choisie. La section de béton est discrétisée à l'aide de 20 fibres et celle d'acier avec 30 fibres. Pour les modèles avec connexion discrète, le nombre d'éléments de connexion est égal au nombre de points de connexion le long de la poutre. Ainsi, pour la poutre isostatique PI4, il y a 9 éléments de connexion et pour la poutre hyperstatique PH3, il y a 14 éléments de connexion par travée. La raideur de l'élément de connexion s'obtient en multipliant la raideur d'un connecteur par le nombre de files. Entre deux éléments de connexion, il peut y avoir plusieurs éléments finis de poutre mixte non connectée, et ce en fonction du degré de précision souhaité. Les caractéristiques (loi de comportement) du modèle de connexion continue sont obtenues en répartissant la raideur des connecteurs au prorata de l'espacement. Si l'espacement n'est pas identique le long de la poutre, les caractéristiques deviennent non uniformes le long de la poutre. Bien entendu, il est nécessaire de placer un noeud au droit de chaque appui afin d'imposer les conditions cinématiques correspondantes. Pour chacune des formulations, plusieurs maillages ont été utilisés selon le mode de connexion. Au tableau 5.1, le détail des maillages est donné pour les deux poutres.

	<b>Poutre PI4</b>	<b>Poutre PH3</b>
Connexion discrète	12 éléments	17 éléments / travée
	18 éléments	30 éléments / travée
	30 éléments	
Connexion continue	4 éléments	6 éléments / travée
	6 éléments	10 éléments / travée
	18 éléments	16 éléments / travée
	34 éléments	24 éléments / travée

Tableau 5.1 – Maillages disponibles pour la simulation numérique

Le comportement de la poutrelle métallique est représenté à l'aide d'un modèle élastoplastique avec palier et écrouissage cinématique linéaire jusqu'à la déformation ultime. Les paramètres du modèle sont issus d'essais de traction standards (cf. thèse de ABDEL AZIZ,

page 164 [5]). Le modèle de béton est celui développé au chapitre 4, mais ici l'endommagement n'est pas pris en compte. Les caractéristiques sont issues de l'expérimentation. Les paramètres des modèles acier et béton sont donnés à la figure 5.11. Le comportement du goujon est décrit à l'aide du modèle de SALARI [120] sur la base de la résistance ultime et du glissement à la ruine obtenus lors d'un essai push-out. Le déchargement se fait selon le module à l'origine. Dès que le glissement atteint la limite  $d_{sc,max}$ , on considère que le connecteur est rompu et que par conséquent ne reprend plus d'effort. Afin d'éviter une dépendance de la solution vis-à-vis du maillage en raison du radoucissement du béton, le comportement radoucissant est modifié en fonction de la longueur de l'élément de manière que l'énergie de rupture soit conservée (cf. paragraphe II.3.5 de la thèse de BENBOUDJMA [36]).

### **Poutre isostatique PI4**

Les courbes théoriques charge/flèche obtenues pour les deux modèles de connexion en utilisant les trois formulations éléments finis, sont tracées et comparées avec la courbe expérimentale aux figures 5.12 et 5.13 pour la poutre PI4. On y observe que les courbes théoriques charge/flèche s'avèrent en bonne concordance avec la courbe expérimentale. On précise que la poutre isostatique PI4 a été sollicitée jusqu'à la ruine. La charge maximale atteinte était de 490 kN et la flèche à mi-travée observée expérimentalement au moment de la ruine était de 157 mm.

Au cours du calcul numérique, on relève un écrasement ( $\varepsilon_c = 4\%$ ) de la fibre de béton la plus comprimée pour une charge de  $P = 406$  kN. Ce résultat a été obtenu avec 12 éléments équilibre. L'outil numérique permet d'aller au-delà de cette charge et ainsi d'évaluer la réserve de résistance dont on dispose. Cette charge correspond à la charge ultime de dimensionnement. Au tableau 5.1, nous donnons, pour l'ensemble des formulations, la charge correspondant à l'écrasement du béton, à la ruine du premier connecteur et à la ruine de tous les connecteurs. Les deux connecteurs d'extrémités sont rompus pour une charge de  $P = 486$  kN. Il ne suffit que d'une légère surcharge pour provoquer la rupture de tous les autres connecteurs. Le calcul s'arrête lorsque tous les connecteurs sont rompus car la matrice de raideur devient singulière. A la ruine, la charge maximale est  $P_{max} = 488$  kN et la flèche maximale est 162 mm. On observe que les modèles équilibre et mixte fournissent

des résultats tout à fait identiques au niveau global (charge et déplacement). On observe que les résultats sont sensiblement identiques pour les deux modèles de connexion. Pour la connexion répartie, on observe qu'il est nécessaire d'utiliser un nombre plus important d'éléments dans la formulation déplacement. En effet, il est nécessaire d'utiliser 18 éléments déplacement contre 4 éléments équilibre et mixte. Si l'on effectue une décharge complète à 400 kN, on observe que la flèche résiduelle prédite par le modèle de connexion discrète est supérieure (environ 10 %) à celle fournie par le modèle de connexion continue.

Ruine observée par modèle numérique	Modèle de connexion discrète (9 E.F. de connexion)		
	18 E.F. déplacement	12 E.F. équilibre	12 E.F. mixte
Écrasement du béton ( $\varepsilon_c > 4\%$ )	$P = 432$ kN $v = 74.5$ mm	$P = 406$ kN $v = 50.5$ mm	$P = 406$ kN $v = 50.5$ mm
1 <sup>er</sup> connecteur compu ( $d_{sc} > 5$ mm)	$P = 487$ kN $v = 150$ mm	$P = 486$ kN $v = 157$ mm	$P = 486$ kN $v = 157$ mm
Tous les connecteurs rompus	$P_{max} = 493$ kN $v_{max} = 173$ mm	$P_{max} = 488$ kN $v_{max} = 162$ mm	$P_{max} = 488$ kN $v_{max} = 162$ mm

Tableau 5.2 – Ruine observée par le modèle numérique

A la figure 5.14, la distribution expérimentale du glissement le long de l'interface acier-béton pour 4 niveaux de charge est donnée et comparée à la distribution obtenue à l'aide de la formulation mixte pour les deux modèles de connexion. On observe que le modèle de connexion discrète fournit des résultats qui sont en meilleure accord avec les résultats expérimentaux. Par ailleurs, on observe que le modèle de connexion répartie a tendance à surestimer le glissement et fournit donc des prédictions qui sont plutôt du côté de la sécurité.

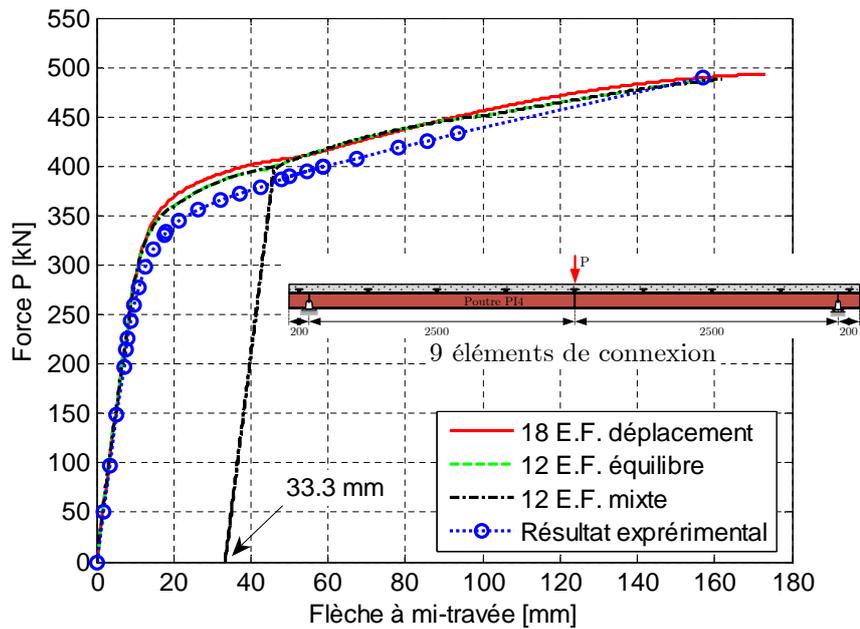


Figure 5.12 – Courbes charges/flèches de la poutre PI4 - Modèle de connexion discrète avec 9 éléments de connexion

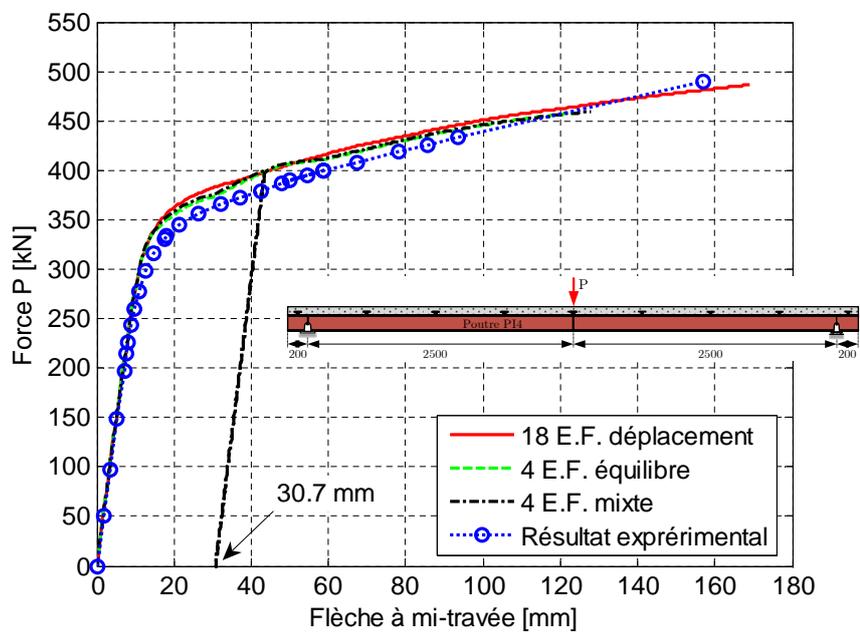


Figure 5.13 – Courbes charges/flèches de la poutre PI4 - Modèle de connexion continue

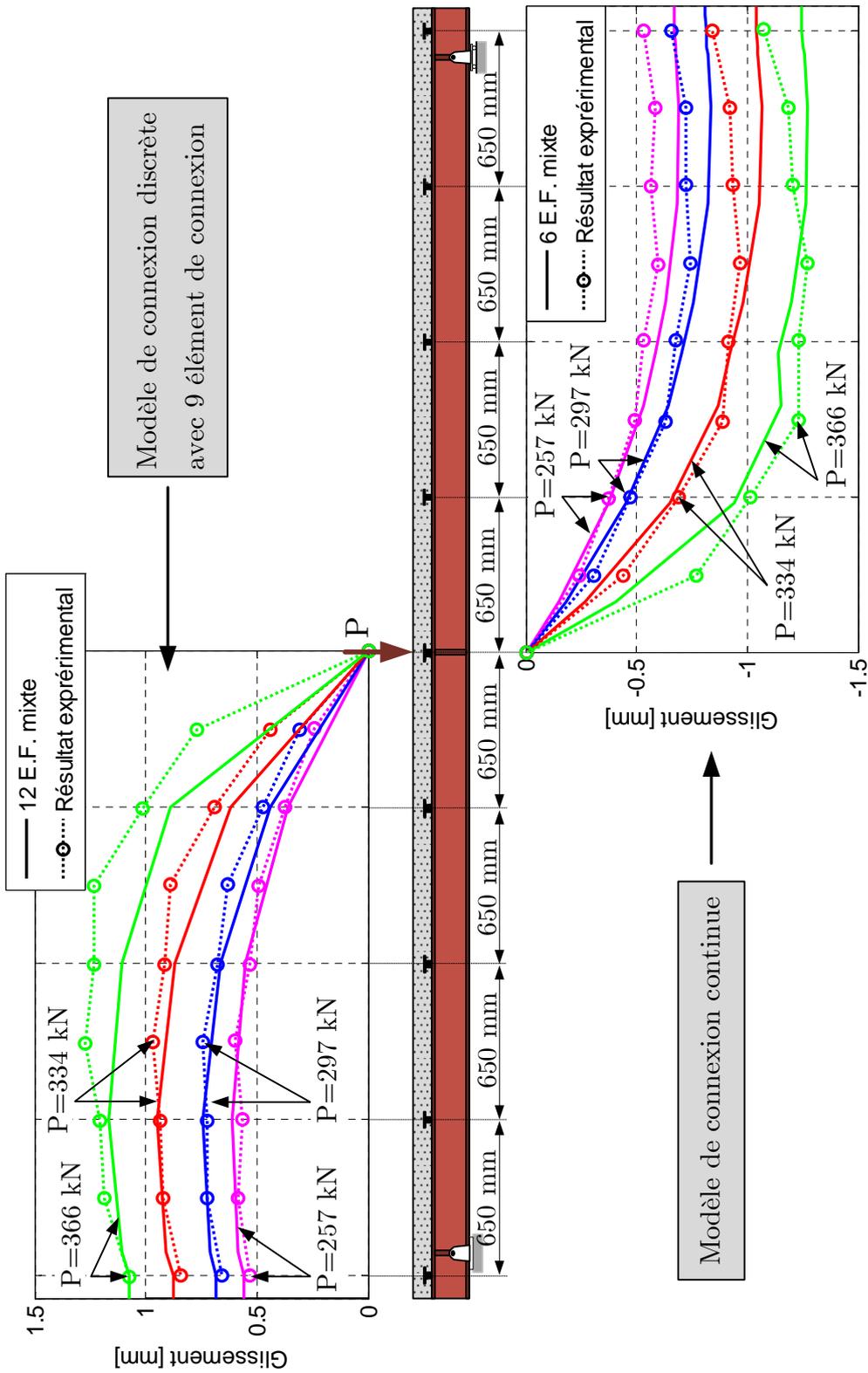


Figure 5.14 – Distribution du glissement de la poutre PI4

### **Poutre hyperstatique PH3**

Pour cet essai, on dispose des courbes charge/flèche et charge/courbure à proximité de la charge et de l'appui intermédiaire (cf. Figures 5.15 à 5.18). Aux figures 5.15 et 5.16, on présente les courbes numériques charge/flèche de la section au droit de la charge comparées à celles de l'expérience. On observe une concordance satisfaisante entre les prédictions numériques et les résultats expérimentaux à tous les stades de chargement. La courbe charge/flèche expérimentale est légèrement au-dessus des courbes numériques pour le modèle de connexion discrète et au-dessous pour le modèle de connexion continue. On retrouve donc la même remarque qu'au paragraphe 2.5 du chapitre 2 que le modèle de connexion continue surestime la flèche. Par ailleurs, la formulation équilibre fournit les mêmes résultats que la formulation mixte, et ce avec le même nombre d'éléments.

D'autres résultats expérimentaux que les flèches ont été fournis par ANSOURIAN [11], à savoir, des mesures de la courbure du profilé métallique dans les deux sections : la section (A-A) au droit de la charge et la section (B-B) situé à 200mm de l'appui intermédiaire. On donne aux figures 5.17 et 5.18 les courbes charge/courbure théoriques et également les courbes expérimentales. Les courbes charge/courbure sont satisfaisantes en zone de moment positif mais s'écartent de la courbe expérimentale en zone de moment négatif, et ce pour les deux types de connexion. Pour la connexion répartie, les éléments de type équilibre et de type mixte sont légèrement meilleurs en zone de moment positif.

En conclusion, on observe que les trois formulations fournissent des résultats très satisfaisants avec moins d'éléments pour les formulations équilibre et mixte. On n'observe pas de différence significative sur les courbes charge/flèche suite au modèle de connexion. Par contre, on relève que le modèle de connexion répartie semble avoir tendance à surestimer le glissement.

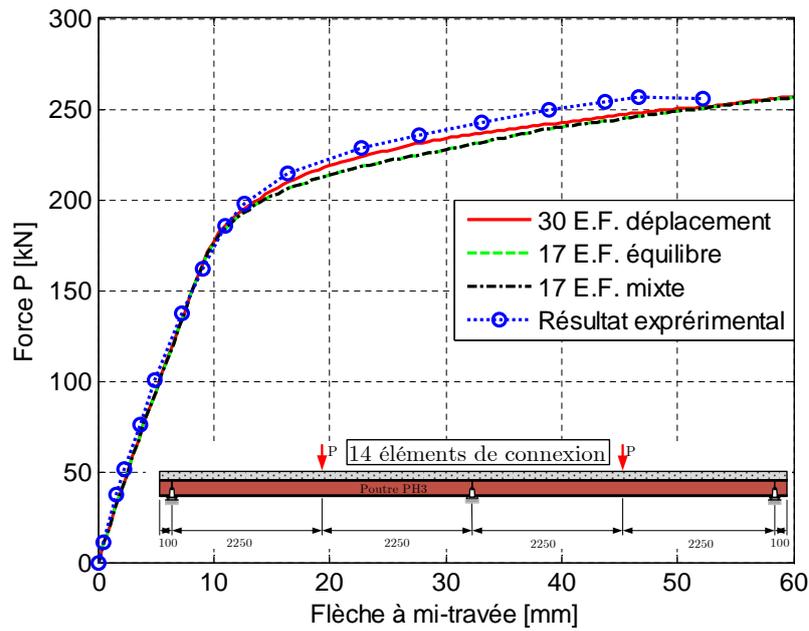


Figure 5.15 – Courbes charges-flèches de la poutre PH3 - Modèle de connexion discrète avec 14 éléments de connexion par travée

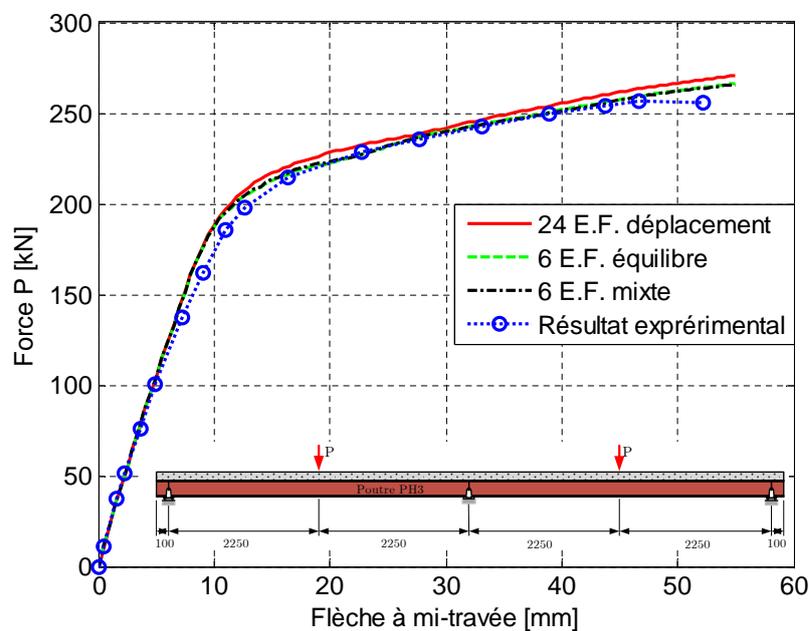


Figure 5.16 – Courbes charges-flèches de la poutre PH3 - Modèle de connexion continue

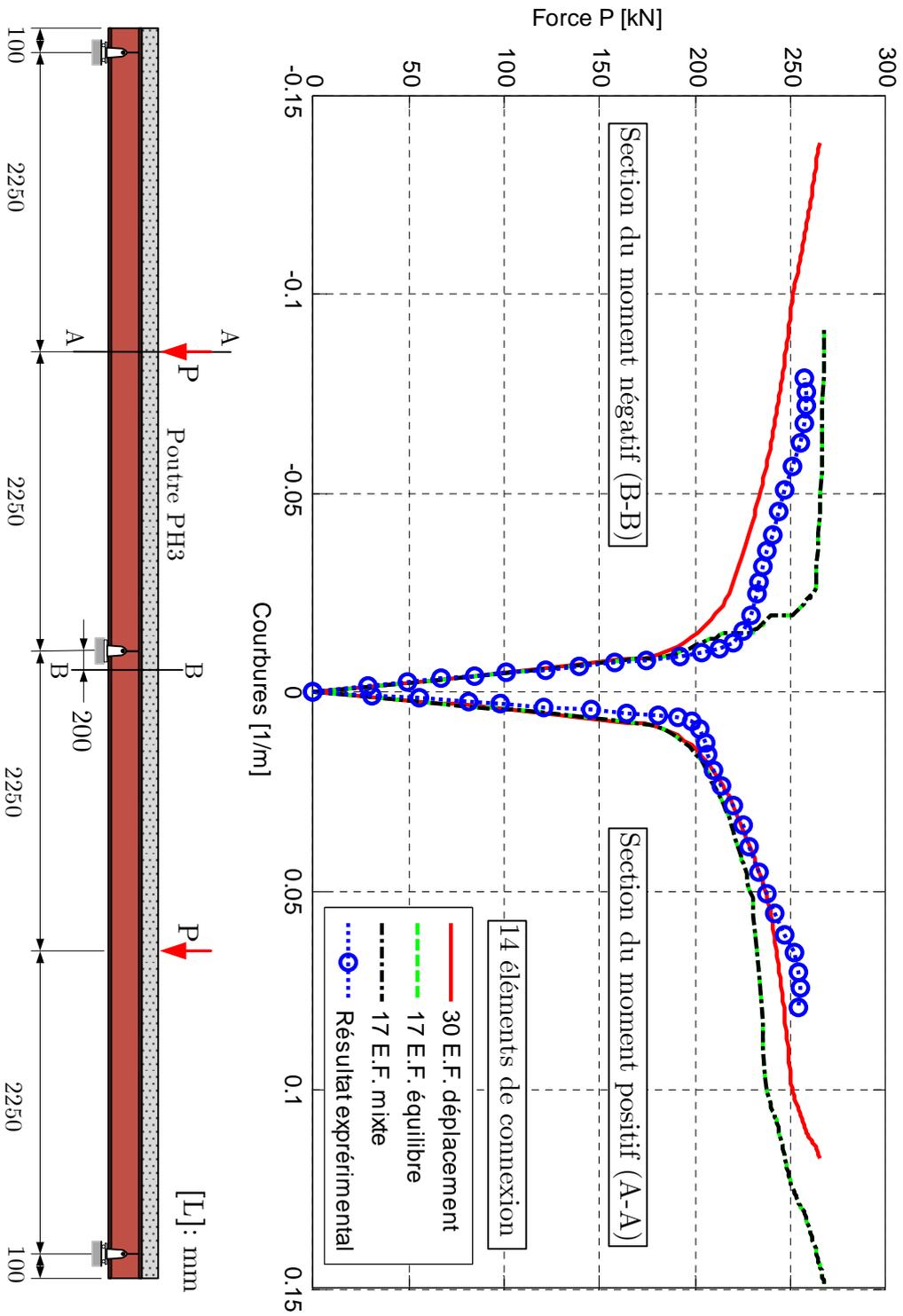


Figure 5.17 – Courbes de variation, en fonction du chargement, des courbures - Modèle de connexion discrète avec 14 éléments de connexion par travée

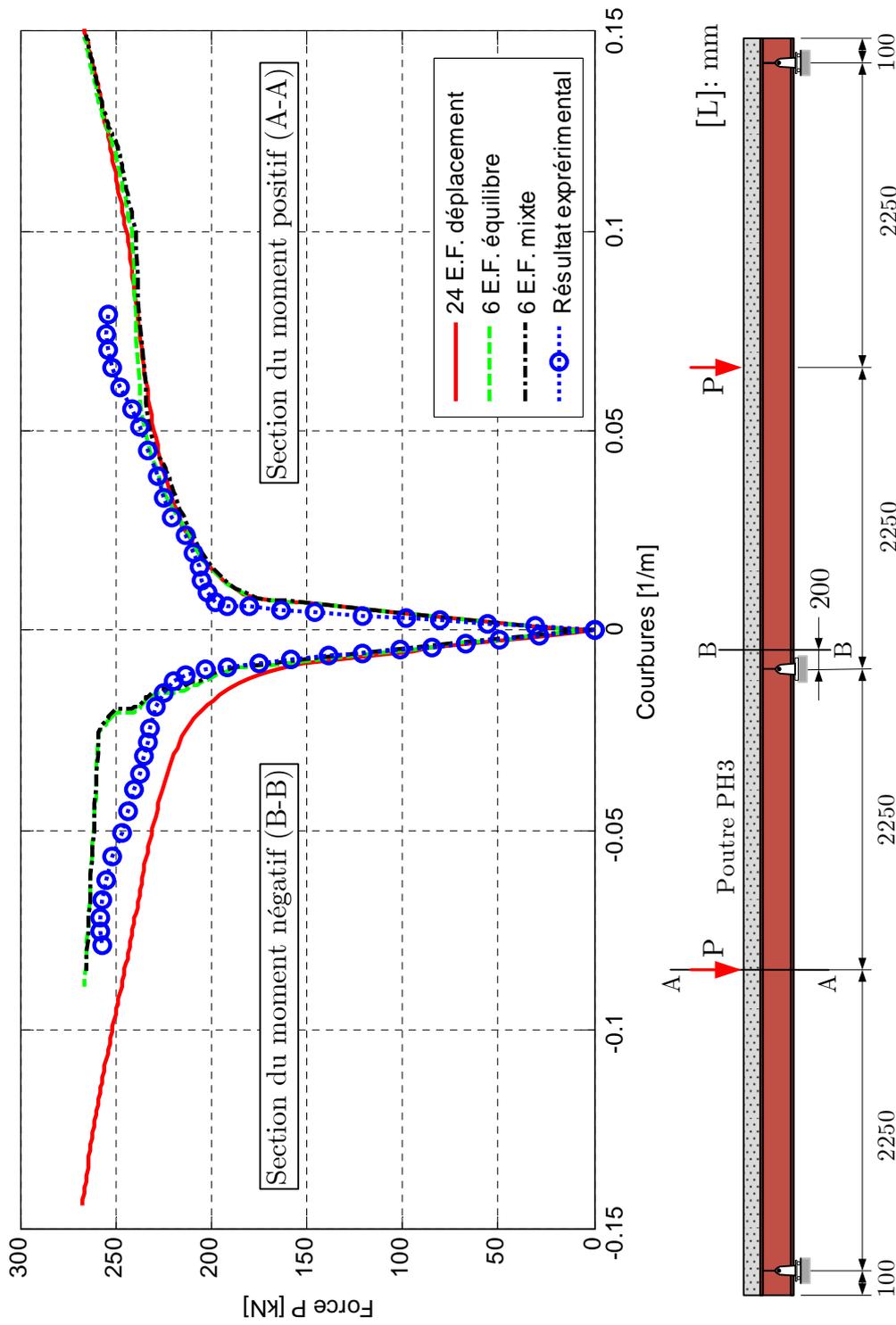


Figure 5.18 – Courbes de variation, en fonction du chargement, des courbures - Modèle de connexion continue

### 5.7 Comparaison des deux modèles de connexion

Dans cette partie, nous nous proposons d'examiner plus en détails l'influence du modèle de connexion sur les champs mécaniques. Plus particulièrement, nous nous intéressons à l'effet du modèle de connexion (discrète/continue) sur la distribution de la courbure, de l'effort normal etc... Pour ce faire, nous poursuivons l'analyse de la poutre PI4 étudiée dans la section précédente. Pour le modèle de connexion continue, nous adoptons une distribution uniforme des caractéristiques mécaniques obtenue en moyennant la contribution de chaque connecteur sur la longueur. Nous avons fait le choix de comparer les modèles de connexion en utilisant la formulation élément fini mixte uniquement. Toutefois, nous pouvons affirmer que, dans l'ensemble, les formulations "équilibre" et "déplacement" conduisent aux mêmes conclusions pour autant que l'on prenne suffisamment d'éléments dans la formulation "déplacement". Le nombre d'éléments considérés correspond au minimum nécessaire pour reproduire la courbe charge/déplacement avec une précision jugée acceptable vis-à-vis de l'expérience. Autrement dit, une augmentation du nombre d'éléments n'apporterait pas une amélioration significative de la précision.

Comme on peut l'observer sur la figure 5.19, les courbes charge/flèche pour les deux modèles de connexion sont très proches avec seulement 6 éléments pour la connexion continue. Ainsi, le calcul des flèches peut se faire avec une précision satisfaisante en utilisant l'un ou l'autre modèle. On observe que le modèle de connexion continue conduit à une flèche supérieure à celle obtenue à l'aide du modèle de connexion discrète pour la poutre isostatique. Comme signalé au paragraphe précédent, le modèle de connexion répartie a tendance à surestimer le glissement par rapport au modèle de connexion ponctuelle (cf. Figure 5.20). A la figure 5.21, on voit que la distribution de la courbure tout au long de la poutre est assez similaire (même tendance) pour les deux modèles avec la présence de discontinuités pour la connexion discrète qui résulte de la présence d'un effort concentré de cisaillement au droit du connecteur, provoquant un saut de moment. Ainsi la distribution de l'effort normal est discontinue pour le modèle de connexion discrète (cf. Figure 5.22). Pour la connexion répartie, on observe également une légère discontinuité autour de 1,4 m et 4 m. Cette discontinuité est inhérente à la formulation et sera discutée au paragraphe 5.8. Toutefois, on notera que la connexion répartie conduit à un effort normal maximal dans la dalle légèrement plus important. Précisons aussi que le cas traité est parfaitement sy-

métrique et que le connecteur sous la charge ne se déforme pas (pas de glissement).

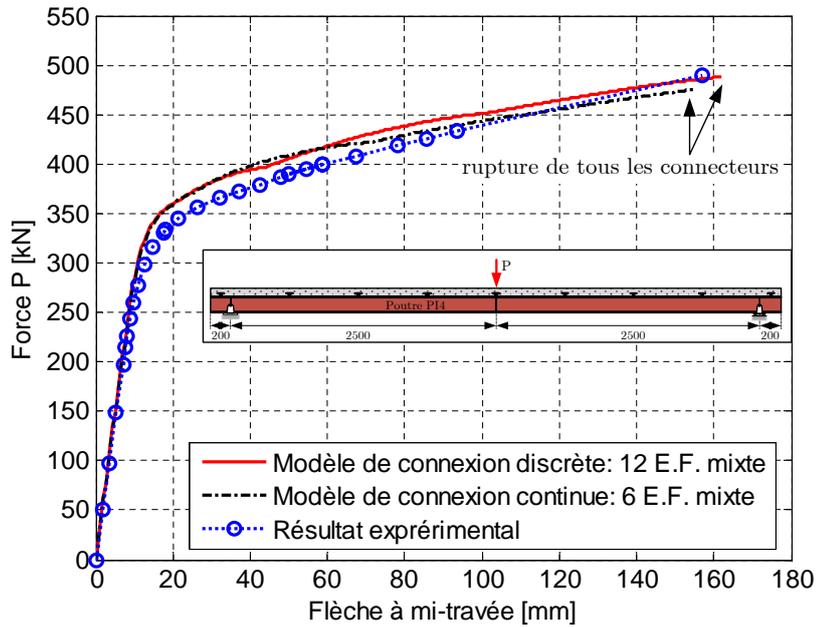


Figure 5.19 – Poutre PI4 : Courbes charge/flèche obtenues pour les deux modèles de connexion

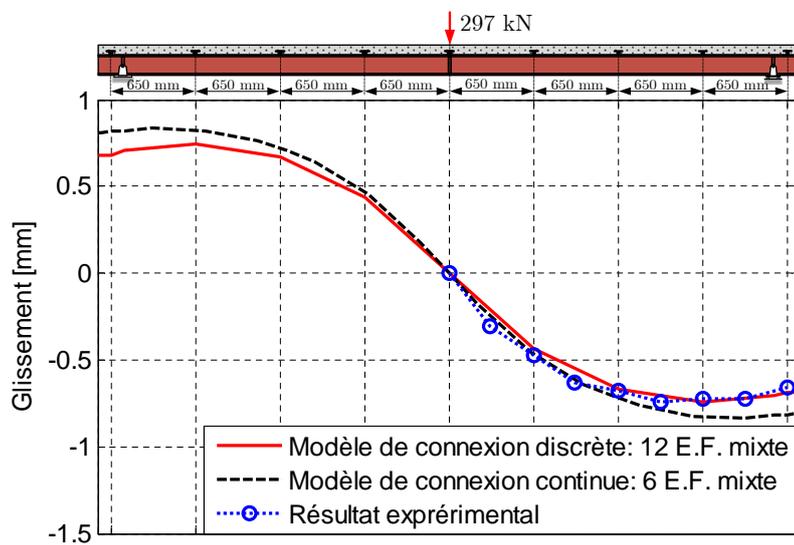


Figure 5.20 – Poutre PI4 : Distributions du glissement pour les deux modèles de connexion

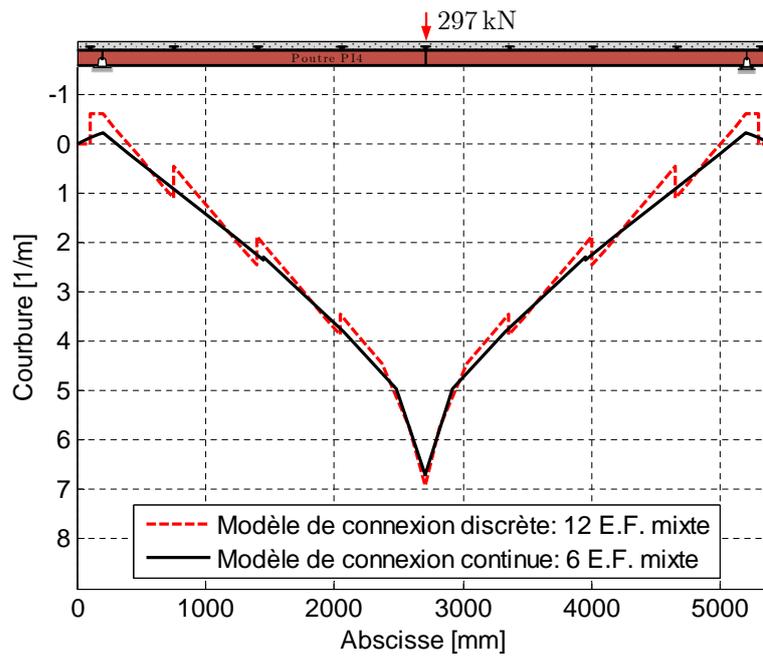
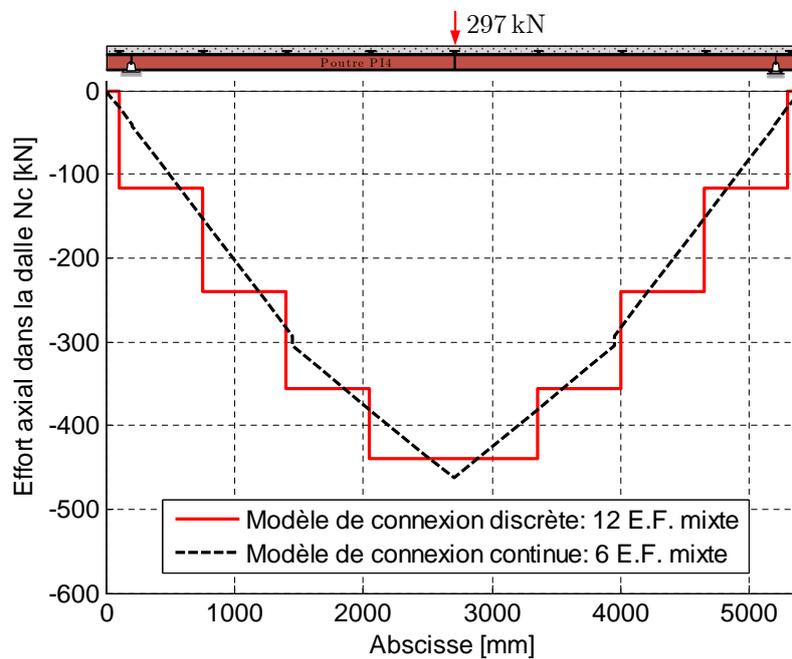


Figure 5.21 – Poutre PI4 : Distributions de la courbure pour les deux modèles de connexion

Figure 5.22 – Poutre PI4 : Distributions de l'effort axial dans la dalle  $N_c$  pour les deux modèles de connexion

### 5.8 Comparaison des trois formulations

Dans ce paragraphe, nous comparons les formulations entre elles. Le précédent paragraphe, nous a permis de tirer quelques conclusions sur le choix du modèle de connexion. Ainsi dans ce qui suit, les comparaisons entre les trois formulations éléments finis se feront avec le modèle de connexion répartie. Il existe toutefois une différence sensible dans le comportement suivant que la charge est ponctuelle ou répartie. La prise en compte d'un chargement réparti avec des éléments équilibre n'a pas été abordé dans la littérature, et ce pour plusieurs raisons. La raison essentielle en est que la mise en oeuvre des éléments équilibre en présence d'un chargement réparti n'est pas aisée et que l'algorithme se complique très rapidement.

#### 5.8.1 Cas d'un chargement ponctuel

Pour ce cas de chargement, nous revenons à la poutre isostatique PI4. La figure 5.23 présente les courbes charge/flèche obtenues par les trois formulations pour un nombre variable d'éléments. On constate que la formulation déplacement nécessite un nombre d'éléments important pour que la courbe charge/flèche n'évolue plus de manière significative. Notamment on y observe qu'il est nécessaire d'utiliser au moins 18 éléments alors que 4 éléments équilibre ou mixte suffisent à obtenir une courbe charge/flèche avec une précision satisfaisante. Ceci résulte de l'incapacité des éléments déplacement à traduire correctement la courbure dans les zones plastifiées. Il est donc nécessaire d'affiner le maillage afin de s'approcher au mieux de la distribution réelle par une variation linéaire de la courbure par élément. Le déplacement transversal est en effet approché par une fonction cubique qui produit une variation linéaire de la courbure. Or dans les zones plastiques, la courbure a tendance à être fortement non-linéaire et il est nécessaire d'augmenter le nombre d'éléments particulièrement dans ces zones. Au contraire, l'élément équilibre approche exactement les champs d'effort et la loi de comportement permet d'estimer la courbure aux points d'intégration uniquement. Ainsi, si le nombre de points d'intégration est suffisant (en général 5 points GAUSS-LABATTO sont largement suffisants), on est tout à fait capable de restituer la distribution de la courbure, d'où le bon résultat avec un nombre d'éléments finis équilibre réduit. Cet aspect est clairement illustré à la figure 5.24 où la distribution de la courbure pour une charge de 320 kN est donnée pour les trois formula-

tions avec 6 éléments pour chacune d'elle. Tout d'abord, on y observe que les formulations "équilibre" et "mixte" sont très proches car pour la formulation mixte la courbure est calculée à partir de la distribution de moments et de la loi de comportement comme pour la formulation équilibre. On y observe clairement qu'avec un nombre insuffisant d'éléments, la formulation déplacement n'est pas capable de restituer la distribution de courbure de manière précise.

La distribution de glissement est quasi identique pour les trois formulations (cf. Figure 5.25). On ne doit pas oublier que pour la formulation en déplacement, on a utilisé une interpolation quadratique pour le champs de déplacement longitudinal, ce qui semble être suffisant. La figure 5.26 illustre la distribution de moment fléchissant total le long de la poutre. La distribution de moment est linéaire pour les formulations équilibre et mixte puisque ces formulations reproduisent la solution exacte. Pour la formulation déplacement, on observe une distribution de moment non-linéaire puisque les moments sont évalués aux points d'intégration. Ainsi, on observe que pour la formulation "déplacement", la courbure est linéaire avec une distribution de moment non-linéaire alors que pour la formulation équilibre la distribution de moment est linéaire et la distribution de la courbure est non-linéaire, ce qui correspond mieux à la réalité. D'ou la bonne performance de ce type d'élément. Enfin, on observe une différence entre les formulations mixte et équilibre lorsque l'on analyse la distribution de l'effort normal dans la dalle de béton. En effet, à la figure 5.27, une légère discontinuité de l'effort normal apparaît qui provient du fait que l'équilibre longitudinal n'est pas satisfait de manière forte dans la formulation mixte ; seul l'équilibre de moment est satisfait rigoureusement. Comme cela a été signalé au chapitre 2, il n'est pas possible de satisfaire toutes les équations d'équilibre en formulation mixte. Par ailleurs, on observe que la formulation déplacement restitue une bonne distribution de l'effort normal, probablement due à l'utilisation d'un champ de déplacement longitudinal quadratique.

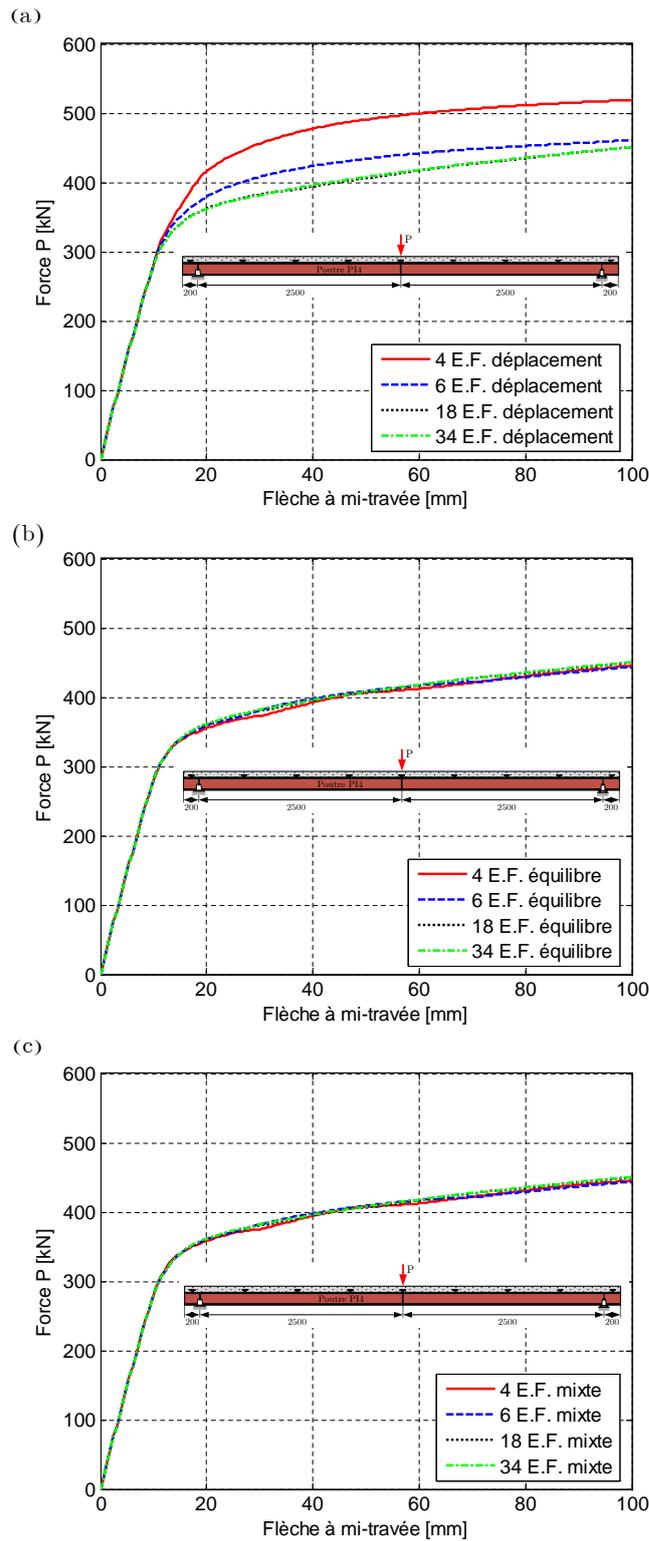


Figure 5.23 – Courbes charges/flèches de la poutre PI4 : (a) Formulation en déplacement ; (b) Formulation en force ; (c) Formulation mixte

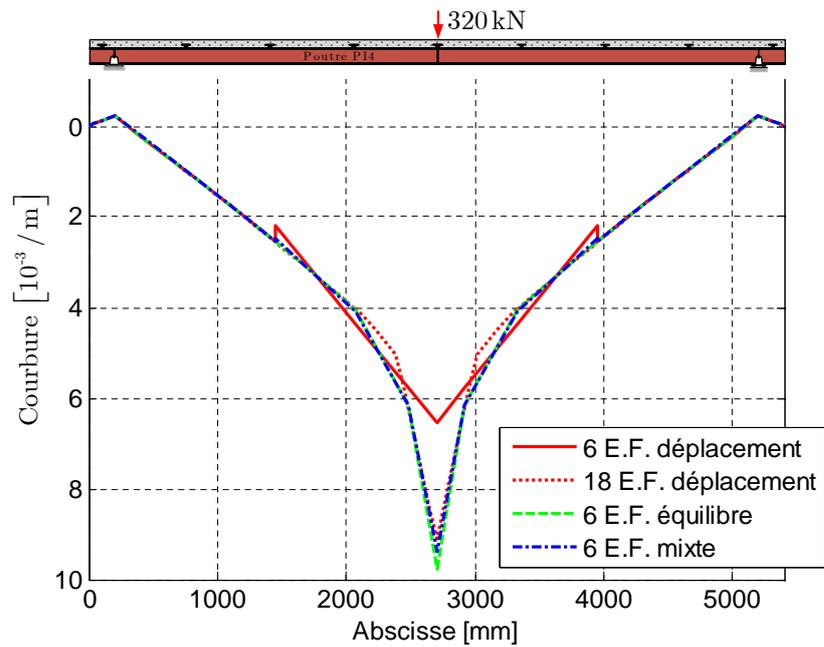


Figure 5.24 – Poutre PI4 : Distributions de la courbure pour les trois formulations

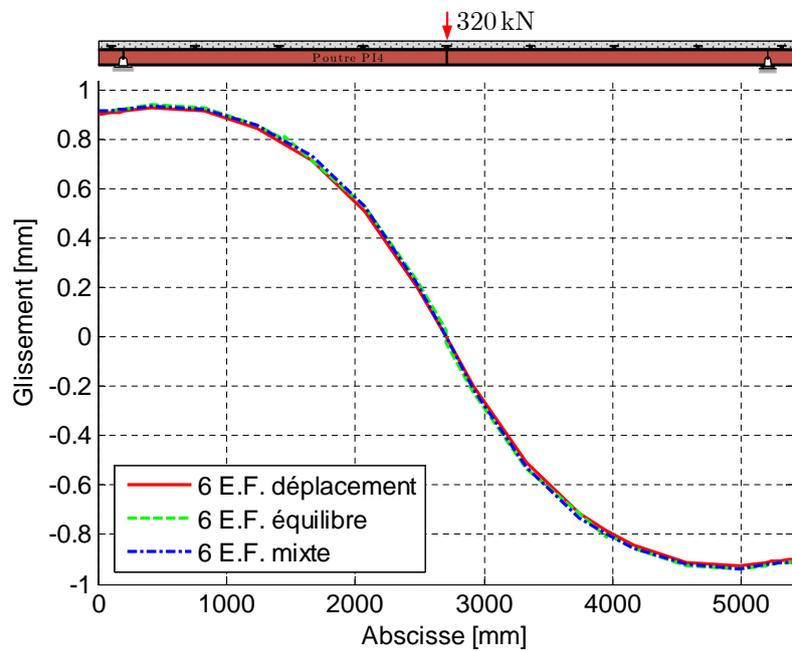


Figure 5.25 – Poutre PI4 : Distributions du glissement pour les trois formulations

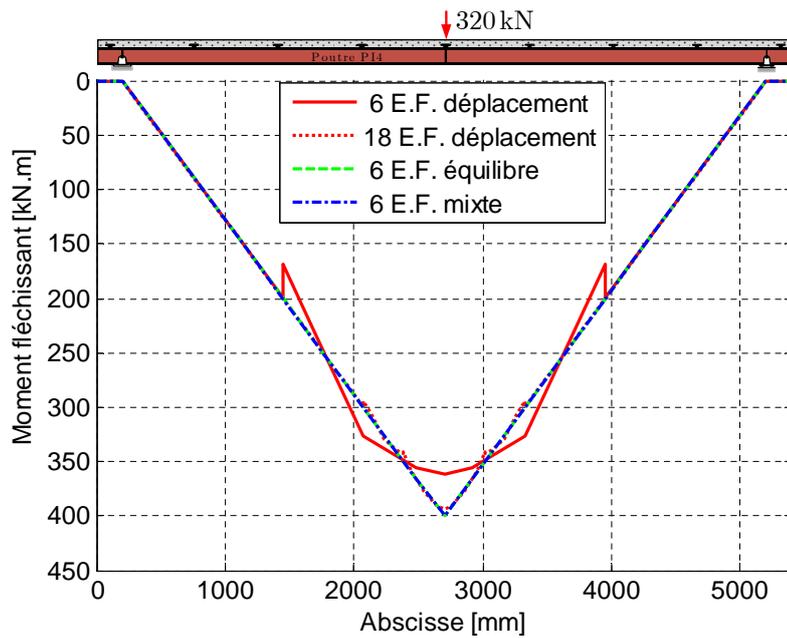


Figure 5.26 – Poutre PI4 : Distributions du moment fléchissant pour les trois formulations

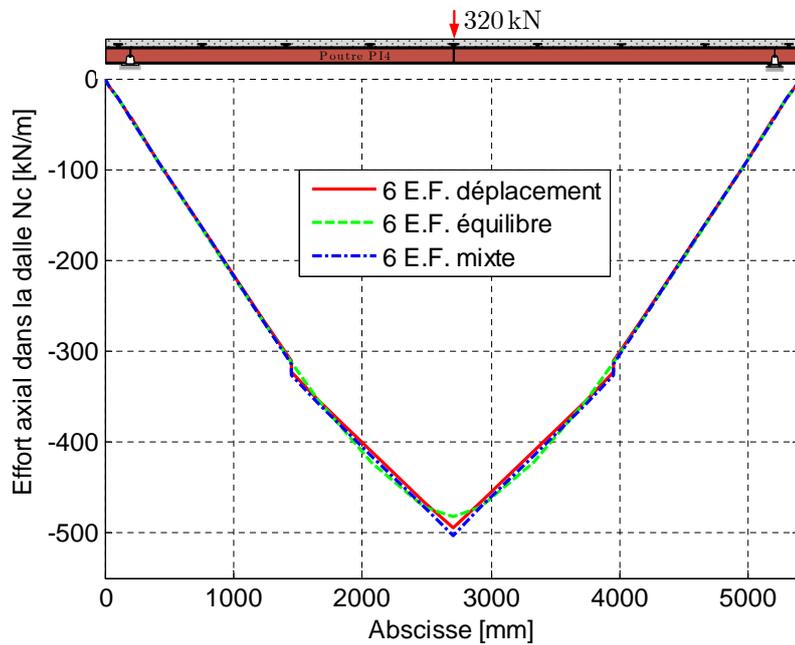


Figure 5.27 – Poutre PI4 : Distributions d'effort axial dans la dalle  $N_c$  pour les trois formulations

### 5.8.2 Cas d'un chargement réparti

Afin de tester notre algorithme pour un chargement réparti, nous considérons une poutre mixte console, nommée SA, soumise à une charge uniformément répartie. La poutre est constituée de deux poutres de section rectangulaire identiques, connectées de manière continue. Le comportement des poutres et de la connexion est supposé élastique parfaitement plastique. La description géométrique et les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant la poutre SA sont donnés à la figure 5.28.

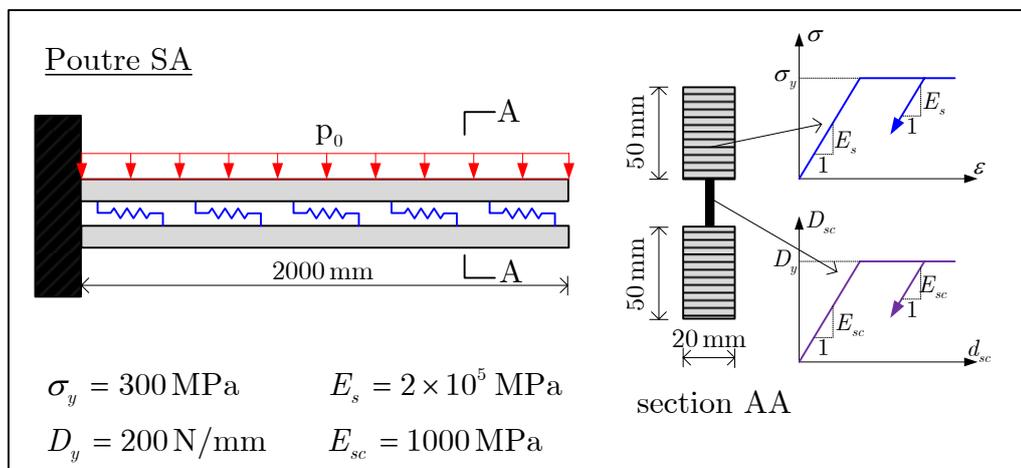


Figure 5.28 – Description de la poutre mixte SA [121]

Ne disposant pas de solution analytique pour analyser les performances des formulations, nous avons établi une solution de référence obtenue en augmentant progressivement le nombre d'éléments équilibre jusqu'à ce qu'une augmentation du nombre d'éléments ne modifie plus significativement la courbe charge/déplacement. Ainsi, la solution de référence a été obtenue avec 32 éléments équilibre. La figure 5.29 présente, pour les trois formulations, les courbes charge/déplacement avec un nombre variable d'éléments. La charge correspond à l'intensité du chargement réparti et le déplacement correspond au déplacement de l'extrémité libre de la poutre. On observe qu'il est nécessaire d'utiliser un nombre important d'éléments en formulation déplacement. Avec un seul élément le plateau, correspondant à l'apparition d'une rotule plastique à l'encastrement, ne peut être atteint. L'usage de quatre éléments "déplacement" permet d'approcher mieux la charge

ultime, mais le plateau ne peut toujours pas être atteint. Il est nécessaire d'utiliser au moins 64 éléments "déplacement" pour obtenir un résultat satisfaisant (cf. Figure 5.29a). La formulation équilibre fournit une solution très satisfaisante avec un seul élément. Par ailleurs, on observe que l'utilisation deux éléments n'apporte pas grand chose à la courbe charge/flèche (cf. Figure 5.29b). Avec un seul élément, la formulation mixte fournit un résultat satisfaisant bien que moins bon que la solution équilibre avec un seul élément. Avec deux éléments, on retrouve une solution de précision équivalente à celle de la formulation équilibre (cf. Figure 5.29c). Comme nous l'avons signalé au paragraphe précédent, la réduction du nombre d'éléments équilibre et mixte par rapport à celui des éléments déplacement s'explique par le fait qu'en présence de la charge répartie, le moment total est toujours représenté de manière exacte, indépendamment la loi de comportement, dans les formulations équilibre et mixte. Par contre, dans la formulation en déplacement, le moment total est déterminé à l'aide de la loi de comportement, ce qui peut conduire à une mauvaise estimation du moment, pour un élément de longueur importante se trouvant dans une zone fortement non-linéaire (plastifiée). Il en résulte qu'il faut augmenter le nombre d'éléments déplacement pour mieux estimer le moment.

La distribution des moments fléchissants est présentée à la figure 5.30. On y observe que le moment est non nul à l'extrémité de la poutre pour la formulation déplacement, traduisant l'équilibre faible inhérent à la formulation en déplacement. On observe une parfaite concordance entre les formulations équilibre et mixte. En revanche, la concordance entre les formulations équilibre et mixte est nettement moins bonne en ce qui concerne l'effort normal dans la dalle de béton, comme indiqué la figure 5.31. On observe également que la distribution de l'effort normal est linéaire pour la formulation mixte et la formulation déplacement conformément aux approximations faites (déplacement quadratique et effort normal linéaire). Comme signalé précédemment, on observe une distribution de courbure linéaire par élément pour la formulation déplacement et une distribution non-linéaire pour les formulations équilibre et mixte (cf. Figure 5.32). Les différences sont plus significatives sur le glissement (cf. Figure 5.33). L'allure générale de la distribution du glissement est similaire pour les formulations déplacement et mixte, et ces deux dernières contrastent fortement avec la formulation équilibre. On observe à la figure 5.33 que la distribution de glissement dans la zone linéaire est bien représentée par un seul élément équilibre, mais

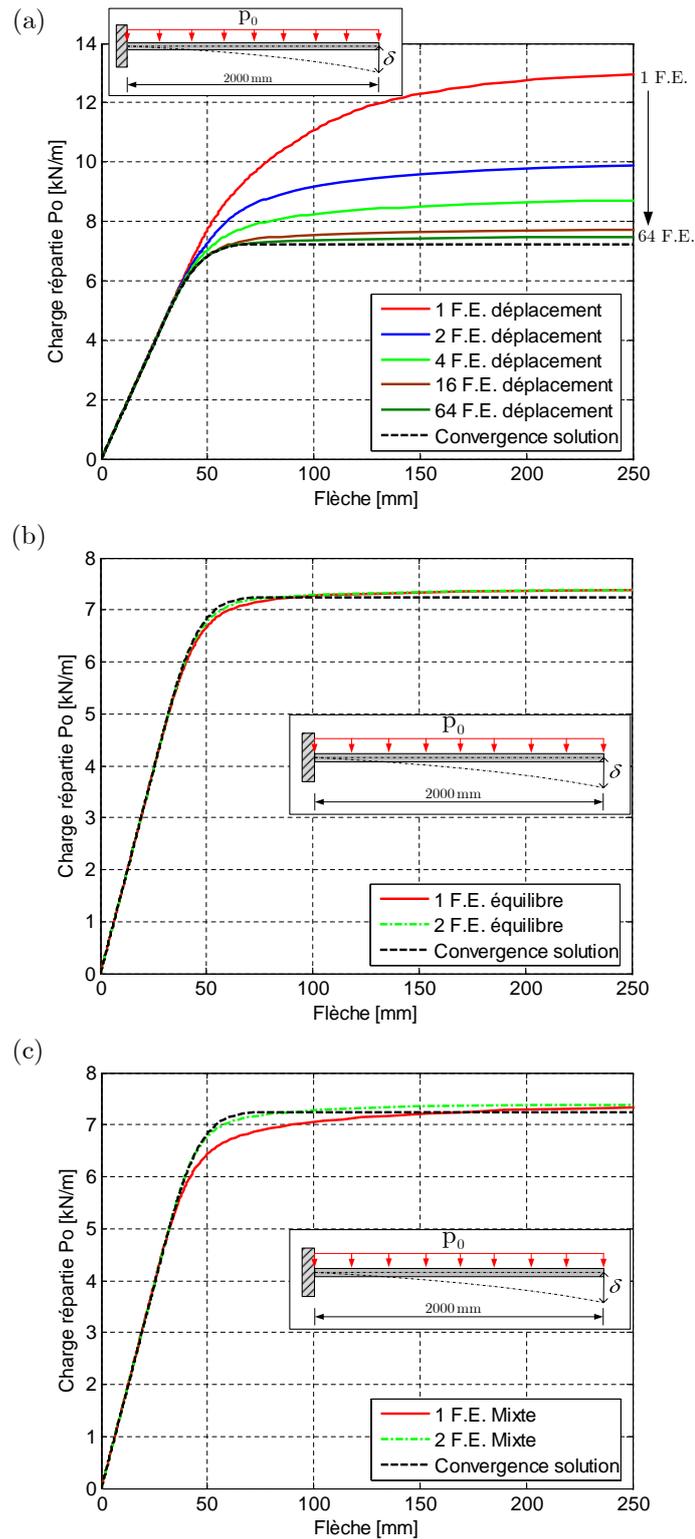


Figure 5.29 – Poutre SA : Diagrammes charges/flèches : (a) Formulation en déplacement ; (b) Formulation équilibre ; (c) Formulation mixte

elle s'écart significativement de la courbe de référence dans la zone non-linéaire. Ceci s'explique par la condition de compatibilité à l'interface de l'élément équilibre qui est violée dans la zone plastique. Il suffit de passer à 3 éléments équilibre pour se rapprocher de la solution de référence. Finalement, on peut conclure à partir de ces différents résultats que notre algorithme qui prend en compte la charge répartie dans l'élément équilibre est bien apte à fournir des résultats valables.

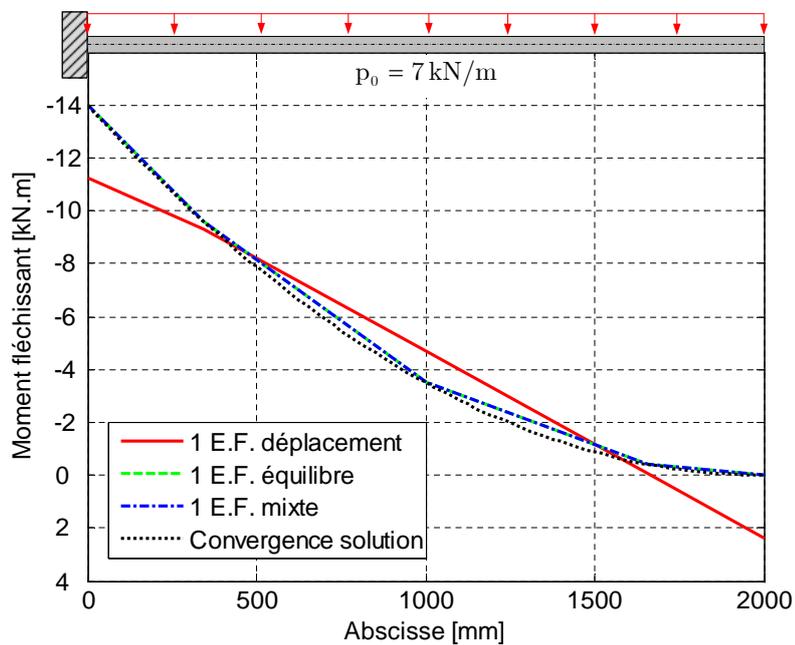


Figure 5.30 – Poutre SA : Distributions du moment fléchissant obtenues par les trois formulations

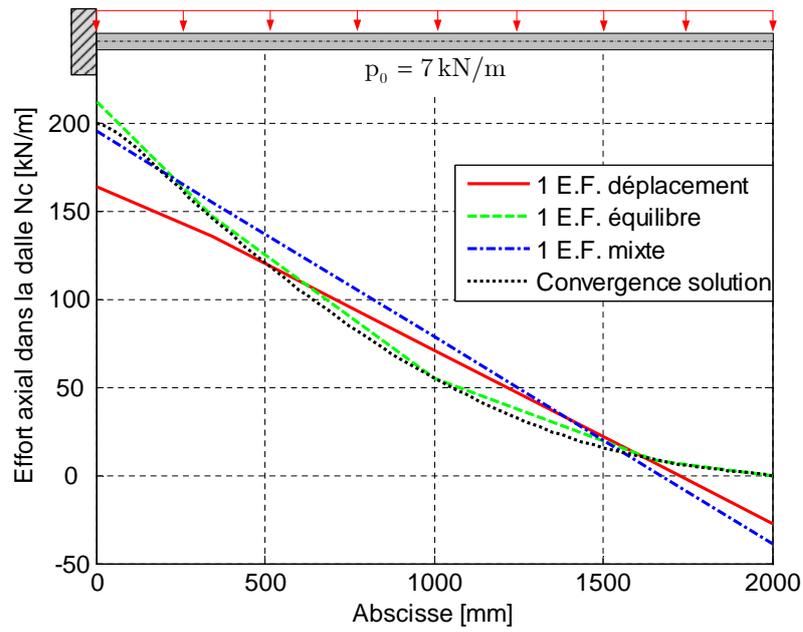


Figure 5.31 – Poutre SA : Distributions de l'effort axial  $N_c$  obtenues par les trois formulations

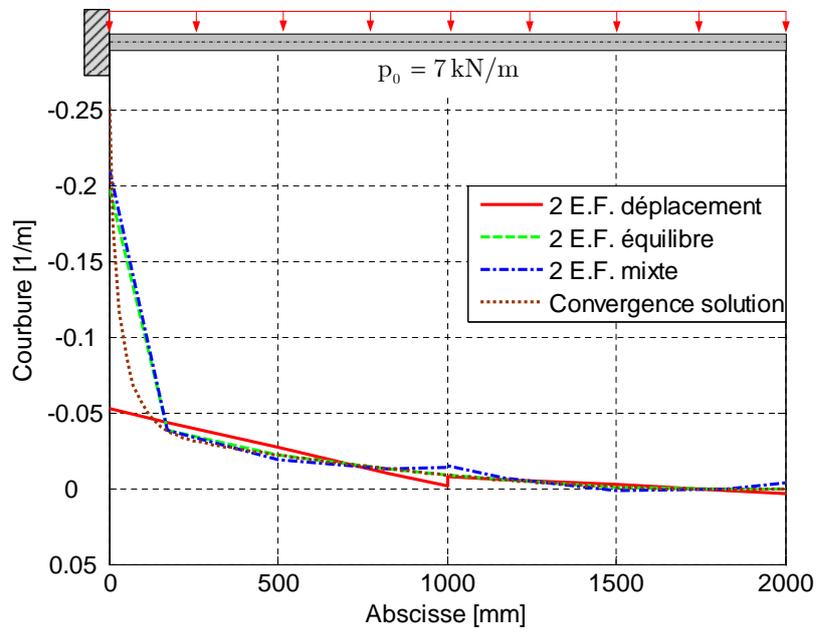


Figure 5.32 – Poutre SA : Distributions de la courbure obtenues par les trois formulations

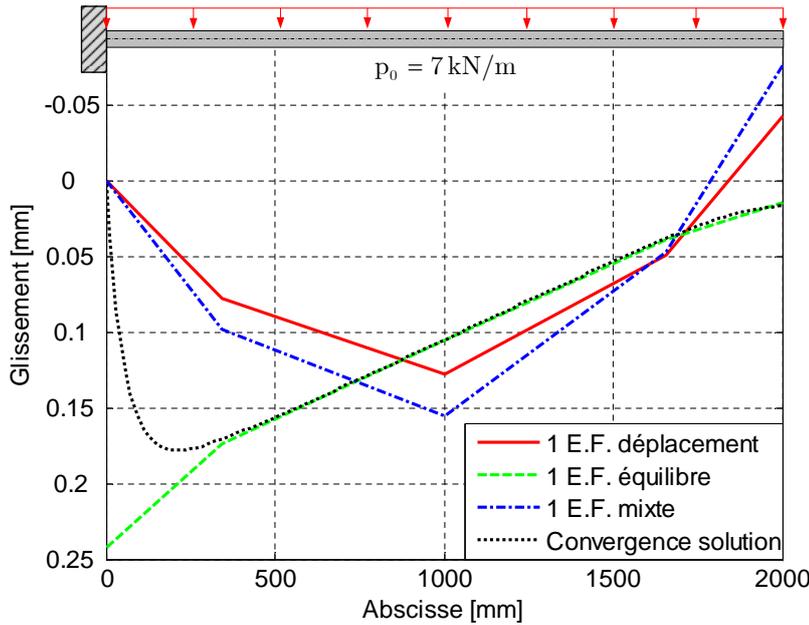


Figure 5.33 – Poutre SA : Distributions du glissement obtenues par les trois formulations

## 5.9 Synthèse et Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons développé plusieurs modèles d'éléments finis avec les algorithmes correspondants pour les poutres mixtes acier-béton. L'approche en déplacement, qui est la plus classique nous fournit une première classe d'éléments finis. Si l'on adopte une modélisation continue de la connexion, l'élément à 10 DDL semble être exempt de verrouillage numérique (curvature locking), phénomène inhérent à la formulation en déplacement. Cet élément utilise des polynômes HERMITIENS cubiques pour le déplacement transversal et des polynômes quadratiques pour les déplacements axiaux. Si le modèle de connexion discrète est adopté [14], le problème de "curvature locking" est évité. L'élément fini de poutre mixte avec connexion discrète possède 8 DDL avec une interpolation linéaire pour les déplacements axiaux. L'algorithme de résolution est classique avec opérateur tangent.

Une seconde classe d'élément fini découle du principe des travaux virtuels complémentaires. Ces éléments, que l'on appelle "élément équilibre", reposent sur une interpolation des efforts internes et conduisent à une solution vérifiant strictement les équations d'équilibre. Un élément équilibre a été développé pour les deux modèles de connexion. Ces

modèles existent dans la littérature pour la connexion continue mais le modèle élément fini avec la connexion discrète est original. Une autre contribution apportée à cet élément est la prise en compte du chargement réparti qui a nécessité d'introduire des modifications dans l'algorithme de résolution.

La troisième classe d'élément fini abordé dans ce travail découle du principe à deux champs de HELLINGER REISSNER. Ces éléments, appelés "éléments mixte" se trouve en quelque sorte entre les éléments déplacement et les éléments équilibre. L'approximation porte à la fois sur les déplacements et les efforts internes. Bien que ces modèles existent dans la littérature, l'élément mixte avec connexion discrète développé dans ce travail est original. Également, la prise en compte d'un chargement réparti est nouveau. L'algorithme de résolution est similaire à celui développé pour les modèles équilibre. Les performances des ces éléments se sont avérées remarquable.

Les outils numériques développés ont été validés, sur deux exemples de poutres mixtes simplement appuyée et continue, en comparant les prédictions des modèles avec les mesures expérimentales. On a observé que les trois formulations conduisent à des résultats satisfaisants. En se basant sur la formulation mixte, une analyse de l'influence du modèle de connexion sur le comportement non-linéaire d'une poutre mixte simplement appuyée a été effectuée. L'analyse a montré l'avantage du modèle de connexion continue par rapport à celui de connexion discrète puisqu'il permet de réduire considérablement le nombre d'éléments et donc le temps de calcul. L'étude comparative des trois formulations nous a montré que l'élément équilibre et mixte sont plus performants que l'élément déplacement classique, notamment en présence d'une charge répartie. Par ailleurs, la formulation équilibre est plus performante que la formulation mixte, mais sa mise en oeuvre algorithmique est plus complexe.



## CHAPITRE 6

# COUPLAGE DE LA FISSURATION ET DES EFFETS DIFFÉRÉS DANS LE BÉTON

### 6.1 Introduction

Comme nous l'avons souligné au chapitre 3, le modèle viscoélastique linéaire n'est valable que si le niveau de contrainte reste inférieur à 40% de la résistance du béton en compression. Au-delà de ce niveau de contrainte, le comportement du béton devient fortement non-linéaire consécutivement à l'endommagement du matériau. Sous un chargement maintenu au cours du temps, les mécanismes différés se développent en interaction avec cet endommagement suivant des cinétiques de fluage qui diffèrent de la phase primaire correspondant au domaine linéaire, [37]. Pour ces niveaux de contraintes, la modélisation des déformations différées doit donc considérer la non-linéarité matérielle. Par ailleurs, si le retrait est significatif, la contrainte de relaxation obtenue par le modèle viscoélastique linéaire risque d'atteindre et de dépasser la limite en traction du béton. La figure 6.1 présente l'évolution au cours du temps de la contrainte lors d'un essai de relaxation. Cette évolution est obtenue à l'aide du modèle viscoélastique linéaire présenté au chapitre 3. On y observe que si le retrait est pris en compte, au bout de 300 jours, la contrainte dépasse la résistance en traction du béton. Ainsi, est-il nécessaire de considérer l'interaction fluage/fissuration. Cette interaction conduit à une redistribution des contraintes qui risque de provoquer une fissuration supplémentaire du béton.

Dans ce chapitre, nous avons pris le parti d'éviter l'usage d'un modèle viscoélastique non-linéaire qui peut s'avérer difficile à mettre en oeuvre en pratique. Il est à noter que plusieurs auteurs ont proposé des approches qui reposent, pour la plupart, sur l'usage d'un modèle viscoélastique non-linéaire (voir [27], [33], [29], [28], [134]). La justification de ce choix est la complexité des phénomènes qui résultent essentiellement d'une modification de la cinétique de fluage, suite aux transformations irréversibles. Ces modèles non-linéaires restent compliqués à manipuler suite à l'invalidité du principe de superposition utilisé en viscoélasticité linéaire. C'est pourquoi nous proposons de modéliser l'interaction entre le fluage

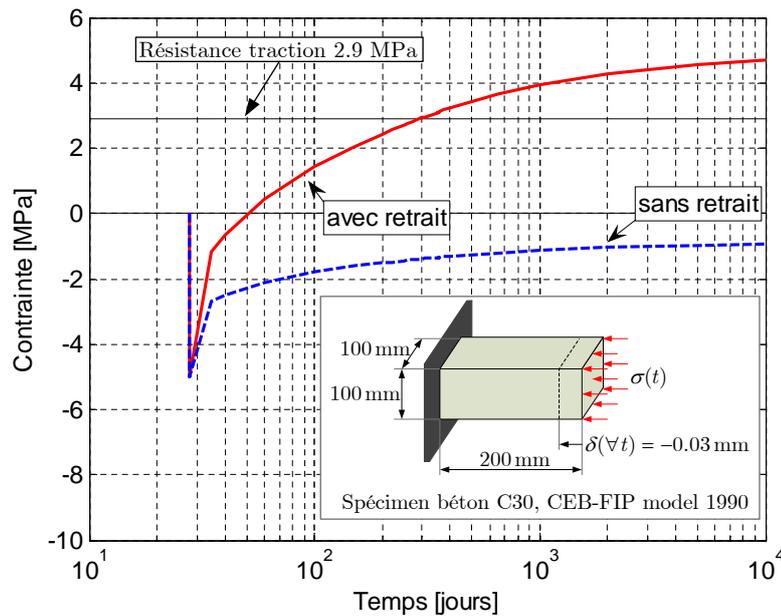


Figure 6.1 – Relaxation de contrainte selon le modèle viscoélastique linéaire

et la fissuration en combinant un modèle viscoélastique linéaire et un modèle de plasticité. Par ailleurs, on considère que les effets différés se manifestent immédiatement après chargement et interagissent avec la fissuration produite par ce dernier. Ainsi, on considère que les non-linéarités matérielles se développent instantanément consécutivement au chargement, les effets du temps n'apparaissant qu'ultérieurement, une fois le chargement appliqué. Cela revient à supposer que dans la partie saine du béton, ou se développeront précisément les effets du temps (retrait et fluage), le niveau de contrainte reste en deçà d'une certaine limite. En pratique, cela revient à combiner une modèle élastoplastique avec un modèle viscoélastique linéaire. Mais cette approche qui semble naturelle reste difficile à implémenter en pratique, dans un code de calcul.

## 6.2 Modèle viscoélastique/plastique pour le béton

Afin d'introduire les effets du temps dans le domaine non-linéaire du comportement du béton, nous développons, dans ce travail, un modèle viscoélastique/plastique permettant d'analyser l'interaction du fluage et du retrait avec le comportement non-linéaire du béton. Le fluage sera pris en compte via le modèle viscoélastique linéaire présenté dans le paragraphe 3.3.3.3 tandis que le comportement non-linéaire du béton est représenté à

l'aide du modèle de plasticité adoucissante présenté dans le paragraphe 4.6. La figure 6.2 illustre le schéma rhéologique du modèle.

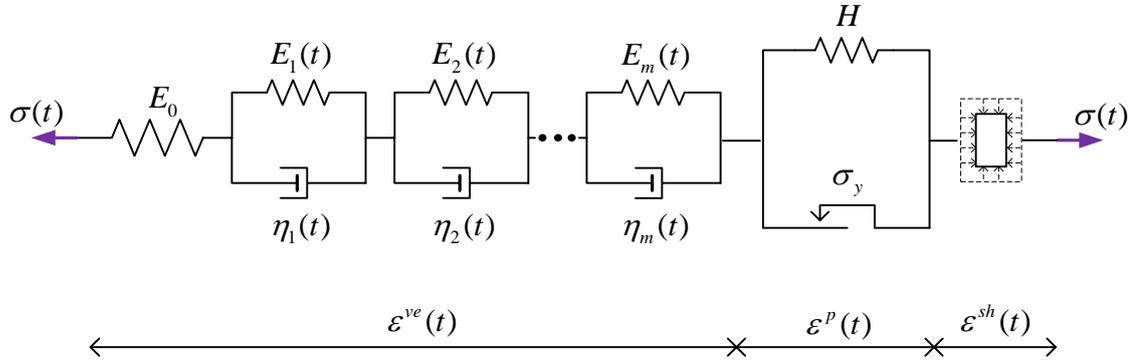


Figure 6.2 – Modèle rhéologique viscoélastique - plastique

Nous suivons la démarche empruntée par VAN ZIJL et al. (2001) [134] qui repose également sur une combinaison de la théorie de la viscoélasticité linéaire et de la théorie de la plasticité adoucissante. On suppose que la déformation totale se décompose de manière additive en une partie viscoélastique  $\varepsilon^{ve}$ , une partie plastique  $\varepsilon^p$  et une partie due au retrait  $\varepsilon^{sh}$  (cf. Figure 6.2) :

$$\varepsilon = \varepsilon^{ve} + \varepsilon^p + \varepsilon^{sh} \quad (6.1)$$

La loi constitutive est complétée en substituant dans l'équation (6.1) les formulations pour chaque déformation. Cette partition nous permet de considérer séparément les différents phénomènes. La déformation viscoélastique  $\varepsilon^{ve}$  et la déformation plastique  $\varepsilon^p$  ont déjà été respectivement formulées dans les paragraphes 3.3.3 et 4.6, alors que l'expression pour la déformation de retrait peut être trouvée dans l'annexe II.

A chaque instant  $t$  et quelque soit le modèle (cf. voir chapitre 3), la déformation viscoélastique  $\varepsilon^{ve}$  est lié à la contrainte par une relation affine que l'on peut écrire sous la forme générale suivante :

$$\sigma = E^{ve} \varepsilon^{ve} + \tilde{\sigma} \quad (6.2)$$

où  $E^{ve}$  est le module de YOUNG équivalent qui dépend uniquement du temps et  $\tilde{\sigma}$  la contrainte héréditaire qui a en mémoire l'histoire. Rappelons qu'à un instant donné, les

valeurs de  $E^{\text{ve}}$  et de  $\tilde{\sigma}$  sont connues. Elles dépendent de la méthode d'approximation de la loi viscoélastique (cf. paragraphe 3.3.3). En combinant les équations (6.1) et (6.2), nous obtenons :

$$\sigma = E^{\text{ve}} (\varepsilon - \varepsilon^{\text{p}} - \varepsilon^{\text{sh}}) + \tilde{\sigma} \quad (6.3)$$

La loi d'évolution de la déformation plastique et de la variable interne  $p$  découle de la règle de normalité généralisée :

$$\dot{\varepsilon}^{\text{p}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (6.4)$$

$$-\dot{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} \quad (6.5)$$

avec les conditions de complémentarité :

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad f(\sigma, R) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} f(\sigma, R) = 0 \quad (6.6)$$

L'expression de la fonction de charge  $f$  est donnée au paragraphe 4.6.

### 6.2.1 Intégration numérique du modèle de comportement

On considère un élément de matière dont l'état mécanique  $(\sigma, \varepsilon, \varepsilon^{\text{p}}, p)$  est totalement déterminé à l'instant  $t_n$ . On impose à l'élément de matière un incrément de déformation totale  $\Delta\varepsilon$  donné, de sorte qu'à l'instant  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  sa déformation soit  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon$ . L'état mécanique à l'instant  $t_{n+1}$  est recherché.

On a choisi ici d'utiliser le schéma implicite d'EULER (toutes les relations de comportement sont écrites à l'instant final  $t = t_{n+1}$ ) pour effectuer la mise à jour des variables. Cette méthode a l'avantage d'être précise et inconditionnellement stable, quelle que soit la complexité du critère de plasticité utilisé [109]. Les relations de comportement discrètes écrites à l'instant  $t_{n+1}$  sont les suivantes :

$$\sigma_{n+1} = E_{n+1}^{\text{ve}} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{\text{p}} - \varepsilon_{n+1}^{\text{sh}}) + \tilde{\sigma}_{n+1} \quad (6.7)$$

$$R_{n+1} = R(p_{n+1}) \quad (6.8)$$

$$\Delta\varepsilon^{\text{p}} = \Delta\lambda \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{n+1} \quad (6.9)$$

$$-\Delta p = \Delta \lambda \left. \frac{\partial f}{\partial R} \right|_{n+1} \quad (6.10)$$

$$\Delta \lambda \geq 0 \quad , \quad f(\sigma_{n+1}, R_{n+1}) \leq 0 \quad , \quad \Delta \lambda f(\sigma_{n+1}, R_{n+1}) = 0 \quad (6.11)$$

Elles conduisent naturellement à un algorithme de type prédiction/correction.

### **Prédiction viscoélastique et correction.**

Elle consiste à supposer *a priori* que le nouvel état de contrainte est situé à l'intérieur de la surface de charge de plasticité, c'est-à-dire que l'évolution entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  est viscoélastique. Cette hypothèse permet de calculer l'état mécanique à l'instant  $t_{n+1}$  et de vérifier *a posteriori* si l'hypothèse initiale était correcte. Dans le cas contraire, une correction est nécessaire [127].

**Prédiction viscoélastique :** la prédiction viscoélastique de l'état mécanique à l'instant final est alors obtenue par

$$\sigma_{n+1}^{trial} = E_{n+1}^{ve} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p - \varepsilon_{n+1}^{sh}) + \tilde{\sigma}_{n+1} \quad (6.12)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p, trial} = \varepsilon_n^p \quad (6.13)$$

$$p_{n+1}^{trial} = p_n \quad (6.14)$$

$$f_{n+1}^{trial} = |\sigma_{n+1}^{trial}| - R(p_n) \quad (6.15)$$

ce qui revient à faire (temporairement) l'hypothèse d'une évolution purement viscoélastique des contraintes entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  avec, en particulier  $\Delta p = \Delta \varepsilon^p = 0$ . Pour mémoire, l'expression de la fonction d'écrouissage  $R(p)$  est celle de l'équation (4.87) pour la compression et celle de l'équation (4.93) pour la traction.

Une fois la prédiction calculée, on vérifie le signe de la fonction de charge. Si la valeur de la fonction de charge est négative pour la prédiction :

$$f_{n+1}^{trial} \leq 0 \quad (6.16)$$

l'intégration locale est achevée à l'instant  $t_{n+1}$  avec :

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \quad (6.17a)$$

$$p_{n+1} = p_n \quad (6.17b)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} \quad (6.17c)$$

Dans le cas contraire, on procède à une correction non-linéaire.

**Correction non-linéaire** : si  $f_{n+1}^{trial} > 0$ , alors la prédiction viscoélastique n'est pas plastiquement admissible. Il faut donc calculer  $\Delta\varepsilon^p$  et  $\Delta p$  correspondant au pas de temps. De la condition de complémentarité discrète

$$\Delta\lambda f(\sigma_{n+1}, R(p_{n+1})) = 0 \quad (6.18)$$

et en tenant compte que  $\Delta\lambda > 0$ , on déduit que :

$$f(\sigma_{n+1}, R(p_{n+1})) = 0 \quad (6.19)$$

L'équation (6.19), qui permet de calculer la déformation plastique cumulée  $p_{n+1}$ , est fortement non-linéaire et il est nécessaire d'adopter un schéma itératif de type NEWTON-RAPHSON. Supposons qu'à l'itération  $i$ , le résidu de (6.19) soit supérieur à la tolérance fixée au préalable. Il faut alors procéder à une nouvelle itération de façon à forcer le résidu à être nul à l'itération  $i + 1$ . La condition donnant le résidu au pas  $n + 1$  est linéarisé autour de la solution à l'itération  $i$  :

$$f(p_{n+1}^{i+1}) = f(p_{n+1}^i) + \left( \frac{\partial f}{\partial p_{n+1}} \right)^i (p_{n+1}^{i+1} - p_{n+1}^i) = 0 \quad (6.20)$$

Une fois le résidu inférieur à la tolérance fixée, la variable interne  $p_{n+1}$  est déterminée. Les autres variables sont directement déterminées par les relations suivantes :

$$\Delta\lambda = \Delta p = p_{n+1} - p_n \quad (6.21a)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \quad (6.21b)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - E_{n+1}^{ve} \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \quad (6.21c)$$

et l'intégration locale au pas  $n + 1$  est achevée. La rigidité tangente à la fin du pas est déterminée par :

$$E_{n+1}^{tg} = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{n+1} = E_{n+1}^{ve} \left( 1 - \frac{E_{n+1}^{ve}}{E_{n+1}^{ve} + \frac{dR}{dp}} \right) \quad (6.22)$$

L'algorithme d'intégration numérique de la loi de comportement viscoélastique/plastique est résumé au tableau 6.1.

1. Variables connues au pas  $n$  :  $\{\sigma_n, \varepsilon_n^p, p_n, \gamma_i^{(n)}\}$

2. Données au pas  $n + 1$  :  $\{\Delta\varepsilon, \Delta\varepsilon^{sh}\}$

3. Calculer les paramètres du modèle viscoélastique :  $E_{n+1}^{ev}, \tilde{\sigma}_{n+1}$

4. Prédiction viscoélastique : Calculer la contrainte de test et vérifier pour le chargement plastique

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}^{trial} &= E_{n+1}^{ve} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p - \varepsilon_{n+1}^{sh}) + \tilde{\sigma}_{n+1} \\ f_{n+1}^{trial} &= f(\sigma_{n+1}^{trial}, R(p_n))\end{aligned}$$

**SI**  $f_{n+1}^{trial} \leq 0$

**ALORS**  $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \\ p_{n+1} = p_n \\ \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} \end{array} \right.$  **FIN** : l'intégration locale est terminée

**SINON** aller à l'étape 5

5. Correction : Résoudre l'équation (6.19) par la méthode NEWTON-RAPHSON pour obtenir la correction  $\Delta\lambda$  et corriger les autres variables :

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= p_n + \Delta\lambda \\ \varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n + \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{trial} + E_{n+1}^{ve} \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial})\end{aligned}$$

Calculer la matrice de rigidité tangente :

$$E_{n+1}^{tg} = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{n+1} = E_{n+1}^{ve} \left( 1 - \frac{E_{n+1}^{ve}}{E_{n+1}^{ve} + \frac{dR}{dp}} \right)$$

**FIN** : l'intégration locale est terminée

Tableau 6.1 – Algorithme de l'intégration locale du comportement viscoélastique-plastique : cas unidimensionnel

### 6.3 Applications

Dans ce paragraphe, nous traitons trois exemples. Dans un premier temps, on simule l'essai de relaxation d'un barreau en béton soumis à un déplacement imposé. Ensuite, nous étudions les effets du temps en phase non-linéaire pour deux poutres mixtes. L'algorithme présenté plus haut est tout à fait général et indépendant du modèle viscoélastique discret utilisé. Toutefois, nous avons choisi la méthode AAEM pour la partie viscoélastique puisque cette dernière conduit à des résultats proches de ceux issus de la méthode générale pas-à-pas.

#### 6.3.1 Relaxation de contrainte

Il s'agit d'une éprouvette standard du béton C30 de longueur 200 mm et de section  $100 \times 100 \text{ mm}^2$ . A  $t_0 = 28$  jours, un déplacement de  $-0.03 \text{ mm}$  est imposé à l'extrémité de l'éprouvette pour une durée de 10000 jours (cf. Figure 6.3). Les fonctions de fluage et de retrait sont celles du CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1] données en annexe II avec les paramètres suivants :

$t_0 = 28$ jours	Temps initial
$f_{c28} = 30 \text{ MPa}$	Résistance à la compression du béton à 28 jours
$RH = 80\%$	Humidité relative
$h_0 = 2A_c/u = 50$	avec $u = 400 \text{ mm}$ périmètre en contact avec l'atmosphère
$s = 0.25$	coefficient correcteur sur le fluage

La figure 6.3 illustre l'évolution de la contrainte dans l'éprouvette au cours du temps. On y observe que de 28 jours à 50 jours, la contrainte diminue (relaxation) jusqu'à ce qu'elle s'annule. Ensuite, puisque la déformation de retrait se développe significativement, l'éprouvette est soumise à des contraintes de traction. La contrainte augmente jusqu'à atteindre la résistance en traction à 300 jours. A partir de là, la déformation plastique (fissures) est activée et se développe (cf. Figure 6.4). Il s'en suit que la contrainte commence à diminuer afin de ne pas sortir du domaine élastique, dont la taille évolue au cours du temps (écrouissage isotrope). On peut conclure que le modèle semble être capable de reproduire le phénomène de fissuration dû au retrait.

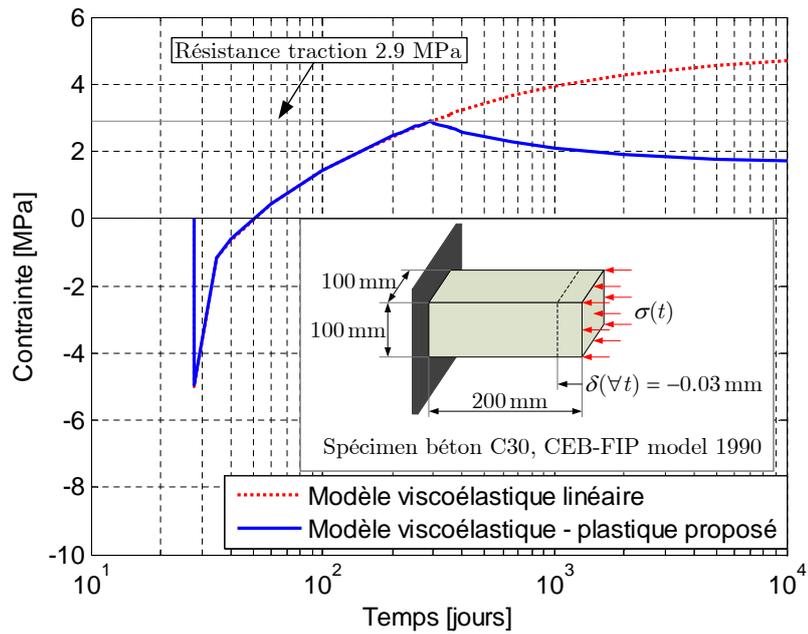


Figure 6.3 – Évolution de contrainte au cours du temps

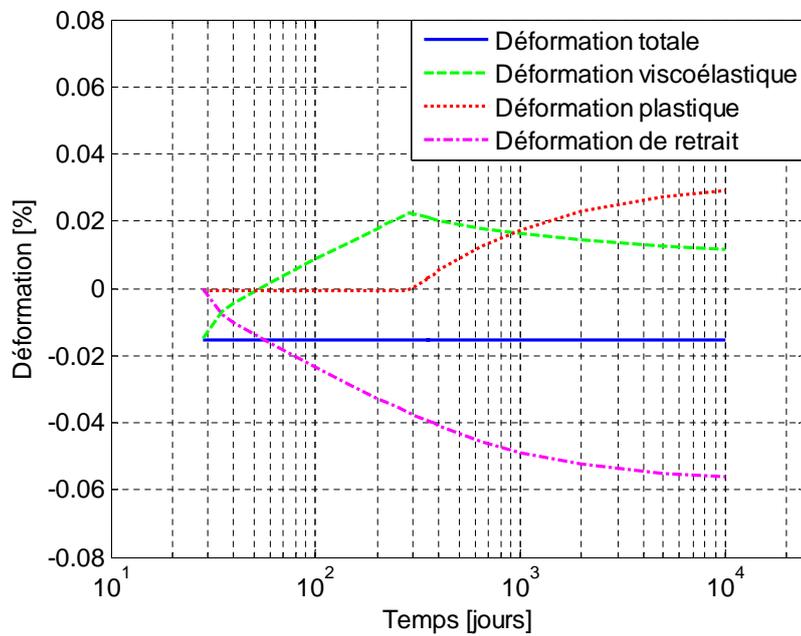


Figure 6.4 – Évolution de déformation au cours du temps

### 6.3.2 Poutre mixte simplement appuyée PI4

La poutre mixte simplement appuyée PI4 étudié au chapitre 5 est reprise dans ce paragraphe pour étudier son comportement non-linéaire au cours du temps. Les propriétés mécaniques et géométriques de la poutre sont strictement identiques à celles données au paragraphe 5.6 du chapitre 5. Les fonctions de fluage et de retrait sont celles du modèle CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1]. En ce qui concerne les paramètres de ce modèle, on suppose que l'humidité relative est de 80% et qu'elle ne change pas au cours du temps. Le coefficient correcteur sur le fluage est pris égale à 0.25. On précise que la poutre est simulée par le modèle de connexion discrète avec 9 éléments de connexion et 18 éléments de poutre.

A  $t_0 = 30$  jours, on applique une charge de 400 kN. A ce niveau de chargement, la poutre se plastifie au voisinage de la charge. On se propose d'analyser la poutre sur une durée de 18250 jours (50 années).

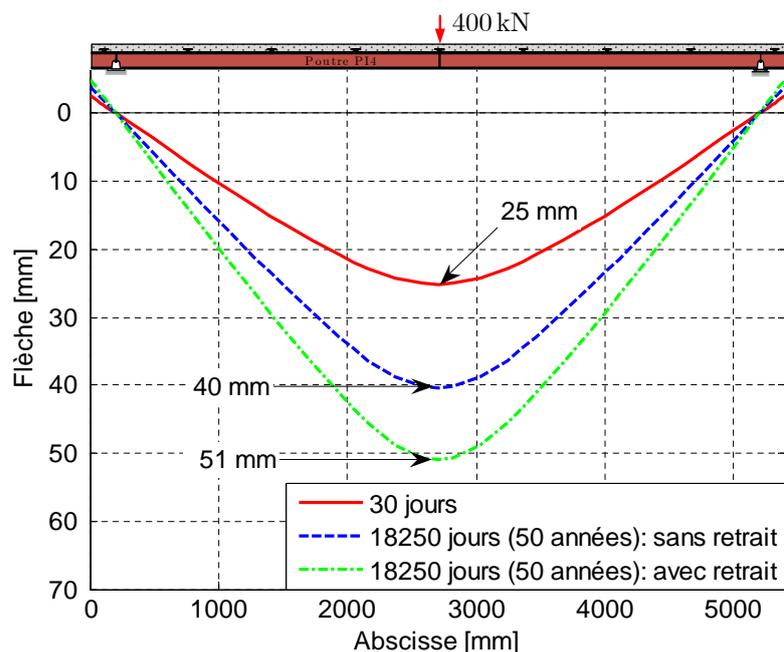


Figure 6.5 – Poutre PI4 : Distribution de la flèche pour un chargement de 400 kN

Le moment total étant constant au cours du temps, les effets différés vont accroître la flèche de manière plus ou moins significative. Cela s'explique par le fait que la raideur

du béton diminue au cours du temps, suite aux effets différés (cf. paragraphe 3.5.5). La distribution de la flèche à 30 jours et à 18250 jours est illustrée à la figure 6.5. On observe que le fluage contribue à augmenter significativement cette flèche. Si le retrait est pris en compte, on observe une augmentation de la flèche encore plus importante. L'évolution de la flèche en milieu de travée au cours du temps est représentée aux figures 6.6a et 6.6b. On y observe que le fluage conduit à une augmentation de la flèche en milieu de travée de 15 mm (60%). Cette augmentation s'accroît si le fluage est couplé au retrait. En pratique, on double la flèche.

Si l'on observe l'évolution de la contrainte dans la fibre la plus comprimée dans la section au droit de la charge, représentée à la figure 6.7, on constate que la contrainte se relaxe de manière viscoélastique. Autrement dit, il y a déchargement viscoélastique au cours du temps. On en conclut que la déformation plastique est constante au cours du temps, comme on peut le voir à la figure 6.8.

Lors du chargement à 30 jours, la contrainte dans la fibre la plus tendue se trouve après le pic de contrainte comme indiqué à la figure 6.9a. On précise que cette fibre se trouve dans la section au droit de la charge. On observe à la figure 6.9b que, comme pour la fibre la plus tendue, la contrainte diminue au cours du temps. Mais cette fois, cette diminution correspond à un écoulement plastique se traduisant par une augmentation de la déformation plastique (voir figure 6.10). Il est à noter que la déformation plastique devient plus importante que la déformation totale, suite à l'action du retrait.

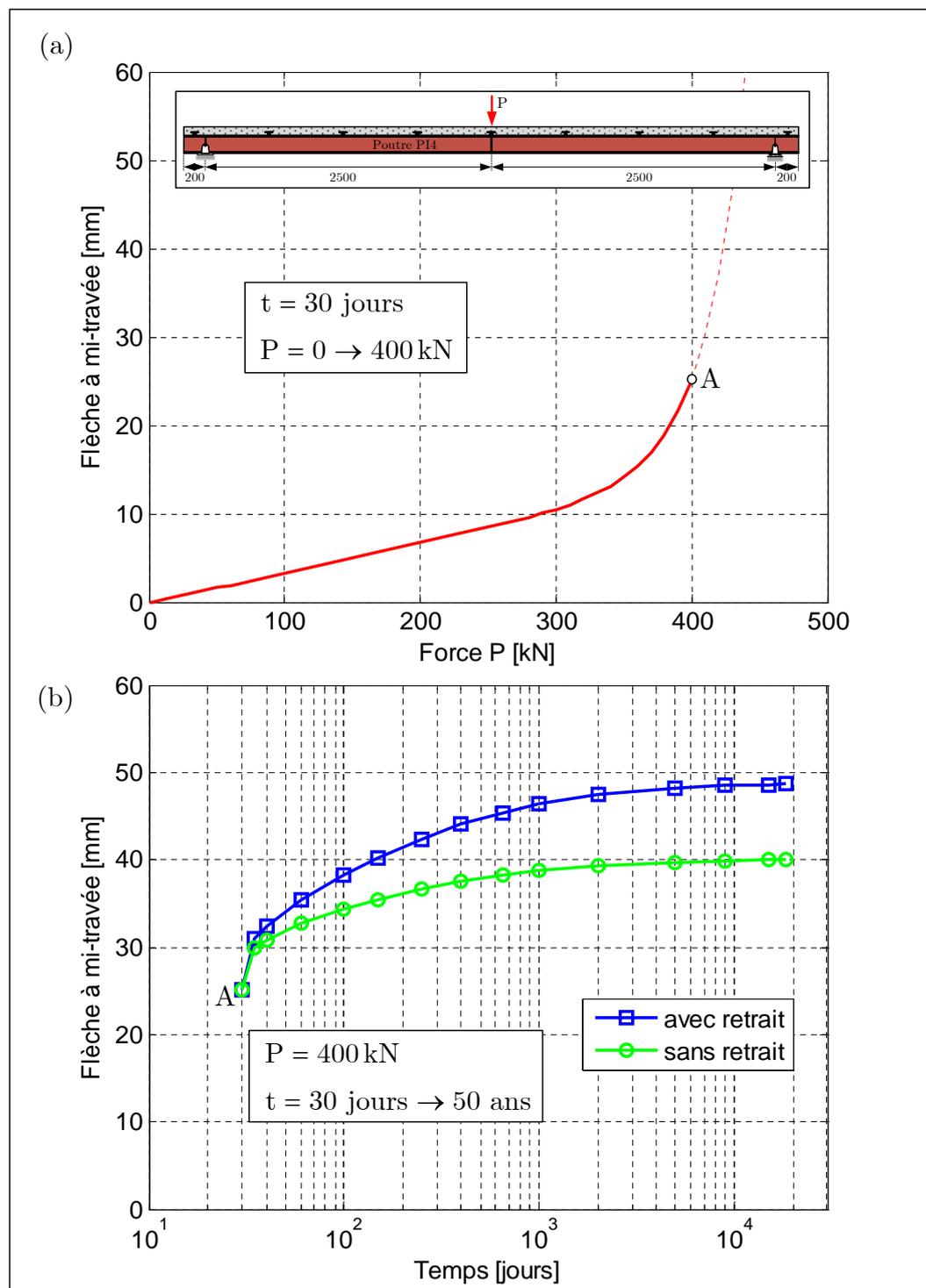


Figure 6.6 – Poutre PI4 : Évolution de la flèche en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps

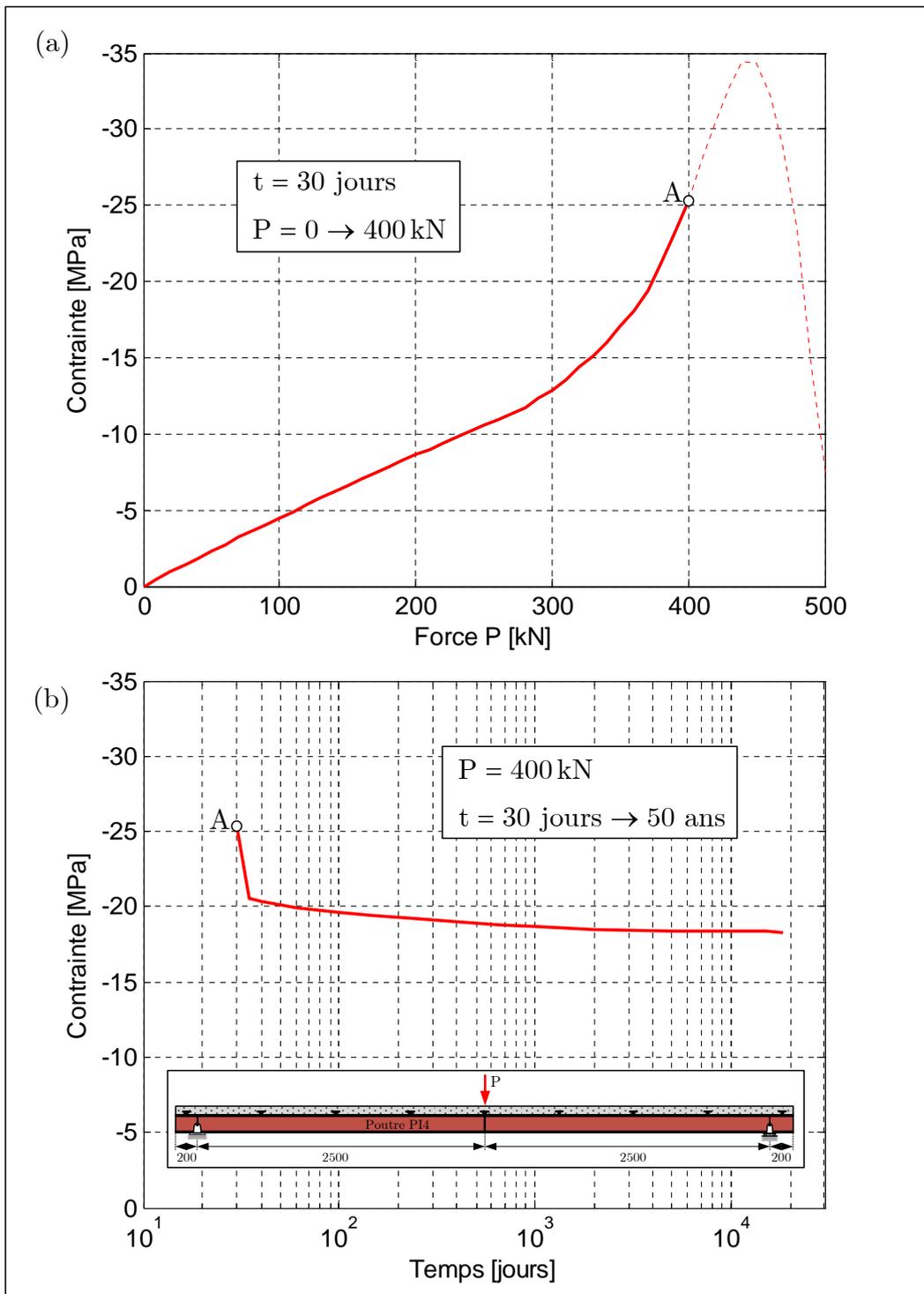


Figure 6.7 – Poutre PI4 : Évolution de la contrainte de la fibre de béton la plus comprimée en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps

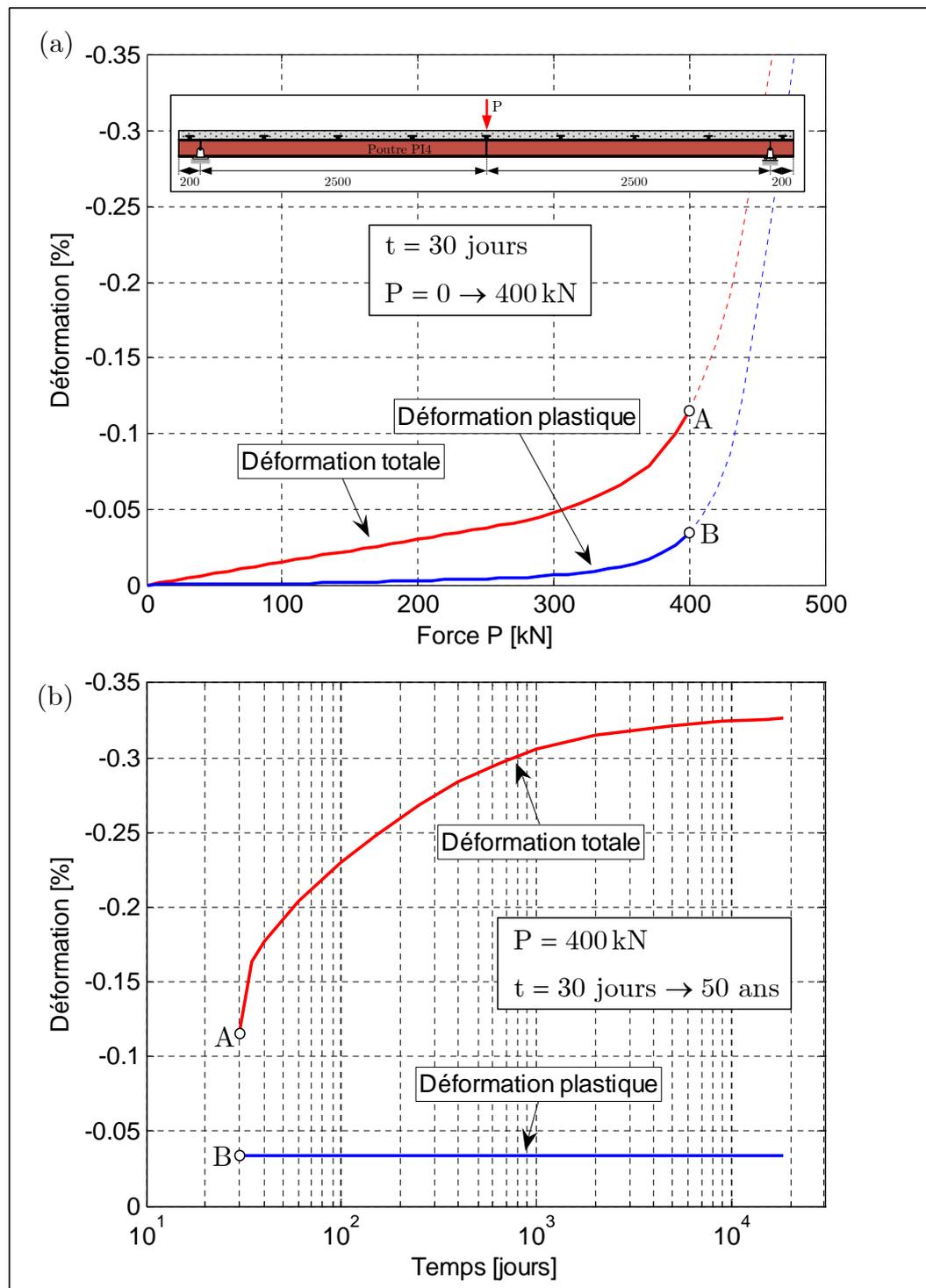


Figure 6.8 – Poutre PI4 : Évolution de la déformation de la fibre de béton la plus comprimée en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps

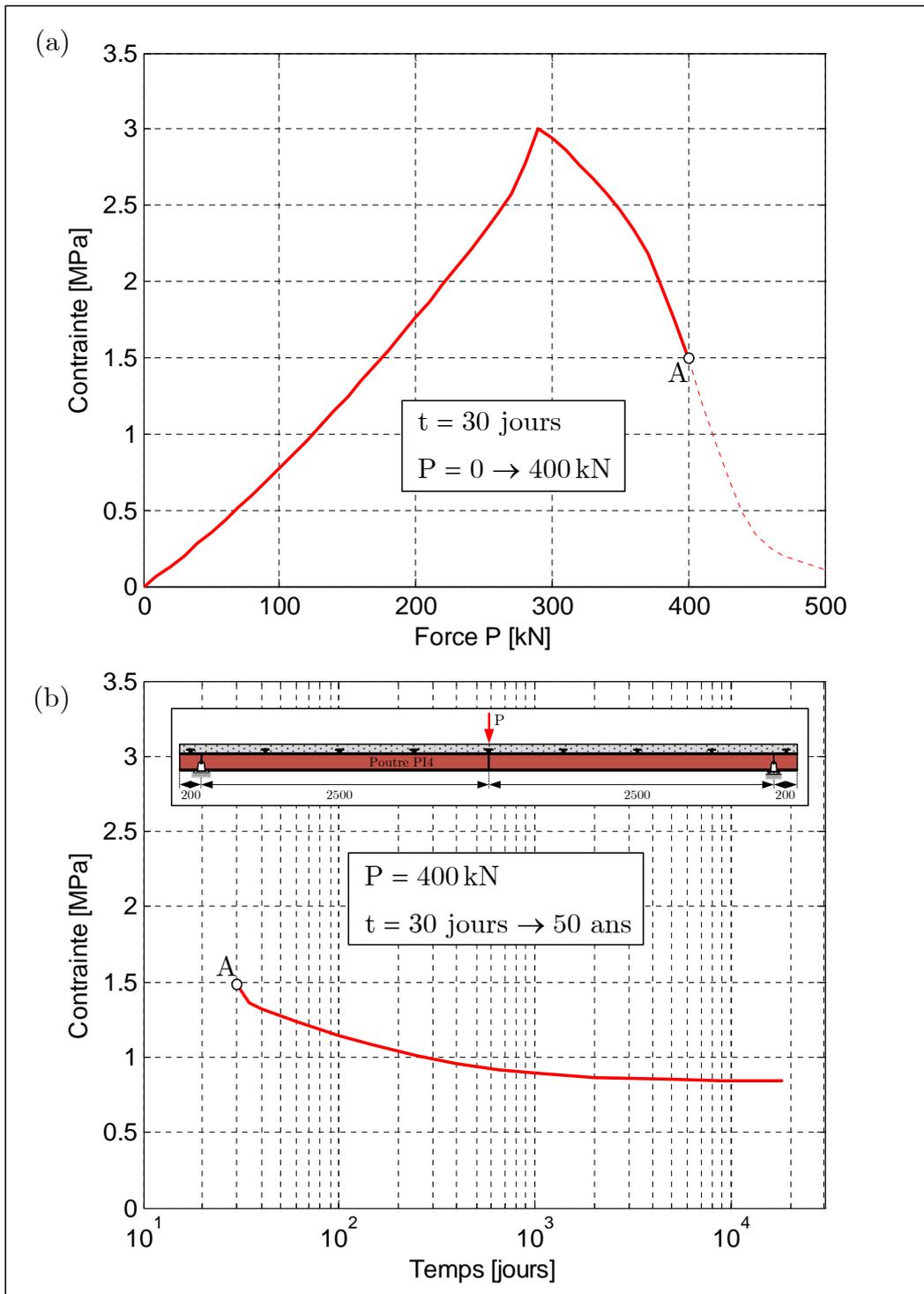


Figure 6.9 – Poutre PI4 : Évolution de la contrainte de la fibre de béton la plus tendue en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps

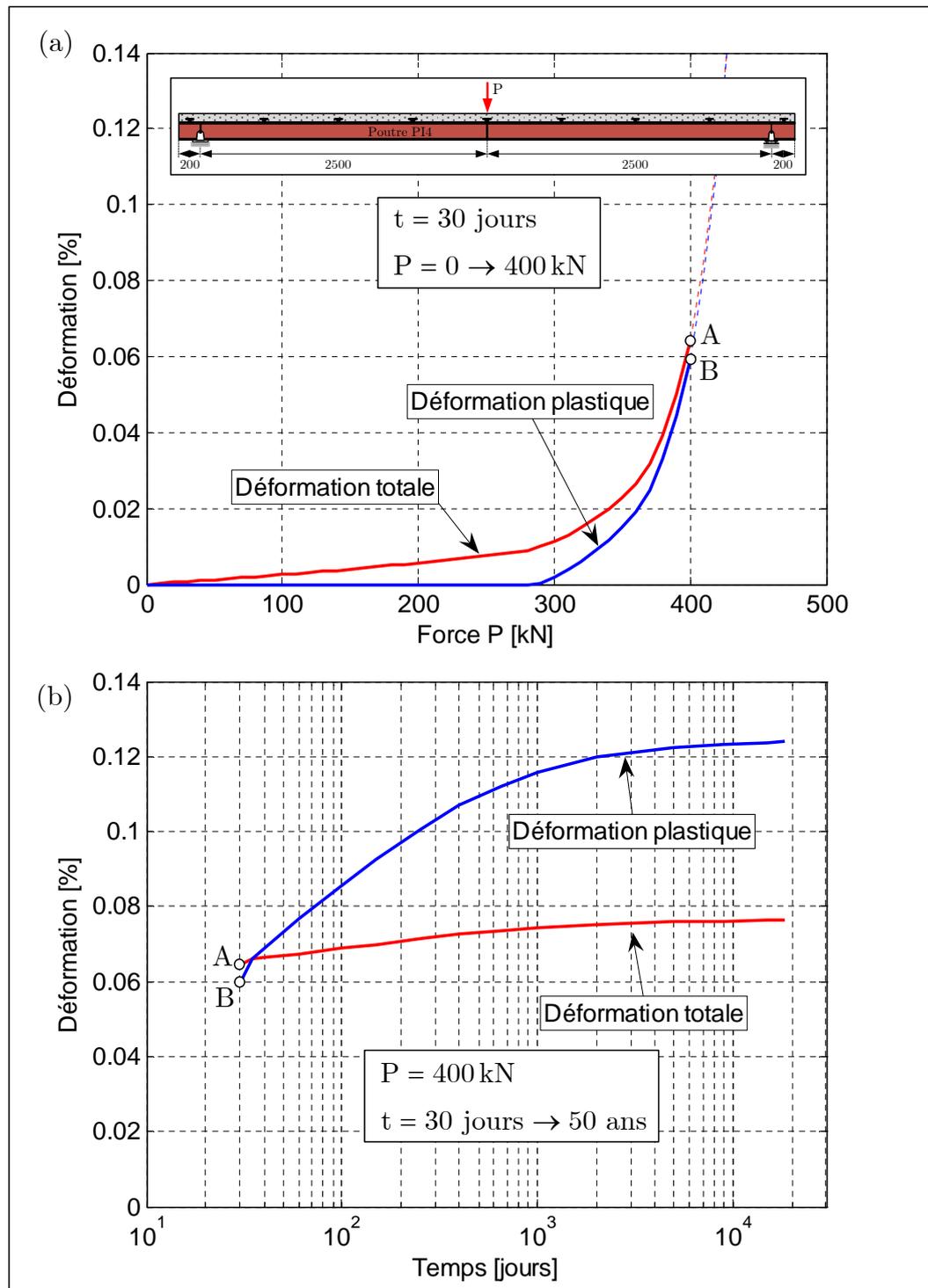


Figure 6.10 – Poutre PI4 : Évolution de la déformation de la fibre de béton la plus tendue en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps

### 6.3.3 Poutre mixte continue PH3

Afin d'étudier l'influence des effets différés du béton sur le comportement non-linéaire à long terme des poutres mixtes continues, la poutre PH3, étudiée au chapitre 5, est reprise dans ce paragraphe. On rappelle que les propriétés mécaniques et géométriques de la poutre sont données au paragraphe 5.6 du chapitre 5. L'analyse se fait de la manière suivante : à 30 jours, la poutre est sollicitée jusqu'à une charge de 150 kN ; autrement dit, à ce niveau de charge, la poutre est déjà entrée dans le domaine non-linéaire de comportement. Cette charge est maintenue constante tout au long d'une durée de 50 années. Les fonctions de fluage et de retrait sont celles du modèle CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1]. En ce qui concerne les paramètres de ce modèle, on suppose que l'humidité relative est de 80% et qu'elle ne change pas au cours du temps. Le coefficient correcteur sur le fluage est pris égal à 0.25.

Les figures 6.11 montrent l'évolution de la flèche en milieu de travée. Encore une fois, on constate que la flèche augmente de manière plus ou moins significative au cours du temps. On représente à la figure 6.12 les distributions de la flèche le long de la poutre pour la charge constante de 150 kN. On observe que le fluage seul augmente flèche maximale de 7.7 mm à 10.1 mm, soit une augmentation de 31%, alors que la flèche maximale augmente de 7.7 mm à 12.8 mm, soit une augmentation 66%, si le retrait est pris en compte. La figure 6.13 illustre la distribution du moment fléchissant total à 30 jours et à 1825 jours. On y constate une redistribution des moments, ce qui ne surprend pas puisque la poutre est hyperstatique, mais ici cette redistribution a l'originalité d'être due aux effets du temps. Comme sous chargement instantané par fissuration et plasticité, la redistribution ici est plus importante en zone de moment négatif qu'en zone de moment positif.

Examinons maintenant l'évolution de la contrainte et de la déformation de la fibre de béton la plus comprimée, donnée respectivement aux figures 6.14 et 6.15. On précise que cette fibre se trouve dans la section au droit de la charge. La déformation plastique observée à la figure 6.15a confirme que sous la charge de 150 kN, à 30 jours, cette fibre est déjà plastifiée. De plus, la figure 6.14a précise que la contrainte ne dépasse pas encore le pic. Ceci explique que la diminution de contrainte au cours du temps, observée à la figure 6.14b, corresponde à un déchargement purement viscoélastique. Ce déchargement s'effec-

tue d'ailleurs avec la déformation plastique qui n'évolue pas au cours du temps, comme l'illustre la figure 6.15b. L'augmentation de déformation totale au cours du temps (cf. Figure 6.15b) peut paraître étrange puisqu'en général avec un déchargement, la déformation totale doit décroître. Cette augmentation s'explique par l'augmentation considérable de la déformation de retrait, comme on l'a signalé à la première application.

L'évolution de la déformation et de la contrainte dans la fibre la plus tendue de la section au droit de l'appui intermédiaire (zone de moment négatif), est représentée respectivement aux figures 6.16 et 6.17. L'apparition de déformation plastique indique qu'avec une charge de 150 kN, cette fibre se plastifie dès 30 jours (cf. Figure 6.16). Ceci est confirmé par la contrainte se trouvant après le pic, comme le montre la figure 6.17a. On observe à la figure 6.17b que la contrainte diminue au cours du temps. Cette diminution correspond à un écoulement plastique avec l'augmentation de la déformation plastique au cours du temps, comme indiqué à la figure 6.16b. On observe encore une fois que la présence des effets différés du béton conduit à une déformation plastique plus importante que la déformation totale.

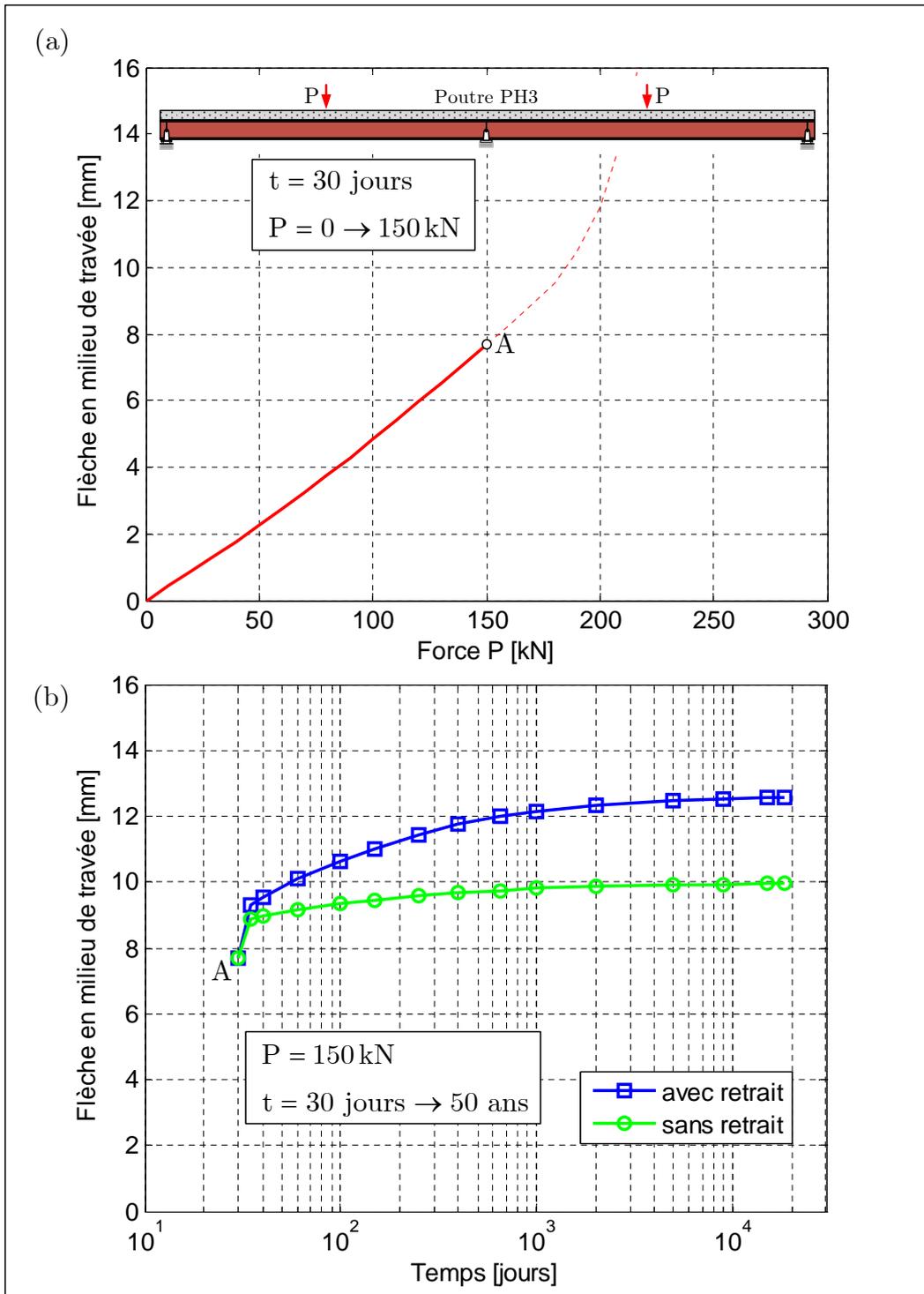


Figure 6.11 – Poutre PH3 : Évolution de la flèche en milieu de travée : (a) au cours de chargement ; (b) au cours du temps

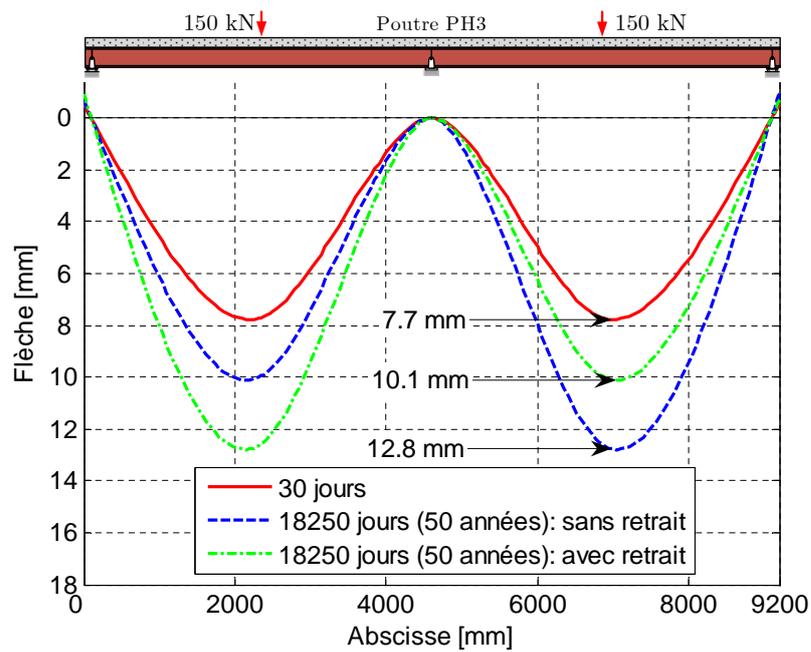


Figure 6.12 – Poutre PH3 : Distribution de la flèche pour une charge de 150 kN

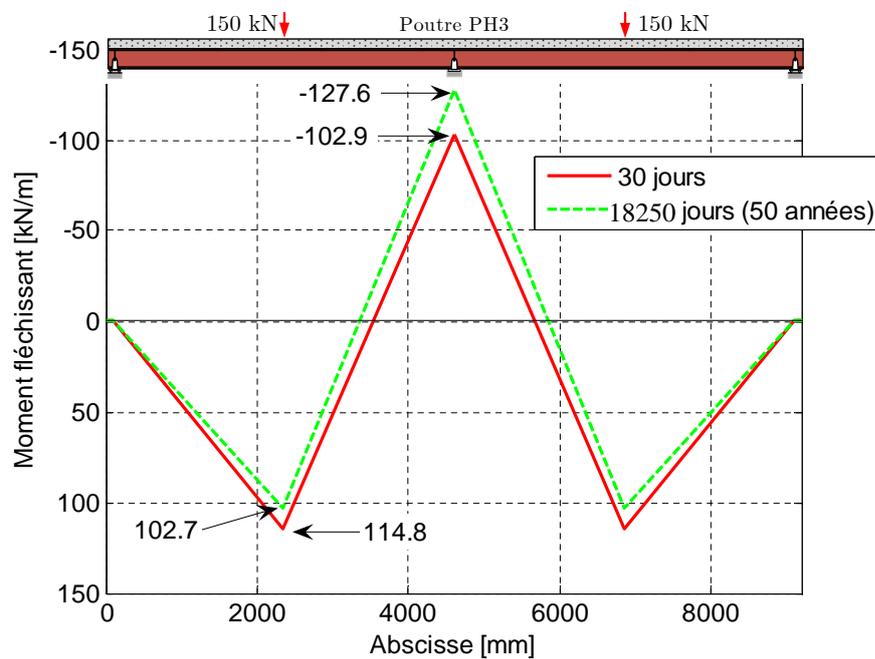


Figure 6.13 – Poutre PH3 : Distributions du moment fléchissant pour une charge de 150 kN

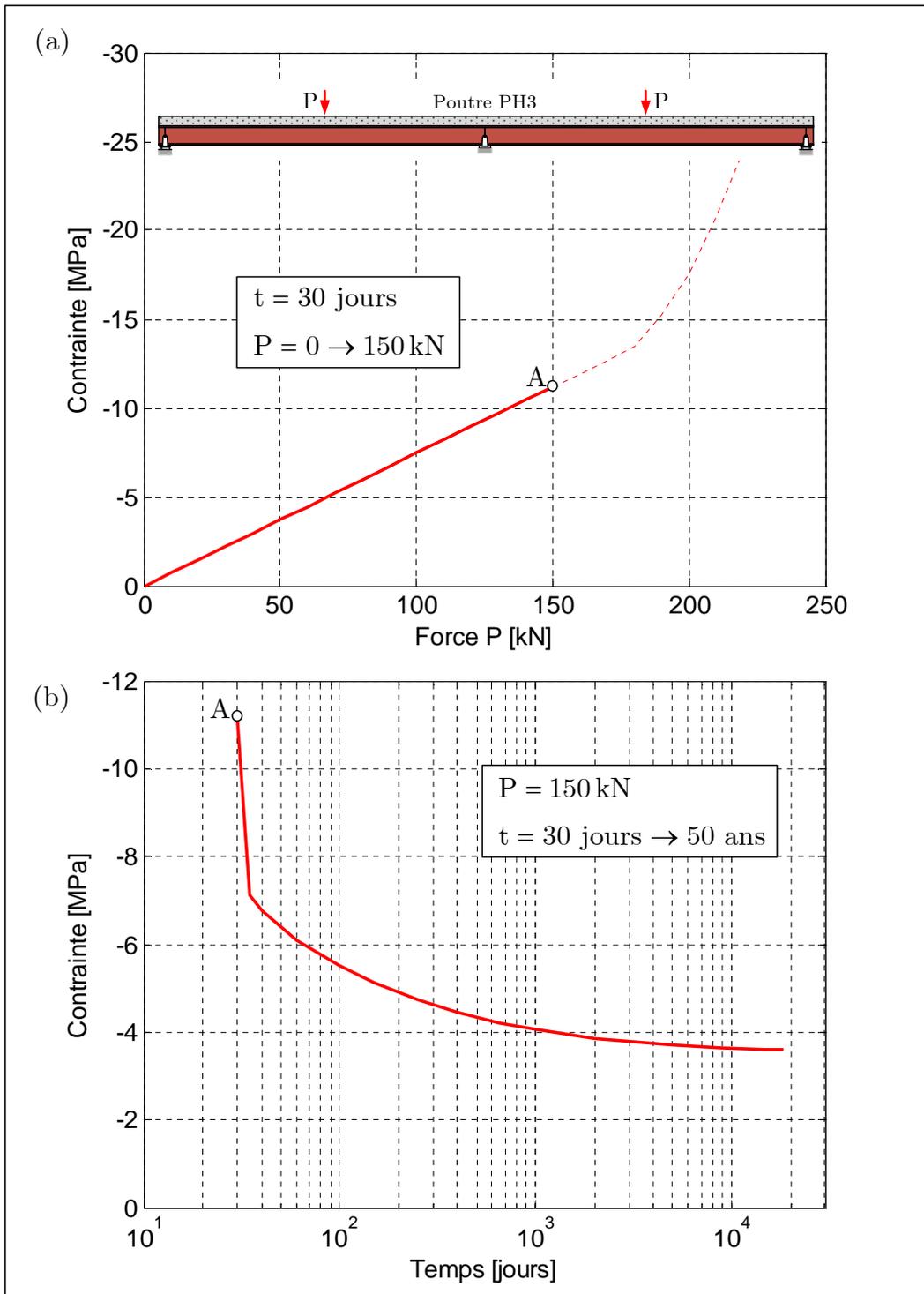


Figure 6.14 – Poutre PH3 : Évolution de la contrainte de la fibre de béton la plus comprimée en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps

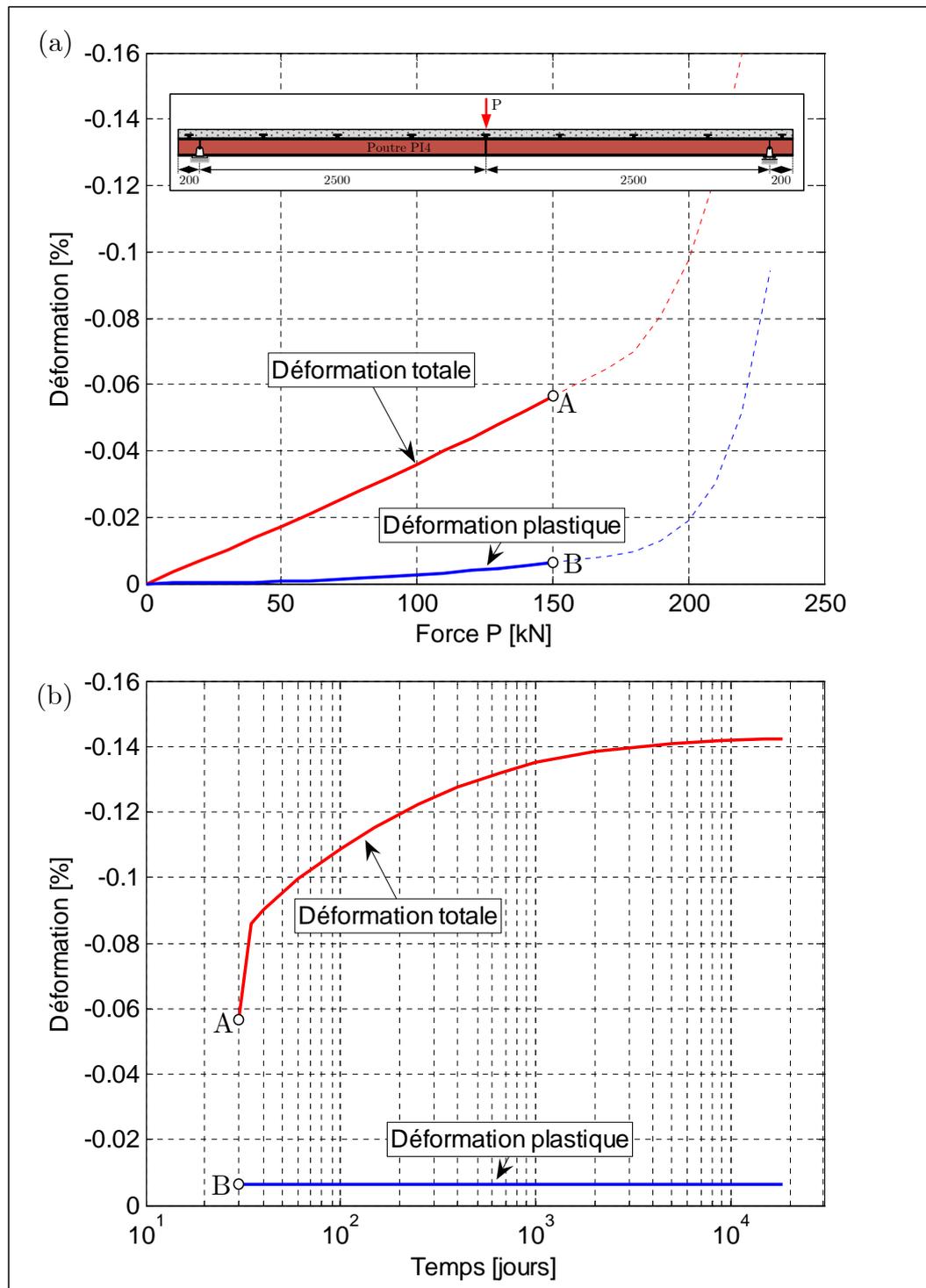


Figure 6.15 – Poutre PH3 : Évolution de la déformation de la fibre de béton la plus comprimée en milieu de travée : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps

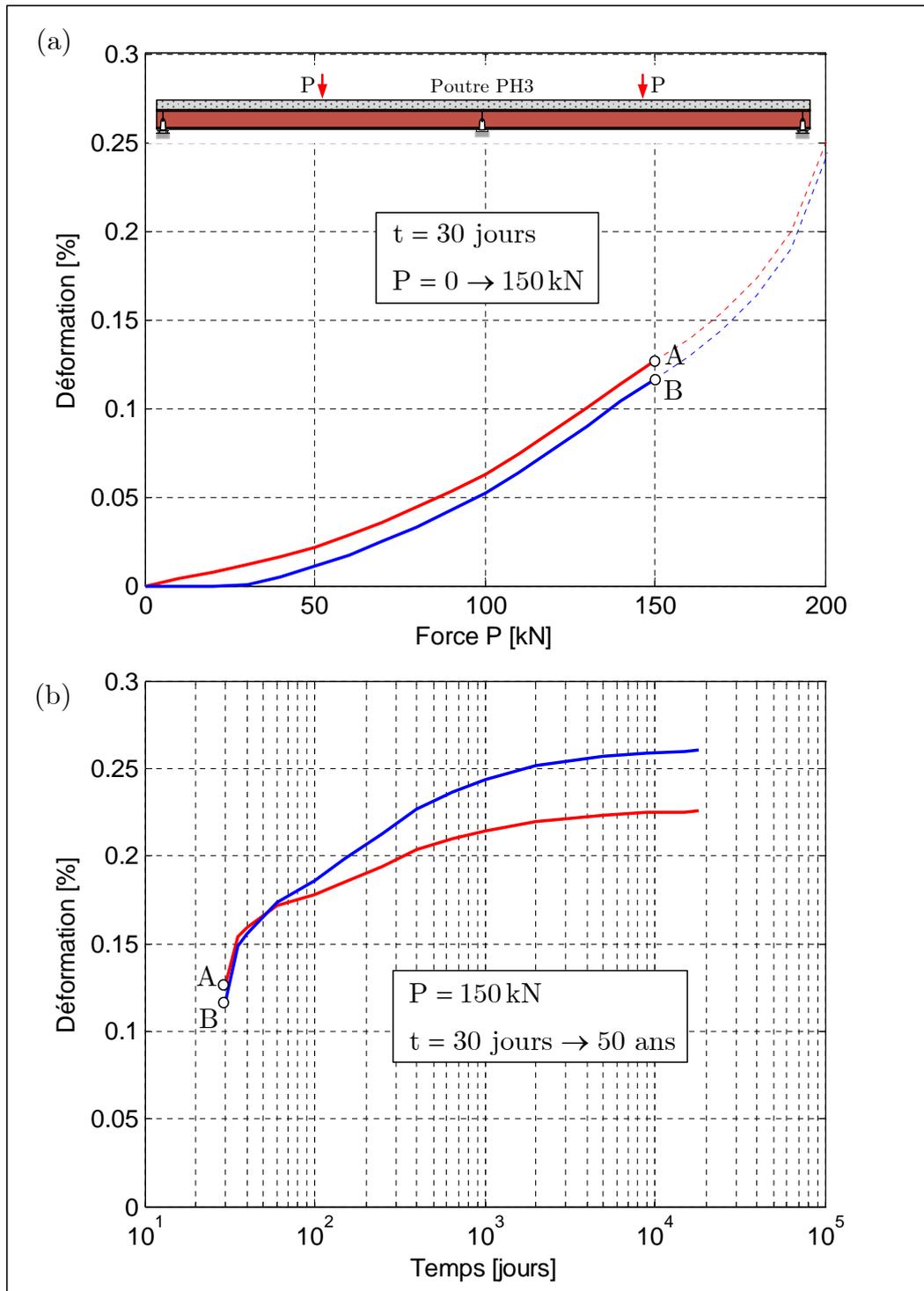


Figure 6.16 – Poutre PH3 : Évolution de la déformation de la fibre de béton la plus tendue au droit de l'appui intermédiaire : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps

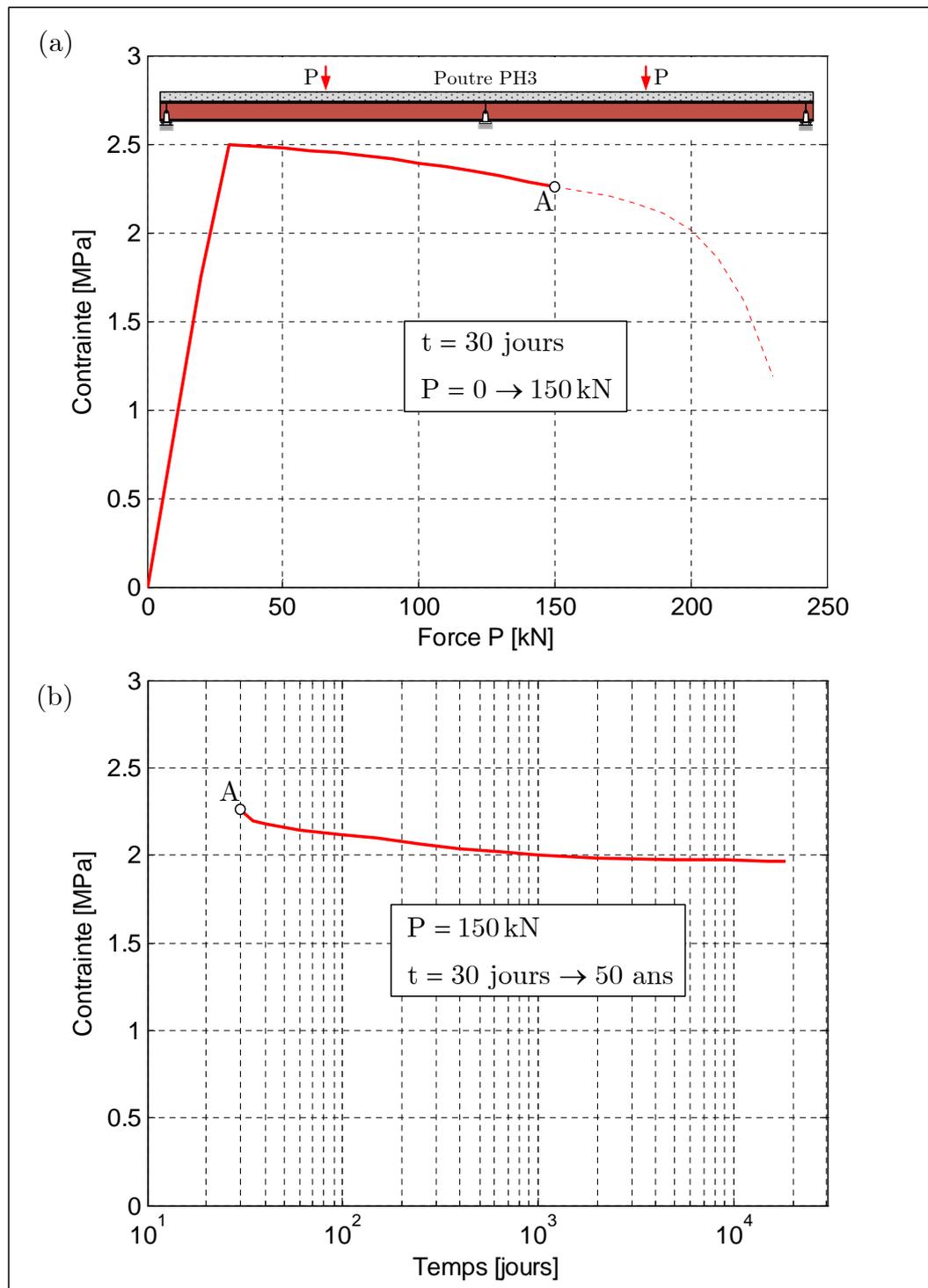


Figure 6.17 – Poutre PH3 : Évolution de la contrainte de la fibre de béton la plus tendue au droit de l'appui intermédiaire : (a) lors du chargement ; (b) au cours du temps

### 6.4 Conclusions

Dans ce chapitre, un modèle viscoélastique/plastique a été proposé pour le béton. Ce modèle prend en compte le couplage entre les effets différés et la plasticité en supposant que le critère de la plasticité ne dépend pas du temps. C'est une première approche qui nous a permis d'analyser l'interaction du fluage et du retrait avec le comportement non-linéaire du béton. Les effets différés (fluage et retrait) ont été pris en compte via le modèle viscoélastique linéaire présenté au paragraphe 3.3.3.3, et le comportement non-linéaire du béton a été exprimé à l'aide du modèle de plasticité adoucissante présenté dans le paragraphe 4.6. Ces modèles de comportement ont été intégrés dans le programme élément fini de poutre mixte développé au chapitre 5 afin de pouvoir analyser les poutres mixtes dans le domaine non-linéaire et à long-terme. Trois applications numériques ont été effectuées. La première application, basée sur un essai 1D de relaxation, a eu pour but de valider l'algorithme d'intégration numérique du modèle. Les deux autres applications ont porté sur deux poutres mixtes étudiées au chapitre 5. Ces applications ont eu pour but de voir, en première approche, le comportement au cours du temps des poutres mixtes lorsque celles-ci sont déjà entrées dans le domaine non-linéaire de comportement. En particulier, on estime que le modèle est tout à fait apte à reproduire le phénomène de fissuration dû au retrait dans les poutres mixtes continues.

## CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Le tout premier objectif premier de ce travail de thèse a été de développer des outils numériques permettant l'analyse des poutres mixtes acier-béton, en particulier en vue de la modélisation des effets différés et des aspects d'interaction entre les non-linéarités matérielles. La première question qui s'est posée à nous a été de choisir entre un modèle de connexion discret ou continu ? Pour répondre, au moins en partie, à cette première interrogation, nous avons mis au point deux éléments finis avec matrice de raideur élastique exacte. Le premier modèle élément fini porte sur la connexion discrète qui naturellement représente la réalité. Le second, plus classique, considère une modélisation continue de la connexion. Ces éléments finis font usage de fonctions d'interpolation exactes, obtenues à partir de la solution des équations d'équilibre exprimées en fonction des déplacements. A l'aide de ces deux outils, nous avons pu analyser l'impact du modèle de la connexion sur la réponse d'une poutre mixte. Les deux modèles de connexion donnent des résultats, en termes d'efforts et de déplacements sensiblement proches, excepté lorsque les connecteurs sont très espacés, ce qui est le cas lorsqu'on se trouve en présence d'une connexion par paquets.

Une seconde question, essentielle pour les poutres mixtes, porte sur des effets différés dans les poutres mixtes et leur couplage avec les non-linéarités matérielles. Le développement d'outils capables d'intégrer toutes ces interrogations s'est déroulé en 3 phases. La première a consisté à évaluer les effets différés en supposant un comportement linéaire de l'acier, des goujons et du béton. Cette hypothèse nous a permis de mettre au point deux éléments finis avec matrice de raideur exacte en espace, mais discrète en temps, puisqu'il a été nécessaire de discrétiser la loi de comportement viscoélastique à l'aide d'un schéma trapézoïdal. La démarche suivie pour construire ces matrices de raideur exacte a été identique à celle suivie pour la solution élastique avec toutefois une plus grande complexité des calculs, notamment pour le modèle de connexion continue. Nous avons pu constater que le fluage et le retrait jouaient un rôle important dans le comportement des poutres mixtes. Par ailleurs, le retrait conduit à une augmentation des flèches et à une redistribution significative des efforts internes dans les poutres hyperstatiques. La méthode pas-à-pas est la plus précise, mais elle nécessite un stockage de l'histoire. La méthode "rate-type" de BAŽANT

permet d'éviter ce stockage, mais pose un problème d'identification de paramètres. Les méthodes algébriques dites à un pas (AAEM, EM et MS) présentent l'avantage d'une forme simplifiée de la relation de comportement discrète, mais sont par nature approximatives. En analysant les résultats obtenus par ces méthodes, on observe que la méthode AAEM est la plus précise. Si l'on observe attentivement les résultats, on constate que l'état de contrainte sort du domaine élastique linéaire et qu'en conséquence, il est nécessaire d'abandonner l'hypothèse d'un comportement linéaire. En effet, au-delà d'une certaine valeur de la charge, le comportement d'une poutre mixte devient non-linéaire et on ne peut faire abstraction de ce fait.

Si on considère alors l'aspect non-linéaire du problème posé, l'idée d'une solution analytique doit être abandonnée au profit de la méthode des éléments finis. Mais quel élément fini ? Avant de répondre à cette question, il est indispensable de prêter attention à la modélisation du comportement non-linéaire des matériaux. On peut se demander pourquoi accorder de l'importance au formalisme alors que nous allons adopter un contexte d'élément fibre ? Les lois uniaxiales ne sont-elles pas suffisantes ? La réponse est oui si le chargement n'est pas alterné. Et pourquoi se priver du cadre rigoureux de la mécanique non-linéaire des matériaux ? Cela a été l'objet du chapitre 4 où un modèle de plasticité couplé à l'endommagement a été développé pour le béton. Ce nouveau modèle permet de reproduire exactement la courbe enveloppe contrainte/déformation en compression du modèle CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1] ainsi que le comportement uniaxial du béton sous trajets charge/décharge multiples. Le formalisme adopté permet une intégration cohérente des relations de comportement, quelque soit la nature du chargement.

La simulation du comportement non-linéaire des poutres mixtes nécessite une discrétisation en espace, souvent réalisée à l'aide de la méthode des éléments finis. Les éléments de type déplacement sont fréquemment utilisés. Cependant, si le modèle de connexion est continu, ce type d'élément peut souffrir du "curvature locking", c'est-à-dire du verrouillage numérique qui résulte d'une mauvaise représentation de la courbure. Cela nous amène à poser la question suivante : quel élément fini faut-il choisir, déplacement, équilibre ou mixte et quel modèle de connexion discrète ou continue ? A cette question, il n'est pas facile de répondre. Pour tenter d'apporter une réponse satisfaisante, plusieurs éléments finis

ont été développés et programmés. Pour chacune de ces formulations, deux éléments avec connexion continue et discrète ont été comparés, ce qui nous a conduit à proposer deux nouveaux éléments avec connexion discrète : un élément équilibre et un élément mixte. Le cas de la charge répartie étant fréquent en pratique, nous avons étendu les formulations équilibre et mixte afin que la charge répartie soit prise en compte. La comparaison entre les différents éléments montre une nette supériorité des éléments équilibre et mixte sur les éléments déplacement.

Arrivés à ce stade, nous avons les outils pour analyser l'interaction entre les effets différés et les non-linéarités matérielles. Au niveau de l'approche, le choix s'est directement porté sur une combinaison en série de la plasticité et de la viscoélasticité. Ce choix a été motivé par le fait que les non-linéarités matérielles se développent instantanément consécutivement au chargement, les effets du temps n'apparaissant qu'ultérieurement, une fois le chargement appliqué. Toutefois, cette approche qui semble naturelle n'est pas triviale à introduire dans un code de calcul. L'intégration numérique conduit à une prédiction de type viscoélastique. En analysant les exemples préliminaires, on observe une augmentation significative des flèches ainsi qu'une redistribution des efforts internes qu'on ne peut négliger, contrairement à ce suggère l'analyse linéaire des effets différés.

Ayant à disposition une variété d'outils, nous sommes aujourd'hui en mesure d'aborder un certain nombre de problèmes, d'ordre plus pratique, qui constituent un objectif des travaux futurs à réaliser. Il convient de mettre au point une méthode simplifiée permettant d'estimer la flèche à long terme d'une poutre continue mixte. Traditionnellement, on considère que le retrait peut être ignoré si la portée est inférieure à 20 m. Ce travail nécessitera une étude paramétrique détaillée qui nécessitera un très grand nombre d'analyses. Les effets différés influencent également la charge critique des poteaux mixtes. Pour estimer la charge critique, il est nécessaire de prendre en compte les effets du second ordre et donc de développer un élément fini poutre/poteau mixte. Ce type d'élément a été développé pour les applications incendie par BIN ZHAO en formulation lagrangienne actualisée, mais en absence d'effets différés. Afin de ré-utiliser les éléments finis développés dans cette thèse, l'approche co-rotationnelle semble tout à fait appropriée. Des résultats préliminaires qui ne sont pas présentés dans cette thèse nous encouragent dans cette voie. Ainsi, il devrait

être possible d'adapter notre programme existant afin qu'il puisse prendre en compte les effets géométriques non-linéaires. Par ailleurs, des développements théoriques actuels, non présentés dans cette thèse, seront également utiles pour les recherches futures.

Un second volet porte sur l'analyse des portiques mixtes pour lesquels il n'existe pas de méthode d'analyse simplifiée. L'objectif serait alors de définir des pourcentages de redistribution des moments comme cela a été fait pour les poutres continues. Pour conduire à bien une telle étude, il est souhaitable de prendre en compte le comportement des assemblages. La première étape consisterait donc à sélectionner des modèles d'assemblage et à les implanter dans le programme de calcul. Disposant de la formulation co-rotationnelle, les effets des grands déplacements pourraient être pris en compte dans un deuxième temps.

Enfin, des développements théoriques sur les poutres mixtes avec le modèle de TIMOSHENKO sont en cours. Une solution analytique remarquable a pu être déjà obtenue pour le cas de deux poutres de TIMOSHENKO reliées par une connexion continue. Cette solution très complexe est le pendant de la solution de NEWMARK pour les poutres mixtes avec l'hypothèse de BERNOUILLI. Ces résultats ouvrent la voie à de futurs développements sur des éléments finis linéaires et non-linéaires géométriques qui restent ouverts aux travaux de recherches.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] *CEB-FIP model code 1990, Design Code*. Thomas Telford, London, 1991.
- [2] EUROCODE 2. Calcul des structures en béton : Partie 1-1 : règles générales et règles pour les bâtiments. *Norme français - P 18-711-1*, NF EN 1992-1-1, Octobre 2005.
- [3] EUROCODE 4. Conception et dimensionnement des structures mixtes acier-béton - partie 1.1 - règles pour les bâtiment. Technical report, Eyrelles, 1997.
- [4] LE MONITEUR. Les retraits du béton. *Le Moniteur*, 33 :107–112, 1972.
- [5] K. ABDEL-AZIZ. *Modélisation et étude expérimentale de poutres mixtes acier-béton à connexion partielle ou espacée*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées des Rennes, FRANCE, 1986.
- [6] P. ACKER. Les effets mécaniques du retrait du béton. *Bulletin de Liaison de Laboratoire Central des Ponts et Chaussées*, pages 95–102, 1988.
- [7] P. ACKER, R. EYMARD, and J.M. PIAU. Structural analysis of concrete structures : accounting for thermal and hygral effects. *Annales des Ponts et Chaussées*, pages 1–11, 1991.
- [8] A.O. ADEKOLA. Partial interaction between elastically connected elements of a composite beam. *International Journal of Solids and Structures*, 11(4) :1125–1135, 1968.
- [9] B.N. ALEMDAR. *Distributed plasticity analysis of steel building structural systems*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, 2001.
- [10] C. AMADIO and M. FRAGICOMO. A finite element model for the study of creep and shrinkage effects in composite beams with deformable shear connections. *Costruzioni Metalliche*, 4 :213–228, 1993.
- [11] P. ANSOURIAN. Experiences on continuous composite beams. *Proceedings - Institution of Civil Engineers*, 71(2) :25–51, 1981.

- [12] J. M. ARIBERT and A. G. LABIB. Modèle calcul élasto-plastique de poutres mixtes à connexion partielle. *Construction Metallique*, 4 :37–51, 1982.
- [13] J.M. ARIBERT and K. ABEL-AZIZ. Calcul des poutres mixtes jusqu’à l’état ultime avec un effet de soulèvement à l’interface acier-béton. *Constructuon métallique*, 4, 1985.
- [14] J.M. ARIBERT, A.G. LABIB, and J.C. RIVAL. Etude numérique et expérimentale de l’influence d’une connexion partielle sur le comportement de poutres mixtes. *Communication présentée aux journées A.F.P.C., Paris*, thème 1(sous-thème 3), 1983.
- [15] J.M. ARIBERT, E. RAGNEAU, and H. XU. Développement d’un élément fini de poutre mixte acier-béton intégrant les phénomènes de glissement et de semi-continuité avec éventuellement voilement local. *Revue Construction Métallique n° 2*, pages 31–49, 1993.
- [16] Y. ARIZUMI, S. HAMADA, and T. KAJITA. Elastic-plastic of composite beams with incomplete interaction by finite element method. *Computers and Structures*, 14 (5-6) :453–462, 1981.
- [17] A. AYOUB. *Mixed formulation for seismic analysis of composite steel-concrete framz structure*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1999.
- [18] A. AYOUB and F.C. FILIPPOU. A model for steel-concrete girders under cyclic loading. *Proc., ASCE Struct. Congr. XV*, pages 721–725, 1997.
- [19] J.W. BALDWIN, J.R HENRY, and G.M. SWEENY. Study of compossite bridge stringers, phase ii. *Missouri University, Columbia*, 1965.
- [20] Z.P. BAŽANT. Numerically stable algorithm with increasing time steps for integral-type aging creep. *Proceedings of the 1st International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, 3 :H2/3, 1971.
- [21] Z.P. BAŽANT. Numerical determination of long-range stress history from strain history in concrete. *Materials and Structures*, 5 :135–141, 1972.

- [22] Z.P. BAŽANT. Prediction of concrete creep effects using age-adjusted effective modulus method. *ACI journal*, 69 :212–217, 1972.
- [23] Z.P. BAŽANT. Theory of creep and shrinkage in concrete structures : A precis of recent developments. *Mechanics Today, Pergamon Press*, 2 :1–93, 1975.
- [24] Z.P. BAŽANT. Thermodynamics of solidifying or melting viscoelastic material. *Journal of Engineering Mechanics*, 105 :933–952, 1979.
- [25] Z.P. BAŽANT. Mathematical models for creep and shrinkage of concrete. In *Symposium on Fundamental Research on Creep and Shrinkage of Concrete*, pages 163–256, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, 1982.
- [26] Z.P. BAŽANT and I. CAROL. Preliminary guidelines and recommendations for characterizing creep and shrinkage in structural design code. *Creep and shrinkage of concrete, proceeding of the fifth international RILEM symposium*.
- [27] Z.P. BAŽANT and J.C. CHERN. Strain-softening with creep and exponential algorithm. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 111(3) :391–415, 1985.
- [28] Z.P. BAŽANT and M. JISÁSEK. R-curve modeling of rate and size effects in quasi-brittle fracture. *International Journal of Fracture*, 62 :355–373, 1993.
- [29] Z.P. BAŽANT and J.K. KIM. Improved prediction model for time-dependent deformation of concrete. part 2, basic creep. *Materials and Structures*, 24(144) :409–421, 1991.
- [30] Z.P. BAŽANT and S.S. KIM. Approximate of relaxation function for concrete. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 105 :2695–2705, 1979.
- [31] Z.P. BAŽANT and L.J. NAJJAR. Comparison of approximate linear methods for concrete creep. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 99 :1851–1874, 1973.
- [32] Z.P. BAŽANT and L. PANULA. Practical prediction of time dependent deformations of concrete. *Materials and Structures*, 11 :307–328, 425–434, 1978.
- [33] Z.P. BAŽANT and S. PRASANNAN. Solidification theory for concrete creep : I. formulation. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 115(8) :1691–1703, 1989.

- [34] Z.P. BAŽANT and S.T. WU. Rate-type law of aging concrete based on maxwell chain. *Materials and Structures*, 7 :45–60, 1974.
- [35] Z.P. BAŽANT and Y. XIANG. Crack growth and lifetime of concrete under long time loading. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(4) :350–358, 1997.
- [36] F. BENBOUDJEMA. *Modélisation des déformations différées du béton sous sollicitations biaxiales. Application aux enceintes de confinement de bâtiments réacteurs des centrales nucléaires*. PhD thesis, Université de Marne la Vallée, FRANCE, 2002.
- [37] A. BERTHOLLET. *Contribution à la modélisation du béton vis-à-vis du vieillissement et de la durabilité : interaction des déformations de fluage et du comportement non-linéaire du matériau*. Thèse, INSA de Lyon, 2003.
- [38] P.H. BISCHOFF. Tension stiffening and cracking of steel fiber-reinforced concrete. *Journal of Structural Engineering*, 15(2) :174–182, 2003.
- [39] B. BISSONNETTE and M. PIGEON. Le comportement viscoélastique du béton en traction et la compatibilité déformationnelle des réparations. *Matériaux et Construction*, 33 :108–118, 2000.
- [40] P. BOERAEVE. *Contribution à l'analyse statique non linéaire des structures mixtes plans formées de poutres, avec prise en compte des effets différés et des phases de construction*. PhD thesis, Faculté des Sciences Appliquées-Université de Liège, 1991.
- [41] P. BOERAEVE. La méthode du temps équivalent pour la prédiction des déformations dues au fluage du béton : prise en compte de la recouvrance. *Materials and Structures*, 21(6) :431–435, 1988.
- [42] Z. BOLTZMANN. Zur theorie der elastischen nachwirkungen. *Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften in Wien, Wiener bericht 70, Wissenschaftliche Abhandlungen*, 1 :279–306, 1874.
- [43] M.A. BRADFORD. Deflections of composite steel-concrete beams subject to creep and shrinkage. *ACI Struct. J.*, 88(5) :610–614, 1991.
- [44] M. BRESLER and L.G. SELNA. Analysis of time-dependent behaviour of reinforced concrete structure. *ACI Symposium on creep of concrete*, 1964.

- [45] P. BURKHARDT. *Le comportement elastique et plastique de poutres mixtes*. PhD thesis, Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne, 1977.
- [46] O.S BURSI and M. BALLERINI. Behavior of a steel-concrete composite substructure with full and partial shear connection. *Proceedings of 11th World Conference on Earthquake Engineering, Acapulco, Mexico*, 1996.
- [47] D.J. CARREIRA and K.H. CHU. Tstress-strain relationship of reinforced concrete in tension. *ACI Journal*, 83(1) :21–28, 1986.
- [48] H.C. CHAN, Y.K. CHEUNG, and Y.P. HUANG. Crack analysis of reinforced concrete tension members. *Journal of Structural Engineering Div, ASCE*, 118 :2118–2132, 1992.
- [49] Z. CHEN and M.L. WANG. A partitioned - solution method with moving boundaries for nonlocal creep damage of concrete. *Creep and shrinkage of concrete proceeding of the fifth international RILEM symposium*, pages 393–398, 1993.
- [50] E. COSENZA and S. MAZZOLANI. Analisi in campo lineare di travi composte con conessioni deformabili : formule esatte e risoluzioni alla differenze. pages 1–21, University of Trento, 1993. First Italian Workshop on Composite Structures.
- [51] M.A. CRISFIELD. An arc-length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(9) :1269–1289, 1983.
- [52] M.A. CRISFIELD. *Non-linear finite element analysis of solids and structure*, volume 1. 1991.
- [53] D. CUSSON and P. PAULTRE. Stress-strain model for confined high-strength concrete. *Journal of the structural division, ASCE*, 121(3) :468–477, 1995.
- [54] A. DALL’ASTA and A. ZONA. Non-linear analysis of composite beams by a displacement approach. *Computers and Structures*, 80 :2217–2228, 2002.
- [55] B.J. DANIEL. Non linear analysis of composite members in bending and shear. Rapport ICOM 223, EPEL, Lausanne, 1989.

- [56] B.J. DANIEL and M. CRISINEL. Composite slab behavior and strength analysis. part i : Calculation procedure. *Journal of Structural Engineering*, 119(1) :16–35, 1993.
- [57] L. DEZI. Shrinkage effects in composite beams with flexible connection. *Journal of Constructional Steel Research*, 28(3) :295–320, 1994.
- [58] L. DEZI and A.M. TARANTINO. Creep in composite continuous beams. i : Theoretical treatment. *Journal of Structural Engineering*, 119(7) :2095–2111, 1993.
- [59] L. DEZI and A.M. TARANTINO. Creep in composite continuous beams. ii : Parametric study. *Journal of Structural Engineering*, 119(7) :2112–2133, 1993.
- [60] L. DEZI, C. IANNI, and A.M. TARANTINO. Simplified creep analysis of composite beams with flexible connectors. *Journal of Structural Engineering*, 119(5) :1484–1497, 1993.
- [61] L. DEZI, G. LEONI, and A.M. TARANTINO. Algebraic methods for creep analysis of continuous composite beams. *Journal of Structural Engineering*, 122(4) :423–430, 1996.
- [62] G. FABBROCINO, G. MANFREDI, and E. COSENZA. Non-linear analysis of composite beams under positive bending. *Computers and Structures*, 70(1) :77–89, 1999.
- [63] C. FAELLA, E. MARTIELLI, and E. NIGRO. Steel and concrete composite beams with flexible shear connection : exact analytical expression of the stiffness matrix and applications. *Computers and Structures*, 80 :1001–1009, 2002.
- [64] C. FAELLA, E. MARTINELLI, and E. NIGRO. Steel and concrete composite beams with flexible shear connection : "exact" analytical expression of the stiffness matrix and applications. *Computers and Structures*, 80(11) :1001–1009, 2002.
- [65] R. FARIA, J. OLIVIER, and M. CEVERRERA. A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures. *International Journal of Solids and Structures*, 35(14) :1533–1558, 1998.

- [66] F.C. FILIPPOU, E.P. POPOV, and V.V. BERTERO. Effects of bond deterioration on hysteric behavior of reinforced concrete joints. EERC Report 83-19, Earthquake Engineering Research Center, Berkley, 1983.
- [67] H. FLOEGL and H.A. MANG. Tension stiffening concept based on bond slip. *Journal of Structural Engineering Div, ASCE*, pages 2681–2701, 1982.
- [68] S.J. FOSTER and P. MARTI. Cracked membrane model : Fe implementation. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 129(9) :1155–1163, 2000.
- [69] R. GILBERT and R. WARNER. Tension stiffening in reinforced concrete slabs. *Journal of the Structural Division*, 104(12) :1885–1900, 1978.
- [70] R.I GILBERT. Time effects in concrete structures. *Elsevier Science Publisher, The Netherlands*, 1988.
- [71] R.I. GILBERT. Time-dependent analysis of composite steel-concrete sections. *Journal of Structural Engineering*, 115(11) :2687–2705, 1989.
- [72] R.I. GILBERT. Creep and shrinkage models for high strength concrete - proposals for inclusion in as3600. *Australian Journal of Structural Engineering, Institution of Engineers*, 4(2) :95–106, 2002.
- [73] W.H. GLANVILLE. Creep of concrete under load. *The Structural Engineer*, 11(2) : 54–73, 1933.
- [74] V.S. GOPALARATNAM and S.P. SHAH. Softening reponse od plain concrete in direct tension. *ACI Materials Journal*, 82(3) :310–323, 1987.
- [75] S. GOVINDJEE, J.K. GREGORY, and J.C. SIMO. Manisotropic modelling and numerical simulation of brittle damage in concrete. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(21) :3611–3633, 1995.
- [76] L.J. HAGEMAN, H. MURAKAMI, and G.A. HEGEMIER. On simulating steel-concrete interaction in reinforced concrete. part 2 : validation studies. *Mechanics of Materials*, 5 :187–197, 1986.

- [77] M. HALLAM. An analysis of the behaviour of continuous composite beams under repeated loading. Research report P323, University of Sydney, 1978.
- [78] T.C. HANSEN. Estimating stress relaxation from creep data. *Materials Research and Standards (ASTM)*, 4 :12–14, 1964.
- [79] S. HUGUES. *Contribution à la modélisation du comportement des ouvrages d’art lors des phases de construction avec prise en compte des non linéarités géométriques et matérielles*. PhD thesis, Université de Liège, 2004.
- [80] J.M. ILLSTON. The creep of concrete under uniaxial tension. *Magazine of Concrete Research*, 17(51) :77–84, 1965.
- [81] M. JIRÁSEK and Z.P. BAŽANT. *Inelastic Analysis of Structures*. WILEY, 2001.
- [82] B. JURKIEWIEZ, S. BUZON, and J.G. SIEFFERT. Incremental viscoelastic analysis of composite beams with partial interaction. *Computers and Structures*, 83(21-22) : 1780–1791, 2005.
- [83] L.M. KACHANOV. Introduction to continuum damage mechanics. *Mertinus Nijhoff Publishers, Dordrecht*.
- [84] G. KAKLAUSKAS and J. GHABOUSSI. Stress-strain relations for cracked tensile concrete from rc beam tests. *Journal of Structural Engineering*, 127(1) :64–73, 2001.
- [85] P. KARSAN and J.O. JIRSA. Behaviour of concrete under compressive loading. *J. Struct. Div., ASCE*, 95(ST12) :2543–2563, 1969.
- [86] V. KERYVIN. *Contribution à la modélisation de l’endommagement localisé*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1999.
- [87] W.B. KRÄTZIG and R. PÖLLING. An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters. *Computers and Structures*, 82(15-16) :1201–1215, 2004.
- [88] W.B. KRÄTZIG and R. PÖLLING. Elasto-plastic damage-theories and elasto-plastic fracturing-theories - a comparison. *Computational Materials Science*, 13(1-3) :117–131, 1998.

- [89] M.Y. LAU and P. ACKER. Comportement différé des poutres en précontraint. modélisation tenant compte de l'hygrométrie. *Supplément de Travaux, New Delhi*, janvier 1986.
- [90] J.P. LEBET. *Comportement des ponts mixtes acier-béton avec interaction partielle de la connexion et fissuration du béton*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1987.
- [91] J. LEE and G.L. FENVES. Plastic-damage concrete model for earthquake analysis dams. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 27 :937–956, 1998.
- [92] J. LEMAITRE and J.L. CHABOCHE. *Mécanique des matériaux solides*. Paris : Dunod, 2001.
- [93] C.S. LIN and A.C. SCORDELIS. Nonlinear analysis of rc shells of general form. *J Struct Div*, 101(3) :523–538, 1975.
- [94] G. MANFREDI, G. FABBROCINO, and E. COSENZA. Modeling of steel-concrete composite beams under negative bending. *Journal of Engineering Mechanics*, 125 (6) :654–662, 1999.
- [95] P.S. MANGAT and M.K. LIMBACCHIYA. Repair material properties of effective structural application. *Cement and Concrete Research*, 27(4) :601–617, 1997.
- [96] B. MASSICOTTE, A.E. ELWI, and J.G. MAC GREGOR. Tension stiffening model for planar reinforced concrete members. *Journal of Structural Engineering*, 116(111) : 3039–3058, 1990.
- [97] J. MAZARS. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse d'état, Université Paris VI, 1986.
- [98] J.B. MCGARRAUGH and J.W. BALDWIN. Lightweight concrete-on-steel composite beams. *Engineering Journal, AISC*, 8(3) :90–98, 1971.
- [99] F.R. MCMILLAN. Method of designing reinforced concrete slabs. *Discussion by discussion by A. C. Janni, Transactions ASCE*, 80 :1738, 1916.

- [100] M. MENEGOTTO and P.E. PINTO. Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bendings. *ABSE Symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on by well-defined repeated loads, Lisbon, 1973.*
- [101] G. MESCHKE, R. LACKNER, and H.A. MANG. An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. *Int. J. Meth. Engng.*, 42 :703–727, 1998.
- [102] N. MOLENSTRA and R.P. JOHNSON. Final report on a study of partial shear connections in composite beams. Technical report, University of Warwick, department of Engineering, 1987.
- [103] A. NEUENHOFER and F.C. FILIPPOU. Evaluation of nonlinear frame finite element models. *Journal of structural engineering, ASCE*, 23(7) :958–966, 1997.
- [104] N. M. NEWMARK, C. P. SIESS, and I. M. VIEST. Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction. *Proceedings Society for experimental stress analysis*, 9(1) :75–92, 1951.
- [105] A.S. NGAB, A.H. NILSON, and F.O. SLATE. Shrinkage and creep of high strength concrete. *ACI Journal*, 78(4) :255–261, 1981.
- [106] D.G. NGUYEN. *A Thermodynamic Approach to Constitutive Modelling of Concrete using Damage Mechanics and Plasticity Theory*. Phd thesis, University of Oxford, 2005.
- [107] A. NILSSON. High-strength concrete - an overview of concrete research. *Utilization of High-Strength Concrete, Proceedings, Stavanger, 1987.*
- [108] J.G. OLLGAARD, R.G. SLUTTER, and J.W. FISHER. Shear strength of stud connectors in lightweight and normal weight concrete. *AISC Engineering Journal*, 8(2) : 55–64, 1971.
- [109] M. ORTIZ and E.P. POPOV. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 21(35) :1561–1576, 1955.

- [110] C. OUYANG, E. WOLLRAB, and S.M. KULKARNI S.P. SHAH. Prediction of cracking response of reinforced concrete tensile members. *Journal of Structural Engineering*, 123(1) :70–77, 1997.
- [111] K.W. POH. General creep - time equation. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 10(2) :118–120, 1998.
- [112] M. RABIR. *Comportement et Modélisation de Connecteurs de types cornière et Goujon utilisés en construction mixte acier-béton*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Lorraine, Vandoeuvre-lès-Nancy, FRANCE, 1994.
- [113] A. RAMASWAMY, F. BARZEGAR, and G.Z. VOYIADJIS. Study of layering procedures in finite-element analysis of rc flexural and torsional elements. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 121(12) :1773–1783, 1995.
- [114] E. RAMM. Strategies for tracing the non-linear response near limit-points. *Non-linear Finite element Analysis in structural Mechanics*, pages 63–89, 1981.
- [115] G. RANZI and M.A. BRADFORD. Analytical solutions for the time-dependent behaviour of composite beams with partial interaction. *International Journal of Solids and Structures*, 43(13) :3770 – 3793, 2006.
- [116] G. RANZI, M.A. BRADFORD, and B. UY. A direct stiffness analysis of a composite beam with partial interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61 :657–672, 2004.
- [117] A.G. RAZAQPUR and M. NOFAL. A finite element for modeling the nonlinear behavior of shear connectors in composite structures. *Computers and Structures*, 32 (1) :168–174, 1989.
- [118] H. REINHARDT, H.A.W. CORNELISSEN, and D.A. HORDJIL. ensile tests and failure analysis of concrete. *journal of Structural Engineering, ASCE*, 112(11) :2462–2477, 1986.
- [119] H. ROBINSON and K.S. NARAIN. Slip and uplift affects in composite beams. In *Engineering Foundation Conference on composite Construction*, pages 487–497. ASCE, 1988.

- [120] M.R. SALARI. *Modelling of bond-slip in steel-concrete composite beams and reinforcing bars*. PhD thesis, University of Colorado, 1999.
- [121] M.R. SALARI and E. SPACONE. Nonlinear analysis of composite beams with deformable shear connectors. *Journal of structural engineering, ASCE*, 124(10) :1148–1158, 1998.
- [122] M.R. SALARI, E. SPACONE, P.B. SHING, and D.D. FRANGOPOL. Behaviour of composite structures under cyclic loading. *Proceedings of the 1997 ASCE Structures Congress, ASCE*, pages 731–735, 1997.
- [123] S. SATHIKUMAR, B.L. KARIHALOO, and S.G. REID. A model for ageing viscoelastic tension softening materials. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 3 :27–39, 1998.
- [124] A. SCANLON and D.W. MURRAY. Time dependent deflections of reinforced concrete slab deflections. *Journal of the Structural Division*, 100(9) :1911–1924, 1974.
- [125] J. SCHANZENBACH. *Zum Einfluss von Dübelnachgiebigkeit und unter Verdübelung auf das Traverhalten von Verbunddurchlaufträgern im hoch-und industriebau*. PhD thesis, Universität de Kaiserslautern, 1988.
- [126] F. SCHIED. *Numerical analysis*. McGraw-Hill, 1961.
- [127] J.C. SIMO and T.J.R. HUGHES. *Computational Inelasticity*.
- [128] Z. SMERDA and V. KRISTEK. Creep and shrinkage of concrete element and structure. *SLTN, Prague*, 1988.
- [129] S. SOMAYAJI and S.P. SHAH. Bond stress versus slip relationship and cracking response of tension members. *ACI Journal*, 78(3) :217–225, 1981.
- [130] E. SPACON, F.C. FILLIPPOU, and F.F. TAUCER. Fiber beam-column model for nonlinear analysis of r/c frames. part i : Formulation. part ii : Applications. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 25(7) :711–742, 1996.
- [131] N.J. STENVENS, S.M. COLLINS, and G.T. WILL. Constitutive model for reinforced concrete finite element analysis. *ACI Structural Journal*, 88(1) :49–59, 1991.

- [132] H. TROST. Auswirkungen des superpositionsprinzip auf kriech-und relaxationsproblem bei beton und spannbeton. *Beton-und Stahlbetonbau*, 18 :230–238, 261–269, 1962.
- [133] P. TROUILLET. Comportement local de connecteurs acier-béton sollicités au cisaillement. etude bibliographique. Technical Report Ouvrage d’art OA-3, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées LCPC, 1987.
- [134] G.P.A.G. VAN ZIJL, R. DE BORST, and J.G. ROTS. A numerical model for the time-dependent cracking of cementitious materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(7) :637–654, 2001.
- [135] A. VEBO and A. GHALI. Moment curvature relation of reinforced concrete slabs. *Journal of the Structural Division*, 103(3) :515–531, 1977.
- [136] F.J. VECCHIO. Distributed stress field model for reinforced concrete : formulation. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 126(9) :1070–1077, 2000.
- [137] I.M. VIEST, FOUNTAIN, and C.P. SIESS. Developement of the news aasmo specifications for composite steel and concrete bridges. *Highway Reseach Board*, (174), 1958.
- [138] F. VIRTUOSO and R. VIEIRA. Time dependent behaviour of continuous composite beams with flexible connection. *Journal of Constructional Steel Research*, 60(3-5) : 451–463, 2004.
- [139] V. VOLTERRA. Sulle equazioni intergradifferenziali della teoria dell’elasticita. *Atti Reale Accad*, 18 :295, 1909.
- [140] H. XU. *Modélisation numérique et étude du comportement de poutres mixtes continues avec phénomène de semi-continuité et glissement*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquees des Rennes, FRANCE, 1995.
- [141] L.C.P. YAM and J. C. CHAPMAN. The inelastic bahaviour of simply supported composite beams of steel and concrete. *Pro. Inst. Civ. Eng.*, Dec. 1968.
- [142] Z. YANNELEVSKY and H.W. REINHARDT. Uniaxial behaviour of concrete in cyclic tension. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 115(1) :166–182, 1989.

- [143] M.H.M. YASSIN. Nonlinear analysis of prestressed concrete structures under monotonic and cyclic loads. Phd dissertation, University of California, Berkeley, 1994.
- [144] B. ZHAO and J.M. ARIBERT. Finite element method for steel-concrete composite frames taking account of slip and large displacement. *European Journal of Finite Elements*, 5(2) :221–249, 1996.
- [145] O.C. ZIENKIEWICZ, M. WATSON, and I.P. KING. A numerical method of viscoelastic stress analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*, 10 :807–827, 1968.

## Annexe I

### Modèle à fibres

Le modèle à fibres, qui est connu dans la littérature, est utilisé pour analyser le comportement nonlinéaire de section d'une poutre mixte en flexion composée. Ce modèle permet de calculer la loi de comportement de la section de la poutre (c'est à dire la relation entre vecteur déformation  $\mathbf{e}(x)$  et vecteur efforts généralisés associés  $\mathbf{D}(x)$ ) à partir d'une description géométrique de la section basée sur des fibres constituant la section droite et de lois de comportement uniaxiales pour chaque matériau (acier, béton). La section est discrétisée en plusieurs fibres (cf. Figure I.1) qui sont suffisamment petites pour que l'on puisse considérer une distribution linéaire de contrainte dans chaque couche.

Sous forme discrétisée, le vecteur efforts généralisés de section mixte est déterminé par la condition d'équilibre suivante :

$$\mathbf{D}(x) = \begin{bmatrix} N_s(x) \\ N_c(x) \\ M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{ns} \sigma_c^i A_c^i \\ \sum_{i=1}^{nc} \sigma_s^i A_s^i \\ \sum_{i=1}^{ns} \sigma_c^i A_c^i z_c^i + \sum_{i=1}^{nc} \sigma_s^i A_s^i z_s^i \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

où :

- $\sigma^i$  contrainte normale au centroïde de la fibre  $i$  ;
- $A^i$  aire de la fibre  $i$  ;
- $z^i$  coordonnée du centroïde de la fibre  $i$  ;
- $ns, nc$  nombre de fibres de la section du profilé et de la dalle, respectivement ;

En se basant sur l'hypothèse de Bernoulli, la déformation en un point de côte  $z^i$  se calcule à partir des déformations généralisées :

$$\varepsilon(x, z^i) = \varepsilon(x) + z^i \kappa(x) \quad (\text{I.2})$$

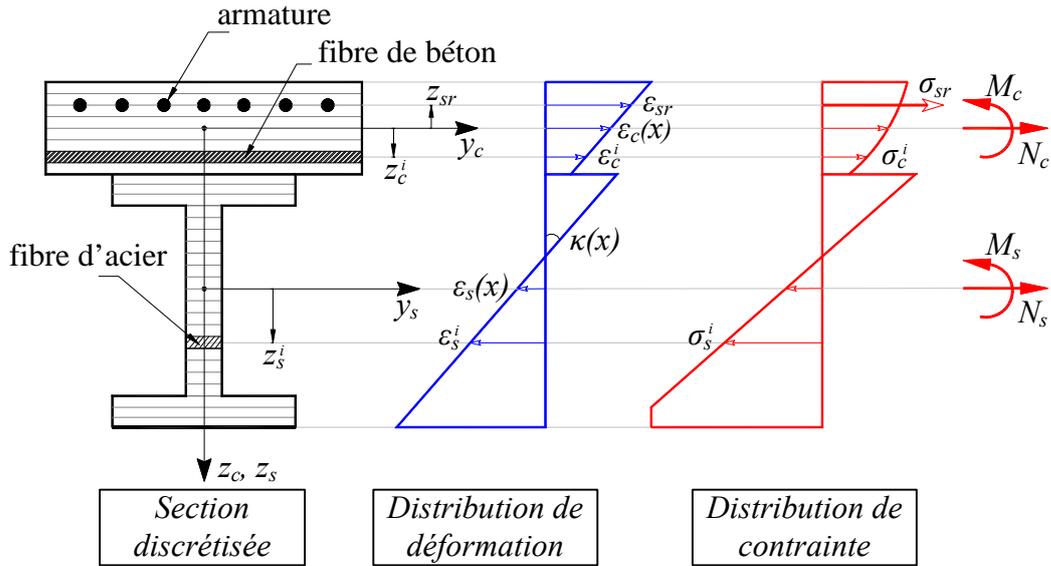


Figure I.1 – Modèle à fibres : discrétisation de section de poutre mixte

Le module de YOUNG tangent  $E(x, z^i)$  et la contrainte  $\sigma(x, z^i)$  au centroïde de la fibre  $i$  sont déterminés à partir de la déformation  $\varepsilon(x, z^i)$  et de la relation constitutive contrainte-déformation. En appliquant le principe des travaux virtuels, on obtient l'expression de la matrice de rigidité tangente de section  $\mathbf{k}(x)$  :

$$\mathbf{k}(x) = \begin{bmatrix} (EA)_s & 0 & (EB)_s \\ 0 & (EA)_c & (EB)_c \\ (EB)_s & (EB)_c & (EI) \end{bmatrix} \quad (I.3)$$

où :

$$\begin{aligned} (EA)_s &= \sum_{i=1}^{ns} E_s^i A_s^i \\ (EB)_s &= \sum_{i=1}^{ns} E_s^i A_s^i z_s^i \\ (EA)_c &= \sum_{i=1}^{nc} E_c^i A_c^i + E_{sr} A_{sr} \\ (EB)_c &= \sum_{i=1}^{nc} E_c^i A_c^i z_s^i + E_{sr} A_{sr} z_{sr} \end{aligned}$$

$$(EI) = \sum_{i=1}^{ns} E_s^i A_s^i (z_s^i)^2 + \sum_{i=1}^{nc} E_c^i A_c^i (z_c^i)^2 + E_{sr} A_{sr} (z_{sr})^2$$



## Annexe II

### Modèle de fluage et de retrait du code model CEB-FIP 1990

#### 1. Modèle de fluage

La fonction de fluage  $J(t, t_0)$  dépend de l'âge du béton au chargement  $t_0$  et de la durée d'application de ce chargement  $(t - t_0)$ . Elle considère également le vieillissement du matériau avec l'introduction du module de raideur  $E_c(t_0)$  en fonction de l'âge du béton  $t_0$ . La fonction de fluage s'exprime par :

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_c} \quad (\text{II.1})$$

avec

- $\varphi(t, t_0)$  : coefficient de fluage [sans unité]
- $E_c(t_0)$  : module de Young à l'âge  $t_0$  jours [MPa]
- $E_c$  : module d'Young à 28 jours [MPa]

Le coefficient de fluage  $\varphi(t, t_0)$  est évalué à l'aide de l'expression suivante :

$$\varphi(t, t_0) = \phi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t_0) \beta_c(t - t_0) \quad (\text{II.2})$$

où

$$\phi_{RH} = 1 + \frac{1 - \frac{RH}{100}}{0.46 \left( \frac{h_0}{100} \right)^{0.33}} \quad (\text{II.3})$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{5.3}{\left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.5}} \quad (\text{II.4})$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0.1 + (t_0)^{0.2}} \quad (\text{II.5})$$

$$\beta_c(t - t_0) = \left[ \frac{t - t_0}{\beta_H + (t - t_0)} \right]^{0.3} \quad (\text{II.6})$$

$$\beta_H = 150 \left[ 1 + \left( 1.2 \frac{RH}{100} \right)^{18} \right] \frac{h_0}{100} + 250 \leq 1500 \quad (\text{II.7})$$

avec

- $RH$  : l'humidité relative [%]
- $h_0 = 2A_c/u$  [mm]
- $A_c$  : aire de la poutre en béton considérée [mm<sup>2</sup>]
- $u$  : périmètre de la section de la poutre en béton en contact avec l'atmosphère [mm]
- $f_{cm} = f_{c28} + 8$  : résistance moyenne à la compression à 28 jours [MPa]
- $f_{c28}$  : résistance à la compression à 28 jours [MPa]

Le module de Young à 28 jours est donné par :

$$E_c = 10^4 \sqrt[3]{f_{cm}} \quad (\text{II.8})$$

Le module de Young à l'âge  $t_0$  jours est donné par :

$$E_c(t_0) = \sqrt{\beta_{cc}} E_c \quad (\text{II.9})$$

où

$$\beta_{cc} = \exp \left[ s \left( 1 - \frac{5.3}{\sqrt{t}} \right) \right] \quad (\text{II.10})$$

avec  $s = 0.25$  pour les ciments normaux et à prise rapide

## 2. Modèle de retrait

La déformation totale de retrait  $\varepsilon_{sh}(t, t_s)$ , recommandée par le code model CEB-FIP [1], est de la forme :

$$\varepsilon_{sh}(t, t_s) = \varepsilon_{cas}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s) \quad (\text{II.11})$$

avec

$$\varepsilon_{cas}(t) = \varepsilon_{caso}(f_{cm}) \beta_{as}(t) \quad (\text{II.12})$$

et

$$\varepsilon_{cds}(t, t_s) = \varepsilon_{cdso}(f_{cm}) \beta_{RH}(RH) \beta_{ds}(t - t_s) \quad (\text{II.13})$$

où :

$\varepsilon_{cas}(t)$  : retrait endogène à l'instant  $t$

$\varepsilon_{cds}(t, t_s)$  : retrait de dessiccation à l'instant  $t$

$\varepsilon_{caso}(f_{cm})$  : coefficient de retrait endogène, déterminé par

$$\varepsilon_{caso}(f_{cm}) = -10^{-6} \alpha_{as} \left( \frac{\frac{f_{cm}}{10}}{6 + \frac{f_{cm}}{10}} \right)^{2.5} \quad (\text{II.14})$$

avec  $\alpha_{as}$  un coefficient qui dépend du type de ciment :

$\alpha_{as} = 800$  pour les ciments à hydratation lente

$\alpha_{as} = 700$  pour les ciments à hydratation rapide

$\alpha_{as} = 600$  pour les ciments à hydratation rapide et haute résistance initiale

$\varepsilon_{cdso}(f_{cm})$  : coefficient de retrait de dessiccation, déterminé par

$$\varepsilon_{cdso}(f_{cm}) = 10^{-6} \left[ (220 + 110\alpha_{ds1}) \exp \left( -\alpha_{ds2} \frac{f_{cm}}{10} \right) \right] \quad (\text{II.15})$$

avec  $\alpha_{ds1}$  et  $\alpha_{ds2}$  sont les coefficients qui dépendent du type de ciment :

$\alpha_{ds1} = 3$  et  $\alpha_{ds2} = 0.13$  pour les ciments à hydratation lente

$\alpha_{ds1} = 4$  et  $\alpha_{ds2} = 0.11$  pour les ciments à hydratation rapide

$\alpha_{ds1} = 6$  et  $\alpha_{ds2} = 0.12$  pour les ciments à hydratation rapide et haute résistance initiale

$\beta_{as}(t)$  : fonction qui représente le développement du retrait endogène, déterminé par

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp \left( -0.2\sqrt{t} \right) \quad (\text{II.16})$$

$\beta_{RH}(RH)$  : coefficient qui prend en compte l'effet de l'humidité sur le retrait de dessiccation, déterminé par

$$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1.55 \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right] & \text{pour } RH < 99\% \beta_{s1} \\ 0.25 & \text{pour } RH \geq 99\% \beta_{s1} \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

avec

$$\beta_{s1} = \left( \frac{3.5}{f_{cm}/10} \right)^{0.1} \quad (\text{II.18})$$

$\beta_{ds}(t-t_s)$  : fonction qui représente le développement du retrait de dessiccation, déterminer par

$$\beta_{ds}(t-t_s) = \left[ \frac{t-t_s}{350 (h_0/100)^2 + (t-t_s)} \right]^{0.5} \quad (\text{II.19})$$

$t$  : âge du béton [jours]

$t_s$  : âge du béton au commencement du séchage [jours]

## Annexe III

### Détermination de la fonction de relaxation

$$J(t, t_1)R(t_1, t_1) + \int_{t_1}^t J(t, \tau) dR(\tau, t_1) = 1 \quad (\text{III.1})$$

Pour résoudre cette équation, nous pouvons la discrétiser en utilisant le schéma trapézoïdal. En subdivisant l'intervalle de temps  $[t_1; t]$  en temps discrète  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n$  avec  $n \geq 2$  et en notant  $J_{n,i} = J(t_n, t_i)$  et  $R_{i,1} = R(t_i, t_1)$ , l'équation (III.1) devient :

$$J_{n,i}R_{1,1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{J_{n,i+1} + J_{n,i}}{2} (R_{i+1,1} - R_{i,1}) = 1 \quad (\text{III.2})$$

Après arrangements et simplifications, nous obtenons :

$$R_{n,1} = \frac{2 + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta J_{n,i} R_{i,1}}{J_{n,n} + J_{n,n-1}} \quad (\text{III.3})$$

où  $\Delta J_{n,i}$  est déterminé par :

$$\Delta J_{n,i} = \begin{cases} J_{n,2} - J_{n,1} & \text{if } i = 1 \\ J_{n,i+1} - J_{n,i-1} & \text{if } i > 1 \end{cases} \quad (\text{III.4})$$



## Annexe IV

### Détail des paramètres du paragraphe 3.4

Les paramètres de la solution semi-analytique (paragraphe 3.4) sont détaillés ci-après :

$$\zeta_1^{(n)} = \frac{\left( H\overline{EA}_c^{(n)} - \overline{EB}_c^{(n)} \right) p_z k_{sc}}{\left( \overline{EA}_c^{(n)} - \left( \overline{EB}_c^{(n)} \right)^2 \right) (EA)_s \overline{EI}} \quad (\text{IV.1})$$

$$\zeta_2^{(n)} = \frac{\zeta_1^{(n)}}{p_z} \quad (\text{IV.2})$$

$$\zeta_3^{(n)} = \frac{\left( \overline{EI}^{(n)} - H\overline{EB}_c^{(n)} \right) p_z k_{sc}}{\left( \overline{EA}_c^{(n)} - \left( \overline{EB}_c^{(n)} \right)^2 \right) (EA)_s \overline{EI}} \quad (\text{IV.3})$$

$$\zeta_4^{(n)} = \frac{\overline{EA}_c^{(n)} (EA)_s}{k_{sc} \left( H\overline{EA}_c^{(n)} - \overline{EB}_c^{(n)} \right)} \quad (\text{IV.4})$$

$$\zeta_5^{(n)} = \frac{\overline{EA}_c^{(n)} + (EA)_s}{H\overline{EA}_c^{(n)} - \overline{EB}_c^{(n)}} \quad (\text{IV.5})$$

$$\zeta_6^{(n)} = \frac{-1}{H\overline{EA}_c^{(n)} - \overline{EB}_c^{(n)}} \quad (\text{IV.6})$$

$$\zeta_7^{(n)} = -\frac{\zeta_1^{(n)} + 2\lambda_4^{(n)} (\zeta_2^{(n)} + \zeta_3^{(n)})}{6\mu_2^2} \quad (\text{IV.7})$$

$$\zeta_8^{(n)} = \frac{3\zeta_5^{(n)} \zeta_7^{(n)} + \zeta_6^{(n)} \lambda_1^{(n)}}{12} \quad (\text{IV.8})$$

$$\zeta_9^{(n)} = \frac{\zeta_6^{(n)} \lambda_2^{(n)}}{3} \quad (\text{IV.9})$$

$$\lambda_{1..6}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \alpha_{1..6}^{(n)} \quad (\text{IV.10})$$

$$\eta_{1..4}^{n,i} = \sum_{j=i}^{n-1} \Psi_{n,j} \beta_{1..4}^{(i,j)} \quad (\text{IV.11})$$

$$a_s^{(n,i)} = \frac{\zeta_2^{(n)} \eta_3^{(n,i)} + \zeta_3^{(n)} \eta_2^{(n,i)}}{\mu_i(\mu_i^2 - \mu_n^2)} \quad (\text{IV.12})$$

$$b_s^{(n,i)} = \frac{\zeta_2^{(n)} \eta_4^{(n,i)} + \zeta_3^{(n)} \eta_1^{(n,i)}}{\mu_i(\mu_i^2 - \mu_n^2)} \quad (\text{IV.13})$$

$$a_v^{(n,i)} = \frac{(\zeta_4^{(n)} \mu_i^2 + \zeta_5^{(n)}) \mu_i b_s^{(n,i)} + \zeta_6^{(n)} \eta_1^{(n,i)}}{\mu_i^2} \quad (\text{IV.14})$$

$$b_s^{(n,i)} = \frac{\zeta_2^{(n)} \eta_4^{(n,i)} + \zeta_3^{(n)} \eta_1^{(n,i)}}{\mu_i(\mu_i^2 - \mu_n^2)} \quad (\text{IV.15})$$

$$b_v^{(n,i)} = \frac{(\zeta_4^{(n)} \mu_i^2 + \zeta_5^{(n)}) \mu_i a_s^{(n,i)} + \zeta_6^{(n)} \eta_2^{(n,i)}}{\mu_i^2} \quad (\text{IV.16})$$

$$a_c^{(n,i)} = \left(1 - \frac{(EA)_s}{k_{sc}} \mu_i^2\right) a_v^{(n,i)} + H \mu_i b_v^{(n,i)} \quad (\text{IV.17})$$

$$b_c^{(n,i)} = \left(1 - \frac{(EA)_s}{k_{sc}} \mu_i^2\right) b_v^{(n,i)} + H \mu_i a_v^{(n,i)} \quad (\text{IV.18})$$

$$a_\theta^{(n,i)} = -\mu_i b_v^{(n,i)} \quad (\text{IV.19})$$

$$b_\theta^{(n,i)} = -\mu_i a_v^{(n,i)} \quad (\text{IV.20})$$

$$a_{N_c}^{(n,i)} = \overline{EA}_c^{(n)} \mu_i b_c^{(n,i)} - \overline{EB}_c^{(n)} \mu_i^2 a_c^{(n,i)} + \eta_1^{(n,i)} \quad (\text{IV.21})$$

$$b_{N_c}^{(n,i)} = \overline{EA}_c^{(n)} \mu_i a_c^{(n,i)} - \overline{EB}_c^{(n)} \mu_i^2 b_c^{(n,i)} + \eta_2^{(n,i)} \quad (\text{IV.22})$$

$$a_{N_s}^{(n,i)} = (EA)_s \mu_i b_s^{(n,i)} \quad (\text{IV.23})$$

$$b_{N_s}^{(n,i)} = (EA)_s \mu_i a_s^{(n,i)} \quad (\text{IV.24})$$

$$a_M^{(n,i)} = \overline{EB}_c^{(n)} \mu_i b_c^{(n,i)} - \overline{EI}^{(n)} \mu_i^2 a_c^{(n,i)} + \eta_3^{(n,i)} \quad (\text{IV.25})$$

$$b_M^{(n,i)} = \overline{EB}_c^{(n)} \mu_i a_c^{(n,i)} - \overline{EI}^{(n)} \mu_i^2 b_c^{(n,i)} + \eta_4^{(n,i)} \quad (\text{IV.26})$$

$$a_T^{(n,i)} = \mu_i (b_M^{(n,i)} + H b_{N_s}^{(n,i)}) \quad (\text{IV.27})$$

$$b_T^{(n,i)} = \mu_i (a_M^{(n,i)} + H a_{N_s}^{(n,i)}) \quad (\text{IV.28})$$

$$\mathbf{X}_c^{(n)} = \mathbf{X}_s^{(n)} - \frac{(EA)_s}{k_{sc}} \partial_x^{(2)} \mathbf{X}_s^{(n)} + H \partial_x \mathbf{X}_v^{(n)} \quad (\text{IV.29})$$

$$\mathbf{X}_\theta^{(n)} = -\partial_x \mathbf{X}_c^{(n)} \quad (\text{IV.30})$$

$$\mathbf{Y}_{N_c}^{(n)} = \overline{EA}_c^{(n)} \partial_x \mathbf{X}_c^{(n)} - \overline{EB}_c^{(n)} \partial_x^{(2)} \mathbf{X}_c^{(n)} \quad (\text{IV.31})$$

$$\mathbf{Y}_{N_s}^{(n)} = EA_s \partial_x \mathbf{X}_s^{(n)} \quad (\text{IV.32})$$

$$\mathbf{Y}_M^{(n)} = \overline{EB}_c^{(n)} \partial_x \mathbf{X}_c^{(n)} - \overline{EI}^{(n)} \partial_x^{(2)} \mathbf{X}_v^{(n)} \quad (\text{IV.33})$$

$$\mathbf{Y}_T^{(n)} = \partial_x \mathbf{Y}_M^{(n)} + H \partial_x \mathbf{Y}_{N_s}^{(n)} \quad (\text{IV.34})$$

$$\mathbf{Z}_c^{(n)} = \mathbf{Z}_s^{(n)} - \frac{(EA)_s}{k_{sc}} \partial_x^{(2)} \mathbf{Z}_s^{(n)} + H \partial_x \mathbf{Z}_v^{(n)} \quad (\text{IV.35})$$

$$\mathbf{Z}_\theta^{(n)} = -\partial_x \mathbf{Z}_c^{(n)} \quad (\text{IV.36})$$

$$\mathbf{R}_{N_s}^{(n)} = EA_s \partial_x \mathbf{Z}_s^{(n)} \quad (\text{IV.37})$$

$$\mathbf{R}_T^{(n)} = \partial_x \mathbf{R}_M^{(n)} + H \partial_x \mathbf{R}_{N_s}^{(n)} \quad (\text{IV.38})$$

$$\mathbf{R}_{N_c}^{(n)} = \overline{EA}_c^{(n)} \partial_x \mathbf{Z}_v^{(n)} - \overline{EB}_c^{(n)} \partial_x^{(2)} \mathbf{Z}_v^{(n)} + \lambda_1^{(n)} x^2 + \lambda_2^{(n)} x + \lambda_3^{(n)} - E_c^{(n)} A_c \varepsilon_{sh}^{(n)} \quad (\text{IV.39})$$

$$\mathbf{R}_M^{(n)} = \overline{EB}_c^{(n)} \partial_x \mathbf{Z}_c^{(n)} - \overline{EI}^{(n)} \partial_x^{(2)} \mathbf{Z}_v^{(n)} + \lambda_4^{(n)} x^2 + \lambda_5^{(n)} x + \lambda_6^{(n)} - E_c^{(n)} B_c \varepsilon_{sh}^{(n)} \quad (\text{IV.40})$$



## Annexe V

### Expressions des coefficients dans le paragraphe 4.6.1

#### 1. Déterminations de $\xi_1$ , $\xi_2$ , $\xi_3$ et $\xi_4$

$\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  et  $\xi_4$  sont déterminés par :

$$\xi_1 = \frac{b^2 (1 + \zeta)^2}{4D^2 (D - b)^2} \quad (\text{V.1})$$

$$\xi_2 = \frac{(bc - abd - 2cd) (1 + \zeta)}{2D^2 (D - b)^2} \quad (\text{V.2})$$

$$\xi_3 = \frac{ad + c}{2D^2 (D - b)^2} \quad (\text{V.3})$$

$$\xi_4 = \frac{(b - 2d) (1 + \zeta)}{2D^2 (D - b)^2} \quad (\text{V.4})$$

où

$$\begin{aligned} a &= \frac{E_{ci} \varepsilon_{c1}}{E_{c1}} & b &= \frac{\varepsilon_{c1}}{f_{cm}} \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \\ c &= \frac{\varepsilon_{c1}^2}{f_{cm}} & D &= \frac{1}{E_c} \end{aligned}$$

#### 2. Détermination de $\varepsilon_{cy}$

La déformation  $\varepsilon_{cy}$  est celle qui correspond à la contrainte  $\sigma = -f_{cm}/3$  et elle correspond à la racine de l'équation :

$$-\frac{f_{cm}}{3} = \frac{\varepsilon^2 - a\varepsilon}{b\varepsilon + c} \quad (\text{V.5})$$

En résolvant cette équation nous trouvons :

$$\varepsilon_{cy} = \frac{3a - bf_{cm} + \sqrt{9a^2 - 6abf_{cm} + b^2f_{cm}^2 - 12cf_{cm}}}{6} \quad (\text{V.6})$$

### 3. Détermination de $\beta_{i=1..2}$ , $\eta_{i=0..2}$ , $\mu_{i=0..3}$

Les coefficients  $\beta_{i=1..2}$ ,  $\eta_{i=0..2}$ ,  $\mu_{i=0..3}$  sont donnés par :

$$\beta_1 = \frac{2(1+\zeta)}{3D} \quad \beta_2 = \frac{e}{3Dk} \quad (V.7)$$

$$\eta_0 = \frac{4e^2}{9D^2k^2} \quad \eta_1 = \frac{4e(1+\zeta)}{9D^2k} \quad \eta_2 = \frac{4(1+\zeta)^2}{9D^2} \quad (V.8)$$

$$\mu_0 = \frac{8e^3}{27D^3k^3} + \frac{4}{D^2k} \quad \mu_1 = \frac{4e^2(1+\zeta)}{9D^3k^2} \quad \mu_2 = -\frac{4e(1+\zeta)^2}{9D^3k} \quad (V.9)$$

$$\mu_3 = -\frac{8(1+\zeta)^3}{27D^3} \quad (V.10)$$

où

$$k = \frac{1}{f_{cm}} \left( \frac{\xi}{\varepsilon_{c,lim}\varepsilon_{c1}} - \frac{2}{\varepsilon_{c,lim}^2} \right) \quad (V.11)$$

$$e = \frac{1}{f_{cm}} \left( \frac{4}{\varepsilon_{c,lim}} - \frac{\xi}{\varepsilon_{c1}} \right) \quad (V.12)$$

## Annexe VI

### Intégration numérique par points de Gauss - Lobatto

On remarque que d'une manière générale pour obtenir la matrice de rigidité de section où de l'élément, il est nécessaire d'intégrer des fonctions quelconques qui n'ont pas a priori de primitives explicites. Par conséquent, l'intégration numérique est indispensable. Dans cet étude, pour calculer numériquement l'intégrale d'une fonction d'une variable, on utilise la formule de quadrature de GAUSS-LOBATTO [126]. Dans les modèles de plasticité croissante (spread plasticity) ceux que nous développons dans cette thèse, cette formule est plus précise que la méthode d'intégration classique de Gauss car elle inclut les points au bord du domaine d'intégration. Lorsqu'il n'y a pas de charge répartie agissant sur l'élément, les sections extrémités sont soumises aux efforts les plus élevés où se développe la plasticité et deviennent les section les plus inélastiques. Le contrôle des sections extrémités donne donc une réponse non-linéaire de la poutre plus précise.

Soit l'intégration suivante :

$$I = \int_0^1 f(x)dx \quad (\text{VI.1})$$

L'idée générale est d'approcher la fonction  $f$  par un polynôme que l'on saura parfaitement intégrer par la suite. Supposons tout d'abord que l'on a  $n$  points  $x_i$  dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ , et utilisons par exemple une interpolation de Lagrange  $\mathcal{L}_i$ , l'intégration (VI.1) peut être approchée par :

$$I = \int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n f(x_i) \mathcal{L}_i(x) \right) dx \approx w_1 f(0) + \sum_{i=2}^{n-1} w_i f(x_i) + w_n f(1) \quad (\text{VI.2})$$

où les  $w_i$  représentent les poids d'intégrations, définis par :

$$w_i = \int_0^1 \mathcal{L}_i(x) dx \quad (\text{VI.3})$$

L'idée de la méthode de GAUSS-LOBATTO est de chercher les positions de points  $x_{i=2..n-1}$ , pour un nombre de points  $n$  donnés, de manière d'obtenir la précision maximale. Il est facile de voir qu'à  $n$  points de définition correspondent  $2n - 2$  inconnues ( $x_i$  et  $w_i$ ) et que,

par conséquence, on peut former et intégrer exactement un polynôme de degré  $2n - 3$ . L'erreur est donc de l'ordre de  $0(\Delta)^{2n}$ , où  $\Delta$  est l'espacement de points [126]. Dans notre propre programme, toutes les intégrations sont numériquement approchées par cinq points de GAUSS-LOBATTO dont les positions et les poids correspondant sont détaillés comme suivants :

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0 & w_1 = \frac{1}{20} \\
 x_2 = \frac{7 - \sqrt{21}}{14} & w_2 = \frac{49}{180} \\
 x_3 = \frac{1}{2} & w_3 = \frac{16}{45} \\
 x_4 = \frac{7 + \sqrt{21}}{14} & w_4 = \frac{49}{180} \\
 x_5 = 1 & w_5 = \frac{1}{20}
 \end{array}$$

## Annexe VII

### Détermination des constantes de la série de Dirichlet

La fonction de fluage qui s'exprime à l'aide d'une série de DIRICHLET

$$J(t, \tau) \approx \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{D_i(\tau)} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_i}\right) \right] \quad (\text{VII.1})$$

est complètement définie si les constantes  $m$ ,  $D_i(\tau)$  et  $\tau_i$  sont déterminées. Les constantes  $m$ ,  $D_i(\tau)$  et  $\tau_i$  sont évaluées de sorte que la courbe donnée par l'expression analytique VII.1 soit la plus proche possible de celle du CEB-FIP MODEL CODE 1990 [1]. La détermination de ces constantes est réalisée selon la procédure suivante :

1. Choisir les valeurs de  $m$  et de  $\tau_i$ ,  $i = 1..m$ .
2. Choisir plusieurs bornes de temps  $t_j$ ,  $j = 1..n$  de sorte que  $t_j > \tau$ .
3. Calculer la valeur de la fonction fluage  $\bar{J}(t_j, \tau)$  à partir de l'expression dans le CEB-FIP MODEL CODE 1990.
4. Imposer à chaque borne  $t_j$  l'égalité entre la série de DIRICHLET et  $J(t_j, \tau)$ .

$$\bar{J}(t_j, \tau) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{D_i(\tau)} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_j - \tau}{\tau_i}\right) \right] \quad (\text{VII.2})$$

Cela conduit au système des équations suivantes :

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{B} \quad (\text{VII.3})$$

où :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_1 - \tau}{\tau_1}\right)\right) & \dots & \left(1 - \exp\left(-\frac{t_1 - \tau}{\tau_m}\right)\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \left(1 - \exp\left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_1}\right)\right) & \dots & \left(1 - \exp\left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_m}\right)\right) \end{bmatrix} \quad (\text{VII.4})$$

$$\mathbf{x} = \left[ \frac{1}{D_1(\tau)} \quad \dots \quad \frac{1}{D_m(\tau)} \right]^T \quad (\text{VII.5})$$

$$\mathbf{B} = \left[ \bar{J}(t_1, \tau) - \frac{1}{E_0} \quad \dots \quad \bar{J}(t_n, \tau) - \frac{1}{E_0} \right]^T \quad (\text{VII.6})$$

L'équation (VII.3) est résolue pour  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \mathbf{B} \quad (\text{VII.7})$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{B}) \quad (\text{VII.8})$$

5. Choisir d'autres valeurs de  $m$  et de  $\tau_i$ ,  $i = 1..m$  et répéter les étapes de 1 à 4 jusqu'à ce que l'écart sur  $\mathbf{x}$  soitt minimisé.
6. Répéter les étapes de 1 à 5 pour plusieurs valeurs de  $\tau$  afin de déterminer les  $D_i(\tau)$  correspondants. La valeur  $D_i(\tau)$  à un âge quelconque peut être déterminée en utilisant une interpolation linéaire.

Il est à noter que dans ce travail, nous avons fixé  $m = 6$  et les temps de retards  $\tau_i$  sont choisis comme :

$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$	$\tau_6$	
1	10	100	1000	10000	36500	(VII.9)

## Annexe VIII

### Méthode de résolution numérique *arc-length* cylindrique

Le traitement par la méthode des éléments finis d'un problème mécanique conduit d'une façon générale à la résolution d'un système des équations algébriques de la forme suivante :

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}, \lambda) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (\text{VIII.1})$$

où :

- $\mathbf{R}$  est le vecteur résidu qui exprime l'état de déséquilibre de la structure ;
- $\mathbf{Q}$  est le vecteur des efforts internes aux noeuds de la structures qui est fonction des déplacements nodaux  $\mathbf{q}$  ;
- $\mathbf{P}$  représente le vecteur de chargement total appliqué à la structure ;
- le scalaire  $\lambda$  désigne un paramètre de contrôle du chargement.

L'idée de la méthode *arc-length* est que la taille de la combinaison de l'incrément de déplacement et l'incrément de chargement  $(\Delta \mathbf{q}, \Delta \mathbf{P})$  doit être contrôlée au cours des itérations de l'équilibre. Cette méthode consiste à trouver la solution de l'équation équilibre (VIII.1) située à une longueur d'arc  $\Delta l$  du dernier point convergé. CRISFIELD (1983) [51] a proposé pour  $\Delta l$  l'expression suivante :

$$(\Delta l)^2 = \Delta \mathbf{q}^T \Delta \mathbf{q} + (\Delta \lambda)^2 \psi^2 \mathbf{P}_{\text{ext}}^T \mathbf{P}_{\text{ext}} \quad (\text{VIII.2})$$

où  $\psi$  est un facteur de graduation scalaire. Pour la méthode *arc-length* cylindrique  $\psi$  est égale à zéro. Ainsi l'équation (VIII.2) devient :

$$(\Delta l)^2 = \Delta \mathbf{q}^T \Delta \mathbf{q} \quad (\text{VIII.3})$$

Par rapport à la méthode classique de NEWTON où  $\lambda$  est connu, la méthode *arc-length* en générale et la méthode *arc-length* cylindrique en particulier considère  $\lambda$  comme une variable inconnue. En conséquence, avec  $n$  déplacements inconnus, on a totale  $n+1$  variables. Pour déterminer ces variables, on a  $n$  équations d'équilibre (VIII.1) et une équation sup-

plémentaire (VIII.3). En tenant compte du fait que  $\lambda$  est une variable, un prédicteur et un correcteur peut être réalisé de la même manière que la méthode classique de NEWTON.

★ **Le prédicteur**

La figure VIII.1 présente la procédure de la méthode *arc-length* pour un seul degré de liberté. Supposons que le point  $A(\mathbf{q}_n, \lambda_n \mathbf{P}_{\text{ext}})$  est un point convergé :

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}(\mathbf{q}_n, \lambda_n \mathbf{P}) = \mathbf{0} \tag{VIII.4}$$

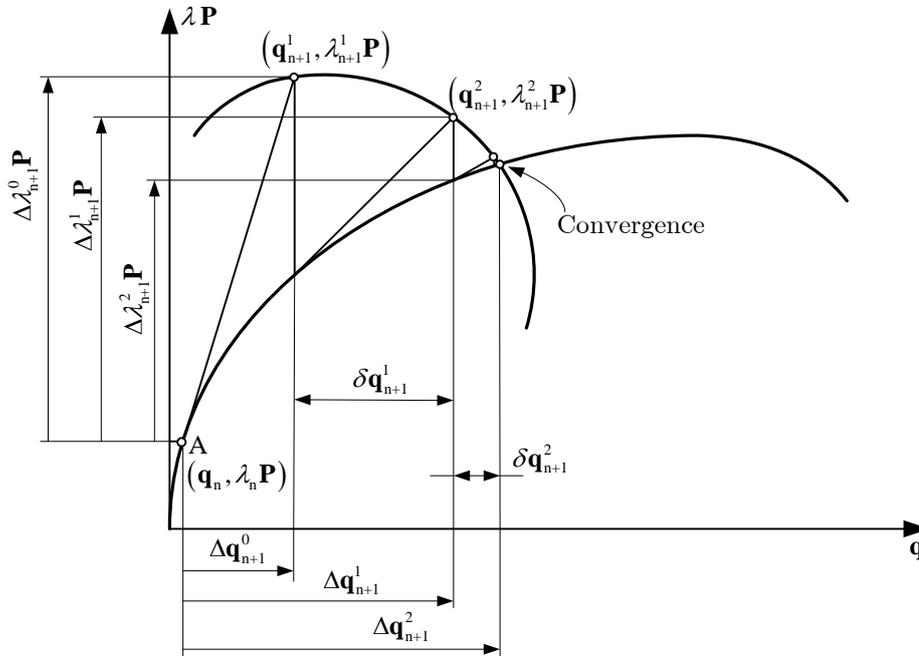


Figure VIII.1 – Méthode *arc-length* pour un seul degré de liberté

En développant, en série de TAYLOR à l'ordre 1, le vecteur des efforts internes et le vecteur de la charge extérieure on obtient :

$$\mathbf{Q}_{n+1} \simeq \mathbf{Q}_n + \mathbf{K}_{T,n} \Delta \mathbf{q} \tag{VIII.5}$$

$$\lambda_{n+1} \mathbf{P} \simeq \lambda_n \mathbf{P} + \Delta \lambda \mathbf{P} \tag{VIII.6}$$

où

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n \quad \text{et} \quad \Delta \lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n \quad (\text{VIII.7})$$

Le vecteur résidu au stade  $n + 1$  est ainsi écrit :

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{Q}_n + \mathbf{K}_{T,n} \Delta \mathbf{q} - \lambda_n \mathbf{P} - \Delta \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (\text{VIII.8})$$

d'où :

$$\Delta \mathbf{q} = \Delta \lambda [\mathbf{K}_{T,n}]^{-1} \mathbf{P} = \Delta \lambda \Delta \hat{\mathbf{q}} \quad (\text{VIII.9})$$

où  $\Delta \hat{\mathbf{q}}$  est le vecteur des déplacements correspondant à le vecteur de charge extérieure  $\mathbf{P}$ . En substituant l'équation (VIII.9) dans l'équation (VIII.3), on obtient :

$$\Delta \lambda = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\Delta \hat{\mathbf{q}}^T \Delta \hat{\mathbf{q}}}} \quad (\text{VIII.10})$$

où  $\Delta l$  est un incrément donné de longueur d'arc. L'équation (VIII.10) indique qu'il y a deux prédicteurs possibles. Selon CRISHFIELD [52] le signe plus dans l'équation (VIII.10) est pris si la matrice tangente est définie positive et le signe moins est pris dans le cas contraire. Après avoir appliqué le prédicteur, on met à jours des variables (avec les notations indiquée à la figure VIII.1) :

$$\mathbf{q}_{n+1}^1 = \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n^0 \quad (\text{VIII.11})$$

$$\lambda_{n+1}^1 = \lambda_n + \Delta \lambda_{n+1}^0 \quad (\text{VIII.12})$$

#### ★ Le correcteur

Comme indiquée à la figure VIII.1, au stade  $(\mathbf{q}_{n+1}^1, \lambda_{n+1}^1)$ , la structure n'est clairement pas en équilibre. Un correcteur doit être appliqué. Le développement en série de TAYLOR est encore une fois utilisé :

$$\mathbf{Q}_{n+1}^{i+1} \simeq \mathbf{Q}_{n+1}^i + \mathbf{K}_{T,n+1}^i \delta \mathbf{q}_{n+1}^i \quad (\text{VIII.13})$$

$$\lambda_{n+1}^{i+1} \mathbf{P} \simeq \lambda_{n+1}^i \mathbf{P} + \delta \lambda_{n+1}^i \mathbf{P} \quad (\text{VIII.14})$$

où

$$\delta \mathbf{q}_{n+1}^i = \mathbf{q}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{q}_{n+1}^i \quad \text{et} \quad \delta \lambda_{n+1}^i = \lambda_{n+1}^{i+1} - \lambda_{n+1}^i \quad (\text{VIII.15})$$

Le vecteur résidu est donc :

$$\mathbf{R}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{K}_{T,n}^i \delta \mathbf{q}_{n+1}^i + \mathbf{R}_{n+1}^i - \delta \lambda_{n+1}^i \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (\text{VIII.16})$$

En résolvant cette équation pour  $\delta \mathbf{q}_{n+1}^i$ , on obtient :

$$\delta \mathbf{q}_{n+1}^i = - [\mathbf{K}_{T,n}^i]^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^i + \delta \lambda_{n+1}^i [\mathbf{K}_{T,n}^i]^{-1} \mathbf{P} \quad (\text{VIII.17})$$

$$= \delta \bar{\mathbf{q}}_{n+1}^i + \delta \lambda_{n+1}^i \delta \widehat{\mathbf{q}}_{n+1}^i \quad (\text{VIII.18})$$

où  $\delta \bar{\mathbf{q}}_{n+1}^i = - [\mathbf{K}_{T,n}^i]^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^i$  et  $\delta \widehat{\mathbf{q}}_{n+1}^i = [\mathbf{K}_{T,n}^i]^{-1} \mathbf{P}$  désigne le vecteur des déplacements correspondant au vecteur de charge extérieure  $\mathbf{P}$ . Ayant obtenu  $\delta \mathbf{q}_{n+1}^i$ , la mis à jours suivante peut être réalisée :

$$\Delta \mathbf{q}_{n+1}^i = \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{i-1} + \delta \bar{\mathbf{q}}_{n+1}^i + \delta \lambda_{n+1}^i \delta \widehat{\mathbf{q}}_{n+1}^i \quad (\text{VIII.19})$$

En itroduisant l'équation (VIII.19) dans l'équation (VIII.3). On obtient une équation du second degré en  $\delta \lambda_{n+1}^i$  suivante :

$$a_1 (\delta \lambda_{n+1}^i)^2 + a_2 \delta \lambda_{n+1}^i + a_3 = 0 \quad (\text{VIII.20})$$

où les coefficients sont donnés par :

$$a_1 = (\delta \widehat{\mathbf{q}}_{n+1}^i)^T \delta \widehat{\mathbf{q}}_{n+1}^i \quad (\text{VIII.21})$$

$$a_2 = 2 \delta \widehat{\mathbf{q}}_{n+1}^i (\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{i-1} - \delta \bar{\mathbf{q}}_{n+1}^i) \quad (\text{VIII.22})$$

$$a_3 = (\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{i-1} + \delta \bar{\mathbf{q}}_{n+1}^i)^T (\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{i-1} + \delta \bar{\mathbf{q}}_{n+1}^i) \quad (\text{VIII.23})$$

La résolution de l'équation (VIII.20) nous conduit à faire un choix entre deux racines. Le choix des racines se fait de la manière suivante : le vecteur incrément de déplacements obtenu par la racine choisie est le plus proche du vecteur incrément de déplacements de l'itération précédente (afin d'éviter le retour du chemin d'équilibre parcouru) (cf. figure

VIII.2). Pour cela, on cherche l'angle minimal entre le vecteur incrément de déplacements de l'itération précédente et le vecteur incrément de déplacements de l'itération actuelle :

$$\cos \theta_j = \frac{(\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{i-1})^T \Delta \mathbf{q}_{n+1}^i |_j}{\|\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{i-1}\| \|\Delta \mathbf{q}_{n+1}^i |_j\|}, \quad j = 1, 2 \quad (\text{VIII.24})$$

où  $\Delta \mathbf{q}_{n+1}^i |_j$  est l'incrément du vecteur de déplacements pour le racine  $\delta \lambda_{n+1}^i |_j$ . La racine choisie doit donner la valeur maximale de  $\cos \theta$ .

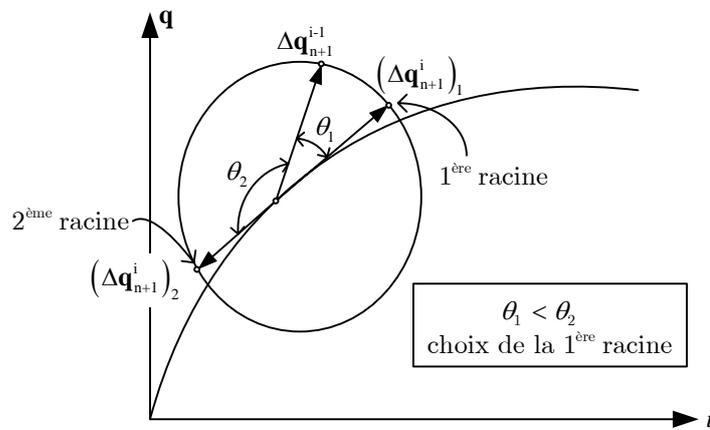


Figure VIII.2 – Choix de la solution évitant le retour sur le chemin d'équilibre parcouru

Une fois,  $\delta \lambda_{n+1}^i$  est choisi, l'incrément du paramètre de contrôle du chargement peut être actualisé :

$$\Delta \lambda_{n+1}^i = \Delta \lambda_{n+1}^{i-1} + \delta \lambda_{n+1}^i \quad (\text{VIII.25})$$

Enfin, le vecteur de déplacements et le paramètre de contrôle du chargement sont mis à jours :

$$\mathbf{q}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{q}_n^i + \Delta \mathbf{q}_n^i \quad (\text{VIII.26})$$

$$\lambda_{n+1}^{i+1} = \lambda_n^i + \Delta \lambda_{n+1}^i \quad (\text{VIII.27})$$

