HAL
open science

Éléments finis stochastiques étendus pour le calcul de structures à géométrie aléatoire : application à la prise en compte de la corrosion de structures en région littorale

Alexandre Clément

▶ **To cite this version:**

Alexandre Clément. Éléments finis stochastiques étendus pour le calcul de structures à géométrie aléatoire : application à la prise en compte de la corrosion de structures en région littorale. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Nantes, 2008. Français. NNT : . tel-01321443

HAL Id: tel-01321443

https://hal.science/tel-01321443

Submitted on 25 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES
UFR SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
« SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR, GÉOSCIENCES, ARCHITECTURE »

Année 2008

N° attribué par la bibliothèque

Éléments finis stochastiques étendus pour le calcul de structures à géométrie aléatoire : application à la prise en compte de la corrosion de structures en région littorale

THÈSE DE DOCTORAT
Discipline : Sciences de l'Ingénieur
Spécialité : Mécanique des solides, des matériaux, des structures et des surfaces

Présentée
et soutenue publiquement par

Alexandre CLEMENT

Le 5 décembre 2008, devant le jury ci-dessous

Président	M. JEZEQUEL Louis	Professeur, Ecole Centrale Lyon
Rapporteurs	M. BOUCARD Pierre-Alain	Professeur, LMT, Cachan
	M. BLANZÉ Claude	Professeur, CNAM, Paris
Examinateurs	M. SUDRET Bruno	Docteur, HDR, PHIMECA, Paris
	M. MOËS Nicolas,	Professeur, GeM, Ecole Centrale Nantes
	M. SCHOEFS Franck	Maître de Conférences, HDR, GeM, univ. Nantes
	M. NOUY Anthony	Maître de Conférences, GeM, univ. Nantes

Directeur de thèse : Franck SCHOEFS

Co-encadrant : Anthony NOUY

ED : ……
(Uniquement pour STIM et MTGC)

ECOLE DOCTORALE						
MÉCANIQUE, THERMIQUE ET GÉNIE CIVIL						
ED 0367						
LISTE DES DIRECTEURS DE RECHERCHE						
AMBIANCES ARCHITECTURALES ET URBAINES						
Michel	BERENGIER	HDR	DR LCPC	LCPC	Division Exploitation Entretien Acoustique Routière	
Gérard	HEGRON		PR	Ecole Architecture Nantes	CERMA Nantes	UMR 1563
Jean-Pierre	PENEAU		PR émérite		CERMA Nantes	UMR 1563
DYNAMIQUE DES FLUIDES ET DES TRANSFERTS						
Bertrand	ALESSANDRINI	HDR	IR	Ecole Centrale de Nantes	L. M. F.	UMR 6598
Jacques	ASTOLFI	HDR	MC	Ecole Navale de Brest	IRENAV Brest	EA 3634
Jean-Yves	BILLARD		PR	Ecole Navale de Brest	IRENAV Brest	EA 3634
Alain	CLEMENT	HDR	IR	Ecole Centrale de Nantes	L. M. F.	UMR 6598
Gérard	DELHOMMEAU	DE	IR	Ecole Centrale de Nantes	L. M. F.	UMR 6598
Henda	DJERIDI	HDR	MC	Ecole Navale de Brest	IRENAV Brest	EA 3634
Pierre	FERRANT	HDR	MC	Ecole Centrale de Nantes	L. M. F.	UMR 6598
Jean-François	HETET		PR	Ecole Centrale de Nantes	L. M. F.	UMR 6598
Dominique	MARICHAL		PR	Ecole Centrale de Nantes		
Patrice	MESTAYER		DR CNRS	Ecole Centrale de Nantes	L. M. F.	UMR 6598
Jean	PIQUET		PR	Ecole Centrale de Nantes	L. M. F.	UMR 6598
Jean-Michel	ROSANT	DE	CR CNRS	Ecole Centrale de Nantes	L. M. F.	UMR 6598
Jean-François	SINI		PR	Ecole Centrale de Nantes	L. M. F.	UMR 6598
Michel	VISONNEAU		DR CNRS	Ecole Centrale de Nantes	L. M. F.	UMR 6598
GENIE CIVIL						
Alain	ALEXIS		PR	IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GeM	UMR 6183
Guy	BASTIAN		PR émérite	IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GeM	UMR 6183
Pierre	CHAMBON	HDR	MC	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	GeM	UMR 6183
Francis	DE LARRARD	HDR	Pr. Ag.	LCPC	Division Technologies du GC et de l'Environnement	
Jacques	GARNIER	HDR	DR LCPC	LCPC	Division Reconnaissance et Mécanique des Sols	
Pierre-Yves	HICHER		PR	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Agnès	JULLIEN	HDR	DR LCPC	LCPC	Division Technologies du GC et de l'Environnement	

Abdelhafid	KHELIDJ		PR	IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GeM	UMR 6183
Van Anh	LE		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	GeM	UMR 6183
Ahmed	LOUKILI	HDR	MC	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Gilles	PIJAUDIER-CABOT		PR	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Abdul-Hamid	SOUBRA		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	GeM	UMR 6183
Philippe	TAMAGNY	HDR	DR LCPC	LCPC	Division Mécanique et Structure des Chaussées	
Pierre	THOMAS		PR	IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GeM	UMR 6183
Christian	WIELGOSZ		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	GeM	UMR 6183
GEOSCIENCES						
Odile	ABRAHAM	HDR	IDTPE	LCPC	Division Reconnaissance et Mécanique des Sols	
Véronique	CARRERE	HDR	MC	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
Philippe	CÔTE	DE	DR LCPC	LCPC	Division Reconnaissance et Mécanique des Sols	
Hervé	DIOT		PR	Univ. La Rochelle	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
Patrick	GENOT		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
Jacques	GIRARDEAU		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
Olivier	GRASSET		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
Eric	HUMLER		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
Richard	LAGABRIELLE	DE	DR LCPC	Directeur Technique - LCPC		
Bernard	LASNIER		PR émérite	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
Patrick	LAUNEAU		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
Daniel	MEGE	HDR	MC	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
Eric	MERCIER		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
Antoine	MOCQUET		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
Martin	SANCHEZ	HDR	MC	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
Christophe	SOTIN		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	Lab. Planét. et Géodyn.	UMR 6112
GENIE MECANIQUE						
Fouad	BENNIS		PR	Ecole Centrale de Nantes	IRCCyN	UMR 6597
Alain	BERNARD		PR	Ecole Centrale de Nantes	IRCCyN	UMR 6597
Christian	BURTIN	HDR	MC	Ecole Centrale de Nantes		
Patrice	CARTRAUD		PR	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Pascal	CASARI	HDR	MC	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	GeM	UMR 6183
Patrick	CHEDMAIL		PR	Ecole Centrale de Nantes	IRCCyN	UMR 6597
Chi Yuen	CHIEM		PR	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Philippe	DEPINCE	HDR	MC	Ecole Centrale de Nantes	IRCCyN	UMR 6597
Benoît	FURET		PR	IUT Nantes - Univ. Nantes	IRCCyN	UMR 6597
Laurent	GORNET	HDR	MC	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Ronald	GUILLEN		PR	IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GeM	UMR 6183

Jean-Yves	HASCOËT		PR	Ecole Centrale de Nantes	IRCCyN	UMR 6597
Frédéric	JACQUEMIN	HDR		IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GeM	UMR 6183
Bernard	LAMY		PR	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Donatien	LE HOUËDEC		PR émérite	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Surandar	MARYA		PR	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Nicolas	MOES		PR	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Pascal	MOGNOL	HDR	MC	ENS CACHAN	IRCCyN	UMR 6597
Bernard	PESEUX		PR Emérite	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Jean-François	PETIOT		PR	Ecole Centrale de Nantes	IRCCyN	UMR 6597
Arnaud	POITOU		PR	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Guillaume	RACINEUX		PR	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Franck	SCHOEFS	HDR	MC	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	GeM	UMR 6183
Erwan	VERRON	HDR	MC	Ecole Centrale de Nantes	GeM	UMR 6183
Philippe	WENGER		DR CNRS	Ecole Centrale de Nantes	IRCCyN	UMR 6597
THERMIQUE, ÉNERGÉTIQUE ET GÉNIE DES PROCÉDÉS						
Yves	ANDRES	HDR	MA	Ecole des Mines de Nantes	GEPEA	UMR 6144
Hervé	ANDRIEU	HDR	IDTPE	LCPC	Division Eau	
Marie	DELAMBALLERIE	HDR	PR	ENITIAA Nantes	GEPEA	UMR 6144
Marc	ANTON		DR	INRA Nantes	Unité BIA	
Abdellah	ARHALIASS		PR	IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GEPEA	UMR 6144
Jean-Pierre	BARDON		PR Emérite	Ecole Polytechnique - Univ. Nantes	Lab. Thermocinétique	UMR 6607
Jérôme	BELLETRE	HDR	MA	Ecole des Mines de Nantes	Dép. Syst. Energ & Environnement	UMR 6144
Lionel	BOILLEREAUX		PR	ENITIAA Nantes	GEPEA	UMR 6144
Brahim	BOUROUGA		PR	Ecole Polytechnique - Univ. Nantes	Lab. Thermocinétique	UMR 6607
Jacques	COMITI		PR	IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GEPEA	UMR 6144
Didier	DELAUNAY		DR CNRS	Ecole Polytechnique - Univ. Nantes	Lab. Thermocinétique	UMR 6607
Arnaud	DELEBARRE		PR	Ecole des Mines de Nantes	GEPEA	UMR 6144
Guy	DELLA VALLE	HDR	IR	INRA Nantes	Unité BIA	
Anne	DESRUMAUX	HDR	MC	ENITIAA Nantes	GEPEA	UMR 6144
Rémi	DETERRE		PR	IUT Nantes - Univ. Nantes	OPERP EE 0101	
Jean-Louis	DOUBLIER		DR	INRA Nantes	Unité BIA	
Louis	DOUBLIEZ		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	GEPEA	UMR 6144
Francine	FAYOLLE	HDR	MC	ENITIAA Nantes	GEPEA	UMR 6144
Alain	FOUCAULT	HDR	IR CNRS	CRTT Saint-Nazaire	GEPEA	UMR 6144
Bertrand	GARNIER	HDR	CR	Ecole Polytechnique - Univ. Nantes	Lab. Thermocinétique	UMR 6607
Jean-Luc	ILARI	HDR	PR	ENITIAA Nantes	GEPEA	UMR 6144
Pascal	JAOUEN		PR	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	GEPEA	UMR 6144
Yvon	JARNY		PR	Ecole Polytechnique - Univ. Nantes	Lab. Thermocinétique	UMR 6607
Abdeljalil	LAHMAR		PR	IUT La Roche/Yon - Univ. Nantes	Lab. Thermocinétique	UMR 6607
Alain	LE BAIL	HDR	PR	ENITIAA Nantes	GEPEA	UMR 6144

Laurence	LE COQ	HDR	MA	Ecole des Mines de Nantes	Dép. Syst. Energ & Environnement	UMR 6144
Olivier	LE CORRE	HDR	MA	Ecole des Mines de Nantes	Dept Syst.Energet. et Environnement	
Yves	LECOINTE		PR	Ecole Polytechnique - Univ. Nantes	Lab. Thermocinétique	UMR 6607
Patrick	LEGENTILHOMME		PR	IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GEPEA	UMR 6144
Jack	LEGRAND		PR	IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GEPEA	UMR 6144
Michel	LEGRET	HDR	DR LCPC	LCPC	Division Eau	
Denis	LOURDIN		CR	INRA Nantes	BIA	
Agnès	MONTILLET	HDR	MC	IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GEPEA	UMR 6144
Ahmed	OULD EL MOCTAR	HDR	MC	Ecole Polytechnique - Univ. Nantes	Lab. Thermocinétique	UMR 6607
Hassan	PEERHOSSAINI		PR	Ecole Polytechnique - Univ. Nantes	Lab. Thermocinétique	UMR 6607
Denis	PONCELET		PR	ENITIAA Nantes	GEPEA	UMR 6144
Jérémy	PRUVOST	HDR	MC	Fac. Sc. et Techn - Univ. Nantes	GEPEA	UMR 6144
Francis	QUEMENEUR		PR Emérite	IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GEPEA	UMR 6144
Véronique	RUBAN	HDR	DR LCPC	LCPC	Division Eau	
Jean-Pierre	SCHLUMPF	HDR	MC	IUT Saint-Nazaire - Univ. Nantes	GEPEA	UMR 6144
Camille	SOLLIEC	HDR	MA	Ecole des Mines de Nantes	GEPEA	UMR 6144
Mohan	TAZEROUT	HDR	MA	Ecole des Mines de Nantes	Dép. Syst. Energ & Environnement	

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer tous mes remerciements à mon directeur de thèse Franck Schoefs qui m'a offert l'opportunité de travailler sur un sujet à la fois original et prometteur. Ses conseils avisés, sa disponibilité et sa confiance m'ont permis de mener à bien l'ensemble de mes travaux. Je tiens également à remercier chaleureusement Anthony Nouy, mon second encadrant, pour sa patience, sa disponibilité et le modèle de rigueur qu'il a été pour moi.

Je remercie sincèrement les membres de mon jury : Messieurs Claude Blanzé et Pierre-Alain Boucard pour avoir accepté de rapporter mon mémoire, Messieurs Bruno Sudret et Nicolas Moës pour avoir participé au jury et, enfin, Monsieur Louis Jezequel pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance aux membres du GeM et du département de physique de l'Université de Nantes qui ont permis à mon travail d'avancer dans de bonnes conditions.

Je remercie mes parents qui m'ont toujours supporté quelques soient mes choix. Grâce à vous, j'ai eu le privilège d'étudier sans avoir à me préoccuper d'autre chose.

Enfin, j'ai une pensée pour tous mes amis, qui, pour la plupart, ne savent toujours pas ce que je cherche (et ça me va très bien ainsi !) mais qui m'ont toujours supporté.

Table des matières

Table des matières 1

Introduction générale 3

1 Approches probabilistes pour le calcul de structures : état de l'art 7

1.1 Introduction . . . 8
1.2 Modélisation probabiliste des incertitudes . . . 8
1.3 Problème modèle en élasticité linéaire . . . 13
1.4 Discrétisation du problème modèle . . . 15
1.5 Méthodes de calcul . . . 17
1.6 Cas particulier des problèmes à géométrie aléatoire . . . 27
1.7 Conclusion . . . 35

2 Méthode éléments finis stochastiques étendus pour les problèmes mécaniques à formes aléatoires 37

2.1 Introduction . . . 39
2.2 La méthode éléments finis étendus déterministe . . . 39
2.3 Reformulation du problème sur un domaine déterministe . . . 43
2.4 Représentation de la géométrie aléatoire par la technique des level sets aléatoires . . . 46
2.5 Définition des espaces d'approximation . . . 48
2.6 Approximation de Galerkin . . . 50
2.7 Exemple d'approche de projection basée sur la méthode X-FEM (P-X-FEM) . . . 50
2.8 Stratégies de résolution dans la méthode X-SFEM . . . 52
2.9 Exemple 1 : plaque à géométrie aléatoire en traction uniforme . . . 60
2.10 Exemple 2 : plaque à géométrie aléatoire avec une modélisation probabiliste complexe . . . 69
2.11 Exemple 3 : couronne circulaire à rayon aléatoire . . . 76
2.12 Exemple 4 : plaque en traction avec trou de forme étoilée . . . 83
2.13 Conclusion . . . 93

3 Méthode éléments finis stochastiques étendus pour les problèmes mécaniques avec interface matérielle aléatoire 95

3.1 Introduction . . . 97
3.2 Formulation du problème d'interface matérielle dans le cadre de X-SFEM . . . 97
3.3 Représentation de la géométrie avec la technique des level sets aléatoires . . . 99

3.4 Définition des espaces d'approximation 99
3.5 Approximation de Galerkin avec un espace enrichi 101
3.6 Fonctions d'enrichissement proposées pour X-SFEM 102
3.7 Exemple 1 : plaque circulaire avec inclusion aléatoire circulaire 117
3.8 Exemple 2 : domaine avec inclusion aléatoire 126
3.9 Conclusion 134

4 Application de la méthode X-SFEM dans une analyse de risque : impact de la corrosion sur une structure en milieu littoral 137
4.1 Introduction 138
4.2 Identification de variable aléatoires : représentation sur le chaos polynomial 139
4.3 Principe de l'analyse de risque 141
4.4 Problématique de la corrosion des structures en région littorale 145
4.5 Etude de cas : analyse de risque d'un composant structurel soumis à la corrosion 152
4.6 Conclusion 159

Conclusion - Perspectives 161

Bibliographie 173

A Espace probabilisé et variables aléatoires 175
A.1 Espace probabilisé et variables aléatoires 175
A.2 Espaces fonctionnels, moments et caractéristiques du second ordre de variables aléatoires 176

B Représentation de variables aléatoires non régulières au niveau stochastique 179
B.1 Éléments finis $h-p$ 179
B.2 Décomposition en multi-ondelettes 180

C Dispositif expérimental : mesure sur site de cinétique de corrosion 183
C.1 Introduction 183
C.2 Présentation du dispositif expérimental et objectifs 183
C.3 Exemple de résultats 187
C.4 Discussion et conclusions 190

Table des figures 191

Liste des tableaux 197

Introduction générale

Depuis son apparition à la fin des années cinquante, la méthode des éléments finis [Turner *et al.* 1956] est devenue l'un des principaux outils numériques dans le domaine du calcul de structures. L'amélioration constante des outils informatiques et les développements de la méthode rendent aujourd'hui possible la simulation de modèles de plus en plus sophistiqués et permettent de prédire le comportement de systèmes mécaniques complexes. Ces modèles complexes, utilisés dans les simulations numériques, font généralement intervenir un grand nombre de paramètres d'entrée supposés connus et déterministes. Pour de nombreux problèmes réels, ils présentent cependant des aléas ou des incertitudes provenant de différentes sources telles que les propriétés matérielles, les chargements ou la géométrie. La prédiction fiable du comportement mécanique d'une structure nécessite de tenir compte de ces incertitudes.
Depuis plus de vingt ans maintenant, de nombreux travaux se sont intéressées à l'introduction de ces incertitudes dans un modèle mécanique. La première démarche a consisté à réaliser des études de sensibilité. Plusieurs théories ont ensuite été utilisées pour modéliser l'incertain. La plus aboutie et la plus utilisée d'entre elles est basée sur la théorie des probabilités. La *mécanique probabiliste*, ou *mécanique stochastique*, est devenue un domaine scientifique à part entière qui permet de tenir compte des incertitudes dans un modèle physique et de leur impact sur la réponse de ce modèle. Les paramètres d'entrée du modèle ne sont plus choisis déterministes mais sont représentés par des variables aléatoires.
Une méthode de base en mécanique probabiliste est la méthode de Monte-Carlo : facile à mettre en oeuvre, elle est bien adaptée à l'évaluation des premiers moments statistiques de la réponse. Cependant ses coûts de calculs sont souvent prohibitifs et rendent son utilisation difficilement envisageable dans un cadre industriel.
Les méthodes de fiabilité sont ensuite apparues avec comme objectif de déterminer la probabilité de défaillance d'une structure. Ces méthodes sont dédiées au calcul de la probabilité d'un événement rare. Leur principe repose sur une approximation de cet événement (domaine particulier de l'espace des événements élémentaires) par un événement dont la probabilité peut être estimée analytiquement (méthodes d'approximation FORM/SORM). Le coût de ces méthodes est moins important que celui des simulations de Monte-Carlo. Généralement bien adaptées aux problèmes mécaniques, elles peuvent cependant manquer de précision pour certains types de problèmes et ainsi conduire à une mauvaise évaluation de la probabilité de défaillance. Enfin, elles demandent une connaissance *a priori* des quantités d'intérêt, ce qui, parfois, ne peut être obtenu avant une analyse approfondie du problème. De plus, elles ne permettent pas de caractériser complètement la solution du problème en fonction des variables aléatoires de base du modèle.
Qu'il s'agisse des méthodes de simulations de Monte-Carlo ou des méthodes fiabilistes, la méthode des éléments finis est simplement utilisée dans un cadre déterministe afin de déterminer la réponse du système pour certaines réalisations des variables aléatoires d'entrée. Au début des années quatre-vingt dix est ap-

parue la méthode des éléments finis stochastiques [Ghanem et Spanos 1991] qui mêle plus profondément la méthode des éléments finis au modèle stochastique. La version la plus utilisée de cette méthode s'appuie sur une représentation de la réponse du système sur une base spécifique, appelée chaos polynomial. Cette méthode couramment appelée *méthode des éléments finis stochastiques spectraux*, ou *méthode spectrale stochastique*, permet d'obtenir une solution précise explicite en fonction des variables aléatoires de base. A partir de cette solution explicite, des post-traitements rapides sont envisageables. Par exemple, il est possible d'utiliser les méthodes fiabilistes sans que les coûts de calcul soient excessifs.
La méthode des éléments finis stochastiques spectraux est une approche aujourd'hui bien maîtrisée lorsque les sources d'incertitude concernent les propriétés matérielles de la structure ou les sollicitations auxquelles elle est soumise. Cependant, il n'existe pas encore de méthode efficace pour résoudre des problèmes mécaniques où l'aléa porte sur la géométrie. Cette problématique est pourtant rencontrée dans de nombreuses applications : modélisation des aléas sur un procédé de fabrication, sur des pertes de matières (corrosion marine), sur la géométrie de la micro-structure d'un matériau hétérogène, etc. Une manière naturelle de résoudre des problèmes stochastiques définis sur un domaine aléatoire est d'utiliser un code éléments finis déterministe couplé à une méthode stochastique non-intrusive comme les approches de Monte-Carlo. Cependant, ces approches nécessitent un nombre important de calculs déterministes pour lesquels un maillage conforme de la géométrie doit être systématiquement créé. Dans le cas de problèmes à géométrie aléatoire, elles conduisent alors à des coûts de calcul trop élevés. De plus, elles ne permettent pas d'obtenir une description explicite de la solution mais seulement une information sur une quantité d'intérêt, de préférence indépendante de la géométrie, qui doit être définie *a priori* (maximum des contraintes, énergie de déformation etc.).
Récemment, quelques approches ont été proposées dans la littérature pour résoudre ce type de problème. Le but de ces méthodes est de s'affranchir de ces remaillages coûteux et de caractériser complètement la solution. Pour cela, il existe principalement deux alternatives. La première consiste à introduire une transformation aléatoire vers un domaine de référence [Tartakovsky et Xiu 2006]. La seconde est basée sur un prolongement des fonctions sur un domaine fictif incluant toutes les réalisations possibles de la géométrie [Canuto et Kozubek 2007].
Dans ce mémoire, nous proposons une nouvelle approche pour résoudre un problème défini sur un domaine aléatoire. Cette technique, baptisée méthode éléments finis stochastiques étendus (X-SFEM pour *eXtended Stochastic Finite Element Method* en anglais), est basée sur une extension de la méthode X-FEM [Moës *et al.* 1999] au cadre stochastique. L'intérêt de la méthode déterministe X-FEM vient de la possibilité d'utiliser un maillage éléments finis qui n'est pas conforme à la surface physique de la structure. Pour cela, on utilise une représentation implicite de la géométrie grâce à la technique des level sets [Sethian 1999]. En utilisant des fonctions level sets aléatoires, il est possible de décrire d'une manière simple des géométries aléatoires complexes. L'objectif de ce travail de thèse a été de développer, d'étudier et d'appliquer la méthode X-SFEM pour deux types de problèmes : les problèmes de forme aléatoire et les problèmes d'interface matérielle aléatoire. Les points importants de la méthode X-SFEM, en plus de la représentation implicite de la géométrie aléatoire, résident dans l'utilisation d'une approximation de Galerkin aux niveaux stochastique et déterministe, et dans un éventuel enrichissement des espaces d'approximation. Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres organisés de la façon suivante.

Le premier chapitre présente un état de l'art non exhaustif des approches probabilistes en méca-

nique. Dans un premier temps, nous considérerons que seuls les propriétés matérielles et les chargements sont aléatoires. Nous utiliserons un problème modèle en élasticité linéaire afin d'illustrer les différentes méthodes. Suite à l'introduction des différentes formulations du problème, nous détaillerons la double discrétisation, au niveau spatial et stochastique du problème. Nous nous intéresserons ensuite aux méthodes de calculs les plus couramment utilisées pour le résoudre. Enfin, nous présenterons le cas particulier d'un problème à géométrie aléatoire ainsi que certaines méthodes proposées récemment pour résoudre ce type de problème.

Le second chapitre est dédié à la méthode éléments finis stochastiques étendus X-SFEM pour des problèmes de forme aléatoire. La méthode sera également présentée dans le cadre d'un problème d'élasticité linéaire. Nous expliquerons comment la représentation implicite de la géométrie, à l'aide de la méthode des level-sets, permet de définir naturellement les espaces de travail, ainsi que les espaces d'approximation, à partir d'un domaine déterministe fixe. Dans le cadre de la méthode X-SFEM, la projection de Galerkin aux niveaux spatial et stochastique est l'approche privilégiée qui permet d'obtenir des solutions précises. Nous montrerons que l'une des principales difficultés vient de l'intégration du problème discrétisé. Pour pallier cette difficulté, nous proposerons une méthode spécifique d'intégration stochastique, et nous montrerons son efficacité et son intérêt à travers plusieurs exemples numériques. Ces mêmes exemples permettront de montrer la qualité de la solution X-SFEM en la comparant aux solutions obtenues par des approches classiques. Nous testerons également une approche de projection L^2, dite non-intrusive, dont les performances seront comparées à celles de la projection de Galerkin.

Le troisième chapitre est consacré aux problèmes d'interface matérielle aléatoire. On y aborde les problèmes liés à l'enrichissement de l'espace d'approximation par la méthode de la partition de l'unité [Melenk et Babuska 1996]. Cet enrichissement est nécessaire afin de permettre à l'approximation de représenter un champ solution continu mais à dérivées discontinues. En effet, si le maillage n'est pas conforme à la géométrie de la structure, une approximation éléments finis classique ne permet pas de représenter ces irrégularités dans la solution. Nous proposerons deux choix pour l'enrichissement. Le premier consiste à étendre au cadre stochastique un enrichissement classiquement utilisé dans la méthode déterministe X-FEM. Nous montrerons que ce premier choix permet d'améliorer la solution. Cependant, celle-ci n'est pas optimale et nous proposerons un autre enrichissement tenant mieux compte du caractère aléatoire du problème. Les exemples numériques permettront de montrer que cet enrichissement dans la méthode X-SFEM conduit à des solutions plus précises.

Le quatrième et dernier chapitre propose une application de la méthode X-SFEM à l'analyse de risques. Nous nous intéresserons à l'impact de la corrosion sur une structure située en milieu littoral. Pour ce faire, nous avons utilisé des données, fournies par le Port Autonome de Nantes Saint-Nazaire, caractérisant les pertes d'épaisseur d'un quai sur pieux métalliques. Nous nous focaliserons sur un composant de la structure soumis à ces pertes de matière. Le problème mécanique est alors défini sur un domaine aléatoire et nous utiliserons les développements de la méthode X-SFEM présentés dans le second chapitre pour le résoudre. Nous introduirons une modélisation probabiliste de l'aléa géométrique qui conduira à distinguer la perte de matière (variabilité intrinsèque) et l'erreur de mesure et à représenter ces quantités par des variables aléatoires. Ces variables aléatoires seront identifiées avec une méthode permettant

de les représenter sur la base du chaos polynomial. Nous proposerons ensuite une analyse de coût qui permettra de prendre en compte l'erreur sur les mesures dans l'étude du composant. Nous supposerons que ce composant peut se situer à différents endroits de la structure et qu'il n'est pas soumis aux mêmes niveaux de corrosion ni aux mêmes conditions d'inspection. Avec la méthode X-SFEM, nous pourrons déterminer la probabilité de défaillance du composant en fonction de sa position sur la structure. Les résultats permettront de déterminer quelles sont les zones les plus sensibles à la corrosion et d'optimiser la stratégie d'inspection de l'ouvrage en terme de coût et de performance.

Ce travail de thèse a été financé dans le cadre du programme européen MEDACHS (*Marine Environment Damage to Atlantic Coast Historical and transport Structures and building* 2005-2007). Ce programme s'intéressait aux méthodes de diagnostic de maintenance et de réparation des ouvrages soumis aux effets de la corrosion et situés sur le littoral atlantique. Différents matériaux ont été étudiés parmi lesquels le béton, la pierre, le mortier, le bois et l'acier. Ces travaux s'inscrivent dans l'étude de ce dernier matériau et des méthodes de diagnostic.

Chapitre 1

Approches probabilistes pour le calcul de structures : état de l'art

Sommaire

1.1 Introduction **8**
1.2 Modélisation probabiliste des incertitudes **8**
1.2.1 Représentation de fonctions de variables aléatoires sur le chaos polynomial 9
1.3 Problème modèle en élasticité linéaire **13**
1.3.1 Le problème déterministe 13
1.3.2 Le problème stochastique 14
1.3.3 Formulation variationnelle du problème 14
1.4 Discrétisation du problème modèle **15**
1.4.1 Semi-discrétisation au niveau déterministe 15
1.4.2 Discrétisation au niveau stochastique 16
1.5 Méthodes de calcul **17**
1.5.1 Méthodes d'intégration directe 17
1.5.2 Méthodes fiabilistes 19
1.5.3 Méthodes de développement en série 21
1.5.4 Représentation sur des bases de fonctions 23
1.6 Cas particulier des problèmes à géométrie aléatoire **27**
1.6.1 Formulation du problème 27
1.6.2 Méthodes non intrusives avec remaillages 28
1.6.3 Approximation éléments finis sur maillage aléatoire 29
1.6.4 Méthode de perturbation de la géométrie 31
1.6.5 Approche avec reformulation sur un domaine fictif 33
1.7 Conclusion **35**

1.1 Introduction

Ce premier chapitre présente un état de l'art non exhaustif sur les approches probabilistes utilisées en calcul de structures. Nous présenterons les méthodes classiques permettant de résoudre un problème mécanique en présence d'aléas ou d'incertitudes. On s'appuiera pour cela sur un problème modèle en élasticité linéaire. Nous discuterons des différents choix de modélisation stochastique des incertitudes puis de la double discrétisation du problème au niveau spatial et stochastique. Les méthodes de calcul seront alors abordées et on s'intéressera notamment aux approches spectrales basées sur l'utilisation du chaos polynomial ou de ses généralisations pour l'approximation stochastique. Ces méthodes ont été développées lorsque les incertitudes portent sur les propriétés matérielles ou sur les chargements et leur extension quand on veut introduire de l'aléa sur la géométrie de la structure pose des difficultés. Récemment, quelques méthodes ont été proposées pour traiter des problèmes à géométrie aléatoire. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous présenterons certaines de ces méthodes en donnant leurs avantages et leurs inconvénients.

1.2 Modélisation probabiliste des incertitudes

On distingue souvent deux types d'incertitudes : les incertitudes épistémiques et les incertitudes intrinsèques. Les incertitudes épistémiques sont liées à une information "imprécise, vague voire incomplète", pouvant provenir d'un manque de données (observations). Ces incertitudes peuvent donc être réduites en particulier par une augmentation du nombre de données, conduisant à une meilleure connaissance du modèle. Les incertitudes intrinsèques sont liées à la variabilité naturelle des phénomènes étudiés et sont généralement considérées comme irréductibles. Les incertitudes considérées dans ces travaux peuvent être de ces deux types.
A partir des observations d'un phénomène particulier, différentes théories peuvent être utilisées pour la modélisation de ces incertitudes. Parmi elles, on trouve la théorie des intervalles, la théorie des possibilités [Zadeh 1978], la théorie des méconnaissances [Puel 2004, Ladevèze *et al.* 2006], la théorie des preuves [Shafer 1976] et la théorie probabiliste (approche stochastique). C'est cette dernière que nous allons exploiter ; utilisée dans de nombreux domaines, elle est certainement la plus aboutie et la plus à même de bien décrire les incertitudes étudiées ici.
Classiquement, pour représenter le contenu probabiliste d'un problème physique, on introduit un espace de probabilité abstrait $(\Theta, \mathcal{B}, P)$ où Θ est l'ensemble des événements élémentaires θ, $\mathcal{B}$ est une tribu ou σ-algèbre, et P une mesure de probabilité. Deux approches se distinguent pour la définition d'espaces probabilisés : l'approche paramétrique et l'approche non-paramétrique.

Approche paramétrique : cette vision est la plus répandue. On fait ici l'hypothèse que le contenu probabiliste du problème stochastique peut être représenté par un ensemble fini de variables aléatoires $\boldsymbol{\xi} : \Theta \to \mathbb{R}^m$. En calcul de structures, c'est le cas lorsque les paramètres du modèle, comme les paramètres matériau (Module d'Young, coefficient de Poisson etc.), sont des variables aléatoires. Lorsque ces paramètres sont des champs stochastiques, une discrétisation amont est nécessaire afin de les représenter en fonction d'un ensemble de variables aléatoires. On pourra, par exemple, utiliser une décomposition de Karhunen-Loeve [Loève 1977 - 1978, Ghanem et Spanos 1991].

Approche non-paramétrique : cette méthode permet de prendre en compte les incertitudes de modélisation. Contrairement aux approches paramétriques, on ne construit pas de modèles probabilistes des paramètres du système mécanique. Les incertitudes sont directement prises en compte au niveau de l'opérateur du système considéré [Soize 2000 - 2001]. Pour cela, on cherche à construire un espace probabilisé d'opérateurs. Dans le cadre du calcul de structures par éléments finis, on cherche à construire une modélisation probabiliste de la matrice de rigidité sous certaines contraintes (matrice symétrique, définie positive, caractère bande [Soize 2008]). Cette approche permet d'augmenter la prédictibilité du modèle probabiliste et permet, en quelque sorte, de tenir compte d'une erreur sur le modèle.

Dans ce mémoire, nous adoptons l'approche paramétrique. Le contenu probabiliste est représenté par un ensemble fini de variables aléatoires $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ...\xi_m)$. On note $\boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}^m$ l'espace image de Θ par $\boldsymbol{\xi}$ et $P_{\boldsymbol{\xi}}$ la mesure de probabilité associée à $\boldsymbol{\xi}$. On notera $p_{\boldsymbol{\xi}}$ la fonction de densité de probabilité associée à $P_{\boldsymbol{\xi}}$. Une identification des paramètres incertains à l'aide de données existantes ou d'un jugement d'expert nous permet de caractériser la mesure de probabilité $P_{\boldsymbol{\xi}}$ et de travailler dans un nouvel espace de probabilité connu $(\boldsymbol{\Theta}, \mathcal{B}, P_{\boldsymbol{\xi}})$ de dimension finie m. Dans la suite, nous travaillerons dans cet espace probabilisé.

Remarque 1.1 *On trouvera dans l'annexe A différents rappels sur les propriétés d'une variable aléatoire (fonction de répartition, moments, etc.).*

1.2.1 Représentation de fonctions de variables aléatoires sur le chaos polynomial

On introduit ici une méthode de représentation fonctionnelle d'une variable aléatoire, appelée représentation sur le chaos polynomial. Cette notion sera utilisée tout au long de ce mémoire. On trouvera en annexe B d'autres modes de représentation, pouvant également être utilisés pour représenter des fonctions de variables aléatoires (éléments finis $h-p$ et décomposition en multi-ondelettes).

1.2.1.1 Espace de Hilbert des fonctions de carré sommable

Soit $\boldsymbol{\xi}$ un vecteur de variables aléatoires à valeur dans $\boldsymbol{\Theta}$ de loi $P_{\boldsymbol{\xi}}$. Il définit un espace de probabilité $(\boldsymbol{\Theta}, \mathcal{B}, P_{\boldsymbol{\xi}})$. L'ensemble des fonctions mesurables f de $\boldsymbol{\xi}$, de carré sommable, définit un espace de Hilbert noté $\mathcal{S} = L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}})$ et muni du produit scalaire naturel

$$< f, g >= \int_{\boldsymbol{\Theta}} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = E(f(\boldsymbol{\xi}) g(\boldsymbol{\xi})) \tag{1.1}$$

où E désigne l'espérance mathématique.

1.2.1.2 Décomposition sur une base Hilbertienne

On appelle base Hilbertienne de $\mathcal{S}$ une base orthonormale complète $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ de $\mathcal{S}$. Cette base vérifie donc les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} &< H_\alpha, H_\beta >= E(H_\alpha(\boldsymbol{\xi}) H_\beta(\boldsymbol{\xi})) = \delta_{\alpha\beta} \\ &< H_\alpha, f >= E(H_\alpha(\boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi})) = 0, \ \forall \alpha \in \mathcal{J} \quad \Rightarrow \quad f = 0 \end{aligned}$$

Toute fonction $f \in L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}})$ peut être décomposée sur cette base. On peut alors écrire la variable aléatoire $f(\boldsymbol{\xi})$ sous la forme de la décomposition suivante

$$f(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{avec} \quad f_\alpha =< f, H_\alpha >= E(f(\boldsymbol{\xi}) H_\alpha(\boldsymbol{\xi})) \tag{1.2}$$

où les f_α sont les coefficients de la décomposition. Ces coefficients sont donc obtenus par le calcul d'une espérance mathématique. Pour calculer cette intégrale, on pourra utiliser des techniques d'intégration numérique (*c.f.* section 1.5.1).

1.2.1.3 Décomposition sur le chaos polynômial

On appelle décomposition d'une variable aléatoire $f(\boldsymbol{\xi})$ sur le chaos polynômial une décomposition la fonction f sur une base Hilbertienne polynômiale en $\boldsymbol{\xi}$. Il s'agit d'une construction particulière de la base où les fonctions H_α sont des polynômes multi-dimensionnels orthonormés. Pour définir cette base, on commence par définir l'espace $\mathcal{S}_p$[1]

$$\mathcal{S}_p = span\{\mathbf{x}^\beta = x_1^{\beta_1} ... x_m^{\beta_m}, |\beta| = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \leqslant p\} \tag{1.3}$$

En d'autres termes, $\mathcal{S}_p$ est l'espace des polynômes multi-dimensionnels de degré total inférieur ou égal à p. L'espace $\mathcal{S}_p$ est appelé espace du chaos polynomial de degré p. On définit ensuite l'espace $\mathcal{H}_p = \mathcal{S}_p \ominus \mathcal{S}_{p-1}$ qui est l'orthogonal de $\mathcal{S}_{p-1}$ dans $\mathcal{S}_p$. L'espace $\mathcal{H}_p$ est appelé chaos homogène de degré p. On obtient donc les décompositions orthogonales suivantes[2]

$$\mathcal{S}_p = \bigoplus_{k=0}^{p} \mathcal{H}_k \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \overline{\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k}$$

On s'intéresse maintenant à la construction d'une base orthogonale du chaos polynomial.

Décomposition sur le chaos polynômial gaussien : On se place dans le cas où $\boldsymbol{\xi}$ est un vecteur de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes [Wiener 1938, Ghanem et Spanos 1991], *i.e.* $E(\xi_i) = 0$, $E(\xi_i^2) = 1$ et $E(\xi_i \xi_j)_{i \neq j} = 0$. La densité de probabilité $p_{\boldsymbol{\xi}}$ est la densité normale canonique :

$$p_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-m/2} exp(-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2}) = \varphi(x_1) \times ... \times \varphi(x_m)$$

où $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} exp(-x^2/2)$. Les polynômes orthogonaux de $L^2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$ sont les polynômes d'Hermite $\{h_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Les polynômes d'Hermite normalisés vérifient :

$$\int_{\mathbb{R}} h_i(x) h_j(x) \varphi(x) dx = \delta_{ij}$$

[1] $span\{f_i\}$ désigne l'espace engendré par les fonctions f_i
[2] $\bigoplus_i E_i$ désigne la somme directe des espaces E_i

On construit alors les polynômes d'Hermite multi-dimensionnels :

$$H_\alpha(\mathbf{x}) = h_{\alpha_1}(x_1) \times ... \times h_{\alpha_m}(x_m)$$

qui constituent bien une famille orthonormée de polynômes multi-dimensionnels. L'espace $\mathcal{S}_p$ peut alors s'écrire

$$\mathcal{S}_p = span\{H_\alpha(\mathbf{x}),\ |\alpha| \leqslant p\} \tag{1.4}$$

Décomposition sur le chaos polynomial généralisé (cas de variables indépendantes) : Dans le cas où $\boldsymbol{\xi}$ est un vecteur de variables aléatoires indépendantes non gaussiennes, on a

$$dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = dP_{\xi_1}(x_1) \times ... \times dP_{\xi_m}(x_m)$$

On construit alors pour chaque dimension stochastique j une base orthonormale de polynômes $\{h_i^{(j)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} h_k^{(j)}(x) h_l^{(j)}(x) dP_{\xi_j}(x) = \delta_{kl}$$

On peut alors définir les polynômes orthonormés multi-dimensionnels par

$$H_\alpha(\mathbf{x}) = h_{\alpha_1}^{(1)}(x_1) \times ... \times h_{\alpha_m}^{(m)}(x_m)$$

On parle alors de chaos polynomial généralisé [Xiu et Karniadakis 2002]. L'espace $\mathcal{S}_p$ est toujours défini par l'équation (1.4). Le tableau 1.1 présente les familles de polynômes orthogonaux pour différentes lois de probabilité classiques.

loi de ξ	support Θ	densité $p_\xi(x)$	famille de polynômes
Normale	$\mathbb{R}$	$(2\pi)^{-1/2} exp(-\frac{x^2}{2})$	Hermite
Uniforme	$[-1,1]$	$\frac{1}{2}$	Legendre
Gamma	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} exp(-x)$	Laguerre
Beta	$[-1,1]$	$\frac{(1+x)^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)2^{a+b-1}}$	Jacobi

TAB. 1.1 – Exemples de polynômes orthogonaux pour différentes lois de probabilité.

Décomposition généralisée sur le chaos polynomial (cas de variables dépendantes) : On suppose ici que $\boldsymbol{\xi}$ est un vecteur formé de variables aléatoires dépendantes [Soize et Ghanem 2004]. Soit $P_{\boldsymbol{\xi}}$ une loi à densité et $\tilde{H}_\alpha(\mathbf{x})$ une base de polynômes orthonormés pour la mesure $dP_{\xi_1}(x_1) \times ... \times dP_{\xi_m}(x_m)$. On définit alors la base de fonction H_α par

$$H_\alpha(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{p_{\xi_1}(x_1) \times ... \times p_{\xi_m}(x_m)}{p_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})}} \tilde{H}_\alpha(\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

On a bien

$$
\begin{aligned}
< H_\alpha, H_\beta > &= \int_{\mathbb{R}^m} H_\alpha(\mathbf{x}) H_\beta(\mathbf{x}) p_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{H}_\alpha(\mathbf{x}) \tilde{H}_\beta(\mathbf{x}) p_{\xi_1}(x_1) \times ... \times p_{\xi_m}(x_m) d\mathbf{x} = \delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

La base obtenue de fonctions H_α n'est cependant pas une base de polynômes. Cette décomposition est appelée décomposition généralisée sur le chaos polynomial.

Exemple de représentation sur le chaos polynomial : On propose d'illustrer la représentation de variables aléatoires sur le chaos polynomial. On considère deux variables aléatoires indépendantes ξ_1 et ξ_2. Ces deux variables sont gaussiennes centrées réduites

$$\xi_1 = \mathcal{N}(0,1) \quad \text{et} \quad \xi_2 = \mathcal{N}(0,1)$$

où $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ désigne une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ. On travaille alors dans un espace des événements élémentaires $\mathbb{R}^2$. On choisit de décomposer les variables aléatoires sur un chaos polynomial avec des degrés différents pour chaque variable (degré 3 pour ξ_1 et degré 2 pour ξ_2). La base de $\mathcal{S}_p$ est composée des polynômes d'Hermite multi-dimensionnels $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$ où

$$\mathcal{I}_p = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2\} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), (3,0), (2,1), (1,2)\}$$

et où les polynômes H_α sont définis par

$$
\begin{aligned}
H_{(0,0)} &= h_0(\xi_1) h_0(\xi_2) = 1 \\
H_{(1,0)} &= h_1(\xi_1) h_0(\xi_2) = \xi_1 \\
H_{(0,1)} &= h_0(\xi_1) h_1(\xi_2) = \xi_2 \\
H_{(2,0)} &= h_2(\xi_1) h_0(\xi_2) = \frac{\xi_1^2 - 1}{\sqrt{2}} \\
H_{(1,1)} &= h_1(\xi_1) h_1(\xi_2) = \xi_1 \xi_2 \\
H_{(0,2)} &= h_0(\xi_1) h_2(\xi_2) = \frac{\xi_2^2 - 1}{\sqrt{2}} \\
H_{(3,0)} &= h_3(\xi_1) h_0(\xi_2) = \frac{\xi_1^3 - 3\xi_1}{\sqrt{6}} \\
H_{(2,1)} &= h_2(\xi_1) h_1(\xi_2) = \frac{\xi_1^2 \xi_2 - \xi_2}{\sqrt{2}} \\
H_{(1,2)} &= h_1(\xi_1) h_2(\xi_2) = \frac{\xi_2^2 \xi_1 - \xi_1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

où les h_i sont les polynômes d'Hermite unidimensionnels. La figure 1.1 présente certains polynômes d'Hermite H_α en fonction des variables ξ_1 et ξ_2.

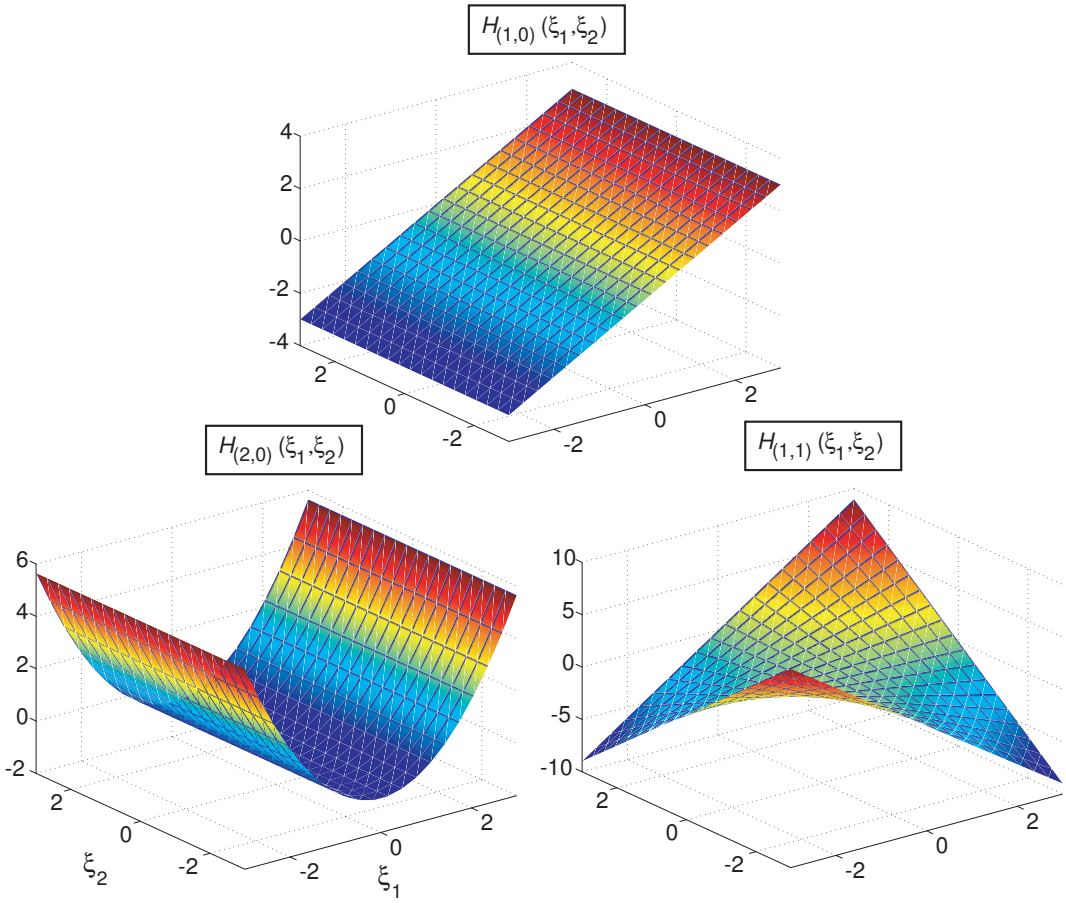


FIG. 1.1 – Exemples de polynômes d'Hermite en dimension 2.

1.3 Problème modèle en élasticité linéaire

Dans ces travaux, on s'intéresse à l'analyse des déformations d'une structure sous l'hypothèse des petites perturbations. Dans ce chapitre, les différentes méthodes éléments finis stochastiques sont présentées dans le cadre particulier de l'élasticité linéaire.

1.3.1 Le problème déterministe

On considère une structure occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, où d est la dimension spatiale du problème, soumise à des efforts volumiques $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ sur Ω et des efforts de surface $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ sur une partie Γ_2 de la frontière $\partial\Omega$. Les déplacements sont imposés nuls sur la partie Γ_1 de la frontière $\partial\Omega$ telle que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. La partie complémentaire de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ notée Γ_0 est supposée libre. On note $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ le champ déplacement, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ la partie symétrique du gradient des déplacements et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes. On note également $\boldsymbol{C}$ le tenseur de Hooke du quatrième ordre. La formulation forte du problème d'élasticité s'écrit : trouver

$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma})$ tel que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = 0 \quad & \text{sur} \quad \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \quad & \text{sur} \quad \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} \quad & \text{sur} \quad \Gamma_2 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad & \text{sur} \quad \Gamma_0 \\ \boldsymbol{u} = 0 \quad & \text{sur} \quad \Gamma_1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale extérieure à la frontière considérée. La figure 1.2 présente le problème modèle.

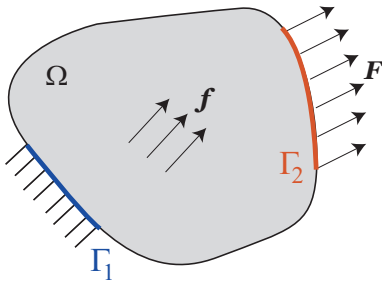


FIG. 1.2 – Problème modèle en élasticité linéaire.

1.3.2 Le problème stochastique

On suppose maintenant que certains paramètres du modèle sont incertains : les chargements $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{F}$, les propriétés matérielles, caractérisées par le tenseur $\boldsymbol{C}$, et la géométrie, caractérisée par Ω, Γ_1 et Γ_2. On s'interesse tout d'abord au cas où seuls les chargements et les propriétés matérielles sont aléatoires. Le cas particulier d'un problème défini sur une géométrie aléatoire sera détaillé dans la section 1.6. On suppose que l'espace de probabilité $(\boldsymbol{\Theta}, \mathcal{B}, P_{\boldsymbol{\xi}})$ permet de représenter le contenu probabiliste du problème. La forme forte du problème stochastique s'écrit alors : trouver les champs aléatoires $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ et $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ qui vérifient presque partout et presque sûrement les équations définies en (1.7).

1.3.3 Formulation variationnelle du problème

On introduit classiquement une formulation faible (ou variationnelle) du problème en vue d'une analyse mathématique du problème ou de la construction de méthodes d'approximation. Nous introduisons, dans un premier temps, une formulation variationnelle au niveau spatial. Le problème s'écrit : trouver $\boldsymbol{u}$ tel que $\forall \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{u}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{U} = \{\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^d; \boldsymbol{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ et tel que l'on ait presque sûrement

$$a(\boldsymbol{u}(\cdot, \boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}) = b(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{U} \tag{1.8}$$

où $a(\cdot, \cdot; \boldsymbol{\xi})$ est une forme bilinéaire coercive symétrique continue sur $\mathcal{U}$ et $b(\cdot; \boldsymbol{\xi})$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{U}$, définies par

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\, dx \tag{1.9}$$

$$b(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, dx + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\, ds \tag{1.10}$$

Nous pouvons maintenant introduire une formulation variationnelle à la fois au niveau spatial et au niveau stochastique. On considère que le problème peut être formulé dans l'espace fonctionnel des variables aléatoires du second ordre à valeurs dans $\mathcal{U}$, noté $\mathcal{V}$ et défini par

$$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{u} : \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Theta} \mapsto \boldsymbol{u}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{U}; \int_{\boldsymbol{\Theta}} \|\boldsymbol{u}(\cdot, \mathbf{x})\|_{\mathcal{U}}^2 \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) < \infty\} := L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}}; \mathcal{U}) \tag{1.11}$$

La forme faible du problème s'écrit alors : trouver $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ tel que

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \tag{1.12}$$

où

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \mathbf{x}) \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) := E(a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi})) \tag{1.13}$$

$$L(\boldsymbol{v}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} b(\boldsymbol{v}; \mathbf{x}) \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) := E(b(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi})) \tag{1.14}$$

Sous réserve de la régularité du tenseur $\boldsymbol{C}$ et des chargements, le problème variationnel vérifie toutes les conditions d'Hadamard nécessaires à un problème bien posé : le problème possède une solution, cette solution est unique et elle dépend des données de manière continue [Babuska *et al.* 2005, Matthies et Keese 2005].
Dans le cas où seuls les chargements et les paramètres matériau sont aléatoires, l'espace fonctionnel $\mathcal{V}$ est le produit tensoriel de deux espaces :

$$\mathcal{V} = L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}}; \mathcal{U}) \cong L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}}) \otimes \mathcal{U} := \mathcal{S} \otimes \mathcal{U} \tag{1.15}$$

où $\mathcal{S} = L^2(\boldsymbol{\Theta}, \, dP_{\boldsymbol{\xi}})$ est l'espace des variables aléatoires du second ordre.

1.4 Discrétisation du problème modèle

Maintenant que la forme faible du problème a été introduite, nous nous intéressons à la discrétisation du problème (1.12). Nous introduirons dans un premier temps une semi-discrétisation au niveau déterministe puis nous discuterons de la représentation des incertitudes et de la discrétisation stochastique du problème.

1.4.1 Semi-discrétisation au niveau déterministe

Selon la nature du problème mécanique étudié, il existe différents types de discrétisation. Dans ces travaux, nous utiliserons une approximation spatiale par éléments finis [Zienkiewicz *et al.* 2005].
L'approximation éléments finis conduit à introduire un espace d'approximation $\mathcal{U}_h$ défini par

$$\mathcal{U}_h = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) v_i = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \mathbf{v}, \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N\}, \tag{1.16}$$

où les $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{U}$ sont les fonctions d'interpolation éléments finis associées à un maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω. L'espace d'approximation semi-discrétisé $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ peut alors être défini de la manière suivante :

$$\mathcal{V}_h = \mathcal{S} \otimes \mathcal{U}_h = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) v_i(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}),\ \mathbf{v} \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{R}^N\} \tag{1.17}$$

La solution approchée semi-discrétisée $\boldsymbol{u}_h \in \mathcal{V}_h$ du problème (1.12) est définie par :

$$A(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = L(\boldsymbol{v}_h) \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \mathcal{V}_h. \tag{1.18}$$

Le problème (1.18) peut être réécrit sous une forme matricielle : trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{R}^N$ tel que $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{R}^N$ on ait

$$E(\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{u}) = E(\mathbf{v}^T \mathbf{b}) \tag{1.19}$$

où la matrice aléatoire $\mathbf{A} \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{R}^{N \times N}$ et le vecteur aléatoire $\mathbf{b} \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{R}^N$ sont définis par :

$$(\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}))_{ij} = a(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i; \boldsymbol{\xi}) \tag{1.20}$$

$$(\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}))_i = b(\boldsymbol{\varphi}_i; \boldsymbol{\xi}) \tag{1.21}$$

1.4.2 Discrétisation au niveau stochastique

Nous nous intéressons maintenant à la discrétisation au niveau stochastique du problème modèle. On cherche à construire un espace d'approximation $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$. Le but est de pouvoir représenter une fonction aléatoire $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ en fonction des variables aléatoires de base $\boldsymbol{\xi}$ de loi $P_{\boldsymbol{\xi}}$. Quelle que soit la représentation stochastique choisie, l'espace $\mathcal{S}_P$ de dimension finie P pourra s'écrire

$$\mathcal{S}_P = \{v(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} v_\alpha H_\alpha(\boldsymbol{\xi}),\ v_\alpha \in \mathbb{R}\}, \tag{1.22}$$

où $\mathcal{I}_P$ est un sous-ensemble de P indices dans $\mathcal{I}$ et où $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ est une base de fonctions de $\mathcal{S}$ pour laquelle plusieurs choix sont possibles. Parmi eux citons le chaos polynomial ou le chaos polynomial généralisé [Wiener 1938, Ghanem et Spanos 1991, Xiu et Karniadakis 2002], les décompositions généralisées sur le chaos [Soize et Ghanem 2004] (*c.f.* section 1.2.1) ou les interpolants de Lagrange [Babuska *et al.* 2007]. Ces modes de représentation s'avèrent être des outils adaptés pour des fonctions de variables aléatoires régulières sur $\boldsymbol{\Theta}$. Dans le cas où ces fonctions sont moins régulières (par exemple s'il s'agit d'une fonction continue mais à dérivées discontinues sur $\boldsymbol{\Theta}$), un degré p élevé sera nécessaire afin de bien les représenter. Pour ce type de fonctions, d'autres types de représentation peuvent être utilisés comme les éléments finis au niveau stochastique [Benth et Gjerde 1998, Deb *et al.* 2001, Babuska *et al.* 2005, Wan et Karniadakis 2005] ou la décomposition en multi-ondelettes [Le Maitre *et al.* 2004, Le Maître *et al.* 2004] (*c.f.* annexe B).

L'espace d'approximation complet $\mathcal{V}_{h,P} \in \mathcal{V}$ sera alors défini par le produit tensoriel suivant

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{h,P} &= \mathcal{S}_P \otimes \mathcal{U}_h \\ &= \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) H_\alpha(\boldsymbol{\xi}) v_{i,\alpha},\ v_{i,\alpha} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}),\ \mathbf{v} \in \mathcal{S}_P \otimes \mathbb{R}^N\}.\end{aligned} \tag{1.23}$$

1.5 Méthodes de calcul

On s'intéresse maintenant à différentes méthodes de calculs existantes dans le cadre des approches probabilistes en mécanique, adaptées à la nature des quantités d'intérêt et de leur post-traitement souhaité. On note $\mathcal{J}(\boldsymbol{u})$ la quantité d'intérêt cible qui peut par exemple être le déplacement d'un point particulier ou la contrainte maximale dans une certaine direction. On peut alors souhaiter obtenir différentes informations au sens probabiliste telles que :

- les moments statistiques comme la moyenne $\mu_{\mathcal{J}} = E(\mathcal{J}(\boldsymbol{u}))$;
- la probabilité d'événements particuliers : $P_{\mathcal{J}} = P\big(\{\mathcal{J}(\boldsymbol{u}) \leqslant \mathcal{J}_0\}\big)$;
- la représentation complète de $\mathcal{J}(\boldsymbol{u})$ (distribution de probabilité).

Pour le calcul des moments statistiques de $\mathcal{J}(\boldsymbol{u})$, on pourra employer des méthodes d'intégration directe : Monte-Carlo/Quasi Monte-Carlo [Niederreiter 1992, Papadrakakis et Papadopoulos 1996, Caflisch 1998], méthodes de quadrature (Gauss, Clenshaw-Curtis etc.).
Pour le calcul de probabilité d'événements particuliers, on pourra également utiliser des méthodes d'intégration directe, du type Monte-Carlo, dans le cas de grandes probabilités (supérieure à 10^{-3} par exemple). Dans le cas de faibles probabilités, comme la probabilité de défaillance d'une structure, les méthodes fiabilistes telles que les méthodes FORM/SORM pourront être employées [Ditlevsen et Madsen 1996], couplées ou non à des méthodes d'intégration (tirage d'importance, etc.).
Pour obtenir les premiers moments statistiques de la solution, on pourra utiliser des méthodes de développement en série telles que le développement de Taylor [Ghanem et Spanos 1991] ou la décomposition en série de Neumann [Shinozuka et Yamakasi 1988]. Une autre alternative consiste à représenter complètement la solution sur une base de fonctions : on pourra alors utiliser des techniques comme la méthode des surfaces de réponse analytiques [Faravelli 1989, Rajashekhar et Ellingwood 1993], où des représentations dites spectrales basées sur le chaos polynomial ou ses généralisations [Ghanem et Spanos 1991, Xiu et Karniadakis 2002].
Dans les sections suivantes, nous détaillons certaines de ces méthodes de calcul et notamment les approches utilisant une approximation basée sur le chaos (polynomial) qui seront employées dans la suite de ce mémoire.

1.5.1 Méthodes d'intégration directe

Les méthodes d'intégration directe peuvent être utilisées pour évaluer les moments statistiques d'une quantité d'intérêt $\mathcal{J}(\boldsymbol{u})$ ou des probabilités d'événements particuliers. Par exemple, la moyenne de cette

quantité $\mu_{\mathcal{J}} = E(\mathcal{J}(\boldsymbol{u}))$ est calculée par l'intégrale suivante

$$\mu_{\mathcal{J}} = E(\mathcal{J}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}))) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \mathcal{J}(\boldsymbol{u}(\mathbf{x}))dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{1.24}$$

Le problème d'intégration (1.24) peut alors être résolu en utilisant des méthodes d'intégration numérique. Le calcul de $\mu_{\mathcal{J}}$ est ainsi approché par

$$\mu_{\mathcal{J}} \approx \sum_{k=1}^{M} \mathcal{J}(\boldsymbol{u}(\mathbf{x}_k))\omega_k \tag{1.25}$$

où les $\mathbf{x}_k$ sont les points d'intégration et les ω_k sont les poids associés. La résolution du problème demande donc le calcul de M problèmes déterministes pour la détermination des $\boldsymbol{u}(\mathbf{x}_k)$. La question qui se pose est celle du choix des formules d'intégration.

Une première méthode est la **méthode de Monte-Carlo** [Caflisch 1998] qui consiste à choisir les $\mathbf{x}_k$ comme des réalisations pseudo-aléatoires des variables $\boldsymbol{\xi}$. Les poids sont alors définis par $\omega_k = \frac{1}{M}$. L'avantage majeur de cette approche vient du fait que la convergence est indépendante de la dimension stochastique du problème. Son défaut principal est qu'elle nécessite souvent un grand nombre de réalisations, ce qui engendre des coûts de calcul très élevés.

Une seconde approche est la **méthode de Quasi Monte-Carlo** [Niederreiter 1992]. Contrairement à la méthode de Monte-Carlo, les points d'intégration ne sont plus choisis de façon aléatoire. On parle alors de points quasi aléatoires (série à discrépance faible) qui sont choisis de manière déterministe dans l'hypercube unitaire $[0,1]^m$, où m désigne la dimension stochastique du problème [Morokoff et Caflish 1995]. Cette méthode permet d'obtenir de meilleurs taux de convergence avec M que la méthode de Monte-Carlo mais, pour un nombre de points M donné, la précision des résultats se détériore en grande dimension stochastique.

Une troisième approche est la méthode présentée ici. Considérons le cas où la dimension stochastique $m = 1$. Le calcul est réalisé à partir d'une quadrature

$$E(\mathcal{J}(\boldsymbol{u}(\xi))) = \int_{\Theta} \mathcal{J}(\boldsymbol{u}(x))dP_{\xi}(x) \approx Q_n(\mathcal{J}) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{J}(\boldsymbol{u}(x_k))\omega_k \tag{1.26}$$

Dans une quadrature de Gauss, les x_k sont définis comme les n racines du $(n)^{\text{ème}}$ polynôme orthogonal associé à la mesure de probabilité dP_{ξ}. Les poids ω_k sont obtenus par intégration des interpolants de Lagrange aux points x_k. On peut alors intégrer exactement des fonctions polynomiales de degré $(2n-1)$. Dans le cas d'une dimension stochastique $m > 1$, les points et poids d'intégration sont obtenus par tensorisation des quadratures unidimensionnelles associées aux mesures dP_{ξ_i}

$$\mathbf{Q}_M = Q_n^{(1)} \otimes ... \otimes Q_n^{(m)} \tag{1.27}$$

où encore

$$\mathbf{Q}_M(\mathcal{J}) = \sum_{k_1=1}^{n} ... \sum_{k_m=1}^{n} \omega_{1,k_1}...\omega_{m,k_m}\mathcal{J}(\boldsymbol{u}(x_{1,k_1},...,x_{m,k_m})) \tag{1.28}$$

Le nombre de points d'intégration M est alors donné par $M = n^m$. La figure 1.3 présente différents exemples de quadrature de Gauss pour $m = 2$ et $n \in \{3, 6, 10\}$.[3]

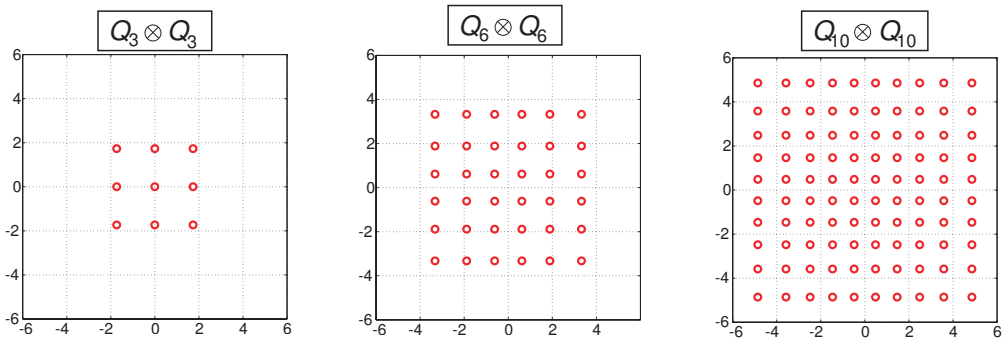


FIG. 1.3 – Exemples de quadrature de Gauss pour $m = 2$ et $n \in \{3, 6, 10\}$.

Cette méthode possède l'avantage d'intégrer précisément des fonctions régulières : plus ces fonctions sont régulières et plus la précision sera élevée. L'inconvénient de cette méthode est la croissance exponentielle du nombre de points d'intégration M avec l'augmentation de la dimension stochastique m.
En grande dimension stochastique, on peut alors utiliser des quadratures dites creuses [Smolyak 1963, Matthies et Keese 2005] qui permettent de limiter le nombre de points d'intégration. Avec ces méthodes, on obtient une croissance polynomiale de M avec la dimension stochastique m. Afin de réduire le nombre de points d'intégration, il sera préférable d'utiliser des quadratures imbriquées (Clenshaw-Curtis, Gauss-Patterson, etc.).

1.5.2 Méthodes fiabilistes

Les méthodes fiabilistes [Ditlevsen et Madsen 1996, Lemaire 2005] sont utilisées pour déterminer la probabilité de défaillance d'une structure lorsque les méthodes d'intégration directe deviennent trop coûteuses.
Soit $\boldsymbol{\xi}$ un vecteur aléatoire, regroupant l'ensemble des paramètres incertains du problème, dont la densité jointe de probabilité est $p_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$. On note $G(\mathbf{x})$ une fonction de performance, associée aux scénarios de défaillance, dont les valeurs négatives indiquent la défaillance de la structure. Le domaine de défaillance $D \subset \boldsymbol{\Theta}$ est défini par $D = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{\Theta} / G(\mathbf{x}) \leqslant 0\}$. La probabilité de défaillance d'une structure est alors définie par

$$P_f = \int_D p_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{1.29}$$

Une probabilité de défaillance est généralement liée à des événements de faible occurrence. Ainsi, on cherche à calculer des probabilités de l'ordre de 10^{-3} ou inférieures pour lesquelles les méthodes d'intégration directe ne sont plus adaptées. On utilise alors classiquement l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind β [Hasofer et Lind 1974] comme estimateur de la fiabilité. Des relations permettent ensuite d'estimer ou d'encadrer la probabilité de défaillance P_f.

[3] on notera qu'il est possible d'utiliser des ordres de quadrature n_i différents selon les dimensions. Dans ce cas $N = \prod_{i=1}^{m} n_i$

On distingue deux étapes pour l'estimation de la probabilité de défaillance. La première étape consiste à appliquer une transformation isoprobabiliste permettant de se ramener à des variables aléatoires de base $\boldsymbol{\xi}$ centrées, réduites et indépendantes. On considérera ici que cette étape a déjà été réalisée. Il existe plusieurs transformations possibles comme celles de Rosenblatt ou de Nataf. La transformation de Nataf n'utilise que les lois de probabilité marginales et la structure de corrélation des variables aléatoires, tandis que la transformation de Rosenblatt nécessite la connaissance de la loi complète.
La seconde étape consiste à calculer l'indice de fiabilité β. Dans l'espace gaussien centré réduit, l'indice de fiabilité est géométriquement défini comme la distance euclidienne entre l'origine et le domaine de défaillance D. L'indice β est alors défini par

$$\beta = \|\mathbf{x}^*\| \quad \text{où} \quad \mathbf{x}^* = \underset{\mathbf{x}\in D}{argmin}\|\mathbf{x}\|^2 \tag{1.30}$$

On doit alors résoudre un problème de minimisation dont le point solution, noté P^* et de coordonnées $\mathbf{x}^*$, est appelé point de défaillance le plus probable. Une fois l'indice β calculé, il existe plusieurs manières de calculer P_f :

- la méthode FORM pour *First Order Reliability Method* consiste à remplacer la fonction d'état limite par son hyper-plan tangent au point P^*. Le domaine de défaillance est donc approché par un demi-espace $\tilde{D}$ dont la probabilité s'exprime

$$P(\tilde{D}) = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \approx P_f \tag{1.31}$$

  où Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite dans le cas général.
- la méthode SORM pour *Second Order Reliability Method*, plus précise, consiste à approcher la géométrie de la fonction d'état limite au voisinage du point P^* par une paraboloïde dont les courbures principales sont notées $(\kappa_1, ..., \kappa_{m-1})$. La probabilité du domaine de défaillance approché $\tilde{D}$ est alors estimée par

$$P(\tilde{D}) = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1+\beta\kappa_i}} \approx P_f \tag{1.32}$$

Les méthodes fiabilistes permettent donc d'évaluer la probabilité de défaillance d'une structure. L'un des points importants dans les méthodes FORM/SORM est donc l'approximation de la surface d'état limite : si, pour beaucoup de problèmes de mécanique, les états limites associés peuvent être bien approchés par ce type de méthode, ces approximations peuvent se révéler nettement moins efficaces dans le cas de problèmes plus compliqués (domaine de défaillance non connexe, existence de plusieurs minima locaux du problème (1.30)).

1.5.3 Méthodes de développement en série

1.5.3.1 Développement de Taylor

On cherche ici à écrire la solution $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ du problème (1.19) sous la forme d'un développement autour de la moyenne de $\boldsymbol{\xi}$, notée $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\xi}}$

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{,j}(\xi_j - \mu_{\xi_j}) + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{,jk}(\xi_j - \mu_{\xi_j})(\xi_k - \mu_{\xi_k}) + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2) \tag{1.33}$$

où $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\xi}})$, $\mathbf{u}_{,j} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j}(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\xi}})$ et $\mathbf{u}_{,jk} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_j \partial \xi_k}(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\xi}})$. Le calcul de $\mathbf{u}$ nécessite de calculer les quantités $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_{,j}$ et $\mathbf{u}_{,jk}$. On effectue un développement analogue pour la matrice $\mathbf{A}$ et le second membre $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_{,j}(\xi_j - \mu_{\xi_j}) + \frac{1}{2}\mathbf{A}_{,jk}(\xi_j - \mu_{\xi_j})(\xi_k - \mu_{\xi_k}) + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2) \tag{1.34}$$

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_{,j}(\xi_j - \mu_{\xi_j}) + \frac{1}{2}\mathbf{b}_{,jk}(\xi_j - \mu_{\xi_j})(\xi_k - \mu_{\xi_k}) + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2) \tag{1.35}$$

Une fois les différents termes du développement calculés, on injecte les développements de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ dans l'équation à résoudre $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$

$$\begin{aligned}&(\mathbf{A}_0\ \mathbf{u}_0 - \mathbf{b}_0) + (\mathbf{A}_0\mathbf{u}_{,j} + \mathbf{A}_{,j}\mathbf{u}_0 - \mathbf{b}_{,j})(\xi_j - \boldsymbol{\mu}_{\xi_j}) + \\ &(\frac{1}{2}\mathbf{A}_0\mathbf{u}_{,jk} + \mathbf{A}_{,j}\mathbf{u}_{,k} + \frac{1}{2}\mathbf{A}_{,jk}\mathbf{u}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{b}_{,jk})(\xi_j - \boldsymbol{\mu}_{\xi_j})(\xi_k - \boldsymbol{\mu}_{\xi_k}) + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2) = 0\end{aligned} \tag{1.36}$$

On obtient alors l'écriture du développement de Taylor du second ordre en $\boldsymbol{\xi}$ d'un vecteur qui doit être nul. On doit alors nécessairement avoir la nullité des différentes termes du développement, ce qui s'écrit

$$\mathbf{A}_0\mathbf{u}_0 = \mathbf{b}_0 \tag{1.37}$$

$$\mathbf{A}_0\mathbf{u}_{,j} = \mathbf{b}_{,j} - \mathbf{A}_{,j}\mathbf{u}_0 \tag{1.38}$$

$$\mathbf{A}_0\mathbf{u}_{,jk} = \mathbf{b}_{,jk} - \mathbf{A}_{,j}\mathbf{u}_{,k} - \mathbf{A}_{,k}\mathbf{u}_{,j} - \mathbf{A}_{,jk}\mathbf{u}_0 \tag{1.39}$$

Les termes du développement de $\mathbf{u}$ peuvent alors être obtenus en résolvant successivement ces systèmes linéaires. On notera que dans toutes les équations, c'est la matrice $\mathbf{A}_0$ qui intervient dans le premier membre. Cette matrice peut être factorisée une seule fois afin de minimiser les coûts de calculs liés à la résolution de ces systèmes linéaires. $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ sont des quantités connues, et les termes de leur développement peuvent être estimés soit analytiquement (directement ou par un code de calcul formel), soit numériquement par un code de calcul. Toutefois, les gradients d'ordre élevé de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ sont difficiles à obtenir. La méthode est alors souvent limitée à l'ordre 2.
Cette méthode est classiquement utilisée pour estimer les premiers moments statistiques de la solution. Par exemple, la moyenne et la matrice de covariance s'écrivent

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{,jk}C_{\xi_j\xi_k} + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2) \tag{1.40}$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_{,j}\mathbf{u}_{,k}^T C_{\xi_j\xi_k} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{,j}\mathbf{u}_{,kl}^T + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2) \tag{1.41}$$

où $\tilde{\xi}_i = \xi_i - \mu_{\xi_i}$ et où $C_{\xi_j \xi_k}$ est la covariance des variables ξ_j et ξ_k. Les approximations du second ordre de ces quantités s'expriment alors

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}} \approx \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{,jk} C_{\xi_j \xi_k} \tag{1.42}$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathbf{u}} \approx \mathbf{u}_{,j} \mathbf{u}_{,k}^T C_{\xi_j \xi_k} \tag{1.43}$$

On notera que l'utilisation au second ordre de cette méthode conduit à de bonnes approximations des statistiques du second ordre de la solution. Cependant, les variations des paramètres aléatoires du modèle doivent rester relativement faibles. Une bonne représentation de la distribution dans le cas général n'est possible qu'en augmentant l'ordre d'approximation. Notons qu'avec une telle représentation analytique, les facteurs de sensibilité aux variables peuvent être déduits [Rguig et Schoefs 2005].

1.5.3.2 Décomposition de Neumann

On cherche ici à obtenir une approximation de la solution $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ en utilisant une décomposition en série de Neumann de l'inverse de la matrice aléatoire [Shinozuka et Yamakasi 1988]. L'opérateur $\mathbf{A}$ est décomposé sous la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \tag{1.44}$$

où la matrice $\mathbf{A}_0$ est déterministe et inversible. On pourra prendre classiquement $\mathbf{A}_0 = E(\mathbf{A})$. L'opérateur $\mathbf{A}$ peut encore s'écrire

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0(\mathbf{I} + \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_1) \tag{1.45}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité. On note $\mathbf{L} = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_1$. L'inverse de la matrice $\mathbf{A}$ s'écrit

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{A}_0^{-1} \tag{1.46}$$

La décomposition en série de Neumann de l'opérateur $(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}$ s'écrit

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathbf{L}^k \tag{1.47}$$

La solution du système $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ peut donc s'écrire sous la forme suivante

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathbf{L}^k \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{b} \tag{1.48}$$

La solution tronquée à l'ordre n s'écrit

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + ... + \mathbf{u}_n \tag{1.49}$$

où

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{u}_{k+1} = -\mathbf{L}\mathbf{u}_k = -\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{u}_k, \quad k > 0$$

Cette méthode est plus simple à mettre en oeuvre numériquement que la méthode de développement en série de Taylor. Cependant, ses coûts de calcul peuvent être très importants si on souhaite un développement d'ordre élevé de la solution.

1.5.4 Représentation sur des bases de fonctions

Dans toute la suite, on considère que la solution approchée $\boldsymbol{u}_{h,P}$ est cherchée dans l'espace $\mathcal{V}_{h,P} = \mathcal{U}_h \otimes \mathcal{S}_P$ défini par (1.23), où l'espace d'approximation $\mathcal{S}_P$ est défini à partir du chaos polynomial ou du chaos polynomial généralisé. Dans le cadre des éléments finis stochastiques spectraux, il existe différentes méthodes pour définir l'approximation dans $\mathcal{V}_{h,P}$. Dans les sections suivantes, nous détaillons certaines de ces méthodes : les méthodes de régression et de projection qui sont des techniques "non intrusives", et la méthode de Galerkin. Les méthodes "non intrusives" sont très attractives car elles ne requièrent que l'utilisation d'un code éléments finis déterministe, tandis que la méthode de Galerkin demande le développement d'un code, ou, tout du moins, l'adaptation d'un code existant.

1.5.4.1 Méthode de régression

La méthode de régression sur le chaos polynomial s'apparente aux méthodes de régression classiques pour la construction de surfaces de réponse [Berveiller *et al.* 2006]. Soit $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ la solution du problème semi-discrétisé (1.19). On cherche ici à déterminer une quantité d'intérêt $\mathcal{J}(\mathbf{u})$ déduite de $\mathbf{u}$. La méthode de régression consiste à définir une expression approchée de cette quantité sous la forme d'une décomposition sur le chaos polynomial [Berveiller *et al.* 2006]

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} \mathcal{J}_\alpha H_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \tag{1.50}$$

L'ensemble des coefficients $\{\mathcal{J}_{\alpha_1}, ..., \mathcal{J}_{\alpha_P}\}$ de la décomposition de $\mathcal{J}$ sont alors définis par une méthode de régression. On suppose que la solution $\boldsymbol{u}_h$ a été calculée pour un ensemble de M réalisations $\boldsymbol{\xi}_k$ en résolvant l'ensemble des problèmes

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}_k)\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_k) = \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}_k) \quad k = 1, ..., M \tag{1.51}$$

On peut ainsi déduire l'ensemble des quantités d'intérêt associées $\mathcal{J}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_k))$. Les coefficients sont alors définis par

$$\{\mathcal{J}_{\alpha_1}, ..., \mathcal{J}_{\alpha_P}\} = \underset{\mathcal{J}_{\alpha_1},...,\mathcal{J}_{\alpha_P}}{argmin} \sum_{k=1}^{M} \omega_k \|\mathcal{J}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_k)) - \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} \mathcal{J}_\alpha H_\alpha(\boldsymbol{\xi}_k)\|^2 \tag{1.52}$$

On considère le cas où la quantité d'intérêt est un scalaire et on note $\mathbf{J} = (\mathcal{J}_{\alpha_1}, ..., \mathcal{J}_{\alpha_P})^T$ le vecteur des composantes. Ce vecteur est alors solution d'un système linéaire

$$\mathbf{GJ} = \mathbf{g} \tag{1.53}$$

où

$$(\mathbf{G})_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \omega_k H_{\alpha_i}(\boldsymbol{\xi}_k) H_{\alpha_j}(\boldsymbol{\xi}_k) \quad (\mathbf{g})_j = \sum_{k=1}^{N} H_{\alpha_j}(\boldsymbol{\xi}_k) \mathcal{J}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_k)) \omega_k$$

L'utilisation de la méthode de régression nécessite N calculs déterministes indépendants, donc facilement parallélisables, pour évaluer les quantités $\{\mathcal{J}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_k))\}_{k=1}^N$. Cette méthode est alors dite non intrusive puisqu'elle ne demande que l'utilisation d'un code déterministe. Le point délicat de cette approche réside dans le choix du plan d'expérience, *i.e.* le choix des points $\{\boldsymbol{\xi}_k\}_{k=1}^N$, ainsi que dans le choix des poids $\{\omega_k\}_{k=1}^N$. En effet, un mauvais choix de ces points, ou un nombre insuffisant de points, peut conduire à un système linéaire singulier ou, du moins, possédant un mauvais conditionnement. Différents choix ont été proposés comme les tirages pseudo-aléatoires, les tirages quasi-aléatoires, ou les quadratures de Gauss complètes ou creuses (*c.f.* section 1.5.1).

1.5.4.2 Méthode de projection

La méthode de projection consiste à définir la solution approchée comme la projection sur $\mathcal{S}_P$ de la solution semi-discrétisée [Le Maître *et al.* 2001 - 2002, Reagan *et al.* 2003, Keese et Mathhies 2003]. L'approximation $\mathbf{u}_P = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} \mathbf{u}_\alpha H_\alpha$ est alors définie par

$$\ll \mathbf{u}_P, \mathbf{v}_P \gg_{L^2} = \ll \mathbf{u}, \mathbf{v}_P \gg_{L^2} \quad \forall \mathbf{v}_P \in \mathcal{S}_P \otimes \mathbb{R}^N \tag{1.54}$$

au sens du produit scalaire suivant

$$\ll \mathbf{u}_P, \mathbf{v}_P \gg_{L^2} = E(\mathbf{v}_P^T \mathbf{u}_P) \quad \forall \mathbf{v}_P \in \mathcal{S}_P \otimes \mathbb{R}^N \tag{1.55}$$

L'équation (1.54) est équivalente à la définition suivante des composantes de l'approximation

$$\mathbf{u}_\alpha = \int_{\boldsymbol{\Theta}} H_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = E(H_\alpha \mathbf{u}) \tag{1.56}$$

L'espérance mathématique peut être calculée par une intégration numérique adaptée au niveau stochastique

$$\mathbf{u}_\alpha \approx \sum_{k=1}^{M} \omega_k H_\alpha(\boldsymbol{\xi}_k) \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_k), \tag{1.57}$$

où les $\boldsymbol{\xi}_k$ sont les points d'intégration (événements élémentaires particuliers) et les ω_k sont les poids d'intégration associés. Différentes méthodes d'intégration sont envisageables (*c.f.* section 1.5.1). Pour chaque point d'intégration, le calcul de $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_k) = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_k)\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}_k)$ nécessite la résolution d'un problème déterministe. Comme elle ne nécessite que l'utilisation d'un code déterministe, la méthode de projection

est dite non intrusive. Les calculs peuvent alors être simplement parallélisés. Toutefois, les coûts de calculs sont généralement élevés car la méthode peut demander un grand nombre de points d'intégration afin de bien calculer les coefficients de la décomposition. Des techniques basées sur des quadratures creuses [Smolyak 1963] sont utilisables afin de réduire le nombre de points d'intégration [Matthies et Keese 2005].

1.5.4.3 Méthode de Galerkin

L'approximation de Galerkin consiste à injecter l'espace d'approximation $\mathcal{V}_{h,P}$ dans la formulation variationnelle (1.12). La solution approchée $\boldsymbol{u}_{h,P}$ est donc solution du problème suivant

$$A(\boldsymbol{u}_{h,P}, \boldsymbol{v}_{h,P}) = L(\boldsymbol{v}_{h,P}) \quad \forall \boldsymbol{v}_{h,P} \in \mathcal{V}_{h,P} \tag{1.58}$$

Si l'opérateur A est une forme bilinéaire symétrique coercive, alors l'approximation de Galerkin peut être vue comme une projection au sens de l'opérateur

$$\boldsymbol{u}_{h,P} = \underset{\boldsymbol{v}_{h,P} \in \mathcal{V}_{h,P}}{argmin} \|\boldsymbol{v}_{h,P} - \boldsymbol{u}\|_A \tag{1.59}$$

où $\boldsymbol{u}$ est la solution exacte du problème et $\|\cdot\|_A$ la norme induite par A. Les coefficients de l'approximation de Galerkin $\boldsymbol{u}_{h,P} \in \mathcal{V}_{h,P}$ sont alors solutions du système d'équations suivant

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} E(H_\beta \mathbf{A} H_\alpha) \mathbf{u}_\alpha = E(\mathbf{b} H_\beta) \quad \forall \beta \in \mathcal{I}_P \tag{1.60}$$

où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ sont respectivement la matrice éléments finis et le vecteur chargement aléatoires. La première étape consiste à décomposer ces quantités sur une base orthonormée $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ de $\mathcal{S} = L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}})$

$$\mathbf{A} = \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_A} \mathbf{A}_\gamma H_\gamma \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_\gamma = E(\mathbf{A} H_\gamma) \tag{1.61}$$

$$\mathbf{b} = \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_b} \mathbf{b}_\gamma H_\gamma \quad \text{avec} \quad \mathbf{b}_\gamma = E(\mathbf{b} H_\gamma) \tag{1.62}$$

Par orthonormalité des fonctions de base, les coefficients de la décomposition de $\mathbf{b}$ conduisent directement aux termes de droite du système (1.60). Ainsi, ces coefficients doivent être seulement calculés pour les indices $\mathcal{I}_b = \mathcal{I}_P$. Dans le système (1.60), les termes du membre de gauche peuvent s'écrire

$$E(\mathbf{A} H_\alpha H_\beta) = \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_A} \mathbf{A}_\gamma E(H_\gamma H_\alpha H_\beta) \tag{1.63}$$

Lorsqu'on utilise des fonctions de base $\{H_\alpha\}$ polynomiales, ou polynomiales par morceaux, si $\mathcal{I}_P$ correspond aux polynômes de degré inférieur ou égal p, les coefficients $\mathbf{A}_\gamma$ doivent être seulement calculés pour l'ensemble des indices $\mathcal{I}_A$ correspondant aux fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $2p$, qui est le degré maximum du produit des polynômes H_α et H_β. Ainsi, $E(H_\gamma H_\beta H_\alpha) = 0$ pour $\gamma \in (\mathcal{I}_P \backslash \mathcal{I}_A)$. Avec ce choix, l'approximation de $\mathbf{A}$ n'a pas d'influence sur la solution du problème discrétisé (1.60). On notera que, pour certains problèmes, si le degré p utilisé est assez élevé, on pourra utiliser un ordre moins élevé que $2p$ pour la décomposition (1.61) : la matrice de rigidité $\mathbf{A}$ sera alors approchée mais elle

restera assez bien décomposée pour obtenir une bonne solution. Dans tous les cas, quel que soit l'ordre de décomposition choisi pour $\mathbf{A}$, on doit calculer efficacement les quantités $E(H_\gamma H_\alpha H_\beta)$. Ces quantités dépendent seulement de la base stochastique choisie et peuvent être facilement pré-calculées. De plus, si on choisit comme base d'approximation le chaos polynomial ou le chaos polynomial généralisé, une expression analytique de ces quantités est parfois disponible. Finalement, en notant $\mathcal{I}_P = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_P\}$ et $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{\alpha_1}^T \ldots \mathbf{u}_{\alpha_P}^T)^T \in \mathbb{R}^{N \times P}$, le système (1.60) peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations par bloc

$$\mathbf{Au} := \begin{pmatrix} E(\mathbf{A}H_{\alpha_1}H_{\alpha_P}) & \ldots & E(\mathbf{A}H_{\alpha_1}H_{\alpha_P}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mathbf{A}H_{\alpha_P}H_{\alpha_1}) & \ldots & E(\mathbf{A}H_{\alpha_P}H_{\alpha_P}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\alpha_1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{\alpha_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\mathbf{b}H_{\alpha_1}) \\ \vdots \\ E(\mathbf{b}H_{\alpha_P}) \end{pmatrix} := \mathbf{b} \tag{1.64}$$

On note que le système (1.64) est un système linéaire de grande taille $P \times N$ où P est le nombre de fonctions de base stochastique et N le nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis. Une résolution directe du système (1.64) est alors prohibitive. Pour le résoudre, on peut utiliser des solveurs itératifs tels qu'une méthode de gradient conjugué préconditionné pour des problèmes symétriques [Demmel 1997, Ghanem 1999, Pellissetti et Ghanem 2000, Keese et Mathhies 2005]. Ce type de solveur ne nécessite que des produits matrice-vecteur et exploite bien la structure parfois creuse du système. Ce caractère creux est dû à la structure creuse de la matrice éléments finis associée au problème déterministe. Il vient également du fait qu'un grand nombre de produits $E(H_\gamma H_\beta H_\alpha)$ sont nuls (propriétés d'orthogonalité des fonctions de base de $\mathcal{S}_P$).

Afin d'améliorer le conditionnement de la matrice $\mathbf{A}$ et donc la convergence des solveurs itératifs, un préconditionneur $\mathbf{P}$ doit être utilisé. On remplace alors le système original $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ par

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Au} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} \tag{1.65}$$

où le conditionnement de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$ est plus faible que celui de $\mathbf{A}$. Un choix simple possible pour le préconditionneur $\mathbf{P}$ consiste à prendre la matrice bloc-diagonale suivante basée sur l'opérateur moyen $E(\mathbf{A})$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} E(\mathbf{A}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & E(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \tag{1.66}$$

Ce choix se justifie par le fait que la matrice assemblée est à diagonale dominante quand les variabilités sont faibles et que le préconditionneur tend à être optimal pour de faibles variances des variables aléatoires du problème.

Les avantages de l'approximation de Galerkin sont multiples. Elle permet une bonne maîtrise de l'approximation en utilisant des estimateurs d'erreur *a priori* et *a posteriori* [Frauenfelder *et al.* 2005, Ladevèze et Florentin 2006, Mathelin et Maître 2007]. Elle possède également une bonne stabilité vis à vis des erreurs d'intégration.

En revanche, son utilisation demande de créer ou d'adapter un code de calcul éléments finis. De plus, la résolution de problèmes en grande dimension stochastique ($m \geqslant 50$ par exemple) conduit à des coûts de calcul élevés mais également à des problèmes de stockage mémoire. Récemment, des méthodes de

résolution alternatives ont été proposées : le but est de diminuer la taille du problème stochastique afin de réduire les coûts de calcul et mémoire [Matthies et Keese 2005, Ghanem *et al.* 2007, Sachdeva *et al.* 2006, Nouy 2007 - 2008].

1.6 Cas particulier des problèmes à géométrie aléatoire

Dans cette section, nous allons présenter le cas particulier d'une géométrie aléatoire. Le mémoire se focalisera ensuite sur la résolution de ce type de problème. Le but principal de ces différentes méthodes est de s'affranchir du remaillage, coûteux en temps de calcul. Nous présentons tout d'abord la formulation du problème dans le cas spécifique d'une géométrie aléatoire, puis, nous expliciterons plusieurs méthodes permettant de le résoudre en précisant les points forts et faibles de chacune d'entre elles.

1.6.1 Formulation du problème

Nous reprenons le problème déterministe donné par l'équation (1.7) et nous modifions le problème stochastique en considérant, ici, que la structure occupe un domaine Ω aléatoire. Nous considérons également, comme précédemment, que les propriétés matérielles et les chargements peuvent être aléatoires. Nous travaillons toujours dans l'espace de probabilité $(\boldsymbol{\Theta}, \mathcal{B}, P_{\boldsymbol{\xi}})$ permettant de représenter le contenu probabiliste du problème. Le domaine est une variable aléatoire $\Omega : \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Theta} \rightarrow \Omega(\boldsymbol{\xi}) \subset \mathbb{R}^d$, où d est la dimension spatiale du problème. $\Omega(\boldsymbol{\xi})$ représente une réalisation du domaine. La figure 1.4 présente deux réalisations du domaine aléatoire et des parties de sa frontière.

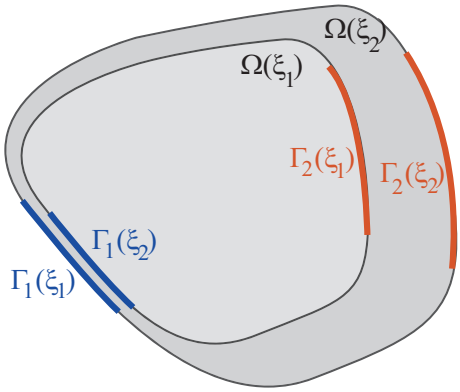


FIG. 1.4 – Exemples de deux réalisations du domaine aléatoire $\Omega(\boldsymbol{\xi})$ et des parties $\Gamma_1(\boldsymbol{\xi})$ et $\Gamma_2(\boldsymbol{\xi})$ de sa frontière.

Lorsque l'on considère que la géométrie du problème est aléatoire, le problème modèle est modifié et il est nécessaire de reprendre sa formulation. Tout d'abord, la forme forte du problème stochastique s'écrit : trouver les champs aléatoires $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ qui vérifient presque partout et presque sûrement les équations définies en (1.7).
Nous introduisons ensuite la forme faible du problème au niveau spatial : trouver $\boldsymbol{u}$ tel que $\forall \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{u}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{U}(\boldsymbol{\xi}) = \{\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega(\boldsymbol{\xi})))^d; \boldsymbol{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1(\boldsymbol{\xi})\}$, et tel que l'on ait presque sûrement

$$a(\boldsymbol{u}(\cdot, \boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}) = b(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{U}(\boldsymbol{\xi}) \tag{1.67}$$

Dans le cas d'un problème défini sur un domaine aléatoire, la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot;\boldsymbol{\xi})$ et la forme linéaire $b(\cdot;\boldsymbol{\xi})$ s'écrivent

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v};\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\, dx, \tag{1.68}$$

$$b(\boldsymbol{v};\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\, dx + \int_{\Gamma_2(\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\, ds \tag{1.69}$$

On remarque que, naturellement, les domaines d'intégration intervenant dans les expressions de $a(\cdot,\cdot;\boldsymbol{\xi})$ et $b(\cdot;\boldsymbol{\xi})$ sont aléatoires.
La formulation variationnelle complète du problème s'écrit alors : trouver $\boldsymbol{u}\in\mathcal{V}$ tel que

$$A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v}\in\mathcal{V} \tag{1.70}$$

L'expression de l'espace fonctionnel $\mathcal{V}$ est la même que celle donnée dans l'équation (1.11) et les expressions des formes bilinéaire A et linéaire L sont données dans les équations (1.13) et (1.14). Cependant $\mathcal{V}$ n'est plus un espace défini à partir d'un produit tensoriel d'espaces puisque l'espace $\mathcal{U}(\boldsymbol{\xi})$ dépend clairement de la réalisation $\boldsymbol{\xi}$. On notera que, d'un point de vue mathématique, ce type de problème défini sur un domaine aléatoire n'a été que peu étudié. Cependant, certains résultats sont donnés dans [Babuska et Chleboun 2002 - 2003] avec une vision non probabiliste du problème.
Le principal problème est alors de pouvoir définir un espace d'approximation pour la résolution du problème (1.70) quand le domaine est aléatoire. L'extension des méthodes éléments finis stochastiques classiques n'est pas possible car l'espace fonctionnel $\mathcal{V}$ n'est plus défini par un produit tensoriel d'espaces. Dans la suite, nous évoquerons quelques méthodes permettant de résoudre ce problème. Pour chacune de ces méthodes, les avantages et les inconvénients seront soulignés.

1.6.2 Méthodes non intrusives avec remaillages

Une première manière de résoudre un problème mécanique défini sur un domaine aléatoire est d'utiliser une méthode non intrusive avec remaillages. On rappelle que l'intérêt des méthodes non intrusives, comme les simulations de Monte-Carlo ou la méthode de projection sur bases fonctionnelles, est de résoudre un ensemble de problèmes déterministes pour des événements élémentaires particuliers $\boldsymbol{\xi}_k\in\boldsymbol{\Theta}$. On rappelle que le choix de ces points est uniquement lié à la méthode utilisée. Ces méthodes ont donc l'avantage de ne demander que l'utilisation d'un code éléments finis classique. Pour chaque calcul, un nouveau maillage éléments finis est alors créé.
Soit $\boldsymbol{\xi}_k\in\boldsymbol{\Theta}$ une réalisation, on introduit un nouveau maillage éléments finis $\mathcal{T}_h(\boldsymbol{\xi}_k)$ du domaine $\Omega(\boldsymbol{\xi}_k)$. On associe à ce maillage un espace d'approximation éléments finis $\mathcal{U}_h(\boldsymbol{\xi}_k)\subset\mathcal{U}(\boldsymbol{\xi}_k)$ défini par

$$\mathcal{U}_h(\boldsymbol{\xi}_k) = \{\boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N(\boldsymbol{\xi}_k)} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_k)v_i,\ v_i\in\mathbb{R}\}$$

Le maillage, et, naturellement, les fonctions d'interpolation $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_k)\in\mathcal{U}_h(\boldsymbol{\xi}_k)$, dépendent alors de l'événement élémentaire $\boldsymbol{\xi}_k$.
Les inconvénients de ces méthodes sont nombreux. Tout d'abord, elles demandent un nombre important

de calculs déterministes : pour chaque calcul, on doit remailler le domaine, assembler et résoudre un problème éléments finis similaire à celui donné par l'équation (1.8). Les temps de calcul sont donc très importants. Un autre inconvénient vient du fait que les réalisations $\boldsymbol{u}(\cdot,\boldsymbol{\xi}_k) \in \mathcal{U}_h(\boldsymbol{\xi}_k)$ sont définies sur des maillages (et donc sur des espaces approximations) différents. On ne peut donc pas obtenir d'informations sur les réalisations qui n'ont pas été calculées. De plus, une caractérisation probabiliste de la solution *a posteriori* est trop coûteuse puisqu'il faut conserver en mémoire tous les maillages et toutes les solutions éléments finis calculées.
Une possibilité est alors de se focaliser sur une quantité d'intérêt qui soit indépendante de la géométrie et donc du maillage (par exemple le déplacement ou la contrainte maximum dans une direction). Notons $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{\xi}))$ cette quantité d'intérêt et $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{\xi}_k))$ ses réalisations calculées par le code déterministe. Avec la méthode des simulations de Monte-Carlo, ces réalisations permettent d'évaluer certaines statistiques de $\mathcal{J}$. Dans le cas de la méthode de projection (*c.f.* section 1.5.4.2), ces réalisations correspondent aux points d'intégration stochastique utilisés pour calculer la décomposition de $\mathcal{J}$ sur une base fonctionnelle appropriée : $\mathcal{J} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \mathcal{J}_\alpha H_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ où

$$\mathcal{J}_\alpha = E(H_\alpha \mathcal{J}(\boldsymbol{u}_h)) \approx \sum_k \omega_k H_\alpha(\boldsymbol{\xi}_k)\mathcal{J}(\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{\xi}_k)) \tag{1.71}$$

Cela nécessite de pouvoir définir *a priori* ces quantités d'intérêt sans connaître la solution.
Les inconvénients des méthodes non-intrusives viennent de la nécessité de remailler le domaine pour chacune des réalisations nécessaires au calcul de l'intégration stochastique. Les méthodes que nous présentons dans la suite ont donc toutes pour but de s'affranchir de ces remaillages et de pouvoir ainsi obtenir une représentation complète de la solution.

1.6.3 Approximation éléments finis sur maillage aléatoire

Nous présentons maintenant une seconde approche introduisant une transformation aléatoire entre un domaine de référence déterministe et le domaine aléatoire $\Omega(\boldsymbol{\xi})$. L'idée est de définir un espace d'approximation éléments finis classique sur ce domaine de référence [Xiu et Tartakovsky 2006, Tartakovsky et Xiu 2006].

1.6.3.1 Description de la géométrie par une transformation aléatoire

La première étape est d'introduire un domaine déterministe de référence $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ et de supposer qu'il existe une transformation continue $\boldsymbol{T}(\cdot,\boldsymbol{\xi})$ entre Ω^0 et la réalisation $\Omega(\boldsymbol{\xi})$ du domaine aléatoire : $\boldsymbol{T}(\cdot,\boldsymbol{\xi}) : \boldsymbol{x}^0 \in \Omega^0 \mapsto \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\xi}) \in \Omega(\boldsymbol{\xi})$. On note $\boldsymbol{T}^{-1}(\cdot,\boldsymbol{\xi})$ la transformation inverse. Ainsi, le domaine de référence Ω^0 et la transformation $\boldsymbol{T}$ permettent de décrire le domaine aléatoire Ω. On suppose que les parties $\Gamma_i(\boldsymbol{\xi})$ de la frontière $\partial\Omega(\boldsymbol{\xi})$ sont les images par la transformation $\boldsymbol{T}(\cdot,\boldsymbol{\xi})$ des parties complémentaires Γ_i^0 de $\partial\Omega^0$. On note $\boldsymbol{T}_{|i}$ la restriction de $\boldsymbol{T}$ à Γ_i^0. Dans [Xiu et Tartakovsky 2006], la transformation aléatoire $\boldsymbol{T}$ est construite à partir des solutions des équations suivantes

$$\Delta_{\boldsymbol{x}^0}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \text{sur } \Omega^0 \times \boldsymbol{\Theta} \tag{1.72}$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{g}_i(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\xi}) \quad \text{sur } \Gamma_i^0 \times \boldsymbol{\Theta} \tag{1.73}$$

où $\Delta_{\boldsymbol{x}^0}$ désigne le laplacien vectoriel par rapport à $\boldsymbol{x}^0$ et où les $\mathbf{g}_i$ sont des fonctions connues paramétrant la frontière aléatoire.

1.6.3.2 Construction de l'espace d'approximation

Afin de définir l'approximation, on introduit un maillage éléments finis fixe $\mathcal{T}_h^0$ de domaine de référence Ω^0. Ainsi, on définit l'espace d'approximation suivant

$$\mathcal{U}_h^0 = \{\boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_i^0(\boldsymbol{x}^0) v_i,\ v_i \in \mathbb{R}\} \tag{1.74}$$

où les $\boldsymbol{\varphi}_i^0 \in \mathcal{U}^0 = \{\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega^0))^d; \boldsymbol{v} = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1^0\}$ sont les fonctions d'interpolation associées au maillage $\mathcal{T}_h^0$. L'espace d'approximation $\mathcal{U}_h^0$ étant indépendant des événements élémentaires, il est possible d'introduire un espace d'approximation sous forme de produit tensoriel : $\mathcal{V}_{h,P}^0 \cong \mathcal{S}_P \otimes \mathcal{U}_h^0$. Un sous-espace d'approximation $\mathcal{V}_{h,P}$ de $\mathcal{V}$ est alors défini par une transformation adaptée des fonctions appartenant à $\mathcal{V}_{h,P}^0$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{h,P} &= \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{\xi}),\ \boldsymbol{v}^0 \in \mathcal{V}_{h,P}^0\} \\ &= \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) v_i(\boldsymbol{\xi}), v_i(\boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{S}_P\} \end{aligned} \tag{1.75}$$

où $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}_i^0(\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))$. L'image de $\mathcal{T}_h^0$ par la transformation $\boldsymbol{T}(\cdot,\boldsymbol{\xi})$ est un maillage de $\Omega(\boldsymbol{\xi})$, noté $\mathcal{T}_h(\boldsymbol{\xi})$, qui peut être considéré comme un maillage aléatoire. La figure 1.5 présente l'image $K(\boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{T}_h(\boldsymbol{\xi})$ d'un élément $K^0 \in \mathcal{T}_h^0$ par $\boldsymbol{T}(\cdot,\boldsymbol{\xi})$.

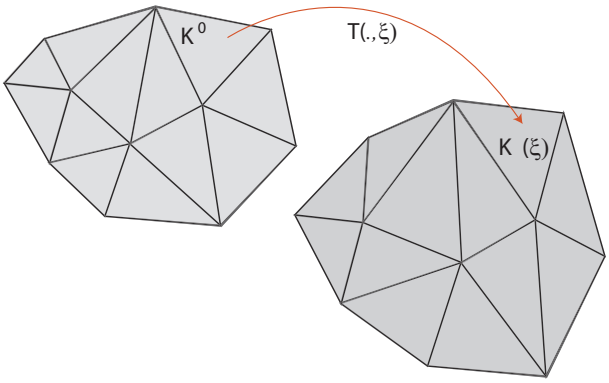


FIG. 1.5 – Transformation aléatoire définie sur un maillage déterministe

1.6.3.3 Définition et construction de l'approximation

L'approximation $\boldsymbol{u}_{h,P} \in \mathcal{V}_{h,P}$ peut s'écrire $\boldsymbol{u}_{h,P} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$, avec $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} \mathbf{u}_\alpha H_\alpha(\boldsymbol{\xi})$. Pour la définition de l'approximation, on utilise l'approximation de Galerkin qui consiste à résoudre le problème (1.58). Bien que l'espace d'approximation ne soit pas défini par un produit tensoriel d'espaces, les coefficients $\mathbf{u}_\alpha \in \mathbb{R}^N$ sont toujours définis par le système d'équations (1.60), où les composantes de

la matrice aléatoire $\mathbf{A}$ et du vecteur aléatoire $\mathbf{b}$ peuvent être écrites comme des intégrales sur le domaine de référence. Pour toute fonction $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$, avec $\boldsymbol{x} \in \Omega(\boldsymbol{\xi})$, on note $f^0(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{\xi})$ la fonction correspondante définie sur $\Omega^0 \times \boldsymbol{\Theta}$. Ainsi, les composantes de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ s'écrivent

$$(\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}))_{ij} = a(\boldsymbol{\varphi}_j,\boldsymbol{\varphi}_i;\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega^0} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_i^0) : \boldsymbol{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_j^0)\, J^0\, dx^0 \tag{1.76}$$

$$(\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}))_i = b(\boldsymbol{\varphi}_i;\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega^0} \boldsymbol{\varphi}_i^0 \cdot \boldsymbol{f}^0\, J^0\, dx^0 + \int_{\Gamma_2^0} \boldsymbol{\varphi}_i^0 \cdot \boldsymbol{F}^0\, J_2^0\, ds^0 \tag{1.77}$$

où J^0 et J_2^0 sont respectivement les jacobiens des transformations $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}_{|2}$. Dans l'équation (1.76), les déformations peuvent être écrites

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_j^0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j^0}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j^0}{\partial \boldsymbol{x}}^T\right), \quad \text{avec } \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j^0}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j^0}{\partial \boldsymbol{x}^0} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}^0}\right)^{-1}$$

L'aléa sur la géométrie est alors uniquement porté par les transformations $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}_{|2}$ et leurs jacobiens. Cependant, l'intégration des termes de gauche et de droite dans l'équation (1.60) n'est pas aisée et doit être réalisée avec soin. Elle sera facilitée si l'on dispose d'une représentation stochastique explicite des transformations aléatoires.

1.6.3.4 Avantages et inconvénients de la méthode

Cette méthode possède donc l'avantage de ne pas demander de remaillage. De plus, elle permet d'obtenir la description complète de la solution stochastique. Cependant quelques inconvénients apparaissent. Tout d'abord, la construction de la transformation $\boldsymbol{T}$ n'est pas triviale et demande le développement de techniques numériques dédiées [Thompson *et al.* 1985, Xiu et Tartakovsky 2006]. Dans [Tartakovsky et Xiu 2006] on trouve des descriptions analytiques de cette transformation pour un problème de transport dans un fluide en écoulement (problème d'équations aux dérivées partielles stochastiques parabolique). De plus, ces méthodes ne permettent pas de traiter des problèmes définis sur un domaine aléatoire complexe. Le cas de variables aléatoires avec des plages de variation importantes peut éventuellement conduire à un problème mal posé (dégénérescence des éléments aléatoires). Enfin, l'espace d'approximation n'étant pas issu d'un produit tensoriel d'espaces, un post-traitement simple du vecteur aléatoire $\mathbf{u}$ ne donnera pas une information physique : par exemple, le calcul de $E(\mathbf{u})$ permet de calculer l'espérance de $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\xi})$ mais pas l'espérance du champ de déplacement physique $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ en un point particulier $\boldsymbol{x}$.

1.6.4 Méthode de perturbation de la géométrie

Dans cette section, la méthode utilisée est basée sur le développement en série de Taylor de la solution (*c.f.* section 1.5.3.1). La méthode présentée ici est celle proposée dans [Van den Nieuwenhoff et Coyette 2003]. Les auteurs s'intéressent à l'analyse modale de structures en présence de paramètres d'entrée incertains. Dans cette étude, ces paramètres incertains sont les paramètres matériau mais également géométriques. Nous choisissons de présenter cette méthode dans le cadre de notre problème modèle et non pour un problème de dynamique. La méthode permettant de décrire la géométrie aléatoire est appelée "approche par dérivée matérielle" (*material derivative approach*).

1.6.4.1 Représentation de la géométrie : approche par dérivée matérielle

On considère que l'aléa sur la géométrie est représenté par une seule variable aléatoire ξ dont la moyenne est notée μ_ξ. L'approche par dérivée matérielle consiste à définir une relation linéaire entre la géométrie moyenne notée Ω^0 et une réalisation de la géométrie aléatoire $\Omega(\xi)$. La transformation $\boldsymbol{T}(\cdot,\xi)$ utilisée ici est définie par

$$\boldsymbol{x}(\xi) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^0,\xi) = \boldsymbol{x}^0 + (\xi - \mu_\xi)\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^0) \tag{1.78}$$

où $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^0)$ est un champ de vitesse déterministe. On notera $\boldsymbol{T}_{|i}$ la restriction de $\boldsymbol{T}$ aux parties complémentaires Γ_i^0 de la frontière $\partial\Omega^0$.
Pour caractériser la géométrie aléatoire, le point clef est de définir le champ de vitesse $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^0)$. Si le problème possède une géométrie simple et s'il est caractérisé par une seule variable aléatoire (longueur d'un domaine rectangulaire, rayon d'un cercle, etc.), le champ de vitesse peut être obtenu avec des hypothèses cinématiques élémentaires. Cette méthode n'est cependant plus applicable pour des problèmes à géométries plus complexes. Le champ $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^0)$ n'est souvent connu que sur la frontière du domaine. Ainsi, pour des problèmes où il est nécessaire de connaître le champ de vitesse pour des points intérieurs du domaine, il faut déterminer $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^0)$ sur tout le domaine. Pour ce type de problème, les auteurs proposent de résoudre un problème de statique avec comme conditions aux limites de Dirichlet le champ $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^0)$. Cette méthode est équivalente à la construction de la transformation aléatoire donnée par les équations (1.72) et (1.73). On notera que dans [Van den Nieuwenhoff et Coyette 2003], seul le cas d'une géométrie simple a été étudié. Avec cette méthode, la paramétrisation de la géométrie n'est pas unique et différents champs de vitesse peuvent être utilisés. Ainsi, l'influence de la représentation de la géométrie peut et doit être étudiée afin de maîtriser les résultats.

1.6.4.2 Construction de l'approximation

Pour la construction de l'approximation, on utilise ici un développement en série de Taylor à l'ordre 1 (*c.f.* section 1.5.3.1). Pour définir l'approximation, on introduit un maillage $\mathcal{T}_h^0$ du domaine moyen Ω^0. L'espace d'approximation est donc identique à celui donné par (1.74). Le problème à résoudre est du type $\mathbf{A}(\xi)\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{b}(\xi)$. Le développement en série de Taylor du premier ordre donne

$$\mathbf{u}(\xi) \approx \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{,\xi}(\xi - \mu_\xi) \tag{1.79}$$

$$\mathbf{A}(\xi) \approx \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_{,\xi}(\xi - \mu_\xi) \tag{1.80}$$

$$\mathbf{b}(\xi) \approx \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_{,\xi}(\xi - \mu_\xi) \tag{1.81}$$

où $\mathbf{u}(\mu_\xi) = \mathbf{u}_0$, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi}(\mu_\xi) = \mathbf{u}_{,\xi}$, $\mathbf{A}(\mu_\xi) = \mathbf{A}_0$, $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}(\mu_\xi) = \mathbf{A}_{,\xi}$ et où $\mathbf{b}(\mu_\xi) = \mathbf{b}_0$, $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \xi}(\mu_\xi) = \mathbf{b}_{,\xi}$. La résolution du problème nécessite le calcul des termes $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_{,\xi}$ et $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_{,\xi}$. Ici, $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{b}_0$ sont respectivement la matrice et le vecteur éléments finis classiques associés au problème sur le domaine Ω^0 déterministe. En notant respectivement J^0 et J^2 les jacobiens des transformations $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}_{|2}$, les expressions des composantes de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ sont identiques à celles données par les équations (1.76) et (1.77). L'aléa est alors porté par les déformations et les jacobiens des transformations. Les composantes de la matrice $\mathbf{A}_{,\xi}$

et du vecteur $\mathbf{b}_{,\xi}$ sont alors données par

$$\frac{\partial(\mathbf{A}(\xi))_{ij}}{\partial\xi} = \int_{\Omega^0} \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}(\varphi_i^0)}{\partial\xi} : \boldsymbol{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\varphi_j^0) J^0 + \boldsymbol{\varepsilon}(\varphi_i^0) : \boldsymbol{C}^0 : \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}(\varphi_j^0)}{\partial\xi} J^0 \right.$$
$$\left. + \boldsymbol{\varepsilon}(\varphi_i^0) : \boldsymbol{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\varphi_j^0) \frac{\partial J^0}{\partial\xi} \right) d\boldsymbol{x}^0 \tag{1.82}$$

et

$$\frac{\partial(\mathbf{b}(\xi))_i}{\partial\xi} = \int_{\Omega^0} \varphi_i^0 \cdot \boldsymbol{f}^0 \frac{\partial J^0}{\partial\xi} d\boldsymbol{x}^0 + \int_{\Gamma_2^0} \varphi_i^0 \cdot \boldsymbol{F}^0 \frac{\partial J^2}{\partial\xi} ds^0 \tag{1.83}$$

Les termes du développement en $\mathbf{u}$ sont alors obtenus en résolvant successivement les systèmes linéaires donnés par les équations (1.37) et (1.38). La moyenne et la covariance de la solution peuvent ensuite être déterminées par

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}} \approx \mathbf{u}_0 \tag{1.84}$$
$$\mathbf{C}_{\mathbf{u}} \approx \mathbf{u}_{,\xi} \mathbf{u}_{,\xi}^T v_\xi \tag{1.85}$$

où v_ξ est la variance de la variable ξ.

1.6.4.3 Avantages et inconvénients de l'approche

L'approche par dérivée matérielle permet donc d'étudier la sensibilité de la réponse d'un problème défini sur un domaine aléatoire sans avoir à effectuer de remaillage. Cependant plusieurs inconvénients limitent l'utilisation de cette approche. Tout d'abord, avec le développement en série de Taylor, les variations des variables aléatoires doivent rester faibles. De plus la paramétrisation de la géométrie aléatoire peut poser des problèmes dans le cas de géométries complexes.

1.6.5 Approche avec reformulation sur un domaine fictif

La dernière approche que nous allons détailler est basée sur une reformulation du problème sur un domaine fictif déterministe. Cette approche est une extension au cadre stochastique de la méthode des domaines fictifs [Glowinski *et al.* 1994]. Elle a été proposée dans [Canuto et Kozubek 2007]. On notera que la formulation utilisée est très similaire à celle de l'approche proposée dans ce mémoire (*c.f.* chapitre 2). Ces travaux sont parus en parallèle de la méthode développée dans le cadre de cette thèse.

1.6.5.1 Reformulation du problème sur un domaine fictif

On introduit un domaine fictif B tel que toutes les réalisations du domaine $\Omega(\boldsymbol{\xi})$ soient incluses dans B. Les auteurs s'intéressent à un problème de Dirichlet. Pour la prise en compte des conditions aux limites sur une frontière aléatoire, les auteurs utilisent une formulation mixte pour laquelle on introduit un multiplicateur de Lagrange $\mathbf{p}$ sur la frontière $\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = \partial\Omega(\boldsymbol{\xi})$ du domaine $\Omega(\boldsymbol{\xi})$. Le problème est le

suivant : trouver $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S} \otimes (H^1(B))^d$ et $\boldsymbol{p} \in \mathcal{Q}$ tels que $\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{S} \otimes (H^1(B))^d$ et $\forall \boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$,

$$\begin{cases} A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + G(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}) = L(\boldsymbol{v}) \\ G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}) = 0 \end{cases} \tag{1.86}$$

avec

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \mathbf{x}) dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_B \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \, dx dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{1.87}$$

$$G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}; \mathbf{x}) dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_{\Gamma(\mathbf{x})} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{u} \, ds dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{1.88}$$

et où l'espace $\mathcal{Q}$ est défini par

$$\mathcal{Q} = \{\boldsymbol{p} : \boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{p}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \in H^{-1/2}(\Gamma(\boldsymbol{\xi})); \int_{\boldsymbol{\Theta}} \|\boldsymbol{p}(\cdot, \mathbf{x})\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma(\mathbf{x}))} \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) < \infty\} \tag{1.89}$$

Le problème vient de l'espace $\mathcal{Q}$ qui n'est pas formé par un produit tensoriel d'espaces. La construction de l'espace d'approximation $\mathcal{Q}$ n'est donc pas triviale.

1.6.5.2 Définition de l'approximation

On s'intéresse tout d'abord à la construction de l'espace d'approximation $\mathcal{U}_{h,P} \subset \mathcal{U}$ pour l'approximation du champ de déplacements $\boldsymbol{u}_{h,P}$. Au niveau spatial, on introduit pour cela un maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine de référence B et on utilise un espace d'approximation $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$. Au niveau stochastique, on introduit un espace d'approximation $\mathcal{S}_P \in \mathcal{S}$ du même type que celui défini dans l'équation (1.22). Dans [Canuto et Kozubek 2007], les auteurs proposent d'utiliser les polynômes de Lagrange pour la base de fonction $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}_P}$ et de choisir l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant p$ pour chaque variable stochastique (tensorisation pleine d'espaces d'approximation uni-dimensionnels). L'utilisation de ce type de base, très riche, n'est alors envisageable que pour une faible dimension stochastique, sans quoi, les coûts de calculs seraient prohibitifs. Le champ de déplacement approché $\boldsymbol{u}_{h,P}$ sera alors cherché dans l'espace d'approximation $\mathcal{V}_{h,P}$ défini par

$$\mathcal{V}_{h,P} = \mathcal{S}_P \otimes \mathcal{U}_h \subset \mathcal{S} \otimes (H^1(B))^d \tag{1.90}$$

On doit ensuite définir un espace d'approximation $\mathcal{Q}_{H,P} \subset \mathcal{Q}$ adapté pour le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{p}$. Pour cela, on utilise un nouveau domaine déterministe de référence B_0 de frontière Γ_0 et on définit une transformation $\boldsymbol{T}(\cdot, \boldsymbol{\xi})$ entre la frontière Γ_0 et la réalisation $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ telle que $\boldsymbol{T}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) : s^0 \in \Gamma_0 \mapsto s = \boldsymbol{T}(s^0, \boldsymbol{\xi}) \in \Gamma(\boldsymbol{\xi})$. La frontière de référence Γ_0 et la transformation $\boldsymbol{T}$ permettent alors de décrire la frontière aléatoire $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$. En introduisant un maillage éléments finis de la frontière Γ_0, on définit un espace d'approximation au niveau spatial $\mathcal{M}^0_H \subset H^{1/2}(\Gamma_0)$. On peut alors définir l'espace d'approximation $\mathcal{Q}^0_{H,P}$ tel que

$$\mathcal{Q}^0_{H,P} = \mathcal{S}_P \otimes \mathcal{M}^0_H \subset \mathcal{Q}^0 = \mathcal{S} \otimes H^{-1/2}(\Gamma_0) \tag{1.91}$$

Ce nouvel espace nous permet alors de définir l'espace d'approximation $\mathcal{Q}_{H,P}$ pour le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{p}$

$$\mathcal{Q}_{H,P} = \{\boldsymbol{p} \in \mathcal{Q}\,;\boldsymbol{p}^0 \in \mathcal{Q}^0_{H,P}\} \tag{1.92}$$

où $\boldsymbol{p}^0$ est défini à partir de $\boldsymbol{p}$ de la manière suivante : $\forall \boldsymbol{v}^0 \in H^{1/2}(\Gamma_0)$

$$\int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{p}^0(s^0, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{v}^0(s^0, \mathbf{x}) ds^0 dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_{\Gamma(\mathbf{x})} \boldsymbol{p}(s, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{T}^{-1}(s, \mathbf{x}), \mathbf{x}) ds dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{1.93}$$

L'approximation de Galerkin, qui consiste à injecter l'espace d'approximation dans la formulation faible (1.86) vérifie : $(\boldsymbol{u}_{h,P}, \boldsymbol{p}_{H,P}) \in \mathcal{V}_{h,P} \otimes \mathcal{Q}_{H,P}$

$$\begin{cases} A(\boldsymbol{u}_{h,P}, \boldsymbol{v}_{h,P}) + G(\boldsymbol{v}_{h,P}, \boldsymbol{p}_{H,P}) = L(\boldsymbol{v}_{h,P}) \\ G(\boldsymbol{u}_{h,P}, \boldsymbol{q}_{H,P}) = 0 \end{cases} \tag{1.94}$$

Le problème (1.94) est alors résolu en utilisant une méthode de collocation [Mathelin *et al.* 2005, Babuska *et al.* 2007] consistant à approcher les formes bilinéaires A et G par une formule de quadrature :

$$G_P(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} \omega_\alpha g(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}_\alpha), \boldsymbol{q}(\boldsymbol{\xi}_\alpha); \boldsymbol{\xi}_\alpha) \tag{1.95}$$

où les $(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \omega_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}_P}$ sont les points et poids d'intégration. Les $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ correspondent ici aux points d'interpolation définissant la base des polynômes de Lagrange $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}_P}$. On notera qu'ici, A_P coincide avec A sur le sous-espace $\mathcal{V}_P = \mathcal{S}_P \otimes \mathcal{U}$ étant donné que $a(\cdot, \cdot; \boldsymbol{\xi}) = a(\cdot, \cdot)$ est déterministe et que $\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} \omega_\alpha = 1$. Finalement, la méthode de collocation revient à résoudre un nombre fini de problèmes déterministes définis sur un domaine fictif ayant comme solutions les valeurs d'interpolation $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}_\alpha)$ et $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}_\alpha)$. En cela, la méthode est similaire à une approche non-intrusive puisqu'elle ne demande pas de modifications du code utilisé pour résoudre les problèmes déterministes par la méthode des domaines fictifs. Ce caractère non-intrusif est dû à l'utilisation de la méthode de collocation.

1.6.5.3 Avantages et inconvénients de l'approche

L'approche par reformulation sur un domaine fictif ne demande pas de remaillage. De plus, elle permet d'obtenir une description complète de la solution stochastique. Cependant, la transformation $\boldsymbol{T}$, nécessaire à la définition de l'espace d'approximation du multiplicateur, peut être difficile à déterminer, surtout pour des géométries complexes.
Cette méthode, très récente, mérite toutefois une attention particulière et apparaît comme une approche concurrente de la méthode X-SFEM utilisée et présentée dans ce mémoire.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé quelques méthodes probabilistes pour l'introduction d'incertitudes dans le calcul de structures. Nous avons notamment présenté les approches spectrales basées sur le chaos polynomial et ses généralisations. L'intérêt des approches spectrales est qu'elles conduisent à

une description complète de la solution, explicite en fonction des variables aléatoires de base. Les post-traitements de la solution obtenue sont alors simples et rapides (permettant notamment une analyse de fiabilité à moindre coût). Avec une approximation stochastique basée sur le chaos polynomial, nous avons vu qu'il existait plusieurs méthodes de définition de l'approximation. Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories : les approches non intrusives et intrusives, possédant chacune leurs avantages et leurs inconvénients.

Toutes ces méthodes sont bien adaptées lorsque l'aléa porte sur les propriétés matérielles ou sur les chargements, mais restent difficilement utilisables si la géométrie est également aléatoire. Nous avons présenté quelques méthodes, issues de la littérature, tentant de résoudre ce type de problème. Les plus récentes d'entre elles tentent de s'affranchir des problèmes de remaillages en se ramenant à un problème défini sur un domaine déterministe. Cette idée semble très pertinente mais sa mise en oeuvre reste très délicate, spécialement pour des géométries aléatoires complexes.

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle stratégie de calcul permettant de prendre en compte les incertitudes géométriques d'une structure. Cette méthode baptisée "méthode des éléments finis stochastiques étendus" (X-SFEM) est une extension de la méthode X-FEM [Moës *et al.* 1999] au cadre stochastique. Cette méthode évite également les problèmes de remaillage et permet la gestion de géométries complexes.

Chapitre 2

Méthode éléments finis stochastiques étendus pour les problèmes mécaniques à formes aléatoires

Sommaire

2.1 Introduction **39**
2.2 La méthode éléments finis étendus déterministe **39**
2.2.1 Formulation du problème X-FEM 40
2.2.2 Représentation de la géométrie par la méthode des level sets 40
2.2.3 Définition de l'approximation 42
2.3 Reformulation du problème sur un domaine déterministe **43**
2.4 Représentation de la géométrie aléatoire par la technique des level sets aléatoires **46**
2.4.1 Level sets aléatoires 46
2.4.2 Construction des level sets aléatoires 47
2.4.3 Discrétisation des level sets 47
2.5 Définition des espaces d'approximation **48**
2.6 Approximation de Galerkin **50**
2.7 Exemple d'approche de projection basée sur la méthode X-FEM (P-X-FEM) . . . **50**
2.7.1 Méthode de projection basée sur la méthode X-FEM (P-X-FEM) 51
2.8 Stratégies de résolution dans la méthode X-SFEM **52**
2.8.1 Procédure générale de résolution pour l'approximation de Galerkin 52
2.8.2 Calcul de la décomposition stochastique de la matrice et du vecteur aléatoires . . . 53
2.9 Exemple 1 : plaque à géométrie aléatoire en traction uniforme **60**
2.9.1 Description du problème 60
2.9.2 Efficacité des procédures d'intégration au niveau stochastique 62
2.9.3 Efficacité des stratégies d'intégration au niveau spatial 64
2.9.4 Qualité de la solution X-SFEM 65
2.9.5 Comparaison avec une approche non-intrusive basée sur X-FEM (P-X-FEM) 67
2.9.6 Bilan 68

2.10 Exemple 2 : plaque à géométrie aléatoire avec une modélisation probabiliste complexe 69
2.10.1 Description du problème 69
2.10.2 Intégration avec procédure de découpage 70
2.10.3 Intégration avec procédure basique 72
2.10.4 Post-traitement des résultats 73
2.10.5 Bilan 74
2.11 Exemple 3 : couronne circulaire à rayon aléatoire 76
2.11.1 Description du problème 76
2.11.2 Efficacité des procédures d'intégration au niveau stochastique 79
2.11.3 Efficacité des stratégies d'intégration au niveau spatial 80
2.11.4 Convergence de la solution X-SFEM 81
2.11.5 Bilan 82
2.12 Exemple 4 : plaque en traction avec trou de forme étoilée 83
2.12.1 Description du problème 83
2.12.2 Comparaison avec des approches classiques 85
2.12.3 Bilan 93
2.13 Conclusion 93

2.1 Introduction

Ce chapitre introduit la méthode éléments finis stochastiques étendus (X-SFEM) pour des problèmes de formes aléatoires [Nouy *et al.* 2007 - 2008]. Cette méthode est une extension au cadre stochastique de la méthode éléments finis étendus X-FEM [Moës *et al.* 1999, Dolbow *et al.* 2000] initialement proposée pour résoudre des problèmes d'évolution de fissure et s'affranchir des problèmes de remaillage. En effet, l'utilisation d'une approche éléments finis classique pour certains problèmes industriels reste difficile pour des raisons de gestion de maillage devant respecter les surfaces physiques du problème telles que des fissures ou des interfaces matérielles. Avec la méthode X-FEM, le positionnement des surfaces physiques peut se faire de manière simple grace à la technique des "level sets" [Sethian 1999]. Selon la nature du problème, l'approximation éléments finis peut alors être enrichie afin de pouvoir représenter des modes discontinus ou à dérivées discontinues à travers les surfaces. La technique de la partition de l'unité est alors utilisée pour la construction des espaces d'approximation [Melenk et Babuska 1996]. Depuis que cette méthode a été proposée, de nombreuses équipes de recherche travaillent à son développement afin de l'appliquer à de nombreux domaines tels que la mécanique de la rupture non linéaire [Legrain *et al.* 2005], la corrélation d'image [Rethoré *et al.* 2007], l'optimisation de formes de structures [Miegroet *et al.* 2005] et d'autres encore.
L'intérêt d'étendre la méthode X-FEM au cadre stochastique vient de la possibilité d'utiliser un maillage qui n'est pas conforme à la géométrie de la structure. On comprend alors qu'elle peut être avantageuse si on cherche à résoudre un problème défini sur un domaine aléatoire. Grace à l'utilisation de la technique des level sets, qui deviennent des fonctions aléatoires dans X-SFEM, il est alors possible de travailler sur un domaine déterministe fixe. La définition des espaces d'approximation est alors simplifiée.
Dans ce chapitre, après une première section dédiée à la méthode déterministe X-FEM, nous présenterons dans un premier temps la formulation du problème sur un domaine déterministe ainsi que la définition des espaces de travail associés. On s'intéressera ensuite à la méthode des level sets aléatoires permettant de représenter la géométrie du problème. Nous présenterons deux manières différentes de définir l'approximation : une méthode de projection couplée à une approche déterministe X-FEM et une approximation de Galerkin. On se focalisera principalement sur cette seconde méthode et on montrera pourquoi l'intégration au niveau stochastique doit être réalisée avec soin. Enfin, plusieurs exemples numériques nous permettront de montrer la qualité de la solution X-SFEM en comparant ses résultats avec des méthodes classiques.

2.2 La méthode éléments finis étendus déterministe

Cette première section est dédiée à l'exposé des principes de base de la méthode déterministe X-FEM. On présente la méthode dans le cadre de notre problème de référence en élasticité linéaire (*c.f.* section 1.3). On notera que la méthode X-FEM est généralement présentée pour des problèmes de fissuration ou de matériaux hétérogènes pour lesquels un enrichissement de l'espace d'approximation, basé sur la partition de l'unité, est utilisé. Cet enrichissement est considéré comme le point clef de la méthode X-FEM mais il n'a aucun intérêt si la solution du problème est régulière sur le domaine. Le point important que nous utilisons dans X-SFEM, pour la résolution des problèmes de formes aléatoires, est l'utilisation d'un domaine de référence non conforme à la géométrie de la structure, et la représentation implicite de cette géométrie avec la technique des level sets. La méthode X-FEM que nous présentons est donc

simplifiée puisqu'une approximation éléments finis classique au niveau spatial est ici suffisante. La question de l'enrichissement sera étudiée dans le chapitre suivant.

2.2.1 Formulation du problème X-FEM

L'idée directrice de la méthode X-FEM est de s'affranchir des remaillages. Pour cela, on propose de ne pas mailler la surface physique de la structure. On introduit alors un domaine fixe, noté B, contenant la géométrie de la structure étudiée et sur lequel on définit l'espace fonctionnel $\overline{\mathcal{U}}$ suivant

$$\overline{\mathcal{U}} = \{\boldsymbol{v} \in (H^1(B))^d; \boldsymbol{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \tag{2.1}$$

La forme faible du problème (1.7) s'écrit alors : trouver $\boldsymbol{u} \in \overline{\mathcal{U}}$ tel que

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \overline{\mathcal{U}} \tag{2.2}$$

où la forme bilinéaire a et la forme linéaire b sont classiquement définies par

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) dx \tag{2.3}$$

$$b(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} dx + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} ds \tag{2.4}$$

La définition du problème sur le domaine de référence B nécessite de savoir si un point de B appartient ou non au domaine Ω. On introduit pour cela une fonction indicatrice notée $I_\Omega(\boldsymbol{x})$ définie sur B par

$$I_\Omega(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{x} \in \Omega \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{x} \in B \setminus \Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

Avec cette fonction indicatrice, les formes bilinéaire et linéaire peuvent s'écrire

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_B \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \, I_\Omega \, dx \tag{2.6}$$

$$b(\boldsymbol{v}) = \int_B \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} I_\Omega dx + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} ds \tag{2.7}$$

Il nous faut alors caractériser la fonction indicatrice du domaine Ω. Pour cela, on utilise la méthode des level sets [Sethian 1999] décrite dans la section suivante.

2.2.2 Représentation de la géométrie par la méthode des level sets

Définition des level sets : le principe de la représentation de la géométrie dans X-FEM réside dans une représentation implicite de la frontière de Ω. Pour cela, on utilise la méthode des level sets qui consiste à représenter cette hyper-surface Γ de $\mathbb{R}^d$ par l'iso-zéro d'une fonction ϕ appelée level set ou fonction de niveau telle que

$$\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d; \phi(\boldsymbol{x}) = 0\} \tag{2.8}$$

La fonction distance signée entre un point du domaine et l'hyper-surface est souvent utilisée comme fonction level set : $\phi(\boldsymbol{x}) = \pm dist(\boldsymbol{x}, \Gamma)$. Par convention, on considère que les valeurs de $\phi(\boldsymbol{x})$ sont négatives dans le domaine Ω et positives dans le domaine complémentaire $B \setminus \Omega$. L'hyper-surface à

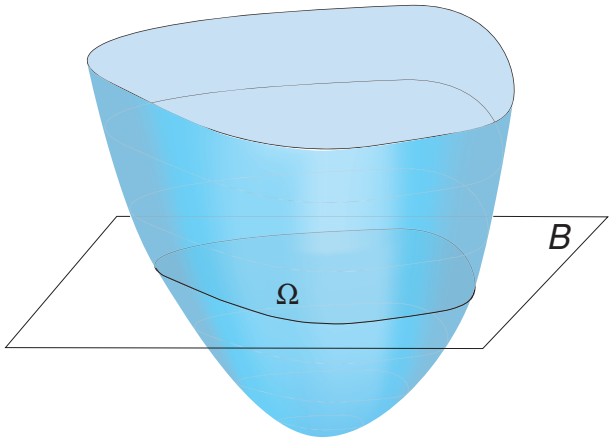


FIG. 2.1 – Level set $\phi(\boldsymbol{x})$ dont l'iso-zéro représente la frontière du domaine Ω.

représenter peut être la frontière complète $\partial\Omega$ du domaine Ω (*c.f.* figure 2.1) ou seulement une partie de sa frontière. Le domaine Ω et sa frontière $\partial\Omega$ peuvent alors être caractérisés par

$$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in B; \phi(\boldsymbol{x}) < 0\} \tag{2.9}$$

$$\partial\Omega = \{\boldsymbol{x} \in B; \phi(\boldsymbol{x}) = 0\} \cup \{\boldsymbol{x} \in \partial B; \phi(\boldsymbol{x}) < 0\} \tag{2.10}$$

La fonction indicatrice du domaine, définie par (2.5) se réécrit ainsi en fonction de la level set

$$I_\Omega(\boldsymbol{x}) = \mathcal{H}(-\phi(\boldsymbol{x})) \tag{2.11}$$

où $\mathcal{H} : \mathbb{R} \mapsto \{0, 1\}$ est la fonction Heaviside définie par

$$\mathcal{H}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

Construction des level sets : Il existe des expressions explicites des levels sets pour certaines formes particulières [Sukumar *et al.* 2001] telles que des hyper-plans, des cercles ou des polygones. De plus, dans le cadre de la technique des level sets, une façon simple d'obtenir des formes plus complexes consiste à utiliser des opérations booléennes classiques sur des domaines de base. On considère Ω_1 et Ω_2 deux domaines caractérisés respectivement par deux level sets ϕ_1 et ϕ_2. On peut alors définir un autre domaine Ω caractérisé par une level set ϕ à partir d'opérations booléennes sur Ω_1 et Ω_2. Voici quelques unes de

ces opérations classiques et les manipulations associées sur les level sets

$$\begin{aligned} \text{union :} \quad & \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \phi(\boldsymbol{x}) = min\{\phi_1(\boldsymbol{x}), \phi_2(\boldsymbol{x})\} \\ \text{intersection :} \quad & \Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2, \quad \phi(\boldsymbol{x}) = max\{\phi_1(\boldsymbol{x}), \phi_2(\boldsymbol{x})\} \\ \text{complément :} \quad & \Omega = \Omega_1^c, \qquad \phi(\boldsymbol{x}) = -\phi_1(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Discrétisation des level sets : en pratique, la fonction level set est calculée aux noeuds d'un maillage éléments finis de B et interpolée entre les noeuds par les fonctions d'interpolations éléments finis classiques

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in I} \varphi_i(\boldsymbol{x}) \phi_i \tag{2.14}$$

où $\{\varphi_i(\boldsymbol{x})\}_{i \in I}$ est l'ensemble des fonctions d'interpolation éléments finis associées aux noeuds $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i \in I}$ du maillage de B et où les ϕ_i sont les valeurs nodales de la fonction level set. En dimension 2, si on utilise une approximation linéaire de ϕ, la frontière sera donc linéaire par morceaux. Pour des éléments finis triangles, l'iso-zéro de la level set est donc représenté par un ensemble de segments de droite associés à chaque triangle. Un exemple d'interpolation de la fonction level set est donné sur la figure 2.2.

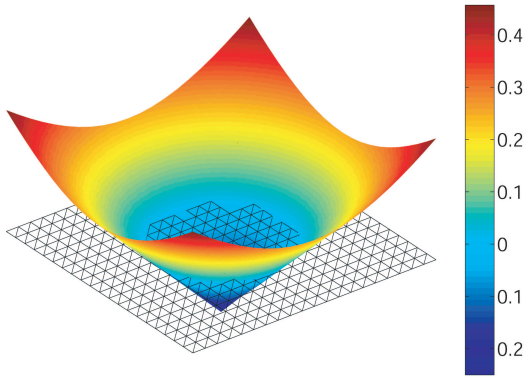


FIG. 2.2 – Exemple d'interpolation d'une fonction level set décrivant un cercle.

2.2.3 Définition de l'approximation

On peut maintenant s'intéresser à la définition de l'approximation. On considère par la suite que la partie de la frontière Γ_1, sur laquelle sont imposées les conditions aux limites de Dirichlet, appartient à la frontière du domaine spatial ∂B. On peut alors utiliser un espace d'approximation $\overline{\mathcal{U}}_h \subset \overline{\mathcal{U}}$. On introduit pour cela un maillage éléments finis du domaine B noté $\mathcal{T}_h$ et une base d'approximation éléments finis $\{\boldsymbol{\varphi}_i\}_{i=1}^N$ dans $\overline{\mathcal{U}}$ associée au maillage $\mathcal{T}_h$ où N désigne le nombre de fonctions d'interpolation. L'espace

d'approximation peut alors s'écrire

$$\overline{\mathcal{U}}_h = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) v_i = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N\} \tag{2.15}$$

La figure 2.3 donne un exemple de maillage utilisé dans X-FEM pour le problème de la plaque trouée et une comparaison avec un maillage éléments finis conforme.
Le problème à résoudre est construit avec une approximation de Galerkin classique, consistant à trouver $\boldsymbol{u}_h \in \overline{\mathcal{U}}_h$ tel que

$$a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = b(\boldsymbol{v}_h) \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \overline{\mathcal{U}}_h \tag{2.16}$$

L'équation (2.16) est équivalente au système linéaire suivant

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \tag{2.17}$$

où $\mathbf{A}$ est la matrice de rigidité, $\mathbf{u}$ le vecteur des degrés de liberté et $\mathbf{b}$ le vecteur des chargements. On notera que les degrés de liberté associés aux noeuds dont le support n'intersecte pas Ω sont arbitrairement fixés à zéro. En effet, la partie de la solution correspondant à ces degrés de liberté n'a pas de sens physique. La matrice de rigidité $\mathbf{A}$ et le vecteur $\mathbf{b}$ sont obtenus par assemblage des quantités élémentaires $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{b}_K$ associées à l'élément fini $K \in \mathcal{T}_h$. Le calcul de ces quantités nécessite un soin particulier pour les éléments coupés par l'iso-zéro de la fonction level set. Deux méthodes d'intégration sont proposées dans la section 2.8.2.1.

On notera que la question de l'enrichissement de l'espace d'approximation sera présentée au chapitre suivant dans la section 3.4 pour des problèmes d'interface matérielle. En effet, les solutions de ce type de problème n'étant pas régulières, l'utilisation d'un espace enrichi est nécessaire pour obtenir une solution de qualité et retrouver des taux de convergence similaires à ceux obtenus avec une méthode FEM associée à un maillage conforme. Suite à cette présentation simplifiée de la méthode X-FEM, nous pouvons maintenant nous intéresser à son extension au cadre stochastique pour les problèmes de formes aléatoires.

2.3 Reformulation du problème sur un domaine déterministe

La première étape de la méthode consiste à introduire un domaine spatial déterministe B contenant toutes les réalisations possibles du domaine aléatoire $\Omega(\boldsymbol{\xi})$, *i.e.* $\bigcup_{\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{\Theta}} \Omega(\boldsymbol{\xi}) \subset B$. Une illustration est présentée sur la figure 2.4.

Le problème doit alors être reformulé sur ce domaine déterministe B. L'idée est de prolonger les fonctions de l'espace $\mathcal{V}$ sur $B \times \boldsymbol{\Theta}$. Travailler sur le domaine spatial B facilite la construction des espaces d'approximation spatial et stochastique. Ils sont alors indépendants de la géométrie aléatoire du problème. Nous introduisons tout d'abord l'espace fonctionnel $\overline{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\xi})$ tel que

$$\overline{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\xi}) = \{\boldsymbol{v} \in (H^1(B))^d; \boldsymbol{v} = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1(\boldsymbol{\xi})\} \tag{2.18}$$

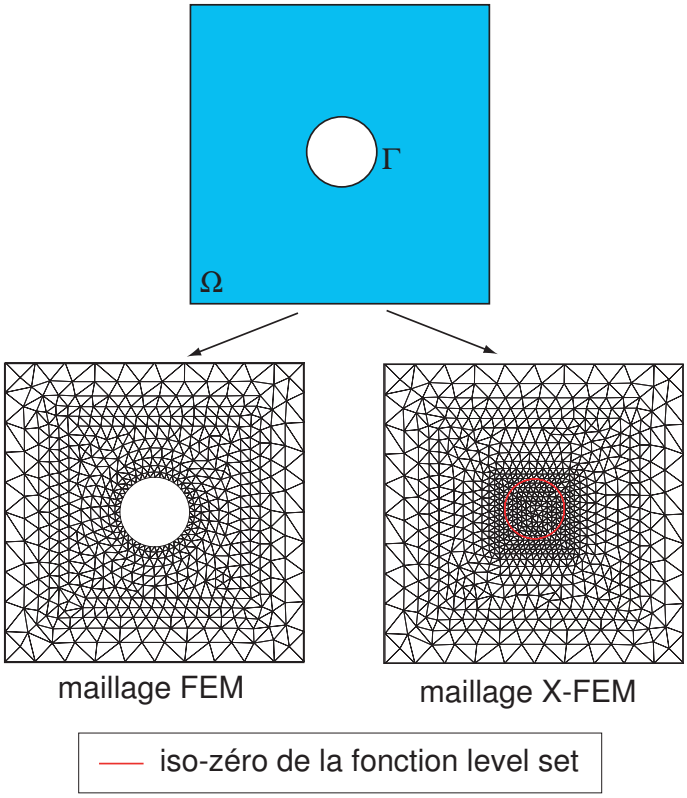


FIG. 2.3 – Exemple de maillage conforme FEM et non conforme X-FEM pour un problème de plaque trouée.

Le prolongement de la solution stochastique $\boldsymbol{u}$ sera alors cherché dans l'espace fonctionnel suivant

$$\overline{\mathcal{V}} = \{\boldsymbol{v} : \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Theta} \to \boldsymbol{v}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \in \overline{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\xi}); \int_{\boldsymbol{\Theta}} \|\boldsymbol{v}(\cdot, \mathbf{x})\|^2_{\overline{\mathcal{U}}(\mathbf{x})} \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) < \infty\} := L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}}; \overline{\mathcal{U}}) \tag{2.19}$$

Le problème stochastique (1.70) peut maintenant être reformulé de manière équivalente : trouver $\boldsymbol{u} \in \overline{\mathcal{V}}$ tel que :

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \overline{\mathcal{V}} \tag{2.20}$$

où

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \mathbf{x}) \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) := E(a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}))$$
$$L(\boldsymbol{v}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} b(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}) \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) := E(b(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}))$$

On appelle partie physique de la solution $\boldsymbol{u} \in \overline{\mathcal{V}}$ la restriction $\boldsymbol{u}_{|\mathcal{P}}$ de $\boldsymbol{u}$ au sous-ensemble physique $\mathcal{P}$ de $B \times \boldsymbol{\Theta}$, défini par :

$$\mathcal{P} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in B \times \boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{x} \in \Omega(\boldsymbol{\xi})\} \tag{2.21}$$

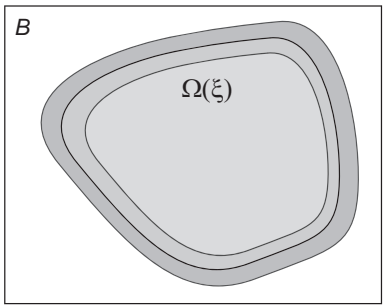


FIG. 2.4 – Domaine déterministe B contenant toutes les réalisations du domaine aléatoire $\Omega(\boldsymbol{\xi})$.

La partie non-physique de la solution $\boldsymbol{u} \in \overline{\mathcal{V}}$ est la restriction de $\boldsymbol{u}$ au sous-ensemble complémentaire de $\mathcal{P}$, noté $\mathcal{P}^c$:

$$\mathcal{P}^c = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in B \times \boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{x} \notin \Omega(\boldsymbol{\xi})\} \tag{2.22}$$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^c$ seront respectivement appelés domaine physique et domaine non-physique par la suite. Afin de différencier les deux parties de la solution, on introduit la fonction indicatrice de $\mathcal{P}$ notée $I_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$. Cette fonction est définie sur $B \times \boldsymbol{\Theta}$ par

$$I_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} := I_{\Omega(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{x}) \tag{2.23}$$

où $I_{\Omega(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{x})$ est la fonction indicatrice classique du domaine spatial $\Omega(\boldsymbol{\xi})$. La forme bilinéaire A et la forme linéaire L peuvent alors être réécrites

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_B \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\, I_{\mathcal{P}}\, dx\, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{2.24}$$

$$L(\boldsymbol{v}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_B \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}\, I_{\mathcal{P}}\, dx\, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) + \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_{\Gamma_2(\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}\, ds\, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{2.25}$$

La forme bilinéaire A est bornée mais seulement semi-coercive sur $\overline{\mathcal{V}}$. Le noyau de l'application $\boldsymbol{v} \to A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ est constitué de l'ensemble des fonctions dont le support est inclus dans le domaine non-physique $\mathcal{P}^c$. Le problème (2.20) possède une infinité de solutions qui diffèrent l'une de l'autre par les fonctions appartenant à ce noyau. Pour le montrer, considérons $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ deux solutions du problème (2.20) et $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \in \overline{\mathcal{V}}$. Nous avons $A(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = 0$. Ainsi, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}) I_{\mathcal{P}} = 0$ presque sûrement sur $B \times \boldsymbol{\Theta}$. Nous obtenons alors que $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}) = 0$ presque sûrement sur $\mathcal{P}$ et donc que $\boldsymbol{w} = 0$ presque sûrement sur $\mathcal{P}$ également. La partie physique $\boldsymbol{u}_{|\mathcal{P}}$ de la solution est alors unique ce qui est fondamental puisque c'est évidemment cette partie qui est recherchée.

Remarque 2.1 *Considérons un point $\boldsymbol{x} \in B$ tel que $0 < P_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x} \in \Omega(\boldsymbol{\xi})) < 1$, la quantité $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ n'aura de sens que pour les réalisations $\Omega(\boldsymbol{\xi})$ incluant $\boldsymbol{x}$. En terme de post-traitement, certaines quantités d'intérêt définies sur une telle zone devront être traitées avec précaution (moyenne d'un déplacement, maximum des contraintes).*

D'après les équations (2.24) et (2.25), la forme bilinéaire A et la forme linéaire L font intervenir la fonction $I_{\mathcal{P}}$. On s'intéresse dans la section suivante à la caractérisation de cette fonction indicatrice. Pour cela, nous utilisons la technique des level-sets dans un un cadre aléatoire. Cette méthode est décrite dans la section suivante.

2.4 Représentation de la géométrie aléatoire par la technique des level sets aléatoires

2.4.1 Level sets aléatoires

La méthode des level sets, présentée dans la section 2.2 peut facilement être étendue au cadre aléatoire. Dans ce cas, l'hyper-surface $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ à représenter est aléatoire et on utilise naturellement une fonction level set $\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ aléatoire telle que

$$\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d; \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0\} \tag{2.26}$$

Toutes les définitions liées aux level sets données dans la section 2.2 sont alors simplement transposables au cadre stochastique en remplaçant Ω par $\Omega(\boldsymbol{\xi})$ et $\phi(\boldsymbol{x})$ par $\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$. La fonction indicatrice nécessaire à la reformulation du problème s'écrit alors

$$I_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = I_{\Omega(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{H}(-\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})) \tag{2.27}$$

où $\mathcal{H}$ est la fonction Heaviside définie dans l'équation (2.12).
Afin de pouvoir imposer des conditions aux limites, il est nécessaire de décrire les parties aléatoires de la frontière $\partial\Omega(\boldsymbol{\xi})$. Cette description est également simplifiée en utilisant la technique des level sets. Montrons, par exemple, comment on peut décrire la frontière $\Gamma_2(\boldsymbol{\xi})$ où des efforts de surface sont appliqués et comment on peut définir les intégrales à calculer sur $\Gamma_2(\boldsymbol{\xi})$. On peut distinguer deux premiers cas de figure importants :

- $$\Gamma_2 = \{\boldsymbol{x} \in B; \phi = 0\} \ : \int_{\Gamma_2(\boldsymbol{\xi})} f\, ds = \int_B f\delta(\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}))\, dx \tag{2.28}$$
- $$\Gamma_2 = \{\boldsymbol{x} \in \partial_2 B; \phi < 0\} \ : \int_{\Gamma_2(\boldsymbol{\xi})} f\, ds = \int_{\partial_2 B} f\mathcal{H}(-\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}))\, ds \tag{2.29}$$

Dans l'équation (2.28), Γ_2 est l'iso-zéro de la level set ϕ et δ la fonction de Dirac. Dans l'équation (2.29), $\Gamma_2 = \partial_2 B \cap \Omega$, où $\partial_2 B$ est une partie déterministe de la frontière ∂B. A l'évidence, ces deux cas de figure ne couvrent pas toutes les possibilités. Par exemple, un traitement spécifique est nécessaire si Γ_2 est uniquement incluse dans les hyper-surfaces décrites par les équations (2.28) et (2.29). Un choix possible consiste à introduire une level set auxiliaire $\widetilde{\phi}$ dont l'iso-zéro permet de caractériser la frontière de l'hyper-surface. Si on considère que, par convention, les valeurs de la level set $\widetilde{\phi}$ sont négatives sur

Γ_2, on obtient deux autres cas de figure :

- $\Gamma_2 = \{\boldsymbol{x} \in B; \phi = 0; \widetilde{\phi} < 0\}$: $\displaystyle\int_{\Gamma_2(\boldsymbol{\xi})} f\, ds = \int_B f\mathcal{H}(-\widetilde{\phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}))\delta(\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}))\, dx$ (2.30)
- $\Gamma_2 = \{\boldsymbol{x} \in \partial_2 B; \phi < 0; \widetilde{\phi} < 0\}$: $\displaystyle\int_{\Gamma_2(\boldsymbol{\xi})} f\, ds = \int_{\partial_2 B} f\mathcal{H}(-\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}))\mathcal{H}(-\widetilde{\phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}))\, ds$ (2.31)

La figure 2.5 illustre le cas de figure donné par l'équation (2.30).

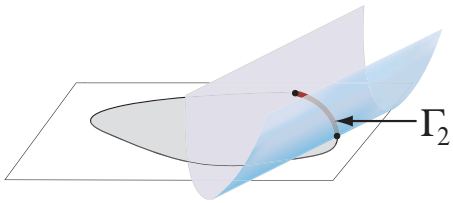


FIG. 2.5 – Level-set $\widetilde{\phi}(\cdot, \boldsymbol{\xi})$ dont l'iso-zéro sur $\partial\Omega(\boldsymbol{\xi})$ représente la frontière de l'hyper-surface $\Gamma_2(\boldsymbol{\xi})$

2.4.2 Construction des level sets aléatoires

Les expressions explicites des level sets utilisées dans un cadre déterministe sont également utilisable dans un cadre aléatoire. Les paramètres de ces level sets deviennent alors des variables aléatoires (*e.g.* les coordonnées du centre et le rayon d'un cercle). De plus la manipulation de level sets, caractérisant des domaines basiques, avec des opérations booléennes reste tout à fait possible dans un cadre aléatoire (*c.f.* équation (2.13)).
Dans la suite, nous considérons que les fonctions level sets sont obtenues avec les techniques précédentes et que la caractérisation probabiliste de ces level sets est donnée. Dans un cadre plus général, il sera essentiel de disposer d'une méthode d'identification de level sets aléatoires. Ainsi, on pourra représenter des formes aléatoires générales plus complexes.

2.4.3 Discrétisation des level sets

En pratique, une level set aléatoire est également approximée au niveau spatial en introduisant un maillage éléments finis du domaine B

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i \in I} \varphi_i(\boldsymbol{x})\phi_i(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.32}$$

où les $\phi_i(\boldsymbol{\xi})$ sont les valeurs nodales de la level set aléatoire qui sont des variables aléatoires. Dans ces travaux, seules des fonctions d'interpolations linéaires ont été utilisées. L'iso-zéro des level sets approximées est alors continue et linéaire par morceaux. Ainsi, la géométrie approchée est linéaire par morceaux. L'aléa sur la géométrie est complètement contenu dans les level sets aléatoires. Dans certains cas, une expression simple et explicite de la level set en fonction de $\boldsymbol{\xi}$ peut exister. Cependant, une approximation

au niveau stochastique de la fonction level set s'avère plus pratique du point de vue numérique. Dans la suite, pour tous les exemples, on décomposera donc la level set sur une base stochastique appropriée :

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i \in I} \sum_{\alpha} \varphi_i(\boldsymbol{x}) \phi_{i,\alpha} H_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.33}$$

où les $\phi_{i,\alpha}$ sont les coefficients de la décomposition permettant de caractériser complètement la géométrie aléatoire approchée. Ainsi, on pourra rapidement évaluer les réalisations de la level set aléatoire nécessaires au calcul de la matrice de rigidité et du second membre (voir section 2.8). La base de fonctions $\{H_\alpha\}$ choisie peut être la même que celle utilisée pour la solution approchée. Cependant, on devra s'assurer qu'elle permet de bien représenter la géométrie.

2.5 Définition des espaces d'approximation

Dans toute la suite, on considère que la partie de la frontière Γ_1 est déterministe et qu'elle appartient à la frontière du domaine spatial ∂B (*c.f.* figure 2.6). La première condition permet à $\overline{\mathcal{V}}$ d'avoir une structure produit tensoriel

$$\overline{\mathcal{V}} = L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}}; \overline{\mathcal{U}}) \cong L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}}) \otimes \overline{\mathcal{U}} \tag{2.34}$$

La seconde condition rend classique la construction d'un sous-espace éléments finis de $\overline{\mathcal{U}}$ qui satisfait les conditions aux limites de Dirichlet. On note $\mathcal{T}_h$ un maillage éléments finis du domaine spatial B et $\{\boldsymbol{\varphi}_i\}_{i=1}^N$

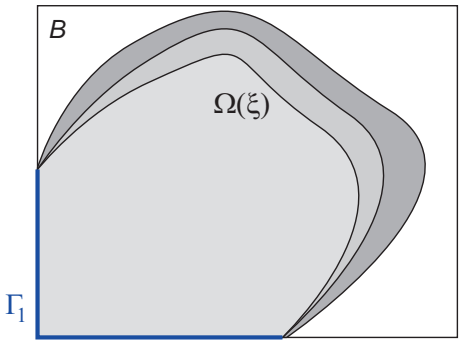


FIG. 2.6 – Cas d'une frontière déterministe $\Gamma_1 \subset \partial B$

une base d'approximation éléments finis dans $\overline{\mathcal{U}}$ associée au maillage $\mathcal{T}_h$. L'espace d'approximation au niveau spatial peut alors être écrit

$$\overline{\mathcal{U}}_h = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) v_i = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \mathbf{v},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N\} \tag{2.35}$$

Un espace d'approximation semi-discrétisé en espace $\overline{\mathcal{V}}_h \subset \overline{\mathcal{V}}$ peut alors être défini comme suit

$$\overline{\mathcal{V}}_h = \mathcal{S} \otimes \overline{\mathcal{U}}_h = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}),\ \mathbf{v} \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{R}^N\} \tag{2.36}$$

Au niveau stochastique, on introduit un espace d'approximation $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$. Finalement, comme dans l'équation (1.23), on introduit l'espace d'approximation de $\overline{\mathcal{V}}$, discrétisé au niveau spatial et stochastique

$$\overline{\mathcal{V}}_{h,P} = \mathcal{S}_P \otimes \overline{\mathcal{U}}_h = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}),\ \mathbf{v} \in \mathcal{S}_P \otimes \mathbb{R}^N\}. \tag{2.37}$$

L'espace $\overline{\mathcal{V}}_{h,P}$ engendré est alors le produit tensoriel des espaces d'approximation au niveau stochastique $\mathcal{S}_P$ et au niveau spatial $\overline{\mathcal{U}}_h$. Pour la définition de l'approximation, on utilise de manière privilégiée une approche de Galerkin. Nous étudierons également une méthode de projection (*c.f.* section 1.5.4.2) couplée à un code éléments finis déterministe X-FEM. A partir des exemples numériques, on pourra alors comparer la qualité de chaque approximation.

Remarque 2.2 ***Discussion sur les conditions aux limites :*** *Dans le cas où seules des conditions aux limites de Neumann sont appliquées ($\Gamma_1 = \emptyset$), $\overline{\mathcal{V}} = L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}}; (H^1(B))^d)$ possède une structure produit tensoriel,* i.e. $\overline{\mathcal{V}} \cong L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}}) \otimes (H^1(B))^d$. *Une approximation classique par produit tensoriel peut alors être facilement construite.*

Dans le cas où des conditions aux limites de Dirichlet sont appliquées sur la partie aléatoire de la frontière Γ_1, $\overline{\mathcal{V}}$ n'a plus une structure produit tensoriel. Une reformulation du problème doit alors être introduite si on souhaite travailler, pour le champ de déplacement, dans un espace fonctionnel construit à partir d'un produit tensoriel et ainsi faciliter la construction de l'espace d'approximation. Dans ce cas, on pourra, par exemple, introduire un multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{p}$ sur Γ_1 afin d'imposer les conditions aux limites de Dirichlet au sens faible. Le problème peut être reformulé comme suit : trouver $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S} \otimes (H^1(B))^d$ et $\boldsymbol{p} \in \mathcal{Q}$ tels que $\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{S} \otimes (H^1(B))^d$ et $\forall \boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$,

$$A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_{\Gamma_1(\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}\, ds\, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = L(\boldsymbol{v}) \tag{2.38}$$

$$\int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_{\Gamma_1(\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{u}\, ds\, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.39}$$

L'espace fonctionnel $\mathcal{Q}$ pour le multiplicateur de Lagrange est défini par

$$\mathcal{Q} = \{\boldsymbol{p} : \boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{p}(\cdot,\boldsymbol{\xi}) \in H^{-1/2}(\Gamma_1(\boldsymbol{\xi})); \int_{\boldsymbol{\Theta}} \|\boldsymbol{p}(\cdot,\mathbf{x})\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_1(\mathbf{x}))}\, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) < \infty\} \tag{2.40}$$

Bien que la construction d'un espace d'approximation pour le champ de déplacement soit simplifiée, on doit prendre un soin particulier pour le choix de l'espace d'approximation de $\mathcal{Q}$ afin de satisfaire à la condition inf-sup [Brezzi 1974]. Une construction possible, proposée dans [Canuto et Kozubek 2007], est rappelée dans la section 1.6.5. Dans le cas où Γ_1 est déterministe, l'espace $\mathcal{Q} \cong \mathcal{S} \otimes H^{-1/2}(\Gamma_1)$ possède une structure produit tensoriel. La construction des espaces d'approximation peut alors être faite indépendamment au niveau spatial et au niveau stochastique. Ceci permet d'utiliser les travaux déjà réalisés dans le cadre déterministe pour obtenir une bonne construction des sous-espaces d'approximation de $(H^1(B))^d$ et $H^{-1/2}(\Gamma_1)$. Par exemple, on pourra utiliser la méthodologie proposée dans [Moës et al. 2006]. On peut également envisager d'utiliser d'autres méthodes telles que la méthode de pénalité [Babuska 1973] ou la méthode de Nitsche [Nitsche 1971], évitant ainsi l'introduction du multiplicateur de Lagrange.

2.6 Approximation de Galerkin

L'approximation de Galerkin $\boldsymbol{u}_{h,P} \in \overline{\mathcal{V}}_{h,P}$ est définie par

$$A(\boldsymbol{u}_{h,P}, \boldsymbol{v}_{h,P}) = L(\boldsymbol{v}_{h,P}) \quad \forall \boldsymbol{v}_{h,P} \in \overline{\mathcal{V}}_{h,P}, \tag{2.41}$$

L'equation (2.41) est équivalente au système d'équations suivant

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} E(H_\beta \mathbf{A} H_\alpha)\mathbf{u}_\alpha = E(\mathbf{b} H_\beta) \quad \forall \beta \in \mathcal{I}_P \tag{2.42}$$

Les aspects numériques liés à la résolution du problème (2.42) seront détaillés dans la section 2.8. Nous montrons maintenant que l'approximation de Galerkin peut être dite optimale dans un certain sens. Comme la forme bilinéaire A est symétrique, continue et coercive sur $\mathcal{V}$, elle définit un produit scalaire dans $\mathcal{V}$. Ce dernier est défini $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ par

$$\ll \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \gg_A = A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \tag{2.43}$$

On note $\|\cdot\|_A$ la norme associée à ce produit scalaire. Par prolongement, $\ll\ ,\ \gg_A$ (respectivement $\|\cdot\|_A$) définit un pseudo-produit scalaire (respectivement une pseudo-norme) dans $\overline{\mathcal{V}}$. On note $\boldsymbol{u} \in \overline{\mathcal{V}}$ une solution du problème (2.20). Ainsi, l'approximation de Galerkin $\boldsymbol{u}_{h,P}$ est l'approximation optimale de $\boldsymbol{u}$ dans $\overline{\mathcal{V}}_{h,P}$ au sens de la semi-norme $\|\cdot\|_A$

$$\|\boldsymbol{u}_{h,P} - \boldsymbol{u}\|_A = \underset{\boldsymbol{v}_{h,P} \in \overline{\mathcal{V}}_{h,P}}{min} \|\boldsymbol{v}_{h,P} - \boldsymbol{u}\|_A \tag{2.44}$$

L'équation (2.44) peut également être interprétée comme suit : $\boldsymbol{u}_{h,P}$ est la projection de $\boldsymbol{u}$ sur $\overline{\mathcal{V}}$ au sens du produit scalaire $\ll, \gg_A$. Le pseudo-produit scalaire ne donne pas de poids à la partie non-physique de la solution ce qui peut également être interprété comme : la partie physique de la solution approchée $\boldsymbol{u}_{h,P|\mathcal{P}}$ est la projection de la solution physique exacte $\boldsymbol{u}_{|\mathcal{P}}$ par rapport au produit scalaire $\ll, \gg_A$ sur $\mathcal{V}$. Les exemples permettront de montrer que l'approximation de Galerkin conduit à des solutions de qualité au regard des solutions physiques exactes.

2.7 Exemple d'approche de projection basée sur la méthode X-FEM (P-X-FEM)

Il est évidemment possible, dans le cadre de la méthode X-SFEM, d'utiliser des méthodes alternatives à l'approche de Galerkin pour définir l'approximation. Toutes les méthodes de calcul, classiques dans le cadre des éléments finis stochastiques, peuvent alors être envisagées (approches de Monte-Carlo/Quasi Monte-Carlo, méthode de projection, méthode de regression etc.). Toutes ces méthodes dites "non-intrusives" sont en effet plus simples à mettre en oeuvre que les approches de Galerkin et sont, en ce sens, très attractives. Nous proposons d'utiliser ici une méthode de projection basée sur un code éléments finis X-FEM déterministe. Les performances de cette méthode seront comparées à celles de l'approximation de Galerkin dans l'exemple 1 (*c.f.* section 2.9).

2.7.1 Méthode de projection basée sur la méthode X-FEM (P-X-FEM)

Nous proposons ici d'utiliser une méthode de projection classique (*c.f.* section 1.5.4.2) où le code déterministe utilisé est basé sur la méthode X-FEM. Soit $\boldsymbol{u}_h \in \mathcal{V}_h$ la solution du problème semi-discrétisé en espace suivant

$$A(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = L(\boldsymbol{v}_h) \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \overline{\mathcal{V}}_h \tag{2.45}$$

avec $\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$. Le vecteur aléatoire $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ vérifie presque sûrement

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.46}$$

L'équation (2.46) correspond au système d'équations classique qui devrait être obtenu par la méthode X-FEM quand on considère le problème déterministe associé à la réalisation $\boldsymbol{\xi}$. Dans ce cas, $\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})$ peut être seulement semi-définie positive. Une définition naturelle de la matrice inverse généralisée $\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})^+$ de $\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})$ consiste à fixer à zéro les degrés de liberté indéterminés. En d'autres termes, ils correspondent aux fonctions de base $\boldsymbol{\varphi}_i$ dont le support est tel que $\lambda(supp(\boldsymbol{\varphi}_i) \cap \Omega(\boldsymbol{\xi})) = 0$, où λ est la mesure de Lebesgue classique.
Une méthode de projection classique, comme celle introduite dans la section 1.5.4.2, consistera alors à projeter la solution $\mathbf{u}$ sur $\mathcal{S}_P \otimes \mathbb{R}^N$ au sens du produit scalaire défini dans $L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}}; \mathbb{R}^N)$. Les coefficients $\mathbf{u}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{I}_P$, de la solution décomposée sur le chaos $\boldsymbol{u}_{h,P} \in \overline{\mathcal{V}}_{h,P}$ sont alors calculés par une intégration sur le domaine stochastique

$$\mathbf{u}_\alpha = E(H_\alpha \mathbf{u}) \approx \sum_{k=1}^{n_g} \omega_k H_\alpha(\boldsymbol{\xi}_k)\mathbf{A}^+(\boldsymbol{\xi}_k)\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}_k) \tag{2.47}$$

Au niveau continu, cela revient à définir la solution $\boldsymbol{u}_{h,P}$ comme la projection de $\boldsymbol{u}_h \in \overline{\mathcal{V}}_h$ sur $\overline{\mathcal{V}}_{h,P}$ au sens de

$$\|\boldsymbol{u}_{h,P} - \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(B\times\boldsymbol{\Theta},d\mu)} = \min_{\boldsymbol{v}_{h,P} \in \overline{\mathcal{V}}_{h,P}} \|\boldsymbol{v}_{h,P} - \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(B\times\boldsymbol{\Theta},d\mu)} \tag{2.48}$$

où $\mu = \lambda \otimes P_{\boldsymbol{\xi}}$ est la mesure produit sur $B \times \boldsymbol{\Theta}$, et

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(B\times\boldsymbol{\Theta},d\mu)} = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_B \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \mathbf{x}) dx \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{2.49}$$

Comme on le montrera dans les exemples numériques, cette stratégie conduit à une mauvaise approximation : des erreurs importantes apparaissent sur les éléments finis $K \subset \mathcal{T}_h$ qui ont une probabilité non nulle d'être en dehors du domaine $\Omega(\boldsymbol{\xi})$, mais aussi une probabilité non nulle d'intersecter le domaine, *i.e* $0 < P_{\boldsymbol{\xi}}(\{\lambda(K \cap \Omega(\boldsymbol{\xi})) = 0\}) < 1$.

Remarque 2.3 ***Méthode de projection adaptée au problème*** *: le problème avec l'utilisation d'une méthode de projection classique vient du poids donné par la projection à la partie non-physique de la solution. On rappelle que la partie non-physique de la solution est ici obtenue par le prolongement artificiel de la solution à zéro. Afin d'obtenir une bonne méthode de projection, celle-ci doit être basée sur la norme*

physique de la solution, tout comme la projection de Galerkin. On peut par exemple définir la solution approchée par

$$\|\boldsymbol{u}_{h,P} - \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(\mathcal{P},d\mu)} = \min_{\boldsymbol{v}_{h,P}\in\overline{\mathcal{V}}_{h,P}} \|\boldsymbol{v}_{h,P} - \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(\mathcal{P},d\mu)} \tag{2.50}$$

où $\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ *est la solution semi-discrétisée en espace et où la norme* $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{P},d\mu)}$ *est la norme* L^2 *classique sur la restriction des fonctions au domaine physique* $\mathcal{P}$*. Ainsi, le problème stochastique à résoudre est le suivant*

$$\int_{\boldsymbol{\Theta}}\int_{\Omega(\mathbf{x})} \boldsymbol{v}_{h,P}\cdot\boldsymbol{u}_{h,P}\,dx\,dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}}\int_{\Omega(\mathbf{x})} \boldsymbol{v}_{h,P}\cdot\boldsymbol{u}_{h}\,dx\,dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{2.51}$$

Le problème (2.51) est équivalent au système d'équations suivant

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_P} E(H_\beta\mathbf{M}H_\alpha)\mathbf{u}_\alpha = E(H_\beta\mathbf{M}\mathbf{u}) \quad \forall\beta\in\mathcal{I}_P \tag{2.52}$$

où $\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi})$ *est une matrice de masse géométrique aléatoire dont les coefficients sont définis par*

$$(\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}))_{ij} = \int_{\Omega(\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\varphi}_j(\boldsymbol{x})\,dx = \int_B \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\varphi}_j(\boldsymbol{x})\,I_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\,dx \tag{2.53}$$

Une méthode de projection efficace, i.e. *basée sur une projection de la partie physique de la solution, conduit alors à résoudre un système similaire au problème (2.42) obtenu par la projection de Galerkin. La méthode de projection, ainsi définie, n'est alors plus une méthode dite non-intrusive car elle nécessite un traitement équivalent à l'approche de Galerkin.*

2.8 Stratégies de résolution dans la méthode X-SFEM

Dans cette section, nous nous intéressons aux aspects numériques liés à la méthode X-SFEM. Dans le cadre d'une approximation de Galerkin, nous montrons comment la construction et la résolution du problème (2.41) peuvent être traitées. Nous présenterons tout d'abord la procédure de résolution générale qui est relativement classique dans le cadre des méthodes éléments finis stochastiques. Nous présenterons ensuite les aspects numériques plus spécifiques à la méthode X-SFEM permettant de construire l'opérateur et le second membre du système (2.42). Nous proposerons une approche prenant en compte les spécificités des quantités élémentaires à calculer.

2.8.1 Procédure générale de résolution pour l'approximation de Galerkin

On rappelle que les coefficients de l'approximation de Galerkin $\boldsymbol{u}_{h,P}\in\overline{\mathcal{V}}_{h,P}$ sont solutions du système d'équations donné dans (2.42) et rappelé ici

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_P} E(H_\beta\mathbf{A}H_\alpha)\mathbf{u}_\alpha = E(\mathbf{b}H_\beta) \quad \forall\beta\in\mathcal{I}_P \tag{2.54}$$

où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ sont respectivement la matrice éléments finis et le vecteur chargement aléatoires. La construction du système est alors analogue à la méthode exposée dans la section 2.6

2.8.2 Calcul de la décomposition stochastique de la matrice et du vecteur aléatoires

L'étape importante et délicate pour la construction du système (2.54) concerne la décomposition stochastique de la matrice et du vecteur aléatoires. Afin de simplifier la compréhension des méthodes utilisées ici, nous considérons que les propriétés matérielles, représentées par le tenseur $\boldsymbol{C}$, et les chargements, représentés par les vecteurs $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{f}$, sont déterministes. Nous considérons également que les efforts de surface $\boldsymbol{F}$ sont appliqués sur une partie aléatoire de la frontière Γ_2 qui peut être caractérisée par une level set ϕ telle que

$$\Gamma_2(\boldsymbol{\xi}) = \{\boldsymbol{x} \in B; \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0\} \cup \{\boldsymbol{x} \in \partial_2 B; \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) < 0\}$$

où $\partial_2 B$ est une partie de la frontière ∂B. Il s'agit d'un cas particulier où les deux cas de figure donnés par les équations (2.28) et (2.29) sont combinés.

2.8.2.1 Décomposition des vecteurs et matrices élémentaires

La matrice et le vecteur du système éléments finis sont obtenus par un assemblage classique des quantités élémentaires

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathop{\mathsf{A}}_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}) = \mathop{\mathsf{A}}_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.55}$$

où $\mathbf{A}_K$ est la matrice élémentaire liée à l'élément K et $\mathbf{b}_K$ le vecteur élémentaire. Les composantes de $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{b}_K$ sont alors définies par

$$(\mathbf{A}_K)_{ij} = \int_K \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_j) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_i)\, \mathcal{H}(-\phi)\, dx \tag{2.56}$$

$$(\mathbf{b}_K)_i = \int_K \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{f}\, \mathcal{H}(-\phi)\, dx + \int_{\partial K \cap \partial_2 B} \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{F}\, \mathcal{H}(-\phi)\, ds + \int_K \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{F}\, \delta(\phi)\, dx \tag{2.57}$$

Les décompositions stochastiques données par les équations (1.61) et (1.62) peuvent être effectuées élément par élément. Nous devons alors calculer les coefficients $\{\mathbf{A}_{K,\gamma}\}_{\gamma \in \mathcal{I}_A}$ et $\{\mathbf{b}_{K,\gamma}\}_{\gamma \in \mathcal{I}_b}$, définis par

$$\mathbf{A}_{K,\gamma} = E(\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi}) H_\gamma(\boldsymbol{\xi})) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{A}_K(\mathbf{x}) H_\gamma(\mathbf{x})\, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{2.58}$$

$$\mathbf{b}_{K,\gamma} = E(\mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi}) H_\gamma(\boldsymbol{\xi})) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{b}_K(\mathbf{x}) H_\gamma(\mathbf{x})\, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{2.59}$$

Les coefficients de la décomposition peuvent alors être obtenus par une intégration appropriée sur le domaine stochastique $\boldsymbol{\Theta}$ respectant la mesure de probabilité $dP_{\boldsymbol{\xi}}$. On note $Q_K = \{(\boldsymbol{\xi}, \omega)\}$ une règle de

quadrature, où $\boldsymbol{\xi}$ et ω sont respectivement les points et les poids d'intégration tels que

$$E(f(\boldsymbol{\xi})) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} f(\mathbf{y}) dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}) \approx \sum_{(\boldsymbol{\xi},\omega)\in Q_K} \omega f(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.60}$$

Ainsi le calcul des coefficients de la décomposition nécessite le calcul des quantités élémentaires $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi})$ pour des réalisations $\boldsymbol{\xi}$, correspondant aux réalisations $\phi(\cdot,\boldsymbol{\xi})$ de la level set aléatoire. Pour tous les éléments qui ne sont pas coupés par l'iso-zéro de la level set $\phi(\cdot,\boldsymbol{\xi})$, une quadrature classique, adaptée à la nature de l'élément fini, est simplement réalisée. En revanche, pour les éléments coupés par l'iso-zéro (*c.f.* figure 2.7), des stratégies d'intégration adaptées sont nécessaires. Nous proposons ici deux méthodes différentes. La première, classiquement utilisée dans la méthode déterministe X-FEM, est basée sur un découpage approprié de l'élément respectant la frontière du domaine. Cette technique permet d'obtenir une intégration spatiale exacte, mais peut s'avérer coûteuse lorsqu'un grand nombre de calculs doit être réalisé. On parlera alors d'une "intégration spatiale exacte". Nous proposons une seconde approche, plus rapide, qui ne nécessite pas de decoupage mais qui introduit naturellement une erreur d'intégration. Nous parlerons alors d'une "intégration spatiale approchée".

Stratégie A : intégration spatiale exacte. Afin de calculer correctement les quantités élémentaires $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi})$, la première stratégie consiste à effectuer un sous-découpage de l'élément (pour le calcul des $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi})$) et de ses bords (pour le calcul des $\mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi})$), puis de définir une quadrature spatiale sur $K \cap \Omega(\boldsymbol{\xi})$, $\partial K \cap \Gamma_2(\boldsymbol{\xi})$ et $K \cap \Gamma_2(\boldsymbol{\xi})$. Cette méthode est classiquement utilisée dans le cadre de la méthode déterministe X-FEM [Sukumar *et al.* 2001]. La figure 2.7 illustre cette première stratégie. Le sous-découpage d'un élément se révèle être une opération relativement coûteuse. Dans le cadre d'un

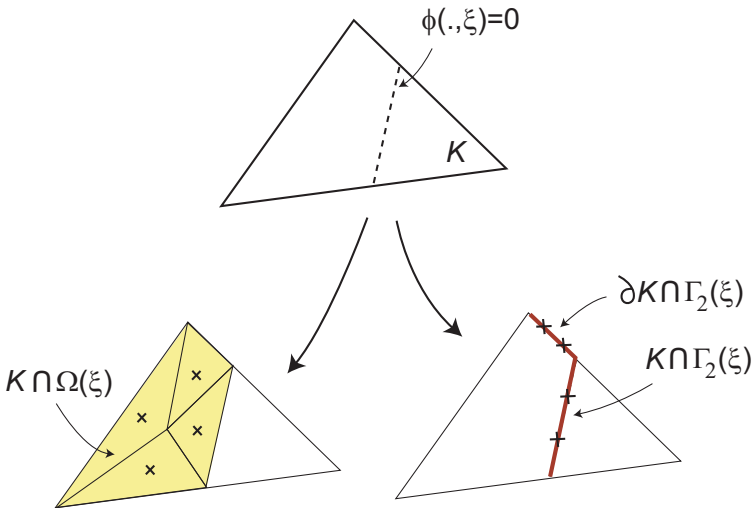


FIG. 2.7 – Stratégie d'intégration spatiale A : sous-découpage d'un élément triangle K à 3 noeuds et de ses bords pour l'intégration numérique sur $K \cap \Omega(\boldsymbol{\xi})$, $\partial K \cap \Gamma_2(\boldsymbol{\xi})$ et $K \cap \Gamma_2(\boldsymbol{\xi})$ pour une réalisation $\phi(\cdot,\boldsymbol{\xi})$ de la level set.

calcul déterministe X-FEM, pour un élément K particulier, cette opération doit être réalisée une seule fois, tandis que, dans le cadre d'un calcul X-SFEM, on est amené à répéter cette opération à plusieurs

reprises en fonction de la quadrature stochastique définie par (2.60). Nous proposons alors une autre stratégie moins coûteuse présentée ci-après.

Stratégie B : intégration spatiale approchée. La seconde stratégie ne demande aucun sous-découpage de l'élément. L'idée est d'utiliser une quadrature spatiale fixée $G_K = \{(\boldsymbol{x}_l, w)\}$ avec un degré élevé. Pour le calcul, on doit alors déterminer les points d'intégration situés dans la matière, *i.e.* appartenant à l'ensemble $G_K^- = \{(\boldsymbol{x}_l, w) \in G_K; \phi(\boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{\xi}) < 0\}$. Cette détermination est rapide puisqu'elle ne nécessite que l'évaluation des valeurs nodales de la level set pour les réalisations $\boldsymbol{\xi}$.
En pratique, la règle de quadrature spatiale est définie sur l'élément de référence du problème. Cette stratégie conduit à une erreur d'intégration. De plus, elle n'est utilisable que pour le calcul des quantités $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ et pas pour les $\mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi})$. Cependant, elle reste plus rapide que la première stratégie et l'évaluation des $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ représente un coût beaucoup plus important que celle des $\mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi})$. Dans les exemples numériques, on comparera l'efficacité de ces deux approches. On notera que pour la création des points

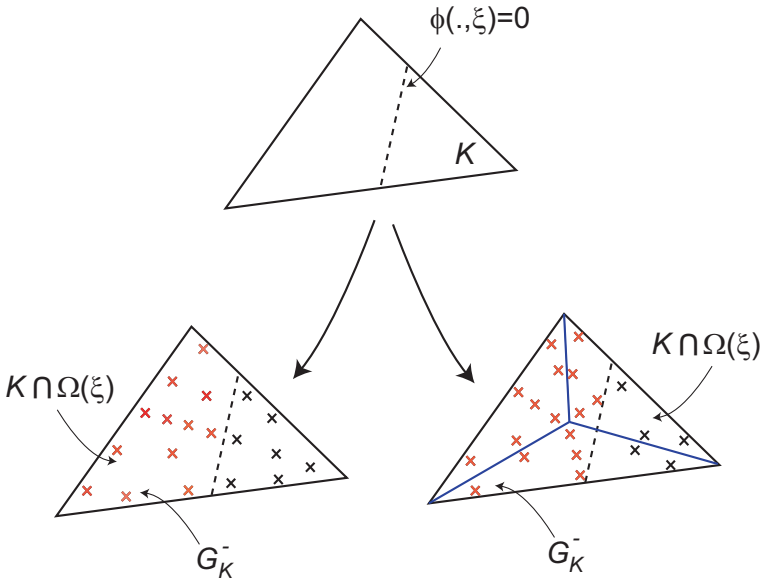


FIG. 2.8 – Stratégie d'intégration spatiale B : détermination de l'ensemble des points d'intégration G_K^- pour une réalisation $\phi(\cdot, \boldsymbol{\xi})$ de la level set.

d'intégration, on peut également prédécouper l'élément et définir une quadrature sur chaque sous-élément obtenu. L'opération n'est pas plus coûteuse puisque le prédécoupage est réalisé sur l'élément de référence une seule fois. La figure 2.8 à droite illustre cette seconde stratégie.
Il reste maintenant à définir une règle de quadrature Q_K sur $\boldsymbol{\Theta}$ adaptée au problème. Celle-ci doit être construite en fonction de la régularité des quantités $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi})$ dépendant de $\boldsymbol{\xi}$. Par exemple, si les composantes de la matrice $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ sont polynomiales de degré au plus j en $\boldsymbol{\xi}$, et si on utilise une base de fonctions polynomiales H_α de degré au plus p, alors l'intégration de $(\mathbf{A}_K H_\alpha)$ sur $\boldsymbol{\Theta}$ nécessitera l'intégration de fonctions polynomiales de degré au plus $p + j$. Ainsi, on pourra construire une règle classique de quadrature de Gauss associée à la mesure $dP_{\boldsymbol{\xi}}$ qui conduira à un calcul exact des coefficients de la décomposition $\mathbf{A}_{K,\gamma}$. Dans la section suivante, nous allons montrer que ces quantités ne sont pas régulières sur $\boldsymbol{\Theta}$ et nécessitent un soin particulier pour leur intégration.

2.8.2.2 Régularité stochastique des matrices et vecteurs élémentaires

Nous choisissons de montrer la régularité des matrices et vecteurs élémentaires en fonction des variables aléatoires $\boldsymbol{\xi}$ en utilisant un exemple simple. On considère un maillage spatial $\mathcal{T}_h$ composé d'éléments triangles à 3 noeuds. On considère également que le matériau est homogène isotrope. Les fonctions de bases $\boldsymbol{\varphi}_i$ d'un élément fini $K \in \mathcal{T}_h$ sont choisies linéaires, la matrice élémentaire $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ s'écrit alors

$$\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A}_K^0 \int_K \mathcal{H}(-\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}))\, dx = \mathbf{A}_K^0 \lambda(K \cap \Omega(\boldsymbol{\xi})) \tag{2.61}$$

où $(\mathbf{A}_K^0)_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_i) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_j)$ est une matrice constante. Dans ce cas, la régularité stochastique de $\mathbf{A}_K$ ne dépend que de la fonction $\boldsymbol{\xi} \mapsto \lambda(K \cap \Omega(\boldsymbol{\xi}))$ qui est la mesure de l'intersection entre l'élément K et le domaine $\Omega(\boldsymbol{\xi})$. On choisit le cas où l'iso-zéro de la fonction level set est un hyperplan défini par une normale unitaire $\boldsymbol{a}$ et une position donnée par une unique variable aléatoire ξ. La level set peut alors s'écrire

$$\phi(\boldsymbol{x}, \xi) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} - \xi$$

La figure 2.9 présente la fonction $\xi \mapsto \lambda(K \cap \Omega(\xi))$. Cette fonction est polynomiale par morceaux. On constate que le domaine stochastique, inclus dans $\mathbb{R}$, peut être divisé en quatre intervalles. Sur l'intervalle $]-\infty, \xi_1[$, la fonction $\lambda(K \cap \Omega(\xi))$ est égale à 0 et sur l'intervalle $]\xi_3, \infty[$ elle est constante est égale à $\lambda(K)$. Sur les deux autres intervalles $]\xi_1, \xi_2[$ et $]\xi_2, \xi_3[$, $\lambda(K \cap \Omega(\xi))$ est polynomiale en ξ de degré 2. Ces deux derniers intervalles correspondent aux cas de figure où l'iso-zéro de la level set coupe deux arêtes de l'élément K, chaque intervalle étant associé à un couple d'arêtes différent. D'une manière

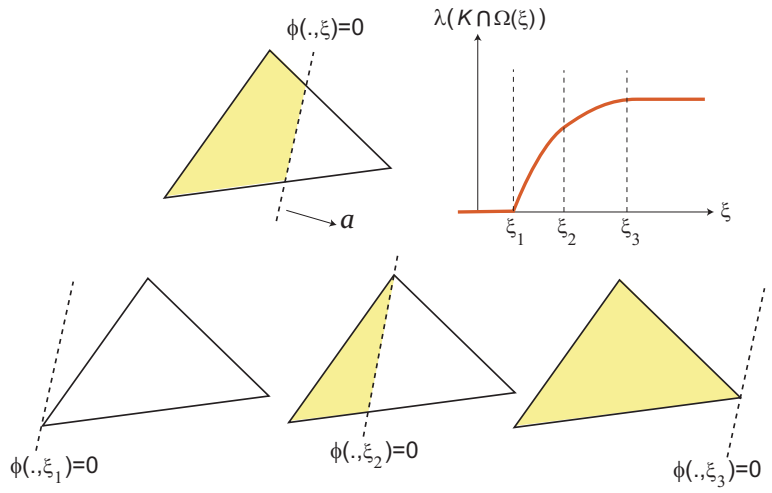


FIG. 2.9 – Représentation de $\lambda(K \cap \Omega(\xi))$ en fonction de ξ pour une level set définie par $\phi(\boldsymbol{x}, \xi) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} - \xi$.

analogue, si les efforts de surface $\boldsymbol{F}$ et les efforts volumiques $\boldsymbol{f}$ sont des fonctions polynomiales de $\boldsymbol{x}$, leurs contributions dans $\mathbf{b}_K$ sont également polynomiales par morceaux en fonction de ξ. Ainsi, il est clair que l'utilisation d'une quadrature classique, définie sur l'ensemble du domaine stochastique, ne permettra pas d'intégrer exactement les quantités élémentaires $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi})$. Une mauvaise intégration de ces quantités peut conduire à une mauvaise estimation de l'approximation de Galerkin conduisant à un "crime

variationnel trop grave". L'idée est alors de construire une partition adaptée du domaine stochastique telle que les quantités élémentaires sont régulières sur chacun des sous-domaines. A partir de cette partition, il sera possible de définir une règle de quadrature permettant d'intégrer convenablement les quantités élémentaires. La question est de savoir comment définir cette partition du domaine stochastique.
La définition de cette partition est finalement assez naturelle puisqu'elle peut être caractérisée entièrement par les valeurs nodales de la level set aléatoire. En effet, on remarque que chacun des sous-domaines stochastiques correspond à un état constant de l'élément K, l'état de K étant défini par le signe des valeurs nodales de la level set. Pour l'exemple traité ici, il existe quatre états d'éléments possibles, correspondants aux quatre sous-domaines stochastiques de $\mathbf{\Theta}$ à déterminer. Ils sont présentés sur la figure 2.10.

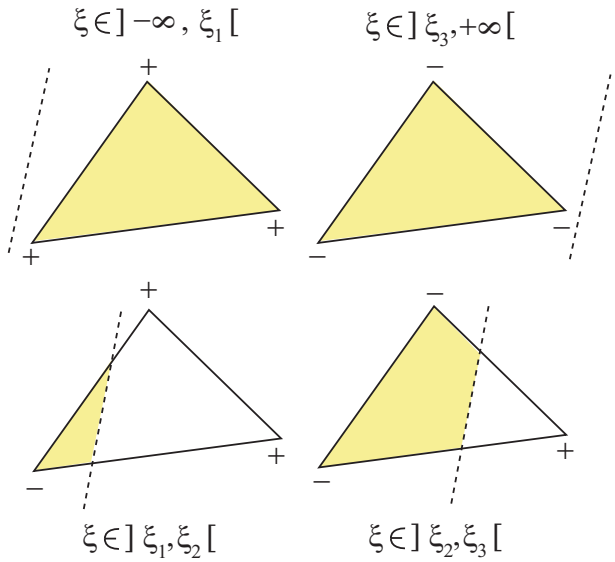


FIG. 2.10 – Signe de la level set $\phi(\cdot, \xi)$ aux noeuds de l'élément K pour chacun des quatre sous-domaines stochastiques.

2.8.2.3 Découpage du domaine stochastique pour l'intégration

A partir des observations précédentes, nous présentons, dans cette section, la procedure utilisée dans la méthode X-SFEM, permettant de créer la partition du domaine stochastique $\mathbf{\Theta}$ adaptée à un élément fini K. Nous rappelons que cette procédure fait seulement appel à l'ensemble des valeurs de la level set aux noeuds I_K d'un élément, notées $(\phi_i(\boldsymbol{\xi}))_{i \in I_K}$.
On suppose que les variables aléatoires de base du problème $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_m)$ sont statistiquement indépendantes et que chaque variable ξ_j est une variable uniforme à valeurs dans $[a_j, b_j]$. On pourra toujours se ramener à ce cas de figure en utilisant une transformation isoprobabiliste adaptée aux variables aléatoires de base. Le domaine stochastique $\mathbf{\Theta}$ peut alors s'écrire

$$\mathbf{\Theta} = \prod_{j=1}^{m} [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^m$$

Pour un événement élémentaire $\boldsymbol{\xi}$, on définit l'état d'un élément $S_K(\boldsymbol{\xi})$ par

$$S_K(\boldsymbol{\xi}) = (sign(\phi_i(\boldsymbol{\xi})))_{i \in I_K}$$

où $sign(\phi_i(\boldsymbol{\xi})) \in \{-1, 0, 1\}$. Idéalement, le but de la procédure de découpage est de créer une partition $\mathcal{C}_K$ de $\boldsymbol{\Theta}$ telle que sur chaque sous-domaine $C \in \mathcal{C}_K$, $S_K(\boldsymbol{\xi})$ ait une valeur constante. On cherche en pratique une partition vérifiant cette propriété au mieux. On utilise pour cela une procédure récursive de type "octree" conduisant à la définition d'un maillage cartésien $\mathcal{C}_K$ de $\boldsymbol{\Theta}$. Un élément $C \in \mathcal{C}_K$ est alors appelé cellule. Elle est définie par un hyper-rectangle telle que

$$C = \prod_{j=1}^{m} [\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}]$$

Elle possède 2^m sommets notés $sommets(C)$. On note $division(C)$ la fonction booléenne qui indique si une cellule doit être divisée ou pas. La fonction $division(C)$ est dite fausse si $S_K(\boldsymbol{\xi}) = S_K(\boldsymbol{\xi}')$ pour tout $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}' \in sommets(C)$, et vraie sinon. On introduit la notion d'ordre de découpage d'une cellule, noté $ordre(C)$, donnant le nombre de découpages depuis $\boldsymbol{\Theta}$ (ordre 0) nécessaires pour obtenir la cellule C. On introduit également un ordre de découpage maximum autorisé, noté $k \in \mathbb{N}$. Une cellule dite "parent" sera divisée en plusieurs cellules dites "enfants" si la fonction $division(C)$ est vraie et que $ordre(C) < k$. La construction de la partition stochastique consiste alors à appliquer la fonction $division_récursive$ au domaine $\boldsymbol{\Theta}$ ou aux cellules d'une partition existante de $\boldsymbol{\Theta}$. La fonction $division_récursive$ est donnée par l'algorithme 1.

algorithme 1 Construction récursive d'un maillage cartésien $\mathcal{C}_K$ de dimension m
fonction $division_récursive(C)$

1: **si** $division(C)$ et $ordre(C) < k$ **alors**
2: **pour tout** $C' \in enfants(C)$ **faire**
3: $division_récursive(C')$
4: **fin pour**
5: **sinon**
6: ajouter C au maillage $\mathcal{C}_K$
7: **fin si**

Il existe évidemment plusieurs manières de définir la division d'une cellule en un ensemble de cellules, notées $enfants(C)$. La manière la plus simple est de découper la cellule parent de façon isotrope sans regarder son état. Cette approche, appelée procédure de découpage isotrope, crée alors 2^m cellules enfants. Si on tient compte de l'état de la cellule parent, *i.e.* les états des sommets de la cellule, on peut définir une seconde approche, appelée procédure de découpage anisotrope. Avec cette méthode, il est possible de réduire le nombre de cellules de la partition stochastique. Ainsi, on peut réduire le nombre de points d'intégration de la règle de quadrature et, donc, les coûts numériques associés à cette phase du calcul. On note qu'une cellule C possède $2m$ faces. On groupe ces faces par paires, notées $(\mathcal{F}_j, \mathcal{F}'_j)$, où les deux faces sont opposées et orthogonale à la dimension j. Dans le cas de la procédure anisotrope, une cellule parent sera découpée si et seulement si $état(\mathcal{F}_j) \neq état(\mathcal{F}'_j)$, où l'état d'une face $\mathcal{F}$ est définie par

$état(\mathcal{F}) = \{S_K(\boldsymbol{\xi})\}_{\boldsymbol{\xi} \in sommets(\mathcal{F})}$. Les sommets de deux faces opposées $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}'_j$ sont rangés de la même manière. Ainsi, deux faces ont le même état si chaque paire $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}')$ de sommets opposés a le même état, *i.e.* $S_K(\boldsymbol{\xi}) = S_K(\boldsymbol{\xi}')$. Les figures 2.11 et 2.12 présentent différentes partitions obtenues avec chacune des procédures de découpage pour des dimensions stochastiques $m = 2$ et $m = 3$.

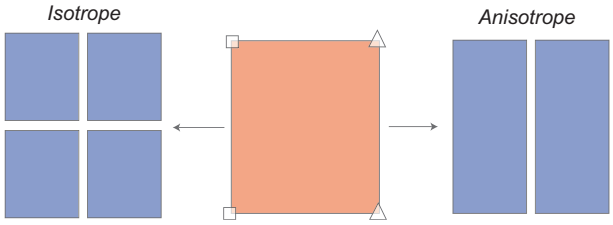


FIG. 2.11 – Comparaison entre les procédures de découpage isotrope et anisotrope où □ et △ indiquent deux états différents des sommets ; dimension $m = 2$.

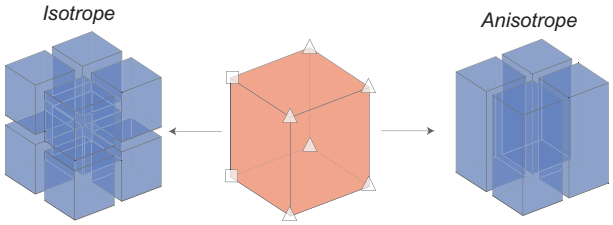


FIG. 2.12 – Comparaison entre les procédures de découpage isotrope et anisotrope où □ et △ indiquent deux états différents des sommets ; dimension $m = 3$.

2.8.2.4 Règle de quadrature adaptée aux partitions du domaine stochastique

On présente ici comment définir une règle de quadrature Q_K adaptée à la partition $\mathcal{C}_K$ du domaine stochastique $\boldsymbol{\Theta}$ obtenue par l'une ou l'autre des procédures proposées précédemment. Pour chaque cellule $C \in \mathcal{C}_K$, soit f_C l'application linéaire qui transforme l'hyper-cube de référence $\tilde{C} = [0,1]^m$ en $C = \prod_{j=1}^m [\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}]$, et soit $\tilde{Q}$ une quadrature classique de Gauss-Legendre sur $\tilde{C}$. On note $(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}, \widetilde{\omega}) \in \widetilde{Q}$ les points et poids d'intégration correspondants. La quadrature $Q_{C,K}$ sur C est alors définie par

$$Q_{C,K} = \{(\boldsymbol{\xi}, \omega) = (f_C(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}), \widetilde{\omega} P_{\boldsymbol{\xi}}(C)), (\widetilde{\boldsymbol{\xi}}, \widetilde{\omega}) \in \widetilde{Q})\}$$

où $P_{\boldsymbol{\xi}}(C) = \frac{\prod_{j=1}^m (\xi_j^{(2)} - \xi_j^{(1)})}{\prod_{j=1}^m (b_j - a_j)}$ est la probabilité de C. La quadrature Q_K est alors définie par $Q_K = \cup_{C \in \mathcal{C}_K} Q_{C,K}$.

La règle de quadrature sur chaque sous-domaine stochastique de la partition $\mathcal{C}_K$ sera choisie conformément à la régularité théorique attendue des matrices $\mathbf{A}_K$ et des vecteurs $\mathbf{b}_K$ afin d'intégrer convenablement les quantités $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi}) H_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi}) H_\alpha(\boldsymbol{\xi})$. Cette régularité dépend de la nature de l'élément fini choisi pour le calcul et de la régularité de la level set par rapport à $\boldsymbol{\xi}$. Elle doit alors pouvoir être estimée *a priori*. Dans toute la suite, nous travaillerons uniquement avec des éléments triangles à 3 noeuds pour lesquels les matrices $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ sont polynomiales par morceaux de degré 2, si ϕ est linéaire en $\boldsymbol{\xi}$. Dans ce cas, l'ordre de la quadrature peut être choisi afin de pouvoir intégrer exactement des fonctions polynomiales de degré

$(2+j)$, où j est le degré maximum des fonctions polynomiales $H_\alpha(\boldsymbol{\xi})$.
Dans la section suivante, nous présentons différents exemples numériques afin d'illustrer l'efficacité de la méthode X-SFEM. Ces exemples permettront notamment de montrer l'intérêt des stratégies d'intégration. De plus, nous pourrons comparer les résultats obtenus avec la projection de Galerkin et ceux obtenus avec une méthode de projection L^2 basée sur un code déterministe X-FEM.

2.9 Exemple 1 : plaque à géométrie aléatoire en traction uniforme

Ce premier exemple de plaque en traction est volontairement très détaillé. En effet, comme il a l'avantage de posséder une solution exacte, il nous est très utile pour étudier les différentes stratégies d'intégration et de calcul présentées précédemment. Nous nous focaliserons surtout sur les différentes méthodes d'intégration au niveau stochastique et spatial. Nous montrerons également la qualité des solutions obtenues avec la méthode X-SFEM. Enfin, nous utiliserons une approche non-intrusive basée sur un code déterministe X-FEM et nous comparerons ces résultats à ceux obtenus avec une projection de Galerkin (*i.e.* X-SFEM).

2.9.1 Description du problème

On considère une plaque homogène soumise à une traction uniaxiale. Cette plaque occupe un domaine aléatoire rectangulaire $\Omega(\boldsymbol{\xi}) =]0,1[\times]-\frac{a(\boldsymbol{\xi})}{2}, \frac{a(\boldsymbol{\xi})}{2}[\subset B =]0,1[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, où $a(\boldsymbol{\xi})$ est une variable aléatoire caractérisée par

$$a(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 + \xi_2 \quad \text{où} \quad \xi_1 \in U(0.75, 0.95) \quad \text{et} \quad \xi_2 \in U(0, 0.05)$$

ξ_1 et ξ_2 sont des variables aléatoires uniformes statistiquement indépendantes. Nous travaillons alors dans un domaine stochastique de dimension 2 tel que $\boldsymbol{\Theta} = [0.75, 0.95] \times [0, 0.05]$. On choisit de caractériser le domaine aléatoire $\Omega(\boldsymbol{\xi})$ par la fonction level set suivante : pour $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \Omega(\boldsymbol{\xi})$,

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = max\{y - \frac{a(\boldsymbol{\xi})}{2}, -\frac{a(\boldsymbol{\xi})}{2} - y\} \tag{2.62}$$

Nous faisons l'hypothèse des contraintes planes et nous considérons le matériau homogène élastique isotrope avec un module d'Young $E = 1$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. La plaque est soumise à un effort unitaire uniforme tel que $\boldsymbol{F} = (\pm 1, 0)$ sur $\Gamma_2 = \{\boldsymbol{x} \in \partial B; \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) < 0\}$. Comme conditions aux limites, nous bloquons les translations selon les directions x et y au point P_1 et selon la direction y au point P_2. La figure 2.13 présente le problème. Ce problème possède une solution exacte $\boldsymbol{u}$ qui s'écrit : pour $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \Omega(\boldsymbol{\xi})$,

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = (\frac{x}{E}, -\frac{\nu}{E} y) \tag{2.63}$$

On remarque que cette solution exacte ne dépend pas de l'aléa $\boldsymbol{\xi}$.
Avec la méthode X-SFEM, on travaille avec un unique maillage $\mathcal{T}_h$ de B composé de 76 éléments triangles à 3 noeuds. Ce maillage est également présenté sur la figure 2.13 où les éléments sont séparés en deux groupes : le premier groupe, noté (e_i), comprend tout les éléments sûrement dans le domaine et le second groupe, noté (e_c), comprend tout les éléments possiblement coupés par l'iso-zéro de la level set. Pour l'approximation au niveau stochastique, on utilise un chaos polynomial généralisé de degré $p = 1$, ce qui

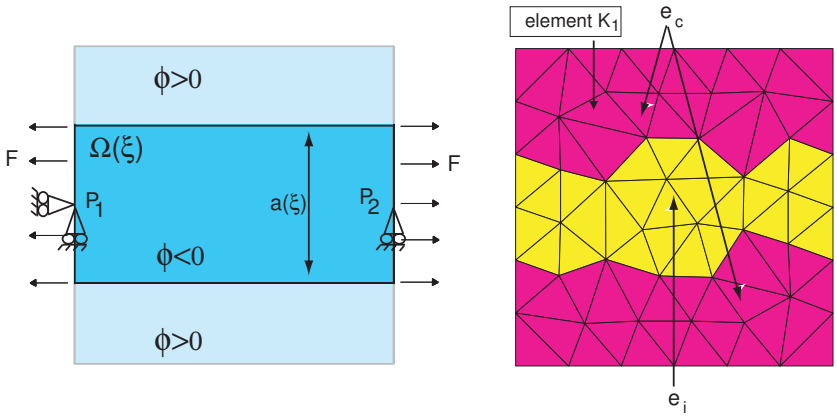


FIG. 2.13 – Exemple 1 : problème de la plaque aléatoire en traction.

paraît suffisant au regard de la solution exacte $\boldsymbol{u}$ puisqu'elle ne dépend pas de ξ. La matrice de rigidité $\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})$ est décomposée sur un chaos de degré 2 afin que son approximation n'ait *a priori* pas d'influence sur la solution du problème discrétisé (*c.f.* méthode de Galerkin section 2.6).

Afin de pouvoir estimer la qualité de la solution X-SFEM, nous introduisons l'indicateur d'erreur global suivant basé sur le champ de contraintes

$$\varepsilon = \frac{\|\boldsymbol{\sigma}_{h,P} - \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(\mathcal{P},d\mu)}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(\mathcal{P},d\mu)}} \tag{2.64}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ and $\boldsymbol{\sigma}_{h,P}$ sont respectivement les champs de contraintes exact et approché, μ la mesure produit sur $B \times \boldsymbol{\Theta}$ et où la norme L^2 est définie par

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|^2_{L^2(\mathcal{P},d\mu)} = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_{\Omega(\mathbf{x})} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\mathbf{x})\, dx\, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{2.65}$$

Nous introduisons également l'indicateur d'erreur local ε_K[1], donnant la contribution locale à l'erreur globale d'un élément fini $K \in \mathcal{T}_h$

$$\varepsilon_K = \frac{\|\boldsymbol{\sigma}_{h,P} - \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(\mathcal{P}_K,d\mu)}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(\mathcal{P},d\mu)}} \tag{2.66}$$

où $\mathcal{P}_K = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \in K \times \boldsymbol{\Theta}\ ; \boldsymbol{x} \in \Omega(\boldsymbol{\xi})\}$. Ces indicateurs d'erreur permettent d'étudier la qualité des techniques d'intégration au niveau stochastique, mais aussi, au niveau spatial.

[1]la contribution locale à l'erreur globale vérifie $\varepsilon = \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\varepsilon^K)^2\right)^{1/2}$

2.9.2 Efficacité des procédures d'intégration au niveau stochastique

2.9.2.1 Comparaison des procédures récursives de découpage

Nous étudions, dans un premier temps, la qualité de la technique d'intégration au niveau stochastique. Nous nous intéressons tout particulièrement aux procédures récursives permettant de découper le domaine stochastique $\mathbf{\Theta}$ (*c.f.* section 2.8.2.3). Au niveau spatial, on n'utilise que la procédure d'intégration exacte, appelée "stratégie A" (*c.f.* section 2.8.2.1). Soit $K \in \mathcal{T}_h$ un élément fini donné et $\mathcal{C}_K$ le maillage cartésien du domaine stochastique associé à K, obtenu par l'une ou l'autre des procédures de découpage (isotrope ou anisotrope). On note $k \in \mathbb{N}$ l'ordre de découpage maximum autorisé pour la partition du domaine stochastique. L'entier k détermine en quelque sorte la précision de l'intégration au niveau stochastique. La figure 2.14 présente les partitions stochastiques d'ordre $k = 4$, obtenues avec chacune des procédures, associées à un élément fini particulier K_1 de maillage $\mathcal{T}_h$ (l'élément est présenté sur la figure 2.13)[2]. K_1 appartient à l'ensemble des éléments (e_c) possiblement coupés par l'iso-zéro de la level set. Nous illustrons sur la figure 2.14 que le nombre de sous-domaines obtenus est plus faible avec la procédure de découpage anisotrope (69 contre 88). Sur cette figure, les cellules sont colorées différemment en fonction de leur état. Les cellules en jaune correspondent aux réalisations ou l'élément est sûrement dans le domaine, les cellules en bleu foncé correspondent aux réalisations où l'élément est sûrement en dehors du domaine et les cellules en bleu clair correspondent aux réalisations où l'élément est coupé par l'iso-zéro de la level set. Quant aux cellules en violet, elles restent indéterminées à ce stade du découpage. Si l'ordre de découpage k avait été plus grand, seules ces cellules auraient été à nouveau découpées. Nous rappelons que les procédures récursives s'arrêtent si tout les sommets $\boldsymbol{\xi} \in sommets(C)$ présentent le même état $S_K(\boldsymbol{\xi}) = (sign(\phi_i(\boldsymbol{\xi})))_{i \in I_K}$ pour un élément fini particulier K. Notons N_K le nombre de

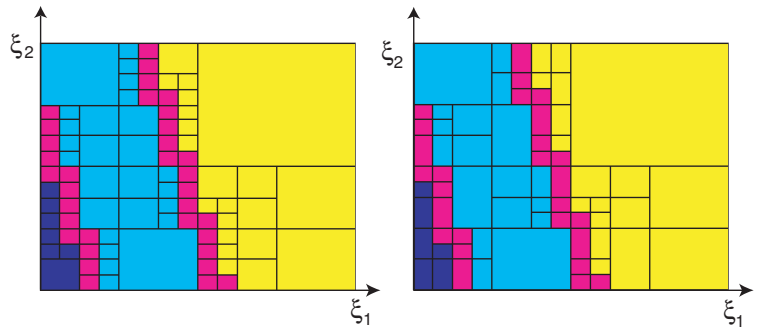


FIG. 2.14 – Exemple 1 : partitions stochastiques $\mathcal{C}_K$ d'ordre $k = 4$ pour l'élément fini K_1 : procédures isotrope (gauche) et anisotrope (droite).

sous-domaines de la partition $\mathcal{C}_K$. Le tableau 2.1 donne la valeur moyenne μ_N de N_K pour les éléments $K \in (e_c)$, obtenue avec chacune des deux procédures récursives pour des ordres de partition k de 1 à 5. On note T_K le temps de calcul nécessaire pour la création de la partition $\mathcal{C}_K$ et l'intégration des quantités élémentaires $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{b}_K$. Le tableau 2.1 donne également le temps de calcul moyen élémentaire μ_T pour les éléments $K \in (e_c)$. On remarque que ces temps sont réduits avec la procédure anisotrope pour des valeurs importantes de k. Les temps de calcul pour le traitement des éléments appartenant à l'ensemble

[2]On notera que l'échelle de la figure 2.14 a été modifiée pour une plus grande clarté : en effet, les variables aléatoires ξ_1 et ξ_2 n'ont pas le même support.

(e_i) et la résolution du système sont négligeables pour ce problème (aux alentours d'une seconde).

ordre k		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
μ_N	isotrope	4	14	32	69	143
	anisotrope	4	11	26	54	106
μ_T (s)	isotrope	$1.1\ 10^{-1}$	$2.4\ 10^{-1}$	$5\ 10^{-1}$	1.1	2.6
	anisotrope	$1.2\ 10^{-1}$	$2.2\ 10^{-1}$	$4.6\ 10^{-1}$	1	2

TAB. 2.1 – Exemple 1 : comparaison entre les procédures de découpage isotrope et anisotrope pour différents ordres k (μ_N, nombre moyen de sous-domaines stochastiques pour les éléments (e_c) et μ_T, temps CPU moyen pour la création des partitions stochastiques et l'intégration des quantités élémentaires pour l'ensemble (e_c)).

Pour ce problème, l'espace d'approximation contient la solution exacte. Ainsi, comme la méthode X-SFEM est basée sur une projection de Galerkin de la solution physique exacte, elle conduit idéalement à cette solution exacte. Cependant, la solution approchée obtenue avec X-SFEM dépend clairement de la précision d'intégration qui, dans les procédures récursives, dépend de k. On note $\boldsymbol{\sigma}_{h,P}^k$ le champ de contraintes approché obtenu avec X-SFEM, et ε^k la valeur de l'indicateur d'erreur globale déterminé à partir de l'équation (2.64). Sur la figure 2.15, on présente la convergence de ε^k en fonction de l'ordre maximum de découpage du domaine stochastique k. On observe une convergence rapide vers la solution exacte pour les deux procédures récursives. De plus, les courbes de convergence des deux procédures sont presque confondues, ce qui prouve que la procédure anisotrope est aussi précise que la procedure isotrope. On remarque, par exemple, que pour un ordre de découpage $k=2$, les deux procédures conduisent à une erreur inférieure à 10^{-4}. Sur cet exemple, la différence entre ces méthodes réside essentiellement dans les temps de calcul (*c.f.* tableau 2.1).

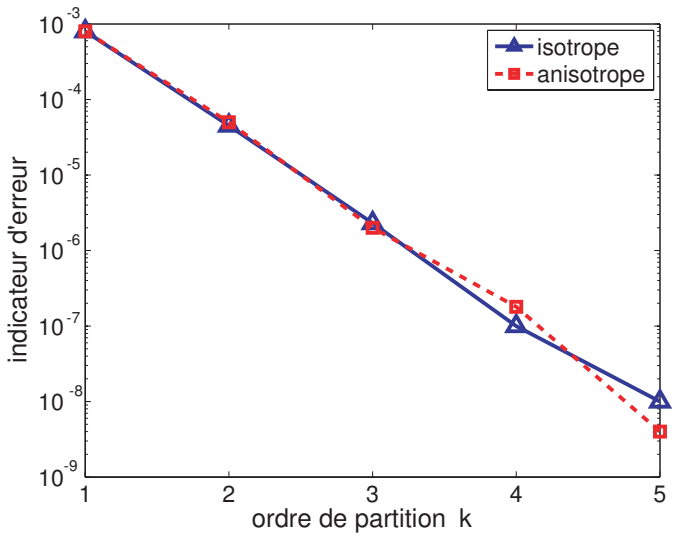


FIG. 2.15 – Exemple 1 : convergence de l'indicateur d'erreur global ε^k en fonction de k pour les procédures isotrope et anisotrope.

2.9.2.2 Comparaison avec une intégration basique

Si les procédures de découpage du domaine stochastique permettent d'obtenir la précision désirée pour l'intégration des quantités élémentaires $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{b}_K$, leurs coûts restent cependant élevés. Pour des problèmes où la dimension stochastique est élevée, l'utilisation de l'une ou l'autre de ces procédures n'est envisageable que pour un ordre de partition k faible (*e.g.* $k \leq 2$). Une autre possibilité est d'utiliser une quadrature Q_K d'ordre élevée sur l'ensemble du domaine stochastique $\mathbf{\Theta}$. Le tableau 2.2 donne les valeurs de l'indicateur d'erreur ε^q, basé sur l'équation (2.64) où q désigne le nombre de points d'intégration pour chaque dimension stochastique. On constate que les erreurs sont plus élevées que celles obtenues avec les procédures de découpage. De plus, ces erreurs restent sensiblement les mêmes quel que soit le nombre de points d'intégration utilisé. Cependant, l'erreur déterminée pour cet exemple, ne vient que des techniques d'intégration. Pour un problème où une véritable erreur d'approximation existe, une erreur d'intégration de l'ordre de 10^{-2} ne modifiera que très peu les résultats. Ce même tableau 2.2 donne également les temps de calculs élémentaires moyens μ_T pour les éléments $K \in (e_c)$. Ces temps de calculs sont plus faibles que ceux obtenus avec les procédures de découpage (*c.f.* tableau 2.1) et l'utilisation d'une technique d'intégration basique est alors avantageuse. Nous rappelons que les précédents résultats ont

q	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=10$	$q=20$	$q=30$	$q=40$
ε^q	$2.5\ 10^{-2}$	$2.5\ 10^{-2}$	$2.15\ 10^{-2}$	$2.17\ 10^{-2}$	$2.15\ 10^{-2}$	$2.2\ 10^{-2}$	$2.18\ 10^{-2}$
μ_T (s)	$4\ 10^{-2}$	$4.4\ 10^{-2}$	$4.8\ 10^{-2}$	$1\ 10^{-1}$	$4\ 10^{-1}$	0.8	1.7

TAB. 2.2 – Exemple 1 : temps CPU μ_T en seconde de la méthode X-SFEM utilisant une quadrature Q_K sur l'ensemble du domaine stochastique.

tous été calculés avec la stratégie d'intégration spatiale exacte (stratégie A), pour laquelle un découpage des éléments finis (e_c) est nécessaire. Nous allons maintenant comparer ces résultats à ceux obtenus avec la stratégie d'intégration approchée (*c.f.* section 2.8.2.1 stratégie B).

2.9.3 Efficacité des stratégies d'intégration au niveau spatial

Nous rappelons que la stratégie B ne nécessite pas de découpage des éléments finis (e_c), ce qui la rend plus rapide que la stratégie A. Cependant elle conduit à une intégration approchée. La question est donc de savoir si les erreurs obtenues avec cette stratégie sont acceptables ou non. Nous rappelons qu'avec cette stratégie, nous avons proposé deux manières de définir la quadrature pour l'intégration au niveau spatial :

1. une quadrature de Gauss de haut degré ;
2. un découpage prédéfini de l'élément de référence (réalisé une unique fois) et la définition d'une quadrature de Gauss de haut degré pour chaque sous-élément.

Ces deux cas de figure étaient présentés sur la figure 2.8. Dans un souci de clarté et de concision, nous choisissons de présenter uniquement le second. Nous fixons l'ordre de quadrature de Gauss à 4 et nous faisons varier le nombre de découpages n_d successifs de l'élément, compris entre 0 et 4 (soit entre 7 et 567 points d'intégration). Les résultats sont présentés dans le tableau 2.3 pour différents ordres de partition k associés à la procédure de découpage anisotrope. Comme prévu, les erreurs obtenues avec l'intégration approchée sont plus importantes. Quelque soit le nombre de points d'intégration spatiaux, l'ordre de grandeur de ε^k reste supérieur à 10^{-3}. De plus, l'utilisation de cette stratégie ne permet pas à la procédure de

découpage de remplir son rôle : quelque soit l'ordre de partition k, la solution X-SFEM ainsi calculée ne tend pas vers la solution exacte. La question est alors de savoir si une telle erreur d'intégration, *i.e.* 10^{-3}, est acceptable. Si on considère un problème pour lequel il existe une véritable erreur d'approximation liée à la modélisation éléments finis, commettre ce type d'erreur d'intégration ne paraît pas aberrant et modifiera très peu la solution obtenue. Dans l'exemple 3, pour lequel une erreur d'approximation existe, on montrera que l'erreur commise sur l'intégration ne modifie presque pas l'erreur d'approximation.

ordre k	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n_d=0$	$7.2\ 10^{-3}$	$4.7\ 10^{-3}$	$4.5\ 10^{-3}$	$4.2\ 10^{-3}$	$4.2\ 10^{-3}$
$n_d=1$	$5\ 10^{-3}$	$4\ 10^{-3}$	$3.4\ 10^{-3}$	$3.4\ 10^{-3}$	$3.4\ 10^{-3}$
$n_d=2$	$2.8\ 10^{-3}$	$1.3\ 10^{-3}$	$1.2\ 10^{-3}$	$1.2\ 10^{-3}$	$1.2\ 10^{-3}$
$n_d=3$	$2\ 10^{-3}$	$2\ 10^{-3}$	$2\ 10^{-3}$	$1.9\ 10^{-3}$	$1.9\ 10^{-3}$
$n_d=4$	$1.9\ 10^{-3}$	$1.6\ 10^{-3}$	$1.5\ 10^{-3}$	$1.5\ 10^{-3}$	$1.5\ 10^{-3}$

TAB. 2.3 – Exemple 1 : valeurs de l'indicateur d'erreur globale ε^k en fonction du nombre de sous-découpages pour l'intégration spatiale n_d et de l'ordre maximum k pour l'intégration stochastique ; procédure récursive anisotrope.

Tout l'intérêt de cette stratégie d'intégration approchée est montré dans le tableau 2.4. Ce dernier présente les temps de calcul élémentaires moyens μ_T obtenus : ils sont nettement inférieurs à ceux présentés dans le tableau 2.1. Le gain de temps moyen est de 30% et la quasi intégralité du temps de calcul vient de la création des partitions stochastiques $\mathcal{C}_K$.

ordre k	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n_d=0$	$6.9\ 10^{-2}$	$1.1\ 10^{-1}$	$2.27\ 10^{-1}$	$5.2\ 10^{-1}$	1
$n_d=1$	$6.9\ 10^{-2}$	$1.14\ 10^{-1}$	$2.29\ 10^{-1}$	$5.3\ 10^{-1}$	1.06
$n_d=2$	$7.2\ 10^{-2}$	$1.17\ 10^{-1}$	$2.34\ 10^{-1}$	$5.4\ 10^{-1}$	1.09
$n_d=3$	$8.1\ 10^{-2}$	$1.2\ 10^{-1}$	$2.8\ 10^{-1}$	$5.8\ 10^{-1}$	1.15
$n_d=4$	$9\ 10^{-2}$	$1.4\ 10^{-1}$	$3.3\ 10^{-1}$	$6.7\ 10^{-1}$	1.28

TAB. 2.4 – Exemple 1 : temps CPU μ_T (s) de la méthode X-SFEM en fonction du nombre de sous-découpages pour l'intégration spatiale n_d et de l'ordre maximum k pour l'intégration stochastique ; procédure récursive anisotrope.

2.9.4 Qualité de la solution X-SFEM

Dans cette section, nous présentons quelques résultats de post-traitement obtenus avec la méthode X-SFEM. On rappelle que les solutions obtenues avec X-SFEM sont explicites en fonction des variables aléatoires de base. Ainsi, la plupart des résultats post-traités sont calculés très rapidement. On notera que tous les résultats suivants ont été obtenus avec le maillage présenté sur la figure 2.13, la procédure d'intégration spatiale exacte et la procédure d'intégration stochastique s'appuyant sur une partition anisotrope de $\boldsymbol{\Theta}$. La figure 2.16 présente les surfaces de réponse du déplacement horizontal pour deux points particuliers : le point $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0.5)$ situé sûrement dans le domaine aléatoire et le point $\boldsymbol{x}_2 = (1, 0.95)$ situé possiblement dans le domaine aléatoire. Pour ce second point, la surface de réponse présentée peut

donc se diviser en deux parties : une première, dite physique, associée aux réalisations $\boldsymbol{\xi}$ pour lesquelles le point $\boldsymbol{x}_2$ est dans le domaine, et une seconde, dite non-physique, associée aux réalisations $\boldsymbol{\xi}$ pour lesquelles le point $\boldsymbol{x}_2$ est en dehors du domaine. Pour les deux points, on observe que l'approximation correspond parfaitement à la solution exacte. Pour le point $\boldsymbol{x}_2$, on note que la partie non-physique de la

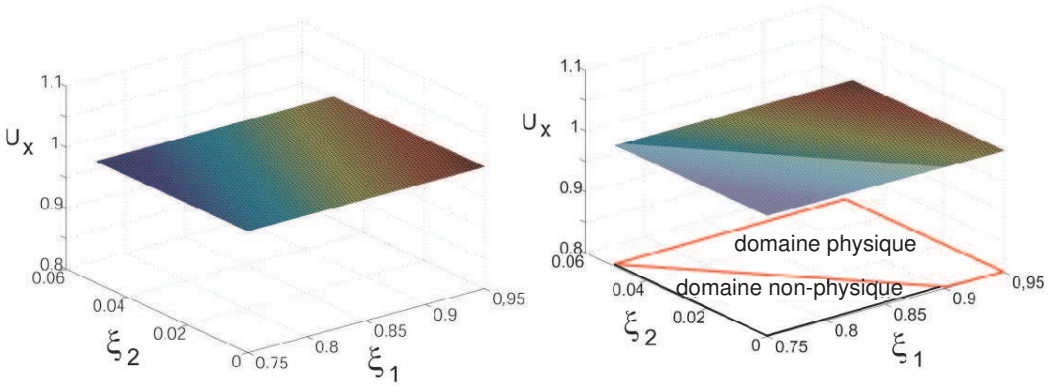


FIG. 2.16 – Exemple 1 : surfaces de réponse du déplacement horizontal des points $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0.5)$ et $\boldsymbol{x}_2 = (1, 0.95)$.

solution est le seul prolongement possible, compris dans l'espace d'approximation, de la partie physique de la solution.

La figure 2.17 présente la composante du champ de contrainte σ_{xx} pour une réalisation particulière $a = 0.75$. Sur cette figure, la frontière du domaine est représentée par un segment rouge. On remarque que la solution en contraintes est uniforme et égale à 1 conformément à la solution exacte. Il en va de même pour la partie de la solution comprise dans le domaine non-physique. Sur la même figure, on trouve également la contribution locale ε_K à l'erreur globale pour chaque éléments finis du maillage $\mathcal{T}_h$: ces erreurs locales sont extrêmement faibles et concentrées sur certains éléments appartenant à l'ensemble (e_c).

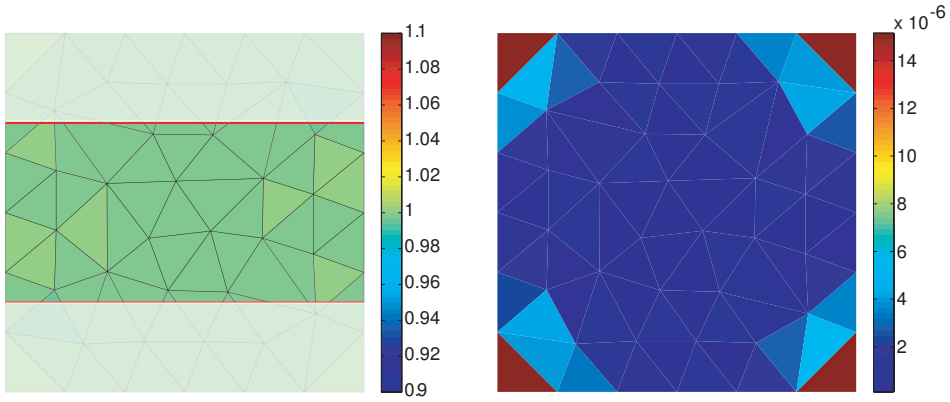


FIG. 2.17 – Exemple 1 : contraintes σ_{xx} correspondant à une réalisation $a = 0.75$ (gauche) et contributions locales à l'erreur globale ε_K^k pour $k = 2$ (droite).

2.9.5 Comparaison avec une approche non-intrusive basée sur X-FEM (P-X-FEM)

Dans cette section, on s'intéresse aux résultats obtenus avec une approche non-intrusive basée sur X-FEM, notée P-X-FEM et présentée dans la section 2.7. Nous allons les comparer avec les résultats obtenus avec la méthode X-SFEM. On rappelle que l'approche non-intrusive utilisée est une méthode de projection basée sur la norme L^2 et que le code déterministe est basé sur la méthode X-FEM : la solution est alors définie sur un maillage unique tout comme avec X-SFEM. On note $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{h,P}$ la solution issue du calcul P-X-FEM. L'indicateur d'erreur global et la contribution locale à l'erreur globale associés à $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{h,P}$ sont notés respectivement $\widetilde{\varepsilon}^p$ et $\widetilde{\varepsilon}^p_K$. Les définitions de ces indicateurs sont données par les équations (2.64) et (2.66). L'indice p est lié au degré du chaos polynomial généralisé utilisé pour l'approximation au niveau stochastique. La figure 2.18 présente la convergence de l'indicateur $\widetilde{\varepsilon}^p$ en fonction du degré p. On observe clairement une convergence très lente. Même pour un ordre de troncature $p = 8$, la valeur de l'indicateur $\widetilde{\varepsilon}^p$ est toujours élevée comparée aux erreurs obtenues avec la méthode X-SFEM. En effet, on a montré précédemment qu'un ordre de troncature $p = 1$ était suffisant avec la méthode X-SFEM pour obtenir la solution exacte. Ceci est dû à la définition de l'approximation : la projection de Galerkin, utilisée dans X-SFEM, ne donne pas de poids à la partie non-physique de la solution contrairement à la méthode de projection L^2. Sur la figure 2.19, où les erreurs locales associées à chaque élément K sont présentées,

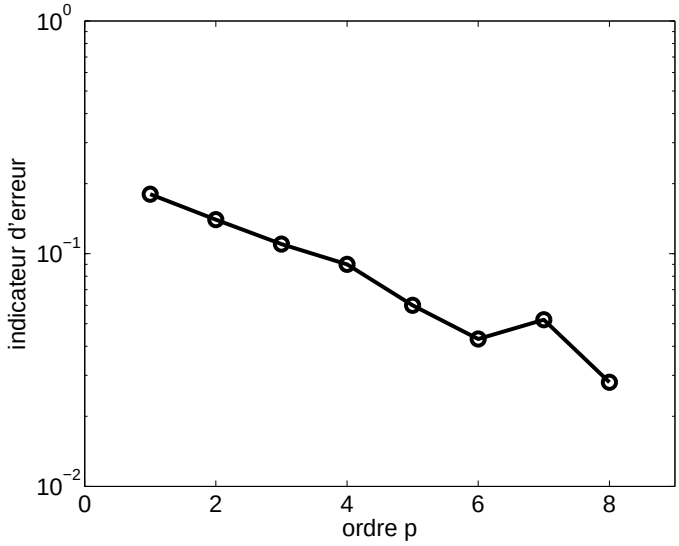


FIG. 2.18 – Exemple 1 : convergence de l'indicateur $\widetilde{\varepsilon}^p$, associé à la solution **P-X-FEM**, en fonction de p.

on remarque que l'erreur est concentrée sur les éléments $K \in (e_c)$ (éléments ayant une probabilité non nulle d'être intersectés par la frontière). Sur cette même figure, on montre la composante σ_{xx} du champ de contraintes pour un événement particulier $a = 0.75$.
La figure 2.20 présente les surfaces de réponse du déplacement horizontal pour les points $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0.5)$ et $\boldsymbol{x}_2 = (1, 0.95)$. Ces résultats ont été obtenus avec P-X-FEM pour un ordre de chaos $p = 8$. La solution obtenue pour le point $\boldsymbol{x}_1$ (point sûrement dans le domaine) est très bonne, tout comme la solution X-SFEM donnée par la figure 2.16. Cependant, la solution pour le point $\boldsymbol{x}_2$ (point possiblement hors du domaine) est nettement moins bonne que celle donnée par X-SFEM. Il est clair qu'une approximation

basée sur une projection L^2 conduit à de mauvais résultats.

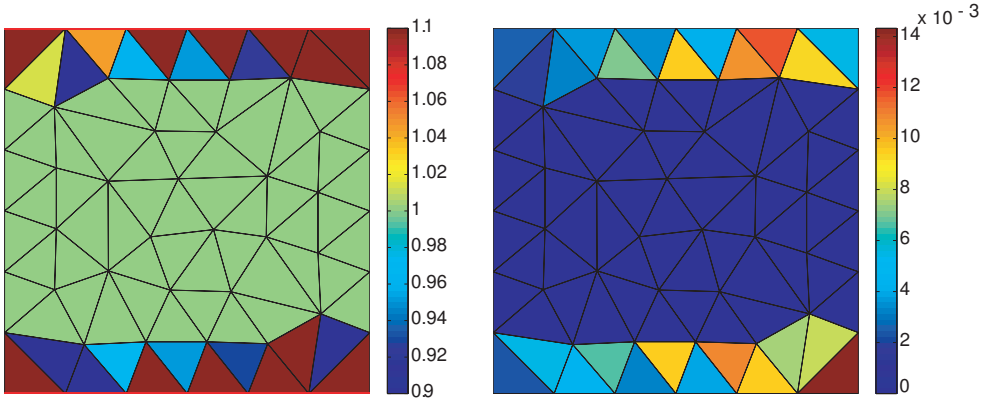


FIG. 2.19 – Exemple 1 : composante $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ obtenue avec **P-X-FEM** (gauche) et contribution locale $\widetilde{\varepsilon}_K^p$ à l'erreur globale (droite).

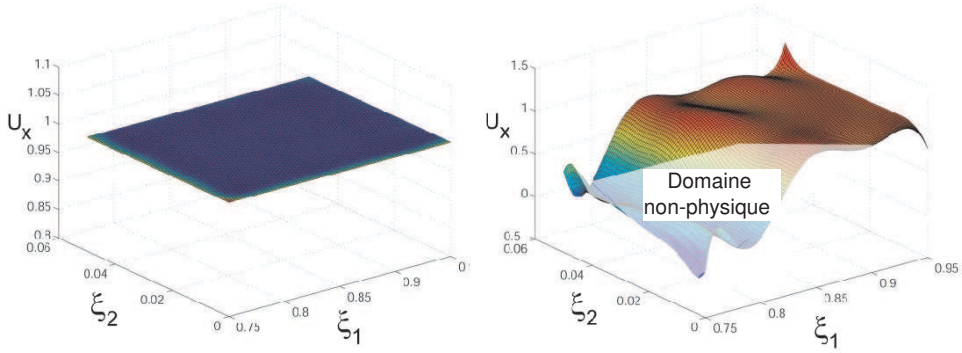


FIG. 2.20 – Exemple 1 : surfaces de réponse du déplacement horizontal des points $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ obtenues avec **P-X-FEM**.

2.9.6 Bilan

Ce premier exemple nous a tout d'abord permis d'étudier en profondeur les différentes stratégies d'intégration proposées dans la méthode X-SFEM. Nous avons montré que les procédures de découpage du domaine stochastique permettaient d'obtenir une intégration de qualité au niveau stochastique conduisant à un calcul précis des matrices et vecteurs élémentaires du problème éléments finis stochastiques. Une technique d'intégration stochastique basique peut aussi être employée : bien qu'elle conduise à des résultats moins précis, les coûts de calcul associés sont moindres et elle permet d'envisager des calculs en grande dimension stochastique. Cependant, l'exemple suivant (exemple 2) nous permettra de montrer que, dans le cas d'une modélisation probabiliste plus complexe, les procédures de decoupage sont beaucoup plus efficaces et doivent alors être employées.
Nous avons également comparé les résultats obtenus avec les deux stratégies d'intégration au niveau spatial (nommées stratégies A et B). Si les résultats obtenus avec la technique d'intégration exacte (stra-

tégie A) sont nettement meilleurs, ceux obtenus avec la la technique approchée (stratégie B) sont apparus satisfaisants. L'exemple 3, pour lequel il existe une véritable erreur d'approximation, nous permettra de vérifier cette conclusion.
La qualité de la solution X-SFEM a ensuite été illustrée au travers de différents post-traitements : les résultats obtenus sur les déplacements mais également sur les contraintes sont apparus en accord avec la solution exacte du problème.
Enfin, nous avons comparé la solution X-SFEM avec une solution issue d'un calcul P-X-FEM, basée sur une méthode non-intrusive de projection L^2 et sur un code déterministe X-FEM. La solution P-X-FEM s'est avérée de mauvaise qualité par rapport à la solution X-SFEM. Une approximation basée sur une projection de Galerkin est bien plus précise car elle ne donne pas de poids à la partie non-physique de la solution.

2.10 Exemple 2 : plaque à géométrie aléatoire avec une modélisation probabiliste complexe

2.10.1 Description du problème

Nous reprenons ici le même problème que précédemment mais en modifiant la modélisation probabiliste du problème. il s'agit toujours d'une plaque homogène soumise à une traction uniaxiale dont les côtés supérieur et inférieur ont une position aléatoire (*c.f.* figure 2.13). Au niveau déterministe, nous reprenons donc les mêmes paramètres. Cette plaque occupe toujours un domaine aléatoire rectangulaire $\Omega(\xi) =]0,1[\times]-\frac{a(\xi)}{2},\frac{a(\xi)}{2}[\subset B =]0,1[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, où $a(\xi)$ est maintenant une variable aléatoire caractérisée ici par

$$a(\xi) = 0.8 + 0.18 \times \cos(\xi \times \pi) \tag{2.67}$$

où ξ est une variable aléatoire uniforme telle que $\xi = U(0,4)$. On travaille alors dans un domaine stochastique de dimension 1 tel que $\Theta = [0,4]$. Le domaine aléatoire $\Omega(\xi)$ peut être caractérisé par la même fonction level set que dans l'exemple précédent (*c.f.* équation (2.62)). Dans cet exemple, la variable aléatoire $a(\xi)$ ne varie pas linéairement en fonction de ξ et la régularité stochastique des quantités élémentaires $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{b}_K$, liées à l'élément K, est fortement non-linéaire. En effet, $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{b}_K$ étant des fonctions polynomiales de degré 2 par morceaux en a, ce sont des fonctions sinusoïdales en fonction de ξ.
Pour le modèle numérique, on utilise un maillage éléments finis $\mathcal{T}_h$ différent de celui du premier exemple. Ce maillage, composé d'un plus grand nombre d'éléments, permettra de rendre encore plus irrégulières les quantités $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{b}_K$ en fonction de ξ et de mieux illustrer les problèmes rencontrés. Ce nouveau maillage est présenté sur la figure 3.30 : il est composé de 218 éléments finis triangles à 3 noeuds. Pour l'approximation stochastique, on utilise toujours un chaos polynomial généralisé de degré $p = 1$.
Cet exemple est uniquement dédié à l'étude de l'intégration au niveau stochastique. Au niveau spatial, tous les calculs ont été réalisés avec la stratégie A permettant une intégration exacte. Dans l'exemple précédent, nous avions constaté que l'utilisation des procédures de découpage du domaine stochastique n'était pas absolument nécessaire puisque les résultats obtenus avec la procédure basique (sans découpage) étaient satisfaisants. Alors qu'en est-il avec la modélisation probabiliste choisie ici ?

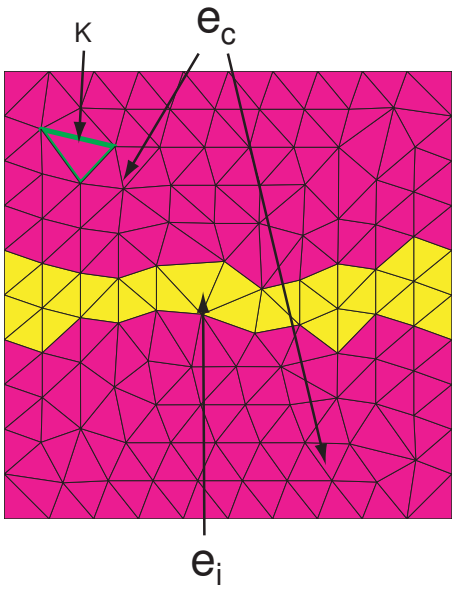


FIG. 2.21 – Exemple 2 : maillage X-SFEM utilisé avec états des éléments.

2.10.2 Intégration avec procédure de découpage

Dans cet exemple, l'objet n'est pas de comparer les deux procédures de découpage du domaine stochastique. En effet, le problème ne dépendant que d'une seule variable aléatoire ξ, les deux procédures de découpage conduisent aux mêmes résultats. On s'intéresse ici à l'influence de l'ordre de partition stochastique k, déterminant la précision du découpage et, donc, de l'intégration au niveau stochastique. Nous utilisons l'indicateur d'erreur ε^k défini dans l'équation (2.64). La figure 2.22 présente la convergence de l'erreur ε^k en fonction de k. On observe des erreurs importantes pour des ordres k de 0 à 2. L'erreur ne diminue nettement que pour les ordres k de 3 à 4. La figure 2.23 présente différentes partitions du domaine stochastique pour l'élément fini K (*c.f.* figure 3.30) : on rappelle que les cellules colorées en violet correspondent aux cellules toujours indéterminées à ce stade du découpage. Alors pourquoi l'erreur est-elle ici plus importante que dans l'exemple précédent ?

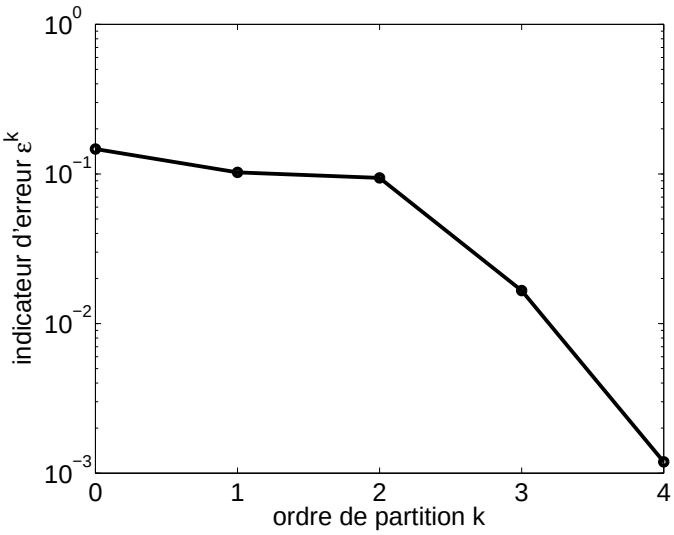


FIG. 2.22 – Exemple 2 : convergence de l'erreur ε^k en fonction de k.

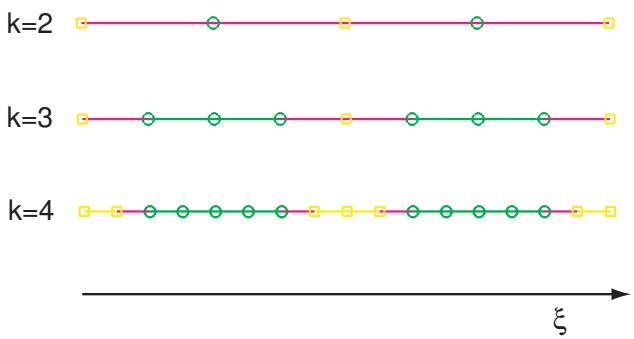


FIG. 2.23 – Exemple 2 : partitions stochastiques de K obtenues pour différents ordres de partition k.

Ici, la variable aléatoire $a(\xi)$ ne dépend pas linéairement de la variable ξ. Les quantités élémentaires $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{b}_K$ sont alors fortement non linéaires en fonction de ξ. Illustrons cette propriété. La figure 2.24 présente l'évolution théorique d'une composante $(\mathbf{A}(\xi))_{ij}$ de la matrice de rigidité en fonction de ξ. Sur cette même figure, on trouve les surfaces de réponse de cette composante obtenues pour différents ordres k . On rappelle que puisque la solution est décomposée sur un chaos polynomial généralisé de degré $p = 1$, il est alors nécessaire de projeter la matrice de rigidité $\mathbf{A}(\xi)$ sur un chaos de degré $2p$ (*c.f.* exemple 1). Les surfaces de réponses présentées sur la figure 2.24 ont donc été calculées sur un chaos de degré 2. On observe de fortes différences entre les différentes surfaces de réponse, ce qui explique les erreurs importantes constatées sur la figure 2.22. Pour les ordres $k = 3$ et $k = 4$, les surfaces de réponse

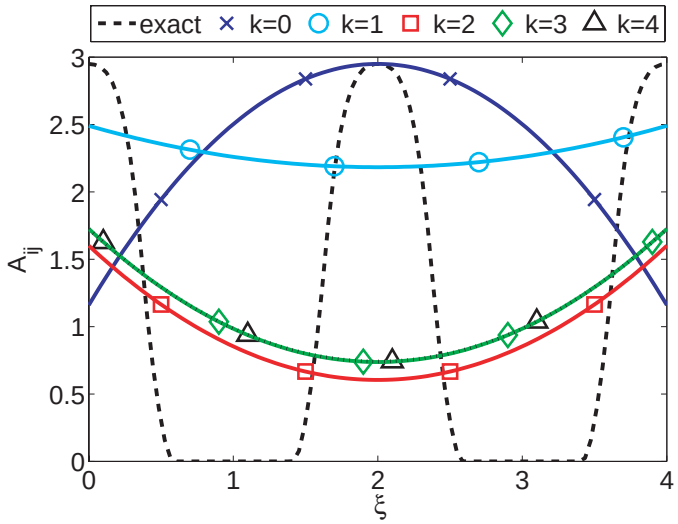


FIG. 2.24 – Exemple 2 : évolution exacte et surfaces de réponse d'une composante $(\mathbf{A}(\xi))_{ij}$ de la matrice de rigidité pour différents ordres k.

obtenues sont très proches : on observe alors la convergence de la décomposition de la matrice de rigidité en fonction de la précision de l'intégration. On notera la propriété remarquable de l'approximation de Galerkin, pour laquelle une approximation de la matrice de rigidité, décomposée sur un chaos de faible degré, n'empêche pas d'obtenir une bonne solution. En effet, même en utilisant un ordre de partition $k = 4$, on constate que la surface de réponse obtenue est très différente de celle de référence. Cette propriété, liée à l'utilisation d'une projection de Galerkin, est très intéressante et avantageuse pour la méthode X-SFEM.

Pour cet exemple, les résultats sont donc sensibles à la précision de l'intégration stochastique. Afin de diminuer l'erreur commise sur l'intégration, il est nécessaire d'utiliser un ordre de partition k relativement élevé. Nous étudions maintenant les résultats obtenus avec une procédure d'intégration basique pour laquelle aucun découpage du domaine stochastique n'est réalisé.

2.10.3 Intégration avec procédure basique

Nous rappelons que la procédure d'intégration basique est basée sur la définition d'une quadrature Q_K de degré élevé sur l'ensemble du domaine stochastique. Pour étudier les solutions obtenues en fonction du nombre de points d'intégration choisi, nous utilisons un indicateur d'erreur ε^q, basée sur l'indicateur donné dans l'équation (2.64), où q désigne le nombre de points d'intégration utilisés. La figure 2.25 donne la convergence de l'indicateur d'erreur ε^q en fonction de q. Tout comme pour l'exemple 1, on observe une convergence très lente vers la solution exacte. De plus, on constate que les erreurs obtenues sont nettement plus importantes que celle obtenues avec la procédure de découpage associée à un ordre k élevé. On peut même parler d'erreurs significatives, contrairement à celles obtenues avec l'exemple 1 (*c.f.* tableau 2.2).

La figure 2.26 présente les surfaces de réponse d'une composante $(\mathbf{A}(\xi))_{ij}$ de la matrice de rigidité obtenues pour différents nombres q de points d'intégration. On considère que la décomposition de référence est celle obtenue pour un ordre de partition $k = 4$ sur la figure 2.24. On constate que les décompositions

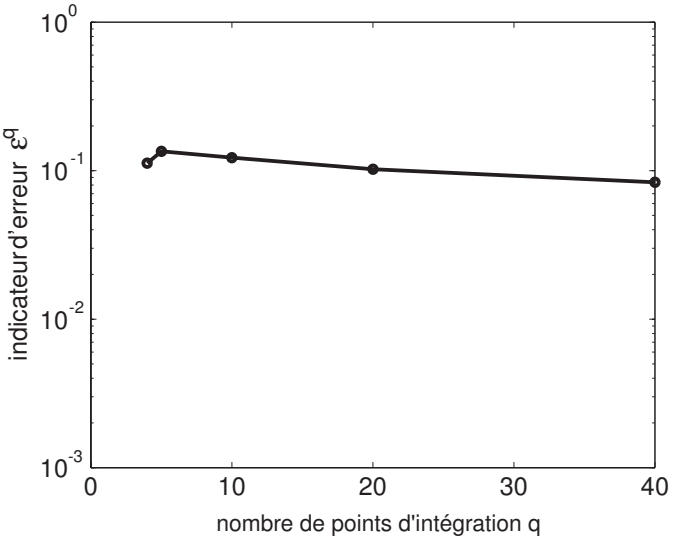


FIG. 2.25 – Exemple 2 : convergence de l'erreur ε^q en fonction de q.

obtenues avec la technique d'intégration basique sont très différentes de celle de référence. De plus, on rappelle que les vecteurs élémentaires $\mathbf{b}_K$ sont aussi calculés avec la même technique d'intégration ce qui introduit une erreur supplémentaire dans le calcul de la solution.

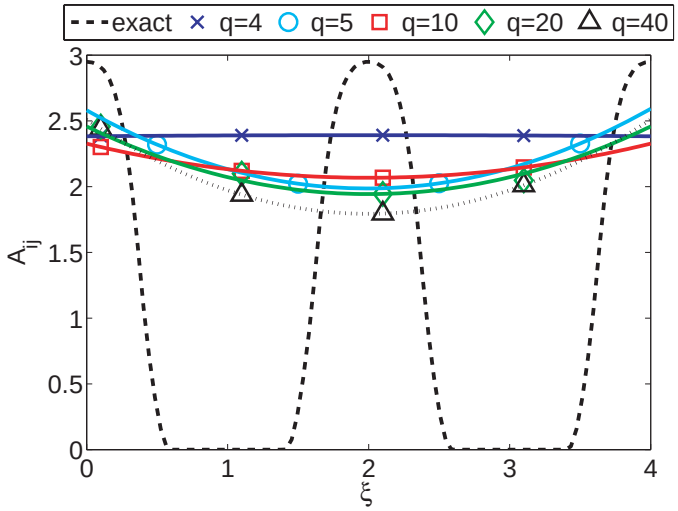


FIG. 2.26 – Exemple 2 : évolution exacte et surfaces de réponse d'une composante $(\mathbf{A}(\xi))_{ij}$ de la matrice de rigidité pour différentes valeurs de q.

2.10.4 Post-traitement des résultats

Pour conclure cet exemple, nous présentons quelques post-traitements pour deux solutions obtenues : la solution calculée avec la procédure de découpage et $k = 4$, et la solution calculée avec la procédure basique et $q = 40$. La figure 3.31 présente les surfaces de réponse associées aux déplacements horizontaux

d'un point $P_1 = (1, 0.5)$ sûrement dans la matière et d'un point $P_2 = (1, 0.9)$ possiblement dans la matière. Si, pour le point P_1, les deux surfaces de réponse sont très proches de la solution exacte, ce n'est pas le cas pour le point P_2. En effet, la solution calculée avec la procédure d'intégration basique donne de mauvais résultats alors que la solution calculée avec la procédure de découpage correspond à la solution de référence. La figure 3.32 présente le champ de contraintes σ_{xx} pour $a = 0.9$ pour chacune des solutions : clairement, la solution calculée avec la procédure basique mène à un mauvais champ de contraintes.

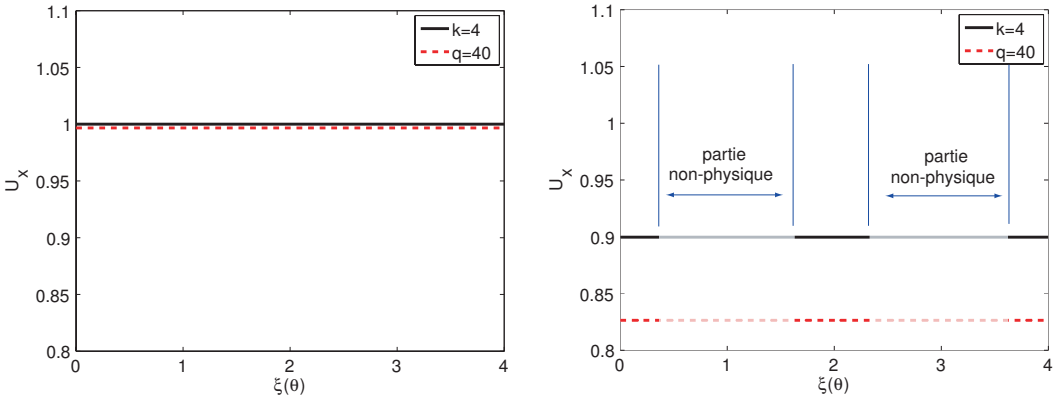


FIG. 2.27 – Exemple 2 : surfaces de réponse du déplacement U_x pour les points P_1 (gauche) et P_2 (droite) : comparaison entre les solutions X-SFEM calculées avec la procédure de découpage ($k = 4$) et avec la procédure basique ($q = 40$).

2.10.5 Bilan

Cet exemple nous a permis de montrer l'importance de l'intégration au niveau stochastique dans le cas où la géométrie ne dépend pas linéairement des variables aléatoires de base. Les procédures de découpages du domaine stochastique se révèlent alors très efficaces et indispensables pour obtenir une solution de qualité avec X-SFEM. En effet, l'utilisation d'une quadrature sur l'ensemble de domaine stochastique conduit, ici, à de mauvais résultats et n'est donc pas envisageable. Pour un problème quelconque, il est alors important d'étudier préalablement la variation de la géométrie en fonction des variables de base du problème pour déterminer si l'intégration stochastique sera délicate ou non. Dans les exemples suivants, on utilisera des modélisations probabilistes simples de la géométrie, ce qui permettra d'utiliser les procédures de découpage avec de faibles ordres de partition k. Finalement, on notera que l'approche P-X-FEM n'a pas été testée sur cet exemple : les résultats étant déjà mauvais avec le premier exemple, il apparaît difficile d'en obtenir des meilleurs avec la modélisation probabiliste du second.

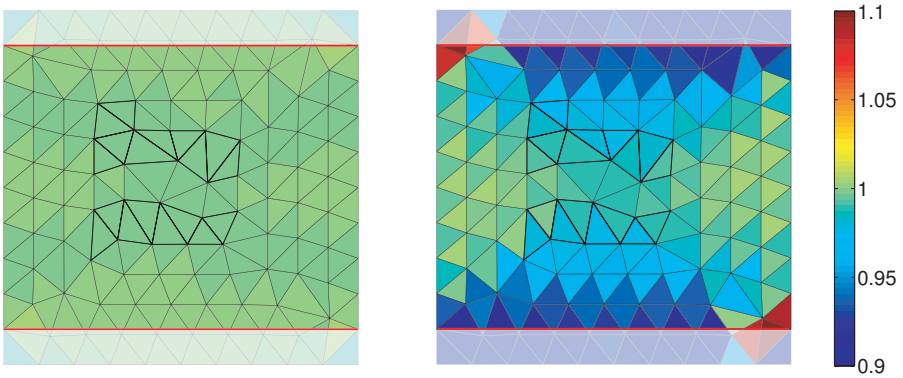


FIG. 2.28 – Exemple 2 : contraintes σ_{xx} pour $a = 0.9$: comparaison entre les solutions X-SFEM calculées avec la procédure de découpage stochastique (gauche) et avec la procédure basique d'intégration stochastique (droite).

2.11 Exemple 3 : couronne circulaire à rayon aléatoire

2.11.1 Description du problème

On considère un domaine $\Omega(\boldsymbol{\xi}) \subset \mathbb{R}^2$ représentant une couronne circulaire. La frontière extérieure Γ_1 du domaine est un cercle, de centre $\boldsymbol{c} = (0,0)$ et de rayon b déterministe égal à 2. La frontière intérieure $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ est un cercle de centre $\boldsymbol{c}$ et de rayon aléatoire $a(\boldsymbol{\xi})$. La variable aléatoire $a(\boldsymbol{\xi})$ est caractérisée par la somme de trois variables aléatoires uniformes indépendantes telles que

$$a(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

avec

$$\xi_1 = U(0.7, 1) \quad \xi_2 = U(0, 0.6) \quad \xi_3 = U(0, 0.2)$$

Nous travaillons alors dans un domaine stochastique de dimension 3 tel que $\boldsymbol{\Theta} = [0.7, 1] \times [0, 0.6] \times [0, 0.2]$. Nous faisons l'hypothèse des déformations planes et les paramètres matériau sont choisis déterministes avec les module d'Young et coefficient de Poisson suivants : $E = 1$ et $\nu = 0.25$. On impose un champ de déplacements linéaire sur la frontière Γ_1 tel que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}$. On notera qu'en effectuant un changement variable $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{u}}$, avec $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{V}$, on se ramène à une formulation du type (2.20) pour la recherche de $\tilde{\boldsymbol{u}}$.

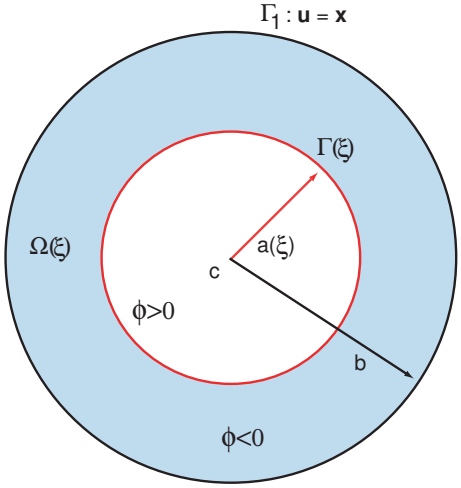


FIG. 2.29 – Exemple 3 : problème de la couronne circulaire à rayon aléatoire.

Le problème est présenté sur la figure 2.29. Ce problème possède une solution exacte $\boldsymbol{u} = (u_r, u_\varphi)$ qui s'écrit en coordonnées polaires :

$$u_r(r, \boldsymbol{\xi}) = \left(r - \frac{b^2}{r}\right) \alpha(\boldsymbol{\xi}) + \frac{b^2}{r}$$
$$u_\varphi = 0$$

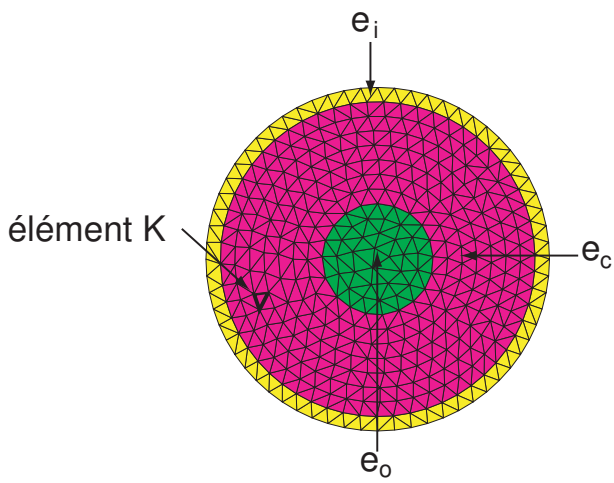


FIG. 2.30 – Exemple 3 : maillage X-SFEM avec états des éléments.

avec

$$\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \frac{(\mu)b^2}{(\lambda+\mu)a(\boldsymbol{\xi})^2 + \mu b^2}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé. Pour le modèle numérique, on utilise des éléments finis triangles à 3 noeuds. Afin d'étudier la convergence de la solution X-SFEM en fonction de la finesse du maillage, nous utiliserons 4 maillages différents. La figure 2.30 présente l'un de ces maillages avec les différents états d'éléments : les éléments presque sûrement inclus dans $\Omega(\boldsymbol{\xi})$ (groupe e_i), les éléments presque sûrement hors de $\Omega(\boldsymbol{\xi})$ (groupe e_o) et les éléments possiblement coupés par $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ (groupe e_c). Le domaine aléatoire $\Omega(\boldsymbol{\xi})$ peut alors être caractérisé par la fonction level set suivante : pour $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \Omega(\boldsymbol{\xi})$

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi}) - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|$$

Pour l'approximation stochastique, on utilise un chaos polynomial généralisé avec un degré $p \in \{1, ..., 4\}$.

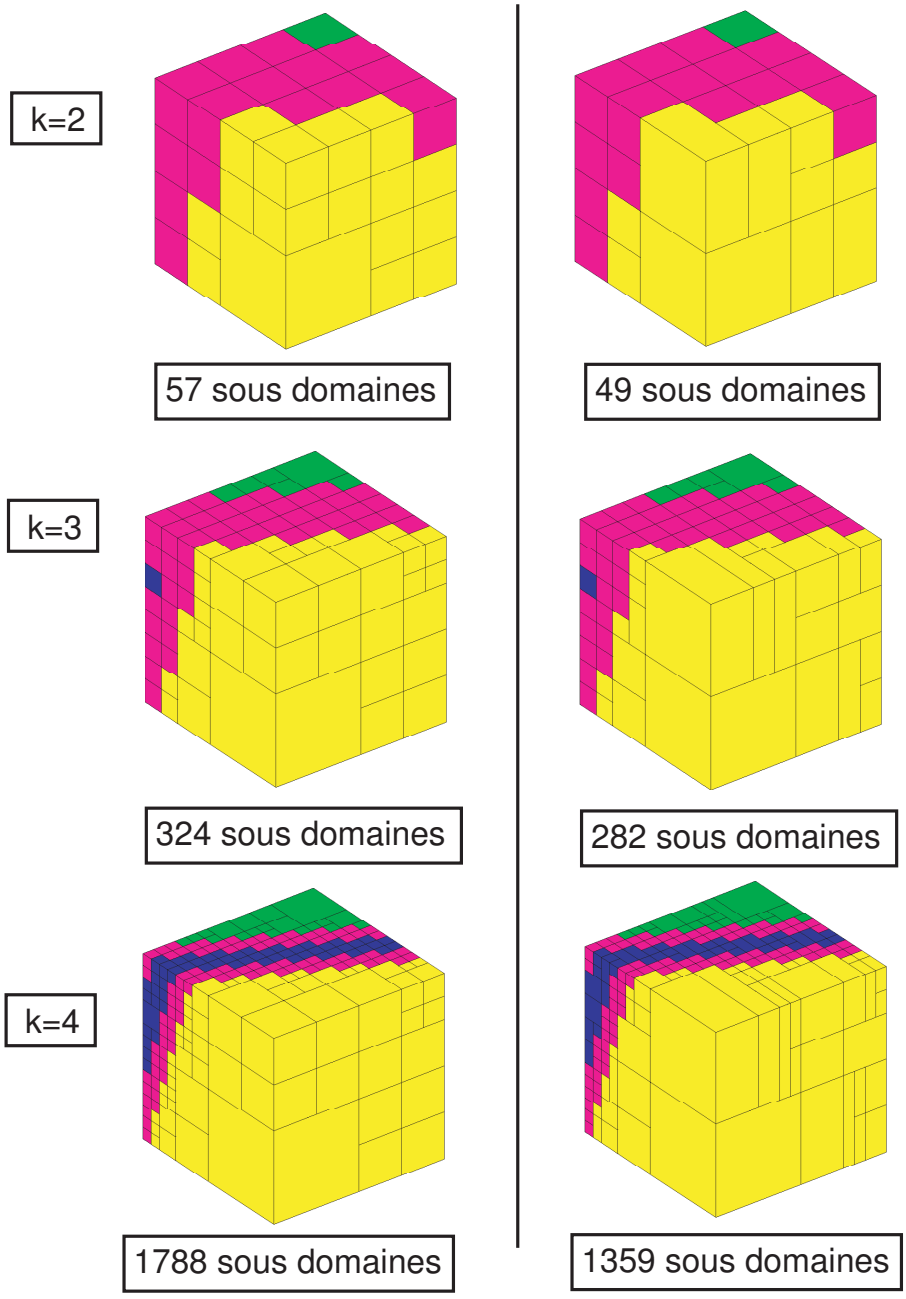


FIG. 2.31 – Exemple 3 : partitions stochastiques de l'élément K obtenues avec les procédures isotrope (gauche) et anisotrope (droite).

2.11.2 Efficacité des procédures d'intégration au niveau stochastique

2.11.2.1 Comparaison des procédures récursives de découpage

Nous étudions tout d'abord la qualité de la technique d'intégration basée sur les procédures récursives données dans la section 2.8.2.3. On rappelle que ces procédures permettent de découper le domaine stochastique $\mathbf{\Theta}$ afin de réaliser une intégration mieux contrôlée des quantités élémentaires $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{b}_K$. On note k l'ordre de découpage maximum autorisé. Dans la suite, on utilise la stratégie d'intégration A au niveau spatial conduisant à une intégration exacte. Les résultats obtenus avec la stratégie B seront présentés et comparés dans la section suivante. La figure 2.31 présente différentes partitions $\mathcal{C}_K$ de l'élément K (*c.f.* figure 2.30) obtenues avec les procédures isotrope et anisotrope pour différents ordres k. On rappelle que les cellules colorées en violet sont toujours indéterminées au stade k du découpage.
On note N_K le nombre de sous-domaines de la partition $\mathcal{C}_K$. Le tableau 2.5 indique les valeurs moyennes de N_K pour les éléments $K \in (e_c)$, notées μ_K, obtenues avec chacune des procédures de découpage et pour différents ordres k. Dans le même tableau, on retrouve les temps moyens μ_T nécessaires à la création des partitions stochastiques et à l'intégration des quantités $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{b}_K$ pour les éléments $K \in (e_c)$. Comme pour l'exemple précédent, on constate que μ_N est moins élevé avec la procédure anisotrope : pour un ordre de découpage $k = 4$, on observe une réduction de 20% avec la procédure anisotrope. Ainsi, les temps de calculs sont logiquement réduits avec cette procédure.
On note ε^k l'indicateur d'erreur global entre la solution en déplacement approchée $\boldsymbol{u}^k_{h,P}$ et la solution

ordre k		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
μ_N	isotrope	8	47	214	1125
	anisotrope	8	41	173	892
μ_T (s)	isotrope	$0.44s$	$2.2s$	$12.1s$	$50s$
	anisotrope	$0.44s$	$2.1s$	$10s$	$41s$

TAB. 2.5 – Exemple 3 : comparaison entre les procédures de découpage isotrope et anisotrope pour différents ordres k (μ_N, nombre moyen de sous-domaines stochastiques pour les éléments (e_c) et μ_T, temps CPU moyen pour la création des partitions stochastiques et l'intégration des quantités élémentaires pour l'ensemble (e_c) (stratégie d'intégration spatiale A)).

de référence $\boldsymbol{u}$. Cet indicateur est défini comme suit

$$\varepsilon^k = \frac{\|\boldsymbol{u}^k_{h,P} - \boldsymbol{u}\|_{L^2(\mathcal{P},d\mu)}}{\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\mathcal{P},d\mu)}} \tag{2.68}$$

La figure 2.32 présente la convergence de l'indicateur ε^k en fonction de l'ordre de partition k. Les résultats pour les deux procédures d'intégration stochastique y sont présentés.

Comme dans l'exemple 1, on constate que les deux procédures de découpage conduisent à des erreurs identiques. De plus, on observe une bonne convergence de ε^k en fonction de k vers l'erreur due à l'approximation. Un ordre de partition $k = 2$ est alors nettement suffisant pour obtenir une intégration stochastique de bonne qualité.
On veut maintenant comparer ces résultats à ceux obtenus avec la stratégie d'intégration spatiale B (*c.f.* section 2.8.2.1)

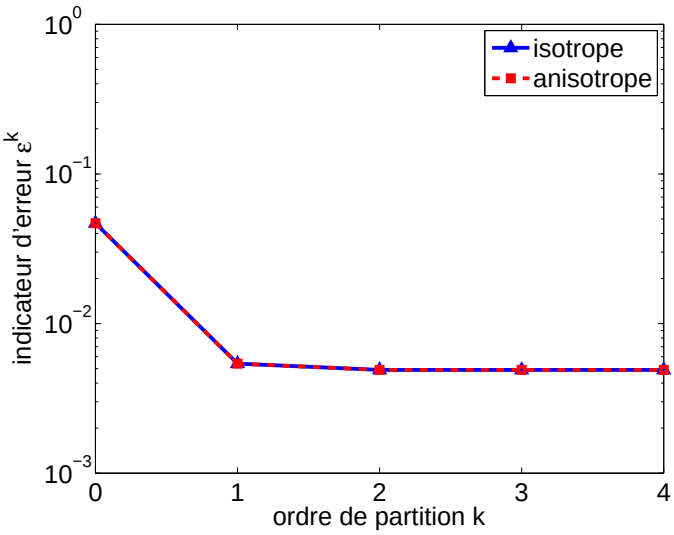


FIG. 2.32 – Exemple 3 : convergence de ε^k en fonction de k pour chacune des procédures de découpage (stratégie d'intégration spatiale A).

2.11.3 Efficacité des stratégies d'intégration au niveau spatial

Nous présentons, dans cette section, les résultats obtenus avec la stratégie d'intégration B au niveau spatial. On rappelle que cette stratégie ne nécessite pas de sous-découpages de l'élément pour chaque réalisation $\boldsymbol{\xi}$: l'erreur d'intégration est alors plus élevée mais les temps de calculs sont diminués. La figure 2.33 présente la convergence de l'indicateur ε^k en fonction de k obtenue pour chacune des procédures d'intégration récursives. Pour chaque ordre k, le nombre de découpage successifs de l'élément spatial est fixé à 2 et pour chaque sous-élément spatial, on utilise une quadrature de Gauss d'ordre 4 (soit 63 points d'intégration au total).

Hormis pour $k = 0$, où l'erreur est plus élevée, les résultats sont presque identiques à ceux obtenus avec la stratégie d'intégration A (*c.f.* figure 2.32). Lorsqu'il existe une erreur due à l'approximation, l'erreur d'intégration engendrée par la stratégie B est alors tout à fait négligeable. Le tableau 2.6 donne les temps des calculs élémentaires moyens μ_T obtenus avec la stratégie d'intégration spatiale B. On constate que les temps sont nettement moins importants que ceux obtenus avec la stratégie spatiale A (*c.f.* tableau 2.5) : avec la procédure de découpage anisotrope, on divise même le temps de calcul par 2 pour $k = 4$. Nous nous intéressons maintenant à l'erreur d'approximation de la solution X-SFEM. Cette erreur vient

ordre k		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
μ_T (s)	isotrope	$0.38s$	$1.8s$	$8.5s$	$28s$
	anisotrope	$0.38s$	$1.6s$	$7.1s$	$24s$

TAB. 2.6 – Exemple 3 : comparaison entre les procédures de découpage isotrope et anisotrope pour différents ordres k (μ_T, temps CPU moyen pour la création des partitions stochastiques et l'intégration des quantités élémentaires pour l'ensemble (e_c) (stratégie d'intégration spatiale B)).

à la fois de l'approximation spatiale et stochastique.

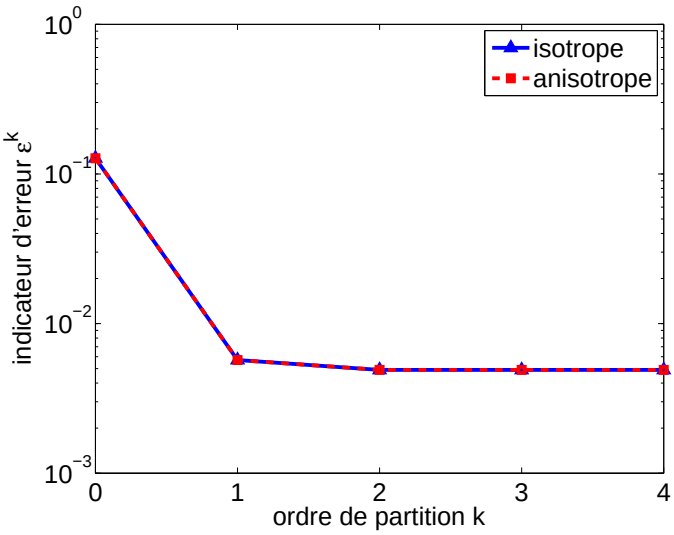


FIG. 2.33 – Exemple 3 : convergence de ε^k en fonction de k pour chacune des procédures de découpage (stratégie d'intégration spatiale B).

2.11.4 Convergence de la solution X-SFEM

Pour l'étude de l'erreur d'approximation de la solution X-SFEM, nous introduisons l'indicateur d'erreur global suivant défini à partir de la solution en déplacement approchée $\boldsymbol{u}_{h,P}$ et de la solution exacte $\boldsymbol{u}$

$$\varepsilon_{h,p} = \frac{\|\boldsymbol{u}_{h,P} - \boldsymbol{u}\|_{L^2(\mathcal{P},d\mu)}}{\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\mathcal{P},d\mu)}} \tag{2.69}$$

où p désigne le degré du chaos polynomial généralisé, h la taille moyenne du maillage éléments finis et $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{P},d\mu)}$ est la norme L^2 de la partie physique du champ de déplacement analogue à celle de l'équation (2.65) pour le champ de contraintes. Nous définissons également l'indicateur d'erreur $\varepsilon^K_{h,p}$ qui donne la contribution locale de l'élément fini K à l'erreur globale :

$$\varepsilon^K_{h,p} = \frac{\|\boldsymbol{u}_{h,P} - \boldsymbol{u}\|_{L^2(\mathcal{P}_K,d\mu)}}{\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\mathcal{P},d\mu)}} \tag{2.70}$$

La figure 2.34 donne la convergence de $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de p pour $h = 0.18$ ($h = \sqrt{2S/N}$ où S est l'aire du domaine et N le nombre d'éléments). On observe une convergence très rapide en fonction de p. Pour $p \geqslant 2$, on peut conclure que la contribution à l'erreur vient principalement de l'erreur d'approximation éléments finis au niveau spatial. La figure 2.35 donne les erreurs locales $\varepsilon^K_{h,p}$ obtenues pour des ordres $p = 1$ et $p = 2$: on constate que ces erreurs sont principalement concentrées sur les éléments $K \in (e_c)$ qui sont possiblement coupés par la frontière.

La figure 2.36 présente la convergence de $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de h pour un ordre $p = 2$. La figure 2.37 donne, elle, les erreurs locales correspondantes pour $h = 0.09$ et $h = 0.06$. On observe alors une convergence classique de l'erreur en $O(h^2)$ similaire à celle obtenue avec la méthode des éléments finis pour un calcul déterministe. De plus les erreurs locales sont, ici encore, concentrées sur les éléments $K \in (e_c)$.

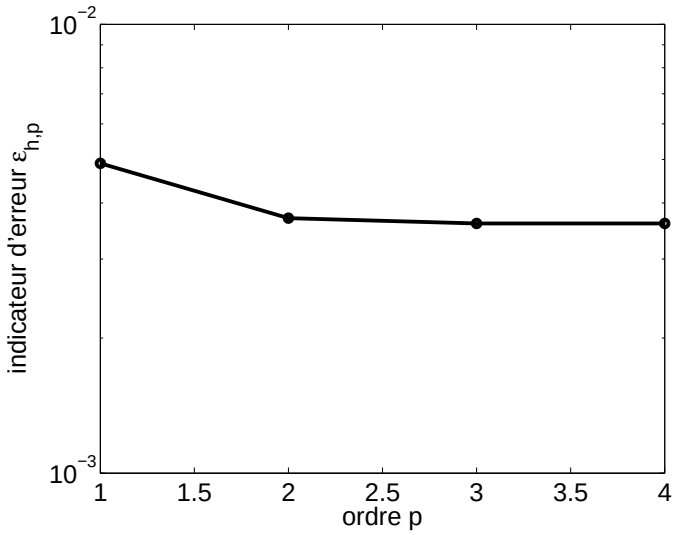


FIG. 2.34 – Exemple 3 : convergence de $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de p pour $h = 0.18$.

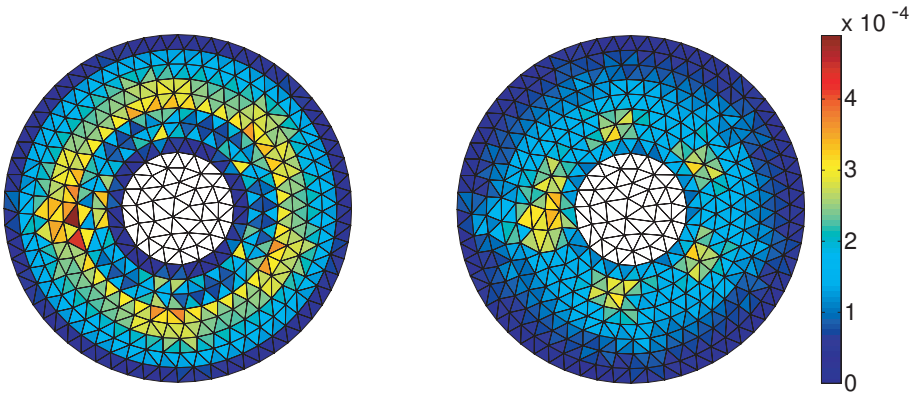


FIG. 2.35 – Exemple 3 : erreurs locales $\varepsilon_{h,p}^K$ obtenues pour $h = 0.18$ et pour $p = 1$ (gauche) et $p = 2$ (droite).

2.11.5 Bilan

Avec cet exemple, possédant une véritable erreur d'approximation, nous avons tout d'abord montré que l'intégration réalisée au niveau stochastique était de bonne qualité. En effet, la modélisation probabiliste simple de l'aléa géométrique permet d'utiliser de faibles ordres de partition k pour les procédures de découpage et ainsi d'obtenir une solution précise avec des coûts de calcul raisonnables. D'autre part, cet exemple a également permis de montrer les bonnes propriétés de convergence de la méthode X-SFEM aussi bien au niveau stochastique qu'au niveau spatial.

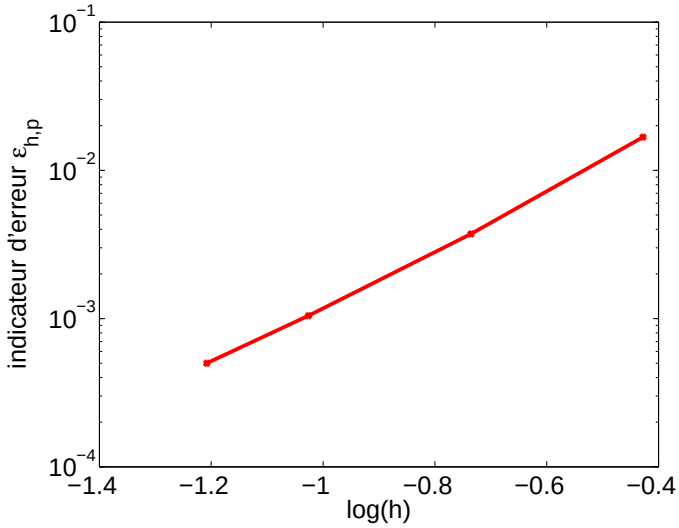


FIG. 2.36 – Exemple 3 : convergence de $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de h pour $p = 2$.

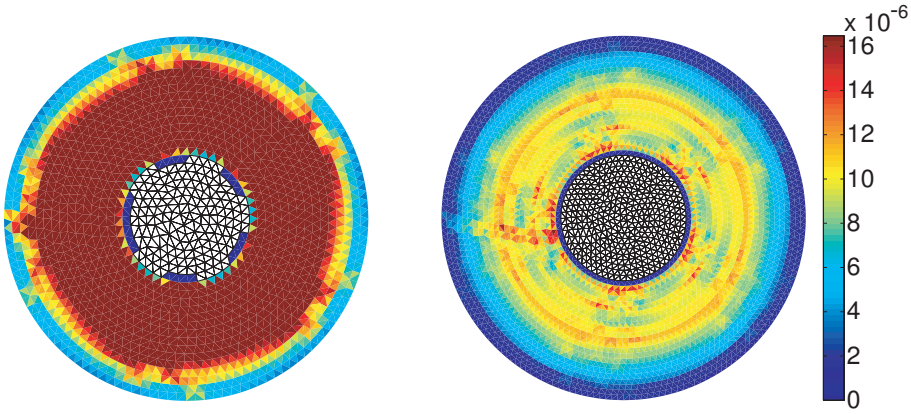


FIG. 2.37 – Exemple 3 : erreurs locales $\varepsilon_{h,p}^K$ obtenues pour $p = 2$ et $h = 0.09$ (gauche) et $h = 0.06$ (droite).

2.12 Exemple 4 : plaque en traction avec trou de forme étoilée

2.12.1 Description du problème

Dans cet exemple, on considère une plaque trouée soumise à une traction uniaxiale présentée sur la figure 2.38. Cette plaque occupe un domaine aléatoire inclus dans un domaine carré déterministe $B =]0, 3[\times]0, 3[$. La frontière intérieure $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ est aléatoire et libre d'efforts. Cette frontière aléatoire peut être caractérisée par l'iso-zéro de la fonction level set $\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ suivante

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = R(\alpha(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\xi}) - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|$$

où $\boldsymbol{c} = (1.5, 1.5)$ et où la fonction $R(\alpha(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\xi})$ est définie par

$$R(\alpha(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\xi}) = \xi_1 + \frac{1}{10}\left(\xi_2 \cos(6\alpha(\boldsymbol{x})) + \xi_3 \sin(6\alpha(\boldsymbol{x}))\right)$$

avec $\alpha(\boldsymbol{x})$ l'angle entre l'axe horizontal et la droite passant par les points $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{x}$ (*c.f.* figure 2.38). ξ_1, ξ_2, et ξ_3 sont des variables aléatoires uniformes statistiquement indépendantes telles que

$$\xi_1 = U(0.7, 0.9), \quad \xi_2 = U(-1, 1) \quad \text{et} \quad \xi_3 = U(-1, 1)$$

Nous travaillons alors dans un domaine stochastique de dimension 3 tel que $\boldsymbol{\Theta} = [0.7, 0.9] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. La frontière $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ peut alors être vue comme un cercle de centre $\boldsymbol{c}$ de rayon aléatoire ξ_1 perturbé par deux modes sinusoïdaux caractérisés par les variables ξ_2 et ξ_3.

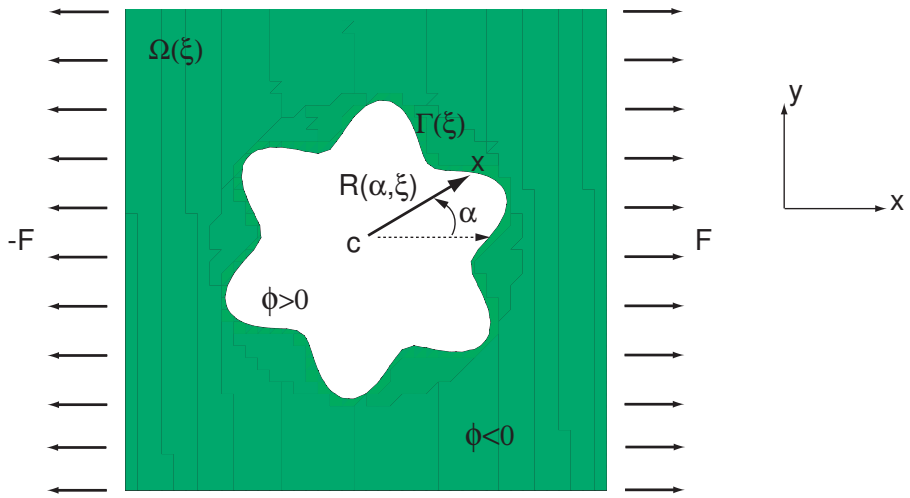


FIG. 2.38 – Exemple 4 : présentation du problème de la plaque avec trou de forme étoilée.

Nous faisons l'hypothèse des déformations planes et nous considérons le matériau homogène élastique isotrope avec un module d'Young $E = 1$ et un coefficient de poisson $\nu = 0.3$. La plaque est soumise à un effort unitaire uniforme tel que $\boldsymbol{F} = (\pm 1, 0)$ sur une partie de la frontière Γ_2 telle que $\Gamma_2 = \{\boldsymbol{x} = (x, y) \in \partial B; x = 3 \text{ ou } x = 0\}$.
Pour le modèle numérique, on utilise le maillage présenté sur la figure 2.39 qui est composé de 3200 éléments finis triangles. Sur cette même figure sont présentés les différents états d'éléments : les éléments sûrement dans le domaine (e_i), les éléments sûrement en dehors du domaine (e_o) et les éléments possiblement coupés par l'iso-zéro de la level set (e_c). Pour l'approximation stochastique, on utilise un chaos polynomial généralisé de degré $p \in \{2, 3\}$.

Contrairement aux exemples précédents, nous n'étudions pas l'influence de l'intégration stochastique. Tous les calculs sont réalisés avec les procédures de découpage pour l'intégration stochastique (avec un ordre $k = 1$) et avec la stratégie d'intégration B pour l'intégration spatiale. Nous comparons les résultats obtenus avec X-SFEM à ceux obtenus avec une approche X-FEM déterministe. Nous utiliserons également des simulations de Monte-Carlo, couplées à un code X-FEM déterministe, afin de comparer les densités de probabilité obtenues avec X-SFEM.

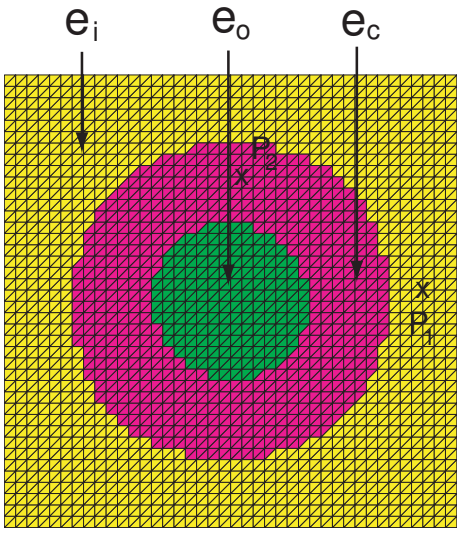


FIG. 2.39 – Exemple 4 : maillage X-SFEM utilisé avec états des éléments et positions des points P_1 et P_2.

2.12.2 Comparaison avec des approches classiques

Dans cette section, nous présentons différents post-traitements des solutions X-SFEM et nous les comparons à ceux obtenus avec des approches déterministes FEM et X-FEM. Comme la solution obtenue est explicite en fonction des variables aléatoires de base du problème, les post-traitements X-SFEM suivants sont réalisés très facilement pour des coûts de calcul très faibles.

2.12.2.1 Comparaison des déplacements

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux résultats en déplacement : le problème dépendant de 3 variables aléatoires, nous ne pouvons pas visualiser les surfaces de réponse en fonction des 3 variables à la fois. Pour une meilleure clarté des résultats, nous présentons des surfaces de réponse avec deux dimensions stochastiques fixées, et une dimension stochastique variable. On se donne deux points distincts appartenant au domaine déterministe B : le point $P_1 = (2.625, 1.5)$ qui est sûrement dans la matière et le point $P_2 = (1.5, 2.25)$ qui est possiblement dans la matière (*c.f.* figure 2.39). On propose d'étudier la surface de réponse des solutions X-SFEM pour les trois cas de figure suivants :

- ***(i)*** on fixe $\xi_2 = 0.5$ et $\xi_3 = 0.5$, et ξ_1 est variable ;
- ***(ii)*** on fixe $\xi_1 = \mu_{\xi_1} = 0.8$ et $\xi_3 = 0.7$, et ξ_2 est variable ;
- ***(iii)*** on fixe $\xi_1 = 0.7$ et $\xi_2 = -0.4$, et ξ_3 est variable.

Nous utilisons une solution de référence basée sur une méthode X-FEM déterministe utilisant le même maillage éléments finis que la solution X-SFEM (*c.f.* figure 2.39). Cette solution est obtenue en effectuant plusieurs calculs déterministes correspondant à différentes réalisations de la géométrie.
Les figures 2.40 à 2.42 présentent les surfaces de réponse du déplacement horizontal u_x de P_1 et P_2 obtenues pour les trois cas de figure *(i)*, *(ii)* et *(iii)*. On constate logiquement que les solutions X-SFEM tendent vers la solution de référence "X-FEM" avec p puisque le maillage éléments finis utilisé est le même. Ainsi, même pour de faibles ordres de décompositions sur le chaos, la solution X-SFEM est très

proche de la solution de référence.

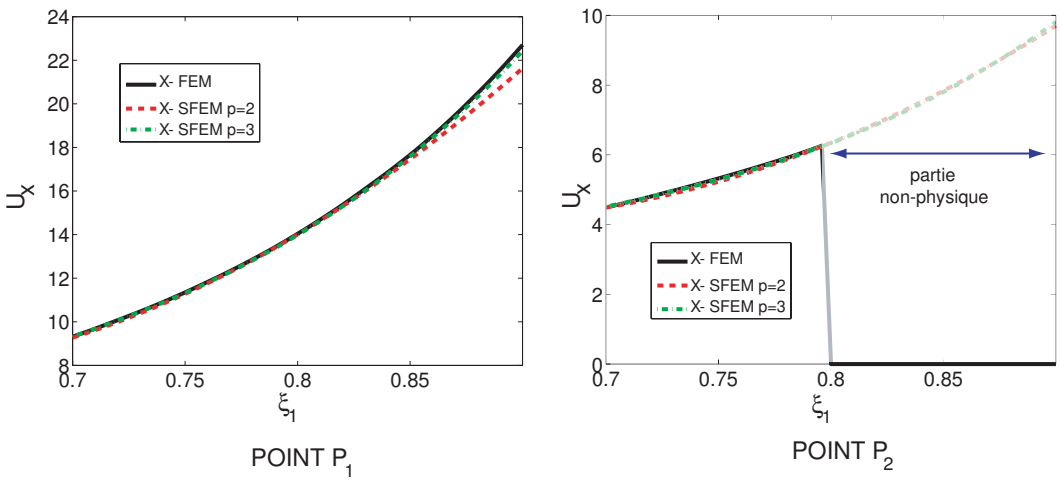


FIG. 2.40 – Exemple 4 : surfaces de réponse u_x en P_1 (gauche) et en P_2 (droite) en fonction de ξ_1 ; $\xi_2 = 0.5$ et $\xi_3 = 0.5$.

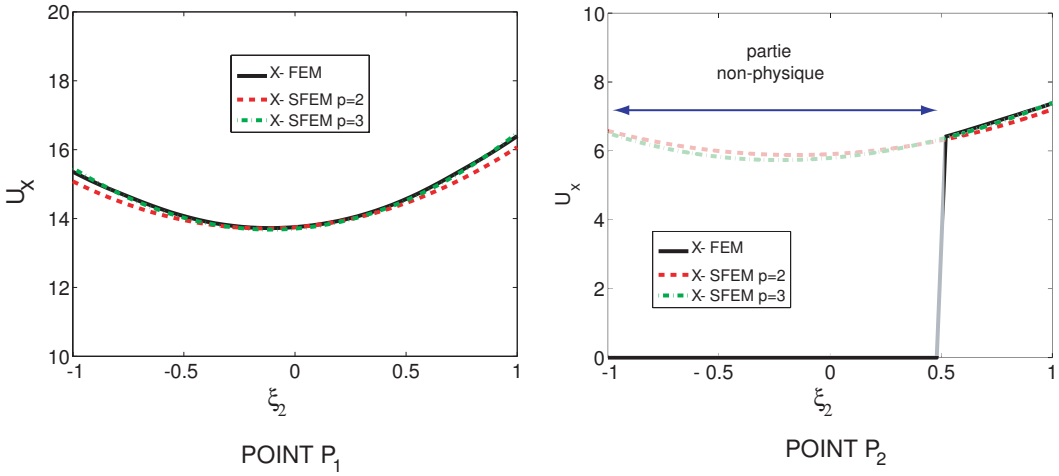


FIG. 2.41 – Exemple 4 : surfaces de réponse u_x en P_1 (gauche) et en P_2 (droite) en fonction de ξ_2 ; $\xi_1 = 0.8$ et $\xi_3 = 0.7$.

La figure 2.44 présente les champs de déplacement u_x obtenus pour différentes réalisations des variables aléatoires de base. On compare les résultats obtenus avec la solution X-SFEM pour un chaos de degré $p = 3$ à ceux obtenus avec une approche FEM associée à des maillages conformes. On constate, ici aussi, une très bonne concordance des résultats entre les deux approches.
Enfin, la figure 2.43 présente les densités de probabilité de u_x au point P_1. La courbe de référence a été calculée avec des simulations de Monte-Carlo associées à des calculs X-FEM basés sur le même maillage éléments finis que X-SFEM. Cette courbe a été obtenue pour 10000 tirages des variables aléatoires. Les différentes courbes X-SFEM ont été obtenues à partir des solutions évaluées au point P_1. Les densités de probabilité sont alors simplement obtenues à partir de 10^6 tirages des variables aléatoires. On constate

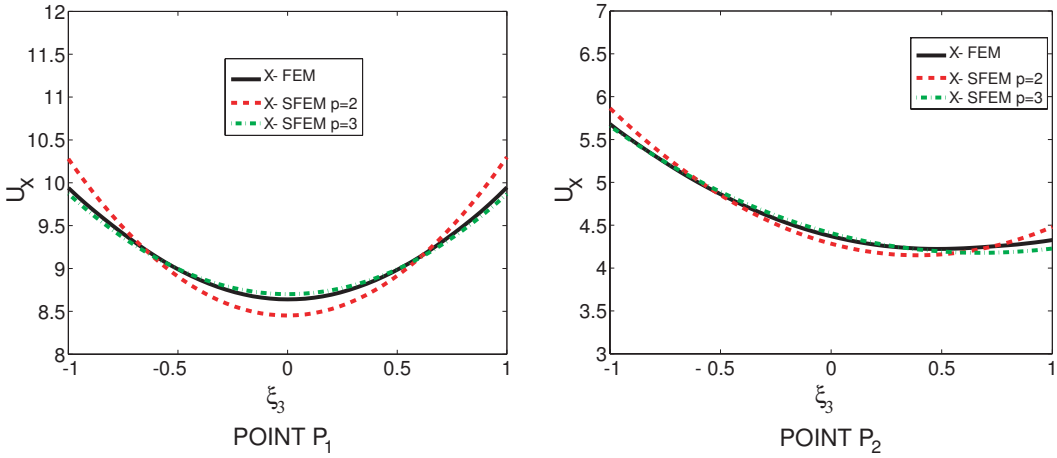


FIG. 2.42 – Exemple 4 : surfaces de réponse u_x en P_1 (gauche) et en P_2 (droite) en fonction de ξ_3 ; $\xi_1 = 0.7$ et $\xi_2 = -0.4$.

que la solution X-SFEM conduit à de bons résultats au regard de la solution de référence et que la densité de probabilité est alors très bien évaluée. On notera que les temps de calcul, entre X-SFEM et la méthode de Monte-Carlo, sont réduits d'un facteur 500.

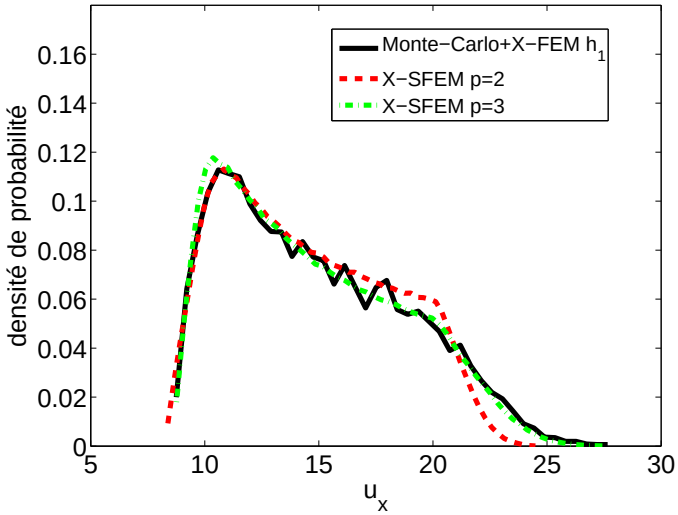


FIG. 2.43 – Exemple 4 : densités de probabilité de u_x au point P_1 : comparaison entre X-SFEM et une approche Monte-Carlo couplée avec FEM pour 10000 tirages.

Les résultats sur les déplacements apparaissent très bons. De manière analogue, nous étudions maintenant les résultats sur les contraintes calculées à partir des solutions X-SFEM en déplacements afin de montrer qu'il existe différentes manières d'obtenir ces résultats.

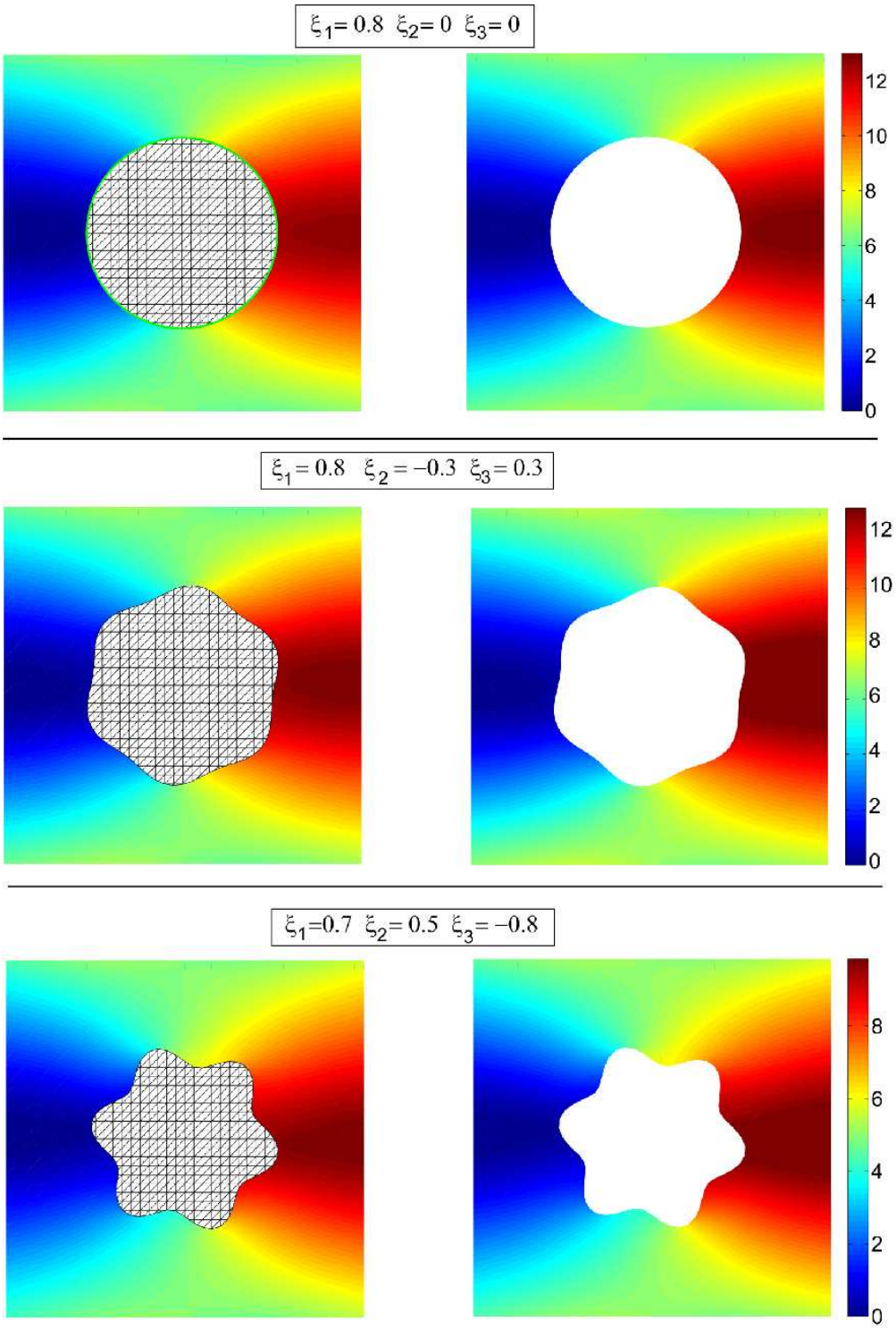


FIG. 2.44 – Exemple 4 : comparaisons des champs de déplacements u_x pour différentes réalisations de la géométrie calculée avec X-SFEM (gauche) et FEM (droite).

2.12.2.2 Comparaison des contraintes et énergie de déformation

Les résultats suivants sur les contraintes ont été obtenus par post-traitement de la solution X-SFEM en déplacement. On note $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}_{h,P}(\boldsymbol{\xi})) := \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ une quantité d'intérêt que l'on veut déterminer et qui dépend de la solution X-SFEM $\boldsymbol{u}_{h,P}$. Pour obtenir la surface de réponse de $\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ en fonction de $\boldsymbol{\xi}$, nous utilisons deux techniques différentes :

- technique (a) : à partir d'un ensemble de réalisations $\{\boldsymbol{\xi}_k\}_{k=1...M}$, on évalue $\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ pour chacune de ces réalisations ;
- technique (b) : on décompose $\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ sur un chaos polynomial de degré identique, ou non, à celui utilisé pour la solution en déplacement.

Maximum des contraintes : Pour comparer ces techniques, on s'intéresse tout d'abord au maximum d'une composante du champ de contraintes $\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\Omega(\boldsymbol{\xi})} |\sigma_{xx}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})| := \sigma_{xx}^{max}(\boldsymbol{\xi})$. On propose d'étudier les surfaces de réponse de $\sigma_{xx}^{max}(\boldsymbol{\xi})$ calculées avec X-SFEM pour les trois cas de figure donnés dans la section précédente. Les solutions de référence sont obtenues, comme pour les déplacements, à partir d'un ensemble de calculs déterministes X-FEM avec deux maillages différents.

Technique (a) : la figure 2.45 présente les résultats obtenus pour le cas *(i)*. Nous utilisons ici deux solutions de référence X-FEM : la première notée "X-FEM h_1" a été calculée avec le même maillage que la solution X-SFEM alors que la solution notée "X-FEM h_2" a été calculée avec un maillage plus fin composé de 20000 éléments finis. On constate que les deux solutions de référence X-FEM présentent certaines irrégularités. L'utilisation de la méthode X-FEM pour le calcul d'une quantité d'intérêt comme le maximum des contraintes n'est clairement pas optimale. Cependant, la solution "X-FEM h_2", calculée sur le maillage le plus fin, présente moins d'irrégularités indiquant la convergence de celle ci vers la solution exacte. La solution X-SFEM tend, elle, logiquement vers la solution "X-FEM h_1" et présente les mêmes irrégularités.

Remarque 2.4 *Avec X-FEM, une quantité présentant de fortes irrégularités (comme les coefficients de concentrations de contraintes en fonction d'une taille de fissure) est classiquement lissée par post-traitement afin de faire disparaître ces irrégularités. Une quantité comme le maximum des contraintes devrait subir le même type de traitement.*

Technique (b) : avec cette technique, on cherche à décomposer $\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ sur un chaos polynomial de degré identique ou non à celui utilisé pour la solution en déplacement. On note $\boldsymbol{u}_{h,P}$ la solution X-SFEM décomposée sur un chaos polynomial de degré p telle que

$$\boldsymbol{u}_{h,P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_P} \boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{x}) H_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.71}$$

où $\mathcal{I}_P = \{\alpha \in \mathcal{I}; \sum_{i=1}^m \alpha_i \leqslant p\}$ et m est la dimension stochastique du problème. Soit $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}_{h,P}(\boldsymbol{\xi})) := \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ la quantité d'intérêt que l'on cherche à décomposer sur un chaos polynomial de degré $p_{\mathcal{J}} \geqslant p$ telle que

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{P_{\mathcal{J}}}} J_\alpha H_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.72}$$

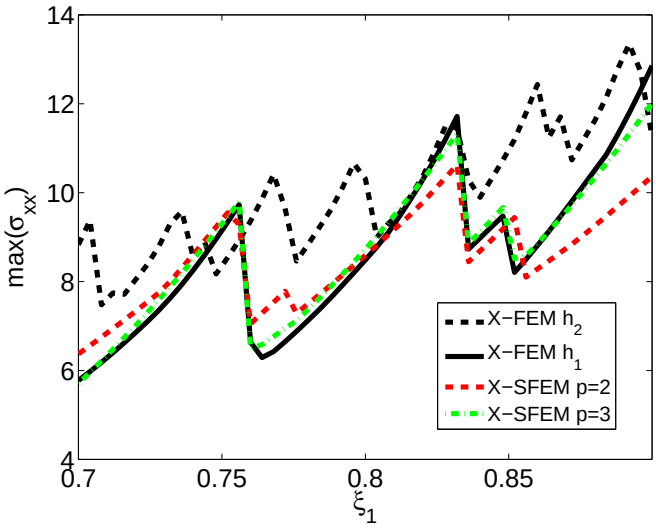


FIG. 2.45 – Exemple 4 : surfaces de réponse du maximum des contraintes $\sigma_{xx}^{max}(\boldsymbol{\xi})$ en fonction de ξ_1 ; $\xi_2 = 0.5$ et $\xi_3 = 0.5$.

avec $\mathcal{I}_{P_\mathcal{J}} = \{\alpha \in \mathcal{I}; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \leqslant p_\mathcal{J}\}$. Les coefficients $\mathcal{J}_\alpha$ sont alors obtenus par une intégration numérique adaptée

$$\mathcal{J}_\alpha = E(\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})H_\alpha(\boldsymbol{\xi})) \approx \sum_k \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_k)H_\alpha(\boldsymbol{\xi}_k)\omega_k \tag{2.73}$$

où les $\boldsymbol{\xi}_k$ sont les points d'intégration et les ω_k les poids d'intégration associés. Les quantités $\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_k)$ sont alors évaluées à partir de la décomposition de la solution $\boldsymbol{u}_{h,P}$ donnée dans l'équation (2.71). Avec cette technique, le nombre d'évaluations de $\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ est alors moins important qu'avec la technique (a). La figure 2.46 présente les surfaces de réponse de $\sigma_{xx}^{max}(\boldsymbol{\xi})$ obtenues pour le cas *(i)* avec la technique (b). La solution X-SFEM a été calculée avec un degré $p = 3$, et la décomposition de $\sigma_{xx}^{max}(\boldsymbol{\xi})$ avec des degrés $p_\mathcal{J} \in \{3, 6, 12\}$. On constate que pour obtenir une surface de réponse semblable à celle obtenue par X-FEM, il est nécessaire d'utiliser un ordre de décomposition $p_\mathcal{J}$ élevé. Cependant, la surface de réponse pour $p_\mathcal{J} = 3$ est plus régulière : utiliser de faibles ordres de décomposition $p_\mathcal{J}$ permet dans ce cas de "lisser" la solution et d'obtenir des résultats certainement plus conformes à la réalité physique du problème. Toutefois, toute généralisation à ce stade serait prématurée. Il sera important d'étudier ce point plus en profondeur afin de s'assurer que ces quantités puissent être bien évaluées et utilisées.
On notera que les champs de contraintes restent cependant bien évalués avec la méthode X-FEM. La figure 2.47 présente en effet plusieurs champs de contrainte σ_{xx} correspondant à différentes réalisations des variables aléatoires de base. On y compare les résultats obtenus avec la solution X-SFEM pour un chaos de degré $p = 3$ à ceux obtenus avec une approche FEM associée à des maillages conformes. Tout comme pour les déplacements (*c.f.* figure 2.44), on constate une très bonne concordance des résultats entre les deux approches.

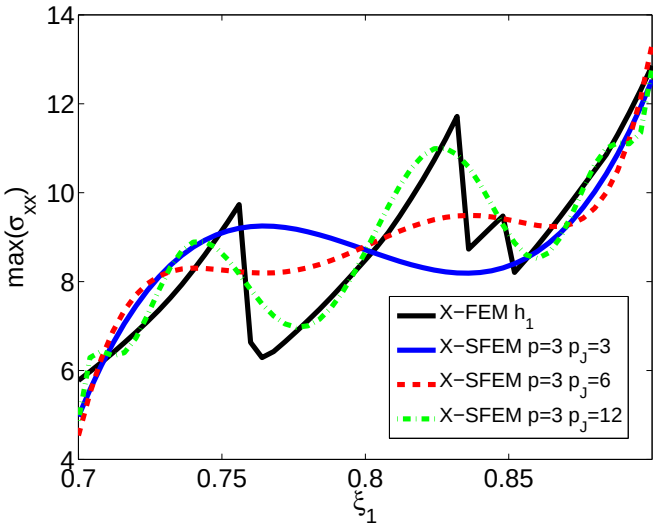


FIG. 2.46 – Exemple 4 : surfaces de réponse de la décomposition de $\sigma_{xx}^{max}(\boldsymbol{\xi})$ pour différents ordres $p_{\mathcal{J}}$ en fonction de ξ_1 ; $\xi_2 = 0.5$ et $\xi_3 = 0.5$.

Énergie élastique de déformation : Prenons à présent comme quantité d'intérêt l'énergie élastique de déformation $W(\boldsymbol{\xi})$ définie par

$$W(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega(\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{h,P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{h,P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))dx := \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.74}$$

La figure 2.48 présente les surface de réponse obtenues pour $W(\boldsymbol{\xi})$ pour le cas *(i)*. Les deux solutions de référence X-FEM sont ici très proches et très régulières. Les deux solutions X-SFEM présentées sur cette figure ont été calculées avec un chaos de degré $p = 3$. Le post-traitement de la solution permettant d'obtenir $W(\boldsymbol{\xi})$ a été réalisé avec les techniques (a) et (b) proposées précédemment : la solution notée "X-SFEM $p = 3$" et tracée en rouge a été obtenue directement (*i.e.* technique (a)) tandis que la solution notée "X-SFEM $p = 3$, $p_{\mathcal{J}} = 3$" a été obtenue en la décomposant préalablement sur un chaos de degré $p_{\mathcal{J}} = 3$ (*i.e.* technique (b)). On constate que les deux solutions sont quasiment identiques et concordent précisément avec la solution de référence "X-FEM h_1". On rappelle que la variable ξ_1 représente le "rayon" de la forme non perturbée, et on observe que plus la valeur de ξ_1 est élevée, plus l'énergie élastique de déformation est importante.

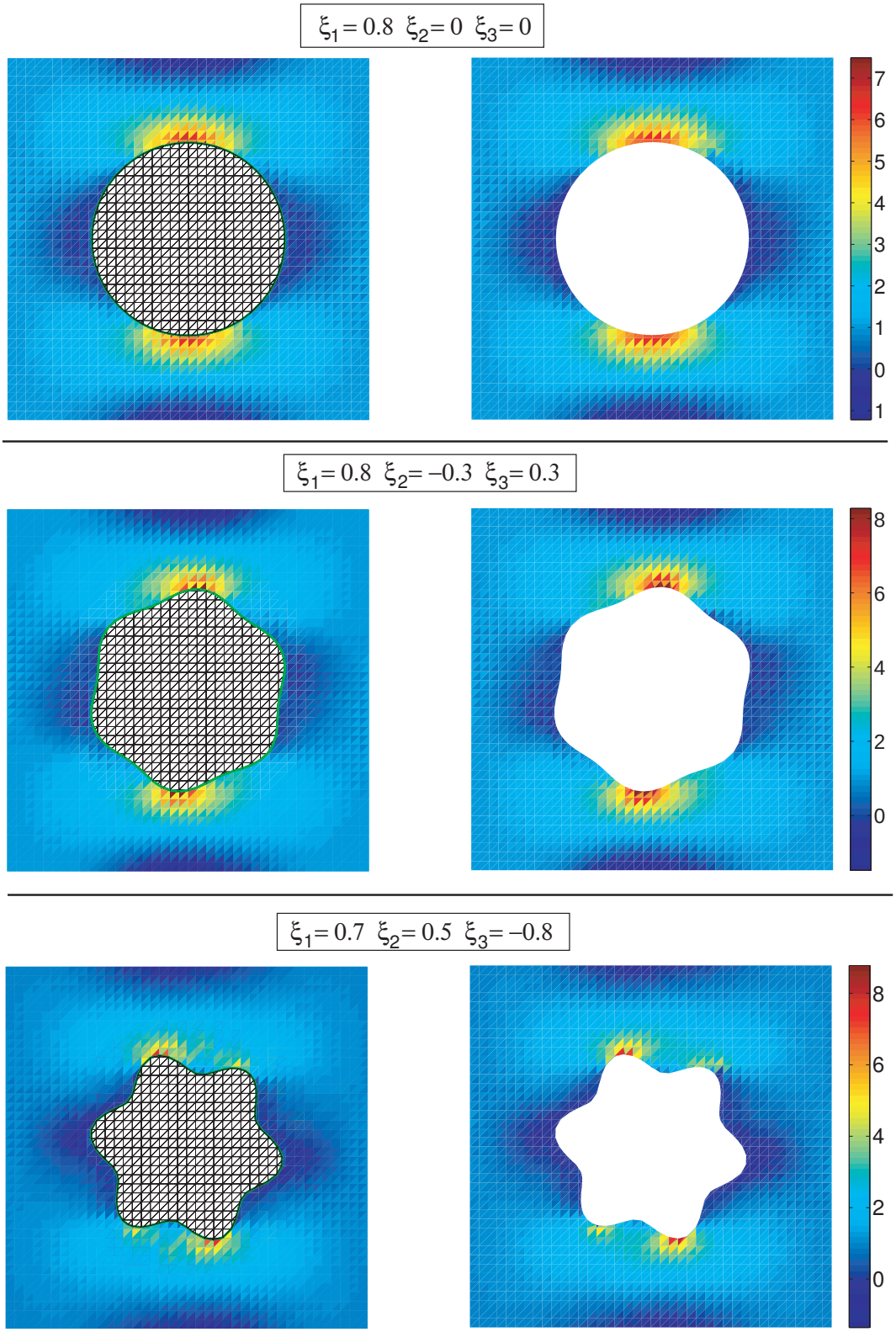


FIG. 2.47 – Exemple 4 : comparaisons des champs de contraintes σ_{xx} pour différentes réalisations de la géométrie calculés avec X-SFEM (gauche) et FEM (droite).

2.12.3 Bilan

Cet exemple nous a permis d'illustrer la qualité de la solution X-SFEM pour de faibles ordres de chaos polynomial. Nous avons montré qu'une géométrie relativement complexe pouvait être facilement prise en compte dans X-SFEM. Tous les post-traitements présentés dans cet exemple sont très rapides et simples à effectuer. Grace à ces différents post-traitements, nous avons montré la qualité de la solution X-SFEM en se basant sur des résultats obtenus avec des approches déterministes.

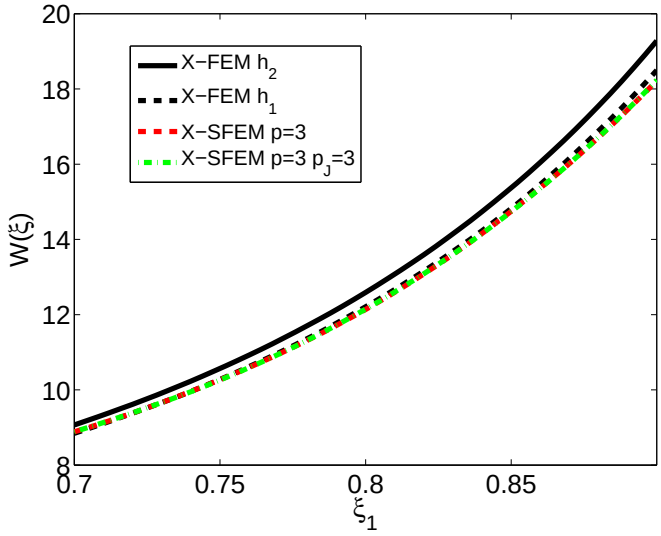


FIG. 2.48 – Exemple 4 : surfaces de réponse de l'énergie élastique de déformation $W(\boldsymbol{\xi})$ en fonction de ξ_1 ; $\xi_2 = 0.5$ et $\xi_3 = 0.5$.

2.13 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter la méthode éléments finis stochastiques étendus X-SFEM pour des problèmes de formes aléatoires. Cette méthode tire avantage de la représentation de la géométrie par la technique des level sets aléatoires. On peut ainsi travailler sur un domaine déterministe fixe et définir assez facilement les espaces d'approximation. Pour l'approximation stochastique, nous avons montré que la projection de Galerkin se révélait beaucoup plus précise et efficace que la méthode de projection L^2 couplée à X-FEM. Les différents exemples numériques nous ont permis de montrer la qualité de la solution X-SFEM. Nous avons mis l'accent sur les problèmes d'intégration au niveau stochastique pour la construction de la matrice et du second membre du problème discrétisé. Il est clair que pour des modélisations probabilistes sophistiquées, une réflexion préalable doit être menée pour s'assurer d'une intégration suffisamment précise. Ainsi, nous avons proposé une méthode d'intégration, basée sur un découpage du domaine stochastique, et nous avons montré son efficacité. Cependant, il reste encore à définir un critère, pouvant être déterminé *a priori* et permettant de savoir jusqu'où la procédure de découpage doit être effectuée.

Chapitre 3

Méthode éléments finis stochastiques étendus pour les problèmes mécaniques avec interface matérielle aléatoire

Sommaire

3.1 Introduction **97**
3.2 Formulation du problème d'interface matérielle dans le cadre de X-SFEM **97**
3.3 Représentation de la géométrie avec la technique des level sets aléatoires **99**
3.4 Définition des espaces d'approximation **99**
3.4.1 Espace d'approximation classique 99
3.4.2 Enrichissement de l'espace d'approximation 100
3.5 Approximation de Galerkin avec un espace enrichi **101**
3.6 Fonctions d'enrichissement proposées pour X-SFEM **102**
3.6.1 Description du problème de référence : plaque en traction avec interface matérielle aléatoire 102
3.6.2 Fonction d'enrichissement classique ψ_1 103
3.6.3 Fonction d'enrichissement améliorée ψ_2 110
3.6.4 Méthode de projection basée sur la méthode X-FEM (P-X-FEM) 113
3.6.5 Bilan 117
3.7 Exemple 1 : plaque circulaire avec inclusion aléatoire circulaire **117**
3.7.1 Description du problème 117
3.7.2 Convergence et post-traitements de la solution X-SFEM 119
3.7.3 Convergence et post-traitements de la solution P-X-FEM 123
3.7.4 Bilan 125
3.8 Exemple 2 : domaine avec inclusion aléatoire **126**
3.8.1 Description du problème 126
3.8.2 Comparaison des résultats avec une approche déterministe 127

3.8.3 Calcul de l'opérateur de rigidité homogénéisé 127
3.8.4 Bilan 133
3.9 Conclusion 134

3.1 Introduction

Nous avons montré dans le chapitre 2 que la méthode X-SFEM s'avérait efficace pour la résolution de problèmes de structures présentant des formes aléatoires. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux problèmes possédant une interface matérielle aléatoire. Nous savons que ce type de problème conduit à une solution en déplacement à dérivées discontinues au passage de l'interface. L'approximation éléments finis peut représenter cette discontinuité si on utilise des maillages conformes à l'interface. En revanche, l'utilisation de maillages non conformes, comme dans X-SFEM, dégrade fortement la qualité de la solution. En utilisant la méthode de la partition de l'unité [Melenk et Babuska 1996], il est possible d'enrichir l'espace d'approximation afin de rajouter des modes à dérivées discontinues au passage de l'interface. Les choix pour l'enrichissement sont multiples : on propose ici d'étudier tout d'abord celui proposé dans [Moës *et al.* 2003]. Dans un cadre déterministe, l'enrichissement est dit optimal car il permet de retrouver des taux de convergence équivalents à ceux de la méthode des éléments finis avec des maillages conformes. La question ici est de savoir si cet enrichissement reste optimal dans le cadre d'un problème stochastique. On montrera que, s'il permet d'obtenir une solution de qualité (*i.e.* meilleure qu'une solution obtenue avec une approximation classique), il n'est cependant pas idéal pour les problèmes stochastiques. On proposera alors un nouvel d'enrichissement adapté au cadre stochastique. On montrera qu'il permet d'améliorer la qualité de la solution à l'aide de différents exemples numériques. La démarche proposée est une extension au cadre stochastique de la méthode de la partition de l'unité, qui revient à enrichir l'espace d'approximation à la fois au niveau spatial et stochastique.

3.2 Formulation du problème d'interface matérielle dans le cadre de X-SFEM

On considère un domaine Ω composé de deux sous-domaines aléatoires disjoints tels que $\Omega = \Omega_1(\boldsymbol{\xi}) \cup \Omega_2(\boldsymbol{\xi})$. Chaque sous-domaine Ω_i est représenté par la variable aléatoire $\Omega_i : \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Theta} \mapsto \Omega_i(\boldsymbol{\xi}) \subset \mathbb{R}^d$ où d désigne la dimension spatiale du problème et $\Omega_i(\boldsymbol{\xi})$ représente une réalisation du sous-domaine. L'interface aléatoire entre ces deux sous-domaines est notée $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$. On suppose que la structure est soumise à des efforts volumiques $\boldsymbol{f}$ sur Ω et à des efforts surfaciques $\boldsymbol{F}$ sur une partie Γ_2 de la frontière $\partial\Omega$, ces efforts étant éventuellement aléatoires. La structure est fixée sur une partie complémentaire Γ_1 de la frontière $\partial\Omega$. On supposera ici que Γ_1 et Γ_2 sont déterministes. Le problème est présenté sur la figure 3.1. On se

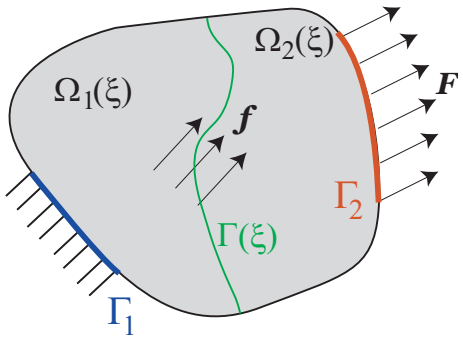


FIG. 3.1 – Problème d'interface matérielle aléatoire.

place sous l'hypothèse des petites perturbations et on suppose le matériau élastique linéaire. On note $\boldsymbol{C}$ le tenseur d'élasticité de Hooke et $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations. Le domaine Ω est ici déterministe, il n'est donc pas nécessaire d'introduire un domaine de référence B comme pour les problèmes de formes aléatoires (*c.f.* section 2.3). Les espaces fonctionnels sont alors définis directement sur Ω et ne demandent pas de prolongement. On introduit tout d'abord une formulation faible du problème au niveau spatial : trouver $\boldsymbol{u}$ tel que $\forall \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{u}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{U} = \{\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^d; \boldsymbol{v} = 0 \ sur \ \Gamma_1\}$, et tel qu'on ait $P_{\boldsymbol{\xi}}$-presque sûrement

$$a(\boldsymbol{u}(\cdot, \boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}) = b(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{U} \tag{3.1}$$

où $a(\cdot, \cdot; \boldsymbol{\xi})$ et $b(\cdot; \boldsymbol{\xi})$ sont respectivement les formes bilinéaire et linéaire définies par :

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \, dx \tag{3.2}$$

$$b(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \, ds \tag{3.3}$$

On introduit ensuite une formulation faible à la fois au niveau spatial et au niveau stochastique. En introduisant l'espace fonctionnel

$$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{u} : \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Theta} \mapsto \boldsymbol{u}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{U}; \int_{\boldsymbol{\Theta}} \|\boldsymbol{u}(\cdot, \mathbf{x})\|^2_{\mathcal{U}} \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) < \infty\} := L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_{\boldsymbol{\xi}}; \mathcal{U}) \tag{3.4}$$

la formulation s'écrit : trouver $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ tel que

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \tag{3.5}$$

où

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \mathbf{x}) \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) := E(a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi})) \tag{3.6}$$

$$L(\boldsymbol{v}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} b(\boldsymbol{v}; \mathbf{x}) \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) := E(b(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\xi})) \tag{3.7}$$

et où $E(\cdot)$ est l'espérance mathématique. Les formes bilinéaire et linéaire s'écrivent encore

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \ dx \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{3.8}$$

$$L(\boldsymbol{v}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f} \ dx \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) + \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} \, ds \, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{3.9}$$

Nous considérons que la forme bilinéaire A est continue et coercive sur $\mathcal{V}$ et que la forme linéaire L est continue sur $\mathcal{V}$, tel que le problème (3.5) soit bien posé. L'aléa sur les sous-domaines matériels est caractérisé par la donnée du tenseur de Hooke aléatoire $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$, qui peut s'écrire :

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{C}_1 I_{\Omega_1(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}_2 I_{\Omega_2(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{x}) \tag{3.10}$$

où $\boldsymbol{C}_1$ et $\boldsymbol{C}_2$ sont respectivement les tenseurs d'élasticité des sous-domaines $\Omega_1(\boldsymbol{\xi})$ et $\Omega_2(\boldsymbol{\xi})$, et où I_{Ω_1} et I_{Ω_2} sont respectivement les fonctions indicatrices des domaines $\Omega_1(\boldsymbol{\xi})$ et $\Omega_2(\boldsymbol{\xi})$ données par

$$I_{\Omega_i(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \Omega_i(\boldsymbol{\xi}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.11}$$

Sans perte de généralité, on considère par la suite que $\boldsymbol{C}_1$ et $\boldsymbol{C}_2$ sont déterministes.

3.3 Représentation de la géométrie avec la technique des level sets aléatoires

Dans le cas des formes aléatoires, la technique des levels sets nous permettait de décrire la fonction caractéristique du domaine physique. Ici, on caractérise l'interface matérielle aléatoire par l'iso-zéro d'une fonction level set aléatoire $\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ définie par l'équation (2.26). L'utilisation et la manipulation des level sets aléatoires, présentées dans les sections 2.2.2 et 2.4, se font de la même manière. Par convention, nous supposerons que la level set prend des valeurs négatives sur le domaine Ω_1 et positives sur le domaine Ω_2. Ainsi, considérant l'équation (3.10), le tenseur $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ peut s'écrire :

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{C}_1 \mathcal{H}(-\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})) + \boldsymbol{C}_2 \mathcal{H}(\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})) \tag{3.12}$$

où $\mathcal{H}$ est la fonction Heaviside. En pratique, on rappelle que la fonction level-set est discrétisée en utilisant une interpolation sur un maillage éléments finis fixe. La géométrie aléatoire est alors complètement caractérisée par la donnée des valeurs nodales de la level-set, qui sont des variables aléatoires.

3.4 Définition des espaces d'approximation

Dans cette section, on s'intéresse à la construction de l'espace d'approximation de l'espace de travail $\mathcal{V}$. On peut distinguer deux définitions possibles : la première consiste à définir un espace d'approximation classique, analogue à celui proposé dans la section 2.5 et la seconde consiste à enrichir cet espace d'approximation en utilisant la méthode de la partition de l'unité.

3.4.1 Espace d'approximation classique

On introduit un maillage éléments finis $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω et on note $\{\boldsymbol{\varphi}_i\}_{i \in I}$ la base d'approximation éléments finis de $\mathcal{U}$. L'espace d'approximation spatial classique $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ peut s'écrire :

$$\mathcal{U}_h = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in I} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) v_i = \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) \mathbf{v}, \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N\} \tag{3.13}$$

Un espace d'approximation semi-discrétisé en espace $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ est alors défini par

$$\mathcal{V}_h = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}), \ \mathbf{v} \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{R}^N\} \tag{3.14}$$

Comme indiqué en section 2.5, on introduit, au niveau stochastique, un espace d'approximation $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$. L'espace d'approximation complet $\mathcal{V}_{h,P} \subset \mathcal{V}$ est alors défini par

$$\mathcal{V}_{h,P} = \mathcal{S}_P \otimes \mathcal{U}_h$$

Il peut également s'écrire

$$\mathcal{V}_{h,P} = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}),\ \mathbf{v} \in \mathcal{S}_P \otimes \mathbb{R}^N\} \tag{3.15}$$

L'utilisation de cet espace d'approximation est tout à fait possible pour notre problème. Cependant, il est clair qu'il n'est pas optimal dans le cas d'un problème d'interface matérielle aléatoire. En effet, ce type de problème possède un champ solution qui présente des dérivées discontinues au passage de l'interface $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$. Or, ces discontinuités ne sont pas contenues dans l'espace d'approximation éléments finis dans le cas où le maillage n'est pas conforme à la géométrie. Il est donc nécessaire de modifier l'espace d'approximation afin qu'il puisse représenter ces discontinuités au passage de l'interface.

3.4.2 Enrichissement de l'espace d'approximation

Il est possible d'enrichir l'espace d'approximation par des fonctions à dérivées discontinues au passage de l'interface. On peut pour cela utiliser la méthode de la partition de l'unité. Dans [Melenk et Babuska 1996], les auteurs ont montré qu'il était possible avec cette méthode d'enrichir l'espace d'approximation éléments finis classique. Le but de cette méthode est d'augmenter la précision de l'approximation sans augmenter de manière significative la dimension de l'espace d'approximation. On introduit pour cela certaines connaissances amont sur la solution du problème à l'aide d'un enrichissement contenant les irrégularités du champ solution.
Au niveau déterministe, correspondant à une réalisation $\boldsymbol{\xi}$ donnée, l'espace d'approximation enrichi $\mathcal{U}_h^+$ au niveau spatial peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_h^+(\boldsymbol{\xi}) = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = &\sum_{i\in I} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})a_i + \sum_{i\in I_e} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})a_i^+,\\ &\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^N,\ \mathbf{a}^+ = (a_i^+)_{i\in I_e} \in \mathbb{R}^{N^+}\}\end{aligned} \tag{3.16}$$

où I_e est l'ensemble des noeuds enrichis, $\psi(\cdot,\boldsymbol{\xi})$ est la fonction d'enrichissement, $\mathbf{a}$ est le vecteur des degrés de liberté classiques et $\mathbf{a}^+$ est le vecteur des degrés de liberté enrichis. Il existe plusieurs choix classiques pour la fonction d'enrichissement ψ donnés dans [Sukumar *et al.* 2001, Moës *et al.* 2003]. Ces différentes fonctions sont basées sur la fonction level set permettant de caractériser la position de l'interface. On rappelle qu'avec la méthode des level sets, l'interface est donnée par l'iso-zéro de la fonction level set $\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$: ainsi, la fonction $|\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})|$ est une fonction continue à dérivée discontinue au passage de l'interface $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$. L'utilisation de la fonction d'enrichissement donnée dans [Moës *et al.* 2003] est dite optimale car elle permet à l'approximation de retrouver des taux de convergence en $O(h^2)$ en norme L^2 identiques à ceux d'une approximation éléments finis classique avec un maillage conforme.
Dans le cadre stochastique, on peut naturellement étendre la définition précédente. Cela conduit à définir

l'espace d'approximation semi-discrétisé $\mathcal{V}_h^+ \in \mathcal{V}$ défini par

$$\mathcal{V}_h^+ = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i\in I} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})a_i(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{i\in I_e} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})a_i^+(\boldsymbol{\xi}),$$
$$\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I} \in \mathcal{S}\otimes\mathbb{R}^N,\ \mathbf{a}^+ = (a_i^+)_{i\in I_e} \in \mathcal{S}\otimes\mathbb{R}^{N^+}\} \tag{3.17}$$

L'utilisation de la fonction d'enrichissement proposée dans [Moës *et al.* 2003] devrait également permettre d'obtenir des taux de convergence optimaux en h. Au niveau stochastique, un espace d'approximation $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$ est utilisé. L'espace d'approximation $\mathcal{V}_{h,P}^+$ est alors défini par

$$\mathcal{V}_{h,P}^+ = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i\in I} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})a_i(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{i\in I_e} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})a_i^+(\boldsymbol{\xi}),$$
$$\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I} \in \mathcal{S}_P\otimes\mathbb{R}^N,\ \mathbf{a}^+ = (a_i^+)_{i\in I_e} \in \mathcal{S}_P\otimes\mathbb{R}^{N^+}\} \tag{3.18}$$

La fonction d'enrichissement $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ est *a priori* aléatoire. L'espace d'approximation $\mathcal{V}_{h,P}^+$ peut encore s'écrire

$$\mathcal{V}_{h,P}^+ = \mathcal{V}_{h,P} + span\{\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})H_\alpha(\boldsymbol{\xi}), i\in I_e, \alpha\in\mathcal{J}_P\} \tag{3.19}$$

L'enrichissement, ainsi défini, permet alors d'enrichir l'espace d'approximation aussi bien au niveau spatial que stochastique. On montrera par la suite que l'utilisation, dans un cadre stochastique, de la fonction d'enrichissement donnée dans [Moës *et al.* 2003] conduit à de mauvais taux de convergence en fonction de l'ordre de décomposition p du chaos polynomial. On proposera alors une fonction d'enrichissement, adaptée au cadre stochastique, qui permet d'obtenir de bons taux de convergence au niveau spatial et stochastique. Les fonctions d'enrichissement, utilisées dans ces travaux, seront présentées dans la section 3.6.

3.5 Approximation de Galerkin avec un espace enrichi

Avant de s'intéresser au choix des fonctions d'enrichissement, nous présentons les particularités dues à l'utilisation d'un espace d'approximation enrichi lorsque l'on utilise une projection de Galerkin. On notera que si on utilise un espace d'approximation classique, la méthode est la même que celle présentée dans la section 2.6. D'autre part, dans les deux premiers exemples, nous utiliserons également une méthode de projection L^2 avec une approximation classique et enrichie. Pour cette méthode, le lecteur pourra se référer à la section 2.7.
On se place dans le cas d'un espace d'approximation enrichi noté $\mathcal{V}_{h,P}^+$. On rappelle que l'approximation de Galerkin $\boldsymbol{u}_{h,P} \in \mathcal{V}_{h,P}^+$ est définie, dans ce cas, par

$$A(\boldsymbol{u}_{h,P},\boldsymbol{v}_{h,P}) = L(\boldsymbol{v}_{h,P}) \quad \forall \boldsymbol{v}_{h,P} \in \mathcal{V}_{h,P}^+, \tag{3.20}$$

On note $\mathbf{u} = (\mathbf{a}^T, (\mathbf{a}^+)^T)^T$. L'équation (3.20) est alors équivalente au système d'équations suivant

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{J}_P} E(H_\beta \mathbf{A} H_\alpha)\mathbf{u}_\alpha = E(\mathbf{b}H_\beta) \quad \forall\beta\in\mathcal{J}_P \tag{3.21}$$

où les $\mathbf{u}_\alpha$ sont les coefficients de la décomposition de l'ensemble des degrés de liberté $\mathbf{u}$. Pour obtenir la matrice et le vecteur du système éléments finis, on utilise un assemblage classique des quantités élémentaires (voir équation (2.55)). On rappelle que ces quantités sont décomposées sur le chaos polynomial et leurs coefficients sont obtenus par une intégration appropriée sur le domaine stochastique $\boldsymbol{\Theta}$ respectant la mesure de probabilité $dP_{\boldsymbol{\xi}}$ des variables aléatoires (*c.f.* équations (2.58) et (2.59)). Pour le calcul de l'intégration, on utilise une règle de quadrature conduisant à déterminer les quantités élémentaires $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi})$ pour des réalisations $\boldsymbol{\xi}$. C'est précisément dans le calcul de ces quantités que l'enrichissement est pris en compte. Prenons le cas de la matrice de rigidité élémentaire $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ définie par

$$\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi}) = \int_K \tilde{\mathbf{B}}_K^T(\boldsymbol{\xi})[\boldsymbol{C}_1\mathcal{H}(-\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})) + \boldsymbol{C}_2\mathcal{H}(\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))]\tilde{\mathbf{B}}_K(\boldsymbol{\xi})dx \tag{3.22}$$

Si on considère que les degrés de liberté sont rangés en deux blocs, *i.e.* classiques puis enrichis, et si on note $\mathbf{B}_K$ la matrice des déformations éléments finis pour les degrés de liberté classiques, alors la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_K$ est définie par

$$\tilde{\mathbf{B}}_K(\boldsymbol{\xi}) = [\mathbf{B}_K, \psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\mathbf{B}_K + (\mathbf{D}_\psi)\boldsymbol{\varphi}_K] \tag{3.23}$$

où $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ est la fonction d'enrichissement pour la réalisation $\boldsymbol{\xi}$, et où les matrices $\boldsymbol{\varphi}_K$ et $\mathbf{D}_\psi$ sont définies, en dimension 2 et pour un élément triangle à 3 noeuds, par

$$\boldsymbol{\varphi}_K = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}_\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

où les φ_i sont les fonctions d'interpolation scalaires aux sommets du triangle. On s'intéresse maintenant aux choix possibles pour la fonction d'enrichissement $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$.

3.6 Fonctions d'enrichissement proposées pour X-SFEM

Dans cette section, nous présentons deux fonctions d'enrichissement notées respectivement ψ_1 et ψ_2. La première fonction est classique dans la méthode X-FEM et a été proposée dans [Moës *et al.* 2003]. La seconde fonction est nouvelle et a été développée spécialement dans la méthode X-SFEM pour les problèmes d'interface matérielle aléatoire. Afin de comparer les performances de chacune de ces fonctions et de montrer l'intérêt de la seconde fonction ψ_2, nous utilisons un problème de référence. Nous décrivons tout d'abord ce problème puis nous présentons les résultats obtenus avec chaque fonction d'enrichissement.

3.6.1 Description du problème de référence : plaque en traction avec interface matérielle aléatoire

On considère un domaine carré $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de côté égal à 1 composé de deux matériaux élastiques. Les matériaux 1 et 2 occupent respectivement les domaines aléatoires $\Omega_1(\xi)$ et $\Omega_2(\xi)$ et sont séparés par une interface aléatoire $\Gamma(\xi)$ caractérisée par une variable aléatoire ξ. On considère que ξ est une variable

aléatoire uniforme telle que $\xi = U(0.4, 0.6)$. Sa moyenne correspond à une frontière séparant la plaque en deux domaines de taille identique. Les deux matériaux ont des caractéristiques matérielles différentes : $E_1 = 1$ et $\nu_1 = 0$ dans $\Omega_1(\xi)$, $E_2 = 2$ et $\nu_2 = 0$ dans $\Omega_2(\xi)$. Le domaine est encastré sur la partie Γ_1 de sa frontière et on applique un effort $\boldsymbol{F} = (1, 0)$ sur la partie Γ_2 de sa frontière.

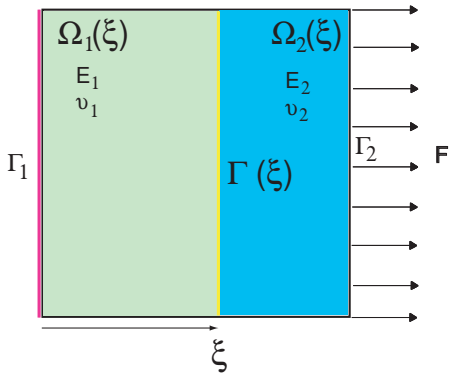


FIG. 3.2 – Exemple de référence : problème de la plaque en traction avec interface matérielle aléatoire.

L'interface $\Gamma(\xi)$ est caractérisée par la fonction level set suivante : pour $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \Omega$

$$\phi(\boldsymbol{x}, \xi) = x - \xi$$

Comme présenté en section 3.3, les valeurs négatives de $\phi(\boldsymbol{x}, \xi)$ caractérisent les points appartenant à $\Omega_1(\xi)$ et les valeurs positives les points appartenant à $\Omega_2(\xi)$.
Pour l'approximation spatiale, afin d'étudier la qualité de la solution obtenue avec X-SFEM, on utilise deux maillages éléments finis différents composés de triangles à 3 noeuds. Le premier maillage comporte 50 éléments et le second 508 éléments. La figure 3.3 présente les deux maillages utilisés avec les différents groupes d'éléments : les éléments appartenant sûrement à Ω_1 (groupe e_1), les éléments appartenant sûrement à Ω_2 (groupe e_2) et les éléments possiblement coupés par $\Gamma(\xi)$ (groupe e_c). Quel est l'intérêt d'utiliser deux maillages ? Sur le premier maillage, très grossier, on peut constater que l'interface est toujours contenue dans la même bande d'éléments (qui sont donc toujours coupés par l'interface). Sur le second maillage, en revanche, les éléments coupés par l'interface ne sont pas toujours les mêmes en fonction de la position (réalisation) de l'interface.
Le problème ne possède ici qu'une seule dimension stochastique. On peut donc reformuler le problème sur un espace probabilisé de dimension 1, noté $(\Theta, \mathcal{B}, P_\xi)$ avec $\Theta = [0.4, 0.6]$ et P_ξ la mesure uniforme sur $[0.4, 0.6]$. Pour l'approximation stochastique, on utilise un chaos polynomial généralisé d'ordre p pour lequel les fonctions de base de $\mathcal{S}_P$ sont les polynômes de Legendre sur $[0.4, 0.6]$. Enfin, pour l'approximation on utilise une projection de Galerkin mais également une méthode de projection L^2. On s'intéresse maintenant au choix de la fonction d'enrichissement.

3.6.2 Fonction d'enrichissement classique ψ_1

Dans cette section, nous présentons une première fonction d'enrichissement, classiquement utilisée dans X-FEM, et proposée dans [Moës *et al.* 2003]. Après avoir présenté cette fonction, on étudiera ses performances sur l'exemple de référence.

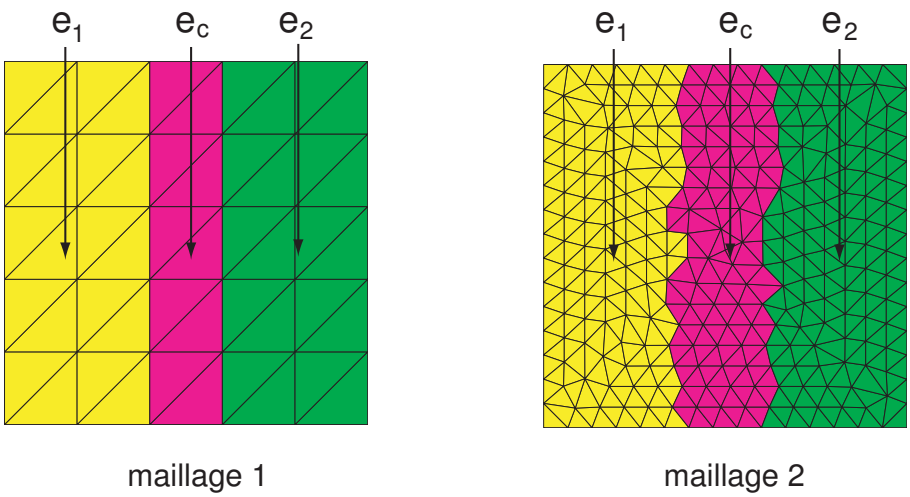


FIG. 3.3 – Exemple de référence : maillages X-SFEM utilisés avec les différents groupes d'éléments : les éléments e_1 appartenant sûrement à Ω_1, les éléments e_2 appartenant sûrement à Ω_2 et les éléments e_c possiblement coupés par $\Gamma(\xi)$.

3.6.2.1 Présentation de la fonction ψ_1

Parmi les différentes fonctions d'enrichissement développées pour la méthode X-FEM déterministe, celle proposée dans [Moës *et al.* 2003] permet d'obtenir des taux de convergence optimaux, *i.e.* identiques à ceux obtenus avec une approche éléments finis utilisant des maillages conformes à l'interface. Cette fonction ψ_1 directement étendue à un cadre stochastique s'écrit[1]

$$\psi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j\in I} |\phi_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})|\varphi_j(\boldsymbol{x}) - |\sum_{j\in I} \phi_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\varphi_j(\boldsymbol{x})| \tag{3.24}$$

où les $\varphi_j(\boldsymbol{x})$ sont les fonctions d'interpolation scalaires définissant l'approximation. Il s'agit en fait de la différence entre l'interpolée des valeurs absolues nodales de la level set et la valeur absolue de la level set. Pour une réalisation $\boldsymbol{\xi}$ donnée, cette fonction d'enrichissement est non nulle sur les éléments coupés par l'interface $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ et nulle ailleurs. Dans le cadre déterministe, son support spatial est composé de l'ensemble des éléments coupés par l'interface. Son utilisation dans le cadre stochastique conduit donc à élargir son support spatial. L'ensemble I_e des noeuds enrichis est alors choisi comme l'ensemble des noeuds I_c dont le support est possiblement coupé par l'interface $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$. La figure 3.4 présente l'ensemble des noeuds enrichis I_e pour chacun des deux maillages pour le problème de référence stochastique. La figure 3.5 représente la fonction $\psi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ sur le maillage 2 pour deux réalisations de la géométrie. On constate que, selon la position de l'interface, la fonction d'enrichissement est non nulle sur un ensemble d'éléments finis différent. On peut alors voir la fonction ψ_1 comme une fonction d'enrichissement localisée au niveau spatial pour un ξ donné.

[1]afin de garder une présentation générale, on considère que le problème dépend d'un ensemble de variables aléatoires $\boldsymbol{\xi}$

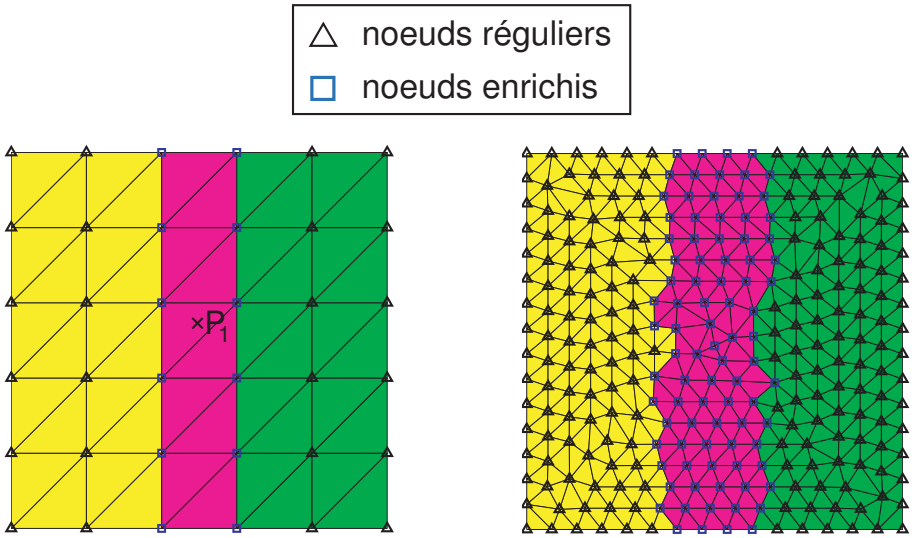


FIG. 3.4 – Exemple de référence : ensemble des noeuds enrichis I_e avec la fonction ψ_1 pour chacun des deux maillages.

3.6.2.2 Résultats obtenus sur le problème de référence

Afin d'étudier la qualité des différentes solutions et connaissant la solution exacte de ce problème, on introduit un indicateur d'erreur global défini à partir des solutions X-SFEM en déplacement $\boldsymbol{u}_{h,P}$ et de la solution exacte $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$

$$\varepsilon_{h,p} = \frac{\|\boldsymbol{u}_{h,P} - \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega\times\boldsymbol{\Theta})}}{\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega\times\boldsymbol{\Theta})}} \tag{3.25}$$

où

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega\times\boldsymbol{\Theta})} = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_{\Omega} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\mathbf{x})\, dx\, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \tag{3.26}$$

On utilisera également un indicateur d'erreur local $\varepsilon^K_{h,p}$ donnant la contribution locale de l'élément fini K à l'erreur globale [2] :

$$\varepsilon^K_{h,p} = \frac{\|\boldsymbol{u}_{h,P} - \boldsymbol{u}\|_{L^2(K\times\boldsymbol{\Theta})}}{\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega\times\boldsymbol{\Theta})}} \tag{3.27}$$

On propose d'étudier la qualité de deux solutions X-SFEM. La première, notée X-SFEM, est relative à un espace d'approximation classique sans enrichissement. La seconde, notée X-SFEM$^+_1$, est relative à un espace d'approximation enrichi basé sur la fonction ψ_1. Le tableau 3.1 présente les valeurs de l'indicateur d'erreur global obtenues en fonction de l'ordre de décomposition p pour le maillage 1. On remarque que la solution X-SFEM$^+_1$ conduit systématiquement à la solution exacte tandis que la solution X-SFEM donne toujours le même niveau d'erreur assez important. Le tableau 3.2 présente les valeurs de l'indicateur

[2] la contribution locale à l'erreur globale vérifie $\varepsilon_{h,p} = \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\varepsilon^K_{h,p})^2\right)^{1/2}$

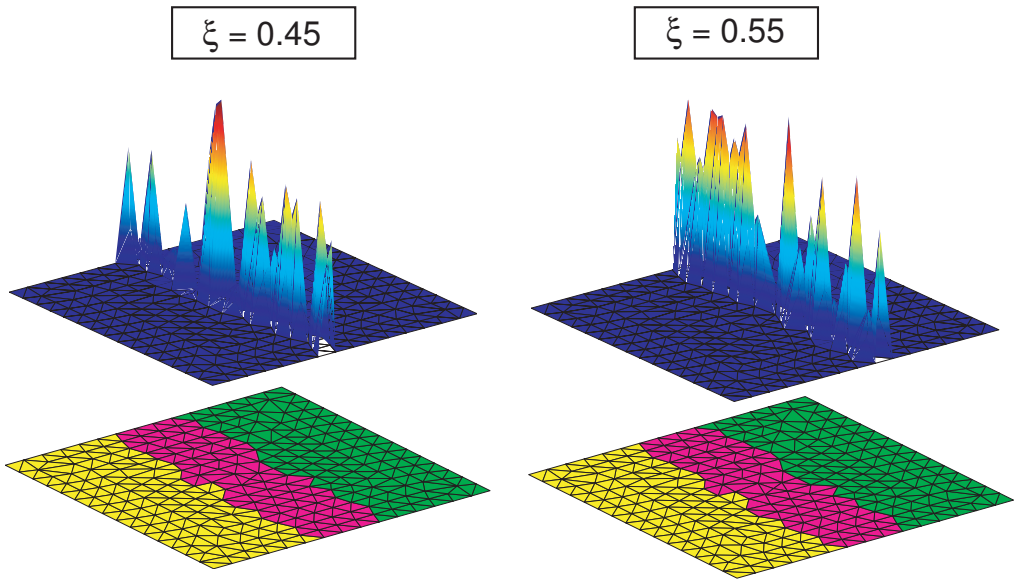


FIG. 3.5 – Exemple de référence : fonction d'enrichissement ψ_1 pour deux réalisations de la géométrie ; **maillage** 2.

d'erreur global obtenues pour le maillage 2. On constate ici qu'aucune des solutions ne donne la solution exacte. Cependant, l'erreur commise sur la solution X-SFEM est plus faible qu'avec le maillage 1 et converge lentement en fonction de l'ordre p. L'erreur de la solution X-SFEM$_1^+$ est plus faible que celle de la solution X-SFEM (environ 1 ordre de grandeur) mais elle converge lentement en fonction de p. On se pose alors la question suivante : pourquoi la solution X-SFEM$_1^+$ ne donne-t-elle pas la solution exacte avec le maillage 2 ?

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
X-SFEM	$2.4\ 10^{-2}$	$2.4\ 10^{-2}$	$2.4\ 10^{-2}$	$2.4\ 10^{-2}$
X-SFEM$_1^+$	$4.3\ 10^{-14}$	$4.1\ 10^{-14}$	$4\ 10^{-14}$	$3.9\ 10^{-14}$

TAB. 3.1 – Exemple de référence : erreurs $\varepsilon_{h,p}$ obtenues avec les solutions X-SFEM et X-SFEM$_1^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; maillage 1.

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
X-SFEM	$9\ 10^{-3}$	$6.6\ 10^{-3}$	$5.8\ 10^{-3}$	$5.5\ 10^{-3}$
X-SFEM$_1^+$	$5\ 10^{-3}$	$2\ 10^{-3}$	$9\ 10^{-4}$	$5.7\ 10^{-4}$

TAB. 3.2 – Exemple de référence : erreurs $\varepsilon_{h,p}$ obtenues avec les solutions X-SFEM et X-SFEM$_1^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; maillage 2.

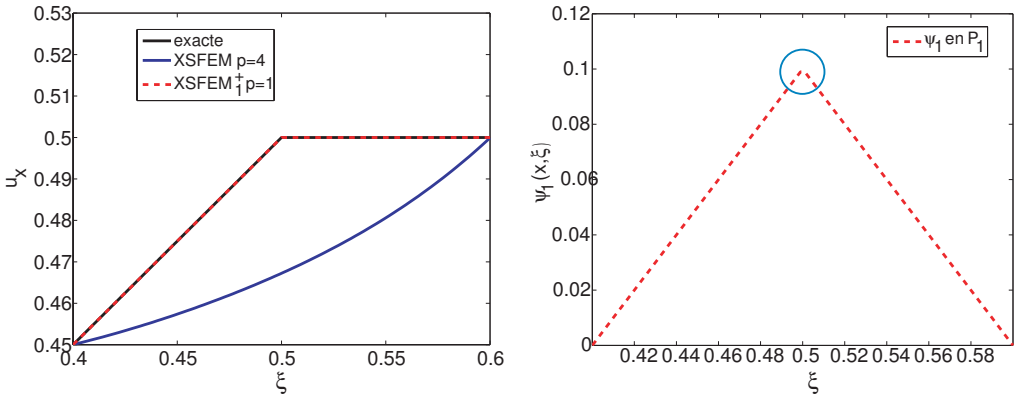


FIG. 3.6 – Exemple de référence : surfaces de réponse du déplacement horizontal (gauche) et évolution de la fonction ψ_1 (droite) au point P_1 ; **maillage** 1.

Pour le comprendre, on propose d'observer différentes quantités relatives à un point particulier $P_1 = (0.5, 0.55)$ du domaine (*c.f.* figure 3.4). Ce point peut, selon les réalisations de la géométrie, être dans l'un ou l'autre des sous-domaines. La figure 3.6 présente les surfaces de réponse du déplacement horizontal de P_1 obtenues avec les solutions X-SFEM et X-SFEM$_1^+$ calculées sur le maillage 1. On illustre le constat évoqué précédemment : la solution X-SFEM$_1^+$ correspond parfaitement à la solution exacte. Sur la même figure, on trouve également l'évolution de la fonction d'enrichissement ψ_1 au point P_1 en fonction de ξ : on observe bien la discontinuité dans la dérivée de ψ_1 par rapport à ξ pour $\xi = 0.5$, illustrant le fait que l'on enrichit au niveau stochastique par des fonctions non polynomiales. La figure 3.7 présente les mêmes surfaces de réponse mais issues des solutions calculées sur le maillage 2. On constate que la surface de réponse de la solution X-SFEM$_1^+$ s'éloigne de la solution exacte. On peut observer différentes discontinuités dans la dérivée de la surface de réponse du déplacement (entourées sur la figure) et c'est ici que se situe le problème. En effet, si la solution possède bien l'irrégularité souhaitée en $\xi = 0.5$, d'autres irrégularités apparaissent. Ces irrégularités parasites viennent en fait de la fonction d'enrichissement ψ_1 : si on observe l'évolution de la fonction ψ_1 au même point P_1, on constate qu'elle possède les mêmes discontinuités dans la dérivée (figure 3.8). On constate que les irrégularités parasites apparaissent lorsque l'état des noeuds de l'élément contenant P_1 change. Ces irrégularités perturbent alors l'approximation et dégradent la qualité de la solution. En effet, les degrés de liberté ne sont pas réguliers au niveau stochastique, et ils ne sont pas représentables correctement dans l'espace $\mathcal{S}_P$. De plus, la fonction ψ_1 étant nulle aux noeuds de l'ensemble I_e, les fonctions de base d'enrichissement $\psi_1(\boldsymbol{x}, \xi)\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})H_\alpha(\xi)$ sont nulles également. L'enrichissement stochastique n'a alors aucun effet aux noeuds, c'est pourquoi on ne peut pas obtenir la solution exacte.

La figure 3.9 illustre ce constat : elle présente les surfaces de réponse en déplacement d'un degré de liberté enrichi obtenues avec X-SFEM$_1^+$ pour différents ordres de chaos polynomial. Sur cette figure, la surface de réponse de référence, notée X-FEM$^+$, a été obtenue à partir de calculs déterministes en modifiant la position de l'interface (solutions calculées dans $\mathcal{V}_h^+$). On constate que le degré de liberté enrichi est constant par morceaux. Pour ce problème, plus le nombre d'éléments possiblement coupés par l'interface est important (*i.e.* plus le rapport entre la taille des éléments finis et la plage de variation est petit) et plus la fonction d'enrichissement ψ_1 devient irrégulière au niveau stochastique, ce qui perturbe la solution X-SFEM$_1^+$. Cependant, on notera que la projection de Galerkin ne cherche à représenter que

la partie non nulle du degré de liberté enrichi ce qui permet, malgré tout, d'améliorer les résultats par rapport à une approximation non enrichie.

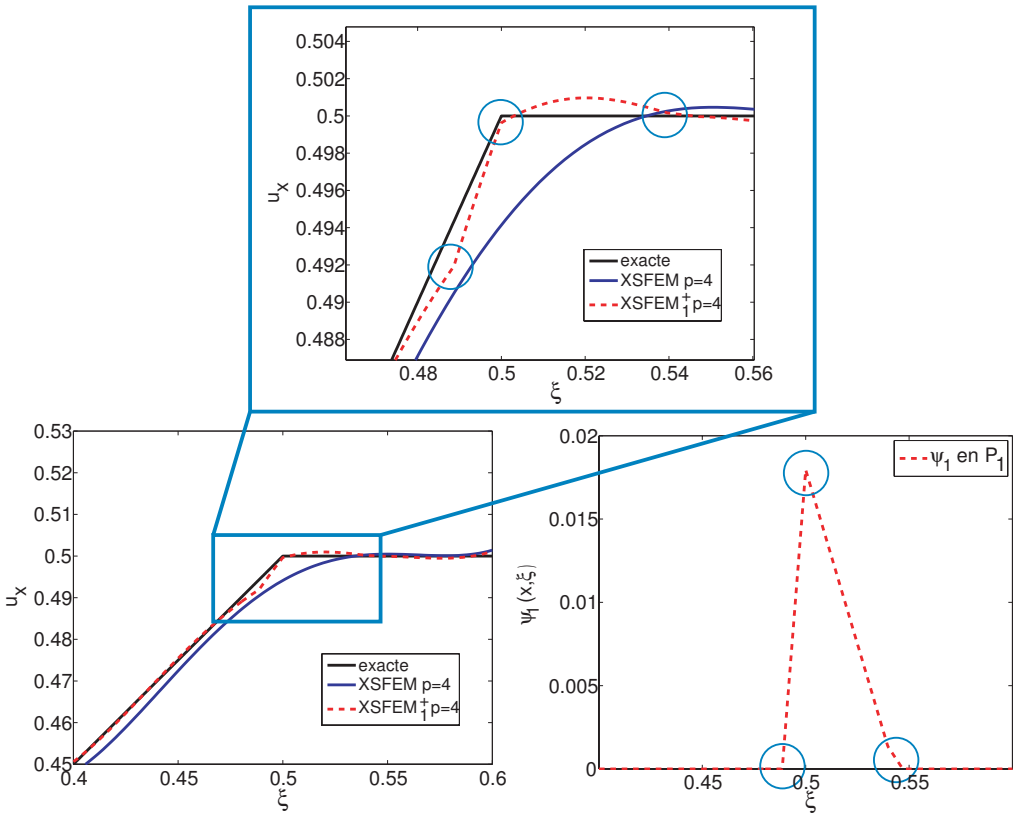


FIG. 3.7 – Exemple de référence : surfaces de réponse du déplacement horizontal (gauche) et évolution de la fonction ψ_1 (droite) au point P_1 ; **maillage** 2.

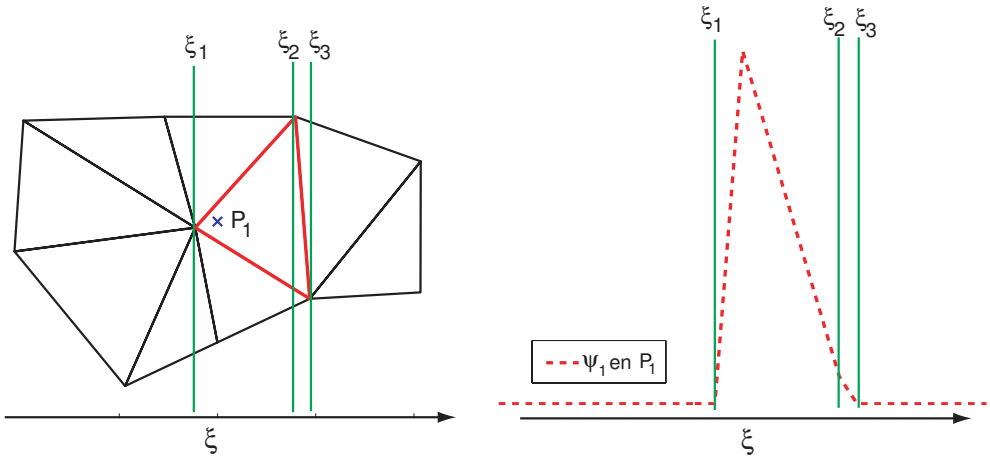


FIG. 3.8 – Evolution de la fonction d'enrichissement ψ_1 au point P_1 en fonction de la position de l'interface donnée par ξ ; **maillage** 2.

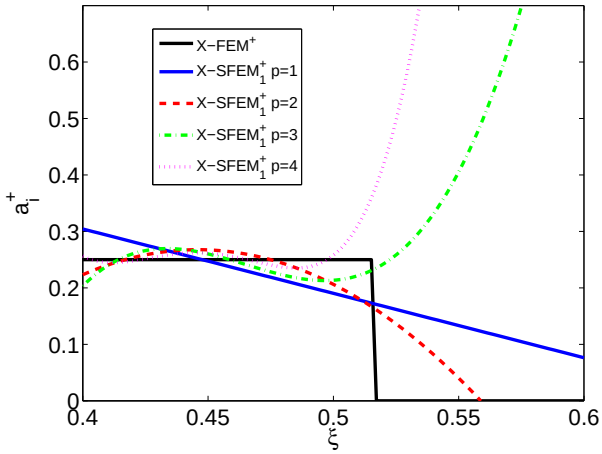


FIG. 3.9 – Exemple de référence : surfaces de réponse d'un degré de liberté enrichi obtenus avec X-SFEM$_1^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; **maillage** 2.

Nous avons montré qu'une approximation enrichie basée sur la fonction ψ_1 est alors loin d'être optimale. L'utilisation de cette fonction pour des problèmes stochastiques ne mène malheureusement pas à la précision escomptée. Si la solution en déplacement reste cependant bien calculée, les champs de contraintes présentent une erreur importante au voisinage de l'interface. C'est ce que nous illustrons sur la figure 3.10 sur laquelle le champ de contraintes σ_{xx} calculé sur chacun des maillages est présenté. En effet, on constate que le champ de contraintes n'est uniforme et égal à 1 que pour la solution calculée sur le maillage 1.

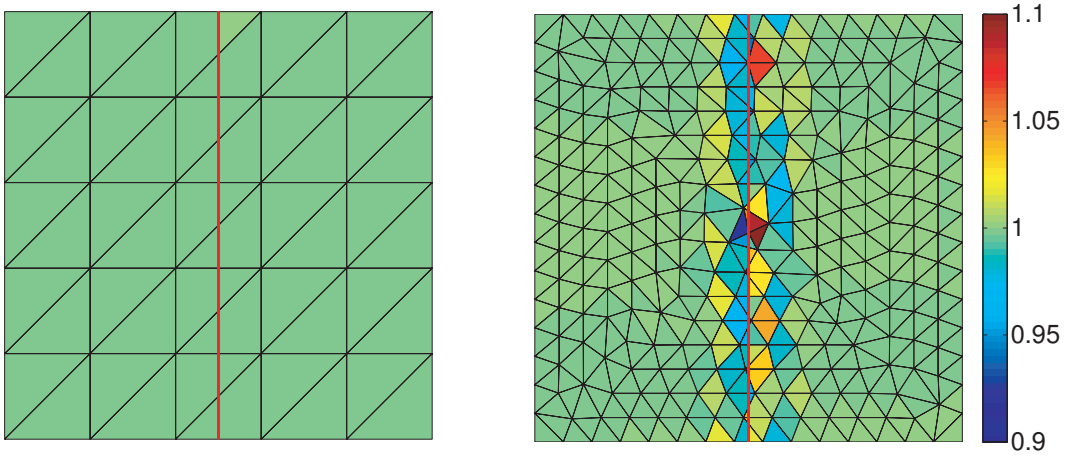


FIG. 3.10 – Exemple de référence : champs de contraintes σ_{xx} pour $\xi = 0.5$ calculés avec X-SFEM$_1^+$; **maillage 1** (gauche), **maillage 2** (droite).

3.6.3 Fonction d'enrichissement améliorée ψ_2

3.6.3.1 Présentation de la fonction ψ_2

Comme nous l'avons montré précédemment, le problème de l'approximation enrichie avec la fonction ψ_1 vient de son caractère local et de sa faible régularité stochastique. L'idée est donc de construire une fonction qui soit plus globale. On note I_c l'ensemble des noeuds dont le support est possiblement coupé par l'interface et on note $I_f \subset I \backslash I_c$ l'ensemble des noeuds, appelés fictifs, dont au moins un élément du support possède un noeud appartenant à I_c. La nouvelle fonction d'enrichissement, notée ψ_2, est alors définie par

$$\psi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \sum_{j \in I_c} \varphi_j(\boldsymbol{x})(\beta - \phi_j(\boldsymbol{\xi})) & \text{si} \quad \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) > 0 \\ \sum_{j \in I_c} \varphi_j(\boldsymbol{x})(\beta + \phi_j(\boldsymbol{\xi})) & \text{si} \quad \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) < 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

où β est une grandeur scalaire permettant à la fonction ψ_2 de prendre des valeurs positives sur l'ensemble des noeuds enrichis I_c et d'être nulle sur l'ensemble des noeuds I_f. On notera que ψ_2 est une troncature de la fonction $\beta - |\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})|$ (fonction ramenée à zéro sur les noeuds $I \backslash I_c$). L'ensemble des noeuds enrichis est $I_e = I_c \cup I_f$. On propose de prendre β telle que

$$\beta = \underset{\substack{i \in I_e \\ \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Theta}}}{sup} |\phi_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})| \tag{3.29}$$

Dans l'équation (3.29), la constante β est alors égale à la valeur nodale maximale de la level set pour l'ensemble des noeuds enrichis. La figure 3.11 présente l'ensemble des noeuds enrichis I_e pour la fonction ψ_2 pour chacun des deux maillages pour le problème de référence. La figure 3.12 représente la fonction $\psi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ sur le maillage 2 pour deux réalisations de la géométrie. On constate que la fonction ψ_2, contrairement à la fonction ψ_1, est non nulle sur l'ensemble de la plage de variation de l'interface et pour toute réalisation $\boldsymbol{\xi}$. L'avantage de la fonction ψ_2 est que les degrés de liberté enrichis seront réguliers au niveau stochastique et donc bien représentés par un chaos polynomial classique. Nous présentons maintenant les résultats obtenus avec l'approximation enrichie basée sur la fonction ψ_2 pour l'exemple de référence. Dans la suite, on notera X-SFEM$_2^+$ la solution obtenue avec cette nouvelle fonction d'enrichissement.

3.6.3.2 Résultats obtenus sur le problème de référence

Pour étudier la qualité de la solution X-SFEM$_2^+$, nous utilisons l'indicateur d'erreur global basé sur la solution exacte en déplacement donnée dans l'équation (3.25). Le tableau 3.3 présente les erreurs obtenues en fonction de l'ordre de décomposition p pour chacun des deux maillages. Quelque soit le maillage utilisé et l'ordre de décomposition p, l'erreur observée est nulle numériquement.

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
maillage1	$4.4\ 10^{-14}$	$4.7\ 10^{-14}$	$3.9\ 10^{-14}$	$4\ 10^{-14}$
maillage2	$4.3\ 10^{-14}$	$4.1\ 10^{-14}$	$4\ 10^{-14}$	$4.2\ 10^{-14}$

TAB. 3.3 – Exemple de référence : erreurs $\varepsilon_{h,p}$ obtenues avec la solution X-SFEM$_2^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; **maillage 1** et **maillage 2**.

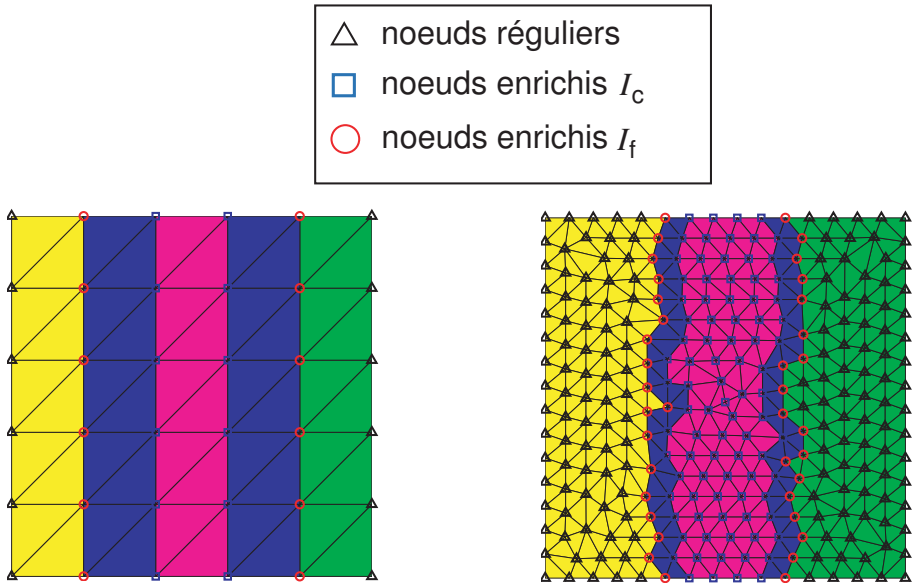


FIG. 3.11 – Exemple de référence : ensemble des noeuds enrichis I_e avec la fonction ψ_2 pour chacun des deux maillages.

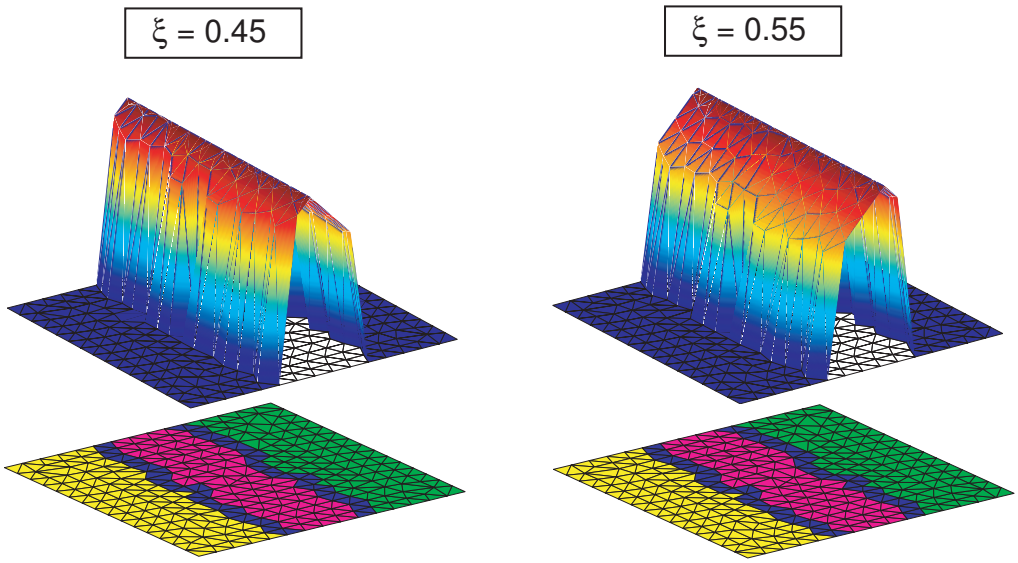


FIG. 3.12 – Exemple de référence : fonction d'enrichissement ψ_2 pour deux réalisations de la géométrie ; **maillage** 2.

La figure 3.13 présente la surface de réponse du déplacement horizontal du point $P_1 = (0.5, 0.55)$ obtenue avec X-SFEM$_2^+$ pour le maillage 2. On constate que la solution X-SFEM$_2^+$ correspond exactement à la solution exacte. Sur la même figure, on trouve l'évolution de la fonction d'enrichissement ψ_2 au même point P_1 en fonction de ξ. Contrairement à la fonction ψ_1, la fonction ψ_2 ne possède qu'une seule discontinuité dans sa dérivée située en $\xi = 0.5$: la fonction ψ_2 remplit alors pleinement son rôle et permet à l'approximation de représenter les modes discontinus dans la dérivée du champ solution sans

toutefois amener d'autres irrégularités parasites. La figure 3.14 présente les surfaces de réponse d'un degré de liberté enrichi obtenues avec X-SFEM$_2^+$: on constate que le degré de liberté enrichi est régulier au niveau stochastique (il est même constant), et que sa représentation dans l'espace $\mathcal{S}_P$ est exacte quel que soit l'ordre p de sa décomposition. Enfin, la figure 3.15 présente le champ de contraintes σ_{xx} calculé sur chacun des maillages utilisés : on constate que, pour les deux maillages, on obtient la solution exacte.

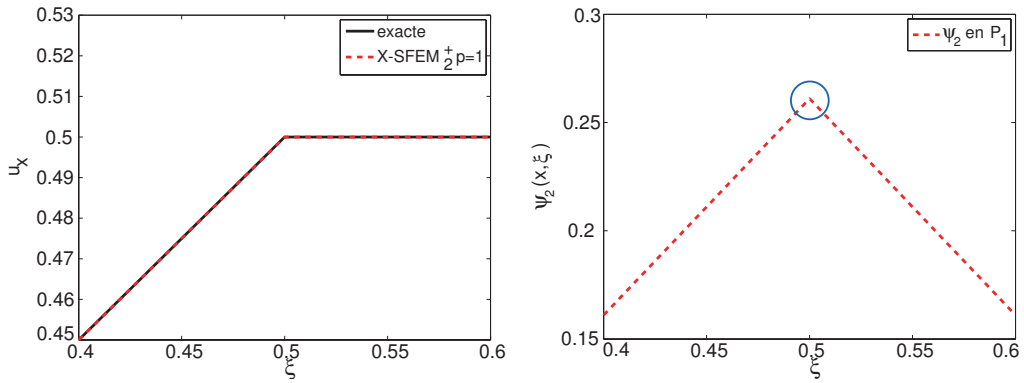


FIG. 3.13 – Exemple de référence : surfaces de réponse du déplacement horizontal (gauche) et évolution de la fonction ψ_2 (droite) au point P_1 ; **maillage** 2.

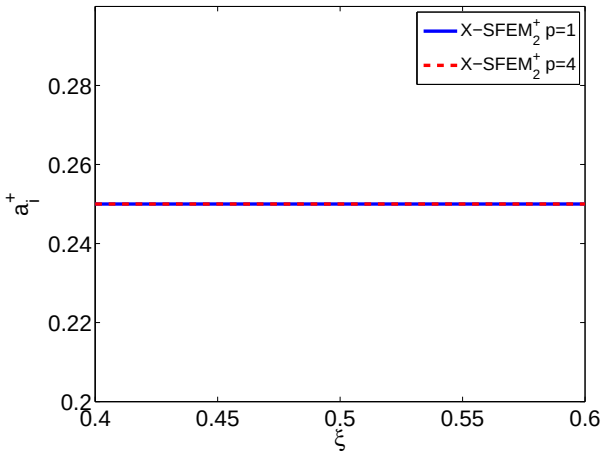


FIG. 3.14 – Exemple de référence : surfaces de réponse d'un degré de liberté enrichi obtenus avec X-SFEM$_2^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; **maillage** 2.

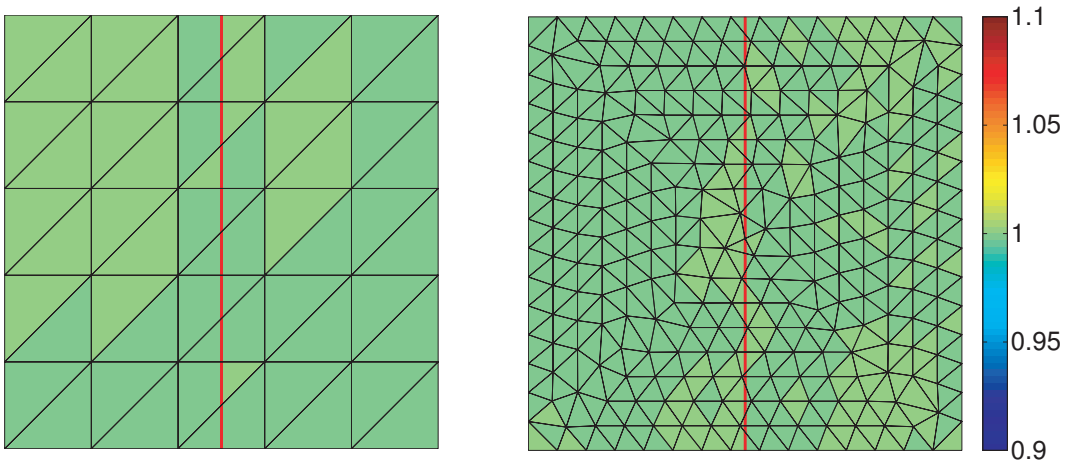


FIG. 3.15 – Exemple de référence : champs de contraintes σ_{xx} pour $\xi = 0.5$ calculés avec X-SFEM$_2^+$; **maillage 1** (gauche), **maillage 2** (droite).

3.6.4 Méthode de projection basée sur la méthode X-FEM (P-X-FEM)

Dans cette section, on utilise une approximation basée sur une méthode de projection L^2 (*c.f.* section 2.7.1). On veut savoir si cette approche peut être efficace pour un problème d'interface matérielle aléatoire. On rappelle que dans le cadre d'un problème de forme aléatoire, la méthode de projection n'avait pas donné satisfaction (*c.f.* exemple 1 du chapitre 2 section 2.9). Le problème venait de la partie non physique de la solution, à laquelle la méthode donnait un poids, et qui perturbait la partie physique de la solution. Ici, la solution est définie sur tout le domaine $\mathbf{\Theta} \times \Omega$ et ce problème ne devrait pas se poser.

3.6.4.1 Résultats obtenus sur le problème de référence

Comme pour l'approximation de Galerkin, nous cherchons à comparer les solutions calculées à partir des différents choix proposés pour la définition de l'approximation : les solutions seront notées P-X-FEM, P-X-FEM$_1^+$ et P-X-FEM$_2^+$ respectivement pour une espace d'approximation sans enrichissement, avec un enrichissement basé sur la fonction ψ_1 et avec un enrichissement basé sur la fonction ψ_2. On notera que l'approche de projection L^2 utilisant un enrichissement basé sur ψ_2 n'est plus totalement non-intrusive et nécessite un prétraitement particulier (*c.f.* remarque ci-après). Pour obtenir une solution précise, le choix du nombre de points d'intégration n_g pour le calcul de l'intégrale stochastique (2.47) est très important : tous les calculs suivants ont été réalisés avec un nombre de points d'intégration égal à 20 (excepté pour l'étude de convergence de la section 3.6.4.2). Les tableaux 3.4 et 3.5 donnent les erreurs obtenues avec chacune des solutions pour différents ordres de chaos polynomial et pour les deux maillages présentés sur la figure 3.3. Pour le maillage 1, on constate que les solutions P-X-FEM$_1^+$ et P-X-FEM$_2^+$ donnent la solution exacte tandis que la solution P-X-FEM présente, quel que soit l'ordre p, une erreur importante. Pour le maillage 2 en revanche, le constat est le même qu'avec l'approximation de Galerkin : l'enrichissement basé sur la fonction ψ_1 ne permet pas d'obtenir la solution exacte alors que l'utilisation de la fonction ψ_2 le permet. Le problème avec l'enrichissement basé sur la fonction ψ_1 est le même qu'avec la projection de Galerkin : les degrés de liberté enrichis ne sont pas réguliers au niveau stochastique. Cependant la représentation des degrés de liberté enrichis n'est pas la même avec la méthode de projection qu'avec la

projection de Galerkin. Sur la figure 3.9, on pouvait constater que la projection de Galerkin ne cherchait à représenter que la partie non nulle des degrés de liberté enrichis. La méthode de projection cherche à représenter le degré de liberté enrichi sur l'ensemble du domaine stochastique comme le montre la figure 3.16.

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
P-X-FEM	$2.3\ 10^{-2}$	$2.2\ 10^{-2}$	$2.4\ 10^{-2}$	$2.3\ 10^{-2}$
P-X-FEM$_1^+$	$7.3\ 10^{-14}$	$9.1\ 10^{-14}$	$5.8\ 10^{-14}$	$6.9\ 10^{-14}$
P-X-FEM$_2^+$	$4.9\ 10^{-14}$	$6.2\ 10^{-14}$	$5.3\ 10^{-14}$	$4.6\ 10^{-14}$

TAB. 3.4 – Exemple de référence : erreurs $\varepsilon_{h,p}$ obtenues avec les solutions P-X-FEM, P-X-FEM$_1^+$ et P-X-FEM$_2^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; maillage 1.

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
P-X-FEM	$5.5\ 10^{-3}$	$5.3\ 10^{-3}$	$5.2\ 10^{-3}$	$5.2\ 10^{-3}$
P-X-FEM$_1^+$	$1.4\ 10^{-3}$	$1\ 10^{-3}$	$7.2\ 10^{-4}$	$3.9\ 10^{-4}$
P-X-FEM$_2^+$	$1.6\ 10^{-12}$	$2.4\ 10^{-12}$	$2.1\ 10^{-12}$	$5.5\ 10^{-12}$

TAB. 3.5 – Exemple de référence : erreurs $\varepsilon_{h,p}$ obtenues avec les solutions P-X-FEM, P-X-FEM$_1^+$ et P-X-FEM$_2^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; maillage 2.

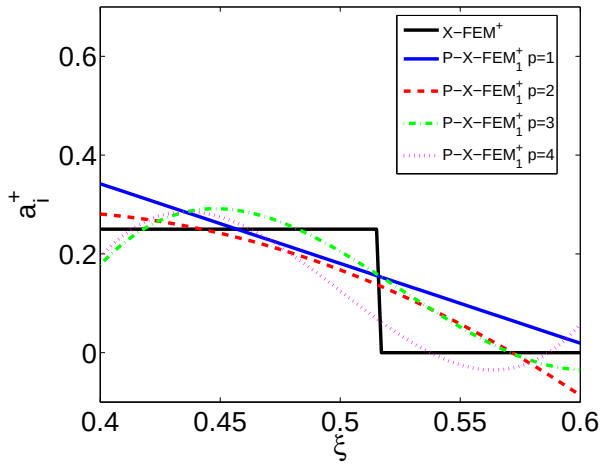


FIG. 3.16 – Exemple de référence : surfaces de réponse d'un degré de liberté enrichi obtenus avec P-X-FEM$_1^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; **maillage** 2.

Remarque 3.1 ***particularité de la méthode P-X-FEM$_2^+$*** *: contrairement à la méthode P-X-FEM$_1^+$, la méthode P-X-FEM$_2^+$ n'est plus totalement une méthode non-intrusive. En effet, il est nécessaire de définir au préalable la structure enrichie du modèle éléments finis afin de bien prendre en compte l'enrichissement. On doit alors déterminer quels sont les noeuds appartenant à l'ensemble $I_e = I_c \cup I_f$. Chaque calcul déterministe, associé à une réalisation de $\boldsymbol{\xi}$, doit alors être fait à partir de ce modèle qui devient une donnée d'entrée. Si on effectuait ces calculs directement avec un code X-FEM classique, l'ensemble I_e*

serait différent et ne comprendrait qu'une partie des noeuds enrichis. C'est pourquoi la méthode P-X-FEM$_2^+$ n'est pas totalement non-intrusive.

3.6.4.2 Particularité de l'enrichissement basé sur ψ_1 (P-X-FEM$_1^+$)

Pour que l'enrichissement basé sur la fonction ψ_1 soit efficace, il est primordial de choisir une quadrature stochastique précise et adaptée. En effet, les fonctions de bases d'enrichissement $\psi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})H_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ sont localisées au niveau spatial (pour $\boldsymbol{\xi}$ donné, leur support est inclus dans le support des $\boldsymbol{\varphi}_i$) mais également au niveau stochastique (pour $\boldsymbol{x} \in K \subset supp(\boldsymbol{\varphi}_i)$ donné, le support des fonctions $\psi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})H_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ dans $\boldsymbol{\Theta}$ est composé de l'ensemble des réalisations $\boldsymbol{\xi}$ pour lesquelles l'interface $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ coupe l'élément K). Ce support stochastique peut être de taille très réduite si, par exemple, le maillage spatial est fin vis à vis de la variabilité de la géométrie. Si on utilise une quadrature grossière, les termes de rigidité associés aux degrés de liberté enrichis $\mathbf{a}^+$ seront mal estimés, voire nuls si aucun point d'intégration n'est dans ce support. Dans ce dernier cas, les degrés de liberté enrichis $\mathbf{a}^+$ seront indéterminés et l'enrichissement n'aura aucun effet. Afin d'illustrer ce cas de figure, on propose maintenant une étude spécifique de la solution P-X-FEM$_1^+$. Pour ce faire on utilise trois nouveaux maillages éléments finis de différentes finesses correspondants à $h \in \{0.3, 1, 0.03\}$ ($h = \sqrt{2S/N}$ où S est l'aire du domaine et N le nombre d'éléments). Au niveau stochastique, on fixe l'ordre de décomposition sur le chaos polynomial à $p = 3$. Pour calculer l'intégrale stochastique (2.47), on utilise un nombre de points d'intégration $n_g \in \{5, 10, 20\}$. La figure 3.17 présente la convergence des solutions P-X-FEM$_1^+$ en fonction de n_g. Sur cette même figure, on trouve également les solutions P-X-FEM afin de comparer les résultats. Pour le maillage le plus grossier,

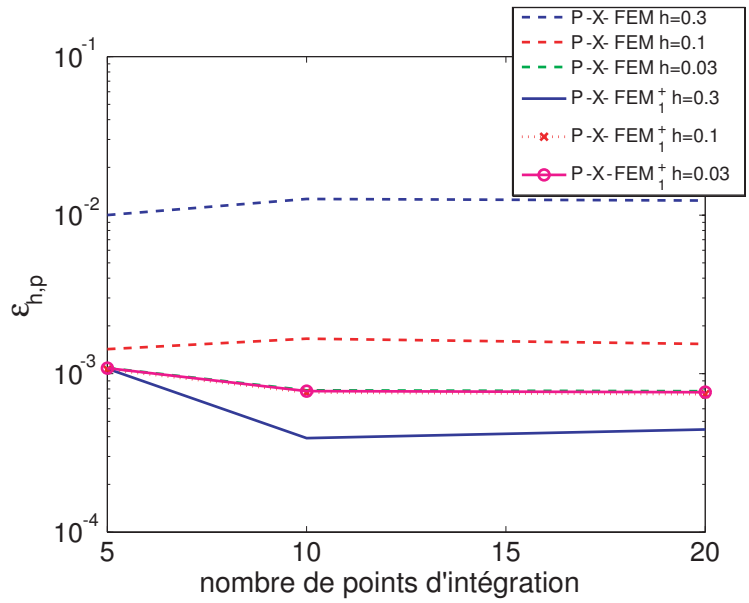


FIG. 3.17 – Exemple de référence : convergence de l'erreur $\varepsilon_{h,p}$ pour P-X-FEM et P-X-FEM$_1^+$ en fonction du nombre de points d'intégration n_g.

correspondant à $h = 0.3$, on constate que l'enrichissement est bien pris en compte et que la solution P-X-FEM$_1^+$ présente des erreurs nettement plus faibles que la solution P-X-FEM. Cependant, on peut observer qu'un nombre $n_g 5$, soit $2p - 1$, n'est pas suffisant pour obtenir une solution optimale.

Pour le maillage correspondant à $h = 0.1$, on constate également que l'enrichissement est pris en compte. Cependant, avec 5 points d'intégration, on peut observer que l'écart entre les erreurs obtenues avec P-X-FEM et P-X-FEM$_1^+$ est faible. Il est alors nécessaire avec P-X-FEM$_1^+$ d'utiliser plus de points d'intégration pour prendre en compte l'enrichissement de manière correcte et obtenir une solution plus précise.
Enfin, pour le dernier maillage correspondant à $h = 0.03$, on constate que l'enrichissement est très mal pris en compte. En effet, les écarts entre les erreurs obtenues avec P-X-FEM et P-X-FEM$_1^+$ sont très faibles et ce quel que soit le nombre n_g de points d'intégration utilisé. Pour illustrer ce dernier cas de figure, on présente sur la figure 3.18 les surfaces de réponse du déplacement horizontal du point $P_1 = (0.5, 0.55)$ obtenues avec P-X-FEM et P-X-FEM$_1^+$ pour des nombre n_g différents. On constate que les différences

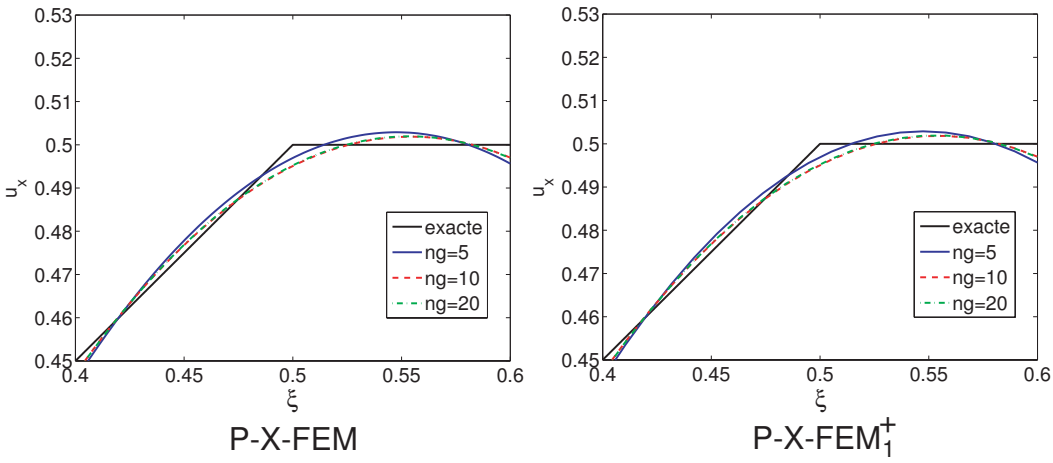


FIG. 3.18 – Exemple de référence : surfaces de réponse de U_x au point P_1 obtenues avec P-X-FEM (gauche) et P-X-FEM$_1^+$ (droite) pour $n_g \in \{5, 10, 20\}$.

entre les solutions P-X-FEM et P-X-FEM$_1^+$ sont très faibles voire inexistantes et que l'enrichissement ne remplit pas son rôle. Le nombre de points d'intégration n'est pas assez élevé pour bien estimer la contribution des degrés de liberté enrichis. La figure 3.19 illustre ce cas de figure : elle présente les surfaces de réponse de deux degrés de liberté enrichis obtenues avec P-X-FEM$_1^+$ pour des nombres n_g différents. La surface de réponse de référence, notée X-FEM$^+$, a été obtenue à partir de calculs déterministes en modifiant la position de l'interface.

Avec ce maillage très fin, les degrés de liberté enrichis ont un support stochastique extrêmement réduit, et il est délicat de bien estimer leur contribution. Pour le premier degré de liberté, seule la solution calculée avec 20 points d'intégration possédait un point d'intégration appartenant à son support stochastique. En revanche, pour le second degré de liberté, seule la solution calculée avec 10 points d'intégration avait un point d'intégration correctement situé.
La méthode de projection L^2 couplée à un enrichissement basé sur la fonction ψ_1 est donc utilisable. Cependant, pour utiliser correctement cette méthode, il parait souhaitable de construire des règles d'intégration adaptatives permettant de bien prendre en compte l'enrichissement.

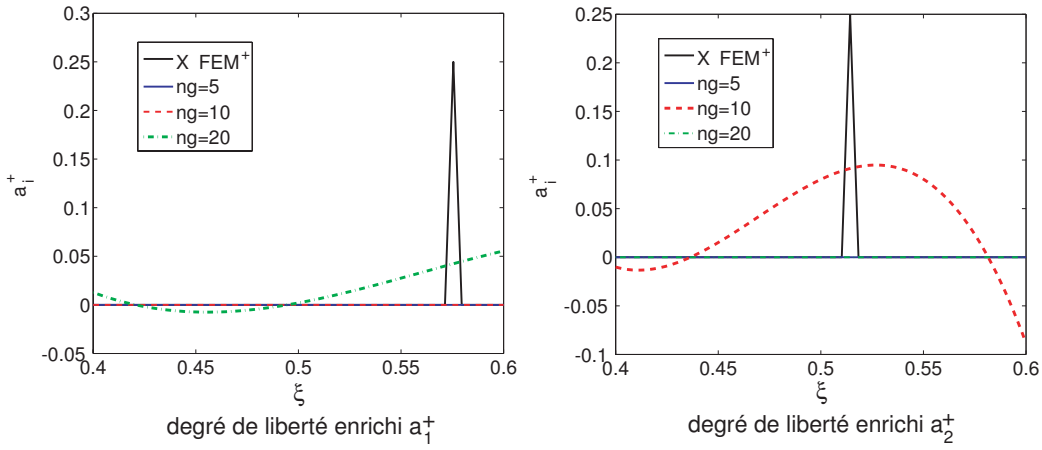


FIG. 3.19 – Exemple de référence : surfaces de réponse de deux degrés de liberté enrichis obtenues avec P-X-FEM$_1^+$ pour $n_g \in \{5, 10, 20\}$.

3.6.5 Bilan

D'une manière générale, l'utilisation d'un espace d'approximation enrichi permet d'obtenir une solution plus précise quand celle-ci présente des irrégularités. Cependant, la fonction d'enrichissement utilisée doit être adaptée au problème stochastique si on veut obtenir une solution optimale. Nous avons montré que la fonction d'enrichissement ψ_1, issue de [Moës *et al.* 2003], ne donne pas de résultats satisfaisants lorsque l'interface matérielle est aléatoire alors qu'elle est optimale pour des problèmes déterministes. Nous avons donc proposé une nouvelle fonction d'enrichissement, notée ψ_2, qui prend en compte l'aspect stochastique du problème. En rendant les degrés de liberté classiques et enrichis plus réguliers au niveau stochastique, la fonction ψ_2 permet d'obtenir de meilleurs taux de convergence en p. Pour le problème de référence, nous avons même obtenu la solution exacte car les degrés de liberté enrichis étaient polynômiaux en ξ. Dans l'exemple suivant, qui possède une véritable erreur d'approximation, nous allons poursuivre cette étude en étudiant notamment la convergence en h de la solution.
D'autre part, nous avons montré que l'utilisation d'une méthode de projection L^2 était utilisable pour ce type de problème. Cependant, avec l'utilisation d'un enrichissement basé sur la fonction ψ_1, il est nécessaire d'apporter un soin particulier à l'intégration stochastique en utilisant une intégration adaptative par exemple. Ce problème peut être résolu en utilisant la fonction ψ_2, plus régulière au niveau stochastique, mais la méthode de projection L^2 perd de son caractère non-intrusif.

3.7 Exemple 1 : plaque circulaire avec inclusion aléatoire circulaire

3.7.1 Description du problème

On considère un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ composé de deux matériaux élastiques aux caractéristiques différentes (voir figure 3.20). Les deux matériaux sont séparés par une interface circulaire $\Gamma(\xi)$ de centre $(0, 0)$ et de rayon aléatoire ξ. Le domaine intérieur est noté $\Omega_1(\xi)$ et le domaine extérieur $\Omega_2(\xi)$. La frontière extérieure Γ_1 de Ω est un cercle de rayon $b = 2$. On considère que ξ est une variable aléatoire uniforme

telle que

$$\xi = U(0.72, 1.8)$$

On choisit volontairement une plage de variation importante pour montrer que la méthode X-SFEM permet également d'obtenir une bonne solution dans ce cas. Les paramètres matériau sont choisis déterministes sur les deux domaines avec les modules d'Young et coefficients de Poisson suivants : $E_1 = 1$, $\nu_1 = 0.25$ dans Ω_1 et $E_2 = 10$, $\nu_2 = 0.3$ dans Ω_2. On impose un champ de déplacement linéaire sur la frontière Γ_1 tel que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}$. On notera qu'en effectuant un changement de variable $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{u}}$, avec $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{V}$, on se ramène à une formulation du type (3.5) pour la recherche de $\tilde{\boldsymbol{u}}$. Pour le modèle numérique, on utilise un maillage spatial unique composé d'éléments triangles à 3 noeuds dont la taille moyenne est $h = 0.09$ (avec $h = \sqrt{2S/N}$ où S est l'aire du domaine et N le nombre d'éléments). La figure 3.20 présente l'un des maillages X-SFEM utilisés avec les différents groupes d'élément : les éléments appartenant sûrement à Ω_1 (groupe (e_1)), les éléments appartenant sûrement à Ω_2 (groupe (e_2)) et les éléments possiblement coupés par $\Gamma(\xi)$ (groupe (e_c)). On peut constater que comme l'aléa est important, la plupart des éléments peuvent être coupés par l'interface matérielle. Le problème ne possède ici qu'une seule dimension stochastique. On peut donc reformuler le problème sur un espace probabilisé de dimension 1, noté $(\Theta, \mathcal{B}, P_\xi)$ avec $\Theta = (0.72, 1.8)$ et P_ξ la mesure uniforme sur $(0.72, 1.8)$. Pour l'approximation stochastique, on utilise un chaos polynomial généralisé d'ordre p pour lequel les fonctions de base de $\mathcal{S}_P$ sont les polynômes de Legendre sur $(0.72, 1.8)$.

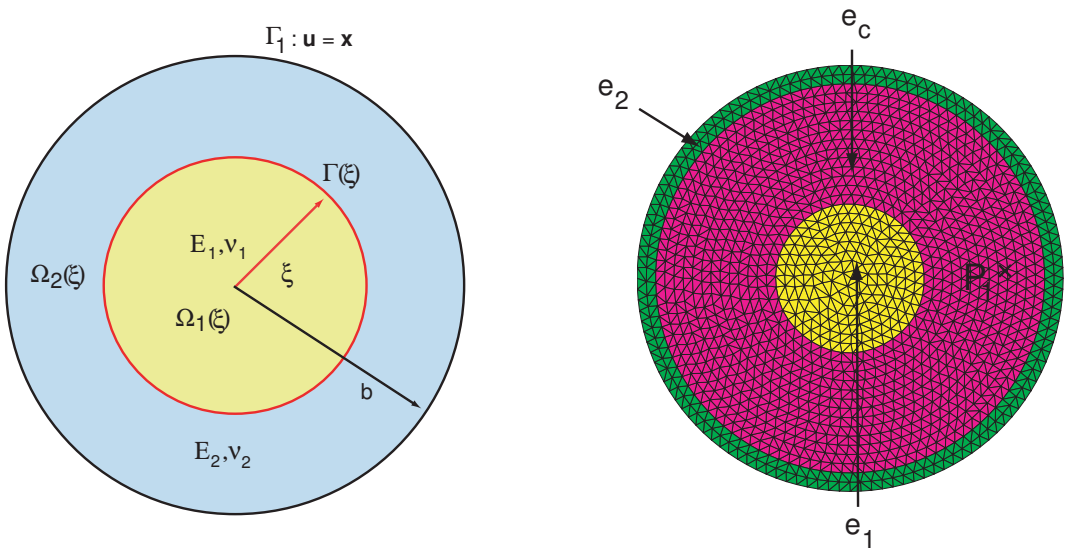


FIG. 3.20 – Exemple 1 : problème de la plaque circulaire avec interface matérielle aléatoire et maillage X-SFEM utilisé ($h = 0.09$).

Le problème possède une solution exacte notée $\boldsymbol{u} = (u_r, u_\varphi)$ qui s'écrit en coordonnées polaires

$$u_r(r,\xi) = \begin{cases} \left[\left(1 - \frac{b^2}{\xi^2}\right)\alpha(\xi) + \frac{b^2}{\xi^2}\right] r, & 0 \leqslant r \leqslant \xi \\ \left(r - \frac{b^2}{r}\right)\alpha(\xi) + \frac{b^2}{r} & \xi \leqslant r \leqslant b \end{cases}$$
$$u_\varphi = 0 \tag{3.30}$$

avec,

$$\alpha(\xi) = \frac{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)b^2}{(\lambda_2 + \mu_2)\xi^2 + (\lambda_1 + \mu_1)(b^2 - \xi^2) + \mu_2 b^2}$$

où les λ_i et μ_i sont les coefficients de Lamé associés au domaine $\Omega_i(\xi)$. Cette solution exacte nous permet de déterminer l'erreur d'approximation en utilisant les indicateurs définis dans les équations (3.25) et (3.27). Contrairement aux exemples du chapitre précédent, nous n'étudions pas l'influence de l'intégration au niveau stochastique. Tous les calculs ont été réalisés avec la procédure de découpage anisotrope (*c.f.* section 2.8.2.3) pour un ordre de partition $k = 2$ afin d'assurer une bonne intégration numérique.

3.7.2 Convergence et post-traitements de la solution X-SFEM

Dans cette section, nous étudions la qualité de la solution X-SFEM en fonction des différentes stratégies d'enrichissement de l'espace d'approximation. On rappelle que les solutions X-SFEM, X-SFEM$_1^+$ et X-SFEM$_2^+$ sont respectivement obtenues sans enrichissement, avec un enrichissement basé sur la fonction ψ_1, et avec un enrichissement basé sur la fonction ψ_2. Ici, toutes les solutions ont été obtenues avec une projection de Galerkin pour l'approximation. La solution exacte étant connue, on utilise l'indicateur d'erreur $\varepsilon_{h,p}$ donné dans l'équation (3.25). On s'intéresse tout d'abord à la convergence de $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de l'ordre de décomposition p de la solution. Les résultats présentés dans la suite ont été déterminés avec le maillage présenté sur la figure 3.20. La figure 3.21 présente la convergence de $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de p pour chacune des solutions X-SFEM. Les erreurs les plus importantes sont obtenues avec la solution X-SFEM sans enrichissement. On observe, pour cette solution, une très mauvaise convergence de l'erreur en fonction de p. Les erreurs commises avec la solution X-SFEM$_1^+$ sont moins importantes, mais on constate que la solution converge très lentement, indiquant que l'enrichissement basé sur la fonction ψ_1 est mal adapté au problème stochastique. Avec cette fonction, les degrés de liberté enrichis ne sont pas assez réguliers au niveau stochastique. Un ordre de décomposition p élevé ($p = 7$) est nécessaire pour obtenir une erreur de l'ordre de 10^{-2}. La solution X-SFEM$_2^+$ présente les meilleurs résultats avec, dès $p = 2$, une erreur voisine de 10^{-3}, qui est assimilable à l'erreur d'approximation spatiale (erreur d'approximation dans $\mathcal{V}_h^+$). La figure 3.22 présente les erreurs locales $\varepsilon_{h,p}^K$ pour les solutions X-SFEM$_1^+$ avec $p = 7$ et X-SFEM$_2^+$ avec $p = 1$. On constate que, pour les éléments appartenant à (e_c), les erreurs commises avec X-SFEM$_1^+$ sont beaucoup plus importantes que celles commises avec X-SFEM$_2^+$.

On s'intéresse maintenant aux déplacements d'un point particulier du domaine Ω : le point $P_1 = (1.5, 0)$ qui peut appartenir à $\Omega_1(\xi)$ ou à $\Omega_2(\xi)$ selon la valeur de ξ (*c.f.* figure 3.20). La figure 3.23 présente les surfaces de réponse du déplacement radial du point P_1 obtenues avec les solutions X-SFEM, X-SFEM$_1^+$ et X-SFEM$_2^+$. Sur cette figure, on peut distinguer deux parties distinctes de la réponse : une première partie pour laquelle $P_1 \in \Omega_2(\xi)$ et une seconde partie pour laquelle $P_1 \in \Omega_1(\xi)$. La séparation

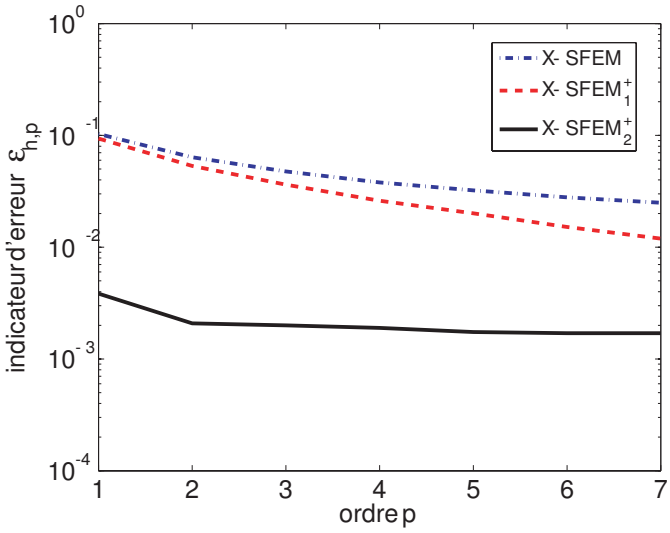


FIG. 3.21 – Exemple 1 : convergence de l'erreur $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de p pour les différentes solutions X-SFEM avec $h = 0.09$.

entre ces deux parties est située en $\xi = 1.5$. Pour la première partie, *i.e.* $P_1 \in \Omega_2(\xi)$, on constate que les trois solutions donnent des réponses assez proches. Toutefois, la solution X-SFEM$_2^+$ reste la plus proche de la solution exacte. En revanche, dans la seconde partie, *i.e* $P_1 \in \Omega_1(\xi)$, on constate que la solution X-SFEM$_2^+$ donne de meilleurs résultats. Cette différence entre les deux parties de la solution vient de la définition de l'approximation : en effet l'approximation de Galerkin étant définie au sens de l'opérateur, elle donne une meilleure approximation de la solution pour le domaine $\Omega_2(\xi)$ où la rigidité du matériau est plus importante ($\frac{E_2}{E_1} = 10$). Concernant la solution X-SFEM$_1^+$, on observe dans la surface de réponse les mêmes irrégularités parasites que celles constatées dans l'exemple de référence. On constate que l'utilisation d'un espace d'approximation enrichi basé sur la fonction ψ_2 permet de bien représenter la solution sur tout le domaine stochastique. La figure 3.24 présente la convergence de l'erreur $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de la taille moyenne d'un élément fini h. Sur cette figure, seule la solution X-SFEM$_2^+$ est présentée car elle est la seule à avoir convergé par rapport à l'ordre p. Les calculs sur les différents maillages ont été réalisés avec un ordre de décomposition $p = 3$. On observe une bonne convergence de la solution vers la solution exacte avec un taux de convergence en $O(h^{1.6})$. Le taux de convergence idéal étant en $O(h^2)$, celui obtenu avec X-SFEM$_2^+$ parait satisfaisant. Il serait nécessaire de réaliser des calculs avec des maillages encore plus fins pour pouvoir déterminer le taux de convergence asymptotique qui pourrait être proche de $O(h^2)$. Pour terminer, la figure 3.25 présente les erreurs locales $\varepsilon_{h,p}^K$ obtenues avec X-SFEM$_2^+$ pour les maillages correspondants à $h = 0.09$ et $h = 0.06$. On peut logiquement constater que les erreurs sont plus faibles avec le maillage le plus fin.

La fonction d'enrichissement ψ_2 parait bien adaptée au problème lorsque l'on utilise une projection de Galerkin pour l'approximation. On veut maintenant savoir si une approximation basée sur une méthode de projection L^2 peut également être efficace pour ce problème.

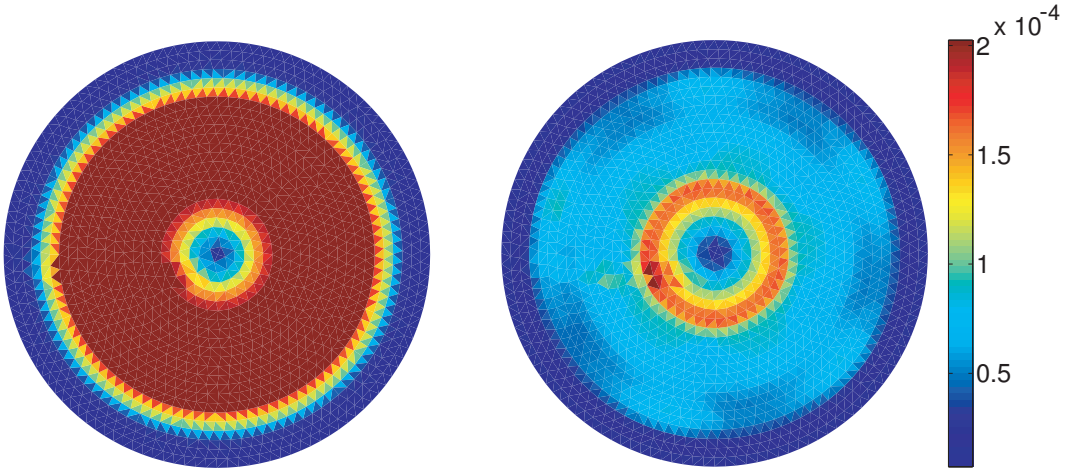


FIG. 3.22 – Exemple 1 : erreurs locales $\varepsilon_{h,p}^{K}$ obtenues pour X-SFEM$_1^+$ avec $p = 7$ (gauche) et X-SFEM$_2^+$ avec $p = 1$ (droite).

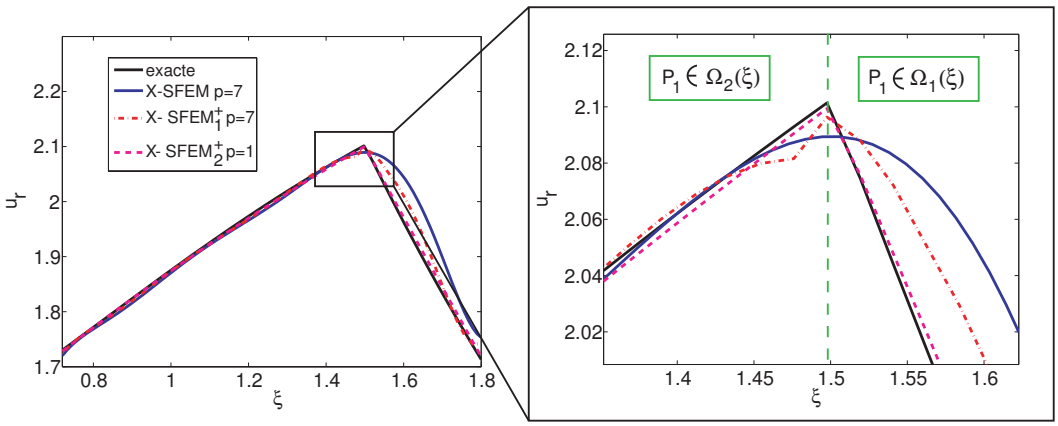


FIG. 3.23 – Exemple 1 : surfaces de réponse du déplacement radial en P_1 obtenues avec les solutions X-SFEM, X-SFEM$_1^+$ et X-SFEM$_2^+$.

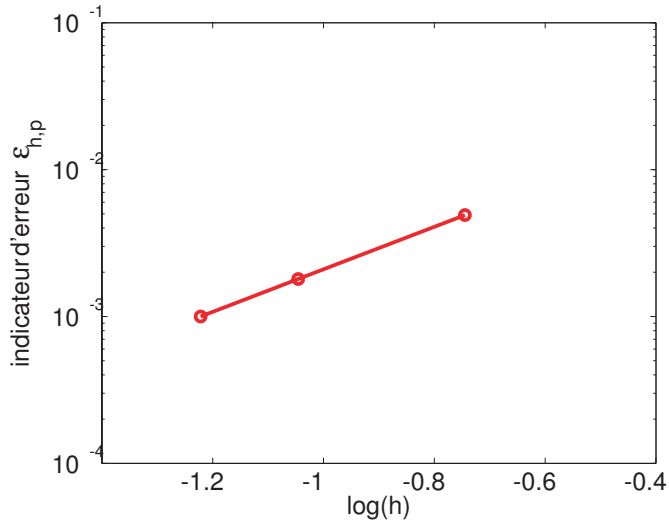


FIG. 3.24 – Exemple 1 : convergence en fonction de h de l'erreur $\varepsilon_{h,p}$ obtenue avec X-SFEM$_2^+$ pour $p = 3$.

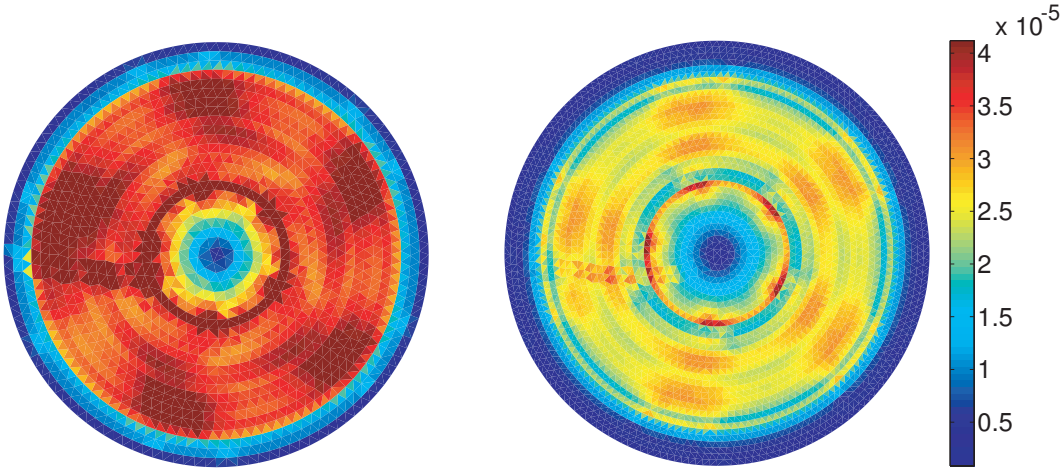


FIG. 3.25 – Exemple 1 : erreurs locales $\varepsilon_{h,p}^K$ obtenues avec X-SFEM$_2^+$ pour $p = 3$ et $h = 0.09$ (gauche) et $h = 0.06$ (droite).

3.7.3 Convergence et post-traitements de la solution P-X-FEM

Dans cette section, on s'intéresse aux résultats obtenus avec une méthode de projection L^2 au niveau stochastique, notée P-X-FEM (*c.f.* section 2.7.1). Comme dans la section précédente, nous cherchons à comparer les solutions calculées à partir des différents choix possibles pour la définition de l'espace d'approximation : les solutions seront notées P-X-FEM, P-X-FEM$_1^+$ et P-X-FEM$_2^+$ respectivement pour un espace d'approximation sans enrichissement, avec un enrichissement basé sur la fonction ψ_1 et avec un enrichissement basé sur la fonction ψ_2. Afin d'obtenir une solution précise, on rappelle que le choix du nombre de points d'intégration n_g pour le calcul de l'intégrale stochastique (2.47) est très important : tous les calculs suivants ont été réalisés avec un nombre de points d'intégration égal à 20. La figure 3.26 présente la convergence de l'erreur $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de l'ordre de décomposition p pour chacune des solutions. On constate que les résultats obtenus sont différents de ceux obtenus avec la projection de Galerkin. Ces différences sont multiples. Prenons la solution associée à un espace d'approximation enrichi basé sur la fonction ψ_1, P-X-FEM$_1^+$: on constate que la convergence est meilleure qu'avec l'approximation de Galerkin et que les erreurs obtenues pour un ordre de décomposition p équivalent sont plus faibles. La solution P-X-FEM$_1^+$, pour ce problème, parait donc meilleure que la solution X-SFEM$_1^+$ au regard de l'indicateur d'erreur $\varepsilon_{h,p}$ basé sur la solution exacte en déplacement. L'enrichissement de l'espace d'approximation basé sur la fonction ψ_1 semble mieux adapté à la méthode de projection qu'à la projection de Galerkin. On discutera ce point un peu plus loin. Si on regarde les erreurs obtenues avec la solution P-X-FEM$_2^+$, on constate tout d'abord qu'elles sont légèrement plus importantes que celles obtenues avec la solution X-SFEM$_2^+$: la méthode de projection ne semble pas tirer pleinement parti de l'enrichissement basé sur la fonction ψ_2. De plus, pour un ordre de décomposition $p = 7$, on constate que les solutions P-X-FEM$_1^+$ et P-X-FEM$_2^+$ donne des erreurs presque identiques, indiquant que l'utilisation de ψ_2 permet seulement une convergence plus rapide en fonction de p.

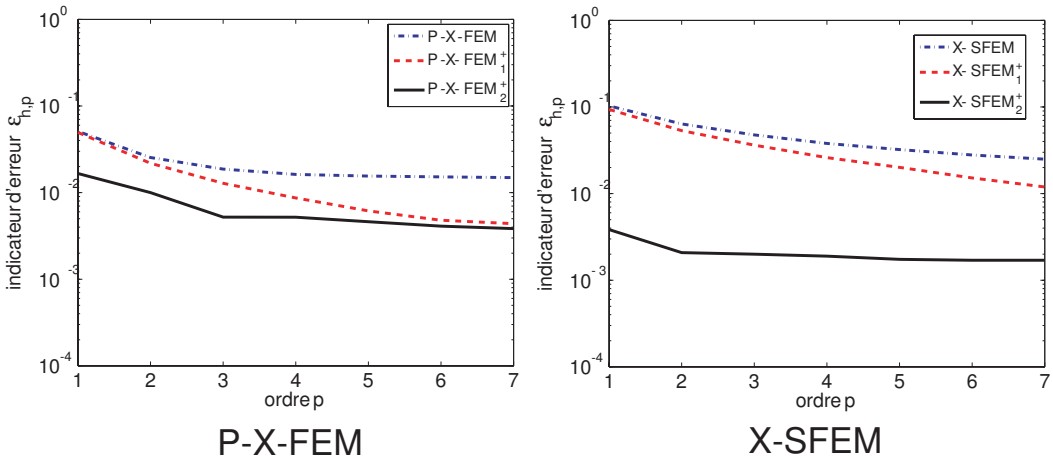


FIG. 3.26 – Exemple 1 : convergence de l'erreur $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de p pour les différentes solutions P-X-FEM et X-SFEM ($h = 0.06$).

Afin de mieux appréhender le comportement des solutions P-X-FEM, on présente sur la figure 3.27 les surfaces de réponse du déplacement radial au point P_1 obtenues à partir des différentes solutions

P-X-FEM. On constate que les surfaces de réponse sont différentes de celles obtenues avec la projection de Galerkin où la solution était mieux représentée là où la rigidité était la plus importante, *i.e.* pour $P_1 \in \Omega_1(\xi)$. En effet, contrairement à la projection de Galerkin, la méthode de projection L^2 ne tient pas compte de la différence de rigidité entre les deux sous-domaines $\Omega_1(\xi)$ et $\Omega_2(\xi)$ (vision ponctuelle spatiale de la projection L^2 au niveau stochastique).

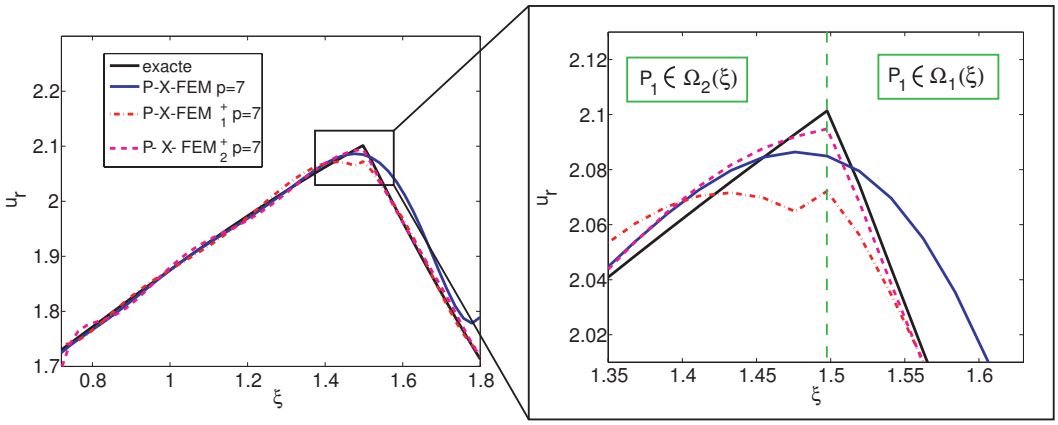


FIG. 3.27 – Exemple 1 : surfaces de réponse du déplacement radial en P_1 obtenues avec les solutions P-X-FEM, P-X-FEM$_1^+$ et P-X-FEM$_2^+$.

Il se pose alors le problème du choix de l'indicateur d'erreur : les calculs d'erreur précédents étaient basés sur une erreur en déplacement ne tenant pas compte de la rigidité du problème. On propose alors un nouvel indicateur d'erreur global, noté $\varepsilon^*_{h,p}$ défini par

$$\varepsilon^*_{h,p} = \frac{\|\boldsymbol{u}_{h,P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\|_A}{\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\|_A} \tag{3.31}$$

où

$$\|\boldsymbol{u}\|_A^2 = \int_{\boldsymbol{\Theta}} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}((\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\mathbf{x})) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\mathbf{x}))\, dx\, dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \tag{3.32}$$

La figure 3.28 présente une comparaison de la convergence de l'erreur $\varepsilon^*_{h,p}$ en fonction de p entre les solutions P-X-FEM$^+$ et X-SFEM$^+$ et pour les deux stratégies d'enrichissement. Avec ce nouvel indicateur d'erreur, on constate que les solutions basées sur une projection de Galerkin donnent des erreurs plus faibles que celles basées sur la méthode de projection et, ce, quelle que soit la stratégie d'enrichissement utilisée. Ainsi, dire qu'une approche est meilleure qu'une autre dépend essentiellement de la définition de l'erreur. Ces conclusions sont logiques lorsqu'on sait que la méthode X-SFEM est une projection au sens de $\|\cdot\|_A$. Elle est donc nécessairement optimale selon ce critère.

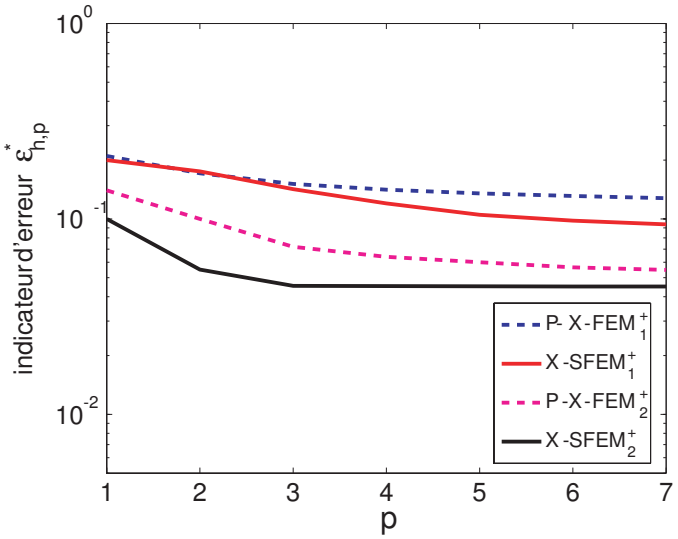


FIG. 3.28 – Exemple 1 : convergence de l'erreur $\varepsilon^*_{h,p}$, basée sur norme énergétique, en fonction de p pour $h = 0.09$.

3.7.4 Bilan

Cet exemple a tout d'abord permis de montrer la qualité de la solution X-SFEM lorsque l'on utilise un espace d'approximation enrichi. Nous avons montré que la fonction d'enrichissement ψ_2 était très performante et permettait, notamment, d'obtenir une convergence rapide de la solution en fonction de l'ordre de décomposition sur le chaos. Si une approximation enrichie basée sur la fonction ψ_1 permet d'obtenir une solution plus précise qu'une approximation classique, les résultats sont cependant moins bons qu'avec la fonction ψ_2 qui est elle adaptée au problème stochastique. En effet, avec la fonction ψ_2, les degrés de liberté enrichis retrouvent une bonne régularité stochastique permettant à leur décomposition sur le chaos de converger rapidement.
D'autre part, au travers de cet exemple, nous avons montré qu'une approximation basée sur une méthode de projection L^2 (P-X-FEM) conduisait à des résultats tout à fait satisfaisants, ce qui n'était pas le cas pour des problèmes de forme aléatoire. Avec cette méthode, les meilleurs résultats ont également été obtenus avec la fonction d'enrichissement ψ_2. Dans ce dernier cas, la méthode de projection L^2 n'est plus tout à fait une méthode non-intrusive puisqu'elle nécessite un traitement particulier afin de prendre en compte l'enrichissement.
Toutefois, la projection de Galerkin couplée à un enrichissement basé sur ψ_2 (solution X-SFEM$^+_2$) reste la meilleure méthode au regard des erreurs présentées dans cet exemple.

3.8 Exemple 2 : domaine avec inclusion aléatoire

3.8.1 Description du problème

On considère un milieu hétérogène qui occupe un domaine déterministe $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. Ce milieu est composé de deux matériaux élastiques aux caractéristiques différentes. Ces deux matériaux occupent les sous-domaines $\Omega_1(\boldsymbol{\xi})$ et $\Omega_2(\boldsymbol{\xi})$ tels que $\Omega = \Omega_1(\boldsymbol{\xi}) \cup \Omega_2(\boldsymbol{\xi})$. Ces deux sous-domaines sont séparés par une interface aléatoire $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ caractérisée par l'iso-zéro de la fonction level-set $\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ suivante : $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \Omega$

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = R(\alpha(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\xi}) - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|$$

où $\boldsymbol{c} = (0.5, 0.5)$ et la fonction $R(\alpha(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\xi})$ est définie par

$$R(\alpha(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\xi}) = 0.25 + \frac{1}{10}\left(\xi_1(\theta)\cos(2\alpha(\boldsymbol{x})) + \xi_2(\theta)\sin(2\alpha(\boldsymbol{x}))\right)$$

avec $\alpha(\boldsymbol{x})$ l'angle entre l'axe horizontal et la droite passant par les points $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{x}$ (*c.f.* figure 3.29). Les variables aléatoires ξ_1 et ξ_2 sont statistiquement indépendantes et suivent des lois uniformes telles que

$$\xi_1 = U(-1, 1) \quad \text{et} \quad \xi_2 = U(-1, 1)$$

Nous travaillons alors dans un domaine stochastique de dimension 2 tel que $\boldsymbol{\Theta} = [-1, 1] \times [-1, 1]$. On notera que l'on choisit, comme pour l'exemple 1, une plage de variation importante de l'interface. La représentation de l'interface aléatoire est analogue à celle utilisée dans l'exemple 4 du chapitre 2 (*c.f.* section 2.12) mais avec des paramètres différents. Nous faisons l'hypothèse des contraintes planes et nous considérons les deux matériaux homogènes élastiques isotropes avec des caractéristiques déterministes telles que : $E_1 = 1$ et $\nu_1 = 0.3$ dans $\Omega_1(\boldsymbol{\xi})$ et $E_2 = 10$ et $\nu_2 = 0.3$ dans $\Omega_2(\boldsymbol{\xi})$. Comme dans l'exemple précédent, on conserve ainsi un rapport de 10 entre les rigidités de chaque domaine.

Le milieu étudié est considéré comme un volume élémentaire d'un matériau hétérogène. Nous cherchons à calculer l'opérateur de rigidité homogénéisé aléatoire : on définit pour cela trois cas de chargements présentés sur la figure 3.29

- **cas 1 :** traction uniforme horizontale telle que $\boldsymbol{F} = (\pm 1, 0)$ sur Γ_x^- et Γ_x^+ ;
- **cas 2 :** traction uniforme verticale telle que $\boldsymbol{F} = (0, \pm 1)$ sur Γ_y^- et Γ_y^+ ;
- **cas 3 :** cisaillement uniforme tel que $\boldsymbol{F} = (0, \pm 1)$ sur Γ_x^- et Γ_x^+, et $\boldsymbol{F} = (\pm 1, 0)$ sur Γ_y^- et Γ_y^+.

On calcule alors les trois solutions correspondant à chaque cas de chargement et on les note respectivement $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$. Pour le modèle numérique, on utilise le maillage présenté sur la figure 3.30 composé de 3200 éléments finis triangles. Pour l'approximation stochastique nous utilisons un chaos polynomial généralisé de degré $p = 3$. Nous allons comparer les résultats entre des solutions utilisant un espace d'approximation classique (solution X-SFEM) et un espace d'approximation enrichi basé sur la fonction ψ_2 (solution X-SFEM$_2^+$). Ces deux solutions utilisent une projection de Galerkin pour l'approximation. On utilisera également une méthode de projection couplée à un code X-FEM (solution P-X-FEM$_1^+$).

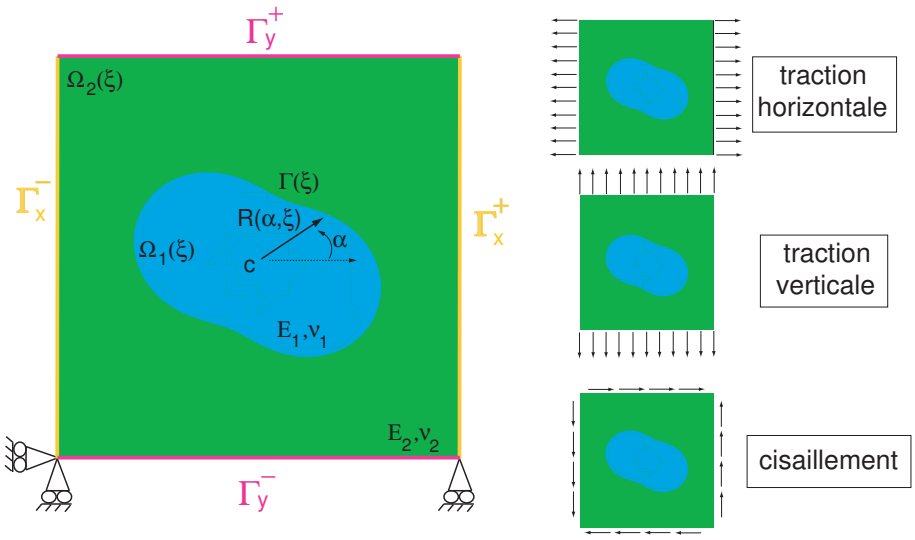


FIG. 3.29 – Exemple 2 : problème d'une plaque carrée avec interface matérielle aléatoire.

3.8.2 Comparaison des résultats avec une approche déterministe

Tout d'abord, nous présentons brièvement quelques post-traitements afin de comparer les deux solutions et montrer l'intérêt de l'enrichissement de l'espace d'approximation. Pour calculer la solution de référence, on utilise un code X-FEM déterministe avec un enrichissement basé sur la fonction ψ_1. On rappelle que, pour un problème déterministe, cette fonction est optimale puisqu'elle permet d'obtenir des taux de convergence identiques à ceux d'une approche FEM avec des maillages conformes. Cette solution de référence sera notée X-FEM$^+$ et sera calculée avec un maillage plus fin composé de 6400 éléments.
On choisit un point du domaine P_1, tel que $P_1 = (0.7, 0.7)$, qui peut appartenir à l'un ou l'autre des sous-domaines selon la position de l'interface. On s'intéresse au déplacement horizontal de ce point pour le cas de chargement **3** correspondant au cisaillement. La figure 3.31 présente les surfaces de réponse obtenues avec la solution X-SFEM et la solution X-SFEM$_2^+$ ainsi que la représentation de la solution de référence X-FEM$^+$. On constate que la solution X-SFEM$_2^+$ est très proche de la solution de référence tandis que la solution X-SFEM présente des différences importantes. La figure 3.32 présente les champs de contraintes σ_{xx} obtenus pour deux réalisations différentes de la géométrie et deux cas de chargement. On constate que les contraintes obtenues avec la solution X-SFEM$_2^+$ au voisinage de l'interface sont proches de celles obtenues avec la solution de référence X-FEM$^+$, montrant, une fois encore, l'intérêt d'enrichir l'espace d'approximation.

3.8.3 Calcul de l'opérateur de rigidité homogénéisé

Dans cette section, on s'intéresse au calcul et à la qualité de l'opérateur de rigidité homogénéisé. Pour plus d'information sur la théorie de l'homogénéisation pour des matériaux hétérogènes, le lecteur pourra se référer à [Sanchez-Palencia 1980, Michel *et al.* 1999, Forest *et al.* 2001].
On considère que le domaine Ω est le volume élémentaire représentatif. On souhaite alors calculer l'opérateur de rigidité homogénéisé $\boldsymbol{C}^{\text{hom}}$ reliant le champ de contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ au champ de

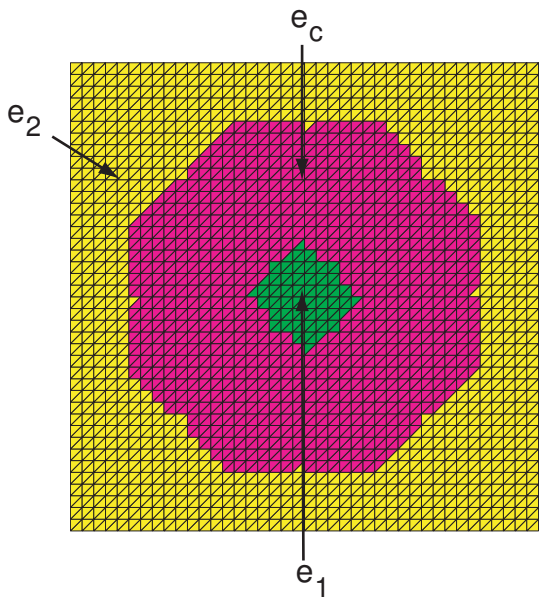


FIG. 3.30 – Exemple 2 : maillage X-SFEM utilisé avec les différents états d'éléments.

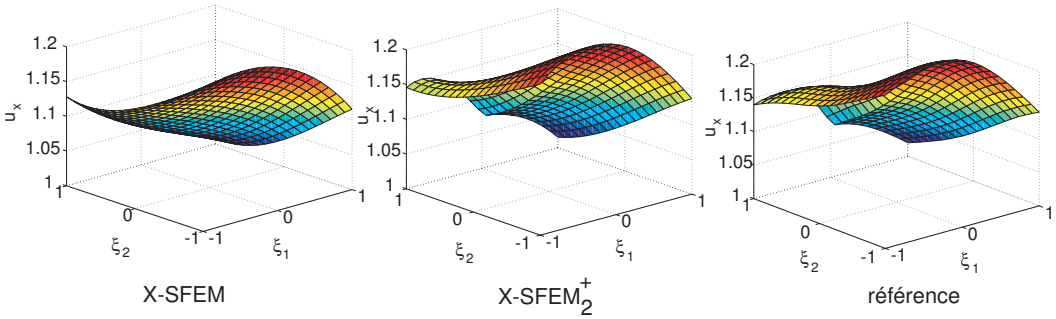


FIG. 3.31 – Exemple 2 : surfaces de réponse du déplacement horizontal du point P_1 obtenues avec X-SFEM, X-SFEM$_2^+$ et représentation de la solution de référence X-FEM$^+$; cisaillement homogène.

déformation macroscopique $\mathbf{E}$ par la relation

$$\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{C}^{\text{hom}} : \mathbf{E} \tag{3.33}$$

Les contraintes et les déformations macroscopiques sont reliées aux contraintes et déformations microscopiques, notées respectivement $\boldsymbol{\sigma}$ et ε, par

$$\mathbf{\Sigma} =< \boldsymbol{\sigma} >= \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) dx \tag{3.34}$$

$$\mathbf{E} =< \boldsymbol{\varepsilon} >= \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) dx \tag{3.35}$$

Les contraintes et déformations macroscopiques sont donc des quantités moyennes. On choisit ici une approche d'homogénéisation par contraintes homogènes aux bords. On impose pour cela les champs de

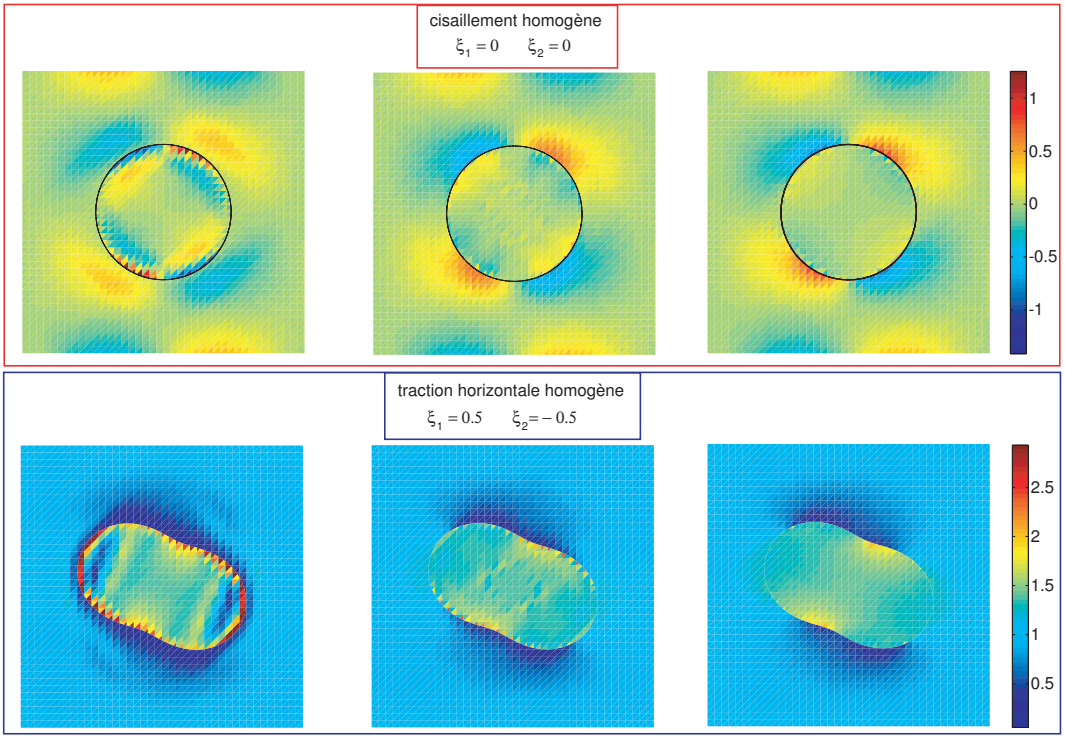


FIG. 3.32 – Exemple 2 : comparaison des champs de contraintes σ_{xx} obtenus avec X-SFEM (gauche), X-SFEM$_2^+$ (centre) et X-FEM$^+$ (droite) pour deux réalisations de la géométrie et deux cas de chargement.

contraintes macroscopiques suivants (écrits avec la représentation de Voigt) correspondants aux trois cas de chargement

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir l'opérateur $\boldsymbol{C}^{\text{hom}}$ on peut calculer l'opérateur de souplesse homogénéisé $\boldsymbol{S}^{\text{hom}}$, les deux opérateurs étant reliés par la relation suivante

$$\boldsymbol{C}^{\text{hom}} = \left(\boldsymbol{S}^{\text{hom}}\right)^{-1} \tag{3.36}$$

Le calcul de $\boldsymbol{S}^{\text{hom}}$ demande la résolution de trois problèmes élémentaires faisant intervenir les trois cas de chargement présentés dans la section précédente. A partir des trois solutions notées $\boldsymbol{u}_i$ où i désigne le cas de chargement unitaire, chaque colonne de l'opérateur $\boldsymbol{S}^{\text{hom}}$ (écrit avec la représentation de Voigt) est déterminé par les relations suivantes

$$\begin{pmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{3i} \end{pmatrix} = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_i) dx \tag{3.37}$$

Dans notre problème, l'opérateur $\boldsymbol{C}^{\text{hom}}$ est aléatoire. Pour le déterminer, on utilise la même méthode que celle présentée dans l'exemple 4 du chapitre 2 (*c.f.* section 2.12 technique (b)) consistant à décomposer la quantité d'intérêt souhaitée sur le chaos polynomial[3]. On cherche donc à obtenir l'opérateur $\boldsymbol{C}^{\text{hom}}(\boldsymbol{\xi})$ sous la forme

$$\boldsymbol{C}^{\text{hom}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{P_{\mathcal{J}}}} \boldsymbol{C}_{\alpha}^{\text{hom}} H_{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$$

Une fois le choix de l'ordre $p_{\mathcal{J}}$ effectué, le calcul de cette décomposition est très rapide et ne demande que l'évaluation des solutions X-SFEM pour certaines réalisations. Dans la suite, on choisit de décomposer $\boldsymbol{C}^{\text{hom}}$ sur la même base fonctionnelle que la solution, *i.e* pour un ordre de décomposition $p_{\mathcal{J}} = p = 3$. Nous calculons donc la décomposition des opérateurs de rigidité homogénéisés correspondant aux solutions X-SFEM et X-SFEM$_2^+$. On propose également d'utiliser une méthode de projection L^2 couplée à un code déterministe X-FEM avec un enrichissement basé sur la fonction ψ_1, toujours notée P-X-FEM$_1^+$ (avec 10 points d'intégration stochastique par dimension). On rappelle qu'avec cette fonction d'enrichissement, la méthode de projection reste une véritable approche non-intrusive. Comme pour la méthode X-SFEM, l'opérateur homogénéisé est alors décomposé sur un chaos polynomial de degré $p_{\mathcal{J}} = 3$. Afin de comparer les opérateurs issus des différentes solutions, nous proposons d'étudier les surfaces de réponse des composantes $\boldsymbol{C}_{ij}^{\text{hom}}$ et $\boldsymbol{C}_{ij}^{\text{hom}+}$ (en notation matricielle de Voigt). Comme pour les déplacements, on utilise une solution de référence calculée avec une approche déterministe X-FEM$^+$. La figure 3.33 présente les surfaces de réponse de la composante $\boldsymbol{C}_{11}^{\text{hom}}$ obtenues avec les différentes solutions. On constate que les solutions X-SFEM et X-SFEM$_2^+$ conduisent à des surfaces de réponse très différentes. Alors que la solution X-SFEM$_2^+$ est très proche de la solution de référence, la solution X-SFEM est systématiquement plus faible. La solution P-X-FEM$_1^+$ donne également de bons résultats très proches de la solution de référence. La figure 3.34 présente les surfaces de réponse d'une autre composante, $\boldsymbol{C}_{33}^{\text{hom}}$. On constate également que les différences sont très importantes et que seules les solutions X-SFEM$_2^+$ et P-X-FEM$_1^+$ correspondent bien à la solution de référence. On notera que ce constat a été vérifié pour chacune des composantes.

[3]Ici une projection L^2 est utilisée pour le calcul de l'inverse de $\boldsymbol{S}^{\text{hom}}$. On notera qu'une projection de Galerkin est également possible.

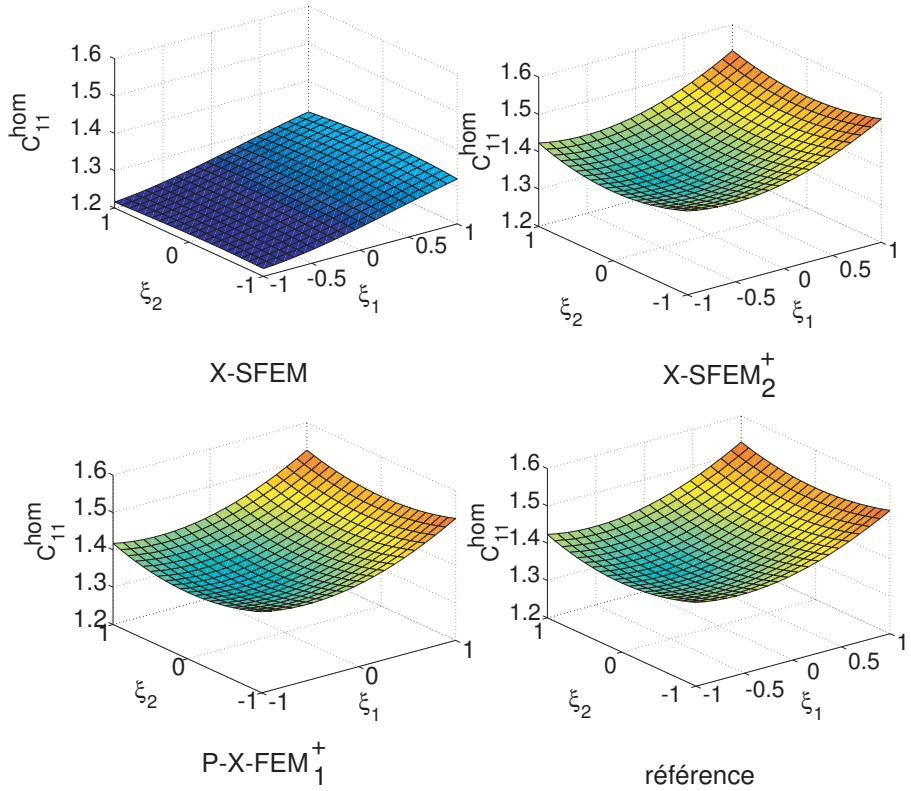


FIG. 3.33 – Exemple 2 : surfaces de réponse de la composante $\boldsymbol{C}_{11}^{\text{hom}}$ obtenue avec X-SFEM, X-SFEM$_2^+$, P-X-FEM$_1^+$ et la solution de référence X-FEM$^+$.

On s'intéresse maintenant aux premiers moments statistiques de l'opérateur homogénéisé. A partir de sa décomposition sur le chaos polynomial, ses moments statistiques peuvent être obtenus très rapidement. Comme solution de référence, on utilise une méthode de Monte-Carlo couplée à l'approche déterministe X-FEM$^+$. Les statistiques de l'opérateur homogénéisé de référence, noté $\boldsymbol{C}_{\text{ref}}^{\text{hom}}$, ont été calculées avec 1000 tirages des variables aléatoires. La figure 3.35 présente la convergence de la moyenne et de l'écart-type de la composante $\boldsymbol{C}_{11}^{hom}$ en fonction du nombre de tirages des variables aléatoires. On constate que 1000 tirages semblent être suffisants pour prendre cette solution comme référence.

Les opérateurs issues des différentes solutions X-SFEM, X-SFEM$_2^+$ et P-X-FEM$_1^+$ sont notés respectivement $\boldsymbol{C}_{\text{X-SFEM}}^{\text{hom}}$, $\boldsymbol{C}_{\text{X-SFEM}_2^+}^{\text{hom}}$ et $\boldsymbol{C}_{\text{P-X-FEM}_1^+}^{\text{hom}}$. On présente tout d'abord les moyennes de chacun des

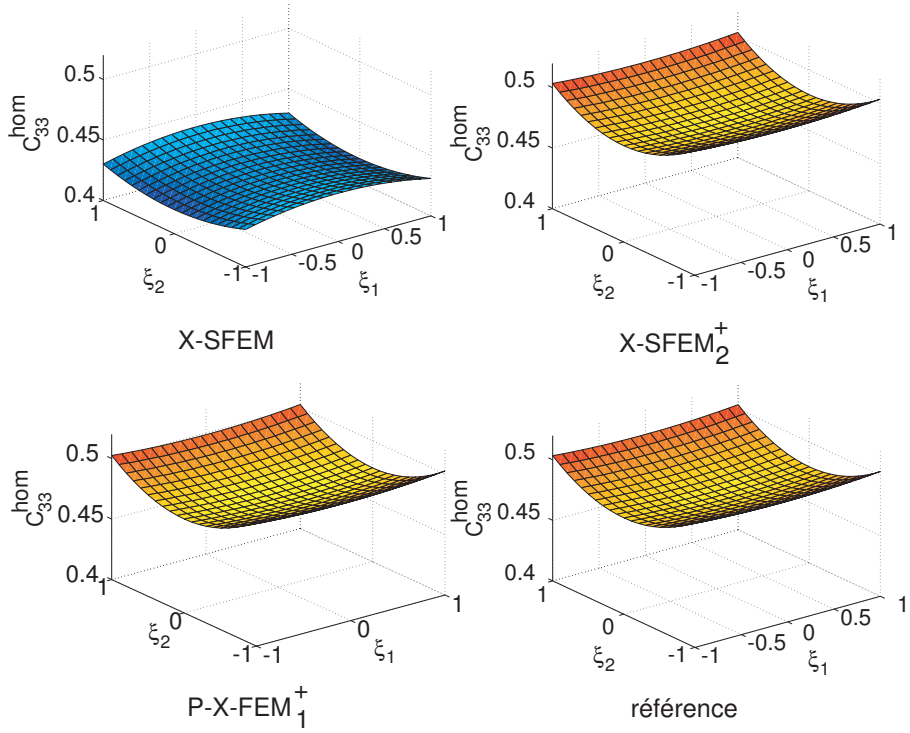


FIG. 3.34 – Exemple 2 : surfaces de réponse de la composante $\boldsymbol{C}_{33}^{\text{hom}}$ obtenue avec X-SFEM, X-SFEM$_2^+$, P-X-FEM$_1^+$ et la solution de référence X-FEM$^+$.

opérateurs

$$E(\boldsymbol{C}_{\text{X-SFEM}}^{\text{hom}}) = \begin{pmatrix} 1.2681 & 0.4118 & 0.0004 \\ 0.4118 & 1.2681 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0004 & 0.4296 \end{pmatrix}$$

$$E(\boldsymbol{C}_{\text{X-SFEM}_2^+}^{\text{hom}}) = \begin{pmatrix} 1.4201 & 0.4523 & 0.0003 \\ 0.4523 & 1.4201 & 0.0003 \\ 0.0003 & 0.0003 & 0.4852 \end{pmatrix}$$

$$E(\boldsymbol{C}_{\text{P-X-FEM}_1^+}^{\text{hom}}) = \begin{pmatrix} 1.4133 & 0.4519 & -0.0001 \\ 0.4519 & 1.4133 & -0.0001 \\ -0.0001 & -0.0001 & 0.4833 \end{pmatrix}$$

$$E(\boldsymbol{C}_{\text{ref}}^{\text{hom}}) = \begin{pmatrix} 1.4122 & 0.4518 & 0.0005 \\ 0.4518 & 1.4134 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0005 & 0.4832 \end{pmatrix}$$

On constate des écarts importants entre la solution de référence et la solution X-SFEM (écarts relatifs de l'ordre de 10%). En revanche, les solutions X-SFEM$_2^+$ et P-X-FEM$_1^+$ donnent de très bons résultats

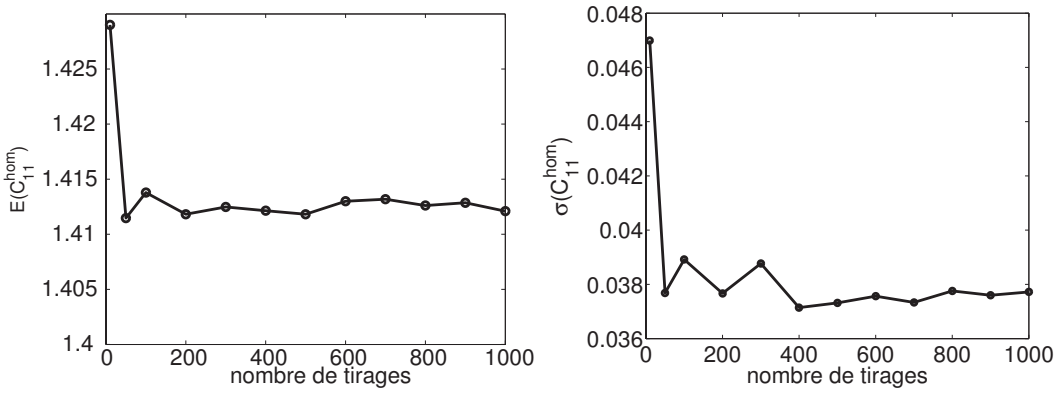


FIG. 3.35 – Exemple 2 : convergences de $E(\boldsymbol{C}_{11}^{hom})$ (droite) et $\sigma(\boldsymbol{C}_{11}^{hom})$ déterminées par Monte-Carlo en fonction du nombre de tirages des variables aléatoires.

au regard de la solution de référence. Analysons maintenant l'écart-type de chacune des composantes

$$\sigma(\boldsymbol{C}^{\text{hom}}_{\text{X-SFEM}}) = \begin{pmatrix} 0.0323 & 0.0043 & 0.0195 \\ 0.0043 & 0.0323 & 0.0195 \\ 0.0196 & 0.0196 & 0.0042 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\boldsymbol{C}^{\text{hom}+}_{\text{X-SFEM}_2^+}) = \begin{pmatrix} 0.0379 & 0.0080 & 0.0198 \\ 0.0080 & 0.0379 & 0.0198 \\ 0.0197 & 0.0197 & 0.0072 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\boldsymbol{C}^{\text{hom}+}_{\text{P-X-FEM}_1^+}) = \begin{pmatrix} 0.0386 & 0.0079 & 0.0200 \\ 0.0079 & 0.0386 & 0.0200 \\ 0.02 & 0.0200 & 0.0075 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\boldsymbol{C}^{\text{hom}+}_{\text{ref}}) = \begin{pmatrix} 0.0377 & 0.0082 & 0.0202 \\ 0.0082 & 0.0386 & 0.0200 \\ 0.0202 & 0.0200 & 0.0078 \end{pmatrix}$$

Comme pour la moyenne, on constate des différences importantes entre la solution X-SFEM et la solution de référence tandis que les solutions X-SFEM$_2^+$ et P-X-FEM$_1^+$ concordent avec la solution de référence. La figure 3.36 présente les densités de probabilité obtenues pour deux composantes de l'opérateur homogénéisé $\boldsymbol{C}^{hom}$: ces densités ont été calculées à partir des solutions X-SFEM$_2^+$, P-X-FEM$_1^+$ et la solution de référence (Monte-Carlo). Les solutions X-SFEM$_2^+$ et P-X-FEM$_1^+$ donnent des densités très proches de celles de la solution de référence. On notera toutefois que le nombre de simulations de Monte-Carlo est certainement trop faible pour affirmer que la convergence de la solution de référence soit atteinte.

3.8.4 Bilan

Cet exemple a permis d'illustrer l'intérêt d'utiliser un espace d'approximation enrichi basé sur la fonction ψ_2 adaptée au problème stochastique. Nous avons tout d'abord montré à l'aide de post-traitements que la solution obtenue avec cet enrichissement était plus précise qu'une solution obtenue sans enrichissement, aussi bien pour les champs de déplacements que pour les champs de contraintes. Nous avons

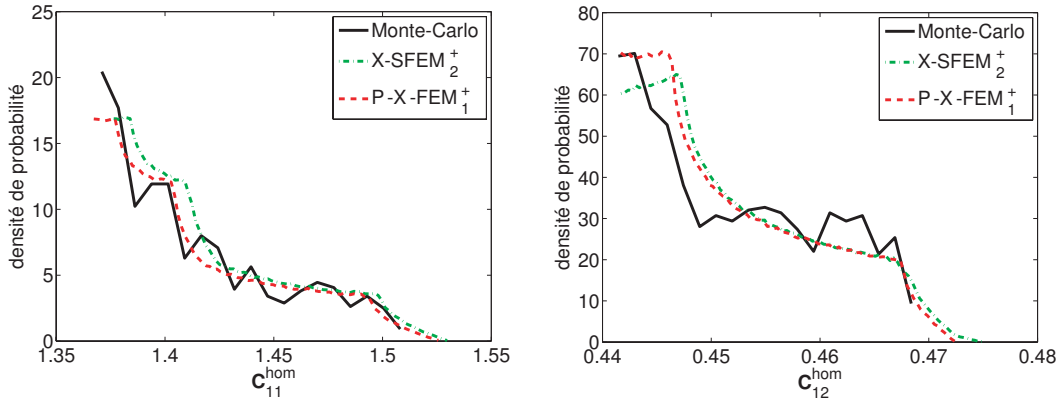


FIG. 3.36 – Exemple 2 : densités de probabilité des composantes $\boldsymbol{C}_{11}^{hom}$ et $\boldsymbol{C}_{12}^{hom}$ obtenues avec X-SFEM$_2^+$, P-X-FEM$_1^+$ et une approche de Monte-Carlo pour 1000 tirages.

également pu montrer que l'opérateur homogénéisé pouvait être facilement obtenu. Cependant, pour que ce dernier soit bien calculé, il parait indispensable d'utiliser une approximation enrichie. En effet, l'étude des premiers moments statistiques de l'opérateur a montré une différence très sensible avec l'opérateur de référence obtenu par tirages de Monte-Carlo.
D'autre part, on notera que la méthode de projection L^2 couplée à une approche déterministe X-FEM enrichie a également permis d'obtenir de bons résultats sur l'opérateur homogénéisé.

3.9 Conclusion

Ce chapitre, dédié aux problèmes hétérogènes possédant une interface matérielle aléatoire, nous a montré tout l'intérêt que représentait l'enrichissement de l'espace d'approximation. En effet, la méthode X-SFEM étant basée sur l'utilisation d'un maillage ne respectant pas les surfaces physiques, il n'est pas possible, avec un espace d'approximation classique, de représenter des fonctions à dérivées discontinues au passage de l'interface. On s'est donc intéressé à l'enrichissement de l'espace d'approximation permettant de représenter ces irrégularités. Le choix de l'enrichissement par la méthode de la partition de l'unité a été discuté. Nous avons proposé d'utiliser deux fonctions d'enrichissement : la première, notée ψ_1 dans ce mémoire, et issue de travaux précédents sur la méthode déterministe X-FEM, se trouve être mal adaptée dans un cadre stochastique. Si elle permet éventuellement d'améliorer la solution, elle conduit également à certaines perturbations de la solution dues à sa faible régularité stochastique. Nous avons alors proposé une autre fonction d'enrichissement adaptée au caractère aléatoire de nos problèmes. Cette fonction, notée ψ_2, s'avère beaucoup plus régulière au niveau stochastique. Elle permet ainsi aux degrés de liberté enrichis d'être plus réguliers au niveau stochastique. Les résultats obtenus avec les divers exemples numériques ont prouvé que cette fonction permettait d'obtenir des solutions très précises. De plus, elle rend plus aisée l'intégration stochastique des quantités élémentaires.
D'autre part, nous avons également montré que, pour ces problèmes, l'utilisation d'une méthode de projection L^2 était possible. Contrairement aux problèmes de forme aléatoire, elle mène à des résultats satisfaisants même s'ils sont généralement moins bons que ceux obtenus avec la projection de Galerkin. En revanche, pour obtenir de bons résultats avec la méthode de projection, il faut prendre soin de l'intégration

au niveau stochastique. Avec la fonction ψ_1, il serait notamment intéressant d'utiliser une intégration adaptative. L'utilisation de la fonction ψ_2 permet de régler le problème de l'intégration stochastique. Cependant, un prétraitement du problème est nécessaire pour définir la fonction ψ_2 et la structure enrichie du modèle éléments finis. Ce prétraitement est identique à celui réalisé avec la méthode de Galerkin. Dans ce cas, la méthode de projection L^2 classique perd de son caractère non-intrusif. En conclusion, l'utilisation d'une méthode de projection L^2 couplée à une méthode X-FEM nécessitera soit une certaine dose d'intrusivité afin de bien définir l'approximation soit de disposer de méthodes permettant d'utiliser la fonction ψ_1 et de bien intégrer la projection.

Chapitre 4

Application de la méthode X-SFEM dans une analyse de risque : impact de la corrosion sur une structure en milieu littoral

Sommaire

4.1 Introduction **138**
4.2 Identification de variable aléatoires : représentation sur le chaos polynomial . . . **139**
4.3 Principe de l'analyse de risque **141**
4.3.1 Concepts de PoD et PFA et de courbes ROC 141
4.3.2 Présentation de la fonction de risque 143
4.4 Problématique de la corrosion des structures en région littorale **145**
4.4.1 Structure étudiée : quais sur pieux métallique 146
4.4.2 Protocole de mesure 147
4.4.3 Modélisation probabiliste des données d'inspection 148
4.4.4 Résultats de l'identification sur les courbes ROC 149
4.5 Etude de cas : analyse de risque d'un composant structurel soumis à la corrosion **152**
4.5.1 Description du problème structurel 153
4.5.2 Modélisation probabiliste du rayon aléatoire 154
4.5.3 Calcul de la probabilité de défaillance 155
4.5.4 Analyse de coût 156
4.6 Conclusion **159**

4.1 Introduction

Ce dernier chapitre est consacré à un exemple d'utilisation de la méthode X-SFEM pour l'analyse de risque d'un composant structurel. Ce composant est de forme aléatoire et on utilisera les développements de la méthode X-SFEM présentés dans le chapitre 2 pour résoudre le problème. L'aléa géométrique porte sur une variabilité intrinsèque, traitée avec la méthode X-SFEM, et sur une incertitude de mesure qui sera uniquement prise en compte dans l'analyse de risque. Cette analyse de risque se base sur des outils d'aide à la décision permettant de représenter les performances d'une technique d'inspection. On dispose pour cela d'un nombre important de mesures permettant de caractériser l'aléa sur la géométrie du composant et l'erreur sur la mesure par des variables aléatoires.
Le premier point de l'étude consiste à identifier ces variables aléatoires. On utilise pour cela une méthode d'identification basée sur une représentation sur le chaos polynomial [Desceliers et Soize 2007]. On montera que cette méthode conduit à une bonne représentation des variables au regard des résultats obtenus avec une identification utilisant des densités de probabilité classiques.
Le second point réside dans l'analyse de risque : on définira pour cela deux fonctionnelles de coût prenant en compte les variables identifiées (aléa intrinsèque et erreur de mesure) qui sont définies à partir de probabilités d'événements particuliers comme la probabilité de détection (PoD) ou la probabilité de fausse alarme (PFA). Nous découplerons le problème et nous montrerons que l'on peut identifier une variable aléatoire ξ caractérisant uniquement la géométrie $\Omega(\xi)$, et une variable aléatoire η caractérisant uniquement l'erreur sur les mesures. La figure 4.1 illustre un exemple de ce problème pour deux réalisations de la géométrie. Pour estimer les fonctionnelles de coût, il sera nécessaire de calculer la probabilité de défaillance du composant.
Pour l'estimation de la probabilité de défaillance, on utilisera les variables identifiées sur le chaos polynomial comme paramètres d'entrée pour le problème mécanique à géométrie aléatoire. A partir d'un simple post-traitement de la solution X-SFEM, on pourra alors calculer cette probabilité de défaillance et mener l'analyse de risque.

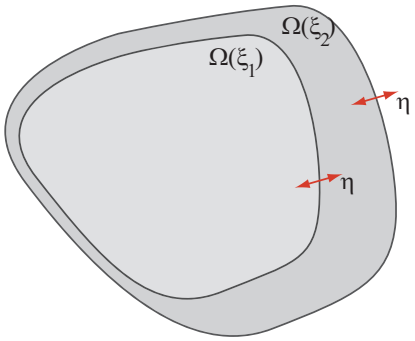


FIG. 4.1 – Exemples de deux réalisations de la géométrie $\Omega(\xi)$ et erreur de mesure η.

L'application concerne un composant situé en milieu marin soumis aux effets de la corrosion. L'impact de la corrosion sur une structure peut être très dommageable pour un ouvrage portuaire en service tel qu'un quai sur pieux métalliques classiquement employé dans les ports. La corrosion de ces structures n'intervient pas dans les premières années de vie de l'ouvrage mais seulement à partir d'un laps de temps variable selon la zone où est située la structure et selon l'efficacité et la maintenance des protections anti-corrosion

utilisées (peintures et protection cathodique). La corrosion des matériaux constituant l'ouvrage est alors une réelle menace pour le maintien de son utilisation et, surtout, pour la sécurité des personnes travaillant sur cet ouvrage. Pour évaluer et prévenir des effets de la corrosion du métal, des campagnes d'inspection par contrôle non-destructif (CND) sont réalisées afin de déterminer les pertes de matière à différentes profondeurs. Toutefois, la mesure est affectée par une incertitude due notamment aux conditions difficiles d'auscultation (visibilité, fatigue, mise en oeuvre de l'outil de contrôle etc.). Ces informations extrêmement riches sont le point de départ de l'étude de cas présentée ici.
On supposera que ce composant peut se situer à différents endroits d'une même structure et qu'il n'est pas soumis aux mêmes niveaux de corrosion ni aux mêmes conditions d'inspection. Avec le calcul X-SFEM, on déterminera quelles sont les positions les plus critiques pour le composant (en comparant les probabilités de défaillance obtenues pour chaque niveau). L'analyse de risque, qui prend en compte l'erreur sur la mesure, permettra d'évaluer les coûts dus aux mauvaises détections. On montrera qu'une technique d'inspection performante permet de réduire les coûts engendrés par la stratégie de maintenance.

4.2 Identification de variable aléatoires : représentation sur le chaos polynomial

Pour identifier une variable aléatoire à partir de données réelles, la méthode la plus simple consiste à utiliser des lois de probabilité classiques et d'identifier leurs paramètres. Si on suppose par exemple que la variable aléatoire suit une loi normale, les paramètres à identifier sont sa moyenne et son écart-type. L'inconvénient de cette méthode est que l'on doit définir *a priori* la loi de probabilité. Pour une même variable, on peut naturellement tester différentes lois et déterminer celle qui représente le mieux la variable à partir d'un critère comme la vraisemblance. Cependant, certains phénomènes physiques, présentant des densités de probabilité complexes, ne pourront être correctement représentés avec cette méthode.
Récemment, une méthode d'identification basée sur une représentation sur le chaos polynomial de la variable aléatoire a été proposée dans [Desceliers *et al.* 2006]. Une variable aléatoire représentée sur le chaos polynomial présente l'avantage majeur d'être facilement utilisable dans le cadre des éléments finis stochastiques spectraux. Cette méthode est présentée dans le cas simplifié où seule une variable aléatoire est considérée. L'application de cette méthode pour la représentation d'un champ stochastique peut être trouvée dans [Desceliers *et al.* 2006, Desceliers et Soize 2007].
Dans [Ghanem et Doostan 2006], on trouve également une méthode d'identification conduisant à une représentation des variables aléatoires sur le chaos polynomial. Dans cette méthode, une approche par inférence bayésienne est utilisée pour estimer les coefficients de la décomposition. Ces coefficients, qui sont les paramètres à estimer, sont considérés comme des variables aléatoires. Ceci permet, en quelque sorte, de prendre en compte l'erreur sur le modèle identifié.
On présente maintenant la méthode d'identification utilisée dans ce mémoire. Cette méthode consiste à représenter la variable aléatoire par une décomposition sur le chaos polynomial [Desceliers et Soize 2007], identifiée à partir d'un ensemble d'observations de cette variable. Cette méthode d'identification repose sur le principe du maximum de vraisemblance. Soit $X(\theta)$ une variable aléatoire du second ordre à

identifier à partir de N tirages notés $\{X^{(k)}\}_{k=1}^{N}$. Une décomposition de cette variable aléatoire s'écrit :

$$X(\theta) = \sum_{i=0}^{p} h_i(\xi(\theta))X_i$$

où ξ est une variable aléatoire centrée réduite, h_i le polynôme d'Hermite normalisé de degré i et p est l'ordre de troncature de la décomposition sur le chaos polynomial. Le but de la procédure d'identification est de déterminer les coefficients X_i de la décomposition. On suppose ici que la moyenne et l'écart-type sont bien estimés à partir de l'ensemble des tirages et on cherche à les imposer. Par la propriété d'orthonormalité des polynômes d'Hermite, on obtient les contraintes suivantes sur les coefficients :

$$\mu_X = X_0 = \mu_{exp}$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{p} X_i^2 = \sigma_{exp}^2$$

où μ_{exp} et σ_{exp} sont respectivement la moyenne et l'écart-type obtenus à partir des échantillons et où μ_X et σ_X sont la moyenne et l'écart-type de la variable aléatoire $X(\theta)$. En notant $b_i = X_i/\sigma_X$, la décomposition peut être réécrite :

$$X(\theta) = \mu_{exp} + \sigma_{exp} \sum_{i=1}^{p} b_i h_i(\xi(\theta))$$

où les coefficients b_i doivent satisfaire :

$$\sum_{i=1}^{p} b_i^2 = 1$$

Considérant $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_p)^T \in \mathbb{R}^p$, on note $p_X(\cdot; \mathbf{b})$ la fonction densité de probabilité de X, paramétrée par $\mathbf{b}$, et on introduit la fonction de vraisemblance :

$$L(\mathbf{b}) = \prod_{k=1}^{N} p_X(X^{(k)}; \mathbf{b})$$

Le problème d'identification par maximum de vraisemblance s'écrit alors de manière équivalente : trouver $\mathbf{b}$ tel que

$$\mathbf{b} = \underset{\substack{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p \\ \mathbf{b}^T\mathbf{b}=1}}{argmin} \; -log(L(\mathbf{b}))$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation sur l'hypersphère unitaire dans $\mathbb{R}^p$. En pratique, on choisit la paramétrisation suivante pour l'hypersphère :

$$\begin{cases} b_1 = cos(\phi_1) \\ b_i = cos(\phi_i) \prod_{n=1}^{i-1} sin(\phi_n) \quad \text{pour} \quad i \in \{2, \ldots, p-1\} \\ b_p = \prod_{i=1}^{p-1} sin(\phi_i) \end{cases} \tag{4.1}$$

avec $\phi_i \in [0, 2\pi]$ $\forall i \in \{2, \ldots p-1\}$ et $\phi_1 \in [0, \pi]$. Le problème d'optimisation (4.2) est reformulé comme un problème d'optimisation sans contrainte sur $[0, \pi] \times [0, 2\pi]^{p-2} \subset \mathbb{R}^{p-1}$. Ce problème est résolu en deux étapes :

1. une localisation grossière du minimum par une méthode de *random search* ;

2. partant de ce point, on utilise un algorithme d'optimisation classique (ici la méthode Nelder-Mead Simplex [Lagarias *et al.* 1998]).

Comme le montre la figure 4.2, ce problème possède généralement plusieurs minima locaux, et il est utile de répéter cette procédure afin de trouver la solution globale du problème. Notons aussi que par la périodicité des fonctions trigonométriques et par la forme même des polynômes d'Hermite, le problème admet plusieurs solutions au sens de ϕ. C'est le cas pour un ordre $p = 2$ où $\phi_1 \in \{0, \pi, 2\pi\}$ sont solutions du problème (*c.f.* figure 4.2). Les performances de la méthode seront présentées dans la section 4.4.4.

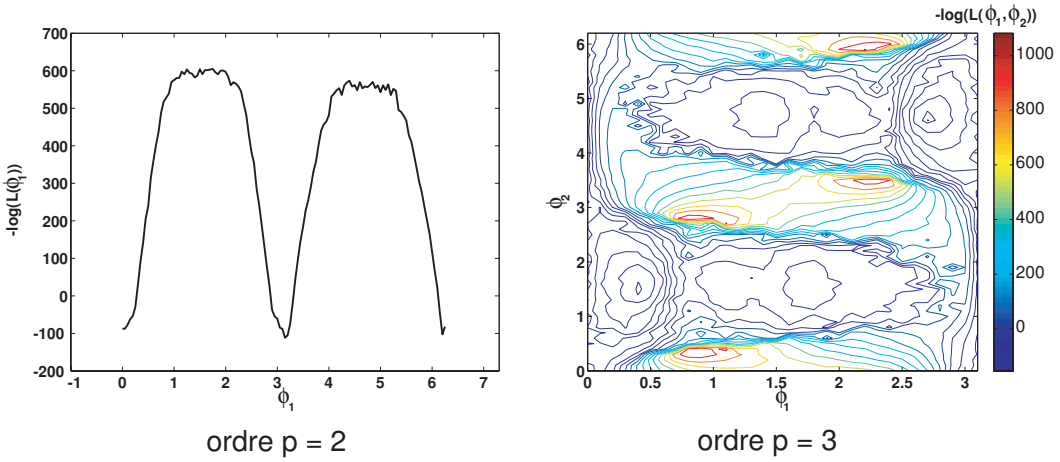


FIG. 4.2 – Evolution de la fonction $-log(L(\phi))$ pour des ordres de chaos polynomial $p = 2$ (droite) et $p = 3$ (gauche) ; variable identifiée à partir de 216 observations.

4.3 Principe de l'analyse de risque

4.3.1 Concepts de PoD et PFA et de courbes ROC

Dans cette section, nous introduisons les différents outils d'aide à la décision qui seront utilisés dans l'analyse de risque. Ils sont couramment employés pour caractériser les performances d'une technique d'inspection et permettent d'optimiser les stratégies d'inspection. Le concept le plus courant pour caractériser la performance d'une technique d'inspection est la probabilité de détection. On note a_s la taille minimale de défaut, en dessous de laquelle on considère qu'aucune détection n'est réalisée. Par la suite, on appellera ce paramètre le seuil de détection. La probabilité de détection est définie par :

$$PoD = P(\widehat{a} \geq a_s) \tag{4.2}$$

où $\hat{a}$ est la taille du défaut mesuré. Le seuil de détection a_s peut être un paramètre déterministe ou une variable aléatoire. De plus, la théorie de la détection permet de définir la probabilité de fausse alarme (PFA) à partir des fonctions $p_{\hat{a}}$ et p_η donnant respectivement les densités de probabilité du (signal+bruit) et du bruit et où η est l'erreur sur la mesure. Le bruit, *i.e.* l'erreur, dépend des conditions environnementales, du facteur humain et de la nature du défaut mesuré [Rouhan et Schoefs 2003]. La PoD et la PFA sont données par les équations (4.3) et (4.4)

$$PoD = \int_{a_s}^{+\infty} p_{\hat{a}}(x)\, dx \tag{4.3}$$

$$PFA = \int_{a_s}^{+\infty} p_\eta(x)\, dx \tag{4.4}$$

Un exemple des densités de probabilité $p_{\hat{a}}$ et p_η permettant le calcul de la PoD et de la PFA pour un seuil de détection donné est présenté sur la figure 4.3.

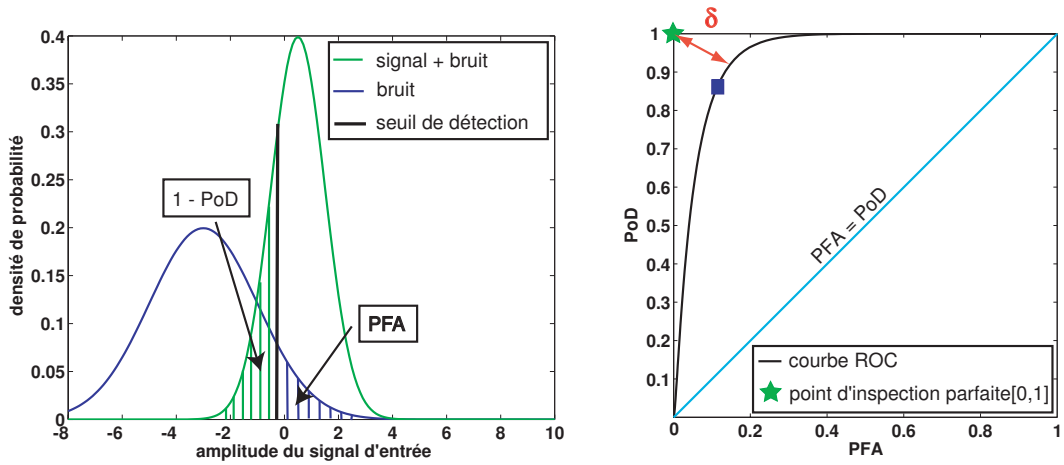


FIG. 4.3 – Illustration de la PoD et de la PFA pour un seuil de détection a_s donné (gauche) et courbe ROC correspondante (droite).

Pour un seuil de détection donné, le couple (PFA,PoD) définit la performance d'une technique CND ; on l'appelle "Receiver Operating Characteristic" (ROC). Ce couple peut être considéré comme les coordonnées d'un point appartenant au plan (PFA, PoD). Considérant que les valeurs de a_s appartiennent à l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, ce point appartient à une courbe appelée courbe ROC. Il s'agit d'une courbe paramétrée par a_s et définie par les équations (4.3) et (4.4). La figure 4.3 présente un exemple de courbe ROC déterminée avec les fonctions $p_{\hat{a}}$ et p_η de la même figure. La fonction $PFA \mapsto PoD$ est une fonction croissante monotone qui se situe toujours au dessus de la diagonale $(PFA = PoD)$ et dont la dérivée est étroitement liée à la sensibilité de l'appareil de mesure [Arques 1982, Füscök *et al.* 2000]. La figure 4.3 présente également le point correspondant à une inspection parfaite, *i.e.* $(PFA, PoD) = (0, 1)$.
Pour l'évaluation d'une courbe ROC, le but est alors d'obtenir des valeurs discrètes pour la PoD et la PFA [Barnouin *et al.* 1993] ou de modéliser les fonctions $p_{\hat{a}}$ et p_η correspondant à un site donné. C'est ce second cas de figure que nous utiliserons ici. A partir de la PoD et de la PFA, nous introduisons le principe de l'analyse de risque.

4.3.2 Présentation de la fonction de risque

La maintenance de grands ouvrages, comme un quai ou une plate-forme offshore, est un enjeu de toute première importance pour garantir à la fois la sécurité des personnes travaillant sur ces structures et leur bon fonctionnement. On développe pour cela des plans IMR (Inspection Maintenance Réparation) permettant de surveiller l'ouvrage durant toute la durée de leur phase d'exploitation. Ces inspections sont souvent très onéreuses et seules les zones structurelles sensibles sont généralement inspectées. Suite à ces inspections, le gérant de l'ouvrage doit décider si certains composants doivent être réparés ou remplacés afin de garantir la sécurité et le fonctionnement de l'ouvrage. Ces stratégies d'inspection doivent être optimisées en terme de coût et de performance. Naturellement, un plan optimal conduirait à inspecter la bonne zone au bon moment avec des outils performants et fiables pour des coûts les plus faibles possibles.
L'optimisation des plans IMR est un problème de décision. Il peut être également abordé comme un problème de risque. Dans ce cas, on peut distinguer deux types de risques :

1. le risque de ne pas détecter un défaut existant et de perdre l'intégrité structurelle ;
2. le risque de détecter des défauts inexistants entraînant des coûts inutiles.

Le but est donc de minimiser au mieux ces deux types de risque. Dans la suite, nous proposons une modélisation de ces risques et de leur impact. Le problème consistera à minimiser des fonctions de coûts liées à la non détection de défauts existants et à la détection de défauts inexistants.

4.3.2.1 Introduction des inspections dans le processus de décision

Dans ces travaux, on propose d'utiliser le formalisme proposé dans [Rouhan et Schoefs 2003]. En se basant sur un formalisme bayésien, l'idée est de conditionner l'événement présence (ou absence) de défaut à l'événement résultant de l'inspection. On introduit alors les probabilités conditionnelles suivantes basées sur l'état de la structure (Y) et sur la décision prise suite à l'inspection $d(Y)$:

- $P_1 = P(\{Y = 0\}|\{d(Y) = 0\})$ correspondant au cas où il n'y a aucun défaut sachant qu'on n'en a pas détecté ;
- $P_2 = P(\{Y = 0\}|\{d(Y) = 1\})$ correspondant au cas où il n'y a aucun défaut sachant qu'on en a détecté un ;
- $P_3 = P(\{Y = 1\}|\{d(Y) = 0\})$ correspondant au cas où un défaut existe sachant qu'il n'a pas été détecté ;
- $P_4 = P(\{Y = 1\}|\{d(Y) = 1\})$ correspondant au cas où un défaut existe sachant qu'il a été détecté.

On s'intéresse ici aux cas des mauvaises décisions, *i.e.* aux probabilités conditionnelles P_2 et P_3, qui vont être directement utilisées dans la fonction de coût. Les probabilités associées à ces événements peuvent être exprimées en fonction de la PoD et de la PFA auxquelles on peut avoir accès grâce aux résultats d'inspection *c.f.* section 4.3.1. Avec ce formalisme, la PoD et la PFA peuvent s'exprimer sous la forme

$$PoD = P(\{d(Y) = 1\}|\{Y = 1\}) \tag{4.5}$$

$$PFA = P(\{d(Y) = 1\}|\{Y = 0\}) \tag{4.6}$$

Les probabilités P_2 et P_3 peuvent se réécrire en utilisant simplement le formalisme de Bayes

$$P_2 = \frac{PFA(1-\gamma)}{PoD\gamma + PFA(1-\gamma)} \tag{4.7}$$

$$P_3 = \frac{(1-PoD)\gamma}{(1-PoD)\gamma + (1-PFA)(1-\gamma)} \tag{4.8}$$

où $\gamma = P(\{Y = 1\})$ est la probabilité de présence de défaut de la zone inspectée au moment de l'inspection. La détermination de γ est délicate ; notons qu'elle peut être déduite à partir de statistiques (*c.f.* [Moan *et al.* 1997] dans le cas de fissures) ou d'un jugement d'expert. Ici on considère que $\gamma = 0.1$, ce qui correspond aux défauts de tailles importantes pouvant entraîner la ruine de la structure. On trouvera dans [Rouhan et Schoefs 2003] des études de sensibilité sur le paramètre γ pour les probabilités P_i. Pour déterminer les probabilités P_i données dans les équations (4.7) et (4.8), on utilise les courbes ROC. Les courbes ROC et les probabilités P_i sont fonctions de la PoD et de la PFA. Nous considérons la restriction de la probabilité P_i à la courbe ROC, notée $(P_i)_{|ROC}$. On obtient ainsi une nouvelle courbe de performance en trois dimensions illustrée sur la figure 4.4. Afin d'obtenir une quantité utilisable dans la fonction de coût, on définit une moyenne de $(P_i)_{|ROC}$, notée $\mu((P_i)_{|ROC})$ donnée dans l'équation (4.9)

$$\mu((P_i)_{|ROC}) = \frac{1}{L_{ROC}} \int_{ROC} P_i \, dl_{ROC} \tag{4.9}$$

où l_{ROC} est l'abscisse curviligne de la courbe en 3 dimensions, L_{ROC} est la longueur de la courbe ROC dans le plan (PFA, PoD). On peut maintenant, grâce à ces moyennes, caractériser les fonctions de coût utilisées pour l'analyse de risque.

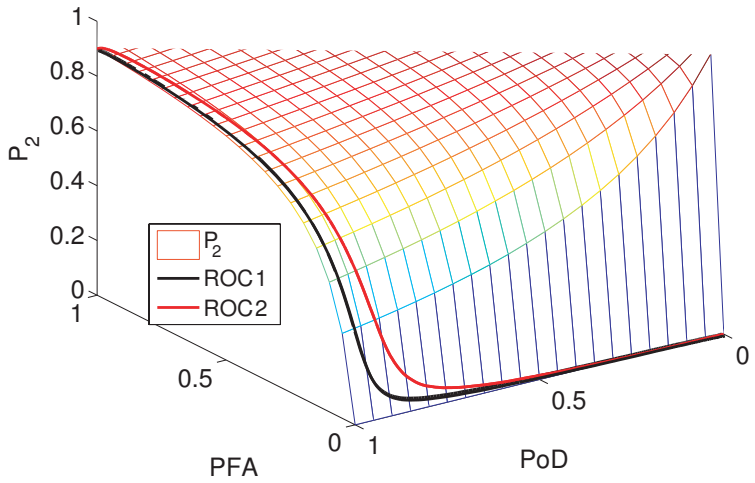


FIG. 4.4 – Surface de réponse de P_2 pour $\gamma = 0.1$ et exemples de courbes $(P_2)\,|_{ROC}$.

4.3.2.2 Fonctions de coûts pour l'analyse de risque

Pour l'analyse de risque, on choisit une politique de maintenance basique :

- si aucun défaut n'est détecté alors aucune réparation n'est effectuée. La non-detection d'un défaut existant conduit donc à un risque de ruine (ou de défaillance) ;
- si un défaut est détecté alors une réparation est effectuée et une inspection est reconduite pour vérifier la qualité de la réparation.

A partir de ces deux scénarios, on définit deux fonctions de coûts. La première[1], notée $\overline{E(C)}_d$ et donnée par l'équation (4.10), indique le surcoût dû aux détections de défauts inexistants. La seconde, notée $E(C)_{nd}$ et donnée par l'équation (4.11) donne le coût dû à la non détection de défauts éxistants

$$\overline{E(C)}_d = (C_{\text{inspection}} + C_{\text{réparation}})\mu((P_2)_{|ROC}) \tag{4.10}$$

$$E(C)_{nd} = C_{\text{inspection}} + C_{\text{défaillance}} P_f \mu((P_3)_{|ROC}) \tag{4.11}$$

où P_f est la probabilité de défaillance de la structure étudiée, $C_{\text{inspection}}$ est le coût de l'inspection, $C_{\text{réparation}}$ est le coût de la réparation et $C_{\text{défaillance}}$ le coût de ruine. Les quantités $\mu((P_2)_{|ROC})$ et $\mu((P_3)_{|ROC})$ sont directement déterminées à partir des courbes ROC (*c.f.* section 4.3.2.1). Pour calculer la fonction $E(C)_{nd}$, on doit déterminer la probabilité de défaillance de la structure soumise à des pertes de matière. Nous sommes donc confronter à un problème de géométrie aléatoire que nous allons naturellement résoudre avec la méthode X-SFEM telle qu'elle est présentée dans le chapitre 2. Nous allons maintenant présenter le contexte particulier de cette étude qui concerne l'impact de la corrosion sur les structures situées en milieu marin.

4.4 Problématique de la corrosion des structures en région littorale

La corrosion des structures en milieu littoral est un problème auquel les gérants d'ouvrages sont de plus en plus confrontés. En effet, un grand nombre de leurs structures sont en place depuis de nombreuses années et les effets néfastes de la corrosion se font de plus en plus ressentir. Les conséquences économiques peuvent alors être très importantes sur plusieurs plans : le plan matériel (immobilisation de l'ouvrage, remplacement des matériaux), le plan écologique (rupture de la structure) et le plan humain (accidents corporels). D'après [Landolt 1993], on estime que 5 tonnes d'acier sont transformées en produits de corrosion dans le monde chaque seconde. Pour évaluer les effects de la corrosion, on mène des campagnes d'inspection par contrôle non-destructif (CND) sur certains ouvrages susceptibles d'être affectés. Si l'inspection visuelle est un premier outil permettant de savoir si l'ouvrage est affecté ou non, c'est généralement une technique par ultrasons qui permet de quantifier son effet en terme de perte d'épaisseur du métal. Cette méthode très coûteuse nécessite donc d'optimiser les plans d'inspection des structures en milieu littoral tout en garantissant le suivi de leur utilisation en toute sécurité. L'objectif pour le gérant d'un parc de structures est de trouver l'équilibre optimal entre le nombre croissant de structures vieillissantes et les moyens financiers disponibles pour poursuivre leur utilisation [Radojicic *et al.* 2001, Stewart *et al.* 2004].

La corrosion marine peut prendre plusieurs aspects : lorsque des cavernes ou des piqûres se forment à la surface du métal, on parle de corrosion localisée ; lorsqu'une couche uniforme recouvre la totalité de la

[1] la notation "surligné" indique un surcoût

surface métallique, on parle de corrosion généralisée. L'inspection par ultrasons, utilisée pour collecter les pertes d'épaisseur, permet principalement d'évaluer la corrosion généralisée et non localisée. C'est donc uniquement ce type de défaut qui est étudié dans ce mémoire. Les données utilisées ici proviennent du programme européen MEDACHS (2005-2007) dans lequel cette thèse s'inscrit. Durant ces travaux, nous avons collecté des données de pertes d'épaisseur dues à la corrosion sur plusieurs quais (sur pieux ou palplanches) situés dans différents ports des côtes européennes atlantiques. Pour cette étude de cas, nous nous sommes focalisés sur l'une de ces structures présentée dans la section suivante.

Remarque 4.1 ***Modélisation de la corrosion dans le temps*** *: une autre partie importante de ces travaux consistait à mettre en oeuvre un dispositif expérimental sur site. L'objectif était de collecter les pertes d'épaisseur de nombreux échantillons d'acier dont les temps d'immersion variaient de* 1 *à* 12 *mois. Ainsi, il était prévu de développer un modèle des effets de la corrosion en fonction du temps [Memet 2000, Melchers et Wells 2006]. Ce dispositif a été mis en place sur deux sites : l'estuaire de la Loire (Montoir) et le port de Peniche au Portugal (face à l'océan Atlantique). J'ai participé étroitement à la conception de ce dispositif notamment en définissant les différents protocoles (préparations des échantillons, installation sur site du dispositif, nettoyage des spécimens et mesure par ultrasons). Malheureusement, les données collectées n'ont pu être exploitées car les pertes d'épaisseurs étaient beaucoup trop faibles au regard de la prédiction initiale des experts et donc de la précision de l'appareil de mesure utilisé (appareil identique à celui utilisé par les compagnies d'inspection). Cependant, les moyens déployés pour la mise en place de ce dispositif ont été importants et l'expérience acquise fut, malgré tout, très enrichissante. Dans le cadre du projet MEDACHS, ce travail a été remplacé par une collecte de campagnes d'inspection concernant un grand nombre d'ouvrages. A partir de ces données, il est possible de déterminer les cinétiques de corrosion (sous certaines hypothèses). Cependant, nous ne possédons pas d'informations sur les 10 premières années de vie des ouvrages, et il n'est pas possible d'établir les cinétiques de corrosion. Pour ces deux raisons, il est toujours envisagé de mettre en place ce dispositif et de modifier les moyens de mesure afin d'obtenir des résultats concluants. C'est pourquoi le détail de ce dispositif et les résultats sont quand même présentés dans l'annexe C.*

4.4.1 Structure étudiée : quais sur pieux métallique

La structure étudiée est un quai sur pieux métalliques se situant dans l'estuaire de la Loire au niveau de la commune de Montoir en Loire-Atlantique et est exploitée par le port autonome de Nantes Saint-Nazaire. Il s'agit du poste 3 du Terminal à Marchandises Diverses et Conteneurs (TMDC). Construit en 1984, il présente une longueur de 253.2 m et une largeur de 40.9 m. Il est composé de 30 pieux-tubes en acier dont les épaisseurs nominales à l'installation étaient comprises entre 10 et 12 mm. Ces pieux sont remplis de béton et la peinture anti-corrosion utilisée à l'époque de la construction était une peinture bitumeuse. La figure 4.5 présente une vue en coupe de ce quai. On peut distinguer sur cette figure différentes marques rouges correspondant aux pieux et aux niveaux où les relevés d'épaisseur ont été effectués. La structure a été inspectée en 1984, soit 20 ans après sa construction. La section suivante est dédiée au protocole de mesure utilisé en France pour ce type d'inspection.

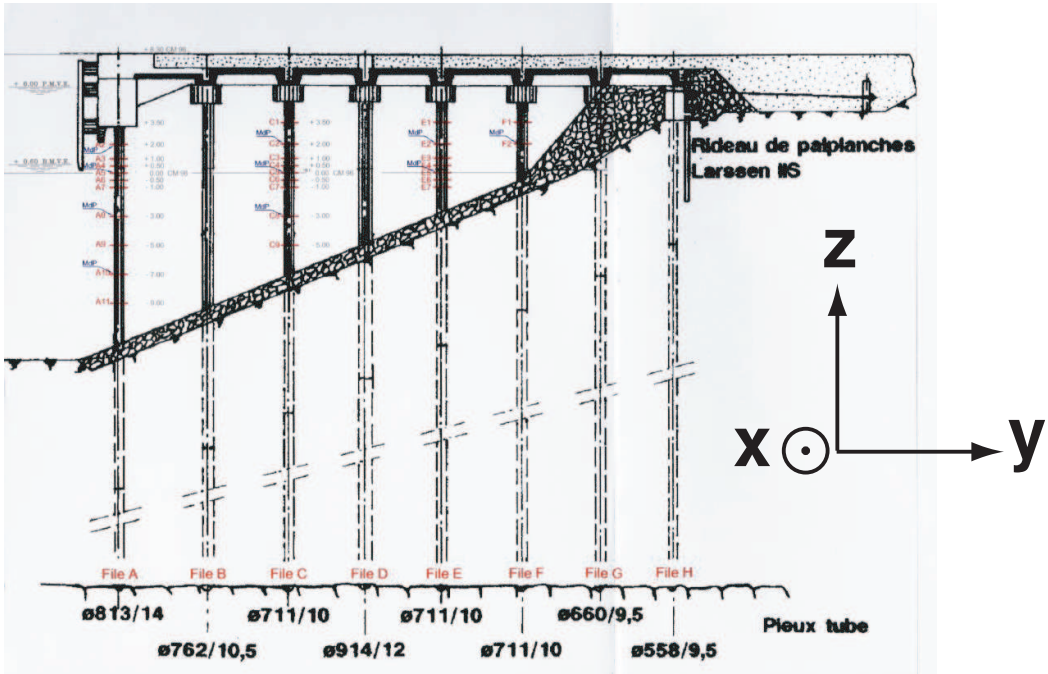


FIG. 4.5 – Structure étudiée : vue en coupe du poste 3 du TMDC.

4.4.2 Protocole de mesure

Le protocole de mesure utilisé en France pour effectuer les relevés des pertes d'épaisseur liées aux effets de la corrosion a été défini par le Centre d'Etudes Maritimes et Fluviales (CETMEF). Il consiste à effectuer des mesures ultrasoniques d'épaisseurs résiduelles à différentes profondeurs sur plusieurs zones définies sur la section d'un pieu. Ces zones sont appelées "zones cardinales". A partir de ces épaisseurs résiduelles et connaissant les épaisseurs nominales des pieux lors de leur installation, il est possible de déterminer la perte de matière due principalement aux effets de la corrosion.
Pour un pieu donné, à un niveau donné (cote), on effectue 12 mesures réparties en 3 mesures géométriques, notées $G1$, $G2$ et $G3$, pour chacune des 4 zones cardinales (a,b,c et d). La figure 4.6 présente la répartition de ces mesures sur la section d'un pieu à une cote donnée. On notera que la technologie par ultrasons ne permet pas de mesurer l'épaisseur du métal sain si celui-ci est recouvert par les produits de corrosion. Une fois les zones de mesure repérées, on effectue alors un nettoyage de la surface par meulage afin de mettre le métal à nu sur un disque d'une dizaine de centimètres de diamètre. L'objectif premier des 3 mesures géométriques par zone cardinale est d'éviter les erreurs de diagnostic dues à une mauvaise mesure ou à un phénomène localisé (piqûres). Elles ont pour nous un autre intérêt majeur qui est l'accès à l'erreur sur la mesure, due à la fois à l'appareil et aux conditions difficiles d'exécution. Pour une zone cardinale particulière, on dispose de 3 mesures géométriques. On considère que ces mesures correspondent au même défaut, *i.e.* à la même perte d'épaisseur. On suppose que la perte d'épaisseur réelle correspond à la moyenne de ces 3 mesures. En notant a le défaut réel et $\hat{a}^k$ le défaut mesuré (où $k \in \{1, ..., 3\}$

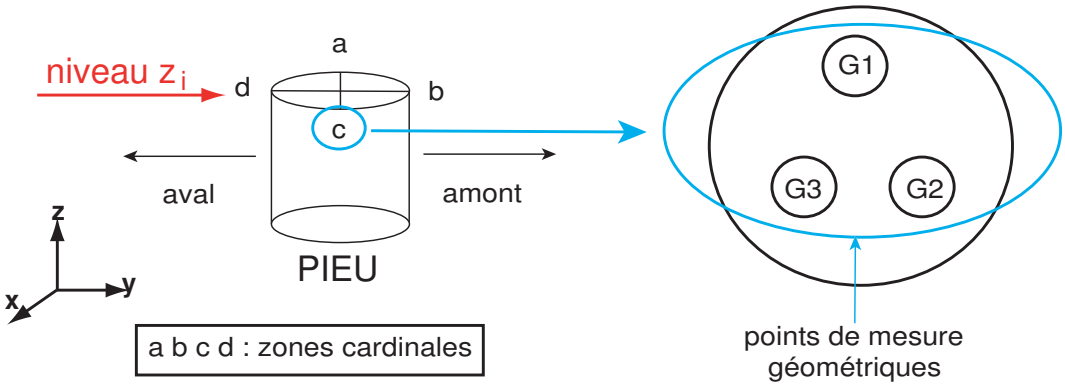


FIG. 4.6 – Protocle de mesure CETMEF : répartition des zones cardinales et des points de mesure géométriques sur un pieu à une cote z donnée.

indique la mesure géométrique de la zone cardinale) on peut caractérisé l'erreur η^k sur la mesure par

$$\eta^k = \hat{a}^k - a \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} \hat{a}^k - b \tag{4.12}$$

où b est un biais qui peut être évalué à partir d'une campagne d'inspection CND spécifique. Sinon, le jugement d'expert et l'analyse du protocole de mesure peuvent donner des valeurs ou des bornes de b. D'après le jugement d'expert (plongeurs et experts en corrosion), le protocole CETMEF n'introduit pas de biais systématique sur les mesures et on considérera que ce dernier est nul. D'autres modèles de calcul d'erreur sont possibles et sont présentés dans [Bonnet *et al.* 2008]. On s'intéresse maintenant aux détails de la modélisation probabiliste des données d'inspection.

4.4.3 Modélisation probabiliste des données d'inspection

A partir des données d'inspection obtenues avec le protocole CETMEF, il est possible de définir différentes quantités nécessaires à l'optimisation des plans d'inspection basée sur une évaluation des risques : la mesure du défaut, l'erreur sur cette mesure et la valeur réelle du défaut. Nous avons montré précédemment que le protocole conduisait à déterminer les pertes d'épaisseur à plusieurs niveaux de la structure. Dans [Clément *et al.* 2008], il a été observé que le champ de corrosion sur cette structure était principalement indexé par l'altitude z sur la structure. Nous allons donc considérer que toutes les mesures effectuées à un niveau particulier z_i sont des réalisations d'une même variable aléatoire. Pour un niveau z_i, il faudra identifier trois variables aléatoires correspondant à la perte de matière mesurée, à la perte de matière réelle et à l'erreur sur la mesure. Ces trois variables aléatoires sont respectivement notées $\hat{a}_{z_i}(\theta)$, $\eta_{z_i}(\theta)$ et $a_{z_i}(\theta)$. Nous faisons également l'hypothèse que ces variables sont indépendantes d'un niveau z_i à un autre. En réalité, ce n'est sûrement pas vrai et il serait plus juste de les considérer comme des processus stochastiques indexés en espace et en temps. Cependant la structure de corrélation est délicate à obtenir car les distances entre chaque niveau sont relativement importantes. Récemment, cette distance a été estimée à moins de $25\ cm$ [Boéro *et al.* 2009]. De plus, nous ne disposons de données qu'à la date de l'inspection et il serait donc impossible de caractériser ces processus en fonction du temps à partir des mesures. Des modèles sont en cours de développement dans le cadre de la thèse de J. Boéro, "Gestion par

les risques des ouvrages portuaires : optimisation de la maintenance d'un parc vieillissant et hétérogène" [Boéro *et al.* 2009].
On rappelle que 18 pieux de la structure ont été inspectés, et qu'en chacun des 4 points cardinaux, 3 mesures géométriques ont été effectuées. Pour un niveau z_i, toutes ces mesures sont considérées comme autant de réalisations indépendantes d'une même variable aléatoire. On note par l'indice $j \in \{1, ..., n_p\}$ (avec $n_p = 72$) tous les points cardinaux de ce niveau, et par l'indice $k \in \{1, ..., n_r\}$ (avec $n_r = 3$) les 3 mesures géométriques de chaque point cardinal. Cette distinction est nécessaire afin de caractériser la perte de matière réelle et l'erreur sur la mesure. Ainsi, pour un niveau z_i, on obtient 216 réalisations de la perte de matière mesurée $\hat{a}_{z_i}(\theta)$. Ces réalisations sont notées $\hat{a}_{z_i}^{(j,k)}$ avec $j \in \{1, ..., 72\}$ et $k \in \{1, ..., 3\}$. Grace aux mesures géométriques (notées avec l'indice k) on peut déterminer les réalisations $a_{z_i}^{(j)}$ de la perte de matière réelle

$$a_{z_i}^{(j)} = \frac{1}{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} \hat{a}_{z_i}^{(j,k)} \quad \text{avec} \quad j \in \{1, ..., 72\} \tag{4.13}$$

On obtient ainsi 72 réalisations de la variable aléatoire $a_{z_i}(\theta)$. On peut ensuite déterminer les réalisations de la variable $\eta_{z_i}(\theta)$ notées $\eta_{z_i}^{(j,k)}$

$$\eta_{z_i}^{(j,k)} = \hat{a}_{z_i}^{(j,k)} - a_{z_i}^{j} \quad \text{pour} \quad (j,k) \in \{1, ..., 72\} \times \{1, ..., 3\} \tag{4.14}$$

On obtient alors 216 réalisations de la variable aléatoire $\eta_{z_i}(\theta)$.
La structure a été inspectée à 6 niveaux : $z_1 = +2m$ et $z_2 = +1m$ pour la zone de marnage, $z_3 = +0.5m$, $z_4 = 0m$, $z_5 = -0.5m$ et $z_6 = -1m$ pour la zone d'immersion permanente. On peut distinguer ces deux zones à partir du niveau de plus basses eaux, situé à $+0.6m$, correspondant à un coefficient de marée de 120. Nous avons ainsi obtenu les ensembles de réalisations nécessaires à l'identification des variables aléatoires $\hat{a}_{z_i}(\theta)$, $a_{z_i}(\theta)$ et $\eta_{z_i}(\theta)$. Pour une plus grande clarté des notations, on les notera $\hat{a}_i(\theta)$, $a_i(\theta)$ et $\eta_i(\theta)$. Classiquement, des distributions prédéfinies (loi normale, log-normale etc.) sont utilisées pour obtenir les densités de probabilité de ces variables. Dans ces travaux, nous avons choisi d'utiliser la méthode d'identification basée sur une représentation sur le chaos polynomial qui est présentée dans la section 4.2.
Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires à l'étude et nous nous intéressons aux résultats obtenus. Les résultats de l'identification sont présentés dans la section 4.4.4. Enfin, dans la section 4.5, nous présenterons le problème structurel résolu avec la méthode X-SFEM et nous compléterons l'analyse de risque.

4.4.4 Résultats de l'identification sur les courbes ROC

Dans cette section, nous présentons les résultats de l'identification des variables aléatoires $\hat{a}_i(\theta)$ et $\eta_i(\theta)$ qui permettront de déterminer les courbes ROC. Nous réalisons tout d'abord une identification en utilisant des fonctions de densité de probabilité classiques. Puis, nous utiliserons la méthode d'identification présentée dans la section 4.2 consistant à représenter les variables sur le chaos polynomial. A l'aide des courbes ROC obtenues avec chacune des méthodes, nous comparerons leurs résultats.
Pour identifier $\hat{a}_i(\theta)$ et $\eta_i(\theta)$, on utilise dans un premier temps des distributions de probabilité *a priori* : une distribution normale, une distribution des valeurs extrêmes généralisées (GEV) et une distribution de

Student. On s'intéresse à un niveau d'inspection particulier correspondant à $z_1 = +2m$ situé dans la zone de marnage. La figure 4.7 présente les densités de probabilité obtenues avec chacune des lois pour $\hat{a}_1(\theta)$ et $\eta_1(\theta)$ et le tableau 4.1 donne les minima de la fonction $(-log(L))$ dans chacun des cas. On constate que la loi de Student permet d'obtenir les meilleurs résultats.

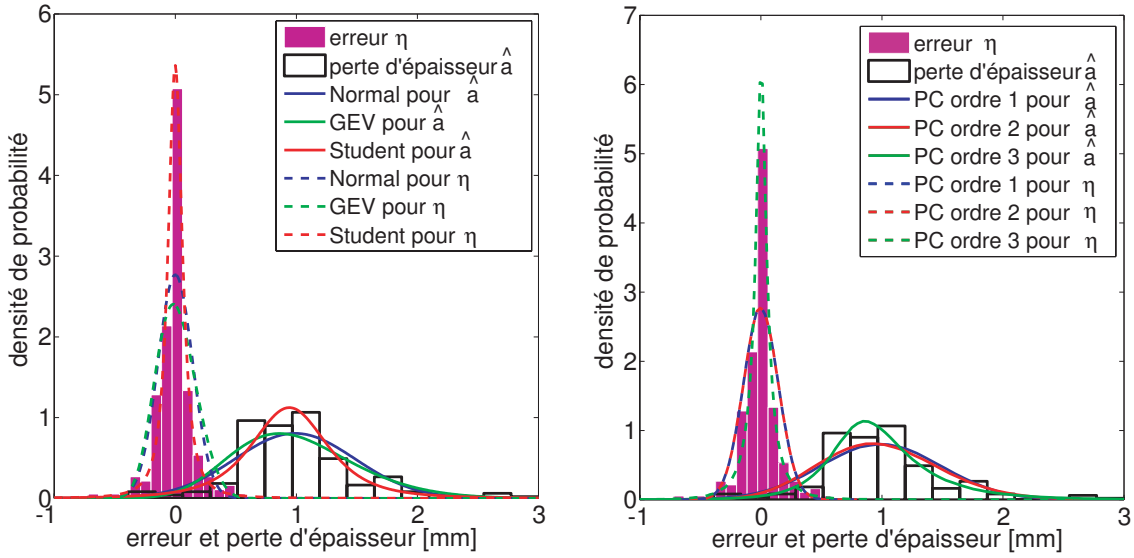


FIG. 4.7 – Densités de probabilité de $\hat{a}_1$ et η_1 obtenues par identification avec des fonction de densité de probabilité classiques (gauche) et par représentation sur le chaos polynomial (droite) ; niveau $z_1 = +2m$.

TAB. 4.1 – Minima de la fonction $-log(L)$ obtenus avec différentes lois classiques pour $\hat{a}_1$ et η_1 ; niveau $z_1 = +2m$.

lois	$z_1 = +2m$	
	perte d'épaisseur $\hat{a}_1$	erreur η_1
loi Normale	154	-112
loi GEV	152	-100
loi de Student	139	-149

On s'intéresse maintenant aux résultats obtenus avec l'identification sur le chaos polynomial. Nous avons utilisé la méthode donnée dans la section 4.2 avec différents ordres de chaos polynomial $p \in \{1, 2, 3\}$. La figure 4.7 présente les distributions de $\hat{a}_1(\theta)$ et $\eta_1(\theta)$ obtenues avec cette méthode et la tableau 4.2 donne les minima de la fonction $(-log(L))$. On constate que les résultats obtenus pour $p = 3$ sont meilleurs, au sens du maximum de vraisemblance, que ceux obtenus avec la loi de Student. La méthode d'identification sur le chaos polynomial parait alors tout à fait adaptée aux variables aléatoires à identifier.

TAB. 4.2 – Minima de la fonction $-log(L)$ obtenus par identification sur le chaos polynomial avec différents ordres p pour $\hat{a}_1$ et η_1 ; niveau $z_1 = +2m$.

chaos polynomial	$z_1 = +2m$	
	perte d'épaisseur $\hat{a}_1$	erreur η_1
ordre $p = 1$	154	-98
ordre $p = 2$	150	-109
ordre $p = 3$	132	-155

Il nous faut maintenant comparer les courbes ROC obtenues à partir des différentes variables $\hat{a}_i(\theta)$ et $\eta_i(\theta)$ identifiées. La taille des échantillons des deux variables étant important, il est possible de déterminer directement des courbes ROC discrètes. En effet, les équations (4.15) et (4.16) donnent une bonne approximation de la PoD et de la PFA pour un niveau i donné

$$PoD \approx \frac{Card(A(z_i))}{n_p \times n_r}, \quad avec\ A(z_i) = \left\{(j,k) \in \mathcal{I}; \hat{a}_i^{(j,k)} > a_s\right\} \tag{4.15}$$

$$PFA \approx \frac{Card(B(z_i))}{n_p \times n_r}, \quad avec\ B(z_i) = \left\{(j,k) \in \mathcal{I}; \eta_i^{(j,k)} > a_s\right\} \tag{4.16}$$

où $\mathcal{I} = \{1 \dots n_p\} \times \{1 \dots n_r\}$, $n_p = 72$ et $n_r = 3$. Les points des courbes ROC discrètes ont été calculés en fixant le seuil de détection a_s à des valeurs séparées d'un pas de $0.05\ mm$. En reliant ces points, on obtient les courbes ROC sans aucun ajustement : elles seront appelées courbes ROC expérimentales dans la suite. Ces courbes expérimentales nous servirons de référence. D'autre part, on calcule également, à partir des variables identifiées, les courbes ROC avec chacune des méthodes d'identification. Dorénavant, on s'intéresse uniquement aux résultats obtenus avec la loi de Student et l'identification sur le chaos polynomial pour un ordre $p = 3$. La figure 4.8 présente les courbes ROC correspondantes. On constate

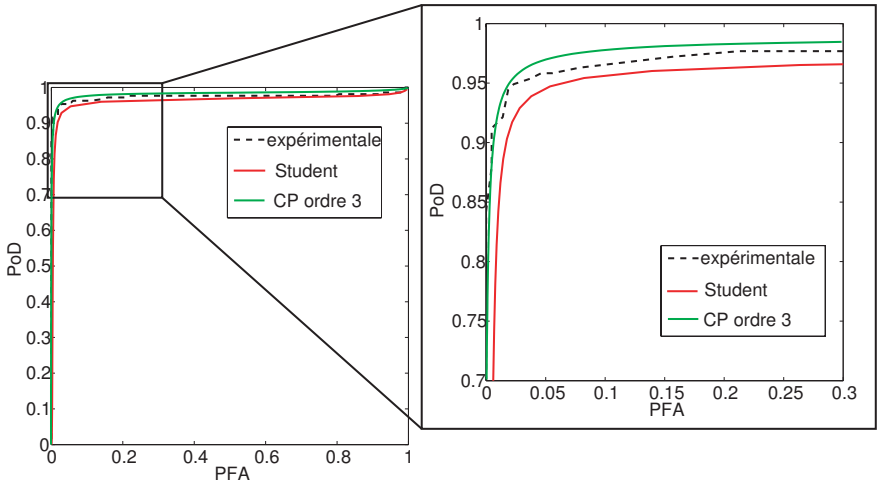


FIG. 4.8 – Comparaison entre les courbes ROC obtenues avec la loi de Student, l'identification sur le chaos polynomial et les mesures sans ajustement ; $z_1 = +2$m.

que la loi de Student tend à sous-estimer la performance de la technique CND au contraire de la méthode

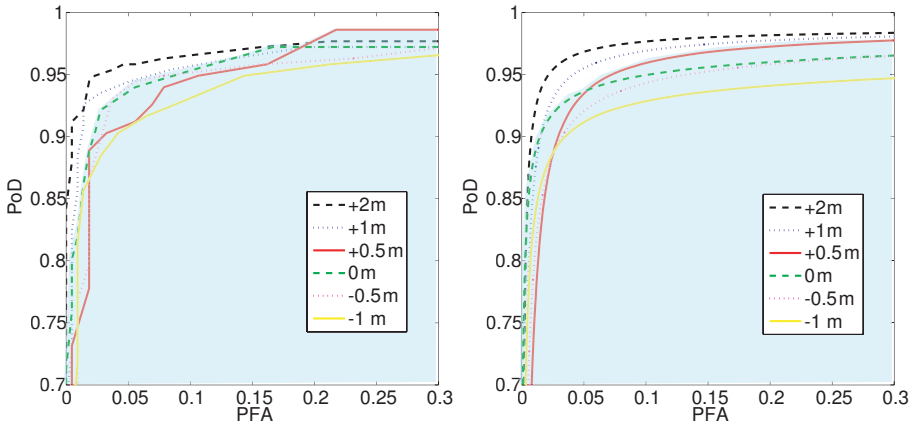


FIG. 4.9 – Comparaison entre les courbes ROC expérimentales (gauche) et obtenues par identification sur le chaos polynomial (droite) pour tous les niveaux d'inspection.

d'identification sur le chaos polynomial car la courbe ROC est plus proche de la diagonale ($PFA = PoD$). Afin de quantifier simplement la performance d'une technique CND, on peut calculer, à partir des courbes ROC, la distance entre la courbe et le point de coordonnées $(PFA, PoD) = (0, 1)$ caractérisant une inspection parfaite [Schoefs et Clément 2004] : cette distance δ représente l'efficacité optimale de la technique sous certaines conditions (seuil de détection, conditions d'inspection etc.). Avec la loi de Student, on obtient une distance $\delta = 0.072$ et avec l'identification sur le chaos polynomial (ordre $p = 3$), on obtient $\delta = 0.052$ ce qui est nettement plus proche de la valeur obtenue directement avec les données expérimentales ($\delta = 0.054$). Enfin, la figure 4.9 présente les courbes ROC expérimentales obtenues pour les 6 niveaux d'inspection et celles obtenues à partir de l'identification sur le chaos polynomial avec un ordre de troncature $p = 3$. On note une bonne concordance entre les deux courbes. Ces figures laissent apparaître deux familles de courbes dans les deux cas. La première regroupe les courbes ROC les plus proches du point d'inspection parfait de coordonnées $(0, 1)$ et la seconde regroupe celles indiquant des inspections moins performantes. On remarque que cette seconde famille, représentée sur fond bleu sur la figure, regroupe les inspections réalisées dans la zone d'immersion permanente pour laquelle les conditions d'inspection sont plus difficiles.

4.5 Etude de cas : analyse de risque d'un composant structurel soumis à la corrosion

Dans cette étude de cas, on propose d'étudier un assemblage en T soudé présenté sur la figure 4.10. On suppose que ce composant structurel appartient à une structure exposée aux effets de la corrosion. Ce composant peut être situé à différents niveaux z_i sur la structure ou sur une structure pouvant se situer à différentes profondeurs. Selon ce niveau, les effets de la corrosion peuvent être plus ou moins importants. La corrosion d'une structure entraîne naturellement des modifications de la géométrie (pertes de matière). La forte variabilité spatiale de la corrosion amène donc à la considérer comme aléatoire. L'analyse mécanique de la structure conduit à résoudre un problème à géométrie aléatoire pour lequel nous allons utiliser la méthode X-SFEM. On cherche à déterminer la probabilité de défaillance P_f de cet

assemblage en fonction de sa position sur la structure. On considère donc une fiabilité composant et, afin de se concentrer sur les effets de la géométrie, le chargement est choisi déterministe. La probabilité de défaillance sera utilisée pour l'analyse de risque dans la définition de la fonction de coûts $E(C)_{nd}$ donnée dans l'équation (4.11). Pour modéliser la corrosion, nous utilisons les résultats obtenus sur le quai sur pieux de référence présenté dans la section 4.4.1. On rappelle que cette structure a été inspectée à 6 niveaux différents et nous utilisons les valeurs obtenues pour la corrosion du cordon. Dans la section 4.4.4, nous avons identifié, pour chaque niveau z_i, différentes variables aléatoires liées à la corrosion : la perte de matière mesurée $\hat{a}_i$, l'erreur sur la mesure η_i et la perte de matière réelle a_i. La corrosion du composant sera alors représentée pour chaque niveau par la variable aléatoire a_i caractérisant la perte de matière réelle.

4.5.1 Description du problème structurel

Dans ce problème, l'aléa porte sur la forme du cordon de soudure. On suppose que la frontière du cordon est circulaire et tangente aux deux pièces soudées. L'aléa porte donc uniquement sur le rayon r du cordon. Ceci s'explique, par exemple, si seule cette partie du composant n'était pas protégée par de la peinture anti-corrosion. On cherche à prédire le comportement de la pièce soumise à une sollicitation de flexion et à déterminer sa probabilité de défaillance. La structure est encastrée sur la partie Γ_1 de sa frontière et on applique un effort réparti $\boldsymbol{F} = (0, 10)MPa$ sur la partie Γ_2 de sa frontière (*c.f.* figure 4.10). On considère que le matériau est homogène (même matériau pour la structure et le cordon) élastique isotrope avec un module d'Young $E = 210000MPa$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. Les calculs sont réalisés sous l'hypothèse des déformations planes. On utilise au niveau spatial une approximation éléments finis définie sur un maillage fixe, représenté sur la figure 4.10, composé de 2640 éléments triangles à 3 noeuds. Pour définir la géométrie de la structure, *i.e.* le rayon du cordon, on définit une level set aléatoire par manipulation de level sets simples (*c.f.* section 2.2.2).

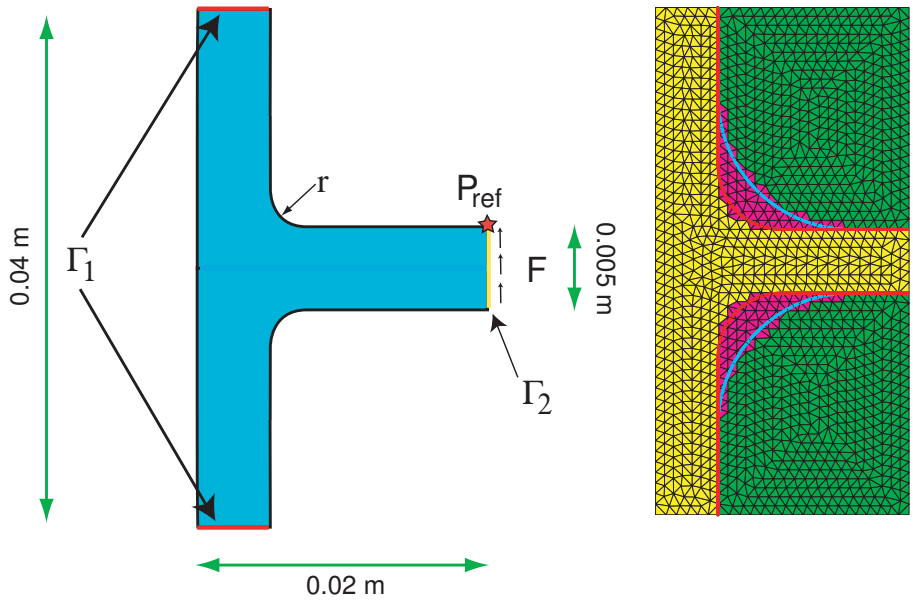


FIG. 4.10 – Problème du cordon de soudure avec rayon r aléatoire.

4.5.2 Modélisation probabiliste du rayon aléatoire

On note r_0 le rayon initial du cordon avant que le composant ne soit soumis aux effets de la corrosion. Considérant la perte de matière réelle au niveau z_i, le rayon r est défini par

$$r = r_0 - a_i \tag{4.17}$$

Les variables aléatoires a_i ont été identifiées à partir d'une représentation sur le chaos polynomial. Pour cela, nous avons utilisé un germe gaussien ξ composé des polynômes d'Hermite normalisés. L'objectif est de n'avoir à réaliser qu'un seul calcul X-SFEM. L'idée pour cela est de déterminer un intervalle $[b, c]$ et de réaliser ce calcul avec une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[b, c]$. Un choix logique pour la borne inférieure b est de prendre $b = 0$ correspondant au cas où le composant n'a subi aucune perte de matière. Pour la borne supérieure c, il n'existe pas de choix aussi naturel. On se fixe alors une probabilité seuil et on décide de choisir c tel que $P(a_i \geqslant c) \leqslant 10^{-5} \quad \forall i \in \{1, ..., 6\}$. A partir des variables aléatoires a_i identifiées nous avons trouvé $c = 7\ mm$. Notons que toutes les mesures de perte d'épaisseur utilisées pour l'identification des a_i sont inférieurs à $7\ mm$. Le calcul X-SFEM permet alors de déterminer la solution $\boldsymbol{u}(y),\ y \in [b, c]$. Cela correspond à un calcul de surface de réponse. La solution à un niveau i est déterminée par un post-traitement et sera prise égale à $\boldsymbol{u}(T(a_i(\xi)))$ où $a_i(\xi)$ est la variable identifiée sur le chaos polynomial gaussien et où T est une transformation de troncature définie par

$$T(y) = yI_{[b,c]}(y) \tag{4.18}$$

où $I_{[b,c]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[b, c]$.

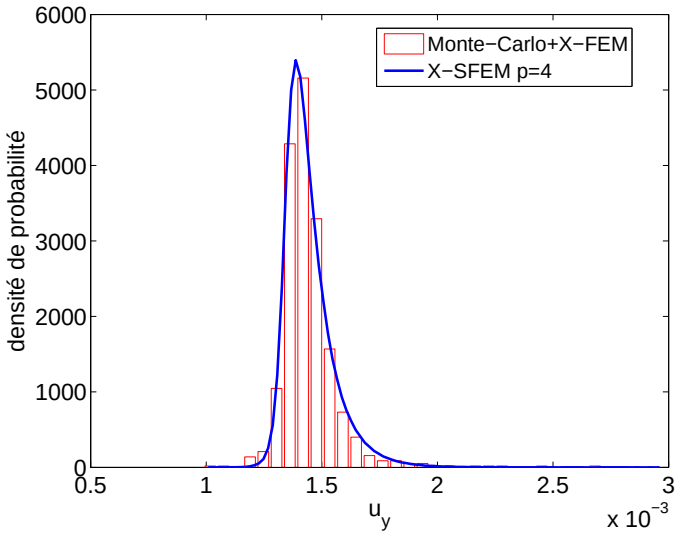


FIG. 4.11 – Densités de probabilité du déplacement vertical du point P_1 obtenues avec Monte-Carlo+X-FEM et X-SFEM pour $p = 4$; niveau $z_1 = +2m$

Les variables aléatoires a_i ont été identifiées sur un chaos polynomial de degré 3. Dans le calcul X-SFEM, nous avons choisi d'utiliser une approximation stochastique basée sur un chaos polynomial généralisé de degré $p = 4$ ce qui conduit à développer $\boldsymbol{u}(y)$ sur une base de polynômes de degré $p = 4$.

Afin d'illustrer que la modélisation effectuée reste correcte, on présente sur la figure 4.11 la densité de probabilité du déplacement vertical d'un point particulier P_{ref} du composant (*c.f.* figure 4.10). Comme point de comparaison, nous présentons une solution de référence calculée avec une méthode de Monte-Carlo pour 1000 tirages couplée à un code déterministe X-FEM. On constate que les densités de probabilité sont très proches indiquant que la modélisation probabiliste est de bonne qualité.
On rappelle que le but du calcul X-SFEM est de déterminer la probabilité de défaillance P_f définissant la fonction de coûts $E(C)_{nd}$ donnée dans l'équation (4.11). Le calcul de P_f, réalisé à partir d'un post-traitement de la solution X-SFEM, est détaillé dans la section suivante.

4.5.3 Calcul de la probabilité de défaillance

Pour calculer la probabilité de défaillance P_f, on définit la fonction de performance $G(\xi)$ par

$$G(\xi) = u_c - u_y(\xi) \tag{4.19}$$

où $u_c = 2\ mm$ est la valeur critique du déplacement vertical autorisé au point P_{ref} et où $u_y(\xi)$ est le déplacement vertical au point P_{ref}. Les situations de défaillance sont alors définies par $G(\xi) \leqslant 0$ et la probabilité de défaillance P_f par

$$P_f = P(\{G(\xi) \leqslant 0\})$$

Pour estimer la probabilité P_f, on génère un ensemble de N réalisations du déplacement vertical au point P_{ref}, noté $\{u_y^{(k)}\}_{k=1}^N$. Une approximation de P_f est donnée par

$$P_f \approx \frac{1}{N} Card\{k \in \{1, ..., N\} / u_y^k \geqslant u_c\}$$

Afin d'obtenir une bonne approximation de P_f, on choisit un nombre de réalisations $N = 10^6$ pour lequel on peut considérer que la convergence de P_f est atteinte. Pour vérifier cette convergence, nous avons effectué 1000 estimations de la probabilité de défaillance pour chacun des niveaux et constaté que le coefficient de variation ne dépassait pas 3%. Le tableau 4.3 donne les valeurs de P_f pour chacun des 6 niveaux de la structure où le composant peut se situer. On observe deux zones distinctes : la première

niveau	probabilité de défaillance P_f
$z_1 = +2m$	$1.8\ 10^{-3}$
$z_2 = +1m$	$2.1\ 10^{-3}$
$z_3 = +0.5m$	$7.5\ 10^{-3}$
$z_4 = +0m$	$2.6\ 10^{-2}$
$z_5 = -0.5m$	$2.5\ 10^{-2}$
$z_6 = -1m$	$3.5\ 10^{-2}$

TAB. 4.3 – Probabilité de défaillance P_f obtenues avec X-SFEM pour les différents niveaux d'inspection z_i.

regroupe les niveaux z_1, z_2 et z_3 pour lesquels la probabilité de défaillance est inférieure à 10^{-2} et la seconde regroupe les niveaux z_4, z_5 et z_6 pour lesquels la probabilité de défaillance est supérieure à

10^{-2}. On peut noter que le premier groupe correspond à la zone de marnage et le second groupe à la zone d'immersion permanente (dans le premier groupe, seul le niveau z_3 n'appartient pas à la zone de marnage). Ce constat est logique puisque les pertes d'épaisseur les plus importantes mesurées lors de l'inspection l'ont été pour des niveaux appartenant à la zone d'immersion permanente. La modélisation probabiliste réalisée ici (aussi bien pour l'identification des variables aléatoires que pour le calcul X-SFEM) paraît satisfaisante puisqu'elle permet de bien représenter ce phénomène. On peut maintenant réaliser l'analyse de risque en étudiant la sensibilité des fonctions de coûts par rapport aux différents paramètres.

4.5.4 Analyse de coût

Pour conclure cette application, nous étudions la sensibilité des fonctions de coûts $\overline{E(C)}_d$ et $E(C)_{nd}$ données respectivement dans les équations (4.10) et (4.11) et dont nous rappelons les définitions

$$\overline{E(C)}_d = (C_{\text{inspection}} + C_{\text{réparation}})\mu((P_2)_{|ROC})$$
$$E(C)_{nd} = C_{\text{inspection}} + C_{\text{défaillance}} P_f \mu(P_3)_{|ROC})$$

On rappelle que les quantités $\mu((P_2)_{|ROC})$ et $\mu((P_3)_{|ROC})$ sont calculées pour une probabilité de présence de défaut $\gamma = 0.1$ correspondant aux pertes de matière importantes pouvant entraîner la ruine du composant.
Nous proposons tout d'abord une étude paramétrique en introduisant les paramètres adimensionnés suivants : $c_1 = \frac{C_{\text{inspection}}}{C_{\text{réparation}}}$ et $c_2 = \frac{C_{\text{réparation}}}{C_{\text{défaillance}}}$. Afin d'exprimer les fonctions de coûts en fonction de ces paramètres adimensionnés, il est nécessaire de les normaliser par le coût de défaillance $C_{\text{défaillance}}$. Les fonctions $\overline{E(C)}_d$ et $E(C)_{nd}$ peuvent alors être réécrites

$$\frac{\overline{E(C)}_d}{C_{\text{défaillance}}} = (c_1 c_2 + c_2)\mu((P_2)_{|ROC}) \tag{4.20}$$
$$\frac{E(C)_{nd}}{C_{\text{défaillance}}} = c_1 c_2 + P_f \mu((P_3)_{|ROC}) \tag{4.21}$$

Pour une plus grande clarté des notations, les fonctions de coûts normalisées seront toujours notées $\overline{E(C)}_d$ et $E(C)_{nd}$. Les paramètres c_1 et c_2 nous permettent d'introduire les ratios entre le coût d'inspection et de réparation et entre le coût de réparation et de défaillance [Schoefs *et al.* 2006]. On considère que c_1 est compris dans l'intervalle $[0, 1]$ et que c_2 est compris dans l'intervalle $[0, 0.1]$. Ainsi, le coût c_1 peut prendre des valeurs plus importantes que c_2, ce qui permet de respecter l'inégalité suivante entre les différents coûts : $C_{\text{inspection}} < C_{\text{réparation}} < C_{\text{défaillance}}$. La figure 4.12 présente l'évolution de la fonction $\overline{E(C)}_d$ pour les niveaux $z_1 = +2m$ et $z_6 = -1m$. Nous avons choisi de présenter les résultats pour ces deux niveaux car ils sont représentatifs : le niveau z_1 présente la probabilité de défaillance la plus faible et la courbe ROC la plus performante tandis que le niveau z_6 présente la probabilité de défaillance la plus élevée et la courbe ROC la moins performante. On peut constater que les différences sont minimes d'un niveau à l'autre. En effet, les courbes ROC sont proches les unes des autres quel que soit le niveau d'inspection. Or, le calcul de $\mu((P_2)_{|ROC})$, pour une probabilité γ donnée, ne dépend que de la courbe ROC considérée, ce qui explique que les évolutions de la fonction $\overline{E(C)}_d$ soient quasi identiques d'un niveau à l'autre. De plus, on remarque que la fonction $\overline{E(C)}_d$ est principalement dépendante du paramètre c_2 donnant le ratio entre $C_{\text{inspection}}$ et $C_{\text{réparation}}$. La figure 4.13 présente l'évolution de la fonction $E(C)_{nd}$ pour les

deux mêmes niveaux z_1 et z_6. Contrairement à la fonction $\overline{E(C)}_d$, la fonction $E(C)_{nd}$ est sensible au paramètre c_1 mais également au paramètre c_2 ; elle est donc sensible au coût de défaillance $C_{\text{défaillance}}$.

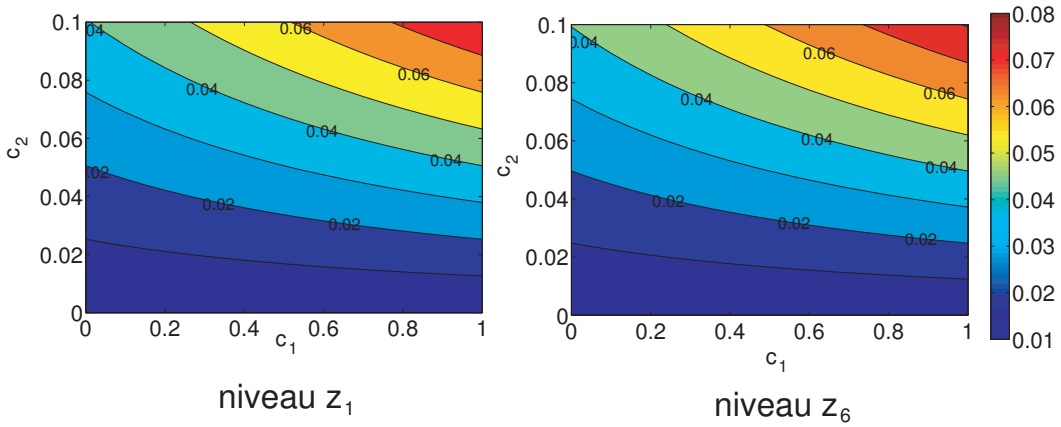


FIG. 4.12 – Evolution de la fonction de risque $\overline{E(C)}_d$ dans le plan (c_1, c_2) pour les niveaux d'inspection $z_1 = +2m$ et $z_6 = -1m$; $c_1 \in [0, 1]$ et $c_2 \in [0, 0.1]$.

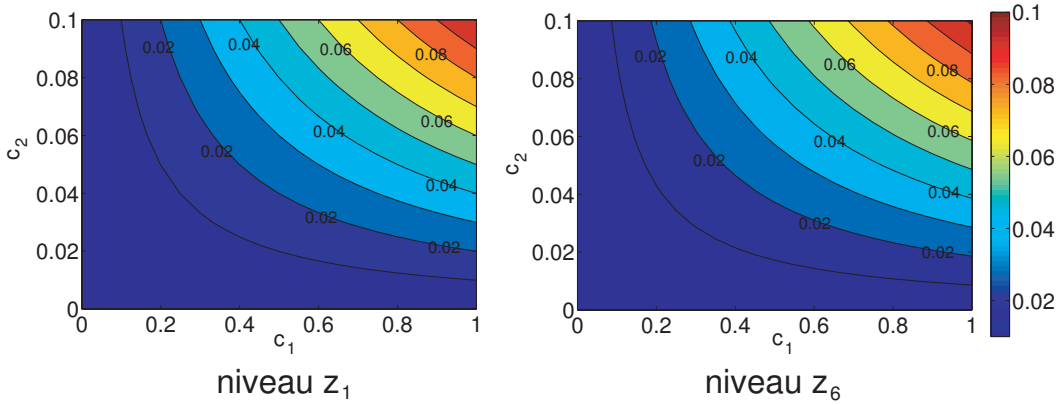


FIG. 4.13 – Evolution de la fonction de risque $E(C)_{nd}$ dans le plan (c_1, c_2) pour les niveaux d'inspection $z_1 = +2m$ et $z_6 = -1m$; $c_1 \in [0, 1]$ et $c_2 \in [0, 0.1]$.

On peut également constater que les écarts de résultats entre les deux niveaux sont peu visibles. Cependant, en réduisant les plages de variation des paramètres c_1 et c_2, certaines différences apparaissent. Les figures 4.14 et 4.15 présentent les mêmes résultats pour $c_1 \in [0.2, 0.3]$ et $c_2 \in [0.02, 0.03]$.

Pour la fonction $\overline{E(C)}_d$ (figure 4.14), on constate que les différences sont toujours aussi faibles entre les deux niveaux d'inspection. En revanche, pour la fonction $E(C)_{nd}$ (figure 4.15), les différences sont beaucoup plus nettes. Les coûts relatifs à la non détection de pertes de matière existantes sont plus importants pour le niveau $z_6 = -1m$. On rappelle que ce niveau, appartenant à la zone d'immersion permanente, présentait des conditions d'inspection difficiles et notamment une visibilité réduite. Ceci explique que, dans l'analyse de risque, la fonction $E(C)_{nd}$ présente des coûts plus importants pour ce niveau.

Tous ces résultats ont été déterminés en prenant la probabilité de présence de défaut (*i.e.* de perte de

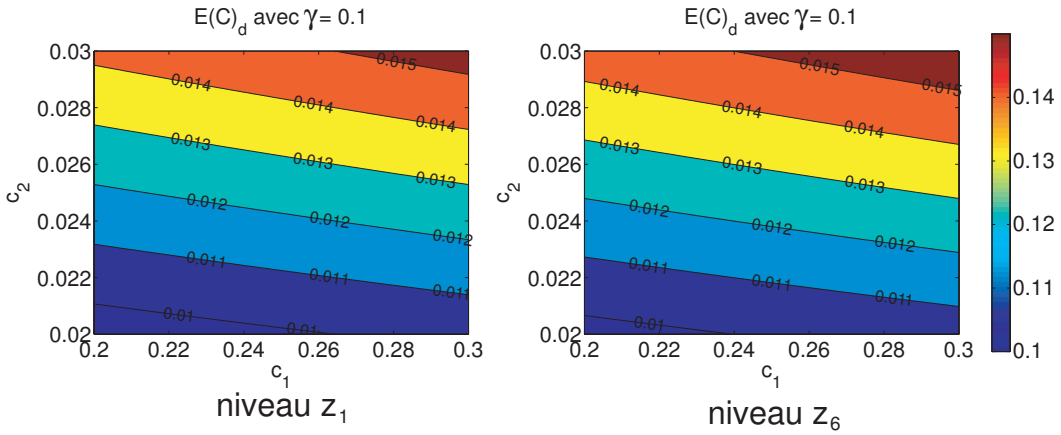


FIG. 4.14 – Evolution de la fonction de risque $\overline{E(C)}_d$ dans le plan (c_1, c_2) pour les niveaux d'inspection $z_1 = +2m$ et $z_6 = -1m$; $c_1 \in [0, 1]$ et $c_2 \in [0.02, 0.03]$.

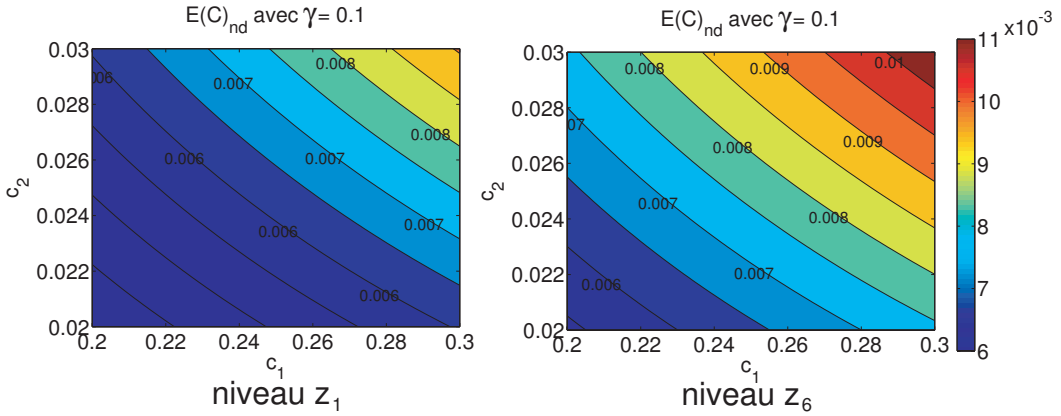


FIG. 4.15 – Evolution de la fonction de risque $E(C)_{nd}$ dans le plan (c_1, c_2) pour les niveaux d'inspection $z_1 = +2m$ et $z_6 = -1m$; $c_1 \in [0.2, 0.3]$ et $c_2 \in [0.02, 0.03]$.

matière) γ égale à 0.1. Cette valeur de γ correspond à des pertes de matière importantes c'est-à-dire en général à une probabilité d'occurrence faible. Pour conclure cette analyse de risque, on propose d'étudier la sensibilité des fonctions de coûts à ce paramètre. Pour cela, on propose d'utiliser trois valeurs pour la probabilité γ :

- $\gamma = 0.1$ qui représente une probabilité faible de perte de matière. Ce premier cas de figure représente en général les pertes de matières les plus élevées ;
- $\gamma = 0.5$ qui représente une probabilité moyenne de perte de matière. Ce second cas de figure représente en général les pertes de matière couramment rencontrées ;
- $\gamma = 0.9$ qui représente une probabilité importante de perte de matière. Ce dernier cas de figure représente en général les pertes de matières les plus faibles et presque systématiquement présentes sur une structure en milieu marin.

On fixe également les différents coûts présents dans les fonctions $\overline{E(C)}_d$ et $E(C)_{nd}$: on choisit de prendre $c_1 = 0.1$ et $c_2 = 0.02$.

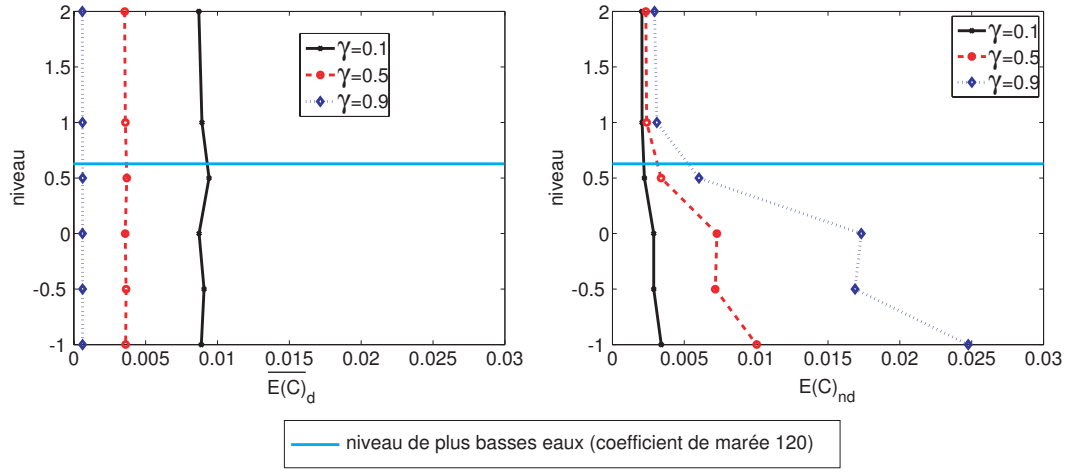


FIG. 4.16 – Evolution des fonctions $\overline{E(C)}_d$ et $E(C)_{nd}$ en fonction du niveau d'inspection z_i pour une probabilité de perte de matière $\gamma \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$.

La figure 4.16 présente l'évolution des fonctions de coûts en fonction du niveau d'inspection z_i pour les différents γ. On constate que la fonction $\overline{E(C)}_{nd}$ est presque constante en fonction du niveau et ce quelle que soit la probabilité γ. Elle est en revanche sensible à la probabilité γ puisqu'on observe des écarts importants entre les $\gamma = 0.1$ et $\gamma = 0.9$. Ces écarts viennent exclusivement de la quantité $\mu((P_2)_{|ROC})$ qui est très sensible à γ. Pour la fonction $E(C)_{nd}$, le constat est différent. On observe que la fonction varie de manière significative entre les différents niveaux. Cette variation provient de la quantité $\mu((P_3)_{|ROC})$ qui est beaucoup plus sensible aux courbes ROC que $\mu((P_2)_{|ROC})$. Ainsi, on peut clairement distinguer les zones de marnage et d'immersion permanente. Pour la zone de marnage, on constate que la probabilité γ a peu d'influence sur $E(C)_{nd}$. En revanche, pour la zone d'immersion permanente, les variations de $E(C)_{nd}$ en fonction de γ sont très importantes. Les inspections situées dans cette zone sont les moins performantes et peuvent donc conduire à des coûts très importants dus à la détection de pertes de matière inexistantes. Dans ce type d'analyse de risque, le choix de la probabilité γ se révèle clairement très important pour estimer les coûts de la politique de maintenance.

4.6 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons présenté un exemple d'utilisation de la méthode X-SFEM dans une analyse de risque d'un problème où la géométrie est sujette à une perte de matière aléatoire. Nous nous sommes intéressé à l'impact de la corrosion sur un ouvrage situé en milieu marin. Pour cela, nous nous sommes basés sur les résultats d'inspection d'un ouvrage cible. A partir d'un grand nombre de données significatif, nous avons introduit une modélisation probabiliste simple conduisant à considérer les pertes de matière dues à la corrosion comme un ensemble de variables aléatoires indépendantes correspondant chacune à un niveau de la structure. A partir des données existantes, nous avons utilisé une méthode d'identification de variable aléatoire consistant à déterminer sa décomposition sur le chaos polynomial. Cette méthode s'est révélée plus efficace que des méthodes d'identification classiques basées sur des lois de probabilité usuelles. En effet, l'estimation du maximum de vraisemblance et la modélisation

des courbes ROC ont montré que cette méthode était plus adaptée pour la modélisation des variables aléatoires liées à notre problème. Ces variables identifiées ont ensuite été utilisées dans une analyse de risque permettant d'étudier la performance des programmes d'inspection. Dans cette analyse, nous avons étudié un composant structurel d'un ouvrage situé en milieu marin. Nous avons supposé que ce composant pouvait se situer à différents niveaux de la structure et qu'il était donc soumis à la fois à des niveaux de corrosion variés mais aussi à des conditions d'inspection différentes. Pour résoudre le problème de géométrie aléatoire, nous avons naturellement utilisé la méthode X-SFEM. Nous avons montré qu'un unique calcul X-SFEM était suffisant. Le post-traitement de la solution nous a permis de déterminer les probabilités de défaillance du composant liées à chaque niveau d'inspection. Ces probabilités se sont alors révélées plus importantes dans la zone d'immersion permanente. D'autre part, ces probabilité ont permis de compléter l'analyse de risque. Cette dernière a montré que les inspections réalisées dans des conditions difficiles (zone d'immersion permanente) conduisaient à des surcoûts importants liés aux mauvaises détections. Des perspectives sont ouvertes afin d'optimiser le nombre et la localisation des inspections sur une période de référence donnée.

Conclusion - Perspectives

Dans ce mémoire, une nouvelle stratégie de calcul a été proposée pour l'analyse de problèmes mécaniques à géométrie aléatoire. Cette méthode, baptisée méthode éléments finis stochastiques étendus (X-SFEM), est une extension au cadre stochastique de la méthode déterministe X-FEM. Elle se base sur la méthode des éléments finis stochastiques spectraux, conduisant à une représentation de la solution du problème sur la base du chaos polynomial ou ses généralisations.

Nous avons développé dans un premier temps la méthode X-SFEM pour des problèmes de forme aléatoire où l'aléa porte sur la frontière du domaine. La géométrie aléatoire est représentée de manière implicite en utilisant la technique des level sets. Il est alors possible de travailler sur un domaine déterministe de référence permettant de définir aisément un espace d'approximation. Pour la définition de l'approximation, nous avons utilisé une projection de Galerkin pour laquelle nous avons montré qu'un soin particulier devait être apporté à l'intégration stochastique pour la construction de la matrice et du second membre du problème discrétisé. Pour réaliser convenablement cette intégration stochastique, nous avons proposé une méthode basée sur un découpage du domaine stochastique. Différents exemples numériques nous ont permis de montrer l'efficacité de la méthode X-SFEM et des stratégies d'intégration proposées. Le cas d'une modélisation probabiliste complexe a notamment été étudié et a montré que ces stratégies d'intégration étaient nécessaires pour obtenir une solution de qualité. D'autre part, dans l'un des exemples numériques, nous avons utilisé une méthode de projection classique pour définir l'approximation, méthode qui s'est révélée être bien moins précise que la projection de Galerkin.

Nous nous sommes ensuite intéressés à des problèmes hétérogènes possédant une interface matérielle aléatoire. Dans ce cas, nous avons développé la méthode X-SFEM pour des problèmes où seule l'interface était aléatoire et où l'ensemble de la frontière du domaine était déterministe. La technique des level sets a alors été utilisée pour représenter l'interface aléatoire. Nous avons montré qu'il était nécessaire d'introduire un enrichissement de l'espace d'approximation. En effet, les solutions de ces problèmes possèdent des discontinuités dans leurs dérivées au passage de l'interface. Or, la méthode X-SFEM étant basée sur l'utilisation d'un maillage éléments finis ne respectant pas la surface physique de la structure, il n'est pas possible, avec un espace d'approximation classique, de représenter correctement des fonctions à dérivées discontinues. L'enrichissement de l'espace d'approximation par la méthode de la partition de l'unité permet de représenter ce type de fonction. Dans ce mémoire, nous avons discuté du choix de l'enrichissement. Nous avons tout d'abord proposé d'utiliser une fonction d'enrichissement classiquement employée dans la méthode X-FEM en l'étendant au cadre stochastique. Si cette fonction d'enrichissement permet d'améliorer la solution, elle n'est cependant pas optimale car elle possède une mauvaise régularité stochastique.

Nous avons alors proposé une nouvelle fonction d'enrichissement plus régulière au niveau stochastique et donc mieux adaptée au caractère aléatoire de ce type de problème. Les exemples numériques ont montré que ses performances étaient meilleures et que les taux de convergence spatial et stochastique étaient satisfaisants.
Enfin, nous avons également utilisé une méthode de projection pour la définition de l'approximation. Contrairement aux problèmes de forme aléatoire, cette dernière s'est révélée efficace pour traiter des problèmes d'interface matérielle aléatoire. Le dernier exemple, pour lequel nous avons calculé l'opérateur homogénéisé aléatoire, a montré que les résultats obtenus étaient équivalents à ceux obtenus avec une projection de Galerkin.

Enfin, nous avons proposé une utilisation de la méthode X-SFEM pour des problèmes d'analyse de risque. L'application concerne des ouvrages situés en milieu littoral et soumis aux effets de la corrosion. Une analyse mécanique d'une structure soumise aux effets de la corrosion, et donc à des pertes de matière, demande la résolution d'un problème de forme aléatoire. Pour réaliser cette étude, nous nous sommes basés sur des données de perte d'épaisseur issues d'une campagne d'inspection d'un quai sur pieux métalliques. Nous avons proposé une modélisation probabiliste de ces données permettant de caractériser la variabilité intrinsèque de la géométrie mais également l'erreur sur de mesure. Ces quantités ont été représentées par des variables aléatoires identifiées à l'aide d'une méthode consistant à déterminer leurs décompositions sur la base du chaos polynomial. Nous avons montré que, pour notre problème, cette méthode s'avérait plus efficace que des méthodes d'identification classiques basées sur des lois de probabilité usuelles choisies *a priori*. La modélisation des courbes de performance de la technique d'inspection (courbes ROC) et l'estimation de la fonction de vraisemblance ont démontré les performances de cette méthode. Les variables identifiées, caractérisant les pertes de matière et l'erreur sur les mesures, ont été utilisées dans une analyse de risque. Cette analyse permet d'étudier les performances des techniques d'inspection et leur impact sur la ré-analyse de la structure. Nous nous sommes focalisés sur un même composant structurel pouvant se situer à différents niveaux de l'ouvrage. En fonction de sa position, ce composant est soumis à des niveaux variés de corrosion et à des conditions d'inspection différentes. Pour chaque niveau sur la structure, le modèle de risque nécessitait l'évaluation de la probabilité de défaillance du composant. Pour la déterminer, nous avons utilisé la méthode X-SFEM afin de résoudre le problème de forme aléatoire. Nous avons montré qu'un unique calcul X-SFEM était suffisant pour l'ensemble de l'analyse. Chaque probabilité de défaillance, associée à un niveau sur la structure, a alors été évaluée par un post-traitement adapté de la solution. Deux conclusions importantes se sont dégagées de cette analyse. Tout d'abord, les probabilités de défaillance du composant se sont révélées plus importantes dans la zone d'immersion permanente. D'autre part, l'analyse de risque a montré que les conditions difficiles d'inspection conduisaient à des surcoûts plus importants dans cette même zone d'immersion. Ce dernier constat est important en vue d'une optimisation des plans d'inspection et de la politique IMR régissant la maintenance de l'ouvrage.

Ce travail de thèse ouvre des perspectives à plusieurs niveaux. Une première perspective à court terme porte sur les problèmes de fissuration aléatoire. Dans un cadre déterministe, la méthode X-FEM a historiquement été développée pour traiter ces problèmes et éviter les remaillages qu'ils peuvent nécessiter.

La méthode X-SFEM doit également pouvoir traiter ces problèmes dans un cadre aléatoire. Comme pour les problèmes d'interface matérielle aléatoire, il sera nécessaire d'utiliser un enrichissement de l'espace d'approximation pour représenter les champs solutions. La stratégie d'enrichissement devra alors certainement être adaptée au cadre stochastique du problème comme nous l'avons fait pour les problèmes d'interface matérielle aléatoire. A long terme, l'objectif est de développer une méthode capable de prédire la propagation aléatoire de la fissure (direction et vitesse).

D'autre part, avec l'utilisation d'une projection de Galerkin, la résolution de problèmes en grande dimension stochastique (ou avec un haut degré d'approximation stochastique) peut conduire à des coûts de calcul élevés mais également à des problèmes de stockage mémoire. Afin de diminuer les temps de calcul dus à la construction du problème éléments finis stochastiques, une première piste consisterait à exploiter le caractère fortement parallèle de la méthode. Une seconde piste permettant de rendre la méthode plus performante, consisterait à utiliser des méthodes de résolution alternatives récemment proposées [Nouy 2008]. Ces méthodes se révèlent en effet plus efficaces que des solveurs usuels pour résoudre des problèmes éléments finis stochastiques classiques, *i.e.* où seuls les paramètres matériau et les chargements sont considérés aléatoires. Ces mêmes méthodes pourraient de plus avoir un effet régularisant, permettant d'alléger le coût d'intégration des problèmes discrétisés.

Ces différentes pistes pour améliorer la méthode ne concernent que la prédiction numérique, le modèle mécanique aléatoire étant donné. Une autre perspective importante concerne la modélisation des paramètres d'entrée définissant la géométrie du modèle. Les géométries utilisées dans ce mémoire pour les différents exemples numériques, ont été représentées à l'aide de fonction level sets simples. Dans un cadre général, il sera essentiel de disposer en amont d'une méthode d'identification de géométries aléatoires à partir d'observations (une collection d'images par exemple). Il sera alors possible de représenter des géométries plus complexes et réalistes à l'aide des level sets aléatoires.

Enfin, il sera intéressant de coupler la méthode X-SFEM à des approches multi-échelles. Si on suppose que l'aléa sur la géométrie ne peut être caractérisé qu'à une échelle microscopique, une approche multi-échelles permettra alors de déterminer l'impact d'incertitudes géométriques localisées sur le comportement macroscopique d'une structure.

Bibliographie

[Arques 1982]
P.Y. Arques. *Decisions en traitement du signal*. Editions Masson, Paris, 1982.

[Babuska 1973]
I. Babuska. The finite element method with penalty. *Mathematics of Computation*, 27(122) : 221–228, 1973.

[Babuska et Chleboun 2002]
I. Babuska et J. Chleboun. Effects of uncertainties in the domain on the solution of neumann boundary value problems in two spatial dimensions. *Mathematics of Computation*, 71(240) : 1339–1370, 2002.

[Babuska et Chleboun 2003]
I. Babuska et J. Chleboun. Effects of uncertainties in the domain on the solution of dirichlet boundary value problems. *Numer. Math.*, 93(4) : 583–610, 2003.

[Babuska *et al.* 2007]
I. Babuska, F. Nobile et R. Tempone. A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM J. Num. Anal.*, 45(3) : 1005–1034, 2007.

[Babuska *et al.* 2005]
I. Babuska, R. Tempone et G. E. Zouraris. Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method : the stochastic formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 : 1251–1294, 2005.

[Barnouin *et al.* 1993]
B. Barnouin, L. Lemoine, W.D. Dover, J. Rudlin, S. Fabbri, G. Rebourcet, D. Topp, R. Kare et D. Sangouard. Underwater inspection reliability trials for offshore structures. Dans *Proceeding of the 12th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, volume 3, pages 883–893. ASME NY editor, 1993.

[Benth et Gjerde 1998]
F. E. Benth et J. Gjerde. Convergence rates for finite element approximations of stochastic partial differential equations. *Stochastics and Stochastics Rep.*, 63(3-4) : 313–326, 1998.

[Berveiller *et al.* 2006]
M. Berveiller, B. Sudret et M. Lemaire. Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression. *European Journal of Computational Mechanics*, 15 : 81–92, 2006.

[Bonnet *et al.* 2008]
S. Bonnet, F. Schoefs, J. Ricardo et M. Salta. Statistical study and probabilistic modeling of error when building chloride profiles. Dans *proceeding of 1st International Conference on Construction Heritage in Coastal and Marine Environments (MEDACHS 2008), 28-30 janvier 2008, Lisbonne Portugal*, 2008.

[Boéro *et al.* 2009]
J. Boéro, F. Schoefs et R. Melchers. Statistical analysis of corrosion process along french coasts. Dans *présenté à ICOSSAR'09, Osaka Japon, 13-19 septembre 2009*, 2009.

[Brezzi 1974]
F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddlepoint problems arising from lagrange multipliers. *RAIRO Anal. Numér.*, R-2 : 129–151, 1974.

[Caflisch 1998]
R. E. Caflisch. Monte carlo and quasi-monte carlo methods. *Acta. Numer.*, 7 : 1–49, 1998.

[Canuto et Kozubek 2007]
C. Canuto et T. Kozubek. A fictitious domain approach to the numerical solution of pdes in stochastic domains. *Numerische Mathematik*, 107(2) : 257–293, 2007.

[Clément *et al.* 2008]
A. Clément, F. Schoefs, J.B. Memet, J. Boéro et A. Nouy. Overview of corrosion impact for marine structures : analysis of french structures in several harbours. Dans *proceeding of 1st International Conference on Construction Heritage in Coastal and Marine Environments (MEDACHS 2008), 28-30 janvier 2008, Lisbonne Portugal*, 2008.

[Deb *et al.* 2001]
M. Deb, I. Babuska et J. T. Oden. Solution of stochastic partial differential equations using galerkin finite element techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 : 6359–6372, 2001.

[Demmel 1997]
J.W. Demmel. *Applied numerical linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1997.

[Desceliers *et al.* 2006]
C. Desceliers, R. Ghanem et C. Soize. Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 66(6) : 978–1001, 2006.

[Desceliers et Soize 2007]
C. Desceliers et C. Soize. Identification of chaos representations of elastic properties of random media using experimental vibration tests. *compmech*, 39(6) : 831–838, 2007.

[Ditlevsen et Madsen 1996]
O. Ditlevsen et H. O. Madsen. *Structural reliability methods*. J. Wiley and Sons, Chichester, 1996.

[Dolbow *et al.* 2000]
J. Dolbow, N. Moës et T. Belytschko. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 36(3-4) : 235–260, 2000.

[Faravelli 1989]
L. Faravelli. Response surface approach for reliability analysis. *J. Engrg. Mech.*, 115(12) : 2763–2781, 1989.

[Forest *et al.* 2001]
S. Forest, G. Cailletaud, J. Besson et J.L. Chaboche. *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermes Science Publications, 2001.

[Frauenfelder *et al.* 2005]
P. Frauenfelder, C. Schwab et R. A. Todor. Finite elements for elliptic problems with stochastic coefficients. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(2-5) : 205–228, 2005.

[Füscök *et al.* 2000]
F. Füscök, C. Muller et M. Scharmach. Human factors : the nde reliability of routine radiographic film evaluation. Dans *Proceedings of the 15th World Conference on Non Destructive Testing*, volume 3, 2000.

[Ghanem 1999]
R. Ghanem. Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168 : 19–34, 1999.

[Ghanem et Doostan 2006]
R. Ghanem et A. Doostan. On the construction and analysis of stochastic models : characterization and propagation of the errors associated with limited data. *Journal of Computational Physics*, 217(1) : 63–81, 2006.

[Ghanem *et al.* 2007]
R. Ghanem, G. Saad et A. Doostan. Efficient solution of stochastic systems : application to the embankment dam problem. *Structural Safety*, 29(3) : 238–251, 2007.

[Ghanem et Spanos 1991]
R. Ghanem et P. Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer, Berlin, 1991.

[Glowinski *et al.* 1994]
R. Glowinski, T. Pan et J. Périaux. A fictitious domain method for dirichlet problems and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 111 : 283–303, 1994.

[Hasofer et Lind 1974]
A. M. Hasofer et N. C. Lind. Exact and invariant second-moment code format (an exact and invariant first order reliability format). *J. Engrg. Mech.*, 100 : 111–121, 1974.

[Keese et Mathhies 2003]
A. Keese et H. G. Mathhies. Numerical methods and smolyak quadrature for nonlinear stochastic partial differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 83, 2003.

[Keese et Mathhies 2005]
A. Keese et H. G. Mathhies. Hierarchical parallelisation for the solution of stochastic finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 83 : 1033–1047, 2005.

[Ladevèze et Florentin 2006]
P. Ladevèze et E. Florentin. Verification of stochastic models in uncertain environments using the constitutive relation error method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(1-3) : 225–234, 2006.

[Ladevèze *et al.* 2006]
P. Ladevèze, G. Puel et T. Romeuf. Lack of knowledge in structural model validation. *cmame*, 195 : 4697–4710, 2006.

[Lagarias *et al.* 1998]
J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright et P.E. Wright. Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, 9 : 112–147, 1998.

[Landolt 1993]
D. Landolt. *Corrosion et chimie de surface des matériaux*. Traité des matériaux - Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1993.

[Le Maître *et al.* 2001]
O.P. Le Maître, O.M. Knio, H.N. Najm et R.G. Ghanem. A stochastic projection method for fluid flow. i. basic formulation. *J. Comput. Phyics*, 173 : 481–511, 2001.

[Le Maître *et al.* 2002]
O.P. Le Maître, M.T. Reagan, H.N. Najm, R.G. Ghanem et O.M. Knio. A stochastic projection method for fluid flow. ii. random process. *J. Comput. Phyics*, 181 : 9–44, 2002.

[Le Maitre *et al.* 2004]
O. P. Le Maitre, O. M. Knio, H. N. Najm et R. G. Ghanem. Uncertainty propagation using Wiener-Haar expansions. *Journal of Computational Physics*, 197(1) : 28–57, 2004.

[Le Maître *et al.* 2004]
O. P. Le Maître, H. N. Najm, R. G. Ghanem et O. M. Knio. Multi-resolution analysis of wiener-type uncertainty propagation schemes. *Journal of Computational Physics*, 197(2) : 502–531, 2004.

[Legrain *et al.* 2005]
G. Legrain, N. Moës et E. Verron. Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the extended finite element method. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 63 : 290–314, 2005.

[Lemaire 2005]
M. Lemaire. *Fiabilité des structures - Couplage mécano-fiabiliste statique*. Hermes, 2005.

[Loève 1977]
M. Loève. *Probability Theory. I, fourth edition, in : Graduate Texts in Mathematics, vol. 45*. Springer-Verlag, New York, 1977.

[Loève 1978]
M. Loève. *Probability Theory. II, fourth edition, in : Graduate Texts in Mathematics, vol. 46*. Springer-Verlag, New York, 1978.

[Mathelin *et al.* 2005]
I. Mathelin, M.Y. Hussaini et T.A. Zang. Stochastic approaches to uncertainity quantification in cfd simulations. *Numerical Algorithms*, 38 : 209–236, 2005.

[Mathelin et Maître 2007]
L. Mathelin et O. Le Maître. Dual-based a posteriori error estimate for stochastic finite element methods. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 2 : 83–116, 2007.

[Matthies et Keese 2005]
H. G. Matthies et A. Keese. Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16) : 1295–1331, 2005.

[Melchers et Wells 2006]
R.E. Melchers et T. Wells. Models for the anaerobic phases of marine immersion corrosion. *Corrosion Science*, 48(7) : 1791–1811, 2006.

[Melenk et Babuska 1996]
J. M. Melenk et I. Babuska. The partition of unity method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39 : 289–314, 1996.

[Memet 2000]
J.B. Memet. *La corrosion marine des structures métalliques portuaires : étude des mécanismes d'amorçage et de croissance des produits de corrosion*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, 164 p, 2000.

[Michel *et al.* 1999]
J.C. Michel, H. Moulinec et P. Suquet. Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1-4) : 109–143, 1999.

[Miegroet *et al.* 2005]
L. Van Miegroet, N. Moës, C. Fleury et P. Duysinx. Generalized shape optimization based on level set method. Dans Brazil J. Herskowitz (ed.), Rio de Janeiro, éditeur, *Proceedings of the 6th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, May 30-June 3*, 2005.

[Moan *et al.* 1997]
T. Moan, O.T. Vårdal, N.C. Hellevig et Skjoldli. In-service observations of cracks in north sea jackets. a study on initial crack depth ans pod values. Dans *Proceedings of 16th international conference on Offchore Mechanics and Arctic Engineering (O.M.A.E.1997)*, volume 2, pages 189–197. ASME NY editor, 1997.

[Moës *et al.* 2006]
N. Moës, E. Béchet et M. Tourbier. Imposing dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 67(12) : 1641–1669, 2006.

[Moës *et al.* 2003]
N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud et J.F. Remacle. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 192 : 3163–3177, 2003.

[Moës *et al.* 1999]
N. Moës, J. Dolbow et T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 46 : 131–150, 1999.

[Morokoff et Caflish 1995]
W. Morokoff et R. Caflish. Quasi-monte carlo integrations. *Journal of Computational Physics*, 122 : 218–230, 1995.

[Niederreiter 1992]
H. Niederreiter. *Random Number Generation and quasi-Monte Carlo Methods*. SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[Nitsche 1971]
J. A. Nitsche. Uber ein variationsprinzip zur Lösung dirichlet-problemen bei verwendung von Teilräumen, die keinen randbedingungen unteworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 36 : 9–15, 1971.

[Nouy 2007]
A. Nouy. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering*, 196(45-48) : 4521–4537, 2007.

[Nouy 2008]
A. Nouy. Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008.

[Nouy *et al.* 2008]
A. Nouy, A. Clément, F. Schoefs et N. Moës. An extended stochastic finite element method for solving stochastic partial differential equations on random domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51-52) : 4663–4682, 2008.

[Nouy *et al.* 2007]
A. Nouy, F. Schoefs et N. Moës. X-sfem, a computational technique based on x-fem to deal with random shapes. *European Journal of Computational Mechanics*, 16(2) : 277–293, 2007.

[Papadrakakis et Papadopoulos 1996]
M. Papadrakakis et V. Papadopoulos. Robust and efficient methods for stochastic finite element analysis using monte carlo simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134 : 325–340, 1996.

[Pellissetti et Ghanem 2000]
M. F. Pellissetti et R. G. Ghanem. Iterative solution of systems of linear equations arising in the context of stochastic finite elements. *Advances in Engineering Software*, 31 : 607–616, 2000.

[Puel 2004]
G. Puel. *Sur la théorie des méconnaissances en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Superieure de Cachan, France, 2004.

[Radojicic *et al.* 2001]
A. Radojicic, S.F. Bailey et E. Brühwiler. Probabilistic models of cost for the management of existing structures. *Life-Cycle Cost Analysis and Design of Civil Infrastructure Systems*, 2001.

[Rajashekhar et Ellingwood 1993]
M. R. Rajashekhar et B. R. Ellingwood. A new look at the response surface approach for reliability analysis. *Structural Safety*, 12 : 205–220, 1993.

[Reagan *et al.* 2003]
M.T. Reagan, H.N. Najm, R.G. Ghanem et O.M. Knio. Uncertainty quantification in reacting flow simulations through non-intrusive spectral projection. *Combustion and Flames*, 132 : 545–555, 2003.

[Rethoré *et al.* 2007]
J. Rethoré, F. Hild et S. Roux. Shear-band capturing using a multiscale extended digital image correlation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(49-52) : 5016–5030, 2007.

[Rguig et Schoefs 2005]
M. Rguig et F. Schoefs. Modélisation par surface surface de réponse d'une structure fissurée : cas d'une plate-forme offshore. 2005.

[Rouhan et Schoefs 2003]
A. Rouhan et F. Schoefs. Probabilistic modeling of inspection results for offshore structures. *Structural Safety*, 25 : 379–399, 2003.

[Sachdeva *et al.* 2006]
S. K. Sachdeva, P. B. Nair et A. J. Keane. Hybridization of stochastic reduced basis methods with polynomial chaos expansions. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(2) : 182–192, 2006.

[Sanchez-Palencia 1980]
E. Sanchez-Palencia. Non homogeneous media and vibration theory. *Lecture Note in Physics*, 127, 1980.

[Schoefs et Clément 2004]
F. Schoefs et A. Clément. Multiple inspection modeling for decision making and management of jacket off-shore platforms : effect of false alarms. Dans *Proceedings of First International Forum on Engineering Decision Making (IFED'04), december 5-9 2004, Stoos, Switzerland*, 2004.

[Schoefs *et al.* 2006]
F. Schoefs, M. Rguig et A. Clément. Risk assessment based on performantial criterion for inspection of offshore structures in presence of large cracks. *Revue Européenne de Génie Civil, special issue : reliability of materials and structures*, 10(5) : 531–547, 2006.

[Sethian 1999]
J.A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.

[Shafer 1976]
G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.

[Shinozuka et Yamakasi 1988]
M. Shinozuka et F. Yamakasi. Stochastic finite element ananlysis : an introduction. *Stochastic Structural Dynamics, Progress in Therory ans Applications*, pages 241–291, 1988.

[Smolyak 1963]
S. A. Smolyak. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. *Sov. Math. Dokl*, 3 : 240–243, 1963.

[Soize 2000]
C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties on reduced matrix model in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3) : 277–294, 2000.

[Soize 2001]
C. Soize. Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 109(5) : 1979–1996, 2001.

[Soize 2008]
C. Soize. Construction of probability distributions in high dimension using the maximum entropy principle : Applications to stochastic processes, random fields and random matrices. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 2008.

[Soize et Ghanem 2004]
C. Soize et R. Ghanem. Physical systems with random uncertainties : chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(2) : 395–410, 2004.

[Stewart *et al.* 2004]
M.G. Stewart, A.C. Estes et D.M. Frangopol. Bridge deck replacement for minimum expected cost under multiple reliability constraints. *journal of Structural Engineering*, 2004.

[Sukumar *et al.* 2001]
N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës et T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 : 6183–6200, 2001.

[Tartakovsky et Xiu 2006]
D. M. Tartakovsky et D. B. Xiu. Stochastic analysis of transport in tubes with rough walls. *Journal of Computational Physics*, 217 : 248–259, 2006.

[Thompson *et al.* 1985]
J. Thompson, Z. Warsi et C. Mastin. *Numerical Grid Generation*. Elsevier Science, Amsterdam, 1985.

[Turner *et al.* 1956]
M. J. Turner, R. W. Clough, H.C. Martin et L. J. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Sci.*, 23(9) : 805–823, 1956.

[Van den Nieuwenhoff et Coyette 2003]
B. Van den Nieuwenhoff et J. P. Coyette. Modal approaches for the stochastic finite element analysis of structures with material and geometric uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 : 3705–3729, 2003.

[Wan et Karniadakis 2005]
X. Wan et G.E. Karniadakis. An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic diffential equations. *J. Comp. Phys.*, 209 : 617–642, 2005.

[Wiener 1938]
N. Wiener. The homogeneous chaos. *Am. J. Math.*, 60 : 897–936, 1938.

[Xiu et Karniadakis 2002]
D. B. Xiu et G. E. Karniadakis. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(2) : 619–644, 2002.

[Xiu et Tartakovsky 2006]
D. B. Xiu et D. M. Tartakovsky. Numerical methods for differential equations in random domains. *SIAM J. Sci. Comput.*, 28(3) : 1167–1185, 2006.

[Zadeh 1978]
L. Zadeh. Fuzzy sets as the basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, (1) : 3–28, 1978.

[Zienkiewicz *et al.* 2005]
0.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor et J.Z. Zhu. *The Finite Element Method : its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 6^{éme} édition, 2005.

Annexe A

Espace probabilisé et variables aléatoires

A.1 Espace probabilisé et variables aléatoires

On introduit un ensemble Θ dont les éléments $\theta \in \Theta$ sont appelés événements élémentaires. On munit Θ d'une tribu ou σ-algèbre notée $\mathcal{B}$. Un élément $A \in \mathcal{B}$ est alors appelé événement. Le couple $(\Theta, \mathcal{B})$ est appelé espace probabilisable. L'introduction d'une mesure de probabilité P permet de probabiliser l'espace probabilisable $(\Theta, \mathcal{B})$. Le triplet $(\Theta, \mathcal{B}, P)$ obtenu forme l'espace probabilisé.
Considérons une application $X : \theta \in \Theta \to X(\theta) \in \mathbb{R}$. On dira qu'à une cause $\theta \in \Theta$, X associe une conséquence $X(\theta) \in \mathbb{R}$. Le principe de causalité conduit à équiper $\mathbb{R}$ d'une tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad X^{-1}(B) \subset \mathcal{B}$$

Ce même principe de causalité conduit également à introduire une probabilité P_X sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad P_X(B) = \int_B dP_X(x) = P(X^{-1}(B))$$

L'application X est alors appelée variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Theta, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et P_X est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X. P_X est caractérisée par la fonction de répartition F_X définie par :

$$F_X(x) = P_X(B_x) = \int_{y \in B_x} dP_X(y) \quad \text{où} \quad B_x =]-\infty, x]$$

Si la mesure de probabilité $dP_X(x)$ admet une densité $p_X(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue dx, soit

$$dP_X(x) = p_X(x)dx$$

alors la fonction p_X est appelée fonction de densité de probabilité de X. Un vecteur aléatoire est une variable aléatoire $\mathbf{X}$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$. On notera $\mathbf{X} = (X_1 ... X_n)^T$ où les composantes X_i sont des

variables aléatoires.

A.2 Espaces fonctionnels, moments et caractéristiques du second ordre de variables aléatoires

Dans la suite, $f(X)$ et $g(X)$ désignent des fonctions de variables aléatoires et donc des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est dite d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si

$$E(|f|^p) < \infty$$

où E désigne l'espérance mathématique. L'espérance mathématique de la variable aléatoire $f(X)$ est définie par

$$E(f) = \int_\Theta f(x) dP_X(x)$$

L'ensemble des variables aléatoires d'ordre p définies sur l'espace probabilisé $(\Theta, \mathcal{B}, P_X)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ constitue un espace vectoriel noté $L^p(\Theta, dP_X; \mathbb{R})$. On pourra noter cet espace $L^p(\Theta, dP_X)$ ou encore $L^p(\Theta)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la nature de Θ. Dans le cas $p = 2$, l'espace $L^2(\Theta)$ est appelé espace des variables aléatoires du second ordre ou de carré sommable. Il s'agit d'un espace de Hilbert si on le munit du produit scalaire suivant :

$$< f, g >_{L^2(\Theta)} = \int_\Theta f(x) g(x) dP_X(x)$$

Le moment d'ordre $i \in \mathbb{N}$ de la variable aléatoire f est défini par

$$m_i(f) = E(f^i) = \int_\mathbb{R} f(x)^i dP_X(x)$$

Si la variable aléatoire est d'ordre p, ses moments seront alors définis jusqu'à l'ordre p.
Les caractéristiques du second ordre d'une variable aléatoire sont des quantités ne dépendant que des moments inférieurs ou égaux à 2.

Moyenne : La moyenne de f, également appelée espérance mathématique et notée μ_f, est le moment d'ordre 1 de f défini par :

$$\mu_f = m_1(f) = E(f) = \int_\mathbb{R} f(x) dP_X(x)$$

Variance : La variance de f, notée v_f, est définie par

$$v_f = E((f - \mu_f)^2) = E(f^2) - \mu_f^2$$

Écart-type : L'écart-type de f, notée σ_f est défini par

$$\sigma_f = \sqrt{v_f} = \sqrt{E(f^2 - \mu_f^2)}$$

Corrélation : La corrélation des variables f et g, notée R_{fg} est définie par

$$R_{fg} = E(fg) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dP_X(x)$$

Covariance : La covariance des variables f et g, notée C_{fg} est définie par

$$C_{fg} = E((f - \mu_f)(g - \mu_g)) = R_{fg} - \mu_f \mu_g$$

On appellera coefficient de corrélation de f et g la quantité ρ_{fg} tel que $\rho_{fg} = \dfrac{C_{fg}}{\sigma_f \sigma_g}$ et on notera que ce coefficient est un scalaire compris entre -1 et 1.

Annexe B

Représentation de variables aléatoires non régulières au niveau stochastique

La décomposition sur le chaos polynomial se révèle un outil adapté pour représenter une fonction de variables aléatoires $u(\boldsymbol{\xi})$ quand celle-ci est régulière sur $\boldsymbol{\Theta}$. Dans le cas où cette fonction est moins régulière (par exemple s'il s'agit d'une fonction continue mais à dérivées discontinues sur $\boldsymbol{\Theta}$), un degré p élevé sera nécessaire afin de représenter au mieux cette fonction. Dans ce cas de figure, d'autres types de représentation peuvent être utilisés comme les éléments finis au niveau stochastique [Deb *et al.* 2001, Wan et Karniadakis 2005] ou la décomposition en multi-ondelettes [Le Maitre *et al.* 2004, Le Maître *et al.* 2004]. Ces deux représentations sont présentées dans cette annexe.

B.1 Éléments finis $h-p$

L'idée des éléments finis au niveau stochastique est de définir des bases de fonctions polynômiales par morceaux permettant ainsi de représenter une fonction de variables aléatoires qui n'est pas régulière sur l'ensemble du domaine stochastique $\boldsymbol{\Theta} = \Theta_1 \times ... \times \Theta_m$. Nous supposons que les Θ_i sont des ensembles bornés de $\mathbb{R}$. Dans le cas de variables aléatoires quelconques, on devra se ramener, par transformations iso-probabilistes, à des variables à supports bornés comme des variables uniformes. Sur chaque dimension stochastique, nous introduisons un maillage $\mathcal{T}_k^i$ de Θ_i composé de n_i éléments. On note $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_k^1 \otimes ... \otimes \mathcal{T}_k^m$ le maillage rectangulaire correspondant de $\boldsymbol{\Theta}$. On choisit alors comme base $\{h_{\alpha_i}^i\}$ des fonctions polynômiales par élément tel que pour un élément $\tau_i \in \mathcal{T}_k^i$, la restriction de h_n^i à τ_i vérifie :

$$h_{\alpha_i}^i(\xi)_{|\tau_i} \in span(\xi^{q_i}, q_i \in \mathbb{N} \text{ et } q_i \leqslant p_i)$$

où p_i est le degré d'approximation sur Θ_i. La restriction d'une fonction H_α de $\mathcal{S}_P$ à un élément τ de $\mathcal{T}_k$ vérifie donc :

$$H_\alpha(\boldsymbol{\xi})_{|\tau} \in span\Big(\prod_{i=1}^{m} \xi_i^{q_i}, q_i \in \mathbb{N} \text{ et } q_i \leqslant p_i\Big) \tag{B.1}$$

On choisira pour $\mathcal{I}_P$ l'ensemble de multi-indices suivant :

$$\mathcal{I}_P = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in (\mathbb{N}^2)^m, \alpha_i = (j_i, q_i), 1 \leqslant j_i \leqslant n_i, 0 \leqslant q_i \leqslant p_i\}$$

Le nombre de fonction de base P de $\mathcal{S}_P$ est alors

$$P = \prod_{i=1}^{m} n_i(p_i + 1)$$

L'utilisation de ce type de base pour l'approximation au niveau stochastique permet d'utiliser les outils classiques de la méthode des éléments finis, tel que des estimateurs d'erreur *a posteriori*. Une approximation adaptative est alors possible. Cependant la dimension des espaces d'approximation est naturellement plus importante que celle des approches par chaos polynomial.

B.2 Décomposition en multi-ondelettes

La décomposition en multi-ondelettes (ou approximation de Wiener-Haar) permet également de décomposer une fonction de variables aléatoires qui n'est pas régulière sur l'ensemble du domaine stochastique [Le Maitre *et al.* 2004, Le Maître *et al.* 2004]. On se ramène par un changement de variable aléatoire classique au cas de variables ξ_i uniformes sur $]0, 1[$ et donc à l'espace de travail $\mathcal{S} = L^2([0, 1]^m)$. On note

$$V_k^{p_i} = \{f \in L^2([0, 1])/f_{|(2^{-k}l, 2^{-k}(l+1))} \text{ est un polynôme de degré } \leqslant p_i, \forall l \in \{0, ..., 2^k - 1\}\}$$

On note $W_k^{p_i}$ l'orthogonal de $V_k^{p_i}$ dans $V_{k+1}^{p_i}$, soit

$$V_{k+1}^{p_i} = V_k^{p_i} \oplus W_k^{p_i} \tag{B.2}$$

On a alors $L^2([0, 1]) = \overline{\cup_{k \geqslant 0} V_k^{p_i}} = V_0^{p_i} \oplus_{k \geqslant 0} W_k^{p_i}$. Soit $\{\phi_n\}_{n=0}^{p_i}$ une base orthonormée de $V_0^{p_i}$ (polynômes de Legendre) et $\{\psi_n\}_{n=0}^{p_i}$ une base orthonormée de $W_0^{p_i}$. Une base orthonormée de l'espace $W_k^{p_i}$, de dimension $(p_i + 1)(2^k)$, est alors donnée par les multi-ondelettes ψ_{nl}^k définies par

$$\psi_{nl}^k(\xi) = 2^{k/2}\psi_n(2^k\xi - l), \quad l = 0...2^k - 1, \quad n = 0...p_i \tag{B.3}$$

On définit alors la base de fonctions polynomiales par morceaux $\{h_j^j\}_{j \geqslant (-p_i - 1)}$ de $L^2([0, 1])$

$$h_{-n-1}(\xi) = \phi_n, \quad n = 0, ..., p_i$$
$$h_{(p_i+1)(2^k+l-1)+n}(\xi) = \psi_{nl}^k\xi), \quad k = 0, ..., +\infty, \quad l = 0, ..., 2^k - 1, \quad n = 0, ..., p_i + 1$$

Les multi-ondelettes de résolution k pour m variables aléatoires seront alors définies par les multi-indices

$$\mathcal{I}_P = \{\beta \in \mathbb{N}^m; \forall i, \beta_i \leqslant 2^k(p_i + 1)\}$$

L'espace d'approximation est le même que l'espace que celui engendré par des éléments finis $h - p$. Cependant la base de fonction définissant cet espace est différente : on adopte ici une vision multi-résolution qui présente un intérêt certain pour l'utilisation d'approches multi-échelles.

L'utilisation de ce type de base pour l'approximation stochastique présente les mêmes avantages qu'une approximation par éléments finis $h-p$: outre le fait de pouvoir représenter des fonctions non-régulières, une approximation adaptative avec des bases de fonctions imbriqées est possible.

Annexe C

Dispositif expérimental : mesure sur site de cinétique de corrosion

C.1 Introduction

L'impact de la corrosion sur les structures marines peut causé certains dommages structurels entraînant l'arrêt de l'exploitation de l'ouvrage (quai sur pieux métalliques, plate-forme offshore, etc.). La corrosion de ces structures n'apparaît pas pendant les premières années de vie de l'ouvrage mais seulement lorsque les protections deviennent inefficaces (peintures, protection cathodique, etc.). Afin de prédire les effets de la corrosion sur une structure avec le temps, il est nécessaire de disposer de modèles fiables. L'un des objectifs initiaux de ce travail de thèse était de développer un dispositif expérimental sur site permettant d'obtenir l'évolution des taux de corrosion avec le temps. Cette annexe présente la mise en place de ce dispositif et les résultats obtenus sur les deux sites équipés de ce dispositif. Malheureusement, ces résultats ne se sont pas révélés satisfaisants. En effet, les taux de corrosion des sites choisis étaient trop faibles pour pouvoir être déterminés avec l'appareil de mesure utilisé (mesures par ultrasons).

C.2 Présentation du dispositif expérimental et objectifs

Ces travaux expérimentaux ont été réalisés à partir du travail effectué dans [Memet 2000] et dans lequel les taux de corrosion du port de La Rochelle ont été déterminés.
L'idée principale de notre dispositif était de placer un nombre important de plaques d'acier à plusieurs niveaux de la structure dans les zones de marnage et d'immersion permanente. Ces échantillons étaient ensuite récupérés à des intervalles de temps différents (1 mois, 3mois, 6 mois, 9 mois et 12 mois) puis mesurés à l'aide d'un appareil par ultrasons. Ainsi, il devait être possible de déterminer les cinétiques de corrosion du site étudié. Un travail préliminaire sur les échantillons était nécessaire afin de connaître notamment leurs épaisseurs initiales. Le protocole de mesure d'épaisseur a été défini en accord avec celui proposé par le CETMEF, utilisé par les ports français pour l'inspection de leurs ouvrages.
Nous présentons tout d'abord le travail amont sur les échantillons, *i.e.* la transformation d'une plaque d'acier en échantillon. Puis, nous nous intéresserons à la mise en place des dispositifs de chaque site et aux résultats obtenus. Nous expliquerons finalement pourquoi les résultats obtenus sont inexploitables et proposerons des solutions pour que cette expérience soit à l'avenir une réussite.

C.2.1 Présentation des échantillons

Les plaques en acier utilisées sont carrées d'une longueur de $90\ mm$ et d'une épaisseur de $6\ mm$. La figure C.1 présente une de ces plaques.

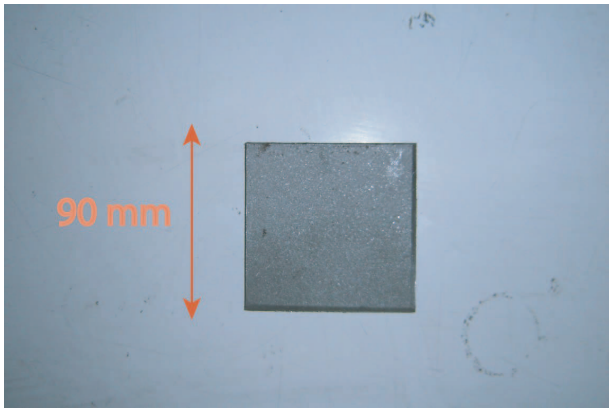


FIG. C.1 – Dispositif expérimental : exemple de plaque en acier utilisée.

Ces plaques ont tout d'abord été sablées afin de s'assurer que la corrosion de l'acier débute dès leur installation. Elles ont ensuite étaient recouvertes d'une résine polyuréthane sur une face et sur leur bords (*c.f.* figure C.2). Cette enrobage est nécessaire pour que la plaque ne se corrode que sur une seule face. Si les deux faces de la plaque étaient laissées découvertes, la corrosion se développerait sur les deux à la fois et une hypothèse serait nécessaire : par exemple, il faudrait supposer que les pertes de matière de chacune des deux faces sont identiques (ce qui est peu probable).

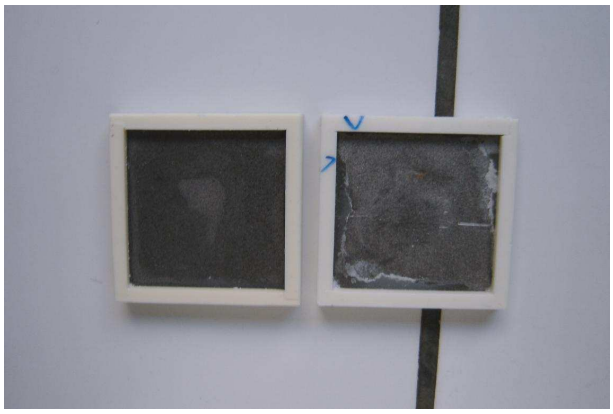


FIG. C.2 – Dispositif expérimental : exemple de plaques enrobées.

Une fois les plaques sablées et recouvertes, elles sont mesurées avec l'appareil par ultrasons. Cette étape est primordiale car elle permet de connaître l'épaisseur nominale de chaque plaque. Pour cette opération, nous avons mis au point un protocole inspiré de celui du CETMEF : on réalise 3 mesures sur chaque plaque en utilisant un patron (*c.f.* figure C.3). Ce même patron sera réutilisé pour la mesure d'épaisseur résiduelle après exposition. Ces trois mesures à $120°$ permettent d'éliminer les mesures semblant erronées. Les plaques sont maintenant prêtes à être exposées sur le site choisi. Deux sites ont été sélectionnés. Ils sont présentés dans les sections suivantes.

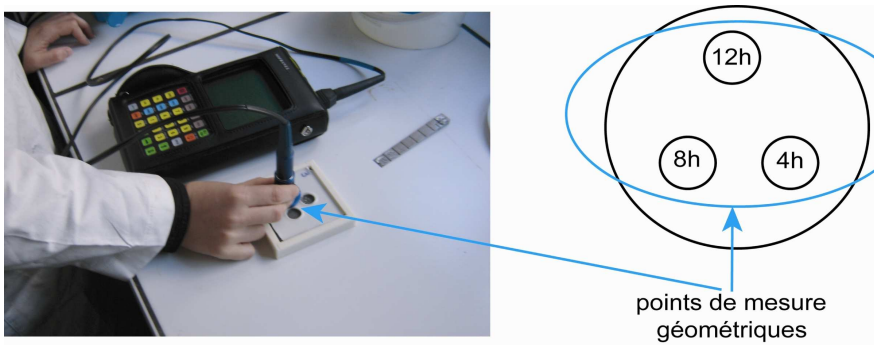


FIG. C.3 – Dispositif expérimental : protocole de mesure des échantillons.

C.2.2 Dispositif de Nantes Saint-Nazaire (France)

Le premier site sur lequel le dispositif expérimental a été installé est l'un des quais du port de Saint-Nazaire (embouchure de l'estuaire de la Loire où l'eau est très douce). Le but était de placer deux ensembles de plaques à deux niveaux de la structure : l'un dans la zone de marnage et l'autre dans la zone d'immersion permanente. Nous aurions pu ainsi obtenir les cinétiques de corrosion correspondant à chaque zone. Nous avons fabriqué deux supports en acier inoxydable (acier 316L) que nous avons fixé à un pieu du quai. Chaque support était équipé de 60 échantillons répartis sur 5 lignes (*c.f.* figure C.4). Les premiers échantillons ont été installés en juin 2006.

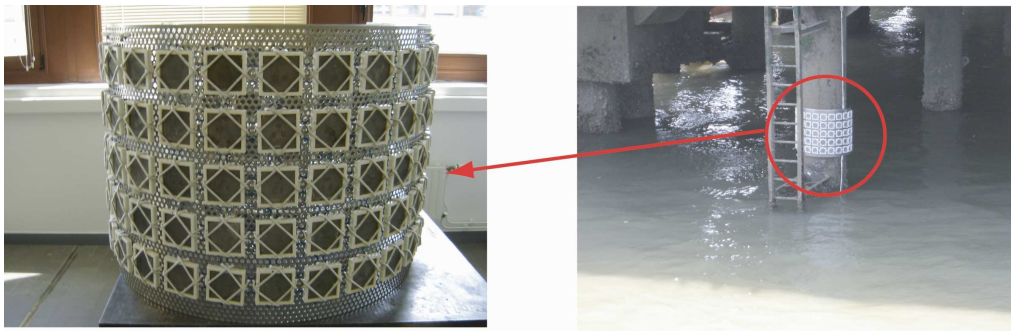


FIG. C.4 – Dispositif expérimental : support des échantillons pour le site de Saint-Nazaire.

C.2.3 Dispositif de Peniche (Portugal)

Pour le dispositif de Peniche (Portugal), les mêmes échantillons ont été utilisés (fabriqués à Nantes). Contrairement au site de Nantes, les échantillons étaient placés dans l'ocean et non dans un estuaire. L'environnement n'était donc pas le même (eau non douce). Les spécimens ont été installés plus tard que ceux de Nantes (février 2007). Le nombre d'échantillons était moins important que pour le site de Saint-Nazaire mais ils ont cependant été placés dans les zones de marnage et d'immersion permanente (24 spécimens dans la zone de marnage et 12 dans la zone d'immersion permanente). La figure C.5 présente les supports utilisés et l'aspect des échantillons après 24 heures d'exposition. On constate que les premières traces de corrosion sont apparues très rapidement.

FIG. C.5 – Dispositif expérimental : support des échantillons pour le site de Peniche (gauche) et aspect de l'acier après 24 heures d'exposition (droite).

C.2.4 Conservation et nettoyage des échantillons

C.2.4.1 Conservation des échantillons

Les mesures de perte d'épaisseur ont souvent pu être réalisées plusieurs semaines après la récupération des échantillons. Afin d'arrêter le processus de corrosion, il était nécessaire de conserver les spécimens. Pour cela, ils étaient placés dans une solution de NaOH (20g/l) permettant de stopper l'évolution de l'état des plaques.

C.2.4.2 Nettoyage des échantillons

Le dernier travail précédent les mesures de perte d'épaisseur, consistait à nettoyer les échantillons pour que l'appareil par ultrasons puisse relever les épaisseurs résiduelles de l'acier sain (le métal doit être mis à nu). Contrairement, à ce qui est effectué dans le cadre d'une inspection sur site, nous n'avons pas utilisé un procédé de meulage pour le nettoyage (nettoyage mécanique). En effet, ce type de nettoyage est trop agressif et conduit généralement à retirer une partie du métal restée saine. On notera que, lors d'une inspection sur site, c'est l'apparition d'étincelles qui indique à l'inspecteur quand arrêter cette phase de meulage. Pour notre expérience, nous avons opté pour un nettoyage chimique consistant à suivre les étapes suivantes :

1. enlever les biosalissures des échantillons (coquillages, etc.) ;
2. plonger les échantillons dans une solution d'acide chlorhydrique pour enlever les produits de corrosion et préserver le métal (solution à $\approx$ 30% pendant 5 minutes) ;
3. rincer et sécher des échantillons.

A la suite de ces différentes étapes, les échantillons étaient prêts à être mesurés. Nous avons utilisé le même protocole (avec les 3 mesures géométriques) que celui développé pour la mesure des épaisseurs initiales des plaques.

C.3 Exemple de résultats

C.3.1 Expertise corrosion : site de Saint-Nazaire

Avant de nettoyer et de mesurer les échantillons, certains d'entre eux ont été expertisés pour identifier le type de corrosion auquel ils étaient soumis. Cette expertise a été réalisée par M. Jean-Bernard Memet, expert corrosion au sein de la société A-Corros[1]. Les échantillons expertisés ont été exposés pendant 3 et 6 mois dans la zone de marnage et la zone d'immersion permanente. Le tableau C.1 présente l'expertise réalisée sur certains échantillons significatifs.
Le premier point remarquable de cette expertise est que la corrosion observée sur les échantillons est uniforme. Nous n'avons pas observé de corrosion localisée (piqûres) ni de corrosion bactérienne. Nous avons également observé qu'en fonction de la saison d'exposition, une quantité importante de biosalissures (balanes) pouvaient se fixer aux spécimens : les plaques exposées entre juin et septembre (pendant l'été) étaient en grande partie recouvertes de ces biosalissures, et ce, qu'elles aient appartenues à la zone de marnage ou à la zone d'immersion permanente. Enfin, le point le plus important et commun à tous les échantillons est qu'ils ont été très peu corrodés (moins de $0.1\ mm$ de perte d'épaisseur).

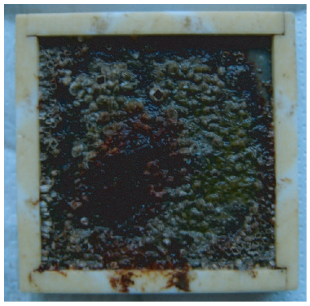
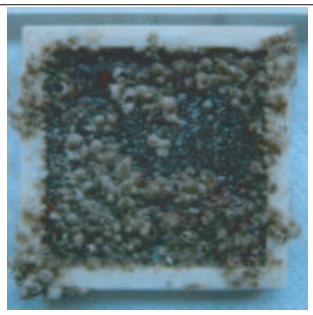
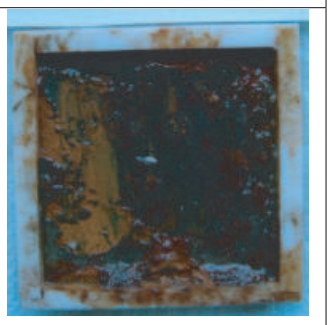
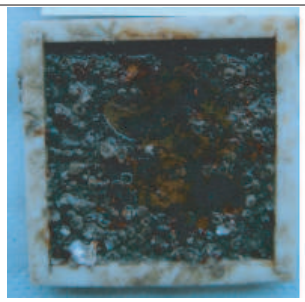
C.3.2 Expertise corrosion : site de Peniche

Le tableau C.2 présente les conclusions de l'expertise corrosion pour les échantillons de Peniche. On rappelle que la principale différence avec le site de Saint-Nazaire vient de l'environnement : ici, les échantillons ont été placés dans l'océan et non dans un estuaire. La luminosité est beaucoup plus élevée dans ce cas et les spécimens sont ainsi recouverts d'une couche d'algues marines. Ces algues empêchent d'autres organismes vivants, comme les balanes très présentes sur les échantillons de Saint-Nazaire, de se fixer aux plaques. La corrosion observée est uniforme comme sur le site de Saint-Nazaire et nous n'avons pas remarqué de corrosion localisée ou bactérienne. Enfin, tous les échantillons sont également peu corrodés (moins de $0.1\ mm$ de perte d'épaisseur).

C.3.3 Résultats des mesures de perte d'épaisseur

Nous nous intéressons maintenant aux mesures des pertes d'épaisseur. Malheureusement, comme nous l'avons mentionné précédemment, les échantillons sont très peu corrodés et l'appareil de mesure par ultrasons n'a pas permis de déterminer les pertes de matière des spécimens. En effet, l'erreur de mesure due à l'appareil par ultrasons est de l'ordre de $0.2\ mm$. Or, tous les échantillons présentent des pertes d'épaisseur inférieures à cette valeur. Il n'est donc pas possible de déterminer les pertes de matière dues aux effets de la corrosion. Pour illustrer ce constat, la figure C.6 présente la dispersion sur les mesures de certains échantillons ayant été exposés entre 3 et 12 mois. On remarque que les pertes de matière sont systématiquement plus faibles que l'incertitude de mesure liée à l'appareil par ultrasons ($0.2\ mm$). S'il n'est pas réellement surprenant que les specimens exposés peu de temps (1 et 3 mois) soient peu corrodés, il est en revanche plus étonnant que ceux exposés pendant 12 mois présentent un niveau si faible de corrosion. Selon les experts en corrosion, il paraissait probable que les échantillons perdent entre

[1]A-Corros : bureau d'études techniques en corrosion et conservation du patrimoine métallique, terrestre et sous-marin, Village d'entreprise, Z.I. nord, BP 12114, 13646 Arles Cedex, jbmemet@a-corros.fr.

zone	**Temps d'exposition : 3 mois**	
zone de marnage	– présence de très peu de balanes (plaques exposées pendant l'hiver ;) – présence de magnétite (produit de corrosion) ; – présence d'une boursouflure centrale caractéristique des cycles humidification/séchage ; – pas de corrosion bactérienne.	
zone d'immersion permanente	– présence de balanes pour les plaques exposées pendant l'été ; – pas de corrosion bactérienne.	
zone d'immersion permanente	– pas de biosalissure pour les plaques exposées pendant l'hiver ; – présence de magnétite ; – pas de corrosion bactérienne.	
	Temps d'exposition : 6 mois	
zone de marnage	– peu de balanes ; – présence d'une boursouflure centrale ; – pas de corrosion bactérienne.	
zone d'immersion permanente	– présence de balanes ; – présence de magnétite ; – pas de corrosion bactérienne.	

TAB. C.1 – Expertise corrosion des échantillons de Saint-Nazaire.

zone	Temps d'exposition : 3 mois	
zone de marnage	– présence d'algues marines due à la luminosité ; – pas de balane ; – présence d'une fine couche de magnétite.	
zone d'immersion permanente	– pas de balane ; – corrosion moins importante ; – moins d'algues marines (luminosité plus faible) ; – présence d'une fine couche de magnétite.	

TAB. C.2 – Expertise corrosion des échantillons de Peniche.

$0.5\ mm$ et $1\ mm$ de métal après une année d'exposition.

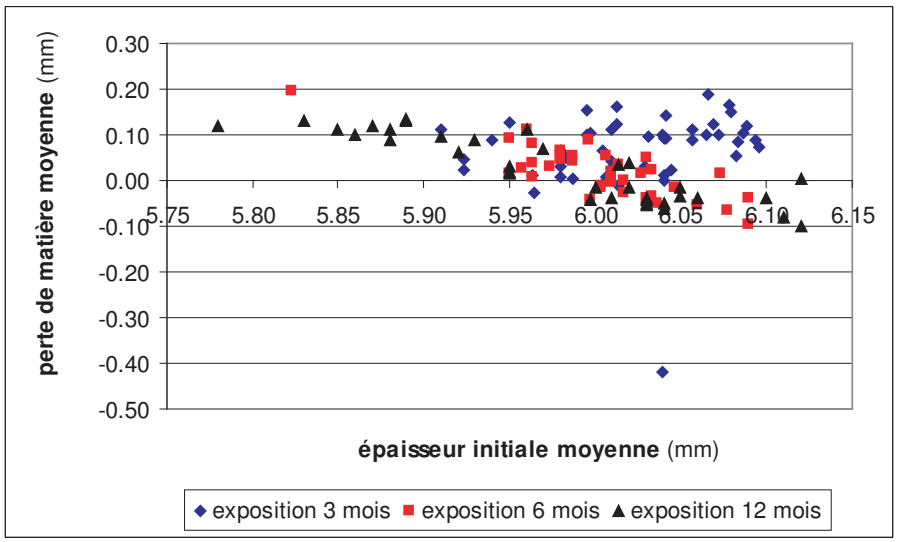


FIG. C.6 – Dispositif expérimental : dispersion sur les mesures par ultrasons pour des échantillons exposés pendant 3, 6 et 12 mois ; spécimens de Saint-Nazaire.

Remarque C.1 *: nous n'avons présenté que les résultats obtenus pour le site de Saint-Nazaire. On notera que le constat sur le site de Peniche est identique : les pertes de matière des échantillons, trop faibles, n'ont pas pu être déterminées.*

C.4 Discussion et conclusions

Bien que les résultats obtenus n'aient pas été ceux escomptés, tous les efforts déployés dans le montage de cette expérience n'ont pas été inutiles. En effet, toute la phase de préparation des échantillons et de mise en place du dispositif reste efficace. Toutefois certaines améliorations sont envisageables. Il serait notamment intéressant de développer un autre système pour l'exposition des spécimens : les supports en acier inoxydable, relativement lourds, sont délicats à installer sur site et à manipuler lors de la collecte des échantillons. Mais le problème majeur reste l'évaluation des pertes d'épaisseur. L'appareil de mesure par ultrasons n'étant pas efficace lorsque les effets de la corrosion sont faibles, une alternative consisterait à peser les échantillons avant et après exposition. Pour cela, il sera nécessaire de disposer d'une balance de haute précision et d'utiliser des échantillons de taille plus importante. Sous l'hypothèse d'une corrosion uniforme, il serait alors possible de déterminer des pertes d'épaisseur même très faibles. Cette technique demanderait alors un protocole de nettoyage très performant, et l'enrobage des plaques par la résine polyuréthane serait à reconsidérer. En effet, une fois l'échantillon recouvert il est très difficile de retirer la résine. Il est donc préférable de peser la plaque une fois recouverte. Après exposition, la plaque serait donc repesée avec la résine. Or, si une partie de cette résine est enlevée, le résultat serait entaché d'une erreur supplémentaire difficile à quantifier. Une solution plus simple serait de ne pas recouvrir les plaques mais, dans ce cas, des hypothèses sur le développement de la corrosion seront nécessaires.
En conclusion, il est possible de rendre ce dispositif efficace. L'échec relatif de cette expérience a permis de mettre en lumière les modifications nécessaires à son bon fonctionnement. Ce dispositif sera d'ailleurs installé dans un bassin d'eau de mer, où tous les paramètres sont sous contrôle, à l'institut IFREMER[2] situé à Brest. Cette nouvelle expérience s'inscrit dans le cadre du projet MAREO (*MAintenance and REpair of concrete coastal structures risk based optimization*, 2007-2010).

[2]Institut français de recherche pour l'exploitation de la mer

Table des figures

1.1 Exemples de polynômes d'Hermite en dimension 2. 13
1.2 Problème modèle en élasticité linéaire. 14
1.3 Exemples de quadrature de Gauss pour $m = 2$ et $n \in \{3, 6, 10\}$. 19
1.4 Exemples de deux réalisations du domaine aléatoire $\Omega(\boldsymbol{\xi})$ et des parties $\Gamma_1(\boldsymbol{\xi})$ et $\Gamma_2(\boldsymbol{\xi})$ de sa frontière. 27
1.5 Transformation aléatoire définie sur un maillage déterministe 30

2.1 Level set $\phi(\boldsymbol{x})$ dont l'iso-zéro représente la frontière du domaine Ω. 41
2.2 Exemple d'interpolation d'une fonction level set décrivant un cercle. 42
2.3 Exemple de maillage conforme FEM et non conforme X-FEM pour un problème de plaque trouée. 44
2.4 Domaine déterministe B contenant toutes les réalisations du domaine aléatoire $\Omega(\boldsymbol{\xi})$. . . 45
2.5 Level-set $\widetilde{\phi}(\cdot, \boldsymbol{\xi})$ dont l'iso-zéro sur $\partial\Omega(\boldsymbol{\xi})$ représente la frontière de l'hyper-surface $\Gamma_2(\boldsymbol{\xi})$ 47
2.6 Cas d'une frontière déterministe $\Gamma_1 \subset \partial B$ 48
2.7 Stratégie d'intégration spatiale A : sous-découpage d'un élément triangle K à 3 noeuds et de ses bords pour l'intégration numérique sur $K \cap \Omega(\boldsymbol{\xi})$, $\partial K \cap \Gamma_2(\boldsymbol{\xi})$ et $K \cap \Gamma_2(\boldsymbol{\xi})$ pour une réalisation $\phi(\cdot, \boldsymbol{\xi})$ de la level set. 54
2.8 Stratégie d'intégration spatiale B : détermination de l'ensemble des points d'intégration G_K^- pour une réalisation $\phi(\cdot, \boldsymbol{\xi})$ de la level set. 55
2.9 Représentation de $\lambda(K \cap \Omega(\xi))$ en fonction de ξ pour une level set définie par $\phi(\boldsymbol{x}, \xi) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} - \xi$. 56
2.10 Signe de la level set $\phi(\cdot, \xi)$ aux noeuds de l'élément K pour chacun des quatre sous-domaines stochastiques. 57
2.11 Comparaison entre les procédures de découpage isotrope et anisotrope où $\square$ et $\triangle$ indiquent deux états différents des sommets ; dimension $m = 2$. 59
2.12 Comparaison entre les procédures de découpage isotrope et anisotrope où $\square$ et $\triangle$ indiquent deux états différents des sommets ; dimension $m = 3$. 59
2.13 Exemple 1 : problème de la plaque aléatoire en traction. 61
2.14 Exemple 1 : partitions stochastiques $\mathcal{C}_K$ d'ordre $k = 4$ pour l'élément fini K_1 : procédures isotrope (gauche) et anisotrope (droite). 62
2.15 Exemple 1 : convergence de l'indicateur d'erreur global ε^k en fonction de k pour les procédures isotrope et anisotrope. 63

2.16 Exemple 1 : surfaces de réponse du déplacement horizontal des points $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0.5)$ et $\boldsymbol{x}_2 = (1, 0.95)$. 66
2.17 Exemple 1 : contraintes σ_{xx} correspondant à une réalisation $a = 0.75$ (gauche) et contributions locales à l'erreur globale ε_K^k pour $k = 2$ (droite). 66
2.18 Exemple 1 : convergence de l'indicateur $\widetilde{\varepsilon}^p$, associé à la solution **P-X-FEM**, en fonction de p. 67
2.19 Exemple 1 : composante $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ obtenue avec **P-X-FEM** (gauche) et contribution locale $\widetilde{\varepsilon}_K^p$ à l'erreur globale (droite). 68
2.20 Exemple 1 : surfaces de réponse du déplacement horizontal des points $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ obtenues avec **P-X-FEM**. 68
2.21 Exemple 2 : maillage X-SFEM utilisé avec états des éléments. 70
2.22 Exemple 2 : convergence de l'erreur ε^k en fonction de k. 71
2.23 Exemple 2 : partitions stochastiques de K obtenues pour différents ordres de partition k. 71
2.24 Exemple 2 : évolution exacte et surfaces de réponse d'une composante $(\mathbf{A}(\xi))_{ij}$ de la matrice de rigidité pour différents ordres k. 72
2.25 Exemple 2 : convergence de l'erreur ε^q en fonction de q. 73
2.26 Exemple 2 : évolution exacte et surfaces de réponse d'une composante $(\mathbf{A}(\xi))_{ij}$ de la matrice de rigidité pour différentes valeurs de q. 73
2.27 Exemple 2 : surfaces de réponse du déplacement U_x pour les points P_1 (gauche) et P_2 (droite) : comparaison entre les solutions X-SFEM calculées avec la procédure de découpage ($k = 4$) et avec la procédure basique ($q = 40$). 74
2.28 Exemple 2 : contraintes σ_{xx} pour $a = 0.9$: comparaison entre les solutions X-SFEM calculées avec la procédure de découpage stochastique (gauche) et avec la procédure basique d'intégration stochastique (droite). 75
2.29 Exemple 3 : problème de la couronne circulaire à rayon aléatoire. 76
2.30 Exemple 3 : maillage X-SFEM avec états des éléments. 77
2.31 Exemple 3 : partitions stochastiques de l'élément K obtenues avec les procédures isotrope (gauche) et anisotrope (droite). 78
2.32 Exemple 3 : convergence de ε^k en fonction de k pour chacune des procédures de découpage (stratégie d'intégration spatiale A). 80
2.33 Exemple 3 : convergence de ε^k en fonction de k pour chacune des procédures de découpage (stratégie d'intégration spatiale B). 81
2.34 Exemple 3 : convergence de $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de p pour $h = 0.18$. 82
2.35 Exemple 3 : erreurs locales $\varepsilon_{h,p}^K$ obtenues pour $h = 0.18$ et pour $p = 1$ (gauche) et $p = 2$ (droite). 82
2.36 Exemple 3 : convergence de $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de h pour $p = 2$. 83
2.37 Exemple 3 : erreurs locales $\varepsilon_{h,p}^K$ obtenues pour $p = 2$ et $h = 0.09$ (gauche) et $h = 0.06$ (droite). 83
2.38 Exemple 4 : présentation du problème de la plaque avec trou de forme étoilée. 84
2.39 Exemple 4 : maillage X-SFEM utilisé avec états des éléments et positions des points P_1 et P_2. 85

2.40 Exemple 4 : surfaces de réponse u_x en P_1 (gauche) et en P_2 (droite) en fonction de ξ_1 ; $\xi_2 = 0.5$ et $\xi_3 = 0.5$. 86
2.41 Exemple 4 : surfaces de réponse u_x en P_1 (gauche) et en P_2 (droite) en fonction de ξ_2 ; $\xi_1 = 0.8$ et $\xi_3 = 0.7$. 86
2.42 Exemple 4 : surfaces de réponse u_x en P_1 (gauche) et en P_2 (droite) en fonction de ξ_3 ; $\xi_1 = 0.7$ et $\xi_2 = -0.4$. 87
2.43 Exemple 4 : densités de probabilité de u_x au point P_1 : comparaison entre X-SFEM et une approche Monte-Carlo couplée avec FEM pour 10000 tirages. 87
2.44 Exemple 4 : comparaisons des champs de déplacements u_x pour différentes réalisations de la géométrie calculée avec X-SFEM (gauche) et FEM (droite). 88
2.45 Exemple 4 : surfaces de réponse du maximum des contraintes $\sigma_{xx}^{max}(\boldsymbol{\xi})$ en fonction de ξ_1 ; $\xi_2 = 0.5$ et $\xi_3 = 0.5$. 90
2.46 Exemple 4 : surfaces de réponse de la décomposition de $\sigma_{xx}^{max}(\boldsymbol{\xi})$ pour différents ordres $p_{\mathcal{J}}$ en fonction de ξ_1 ; $\xi_2 = 0.5$ et $\xi_3 = 0.5$. 91
2.47 Exemple 4 : comparaisons des champs de contraintes σ_{xx} pour différentes réalisations de la géométrie calculés avec X-SFEM (gauche) et FEM (droite). 92
2.48 Exemple 4 : surfaces de réponse de l'énergie élastique de déformation $W(\boldsymbol{\xi})$ en fonction de ξ_1 ; $\xi_2 = 0.5$ et $\xi_3 = 0.5$. 93

3.1 Problème d'interface matérielle aléatoire. 97
3.2 Exemple de référence : problème de la plaque en traction avec interface matérielle aléatoire. 103
3.3 Exemple de référence : maillages X-SFEM utilisés avec les différents groupes d'éléments : les éléments e_1 appartenant sûrement à Ω_1, les éléments e_2 appartenant sûrement à Ω_2 et les éléments e_c possiblement coupés par $\Gamma(\xi)$. 104
3.4 Exemple de référence : ensemble des noeuds enrichis I_e avec la fonction ψ_1 pour chacun des deux maillages. 105
3.5 Exemple de référence : fonction d'enrichissement ψ_1 pour deux réalisations de la géométrie ; **maillage** 2. 106
3.6 Exemple de référence : surfaces de réponse du déplacement horizontal (gauche) et évolution de la fonction ψ_1 (droite) au point P_1 ; **maillage** 1. 107
3.7 Exemple de référence : surfaces de réponse du déplacement horizontal (gauche) et évolution de la fonction ψ_1 (droite) au point P_1 ; **maillage** 2. 108
3.8 Evolution de la fonction d'enrichissement ψ_1 au point P_1 en fonction de la position de l'interface donnée par ξ ; **maillage** 2. 108
3.9 Exemple de référence : surfaces de réponse d'un degré de liberté enrichi obtenus avec X-SFEM$_1^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; **maillage** 2. 109
3.10 Exemple de référence : champs de contraintes σ_{xx} pour $\xi = 0.5$ calculés avec X-SFEM$_1^+$; **maillage 1** (gauche), **maillage 2** (droite). 109
3.11 Exemple de référence : ensemble des noeuds enrichis I_e avec la fonction ψ_2 pour chacun des deux maillages. 111
3.12 Exemple de référence : fonction d'enrichissement ψ_2 pour deux réalisations de la géométrie ; **maillage** 2. 111

3.13 Exemple de référence : surfaces de réponse du déplacement horizontal (gauche) et évolution de la fonction ψ_2 (droite) au point P_1 ; **maillage** 2. 112
3.14 Exemple de référence : surfaces de réponse d'un degré de liberté enrichi obtenus avec X-SFEM$_2^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; **maillage** 2. 112
3.15 Exemple de référence : champs de contraintes σ_{xx} pour $\xi = 0.5$ calculés avec X-SFEM$_2^+$; **maillage 1** (gauche), **maillage 2** (droite). 113
3.16 Exemple de référence : surfaces de réponse d'un degré de liberté enrichi obtenus avec P-X-FEM$_1^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; **maillage** 2. 114
3.17 Exemple de référence : convergence de l'erreur $\varepsilon_{h,p}$ pour P-X-FEM et P-X-FEM$_1^+$ en fonction du nombre de points d'intégration n_g. 115
3.18 Exemple de référence : surfaces de réponse de U_x au point P_1 obtenues avec P-X-FEM (gauche) et P-X-FEM$_1^+$ (droite) pour $n_g \in \{5, 10, 20\}$. 116
3.19 Exemple de référence : surfaces de réponse de deux degrés de liberté enrichis obtenues avec P-X-FEM$_1^+$ pour $n_g \in \{5, 10, 20\}$. 117
3.20 Exemple 1 : problème de la plaque circulaire avec interface matérielle aléatoire et maillage X-SFEM utilisé ($h = 0.09$). 118
3.21 Exemple 1 : convergence de l'erreur $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de p pour les différentes solutions X-SFEM avec $h = 0.09$. 120
3.22 Exemple 1 : erreurs locales $\varepsilon_{h,p}^K$ obtenues pour X-SFEM$_1^+$ avec $p = 7$ (gauche) et X-SFEM$_2^+$ avec $p = 1$ (droite). 121
3.23 Exemple 1 : surfaces de réponse du déplacement radial en P_1 obtenues avec les solutions X-SFEM, X-SFEM$_1^+$ et X-SFEM$_2^+$. 121
3.24 Exemple 1 : convergence en fonction de h de l'erreur $\varepsilon_{h,p}$ obtenue avec X-SFEM$_2^+$ pour $p = 3$. 122
3.25 Exemple 1 : erreurs locales $\varepsilon_{h,p}^K$ obtenues avec X-SFEM$_2^+$ pour $p = 3$ et $h = 0.09$ (gauche) et $h = 0.06$ (droite). 122
3.26 Exemple 1 : convergence de l'erreur $\varepsilon_{h,p}$ en fonction de p pour les différentes solutions P-X-FEM et X-SFEM ($h = 0.06$). 123
3.27 Exemple 1 : surfaces de réponse du déplacement radial en P_1 obtenues avec les solutions P-X-FEM, P-X-FEM$_1^+$ et P-X-FEM$_2^+$. 124
3.28 Exemple 1 : convergence de l'erreur $\varepsilon_{h,p}^*$, basée sur norme énergétique, en fonction de p pour $h = 0.09$. 125
3.29 Exemple 2 : problème d'une plaque carrée avec interface matérielle aléatoire. 127
3.30 Exemple 2 : maillage X-SFEM utilisé avec les différents états d'éléments. 128
3.31 Exemple 2 : surfaces de réponse du déplacement horizontal du point P_1 obtenues avec X-SFEM, X-SFEM$_2^+$ et représentation de la solution de référence X-FEM$^+$; cisaillement homogène. 128
3.32 Exemple 2 : comparaison des champs de contraintes σ_{xx} obtenus avec X-SFEM (gauche), X-SFEM$_2^+$ (centre) et X-FEM$^+$ (droite) pour deux réalisations de la géométrie et deux cas de chargement. 129
3.33 Exemple 2 : surfaces de réponse de la composante $\boldsymbol{C}_{11}^{\text{hom}}$ obtenue avec X-SFEM, X-SFEM$_2^+$, P-X-FEM$_1^+$ et la solution de référence X-FEM$^+$. 131

3.34 Exemple 2 : surfaces de réponse de la composante $\boldsymbol{C}_{33}^{\text{hom}}$ obtenue avec X-SFEM, X-SFEM$_2^+$, P-X-FEM$_1^+$ et la solution de référence X-FEM$^+$. 132
3.35 Exemple 2 : convergences de $E(\boldsymbol{C}_{11}^{hom})$ (droite) et $\sigma(\boldsymbol{C}_{11}^{hom})$ déterminées par Monte-Carlo en fonction du nombre de tirages des variables aléatoires. 133
3.36 Exemple 2 : densités de probabilité des composantes $\boldsymbol{C}_{11}^{hom}$ et $\boldsymbol{C}_{12}^{hom}$ obtenues avec X-SFEM$_2^+$, P-X-FEM$_1^+$ et une approche de Monte-Carlo pour 1000 tirages. 134

4.1 Exemples de deux réalisations de la géométrie $\Omega(\xi)$ et erreur de mesure η. 138
4.2 Evolution de la fonction $-log(L(\phi))$ pour des ordres de chaos polynomial $p = 2$ (droite) et $p = 3$ (gauche) ; variable identifiée à partir de 216 observations. 141
4.3 Illustration de la PoD et de la PFA pour un seuil de détection a_s donné (gauche) et courbe ROC correspondante (droite). 142
4.4 Surface de réponse de P_2 pour $\gamma = 0.1$ et exemples de courbes $(P_2)\,|_{ROC}$. 144
4.5 Structure étudiée : vue en coupe du poste 3 du TMDC. 147
4.6 Protocle de mesure CETMEF : répartition des zones cardinales et des points de mesure géométriques sur un pieu à une cote z donnée. 148
4.7 Densités de probabilité de $\hat{a}_1$ et η_1 obtenues par identification avec des fonction de densité de probabilité classiques (gauche) et par représentation sur le chaos polynomial (droite) ; niveau $z_1 = +2m$. 150
4.8 Comparaison entre les courbes ROC obtenues avec la loi de Student, l'identification sur le chaos polynomial et les mesures sans ajustement ; $z_1 = +2$m. 151
4.9 Comparaison entre les courbes ROC expérimentales (gauche) et obtenues par identification sur le chaos polynomial (droite) pour tous les niveaux d'inspection. 152
4.10 Problème du cordon de soudure avec rayon r aléatoire. 153
4.11 Densités de probabilité du déplacement vertical du point P_1 obtenues avec Monte-Carlo+X-FEM et X-SFEM pour $p = 4$; niveau $z_1 = +2m$ 154
4.12 Evolution de la fonction de risque $\overline{E(C)}_d$ dans le plan (c_1, c_2) pour les niveaux d'inspection $z_1 = +2m$ et $z_6 = -1m$; $c_1 \in [0, 1]$ et $c_2 \in [0, 0.1]$. 157
4.13 Evolution de la fonction de risque $E(C)_{nd}$ dans le plan (c_1, c_2) pour les niveaux d'inspection $z_1 = +2m$ et $z_6 = -1m$; $c_1 \in [0, 1]$ et $c_2 \in [0, 0.1]$. 157
4.14 Evolution de la fonction de risque $\overline{E(C)}_d$ dans le plan (c_1, c_2) pour les niveaux d'inspection $z_1 = +2m$ et $z_6 = -1m$; $c_1 \in [0, 1]$ et $c_2 \in [0.02, 0.03]$. 158
4.15 Evolution de la fonction de risque $E(C)_{nd}$ dans le plan (c_1, c_2) pour les niveaux d'inspection $z_1 = +2m$ et $z_6 = -1m$; $c_1 \in [0.2, 0.3]$ et $c_2 \in [0.02, 0.03]$. 158
4.16 Evolution des fonctions $\overline{E(C)}_d$ et $E(C)_{nd}$ en fonction du niveau d'inspection z_i pour une probabilité de perte de matière $\gamma \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$. 159

C.1 Dispositif expérimental : exemple de plaque en acier utilisée. 184
C.2 Dispositif expérimental : exemple de plaques enrobées. 184
C.3 Dispositif expérimental : protocole de mesure des échantillons. 185
C.4 Dispositif expérimental : support des échantillons pour le site de Saint-Nazaire. 185
C.5 Dispositif expérimental : support des échantillons pour le site de Peniche (gauche) et aspect de l'acier après 24 heures d'exposition (droite). 186

C.6 Dispositif expérimental : dispersion sur les mesures par ultrasons pour des échantillons exposés pendant 3, 6 et 12 mois ; spécimens de Saint-Nazaire. 189

Liste des tableaux

1.1 Exemples de polynômes orthogonaux pour différentes lois de probabilité. 11

2.1 Exemple 1 : comparaison entre les procédures de découpage isotrope et anisotrope pour différents ordres k (μ_N, nombre moyen de sous-domaines stochastiques pour les éléments (e_c) et μ_T, temps CPU moyen pour la création des partitions stochastiques et l'intégration des quantités élémentaires pour l'ensemble (e_c)). 63
2.2 Exemple 1 : temps CPU μ_T en seconde de la méthode X-SFEM utilisant une quadrature Q_K sur l'ensemble du domaine stochastique. 64
2.3 Exemple 1 : valeurs de l'indicateur d'erreur globale ε^k en fonction du nombre de sous-découpages pour l'intégration spatiale n_d et de l'ordre maximum k pour l'intégration stochastique ; procédure récursive anisotrope. 65
2.4 Exemple 1 : temps CPU μ_T (s) de la méthode X-SFEM en fonction du nombre de sous-découpages pour l'intégration spatiale n_d et de l'ordre maximum k pour l'intégration stochastique ; procédure récursive anisotrope. 65
2.5 Exemple 3 : comparaison entre les procédures de découpage isotrope et anisotrope pour différents ordres k (μ_N, nombre moyen de sous-domaines stochastiques pour les éléments (e_c) et μ_T, temps CPU moyen pour la création des partitions stochastiques et l'intégration des quantités élémentaires pour l'ensemble (e_c) (stratégie d'intégration spatiale A)). . . 79
2.6 Exemple 3 : comparaison entre les procédures de découpage isotrope et anisotrope pour différents ordres k (μ_T, temps CPU moyen pour la création des partitions stochastiques et l'intégration des quantités élémentaires pour l'ensemble (e_c) (stratégie d'intégration spatiale B)). 80

3.1 Exemple de référence : erreurs $\varepsilon_{h,p}$ obtenues avec les solutions X-SFEM et X-SFEM$_1^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; maillage 1. 106
3.2 Exemple de référence : erreurs $\varepsilon_{h,p}$ obtenues avec les solutions X-SFEM et X-SFEM$_1^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; maillage 2. 106
3.3 Exemple de référence : erreurs $\varepsilon_{h,p}$ obtenues avec la solution X-SFEM$_2^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; **maillage 1** et **maillage 2**. 110
3.4 Exemple de référence : erreurs $\varepsilon_{h,p}$ obtenues avec les solutions P-X-FEM, P-X-FEM$_1^+$ et P-X-FEM$_2^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; maillage 1. 114
3.5 Exemple de référence : erreurs $\varepsilon_{h,p}$ obtenues avec les solutions P-X-FEM, P-X-FEM$_1^+$ et P-X-FEM$_2^+$ pour différents ordres de chaos polynomial p ; maillage 2. 114

4.1 Minima de la fonction $-log(L)$ obtenus avec différentes lois classiques pour $\hat{a}_1$ et η_1 ; niveau $z_1 = +2m$. 150
4.2 Minima de la fonction $-log(L)$ obtenus par identification sur le chaos polynomial avec différents ordres p pour $\hat{a}_1$ et η_1 ; niveau $z_1 = +2m$. 151
4.3 Probabilité de défaillance P_f obtenues avec X-SFEM pour les différents niveaux d'inspection z_i. 155

C.1 Expertise corrosion des échantillons de Saint-Nazaire. 188
C.2 Expertise corrosion des échantillons de Peniche. 189